UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE / MATHSTIC

UNIVERSITÉ DE NANTES

THÈSE DE DOCTORAT

DE L'UNIVERSITÉ DE NANTES
COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

Ecole Doctorale N° 601
Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication
Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par

Hélène PÉRENNOU

Caractères modulaires de familles de groupes

Thèse présentée et soutenue à l'Université de Nantes, le 4 décembre 2019
Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

Rapporteurs :

Serge Bouc, Directeur de recherche, Université d'Amiens
Nicholas J. Kuhn, Professeur, Université de Virginie

Jury :

Président : **Serge Bouc**, Directeur de recherche, Université d'Amiens
Examinateurs :
Vincent Franjou, Professeur, Université de Nantes
Geoffrey Powell, Directeur de recherche, Université d'Angers
Christine Vespa, Maître de conférence, Université de Strasbourg

Directeur de thèse : **Vincent Franjou**, Professeur, Université de Nantes

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur, Vincent Franjou, qui m'a proposé un sujet assez large pour que j'y trace mon propre chemin et qui m'a accompagné sur cette route. Je remercie également Hai pour les explications et les discussions qui ont largement contribué à faire avancer mon travail.

Je remercie Serge Bouc, Geoffrey Powell et Christine Vespa qui m'ont fait l'honneur d'être membres de mon jury de thèse. Je tiens également à remercier mes rapporteurs, Nick Kuhn pour ses commentaires, notamment sur la dernière partie de ma thèse, et à nouveau Serge, pour son incroyable travail de relecture et toutes ses remarques qui ont largement amélioré ce document.

Le travail long et solitaire de thèse serait souvent bien lourd sans la présence chaleureuse des autres doctorants, post-docs, ATER et + du laboratoire. Je les en remercie, à commencer par les plus éloignés de mon bureau perdu, même s'ils sont loin d'être les moins sympathiques. Merci Fabien pour ton enthousiasme débordant, à propos de tout, et aussi pour me faire bien rire avec tes manques de motivations chroniques. Merci aussi à Alexandre, même si tu nous as enlevé un canapé bien confortable, et à Amiel qui est devenu le coiffeur officiel du laboratoire. Merci Claire pour tes "Ca va ?" et Arthur, que je ne connais pas encore beaucoup mais qui a quand même eu le courage de m'écouter répéter. Merci Andy de nous avoir si bien accueilli à ton arrivée. Merci à Matilde qui a les anecdotes de conférences les plus drôles. Merci Germain, la reine, pour tes imitations mémorables. Un grand merci à Caroline, surtout pour ta bonne humeur mais aussi pour avoir découvert avec moi les joies administratives de l'éducation nationale. Merci aussi à Mathieu de toujours ramener une bouteille de son vin, vous serez toujours les bienvenus si une soirée s'arrose un peu trop. Merci Côme pour ton élaboration d'un planning audacieux mais efficace, même si je pense qu'il te faudrait un agenda (tu pourras y noter qu'on doit aller boire un whisky). Merci Matthieu pour tes performances de beatbox et pour porter la crête comme personne, et merci à vous deux pour votre amour des chatons. Merci Mohamad pour ton grand calme et ta gentillesse. Merci à Thomas W. pour toutes les discussions sur les nouvelles sorties de jeux, les espaces games et les maths aussi parfois. Merci Guillaume pour ton expertise ludique, j'espère qu'on réussira un jour à se croiser au FLIP. Merci à Thomas B., et aussi Coralie, pour les soirées jeux, les crêpes vegan et les quelques conseils avant mon séjour à New-York. C'est aussi l'occasion de remercier Johan, mon grand frère de GdR, qui a eu la bienveillance de m'expliquer les dessous de ce drôle de monde. Merci Thomas G. de partager ta grande sagesse d'ancien doctorant. Merci Zeinab, la radio du Liban, pour ta gentillesse, ta méchanceté et ton humour entre les deux. Bon courage pour la dernière semaine. Merci Maha d'être toujours contente de discuter des cours que nous partageons, c'est bien agréable. Merci aussi à Anh d'avoir essayé de m'initier au plum-foot, je ne perds pas espoir. Merci à mes voisins de bureau, Meissa et Trung, qu'on peut entendre chanter de l'autre coté du mur si on tend bien l'oreille. J'arrive enfin à mon bureau, qui a accueilli un peu de monde depuis mon arrivée : Nicolas qui m'a expliqué les lois du monde de la recherche universitaire, Yassin et son beau sourire, Hala qui nous a bien gâté de gourmandises pendant deux ans, Maël qui a ramené un peu de Bretagne, Antoine qui m'aura fait danser (tu sembles être un homme aux milles talents !) et Adrian qui a la gentillesse de partager avec nous les boules inventives de ses étudiants, merci à vous tous. Et si j'ai eu la joie d'avoir de multiple co-bureau j'ai aussi eu la chance de le partager trois années avec Solène qui en aura profité pour le peupler d'animaux en papier. Merci pour tout et encore plus pour cette chasse au trésor épique. J'en profite pour remercier Benjamin qui est certainement le plus gentil des boulangers mais aussi le plus fourbe des naufragés. Un immense merci à tous ceux que j'aurais oubliés.

Plus largement, merci à tous les membres du laboratoire, qui en font un endroit bien agréable. Je remercie tout particulièrement Friedrich qui semble toujours content de m'écouter depuis qu'il a encadré mon stage de M1, Salim mon coach PRAG, Erwan pour m'avoir montré que de toute façon personne n'est jamais assez fort pour ce calcul et François qui m'a écouté répéter, plusieurs fois, et donné de précieux conseils. Merci également à Claude et Anh qui m'ont laissé emprunter un peu trop de livres. Merci à Éric et Saïd d'être toujours là pour résoudre nos problèmes. Un grand merci à l'équipe du secrétariat, Brigitte, Stéphanie, Annick, Anaïs et les autres, sans qui ma vie aurait été bien plus compliquée ces trois dernières années.

Comme cette thèse est aussi le résultat des études qui ont précédé, je dois un immense merci à Matthieu Giraud pour m'avoir prêté ses cours d'algèbre linéaire à mon arrivée à Nantes, ça m'a bien servi ! Merci aussi à Eddy de m'avoir challengée toutes ces années, quitte à m'offrir un burger.

Je voudrais encore remercier Fabien, Fabrice, Florent, Gaël et Élodie pour les samedi après-midi ludiques qui ont ponctué ma première année. Merci aussi à Katell pour les digressions berlinoises du mardi soir, et parfois plus...

Merci à toute la famille Nayl qui s'est montrée particulièrement motivée pour comprendre ce que je faisais de mes journées. Je joins Tevy à ces remerciements, qui compare à présent les tasses et les donuts. Merci Thomas (aka docteur Toto) d'avoir expérimenté avant moi la vie de doctorant et de m'avoir fait relativiser nombre de situations. Merci Patrick, d'être toujours présent pour nous. Un grand merci à mes parents, Dominique et Raymond, pour toute l'aide logistique et pour leur soutien moral inconditionnel.

Enfin, merci Laura d'avoir supporté mes angoisses et fêté mes victoires ces trois dernières années. Merci d'être une épaule si douce sur laquelle me reposer. Et parce que tu m'en voudrais si je ne le faisais pas, merci aux petits loups pour tous les claviers squattés et tous les articles froissés.

Table des matières

Introduction

Cette thèse traite des caractères modulaires de trois familles de groupes : les groupes symétriques S_n, les produits en couronne d'un groupe fini G avec les groupes symétriques $G \wr S_n$ et les groupes linéaires finis $GL_n(\mathbb{F}_q)$, où $\mathbb{F}_q$ est le corps à q éléments.

On montre que les caractères modulaires de ces familles de groupes s'organisent en une structure d'algèbre de Hopf graduée. Dans le cas des groupes symétriques et des produits en couronne, on montre de plus, que les caractères modulaires des représentations projectives forment un anneau de polynômes sur $\mathbb{Z}$ dont on exhibe des familles de générateurs. Pour les groupes linéaires finis, on donne des générateurs polynomiaux sur $\mathbb{C}$.

Structure d'algèbre de Hopf en caractéristique 0

Notons $(G_n)_{n\geq 0}$ l'une des trois familles citées ci-dessus. Pour tout i et j tels que $i+j=n$, fixons un plongement de $G_i \times G_j$ dans G_n. Ceci permet de définir des foncteurs, notés $\mathrm{ind}_{G_i\times G_j}^{G_n}$ et $\mathrm{res}_{G_i\times G_j}^{G_n}$, entre les catégories des $\mathbb{C}(G_i \times G_j)$-modules et la catégorie des $\mathbb{C}\,G_n$-modules.

Pour les groupes symétriques, le groupe $S_i \times S_j$ s'identifie au sous-groupe de S_n qui laisse globalement fixe le sous-ensemble $\{1,\ldots,i\}$ de $\{1,\ldots,n\}$. On note

$$\mathrm{ind}_{S_i\times S_j}^{S_n} = \mathrm{Ind}_{S_i\times S_j}^{S_n} \ \text{ et } \ \mathrm{res}_{S_i\times S_j}^{S_n} = \mathrm{Res}_{S_i\times S_j}^{S_n}\,.$$

Pour les produits en couronne, on identifie $G\wr S_i \times G \wr S_j$ au sous-groupe de $G \wr S_n$ qui laisse globalement fixes les i premiers facteurs de G^n et on note

$$\mathrm{ind}_{G\wr S_i\times G\wr S_j}^{G\wr S_n} = \mathrm{Ind}_{G\wr S_i\times G\wr S_j}^{S_n} \ \text{ et } \ \mathrm{res}_{G\wr S_i\times G\wr S_j}^{G\wr S_n} = \mathrm{Res}_{G\wr S_i\times G\wr S_j}^{G\wr S_n}\,.$$

Enfin, pour les groupes linéaires finis, on utilise les foncteurs d'induction et de restriction paraboliques, dont on rappelle la définition. Notons $P_{i,j}$ le sous-groupe parabolique de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ formé des matrices

$$\begin{pmatrix} g_i & m \\ 0 & g_j \end{pmatrix},$$

avec g_i dans $GL_i(\mathbb{F}_q)$, g_j dans $GL_j(\mathbb{F}_q)$ et m dans $\mathcal{M}_{i,j}(\mathbb{F}_q)$. On note aussi $U_{i,j}$ le sous-groupe unipotent de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ formé des matrices

$$\begin{pmatrix} I_i & m \\ 0 & I_j \end{pmatrix},$$

avec I_k la matrice identité de $GL_k(\mathbb{F}_q)$ et m dans $\mathcal{M}_{i,j}(\mathbb{F}_q)$. Le groupe $P_{i,j}$ se décompose en produit semi-direct

$$P_{i,j} = U_{i,j} \rtimes (GL_i(\mathbb{F}_q) \times GL_j(\mathbb{F}_q)).$$

Soit V un $\mathbb{C}(GL_i(\mathbb{F}_q) \times GL_j(\mathbb{F}_q))$-module. L'action de $GL_i(\mathbb{F}_q) \times GL_j(\mathbb{F}_q)$ sur V s'étend en une action de $P_{i,j}$ sur V en faisant opérer $U_{i,j}$ trivialement. Ceci définit le foncteur d'inflation $\mathrm{Infl}_{GL_i(\mathbb{F}_q)\times GL_j(\mathbb{F}_q)}^{P_{i,j}}$.

Le foncteur d'induction parabolique est le foncteur composé

$$\mathrm{PInd}_{GL_i(\mathbb{F}_q)\times GL_j(\mathbb{F}_q)}^{GL_n(\mathbb{F}_q)} = \mathrm{Ind}_{P_{i,j}}^{GL_n(\mathbb{F}_q)} \circ \mathrm{Infl}_{GL_i(\mathbb{F}_q)\times GL_j(\mathbb{F}_q)}^{P_{i,j}},$$

et le foncteur de restriction parabolique est

$$\mathrm{PRes}_{GL_i(\mathbb{F}_q)\times GL_j(\mathbb{F}_q)}^{GL_n(\mathbb{F}_q)} V = (\mathrm{Res}_{P_{i,j}}^{GL_n(\mathbb{F}_q)} V)^{U_{i,j}},$$

le module des invariants de $\mathrm{Res}_{P_{i,j}}^{GL_n(\mathbb{F}_q)} V$ sous l'action de $U_{i,j}$.

On note

$$\mathrm{ind}_{GL_i(\mathbb{F}_q)\times GL_j(\mathbb{F}_q)}^{GL_n(\mathbb{F}_q)} = \mathrm{PInd}_{GL_i(\mathbb{F}_q)\times GL_j(\mathbb{F}_q)}^{GL_n(\mathbb{F}_q)}$$

et

$$\mathrm{res}_{GL_i(\mathbb{F}_q)\times GL_j(\mathbb{F}_q)}^{GL_n(\mathbb{F}_q)} = \mathrm{PRes}_{GL_i(\mathbb{F}_q)\times GL_j(\mathbb{F}_q)}^{GL_n(\mathbb{F}_q)}.$$

Soit $K_0(\mathbb{C}\,G_n\text{-mod})$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathbb{C}\,G_n$-modules. C'est le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les représentations irréductibles de G_n sur $\mathbb{C}$. Rappelons que la classe d'isomorphisme d'une représentation complexe d'un groupe fini est entièrement déterminée par son caractère. Le groupe $K_0(\mathbb{C}\, G_n\text{-mod})$ s'identifie donc au $\mathbb{Z}$-module des caractères de G_n.

Pour chacune de ces trois familles, on note R le groupe gradué $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\, G_n\text{-mod})$. Les foncteurs d'induction et de restriction permettent de munir R d'une multiplication

$$\begin{array}{cccc} \_\circ\_ & : & R\otimes R & \to & R \\ & & [V]\otimes[W] & \mapsto & [\mathrm{ind}_{G_m\times G_n}^{G_{m+n}}] \end{array}$$

et d'une comultiplication

$$\begin{array}{ccccc} \Delta & : & R & \to & R\otimes R \\ & & [V] & \mapsto & \sum_{i+j=n}[\mathrm{res}_{G_i\times G_j}^{G_n} V]. \end{array}$$

La formule de Mackey pour les doubles classes montre que R muni des opérations $\circ$ et Δ est une bigèbre graduée et donc une algèbre de Hopf [Zel81].

Dans son Lecture Note [Zel81], A. Zelevinsky précise la structure de R. Pour cela, il introduit la notion d'algèbre de Hopf auto-adjointe positive. Une algèbre de Hopf sur $\mathbb{Z}$ est dite auto-adjointe positive si elle est graduée, connexe et munie d'une $\mathbb{Z}$-base Ω formée d'éléments homogènes. On demande aussi que les constantes de structures soient positives et identiques pour la multiplication et la comultiplication des éléments de Ω (voir l'Appendice A pour plus de détails). L'exemple type est l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques à coefficients dans $\mathbb{Z}$, munie de la base des fonctions de Schur. On note $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}$ cette algèbre. Zelevinsky montre que toute algèbre de Hopf auto-adjointe positive est isomorphe, à graduation près, à un produit tensoriel de copie de l'algèbre $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}$ [Zel81, §3]. Concernant les caractères des groupes G_n, il obtient le résultat suivant.

Théorème 1. *[Zel81, Ch. II-III] Pour chacune des trois familles, le groupe gradué R muni des opérations $\circ$, Δ est une algèbre de Hopf auto-adjointe positive.*

Pour les groupes symétriques, ce résultat est classique et sûrement déjà connu de Frobenius (voir [Car83 ; Mac98]). Les produits en couronne ont eux été étudiés par Geissinger et Kinch [Gei77 ; GK78], au moins lorsque $G = \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$. La théorie des algèbres de Hopf auto-adjointes positives développée par Zelevinsky permet d'englober les groupes linéaires finis. Avec ce formalisme, on retrouve la classification des caractères irréductibles des $GL_n(\mathbb{F}_q)$ [SZ84] expliquée par Green [Gre55].

Théorie de Brauer

On s'intéresse ici aux structures qui apparaissent lorsqu'on fait agir les groupes G_n, non plus sur $\mathbb{C}$, mais sur un corps de caractéristique strictement positive. Précisément, on étudie les caractères modulaires de ces groupes.

Soit G un groupe fini, k un corps de caractéristique $p > 0$ assez grand (c'est-à-dire contenant les racines e-ème de l'unité où e est le plus grand diviseur premier à p de l'exposant de G), et ρ une représentation de G sur k. Notons G_{reg} l'ensemble des éléments de G d'ordre premier à p et fixons θ un plongement de $k^\times$ dans $\mathbb{C}^\times$. Soit g un élément de G_{reg}. Puisque g est d'ordre premier à p, l'endomorphisme $\rho(g)$ est diagonalisable sur k. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres et

$$\Phi_\rho(g) = \sum_{i=1}^{n} \theta(\lambda_i).$$

On appelle caractère de Brauer, ou modulaire, de ρ l'application $\Phi_\rho : G_{reg} \to \mathbb{C}$.

La théorie de Brauer relie les caractères complexes aux caractères modulaires (voir l'appendice B). On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
K_0(kG\text{-proj}) \arrow[rr, "c"] \arrow[dr, "e"'] & & K_0(kG\text{-mod}) , \\
& K_0(\mathbb{C}\,G\text{-mod}) \arrow[ur, "d"'] &
\end{tikzcd}$$

où $K_0(kG\text{-mod})$ désigne le groupe de Grothendieck de la catégorie des kG-modules de type fini et $K_0(kG\text{-proj})$ celui des kG-modules projectifs.

Structure multiplicative en caractéristique non nulle

Considérons à nouveau la famille des groupes $(G_n)_{n\geq 0}$ et fixons k un corps de caractéristique p, assez grand pour tous les G_n. Notons $R(p)_n = K_0(kG_n\text{-mod})$, $K(p)_n = K_0(kG_n\text{-proj})$ et $R(p) = \bigoplus_{n\geq 0} R(p)_n$, $K(p) = \bigoplus_{n\geq 0} K(p)_n$ les groupes gradués associés. D'après ce qui précède, pour tout entier n, on a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
K(p)_n \arrow[rr, "c_n"] \arrow[dr, "e_n"'] & & R(p)_n . \\
& R_n \arrow[ur, "d_n"'] &
\end{tikzcd}$$

Notons $e = \bigoplus_{n\geq 0} e_n$, $d = \bigoplus_{n\geq 0} d_n$ et $c = \bigoplus_{n\geq 0} c_n$ les applications graduées. Comme pour les représentations complexes, on peut définir une multiplication $\circ$ et une co-multiplication Δ sur $R(p)$. À l'exception du cas où G_n est $GL_n(\mathbb{F}_q)$ avec $q = p^n$ et où k est un corps de caractéristique p, les foncteurs d'induction et de restriction sont exacts et préservent donc les modules projectifs. On peut alors restreindre $\circ$ et Δ à $K(p)$.

Proposition 1. *Le triangle de groupes gradués*

$$\begin{tikzcd} K(p) \arrow[rr, "c"] \arrow[dr, "e"'] & & R(p) \\ & R \arrow[ur, "d"'] & \end{tikzcd}$$

est un triangle d'algèbres de Hopf.

On peut préciser la structure de l'anneau $K(p)$ dans le cas des groupes symétriques.

Théorème 2. *Si $G_n = S_n$, l'anneau $K(p)$ est polynomial avec un générateur homogène en chaque degré premier à p.*

Ce résultat s'adapte au cas des produits en couronne entre un groupe fini G et les groupes symétriques.

Théorème 3. *Si $G_n = G \wr S_n$ et k est un corps de décomposition pour G avec $\mathrm{car}(k) = p$, l'anneau $K(G_n)$ est polynomial sur $\mathbb{Z}$.*

Pour les représentations des $GL_n(\mathbb{F}_p)$, si k est de caractéristique p, la multiplication $\circ$ n'est pas définie sur $K(p)$. Cependant, elle l'est toujours sur $R(p)$ et l'application $d : R \to R(p)$ est un morphisme d'algèbres de Hopf. Par ailleurs, l'anneau $R(p)$ et l'anneau obtenu en munissant $K(p)$ de la multiplication induite par les foncteurs d'induction usuels sont isomorphes [Lus76 ; Hai19].

L'étude des caractères modulaires des $GL_n(\mathbb{F}_p)$ est liée à la théorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod modulo p. En effet, l'anneau $K(p)$ est isomorphe à $K(\mathcal{U})$, le groupe de Grothendieck des modules instables réduits de type fini sur l'algèbre de Steenrod modulo p (voir par exemple [CK89]).

Plan de la thèse

Chapitre 1 : Caractères des groupes symétriques

Dans le premier chapitre, nous étudions les caractères des groupes symétriques. Rappelons que $K_0(\mathbb{C}\,S_n)$ désigne le groupe de Grothendieck des $\mathbb{C}\,S_n$-modules. Il s'identifie au $\mathbb{Z}$-module formé des caractères complexes du groupe S_n. La théorie des représentations des groupes symétriques est très bien comprise (voir par exemple [JK84]). En particulier, les représentations irréductibles de S_n sont paramétrées par l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des partitions de n.

On munit le groupe gradué $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\,S_n\text{-mod})$ d'une structure de bigèbre via les foncteurs d'induction et de restriction. Pour tous m et n entiers, on identifie le groupe produit $S_m \times S_n$ au sous-groupe de S_{m+n} qui stabilise le sous-ensemble $\{1,\ldots,m\}$ de $\{1,\ldots,m+n\}$. Les foncteurs d'induction de la forme $\mathrm{Ind}_{S_n\times S_m}^{S_{m+n}}$ permettent de définir une multiplication graduée $\circ$ sur $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\,S_n\text{-mod})$,

$$\begin{array}{rcccc} \_\circ\_ & : & K_0(\mathbb{C}\,S_m\text{-mod})\otimes K_0(\mathbb{C}\,S_n\text{-mod}) & \to & K_0(\mathbb{C}\,S_{m+n}\text{-mod}) \\ & & [V]\otimes[W] & \mapsto & [\mathrm{Ind}_{S_n\times S_m}^{S_{m+n}}(V\otimes W)]. \end{array}$$

De la même manière, on construit une comultiplication sur $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\,S_n\text{-mod})$ en utilisant les foncteurs de restriction de la forme $\mathrm{Res}_{S_n\times S_m}^{S_{m+n}}$. On note Δ cette comultiplication,

$$\begin{array}{rcccc} \Delta & : & K_0(\mathbb{C}\,S_n\text{-mod}) & \to & \bigoplus_{k+l=n} K_0(\mathbb{C}\,S_k\text{-mod})\otimes K_0(\mathbb{C}\,S_l\text{-mod}) \\ & & [V] & \mapsto & \sum_{k+l=n}[\mathrm{Res}_{S_k\times S_l}^{S_n} V]. \end{array}$$

Théorème 4. *Muni des opérations $\circ$ et Δ, $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\,S_n\text{-mod})$ est une algèbre de Hopf (au sens de A.1.6). De plus, $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\,S_n\text{-mod})$ est isomorphe à* Sym, *l'algèbre des fonctions symétriques à coefficients dans $\mathbb{Z}$. En particulier, c'est un anneau polynomial sur $\mathbb{Z}$.*

On munit $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\,S_n\text{-mod})$ du produit scalaire défini par

$$\langle [V],[W]\rangle = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{S_n}(V,W),$$

pour $[V]$ et $[W]$ dans $K_0(\mathbb{C}\,S_n\text{-mod})$.

L'isomorphisme précédent est une isométrie puisque le produit scalaire sur $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}$ est tel que la base des fonctions de Schur est orthonormée (voir appendice A).

Si le corps des nombres complexes est remplacé par un corps de caractéristique non nulle, par exemple $\mathbb{F}_p$, la description des représentations irréductibles n'est pas complètement connue, même pour les groupes symétriques. On a vu que la théorie de Brauer permet de relier les représentations modulaires aux représentations complexes (voir [Ser71] ou l'appendice B). Une question centrale dans cette étude est de décrire les matrices de décomposition, c'est-à-dire les facteurs de composition (avec multiplicité) de la réduction sur $\mathbb{F}_p$ des $\mathbb{C}\,S_n$ -modules simples. Ceci équivaut à décrire la décomposition de l'image par e d'un $\mathbb{F}_p\,S_n$-module projectif en $\mathbb{C}\,S_n$-modules irréductibles.

Comme dans le cas complexe, on peut munir $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\,S_n\text{-proj})$ et $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\,S_n\text{-mod})$ d'une structure d'algèbre de Hopf via les foncteurs d'induction et de restriction. Les caractères de Brauer permettent alors d'identifier $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\,S_n\text{-proj})$ à la sous-algèbre de Hopf de $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\,S_n\text{-mod})$ formée des caractères nuls en dehors des classes p-régulières.

En utilisant cette identification, on montre le théorème principal de ce premier chapitre.

Théorème 5. *L'anneau* $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\,S_n\text{-proj})$ *est polynomial avec un générateur homogène en chaque degré premier à* p*.*

Ce résultat est sûrement déjà connu et aurait été prouvé par Robert Oliver et Pierre Vogel [Vog88]. Cependant, aucune référence n'est connue de l'auteure.

La preuve donnée ici fournit une condition suffisante pour qu'un sous-ensemble de générateurs polynomiaux de $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\,S_n\text{-mod})$ soit un ensemble de générateurs polynomiaux pour $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\,S_n\text{-proj})$. On exhibe ensuite deux familles de générateurs. L'une est construite de manière *ad hoc* comme suit. Pour tout entier n premier à p, on définit un élément y_n de $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\,S_n\text{-mod})$ de telle sorte que la famille $(y_n)_{p\nmid n}$ vérifie les propriétés souhaitées. Des calculs via Sage et Gap montrent que pour des degrés accessibles, les générateurs choisis sont, au signe près, les caractères de vraies représentations complexes.

De plus, pour les degrés dans lesquels on dispose des matrices de décomposition, on vérifie qu'au signe près ces générateurs proviennent de vrais $\mathbb{F}_p\,S_n$-modules projectifs. On propose la conjecture suivante.

Conjecture 1. *Pour tout* n *entier,* $(-1)^{q(n,p)}y_n$ *est l'image du caractère modulaire d'un vrai* $\mathbb{F}_p\,S_n$*-module projectif par le morphisme* e*, où* $q(n,p)$ *désigne le quotient de la division euclidienne de* n *par* p*.*

La deuxième famille est donnée par les fonctions symétriques de Witt en degré premier à p. La conjecture de Reutenauer, prouvée par W. Doran [Dor96] et T. Scharf et J-Y. Thibon [ST96], montre que les fonctions symétriques de Witt sont associées à de vrais caractères des groupes symétriques. À nouveau, les calculs montrent qu'en bas degré ce sont, au signe près, les caractères de vrais modules projectifs.

Chapitre 2 : Caractères des produits en couronne avec les groupes symétriques

Dans ce deuxième chapitre, on adapte les résultats du précédent au cas des produits en couronne entre un groupe fini et les groupes symétriques.

Soit G un groupe fini. Le groupe S_n agit sur G^n par permutation des facteurs. On note $G \wr S_n$ le produit semi-direct de G avec S_n pour cette action. Ce groupe est appelé produit en couronne de G avec S_n. La théorie des représentations complexes de $G \wr S_n$ se déduit largement de la théorie des représentations complexes des groupes symétriques (voir par exemple [JK84]). En particulier, les représentations irréductibles sont paramétrées par les applications $\underline{\lambda} : \mathrm{Irr}(G) \to \mathcal{P}$ telles que $\sum_{\rho \in \mathrm{Irr}(G)} |\underline{\lambda}(\rho)| = n$.

Considérons le groupe gradué $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(G \wr S_n)$. Pour m et n entiers, on identifie $G \wr S_m \times G \wr S_n$ au sous-groupe de $G \wr S_{m+n}$ qui laisse invariant les m premiers facteurs de G^{m+n}. À nouveau les foncteurs d'induction et de restriction permettent de définir une multiplication $\circ$ et une comultiplication Δ sur $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(G \wr S_n)$:

$$\begin{array}{rcccc} \_\circ\_ & : & K_0(\mathbb{C}\, G \wr S_m\text{-mod}) \otimes K_0(\mathbb{C}\, G \wr S_n\text{-mod}) & \to & K_0(\mathbb{C}\, G \wr S_{m+n}\text{-mod}) \\ & & [V] \otimes [W] & \mapsto & [\mathrm{Ind}_{G\wr S_m \times G \wr S_n}^{G \wr S_{m+n}} (V \otimes W)] \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcccc} \Delta & : & K_0(\mathbb{C}\, G \wr S_n\text{-mod}) & \to & \bigoplus_{k+l=n} K_0(\mathbb{C}\, G \wr S_k\text{-mod}) \otimes K_0(\mathbb{C}\, G \wr S_l\text{-mod}) \\ & & [V] & \mapsto & \sum_{k+l=n} [\mathrm{Res}_{G\wr S_k \times G \wr S_l}^{G \wr S_n} V]. \end{array}$$

Théorème 6. *[Zel81] Muni des opérations $\circ$ et Δ, $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(G \wr S_n)$ est une algèbre de Hopf auto-adjointe positive. On a :*

$$\bigoplus_{n\geq 0} K_0(G \wr S_n) \cong \bigotimes_{\rho \in \mathrm{Irr}(G)} \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\,.$$

En particulier, c'est un anneau polynomial sur $\mathbb{Z}$.

Pour étudier les représentations p-modulaires des $G \wr S_n$ avec p premier, on fixe $(\mathbb{K}, \mathbb{A}, k)$ un système p-modulaire de rupture pour G (voir Appendice B). Le système $(\mathbb{K}, \mathbb{A}, k)$ est également un système p-modulaire de rupture pour tous les $G \wr S_n$. La théorie des représentations modulaires des $G \wr S_n$ se déduit à nouveau de celle des groupes symétriques (voir [JK84]. Les représentations irréductibles de $G \wr S_n$ sont paramétrées par les applications $\underline{\lambda} : \mathrm{Irr}_p(G) \to \mathcal{P}$ telles que $\sum_{\rho \in K_0(kG\text{-mod})} |\underline{\lambda}(\rho)| = n$. On a le même paramétrage pour les projectifs indécomposables de $G \wr S_n$ en remplaçant les kG-modules irréductibles par les kG-modules projectifs indécomposables.

En utilisant les idées développées dans le chapitre précédent, on aboutit au résultat suivant.

Théorème 7. *Soit k un corps de décomposition pour G avec $\mathrm{car}(k) = p$. L'anneau $\bigoplus_{n \geq 0} K_0(k(G \wr S_n)\text{-proj})$ est polynomial sur $\mathbb{Z}$.*

Chapitre 3 : Caractères des groupes linéaires finis en caractéristique transverse

La structure d'algèbre de Hopf auto-adjointe positive de Zelevinsky permet aussi d'étudier les représentations des groupes linéaires finis. Pour définir une structure d'algèbre de Hopf sur le groupe gradué $\bigoplus_{n \geq 0} K_0(\mathbb{C}\, GL_n(\mathbb{F}_q)\text{-mod})$, on utilise les foncteurs d'induction et de restriction paraboliques PInd et PRes. Ils font apparaître implicitement les groupes symétriques qui sont les groupes de Weyl des groupes linéaires $GL_n(\mathbb{F}_q)$. Ceci peut expliquer les similarités de la combinatoire entre le cas présent et les précédents.

Dans ce troisième chapitre, on commence par détailler la classification des classes de conjugaison des groupes linéaires. Notons Φ l'ensemble des polynômes irréductibles de degré n sur $\mathbb{F}_q$ avec coefficient constant non nul, $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des partitions de n et $\mathcal{P} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}_n$. Les classes de conjugaison de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sont paramétrées par les applications

$$\boldsymbol{\lambda} : \Phi \to \mathcal{P},$$

telles que $\sum_{f \in \Phi} |\boldsymbol{\lambda}(f)| \deg(f) = n$. Ceci fournit également une indexation des fonctions de classes sur les $GL_n(\mathbb{F}_q)$.

On identifie l'espace vectoriel des fonctions de classes sur $GL_n(\mathbb{F}_q)$ à $\mathbb{C} \otimes K_0(\mathbb{C}\, GL_n(\mathbb{F}_q)\text{-mod})$ via les caractères. L'espace vectoriel gradué $\mathbb{C} \otimes \bigoplus_{n \geq 0} K_0(\mathbb{C}\, GL_n(\mathbb{F}_q)\text{-mod})$ est muni d'une multiplication et d'une comultiplication, toujours notées $\circ$ et Δ, par extension des précédentes.

Théorème 8. *[Zel81 ; SZ84] L'algèbre* $\mathbb{C} \otimes \bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\, GL_n(\mathbb{F}_q)\text{-mod})$ *est une algèbre de Hopf. Précisément,*

$$\mathbb{C} \otimes \bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\, GL_n(\mathbb{F}_q)\text{-mod}) \cong \bigotimes_{f\in\Phi} \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}},$$

où $\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}$ *désigne l'algèbre des fonctions symétriques à coefficients dans* $\mathbb{C}$*.*

Le résultat est en fait vrai avant complexification. Pour cela on introduit la notion de représentation *cuspidale.* Une représentation de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ est dite cuspidale si elle est irréductible et que sa classe d'isomorphisme est un élément primitif de l'algèbre $\mathbb{C} \otimes \bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\, GL_n(\mathbb{F}_q)\text{-mod})$. Les représentations cuspidales jouent un rôle central dans la théorie des représentations des groupes linéaires finis. On note $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations cuspidales de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ et $\mathcal{C} = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{C}_n$. Par exemple, la représentation triviale de $GL_1(\mathbb{F}_q)$ est une représentation cuspidale.

Théorème 9. *[Zel81 ; SZ84] Le groupe gradué* $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\, GL_n(\mathbb{F}_q)\text{-mod})$ *muni de* $\circ$ *et* Δ *est une algèbre de Hopf auto-adjointe positive,*

$$\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\, GL_n(\mathbb{F}_q)\text{-mod}) \cong \bigotimes_{\rho\in\mathcal{C}} \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\,.$$

En particulier, c'est un anneau polynomial sur $\mathbb{Z}$*.*

Pour l'étude des représentations modulaires, il faut distinguer deux cas. Celui de la caractéristique transverse, c'est-à-dire des représentations sur un corps de caractéristique $l \neq p$, et celui de la caractéristique naturelle. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux représentations en caractéristique transverse.

Fixons k un corps de caractéristique $l \neq p$, tel que k soit un corps de rupture pour tout les $GL_n(\mathbb{F}_q)$. La théorie des caractères modulaires nous permet d'identifier $\mathbb{C} \otimes K_0(kGL_n(\mathbb{F}_q)\text{-mod})$ et $\mathbb{C} \otimes K_0(\mathbb{C}\, GL_n(\mathbb{F}_q)\text{-mod})$ au $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions de classes sur $GL_n(\mathbb{F}_q)$, nulles en dehors des classes de conjugaison l-régulières (*i.e.* dont les éléments sont d'ordre premier à l). Notons Φ_l le sous-ensemble de Φ formé des polynômes dont les racines sont d'ordre premier à l dans $\bar{\mathbb{F}}_q$. Les classes de conjugaison l-régulières sont paramétrées par les applications

$$\boldsymbol{\lambda} : \Phi_l \to \mathcal{P},$$

telles que $\sum_{f\in\Phi_l} |\boldsymbol{\lambda}(f)| \deg(f) = n$.

Théorème 10. *On a un isomorphisme d'algèbres,*

$$\mathbb{C}\Big(\bigoplus_{n\geq 0} K_0(kGL_n(\mathbb{F}_q)\text{-mod})\Big) \cong \bigotimes_{f\in\Phi_l} \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}\,.$$

Ces résultats s'adaptent aux caractères des groupes unitaires finis en utilisant les travaux de Digne et Michel [DM87]. Pour définir la multiplication et la comultiplication, on utilise les foncteurs de Lusztig qui sont une généralisation des foncteurs paraboliques (voir aussi [DM91]).

Chapitre 4 : Caractères des groupes linéaires finis en caractéristique naturelle

Dans le cas des représentations modulaires de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ sur $\mathbb{F}_p$, qui est corps de rupture pour tous les $GL_n(\mathbb{F}_p)$ [HK88, §4], le produit donné par l'induction parabolique est toujours défini sur $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-mod})$ mais ne préserve pas les projectifs.

Parmi les représentations irréductibles de $GL_n(\mathbb{F}_p)$, l'une joue un rôle très particulier, notament en caractéristique naturelle. Cette représentation est la représentation de Steinberg [Ste57], noté St_n. Sa réduction modulo p reste irréductible mais est également un $\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)$-module projectif. De plus, on a un isomorphisme [Lus76] :

$$\_ \otimes \mathrm{St}_n : K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-mod}) \to K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj}).$$

Munissons maintenant le groupe gradué $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})$ d'une structure d'anneau avec pour multiplication $\_ \bullet \_$ l'opération graduée définie, pour tout m et n entier, par :

$$\begin{array}{rcccc} \_ \bullet \_ & : & K_0(\mathbb{F}_p\, GL_m(\mathbb{F}_p)\text{-proj}) \otimes K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj}) & \to & K_0(\mathbb{F}_p\, GL_{m+n}(\mathbb{F}_p)\text{-proj}) \\ & & [V]\otimes[W] & \mapsto & [\mathrm{Ind}_{GL_m(\mathbb{F}_p)\times GL_n(\mathbb{F}_p)}^{GL_{m+n}(\mathbb{F}_p)} V\otimes W]. \end{array}$$

Théorème 11. *[Lus76 ; Hai19] L'application*

$$\bigoplus_{n\geq 0}(\_ \otimes \mathrm{St}_n) : (\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-mod}), \circ) \to (\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj}), \bullet),$$

est un isomorphisme d'anneaux.

Notre premier résultat dans ce chapitre précise la structure de l'anneau

$(\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj}), \bullet)$ après tensorisation par $\mathbb{C}$.

Soit f un polynôme à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, on note π_f la fonction caractéristique de la classe associée à f. C'est un élément de $\mathbb{C}\otimes K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})$ avec $n = \deg(f)$.

Théorème 12. *L'algèbre* $\mathbb{C}\otimes\Big(\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})\Big)$ *est polynomiale,*

$$\mathbb{C}\otimes\Big(\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})\Big) = \mathbb{C}[\pi_f, f\in\Phi],$$

où l'on rappelle que Φ *désigne l'ensemble des polynômes sur* $\mathbb{F}_p$*, unitaires, irréductibles et avec terme constant non-nul.*

On relie ensuite les générateurs polynomiaux $(\pi_f)_{f\in\Phi}$ aux caractères de vraies représentations en les exprimant en fonction de caractères de Deligne-Lusztig [DL76].

Fixons θ un plongement de $\bar{\mathbb{F}}_p^\times$ dans $\mathbb{C}^\times$. Considérons $\mathbb{F}_{p^n}$ comme un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{F}_p$. La multiplication dans $\mathbb{F}_{p^n}$ induit un homomorphisme de groupes entre $\mathbb{F}_{p^n}^\times$ et $GL_n(\mathbb{F}_p)$. Notons T_n l'image de cet homomorphisme et $\varphi_0,\ldots,\varphi_{p^n-2}$ les caractères irréductibles de T_n. Pierre Deligne et George Lusztig associent au tore T_n et au caractère φ_j de T_n, un caractère de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ appelé caractère de Deligne-Lusztig et noté $R_{T_n}^{\varphi_j}$.

Lemme 1. *[DL76, Prop. 7.3] Pour tout* j *dans* $\{0,\ldots,p^n-2\}$,

$$\mathrm{Ind}_{T_n}^{GL_n(\mathbb{F}_p)}(\varphi_j) = (-1)^{n-1} R_{T_n}^{\varphi_j}\otimes \mathrm{St}_n\,.$$

On en déduit une expression des générateurs π_f en fonction des caractères de Deligne-Lusztig.

Proposition 2. *Soit* f *un polynôme irréductible sur* $\mathbb{F}_p$ *et* α *une racine de* f *dans* $\bar{\mathbb{F}}_p$,

$$\pi_f = (-1)^{n-1}\frac{1}{p^n-1}\sum_{j=0}^{p^n-2}\theta(\alpha)^{-j} R_{T_n}^{\varphi_j}\otimes \mathrm{St}_n\,.$$

Chapitre 5 : Application à la théorie des modules instables

L'étude de l'anneau $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})$ est motivée par plusieurs conjectures venant de la topologie algébrique, précisément de la théorie des modules sur l'algèbre de Steenrod. Notons $K^n(\mathcal{U})$ le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphisme des facteurs directs de $H^*V_n := H^*(V_n, \mathbb{Z}/p)$ comme module sur l'algèbre de Steenrod, avec $V_n = (\mathbb{F}_p)^n$. En interprétant un facteur direct de H^*V_n comme un facteur direct de H^*V_{n+1}, on obtient un monomorphisme de $K^n(\mathcal{U})$ vers $K^{n+1}(\mathcal{U})$. On dispose donc d'une filtration du groupe abélien libre $K(\mathcal{U}) = \bigcup_{n\geq 0} K^n(\mathcal{U})$. Ce groupe est également muni d'une structure d'anneau pour la multiplication donnée par le produit tensoriel de modules instables. Carlisle et Kuhn énoncent la question suivante à propos de la structure de cet anneau.

Question 1. *[CK89, §8] L'anneau $K(\mathcal{U})$ est-il polynomial ?*

D'après [CK89, Thm. 3.2] les anneaux $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})$ et $K(\mathcal{U})$ sont isomorphes. Le théorème 4.2.2 montre donc que $K_{\mathbb{C}}(\mathcal{U}) := \mathbb{C}\otimes K(\mathcal{U})$ est une algèbre polynomiale. On décrit une famille de générateurs sur $\mathbb{C}$ en utilisant les facteurs de Campbell-Selick [CS90], (voir aussi [Hai19]). Ceci donne une nouvelle preuve d'une conjecture de Schwartz [DHS14, Conj. 3.2], qui a été démontrée dans [Hai15 ; Hai16 ; Hai19] (voir aussi [FHS16]).

Proposition 3. *L'action du foncteur T de Lannes sur $K^n_{\mathbb{C}}(\mathcal{U})$ est diagonalisable et son spectre est $\{1, p, \ldots, p^n\}$.*

On identifie ensuite les séries de Poincaré associées aux éléments de $K_{\mathbb{C}}(\mathcal{U})$. Soit $P_{\mathbb{C}}(., t)$ l'application de $K_{\mathbb{C}}(\mathcal{U})$ vers $\mathbb{C}[[t]]$ qui associe à la classe d'un module instable sa série de Poincaré. On fixe un plongement θ de $\overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ dans $\mathbb{C}$.

Proposition 4. *L'image $P_{\mathbb{C}}(., t)$ est engendrée comme algèbre par les séries*

$$P_{\mathbb{C}}(P_f, t) = \begin{cases} \frac{1}{(w-t)(w^2-t)\ldots(w^{2^{n-1}}-t)}, & \textit{pour } p = 2, \\ \\ \frac{(w+t)(w^p+t)\ldots(w^{p^{n-1}}+t)}{(w-t^2)(w^p-t^2)\ldots(w^{p^{n-1}}-t^2)}, & \textit{pour } p > 2, \end{cases}$$

où f parcourt l'ensemble des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_p$ avec un coefficient constant non nul et $w = \theta(\alpha)$ où α est une racine de f.

On retrouve que le noyau de $P_{\mathbb{C}}(., t)$ est non trivial pour $p = 2$ [DHS14]. On obtient de plus que la restriction à l'espace propre associé à 1 est également non injective.

Proposition 5. *Pour $p = 2$, la restriction de $P_{\mathbb{C}}(., t)$ à l'espace propre pour l'action du foncteur T associé à la valeur propre 1 a un noyau non trivial.*

Notations

On utilise les notations suivantes :

— p désigne un nombre premier

— q désigne une puissance de p

— $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels

— $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs

— $\mathbb{Q}$ est le corps des nombres rationnels

— $\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes

— $\mathbb{K}$ désigne un corps, souvent de caractéristique 0

— k désigne un corps, souvent de caractéristique p

— $\mathbb{A}$ ou Λ désignent des anneaux commutatifs, associatifs et unitaires

— $\mathbb{F}_q$ désigne le corps à q éléments

— G est un groupe fini

— S_n est le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$

— $G \wr S_n$ désigne le produit en couronne de G avec S_n

— $GL_n(k)$ désigne le groupe linéaire d'ordre n à coefficients dans k

— $U_n(k)$ désigne le groupe unitaire d'ordre n à coefficients dans k

— $K_0(\mathcal{C})$ désigne le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathcal{C}$

— $\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des partitions de n

— Sym_Λ est l'anneau des fonctions symétriques à coefficients dans Λ.

— s_λ désigne la fonction de Schur associée à la partition λ

— Ind désigne le foncteur d'induction

— Res désigne le foncteur de restriction

— PInd désigne le foncteur d'induction parabolique

— PRes désigne le foncteur de restriction parabolique

1

Caractères des groupes symétriques

Ce premier chapitre étudie les caractères des groupes symétriques S_n. On commence par rappeler des résultats sur leurs représentations complexes, notamment la structure d'algèbre de Hopf de l'anneau $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\, S_n\text{-mod})$, où $K_0(\mathbb{C}\, S_n\text{-mod})$ désigne le groupe de Grothendieck des $\mathbb{C}\, S_n$-modules et, où la multiplication est donnée par les foncteurs d'induction et la comultiplication par les foncteurs de restriction. Un résultat classique, sûrement déjà connu de Frobenius, affirme que cet anneau est isomorphe à l'anneau des fonctions symétriques, en particulier, il est polynomial (i.e. libre et commutatif). On explique ce résultat du point de vue de A. Zelevinsky [Zel81], à savoir en utilisant la théorie des algèbres de Hopf auto-adjointes positives (voir l'appendice A).

On s'intéresse ensuite aux représentations des groupes S_n sur un corps de caractéristique positive. Notons $\mathbb{F}_p$ le corps premier à p éléments et $K_0(\mathbb{F}_p\, S_n\text{-mod})$ (resp. $K_0(\mathbb{F}_p\, S_n\text{-proj})$) le groupe de Grothendieck des $\mathbb{F}_p\, S_n$-modules de type fini (resp. des $\mathbb{F}_p\, S_n$-modules projectifs). De la même manière que dans le cas complexe, les foncteurs d'induction et de restriction permettent de munir $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, S_n\text{-mod})$ d'une structure d'anneau. De plus, ces opérations se restreignent à $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, S_n\text{-proj})$ qui est donc également un anneau. Le résultat principal de ce chapitre précise la structure de ce dernier.

Théorème 1.0.1. *L'anneau* $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, S_n\text{-proj})$ *est polynomial avec un générateur homogène en chaque degré premier à p.*

Ce résultat serait déjà connu et aurait été prouvé par Robert Oliver et Pierre Vogel [Vog88]. Cependant, aucune référence n'est connue de l'auteure. Nous donnons ici une preuve de ce théorème. Nous proposons également deux familles de générateurs polynomiaux, la première est construite de manière *ad hoc*, l'autre est reliée aux fonctions symétriques de Witt.

1.1 Caractères des représentations complexes

Pour simplifier, notons $R_n = K_0(\mathbb{C}\, S_n\text{-mod})$, le groupe de Grothendieck des représentations complexes de S_n avec la convention $R_0 = \mathbb{Z}$. Si V est une représentation de S_n sur $\mathbb{C}$, on note $[V]$ sa classe dans $K_0(\mathbb{C}\, S_n\text{-mod})$. Rappelons que la classe d'isomorphisme d'une représentation complexe d'un groupe fini est entièrement déterminée par son caractère. Ainsi, le groupe R_n s'identifie au groupe abélien libre engendré par les caractères irréductibles de S_n (voir l'annexe B ou [Ser71]).

Notons au passage que pour tout corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 0, les groupes abéliens libres $K_0(\mathbb{K}\, S_n\text{-mod})$ et R_n sont isomorphes puisque tout corps est corps de décomposition pour les groupes symétriques [JK84].

1.1.1 Produit et coproduit

Une manière classique d'étudier les groupes symétriques consiste à les considérer tous simultanément. Du point de vue des groupes de Grothendieck, cela mène à étudier le groupe gradué $R = \bigoplus\limits_{n\geq 0} R_n$. On le munit d'une structure d'algèbre de Hopf de la façon suivante.

Soient m et n deux entiers, on identifie le groupe produit $S_m \times S_n$ au sous-groupe de S_{m+n} qui stabilise le sous-ensemble $\{1, \dots, n\}$ de $\{1, \dots, m+n\}$. On obtient alors le foncteur d'induction,

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{Ind}_{S_m\times S_n}^{S_{m+n}}(\_) & : & \mathbb{C}\, S_m\text{-mod} \times \mathbb{C}\, S_n\text{-mod} & \to & \mathbb{C}\, S_{m+n} \\ & & (V, W) & \mapsto & \mathbb{C}\, S_{m+n} \otimes_{\mathbb{C}(S_m\times S_n)} (V \otimes W) \end{array}$$

Ceci permet de définir une multiplication graduée $\circ$ sur R. Pour tout m et n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{array}{cccc} \_\circ\_ & : & R_m \otimes R_n & \to & R_{m+n} \\ & & [V]\otimes[W] & \mapsto & [\mathrm{Ind}_{S_m\times S_n}^{S_{m+n}}(V\otimes W)]. \end{array}$$

Si ρ_m est le caractère associé à la classe d'isomorphisme $[V]$ et ρ_n celui de $[W]$, la valeur du caractère associé à la classe $[V]\circ[W]$ en un élément g de S_{m+n} est

$$(\rho_m\circ\rho_n)(g) = \frac{1}{|S_m|.|S_n|} \sum_{\substack{h\in S_{n+m},\\ hgh^{-1}=(g_m,g_n)\in S_m\times S_n}} \rho_m(g_m).\rho_n(g_n).$$

De la même manière, les foncteurs de restriction

$$\mathrm{Res}_{S_k\times S_l}^{S_n}(\_) : \mathbb{C}\,S_n \to \mathbb{C}\,S_k\text{-mod}\otimes\mathbb{C}\,S_l\text{-mod},$$

avec $k+l=n$, permettent de définir une comultiplication sur R. On désigne par Δ le morphisme de groupe gradué, défini en degré n dans $\mathbb{N}$ par

$$\begin{array}{cccc} \Delta & : & R_n & \to & \bigoplus_{k+l=n} R_k\otimes R_l \\ & & [V] & \mapsto & \sum_{k+l=n}[\mathrm{Res}_{S_k\times S_l}^{S_n}(V)], \end{array}$$

où on identifie $R_k\otimes R_l = K_0(\mathbb{C}\,S_k\text{-mod})\otimes K_0(\mathbb{C}\,S_l\text{-mod})$ avec $K_0(\mathbb{C}(S_k\times S_l)\text{-mod})$.

Proposition 1.1.1. *[Zel81] Muni des opérations $\circ$ et Δ, R est une algèbre associative et commutative, et une cogèbre coassociative et cocommutative.*

1.1.2 L'algèbre des fonctions de classes

Considérons à présent le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions de classes sur S_n à valeur dans $\mathbb{C}$, on le note $\mathrm{CF}(S_n)$. Une base de $\mathrm{CF}(S_n)$ est donnée par les caractères irréductibles de S_n [Ser71, §2.4, Thm. 6]. On identifie alors $\mathrm{CF}(S_n)$ avec $\mathbb{C}\otimes R_n$ et on peut étendre la multiplication $\circ$ et la comultiplication Δ au $\mathbb{C}$-espace vectoriel gradué $\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{CF}(S_n)$. Par extension, les opérations $\circ$ et Δ munissent $\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{CF}(S_n)$ d'une structure d'algèbre de Hopf.

Une base plus naïve de $\mathrm{CF}(S_n)$ est donnée par les fonctions caractéristiques des classes de conjugaison de S_n. Avant de les définir on introduit quelques notations.

Soit σ un élément de S_n et $\sigma=\gamma_1\ldots\gamma_k$, sa décomposition en cycles à supports disjoints, avec γ_i un cycle de longueur λ_i et telle que $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_k$. La suite

$(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ est une partition de n et elle caractérise la classe de conjugaison de σ dans S_n.

Notons $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des partitions de n et $\mathcal{P} = \bigsqcup_{n\geq 0} \mathcal{P}_n$. On utilisera aussi la notation plus concise $(1^{i_1}, 2^{i_2}, \dots, k^{i_k})$ pour désigner λ, où i_j est le nombre de parts de taille j de λ.

D'après ce qui précède, pour tout entier n, il y a une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison de S_n et $\mathcal{P}_n$. Pour λ une partition de n, notons C_λ la classe de conjugaison associée et π_λ la fonction caractéristique de C_λ. La fonction π_λ est la fonction de classes de S_n définie par :

$$\pi_\lambda(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in C_\lambda, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La famille $\{\pi_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{P}_n}$ est une base de $\mathrm{CF}(S_n)$ et $\{\pi_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{P}}$ une base de $\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{CF}(S_n)$.

Rappelons que si G est un groupe fini, $K_0(\mathbb{C}\,G\text{-mod})$ est muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle_{\mathbb{C}}$. Pour tout ρ, ρ' dans $K_0(\mathbb{C}\,G\text{-mod})$ et g dans G,

$$\langle \rho, \rho' \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \rho(g)\overline{\rho'(g)},$$

où $\bar{.}$ désigne la conjugaison complexe.

L'algèbre R est munie d'un produit scalaire gradué $\langle .,. \rangle$ défini sur les éléments homogènes par :

$$\langle \rho, \rho' \rangle = \begin{cases} \langle \rho, \rho' \rangle_{S_n} & \text{si } \rho \text{ et } \rho' \text{ ont même degré,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La base $\{\pi_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{P}}$ est orthogonale pour ce produit scalaire. Notons pour n tout entier $\xi_n = n\pi_{(n)}$ et, pour $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, partition de n, $\xi_\lambda = \xi_{\lambda_1} \dots \xi_{\lambda_k}$. Si $\lambda = (1^{k_1}, \dots, n^{k_n})$,

$$\xi_\lambda = \xi_1^{k_1} \dots \xi_n^{k_n}.$$

Donc, pour $\lambda = (1^{k_1}, \dots, n^{k_n})$,

$$\xi_\lambda = \prod_{i=1}^{n} i^{k_i} \pi_{(i)}^{k_i}.$$

D'après'après la formule d'induction pour les caractères, on a

$$\xi_\lambda = \frac{|S_n|}{|C_\lambda|}\pi_\lambda = (\prod_{i=1}^{n} k_i! i^{k_i})\pi_\lambda. \tag{1.1}$$

Ainsi, la famille $(\xi_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{P}}$ est orthogonale et pour tout ρ dans R,

$$\langle \rho, \xi_\lambda \rangle = \rho(\gamma_\lambda), \tag{1.2}$$

avec γ_λ dans la classe de conjugaison C_λ.

Proposition 1.1.2. *L'algèbre* $\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{CF}(S_n)$ *est une algèbre polynomiale,*

$$\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{CF}(S_n) = \mathbb{C}[\xi_i, i \geq 1].$$

Démonstration. D'après (1.1), pour tout $\lambda = (1^{k_1}, \ldots, n^{k_n})$,

$$\xi_\lambda = \xi_1^{k_1} \circ \ldots \circ \xi_n^{k_n} = (\prod_{i=1}^{n} k_i! i^{k_i})\pi_\lambda.$$

Donc les ξ_i engendrent algébriquement $\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{CF}(S_n)$.

De plus,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{CF}(S_n) = \operatorname{card} \mathcal{P}_n,$$

et $\operatorname{card} \mathcal{P}_n$ est égal à la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[\xi_i, i \geq 1]$, engendré par les polynômes de degré n en les ξ_i. □

Remarque 1. On peut remplacer le corps des nombres complexes par celui des rationnels dans ce qui précède.

1.1.3 Structure d'algèbre de Hopf auto-adjointe positive

On a établi dans le paragraphe précédent que l'algèbre obtenue en tensorisant R par $\mathbb{C}$ est polynomiale. Le résultat est en fait déjà vrai sur les entiers. Le point essentiel est la compatibilité de la comultiplication Δ avec la multiplication $\circ$.

Proposition 1.1.3. *[Zel81] La comultiplication Δ est un morphisme d'algèbres.*

Démonstration. La preuve se déduit du théorème de décomposition de Mackey (voir [Ser71, §7.3]). □

On en déduit immédiatement que R est une algèbre de Hopf puisque que c'est une bigèbre graduée, ce qui montre à nouveau que $\mathbb{C} \otimes R$ est une algèbre polynomiale sur $\mathbb{C}$. La famille de générateurs $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ de la proposition 1.1.2 est formée d'éléments primitifs de $\mathbb{C} \otimes R$.

En fait, R peut être muni d'une structure d'algèbre de Hopf auto-adjointe positive. On fixe comme base, la base formée des caractères irréductibles et on munit R du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ pour lequel cette base est orthonormale. En degré fixé, on retrouve le produit scalaire usuel entre les caractères.

Proposition 1.1.4. *Les applications $\circ$ et Δ sont adjointes l'une de l'autre pour le produit scalaire.*

Démonstration. Ceci découle immédiatement de la formule de réciprocité de Frobenius (voir par exemple [Ser71, §7.2]). □

La théorie des algèbres de Hopf auto-adjointes positives (voir A.3) donne le résultat suivant.

Théorème 1.1.5. *[Zel81, §6] L'application qui envoie les représentations irréductibles des S_n sur les fonctions de Schur associées est un isomorphisme d'algèbres de Hopf auto-adjointes positives. Pour tout n entier, cet isomorphisme envoie le caractère de la représentation triviale x_n sur la fonction symétrique homogène h_n. En particulier,*

$$\bigoplus_{n\geq 0} R_n = \mathbb{Z}[x_n, n \geq 1].$$

Le reste du chapitre vise à généraliser ce résultat au cas des représentations des groupes symétriques sur un corps de caractéristique positive.

1.2 Caractères modulaires

On fixe un nombre premier p et un système p-modulaire $(\mathbb{K}, \mathbb{A}, k)$ tel que $\mathbb{K}$ et k soient des corps de décomposition pour tous les groupes symétriques. Notons que puisque tout corps est un corps de décomposition pour les groupes symétriques [JK84], on peut choisir le système $(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p, \mathbb{F}_p)$.

Pour tout n entier, notons $R(p)_n = K_0(\mathbb{F}_p S_n\text{-mod})$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathbb{F}_p S_n$-modules de type fini et $K(p)_n = K_0(\mathbb{F}_p S_n\text{-proj})$ celui de la catégorie des $\mathbb{F}_p S_n$-modules projectifs.

Comme dans le cas des représentations complexes, l'application

$$\begin{array}{ccc} R(p)_m \otimes R(p)_n & \to & R(p)_{m+n} \\ [V] \otimes [W] & \mapsto & \left[\mathrm{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_n+m}(V \otimes W)\right] \end{array}$$

définit une multiplication graduée sur $R(p) = \bigoplus_{n \geq 0} R(p)_n$, qu'on notera à nouveau $\circ$. De même l'application

$$\begin{array}{ccc} R(p)_n & \to & \bigoplus_{k+l=n} R(p)_k \otimes R(p)_l \\ [V] & \mapsto & \sum_{k+l=n} \left[\mathrm{Res}_{S_k \times S_l}^{S_n} V\right] \end{array}$$

définit une comultiplication sur $R(p)$.

Les foncteurs d'induction et de restriction étant des foncteurs exacts, on peut donc restreindre la multiplication et la comultiplication à $K(p) = \bigoplus_{n \geq 0} K(p)_n$.

1.2.1 De la caractéristique p à la caractéristique 0

D'après la théorie de Brauer, pour tout entier n, on dispose d'un morphisme injectif de $K_0(\mathbb{F}_p\, S_n\text{-proj})$ dans $K_0(\mathbb{Q}_p\, S_n\text{-mod})$ et d'un morphisme surjectif entre $K_0(\mathbb{Q}_p\, S_n\text{-mod})$ et $K_0(\mathbb{F}_p\, S_n\text{-mod})$. En identifiant $K_0(\mathbb{Q}_p\, S_n\text{-mod})$ à $K_0(\mathbb{C}\, S_n\text{-mod})$, on obtient le diagramme commutatif,

$$\begin{tikzcd} K(p)_n \arrow[rr, "c_n"] \arrow[dr, "e_n"'] & & R(p)_n \\ & R_n \arrow[ur, "d_n"'] & \end{tikzcd},$$

avec e_n et c_n injectifs et d_n surjectif (voir B.2.4).

Notons $e = \bigoplus_{n \geq 0} e_n$, $c = \bigoplus_{n \geq 0} c_n$ et $d = \bigoplus_{n \geq 0} d_n$ les morphismes gradués. Il en résulte le triangle de groupes gradués,

$$\begin{tikzcd} K(p) \arrow[rr, "c"] \arrow[dr, "e"'] & & R(p) \\ & R \arrow[ur, "d"'] & \end{tikzcd},$$

avec toujours e et d injectifs et c surjectif.

Lemme 1.2.1. *Le diagramme précédent est un diagramme d'algèbres de Hopf.*

Démonstration. Commençons par montrer que e est une application multiplicative et comultiplicative. Par linéarité, il suffit de vérifier les propriétés sur les classes de vrais modules projectifs.

Soit P un kS_m-module projectif de type fini et Q un kS_n-module projectif de type fini. D'après [Ser71, p. 14.4], il existe un $\mathbb{Z}_p\, S_m$-module projectif $\tilde{P}$ et un $\mathbb{Z}_p\, S_n$-module projectif $\tilde{Q}$ tels que

$$P \cong \mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \tilde{P} \text{ et } Q \cong \mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \tilde{Q}.$$

On a alors

$$\mathrm{Ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}} (P \otimes Q) \cong \mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}} (\tilde{P} \otimes \tilde{Q}),$$

donc

$$e([P].[Q]) \;=\; [\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}} (\tilde{Q} \otimes \tilde{P})]\ ,$$

et

$$\begin{aligned} e([P]).e([Q]) &= [\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \tilde{P}].[\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \tilde{Q}] \\ &= [\mathrm{Ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}} ((\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \tilde{P}) \otimes (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \tilde{Q}))] \\ &= [\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\mathrm{Ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}} (\tilde{P} \otimes \tilde{Q}))]. \end{aligned}$$

Ainsi e est multiplicative.

De même,

$$\begin{aligned} \Delta([P]) &= \textstyle\sum_{k+l=n} [\mathrm{Res}_{S_k \times S_l}^{S_n} P] \\ &= \textstyle\sum_{k+l=n} [\mathrm{Res}_{S_k \times S_l}^{S_n} \mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \tilde{P}] \\ &= \textstyle\sum_{k+l=n} [\mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Res}_{S_k \times S_l}^{S_n} \tilde{P}], \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} e(\Delta[P]) &= \textstyle\sum_{k+l=n} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} [\mathrm{Res}_{S_k \times S_l}^{S_n} \tilde{P}] \\ &= \textstyle\sum_{k+l=n} [\mathrm{Res}_{S_k \times S_l}^{S_n} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \tilde{P}] \\ &= \Delta(e([P])). \end{aligned}$$

Comme e est injective, on en déduit que $K(p)$ est une algèbre de Hopf et que e est un morphisme d'algèbres de Hopf.

On montre de manière similaire que d est multiplicative et comultiplicative. Soit E un $\mathbb{C}\,S_m$-module de type fini et F un $\mathbb{C}\,S_n$-module de type fini. Il existe E_1 un $\mathbb{Z}_p\,S_m$-module $\mathbb{Z}_p$-libre inclus dans E et F_1 un $\mathbb{Z}_p\,S_n$-module $\mathbb{Z}_p$-libre inclus dans F tels que $[E] = [\mathbb{Q}_p\,E_1]$ et $[F] = [\mathbb{Q}_p\,F_1]$ (voir annexe B). Alors,

$$[\mathrm{Ind}_{S_m\times S_n}^{S_{m+n}}(E\otimes F)] \;=\; [\mathbb{Q}_p(\mathrm{Ind}_{S_m\times S_n}^{S_{m+n}}(E_1\otimes F_1))],$$

et

$$\begin{aligned} d([\mathrm{Ind}_{S_m\times S_n}^{S_{m+n}}(E\otimes F)]) &= [\mathbb{F}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{Ind}_{S_m\times S_n}^{S_{m+n}}(E_1\otimes F_1)] \\ &= [\mathbb{F}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}E_1].[\mathbb{F}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}F_1] \\ &= d([E]).d([F]). \end{aligned}$$

Pour la comultiplicativité, on a :

$$\begin{aligned} d(\Delta[E]) &= \textstyle\sum_{k+l=n}[\mathbb{F}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{Res}_{S_k\times S_l}^{S_n}\tilde{E}_1] \\ &= \textstyle\sum_{k+l=n}[\mathrm{Res}_{S_k\times S_l}^{S_n}\mathbb{F}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\tilde{E}_1] \\ &= \Delta(d([P])). \end{aligned}$$

Comme d est surjective, on obtient que $R(p)$ est une algèbre de Hopf et que d est un morphisme d'algèbres de Hopf. □

L'algèbre $K(p)$ est donc isomorphe à une sous-algèbre de Hopf de R. De plus, on sait que pour tout n, l'image de e_n est formée des caractères s'annulant en dehors des classes p-régulières (voir B.3). L'anneau $K(p)$ s'identifie donc à la sous-algèbre de R formée des caractères nuls en dehors des classes p-régulières. Rappelons qu'une classe de conjugaison est dite p-régulière si ses éléments sont d'ordre premier à p.

Il est clair qu'un élément σ de S_n est p-régulier si tous les cycles qui apparaissent dans sa décomposition en cycles à supports disjoints sont d'ordre premier à p. Le paramétrage des classes de conjugaison de S_n, donné précédemment, associe à un élément p-régulier σ la partition $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ telle que p ne divise aucun des λ_i, pour i dans $\{1,\ldots,k\}$.

On note $\mathcal{P}_{n,reg}$ l'ensemble des partitions de n dont toutes les parts sont de taille première à p. Notons aussi $\mathcal{P}_{reg} = \bigsqcup_{n\geq 0}\mathcal{P}_{n,reg}$. On dira qu'une partition est *p-régulière* si elle est dans $\mathcal{P}_{reg}$, et *p-singulière* dans le cas contraire. Les classes de conjugaison p-régulières de S_n sont donc paramétrées par les partitions p-régulières de n. En particulier, l'image de e est caractérisée par la propriété suivante.

Proposition 1.2.2. *Un élément x de R est dans l'image de e si, et seulement si, pour toute partition p-singulière λ,*

$$\langle x, \xi_\lambda \rangle = 0.$$

Démonstration. D'après (1.2),

$$\langle x, \xi_\lambda \rangle = x(\gamma_\lambda),$$

où γ_λ est un représentant de la classe de conjugaison associée à λ. Le résultat s'en déduit puisque l'image de e est exactement formée des caractères x tels que pour toute partition p-singulière λ,

$$x(\gamma_\lambda) = 0.$$

$\square$

Autrement dit, $e(K(p))$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{I}_p$, l'idéal de R engendré par $\{\xi_{kp}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ [LLT96, §2.4]. L'idéal $\mathcal{I}_p$ est également le noyau du morphisme d, en particulier

$$R(p) \cong R/\mathcal{I}_p.$$

1.2.2 Fonctions de classes et classes p-régulières

Comme pour les caractères ordinaires, l'étude des algèbres complexifiées $\mathbb{C} \otimes R(p)$ et $\mathbb{C} \otimes K(p)$ est plus simple. Notons $\mathrm{CF}_{reg}(S_n)$ l'espace vectoriel des fonctions de classes nulles sur les classes p-singulières et $\mathrm{CF}(S_n)_{reg}$ l'espace des fonctions sur les classes p-régulières [1]. Les caractères modulaires des représentations simples de S_n sur $\mathbb{F}_p$ forment une base de $\mathrm{CF}(S_n)_{reg}$ ce qui nous permet d'identifier $\mathbb{C} \otimes R(p)_n$ à $\mathrm{CF}(S_n)_{reg}$. L'application e_n induit un isomorphisme entre $\mathbb{C} \otimes K(p)$ et $\mathrm{CF}_{reg}(S_n)$. Rappelons également que $\mathbb{C} \otimes c_n$, où c_n désigne le morphisme de Cartan, est un isomorphisme entre $\mathrm{CF}(S_n)_{reg}$ et $\mathrm{CF}_{reg}(S_n)$.

Les multiplications et les comultiplications s'étendent à $\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{CF}(S_n)_{reg}$ et $\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{CF}_{reg}(S_n)$ qui sont ainsi munies d'une structure de bigèbre graduée.

1. La notation diffère légèrement de l'appendice B du fait des doubles indices.

Proposition 1.2.3. *L'algèbre*

$$\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{CF}_{reg}(S_n)$$

est une sous-algèbre de Hopf de l'algèbre des fonctions de classes $\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{CF}(S_n)$*. En particulier,* $\mathbb{C}\otimes K(p)$ *est polynomiale sur* $\mathbb{C}$*,*

$$\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{CF}_{reg}(S_n) = \mathbb{C}[\xi_n, p \nmid n].$$

Démonstration. C'est une conséquence de la structure d'algèbre de Hopf. On peut aussi le constater en effectuant un calcul similaire à celui de la preuve de la proposition 1.1.2. □

1.2.3 Polynomialité

Dans cette section on montre le résultat principal de ce chapitre, à savoir que l'algèbre $K(p)$ est polynomiale sur $\mathbb{Z}$. On donne ensuite deux familles de générateurs homogènes pour $K(p)$. Ces familles peuvent s'étendre en des familles de générateurs pour R. Cela permet de montrer que $R(p)$ n'est pas un anneau polynomial.

Le lemme suivant donne une condition suffisante pour qu'une famille d'éléments de $e(K(p))$ soit une famille de générateurs polynomiaux.

Lemme 1.2.4. *Soit* $(y_n)_{n\geq 0, p\nmid n}$ *une famille d'éléments homogènes de* $e(K(p))$ *avec* $\deg(y_n) = n$*. Si la famille* $(y_n)_{n\geq 0, p\nmid n}$ *vérifie les propriétés suivantes, c'est une famille de générateurs polynomiaux pour* $e(K(p))$ *:*

1. y_n *est un polynôme à coefficients complexes en les* ξ_k *avec* $p \nmid k$*,*
2. $y_n - x_n$ *est une combinaison* $\mathbb{C}$*-linéaire des* x_λ*, avec* λ *partition* p*-singulière.*

Démonstration. Soit $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille vérifiant les propriétés de l'énoncé. D'après la proposition 1.2.3, $\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{CF}_{reg}(S_n)$ est polynomial avec un générateur en chaque degré premier à p. On a donc

$$\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{CF}_{reg}(S_n) = \mathbb{C}[y_n, p \nmid n].$$

Il reste à montrer que tout élément de $e(K(p))$ s'écrit comme polynôme à coefficients entiers en les y_n. Soit z un élément de $e(K(p))$, homogène de degré n. On plonge z

dans $\mathbb{C}\otimes e(K(p))$ en étendant les scalaires. Comme

$$\mathbb{C}\otimes e(K(p)) = \mathbb{C}[y_n, p \nmid n],$$

il existe des coefficients α_λ dans $\mathbb{C}$ tels que

$$z = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_{n,reg}} \alpha_\lambda y_\lambda.$$

Par ailleurs, comme z est aussi un élément de R_n et que $\bigoplus_{n\geq 0} R_n = \mathbb{Z}[x_i | i \geq 1]$, il existe des coefficients β_λ dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$z = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n} \beta_\lambda x_\lambda.$$

En combinant les deux expressions, on obtient la relation suivante dans $\mathbb{C}\otimes e(K(p))$:

$$0 = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n} \beta_\lambda x_\lambda - \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_{n,reg}} \alpha_\lambda y_\lambda.$$

Par définition de y_n, on a

$$y_\lambda = x_\lambda + r_\lambda$$

avec r_λ combinaison linéaire des $\{x_{\lambda'}\}_{\lambda'\notin\mathcal{P}_{n,reg}}$, donc

$$0 = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_{n,reg}} (\beta_\lambda - \alpha_\lambda) x_\lambda + \sum_{\lambda\notin\mathcal{P}_{n,reg}} \beta_\lambda x_\lambda - \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_{n,reg}} \alpha_\lambda r_\lambda.$$

Comme la famille $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{P}_n}$ est une base de R_n, on a

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_{n,reg}} (\beta_\lambda - \alpha_\lambda) x_\lambda = 0$$

et pour tout $\lambda \in \mathcal{P}_{n,reg}$,

$$\beta_\lambda - \alpha_\lambda = 0.$$

En particulier, α_λ est dans $\mathbb{Z}$. Finalement $z \in \mathbb{Z}[y_n, p \nmid n]$, ce qui conclut la preuve. □

Remarque 2. À nouveau $\mathbb{C}$ peut être remplacé par $\mathbb{Q}$ dans ce qui précède.

Construction d'une famille de générateurs

Construisons maintenant une famille vérifiant les hypothèses du lemme 1.2.4.

Définition 1.2.5. Soit $X(t) = \sum_{n\geq 0} x_n t^n$ une série formelle,

— La *partie p-régulière* de X est la série $\sum_{p\nmid n} x_n t^n$,

— La *partie p-singulière* de X est la série $\sum_{n\geq 0} x_{np} t^{np}$.

Lemme 1.2.6. *Soit $X(t) = \sum_{n\geq 0} x_n t^n$ et $C(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{\xi_n}{n} t^n$ deux séries formelles telles que :*

$$X(t) = \exp(C(t)).$$

On note $U(t)$ (resp. $V(t)$) la partie p-singulière (resp. p-régulière) de $X(t)$, $A(t)$ (resp. $B(t)$) la partie p-singulière (resp. p-régulière) de $C(t)$, et $Y(t) = \sum_{n\geq 0} y_n t^n$ la série formelle définie par

$$Y(t) = \frac{V(t)}{U(t)}.$$

La famille $(y_n)_{n\geq 0}$ a les propriétés suivantes :

1. *$y_n = 0$ pour $p|n$,*
2. *y_n est polynomial en les ξ_i, $p \nmid i$,*
3. *$(y_n - x_n)$ est combinaison linéaire de x_λ avec $\lambda \notin \mathcal{P}_{n,reg}$.*

Démonstration. On écrit

$$\begin{aligned}
\exp(C(t)) &= \exp(A(t) + B(t)) \\
&= \exp(A(t)).\operatorname{ch}_p(B(t)) + \exp(A(t)).\operatorname{sh}_p(B(t)),
\end{aligned}$$

où $\operatorname{ch}_p(B(t))$ désigne la partie p-singulière de $\exp(B(t))$ et $\operatorname{sh}_p(B(t))$ désigne la partie p-régulière de $\exp(B(t))$.

D'une part, en identifiant les parties p-régulières et p-singulières, on a :

$$U(t) = \exp(A(t)).\operatorname{ch}_p(B(t)) \quad \text{et} \quad V(t) = \exp(A(t)).\operatorname{sh}_p(B(t)),$$

ainsi

$$Y(t) = \frac{\operatorname{sh}_p(B(t))}{\operatorname{ch}_p(B(t))}$$

et $(y_n)_{n\geq 0}$ vérifie le second point.

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{U(t)} &= \frac{1}{1+\sum_{n\geq 1} x_{pn}t^{pn}} \\
&= \sum_{k\geq 0}(-1)^k(\sum_{n\geq 1} x_{pn}t^{pn})^k \\
&= \sum_{\substack{k\geq 0,\\ p|\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\lambda_i>0}} (-1)^{\lambda_1+\ldots\lambda_k} x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k} t^{\lambda_1+\ldots+\lambda_k},
\end{aligned}$$

donc

$$Y(t) = V(t)\Big[\sum_{\substack{k\geq 0,\\ p|\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\lambda_i>0}} (-1)^{\lambda_1+\ldots\lambda_k} x_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k} t^{\lambda_1+\ldots+\lambda_k}\Big].$$

Ceci prouve 1) et 3). □

La preuve donne une formule explicite pour les y_n :

$$y_n = \sum_{\substack{(\lambda_0,\ldots,\lambda_k)\in(\mathbb{N}^*)^{k+1}\\ \sum_i \lambda_i = n\\ p\nmid\lambda_0 \text{ et } p|\lambda_i, i\geq 1}} (-1)^k x_{\lambda_0}\ldots x_{\lambda_k}. \tag{1.3}$$

Par exemple, pour $p = 2$:

- $y_1 = x_1$,
- $y_3 = x_3 - x_1x_2$,
- $y_5 = x_5 - x_3x_2 + x_1x_2^2 - x_1x_4$,
- $y_7 = x_7 - x_5x_2 - x_3x_4 - x_1x_6 + x_3x_2^2 + 2x_1x_4x_2 - x_1x_2^3$.

Théorème 1.2.7. *L'anneau $K(p)$ est polynomial avec un générateur en chaque degré premier à p,*

$$e(K(p)) = \mathbb{Z}[y_n, p \nmid n].$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des lemmes 1.2.4 et 1.2.6. □

Corollaire 1.2.8. *L'anneau gradué $R(p)$ n'est pas polynomial sur $\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Supposons que $R(p)$ soit polynomial. Alors, pour tout l premier, $\mathbb{F}_l \otimes R(p)$ est polynomial. D'après [BR08, Prop. 2.4], pour tout entier n, le module des indécomposables $QR(p)_n$ est sans torsion (voir A.1.12 pour la notation) et

$$\dim_{\mathbb{F}_l} Q(\mathbb{F}_l \otimes R(p))_n = \dim_{\mathbb{Q}} Q(\mathbb{Q} \otimes R(p))_n = \operatorname{rg} QR(p)_n.$$

Ainsi,

$$\operatorname{rg} QR(p)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } p \nmid n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout p ne divisant pas n, un relèvement d'une base de $QR(p)_n$ dans $R(p)_n$ est $(d(y_n))$. La famille $(d(y_n))_{p \nmid n}$ est donc une famille de générateurs pour $R(p)$:

$$R(p) = \mathbb{Z}[d(y_n), p \nmid n].$$

On en déduit que l'application c est un isomorphisme d'anneaux et que les morphismes de Cartan c_n sont des isomorphismes de groupes abéliens. Ce dernier point est faux. □

Par exemple, pour $p = 2$, on a un défaut de polynomialité en degré 2. Notons pour tout n entier, Tr_n le caractère de la représentation triviale de S_n sur $\mathbb{F}_2$. Le caractère Tr_1 engendre le $\mathbb{Z}$-module $R(p)_1$ et est donc (au signe près) le seul choix pour un générateur homogène de degré 1. Cependant $(\mathrm{Tr}_1)^2$ n'engendre pas le $\mathbb{Z}$-module $R(p)_2$. Le module $R(p)_2$ est par exemple engendré par Tr_2 et on a la relation $2\,\mathrm{Tr}_2 = (\mathrm{Tr}_1)^2$.

Exemple. Explicitons les premiers générateurs de $K(p)$. En degré 1, $y_1 = x_1$ est la classe de la représentation triviale de S_1. Notons que pour $n \geq 1$, x_1^n est la classe de la représentation régulière de S_n.

En degré 2, il existe une unique représentation irréductible de S_2 sur $\mathbb{F}_2$: la représentation triviale. Donc il existe un unique $\mathbb{F}_2 S_2$-module projectif indécomposable : la couverture de la représentation triviale, qui est $\mathbb{F}_2 S_2$. Sa classe est $2d(x_2) = d(y_1)^2$.

Pour $n = 3$, on a $\mathbb{F}_2 S_3 = P \oplus \mathrm{St}_2^{\oplus 2}$ où P est la couverture projective de la représentation triviale de S_3 sur $\mathbb{F}_2$ et St_2 est le deuxième $\mathbb{F}_2 S_3$-module irréductible. En se servant des identifications précédentes, on obtient $d(x_1)^3 = 2d(x_1)d(x_2)$, donc $d(x_1)^3 = 2d(x_3) + 2(d(x_1)d(x_2) - d(x_3))$. En particulier, $(-d(y_3)) = d(x_1)d(x_2) - d(x_3)$ est la classe de St_2.

En degré 4, il y a deux $\mathbb{F}_2 S_4$-modules irréductibles [Web16, §p.267]. Notons P_1 la couverture projective de la représentation triviale et P_2 la couverture projective du deuxième module irréductible. On a $\mathbb{F}_2 S_4 = P_1 \oplus P_2^{\oplus 2}$ et $(-d(y_1)d(y_3))$ est la classe de P_2. La classe de la couverture projective du second module irréductible est donc $d(y_1)^4 + 2d(y_1)d(y_3)$.

Remarquons que y_3 est l'opposé d'une vraie représentation. Des calculs sur SAGEMATH [Dev17] montrent que les premiers générateurs y_n sont au signe près, les caractères de vraies représentations.

Conjecture 1.2.9. *Pour tout n entier, $(-1)^{q(n,p)}y_n$ est le caractère d'une vraie représentation de S_n sur $\mathbb{C}$ avec $q(n,p)$ quotient dans la division euclidienne de n par p.*

En fait, des calculs en petits degrés avec SAGEMATH [Dev17] et le package Hecke de GAP [Gro17 ; Tra13] montrent que, au signe près, y_n est le caractère d'un vrai module projectif (on détaille cela au paragraphe 1.3 et dans l'appendice C).

Conjecture 1.2.10. *Pour tout n entier, $(-1)^{q(n,p)}y_n$ est l'image du caractère modulaire d'un vrai $\mathbb{F}_p S_n$-module projectif par le morphisme e.*

Fonctions de Witt

Une autre famille de générateurs est donnée par les fonctions de Witt . La fonction symétrique de Witt q_n est la fonction symétrique définie par la formule :

$$\prod_{n\geq 1} \frac{1}{1 - q_n t^n} = \sum_{n\geq 0} t^n h_n.$$

Par exemple,

- $q_1 = h_1$,
- $q_2 = -h_1^2 + h_2$,
- $q_3 = -h_1 h_2 + h_3$,
- $q_4 = -h_1^4 + 2h_2 h_1^2 - h_2^2 - h_3 h_1 + h_4$,
- $q_5 = -h_2 h_1^3 + h_2^2 h_1 + h_3 h_1^2 - h_3 h_2 - h_4 h_1 + h_5$.

Puisque les fonctions symétriques homogènes h_n sont des générateurs polynomiaux de l'algèbre des fonctions symétriques, il en va de même des fonctions de Witt,

$$\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[q_n, n \geq 0].$$

Les fonctions q_n se décrivent en fonction des sommes de Newton [ST96] :

$$p_n = \sum_{d|n} d q_d^{n/d}. \tag{1.4}$$

La conjecture de Reutenauer [Reu95], prouvée indépendamment par W. Doran [Dor96] et T. Scharf et J-Y. Thibon [ST96], assure que les fonctions de Witt sont positives.

Proposition 1.2.11. *Les fonctions q_1, $-q_n$, $n \geq 2$ sont des combinaisons linéaires entières positives des fonctions de Schur.*

Notons pour tout n, w_n le caractère de S_n correspondant à la fonction q_n . La conjecture de Reutenauer assure donc que $(-w_n)$ est le caractère d'une vraie représentation, pour $n \geq 1$. De plus, la formule (1.4) montre que pour n premier avec p, w_n est dans l'image de e. On déduit alors de la proposition 1.2.4, que la famille $\{w_n, p \nmid n\}$ est une famille de générateurs polynomiaux pour $e(K(p))$:

$$e(K(p)) = \mathbb{Z}[w_n, p \nmid n].$$

Des calculs en bas degré montrent que $-w_n$ est l'image par e du caractère modulaire d'un vrai $\mathbb{F}_p\, S_n$-module projectif (voir à nouveau le paragraphe 1.3 et l'appendice C).

On propose la conjecture suivante.

Conjecture 1.2.12. *Pour tout $n \geq 2$, $-w_n$ est l'image du caractère modulaire d'un vrai $\mathbb{F}_p\, S_n$-module projectif par le morphisme e.*

1.3 Décomposition des générateurs

Dans cette section on justifie les conjectures 1.2.10 et 1.2.12 par des tables donnant la décomposition des générateurs de $K(p)$ sur la base des projectifs indécomposables (voir aussi l'appendice C pour la méthode de calcul). Les partitions dans la première ligne d'un tableau font référence aux projectifs indécomposables qui leur sont associés (on utilise se réfère à [JK84] pour l'indexation des projectifs indécomposables par les partitions). La deuxième ligne indique les coefficients du générateur dans la base des projectifs indécomposables. On ne fait pas apparaître les partitions pour lesquelles le coefficient associé est nul.

1.3.1 $p = 2$

Décomposition des y_n

	(2, 1)
$-y_3$	1

	(3, 2)
y_5	1

	(4, 3)	(4, 2, 1)
$-y_7$	1	2

	(5, 4)	(5, 3, 1)	(4, 3, 2)
y_9	1	2	6

	(6, 5)	(6, 4, 1)	(6, 3, 2)	(5, 4, 2)	(5, 3, 2, 1)
$-y_{11}$	1	4	4	8	18

	(7, 6)	(7, 5, 1)	(7, 4, 2)	(7, 3, 2, 1)	(6, 5, 2)	(6, 4, 3)	(6, 4, 2, 1)	(5, 4, 3, 1)
y_{13}	1	4	4	16	20	16	24	58

Décomposition des w_n

	(2, 1)
$-w_3$	1

	(4, 1)	(3, 2)
$-w_5$	1	1

	(6, 1)	(5, 2)	(4, 3)	(4, 2, 1)
$-w_7$	1	2	1	3

	(8,1)	(7,2)	(6,3)	(5,4)	(6,2,1)	(5,3,1)	(4,3,2)
$-w_9$	1	3	5	1	8	4	15

	(10,1)	(9,2)	(8,3)	(7,4)	(6,5)	(8,2,1)	(7,3,1)	(6,4,1)	(6,3,2)	(5,4,2)	(5,3,2,1)
$-w_{11}$	1	4	9	15	3	17	18	13	78	38	105

	(12,1)	(11,2)	(10,3)	(9,4)	(8,5)	(7,6)	(10,2,1)	(9,3,1)	(8,4,1)	(8,3,2)	(7,5,2)	(7,4,2)	...
$-w_{13}$	1	1	16	32	43	1	32	40	125	219	22	267	...

...	(6,5,2)	(6,4,3)	(7,3,2,1)	(6,4,2,1)	(5,4,3,1)
...	133	100	616	246	658

1.3.2 $p = 3$

Décomposition des y_n

	(2)
y_2	1

	(3,1)
$-y_4$	1

	(4,1)
$-y_5$	1

	(5,2)	(5,1,1)
y_7	1	1

	$(6,2)$	$(6,1,1)$	$(5,3)$
y_8	1	1	2

	$(7,3)$	$(7,2,1)$	$(6,4)$	$(6,3,1)$	$(5,3,1,1)$
$-y_{10}$	1	1	2	4	3

	$(8,3)$	$(8,2,1)$	$(7,4)$	$(7,3,1)$	$(7,2,1,1)$	$(6,4,1)$
$-y_{11}$	1	1	3	4	3	8

Décomposition des w_n

	$(1,1)$
$-w_2$	1

	$(3,1)$	$(2,2)$	$(2,1,1)$
$-w_4$	1	1	1

	$(4,1)$	$(3,1,1)$	$(2,2,1)$
$-w_5$	1	1	1

	$(6,1)$	$(5,2)$	$(5,1,1)$	$(4,3)$	$(4,2,1)$	$(3,3,1)$	$(3,2,2)$	
$-w_4$	1	2	2	1	1	3	1	2

	$(7,1)$	$(6,2)$	$(5,3)$	$(4,4)$	$(6,1,1)$	$(5,2,1)$	$(4,3,1)$	$(4,2,2)$	$(3,3,2)$	$(4,2,1,1)$	$(3,3,1,1)$	$(3,2,2,1)$
$-w_8$	1	2	5	1	3	6	3	7	6	1	4	8

	$(9,1)$	$(8,2)$	$(7,3)$	$(6,4)$	$(8,1,1)$	$(7,2,1)$	$(6,3,1)$	$(6,2,2)$	$(5,3,2)$	$(4,4,2,2)$	$\dots$
$-w_{10}$	1	4	5	11	4	10	34	15	15	3	$\dots$

$\dots$	$(4,3,3)$	$(6,2,1,1)$	$(5,3,1,1)$	$(4,4,1,1)$	$(5,2,2,1)$	$(4,3,2,1)$	$(4,2,2,1,1)$	$(3,3,2,1,1)$
$\dots$	9	25	67	4	28	12	64	30

	$(10,1)$	$(9,2)$	$(8,3)$	$(7,4)$	$(6,5)$	$(9,1,1)$	$(8,2,1)$	$(7,3,1)$	$(6,4,1)$	$(5,5,1)$	$(7,2,2)$	$(6,3,2)$	$\dots$
$-w_{11}$	1	3	10	11	1	4	11	29	1	1	30	81	$\dots$

$\dots$	$(5,4,2)$	$(5,3,3)$	$(7,2,1,1)$	$(6,3,1,1)$	$(5,4,1,1)$	$(6,2,2,1)$	$(5,3,2,1)$	$(4,4,2,1)$	$(4,3,3,1)$	$(4,3,2,2)$	$(5,2,2,1,1)$	$(4,3,2,1)$	$(3,3,2,2,1)$
$\dots$	8	19	54	72	3	54	65	26	54	12	82	38	5

2

Caractères des produits en couronne avec les groupes symétriques

Ce chapitre généralise les résultats du précédent au cas des produits en couronne d'un groupe fini G avec les groupes symétriques. Le résultat principal étend le théorème 1.2.7.

Théorème 2.0.1. *Soit k un corps de décomposition pour G avec $\mathrm{car}(k) = p$. L'anneau $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(kG \wr S_n\text{-proj})$ est polynomial sur $\mathbb{Z}$.*

Cette généralisation s'appuie essentiellement sur le fait que les représentations irréductibles des produits en couronne s'expriment en fonction des représentations irréductibles du groupe G et des représentations irréductibles des groupes symétriques.

On commence par rappeler la théorie des représentations des produits en couronne [JK84]. On explique notamment comment s'applique la théorie des algèbres auto-adjointes à ce cadre [Zel81]. Dans un deuxième temps on s'intéresse aux représentations modulaires pour aboutir au théorème.

2.1 Produits en couronne

Fixons pour tout le chapitre un groupe fini G. Le groupe symétrique S_n agit à gauche sur le groupe produit $G^n = G \times \ldots \times G$ par permutation des facteurs. Pour tout n-uplet $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ dans G^n et tout σ dans S_n, on note :

$$^{\sigma}\mathbf{g} = (g_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, g_{\sigma^{-1}(n)}),$$

l'image de $\mathbf{g}$ sous l'action de σ. On appelle *produit en couronne* de G avec S_n, et on note $G \wr S_n$, le produit semi-direct

$$G \wr S_n := G^n \rtimes S_n = \{(\mathbf{g}, \sigma) | \mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n, \sigma \in S_n\}.$$

La multiplication de deux éléments est

$$(\mathbf{g}, \sigma).(\mathbf{h}, \omega) = (\mathbf{g}.^{\sigma}\mathbf{h}, \sigma.\omega)$$

et l'inverse de $(\mathbf{g}, \sigma) = ((g_1, \ldots, g_n, \sigma)$ est

$$(g_{\sigma(1)}^{-1}, \ldots, g_{\sigma(n)}^{-1}, \sigma^{-1}).$$

Par définition, G^n est un sous-groupe distingué de $G \wr S_n$ et $(G \wr S_n)/G^n \cong S_n$.

Remarque 3. On peut penser à $G \wr S_n$ comme à l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficient dans G, ayant un seul coefficient non-nul sur chaque ligne et chaque colonne.

2.1.1 Classes de conjugaison

Notons $C(G) = \{C_1, \ldots, C_r\}$ l'ensemble des classes de conjugaison de G. Soit $(\mathbf{g}, \sigma)$ un élément de $G \wr S_n$, considérons $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ un cycle dans la décomposition à support disjoint de σ. L'élément $g_{\gamma_k}. \ldots .g_{\gamma_1}$ est appelé *produit cyclique* de $\mathbf{g}$ associé au cycle γ. La classe de conjugaison du produit cyclique $g_{\gamma_k}. \ldots .g_{\gamma_1}$ dans G est indépendante de la permutation cyclique des éléments $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$. On peut ainsi définir une application $\varphi_{(\mathbf{g},\sigma)} : C(G) \to \mathcal{P}$ telle que pour tout i dans $\{1, \ldots, r\}$, $\varphi_{(\mathbf{g},\sigma)}(C_i) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ si σ admet λ_l cycles de longueur l dont le produit cyclique est dans la classe de conjugaison C_i. L'application $\varphi_{(\mathbf{g},\sigma)}$ est appelée le *type* de $(\mathbf{g}, \sigma)$.

Proposition 2.1.1. *Deux éléments de $G \wr S_n$ sont conjugués si, et seulement si, ils ont le même type. En particulier, les classes de conjugaison de $G \wr S_n$ sont paramétrées par les applications $\varphi : C(G) \to \mathcal{P}$, telles que $\sum_{C \in C(G)} |\varphi(C)| = n$.*

Démonstration. Supposons que $(\mathbf{g}, \sigma)$ et $(\mathbf{f}, \tau)$ soient conjugués dans $G \wr S_n$. Il existe $(\mathbf{h}, \pi) = ((h_1, \dots, h_n), \pi)$ dans $G \wr S_n$ tel que

$$((h_1, \dots, h_n), \pi)((g_1, \dots, g_n), \sigma)((h_{\pi(1)}^{-1}, \dots, h_{\pi(n)}^{-1}), \pi^{-1}) = ((f_1, \dots, f_n), \tau).$$

Donc σ et τ sont conjugués dans S_n. Il reste à montrer que pour tout cycle $(i_1, \dots, i_k)$ de σ, les produits cycliques $g_{i_k} \dots g_{i_1}$ et $f_{\pi(i_k)} \dots f_{\pi(i_1)}$, associés à σ et τ respectivement, sont conjugués. On a

$$\begin{aligned}
(\mathbf{h}, \pi).((g_1, \dots, g_n), \sigma).(\mathbf{h}, \pi)^{-1} &= ((h_1 g_{\pi^{-1}(1)} h^{-1}_{\pi^{-1}\sigma\pi(1)}, \dots, h_n g_{\pi^{-1}(n)} h^{-1}_{\pi^{-1}\sigma^{-1}\pi(n)}, \pi\sigma\pi^{-1}) \\
&= ((h_1 g_{\pi^{-1}(1)} h^{-1}_{\tau^{-1}(1)}, \dots, h_n g_{\pi^{-1}(n)} h^{-1}_{\tau^{-1}(n)}), \tau) \\
&= ((f_1, \dots, f_n), \tau).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout l dans $\{1, \dots, k\}$,

$$\begin{aligned}
f_{\pi(i_l)} &= h_{\pi(i_l)} g_{i_l} h^{-1}_{\tau^{-1}(\pi(i_l))} \\
&= h_{\pi(i_l)} g_{i_l} h^{-1}_{\pi(i_{l-1})}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$f_{\pi(i_k)} f_{\pi(i_{k-1})} \dots f_{\pi(i_1)} = h_{\pi(i_k)} g_{i_1} g_{i_{k-1}} \dots g_{i_1} h^{-1}_{\pi(i_k)}.$$

Ainsi, $(\mathbf{g}, \sigma)$ et $(\mathbf{f}, \tau)$ ont même type.

Réciproquement, supposons que $(\mathbf{g}, \sigma)$ et $(\mathbf{f}, \tau)$ aient le même type. Alors, il existe π dans S_n tel que

$$\tau = \pi\sigma\pi^{-1}$$

et tel que pour tout cycle $(i_1, \dots, i_k)$ de σ, les éléments $g_{i_k} \dots g_{i_1}$ et $f_{\pi(i_k)} \dots f_{\pi(i_1)}$ soient conjugués. Pour tout cycle $(i_1, \dots, i_k)$ de σ, choisissons $h_{\pi(i_k)}$ dans G tel que

$$f_{\pi(i_k)} \dots f_{\pi(i_1)} = h_{\pi(i_k)} g_{i_k} \dots g_{i_k} h^{-1}_{\pi(i_1)},$$

et pour tout l dans $\{2,\dots,k\}$, notons

$$h_{\pi(i_{l-1})} = f_{\pi(i_l)}^{-1} h_{\pi(i_l)} g_{i_l}.$$

On a

$$\begin{array}{rcl} f_{\pi(i_1)} & = & h_{\pi(i_1)} g_{i_l} h_{\pi(i_k)}^{-1} \\ & = & h_{\pi(i_1)} g_{i_1} h_{\tau^{-1}(\pi(i_1))}^{-1}. \end{array}$$

et pour tout l dans $\{2,\dots,k\}$,

$$\begin{array}{rcl} f_{\pi(i_l)} & = & h_{\pi(i_l)} g_{i_l} h_{\pi(i_{l-1})}^{-1} \\ & = & h_{\pi(i_l)} g_{i_l} h_{\tau^{-1}(\pi(i_l))}^{-1}. \end{array}$$

En remontant les calculs de la première partie de la preuve, on obtient $(h_1,\dots,h_n)$ dans G^n tel que

$$((h_1,\dots,h_n),\pi)(\mathbf{g},\sigma)(h_{\pi(1)}^{-1},\dots,h_{\pi(n)}^{-1},\pi^{-1}) = (\mathbf{f},\tau).$$

□

Considérons maintenant p un nombre premier et notons $C_{reg}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison p-régulières de G.

Proposition 2.1.2. *Les classes de conjugaison p-régulières de $G \wr S_n$ sont paramétrées par les applications $\varphi : C_{reg}(G) \to \mathcal{P}_{reg}$, telles que $\sum_{C \in C_{reg}(G)} |\varphi(C)| = n$.*

Démonstration. Soit $(\mathbf{g},\sigma)$ un élément de $G \wr S_n$. Remarquons que l'ordre de σ divise celui $(\mathbf{g},\sigma)$. Donc, si σ est un élément p-régulier de S_n, $\varphi_{(\mathbf{g},\sigma)}$ est à valeurs dans $\mathcal{P}_{reg}$ puisque σ ne possède pas de cycle de longueur divisible par p.

Réciproquement, si $(\mathbf{g},\sigma)$ est de type φ, avec φ à valeur dans $\mathcal{P}_{reg}$, alors σ ne possède pas de cycle de longueur divisible par p. Donc σ est p-régulier.

Supposons maintenant que σ soit p-régulier et notons e son ordre. On a :

$$(\mathbf{g},\sigma)^e = (\mathbf{g}({}^{\sigma}\mathbf{g})\dots({}^{\sigma^{e-1}}\mathbf{g}),\mathrm{id}).$$

Soit $\gamma = (i_1,\dots,i_k)$ un cycle de σ. Le i_k-ème facteur de $\mathbf{g}({}^{\sigma}\mathbf{g})\dots({}^{\sigma^{e-1}}\mathbf{g})$ est $g_{i_k} g_{i_{k-1}} \dots g_{i_1}$, c'est-à-dire le produit cyclique de $\mathbf{g}$ associé à γ. Donc $(\mathbf{g},\sigma)$ est d'ordre premier à p si, et seulement si, tous ses produits cycliques sont d'ordre premier à p. □

2.1.2 Représentations complexes

On explique ici brièvement la théorie des représentations complexes des produits en couronne. Elle se déduit principalement de la théorie des représentations complexes des groupes symétriques.

Soit U une représentation complexe de G et V une représentation de S_n. Le groupe $G \wr S_n$ agit sur $U^{\otimes n} \otimes V$. Pour $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ dans G, σ dans S_n et $u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \otimes v$ un vecteur de $U^{\otimes n} \otimes V$,

$$\mathbf{g}(u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \otimes v) := g_1 u_1 \otimes \ldots \otimes g_n u_n \otimes v$$

et

$$\sigma(u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \otimes v) := u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes u_{\sigma^{-1}(n)} \otimes \sigma v.$$

Notons $\mathrm{Irr}(G) = \{U_1, \ldots, U_r\}$ l'ensemble des représentations irréductibles de G et pour V_λ une représentation simple de S_n,

$$V_{i,\lambda} := U_i^{\otimes n} \otimes V_\lambda$$

la représentation de $G \wr S_n$ avec l'action décrite ci-dessus. Maintenant pour $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$, des partitions de $n_1, \ldots, n_r$ respectivement (avec éventuellement $n_j = 0$), le produit

$$V_{1,\lambda^1} \otimes \ldots \otimes V_{r,\lambda^r} = (U_1^{\otimes n_1} \otimes V_{\lambda^1}) \otimes \ldots \otimes (U_r^{\otimes n_r} \otimes V_{\lambda^r})$$

est une représentation de $(G \wr S_{n_1}) \times \ldots \times (G \wr S_{n_r})$. En identifiant $(G \wr S_{n_1}) \times \ldots \times (G \wr S_{n_r})$ à un sous-groupe de $G \wr S_n$, avec $n = n_1 + \ldots + n_k$, on peut induire la représentation précédente sur $G \wr S_n$. On obtient la représentation

$$\mathrm{Ind}_{(G \wr S_{n_1}) \times \ldots \times (G \wr S_{n_r})}^{G \wr S_n} (V_{1,\lambda^1} \otimes \ldots \otimes V_{r,\lambda^r}).$$

Cette construction permet en fait de décrire les représentations irréductibles de $G \wr S_n$. Soit $\underline{\lambda} : \mathrm{Irr}(G) \to \mathcal{P}$ l'application qui à la représentation irréductible U_i associe la partition λ^i. On note

$$V_{\underline{\lambda}} := \mathrm{Ind}_{(G \wr S_{n_1}) \times \ldots \times (G \wr S_{n_r})}^{G \wr S_n} (V_{1,\lambda^1} \otimes \ldots \otimes V_{r,\lambda^r})$$

la représentation de $G \wr S_n$ décrite ci-dessus.

Théorème 2.1.3. *[JK84] Les représentations irréductibles de $G \wr S_n$ sont toutes de la forme $V_{\underline{\lambda}}$ avec $\underline{\lambda} : \mathrm{Irr}(G) \to \mathcal{P}$ telle que $\sum_{U \in \mathrm{Irr}(G)} |\varphi(U)| = n$. De plus $V_{\underline{\lambda}} \cong V_{\underline{\lambda}'}$ si, et seulement si, $\underline{\lambda} = \underline{\lambda}'$.*

2.2 Structure d'algèbre de Hopf

Notons $R(G)_n = K_0(\mathbb{C}(G \wr S_n)\text{-mod})$ le groupe de Grothendieck des $\mathbb{C}(G \wr S_n)$-modules. On identifie $R_n(G)$ au $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les caractères irréductibles de $G \wr S_n$ et on note $\chi_{\underline{\lambda}}$ le caractère de la représentation irréductible $V_{\underline{\lambda}}$ de $G \wr S_n$. On munit le groupe gradué $R(G) = \bigoplus_{n \geq 0} R(G)_n$ de la base formée des caractères irréductibles

$$\{\chi_{\underline{\lambda}}, \underline{\lambda} : \mathrm{Irr}(G) \to \mathcal{P}\}.$$

Comme dans le cas des groupes symétriques, les foncteurs d'induction et de restriction permettent de définir une multiplication $\circ$ et une comultiplication Δ sur $R(G)$:

$$\begin{array}{cccc} \circ & : & R(G)_m \otimes R(G)_n & \to & R(G)_{m+n} \\ & & [V] \otimes [W] & \mapsto & [\mathrm{Ind}_{(G\wr S_m)\times(G\wr S_n)}^{G\wr S_{m+n}}(V \otimes W)], \end{array}$$

et pour tout n entier :

$$\begin{array}{cccc} \Delta & : & R(G)_n & \to & \bigoplus_{k+l=n} R(G)_k \otimes R(G)_l \\ & & [V] & \mapsto & \sum_{k+l=n} [\mathrm{Res}_{(G\wr S_k)\times(G\wr S_l)}^{G\wr S_n}(V)]. \end{array}$$

Enfin, on munit $R(G)$ du produit scalaire pour lequel la base des caractères irréductibles est orthonormale. À nouveau, les opérations $\circ$ et Δ sont adjointes l'une de l'autre pour ce produit scalaire.

Proposition 2.2.1. *[Zel81, §7.1] $(R(G), \circ, \Delta)$ est une algèbre de Hopf auto-duale positive. Les éléments primitifs irréductibles sont les caractères irréductibles de $G \cong G \wr S_1$, c'est-à-dire les éléments de $\mathrm{Irr}(G)$.*

D'après le théorème de décomposition des algèbres de Hopf auto-adjointes positives [Zel81],

$$R(G) \cong \bigotimes_{\rho \in \mathrm{Irr}(G)} R(\rho),$$

où $R(\rho)_n$ est le $\mathbb{Z}$-module engendré par les facteurs directs de

$$\rho^n = \mathrm{Ind}_{G^n}^{G\wr S_n}(\rho \otimes \ldots \otimes \rho)$$

(voir appendice A).

Soit ρ une représentation irréductible de G. On peut lui associer le foncteur additif

$$\begin{array}{rcl} F_{\rho,n} : \mathbb{C}\, S_n\text{-mod} & \to & \mathbb{C}(G \wr S_n)\text{-mod} \\ V_\lambda & \mapsto & \rho^{\otimes n} \otimes V_\lambda, \end{array}$$

où l'action de $G \wr S_n$ sur $\rho^{\otimes n} \otimes V_\lambda$ est celle définie au paragraphe précédent.

On obtient ainsi un morphisme de groupes gradués

$$F_\rho : R \to R(G).$$

Proposition 2.2.2. *[Zel81, §7] L'application F_ρ est un morphisme d'algèbres de Hopf auto-adjointes positives.*

En particulier, F_ρ induit un isomorphisme entre R et $R(\rho)$.

Définition 2.2.3. Pour x dans R et ρ dans $\mathrm{Irr}(G)$, on note $x(\rho) = F_\rho(x)$.

Avec cette notation,

$$R(G) = \mathbb{Z}[x_n(\rho) | n \geq 1, \rho \in \mathrm{Irr}(G)],$$

où x_n désigne la représentation triviale de S_n.

Par ailleurs, comme $R(G)$ est une algèbre de Hopf, d'après le théorème A.1.11, l'algèbre $\mathbb{C} \otimes R(G)$ est polynomiale sur $\mathbb{C}$. Rappelons que l'espace $\mathbb{C} \otimes R(G)_n$ s'identifie à $\mathrm{CF}(G \wr S_n)$, l'espace vectoriel des fonctions de classes sur $G \wr S_n$. De plus, une famille de générateurs polynomiaux est donnée par les fonctions caractéristiques des classes de conjugaison de la forme

$$(\mathbf{g}, \sigma) = ((g_1, \ldots, g_n), (1 \ldots n)).$$

Pour $g_n \ldots g_1$ dans C, on note $\xi_{i,C}$ cette fonction.

2.3 Caractères modulaires

Fixons $(\mathbb{K}, \mathbb{A}, k)$ un système p-modulaire de décomposition pour G. C'est également un système de décomposition pour tous les $G \wr S_n$ [JK84].

Pour tout n entier, on note $R(k,G)_n = K_0(k(G \wr S_n)\text{-mod})$ le groupe de Grothendieck des $k(G \wr S_n)$-modules de type fini et $K(k,G)_n = K_0(k(G \wr S_n)\text{-proj})$ le groupe de Grothendieck des $k(G \wr S_n)$-modules projectifs.

Comme dans les cas précédents, le groupe gradué $R(k,G) = \bigoplus_{n \geq 0} R(k,G)_n$ est muni d'une multiplication donnée par les foncteurs d'induction

$$\begin{array}{ccc} R(k,G)_m \otimes R(k,G)_n & \to & R(k,G)_{m+n} \\ [M \otimes N] & \mapsto & \left[\mathrm{Ind}_{(G \wr S_m) \times (G \wr S_n)}^{G \wr S_{m+n}} (M \otimes N)\right] \end{array},$$

pour M un $(G \wr S_m)$-module et N un $(G \wr S_n)$-module, et d'une comultiplication donnée par les foncteurs de restriction

$$\begin{array}{ccc} R(k,G)_n & \to & \bigoplus_{i+j=n} R(k,G)_i \otimes R(k,G)_j \\ [N] & \mapsto & \sum_{i+j=n} \left[\mathrm{Res}_{(G \wr S_i) \times (G \wr S_j)}^{G \wr S_n} N\right], \end{array}$$

pour N un $(G \wr S_n)$-module.

Les foncteurs d'induction et de restriction sont exacts. En particulier, ils préservent les projectifs. On peut donc restreindre ces opérations à $K(k,G) = \bigoplus_{n \geq 0} K(k,G)_n$.

Notons $c(G) = \bigoplus c_n(G) : K(k,G) \to R(k,G)$ l'application de Cartan graduée, $e(G) = \bigoplus e_n(G) : K(k,G) \to R(G)$ et $d(G) = \bigoplus d_n(G) : R(G) \to R(k,G)$ l'application de décomposition (voir B.2.4). On a une version graduée du triangle cde,

$$\begin{tikzcd} K(k,G) \arrow[rr, "c(G)"] \arrow[dr, "e(G)"'] & & R(k,G) \\ & R(G) \arrow[ur, "d(G)"'] & \end{tikzcd}.$$

Proposition 2.3.1. *Le diagramme précédent est un diagramme d'algèbres de Hopf.*

Démonstration. Commençons par montrer que $e(G)$ est une application multiplicative et comultiplicative.

Soient P un $k(G \wr S_m)$-module projectif de type fini et Q un $k(G \wr S_n)$-module projectif de type fini. Il existe un $\mathbb{A}(G \wr S_m)$-module projectif $\tilde{P}$ et un $\mathbb{A}(G \wr S_n)$-module

projectif $\tilde{Q}$ tels que
$$P \cong k \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{P} \text{ et } Q \cong k \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{Q}.$$
On a alors
$$\mathrm{Ind}_{(G\wr S_m)\times(G\wr S_n)}^{G\wr S_{m+n}}(P \otimes Q) \cong \otimes_{\mathbb{A}}(\tilde{P} \otimes \tilde{Q}).$$
Par définition,
$$e(G)([P].[Q]) = [\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{A}} \mathrm{Ind}_{(G\wr S_m)\times(G\wr S_n)}^{G\wr S_{m+n}}(\tilde{Q} \otimes \tilde{P})]$$
et
$$\begin{aligned} e(G)([P]).e(G)([Q]) &= [\mathbb{K} \otimes_A \tilde{P}].[\mathbb{K} \otimes_A \tilde{Q}] \\ &= [\mathrm{Ind}_{(G\wr S_m)\times(G\wr S_n)}^{G\wr S_{m+n}}((\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{P}) \otimes (\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{Q}))] \\ &= [\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{A}} (\mathrm{Ind}_{(G\wr S_m)\times(G\wr S_n)}^{G\wr S_{m+n}}(\tilde{P} \otimes \tilde{Q})]. \end{aligned}$$
Donc e est multiplicative.

De même,
$$\begin{aligned} \Delta([P]) &= \textstyle\sum_{k+l=n}[\mathrm{Res}_{(G\wr S_k)\times(G\wr S_l)}^{G\wr S_n} P] \\ &= \textstyle\sum_{k+l=n}[\mathrm{Res}_{(G\wr S_k)\times(G\wr S_l)}^{G\wr S_n} k \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{P}] \\ &= \textstyle\sum_{k+l=n}[k \otimes_{\mathbb{A}} \mathrm{Res}_{(G\wr S_k)\times(G\wr S_l)}^{G\wr S_n} \tilde{P}]. \end{aligned}$$
Donc,
$$\begin{aligned} e(G)(\Delta[P]) &= \textstyle\sum_{k+l=n} \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{A}} [\mathrm{Res}_{(G\wr S_k)\times(G\wr S_l)}^{G\wr S_n} \tilde{P}] \\ &= \textstyle\sum_{k+l=n}[\mathrm{Res}_{(G\wr S_k)\times(G\wr S_l)}^{G\wr S_n} \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{P}] \\ &= \Delta(e(G)([P])). \end{aligned}$$
Comme $e(G)$ est injective, on en déduit que $K(k, G)$ est une algèbre de Hopf et que $e(G)$ est un morphisme d'algèbres de Hopf.

On montre de manière similaire que $d(G)$ est multiplicative et comultiplicative. Comme $d(G)$ est surjective, on obtient que $R(k, G)$ est une algèbre de Hopf et que $d(G)$ est un morphisme d'algèbres de Hopf. $\square$

Dans toute la suite, on confond $K(k, G)$ et son image dans $R(G)$ par l'application $e(G)$. Cette image est le sous-anneau de $R(G)$ formé des caractères nuls en dehors des classes de conjugaison p-régulières.

2.3.1 Fonctions de classes

Rappelons que pour tout entier n, $\mathrm{CF}(G \wr S_n)$ désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions de classes sur $G \wr S_n$. Il s'identifie à $\mathbb{C} \otimes R(G)_n$ via les caractères et $\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{CF}(G \wr S_n)$ s'identifie à l'algèbre $\mathbb{C} \otimes R(G)$. De la même manière $\mathbb{C} \otimes K(k, G)$ s'identifie, via l'application e, à $\mathrm{CF}_{reg}(G \wr S_n)$, le sous-espace de $CF(G \wr S_n)$ formé des fonctions de classes nulles en dehors des classes p-régulières, et $R(k, G)$ s'identifie à $\mathrm{CF}(G \wr S_n)_{reg}$ l'espace des fonctions sur les classes p-régulières, via les caractères de Brauer. En étendant les opérations de manière $\mathbb{C}$-linéaire, on identifie les algèbres $\mathbb{C} \otimes K(k, G)$ avec $\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{CF}_{reg}(G \wr S_n)$ et $\mathbb{C} \otimes R(k, G)$ avec $\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{CF}(G \wr S_n)_{reg}$.

Le triangle suivant est donc commutatif :

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{CF}_{reg}(G \wr S_n) \arrow[rr, "c(G)"] \arrow[dr, "e(G)"'] & & \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{CF}(G \wr S_n)_{reg} . \\ & \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{CF}(G \wr S_n) \arrow[ur, "d(G)"'] & \end{tikzcd}$$

Puisque $\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{CF}_{reg}(G \wr S_n)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de Hopf graduée, c'est une algèbre polynomiale d'après le théorème de Milnor-Moore (voir théorème A.1.11). Par ailleurs, rappelons que l'espace des éléments primitifs de $\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{CF}(G \wr S_n)$ est engendré par les fonctions de classes $\xi_{i,C}$ avec i entier et C une classe de conjugaison de G. On en déduit que les fonctions $\xi_{i,C}$ avec p ne divisant par i, engendrent l'ensemble des éléments primitifs de $\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{CF}_{reg}(G \wr S_n)$. Donc

$$\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{CF}_{reg}(G \wr S_n) = \mathbb{C}[\xi_{i,C}, p \nmid i \text{ et } C \in \mathrm{Cl}_{reg}(G)].$$

2.3.2 Polynomialité

Notons e l'inclusion de $K_0(kG\text{-proj})$ dans $K_0(\mathbb{K}G\text{-mod})$ (voir B.2.3). Considérons une base $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_M\}$ de $K_0(kG\text{-proj})$, par exemple la base formée des kG-modules projectifs indécomposables. Puisque l'inclusion $e(G)$ se rétracte, on peut la compléter en une base

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_M, \varphi_{M+1}, \ldots, \varphi_N\},$$

de $K_0(\mathbb{K}G\text{-mod})$.

On note pour tout $i \in [\![1, N]\!]$:

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_{1,i} \\ \vdots \\ \varphi_{N,i} \end{pmatrix}.$$

La matrice $(\varphi_{s,t})_{1 \leq s,t \leq N}$ est la matrice de passage de la base $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ à la base $\{\rho_1, \ldots, \rho_N\}$ formée des caractères irréductibles de G.

Définition 2.3.2. Pour tout $k \in \{1, \ldots, M\}$, on note

$$X_k(t) = \sum_{i \geq 0} X_{k,i} t^i = \Big(\sum_{i \geq 0} x_i(\rho_1) t^i\Big)^{\varphi_{1,k}} \ldots \Big(\sum_{i \geq 0} x_i(\rho_M) t^i\Big)^{\varphi_{M,k}}.$$

Rappelons que pour tout x dans R et tout i dans $\{1, \ldots, N\}$, $x(\rho_i) = F_{\rho_i}(x)$. Pour alléger les notations dans la suite, on note $F_i = F_{\rho_i}$.

Lemme 2.3.3. *Pour tout $k \in \{1, \ldots, M\}$, on a l'égalité suivante dans $\bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{CF}(G \wr S_n)$:*

$$X_k(t) = \exp(C_k(t))$$

avec

$$C_k(t) = \sum_{i \geq 1} \Big[\sum_{C \in \mathrm{Cl}_{reg}(G)} \Big(\sum_{j=1}^{N} \frac{|C|}{|G|} \varphi_{j,k} \chi_j(C) \Big) \frac{\xi_{i,C}}{i} t^i \Big].$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} X_k(t) &= \Big(\sum_{i \geq 0} F_1(x_i) t^i\Big)^{\varphi_{1,k}} \ldots \Big(\sum_{i \geq 0} F_M(x_i) t^i\Big)^{\varphi_{M,k}} \\ &= \exp\Big(\sum_{i \geq 1} F_1(\frac{c_i}{i}) t^i\Big)^{\varphi_{1,k}} \ldots \exp\Big(\sum_{i \geq 1} F_M(\frac{c_i}{i}) t^i\Big)^{\varphi_{M,k}} \\ &= \exp\Big(\sum_{i \geq 1} (\sum_{j=1}^{N} \varphi_{j,k} F_j(\frac{c_i}{i} t^i))\Big) \\ &= \exp\Big(\sum_{i \geq 1} \Big[\sum_{j=1}^{N} \Big(\sum_{C \in \mathrm{Cl}(G)} \varphi_{j,k} \chi_k(C) \frac{|C|}{|G|} \frac{\xi_{i,C}}{i} t^i\Big)\Big]\Big) \end{aligned}$$

car $F_j(c_i) = \sum_{C \in \mathrm{Cl}(G)} \chi_j(C) \frac{|C|}{|G|} \xi_{i,C}$.

Donc

$$\begin{aligned} X_k(t) &= \exp\Big[\sum_{C\in \mathrm{Cl}(G)} \Big(\sum_{j=1}^{N} \varphi_{j,k}\chi_k(C)\frac{|C|}{|G|}\frac{\xi_{i,C}}{i}t^i\Big] \\ &= \exp\Big[\sum_{C\in \mathrm{Cl}_{\mathrm{reg}}(G)} \Big(\sum_{j=1}^{N} \varphi_{j,k}\chi_k(C)\frac{|C|}{|G|}\frac{\xi_{i,C}}{i}t^i\Big], \end{aligned}$$

puisque φ_k est nul en dehors des classes de conjugaison p-régulières. □

Définition 2.3.4. Pour tout $k \in \{1,\ldots,M\}$, on note :

$$Y_k(t) = \sum_{n\geq 0} Y_{k,n}t^n = \frac{V_k(t)}{U_k(t)},$$

où $U_k(t)$ désigne la partie p-régulière de $X_k(t)$ et $V_k(t)$ sa partie p-singulière (voir définition 1.2.5).

D'après le lemme 1.2.6, pour tout k dans $\{1,\ldots,M\}$,

1. $Y_{k,n} = 0$ pour $p|n$,
2. $Y_{k,n}$ est un polynôme à coefficient dans $\mathbb{C}$ en les $\xi_{i,C}$, $p \nmid i$ et $C \in \mathrm{Cl}_{\mathrm{reg}}(G)$,
3. En notant $X_{k,\lambda} = X_{k,\lambda_1}\ldots X_{k,\lambda_k}$ pour $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \in \mathcal{P}_n$, $(Y_{k,n} - X_{k,n})$ est combinaison linéaire de $X_{k,\lambda}$ avec $\lambda \notin \mathcal{P}_{n,reg}$.

En particulier, pour tout n entier et k dans $\{1,\ldots,M\}$, $Y_{k,n}$ est dans $K(G)_n$.

Lemme 2.3.5. *L'ensemble* $\{X_{k,i} | k \in [\![1;N]\!], i \geq 1\}$ *est un ensemble de générateurs de l'anneau gradué* $R(G)$*,*

$$R(G) = \mathbb{Z}[X_{k,i} | k \in [\![1;N]\!], i \geq 1].$$

Démonstration. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\mathbb{Z}[X_{k,i} | k \in [\![1;N]\!], 1 \leq i \leq n] = \mathbb{Z}[F_k(x_i) | k \in [\![1;N]\!], 1 \leq i \leq n].$$

Pour $i = 1$, on a :

$$X_{1,1} = \varphi_{1,1}F_1(x_1) + \ldots + \varphi_{N,1}F_N(x_1)$$

$$\vdots$$

$$X_{N,1} = \varphi_{1,N}F_1(x_1) + \ldots + \varphi_{N,N}F_N(x_1).$$

Mais $(\varphi_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ est une matrice inversible dans $\mathbb{Z}$, donc

$$\mathbb{Z}[X_{k,1}|k \in [\![1;N]\!]] = \mathbb{Z}[F_k(x_1)|k \in [\![1;N]\!]].$$

Supposons maintenant que

$$\mathbb{Z}[X_{k,i}|k \in [\![1;N]\!], 1 \leq i \leq n-1] = \mathbb{Z}[F_k(x_i)|k \in [\![1;N]\!], 1 \leq i \leq n-1].$$

On a :

$$\begin{aligned} X_{1,n} &= \varphi_{1,1}F_1(x_n) + \ldots + \varphi_{N,1}F_N(x_n) + R_1 \\ &\vdots \\ X_{N,n} &= \varphi_{1,N}F_1(x_n) + \ldots + \varphi_{N,N}F_N(x_n) + R_N \end{aligned}$$

avec $R_k \in \mathbb{Z}[X_{k,i}|k \in [\![1;N]\!], 1 \leq i \leq n-1]$. Ainsi les

$$\begin{gathered} \varphi_{1,1}F_1(x_n) + \ldots + \varphi_{N,1}F_N(x_n) \\ \vdots \\ \varphi_{1,N}F_1(x_n) + \ldots + \varphi_{N,N}F_N(x_n) \end{gathered}$$

sont dans $\mathbb{Z}[X_{k,i}|k \in [\![1;N]\!], 1 \leq i \leq n]$. Comme $(\varphi_{i,j})_{1\leq i,j\leq N} \in GL_N(\mathbb{Z})$, les $F_k(x_n)$, $1 \leq k \leq N$, sont dans $\mathbb{Z}[X_{k,i}|k \in [\![1;N]\!], 1 \leq i \leq n]$ et le résultat est prouvé. $\square$

On peut maintenant donner le théorème principal de cette section.

Théorème 2.3.6. *L'anneau $K(k,G)$ est polynomial. Plus précisément, on a :*

$$K(k,G) = \mathbb{Z}[Y_{i,n}|i \in [\![1;M]\!], p \nmid n].$$

En particulier,

$$K(k,G) \cong \bigotimes_{i=1}^{M} K(p).$$

Démonstration. On sait que

$$\mathbb{Z}[Y_{i,n}|i \in [\![1;M]\!], p \nmid n] \subset K(k,G).$$

De plus, en comparant les dimensions degré par degré, on obtient

$$\mathbb{C} \otimes K(k, G) = \mathbb{C}[Y_{i,n} | i \in [\![1; M]\!], p \nmid n]. \tag{2.1}$$

Il reste à montrer que pour z homogène de degré n dans $K(k, G)$, z est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ en les $Y_{i,k}$, $i \in [\![1, M]\!]$ et $k \leq n$.

Considérons donc un tel z. D'après (2.1) :

$$z = \sum_{\substack{\lambda_1, \ldots, \lambda_M \in \mathcal{P}_{\text{reg}}, \\ \sum |\lambda_i| = n}} \alpha_{\lambda_1, \ldots, \lambda_M} y_{1,\lambda_1} \ldots y_{M,\lambda_M}$$

avec $\alpha_{\lambda_1, \ldots, \lambda_M} \in K$, et

$$z = \sum_{\substack{\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathcal{P}, \\ \sum |\lambda_i| = n}} \beta_{\lambda_1, \ldots, \lambda_N} X_{1,\lambda_1} \ldots X_{N,\lambda_N},$$

avec $\beta_{\lambda_1, \ldots, \lambda_N} \in \mathbb{Z}$, d'après le lemme 2.3.5. Or $y_{i,\lambda} = X_{i,\lambda} + R_{i,\lambda}$ où $R_{i,\lambda}$ est combinaison linéaire de $X_{i,\lambda'}$ avec $\lambda' \notin \mathcal{P}_{\text{reg}}$ et la famille $\{X_{1,\lambda_1} \ldots X_{N,\lambda_N}\}_{\lambda_i \in \mathcal{P}, \sum |\lambda_i| = n}$ forme une base de $R(G)_n$. Donc

$$y_{1,\lambda_1} \ldots y_{M,\lambda_M} = X_{1,\lambda_1} \ldots X_{M,\lambda_M} + R_{\lambda_1, \ldots, \lambda_M},$$

où $R_{\lambda_1, \ldots, \lambda_M}$ est un polynôme en les $X_{i,\lambda'}$ avec $i \in [\![1, M]\!]$ et $\lambda' \notin \mathcal{P}_{\text{reg}}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
0 \;=\; & \sum_{\substack{\lambda_1, \ldots, \lambda_M \in \mathcal{P}_{\text{reg}}, \\ \sum |\lambda_i| = n}} (\alpha_{\lambda_1, \ldots, \lambda_M} - \beta_{\lambda_1, \ldots, \lambda_M}) X_{1,\lambda_1} \ldots X_{M,\lambda_M} \\
& + \sum_{\substack{\lambda_1, \ldots, \lambda_M \in \mathcal{P}_{\text{reg}}, \\ \sum |\lambda_i| = n}} \alpha_{\lambda_1, \ldots, \lambda_M} R_{\lambda_1, \ldots, \lambda_M} \\
& - \sum_{\substack{\lambda_1, \ldots, \lambda_M \notin \mathcal{P}_{\text{reg}}, \\ \sum |\lambda_i| = n}} \beta_{\lambda_1, \ldots, \lambda_M} X_{1,\lambda_1} \ldots X_{N,\lambda_M} - \sum_{\substack{(\lambda_{M+1}, \ldots, \lambda_N) \neq 0, \\ \sum |\lambda_i| = n}} \beta_{\lambda_1, \ldots, \lambda_N} X_{1,\lambda_1} \ldots X_{N,\lambda_N}.
\end{aligned}$$

Par indépendance linéaire des $\{X_{1,\lambda_1} \ldots X_{N,\lambda_N}\}_{\lambda_i \in \mathcal{P}, \sum |\lambda_i| = n}$, pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_M \in \mathcal{P}_{\text{reg}}$, $\alpha_{\lambda_1, \ldots, \lambda_M} = \beta_{\lambda_1, \ldots, \lambda_M}$ donc $\alpha_{\lambda_1, \ldots, \lambda_M} \in \mathbb{Z}$ et le résultat est prouvé. $\square$

3

Caractères des groupes linéaires en caractéristique transverse

Nous avons vu dans les chapitres précédents que les caractères complexes des groupes symétriques et des produits en couronne d'un groupe fini G avec les groupes symétriques respectivement, s'organisent en une structure d'algèbre de Hopf auto-adjointe positive. En particulier, ce sont des anneaux de polynômes sur les entiers. On a utilisé ce résultat pour montrer que les caractères modulaires des modules projectifs se structurent également en anneaux de polynômes sur les entiers.

Un résultat remarquable de A. Zelevinsky [Zel81] affirme que c'est aussi le cas des caractères complexes des groupes linéaires finis : ils forment une algèbre de Hopf auto-adjointe positive. Le présent chapitre explique ces résultats. C'est aussi l'occasion d'introduire des notations qui serviront au chapitre suivant.

On étudie brièvement le cas modulaire, obtenant par exemple que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des caractères l-modulaires des $GL_n(\mathbb{F}_q)$, avec l et q premiers entre eux, est une sous-algèbre de Hopf de $\mathbb{C}\otimes(\bigoplus_{n\geq 0} K_0(GL_n(\mathbb{F}_q)\text{-mod})$.

Les résultats s'adaptent au cas des groupes unitaires finis en utilisant les foncteurs de Lusztig et des résultats de François Digne et Jean Michel [DM87].

3.1 Classes de conjugaison

Pour n entier, on note $GL_n(\mathbb{F}_q)$ le groupe fini des matrices inversibles sur $\mathbb{F}_q$, le corps fini à q éléments, où $q = p^n$ et p est premier.

On note $\mathbb{F}_q[x]$ l'anneau des polynômes sur $\mathbb{F}_q$ en l'indéterminée x et Φ l'ensemble des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$, distincts de x (c'est l'ensemble des polynômes caractéristiques des matrices inversibles sur $\mathbb{F}_q$).

Les classes de conjugaison des éléments de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sont décrites par leurs invariants de similitude. Soit g dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$ et f dans Φ, on note $m_{f^i}(g)$ la multiplicité de f^i comme invariant de similitude de g. On note $U(f^i)$ la matrice compagnon de f^i et pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ une partition de n,

$$U_\lambda(f) = \begin{pmatrix} U(f^{\lambda_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & U(f^{\lambda_k}) \end{pmatrix}.$$

Si $f_1^{k_1} \ldots f_r^{k_r}$ est la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme caractéristique de g, un représentant de sa classe de conjugaison est la matrice

$$\begin{pmatrix} U_{\lambda_1}(f_1) & & \\ & \ddots & \\ & & U_{\lambda_r}(f_r) \end{pmatrix},$$

où pour tout i dans $\{1, \ldots, r\}$,

$$\lambda_i = (1^{n_1}, \ldots, s^{n_s}, \ldots),$$

et $n_j = m_{(f_i)^j}(g)$ est la multiplicité de $(f_i)^j$ comme invariant de similitude de g.

Autrement dit, on a un isomorphisme de modules,

$$\mathbb{F}_q[x]/(g) \cong \bigoplus_{f\in\Phi} \bigoplus_{i\geq 1} \left(\mathbb{F}_q[x]/(f^i) \right)^{m_{f^i}(g)}.$$

Les classes de conjugaison des éléments de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sont donc paramétrées par les applications

$$\boldsymbol{\lambda} : \Phi \ \to \ \mathcal{P},$$

telles que $\sum_{f\in\Phi} \deg(f)|\boldsymbol{\lambda}(f)| = n$. Précisément, à chaque g dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$, on associe

l'application
$$\boldsymbol{\lambda}_g : f \mapsto (m_{f^1}(g), m_{f^2(g)}, \ldots, m_{f^k}(g), \ldots),$$
et $\boldsymbol{\lambda}_g$ ne dépend que de la classe de conjugaison de g.

Soit $\boldsymbol{\lambda}$ une application de Φ dans $\mathcal{P}$. On appelle *support* de $\boldsymbol{\lambda}$ l'ensemble des polynômes f de Φ pour lesquelles $\boldsymbol{\lambda}(f) \neq (0)$. Si $\boldsymbol{\lambda}$ est associée à une classe de conjugaison dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$, son support est un ensemble fini.

On note $\operatorname{ord}(g)$ l'ordre de g dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$. Pour f un polynôme sur $\mathbb{F}_q$, on note $\operatorname{ord}(f)$ l'ordre de la matrice compagnon de f. Si f est irréductible, $\operatorname{ord}(f)$ est égal à l'ordre de ses racines dans $\overline{\mathbb{F}}_q$, en particulier $\operatorname{ord}(f)$ divise $q^{\deg(f)} - 1$.

Lemme 3.1.1. *[LN97, Thm 3.8] Soit f un élément de Φ et i dans $\mathbb{N}$. Alors*
$$\operatorname{ord} f^i = p^t \operatorname{ord}(f),$$
où t est le plus petit entier tel que $p^t \geq i$.

Ainsi pour g un élément de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ et $\boldsymbol{\lambda}_g : \Phi \to \mathcal{P}$ l'application associée à sa classe de conjugaison,
$$\operatorname{ord}(g) = p^t M,$$
avec
$$M = \operatorname{ppcm}\{\operatorname{ord}(f) | f \in \Phi, \boldsymbol{\lambda}(f)_{l(\boldsymbol{\lambda}(f))} \neq 0\},$$
où $l(\lambda)$ désigne le nombre de parts de λ et t le plus petit entier tel que $p^t \geq \max_{f\in\Phi}\{\boldsymbol{\lambda}(f)_{l(\boldsymbol{\lambda}(f))}\}$.

3.2 Représentations complexes

Notons $R_n = K_0(\mathbb{C}\, GL_n(F_q))$ le groupe de Grothendieck des $\mathbb{C}\, GL_n(\mathbb{F}_q)$-modules. Ce groupe s'identifie au $\mathbb{Z}$-module engendré par les caractères irréductibles de $GL_n(\mathbb{F}_q)$. On note C_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les fonctions de classes sur $GL_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathbb{C} \otimes R_n \cong C_n$.

À nouveau, on considère le groupe gradué $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$, avec $R_0 = \mathbb{Z}$. On le munit d'une structure d'algèbre de Hopf graduée en utilisant les foncteurs d'induction et de restriction parabolique.

3.2.1 Induction et restriction parabolique

Soient n et m deux entiers naturels. Notons $G_{m,n}$ le sous-groupe de Levi de $GL_{m+n}(\mathbb{F}_q)$ formé des matrices diagonales par blocs

$$\begin{pmatrix} A_m & 0 \\ 0 & A_n \end{pmatrix},$$

avec A_m dans $GL_m(\mathbb{F}_q)$ et A_n dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$, et notons $U_{m,n}$ le sous-groupe unipotent de $GL_{m+n}(\mathbb{F}_q)$ formé des matrices du type

$$\begin{pmatrix} 1 & & M \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

avec M dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F}_q)$. Le sous-groupe $G_{m,n}$ agit par conjugaison sur $U_{m,n}$ et $G_{m,n} \cap U_{m,n} = \{1\}$. On note $P_{m,n} = G_{m,n} \ltimes U_{m,n}$. C'est le sous-groupe parabolique de $GL_{m+n}(\mathbb{F}_q)$ formé des matrices triangulaires supérieures par blocs,

$$\begin{pmatrix} A_m & M \\ 0 & A_n \end{pmatrix}.$$

On note $\mathrm{Infl}_{m,n}(\_)$ le foncteur de la catégorie des $\mathbb{C}(GL_m(\mathbb{F}_q) \times GL_n(\mathbb{F}_q))$-modules vers la catégorie des $\mathbb{C}\, P_{m,n}$-modules, tel que $U_{m,n}$ agit trivialement sur $\mathrm{Infl}_{m,n}(V)$.

Définition 3.2.1. Le foncteur *d'induction parabolique* $\mathrm{PInd}_{GL_m \times GL_n}^{GL_{m,n}}(\_)$ est le foncteur composé

$$\mathrm{Ind}_{P_{m,n}}^{GL_{m,n}} \circ \mathrm{Infl}_{m,n}(\_) : \mathbb{C}(GL_m(\mathbb{F}_q) \times GL_n(\mathbb{F}_q))\text{-mod} \to \mathbb{C}\, GL_{m+n}(\mathbb{F}_q)\text{-mod}\,.$$

On l'appelle également foncteur *d'induction de Harish-Chandra.*

Définition 3.2.2. On appelle *foncteur de restriction parabolique* ou *foncteur de restriction de Harish-Chandra*, et on note $\mathrm{PRes}_{GL_m \times GL_n}^{GL_{m,n}}(\_)$, le foncteur

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{PRes}_{GL_m \times GL_n}^{GL_{m,n}}(\_) : & \mathbb{C}\, GL_{m+n}(\mathbb{F}_q)\text{-mod} & \to & \mathbb{C}(GL_m(\mathbb{F}_q) \times GL_n(\mathbb{F}_q))\text{-mod} \\ & V & \mapsto & (\mathrm{Res}_{P_{m,n}}^{GL_{m,n}}(V))^{U_{m,n}}. \end{array}.$$

Proposition 3.2.3. *Pour tout m et n entiers,*

- *Les foncteurs* $\mathrm{PInd}_{GL_m \times GL_n}^{GL_{m,n}}(\_)$ *et* $\mathrm{PRes}_{GL_m \times GL_n}^{GL_{m,n}}(\_)$ *sont additifs,*
- $\mathrm{PInd}_{GL_m \times GL_n}^{GL_{m,n}}(\_)$ *est adjoint à gauche de* $\mathrm{PRes}_{GL_m \times GL_n}^{GL_{m,n}}(\_)$*,*
- *Les foncteurs* $\mathrm{PInd}_{GL_m \times GL_n}^{GL_{m,n}}(\_)$ *et* $\mathrm{PRes}_{GL_m \times GL_n}^{GL_{m,n}}(\_)$ *sont exacts.*

Si ρ est le caractère d'un $\mathbb{C}\, GL_m(\mathbb{F}_q) \times \mathbb{C}\, GL_n(\mathbb{F}_q)$-module V, on note $\mathrm{PInd}_{GL_m(\mathbb{F}_q) \times GL_n(\mathbb{F}_q)}^{GL_{m+n}(\mathbb{F}_q)}(\rho)$ le caractère de $\mathrm{PInd}_{GL_m(\mathbb{F}_q) \times GL_n(\mathbb{F}_q)}^{GL_{m+n}(\mathbb{F}_q)}(V)$. Soient ρ_m et ρ_n des caractères de $GL_m(\mathbb{F}_q)$ et $GL_n(\mathbb{F}_q)$ respectivement, et g un élément de $GL_{m+n}(\mathbb{F}_q)$,

$$\mathrm{PInd}(\rho_m \otimes \rho_n)(g) = \frac{1}{|P_{n,m}|} \sum_{\substack{h \in GL_{m+n} \\ hgh^{-1} = \begin{pmatrix} g_m & * \\ 0 & g_n \end{pmatrix} \in P_{m,n}}} \rho_m(g_m)\rho_n(g_n).$$

De même, si ρ est le caractère de $GL_{m+n}(\mathbb{F}_q)$-module V, on note $\mathrm{PRes}_{GL_m(\mathbb{F}_q) \times GL_n(\mathbb{F}_q)}^{GL_{m+n}(\mathbb{F}_q)}(\rho)$ le caractère de $\mathrm{PRes}_{GL_m(\mathbb{F}_q) \times GL_n(\mathbb{F}_q)}^{GL_{m+n}(\mathbb{F}_q)}(V)$. Pour $g = (g_m, g_n)$ dans $GL_m(\mathbb{F}_q) \times GL_n(\mathbb{F}_q)$,

$$\mathrm{PRes}(\rho)(g) = \frac{1}{|U_{m,n}|} \sum_{u \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F}_q)} \rho(\begin{pmatrix} g_m & u \\ 0 & g_n \end{pmatrix}).$$

3.2.2 Structure d'algèbre de Hopf

On munit R de la multiplication

$$\begin{array}{rcl} \circ : R_k \otimes R_l & \to & R_{k+l} \\ [M] \otimes [N] & \mapsto & \left[\mathrm{PInd}_{GL_k \times GL_l}^{GL_n}(M \otimes N)\right] \end{array}$$

et de la comultiplication

$$\begin{array}{rcl} \Delta : R_n & \to & \bigoplus_{k+l=n} R_k \otimes R_l \\ [M] & \mapsto & \sum_{k+l=n} \left[\mathrm{PRes}_{GL_k \otimes GL_l}^{GL_n}(M)\right]. \end{array}$$

On note Ω la base de R formée par les représentations irréductibles des $GL_n(\mathbb{F}_q)$.

Proposition 3.2.4. *[Zel81 ; SZ84] La multiplication $\circ$, la co-multiplication Δ et la base Ω munissent R d'une structure d'algèbre de Hopf sur $\mathbb{Z}$.*

D'après le théorème de structure des algèbres de Hopf auto-adjointes positives (voir théorème A.3.3), R se décompose en produit tensoriel d'algèbres de Hopf toutes isomorphes à $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}$, à graduation près. Les éléments permettant de décrire cette décomposition sont les caractères *cuspidaux*.

Un caractère irréductible de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ est dit *cuspidal* si c'est aussi un élément primitif de R. On note $\mathcal{C}_n$ leur ensemble et $\mathcal{C} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{C}_n$. Si ρ est un caractère de $\mathcal{C}_n$, on dit que ρ est de degré n et on note $d(\rho) = n$.

On dit qu'une représentation est *cuspidale* si son caractère est cuspidal. Par définition, les représentations cuspidales de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sont exactement les représentations ne contenant aucun vecteur invariant sous l'action d'un sous-groupe unipotent $U_{k,l}$.

On note $R(\rho)$ le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les facteurs directs des ρ^n, avec n entier.

Théorème 3.2.5. *[Zel81, §8]*

1. *Chaque $R(\rho)$ est une sous-algèbre de Hopf de R. Ces sous-algèbres sont orthogonales et la restriction orthogonale* $\mathrm{res}_\rho : R \to R(\rho)$ *est un morphisme d'algèbres de Hopf.*
2. *Pour tout ρ dans $\mathcal{C}$, il existe un isomorphisme naturel d'algèbres de Hopf, à graduation près, entre* $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}$ *et $R(\rho)$, qui à x associe $x(\rho)$, tel que les caractères irréductibles de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ soient exactement les caractères $s_\lambda(\rho)$ correspondant aux fonctions de Schur, pour λ parcourant les partitions de n. En particulier, cet isomorphisme est une isométrie.*
3. *L'algèbre R se décompose en produit tensoriel :*

$$R = \bigotimes_{\rho \in \mathcal{C}} R(\rho).$$

Les caractères irréductibles de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sont paramétrés par les fonctions $\boldsymbol{\lambda} : \mathcal{C} \to \mathcal{P}$ telles que

$$||\boldsymbol{\lambda}|| = \sum_{\rho \in \mathcal{C}} d(\rho)|\lambda(\rho)| = n.$$

Le caractère irréductible correspondant à la fonction $\boldsymbol{\lambda}$ est

$$\chi_{\boldsymbol{\lambda}} = \prod_{\rho \in \mathcal{C}} s_{\lambda(\rho)}(\rho).$$

Remarque 4. Une $\mathbb{Z}$-base de l'espace des éléments primitifs de R est donnée par

$$\mathcal{B}_R = \{p_n(\rho), n \in \mathbb{N}, \rho \in \mathcal{C}\},$$

où $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la famille des sommes de Newton de l'algèbre des fonctions symétriques $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}$ (voir remarque 7 de l'appendice A.2).

3.2.3 Fonctions de classes

Notons $c_{\boldsymbol{\lambda}}$ la classe de conjugaison caractérisée par l'application $\boldsymbol{\lambda} : \mathcal{C} \to \mathcal{P}$ et $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ la fonction caractéristique de cette classe. Les fonctions $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ forment une base de $C := \mathbb{C} \otimes R$ pour $\boldsymbol{\lambda}$ parcourant les applications de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{P}$.

Notons

$$V_{\boldsymbol{\lambda}} = \bigoplus_{f\in\Phi} \bigoplus_{i\geq 1} \left(\mathbb{F}_q[x]/(f^i)\right)^{\boldsymbol{\lambda}(f)_i},$$

et $g^{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}$ le nombre de sous-modules $W \subset V_{\boldsymbol{\nu}}$ tel que $W \cong V_{\boldsymbol{\lambda}}$ et $V_{\boldsymbol{\nu}}/W \cong V_{\boldsymbol{\mu}}$.

Proposition 3.2.6. *[Zel81, Prop. 10.1]*

$$\pi_{\boldsymbol{\lambda}} \circ \pi_{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{\boldsymbol{\nu}} g^{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}} \pi_{\boldsymbol{\nu}}.$$

Pour $f \in \Phi$, on note $C(f)$ le sous-espace de C engendré par les fonctions $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ pour lesquelles le support de $\boldsymbol{\lambda}$ est restreint à f. On a le résultat suivant :

Théorème 3.2.7. *[SZ84, §1.6]*

1. *Pour tout $f \in \Phi$, $C(f)$ est une sous-algèbre de Hopf de C. Ces algèbres sont orthogonales et la projection orthogonale* $\mathrm{res}_f : C \to C(f)$ *est un morphisme d'algèbres de Hopf.*
2. *Pour tout $f \in \Phi$, il y a un isomorphisme, à graduation près, entre Sym et $C(f)$, noté $x \mapsto x(f)$, et tel que*

$$h_l(f) = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_l} \pi_\lambda(f).$$

3. *L'algèbre C est isomorphe à $\bigotimes_{f\in\Phi} C(f)$. De plus, on a*

$$\pi_{\boldsymbol{\lambda}} = \prod_{f\in\Phi} \pi_{\lambda(f)}(f).$$

Remarque 5. En s'appuyant sur le deuxième point, on peut déterminer l'image d'autres fonctions symétriques de référence dans $C(f)$. L'image de la fonction symétrique élémentaire e_l est :

$$e_l(f) = q^{d(f)l(l-1)/2}\pi_{1^l}(f).$$

L'image de polynôme de Newton p_l est :

$$p_l(f) = \prod_{f\in\Phi}(-1)^{l(\lambda)-1}\psi_{l(\lambda)-1}(q^{\deg(f)})\pi_{\lambda(f)}(f),$$

où $l(\lambda)$ est le nombre de parts de λ et pour tout $r \geq 0$

$$\psi_r(q) = \prod_{1\leq i\leq r}(q^i - 1)$$

est le q-analogue de la factorielle.

On en déduit en particulier que la famille

$$\mathcal{B}_C = \{p_n(f), n \in \mathbb{N}, f \in \Phi\}$$

est une $\mathbb{C}$-base de l'ensemble des éléments primitifs de $C = \mathbb{C}\otimes R$.

Explicitons le changement de base entre $\mathcal{B}_C$ et $\mathcal{B}_R$. Pour cela, on a besoin de notations supplémentaires.

Pour tout entier n, notons k_n l'unique extension de degré n de $\mathbb{F}_q$ et $L_n = \mathrm{Hom}(k_n^\times, \mathbb{C}^\times)$ le groupe des caractères de k_n. Si m divise n, l'application norme $N_{n,m} : k_n^\times \to k_m^\times$, définie par

$$N_{n,m}(x) = x^{(q^n-1)/(q^m-1)},$$

où $d = n/m$ est surjective. Si n divise m, L_m se plonge dans L_n via l'application duale de la norme de $N_{n,m}$. Notons L la limite directe des L_n. L'automorphisme de Frobenius $F : x \mapsto x^p$ agit sur L en laissant chaque L_n invariant. Notons Γ le groupe engendré par F, et Θ (respectivement Θ_n) l'ensemble des orbites de L (respectivement L_n) sous l'action de Γ. Pour chaque Φ dans Θ, on appelle *degré* de Φ son cardinal et on le note $d(\Phi)$. Les éléments Θ_n sont exactement ceux dont le degré divise n. On définit un couplage de L_n avec $k_n^\times$ par

$$\langle\xi, x\rangle_n = \xi(x),$$

pour ξ dans L_n et x dans $k_n^\times$. Enfin, pour x un élément de k, racine d'un polynôme irréductible f_x sur $\mathbb{F}_q$, avec $d = \deg(f_x)$, on note

$$\tilde{p}_n(x) = \begin{cases} p_l(f_x) & \text{si } n = ld \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 3.2.8. *[SZ84, Thm 1.11]*

1. *Il existe une bijection naturelle $\Phi \to \rho(\Phi)$ entre Θ et $\mathcal{C}$ préservant le degré. Si Φ est un élément de Θ de degré d et ξ un élément de L, alors on note*

$$\tilde{p}_n(\xi) = \tilde{p}_n(\Phi) = \begin{cases} p_l(\rho(\Phi)) & \textit{si } n = ld \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

   Les éléments $\tilde{p}_n(\Phi)$ forment une base des éléments primitifs de R.

2. *Soit ξ dans L, Φ a Γ-orbite ξ, $d = d(\Phi)$ et $n = ld$,*

$$\tilde{p}_n(\Phi) \quad = \quad (-1)^{l(d-1)} \textstyle\sum_{x \in k_n^\times} \langle \xi, x \rangle_n \tilde{p}_n(x).$$

3.3 Caractères modulaires en caractéristique transverse

On déduit des résultats de Zelevinsky présentés ci-dessus quelques propriétés des caractères modulaires des $GL_n(\mathbb{F}_q)$ en caractéristique distincte de p.

Fixons l un nombre premier distinct de p et k un corps de rupture de caractéristique l pour tous les $GL_n(\mathbb{F}_q)$. Rappelons qu'une classe de conjugaison de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ est dite l-régulière si ses éléments sont d'ordre premier à l.

Lemme 3.3.1. *Soit g un élément de $GL_n(\mathbb{F}_q)$. Alors g est l-régulier si, et seulement si, pour tout f dans Φ tel que $l \mid \operatorname{ord} f$, f n'est pas un facteur irréductible d'un invariant de similitude de g.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme 3.1.1. □

En particulier, si f est un polynôme irréductible sur $\mathbb{F}_q$ de degré n, l'ordre de f divise $q^n - 1$.

Notons Φ_l le sous-ensemble de Φ des polynômes d'ordre premier à l. D'après le lemme précédent, les classes de conjugaison l-régulières de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sont paramétrées par les applications

$$\Phi_l \to \mathcal{P},$$

telles que $\sum_{f \in \Phi_l} \deg(f)|\boldsymbol{\lambda}(f)| = n$.

De la même manière que sur le corps des nombres complexes, on définit les foncteurs d'induction et de restriction parabolique PInd et PRes. À nouveau, ces foncteurs sont exacts et préservent donc les projectifs.

Notons M_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les caractères l-modulaires irréductibles. D'après la théorie de Brauer, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel M_n est isomorphe à

$$\mathbb{C} \otimes K_0(kGL_n(\mathbb{F}_q)\text{-mod}),$$

ainsi qu'à

$$\mathbb{C} \otimes K_0(kGL_n(\mathbb{F}_q)\text{-proj}).$$

De plus, M_n s'identifie au sous-espace de C_n formé des fonctions de classes nulles en dehors des classes l-régulières.

Notons maintenant $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$. On a le triangle d'algèbres de Hopf graduées,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "c"] \arrow[dr, "e"'] & & M \\ & C \arrow[ur, "d"'] & \end{tikzcd}$$

et M s'identifie, via l'application e, à la sous-algèbre de Hopf de C formée des fonctions de classes nulles en dehors des classes l-régulières.

Proposition 3.3.2. *L'algèbre M est isomorphe à la sous-algèbre de Hopf*

$$\bigotimes_{f \in \Phi_l} C(f)$$

de C.

Démonstration. On commence par identifier M à la sous-algèbre de Hopf de C formée des fonctions de classes nulles en dehors des classes l-régulières. D'après le lemme 3.3.1, les classes l-régulières de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sont celles dont les invariants de similitude n'ont que des éléments de Φ_l comme facteurs irréductibles. Ainsi une fonction de classes est dans M si, et seulement si, elle est dans l'algèbre engendrée par les fonctions de classes π_f avec f un polynôme dont les invariants de similitude ont pour facteurs irréductibles uniquement des éléments de Φ_l. C'est exactement l'algèbre $\bigotimes_{f\in\Phi_l} C(f)$, d'après le théorème 3.2.7. $\square$

Corollaire 3.3.3. *Soit ρ est un caractère cuspidal de degré n. Si l ne divise pas q^n-1, alors ρ est un caractère de Brauer projectif virtuel.*

Démonstration. D'après le théorème 3.2.8, il existe Φ dans Θ, de degré n tel que $\rho=\rho(\Phi)$. Alors

$$\rho = p_1(\rho) = \tilde{p}_n(\Phi) = (-1)^{d-1}\sum_{x\in k_n^\times}\langle\xi, x\rangle_n \tilde{p}_n(x).$$

Si x est racine d'un polynôme irréductible unitaire f_x,

$$\tilde{p}_n(x) = \begin{cases} p_k(f_x) & \text{si } n = kd \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $d=\deg(f_x)$. Rappelons que l'ordre d'un polynôme irréductible sur $\mathbb{F}_q$ de degré d divise q^d-1. Donc si l ne divise pas q^n-1, l ne divise pas q^d-1 si d divise l et pour tout x dans $k_n^\times$, f_x est d'ordre premier à l. On en déduit que ρ est un élément de $\bigotimes_{f\in\Phi_l} C(f)$. Ainsi, ρ est dans l'image de e. $\square$

3.4 Caractères des groupes unitaires

On peut étudier de la même manière les groupes unitaires finis. Leurs classes de conjugaison sont également paramétrées par des fonctions de partitions et à nouveau, les caractères complexes des groupes unitaires sont munis d'une structure d'algèbre de Hopf. La multiplication et la comultiplication sont cette fois définies en utilisant les foncteurs de Lusztig [DM87] qui sont une généralisation des foncteurs d'induction et de restriction paraboliques.

3.4.1 Classes de conjugaison

On note $\bar{\mathbb{F}}_q$ la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$. On considère le morphisme de Frobenius

$$\begin{array}{rcl} F : GL_n(\bar{\mathbb{F}}_q) & \to & GL_n(\bar{\mathbb{F}}_q) \\ (a_{i,j}) & \mapsto & (a_{j,i}^q)^{-1}. \end{array}$$

Le groupe unitaire sur $\mathbb{F}_{q^2}$ est le sous-groupe des points fixes sous l'action de F :

$$U_n(\mathbb{F}_{q^2}) := \{A \in GL_n(\bar{\mathbb{F}}_q) \mid F(A) = A\}.$$

Pour $f(x) = x^d + a_1x^{d-1} + \ldots + a_{d-1}x + a_d$ dans $\mathbb{F}_{q^2}[x]$ avec $a_d \neq 0$, on note

$$\tilde{f}(t) = x^d + a_d^{-q}(a_{d-1}^q x^{d-1} + \ldots + a_1^q x + 1).$$

Si $\{x_1, \ldots, x_d\}$ est l'ensemble des racines de f dans $\bar{\mathbb{F}}_q$, alors les racines de $\tilde{f}$ sont $\{F(x_1), \ldots, F(x_d)\}$.

Définition 3.4.1. Un polynôme f dans $\mathbb{F}_{q^2}[x]$ est dit U-irréductible dans l'un des deux cas suivants :

- f est irréductible dans $\mathbb{F}_{q^2}[x]$ et $\tilde{f} = f$ (dans ce cas $\deg f$ est impair),
- $f = h\tilde{h}$ avec h irréductible dans $\mathbb{F}_{q^2}[x]$ et $\tilde{h} \neq h$.

On note Φ^U l'ensemble des polynômes U-irréductibles dans $\mathbb{F}_{q^2}[x]$.

Comme dans le cas des groupes linéaires, les classes de conjugaison de $U_n(\mathbb{F}_{q^2})$ sont paramétrées par l'ensemble des applications

$$\boldsymbol{\lambda} : \Phi^U \rightarrow \mathcal{P},$$

telles que $\sum_{f \in \Phi^U} \deg(f)|\boldsymbol{\lambda}(f)| = n$. En particulier, l'ordre d'un élément de $U_n(\mathbb{F}_{q^2})$ est donné par la proposition 3.1.1.

3.4.2 Foncteurs de Lusztig

On introduit ici les foncteurs de Lusztig de manière générale, suivant [DM87].

Définition 3.4.2. Soit G et H deux groupes finis et M un $(\mathbb{C}\,G, \mathbb{C}\,H)$-bimodule. On note R_M le foncteur qui associe à tout $\mathbb{C}\,H$-module à gauche, le $\mathbb{C}\,G$-module $M \otimes_{\mathbb{C}\,H} V$, l'action de G étant induite par l'action de G sur M.

Exemples. Si H est un sous-groupe de G et $M = \mathbb{C}\,G$, $R_M = \mathrm{Ind}_G^H$. On retrouve les foncteurs utilisés dans l'étude des groupes symétriques et des produits en couronne.

Soit maitenant $\mathbf{G}$ un groupe réductif défini sur $\mathbb{F}_q$, $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique rationnel de $\mathbf{G}$. Considérons $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$ deux sous-groupes de $\mathbf{G}$ tels que $\mathbf{P} = \mathbf{LU}$ soit une décomposition de Lévi rationnelle de $\mathbf{P}$. On note G, L et U les groupes des points rationnels sur $\mathbb{F}_q$ de $\mathbf{G}$, $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$ respectivement. L'algèbre de groupe $M = \mathbb{C}\,G/U$ est un G-module à gauche et un L-module à droite (car L normalise U). Le foncteur R_M associé est le foncteur d'induction parabolique R_L^G.

Considérons à nouveau $\mathbf{G}$ un groupe réductif défini sur $\mathbb{F}_q$, $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{P} = \mathbf{LU}$ une décomposition de Lévi de $\mathbf{P}$. On suppose ici que $\mathbf{L}$ est rationnel mais pas nécessairement $\mathbf{P}$. On pose

$$Y_U = \{x \in \mathbf{G} | x^{-1}{}^F x \in {}^F\mathbf{U}\}.$$

Le groupe $G \times L$ agit sur la variété Y_U. On note $M = H_c^*(Y_U, \bar{\mathbb{Q}}_s)$ avec s un nombre premier qui ne divise pas q. Le module M est muni d'une action à gauche de G et à droite de L. On note $R_L^G = R_M$. Si $\mathbf{P}$ est rationnel, on retrouve l'induction à la Harish-Chandra.

On note R_M^*, l'adjoint à droite du foncteur R_M. On a

$$(\mathrm{Ind}_G^H)^* = \mathrm{Res}_G^H,$$

et

$$(\mathrm{PInd}_L^G)^* = \mathrm{PRes}_L^G\,.$$

3.4.3 Caractères complexes

Pour tout entier n, on note U_n pour $U_n(\mathbb{F}_q^2)$. On définit une multiplication $\circ$ et une comultiplication Δ sur $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\,U_n\text{-mod})$ par :

$$\begin{array}{rcl} \circ : K_0(\mathbb{C}\,U_k\text{-mod}) \otimes K_0(\mathbb{C}\,U_l\text{-mod}) & \to & K_0(\mathbb{C}\,U_{k+l}\text{-mod}) \\ {[M] \otimes [N]} & \mapsto & \left[R_{U_k \times U_l}^{U_{k+l}}(M \otimes N)\right] \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \Delta : K_0(\mathbb{C}\,U_n\text{-mod}) & \to & \bigoplus_{k+l=n} K_0(\mathbb{C}\,U_k\text{-mod}) \otimes K_0(\mathbb{C}\,U_l\text{-mod}) \\ {[M]} & \mapsto & \sum_{k+l=n} \left[(R_{U_k \times U_l}^{U_n})^*(M)\right]. \end{array}$$

Théorème 3.4.3. *[DM87, Cor. 9.4] Muni des opérations $\circ$ et Δ, l'anneau $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\,U_n\text{-mod})$ est une algèbre de Hopf auto-adjointe.*

C'est également un anneau de polynômes sur les entiers.

Théorème 3.4.4. *[DM87, Thm. 9.5] L'algèbre* $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\, U_n\text{-mod})$ *est isomorphe à un produit tensoriel de copie de* $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}$ *:*

$$\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\, U_n\text{-mod}) \cong \bigotimes_{f\in\Phi^U} \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\,.$$

Les fonctions de Schur dans les copies $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}$ correspondent, au signe près, aux représentations irréductibles des U_n. Une étude combinatoire complète est donnée dans [TV07].

3.4.4 Caractères modulaires

Fixons $(\mathbb{K}, \mathbb{A}, k)$ un système l-modulaire de décomposition pour U_n, avec l ne divisant pas q.

On identifie $K_0(kU_n\text{-proj})$ au sous-groupe de $K_0(\mathbb{K}\, U_n\text{-mod})$ formé des caractères nuls en dehors des classes p-régulières. En complexifiant, $\mathbb{C}\otimes K_0(kU_n\text{-proj})$ s'identifie au sous-espace vectoriel des fonctions de classes sur U_n, nulles en dehors des classes p-régulières.

Notons Φ_l^U le sous-ensemble de Φ^U des polynômes d'ordre premier à l. D'après ce qui précède, les classes de conjugaison p-régulières des U_n sont paramétrées par les applications

$$\boldsymbol{\lambda} : \Phi_l^U \;\; \to \;\; \mathcal{P},$$

telles que $\sum_{f\in\Phi_l^U} \deg(f)|\boldsymbol{\lambda}(f)| = n$. Pour $\boldsymbol{\lambda}$ une telle application, on note π_{λ} la fonctions de classes de U_n associée. Pour tout f dans Φ_U, on note $\tilde{C}(f)$ le sous-espace engendré par les fonctions de classes $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ où le support de $\boldsymbol{\lambda}$ est restreint à f. On a

$$\tilde{C}(f) \cong \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}\,.$$

D'après [DM87, 9 §]

$$\mathbb{C}\otimes\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\, U_n\text{-mod}) \cong \bigotimes_{f\in\Phi^U} \tilde{C}(f).$$

Proposition 3.4.5. *L'algèbre* $\mathbb{C}\otimes\bigoplus_{n\geq 0} K_0(kU_n\text{-proj})$ *est une sous-algèbre de Hopf de* $\mathbb{C}\otimes\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\, U_n\text{-mod})$ *isomorphe au produit tensoriel de copies de* $\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}$*,*

$$\mathbb{C}\otimes\bigoplus_{n\geq 0} K_0(kU_n\text{-proj}) \cong \bigotimes_{f\in\Phi_l^U} \tilde{\mathbb{C}}(f).$$

4

Caractères modulaires des groupes linéaires en caractéristique naturelle

Ce chapitre s'intéresse aux caractères des groupes linéaires finis en caractéristique naturelle. Considérons $K_0(\mathbb{F}_p GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-mod})$ le groupe de Grothendieck des $\mathbb{F}_p GL_n(\mathbb{F}_p)$-modules de type fini, où $\mathbb{F}_p$ est le corps premier à p éléments. Le groupe gradué $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-mod})$ muni de la multiplication et de la comultiplication données par les foncteurs d'induction et de restriction parabolique est une algèbre de Hopf. Contrairement aux cas précédents, ces opérations ne se restreignent pas au groupe gradué $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})$. Cependant, les caractères de Steinberg permettent de définir un isomorphisme entre l'anneau $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-mod})$ et l'anneau obtenu en munissant $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})$ de la multiplication donnée par les foncteurs d'induction usuels. C'est ce dernier anneau qui est étudié ci-après.

En utilisant la caractérisation des modules projectifs par leur caractère de Brauer, on identifie $\mathbb{C}\otimes\Big(\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})\Big)$ avec l'espace des fonctions de classes sur $GL_n(\mathbb{F}_p)$ qui s'annulent en dehors des classes semi-simples. Une base de $\mathbb{C}\otimes\Big(\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})\Big)$ est donnée par les fonctions caractéristiques des classes de conjugaison des éléments semi-simples. Une classe semi-simple est entièrement déterminée par le polynôme caractéristique associé. Ainsi, on peut paramétrer les fonctions caractéristiques des classes semi-simples par les polynômes unitaires sur $\mathbb{F}_p$ avec un coefficient constant non-nul. Cette indexation se comporte agréablement vis-à-vis de la multiplication. On obtient le résultat qui suit.

Théorème 4.0.1. *L'algèbre $\mathbb{C} \otimes \Big(\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj}) \Big)$ est polynomiale et une famille de générateurs est donnée par les fonctions caractéristiques associées aux polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_p$, unitaires, avec un coefficient constant non nul.*

Les caractères de Deligne-Lusztig [DL76] tensorisés avec les modules de Steinberg donnent de vrais $\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)$-modules projectifs. Ces modules nous serviront à donner une autre description de ces générateurs.

Cette étude est motivée par plusieurs conjectures en théorie des modules instables qui seront explicitées au chapitre suivant.

4.1 Groupes de Grothendieck

Pour tout n entier, on note $K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-mod})$ le groupe de Grothendieck des $\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)$-modules de type fini et $K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})$ celui des $\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)$-modules projectifs de type fini. Pour V un $\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)$-module de type fini (resp. projectif), on note $[V]$ sa classe dans $K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-mod})$ (resp. $K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})$). Comme dans le chapitre précédent, les foncteurs d'induction parabolique définissent une multiplication $\circ$ qui munit le groupe gradué $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-mod})$ d'une structure d'anneau commutatif. Contrairement au cas précédent, cette multiplication ne se restreint pas à $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})$.

Considérons maintenant les foncteurs d'induction

$$\mathrm{Ind}_{GL_k(\mathbb{F}_p)\times GL_l(\mathbb{F}_p)}^{GL_n(\mathbb{F}_p)}(\_),$$

où k, l et n sont des entiers naturels vérifiant $k+l=n$. On définit une multiplication commutative $\bullet$ sur $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-mod})$, pour tous k et l tel que $k+l=n$,

$$\begin{array}{rcccc} \_\bullet\_ & : & K_0(\mathbb{F}_p\, GL_k(\mathbb{F}_p)\text{-mod}) \otimes K_0(\mathbb{F}_p\, GL_l(\mathbb{F}_p)\text{-mod}) & \to & K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-mod}) \\ & & [V]\otimes[W] & \mapsto & [\mathrm{Ind}_{GL_k(\mathbb{F}_p)\times GL_l(\mathbb{F}_p)}^{GL_n}(V\otimes W)]. \end{array}$$

Cette multiplication munit $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-mod})$ d'une deuxième structure d'anneau. Cette multiplication se restreint à $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})$ et le munit également d'une structure d'anneau gradué.

4.1.1 Représentations de Steinberg

Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{F}_p)$ admet une représentation bien particulière, la représentation de Steinberg. On commence ici par donner une définition de cette représentation [Hum87].

Notons B_n le sous-groupe de Borel de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ formé des matrices triangulaires supérieures, T_n le tore maximal contenu dans B_n formé des matrices diagonales et U_n le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ des matrices triangulaires supérieures unipotentes. Le groupe B_n est le produit semi-direct de T_n avec U_n. On note $N_n = N_{GL_n(\mathbb{F}_p)}(T_n)$ le normalisateur de T_n dans $GL_n(\mathbb{F}_p)$ et $W_n = N_n/T_n$ le groupe de Weyl de $GL_n(\mathbb{F}_p)$. Le groupe W_n est isomorphe au groupe symétrique S_n.

Fixons $\mathbb{K}$ un corps quelconque. Dans le but d'expliciter une représentation dont le degré est une puissance de p de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ (ou plus généralement un groupe de type Lie défini sur un corps de caractéristique p), Steinberg construit un idéal à gauche de l'algèbre de groupe $\mathbb{K}\, GL_n(\mathbb{F}_p)$ [Ste57]. Notons ϵ_n la représentation signature de W_n. Soient $\bar{T}_n$ et $\bar{U}_n$ les éléments de $\mathbb{K}\, GL_n(\mathbb{F}_p)$ définis par

$$\bar{T}_n = \sum_{t\in T_n} t$$

et

$$\bar{U}_n = \sum_{u\in U_n} u.$$

Pour tout w dans W_n, soit n_w un représentant de w dans N_n. On note

$$e_n = \sum_{w\in W_n} \epsilon_n(w) n_w \bar{T}_n \bar{U}_n,$$

et I_n l'idéal à gauche de $\mathbb{K}\, GL_n(\mathbb{F}_p)$ engendré par e_n. Une base de I_n est donnée par les éléments $u.e$, où u parcourt le sous-groupe U_n. En particulier, la dimension de $\mathbb{K}\, GL_n(\mathbb{F}_p).e$ est $p^{\dim U_n}$.

Définition 4.1.1. On note St_n le représentation de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ associée à l'idéal I_n, et on l'appelle représentation de Steinberg. On note également St_n son caractère.

Théorème 4.1.2. *[Ste57, Thm. 2]*

— *La restriction de* St_n *à* U_n *est isomorphe à la représentation régulière à droite de* U_n.

— *Dans la base* $(u.e_n, u \in U_n)$, St_n *est représenté par des matrices à coefficients dans* $\{-1, 0, 1\}$, *avec au plus* $|W_n|$ *coefficients non-nuls par ligne.*

— *Si* K *est un corps de caractéristique* 0 *ou* p, St_n *est une représentation irréductible de* $GL_n(\mathbb{F}_p)$.

Curtis [Cur66] et Feit, indépendamment, expriment le caractère de Steinberg comme combinaison linéaire entière de modules induits. Pour tout $I = (i_1, \ldots, i_k)$ avec i_j dans $\mathbb{N}^*$ et $\sum_j^k i_j = n$, on note P_I le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ formé des matrices triangulaires supérieures par blocs, avec des blocs de tailles $i_1, \ldots i_k$. On a

$$\mathrm{St}_n = \sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} \operatorname{Ind}_{P_I}^{GL_n(\mathbb{F}_p)} \mathbf{1}_{P_I}.$$

En particulier, en reprenant les notations du chapitre précédent,

$$\mathrm{St}_n = s_{(1^n)}(x-1) = e_n(x-1) = \sum_{(i_1,\ldots,i_k), \sum_{j=1}^k i_j = n} (-1)^k \mathbf{1}_{i_1} \circ \ldots \circ \mathbf{1}_{i_k}.$$

La valeur du caractère complexe St_n s'en déduit.

Théorème 4.1.3. *[SZ84, §1.3] Le caractère de Steinberg* St_n *évalué sur une classe de conjugaison* $C_{\boldsymbol{\lambda}}$ *de* $GL_n(\mathbb{F}_p)$ *vaut zéro sauf si* $C_{\boldsymbol{\lambda}}$ *est p-régulière, c'est-à-dire si* $\boldsymbol{\lambda}(f)$ *est de la forme* $(1^{k(f)})$ *pour tout* $f \in \Phi$, *et dans ce cas*

$$\mathrm{St}_n(C_{\boldsymbol{\lambda}}) = (-1)^N p^D,$$

où $N = n - \sum_{f \in \Phi} l(f)$ *et* $D = \sum_{f\in\Phi} \deg(f).(k(f)(k(f)-1)/2)$.

4.1.2 Modules projectifs et isomorphismes

D'après le théorème 4.1.2, la réduction modulo p de la représentation de Steinberg est toujours irréductible et par définition c'est aussi un $\mathbb{F}_p GL_n(\mathbb{F}_p)$-module projectif. Ainsi en tensorisant un $\mathbb{F}_p GL_n(\mathbb{F}_p)$-module quelconque avec St_n, on obtient un $\mathbb{F}_p GL_n(\mathbb{F}_p)$-module projectif. En fait, St_n "divise" tout module projectif.

Lemme 4.1.4. *[Lus76] Soit P un $\mathbb{F}_p\,GL_n(\mathbb{F}_p)$-module projectif. Il existe un unique élément $[V]$ dans $K_0(\mathbb{F}_p\,GL_n(\mathbb{F}_p)\,\text{-mod})$ tel que*

$$[P] = [\mathrm{St}_n \otimes V]$$

dans $K_0(\mathbb{F}_p\,GL_n(\mathbb{F}_p)\,\text{-proj})$.

Les représentations de Steinberg se comportent bien vis-à-vis des multiplications et le résultat précédent s'étend aux groupes gradués.

Théorème 4.1.5. *[DM91, p. 9.6] L'application linéaire*

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\,GL_n(\mathbb{F}_p)\,\text{-mod}), \circ) & \to & (\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\,GL_n(\mathbb{F}_p)\,\text{-proj}), \bullet) \\ [V] & \mapsto & [\mathrm{St}_n \otimes V] \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

Corollaire 4.1.6. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\,GL_n(\mathbb{F}_p)\,\text{-mod}), \circ) & \to & (\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\,GL_n(\mathbb{F}_p)\,\text{-proj}), \bullet) \\ [V] & \mapsto & [\mathrm{St}_n \otimes d_n(V)] \end{array}$$

où $d_n : \bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\,GL_n(\mathbb{F}_p)\,\text{-mod}) \mapsto \bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\,GL_n(\mathbb{F}_p)\,\text{-mod})$ est l'application de décomposition [Ser71, §15.2], est un morphisme d'anneaux surjectif.

Démonstration. Les applications de décomposition d_n induisent un morphisme de groupes gradués, qui est multiplicatif d'après [DM91, p. 9.6]. En composant avec l'isomorphisme du théorème 4.1.5, on obtient l'isomorphisme souhaité. □

4.2 Polynomialité

Dans cette section, on montre que la $\mathbb{C}$-algèbre $(\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\,GL_n(\mathbb{F}_p)\,\text{-proj}), \bullet)$ est polynomiale en explicitant une famille de générateurs.

4.2.1 Caractères des groupes linéaires

En utilisant la caractérisation des modules projectifs par leur caractère de Brauer, pour chaque entier naturel n, on identifie $\mathbb{C} \otimes K_0(\mathbb{F}_p\,GL_n(\mathbb{F}_p)\,\text{-proj})$ avec l'espace des fonctions de classes sur $GL_n(\mathbb{F}_p)$, s'annulant en dehors des éléments p-réguliers (*i.e* en dehors des éléments d'ordre premier à p). Remarquons qu'un élément de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ est d'ordre premier à p si, et seulement si, il est semi-simple (*i.e.* diagonalisable dans une extension finie de $\mathbb{F}_p$). Avec cette reformulation, la multiplication de $\mathbb{C}\otimes K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})$ est donnée par la formule :

$$\rho_n.\rho_m(g) = \frac{1}{|GL_n(\mathbb{F}_p)|.|GL_m(\mathbb{F}_p)|} \sum_{\substack{h\in GL_{n+m}(\mathbb{F}_p),\\ hgh^{-1}=\begin{pmatrix} g_n & 0\\ 0 & g_m\end{pmatrix}}} \rho_n(g_n)\rho_m(g_m),$$

où ρ_n et ρ_m sont des fonctions de classes p-régulières sur $GL_n(\mathbb{F}_p)$ et $GL_m(\mathbb{F}_p)$ respectivement.

Pour g dans $GL_n(\mathbb{F}_p)$, on note χ_g le polynôme caractéristique de g.

Définition 4.2.1. Soit f dans $\mathbb{F}_p[x]$ de degré n, de coefficient constant non nul. On note π_f la fonction de classes sur $GL_n(\mathbb{F}_p)$ définie par

$$\pi_f(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \text{ est semi-simple et } f=\chi_g,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ainsi, π_f est la fonction caractéristique de la classe des éléments semi-simples de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ dont le polynôme caractéristique est f. Ce choix d'indexation est cohérent avec la multiplication. Pour tout f_n, f_m dans $\mathbb{F}_p[x]$ de degré respectif n et m, et g dans $GL_{n+m}(\mathbb{F}_p)$,

$$\pi_{f_n}.\pi_{f_m}(g) = \frac{1}{|GL_n(\mathbb{F}_p)|.|GL_m(\mathbb{F}_p)|} \sum_{\substack{h\in GL_{n+m}(\mathbb{F}_p),\\ hgh^{-1}=\begin{pmatrix} g_n & 0\\ 0 & g_m\end{pmatrix}}} \pi_{f_n}(g_n)\pi_{f_m}(g_m) = c_{f_n,f_m}\pi_{f_n.f_m}(g) \tag{4.1}$$

où c_{f_n,f_m} est un entier non-nul.

Théorème 4.2.2. *L'algèbre* $\mathbb{C}\otimes\Big(\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})\Big)$ *est polynomiale avec un générateur pour chaque polynôme irréductible de* $\mathbb{F}_p[x]$ *avec un coefficient constant non nul. Précisément,*

$$\mathbb{C}\otimes\Big(\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})\Big) \cong \mathbb{C}[\pi_f, f\in\mathbb{F}_p[x] \textit{ irréductible, unitaire, } f\neq x].$$

Démonstration. Soit W l'espace vectoriel de base

$$(w_f, f \text{ irréductible dans } \mathbb{F}_p[x], \text{unitaire, } f\neq x).$$

Notons $P = S_{\mathbb{C}}(W)$ la $\mathbb{C}$-algèbre commutative symétrique sur W telle que $\deg w_f = n$, pour $\deg f = n$. Soit φ le morphisme d'algèbres défini par

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & S_{\mathbb{C}}(W) & \to & \mathbb{C} \otimes \bigoplus_{n\geq 0} K_0(GL_n(\mathbb{F}_p)) \\ & & w_f & \mapsto & \pi_f . \end{array}$$

D'après la formule (4.1), φ est surjective. De plus, pour tout n entier

$$\dim_{\mathbb{C}} S(W)_n = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \otimes K_0(GL_n(\mathbb{F}_p))$$

et φ est injective. Ainsi, φ est un isomorphisme d'algèbres. On en déduit que $\mathbb{C} \otimes \bigoplus_{n\geq 0} K_0(GL_n(\mathbb{F}_p))$ est polynomiale et que

$$\{f,\ f \in \mathbb{F}_p[x] \text{ irréductible, unitaire }, f \neq x\}$$

est un ensemble de générateurs. $\square$

D'après l'isomorphisme 4.1.5, le fait que cette algèbre soit polynomiale n'est pas surprenant puisque $\mathbb{C} \otimes \Big(\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-mod})\Big)$ est une algèbre de Hopf. Cependant, on a ici des générateurs assez simples pour nous permettre de mener des calculs.

On déduit de ce qui précède que le résultat reste vrai sur n'importe quel corps de caractéristique 0.

Corollaire 4.2.3. *L'algèbre* $\mathbb{Q} \otimes \Big(\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})\Big)$ *est polynomiale avec un générateur pour chaque polynôme irréductible de* $\mathbb{F}_p[x]$ *avec un coefficient constant non nul.*

4.2.2 Constantes de structures

Pour terminer la description de l'algèbre, il reste à calculer les constantes c_{f_n, f_m} de (4.1).

Proposition 4.2.4. *Soit f et g des polynômes unitaires dans $\mathbb{F}_p[x]$ avec des coefficients constants non nuls.*

— *Si f et g sont premiers entre eux, $\pi_f.\pi_g = \pi_{f.g}$, c'est-à-dire*

$$c_{f,g} = 1.$$

— *Si f est irréductible de degré d, pour tout entier n et m,*

$$c_{f^n,f^m} = p^{dmn} \frac{\psi_{n+m}(p^d)}{\psi_n(p^d)\psi_m(p^d)}$$

où $\psi_k(p^d) = \prod_{i=1}^k (p^{id} - 1)$.

Remarque 6. Le coefficient $\frac{\psi_{n+m}(p^d)}{\psi_n(p^d)\psi_m(p^d)}$ est le p^d-analogue du coefficient binomial $\binom{n+m}{n}$. Il est parfois noté $\binom{n+m}{n}_{p^d}$ et il compte le nombre de sous-espaces vectoriels de dimension n dans un $\mathbb{F}_{p^d}$-espace vectoriel de dimension $(n+m)$.

Démonstration. Le premier point se déduit de 4.1.3. Pour le second, fixons un entier n. On utilise la description du caractère St_n du théorème 4.1.3. Si $f_1, \dots, f_k$ sont des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_p$ avec un coefficient constant non nul et de degré respectif $d_1, \dots, d_k$ et si g est un élément semi-simple de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ de polynôme caractéristique $f_1^{n_1} \dots f_k^{n_k}$,

$$St_n(g) = (-1)^N p^D, \tag{4.2}$$

où $N = n - \sum_{i=1}^k n_i$ et $D = \sum_{i=1}^k d_i \binom{n_i}{2}$ (voir [SZ84, §1.13]).

Ainsi

$$\pi_{f^n} = \frac{(-1)^{nd-n}}{p^{d\binom{n}{2}}} \mathrm{St}_{dn} \otimes \pi_{f^n} \quad \text{et} \quad \pi_{f^m} = \frac{(-1)^{md-m}}{p^{d\binom{m}{2}}} \mathrm{St}_{dm} \otimes \pi_{f^m}.$$

Donc

$$\pi_{f^n}.\pi_{f^m} = \frac{(-1)^{d(m+n)-m+n}}{p^{d(\binom{n}{2}+\binom{m}{2})}} \mathrm{St}_{d(n+m)} \otimes \mathrm{PInd}_{GL_{dn}(\mathbb{F}_p)\times GL_{dm}(\mathbb{F}_p)}^{GL_{d(n+m)}(\mathbb{F}_p)} (\pi_{f^n} \otimes \pi_{f^m}).$$

Par le théorème 4.1.5 et [Zel81, Prop. 10.1],

$$\mathrm{St}_{d(n+m)} \otimes \mathrm{PInd}_{GL_{dn}(\mathbb{F}_p)\times GL_{dm}(\mathbb{F}_p)}^{GL_{d(n+m)}(\mathbb{F}_p)} (\pi_{f^n} \otimes \pi_{f^m}) = \mathrm{St}_{d(n+m)} \otimes \frac{\psi_{n+m}(p^d)}{\psi_n(p^d)\psi_m(p^d)} \pi_{f^{n+m}}.$$

Le résultat s'en déduit en utilisant à nouveau (4.2). □

Corollaire 4.2.5. *Soit f un polynôme irréductible de degré d sur $\mathbb{F}_p$ avec un coefficient constant non nul. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,*

$$(\pi_f)^n = p^{d\binom{n}{2}} \frac{\psi_n(p^d)}{\psi_1(p^d)^n} \pi_{f^n}.$$

Démonstration. On le montre par récurrence sur n dans $\mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$, c'est immédiat. Supposons le résultat vrai pour $n-1$. On a

$$(\pi_f)^n = (\pi_f)^{n-1}\pi_f = p^{d\binom{n-1}{2}} \frac{\psi_{n-1}(p^d)}{\psi_1(p^d)^{n-1}} \pi_{f^{n-1}}\pi_f$$

et, d'après le lemme précédent,

$$\pi_{f^{n-1}}\pi_f = p^{d(n-1)} \frac{\psi_n(p^d)}{\psi_{n-1}(p^d)\psi_1(p^d)} \pi_{f^n}.$$

Donc

$$\begin{aligned} (\pi_f)^n &= p^{d\binom{n-1}{2}} p^{d(n-1)} \tfrac{\psi_{n-1}(p^d)}{\psi_1(p^d)^{n-1}} \tfrac{\psi_n(p^d)}{\psi_{n-1}(p^d)\psi_1(p^d)} \pi_{f^n} \\ &= p^{d\binom{n}{2}} \tfrac{\psi_n(p^d)}{\psi_1(p^d)^n} \pi_{f^n}. \end{aligned}$$

□

4.3 Éléments de type groupe

D'après [Kuh94, Thm. 6.10], l'anneau $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p))$ admet aussi une structure de bigèbre (non graduée) pour la comultiplication Δ définie en degré n par l'application

$$\mathrm{Ind}_{GL_n(\mathbb{F}_p)}^{GL_n(\mathbb{F}_p)\times GL_n(\mathbb{F}_p)} : K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj}) \to K_0(\mathbb{F}_p(GL_n(\mathbb{F}_p) \times GL_n(\mathbb{F}_p))\text{-proj})$$

composée avec l'inverse de

$$\_\otimes\_ : K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj}) \otimes K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj}) \to K_0(\mathbb{F}_p(GL_n(\mathbb{F}_p) \times GL_n(\mathbb{F}_p))\text{-proj}).$$

Les fonctions π_f se comportent également bien vis-à-vis de cette comultiplication.

Lemme 4.3.1. *Pour f un polynôme unitaire sur $\mathbb{F}_p$ avec un coefficient constant non nul, π_f est un élément de type groupe :*

$$\Delta\pi_f = \pi_f \otimes \pi_f.$$

Démonstration. Soit f comme précédemment et de degré n. On fixe (a,b) dans $GL_n(\mathbb{F}_p) \times GL_n(\mathbb{F}_p)$. La formule de l'induction pour les fonctions de classes donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{GL_n(\mathbb{F}_p)}^{GL_n(\mathbb{F}_p)\times GL_n(\mathbb{F}_p)}(\pi_f)(a,b) &= \tfrac{1}{|GL_n(\mathbb{F}_p)|} \sum_{\substack{(h,l)\in GL_n(\mathbb{F}_p)\times GL_n(\mathbb{F}_p) \\ (hah^{-1},lbl^{-1})\in GL_n(\mathbb{F}_p)}} \pi_f(hah^{-1}) \\
&= \tfrac{1}{|GL_n(\mathbb{F}_p)|} \sum_{\substack{(h,l)\in GL_n(\mathbb{F}_p)\times GL_n(\mathbb{F}_p) \\ hah^{-1}=lbl^{-1}}} \pi_f(hah^{-1}).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{GL_n(\mathbb{F}_p)}^{GL_n(\mathbb{F}_p)\times GL_n(\mathbb{F}_p)}(\pi_f)(a,b) &= \mathrm{Ind}_{GL_n(\mathbb{F}_p)}^{GL_n(\mathbb{F}_p)\times GL_n(\mathbb{F}_p)}(\pi_f)(a,a)\delta_{\chi_a,\chi_b} \\
&= \tfrac{1}{|GL_n(\mathbb{F}_p)|} \sum_{\substack{(h,l)\in GL_n(\mathbb{F}_p)\times GL_n(\mathbb{F}_p) \\ hah^{-1}=lal^{-1}}} \pi_f(a)\delta_{\chi_a,\chi_b}.
\end{aligned}$$

Comme il y a une bijection entre

$$\{(h,l) \in GL_n(\mathbb{F}_p) \times GL_n(\mathbb{F}_p) | hah^{-1} = lal^{-1}\} \text{ et } \mathrm{Stab}_{GL_n(\mathbb{F}_p)}(a) \times \mathrm{Orb}(a),$$

on a

$$\#\{(h,l) \in GL_n(\mathbb{F}_p) \times GL_n(\mathbb{F}_p) | hah^{-1} = lal^{-1}\} = |GL_n(\mathbb{F}_p)|$$

et donc

$$\mathrm{Ind}_{GL_n(\mathbb{F}_p)}^{GL_n(\mathbb{F}_p)\times GL_n(\mathbb{F}_p)}(\pi_f)(a,a) = \pi_f(a) = \delta_{\chi_a,f}.$$

Finalement,

$$\mathrm{Ind}_{GL_n(\mathbb{F}_p)}^{GL_n(\mathbb{F}_p)\times GL_n(\mathbb{F}_p)}(\pi_f)(a,b) = \delta_{(\chi_a,\chi_b),(f,f)}.$$

Ainsi, $\mathrm{Ind}_{GL_n(\mathbb{F}_p)}^{GL_n(\mathbb{F}_p)\times GL_n(\mathbb{F}_p)}(\pi_f)$ est l'image de $\pi_f \otimes \pi_f$ par

$$K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj}) \otimes K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj}) \xrightarrow{\otimes} K_0(\mathbb{F}_p(GL_n(\mathbb{F}_p) \times GL_n(\mathbb{F}_p))\text{-proj})$$

et $\Delta(\pi_f) = \pi_f \otimes \pi_f$. $\square$

4.4 Caractères de Deligne-Lusztig

Dans cette section, on utilise les caractères de Deligne-Lusztig pour donner une autre description des fonctions de classes, π_f.

Soit α une racine primitive de l'unité, de degré p^n-1 sur $\mathbb{F}_p$. C'est un générateur du groupe cyclique $\mathbb{F}_{p^n}^\times$. Soit θ un plongement de $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ dans $\mathbb{C}^\times$ et soit $w=\theta(\alpha)$. On note T_n le groupe cyclique engendré par α, ainsi $T_n \cong \mathbb{Z}/(p^n-1)$. Le groupe T_n s'identifie à un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ en choisissant une base de $\mathbb{F}_{p^n}$ comme $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel. Enfin, pour tout entier i dans $\{0,\dots,p^n-2\}$, on note

$$\begin{array}{rcccc} \varphi_i & : & T_n & \to & \mathbb{C}^\times \\ & & \alpha^k & \mapsto & \omega^{ki} \end{array}$$

les caractères irréductibles de T_n. Les caractères induits $\mathrm{Ind}_{T_n}^{GL_n(\mathbb{F}_p)}(\varphi_i)$, sont projectifs et dépendent seulement de l'orbite de α^i sous l'action du Frobenius de $\mathbb{F}_{p^n}$. De plus, ils sont fortement liés aux caractères de Deligne-Lusztig.

Lemme 4.4.1. *[DL76, Prop. 7.3] Pour tout i dans $\{0,\dots,p^n-2\}$,*

$$\mathrm{Ind}_{T_n}^{GL_n(\mathbb{F}_p)}(\varphi_i) = (-1)^{n-1} R_{T_n}^{\varphi_i} \otimes \mathrm{St}_n,$$

où $R_{T_n}^{\varphi_i}$ est le caractère de Deligne Lusztig associé à φ_i de T_n [DL76].

Considérons, pour tout k dans $\{0,\dots,p^n-2\}$, $\hat{\varphi}_k$ la transformée de Fourier de φ_k. Pour tout i et k dans $\{0,\dots p^n-2\}$,

$$\hat{\varphi}_k(\alpha^i) = \frac{1}{p^n-1}\sum_{j=0}^{p^n-2} w^{-ij}\varphi_k(\alpha^j) = \delta_{i,k}.$$

Ainsi, $\hat{\varphi}_k$ est la fonction indicatrice de α^k sur T_n.

Lemme 4.4.2. *Pour tout k dans $\{0,\dots,p^n-2\}$,*

$$\hat{\varphi}_k = \frac{1}{p^n-1}\sum_{j=0}^{p^n-2} w^{-jk}\varphi_j.$$

Démonstration. Ce résultat est juste une réécriture de la formule précédente. □

Les lemmes 4.4.1 et 4.4.2 donnent un cas particulier de [DL76, Prop. 7.5] :

$$\mathrm{Ind}_{T_n}^{GL_n(\mathbb{F}_p)}(\hat{\varphi}_k) = \frac{(-1)^{n-1}}{p^n-1}\sum_{j=0}^{p^n-2} w^{-jk} R_{T_n}^{\varphi_j} \otimes \mathrm{St}_n \,. \tag{4.3}$$

Proposition 4.4.3. *Pour tout k dans $\{0,\dots,p^n-2\}$,*

$$\mathrm{Ind}_{T_n}^{GL_n(\mathbb{F}_p)}(\hat{\varphi}_k) = \frac{\psi_{m_k}(p^{d_k})}{\psi_1(p^n)}\pi_{f_k^{m_k}},$$

où f_k est le polynôme irréductible sur $\mathbb{F}_p$ de racines $\{\alpha^k,\alpha^{pk},\dots,\alpha^{p^{n-1}k}\}$, d_k est le degré de f_k, $m_k = n/d_k$, et $\psi_m(p^d) = \prod_{i=1}^m (p^{id}-1)$ comme dans la proposition 4.2.4.

Démonstration. Comme $\hat{\varphi}_k$ est la fonction indicatrice de α^k, $\mathrm{Ind}_{T_n}^{GL_n(\mathbb{F}_p)}(\hat{\varphi}_k)$ est colinéaire à la fonction caractéristique de la classe de conjugaison de α^k dans $GL_n(\mathbb{F}_p)$ qui est la fonction $\pi_{f_k^{m_k}}$. Il reste à calculer $\mathrm{Ind}_{T_n}^{GL_n(\mathbb{F}_p)}(\hat{\varphi}_k)(\alpha^k)$:

$$\mathrm{Ind}_{T_n}^{GL_n}(\hat{\varphi}_k)(\alpha^k) = \frac{1}{|T_n|}\sum_{\substack{h\in GL_n(\mathbb{F}_p),\\ h\alpha^k h^{-1}\in T_n}} \hat{\varphi}_k(\alpha^k) = \frac{|Z_{GL_n(\mathbb{F}_p)}(\alpha^k)|}{|T_n|}.$$

Or $|Z_{GL_n(\mathbb{F}_p)}(\alpha^k)|$ ne dépend que de l'orbite de α^k sous l'action du Frobenius. On note d_k le cardinal de $\{\alpha^k,\alpha^{pk},\dots,\alpha^{kp^{n-1}})$, l'orbite de α^k, et $m_k = n/d_k$. On a

$$|Z_{GL_n(\mathbb{F}_p)}(\alpha^k)| = |GL_{m_k}(\mathbb{F}_{p^{d_k}})|,$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{|Z_{GL_n(\mathbb{F}_p)}(\alpha^k)|}{|T_n|} &= \frac{(p^{d_k m_k}-1)(p^{d_k m_k}-p^{d_k})\dots(p^{d_k m_k}-p^{d_k m_k - d_k})}{p^n-1} \\ &= \frac{\psi_{m_k}(p^{d_k})}{\psi_1(p^n)}.\end{aligned}$$

□

Rappelons que d'après le corollaire 4.2.5, pour f_k un polynôme irréductible unitaire de racines $\{\alpha^k,\alpha^{pk},\dots,\alpha^{p^{n-1}k}\}$,

$$\pi_{f_k}^{m_k} = p^{d_k\binom{m_k}{2}}\frac{\psi_{m_k}(p^{d_k})}{\psi_1(p^{d_k})^{m_k}}\pi_{f_k^{m_k}}.$$

La Proposition 4.4.3 implique :

Proposition 4.4.4.

$$\pi_{f_k}^{m_k} = (-1)^{n-1} \frac{p^{d_k \binom{m_k}{2}}}{(p^{d_k}-1)^{m_k}} \sum_{j=0}^{p^n-2} w^{-jk} R_{T_n}^{\varphi_j} \otimes \mathrm{St}_n,$$

et en inversant la transformée de Fourier, on obtient

$$R_{T_n}^{\varphi_i} \otimes \mathrm{St}_n = \sum_{k=0}^{p^n-2} w^{ik} \frac{\psi_1(p^{d_k})^{m_k}}{p^{d_k \binom{m_k}{2}} \psi_1(p^n)} \pi_{f_k}^{m_k}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\pi_{f_k}^{m_k} &= p^{d_k \binom{m_k}{2}} \tfrac{\psi_{m_k}(p^{d_k})}{\psi_1(p^{d_k})^{m_k}} \operatorname{Ind}_{T_k}^{GL_k(\mathbb{F}_p)} \\
&= p^{d_k \binom{m_k}{2}} \tfrac{\psi_1(p^n)}{\psi_1(p^{d_k})^{m_k}} \tfrac{(-1)^{n-1}}{p^n-1} \textstyle\sum_{j=0}^{p^n-2} w^{-jk} R_{T_n}^{\varphi_j} \otimes \mathrm{St}_n \\
&= (-1)^{n-1} \tfrac{p^{d_k \binom{m_k}{2}}}{(p^{d_k}-1)^{m_k}} \textstyle\sum_{j=0}^{p^n-2} w^{-jk} R_{T_n}^{\varphi_j} \otimes \mathrm{St}_n,
\end{aligned}$$

où la première égalité est donnée par la propriété 4.4.3 et la deuxième par la formule suivant le lemme 4.4.2.

Pour la deuxième relation, on applique la formule d'inversion de Fourier à

$$\hat{\varphi}_k = \frac{1}{p^n-1} \sum_{j=0}^{p^n-2} w^{-jk} \varphi_j.$$

On obtient

$$\varphi_j = \sum_{k=0}^{p^n-2} w^{jk} \bar{\varphi}_k.$$

On applique ensuite le foncteur $\operatorname{Ind}_{T_n}^{GL_n(\mathbb{F}_p)}(\_)$,

$$\begin{aligned}
R_{T_n}^{\varphi_i} \otimes \mathrm{St}_n &= \textstyle\sum_{k=0}^{p^n-2} w^{jk} \tfrac{\psi_{n_k}(p^{d_k})}{\psi_1(p^n)} \pi_{f_k^{m_k}} \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{p^n-2} w^{ik} \tfrac{\psi_1(p^{d_k})^{m_k}}{p^{d_k \binom{m_k}{2}} \psi_1(p^n)} \pi_{f_k}^{m_k},
\end{aligned}$$

d'après le lemme 4.4.2 et la proposition 4.4.3. $\square$

Corollaire 4.4.5. *Pour tout entier* n*, il existe un sous-ensemble de* $\{R_{T_n}^{\varphi_i} \otimes \mathrm{St}_n\}_{j\in\{0,\ldots,p^n-2\}}$ *qui est un ensemble de générateurs de degré* n *pour* $\mathbb{Q}\otimes(\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)))$*.*

Démonstration. Notons $\kappa(n)$ le nombre d'orbites de $\mathbb{F}_{p^n}^\times$ sous l'action du Frobenius et choisissons $i_1, \ldots, i_{\kappa(n)}$ dans $\{1, \ldots, p^{n-2}\}$ tels que

$$\mathbb{F}_{p^n}^\times = \bigsqcup_{j=1}^{\kappa(n)} \mathrm{Orb}(\alpha^{i_j}).$$

Alors, les $f_{i_1}, \ldots, f_{i_{\kappa(n)}}$ sont des polynômes distincts et les caractères $R_{T_n}^{\varphi_{i_1}} \otimes \mathrm{St}_n, \ldots, R_{T_n}^{\varphi_{i_{\kappa(n)}}} \otimes \mathrm{St}_n$ sont tous différents. On peut réécrire les formules de la proposition 4.4.4 de la manière suivante. Notons pour r, s dans $\{1, \ldots, \kappa(n)\}$,

$$W_{r,s} = \sum_{l=0}^{d_{i_r}-1} w^{i_r i_s p^l},$$

et

$$\tilde{W}_{r,s} = \sum_{l=0}^{d_{i_r}-1} w^{-i_r i_s p^l}.$$

Alors,

$$\pi_{f_k}^{m_k} = (-1)^{n-1} \frac{p^{d_k\binom{m_k}{2}}}{(p^{d_k}-1)^{m_k}} \sum_{j=1}^{\kappa(n)} \tilde{W}_{j,k} R_{T_n}^{\varphi_{i_j}} \otimes \mathrm{St}_n,$$

et

$$R_{T_n}^{\varphi_i} \otimes \mathrm{St}_n = \sum_{k=1}^{\kappa(n)} W_{j,k} \frac{\psi_1(p^{d_k})^{m_k}}{p^{d_k\binom{m_k}{2}}\psi_1(p^n)} \pi_{f_k}^{m_k}.$$

Ce sont les formules de changement de base entre $(R_n^{\varphi_i} \otimes \mathrm{St}_n)_{i\in\{i_1,\ldots,i_{\kappa(n)}\}}$ et $(\pi_{f_i})_{i\in\{i_1,\ldots,i_{\kappa(n)}\}}$.

Remarquons que $\{\pi_{f_{i_k}} \,|\, \deg(f_{i_k}) = n\}$ est un ensemble de générateurs de degré n pour $\mathbb{C}\otimes(\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)))$. Notons $\nu(n)$ le nombre de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_p$ de degré n et par $f_{k_1}, \ldots, f_{k_{\nu(n)}}$ ces polynômes. Les formules précédentes montrent que si l'on choisit $j_1, \ldots, j_{\nu(n)}$ dans $\{i_1, \ldots, i_{\kappa(n)}\}$ tels que la matrice

$$(W_{i_r,k_s})_{1\leq r,s\leq \nu(n)}$$

est inversible, $\{R_{T_n}^{\varphi_{i_r}} \otimes \mathrm{St}_n\}_{1\leq r\leq \nu(n)}$ est un autre ensemble de générateurs de degré n pour $\mathbb{C}\otimes(\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, GL_n(\mathbb{F}_p)))$. En particulier, ces éléments sont des générateurs sur $\mathbb{Q}$. □

5

Application à la théorie des modules instables

L'étude des caractères modulaires des groupes linéaires finis menée dans le chapitre précédent est motivée par plusieurs conjectures issues de la topologie algébrique, précisément de la théorie des modules sur l'algèbre de Steenrod. On note $K^n(\mathcal{U})$ le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphisme des facteurs directs de $H^*V_n := H^*(V_n, \mathbb{Z}/p)$ comme module sur l'algèbre de Steenrod, avec $V_n = (\mathbb{F}_p)^n$. En interprétant un facteur direct de H^*V_n comme facteur direct de H^*V_{n+1}, on obtient un monomorphisme de $K^n(\mathcal{U})$ vers $K^{n+1}(\mathcal{U})$. On dispose donc d'une filtration du groupe abélien libre $K(\mathcal{U}) = \bigcup_{n\geq 0} K^n(\mathcal{U})$. Ce groupe est également muni d'une structure d'anneau pour la multiplication donnée par le produit tensoriel de modules instables. Carlisle et Kuhn [CK89] proposent la conjecture suivante sur la structure de cet anneau.

Conjecture 5.0.1. *L'anneau $K(\mathcal{U})$ est polynomial.*

D'après [CK89, Thm. 3.2] les anneaux $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})$ et $K(\mathcal{U})$ sont isomorphes. Le théorème 4.2.2 montre donc que $K_{\mathbb{C}}(\mathcal{U}) := \mathbb{C} \otimes K(\mathcal{U})$ est une algèbre polynomiale. On décrit une famille de générateurs (sur $\mathbb{C}$) en utilisant les facteurs de Campbell-Selick [CS90], (voir [Hai19]). La polynomialité donne une nouvelle preuve d'une conjecture de Schwartz [DHS14, Conj. 3.2], qui a été démontrée dans [Hai15 ; Hai16 ; Hai19] (voir aussi [FHS16]).

Proposition 5.0.2. *L'action du foncteur T de Lannes sur $K^n_{\mathbb{C}}(\mathcal{U})$ est diagonalisable et son spectre est $\{1, p, \dots, p^n\}$.*

On peut également identifier les séries de Poincaré associées aux éléments de $K_{\mathbb{C}}(\mathcal{U})$. Soit $P_{\mathbb{C}}(., t)$ l'application de $K_{\mathbb{C}}(\mathcal{U})$ vers $\mathbb{C}[[t]]$ qui associe à la classe d'un module instable sa série de Poincaré. On fixe un plongement θ de $\overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ dans $\mathbb{C}$ et pour tout f polynôme irréductible sur $\mathbb{F}_p$ avec un coefficient constant non nul, on note P_f l'image par l'isomorphisme décrit ci-dessus dans $K_{\mathbb{C}}(\mathcal{U})$ de la fonction de classes π_f.

Proposition 5.0.3. *L'image $P_{\mathbb{C}}(., t)$ est engendrée en tant qu'algèbre par les séries*

$$P_{\mathbb{C}}(P_f, t) = \begin{cases} \frac{1}{(w-t)(w^2-t)\dots(w^{2^{n-1}}-t)}, & \textit{pour } p = 2, \\ \\ \frac{(w+t)(w^p+t)\dots(w^{p^{n-1}}+t)}{(w-t^2)(w^p-t^2)\dots(w^{p^{n-1}}-t^2)}, & \textit{pour } p > 2, \end{cases}$$

où f parcourt l'ensemble des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_p$ avec un coefficient constant non nul et $w = \theta(\alpha)$ où α est une racine de f.

On retrouve que le noyau de $P_{\mathbb{C}}(., t)$ est non trivial pour $p = 2$ [DHS14] et notre argument fournit une réponse à une question plus précise posée par Hai [Hai19, §5] :

Proposition 5.0.4. *Pour $p = 2$, la restriction de $P_{\mathbb{C}}(., t)$ à l'espace propre pour l'action du foncteur T associé à la valeur propre 1 admet un noyau non trivial.*

5.1 Polynomialité

On note $\mathcal{U}$ la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod modulo p, et $K^n(\mathcal{U})$ le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphisme des facteurs directs de H^*V_n, où $V_n = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$. Le groupe $K(\mathcal{U}) = \bigcup_{n \geq 0} K^n(\mathcal{U})$ est un anneau pour le produit tensoriel de modules instables. Pour M un facteur direct de H^*V_n, on note $[M]$ sa classe dans $K(\mathcal{U})$.

Carlisle et Kuhn énoncent la conjecture suivante :

Conjecture 5.1.1. *[CK89, §4] L'anneau $K(\mathcal{U})$ est polynomial sur $\mathbb{Z}$.*

Cette conjecture est discutée dans [Hai19, §4]. Elle s'énonce également en termes de représentations modulaires des groupes linéaires. Pour P un $\mathbb{F}_p GL_n(\mathbb{F}_p)$-module projectif, considérons le module instable $\mathrm{Hom}_{GL_n(\mathbb{F}_p)}(P, H^*V_n)$. Il est isomorphe à un facteur direct de H^*V_n. Ceci permet de définir l'application

$$\begin{array}{rcl} \bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj}) & \to & K(\mathcal{U}) \\ [P] & \mapsto & [\mathrm{Hom}_{GL_n(\mathbb{F}_p)}(P, H^*V_n)], \end{array} \tag{5.1}$$

qui est un isomorphisme d'anneaux [CK89, Thm. 3.2]. On l'étend en un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\mathbb{C} \otimes \Big(\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj}) \Big) \xrightarrow{\sim} K_{\mathbb{C}}(\mathcal{U}). \tag{5.2}$$

On déduit du théorème 4.2.2 une forme faible de 5.1.1.

Théorème 5.1.2. *L'algèbre $K_{\mathbb{C}}(\mathcal{U})$ est polynomiale et une famille de générateurs polynomiaux est*

$$\{P_f,\ f \text{ dans } \mathbb{F}_p[x] \text{ irreducible, } f(0) \neq 0\}.$$

Le corollaire 4.2.3 donne le résultat sur les rationnels.

Corollaire 5.1.3. *L'algèbre $\mathbb{Q} \otimes K(\mathcal{U})$ est polynomiale avec un générateur pour chaque polynôme irréductible sur $\mathbb{F}_p$ avec un coefficient constant non nul.*

Démonstration. C'est une reformulation du théorème 4.2.2 par l'isomorphisme (5.2). □

Rappelons que d'après la proposition 4.4.3 les fonctions de classes π_f sont des combinaisons linéaires à coefficients complexes des caractères de Deligne-Lusztig tensorisés par la représentation de Steinberg St_n. L'isomorphisme (5.1) fournit une bijection entre les facteurs directs de Campbell-Selick [CS90] et les caractères $\mathrm{St}_n \otimes R_{T_n}^{\varphi_i}$ [Hai19, §4]. Ainsi, la proposition 4.4.4 devient :

$$P_f = \frac{1}{p^n - 1} \sum_{j=0}^{|T_n|-1} w^{-j} M_n(j).$$

Remarquons que les facteurs directs $M_n(j)$ sont ceux utilisés par Hai pour décrire un système de générateurs de $K(\mathcal{U})$ formé de vecteurs propres du foncteur T [Hai19, §1].

5.2 Vecteurs propres du foncteur T

Considérons l'action du foncteur T de Lannes [Lan92]. Le foncteur T est l'adjoint à gauche du foncteur $\_\otimes H^*\mathbb{F}_p : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. C'est un foncteur exact et il commute avec le produit tensoriel [Lan92]. En particulier, il induit un endomorphisme de l'anneau $K(\mathcal{U})$, qu'on notera encore T. D'après [Lan92],

$$T(\mathrm{Hom}_{GL_n(\mathbb{F}_p)}(P, H^*V_n)) \cong \mathrm{Hom}_{GL_n(\mathbb{F}_p)}(P \otimes \mathbb{F}_p[V_n^*], H^*V_n).$$

Par l'isomorphisme (5.1), on peut aussi voir T comme un endomorphisme de $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})$. Alors,

$$T([P]) = [P \otimes \mathbb{F}_p[V_n^*]].$$

Notons $T_{\mathbb{C}}$ la complexification de T. C'est un endomorphisme de $\mathbb{C}\otimes(\bigoplus_{n\geq 0} K_0(GL_n(\mathbb{F}_p)\text{-proj})$.

Proposition 5.2.1. *Soit $f = (x-1)^n g$ dans $\mathbb{F}_p[x]$ avec $g(0)g(1) \neq 0$. La fonction de classes π_f est un vecteur propre pour $T_{\mathbb{C}}$ pour la valeur propre p^n.*

Démonstration. Soit f un polynôme de degré n sur $\mathbb{F}_p$ avec un coefficient constant non nul. On a

$$T(\pi_f) = \pi_f \otimes \mathbb{F}_p[V_n^*].$$

Soit alors g dans $GL_n(\mathbb{F}_p)$, on a

$$\pi_f \otimes \mathbb{F}_p[V_n^*](g) = \begin{cases} \mathbb{F}_p[V_n^*](g), & \text{si } \chi_g = f, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $f \neq x-1$ et $\chi_g = f$, alors $g : V_n^* \to V_n^*$ est sans point fixe. Ainsi $\mathbb{F}_p[V_n^*](g) = 1$ et $T(\pi_f) = \pi_f$. Sinon, $f = x-1$ et pour g tel que $\chi_g = f$, on a $\mathbb{F}_p[V_1^*](g) = p$. Donc $T(\pi_f) = p\pi_f$. □

Comme corollaire, on obtient une preuve de la conjecture de Schwartz [DHS14, Conj. 3.2] sur la diagonalisation de l'action de $T_{\mathbb{C}}$. Cette conjecture a été démontrée dans [Hai15] et [Hai16] par des méthodes différentes.

Corollaire 5.2.2. *L'action de T sur $K^n_{\mathbb{C}}(\mathcal{U})$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont $1, p, \dots, p^n$. De plus, pour $0 \leq i \leq 1$, une base de l'espace propre associé à p^i est*

$$\Big((H^*\mathbb{F}_p)^{\otimes i} \otimes P_f,\ \deg(f) \leq n-i,\ f(1) \neq 0\Big).$$

Cet espace est de dimension $p^{n-i} - p^{n-i-1}$ pour $i < n$, et unidimensionnel si $i = n$.

Démonstration. D'après le théorème 5.1.2, pour tout entier n, une base de $K^n_{\mathbb{C}}(\mathcal{U})$ est

$$(P_f, f \text{ unitaire de degré } \leq n \text{ et } f(0) \neq 0).$$

Notons pour tout $0 \leq i \leq n$, $K^n_{\mathbb{C}}(p^i)$ le sous-espace propre de $K^n_{\mathbb{C}}(\mathcal{U})$ associé à la valeur propre p^i. D'après la propriété 5.2.1, $K^n_{\mathbb{C}}(p^i)$ est le sous-espace engendré par les $P_{(x-1)^i f}$ avec f dans $\mathbb{F}_p[x]$, unitaire, de degré inférieur ou égal à $(n-i)$ et tel que $f(0)f(1) \neq 0$. En particulier,

$$\dim_{\mathbb{C}} K^n_{\mathbb{C}}(p^i) = \#\{f \in \mathbb{F}_p[x], f \text{ unitaire},\ \deg f \leq n-i, f(0)f(1) \neq 0\}.$$

Notons $F_n = \{f \in \mathbb{F}_p[x], f \text{ unitaire},\ \deg f \leq n, f(0)f(1) \neq 0\}$. Il reste à montrer que

$$\#F_{n-i} = \begin{cases} p^{n-i} - p^{n-i-1} & \text{si } i < n, \\ 1 & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Le cas $n = i$ est clair, le seul polynôme dans F_0 est polynôme constant égal à 1.

Montrons par récurrence sur n dans $\mathbb{N}^*$ la propriété $(\mathcal{P}_n)$: “ le cardinal de F_n vaut $p^n - p^{n-1}$.”

Pour $n = 1$,

$$F_1 = \{1\} \cup \{x - a, a \in \mathbb{F}_p\} \backslash \{0, 1\}.$$

Donc $\#F_1 = p - 1$ et $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

Supposons $(\mathcal{P}_{n-1})$. Pour tout k entier, notons

$$G_k = \{f \in \mathbb{F}_p[x], \deg f = n, f(0) \neq 0\}.$$

On a la décomposition ensembliste,

$$F_n = G_n \backslash \{(x-1)g, g \in G_{n-1}\} \cup F_{n-1}.$$

Donc

$$\#F_n = p^n - p^{n-1} - (p^{n-1} - p^{n-2}) + p^{n-1} - p^{n-2} = p^n - p^{n-1}.$$

Ainsi, la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $\square$

5.3 Séries de Poincaré

On peut identifier les séries de Poincaré associées aux éléments de $K_{\mathbb{C}}(\mathcal{U})$. On note $P(.,t)$ l'application qui associe à la classe d'un module instable sa série de Poincaré

$$\begin{array}{rcl} K(\mathcal{U}) & \to & \mathbb{Z}[[t]] \\ [M] & \mapsto & \sum_{d \geq 0} \dim M^d t^d. \end{array}$$

On note $P_{\mathbb{C}}(.,t)$ sa complexifiée. Enfin, rappelons que pour f un polynôme sur $\mathbb{F}_p$ avec un coefficient constant non nul, P_f désigne l'élément de $K_{\mathbb{C}}(\mathcal{U})$ associé à π_f. La proposition suivante décrit l'image de $P_{\mathbb{C}}(.,t)$.

Proposition 5.3.1. *Soit f un polynôme unitaire, irréductible sur $\mathbb{F}_p$ avec un coefficient constant non nul,*

$$P_{\mathbb{C}}(P_f, t) = \begin{cases} \frac{1}{(w-t)(w^2-t)\dots(w^{2^{n-1}}-t)}, & p = 2, \\ \\ \frac{(w+t)(w^p+t)\dots(w^{p^{n-1}}+t)}{(w-t^2)(w^p-t^2)\dots(w^{p^{n-1}}-t^2)}, & p > 2. \end{cases}$$

Démonstration. On a vu que

$$P_f = \frac{1}{p^n - 1} \sum_{j=0}^{|T_n|-1} w^{-j} M_n(j).$$

Par ailleurs,

$$\begin{array}{rcl} M_n(j) & = & \mathrm{Hom}_{GL_n(\mathbb{F}_p)}(\mathrm{Ind}_{T_n}^{GL_n(\mathbb{F}_p)}(\varphi_j), H^*V_n) \\ & = & \mathrm{Hom}_{T_n}(\varphi_j, \mathrm{Res}_{T_n}^{GL_n(\mathbb{F}_p)} H^*V_n) \\ & \cong & H^*V_n^{\varphi_j}. \end{array}$$

Comme

$$H^*V_n \cong \begin{cases} S(V_n^*) & \text{si } p = 2 \\ S(V_n^*) \otimes \Lambda(V_n^*) & \text{si } p > 2, \end{cases}$$

où $S(V_n^*)$ est l'algèbre symétrique sur V_n^* concentré en degré 1 et $\Lambda(V_n^*)$ l'algèbre extérieure sur V_n^* concentré en degré 2 (voir par exemple [Sch94, §1.5]), le résultat se déduit de la formule de Molien. □

Le cas $p = 2$

Dans ce cas, la formule de la proposition 5.3.1 prend une forme particulièrement simple.

Soit f un polynôme irréductible sur $\mathbb{F}_2$ avec un terme constant non nul et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses racines dans $\overline{\mathbb{F}}_2^{\times}$. On note $\tilde{f}$ le polynôme $(\theta(\alpha_1) - t) \dots (\theta(\alpha_n) - t)$ in $\mathbb{C}[t]$. L'image $P_{\mathbb{C}}(., t)$ est la sous-algèbre de $\mathbb{C}(t)$ engendrée par $\{1/\tilde{f} \mid f \in \mathbb{F}_2[x],\ f(0) \neq 0\}$.

Soit g le produit des polynômes irréductibles $f_1, \dots, f_N$, on note $P_g = P_{f_1} \otimes \dots \otimes P_{f_N}$ et $\tilde{g} = \tilde{f}_1 \dots \tilde{f}_N$. Ainsi, on a $P_{\mathbb{C}}(P_g, t) = 1/\tilde{g}$.

Proposition 5.3.2. *Pour $p = 2$, le noyau de $P_{\mathbb{C}}(., t)$ est non-trivial.*

Démonstration. Soit N un entier et $f_1, \dots, f_{k_N}$ des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_2$ de degré N. D'après la proposition 5.3.1, pour tout $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_N}$, dans $\mathbb{C}$, la série

$$\sum_{i=1}^{k_N} \frac{\alpha_i}{\prod_{j=1, j\neq i}^{k_N} \tilde{f}_j} = \sum_{i=1}^{k_N} \frac{\alpha_i \tilde{f}_i}{\prod_{j=1}^{k_N} \tilde{f}_j}$$

est dans cette image. Ainsi, chaque relation

$$\alpha_1 \tilde{f}_1 + \dots + \alpha_N \tilde{f}_N = 0$$

dans $\mathbb{C}[t]$ fournit un élément du noyau. En particulier, lorsque le nombre de polynômes irréductibles de degré N est strictement plus grand que la dimension de l'espace $\mathbb{C}[t]_{\leq n}$, on est sûr qu'il existe de telles relations. Il suffit par exemple de prendre $N = 6$. □

La preuve donne une réponse négative à une question posée dans [Hai19, p. 4.6] : la restriction de $P_{\mathbb{C}}(., t)$ à l'espace propre associée à 1 pour l'action de T sur $K_{\mathbb{C}}(\mathcal{U})$ n'est pas injective.

On peut aussi décrire le noyau de $P_{\mathbb{C}}(.,t)$. Chaque élément P de $K_{\mathbb{C}}(\mathcal{U})$ est combinaison linéaire des $P_{f_1}, \ldots, P_{f_N}$, avec f_i unitaire de degré d_i et avec un terme constant non nul :

$$P = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{f_i} P_{f_i}.$$

Donc P est un élément du noyau si, et seulement si,

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_{f_i}}{\tilde{f}_i} = 0.$$

C'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_{f_i} \prod_{j=1, j\neq i}^{N} \tilde{f}_i}{\prod_{j=1}^{N} \tilde{f}_i} = 0,$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_{f_i} \prod_{j=1, j\neq i}^{N} \tilde{f}_i = 0,$$

où la dernière équation vit dans l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $\prod_{i=1}^{N} d_i$.

Exemple. Considérons les polynômes de degré 4 sur $\mathbb{F}_2$, premiers avec $x+1$. Un élément du noyau de $P_{\mathbb{C}}(.,t)$ est

$$P_{FGH} - 5P_{EGH} + 3P_{EFH} + P_{EFG},$$

avec

$$\begin{aligned} E &= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ F &= x^4 + x^3 + 1 \\ G &= x^4 + x^2 + 1 = (x^2+x+1)^2 \\ H &= x^4 + x + 1. \end{aligned}$$

Par définition, c'est un vecteur propre pour la valeur propre 1 pour l'action de T. Ceci permet de répondre à une question posée par Hai quant à l'injectivité de l'application série de Poincaré restreinte à l'espace propre associé à la valeur propre 1 [Hai19, Conj. 5.6].

A

Algèbres de Hopf auto-adjointes positives

Dans ce chapitre on introduit la notion d'algèbre de Hopf auto-adjointe positive ("PSH-algebras") définie par Andreï Zelevinsky dans son Lecture Notes [Zel81]. Cette structure a pour exemple typique l'algèbre des fonctions symétriques. Un résultat classique, certainement connu de F.G. Frobenius, relie l'algèbre des fonctions symétriques aux représentations des groupes symétriques pris simultanément. La structure d'algèbre de Hopf auto-adjointe permet également de faire le lien avec les produits en couronne d'un groupe fini G, avec les groupes symétriques ainsi qu'avec les groupes linéaires finis et les groupes unitaires finis.

On commence par rappeler la définition d'algèbre de Hopf. Ensuite on décrit l'exemple de l'algèbre des fonctions symétriques. Ceci permet de fixer des notations, également utilisées dans le reste du texte. Enfin, on présente la notion d'algèbre de Hopf auto-adjointe positive. On suit la présentation de [GR18].

A.1 Algèbres de Hopf

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps et $\mathbb{A}$ un anneau, la lettre m désigne une multiplication et Δ une comultiplication. Toutes les algèbres que l'on considère sont associatives et munies d'une unité, souvent notée u. De même les cogèbres sont coassociatives et munies d'une counité qu'on notera ε.

Définition A.1.1. Un $\mathbb{K}$-module est une *bigèbre* si c'est une algèbre et une cogèbre sur $\mathbb{K}$ telle que la comultiplication soit un morphisme d'algèbres.

Exemple. Pour G un groupe fini, on munit l'algèbre $\mathbb{K}G$ d'une base $(e_g)_{g\in G}$ telle que pour tout g et g' dans G, $e_g.e_{g'} = e_{gg'}$. L'algèbre $\mathbb{K}G$ est une bigèbre pour la counité

$$\begin{array}{cccc} \varepsilon & : & \mathbb{K}G & \to & \mathbb{K} \\ & & e_g & \mapsto & 1 \end{array}$$

et la comultiplication

$$\begin{array}{ccccc} \Delta & : & \mathbb{K}G & \to & \mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}G \\ & & e_g & \mapsto & e_g \otimes e_g \end{array}.$$

Définition A.1.2. Soit A une bigèbre et x un élément de A,

— l'élément x est dit de *type groupe* si $\Delta(x) = x \otimes x$,

— il est dit *primitif* si $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$.

Exemple. Dans la bigèbre $\mathbb{K}G$, les éléments de la base $(e_g)_{g\in G}$ sont des éléments de type groupe.

Définition A.1.3. Soit A une bigèbre. Un *coidéal bilatère* est un sous $\mathbb{K}$-module J de A tel que

$$\Delta(J) \subset J \otimes A + A \otimes J$$

et

$$\varepsilon(J) = 0.$$

Si un sous-ensemble J d'une bigèbre A est à la fois un coidéal bilatère et un idéal bilatère, alors le quotient A/J hérite d'une structure de bigèbre.

Définition A.1.4. Un $\mathbb{K}$-module M est dit $\mathbb{N}$-*gradué* s'il admet une décomposition en somme directe de la forme

$$M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n.$$

Un élément x appartenant à M_n est dit *homogène de degré* n. Un $\mathbb{K}$-module M est dit *connexe* si $M_0 \cong \mathbb{K}$.

Définition A.1.5. On dit qu'un module gradué est de *type fini* si pour tout n entier M_n est de type fini.

Définition A.1.6. Une bigèbre A sur $\mathbb{K}$ est une *algèbre de Hopf* s'il existe une application $\mathbb{K}$-linéaire $S : A \to A$, appelée *antipode*, telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[rr, "S\otimes\mathrm{id}"] & & A \otimes A \arrow[dr, "m"] & \\
A \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathbb{K} \arrow[rr, "u"] & & A \\
 & A \otimes A \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes S"'] & & A \otimes A \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemple. L'algèbre de groupe $\mathbb{K}G$ est une algèbre de Hopf pour l'antipode

$$S(e_g) = e_{g^{-1}}.$$

Exemple. Soit V un $\mathbb{K}$-module gradué. L'algèbre tensorielle $T(V)$ et l'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}(V)$ sont des algèbres de Hopf.

Définition A.1.7. Soit H et H' deux algèbres de Hopf. On dit qu'une application $f : H \to H'$ est un morphisme d'algèbres de Hopf si c'est un morphisme de bigèbres, c'est-à-dire si f commute avec la multiplication et avec avec la comultiplication.

Proposition A.1.8. *L'antipode S d'une algèbre de Hopf est un anti-endomorphisme :*

$$S(1) = 1 \textit{ et } S(a.b) = S(b).S(a).$$

Proposition A.1.9. *[GR18, Prop. 1.4.14] Une bigèbre graduée connexe A admet une unique antipode S qui est un morphisme gradué et qui munit A d'une structure d'algèbre de Hopf.*

Définition A.1.10. Soit H une algèbre de Hopf sur $\mathbb{K}$. Une sous-algèbre de Hopf de H est une algèbre de Hopf A sur $\mathbb{K}$ telle que $A \subset H$ et l'inclusion est un morphisme d'algèbres de Hopf.

Théorème A.1.11 (Milnor-Moore)**.** *Soit $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ une algèbre de Hopf graduée sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 0. Si A est connexe et commutative alors c'est une algèbre commutative libre, c'est-à-dire une* algèbre polynomiale*, engendrée par des éléments homogènes.*

Définition A.1.12. Soit A une algèbre graduée connexe de type fini et soit $\bar{A}$ son idéal d'augmentation. On appelle module des *indécomposables* le module $\bar{A}/\bar{A}^2$ et on le note $Q(A)$. On appelle module des *décomposables* le module $\bar{A}^2$, qu'on note $D(A)$.

Les modules $Q(A)$ et $D(A)$ héritent de la graduation de A.

A.2 Algèbre des fonctions symétriques

A.2.1 Définition

Soit A un anneau commutatif et $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ une suite de variables. Pour toute suite d'entiers $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ nulle à partir d'un certain rang, on note $\mathbf{x}^\alpha$ le monôme $x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}$. Un monôme $\mathbf{x}^\alpha$ est de *degré* n si $\sum_i \alpha_i = n$.

On note $A[\mathbf{x}]$ l'anneau des séries formelles en $\mathbf{x}$,

$$S(\mathbf{x}) = \sum_\alpha c_\alpha \mathbf{x}^\alpha$$

de degré fini, c'est-à-dire les séries pour lesquelles il existe $d = d(S)$ tel que si $\sum_i \alpha_i > d$ alors $c_\alpha = 0$.

Pour tout n, le groupe symétrique S_n agit sur $A[\mathbf{x}]$ en permutant les n premières variables. Considérons la chaîne formée par les groupes symétriques :

$$S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots,$$

on note S_∞ sa limite inductive. On peut voir S_∞ comme le groupe des permutations de $\mathbb{N}^*$ ne permutant qu'un nombre fini d'éléments.

Définition A.2.1. On appelle *anneau des fonctions symétriques* en $\mathbf{x}$ et à coefficients dans A, le sous-anneau des S_∞-invariants $A[\mathbf{x}]^{S_\infty}$. On le note Sym_A ou simplement Sym si cela ne prête pas à confusion.

L'anneau Sym est gradué :

$$\mathrm{Sym} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{Sym}_n,$$

où Sym_n désigne l'ensemble des fonctions symétriques homogènes de degré n.

A.2.2 Comultiplication

Considérons les familles de variables $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. On a un homomorphisme d'anneaux

$$\begin{array}{rcl} A[\mathbf{x}] \otimes A[\mathbf{y}] & \to & A[(\mathbf{x},\mathbf{y})] \\ f(\mathbf{x}) \otimes g(\mathbf{y}) & \mapsto & f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}) \end{array}.$$

La restriction de cet homomorphisme aux fonctions symétriques donne l'isomorphisme

$$\varphi : \mathrm{Sym}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \to A[(\mathbf{x},\mathbf{y})]^{S_\infty \times S_\infty},$$

où $S_\infty \times S_\infty$ désigne le groupe des permutations (finies) de $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ qui permutent les variables $x_1,\dots,x_n,\dots$ de $\mathbf{x}$ entre elles. Notons $S_{(\infty,\infty)}$ le groupe des permutations de $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ne permutant qu'un nombre fini de variables. Le groupe $S_\infty \times S_\infty$ est un sous-groupe de $S_{(\infty,\infty)}$. On a donc une inclusion d'anneaux

$$i : A[(\mathbf{x},\mathbf{y})]^{S_{(\infty,\infty)}} \hookrightarrow A[(\mathbf{x},\mathbf{y})]^{S_\infty \times S_\infty} = \mathrm{Sym} \otimes \mathrm{Sym}\,.$$

En fixant une bijection entre $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ et $\mathbf{x}$, on identifie les anneaux $A[(\mathbf{x},\mathbf{y})]^{S_{(\infty,\infty)}}$ et Sym (le choix de la bijection n'importe pas puisque les éléments de Sym sont des fonctions symétriques en les variables). On obtient alors la comultiplication Δ en composant i et φ^{-1} :

$$\Delta : \mathrm{Sym} \xrightarrow{i} A[(\mathbf{x},\mathbf{y})]^{S_\infty \times S_\infty} \xrightarrow{\varphi^{-1}} \mathrm{Sym} \otimes \mathrm{Sym}\,.$$

Proposition A.2.2. *[GR18, §2.2] L'application Δ est un morphisme d'algèbres et munit* Sym *d'une structure de bigèbre connexe graduée qui est donc une algèbre de Hopf.*

A.2.3 Bases

On définit ici les bases usuelles de Sym (voir [GR18]).

fonctions symétriques élémentaires : $e_n := \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$.

sommes de Newton : $p_n := x_1^n + x_2^n + \ldots$.

fonctions symétriques homogènes : $h_n := \sum_{i_1\leq i_2\leq\ldots\leq i_n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$.

Notons,

$$e(t) = \textstyle\sum_{n\geq 0} e_n t^n, \quad h(t) = \sum_{n\geq 0} h_n t^n,$$

et

$$p(t) = \sum_{i\geq 0} p_n t^n.$$

On a la relation

$$e(t)h(-t) = 1.$$

On a également,

$$h(t)p(t) = nh'(t),$$

soit

$$p_n + h_1 p_{n-1} + \ldots + h_{n-1} p_1 = nh_n. \tag{A.1}$$

En particulier, si $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$,

$$h(t) = \exp(\sum_{k\geq 1} \frac{p_k}{k} t^k).$$

Si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, on note

$$e_\lambda = e_{\lambda_1}.e_{\lambda_2}.\ldots.e_{\lambda_k},$$

$$p_\lambda = p_{\lambda_1}.p_{\lambda_2}.\ldots.p_{\lambda_k},$$

et

$$h_\lambda = h_{\lambda_1}.h_{\lambda_2}.\ldots.h_{\lambda_k}.$$

Proposition A.2.3. *Les familles $\{e_\lambda\}_\lambda$ et $\{h_\lambda\}_\lambda$ sont des $\mathbb{K}$-bases de $\mathrm{Sym}_{\mathbb{K}}$. Si $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$, alors $\{p_\lambda\}_\lambda$ est également une base de $\mathrm{Sym}_{\mathbb{K}}$.*

En particulier,

$$\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[e_n, n \geq 1] = \mathbb{Z}[h_n, n \geq 1],$$

et

$$\mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[p_n, n \geq 1].$$

Pour tout entier n, on a,

- $\Delta(p_n) = p_n \otimes 1 + 1 \otimes p_n$,
- $\Delta(e_n) = \sum_{i+j=n} e_i \otimes e_j$,
- $\Delta(h_n) = \sum_{i+j=n} h_i \otimes h_j$.

Remarque 7. Les p_n sont des éléments primitifs de $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}$. En fait ils engendrent le sous-module de $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}$ formé des éléments primitifs et en forment donc une base puisque ce module est de rang 1 en chaque degré et que les p_n ne sont pas divisibles (d'après la formule (A.1)).

A.2.4 Fonctions de Schur

Une autre base classique pour Sym est la base des fonctions de Schur $\{s_\lambda\}_\lambda$. Pour toute partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, on note :

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i,j \leq m}.$$

Proposition A.2.4. *[GR18] Dans la base formée des fonctions de Schur, les constantes de multiplication et de comultiplication sont les mêmes. C'est-à-dire qu'il existe des coefficients entiers $c^\nu_{\lambda,\mu}$ définis pour tout triplet de partitions, tels que*

$$s_\lambda . s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} s_\nu,$$

et

$$\Delta(s_\nu) = \sum_{\lambda,\mu} c^\nu_{\lambda,\mu} s_\lambda \otimes s_\mu.$$

De plus, $c^\nu_{\lambda,\mu}$ est nul sauf si $\lambda, \mu \subset \nu$ et $|\lambda| + |\mu| = |\nu|$.

En particulier,

$$\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[s_n, n \geq 1].$$

L'algèbre Sym est munie d'un produit scalaire tel que la base des fonctions de Schur soit une base orthonormée,

$$\langle s_\lambda, s_{\lambda'} \rangle = \delta_{\lambda,\lambda'}.$$

La base $\{p_\lambda\}_\lambda$ est orthogonale pour ce produit scalaire et $\lambda = (1^{r_1}, 2^{r_2}, \ldots)$,

$$\langle p_\lambda, p_\lambda \rangle = \prod_{i \geq 1} i^{r_i} r_i!$$

A.3 Algèbres de Hopf auto-adjointes positives

Dans l'algèbre des fonctions symétriques Sym, la base formée des fonctions de Schur a la propriété remarquable que les constantes de structure pour la multiplication et pour la comultiplication sont les mêmes. De plus, toutes ces constantes sont positives. L'idée de Zelevinsky est d'étudier les algèbres de Hopf graduées munies d'une base ayant ces mêmes propriétés [Zel81].

A.3.1 Définition

Définition A.3.1. [Zel81] Une algèbre de Hopf A sur $\mathbb{Z}$ est dite *auto-adjointe positive* si elle est munie d'une $\mathbb{Z}$-base $\Omega = \{\omega_\lambda\}_\lambda$ formée d'éléments homogènes vérifiant les deux propriétés suivantes :

(auto-adjonction) Si $\omega_\lambda.\omega_\mu = \sum_\nu \alpha^\nu_{\lambda,\mu}\omega_\nu$, alors $\Delta\omega_\nu = \sum_{\lambda,\mu} \alpha^\nu_{\lambda,\mu}\omega_\lambda \otimes \omega_\mu$.

(positivité) Pour tout λ, μ, ν, $\alpha^\nu_{\lambda,\mu} \geq 0$.

Les éléments de Ω sont dit *irréductibles*.

L'algèbre des fonctions symétriques munie de la base des fonctions de Schur est évidemment une algèbre de Hopf auto-adjointe positive.

Un morphisme d'algèbres de Hopf auto-adjointes positives f entre A_1 et A_2 de bases respectives Ω_1 et Ω_2 est un morphisme d'algèbres de Hopf graduées tel que $f(\Omega_1) \subset \mathbb{N}\,\Omega_2$.

La propriété d'auto-adjonction implique notamment le résultat suivant.

Théorème A.3.2. *[GR18] Soit A une algèbre de Hopf auto-adjointe positive définie sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 0. L'inclusion de l'ensemble des éléments primitifs $\mathfrak{p}$ dans A induit un isomorphisme d'algèbres*

$$\mathrm{Sym}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{p}) \to A.$$

En particulier, A est commutative et cocommutative.

Toute algèbre de Hopf auto-adjointe positive (A, Ω) est munie d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ pour lequel la base Ω est orthonormale. Pour tout élément x de A, on note $x^\perp$ l'opérateur adjoint de la multiplication par x. Autrement dit, $x^\perp$ est défini par

$$\langle x^\perp(y), z\rangle = \langle y, xz\rangle,$$

pour tous y et z dans A.

A.3.2 Décomposition

Dans cette section on donne la décomposition des algèbres de Hopf auto-adjointes positives en produit tensoriel de sous-algèbres ayant un unique élément primitif irréductible.

Si A_1 et A_2 sont deux algèbres de Hopf auto-adjointes positives de bases respectives Ω_1 et Ω_2, leur produit tensoriel $A_1 \otimes A_2$ est à nouveau muni d'une structure d'algèbre de Hopf auto-adjointe positive de base $\{\omega_1 \otimes \omega_2\}_{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega_1\times\Omega_2}$.

Soit A une algèbre de Hopf auto-adjointe positive et Ω la base des irréductibles. On note $\mathcal{C} := \Omega \cap \mathfrak{p}$ l'ensemble des éléments primitifs de Ω. Pour tout ρ dans $\mathcal{C}$, on note

$$\Omega(\rho) := \{\omega \in \Omega | \langle \omega, \rho^n \rangle \neq 0 \text{ pour un certain } n \geq 0\}$$

et

$$A(\rho) := \bigoplus_{w\in\Omega(\rho)} \mathbb{Z}\,.\omega.$$

Alors $A(\rho)$ est une sous-algèbre de Hopf auto-adjointe positive de A et l'ensemble de ses éléments irréductibles est $\Omega(\rho)$. En particulier, ρ est le seul élément à la fois irréductible et primitif de $A(\rho)$. On dit que $A(\rho)$ est *indécomposable*.

Théorème A.3.3. *[Zel81] Toute algèbre de Hopf auto-adjointe positive A admet une décomposition en produit tensoriel d'algèbres de Hopf auto-adjointes positives indécomposables*

$$A = \bigotimes_{\rho\in\mathcal{C}} A(\rho).$$

A.3.3 Unicité

Il nous reste donc à comprendre les algèbres de Hopf auto-adjointes indécomposables, c'est-à-dire celles ayant un unique élément primitif irréductible. Soit A une algèbre de Hopf auto-adjointe positive ayant un unique élément primitif, à changement de graduation près, A est isomorphe à Sym.

L'idée est de trouver dans la base Ω de A, deux familles d'éléments qui vont correspondre respectivement à la famille des fonctions symétriques homogènes

$$\{h_n = s_{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

et à la famille des fonctions symétriques élémentaires

$$\{e_n = s_{(1^n)}\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Zelevinsky caractérise ces deux familles par les propriétés suivantes :

1. $h_0 = e_0 = 1$, $h_1 = e_1 =: \rho$ et

$$\rho^2 = e_2 + h_2,$$

2. pour tout $n \geq 0$

$$h_2^\perp(e_n) = 0 \quad \text{et} \quad e_2^\perp(h_n) = 0,$$

3. pour $0 \leq k \leq n$,

$$h_k^\perp(h_n) = h_{n-k} \quad \text{et} \quad e_k^\perp(e_n) = h_{n-k},$$

4. si $\omega \in \Omega \backslash \{h_0, \ldots, h_n\}$,

$$\rho^\perp(h_n) = 0$$

   et si $\omega \in \Omega \backslash \{e_0, \ldots, e_n\}$

$$\rho^\perp(e_n) = 0,$$

5. pour tout $n \geq 0$,

$$\Delta(h_n) = \textstyle\sum_{i+j=n} h_i \otimes h_j \quad \text{et} \quad \Delta(e_n) = \textstyle\sum_{i+j=n} e_i \otimes e_j.$$

Théorème A.3.4. *[Zel81] Soit A une algèbre de Hopf sur $\mathbb{Z}$ auto-adjointe positive de base Ω. On suppose que Ω contient un unique élément primitif, noté ρ, et qu'il est de degré 1. Il existe un unique couple de familles $\{h_n\}_n$ et $\{e_n\}_n$ d'éléments de A, vérifiant les propriétés listées ci-dessus. De plus,*

— *les éléments e_n et h_n vérifient les relations*

$$\sum_{i+j=n} (-1)^i e_i h_j = \delta_{0,n},$$

— *on a,*

$$A = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \ldots] = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots],$$

— *il existe un unique automorphisme non trivial d'algèbre de Hopf auto-adjointe positive sur A, le morphisme qui échange h_n et e_n pour tout n entier,*

— *il existe deux isomorphismes d'algèbres de Hopf auto-adjointes positives entre A et* Sym. *Le premier envoie h_n sur la fonction symétrique homogène $h_n(\mathbf{x})$, le second envoie e_n sur la fonction symétrique homogène $e_n(\mathbf{x})$.*

B

Théorie de Brauer

On rappelle ici brièvement des éléments de la théorie des représentations modulaires des groupes finis. Notre référence principale est [Ser71] et on utilise également [Web16].

Pour le reste de cette section, on fixe G un groupe fini et $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique 0 muni d'une valuation discrète. On note $\mathbb{A}$ l'anneau de valuation, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal et $k := \mathbb{A}/\mathfrak{m}$ le corps résiduel. On suppose que k est de caractéristique $p > 0$. Le triplet $(\mathbb{K}, \mathbb{A}, k)$ est appelé *système p-modulaire*.

Un $\mathbb{K}G$-module (ou un kG-module) simple est dit *absolument simple* s'il reste simple après extension des scalaires. Si tous les $\mathbb{K}G$-modules simples sont absolument simples, on dit que $\mathbb{K}$ est un *corps de décomposition pour G*.

En pratique on supposera que $(\mathbb{K}, \mathbb{A}, k)$ est système p-modulaire de décomposition pour G.

Dans toute la suite, pour Λ un anneau associatif unitaire, on note $K_0(\Lambda\text{-mod})$ (resp. $K_0(\Lambda\text{-proj})$) le groupe de Grothendieck de la catégorie des Λ-modules de type fini (resp. le groupe de Grothendieck de la catégorie des Λ-modules projectifs de type fini).

B.1 Dualités

Si E et F sont deux $\mathbb{K}\,G$-modules, le couplage

$$(E, F) \to \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Hom}_G(E, F)$$

définit une application bilinéaire

$$K_0(\mathbb{K}\,G\text{-mod}) \times K_0(\mathbb{K}\,G\text{-mod}) \to \mathbb{Z}\,.$$

On la note $\langle ., . \rangle_{\mathbb{K}}$. Les classes de deux modules simples non-isomorphes sont orthogonales pour cette forme. De plus, si $\mathbb{K}$ est un corps de décomposition pour G, un $\mathbb{K}\,G$-module S est simple si, et seulement si, $\langle S, S \rangle_{\mathbb{K}} = 1$. Ainsi, la forme bilinéaire est non-dégénérée.

Si E est un kG-module projectif et F un kG-module quelconque, le couplage

$$(E, F) \to \dim_k \operatorname{Hom}_G(E, F)$$

permet de définir à nouveau une application bilinéaire

$$K_0(kG\text{-proj}) \times K_0(kG\text{-mod}) \to \mathbb{Z}\,.$$

On note cette dernière $\langle ., . \rangle_k$. Si k est un corps de rupture pour G, la forme $\langle ., . \rangle_k$ est non dégénérée. En effet, les familles des kG-modules simples $\{[S]\}_S$ et des kG-modules projectifs indécomposables $\{[P_S]\}_S$, sont des bases duales l'une de l'autre.

B.2 Triangle cde

B.2.1 Décomposition des projectifs

En associant à chaque kG-module projectif, sa classe dans $K_0(kG\text{-mod})$, on obtient un morphisme de groupes abéliens

$$c : K_0(kG\text{-proj}) \to K_0(kG\text{-mod}),$$

appelé *homomorphisme de Cartan.*

B.2.2 Décomposition en caractéristique positive

Pour E un $\mathbb{K}\,G$-module, on peut trouver un sous-$\mathbb{A}$-module $\mathbb{A}$-libre E_1 de E tel que $\mathbb{K}\,E_1 \cong E$. De plus, on peut supposer que E_1 est stable sous l'action de G de telle sorte que E_1 soit un $\mathbb{A}\,G$-module. On peut alors former le kG-module $k \otimes_{\mathbb{A}} E_1$ dont l'image dans $K_0(kG\text{-mod})$ est indépendante du choix de E_1. On obtient alors un morphisme

$$d : K_0(\mathbb{K}\,G\text{-mod}) \to K_0(kG\text{-mod}).$$

Le morphisme d est appelé application de *décomposition.*

B.2.3 Relèvement des projectifs

Si P est kG-module projectif, il existe un unique $\mathbb{A}\,G$-module $\tilde{P}$ à isomorphisme près tel que $k \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{P} \cong P$. De plus c'est un $\mathbb{A}\,G$-module projectif.

Pour P un kG-module projectif, à partir de son relèvement $\tilde{P}$, on peut former le KG-module $K \otimes_A \bar{P}$. Ceci définit un morphisme

$$e : K_0(kG\text{-proj}) \to K_0(\mathbb{K}\,G\text{-mod}).$$

B.2.4 Le triangle

Les applications c, d et e donnent le triangle *commutatif* :

$$\begin{tikzcd} K_0(kG\text{-proj}) \arrow[rr, "c"] \arrow[dr, "e"'] & & K_0(kG\text{-mod}) . \\ & K_0(\mathbb{K}\,G\text{-mod}) \arrow[ur, "d"'] & \end{tikzcd}$$

De plus, les applications d et e sont adjointes l'une de l'autre,

$$\langle e(P), M\rangle_{\mathbb{K}} = \langle c(P), d(M)\rangle_k,$$

pour P dans $K_0(kG\text{-proj})$ et M dans $K_0(\mathbb{K}\,G\text{-mod})$.

Proposition B.2.1.

— *L'homomorphisme d est surjectif,*

— *L'homomorphisme e est une injection scindée.*

B.3 Caractérisation de l'image de e

Définition B.3.1. Un élément de G est dit *p-régulier* s'il est d'ordre premier à p. On note G_{reg} l'ensemble des éléments p-réguliers. On dit qu'une classe de conjugaison de G est *p-régulière* si ses éléments sont p-réguliers.

La propriété suivante est un résultat essentiel dans le travail présenté dans cette thèse.

Proposition B.3.2. *[Ser71, §16.2.37] L'image de* $e : K_0(kG\text{-proj}) \to K_0(\mathbb{K}\,G\text{-mod})$ *est formée des éléments de* $K_0(\mathbb{K}\,G\text{-mod})$ *dont le caractère est nul en dehors des classes p-régulières.*

La classe d'isomorphisme d'un kG-module projectif est entièrement déterminée par le caractère de son image par e.

B.4 Caractères modulaires

Ici, on a besoin les corps que $\mathbb{K}$ et k soient des corps de décomposition pour G et pour tous ses sous-groupes. On peut par exemple supposer que $\mathbb{K}$ contient toutes les racines e-ièmes de l'unité, où e est l'exposant de G.

Rappelons que G_{reg} désigne l'ensemble de éléments de G d'ordre premier à p. Notons a le plus petit multiple commun de l'ordre des éléments de G_{reg} et fixons θ un isomorphisme entre les racines a-èmes de l'unité de k et les racines a-èmes de l'unité de $\mathbb{K}$.

B.4.1 Caractères modulaires

Soit E un kG-module de dimension n et g un élément de G_{reg}. On note g_E l'endomorphisme de E associé à g. Comme g est d'ordre premier à p, g_E est diagonalisable sur k et ses valeurs propres sont des racines a-èmes de l'unité. On les note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On note

$$\Phi_E(g) = \sum_{i=1}^{n} \theta(\lambda_i).$$

L'application $\Phi_E : G_{reg} \to \mathbb{K}$ est appelée *caractère modulaire* de E, ou encore *caractère de Brauer* de E.

Proposition B.4.1. *On a,*

1. $\Phi_E(1) = \dim_k E$;
2. Φ_E *est une fonction de classes sur* G_{reg} ;
3. *si* $0 \to E_0 \to E_1 \to E_2 \to 0$ *est une suite exacte courte de kG-modules, alors* $\Phi_{E_1} = \Phi_{E_0} + \Phi_{E_2}$. *En particulier,* Φ_E *ne dépend que de la classe d'isomorphisme de* E ;
4. *si* P *est un kG-module projectif, pour tout* g *dans* G_{reg}, *on a* $\chi_{e([P])}(g) = \Phi_E(g)$, *où* $\chi_{e([P])}$ *désigne le caractère complexe de* $e([P])$.

Notons $\mathrm{CF}(G_{reg})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions de classes de G_{reg}.

Théorème B.4.2. *(Brauer) Les caractères des kG-modules irréductibles forment une base de* $\mathrm{CF}(G_{reg})$.

Corollaire B.4.3. *Le nombre de classes d'isomorphisme de kG-modules irréductibles est égal au nombre de classes de conjugaison p-régulières de G.*

B.4.2 Triangle cde et fonctions de classes

D'après ce qui précède, en tensorisant les applications du triangle *cde* par $\mathbb{K}$ et après des identifications évidentes, on obtient le triangle commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CF}_{reg}(G) \arrow[rr, "\mathbb{K}\otimes c"] \arrow[dr, "\mathbb{K}\otimes e"'] & & \mathrm{CF}(G_{reg}) \\ & \mathrm{CF}(G) \arrow[ur, "\mathbb{K}\otimes d"'] & \end{tikzcd} .$$

Notons que $\mathbb{K}\otimes c$ est un isomorphisme d'espaces-vectoriels.

B.4.3 Relèvement de Brauer

On l'a expliqué, l'application e est un monomorphisme scindé. Comme l'application de décomposition d est l'application adjointe de e, elle est également scindée. On définit ici une section de d.

Tout élément g de G admet une décomposition unique $g = g_r g_u$ avec g_r un élément p-régulier et g_u un élément dont l'ordre est une puissance de p et qui commute à g_r. L'élément g_r est la partie p-régulière de g et g_u sa partie p-unipotente.

Si f est une fonction de $\mathrm{CF}(G_{reg})$, on définit une fonction de classes $\sigma(f)$ sur G en posant pour tout g dans G,

$$\sigma(f)(g) = f(g_r).$$

Théorème B.4.4.

— *Si f est un caractère modulaire de G, alors $\sigma(f)$ est un caractère virtuel de G.*

— *L'application $\sigma : K_0(kG\text{-mod}) \to K_0(\mathbb{K}G\text{-mod})$ définit une section de l'application de décomposition d.*

C

Calcul des générateurs

On présente une méthode pour calculer les générateurs $(y_n)_{p\nmid n}$ de $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, S_n\text{-proj})$ ainsi que leur décomposition en termes des $\mathbb{F}_p\, S_n$-modules projectifs indécomposables en utilisant SageMath. Les conjectures énoncées le chapitre 1 s'y appuient.

Les calculs sont réalisés dans Sym, l'anneau des fonctions symétriques. Notons $A(p)$ le sous-anneau de Sym formé des fonctions symétriques f telles que pour toutes partitions p-singulières λ,

$$\langle f, p_\lambda \rangle = 0.$$

L'isomorphisme entre les anneaux Sym et $\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{C}\, S_n\text{-mod})$ (voir théorème 1.1.5) identifie le sous-anneau $A(p)$ avec $e(\bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathbb{F}_p\, S_n\text{-proj}))$. Après des traductions immédiates, le théorème 1.2.7 montre que $A(p)$ est polynomial et que des générateurs polynomiaux sont donnés par les fonctions

$$y_n = \sum_{\substack{(\lambda_0,\ldots,\lambda_k)\in(\mathbb{N}^*)^{k+1} \\ \sum_i \lambda_i = n \\ p\nmid\lambda_0 \text{ et } p\mid\lambda_i, i\geq 1}} (-1)^k h_{\lambda_0} \ldots h_{\lambda_k}, \tag{C.1}$$

pour n premier à p (voir 1.3 après le lemme 1.2.6 pour la formule)

D'après le paragraphe 1.2.3, d'autres générateurs s'obtiennent en considérant les fonctions de Witt $(q_n)_{p\nmid n}$.

Avec SageMath, on commence par définir Sym et plusieurs de ses bases :

```
sage: Sym=SymmetricFunctions(ZZ)
sage: s=Sym.s() #base des fonctions de Schur
sage: h=Sym.h() #base des fonctions homogènes
sage: w=Sym.w() #base des fonctions de Witt
```

Remarquons que SageMath utilise la notation w pour les fonctions symétriques de Witt. Ainsi, dans toute la suite on confondra la fonction symétrique de Witt et le caractère complexe du groupe symétrique associé en espérant que cela ne troublera pas le lecteur. On fera de même pour les fonctions symétriques y_n définies ci-dessus et les caractères associés.

C.1 Générateurs y_n

En s'appuyant sur la formule C.1, les générateurs $(y_n)_{p\nmid n}$ se décrivent comme combinaison linéaire des fonctions symétriques homogènes. La fonctions fonctions suivantes construit le générateur $y(n,p)$ en suivant cette description. Les nombres n et p sont rentrés en paramètres.

```
sage: def y(n,p) :
...       y=0
...       L=Partitions(n).list() #Liste des partitions de n
...       for mu in L :
...           if (len([k for k in mu if k%p!=0])==1) and
(len([k for k in mu if k%p==0])==(len(mu)-1)) :
...               c=((-1)^(len(mu)-1))*factorial(len(mu)-1)
...               l=[list(mu).count(x) for x in list(set(mu)) if x % p == 0]
...               for i in range(len(set(mu))-1) :
...                   c=c/factorial(l[i])
...               y=y+c*h(mu)
...       return y
```

On a par exemple :

```
sage: y(9,2)
h[2, 2, 2, 2, 1] - h[3, 2, 2, 2] - 3*h[4, 2, 2, 1] + 2*h[4, 3, 2]
+ h[4, 4, 1] + h[5, 2, 2] - h[5, 4] + 2*h[6, 2, 1] - h[6, 3]
- h[7, 2] - h[8, 1] + h[9]
```

En particulier, y_9 est le caractère d'un vrai $\mathbb{C}\,S_9$-module.

C.2 Décomposition dans la base des projectifs indécomposables

Soit f une fonction symétrique homogène de degré n dans $A(p)$. Notons χ le caractère complexe de S_n qui lui est associé. On le voit comme un élément de $K_0(\mathbb{C}\,S_n\text{-mod})$. Puisque f est dans $A(p)$, le caractère χ est dans l'image de l'application

$$e_n : K_0(\mathbb{F}_p\,S_n\text{-proj}) \to K_0(\mathbb{C}\,S_n\text{-mod}).$$

Étant donné la matrice de l'application e_n dans les bases des $\mathbb{F}_p\,S_n$-modules projectifs indécomposables au départ et des $\mathbb{C}\,S_n$-modules simples à l'arrivée, on peut déterminer la décomposition de $e_n^{-1}(\chi)$ dans la base des $\mathbb{F}_p\,S_n$-modules projectifs indécomposables. Il suffit de résoudre l'équation :

$$\chi = Ep.$$

C'est ce que fait la fonction suivante. La fonction symétrique f et la matrice E de l'application e_n sont rentrées en paramètres.

```
sage: def DecProj(E,f) :
...       a=s(f)
...       n=sum(a.support()[0])
...       V=Matrix([a[i] for i in sorted(Partitions(n).list(),reverse=true)])
...       P = E.solve_right(V.transpose())
...       return P.transpose()
```

Remarque 8. Les matrices des applications e_n peuvent s'obtenir en utilisant la bibliothèque *Hecke* de GAP [Tra13].

C.3 Un exemple de calcul

Prenons pour l'exemple $n = 9$ et $p = 2$. Définissons les fonctions symétriques

$$y_{9\_2} = (-1)^{q_{(9,2)}} y_9,$$

où $q_{(9,2)}$ désigne le quotient de la division euclidienne de 9 par 2, et

$$w_{9\_2} = -w_9.$$

```
sage: y9_2=(-1)^(9//2)*y(9,2)
sage: w9_2=-w[9]
```

Enfin, définissons E_{9_2} la matrice de l'application e_9 dans les bases mentionnées plus haut :

```
sage: E9_2=Matrix(
sage: [ [ 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ], [ 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ],
...     [ 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 ], [ 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 ],
...     [ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0 ], [ 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0 ],
...     [ 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0 ], [ 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0 ],
...     [ 2, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0 ], [ 2, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0 ],
...     [ 3, 0, 2, 0, 1, 1, 1, 0 ], [ 2, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 0 ],
...     [ 2, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1 ],
...     [ 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1 ], [ 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1 ],
...     [ 3, 0, 2, 0, 1, 1, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0 ],
...     [ 2, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1 ],
...     [ 2, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0 ], [ 2, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0 ],
...     [ 2, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0 ], [ 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0 ],
...     [ 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 ], [ 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0 ],
...     [ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0 ], [ 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 ],
...     [ 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ], [ 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ] ]
...
sage: )
```

On obtient :

```
sage: DecProj(E9_2,y9_2);
[0 0 0 0 0 1 2 6]
```

et

```
sage: DecProj(E9_2,w9_2);
[ 0  1  3  5  8  1  4 15]
```

Vu comme des caractères complexes S_9, les caractères y_{9_2} et w_{9_2} sont donc les caractères de vrais modules projectifs de S_9 sur $\mathbb{F}_p$.

Bibliographie

[BR08] A. Baker et B. Richter. « Quasisymmetric functions from a topological point of view ». *Mathematica Scandinavica* (2008), p. 208-242.

[Car83] P. Cartier. « La théorie classique et moderne des fonctions symétriques ». *Séminaire Bourbaki* 25 (1983), p. 1-23.

[CK89] D. Carlisle et N.J. Kuhn. « Smash products of summands of $B(\mathbb{Z}/p)$ ». *Contemporary Mathematics* 96 (1989), p. 87-102.

[CS90] H.E.A. Campbell et P.S. Selick. « Polynomial algebras over the Steenrod algebra ». *Comment. Math. Helv.* 65.1 (1990), p. 171-180.

[Cur66] C.W. Curtis. « The Steinberg character of a finite group with a (B,N)-pair ». *Journal of Algebra* 4.3 (1966), p. 433-441.

[Dev17] The Sage Developers. *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 7.5.1)*. `http://www.sagemath.org`. 2017.

[DHS14] K. Delamotte, N.D.H. Hai et L. Schwartz. « Questions and conjectures about the modular representation theory of the general linear group $GL_n(\mathbb{F}_2)$ and the Poincaré series of unstable modules ». *arXiv e-prints* (2014). arXiv : `1408.1322 [math.AT]`.

[DL76] P. Deligne et G. Lusztig. « Representations of reductive groups over finite fields ». *Annals of Mathematics* (1976), p. 103-161.

[DM87] F. Digne et J. Michel. « Foncteurs de Lusztig et caractères des groupes linéaires et unitaires sur un corps fini ». *Journal of Algebra* 107.1 (1987), p. 217-255.

[DM91] F. Digne et J. Michel. *Representations of finite groups of Lie type*. T. 21. Cambridge University Press, 1991.

[Dor96] W.F. Doran. « A Proof of Reutenauer's $q(n)$-Conjecture ». *Journal of combinatorial theory, Series A* 74.2 (1996), p. 342-344.

[FHS16] V. Franjou, N.D.H. Hai et L. Schwartz. « Lannes' T-functor on injective unstable modules and Harish-Chandra restriction ». *arXiv e-prints* (2016). arXiv : `1606.02905 [math.AT]`.

[Gei77] L. Geissinger. « Hopf algebras of symmetric functions and class functions ». *Combinatoire et représentation du groupe symétrique* (1977), p. 168-181.

[GK78] L. Geissinger et D. Kinch. « Representations of the hyperoctahedral groups ». *Journal of Algebra* 53.1 (1978), p. 1-20.

[GR18] D. Grinberg et V. Reiner. « Hopf Algebra in Combinatorics ». *arXiv e-prints* (2018). arXiv : `1409.8356 [math.CO]`.

[Gre55] J.A. Green. « The characters of the finite general linear groups ». *Transactions of the American Mathematical Society* 80.2 (1955), p. 402-447.

[Gro17] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.9*. `https://www.gap-system.org`. 2017.

[Hai15] N.D.H. Hai. « On a conjecture of L. Schwartz about the eigenvalues of Lannes' T-functor ». *C. R. Maths* 353.3 (2015), p. 197-202.

[Hai16] N.D.H. Hai. « A proof of Schwartz's conjecture about the eigenvalues of Lannes' T-functor ». *Journal of Algebra* 445 (2016), p. 115-124.

[Hai19] N.D.H. Hai. « Deligne-Lusztig characters of the finite general linear groups and eigenvectors of Lannes' T-functor ». *Advances in Mathematics* 343 (2019), p. 1-15.

[HK88] J. C. Harris et N.J. Kuhn. « Stable decompositions of classifying spaces of finite abelian p-groups ». *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. T. 103. 3. Cambridge University Press. 1988, p. 427-449.

[Hum87] J.E. Humphreys. « The Steinberg representation ». *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society* 16.2 (1987), p. 247-263.

[JK84] G.D. James et A. Kerber. *The Representation Theory of the Symmetric Group (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications)*. Cambridge University Press, 1984.

[Kuh94] N.J. Kuhn. « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra : II ». *K-theory* 8.4 (1994), p. 395-428.

[Lan92] J. Lannes. « Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un groupe abélien élémentaire ». *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* 75.1 (1992), p. 135-244.

[LLT96] A. Lascoux, B. Leclerc et J.-Y. Thibon. « Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras ». *Communications in Mathematical Physics* 181.1 (1996), p. 205-263.

[LN97] R. Lidl et H. Niederreiter. *Finite fields*. T. 20. Cambridge University Press, 1997.

[Lus76] G. Lusztig. « Divisibility of projective modules of finite Chevalley groups by the Steinberg module ». *Bulletin of the London Mathematical Society* 8.2 (1976), p. 130-134.

[Mac98] I.G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford university press, 1998.

[Reu95] C. Reutenauer. « On symmetric functions related to Witt vectors and the free Lie algebra ». *Advances in Mathematics* 110.2 (1995), p. 234-246.

[Sch94] L. Schwartz. *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*. University of Chicago Press, 1994.

[Ser71] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, Paris, 1971.

[ST96] T. Scharf et J.-Y. Thibon. « On Witt vectors and symmetric functions ». (1996).

[Ste57] R. Steinberg. « Prime power representations of finite linear groups II ». *Canadian Journal of Mathematics* 9 (1957), p. 347-351.

[SZ84] T.A. Springer et A.V. Zelevinsky. « Characters of $GL(n, \mathbb{F}_q)$ and Hopf algebras ». *Journal of the London Mathematical Society* 2.1 (1984), p. 27-43.

[Tra13] D. Traytel. *Hecke 1.4*. `http://home.in.tum.de/ traytel/hecke/index.html`. 2013.

[TV07] N. Thiem et C.R. Vinroot. « On the characteristic map of finite unitary groups ». *Advances in Mathematics* 210.2 (2007), p. 707-732.

[Vog88] P. Vogel. « Communication au séminaire de topologie ». (Séminaire de Topologie, 1988). Université de Nantes. 1988.

[Web16] P. Webb. *A Course in Finite Group Representation Theory*. Cambridge University Press, 2016.

[Zel81] A.V. Zelevinsky. *Representations of finite classical groups, volume 869 of Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1981.

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE / MATHSTIC

UNIVERSITÉ DE NANTES

Titre : Caractères modulaires de familles de groupes

Mot clés : représentations modulaires ; groupes symétriques ; groupes linéaires finis ; modules instables.

Resumé : Cette thèse étudie les caractères modulaires de trois familles de groupes : les groupes symétriques, les produits en couronne avec un groupe fini et les groupes linéaires finis. On s'intéresse plus particulièrement à la structure multiplicative des groupes de Grothendieck des modules projectifs. Dans les cas des groupes symétriques et des produits en couronne, on obtient que ce sont des anneaux polynomiaux. Un résultat similaire a été conjecturé par Carlisle et Kuhn pour les groupes linéaires en caractéristique naturelle. On obtient une forme plus faible donnant la polynomialité sur les rationnels avec des générateurs décrits par les caractères de Deligne-Lusztig. On montre diverses applications de ce résultat en théorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod.

Title : Modular characters of families of groups

Keywords : modular representations ; symmetric groups ; finite general linear groups ; unstable modules.

Abstract : This thesis studies modular characters of three families of groups : the symmetric groups, the wreath products with a finite group and the finite general linear groups. Precisely, we study the multiplicative structure on the Grothendieck groups of projective modules. For the symmetric groups, as for the wreath products, we show that these are polynomial rings. Carlisle and Kuhn conjectured a similar result holds for the finite general linear groups in defining characteristic. We give a weaker version which states the polynomiality over the rationals and we describe polynomial generators using Deligne-Lusztig characters. We get applications to unstable modules over the Steenrod algebra.