

INSA CENTRE VAL DE LOIRE

ÉCOLE DOCTORALE

ÉNERGIE, MATÉRIAUX, SCIENCES DE LA TERRE ET DE L'UNIVERS

LABORATOIRE DE MÉCANIQUE GABRIEL LAMÉ

THÈSE présentée par :
Duc Thinh KIEU

Soutenue le : 10 février 2020

Pour obtenir le grade de : **Docteur** de l'INSA Centre Val de Loire
Discipline/S cialit  : génie mécanique

MÉTHODES DE RÉDUCTION DE MODÈLES POUR L'ANALYSE DU
COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES STRUCTURES   PARAMÈTRES
INCERTAINS

THÈSE dirigée par :

M. Sébastien BERGER

Professeur, INSA Centre Val de Loire

M. Jean-Mathieu MENCIK

Professeur, INSA Centre Val de Loire

RAPPORTEURS :

Mme. Evelyne AUBRY

Professeur, ENSISA - Université de Haute-Alsace

M. Thierry TISON

Professeur, Université Polytechnique Hauts-de-France

JURY :

M. Denis DUHAMEL

Professeur,  cole des Ponts ParisTech

Président

Mme. Evelyne AUBRY

Professeur, ENSISA - Université de Haute-Alsace

Rapporteur

M. Thierry TISON

Professeur, Université Polytechnique Hauts-de-France

Rapporteur

M. Lyes NECHAK

MCF, Ecole Centrale de Lyon

Examinateur

Mme. Marie-Laure GOBERT

MCF, INSA Centre Val de Loire

Examinatrice

M. Baptiste BERGEOT

MCF, INSA Centre Val de Loire

Examinateur

M. Sébastien BERGER

Professeur, INSA Centre Val de Loire

Directeur

M. Jean-Mathieu MENCIK

Professeur, INSA Centre Val de Loire

Co-directeur

"Il n'y pas de chemin qui mène au bonheur, le bonheur est le chemin"
Bouddha

À mes parents
À ma femme et ma fille
À mon frère et ma sœur
À tous mes amis

Remerciements

Mon travail a été mené au laboratoire de Mécanique Gabriel Lamé de l'INSA Centre Val de Loire.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur Sébastien Berger, Professeur à l'INSA Centre Val de Loire et directeur de cette thèse, pour le privilège qu'il m'a offert en m'accueillant dans son équipe.

Je tiens à présenter mes sincères remerciements à Monsieur Jean-Mathieu Mencik, Professeur à l'INSA Centre Val de Loire, co-directeur de cette thèse, pour son soutien actif et les conseils prodigués qui ont permis l'achèvement de ce travail.

J'exprime aussi ma reconnaissance à Madame Marie-Laure Gobert et Monsieur Baptiste Bergeot, Maîtres de Conférences à l'INSA Centre Val de Loire, qui m'ont encadré et soutenu tout au long de la période de ma thèse.

Je tiens à présenter mes sincères remerciements à Monsieur Denis Duhamel, Professeur à l'École Nationale des Ponts et Chaussées ParisTech pour avoir accepté d'être Président du jury de ma soutenance.

Je souhaite remercier très sincèrement Madame Evelyne Aubry, Professeur à l'Université de Haute Alsace, et Monsieur Thierry Tison, Professeur à l'Université Polytechnique Hauts-de-France, qui m'ont fait l'honneur d'accepter de rapporter ce travail.

J'exprime également ma reconnaissance à Monsieur Lyes Nechak, Maître de Conférences à l'École Centrale de Lyon, pour avoir accepté d'examiner cette thèse.

Il m'est aussi particulièrement agréable de remercier Monsieur Trinh Minh Hoang, Maître de Conférences à l'Institut polytechnique de Hanoï et Monsieur Cherif Snoun, Doctorant à l'INSA Centre Val de Loire, qui m'ont beaucoup aidé et soutenu tout au long de ces années de thèse.

Je tiens également à remercier les Professeurs, les Maîtres de conférences, les collègues du laboratoire de Mécanique Gabriel Lamé et les personnels de l'INSA Centre Val de Loire pour leur aide et leur soutien.

Je n'oublie pas de remercier la famille de Madame Yen Nguyen et les adhérents de l'association Touraine-Vietnam qui m'ont aidé tout au long de ces années.

Enfin, je souhaite à exprimer un grand merci à mes parents, à ma femme et ma fille, à ma sœur et mon frère, à toute ma famille et à mes amis pour leurs encouragements, leur affection, leur compréhension et leur patience.

Résumé

Les exigences économiques étant de plus en plus sévères et les problèmes de vibrations devenant un enjeu de santé publique croissant, les industriels sont dans la nécessité de concevoir des systèmes mécaniques respectant des niveaux de performance vibratoire élevés. La conception mécanique dispose d'outils de calcul puissants capables de prédire le comportement dynamique de systèmes mécaniques. Cependant, afin d'assurer les niveaux vibratoires imposés par les cahiers des charges tout au long du cycle de vie de ces systèmes, il devient impératif de prendre en compte les incertitudes dans leur cycle de conception. L'objectif est de concevoir des systèmes mécaniques optimaux et robustes, autrement dit des structures qui gardent leurs performances tout le long de leur cycle de vie et ce malgré le caractère incertain de leurs paramètres.

La première approche pour décrire le comportement dynamique de structures à paramètres incertains consiste à modéliser ces structures par éléments finis (EF), et effectuer différentes simulations de ces modèles en vue de décrire leur caractère incertain. Cette approche est connue sous le nom de méthode de Monte Carlo (MC). Elle s'avère néanmoins prohibitive en termes de temps de calcul dès lors que le nombre de degrés de liberté (DDLs) et de variables aléatoires est élevé.

Dans cette thèse, l'objectif est de développer des approches numériques s'appuyant d'une part sur des méthodes de prises en compte d'incertitudes basées sur des développements en chaos polynomiaux non intrusifs, et d'autre part, sur des modèles numériques « réduits » de type Craig-Bampton, c'est-à-dire impliquant un nombre réduit de DDLs et ainsi pouvant être simulés rapidement.

Dans une première partie, plusieurs méthodes de prise en compte d'incertitudes basées sur le chaos polynomial non intrusif sont développées afin de tenir compte d'un nombre significatif de paramètres incertains. Ces méthodes sont appliquées à l'étude du comportement dynamique d'un modèle d'embrayage et plus particulièrement à l'étude de la stabilité à partir de la méthode indirecte de Lyapunov. Suite à une comparaison des résultats obtenus avec ces différentes méthodes et la méthode de référence MC, l'approche basée sur le chaos polynomial creux anisotropique s'avère être la plus performante et est donc retenue pour la deuxième partie de la thèse.

Dans la deuxième partie, la méthode basée sur le chaos polynomial creux anisotropique est associée à la méthode de sous-structuration dynamique de Craig-Bampton afin d'étudier les fonctions de réponse en fréquences d'une structure avec paramètres incertains et plus particulièrement les évolutions fréquentielles des énergies de déformation en fonction des paramètres incertains. Cette approche est appliquée à une structure académique composée de trois plaques reliées par des interfaces de raideurs incertaines. Dans un premier temps, seule la méthode de réduction de Craig-Bampton est utilisée. L'impact de la troncature de la base modale est alors évalué. Dans un deuxième temps, le chaos polynomial creux anisotropique est utilisé seul puis associé à différents modèles réduits de type Craig-Bampton. L'impact de la troncature simultanée des bases des modèles réduits de type Craig-Bampton et de la base du chaos polynomial est étudié. Il est montré que les coûts en temps de calcul obtenus sont très largement inférieurs à ceux requis par la technique de Monte Carlo, pour des niveaux de précision et de confiance similaires. Cette approche combinée offre donc une alternative très intéressante à la méthode prohibitive de Monte Carlo.

Mots-clés : Dynamique des structures, méthodes de réduction de modèles, méthode de Craig-Bampton, méthodes stochastiques, chaos polynomial non intrusif, incertitudes.

Abstract

As economic requirements are becoming more and more severe and vibration problems are becoming a growing public health issue, manufacturers are in the need to design mechanical systems that respect high levels of vibration performance. Mechanical design has powerful calculation tools for the prediction of the dynamic behaviour of mechanical systems. However, in order to ensure the vibration levels imposed by the specifications throughout the life cycle of these systems, it becomes imperative to take into account the uncertainties in the design cycle. The objective is to design optimal and robust mechanical systems, in other words structures that maintain their performance throughout their life cycle, despite the uncertain nature of their parameters.

The first approach to describe the dynamic behaviour of structures with uncertain parameters is to model these structures by finite elements (FE), and to perform different simulations of these models in order to describe their uncertain nature. This approach is known as the Monte Carlo (MC) method. However, it is prohibitive in terms of computational cost when the number of degrees of freedom (DOFs) and random variables is high. In this thesis, the objective is to develop numerical approaches based, on the one hand, on methods for taking into account uncertainties involving developments in non-intrusive polynomial chaos, and on the other hand, on Craig-Bampton "reduced" numerical models, i.e. involving a reduced number of DOFs.

In a first part, several methods based on non-intrusive polynomial chaos (PC) expansions are developed in order to take into account a significant number of uncertain parameters. These methods are applied to study the dynamic behaviour of a clutch model and more particularly to analyze the stability using Lyapunov's indirect method. Following a comparison of the results obtained with these different methods and the MC reference method, the approach based on the sparse polynomial chaos with anisotropic hyperbolic index sets is the most efficient and is therefore retained for the second part of the thesis.

In the second part, the sparse PC with anisotropic hyperbolic index sets is associated with the Craig-Bampton dynamic substructuring method in order to study the frequency response functions of a structure with uncertain parameters and more particularly the evolutions of the deformation energies according to uncertain parameters. This approach is applied to an academic structure composed of three plates connected by springs with uncertain stiffnesses. First, only the Craig-Bampton reduction method is used. The impact of the truncation of the modal base is then evaluated. In a second step, only the sparse PC with anisotropic hyperbolic index sets is used and then associated with different Craig-Bampton reduced models. The impact of the simultaneous truncations of the bases of the Craig-Bampton reduced models and of the polynomial chaos is studied. It is shown that the computational costs obtained are very much lower than those required by the MC method, for similar levels of accuracy and confidence. This combined approach therefore offers a very interesting alternative to the prohibitive MC method.

Keywords : Structural dynamics, model reduction methods, Craig-Bampton method, stochastic methods, non-intrusive polynomial chaos, uncertainties.

Table des matières

Introduction générale	1
1 ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE	5
1.1 Introduction	5
1.2 Méthodes de propagation des incertitudes	5
1.2.1 Introduction	5
1.2.2 Approches possibilistes	5
1.2.3 Approches probabilistes	6
1.2.4 Conclusion	10
1.3 Méthodes de sous-structuration dynamique	11
1.3.1 Introduction	11
1.3.2 Méthode de Guyan-Irons	13
1.3.3 Méthode de Craig-Bampton	13
1.3.4 Méthodes de Mac-Neal	14
1.3.5 Méthode de Benfield-Hruda	15
1.3.6 Conclusion	17
1.4 Association des méthodes de prise en compte d'incertitudes et de réduction de modèles	18
1.5 Conclusion	19
2 THÉORIE DU CHAOS POLYNOMIAL	21
2.1 Introduction	21
2.2 Méthode de Monte Carlo	21
2.3 Chaos polynomial généralisé	22
2.3.1 Calcul pratique du développement en polynômes du chaos polynomial généralisé : Approches intrusives et non intrusives	24
2.4 Chaos polynomial généralisé multi-éléments	26
2.5 Chaos polynomial creux	27
2.5.1 Low-rank index sets	27
2.5.2 Isotropic hyperbolic index sets	28
2.5.3 Anisotropic hyperbolic index sets	28
2.5.4 Estimation d'erreur	30
2.5.5 Algorithme de construction de l'expansion en sPC	31
2.5.6 Plan d'expérience numérique	33
2.6 Conclusion	34
3 ÉTUDE DE STABILITÉ D'UN SYSTÈME D'EMBRAYAGE AVEC LE CHAOS POLYNOMIAL	37
3.1 Introduction	37
3.2 Description du modèle d'embrayage	38

3.3	Stabilité des systèmes	40
3.4	Résultats	40
3.4.1	Propension à être stable	40
3.4.2	Paramètres incertains considérés	41
3.4.3	Étude de référence : Monte Carlo sur le modèle mathématique	41
3.4.4	Méthode sPC appliquée à l'analyse de la stabilité du système d'embrayage	43
3.5	Conclusion	47
4	ÉTUDE DYNAMIQUE D'UNE STRUCTURE AVEC LA MÉTHODE DE CRAIG-BAMPTON	49
4.1	Introduction	49
4.2	Théorie de Craig-Bampton	49
4.2.1	Equation dynamique de la structure	49
4.2.2	La transformation de Craig-Bampton	50
4.2.3	Modes statiques	51
4.2.4	Modes d'interface fixe	51
4.2.5	Système matriciel résultant	52
4.2.6	Réduction de modèle	53
4.3	Application à des structures connectées par des ressorts	54
4.3.1	Cas de deux structures couplées par un ou plusieurs ressorts	54
4.3.2	Cas de trois structures connectées par des ressorts	57
4.4	Résultats numériques : cas de trois plaques connectées par des ressorts	58
4.4.1	Présentation du modèle	58
4.4.2	Solution de référence	59
4.4.3	Réduction de modèle par la méthode de Craig-Bampton	60
4.5	Conclusion	62
5	ÉTUDE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UNE STRUCTURE AVEC INCERTITUDES	65
5.1	Introduction	65
5.2	Choix de l'approche sPC	66
5.2.1	Définition du paramètre incertain	66
5.2.2	Première approche : méthode sPC1	68
5.2.3	Seconde approche : méthode sPC2	68
5.2.4	Résultats numériques pour les approches sPC1 et sPC2 avec un paramètre incertain	68
5.3	Association du chaos polynomial creux avec les modèles réduits de type Craig-Bampton	78
5.3.1	Cas d'un paramètre incertain	79
5.3.2	Cas de huit, seize et quatre-vingt deux paramètres incertains	95
5.4	Conclusion	126
	Conclusion générale et Perspectives	129
	Bibliographie	131

A	Les polynômes du chaos	139
A.1	Polynômes orthogonaux	139
A.1.1	Polynômes d’Hermite	139
A.1.2	Polynômes de Legendre	139
A.1.3	Polynômes de Laguerre	140
A.2	Construction des polynômes du chaos	140
A.3	Calcul de la moyenne et de la variance théorique	141
B	Algorithmes appliqués avec des sPC	143
B.1	Algorithmes initiaux appliqués pour des sPC	143
B.2	Algorithme appliqué pour le sPC hyperbolique anisotropique amélioré	147
C	Statistiques de la quantité d’intérêt obtenues à partir des différentes méthodes	149
C.1	Amplitude du pic 5 de l’énergie de déformation $E_{def\ 1}$	149
C.2	Amplitude du pic 7 de l’énergie de déformation $E_{def\ 1}$	152
D	Articles et Conférences	155
D.1	Article dans une revue internationale	155
D.2	Conférences et Séminaires	155

Liste des acronymes

CB	Craig-Bampton
DDL	Degré de liberté
FEM	Finite Element Model (modèle éléments finis)
gPC	generalized Polynomial Chaos (chaos polynomial généralisé)
LHS	Latin Hypercube Sampling (échantillonnage Hypercube Latin)
MC	Monte Carlo
MCMM	méthode de Monte Carlo appliquée au Modèle Mathématique
ME-gPC	Multi-Element generalized Polynomial Chaos (chaos polynomial généralisé multi-éléments)
MM	Modèle mathématique
NISP	Non-Intrusive Spectral Projection (Projection spectrale non intrusive)
NLHS	Nested Latin Hypercube Sampling (échantillonnage Hypercube Latin imbriqué)
PEN	Plan d'Expérience Numérique
QoI	Quantity of Interest (quantité d'intérêt)
SMM	Simulations du Modèle Mathématique
sPC	sparse Polynomial Chaos (chaos polynomial creux)
sPC-AH	Chaos polynomial creux hyperbolique anisotropique
sPC-CB	Chaos polynomial creux associé au modèle réduit de Craig-Bampton
sPC-FEM	Chaos polynomial creux associé au modèle éléments finis
sPC-IH	Chaos polynomial creux hyperbolique isotropique
sPC-LR	Chaos polynomial creux low-rank
Theo	Théorique

Liste des tableaux

2.1	Correspondance entre les familles de polynômes orthogonaux et les distributions des variables aléatoires	23
3.1	Moyenne et variance de la partie réelle de λ_2 et propension à être stable obtenue avec le MCMM	41
3.2	Comparaison des résultats entre gPC, ME-gPC, sPC et MCMM	44
3.3	Indices de sensibilité totaux et pondérations des paramètres incertains avec sPC-AH	45
3.4	Paramètres des sPC-AH	47
4.1	Maximum des fréquences propres des plaques 1 et 3 en fonction du nombre de modes d'interface fixe	60
4.2	Maximum des fréquences propres de la plaque 2 en fonction du nombre de modes d'interface fixe	60
4.3	Moyenne et maximum des erreurs relatives sur l'amplitude et la fréquence des énergies de déformation des trois plaques obtenues par un modèle réduit par rapport à la solution de référence	63
5.1	Valeurs moyennes et écarts de quelques QoI pour 10 000 valeurs du paramètre incertain k_z	66
5.2	Intervalles fréquentiels d'étude autour des pics 2, 5, 7 et 9 et nombre de fréquences associées pour l'approche sPC1.	69
5.3	Erreurs relatives sur les amplitudes et les fréquences propres des pics d'énergie de déformation.	74
5.4	Coûts de calcul pour huit QoI liées aux pics 2, 5, 7 et 9 de l'énergie de déformation de la plaque 1 pour $N = 10\,000$ valeurs d'un paramètre incertain k_z	77
5.5	Coûts de calcul pour huit QoI liées aux pics 2, 5, 7 et 9 de l'énergie de déformation de la plaque 1 pour $N = 10\,000$ valeurs du paramètre incertain k_z	94
5.6	Valeurs moyennes et écarts de quelques quantités d'intérêt pour 10 000 valeurs du jeu de paramètres incertains (pour les cas $r = 1$, $r = 8$, $r = 16$ et $r = 82$).	96
5.7	Comparaison des nombres de simulations avec FEM complet ou réduit entre sPC original et sPC amélioré pour des QoI liées au pic 5 de l'énergie de déformation de la plaque 1 avec 8 paramètres incertains.	97
5.8	Coûts de calcul pour 8 QoI liées aux pics 2, 5, 7 et 9 de l'énergie de déformation de la plaque 1 pour $N = 10\,000$ jeux de valeurs des 8 paramètres incertains.	121
5.9	Coûts de calcul pour 8 QoI liées aux pics 2, 5, 7 et 9 de l'énergie de déformation de la plaque 1 pour $N = 10\,000$ jeux de valeurs des 16 paramètres incertains.	123
5.10	Coûts de calcul pour 8 QoI liées aux pics 2, 5, 7 et 9 de l'énergie de déformation de la plaque 1 pour $N = 10\,000$ jeux de valeurs des 82 paramètres incertains.	124

5.11 Comparaison des nombres de simulations avec FEM complet ou réduit entre gPC et sPC pour 8 QoI liées aux pics 2, 5, 7 et 9 de l'énergie de déformation de la plaque 1.	125
--	-----

Liste des figures

2.1	Ensemble $\mathcal{A}_m^{r,p}$ avec $m = 0.6, 0.8, 1$; $p = 4, 5, 6$ et $r = 2$.	29
2.2	Ensemble $\mathcal{A}_{m,w}^{r,p}$ avec différentes pondérations $w = \{1, 1\}$, $w = \{1, 3\}$, $w = \{1, 5\}$ et avec $m = 1$; $p = 4, 5, 6$ et $r = 2$.	30
2.3	LHS de quatre points avec deux variables aléatoires indépendantes	34
2.4	Hypercube Latin Imbriqué - premier cas	35
2.5	Hypercube Latin Imbriqué - deuxième cas	35
3.1	Modèle mathématique du système d'embrayage. À gauche deux rotations θ_x, θ_y (flèches bleues) autour des axes x et y , à droite quatre mouvements de translation Z_A, Z_B, Z_C, Z_D (flèches vertes) des points A, B, C, D dans la direction z .	39
3.2	(a) Parties réelles et (b) parties imaginaires des valeurs propres λ_1 et λ_2 des modes 1 et 2	42
3.3	Parties réelles des valeurs propres des modes 1 et 2 utilisant MCMM (noir) et sPC-AH (gris) en fonction du coefficient de frottement μ .	46
4.1	Schéma de deux structures couplées par n_r ressorts.	54
4.2	Modèle de 3 plaques connectées par des ressorts.	58
4.3	Énergies de déformation des plaques 1, 2 et 3 en fonction de la fréquence.	59
4.4	Énergies de déformation (a) E_{def1} , (b) E_{def2} et (c) E_{def3} en fonction de la fréquence	61
4.5	(a) Pic 2, (b) pic 5, (c) pic 7 et (d) pic 9 de l'énergie de déformation E_{def1} de la plaque 1 en fonction de la fréquence	62
5.1	Énergies de déformation de la plaque 1 pour plusieurs valeurs du paramètre incertain k_z ; (a) intervalle fréquentiel complet, (b) zoom sur le pic 2, (c) zoom sur le pic 5, (d) zoom sur le pic 7, (e) zoom sur le pic 9.	67
5.2	Comparaison des énergies de déformation obtenues par la solution de référence et l'approche sPC1 pour $k_z = 150 N/m$: (a) plaque 1, pic 2; (b) plaque 2, pic 2; (c) plaque 1, pic 7; (d) plaque 2, pic 7.	70
5.3	Comparaison des pics d'énergie de déformation obtenus par la solution de référence et les approches sPC1 et sPC2 pour $k_z = 150 N/m$: (a) plaque 1, pic 2; (b) plaque 2, pic 2; (c) plaque 1, pic 7; (d) plaque 2, pic 7.	71
5.4	Comparaison des pics d'énergie de déformation obtenus par la solution de référence et les approches sPC1 et sPC2 pour $k_z = 150 N/m$: (a) plaque 1, pic 2; (b) plaque 2, pic 2; (c) plaque 1, pic 7; (d) plaque 2, pic 7.	72
5.5	Maximum, moyenne et minimum de l'énergie de déformation sur l'intervalle fréquentiel entourant le pic 2 pour 10 000 valeurs de k_z : (a) plaque 1; (b) plaque 2.	73
5.6	Maximum, moyenne et minimum de l'énergie de déformation sur l'intervalle fréquentiel entourant le pic 7 pour 10 000 valeurs de k_z : (a) plaque 1; (b) plaque 2.	74
5.7	Amplitudes du pic 2 des énergies de déformation (a) E_{def1} (b) E_{def2} (c) E_{def3} et (d) fréquence propre du pic 2 de l'énergie E_{def1} en fonction de la raideur k_z .	75

5.8	Amplitudes du pic 7 des énergies de déformation (a) E_{def1} (b) E_{def2} (c) E_{def3} et (d) fréquence propre du pic 7 de l'énergie E_{def1} en fonction de la raideur k_z	76
5.9	(a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de la fréquence propre f_2 du second pic de l'énergie E_{def1} , en fonction du nombre de simulations MC.	80
5.10	Moyenne des erreurs relatives sur la fréquence propre du pic 2 par rapport à la solution de référence, en fonction du nombre de simulations MC.	81
5.11	(a) Fréquence propre du pic 2 de l'énergie E_{def1} en fonction de la raideur k_z et (b) zoom sur un petit intervalle de valeurs de k_z pour $N = 10\,000$	82
5.12	(a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 2 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC.	83
5.13	Moyenne des erreurs relatives sur l'amplitude du pic 2 par rapport à la solution de référence, en fonction du nombre de simulations MC.	84
5.14	(a) Amplitude du pic 2 de l'énergie de déformation E_{def1} en fonction de la raideur k_z et (b) zoom sur un petit intervalle de valeurs de k_z pour $N = 10\,000$	85
5.15	Amplitudes de l'énergie de déformation E_{def1} calculées par la méthode FEM de référence en fonction de la fréquence, pour différentes valeurs de $k_z \in [100; 100.2] N/m$	86
5.16	Les erreurs leave-one-out S_0^2 des trois développements sPC (sPC-FEM, sPC-CB50130 et sPC-3080) pour l'amplitude du pic 5 de l'énergie E_{def1} en fonction de l'ordre p	86
5.17	(a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 5 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC.	87
5.18	Moyenne des erreurs relatives sur l'amplitude du pic 5 par rapport à la solution de référence, en fonction du nombre de simulations MC.	88
5.19	(a) Amplitude du pic 5 de l'énergie de déformation E_{def1} en fonction de la raideur k_z et (b) zoom sur un petit intervalle de valeurs de k_z pour $N = 10\,000$	89
5.20	Amplitudes de l'énergie de déformation E_{def1} calculées par la méthode FEM de référence en fonction de la fréquence, pour différentes valeurs de $k_z \in [100; 100.2] N/m$	90
5.21	Erreurs leave-one-out S_0^2 des trois développements sPC (sPC-FEM, sPC-CB50130 et sPC-3080) pour l'amplitude du pic 7 de l'énergie E_{def1} en fonction de l'ordre p	90
5.22	(a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 7 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC.	91
5.23	Moyenne des erreurs relatives sur l'amplitude du pic 7 par rapport à la solution de référence, en fonction du nombre de simulations MC.	91
5.24	(a) Amplitude du pic 7 de l'énergie de déformation E_{def1} en fonction de la raideur k_z et (b) zoom sur un petit intervalle de valeurs de k_z pour $N = 10\,000$	92
5.25	Configuration des trois plaques avec $r = 8$ paramètres incertains.	95
5.26	Configuration des trois plaques avec $r = 16$ paramètres incertains.	95
5.27	Configuration des trois plaques avec $r = 82$ paramètres incertains.	96
5.28	Erreurs leave-one-out S_0^2 des trois développements sPC pour l'amplitude du pic 5 de l'énergie E_{def1} en fonction de l'ordre p pour $r = 8$; (a) sPC original, (b) sPC amélioré.	98
5.29	Algorithme appliqué pour construire le sPC avec « anisotropic hyperbolic index sets » ; (a) sPC original, (b) sPC amélioré.	99
5.30	(a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 5 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC en utilisant sPC original et (e) Moyenne, (f) variance, (g) erreur relative sur la moyenne, (h) erreur relative sur la variance en utilisant sPC amélioré pour $r = 8$	100

5.31	Moyenne des erreurs relatives sur l'amplitude du pic 5 de E_{def1} par rapport à la solution de référence, en fonction du nombre de simulations MC pour $r = 8$; (a) sPC original, (b) sPC amélioré.	101
5.32	Erreurs leave-one-out S_0^2 des trois développements sPC pour la fréquence propre du pic 2 de l'énergie E_{def1} en fonction de l'ordre p ; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$	102
5.33	Indices de sensibilité totaux S_i^T des paramètres incertains sur la fréquence propre du pic 2 pour les trois développements sPC; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$	103
5.34	(a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de la fréquence propre du pic 2 de E_{def1} , en fonction du nombre de simulations MC, pour $r = 8$	104
5.35	(a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de la fréquence propre du pic 2 de E_{def1} , en fonction du nombre de simulations MC, pour $r = 16$	104
5.36	(a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de la fréquence propre du pic 2 de E_{def1} , en fonction du nombre de simulations MC, pour $r = 82$	105
5.37	Moyenne des erreurs relatives sur la fréquence du pic 2 de E_{def1} par rapport à la solution de référence, en fonction du nombre de simulations MC; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$	105
5.38	Fréquence propre du pic 2 de l'énergie E_{def1} en fonction des raideurs $k_{z1} = k_{z2} = .. = k_{zr} = k_z$ pour $N = 10\,000$; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$	106
5.39	Erreurs leave-one-out S_0^2 des trois développements sPC pour l'amplitude du pic 2 de l'énergie E_{def1} en fonction de l'ordre p ; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$	108
5.40	Indices de sensibilité totaux S_i^T des r paramètres incertains sur l'amplitude du pic 2 pour les trois développements sPC; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$ et (d) déformées modales aux valeurs nominales du pic 2 pour les plaques 1, 2 et 3	109
5.41	(a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 2 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC pour $r = 8$	110
5.42	(a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 2 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC pour $r = 16$	111
5.43	(a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 2 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC pour $r = 82$	111
5.44	Moyenne des erreurs relatives sur l'amplitude du pic 2 de E_{def1} par rapport à la solution de référence, en fonction du nombre de simulations MC; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$	112
5.45	Amplitude du pic 2 de E_{def1} en fonction des raideurs $k_{z1} = k_{z2} = .. = k_{zr} = k_z$ pour $N = 10\,000$; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$	112
5.46	Maximum, moyenne, minimum et écart global de l'amplitude du pic 5 de E_{def1} en fonction du nombre de paramètres incertains.	113
5.47	Erreurs leave-one-out S_0^2 des trois développements sPC pour l'amplitude du pic 5 de l'énergie E_{def1} en fonction de l'ordre p ; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$	114
5.48	Indices de sensibilité totaux S_i^T des r paramètres incertains sur l'amplitude du pic 5 de E_{def1} pour les trois développements sPC; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$ et (d) déformées modales aux valeurs nominales du pic 5 pour les plaques 1, 2 et 3	115
5.49	Amplitude du pic 5 de E_{def1} en fonction des raideurs $k_{z1} = k_{z2} = .. = k_{zr} = k_z$ pour $N = 10\,000$; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$	116

5.50	Maximum, moyenne, minimum et l'écart de QoI en fonction de différent nombre de paramètres incertains $r = 1, r = 8, r = 16$ et $r = 82$	117
5.51	Erreurs leave-one-out S_0^2 des trois développements sPC pour l'amplitude du pic 7 de l'énergie E_{def1} en fonction de l'ordre p ; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$	118
5.52	Indices de sensibilité totaux S_i^T des paramètres incertains sur l'amplitude du pic 7 pour les trois développements sPC; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$ et (d) déformées modales aux valeurs nominales du pic 7 pour les plaques 1, 2 et 3	119
5.53	Amplitude du pic 7 de E_{def1} en fonction des raideurs $k_{z1} = k_{z2} = \dots = k_{zr} = k_z$ pour $N = 10\,000$; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$	120
B.1	Algorithme appliqué pour construire le sPC avec « low-rank index sets ».	144
B.2	Algorithme appliqué pour construire le sPC avec « isotropic hyperbolic index sets ».	145
B.3	Algorithme appliqué pour construire le sPC avec « anisotropic hyperbolic index sets ».	146
B.4	Algorithme appliqué pour construire le sPC amélioré avec « anisotropic hyperbolic index sets ».	147
C.1	(a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 5 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC pour $r = 8$	150
C.2	(a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 5 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC pour $r = 16$	150
C.3	(a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 5 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC pour $r = 82$	151
C.4	Moyenne des erreurs relatives sur l'amplitude du pic 5 de E_{def1} par rapport à la solution de référence, en fonction du nombre de simulations MC; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$	151
C.5	(a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 7 de E_{def1} , en fonction du nombre de simulations MC, pour $r = 8$	152
C.6	(a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 7 de E_{def1} , en fonction du nombre de simulations MC, pour $r = 16$	153
C.7	(a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 7 de E_{def1} , en fonction du nombre de simulations MC, pour $r = 82$	153
C.8	Moyenne des erreurs relatives sur l'amplitude du pic 7 de E_{def1} par rapport à la solution de référence, en fonction du nombre de simulations MC; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$	154

Introduction générale

Les contraintes économiques, environnementales, de santé publique et réglementaires devenant de plus en plus élevées dans un marché de plus en plus concurrentiel, les produits industriels doivent répondre à de nombreuses exigences en termes de performance, de robustesse, de fiabilité, de confort, d'écologie, de sécurité et de coût.

Dans ce contexte, les industriels sont dans la nécessité de concevoir des structures mécaniques respectant des niveaux vibratoires très faibles voire nuls afin de répondre à des objectifs de performance et de confort.

Pour atteindre ces objectifs, la conception des systèmes mécaniques doit s'appuyer sur des méthodes d'ingénierie tel le cycle de conception en V qui vont comprendre entre autres des étapes de modélisation et de simulation du comportement dynamique des systèmes mécaniques.

Ces incertitudes pouvant avoir une forte influence sur le comportement des systèmes, il devient impératif, afin d'assurer les niveaux vibratoires imposés par les cahiers des charges, de les prendre en compte tout le long du processus de conception et de fabrication du système et particulièrement lors des étapes de modélisation et de simulation du comportement dynamique du système.

L'objectif final étant de concevoir des systèmes mécaniques optimaux et robustes, autrement dit des structures qui gardent leurs performances tout le long de leur cycle de vie et ce malgré le caractère incertain de leurs paramètres.

L'approche classique pour décrire le comportement dynamique des structures mécaniques à paramètres incertains consiste à modéliser ces structures par la méthode des éléments finis, et à effectuer différentes simulations de ces modèles à partir d'un ensemble de tirages du jeu des paramètres incertains suivant leurs lois de probabilité. Cette approche, qui est connue sous le nom de méthode de Monte Carlo, est une méthode facile à mettre en œuvre et qui permet d'obtenir des résultats de très grande qualité. Cependant elle peut s'avérer extrêmement prohibitive en termes de temps de calcul dès lors que le nombre de degrés de liberté du modèle éléments finis et le nombre de variables aléatoires sont élevés. Ainsi, elle peut être utilisée comme une méthode de référence pour valider d'autres approches dans un cadre académique mais son utilisation est très vite rédhibitoire dans un cadre industriel.

Afin de palier ce problème il est donc nécessaire de développer des stratégies numériques alternatives. Pour répondre à cette problématique, de nombreux travaux ont été menés pour développer des méthodes spécifiques de propagation des incertitudes dans les modèles éléments finis décrivant le comportement dynamique des structures. Par ailleurs, tout un ensemble de stratégies de réduction du nombre de degrés de libertés des modèles éléments finis ont été développées, comme les méthodes de sous-structuration dynamique.

Cependant un nombre limité d'études a été menée associant ces deux approches pour répondre à la problématique.

Ainsi l'objectif de ce travail de thèse est de développer une approche numérique associant des

méthodes de propagation d'incertitudes paramétriques et des méthodes de réduction de modèles dans le cadre de l'étude du comportement dynamique de structures mécaniques à paramètres incertains.

Ce manuscrit de thèse va s'articuler autour de 5 chapitres :

Le premier chapitre présente une étude bibliographique sur les approches robustes d'analyse du comportement dynamique des structures et plus particulièrement sur les méthodes de propagation des incertitudes paramétriques, les méthodes de sous-structuration dynamique et les études associant ces deux approches. Une synthèse des avantages et inconvénients de chacune des méthodes relevées dans la littérature est faite afin d'orienter le choix des méthodes qui vont être utilisées dans la suite du manuscrit. Les objectifs des travaux de thèse sont ainsi affinés à la lumière de l'étude bibliographique.

Le deuxième chapitre donne les éléments théoriques des méthodes choisies à l'issue de l'étude bibliographique et qui vont être développées dans ces travaux de thèse pour propager les incertitudes paramétriques dans une structure mécanique. La méthode de Monte Carlo est tout d'abord décrite, puis les formalismes mathématiques pour trois types de développement en chaos polynomial sont exposés, à savoir le chaos polynomial généralisé, le chaos polynomial généralisé multi-éléments et finalement le chaos polynomial creux.

Le troisième chapitre est consacré à l'évaluation de la capacité des schémas numériques basés sur des chaos polynomiaux creux, présentés dans le chapitre 2, à propager les incertitudes paramétriques dans l'étude de la stabilité d'un système d'embrayage avec un nombre croissant de paramètres incertains. Après une introduction justifiant le choix de cette étude à partir d'éléments bibliographiques, le modèle d'embrayage est présenté et la méthode indirecte de Lyapunov permettant d'étudier la stabilité du système est rappelée. Puis une étude est effectuée avec l'objectif de comparer les résultats obtenus avec l'approche basée sur les développements en chaos polynomial creux par rapport à la méthode de Monte Carlo et à des résultats de la littérature obtenus à partir de chaos polynomiaux généralisé et multi-éléments.

Dans le quatrième chapitre, la méthode de sous-structuration dynamique de Craig-Bampton, dont la revue bibliographique a montré l'efficacité, est utilisée pour étudier la réponse dynamique à une sollicitation harmonique d'une structure académique. Après une présentation du formalisme théorique de la sous-structuration dynamique de Craig-Bampton, le modèle éléments finis de la structure académique est exposé. Puis les résultats obtenus avec un modèle éléments finis complet sont comparés avec ceux obtenus avec les modèles de Craig Bampton avec deux bases réduites.

Le cinquième chapitre porte sur l'étude du comportement dynamique d'un modèle éléments finis avec incertitudes. L'objectif est d'évaluer les capacités respectives du schéma numérique basé sur le chaos polynomial creux le plus efficace de l'étude du chapitre 3 et de la méthode de Craig-Bampton étudiée dans le chapitre 4 à prendre en compte un nombre variable de paramètres incertains dans la réponse dynamique à une sollicitation harmonique de la structure académique définie au chapitre 4. Ces méthodes sont évaluées seules et également associées entre elles. Dans un premier temps, deux approches basées sur le chaos polynomial creux avec des quantités d'intérêt différentes sont testées dans le cas d'un seul paramètre incertain. Seule la seconde approche qui s'avère efficace est conservée dans la suite de l'étude. Un nouveau schéma numérique s'appuyant sur cette seconde approche est proposé et évalué sur des études où le nombre de paramètres incertains augmente significativement.

Une conclusion générale incluant le bilan des résultats de ces travaux de recherche ainsi que diffé-

rentes perspectives qui en découlent est rédigée à la fin de cette thèse.

Chapitre 1

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 Introduction

Comme écrit dans l'introduction de ce manuscrit, la prise en compte des incertitudes paramétriques dans l'étude du comportement dynamique des structures est primordiale. Cette problématique peut être traitée à partir de méthodes spécifiquement développées pour propager les incertitudes dans les modèles décrivant le comportement dynamique des structures. Elle peut également être abordée à l'aide de la méthode de Monte Carlo appliquée avec des modèles ayant un nombre de degrés de liberté réduit en comparaison à un modèle éléments finis complet.

Ainsi, ce chapitre qui va présenter une revue bibliographique rapide sur les approches robustes de l'analyse du comportement dynamique des structures mécaniques va s'articuler autour de trois sections : une première section qui concerne les méthodes développées spécifiquement pour la prise en compte d'incertitudes, une deuxième section qui présente des méthodes de réduction de modèles et plus particulièrement des méthodes de sous-structuration dynamique et pour finir une troisième section consacrée aux études de la littérature associant ces deux approches. Pour chacune de ces trois sections, l'objectif est de faire une revue concise des principales approches de la littérature afin de choisir les méthodes qui semblent les plus appropriées pour traiter la problématique de ces travaux de thèse.

1.2 Méthodes de propagation des incertitudes

1.2.1 Introduction

De nombreuses méthodes de prise en compte d'incertitudes ont été développées et utilisées dans l'analyse du comportement dynamique de structures mécaniques. Ces méthodes reposent généralement sur trois étapes de base à savoir : définir un modèle mathématique décrivant le comportement dynamique de la structure, identifier et caractériser les incertitudes paramétriques et finalement évaluer la propagation de ces incertitudes. Une étape de post-traitement est généralement effectuée pour l'analyse et l'évaluation des quantités d'intérêt (QoI) associées au modèle mathématique. Les méthodes de prise en compte d'incertitudes se distinguent les unes des autres par l'utilisation d'outils mathématiques différents. Les deux approches possibilistes et probabilistes, qui sont les plus développées et utilisées dans littératures, vont être présentées dans cette section.

1.2.2 Approches possibilistes

Dans cette section, deux méthodes familles de importantes de l'approche possibiliste, les méthodes des intervalles et les méthodes basées sur le formalisme de la logique floue, sont présentées.

1.2.2.1 Méthodes des intervalles

Les méthodes des intervalles [57] permettent de modéliser les paramètres incertains à l'aide d'intervalles limités par leurs valeurs minimales et maximales. Les méthodes sont ainsi basées sur l'arithmétique des intervalles et permettent de traiter les problèmes de prise en compte des incertitudes avec des formalismes mathématiques conviviaux.

Un des principaux avantages de cette approche est que les intervalles de paramètres sont définis sans besoin d'aucune information sur la nature des dispersions des paramètres physiques du système [23]. La seule connaissance des valeurs extrémales est suffisante.

L'inconvénient est que l'information sur les variables n'est alors que partiellement représentée. Par conséquent, il n'est plus possible de dire dans quel ensemble une variable a le plus de chance de se trouver [23]. Cette approche présente également un désavantage majeur, appelé phénomène de pessimisme, qui conduit à une surestimation systématique des résultats lorsqu'un paramètre incertain apparaît plusieurs fois dans la même fonction. Ceci s'explique par le fait que l'arithmétique des intervalles ne tient pas compte des dépendances relatives à plusieurs occurrences d'un seul paramètre dans une fonction. Ainsi ce phénomène conduit très souvent à une divergence dans l'évaluation des sorties du modèle.

Les méthodes des intervalles ont été utilisées pour l'étude du comportement dynamique de systèmes. Par exemple pour les systèmes frottants on peut citer les travaux respectifs de Rauh et Ragot qui ont été confrontés au phénomène de pessimisme lorsqu'ils ont voulu estimer les dispersions des niveaux de vibrations dues aux incertitudes des lois de frottement [65, 64].

Pour conclure, on peut dire que l'application des méthodes des intervalles n'est pas la plus appropriée pour l'étude de la propagation des incertitudes dans le comportement dynamique des systèmes.

1.2.2.2 Méthode à base de la logique floue

Les méthodes à base de la logique floue ont été introduites pour la première fois en 1965 par Zadeh [90]. Ces méthodes basées sur la théorie des ensembles flous ont la capacité de représenter et de manipuler des données incertaines sans aucune information probabiliste ou statistique. L'incertitude est décrite par des fonctions de forme appelée fonctions d'appartenance. La logique floue est une forme de logique polyvalente où les valeurs de vérité des variables peuvent prendre n'importe quel nombre réel compris entre 0 et 1. Ces méthodes sont des outils appropriés pour analyser des systèmes avec des paramètres incertains découlant de données vagues et imprécises plutôt que de caractère aléatoire [34, 80].

Les données floues ont été utilisées pour évaluer la contribution de paramètres incertains dans les instabilités dynamiques de systèmes frottants. Par exemple, dans les études de Do et al. [24, 53], les méthodes à base de logique floue ont été développées afin de définir la position d'équilibre dans le problème de stabilité.

1.2.3 Approches probabilistes

Dans cette section, les approches utilisées pour propager les incertitudes dans le modèle mathématique de la structure mécanique sont probabilistes. Ainsi, les paramètres et variables du modèles sont des quantités aléatoires qui décrivent des lois probabilistes.

1.2.3.1 Méthode de Monte Carlo

Cette méthode a été utilisée dès les années 1930. Elle a été largement reconnue avec l'appellation « Monte Carlo » à partir de 1949 avec la publication de Metropolis et Ulam [55]. La méthode de Monte Carlo (MC) est une méthode générale, facile à mettre en oeuvre et utilisée pour résoudre des problèmes

concernant un modèle mathématique associé au comportement dynamique d'une structure, avec des paramètres incertains modélisés par des variables aléatoires. Dans la procédure classique de MC, des tirages de ces paramètres incertains sont générés suivant leur loi de probabilité. Pour chaque tirage, un jeu de paramètre est obtenu et un calcul est effectué à l'aide du modèle mathématique. Ensuite, une évaluation statistique (moments, lois de probabilité) des QoI du modèle mathématique peut être effectuée. Si N tirages aléatoires indépendants sont effectués, la méthode converge avec une erreur de l'ordre de $O(N^{-1/2})$, quelque soient la dimension du problème et sa complexité [71]. Ainsi pour obtenir une précision raisonnable des résultats, le nombre de tirages doit être grand. Cette méthode peut donc être efficace pour des petits modèles mais devient vite prohibitive pour des structures avec un nombre de degrés de liberté (DDLs) élevé, comme les modèles éléments finis utilisés dans un contexte industriel.

Pour conclure, la méthode de MC est une méthode puissante qui peut devenir très vite prohibitive utilisée avec un modèle ayant un grand nombre de DDLs mais dont la vitesse de convergence ne dépend pas de la dimension du système et de sa complexité. Par conséquent cette méthode va être utilisée comme méthode de référence dans le cadre de cette thèse lorsqu'elle sera utilisée pour propager des incertitudes dans un modèle éléments finis de référence. Elle sera également utilisée pour propager les incertitudes paramétriques dans d'autres modèles alternatifs.

1.2.3.2 Méthode des perturbations

La méthode de perturbation est une méthode qui permet de propager des incertitudes dans un modèle mathématique [6, 48] en trouvant une solution approchée du problème considéré. Le principe de cette méthode consiste à substituer, dans l'expression du modèle, les fonctions aléatoires par leurs développements de Taylor autour de leur moyenne [30]. Puis, en regroupant les termes du même ordre, un système d'équations est généré. La solution approchée est ensuite trouvée en résolvant successivement ordre par l'ordre à commencer par l'ordre zéro. Cependant, cette méthode n'est efficace que lorsqu'elle est appliquée aux cas où il y a de faibles dispersions des paramètres incertains. Par ailleurs, cette méthode devient inefficace lorsqu'elle est utilisée pour résoudre des problèmes d'un système complexe ayant un grand nombre de DDLs à cause de la mise en œuvre qui devient vite laborieuse.

1.2.3.3 Chaos polynomial

a. Principe et premières applications

Le chaos polynomial formalise une séparation entre la partie déterministe et la partie stochastique d'un processus aléatoire. La partie stochastique est représentée par des polynômes et la partie déterministe par des coefficients du chaos. Cette méthode est basée sur le fait que tout processus stochastique du second ordre peut être exprimé par un développement en série de polynômes d'Hermite. Le chaos polynomial a d'abord été développé par Wiener pour des processus stochastiques modélisés à l'aide de polynômes d'Hermite avec des variables aléatoires gaussiennes et indépendantes [86]. Ainsi, les coefficients du chaos polynomial $\bar{x}_j$ qui présentent la partie déterministe de processus $X(\xi)$ pondèrent les fonctions polynomiales d'Hermite $\phi_j(\xi)$:

$$X(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{x}_j \phi_j(\xi) \quad (1.1)$$

Selon Cameron et Marin [14], une telle expansion formée par la famille des polynômes d'Hermite ϕ_j converge au sens des moindres carrés. Suite aux travaux de Xiu et Karniadakis [87] et d'Askey et Wilson [2], un schéma dit Askey a été développé et permet de généraliser le développement en chaos

polynomial aux cas des processus non-Gaussiens en établissant une correspondance entre des lois de probabilité et des familles de polynômes orthogonaux. La notion de chaos polynomial généralisé (gPC) qui est alors définie permet de généraliser une convergence exponentielle aux cas de différentes lois de probabilité [87, 88, 74]. Comme un développement en série à l'infini ne peut pas être utilisé en pratique, la série (1.1) est tronquée à un ordre p pour limiter le nombre de termes $N_p + 1$ dans la somme à un nombre fini. Celui-ci dépend de l'ordre du chaos polynomial p et du nombre de paramètres incertains r :

$$N_p + 1 = \frac{(p + r)!}{p!r!}. \quad (1.2)$$

Les premières applications du chaos polynomial remontent aux années 1960. Ghanem et Spanos ont combiné le développement de Wiener-Hermite avec la méthode des éléments finis pour modéliser et propager les incertitudes dans des structures mécaniques [30]. L'application du chaos polynomial a été développée dans différents domaines, par exemple dans la fiabilité des structures mécaniques [76, 21]. Le chaos polynomial a également été utilisé pour analyser et prédire de façon robuste le comportement dynamique des systèmes non-linéaires en particulier la stabilité et les niveaux vibratoires de systèmes frottants [62, 68, 78].

b. Schémas intrusif et non-intrusif

Afin d'utiliser les méthodes basées sur le chaos polynomial pour étudier la propagation des incertitudes, il est nécessaire de déterminer les $N_p + 1$ coefficients $\bar{x}_j$ du chaos polynomial. Deux approches sont possibles pour calculer ces coefficients : les approches dites intrusive et non-intrusive.

Approche intrusive :

Dans l'approche intrusive, des techniques de projection de Galerkin sont utilisées pour exprimer le modèle mathématique (MM) décrivant le comportement dynamique de la structure dans la base du chaos polynomial sous la forme d'un système d'équations couplées et déterministes gardant les mêmes propriétés de linéarité du MM original [30, 4]. Les coefficients du chaos polynomial sont calculés à l'aide d'un algorithme de calcul correspondant à la nature du système d'équations résultants. Cependant, l'utilisation de l'approche intrusive peut devenir difficile en raison de la modification du MM via sa projection. En effet cette modification peut vite devenir fastidieuse pour des modèles avec un nombre de DDLs importants. De plus, d'un point de vue industriel, l'intrusion dans les codes de calculs pour effectuer cette modification n'est pas toujours aisée. Par ailleurs, l'approche intrusive devient moins efficace lorsque le MM présente un grand nombre de paramètres incertains. La difficulté est mise en évidence dans le cas des problèmes non-linéaires [87, 89, 61]. C'est pourquoi, des approches dites non intrusives ont été développées.

Approche non-intrusive

Contrairement à l'approche intrusive, déterminer les coefficients du chaos polynomial par l'approche non-intrusive ne nécessite aucune modification du MM. C'est une alternative très intéressante. En effet, cette approche ne nécessite que certaines mesures du processus aléatoire appelé QoI en des points selon un plan d'expérience numérique. L'évaluation des coefficients du chaos polynomial peut être effectuée par deux types de méthode : les méthodes de régression et les méthodes de projection spectrale appelées non-intrusive spectral projection en anglais (NISP).

Dans le cadre des méthodes de type régression, les coefficients du chaos polynomial d'une QoI sont calculés sur la base de leur évaluation qui résulte de la minimisation au sens des moindres carrés de l'écart entre les évaluations de cette QoI déterminée à partir du MM et de ses approximations dans la base du chaos polynomial [8]. L'efficacité de cette méthode a été testée entre autres sur l'analyse de sensibilité des paramètres incertains à partir des indices de Sobol [21].

Dans les méthodes de type NISP, la QoI associée au MM est projetée dans la base du chaos. Les coefficients du chaos polynomial sont calculés par des calculs numériques d'intégrales. La méthode de NISP utilise des points de collocation de Gauss pour construire les coefficients du chaos polynomial [3].

La difficulté dans cette approche non intrusive réside dans le fait que le nombre d'évaluations de la QoI à partir du MM nécessaire pour construire les coefficients du chaos dépend de façon factoriel du nombre de paramètres incertains (équation (1.2)). Ce nombre pouvant devenir prohibitif, des stratégies ont été mises en œuvre afin de remédier à ce problème. Les sections suivantes en décrivent les principales de la littérature.

c. Chaos polynomial généralisé multi-éléments

Pour améliorer la précision des résultats et réduire les coûts de calcul par rapport à la méthode classique du chaos polynomial généralisé, Wan et Karniadakis [81] ont développé la méthode du chaos polynomial généralisé multi-éléments qui consiste à décomposer l'espace aléatoire en plusieurs éléments non sécants. Une approximation du chaos polynomial généralisé est effectuée pour chaque élément. Le fait de diminuer la taille de l'espace aléatoire pour chaque chaos polynomial diminue la complexité de la QoI à approximer et ainsi permet de tronquer chacun des chaos polynomiaux à des ordres plus faibles. Wan et Karniadakis ont appliqué le chaos polynomial multi-éléments dans la résolution des équations différentielles stochastiques [82, 83]. Cette méthode a été utilisée pour analyser la stabilité [58] et les niveaux vibratoires [73] d'un modèle de système de freinage et la stabilité de système d'embrayage [79] avec des résultats acceptables jusqu'à cinq paramètres incertains.

d. Chaos polynomial creux

Blatman et Sudret ont proposé et développé des méthodes basées sur un chaos polynomial dit creux et qui contiennent un faible nombre de coefficients non nuls par rapport aux chaos polynomial généralisé ou chaos polynomial généralisé multi-éléments. Ces méthodes s'appuient sur le principe de hiérarchie des effets [56] pour effectuer la stratégie de troncature. Selon ce principe la plupart des modèles sont principalement gouvernés par des effets primaires et des interactions de faibles ordres, limitant ainsi le nombre de polynômes utiles couplant différents paramètres incertains. Ensuite, une procédure itérative est utilisée pour retenir un faible nombre de termes choisis sur la base de calculs d'erreurs. Seuls les termes importants sont retenus tandis que les termes négligeables sont enlevés [12, 10, 11].

Les études de Blatman et Sudret ont montré que les méthodes basées sur le chaos polynomial creux peuvent être efficaces pour réduire le coût de calcul dans le cadre d'analyses de fiabilité des structures mécaniques. On peut également citer un travail récent de Guo et al. qui ont utilisé le chaos polynomial creux dans l'analyse de fiabilité de revêtement d'un tunnel [35].

e. Conclusion

Le chaos polynomial peut être un outil efficace pour étudier la propagation des incertitudes dans l'analyse du comportement dynamique de structures mécaniques. L'avantage de l'approche intrusive est qu'un seul calcul est nécessaire pour évaluer les coefficients du chaos polynomial. Cependant dans un cadre industriel, l'intrusivité dans le code de calcul et la lourdeur d'une mise en œuvre pour un modèle élément finis avec un grand nombre de DDLs nous conduisent à ne pas choisir ce type d'approche dans la suite de ces travaux de thèse. A l'inverse, l'avantage de l'approche non-intrusive est de ne nécessiter aucune modification du MM. Le chaos polynomial généralisé étant rapidement prohibitif lorsque le nombre de paramètres incertains augmente, des solutions alternatives ont été proposées dans la littérature. Le chaos polynomial généralisé multi-élément bien que permettant de prendre en compte un nombre plus élevé de paramètres a également montré ses limites. Pour résoudre

ce problème, des méthodes basées sur le chaos polynomial creux ont été proposées dans la littérature avec des résultats significatifs. Cependant, le développement de ces stratégies a été principalement proposé dans le domaine de la fiabilité et peu dans l'étude du comportement dynamique de structures mécaniques.

1.2.4 Conclusion

Les méthodes de prise en compte d'incertitudes présentées dans cette section sont basées sur différents formalismes mathématiques de modélisation des incertitudes. Dans les approches possibilistes, les méthodes basées sur l'arithmétique des intervalles ne nécessitent pas d'informations sur les occurrences des dispersions physiques des incertitudes. Cependant, ces méthodes présentent un inconvénient majeur qui est le problème du pessimisme conduisant à une divergence des résultats. Les méthodes basées sur la logique floue sont principalement appropriées pour analyser des structures dont les incertitudes découlent de données vagues et imprécises. En ce qui concerne les approches probabilistes, la méthode MC est une méthode facile à mettre en oeuvre qui garantit une grande précision en terme de résultat pour un grand nombre de tirages. Cependant, elle entraîne un coût de calcul prohibitif pour l'analyse d'une structure complexe avec un nombre élevé de DDLs. Ainsi, dans ce cas cette méthode peut être utilisée comme méthode de référence servant à valider des méthodes alternatives. Par ailleurs, cette méthode MC peut être appliquée à un modèle réduit pour propager efficacement les incertitudes. La méthode des perturbations est quant-à-elle une méthode qui devient rapidement inefficace lorsqu'elle est appliquée à une structure pour laquelle les dispersions des paramètres sont importantes.

Concernant les méthodes basées sur les expansions de chaos polynomial, les approches intrusives ont l'inconvénient majeur de nécessiter des modifications non aisées des codes éléments finis, ce qui peut être rédhibitoire d'un point de vue industriel. Les méthodes non-intrusives ont l'avantage de ne nécessiter que certaines mesures du processus aléatoire. L'inconvénient principal de ces méthodes réside dans l'augmentation très rapide du nombre de ces mesures en fonction du nombre de paramètres incertains. Des méthodes telles que le chaos polynomial multi-éléments et surtout celles basées sur le chaos polynomial creux ont montré leur potentiel dans le cadre d'étude de fiabilité des structures.

1.3 Méthodes de sous-structuration dynamique

1.3.1 Introduction

L'application de la méthode des éléments finis pour analyser le comportement dynamique des structures industrielles complexes avec un grand nombre de DDLs peut nécessiter des temps de calculs importants. Il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes pour réduire la taille des modèles éléments finis. Les méthodes de sous-structuration dynamique peuvent résoudre ces problèmes. Hurty [42, 43] a développé la première méthode de sous-structuration dynamique. Par la suite Gladwell [31] a développé la méthode des modes de branches, puis Irons [45] et Guyan [36] ont proposé la méthode de condensation dans les années 1960. Plusieurs auteurs ont développé différentes méthodes qui se basent sur différents types de conditions limites appliquées aux interfaces des sous-structures qui peuvent être fixes, libres ou chargées. Dans la suite de cette section, le formalisme de la sous-structuration dynamique en général puis plus particulièrement des méthodes les plus utilisées dans la littérature, à savoir les méthodes de Guyan-Irons [36, 45], de Craig-Bampton [20], de Mac-Neal [52] et de Benfield-Hruda [7] sont présentées de façon synthétique.

Considérons une structure qui est décomposée en S sous-structures. L'équation du mouvement d'une sous-structure j ($j = 1 \dots S$) peut s'écrire :

$$M_j \ddot{q}_j + C_j \dot{q}_j + K_j q_j = F_j, \quad (1.3)$$

où q_j est le vecteur des déplacements nodaux, de taille n_j , F_j désigne le vecteur des forces nodales, de taille n_j , M_j , C_j et K_j sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité, de même taille $n_j \times n_j$.

Dans le domaine fréquentiel, l'équation (1.3) devient :

$$-\omega^2 M_j q_j + i\omega C_j q_j + K_j q_j = F_j, \quad (1.4)$$

où ω représente la pulsation.

L'objectif de la réduction du modèle est de réduire la taille des matrices M_j , C_j et K_j en utilisant la transformation :

$$q_j \approx T_j \tilde{q}_j, \quad (1.5)$$

où T_j est une matrice de transformation et $\tilde{q}_j$ est un vecteur de coordonnées généralisées, de taille m_j ($m_j \ll n_j$).

En appliquant la matrice de transformation à l'équation ((1.4)), le système réduit est :

$$-\omega^2 \tilde{M}_j \tilde{q}_j + i\omega \tilde{C}_j \tilde{q}_j + \tilde{K}_j \tilde{q}_j = \tilde{F}_j, \quad (1.6)$$

$$\tilde{M}_j = T_j^T M_j T_j, \quad \tilde{C}_j = T_j^T C_j T_j, \quad \tilde{K}_j = T_j^T K_j T_j, \quad \tilde{F}_j = T_j^T F_j, \quad (1.7)$$

où $\tilde{M}_j$, $\tilde{C}_j$ et $\tilde{K}_j$ sont les matrices réduites de masse, d'amortissement et de rigidité respectivement, de même taille $m_j \times m_j$, et $\tilde{F}_j$ est le vecteur réduit des forces, de taille m_j .

Le vecteur des DDLs q_j peut être partitionné en n_{Bj} DDLs d'interface, q_{Bj} , et en n_{Ij} DDLs internes, q_{Ij} . En partitionnant de même le vecteur des forces et en réorganisant les matrices de masse et de rigidité, l'équation (1.4) devient :

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} M_{BBj} & M_{BIj} \\ M_{IBj} & M_{IIj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{Bj} \\ q_{Ij} \end{Bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} C_{BBj} & C_{BIj} \\ C_{IBj} & C_{IIj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{Bj} \\ q_{Ij} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{BBj} & K_{BIj} \\ K_{IBj} & K_{IIj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{Bj} \\ q_{Ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{Bj} \\ F_{Ij} \end{Bmatrix}. \quad (1.8)$$

Lorsque S sous-structures sont couplées, les DDLs d'interface de la sous-structure j , q_{Bj} , sont donc un sous-ensemble des DDLs d'interface de la structure assemblée, q_B :

$$q_{Bj} = L_{Bj} q_B, \quad (1.9)$$

où L_{Bj} est une matrice booléenne de localisation qui relie les DDLs d'interface de la structure assemblée aux DDLs d'interface de la sous-structure j .

L'équation du mouvement de la structure assemblée s'écrit comme suit :

$$-\omega^2 Mq + i\omega Cq + Kq = F, \quad (1.10)$$

où

$$q = \begin{Bmatrix} q_B \\ q_{I1} \\ \vdots \\ q_{IS} \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^S L_{Bj}^T F_{Bj} \\ F_{I1} \\ \vdots \\ F_{IS} \end{Bmatrix}, \quad (1.11)$$

$$M = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^S L_{Bj}^T M_{BBj} L_{Bj} & L_{B1}^T M_{BI1} & \dots & L_{BS}^T M_{BIS} \\ M_{IB1} L_{B1} & M_{II1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{IBS} L_{BS} & 0 & \dots & M_{IIS} \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

$$C = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^S L_{Bj}^T C_{BBj} L_{Bj} & L_{B1}^T C_{BI1} & \dots & L_{BS}^T C_{BIS} \\ C_{IB1} L_{B1} & C_{II1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{IBS} L_{BS} & 0 & \dots & C_{IIS} \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

$$K = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^S L_{Bj}^T K_{BBj} L_{Bj} & L_{B1}^T K_{BI1} & \dots & L_{BS}^T K_{BIS} \\ K_{IB1} L_{B1} & K_{II1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{IBS} L_{BS} & 0 & \dots & K_{IIS} \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

En utilisant la matrice de la transformation de la structure assemblée, T , le système réduit devient :

$$-\omega^2 \tilde{M}\tilde{q} + i\omega \tilde{C}\tilde{q} + \tilde{K}\tilde{q} = \tilde{F}, \quad (1.15)$$

où les matrices réduites de la structure assemblée sont calculées comme suit :

$$\tilde{M} = T^T M T, \quad \tilde{C} = T^T C T, \quad \tilde{K} = T^T K T, \quad \tilde{F} = T^T F, \quad (1.16)$$

Les méthodes de sous-structuration dynamique présentées ci-dessous ne prennent en compte aucun effet d'amortissement dans le cadre de l'établissement des bases de modes propres. Les équations du mouvement des sous-structures sont supposées faiblement amorties. L'effet d'amortissement sera soit supposé négligeable soit pris en compte pour les sous-structures analysées avec un faible facteur de pertes (amortissement structural). La matrice réduite d'amortissement peut être construite directe-

ment dans le système réduit d'une sous-structure comme dans les équations (1.6) et (1.7) ou dans la structure assemblée comme dans les équations (1.15) et (1.16).

1.3.2 Méthode de Guyan-Irons

La méthode de Guyan-Irons [36, 45] est une technique de condensation statique. Dans ce cadre, l'équation du mouvement d'une sous-structure j non amortie peut s'écrire :

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} M_{BBj} & M_{BIj} \\ M_{IBj} & M_{IIj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{Bj} \\ q_{Ij} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{BBj} & K_{BIj} \\ K_{IBj} & K_{IIj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{Bj} \\ q_{Ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{Bj} \\ F_{Ij} \end{Bmatrix}. \quad (1.17)$$

En supposant que $F_{Ij} = 0$, les DDLs internes s'obtiennent par :

$$q_{Ij} = -K_{IIj}^{-1} K_{IBj} q_{Bj} + K_{IIj}^{-1} \omega^2 (M_{IBj} q_{Bj} + M_{IIj} q_{Ij}) \quad (1.18)$$

En négligeant les effets inertiels, l'équation (1.18) devient :

$$q_{Ij} = -K_{IIj}^{-1} K_{IBj} q_{Bj}. \quad (1.19)$$

La transformation de Guyan-Irons s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} q_{Bj} \\ q_{Ij} \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} I \\ -K_{IIj}^{-1} K_{IBj} \end{bmatrix} q_{Bj} = \begin{bmatrix} I \\ X_{st} \end{bmatrix} q_{Bj} = T_j^G q_{Bj}, \quad (1.20)$$

où X_{stj} est la matrice des formes modales des modes statiques, $X_{stj} = -K_{IIj}^{-1} K_{IBj}$.

La transformation de Guyan-Irons donne un vecteur réduit contenant uniquement les DDLs d'interface q_{Bj} .

En appliquant la méthode de Guyan-Irons, la transformation de la structure assemblée s'écrit comme suit :

$$q = \begin{Bmatrix} q_B \\ q_{I1} \\ \vdots \\ q_{IS} \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} I \\ X_{st1} L_{B1} \\ \vdots \\ X_{stS} L_{BS} \end{bmatrix} q_B = T^G q_B. \quad (1.21)$$

Les matrices réduites de masse et de rigidité et le vecteur des forces de la structure sont calculés par l'équation (1.16).

Les résultats obtenus par la méthode de Guyan-Irons sont justes acceptables pour les fréquences des forces harmoniques proches de la première fréquence propre de la sous-structure à cause des effets inertiels négligés [26, 13].

1.3.3 Méthode de Craig-Bampton

La méthode de Craig-Bampton [20] est détaillée dans le Chapitre 4. Ici nous donnons un bref aperçu de cette méthode.

Comme mentionné ci-dessus, la méthode de Guyan-Irons a des limitations sur la précision du modèle réduit lorsqu'elle est appliquée sur le modèle dynamique. La méthode de Craig-Bampton améliore la précision de la méthode de Guyan-Irons en ajoutant des modes d'interface fixe à la matrice de transformation :

$$\begin{Bmatrix} q_{Bj} \\ q_{Ij} \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_{stj} & \tilde{X}_{elj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{Bj} \\ \tilde{\alpha}_j \end{Bmatrix} = T_j^{CB} \begin{Bmatrix} q_{Bj} \\ \tilde{\alpha}_j \end{Bmatrix}, \quad (1.22)$$

où X_{elj} est la matrice des modes d'interface fixe, i.e. $X_{elj} = [\phi_1 \dots \phi_{n_{Ij}}]$ où ϕ_i , sont les solutions du problème aux valeurs propres : $\{K_{IIj} - \omega_i^2 M_{IIj}\}\phi_i = 0$ et α_j est le vecteur des amplitudes modales ; la matrice $\tilde{X}_{elj}$ et le vecteur $\tilde{\alpha}_j$ sont réduits, de taille $n_{Ij} \times m_j$ et m_j respectivement ($m_j < n_{Ij}$).

La transformation de la structure assemblée peut s'écrire :

$$q = \begin{Bmatrix} q_B \\ q_{I1} \\ \vdots \\ q_{IS} \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ X_{st1}L_{B1} & X_{el1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{stS}L_{BS} & 0 & \dots & X_{elS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_B \\ \tilde{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_S \end{Bmatrix} = T^{CB} \begin{Bmatrix} q_B \\ \tilde{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_S \end{Bmatrix}. \quad (1.23)$$

La méthode de Craig-Bampton est largement utilisée dans les codes de calcul et représente la méthode la plus populaire en sous-structuration dynamique [49]. Les matrices de masse et de rigidité réduites obtenues par la méthode de Craig-Bampton sont creuses et presque diagonales [66, 49, 33]. Par exemple, la faible densité de ces matrices réduites, obtenues par la méthode de Craig-Bampton pour un treillis de Benfield (Benfield truss) [7] composé de deux sous-structures, a été démontrée dans [33]. La densité des éléments non nuls de ces matrices réduites est de 30 % environ. Cela permet de réduire le coût de calcul lorsque les simulations des modèles réduits sont effectuées via un logiciel, par exemple Matlab. Plusieurs auteurs continuent à améliorer cette méthode et à l'utiliser, par exemple Suarez et Singh [75], Rixen [66], Kim et Lee [47]. Plusieurs méthodes de réduction d'interface sont développées par Castanier et al. [15], Hong et al. [41] et Lindberg et al. [50] afin de réduire le nombre de DDLs d'interface du modèle de Craig-Bampton.

1.3.4 Méthodes de Mac-Neal

Les méthodes de Mac-Neal [52] utilisent des modes d'interface libre de chaque sous-structure j , ϕ_i , qui sont les vecteurs propres solutions du problème aux valeurs propres :

$$\{K_j - \omega_i^2 M_j\}\phi_i = 0. \quad (1.24)$$

Ces modes peuvent être partitionnés en deux parties comme suit :

$$[\Phi_j^{rig} \quad \Phi_j^{el}] = [\phi_1 \dots \phi_r \quad \phi_{r+1} \dots \phi_{n_j}], \quad (1.25)$$

où Φ_j^{rig} et Φ_j^{el} sont les matrices des modes rigides et des modes élastiques, r est le nombre des modes rigides ($r \leq 6$).

La matrice de transformation de Mac-Neal est construite comme suit :

$$T_j^{MN} = [\Phi_j^{rig} \quad \tilde{\Phi}_j^{el}], \quad (1.26)$$

où $\tilde{\Phi}_j^{el}$ est la matrice réduite de taille $n_j \times m_j$ ($m_j < n_j - r$).

En réorganisant la matrice de transformation, le vecteur des déplacements peut être approché par :

$$\begin{Bmatrix} q_{Bj} \\ q_{Ij} \end{Bmatrix} \approx T_j^{MN} \tilde{\alpha}_j = \begin{bmatrix} \Phi_{Bj}^{rig} & \tilde{\Phi}_{Bj}^{el} \\ \Phi_{Ij}^{rig} & \tilde{\Phi}_{Ij}^{el} \end{bmatrix} \tilde{\alpha}_j = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{Bj}^{MN} \\ \tilde{\Phi}_{Ij}^{MN} \end{bmatrix} \tilde{\alpha}_j, \quad (1.27)$$

où $\tilde{\Phi}_{Bj}^{MN} = [\Phi_{Bj}^{rig} \quad \tilde{\Phi}_{Bj}^{el}]$ et $\tilde{\Phi}_{Ij}^{MN} = [\Phi_{Ij}^{rig} \quad \tilde{\Phi}_{Ij}^{el}]$.

En appliquant la méthode de Mac-Neal pour toutes les S sous-structures, la transformation peut s'écrire comme suit :

$$\begin{Bmatrix} q_{B1} \\ q_{B2} \\ \vdots \\ q_{BS} \\ q_{I1} \\ q_{I2} \\ \vdots \\ q_{IS} \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{B1}^{MN} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_{B2}^{MN} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\Phi}_{BS}^{MN} \\ \tilde{\Phi}_{I1}^{MN} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_{I2}^{MN} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\Phi}_{IS}^{MN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_B^{MN} \\ T_I^{MN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_S \end{Bmatrix}, \quad (1.28)$$

où

$$T_B^{MN} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{B1}^{MN} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_{B2}^{MN} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\Phi}_{BS}^{MN} \end{bmatrix}, \quad T_I^{MN} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{I1}^{MN} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_{I2}^{MN} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\Phi}_{IS}^{MN} \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Lorsque S sous-structures sont couplées, les déplacements d'interface de la structure assemblée sont compatibles :

$$q_B = L_B \begin{Bmatrix} q_{B1} \\ q_{B2} \\ \vdots \\ q_{BS} \end{Bmatrix}, \quad (1.30)$$

où L_B est une matrice booléenne de localisation reliant les DDLs d'interface de la structure assemblée.

En combinant des équations (1.28) et (1.30), la transformation de la structure assemblée peut s'écrire :

$$q = \begin{Bmatrix} q_B \\ q_{I1} \\ \vdots \\ q_{IS} \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} L_B T_B^{MN} \\ T_I^{MN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_S \end{Bmatrix} = T^{MN} \begin{Bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_S \end{Bmatrix}. \quad (1.31)$$

Dans l'étude de Gruber et Rixen [33], les méthodes de Mac-Neal et de Craig-Bampton sont utilisées pour calculer des fréquences propres dans la gamme des basses fréquences de 3 systèmes académiques : un treillis de Benfield, divisé en 2 sous-structures, un cadre de poutre tridimensionnel, composé de 5 sous-structures et le problème d'un rectangle bidimensionnel décomposé en 12 sous-structures. Cette étude a montré que la méthode de Craig-Bampton donne des erreurs relatives des fréquences propres par rapport à la solution des modèles éléments finis complets généralement plus faibles que la méthode de Mac-Neal. Néanmoins, ces deux méthodes donnent une perte de précision faible dans la gamme des basses fréquences. De plus, les matrices de masse et de rigidité réduites obtenues par la méthode de Craig-Bampton sont plus creuses que celles obtenues par la méthode de Mac-Neal. Ainsi la méthode de Craig-Bampton est plus performante que la méthode de Mac-Neal.

1.3.5 Méthode de Benfield-Hruda

Pour présenter la méthode de Benfield-Hruda [7], nous considérons un modèle de deux sous-structures, la sous-structure principale 1 et la sous-structure secondaire 2 couplées ensemble. La sous-structure principale 1 est décrite à partir de modes à interface libre ou à interface chargée. En utilisant

ces derniers, la précision des résultats est améliorée.

La matrice des modes d'interface chargée de taille réduite $\tilde{\Phi}_1^{BH}$ de la sous-structure 1 sont les m_1 ($m_1 < n_1$) premiers vecteurs propres solutions, ϕ_i , du problème aux valeurs propres :

$$\{\mathcal{K}_1 - \omega_i^2 \mathcal{M}_1\} \phi_i = 0, \quad (1.32)$$

où $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{K}_1$ sont les matrices de masse et de rigidité d'interface chargée de la sous-structure 1 calculées par :

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} M_{BB1} & M_{BI1} \\ M_{IB1} & M_{II1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (T_2^G)^T M_2 T_2^G & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K}_1 = \begin{bmatrix} K_{BB1} & K_{BI1} \\ K_{IB1} & K_{II1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (T_2^G)^T K_2 T_2^G & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.33)$$

où les matrices $(T_2^G)^T M_2 T_2^G$ et $(T_2^G)^T K_2 T_2^G$ sont représentatives de l'effet de masse et de rigidité de la sous-structure 2 sur les DDLs d'interface, avec :

$$T_2^G = \begin{bmatrix} I \\ X_{el2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -K_{II2}^{-1} K_{IB2} \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

Dans le cas général comprenant un nombre quelconque de sous-structures, il faut compter les effets de masse et de rigidité de toutes les autres sous-structures du système couplées avec la sous-structure 1 dans l'équation (1.33).

La transformation de Benfield-Hruda appliquée à la sous-structure 1 est :

$$\begin{Bmatrix} q_{B1} \\ q_{I1} \end{Bmatrix} \approx \tilde{\Phi}_1^{BH} \tilde{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{B1}^{BH} \\ \tilde{\Phi}_{I1}^{BH} \end{bmatrix} \tilde{\alpha}_1. \quad (1.35)$$

Lorsque les deux sous-structures sont couplées, les déplacements d'interface des deux sous-structures sont compatibles :

$$q_B = q_{B1} = q_{B2}. \quad (1.36)$$

Le couplage de deux sous-structures utilisent les modes de deux façons différentes :

- la sous-structure principale utilise les modes à interface chargée et la sous-structure secondaire utilise les modes statiques et les modes à interface fixe (méthode de Craig-Bampton),
- les deux sous-structures utilisent les modes à interface chargée [7].

En utilisant les modes statiques et les modes d'interface fixe, la sous-structure 2 est décrite de la manière suivante :

$$\begin{Bmatrix} q_{B2} \\ q_{I2} \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_{st2} & \tilde{X}_{el2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{B2} \\ \tilde{\alpha}_2 \end{Bmatrix}, \quad (1.37)$$

La transformation de la structure assemblée peut alors s'écrire :

$$q = \begin{Bmatrix} q_B \\ q_{I1} \\ q_{I2} \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{B1}^{BH} & 0 \\ \tilde{\Phi}_{I1}^{BH} & 0 \\ X_{st2} \tilde{\Phi}_{B1}^{BH} & \tilde{X}_{el2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \end{Bmatrix}. \quad (1.38)$$

En utilisant les modes à interface chargée, la sous-structure 2 est décrite de la manière suivante :

$$\begin{Bmatrix} q_{B2} \\ q_{I2} \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{B2}^{BH} \\ \tilde{\Phi}_{I2}^{BH} \end{bmatrix} \tilde{\alpha}_2. \quad (1.39)$$

La transformation de la structure assemblée dans ce cas devient :

$$q = \begin{Bmatrix} q_B \\ q_{I1} \\ q_{I2} \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{B1}^{BH} & 0 \\ \tilde{\Phi}_{I1}^{BH} & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_{I2}^{BH} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \end{Bmatrix}. \quad (1.40)$$

En comparant ces deux stratégies pour modéliser la sous-structure 2, Benfield et Hruda ont utilisé ces deux types de modes pour calculer des fréquences propres de deux systèmes académiques : une poutre et un treillis plan (treillis de Benfield), chaque système se composant de deux sous-structures. Cette étude a montré que la première stratégie (modes statiques et modes à interface fixe) donne des erreurs relatives des fréquences propres de ces deux systèmes plus faibles que la deuxième [7].

Dans le cas de S sous-structures, lorsque toutes les sous-structures utilisent les modes à interface chargée, la transformation peut s'écrire comme suit :

$$\begin{Bmatrix} q_{B1} \\ q_{B2} \\ \vdots \\ q_{BS} \\ q_{I1} \\ q_{I2} \\ \vdots \\ q_{IS} \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{B1}^{BH} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_{B2}^{BH} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\Phi}_{BS}^{BH} \\ \tilde{\Phi}_{I1}^{BH} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_{I2}^{BH} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\Phi}_{IS}^{BH} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_B^{BH} \\ T_I^{BH} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_S \end{Bmatrix}, \quad (1.41)$$

où

$$T_B^{BH} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{B1}^{BH} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_{B2}^{BH} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\Phi}_{BS}^{BH} \end{bmatrix}, \quad T_I^{BH} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{I1}^{BH} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_{I2}^{BH} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\Phi}_{IS}^{BH} \end{bmatrix}. \quad (1.42)$$

En utilisant la compatibilité des déplacements d'interface (équation (1.30)) dans le cas de l'assemblage de S sous-structures, la transformation de la structure assemblée devient finalement :

$$q = \begin{Bmatrix} q_B \\ q_{I1} \\ \vdots \\ q_{IS} \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} L_B T_B^{BH} \\ T_I^{BH} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_S \end{Bmatrix} = T^{BH} \begin{Bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_S \end{Bmatrix}. \quad (1.43)$$

1.3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, plusieurs méthodes de sous-structuration dynamique ont été présentées. La méthode de Guyan-Irons présente des limitations concernant la précision du modèle réduit lorsqu'elle est appliquée sur le modèle dynamique. La méthode de Craig-Bampton améliore la précision de la méthode de Guyan-Irons en ajoutant des modes d'interface fixe à la matrice de transformation. De plus, la méthode de Craig-Bampton conduit à des erreurs relatives par rapport à la solution des modèles éléments finis plus faibles que la méthode de Mac-Neal. Par ailleurs, les matrices de masse et de rigidité réduites obtenues par la méthode de Craig-Bampton sont creuses ce qui permet de réduire significativement le coût de calcul. Pour la méthode de Benfield-Hruda, la précision des résultats obtenus est limitée, c'est pourquoi, cette méthode n'est pas souvent utilisée [25]. Ainsi la méthode de Craig-Bampton est celle qui présente les meilleures performances parmi les différentes méthodes de

sous-structuration pour étudier le comportement dynamique d'une structure.

1.4 Association des méthodes de prise en compte d'incertitudes et de réduction de modèles

L'objectif de cette section est de présenter des méthodes de la littérature combinant des méthodes de réduction de modèles et des méthodes de propagation d'incertitudes dans l'étude du comportement dynamique de structure.

Les méthodes de sous-structuration dynamique peuvent être couplées avec des méthodes probabilistes ou avec des méthodes possibilistes. Concernant l'association de méthodes de sous-structuration dynamique avec des méthodes probabilistes, Mace et Shorter [51] ont couplé la méthode de Craig-Bampton avec la méthode des perturbations pour étudier la fonction de réponse en fréquence d'un système simple comprenant deux poutres couplées par un ressort. Comme dans des études de Sarsri et al., la méthode à interface fixe de Craig-Bampton et la méthode à interface libre de Mac-Neal ont été respectivement couplées avec la méthode du chaos polynomial [70] et avec la méthode des perturbations [69] pour analyser le comportement dynamique de structures composées de plaques assemblées avec des paramètres aléatoires. Dans ces études, les méthodes de sous-structuration dynamique sont utilisées afin de réduire la taille du modèle avant de procéder à des calculs numériques des fonctions de réponse en fréquence des structures stochastiques avec la méthode du chaos polynomial [70] ou des modes propres stochastiques de structure par la méthode des perturbations [69]. L'efficacité des approches proposées est démontrée avec une réduction significative du coût de calcul et avec des résultats acceptables mais pour seulement deux paramètres incertains qui sont la masse volumique et le module de Young. La méthode des perturbations a aussi été couplée à la méthode à interface fixe de Craig-Bampton dans l'étude de Hinke et al. [39] pour analyser la réponse dynamique d'un système composé de deux plaques connectées par des ressorts dont la raideur est considérée un paramètre incertain avec une faible déviation. La méthode de réduction de modèle de Craig-Bampton a également été couplée avec la méthode du chaos polynomial généralisé pour étudier l'analyse statistique de la dispersion des réponses fréquentielles de deux structures dynamiques composées d'un portique 2D et de micro-poutres couplées [19]. Cette étude a montré qu'en combinant un modèle réduit de Craig-Bampton avec un développement du chaos polynomial généralisé, la précision des résultats reste satisfaisante avec un coût de calcul raisonnable pour deux ou trois paramètres incertains par rapport à la méthode de référence basée sur une approche de type Hypercube Latin sur le modèle éléments finis complet. Cependant, pour le cas d'un nombre élevé de paramètres incertains, le coût de calcul devient prohibitif.

Concernant le couplage des méthodes de sous-structuration dynamique avec des méthodes de possibiliste. On peut citer un travail de Gersem et al. [29], dans lequel des méthodes des intervalles et des méthodes basées sur la logique floue sont combinées à la méthode de Craig-Bampton pour analyser la fonction de réponse en fréquence d'un grand modèle éléments finis d'un avion de référence (Garteur benchmark aircraft) avec paramètres incertains. En comparaison avec une approche MC de référence appliquée sur un modèle éléments finis complet, la méthode combinant des réductions de modèles de Craig-Bampton et une approche par intervalle a montré son efficacité pour évaluer les fréquences propres de la structure. Pour une étude jusqu'à trois paramètres incertains, la réduction du temps de calcul peut atteindre jusqu'à 28 % avec une bonne précision des résultats.

Les études présentées ci-dessus montrent que la combinaison des méthodes de sous-structuration dynamique avec des méthodes de prise en compte d'incertitudes peuvent réduire efficacement le nombre de simulations pour des modèles éléments finis ayant un faible nombre de paramètres incertains. Ainsi, il serait pertinent d'associer ces différentes méthodes pour étudier le comportement dynamique de

structure avec un nombre de paramètres incertains plus significatif.

1.5 Conclusion

Ce chapitre a permis de faire une revue des principales approches de la littérature permettant de prendre en compte les incertitudes paramétriques dans l'étude du comportement dynamique des structures.

La première section qui est consacrée aux méthodes développées spécifiquement pour propager les incertitudes dans les modèles dynamiques des structures a montré que les approches basées sur le chaos polynomial creux non intrusif peuvent être potentiellement performantes pour propager les incertitudes paramétriques dans un modèle décrivant le comportement dynamique d'une structure. Le point faible de ces méthodes est la difficulté à prendre en compte un nombre élevé de paramètres incertains.

La deuxième section qui est dédiée aux méthodes de sous-structuration dynamique a mis en avant l'efficacité de la méthode de Craig-Bampton pour diminuer le nombre de DDLs d'un modèle éléments finis d'une structure mécanique dans le cadre d'une étude de son comportement dynamique.

La troisième section portant sur les études associant respectivement les méthodes de sous-structuration et de propagation d'incertitudes paramétriques a mis en évidence la pertinence de combiner ces deux approches pour prendre en compte les incertitudes paramétriques dans le comportement dynamique de structures. L'objectif de cette association a été montré pour un nombre faible de paramètres incertains.

Ainsi, la revue bibliographique réalisée dans ce chapitre a permis d'une part de choisir de type d'approche qui semble être la plus appropriée pour propager les incertitudes paramétriques dans un modèle, à savoir les développements en chaos polynomial creux, et d'autre part de mettre en avant la méthode de sous-structuration qui semble être la plus adaptée à réduire un modèle à savoir la méthode de Craig-Bampton.

La suite de ces travaux va s'articuler autour de trois parties.

La première partie (Chapitres 2 et 3) va être consacrée au développement de méthodes basées sur le chaos polynomial non intrusif avec un focus particulier sur le chaos polynomial creux proposé par Blatman, afin de prendre en compte un nombre significatif de paramètres incertains dans le cadre d'une étude en dynamique. Ces méthodes, qui ont été principalement utilisées en fiabilité et peu en dynamique, vont être appliquées à l'étude du comportement dynamique d'un modèle de système d'em-brayage et plus particulièrement à l'analyse de la stabilité du système.

Dans la deuxième partie (Chapitre 4), la méthode de sous-structuration de Craig-Bampton va être utilisée pour analyser la réponse dynamique à une sollicitation harmonique d'une structure académique composée de trois plaques connectées les unes avec les autres par des raideurs. L'objectif va être d'étudier la capacité de cette méthode à réduire efficacement le nombre de DDLs.

Dans une troisième partie (Chapitre 5), la capacité des méthodes basées sur le chaos polynomial creux et de la méthode de réduction de Craig-Bampton à prendre en compte les incertitudes paramétriques dans l'étude dynamique de la structure académique mentionnée ci-dessus va être évaluée lorsque ces méthodes sont utilisées seules ou associées entre elles.

Chapitre 2

THÉORIE DU CHAOS POLYNOMIAL

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les méthodes stochastiques qui vont être développées pour propager les incertitudes paramétriques dans une structure mécanique. Dans un premier temps, la méthode de Monte Carlo est brièvement décrite dans la section 2.2. Dans un second temps, le formalisme mathématique pour trois types de chaos polynomial est présenté, à savoir le chaos polynomial généralisé (gPC) dans la section 2.3, le chaos polynomial généralisé multi-éléments (ME-gPC) dans la section 2.4 et finalement le chaos polynomial creux (sPC) dans la section 2.5. Dans cette dernière, plusieurs méthodes vont particulièrement être développées.

2.2 Méthode de Monte Carlo

Comme mentionné dans le chapitre bibliographique, cette méthode est une méthode facile à mettre en oeuvre. Selon le modèle mathématique sur lequel elle est appliquée, elle permet d'obtenir des solutions de référence ou des solutions estimées.

On peut résumer l'algorithme numérique de la méthode de Monte Carlo (MC) appliquée à un modèle mathématique avec les 5 étapes suivantes :

1. Identifier les lois de probabilité des paramètres incertains d'entrée du modèle mathématique (MM).
2. Générer un échantillon de tirages de paramètres incertains aléatoires indépendants suivant les lois de probabilité identifiées.
3. Propager l'incertitude dans le MM en déterminant le jeu de sortie appelé quantité d'intérêt (QoI) correspondant au jeu des tirages des paramètres incertains généré de l'étape 2.
4. Analyser l'évaluation statistique du jeu de sortie (QoI) du modèle (moyenne, variance).
5. Analyser la convergence de la distribution de la QoI du MM.

La méthode de Monte Carlo peut être présentée sous le formalisme suivant.

Soit $f_1 : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mathématique analytique (ou algorithmique) modélisant un système quelconque et W un vecteur de paramètres incertains modélisés par des variables aléatoires $W = (W_1, \dots, W_r)$. La réponse Z est la solution de la fonction mathématique comme suit :

$$Z = f_1(W). \quad (2.1)$$

Dans le cadre de la méthode de MC, la loi de distribution de la sortie est estimée avec ses caractéristiques statistiques données par la valeur moyenne μ_Z et l'écart type σ_Z . Elles sont estimées via des valeurs arithmétiques d'un échantillon de N tirages comme suit :

$$\begin{cases} \hat{\mu}_Z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_1(W^{(i)}) \\ \hat{\sigma}_Z^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(f_1(W^{(i)}) - \hat{\mu}_Z \right)^2 \end{cases} \quad (2.2)$$

La convergence de la méthode de MC est certifiée par le théorème central limite [71] selon lequel la normalisation de $\hat{\mu}_Z$ notée $\hat{\mu}_{normalisé}$ et calculée avec l'équation (2.3) converge vers une loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$ lorsque N est grand.

$$\hat{\mu}_{normalisé} = \sqrt{N} \frac{\hat{\mu}_Z - \mu_Z}{\hat{\sigma}_Z}. \quad (2.3)$$

Cela permet d'obtenir l'intervalle de confiance pour la valeur moyenne comme suit :

$$\mu_Z \in \left[\hat{\mu}_Z - \frac{u_{\alpha/2} \hat{\sigma}_Z}{\sqrt{N}}, \hat{\mu}_Z + \frac{u_{\alpha/2} \hat{\sigma}_Z}{\sqrt{N}} \right] \quad (2.4)$$

au niveau de confiance $100(1 - \alpha)\%$, où $u_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, $\Phi(x)$ étant la fonction de répartition de la loi normale standard définie par :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (2.5)$$

A partir de l'intervalle de confiance (2.4) au niveau de confiance $100(1 - \alpha)\%$, pour estimer la valeur moyenne avec une erreur relative $\pm \epsilon_{\mu_Z}$, il est nécessaire d'utiliser un nombre minimal de tirages calculé par :

$$N_{min} = \text{ceil} \left[\left(\frac{u_{\alpha/2} \hat{C}_Z}{\epsilon_{\mu_Z}} \right)^2 \right], \quad (2.6)$$

où la fonction $\text{ceil}[x]$ arrondit x au nombre entier supérieur suivant et $\hat{C}_Z = \hat{\sigma}_Z / \hat{\mu}_Z$ désigne le coefficient de variation de la réponse Z .

2.3 Chaos polynomial généralisé

Le chaos polynomial formalise une séparation entre la partie déterministe et la partie stochastique d'un processus aléatoire $X(\xi)$. Soit (Ω, β, Pr) un espace de probabilité où Ω est l'espace des événements aléatoires ω , β est une σ -algèbre (tribu) des sous-ensembles Ω et Pr est une mesure de probabilité. Comme mentionnée dans la section 1.2.3.3, le chaos polynomial a d'abord été développé par Wiener pour des processus stochastiques modélisés à l'aide de polynômes d'Hermite avec des variables aléatoires gaussiennes et indépendantes [86]. Puis selon le théorème généralisé de Cameron-Martin [14], les travaux de Xiu et Karniadakis [87] et ceux d'Askey et Wilson [2], tout processus aléatoire de second ordre $X(\xi)$ dans un espace d'Hilbert, noté $L^2(\Omega, \beta, Pr)$, peut être développé en série convergente

(au sens des moindres carrés) de fonction polynomiale de r variables aléatoires gaussiennes et non gaussiennes indépendantes $\xi(\omega) = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ comme suit :

$$X(\omega) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r} \bar{x}_\alpha \phi_\alpha(\xi(\omega)), \quad (2.7)$$

$\phi_\alpha(\xi)$ sont les polynômes du chaos basés sur une famille de polynômes orthogonaux (détaillées dans l'annexe A.2) correspondant à la distribution des r variables $(\xi_1, \dots, \xi_r)$ comme indiqué dans le tableau 2.1. Pour des raisons de commodité, $\xi(\omega)$ sera noté ξ dans la suite du manuscrit). Les polynômes du chaos $\phi_\alpha(\xi)$ représentent les composantes stochastiques du processus, et $\bar{x}_\alpha$ sont les coefficients du chaos polynomial qui correspondent aux composantes déterministes du processus.

Dans le cadre de cette thèse pour l'analyse du comportement dynamique des systèmes ou structures mécaniques, les variables utilisées sont du type uniforme. Cette loi a été choisie car elle ne privilégie aucune occurrence par rapport à une autre. Ainsi, elle est la mieux adaptée pour des processus aléatoires pour lesquels la connaissance des lois de probabilité n'est pas ou peu connue. Ainsi le vecteur $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r) \in [-1, 1]^r$ est lié au vecteur des paramètres physiques incertains du système $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_r) \in \prod_{i=1}^r [a_i, b_i]$ par :

$$\zeta_i = \frac{b_i + a_i}{2} + \xi_i \frac{b_i - a_i}{2}, \quad i = 1, \dots, r, \quad (2.8)$$

où a_i et b_i dénotent les limites de l'intervalle uniforme correspondant au paramètre i^{th} .

Selon le schéma d'Askey, si les distributions des paramètres incertains sont uniformes (comme considéré dans ce qui suit), les fonctions polynomiales ϕ_α qui permettent une convergence optimale de la série sont obtenues à partir des polynômes de Legendre, comme détaillés au tableau 2.1 [2, 87, 88].

Variable aléatoire ξ	Famille de polynômes $\phi_\alpha(\xi)$	Support
Gaussienne	Hermite	$(-\infty, \infty)$
Gamma	Laguerre	$[0, \infty)$
Beta	Jacobi	$[-1, 1]$
Uniforme	Legendre	$[-1, 1]$

TABLEAU 2.1 – Correspondance entre les familles de polynômes orthogonaux et les distributions des variables aléatoires

En pratique, le processus aléatoire $X(\xi)$ qui peut être appelé QoI est approché par une expansion tronquée impliquant un nombre fini de $N_p + 1$ termes :

$$X(\xi) \approx \sum_{\alpha \in \mathcal{A}^{r,p}} \bar{x}_\alpha \phi_\alpha(\xi), \quad (2.9)$$

où p est l'ordre du chaos polynomial et $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ un multi-indice en $\mathbb{N}^r$, de longueur :

$$\|\alpha\|_1 = \sum_{i=1}^r \alpha_i. \quad (2.10)$$

L'ensemble d'indices utilisé dans l'expansion tronquée (2.9) est alors défini comme suit

$$\mathcal{A}^{r,p} = \{\alpha \in \mathbb{N}^r : \|\alpha\|_1 \leq p\}. \quad (2.11)$$

La construction du gPC $X(\xi)$ est donc transformé en un problème d'estimation des coefficients $\bar{x}_\alpha$ de ce gPC (équation (2.9)). Le nombre de termes $N_p + 1$ à évaluer est lié à l'ordre p et au nombre de

paramètres incertains r comme [88] :

$$N_p + 1 = \text{card}(\mathcal{A}^{r,p}) = \frac{(p+r)!}{p!r!}. \quad (2.12)$$

L'expansion tronquée (2.9) peut être réécrite comme suit :

$$X(\xi) \approx \sum_{j=0}^{N_p} \bar{x}_j \phi_j(\xi), \quad (2.13)$$

2.3.1 Calcul pratique du développement en polynômes du chaos polynomial généralisé : Approches intrusives et non intrusives

Deux approches sont possibles pour estimer les coefficients du développement en chaos d'une QoI $X(\xi)$: une approche intrusive et une approche non intrusive. Dans la première, une projection de type Galerkin est utilisée pour projeter le modèle mathématique associé à la QoI $X(\xi)$ dans base du chaos polynomial. Dans la deuxième approche, c'est la QoI $X(\xi)$ qui est projetée dans la base du chaos polynomial. Pour illustrer ces deux approches, nous considérons le modèle mathématique très général associé à un système dynamique sous la forme :

$$\mathfrak{J}(y(x, t, \xi(\omega))) = f_2(y(x, t, \xi(\omega)), x, \xi(\omega)), \quad (2.14)$$

où $\mathfrak{J}$ désigne un opérateur différentiel ; $y(x, t, \xi(\omega))$ est la solution qui dépend de l'espace x , du temps t et de l'incertitude modélisée par ξ liée à l'événement aléatoire ω ; la fonction f_2 peut être non linéaire.

La solution $y(x, t, \xi(\omega))$ qui est la QoI, est considérée comme un processus aléatoire, et peut être exprimée par un développement en série de polynômes orthogonaux comme suit :

$$y(x, t, \xi) = \sum_{j=0}^{N_p} \bar{y}_j(x, t) \phi_j(\xi), \quad (2.15)$$

2.3.1.1 Approche intrusive

L'approche intrusive peut être présentée dans les trois étapes suivantes :

1. En substituant le développement (2.15) dans l'équation (2.14), on obtient :

$$\mathfrak{J}\left(\sum_{j=0}^{N_p} \bar{y}_j(x, t) \phi_j(\xi)\right) = f_2\left(\sum_{j=0}^{N_p} \bar{y}_j(x, t) \phi_j(\xi), x, \xi\right), \quad (2.16)$$

2. Une projection de Galerkin est opérée en multipliant les deux côtés de l'équation (2.16) par les différents polynômes de la base choisie et faire la moyenne statistique :

$$\left\langle \mathfrak{J}\left(\sum_{j=0}^{N_p} \bar{y}_j(x, t) \phi_j(\xi)\right), \phi_l(\xi) \right\rangle = \left\langle f_2\left(\sum_{j=0}^{N_p} \bar{y}_j(x, t) \phi_j(\xi), x, \xi\right), \phi_l(\xi) \right\rangle, \quad l = 0, 1, \dots, N_p \quad (2.17)$$

En utilisant l'orthogonalité de la base polynomiale, on peut obtenir un système de $N_p + 1$ équations déterministes et couplées. Par exemple, dans le cas où l'équation (2.14) est une équation différentielle ordinaire avec $\mathfrak{J}$ l'opérateur de la dérivée par rapport au temps, on obtient un système déterministe qui définit la dynamique des coefficients du chaos polynomial comme suit :

$$\dot{y}_l(x, t) = \left(1/\langle \phi_l(\xi), \phi_l(\xi) \rangle\right) \left\langle f_2 \left(\sum_{j=0}^{N_p} \bar{y}_j(x, t) \phi_j(\xi), x, \xi \right), \phi_l(\xi) \right\rangle, \quad l = 0, 1, \dots, N_p \quad (2.18)$$

3. Le système des équations résultant de l'étape 2 est résolu par un algorithme approprié pour déterminer l'ensemble des coefficients du chaos polynomial $\bar{y}_l(x, t)$, $l = 0, 1, \dots, N_p$. Pour le cas de l'équation (2.18), un schéma d'intégration numérique adapté est utilisé.

2.3.1.2 Approche non-intrusive

Comme il a été écrit dans le Chapitre 1, contrairement à l'approche intrusive, celle non-intrusive ne nécessite aucune modification du modèle mathématique (équation (2.14)) et va ainsi être utilisée dans la suite de ces travaux de thèse. Dans cette approche, les coefficients du chaos polynomial sont construits à partir d'un nombre fini des évaluations de la QoI, obtenue à partir de simulations numériques du modèle mathématique. La projection spectrale non intrusive (NISP) et les méthodes de régression sont les méthodes non intrusives les plus utilisées. La méthode NISP nécessite des simulations aux $Q = (p + 1)^r$ points de collocation de Gauss pour construire les coefficients du chaos polynomial. Avec la méthode de régression, un minimum de $Q = N_p + 1$ simulations est nécessaire, qui peuvent être effectuées en pratique aux $Q = (p + 1)^r$ points de collocation de Gauss ou à des points choisis avec une méthode d'échantillonnage par Hypercube Latin présentée dans la section 2.5.6. Dans ce dernier cas, on utilise $Q = k(N_p + 1)$ simulations (avec k un petit entier généralement égal à 2, 3 ou 4).

Dans la thèse de Trinh [78], la méthode de régression et la méthode de projection spectrale non-intrusive (NISP) sont utilisées pour l'analyse de la stabilité d'un système d'embrayage. Cette étude a montré que ces deux méthodes donnent les mêmes niveaux d'erreurs relatives de la propension à être stable par rapport à la méthode de référence Monte Carlo. Cependant, les coûts de calcul pour construire les coefficients du chaos polynomial pour la méthode de régression sont plus faibles que ceux pour la méthode de NISP. La méthode de régression va donc être utilisée dans le cadre de cette thèse pour construire les coefficients du chaos polynomial.

Dans le cadre de la régression, l'évaluation des coefficients résulte de la minimisation du critère suivant [8] :

$$\varepsilon_{reg}^2 = \sum_{q=1}^Q \left[y(x, t, \xi^{(q)}) - \sum_{l=0}^{N_p} \bar{y}_l(x, t) \phi_l(\xi^{(q)}) \right]^2, \quad (2.19)$$

où $\xi^{(q)} = (\xi_1^{(q)}, \dots, \xi_r^{(q)})$ (avec $q = 1, \dots, Q$) désigne le Plan Expérimental Numérique (PEN), qui est un ensemble de Q vecteurs de valeurs de paramètres générés sur le support probabiliste des paramètres. Les coefficients du chaos polynomial $\bar{y} = (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{N_p})^T$ sont calculés comme suit :

$$\bar{y} = \left(\phi^T(\xi^{(q)}) \phi(\xi^{(q)}) \right)^{-1} \phi^T(\xi^{(q)}) Y, \quad (2.20)$$

avec $Y = \left(y(x, t, \xi^{(1)}), y(x, t, \xi^{(2)}), \dots, y(x, t, \xi^{(Q)}) \right)^T$ désigne le vecteur des évaluations de la QoI

avec le modèle mathématique correspondant et $\phi(\xi^{(q)})$ la matrice définie par :

$$\phi(\xi^{(q)}) = \begin{pmatrix} \phi_0(\xi^{(1)}) & \dots & \phi_{N_p}(\xi^{(1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(\xi^{(Q)}) & \dots & \phi_{N_p}(\xi^{(Q)}) \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

La méthode pour choisir l'ordre optimal de troncation est décrite dans [78, 79], où un critère basé sur le taux de décroissance de l'erreur relative entre deux développements d'ordre successif est utilisé. En pratique, le taux de décroissance est défini comme le ratio entre l'erreur de la variance entre deux développements d'ordre $p - 1$ et p , et la variance de développement d'ordre p .

Si le nombre de paramètres incertains r et l'ordre p du gPC sont élevés, le nombre de coefficients du chaos polynomial et donc le nombre de simulations nécessaires pour les construire deviennent rapidement prohibitifs. Des stratégies visant à réduire ce nombre de simulations sont donc nécessaires et vont être présentées dans les sections 2.4 et 2.5.

2.3.1.3 Caractéristiques statistiques du gPC

L'intérêt principal de l'expansion du gPC est de permettre d'estimer les caractéristiques statistiques de processus aléatoires à partir des coefficients du chaos polynomial sans avoir besoin d'utiliser des tirages de paramètres incertains générés par la méthode de MC.

Les valeurs moyenne μ et variance σ^2 théoriques de la QoI $X(\xi)$ sont en effet calculées comme suit :

$$\begin{cases} \mu \approx \bar{x}_0 \\ \sigma^2 \approx \sum_{j=1}^{N_p} \bar{x}_j^2 E[\phi_j^2(\xi)] \end{cases} \quad (2.22)$$

Ces équations sont démontrées en annexe A.3.

2.4 Chaos polynomial généralisé multi-éléments

Cette approche consiste à décomposer l'espace aléatoire en m d'éléments sans intersections, dans le but de réduire le nombre Q de simulations nécessaires pour évaluer les coefficients du chaos polynomial en utilisant un gPC avec un ordre faible p dans chaque élément [81].

Comme dans la méthode gPC, un changement de variables est effectué, pour chacun des m éléments. Les variables locales incertaines $\bar{\xi}^k \in \prod_{i=1}^r [a_i^k, b_i^k]$, sont exprimés en termes de variables uniformes aléatoires indépendantes $\bar{\xi}^k \in [-1, 1]^r$, de telle sorte que les polynômes de Legendre soient exploités :

$$\bar{\xi}_i^k = \frac{b_i^k + a_i^k}{2} + \bar{\xi}_i^k \frac{b_i^k - a_i^k}{2}, \quad i = 1, \dots, r; \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.23)$$

Dans ce contexte, le processus aléatoire correspondant au k^{th} élément est donné par le gPC local :

$$X^k(\bar{\xi}^k) \approx \sum_{\alpha \in \mathcal{A}^{r,p}} \bar{x}_\alpha^k \phi_\alpha(\bar{\xi}^k), \quad (2.24)$$

tandis que l'approximation du processus stochastique est finalement exprimée en utilisant les mesures

de probabilité J_k [81] comme suit :

$$X(\xi) \approx \sum_{k=1}^m \sum_{\alpha \in \mathcal{A}^{r,p}} \bar{x}_\alpha^k \phi_\alpha(\bar{\xi}^k) J_k \quad \text{avec } J_k = \prod_{i=1}^r \frac{b_i^k - a_i^k}{2} \quad (2.25)$$

La procédure pour construire le chaos polynomial généralisé multi-éléments (ME-gPC) est détaillée dans [78, 79], où la méthode a été appliquée pour analyser la stabilité d'un système d'embrayage.

Dans le contexte de ME-gPC, un ordre faible du chaos polynomial dans chaque élément peut être maintenu, car la précision des résultats est principalement déterminée par le nombre m des éléments choisis pour décomposer l'espace aléatoire. Les stratégies pour définir un nombre optimal m sont décrites dans [78, 79], où une procédure itérative utilisant trois critères est proposée. Pour une valeur p donnée, le premier critère est à nouveau basé sur le taux de décroissance de l'erreur relative de la variance entre deux développements d'ordre successif dans chaque élément. La deuxième implique la détermination du paramètre le plus sensible et la troisième impose une taille minimale pour chaque élément.

Le ME-gPC ne va pas être utilisé en tant que telle dans ces travaux de thèse. Néanmoins, des résultats obtenus avec cette méthode dans [78, 79] seront utilisés dans le Chapitre 3 à des fins de comparaison avec les méthodes développées dans le cadre de ces travaux de thèse. Les stratégies de réduction des coûts de calcul qui vont être développées et utilisées dans ces travaux sont basées sur le chaos polynomial creux et vont maintenant être présentées.

2.5 Chaos polynomial creux

Comme mentionné dans le chapitre bibliographique, ces méthodes s'appuient sur le principe de hiérarchie des effets [56] selon lequel la plupart des modèles sont principalement gouvernés par des effets primaires et des interactions de faibles ordres. Ainsi, l'efficacité du Chaos Polynomial creux dit sparse Polynomial Chaos en anglais (sPC) réside dans la réduction du nombre de coefficients du chaos polynomial. Dans cette section, nous présentons trois méthodes différentes de sPC, à savoir le sPC avec « low rank index sets », le sPC avec « isotropic hyperbolic index sets » et le sPC avec « anisotropic hyperbolic index sets ». Ces méthodes ont été initialement développées par Blatman dans [9] et leurs différentes étapes vont être détaillées dans cette section.

2.5.1 Low-rank index sets

Dans cette approche, les polynômes ϕ_α sont retenus ou éliminés de l'expansion du chaos polynomial en fonction de leurs degrés p_α et ordres d'interaction j_α , respectivement définis comme [11] :

$$p_\alpha = \|\alpha\|_1 \quad j_\alpha = \sum_{i=1}^r 1_{\{\alpha_i > 0\}}, \quad (2.26)$$

où $1_{\{\alpha_i > 0\}}$ est égal à 1 si $\alpha_i > 0$ et à 0 sinon.

Le nombre de coefficients du chaos polynomial retenus est diminué en introduisant un ordre d'interaction limité $j \leq p$ à partir duquel un ensemble d'indices réduit est défini [9] :

$$\mathcal{A}^{r,p,j} = \{\alpha \in \mathbb{N}^r : p_\alpha \leq p, j_\alpha \leq j\}. \quad (2.27)$$

L'expansion du chaos polynomial « low rank index sets » utilisant le jeu d'indices $\mathcal{A}^{r,p,j}$ est donc défini

comme suit :

$$X_{\mathcal{A}^{r,p,j}}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}^{r,p,j}} \bar{x}_\alpha \phi_\alpha(\xi). \quad (2.28)$$

Comme expliqué dans [9], la méthode est cependant inexacte lorsque $j < \min(r, p)$: dans ce cas, l'absence des termes de l'ordre d'interaction supérieur à j empêche l'expansion du chaos polynomial $X_{\mathcal{A}^{r,p,j}}$ de converger vers la vraie valeur de la QoI. Les sPC avec « hyperbolic index sets », présentés dans les sections suivantes, surmontent cette limitation.

2.5.2 Isotropic hyperbolic index sets

Dans cette méthode, un ensemble d'indices réduit est introduit sur la base d'une troncature hyperbolique utilisant une norme- m avec $0 < m < 1$ [10] :

$$\mathcal{A}_m^{r,p} = \{\alpha \in \mathbb{N}^r : \|\alpha\|_m \leq p\}, \quad (2.29)$$

où

$$\|\alpha\|_m = \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i^m \right)^{1/m}. \quad (2.30)$$

Quelle que soit la valeur de m choisie pour la norme- m , la séquence d'ensembles imbriqués $\mathcal{A}_m^{r,p}$ ($p \in \mathbb{N}$) converge toujours vers l'ensemble $\mathbb{N}^r$. Par exemple, les termes de base retenus dans les expansions de chaos polynomial pour différents ordres p sont illustrés dans la Figure 2.1 pour différentes norme- m avec $m = 0.6$, $m = 0.8$ et $m = 1$ et un nombre de paramètres incertains $r = 2$. Sur cette figure, les points rouges correspondent aux coefficients retenus et présentent une forme hyperbolique. Avec cette méthode, les différents paramètres incertains sont pris en compte de la même façon, quelque soit leur niveau d'influence sur la QoI. Les indices retenus le sont de la même manière quelque soient les paramètres. Afin de tenu compte d'un niveau d'influence différent selon les paramètres, une méthode dit anisotropie a été définie.

L'expansion du PC « isotropic hyperbolic » avec l'ensemble d'indices $\mathcal{A}_m^{r,p}$ est alors défini comme suit :

$$X_{\mathcal{A}_m^{r,p}}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_m^{r,p}} \bar{x}_\alpha \phi_\alpha(\xi). \quad (2.31)$$

2.5.3 Anisotropic hyperbolic index sets

Dans cette troisième méthode, la stratégie de troncation des expansions du chaos polynomial favorise les variables aléatoires d'entrée ξ_i les plus influents autrement dit ceux avec de grands indices de sensibilité totaux S_i^T . Pour ce faire, la troncature est basée sur la norme anisotrope suivante :

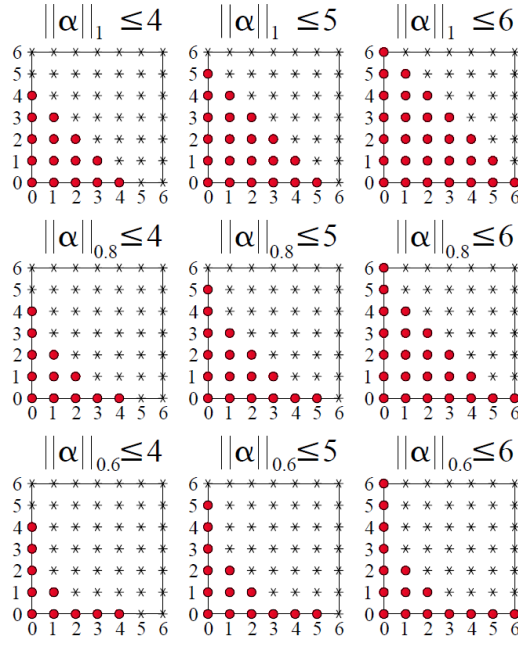
$$\|\alpha\|_{m,w} = \left(\sum_{i=1}^r |w_i \alpha_i|^m \right)^{1/m}, \quad w_i \geq 1. \quad (2.32)$$

L'ensemble d'indices anisotropes correspondant est alors choisi comme suit :

$$\mathcal{A}_{m,w}^{r,p} = \{\alpha \in \mathbb{N}^r : \|\alpha\|_{m,w} \leq p\}, \quad (2.33)$$

où w est un ensemble de coefficients pondérations w_i défini par :

$$w_i = 1 + \frac{\max_{1 \leq j \leq r} S_j^T - S_i^T}{\sum_{k=1}^r S_k^T}. \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.34)$$


 FIGURE 2.1 – Ensemble $\mathcal{A}_m^{r,p}$ avec $m = 0.6, 0.8, 1$; $p = 4, 5, 6$ et $r = 2$.

Par définition, le coefficient w_i de pondération est égal à 1 pour le paramètre ξ_i le plus influent et a une valeur d'autant plus élevée que le paramètre a une moindre influence. Dans l'équation ci-dessus, S_i^T est l'indice de sensibilité totale [77] de la QoI par rapport à la variable aléatoire d'entrée ξ_i , et est calculé comme suit :

$$S_i^T = \frac{1}{D_{PC}} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_i^+} \bar{x}_\alpha^2 \mathbb{E}[\phi_\alpha^2(\xi)], \quad (2.35)$$

où $\mathcal{I}_i^+$ désigne l'ensemble des indices ayant le $i^{\text{ème}}$ composant non nul :

$$\mathcal{I}_i^+ = \{\alpha \in \mathcal{A}_{m,w}^{r,p} : \alpha_i \neq 0\}, \quad (2.36)$$

et D_{PC} la variance de la QoI :

$$D_{PC} = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}^+} \bar{x}_\alpha^2 \mathbb{E}[\phi_\alpha^2(\xi)]. \quad (2.37)$$

où

$$\mathcal{I}^+ = \{\alpha \in \mathcal{A}_{m,w}^{r,p} : \|\alpha\|_1 > 0\}, \quad (2.38)$$

La quantité S_i^T représente une approximation de la contribution du paramètre ξ_i dans la variance de la QoI par rapport à la variance totale.

Pour illustrer, un exemple est présenté dans la Figure 2.2, dans laquelle, les termes de base retenus dans les expansions du chaos polynomial sont donnés dans le cas avec deux paramètres incertains pour différents ensembles de pondérations w , $w = \{1, 1\}$, $w = \{1, 3\}$, $w = \{1, 5\}$ et différents ordres p . Il apparaît clairement que les indices retenus sont différents selon les paramètres. Les expansions du chaos polynomial « anisotropic hyperbolic » sont finalement définies avec les ensembles d'indices $\mathcal{A}_{m,w}^{r,p}$ comme suit :

$$X_{\mathcal{A}_{m,w}^{r,p}}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{m,w}^{r,p}} \bar{x}_\alpha \phi_\alpha(\xi). \quad (2.39)$$

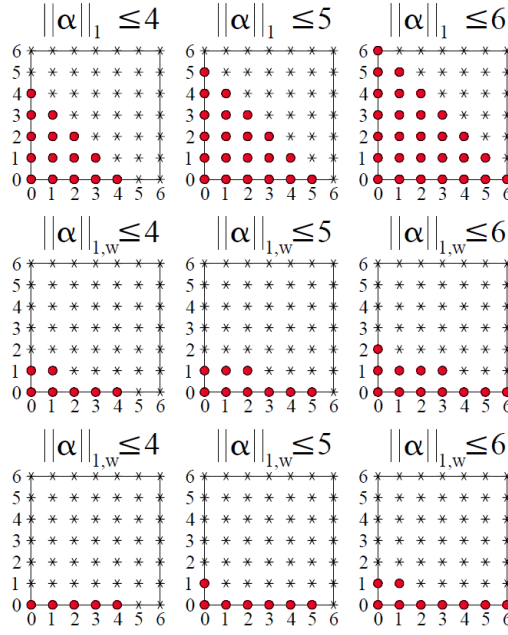


FIGURE 2.2 – Ensemble $\mathcal{A}_{m,w}^{r,p}$ avec différentes pondérations $w = \{1, 1\}$, $w = \{1, 3\}$, $w = \{1, 5\}$ et avec $m = 1$; $p = 4, 5, 6$ et $r = 2$.

2.5.4 Estimation d'erreur

La construction d'une expansion de sPC est basée sur une recherche itérative des termes significatifs et nécessite donc des estimations d'erreurs pour évaluer l'exactitude des approximations consécutives du chaos polynomial.

Une erreur théorique pertinente dans ce contexte est l'erreur de généralisation définie comme suit :

$$Err = E[(X(\xi) - \hat{X}_{\mathcal{A}}(\xi))^2], \quad (2.40)$$

qui est basée sur la différence entre la valeur déterministe $X(\xi)$ de la QoI obtenue directement avec le modèle mathématique et son approximation avec le chaos polynomial $\hat{X}_{\mathcal{A}}(\xi)$ calculée depuis un sous-ensemble non vide fini $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^r$:

$$\hat{X}_{\mathcal{A}}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \bar{x}_{\alpha} \phi_{\alpha}(\xi). \quad (2.41)$$

L'erreur de généralisation est estimée en pratique par l'erreur empirique suivante :

$$Err_{emp} = \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q \left[\left(X(\xi^{(q)}) - \hat{X}_{\mathcal{A}}(\xi^{(q)}) \right)^2 \right] \quad (2.42)$$

dans laquelle les différences sont calculées spécifiquement aux Q observations d'un PEN $\xi^{(q)} = (\xi_1^{(q)}, \dots, \xi_r^{(q)})$. Cette erreur permet de calculer un coefficient R^2 défini comme ci-dessous

$$R^2 = 1 - \frac{Err_{emp}}{\widehat{V}[X]}, \quad (2.43)$$

où $\widehat{V}[X]$ est la variance de $X(\xi^{(q)})$:

$$\widehat{V}[X] = \frac{1}{Q-1} \sum_{q=1}^Q \left(X(\xi^{(q)}) - \bar{X} \right)^2 \quad \text{avec} \quad \bar{X} = \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q X(\xi^{(q)}).$$

Il est à noter que R^2 tend vers 1 lorsque l'erreur de généralisation tend vers 0. Ce coefficient R^2 permet de faire une évaluation de la qualité du chaos polynomial aux points du PEN à partir desquels il a été construit.

Un phénomène de surapprentissage est connu lors de l'utilisation de l'erreur empirique, ce qui, par conséquent, sous-estime l'erreur de généralisation. L'erreur dite leave-one-out [9], qui est basée sur une somme des carrés des résidus $\Delta^{(i)}$ définis dans l'équation (2.44), peut permettre d'éviter cet inconvénient. Un résidu exprime la différence entre l'évaluation déterministe $X(\xi^{(i)})$ de la QoI à l'observation i^{th} du PEN $\xi^{(q)}$, et sa prédiction $\widehat{X}_{\mathcal{A}}^{(-i)}(\xi^{(i)})$ obtenue avec une expansion de chaos polynomial $\widehat{X}_{\mathcal{A}}^{(-i)}$ construite avec un PEN réduit $(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(Q)}) \setminus \xi^{(i)}$ (c'est le PEN original dont l'observation $\xi^{(i)}$ a été enlevée) [11] :

$$\Delta^{(i)} = X(\xi^{(i)}) - \widehat{X}_{\mathcal{A}}^{(-i)}(\xi^{(i)}). \quad (2.44)$$

L'erreur leave-one-out est alors définie comme suit :

$$Err_{LOO} = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^Q (\Delta^{(i)})^2. \quad (2.45)$$

Dans la pratique, le résidu $\Delta^{(i)}$ peut être calculé avec la formule suivante [9] :

$$\Delta^{(i)} = \frac{X(\xi^{(i)}) - \widehat{X}_{\mathcal{A}}(\xi^{(i)})}{1 - h_i}, \quad (2.46)$$

où h_i est le $i^{ème}$ terme diagonal de la matrice $\phi(\xi^{(q)})(\phi^T(\xi^{(q)})\phi(\xi^{(q)}))^{-1}\phi^T(\xi^{(q)})$. L'erreur leave-one-out est dans ce cas donnée par :

$$Err_{LOO} = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^Q \left(\frac{X(\xi^{(i)}) - \widehat{X}_{\mathcal{A}}(\xi^{(i)})}{1 - h_i} \right)^2. \quad (2.47)$$

Un coefficient S^2 équivalent à celui de l'erreur empirique, R^2 , peut être défini pour l'erreur leave-one-out comme suit :

$$S^2 = 1 - \frac{Err_{LOO}}{\widehat{V}[X]}. \quad (2.48)$$

Comme pour R^2 , la valeur du coefficients S^2 tend vers 1 quand l'erreur leave-one-out tend vers 0. Le coefficients S^2 permet ainsi d'évaluer la qualité du chaos polynomial en des points non utilisés pour sa construction.

Les deux coefficients R^2 et S^2 définis ci-dessus seront utilisés dans un algorithme dont le but est de construire une expansion optimale de sPC impliquant les termes les plus significatifs à partir d'un PEN adapté de taille réduite. Cet algorithme va être décrit dans la section suivante.

2.5.5 Algorithme de construction de l'expansion en sPC

Comme expliqué précédemment, l'efficacité des développements en sPC peut être augmentée en ne retenant uniquement que les polynômes les plus significatifs [11]. Ainsi un algorithme de construction d'un développement en sPC a été défini pour sélectionner qu'un certain nombre de termes parmi ceux

correspondant aux ensembles d'indices $\mathcal{A}^{r,p,j}$, $\mathcal{A}_m^{r,p}$ et $\mathcal{A}_{m,w}^{r,p}$. Dans ce qui suit, les ensembles d'indices finaux des termes retenus sont respectivement désignés par $\mathcal{A}^p$, $\mathcal{A}_m^p$ et $\mathcal{A}_{m,w}^p$.

Le principe de la méthode est de construire progressivement un chaos polynomial approximant une QoI à partir d'un PEN le plus petit possible pouvant être enrichi si besoin. L'idée est une construction avec une itération de l'ordre du chaos p en ne retenant que les termes du chaos les plus bénéfiques sur les coefficients R^2 . Le coefficient S^2 est utilisé pour vérifier que le chaos polynomial est performant aux points non utilisés pour sa construction.

La recherche de ces coefficients les plus significatifs s'effectue par cette procédure itérative qui est résumée ci-dessous en 5 étapes de base.

Étape 1

1. Sélectionner un PEN $(\xi^{(q)})$, par exemple un plan aléatoire de type Hypercube Latin (section 2.5.6.1), de taille arbitraire $Q_k = 4(N_p + 1)$, où $(N_p + 1)$ est déterminé par l'équation (2.12) avec r paramètres incertains et $p = 1$. Les évaluations du modèle mathématique aux points du PEN sont regroupées dans le vecteur $X(\xi^{(q)})$.
2. Définir arbitrairement les valeurs des paramètres correspondant à la méthode sPC choisie : l'ordre maximal du chaos polynomial p_{max} et l'ordre d'interaction j_{max} avec la méthode « low rank index sets » (ou le coefficient m utilisé pour la norme- m de troncation pour les méthodes « isotropic hyperbolic » et « anisotropic hyperbolic index sets »), ainsi que la précision de la cible S_{cible}^2 associée au coefficient S^2 et les deux seuils associés au coefficient R^2 .

Étape 2

Initialiser l'algorithme : l'ordre du chaos polynomial est fixé à $p = 0$, et l'ensemble des indices de troncature ne contient que l'élément nul de $\mathbb{N}^r$ $\{0\}$ (le vecteur de pondérations w_i est réglé à $w = \{1, \dots, 1\}$ pour la méthode « anisotropic hyperbolic index sets »). Les valeurs initiales des coefficients de R^2 et S^2 sont désignées par R_0^2 et S_0^2 .

Étape 3 : Enrichissement de la base du chaos

Augmenter la valeur de l'ordre : $p \rightarrow p + 1 \in [1, \dots, p_{max}]$.

⇒ **Étape ascendante** (Étape d'addition) :

1. Avec la méthode « low rank index sets » : définir la valeur de l'ordre d'interaction à $j = \min(p, j_{max})$; ajouter chaque terme de l'ensemble candidat $\mathcal{C}^{j,p} = \{\alpha \in \mathbb{N}^r : p_\alpha = p, j_\alpha = j\}$ à l'ensemble $\mathcal{A}^{p-1}$, calculer les coefficients du chaos polynomial par la méthode de régression (équation (2.20)) en utilisant les Q_k points et le coefficient correspondant R^2 .

Avec la méthode isotropic (resp. anisotropic) hyperbolic index sets : ajouter chaque terme de l'ensemble candidat $\mathcal{C}_m^p = \{\alpha \in \mathbb{N}^r : p - 1 < \|\alpha\|_m \leq p\}$ (resp. $\mathcal{C}_{m,w}^p = \{\alpha \in \mathbb{N}^r : p - 1 < \|\alpha\|_{m,w} \leq p\}$) à l'ensemble $\mathcal{A}_m^{p-1}$ (resp. $\mathcal{A}_{m,w}^{p-1}$) et calculer, comme ci-dessus, les coefficients du chaos polynomial et le coefficient R^2 .

2. Retenir chaque candidat dont l'addition conduit à une augmentation significative de la valeur du coefficient R^2 , soit :

$$\Delta R^2 = R^2 - R_0^2 \geq \epsilon_1. \quad (2.49)$$

Si l'inégalité (2.49) n'est pas respectée, le candidat est éliminé.

Avec la méthode « low rank index sets », on note $\mathcal{A}^{p,+}$ l'ensemble de troncature final de cette étape (respectivement $\mathcal{A}_m^{p,+}$ et $\mathcal{A}_{m,w}^{p,+}$ pour les méthodes « isotropic hyperbolic » et « anisotropic hyperbolic index sets »).

⇒ **Étape descendante** (Étape d'élimination) :

1. Enlever à tour de rôle chaque terme dans $\mathcal{A}^{p,+}$ ($\mathcal{A}_m^{p,+}$ et $\mathcal{A}_{m,w}^{p,+}$ respectivement avec les méthodes « isotropic hyperbolic » et « anisotropic hyperbolic index sets ») d'ordre strictement inférieur à p , et calculer de nouveau les coefficients du développement du chaos polynomial et le coefficient R^2 associé.
2. Retirer de $\mathcal{A}^{p,+}$ ($\mathcal{A}_m^{p,+}$ et $\mathcal{A}_{m,w}^{p,+}$ respectivement avec les méthodes « isotropic hyperbolic » et « anisotropic hyperbolic index sets ») le terme qui induit une réduction non-significative du R^2 , c'est-à-dire si la suppression du candidat conduit à

$$\Delta R^2 = R_0^2 - R^2 < \epsilon_2. \quad (2.50)$$

Si l'inégalité (2.50) n'est pas respectée, le candidat est gardé.

Ainsi, le terme est éliminé si le fait de le garder n'améliore pas ou peu la qualité du chaos autrement dit on ne garde le terme seulement si cela améliore de façon significative la qualité du chaos.

Soit $\mathcal{A}^p$ l'ensemble final de troncature pour la méthode « low rank index sets » (respectivement $\mathcal{A}_m^p$ et $\mathcal{A}_{m,w}^p$ pour les méthodes « isotropic hyperbolic » et « anisotropic hyperbolic index sets »). Avec la méthode « anisotropic hyperbolic index sets », les indices de sensibilité totaux S_i^T de l'approximation du chaos polynomial sont calculés et les pondérations w_i sont actualisées (équation (2.34)).

Étape 4 : Vérification du conditionnement de la matrice de régression

1. Si le conditionnement du problème de régression est satisfaisant, c'est-à-dire que la taille Q_k du PEN ($\xi^{(q)}$) est supérieure ou égale à $2 \cdot \text{card}(\mathcal{A}^p)$ avec la méthode « low rank index sets » (respectivement $2 \cdot \text{card}(\mathcal{A}_m^p)$ et $2 \cdot \text{card}(\mathcal{A}_{m,w}^p)$ avec les méthodes « isotropic hyperbolic » et « anisotropic hyperbolic index sets ») passer à l'étape 5.
2. Si le conditionnement du problème de régression est mauvais, c'est-à-dire que la taille Q_k du PEN ($\xi^{(q)}$) est inférieure à $2 \cdot \text{card}(\mathcal{A}^p)$ avec la méthode « low rank index sets » (respectivement $2 \cdot \text{card}(\mathcal{A}_m^p)$ et $2 \cdot \text{card}(\mathcal{A}_{m,w}^p)$ avec les méthodes « isotropic hyperbolic » et « anisotropic hyperbolic index sets »), un enrichissement du PEN est effectué en utilisant la forme Hypercube Latin Imbriqué (section 2.5.6.2) pour atteindre une taille $Q_{k+1} = 4(N_p + 1)$. Dans ce cas, l'ensemble de troncature est réinitialisé à $\{0\}$ et la procédure d'enrichissement est relancée à l'étape 2.

Étape 5 : Étape de test de la qualité du chaos

S'arrêter si le coefficient S_0^2 associé à l'erreur « leave-one-out » est supérieure ou égale à la valeur cible S_{cible}^2 ou si l'ordre du chaos polynomial est égal à p_{max} . Sinon, retourner à l'étape 3.

Les algorithmes détaillés sont présentés en annexe B.

2.5.6 Plan d'expérience numérique

Le Plan d'Expérience Numérique (PEN) initial est construit à partir d'un plan de type Hypercube Latin [54] (Latin Hypercube Sampling (LHS)) comme présenté dans la partie 2.5.6.1. Dans le cas où le conditionnement de la matrice du problème de régression est mauvais (étape 4 dans la section 2.5.5), un enrichissement du PEN est effectué en utilisant la forme Hypercube Latin Imbriqué (nested Latin Hypercube (NLHS) designs) [84, 11] qui est présenté dans la partie 2.5.6.2.

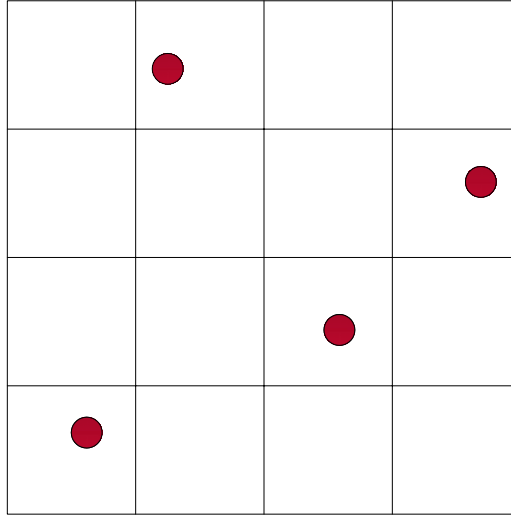


FIGURE 2.3 – LHS de quatre points avec deux variables aléatoires indépendantes

2.5.6.1 Méthode de Hypercube Latin

Le principe de la méthode est d'effectuer une subdivision de l'intervalle $[-1, 1]$ en Q_k sous-intervalles de même longueur de la forme suivante : $\left[-1, -\frac{Q_k/2-1}{Q_k/2}\right], \dots, \left[-\frac{1}{Q_k/2}, 0\right], \left[0, \frac{1}{Q_k/2}\right], \left[\frac{1}{Q_k/2}, \frac{2}{Q_k/2}\right], \dots, \left[\frac{Q_k/2-1}{Q_k/2}, 1\right]$ [27]. Lorsque le produit cartésien est effectué sur r de ces sous-intervalles, il existe un maillage de $(Q_k)^r$ cellules de même taille. Q_k cellules sont choisies ensuite au hasard parmi ces $(Q_k)^r$ cellules de telle manière que les cellules des marges de dimension 1 soient représentées une fois chacune.

Pour illustrer cette méthode, un ensemble du PEN ($\xi^{(q)}$) de quatre points avec deux variables aléatoires indépendantes est montré dans la Figure 2.3.

2.5.6.2 Hypercube Latin Imbriqué

La technique NLHS est expliquée dans le cas simple de deux variables aléatoires indépendantes sur l'intervalle $[-1, 1]$. La taille du PEN initial est supposée de $Q_k = 4$. Un enrichissement du PEN est effectué pour atteindre une taille $Q_{k+1} = 5$. Comme montré dans la Figure 2.4, l'intervalle $[-1; 1]$ de chaque variable aléatoire est d'abord divisé en 5 sous-intervalles de la même longueur. Dans ce cas présenté, il n'y a qu'une seule cellule vide, dans laquelle le point de l'enrichissement peut être échantillonné au hasard. Cependant, il n'est pas toujours possible d'obtenir le PEN de cette façon. Un autre cas est illustré à la Figure 2.5 : après avoir construit la nouvelle grille 5 x 5, deux points se trouvent dans une même cellule. Si les cellules non-vides sont retirées, le reste des sous-intervalles forme une grille de 2x2. Deux points d'enrichissement sont alors choisis au hasard dans ces cellules. Par ailleurs les 2 points positionnés dans la même cellule sont gardés. Après l'enrichissement du PEN, sa taille est donc $Q_{k+1} = 6$ au lieu de 5 comme prévu.

2.6 Conclusion

Ce chapitre a présenté des éléments théoriques de la méthode de Monte Carlo et de différents types d'expansion en chaos polynomial, à savoir le chaos polynomial généralisé (gPC), le chaos polynomial généralisé multi-éléments (ME-gPC) et des chaos polynomial creux (sPC). Ces expansions basées sur le formalisme du chaos polynomial non-intrusif vont être développées et appliquées à l'étude du comportement dynamique d'un modèle d'embrayage et plus particulièrement à l'étude de la stabilité

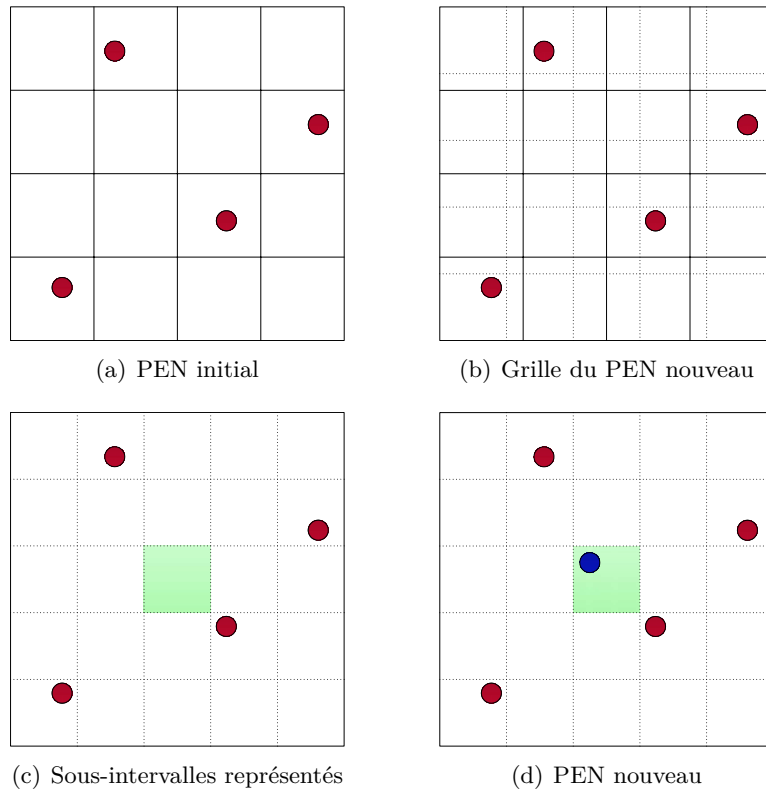


FIGURE 2.4 – Hypercube Latin Imbriqué - premier cas

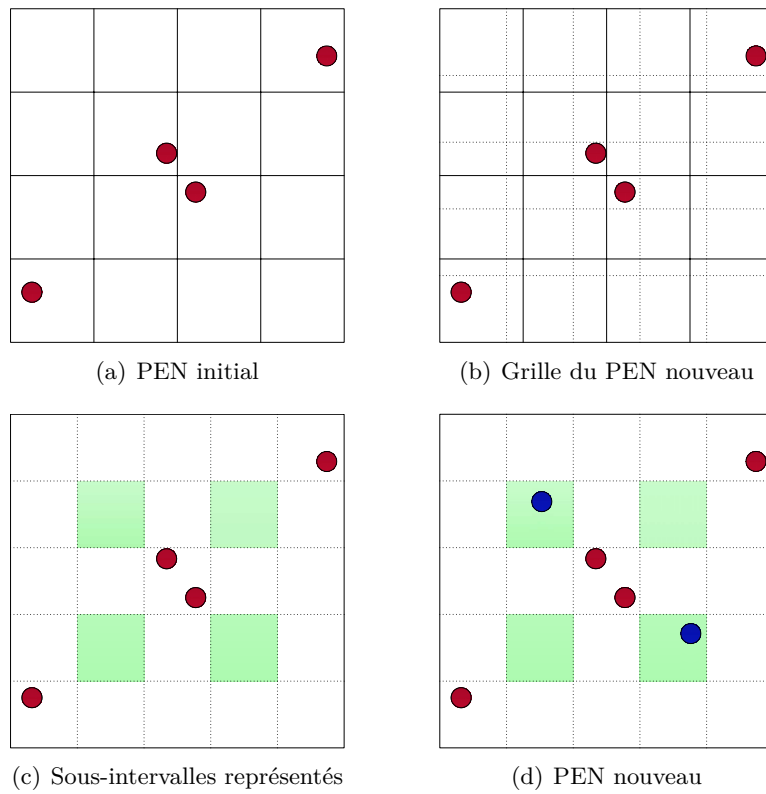


FIGURE 2.5 – Hypercube Latin Imbriqué - deuxième cas

d'un modèle d'embrayage à partir de la méthode indirecte de Lyapunov dans le Chapitre 3. Les résultats obtenus avec ces différentes méthodes seront comparés avec ceux obtenus avec de la méthode de référence Monte Carlo (MC).

Chapitre 3

ÉTUDE DE STABILITÉ D'UN SYSTÈME D'EMBRAYAGE AVEC LE CHAOS POLYNOMIAL

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'évaluer la capacité des modèles basées sur des chaos polynomiaux creux à prendre en compte les incertitudes paramétriques dans l'étude de stabilité d'un système d'embrayage avec un nombre croissant de paramètres incertains.

Il a été choisi de tester ces méthodes de propagation d'incertitudes en effectuant des études de la stabilité d'un système d'embrayage pour les raisons suivantes.

Les instabilités dans les systèmes frottants tels que les systèmes d'embrayage sont encore un problème ouvert qui a suscité de nombreuses études dans la littérature [37, 16, 18]. Des vibrations provoquées par les forces de frottement peuvent se produire lors des phases de patinage et générer un inconfort et des nuisances sonores.

La littérature a montré que le comportement de ces systèmes frottements est très sensible à leurs paramètres [38, 17]. Par ailleurs, les paramètres de conception et particulièrement la loi de frottement admet des dispersions importantes dues aux procédés de fabrication et aux conditions d'utilisation de ces systèmes [44]. Il est donc primordial pour ces systèmes d'embrayage de prendre en compte les incertitudes paramétriques dans l'étude de leur stabilité.

Dans études ont été menées pour prendre en compte les incertitudes paramétriques dans le comportement dynamique des systèmes frottants tels que les systèmes de freinage [62, 63, 68, 67, 59, 60, 22, 46, 58] mais très peu sur les systèmes d'embrayage. On peut citer Trinh et al. [79] qui ont été utilisé le chaos polynomial généralisé (gPC) et le chaos polynomial généralisé multi-éléments (ME-gPC) pour modéliser les valeurs propres d'un modèle de système d'embrayage pour en étudier la stabilité. Ces développements en chaos ont permis d'obtenir satisfaisants pour un nombre réduit de paramètres incertains.

Ainsi, dans ce chapitre, les différentes méthodes du chaos polynomial détaillées dans le chapitre 2 (i.e gPC, ME-gPC et sPC) vont être utilisées pour analyser la stabilité du modèle simple d'embrayage à six degrés de liberté [85] utilisé dans l'étude menée par Trinh [78] avec un nombre plus élevé de paramètres incertains. L'objectif est d'étudier la valeur ajoutée du sPC (en terme de coup de calcul et de précision du résultat) par rapport aux approches plus classiques du chaos polynomial que sont le gPC et le ME-gPC mais aussi par rapport à la méthode de Monte Carlo qui servira de référence.

Ce chapitre suit le plan suivant. D'abord le modèle d'embrayage utilisé est présenté dans la sec-

tion 3.2. Ensuite, la section 3.3 décrit la méthode indirecte de Lyapunov pour déterminer la stabilité d'un système dynamique. Enfin, les résultats sont exposés dans la section 3.4.

3.2 Description du modèle d'embrayage

Le modèle du système d'embrayage considéré dans ce chapitre est présenté en Figure 3.1. Ce modèle à six degrés de liberté a été initialement défini et validé expérimentalement dans [85]. Bien que possédant un nombre limité de degrés de liberté, il permet de reproduire le phénomène d'instabilité vibratoire par couplage de modes. Le modèle a ensuite été complété pour tenir compte de l'amortissement supplémentaire lié au disque d'embrayage et à la plaque de pression [79]. Par souci de clarté, les détails du modèle sont donnés ci-après.

Comme illustré à la Figure 3.1, la surface de frottement du système d'embrayage est connectée au volant moteur aux points A', B', C' et D' par un ressort de progressivité k_p qui est divisé en quatre raideurs k_A , k_B , k_C et k_D qui sont supposées non linéaires. En effet, à l'équilibre statique, chaque raideur est supposée avoir une valeur constante $k_p/4$. Cependant, en raison des vibrations du plateau autour de l'axe (Ox), les points A et B vibrent avec de faibles amplitudes, par conséquent, les raideurs k_A et k_B ne sont plus constantes mais varient de façon hyperbolique autour de $k_p/4$. Pour prendre en compte ce phénomène, les raideurs $k_p/4$ aux emplacements A' et B' sont respectivement multipliées et divisées par un facteur γ_1 . De façon similaire un second facteur γ_2 est également utilisé aux emplacements C' et D'. Les valeurs de k_A , k_B , k_C et k_D sont donc

$$k_A = \gamma_1 k_p/4, \quad k_B = k_p/(4\gamma_1), \quad (3.1a)$$

$$k_C = \gamma_2 k_p/4, \quad k_D = k_p/(4\gamma_2). \quad (3.1b)$$

L'amortissement interne du disque d'embrayage est pris en compte par quatre coefficients d'amortissement c_A , c_B , c_C et c_D placés aux mêmes positions que les raideurs k_A , k_B , k_C et k_D . La surface de contact entre le disque de friction et le plateau de pression est un anneau de rayon interne r_1 et de rayon externe r_2 . Les points A', B', C' et D' sont supposés situés au rayon moyen $\bar{r} = (r_1 + r_2)/2$ de cet anneau.

Le plateau de pression de masse M_p et d'épaisseur $2l$ est modélisé par quatre masses $M_p/4$ connectées par quatre ressorts de flexion de raideur k_f et par un amortisseur coefficient c_f (cf. Figure 3.1 à droite). Les points A, B, C, D représentent la projection de A', B', C' et D' sur sa surface moyenne, alors que les points E, F, G, H sont des points fixes appartenant au volant moteur. Les six degrés de liberté du système sont donc les rotations internes θ_x, θ_y autour des axes fixes x et y qui décrivent les rotations de corps rigides du plateau de pression, et les mouvements de translation Z_A, Z_B, Z_C, Z_D des points A, B, C, D qui décrivent les deux premiers modes de flexion du plateau de pression.

Aux points A', B', C' et D', les forces normales de rappel des ressorts de progressivité, notées $N_{A'}$, $N_{B'}$, $N_{C'}$, $N_{D'}$, et les forces de frottement notées $F_{A'}$, $F_{B'}$, $F_{C'}$, $F_{D'}$ sont donnée par les expressions suivantes :

$$N_{A'} = k_A(Z_A + \bar{r}\theta_x), \quad N_{B'} = k_B(Z_B - \bar{r}\theta_x), \quad (3.2a)$$

$$N_{C'} = k_C(Z_C + \bar{r}\theta_y), \quad N_{D'} = k_D(Z_D - \bar{r}\theta_y), \quad (3.2b)$$

et

$$F_{A'} = \mu N_{A'}, \quad F_{B'} = \mu N_{B'}, \quad (3.3a)$$

$$F_{C'} = \mu N_{C'}, \quad F_{D'} = \mu N_{D'}. \quad (3.3b)$$

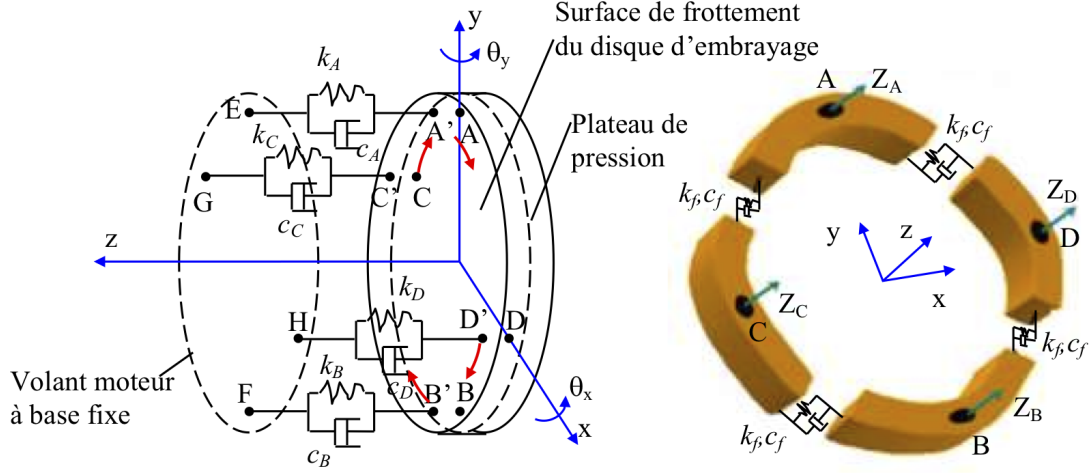


FIGURE 3.1 – Modèle mathématique du système d'embrayage. À gauche deux rotations θ_x , θ_y (flèches bleues) autour des axes x et y , à droite quatre mouvements de translation Z_A , Z_B , Z_C , Z_D (flèches vertes) des points A, B, C, D dans la direction z .

Dans les équations (3.2) et (3.3), le coefficient de frottement μ est supposé constant en raison de la gamme de vitesse élevée considérée (> 700 tr/min).

Les équations du mouvement du modèle d'embrayage sont :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (3.4)$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \theta_x & \theta_y & Z_A & Z_B & Z_C & Z_D \end{bmatrix}^T. \quad (3.5)$$

Dans l'équation (3.4), la matrice de masse est donnée par :

$$\mathbf{M} = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} I_x & I_y & \frac{M_p}{4} & \frac{M_p}{4} & \frac{M_p}{4} & \frac{M_p}{4} \end{bmatrix} \right), \quad (3.6)$$

où I_x , I_y sont les moments d'inertie du plateau de pression autour des axes x et y respectivement.

Les matrices de rigidité et d'amortissement sont définies respectivement comme suit :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \bar{r}^2(k_A + k_B + 4k_f) & \mu l \bar{r}(k_C + k_D) & \bar{r}(k_A + 2k_f) & -\bar{r}(k_B + 2k_f) & \mu l k_C & -\mu l k_D \\ -\mu l \bar{r}(k_A + k_B) & \bar{r}^2(k_C + k_D + 4k_f) & -\mu l k_A & \mu l k_B & \bar{r}(k_C + 2k_f) & -\bar{r}(k_D + 2k_f) \\ \bar{r}(k_A + 2k_f) & 0 & k_A + 2k_f & 0 & -k_f & -k_f \\ -\bar{r}(k_B + 2k_f) & 0 & 0 & k_B + 2k_f & -k_f & -k_f \\ 0 & \bar{r}(k_C + 2k_f) & -k_f & -k_f & k_C + 2k_f & 0 \\ 0 & -\bar{r}(k_D + 2k_f) & -k_f & -k_f & 0 & k_D + 2k_f \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

et

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \bar{r}^2(c_A + c_B + 4c_f) & \mu l \bar{r}(c_C + c_D) & \bar{r}(c_A + 2c_f) & -\bar{r}(c_B + 2c_f) & \mu l c_C & -\mu l c_D \\ -\mu l \bar{r}(c_A + c_B) & \bar{r}^2(c_C + c_D + 4c_f) & -\mu l c_A & \mu l c_B & \bar{r}(c_C + 2c_f) & -\bar{r}(c_D + 2c_f) \\ \bar{r}(c_A + 2c_f) & 0 & c_A + 2c_f & 0 & -c_f & -c_f \\ -\bar{r}(c_B + 2c_f) & 0 & 0 & c_B + 2c_f & -c_f & -c_f \\ 0 & \bar{r}(c_C + 2c_f) & -c_f & -c_f & c_C + 2c_f & 0 \\ 0 & -\bar{r}(c_D + 2c_f) & -c_f & -c_f & 0 & c_D + 2c_f \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Les valeurs nominales des paramètres, prises dans [85], sont : $k_p = 16 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$; $k_f = 7 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$; $\gamma_1 = 0.9$; $\gamma_2 = 0.8$; $r_1 = 75 \text{ mm}$; $r_2 = 120 \text{ mm}$; $l = 12.5 \text{ mm}$; $c_A = c_B = c_C = c_D = 4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$; $c_f = 0.1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le modèle présenté ci-dessus est appelé modèle mathématique de l'embrayage.

3.3 Stabilité des systèmes

La stabilité de la solution d'équilibre triviale $\mathbf{U}_0 = \mathbf{0}$ de (3.4) est obtenue en calculant les valeurs propres λ du système en résolvant l'équation caractéristique suivante :

$$\det(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) = 0. \quad (3.9)$$

Comme (3.4) est un système de second ordre à six degrés de liberté, il possède douze valeurs propres λ_i ($i = 1, \dots, 12$). En effet, l'équation caractéristique (3.9) est une équation polynomiale de degré douze par rapport à λ .

La méthode indirecte de Lyapunov permet de relier la stabilité de $\mathbf{U}_0$ aux signes des parties réelles des valeurs propres λ_i ($i = 1, \dots, 12$) :

1. L'équilibre $\mathbf{U}_0$ est asymptotiquement stable si $\forall i \in (1, \dots, 12), \text{Re}(\lambda_i) < 0$;
2. L'équilibre $\mathbf{U}_0$ est instable si $\exists i \in (1, \dots, 12) / \text{Re}(\lambda_i) > 0$.

Il est connu que l'analyse de stabilité telle que présentée ci-dessus peut entraîner une sous-estimation ou une surestimation du nombre de modes instables en raison des limites de l'hypothèse linéaire [72]. En effet, une analyse non linéaire complète montre que des modes instables supplémentaires peuvent apparaître lors de vibrations transitoires. Cependant, la détermination de la stabilité linéaire d'un point d'équilibre à l'aide de la méthode indirecte de Lyapunov est la première étape d'une analyse globale qui prendrait en compte la nature non linéaire du système. Il faudrait par exemple compléter l'analyse par des simulations temporelles du modèle pour déterminer quels modes (fondamentales, harmoniques et combinaison des deux) contribuent aux vibrations induites par le frottement. Nous nous contenterons, dans le cadre de cette thèse, de l'analyse de la stabilité linéaire du système.

Dans l'étude stochastique présentée dans les sections suivantes, les valeurs propres λ_i ($i = 1, \dots, 12$), solutions de l'équation caractéristique (3.9), sont les Quantités d'Intérêt (QoI) qui vont être modélisées par les différents développements en chaos polynomial.

3.4 Résultats

Dans cette section, l'analyse de stabilité du système d'embrayage décrit précédemment et possédant des paramètres incertains est d'abord effectuée par la méthode de Monte Carlo appliquée au Modèle Mathématique (MCMM) décrit à la Section 3.2. Les résultats de la MCMM constituent la référence de cette étude avec laquelle seront comparés les résultats obtenus avec la théorie du chaos polynomial (i.e. gPC, ME-gPC et sPC). Les comparaisons seront effectuées d'une part sur les statistiques (moyenne et variance) des QoI qui seront les parties réelles des valeurs propres du système et d'autre part sur la *propension à être stable* du système, grandeur définie ci-après.

3.4.1 Propension à être stable

L'état de stabilité d'un système mécanique possédant des paramètres avec des valeurs fixes est déterministe. Ainsi, ce système est soit stable soit instable. Ceci n'est pas le cas d'un système avec des paramètres incertains. Pour caractériser son état de stabilité, il a été défini sa propension à être stable étant données les incertitudes sur les valeurs de ses paramètres.

Cette propension à être stable V du système d'embrayage est estimée avec la méthode MC de la façon suivante :

$$V = \frac{N_{stable}}{N}, \quad (3.10)$$

Nombre de paramètres incertains (r)	Paramètres incertains	Moyenne des parties réelles du (λ_2)	Variance des parties réelles du (λ_2)	Propension à être stable (MCMM) (%)
1	μ	34.46	880.44	22.22
2	μ, k_p	34.43	880.42	22.22
3	μ, k_p, k_f	34.44	881.07	22.23
4	μ, k_p, k_f, γ_1	34.63	875.62	21.51
5	$\mu, k_p, k_f, \gamma_1, \gamma_2$	34.12	880.51	22.57
6	$\mu, k_p, k_f, \gamma_1, \gamma_2, r_1$	34.16	882.77	22.56
7	$\mu, k_p, k_f, \gamma_1, \gamma_2, r_1, r_2$	34.29	897.17	22.54
8	$\mu, k_p, k_f, \gamma_1, \gamma_2, r_1, r_2, l$	34.29	897.40	22.54

TABLEAU 3.1 – Moyenne et variance de la partie réelle de λ_2 et propension à être stable obtenue avec le MCMM

où N est le nombre total d'échantillons (obtenus par un tirage aléatoire suivant les lois de probabilité des paramètres considérés) et N_{stable} est le nombre d'échantillons conduisant à un état stable du système.

Pour assurer un niveau de confiance de 99 % avec une marge de précision de 1,07 % pour la propension à être stable, un nombre total d'échantillons $N = 10\,000$ est requis [5]. Il est à noter que ce nombre d'échantillon N ne dépend pas du nombre de paramètres incertains considéré, mais seulement du niveau de confiance et de la précision désirés.

Dans la suite, si le coût de calcul nécessaire pour construire le chaos polynomial est supérieur à 10 000 Simulations du Modèle Mathématique (SMM), il n'y a aucun avantage à utiliser le chaos polynomial. Dans ce cas, la MCMM reste la méthode optimale. Le coût de calcul maximal autorisé pour construire le chaos est donc de 10 000 SMM.

3.4.2 Paramètres incertains considérés

Dans le modèle mathématique du système d'embrayage présenté à la section 3.2, huit paramètres peuvent être choisis comme incertains : $\mu, k_p, k_f, \gamma_1, \gamma_2, r_1, r_2$ et l . Le coefficient de frottement μ est supposé indépendant des autres paramètres, il suit une loi uniforme dans l'intervalle $[0, 0.5]$. Les sept autres paramètres incertains sont également considérés comme indépendants, aléatoires et uniformes mais dans les intervalles $[0.95V_n, 1.05V_n]$ où V_n sont les valeurs nominales des paramètres (données à la fin de la section 3.2). Les calculs des valeurs propres du système d'embrayage est effectués dans huit situations différentes correspondant à un nombre variable de paramètres incertains allant de $r = 1$ à 8. La liste des paramètres incertains pour ces différentes situations est donnée au Tableau 3.1. Lorsque les paramètres ne sont pas incertains ils sont fixés à leurs valeurs nominales.

3.4.3 Étude de référence : Monte Carlo sur le modèle mathématique

Dans cette section, la MCMM est utilisée pour étudier la stabilité du système d'embrayage. Pour cela, 10 000 ensembles de valeurs propres λ_i ($i = 1, \dots, 12$) (les QoI), solutions de l'équation caractéristique (3.9), sont calculées à partir de 10 000 tirages aléatoires indépendants réalisés au sein de l'espace des paramètres incertain en suivant leurs lois de probabilité. Il apparaît que le modèle a huit valeurs propres non nulles correspondant aux modes 1, 2, 3 et 4 (à chaque mode correspond deux valeurs propres complexes conjuguées). Les modes 3 et 4 sont toujours découplés et stables, contrairement aux modes 1 et 2 qui se couplent (phénomène de coalescence de modes) entraînant une instabilité (les parties réelles des valeurs propres deviennent positive). Ces deux modes régissent donc la stabilité du système d'embrayage.

Huit études ont été menées correspondant aux nombre de paramètres incertains considérés ($r = 1$ à 8). Les statistiques résultantes (moyenne et variance) de la partie réelle de λ_2 ainsi que la propension

à être stable correspondante sont présentées dans le Tableau 3.1.

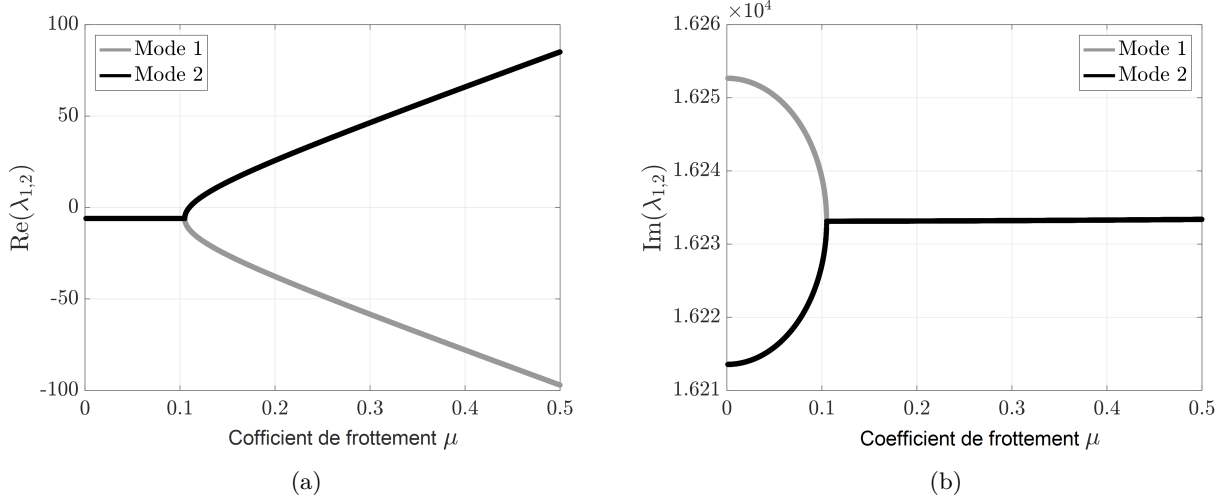


FIGURE 3.2 – (a) Parties réelles et (b) parties imaginaires des valeurs propres λ_1 et λ_2 des modes 1 et 2

À titre d'exemple, la Figure 3.2 affiche les parties réelles et imaginaires des modes 1 (en gris) et 2 (en noir) obtenues pour 10 000 valeurs du coefficient de frottement μ , les autres paramètres étant fixés à leur valeur nominale (soit $r = 1$). Lorsque μ passe de 0 à 0.105, les parties imaginaires (i.e. les pulsations) des deux valeurs propres sont séparées mais ont tendance à se rapprocher, alors que les parties réelles sont égales et négatives, ce qui signifie que le système est stable. À partir de $\mu = 0.105$, les parties imaginaires des deux modes se chevauchent, caractérisant le phénomène de coalescence de modes, tandis que les parties réelles se séparent. À partir du point de bifurcation de Hopf situé à ($\mu = 0.11$), la partie réelle du mode 2 devient positive et le système est instable.

Il est bien connu dans la littérature des systèmes frottants, que les caractéristiques du phénomène de coalescence de modes peuvent varier en fonction des valeurs prises par les coefficients d'amortissement associés aux modes qui se couplent [40, 28]. Deux effets principaux peuvent se produire : un déplacement des parties réelles des valeurs propres vers les valeurs négatives et un effet de lissage du voisinage du point de coalescence. Le premier stabilise le système tandis que le second peut conduire à une déstabilisation peu intuitive (le système se déstabilise alors que de l'amortissement est ajouté). Dans le cas du modèle d'embrayage considéré dans cette étude, Trinh *et al.* [79], il apparaît que le phénomène de coalescence est très influencé par le rapport entre les coefficients d'amortissement modaux des deux modes qui coalescent.

Les coefficients d'amortissement choisis dans cette étude induisent des valeurs très proches de ces deux coefficients d'amortissement modaux. Par conséquent, seul l'effet d'abaissement évoqué plus haut se produit.

Les faibles variations des coefficients d'amortissement modaux dues aux incertitudes des paramètres du modèle peuvent donc avoir une faible influence sur les caractéristiques de la coalescence des modes. Cependant, l'allure des parties réelles et imaginaires des valeurs propres reste similaires à celle de la Figure 3.2, et ne peuvent pas affecter l'efficacité de la méthode chaos polynomial. L'influence de ces effets d'abaissement et de lissage sur l'efficacité du chaos polynomial pourrait faire l'objets d'études futures. Nous pouvons déjà noter que la modélisation des valeurs propres par le chaos polynomial devrait être facilitée par l'effet de lissage.

3.4.4 Méthode sPC appliquée à l'analyse de la stabilité du système d'embrayage

Dans cette section, la stabilité du système d'embrayage est réalisée en couplant la méthode de Monte-Carlo avec les différentes méthodes sPC détaillées au Chapitre 2. Les résultats obtenus précédemment par Trinh *et al.* [79] avec les méthodes gPC et ME-gPC sont également présentés à des fins de comparaison.

Les valeurs propres λ_i ($i = 1, \dots, 8$) sont donc d'abord exprimées sous la forme suivante :

$$\lambda_i(\xi) \approx \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \bar{\lambda}_{i,\alpha} \phi_\alpha(\xi), \quad (3.11)$$

où $\mathcal{A}$ désigne $\mathcal{A}^{r,p}$ (pour le gPC et le ME-gPC, cf. Eq. (2.11)), $\mathcal{A}^{r,p,j}$ (pour le sPC « low rank index sets » cf. Eq.(2.27)), $\mathcal{A}_m^p$ ou $\mathcal{A}_{m,w}^p$ (pour les sPC « isotropic hyperbolic » et « anisotropic hyperbolic index sets » respectivement, cf. Eqs. (2.29) et (2.33)).

Dans un second temps, des statistiques comme par exemple la moyenne et la variance des parties réelles des valeurs propres ou la propension à être stable sont obtenues avec la MC appliquée à l'Eq. (3.11) pour 10 000 tirage aléatoires dans l'espace des paramètres incertains ξ .

Le tableau 3.2 compare les résultats (en termes de propension à être stable) obtenus avec les méthodes MCMM, gPC, ME-gPC et les trois méthodes sPC respectivement notées sPC-LR (pour sPC « low-rank index sets »), sPC-IH (pour sPC « isotropic hyperbolic index sets ») et sPC-AH (sPC « anisotropic hyperbolic index sets »).

Dans [79], les résultats du gPC et du ME-gPC sont obtenus en utilisant une méthode de régression avec une taille de PEN $Q = (p+1)^r$. De plus, le gPC et le ME-gPC sont construits par une procédure itérative et le choix de l'ordre p est basé sur un critère considérant le taux de décroissement de l'erreur relative entre deux développements d'ordre successif. En ce qui concerne le gPC, cette stratégie conduit à un ordre relativement faible qui part de $p = 6$ pour $r = 1$ et diminue à $p = 2$ pour un nombre plus élevé de paramètres incertains (cf. tableau 3.2). Cependant, le nombre de polynômes intervenants dans la série du gPC devient excessif à partir de $r = 5$, conduisant à un nombre prohibitif de SMM nécessaires pour construire les coefficients du chaos polynomial. Les erreurs relatives sur la propension à être stable entre le gPC et la MCMM deviennent supérieures à 20%, le gPC devenant donc inefficace dans ces cas. La méthode ME-gPC donne des résultats satisfaisants pour $r \leq 7$. Cependant, avec plus de 5 000 SMM requises, le coût de calcul devient très important pour r allant de 5 à 7. Pour $r = 8$, le ME-gPC l'utilisation du ME-gPC n'est plus pertinente car le nombre de SMM nécessaire pour calculer les coefficients du chaos polynomial dépasse la limite de 10 000 simulations.

Dans la présente étude, les QoI obtenues avec les trois méthodes sPC sont calculées avec une précision cible $S_{cible}^2 = 0.999$, un ordre maximal $p_{max} = 15$ et des valeurs de seuils fixées à $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-3}(1 - S_{cible}^2)$. Pour le sPC-LR, les paramètres suivants sont utilisés : $j_{max} = 2$ pour $r = 3$, $j_{max} = 3$ pour $r = 4, 5$, $j_{max} = 4$ pour $r = 6, 7$ et $j_{max} = 5$ pour $r = 8$. Pour les sPC de type « hyperbolic index sets », deux valeurs différentes de la norme- m sont utilisées : dans le cas « isotropic hyperbolic » (sPC-IH), la valeur de m est fixée à 0.6, une valeur supérieure entraînant un nombre excessif de SMM ; dans le cas « anisotropic » (sPC-AH), nous prenons $m = 0.8$ ce qui permet de limiter l'erreur sur la propension à être stable tout en conservant un nombre raisonnable de SMM. Le tableau 3.2 montre les résultats obtenus avec les trois méthodes sPC pour $r = 3 \rightarrow 8$, ces méthodes n'étant pas pertinentes pour un nombre inférieur de paramètres incertains. De plus, afin d'évaluer l'influence du PEN initial, pour chaque situation, les résultats sont obtenus pour cinq PEN différents. Le tableau 3.2 affiche seulement entre crochets, dans chaque cas, les valeurs minimales et maximales de l'ordres du chaos polynomial, du nombre de SMM et des erreurs relatives.

L'analyse du tableau 3.2 montre que les méthodes sPC s'avèrent très efficaces par rapport aux méthodes gPC et ME-gPC, en particulier pour $r \geq 5$, car elles assurent une bonne précision tout

Nombre de paramètres incertains (r)	Méthode	Ordre (p)	Nombre de SMM	Erreur relative (%) de la propension à être stable entre sPC/gPC/ME-gPC et MCMM
1 - 8	MCMM	-	10 000	-
1	gPC	6	7	6.45
2	gPC	6	49	0.18
	ME-gPC	2	126	0.18
			234	0.18
3	gPC	6	343	6.45
	ME-gPC	2	378	0.227
			756	0.227
	sPC-LR	[8;11]	[320;673]	[0.09;2.11]
	sPC-IH	[8;11]	[195;235]	[0.05;2.65]
	sPC-AH	[8;11]	[125;196]	[0.09;3.43]
4	gPC	6	2401	7.54
	ME-gPC	2	648	1.22
			972	0.59
	sPC-LR	[8;10]	[531;1149]	[0.23;3.48]
	sPC-IH	[10;13]	[175;482]	[1.20;4.16]
	sPC-AH	[11;13]	[186;563]	[0.05;3.02]
5	gPC	5	7776	8.04
	ME-gPC	2	3402	1.68
			5832	0.59
	sPC-LR	[9;12]	[1482;3550]	[0.31;1.19]
	sPC-IH	[15]	[922;1187]	[4.39;4.96]
	sPC-AH	[15]	[579;1201]	[1.37;4.39]
6	gPC	3	4096	26.85
	ME-gPC	2	4374	1.04
			5103	1.04
	sPC-LR	[10;11]	[1709;2968]	[1.77;3.94]
	sPC-IH	[15]	[933;1399]	[3.94;6.82]
	sPC-AH	[15]	[860;1532]	[1.06;4.03]
7	gPC	2	2187	43.84
	ME-gPC	2	8748	2.45
			8748	2.45
	sPC-LR	[12;15]	[1939;5093]	[0.04;1.95]
	sPC-IH	[15]	[1045;1708]	[3.06;6.89]
	sPC-AH	[15]	[1155;1949]	[1.55;4.17]
8	gPC	2	6561	43.88
	sPC-LR	[14;15]	[1842;5574]	[0.04;0.66]
	sPC-IH	[15]	[1706;2117]	[3.15;5.85]
	sPC-AH	[15]	[1450;2530]	[0.67;4.17]

TABEAU 3.2 – Comparaison des résultats entre gPC, ME-gPC, sPC et MCMM

Uncertain parameter	$S_i^T \times 10^3$ [min,max]	w_i [min,max]
μ	[979;980]	[1]
k_p	[2;2.4]	[1.96]
k_f	[0.5;0.9]	[1.96;1.97]
γ_1	[4.2;4.6]	[1.96]
γ_2	[17]	[1.95]
r_1	[0.7;1]	[1.96;1.97]
r_2	[9.3;9.7]	[1.96]
l	[0.3;0.7]	[1.96;1.97]

TABLEAU 3.3 – Indices de sensibilité totaux et pondérations des paramètres incertains avec sPC-AH

en ne nécessitant un plus petit nombre de SMM. L'erreur relative sur la propension à être stable entre les sPC et la MCMM est toujours inférieure à 5 % pour $r = 3 \rightarrow 5$. Pour $r = 6 \rightarrow 8$ et pour les méthodes sPC-LR et sPC-AH l'erreur reste toujours inférieure 5 % et inférieures à 7 % pour la méthode sPC-IH. Pour $r = 8$, l'efficacité des méthodes sPC est particulièrement visible. En effet, le nombre de SMM dépasse la limite de 10 000 pour le ME-gPC et l'erreur relative devient excessive pour le gPC. Avec le sPC-LR et pour la majorité des PEN initiaux, le nombre de SMM est inférieur à 5000, soit une réduction d'environ 50 % du coût de calcul, avec des erreurs relatives inférieures à 1 %. Le nombre de SMM observés pour les méthodes sPC-IH et sPC-AH est inférieur à 3000, la réduction du coût de calcul passe donc ici à plus de 70 % ; les erreurs relatives sont entièrement satisfaisantes mais légèrement supérieures à celles du sPC-LR (< 5 % avec sPC-AH et < 7 % avec sPC-IH). La précision globale des résultats avec les méthodes sPC est donc élevée quelle que soit la valeur de r . Cependant, l'étude montre également que le choix du PEN a une influence significative, que ce soit sur le nombre SMM nécessaire à la construction du chaos polynomial ou sur la valeur de la propension à être stable.

En comparant les différentes méthodes sPC les unes aux autres, il apparaît que les résultats les plus précis sont obtenus avec la méthode sPC-LR quelque soit le nombre de paramètres incertains. Cette méthode nécessite cependant un cout de calcul plus important. Entre les deux méthodes sPC de type « hyperbolic index sets », c'est-à-dire les sPC-IH et sPC-AH, la précision est nettement supérieure avec le sPC-AH pour des coûts de calcul similaires. Ce comportement est favorisé par l'utilisation de coefficients de pondération pour les paramètres incertains. Les indices de sensibilité totaux S_i^T et les coefficients de pondération w_i utilisés pour le sPC-AH sont indiqués au tableau 3.3. Comme précédemment, le tableau n'indique (entre crochets) que les valeurs minimales et maximales des résultats obtenues pour cinq PEN différents. Le tableau montre que le coefficient de frottement μ est le paramètre le plus influent ; en effet, son indice de sensibilité est au moins 400 fois supérieur à ceux des autres paramètres. Ainsi, sa pondération est la plus faible (1 au lieu d'environ 1.95 pour les autres paramètres). Plus l'indices de sensibilité d'un paramètre incertain est élevé, plus son coefficient de pondération est faible. Ceci permet d'accroître l'impact des paramètres les plus influents lors de la construction du chaos polynomial et augmente la précision des résultats, en particulier lorsque le nombre de paramètres incertains est élevé.

Pour illustrer les résultats précédents, la Figure 3.3 montre les parties réelles des valeurs propres correspondant aux modes 1 et 2 du modèle d'embrayage obtenues en utilisant la MCMM (en noir) et le sPC-AH (en gris) pour $r = 3$ à 8. Les résultats affichés correspondent à chaque fois au PEN initial qui conduit à l'erreur relative la plus faible sur la propension à être stable. Les paramètres correspondants (ordre p , nombre de SMM et erreur relative) sont indiqués dans le tableau 3.4. Chaque sPC-AH est calculée pour r paramètres incertains, mais les QoI sont tracés uniquement par rapport au coefficient de frottement μ pour des valeurs données des $r - 1$ autres paramètres. Les figures montrent un bon accord entre le sPC-AH et la référence. En particulier, nous pouvons voir que le point de bifurcation

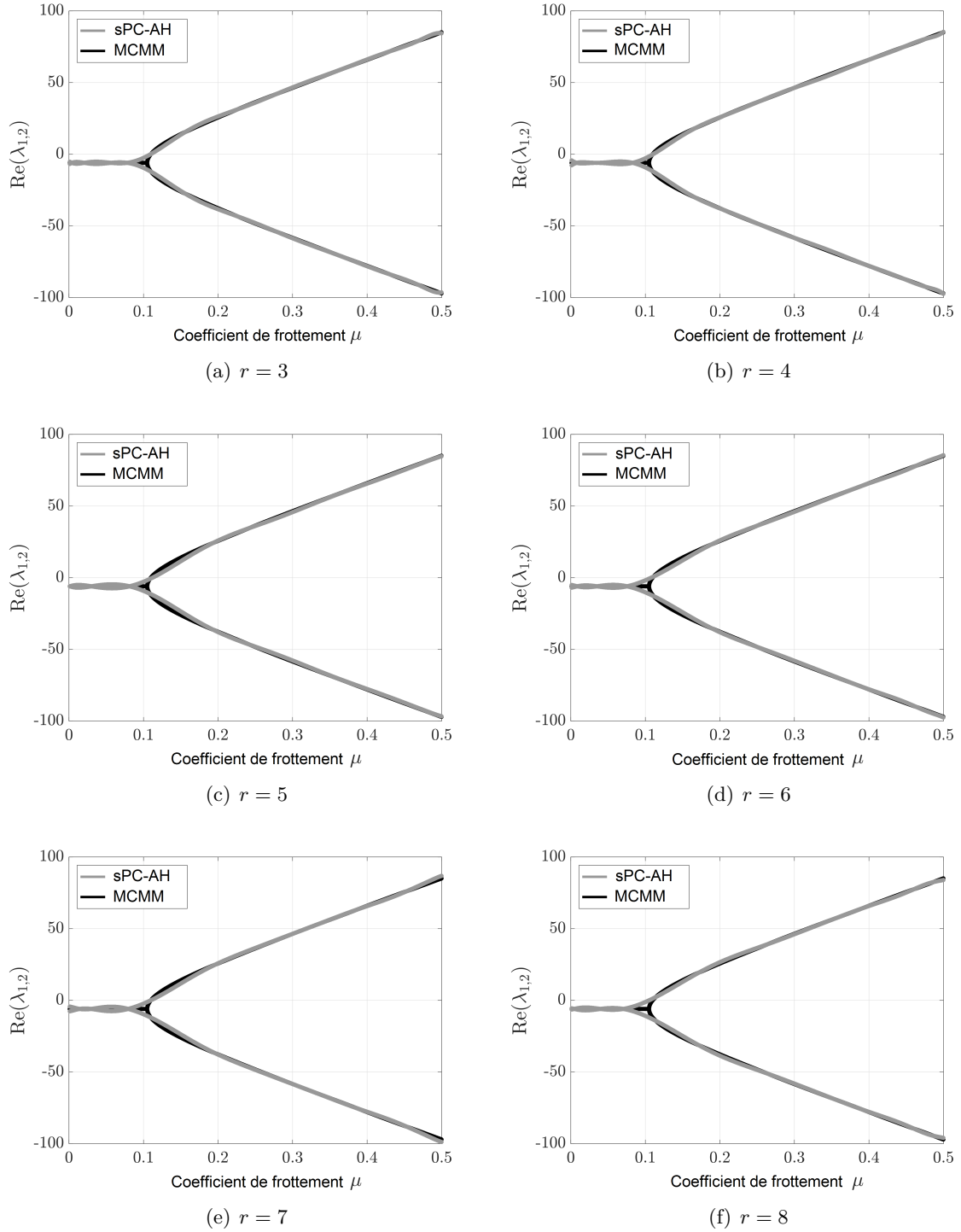


FIGURE 3.3 – Parties réelles des valeurs propres des modes 1 et 2 utilisant MCMM (noir) et sPC-AH (gris) en fonction du coefficient de frottement μ .

de Hopf est bien déterminé, ce qui permet une estimation précise de la propension à être stable.

Nombre de paramètres incertains (r)	Ordre (p)	Nombre de SMM	Erreur relative de la proportion de stabilité par rapport au MCMM (%)
3	11	125	0.09
4	13	413	0.05
5	15	1073	1.37
6	15	1405	1.06
7	15	1591	1.55
8	15	2536	0.67

TABLEAU 3.4 – Paramètres des sPC-AH

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, trois méthodes basées sur le Chaos Polynomial creux (sPC) ont été utilisées pour analyser la stabilité d'un système d'embrayage à six degrés de liberté. Les méthodes sPC ont ensuite été comparées à la méthode de référence de Monte Carlo réalisée directement sur le Modèle Mathématique (MCMM) du système d'embrayage mais aussi aux approches plus classiques du Chaos Polynomial généralisé (gPC) et du Chaos Polynomial généralisé Multi-Éléments (ME-gPC). Ces dernières ont été utilisées dans la littérature pour palier les limites de la méthode de MC qui sévère souvent trop coûteuse lorsqu'il s'agit d'étudier des système industriels de grande taille (des modèles éléments finis par exemple). Cependant, les coûts de calcul associé à ces méthodes devenant également prohibitifs lorsque le nombre de paramètres incertains s'élève, les méthodes sPC permettant de réduire ces coûts de calcul, notamment en limitant le nombre de polynômes intervenant dans la construction du chaos polynomial ont été testées.

Les résultats de cette étude montrent que l'utilisation des méthodes sPC pour analyser la stabilité d'un système d'embrayage est efficace pour un nombre de paramètres incertains allant de 3 à 8. Ces méthodes permettent en effet une réduction importante du coût de calcul par rapport à la méthode de référence dite MCMM mais aussi par rapport aux approches plus classiques du chaos polynomial (gPC et ME-gPC) tout en assurant une très bonne précision des résultats. Le choix du PEN initial a cependant une influence notable sur les résultats, par exemple dans le cas du sPC « low-rank index sets » pour une configuration identiques mais avec deux PEN différents le nombre de SMM peut plus que doublé.

Dans le Chapitre 5, la méthode sPC « anisotropic hyperbolic index sets » qui permet le meilleur compromis entre coût de calcul et précision des résultats va être associée à la méthode de Craig-Bampton afin d'étudier la propagation des incertitudes dans une structure académique possédant un plus grand nombre de degrés de liberté et un nombre plus élevé de paramètres incertains.

Avant d'étudier l'efficacité de l'association du chaos polynomial avec la méthode de sous-structuration Craig-Bampton, cette dernière va être utilisée seule pour réduire les coûts de calcul dans l'étude de la réponse dynamique à une sollicitation harmonique de cette structure académique.

Chapitre 4

ÉTUDE DYNAMIQUE D'UNE STRUCTURE AVEC LA MÉTHODE DE CRAIG-BAMPTON

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, la méthode de sous-structuration dynamique de Craig-Bampton (CB) dont la revue bibliographique de Chapitre 1 a montré l'efficacité, va être utilisée pour étudier la réponse dynamique à une sollicitation harmonique d'une structure académique. Sa capacité à réduire efficacement le nombre de DDLs et aussi les coûts de calcul va être évaluée en comparaison avec des calculs effectués avec un modèle éléments finis complet.

La méthode de CB est une des méthodes de sous-structuration des plus populaire et repose sur un formalisme qui va être présenté dans ce chapitre. Cette méthode repose sur une décomposition des déplacements internes de la structure sur des bases de modes de vibration à interface fixe et des modes statiques. L'utilisation d'une base réduite pour les modes d'interface fixe permet de réduire la taille du système à résoudre, et donc d'économiser le temps de calcul par rapport à un calcul éléments finis classique impliquant le système complet. Nous allons appliquer la méthode de Craig-Bampton à une structure académique composée de trois plaques connectées par des ressorts et nous allons nous intéresser aux fonctions de réponse en fréquences des énergies de déformation des différentes plaques. Pour évaluer l'influence du nombre de modes retenus sur les résultats, nous allons considérer deux bases de modes d'interface fixes de tailles différentes.

Ce chapitre est organisé comme suit : la théorie de Craig-Bampton [20, 32] est d'abord présentée dans la section 4.2 ; le modèle de la structure académique est ensuite présenté dans la section 4.3, avant d'aborder les résultats obtenus par la méthode des éléments finis classique puis les modèles de Craig-Bampton avec deux bases réduites (section 4.4).

4.2 Théorie de Craig-Bampton

4.2.1 Equation dynamique de la structure

Dans le cadre d'une modélisation par éléments finis, les degrés de liberté (DDLs) d'une structure non amortie, contenus dans le vecteur $\underline{q}$, vérifient le système matriciel suivant :

$$M\ddot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{F}, \quad (4.1)$$

où F désigne le vecteur des forces appliquées à la structure, et M et K sont respectivement les matrices de masse et de rigidité de la structure.

Pour appliquer la méthode de Craig-Bampton, il sera nécessaire de partitionner le vecteur des DDLs $\underline{q}$ en n_B DDLs de frontière, $\underline{q}_B$, et en n_I DDLs internes, $\underline{q}_I$:

$$\underline{q} = \begin{Bmatrix} \underline{q}_B \\ \underline{q}_I \end{Bmatrix}. \quad (4.2)$$

En partitionnant de même les forces entre forces appliquées à la frontière et forces internes, et en réorganisant les matrices M et K comme suit :

$$M = \begin{bmatrix} M_{BB} & M_{BI} \\ M_{IB} & M_{II} \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} K_{BB} & K_{BI} \\ K_{IB} & K_{II} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

l'équation (4.1) devient :

$$\begin{bmatrix} M_{BB} & M_{BI} \\ M_{IB} & M_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{q}}_B \\ \ddot{\underline{q}}_I \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{BB} & K_{BI} \\ K_{IB} & K_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{q}_B \\ \underline{q}_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F}_B \\ \underline{F}_I \end{Bmatrix}. \quad (4.4)$$

On se place dans le cadre d'un forçage harmonique de pulsation ω . Les DDLs se mettent alors sous la forme $\underline{q}_B = \underline{q}_B e^{i\omega t}$ et $\underline{q}_I = \underline{q}_I e^{i\omega t}$ (de même pour les forces) et le système vérifié par les amplitudes des déplacements / rotations et des forces devient :

$$D \begin{Bmatrix} \underline{q}_B \\ \underline{q}_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F}_B \\ \underline{F}_I \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

avec D la matrice de rigidité dynamique définie par

$$D = \begin{bmatrix} K_{BB} & K_{BI} \\ K_{IB} & K_{II} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{BB} & M_{BI} \\ M_{IB} & M_{II} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

La résolution du système passe alors par l'inversion de la matrice de rigidité dynamique :

$$\begin{Bmatrix} \underline{q}_B \\ \underline{q}_I \end{Bmatrix} = D^{-1} \begin{Bmatrix} \underline{F}_B \\ \underline{F}_I \end{Bmatrix}. \quad (4.7)$$

Cette inversion peut entraîner des temps de calcul extrêmement longs lorsque la structure considérée comporte un nombre important de DDLs. Ce problème peut devenir crucial dans le cas d'une étude de réponse en fréquence, où l'inversion doit être réalisée pour chaque valeur de pulsation ω considérée.

4.2.2 La transformation de Craig-Bampton

La transformation de Craig-Bampton consiste à exprimer les amplitudes physiques $\{\underline{q}_B \quad \underline{q}_I\}^T$ à partir de coordonnées généralisées $\{\underline{q}_B \quad \alpha\}^T$ comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \underline{q}_B \\ \underline{q}_I \end{Bmatrix} = [B \quad \Phi] \begin{Bmatrix} \underline{q}_B \\ \alpha \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

avec B et Φ les matrices définies par :

$$B = \begin{bmatrix} I \\ X_{st} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ X_{el} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Dans les équations précédentes, I est la matrice identité de taille $n_B \times n_B$, X_{st} est la matrice des formes modales des modes statiques, de taille $n_I \times n_B$, X_{el} la matrice des formes modales des modes élastiques, de taille $n_I \times n_I$, et α est le vecteur des amplitudes des modes élastiques, de taille n_I .

La transformation de Craig-Bampton peut finalement s'écrire

$$\begin{Bmatrix} q_B \\ q_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_{st} & X_{el} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_B \\ \alpha \end{Bmatrix}. \quad (4.10)$$

Les inconnues du système sont désormais q_B et α , tandis que les DDLs internes s'obtiennent par

$$q_I = X_{st} q_B + X_{el} \alpha. \quad (4.11)$$

Dans l'équation précédente, $q_I^{st} = X_{st} q_B$ représente les déplacements statiques de corps rigide des n_I DDLs internes dus aux n_B DDLs de frontière, tandis que le terme $q_I^{el} = X_{el} \alpha$ représente les déplacements élastiques des n_I DDLs internes par rapport à la frontière déplacée. L'obtention des matrices X_{st} et X_{el} sera détaillée dans la suite.

4.2.3 Modes statiques

Comme mentionné précédemment, la matrices des modes statiques (ou modes constraints) X_{st} permet de relier les déplacements physiques de corps rigide de la frontière aux déplacements physiques des DDLs internes.

Pour déterminer X_{st} , on se limite au problème statique ($\ddot{q}_I = \ddot{q}_B = 0$), régi par l'équation

$$K_{IB} q_B^{st} + K_{II} q_I^{st} = 0. \quad (4.12)$$

Il vient alors :

$$q_I^{st} = -K_{II}^{-1} K_{IB} q_B^{st} = X_{st} q_B^{st} \quad (4.13)$$

soit

$$X_{st} = -K_{II}^{-1} K_{IB}. \quad (4.14)$$

Physiquement, chaque colonne de X_{st} représente les déplacements structurels internes obtenus en affectant un déplacement unitaire à l'un des DDLs de q_B , et en fixant tous les autres ; la matrice X_{st} représente l'ensemble de ces déplacements internes, c'est-à-dire pour

$$q_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = I. \quad (4.15)$$

L'obtention de X_{st} nécessite, comme le montre l'équation (4.14), d'inverser la sous-matrice de rigidité de la structure interne, et cette étape peut être coûteuse lorsque la structure comporte un grand nombre de DDLs internes q_I . Néanmoins, en cas d'étude de fonction de réponse ne fréquence, cette inversion n'est à réaliser qu'une seule fois puisque les matrices en jeu ne dépendent pas de la fréquence de forçage ω .

4.2.4 Modes d'interface fixe

Comme mentionné précédemment, le second terme de la décomposition des DDLs internes consiste en la projection de ces déplacements internes sur la base des modes de vibration libre de la structure lorsque la frontière est fixée, soit $q_I^{el} = X_{el} \alpha$ avec X_{el} la matrice des modes d'interface fixe et α le

vecteur des amplitudes modales. L'équation dynamique qui régit ce cas, pour lequel $\ddot{q}_B = q_B = 0$ et $F_I = 0$ (pas de force intérieure), s'écrit donc simplement

$$M_{II} \ddot{q}_I + K_{II} q_I = 0. \quad (4.16)$$

Supposons un déplacement correspondant au $i^{\text{ème}}$ mode de vibration, soit $q_I = \phi_i e^{i\omega_i t}$ avec ω_i la pulsation propre et ϕ_i la forme modale du mode. L'obtention de ces grandeurs nécessite alors la résolution du problème aux valeurs propres

$$\{K_{II} - \omega_i^2 M_{II}\} \phi_i = 0 \quad (4.17)$$

ou encore

$$\{M_{II}^{-1} K_{II} - \omega_i^2 I\} \phi_i = 0. \quad (4.18)$$

Les pulsations propres ω_i correspondent aux valeurs propres de la matrice $M_{II}^{-1} K_{II}$ et les formes modales ϕ_i aux vecteurs propres, choisis tels que

$$\phi_i^T M_{II} \phi_i = 1. \quad (4.19)$$

On peut alors noter que

$$\phi_i^T K_{II} \phi_i = \omega_i^2, \quad (4.20)$$

ce qui nous permettra de simplifier certains termes dans le système matriciel résultant de la transformation de Craig-Bampton, qui sera présenté dans la section suivante.

La matrice X_{el} peut alors être construite comme $X_{el} = [\phi_1 \dots \phi_{n_I}]$.

4.2.5 Système matriciel résultant

La suite de la méthode de Craig-Bampton consiste à introduire dans l'équation dynamique de base (4.5) la transformation de Craig-Bampton définie par le système (4.8), soit

$$-\omega^2 M \begin{bmatrix} B & \Phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_B \\ \alpha \end{Bmatrix} + K \begin{bmatrix} B & \Phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_B \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_B \\ F_I \end{Bmatrix}. \quad (4.21)$$

En multipliant l'équation (4.21) par la matrice transposée $[B \ \Phi]^T$, on obtient le système simplifié :

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} B^T M B & B^T M \Phi \\ \Phi^T M B & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_B \\ \alpha \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B^T K B & B^T K \Phi \\ \Phi^T K B & [\omega_i^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_B \\ \alpha \end{Bmatrix} = [B \ \Phi]^T \begin{Bmatrix} F_B \\ F_I \end{Bmatrix}, \quad (4.22)$$

puisque d'après ce qui précède, $\Phi^T M \Phi = I$ et $\Phi^T K \Phi = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots \\ 0 & \omega_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = [\omega_i^2]$.

On réécrit finalement le système sous la forme :

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} M_{st-st} & M_{st-el} \\ M_{el-st} & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_B \\ \alpha \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{st-st} & 0 \\ 0 & K_{el-el} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_B \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_B + X_{st}^T F_I \\ X_{el}^T F_I \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

avec

$$M_{st-st} = \begin{bmatrix} I \\ X_{st} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{BB} & M_{BI} \\ M_{IB} & M_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X_{st} \end{bmatrix} = M_{BB} + M_{BI}X_{st} + X_{st}^T M_{IB} + X_{st}^T M_{II}X_{st} \quad (4.24)$$

$$M_{el-st} = \begin{bmatrix} 0 \\ X_{el} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{BB} & M_{BI} \\ M_{IB} & M_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X_{st} \end{bmatrix} = X_{el}^T [M_{IB} + M_{II}X_{st}] \quad (4.25)$$

$$M_{st-el} = \begin{bmatrix} I \\ X_{st} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{BB} & M_{BI} \\ M_{IB} & M_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ X_{el} \end{bmatrix} = [M_{BI} + X_{st}^T M_{II}]X_{el} \quad (4.26)$$

$$= M_{el-st}^T \quad (4.27)$$

$$K_{el-el} = [\omega_i^2] \quad (4.28)$$

$$K_{st-st} = \begin{bmatrix} I \\ X_{st} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{BB} & K_{BI} \\ K_{IB} & K_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X_{st} \end{bmatrix} = K_{BB} + K_{BI}X_{st} + X_{st}^T [K_{IB} + K_{II}X_{st}] \quad (4.29)$$

$$= K_{BB} + K_{BI}X_{st}$$

par définition de $X_{st} = -K_{II}^{-1} K_{IB}$.

Une fois les matrices X_{st} , X_{el} et $[\omega_i^2]$ déterminées, les inconnues $\begin{Bmatrix} q_B \\ \alpha \end{Bmatrix}$ s'obtiennent en inversant le système matriciel (4.23). La résolution peut être encore simplifiée en réécrivant ce dernier

$$\begin{bmatrix} D_{st-st} & D_{el-st}^T \\ D_{el-st} & D_{el-el} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_B \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_B + X_{st}^T F_I \\ X_{el}^T F_I \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

avec $D_{st-st} = -\omega^2 M_{st-st} + K_{st-st}$, $D_{el-st} = -\omega^2 M_{el-st}$ et $D_{el-el} = K_{el-el}$. Le vecteur α peut alors s'exprimer comme :

$$\alpha = -D_{el-el}^{-1} D_{el-st} q_B + D_{el-el}^{-1} X_{el}^T F_I, \quad (4.31)$$

avec $D_{el-el}^{-1} = K_{el-el}^{-1} = [\omega_i^{-2}]$, ce qui nous permet d'obtenir q_B :

$$D_{st-st} q_B + D_{el-st}^T (-D_{el-el}^{-1} D_{el-st} q_B + D_{el-el}^{-1} X_{el}^T F_I) = F_B + X_{st}^T F_I \quad (4.32)$$

soit

$$q_B = (D_{st-st} - D_{el-st}^T D_{el-el}^{-1} D_{el-st})^{-1} (F_B + X_{st}^T F_I - D_{el-st}^T D_{el-el}^{-1} X_{el}^T F_I). \quad (4.33)$$

Les autres inconnues α et q_I s'obtiennent ensuite directement en appliquant les expressions (4.31) et (4.11) respectivement.

A cette étape, le système d'équations obtenu après application de la transformation de Craig-Bampton ne permet pas de véritable économie de temps de calcul, au vu des tailles importantes des matrices à inverser. L'utilisation d'une base réduite va cependant permettre de diminuer la taille du système.

4.2.6 Réduction de modèle

Dans le cadre d'une modélisation par éléments finis, le nombre de modes d'interface fixe que l'on peut déterminer en résolvant le système d'équations aux valeurs propres est égal au nombre de DDLs internes n_I . L'idée de base pour diminuer les temps de calcul est de ne conserver qu'un petit nombre

$m < n_I$ de ces modes pour obtenir une approximation des déplacements internes $\tilde{q}_I$:

$$\tilde{q}_I = X_{st} q_B + \tilde{X}_{el} \tilde{\alpha} \quad (4.34)$$

avec $\tilde{X}_{el}$ la matrice des formes modales des modes conservés, de taille $n_I \times m$, et $\tilde{\alpha}$ le vecteur des amplitudes modales des modes conservés, de taille m . Les matrices $\tilde{M}_{el-st}$ et $\tilde{K}_{el-el}$ (donc $\tilde{D}_{el-st}$ et $\tilde{D}_{el-el}$) sont également réduites.

L'enjeu de la sélection de la base réduite sera de trouver un compromis sur le nombre de modes à conserver ; plus la base modale est réduite, plus les temps de calcul sont diminués, mais il faut veiller à conserver suffisamment de modes pour garantir un niveau de précision satisfaisant.

En règle générale, on conserve les m premiers modes (de pulsations propres les plus faibles) qui transmettent l'essentiel de l'énergie de la structure. Dans les exemples d'application que nous développerons dans la seconde partie de ce chapitre, nous testerons des bases réduites de tailles différentes, afin de mettre en lumière l'influence de la taille de la base sur la précision des résultats. Le choix du dernier mode retenu dépendra de sa pulsation propre, qui sera confrontée au domaine fréquentiel de l'étude.

4.3 Application à des structures connectées par des ressorts

Pour étudier les capacités de la méthode de Craig-Bampton à réduire les coûts de calcul, nous allons considérer un système constitué de trois plaques connectées par des ressorts. Néanmoins, par souci de compréhension, nous allons commencer par détailler le système matriciel résultant du formalisme de Craig-Bampton pour un cas plus simple consistant en deux structures connectées par des ressorts. Nous généraliserons ensuite les matrices obtenus au cas des trois plaques.

4.3.1 Cas de deux structures couplées par un ou plusieurs ressorts

On considère dans un premier temps le système représenté sur la Figure 4.1 dans lequel deux structures quelconques sont couplées par l'intermédiaire d'un ou de plusieurs ressorts localisés sur un bord. On appelle n_r le nombre de ressorts, qui peuvent être positionnés dans des directions différentes (ressorts axiaux ou de torsion). Dans le cadre d'une modélisation par éléments finis, on appelle respectivement n_1 et n_2 le nombre de DDLs de chacune des structures 1 et 2, que l'on peut partitionner en n_{B1} (resp. n_{B2}) DDLs de frontière et n_{I1} (resp. n_{I2}) DDLs internes.

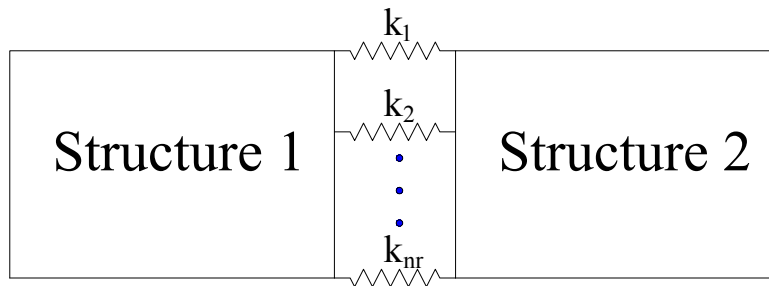


FIGURE 4.1 – Schéma de deux structures couplées par n_r ressorts.

Dans le cas de vibrations sous excitation harmonique, chaque structure i ($i = 1, 2$) prise indépendamment vérifie l'équation dynamique classique

$$D_i q_i = F_i \quad (4.35)$$

où D_i désigne la matrice de rigidité dynamique, F_i le vecteur des efforts extérieurs appliqués à la structure i et q_i le vecteur des DDLs de la structure i , ces deux vecteurs pouvant être partitionnés comme exposé dans la section précédente :

$$q_i = \begin{Bmatrix} q_{Bi} \\ q_{Ii} \end{Bmatrix} \quad F_i = \begin{Bmatrix} F_{Bi} \\ F_{Ii} \end{Bmatrix}. \quad (4.36)$$

Un amortissement structural est à présent pris en compte pour chacune des structures au moyen d'un facteur de perte η_i ; dans ce cas, la matrice de rigidité dynamique de la structure i devient complexe et s'écrit :

$$D_i = (1 + i \eta_i) K_i - \omega^2 M_i \quad (4.37)$$

avec K_i et M_i les matrices de rigidité et de masse de la structure i , respectivement.

En tenant compte du couplage entre les deux structures dues aux n_r ressorts, le système d'équations régissant le mouvement de ces structures devient :

$$\begin{aligned} D_1 q_1 &= F_1 - L_1^T K_c [L_1 q_1 - L_2 q_2] \\ D_2 q_2 &= F_2 - L_2^T K_c [L_2 q_2 - L_1 q_1] \end{aligned} \quad (4.38)$$

où $K_c = \begin{bmatrix} k_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & k_i & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & & k_{nr} \end{bmatrix}$ est une matrice diagonale qui contient les n_r valeurs des raideurs

des ressorts, L_1 est une matrice booléenne de localisation (contenant des 0 et des 1) de taille $n_r \times n_1$ dont la $i^{\text{ème}}$ ligne permet de sélectionner le DDL de la structure 1 correspondant au $i^{\text{ème}}$ ressort de raideur k_i , et L_2 est de même une matrice booléenne de localisation de taille $n_r \times n_2$ permettant de relier le ressort de raideur k_i avec le DDL de la structure 2 correspondant.

Sans réduction de modèle, le problème peut être résolu en inversant, à chaque pulsation ω , le système suivant :

$$\begin{bmatrix} D_1 + L_1^T K_c L_1 & -L_1^T K_c L_2 \\ -L_2^T K_c L_1 & D_2 + L_2^T K_c L_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}. \quad (4.39)$$

Appliquons à présent la transformation de Craig-Bampton définie par l'équation (4.10) dans laquelle on ne garde qu'un nombre réduit de modes d'interface fixe pour chacune des structures :

$$q_1 = \begin{Bmatrix} q_{B1} \\ q_{I1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_{st1} & \tilde{X}_{el1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{B1} \\ \tilde{\alpha}_1 \end{Bmatrix} = T_1 \begin{Bmatrix} q_{B1} \\ \tilde{\alpha}_1 \end{Bmatrix}; \quad (4.40)$$

$$q_2 = \begin{Bmatrix} q_{B2} \\ q_{I2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_{st2} & \tilde{X}_{el2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{B2} \\ \tilde{\alpha}_2 \end{Bmatrix} = T_2 \begin{Bmatrix} q_{B2} \\ \tilde{\alpha}_2 \end{Bmatrix}, \quad (4.41)$$

avec $T_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_{st1} & \tilde{X}_{el1} \end{bmatrix}$ et $T_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_{st2} & \tilde{X}_{el2} \end{bmatrix}$ les matrices de transformation définies précédemment, de tailles respectives $n_1 \times (n_{B1} + m_1)$ et $n_2 \times (n_{B2} + m_2)$ en appelant m_1 et m_2 les nombres de modes d'interface fixe conservés pour les structures 1 et 2.

Le système d'équations (4.39) devient alors :

$$D_1 T_1 \begin{Bmatrix} q_{B1} \\ \tilde{\alpha}_1 \end{Bmatrix} = F_1 - L_1^T K_c \left[L_1 T_1 \begin{Bmatrix} q_{B1} \\ \tilde{\alpha}_1 \end{Bmatrix} - L_2 T_2 \begin{Bmatrix} q_{B2} \\ \tilde{\alpha}_2 \end{Bmatrix} \right] \quad (4.42)$$

et

$$D_2 T_2 \begin{Bmatrix} q_{B2} \\ \tilde{\alpha}_2 \end{Bmatrix} = F_2 - L_2^T K_c \left[L_2 T_2 \begin{Bmatrix} q_{B2} \\ \tilde{\alpha}_2 \end{Bmatrix} - L_1 T_1 \begin{Bmatrix} q_{B1} \\ \tilde{\alpha}_1 \end{Bmatrix} \right], \quad (4.43)$$

soit, sous forme vectorielle :

$$\begin{bmatrix} T_1^T D_1 T_1 + T_1^T L_1^T K_c L_1 T_1 & -T_1^T L_1^T K_c L_2 T_2 \\ -T_2^T L_2^T K_c L_1 T_1 & T_2^T D_2 T_2 + T_2^T L_2^T K_c L_2 T_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{B1} \\ \tilde{\alpha}_1 \\ q_{B2} \\ \tilde{\alpha}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1^T F_1 \\ T_2^T F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{B1} + X_{st1}^T F_{I1} \\ \tilde{X}_{el1}^T F_{I1} \\ F_{B2} + X_{st2}^T F_{I2} \\ \tilde{X}_{el2}^T F_{I2} \end{Bmatrix}. \quad (4.44)$$

Les inconnues s'obtiennent par inversion du système (4.44), les DDLs internes étant ensuite calculés par

$$q_{I1} = X_{st1} q_{B1} + \tilde{X}_{el1} \tilde{\alpha}_1 \quad (4.45)$$

$$q_{I2} = X_{st2} q_{B2} + \tilde{X}_{el2} \tilde{\alpha}_2. \quad (4.46)$$

Comme précédemment, le système peut être simplifié ; pour chaque structure i ($i = 1, 2$),

$$T_i^T D_i T_i = \begin{bmatrix} D_{st-sti} & \tilde{D}_{el-sti}^T \\ \tilde{D}_{el-sti} & \tilde{D}_{el-eli} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

est une matrice carrée de taille $(n_{Bi} + m_i) \times (n_{Bi} + m_i)$. Les ressorts n'étant situés que sur la frontière de chaque structure, la matrice de localisation peut se mettre sous la forme

$$L_i = \begin{bmatrix} L_{Bi} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

où L_{Bi} est la matrice de taille $n_r \times n_{Bi}$ permettant de localiser le DDL correspondant la raideur k_i du $i^{ème}$ ressort parmi les n_{Bi} DDLs de la frontière de la structure i . On a alors les simplifications suivantes :

$$L_i^T K_c L_i = \begin{bmatrix} L_{Bi}^T K_c L_{Bi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T_i^T L_i^T K_c L_i T_i = \begin{bmatrix} L_{Bi}^T K_c L_{Bi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ce qui permet finalement d'écrire

$$T_i^T D_i T_i + T_i^T L_i^T K_c L_i T_i = \begin{bmatrix} D_{st-sti} + L_{Bi}^T K_c L_{Bi} & \tilde{D}_{el-sti}^T \\ \tilde{D}_{el-sti} & \tilde{D}_{el-eli} \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

De même, les termes croisés se simplifient en

$$L_j^T K_c L_i = \begin{bmatrix} L_{Bj}^T K_c L_{Bi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T_j^T L_j^T K_c L_i T_i = \begin{bmatrix} L_{Bj}^T K_c L_{Bi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (i, j) = (1, 2) \quad i \neq j. \quad (4.50)$$

Le système (4.44) prend alors une forme réduite plus économe à inverser en ne conservant comme inconnues que le vecteur $\begin{Bmatrix} q_{B1} \\ q_{B2} \end{Bmatrix}$, après avoir exprimé les amplitudes des modes d'interface fixe en

fonction de ces dernières :

$$\tilde{\alpha}_i = -\tilde{D}_{el-eli}^{-1} \tilde{D}_{el-sti} q_{Bi} + \tilde{D}_{el-eli}^{-1} \tilde{X}_{eli}^T F_{Ii} \quad (4.51)$$

pour chaque structure i . Le système final prend finalement la forme

$$\begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* \\ D_{21}^* & D_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{B1} \\ q_{B2} \end{Bmatrix} = F^* \quad (4.52)$$

où

$$D_{11}^* = D_{st-st1} + L_{B1}^T K_c L_{B1} - \tilde{D}_{el-st1}^T \tilde{D}_{el-el1}^{-1} \tilde{D}_{el-st1} \quad (4.53)$$

$$D_{12}^* = -L_{B1}^T K_c L_{B2} \quad (4.54)$$

$$D_{21}^* = -L_{B2}^T K_c L_{B1} \quad (4.55)$$

$$D_{22}^* = D_{st-st2} + L_{B2}^T K_c L_{B2} - \tilde{D}_{el-st2}^T \tilde{D}_{el-el2}^{-1} \tilde{D}_{el-st2} \quad (4.56)$$

et

$$F^* = \begin{Bmatrix} F_{B1} + X_{st1}^T F_{I1} - \tilde{D}_{el-st1}^T \tilde{D}_{el-el1}^{-1} \tilde{X}_{el1}^T F_{I1} \\ F_{B2} + X_{st2}^T F_{I2} - \tilde{D}_{el-st2}^T \tilde{D}_{el-el2}^{-1} \tilde{X}_{el2}^T F_{I2} \end{Bmatrix}. \quad (4.57)$$

4.3.2 Cas de trois structures connectées par des ressorts

Les développements précédents peuvent être étendus sans difficulté à des systèmes comportant diverses structures connectées par des ressorts. Le cas d'étude qui nous intéresse est illustré sur la Figure 4.2. Il s'agit de trois plaques connectées deux à deux sur deux bords par des ressorts d'orientations et de raideurs variables.

Sans réduction de modèle, le problème se résout en inversant le système

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ 0 & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

avec $D_{ii} = (1 + i \eta_i) K_i - \omega^2 M_i + L_i^T K_c L_i$ la matrice de rigidité dynamique complexe de la structure i modifiée pour tenir compte de la présence des ressorts, $D_{ij} = -L_i^T K_c L_j$ le terme de couplage du aux ressorts positionnés entre les plaques i et j , et F le vecteur des efforts extérieurs appliqués au système.

En appliquant pour chaque structure la transformation de Craig-Bampton et en tenant compte des simplifications liées à la position des ressorts à l'interface entre les structures 1 et 2 d'une part, et 2 et 3 d'autre part, on aboutit à un système de taille réduite de la forme :

$$\begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & 0 \\ D_{21}^* & D_{22}^* & D_{23}^* \\ 0 & D_{32}^* & D_{33}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{B1} \\ q_{B2} \\ q_{B3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^* \\ F_2^* \\ F_3^* \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

les différents termes étant analogues à ceux présentés pour le cas de deux structures couplées (Eqs. (4.53) à (4.57)).

Les amplitudes des modes d'interface fixe sont ensuite déduites en appliquant pour chaque structure

la relation (4.52), et les DDLs internes s'obtiennent enfin par

$$\begin{cases} q_{I1} = X_{st1} q_{B1} + \tilde{X}_{el1} \tilde{\alpha}_1 \\ q_{I2} = X_{st2} q_{B2} + \tilde{X}_{el2} \tilde{\alpha}_2 \\ q_{I3} = X_{st3} q_{B3} + \tilde{X}_{el3} \tilde{\alpha}_3 \end{cases} \quad (4.60)$$

4.4 Résultats numériques : cas de trois plaques connectées par des ressorts

Dans cette section, nous allons illustrer les résultats obtenus en appliquant la méthode de Craig-Bampton présentée précédemment à un système composé de trois plaques connectées deux à deux par des ressorts, visible sur la Figure 4.2.

4.4.1 Présentation du modèle

Le modèle retenu pour illustrer les résultats est un ensemble de trois plaques d'épaisseur constante 5 mm. Les plaques 1 et 3, de dimensions 1 m × 1 m, sont identiques et constituées d'acier, de masse volumique $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, de module d'Young $E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. La plaque 2, de dimensions 0,2 m × 1 m, représente une jonction souple en caoutchouc, avec les propriétés suivantes : $\rho = 950 \text{ kg/m}^3$, $E = 15 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ et $\nu = 0.48$. Pour prendre en compte un amortissement structural des plaques, un facteur de pertes $\eta = 0,005$ est pris en compte pour chacune des trois plaques.

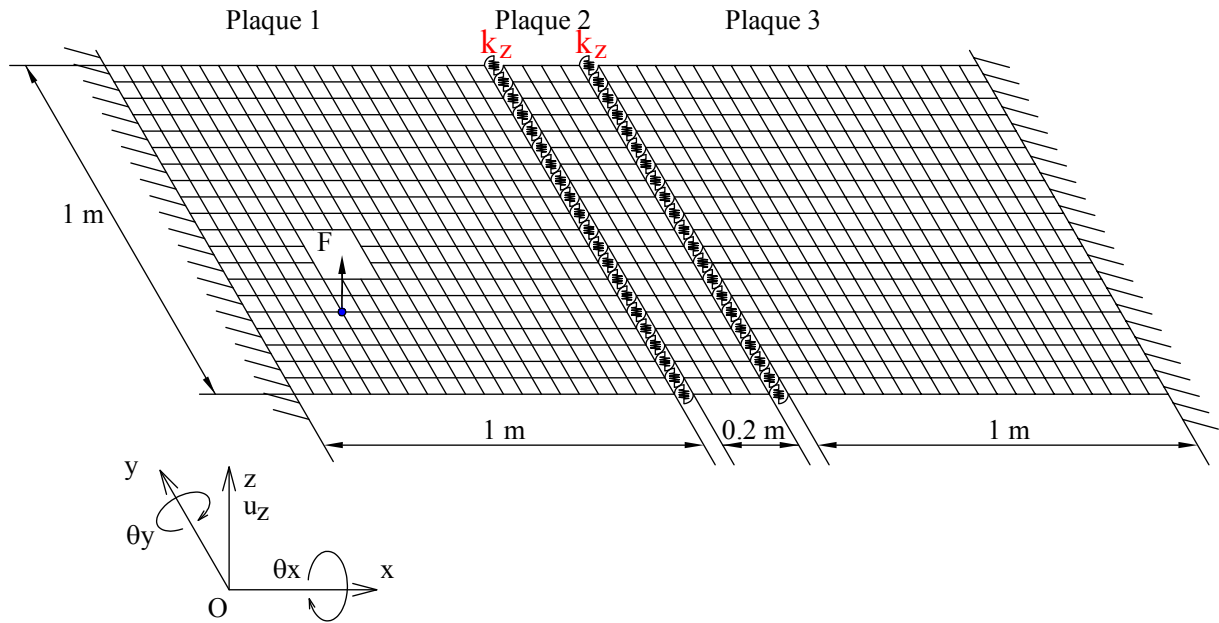


FIGURE 4.2 – Modèle de 3 plaques connectées par des ressorts.

Dans le cadre d'une modélisation par éléments finis, les trois plaques sont maillées à l'aide d'éléments de plaque carrés de longueur 0,025 m possédant trois DDLs par nœud, à savoir le déplacement u_z et deux rotations θ_x et θ_y . Les maillages des plaques 1 et 3 comportent donc chacun 1600 éléments et 5043 DDLs, tandis que 320 éléments et 1107 DDLs sont utilisés pour la plaque 2. Le nombre total de DDLs du système est donc de 11193.

Les ressorts qui couplent les plaques sont situés aux interfaces entre les plaques 1 et 2 d'une part, et 2 et 3 d'autre part, comme indiqué sur la Figure 4.2. A chaque noeud du maillage sont connectés trois ressorts, deux ressorts de torsion de raideur indentique $k_t = 20 \text{ Nm/rad}$ autour des axes x et y , et un ressort linéaire dans la direction z , de raideur $k_z = 150 \text{ N/m}$.

Les plaques 1 et 3 sont encastrées à l'une de leurs extrémités, les autres frontières étant libres. Le système est excité par une force ponctuelle harmonique d'amplitude 40 N appliquée au noeud situé au quart inférieur gauche de la plaque 1, comme illustré sur la Figure 4.2. On étudie la fonction de réponse en fréquence du système dans l'intervalle $[0, 50] \text{ Hz}$ en utilisant un pas fréquentiel de 10^{-3} Hz .

4.4.2 Solution de référence

La solution de référence est constituée par le calcul éléments finis direct, c'est-à-dire en inversant le système (4.58) décrit précédemment, avec ici $F_2 = F_3 = 0$ (les plaques 2 et 3 n'étant soumises à aucun effort extérieur) et F_1 un vecteur comportant un unique terme non nul à la $j^{\text{ème}}$ ligne correspondant au DDL j auquel est appliqué le forçage. La matrice à inverser est ici de taille 11193×11193 , et l'inversion est répétée pour chacune des 50001 fréquence de l'intervalle $[0, 50] \text{ Hz}$. Les simulations ont été réalisées via le logiciel Matlab sur un ordinateur comportant deux processeurs Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2623 v3 @ 3.00 GHz et 32 Go de ram. Le temps total de simulation pour ce cas est de 5h et 24min.

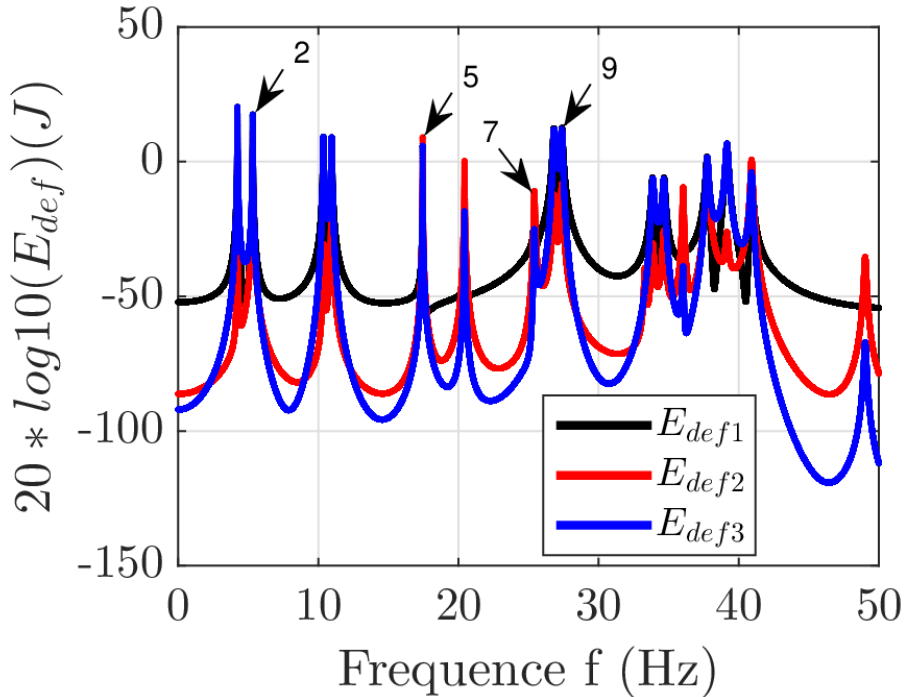


FIGURE 4.3 – Énergies de déformation des plaques 1, 2 et 3 en fonction de la fréquence.

Les résultats sont illustrés pour chaque plaque i en termes d'énergie de déformation $E_{def i} = \frac{1}{2} q_i^T K_i q_i$. La Figure 4.3 représente les évolutions fréquentielles des amplitudes des trois énergies de déformation ainsi obtenues. Les trois courbes présentent allures similaires avec de multiples pics aux fréquences de résonance des plaques, et un niveau d'énergie globalement plus élevé pour la plaque 1 qui est soumise à l'excitation. On s'intéressera dans la suite à quatre pics particuliers (les pics 2, 5, 7 et 9 mis en évidence sur la Figure 4.3) en vue d'estimer l'impact de la réduction de modèle sur la

précision des résultats.

4.4.3 Réduction de modèle par la méthode de Craig-Bampton

En vue de réduire les temps de calcul, la méthode de Craig-Bampton présentée précédemment est appliquée à chacune des structure, en ne conservant qu'un nombre limité m_i de modes d'interface fixe. Comme il a été mentionné précédemment, il est d'usage de retenir les modes de fréquences propres les plus basses, le nombre de modes étant à ajuster en fonction du modèle et de la bande de fréquences d'étude. Pour chaque plaque i , les pulsations propres ω_i sont les racines des valeurs propres de la matrice $M_{IIi}^{-1} K_{IIi}$, et le nombre de modes d'interface fixe maximal est donc égal au nombre de DDLs internes de chaque plaque, à savoir 4563 pour les plaques 1 et 3, et 819 pour la plaque 2. Les tableaux 4.1 et 4.2 représentent les valeurs maximales des fréquences propres $f_i = \omega_i/(2\pi)$ pour différents nombres de modes d'interface fixe retenus, pour les trois plaques.

Nombre de modes	Maximum des fréquences propres f_i (Hz)
30	6.34×10^2
50	1.00×10^3
100	1.88×10^3
200	3.49×10^3
300	5.12×10^3
400	6.67×10^3
4563	1.13×10^5

TABEAU 4.1 – Maximum des fréquences propres des plaques 1 et 3 en fonction du nombre de modes d'interface fixe

Nombre de modes	Maximum des fréquences propres f_i (Hz)
30	3.16×10^2
50	4.50×10^2
80	6.52×10^2
100	8.03×10^2
130	1.00×10^3
150	1.13×10^3
819	9.08×10^3

TABEAU 4.2 – Maximum des fréquences propres de la plaque 2 en fonction du nombre de modes d'interface fixe

Deux modèles réduits ont été définis à partir de ces tableaux. Pour le premier modèle, qui sera noté CB50130 dans la suite, 50 modes d'interface fixe sont retenus pour les plaques 1 et 3 (sur 4563 modes) et 130 modes pour la plaque 2 (sur 819); cela correspond à une fréquence propre maximale de l'ordre de 1000 Hz , soit 20 fois la fréquence d'étude maximale de 50 Hz . Pour le second modèle, plus réduit, on choisit de conserver les modes d'interface fixe de fréquence maximale de l'ordre de 13 fois la fréquence maximale d'étude, c'est-à-dire 650 Hz . On retient alors 30 modes pour les plaques les plaques 1 et 3 et 80 pour la plaque 2. Ce second modèle sera ainsi dénoté CB3080 dans la suite.

L'étude est reconduite pour chaque modèle réduit en inversant cette fois le système (4.59), toujours sur l'intervalle $[0, 50] \text{ Hz}$ avec le même pas fréquentiel de 10^{-3} Hz . Les temps de calcul correspondants sont à présent de 1h 48min pour le modèle CB50130 et 1h 27min pour le modèle CB3080, c'est-à-dire des réductions de coût de calcul respectives de 66, 86% et de 73, 10%.

Chacune des figures 4.4 (a), (b) et (c) représente les énergies de déformation d'une plaque donnée obtenues par les trois méthodes (modèle éléments finis complet et les deux modèles réduits). Les trois courbes ne sont pas dissociables sur ces figures, validant ainsi les résultats obtenus par la méthode de Craig-Bampton.

De légers écarts sont néanmoins visibles en agrandissant les vues, notamment autour des pics de résonance. Les quatre pics 2, 5, 7 et 9 de l'énergie de déformation de la plaque 1 peuvent ainsi être observés plus en détail sur la figure 4.5. Il apparaît ainsi clairement que les écarts augmentent avec la fréquence propre du pic : le pic 2 est ainsi fidèlement reproduit avec les deux modèles réduits par rapport à la solution de référence, tandis que de légers écarts d'amplitude sont visibles pour le pic 5 avec le modèle le plus réduit CB3080. Pour les pics 7 et 9, des différences sont visibles en termes

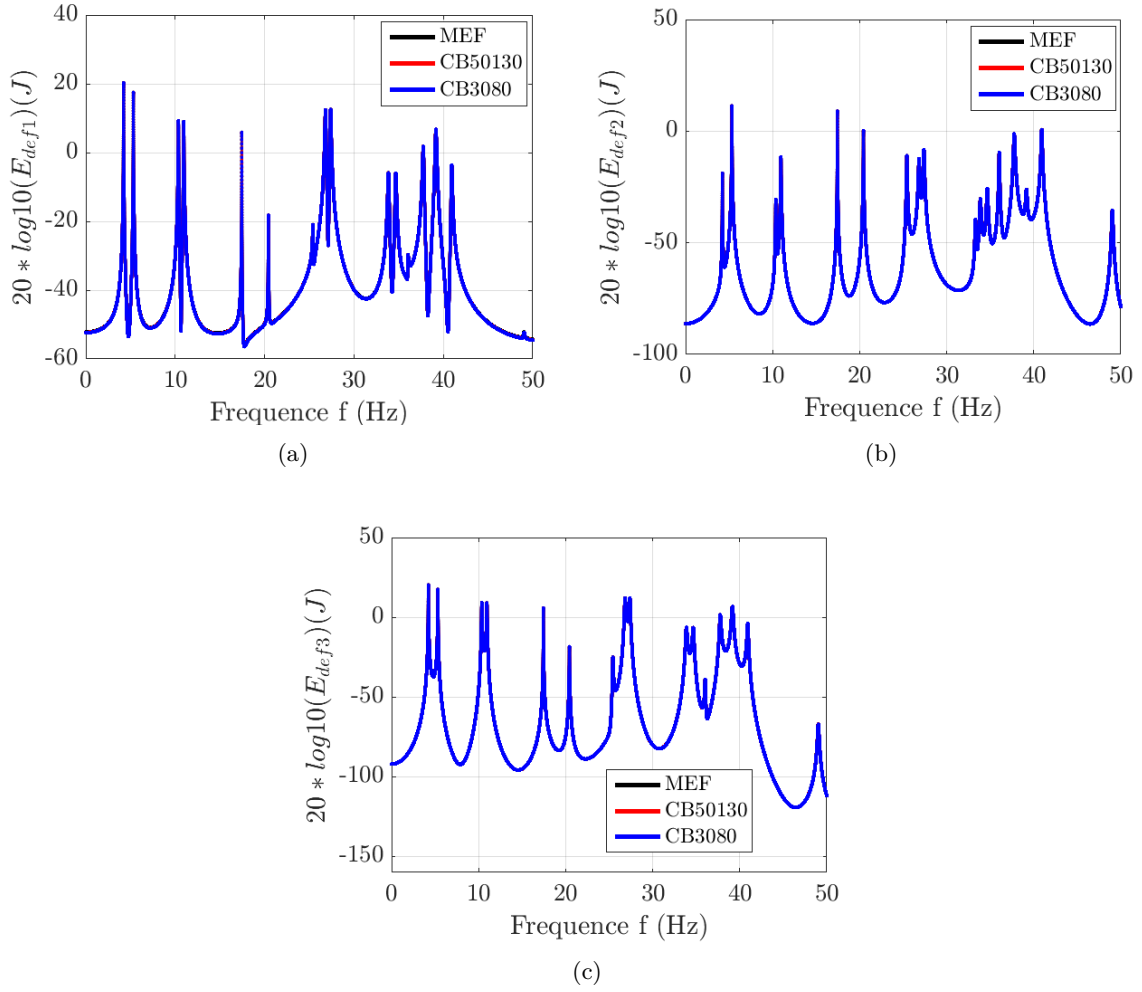


FIGURE 4.4 – Énergies de déformation (a) E_{def1} , (b) E_{def2} et (c) E_{def3} en fonction de la fréquence

d'amplitude et de fréquence du pic, le modèle le plus réduit CB3080 donnant logiquement des écarts plus importants que le modèle CB50130.

Pour analyser plus finement la précision des résultats, les erreurs relatives sont calculées pour chaque pic de chacune des trois plaques entre l'énergie de déformation obtenue par un modèle réduit et la solution de référence impliquant le modèle éléments finis complet, en termes d'amplitude

$$\frac{|E_{defj,ref}(pic_i) - E_{defj,CB}(pic_i)|}{|E_{defj,ref}(pic_i)|} \quad (4.61)$$

et de fréquence

$$\frac{|f_{Edefj,ref}(pic_i) - f_{Edefj,CB}(pic_i)|}{|f_{Edefj,ref}(pic_i)|} \quad (4.62)$$

où $E_{defj,ref}(pic_i)$ et $E_{defj,CB}(pic_i)$ désignent les amplitudes des $i^{ème}$ pics des énergies de déformation de la plaque j ($j = 1, 2$ ou 3) obtenues respectivement par la solution de référence et un modèle réduit CB ; $f_{Edefj,ref}(pic_i)$ et $f_{Edefj,CB}(pic_i)$ sont les fréquences propres de ces pics.

La moyenne et le maximum de ces erreurs relatives, calculées sur les quatorze premiers pics, sont données pour chaque plaque dans le tableau 4.3. Avec une erreur relative maximale inférieure à

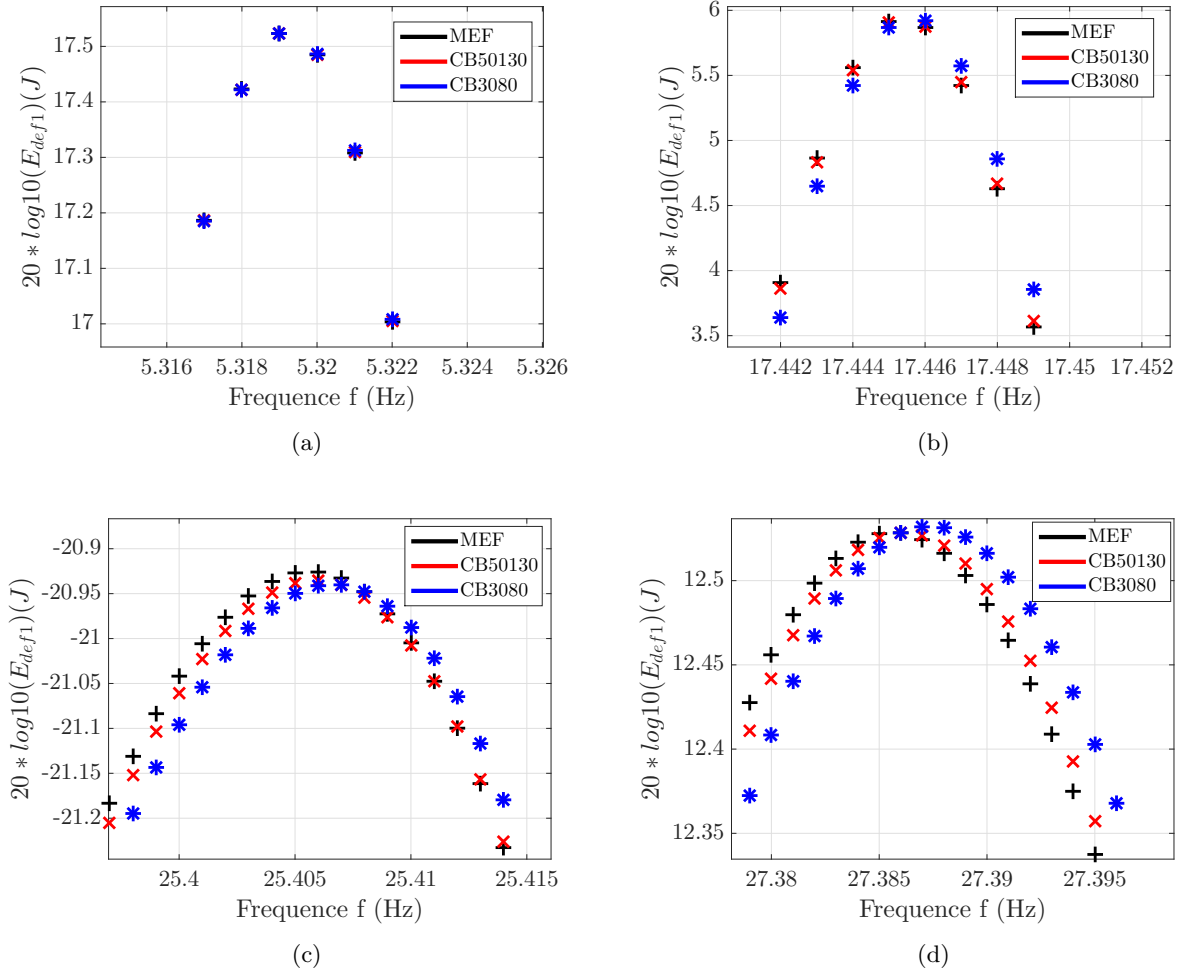


FIGURE 4.5 – (a) Pic 2, (b) pic 5, (c) pic 7 et (d) pic 9 de l'énergie de déformation E_{def1} de la plaque 1 en fonction de la fréquence

0,1%, la précision des résultats obtenue avec le modèle CB50130 est excellente ; elle reste parfaitement satisfaisante en utilisant le modèle CB3080 le plus réduit, l'erreur maximale étant cette fois inférieure à 0,5%.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre a été présentée la méthode de réduction de modèle de Craig-Bampton, basée sur une projection des DDLs internes d'une structure sur une base de modes statiques et de modes d'interface fixe. La méthode a été appliquée pour analyser la réponse dynamique à une sollicitation harmonique d'un système composé de trois plaques connectées deux à deux par des ressorts et comportant un grand nombre de DDLs. Deux modèles réduits comportant un nombre variable de modes d'interface fixe ont été proposés et validés par comparaison avec la solution de référence impliquant le modèle éléments finis complet du système. Il a été montré que la méthode de Craig-Bampton permet une réduction substantielle du coût de calcul tout en garantissant une perte de précision négligeable.

Dans le chapitre suivant, les structures considérées ne vont plus être déterministes mais vont comporter un nombre plus ou moins élevé de paramètres incertains. La méthode de Craig-Bampton va

4.5. Conclusion

Méthode	E_{def1}		E_{def2}		E_{def3}	
	Amplitude	Fréquence	Amplitude	Fréquence	Amplitude	Fréquence
Moyenne des erreurs relatives (%)						
CB3080	7.49×10^{-2}	5.08×10^{-3}	8.96×10^{-2}	5.16×10^{-3}	1.06×10^{-1}	4.79×10^{-3}
CB50130	2.90×10^{-2}	1.40×10^{-3}	2.33×10^{-2}	2.24×10^{-3}	2.40×10^{-2}	1.79×10^{-3}
Maximum des erreurs relatives (%)						
CB3080	2.27×10^{-1}	1.02×10^{-2}	4.45×10^{-1}	1.28×10^{-2}	4.79×10^{-1}	1.18×10^{-2}
CB50130	1.10×10^{-1}	4.89×10^{-3}	8.47×10^{-2}	5.77×10^{-3}	9.43×10^{-2}	7.33×10^{-3}

TABLEAU 4.3 – Moyenne et maximum des erreurs relatives sur l’amplitude et la fréquence des énergies de déformation des trois plaques obtenues par un modèle réduit par rapport à la solution de référence

être couplée au Chaos Polynomial creux afin d’étudier la propagation des incertitudes dans le modèle, le but étant d’estimer l’impact de l’utilisation d’un modèle réduit pour construire les coefficients du chaos. L’exemple des trois plaques connectées par des ressorts va être repris pour illustrer l’approche, l’incertitude portant sur les valeurs des raideurs des ressorts. Trois développements en chaos polynomial seront entrepris, basés sur le modèle éléments finis complet et les deux modèles réduits CB50130 et CB3080 présentés dans ce chapitre.

Chapitre 5

ÉTUDE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UNE STRUCTURE AVEC INCERTITUDES

5.1 Introduction

Ce dernier chapitre a pour objet d'évaluer la capacité du chaos polynomial creux le plus efficace (cf Chapitre 3) à savoir l'anisotrope hyperbolique (dénommée juste sPC dans la suite) et de la méthode de Craig-Bampton (CB) à prendre en compte un nombre variable de paramètres incertains dans la réponse dynamique de la structure académique définie au chapitre précédent. L'objectif est double : il s'agit d'une part d'évaluer la capacité du développement sPC à étudier à moindre coût la propagation des incertitudes dans un modèle comportant un grand nombre de degrés de liberté, et d'autre part d'estimer l'impact de l'utilisation de modèles éléments finis (FEM) réduits sur les prédictions issues des développements sPC construits à partir de ces FEM réduits.

Dans ce but, la méthode sPC est appliquée au modèle des trois plaques connectées par des ressorts, présenté dans le Chapitre 4. L'incertitude portera sur la valeur des raideurs des ressorts, le but étant d'estimer l'impact de cette incertitude sur les fonctions de réponse en fréquence du système ; on s'intéressera en particulier aux évolutions fréquentielles des énergies de déformation des trois plaques. Trois développements sPC seront entrepris, les coefficients du chaos étant calculés soit à partir du FEM complet, soit à partir des modèles réduits dénommés CB50130 et CB3080 obtenus en appliquant la méthode de Craig-Bampton avec un nombre variables de modes d'interface fixe et détaillés dans le Chapitre 4.

Dans la suite de ce chapitre, la section 5.2 présente deux approches sPC avec des quantités d'intérêt (QoI) distinctes, qui seront testées pour le cas d'un seul paramètre incertain. Seule la seconde approche sPC, qui s'avèrera plus efficace, sera conservée dans la section suivante 5.3 où le nombre de paramètres incertains sera augmenté. Dans la section 5.3, la méthode du sPC avec son algorithme modifié est proposée appelée sPC amélioré qui permet de réduire le coût de calcul tout en garantissant le même ordre de précision que celui obtenu avec le sPC original pour les cas de nombre élevé de paramètres incertains.

5.2 Choix de l'approche sPC

5.2.1 Définition du paramètre incertain

Dans le Chapitre 4, nous avons étudié les évolutions fréquentielles des énergies de déformation d'un système composé de trois plaques connectées par des ressorts de raideur fixe, décrit dans la section 4.4. Les résultats obtenus avec le FEM complet et les deux modèles réduits via la méthode de Craig-Bampton ont été en particulier présentés pour une raideur constante et uniforme des ressorts linéaires positionnés dans la direction z entre les trois plaques : $k_z = 150 \text{ N/m}$.

Dans ce chapitre, cette raideur k_z est désormais supposée incertaine. Dans cette section, on la supposera encore uniforme pour l'ensemble des ressorts verticaux, ce qui implique que le modèle comporte un unique paramètre incertain $\xi = k_z$. La loi de probabilité de ce paramètre sera supposée uniforme sur l'intervalle $[100; 200] \text{ N/m}$, la valeur nominale restant $k_z = 150 \text{ N/m}$.

Les énergies de déformation des trois plaques dépendent de la valeur de ce paramètre incertain, comme le montre la Figure 5.1 pour la plaque 1 : la figure (a) représente les évolutions fréquentielles de l'énergie de déformation E_{def1} pour trois valeurs de k_z (les deux valeurs extrêmes et la valeur nominale) sur la bande de fréquences $[0, 50] \text{ Hz}$ en utilisant un pas fréquentiel de 10^{-3} Hz . Il apparaît clairement que certains pics de résonance varient, en termes de fréquence et d'amplitude, en fonction de la raideur k_z . C'est notamment le cas pour les pics 2, 5, 7 et 9 dont on peut suivre les évolutions spécifiques sur les vues zoomées (figures (b) à (e)).

Les énergies de déformation des deux autres plaques, qui n'ont pas été représentées, suivent des tendances similaires avec des pics de résonance aux mêmes fréquences propres que la plaque 1 dont l'amplitude et la fréquence varie en fonction de k_z . Les amplitudes de ces pics peuvent en revanche différer fortement de celles obtenues pour l'énergie de déformation de la plaque 1, de même que les sens de variation (augmentation ou diminution d'amplitude) en fonction de k_z .

En vue de donner une idée de la sensibilité des différents pics au paramètre incertain k_z , $N = 10\,000$ simulations ont été réalisées avec le FEM des trois plaques pour 10 000 valeurs de la raideur k_z . Le tableau 5.1 présente quelques résultats numériques concernant les fréquences propres et/ou amplitudes des pics 2, 5, 7 et 9 des énergies de déformation des plaques 1 (E_{def1}) et 2 (E_{def2}). On peut notamment y lire, pour chaque quantité représentée (fréquence ou amplitude de pic), la valeur moyenne obtenue pour les 10 000 valeurs de k_z , et l'écart défini par la formule

$$Ecart = \frac{Max - Min}{Moyenne} \quad (5.1)$$

où Max et Min sont les valeurs maximale et minimale de la quantité obtenues pour les 10 000 valeurs de k_z .

Pic	Quantité	Moyenne	Ecart (%)
Pic 2	fréquence E_{def1} (Hz)	5.309	5.217
	amplitude E_{def1} (J)	7.572	21.756
Pic 5	fréquence E_{def1} (Hz)	17.316	28.806
	amplitude E_{def1} (J)	2.027	19.417
Pic 7	amplitude E_{def1} (J)	0.147	427.156
	amplitude E_{def2} (J)	0.312	174.375
Pic 9	amplitude E_{def1} (J)	4.276	33.833

TABLEAU 5.1 – Valeurs moyennes et écarts de quelques QoI pour 10 000 valeurs du paramètre incertain k_z .

Ce tableau permet de mieux comprendre l'intérêt porté aux pics précédemment cités. Dans la suite, on s'intéressera en particulier au pic 2 de l'énergie de déformation de la plaque 1, qui présente

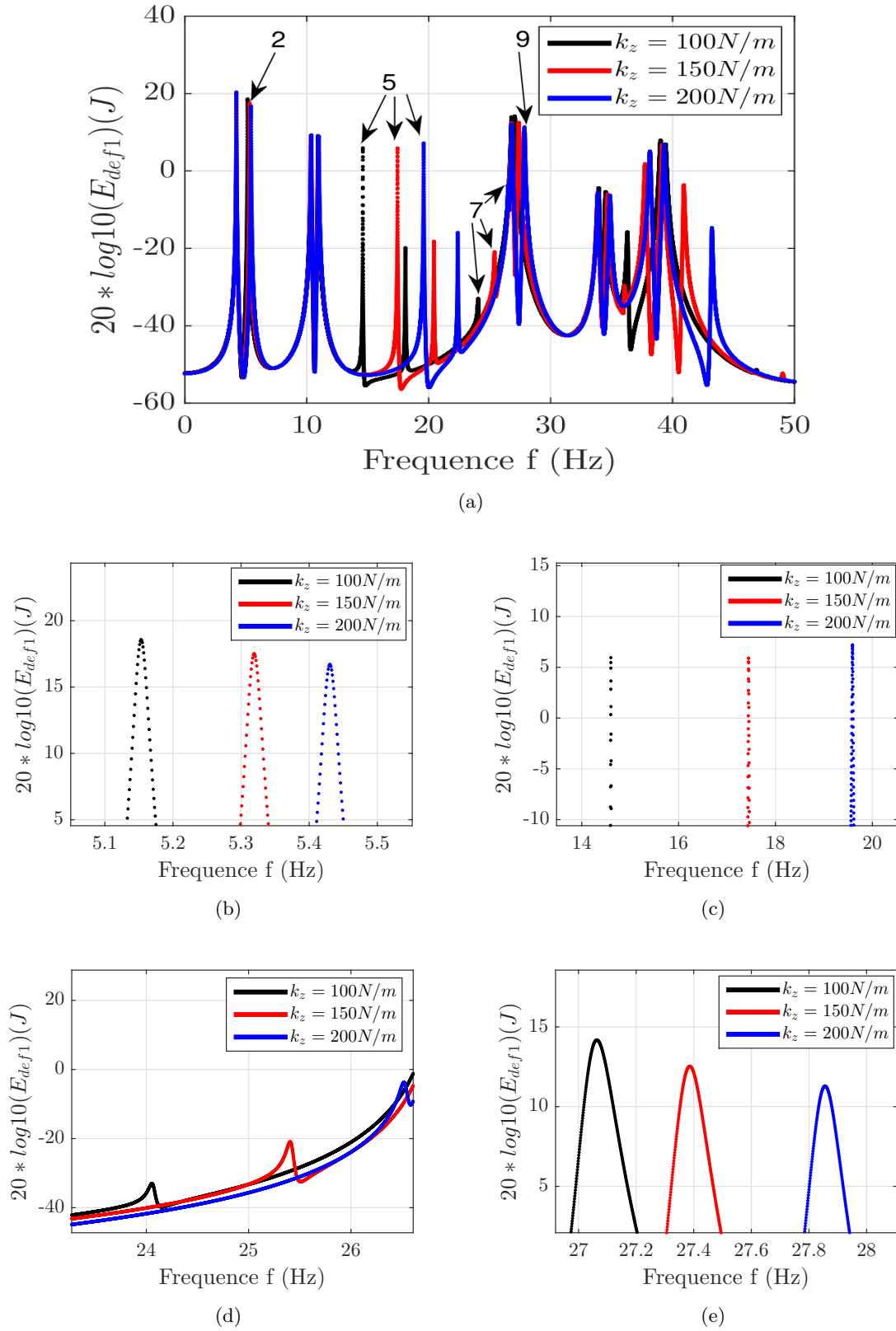


FIGURE 5.1 – Énergies de déformation de la plaque 1 pour plusieurs valeurs du paramètre incertain k_z ; (a) intervalle fréquentiel complet, (b) zoom sur le pic 2, (c) zoom sur le pic 5, (d) zoom sur le pic 7, (e) zoom sur le pic 9.

une amplitude importante et une relativement forte variabilité en fonction du paramètre incertain, de l'ordre de 22%. La fréquence propre du pic 5 de cette énergie de déformation présente la plus forte dépendance à k_z avec un écart de l'ordre de 29%. Si l'amplitude du pic 7 est nettement inférieure à celles des deux précédents pics, elle présente une sensibilité extrême au paramètre incertain (plus de 400% pour l'énergie de déformation de la plaque 1) et constitue également une quantité intéressante pour tester les méthodes de propagation d'incertitude.

Différentes stratégies peuvent être mises en œuvre dans le but de prédire, à l'aide du chaos polynomial creux, les énergies de déformation des plaques en fonction du paramètre incertain $\xi = k_z$.

5.2.2 Première approche : méthode sPC1

Une première stratégie consiste à définir comme quantité d'intérêt (QoI) l'amplitude de l'énergie de déformation de chacune des trois plaques pour une fréquence f donnée :

$$E_{def\ j,\ f}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{m,w}^{r,p}} \bar{x}_{f,\alpha} \phi_{\alpha}(\xi) \quad j = 1, \dots, 3. \quad (5.2)$$

Avec cette méthode, dénommée dans la suite sPC1, recomposer l'évolution fréquentielle de l'énergie de déformation d'une plaque dans une bande de fréquences autour d'un pic d'intérêt implique donc de réaliser les développements sPC pour chacune des fréquences d'échantillonnage ; ce qui peut représenter un nombre important de QoI ; ce qui laisse présager un coût de calcul élevé. En effet, les coefficients des chaos $\bar{x}_{f,\alpha}$ doivent être calculés pour chaque QoI, et donc pour chaque fréquence d'échantillonnage autour du pic d'intérêt, à partir d'un jeu de valeurs d'énergies de déformation obtenues en réalisant les simulations du FEM complet pour un certain nombre de valeurs de la raideur k_z .

5.2.3 Seconde approche : méthode sPC2

Une seconde approche (dénommée sPC2 dans la suite) a été envisagée en vue de limiter le nombre de QoI. Elle nécessite cependant de connaître l'allure générale de l'évolution fréquentielle de l'énergie de déformation que l'on cherche à étudier, pour une ou plusieurs valeurs du paramètre incertain, comme illustré par exemple sur la Figure 5.1(a) pour la plaque 1. L'idée est alors de ne chercher à prédire que l'évolution de certains pics en fonction de la valeur de k_z . Dans une démarche d'ingénierie, c'est en effet souvent le comportement du système dynamique dans les zones de résonance qui peut s'avérer le plus critique et nécessiter une étude approfondie. Pour chaque pic d'intérêt de l'énergie de déformation d'une plaque donnée, on définit alors deux QoI : l'amplitude et la fréquence du pic

$$E_{def\ j,\ pic\ i}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{m,w}^{r,p}} \bar{x}_{pic\ i,\alpha} \phi_{\alpha}(\xi) \quad j = 1, \dots, 3 \quad (5.3)$$

$$f_{E_{def\ j,\ pic\ i}}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{m,w}^{r,p}} \bar{x}'_{pic\ i,\alpha} \phi_{\alpha}(\xi) \quad j = 1, \dots, 3. \quad (5.4)$$

Pour chaque pic de chaque plaque, deux jeux de coefficients $\bar{x}_{pic\ i,\alpha}$ et $\bar{x}'_{pic\ i,\alpha}$ doivent seulement être calculés pour réaliser les développements sPC, limitant ainsi le coût de calcul correspondant.

5.2.4 Résultats numériques pour les approches sPC1 et sPC2 avec un paramètre incertain

Les deux approches vont être illustrées dans la suite pour les trois plaques. On choisit de se concentrer pour commencer sur les quatre pics (pics 2, 5, 7 et 9) de l'énergie de déformation $E_{def\ 1}$ visibles sur les zooms de la Figure 5.1, qui s'étaient avérés sensibles à la valeur du paramètre incertain.

Pour la première approche sPC1, on commence par calculer, pour un pic d'intérêt i donné, les énergies de déformation à chaque fréquence d'échantillonnage d'une bande limitée autour de la fréquence propre du pic obtenue à la valeur nominale de k_z ; on applique ensuite un algorithme de détection de maximum pour déduire l'amplitude du pic et la fréquence à laquelle se situe le pic. Le tableau 5.2 définit les intervalles fréquentiels d'étude autour des quatre pics retenus, et donne le nombre de QoI associées pour une plaque compte tenu du pas fréquentiel de 10^{-3} Hz . Ces intervalles ont été choisis les plus étroits possibles pour limiter le nombre de QoI, mais suffisamment larges pour détecter les pics aux valeurs extrémales du paramètre incertain. L'étude des quatre pics implique au total 8924 valeurs de fréquences, soit $3 \times 8924 = 26772$ QoI pour les trois plaques avec l'approche sPC1.

Pic	Intervalle fréquentiel (Hz)	Nombre de valeurs de fréquences N_f
Pic 2	[5.1 ; 5.45]	351
Pic 5	[14.56 ; 19.63]	5071
Pic 7	[24 ; 26.6]	2601
Pic 9	[27 ; 27.9]	901

TABLEAU 5.2 – Intervalles fréquentiels d'étude autour des pics 2, 5, 7 et 9 et nombre de fréquences associées pour l'approche sPC1.

La seconde approche sPC2 nous donnera directement l'amplitude et la fréquence propre de chacun de ces pics pour une valeur quelconque du paramètre incertain ξ , en utilisant les développements des deux seuls QoI (5.3) et (5.4). Pour déterminer les deux jeux de coefficients de ces deux QoI (5.3) et (5.4), il faut estimer ces deux QoI en un certain nombre de valeur de k_z . Pour cela il est donc nécessaire, à l'instar de la méthode sPC1 de déterminer les énergies de déformations à chaque fréquence autour de pic d'intérêt, d'identifier l'amplitude maximum avec un algorithme adaptée et d'en déduire la fréquence associée.

5.2.4.1 Comparaison entre prédictions sPC et solution de référence pour une valeur du paramètre incertain k_z

Une première illustration de l'approche sPC1 est visible sur la Figure 5.2. Sur cette figure sont comparées les évolutions fréquentielles des énergies de déformation des plaques 1 et 2 autour des pics 2 et 7, obtenues pour une raideur $k_z = 150 \text{ N/m}$ d'une part par simulation du FEM complet (en noir) et d'autre part en appliquant le développement (5.2) à chaque fréquence de la bande considérée pour $\xi = 150 \text{ N/m}$. Dans le cadre de l'approche sPC1, chaque QoI a été estimée en utilisant un ordre de chaos $p_{max} = 5$, la précision cible vaut $S_{cible}^2 = 0.999$, norme- $m = 0.8$ et les valeurs des seuils sont fixées à $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.001(1 - S_{cible}^2)$.

Des écarts très importants sont visibles entre la solution de référence et les évolutions résultant de l'approche sPC1. Malgré un ordre élevé des développements sPC (on obtient après application de l'algorithme sPC un ordre final $p = 5$ pour toutes les QoI), l'approche sPC1 s'avère donc inefficace pour reproduire les évolutions fréquentielles des énergies de déformation dans des zones de résonances. Les coûts de calcul associés sont par ailleurs prohibitifs, dans la mesure où la méthode requiert un ordre de chaos élevé pour un très grand nombre de QoI.

Comme expliqué précédemment, l'amplitude et la fréquence de chacun des pics d'intérêt pour une plaque donnée sont estimées, dans le cadre de l'approche sPC1, en détectant le maximum sur les évolutions fréquentielles dans les bandes de fréquences réduites autour des pics. Les Figures 5.3 et 5.4 comparent les résultats correspondant aux pics 2 et 7 des plaques 1 et 2 obtenues avec les trois méthodes (la solution de référence et les deux approches sPC1 et sPC2); pour plus de clarté, l'évolution fréquentielle de référence est représentée sur la première figure, tandis que sur la seconde

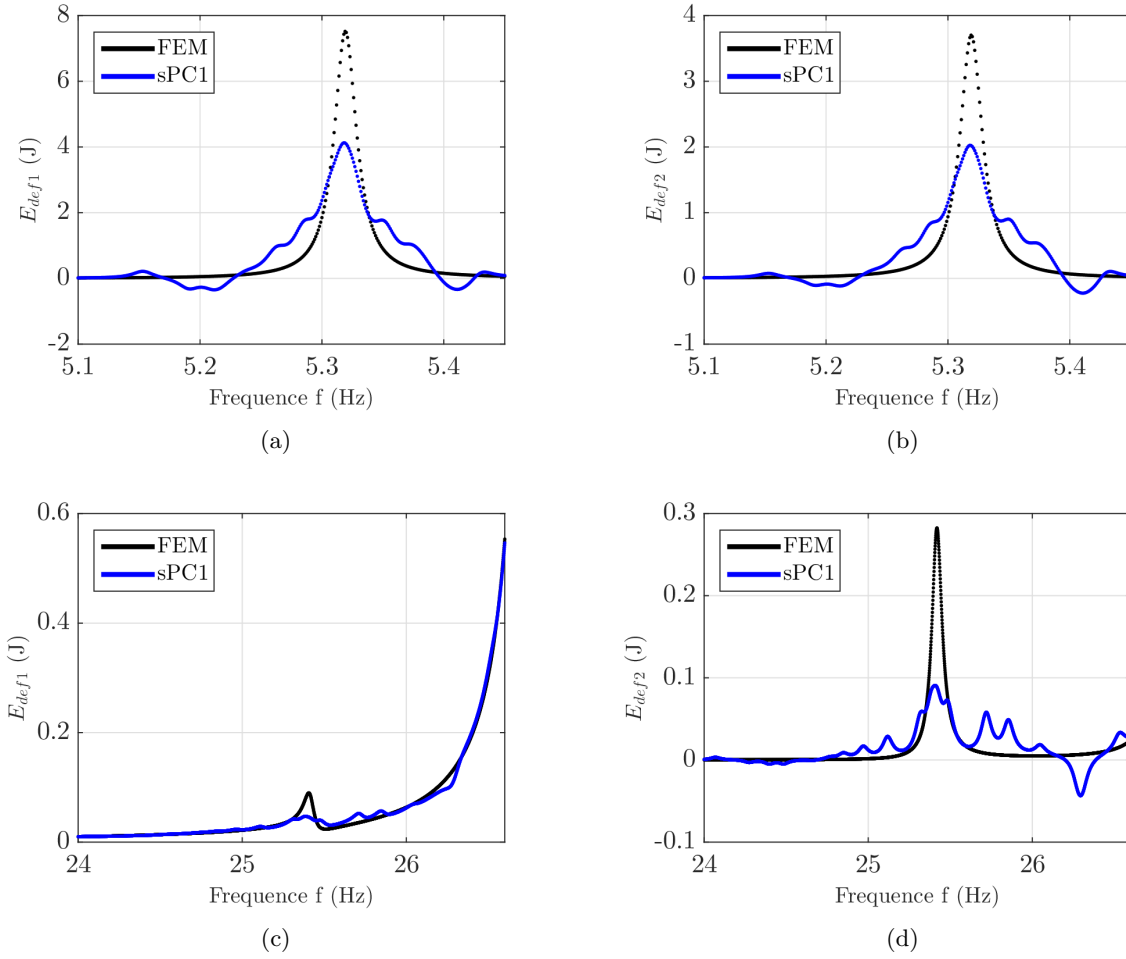


FIGURE 5.2 – Comparaison des énergies de déformation obtenues par la solution de référence et l’approche sPC1 pour $k_z = 150 \text{ N/m}$: (a) plaque 1, pic 2 ; (b) plaque 2, pic 2 ; (c) plaque 1, pic 7 ; (d) plaque 2, pic 7.

seuls les pics ainsi détectés pour les trois méthodes sont tracés, permettant de mieux faire apparaître les écarts. Les pics prédits par l’approche sPC1 sont sans surprise très éloignés des pics de référence, en termes d’amplitudes principalement, mais également de fréquence pour le pic 7 de l’énergie de déformation de la plaque 1 (visible sur les figures (c)). Pour ce pic, l’évolution fréquentielle résultant de l’approche sPC1 présente en effet plusieurs maxima locaux et le pic est déterminé à une fréquence plus élevée que la fréquence attendue.

L’approche sPC2, en revanche, s’avère efficace pour prédire correctement les pics, même si de faibles écarts sont visibles, notamment pour le pic 7 de l’énergie E_{def1} , sur la figure 5.4 (c).

5.2.4.2 Statistiques sur des intervalles de fréquences réduits entre solution de référence et approche sPC1 pour 10 000 valeurs de k_z

Les résultats précédents consistaient en des comparaisons entre les prédictions des amplitudes et fréquences de pics d’énergies de déformation obtenues par les deux approches de chaos polynômial creux pour une valeur donnée du paramètre incertain k_z et les valeurs de référence issues de la simulation impliquant le FEM complet.

L’intérêt du chaos polynômial réside toutefois dans sa capacité à estimer à moindre coût les statistiques d’une QoI lorsque le paramètre incertain varie selon sa loi de probabilité uniforme. Dans

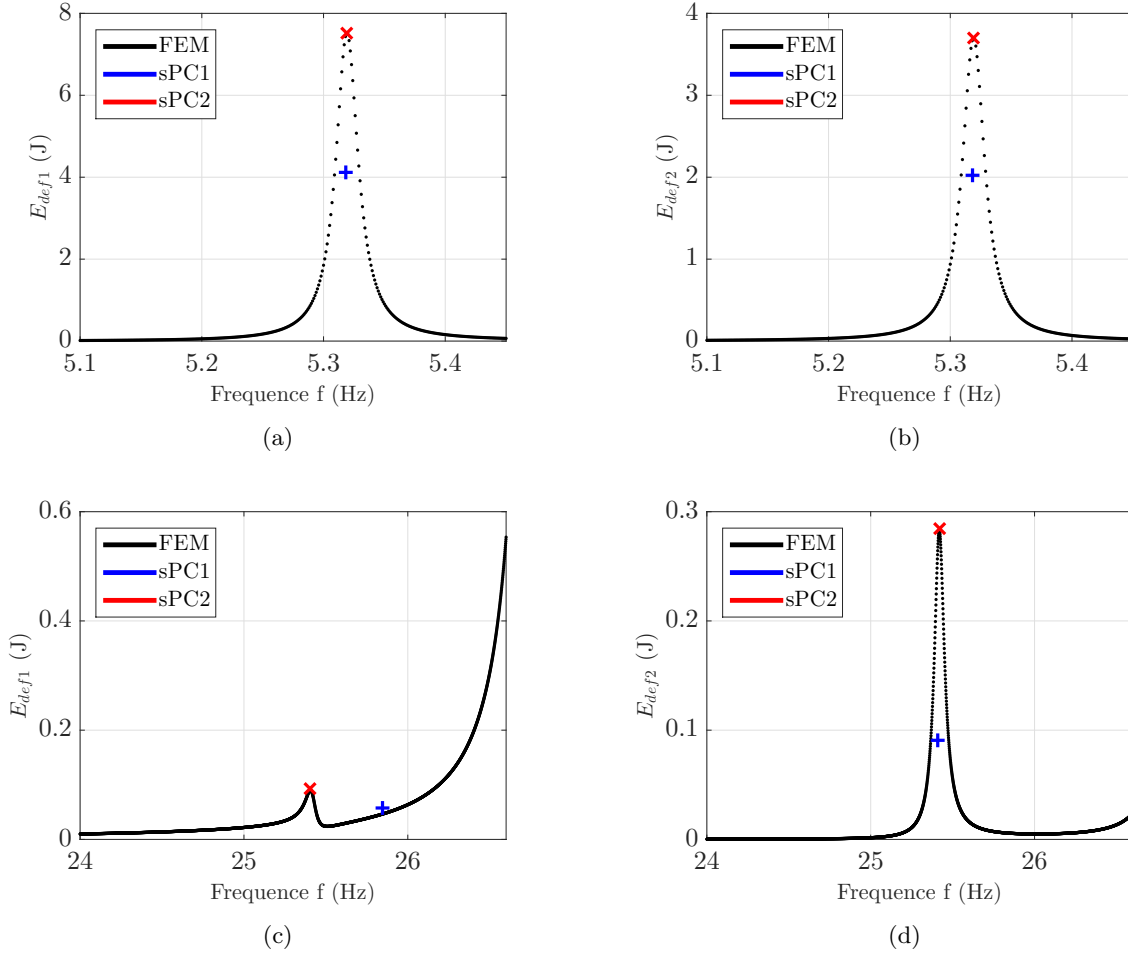


FIGURE 5.3 – Comparaison des pics d'énergie de déformation obtenus par la solution de référence et les approches sPC1 et sPC2 pour $k_z = 150 \text{ N/m}$: (a) plaque 1, pic 2 ; (b) plaque 2, pic 2 ; (c) plaque 1, pic 7 ; (d) plaque 2, pic 7.

cette optique, on s'intéresse à présent aux valeurs maximales, moyennes et minimales des énergies de déformation des différentes plaques sur des intervalles de fréquences réduits entourant certains pics, déterminées à partir de 10 000 valeurs de k_z choisies aléatoirement sur l'intervalle $[100; 200] \text{ N/m}$. Le choix d'un nombre de 10 000 tirages a pour objectif d'obtenir une erreur sur la moyenne pour un niveau de confiance de 95 %, inférieure à 0.27 % que ce soit pour la solution de référence ou l'approche sPC1.

La Figure 5.5 compare ainsi les valeurs maximales, moyennes et minimales des énergies de déformation des plaques 1 (figure (a)) et 2 (figure (b)) pour chaque fréquence de la bande de fréquences entourant le pic 2 obtenues respectivement par la solution de référence et l'approche sPC1. Il peut être noté que ces évolutions ne sont pas accessibles par la seconde approche sPC2 puisque les amplitudes ne sont estimées qu'à la fréquence de résonance du pic. A chaque fréquence de la bande étudiée, l'amplitude maximale est atteinte pour la valeur de k_z pour laquelle le pic de résonance est au plus près de cette fréquence ; on avait par exemple montré sur la Figure 5.1(b) que lorsque k_z augmentait, le pic 2 de l'énergie de déformation de la plaque 1 se déplaçait vers les hautes fréquences tout en perdant de l'amplitude : il est donc logique de retrouver, sur la Figure 5.5(a), une amplitude maximale qui décroît lorsque la fréquence augmente pour la solution de référence. La tendance est inversée pour la plaque 2,

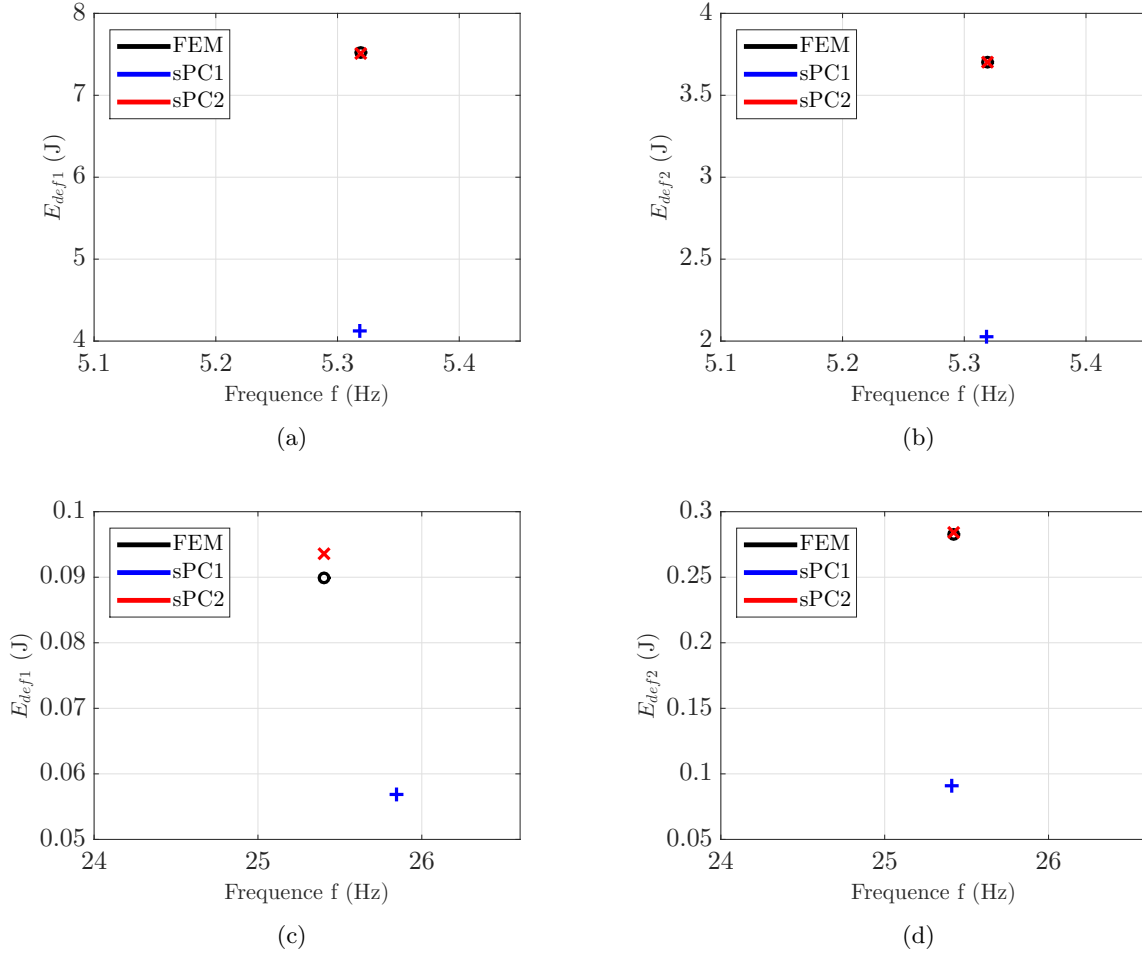


FIGURE 5.4 – Comparaison des pics d'énergie de déformation obtenus par la solution de référence et les approches sPC1 et sPC2 pour $k_z = 150 \text{ N/m}$: (a) plaque 1, pic 2; (b) plaque 2, pic 2; (c) plaque 1, pic 7; (d) plaque 2, pic 7.

visible sur la figure (b). Par ailleurs, la Figure 5.5 montre l'évolution de l'erreur sur la moyenne pour un niveau de confiance de 95 % pour la solution de référence et l'approche sPC1 en fonction de la fréquence sur la bande de fréquence considérée. Si l'approche sPC1 permet d'obtenir ces statistiques avec des coûts de calcul réduits, elle s'avère de nouveau inefficace pour prédire ces statistiques, au vu des écarts très importants visibles sur la figure (à l'exception des fréquences les plus basses et les plus hautes de l'intervalle considéré, qui ne coïncident avec une fréquence de résonance du pic 2 pour aucune des valeurs de k_z).

Cette incapacité de la méthode sPC1 à reproduire les statistiques de référence se retrouve sur la Figure 5.6 qui illustre les résultats obtenus pour les plaques 1 et 2 sur l'intervalle fréquentiel entourant cette fois le pic 7.

5.2.4.3 Évolutions de la fréquence propre et de l'amplitude des pics en fonction de la raideur du ressort k_z

En vue de comparer les deux approches sPC1 et sPC2, on s'intéresse pour terminer plus particulièrement aux résultats concernant les évolutions des pics étudiés (amplitude et fréquence des pics 2, 5, 7 et 9 des énergies de déformation des trois plaques) en fonction de la valeur du paramètre incertain

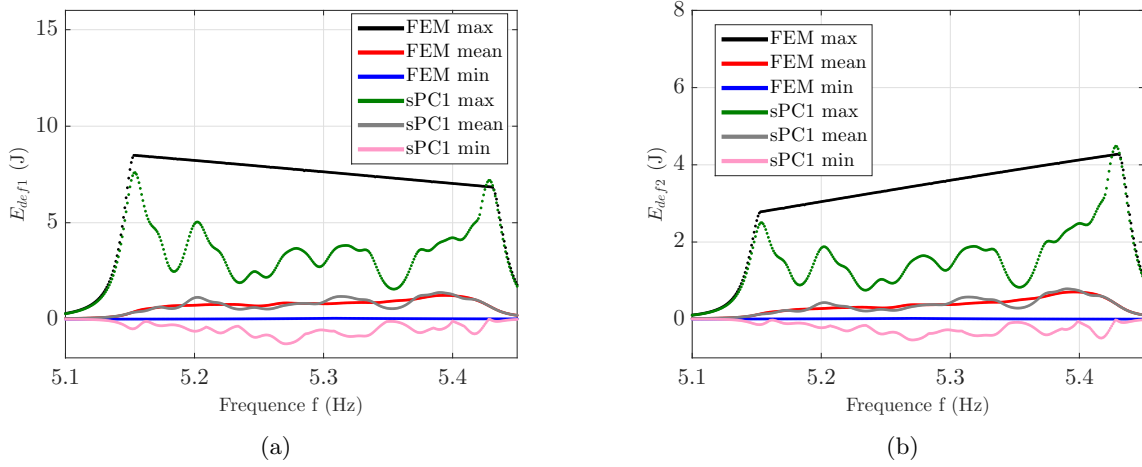


FIGURE 5.5 – Maximum, moyenne et minimum de l'énergie de déformation sur l'intervalle fréquentiel entourant le pic 2 pour 10 000 valeurs de k_z : (a) plaque 1 ; (b) plaque 2.

k_z .

Les résultats de référence sont obtenus comme précédemment en réalisant $N = 10\,000$ simulations correspondant aux 10 000 valeurs de raideur k_z avec le FEM complet, pour chacune des fréquences d'échantillonnage sur les quatre intervalles fréquentiels entourant les quatre pics ; pour chaque valeur de raideur et chaque intervalle de fréquences, un algorithme est appliqué pour déterminer le maximum local et en déduire l'amplitude et la fréquence propre du pic.

Dans le cadre de l'approche sPC1, les résultats sont obtenus pour chacune des trois plaques en appliquant le développement (5.2) pour les 10 000 valeurs de k_z , pour chaque fréquence des quatre intervalles entourant les pics, après avoir calculé les coefficients du chaos. Le maximum local de chaque intervalle est ensuite détecté pour déterminer la position du pic.

Avec l'approche sPC2, les amplitudes et fréquences de chaque pic sont directement obtenues en appliquant les développements (5.3) et (5.4) pour les 10 000 valeurs de k_z , après avoir calculé les deux séries de coefficients du chaos. Les coûts de calcul sont de fait considérablement réduits par rapport aux deux approches précédentes.

Les résultats concernant le pic 2 de l'énergie de déformation sont illustrés sur la Figure 5.7, qui montre les amplitudes du pic en fonction de la raideur k_z pour les trois plaques (figures (a), (b) et (c)) ainsi que la fréquence propre du pic pour la plaque 1 sur la figure (d). Les résultats obtenus par l'approche sPC2 sont superposés avec les résultats de référence, ce qui explique que seules deux courbes sont visibles sur chaque figure. Les courbes correspondant à l'approche sPC1 sont en revanche très distinctes des deux autres, conformément aux observations précédentes.

Des tendances similaires sont obtenues pour les autres pics étudiés. Le cas du pic 7, pour lequel l'approche sPC1 était la moins efficace, est illustré sur la Figure 5.8. La mauvaise détection du pic 7 avec la méthode sPC1 due à la présence du plusieurs maxima locaux d'amplitudes supérieures à celle du pic 7 donne des résultats discontinus en termes d'amplitude et de fréquence, très éloignés des évolutions de référence. L'approche sPC2 est en revanche ici encore tout à fait satisfaisante, les courbes obtenues étant superposées avec les courbes de référence.

Afin d'analyser plus finement l'efficacité de l'approche sPC2, des erreurs ont été calculées pour 12 QoI listées dans le tableau 5.3 (fréquences et amplitudes de pics d'énergies de déformation pour les différentes plaques). Le tableau présente notamment les erreurs relatives entre les moyennes de ces QoI obtenues avec les approches sPC1 et sPC2 pour les 10 000 valeurs de raideur k_z et les moyennes

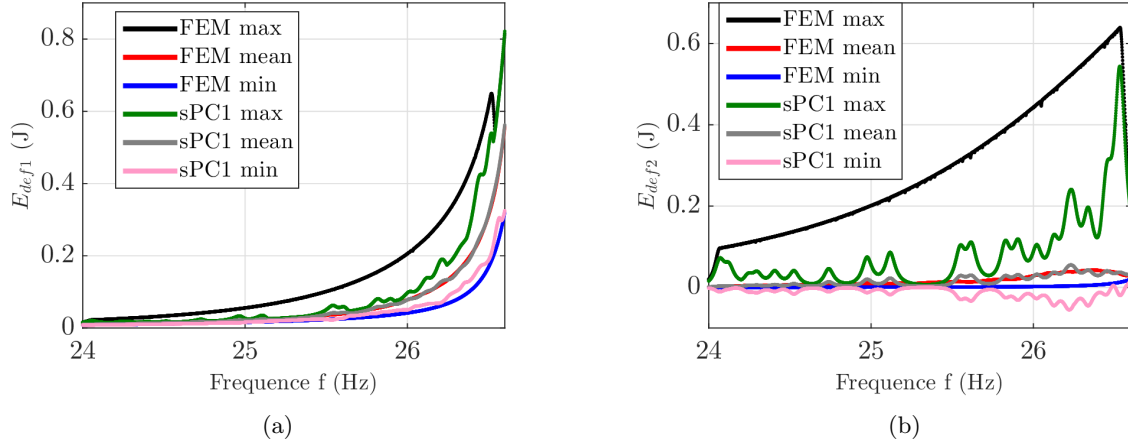


FIGURE 5.6 – Maximum, moyenne et minimum de l'énergie de déformation sur l'intervalle fréquentiel entourant le pic 7 pour 10000 valeurs de k_z : (a) plaque 1 ; (b) plaque 2.

de référence. La précision obtenue avec l'approche sPC2 s'avère excellente, les erreurs relatives étant toutes inférieures à 1%, voire 0,01% pour le premier pic étudié (le pic 2). Des erreurs de plus de 60% sont en revanche atteintes pour certaines QoI avec l'approche sPC1. Les erreurs relatives sur la variance des QoI sont légèrement plus élevées avec un niveau maximum de l'ordre de 3% pour l'approche sPC2, ce qui reste très satisfaisant. Le tableau présente enfin la moyenne des erreurs relatives pour chacune des 12 QoI (i.e. pour chacune des 10000 valeurs de k_z , on calcule l'erreur relative entre la valeur obtenue par l'un des chaos polynomial creux et la valeur de référence, et on calcule enfin la moyenne de ces 10000 erreurs). En dehors des niveaux d'erreur pour deux QoI liées au pic 7, qui atteignent 4%, les niveaux obtenus avec l'approche sPC2 sont inférieurs à 1%, validant ainsi l'approche proposée. L'approche sPC1 donne des erreurs moyennes qui dépassent les 60% pour certaines QoI et ne sera donc pas retenue dans la suite.

Pic	Amplitude ou fréquence propre	Erreur relative sur la moyenne (%)		Erreur relative sur la variance (%)		Moyenne des erreurs relative (%)	
		sPC1	sPC2	sPC1	sPC2	sPC1	sPC2
Pic 2	$f_{E_{def}1}$	0.018	0.002	2.202	0.295	0.156	0.014
	$E_{def}1$	43.209	0.008	266.449	1.000	42.853	0.065
	$E_{def}2$	41.972	0.036	154.351	0.458	42.658	0.130
	$E_{def}3$	43.254	0.032	264.497	0.368	42.904	0.064
Pic 5	$f_{E_{def}1}$	0.003	0.003	1.825	0.349	0.872	0.036
	$E_{def}1$	65.387	0.138	1003.386	1.733	65.978	0.227
	$E_{def}2$	66.454	0.158	62.742	2.389	65.821	0.215
Pic 7	$f_{E_{def}1}$	2.177	3.32E-05	53.651	0.047	2.237	0.001
	$E_{def}1$	10.893	0.715	25.510	2.634	68.424	4.540
	$E_{def}2$	57.501	0.050	49.827	0.681	60.880	0.544
Pic 9	$E_{def}3$	49.222	0.232	68.452	3.096	44.139	4.355
	$E_{def}1$	28.591	0.040	278.456	0.549	29.384	0.161

TABEAU 5.3 – Erreurs relatives sur les amplitudes et les fréquences propres des pics d'énergie de déformation.

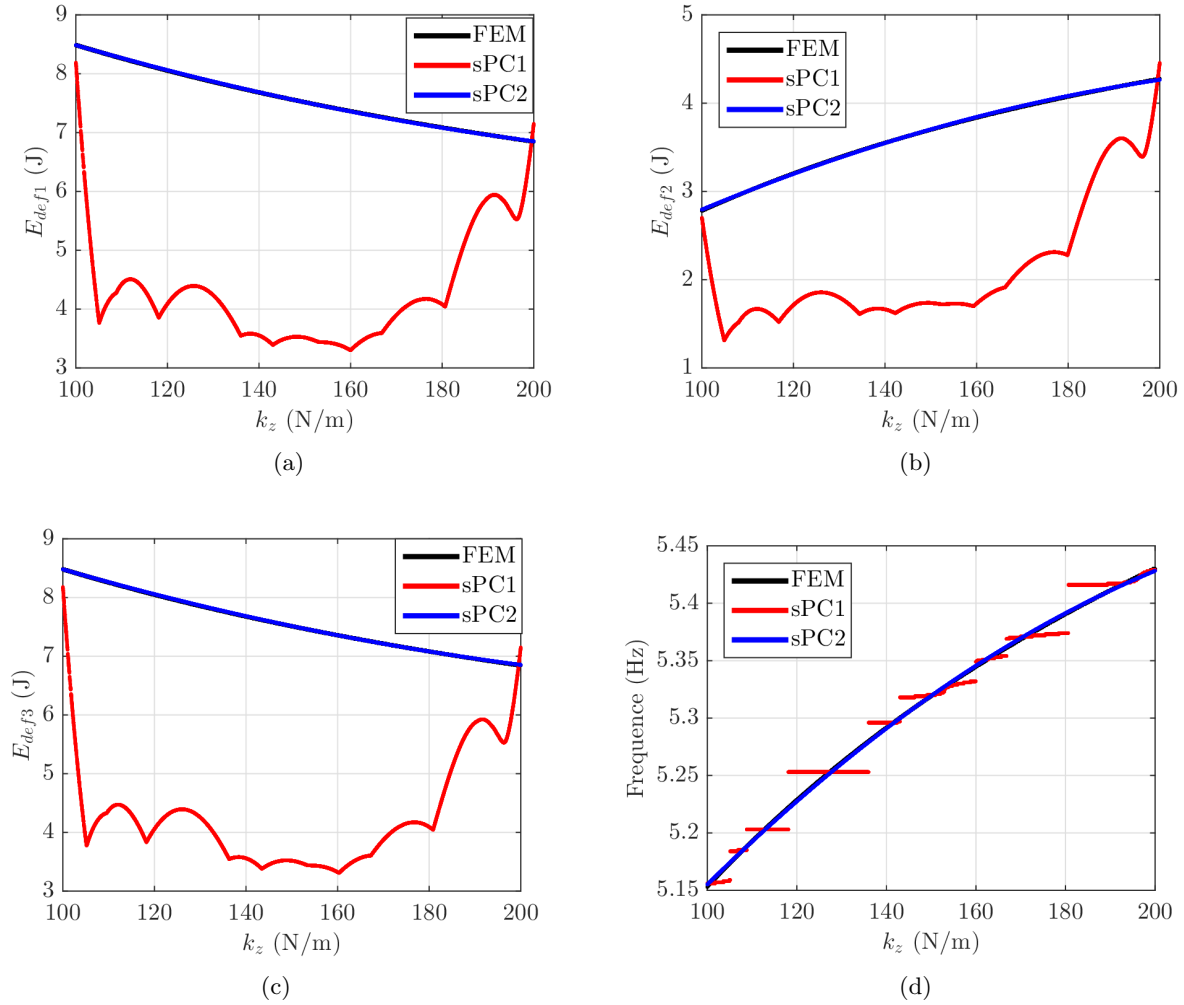


FIGURE 5.7 – Amplitudes du pic 2 des énergies de déformation (a) E_{def1} (b) E_{def2} (c) E_{def3} et (d) fréquence propre du pic 2 de l'énergie E_{def1} en fonction de la raideur k_z .

5.2.4.4 Comparaison du coût de calcul

Les coûts de calcul obtenus par la solution de référence du modèle éléments finis (FEM) complet et les deux approches sPC1 et sPC2, pour déterminer l'amplitude et la fréquence des quatre pics (2, 5, 7 et 9) des énergies de déformation des trois plaques, sont présentés dans le tableau 5.4. Avec un grand nombre de simulation ($N = 10000$), les coûts de calcul de la solution de référence sont prohibitifs pour ces quatre pics. En utilisant les deux approches du sPC, le nombre de simulations nécessaires pour construire les coefficients du chaos sont très limités. Pour toutes les QoI de l'approche sPC1, un ordre de chaos de $p = 5$ suffit ce qui correspond à un besoin de $Q = 24$ simulations pour chaque fréquence. L'approche sPC2 requiert ce même nombre de simulations avec l'ordre $p = 5$ pour le pic 7. Les autres pics requièrent un nombre de simulation Q plus faible : respectivement 14, 16 et 16 simulations pour les pics 2, 5 et 9 à cause d'un ordre de chaos p plus faible. Ainsi les coûts de construction pour la méthode sPC2 sont plus faibles que ceux pour la méthode sPC1.

Concernant les coûts d'exploitation, pour l'approche sPC1, une fois les coefficients du chaos déterminés les QoI sont évalués pour chacune des trois plaques en utilisant l'équation (5.2) pour 10 000 valeurs de k_z . Les coûts de calcul de ces résultats sont respectivement de 22, 32, 26 et 25 secondes

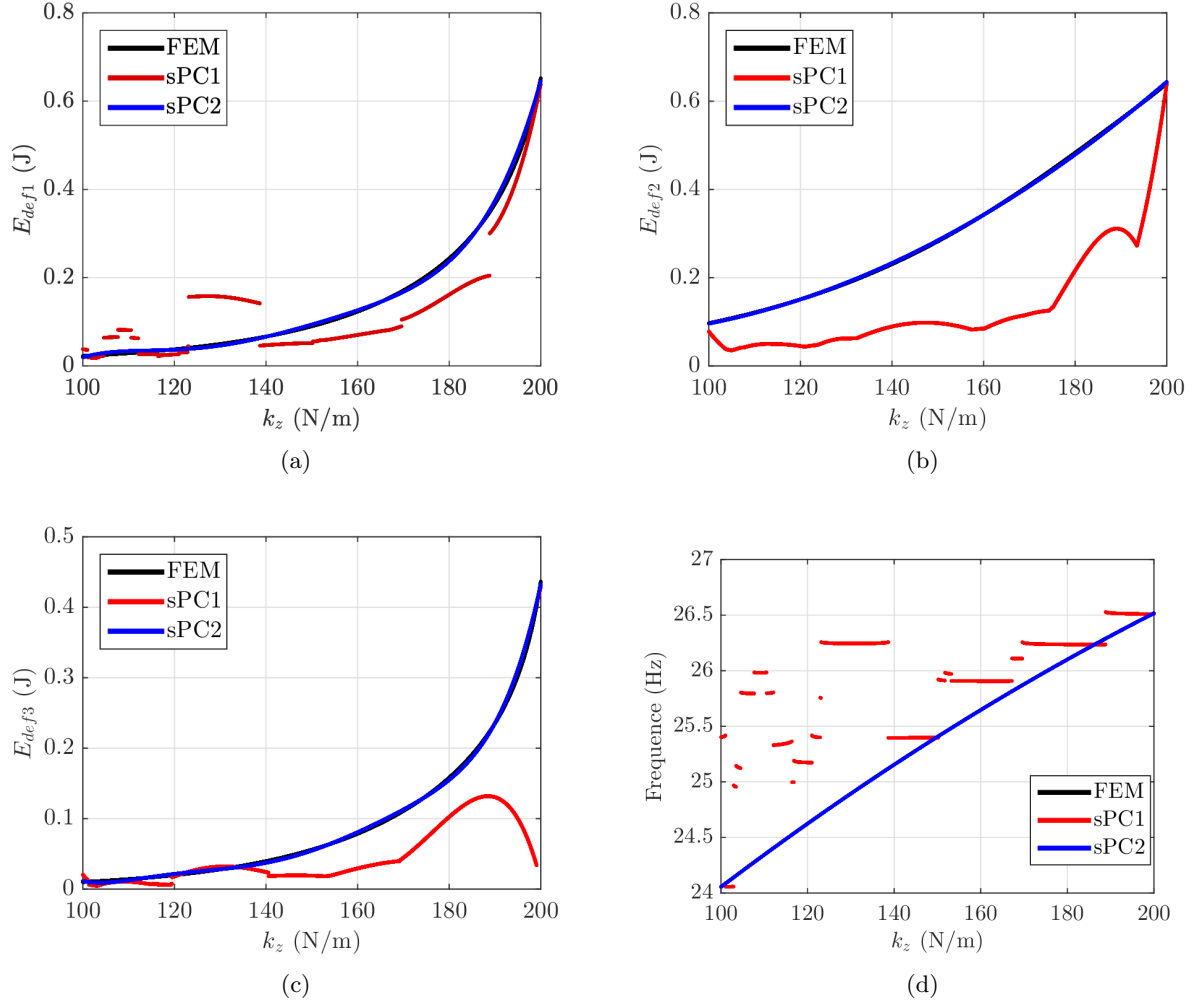


FIGURE 5.8 – Amplitudes du pic 7 des énergies de déformation (a) E_{def1} (b) E_{def2} (c) E_{def3} et (d) fréquence propre du pic 7 de l'énergie E_{def1} en fonction de la raideur k_z .

pour les pics 2, 5, 7 et 9. Ces temps proviennent du grand nombre de QoI correspondant au nombre des fréquences d'échantillonnage entourant chaque pic pour l'approche sPC1 (table 5.2). A l'inverse, avec l'approche sPC2, lorsque les coefficients sont connus, effectuer les 10 000 calculs pour seulement 2 QoI, l'amplitude et la fréquence de chaque pic a un coût très faible (inférieur à 1 second) de nouveau les coûts d'exploitation avec la méthode sPC2 sont les plus faibles. Lorsqu'on compare les coûts de calcul totaux des deux méthodes basées sur le chaos à celles obtenues avec la méthode de référence, il apparait des réductions très élevées respectivement de 99.76 % et 99.82 % pour les méthodes sPC1 et sPC2.

5.2.4.5 Conclusion sur les approches

Dans cette section, des méthodes basées sur des développements en chaos polynômial creux ont été proposés pour prédire le comportement de quantités d'intérêt (QoI) liées aux énergies de déformation des trois plaques connectées par des ressorts en présence d'un paramètre incertain, à savoir la raideur des ressorts verticaux. Seule la seconde approche, dénommée sPC2, s'est avérée efficace, à la fois en termes de précision et de temps de calcul, pour retrouver les résultats de référence. Dans cette

Méthodes	Méthode de référence	sPC1-FEM	sPC2-FEM
Pic 2	Coût construction	-	$N_f \times Q \times$ Temps unitaire par FEM complet
	N_f	351	351
	Ordre du chaos	5	2
	Q	24	14
	Valeur	54 min 39 s	31 min 52 s
	Coût exploitation	10 000 x N_f x Temps unitaire par FEM complet	10 000 x Temps unitaire du calcul d'un chaos
Pic 5	Valeur	15jours 20h	<1 s
	Coût total	15jours 20h	32 min
	Pourcentage de réduction (%)	-	99.76
	Coût construction	-	$N_f \times Q \times$ Temps unitaire par FEM complet
	N_f	5071	5071
	Ordre du chaos	5	3
Pic 7	Q	24	16
	Valeur	13h 9 min 38 s	8h 46 min 25 s
	Coût exploitation	10 000 x N_f x Temps unitaire par FEM complet	10 000 x Temps unitaire du calcul d'un chaos
	Valeur	15jours 20h	<1 s
	Coût total	15jours 20h	8h 46
	Pourcentage de réduction (%)	-	99.76
Pic 9	Coût construction	-	$N_f \times Q \times$ Temps unitaire par FEM complet
	N_f	2601	2601
	Ordre du chaos	5	5
	Q	24	24
	Valeur	6h 45 min 1 s	6h 45 min 1 s
	Coût exploitation	10 000 x N_f x Temps unitaire par FEM complet	10 000 x Temps unitaire du calcul d'un chaos
Pic 9	Valeur	117jours 7h	<1 s
	Coût total	117jours 7h	6h 45
	Pourcentage de réduction (%)	-	99.76
	Coût construction	-	$N_f \times Q \times$ Temps unitaire par FEM complet
	N_f	901	901
	Ordre du chaos	5	3
Pic 9	Q	24	16
	Valeur	2h 20 min 18 s	1h 33 min 32 s
	Coût exploitation	10 000 x N_f x Temps unitaire par FEM complet	10 000 x Temps unitaire du calcul d'un chaos
	Valeur	40jours 14h	<1 s
	Coût total	40jours 14h	1h 34
	Pourcentage de réduction (%)	-	99.76

TABLEAU 5.4 – Coûts de calcul pour huit QoI liées aux pics 2, 5, 7 et 9 de l'énergie de déformation de la plaque 1 pour $N = 10\,000$ valeurs d'un paramètre incertain k_z .

approche, les QoI sont les amplitudes et les fréquences propres des pics d'énergies de déformation des différentes plaques. Les développements en chaos polynomial creux nécessitent de calculer deux séries de coefficients par pic étudié, au moyen d'un certain nombre de simulations impliquant le FEM complet du système.

Dans la suite de ce chapitre, on va chercher à déterminer l'impact de l'utilisation, pour la construction des coefficients du chaos, d'un modèle réduit du système des trois plaques, au lieu du FEM complet, sur les prédictions obtenues avec l'approche sPC2. Le nombre de paramètres incertains sera également augmenté en vue de tester l'efficacité de la méthode. Pour alléger l'écriture, cette approche sPC2 sera simplement dénotée sPC dans la section suivante.

5.3 Association du chaos polynomial creux avec les modèles réduits de type Craig-Bampton

Comme expliqué précédemment, l'objectif de cette section est d'étudier l'influence de l'utilisation d'un FEM réduit du système pour construire les coefficients du chaos. Dans cette optique, les résultats seront donnés pour les mêmes quantités d'intérêt (QoI) que dans la section précédente : on se focalisera en particulier sur les fréquences propres et amplitudes des 4 pics retenus précédemment (pics 2, 5, 7 et 9) concernant les énergies de déformation des trois plaques. On rappelle que les valeurs de référence sont obtenues, pour une raideur k_z donnée, par une simulation impliquant le FEM complet sur un petit intervalle fréquentiel entourant la fréquence propre du pic étudié, suivi d'un traitement pour détecter le maximum local de l'énergie de déformation considérée sur cette bande de fréquences. Comme il a déjà été mentionné, la méthode suppose donc de connaître au préalable les ordres de grandeur des fréquences des pics d'intérêt.

Concernant le nombre de paramètres incertains, différents scénarios seront envisagés dans cette section. L'incertitude portera comme précédemment sur la valeur de la raideur k_z des ressorts verticaux qui connectent les trois plaques. Dans un premier temps, on reprendra l'étude précédente avec un unique paramètre incertain : la raideur k_z sera supposée identique pour les 82 ressorts qui composent les jonctions entre les plaques, et incertaine dans l'intervalle $[100; 200] N/m$. On traitera ensuite les cas de 8, 16 et 82 paramètres incertains. Les ressorts seront alors répartis en groupes au sein desquels la raideur k_z sera identique, mais les valeurs de raideur pourront varier d'un groupe à l'autre (en restant dans le même intervalle d'incertitude que pour un paramètre incertain). Pour le cas extrême de 82 paramètres incertains, tous les ressorts pourront avoir des raideurs distinctes comprises entre $100 N/m$ et $200 N/m$.

Dans cette section, pour chaque QoI (fréquence ou amplitude d'un pic d'une énergie de déformation donnée), trois développements sPC vont être construits conformément à la procédure itérative détaillée dans la section 2.5.3 du Chapitre 2. Le premier, dénoté dans la suite sPC-FEM, correspond à celui présenté dans la section précédente : les coefficients du chaos sont construits à partir d'un certain nombre de simulations du FEM complet du système des trois plaques. Les deux autres développements seront dénotés respectivement sPC-CB50130 et sPC-CB3080. Les coefficients du chaos sont dans ces cas construits à partir de simulations de l'un des modèles réduits dans le cadre de la méthode de Craig-Bampton que nous avons présentées dans le chapitre précédent.

Il est à noter que l'ordre du chaos impose un nombre minimal de ces simulations permettant de calculer les coefficients, qui correspondent à un jeu de valeurs du paramètres incertains k_z du Plan d'Expérience Numérique (PEN). La taille du PEN initial $Q_0 = 4(N_p + 1)$, avec $(N_p + 1)$ les coefficients du chaos, est déterminé par l'équation (2.12) avec r paramètres incertains et l'ordre du chaos $p = 1$.

Cet ensemble peut par ailleurs être enrichi par la procédure itérative détaillée dans la section 2.5.5. Pour éviter que les résultats obtenus par les trois versions de chaos ne soient affectés par le choix de ce jeu de valeurs, et ne dépendent que du modèle utilisé pour effectuer les simulations correspondantes, un jeu de valeurs du même PEN sera imposé pour les trois développements sPC. Le nombre de simulations réalisées sera donc identique dans chaque cas, égal au nombre de simulations minimal requis par le développement le plus coûteux, même si l'ordre du chaos résultant de l'algorithme pourra différer d'un développement à l'autre.

Le même ensemble de paramètres est utilisé dans les cas de 1, 8, 16 et 82 paramètres incertains : l'ordre maximal du chaos polynomial est $p_{max} = 5$, la précision cible vaut $S_{cible}^2 = 0.999$, la norme $m = 0.8$ et les valeurs des seuils sont fixées à $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.001(1 - S_{cible}^2)$. Dans le cas de 82 paramètres incertains l'ordre maximal du chaos polynomial est $p_{max} = 3$ pour limiter le nombre de simulations nécessaires pour construire les coefficients du chaos, cependant les autres paramètres ne changent pas.

L'efficacité de ces trois développements en chaos polynomial creux sera notamment évaluée dans le cadre d'une procédure Monte-Carlo en comparant les statistiques (moyenne et variance) d'une QoI obtenues par ces développements sPC en effectuant N tirages du jeu de paramètres incertains, avec les statistiques de référence obtenues par N simulations du FEM complet (ce type d'analyse a été utilisé dans la section précédente en utilisant $N = 10\,000$ valeurs de l'unique paramètre incertain considéré). Cette méthode de référence sera dénotée FEM dans la suite. A titre comparatif, on s'intéressera également aux statistiques obtenues par N simulations numériques impliquant non pas le FEM complet, mais les modèles réduits dans le cadre de méthode de Craig-Bampton (qui seront dénotés CB50130 et CB3080 comme précédemment).

5.3.1 Cas d'un paramètre incertain

Pour illustrer les résultats obtenus dans ce premier cas, nous allons nous intéresser à quatre QoI : la fréquence propre et l'amplitude du pic 2 de l'énergie de déformation de la plaque 1, que nous avons déjà considérées pour illustrer les deux approches dans la section précédente ; l'amplitude du pic 5 de la même énergie de déformation $E_{def\,1}$, pour laquelle les écarts entre les différentes méthodes seront un peu plus marquées ; enfin la QoI qui présentait la plus grande sensibilité au paramètre incertain (voir tableau 5.1), à savoir l'amplitude du pic 7 de l'énergie $E_{def\,1}$.

5.3.1.1 Fréquence propre du pic 2 de l'énergie $E_{def\,1}$

Construction des développements sPC

Comme expliqué dans le Chapitre 2, l'ordre optimal p du chaos dépend de l'erreur leave-one-out S_0^2 , qui est calculée à chaque étape de la procédure itérative et comparée à la valeur cible S_{cible}^2 . Pour cette première QoI (la fréquence propre du pic 2 de l'énergie de déformation $E_{def\,1}$ de la plaque 1), les valeurs de S_0^2 obtenues pour les trois développements sPC (sPC-FEM, sPC-CB50130 et sPC-3080) sont identiques et égales à $S_0^2 = 0.9820$ pour $p = 1$ et $S_0^2 = 0.9997$ pour $p = 2$. L'ordre optimal pour les trois sPC est donc $p = 2$.

Statistiques de la QoI obtenues à partir des différentes méthodes

Les statistiques (moyenne et variance) de la QoI dépendent du nombre de simulations N choisies dans la procédure Monte-Carlo, chaque simulation correspondant à une valeur distincte du paramètre incertain k_z .

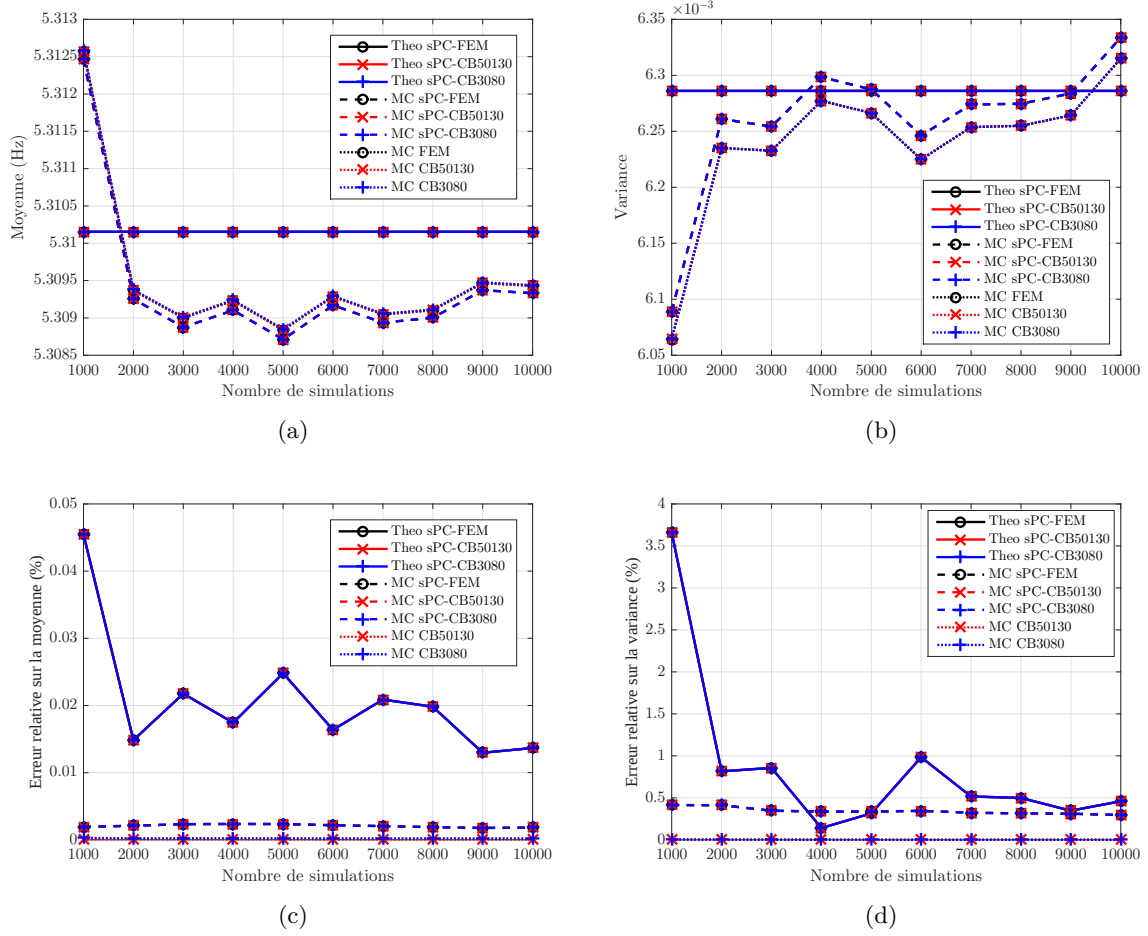


FIGURE 5.9 – (a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de la fréquence propre f_2 du second pic de l'énergie E_{def1} , en fonction du nombre de simulations MC.

Plusieurs tests allant de $N = 1000$ à $N = 10000$ ont été effectués pour chacune des six méthodes évoquées précédemment (FEM, CB50130, CB3080, sPC-FEM, sPC-CB50130 et sPC-CB3080). Les Figures 5.9 (a) et (b) comparent les statistiques (moyenne et variance) obtenues par les 6 méthodes pour dix valeurs de N . Sur ces deux figures ont également été ajoutées les valeurs théoriques de la moyenne et de la variance, obtenues pour les 3 versions des chaos (Theo sPC-FEM, Theo sPC-CB50130 et Theo sPC-CB3080). Ces valeurs théoriques, calculées avec l'équation (2.22), ne nécessitent pas de simulations mais seulement la connaissance des coefficients du chaos. Il apparaît que les valeurs de la moyenne et de la variance se stabilisent à partir de $N = 2000$ approximativement, et tendent à se rapprocher des valeurs théoriques.

Trois groupes de courbes sont visibles sur chaque graphique, ce qui signifie que l'utilisation d'un développement sPC (quel que soit le modèle choisi pour construire les coefficients du chaos) induit un léger changement de la moyenne et de la variance par rapport aux valeurs de référence, mais que l'utilisation d'un modèle réduit CB ne modifie pas les statistiques de manière significative.

Les faibles niveaux de variance obtenus dans la Figure 5.9 (b) réduisent également les intervalles de confiance par rapport à la fréquence de résonance moyenne. Par exemple, pour $N = 10000$, la moyenne de la fréquence propre du pic 2 se situe dans l'intervalle $\bar{f}_2 \pm 1.2 \cdot 10^{-4}$ avec un niveau de confiance de 95 %.

Pour analyser plus en détail les précisions des différentes méthodes, les erreurs relatives sur la moyenne et sur la variance de la QoI par rapport à la solution de référence (c'est-à-dire N simulations du FEM complet) sont tracées sur les figures 5.9 (c) et (d). Trois groupes de courbes sont à nouveau visibles sur chaque graphique, conformément aux résultats des figures 5.9 (a) et (b). Les niveaux d'erreur les plus faibles sont obtenus logiquement avec la méthode CB50130, qui implique N simulations directes avec le modèle CB réduit qui possède la plus grande base de modes d'interface fixe. Réduire la taille de cette base augmente légèrement les niveaux d'erreur, mais la précision reste excellente dans les deux cas, avec des niveaux d'erreur proches de 0. L'utilisation d'un développement sPC augmente les niveaux d'erreur, qui restent toutefois inférieurs à $2.5 \cdot 10^{-3} \%$ pour la moyenne et 0.5% pour la variance. Le choix d'un modèle réduit au lieu du FEM complet pour calculer les coefficients du chaos n'augmente pas les niveaux d'erreur pour cette QoI. Les trois valeurs théoriques de la moyenne et de la variance étant assez proches des valeurs de référence sur les figures 5.9 (a) et (b), les niveaux d'erreur théorique s'avèrent inférieurs à 0.02% pour la moyenne et 0.5% pour la variance à partir de $N = 8000$.

Les mêmes conclusions se dégagent lors de l'analyse des valeurs moyennes des erreurs relatives (Figure 5.10) calculées cette fois pour chaque valeur de k_z entre la fréquence du pic 2 résultant d'une méthode donnée (impliquant un modèle réduit ou un sPC) et celle obtenue avec la solution de référence (impliquant le FEM complet). Les erreurs proviennent principalement des développements sPC, l'influence de la réduction du modèle étant à nouveau très limitée ; le niveau de précision est également extrêmement satisfaisant avec une erreur relative moyenne inférieure à 0.015% quel que soit le nombre de simulations retenu.

Évolution de la fréquence propre du pic 2 en fonction de k_z

Les résultats dans ce paragraphe sont présentés pour le nombre le plus élevé de simulations $N = 10000$, afin de garantir que la QoI est prédite avec le niveau de confiance le plus élevé. La Figure 5.11 représente les valeurs de la fréquence propre du pic 2 obtenues pour chacune des 10000 valeurs de k_z choisies dans l'intervalle $[100; 200] N/m$ avec les différentes méthodes : calculées directement avec le FEM complet ou les modèles réduits, ou prédites à partir des trois sPC. La fréquence du

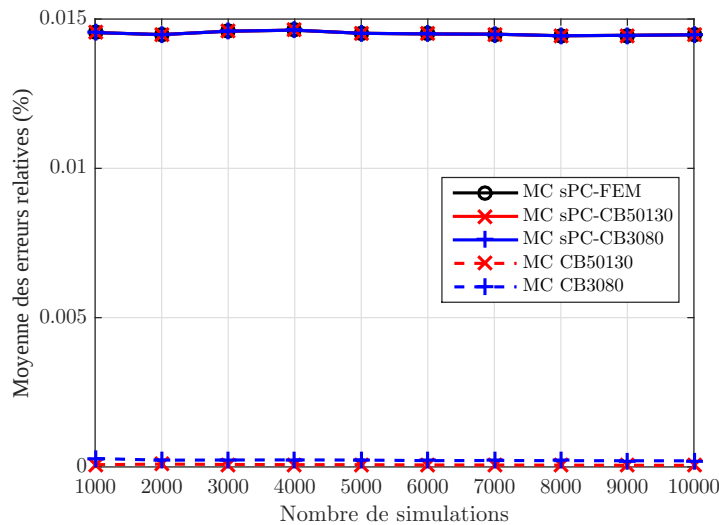


FIGURE 5.10 – Moyenne des erreurs relatives sur la fréquence propre du pic 2 par rapport à la solution de référence, en fonction du nombre de simulations MC.

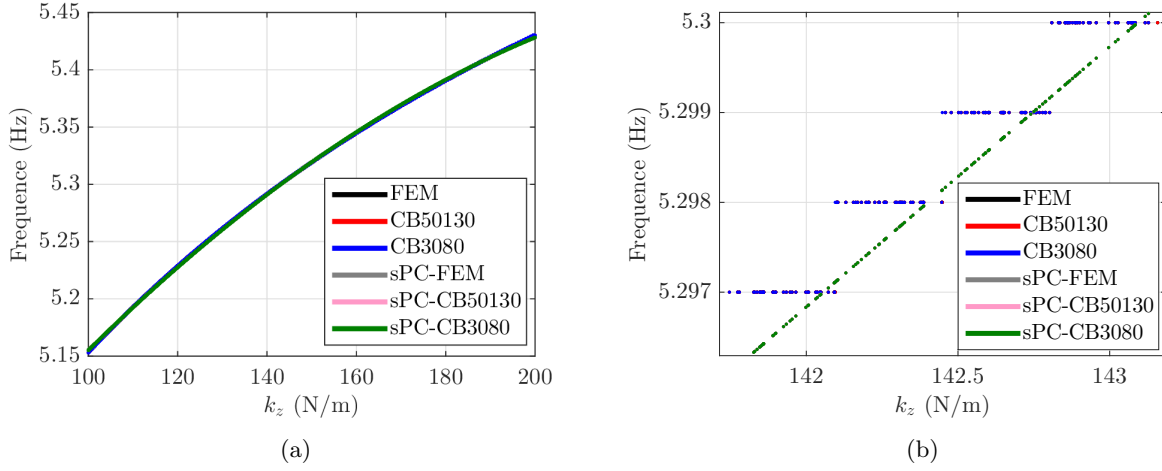


FIGURE 5.11 – (a) Fréquence propre du pic 2 de l'énergie E_{def1} en fonction de la raideur k_z et (b) zoom sur un petit intervalle de valeurs de k_z pour $N = 10\,000$.

pic 2 augmente de façon non linéaire avec la raideur k_z , avec un écart global de 5.217 % (voir tableau 5.1). Un bon accord général est trouvé entre les différentes stratégies, les six courbes apparaissant superposées sur la figure (a) où l'ensemble de la plage de valeurs de k_z est représenté. Toutefois, lorsque l'on effectue un zoom sur un intervalle plus petit de valeurs de k_z , comme sur la Figure 5.11 (b), de légères différences deviennent visibles, en accord avec les niveaux d'erreurs présentés précédemment. Les courbes correspondant aux trois méthodes impliquant des simulations FE directes (FEM, CB50130 et CB3080) présentent des discontinuités liées au pas fréquentiel utilisé dans cette étude, 0,001 Hz ; la fréquence propre est soit sous-estimée, soit surestimée en fonction de la valeur de k_z , car sa précision ne peut dépasser la résolution en fréquence des simulations. Prédire la valeur de fréquence à partir d'un développement sPC évite ce problème, car la fréquence devient une fonction polynomiale de k_z . Les courbes correspondant aux trois développements sPC sont ainsi des courbes continues que l'on peut difficilement distinguer les unes des autres.

5.3.1.2 Amplitude du pic 2 de l'énergie de déformation E_{def1}

Intéressons-nous à présent à l'amplitude du pic 2 de l'énergie de déformation E_{def1} . Pour cette seconde QoI, les valeurs d'erreurs leave-one-out sont identiques à celles obtenues pour la fréquence propre f_2 et l'ordre optimal des développements en chaos est à nouveau $p = 2$.

Statistiques de la QoI obtenues à partir des différentes méthodes

Comme pour la fréquence propre, les statistiques relatives à l'amplitude du pic 2 de l'énergie de déformation E_{def1} sont calculées pour N valeurs de k_z , allant de $N = 1000$ à $N = 10000$. Les mêmes tendances générales se dégagent pour l'amplitude du pic que pour sa fréquence, avec notamment une stabilisation des valeurs de moyenne et de variance à partir de $N = 2000$, comme le montrent les figures 5.12 (a) et (b). On note cependant que les trois valeurs théoriques de la moyenne (i.e. le premier coefficient de chaque développement sPC), sur la figure (a), ne sont cette fois pas parfaitement superposées, la valeur obtenue dans le cas sPC-CB3080 se distinguant des deux autres.

En ce qui concerne la moyenne calculée à partir des N tirages de k_z , les courbes relatives aux

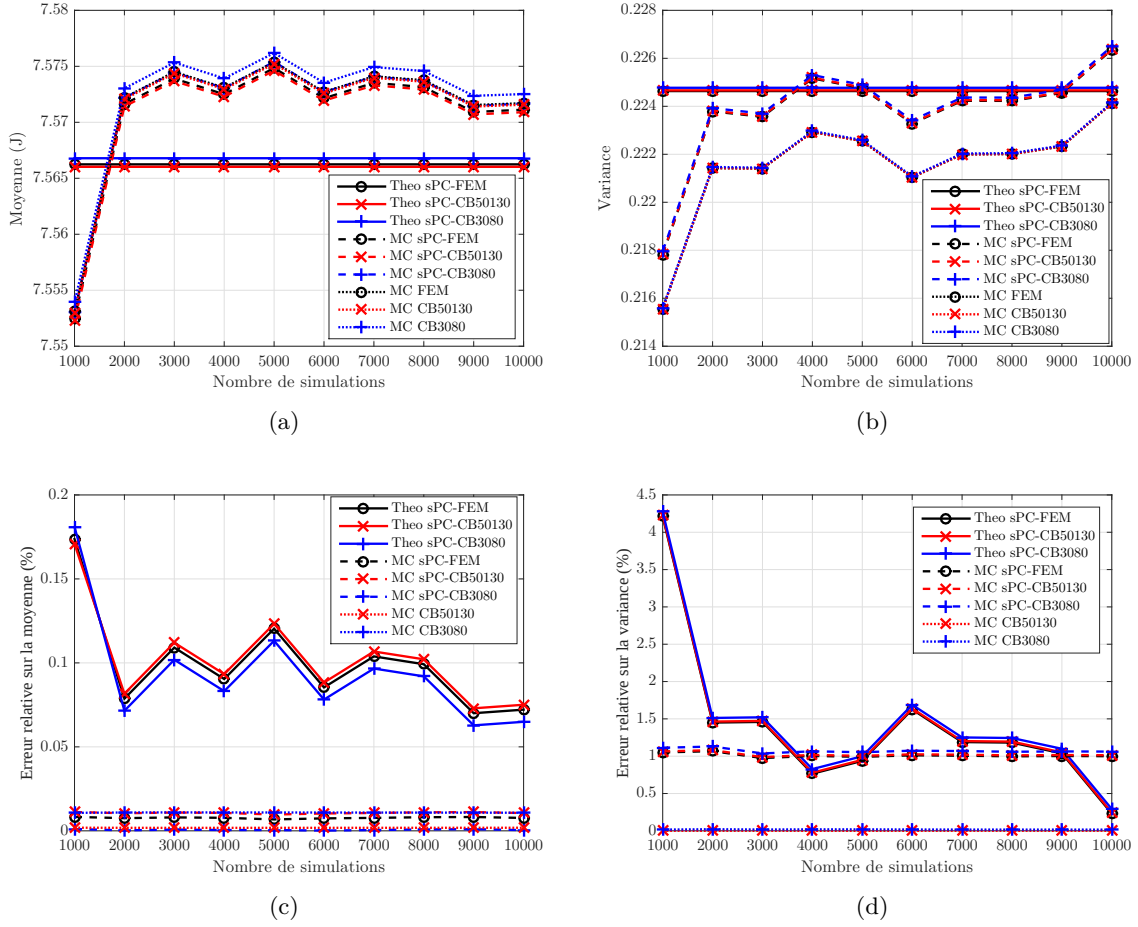


FIGURE 5.12 – (a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l’amplitude du pic 2 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC.

FEM et CB50130 sont quasiment superposées, tandis que la courbe relative au modèle CB3080 (qui correspond à la base de modes d’interface fixe la plus réduite) est également légèrement décalée vers le haut. Lorsque les coefficients du chaos sont calculés à partir de simulations impliquant le FEM complet (cas sPC-FEM), on obtient à l’inverse une courbe légèrement décalée vers le bas, impliquant que l’utilisation d’un développement sPC fait diminuer la moyenne de la QoI. Ces tendances opposées se compensent lorsque les coefficients du chaos sont construits à partir de simulations impliquant le modèle le plus réduit (cas sPC-CB3080), la courbe correspondante étant quasiment superposée avec celle de référence, et les niveaux d’erreur tendant vers 0%. Les niveaux d’erreurs relatifs pour les méthodes sPC-FEM et sPC-CB50130 ne sont pas nuls mais restent inférieurs à 0.015 %. De même pour la moyenne théorique, les niveaux d’erreur dans le cas sPC-CB3080 sont légèrement plus faibles que pour les cas sPC-FEM et sPC-CB50130.

En ce qui concerne la variance, on retrouve les trois groupes de courbes que l’on avait pour la fréquence. Les erreurs relatives de variance par rapport à la solution de référence sont illustrées sur la Figure 5.12 (d) et présentent des niveaux globalement très satisfaisants bien qu’elles soient supérieures à celles obtenues pour la fréquence de résonance. L’utilisation d’une base réduite au lieu du FEM complet a encore une faible incidence sur les erreurs de variance, induisant un niveau d’erreur d’environ 0.02 %. L’influence des développements sPC sur la précision de l’estimation de la variance est plus

importante, avec des niveaux d'erreur d'environ 1 %. Les meilleurs résultats sont obtenus lorsque les coefficients sPC sont calculés à l'aide du FEM complet (cas sPC-FEM), tandis que les niveaux d'erreur augmentent jusqu'à 1,1 % avec la méthode sPC-CB3080.

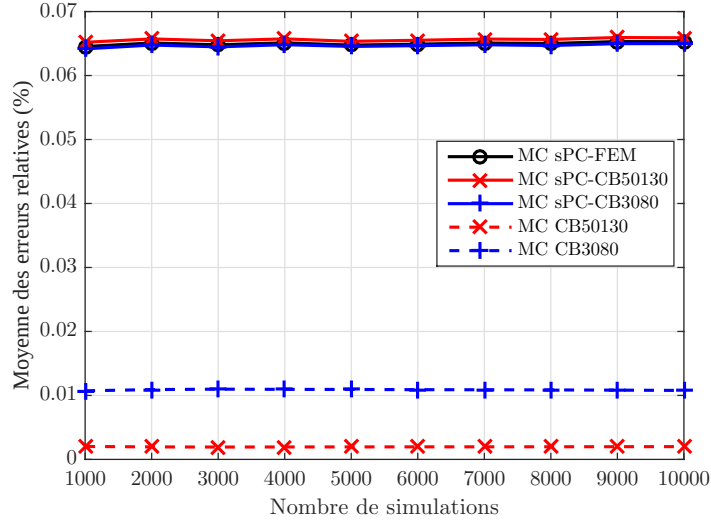


FIGURE 5.13 – Moyenne des erreurs relatives sur l'amplitude du pic 2 par rapport à la solution de référence, en fonction du nombre de simulations MC.

La Figure 5.13 montre la moyenne des erreurs relatives calculées, pour chaque valeur de k_z , entre l'amplitude résultant d'une méthode donnée (impliquant une base réduite ou un développement sPC) et celle de référence. Comme précédemment, les niveaux d'erreur deviennent constants à partir de $N = 2000$ et résultent principalement de l'utilisation d'un développement sPC, tandis que la réduction de modèle CB induit de faibles erreurs supplémentaires. Toutes les méthodes fournissent une excellente précision avec des niveaux d'erreur globalement très faibles. Ainsi, le niveau d'erreur moyen est d'environ 0.002 % avec la méthode CB50130, de 0.01, % avec la méthode CB3080 et de 0.065 % avec les développements sPC.

Évolutions de l'amplitude du pic 2 de l'énergie E_{def1} en fonction de k_z

Les évolutions de l'amplitude du pic 2 E_{def1} , calculées directement à partir de $N = 10000$ simulations du FEM complet ou d'un modèle CB réduit, ou prédites par un des trois développements sPC, sont finalement tracées dans la Figure 5.14. La QoI est ici une fonction non linéaire décroissante de la raideur k_z , avec un écart global d'égal 21.756 % (voir tableau 5.1), et les six courbes apparaissent à nouveau superposées sur toute la plage de k_z . Les écarts entre les solutions sont révélées dans la vue détaillée (figure (b)), où deux groupes de courbes sont à nouveau visibles. Le premier groupe concerne les simulations directes impliquant les FEM complet et réduits, pour lesquelles la fréquence du pic 2 peut être sous-estimée ou surestimée en raison du pas fréquentiel limité de 0.001 Hz.

Ce phénomène devient plus clair quand on regarde l'évolution fréquentielle de l'énergie de déformation E_{def1} pour différentes valeurs de k_z sur la Figure 5.15 ; la fréquence réelle du pic 2 se situerait entre les valeurs 5.153 et 5.154 Hz pour tout un ensemble de valeurs de k_z , mais est numériquement approchée par l'une de ces deux valeurs en raison du pas fréquentiel d'étude. L'amplitude du pic est en conséquence sous-estimée pour ces valeurs de k_z , conduisant à l'allure inégale des courbes sur la Figure

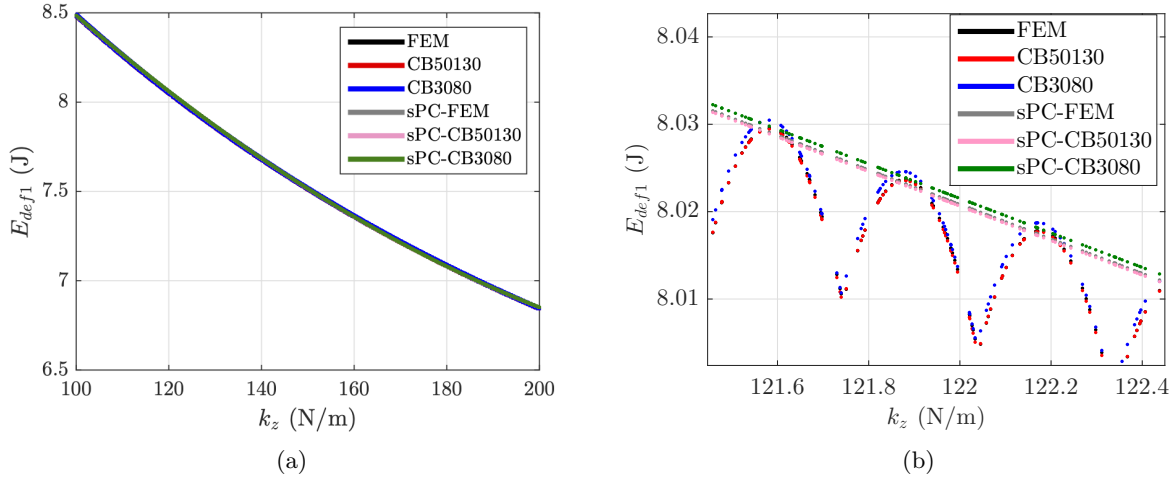


FIGURE 5.14 – (a) Amplitude du pic 2 de l'énergie de déformation E_{def1} en fonction de la raideur k_z et (b) zoom sur un petit intervalle de valeurs de k_z pour $N = 10\,000$.

5.14(b). Ces dernières atteignent leurs valeurs maximales lorsque la valeur réelle de la fréquence propre du pic coïncide avec un multiple du pas fréquentiel. L'utilisation d'un développement sPC pour prédire l'amplitude du pic s'avère à nouveau efficace pour résoudre ce problème, car les courbes obtenues sont lissées et correspondent aux valeurs maximales du premier groupe.

En ce qui concerne la précision des prévisions, on peut constater que dans le premier groupe, la courbe correspondant à la méthode CB50130 est parfaitement superposée à la courbe FEM de référence, tandis que la courbe correspondant à la méthode CB3080 est légèrement décalée (mais reste très proche des deux premières). Cette tendance est retrouvée dans le deuxième groupe, où la courbe correspondant au cas sPC-CB3080 ne se superpose pas parfaitement aux deux autres courbes, bien que les différences soient extrêmement faibles.

5.3.1.3 Amplitude du pic 5 de l'énergie de déformation E_{def1}

Construction des développements sPC

Pour cette QoI, l'ordre optimal des trois développements sPC doit être augmenté à $p = 3$. Les valeurs des erreurs leave-one-out S_0^2 des trois développements sPC (sPC-FEM, sPC-CB50130 et sPC-3080) sont représentées sur la Figure 5.16. On constate que le choix du modèle permettant de construire les coefficients du chaos a ici un impact, puisque pour $p = 1$ et $p = 2$ l'erreur S_0^2 est différente pour le cas sPC-CB3080 par rapport aux deux autres méthodes, signifiant que les valeurs des coefficients, et éventuellement le jeu de coefficients finalement conservés par l'algorithme sPC, diffèrent d'une version à l'autre. Les trois valeurs convergent néanmoins pour $p = 3$ à $S_0^2 = 0,9992$.

Statistiques de la QoI obtenues à partir des différentes méthodes

Les résultats concernant les moyennes et variances de la QoI obtenues pour $N = 1000$ à $N = 10000$ tirages du paramètre incertain k_z sont représentés pour les six méthodes sur la Figure 5.17. On note que le nombre de simulations requis pour voir une stabilisation de ces valeurs est pour cette quantité augmenté à $N = 3000$.

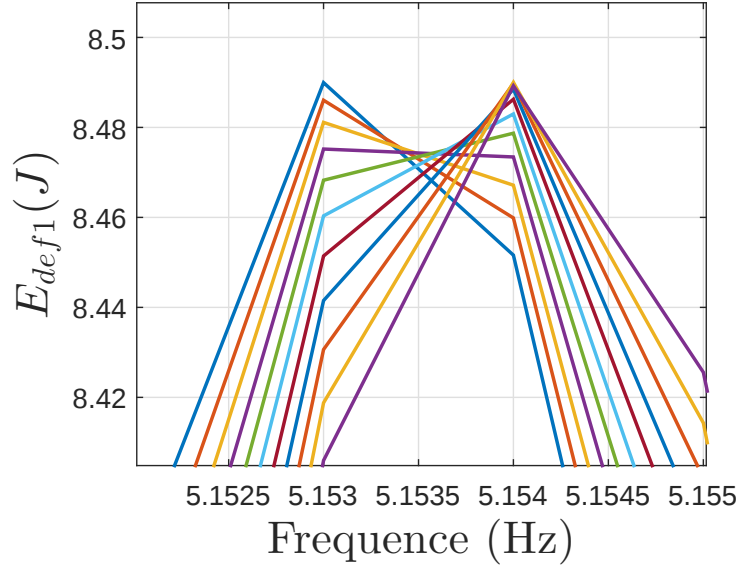


FIGURE 5.15 – Amplitudes de l'énergie de déformation E_{def1} calculées par la méthode FEM de référence en fonction de la fréquence, pour différentes valeurs de $k_z \in [100; 100.2] \text{ N/m}$.

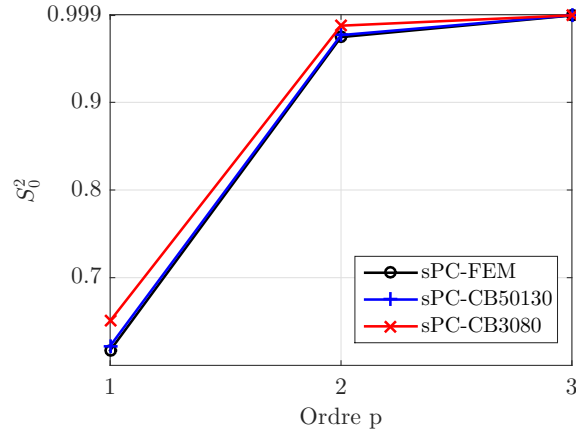


FIGURE 5.16 – Les erreurs leave-one-out S_0^2 des trois développements sPC (sPC-FEM, sPC-CB50130 et sPC-CB3080) pour l'amplitude du pic 5 de l'énergie E_{def1} en fonction de l'ordre p

En ce qui concerne la moyenne (figures (a) et (c)), on note comme précédemment que l'utilisation du modèle réduit avec la plus grande base CB50130 n'engendre pas d'écart notable par rapport au FEM complet, contrairement au modèle CB3080 pour lequel les courbes sont décalées (la moyenne est augmentée dans tous les cas, qu'il s'agisse de N simulations directes avec le modèle CB3080 ou que ce modèle soit utilisé pour calculer les coefficients d'un développement sPC, ce que l'on retrouve pour la valeur de la moyenne théorique); de façon générale, l'utilisation d'un développement sPC induit une faible erreur (limitée à 0.2%) par rapport à la méthode de référence.

Les écarts sont cependant plus visibles pour la variance (figures (b) et (d)). L'utilisation d'un développement sPC engendre ainsi des niveaux d'erreur de l'ordre de 2 % pour le cas sPC-FEM, 2.7 % pour

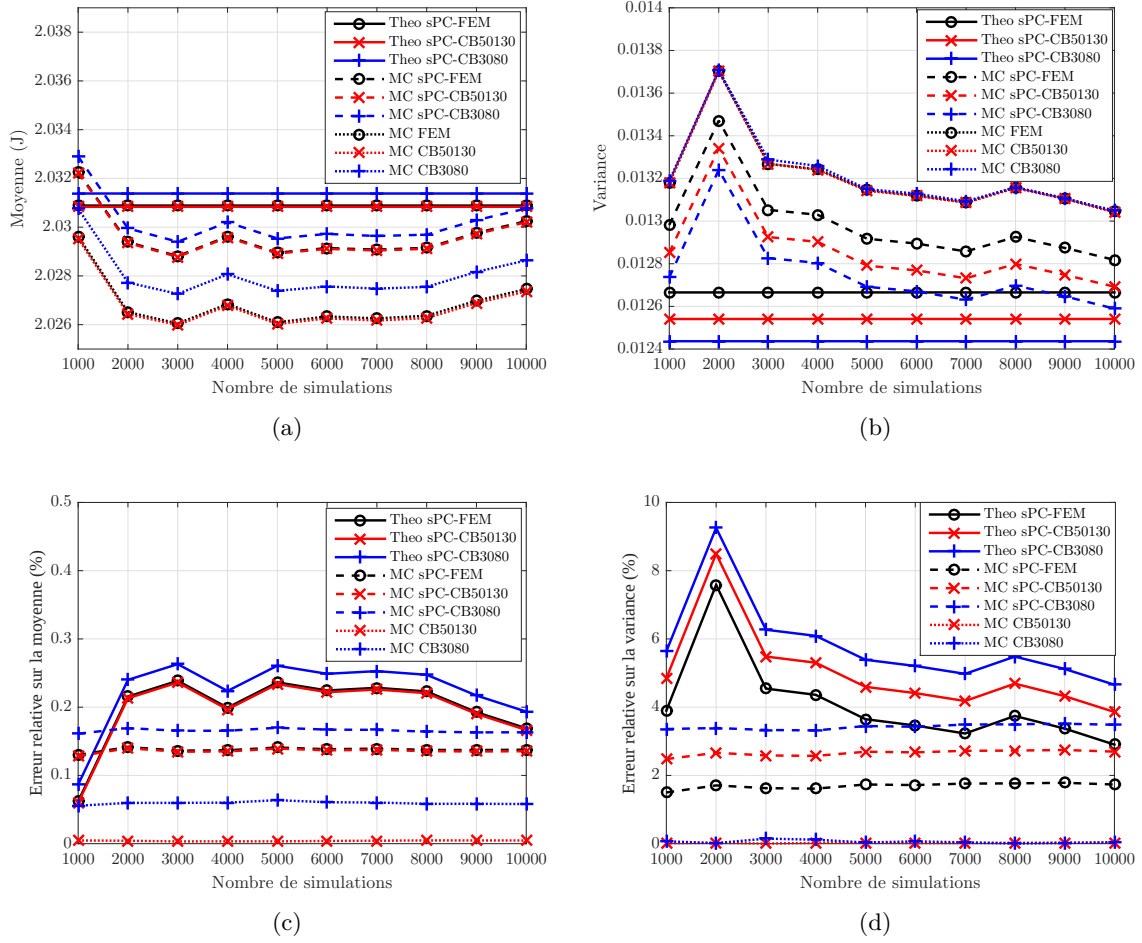


FIGURE 5.17 – (a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l’amplitude du pic 5 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC.

le cas sPC-CB50130 pour lequel la courbe n’est cette fois plus superposée avec celle du cas précédent, et 3.5 % pour le cas sPC-CB3080. Le fait que le modèle utilisé (complet ou réduit) affecte les valeurs des coefficients du développement sPC se retrouve dans les écarts nettement visibles entre les trois valeurs de variance théorique, dépendant de ces coefficients.

Les niveaux de la moyenne des erreurs relatives, visibles sur la Figure 5.18, sont également augmentés par rapport à ceux obtenus pour les deux premières QoI, tout en restant très satisfaisants (de l’ordre de 0.23 % pour les trois développements sPC) ; l’erreur maximale est pour une fois obtenue dans le cas CB3080 correspondant aux N simulations directes avec le modèle le plus réduit, le niveau restant inférieur à 0.27 %.

Évolutions de l’amplitude du pic 5 de l’énergie E_{def1} en fonction de k_z

Le bénéfice de l’utilisation d’un développement sPC pour prédire l’évolution de l’amplitude du pic 5 en fonction de k_z est particulièrement visible ici (Figure 5.19). En effet, ce pic 5 est plus sensible que le pic 2 à la valeur de k_z (avec un écart global de 19.417 % sur l’intervalle d’incertitude de k_z), et reste suffisamment fin pour être affecté par le pas fréquentiel limité à $10^{-3} Hz$. Comme le montre la Figure

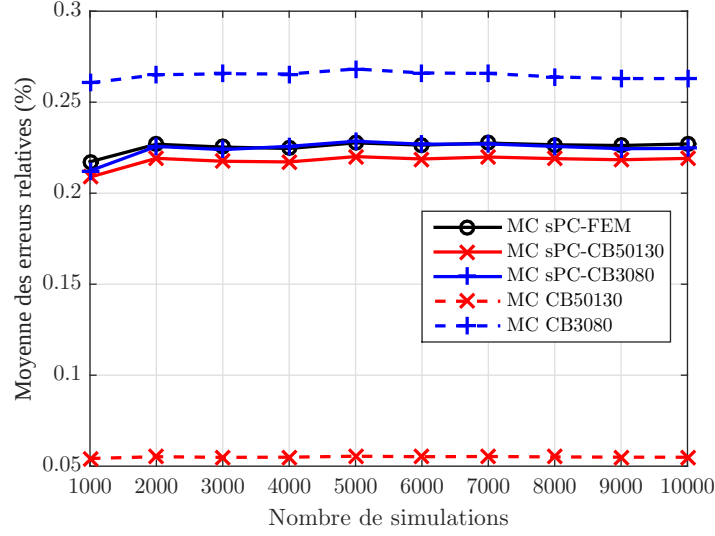


FIGURE 5.18 – Moyenne des erreurs relatives sur l'amplitude du pic 5 par rapport à la solution de référence, en fonction du nombre de simulations MC.

5.20, la fréquence propre du pic 5 est alternativement surestimée ou sous-estimée selon la valeur de k_z dans les simulations impliquant le modèle complet comme un modèle réduit, ce qui peut conduire à une sous-estimation importante de l'amplitude du pic.

Ainsi, des fluctuations importantes apparaissent lorsque l'amplitude de ce pic est prédite par une simulation directe (cas FEM, CB50130 et CB3080), ce qui est nettement visible sur la Figure 5.19 (b), les nuages de points donnant l'aspect de courbes épaisses sur la figure (a).

Les développements en chaos polynomial permettent de lisser ces évolutions de la QoI en fonction de k_z . Les trois courbes correspondantes sont par ailleurs très proches les unes des autres, la courbe correspondant au cas sPC-CB3080 étant à nouveau faiblement décalée par rapport aux deux autres.

5.3.1.4 Amplitude du pic 7 de l'énergie de déformation E_{def1}

Construction des développements sPC

On s'intéresse pour finir cette section 5.3.1 à la QoI qui présentait la plus grande sensibilité au paramètre incertain dans les études de la section 5.2, avec un écart global de plus de 400 % sur l'intervalle d'incertitude de k_z . D'après les erreurs leave-one-out S_0^2 obtenues pour les trois développements sPC pour cette QoI, présentées dans la Figure 5.21, l'ordre optimal pour les trois chaos est cette fois $p = 5$.

Statistiques de la QoI obtenues à partir des différentes méthodes

Les résultats concernant les statistiques (moyenne et variance) de cette dernière QoI (l'amplitude du pic 7 de l'énergie de déformation de la première plaque), représentées sur la Figure 5.22, présentent des tendances similaires à celles des précédentes QoI. On note une nouvelle augmentation du nombre minimal de simulations requises pour observer une stabilisation de la moyenne et de la variance, qui est à présent de $N = 5000$ approximativement, bien que des variations soient encore visibles sur la

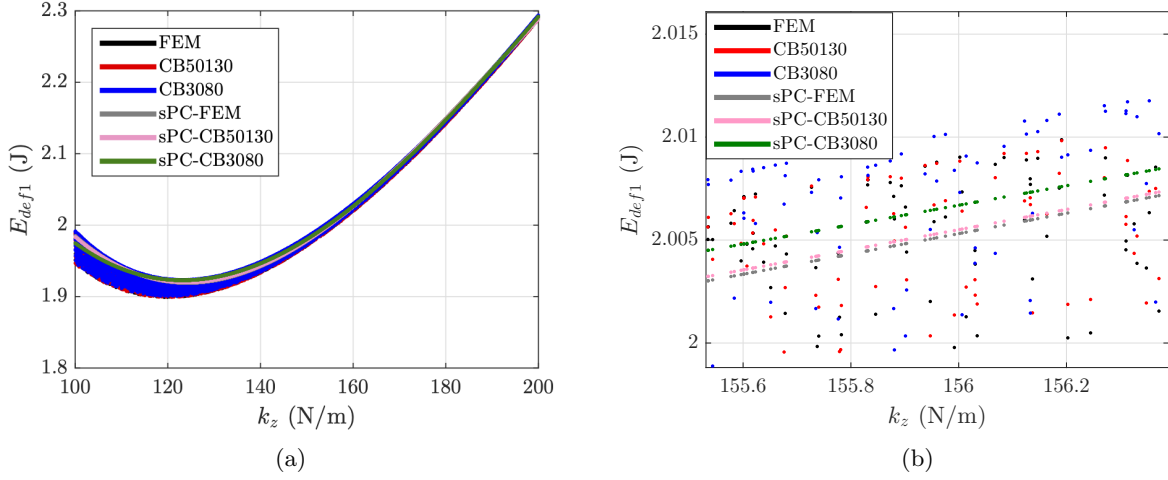


FIGURE 5.19 – (a) Amplitude du pic 5 de l'énergie de déformation E_{def1} en fonction de la raideur k_z et (b) zoom sur un petit intervalle de valeurs de k_z pour $N = 10\,000$.

moyenne. Les niveaux d'erreur sur la moyenne, situés entre 0.5 % et 1 % pour les trois développements sPC, sont de fait plus importants pour cette QoI que pour les précédentes, tout en restant parfaitement acceptables. Les erreurs sur la variance sont en revanche légèrement inférieures à celles relevées pour l'amplitude du pic 5. Dans tous les cas, l'utilisation d'un modèle réduit s'avère d'un faible impact sur les statistiques.

La moyenne des erreurs relatives calculées pour chacune des N valeurs de k_z est en revanche sans surprise plus importante que pour les précédentes QoI dès qu'un développement sPC est utilisé, comme le montre la Figure 5.23 ; elle avoisine en effet 4.6 % pour les trois méthodes sPC-FEM, sPC-CB50130 et sPC-3080.

Évolutions de l'amplitude du pic 7 de l'énergie E_{def1} en fonction de k_z

Les évolutions de l'amplitude du pic 7, calculées directement avec $N = 10\,000$ simulations du FEM complet ou d'un modèle réduit CB, ou prédites par un des trois développements sPC, sont finalement tracées comme précédemment sur la Figure 5.24. Les écarts entre les courbes sont révélés sur la vue détaillée (figure (b)) sur laquelle on retrouve, nettement séparés, les deux groupes de courbes déjà observés pour d'autres QoI et correspondant aux simulations directes d'une part, et aux trois développements sPC d'autre part. Au sein de chaque groupe, les faibles décalages entre courbes témoignent de l'impact limité de l'utilisation d'un modèle réduit par rapport au modèle complet pour prédire l'évolution de cette quantité en fonction du paramètre incertain.

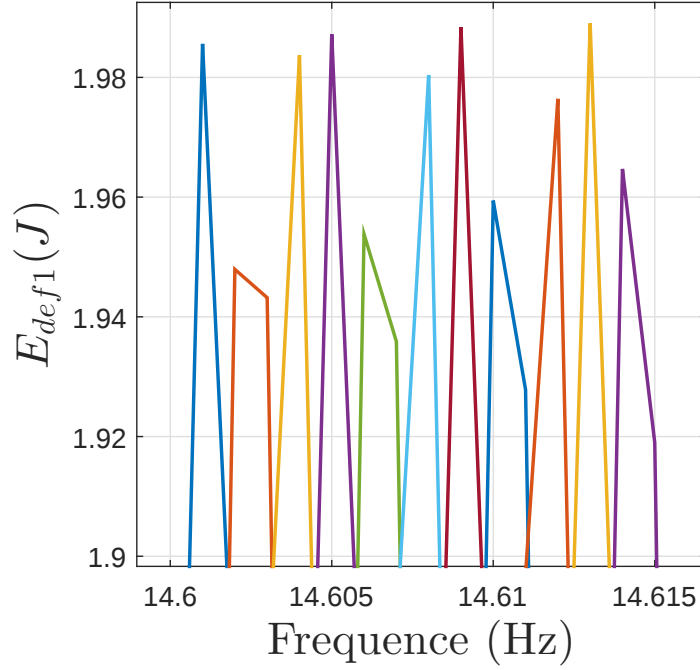


FIGURE 5.20 – Amplitudes de l'énergie de déformation E_{def1} calculées par la méthode FEM de référence en fonction de la fréquence, pour différentes valeurs de $k_z \in [100; 100.2] \text{ N/m}$.

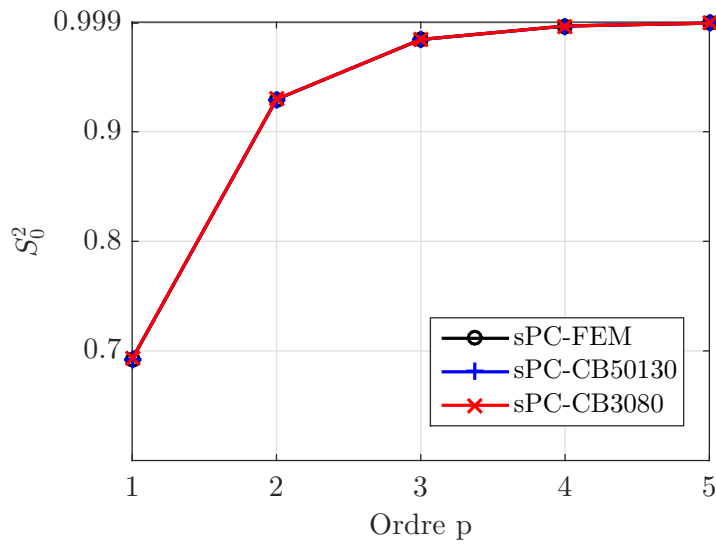


FIGURE 5.21 – Erreurs leave-one-out S_0^2 des trois développements sPC (sPC-FEM, sPC-CB50130 et sPC-3080) pour l'amplitude du pic 7 de l'énergie E_{def1} en fonction de l'ordre p

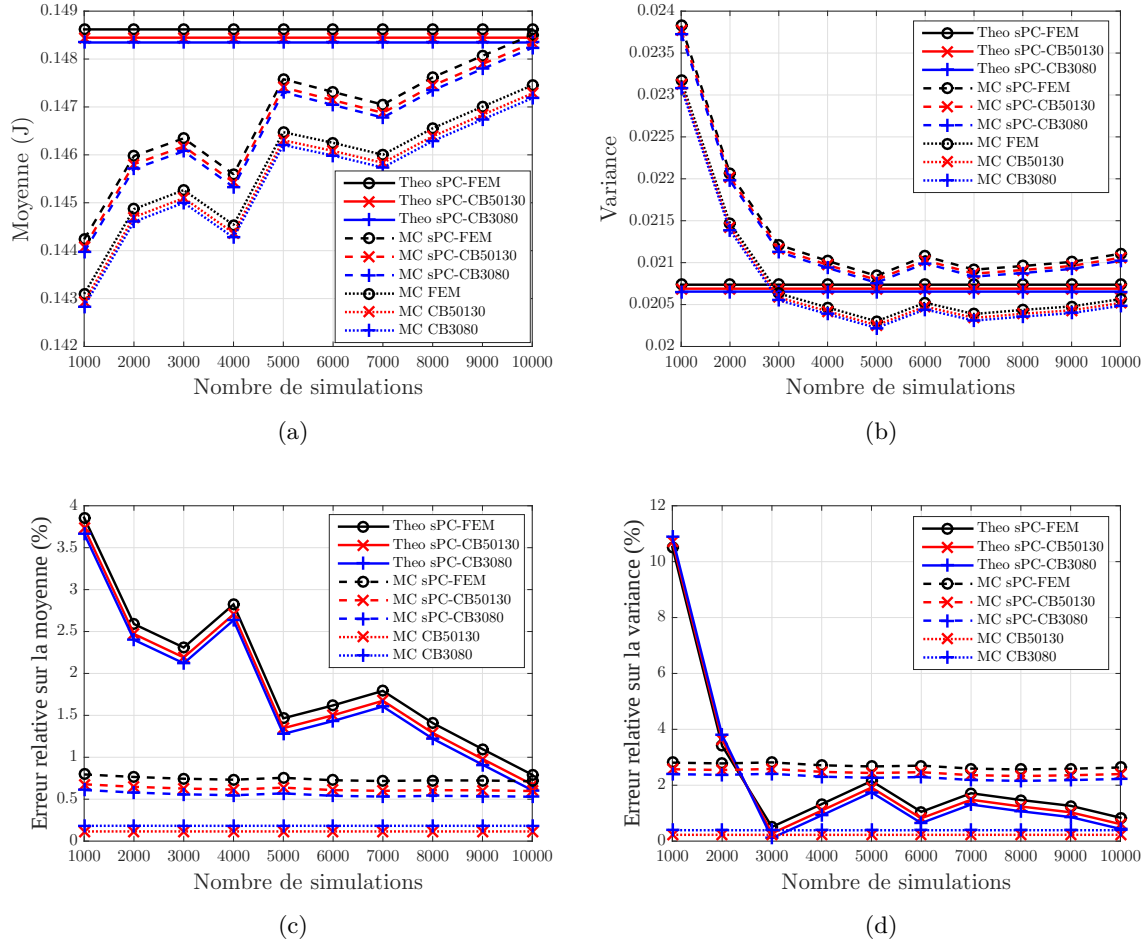


FIGURE 5.22 – (a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 7 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC.

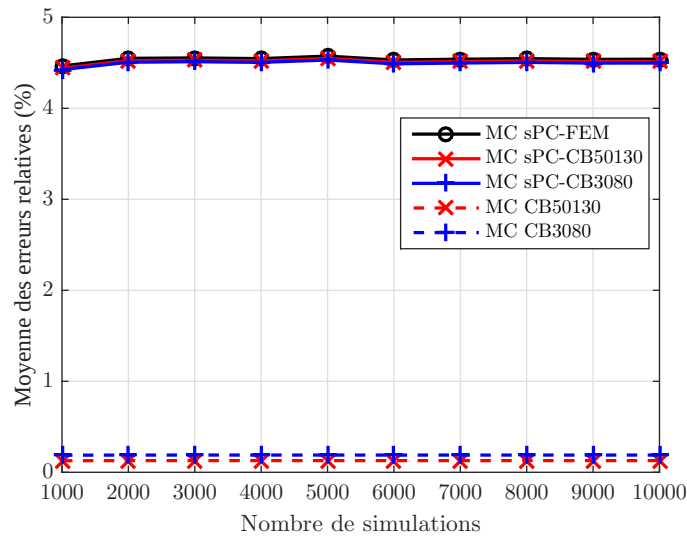


FIGURE 5.23 – Moyenne des erreurs relatives sur l'amplitude du pic 7 par rapport à la solution de référence, en fonction du nombre de simulations MC.

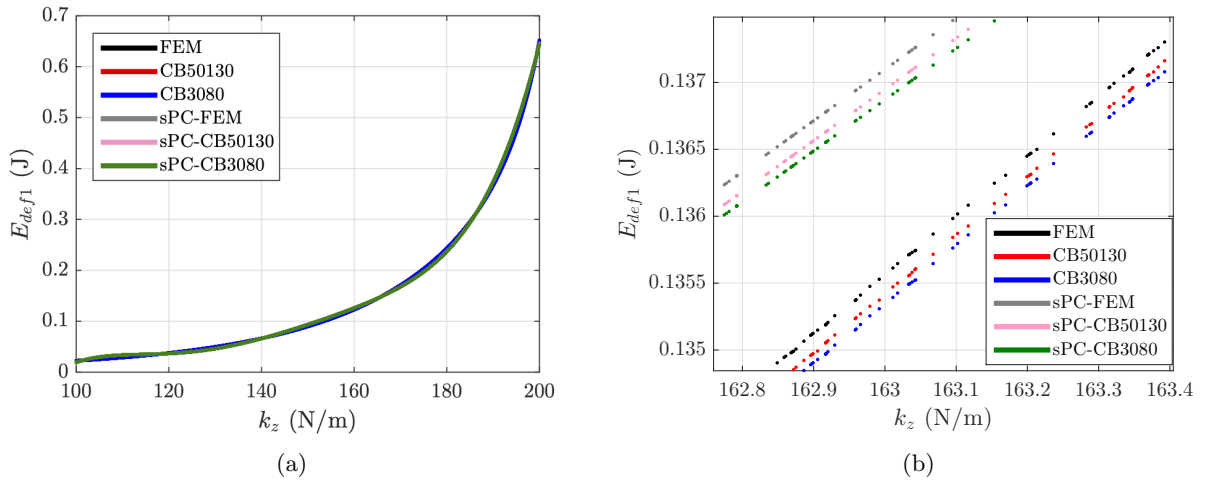


FIGURE 5.24 – (a) Amplitude du pic 7 de l'énergie de déformation E_{def1} en fonction de la raideur k_z et (b) zoom sur un petit intervalle de valeurs de k_z pour $N = 10\,000$.

5.3.1.5 Coût de calcul

Les résultats précédents ont clairement établi que les développements sPC étaient efficaces pour prédire de manière précise les évolutions des différentes QoI en fonction du paramètre incertain (i.e. la raideur du ressort k_z). L'intérêt principal de la méthode est que les coûts de calcul sont extrêmement réduits en raison du nombre limité de simulations nécessaires pour construire les coefficients du chaos.

Pour illustrer cet avantage, les coûts de calcul relatifs aux deux QoI (amplitude et fréquence propre) liées à chacun des quatre pics de l'énergie de déformation E_{def1} (pics 2, 5, 7 et 9) obtenus pour les six méthodes pour $N = 10\,000$ sont présentés dans le tableau 5.5.

La solution de référence est évidemment la plus coûteuse car elle implique $N = 10\,000$ simulations avec le FEM complet. Il est à noter que les coûts de calcul du FEM complet sont donnés pour information. Ces calculs prohibitifs n'ont pas été effectués. Une réduction substantielle des coûts de calcul est déjà réalisée en utilisant un modèle réduit au lieu du FEM complet pour effectuer ces 10 000 simulations. Avec le modèle le plus réduit (CB3080), la réduction du temps de calcul atteint ainsi 73,10 % sans perte de précision notable.

L'avantage des développements sPC est que le nombre de simulations nécessaires pour calculer les coefficients du chaos est très limité. En appliquant la procédure itérative décrite précédemment, seules 14 simulations sont ainsi nécessaires pour les deux premières QoI (fréquence propre et amplitude du pic 2) pour lequel l'ordre $p = 2$ était suffisant. Le nombre maximal de coefficients conservés par l'algorithme est obtenu pour le pic 7 (pour lequel l'ordre est augmenté à $p = 5$), qui requiert 24 simulations par QoI. Une fois les coefficients connus, effectuer les 10 000 calculs pour obtenir la QoI considérée ne coûte rien. La réduction du temps de calcul dépasse ainsi 99 % pour les trois développements sPC proposés, la réduction maximale (99,96 %) étant logiquement atteinte avec la méthode sPC-CB3080 qui implique un nombre de simulations limité avec le modèle le plus réduit.

Il n'y a pas d'avantage à utiliser le sPC au lieu de la méthode classique du chaos polynomial généralisé (gPC) pour le cas $r = 1$, car tous les coefficients du chaos sont gardés. Par conséquent, le nombre de coefficients d'un sPC égal celui d'un gPC qui est calculé par l'équation (2.12). L'avantage de l'utilisation d'un sPC par rapport au gPC sera démontré dans la section 5.3.2.6 pour un plus grand nombre de paramètres incertains.

Ces réductions exceptionnelles de temps de calcul sont néanmoins favorisées par le fait qu'un seul paramètre incertain était considéré jusqu'ici. Dans les sections suivantes, le nombre de paramètres incertains va être augmenté en vue de tester l'efficacité de la méthode. La section suivante va notamment présenter les cas de $r = 8$, $r = 16$ et $r = 82$ paramètres incertains, pour lesquels les résultats obtenus sont proches.

Méthode		FEM	CB50130	CB3080	sPC-FEM	sPC-CB50130	sPC-CB3080
Formule du coût de calcul		$N_f \times \text{Nb tirages}$ $\times$ Temps unitaire par FEM complet	$N_f \times \text{Nb tirages}$ $\times$ Temps unitaire par FEM réduit	$N_f \times \text{Nb tirages}$ $\times$ Temps unitaire par FEM réduit	$N_f \times \text{Nb simulations}$ pour construire chaos $\times$ Temps unitaire par FEM complet	$N_f \times \text{Nb simulations}$ pour construire chaos $\times$ Temps unitaire par FEM réduit	$N_f \times \text{Nb simulations}$ pour construire chaos $\times$ Temps unitaire par FEM réduit
Pic 2	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit avec $N_f = 351$	10 000	10 000	10 000	14	14	14
	Coût (temps) de calcul	15jours 20h	5jours 6h	4jours 6h	32 min	11 min	9 min
	Pourcentage de réduction (%)	-	66.86	73.10	99.86	99.95	99.96
Pic 5	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit avec $N_f = 5071$	10 000	10 000	10 000	16	16	16
	Coût (temps) de calcul	228jours 12h	75jours 17h	61jours 11h	8h 46	2h 54	2h 22
	Pourcentage de réduction (%)	-	66.86	73.10	99.84	99.95	99.96
Pic 7	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit avec $N_f = 2601$	10 000	10 000	10 000	24	24	24
	Coût (temps) de calcul	117jours 5h	38jours 20h	31jours 12h	6h 45	2h 14	1h 49
	Pourcentage de réduction (%)	-	66.86	73.10	99.76	99.92	99.94
Pic 9	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit avec $N_f = 901$	10 000	10 000	10 000	16	16	16
	Coût (temps) de calcul	40jours 14h	13jours 11h	10jours 22h	1h 34	31 min	25 min
	Pourcentage de réduction (%)	-	66.86	73.10	99.84	99.95	99.96

TABLEAU 5.5 – Coûts de calcul pour huit QoI liées aux pics 2, 5, 7 et 9 de l'énergie de déformation de la plaque 1 pour $N = 10\,000$ valeurs du paramètre incertain k_z .

5.3.2 Cas de huit, seize et quatre-vingt deux paramètres incertains

Comme expliqué préalablement, pour augmenter le nombre de paramètres incertains r , on considère que les ressorts verticaux qui couplent les trois plaques sont séparés en r groupes de ressorts au sein desquels la raideur k_z est homogène et incertaine dans la plage $[100; 200] N/m$. Le cas de $r = 8$ paramètres incertains est illustré sur la Figure 5.25; les 8 raideurs k_{z1} à k_{z8} peuvent prendre des valeurs simultanément distinctes.

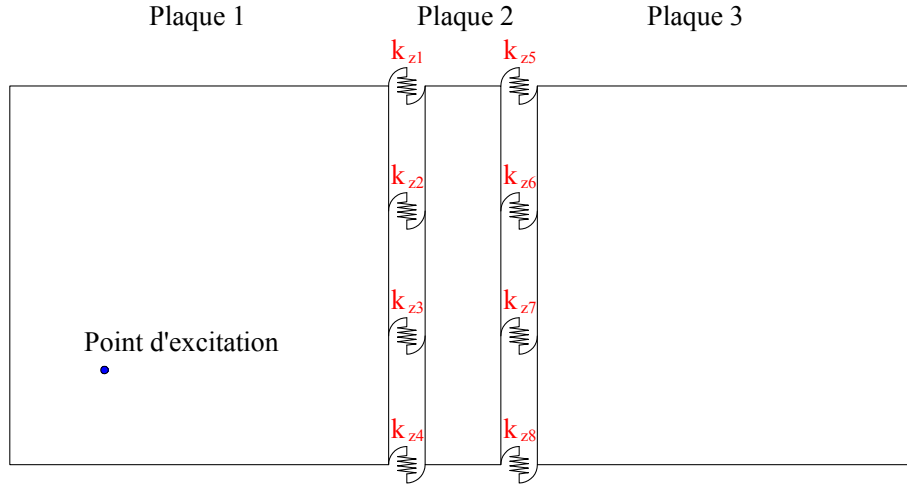


FIGURE 5.25 – Configuration des trois plaques avec $r = 8$ paramètres incertains.

La configuration retenue pour $r = 16$ paramètres incertains est quant à elle représentée sur la Figure 5.26. Les ressorts situés entre les plaques 1 et 2 sont séparés en 8 groupes de raideurs notées de k_{z1} à k_{z8} , tandis que les raideurs des ressorts situés entre les plaques 2 et 3 sont numérotées de k_{z9} à k_{z16} .

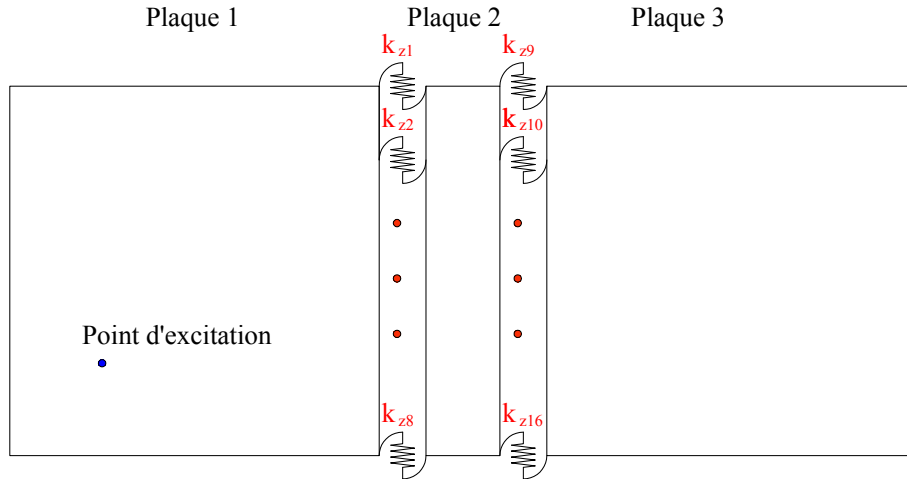


FIGURE 5.26 – Configuration des trois plaques avec $r = 16$ paramètres incertains.

Dans le cas extrême de 82 paramètres incertains (Figure 5.27), tous les ressorts ont des raideurs distinctes.

Le tableau 5.6 récapitule les statistiques (valeurs moyennes et écarts globaux) de sept QoI obtenues avec le FEM complet pour 10 000 jeux de valeurs des r paramètres incertains, pour les trois cas $r = 8$,

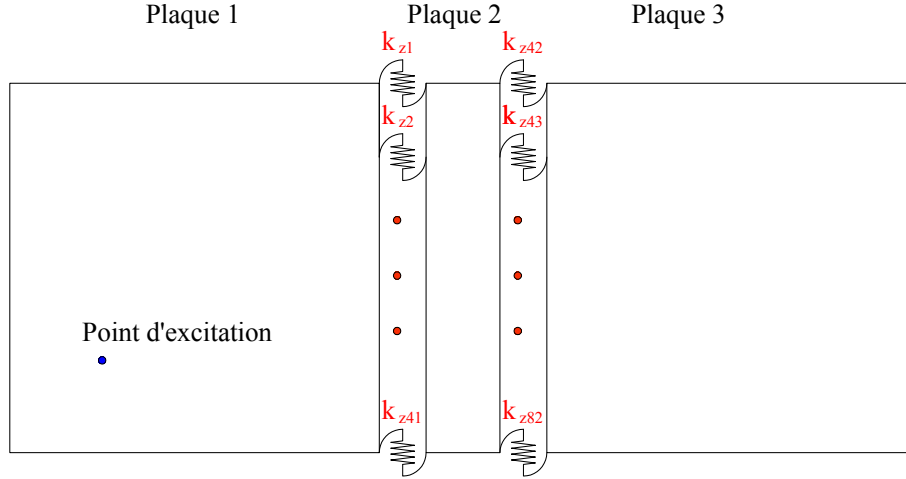


FIGURE 5.27 – Configuration des trois plaques avec $r = 82$ paramètres incertains.

$r = 16$ et $r = 82$. Le cas d'un paramètre incertain est rappelé à titre de comparaison.

Pic	QoI		r = 1		r = 8		r = 16		r = 82	
			Moyenne	Écart (%)	Moyenne	Écart (%)	Moyenne	Écart (%)	Moyenne	Écart (%)
Pic 2	QoI 1	$F_{Def1}(Hz)$	5.309	5.217	5.312	5.214	5.315	5.211	5.318	5.208
	QoI 2	$E_{Def1}(J)$	7.572	21.756	7.548	24.684	7.532	24.736	7.520	24.777
Pic 5	QoI 3	$F_{Def1}(Hz)$	17.316	28.806	17.281	28.865	17.347	28.754	17.425	28.626
	QoI 4	$E_{Def1}(J)$	2.027	19.417	1.704	134.213	1.794	127.492	1.937	118.106
Pic 7	QoI 5	$E_{Def1}(J)$	0.147	427.156	0.103	614.19	0.098	643.496	0.091	691.389
	QoI 6	$E_{Def2}(J)$	0.312	174.375	0.301	347.752	0.293	357.104	0.284	368.218
Pic 9	QoI 7	$E_{Def1}(J)$	4.276	33.833	4.24	59.964	4.234	60.051	4.232	60.085

TABEAU 5.6 – Valeurs moyennes et écarts de quelques quantités d'intérêt pour 10 000 valeurs du jeu de paramètres incertains (pour les cas $r = 1$, $r = 8$, $r = 16$ et $r = 82$).

Les valeurs moyennes des sept QoI représentées varient peu entre les trois configurations, en revanche les écarts globaux, calculés par la formule (5.1) sont globalement augmentés entre les cas d'un et de huit paramètres incertains ; ainsi, les écarts des amplitudes des pics 5 et 7 de l'énergie de déformation de la plaque 1, illustrés dans la section précédente, passent respectivement de 19 % à 134 %, et de 427 % à 614 %.

Les valeurs obtenues pour $r = 16$ et $r = 82$ s'avèrent quant à elles toutes relativement proches des valeurs correspondant au cas $r = 8$.

Dans les paragraphes suivants seront montrés les résultats obtenus par les six méthodes (N simulations du FEM complet et des deux modèles réduits, puis N calculs à l'aide des trois versions de chaos polynomial creux dans lesquelles les coefficients sont obtenus par un nombre limité de simulations du FEM complet ou d'un modèle réduit) pour les mêmes QoI qu'avec un paramètre incertain.

Comme discuté au début de la section 5.3. Nous répétons que le même ensemble de paramètres est utilisé dans les cas de 8, 16 et 82 paramètres incertains : la précision cible vaut $S_{cible}^2 = 0.999$, norme- $m = 0.8$ et les valeurs des seuils sont fixées à $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.001(1 - S_{cible}^2)$. Cependant l'ordre maximal du chaos polynomial est $p_{max} = 5$ pour les cas de 8, 16 paramètres incertains, tandis que $p_{max} = 3$ dans le cas de 82 paramètres incertains pour limiter le nombre de simulations nécessaires pour construire les coefficients du chaos.

Par ailleurs, il va être défini des nouveaux chaos polynomiaux qui seront appelés polynomiaux améliorés et qui seront basés sur les chaos polynomiaux creux avec des critères de choix des coefficients du chaos différents.

5.3.2.1 Proposition d'un chaos polynomial creux amélioré

Dans cette section, des nouveaux critères pour le choix des coefficients du chaos dans l'algorithme de construction du chaos polynomial creux (sPC) vont être proposés. Le chaos ainsi obtenu sera appelé sPC amélioré.

Cette volonté de modifier ces critères fait suite au tracé de l'erreur leave-one-out S_0^2 dans une étude menée sur l'amplitude du pic 5 de l'énergie de déformation E_{def1} (Figure 5.28 (a)). On rappelle que plus S_0^2 tend vers 1, meilleur est le développement en chaos. Sur cette figure, on peut remarquer que S_0^2 augmente en fonction de p jusqu'à $p = 4$ puis diminue pour $p = 5$. Cette diminution provient du fait que seul l'erreur empirique R^2 est utilisée dans l'étape 3 pour choisir les coefficients du chaos. Il y a donc été décidé de rajouter l'erreur S^2 dans cette étape afin d'éviter que S_0^2 n'augmente avec p . Ainsi on ne choisit que les coefficients du chaos qui augmentent ou ne diminuent pas S_0^2 . Les modifications dans l'algorithme sont notées en gras dans la Figure 5.29 (b). La Figure 5.28 (b) montre l'évolution de S_0^2 en fonction de p obtenue avec ces nouveaux critères. On constate que les S_0^2 augmentent toujours en fonction de p quelque soit le type de sPC amélioré. Grâce à cela, les nombres de coefficients du chaos des trois sPC améliorés (sPC-FEM, sPC-CB50130 et sPC-CB3080) sont beaucoup plus faibles que ceux des sPC originaux (tableau 5.7). Le nombre de simulations nécessaires pour construire les coefficients du chaos avec ces trois sPC améliorés est donc plus faible que celui des sPC originaux, les nombres de simulations pour les deux types de sPC sont respectivement 328 et 592.

Dans les figures 5.30 et 5.31 sont tracées les mêmes types de résultats que pour l'étude à un paramètre incertain pour les sPC originaux et les sPC améliorés. On obtient les mêmes niveaux d'erreurs relatives sur la moyenne entre les sPC originaux et les sPC améliorés (Figure 5.30 (c) et (g)). On peut faire la même constatation concernant la moyenne des erreurs relatives (Figure 5.31). Par ailleurs les erreurs relatives sur la variance obtenues par les sPC améliorés sont encore plus faibles que celles obtenues par les sPC originaux (Figures 5.30 (d) et (h)). Ainsi en utilisant le sPC amélioré, on réduit le coût de calcul et on garantit le même ordre de précision que celui obtenu avec le sPC original. Le sPC amélioré va donc être choisi pour calculer les QoI pour $r = 8, 16$ et 82 dans les parties suivantes de ce rapport.

Méthode		sPC original			sPC amélioré		
		gPC-FEM	gPC-CB50130	gPC-CB3080	sPC-FEM	sPC-CB50130	sPC-CB3080
Pic 5	Ordre p	5	5	5	5	5	5
	Nb de coefficients du chaos	284	285	276	96	95	96
	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit	592	592	592	328	328	328

TABLEAU 5.7 – Comparaison des nombres de simulations avec FEM complet ou réduit entre sPC original et sPC amélioré pour des QoI liées au pic 5 de l'énergie de déformation de la plaque 1 avec 8 paramètres incertains.

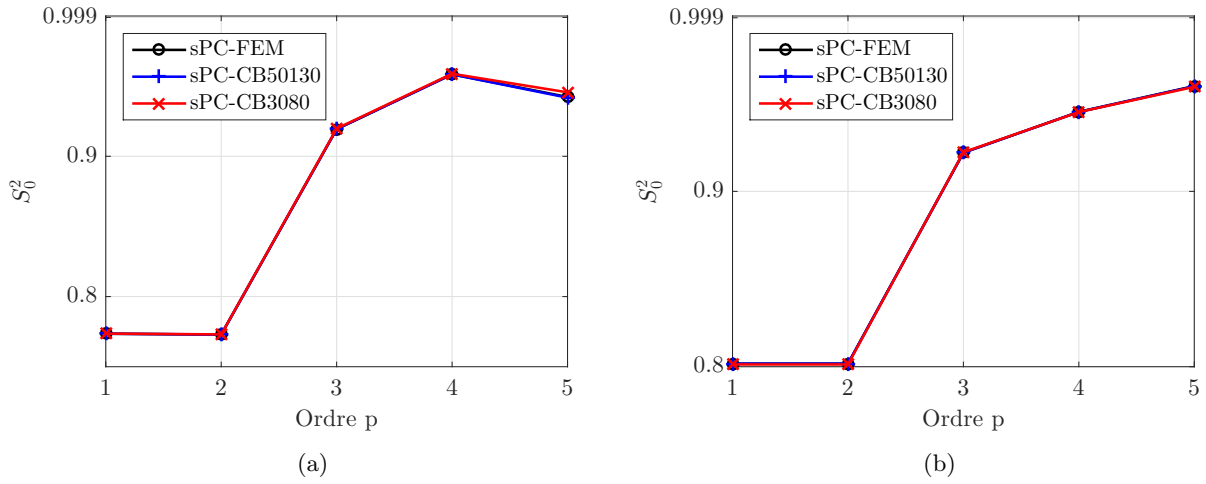
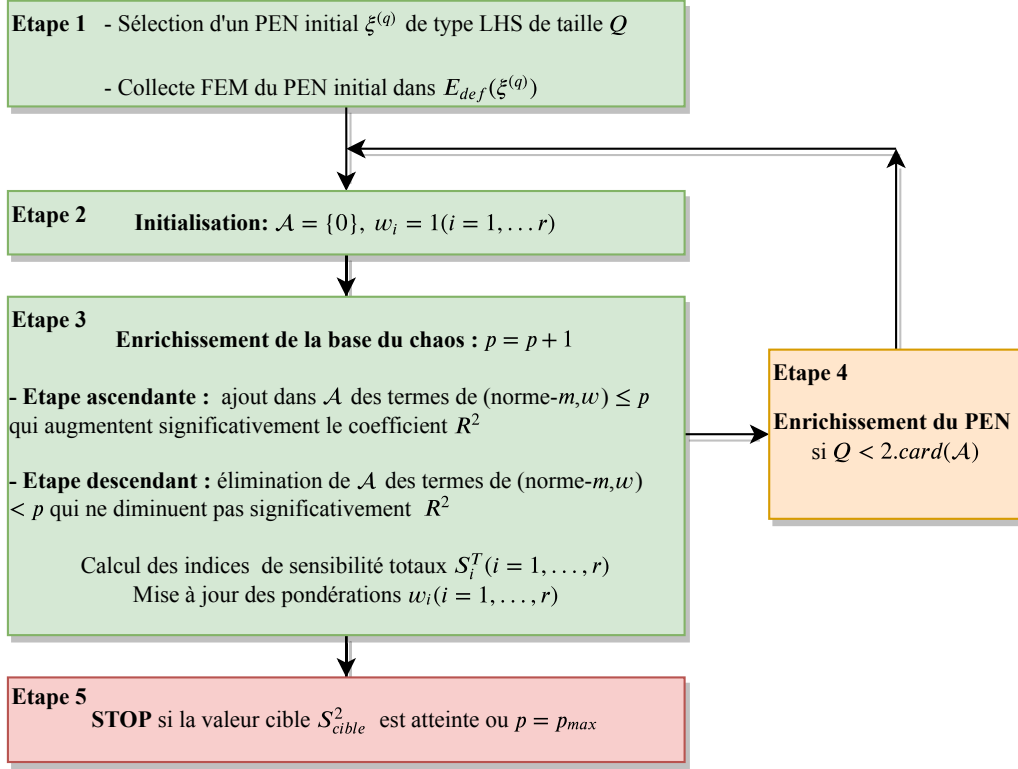
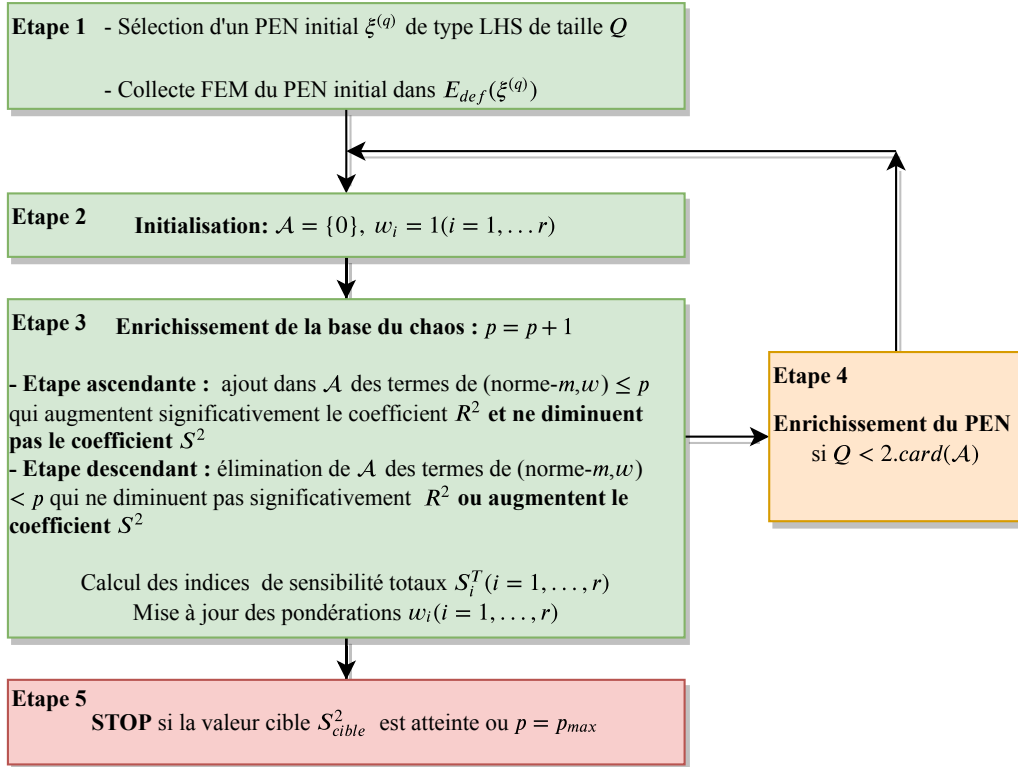


FIGURE 5.28 – Erreurs leave-one-out S_0^2 des trois développements sPC pour l'amplitude du pic 5 de l'énergie E_{def1} en fonction de l'ordre p pour $r = 8$; (a) sPC original, (b) sPC amélioré.



(a)



(b)

FIGURE 5.29 – Algorithme appliqué pour construire le sPC avec « anisotropic hyperbolic index sets » ; (a) sPC original, (b) sPC amélioré.

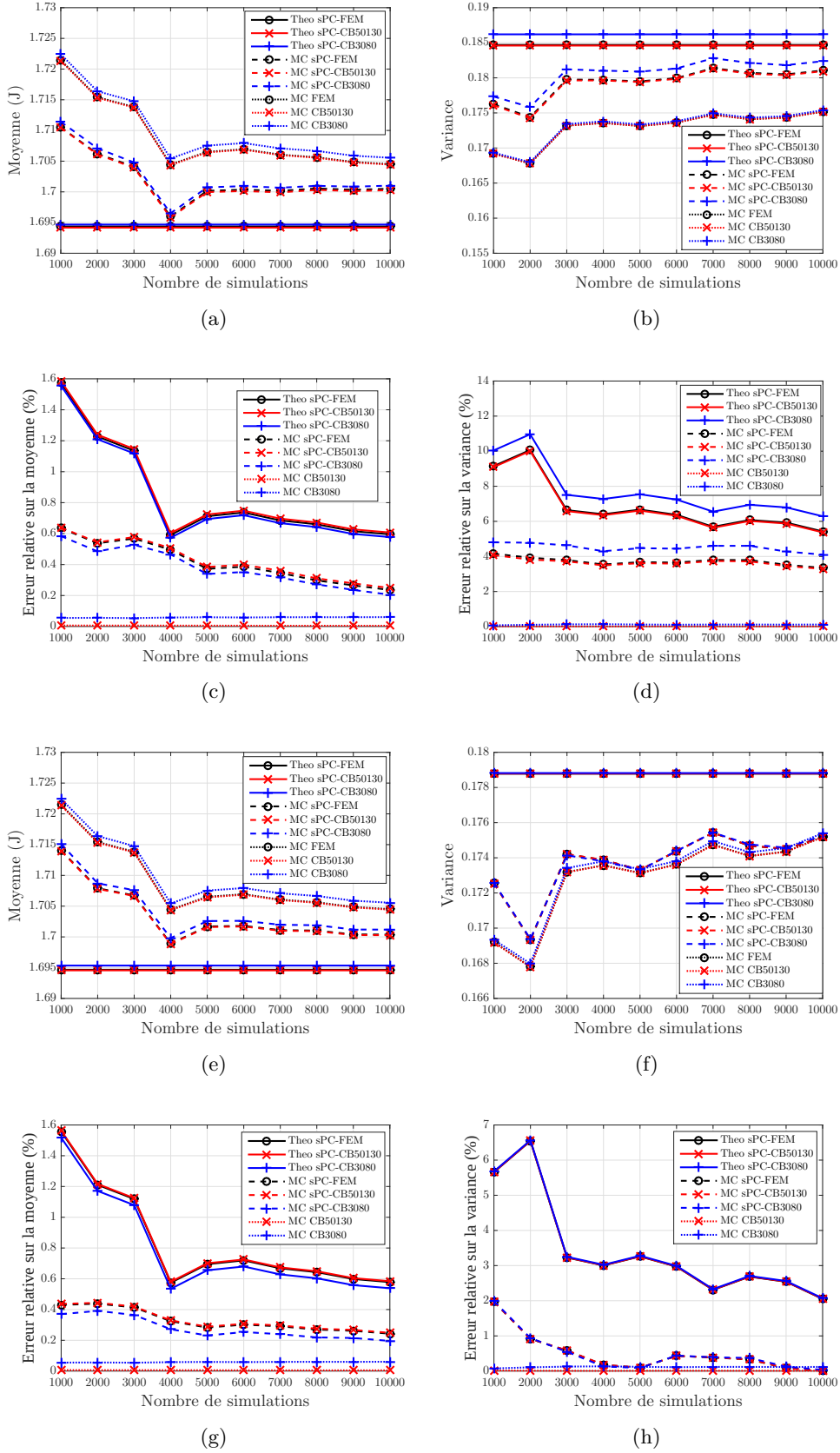


FIGURE 5.30 – (a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 5 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC en utilisant sPC original et (e) Moyenne, (f) variance, (g) erreur relative sur la moyenne, (h) erreur relative sur la variance en utilisant sPC amélioré pour $r = 8$.

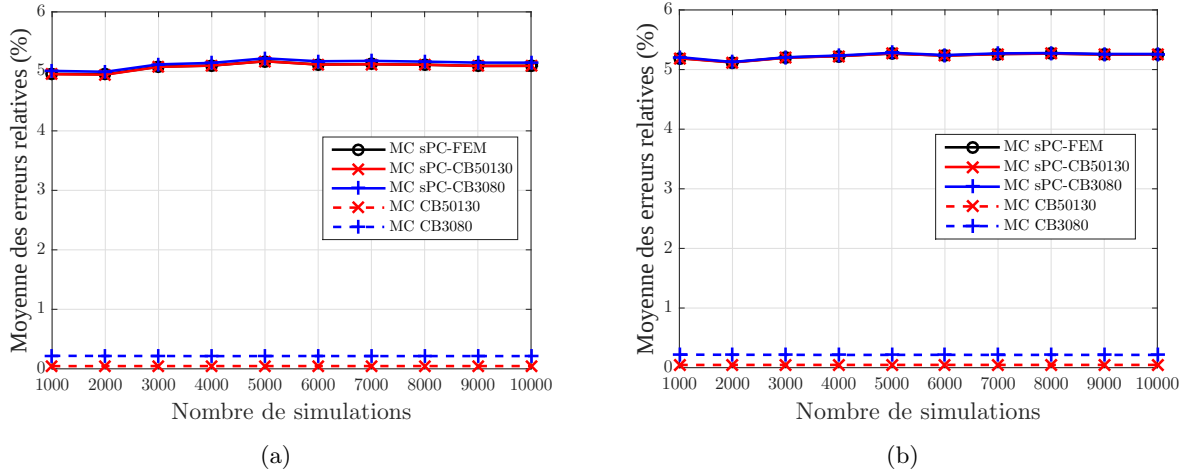


FIGURE 5.31 – Moyenne des erreurs relatives sur l'amplitude du pic 5 de E_{def1} par rapport à la solution de référence, en fonction du nombre de simulations MC pour $r = 8$; (a) sPC original, (b) sPC amélioré.

5.3.2.2 Fréquence propre du pic 2 de l'énergie E_{def1}

Comme le laisse supposer le tableau 5.6, les valeurs maximales, moyennes, et minimales de cette QoI sont quasiment constantes entre les quatre configurations $r = 1$, $r = 8$, $r = 16$ et $r = 82$ paramètres incertains. Cependant, les développements en chaos vont comporter un nombre largement accru de termes pour les trois derniers cas, comme nous allons l'illustrer dans la suite.

Construction des développements sPC et sensibilité aux paramètres

Les erreurs leave-one-out S_0^2 calculées pour $r = 8$ paramètres incertains sont tracées sur la Figure 5.32 (a). Il apparaît que l'ordre optimal pour les deux développements sPC basés sur les modèles réduits (sPC-CB50130 et sPC-CB3080) est $p = 4$ (ordre pour lequel $S_0^2 = 0.999$, le critère de précision $S_{cible}^2 = 0.999$ étant donc satisfait) tandis que pour le cas sPC-FEM il faut aller jusqu'à l'ordre maximal $p = 5$, pour lequel $S_0^2 = 0.9992$. Les ordres des chaos sont donc plus élevés que pour un paramètre incertain, configuration pour laquelle un ordre $p = 2$ était suffisant pour les trois développements sPC (voir 5.3.1.1).

Pour le cas $r = 16$, un ordre $p = 3$ est suffisant pour les trois développements en chaos polynomial creux pour respecter le critère de précision sur les erreurs leave-one-out, comme le montre sur la Figure 5.32 (b). L'ordre $p = p_{max} = 3$ est utilisé pour les trois développements sPC dans le cas $r = 82$ (Figure 5.32 (c)) mais la valeur $S_{cible}^2 = 0.999$ n'est pas atteinte.

Les r paramètres incertains n'ont pas tous la même influence sur la fréquence propre du pic 2, comme le montre la Figure 5.33 qui représente les indices de sensibilité S_i^T des paramètres pour les trois développements sPC. Les raideurs des ressorts situés au plus bas des jonctions entre les plaques, notées k_{z4} et k_{z8} dans le cas $r = 8$, et k_{z8} et k_{z16} dans le cas $r = 16$, apparaissent en effet comme les plus influentes pour cette QoI, puisqu'elles possèdent les indices de sensibilité les plus élevés. Néanmoins, tous ces indices de sensibilité sont tous du même ordre de grandeur. Ceci est clairement visible dans le cas de $r = 82$. Des valeurs d'indices quasiment identiques sont obtenues pour les trois versions

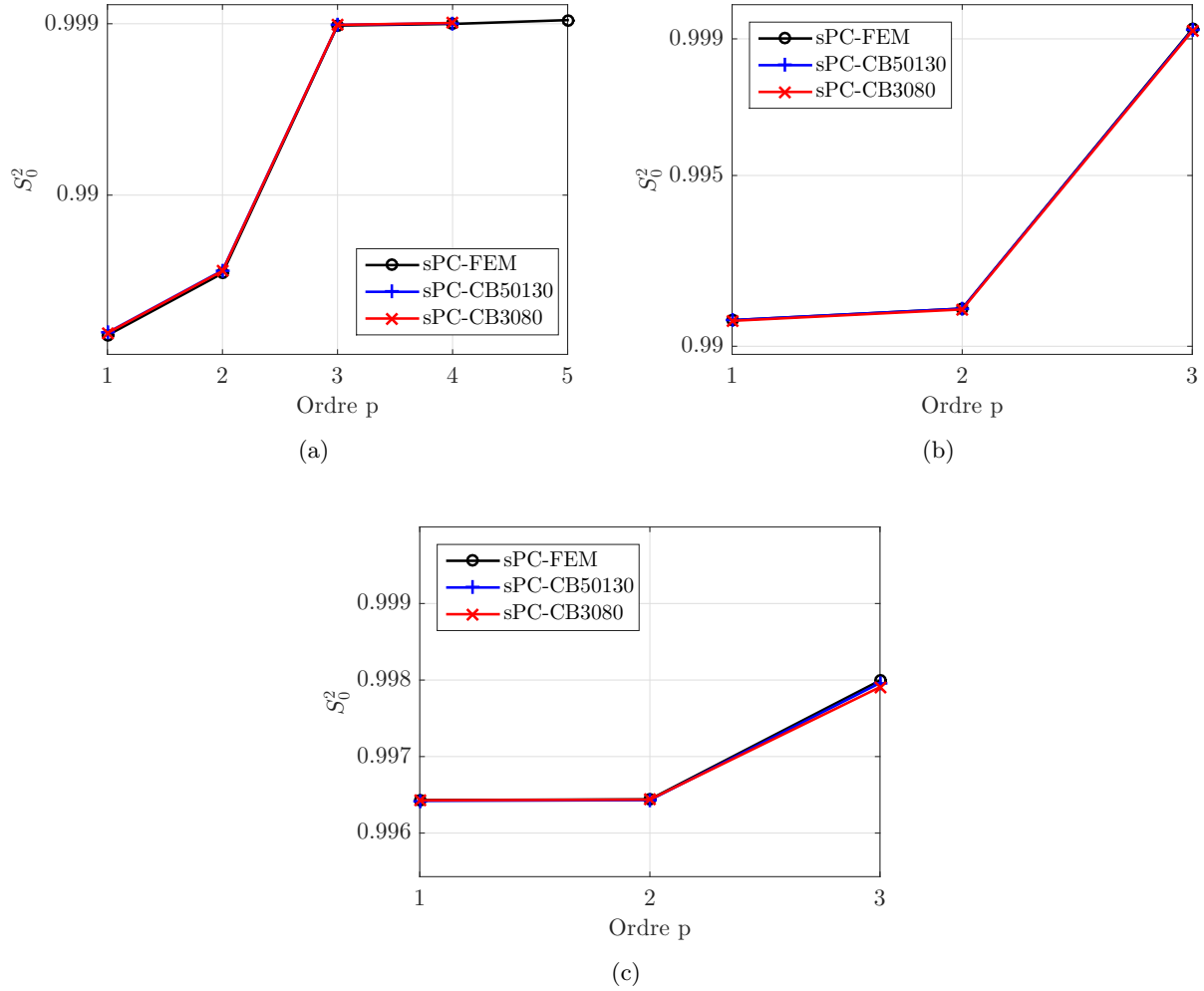


FIGURE 5.32 – Erreurs leave-one-out S_0^2 des trois développements sPC pour la fréquence propre du pic 2 de l'énergie E_{def1} en fonction de l'ordre p ; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$.

des développements sPC.

Statistiques de la QoI obtenues à partir des différentes méthodes

Les statistiques (moyenne et variance) obtenues pour N jeux de valeurs des r paramètres incertains ont des allures sensiblement différentes pour $r = 8$ (Figure 5.34), $r = 16$ (Figure 5.35) et $r = 82$ (Figure 5.36) que ce qui avait été obtenu pour $r = 1$ (Figure 5.9). Pour un paramètre incertain, les valeurs de moyenne et de variance tendaient à se stabiliser à partir de $N = 2000$, ce qui est encore le cas pour la moyenne pour $r = 8$ et $r = 82$; la variance, en revanche, ne se stabilise que pour $N = 6000$ dans ces deux configurations. Avec 16 paramètres incertains, les deux quantités se stabilisent également autour de $N = 6000$. Dans tous les cas, elles tendent à se rapprocher des valeurs théoriques.

Les niveaux d'erreur sont du même ordre de grandeur pour les cas $r = 8$, $r = 16$ et $r = 82$ que pour un paramètre incertain, en dehors de l'erreur entre la valeur théorique de la variance et la valeur de référence pour les cas $r = 8$ et $r = 16$, qui reste environ deux fois plus grande même pour $N = 10\,000$. En ce qui concerne la variance, on retrouve des tendances similaires avec un niveau de précision des développements sPC très satisfaisant et une influence presque négligeable de l'utilisation d'un modèle

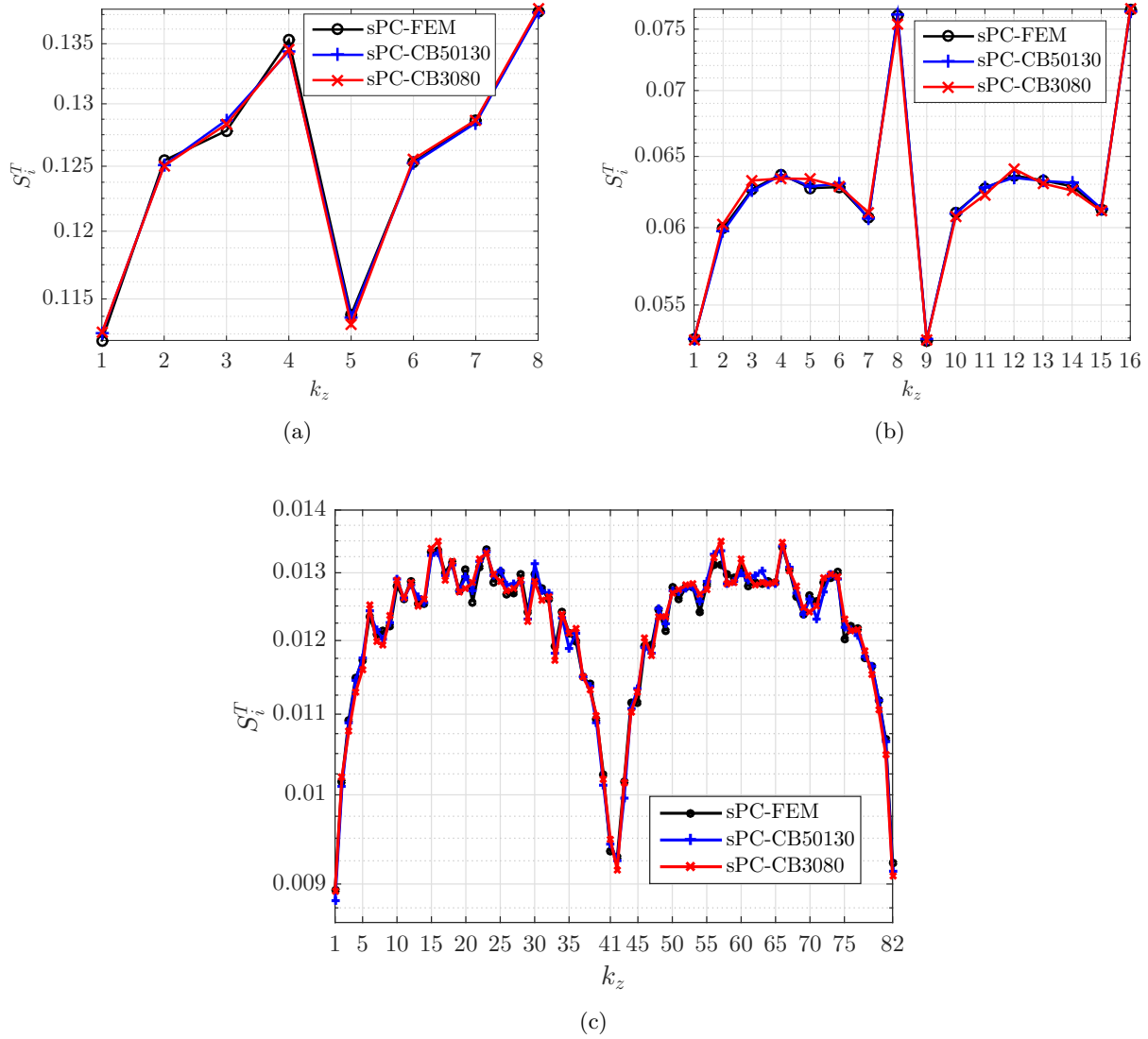


FIGURE 5.33 – Indices de sensibilité totaux S_i^T des paramètres incertains sur la fréquence propre du pic 2 pour les trois développements sPC ; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$.

réduit pour obtenir les coefficients de ces développements. La différence principale concerne la moyenne obtenue pour 16 paramètres incertains, pour laquelle les courbes relatives au modèle le plus réduit CB3080 présentent des écarts nettement plus importants que pour les trois autres configurations $r = 1$, $r = 8$ et $r = 82$, qu'il s'agisse des valeurs obtenues par simulations directes ou des valeurs déduites des développements sPC.

Les moyennes des erreurs relatives calculées pour chaque jeu de valeurs des r paramètres incertains entre le modèle de référence et un modèle réduit ou un développement sPC sont également du même ordre de grandeur pour le cas $r = 8$ (Figure 5.37) que pour $r = 1$, et légèrement inférieures pour $r = 16$ et $r = 82$. Avec 8 paramètres incertains, la valeur maximale est atteinte pour le modèle sPC-FEM, pour lequel le chaos est d'un ordre supérieur à ceux des deux autres développements basés sur les modèles réduits. Pour $r = 16$, c'est l'utilisation du modèle le plus réduit qui engendre les erreurs les plus importantes. Cependant, les écarts des erreurs des trois développements sPC sont très faibles pour $r = 82$.

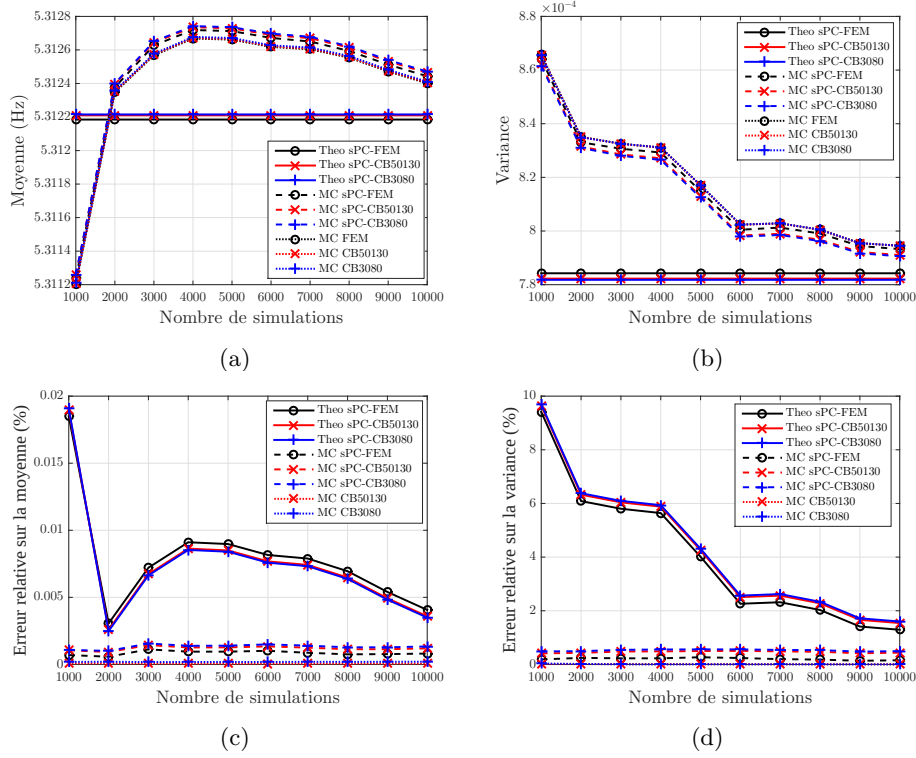


FIGURE 5.34 – (a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de la fréquence propre du pic 2 de E_{def1} , en fonction du nombre de simulations MC, pour $r = 8$.

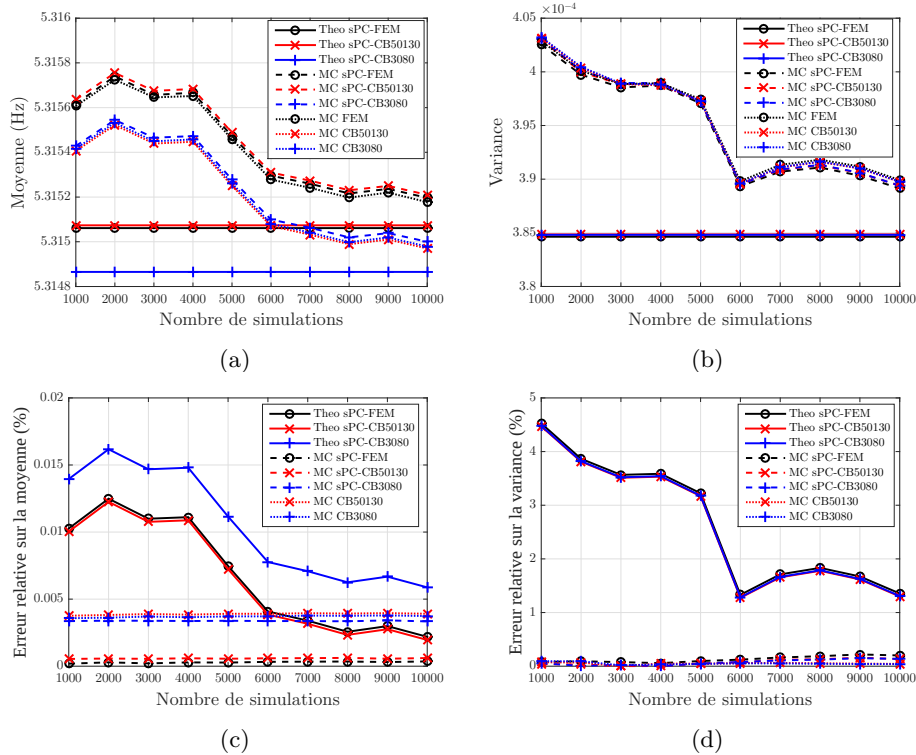


FIGURE 5.35 – (a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de la fréquence propre du pic 2 de E_{def1} , en fonction du nombre de simulations MC, pour $r = 16$.

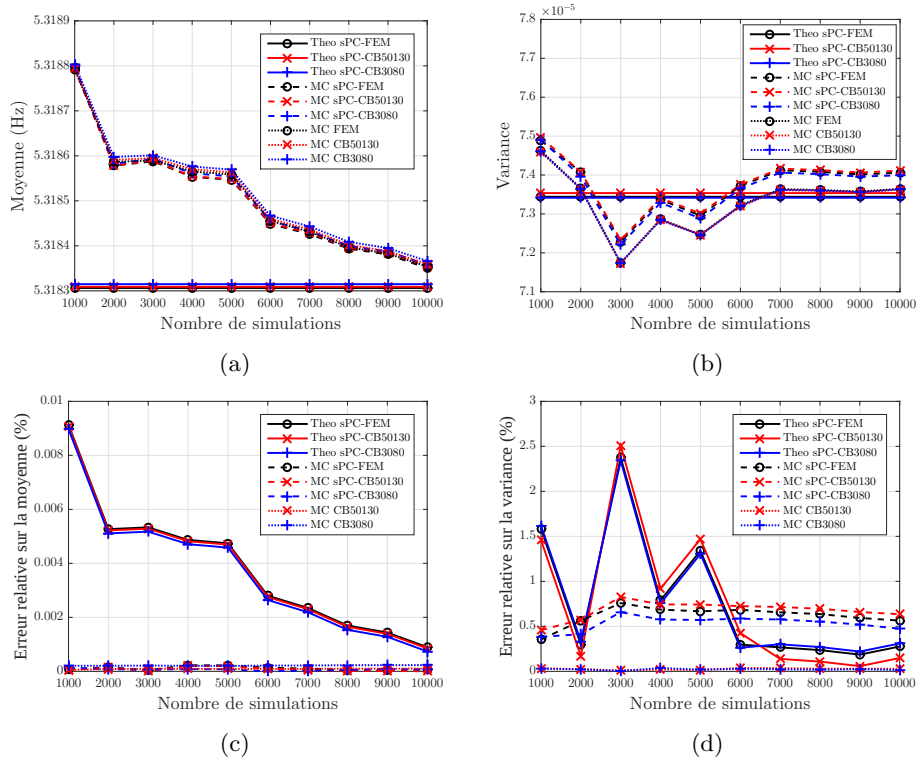


FIGURE 5.36 – (a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de la fréquence propre du pic 2 de E_{def1} , en fonction du nombre de simulations MC, pour $r = 82$.

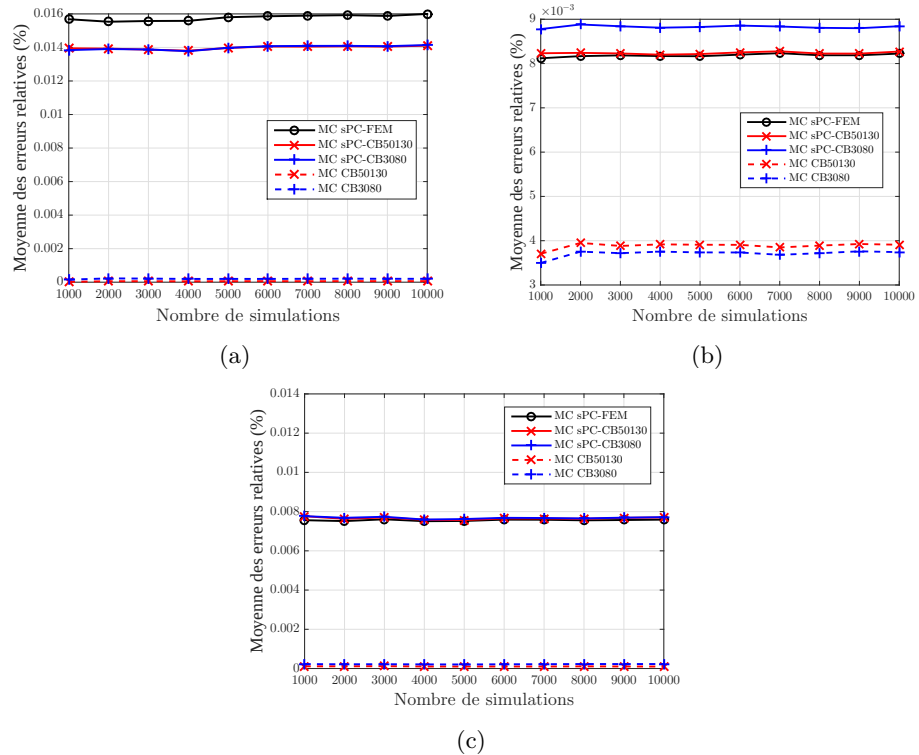


FIGURE 5.37 – Moyenne des erreurs relatives sur la fréquence du pic 2 de E_{def1} par rapport à la solution de référence, en fonction du nombre de simulations MC; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$.

Évolution de la fréquence propre du pic 2 en fonction des valeurs des paramètres

incertains

Pour comparer les évolutions de la fréquence propre du pic 2 en fonction des valeurs des paramètres incertains au cas $r = 1$ traité précédemment, on choisit d'effectuer $N = 10\,000$ tirages de r valeurs identiques $k_{z1} = k_{z2} = \dots = k_{zr} = k_z$. Cette configuration est donc équivalente à celle du cas $r = 1$ en ce qui concerne la solution de référence et les simulations CB50130 et CB3080 avec les modèles réduits. Les développements sPC sont quant à eux différents des développements obtenus pour un paramètre incertain, avec notamment des ordres supérieurs.

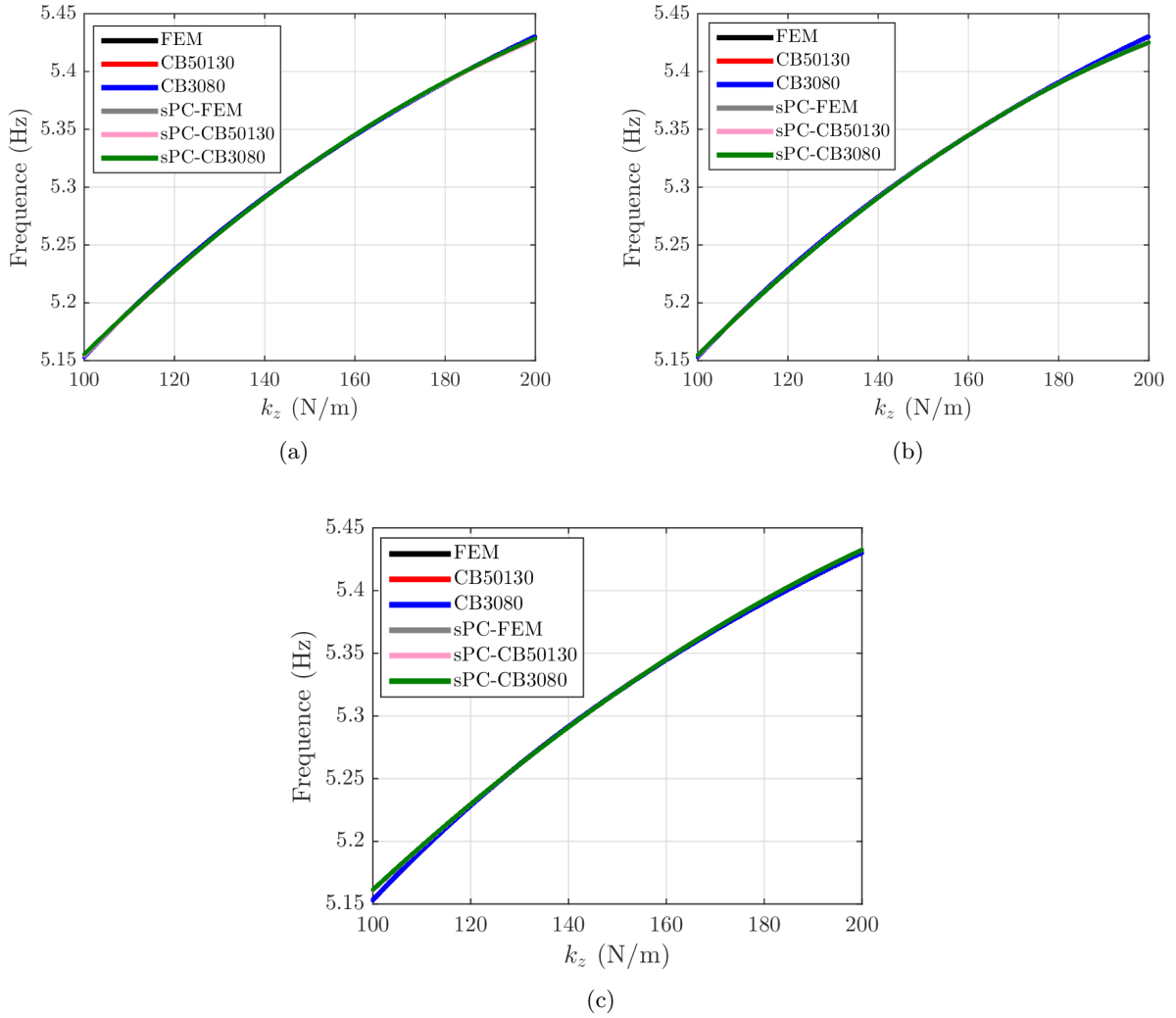


FIGURE 5.38 – Fréquence propre du pic 2 de l'énergie E_{def1} en fonction des raideurs $k_{z1} = k_{z2} = \dots = k_{zr} = k_z$ pour $N = 10\,000$; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$.

La méthode s'avère cependant efficace pour les cas de 8, 16 et 82 paramètres incertains, puisque les évolutions données par les développements sPC coïncident de nouveau avec celles obtenues par les simulations directes, comme le montre la Figure 5.38. Un petit écart est cependant visible entre le groupes de courbes issues des développements sPC et le groupe de courbes correspondant aux simulations directes pour les plus hautes valeurs de raideurs ($k_z > 180\text{ N/m}$) dans le cas $r = 16$ (figure (b)) et pour les plus bas valeurs de raideurs ($k_z < 120\text{ N/m}$) dans le cas $r = 82$ (figure (c)). Cet écart peut s'expliquer par le fait que les développements en chaos ont parfois des difficultés à

représenter correctement une QoI aux bords de l'espace stochastique. Cependant, les moyennes des erreurs relatives sont très faibles pour tous les développements sPC et pour les cas $r = 8$, $r = 16$ et $r = 82$ (Figure 5.37).

L'effet bénéfique de lissage des courbes par les développements sPC est encore présent, mais n'a pas été représenté.

5.3.2.3 Amplitude du pic 2 de l'énergie de déformation E_{def1}

La seconde QoI que nous avons considérée, l'amplitude du pic 2 de l'énergie de déformation de la première plaque, ne présente pas non plus de variations importantes dans ses valeurs extrémales lorsque l'on augmente le nombre de paramètres incertains. L'écart global, de l'ordre de 22 % dans le cas $r = 1$, augmente modérément jusqu'à atteindre approximativement 25 % pour $r = 8$, $r = 16$ et $r = 82$.

Construction des développements sPC et sensibilité aux paramètres

Les développements sPC ont cependant un ordre plus élevé que pour le cas d'un paramètre incertain, pour lequel l'ordre $p = 2$ était suffisant. Au vu des valeurs des erreurs leave-one-out S_0^2 obtenues pour 8, 16 et 82 paramètres incertains (Figure 5.39), il faut à présent utiliser l'ordre maximal $p = p_{max} = 5$ pour les trois développements sPC (sPC-FEM, sPC-CB50130 et sPC-3080) pour les cas $r = 8$ et $r = 16$ et $p_{max} = 3$ pour le cas $r = 82$, le critère de précision n'étant pas parfaitement satisfait, puisque dans tous les cas la valeur de 0.999 n'est pas atteinte (d'après ce critère, la précision des développements sPC sera légèrement supérieure dans le cas $r = 16$ que dans les cas $r = 8$ et $r = 82$).

Par ailleurs, cette seconde QoI (amplitude du pic 2) ne présente pas la même sensibilité aux paramètres incertains que la précédente (fréquence propre du pic 2). Les indices de sensibilité totaux, tracés sur la Figure 5.40, montrent en effet que ce sont cette fois les raideurs (notées H) des ressorts situés entre les plaques 1 et 2 qui sont les plus influentes. Les valeurs d'indices sont identiques pour les trois développements sPC.

Les raideurs des ressorts les plus influentes sont notées H sur la Figure 5.40 (d) qui représente les déformées modales du pic 2 déterminées avec les paramètres incertains à leurs valeurs nominales, on peut ainsi observer que les raideurs incertaines d'interface les plus influentes se situent tout le long de la jonction la plus proche du point d'excitation harmonique.

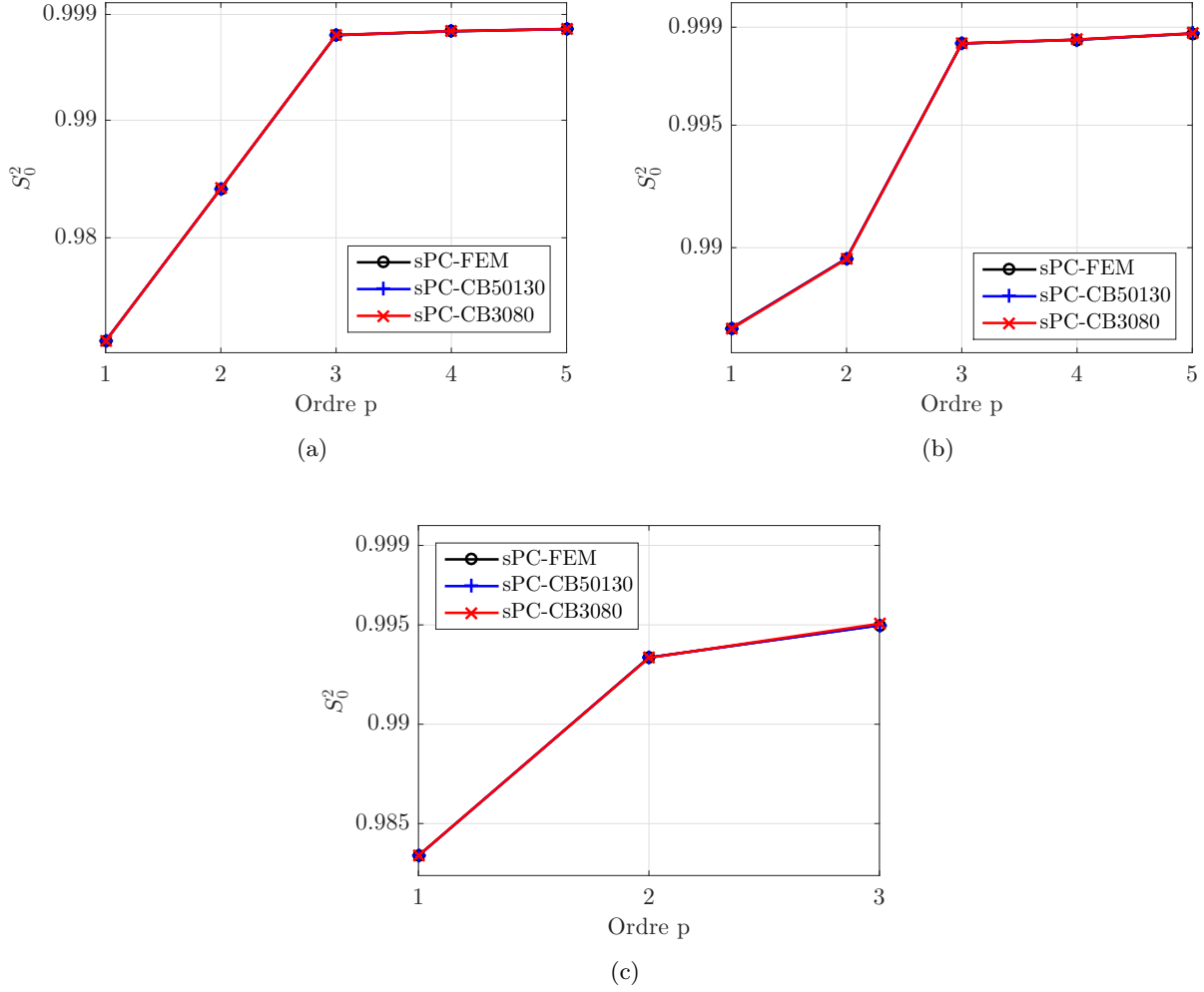


FIGURE 5.39 – Erreurs leave-one-out S_0^2 des trois développements sPC pour l'amplitude du pic 2 de l'énergie E_{def1} en fonction de l'ordre p ; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$.

Statistiques de la QoI obtenues à partir des différentes méthodes

Les statistiques (moyenne et variance) de l'amplitude du pic 2 sont visibles sur la Figure 5.41 pour le cas de 8 paramètres incertains, sur la Figure 5.42 pour $r = 16$, et sur la Figure 5.43 pour $r = 82$. Par rapport au cas d'un paramètre incertain, les deux quantités requièrent un nombre accru de simulations avant de se stabiliser (approximativement 5000 et 8000 simulations respectivement pour la moyenne et la variance pour $r = 8$, 6000 et 4000 respectivement pour $r = 16$, 6000 et 5000 respectivement pour $r = 82$, contre 2000 simulations pour les deux quantités avec un paramètre incertain). On note également un effet plus marqué de l'utilisation du modèle réduit CB3080 sur la moyenne, les courbes relatives à ce modèle étant décalées par rapport aux autres dans les trois configurations $r = 8$, $r = 16$ et $r = 82$.

Les niveaux d'erreur relative sur la moyenne et la variance sont du même ordre de grandeur pour les quatre configurations de nombre de paramètres incertains.

On retrouve cette tendance sur la Figure 5.13 où sont représentées les valeurs moyennes des erreurs

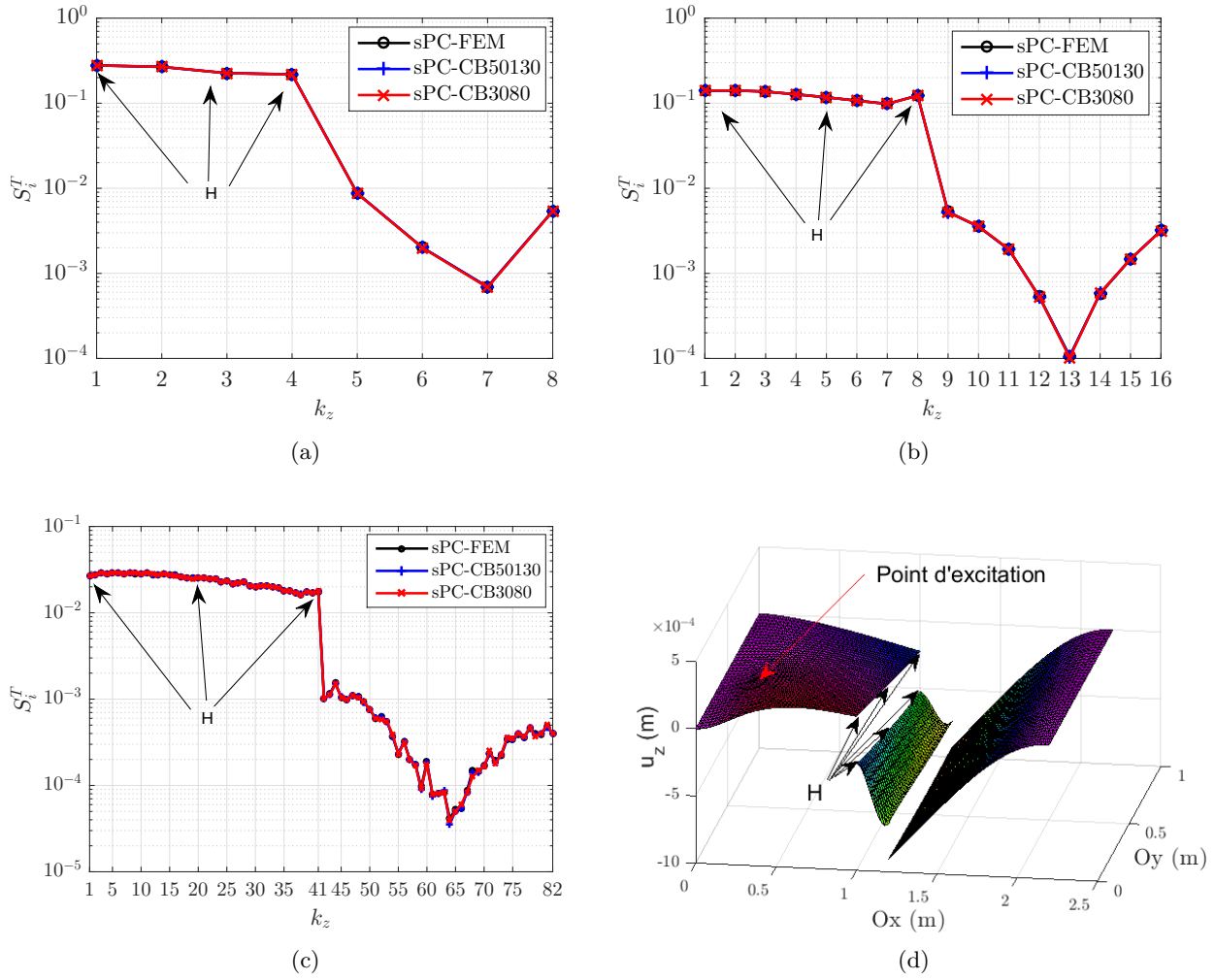


FIGURE 5.40 – Indices de sensibilité totaux S_i^T des r paramètres incertains sur l'amplitude du pic 2 pour les trois développements sPC ; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$ et (d) déformées modales aux valeurs nominales du pic 2 pour les plaques 1, 2 et 3

relatives ; l'utilisation d'un développement sPC (quel que soit le modèle retenu pour en calculer les coefficients) dans le cas $r = 8$ engendre un niveau d'erreur double de celui obtenu pour $r = 1$, tandis que pour $r = 16$ et $r = 82$ les niveaux d'erreur sont comparables à celui d'un paramètre incertain. L'utilisation d'un modèle réduit n'a pas plus d'impact sur cette quantité que pour un paramètre incertain.

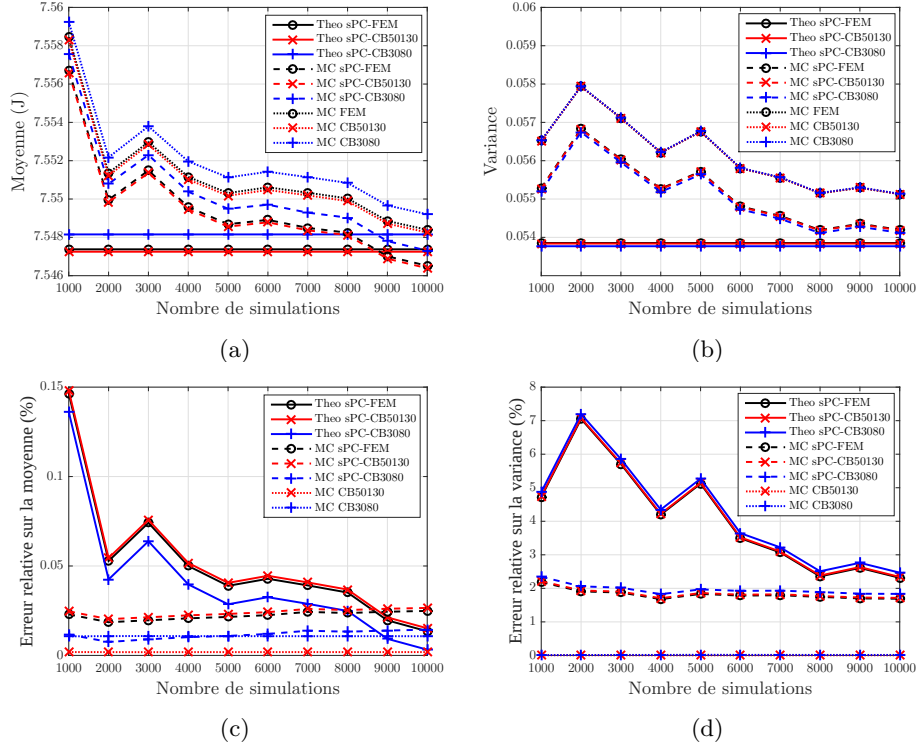


FIGURE 5.41 – (a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 2 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC pour $r = 8$.

Évolution de l'amplitude du pic 2 de E_{def1} en fonction des paramètres incertains

Comme précédemment, on compare les évolutions de la QoI en fonction des paramètres incertains entre les trois configurations $r = 1$, $r = 8$, $r = 16$ et $r = 82$ en réalisant, pour ces trois derniers cas, 10 000 tirages de valeurs identiques pour les r paramètres incertains. Les courbes correspondant aux six méthodes sont visibles sur la Figure 5.45 et présentent des tracés similaires à ceux du cas $r = 1$.

On note toutefois un écart léger mais visible pour le cas sPC-CB3080, qui cumule l'utilisation d'un développement sPC et du modèle le plus réduit pour calculer les coefficients, pour les valeurs les plus petites ($k_z < 120 \text{ N/m}$) et les plus grandes ($k_z > 180 \text{ N/m}$) des paramètres incertains. Il n'y a pas de changement de précision visible entre les cas $r = 8$, $r = 16$ et $r = 82$.

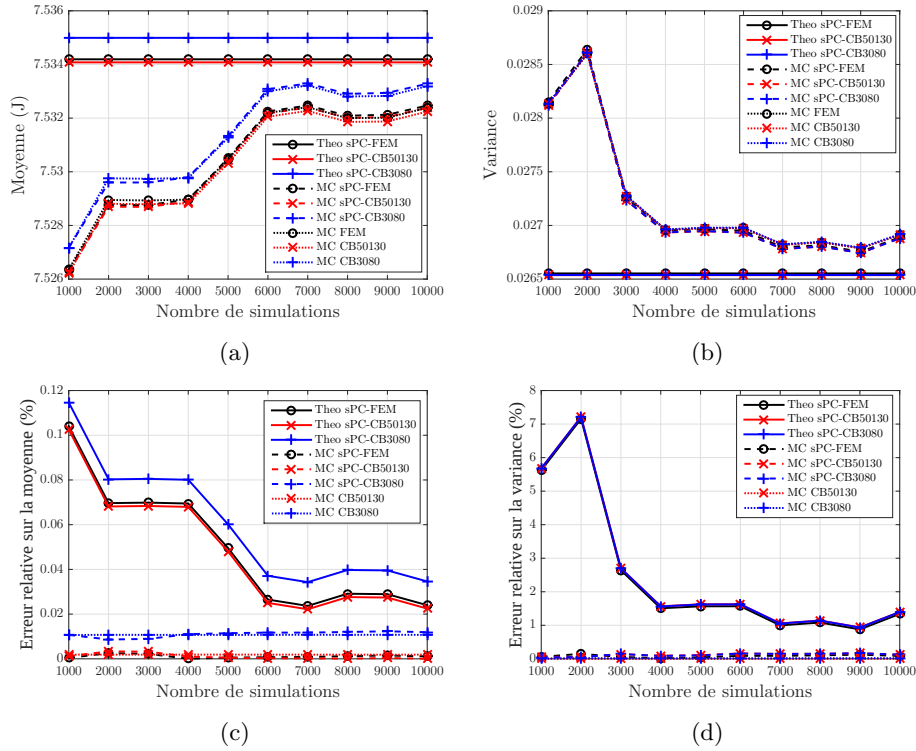


FIGURE 5.42 – (a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 2 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC pour $r = 16$.

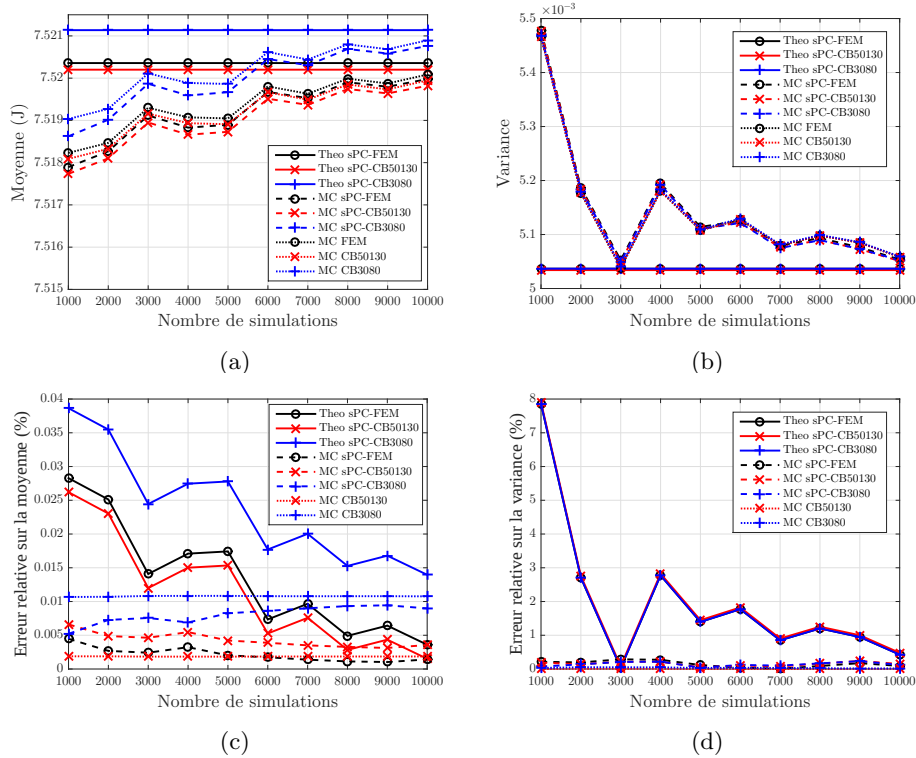


FIGURE 5.43 – (a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 2 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC pour $r = 82$.

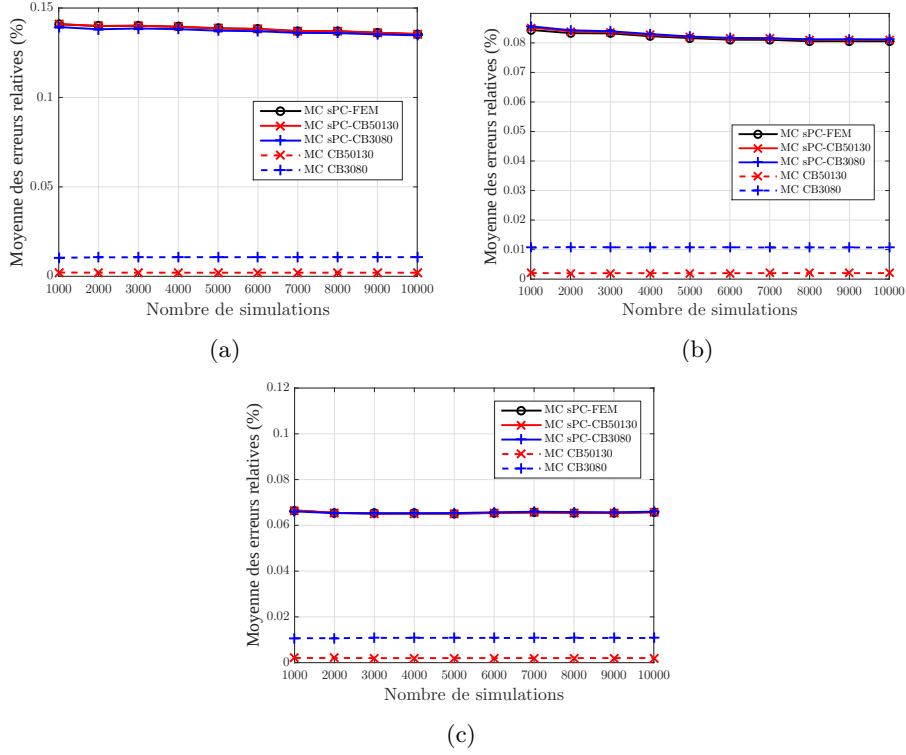


FIGURE 5.44 – Moyenne des erreurs relatives sur l'amplitude du pic 2 de E_{def1} par rapport à la solution de référence, en fonction du nombre de simulations MC ; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$.

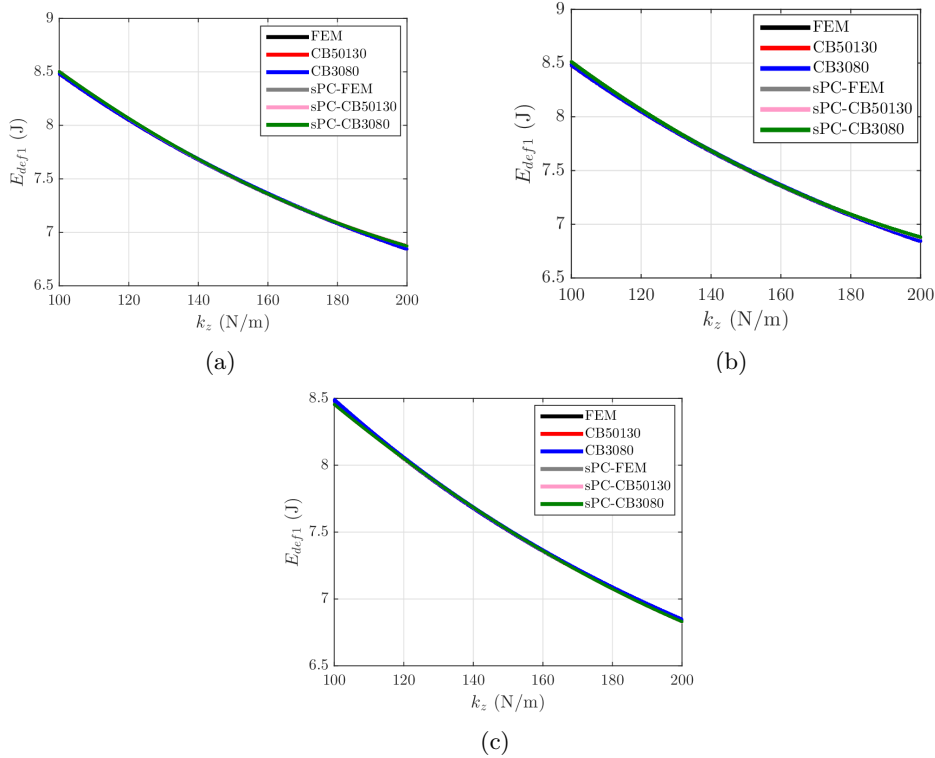


FIGURE 5.45 – Amplitude du pic 2 de E_{def1} en fonction des raideurs $k_{z1} = k_{z2} = \dots = k_{zr} = k_z$ pour $N = 10000$; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$.

5.3.2.4 Amplitude du pic 5 de l'énergie de déformation E_{def1}

Si la valeur moyenne de cette QoI varie peu entre les cas $r = 1$ et $r = 8$, ses valeurs minimales et maximales s'avèrent en revanche très sensibles au nombre de paramètres incertains, comme on peut le voir sur la Figure 5.46 ; l'écart global de cette QoI passe ainsi d'environ 19 % à 134 %. Les valeurs se stabilisent ensuite entre les cas $r = 8$, $r = 16$ et $r = 82$, l'écart global étant même légèrement inférieur pour la dernière configuration (autour de 118 %).

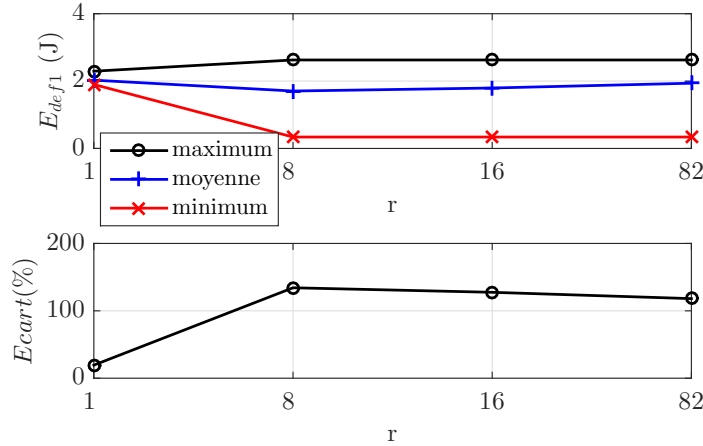


FIGURE 5.46 – Maximum, moyenne, minimum et écart global de l'amplitude du pic 5 de E_{def1} en fonction du nombre de paramètres incertains.

Construction des développements sPC et sensibilité aux paramètres

Pour cette QoI, lorsque l'on augmente le nombre de paramètres incertains l'ordre maximal ($p = 5$ pour les cas $r = 8$, $r = 16$ et $p = 3$ pour le cas $r = 82$) sont les nouvelles fois atteints pour les trois développements sPC sans que le critère sur l'erreur leave-one-out soit satisfait. La Figure 5.47 (a) montre que dans le cas de 8 paramètres incertains, l'erreur pour $p = 5$ est approximativement $S_0^2 = 0.96$, valeur nettement inférieure à la précision cible $S_{cible}^2 = 0.999$. On s'attend donc à un niveau de précision moins élevé pour ce cas. Avec 16 paramètres incertains (Figure 5.47 (b)), on se rapproche davantage de la précision cible, le développement basé sur le modèle le plus réduit (sPC-CB3080) étant le moins performant, cette tendance arrive aussi dans le cas $r = 82$ (Figure 5.47 (c)). On rappelle que dans le cas d'un paramètre incertain un ordre $p = 3$ s'était avéré suffisant pour les trois chaos.

Les indices de sensibilité totaux des 8 paramètres incertains des trois développements sPC, superposés sur la Figure 5.48, indiquent que les raideurs les plus influentes pour cette troisième QoI correspondent aux groupes de ressorts situés respectivement dans la zone notée H entre les plaques 1 et 2, et dans la zone notée E entre les plaques 2 et 3 (c'est-à-dire les raideurs notées k_{z4} et k_{z5} pour $r = 8$, de k_{z7} à k_{z10} pour $r = 16$, et de k_{z28} à k_{z53} pour $r = 82$). On peut noter qu'une discrétisation spatiale même grossière ($r = 8$) de l'incertitude en raideur d'une zone de jonction permet de localiser les zones les plus influentes.

On peut ainsi observer que les raideurs incertaines d'interface les plus influentes se situent respectivement dans la zone proche du point d'excitation pour l'interface liée à la plaque excitée et dans la zone opposée pour l'interface non liée à la plaque excitée.

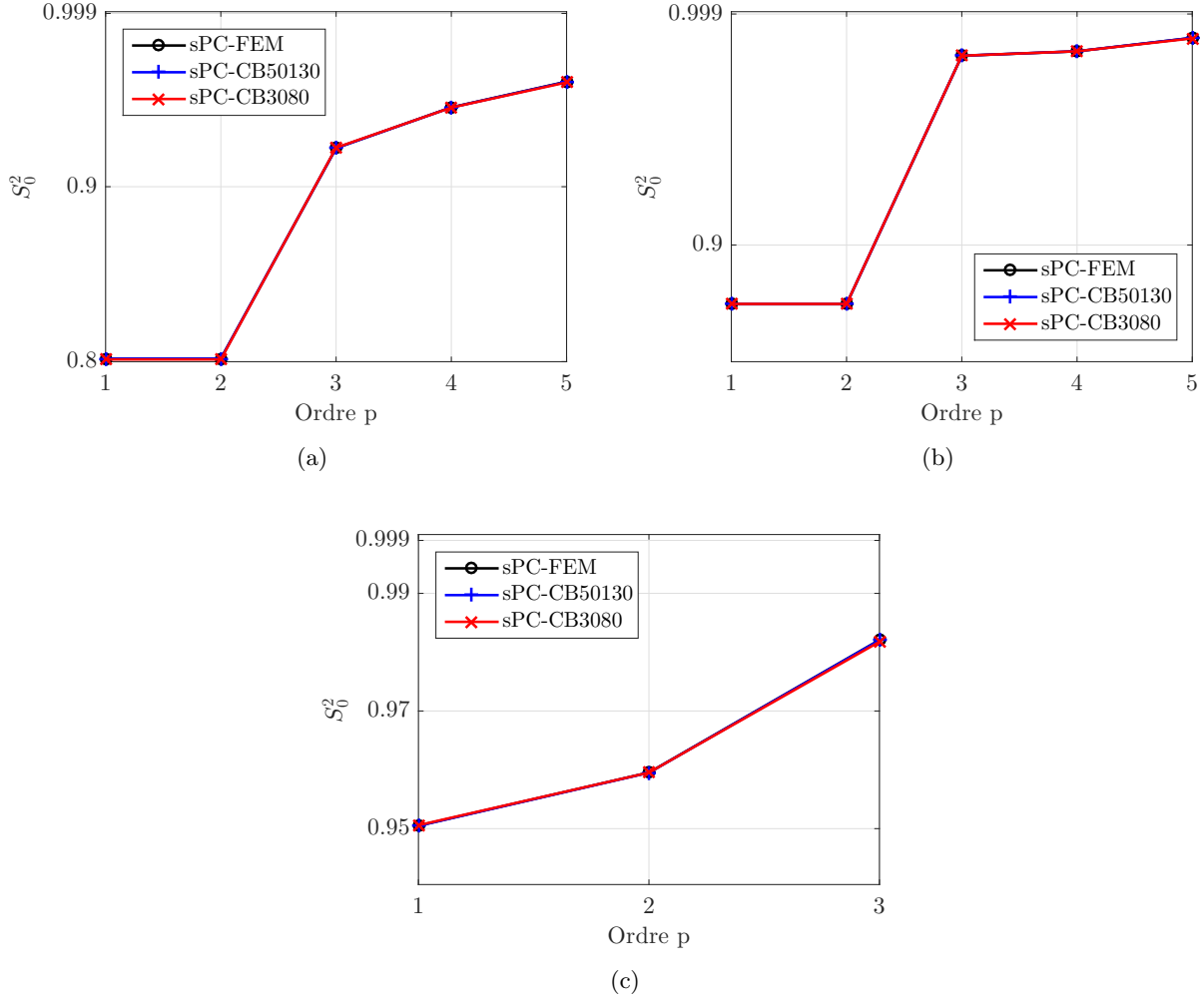


FIGURE 5.47 – Erreurs leave-one-out S_0^2 des trois développements sPC pour l'amplitude du pic 5 de l'énergie E_{def1} en fonction de l'ordre p ; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$.

Dans un souci de clarté, les statistiques (moyennes et variances) et les commentaires anoures pour cette QoI sont données dans l'annexe C.1. En effet, les résultats et commentaires sont similaires à ceux des deux QoI présentées précédemment.

Évolution de l'amplitude du pic 5 de E_{def1} en fonction des paramètres incertains

Les évolutions de l'amplitude du pic 5 de l'énergie de déformation de la plaque 1 sont une nouvelle fois calculées par les six méthodes pour $N = 10\,000$ tirages de r valeurs identiques des paramètres incertains, en vue de comparer les résultats à ceux obtenus préalablement pour le cas $r = 1$.

Les tendances précédentes sont retrouvées pour les cas $r = 8$, $r = 16$ et $r = 82$ (voir Figure 5.49), avec notamment un élargissement des courbes lorsque les amplitudes sont issues de simulations directes (avec le FEM complet ou l'un des modèles réduits) dû au problème de pas fréquentiel encore trop important. Néanmoins, en accord avec l'augmentation du niveau moyen d'erreur sur la moyenne par l'utilisation d'un développement sPC relevé précédemment, des écarts nets sont visibles entre les prédictions données par les trois développements sPC et les résultats de référence.

L'écart le plus important est logiquement obtenu pour le cas sPC-CB3080 pour $r = 8$, et s'observe

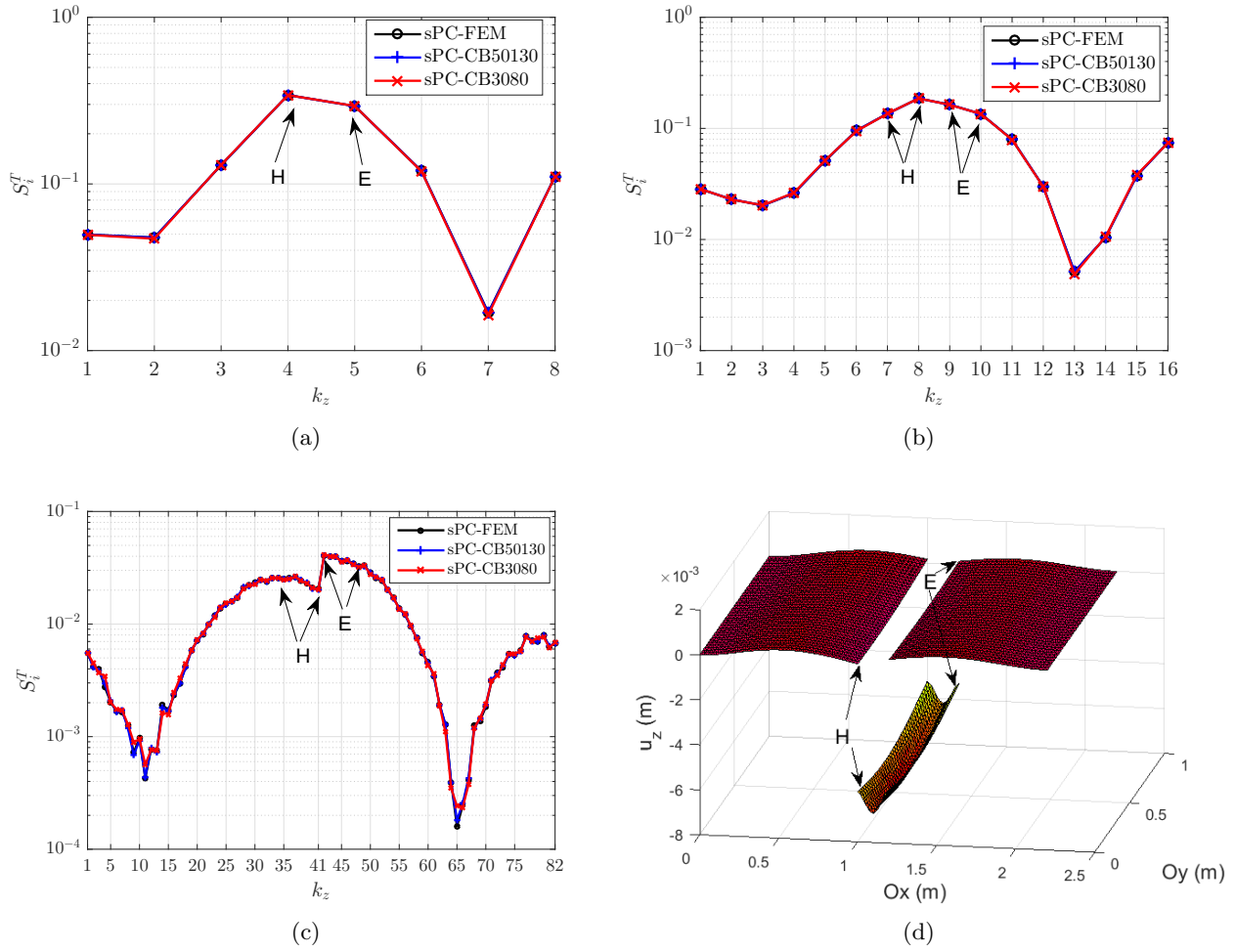


FIGURE 5.48 – Indices de sensibilité totaux S_i^T des r paramètres incertains sur l'amplitude du pic 5 de E_{def1} pour les trois développements sPC; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$ et (d) déformées modales aux valeurs nominales du pic 5 pour les plaques 1, 2 et 3

pour les plus faibles valeurs de k_z (comprises entre 100 et 120 N/m). Les développements sPC-FEM et sPC-CB50130, pour lesquels les courbes sont superposées, sont distincts du cas sPC-CB3080 aux plus faibles valeurs de la raideur, mais n'améliorent que très faiblement cette tendance. Des écarts un peu plus modérés sont aussi visibles pour le cas $r = 16$, cette fois pour les deux extrêmes de l'intervalle de valeurs de k_z . Comme expliqué dans la partie 5.3.2.2, une partie de la raison de ces écarts provient de la difficulté des développements en chaos aux bords des espaces stochastiques.

On observe donc ici une première limite des développements sPC, bien que les écarts restent modérés et que l'effet de lissage des courbes soit toujours bénéfique.

Un ordre de chaos supérieur aurait peut-être permis d'améliorer ces résultats, mais les temps de calcul en auraient été allongés.

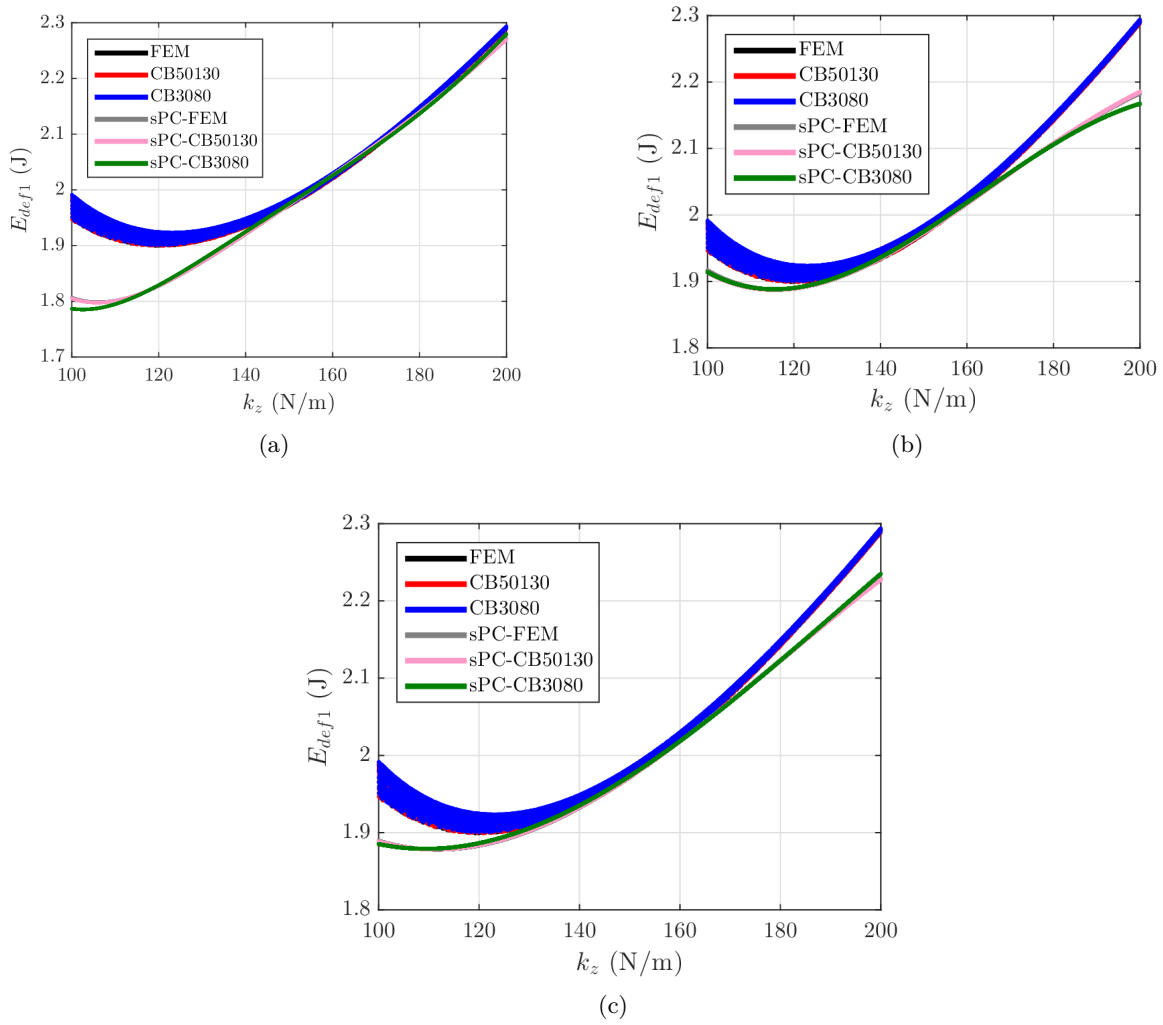


FIGURE 5.49 – Amplitude du pic 5 de E_{def1} en fonction des raideurs $k_{z1} = k_{z2} = \dots = k_{zr} = k_z$ pour $N = 10\,000$; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$.

5.3.2.5 Amplitude du pic 7 de l'énergie de déformation E_{def1}

L'amplitude du pic 7 de l'énergie de déformation de la première plaque, qui présentait la sensibilité la plus grande au paramètre incertain du fait notamment de sa faible valeur moyenne, reste la quantité la plus variable dans le cas de 8 paramètres incertains, avec un écart global qui dépasse 614 %. Sa valeur moyenne, qui diminue légèrement entre les deux configurations, ne change pas significativement lorsque l'on augmente à 16 le nombre de paramètres incertains (voir Figure 5.50), l'écart global s'approchant de 644 % dans ce cas, et il augmente jusqu'à 691 % dans le cas $r = 82$.

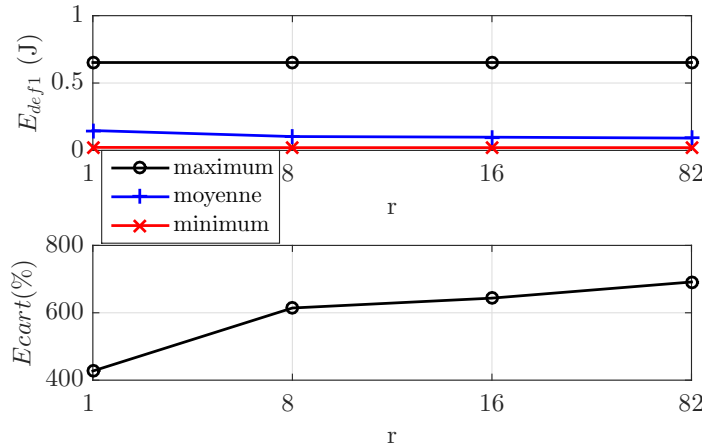


FIGURE 5.50 – Maximum, moyenne, minimum et l'écart de QoI en fonction de différent nombre de paramètres incertains $r = 1$, $r = 8$, $r = 16$ et $r = 82$

Construction des développements sPC et sensibilité aux paramètres

Comme pour la précédente QoI, les erreurs leave-one-out obtenues pour l'amplitude du pic 7 pour $r = 8$, $r = 16$ et $r = 82$ (Figure 5.51) montrent qu'il est encore nécessaire d'utiliser l'ordre maximal $p = p_{max} = 5$ pour les trois développements sPC dans les cas $r = 8$ et $r = 16$, ce qu'on avait déjà observé pour $r = 1$ ($p = p_{max} = 3$ pour le cas $r = 82$). Néanmoins, avec 8, 16 et 82 paramètres incertains la précision cible $S_{cible}^2 = 0.999$ n'est pas atteinte, les valeurs obtenues pour $p = p_{max}$ étant de l'ordre de $S_0^2 = 0.974$ pour $r = 8$, de $S_0^2 = 0.990$ pour $r = 16$ et de $S_0^2 = 0.994$ pour $r = 82$, la précision étant donc meilleure dans ce dernier cas.

Les indices de sensibilité des r paramètres incertains diffèrent encore pour cette quatrième QoI, comme le montre la Figure 5.52. Les raideurs des ressorts situés au milieu de la jonction entre les plaques 1 et 2 (k_{z2} et k_{z3} pour $r = 8$, k_{z4} et k_{z5} pour $r = 16$ et quelques raideurs des ressorts situés autour de k_{z20} pour $r = 82$), apparaissent ici comme les paramètres les plus influents, suivis de près par les raideurs notées E des ressorts au milieu de la jonction entre les plaques 2 et 3 (respectivement k_{z6} et k_{z7} pour $r = 8$, k_{z12} et k_{z13} pour $r = 16$ et quelques raideurs notées H des ressorts autour de k_{z61} pour $r = 82$). Des valeurs quasiment identiques sont ici encore obtenues pour les trois développements sPC.

Les raideurs des ressorts les plus influentes sont notées E et H sur la Figure 5.52 (d) qui représente les déformées modales du pic 7 déterminées avec les paramètres incertains à leurs valeurs nominales. On peut ainsi observer que les raideurs incertaines d'interface les plus influentes se situent dans les

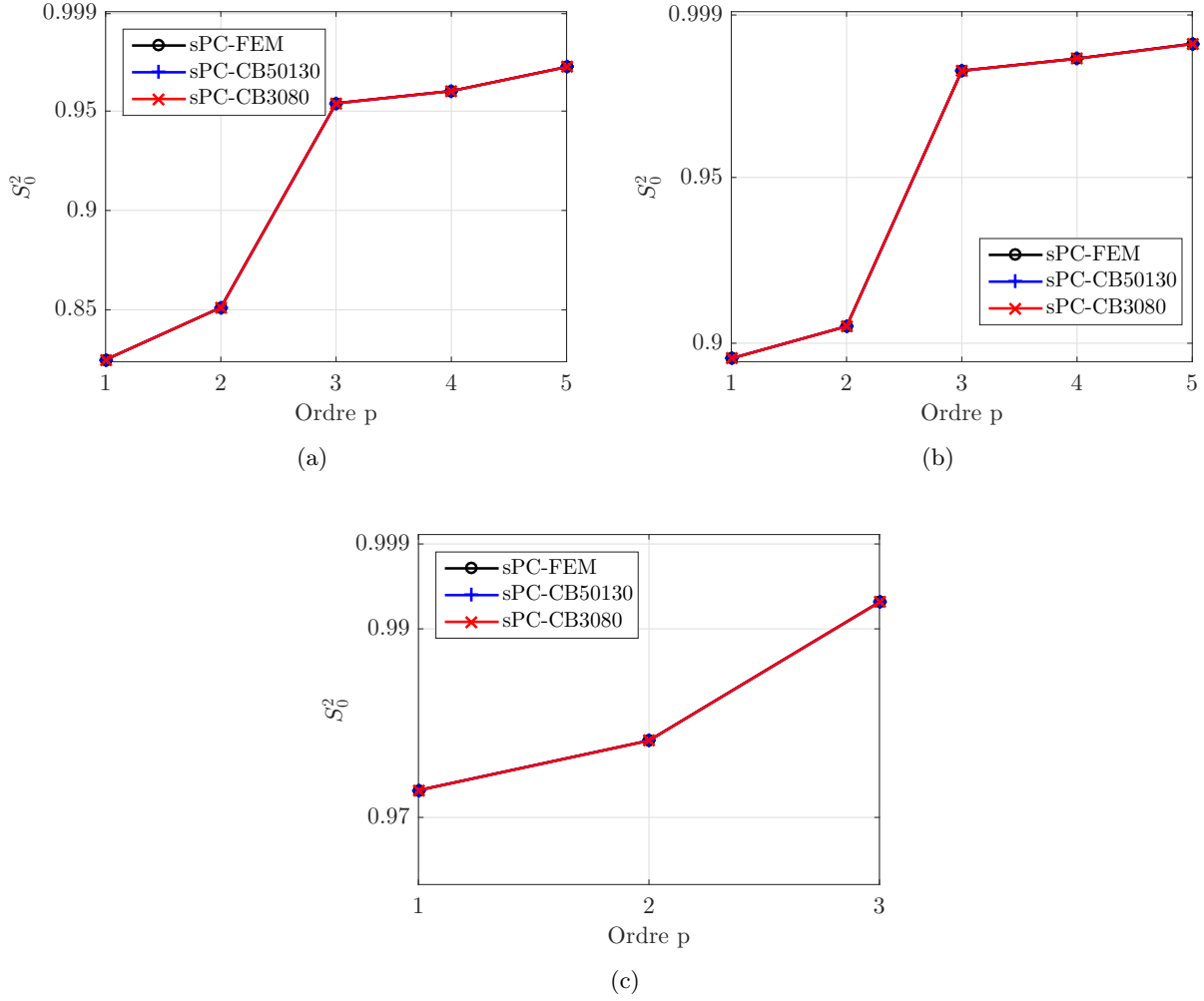


FIGURE 5.51 – Erreurs leave-one-out S_0^2 des trois développements sPC pour l'amplitude du pic 7 de l'énergie E_{def1} en fonction de l'ordre p ; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$.

zones notées E et H des interfaces correspondant aux amplitudes modales des plus importantes.

Comme pour la QoI précédente, les statistiques associées à l'amplitude du pic 7 sont détaillées en annexe C.2.

Évolution de l'amplitude du pic 7 de E_{def1} en fonction des paramètres incertains

Les cas de 8, 16 et 82 paramètres incertains sont encore une fois comparés au cas $r = 1$ en réalisant $N = 10\,000$ tirages de valeurs de raideurs $k_{z1} = k_{z2} = \dots = k_{zr} = k_z$.

Les évolutions correspondantes de l'amplitude du pic 7 en fonction de k_z pour les 6 méthodes sont tracées sur la figure 5.53. On retrouve l'allure générale que l'on avait obtenue pour le cas $r = 1$, néanmoins, comme pour la précédente QoI, des écarts sont visibles pour les plus faibles et plus grandes valeurs de k_z (en particulier pour $k_z > 180\text{ N/m}$ pour $r = 16$ et $r = 82$) entre les évolutions prédites par un développement sPC et les courbes résultant de simulations directes avec les modèles éléments finis complet et réduits (qui sont, elles, toujours superposées). Les courbes correspondant au modèle sPC-CB3080 ne sont ici pas distinctes des autres (relatives aux modèles sPC-FEM et sPC-CB50130).

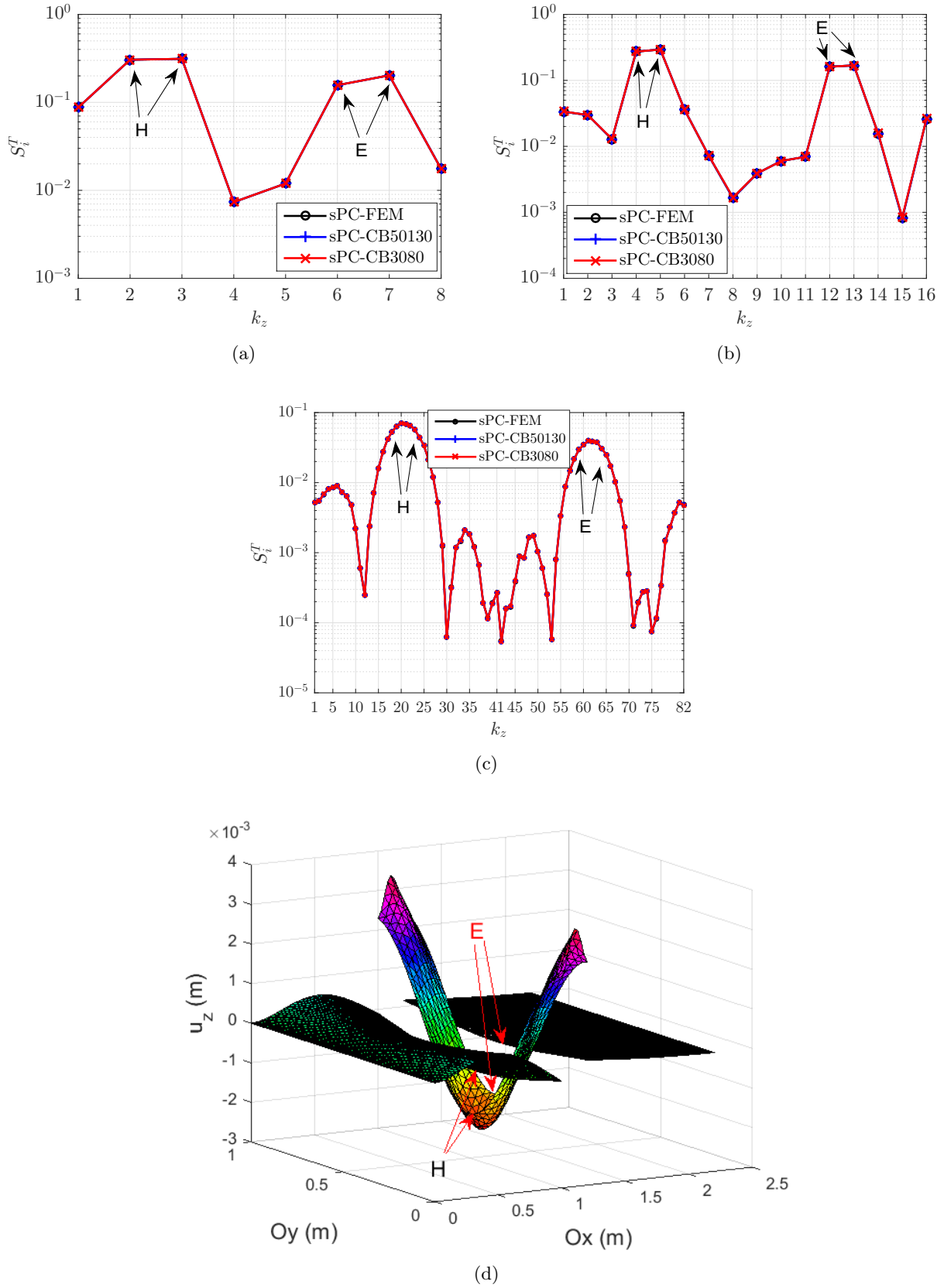


FIGURE 5.52 – Indices de sensibilité totaux S_i^T des paramètres incertains sur l'amplitude du pic 7 pour les trois développements sPC ; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$ et (d) déformées modales aux valeurs nominales du pic 7 pour les plaques 1, 2 et 3

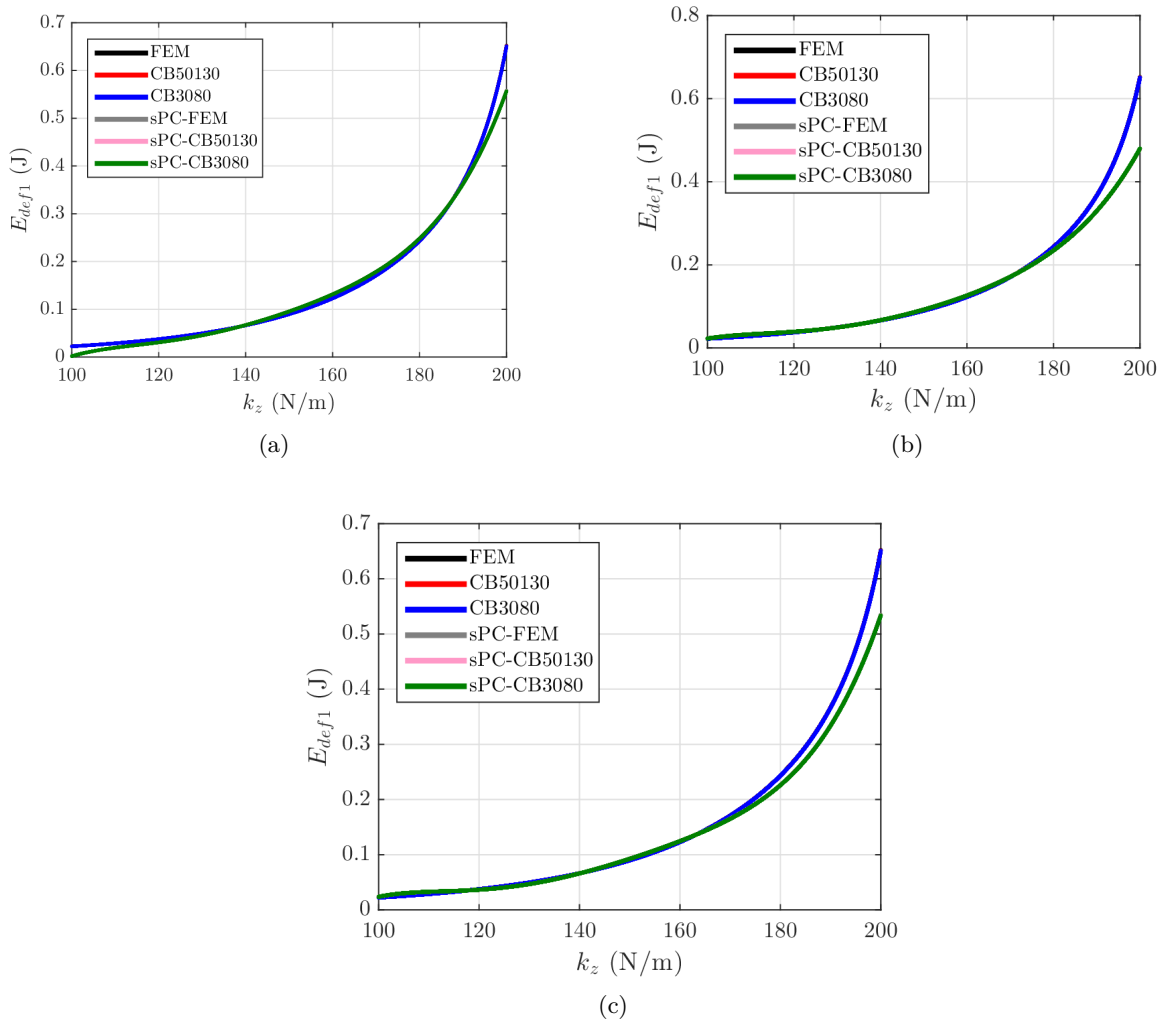


FIGURE 5.53 – Amplitude du pic 7 de E_{def1} en fonction des raideurs $k_{z1} = k_{z2} = \dots = k_{zr} = k_z$ pour $N = 10\,000$; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$.

5.3.2.6 Coût de calcul

Comme dans le cas d'un paramètre incertain, on s'intéresse pour finir au coût de calcul requis pour déterminer les statistiques de huit QoI (les amplitudes et fréquences propres des pics 2, 5, 7 et 9 de l'énergie de déformation E_{def1} de la plaque 1) pour les six méthodes, et pour $N = 10\,000$ tirages du jeu de paramètres incertains. L'ensemble des coûts est présenté dans les tableaux 5.8 pour $r = 8$, 5.9 pour $r = 16$ et 5.10 pour $r = 82$.

Méthode		FEM	CB50130	CB3080	sPC-FEM	sPC-CB50130	sPC-CB3080
Formule du coût de calcul		$N_f \times \text{Nb tirages}$ $\times$ Temps unitaire par FEM complet	$N_f \times \text{Nb tirages}$ $\times$ Temps unitaire par FEM réduit	$N_f \times \text{Nb tirages}$ $\times$ Temps unitaire par FEM réduit	$N_f \times \text{Nb simulations pour construire chaos}$ $\times$ Temps unitaire par FEM complet	$N_f \times \text{Nb simulations pour construire chaos}$ $\times$ Temps unitaire par FEM réduit	$N_f \times \text{Nb simulations pour construire chaos}$ $\times$ Temps unitaire par FEM réduit
Pic 2	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit avec $N_f = 351$	10 000	10 000	10 000	251	251	251
	Coût (temps) de calcul	15jours 20h	5jours 6h	4jours 6h	9h 32	3h 9	2h 34
	Pourcentage de réduction (%)	-	66.86	73.10	97.49	99.17	99.32
Pic 5	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit avec $N_f = 5071$	10 000	10 000	10 000	328	328	328
	Coût (temps) de calcul	228jours 12h	75jours 17h	61jours 11h	7jours 12h	59h 36	48h 22
	Pourcentage de réduction (%)	-	66.86	73.10	96.72	98.91	99.12
Pic 7	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit avec $N_f = 2601$	10 000	10 000	10 000	216	216	216
	Coût (temps) de calcul	117jours 5h	38jours 20h	31jours 12h	60h 45	20h 8	16h 20
	Pourcentage de réduction (%)	-	66.86	73.10	97.84	99.28	99.42
Pic 9	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit avec $N_f = 901$	10 000	10 000	10 000	182	182	182
	Coût (temps) de calcul	40jours 14h	13jours 11h	10jours 22h	17h 44	5h 53	4h 46
	Pourcentage de réduction (%)	-	66.86	73.10	98.18	99.40	99.51

TABLEAU 5.8 – Coûts de calcul pour 8 QoI liées aux pics 2, 5, 7 et 9 de l'énergie de déformation de la plaque 1 pour $N = 10\,000$ jeux de valeurs des 8 paramètres incertains.

Il est à noter que l'augmentation du nombre de paramètres incertains ne modifie pas les coûts de calcul relatifs aux simulations directes avec les modèles éléments finis (complet et réduit), puisqu'un même nombre de simulations est effectué dans les quatre cas $r = 1$, $r = 8$, $r = 16$ et $r = 82$. Seuls les coûts liés aux développements sPC vont être affectés.

Comme dans le cas d'un paramètre incertain, pour chaque QoI, on utilise un même nombre de simulations pour déterminer les coefficients du chaos dans les trois versions des développements sPC afin de s'affranchir de l'influence du choix des jeux de valeurs de paramètres incertains correspondant à ces simulations sur les résultats. Ce nombre (limité) de simulations correspond au nombre minimal requis par le développement d'ordre le plus élevé après enrichissement.

Pour $r = 8$ paramètres incertains il est ainsi de 251 simulations pour les deux QoI liées au pic 2, 328 simulations pour le pic 5, 216 simulations pour le pic 7 et 182 simulations pour le pic 9. Malgré une augmentation forte de ces nombres de simulations par rapport au cas $r = 1$, ils restent très inférieurs à 10 000 et permettent ici encore des réductions très importantes des coûts de calcul, toutes supérieures à 96 %. En utilisant de surcroît un modèle réduit pour calculer les coefficients des développements sPC, les réductions dépassent les 99 % pour la plupart des QoI.

Dans le cas de $r = 16$ paramètres incertains, ce nombre de simulations augmente par rapport aux cas précédents, avec 1008 simulations pour le pic 2, 1999 simulations pour le pic 5, 623 simulations pour le pic 7 et 751 simulations pour le pic 9. Les réductions de temps de calcul en sont naturellement affectées mais restent intéressantes, la réduction la plus faible étant tout de même supérieure à 80 % pour le pic 5 et à 90 % pour les autres pics en calculant les coefficients du chaos avec le FEM complet. Lorsque les coefficients sont calculés à l'aide d'un modèle réduit, la réduction de temps de calcul varie entre 93 % et 98 % selon le pic considéré.

Pour le cas extrême de paramètres incertains ($r = 82$), les nombres de simulations nécessaires pour construire les coefficients du chaos sont tous supérieurs à 2000, mais restent inférieurs à 3000 grâce à la limitation de l'ordre maximal du chaos $p_{max} = 3$, au lieu de $p_{max} = 5$ dans les cas $r = 1$, $r = 8$ et $r = 16$. En calculant les coefficients du chaos avec le FEM complet (sPC-FEM), la réduction de temps de calcul varie entre 74 % et 78 % ce qui donne un faible avantage par rapport au cas de calcul direct par le modèle le plus réduit (CB3080). Cependant, les réductions de temps de calcul sont supérieures à 91 % lorsque les coefficients du chaos sont calculés par un modèle réduit et la réduction dépasse 94 % pour les pics 2 et 7 dans le cas de sPC-CB3080.

Ces résultats prouvent de nouveau l'efficacité du chaos dans les cas de 8, 16 et 82 paramètres incertains, pour une diminution très légère de la précision des résultats.

Pour montrer l'avantage de l'utilisation de sPC par rapport au chaos polynomial généralisé (gPC) en terme de coût de calcul, les nombres de simulations nécessaires pour construire les coefficients du chaos pour le gPC et le sPC sont comparés pour le cas $r = 8$ (tableau 5.11). Dans ce tableau, trois versions des développements gPC sont supposées : gPC-FEM, gPC-CB50130 et gPC-CB3080 (les même cas de sPC). Pour chaque pic, les trois versions des gPC sont supposées utiliser le même ordre optimal du chaos, p , que les cas de sPC pour construire les coefficients. Cet ordre égal à 5 correspond à l'ordre maximal des ordres optimaux des QoI pour tous les pics dans le cas $r = 8$. Le nombre de coefficients d'un gPC, $N_p + 1$, est calculé avec l'équation (2.12) et le nombre de simulations du modèle complet (ou réduit), est $Q = 4(N_p + 1)$ (comme dans le cas de l'enrichissement du nombre de simulations d'un sPC dans l'étape 4 (annexe B.2)). Le tableau 5.11 montre que les trois versions de gPC, pour les quatre pics, utilisent 20592 simulations, ce qui dépasse le nombre de simulations avec les méthodes directes (FEM, CB50130 et CB3080), $N = 10000$. Il est donc clairement montré que le sPC est bien meilleur en coût de calcul que le gPC dès un nombre relativement faible de paramètres incertains.

Méthode		FEM	CB50130	CB3080	sPC-FEM	sPC-CB50130	sPC-CB3080
Formule du coût de calcul		$N_f \times \text{Nb tirages}$ x Temps unitaire par FEM complet	$N_f \times \text{Nb tirages}$ x Temps unitaire par FEM réduit	$N_f \times \text{Nb tirages}$ x Temps unitaire par FEM réduit	$N_f \times \text{Nb simulations}$ pour construire chaos x Temps unitaire par FEM complet	$N_f \times \text{Nb simulations}$ pour construire chaos x Temps unitaire par FEM réduit	$N_f \times \text{Nb simulations}$ pour construire chaos x Temps unitaire par FEM réduit
Pic 2	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit avec $N_f = 351$	10 000	10 000	10 000	1008	1008	1008
	Coût (temps) de calcul	15jours 20h	5jours 6h	4jours 6h	38h 16	12h 41	10h 17
	Pourcentage de réduction (%)	-	66.86	73.10	89.92	96.66	97.29
Pic 5	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit avec $N_f = 5071$	10 000	10 000	10 000	1999	1999	1999
	Coût (temps) de calcul	228jours 12h	75jours 17h	61jours 11h	45jours 16h	15jours 3h	12jours 7h
	Pourcentage de réduction (%)	-	66.86	73.10	80.01	93.38	94.62
Pic 7	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit avec $N_f = 2601$	10 000	10 000	10 000	623	623	623
	Coût (temps) de calcul	117jours 5h	38jours 20h	31jours 12h	7jours 7h	58h 4	47h 8
	Pourcentage de réduction (%)	-	66.86	73.10	93.77	97.94	98.32
Pic 9	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit avec $N_f = 901$	10 000	10 000	10 000	751	751	751
	Coût (temps) de calcul	40jours 14h	13jours 11h	10jours 22h	73h 10	24h 15	19h 41
	Pourcentage de réduction (%)	-	66.86	73.10	92.49	97.51	97.98

TABLEAU 5.9 – Coûts de calcul pour 8 QoI liées aux pics 2, 5, 7 et 9 de l'énergie de déformation de la plaque 1 pour $N = 10\,000$ jeux de valeurs des 16 paramètres incertains.

Méthode		FEM	CB50130	CB3080	sPC-FEM	sPC-CB50130	sPC-CB3080
Formule du coût de calcul		$N_f \times \text{Nb tirages}$ $\times$ Temps unitaire par FEM complet	$N_f \times \text{Nb tirages}$ $\times$ Temps unitaire par FEM réduit	$N_f \times \text{Nb tirages}$ $\times$ Temps unitaire par FEM réduit	$N_f \times \text{Nb simulations}$ pour construire chaos $\times$ Temps unitaire par FEM complet	$N_f \times \text{Nb simulations}$ pour construire chaos $\times$ Temps unitaire par FEM réduit	$N_f \times \text{Nb simulations}$ pour construire chaos $\times$ Temps unitaire par FEM réduit
Pic 2	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit avec $N_f = 351$	10 000	10 000	10 000	2206	2206	2206
	Coût (temps) de calcul	15jours 20h	5jours 6h	4jours 6h	3jours 12h	27h 45	22h 31
	Pourcentage de réduction (%)	-	66.86	73.10	77.94	92.69	94.07
Pic 5	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit avec $N_f = 5071$	10 000	10 000	10 000	2514	2514	2514
	Coût (temps) de calcul	228jours 12h	75jours 17h	61jours 11h	57jours 11h	19jours 1h	15jours 11h
	Pourcentage de réduction (%)	-	66.86	73.10	74.86	91.67	93.24
Pic 7	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit avec $N_f = 2601$	10 000	10 000	10 000	2166	2166	2166
	Coût (temps) de calcul	117jours 5h	38jours 20h	31jours 12h	25jours 9h	8jours 10h	6jours 20h
	Pourcentage de réduction (%)	-	66.86	73.10	78.34	92.82	94.17
Pic 9	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit avec $N_f = 901$	10 000	10 000	10 000	2248	2248	2248
	Coût (temps) de calcul	40jours 14h	13jours 11h	10jours 22h	9jours 3h	3jours 1h	2jours 11h
	Pourcentage de réduction (%)	-	66.86	73.10	77.52	92.55	93.95

TABLEAU 5.10 – Coûts de calcul pour 8 QoI liées aux pics 2, 5, 7 et 9 de l'énergie de déformation de la plaque 1 pour $N = 10\,000$ jeux de valeurs des 82 paramètres incertains.

Méthode		gPC-FEM, gPC-CB50130, gPC-CB3080	sPC-FEM	sPC-CB50130	sPC-CB3080
Pic 2	Ordre p	5	5	5	5
	Nb de coefficients du chaos	5148	61	55	54
	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit	20592	251	251	251
Pic 5	Ordre p	5	5	5	5
	Nb de coefficients du chaos	5148	96	95	96
	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit	20592	328	328	328
Pic 7	Ordre p	5	5	5	5
	Nb de coefficients du chaos	5148	53	58	53
	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit	20592	216	216	216
Pic 9	Ordre p	5	5	5	5
	Nb de coefficients du chaos	5148	40	40	40
	Nb de simulations avec FEM complet ou réduit	20592	182	182	182

TABEAU 5.11 – Comparaison des nombres de simulations avec FEM complet ou réduit entre gPC et sPC pour 8 QoI liées aux pics 2, 5, 7 et 9 de l'énergie de déformation de la plaque 1.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, trois développements sPC ont été entrepris pour calculer des quantités d'intérêt (QoI) liées à des fréquences propres ou des amplitudes d'énergies de déformation de plaques connectées par des ressorts de raideurs incertaines. Dans ces développements, les coefficients des polynômes du chaos sont déterminés à partir d'un nombre limité de simulations impliquant soit le FEM complet des trois plaques, soit l'un des modèles réduits dans le cadre de la méthode de Craig-Bampton (dénommés CB50130 et CB3080).

Ces développements ont été mis en œuvre pour trois configurations impliquant respectivement $r = 1$, $r = 8$, $r = 16$ et $r = 82$ paramètres incertains, dans le but de déterminer les statistiques des QoI pour $N = 10\,000$ jeux de valeurs des paramètres incertains.

Par ailleurs, un nouveau chaos polynomial creux appelé chaos polynomial amélioré a été défini à partir du chaos polynomial creux hyperbolique anisotropique avec une modification des critères de choix des coefficients.

Tandis que le coût de calcul associé à la solution de référence (la méthode classique de Monte-Carlo impliquant 10 000 simulations du FEM complet) s'avère prohibitif, des réductions de temps de calcul intéressantes (de l'ordre de 70 %) sont déjà obtenues en utilisant les modèles réduits CB50130 et CB3080, sans perte notable de précision.

En combinant un modèle réduit CB avec un développement sPC, la précision des résultats reste satisfaisante et la réduction du temps de calcul atteint des niveaux exceptionnels, supérieurs à 99.9 % pour le cas $r = 1$; pour les cas $r = 8$, $r = 16$ et $r = 82$, grâce à l'utilisation du développement sPC amélioré, la réduction du temps de calcul atteint encore des niveaux exceptionnels, globalement supérieurs à 98 % pour le cas $r = 8$, et supérieurs à 91 % même pour le cas extrême de paramètres incertains $r = 82$, en garantissant une précision des résultats satisfaisante.

Les études montrent que les approximations dues respectivement au modèle réduit de Craig-Bampton et aux développements en chaos génèrent des erreurs très faibles sur les QoI, celles dues aux approximations générées par les modèles réduits étant les plus faibles.

Pour les développements en chaos construits à partir des modèles réduits, l'association des approximations conduit à des erreurs très faibles qui correspondent à une simple addition des erreurs dues aux deux approximations. En effet, il n'y a pas de phénomène d'amplification des erreurs obtenues avec les modèles combinés qui aurait pu apparaître du fait d'une estimation des coefficients des chaos à partir d'estimations des QoI par les modèles réduits. Ainsi, il est tout à fait possible d'utiliser un modèle significativement réduit (CB3080) pour construire des développements en chaos.

Par ailleurs, l'utilisation de développements en chaos permet d'obtenir à un coût réduit (celui de la construction du chaos) la sensibilité des QoI aux différents paramètres incertains. En particulier, cela permet d'identifier des zones sur la structure où se situent les incertitudes en terme de raideur de jonction les plus influentes. On peut noter qu'une discrétisation spatiale même grossière de ces incertitudes ($r = 8$) permet de localiser rapidement ces zones. L'utilisation d'une discrétisation plus importante ($r = 82$) permet d'affiner l'analyse au sein de ces zones.

Ainsi l'utilisation du chaos polynomial creux anisotrope hyperbolique construit à partir d'un modèle réduit de Craig-Bampton permet d'effectuer à moindre coût avec une faible erreur une étude

dynamique d'une structure académique avec un nombre de paramètres incertains significatif.

Conclusion générale

Ces travaux de thèse se positionnent dans un cadre général, celui de contribuer à définir une démarche de conception robuste des systèmes dynamiques. Comme mentionné dans l'introduction de ce manuscrit, cette démarche a pour objectif final de concevoir des systèmes mécaniques robustes, autrement dit des systèmes qui gardent leurs performances tout le long de leur cycle de vie et ce malgré le caractère incertain de leurs paramètres.

Les systèmes mécaniques étant sujets à des incertitudes paramétriques tout au long de leur cycle de vie avec un comportement dynamique très sensible à ces incertitudes, il s'avère nécessaire d'avoir une analyse robuste de leur comportement dynamique. Dans ce contexte l'objectif de ce travail de thèse a été de développer une approche numérique associant des méthodes de propagation d'incertitudes paramétriques et des méthodes de réduction de modèles pour l'étude du comportement dynamique de structures mécaniques à paramètres incertains.

Suite à une étude bibliographique sur les principales approches de la littérature permettant de prendre en compte les incertitudes paramétriques, il est montré, d'une part, que les approches basées sur le chaos polynomial creux non intrusif, peu utilisées en dynamique, possèdent un potentiel significatif pour propager des incertitudes dans un modèle en général, et d'autre part, que la méthode de Craig-Bampton est la plus performante des méthodes de sous-structuration dynamique.

Dans une première partie, afin d'évaluer l'aptitude de schémas numériques basés sur des chaos polynomiaux creux proposées par Blatman à prendre en compte les incertitudes paramétriques dans le cadre d'une analyse en dynamique, une étude de la stabilité d'un modèle d'embrayage avec une approche indirecte de Lyapunov est effectuée. Trois méthodes basées sur des chaos polynomiaux creux (méthodes low-ranks index sets, isotropic hyperbolic index sets, anisotropic hyperbolic index sets) sont utilisées sur un modèle de la littérature et comparées à la fois à la méthode de référence de Monte Carlo et à des résultats de la littérature obtenus avec des méthodes basées respectivement sur les chaos polynomiaux généralisé et multi-éléments. Les quantités d'intérêts modélisées par les chaos polynomiaux sont les valeurs propres du système. Ces études montrent une meilleure efficacité des schémas basés sur les chaos polynomiaux creux avec une bonne précision des résultats et une réduction importante du coût de calcul, par rapport à la méthode de référence et aux deux autres approches. Il est mis en évidence que la méthode basée sur le chaos hyperbolique anisotropique est la plus performante des trois approches utilisant le chaos creux. Cependant le nombre de paramètres incertains pour lesquels le coût de calcul est acceptable reste encore peu élevé (jusqu'à huit). Ceci provient de la forte non linéarité des quantités d'intérêt au voisinage du point de bifurcation de Hopf. Par ailleurs, il est montré l'influence significative du plan d'expérience numérique initial du schéma de construction des développements en chaos polynomial en termes de précision et de coût de calcul.

Dans une deuxième partie, afin d'étudier la capacité de la méthode de sous-structuration de Craig-Bampton à réduire efficacement le nombre de degrés de liberté d'un modèle éléments finis, cette approche est utilisée pour analyser la réponse dynamique, en termes d'énergies de déformations, à une sollicitation harmonique d'une structure académique composée de trois plaques connectées les unes avec les autres par des raideurs. Deux modèles réduits comportant un nombre variable de modes d'interface fixe sont proposés et validés par comparaison avec la solution de référence impliquant le modèle éléments finis complet du système. Il est montré que cette méthode qui est basée sur une projection des degrés de liberté internes de la structure sur une base de modes statiques et de modes d'interface fixe permet une réduction substantielle du coût de calcul tout en garantissant une perte de précision négligeable.

Dans une troisième partie, la capacité de schémas numériques basés sur le chaos polynomial hyperbolique anisotropique et de la méthode de réduction de Craig-Bampton à prendre en compte les incertitudes paramétriques dans l'étude dynamique d'une structure est évaluée lorsque ces méthodes sont utilisées seules ou associées entre elles. La structure académique est celle utilisée précédemment avec des incertitudes portant sur les valeurs des raideurs d'interface entre les trois plaques.

Dans un premier temps, une série d'études est effectuée avec le seul formalisme du chaos polynomial sans modèle réduit, pour une incertitude des raideurs identique tout le long des deux interfaces. Afin de mener l'étude énergétique, il est proposé deux approches basées sur différentes quantités d'intérêt modélisées par le chaos. Il est montré que celle dont les quantités d'intérêt sont les amplitudes et les fréquences propres des pics d'énergies de déformation des différentes plaques s'avère être très performante à la fois en termes de précision et de temps de calcul. Ainsi dans la suite du manuscrit toutes les études sont exclusivement effectuées avec ces quantités d'intérêt.

Dans un second temps, les schémas numériques basés sur le chaos polynomial hyperbolique anisotropique sont associés aux deux modèles réduits de Craig-Bampton. Des études sont menées avec respectivement les deux modèles réduits seuls et trois chaos polynomiaux dont les coefficients sont déterminés à partir du modèle élément finis des trois plaques ou de l'un des modèles réduits. Le nombre de paramètres incertains considérés est augmenté, passant successivement de un à huit, seize et quatre-vingt-deux. Les résultats obtenus, en particulier les statistiques des quantités d'intérêt pour 10 000 jeux de valeurs des paramètres incertains, sont comparés à ceux obtenus avec la méthode de référence de Monte Carlo appliquée directement au modèle éléments finis complet. Il est proposé un nouveau chaos polynomial creux appelé chaos polynomial amélioré défini à partir du chaos polynomial creux hyperbolique anisotropique avec une modification des critères de choix des coefficients du chaos.

Il est montré que des réductions de temps de calcul intéressantes (de l'ordre de 70 %) sont déjà obtenues en utilisant les modèles réduits seuls sans perte notable de précision alors que le coût de calcul associé à la solution de référence s'avère prohibitif. En combinant un modèle réduit avec un développement en chaos, la précision des résultats reste satisfaisante et la réduction du temps de calcul atteint des niveaux supérieurs à 90 % grâce à l'utilisation du développement en chaos polynomial creux amélioré. Les études montrent que les approximations dues respectivement au modèle réduit de Craig-Bampton et aux développements en chaos génèrent des erreurs très faibles sur les quantités d'intérêt, celles dues aux approximations générées par les modèles réduits étant les plus faibles.

Comme mentionné dans la conclusion du chapitre 5, pour les développements en chaos construits à partir des modèles réduits, l'association des approximations conduit à des erreurs très faibles qui correspondent à une simple addition des erreurs dues aux deux approximations (pas de phénomène d'amplification). Par ailleurs, l'utilisation de développement en chaos permet d'obtenir à un coût ré-

duit (celui de la construction du chaos) la sensibilité des quantités d'intérêt aux différents paramètres incertains. En particulier, cela permet d'identifier des zones sur la structure où se situent les incertitudes en terme de raideur de jonction les plus influentes.

Pour conclure, l'utilisation du chaos polynomial creux anisotropique hyperbolique amélioré construit à partir d'un modèle réduit de Craig-Bampton peut permettre une étude dynamique d'une structure académique avec un nombre de paramètres incertains significatif, à moindre coût et avec une faible erreur. Néanmoins, l'efficacité de la méthode est fortement liée au choix de la quantité d'intérêt qui doit être modélisée par le chaos polynomial, l'efficacité de ce dernier dépendant fortement de la non linéarité de cette quantité d'intérêt.

Perspectives

La première perspective est d'appliquer les méthodes proposées dans ces travaux de thèse à un modèle éléments finis d'une structure industrielle possédant un nombre de degrés de liberté très élevé. L'objectif serait d'estimer l'applicabilité de ces méthodes dans un contexte industriel.

Dans une deuxième perspective, il serait intéressant de comparer ces méthodes non intrusives basées sur le chaos polynomial à celles intrusives. Cela permettrait, dans le cadre d'une approche académique, d'évaluer les performances de chacune de ces approches et ainsi de pouvoir apporter un éclairage sur le choix à faire entre ces deux approches dans un cadre industriel.

Une troisième perspective serait d'intégrer les méthodes développées dans cette thèse dans le cadre d'une démarche de conception robuste d'une structure en les utilisant dans une phase d'optimisation robuste.

Enfin, il pourrait être intéressant de valider ces différentes méthodes à travers une approche expérimentale.

Bibliographie

- [1] M. ABRAMOWITZ et I. A. STEGUN : *Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*,. Dover Publications, Inc., New York, NY, USA, 1970.
- [2] R. ASKEY et J.A. WILSON : *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials*, volume 319. American Mathematical Soc., 1985.
- [3] Ivo BABUŠKA, Fabio NOBILE et Raul TEMPONE : A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(3):1005–1034, 2007.
- [4] Ivo BABUSKA, Raúl TEMPONE et Georgios E ZOURARIS : Galerkin finite element approximations of stochastic elliptic partial differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(2): 800–825, 2004.
- [5] G. BAILLARGEON : *Méthodes statistiques et l'ingénieur*. Les Editions SMG, 1990.
- [6] Haym BENAROYA et M REHAK : Finite element methods in probabilistic structural analysis : a selective review. *Applied Mechanics Reviews*, 41(5):201–213, 1988.
- [7] WA BENFIELD et RF HRUDA : Vibration analysis of structures by component mode substitution. *AIAA journal*, 9(7):1255–1261, 1971.
- [8] M. BERVEILLER, B. SUDRET et M. LEMAIRE : Stochastic finite elements : a non intrusive approach by regression. *European Journal of Computational Mechanics*, 15(1-3) :81–92., 2006.
- [9] G. BLATMAN : *Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis*. Thèse de doctorat, Université BLAISE PASCAL - Clermont II, 2009.
- [10] G. BLATMAN et B. SUDRET : Anisotropic parcimonious polynomial chaos expansions based on the sparsity-of-effects principle. *In Proc ICOSSAR'09, International Conference in Structural Safety and Reliability*, 2009.
- [11] G. BLATMAN et B. SUDRET : An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 25(2):183–197, 2010.
- [12] Géraud BLATMAN et Bruno SUDRET : Sparse polynomial chaos expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach. *Comptes Rendus Mécanique*, 336(6):518 – 523, 2008.
- [13] N. BOUHADDI et R. FILLOD : A method for selecting master dof in dynamic substructuring using the guyan condensation method. *Computers & Structures*, 45(5):941 – 946, 1992.
- [14] R.H. CAMERON et W.T. MARTIN : The orthogonal development of non-linear functionals in series of fourier-hermite functionals. *Annals of Mathematics*, 48(2):385–392, 1947.
- [15] Matthew P CASTANIER, Yung-Chang TAN et Christophe PIERRE : Characteristic constraint modes for component mode synthesis. *AIAA journal*, 39(6):1182–1187, 2001.

-
- [16] D. CENTEA, H. RAHNEJAT et M.T. MENDAY : Non-linear multi-body dynamic analysis for the study of clutch torsional vibrations (judder). *Applied Mathematical Modelling*, 25(3):177 – 192, 2001.
 - [17] G. CHEVALLIER et D. LE NIZERHY : Friction induced vibrations in a clutch system. consequences on the apparent friction torque. In C. A. MOTASOARES, J. A. C. MARTINS, H. C. RODRIGUES, Jorge A. C. AMBRÓSIO, C. A. B. PINA, C. M. MOTASOARES, E. B. R. PEREIRA et J. FOLGADO, éditeurs : *III European Conference on Computational Mechanics : Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering : Book of Abstracts*, pages 309–309, Dordrecht, 2006. Springer Netherlands.
 - [18] G. CHEVALLIER, F. MACEWKO et F. ROBBE-VALLOIRE : Dynamic friction evolution during transient sliding. *Tribology Series*, 43:537 – 543, 2003. Transient Processes in Tribology.
 - [19] Khaoula CHIKHAOUI, Nouredine BOUHADDI, Najib KACEM, Mohamed GUEDRI et Soula MOHAMED : Uncertainty quantification/propagation in nonlinear models : Robust reduction - generalized polynomial chaos. *Engineering Computations*, 34, 06 2017.
 - [20] R.R. CRAIG et M.C.C. BAMPTON : Coupling of Substructures for Dynamic Analyses. *AIAA Journal*, 6(7):1313–1319, 1968.
 - [21] Thierry CRESTAUX, Olivier LE MAITRE et Jean-Marc MARTINEZ : Polynomial chaos expansion for sensitivity analysis. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(7):1161–1172, 2009.
 - [22] E. DENIMAL, L. NECHAK, J.-J. SINOUE et S. NACIVET : A novel hybrid surrogate model and its application on a mechanical system subjected to friction-induced vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 2018.
 - [23] Olivier DESSOMBZ : *Analyse dynamique de structures comportant des paramètres incertains*. Thèse de doctorat, Ecully, Ecole centrale de Lyon, 2000.
 - [24] Quan DO, Franck MASSA, Thierry TISON et Bertrand LALLEMAND : A global strategy for the stability analysis of friction induced vibration problem with parameter variations. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 84:346–364, 02 2017.
 - [25] Abdelkhalak EL HAMI et Bouchaïb RADI : *Dynamique des structures de grande taille et problèmes inverses*, volume 5. ISTE Group, 2018.
 - [26] O. FLODÉN, K. PERSSON et G. SANDBERG : Reduction methods for the dynamic analysis of substructure models of lightweight building structures. *Computers & Structures*, 138:49 – 61, 2014.
 - [27] Jessica FRANCO : *Exploratory Designs for Computer Experiments of Complex Physical Systems Simulation*. Theses, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, septembre 2008.
 - [28] G. FRITZ, J.-J. SINOUE, J.-M. DUFFAL et L. JÉZÉQUEL : Investigation of the relationship between damping and mode-coupling patterns in case of brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 307(3):591 – 609, 2007.
 - [29] Hilde De GERSEM, David MOENS, Wim DESMET et Dirk VANDEPITTE : Interval and fuzzy dynamic analysis of finite element models with superelements. *Computers & Structures*, 85(5):304 – 319, 2007. Computational Stochastic Mechanics.
 - [30] R.G. GHANEM et P.D. SPANOS : *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, 1991.
 - [31] GML GLADWELL : Branch mode analysis of vibrating systems. *Journal of sound and vibration*, 1(1):41–59, 1964.
 - [32] Michel GÉRADIN et Daniel RIXEN : *Mechanical Vibrations : Theory and Application to Structural Dynamics, 3rd Edition*. John Wiley & Sons, 2015.

- [33] Fabian M GRUBER et Daniel J RIXEN : Evaluation of substructure reduction techniques with fixed and free interfaces. *Strojniški vestnik-Journal of Mechanical Engineering*, 62(7-8):452–462, 2016.
- [34] Wang GUANG-YUAN et Ou JIN-PING : Theory of fuzzy random vibration with fuzzy parameters. *Fuzzy Sets and Systems*, 36(1):103 – 112, 1990. Fuzzy Information Processing.
- [35] Xiangfeng GUO, Dianchun DU et Daniel DIAS : Reliability analysis of tunnel lining considering soil spatial variability. *Engineering Structures*, 196:109332, 10 2019.
- [36] Robert J GUYAN : Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA journal*, 3(2):380–380, 1965.
- [37] B. HERVÉ, J.-J. SINOÛ, H. MAHÉ et L. JÉZÉQUEL : Analysis of squeal noise and mode coupling instabilities including damping and gyroscopic effects. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 27(2):141 – 160, 2008.
- [38] B. HERVÉ, J.-J. SINOÛ, H. MAHÉ et L. JÉZÉQUEL : Extension of the destabilization paradox to limit cycle amplitudes for a nonlinear self-excited system subject to gyroscopic and circulatory actions. *Journal of Sound and Vibration*, 323(3):944 – 973, 2009.
- [39] L. HINKE, F. DOHNAL, B.R. MACE, T.P. WATERS et N.S. FERGUSON : Component mode synthesis as a framework for uncertainty analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 324(1):161 – 178, 2009.
- [40] N HOFFMANN et L GAUL : Effects of damping on mode-coupling instability in friction induced oscillations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 83(8):524–534, 2003.
- [41] Sung-Kwon HONG, Bogdan I. EPUREANU et Matthew P. CASTANIER : Next-generation parametric reduced-order models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 37(1):403 – 421, 2013.
- [42] Walter C HURTY : Vibrations of structural systems by component mode synthesis. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 126(1):157–175, 1960.
- [43] Walter C HURTY : Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA journal*, 3(4):678–685, 1965.
- [44] R.A. IBRAHIM : Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos–part i : Mechanics of contact and friction. *Applied Mechanics Reviews*, 47(7):209–226, 1994.
- [45] Bruce IRONS : Eigenvalue economisers in vibration problems. *The Aeronautical Journal*, 67(632): 526–528, 1963.
- [46] E. JACQUELIN, O. DESSOMBZ, J.-J. SINOÛ, S. ADHIKARI et M.I. FRISWELL : Polynomial chaos-based extended padé expansion in structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 111(12):1170–1191, 2017.
- [47] Jin-Gyun KIM et Phill-Seung LEE : An enhanced craig–bampton method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 103:79–93, 04 2015.
- [48] Michał KLEIBER et Tran Duong HIEN : *The stochastic finite element method : basic perturbation technique and computer implementation*. Wiley, 1992.
- [49] Dennis KLERK, Daniel RIXEN et Sven VOORMEEREN : A general framework for dynamic substructuring. history, review and classification of techniques. *AIAA Journal*, 46:1169–1181, 01 2008.
- [50] Eskil LINDBERG, Nils-Erik HÖRLIN et Peter GÖRANSSON : Component mode synthesis using undeformed interface coupling modes to connect soft and stiff substructures. *Shock and Vibration*, 20(1):157–170, 2013.
- [51] B.R. MACE et P.J. SHORTER : A local modal/perturbational method for estimating frequency response statistics of built-up structures with uncertain properties. *Journal of Sound and Vibration*, 242(5):793 – 811, 2001.

-
- [52] Richard H. MACNEAL : A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, 1(4):581 – 601, 1971. Special Issue on Structural Dynamics.
- [53] Franck MASSA, Quan DO, Thierry TISON et Olivier CAZIER : Uncertain friction-induced vibration study : Coupling of fuzzy logic, fuzzy sets, and interval theories. *ASCE-ASME J. Risk and Uncert. in Engrg. Sys., Part B : Mech. Engrg.*, 2, 04 2015.
- [54] M.D. MCKAY, R.J. BECKMAN et W.J. CONOVER : A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21(2): 239–245, 1979.
- [55] Nicholas METROPOLIS et Stanislaw ULAM : The monte carlo method. *Journal of the American statistical association*, 44(247):335–341, 1949.
- [56] D.C. MONTGOMERY : *Design and Analysis of Experiments*. Student solutions manual. John Wiley & Sons, 2008.
- [57] Ramon E MOORE : *Interval analysis*, volume 4. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- [58] L. NECHAK, S. BERGER et E. AUBRY : Prediction of random self friction-induced vibrations in uncertain dry friction systems using a multi-element generalized polynomial chaos approach. *Journal of Vibration and Acoustics*, 134(4):041015, 2012.
- [59] L. NECHAK, S. BESSET et J.-J. SINOÛ : Robustness of stochastic expansions for the stability of uncertain nonlinear dynamical systems – application to brake squeal. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 111:194 – 209, 2018.
- [60] L. NECHAK et J.J. SINOÛ : Hybrid surrogate model for the prediction of uncertain friction-induced instabilities. *Journal of Sound and Vibration*, 396:122 – 143, 2017.
- [61] Lyes NECHAK : *Approches robustes du comportement dynamique des systèmes non linéaires : Application aux systèmes frottants*. Thèse de doctorat, Mulhouse, 2011.
- [62] Lyes NECHAK, Sébastien BERGER et Evelyne AUBRY : A polynomial chaos approach to the robust analysis of the dynamic behaviour of friction systems. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 30(4):594 – 607, 2011b.
- [63] Lyes NECHAK, Sébastien BERGER et Evelyne AUBRY : Non-intrusive generalized polynomial chaos for the robust stability analysis of uncertain nonlinear dynamic friction systems. *Journal of Sound and Vibration*, 332(5):1204 – 1215, 2013.
- [64] P. RAGOT : *Contribution à la conception robuste en dynamique des systèmes : Application à un système frottant présentant des instabilités de type Sprag-Slip*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure d’Ingénieurs Sud Alsace, UHA, 2007.
- [65] Andreas RAUH, Marco KLETTING, Harald ASCHEMANN et Eberhard P HOFER : Interval methods for simulation of dynamical systems with state-dependent switching characteristics. In *2006 IEEE Conference on Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pages 355–360. IEEE, 2006.
- [66] Daniel J. RIXEN : A dual craig-bampton method for dynamic substructuring. *J. Comput. Appl. Math.*, 168(1-2):383–391, juillet 2004.
- [67] E. SARROUY, O. DESSOMBZ et J.-J. SINOÛ : Stochastic analysis of the eigenvalue problem for mechanical systems using polynomial chaos expansion - application to a finite element rotor. *Journal of Vibration and Acoustics*, 134(5):051009, 2012.
- [68] E. SARROUY, O. DESSOMBZ et J.-J. SINOÛ : Piecewise polynomial chaos expansion with an application to brake squeal of a linear brake system. *Journal of Sound and Vibration*, 332(3):577 – 594, 2013.

- [69] D. SARSRI et L. AZRAR : Dynamic analysis of large structures with uncertain parameters based on coupling component mode synthesis and perturbation method. *Ain Shams Engineering Journal*, 7(1):371 – 381, 2016.
- [70] D. SARSRI, L. AZRAR, A. JEBBOURI et A. El HAMI : Component mode synthesis and polynomial chaos expansions for stochastic frequency functions of large linear fe models. *Computers & Structures*, 89(3):346 – 356, 2011.
- [71] A. SHAPIRO : Monte Carlo sampling methods. *Handbooks in Operations Research and Management Science*, 10:353 – 425, 2003. Stochastic Programming.
- [72] J. J. SINOU : Transient non-linear dynamic analysis of automotive disc brake squeal - On the need to consider both stability and non-linear analysis. *Mechanics Research Communications*, 37(1):96–105, 2010.
- [73] Cherif SNOUN, Baptiste BERGEOT et Sébastien BERGER : Prediction of the dynamic behavior of an uncertain friction system coupled to nonlinear energy sinks using a multi-element generalized polynomial chaos approach. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 80:103917, 2019.
- [74] Christian SOIZE et Roger GHANEM : Physical systems with random uncertainties : chaos representations with arbitrary probability measure. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(2):395–410, 2004.
- [75] LE SUAREZ et MP SINGH : Improved fixed interface method for modal synthesis. *AIAA journal*, 30(12):2952–2958, 1992.
- [76] B. SUDRET : Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models : Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods. Rapport technique, Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods., 2007.
- [77] Bruno SUDRET : Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering & System Safety*, 93(7):964 – 979, 2008. Bayesian Networks in Dependability.
- [78] Minh Hoang TRINH : *Etude du comportement dynamique d'un système d'embrayage en présence d'incertitudes*. Thèse de doctorat, Université de Haute-Alsace, 2015.
- [79] Minh Hoang TRINH, Sébastien BERGER et Evelyne AUBRY : Stability analysis of a clutch system with multi-element generalized polynomial chaos. *Mechanics & Industry*, 17(2):205, 2016.
- [80] S. VALLIAPPAN et T. D. PHAM : Elasto-plastic finite element analysis with fuzzy parameters. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(4):531–548, 1995.
- [81] X. WAN et G.E. KARNIADAKIS : An adaptive multi-element generalized polynomial chaos method for stochastic differential equations. *Journal of Computational Physics*, 209(2):617 – 642, 2005.
- [82] Xiaoliang WAN et George Em KARNIADAKIS : Beyond wiener–askey expansions : handling arbitrary pdfs. *Journal of Scientific Computing*, 27(1-3):455–464, 2006.
- [83] Xiaoliang WAN et George Em KARNIADAKIS : Multi-element generalized polynomial chaos for arbitrary probability measures. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 28(3):901–928, 2006.
- [84] G.G. WANG : Adaptive response surface method using inherited Latin Hypercube design points. *Journal of Mechanical Design*, 125(2):210–220, 2003.
- [85] P. WICKRAMARACHI, R. SINGH et G. BAILEY : Analysis of friction-induced vibration leading to “eek” noise in a dry friction clutch. *Noise Control Engineering Journal*, 53(4):138–144, 2005.
- [86] Norbert WIENER : The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4):897–936, 1938.
- [87] D. XIU et G.E. KARNIADAKIS : Modeling uncertainty in steady state diffusion problems via generalized polynomial chaos. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(43):4927–4948, 2002.

- [88] D. XIU et G.E. KARNIADAKIS : The wiener–askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(2):619–644, 2002.
- [89] Dongbin XIU et George Em KARNIADAKIS : Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. *Journal of computational physics*, 187(1):137–167, 2003.
- [90] L.A. ZADEH : Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338 – 353, 1965.

Annexe A

Les polynômes du chaos

A.1 Polynômes orthogonaux

Plusieurs familles de polynômes orthogonaux sont actuellement utilisées dans la théorie de l'intégration numérique [1]. Trois familles sont présentées ci-dessous.

A.1.1 Polynômes d'Hermite

Les polynômes d'Hermite d'ordre n sont les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y'' - xy' + ny = 0. \quad (\text{A.1})$$

Ils sont générés par la relation de récurrence suivante :

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x), \quad (\text{A.2})$$

avec $H_0(x) = 1$ et $H_1(x) = x$.

Ces polynômes sont orthogonaux par rapport à loi de la probabilité gaussienne comme suit :

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)W(x)dx = \sqrt{2\pi} n! \delta_{nm}, \quad (\text{A.3})$$

où $W(x) = e^{-x^2/2}$ est la fonction de poids de la loi normale standard correspondant aux polynômes d'Hermite et δ_{nm} est le symbole de Kronecker : $\delta_{nm} = 1$ si $m = n$, et 0 sinon.

L'espérance mathématique $E[.]$ des polynômes d'Hermite est :

$$E[H_n(x)H_m(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)f(x)dx = n! \delta_{nm}, \quad (\text{A.4})$$

où $f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ est la fonction densité de probabilité de la loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$.

A.1.2 Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre d'ordre n sont les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0. \quad (\text{A.5})$$

Ces polynômes sont générés par la relation de récurrence suivante :

$$(n + 1)L_{n+1}(x) = (2n + 1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x), \quad (\text{A.6})$$

avec $L_0(x) = 1$ et $L_1(x) = x$.

Les polynômes de Legendre sont orthogonaux par rapport à la loi de probabilité uniforme sur $[-1, 1]$:

$$\langle L_n, L_m \rangle = \int_{-1}^1 L_n(x) L_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}, \quad (\text{A.7})$$

où la fonction de poids correspondant aux polynômes de Legendre est $W(x) = 1$.

L'espérance mathématique des polynômes de Legendre est :

$$E[L_n(x) L_m(x)] = \int_{-1}^1 L_n(x) L_m(x) f(x) dx = \frac{1}{2n+1} \delta_{nm}, \quad (\text{A.8})$$

où $f(x) = 1/2$ est la fonction densité de probabilité de la loi uniforme continue sur $[-1, 1]$.

A.1.3 Polynômes de Laguerre

Les polynômes de Laguerre d'ordre n sont les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$xy''(1-x)y' + ny = 0. \quad (\text{A.9})$$

Ils sont générés par la relation de récurrence suivante :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x), \quad (\text{A.10})$$

avec $L_0(x) = 1$ et $L_1(x) = 1-x$.

Les polynômes de Laguerre sont orthogonaux par rapport à la loi de probabilité Gamma sur $[0, +\infty)$:

$$\langle L_n, L_m \rangle = \int_0^{+\infty} L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx = \delta_{nm}, \quad (\text{A.11})$$

où la fonction de poids correspondant aux polynômes de Laguerre est $W(x) = e^{-x}$.

L'espérance mathématique des polynômes de Laguerre est :

$$E[L_n(x) L_m(x)] = \int_0^{+\infty} L_n(x) L_m(x) f(x) dx = \delta_{nm}, \quad (\text{A.12})$$

où $f(x) = e^{-x}$ est la fonction densité de probabilité de la loi Gamma.

A.2 Construction des polynômes du chaos

Rappelons que la quantité d'intérêt $X(\xi)$ est approchée par une expansion tronquée impliquant un nombre fini N_p de termes :

$$X(\xi) \approx \sum_{j=0}^{N_p} \bar{x}_j \phi_j(\xi), \quad (\text{A.13})$$

où $\phi_j(\xi)$ sont les polynômes du chaos basés sur les polynômes orthogonaux d'une famille $P_n(\xi)$ et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ est un vecteur de r variables aléatoires indépendantes. ξ_i est distribuée selon la fonction densité de probabilité relative à la famille $P_n(\xi)$.

Les polynômes du chaos sont définis par :

$$\phi_j(\xi) = \phi_{\alpha^{(j)}}(\xi) = \prod_{i=1}^r P_{\alpha_i^{(j)}} = P_{\alpha_1^{(j)}}(\xi_1) \otimes \dots \otimes P_{\alpha_r^{(j)}}(\xi_r) \quad (\text{A.14})$$

L'espérance mathématique des polynômes du chaos est donc donnée par :

$$E[\phi_\alpha \phi_\beta] = \prod_{i=1}^r E[P_{\alpha_i}(\xi_i) P_{\beta_i}(\xi_i)] = \delta_{\alpha\beta} \prod_{i=1}^r E[P_{\alpha_i}^2(\xi_i)] = \delta_{\alpha\beta} E[\phi_\alpha^2(\xi)] \quad (\text{A.15})$$

A.3 Calcul de la moyenne et de la variance théorique

Les moyenne μ et variance σ^2 théoriques de la quantité d'intérêt $X(\xi)$ sont définies par :

$$\begin{cases} \mu = E[X(\xi)] \\ \sigma^2 = E[(X(\xi) - \mu)^2] \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

a. Calcul de la moyenne théorique

A partir de l'équation A.13, l'équation de la moyenne de $X(\xi)$ peut s'écrire :

$$\mu = E[X(\xi)] \approx E\left[\sum_{j=0}^{N_p} \bar{x}_j \phi_j(\xi)\right] \quad (\text{A.17})$$

En appliquant l'équation A.14, la moyenne de $X(\xi)$ devient :

$$\begin{aligned} \mu &\approx E\left[\sum_{j=0}^{N_p} \bar{x}_j P_{\alpha_1^{(j)}}(\xi_1) \otimes \dots \otimes P_{\alpha_r^{(j)}}(\xi_r)\right] \\ &= E[\bar{x}_0 P_0(\xi_1) \otimes \dots \otimes P_0(\xi_r)] + E[\bar{x}_1 P_{\alpha_1^{(1)}}(\xi_1) \otimes \dots \otimes P_{\alpha_r^{(1)}}(\xi_r)] + \dots + E[\bar{x}_{N_p} P_{\alpha_1^{(N_p)}}(\xi_1) \otimes \dots \otimes P_{\alpha_r^{(N_p)}}(\xi_r)] \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Comme $P_0(\xi_i) = 1$ pour chaque famille de polynômes orthogonaux (annexe A.1), la moyenne de $X(\xi)$ devient :

$$\begin{aligned} \mu &\approx \bar{x}_0 E[P_0^2(\xi_1) \otimes \dots \otimes P_0^2(\xi_r)] + \bar{x}_1 E[P_0(\xi_1) P_{\alpha_1^{(1)}}(\xi_1) \otimes \dots \otimes P_0(\xi_r) P_{\alpha_r^{(1)}}(\xi_r)] + \dots \\ &\quad + \bar{x}_{N_p} E[P_0(\xi_1) P_{\alpha_1^{(N_p)}}(\xi_1) \otimes \dots \otimes P_0(\xi_r) P_{\alpha_r^{(N_p)}}(\xi_r)] \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Les r variables $(\xi_1, \dots, \xi_r)$ sont indépendantes, donc :

$$\begin{aligned} \mu &\approx \bar{x}_0 E[P_0^2(\xi_1)] \otimes \dots \otimes E[P_0^2(\xi_r)] + \bar{x}_1 E[P_0(\xi_1) P_{\alpha_1^{(1)}}(\xi_1)] \otimes \dots \otimes E[P_0(\xi_r) P_{\alpha_r^{(1)}}(\xi_r)] + \dots \\ &\quad + \bar{x}_{N_p} E[P_0(\xi_1) P_{\alpha_1^{(N_p)}}(\xi_1)] \otimes \dots \otimes E[P_0(\xi_r) P_{\alpha_r^{(N_p)}}(\xi_r)] \\ &= \bar{x}_0 E[P_0^2(\xi_1)] \otimes \dots \otimes E[P_0^2(\xi_r)] + \bar{x}_1 \delta_{01} E[\phi_0^2] + \dots + \bar{x}_{N_p} \delta_{0N_p} E[\phi_0^2] \\ &= \bar{x}_0 (E[1])^r \\ \mu &\approx \bar{x}_0 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

b. Calcul la variance théorique

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= E[(X(\xi) - \mu)^2] \\
 &\approx E[(\sum_{j=0}^{N_p} \bar{x}_j \phi_j(\xi) - \bar{x}_0)^2] \\
 &= E[(\bar{x}_0 \phi_0(\xi) + \sum_{j=1}^{N_p} \bar{x}_j \phi_j(\xi) - \bar{x}_0)^2] \\
 &= E[(\bar{x}_0 + \sum_{j=1}^{N_p} \bar{x}_j \phi_j(\xi) - \bar{x}_0)^2] \\
 &= E[(\sum_{j=1}^{N_p} \bar{x}_j \phi_j(\xi))^2] \tag{A.21}
 \end{aligned}$$

$$(\sum_{j=1}^{N_p} \bar{x}_j \phi_j(\xi))^2 = \sum_{j=1}^{N_p} \bar{x}_j^2 \phi_j^2(\xi) + 2 \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq N_p} \bar{x}_{j_1} \phi_{j_1}(\xi) \bar{x}_{j_2} \phi_{j_2}(\xi) \tag{A.22}$$

Les r variables $(\xi_1, \dots, \xi_r)$ sont indépendantes, donc :

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \sum_{j=1}^{N_p} \bar{x}_j^2 E[\phi_j^2(\xi)] + 2 \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq N_p} \bar{x}_{j_1} \bar{x}_{j_2} E[\phi_{j_1}(\xi) \phi_{j_2}(\xi)] \\
 &= \sum_{j=1}^{N_p} \bar{x}_j^2 E[\phi_j^2(\xi)] + 2 \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq N_p} \bar{x}_{j_1} \bar{x}_{j_2} \delta_{j_1 j_2} E[\phi_{j_1}^2(\xi)] \\
 &= \sum_{j=1}^{N_p} \bar{x}_j^2 E[\phi_j^2(\xi)] \tag{A.23}
 \end{aligned}$$

Les valeurs de la moyenne et de la variance théoriques de la quantité d'intérêt $X(\xi)$ sont finalement calculées par :

$$\begin{cases} \mu \approx \bar{x}_0 \\ \sigma^2 \approx \sum_{j=1}^{N_p} \bar{x}_j^2 E[\phi_j^2(\xi)] \end{cases} \quad . \tag{A.24}$$

Annexe B

Algorithmes appliqués avec des sPC

B.1 Algorithmes initiaux appliqués pour des sPC

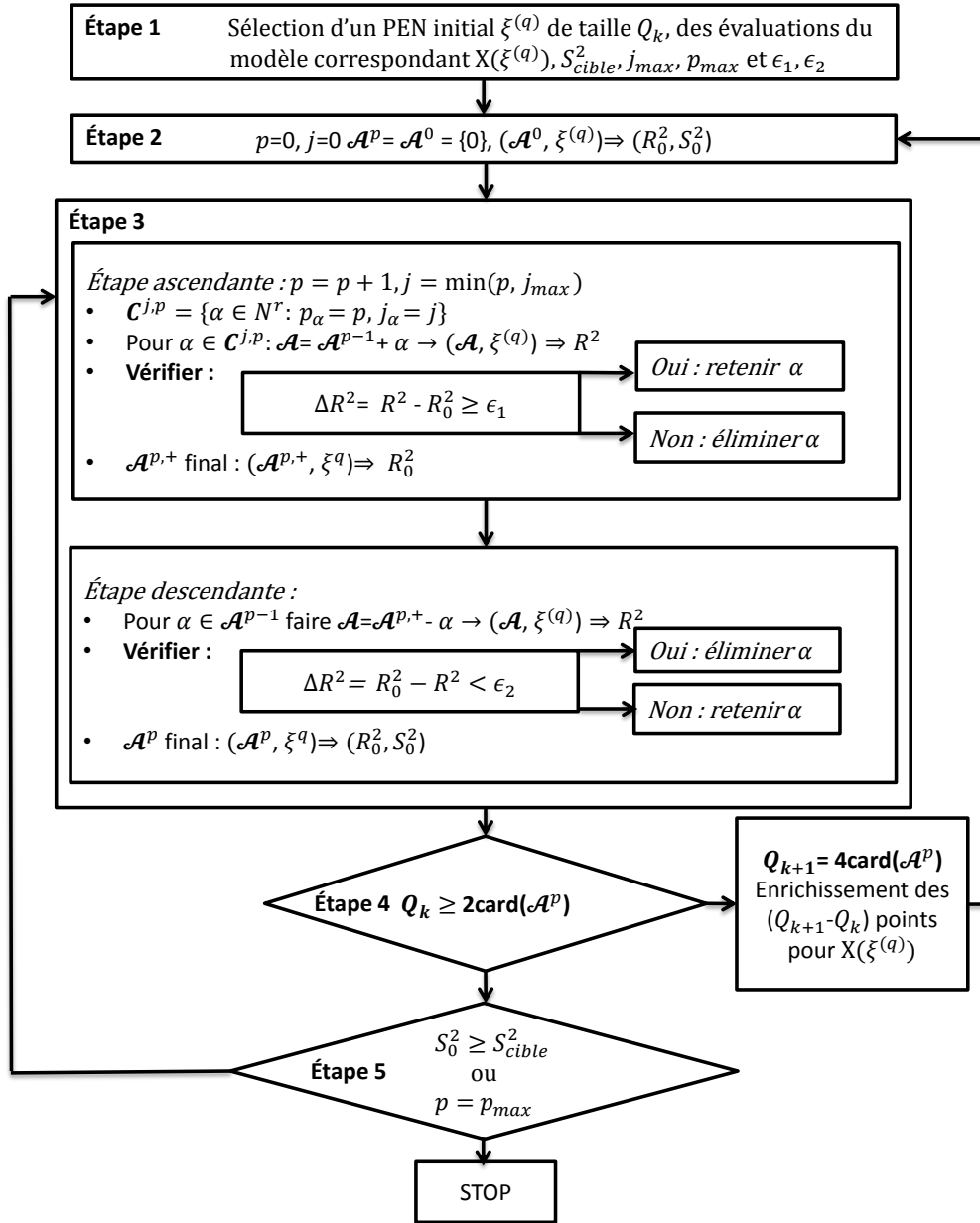


FIGURE B.1 – Algorithme appliqué pour construire le sPC avec « low-rank index sets ».

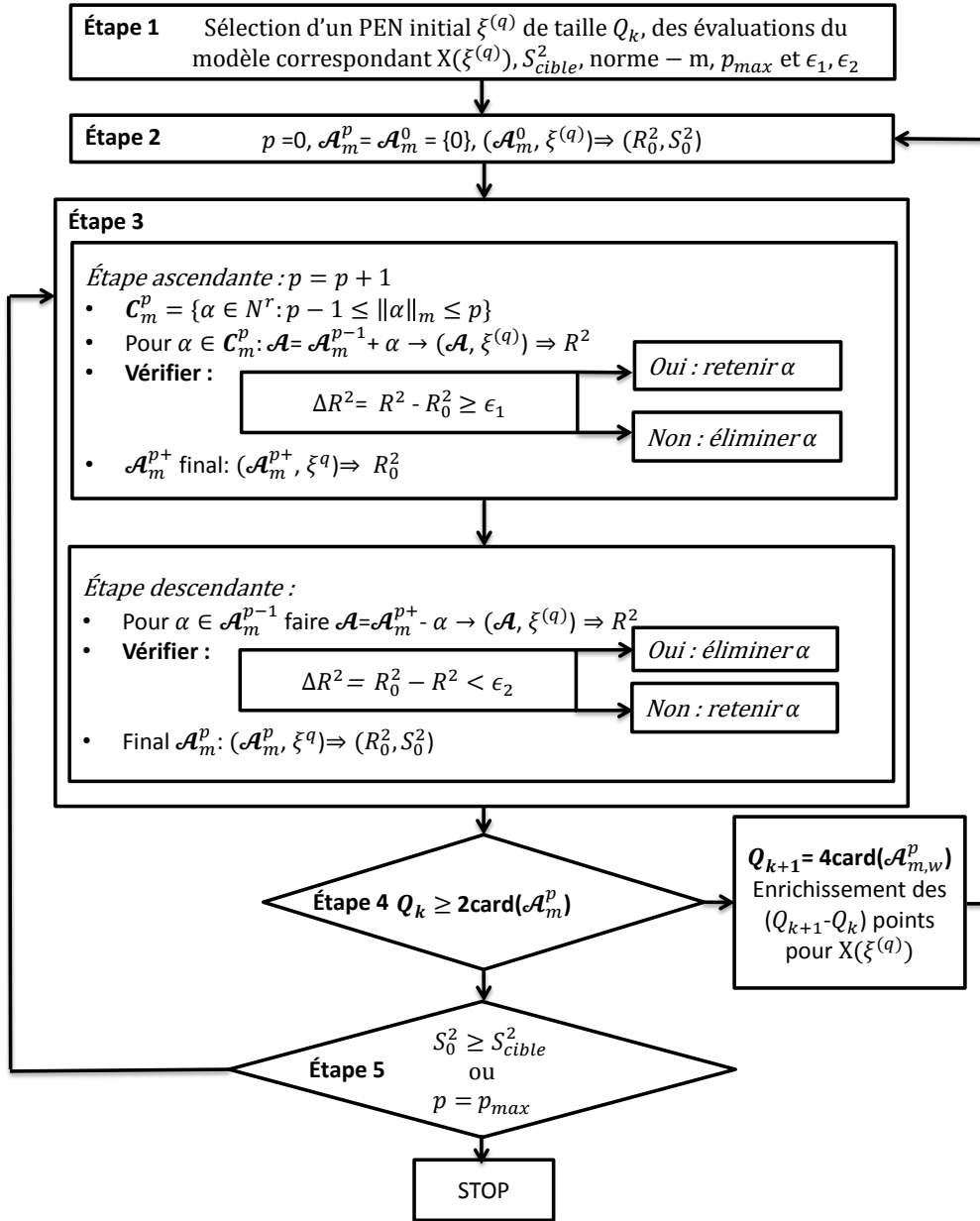


FIGURE B.2 – Algorithme appliqué pour construire le sPC avec « isotropic hyperbolic index sets ».

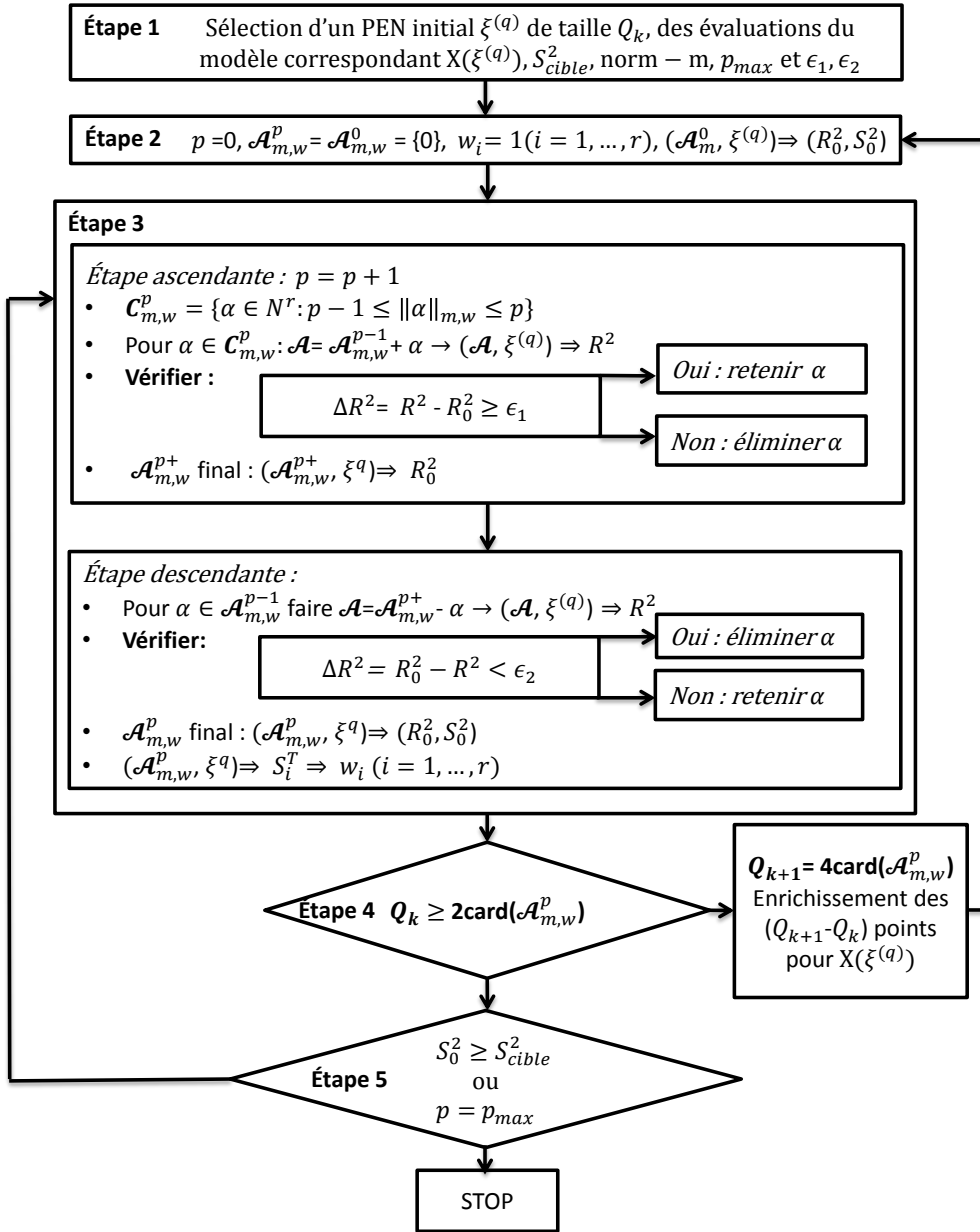


FIGURE B.3 – Algorithme appliqué pour construire le sPC avec « anisotropic hyperbolic index sets ».

B.2 Algorithme appliqué pour le sPC hyperbolique anisotropique amélioré

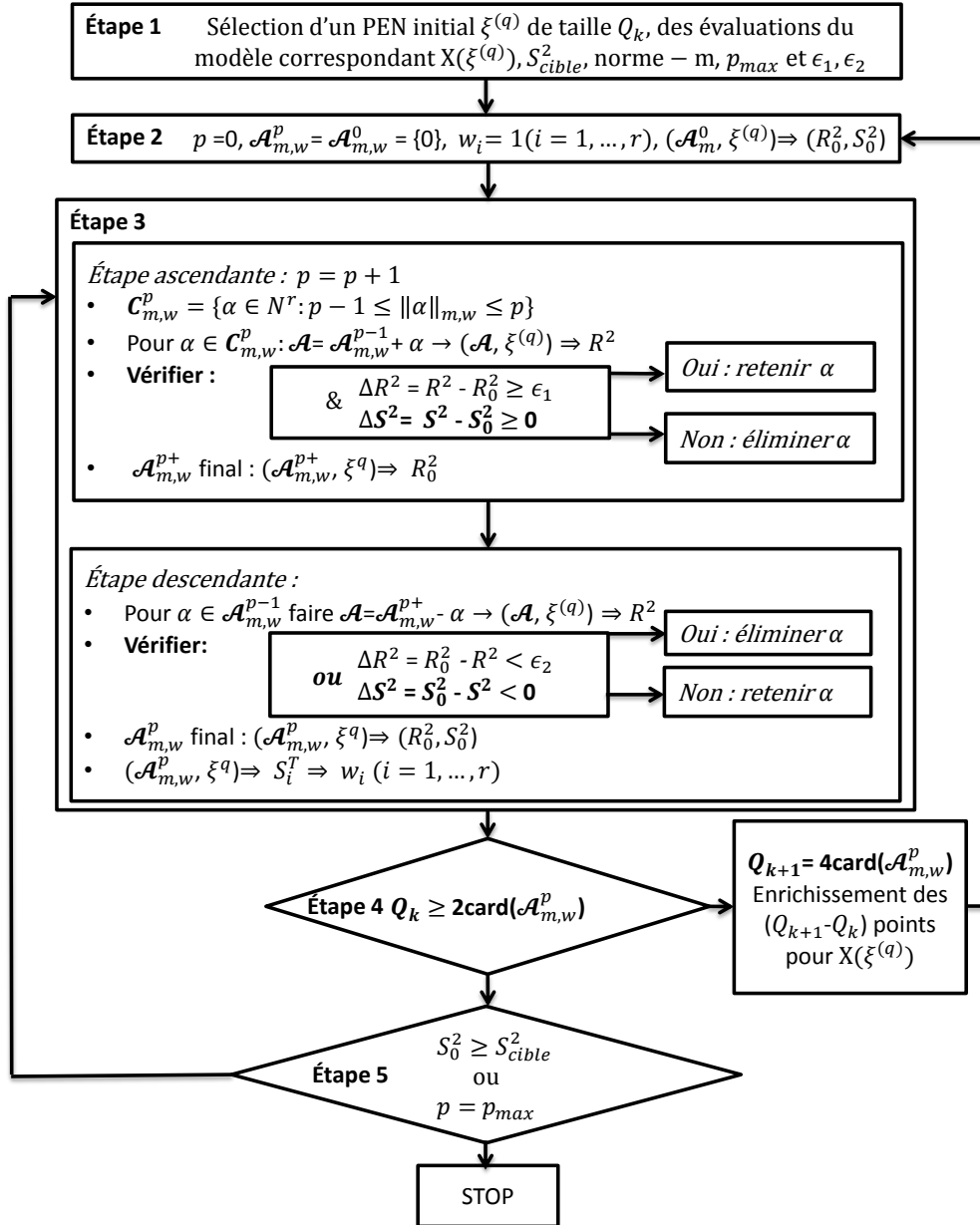


FIGURE B.4 – Algorithme appliqué pour construire le sPC amélioré avec « anisotropic hyperbolic index sets ».

Annexe C

Statistiques de la quantité d'intérêt obtenues à partir des différentes méthodes

C.1 Amplitude du pic 5 de l'énergie de déformation E_{def1}

Les moyennes et variances de la quantité d'intérêt obtenues pour $r = 8$ avec les six méthodes sont représentées sur la figure C.1. Les valeurs se stabilisent pour des mêmes ordres de grandeur de N que dans le cas $r = 1$, approximativement $N = 4000$ pour la moyenne et $N = 3000$ pour la variance. Les résultats concernant les configurations $r = 16$ et $r = 82$ sont quant à eux représentés sur la figure C.2 et C.3 respectivement ; une stabilisation des valeurs de moyenne et de variance apparaît dans ce cas plus tardivement, autour de $N = 7000$. L'effet de l'utilisation d'un modèle réduit est moins présent ici, pour un nombre de paramètres incertains augmenté, que ce que l'on avait observé pour le cas d'un paramètre incertain.

Concernant l'erreur relative sur la moyenne, des niveaux similaires sont atteints pour les cas $r = 1$, $r = 16$ et $r = 82$ (pour un nombre N de simulations suffisamment élevé), tandis qu'ils sont approximativement doublés pour 8 paramètres incertains. Les tendances sont différentes en ce qui concerne l'erreur relative sur la variance, pour laquelle les niveaux les plus faibles sont observés pour $r = 16$, et les plus élevés pour $r = 1$.

Les moyennes des erreurs relatives sur l'amplitude du pic 5, visibles sur la figure C.4, reflètent la perte de précision évoquée précédemment au sujet des erreurs leave-one-out. Pour un paramètre incertain, la valeur moyenne était d'environ 0.22, % pour les trois développements sPC ; elle augmente très franchement jusqu'aux alentours de 5.3 % pour 8 paramètres incertains, baisse à nouveau jusqu'à 1.7 % dans le cas $r = 16$ et jusqu'à 0.95 % dans le cas $r = 82$.

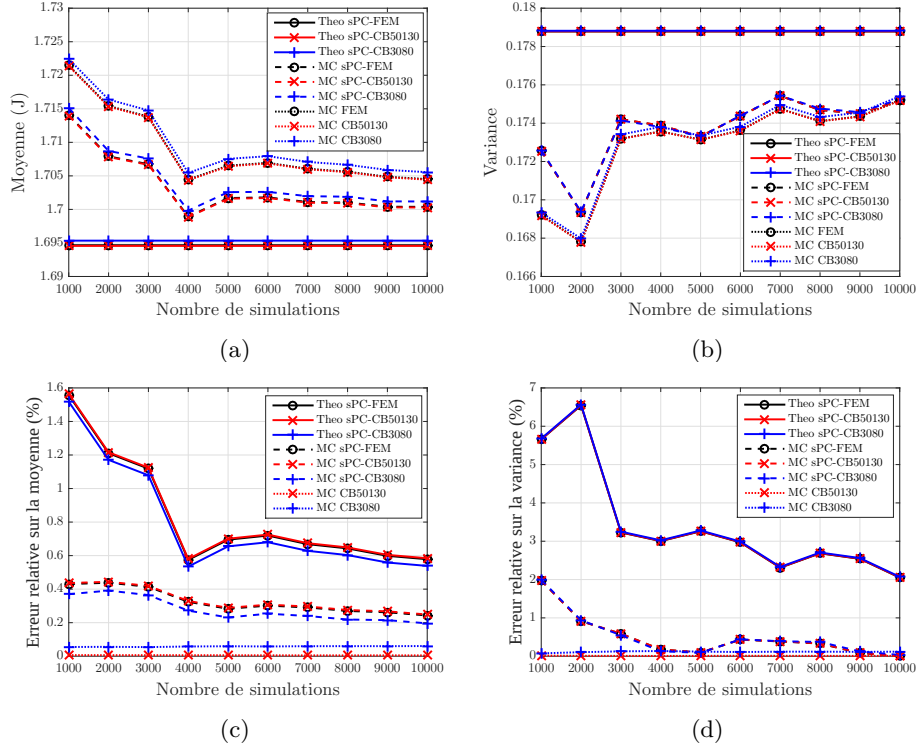


FIGURE C.1 – (a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 5 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC pour $r = 8$.

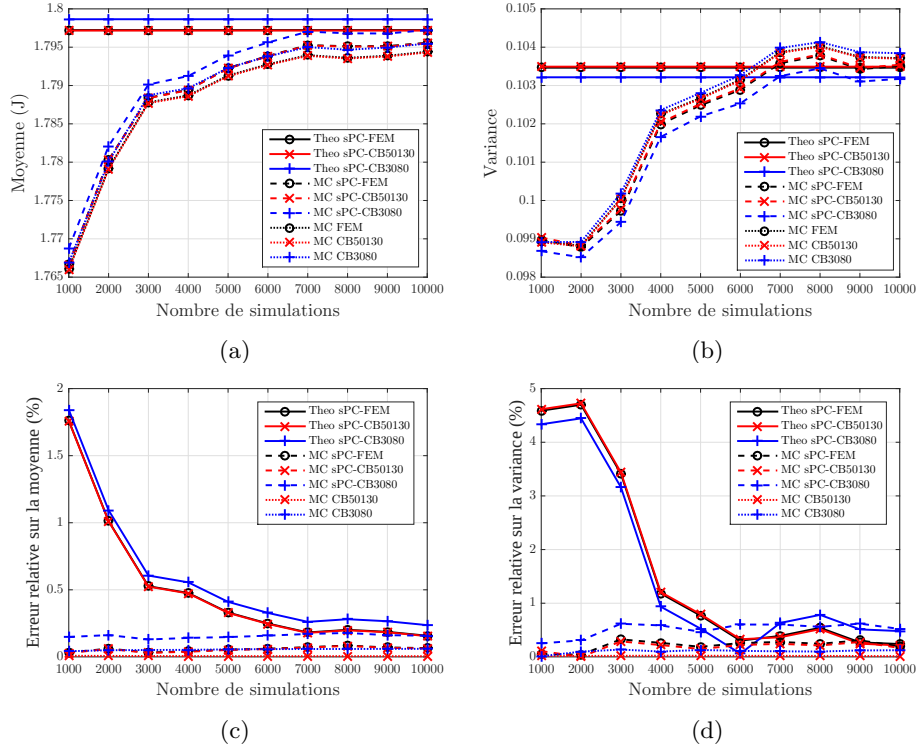


FIGURE C.2 – (a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 5 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC pour $r = 16$.

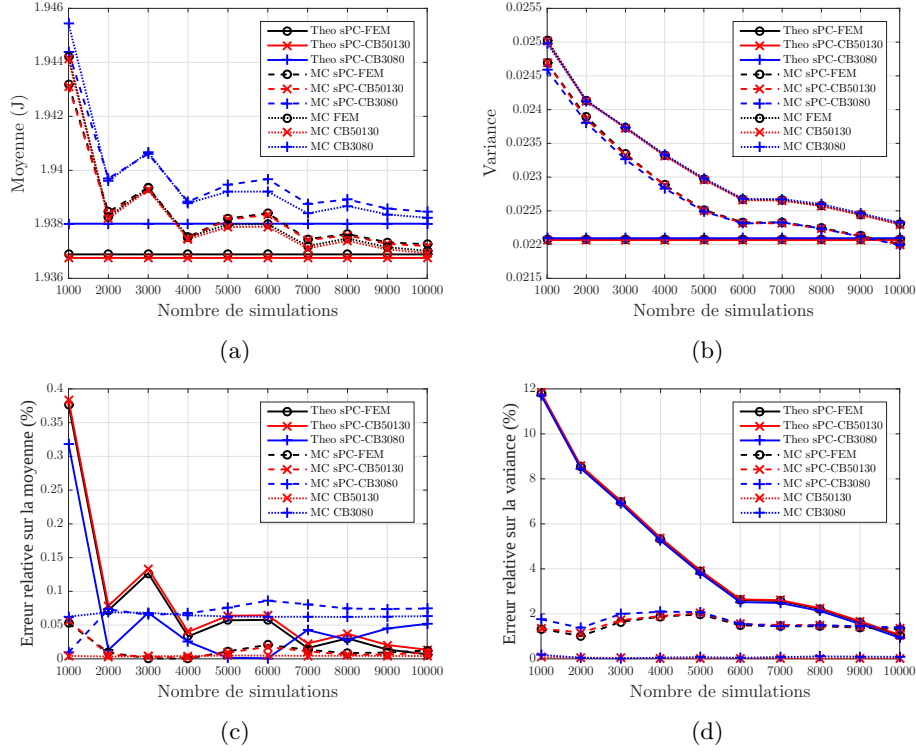


FIGURE C.3 – (a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 5 de E_{def1} en fonction du nombre de simulations MC pour $r = 82$.

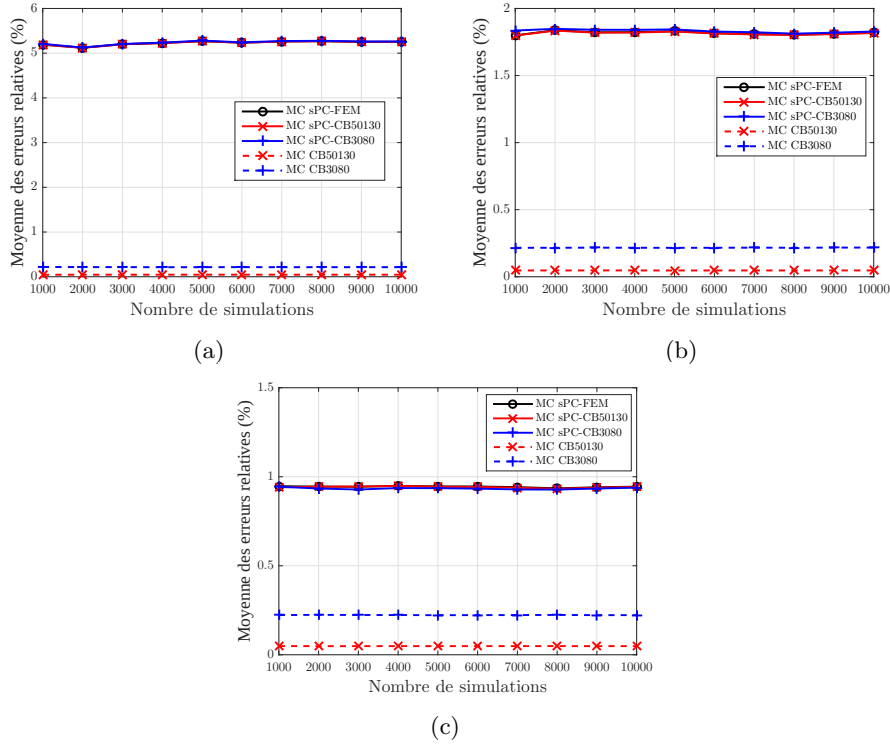


FIGURE C.4 – Moyenne des erreurs relatives sur l'amplitude du pic 5 de E_{def1} par rapport à la solution de référence, en fonction du nombre de simulations MC ; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$.

C.2 Amplitude du pic 7 de l'énergie de déformation E_{def1}

Les moyennes et variances de l'amplitude du pic 7 de E_{def1} obtenues pour N jeux de valeurs de paramètres incertains présentent des allures proches pour $r = 8$, $r = 16$ et $r = 82$, ainsi que le montrent les figures C.5, C.6 et C.7, mais à nouveau différentes de ce qui avait été observé dans le cas d'un paramètre incertain.

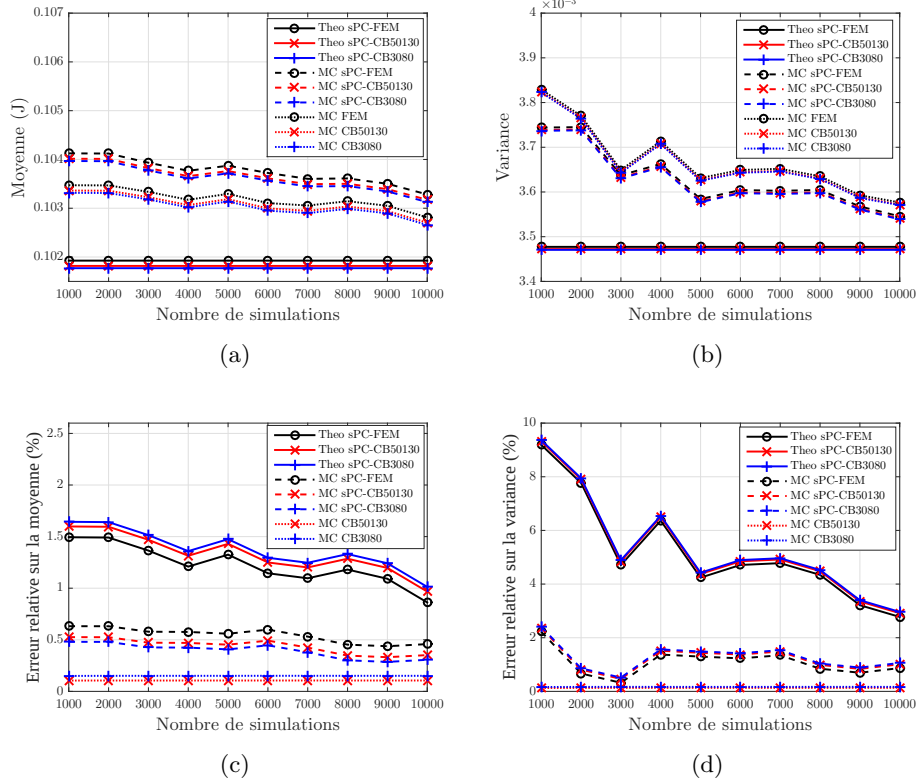


FIGURE C.5 – (a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 7 de E_{def1} , en fonction du nombre de simulations MC, pour $r = 8$.

Les niveaux d'erreur sont cependant du même ordre de grandeur pour les trois configurations, voire légèrement inférieurs en ce qui concerne la moyenne pour les cas $r = 8$, $r = 16$ et $r = 82$ où une stabilisation des valeurs apparaît plus rapidement que pour le cas $r = 1$. Par ailleurs, toujours pour la moyenne et comme dans le cas $r = 1$, les courbes ne sont pas parfaitement superposées tout en restant proches, signifiant que l'utilisation d'un modèle réduit, et la taille de ce modèle, ont une influence modérée mais non négligeable sur les statistiques de la quantité d'intérêt.

La moyenne des erreurs relatives pour cette quantité d'intérêt, contrairement à l'amplitude du pic 5 précédent, n'est pas augmentée significativement lorsque l'on passe de $r = 1$ à $r = 8$ ou $r = 16$ paramètres incertains, restant comprise entre 6 % et 7 % pour chacun des trois développements sPC dans ces deux derniers cas (voir figure C.8 (a) et (b)). En revanche, le niveau d'erreur diminue pour le cas $r = 82$, de l'ordre de 1.9 %.

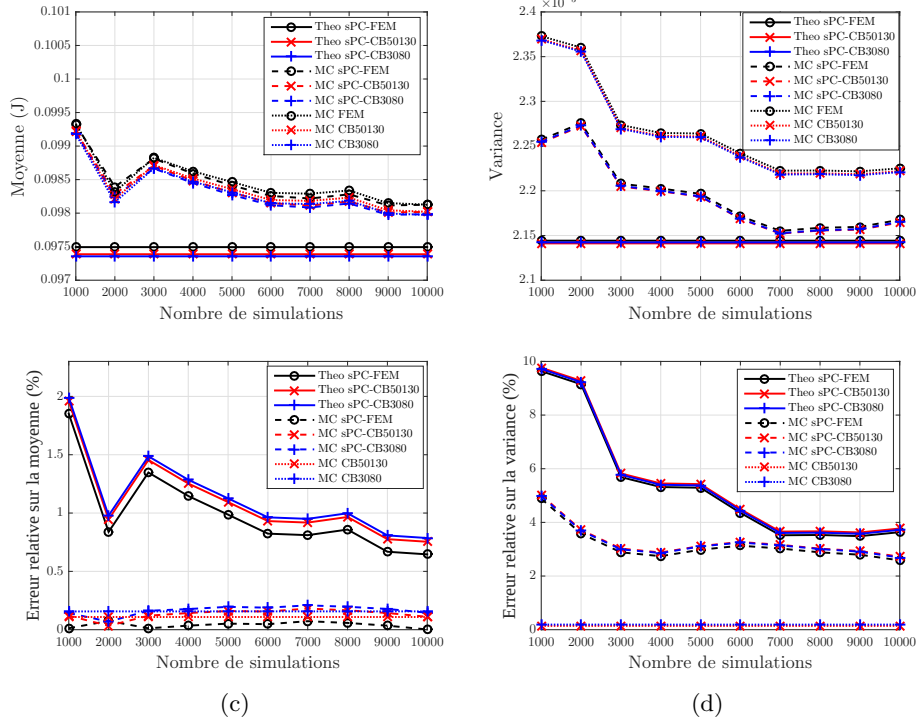


FIGURE C.6 – (a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 7 de E_{def1} , en fonction du nombre de simulations MC, pour $r = 16$.

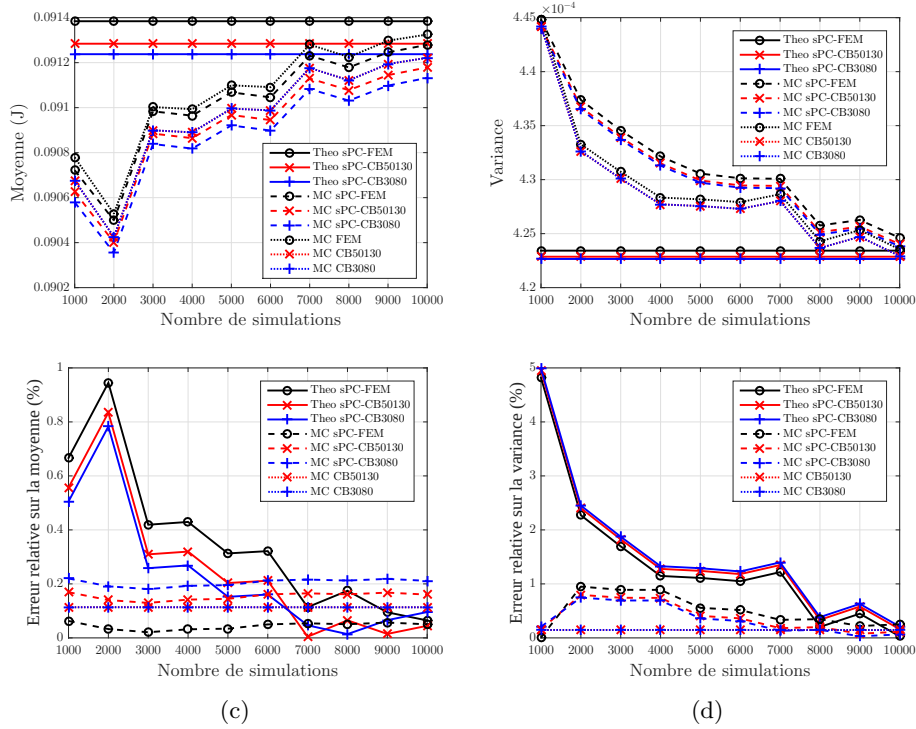


FIGURE C.7 – (a) Moyenne, (b) variance, (c) erreur relative sur la moyenne, (d) erreur relative sur la variance de l'amplitude du pic 7 de E_{def1} , en fonction du nombre de simulations MC, pour $r = 82$.

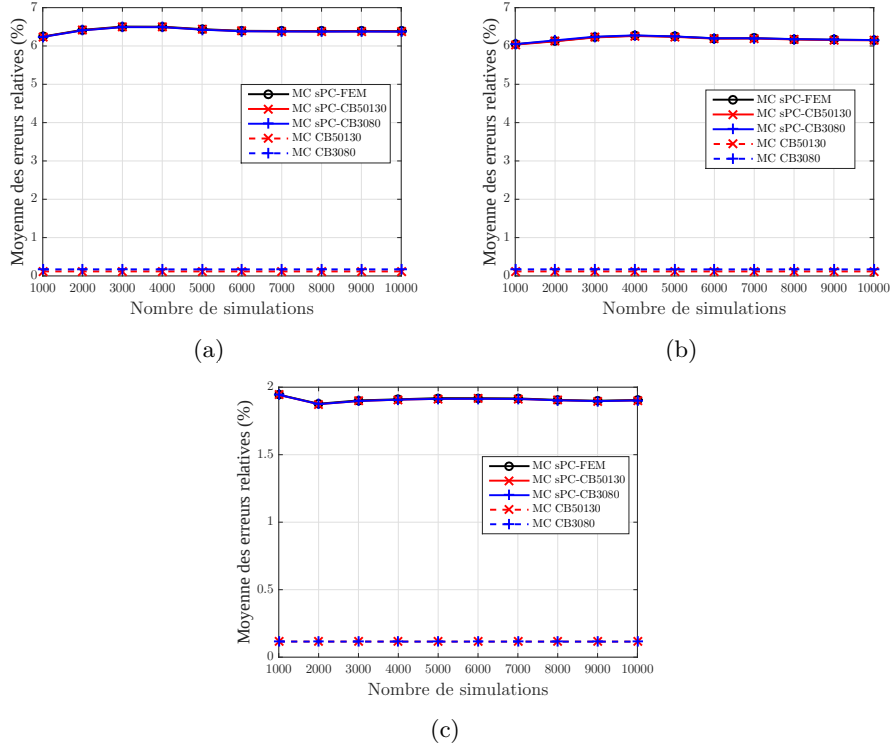


FIGURE C.8 – Moyenne des erreurs relatives sur l'amplitude du pic 7 de E_{def1} par rapport à la solution de référence, en fonction du nombre de simulations MC ; (a) $r = 8$, (b) $r = 16$, (c) $r = 82$.

Annexe D

Articles et Conférences

D.1 Article dans une revue internationale

[1] Duc Thinh KIEU, Baptiste BERGEOT, Marie-Laure GOBERT et Sébastien BERGER : Stability analysis of a clutch system with uncertain parameters using sparse polynomial chaos expansions. *Mechanics and Industry*, 20(1) :104, 2019.

D.2 Conférences et Séminaires

[1] Duc Thinh KIEU, Baptiste BERGEOT et Sébastien BERGER : Stability analysis of a clutch system with uncertain parameters. *Séminaire franco-polonais de mécanique*, Bourges, 2017.

[2] Duc Thinh KIEU, Baptiste BERGEOT et Sébastien BERGER : Sparse polynomial chaos expansion for stability analysis of a clutch system with uncertain parameters. *23ème Congrès Français de Mécanique*, Lille, 2017.

[3] Duc Thinh KIEU, Marie-Laure GOBERT, Sébastien BERGER et Jean-Mathieu MENCİK : A model reduction method to analyze the dynamic behavior of vibrating structures with uncertain parameters. *SURVISHNO*, Lyon, 2019.