



Ecole Doctorale SIE

## THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

## DOCTEUR

de l'université Paris-Est

Spécialité : Structures et Matériaux

par

**Hugues VINCENT**

intitulée

# Développement d'un modèle de calcul de la capacité ultime d'éléments de structure (3D) en béton armé, basé sur la théorie du calcul à la rupture

soutenue le 21 novembre 2018, devant le jury composé de :

Pr. Aurelio MUTTONI	École Polytechnique Fédérale de Lausanne	Président du jury
Pr. Samir MAGHOUS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul	Rapporteur
Pr. Géry de SAXCÉ	Université Lille	Rapporteur
Dr. Jérémie BLEYER	École des Ponts ParisTech	Examineur
Pr. Patrick de BUHAN	École des Ponts ParisTech	Directeur de thèse
Xavier CESPEDES	STRAINS	Invité
Mathieu ARQUIER	STRAINS	Invité



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Dimensionnement des structures en béton armé : la méthode des bielles-et-tirants . . . . .	2
1.2	L'approche calcul à la rupture . . . . .	7
1.2.1	Principes de l'approche et application . . . . .	7
1.2.2	Méthodes numériques en calcul à la rupture (ou analyse limite) . . . . .	10
1.3	Contexte industriel de la thèse . . . . .	13
1.4	Organisation du manuscrit . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Approche par le calcul à la rupture du dimensionnement des ouvrages massifs en béton armé : fondements théoriques</b>	<b>19</b>
2.1	Introduction . . . . .	21
2.2	Principe général du calcul à la rupture . . . . .	22
2.2.1	Cadre du problème de calcul à la rupture . . . . .	22
2.2.2	Domaine des chargements potentiellement supportables . . . . .	23
2.2.3	L'approche statique du calcul à la rupture . . . . .	23
2.2.4	L'approche cinématique du calcul à la rupture . . . . .	24
2.3	Critères de résistance des éléments constitutifs du béton armé . . . . .	26
2.3.1	Choix du critère de résistance du béton : Rankine ou Mohr-Coulomb tronqué en traction . . . . .	27
2.3.2	Analyse comparée des deux critères . . . . .	32
2.3.3	Critère de résistance des armatures et de l'interface béton-armatures . . . . .	35
2.4	Modélisation mixte du composite « béton armé » . . . . .	36
2.4.1	Le principe de modélisation mixte . . . . .	37
2.4.2	Efforts intérieurs et équations d'équilibre . . . . .	37
2.4.3	Les limites de la modélisation mixte . . . . .	39
2.5	La modélisation multiphasique comme alternative : le cas périodique . . . . .	40
2.5.1	Principe de la modélisation multiphasique . . . . .	41
2.5.2	Modèle multiphasique et calcul à la rupture . . . . .	42
2.6	Cas de l'adhérence parfaite entre phases : la méthode d'homogénéisation . . . . .	43
2.6.1	Critère de résistance macroscopique du béton armé . . . . .	43
2.6.2	Représentation du critère dans le plan de Mohr et calcul des fonctions d'appui . . . . .	44
2.6.3	Une application illustrative simple . . . . .	46
2.7	Extension de la modélisation multiphasique au cas d'une répartition quelconque des inclusions . . . . .	50
2.7.1	Principe de la procédure d'homogénéisation étendue . . . . .	50

2.7.2	Formulation des approches statique et cinématique du problème de calcul à la rupture homogénéisé . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Approche par le calcul à la rupture du dimensionnement des ouvrages massifs en béton armé : mise en œuvre numérique</b>	<b>55</b>
3.1	Introduction . . . . .	57
3.2	Méthodes des éléments finis pour l'approche statique du calcul à la rupture en 3D . . . . .	58
3.2.1	Formulation générale de l'approche statique du calcul à la rupture (approche par l'intérieur) . . . . .	58
3.2.2	Discrétisation par des éléments tétraédriques . . . . .	62
3.2.3	Interpolation et discontinuité . . . . .	63
3.2.4	Formulation des critères pour l'approche statique . . . . .	67
3.3	Méthode des éléments finis pour l'approche cinématique du calcul à la rupture en 3D . . . . .	73
3.3.1	Formulation générale de l'approche cinématique du calcul à la rupture (approche par l'extérieur) . . . . .	73
3.3.2	Formulation des critères pour l'approche cinématique . . . . .	75
3.3.3	Discrétisation en tétraèdres . . . . .	80
3.4	Premiers exemples de validation . . . . .	90
3.4.1	Retour sur l'exemple de la compression en déformations planes d'un bloc en béton armé . . . . .	91
3.4.2	Validation de la méthode d'homogénéisation dans le cas d'armatures isolées . . . . .	100
3.5	Conclusions . . . . .	112
<b>4</b>	<b>Approche par le calcul à la rupture du dimensionnement des ouvrages massifs en béton armé : applications</b>	<b>115</b>
4.1	Introduction . . . . .	116
4.2	Application à des structures non renforcées . . . . .	117
4.2.1	Compression avec frottement d'un bloc non confiné . . . . .	117
4.2.2	Chevêtre de pont en béton . . . . .	120
4.3	Application à des structures renforcées . . . . .	128
4.3.1	Chevêtre de pont en béton armé . . . . .	128
4.3.2	Semelle de fondation circulaire . . . . .	133
4.3.3	Mur en cisaillement . . . . .	153
4.4	Conclusions . . . . .	157
<b>5</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>165</b>
5.1	Conclusions . . . . .	165
5.2	Perspectives . . . . .	170
	<b>Bibliographie</b>	<b>175</b>

# Chapitre 1

## Introduction

**Résumé :** Ce chapitre fait état des difficultés liées au dimensionnement de structures en béton armé à la ruine, avant de brièvement présenter ce qui est pratiqué aujourd’hui. Nous verrons ensuite que la théorie du *calcul à la rupture*, encore trop peu utilisée pour les structures en béton armé, permet d’étudier leur état limite ultime. L’entreprise STRAINS qui a co-encadré cette thèse industrielle (avec le laboratoire Navier) sera ensuite brièvement présentée. Ses ambitions et le contexte industriel permettront de comprendre dans quel cadre s’inscrit ce travail de thèse.

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Dimensionnement des structures en béton armé : la méthode des bielles-et-tirants . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>1.2</b>	<b>L’approche calcul à la rupture . . . . .</b>	<b>7</b>
1.2.1	Principes de l’approche et application . . . . .	7
1.2.2	Méthodes numériques en calcul à la rupture (ou analyse limite) .	10
<b>1.3</b>	<b>Contexte industriel de la thèse . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>1.4</b>	<b>Organisation du manuscrit . . . . .</b>	<b>15</b>

---

## 1.1 Dimensionnement des structures en béton armé : la méthode des bielles-et-tirants

Le comportement à la rupture des structures en béton armé est complexe. En effet, le béton est un matériau hétérogène et fragile. La rupture de ce dernier est alors souvent très localisée et se manifeste suite à l'apparition de fissures. Son comportement est extrêmement délicat à modéliser et nécessite des ressources numériques importantes. Décrire numériquement l'évolution du matériau depuis son état initial jusqu'à sa ruine peut donc s'avérer très ambitieux et périlleux. L'ingénieur ne s'y tente que très rarement. Et lorsqu'il le fait, la ruine de la structure est bien souvent détectée (à tort) dès lors que l'algorithme de résolution cesse de converger. Ces méthodes demandent à la fois maîtrise et prudence. Les progrès numériques des dernières années laissent espérer que ce type de calcul sera bientôt réalisable par tous les ingénieurs. En effet, les puissances de calculs grandissantes permettent de traiter des problèmes de plus en plus « conséquents » et les méthodes de résolution plus fiables et performantes permettent de traiter des problèmes de plus en plus complexes et de taille croissante.

Quoiqu'il en soit, dans une première approche l'ingénieur a besoin de caractériser rapidement la ruine de la structure qu'il analyse. Dans l'Eurocode [NF EN 1990, 2003], document qui régit et encadre le dimensionnement des structures en France (et en Europe), on parle de l'*État Limite Ultime (ELU)*<sup>(1)</sup>. L'état limite ultime est l'état ne devant pas être atteint, à partir duquel la construction n'assure plus son rôle structurel ou fonctionnel. Faute de moyens numériques adaptés, la détermination de l'ELU par les ingénieurs n'est pas facile et est bien souvent réalisée à partir d'un calcul élastique et en prenant des marges de sécurité importantes (par des facteurs adéquats). Ces marges ne sont d'ailleurs pas quantifiées, l'ELU n'étant pas déterminé. L'une des raisons qui poussent les ingénieurs à n'effectuer que des calculs en régime élastique est donc la complexité inhérente aux calculs non linéaires (plasticité, endommagement, ...) qui, certes, permettraient de rendre compte de manière plus réaliste du comportement du béton armé à la rupture, mais sont, en l'état actuel, beaucoup trop difficiles à mettre en œuvre.

Le deuxième volet de l'Eurocode (Eurocode 2 [NF EN 1992-1-1, 2007]), qui traite des structures en *béton armé*, introduit, entre autres, la *méthode des bielles et tirants* permettant un dimensionnement optimisé des structures courantes présentant des régions de discontinuités. La méthode des bielles et tirants<sup>(2)</sup> prend naissance dans le travail de Ritter [1899] et Mörsch [1912] qui modélisent mécaniquement une poutre en béton armé par un treillis formé par des éléments tendus (tirants en acier) et des éléments comprimés (bielles de béton), permettant notamment de dimensionner les armatures

---

(1). Ultimate Limit State (ULS) en anglais

(2). Strut and tie design en anglais

## 1.1. Dimensionnement des structures en béton armé : la méthode des bielles-et-tirants

---

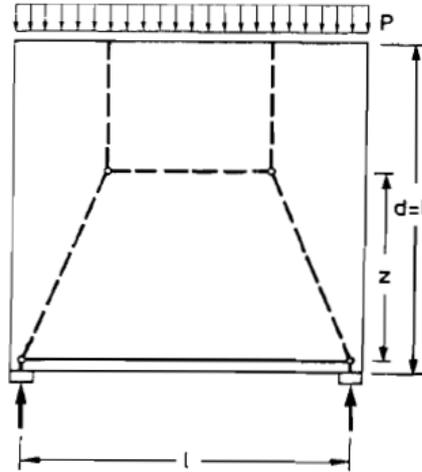


FIGURE 1.1 – Schéma de bielles et tirants d'un mur comprimé, reposant sur deux appuis (d'après [Schlaich \*et al.\* \[1987\]](#))

transversales des poutres en béton armé soumises à un effort tranchant.

Cette méthode du treillis de Ritter-Mörsch a été ensuite améliorée par [Leonhardt et Mönning \[1975\]](#), qui cherchent à équilibrer les efforts de traction en positionnant des armatures au barycentre de ces efforts. Le vocable « bielle-et-tirant » n'étant toujours pas introduit, on parle de « méthode des champs de contrainte ». La réflexion de Leonhardt sur le cheminement des efforts au sein d'éléments structuraux en béton armé est basée sur une campagne expérimentale portant sur des poutres en béton armé en « T », dans laquelle plusieurs paramètres sont étudiés (dimensions de la poutre, configuration et disposition des renforcements) afin de caractériser la ruine d'éléments structuraux en béton armé et de comprendre l'équilibre et la diffusion des efforts [[Leonhardt, 1965](#)].

Le travail de [Marti \[1985\]](#) et [Mueller \[1978\]](#) s'inscrit dans la lignée de celui de Nielsen (rassemblé dans son ouvrage [[Nielsen et Hoang, 2010](#)]) et porte sur l'influence de la présence d'armatures à l'effort tranchant sur l'inclinaison des zones de compression du béton (qui seront plus tard appelées bielles). Marti a ensuite proposé des solutions de dimensionnement de cas pratiques (voile sollicité par une charge distribuée). Nous souhaitons également mentionner le travail de l'école de Zürich mené par Thürlimann qui a travaillé sur l'inclinaison des zones de compression et proposé différents treillis de poutres [[Thürlimann \*et al.\*, 1983](#)], permettant ainsi de comprendre davantage le comportement à la rupture d'éléments structuraux en béton armé. On référencera également les travaux de Muttoni et Schwartz ([[Muttoni \*et al.\*, 1987, 1997](#)] [[Schwartz, 2002](#)]) qui ont contribué au développement de ces méthodes dans le sillage de Thürlimann.

C'est à [Schlaich et Schäfer \[1991\]](#) qu'est attribuée la « méthode des bielles et tirants » grâce aux simplifications apportées permettant ainsi de formaliser la méthode.

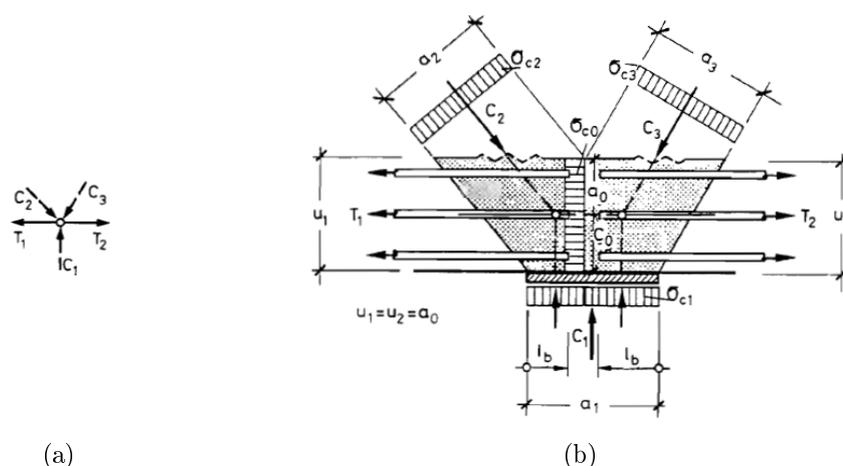


FIGURE 1.2 – Détail d'un nœud de béton armé étudié par la méthode des bielles et tirants (d'après Schlaich *et al.* [1987])

Cette nouvelle méthode propose, non plus de vérifier les conditions statiques sur les contraintes, mais sur leur résultante, introduisant la notion de *bielle* pour équilibrer les efforts de compression et de *tirant* pour équilibrer les efforts de traction (voir Figure 1.1). Cette méthode permet une représentation discrète du champ de contrainte équilibrant le chargement imposé au système étudié. L'accent est mis sur la vérification des nœuds de contraintes (zones critiques dans l'utilisation de méthode) situés aux points de jonction entre les bielles et les tirants (voir Figure 1.2). L'ensemble des bielles et tirants connectés par des nœuds permettent de former un treillis équilibrant le chargement.

Le dimensionnement par la méthode des bielles et tirants passe par la détermination des efforts extérieurs appliqués à la structure à dimensionner, la détermination du placement et de l'orientation des barres du treillis (la recherche du schéma peut se faire « à la main » ou automatiquement à l'aide de logiciels - voir Figure 1.3), la détermination des efforts intérieurs au treillis et enfin, la vérification de la *résistance* des barres et nœuds du treillis (ainsi que l'ancrage des armatures dans les nœuds).

#### ✓ Les bielles

Les bielles, correspondant aux zones *comprimées*, sont vérifiées en s'assurant que la contrainte principale de compression  $\sigma_I$  est inférieure à la résistance du béton  $f_c$  affectée d'un coefficient de sécurité  $\gamma_c$  ( $\gamma_c > 1$ ) :

$$|\sigma_I| \leq f_c^* = f_c / \gamma_c \quad (1.1)$$

où  $f_c^*$ , appelée résistance *effective* du béton, tient compte de la réduction de résistance dans la bielle due aux effets des déformations latérales.

## 1.1. Dimensionnement des structures en béton armé : la méthode des bielles-et-tirants

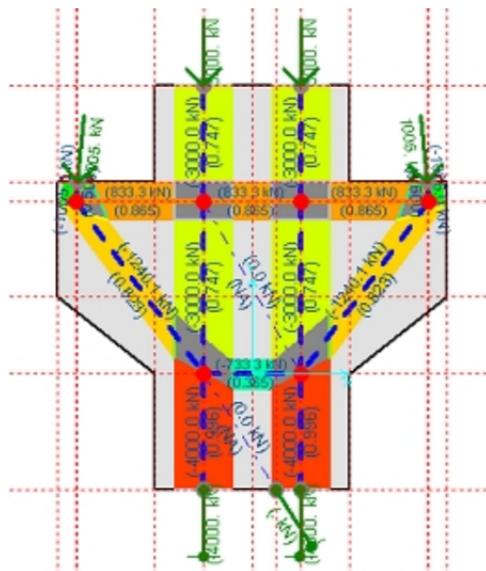


FIGURE 1.3 – Recherche automatique d'un schéma bielles et tirants sur un « double corbeau » (à l'aide du logiciel CAST)

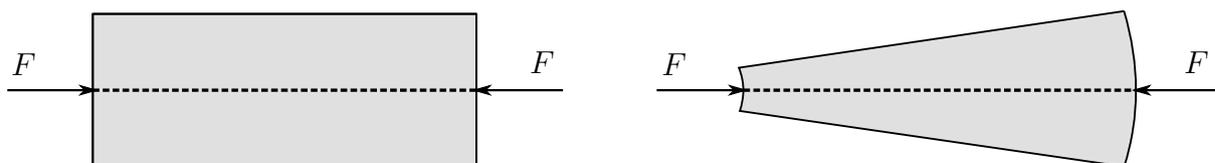


FIGURE 1.4 – Représentations idéalisées de la forme des bielles

Il est possible de distinguer deux types de bielle, de forme droite ou en éventail (voir Figure 1.4).

### ✓ Les tirants

Les tirants, reprenant les efforts de *traction*, sont matérialisés par des barres d'acier. La contrainte  $\sigma_s$  dans l'acier est limitée par sa résistance  $f_s$  affectée d'un coefficient de sécurité  $\gamma_s$  :

$$\sigma_s \leq f_s^* = f_s / \gamma_s \quad (1.2)$$

L'*adhérence* des armatures dans le béton doit également être vérifiée. Des règles dans l'Eurocode permettent de déterminer la longueur d'ancrage selon le type d'acier (droit ou « croché »).

### ✓ Les nœuds

Les nœuds, en raison de la forte concentration de contraintes qui doivent être équi-

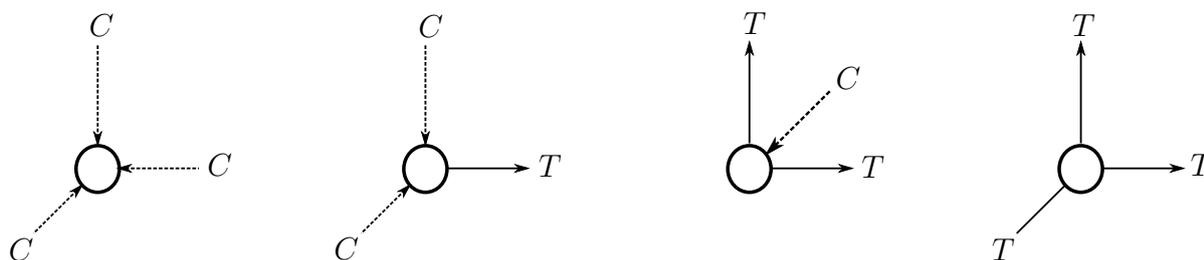


FIGURE 1.5 – Représentation schématique des quatre types de nœuds

brées dans un région restreinte, constituent une zone d'intérêt particulier qui convient d'être vérifiée lors d'un dimensionnement par la méthode des bielles et tirants. Il est possible de regrouper les nœuds en quatre catégories en fonction des efforts qui y convergent : CCC, CCT, CTT et TTT (C signifie compression et T signifie traction). Une représentation schématique de ces types de nœuds est visible sur la Figure 1.5.

Les nœuds CCC, qui ne rassemblent que des bielles, sont dimensionnés en vérifiant que la contrainte principale de compression au sein de chacune des bielles vérifie l'équation (1.1).

Deux bielles (ou plus) et un tirant forment un nœud CCT. Le tirant matérialisé par une armature, s'ancre soit dans le nœud, et on parle alors de cas distribué, soit à l'extérieur du nœud, et on parle de cas concentré. L'ancrage doit être assuré quel que soit le cas (notion de longueur d'ancrage dans l'Eurocode). Une attention particulière doit être portée à l'angle formé par le tirant avec chacune des bielles. Ce dernier ne doit pas être inférieur à  $55^\circ$  afin d'éviter la création de fissures réduisant alors la capacité de résistance des bielles [NF EN 1992-1-1, 2007]. Néanmoins, il est possible d'ajouter des armatures constructives permettant de contrôler l'ouverture de fissures et laissant ainsi la possibilité à l'angle formé par le tirant avec chacune des bielles de mesurer jusqu'à  $25^\circ$  [Muttoni et Fernández Ruiz, 2008].

L'intersection d'une seule bielle avec plusieurs tirants forme un nœud CTT. Pour ces nœuds, la formation de fissures est plus fréquente que pour les nœuds CCT et les mêmes règles d'angle entre bielle et tirant doivent être respectées.

Enfin, le dernier type de nœud ne comporte pas de bielle et est constitué uniquement de tirants. Ces nœuds TTT nécessitent la présence d'étriers permettant de *confiner* le béton dans cette zone.

L'application de la méthode des bielles et tirants requiert une certaine expérience et est principalement basée sur l'intuition de l'ingénieur afin de proposer un premier schéma de bielles et tirants qu'il convient ensuite de vérifier et à partir duquel il pourra itérer.

## 1.2. L'approche calcul à la rupture

---

Elle demeure donc délicate à utiliser, surtout dans le cas de structures tridimensionnelles. Malheureusement, pour diverses raisons, notamment le fait que la méthode est moins enseignée, couplé au goût grandissant pour les simulations numériques, la méthode des bielles et tirants est de moins en moins pratiquée par les ingénieurs, voire de moins en moins connue par eux.

Il existe donc un fossé entre les approches visant à décrire très précisément le comportement d'une structure en béton armé jusqu'à sa ruine et les méthodes employées par les ingénieurs qui dimensionnent véritablement les ouvrages en béton armé. Nous proposons dans ce travail une méthode permettant de dimensionner les structures en béton armé basée sur le *calcul à la rupture*. Cette méthode se veut suffisamment générale, utilisable par des ingénieurs et fondée sur des bases mécaniques rigoureuses.

## 1.2 L'approche calcul à la rupture

### 1.2.1 Principes de l'approche et application

La théorie du calcul à la rupture permet l'analyse de structures aux ELU et notamment de structures en béton armé. Les récents événements ont montré l'importance de répondre à la question de la capacité ultime des structures (la ruine d'une structure en béton armé est illustrée par l'effondrement récent (2018) du pont Morandi sur la Figure 1.6 et par celui du terminal de Roissy (2004) sur la Figure 1.7). D'une façon générale, cette théorie, qui sera largement détaillée dans cette thèse, consiste à déterminer la charge de ruine d'une structure en assurant la compatibilité entre l'équilibre de la structure et le respect d'un critère de résistance en tout point de celle-ci. Le calcul à la rupture permet donc de répondre à la question de la ruine d'une structure en s'affranchissant d'un calcul élastoplastique pas-à-pas pour lequel les difficultés ont déjà été évoquées.

Dans le cas où le comportement des matériaux est parfaitement *ductile* (c'est-à-dire obéissant par exemple à une loi de comportement élastique parfaitement plastique avec normalité de la règle d'écoulement plastique), les chargements pour lesquels une telle compatibilité « équilibre-résistance » est vérifiée sont *effectivement supportés* par la structure ou l'ouvrage. On parle alors d'*analyse limite*. Le calcul à la rupture consiste alors à étendre ce même raisonnement au cas où le *critère de plasticité parfaite* est remplacé par un simple *critère de résistance*. Les chargements satisfaisant une telle condition de compatibilité sont dès lors qualifiés de *potentiellement supportables* [Salençon, 1983]. Il convient de souligner que la *méthode des bielles et tirants* décrite précédemment se rattache clairement à un tel raisonnement de calcul à la rupture, puisqu'elle vise à déterminer des trajets d'efforts intérieurs en équilibre avec le chargement (descente de charges) et respectant les conditions de résistance du béton pour les bielles, de l'acier



FIGURE 1.6 – Effondrement du pont Morandi à Gênes en Italie (2018)

pour les tirants.

La fiabilité des évaluations données par l'approche calcul à la rupture est d'autant plus grande que la rupture des matériaux constitutifs est plus *ductile*. Or, le comportement du béton, y compris en compression, présente une certaine *fragilité*, comme le montre l'allure de la courbe expérimentale type de la Figure 1.8, présentant un adoucissement marqué après le franchissement d'un pic. L'introduction d'armatures de renforcement en acier (matériau connu pour sa ductilité) redonne alors une certaine ductilité au « composite béton-armé » notamment vis-à-vis de sollicitations de traction, donnant ainsi sa pleine justification à l'application du calcul à la rupture. Drucker a discuté de la possibilité et de la pertinence de traiter des structures en béton armé par le calcul à la rupture [Drucker, 1961]. Pour tenir compte de la fragilité du béton, la résistance retenue pour les calculs peut être choisie inférieure à sa résistance réelle (résistance caractéristique

## 1.2. L'approche calcul à la rupture

---



FIGURE 1.7 – Effondrement du terminal de Roissy en France (2004)

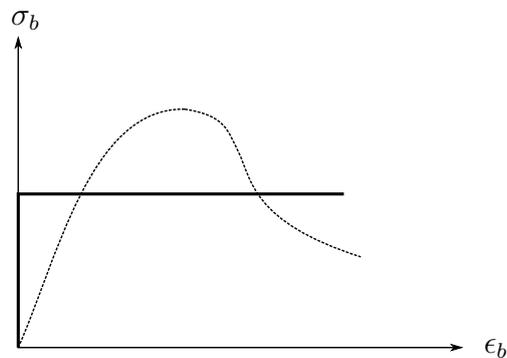


FIGURE 1.8 – Loi de comportement « rigide plastique » du béton

du béton à la compression mesurée sur un cylindre). De même, concernant la résistance à la traction du béton, elle est souvent négligée.

On peut remonter à 1773 et aux travaux de [Coulomb \[1773\]](#) pour voir les prémices du raisonnement de calcul à la rupture. Dans son mémoire, Coulomb traite de la stabilité de différents éléments structuraux et notamment de la stabilité d'un mur de soutènement. Le calcul à la rupture est beaucoup utilisé en géotechnique et mécanique des sols. Il permet le dimensionnement de différents ouvrages (talus, remblais, par exemple) afin d'en évaluer la stabilité. Il permet également de comprendre les mécanismes de ruine (voir le glissement d'un sol sur la Figure 1.9 que l'on peut interpréter comme un mécanisme de bloc en rotation). On peut mentionner le travail de [Prandtl \[1920\]](#) qui a permis d'obtenir, par la mise en œuvre analytique des approches statique et cinématique du calcul à la rupture, la solution exacte d'un problème courant (capacité portante d'un sol, voir Figure 1.10). C'est en l'appliquant à ce type de problèmes, pour lesquels le comportement réel des sols est assez éloigné d'un comportement ductile, que [Salençon \[1983\]](#),

[2013] est parvenu à formuler dans un cadre mécanique rigoureux la *théorie du Calcul à la rupture* qu'il s'agisse de *l'approche statique par l'intérieur* ou de *l'approche cinématique par l'extérieur* provenant de la dualisation des équations d'équilibre à travers les *principe des puissances virtuelles*.

Les ouvrages en maçonnerie trouvent également un intérêt à être traités par le calcul à la rupture. Notamment grâce à la méthode d'homogénéisation permettant de prendre en compte l'effet des joints entre les pierres à travers la détermination d'un *critère de résistance macroscopique* [de Buhan et de Felice, 1997]. Plus récemment les travaux de thèse de Terrade [2017] ont montré la bonne corrélation entre l'approche cinématique (analytique) du calcul à la rupture, son pendant numérique et des essais expérimentaux sur un mur de soutènement, permettant ainsi d'estimer la charge de ruine d'ouvrages de soutènement en maçonnerie afin d'assurer leur stabilité.

Concernant l'étude d'éléments de structure en béton armé par le calcul à la rupture, nous avons déjà évoqué la méthode des bielles et tirants qui n'est autre qu'une mise en œuvre particulière de l'approche statique du calcul à la rupture. Cette méthode a montré tout son intérêt dans la vérification de poutres, dalles, voiles ou encore de corbeaux en béton armé. La vérification de dalles en béton armé par le calcul à la rupture a déjà été étudiée. Johansen [1962] a proposé une méthode des « lignes de rupture »<sup>(3)</sup> qui permet de trouver des mécanismes de ruine de blocs en rotation où le moment est maximal (moment « plastique ») le long des lignes de rupture ou charnières (voir Figure 1.11). Cette méthode correspond à une approche cinématique du calcul à la rupture. Hillerborg [1996] a également œuvré pour développer un approche statique pour les dalles, appelée « méthode des bandes »<sup>(4)</sup>, proposant une alternative à la méthode des lignes de rupture. Cette méthode, négligeant la torsion, consiste à remplacer la dalle étudiée par une série de poutres en flexion, facilitant le calcul. Cette méthode présente l'intérêt de se situer du côté de la sécurité, mais la capacité de la dalle est grandement sous-estimée.

## 1.2.2 Méthodes numériques en calcul à la rupture (ou analyse limite)

Aujourd'hui, s'appuyant sur l'amélioration des performances des méthodes numériques, différents travaux ont montré l'intérêt de l'utilisation du calcul à la rupture pour traiter la stabilité de sols renforcés (méthodes directes et homogénéisation) permettant une étude rigoureuse de problèmes de mécanique des sols [Abdi *et al.*, 1994] [de Buhan et Hassen, 2008] [Gueguin, 2014]. Ils reposent notamment sur la mise en œuvre du calcul à la rupture par la méthode des éléments finis [Pastor et Turgeman, 1976] et sur les améliorations en programmation linéaire et non linéaire permettant d'exprimer le critère

---

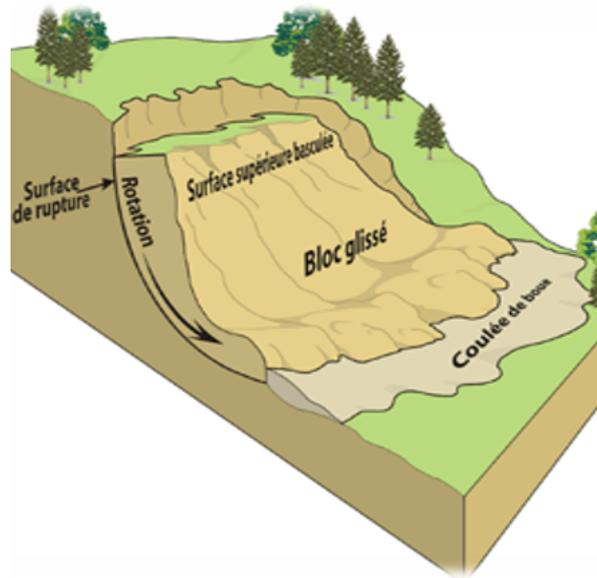
(3). « yield line theory » en anglais

(4). « strip method »

## 1.2. L'approche calcul à la rupture



(a) Glissement de terrain au Canada (photo par R. Couture)



(b) Mécanisme de bloc en rotation

FIGURE 1.9 – Compréhension de la stabilité d'un sol par le calcul à la rupture

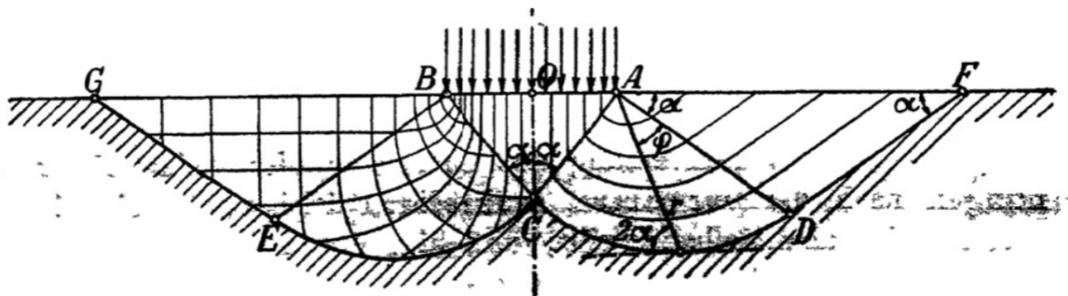


FIGURE 1.10 – Capacité portante d'un sol (Figure de [Prandtl, 1920])

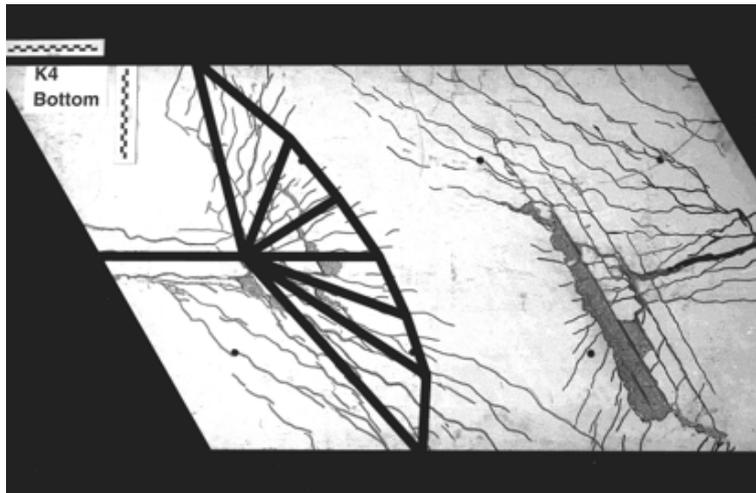


FIGURE 1.11 – Méthode des lignes de rupture

de résistance des matériaux [Sloan, 1988, 1989] [Lyamin et Sloan, 2002] [Krabbenhoft *et al.*, 2005] [Martin et Makrodimopoulos, 2008].

Plusieurs logiciels (Talren<sup>(5)</sup>, Optum G2 et Optum G3<sup>(6)</sup>), basés sur la théorie du calcul à la rupture (ou de l'analyse limite), permettant d'étudier la stabilité de sols (stabilité de pentes, murs et sols renforcés, etc.) ont été développés. Le logiciel Talren est basé sur l'approche cinématique du calcul à la rupture et recherche le mécanisme de ruine de la structure (par des blocs en rotation, les surfaces de discontinuités étant des arcs de cercles ou spirales logarithmiques), permettant ainsi de déterminer un facteur de stabilité. Quant à Optum G2 (2D) et Optum G3 (3D), la méthode des éléments finis est utilisée pour traiter les deux approches du calcul à la rupture. Nous parlerons à nouveau dans cette thèse de ce logiciel avec lequel nous comparerons des résultats.

Plus récemment, dans le domaine du calcul à la rupture des structures de type poutre, plaque ou coque, les approches statique et cinématique du calcul à la rupture ont été mises en œuvre numériquement par la méthode des éléments finis. Les travaux de Bleyer permettent de prendre en compte l'effort tranchant en plus de la résistance en flexion pour l'étude de plaques épaisses ([Bleyer et de Buhan, 2014c] pour l'approche statique et [Bleyer *et al.*, 2015a] pour l'approche cinématique). Ce travail a ensuite été étendu aux coques en combinant des éléments finis de plaque en flexion avec des éléments finis de membrane et en formulant le critère d'interaction à l'aide de contraintes coniques [Bleyer et de Buhan, 2014a,b] (cadre propice à la programmation conique du second ordre<sup>(7)</sup>). Enfin, combinant homogénéisation et approximation numérique du critère de résistance, la capacité de plaques minces hétérogènes périodiques en flexion peut être

---

(5). [www.terrasol.fr](http://www.terrasol.fr)

(6). [www.optumce.com](http://www.optumce.com)

(7). Second-Order Cone Programming (SOCP) en anglais

### 1.3. Contexte industriel de la thèse

---

évaluée [Bleyer *et al.*, 2015c].

Les travaux de thèse d’Averbuch [1996] ont permis de mettre au point une méthode de dimensionnement à l’État Limite Ultime des structures en béton armé bidimensionnelles (poutres épaisses en contrainte plane) basée sur le calcul à la rupture. La méthode développée permet de prendre en compte l’effort tranchant et s’appuie sur la méthode d’homogénéisation pour modéliser le matériau composite béton armé : les armatures sont décrites comme des inclusions unidimensionnelles plongées dans un milieu continu bidimensionnel (le béton) [Averbuch et de Buhan, 1999]. La résolution numérique du problème dans le cadre de la méthode des éléments finis est réalisée par programmation linéaire aussi bien dans le cadre de l’approche statique que de l’approche cinématique.

La généralisation au cas plus réaliste où les inclusions unidirectionnelles sont plongées dans un milieu continu tridimensionnel (modélisation mixte 1D-3D) est délicate, générant des concentrations de contrainte non réalistes et une forte dépendance au maillage. Nous verrons plus en détails les raisons de cette incompatibilité dans ce manuscrit. On pourrait alors modéliser les armatures comme un milieu continu tridimensionnel également. Cependant, en vue d’une résolution par la méthode des éléments finis, la différence notoire d’échelle entre les diamètres usuels d’armatures et la taille des structures dans lesquelles elles sont plongées contraindrait à des maillages très fins ce qui engendrerait un coût numérique exorbitant. Bien que cette solution permette de modéliser les armatures le plus « fidèlement » possible, dans l’optique de traiter des structures massives en béton armé, elle ne semble pas abordable du point de vue du coût de calcul.

Pour contourner ce problème, Llau *et al.* [2016] proposent une méthode dans le cadre d’une résolution par éléments finis où un volume équivalent est créé à partir de l’inclusion 1D et relié au volume 3D par des conditions cinématiques. Les travaux de Nielsen sur les disques de béton armé (présentés dans l’ouvrage [Nielsen et Hoang, 2010]) sont proches de la méthode d’homogénéisation, utilisée par Figueiredo *et al.* [2013] dans un problème d’élasto-plasticité en béton armé. Cette méthode, initialement développée pour des sols renforcés sera utilisée pour modéliser les armatures et sera présentée en détail dans ce manuscrit.

### 1.3 Contexte industriel de la thèse

Après la seconde guerre mondiale, la France a dû être en grande partie reconstruite. La forte demande de constructions nouvelles à laquelle s’est ajouté le faible coût des matériaux à l’époque n’ont poussé ni à l’économie de matière ni à l’optimisation structurale. La fiabilité des constructions et leur fonctionnalité ont été préférées. Cette période de croissance dans la construction a été suffisamment soutenue pour fortement influencer les méthodes d’ingénierie. Les méthodes numériques se sont alors peu à peu introduites

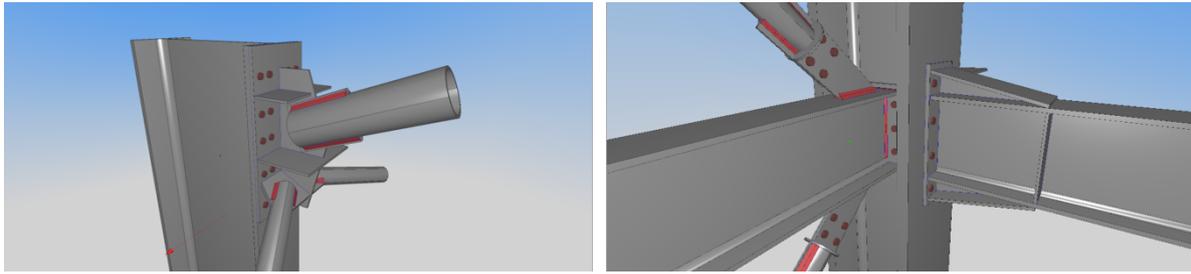


FIGURE 1.12 – Assemblage métallique conçu dans l’interface de DS-Steel

dans le secteur du génie civil. La consommation de matériaux n’étant toujours pas une problématique à ce moment là (faible coût et manque d’intérêt public pour l’environnement) les logiciels développés répondent alors simplement à un besoin d’efficacité en vue de permettre aux ingénieurs structure de concevoir rapidement, tout en restant sécuritaire. Afin de répondre à ces deux problématiques, les logiciels considèrent le matériau structural comme étant élastique (et de résistance égale à la limite d’élasticité), réduisant alors fortement ses capacités et possibilités structurales et conduisant à des marges sécuritaires très importantes.

Les logiciels ainsi développés mettent alors l’accent sur la capacité à réaliser tout un projet « en un clic » : de la vérification réglementaire avec production de note de calcul, à la réalisation de plans de ferrailage.

Aujourd’hui le paysage a changé. D’un côté, les constructions vieillissantes vont devoir être réévaluées (comme c’est déjà le cas pour les centrales nucléaires) afin d’assurer leur stabilité ou d’engager des travaux de réhabilitation si nécessaire. De l’autre, le coût des matériaux n’étant plus négligeable dans un projet de construction comme il pouvait l’être autrefois, il existe un intérêt grandissant pour l’optimisation structurale et l’économie de matériaux (développement durable).

Partant de ce constat, la société STRAINS se propose donc de développer de nouveaux logiciels de simulation numérique pour l’étude de structures du génie civil, afin de remplacer les méthodes de calcul utilisées aujourd’hui dans le secteur (datant des années 1980 ou 1990), qui ne permettent plus de répondre aux problématiques actuelles.

Dans cette quête, STRAINS<sup>(8)</sup> a commencé par développer un premier logiciel de calcul de la capacité ultime de structures en *acier* : *DS-Steel*. Ce logiciel, basé sur le calcul à la rupture et sur une CAO spécialement dédiée (CAO orientée « métier »), permet de concevoir et calculer des assemblages de charpentes métalliques complexes (boulonnés, soudés, en contact) en 3D (voir Figure 1.12). Le but est de développer un logiciel simple d’utilisation, capable de délivrer rapidement des résultats clairs permettant à l’ingénieur

---

(8). [www.strains.fr](http://www.strains.fr)

## 1.4. Organisation du manuscrit

---

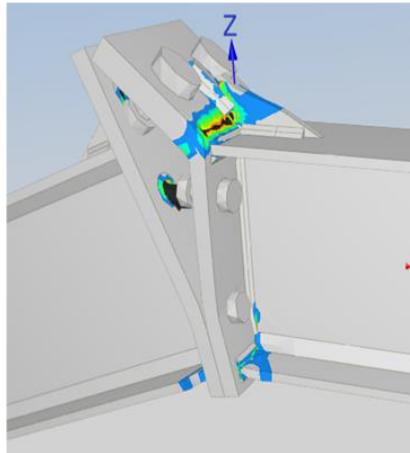


FIGURE 1.13 – Visualisation de résultats d’un assemblage métallique dans l’interface de DS-Steel

de comprendre le comportement de la structure étudiée à la rupture (voir un mécanisme de ruine sur la Figure 1.13).

STRAINS développe également un logiciel pour l’analyse structurelle de ponts. Alors que beaucoup de logiciels de calcul de structure de ponts existent aujourd’hui, la plupart reposent sur une modélisation par éléments de poutres (éléments 1D), ne permettant pas de représenter de manière réaliste le comportement des ouvrages. Un modèle volumique (3D) global d’un pont étant évidemment numériquement trop coûteux, l’étude *locale* d’éléments de structure particuliers permet de compléter l’étude *globale* réalisée avec les éléments de poutre.

Les travaux démarrés par Ferradi *et al.* [2016] et prolongés par Corre [2018] visent ainsi à développer un élément de poutre avec une cinématique enrichie capable de capter des phénomènes dans le plan transversal (gauchissement par exemple), permettant ainsi d’obtenir des résultats similaires à un modèle volumiques mais à moindre coût.

## 1.4 Organisation du manuscrit

Le renouvellement des logiciels de simulation numérique pour le calcul de structure est donc nécessaire pour les ingénieurs du génie civil afin de répondre aux problématiques actuelles. Les difficultés liées à la modélisation du comportement du béton et son traitement numérique ont été évoquées. Les possibilités offertes par le calcul à la rupture ont déjà été montrées en géotechnique ou en maçonnerie, mais également pour traiter les structures métalliques 3D. Le calcul à la rupture a aussi été utilisé récemment pour l’étude de structures *bidimensionnelles* en béton armé (plaques, coques, poutres

en contraintes planes) tirant profit d'avancées majeures dans les méthodes de résolution numérique ces dernières années. La thèse qui s'ouvre ici vise à développer un modèle de calcul de la capacité ultime d'éléments de structures massives (3D) en béton armé. Le fruit de ce travail constituera le cœur de calcul du logiciel *DS-Concrete* développé par STRAINS. La thèse a été réalisée dans le cadre d'un partenariat entre le laboratoire Navier et la société STRAINS (contrat CIFRE<sup>(9)</sup>).

Le *Chapitre 2* permettra de présenter les outils théoriques permettant de répondre à la question du dimensionnement de structures en béton armé. La théorie du calcul à la rupture, constituée de deux approches (approche statique et approche cinématique), sera donc présentée en détail et nous verrons comment appliquer cette théorie au cas particulier du béton armé. Nous discuterons également du critère permettant de rendre compte de la résistance du béton. Nous en proposerons deux : le critère de Rankine et le critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction. Nous verrons quelles sont les différences entre les deux ainsi que les avantages et les inconvénients de chacun. Le type de modélisation pour prendre en compte les armatures sera ensuite présenté. Nous avons déjà évoqué les limites d'une modélisation 1D des armatures dans un volume 3D ainsi que le coût numérique engendré par une modélisation 3D des armatures. Dans le cas d'une disposition périodique du renforcement, nous utiliserons la méthode d'homogénéisation consistant à remplacer le matériau composite béton-armé par un matériau homogène équivalent. Dans le cas d'une disposition non périodique du renforcement, nous verrons comment adapter la méthode d'homogénéisation. Quant au critère de résistance des armatures, il est formulé très simplement et porte sur la résistance uniaxiale de l'acier.

Le *Chapitre 3* servira à mettre en œuvre numériquement tous les concepts et outils fondamentaux présentés dans le Chapitre 2. Nous montrerons, successivement, comment implémenter chacune des deux approches du calcul à la rupture. Nous commencerons par l'approche statique du calcul à la rupture. Dans un premier temps, la formulation générale de l'approche statique du calcul à la rupture sera rappelée avant d'exposer le problème dans le cas où le système étudié est discrétisé en éléments finis. Le type d'éléments finis, l'interpolation, le nombre de variables à chaque sommet, ainsi que les contraintes imposées seront expliqués. Puis, la formulation numérique des critères sera présentée. Il sera intéressant de voir la mise en œuvre de l'homogénéisation en calcul à la rupture. Ce même travail a été effectué pour l'approche cinématique du calcul à la rupture et nous le présenterons ensuite.

Nous verrons comment les deux approches du calcul à la rupture peuvent être mises sous la forme de problème d'optimisation mathématique. L'approche statique du calcul à la rupture est mise sous la forme d'un problème de *maximisation* et l'approche cinématique du calcul à la rupture sous la forme d'un problème de *minimisation*. Les deux problèmes posés numériquement peuvent alors être résolus par un solveur de program-

---

(9). conventions industrielles de formation par la recherche

## 1.4. Organisation du manuscrit

---

mation semi-définie positive.

Pour clore ce chapitre, nous avons décidé de traiter quelques exemples simples afin d'illustrer le travail mis en place. Nous commencerons par un exemple qui a été traité analytiquement dans le Chapitre 2 et qui permet de pointer du doigt certaines différences entre les deux critères modélisant la résistance du béton. Les différences mises en lumière sur cet exemple porteront à la fois sur la capacité ultime estimée, que sur les résultats obtenus en terme de champs optimisés. Puis, nous traiterons un exemple permettant d'illustrer et de valider la technique d'homogénéisation dans le cas d'armatures isolées.

Enfin, le *Chapitre 4* sera consacré aux applications. Les différents exemples choisis permettront de mettre en avant l'efficacité de la méthode développée. Une première section réunira les exemples de structures non renforcés, dans laquelle deux exemples seront traités. Dans une deuxième section seront présentés les résultats sur des structures en béton armé. Nous nous efforcerons de comparer au maximum les résultats avec d'autres travaux ou avec d'autres logiciels lorsque cela est possible. L'estimation de la capacité ultime des structures traitées, obtenue par les deux approches du calcul à la rupture, ainsi que les différents champs de résultats obtenus seront présentés pour chaque exemple.

\*       \*  
\*  
\*  
\*



# Chapitre 2

## Approche par le calcul à la rupture du dimensionnement des ouvrages massifs en béton armé : fondements théoriques

**Résumé :** Les différents outils nécessaires à la résolution d'un problème de dimensionnement d'ouvrages massifs en béton armé par le calcul à la rupture sont présentés. Les approches statique et cinématique du calcul à la rupture sont bien évidemment introduites avant de discuter des critères de résistance permettant de modéliser d'un côté le béton et de l'autre les armatures. Enfin, la méthode d'homogénéisation, permettant de prendre en compte les armatures dans le matériau béton-armé et présentée.

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>21</b>
<b>2.2</b>	<b>Principe général du calcul à la rupture</b>	<b>22</b>
2.2.1	Cadre du problème de calcul à la rupture	22
2.2.2	Domaine des chargements potentiellement supportables	23
2.2.3	L'approche statique du calcul à la rupture	23
2.2.4	L'approche cinématique du calcul à la rupture	24
<b>2.3</b>	<b>Critères de résistance des éléments constitutifs du béton armé</b>	<b>26</b>
2.3.1	Choix du critère de résistance du béton : Rankine ou Mohr-Coulomb tronqué en traction	27
2.3.2	Analyse comparée des deux critères	32
2.3.3	Critère de résistance des armatures et de l'interface béton-armatures	35
<b>2.4</b>	<b>Modélisation mixte du composite « béton armé »</b>	<b>36</b>
2.4.1	Le principe de modélisation mixte	37
2.4.2	Efforts intérieurs et équations d'équilibre	37
2.4.3	Les limites de la modélisation mixte	39
<b>2.5</b>	<b>La modélisation multiphasique comme alternative : le cas périodique</b>	<b>40</b>

---

## Calcul à la rupture pour le dimensionnement : fondements théoriques

---

2.5.1	Principe de la modélisation multiphasique . . . . .	41
2.5.2	Modèle multiphasique et calcul à la rupture . . . . .	42
<b>2.6</b>	<b>Cas de l'adhérence parfaite entre phases : la méthode d'homogénéisation . . . . .</b>	<b>43</b>
2.6.1	Critère de résistance macroscopique du béton armé . . . . .	43
2.6.2	Représentation du critère dans le plan de Mohr et calcul des fonctions d'appui . . . . .	44
2.6.3	Une application illustrative simple . . . . .	46
<b>2.7</b>	<b>Extension de la modélisation multiphasique au cas d'une répartition quelconque des inclusions . . . . .</b>	<b>50</b>
2.7.1	Principe de la procédure d'homogénéisation étendue . . . . .	50
2.7.2	Formulation des approches statique et cinématique du problème de calcul à la rupture homogénéisé . . . . .	52

---

# 2.1 Introduction

Le présent chapitre a pour objectif d'établir les concepts et outils fondamentaux permettant d'aborder la question du dimensionnement aux États Limites Ultimes des ouvrages massifs en béton armé comme un problème relevant du cadre théorique du Calcul à la Rupture dont les fondements sont rappelés dans la section 2.2. Dans ce contexte, et en préalable à toute simulation numérique du problème, deux points importants méritent d'être plus particulièrement approfondis : la définition des propriétés de résistance des constituants du béton armé d'une part et le choix de la modélisation mécanique du composite béton armé d'autre part.

La section 2.3 de ce chapitre est consacrée au choix des critères permettant de rendre compte des capacités de résistance du béton seul, des armatures de renforcement, mais aussi de l'adhérence entre le béton et les armatures. Deux critères de résistance du béton sont proposés et explicités pour différents états de contrainte tridimensionnels : le critère de Rankine (R) et celui de Mohr-Coulomb tronqué en traction (MCT), ces deux critères étant construits à partir des valeurs mesurées de la résistance en traction et en compression simple du béton. Une analyse comparative est alors effectuée, d'où il ressort que si le premier critère est plus simple d'utilisation que le second, il semble peu réaliste pour décrire la résistance du béton sous sollicitations de compression isotrope. Les fonctions d'appui de ces deux critères, nécessaires à la mise en œuvre de l'approche cinématique du calcul à la rupture, sont par ailleurs explicitées.

Le second volet de ce chapitre (sections 2.4 à 2.6) concerne le type de modélisation qu'il convient d'adopter pour décrire le comportement du composite béton armé dans un cadre mécanique cohérent. Partant du constat des limites de la modélisation mixte 1D-3D, où les armatures de renforcement sont schématisées comme des éléments de structures *unidimensionnels* plongés dans une matrice (béton) *tridimensionnelle*, une modélisation multiphasique est proposée qui s'applique à la configuration d'un béton renforcé par une distribution périodique et dense d'armatures parallèles. Dans l'hypothèse d'une adhérence parfaite entre béton et armatures, cette modélisation débouche sur une technique d'homogénéisation et la définition corrélative d'un *critère de résistance macroscopique* anisotrope pour le béton armé. Ce critère peut être très simplement déterminé à partir de celui du béton seul et des résistances en traction-compression des armatures par unité de surface transversale.

La section 2.7 traite enfin du cas (fréquent) où les inclusions de renforcement ne sont pas réparties au sein du béton selon un réseau dense et périodique, ne permettant pas d'appliquer la modélisation multiphasique ou la méthode d'homogénéisation évoquée ci-dessus. Une approche originale (récemment développée par certains auteurs [Figueiredo *et al.*, 2013]), utilisée dans le cas d'analyses élastoplastiques de poutres en béton armé, est ici reprise dans le cadre du calcul à la rupture. Elle permet de contourner les

difficultés inhérentes à la modélisation mixte 1D-3D en proposant une extension de la modélisation multiphasique ou de la méthode d'homogénéisation en vue de faciliter le traitement numérique du problème qui fera l'objet des chapitres suivants.

## 2.2 Principe général du calcul à la rupture

Avant toute chose, il convient de rappeler le principe général de la théorie du calcul à la rupture ([Salençon, 1983], [de Buhan, 2007] [Salençon, 2013]). En effet, le calcul à la rupture est la méthode que nous avons choisie pour résoudre des problèmes de dimensionnement à la ruine de structures massives en béton armé. Nous distinguerons provisoirement par la notation symbolique  $\Sigma$  les *efforts intérieurs* à un système mécanique, que celui-ci soit modélisé comme un milieu continu 3D, une armature 1D ou une interface.

### 2.2.1 Cadre du problème de calcul à la rupture

Afin de présenter la théorie du calcul à la rupture, nous étudions un système mécanique dont la géométrie est définie par son domaine  $\Omega$  et son bord  $\partial\Omega$  et pour lequel nous cherchons à déterminer le chargement maximal qui peut lui être appliqué. La théorie du calcul à la rupture peut être utilisée si nous faisons l'hypothèse de petites perturbations, ce qui veut dire que la géométrie initiale  $\Omega$  peut être confondue avec la géométrie actuelle du système étudié (les changements de géométrie sont négligés).

Le système est soumis à des efforts qui peuvent être surfaciques sur le bord  $\partial\Omega$  ou volumiques dans  $\Omega$ . Le chargement à  $n$  paramètres auquel est soumis le système est représenté par le vecteur  $\underline{Q} = (Q_i, i = 1, \dots, n)$ .

Le critère de résistance du matériau constitutif de  $\Omega$  est défini en tout point  $\underline{x}$  de la structure par :

$$f(\Sigma(\underline{x})) \leq 0 \Leftrightarrow \Sigma(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad (2.1)$$

où  $G(\underline{x})$  représente le domaine de résistance en ce point, constitué de l'ensemble des états de contrainte  $\Sigma(\underline{x})$  admissibles. Nous admettons que ce domaine contient l'origine :

$$\Sigma(\underline{x}) = 0 \in G(\underline{x}) \quad (2.2)$$

et possède la propriété de *convexité* :

$$\forall \Sigma_1(\underline{x}), \Sigma_2(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \Rightarrow (1 - \lambda)\Sigma_1(\underline{x}) + \lambda\Sigma_2(\underline{x}) \in G(\underline{x}), \quad \forall \lambda \in [0; 1], \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2.3)$$

## 2.2. Principe général du calcul à la rupture

---

### 2.2.2 Domaine des chargements potentiellement supportables

On définit le domaine  $K$ , des chargements potentiellement supportables par le système, comme l'ensemble des chargements  $\underline{Q}$  tels qu'il existe un champ d'efforts intérieurs  $\underline{\Sigma}(\underline{x})$  statiquement admissible (S.A.) avec  $\underline{Q}$  et vérifiant le critère de résistance, en tout point de  $\Omega$  :

$$\underline{Q} \in K \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\Sigma}(\underline{x}) \text{ S.A. avec } \underline{Q} & (\text{Équilibre}) \\ \underline{\Sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega & (\text{Résistance}) \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $G(\underline{x})$  représente le domaine de résistance du matériau (le critère) en tout point  $\underline{x}$ .

Pour qu'un champ  $\underline{\Sigma}$  soit statiquement admissible, les conditions d'équilibre local, les conditions aux limites en efforts appliqués au problème, ainsi que les équations de saut, au travers d'éventuelles surfaces de discontinuités, doivent être respectées.

L'*Analyse Limite* est une méthode, au même titre que le *Calcul à la Rupture*, qui permet de déterminer les chargements limites applicables au système étudié par raisonnement de compatibilité équilibre-critère, dans l'hypothèse où la loi de comportement de la structure étudiée est du type élastique parfaitement plastique avec règle d'écoulement associée. Dans le cas où l'on ne dispose d'aucune autre information sur le comportement de la structure que le critère de résistance, la généralisation de ce raisonnement devient alors un raisonnement de *Calcul à la Rupture*, les charges *limites* étant appelées charges *extrêmes*, situées sur la frontière du domaine  $K$ , domaine des chargements *potentiellement* supportables. L'adverbe « *potentiellement* » vise à signifier que, hormis dans le cas particulier où le critère de résistance est un critère de plasticité parfaite, on n'est nullement assuré que le chargement extrême déterminé par le raisonnement de calcul à la rupture soit effectivement atteint. C'est-à-dire que la présomption de stabilité issue du calcul à la rupture devient certaine uniquement dans les conditions particulières de l'analyse limite. En revanche, le calcul à la rupture permet de conclure de façon certaine, que les chargements situés à l'*extérieur* de  $K$ , ne peuvent en aucun cas être supportés [de Buhan, 2007].

### 2.2.3 L'approche statique du calcul à la rupture

L'approche statique par l'intérieur du calcul à la rupture consiste tout simplement à appliquer la définition du domaine des chargements potentiellement supportables  $K$  (équation (2.4)), c'est-à-dire à chercher par tous les moyens (analytiques ou numériques) à mettre en évidence un champ d'efforts intérieurs  $\underline{\Sigma}$  en équilibre avec le chargement  $\underline{Q}$ , tout en satisfaisant le critère de résistance en tout point.

Le chargement  $\underline{Q}$  équilibré par ce champ appartient alors au domaine  $K$  des charge-

ments potentiellement supportables. L'*enveloppe convexe*  $K^{stat}$  de tous les chargements dont on a pu montrer leur appartenance à  $K$ , est alors incluse dans  $K$ , d'où la dénomination d'approche par l'intérieur (voir représentation géométrique du domaine  $K^{stat}$  sur la Figure 2.1).

Dans le cas d'un seul paramètre de chargement positif, le chargement maximal obtenu par cette approche statique, constitue donc un *minorant* du chargement extrême de la structure.

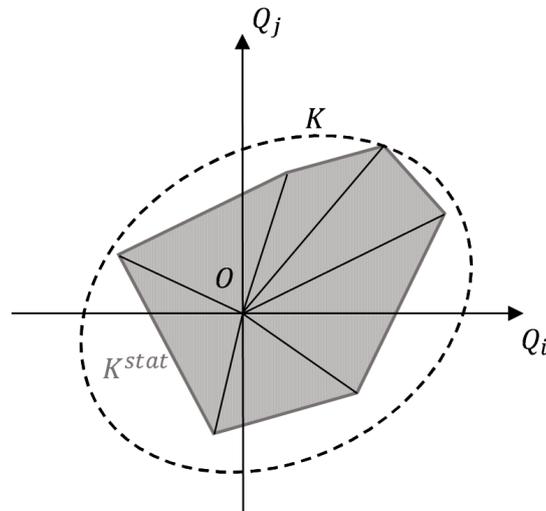


FIGURE 2.1 – Représentation de l'approximation du domaine des chargements potentiellement supportables par l'approche statique par l'intérieur

### 2.2.4 L'approche cinématique du calcul à la rupture

L'approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture consiste à obtenir une approximation par l'extérieur du chargement extrême (*majoration*) et ce en identifiant les chargements n'appartenant pas au domaine des chargements potentiellement supportables  $K$ .

#### 2.2.4.1 Principe des puissances virtuelles

En considérant toujours un champ d'efforts intérieurs  $\Sigma$  et en introduisant un champ de vitesse *virtuelle*  $\mathbf{U}$ , respectivement supposés statiquement admissible (S.A.) avec le chargement et cinématiquement admissible (C.A.) avec les conditions aux limites en vitesse appliquées sur le bord  $\partial\Omega$ , la puissance virtuelle des efforts extérieurs dans ce

## 2.2. Principe général du calcul à la rupture

---

champ de vitesse s'écrit :

$$P_e(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{U}) = \underline{Q}(\boldsymbol{\Sigma}) \cdot \underline{\dot{q}}(\mathbf{U}) \quad (2.5)$$

où  $\underline{\dot{q}}(\mathbf{U})$  est un vecteur des paramètres cinématiques généralisés, associé par dualité au vecteur de chargement à  $n$  paramètres du système  $\underline{Q}$ .

Le principe des puissances virtuelles permet de dualiser les équations d'équilibre du système (approche statique) en écrivant l'égalité de la puissance virtuelle des efforts extérieurs  $P_e$  et de la puissance virtuelle de déformation  $P_d$  :

$$\boldsymbol{\Sigma} \text{ S.A. avec } \underline{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \mathbf{U} \text{ C.A. avec } \underline{\dot{q}}(\mathbf{U}) \\ P_e(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{U}) = \underline{Q}(\boldsymbol{\Sigma}) \cdot \underline{\dot{q}}(\mathbf{U}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{D} \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \llbracket \mathbf{U} \rrbracket \, dS = P_d(\mathbf{U}) \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $\llbracket \mathbf{U} \rrbracket$  est la discontinuité du champ de vitesse à la traversée d'une surface de discontinuité  $\Gamma$ ,  $\mathbf{D}$  représente le taux de déformation virtuelle généralisée associé par dualité aux efforts intérieurs généralisés et  $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \underline{n}$  est le vecteur contrainte appliqué sur la surface  $\Gamma$  de normale  $\underline{n}$ .

### 2.2.4.2 Notion de Puissance résistante maximale

La valeur maximale de la puissance de déformation  $P_d$ , appelée *puissance résistante maximale*, est notée  $P_{rm}$ . En reprenant l'expression du principe des puissances virtuelles (équation (2.6)), la puissance résistante maximale peut s'écrire :

$$P_{rm}(\mathbf{U}) = \int_{\Omega} \pi(\mathbf{D}) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \pi(\underline{n}; \llbracket \mathbf{U} \rrbracket) \, dS \quad (2.7)$$

où les fonctions  $\pi$  sont les *fonctions d'appui* du domaine de résistance  $G$ , sont définies comme suit :

$$\pi(\mathbf{D}) = \sup_{\boldsymbol{\Sigma} \in G} \{ \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{D} \} \quad (2.8)$$

pour la fonction d'appui liée au taux de déformation et :

$$\pi(\underline{n}; \llbracket \mathbf{U} \rrbracket) = \sup_{\boldsymbol{\Sigma} \in G} \{ (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \llbracket \mathbf{U} \rrbracket \} \quad (2.9)$$

pour la fonction d'appui liée à la discontinuité du champ de vitesse.

À partir des équations (2.4) et (2.6) à (2.9), il apparait que la puissance virtuelle d'un chargement *potentiellement supportable*  $\underline{Q}$  dans un champ de vitesse virtuelle cinématiquement admissible  $\mathbf{U}$ , est majorée par cette puissance résistante maximale :

$$\underline{Q} \in K \Leftrightarrow \forall \mathbf{U} \text{ C.A. avec } \underline{\dot{q}}, \quad \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} \leq P_{rm}(\mathbf{U}) \quad (2.10)$$

L'équation  $\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} = P_{rm}(\underline{U})$  correspond à un hyperplan délimitant un demi-espace incluant  $K$  et l'origine. En dualité avec l'approche statique par l'intérieur, l'ensemble de tous les hyperplans associés à l'ensemble des champs de vitesse virtuelle respectant (2.10) constituent une enveloppe convexe  $K^{cin}$  incluant le domaine  $K$ . L'interprétation géométrique du domaine  $K^{cin}$  est donnée sur la Figure 2.2. L'approche cinématique permet donc bien d'approcher *par l'extérieur* le domaine des chargements potentiellement supportables. Dans le cas d'un seul paramètre de chargement, cette approche permet d'obtenir une majoration du chargement extrême appliqué au système.

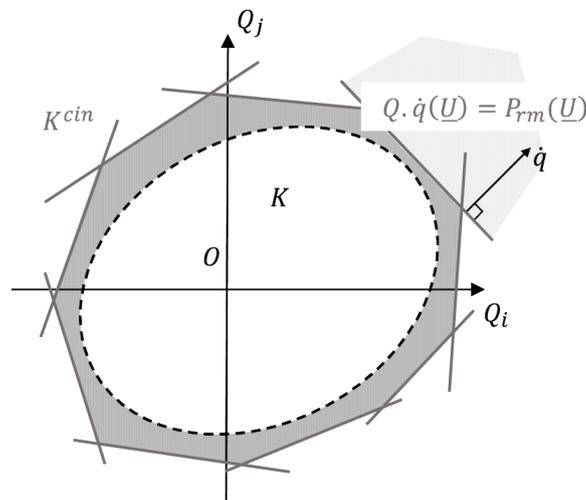


FIGURE 2.2 – Représentation de l'approximation du domaine des chargements potentiellement supportables par l'approche cinématique par l'extérieur

### 2.3 Critères de résistance des éléments constitutifs du béton armé

Le béton armé est un matériau composite dont il convient de définir au préalable les propriétés de résistance à travers la définition d'un critère de résistance caractérisant chacun de ses deux composants, le béton et les armatures de renforcement, mais également l'interface entre le béton et les armatures.

## 2.3. Critères de résistance des éléments constitutifs du béton armé

### 2.3.1 Choix du critère de résistance du béton : Rankine ou Mohr-Coulomb tronqué en traction

#### 2.3.1.1 Critère de Rankine

Il s'agit du critère le plus simple, basé sur la connaissance de deux paramètres de résistance classiques du béton : la résistance en compression simple (c'est-à-dire pour une sollicitation uniaxiale de compression), notée  $f_c$  et la résistance en traction simple, notée  $f_t$ . Ce critère stipule que les contraintes principales en tout point doivent rester dans l'intervalle formé par les résistances en traction et en compression simple, soit :

$$f^R(\underline{\sigma}) \leq 0 \Leftrightarrow -f_c \leq \sigma_m \leq \sigma_M \leq f_t \quad (2.11)$$

où  $\sigma_m$  (respectivement  $\sigma_M$ ) désigne la contrainte principale mineure (respectivement majeure).

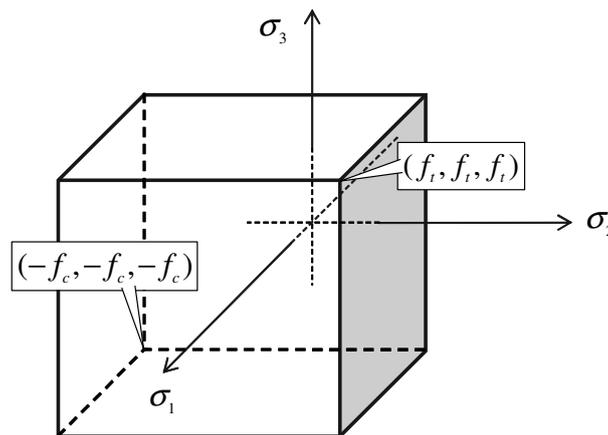


FIGURE 2.3 – Représentation du critère de Rankine dans l'espace des contraintes principales

Ce critère, *isotrope*, est représenté dans l'espace des contraintes principales par le domaine cubique défini par

$$-f_c \leq \sigma_i \leq f_t, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.12)$$

et représenté sur la Figure 2.3.

Ce critère peut également être représenté par l'intermédiaire d'une *courbe intrinsèque tracée* dans le *plan de Mohr*  $(\sigma, \tau)$  comme l'enveloppe des cercles de Mohr représentatifs des états de contrainte vérifiant le critère écrit sous la forme (2.11) ou (2.12). Cette

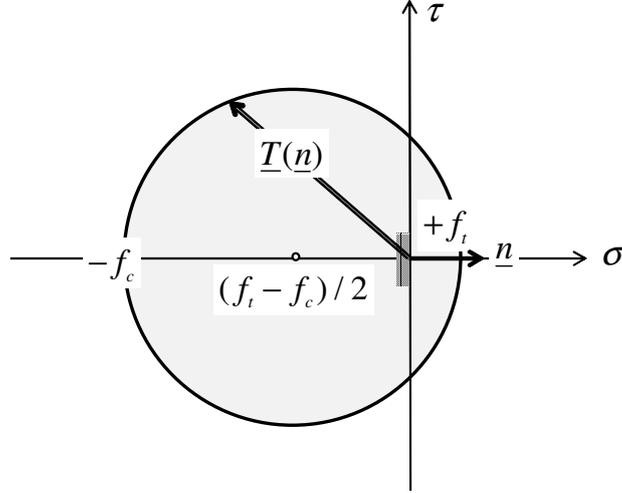


FIGURE 2.4 – Courbe intrinsèque relative au critère de Rankine

courbe intrinsèque n'est par conséquent autre que le cercle centré sur l'axe des  $\sigma$  et dont les points d'intersection avec cet axe ont pour abscisses  $-f_c$  et  $+f_t$  (Figure 2.4). Son équation s'écrit :

$$\left[ (\sigma - (f_t - f_c)/2)^2 + \tau^2 \right]^{1/2} = \frac{f_t + f_c}{2} \quad (2.13)$$

Dans la perspective de mettre en œuvre l'approche cinématique du *Calcul à la Rupture* utilisant un tel critère, il convient de calculer préalablement les *fonctions d'appui* de ce critère, relatives à un taux de déformation et à une discontinuité de vitesse.

✓ Calcul de  $\pi^R(\underline{d})$

La définition de la fonction d'appui relative à un taux de déformation (virtuelle)  $\underline{d}$  s'écrit :

$$\pi^R(\underline{d}) = \sup \{ \underline{\sigma} : \underline{d}, f^R(\underline{\sigma}) \leq 0 \} \quad (2.14)$$

Le critère de résistance étant *isotrope*, on peut montrer que le maximum du produit  $\underline{\sigma} : \underline{d}$  est atteint lorsque  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{d}$  ont mêmes *directions principales*, de sorte que :

$$\begin{aligned} \pi^R(\underline{d}) &= \sup \left\{ \sum_{k=1}^3 \sigma_k d_k; -f_c \leq \sigma_k \leq f_t \right\} = \sum_{k=1}^3 \{ \sigma_k d_k; -f_c \leq \sigma_k \leq f_t \} \\ &= \sum_{k=1}^3 \sup \{ -f_c d_k, +f_t d_k \} \end{aligned} \quad (2.15)$$

### 2.3. Critères de résistance des éléments constitutifs du béton armé

✓ Calcul de  $\pi^R(\underline{n}; \underline{V})$

Étant donnée une *discontinuité de vitesse* (virtuelle)  $\underline{V} = \llbracket \underline{U} \rrbracket$  à la traversée d'une surface de normale unitaire  $\underline{n}$ , on définit la fonction d'appui relative à cette discontinuité comme suit :

$$\pi^R(\underline{n}; \underline{V}) = \sup\{(\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{V}, f^R(\underline{\sigma}) \leq 0\} \quad (2.16)$$

qui peut être réécrite :

$$\pi^R(\underline{n}; \underline{V}) = \pi^R(\underline{\underline{\delta}} = \underline{n} \otimes^s \underline{V}) \quad (2.17)$$

où  $\underline{n} \otimes^s \underline{V} = 1/2(\underline{n} \otimes \underline{V} + \underline{V} \otimes \underline{n})$ . Soit en tenant compte de (2.15) :

$$\pi^R(\underline{n}; \underline{V}) = \sum_{k=1}^3 \sup\{-f_c \delta_k; +f_t \delta_k\} \quad (2.18)$$

où  $\delta_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  désignent les valeurs principales de  $\underline{\underline{\delta}}$ . Ce dernier tenseur pouvant être réécrit :

$$\underline{\underline{\delta}} = \underline{n} \otimes^s \underline{V} = V_n \underline{n} \otimes \underline{n} + V_t \underline{n} \otimes^s \underline{t} \quad (2.19)$$

où le vecteur unitaire  $\underline{t}$  tangent à la surface de discontinuité est défini comme indiqué sur la Figure (2.5).

La matrice des composantes de  $\underline{\underline{d}}$  dans le repère orthonormé  $(\underline{n}, \underline{t}, \underline{n} \wedge \underline{t})$  ayant pour expression :

$$\underline{\underline{\delta}} = \begin{bmatrix} V_n & V_t/2 & 0 \\ V_t/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } V_n = \underline{V} \cdot \underline{n} \text{ et } V_t = \underline{V} \cdot \underline{t} \quad (2.20)$$

ses composantes principales valent :

$$\delta_1 = \frac{V_n + |\underline{V}|}{2} \geq 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = \frac{V_n - |\underline{V}|}{2} \leq 0, |\underline{V}| = \sqrt{V_n^2 + V_t^2} \quad (2.21)$$

et par conséquent en vertu de (2.18) :

$$\pi^R(\underline{n}; \underline{V}) = f_t \left( \frac{|\underline{V}| + V_n}{2} \right) + f_c \left( \frac{|\underline{V}| - V_n}{2} \right) = \frac{f_t + f_c}{2} |\underline{V}| + \frac{f_t - f_c}{2} \underline{V} \cdot \underline{n} \quad (2.22)$$

Il est intéressant de remarquer que ce dernier résultat peut être retrouvé directement à partir de la courbe intrinsèque du critère de *Rankine* qui délimite dans le plan de Mohr l'ensemble des vecteurs contrainte admissibles. En effet :

$$\begin{aligned} \pi^R(\underline{n}; \underline{V}) &= \sup\{(\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{V}; f^R(\underline{\sigma}) \leq 0\} \\ &= \sup\{\underline{T}(\underline{n}) \cdot \underline{V}; \text{ avec } \underline{T} = (\sigma, \tau) \text{ vérifiant (2.13)}\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

d'où (voir Figure 2.5) :

$$\pi^R(\underline{n}; \underline{V}) = \underline{T}^* \cdot \underline{V} = \left[ \frac{f_t - f_c}{2} \underline{n} + \frac{f_t + f_c}{2} \frac{\underline{V}}{|\underline{V}|} \right] \cdot \underline{V} = \frac{f_t + f_c}{2} |\underline{V}| + \frac{f_t - f_c}{2} \underline{V} \cdot \underline{n} \quad (2.24)$$

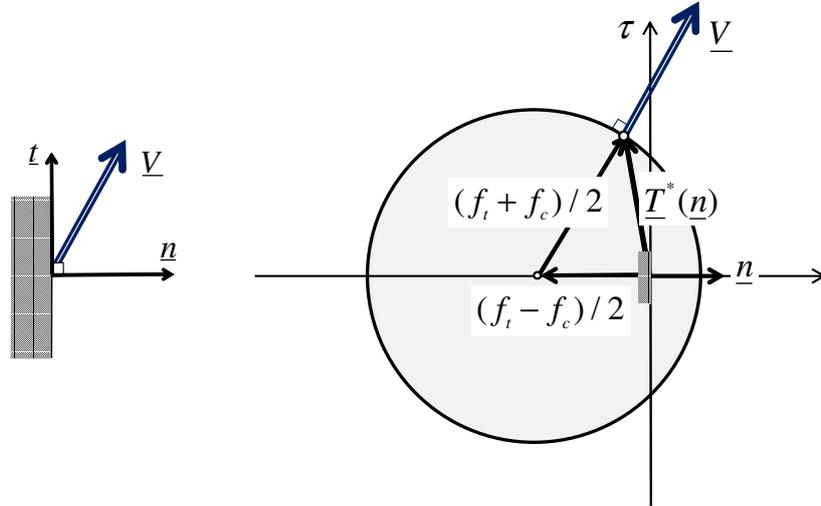


FIGURE 2.5 – Calcul de la fonction  $\pi^R(\underline{n}; \underline{V})$  à partir de la courbe intrinsèque

### 2.3.1.2 Critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction (MCT)

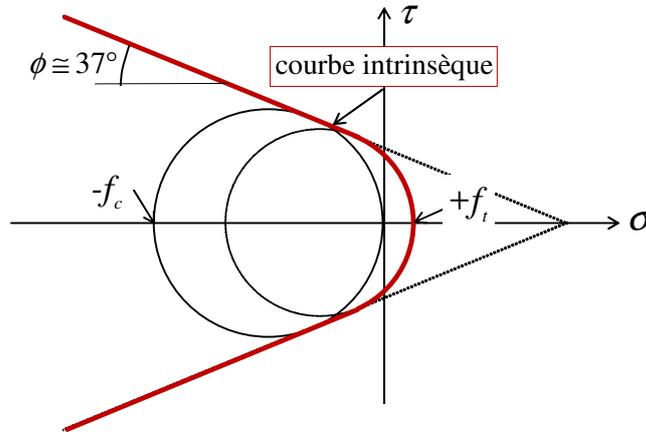


FIGURE 2.6 – Courbe intrinsèque relative au critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction

Ce critère, également retenu par certains auteurs pour décrire les propriétés de résistance tridimensionnelles du béton ([Chen, 1982] [Averbuch et de Buhan, 1999] [Bleyer et al., 2015b]) dépend de trois paramètres de résistance : les résistances en traction et compression simple  $f_c$  et  $f_t$  ainsi que d'un angle de frottement interne  $\phi$ . Tout comme le critère de Rankine, il porte sur les contraintes principales extrêmes :

$$f^{MCT}(\underline{\sigma}) = \sup\{K_p \sigma_M - \sigma_m - f_c; \sigma_M - f_t\} \leq 0 \quad (2.25)$$

où  $K_p = (1 + \sin \phi)/(1 - \sin \phi) = \tan^2(\pi/4 + \phi/2)$ .

### 2.3. Critères de résistance des éléments constitutifs du béton armé

En l'absence d'une évaluation expérimentale spécifique précise de l'angle de frottement, on retient généralement la valeur :

$$\phi \simeq 37^\circ \Rightarrow K_p \simeq 4 \quad (2.26)$$

La Figure 2.6 ci-dessus représente la courbe intrinsèque relative à ce critère, tracée dans le plan de Mohr. Elle fait clairement apparaître les trois paramètres de résistance dont dépend ce critère. Ce critère peut également être représenté dans l'espace des contraintes principales sous la forme d'une pyramide hexagonale d'axe la droite des contraintes isotropes tronquée par les trois plans d'équation  $\sigma_i = f_t$  ([Salençon, 2013]). Les fonctions d'appui de ce critère, nécessaires à la mise en œuvre de l'approche cinématique sont calculées comme suit.

✓ Calcul de  $\pi^{MCT}(\underline{d})$

La fonction d'appui relative à un taux de déformation s'écrit ([Salençon, 2013]) :

$$\pi^{MCT}(\underline{d}) = \begin{cases} \frac{f_c}{2} \left( \sum_{k=1}^3 |d_k| - \text{tr } \underline{d} \right) \\ + \frac{f_t}{1 - \sin \phi} \left( \text{tr } \underline{d} - \sum_{k=1}^3 |d_k| \sin \phi \right) & \text{si } \text{tr } \underline{d} \geq \left( \sum_{k=1}^3 |d_k| \right) \sin \phi \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.27)$$

Dans l'expression ci-dessus, la condition cinématique portant sur le taux de déformation et assurant que la fonction d'appui demeure finie, s'appelle *condition de pertinence*. Elle correspond au fait que, à la différence du critère de Rankine, le domaine de résistance de Mohr-Coulomb tronqué en traction n'est pas borné dans l'espace des contraintes.

✓ Calcul de  $\pi^{MCT}(\underline{n}; \underline{V})$

La démarche permettant le calcul de cette seconde fonction d'appui est identique à celle employée pour le critère de Rankine, puisque :

$$\pi^{MCT}(\underline{n}; \underline{V}) = \pi^{MCT}(\underline{\delta} = \underline{n} \otimes \underline{V}) \quad (2.28)$$

avec l'équation (2.21), d'où :

$$\text{tr } \underline{\delta} = \underline{V} \cdot \underline{n} = V_n \text{ et } \sum_{k=1}^3 |\delta_k| = |\underline{V}| \quad (2.29)$$

et donc en reportant ces dernières expressions dans (2.27) :

$$\pi^{MCT}(\underline{n}; \underline{V}) = \begin{cases} \frac{f_c}{2} \left( |\underline{V}| - \underline{V} \cdot \underline{n} \right) + \frac{f_t}{1 - \sin \phi} \left( \underline{V} \cdot \underline{n} - |\underline{V}| \sin \phi \right) & \text{si } \underline{V} \cdot \underline{n} \geq |\underline{V}| \sin \phi \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.30)$$

Tout comme pour le critère de Rankine, cette fonction d'appui peut être directement

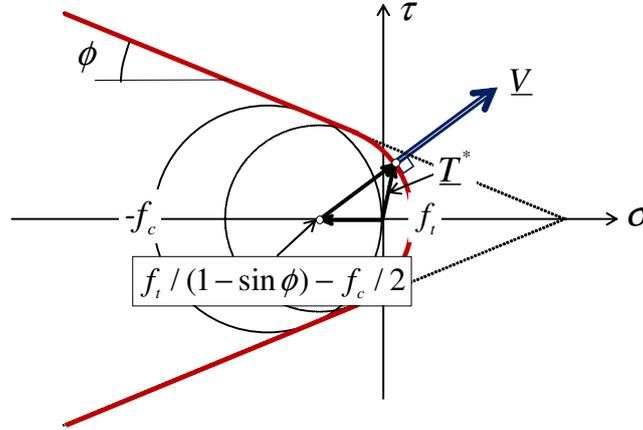


FIGURE 2.7 – Calcul de la fonction  $\pi^{MCT}(\underline{n}; \underline{V})$  à partir de la courbe intrinsèque

calculée à partir de la courbe intrinsèque tracée dans le plan de Mohr (Figure 2.7). La *condition de pertinence* exprime le fait que l'angle que forme la vitesse de discontinuité avec le plan tangent à la surface de discontinuité doit être compris entre  $\phi$  et  $\pi - \phi$ .

### 2.3.2 Analyse comparée des deux critères

Les deux critères décrits ci-dessus pour modéliser la résistance du béton dans des conditions de sollicitations tridimensionnelles, sont maintenant comparés pour différents états de contrainte. Par construction, tous les deux donnent les mêmes valeurs de résistance pour une *sollicitation uniaxiale* de traction et de compression, qui peuvent être évaluées par des essais classiques. Cette sollicitation particulière correspond par exemple aux états de contrainte caractéristiques dans des systèmes de poutres (ou d'arcs) travaillant de façon prédominante à la flexion et à l'effort normal.

#### 2.3.2.1 Sollicitations en contraintes planes

Ce type de sollicitation est associé par exemple à des poutres travaillant à l'effort tranchant, l'état de contrainte étant parallèle au plan de la poutre (voir par exemple [Averbuch et de Buhan, 1999]), mais également au cas des plaques ou coques en béton armé ([Bleyer et al., 2015b]), l'état de contrainte étant alors parallèle au plan de la plaque (ou au plan localement tangent à la coque). Le tenseur de contrainte correspondant étant alors de la forme (dans le repère principal) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \tag{2.31}$$

les critères de Rankine et de Mohr-Coulomb tronqué en traction s'expriment comme suit

### 2.3. Critères de résistance des éléments constitutifs du béton armé

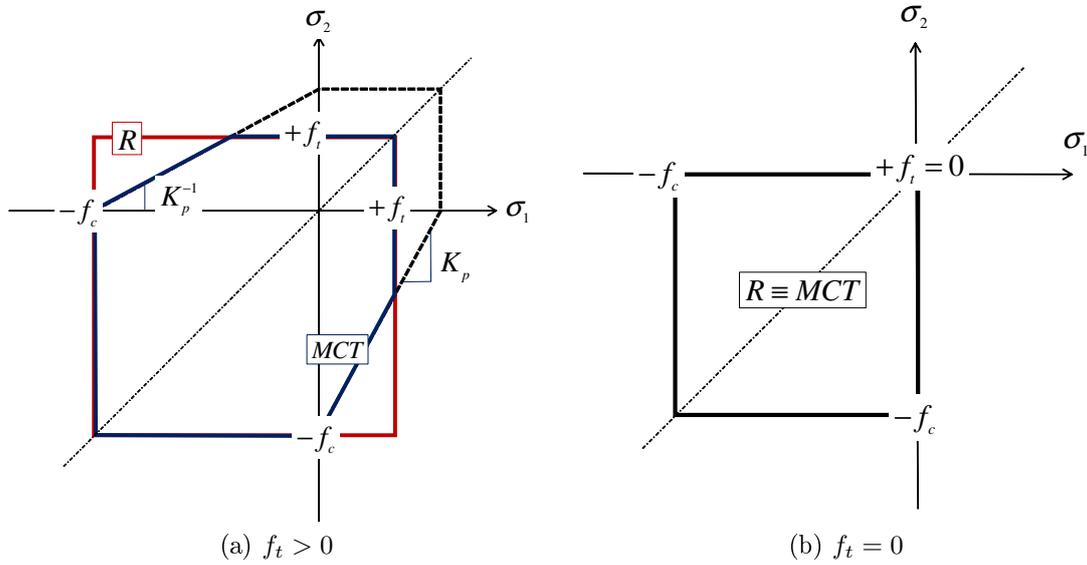


FIGURE 2.8 – Comparaison des critères de Rankine (R) et de MCT en contraintes planes

(voir la représentation de ces deux critères sur la Figure 2.8 où est également représenté le critère de Mohr-Coulomb non tronqué en pointillé) :

- Rankine :

$$-f_c \leq \sigma_1 \leq +f_t, f_c \leq \sigma_2 \leq +f_t \quad (2.32)$$

- Mohr-Coulomb tronqué :

$$\begin{aligned} -f_c \leq \sigma_1 \leq +f_t, f_c \leq \sigma_2 \leq +f_t \\ \sigma_1 \leq K_p^{-1}(\sigma_2 + f_c), \sigma_2 \leq K_p^{-1}(\sigma_1 + f_c) \end{aligned} \quad (2.33)$$

On constate que les deux critères coïncident uniquement dans le cas  $f_t = 0$ . Pour  $f_t > 0$ , R contient MCT.

#### 2.3.2.2 Sollicitations en déformations planes

Cette situation correspond à la résolution de problèmes de calcul à la rupture en déformations planes (exemple d'un barrage dont la longueur est grande vis-à-vis de ses dimensions transversales). Tandis que les critères en contraintes planes s'obtiennent en prenant l'*intersection* des domaines de résistance tridimensionnels dans l'espace des contraintes par le plan  $(\sigma_1, \sigma_2)$ , les critères en déformation planes sont obtenus par

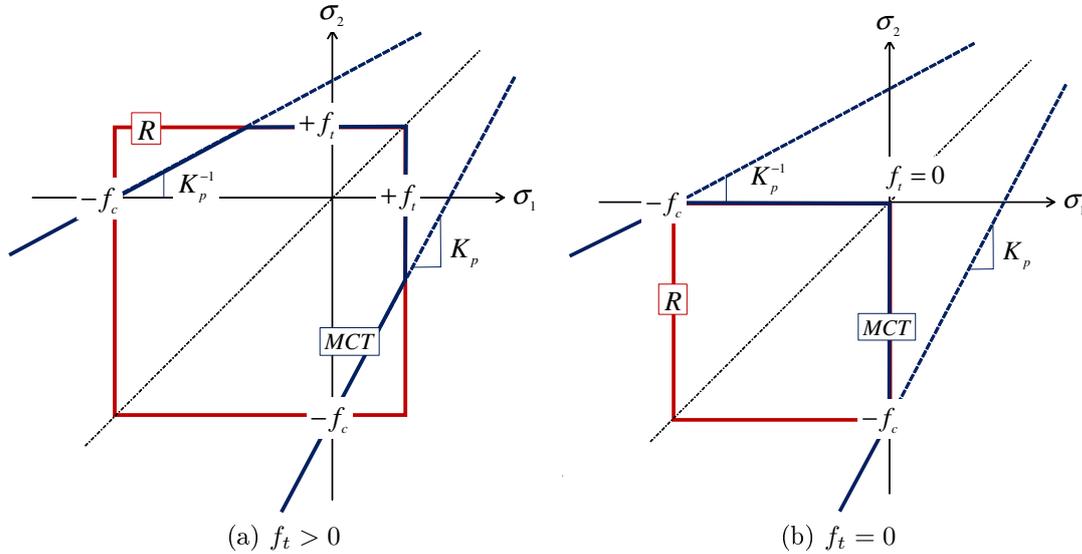


FIGURE 2.9 – Comparaison des critères de Rankine et de MCT en déformations planes

projection de ces mêmes domaines sur le plan  $(\sigma_1, \sigma_2)$ . La Figure 2.9 représente ces différents domaines dans les cas où la résistance en traction du béton est prise en compte ( $f_t > 0$ ) ou non ( $f_t = 0$ ).

Cette figure montre que les deux critères sont à peu près équivalents dans le domaine des contraintes positives de traction, mais diffèrent radicalement dans celui des contraintes de compression, qui ne peuvent excéder la valeur  $f_c$  dans le cas du critère de Rankine (R), alors qu’elles ne sont pas limitées, notamment en compression isotrope, dans le cas du critère MCT.

Cette divergence importante entre les deux critères dans le domaine des contraintes de compression, notamment isotropes, est confirmée par l’examen de leurs courbes intrinsèques dans le plan de Mohr (Figure 2.10). Ce constat semble mettre en question la pertinence du critère de Rankine à décrire correctement les propriétés de résistance de béton sous sollicitation de compression, puisque contrairement au critère MCT, il prédit une *rupture* du béton<sup>(1)</sup> pour une sollicitation isotrope égale à  $\underline{\underline{\sigma}} = -f_c \mathbf{1}$ , ce qui est contraire aux observations expérimentales, s’agissant de « géomatériaux » tels que les sols, roches ou bétons. Il est donc vraisemblable que l’adoption d’un critère de Rankine en lieu et place d’un critère MCT, conduit à sous-estimer les capacités de résistance d’une structure. Il conviendra d’évaluer au cas par cas sur des exemples concrets si une telle sous-estimation est suffisamment significative pour remettre en question le choix d’un tel critère, plus facile d’utilisation que le critère MCT, notamment dans la mise en

(1). À ne pas confondre avec une simple limite d’élasticité

### 2.3. Critères de résistance des éléments constitutifs du béton armé

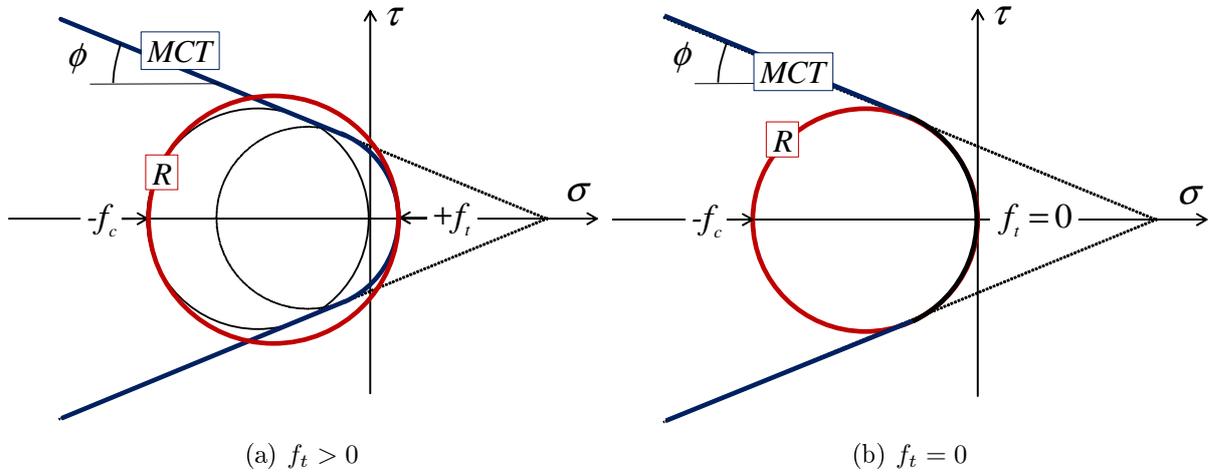


FIGURE 2.10 – Comparaison des courbes intrinsèques relatives au critère de Rankine et de MCT en déformations planes

œuvre de l'approche cinématique du calcul à la rupture <sup>(2)</sup>.

#### 2.3.3 Critère de résistance des armatures et de l'interface béton-armatures

Les armatures de renforcement étant constituées d'un matériau métallique (acier), il paraît naturel de caractériser sa résistance par un critère de von Mises, le paramètre de résistance étant la contrainte de rupture sous chargement *uniaxial* de traction-compression, notée  $\sigma^y$  :

$$f^r(\underline{\sigma}) = [3/2\underline{s} : \underline{s}]^{1/2} - \sigma^y \leq 0, \quad \underline{s} = \underline{\sigma} - 1/3(\text{tr } \underline{\sigma})\mathbf{1} \quad (2.34)$$

Dans le cas d'une « modélisation mixte » du béton armé où les armatures de renforcement sont schématisées comme des poutres *unidimensionnelles* (voir plus loin), la résistance des armatures est caractérisée par l'effort limite  $N_0$  en traction :

$$-kN_0 \leq N \leq N_0 \quad \text{avec } N_0 = A^r \sigma^y = (\pi\Phi^2/4)\sigma^y \quad (2.35)$$

où la section de l'armature de diamètre  $\Phi$  est supposée homogène, tandis que le paramètre adimensionnel  $k$  ( $0 \leq k \leq 1$ ) tient compte d'une éventuelle réduction de la résistance en compression (possibilité de flambement par exemple).

Il convient enfin de préciser la condition de résistance spécifique à l'*interface de contact* entre le béton et l'armature. Celle-ci porte sur le vecteur-contrainte agissant en

(2). Puisque les champs de vitesse ne sont soumis à aucune condition de pertinence

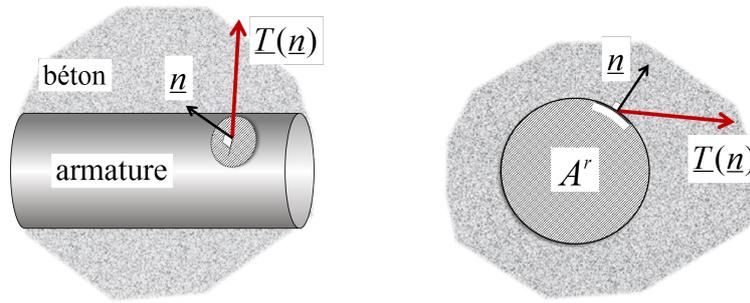


FIGURE 2.11 – Vecteur contrainte à l’interface béton armature

tout point de cette interface de normale unitaire  $\underline{n}$  (Figure 2.11). Elle s’écrit sous la forme :

$$f^I(\underline{T}) \leq 0 \quad (2.36)$$

la condition d’*adhérence parfaite* correspondant au fait que le critère ci-dessus est automatiquement vérifié, c’est-à-dire qu’il ne peut y avoir de rupture le long de cette interface en dehors d’une rupture dans l’un des deux matériaux en contact (béton ou acier). Une telle condition de résistance, qui doit être prise en compte notamment dans les ouvrages vieillissants pour lesquels les propriétés d’adhérence peuvent être fortement dégradées, est plus délicate à évaluer que les propriétés de résistance des matériaux constitutifs du béton armé. Une telle évaluation peut par exemple être réalisée par le biais d’essais d’arrachement.

## 2.4 Modélisation mixte du composite « béton armé »

Une première tentative de modélisation mécanique du béton armé, permettant le traitement de problèmes de calcul à la rupture relatifs aux ouvrages en béton armé, pourrait consister à considérer qu’il s’agit d’une *matériau composite* formé d’une matrice tridimensionnelle (le béton) au sein de laquelle sont réparties les armatures de renforcement elles-mêmes vues comme des objets tridimensionnels répartis au sein de la matrice. Une telle modélisation « 3D/3D » (schématisée sur la Figure 2.11) se heurte néanmoins à un certain nombre de difficultés dues à deux caractéristiques particulières du composite « béton armé », qui le rapprochent par exemple beaucoup des sols renforcés :

- ✓ la *fraction volumique* du matériau de renforcement (l’acier des armatures) est très faible, dépassant rarement 1% ;
- ✓ en contrepartie, les caractéristiques mécaniques du matériau de renforcement, et notamment sa résistance en traction, sont bien supérieures à celles du béton.

Le caractère fortement hétérogène de ce composite, ainsi que la densité du réseau

## 2.4. Modélisation mixte du composite « béton armé »

---

d'armatures dans de nombreux ouvrages, rendent la simulation numérique de ce type de structures dans le cadre d'une telle modélisation 3D/3D très difficile, voire impossible, au regard notamment de méthodes de dimensionnement accessibles à l'ingénieur de génie civil. La *modélisation mixte* que nous allons maintenant présenter permet de remédier à ces difficultés en s'appuyant sur le fait que les armatures sont des inclusions *linéaires* assimilables à des milieux continus 1D (ou 2D s'agissant de nappes ou plaques de renforcement).

### 2.4.1 Le principe de modélisation mixte [Anthoine, 1989] [Averbuch et de Buhan, 1999] [de Buhan *et al.*, 2017]

Un exemple illustratif simple est représenté sur la Figure 2.12 : une éprouvette rectangulaire de béton (hauteur  $2H$  et largeur  $2B$ ) est sollicitée en *déformations planes* dans le plan  $Oxy$  par un effort de compression  $Q$  (par unité de longueur selon la direction transversale  $Oz$ ), le contact avec les plateaux inférieur et supérieur étant supposé *lisse*. L'éprouvette est renforcée par une inclusion de type plaque placée à mi-hauteur.

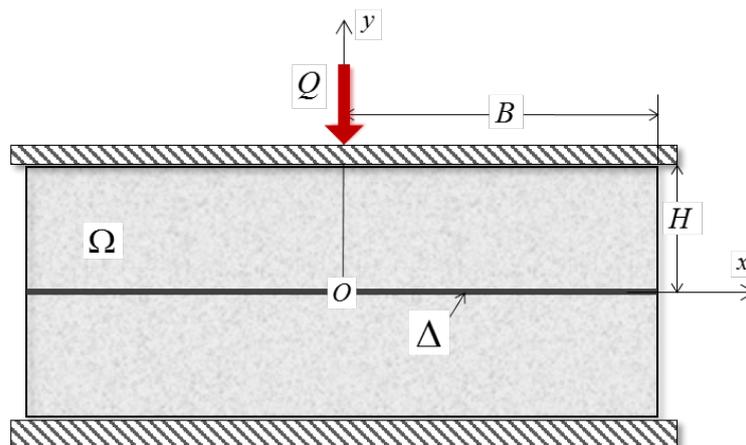


FIGURE 2.12 – Compression en déformations planes d'une éprouvette en béton armé

### 2.4.2 Efforts intérieurs et équations d'équilibre

Dans le cadre de la modélisation mixte de ce bloc en béton armé, les efforts intérieurs sont constitués :

- ✓ des *champs de contrainte*  $\underline{\underline{\sigma}}$  dans la partie de l'éprouvette occupée par le béton ;
- ✓ des distributions d'*efforts axiaux*  $N$  (par unité de longueur selon  $Oz$ ) le

long du renforcement <sup>(3)</sup>.

En l'absence de forces de volume, ces champs vérifient les équations d'équilibre et conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega \setminus \Delta, \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_x = 0, \quad x = \pm B, \quad |y| \leq H \\ \sigma_{xy} = 0, \quad |x| \leq B, \quad y = \pm H, \quad Q = \int_{-B}^{+B} \sigma_{yy}(y = H) dy \end{cases} \quad (2.37)$$

pour les champs de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  et :

$$\frac{dN}{dx} + \llbracket \sigma_{xy} \rrbracket = 0, \quad \llbracket \sigma_{yy} \rrbracket \text{ sur } \Delta, \text{ avec } N(x = \pm B) = 0 \quad (2.38)$$

pour les distributions d'efforts axiaux le long du renforcement, où  $\llbracket \cdot \rrbracket$  désigne le saut d'une grandeur au franchissement de l'inclusion de renforcement dans le sens des  $y$  croissants. À noter que la première équation de (2.38) qui relie la variation de  $N$  à la discontinuité de la contrainte de cisaillement  $\sigma_{xy}$ , exprime l'interaction mécanique entre le béton et l'armature de renforcement.

#### 2.4.2.1 Position du problème de calcul à la rupture

Dans ces conditions, la *résistance en compression* de l'éprouvette, c'est-à-dire la valeur  $Q^+$  du chargement extrême au sens du calcul à la rupture est la valeur maximale de  $Q$  pour laquelle il est possible de mettre en évidence un champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  ainsi qu'une distribution d'effort axial  $N$  vérifiant l'ensemble des équations d'équilibre (2.37) et (2.38) tout en satisfaisant les différents critères de résistance :

- Béton (critère en déformations planes dans le plan  $(x,y)$ ) :

$$f_{DP}^{R/MCT}(\underline{\underline{\sigma}}(x,y)) \leq 0, \quad \forall (x,y) \in \Omega \setminus \Delta \quad (2.39)$$

- *Armature de renforcement* :

$$-k\sigma_{DP}^y e \leq N(x) \leq \sigma_{DP}^y e, \quad -B \leq x \leq +B \quad (2.40)$$

où  $e$  désigne l'épaisseur de l'armature et  $\sigma_{DP}^y$  la résistance à la traction *uniaxiale* en *déformations planes* du matériau constitutif.

- *Interface béton-armature* :

---

(3). On adpote ici une modélisation du renforcement dans laquelle les efforts tranchants et moments fléchissant sont négligés

## 2.4. Modélisation mixte du composite « béton armé »

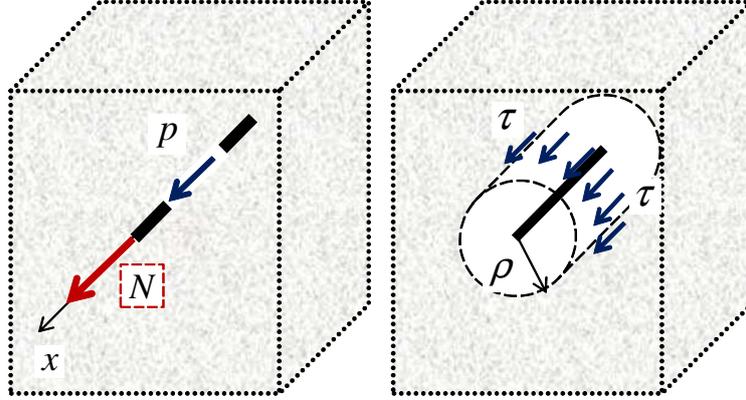


FIGURE 2.13 – Forces d'interaction entre béton et armatures dans le cas d'une modélisation mixte 1D/3D du béton armé

$$f^I(\sigma_{xy}^{\pm}, \sigma_{yy}) \leq 0 \quad (2.41)$$

où  $\sigma_{xy}^{\pm}$  désignent les contraintes de cisaillement s'exerçant de part et d'autre de l'armature (la contrainte normale étant continue).

Ce problème de calcul à la rupture étant bien posé, il peut être résolu par la mise en œuvre des approches statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur, soit par voie analytique, soit par voie numérique [Averbuch et de Buhan, 1999]<sup>(4)</sup>.

### 2.4.3 Les limites de la modélisation mixte

Si la modélisation mixte 1D/2D (cas de l'éprouvette en béton armé de la Figure 2.12) ou 2D/3D (armatures de type plaque ou coque plongées au sein d'un volume tridimensionnel de béton) peut être appliquée sans difficulté à la formulation puis à la résolution de problèmes de calcul à la rupture relatifs aux structures massives en béton armé, il n'en est pas de même dans la situation la plus fréquemment rencontrée de structures *tridimensionnelles* renforcées par des armatures *unidimensionnelles* (modélisation 1D/3D).

En effet, l'homologue 1D/3D de la première équation d'équilibre de (2.38) peut s'écrire (voir Figure 2.13(a)) :

$$\frac{dN(x)}{dx} + p(x) = 0 \quad (2.42)$$

où  $p$  désigne la *densité linéaire* d'effort longitudinal exercée sur l'armature par le béton environnant. Le principe des actions mutuelles implique alors que le volume tridimensionnel de béton est soumis en retour à une densité linéique d'efforts  $-p$ , ce qui est

(4). Où le problème est formulé en contraintes planes

incompatible avec une description mécanique du béton en tant que milieu continu 3D de Cauchy, lequel ne peut reprendre que des densités volumiques ou surfaciques d'efforts extérieurs.

L'impossibilité de raccorder une telle distribution linéique d'efforts dans l'armature avec des champs de contrainte tridimensionnels dans le béton peut être simplement illustrée comme suit. Se référant à une « surface de contrôle » cylindrique circulaire de rayon  $\rho$  et de même axe que l'inclusion (Figure 2.13(b)), la composante axiale de la densité linéique d'efforts  $p$  peut être obtenue par l'application d'une contrainte de cisaillement longitudinale dont la valeur moyenne sur la circonférence peut s'écrire par simple raisonnement d'équilibre :

$$\langle \tau \rangle(x) = \frac{p(x)}{2\pi\rho} \quad (2.43)$$

Cette contrainte de cisaillement tend alors vers l'infini lorsque que l'on fait tendre vers zéro le rayon  $\rho$  du volume cylindrique de contrôle, de sorte que le champ de contrainte dans la matrice devient singulier le long de l'inclusion de renforcement. On pourrait envisager de traiter de telles singularités dans le cadre d'un comportement élastique linéaire du béton, mais pas dans le cadre d'un comportement plastique ou à la rupture de ce dernier puisque, le critère de plasticité/résistance serait alors systématiquement violé au voisinage de l'inclusion où les contraintes deviennent infinies. Nous verrons ultérieurement comment cette difficulté peut être surmontée par le recours à une technique d'homogénéisation que nous allons maintenant présenter.

## 2.5 La modélisation multiphasique comme alternative : le cas périodique

On se place tout d'abord dans la configuration où les armatures de renforcement sont disposées de façon *périodique* comme schématisé sur la Figure 2.14 où les inclusions sont toutes parallèles à une même direction  $\underline{e}_x$ , tandis que l'espacement entre deux armatures voisines est supposé petit en comparaison des dimensions de la structure. La structure initiale en béton armé (Figure 2.14(a)) peut être alors remplacée par une structure homogène équivalente constituée d'un *milieu multiphasique* défini comme suit dans le cadre du *calcul à la rupture* ([Sudret et de Buhan, 1999] [Thai Son *et al.*, 2009] [de Buhan et Hassen, 2010] [de Buhan *et al.*, 2017]).

## 2.5. La modélisation multiphasique comme alternative : le cas périodique

### 2.5.1 Principe de la modélisation multiphasique

Le milieu multiphasique qui décrit à l'échelle *macroscopique* le composite béton armé résulte de la superposition de deux milieux continus, appelés phases : une *phase matrice* possédant les *mêmes caractéristiques* de résistance que le béton qu'elle représente et une *phase renforcement* qui modélise le réseau d'inclusions parallèles, ces deux phases étant en interaction mutuelle (Figures 2.14(c) et (d)).

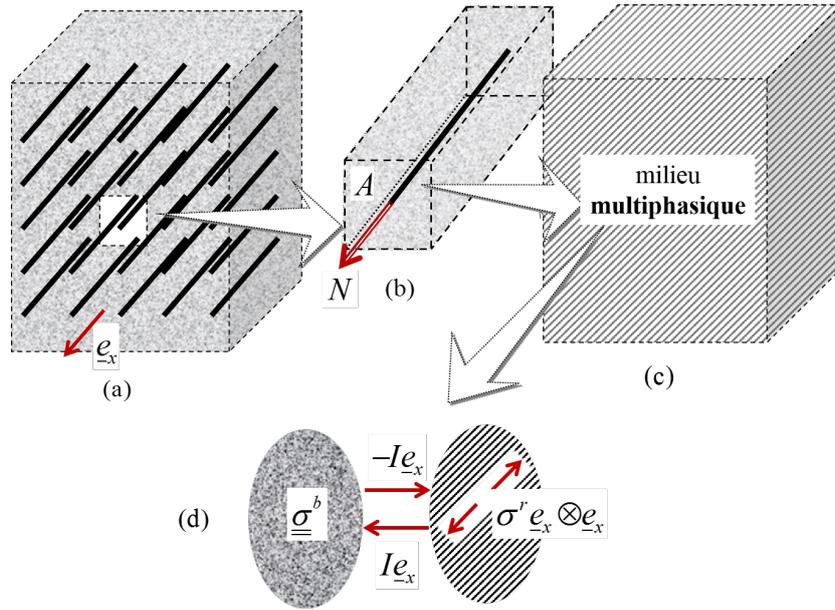


FIGURE 2.14 – Modélisation du béton armé comme un milieu multiphasique

Plus précisément, les *équations d'équilibre* (en l'absence de force de volume) de chacune des phases s'écrivent comme suit <sup>(5)</sup>

✓ *Phase matrice* :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^b + I \underline{e}_x = 0 \quad (2.44)$$

✓ *Phase renforcement* :

$$\operatorname{div}(\sigma^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) - I \underline{e}_x = 0 \quad (2.45)$$

Dans ces équations  $\underline{\underline{\sigma}}^b$  désigne la contrainte en un point quelconque de la phase matrice (béton), et  $\sigma^r$  la contrainte uniaxiale dans la phase renforcement. Celle-ci est

(5). Ces équations peuvent par exemple être établies à partir de la *méthode des puissances virtuelles* et des deux principes associés (voir [de Buhan *et al.*, 2017]-Chapitre 4)

définie comme suit :

$$\sigma^r = N/A \quad (2.46)$$

où  $N$  représente l'effort axial dans une armature individuelle et  $A$  l'aire de la section droite d'un volume élémentaire représentatif du matériau renforcé (Figure 2.14(b)). Par ailleurs  $I$  est la *densité volumique des efforts d'interaction* entre phases. À noter que l'équation d'équilibre (2.45) de la phase renforcement peut être réécrite sous forme scalaire :

$$\frac{\partial \sigma^r}{\partial x} - I = 0 \quad (2.47)$$

### 2.5.2 Modèle multiphasique et calcul à la rupture

Se référant à un problème de calcul à la rupture relatif à un tel milieu multiphasique modélisant le béton armé, les critères de résistance retenus sont les suivants. Comme indiqué précédemment, le critère de résistance de la *phase matrice* est identique à celui du béton, tandis que celui de la phase renforcement peut s'exprimer très simplement sous la forme :

$$-k\sigma_0 \leq \sigma^r \leq \sigma_0 = N_0/A \quad (2.48)$$

où  $N_0$  est la *résistance en traction simple* d'une inclusion définie par la relation (2.35).

Par ailleurs, une troisième condition de résistance portant sur la densité de force d'interaction peut s'exprimer sous la forme :

$$|I| \leq I_0 = R^a/A \quad (2.49)$$

où  $R^a$  désigne la *résistance à l'arrachement par unité de longueur* d'une armature scellée au béton. Une telle résistance peut être reliée à la donnée d'un critère d'interface entre le béton et l'armature tel que défini ci-dessus par une condition de type (2.36).

L'ensemble des équations d'équilibre précédentes (2.44) et (2.45) (auxquelles il convient d'ajouter les conditions aux limites correspondantes) associées à la donnée des divers critères de résistance portant séparément sur chacune des phases, ainsi que sur l'effort d'interaction, permet de formuler de manière cohérente un *problème de calcul à la rupture* multiphasique associé à la structure en béton armé initiale. Ce problème peut alors être résolu par voie analytique ou numérique (méthode des éléments finis utilisée dans le présent travail), en recourant soit à l'approche statique par l'intérieur, soit à l'approche cinématique par l'extérieur (voir [de Buhan et Hassen, 2010] et [de Buhan et al., 2017] pour plus de détails sur la mise en œuvre de cette dernière approche).

Avant de parler du cas particulier de l'adhérence parfaite et des modifications engendrées, il convient de terminer sur quelques remarques importantes quant à l'utilisation du modèle multiphasique :

## 2.6. Cas de l'adhérence parfaite entre phases : la méthode d'homogénéisation

---

- ✓ La pertinence du modèle multiphasique repose sur deux conditions : d'une part la faible fraction volumique du matériau de renforcement au sein de la matrice béton, d'autre part une résistance beaucoup plus importante du premier par rapport à celle de la seconde. De telles conditions sont bien satisfaites dans le cas du béton armé.
- ✓ La modélisation multiphasique précédente présentée dans le cas d'un renforcement unidirectionnel peut être aisément étendue au cas d'un renforcement bi- voire multidirectionnel. Il suffit pour cela de considérer autant de phases renforcement qu'il y a de familles d'inclusions orientées dans la même direction (voir [de Buhan *et al.*, 2017]).
- ✓ Enfin, même si cela ne s'avère sans doute pas utile pour ce qui concerne le béton armé, le modèle multiphasique peut prendre en compte la résistance en flexion des inclusions en sus de leur résistance en traction-compression : cas des inclusions qualifiées de « rigides » [de Buhan *et al.*, 2017].

## 2.6 Cas de l'adhérence parfaite entre phases : la méthode d'homogénéisation

Le modèle multiphasique brièvement décrit ci-dessus constitue une généralisation de la méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture à laquelle est associée la notion de *critère de résistance macroscopique* d'un matériau renforcé par l'introduction de renforts *linéaires* (voir entre autres [de Buhan *et al.*, 1989] pour les sols renforcés, [de Buhan et Talierno, 1991] pour les matériaux composites à fibres ou encore [Averbuch et de Buhan, 1999] pour le béton armé). Plus précisément l'homogénéisation correspond au cas particulier du modèle multiphasique pour lequel il y a *adhérence parfaite entre phases* ( $I_0 \rightarrow +\infty$  dans la condition (2.49)).

### 2.6.1 Critère de résistance macroscopique du béton armé

La densité de forces d'interaction  $I$  n'étant soumise à aucune condition de résistance, elle peut être éliminée par sommation des équations d'équilibre par phases (2.44) et (2.45), conduisant à l'équation d'équilibre unique suivante :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\Sigma}} = 0 \text{ avec } \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^b + \sigma^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (2.50)$$

qui porte sur les champs de *contraintes macroscopiques* définis en tout point comme la somme de contraintes par phases.

Il en résulte que le béton armé est traité à l'échelle macroscopique comme un seul

milieu continu homogène<sup>(6)</sup> obéissant au critère de résistance suivant :

$$f^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^b + \sigma^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \\ f^{R/MCT}(\underline{\underline{\sigma}}^b) \leq 0 \text{ et } -k\sigma_0 \leq \sigma^r \leq \sigma_0 \end{cases} \quad (2.51)$$

que l'on peut également écrire sous la forme :

$$G^{hom} = G^{R/MCT} \oplus [-k\sigma_0 \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x, \sigma_0 \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x] \quad (2.52)$$

Dans la relation ci-dessus,  $G^{hom}$  (respectivement  $G^{R/MCT}$ ) désigne le *domaine de résistance macroscopique* dans l'espace des contraintes tridimensionnelles (resp. le domaine de résistance du béton seul caractérisé par un critère de Rankine ou MCT) et l'opérateur  $\oplus$  désigne la *somme de Minkowski* de deux ensembles<sup>(7)</sup>. Ce domaine de résistance macroscopique peut être construit dans l'espace des contraintes comme l'enveloppe convexe du domaine de résistance du béton seul translaté d'une quantité  $+\sigma_0$  le long de l'axe des  $\sigma_{xx}$  et de celui obtenu par translation de la quantité  $-k\sigma_0$  le long de ce même axe (Figure 2.15). Cette construction fait clairement ressortir le caractère *anisotrope* du critère macroscopique clairement attribuable à la direction privilégiée du renforcement.

A noter que le paramètre  $\sigma_0$  défini par (2.48) comme la résistance d'une armature de renforcement individuelle par unité de surface transversale, peut aussi s'interpréter comme le produit de la résistance uniaxiale du matériau constitutif de l'armature (acier) par la fraction volumique de ce même matériau :

$$\sigma_0 = \frac{N_0}{A} = \frac{A^r \sigma^y}{A} = \eta \sigma^y \quad (2.53)$$

## 2.6.2 Représentation du critère dans le plan de Mohr et calcul des fonctions d'appui

Une autre représentation géométrique du critère de résistance macroscopique consiste à tracer le domaine des vecteurs contrainte admissibles sur une facette orientée dont la normale fait un angle  $\alpha$  avec la direction du renforcement (Figure 2.16) :

$$g^{hom}(\alpha) = \{\underline{T} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}; \underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom}\} \quad (2.54)$$

c'est-à-dire en vertu de la définition (2.51) du critère macroscopique :

$$g^{hom}(\alpha) = \left\{ \underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}^b \cdot \underline{n} + (\sigma^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) \cdot \underline{n}; \left| \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}^b \in G^{R/MCT} \\ -k\sigma_0 \leq \sigma^r \leq \sigma_0 \end{array} \right. \right\} \quad (2.55)$$

---

(6). Et non plus comme la superposition de deux milieux continus de la modélisation multiphasique.

(7).  $A \oplus B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$

## 2.6. Cas de l'adhérence parfaite entre phases : la méthode d'homogénéisation

---

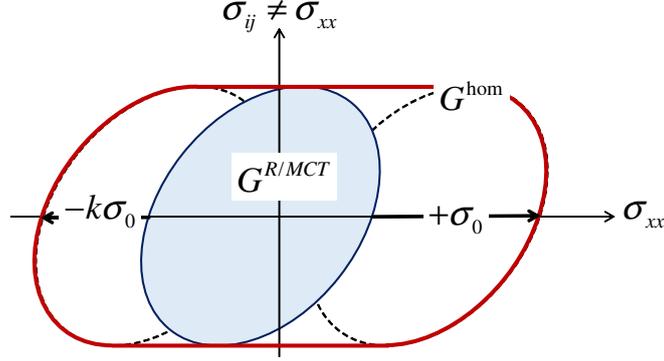


FIGURE 2.15 – Construction géométrique du domaine de résistance macroscopique du béton armé (renforcement unidirectionnel)

soit encore :

$$\begin{aligned} g^{hom}(\alpha) &= \left\{ \underline{\underline{\sigma}}^b \cdot \underline{\underline{n}}; \underline{\underline{\sigma}}^b \in G^{R/MCT} \right\} \oplus \left\{ \sigma^r \cos \alpha \underline{\underline{e}}_x; -k\sigma_0 \leq \sigma^r \leq \sigma_0 \right\} \\ &= g^{R/MCT} \oplus \left[ -k\sigma_0 \cos \alpha \underline{\underline{e}}_x, \sigma_0 \cos \alpha \underline{\underline{e}}_x \right] \end{aligned} \quad (2.56)$$

Les domaines correspondants ont été tracés sur la Figure 2.16 dans le cas particulier où  $k = 0$ . Cette représentation du critère macroscopique met là encore bien en évidence l'*anisotropie* du critère (et plus précisément son caractère *orthotrope de révolution* autour de la direction du renforcement), ainsi que l'augmentation de résistance induite par le renforcement.

La mise en œuvre de l'approche cinématique du calcul à la rupture appliquée au dimensionnement d'une structure en béton armé ainsi homogénéisée, passe par le calcul des *fonctions d'appui* du critère macroscopique.

✓ Calcul de  $\pi^{hom}(\underline{\underline{d}})$

$$\begin{aligned} \pi^{hom}(\underline{\underline{d}}) &= \sup \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{d}}; \underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \right\} \\ &= \sup \left\{ (\underline{\underline{\sigma}}^b + \sigma^r \underline{\underline{e}}_x \otimes \underline{\underline{e}}_x) : \underline{\underline{d}}; \underline{\underline{\sigma}}^b \in G^{R/MCT}, -k\sigma_0 \leq \sigma^r \leq +\sigma_0 \right\} \end{aligned} \quad (2.57)$$

soit :

$$\pi^{hom}(\underline{\underline{d}}) = \pi^{R/MCT}(\underline{\underline{d}}) + \sup \left\{ -k\sigma_0 d_{xx}, +\sigma_0 d_{xx} \right\} \quad (2.58)$$

✓ Calcul de  $\pi^{hom}(\underline{\underline{n}}; \underline{\underline{V}})$

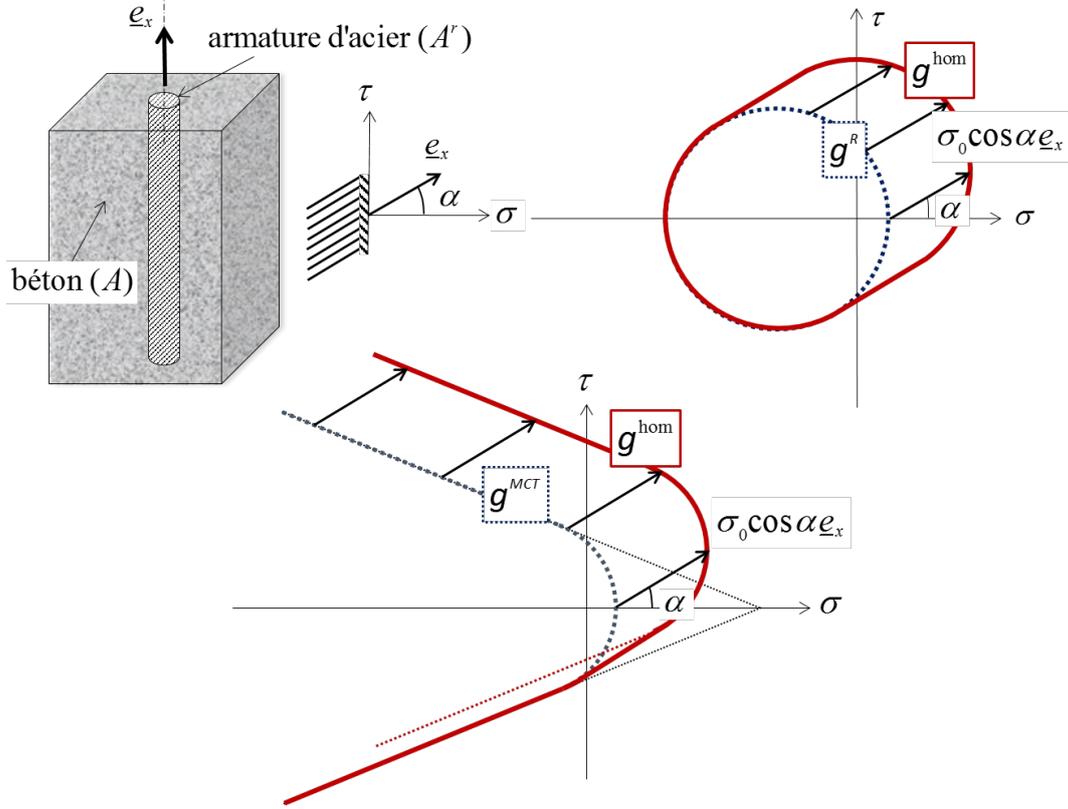


FIGURE 2.16 – Représentations du critère macroscopique sur une facette orientée (cas  $k = 0$ )

$$\begin{aligned}
 \pi^{hom}(\underline{n}; \underline{V}) &= \sup \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{n} \otimes \underline{V}); \underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \right\} \\
 &= \sup \left\{ (\underline{\underline{\sigma}}^b + \sigma^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) : (\underline{n} \otimes \underline{V}); \underline{\underline{\sigma}}^b \in G^{R/MCT}, -k\sigma_0 \leq \sigma^r \leq +\sigma_0 \right\}
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

c'est-à-dire :

$$\pi^{hom}(\underline{n}; \underline{V}) = \pi^{R/MCT}(\underline{n}; \underline{V}) + \sup \left\{ -k\sigma_0 n_x V_x, +\sigma_0 n_x V_x \right\} \tag{2.60}$$

### 2.6.3 Une application illustrative simple

On traite l'exemple de la compression en *déformations planes* dans le plan  $Oxy$  d'un bloc rectangulaire de béton de résistance en compression uniaxiale  $f_c$ , renforcé par une distribution périodique d'armatures horizontales de résistance en traction par unité de surface transversale  $\sigma_0$  (Figure 2.17). Les faces inférieure et supérieure du bloc sont en *contact lisse* avec des plateaux rigides exerçant un effort de compression  $Q$  (par unité de longueur selon  $Oz$ ), ses parois latérales restant *libres de contrainte*. On se propose

## 2.6. Cas de l'adhérence parfaite entre phases : la méthode d'homogénéisation

d'évaluer la résistance en compression de ce bloc, notée  $Q_{hom}^+$  par les approches du calcul à la rupture, le béton armé étant modélisé comme un milieu homogène dont la résistance est définie par le critère macroscopique (2.51), tandis que son poids volumique est négligé.

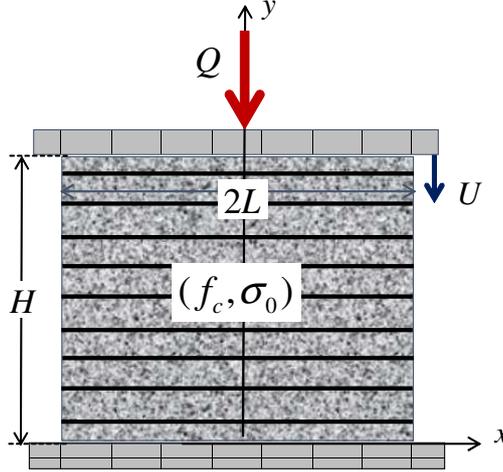


FIGURE 2.17 – Compression en déformations planes d'un bloc en béton armé

### 2.6.3.1 Approche statique par l'intérieur

Cette approche est mise en œuvre en considérant le champ de contrainte (macroscopique) homogène suivant :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^b + \sigma^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (2.61)$$

avec

$$\underline{\underline{\sigma}}^b = -Q/2L \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \sigma_0 (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \text{ et } \sigma^r = \sigma_0 \quad (2.62)$$

On vérifie immédiatement que ce champ est bien statiquement admissible avec le chargement  $Q$ . Il respecte par ailleurs le critère de résistance macroscopique (2.51) si et seulement si la contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}^b$  respecte celle du béton, soit puisque  $\sigma_M^b = -\sigma_0$  et  $\sigma_m^b = -Q/2L$  :

$$\sigma_m^b = -Q/2L \geq -f_c \quad (2.63)$$

dans le cas où on adopte le critère de Rankine (2.11), ou bien :

$$K_p \sigma_M^b - \sigma_m^b = -K_p \sigma_0 + Q/2L \leq f_c \quad (2.64)$$

si l'on adopte le critère MCT (2.25).

On obtient ainsi les *minorations* suivantes du chargement extrême  $Q_{hom}^+$  selon le critère adopté pour décrire la résistance du béton :

$$\text{Rankine : } Q_{hom}^+ \geq 2L f_c ; \text{ MCT : } Q_{hom}^+ \geq 2L (f_c + K_p \sigma_0) \quad (2.65)$$

### 2.6.3.2 Approche cinématique par l'extérieur

Cette approche est mise en œuvre à l'aide du champ de vitesse virtuel cinématiquement admissible suivant :

$$U_x = \alpha \frac{U}{H} x, U_y = -\frac{U}{H} y, U_z = 0 \quad (2.66)$$

où  $\alpha$  est un paramètre sans dimension à ajuster et  $U$  est la vitesse verticale comptée positivement vers le bas du plateau supérieur, le plateau inférieur demeurant immobile. La *puissance résistante maximale* (par unité de longueur selon  $Oz$ ) développée dans un tel champ de vitesse s'écrit :

$$P_{rm}^{hom}(\underline{U}) = \int_S \pi^{hom}(\underline{d}) dS \quad (2.67)$$

où  $S$  désigne la section droite du bloc, avec d'après (2.58) :

$$\pi^{hom}(\underline{d}) = \pi^{R/MCT}(\underline{d}) + \sup \left\{ -k\sigma_0 d_{xx}, +\sigma_0 d_{xx} \right\} \quad (2.68)$$

et

$$\underline{d} = \alpha \frac{U}{H} e_x \otimes e_x - \frac{U}{H} e_y \otimes e_y \quad (2.69)$$

✓ Critère de Rankine

$$\pi^R(\underline{d}) = \sum_{k=1}^3 \sup \left\{ -f_c d_k, +f_t d_k \right\} = f_c \frac{U}{H} + \sup \left\{ -f_c \alpha \frac{U}{H}, +f_t \alpha \frac{U}{H} \right\} \quad (2.70)$$

et donc en choisissant  $\alpha = 0$  :

$$\pi^{hom}(\underline{d}) = \pi^R(\underline{d}) = f_c \frac{U}{H} \quad (2.71)$$

Il en résulte que :

$$P_{rm}^{hom}(\underline{U}) = 2HL\pi^R(\underline{d}) = 2Lf_c U \quad (2.72)$$

tandis que la *puissance virtuelle des efforts extérieurs* s'écrit simplement :

$$P_e(\underline{U}) = QU \quad (2.73)$$

conduisant ainsi à l'obtention du *majorant* suivant :

$$Q_{hom}^+ \leq 2Lf_c \quad (2.74)$$

✓ Critère de MCT

## 2.6. Cas de l'adhérence parfaite entre phases : la méthode d'homogénéisation

---

On a en vertu de (2.27) et en tenant compte de (2.69) :

$$\pi^{MCT}(\underline{d}) = \begin{cases} f_c \frac{U}{H} + f_t(\alpha - K_p) \frac{U}{H} & \text{si } \alpha \geq K_p \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \pi^{hom}(\underline{d}) &= f_c \frac{U}{H} + f_t(\alpha - K_p) \frac{U}{H} + \sup \left\{ -k\sigma_0 \alpha \frac{U}{H}, +\sigma_0 \alpha \frac{U}{H} \right\} \\ &= (f_c + f_t(\alpha - K_p) + \alpha\sigma_0) \frac{U}{H}, \quad \alpha \geq K_p \end{aligned} \quad (2.76)$$

et par conséquent :

$$P_{rm}^{hom}(U) = 2HL\pi^R(\underline{d}) = 2L(f_c + f_t(\alpha - K_p) + \alpha\sigma_0)U \quad (2.77)$$

D'où finalement la majoration suivante :

$$Q_{hom}^+ \leq 2L(f_c + f_t(\alpha - K_p) + \alpha\sigma_0), \quad \alpha \geq K_p \quad (2.78)$$

dont le minimum est atteint pour  $\alpha = K_p$  :

$$Q_{hom}^+ \leq 2L(f_c + K_p\sigma_0) \quad (2.79)$$

### 2.6.3.3 Résultats et commentaires

Par comparaison des résultats (2.65) de l'approche statique et (2.74) et (2.79) de l'approche cinématique, l'évaluation de la résistance en compression du bloc en béton armé est très différente selon que l'on modélise la résistance du béton seul par un critère de Rankine ou un critère MCT :

$$\text{Rankine : } Q_{hom}^+ = 2Lf_c; \quad \text{MCT : } Q_{hom}^+ = 2L(f_c + K_p\sigma_0) \quad (2.80)$$

Il est remarquable de constater que, sur cet exemple particulier mais significatif, l'adoption d'un critère de Rankine pour décrire la résistance tridimensionnelle du béton ne permet pas de rendre compte du renforcement de ce dernier par l'introduction d'armatures, contrairement à ce qui se passe lorsque l'on adopte un critère MCT. Ceci confirme, comme nous l'avons déjà souligné, les faiblesses du critère de Rankine à rendre du compte de la rupture du béton pour des états de contrainte de compression confinée.

A noter enfin que les majorants (2.74) et (2.79) obtenus par l'approche cinématique du calcul à la rupture utilisant des champs de vitesse de déformation homogènes de la forme (2.66) peuvent être retrouvés à l'aide de mécanismes par blocs en translation séparés par un plan de discontinuité de vitesse, où il est fait usage des fonction d'appui (2.60).

## 2.7 Extension de la modélisation multiphasique au cas d'une répartition quelconque des inclusions

### 2.7.1 Principe de la procédure d'homogénéisation étendue

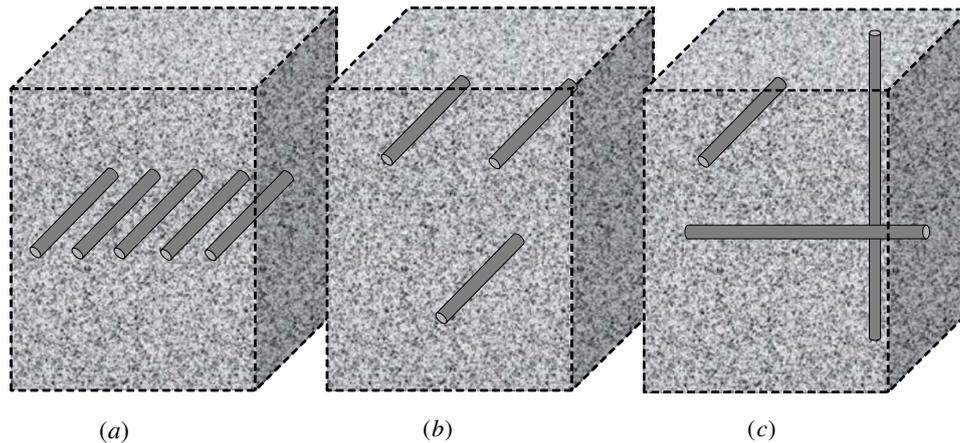


FIGURE 2.18 – Différentes configurations de renforcement non périodique : (a) un seul lit d'armatures, (b) armatures parallèles, (c) disposition quelconque d'armatures

La Figure 2.18 ci-dessus offre quelques exemples pour lesquels le modèle multiphasique, et donc également la méthode d'homogénéisation, ne peut être appliqué tel quel dans la mesure où l'on n'a pas affaire comme sur la figure 2.14 à une répartition *périodique* (ou éventuellement quasi-périodique) des inclusions dans les deux directions de l'espace transversales à celle des inclusions, mais soit à un seul lit d'inclusions (configuration (a) sur la Figure 2.18), soit à des inclusions relativement éloignées ou isolées les unes des autres (configurations (b) et (c) sur la Figure 2.18).

Une approche alternative concernant l'application de la méthode des éléments finis au traitement numérique et à la résolution de problèmes relatifs à des structures tridimensionnelles en béton renforcées par des inclusions d'acier 1D a été récemment proposée par Llau *et al.* [2016]. Dans une référence plus explicite à la modélisation multiphasique ou à la méthode d'homogénéisation ici développée, Figueiredo *et al.* [2013] ont proposé une procédure permettant de traiter le cas des inclusions isolées que nous reprenons ici. L'idée proposée pour contourner les difficultés, voire l'impossibilité, à mettre en œuvre une modélisation mixte 1D-3D, notamment pour l'approche statique par l'intérieur (problèmes déjà évoqués dans 2.4.3), consiste à considérer un volumique cylindrique (de section rectangulaire ou circulaire) axé sur chaque inclusion individuelle et à remplacer ce cylindre composite 1D-3D par le même volume cylindrique constitué d'un *milieu biphasique* ou *homogénéisé*. Les caractéristiques de la phase renforcement et de son interaction avec la phase matrice dans ce domaine cylindrique sont données

## 2.7. Extension de la modélisation multiphasique au cas d'une répartition quelconque des inclusions

respectivement par les équations (2.48) et (2.49) où  $A$  désigne cette fois-ci l'aire de la section droite du volume cylindrique entourant l'inclusion. Une telle procédure revient en quelque sorte à « diluer » l'inclusion dans la zone cylindrique environnante (comme illustré sur la Figure 2.19).

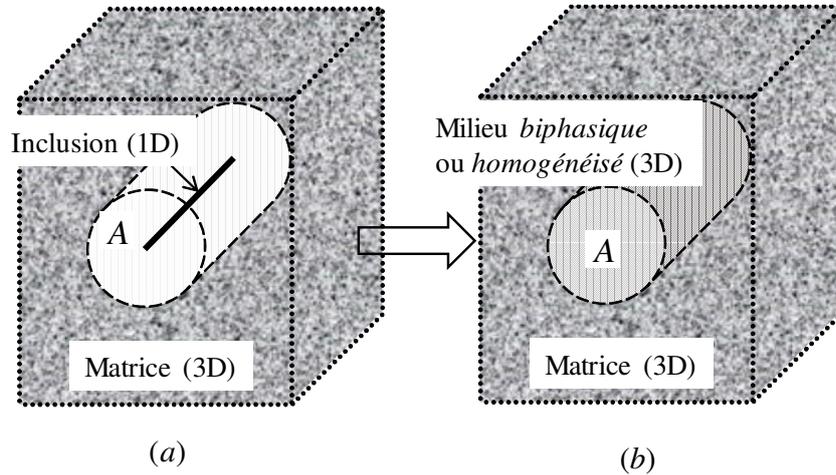


FIGURE 2.19 – Principe de la généralisation de la modélisation multiphasique au cas d'une inclusion isolée

La Figure 2.20 montre le résultat d'une telle procédure d'homogénéisation sur les différents cas de figure représentés Figure 2.18. Dans la première configuration (a) où la structure en béton est renforcée par un lit d'inclusions, la procédure d'homogénéisation est immédiate puisque les inclusions sont remplacées par une zone dont l'épaisseur est égale à l'espacement  $e$  entre deux inclusions voisines, de sorte que  $A = e^2$ .

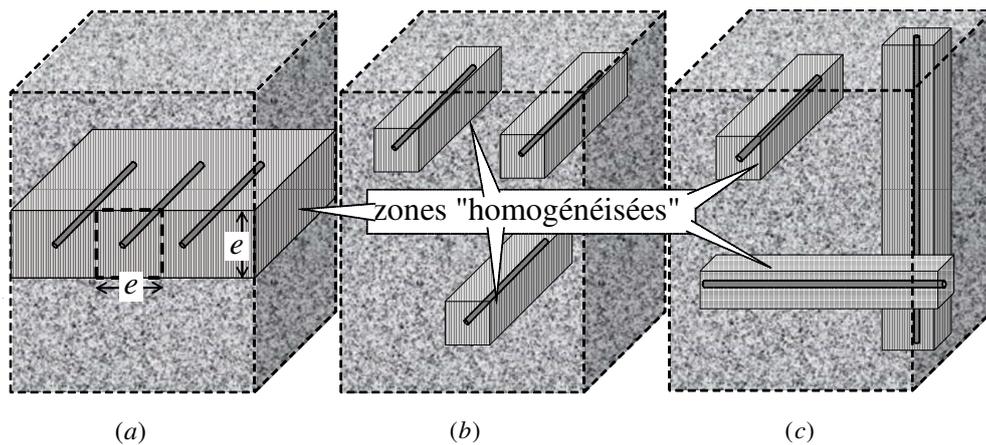


FIGURE 2.20 – Modélisation multiphasique des configurations de la Figure 2.18

Dans les deux autres cas (b) et (c), la modélisation 1D-3D de la structure composite a été remplacée par une modélisation 3D-3D dans laquelle les inclusions et la matrice

environnante sont elles-mêmes remplacées par des volumes cylindriques constitués du *milieu biphasique* ou *homogénéisé*. Cette modélisation 3D-3D permet un traitement beaucoup plus facile de la structure, puisque se référant par exemple à une technique d'éléments finis, il n'est plus nécessaire de discrétiser cette structure aussi finement que dans le cas où les inclusions elles-mêmes sont traitées comme des cylindres de diamètres beaucoup plus faibles.

La validité d'une telle démarche reste bien évidemment à démontrer, car elle repose sur le choix de la valeur  $A$  de l'aire de la section transversale du cylindre (de section carrée sur la Figure 2.20). On peut raisonnablement penser que la solution du problème 3D-3D ainsi défini, en termes de charge de ruine ou de capacité portante de la structure, sera relativement indépendante du choix de la valeur  $A$  dans une certaine plage de variation et proche de la solution exacte du problème initial. Ce point important devra bien évidemment être vérifié, ce que nous ferons ultérieurement par des simulations numériques sur des cas tests (voir Chapitre 3).

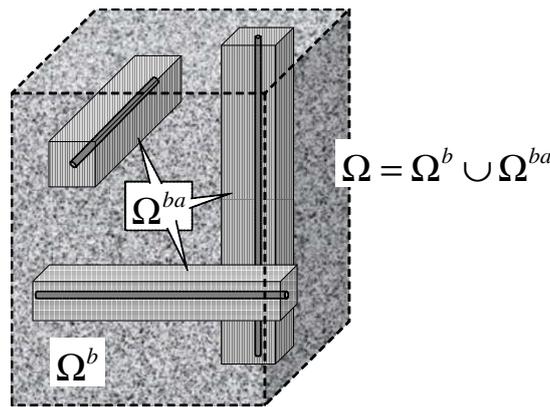


FIGURE 2.21 – Structure en béton armé « homogénéisée »

### 2.7.2 Formulation des approches statique et cinématique du problème de calcul à la rupture homogénéisé

Se plaçant dans le cas où la structure en béton armé « homogénéisée »<sup>(8)</sup> (Figure 2.21) est soumise à un seul paramètre de chargement  $Q$ <sup>(9)</sup>, le chargement *extrême* ou chargement de *ruine*  $Q^+$  est défini comme suit au sens de la théorie du calcul à la rupture. Il s'agit de la valeur maximale du chargement en deçà de laquelle il est possible de mettre en évidence un champ de contrainte  $\underline{\sigma}$  qui soit :

---

(8). C'est-à-dire dans le cas où il y a adhérence parfaite entre les phases matrice (béton) et renforcement.

(9). L'extension à plusieurs paramètres de chargement ne posant aucune difficulté particulière.

## 2.7. Extension de la modélisation multiphasique au cas d'une répartition quelconque des inclusions

---

- ✓ *Statiqument admissible* (S.A.) avec le chargement, c'est-à-dire vérifiant les équations d'équilibre en tout point de la structure :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) + \rho \underline{F} = 0, \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2.81)$$

où  $\rho \underline{F}$  désigne la densité volumique d'efforts à distance (poids volumique du béton ou du béton armé « homogénéisé »), la condition de continuité du vecteur-contrainte à la traversée d'éventuelles surfaces de discontinuité  $S_\Sigma$  de ce champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  dans le sens de la normale unitaire  $\underline{n}$  :

$$[[\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})]] \cdot \underline{n}(\underline{x}) = 0, \quad \forall \underline{x} \in S_\Sigma \quad (2.82)$$

ainsi que les conditions aux limites en contraintes ;

- ✓ respecte en tout point les conditions de résistance respectives du béton seul et du béton homogénéisé :

$$f^{R/MCT}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})) \leq 0, \quad \forall \underline{x} \in \Omega^b \text{ et } f^{hom}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})) \leq 0, \quad \forall \underline{x} \in \Omega^{ba} \quad (2.83)$$

où  $\Omega^b$  (resp.  $\Omega^{ba}$ ) désigne la partie de la structure occupée par le béton seul (resp. le béton armé « homogénéisé ») : voir Figure 2.21.

Tandis que l'*approche statique par l'intérieur* consiste classiquement à explorer, par voies analytique ou numérique (éléments finis) de tels champs de contrainte, l'*approche cinématique* consiste à explorer des champs de vitesse  $\underline{U}$  *cinématiquement admissibles* (C.A.) et *pertinents*<sup>(10)</sup> pour le problème, pour lesquels on calcule la puissance résistante maximale ainsi définie à partir des fonctions d'appui du critère du béton seul et de celui du béton armé (critère macroscopique) :

$$\begin{aligned} P_{rm}(\underline{U}) = & \int_{\Omega_b} \pi^{R/MCT}(\underline{d}) \, d\Omega + \int_{S_{\Sigma^b}} \pi^{R/MCT}(\underline{n}; \underline{V}) \, dS \\ & + \int_{\Omega_{ba}} \pi^{hom}(\underline{d}) \, d\Omega + \int_{S_{\Sigma^{ba}}} \pi^{hom}(\underline{n}; \underline{V}) \, dS \end{aligned} \quad (2.84)$$

où  $\underline{d}$  est le taux de déformation associé au champ de vitesse, et  $\underline{V}$  la discontinuité de vitesse à la traversée de surfaces  $S_{\Sigma^b}$  dans le béton seul et  $S_{\Sigma^{ba}}$  dans le béton armé. Compte-tenu des expressions (2.58) et (2.60) des fonctions  $\pi^{hom}$ , cette quantité peut être réécrite :

$$\begin{aligned} P_{rm}(\underline{U}) = & \int_{\Omega_b \cup \Omega_{ba}} \pi^{R/MCT}(\underline{d}) \, d\Omega + \int_{S_{\Sigma^b} \cup S_{\Sigma^{ba}}} \pi^{R/MCT}(\underline{n}; \underline{V}) \, dS \\ & + \int_{\Omega_{ba}} \sup \left\{ -k\sigma_0 d_{xx}, +\sigma_0 d_{xx} \right\} \, d\Omega + \int_{S_{\Sigma^{ba}}} \sup \left\{ -k\sigma_0 n_x V_x, +\sigma_0 n_x V_x \right\} \, dS \end{aligned} \quad (2.85)$$

---

(10). Rappelons que le respect de cette condition de pertinence assure que la *puissance résistante maximale* demeure une quantité positive finie, ainsi que les majorants obtenus.

## Calcul à la rupture pour le dimensionnement : fondements théoriques

---

La puissance virtuelle du chargement dans un tel champ de vitesse s'écrivant sous la forme  $Q\dot{q}(\underline{U})$ , le chargement extrême vérifie l'inégalité :

$$Q^+\dot{q}(\underline{U}) \leq P_{rm}(\underline{U}) \quad (2.86)$$

soit :

$$Q^+ \leq \min_{\underline{U}} \left\{ \frac{P_{rm}(\underline{U})}{\dot{q}(\underline{U})}; \dot{q}(\underline{U}) > 0 \right\} \quad (2.87)$$

conduisant ainsi à un processus de *minimisation*.

Le chapitre suivant est consacré à la formulation numérique de ces approches dans le cadre d'une méthode des éléments finis qui permet d'engendrer de façon automatique des champs de contrainte ou de vitesse discrétisés.

\*       \*

\*

# Chapitre 3

## Approche par le calcul à la rupture du dimensionnement des ouvrages massifs en béton armé : mise en œuvre numérique

**Résumé :** La mise en œuvre numérique des outils présentés dans le précédent chapitre est ici expliquée en détail. La résolution des approches statique et cinématique du calcul à la rupture par la méthode des éléments finis sont présentés sous la forme d'un problème d'optimisation mathématique résolu par un solveur d'optimisation non linéaire.

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>57</b>
<b>3.2</b>	<b>Méthodes des éléments finis pour l'approche statique du calcul à la rupture en 3D</b>	<b>58</b>
3.2.1	Formulation générale de l'approche statique du calcul à la rupture (approche par l'intérieur)	58
3.2.2	Discretisation par des éléments tétraédriques	62
3.2.3	Interpolation et discontinuité	63
3.2.4	Formulation des critères pour l'approche statique	67
<b>3.3</b>	<b>Méthode des éléments finis pour l'approche cinématique du calcul à la rupture en 3D</b>	<b>73</b>
3.3.1	Formulation générale de l'approche cinématique du calcul à la rupture (approche par l'extérieur)	73
3.3.2	Formulation des critères pour l'approche cinématique	75
3.3.3	Discretisation en tétraèdres	80
<b>3.4</b>	<b>Premiers exemples de validation</b>	<b>90</b>

## Calcul à la rupture pour le dimensionnement : mise en œuvre numérique

---

3.4.1	Retour sur l'exemple de la compression en déformations planes d'un bloc en béton armé . . . . .	91
3.4.2	Validation de la méthode d'homogénéisation dans le cas d'arma- tures isolées . . . . .	100
<b>3.5</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>112</b>

---

## 3.1 Introduction

Le précédent chapitre a permis d'introduire les outils et concepts fondamentaux pour traiter les structures en béton armé à l'État Limite Ultime par la méthode du calcul à la rupture. Les deux approches du calcul à la rupture, que sont l'approche statique et l'approche cinématique et qui permettent d'obtenir un *encadrement* de la capacité ultime d'une structure, ont été présentées.

Les critères choisis pour modéliser les différentes phases du matériau composite béton armé ont également été introduits. Deux critères pour la modélisation du béton ont été présentés : le critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction (MCT) ainsi que le critère de Rankine. Des différences entre les deux ont déjà été exposées analytiquement. Nous nous efforcerons de les comparer numériquement à travers plusieurs exemples dans la suite de cette thèse. Quant aux armatures, la modélisation multiphasique (incluant le cas particulier de la méthode d'homogénéisation) a été développée. Le choix de cette modélisation pour les armatures est dû principalement au fait que nous voulons traiter des structures massives en béton armé. Or, la différence de fraction volumique entre le matériau renforcement (les armatures) et le béton ne nous permettrait pas de traiter les armatures par une modélisation volumique fine (coût de calcul trop élevé).

Le chapitre qui s'ouvre ici a pour objectif d'implémenter numériquement les deux approches du calcul à la rupture. La mise en place numérique de ces deux approches se fera successivement dans la section 3.2 pour l'approche statique et dans la section 3.3 pour l'approche cinématique. Chacune de ces deux sections sera organisée de manière similaire. Une première partie permettra de rappeler les équations principales qui serviront ensuite à la mise en œuvre numérique de l'approche statique ou cinématique. Chaque approche sera alors reformulée sous la forme d'un problème d'optimisation. Puis, une partie permettra de présenter la formulation numérique des différents critères. Nous verrons que nous nous inscrirons dans le cadre de la *programmation semi-définie positive* (SDP). La méthode des éléments finis qui permet de discrétiser les champs statiques et cinématiques est alors choisie pour résoudre aussi bien l'approche statique que l'approche cinématique. Le choix du type d'élément fini, l'interpolation ainsi que les règles de discontinuité feront l'objet d'une dernière partie. Le problème pourra alors être réécrit en vue de sa résolution par Mosek [Mosek, 2018], un solveur de programmation semi-définie positive.

La dernière section de ce chapitre (section 3.4) viendra valider la procédure numérique ainsi mise au point avec deux exemples. L'un, très simple et déjà présenté dans le chapitre précédent est celui de l'étude d'un bloc renforcé en déformations planes soumis à un effort de compression. Le second, un peu plus compliqué, servira principalement à valider la méthode d'homogénéisation dans le cas d'armatures isolées (étude d'une poutre en béton armé soumis à de la flexion).

## 3.2 Méthodes des éléments finis pour l'approche statique du calcul à la rupture en 3D

Dans cette section, la théorie de la résolution d'un problème par l'approche statique par l'intérieur est mise en œuvre en considérant une discrétisation par éléments finis. La résolution passe par la formulation de l'approche statique comme un problème d'optimisation semi-définie positive dans le but de le résoudre avec Mosek [Mosek, 2018], solveur de problèmes d'optimisation non linéaire.

### 3.2.1 Formulation générale de l'approche statique du calcul à la rupture (approche par l'intérieur)

Nous commençons par rappeler le cadre général d'un problème multiphasique résolu par l'approche statique du calcul à la rupture avant de montrer comment le formuler numériquement afin de le résoudre par la méthode des éléments finis. Cette section vient dans la continuité de la section 2.7.2 où a été formulé l'approche statique dans le cas particulier de l'adhérence parfaite, un cas particulier du modèle multiphasique.

Le problème multiphasique est schématisé sur la Figure 3.1 où l'on distingue deux zones différentes : une zone non renforcée,  $\Omega^b$ , composée d'une phase matrice (zone béton) et une zone renforcée,  $\Omega^{ba}$ , composée d'une phase matrice et d'une phase renfort (zone béton armé).

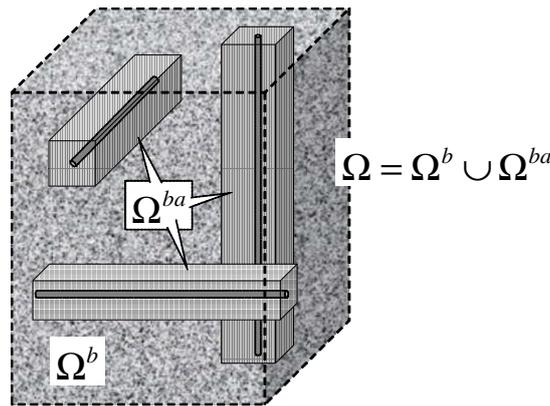


FIGURE 3.1 – Problème multiphasique

L'approche statique du calcul à la rupture dans le cas d'un problème multiphasique consiste à trouver un champ de contrainte en équilibre avec le chargement  $\underline{Q}$  et qui

### 3.2. Méthodes des éléments finis pour l'approche statique du calcul à la rupture en 3D

---

respecte les critères de résistance des différentes phases. On cherche donc :

$$\underline{Q} \in K \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \{ \underline{\sigma}^b \forall \underline{x} \in \Omega^b ; (\underline{\sigma}^b, \sigma^r, I) \forall \underline{x} \in \Omega^{ba} \} \text{ S.A. avec } \underline{Q} \\ f^b(\underline{\sigma}^b) \leq 0 ; f^r(\sigma^r) \leq 0 ; f^I(I) \leq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $K$  est le domaine des chargements potentiellement supportables par le système,  $\underline{\sigma}^b$  est le champ de contrainte du béton (phase matrice) dans  $\Omega^b$  et  $\Omega^{ba}$ ,  $\sigma^r$  est la contrainte du renfort (phase renforcement) dans  $\Omega^{ba}$  et  $I$  est la densité d'efforts d'interaction entre ces deux phases dans  $\Omega^{ba}$  (voir Chapitre 2).  $f^b(\underline{\sigma}^b)$  est le critère du béton (dans  $\Omega^b$  et  $\Omega^{ba}$ ),  $f^r(\sigma^r)$  est le critère dans le renfort (dans  $\Omega^{ba}$ ) et  $f^I(I)$  est le critère de l'interaction entre les deux phases (dans  $\Omega^{ba}$ ). Les critères doivent être respectés en tout point de la structure  $\Omega$ .

Pour qu'un champ de contrainte soit statiquement admissible, les conditions d'équilibre local, les conditions aux limites en efforts appliqués au problème ainsi que les équations de saut doivent être respectées, aussi bien dans une zone renforcée que dans une zone non renforcée.

Dans une zone non renforcée, l'équilibre s'écrit sur la phase matrice (béton), seule phase qui compose  $\Omega^b$  :

$$\forall \underline{x} \in \Omega^b, \quad \text{div } \underline{\sigma}^b + \rho^b \underline{F}^b = 0 \quad (3.2)$$

avec  $\rho^b \underline{F}^b$  la densité d'efforts volumiques appliqués au béton (poids volumique par exemple).

Dans une zone renforcée, les conditions d'équilibre à respecter sont différentes. L'équilibre se fait *séparément* sur chacune des deux phases qui composent le milieu  $\Omega^{ba}$  :

✓ Dans la phase matrice :

$$\forall \underline{x} \in \Omega^{ba}, \quad \text{div } \underline{\sigma}^b + \rho^b \underline{F}^b + I \underline{e}_x = 0 \quad (3.3)$$

✓ Dans la phase renforcement (renfort parallèle à  $\underline{e}_i$ ) :

$$\forall \underline{x} \in \Omega^{ba}, \quad \text{div } (\sigma^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) + \rho^r \underline{F}^r - I \underline{e}_x = 0 \quad (3.4)$$

avec  $\rho^b \underline{F}^b$  la densité d'efforts volumiques appliqués au béton et  $\rho^r \underline{F}^r$  la densité d'efforts volumiques appliqués au renfort et  $\underline{e}_x$  le vecteur unitaire parallèle à la direction du renforcement.

La condition de saut portant sur les efforts intérieurs s'exprime différemment selon que la surface de discontinuité,  $S_\Sigma$ , se trouve dans  $\Omega^b$ ,  $\Omega^{ba}$  ou à la frontière des deux domaines.

## Calcul à la rupture pour le dimensionnement : mise en œuvre numérique

---

Dans le cas où la surface de discontinuité est localisée dans  $\Omega^b$ , cette condition s'écrit :

$$\forall \underline{x} \in S_{\Sigma^b}, \llbracket \underline{\underline{\sigma}}^b \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \quad (3.5)$$

où  $\underline{n}$  est la normale unitaire à  $S_{\Sigma^b}$  et  $\llbracket \cdot \rrbracket$  la discontinuité de  $(\cdot)$  à travers cette surface en suivant la normale  $\underline{n}$ .

Cette dernière équation exprime la *continuité du vecteur contrainte* agissant sur une facette tangente à la surface de discontinuité  $S_{\Sigma^b}$ , de normale  $\underline{n}$ , à la traversée de cette surface.

Dans le cas où la surface de discontinuité est dans  $\Omega^{ba}$ , la condition de continuité des efforts intérieurs est :

✓ Dans la phase matrice :

$$\forall \underline{x} \in S_{\Sigma^{ba}}, \llbracket \underline{\underline{\sigma}}^b \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \quad (3.6)$$

✓ Dans la phase renforcement (renfort parallèle à  $\underline{e}_x$ ) :

$$\forall \underline{x} \in S_{\Sigma^{ba}}, \llbracket \sigma^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \Rightarrow \sigma^r \text{ est continu} \quad (3.7)$$

Dans le cas de la discontinuité à la frontière entre une zone renforcée et une zone non renforcée, la continuité du vecteur contrainte ne portera que sur le tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}^b$  (de manière équivalente à l'équation (3.5) et l'équation (3.6)).

Les conditions à respecter afin que le champ de contrainte soit statiquement admissibles ont été exprimées à travers les équations (3.2) à (3.7), auxquelles s'ajoutent les conditions aux limites. Dans le cas d'efforts surfaciques extérieurs donnés *nuls* (bords libres) dans une zone non renforcée, on a :

$$\forall \underline{x} \in \partial\Omega_{\text{libre}}^b, \underline{\underline{\sigma}}^b \cdot \underline{n} = 0 \quad (3.8)$$

où  $\partial\Omega_{\text{libre}}^b$  désigne l'union des bords libres d'efforts du contour  $\partial\Omega^b$  de  $\Omega^b$ .

Et dans le cas d'efforts surfaciques extérieurs donnés nuls (bords libres) dans une zone renforcée, on a pour la phase béton :

$$\forall \underline{x} \in \partial\Omega_{\text{libre}}^{ba}, \underline{\underline{\sigma}}^b \cdot \underline{n} = 0 \quad (3.9)$$

et pour la phase renforcement :

$$\forall \underline{x} \in \partial\Omega_{\text{libre}}^{ba}, (\sigma^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) \cdot \underline{n} = 0 \quad (3.10)$$

avec  $\partial\Omega_{\text{libre}}^{ba}$ , l'union des bords libres d'efforts du contour  $\partial\Omega^{ba}$  de  $\Omega^{ba}$ .

### 3.2. Méthodes des éléments finis pour l'approche statique du calcul à la rupture en 3D

---

Concernant le chargement appliqué sur une surface de la structure, il pourra être exprimé de manière similaire à la condition de bord libre pour laquelle les efforts extérieurs appliqués sont non nuls.

Le vecteur de chargement  $\underline{Q}$  équilibrée par ce champ appartient alors au domaine  $K$  (domaine des chargements potentiellement supportables) si et seulement si le champ de contrainte vérifie les conditions de résistance (i.e.  $f^b(\underline{\sigma}^b) \leq 0$  ;  $f^r(\sigma^r) \leq 0$  ;  $f^I(I) \leq 0$ ). L'ensemble des chargements  $\underline{Q}$  appartenant à  $K$ , constitue une enveloppe convexe,  $K^{stat}$ , incluse dans  $K$ , d'où la dénomination d'approche statique « par l'intérieur ».

Le long d'un *trajet de chargement radial*, la valeur maximale du chargement obtenue par cette approche permet d'obtenir :

$$\underline{Q}^+ = \lambda^+ \underline{Q}^* \quad (3.11)$$

où  $\underline{Q}^*$  est un vecteur quelconque du chargement et où  $\lambda^+$  est défini par :

$$\lambda^+ = \sup\{\lambda; \lambda \underline{Q}^* \in K\} \quad (3.12)$$

Étant donné un champ de contrainte  $\underline{\sigma}^*$  quelconque statiquement admissible avec  $\underline{Q}^*$ , on a :

$$\lambda^s \underline{\sigma}^*(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (3.13)$$

avec  $\lambda^s$  défini par :

$$\lambda^s = \sup\{\lambda; \lambda \underline{\sigma}^*(\underline{x}) \in G(\underline{x}), \forall \underline{x} \in \Omega\} \quad (3.14)$$

Il est clair que  $\lambda^s$  constitue un *minorant* de la valeur maximale  $\lambda^+$  :

$$\lambda^s \leq \lambda^+ \quad (3.15)$$

La valeur maximale de chargement,  $\lambda^s \underline{Q}^*$ , obtenue par une telle approche représente une *borne inférieure* du chargement extrême le long de ce trajet de chargement.

La mise en œuvre numérique de l'approche statique est alors effectuée par la méthode des éléments finis qui permet de discrétiser les champs de contrainte. Comme le montrent les équations (3.14) et (3.15), l'approche statique du calcul à la rupture se traduit par

un problème de maximisation sous contraintes que l'on peut résumer comme suit :

$$\begin{aligned}
 \lambda^+ \geq \lambda^s = \max_{\underline{\underline{\sigma}}^b, \sigma^r, I} \quad & \lambda \\
 \text{t.q.} \quad & \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^b + \rho^b \underline{\underline{F}}^b = 0 & (\forall \underline{x} \in \Omega^b) \\
 & \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^b + \rho^b \underline{\underline{F}}^b + I \underline{e}_x = 0 & (\forall \underline{x} \in \Omega^{ba}) \\
 & \operatorname{div} (\sigma^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) + \rho^r \underline{\underline{F}}^r - I \underline{e}_x = 0 & (\forall \underline{x} \in \Omega^{ba}) \\
 & \llbracket \underline{\underline{\sigma}}^b \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 & (\forall \underline{x} \in S_{\Sigma^b}) \\
 & \llbracket \underline{\underline{\sigma}}^b \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 & (\forall \underline{x} \in S_{\Sigma^{ba}}) \\
 & \llbracket \sigma^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 & (\forall \underline{x} \in S_{\Sigma^{ba}}) \\
 & C.L. & (\forall \underline{x} \in \partial\Omega) \\
 & f^b(\underline{\underline{\sigma}}^b) \leq 0 & (\forall \underline{x} \in \Omega) \\
 & f^r(\sigma^r) \leq 0 & (\forall \underline{x} \in \Omega^{ba}) \\
 & f^I(I) \leq 0 & (\forall \underline{x} \in \Omega^{ba})
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

### 3.2.2 Discrétisation par des éléments tétraédriques

Le domaine  $\Omega$  du volume étudié est discrétisé en  $N_e$  éléments finis *tétraédriques* à quatre nœuds  $\Omega_e$ . Un élément fini de ce type est représenté sur la Figure 3.2. À chaque sommet du tétraèdre est attaché un nombre fini de degrés de liberté en contraintes.

Contrairement à la méthode des éléments finis traditionnelle, la valeur du champ  $\underline{\underline{\sigma}}$  est propre au sommet de chaque élément et non au nœud du maillage. En d'autres termes, au niveau d'un nœud *géométrique* peut coexister autant de valeurs du champ  $\underline{\underline{\sigma}}$  qu'il y a d'éléments aboutissant à ce nœud. Il existe bien entendu des règles de « discontinuité » du champ  $\underline{\underline{\sigma}}$  entre ces éléments contigus. Elles seront détaillées dans la partie suivante (3.2.3).

Dans le cas d'une *modélisation multiphasique*, un élément fini comme celui présenté sur la Figure 3.2, sera situé soit dans une zone de béton seul, soit dans une zone renforcée (béton armé).

Dans les zones non renforcées, les variables aux sommets du tétraèdre sont les six composantes du tenseur des contraintes dans le béton :  $\underline{\underline{\sigma}}^b$  (voir Figure 3.3). Tandis que dans les zones renforcées, on retrouvera le tenseur des contraintes du béton  $\underline{\underline{\sigma}}^b$  (phase matrice) auquel s'ajoute une variable scalaire  $\sigma^r$ , par direction de renforcement (phase renforcement) ainsi qu'une variable scalaire  $I$  (également par direction de renforcement), correspondant à l'interaction entre la phase béton et chaque phase renforcement (voir Figure 3.4).

### 3.2. Méthodes des éléments finis pour l'approche statique du calcul à la rupture en 3D

---

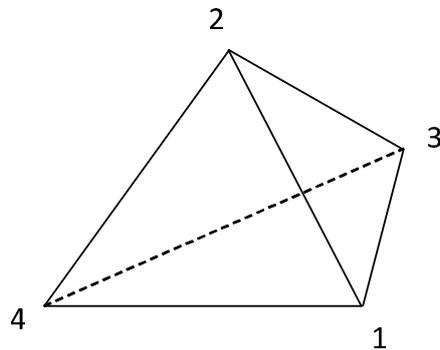


FIGURE 3.2 – Élément fini tétraédrique à quatre nœuds

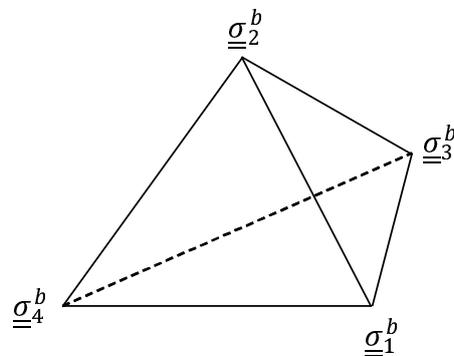


FIGURE 3.3 – Élément fini dans une zone béton seul

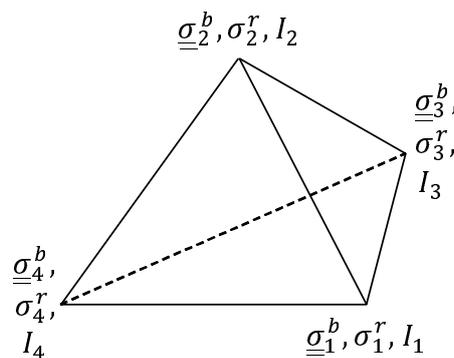


FIGURE 3.4 – Élément fini dans une zone renforcée dans une seule direction

#### 3.2.3 Interpolation et discontinuité

On choisit une interpolation linéaire du champ de contrainte au sein de chaque élément fini. La composante  $\sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes en tout point  $\underline{x}$  de l'élément

peut classiquement être exprimée par :

$$\sigma_{ij}(\underline{x}) = \sum_{k=1}^4 N^k(\underline{x}) \sigma_{ij}^k, \quad i,j = x,y,z \quad (3.17)$$

où  $\sigma_{ij}(\underline{x})$  est la composante du tenseur des contraintes en un point  $\underline{x}$  de l'élément,  $\sigma_{ij}^k$  la composante du tenseur des contraintes au nœud  $k$  de l'élément, et  $N_k(\underline{x})$  la valeur, au point  $\underline{x}$ , de la fonction d'interpolation (linéaire dans ce cas) associée au nœud  $k$  de l'élément ( $k = 1,2,3,4$ ). On rappelle la définition des fonctions d'interpolation :

$$N_k(\underline{x}_l) = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases} \quad (3.18)$$

où  $k,l = 1,2,3,4$  sont les numéros des sommets de l'élément. Dans les zones renforcées, les variables  $\sigma^r$  et  $I$  sont interpolées de la même manière (avec les mêmes fonctions d'interpolation).

### 3.2.3.1 Cas d'une zone non renforcée

L'équilibre doit être assuré en tout point de la structure  $\Omega$  et donc au sein de chaque élément  $\Omega_e$ . Dans une zone *non renforcée* (béton seul) l'équilibre est assuré par l'équation (3.2) qui s'écrit en composantes cartésiennes orthonormées :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -\rho F_x \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = -\rho F_y \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\rho F_z \end{cases} \quad (3.19)$$

où, afin d'éviter la surcharge d'exposants,  $\sigma^b$  est remplacé par  $\sigma$ .

En tirant profit de la discrétisation en éléments finis et de l'interpolation du champ de contrainte, l'équation (3.19) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^4 \sigma_{xx}^k N_{k,x} + \sum_{k=1}^4 \sigma_{xy}^k N_{k,y} + \sum_{k=1}^4 \sigma_{xz}^k N_{k,z} = -\rho F_x \\ \sum_{k=1}^4 \sigma_{xy}^k N_{k,x} + \sum_{k=1}^4 \sigma_{yy}^k N_{k,y} + \sum_{k=1}^4 \sigma_{yz}^k N_{k,z} = -\rho F_y \\ \sum_{k=1}^4 \sigma_{xz}^k N_{k,x} + \sum_{k=1}^4 \sigma_{yz}^k N_{k,y} + \sum_{k=1}^4 \sigma_{zz}^k N_{k,z} = -\rho F_z \end{cases} \quad (3.20)$$

### 3.2. Méthodes des éléments finis pour l'approche statique du calcul à la rupture en 3D

où  $N_{k,x} = \frac{\partial N_k}{\partial x}$ ,  $N_{k,y} = \frac{\partial N_k}{\partial y}$ ,  $N_{k,z} = \frac{\partial N_k}{\partial z}$  avec  $k = 1, 2, 3, 4$ .

L'équation (3.20) peut aussi s'écrire sous forme matricielle, forme adéquate pour l'écriture du problème d'optimisation numérique qui sera développée ultérieurement :

$$\left[ \dots \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^k & \sigma_{xy}^k & \sigma_{xz}^k \\ \sigma_{xy}^k & \sigma_{yy}^k & \sigma_{yz}^k \\ \sigma_{xz}^k & \sigma_{yz}^k & \sigma_{zz}^k \end{bmatrix} \dots \right] \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho F_x \\ -\rho F_y \\ -\rho F_z \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Ce qui revient à écrire l'équation d'équilibre (3.2) à l'intérieur de chaque élément  $\Omega_e^b$  de la manière suivante :

$$\forall \underline{x} \in \Omega_e^b, \quad \text{div } \underline{\underline{\sigma}}^b = \sum_{k=1}^4 {}^t \text{grad} N_k \cdot \underline{\underline{\sigma}}_k^b = -\rho^b \underline{F}^b \quad (3.22)$$

Puisque le champ de contrainte varie *linéairement* au sein de chaque élément, la quantité  $\text{div } \underline{\underline{\sigma}}^b$  est *constante* au sein de l'élément. Afin de vérifier l'équation d'équilibre en tout point de l'élément  $\Omega_e^b$ , il est donc suffisant de vérifier cette dernière en un seul point de l'élément pour qu'elle soit vérifiée dans tout l'élément.

L'équation (3.5) exprime la continuité du vecteur contrainte à la traversée d'une surface de discontinuité  $S_{\Sigma^b}$ , dans  $\Omega^b$  (aussi appelée *condition de saut*). Cette condition est une condition *linéaire* et doit être vérifiée pour chaque surface de discontinuité  $S_{\Sigma^b}$  du champ de contrainte et donc entre tous les éléments finis contigus (comme ceux présentés sur la figure 3.5) dans  $\Omega^b$  :

$$(\underline{\underline{\sigma}}_+^b - \underline{\underline{\sigma}}_-^b) \cdot \underline{n} = 0 \quad (3.23)$$

avec  $\Omega_+^e$  et  $\Omega_-^e$  deux éléments voisins.

Le champ de contrainte au sein de chaque élément étant affine, la continuité du vecteur contrainte doit être vérifiée en chacun des trois sommets de la *facette triangulaire*,  $S_{\Sigma^b}$  (constituant la frontière entre deux éléments) afin d'être vérifiée partout sur celle-ci.

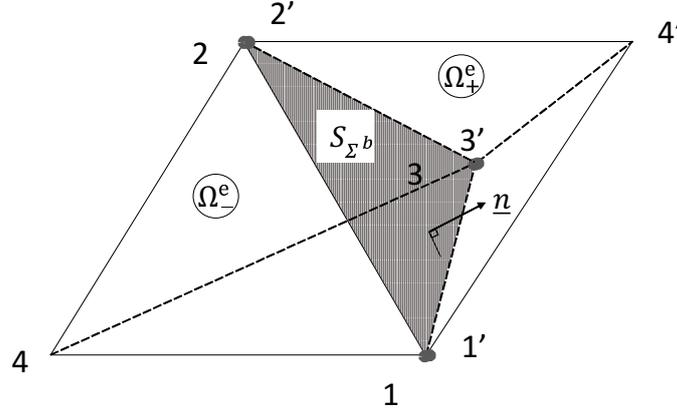


FIGURE 3.5 – Discontinuité entre deux tétraèdres adjacents

### 3.2.3.2 Cas d'une zone renforcée

Dans le cas où un élément fini se trouve dans une *zone renforcée*, les conditions d'équilibre à respecter sont exprimées au travers des équations (3.3) et (3.4) avec une équation d'équilibre pour chacune des deux phases constituant le matériau multiphasique.

Nous nous plaçons dans le cas particulier de l'*adhérence parfaite* entre les deux phases dans  $\Omega^{ba}$ , un cas particulier de la modélisation multiphasique : la *méthode d'homogénéisation*. Ce qui veut dire qu'il n'y a pas de condition de résistance spécifique associée à la densité d'effort d'interaction  $I$ , qui peut prendre n'importe quelle valeur. En éliminant la densité d'effort d'interaction  $I$  par sommation des équations (3.3) et (3.4), on obtient alors :

$$\forall \underline{x} \in \Omega_e^{ba}, \quad \text{div} \left( \underbrace{\underline{\underline{\Sigma}}}_{\underline{\underline{\Sigma}}} + \underbrace{\rho^b \underline{F}^b + \rho^r \underline{F}^r}_{\rho \underline{F}} \right) = 0 \quad (3.24)$$

où  $\underline{\underline{\Sigma}}$ , le tenseur des contraintes totales (également appelée contrainte macroscopique), est défini comme la somme de  $\underline{\underline{\sigma}}^b$ , la contrainte dans le béton (phase matrice) et  $\sigma^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$ , la contrainte dans la phase renforcement (renfort selon la direction  $\underline{e}_x$ ) :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^b + \sigma^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (3.25)$$

Dans le cas particulier de l'*adhérence parfaite*, les conditions de continuité du vecteur contrainte exprimées par les équations (3.6) et (3.7) peuvent alors s'exprimer sur le tenseur des contraintes *totales*  $\underline{\underline{\Sigma}}$  :

$$\forall \underline{x} \in S_{\Sigma^{ba}}, \quad \llbracket \underline{\underline{\Sigma}} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \quad (3.26)$$

$$(\underline{\underline{\Sigma}}_+ - \underline{\underline{\Sigma}}_-) \cdot \underline{n} = 0 \quad (3.27)$$

### 3.2. Méthodes des éléments finis pour l'approche statique du calcul à la rupture en 3D

Les conditions d'équilibre exprimées par les équations (3.22) et (3.23) pour les zones non renforcées et par les équations (3.24) et (3.27) pour les zones renforcées, auxquelles s'ajoutent les conditions aux limites en contraintes, permettent d'assurer que le champ discrétisé en éléments finis est bien *statiquement admissible* (S.A.) avec le chargement  $Q$  (dans le cas particulier de l'adhérence parfaite de la modélisation multiphasique et d'un seul paramètre de chargement). On peut condenser ces conditions sous forme matricielle :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \text{ S.A. avec } Q \Leftrightarrow \begin{cases} Q = {}^t \{A\} \{X\} \\ \text{avec } [B] \{X\} = \{C\} \end{cases} \quad (3.28)$$

où  $\{X\}$  est un vecteur contenant toutes les inconnues nodales ( $\sigma_{ij}^b$  dans  $\Omega^b$  et  $\Sigma_{ij}$  dans  $\Omega^{ba}$ ) associées à la discrétisation en éléments finis et  $[B] \{X\} = \{C\}$  est un *système linéaire* dans lequel sont assemblées toutes les contributions élémentaires de l'équilibre local de la structure, de la continuité du vecteur contrainte (condition de saut), ainsi que des conditions aux limites en contraintes.

L'approche calcul à la rupture consistant à trouver le chargement maximal qui peut être appliqué à la structure, l'*approche statique* traitée par la méthode des éléments finis conduit au problème d'optimisation (maximisation) suivant :

$$Q^+ \geq Q^s = \max_{\{X\}} Q = {}^t \{A\} \{X\} \text{ tel que } \begin{cases} [B] \{X\} = \{C\} \quad (\text{équilibre}) \\ f^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) \leq 0 \quad (\text{critère}) \end{cases} \quad (3.29)$$

Il convient alors de vérifier le critère  $f^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}})$  en tout point de la structure  $\Omega$  et donc au sein de chaque élément fini  $\Omega_e$  afin d'obtenir une borne inférieure rigoureuse du chargement maximal.

Nous allons voir maintenant comment exprimer le critère du béton et celui du béton armé.

#### 3.2.4 Formulation des critères pour l'approche statique

La *convexité* des critères de résistance, associée à la variation *linéaire* du champ de contrainte sur chaque élément, permet de montrer qu'il suffit que les critères soient vérifiés aux *quatre sommets* de l'élément pour être vérifiés en tout point de l'élément.

Quelle que soit la zone dans laquelle on se trouve (zone renforcée ou non), chacun des critères doit être vérifié *indépendamment*. C'est-à-dire que pour une zone renforcée on vérifie :

$$f^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f^b(\underline{\underline{\sigma}}^b) \leq 0 \\ f^r(\underline{\underline{\sigma}}^r) \leq 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

## Calcul à la rupture pour le dimensionnement : mise en œuvre numérique

où l'on fait apparaître un critère distinct sur chacune des phases du milieu multiphasique.

Pour une zone non renforcée, n'étant constituée que de la phase matrice (béton), seul le critère  $f^b(\underline{\underline{\sigma}}^b)$  doit être vérifié.

Dans cette partie, nous allons montrer comment doit être exprimé numériquement le critère du béton (critère de Mohr-Coulomb tronqué (MCT) ou critère de Rankine (R)) en écrivant le problème comme un *problème d'optimisation semi-définie positive* (SDP). Nous montrerons aussi comment écrire le critère sur les armatures. Bien que nous nous placions dans le cas de l'*adhérence parfaite*, le critère sur l'interaction sera également formulé pour le cas général de la modélisation multiphasique.

### 3.2.4.1 Critère de Mohr-Coulomb

Nous commençons par formuler le critère de Mohr-Coulomb. Puis nous verrons comment ajouter la troncature afin d'obtenir le critère MCT.

La programmation SDP fait intervenir des matrices devant appartenir au cône convexe des matrices *semi-définies positives* [Vandenberghe et Boyd, 1996][Freund, 2007] définit comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_+^r &= \{X \in \mathcal{S}^r, X \succeq 0\} \\ \text{avec } X \succeq 0 &\Leftrightarrow {}^t z X z \geq 0, \forall z \in \mathbb{R}^r \end{aligned} \quad (3.31)$$

où  $\mathcal{S}^r$  désigne l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille  $r$ . À noter que  $X \succeq 0$  si et seulement si ses valeurs propres sont toutes positives ou nulles.

Ce cadre de programmation est donc propice à la résolution de problèmes d'optimisation exprimés à l'aide des valeurs propres de matrices symétriques, et donc au cas du critère de Mohr-Coulomb. Martin et Makrodimopoulos [2008] ont montré que la programmation SDP est le choix naturel pour mettre en place la résolution d'une analyse par éléments finis de matériaux de Mohr-Coulomb en 3D.

En effet, dans le cas d'un état de contrainte 3D, le critère de Mohr-Coulomb s'exprime usuellement comme suit :

$$f^b(\underline{\underline{\sigma}}) = (1 + \sin(\phi))\sigma_M - (1 - \sin(\phi))\sigma_m - 2C\cos(\phi) \leq 0 \quad (3.32)$$

où  $\sigma_M$  et  $\sigma_m$  sont respectivement les contraintes principales majeure et mineure du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$ .  $C$  et  $\phi$  sont des paramètres du matériau, respectivement la cohésion et l'angle de frottement interne.

Soient  $\lambda_{\max}$  et  $\lambda_{\min}$ , respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre du

### 3.2. Méthodes des éléments finis pour l'approche statique du calcul à la rupture en 3D

tenseur (symétrique)  $\underline{\underline{\sigma}}$ . Il en découle alors que :

$$\begin{aligned} t_{\max} \geq \lambda_{\max} &\Leftrightarrow t_{\max} \mathbf{1} - \underline{\underline{\sigma}} \succeq 0 \\ t_{\min} \leq \lambda_{\min} &\Leftrightarrow t_{\min} \mathbf{1} - \underline{\underline{\sigma}} \preceq 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Martin et Makrodimopoulos [2008] montrent que puisque :

$$\left. \begin{aligned} t_{\max} &\geq \lambda_{\max} \\ t_{\min} &\leq \lambda_{\min} \\ \alpha t_{\max} - \beta t_{\min} &= \gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha \lambda_{\max} - \beta \lambda_{\min} \leq \gamma \quad (3.34)$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  positifs, il est possible d'exprimer le critère de Mohr-Coulomb (3.32) par :

$$\begin{cases} t_{\max} \mathbf{1} - \underline{\underline{\sigma}} \succeq 0 \\ t_{\min} \mathbf{1} - \underline{\underline{\sigma}} \preceq 0 \\ (1 + \sin(\phi))t_{\max} - (1 - \sin(\phi))t_{\min} - 2C \cos(\phi) = 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

où  $t_{\max}$  et  $t_{\min}$  sont des *variables auxiliaires*. La troisième équation du système (3.35) permet d'éliminer  $t_{\max}$ . On peut donc finalement écrire le critère de Mohr-Coulomb sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} - 1/K_p t_{\min} \mathbf{1} &\preceq 1/K_p f_c \mathbf{1} \\ -\underline{\underline{\sigma}} + t_{\min} \mathbf{1} &\preceq 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

où :

$$1/K_p = \frac{1 - \sin(\phi)}{1 + \sin(\phi)}, \quad f_c = \frac{2C \cos(\phi)}{1 - \sin(\phi)} \quad (3.37)$$

où  $f_c$  représente la *résistance en compression simple* du béton (cf. Chapitre 2).

En introduisant  $\underline{\underline{X}}$ , une matrice auxiliaire, la seconde expression de (3.36) peut également s'écrire :

$$t_{\min} \mathbf{1} - \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{X}} = 0 \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{X}} \succeq 0 \quad (3.38)$$

de sorte qu'en utilisant la relation :

$$\underline{\underline{\sigma}} = t_{\min} \mathbf{1} + \underline{\underline{X}} \quad (3.39)$$

la première inégalité de (3.36) devient :

$$\underline{\underline{X}} + (1 - 1/K_p)t_{\min} \mathbf{1} \preceq 1/K_p f_c \mathbf{1} \quad (3.40)$$

Introduisant enfin une seconde matrice auxiliaire  $\underline{\underline{Y}}$ , le critère de Mohr-Coulomb tridimensionnel peut finalement être formulé comme suit :

$$\begin{aligned} (1 - 1/K_p)t_{\min} \mathbf{1} + \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{Y}} &= f_c/K_p \mathbf{1} \\ \text{avec} \quad \underline{\underline{X}} \succeq 0 \quad \text{et} \quad \underline{\underline{Y}} \succeq 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

formulation qui se prête facilement à un traitement numérique à l'aide d'un solveur SDP tel que Mosek [Mosek, 2018] que nous avons utilisé dans tout ce travail.

L'expression du critère de Mohr-Coulomb sous la forme de conditions SDP a aussi été présenté par Bisbos [2006, 2007] ainsi que par Krabbenhøft *et al.* [2008].

### 3.2.4.2 Critère de Rankine

Avant de voir comment tronquer le critère de Mohr-Coulomb pour obtenir le critère MCT, nous allons formuler numériquement le critère de Rankine. Cette formulation nous servira ensuite pour la troncature du critère MCT.

On rappelle que le critère de Rankine est défini par :

$$-f_c \leq \sigma_i \leq f_t, i = 1,2,3 \quad (3.42)$$

où  $\sigma_i$  sont les contraintes principales et  $f_t$  et  $f_c$  sont respectivement les résistances en traction et compression uniaxiales.

De la même manière que ce qui a été présenté pour la formulation du critère de Mohr-Coulomb dans la partie 3.2.4.1, le critère de Rankine peut donc être exprimé comme suit :

$$f^R(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\underline{\underline{\sigma}} + f_t \mathbf{1} \succeq 0 \\ \underline{\underline{\sigma}} + f_c \mathbf{1} \succeq 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

Les expressions (3.42) et (3.43) sont équivalentes mais cette dernière permet d'exprimer le critère de Rankine sous une forme acceptable pour un solveur mathématique SDP en ayant comme inconnues du problème les composantes du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$ .

On note ici que la première équation du système (3.43) aurait pu être obtenue à partir de (3.36) en prenant comme valeur particulière de l'angle de frottement interne  $\phi = \pi/2$ . Le critère de Rankine est donc exprimé par deux équations qui définissent trois plans chacune, formant un critère borné et fermé : un cube (voir la représentation du critère de Rankine dans le Chapitre 2).

### 3.2.4.3 Critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction (MCT)

Le critère de Mohr-Coulomb seul ne semble pas approprié pour représenter le comportement du béton. En effet, dès lors que l'angle de frottement interne est fixé à  $37^\circ$  (ce qui est généralement admis pour le béton), le rapport entre  $f_c$  et  $f_t$  est de l'ordre de quatre (voir Chapitre 2 équation (2.26)). Les résultats expérimentaux montrant que le rapport

### 3.2. Méthodes des éléments finis pour l'approche statique du calcul à la rupture en 3D

---

entre  $f_c$  et  $f_t$  est bien supérieur à quatre, l'utilisation du critère de Mohr-Coulomb tel quel ne peut convenir pour décrire la résistance du béton.

Il convient donc de le tronquer en *traction* permettant ainsi de gérer les paramètres  $f_c$  et  $f_t$  indépendamment à  $\phi = 37^\circ$  fixé. Pour cela, il suffit de rajouter un (demi) critère de Rankine afin de limiter les contraintes de traction :

$$\sigma_i \leq f_t \quad (3.44)$$

qui opère directement sur les contraintes principales. Il a été montré dans la partie 3.2.4.2 que ce critère pouvait être écrit de la manière suivante :

$$-\underline{\underline{\sigma}} + f_t \mathbf{1} \succeq 0 \quad (3.45)$$

soit de manière équivalente :

$$\underline{\underline{\sigma}} - f_t \mathbf{1} \preceq 0 \quad (3.46)$$

En introduisant une variable auxiliaire  $\alpha$ , on peut aussi écrire la condition de troncature par une inéquation SDP et une inégalité linéaire :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} - \alpha \mathbf{1} &\preceq 0 \\ \alpha &\leq f_t \end{aligned} \quad (3.47)$$

Cette écriture semble à première vue plus lourde mais l'introduction de cette variable auxiliaire permettra, en combinant avec les équations du critère de Mohr-Coulomb, de gagner une équation portant sur les variables SDP. Pour la résolution numérique, on préfère avoir une égalité (ou inégalité) linéaire en plus plutôt qu'une équation SDP qui sera numériquement plus coûteuse.

Cette troncature s'ajoute donc au critère de Mohr-Coulomb, précédemment exprimé (équation (3.36)). La première inéquation de (3.36) :

$$\underline{\underline{\sigma}} - 1/K_p(t_{\min} + f_c)\mathbf{1} \preceq 0 \quad (3.48)$$

peut également s'écrire :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} - \alpha \mathbf{1} &\preceq 0 \\ \alpha &\leq 1/K_p(t_{\min} + f_c) \end{aligned} \quad (3.49)$$

où la variable auxiliaire  $\alpha$ , introduite précédemment est utilisée à nouveau.

Le critère de *Mohr-Coulomb tronqué en traction* s'exprime donc à travers deux inéquations SDP et deux inégalités linéaires :

$$f^{MCT}(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} - \alpha \mathbf{1} \preceq 0 \\ -\underline{\underline{\sigma}} + t_{\min} \mathbf{1} \preceq 0 \\ \alpha \leq f_t \\ \alpha \leq 1/K_p(t_{\min} + f_c) \end{cases} \quad (3.50)$$

## Calcul à la rupture pour le dimensionnement : mise en œuvre numérique

---

Dans l'optique d'un traitement numérique à l'aide d'un solveur SDP, on préférera exprimer le critère MCT de la manière suivante :

$$f^{MCT}(\underline{\sigma}) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\sigma} - \alpha \mathbf{1} + \underline{X} = 0 \\ -\underline{\sigma} + t_{\min} \mathbf{1} + \underline{Y} = 0 \\ \alpha \leq f_t \\ \alpha \leq 1/K_p t_{\min} + f_c \\ \underline{X}, \underline{Y} \succeq 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

en introduisant deux matrices auxiliaires  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$ , imposées semi-définies positives.

### 3.2.4.4 Critères de résistance des armatures et de l'interaction

Nous allons maintenant présenter la formulation numérique du critère de résistance des armatures constituant la phase renforcement, intervenant dans l'application du modèle multiphasique pour décrire le béton armé.

✓ Critère de résistance des armatures

Le critère de résistance des armatures est beaucoup plus simple à exprimer que celui du béton. Ce dernier a été présenté dans le chapitre précédent pour le modèle multiphasique :

$$\begin{aligned} -k\sigma_0 &\leq \sigma^r \leq \sigma_0 \\ \sigma_0 &= N_0/A \end{aligned} \quad (3.52)$$

où  $N_0$  est la résistance en traction simple d'une inclusion définie par :

$$N_0 = A^r \sigma^y = (\pi \Phi^2 / 4) \sigma^y$$

et  $A$  est l'aire de la section de béton armé comprenant une armature.

Ce critère s'exprime donc simplement comme une condition *linéaire* portant sur la variable scalaire  $\sigma^r$ , contrainte uniaxiale dans le renfort.

✓ Critère de résistance relatif à l'interaction béton/armatures

Bien que nous nous placions dans la suite dans le cas particulier de l'*adhérence parfaite* et donc qu'il n'y a pas de condition de résistance sur la densité d'efforts d'interaction, nous mentionnons ici simplement le critère sur ce paramètre dans le cas de la modélisation multiphasique générale :

$$f(I) \leq 0 \Leftrightarrow |I| \leq I_0 \quad (3.53)$$

### 3.3. Méthode des éléments finis pour l'approche cinématique du calcul à la rupture en 3D

---

Ce critère est similaire à celui sur les armatures : condition linéaire bornant la densité d'efforts d'interaction  $I$ . Dans le cas de l'adhérence parfaite, le paramètre  $I_0$  prend une valeur infinie.

L'identification de ce paramètre  $I_0$  qui caractérise la résistance de l'interaction entre les phases peut être réalisé par voie expérimentale et pour le béton armé, l'essai normalisé d'arrachement (« pull-out test »), qui consiste à tirer sur une armature ancrée dans une éprouvette de béton, permet d'identifier ce paramètre.

## 3.3 Méthode des éléments finis pour l'approche cinématique du calcul à la rupture en 3D

Après avoir mis en place le cadre numérique permettant de résoudre un problème de dimensionnement par l'approche statique du calcul à la rupture, nous allons en faire de même pour son dual : l'*approche cinématique* du calcul à la rupture.

### 3.3.1 Formulation générale de l'approche cinématique du calcul à la rupture (approche par l'extérieur)

L'approche cinématique du calcul à la rupture a été introduite dans le Chapitre 2. Nous rappelons ici les points principaux sur lesquels nous nous appuyerons afin de formuler cette approche en vue de sa résolution par la méthode des éléments finis.

Dans un premier temps, nous allons présenter cette approche dans le cas général de la modélisation multiphasique puis nous passerons au cas qui nous intéresse : le cas particulier de l'*adhérence parfaite* qui sera le seul traité numériquement.

Le principe de cette approche consiste à explorer des *couples* de champs de vitesse virtuelles  $\{\underline{U}^b, \underline{U}^r\}$  cinématiquement admissibles (C.A.), qui respectent les *conditions de pertinence* et pour lesquels la puissance résistante maximale doit rester supérieure ou égale à la puissance du chargement pour que ce dernier soit potentiellement supportable :  $P_{ext} \leq P_{rm}$ .

L'expression de la puissance résistante maximale pour un problème multiphasique s'écrit [de Buhan *et al.*, 2017] :

$$P_{rm}(\underline{U}^b, \underline{U}^r) = \int_{\Omega} (\pi^b(\underline{d}^b) + \pi^r(d^r) + \pi^I(\Delta)) d\Omega \quad (3.54)$$

où  $\underline{d}^b$  est le taux de déformation virtuel dans le béton (phase matrice) et  $d^r$  est le taux de déformation virtuel dans le renfort (phase renforcement).  $\Delta$  est la différence

## Calcul à la rupture pour le dimensionnement : mise en œuvre numérique

---

de vitesse virtuelle entre la phase matrice et la phase renforcement dans la direction du renforcement :  $\Delta = U_x^r - U_x^m$ , dans le cas d'un renforcement selon  $\underline{e}_x$ . Les taux de déformation sont définis comme suit :

$$\underline{d}^b = 1/2 \left( \underline{\underline{\text{grad}}}(U^b) + {}^t \underline{\underline{\text{grad}}}(U^b) \right), \quad d^r = \frac{\partial U_x^r}{\partial x} \quad (3.55)$$

Nous reviendrons plus tard sur l'expression des fonctions «  $\pi$  » définies à partir des critères respectifs. Si on se place dans le cas d'une *adhérence parfaite* entre la phase matrice et la phase renforcement (adhérence parfaite entre le béton et les armatures), les deux phases constituantes du milieu multiphasique doivent avoir la même vitesse virtuelle :  $\underline{U}^b = \underline{U}^r = \underline{U}$ . L'expression (3.54) devient :

$$P_{rm}(\underline{U}) = \int_{\Omega} \left[ \pi^b(\underline{d}) + \pi^r \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) \right] d\Omega = \int_{\Omega} \pi^{hom}(\underline{d}) d\Omega \quad (3.56)$$

Dans le cas où les discontinuités de vitesse sont prises en compte, l'expression de la puissance résistante maximale s'écrit ((2.84) dans le Chapitre 2) :

$$\begin{aligned} P_{rm}(\underline{U}) = & \int_{\Omega^b} \pi^{R/MCT}(\underline{d}) d\Omega^b + \int_{S_{\Sigma^b}} \pi^{R/MCT}(\underline{n}; \underline{V}) dS_{\Sigma^b} \\ & + \int_{\Omega^{ba}} \pi^{hom}(\underline{d}) d\Omega^{ba} + \int_{S_{\Sigma^{ba}}} \pi^{hom}(\underline{n}; \underline{V}) dS_{\Sigma^{ba}} \end{aligned} \quad (3.57)$$

où  $\underline{d}$  est le taux de déformation associé au champ de vitesse, et  $\underline{V}$  est la discontinuité de vitesse à la traversée de surfaces de discontinuité  $S_{\Sigma^b}$  dans le béton seul et  $S_{\Sigma^{ba}}$  dans le béton armé.  $\pi^{hom}$  est la fonction d'appui dans la zone homogénéisée (zone béton armé) :  $\pi^{hom} = \pi^b + \pi^r$ .

Comme pour le cas de l'approche statique, pour une direction de renforcement fixée, la détermination du chargement extrême  $\underline{Q}^+ = \lambda^+ \underline{Q}$  revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \lambda^+ \leq \lambda^c = & \min_{\underline{U}} \left\{ \int_{\Omega^b} \pi^{R/MCT}(\underline{d}) d\Omega^b + \int_{S_{\Sigma^b}} \pi^{R/MCT}(\underline{n}; \underline{V}) dS_{\Sigma^b} \right. \\ & \left. + \int_{\Omega^{ba}} \pi^{hom}(\underline{d}) d\Omega^{ba} + \int_{S_{\Sigma^{ba}}} \pi^{hom}(\underline{n}; \underline{V}) dS_{\Sigma^{ba}} \right\} \quad (3.58) \\ \text{t.q. } & P_{ext}(\underline{U}) = 1 \end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à déterminer les formulations numériques des fonctions d'appui du critère béton et du critère béton armé, que ce soit dans le cas où le béton est modélisé par un critère de Rankine ou par un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction.

### 3.3. Méthode des éléments finis pour l'approche cinématique du calcul à la rupture en 3D

#### 3.3.2 Formulation des critères pour l'approche cinématique

En nous appuyant sur la formulation numérique des différents critères pour l'approche statique du calcul à la rupture, nous allons, par dualité mathématique, formuler ces critères pour l'approche cinématique.

##### 3.3.2.1 Formulation pour le critère de Mohr-Coulomb

On cherche à exprimer le critère de Mohr-Coulomb pour l'approche cinématique. Pour cela, il faut exprimer les différentes fonctions d'appui. Celle relative au taux de déformation dans le béton (phase matrice) s'écrit :

$$\pi^b(\underline{\underline{d}}^b) = \pi^{MC}(\underline{\underline{d}}^b) = \sup\{\underline{\underline{\sigma}}^b : \underline{\underline{d}}^b, f^b(\underline{\underline{\sigma}}^b) \leq 0\} \quad (3.59)$$

ce qui revient à résoudre le *problème de maximisation* suivant :

$$\begin{aligned} \max_{\underline{\underline{\sigma}}^b, t_{\min}} \quad & \{\underline{\underline{\sigma}}^b : \underline{\underline{d}}^b\} \\ \text{t.q.} \quad & \underline{\underline{\sigma}}^b - 1/K_p t_{\min} \mathbf{1} \preceq f_c \mathbf{1} \\ & -\underline{\underline{\sigma}}^b + t_{\min} \mathbf{1} \preceq 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

en se basant sur l'expression (3.36) du critère de Mohr-Coulomb.

On introduit alors le Lagrangien de ce problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\underline{\underline{\sigma}}^b, t_{\min}, \underline{\underline{e}}_1, \underline{\underline{e}}_2) &= \underline{\underline{\sigma}}^b : \underline{\underline{d}}^b + \underline{\underline{e}}_1 : (-\underline{\underline{\sigma}}^b + 1/K_p t_{\min} \mathbf{1} + f_c \mathbf{1}) + \underline{\underline{e}}_2 : (\underline{\underline{\sigma}}^b - t_{\min} \mathbf{1}) \\ &= \underline{\underline{\sigma}}^b : (\underline{\underline{d}}^b - \underline{\underline{e}}_1 + \underline{\underline{e}}_2) + t_{\min} (1/K_p \text{tr}(\underline{\underline{e}}_1) - \text{tr}(\underline{\underline{e}}_2)) + f_c \text{tr}(\underline{\underline{e}}_1) \end{aligned} \quad (3.61)$$

ainsi que ses dérivées partielles :

$$\partial \mathcal{L} / \partial \underline{\underline{\sigma}}^b = \underline{\underline{d}}^b - \underline{\underline{e}}_1 + \underline{\underline{e}}_2 = 0 \quad (3.62)$$

$$\partial \mathcal{L} / \partial t_{\min} = 1/K_p \text{tr}(\underline{\underline{e}}_1) - \text{tr}(\underline{\underline{e}}_2) = 0 \quad (3.63)$$

avec  $\underline{\underline{e}}_1$  et  $\underline{\underline{e}}_2$  les variables duales associées aux deux contraintes SDP (*multiplieurs de Lagrange*) dans (3.60), et devant donc vérifier  $\underline{\underline{e}}_1, \underline{\underline{e}}_2 \succeq 0$ .

Le dual du problème SDP (3.60) est donc le *problème de minimisation* suivant :

$$\begin{aligned}
 & \min_{\underline{e}_1, \underline{e}_2} \max_{\underline{\sigma}^b, t_{\min}} \mathcal{L}(\underline{\sigma}^b, t_{\min}, \underline{e}_1, \underline{e}_2) \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \min_{\underline{e}_1, \underline{e}_2} \{f_c \operatorname{tr}(\underline{e}_1)\} \\
 & \text{t.q.} \quad \underline{d}^b - \underline{e}_1 + \underline{e}_2 = 0 \\
 & \quad \quad 1/K_p \operatorname{tr}(\underline{e}_1) - \operatorname{tr}(\underline{e}_2) = 0 \\
 & \quad \quad \underline{e}_1, \underline{e}_2 \succeq 0
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

obtenu en écrivant les conditions d'optimalité du problème de maximisation (3.60).

On se retrouve ici avec un problème d'optimisation, comme pour le cas de l'approche statique du calcul à la rupture. Mais cette fois, le problème d'optimisation est une *recherche de minimum* (minimisation) *sous contraintes* (deux contraintes linéaires et deux contraintes SDP).

### 3.3.2.2 Formulation du critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction (MCT)

Comme dans le cas de la formulation numérique du critère pour l'approche statique, nous avons commencé par définir l'expression du critère de Mohr-Coulomb avant d'ajouter la troncature en traction afin d'obtenir le critère MCT. Nous allons voir les modifications apportées par la troncature dans le calcul des fonctions d'appuis.

✓ Calcul de  $\pi^{MCT}(\underline{d}^b)$

La recherche de l'expression du critère de Mohr-Coulomb tronqué pour l'approche cinématique revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned}
 & \max_{\underline{\sigma}^b} \{ \underline{\sigma}^b : \underline{d}^b \} \\
 & \text{t.q.} \quad \underline{\sigma}^b - \alpha \mathbf{1} \preceq 0 \\
 & \quad \quad - \underline{\sigma}^b + t_{\min} \mathbf{1} \preceq 0 \\
 & \quad \quad \alpha \leq f_t \\
 & \quad \quad \alpha \leq 1/K_p t_{\min} + f_c
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

qui est la dualisation du critère MCT exprimé en (3.50) pour l'approche statique (et dans lequel on distingue bien le critère de MC de la troncature). Le Lagrangien associé

### 3.3. Méthode des éléments finis pour l'approche cinématique du calcul à la rupture en 3D

s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\underline{\sigma}^b, t_{\min}, \underline{e}_1, \underline{e}_2, s_1, s_2) &= \underline{\sigma}^b : \underline{d}^b + \underline{e}_1 : (-\underline{\sigma}^b + \alpha \mathbf{1}) + \underline{e}_2 : (\underline{\sigma}^b - t_{\min} \mathbf{1}) \\
&+ s_1(f_t - \alpha) + s_2(1/K_p t_{\min} + f_c - \alpha) \\
&= \underline{\sigma}^b : (\underline{d}^b - \underline{e}_1 + \underline{e}_2) + \alpha(\text{tr}(\underline{e}_1) - s_1 - s_2) \\
&+ t_{\min}(-\text{tr}(\underline{e}_2) + 1/K_p s_2) + s_1 f_t + s_2 f_c
\end{aligned} \tag{3.66}$$

où  $s_1$  et  $s_2$  sont les variables duales associées aux deux contraintes linéaires (multipliateurs de Lagrange) dans (3.65) et devant donc vérifier  $s_1, s_2 \geq 0$ .

Le dual du problème d'optimisation (3.65) est donc le problème de minimisation suivant :

$$\begin{array}{l}
\min_{\substack{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \\ s_1, s_2}} \quad \max_{\substack{\underline{\sigma}^b, t_{\min}}} \quad \mathcal{L}(\underline{\sigma}^b, t_{\min}, \underline{e}_1, \underline{e}_2, s_1, s_2) \\
\Leftrightarrow \\
\min_{\substack{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \\ s_1, s_2}} \quad \{s_1 f_t + s_2 f_c\} \\
\text{t.q.} \quad \underline{d}^b - \underline{e}_1 + \underline{e}_2 = 0 \\
\text{tr}(\underline{e}_1) - s_1 - s_2 = 0 \\
-\text{tr}(\underline{e}_2) + 1/K_p s_2 = 0 \\
\underline{e}_1, \underline{e}_2 \succeq 0 \\
s_1, s_2 \geq 0
\end{array} \tag{3.67}$$

Il est intéressant de noter que si on prend  $s_1 = 0$  dans (3.67) (ce qui revient à annihiler la troncature), on retrouve l'expression du problème (3.64). D'autre part, le problème d'optimisation (3.67) peut encore être simplifié en supprimant la variable  $s_2$  qui est égale à  $K_p \text{tr}(\underline{e}_2)$ , expression elle aussi positive. Cette dernière simplification permet tout de même d'économiser un nombre important de variables, ce qui est non négligeable pour les problèmes de grande taille que nous souhaitons traiter. Intéressons nous maintenant au calcul de la fonction d'appui liée aux discontinuités.

✓ Calcul de  $\pi^{MCT}(\underline{n}; \underline{V})$

Le calcul de la fonction d'appui liée aux discontinuités dans le cas du critère MCT,  $\pi^{MCT}(\underline{n}; \underline{V})$ , a été développé dans le chapitre précédent. Elle s'écrit :

$$\pi^{MCT}(\underline{n}; \underline{V}) = \begin{cases} \frac{f_c}{2} (\|\underline{V}\| - \underline{V} \cdot \underline{n}) + \frac{f_t}{1 - \sin\phi} (\underline{V} \cdot \underline{n} - \|\underline{V}\| \sin\phi) & \text{si } \underline{V} \cdot \underline{n} \geq \|\underline{V}\| \sin\phi \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.68}$$

## Calcul à la rupture pour le dimensionnement : mise en œuvre numérique

---

Ce terme contribue au calcul de la puissance résistante maximale,  $P_{rm}$ , et se retrouvera donc dans la fonctionnelle à minimiser, tandis que la condition de pertinence  $\underline{V} \cdot \underline{n} \geq \|\underline{V}\| \sin\phi$  s'ajoutera aux conditions linéaires à respecter.

### 3.3.2.3 Formulation pour le critère de Rankine

Le deuxième critère auquel nous nous intéressons pour décrire le béton est le critère de Rankine. Dans cette section, de manière très similaire à ce qui vient d'être fait pour le critère MCT, nous allons formuler le problème de l'approche cinématique comme un problème de minimisation en exprimant successivement les fonctions d'appui correspondant au taux de déformation et aux discontinuités.

✓ Calcul de  $\pi^R(\underline{d}^b)$

On cherche donc à dualiser le problème (3.43). On obtient :

$$\boxed{\begin{array}{l} \min_{\underline{e}_1, \underline{e}_2} \{f_c \operatorname{tr}(\underline{e}_2) + f_t \operatorname{tr}(\underline{e}_1)\} \\ \text{t.q. } \underline{d}^b - \underline{e}_1 + \underline{e}_2 = 0 \\ \underline{e}_1, \underline{e}_2 \succeq 0 \end{array}} \quad (3.69)$$

où  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  sont deux matrices semi-définies positives, respectivement duales de  $(\underline{\sigma} + f_c \mathbf{1})$  et  $(-\underline{\sigma} + f_t \mathbf{1})$  dans (3.43). En particulier, on peut montrer que  $\underline{e}_1 = \langle \underline{d}^b \rangle^+$ , la partie positive des valeurs principales de  $\underline{d}^b$ , et  $\underline{e}_2 = -\langle \underline{d}^b \rangle^-$ , l'opposé de la partie négative des valeurs principales de  $\underline{d}^b$ . Ce qui permet d'écrire que :

$$\begin{aligned} f_c \operatorname{tr}(\underline{e}_2) + f_t \operatorname{tr}(\underline{e}_1) &= -f_c \sum_{i=1}^3 \langle d_i^b \rangle^- + f_t \sum_{i=1}^3 \langle d_i^b \rangle^+ \\ &= \sum_{i=1}^3 \sup\{-f_c d_i, f_t d_i\} \end{aligned} \quad (3.70)$$

retrouvant ainsi l'expression (2.15).

✓ Calcul de  $\pi^R(\underline{n}; \underline{V})$

Le calcul de la fonction d'appui liée aux discontinuités dans le cas du critère de Rankine  $\pi^R(\underline{n}; \underline{V})$ , a été développé dans le chapitre précédent :

$$\pi^R(\underline{n}; \underline{V}) = \frac{f_t + f_c}{2} \|\underline{V}\| + \frac{f_t - f_c}{2} \underline{V} \cdot \underline{n} \quad (3.71)$$

### 3.3. Méthode des éléments finis pour l'approche cinématique du calcul à la rupture en 3D

---

Contrairement à l'expression de la fonction d'appui relative aux discontinuités pour le critère MCT (équation (3.68)), il n'y a pas de condition de pertinence sur les discontinuités pour le critère de Rankine. Avec ce critère, rien n'empêchera par exemple (contrairement au critère MCT) les éléments finis de « s'interpénétrer ». On observera dès les exemples de validation qui suivront des différences notoires entre les deux critères au niveau de la cinématique de rupture.

#### 3.3.2.4 Formulation du critère dans les zones homogénéisées

Dans les zones homogénéisées, le matériau est composé d'une phase matrice et d'une phase renforcement. Comme nous nous plaçons dans le cas de l'adhérence parfaite, les fonctions d'appuis dans une zone renforcée sont définies comme la somme des fonctions d'appui des différentes phases qui composent le matériau homogénéisé (voir équations (2.58) et (2.60)).

✓ Calcul de  $\pi^{hom}(\underline{d})$

Dans le cas de la fonction d'appui relative au taux de déformation macroscopique,  $\underline{d}$ , on a :

$$\pi^{hom}(\underline{d}) = \pi^{R/MCT}(\underline{d}) + \sup \{-k\sigma_0 d_{xx}, + \sigma_0 d_{xx}\} \quad (3.72)$$

avec  $\pi^{R/MCT}(\underline{d})$  la fonction d'appui de la phase matrice décrite soit par le matériau de MCT (voir section 3.3.2.2), soit par le matériau de Rankine (voir section 3.3.2.3). Et  $\sup \{-k\sigma_0 d_{xx}, + \sigma_0 d_{xx}\}$  la contribution du renfort, avec  $d_{xx}$  le taux de déformation virtuel dans la direction de renforcement  $\underline{e}_x$  et  $\sigma_0$  la limite de résistance du renforcement dans la zone homogénéisée, définie par les conditions (3.52).

✓ Calcul de  $\pi^{hom}(\underline{n}, \underline{V})$

La fonction d'appui relative aux discontinuités,  $\pi^{hom}(\underline{n}, \underline{V})$ , est la somme des fonctions d'appui des deux phases du matériau homogénéisé :

$$\pi^{hom}(\underline{n}, \underline{V}) = \pi^{R/MCT}(\underline{n}, \underline{V}) + \sup \{-k\sigma_0 n_x V_x, + \sigma_0 n_x V_x\} \quad (3.73)$$

avec  $\pi^{R/MCT}(\underline{n}, \underline{V})$  la fonction d'appui de la phase matrice modélisée soit par le matériau de MCT (voir partie 3.3.2.2), soit par le matériau de Rankine (voir partie 3.3.2.3). Et  $\sup \{-k\sigma_0 n_x V_x, + \sigma_0 n_x V_x\}$  la contribution du renfort, avec  $V_x$  la discontinuité du champ de vitesse dans la direction de renforcement  $\underline{e}_x$  et  $\sigma_0$  la limite de résistance du renforcement homogénéisé.

### 3.3.3 Discrétisation en tétraèdres

L'approche cinématique du calcul à la rupture est mise en œuvre dans le cadre de la méthode des éléments finis. De la même manière que pour l'approche statique, le domaine  $\Omega$  du volume étudié est discrétisé en  $N_e$  éléments finis tétraédriques  $\Omega_e$ . Cependant, pour l'approche cinématique, les éléments finis tétraédriques utilisés sont composés de dix nœuds (Figure 3.6). L'interpolation du champ de vitesse virtuel  $\underline{U}$  est quadratique au sein de chaque élément fini et il peut être exprimé en tout point  $\underline{x}$  de l'élément par :

$$\underline{U}(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{10} N^k(\underline{x}) \underline{U}^k, \quad (3.74)$$

où  $\underline{U}(\underline{x})$  est le vecteur vitesse au point  $\underline{x}$  de l'élément,  $\underline{U}^k$  le vecteur vitesse au nœud  $k$  de l'élément, et  $N_k$  la valeur, au point  $\underline{x}$ , des fonctions d'interpolations (quadratiques dans ce cas) du nœud  $k$  de l'élément ( $k = 1, 2, \dots, 10$ ).

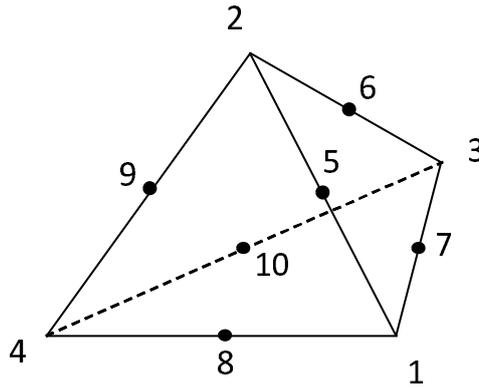


FIGURE 3.6 – Élément fini tétraédrique à dix nœuds

Le nombre de variables aux nœuds du tétraèdre dépend de la zone dans laquelle il est situé. Suivant qu'il se trouve dans une zone renforcée ou non. Nous allons maintenant détailler zone par zone les variables nécessaires pour résoudre l'approche cinématique du calcul à la rupture par la méthode des éléments finis. Nous reformulerons le problème d'optimisation comme un problème de programmation *semi-définie positive* (SDP) que l'on résout à l'aide du solveur Mosek [Mosek, 2018].

#### 3.3.3.1 Zone non renforcée

Il a été montré précédemment que le calcul des fonctions d'appui pouvait être mis sous la forme d'un problème d'optimisation (aussi bien pour le critère R que pour le critère MCT). C'est spécifiquement ce problème de minimisation que nous allons résoudre (dans un premier temps en absence de renforcement) par la méthode des éléments finis.

### 3.3. Méthode des éléments finis pour l'approche cinématique du calcul à la rupture en 3D

Pour chaque tétraèdre  $\Omega_e^b$  d'une *zone non renforcée*, on a comme inconnues les trois composantes du champ de vitesse  $\underline{U}$  à chacun des dix nœuds du tétraèdre (c'est le champ qui nous intéresse en sortie de calcul de l'approche cinématique).

Les minimisations (3.67) et (3.69) font intervenir la condition  $\underline{\underline{d}}^b - \underline{e}_1 + \underline{e}_2 = 0$  qui porte sur le taux de déformation dans le béton, lequel est relié au champ de vitesse  $\underline{U}$  par :

$$\underline{\underline{d}}^b = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{U} + {}^t \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{U} \right) \quad (3.75)$$

Cette relation peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} [B^1] & -\mathbb{1}_{6 \times 6} & & & & \\ & & (0) & & & \\ [B^2] & & -\mathbb{1}_{6 \times 6} & & & \\ & & & (0) & & \\ [B^3] & & & & -\mathbb{1}_{6 \times 6} & \\ & & & & & (0) \\ [B^4] & & & & & -\mathbb{1}_{6 \times 6} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \left( \begin{matrix} \underline{U}^1 \\ \vdots \\ \underline{U}^{10} \\ \underline{d}^{b,1} \\ \vdots \\ \underline{d}^{b,4} \end{matrix} \right) \\ \vdots \end{pmatrix} = \{ \underline{0} \} \quad (3.76)$$

où  $[B^i]$  est une matrice de taille 6x30 faisant intervenir les fonctions de formes (interpolation) et leurs dérivées premières (calcul du gradient) qui relie les trois composantes du champ de vitesse  $\underline{U}$  (à chacun des dix nœuds  $k$  du tétraèdre) au taux de déformation  $\underline{d}^{b,i}$  (calculé à chacun des points d'intégration du tétraèdre  $i = 1$  à 4).  $\underline{d}^b$  est une notation de Voigt du tenseur  $\underline{\underline{d}}^b$  :

$$\underline{\underline{d}}^b = \{ d_{xx}^b, d_{yy}^b, d_{zz}^b, 2d_{xy}^b, 2d_{yz}^b, 2d_{xz}^b \} \quad (3.77)$$

La relation  $\underline{\underline{d}}^b - \underline{e}_1 + \underline{e}_2 = 0$  s'écrit alors de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} [B^1] & -\mathbb{1}_{6 \times 6} & \mathbb{1}_{6 \times 6} & & & & \\ & & & (0) & & & \\ [B^2] & & -\mathbb{1}_{6 \times 6} & \mathbb{1}_{6 \times 6} & & & \\ & & & & (0) & & \\ [B^3] & & & & -\mathbb{1}_{6 \times 6} & \mathbb{1}_{6 \times 6} & \\ & & & & & & (0) \\ [B^4] & & & & & -\mathbb{1}_{6 \times 6} & \mathbb{1}_{6 \times 6} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \left( \begin{matrix} \underline{U}^1 \\ \vdots \\ \underline{U}^{10} \\ \underline{e}_1^1 \\ \underline{e}_2^1 \\ \vdots \\ \underline{e}_1^4 \\ \underline{e}_2^4 \end{matrix} \right) \\ \vdots \end{pmatrix} = \{ \underline{0} \} \quad (3.78)$$

Point	$r$	$s$	$t$	$\omega$	
1	$a$	$a$	$a$	$1/24$	$a = 0 \quad b = 1$
2	$a$	$a$	$b$	$1/24$	
3	$a$	$b$	$a$	$1/24$	
4	$b$	$a$	$a$	$1/24$	

TABLEAU 3.1 – Coordonnées des points d’intégration dans le tétraèdre de référence

où  $\underline{e}_1^i$  contient les six composantes indépendantes de la matrice SDP  $\underline{e}_1$  (notation de Voigt) au point d’intégration  $i$ . Idem pour  $\underline{e}_2^i$  avec  $\underline{e}_2$ . Les matrices  $[B^i]$  ont été définies à l’équation (3.76) et permettent d’écrire  $\underline{d}^b$  en fonction de  $\underline{U}$ .

La fonction d’appui liée au taux de déformation,  $\pi^{R/MCT}(\underline{d}^b)$ , s’exprime en fonction des matrices SDP  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  (voir (3.67) et (3.69)). Son intégrale (qui permet de calculer  $P_{rm}$ ) est évaluée à partir de ses valeurs aux quatre points de Gauss dans  $\Omega_e^b$ . L’interpolation du champ de vitesse  $\underline{U}$  étant choisie quadratique, le taux de déformation varie *linéairement*. En revanche,  $\pi^{R/MCT}(\underline{d}^b)$  est une fonction *convexe non linéaire*. L’intégration par points de Gauss des fonctions d’appui  $\pi^{R/MCT}(\underline{d}^b)$  ne peut donc pas être exacte et ce quel que soit le nombre de points de Gauss choisis. En revanche, comme le montrent Makrodimopoulos et Martin dans [Makrodimopoulos et Martin, 2007], il est possible d’évaluer  $\int_{\Omega^b} \pi^{R/MCT}(\underline{d}^b) d\Omega^b$  par majoration. En effet, on peut approcher la contribution de chaque élément par excès, en intégrant à partir de points d’intégration situés aux sommets de l’élément, permettant ainsi de garder le statut de majorant. Les coordonnées (dans le repère de référence  $r,s,t$ ) des points d’intégration et les poids de Gauss associés pour cette intégration numérique sont donnés dans le Tableau (3.1) et représentés sur un tétraèdre quelconque sur la Figure 3.7.

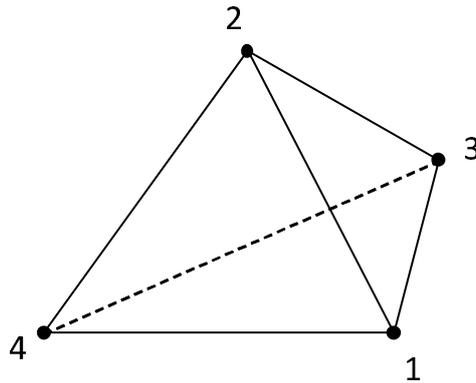


FIGURE 3.7 – Points d’intégration aux sommets de l’élément

L’intégration numérique de cette fonction d’appui dans le cas où l’on décide d’intégrer à partir de ces quatre points d’intégration et dans le cas où le champ de vitesse est



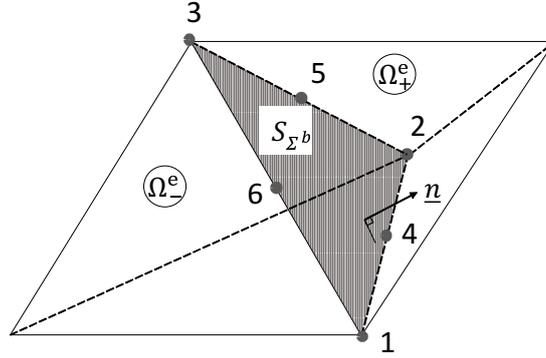


FIGURE 3.8 – Face de discontinuité entre deux tétraèdres

avec  $\pi^{R/MCT}(\underline{n}; \underline{V})$  définie par l'équation (3.68) pour le critère MCT et par l'équation (3.71) pour le critère de Rankine.

Le champ de discontinuité de vitesse  $\underline{V}$  est défini par :  $\underline{V} = \llbracket \underline{U} \rrbracket$ . La contribution de cette discontinuité dans le calcul de la puissance résistante maximale (équation (3.82)) se fera à partir de points d'intégration sur la face (pour procéder à l'intégration numérique).

Dans le cas où le béton est modélisé par le critère MCT, il convient de vérifier la condition de pertinence :  $\underline{V} \cdot \underline{n} \geq \|\underline{V}\| \sin \phi$  partout sur la face triangulaire partagée par deux tétraèdres. Or, l'interpolation de  $\underline{U}$  étant quadratique, celle de  $\underline{V}$  l'est également. Il n'est alors pas possible de vérifier rigoureusement cette condition en tout point de la face. Une solution consiste à forcer à ce que le champ de discontinuité soit affine. Pour ce faire, il suffit d'imposer que la valeur du champ de discontinuité au milieu des trois arêtes d'une face de discontinuité soit égale à la demi somme des valeurs du champ aux nœuds qui l'entourent. Soit, dans le cas de la numérotation d'une face comme sur la Figure 3.8 :

$$\begin{cases} V_4 = \frac{V_1 + V_2}{2} \\ V_5 = \frac{V_2 + V_3}{2} \\ V_6 = \frac{V_1 + V_3}{2} \end{cases} \quad (3.83)$$

L'interpolation du champ de discontinuité de vitesse étant choisie linéaire, il est suffisant d'assurer la condition de pertinence en chacun des trois sommets de la face pour qu'elle soit vérifiée partout.

L'expression de la *condition de pertinence* pour les discontinuités dans le cas du critère MCT s'écrit comme une condition conique, formulation adéquate pour la pro-

### 3.3. Méthode des éléments finis pour l'approche cinématique du calcul à la rupture en 3D

grammation conique du second ordre (SOCP) :

$$\underline{V} \cdot \underline{n} \geq \|\underline{V}\| \cdot \sin(\phi) \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \|\underline{V}\| \\ t = \frac{\underline{V} \cdot \underline{n}}{\sin(\phi)} \end{cases} \quad (3.84)$$

où  $t$  est une variable scalaire additionnelle permettant de définir le cône. L'équation  $t \geq \|\underline{V}\|$  est équivalente à dire que  $(t, V_x, V_y, V_z) \in Q^4$ , cône de dimension 4.

L'utilisation des sommets de la face comme points d'intégration permet alors d'obtenir une borne supérieure<sup>(1)</sup> de la contribution des discontinuités au calcul de  $P_{rm}$  (dans le cas du critère MCT) comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{S_{\Sigma^b}} \pi^{MCT}(\underline{n}; \underline{V}) dS_{\Sigma^b} &= \sum_{n=1}^{N_{FAI}} \int_{S_{\Sigma_n^b}} \pi^{MCT}(\underline{n}; \underline{V}) dS_{\Sigma_n^b} \\ &\leq \sum_{n=1}^{N_{FAI}} \sum_{i=1}^3 \omega_i J_n \left[ \frac{f_c}{2} (\|\underline{V}_i\| - \underline{V}_i \cdot \underline{n}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_t}{1 - \sin\phi} (\underline{V}_i \cdot \underline{n} - \|\underline{V}_i\| \sin\phi) \right] \end{aligned} \quad (3.85)$$

où  $N_{FAI}$  est le nombre de faces internes partagées par deux tétraèdres,  $\omega_i$  est le poids au point d'intégration  $i$  ( $= 1/6$ ) et  $J_n$  est le jacobien de la transformation de la face  $n$  (compte tenu du fait que le type d'élément fini utilisé est à bords droits,  $J_e = 2 \times A_f$ , l'aire de la face triangulaire).

On rappelle que dans le cas où le béton est modélisé par le critère de Rankine, il n'y a pas de condition de pertinence à vérifier. L'interpolation de  $\underline{V}$  peut donc être quadratique (comme  $\underline{U}$ ) et l'intégration s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\Sigma^b}} \pi^R(\underline{n}; \underline{V}) dS_{\Sigma^b} &\simeq \sum_{n=1}^{N_{FAI}} \int_{\Omega_{\Sigma_n^b}} \pi^R(\underline{n}; \underline{V}) dS_{\Sigma_n^b} \\ &\simeq \sum_{n=1}^{N_{FAI}} \sum_{i=1}^3 \omega_i J_n \left[ \frac{f_t + f_c}{2} \|\underline{V}_i\| + \frac{f_t - f_c}{2} \underline{V}_i \cdot \underline{n} \right] \\ &\simeq \sum_{n=1}^{N_{FAI}} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^6 \omega_i J_n \left[ \frac{f_t + f_c}{2} \|N_j^i \underline{V}_j\| + \frac{f_t - f_c}{2} N_j^i \underline{V}_j \cdot \underline{n} \right] \end{aligned} \quad (3.86)$$

où  $N_j^i$  est la valeur de la fonction de forme du nœud  $j$  au point d'intégration  $i$ . Les poids de Gauss  $\omega_i$  au point d'intégration  $i$  (et leurs coordonnées) sont données par le Tableau (3.2). Ils sont représentés par des *petits triangles* sur la Figure 3.9.

(1). généralisation de l'inégalité d'Hermite-Hadamard

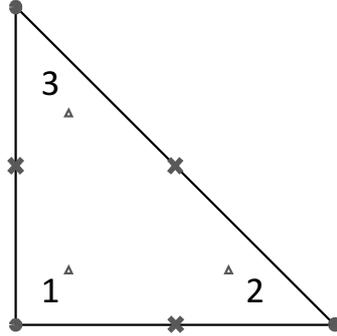


FIGURE 3.9 – Points de Gauss sur un élément triangulaire de référence à six nœuds - face de discontinuité entre deux tétraèdres

Point	$\xi$	$\eta$	$\omega$
1	$b$	$b$	$1/6$
2	$a$	$b$	$1/6$
3	$b$	$a$	$1/6$

$$a = \frac{2}{3} \quad b = \frac{1}{6}$$

TABLEAU 3.2 – Coordonnées des points de Gauss sur une face de référence

On remarque que la contribution des discontinuités au calcul de  $P_{rm}$  est approximée (3.86) et non majorée comme dans le cas du critère MCT (3.85). Néanmoins, il est possible de recalculer *a posteriori* cette contribution pour améliorer le calcul de  $P_{rm}$  (évaluation de  $P_{rm}$  en post-traitement du calcul avec davantage de points de Gauss pour réduire l'erreur numérique commise sur l'intégration). Il est également possible, comme dans le cas du critère MCT, d'imposer la linéarité de  $\underline{V}$  et de calculer la contribution au calcul de  $P_{rm}$  à partir des sommets de la face assurant le statut de majorant.

En résumé, la résolution par éléments finis de l'approche cinématique du calcul à la rupture d'une structure en béton (modélisé par un critère MCT) se réduit à :

$$\begin{aligned}
 \lambda^+ \leq \lambda^c = \min_{\{X\}} \quad & t \{C_{obj}\} \{X\} \\
 \text{t.q.} \quad & [D] \{X\} = 0 \\
 & [V] \{X\} = 0 \\
 & [F] \{X\} = 1 \\
 & t \geq \|\underline{V}\| \\
 & \underline{e}_1, \underline{e}_2 \succeq 0 \\
 & s_1 \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

où :

### 3.3. Méthode des éléments finis pour l'approche cinématique du calcul à la rupture en 3D

---

$$\checkmark \quad {}^t \{C_{obj}\} \{X\}$$

est la *fonction objectif* à minimiser regroupant toutes les contributions au calcul de  $P_{rm}$  : (3.79) pour  $\pi^{MCT}(\underline{d}^b)$  et (3.85) pour  $\pi^{MCT}(\underline{n}; \underline{V})$ , avec

$$\checkmark \quad \{X\}$$

le vecteur regroupant toutes les inconnues nécessaires à la résolution du problème :  $\underline{U}$  aux dix nœuds de chaque tétraèdre ;  $\underline{e}_1$  (les composantes indépendantes de  $\underline{e}_1$ ),  $\underline{e}_2$  (les composantes indépendantes de  $\underline{e}_2$ ) et  $s_1$  aux quatre points de Gauss de chaque tétraèdre ;  $(t, \underline{V})$  aux six nœuds de chaque face interne (surface de discontinuité).

$$\checkmark \quad [D]$$

est une matrice englobant toutes les conditions linéaires permettant d'imposer les relations  $\underline{d}^b - \underline{e}_1 + \underline{e}_2 = 0$  et  $\text{tr}(\underline{e}_1) - s_1 - K_p \text{tr}(\underline{e}_2) = 0$  en chacun des points d'intégration volumiques des tétraèdres  $\Omega_e^b$  (écrites au format matriciel aux équations (3.78) et (3.81)).

$$\checkmark \quad [V]$$

est une matrice englobant toutes les conditions linéaires écrites sur les faces internes des tétraèdres :  $\underline{V} = \llbracket \underline{U} \rrbracket$ , les trois équations de (3.83) pour imposer une variation linéaire du champ de discontinuité de vitesse,  $t = \frac{1}{\sin(\phi)} \underline{V} \cdot \underline{n}$ .

$$\checkmark \quad [F] \{X\}$$

est la *puissance des efforts extérieurs*, imposée égale à 1.

$$\checkmark \quad t \geq \|\underline{V}\|$$

est la condition conique du second ordre imposée aux six nœuds de chaque face interne.

$$\checkmark \quad \underline{e}_1, \underline{e}_2 \succeq 0$$

impose que les matrices  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  soient semi-définies positives.

$$\checkmark \quad \text{Enfin, } s_1 \geq 0$$

impose que la variable scalaire  $s_1$  soit positive (à tous les points d'intégration de  $\Omega_e^b$ ).

Dans le cas du critère de Rankine,  $\pi^R(\underline{d}^b)$  et  $\pi^R(\underline{n}; \underline{V})$  sont respectivement donnés par les équations (3.80) et (3.86) pour remplir  $\{C_{obj}\}$ . Le vecteur  $\{X\}$  regroupant les

## Calcul à la rupture pour le dimensionnement : mise en œuvre numérique

---

inconnues du problème est le même que dans le cas du critère MCT, excepté les variables scalaires  $s_1$  qui n'existent pas.  $[D]$  permet d'imposer que  $\underline{\underline{d}}^b - \underline{\underline{e}}_1 + \underline{\underline{e}}_2 = 0$ , seule condition linéaire à imposer aux points d'intégration du volume  $\Omega_e^b$ .

Il n'y a pas de condition de pertinence pour le critère de Rankine. De ce fait,  $[V]$  est composée uniquement de  $\underline{V} = \llbracket \underline{U} \rrbracket$ , la définition de la discontinuité du champ de vitesse, à laquelle s'ajoute les conditions pour imposer la linéarité de  $\underline{V}$ .

Le reste du problème de minimisation est strictement identique.

### 3.3.3.2 Zone renforcée

Dans le cas d'un tétraèdre  $\Omega_e^{ba}$  situé dans une zone renforcée, les fonctions d'appuis liées au taux de déformation et aux discontinuités de vitesse sont augmentées de la contribution du renforcement. Celle-ci est exprimée dans les équations (3.72) et (3.73). Le calcul de  $P_{rm}$  dans ces zones là est :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega^{ba}} \pi^{hom}(\underline{\underline{d}}) d\Omega^{ba} + \int_{S_{\Sigma^{ba}}} \pi^{hom}(\underline{n}; \underline{V}) dS_{\Sigma}^{ba} &= \int_{\Omega^{ba}} \pi^{R/MCT}(\underline{\underline{d}}) d\Omega^{ba} \\
 &+ \int_{\Omega^{ba}} \sup \{-k\sigma_0 d_{xx}, +\sigma_0 d_{xx}\} d\Omega^{ba} \\
 &+ \int_{S_{\Sigma^{ba}}} \pi^{R/MCT}(\underline{n}, \underline{V}) dS_{\Sigma}^{ba} \\
 &+ \int_{S_{\Sigma^{ba}}} \sup \{-k\sigma_0 n_x V_x, +\sigma_0 n_x V_x\} dS_{\Sigma}^{ba}
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

Le calcul de  $\int_{\Omega^{ba}} \pi^{R/MCT}(\underline{\underline{d}}) d\Omega^{ba}$  et  $\int_{S_{\Sigma^{ba}}} \pi^{R/MCT}(\underline{n}; \underline{V}) dS_{\Sigma}^{ba}$  est le même que pour une zone non renforcée : respectivement développé dans les équations (3.79) et (3.85) pour le critère MCT et dans les équations (3.80) et (3.86) pour le critère de Rankine.

Pour évaluer la contribution du renfort dans le calcul de  $P_{rm}$ , il convient d'ajouter une variable scalaire  $d_{xx}$ , correspondant au taux de déformation dans la direction de renforcement  $\underline{e}_x$ , à chaque point de Gauss volumique (une variable par direction de renforcement). Ce taux de déformation axiale peut être relié à  $\underline{U}$  par l'équation matricielle

### 3.3. Méthode des éléments finis pour l'approche cinématique du calcul à la rupture en 3D

suivante :

$$\begin{bmatrix} {}^t\{B_1^*\} & -1 & & & \\ & & (0) & & \\ {}^t\{B_2^*\} & & -1 & & \\ & & & & \\ {}^t\{B_3^*\} & & & -1 & \\ & & (0) & & \\ {}^t\{B_4^*\} & & & & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \left\{ \begin{matrix} \underline{U}^1 \\ \vdots \\ \underline{U}^{10} \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} d_{xx}^1 \\ \vdots \\ d_{xx}^4 \end{matrix} \right\} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3.89)$$

où  ${}^t\{B_i^*\}$  est un vecteur ligne de taille 30 faisant intervenir les fonctions de forme (interpolation) et leurs dérivées premières (calcul du gradient) qui relie les trois composantes du champ de vitesse  $\underline{U}$  à chacun des dix nœuds du tétraèdre au taux de déformation  $d_{xx}$  en chacun des quatre points d'intégration du tétraèdre  $\Omega_e^{ba}$ .

La contribution au calcul de  $P_{rm}$  liée au taux de déformation dans le renforcement se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{ba}} \sup \{-k\sigma_0 d_{xx} + \sigma_0 d_{xx}\} d\Omega^{ba} &= \sum_{n=1}^{N_e} \int_{\Omega_e^{ba}} \sup \{-k\sigma_0 d_{xx} + \sigma_0 d_{xx}\} d\Omega_e^{ba} \\ &= \sum_{n=1}^{N_e} \sum_{j=1}^4 \omega_j J_n \left[ \sigma_0 |d_{xx}^j| \right], \text{ si } k = 1 \end{aligned} \quad (3.90)$$

où  $\sigma_0$  est la limite de résistance du renforcement dans la zone homogénéisée définie par l'équation (3.52).

On ajoute également une variable  $\underline{V}_x$  (par direction de renforcement), à chaque point de Gauss d'une face de discontinuité. C'est la discontinuité du champ de vitesse dans la direction de renforcement  $\underline{e}_x$  :

$$\underline{V}_x = \llbracket \underline{U} \rrbracket \cdot \underline{e}_x \quad (3.91)$$

La contribution au calcul de  $P_{rm}$  liée à la discontinuité du champ de vitesse dans la direction de renforcement se calcule de la manière suivante :

$$\int_{S_{\Sigma^{ba}}} \sup \{-k\sigma_0 n_x V_x + \sigma_0 n_x V_x\} dS_{\Sigma^{ba}} = \sum_{n=1}^{N_e} \int_{S_{\Sigma^{ba}}} \sup \{-k\sigma_0 n_x V_x + \sigma_0 n_x V_x\} dS_{\Sigma^{ba}} \quad (3.92)$$

et dans le cas où  $k = 1$  :

$$\int_{S_{\Sigma^{ba}}} \sup \{\sigma_0 n_x V_x + \sigma_0 n_x V_x\} dS_{\Sigma^{ba}} = \sum_{n=1}^{N_e} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^6 \omega_j J_n \left[ \sigma_0 |n_x| |N_l^j V_x^l| \right] \quad (3.93)$$

## Calcul à la rupture pour le dimensionnement : mise en œuvre numérique

---

où  $N_l^j$  est la valeur de la fonction de forme du nœud  $l$  au point d'intégration  $j$ ,  $\omega_j$  est le poids de Gauss au point d'intégration  $j$  et  $J_n$  est le jacobien de la transformation de la face  $n$  ( $J_e = 2 \times A_f$ , l'aire de la face triangulaire).

Dans le cas d'un problème de structure en béton armé, la résolution par l'approche cinématique du calcul à la rupture (par la méthode des éléments finis) s'écrit de la même manière qu'à l'équation (3.87). Seule la composition des vecteurs et matrices évolue :

$$\checkmark \{C_{obj}\}$$

est le vecteur comprenant toutes les contributions au calcul de  $P_{rm}$ . On ajoute la contribution des éléments finis  $\Omega_e^{ba}$  exprimée par les équations (3.90) et (3.93).

$$\checkmark \{X\}$$

est le vecteur englobant toutes les variables du problème. Les variables qui s'ajoutent au problème pour les éléments finis renforcés sont :  $d_{xx}$  à chacun des points d'intégration volumiques ainsi que  $\underline{V}_x$  aux points d'intégration surfaciques des faces de discontinuité.

$$\checkmark [D]$$

est la matrice regroupant toutes les conditions sur le taux de déformation. Il faut ajouter l'équation définissant  $d_{xx}$ , le taux de déformation dans la direction de renforcement (équation (3.89)). Cette variable est utile pour le calcul de la fonction d'appui associée au taux de déformation dans la direction du renforcement.

$$\checkmark [V]$$

est la matrice contenant toutes les conditions portant sur les discontinuités. La définition de la discontinuité du champ de vitesse dans la direction de renforcement doit être exprimée (équation (3.91)) à chacun des points d'intégration de la face de discontinuité en interpolant le champ de vitesse  $\underline{U}$ .

### 3.4 Premiers exemples de validation

Nous avons développé dans la partie précédente le cadre numérique permettant de résoudre un problème de structure en béton armé par la théorie du calcul à la rupture. La méthode des éléments finis permet en effet de mettre en œuvre tant l'approche statique que l'approche cinématique du calcul à la rupture. Et tout au long de cette partie, nous avons montré comment implémenter ces deux approches en modélisant la résistance du béton soit par un critère MCT, soit par un critère de Rankine. Afin de

### 3.4. Premiers exemples de validation

---

valider la méthode proposée, nous allons maintenant passer en revue quelques exemples illustratifs.

#### 3.4.1 Retour sur l'exemple de la compression en déformations planes d'un bloc en béton armé

Dans un premier temps, nous allons traiter un exemple qui a été développé analytiquement dans le Chapitre 2, section 2.6.3. L'intérêt de traiter numériquement cet exemple simple est de fournir une première validation de la méthode des éléments finis développée dans ce chapitre et d'évaluer son efficacité en terme de précision sur les bornes statique et cinématique obtenues.

##### 3.4.1.1 Présentation du problème

On reprend l'exemple présenté dans le chapitre précédent qui traite de la compression en déformations planes d'un bloc en béton armé. On étudie un bloc rectangulaire de béton dont la résistance en compression uniaxiale est égale à  $f_c$ . Ce dernier est renforcé par une distribution périodique d'armatures horizontales (selon l'axe  $\underline{e}_x$ ) de résistance en traction par unité de surface transversale  $\sigma_0$  (Figure 3.10). Bien que, comme nous l'avons vu au Chapitre précédent, ce problème peut être traité comme un problème *bidimensionnel* (en déformations planes), il sera ici traité comme un problème *tridimensionnel*. Les conditions aux limites sur les différentes faces du bloc parallélépipédique (également visibles sur la Figure 3.10) sont les suivantes :

- ✓ faces latérales de normale  $\underline{e}_x$  libres de contrainte :  $\underline{T} = 0$
- ✓ faces latérales de normale  $\underline{e}_z$  en contact *sans frottement* avec des plans fixes :  $T_x = T_y = 0, U_z = 0$
- ✓ face inférieure ( $y = 0$ ) du bloc en contact *sans frottement* avec un plateau rigide immobile :  $T_x = T_z = 0, U_y = 0$
- ✓ une pression uniforme  $p$ , qui constitue le paramètre de chargement du système dont on cherche la valeur extrême  $p^+$  (à comparer au  $Q^+/2L$  du calcul analytique effectué en 2.6.3), est appliquée sur la face supérieure ( $y = H$ ) :  $\underline{T} = -p \underline{e}_y$ .

Il est à noter qu'appliquer une pression en partie supérieure, comme nous le faisons (numériquement) ici, est équivalent à appliquer une pression sur un plateau rigide en contact sans frottement avec le bloc en béton étudié, comme nous l'avons fait à la section 2.6.3 du Chapitre 2, compte tenu du caractère *uniforme* des champs solution.

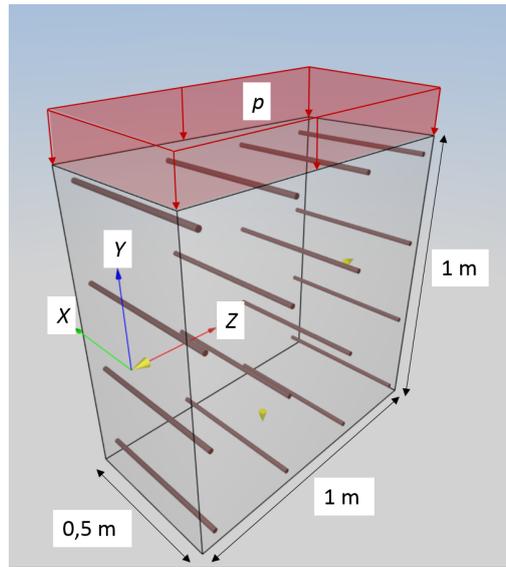


FIGURE 3.10 – Bloc de béton en compression visualisé dans l’interface du logiciel DS CONCRETE

### 3.4.1.2 Résultats pour le bloc non renforcé

Nous avons réalisé différents calculs sur ce bloc en compression. Dans un premier temps, nous étudierons les résultats des approches statique et cinématique du calcul à la rupture sur le bloc non renforcé. La charge extrême obtenue est bien entendu égale à la résistance en compression uniaxiale du béton  $f_c$  (prise égale à 40 MPa pour la simulation numérique) :

$$p^s = 40,00 \text{ MPa} \leq p^+ \leq p^c = 40,00 \text{ MPa}$$

pour le critère de Rankine et

$$p^s = 40,00 \text{ MPa} \leq p^+ \leq p^c = 40,00 \text{ MPa}$$

pour le critère MCT.  $p^+$  est la pression maximale appliquée sur la partie supérieure,  $p^s$  est le chargement extrême obtenu par l’approche statique et  $p^c$  est celui obtenu par l’approche cinématique.

Dans le cas où le bloc de béton est non renforcé, il est intéressant de voir la différence entre les mécanismes de ruine, selon que la résistance du béton est modélisée par un critère de Rankine ou par un critère MCT : sur la Figure 3.11 est représenté le champ de vitesse optimal (représentation par des vecteurs), alors que la Figure 3.12 montre l’état « déformé » du bloc obtenu à partir du champ de vitesse optimal (représentation de la norme du champ de vitesse sur la configuration déformée). On voit ici que le mécanisme de ruine est complètement différent, alors que la charge extrême obtenue est

### 3.4. Premiers exemples de validation

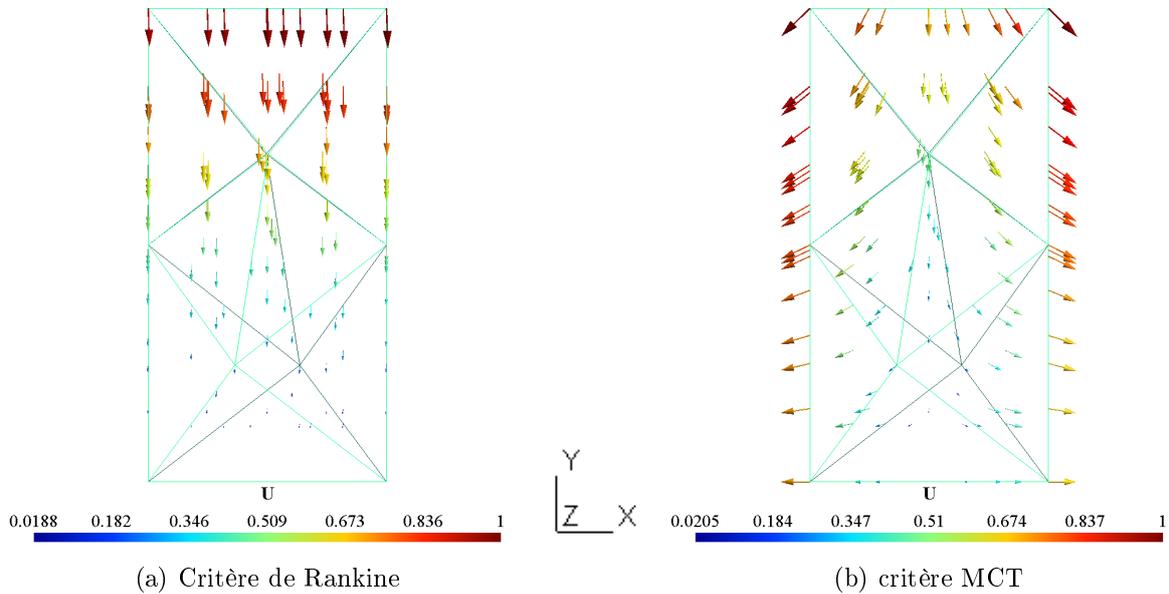


FIGURE 3.11 – Mécanisme de ruine d'un bloc en béton (champ de vitesse optimal obtenu par l'approche cinématique)

identique : dans le cas du critère de Rankine, le bloc de béton s'écrase sur lui-même et les éléments s'interpénètrent (ce qui est autorisé car il n'y a pas de *condition de pertinence* à respecter), alors que dans le cas du critère MCT, le bloc se déforme latéralement.

L'approche statique permet d'obtenir un champ de contrainte optimisé en équilibre avec le chargement et qui respecte le critère en tout point de la structure étudiée. Les champs de contrainte  $\sigma_{xx}^b$ ,  $\sigma_{yy}^b$  et  $\sigma_{zz}^b$  sont présentés sur la Figure 3.13 pour le critère MCT et 3.14 pour le critère de Rankine. Une contrainte positive traduit un état de traction alors qu'une contrainte négative traduit un état de compression (cette convention est la même pour tous les résultats obtenus et présentés dans cette thèse). Quel que soit le critère choisi pour modéliser la résistance du béton, le champ de contrainte  $\sigma_{yy}^b$  est homogène et égale à  $-f_c$ ,  $\sigma_{xx}^b$  est nul alors que  $\sigma_{zz}^b$  est non nul et homogène (en compression). Les champs de contrainte  $\sigma_{xy}^b$ ,  $\sigma_{yz}^b$  et  $\sigma_{xz}^b$  ne sont pas représentés et sont bien évidemment nuls.

#### 3.4.1.3 Cas du bloc renforcé

Dans cette section nous allons analyser les résultats obtenus dans le cas d'un bloc renforcé périodiquement comme décrit précédemment et illustré sur la Figure 3.10.

Les mécanismes de ruine dans le cas du bloc renforcé ne diffèrent pas des mécanismes présentés dans le cas non renforcé (Figure 3.11). Nous nous intéressons ici au charge-

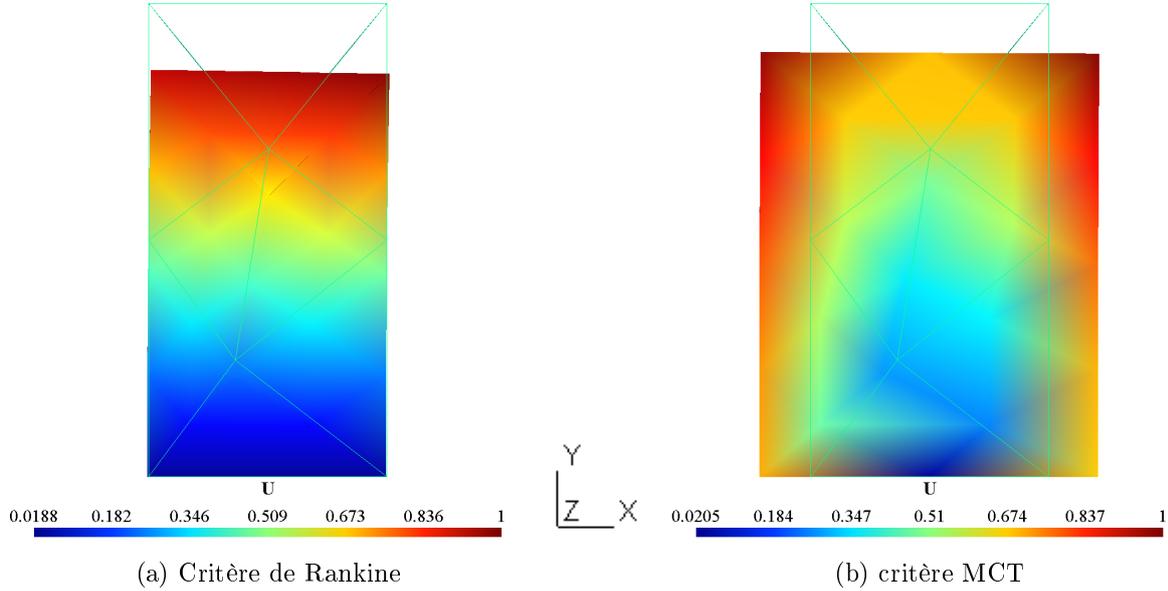


FIGURE 3.12 – Mécanisme de ruine d'un bloc en béton (iso-valeurs du champ de vitesse optimal obtenu par l'approche cinématique)

ment extrême  $p_{hom}^+$ . En effet, il a été mis en lumière dans le chapitre précédent (Chapitre 2) qu'un cas aussi simple que la compression d'un bloc renforcé en déformations planes pouvait exhiber des résultats bien différents selon que la résistance du béton est modélisée par un critère de Rankine ou par un critère MCT. Et ce, alors même que la résistance en compression uniaxiale du béton seul est la même pour les deux critères ( $f_c$ ).

Les résultats théoriques établis à la section 2.6.3 du Chapitre 2 montrent que la pression maximale pouvant être appliquée en partie supérieure est égale à :

$$p_{hom}^+ = Q_{hom}^+ / 2L = f_c \quad (3.94)$$

dans le cas où le béton est modélisé par un critère de Rankine, et :

$$p_{hom}^+ = f_c + K_p \sigma_0, K_p = \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi} \quad (3.95)$$

dans le cas où le béton est modélisé par un critère MCT.

On voit sur la Figure 3.15 les résultats de l'approche statique numérique dans le cas où le béton est modélisé par le critère de Rankine. On s'intéresse à la répartition des contraintes entre les deux phases :  $\Sigma_{xx} = \sigma_{xx}^b + \sigma_{xx}^r$ . On a représenté le champ de contrainte optimal  $\underline{\underline{\sigma}}^r$  uniquement dans la direction  $\underline{e}_x$ , puisque le champ est uniaxial  $\underline{\underline{\sigma}}^r = \sigma^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$ .

### 3.4. Premiers exemples de validation

---

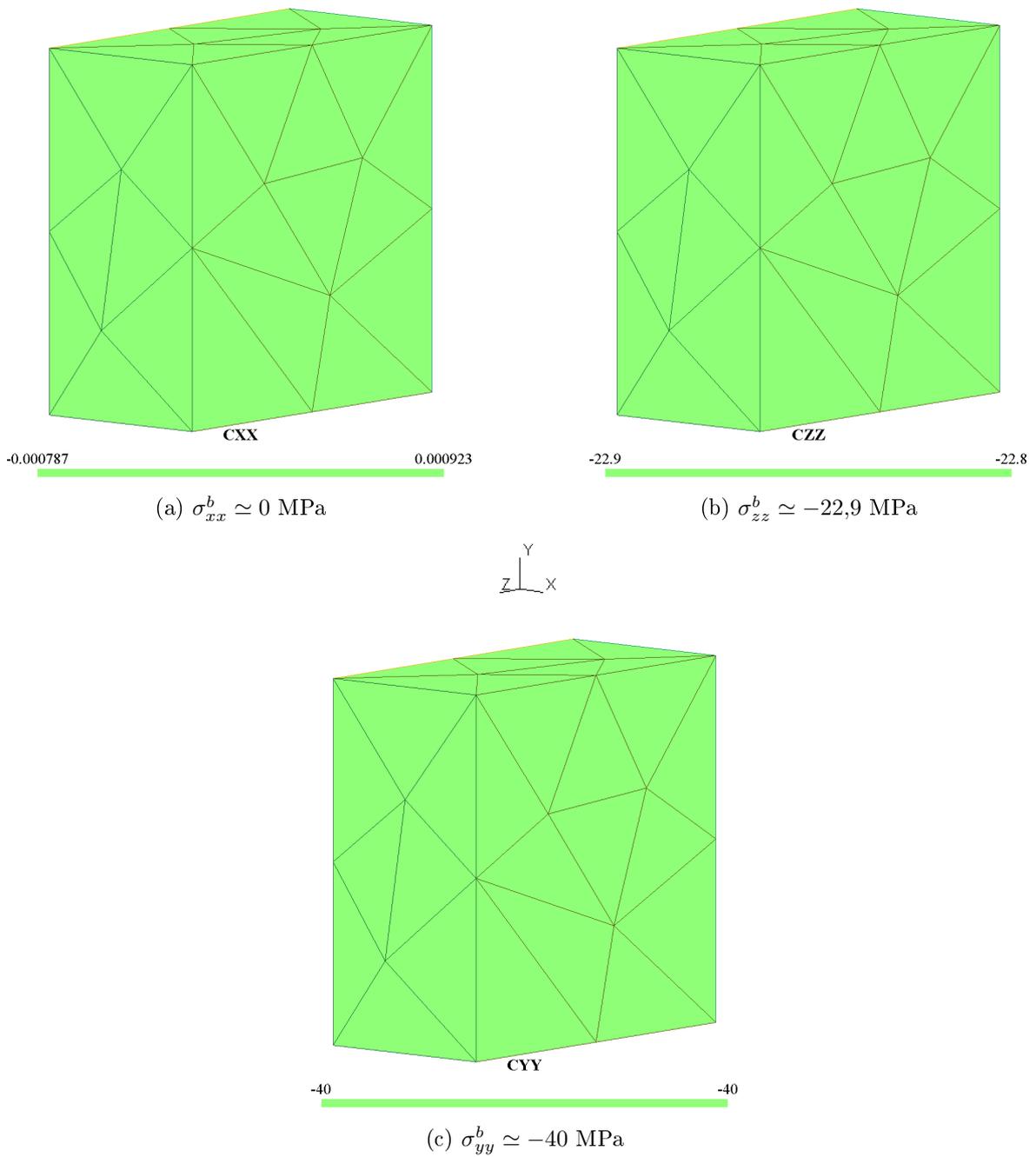


FIGURE 3.13 – Résultats de l'approche statique pour un bloc en béton non renforcé (résistance du béton modélisée par le critère MCT)

Calcul à la rupture pour le dimensionnement : mise en œuvre numérique

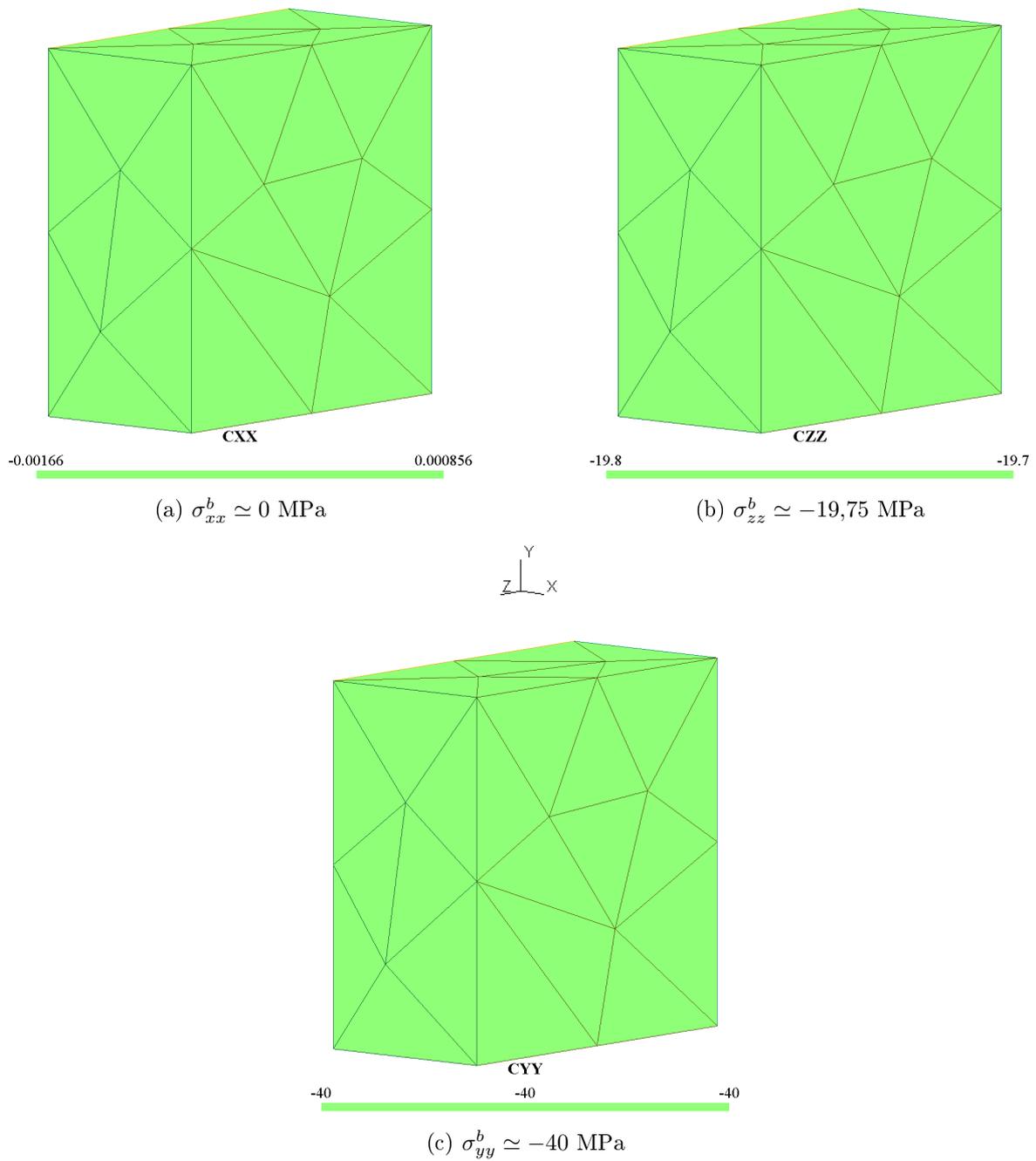


FIGURE 3.14 – Résultats de l'approche statique pour un bloc en béton non renforcé (résistance du béton modélisée par le critère de Rankine)

### 3.4. Premiers exemples de validation

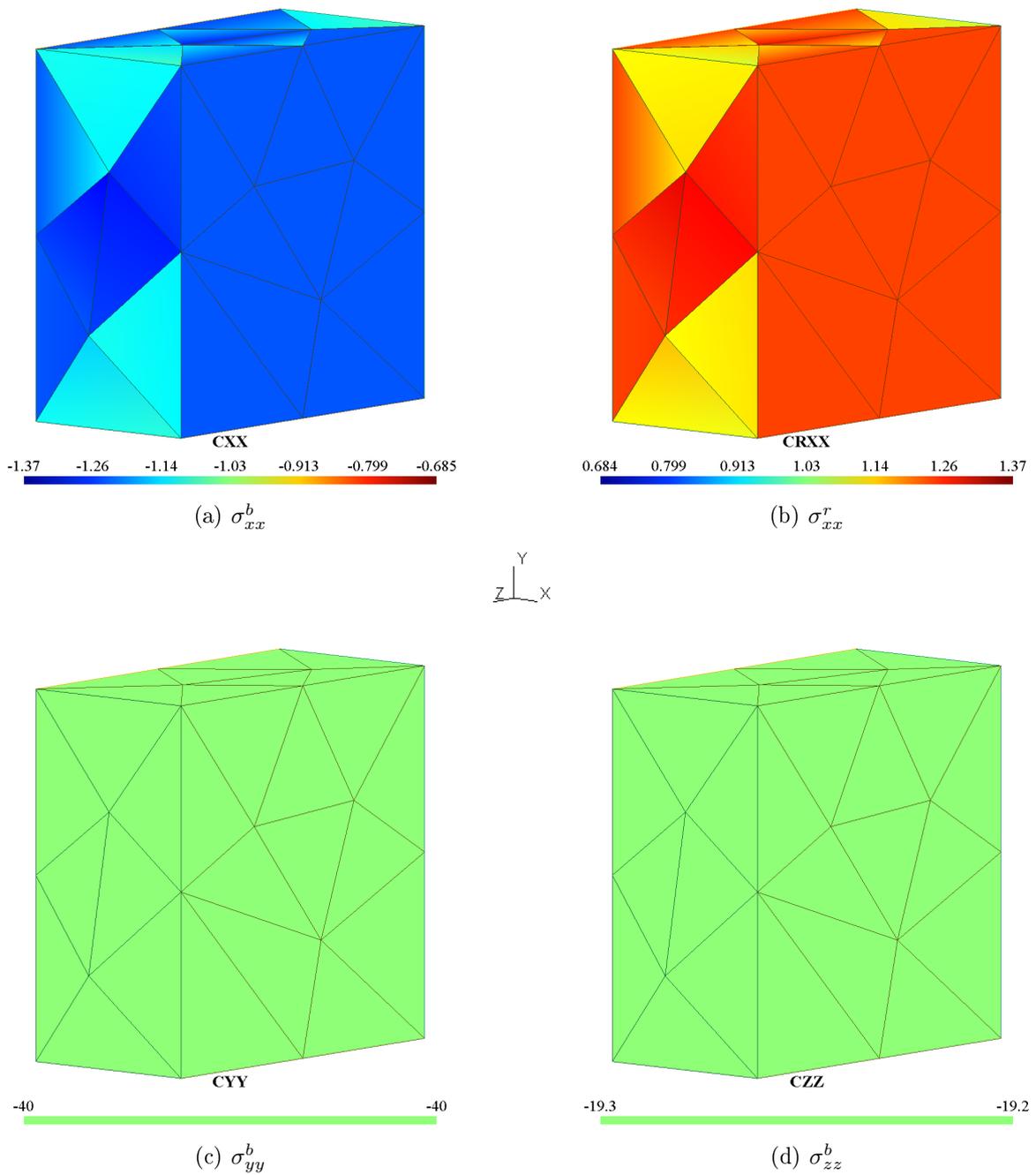


FIGURE 3.15 – Résultats de l'*approche statique* pour un bloc en béton renforcé (résistance du béton modélisée par le critère de Rankine)

## Calcul à la rupture pour le dimensionnement : mise en œuvre numérique

---

Dans le cas où le bloc est non renforcé,  $\sigma_{xx}^r$  est bien entendu nul et on a vu que  $\sigma_{xx}^b$  est nul sur les bords afin de respecter la condition de bord libre  $\underline{T} = 0$  (voir Figure 3.14). Dans le cas du bloc renforcé, c'est la contrainte macroscopique  $\Sigma_{xx}$  qui doit être nulle au bord. Le champ de contrainte vertical  $\sigma_{yy}^b$  est homogène et égal à  $-f_c$  (comme dans le cas du bloc non renforcé).

Dans le cas du critère de Rankine, on voit que le renforcement a un effet sur la répartition des contraintes entre les deux phases pour respecter l'équilibre et les conditions aux limites portant sur le tenseur de contraintes totales (condition de bord libre) mais qu'il n'y a pas d'effet du renforcement transversal sur la charge extrême. Numériquement, on retrouve ce résultat : en présence des renforts, la charge extrême obtenue est toujours  $p_{hom}^+ = f_c = 40$  MPa.

En revanche, dans le cas du critère MCT la charge extrême théorique est  $p_{hom}^+ = f_c + K_p \sigma_0$  en présence de renforcement transversal. Pour la simulation numérique, l'équivalent de 16 aciers de diamètre  $\Phi = 20$  mm de résistance uniaxiale  $f^y = 640$  MPa ont été homogénéisés. On a donc :

$$|\sigma_0| = \left| \frac{N}{A} \right| = \left| \frac{f^y \pi \Phi^2 / 4}{A} \right| \simeq 3,217 \text{ MPa} \quad (3.96)$$

avec  $A = (1,0 \times 1,0) / 16 \text{ m}^2$  l'aire d'homogénéisation (section de béton contenant une inclusion). Avec ces paramètres et sachant que l'angle de frottement interne du béton  $\phi$ , est choisi égal à  $37^\circ$ , le chargement extrême théorique est :

$$p_{hom}^+ = 52,941 \text{ MPa}$$

Numériquement, on obtient :

$$p^s = 52,941 \text{ MPa} \leq p_{hom}^+ \leq p^c = 52,941 \text{ MPa}$$

La Figure 3.16 montre que, dans le cas du critère MCT, les champs  $\sigma_{xx}^b$  et  $\sigma_{xx}^r$  sont homogènes et opposés, permettant de respecter la condition de bord libre imposée sur les faces latérales et portant sur le vecteur contrainte totale  $\underline{T}$  :  $\sigma_{xx}^b = -3,22$  MPa et  $\sigma_{xx}^r = 3,22$  MPa partout. Le champ est bien optimisé avec  $\sigma_{xx}^r = \sigma_0$ , la valeur maximale permise. Le champ de contrainte  $\sigma_{yy}^b$  est lui aussi homogène et supérieur à  $f_c$  :  $-52,9$  MPa.

À travers cet exemple, nous avons validé la mise en œuvre numérique de la méthode d'homogénéisation dans le cas d'un renforcement périodique, tout en montrant que le choix du critère MCT ou R peut aboutir à des résultats très différents. Il sera intéressant de continuer à comparer ces derniers au travers d'exemples plus complexes.

### 3.4. Premiers exemples de validation

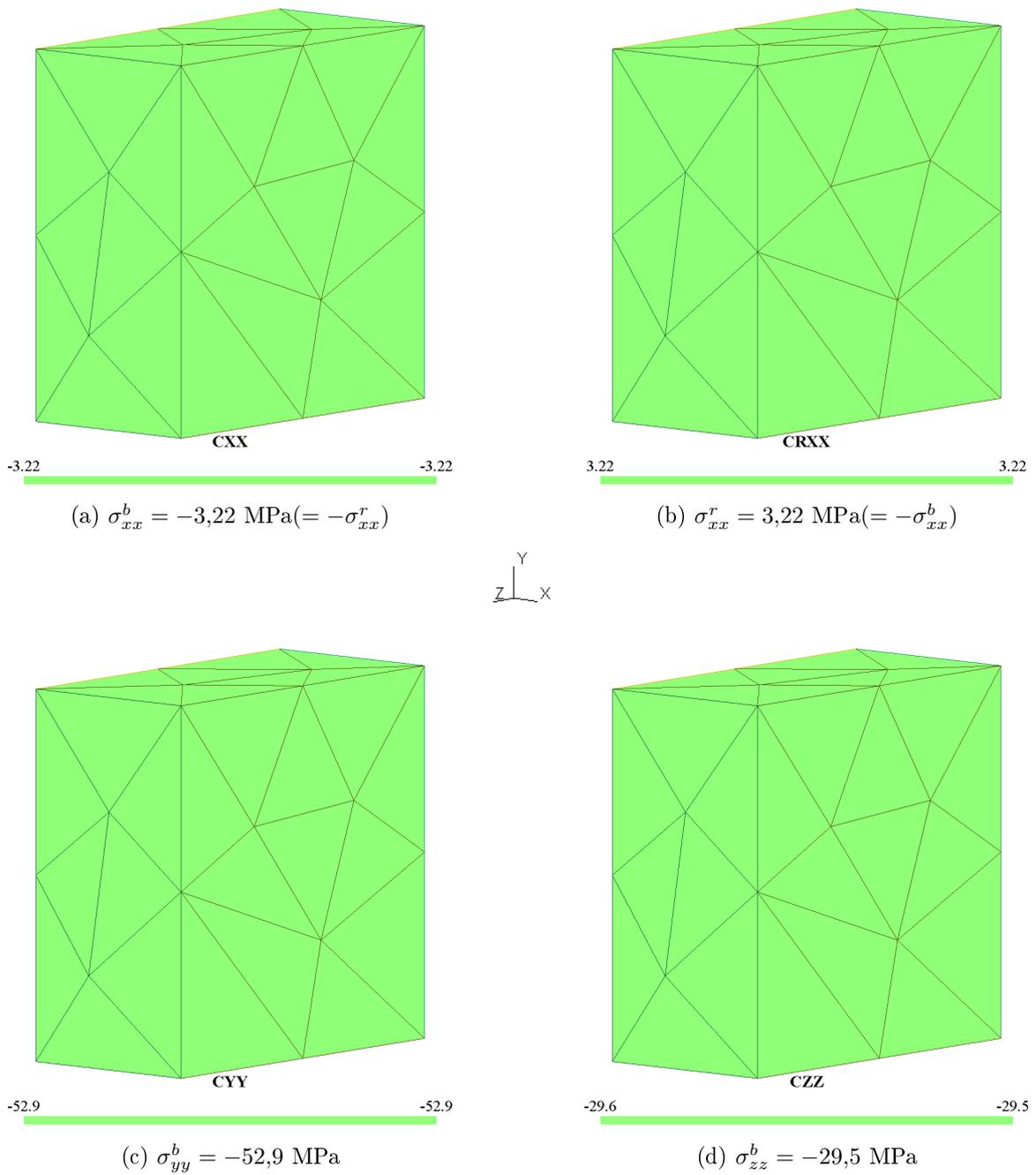


FIGURE 3.16 – Résultats de l'approche statique pour un bloc en béton renforcé (résistance du béton modélisée par le critère de MCT)

### 3.4.2 Validation de la méthode d'homogénéisation dans le cas d'armatures isolées [Vincent *et al.*, 2018b]

Nous allons maintenant utiliser le code ainsi mis au point sur un cas un peu plus compliqué que le bloc renforcé en compression étudié en déformations planes. Cet exemple va notamment nous permettre de valider la théorie de l'homogénéisation dans le cas d'armatures isolées (cas non périodique).

#### 3.4.2.1 Présentation du problème

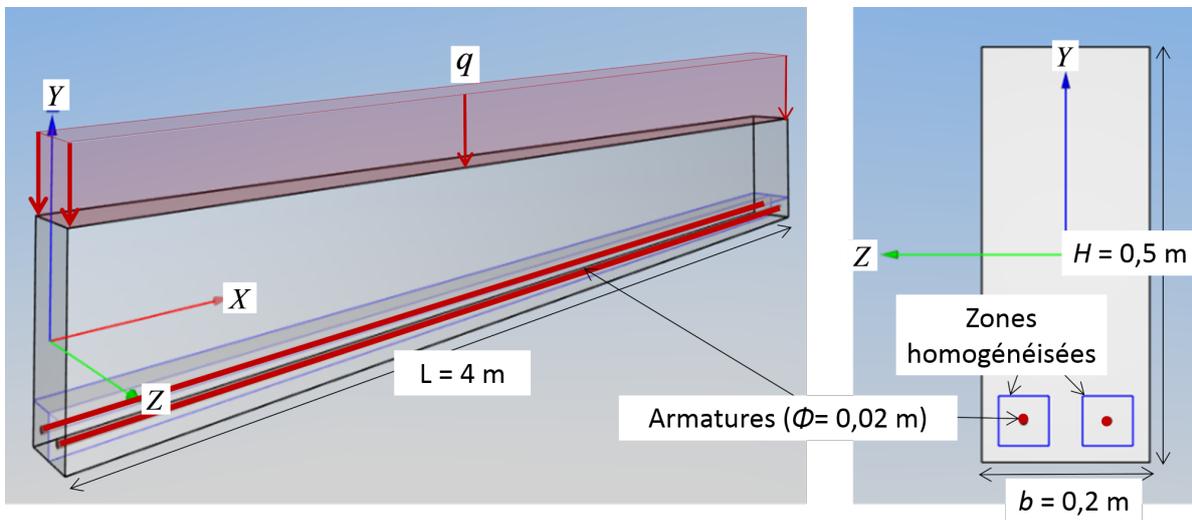


FIGURE 3.17 – Poutre console en béton renforcée par deux armatures, sous charge répartie uniforme (visualisée dans l'interface du logiciel DS CONCRETE)

Nous étudions une poutre dont la longueur  $L$  varie entre 0,5 m et 16 m et de section rectangulaire fixe :  $H = 0,5$  m et  $b = 0,2$  m (voir Figure 3.17 où le cas  $L = 4$  m est représenté). Les conditions aux limites, imposées à cette poutre *modélisée comme un milieu continu 3D*, sont les suivantes :

- ✓ Une charge surfacique uniformément répartie  $q$  est appliquée sur la partie supérieure de la poutre, les autres faces latérales étant libres de contrainte.
- ✓ Encastrement du bord gauche de la poutre :  $\underline{U} = 0$ .
- ✓ Appui simple en  $x = L$  :  $T_x = \sigma_{xx} = 0$ ,  $U_y = U_z$ .

Cette dernière condition aux limites implique qu'il y a ni moment (rotation libre) ni effort normal (mouvement libre selon  $x$ ) à l'extrémité droite de la poutre ( $x = L$ ).

La poutre est constituée d'un béton caractérisé par ses résistances uniaxiales en

### 3.4. Premiers exemples de validation

---

compression et en traction :

$$f_c = 40 \text{ MPa et } f_t = 0,5 \text{ MPa} \quad (3.97)$$

Ces caractéristiques mécaniques sont utilisées pour la modélisation numérique du béton dont la résistance est décrite par le critère MCT pour lequel l'angle de frottement interne est pris égal à  $37^\circ$ .

La poutre en béton est renforcée par deux armatures longitudinales (orientées selon  $x$ ) placées en partie inférieure de la poutre. De diamètre  $\Phi = 20$  mm, elles sont constituées d'un acier dont la résistance uniaxiale est  $f^y = 400$  MPa.

Nous allons maintenant déterminer le chargement extrême  $q^+$  de cette structure par l'approche statique et l'approche cinématique du calcul à la rupture, que nous comparerons ensuite à une modélisation 1D de la poutre.

#### 3.4.2.2 Modélisation 1D de la poutre

Dans un premier temps, nous modélisons la structure comme un élément de poutre 1D sur lequel est appliqué un chargement uniforme de densité *linéique*  $qb$  (Figure 3.18). Dans ces conditions, la structure est hyperstatique d'ordre 1, de sorte que choisissant la réaction d'appui  $R$  (en  $x = L$ ) comme inconnue hyperstatique, la distribution des efforts axiaux et des moments fléchissants en équilibre avec un tel chargement s'écrit :

$$N = 0, M(X) = R(L - X) - \frac{qb}{2}(L - X)^2 \quad (3.98)$$

Il peut être montré que la valeur limite du chargement de cette structure notée  $q_{1D}^+$  est atteinte lorsque le moment à l'encastrement atteint la résistance de la poutre en flexion pure ( $N = 0$ ) négative (voir Figure 3.18) :

$$M(X = 0) = RL - \frac{q_{1D}^+ b}{2} L^2 = M_0^- \quad (3.99)$$

tandis que la résistance en flexion pure positive est atteinte au point de moment maximal ( $X = X^*$ ) :

$$M(X = X^*) = M_0^+ \text{ avec } \frac{dM}{dX}(X^*) = 0 \quad (3.100)$$

soit

$$M(X^* = L - R/(q_{1D}^+ b)) = R^2/(2q_{1D}^+ b) = M_0^+ \quad (3.101)$$

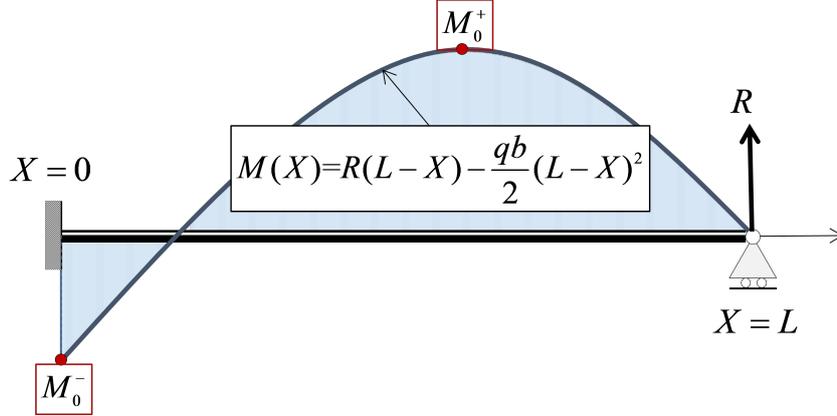


FIGURE 3.18 – Distribution du moment fléchissant statiquement admissible avec le chargement - modélisation 1D de la poutre

La résolution du système formé par les équations (3.99) et (3.101) conduit à l'équation du second degré en  $q_{1D}^+$  :

$$(q_{1D}^+)^2 + 4 \frac{b(M_0^- - 2M_0^+)}{L^2} q_{1D}^+ + 4 \frac{b^2(M_0^-)^2}{L^4} = 0 \quad (3.102)$$

avec comme solution (qui peut être retrouvée par l'approche cinématique par l'extérieur) :

$$q_{1D}^+ = \frac{2}{bL^2} \left[ 2M_0^+ - M_0^- + 2\sqrt{M_0^+(M_0^+ - M_0^-)} \right] \quad (3.103)$$

Les valeurs de  $M_0^+$  et  $M_0^-$  peuvent être obtenues à partir du *diagramme d'interaction* de la section renforcée avec les caractéristiques géométriques présentées sur la partie gauche de la Figure 3.19. Plus précisément, le domaine d'interaction  $G^b$  de la section en béton non renforcé est défini par :

$$(N, M) \in G^b \Leftrightarrow |M| \leq \frac{H(N + N_c)(N_t - N)}{2(N_t + N_c)^2} \quad (3.104)$$

pour  $-bHf_c = -N_c \leq N \leq N_t = bHf_t$

et le domaine d'interaction  $G^{ba}$  de la section en béton renforcé est définie par (voir [Averbuch, 1996] et [Pham et al., 2015] pour davantage de détails concernant la procédure utilisée pour déterminer un domaine d'interaction par le calcul à la rupture) :

$$G^{ba} = \{G^b + \lambda(1, \delta); -2kn_0 \leq \lambda \leq 2n_0\} \text{ avec } n_0 = (\pi\Phi^2/4)f_y^a \quad (3.105)$$

Les deux domaines  $G^b$  et  $G^{ba}$  sont représentés sur la Figure 3.19 au voisinage de l'origine du repère  $(N, M)$ . Les valeurs de résistance de la section renforcée en *flexion*

### 3.4. Premiers exemples de validation

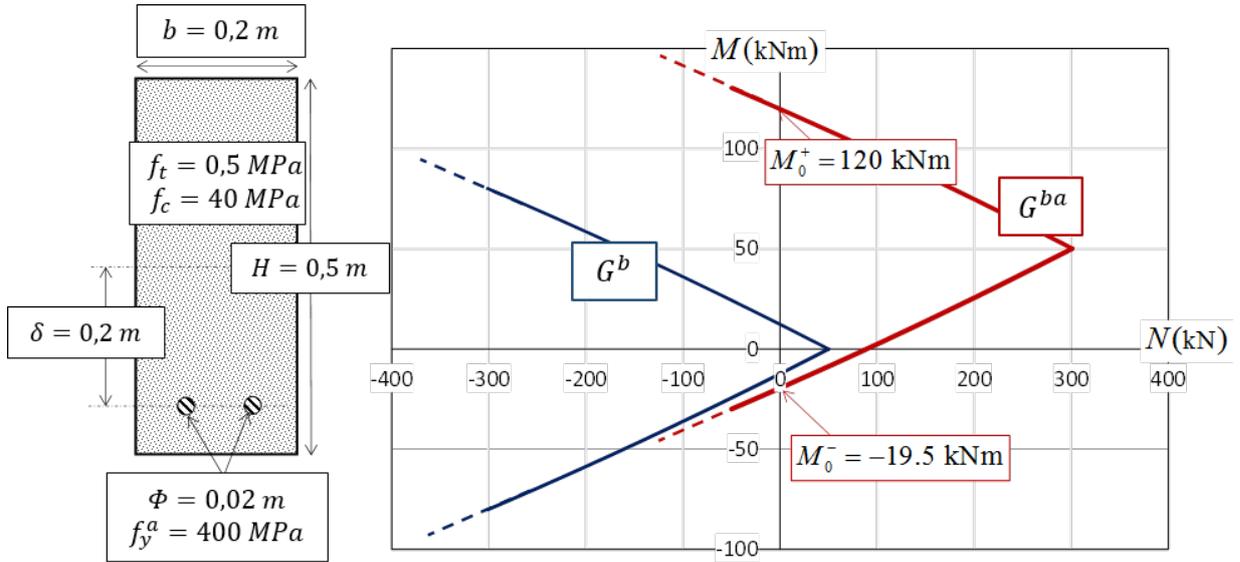


FIGURE 3.19 – Diagrammes d’interaction dans le plan  $(N, M)$  de la poutre renforcée et non renforcée.

*pure* correspondent à l’intersection de la courbe délimitant le domaine  $G^{ba}$  avec l’axe des ordonnées ( $M$ ) :

$$\begin{aligned} M_0^+ &= \max \{ M; (N = 0, M) \in G^{ba} \} \simeq 120 \text{ kN.m} \\ M_0^- &= \min \{ M; (N = 0, M) \in G^{ba} \} \simeq -19,5 \text{ kN.m} \end{aligned} \quad (3.106)$$

La valeur du chargement limite en fonction de la longueur  $L$  ( $m$ ) de la poutre est donc finalement :

$$q_{1D}^+ (\text{MPa}) \simeq \frac{5,18}{L^2} \quad (3.107)$$

#### 3.4.2.3 Modélisation 3D de la poutre

Nous allons maintenant évaluer le chargement extrême de cette poutre vue comme un solide 3D par les approches statique et cinématique du calcul à la rupture utilisant le code numérique qui a été présenté dans ce chapitre.

Les calculs sont effectués pour plusieurs longueurs de poutre afin de mettre en lumière les limites de la modélisation 1D de la poutre. Mais avant cela, validons sur cet exemple la méthode d’homogénéisation où la répartition des armatures n’est pas périodique.

Dans un premier temps, la longueur de la poutre est fixée à 4 mètres et nous faisons varier la taille des zones homogénéisées entourant les armatures. Le but est de valider

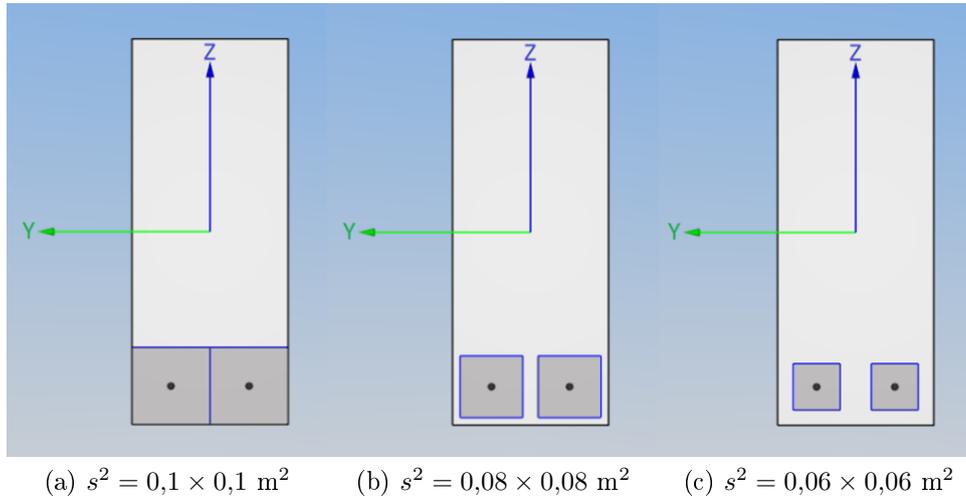


FIGURE 3.20 – Différentes sections des volumes homogénéisés

la procédure numérique implémentée et plus particulièrement la méthode d'homogénéisation qui consiste à remplacer chaque armature individuelle par un volume englobant, plus large, avec les caractéristiques mécaniques adaptées, permettant ainsi de mener des analyses numériques à un coût moins élevé que s'il fallait mailler chacune des barres individuellement. Les deux armatures longitudinales sont donc remplacées par des volumes homogénéisés avec trois sections différentes :  $s^2 = 0,1 \times 0,1 \text{ m}^2$ ,  $s^2 = 0,08 \times 0,08 \text{ m}^2$  et  $s^2 = 0,06 \times 0,06 \text{ m}^2$  (voir les différentes sections sur la Figure 3.20).

Les résultats des évaluations de la charge extrême  $q^+$  obtenues par l'approche statique ( $q_{3D}^s$ ) et l'approche cinématique ( $q_{3D}^c$ ) du calcul à la rupture sont représentés sur la Figure 3.21 en fonction de la taille du maillage.

Pour chacune des trois tailles de volume homogénéisé, plusieurs calculs, sur différents maillages, ont été réalisés, permettant ainsi aux deux approches de converger. En effet, au fur et à mesure que le nombre d'éléments augmente, la valeur de la charge extrême obtenue par l'approche statique augmente, tandis que celle obtenue par l'approche cinématique diminue : les deux bornes (inférieure et supérieure) se rapprochent réduisant petit à petit l'écart entre les deux bornes.

On observe que les résultats se stabilisent à partir de 12000 éléments pour l'approche statique et 10000 éléments pour l'approche cinématique. Si on compare maintenant nos trois tailles de volume homogénéisé, on s'aperçoit que les résultats sont très similaires et que la taille de cette zone n'a que très peu d'influence sur la valeur du chargement extrême obtenue.

L'intérêt du calcul à la rupture réside dans le fait que l'on obtienne un *encadrement*

### 3.4. Premiers exemples de validation

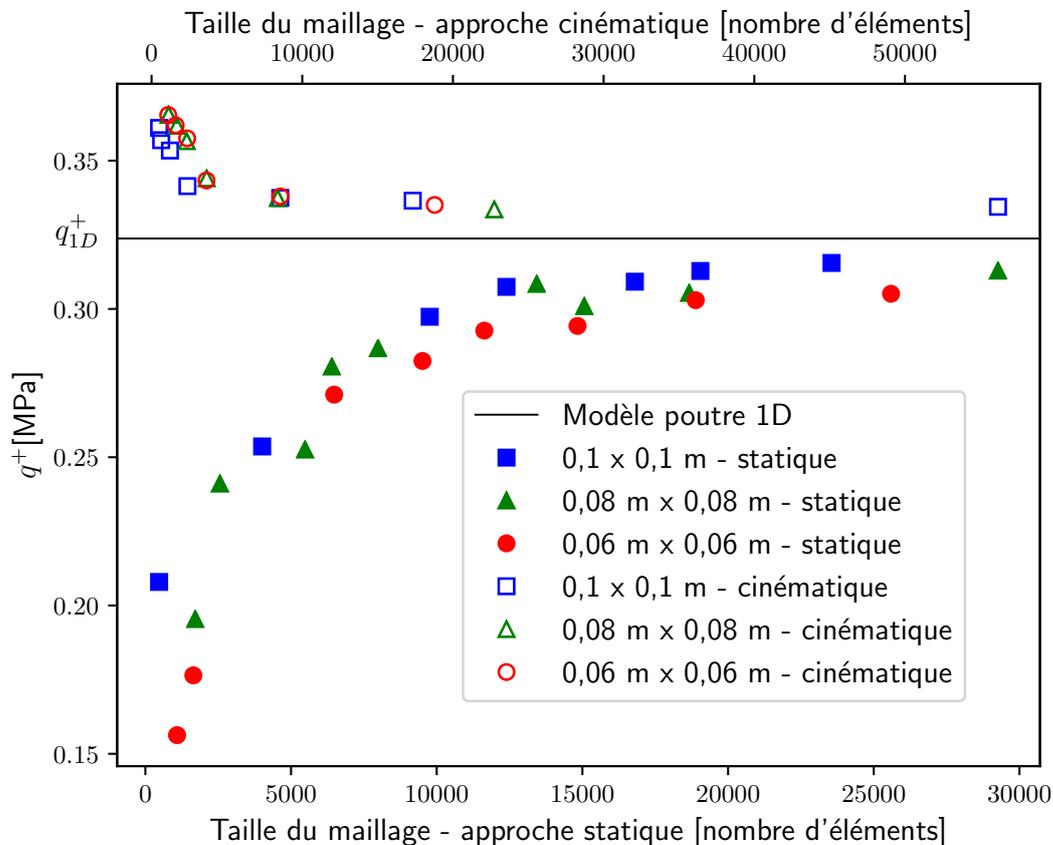


FIGURE 3.21 – Convergence des deux approches du calcul à la rupture sur l'étude d'une poutre de 4 mètres de long.

*rigoureux* du chargement extrême (borne inférieure obtenue par l'approche statique et borne supérieure obtenue par l'approche cinématique) et nous voyons dans le Tableau 3.3 que l'écart est très faible entre les deux :  $\Delta$  est l'erreur en % entre la valeur moyenne des bornes obtenues (moyenne entre  $q_{3D}^s$  et  $q_{3D}^c$ ) et les bornes qui l'encadrent. De plus, on s'aperçoit que la valeur de la charge limite,  $q_{1D}^+$ , obtenue par le modèle poutre unidimensionnel (à l'aide de l'équation (3.107) avec  $L = 4$  m) se situe bien entre les deux bornes (droite horizontale sur la Figure 3.21).

## Calcul à la rupture pour le dimensionnement : mise en œuvre numérique

---

Section zones homogénéisées (m <sup>2</sup> )	0,1 × 0,1	0,08 × 0,08	0,06 × 0,06
$q_{1D}^+$ (MPa)	0,324		
$q_{3D}^s$ (MPa)	0,316	0,313	0,305
$q_{3D}^c$ (MPa)	0,334	0,334	0,335
$\Delta$ (%)	±3	±3	±4,5

TABLEAU 3.3 – Résultats optimaux des approches statiques et cinématiques sur l'étude d'une poutre de 4 mètres de long.

### 3.4. Premiers exemples de validation

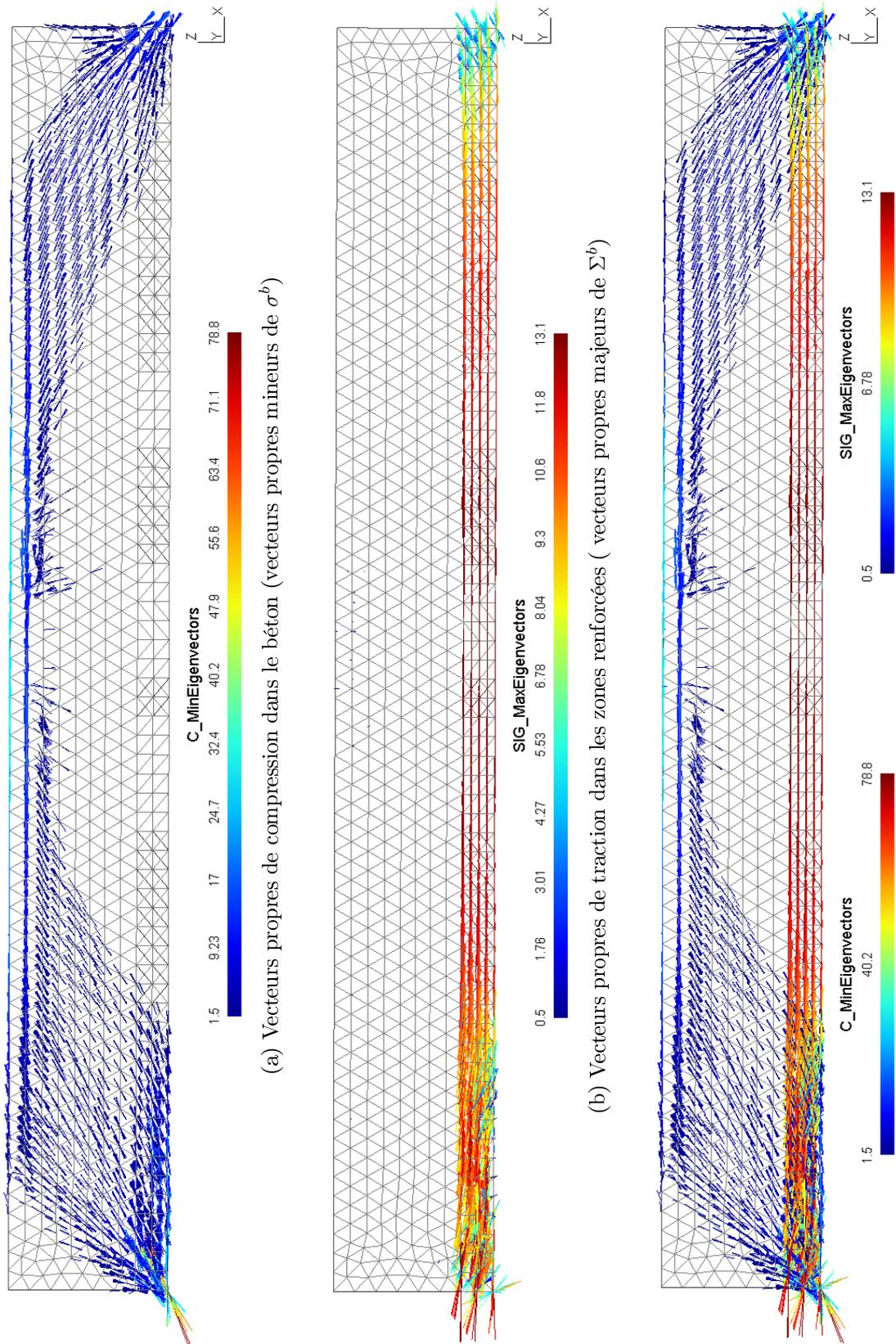


FIGURE 3.22 – Résultats de l’approche statique : visualisation du champ de contrainte optimisé (maillage en transparence)

## Calcul à la rupture pour le dimensionnement : mise en œuvre numérique

La Figure 3.22 visualise les résultats obtenus par l'approche statique du calcul à la rupture sur une poutre de longueur  $L = 4$  m et avec les zones homogénéisées de section  $s^2 = 0,1 \times 0,1$  m<sup>2</sup>. La structure est discrétisée en 23352 éléments tétraédriques.

L'approche statique permet d'obtenir le champ de contrainte optimisé de la structure :  $\underline{\underline{\sigma}}^b$  dans les zones non renforcées et  $(\underline{\underline{\sigma}}^b, \sigma^r)$  dans les zones renforcées. A chaque sommet de tétraèdre  $\Omega_e^b$  (zone non renforcée), il est possible de calculer les valeurs propres (et vecteurs propres) du champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}^b$  obtenu. Les vecteurs propres mineurs sont représentés sur la figure (a) de la Figure 3.22, correspondant aux contraintes de compression maximale dans le béton. Quant aux zones renforcées, les vecteurs propres majeurs de  $\underline{\underline{\Sigma}}$ , le tenseur macroscopique, sont représentés sur la figure (b) de la Figure 3.22, correspondant aux contraintes de traction maximale dans les zones homogénéisées.

Sur la dernière figure de la Figure 3.22, les vecteurs propres des zones non renforcées et des zones renforcées sont superposés, permettant ainsi de mettre en évidence le cheminement des efforts avec les zones comprimées et les zones tendues. Les résultats de l'approche statique ainsi optimisé numériquement ressemblent fort aux schémas d'efforts obtenus par la *méthode des bielles et tirants*. À deux différences près :

- Les champs de contrainte optimisés vérifient en tout point de la structure les équations d'équilibre ainsi que les critères de résistance. Ce qui n'est pas toujours le cas pour les schémas de type « bielles-tirants » où la vérification de ces conditions aux nœuds n'est pas toujours effectuée, si ce n'est de façon globale.
- La construction des champs optimisés est faite de façon automatique à partir d'un maillage de la structure, contrairement à la recherche des schémas « bielles-tirants » qui est le plus souvent effectuée manuellement.

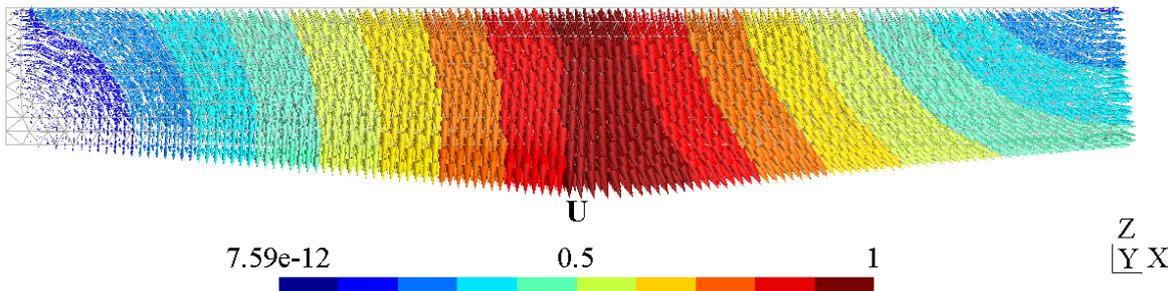


FIGURE 3.23 – Cinématique de rupture d'une poutre en flexion de  $L = 4$  m - Champ de vitesse optimal

L'approche cinématique du calcul à la rupture permet à l'inverse d'obtenir le champ de vitesse  $\underline{U}$ , représenté sur la Figure 3.23 (les valeurs du champ sont normées). Ce

### 3.4. Premiers exemples de validation

champ de vitesse obtenu par l'approche cinématique permet aussi de représenter la structure « déformée » en déplaçant chaque nœud du maillage de la géométrie initiale par le vecteur de vitesse virtuelle en ce point. Sur ce maillage déformé, il est possible de représenter la norme du champ de vitesse (voir Figure 3.24), mettant en évidence le mécanisme de ruine. On voit sur ces résultats de l'approche cinématique la section de gauche encastrée qui ne « bouge » pas, alors que celle de droite (au niveau de l'appui simple) subit une rotation ainsi qu'un déplacement horizontal (selon  $x$ ). La vitesse maximale se situe dans la partie centrale de la poutre (dans la moitié de la poutre côté appui simple, proche de la mi travée).

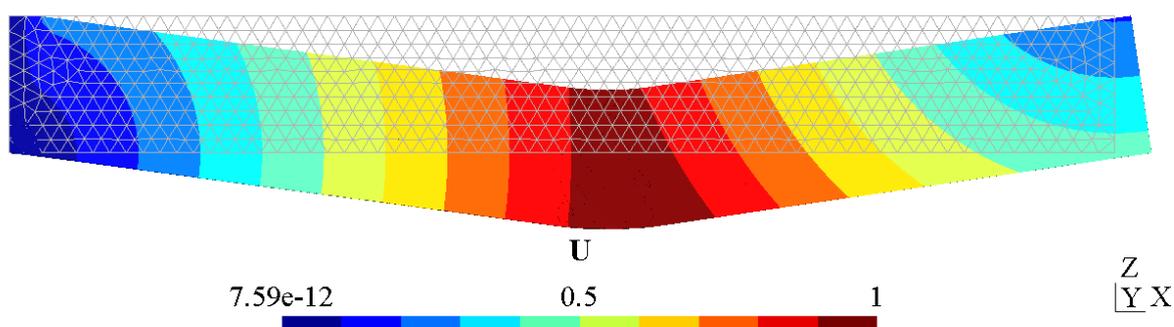


FIGURE 3.24 – Cinématique de rupture d'une poutre en flexion de  $L = 4$  m - Norme du champ de vitesse optimal sur le maillage déformé

Du résultat de l'approche cinématique, il est aussi possible d'extraire le champ des taux de déformation, information également importante dans la compréhension du mécanisme de ruine. Ce champ permet de détecter les zones où se forment les « rotules plastiques ». La norme du taux de déformation est représentée sur la Figure 3.25 et les rotules sont visibles sur la Figure 3.26, où seules les valeurs de la norme du taux de déformation supérieures à 0,1 sont représentées.

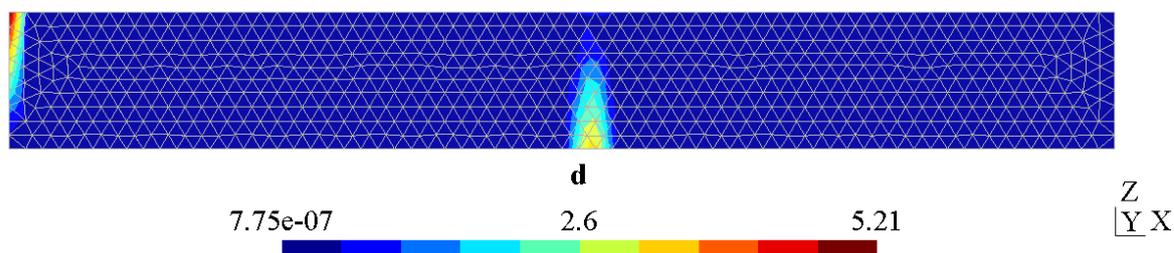


FIGURE 3.25 – Norme du taux de déformation sur une poutre en flexion de  $L = 4$  m.

Les résultats de l'approche cinématique présentés sur la Figure 3.23 ont été obtenus sur un maillage de 17332 éléments, correspondant à l'avant dernier résultat pour une

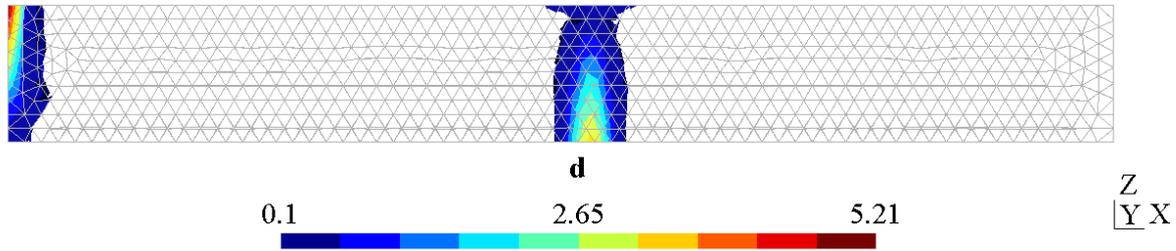


FIGURE 3.26 – Valeurs de la norme du taux de déformation supérieures à 0,1 sur une poutre en flexion de  $L = 4$  m.

taille de zone homogénéisée de  $0,1 \times 0,1$  m<sup>2</sup> (croix bleue) de la Figure 3.21.

#### 3.4.2.4 Comparaison des modélisations 1D et 3D

Nous faisons à présent varier la longueur  $L$  de la poutre afin de comparer et mettre en avant les limitations de la modélisation 1D par rapport à la modélisation 3D.

La terminologie de *poutre épaisse*<sup>(2)</sup> (ou *poutre courte*) est utilisée pour caractériser le faible élancement ( $L/h$ ) d'une poutre. On distingue les poutres épaisses des poutres élancées car leur comportement peut être très différent. En effet, la ruine d'une poutre épaisse soumise à un effort uniformément réparti est davantage gouvernée par sa résistance au cisaillement, alors qu'une poutre élancée rompt essentiellement en flexion.

Le résultat des simulations numériques menées sur la poutre en flexion renforcée est représenté sur la Figure 3.27. L'approche statique et l'approche cinématique permettant d'obtenir un encadrement du chargement extrême pour différentes valeurs d'élancement sont respectivement représentées par une croix bleue et une croix rouge. La valeur du chargement extrême obtenu par le modèle poutre 1D (3.107) est représentée par un triangle noir.

On remarque dans un premier temps que les deux approches (statique et cinématique) peinent à converger pour les poutres dont l'élancement est inférieur à 2. Il faudrait des maillages très fins pour réduire l'écart entre les deux bornes ou une procédure de remaillage adaptatif à l'endroit où le phénomène se localise (là où le taux de déformation est maximal par exemple). Cependant, ces écarts n'empêchent pas de tirer des conclusions quant aux différences entre le modèle de poutre 1D et la modélisation 3D. Alors que les résultats obtenus par les deux modélisations sont quasiment identiques pour un élancement de 4, 8 et 12, les résultats pour les poutres d'élancement inférieur à 2

(2). *deep beam* en anglais

### 3.4. Premiers exemples de validation

---

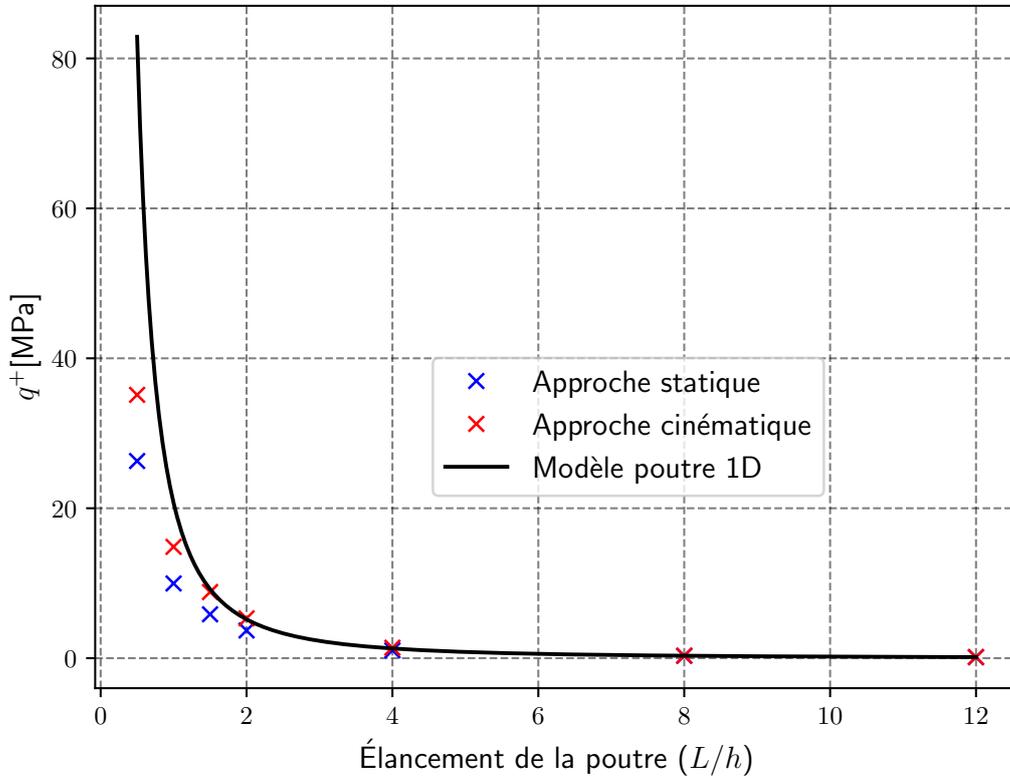


FIGURE 3.27 – Comparaison des évaluations du chargement extrême  $q^+$  obtenues par les modèles 1D (équation (3.107)) et 3D, pour différents élancements de la poutre

divergent : la charge limite obtenue par le modèle 1D est *supérieure* à celle obtenue par le calcul à la rupture en 3D. En outre, plus l'élancement de la poutre est faible, plus le rapport  $q_{1D}^+/q_{3D}^+$  est grand (voir Figure 3.28).

L'écart grandissant entre les deux estimations de la charge limite au fur et à mesure que l'élancement diminue provient du fait que la résistance à l'effort tranchant est considérée comme étant infinie pour le modèle poutre uni-dimensionnel alors que cette résistance est bien prise en compte dans le modèle 3D. Or, on voit au travers du résultat de l'approche cinématique pour une poutre de 0,5 m de long (élancement de 1) que la ruine n'est pas en flexion mais bien en cisaillement (voir le champ de vitesse virtuelle sur la Figure 3.29 et les plus grandes valeurs de la norme du taux de déformation représentées sur la Figure 3.30). On observe également sur cette dernière figure que la norme du taux de déformation maximale est localisée juste au dessus de la zone homogénéisée. Un raffinement du maillage dans cette zone permettrait vraisemblablement d'obtenir un meilleur encadrement du chargement extrême.

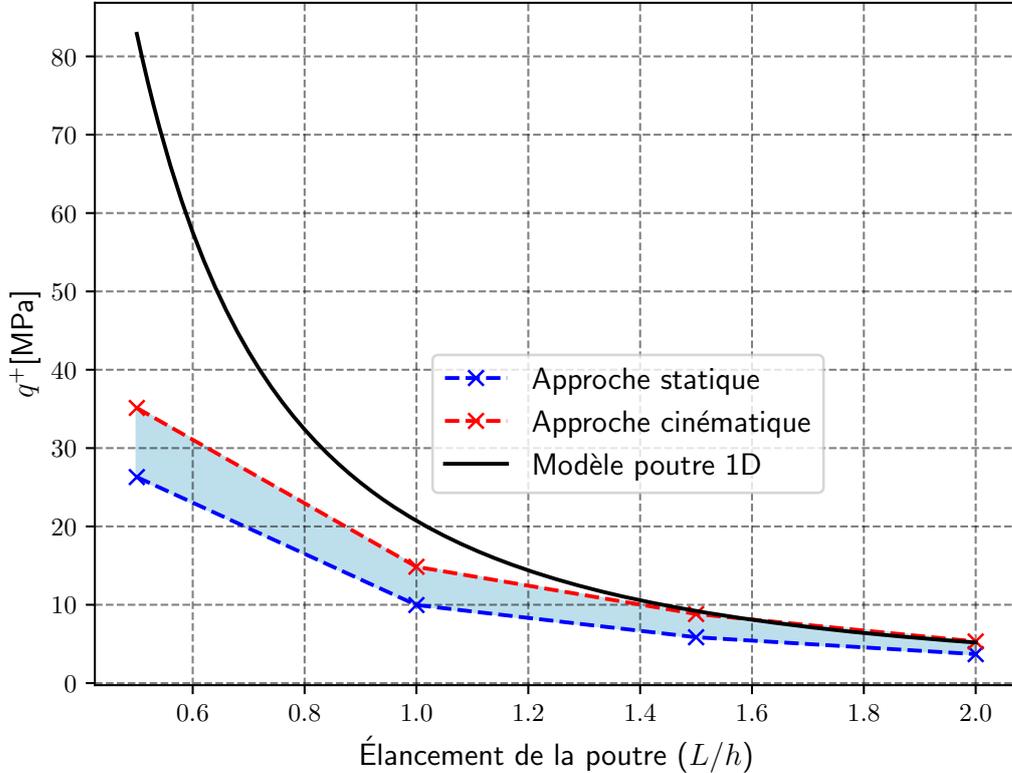


FIGURE 3.28 – Zoom sur les évaluations du chargement extrême  $q^+$  obtenues par le modèle 1D (équation (3.107)) et 3D, pour les faibles élanements.

### 3.5 Conclusions

L'objectif de ce chapitre était d'implémenter numériquement la théorie précédemment présentée dans le Chapitre 2. Les deux approches du calcul à la rupture ont, dans un premier temps, été formulées, à travers la méthode des éléments finis, comme des problèmes d'optimisation. L'approche statique du calcul à la rupture a été mise sous la forme d'un *problème de maximisation* permettant d'obtenir un champ de contrainte optimisé associé à une *borne inférieure* du chargement extrême. L'approche cinématique, quant à elle, a été mise sous la forme d'un *problème de minimisation* permettant d'obtenir un champ de vitesse virtuelle optimisé (mécanisme de ruine) correspondant à une *borne supérieure* de chargement extrême.

Dans un second temps, la méthode des éléments finis a été mise en œuvre pour traiter ces deux approches du calcul à la rupture. Dans les deux cas, l'optimisation est réalisée par le solveur mathématique de problèmes d'optimisation Mosek [Mosek, 2018].

### 3.5. Conclusions

---

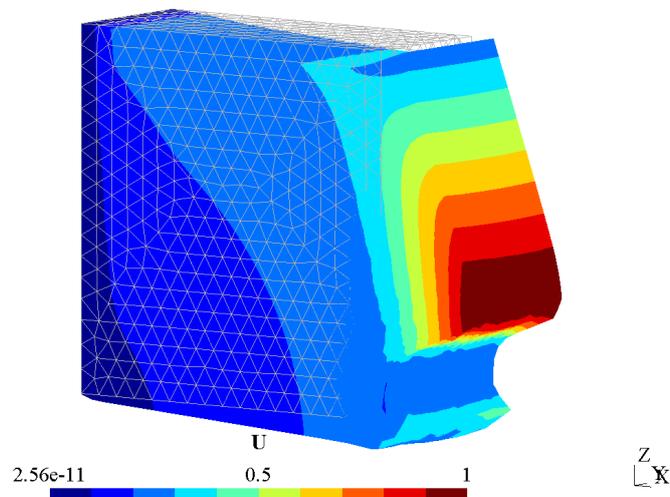


FIGURE 3.29 – Norme du champ de vitesse virtuelle représenté sur le maillage déformé ( $L = 0,5$  m)

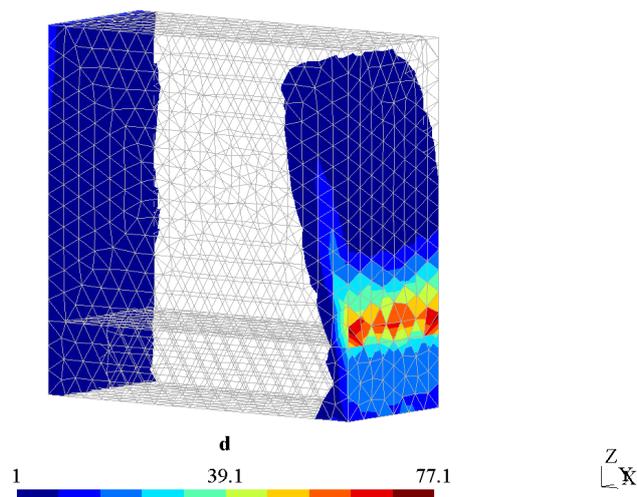


FIGURE 3.30 – Norme du taux de déformation - Ruine en cisaillement d'une poutre épaisse ( $L = 0,5$  m)

La pertinence du calcul à la rupture réside notamment dans le fait que le chargement extrême est évalué par deux approches qui sont duales l'une de l'autre. L'approche statique permet d'obtenir un minorant du chargement extrême et l'approche cinématique, un majorant. Ce statut de bornes (majorant-minorant) est conservé dans la mise en œuvre numérique. Cependant, l'écart entre le résultat de chacune des deux approches, traduisant l'erreur du modèle numérique, peut être parfois grand. La résolution numérique est en effet dépendante de plusieurs paramètres : la complexité du problème traité, la finesse du maillage, la qualité de convergence du solveur par Programmation

## Calcul à la rupture pour le dimensionnement : mise en œuvre numérique

Semi-définie Positive (SDP).

L'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs ces dernières années permet aujourd'hui de mettre en place numériquement ce type d'approches et d'envisager de traiter des problèmes complexes avec des coûts de calcul limités. En effet, il est possible de faire des simulations sur des maillages de plusieurs centaines de milliers d'éléments, ce qui permet d'une part de traiter des problèmes de grande taille, mais aussi d'assurer la bonne convergence des deux approches du calcul à la rupture. Enfin, la qualité de la convergence est aussi à mettre sur le compte des améliorations des méthodes de résolution numérique (méthode de point intérieur) utilisées par les solveurs d'optimisation, qui permettent notamment de traiter les redondances linéaires (en grand nombre dans les problèmes résolus par éléments finis).

\*      \*

      \*

# Chapitre 4

## Approche par le calcul à la rupture du dimensionnement des ouvrages massifs en béton armé : applications

**Résumé :** Ce chapitre a pour but d'illustrer et de mettre en valeur tout le travail réalisé pendant cette thèse. Différents exemples sont traités pour valider la méthode proposée et pour montrer ce qu'elle permet de réaliser sur des problèmes relativement complexes. Ce chapitre traite cinq exemples : deux structures non renforcées et trois structures en béton armé.

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>116</b>
<b>4.2</b>	<b>Application à des structures non renforcées</b>	<b>117</b>
4.2.1	Compression avec frottement d'un bloc non confiné	117
4.2.2	Chevêtre de pont en béton	120
<b>4.3</b>	<b>Application à des structures renforcées</b>	<b>128</b>
4.3.1	Chevêtre de pont en béton armé	128
4.3.2	Semelle de fondation circulaire	133
4.3.3	Mur en cisaillement	153
<b>4.4</b>	<b>Conclusions</b>	<b>157</b>

---

## 4.1 Introduction

Alors que les précédents chapitres ont permis d'introduire la théorie pour traiter les structures en béton armé par le calcul à la rupture (Chapitre 2) ainsi que sa mise en œuvre numérique (Chapitre 3), le présent chapitre a pour but d'illustrer la méthode développée à travers divers exemples.

Nous allons traiter différents exemples tout au long de ce chapitre pour pouvoir mettre en avant l'intérêt de l'outil développé et montrer son utilité et son efficacité. Nous commencerons par un exemple assez simple qui nous permettra de valider la méthode puis nous monterons graduellement en complexité. Ce chapitre sera divisé en deux parties, la première composée d'exemples de structures en béton et la deuxième d'exemples de structures en béton armé.

Nous commençons par étudier la compression d'un bloc non confiné avec frottement (4.2.1). C'est un exemple qui paraît très simple, mais dont la résolution analytique n'est pas connue pour autant. L'emploi de la méthode développée est justifié par le caractère tridimensionnel de l'exemple. Ce premier exemple a été choisi car nous pouvons comparer les résultats avec Martin et Makrodimopoulos qui le traitent dans [Martin et Makrodimopoulos, 2008]. Ce premier exemple permettra donc de valider la méthode développée dans le cas d'une structure non renforcée.

Ensuite, nous poursuivrons par l'étude d'un chevêtre de pont, une pièce courante en béton que nous étudierons dans un premier temps sans renfort (4.2.2) afin de pouvoir d'une part, comparer les résultats avec un autre logiciel (Optum G3), et d'autre part, mesurer l'apport des renforts lorsque nous les ajouterons (4.3.1). Cet exemple constituera une transition entre les structures non renforcées et les structures renforcées.

Afin d'agrémenter la partie sur les exemples de structures renforcées, nous avons choisi d'étudier une fondation en béton armé (4.3.2). Simões et al. ont présenté dans [Simões *et al.*, 2016] une approche cinématique analytique permettant d'approcher la capacité de la structure (majoration du chargement extrême) et son mécanisme de ruine. Nous comparerons nos résultats avec cette approche qui a également été validée par des résultats expérimentaux (toujours dans [Simões *et al.*, 2016]). Afin de compléter l'étude, nous ajouterons à la comparaison les résultats obtenus à l'aide d'un logiciel 2D (Optum G2) où la résolution est faite en axi-symétrique. Pour finir, nous modifierons légèrement l'exemple afin qu'il ne soit plus possible de le traiter en axi-symétrique mais seulement en 3D avec la méthode développée.

Enfin, pour terminer ce chapitre consacré aux applications, nous traiterons un mur composé d'un nombre important d'armatures (4.3.3) que nous traiterons dans un premier temps par la méthode d'homogénéisation dans le cas d'armatures isolées. En effet,

## 4.2. Application à des structures non renforcées

---

dans beaucoup de cas courants étudiés en béton armé, les structures sont composées de renforts dont la disposition est non périodique. La technique permettant de traiter ce type de renforcement, qui a été introduite dans le Chapitre 2, mise en œuvre numériquement et validée une première fois dans le Chapitre 3, sera utilisée dans avec cet exemple. Les limites de cette méthode seront également exposées.

## 4.2 Application à des structures non renforcées

### 4.2.1 Compression avec frottement d'un bloc non confiné [Martin et Makrodimopoulos, 2008]

Le premier exemple que nous décidons de traiter est un bloc en compression avec frottement qui a déjà été traité par Martin et Makrodimopoulos [2008]. Cet exemple a pour but de valider la mise en œuvre numérique sur un cas tri-dimensionnel simple, mais pour lequel la charge limite n'est pas connue analytiquement.

#### 4.2.1.1 Description du problème

Un bloc parallélépipédique de dimensions  $L \times L \times H = 2 \text{ m} \times 2 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ , encastré en partie basse, est soumis à une pression uniforme appliquée par l'intermédiaire d'une plaque rigide en contact parfaitement adhérent avec la face supérieure du bloc (voir représentation du problème complet sur la Figure 4.1). Les conditions aux limites du problème complet sont les suivantes :

- ✓ Les bords latéraux sont libres de contrainte :  $\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = 0$ ;
- ✓ La face inférieure est encastrée :  $\underline{U} = 0$ ;
- ✓ Une pression uniforme  $p$  est appliquée sur la plaque rigide :  $\underline{T} = -p\underline{e}_z$ .

Nous cherchons à déterminer la pression maximale  $p^+$  qui peut être appliquée sur ce bloc. Si on applique une pression directement sur le bloc, tandis que ce dernier est en contact *lisse* sur sa face inférieure, la pression limite obtenue est alors directement la résistance en compression du matériau ( $f_c$ ). Ce résultat ne pose pas de problème particulier et sa résolution par éléments finis est immédiate.

Grâce aux différentes symétries du problème, il est possible d'étudier seulement 1/16<sup>ème</sup> de la structure (représenté sur la géométrie complète sur la Figure 4.1). Le système étudié et modélisé dans DS Concrete est représenté sur la Figure 4.2. On y distingue deux parties : le bloc délimité par un trait bleu de la plaque rigide, à laquelle est appliquée la pression. Le bloc étudié est constitué d'un matériau de Mohr-Coulomb avec un angle de frottement interne  $\phi$  fixé à  $30^\circ$  et une résistance en compression uni-

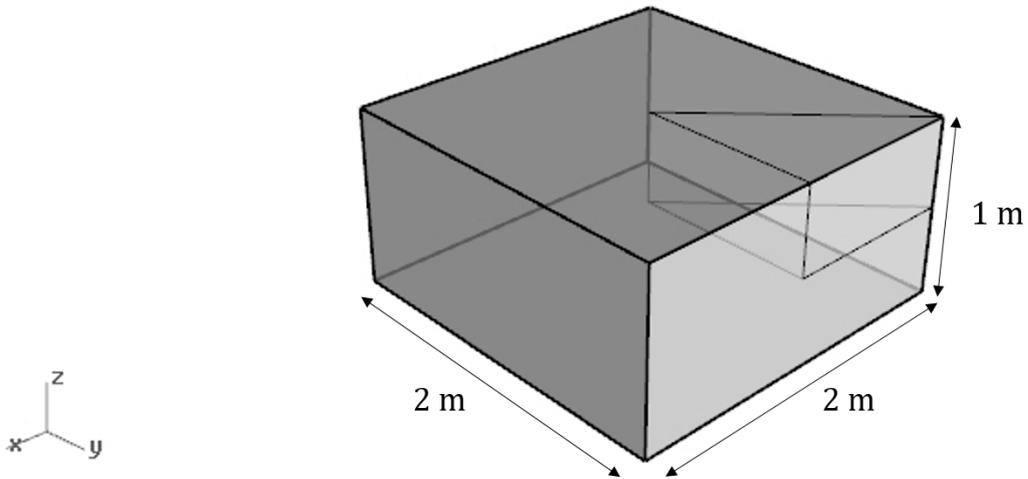


FIGURE 4.1 – Vue en perspective du bloc étudié

axiale  $f_c = 40$  MPa. Les dimensions du bloc étudié (1/16<sup>ème</sup> de la structure complète) sont indiquées sur la Figure 4.2 : 1 m de large, 1 m de long et 0,5 m de haut.

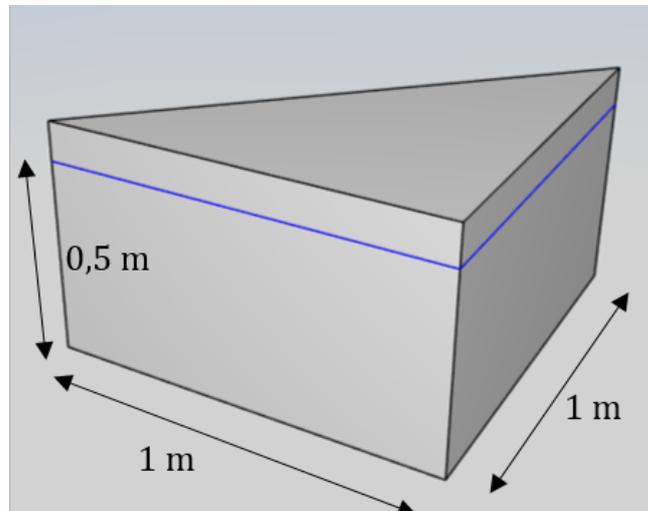


FIGURE 4.2 – Vue en perspective d'1/16<sup>ème</sup> du bloc

Les conditions aux limites sur le 1/16<sup>ème</sup> de la structure complète sont les suivantes :

- ✓ Le bord latéral de normale  $\underline{e}_y$  (bord de droite d'un mètre de long, voir Figure 4.2) est libre de contrainte :  $\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_y = 0$  ;
- ✓ Une pression uniforme  $p$  est appliquée sur la plaque rigide :  $\underline{T} = -p\underline{e}_z$  ;
- ✓ La face inférieure est un plan de symétrie :  $\underline{U} \cdot -\underline{e}_z = U_z = 0, T_x = T_y = 0$  ;
- ✓ Les deux dernières faces latérales sont des plans de symétrie : contact lisse

## 4.2. Application à des structures non renforcées

---

avec des plans fixes.

### 4.2.1.2 Résultats

Le chargement extrême est estimé par les deux approches du calcul à la rupture. Le résultat de l'approche cinématique est visible sur la Figure 4.3 où est représenté le champ de vitesse virtuelle optimal permettant d'appréhender le mécanisme de ruine. Sur la Figure 4.4 sont représentés les vecteurs propres de compression dans le massif, calculés *a posteriori* à partir du champ de contrainte obtenu. L'inclinaison et l'intensité des vecteurs propres au niveau du contact entre le bloc rigide et le massif montre bien le cisaillement induit par le bloc (sur lequel est appliquée la pression) sur le massif.

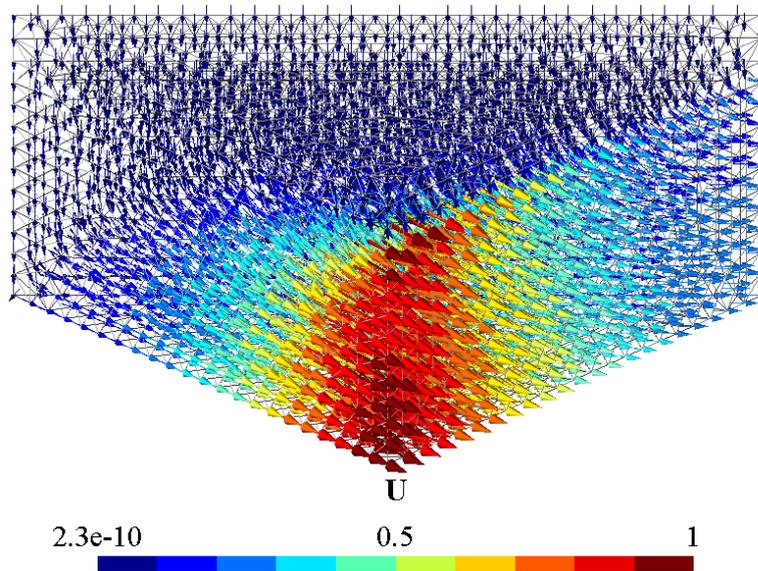


FIGURE 4.3 – Résultat de l'approche cinématique

Au delà des résultats présentés sur les Figures 4.3 et 4.4, les deux approches permettent d'obtenir un encadrement du chargement extrême :

$$p^s = 95,1 \text{ MPa} \leq p^+ \leq 110,3 \text{ MPa} = p^c \quad (4.1)$$

On remarque que le chargement extrême est plus de deux fois supérieur à la résistance en compression simple et que l'écart entre les deux approches n'est pas négligeable ( $\pm 7,4 \%$ ), ce qui montre que cet exemple n'est pas aussi simple qu'il n'y paraît. Martin et Makrodimitopoulos dans [Martin et Makrodimitopoulos, 2008] obtiennent quant à eux :

$$8,35 \leq p^+/c \leq 10,06 \quad (4.2)$$

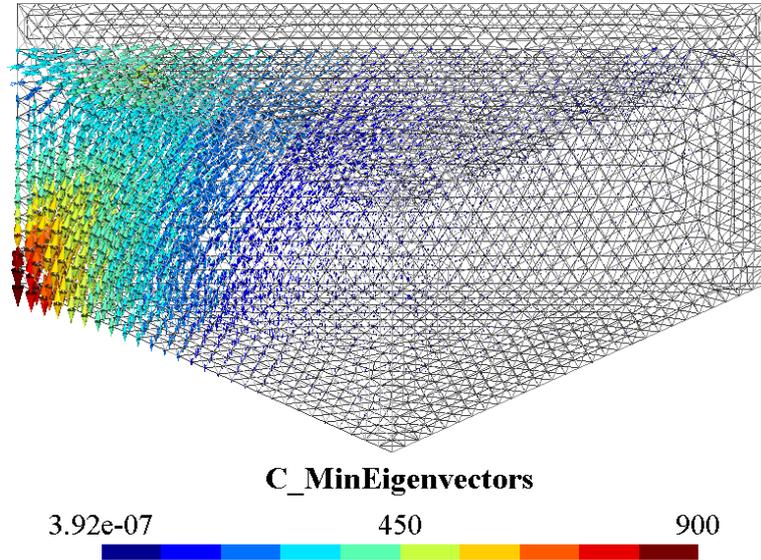


FIGURE 4.4 – Résultat de l’approche statique

où  $c$  est la cohésion du matériau et nous rappelons la relation entre  $c$ ,  $f_c$  et  $\phi$  :  $f_c = 2c \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$ . Si nous adimensionnons également le résultat obtenu avec la méthode développée, on a :

$$8,21 \leq p^+/c \leq 9,55 \quad (4.3)$$

Nous obtenons donc des résultats comparables à ce que [Martin et Makrodimopoulos \[2008\]](#). Le but ici n’est pas de comparer scrupuleusement les valeurs mais bien de montrer que nous obtenons des résultats relativement proches. De plus, au delà de l’encadrement du chargement extrême obtenu, nous obtenons le même mécanisme de ruine (approche cinématique) ainsi que le même champ de contraintes principales (approche statique) que [Martin et Makrodimopoulos \[2008\]](#) dont les résultats sont présentés sur la Figure 4.5.

Ce premier exemple sur une structure non renforcée permet de valider la méthode développée dont les résultats sont comparées à un travail de référence. Nous allons maintenant étudier une deuxième structure non renforcée : un chevêtre de pont.

### 4.2.2 Chevêtre de pont en béton

Afin de mettre en avant l’intérêt de l’outil développé, nous nous intéressons maintenant à un chevêtre, pièce massive et tridimensionnelle qui assure la stabilité d’un pont en transférant le chargement provenant du tablier de pont vers les piles. Dans un pre-

## 4.2. Application à des structures non renforcées

---

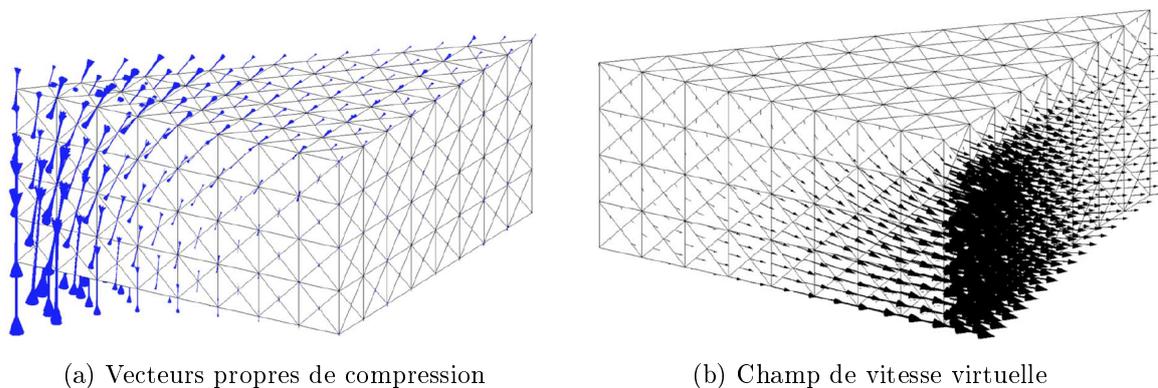


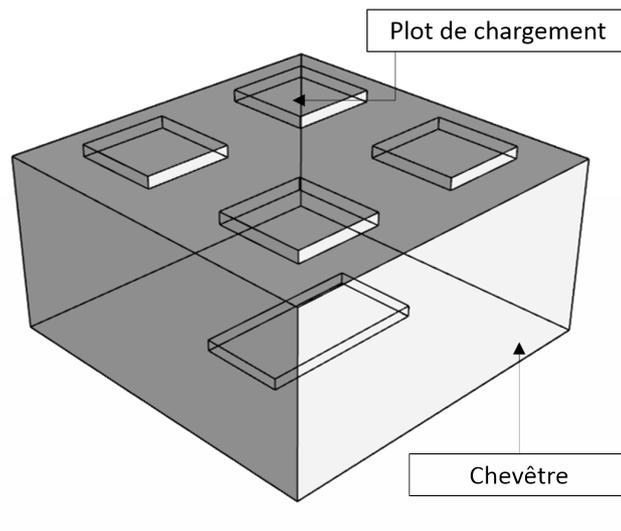
FIGURE 4.5 – Résultats des approches statique et cinématique dans [Martin et Makrodimopoulos, 2008]

mier temps, nous allons étudier cette structure sans renforcement (béton seul), ce qui permettra de comparer les résultats obtenus avec Optum G3, un logiciel commercialisé pour réaliser des études géotechniques dans lequel le critère de Mohr-Coulomb tronqué est disponible et dont la résolution peut être effectuée par le calcul à la rupture. Puis, nous modéliserons la résistance du béton par le critère de Rankine. Nous pourrons alors comparer les résultats correspondant aux deux critères.

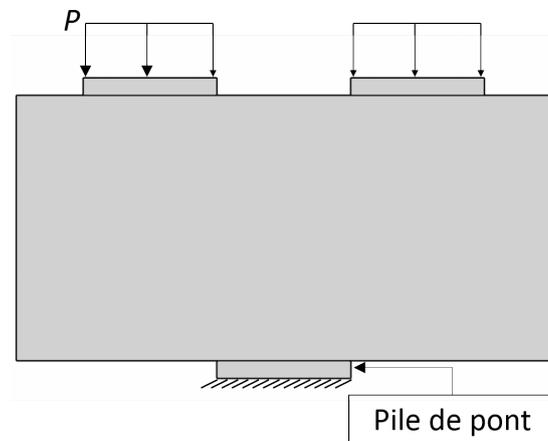
### 4.2.2.1 Description du problème

Le chevêtre est modélisé par un bloc parallélépipédique de section rectangulaire de  $3 \times 3 \times 1,5 \text{ m}^3$  sur laquelle sont disposées quatre plaques de section carrée  $0,7 \times 0,7 \text{ m}^2$  servant à appliquer le chargement. Ces quatre plaques sont *infiniment résistantes*. Le chevêtre repose sur un bloc parallélépipédique également, de section rectangulaire  $0,7 \times 1,5 \text{ m}^2$  permettant de définir une condition limite sur la face inférieure. Ce bloc est aussi *infiniment résistant*. La représentation géométrique du chevêtre étudié, des appareils d'appui et de chargement est visible sur la Figure 4.6. Le chevêtre est constitué d'un béton caractérisé par ses résistances en compression uniaxiale et en traction uniaxiale respectivement égales à  $f_c = 40 \text{ MPa}$  et  $f_t = 0,5 \text{ MPa}$ .

Une pression uniforme est appliquée sur chacune des quatre plaques de la face supérieure du chevêtre, représentant l'action du tablier de pont sur le chevêtre. La face inférieure du chevêtre est partiellement encastree, permettant de modéliser l'interaction de la pile de pont avec le chevêtre.



(a) Vue en perspective (en transparence)



(b) Vue de face

FIGURE 4.6 – Représentation géométrique du chevêtre non renforcé

## 4.2. Application à des structures non renforcées

---

	$P^s$ [MPa]	$P^c$ [MPa]	$\Delta$ (%)
MCT (avec Optum G3)	3,85	4,38	$\pm 6,4$
MCT	3,89	4,46	$\pm 6,8$
Rankine	3,80	4,00	$\pm 2,6$

TABLEAU 4.1 – Résultats obtenus sur le chevêtre non renforcé

### 4.2.2.2 Résultats

L'estimation du chargement extrême qui peut être appliqué sur ce chevêtre est calculée par les approches statique et cinématique du calcul à la rupture. Les résultats de l'encadrement de la pression maximale,  $P^+$ , obtenus sont présentés dans le Tableau 4.1 où  $P^s$  est la pression maximale obtenue par l'approche statique et  $P^c$  est la pression maximale obtenue par l'approche cinématique. Dans le Tableau 4.1 sont présentés les résultats obtenus avec Optum G3 où la résistance du béton est modélisée par le critère de Mohr-Coulomb tronqué (MCT) ainsi que les résultats obtenus avec la méthode développée dans cette thèse où la résistance du béton est modélisée par les critères de MCT et Rankine. La dernière colonne du Tableau indique en % l'écart entre les bornes statique et cinématique.

Les résultats relatifs au critère MCT obtenus avec le logiciel Optum G3 et la méthode développée sont concordants. La méthode développée dans cette thèse permet d'obtenir une estimation de  $P^+$  de 4,19 MPa à  $\pm 6,8$  % près. Le logiciel Optum G3 présente l'intérêt d'avoir une procédure de remaillage plutôt efficace qui permet de resserrer les bornes. Ainsi en résolvant le même problème plusieurs fois (trois fois) et en remaillant les zones d'intérêt entre chaque résolution, il est possible d'obtenir un encadrement de la charge limite à  $\pm 3,5$  % près :  $4,00 \text{ MPa} \leq P^+ \leq 4,29 \text{ MPa}$ . Il est intéressant de noter que cette dernière estimation est réalisée avec approximativement le même nombre d'éléments que celle reportée dans le Tableau 4.1 (10000 éléments), d'où l'intérêt du remaillage adaptatif et localisé.

Étant donnée la symétrie de la géométrie du problème et de son chargement, les calculs dont les résultats sont présentés dans le Tableau 4.1 ont été réalisés sur un quart de la structure afin de pouvoir mailler plus finement et pour obtenir une meilleure estimation de  $P^+$ . Cependant, les résultats que nous allons présenter seront soit sur la structure complète soit sur la moitié de la structure pour une meilleure lisibilité et compréhension de la ruine de la structure. Ils ne correspondront donc pas aux meilleurs résultats de l'approche statique ou de l'approche cinématique mais les observations que nous allons faire sont tout autant valables que pour les résultats sur le quart du chevêtre. De plus, même si ces résultats ne correspondent pas aux optimums trouvés, ils en sont très proches.

## Approche par le calcul à la rupture du dimensionnement des ouvrages massifs en béton armé : applications

---

### ✓ Résultats de l'approche statique

On rappelle que les résultats issus de l'approche statique du calcul à la rupture permettent d'obtenir un champ de contrainte optimisé en équilibre avec le chargement et qui respecte le critère en tout point de la structure. On obtient donc les six composantes indépendantes de  $\underline{\underline{\sigma}}^b$ , en chacun des quatre sommets de chaque tétraèdre, que nous pouvons lire indépendamment. Néanmoins, ce qui va davantage nous intéresser ici est d'étudier les *contraintes principales*, c'est à dire les valeurs propres (ou vecteurs propres) du tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}^b$  que nous pouvons calculer *a posteriori* (post-traitement du calcul).

Sur la Figure 4.7 sont représentées les plus petites valeurs propres correspondant aux contraintes de compression. Sur la Figure 4.8 sont représentés les plus petits vecteurs propres correspondant aux contraintes de compression. Sur ces deux figures, deux vues sont présentées : une de face et une de côté. Pour la représentation des valeurs propres (respectivement des vecteurs propres), seules les valeurs de compression entre  $-5$  MPa et  $-50$  MPa (respectivement entre  $5$  MPa et  $50$  MPa) sont représentées, ce qui permet de faire apparaître les *bielles de compression* allant des plots de chargement, où sont appliquées les pressions, à l'encastrement en partie basse du chevêtre. Une représentation des vecteurs propres de compression sur toute la structure est visible sur la Figure 4.9. Les vecteurs propres, en plus des valeurs propres, nous renseignent sur la direction de l'effort. Cette première approche permet de comprendre la diffusion des efforts au sein de la structure.

### ✓ Résultats de l'approche cinématique

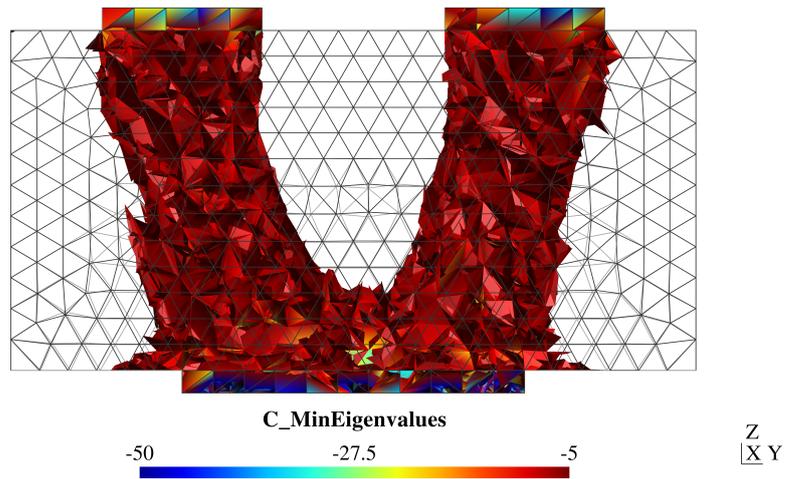
L'approche cinématique permet d'obtenir un champ de vitesse virtuelle qui peut permettre de construire un maillage déformé de la structure (voir Figure 4.10) où chacun des dix nœuds de chaque tétraèdre composant la géométrie initiale subit un déplacement défini par le vecteur de vitesse virtuelle en ce point (dont les valeurs sont normalisées). L'approche cinématique du calcul à la rupture permet donc, en plus de fournir un majorant du chargement extrême recherché, de visualiser le mécanisme de ruine.

### ✓ Comparaison des critères du béton

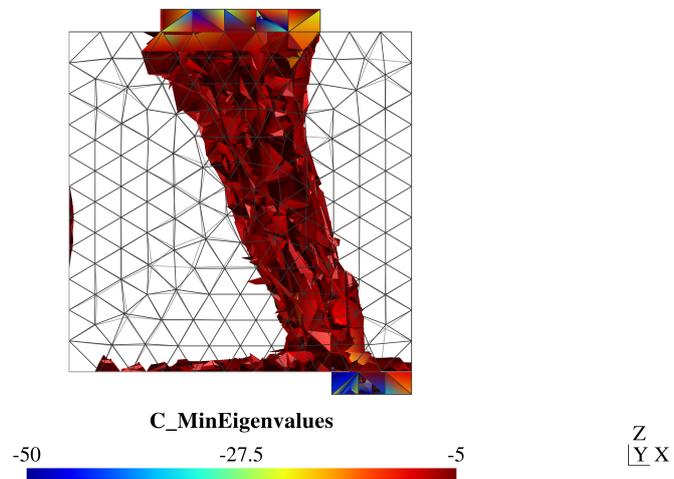
Les encadrements de  $P^+$  avec le critère de Rankine et celui de MCT se recoupent (voir les bornes obtenues pour les deux critères dans le Tableau 4.1 :  $P_R^c > P_{MCT}^s$ ). Nous ne pouvons donc pas fermement statuer quant au fait que la pression extrême est inférieure dans le cas où la résistance du béton est modélisée par un critère de Rankine, même si une telle tendance semble se dégager. Toutefois, si on s'intéresse aux valeurs propres du champ de contrainte, on s'aperçoit que la compression dans les bielles est moins importante dans le cas où la résistance du béton est modélisée par le critère de Rankine que dans le cas où la résistance du béton est modélisée par le critère MCT. De plus, dans le cas du critère MCT, il y a des compressions qui vont au delà de  $f_c$  (ce qui

## 4.2. Application à des structures non renforcées

---

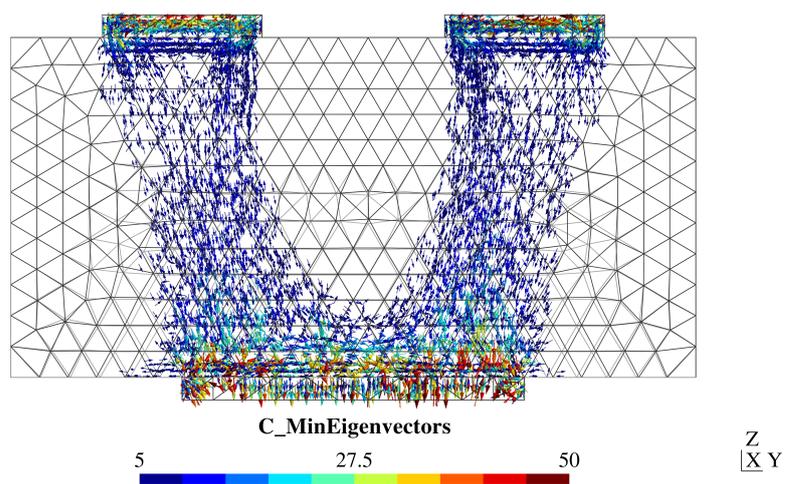


(a) Vue de face

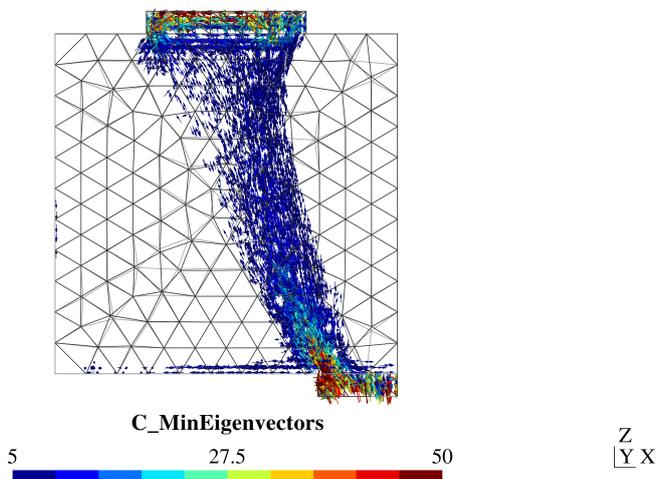


(b) Vue de côté

FIGURE 4.7 – Représentation des valeurs propres de compression sur la moitié du ché-  
vêtre (critère MCT)



(a) Vue de face



(b) Vue de côté

FIGURE 4.8 – Représentation des vecteurs propres de compression sur la moitié du chevêtre (critère MCT)

## 4.2. Application à des structures non renforcées

---

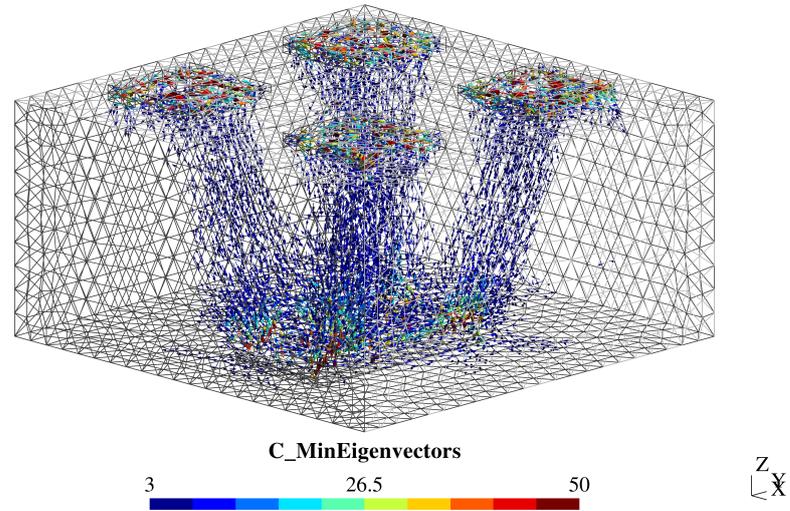


FIGURE 4.9 – Vue en perspective des vecteurs propres sur la structure complète (critère MCT)

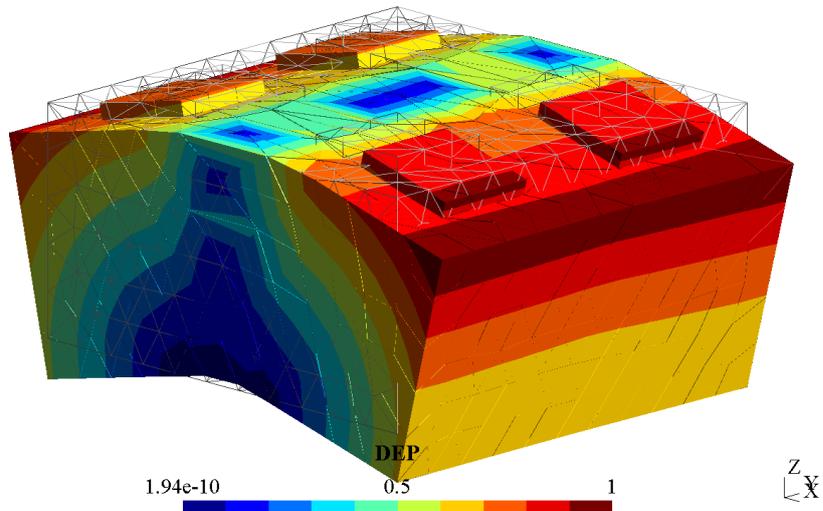


FIGURE 4.10 – Mécanisme de ruine du chevêtre non renforcé (critère MCT)

est autorisé par le critère dans le cas de contraintes triaxiales), comme nous le voyons sur la Figure 4.9 au niveau de l'encastrement. On peut donc penser que la configuration de cet exemple permet, dans le cas du critère MCT, d'obtenir un équilibre avec des contraintes supérieures à  $f_c$  conduisant *de facto* à une estimation de  $P^+$  supérieure à celle obtenue dans le cas du critère de Rankine.

## 4.3 Application à des structures renforcées

### 4.3.1 Chevêtre de pont en béton armé [Vincent *et al.*, 2018b] [Vincent *et al.*, 2018a]

Nous étudions maintenant le même chevêtre en ajoutant des renforts en partie haute de la structure, sous les plots de chargement, afin d'équilibrer les bielles de compression. Selon toute vraisemblance, la pression extrême  $P^+$  que nous recherchons sera supérieure à celle obtenue dans le cas du chevêtre non renforcé.

#### 4.3.1.1 Description du problème

La géométrie du chevêtre est exactement la même que dans l'exemple précédent. Quatre renforts sont ajoutés juste en dessous des blocs infiniment résistants où sont appliquées les pressions (30 cm en dessous de la face supérieure du chevêtre). La nouvelle configuration du problème est présentée sur la Figure 4.11. Les armatures vont d'un bout à l'autre de la structure et leur diamètre est égal à  $\Phi = 30$  mm. La résistance uniaxiale de ce dernières est  $f^y = 400$  MPa. Chaque barre d'armature est homogénéisée dans un cylindre carré de section  $0,1 \times 0,1$  m<sup>2</sup>. L'outil développé dispose d'une CAO permettant d'ajouter des barres d'armatures de manière individuelle et de leur associer des zones homogénéisées.

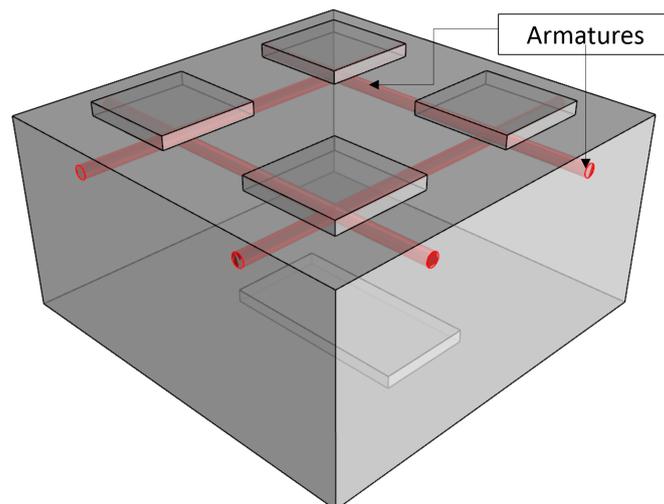


FIGURE 4.11 – Vue en perspective du chevêtre renforcé par quatre armatures

### 4.3. Application à des structures renforcées

---

	$P^s$ [MPa]	$P^c$ [MPa]	$\Delta$ [%]
MCT	5,28	6,21	$\pm 8,1$
Rankine	5,20	5,51	$\pm 2,9$

TABLEAU 4.2 – Résultats obtenus pour le chevêtre renforcé

#### 4.3.1.2 Résultats

Les approches statique et cinématique ont été mises en œuvre sur ce chevêtre renforcé avec la résistance du béton modélisée soit par un critère de Rankine, soit par un critère MCT. Il sera donc possible de comparer une nouvelle fois ces deux critères permettant de modéliser la résistance du béton et nous pourrons également mesurer l'apport des renforts par rapport au cas que nous venons de traiter. Les résultats de l'estimation de  $P^+$  obtenus par les deux approches du calcul à la rupture sont synthétisés dans le Tableau 4.2.

##### ✓ Résultats de l'approche statique

De la même manière que pour le chevêtre non renforcé, nous obtenons, par l'approche statique, un champ de contrainte optimisé. Dans les zones de béton seul, le champ de contrainte est composé des six composantes indépendantes de  $\underline{\underline{\sigma}}^b$  alors que dans les quatre cylindres où les armatures sont modélisées par la méthode d'homogénéisation (zone béton armé), le champ de contrainte est composé à la fois de  $\underline{\underline{\sigma}}^b$  et de  $\sigma_{xx}^r$  ou  $\sigma_{yy}^r$ , les contraintes dans les renforts (les deux directions de renforcement sont  $\underline{e}_x$  et  $\underline{e}_y$ ).

Comme dans le cas du chevêtre non renforcé, le plus pertinent ici semble être de visualiser les contraintes principales dans le béton, calculées à partir du champ de contrainte obtenus, afin de localiser les zones les plus comprimées. En ne montrant que les contraintes de compression entre 6 MPa et 50 MPa, il est possible de faire apparaître les bielles de compression (voir Figure 4.12). Dans les zones homogénéisées, du fait de leur position dans ce chevêtre, les armatures sont tendues comme on peut le voir sur la Figure 4.13. Enfin, en réunissant ces deux champs sur une même représentation (voir Figure 4.14), on obtient ce qui peut être interprété comme un *schéma de bielles et tirants tridimensionnel*.

##### ✓ Résultats de l'approche cinématique

L'approche cinématique du calcul à la rupture permet à la fois de mettre en évidence le mécanisme de ruine de la structure et de donner une majoration du chargement extrême recherché. En effet, la dualité de cette approche avec l'approche statique permet d'encadrer le chargement extrême recherché avec plus ou moins de précision. Le méca-

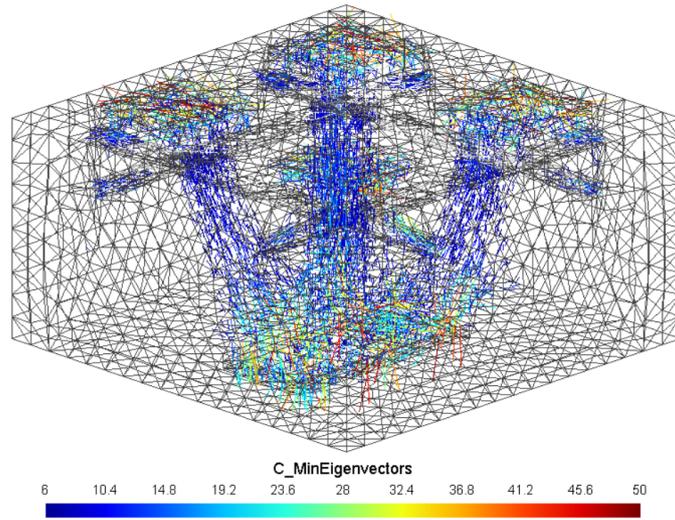


FIGURE 4.12 – Contraintes principales de compression dans le béton

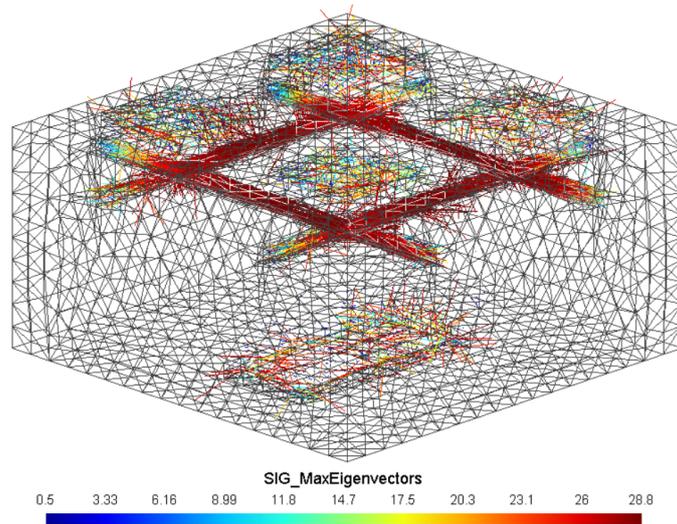


FIGURE 4.13 – Contraintes principales de traction dans les zones homogénéisées

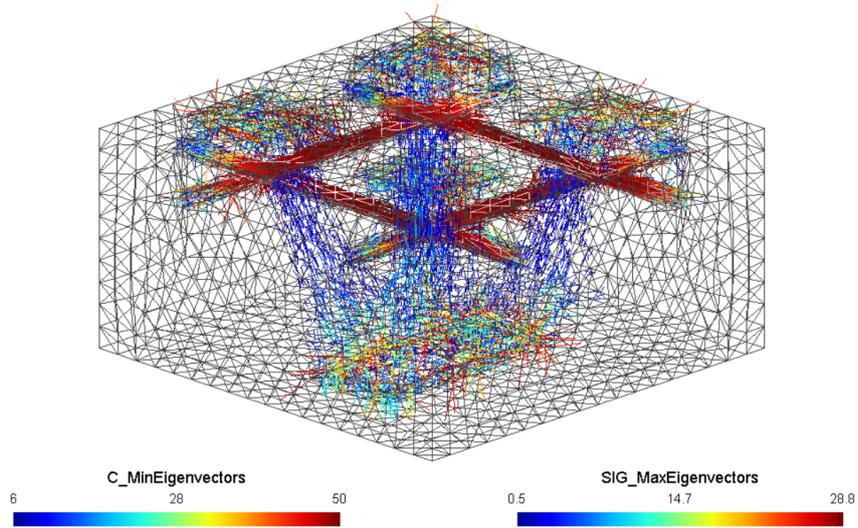
nisme de ruine de la structure est visible sur la Figure 4.15, où est représentée la norme du champ de vitesse virtuelle sur la structure déformée. On remarque que le mécanisme de ruine de la structure renforcée est semblable à celui de la structure non renforcée.

✓ *Comparaison des critères du béton*

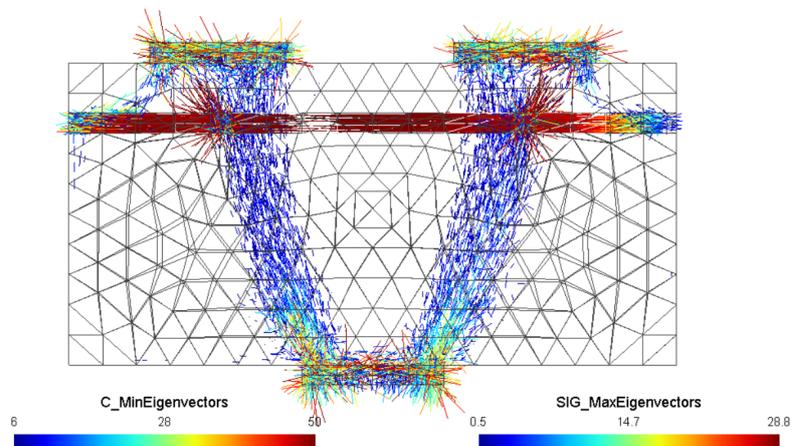
Les deux critères que nous employons pour modéliser la résistance du béton présentent tous deux des avantages. Le critère de Rankine a la particularité qu'aucune des contraintes dans le béton ne dépasse les caractéristiques  $f_c$  et  $f_t$  qui le définissent. De ce fait il est plutôt apprécié par les ingénieurs structure tant il rend l'analyse et la

### 4.3. Application à des structures renforcées

---



(a) Vue en perspective



(b) Vue de face

FIGURE 4.14 – Champ de contrainte optimisé dans toute la structure

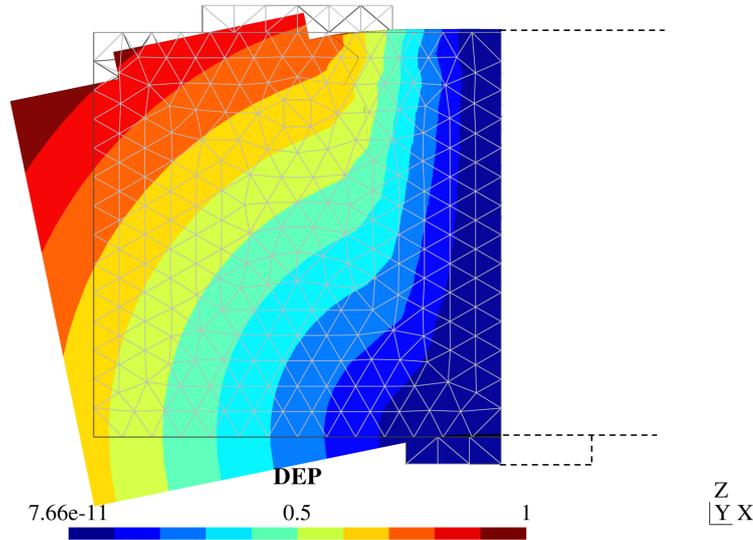


FIGURE 4.15 – Mécanisme de ruine (sur la moitié du chevêtre renforcé)

justification plus « facile ». D'un autre côté, le critère MCT ambitionne de décrire plus fidèlement la résistance du béton. La différence majeure que le critère MCT entretient avec le critère de Rankine est qu'il n'est pas borné en *compression isotrope*. En effet, ce critère est ouvert du côté des compressions isotropes, lui offrant une résistance infinie. L'intérêt d'un tel critère est de représenter le fait qu'il est possible, pour le béton, de résister à des contraintes de compression supérieures à sa résistance en compression uniaxiale, lorsque celui-ci est confiné (solicitations triaxiales).

L'exemple du chevêtre permet de mettre en évidence des états de contraintes confinés, ce qui explique donc que la capacité portante du chevêtre est supérieure lorsque la résistance du béton est modélisée par un critère MCT que lorsqu'elle est modélisée par un critère de Rankine. C'est ce que nous avons déjà observé pour le cas du chevêtre non renforcé et qui se retrouve lorsque nous ajoutons des renforts dans la structure.

L'ajout de renforts dans le chevêtre permet d'augmenter la capacité de la structure de 37 % pour le critère de Rankine et de 38 % pour le critère MCT. On s'aperçoit que, quel que soit, le critère, l'impact de l'ajout des renforts est non négligeable et permet d'augmenter significativement le chargement extrême.

Les résultats des deux approches du calcul à la rupture pour les deux critères de béton sont comparables : l'approche statique permet d'obtenir quatre bielles de compression, allant des zones de chargement vers la zone d'encastrement, équilibrées par des tirants (les renforts, dont la limite est atteinte), tandis que l'approche cinématique met en avant un mécanisme de ruine où la partie centrale reste fixe et autour de laquelle pivote le reste de la structure.

### 4.3. Application à des structures renforcées

---

Cet exemple de chevêtre de pont en béton, étudié dans un premier temps sans armatures puis, dans un second temps, renforcé par quatre armatures, nous a permis d'illustrer l'intérêt de la méthode développée composée de deux approches duales l'une de l'autre et qui permettent d'encadrer rigoureusement le chargement extrême recherché (capacité portante ultime de la structure). La première approche permet, en outre, d'obtenir le cheminement des efforts au sein de la structure et le résultat obtenu est proche de ce qui pourrait être obtenu par la *méthode des bielles et tirants*, tandis que la seconde approche permet de visualiser le mécanisme de ruine de la structure. Un premier exemple de structure massive et tridimensionnelle avec des armatures isolées a donc pu être traité par la méthode développée.

#### 4.3.2 Semelle de fondation circulaire [Simões *et al.*, 2016]

Afin de poursuivre la validation de la méthode développée dans ce travail au travers d'exemples, nous décidons maintenant d'étudier une semelle de fondation renforcée. Simões *et al.* ont présenté dans [Simões *et al.*, 2016] une méthode analytique permettant d'estimer le chargement extrême d'une fondation circulaire par la mise en œuvre de l'approche cinématique du calcul à la rupture. Leurs résultats sont comparés à des résultats expérimentaux et montrent une bonne estimation du chargement extrême, ainsi que du mécanisme de ruine.

Le but de notre travail ici est de modéliser une semelle de fondation comme l'une de celles étudiées par Simões *et al.* et de comparer l'estimation de la charge limite. Nous nous intéresserons ensuite à comparer les mécanismes de ruine obtenus par la méthode analytique développée par Simões *et al.* et ceux obtenus par notre méthode numérique 3D. Afin de compléter l'étude et les comparaisons, nous ferons également les calculs avec Optum G2 en tirant profit de l'axi-symétrie de la fondation étudiée.

Les fondations en béton armé sont très courantes et leur dimensionnement repose principalement sur leur résistance en flexion et au poinçonnement. Plusieurs travaux ont déjà été réalisés, qu'ils soient expérimentaux ([Talbot, 1913] [Hallgren et Bjerke, 2002]) ou théoriques ([Brooms, 2005] [Muttoni, 2008] [Nielsen et Hoang, 2010] [Kueres *et al.*, 2017]) afin de mieux comprendre le comportement à la rupture d'éléments structuraux en béton armé. Le calcul à la rupture permet à la fois d'analyser les mécanismes de ruine de ces structures et surtout d'en estimer la capacité portante.

##### 4.3.2.1 Description du problème

La semelle de fondation étudiée est circulaire de rayon  $r_s$  et d'épaisseur  $h$ , sur laquelle repose une colonne de rayon  $r_c$ . Une pression uniforme est appliquée en partie inférieure de la semelle de fondation, modélisant la réaction supposée uniforme du sol sur la

## Approche par le calcul à la rupture du dimensionnement des ouvrages massifs en béton armé : applications

semelle. La surface supérieure de la colonne est encastrée. La géométrie de la structure est visible sur la Figure 4.16. Cette structure est renforcée en partie basse par des armatures en acier (renforcement de flexion). Dans le cas des semelles étudiées en axi-symétrique par Simões et al., le renforcement est également axi-symétrique. C'est-à-dire que la structure est renforcée dans la direction radiale et la direction orthoradiale (voir Figure 4.17 (a)). Dans le cas du calcul 3D que nous menons, nous renforçons la structure par un quadrillage d'armatures dans deux directions perpendiculaires (voir Figure 4.17 (b)), ce qui constitue une légère différence entre les deux modélisations. Cependant, nous comparerons les résultats à quantité de ferrailage équivalente, ce qui nous laisse penser que les problèmes restent semblables.

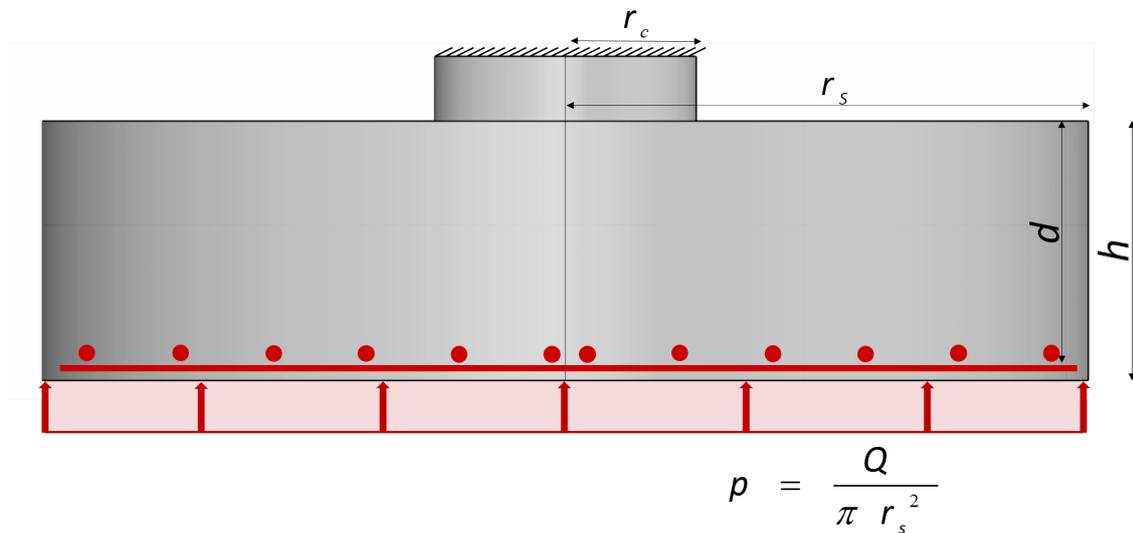
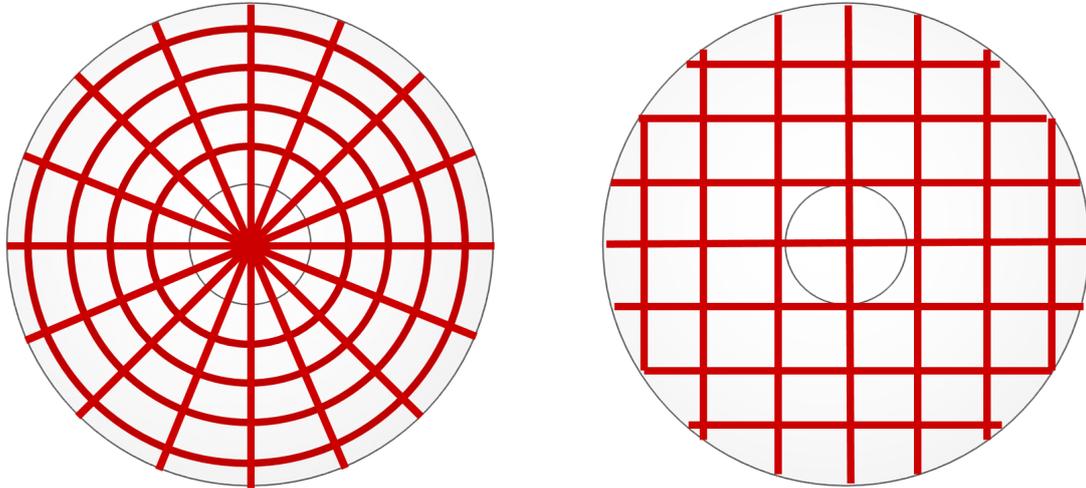


FIGURE 4.16 – Propriétés géométriques de la semelle de fondation circulaire

### 4.3.2.2 Méthode semi-analytique proposée par Simões et al. [Simões et al., 2016]

Nous allons maintenant décrire brièvement les cinématiques proposées par Simões et al. ainsi que les estimations du chargement extrême associées à ces cinématiques. Deux mécanismes sont présentés : le premier mécanisme (M1, Figure 4.18 (a)) correspond à un mouvement de rotation (dans le plan  $(r,z)$ ) dont le centre est situé dans le quart supérieur gauche. Il s'agit donc d'une rupture « par flexion » lorsque le centre est proche de la surface de rupture et « par poinçonnement » lorsque ce même centre est positionné à l'infini ( $r \rightarrow -\infty$ ). Le seconde mécanisme (M2, Figure 4.18 (b)) correspond à un mouvement de rotation dont le centre est situé dans le quart inférieur droit. Il convient de noter que, hormis dans le cas où ces mouvements correspondent à une translation purement verticale, ils induisent un taux de déformation *non nul* dans la direction orthoradiale ( $d_{\theta\theta} \neq 0$ ).

### 4.3. Application à des structures renforcées



(a) Disposition du renforcement par Simões et al. (b) Disposition du renforcement dans DS Concrete

FIGURE 4.17 – Différence dans la modélisation du renforcement

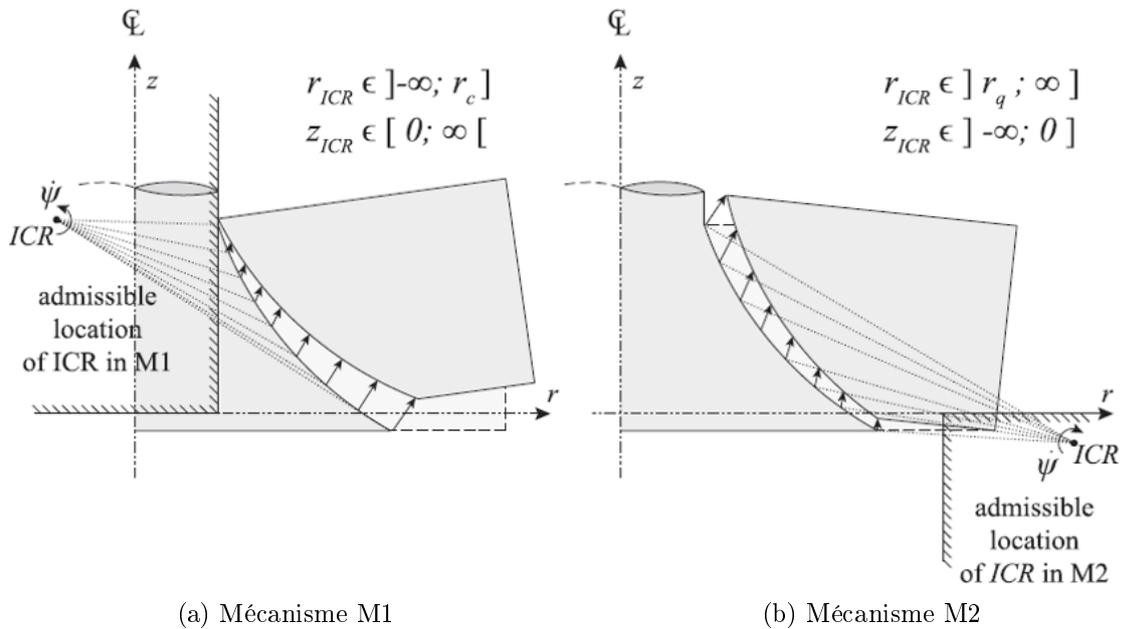


FIGURE 4.18 – Mécanismes de ruine proposés par Simões et al. [Simões *et al.*, 2016]

## **Approche par le calcul à la rupture du dimensionnement des ouvrages massifs en béton armé : applications**

---

La puissance des efforts extérieurs et la puissance résistante maximale sont alors calculées à partir du champ de vitesse virtuelle le long de la ligne de rupture, dont la géométrie reste à définir et qui dépend du centre de rotation du bloc. La pression appliquée en partie inférieure de la fondation est la seule contribution au calcul de la puissance des efforts extérieurs. La puissance résistante maximale comporte quant à elle plusieurs termes ; deux termes correspondant à la discontinuité de vitesse dans le béton et dans le renforcement radial, le long de la surface de rupture, ainsi que deux termes relatifs au béton et au renforcement orthoradial et associés au taux de déformation dans la direction orthoradiale.

Le chargement extrême peut être évalué en minimisant le majorant cinématique par rapport à la position du centre de rotation du bloc et à la géométrie de la surface de rupture. Simões et al. résolvent ce problème numériquement en découpant la surface de rupture en un ensemble de segments et en trouvant le centre de rotation et la géométrie de la surface de rupture permettant d'obtenir le plus petit majorant de la charge extrême. Ce problème discrétisé se traduit donc par un problème de minimisation non linéaire résolu par un solveur d'optimisation.

Par ailleurs, Simões et al. ont développé des formulations simplifiées permettant d'approcher la charge limite de la fondation, pour les mécanismes M1 et M2, sans avoir à résoudre un problème de minimisation. Ces formulations s'appliquent aux fondations sans renforts transversaux (permettant de reprendre le cisaillement), soumises à une pression du sol uniforme et avec des caractéristiques géométriques particulières ( $r_c/d \leq 1,2$ ;  $1 \leq a/d \leq 3$ ;  $2 \leq r_s/r_c \leq 12$ ; où  $r_c$  est le rayon de la colonne sur la fondation de rayon  $r_s$ ,  $a = r_s - r_c$  et  $d$  est la hauteur effective, c'est-à-dire la distance entre le haut de la semelle de fondation et le centre de gravité des armatures placées en partie basse) correspondant au cas que nous allons traiter.

Deux formulations analytiques simplifiées sont alors proposées par les auteurs : la première correspondant à un mode de rupture par « flexion-cisaillement » qui prédomine lorsque la semelle de fondation est faiblement renforcée, tandis que la seconde est associée à un mode de rupture par « poinçonnement » qui prévaut lorsque le taux de renforcement radial de la semelle de fondation devient plus important. Ils observent un bon accord entre les évaluations précédentes faites par l'approche cinématique et celles correspondant à ces formulations analytiques simplifiées et auxquelles nous allons, maintenant, comparer nos propres résultats.

### **4.3.2.3 Résultats et comparaisons**

La semelle de fondation étudiée est modélisée en 3D et son chargement extrême est estimé par les approches statique et cinématique du calcul à la rupture qui ont été développées numériquement dans cette thèse. Nous pourrions modéliser la fondation dans

### 4.3. Application à des structures renforcées

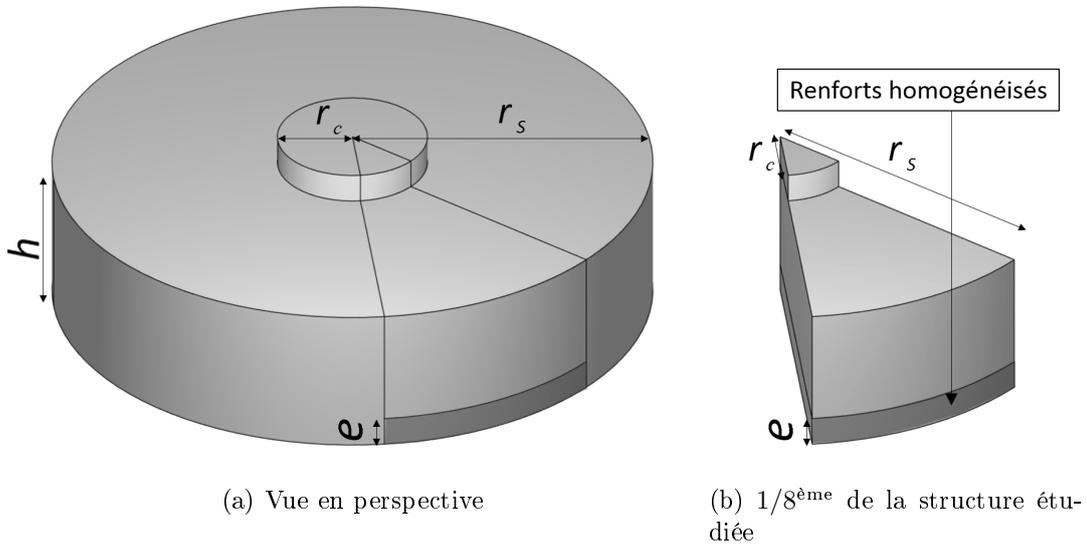


FIGURE 4.19 – Semelle de fondation modélisée dans DS Concrete avec délimitation du huitième étudié

son ensemble, mais la symétrie de révolution de la géométrie et du chargement appliqué nous permet d'étudier seulement une « tranche ». Nous décidons d'étudier  $1/8^{\text{ème}}$  de la fondation. Ce choix est purement arbitraire, mais il permet d'une part d'éviter d'obtenir des mailles trop « anisotropes » (mailles trop allongées) dans la pointe de la « tranche » qui conduisent à des difficultés numériques et d'autre part, d'envisager de mailler suffisamment finement pour avoir une bonne estimation du chargement extrême. D'autre part, étant donné que nous souhaitons montrer ici la possibilité de mener des calculs sur des structures massives avec ce type d'approches, nous choisissons d'étudier une portion représentative de la structure globale et non une tranche angulaire très mince.

La fondation (visible sur la Figure 4.19) est modélisée de façon à ce que les rapports suivants soient respectés :  $r_c/d = 0,5 \leq 1,2$  ;  $1 \leq a/d = 1,5 \leq 3$  ;  $2 \leq r_s/r_c = 4 \leq 12$  pour pouvoir comparer les résultats avec les formulations simplifiées proposées par Simões et al.. Une pression uniforme est appliquée sur la surface inférieure de la fondation. La colonne est encastree. Sur la Figure 4.19, on distingue également en partie basse de la fondation la zone dans laquelle les armatures sont homogénéisées (gris foncé). Cette zone mesure  $1/5^{\text{ème}}$  de la hauteur de la fondation. À la différence de toute la théorie et de la mise en œuvre numérique, respectivement présentées dans les chapitres 2 et 3, où seule une direction de renforcement était supposée, l'homogénéisation du renforcement pour cette fondation s'effectue dans deux directions (le quadrillage formé par le renforcement est schématiquement représenté sur la Figure 4.17 (b)). On rappelle que la limite de la contrainte dans chaque direction de renforcement est  $\sigma_0 = f^y \frac{A_s}{A_h}$ , où  $f^y$  est la résistance

## Approche par le calcul à la rupture du dimensionnement des ouvrages massifs en béton armé : applications

uniaxiale de l'acier,  $A_s$  est l'aire d'acier dans une des deux directions de renforcement et  $A_h$  est l'aire de la section de la zone homogénéisée. Le taux de renforcement de la structure est défini par  $\rho = \frac{A_s}{A}$  dans le travail de Simões et al., où  $A = 2 \times r_s \times h$  est l'aire de la section totale (voir une coupe de la fondation sur la Figure 4.20). Comme évoqué précédemment, bien que la disposition des renforts n'est pas strictement identique à celle de Simões et al., nous veillons tout de même à comparer les résultats à taux de renforcement équivalents en imposant :

$$\sigma_0 = \frac{A_s}{A_h} f^y = \rho \frac{A}{A_h} f^y \quad (4.4)$$

pour chacune des deux directions de renforcement.

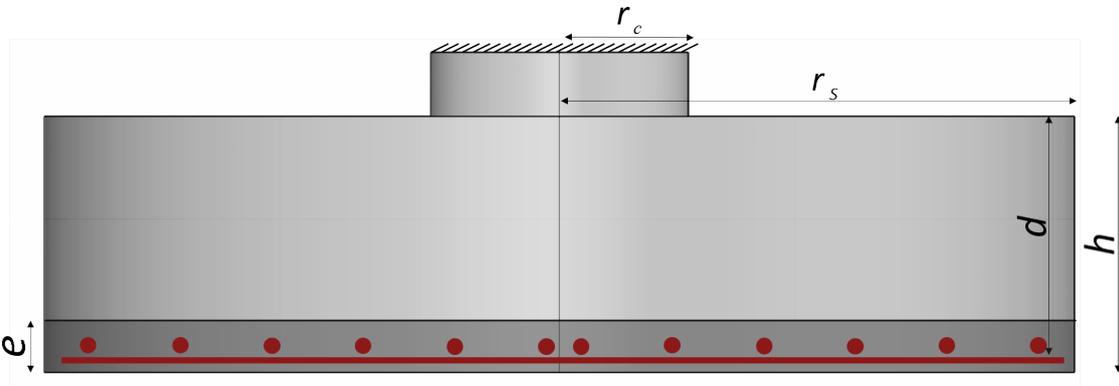


FIGURE 4.20 – Renforcement de la semelle de fondation et zone d'homogénéisation

Le but de l'étude est de faire varier le taux de renforcement en partie basse de la fondation afin de mesurer son impact sur l'estimation du chargement extrême ainsi que son influence sur le comportement à la rupture de la structure (mécanisme de ruine). Les résultats de ces calculs sont représentés sur la Figure 4.21 sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\frac{Q}{f_c d^2} = f(\omega = \rho \frac{f_y}{f_c}) \quad (4.5)$$

où  $Q = p \pi r_s^2$  est la résultante des forces de pression s'exerçant sur la face inférieure de la fondation,  $f_c$  est la résistance en compression uniaxiale du béton,  $d$  la « hauteur utile » de la fondation (distance de la face supérieure jusqu'au centre de gravité des aciers de renforcement) et  $\omega$  le taux de renforcement.

Les résultats issus de ces calculs 3D sont représentés par un + rouge pour l'approche cinématique et un + bleu pour l'approche statique. Les formulations analytiques simplifiées développées par Simões et al. sont en trait plein *gris* pour la rupture en flexion-cisaillement, en trait plein *noir* pour la rupture par poinçonnement. Bien que les résultats présentés sur la Figure 4.21 soient adimensionnés, les calculs 3D ont été réalisés avec  $f_c = 30$  MPa,  $f^y = 500$  MPa et  $f_t = 0,1$  MPa.

### 4.3. Application à des structures renforcées

L'estimation de la charge limite dans le cas d'une rupture par flexion pure est également indiquée en trait plein vert sur la Figure 4.21 (estimation issue d'une formulation simplifiée dans [Simões *et al.*, 2016]). On remarque que ce type de mécanisme conduit à un majorant toujours supérieur à celui donné par un mécanisme de flexion-cisaillement (trait plein gris) qui conduit donc une meilleure majoration de l'estimation du chargement extrême.

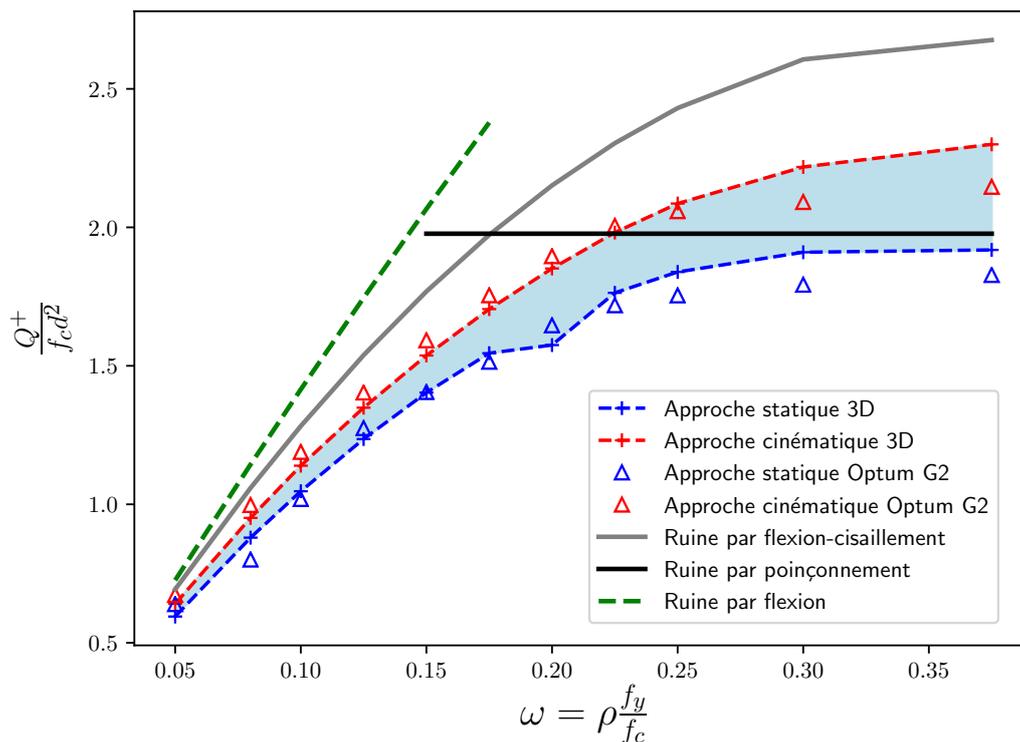
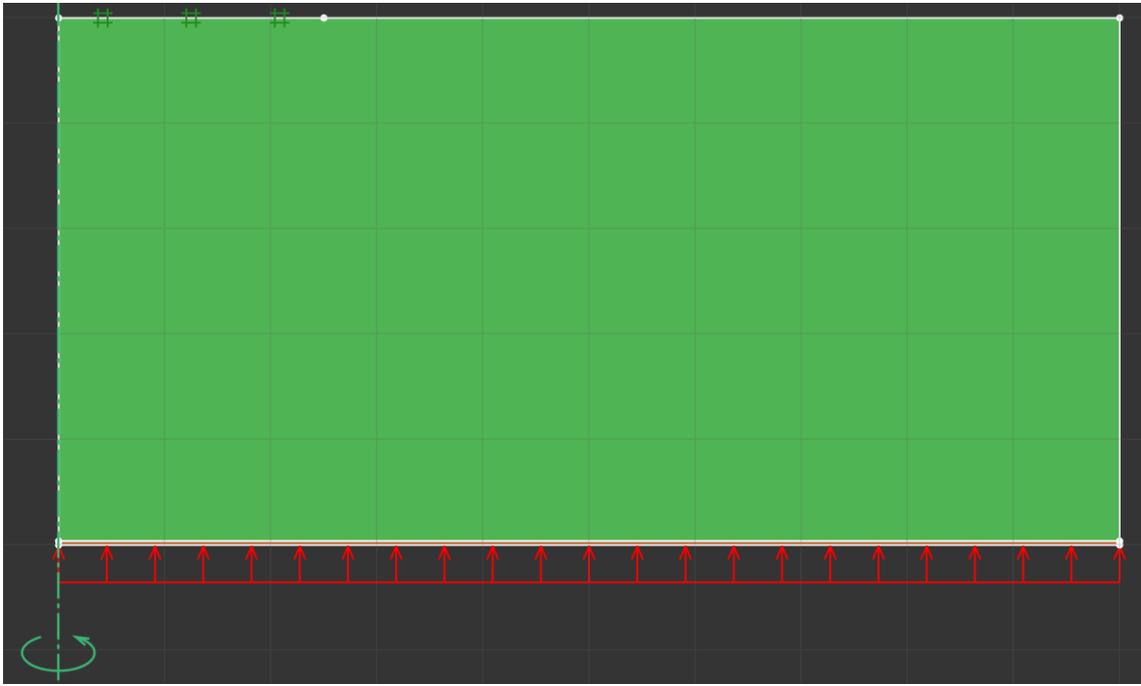


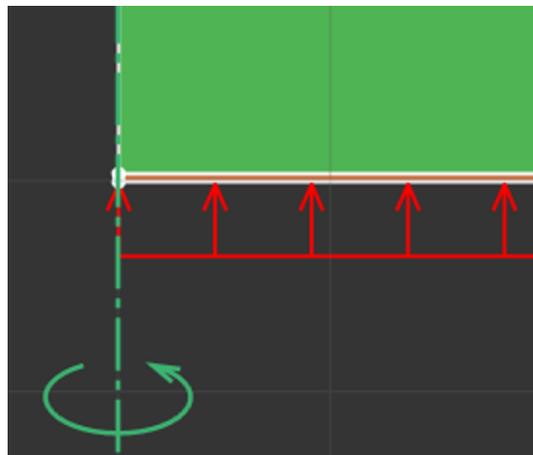
FIGURE 4.21 – Comparaison des évaluations du chargement extrême obtenues par les différentes méthodes de calcul

Sur la Figure 4.21, nous avons également ajouté à la comparaison, les résultats obtenus à l'aide du logiciel Optum G2 dans lequel nous avons modélisé la fondation en *axi-symétrique*. Il n'est pas possible de modéliser des armatures 1D dans ce logiciel. De ce fait, les renforts ont été remplacés par une couche de matériau de Tresca sur toute la largeur de la fondation, dont on fait varier la hauteur pour avoir la quantité de renfort souhaité et pour pouvoir comparer les résultats à taux de renforcement équivalent. Le problème modélisé dans Optum G2 est visible sur la Figure 4.22 (a) avec en orange la couche de renforcement modélisée par un matériau de Tresca (agrandissement de cette zone visible sur la Figure 4.22 (b)) et en vert la couche de béton dont la résistance est modélisée par un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction.

On voit sur les résultats présentés sur la Figure 4.21 que l'encadrement de la charge



(a) Vue d'ensemble du problème modélisé en axi-symétrique



(b) Agrandissement de la zone de renforcement modélisée par une plaque (matériau de type Tresca)

FIGURE 4.22 – Modélisation de la fondation dans Optum G2

### 4.3. Application à des structures renforcées

---

limite obtenu par les approches cinématique et statique du calcul à la rupture en axi-symétrique 2D est très proche de celui obtenu par le calcul à la rupture 3D. Pour les taux de renforcement élevés ( $\rho$  élevé donc  $\omega$  élevé), il y a une légère différence entre les deux calculs (l'estimation de la charge limite par Optum G2 étant inférieure à celle obtenue par le calcul 3D). Cet écart peut provenir de la façon de modéliser les armatures dans le cas d'Optum G2 (par une couche de Tresca et en axi-symétrique dans Optum G2 contre la méthode d'homogénéisation et renforcement selon  $x$  et  $y$  dans le calcul 3D).

On observe que les résultats de l'estimation de la charge limite obtenus par le calcul 3D sont cohérents avec l'approche analytique développée par Simões et al. dans [Simões et al., 2016]. En effet, l'approche statique 3D, qui constitue un *minorant* de la charge limite, est toujours inférieure à l'approche analytique de Simões et al.. Il convient cependant de noter que les formulations simplifiées proposées par Simões et al. n'ont pas le statut « rigoureux » de borne supérieure et il est montré dans [Simões et al., 2016] que ces formulations simplifiées peuvent donner des estimations inférieures à une approche par l'extérieur (*majorant* la charge limite) pour certains cas de figure. De plus, on observe une plus grande différence entre les résultats pour des taux de renforcement intermédiaires. La ruine de la fondation pour ces taux de renforcements pourrait bien être une combinaison des deux modes de ruine (flexion-cisaillement et poinçonnement), ce qui expliquerait que l'estimation de la charge limite par le calcul 3D soit plus faible. Nous allons vérifier cela en analysant les mécanismes de ruine issus de l'approche cinématique du calcul à la rupture en 3D.

On rappelle que les calculs 3D ont été effectués sur  $1/8^{\text{ème}}$  de la fondation. Sur les Figures 4.23 et 4.24, où les isovalues de la norme du champ de vitesse sont représentées sur la structure déformée, la moitié de la fondation a été reconstituée pour une meilleure lisibilité des résultats. Sur ces premières figures, on identifie clairement un *mécanisme de flexion* pour  $\omega = 0,05$  (correspondant au plus petit taux de renforcement) et un *mécanisme de poinçonnement* pour  $\omega = 0,375$  (correspondant au plus grand taux de renforcement).

Il est également possible de représenter le champ de vitesse par des vecteurs (voir Figure 4.25 où la représentation est faite sur le  $1/8^{\text{ème}}$  de la fondation), ce qui permet aussi de mieux visualiser le mécanisme de ruine. Pour le cas le moins renforcé, on observe bien un bloc en rotation (dans le plan  $(r,z)$ ) autour de la colonne encastree (Figure 4.25 (a)). On voit que pour  $\omega = 0,15$  (Figure 4.25 (b)) et  $\omega = 0,20$  (Figure 4.25 (c)), le mécanisme de ruine est un mécanisme situé entre flexion-cisaillement et poinçonnement. La ruine par poinçonnement apparaît clairement pour  $\omega = 0,375$ , le taux de renforcement le plus élevé (Figure 4.25 (d)).

Concernant ce dernier cas, la représentation du champ de vitesse virtuelle sur la Figure 4.25 (d) permet de voir la partie de la structure qui reste immobile (partie

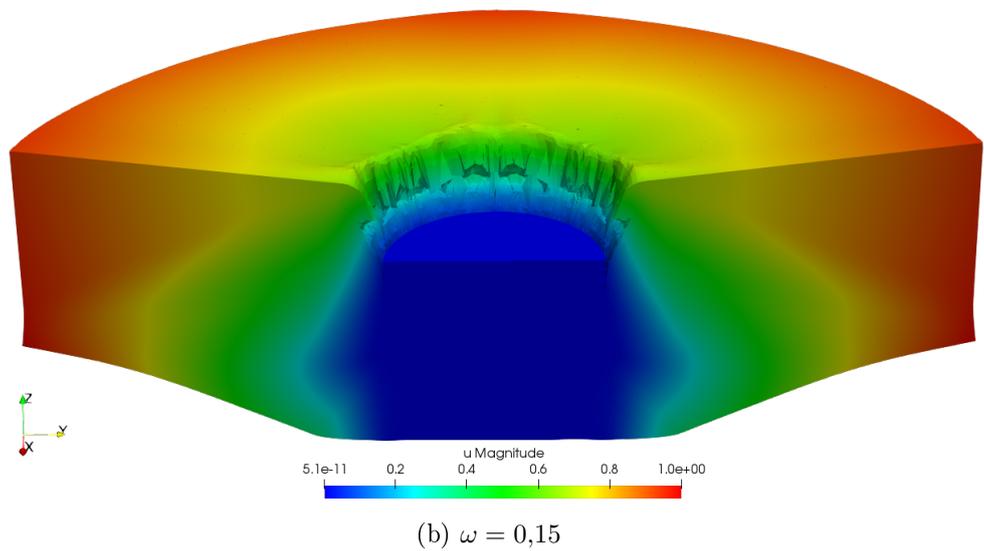
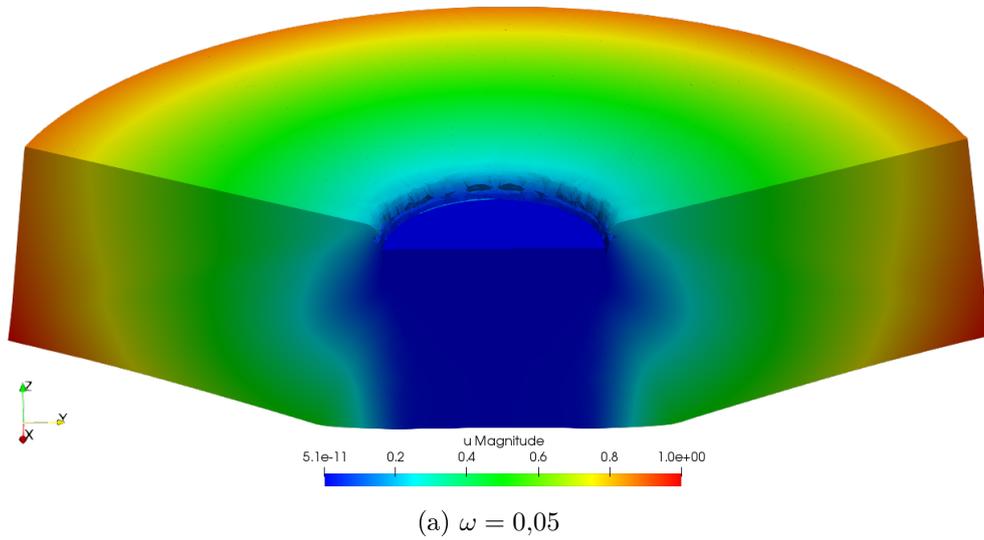


FIGURE 4.23 – Représentation de la norme du champ de vitesse sur le maillage déformé - Représentation sur la moitié de la fondation (vue en perspective) - Résultats pour  $\omega = 0,05$  et  $\omega = 0,15$

### 4.3. Application à des structures renforcées

---

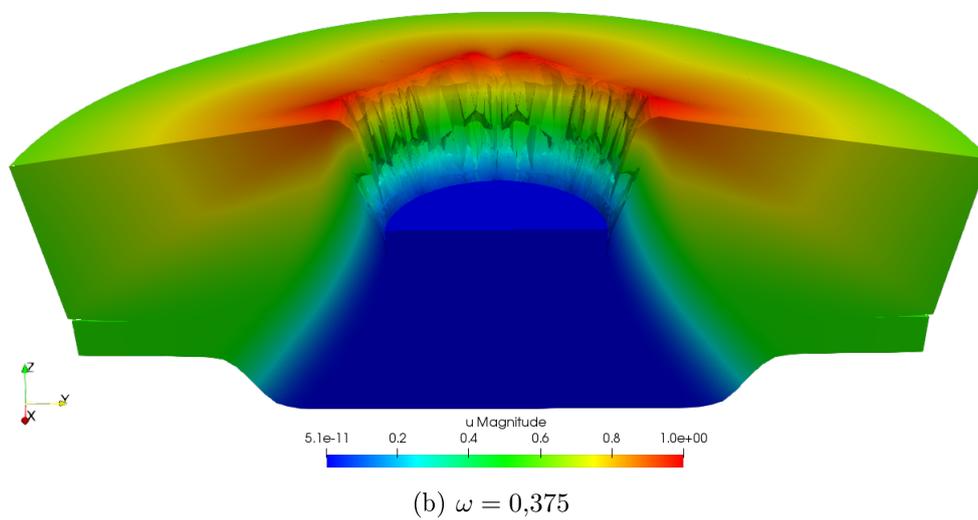
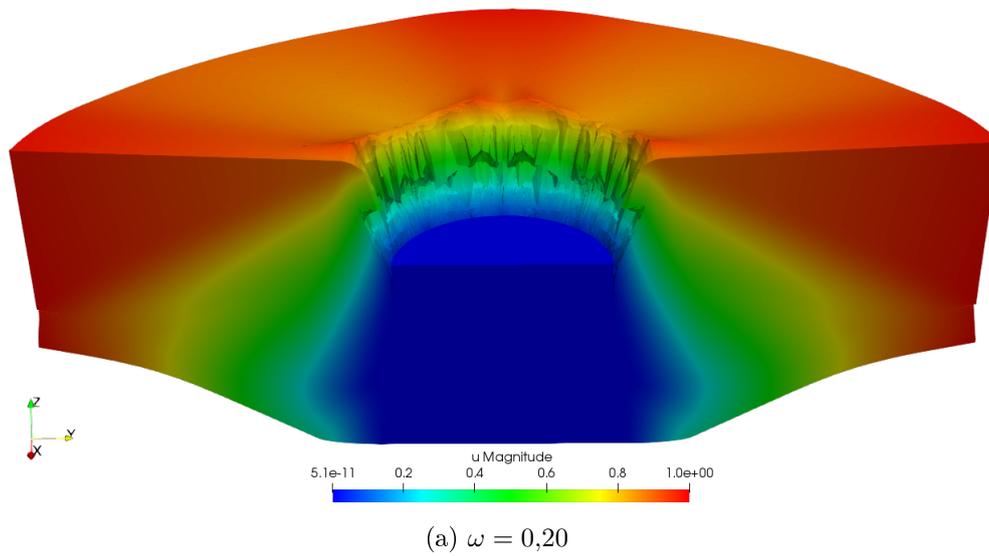


FIGURE 4.24 – Représentation de la norme du champ de vitesse sur le maillage déformé - Représentation sur la moitié de la fondation (vue en perspective) - Résultats pour  $\omega = 0,20$  et  $\omega = 0,375$

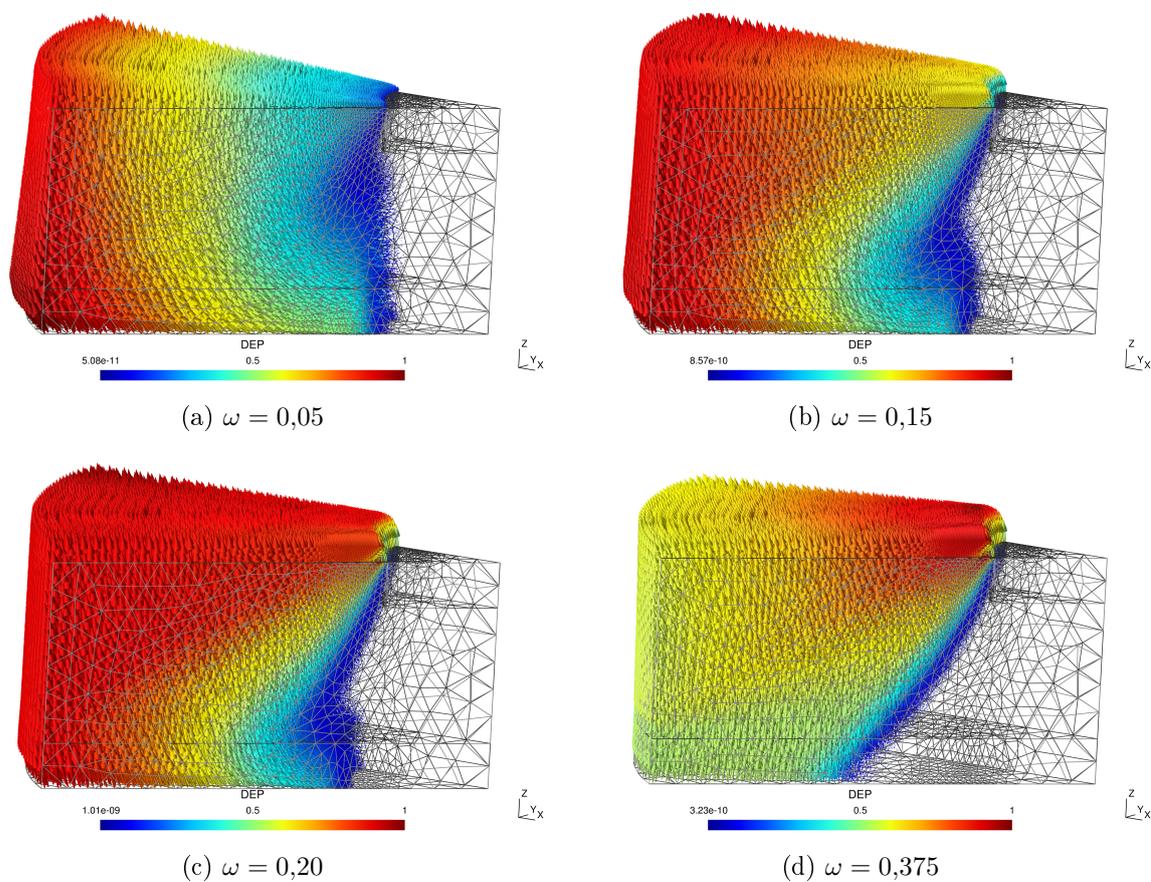


FIGURE 4.25 – Champ de vitesse virtuelle

### 4.3. Application à des structures renforcées

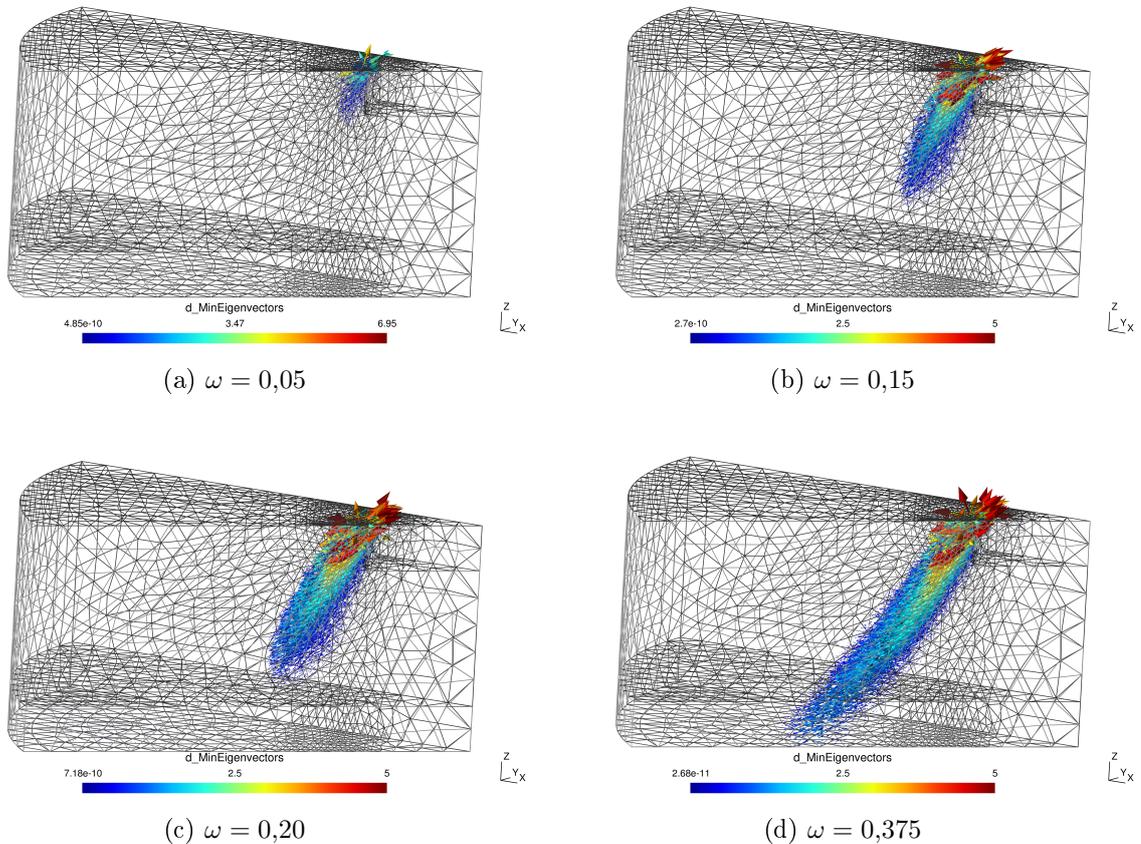


FIGURE 4.26 – Vecteurs propres de compression du taux de déformation

centrale) et le bloc en translation. Contrairement au mécanisme de flexion où le centre de rotation est situé à proximité de la colonne encastree, le centre de rotation pour le cas du poinçonnement se situe au niveau du bord extérieur de la fondation (en partie basse au niveau des armatures). Les sens de rotation sont donc inversés entre les deux mécanismes.

L'approche cinématique du calcul à la rupture permet également d'obtenir le taux de déformation dans la structure dont on peut étudier les valeurs principales correspondant aux taux de déformation de traction (pour les plus grandes) et au taux de déformation de compression (pour les plus petites). Sur la Figure 4.26 sont représentés les vecteurs propres de compression du taux de déformation. On observe une concentration du taux de déformation de compression au niveau de la colonne pour la fondation la moins renforcée (Figure 4.26 (a)) ce qui est bien en accord avec le mécanisme de flexion quasiment pure que l'on a observé pour cette fondation. Si on regarde les vecteurs propres de traction du taux de déformation pour cette même fondation (Figure 4.27 (a)), on observe des déformations de traction en partie basse de la fondation au droit de la colonne,

Approche par le calcul à la rupture du dimensionnement des ouvrages massifs en béton armé : applications

---

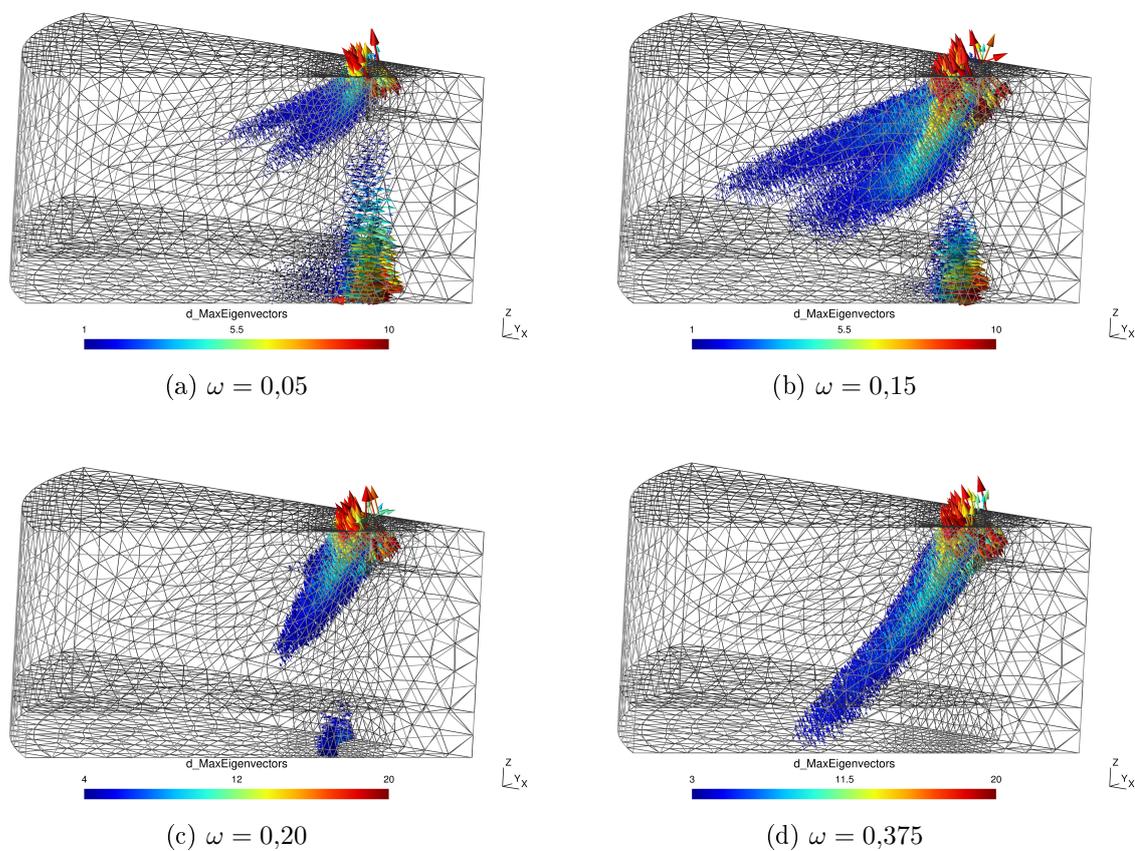


FIGURE 4.27 – Vecteurs propres de traction du taux de déformation

### 4.3. Application à des structures renforcées

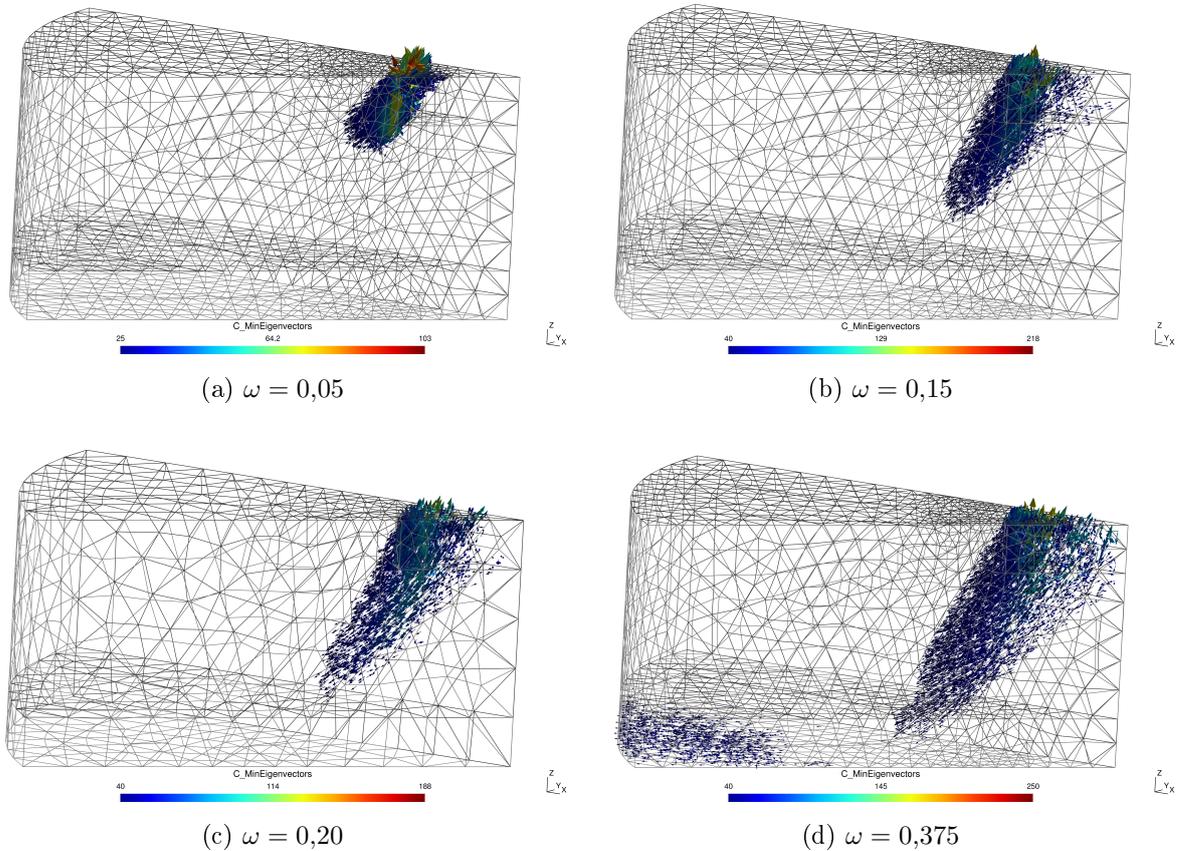


FIGURE 4.28 – Vecteurs propres de compression

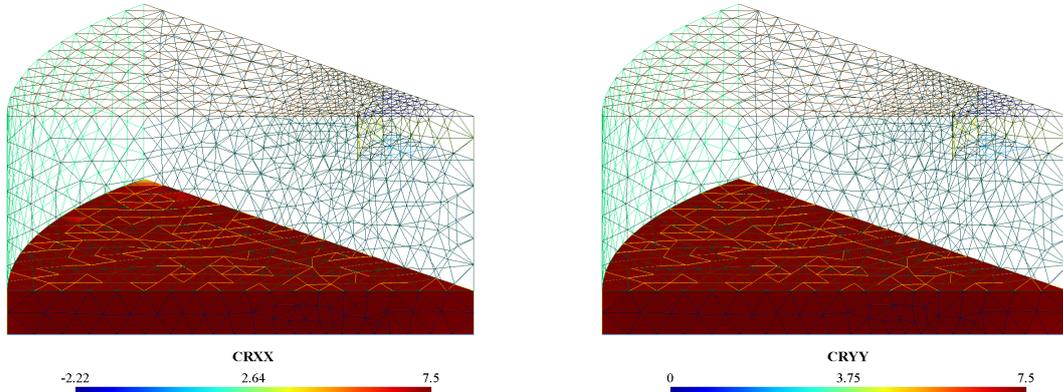
exactement à la frontière entre le bloc en rotation et le bloc qui reste immobile (ce que nous observions avec le champ de vitesse virtuelle). Cette frontière peut être interprétée comme une surface de rupture.

L'approche statique du calcul à la rupture permet par ailleurs de confirmer que la zone la plus comprimée se trouve bien au niveau de la colonne encastrée dans le cas de la fondation la moins renforcée. En effet sur la Figure 4.28 (a), où sont représentés les vecteurs propres de compression, on observe une concentration dans cette zone avec des contraintes de compression maximale allant jusqu'à 103 MPa. Une valeur de compression aussi élevée nous indique également que l'on a du confinement. En effet, le critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction est limité à  $f_c$  (ici 30 MPa) lorsque le béton est comprimé de manière *uniaxiale*, mais résiste à l'infini (critère non borné) pour des sollicitations de compression *isotropes*. On a donc un état de compression *triaxial* dans cette zone.

Le champ de contrainte dans la zone homogénéisée obtenu par l'approche statique

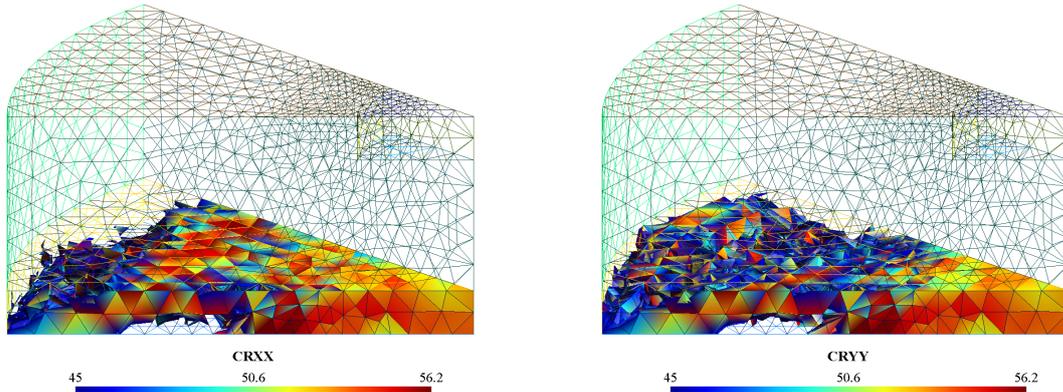
## Approche par le calcul à la rupture du dimensionnement des ouvrages massifs en béton armé : applications

---



(a) Contraintes selon  $x$  ( $\omega = 0,05$ ),  $\sigma_0 = 7,5$  MPa    (b) Contraintes selon  $y$  ( $\omega = 0,05$ ),  $\sigma_0 = 7,5$  MPa

$\begin{matrix} z \\ \swarrow \searrow \\ x \end{matrix}$



(c) Contraintes selon  $x$  ( $\omega = 0,375$ ),  $\sigma_0 = 56,2$  MPa    (d) Contraintes selon  $y$  ( $\omega = 0,375$ ),  $\sigma_0 = 56,2$  MPa

FIGURE 4.29 – Contraintes dans les aciers

nous renseigne sur la façon dont la résistance des armatures est sollicitée. Toujours dans le cas de la fondation la moins renforcée, on s'aperçoit que toutes les contraintes de l'acier dans les deux directions de renforcement ont pour valeur la limite de traction (ou une valeur très proche).

La Figure 4.29, montrant l'état de contrainte des renforts dans la zone homogénéisée, met en évidence que les aciers atteignent leur limite de traction dans le cas de la fondation la moins renforcée pour laquelle  $\sigma_0 = 7,5$  MPa partout (Figures (a) et (b)). Ceci explique donc que plus on augmente le taux de renforcement en partie basse de la fondation et plus la capacité de cette dernière augmente. De ce fait, en augmentant la résistance à la traction de la fondation en partie basse, on obtient moins de rotation (visible sur les Figures 4.23, 4.24 et 4.25) et la déformation le long de la surface de rupture augmente (voir Figures 4.26 et 4.27) jusqu'à atteindre le bas de la fondation pour le cas

### 4.3. Application à des structures renforcées

---

le plus renforcé ( $\omega = 0,375$ ). Cette analyse est confirmée par les résultats de l'approche statique et les vecteurs propres de compression (Figure 4.28). Enfin, on remarque que pour le cas de la fondation la plus renforcée, les aciers restent en *deçà de leur limite de traction*. En effet, la Figure 4.29 montre les contraintes dans les renforts selon  $x$  et  $y$  (les deux directions de renforcement) et on observe bien que toutes les contraintes dans la zone homogénéisée n'ont pas atteint la valeur limite ( $\sigma_0 = 56,2$  MPa dans le cas le plus renforcé). Seules les contraintes entre 40 MPa et 56,2 MPa sont représentées afin de montrer les zones où la limite n'est pas atteinte (les zones en dehors de cette plage de contraintes ne sont pas représentées et on voit bien qu'il y a des « trous » dans la zone homogénéisée). Ce n'est donc pas la rupture de l'acier qui entraîne la ruine dans le cas du poinçonnement mais bien une rupture en cisaillement du béton le long de la surface de rupture.

Pour les deux taux de renforcement intermédiaires, ce n'est ni de la flexion (quasiement) pure qui est observée, ni du poinçonnement. La rotation du bloc (dans un sens ou dans l'autre) n'est pas aussi marquée que pour les deux autres cas. Les deux mécanismes obtenus avec ces taux de renforcement intermédiaires comportent à la fois de la rotation mais aussi (et principalement) de la translation. Ce sont des mécanismes de transition entre le mécanisme de flexion-cisaillement et le mécanisme de poinçonnement.

La semelle de fondation étudiée présente l'avantage de pouvoir être étudiée en axi-symétrique (géométrie et chargement circulaires), ce qui nous a permis de comparer les résultats de la méthode 3D développée avec des résultats analytiques d'une part et des résultats obtenus avec un logiciel en 2D d'autre part. Au vu des résultats, la méthode développée est validée. En effet, elle permet d'obtenir une bonne estimation de la charge limite (encadrement par les deux approches du calcul à la rupture) mais aussi d'exhiber le mécanisme de ruine de la structure par l'approche cinématique ainsi que le champ de contrainte optimisé par l'approche statique.

#### 4.3.2.4 Semelle non circulaire

L'exemple précédent présente évidemment des limites quant à sa transposabilité à des cas réels. En effet, l'étude se limite ici à des semelles circulaires pour lesquelles la réaction du sol, modélisée par une pression en partie basse de la fondation, est supposée uniforme. Or, la géométrie et le chargement ne sont pas forcément axi-symétriques. La modélisation tridimensionnelle présente l'avantage de pouvoir traiter tout type de structure. Afin de mettre en évidence l'intérêt de la méthode développée dans ce travail, nous allons maintenant modifier un petit peu l'exemple précédent afin de nous placer dans un cas qui ne peut être étudié en axi-symétrique.

Nous étudions donc maintenant une fondation carrée sur laquelle repose une colonne circulaire. Comme pour le cas de la semelle de fondation circulaire, une pression uniforme

## Approche par le calcul à la rupture du dimensionnement des ouvrages massifs en béton armé : applications

est appliquée en partie inférieure, représentant ainsi la réaction du sol sur la fondation. Cette nouvelle géométrie ne permet donc pas d'étudier la fondation en axi-symétrie. Vue en coupe, la fondation carrée étudiée est identique à la fondation circulaire représentée sur la Figure 4.16, à ceci près que le rayon équivalent  $r_s^*$  est déterminé de sorte que l'aire de la fondation carrée ( $4r_s^{*2}$ ) soit égale à celle de la fondation circulaire équivalente ( $\pi r_s^2$ ). La surface sur laquelle est appliquée la pression est alors la même pour les deux types de fondation. La colonne circulaire apposée en partie supérieure est identique dans les deux cas (circulaire de rayon  $r_c$ ).

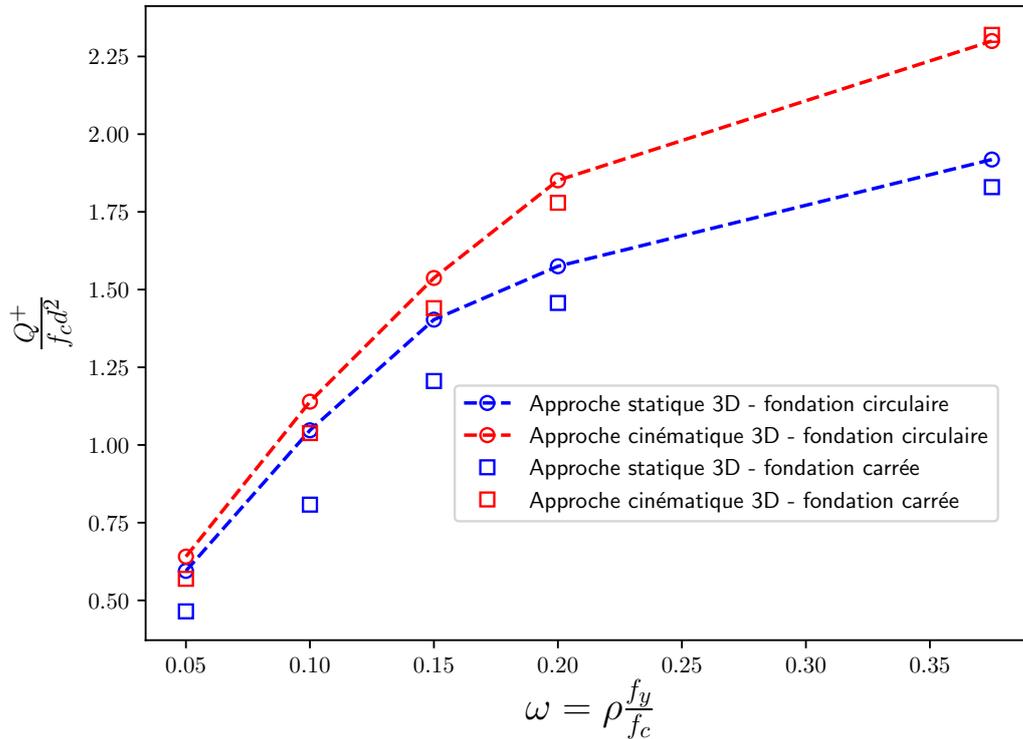


FIGURE 4.30 – Comparaison des résultats entre la fondation circulaire et la fondation carrée

Les résultats de l'estimation du chargement extrême pour différents ratios de renforcement sont représentés sur la Figure 4.30 par des carrés bleus (approche statique) et des carrés rouges (approche cinématique) pour le cas de la fondation carrée. Les résultats pour le cas de la fondation circulaire sont également représentés sur cette même figure (par des ronds rouges et bleus). Comme on pouvait s'y attendre en choisissant une fondation carrée de surface équivalente à celle la fondation circulaire précédemment étudiée, on voit que les résultats sont *très proches* entre les deux géométries. Ceux de la fondation carrée semblent néanmoins légèrement inférieurs, notamment pour les fondations les moins renforcées où la ruine par flexion-cisaillement prédomine. On remarque tout de même que l'estimation de la pression maximale qui peut être appliquée sur la

### 4.3. Application à des structures renforcées

---

fondation de section carrée est moins bonne que dans le cas de la fondation circulaire (plus grand écart entre les approches statique et cinématique).

Concernant les mécanismes de ruine, on obtient des résultats similaires à ceux de la fondation circulaire avec une rupture en flexion quasiment pure pour la fondation la moins renforcée et une rupture par poinçonnement pour celle qui est la plus renforcée. Pour des taux de renforcement intermédiaires ( $\omega = 0,15$  et  $\omega = 0,20$ ), les mécanismes de ruine sont intermédiaires entre les deux modes. Ces observations sont semblables à celles faites sur la fondation circulaire. Le champ de vitesse virtuelle obtenu par l'approche cinématique du calcul à la rupture dans le cas de la fondation la plus renforcée et représenté sur la Figure 4.31

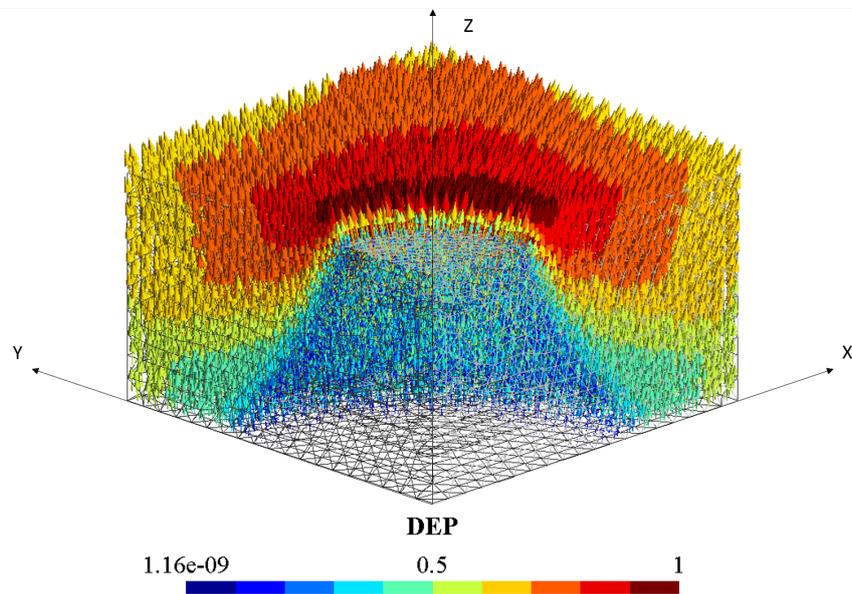


FIGURE 4.31 – Résultat de l'approche cinématique sur la fondation carrée la plus renforcée

#### 4.3.2.5 Indications sur les temps de calcul

Les calculs ont été menés sur un quart de la fondation carrée, tirant profit des symétries de la géométrie et du chargement. Ils ont été réalisés sur un serveur Microsoft Azure muni d'un processeur INTEL XEON CPU E5-2673 @2.39 GHz (8 processeurs virtuels) et de 56 Go de RAM. Les temps de calcul et les tailles de maillage pour chacune des deux approches et pour chaque taux de renforcement sont répertoriés dans le Tableau 4.3. L'approche statique nécessite souvent plus d'éléments que l'approche cinématique pour converger et ceci est sans doute due à l'interpolation au sein des éléments finis : une interpolation linéaire du champ de contrainte pour l'approche statique contre une interpolation quadratique du champ de vitesse virtuelle pour l'approche cinématique.

**Approche par le calcul à la rupture du dimensionnement des ouvrages massifs en béton armé : applications**

	Approche Statique		Approche Cinématique	
$\omega$	nombre d'éléments	temps de calcul [s]	nombre d'éléments	temps de calcul [s]
0,05	42420	953	15006	1540
0,10	42420	887	15006	1550
0,15	86192	1332	15006	1515
0,20	86192	1369	18244	2230
0,375	86192	1397	18244	2275

TABLEAU 4.3 – Temps de calcul pour la fondation carrée

Cependant, on remarque que le calcul est plus long pour l'approche cinématique que pour l'approche statique. Les temps de calcul restent raisonnables, ne dépassant pas 38 minutes pour cet exemple-ci. Ce qui est bloquant actuellement n'est pas tant le temps de calcul, mais plutôt la taille du problème à traiter (proportionnel au nombre d'éléments finis bien entendu) et la mémoire disponible pour le traiter.

À travers cet exemple où nous avons traité une structure tridimensionnelle en béton armé, nous avons validé un peu plus la méthode développée. Dans un premier temps, nous avons traité le cas d'une fondation circulaire qu'il est possible de traiter en axi-symétrique et pour laquelle Simões et al. ont proposé une estimation du chargement extrême par une approche cinématique dans [Simões *et al.*, 2016]. Nous avons également comparé les résultats avec OptumG2, un logiciel de calcul géotechnique, permettant une étude 2D axi-symétrique par le calcul à la rupture. Les résultats obtenus avec la méthode développée (3D) se sont montrés en accord avec les résultats analytiques et les résultats d'OptumG2. Dans un second temps, nous avons modifié le problème afin qu'il ne soit plus axi-symétrique, ce qui se présente dans la majorité des cas réels soit parce que la géométrie du problème étudié n'est pas axi-symétrique, soit par ce que son chargement n'est pas axi-symétrique. Nous avons décidé de modifier la géométrie en gardant des proportions telles que les résultats attendus soient proches de ceux de la fondation circulaire : le volume de la fondation carrée étudiée dans un second temps est identique à celui de la fondation circulaire.

Le renforcement dans cet exemple était assez simple et périodique et nous avons homogénéisé les deux directions dans un volume en partie inférieure. Cependant, beaucoup de cas réels ne présentent pas une répartition périodique du renforcement. Dans ce cas, la technique que nous utilisons est celle présentée dans le Chapitre 2 et utilisée dans le cas du chevêtre de pont en béton armé (4.3.1). Dans cet exemple, les renforts étaient peu nombreux (quatre), ce qui n'est pas réaliste. Nous souhaitons donc traiter maintenant un cas où sont disposés un nombre plus important d'armatures.

### 4.3. Application à des structures renforcées

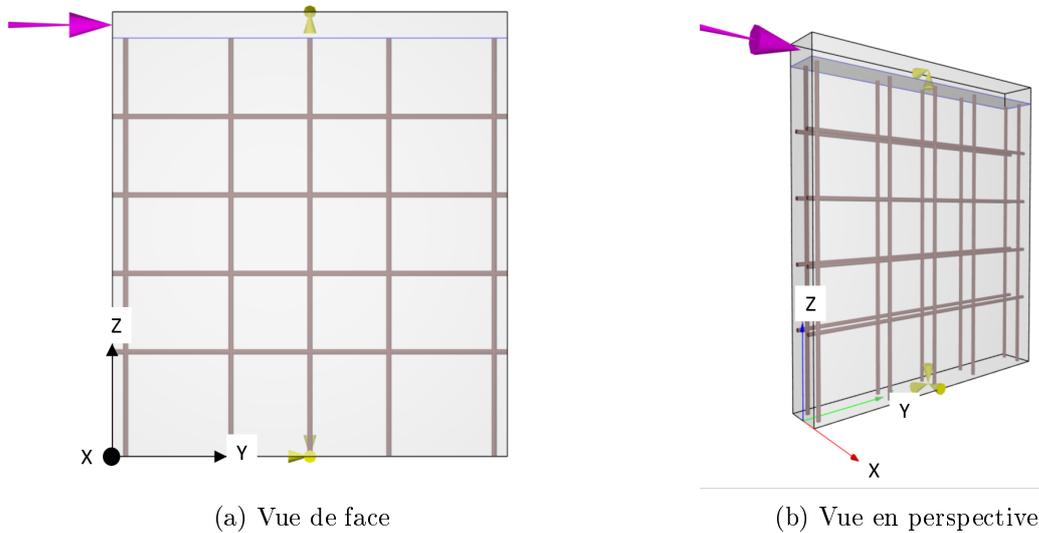


FIGURE 4.32 – Mur en cisaillement modélisé dans DS Concrete

#### 4.3.3 Mur en cisaillement

En guise de dernier exemple, nous nous intéressons maintenant à l'étude d'un mur en béton armé soumis à une sollicitation de cisaillement.

##### 4.3.3.1 Description du problème

Le mur que nous étudions est présenté sur la Figure 4.32, où une première vue de face permet de voir le quadrillage des armatures dans le plan  $(y,z)$  de normale  $\underline{e}_x$  (cinq armatures verticales selon  $\underline{e}_z$  et quatre armatures horizontales selon  $\underline{e}_y$ ) et la deuxième vue montre qu'il y a deux rangées dans l'épaisseur (selon  $\underline{e}_x$ ). Le mur mesure 0,75 m de large, 0,8 m de haut et 0,1 m d'épaisseur. Le mur est encastré en partie basse. Un bloc infiniment résistant est posé en partie supérieure de ce dernier permettant d'imposer le chargement : une pression horizontale uniforme est appliquée sur une des faces latérales du bloc afin de cisailier le mur. La face supérieure du bloc est bloquée verticalement et transversalement (selon  $\underline{e}_z$  et  $\underline{e}_x$ ). Seule la direction dans laquelle la pression est appliquée ( $\underline{e}_y$ ) est laissée libre de déplacement. Les conditions aux limites en déplacement sont représentées par des flèches jaunes sur la Figure 4.32 alors que la pression imposée est représentée par sa résultante (flèche rose).

Le béton qui compose le mur est caractérisé par sa résistance en compression simple  $f_c = 40$  MPa et sa résistance en traction simple  $f_t = 0,5$  MPa. Sa résistance est modélisée par le critère MCT. Les armatures qui renforcent le mur en béton sont caractérisées par

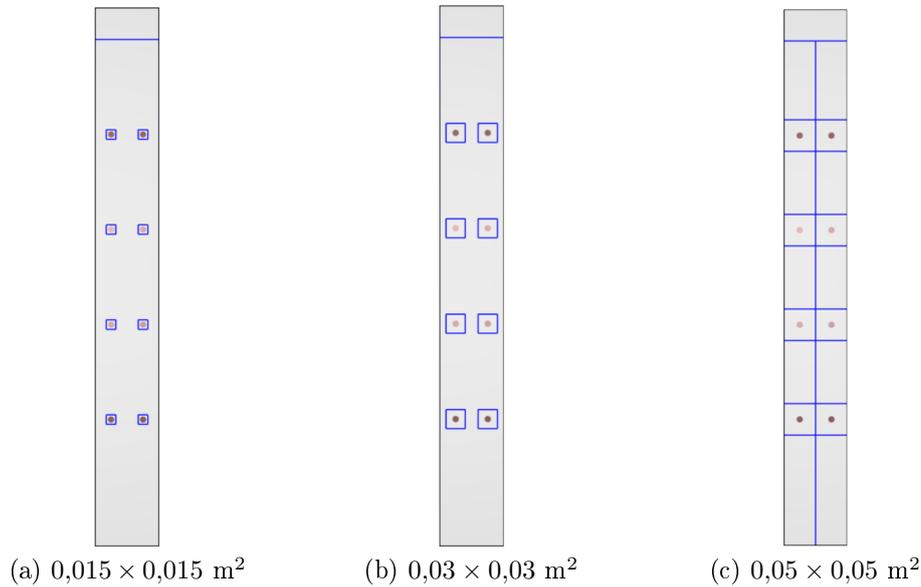


FIGURE 4.33 – Différentes sections du volume d’homogénéisation (vue de côté)

leur résistance uniaxiale  $f^y = 500$  MPa et ont toutes un diamètre de 10 mm.

Bien que la disposition des armatures qui renforcent ce mur en béton permettrait de traiter ce problème par la méthode d’homogénéisation périodique, chaque armature est homogénéisée individuellement dans un volume cylindrique de section carrée dont on fait varier la taille. En effet, le but de cet exemple est de montrer la validité de la méthode proposée pour traiter des problèmes faisant intervenir un grand nombre d’armatures isolées. Les approches statique et cinématique du calcul à la rupture sont conduites pour chacune des trois sections de volume homogénéisé :  $0,015 \times 0,015$  m<sup>2</sup>,  $0,03 \times 0,03$  m<sup>2</sup> et  $0,05 \times 0,05$  m<sup>2</sup>. La modélisation du mur dans DS Concrete pour chacune des trois sections est visible à la Figure 4.33, où une vue de côté est présentée, laissant apparaître les armatures longitudinales (horizontales) et leur volume homogénéisé respectif. Lorsque la section de la zone homogénéisée est la plus grande ( $0,05 \times 0,05$  m<sup>2</sup>), on remarque que les deux zones d’homogénéisation permettant de modéliser les barres horizontales se touchent et mesurent chacune la moitié de la profondeur du mur. L’effort pour mailler cette structure sera donc beaucoup moins important que pour les deux autres sections ( $0,03 \times 0,03$  m<sup>2</sup> et  $0,015 \times 0,015$  m<sup>2</sup>).

#### 4.3.3.2 Résultats

✓ *Résultats préalables du mur sans renforcement*

### 4.3. Application à des structures renforcées

Avant de montrer les résultats du mur qui vient d'être présenté, nous allons étudier le comportement à la ruine de ce dernier sans ses renforts. Nous pourrions alors mesurer l'apport des armatures sur la pression extrême que nous estimons par les approches statique et cinématique du calcul à la rupture. Nous pourrions également voir l'influence de la présence des renforts sur le mécanisme de ruine en comparant avec le mur non renforcé.

La Figure 4.34 présente les résultats de l'approche cinématique. La première figure montre la norme du taux de déformation et la deuxième montre le champ de vitesse virtuelle optimisé. Le champ de vitesse indique qu'une moitié du mur subit une vitesse horizontale alors que l'autre est immobile traçant un plan diagonal de rupture. La norme du taux de déformation, qui permet de localiser les zones de rupture de la structure, met également en évidence ce plan de rupture. Ces deux figures montrent bien une rupture nette en cisaillement du mur.

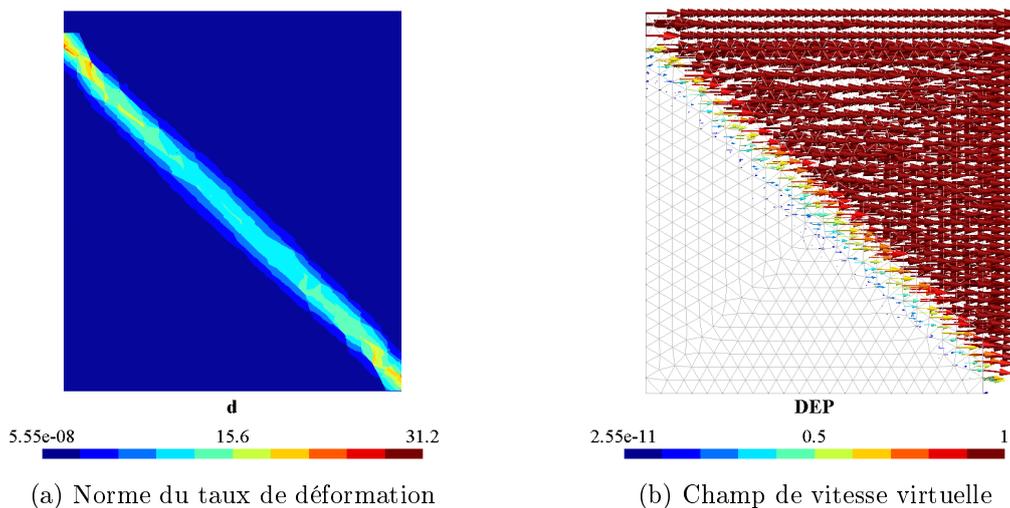


FIGURE 4.34 – Résultats de l'approche cinématique pour le mur non renforcé

La rupture en cisaillement est confirmée par les résultats de l'approche statique. Sur la Figure 4.35 sont tracés les vecteurs propres de compression, laissant apparaître une bielle de compression inclinée qui part de la partie supérieure gauche du mur (là où est appliquée la pression horizontale sur le bloc rigide) jusqu'au pied du mur à droite. Une bielle inclinée est caractéristique d'une rupture par cisaillement.

Les deux approches permettent également d'évaluer la pression extrême appliquée en partie supérieure du mur. L'encadrement obtenu est :

$$111,5 \text{ MPa} \leq P^+ \leq 131,8 \text{ MPa}$$

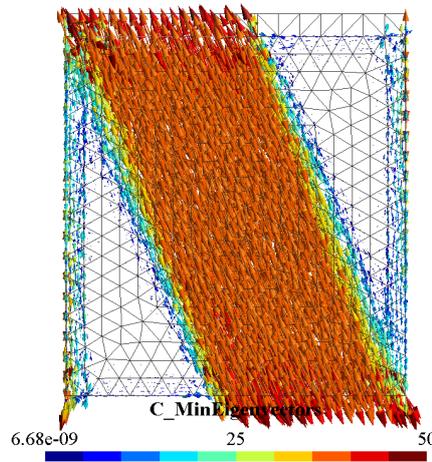


FIGURE 4.35 – Représentation des vecteurs propres de compression pour le mur non renforcé

section [m <sup>2</sup> ]	$P^s$ [MPa]	$P^c$ [MPa]	$\Delta$ [%]
0,015 × 0,015	166,02	201,22	±9,6
0,03 × 0,03	166,61	208,04	±11,1
0,05 × 0,05	167,11	203,07	±9,7

TABLEAU 4.4 – Résultats de l'estimation du chargement extrême (critère MCT)

✓ *Résultats du mur renforcé*

Les résultats de l'estimation de la pression extrême appliquée sur le mur sont présentés dans le Tableau 4.4.  $P^s$  désigne la pression obtenue par l'approche statique et  $P^c$  la pression obtenue par l'approche cinématique. Ces résultats montrent que la taille de la zone homogénéisée n'a pas véritablement d'influence sur l'estimation de  $P^+$  et permettent de valider une fois de plus la méthode employée pour décrire en 3D les armatures isolées. La capacité du mur est augmentée d'environ 52 % avec le renforcement proposé.

Comme expliqué précédemment, la modélisation des zones homogénéisées avec une section de 0,05 × 0,05 m<sup>2</sup> nécessite un effort moins important pour mailler la structure. Ainsi, deux fois moins d'éléments ont été nécessaires pour obtenir les résultats présentés dans le Tableau 4.4 pour la section 0,05 × 0,05 m<sup>2</sup> (44416 éléments) que pour les sections 0,03 × 0,03 m<sup>2</sup> (81356 éléments) et 0,015 × 0,015 m<sup>2</sup> (95028 éléments). Le temps de calcul est quant à lui divisé par trois.

Nous nous intéressons maintenant aux contraintes dans les aciers. La limite de la contrainte dans l'acier est  $\sigma^{lim} = f_y A_s / A_h$ . Dans le cas d'une section de zone homo-

#### 4.4. Conclusions

---

générisée  $A_h = 0,015 \times 0,015 \text{ m}^2$ , la limite  $\sigma_0$  est égale à 174,5 MPa. Dans le cas d'une section de zone homogénéisée  $A_h = 0,03 \times 0,03 \text{ m}^2$ , la limite  $\sigma_0$  est égale à 43,6 MPa. Dans le cas d'une section de zone homogénéisée  $A_h = 0,05 \times 0,05 \text{ m}^2$ , la limite  $\sigma_0$  est égale à 15,7 MPa. On peut donc voir dans les Figure 4.36 et 4.37, où sont respectivement représentées la contrainte dans les aciers horizontaux et la contrainte dans les aciers verticaux, les zones où les aciers plastifient. On voit que, quelle que soit la section de la zone homogénéisée, les zones où les aciers plastifient sont les mêmes : les aciers verticaux sont tendus et atteignent leur limite en haut à droite du mur et en bas à gauche du mur. L'acier central ne semble pas beaucoup « travailler » : la contrainte est faible et l'acier pourrait être supprimé. Les aciers horizontaux sont tendus et également « plastifiés ».

On remarque que le renforcement a un effet sur la forme de la bielle de compression (les vecteurs propres de compression sont représentés sur la Figure 4.38). Contrairement au cas non renforcé où la bielle est inclinée et diagonale, les aciers ont pour effet de « redresser » verticalement la bielle. La bielle est inclinée en partie supérieure entre le bloc rigide et le premier acier horizontal qu'elle rencontre, puis elle est verticale avant de s'incliner à nouveau à partir du dernier acier pour s'ancrer en partie inférieure du mur.

Les résultats de l'approche cinématique permettent de visualiser le mécanisme de ruine de la structure (le champ de vitesse virtuelle optimisé est représenté sur la Figure 4.39). La cinématique de ruine est à peu près la même pour les trois sections d'homogénéisation. On observe une vitesse inclinée vers le haut en partie inférieure gauche du mur et une vitesse inclinée vers le bas en partie inférieure droite. Une vitesse horizontale, dans le sens de l'effort appliqué, est observée sur le reste de la structure.

Ce champ de vitesse optimisé est cohérent avec les contraintes dans les aciers : les aciers verticaux sont tendus en bas à gauche, là où le mur se « soulève » et sont comprimés en bas à droite du mur où le mur « s'écrase » à l'encastrement. Le mur subit globalement un déplacement horizontal. En réaction, les aciers horizontaux sont bien tendus comme nous l'avions vu sur la Figure 4.36.

Les taux de déformation les plus importants sont observés en haut à gauche et en bas à droite de la structure (voir Figure 4.40), là où les armatures sont comprimées et là où la bielle vient s'ancrer.

## 4.4 Conclusions

Ce chapitre a permis d'illustrer et de montrer les capacités de l'outil développé au travers de différents exemples. Dans un premier temps, deux exemples ont été présentés

Approche par le calcul à la rupture du dimensionnement des ouvrages massifs en béton armé : applications

---

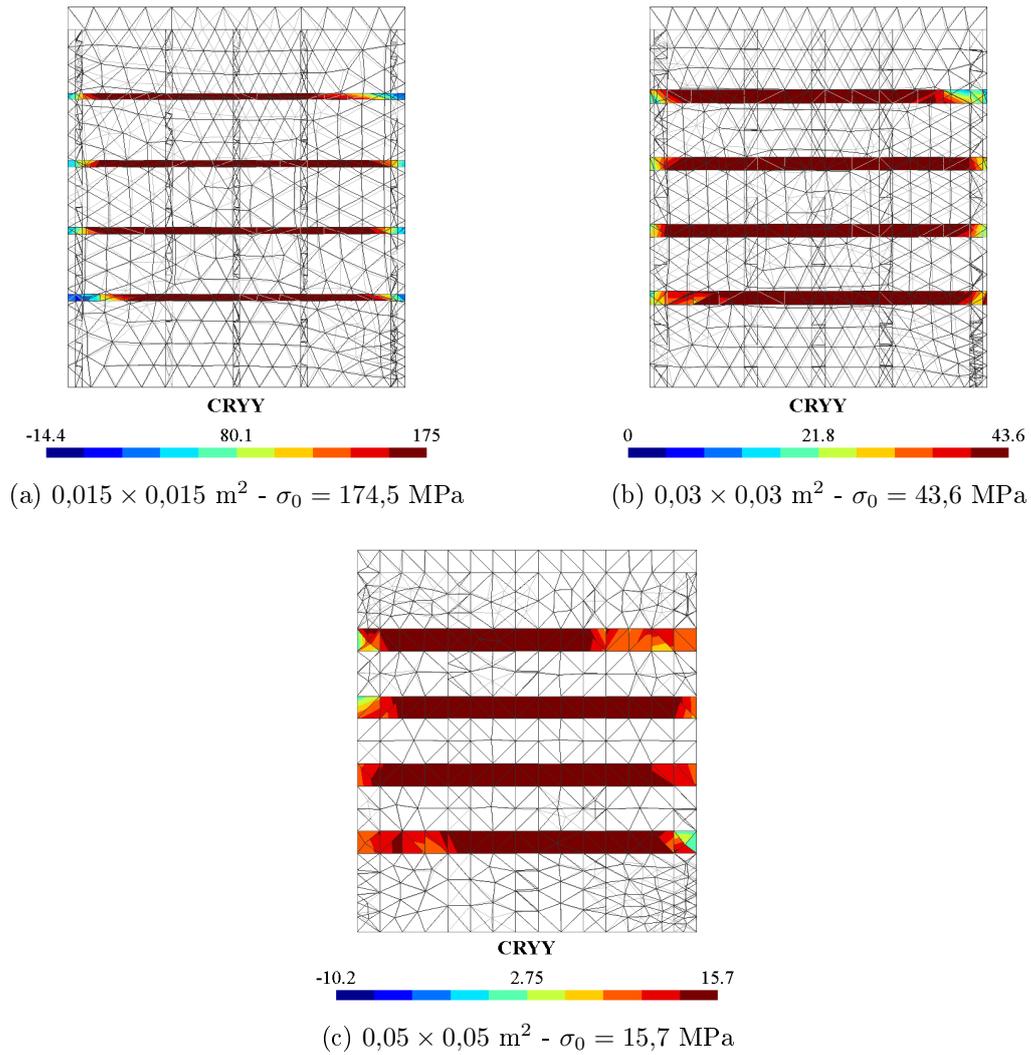


FIGURE 4.36 – Contrainte  $\sigma_{yy}^r$  de l'acier dans les zones homogénéisées horizontales

#### 4.4. Conclusions

---

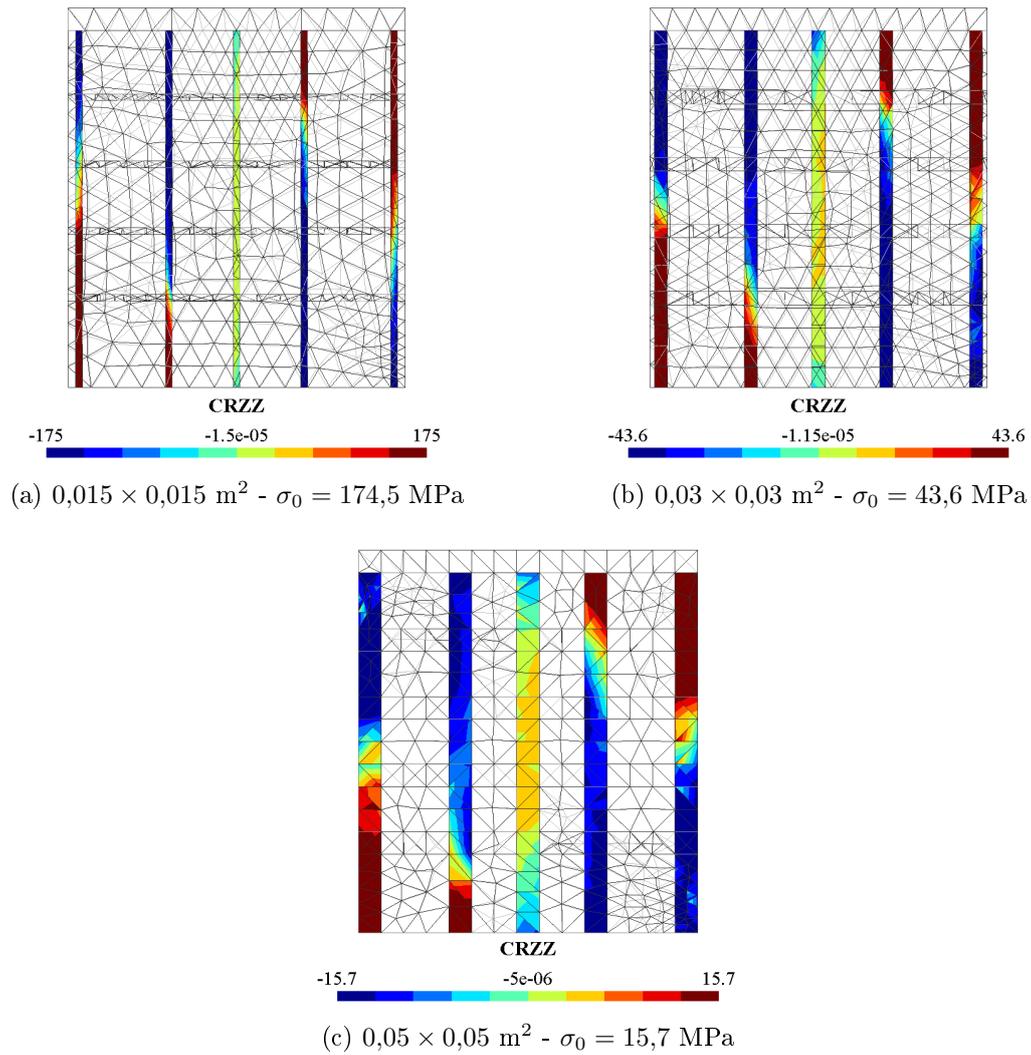


FIGURE 4.37 – Contrainte  $\sigma_{zz}^r$  de l'acier dans les zones homogénéisées verticales

Approche par le calcul à la rupture du dimensionnement des ouvrages massifs en béton armé : applications

---

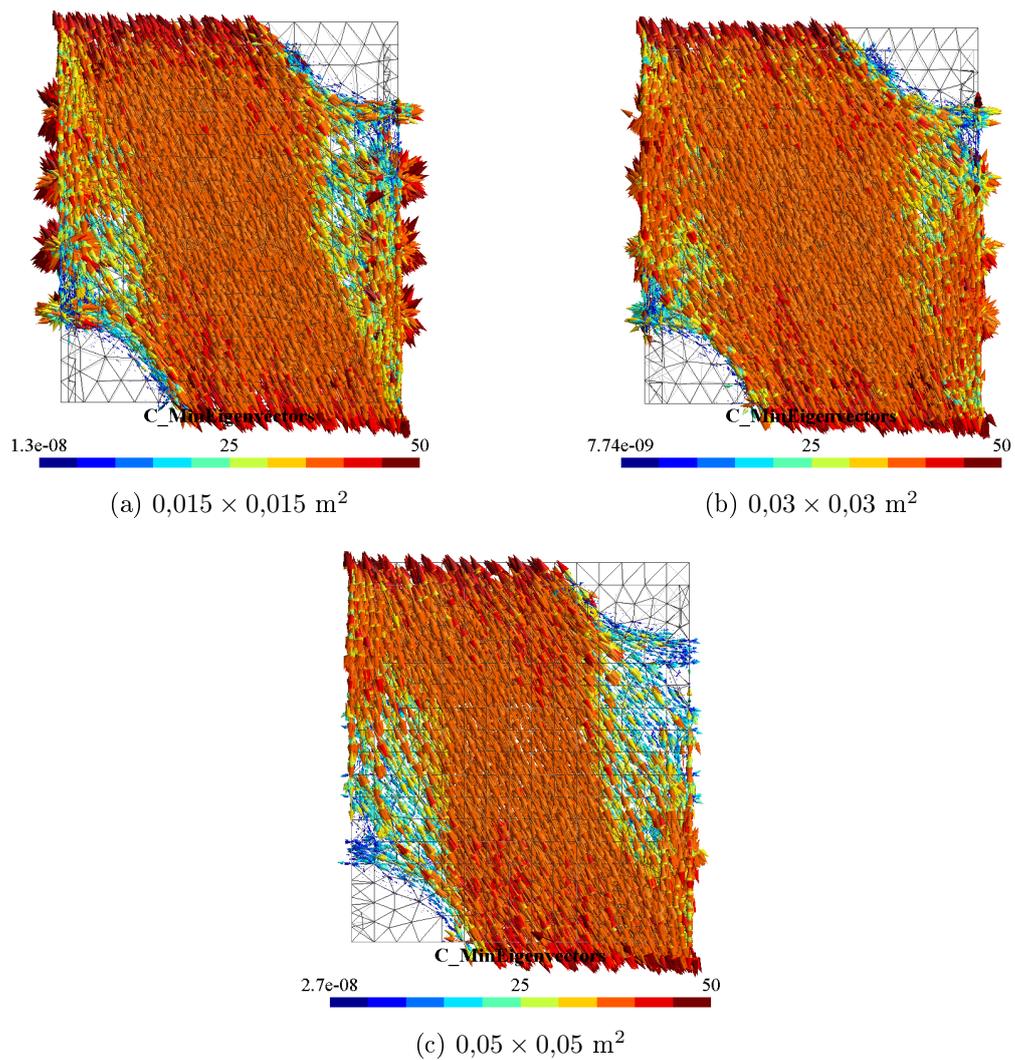


FIGURE 4.38 – Représentation des vecteurs propres de compression du mur renforcé

#### 4.4. Conclusions

---

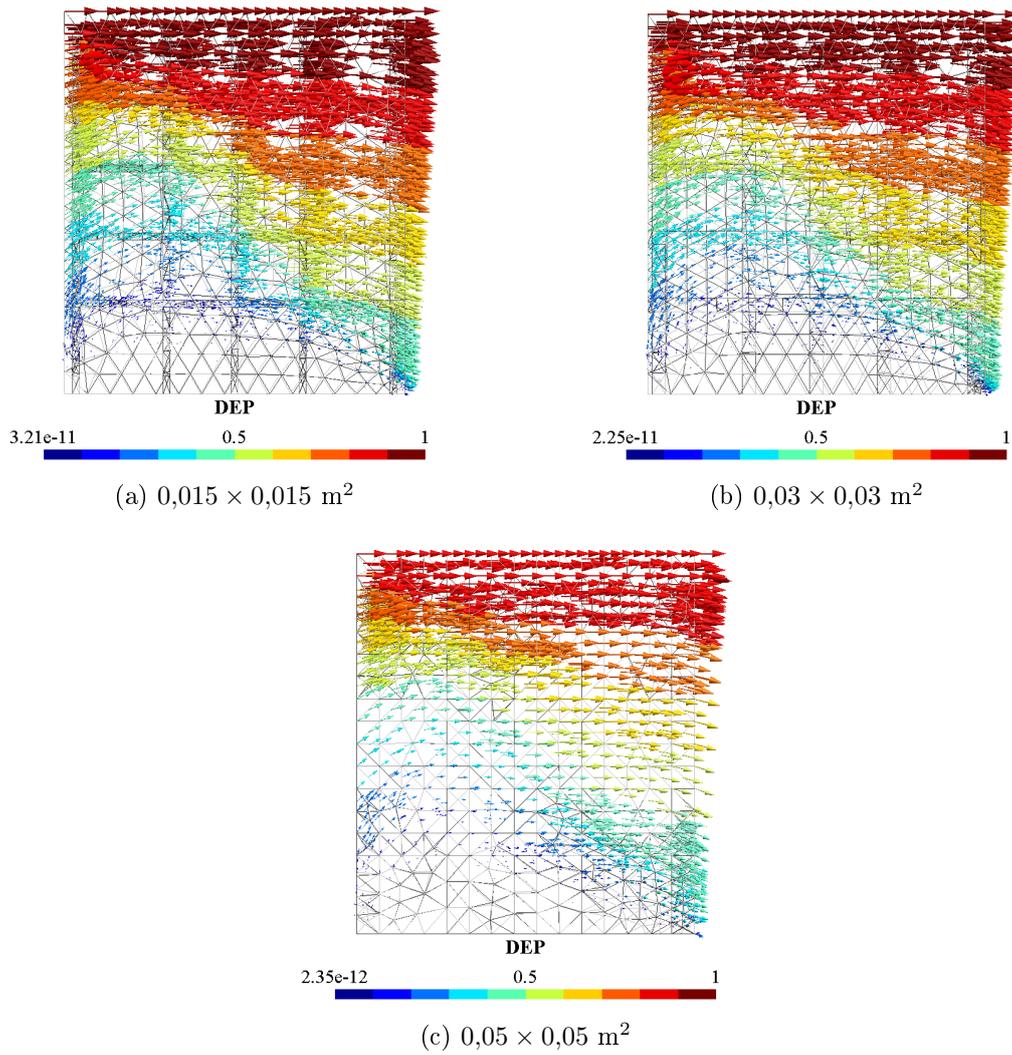


FIGURE 4.39 – Champ de vitesse virtuelle optimisé du mur renforcé

Approche par le calcul à la rupture du dimensionnement des ouvrages massifs en béton armé : applications

---

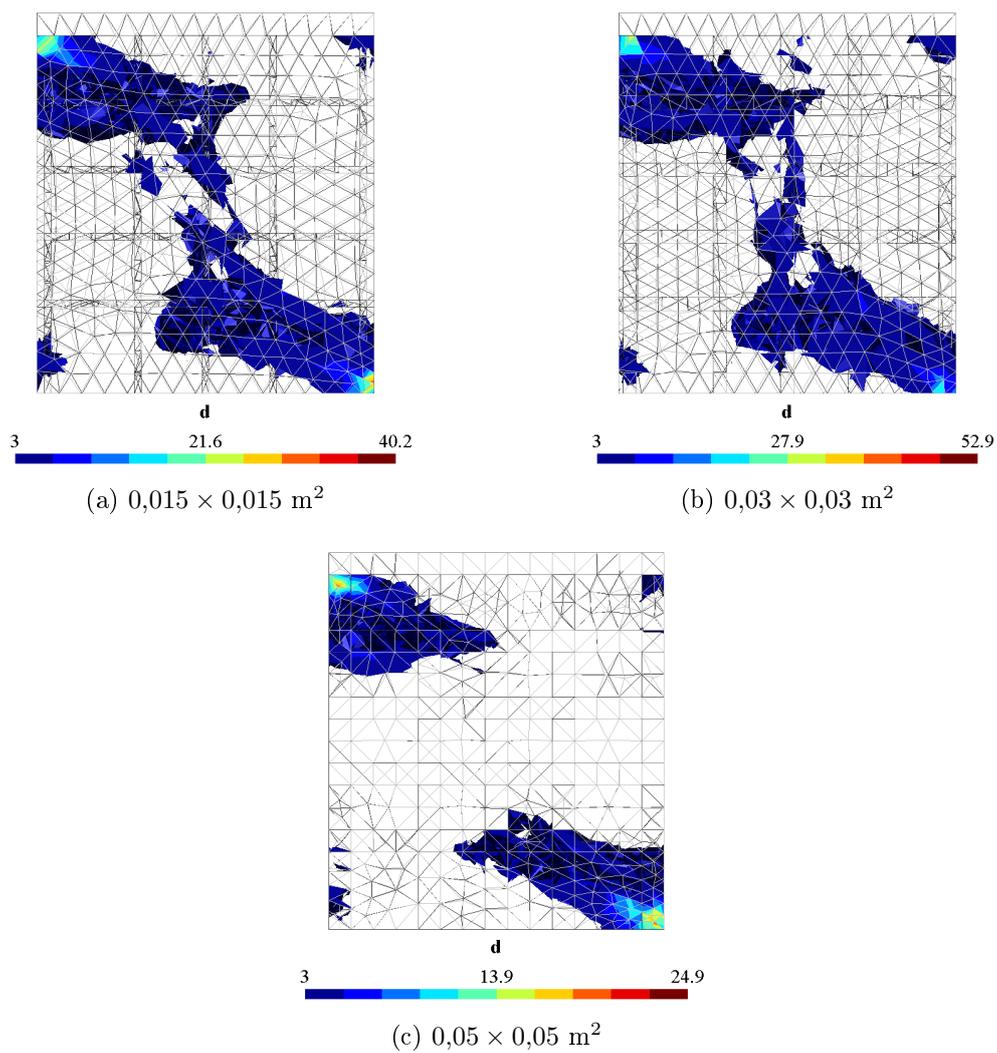


FIGURE 4.40 – Norme du taux de déformation

#### 4.4. Conclusions

---

permettant de valider la méthode dans le cas de structures non renforcées, comparant les résultats avec les travaux de [Martin et Makrodimopoulos \[2008\]](#) pour le premier exemple non renforcé, avec le logiciel Optum G3 pour le deuxième exemple non renforcé. Dans un second temps, des exemples de structures renforcées ont été traités. Les résultats de trois exemples de structures en béton armé ont été présentés : un chevêtre de pont, une semelle de fondation, ainsi qu'un voile en cisaillement.

L'outil développé permet d'obtenir une estimation relativement précise du chargement extrême appliqué sur des structures massives en béton armé. Ceci, grâce à la Programmation Semi-Définie Positive, mais aussi à la méthode permettant de prendre en compte les armatures : méthode d'homogénéisation dans le cas de répartitions périodiques des renforts et adaptation de cette méthode dans le cas de renforts isolés. Cette dernière méthode a particulièrement été mise en avant sur le dernier exemple où la structure étudiée est renforcée par un nombre assez important d'armatures isolées. Ce qui constitue une configuration de renforcement que l'on retrouve dans beaucoup de cas pratiques.

L'outil développé, basé sur le calcul à la rupture permet d'obtenir des informations précieuses sur la ruine de la structure : il renseigne l'utilisateur sur les zones à renforcer (champ de contrainte optimisé obtenu par l'approche statique) et permet de comprendre la ruine de la structure (champ de vitesse virtuelle optimisé obtenu par l'approche cinématique).

\*      \*

      \*



# Chapitre 5

## Conclusions et perspectives

### 5.1 Conclusions

Ce travail de thèse a eu pour but de proposer une nouvelle méthode de dimensionnement aux États Limites Ultimes (ELU) des éléments de structures massives en béton armé. Cette méthode basée sur la théorie du calcul à la rupture a été mise en œuvre numériquement nécessitant la levée de différents verrous que nous allons rappeler maintenant.

Le Chapitre 2 a permis de présenter les outils théoriques permettant de poser et de résoudre le problème du calcul à la rupture pour les structures en béton armé. Les approches statique et cinématique du calcul à la rupture ont été développées. Les critères de résistance servant à modéliser numériquement le comportement du béton sont multiples. Nous en avons retenu deux : le critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction et le critère de Rankine. Il a été montré dans ce chapitre que ces deux critères sont très proches en contraintes planes mais qu'ils peuvent exhiber des différences importantes en déformations planes ainsi que pour des sollicitations de compression triaxiales. En effet, le critère de Mohr-Coulomb est de forme conique ouvert du côté des contraintes de compression. Il permet de rendre compte d'un accroissement de la résistance du béton lorsqu'il est confiné. De ce point de vue là, il semble être plus réaliste « physiquement » que le critère de Rankine. Ce dernier, de forme cubique, est beaucoup plus simple dans sa description. Son utilisation présente l'intérêt d'être assuré qu'aucune contrainte principale (majeure ou mineure) ne dépasse les limites de résistance en compression et en traction uniaxiales imposées, ce qui représente un certain avantage du point de vue de l'ingénieur dans le but de justifier, auprès d'un bureau de contrôle, de la résistance de la structure qu'il étudie.

Dans ce même chapitre, la méthode employée pour prendre en compte les armatures dans un calcul tridimensionnelle a ensuite été présentée. Alors qu'ont été évoquées les difficultés liées à une modélisation mixte 1D-3D, ainsi que le coût numérique trop important pour envisager de modéliser les armatures comme un milieu continu tridi-

mensionnel, la modélisation multiphasique a été formulée dans le cas particulier de l'adhérence parfaite entre armature et béton donnant lieu dans sa version simplifiée à la méthode d'homogénéisation. Cette méthode consiste à remplacer un réseau de renforts disposés de manière périodique par un matériau homogène équivalent. Cette technique a déjà été utilisée, en géotechnique notamment, sur des problèmes de sols renforcés. Les structures en génie civil étant principalement renforcées par une disposition non périodique d'armatures, il a été décidé d'adapter la méthode d'homogénéisation pour traiter le cas des armatures isolées. Cette méthode consiste à homogénéiser l'armature dans un volume qui l'englobe et présente l'avantage, en vue d'une résolution numérique, de ne pas avoir à mailler un volume aussi petit qu'une armature, impliquant donc des temps de calcul raisonnables.

Le chapitre suivant (Chapitre 3) a permis d'implémenter numériquement la théorie tout juste présentée. L'implémentation numérique est réalisée à l'aide d'éléments finis tétraédriques servant à discrétiser le système étudié et permettant d'explorer des champs de contrainte dans le cas de l'approche statique du calcul à la rupture et d'explorer des champs de vitesse virtuelle dans le cas de l'approche cinématique du calcul à la rupture. Les deux approches sont reformulées en un problème d'optimisation non-linéaire, résolu par le solveur Mosek. L'approche statique est traduite sous la forme d'un problème de maximisation, tandis que l'approche cinématique est traduite sous la forme d'un problème de minimisation.

La formulation numérique du critère de résistance du béton s'inscrit dans le cadre de la programmation semi-définie positive (SDP) qui permet d'avoir des matrices symétriques définies positives comme variables d'optimisation. Ce cadre de programmation offre donc la possibilité de formuler le critère de Rankine et le critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction, tous les deux exprimés en fonction de leurs contraintes principales. Au début de ce travail de thèse, nous avons choisi le critère de Drucker-Prager pour modéliser la résistance du béton. Ce critère peut s'exprimer par la programmation conique du second ordre (SOCP), pour laquelle les performances des algorithmes de résolution sont supérieures à celles des algorithmes en SDP. Cependant, même tronqué en traction, il s'est avéré que le critère de Drucker-Prager ne permettait pas de modéliser la résistance du béton de manière réaliste. En effet, nous avons remarqué la possibilité d'obtenir des contraintes principales de traction supérieures à la limite en traction simple imposée (par la troncature). Ce critère n'a donc pas été retenu pour modéliser le béton. Nous avons alors opté pour la SDP, qui est une généralisation de la SOCP, et qui nous a permis de modéliser les deux critères utilisés dans cette thèse.

Le Chapitre 3 a présenté tous les outils nécessaires à la résolution numérique d'un problème de structure tridimensionnelle en béton armé par les approches statique et cinématique du calcul à la rupture. Ont été décrits en détail, le type d'élément fini utilisé, l'interpolation du champ considéré (contrainte ou vitesse virtuelle selon l'approche) en son sein, les variables associées à chacun des noeuds ou des points d'interpolation

## 5.1. Conclusions

---

de l'élément, ainsi que les différentes équations à écrire (contraintes à respecter) pour chaque élément fini et pour chaque interface entre deux éléments finis. Et ce, qu'il s'agisse d'une zone de béton ou d'une zone en béton armé (zone homogénéisée).

Deux exemples simples sont venus clore ce chapitre. Le premier a permis de valider la méthode d'homogénéisation dans un cas périodique : une éprouvette renforcée soumise à un effort de compression et étudiée en déformations planes. Cet exemple avait été traité analytiquement dans le Chapitre 2 et met en lumière, sur un cas simple, les différences entre la modélisation de la résistance du béton par le critère MCT et par celui de Rankine. Les différences portent premièrement sur la charge limite obtenue : l'effet du renforcement est nul dans le cas du critère de Rankine. Nous retrouvons numériquement ce résultat. Les différences portent également sur les champs de contrainte et les mécanismes de ruine obtenus par les deux approches. Le deuxième exemple a servi à valider la méthode d'homogénéisation dans le cas d'armatures isolées. Pour cela, une poutre renforcée longitudinalement en partie inférieure et soumise à une charge répartie est étudiée. L'étude de sensibilité sur l'influence de la taille des zones homogénéisées montre une franche stabilité de l'estimation de la charge limite. La méthode a été à nouveau évaluée dans le chapitre qui a suivi.

Le dernier chapitre de cette thèse (Chapitre 4) s'est proposé d'illustrer les capacités du calcul à la rupture et le potentiel de l'outil numérique développé sur des structures massives. La première partie de ce dernier chapitre a permis de traiter des exemples de structures non renforcées alors que la deuxième a servi à présenter l'étude de trois structures en béton armé. L'étude d'un chevet de pont a été présentée à la fois dans la partie traitant des structures non renforcées et dans la partie traitant des structures renforcées. Cet exemple a constitué le fil rouge de ce travail de thèse car bien représentatif du type de structures que nous souhaitons traiter : des structures massives en béton armé. Ces structures présentent également l'intérêt d'être purement structurelles. Elles peuvent répondre à des questions d'esthétisme mais n'ont pas de fonction d'usage (comme l'ont les bâtiments d'habitation par exemple). Il n'est donc pas rare de voir leur forme adaptée à la diffusion des efforts.

Les résultats des différents exemples présentés ont été, dans la mesure du possible, comparés, soit avec d'autres travaux scientifiques (c'est les cas du premier exemple non renforcé et de la semelle de fondation), soit avec les résultats d'autres logiciels (c'est également le cas de la semelle de fondation ainsi que du chevet dans le cas où il n'est pas renforcé), permettant ainsi de donner davantage de « légitimité » à l'outil développé, sachant que ce dernier est le seul à traiter complètement (c'est-à-dire par les deux approches statique et cinématique) des structures en béton armé.

Le calcul à la rupture présente le grand intérêt d'être fondé sur deux approches, duales l'une de l'autre, estimant la capacité portante de la structure étudiée par encadrement (minoration par l'approche statique et majoration par l'approche cinématique). Nous

avons vu dans ce dernier chapitre que les estimations sur des cas tridimensionnels relativement complexes sont suffisamment précises pour que l'outil développé puisse être utilisé pour l'étude des structures aux ELU. Parmi les *perspectives* de travail que nous évoquerons ci-après seront proposées des pistes permettant, sans doute, d'améliorer la précision en réduisant, dans certains cas, l'écart résiduel entre les deux approches.

### Autres pistes explorées durant la thèse

Différents points sur lesquels nous avons travaillé durant cette thèse n'ont pu être inclus dans ce manuscrit, et nous profitons donc de ce chapitre de conclusion pour les évoquer.

#### ✓ *Travail sur les zones d'homogénéisation*

Le dernier exemple du Chapitre 4, traitant d'un mur en béton armé sollicité par un chargement latéral, met en avant les difficultés liées à l'usage de la méthode d'homogénéisation, telle que nous l'avons présentée dans cette thèse, pour traiter des exemples composés d'un nombre important d'inclusions. En effet, ne serait-ce que du point de vue de la construction du modèle (CAO), il devient compliqué de gérer les intersections de volumes d'homogénéisation englobant les armatures. D'autant plus si les aciers sont courbes (aciers crossés par exemple). S'agissant du calcul, les modèles peuvent devenir numériquement très coûteux, nécessitant beaucoup d'éléments finis pour mailler les volumes ainsi créés.

Une procédure a donc été développée pour le logiciel DS Concrete qui permet de ne pas avoir à mailler le volume homogénéisé. La taille du volume homogénéisé est alors variable et dépendante du maillage généré (voir Figure 5.1 où une première vue présente une poutre renforcée par une armature longitudinale et deux autres permettent de visualiser les éléments finis « concernés » par l'acier et faisant partis de la zone « béton armé »). Un travail a été réalisé pour permettre de calculer la « véritable » section de cette zone au droit de chaque sommet d'élément fini pour que la limite de résistance  $f_y$  de l'acier soit effectivement respectée ( $\sigma_0 = f_y A_s / A_h$ ). La Figure 5.2 montre les résultats obtenus sur une poutre en flexion quatre points renforcée par des armatures longitudinales crossées et un cadre. Les bielles de compression sont représentées ainsi que l'effort résultant dans l'acier.

Cette méthode présente donc l'avantage d'être plus souple pour traiter des cas où les renforts se croisent (ce qui est quasiment systématique dans les structures en béton armé).

#### ✓ *Travail sur l'étude de structures maçonnées*

## 5.1. Conclusions

---

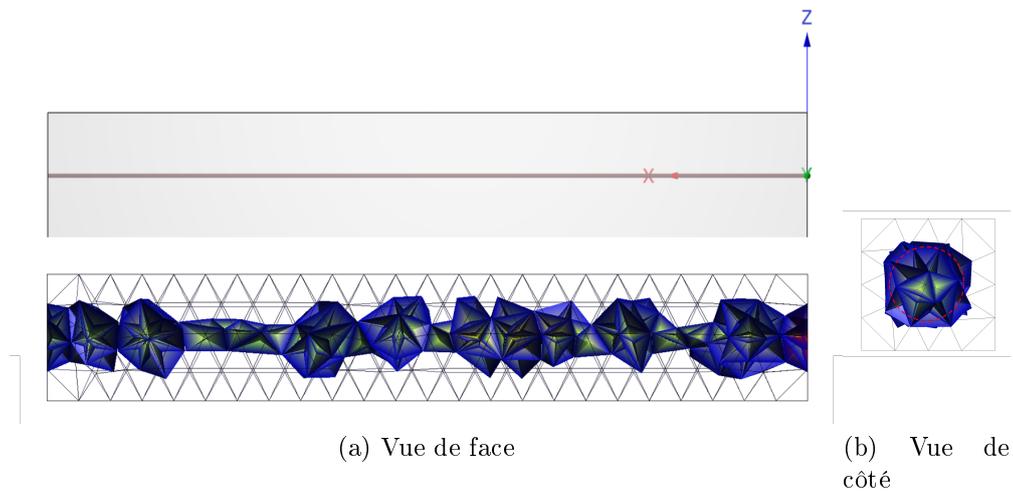


FIGURE 5.1 – Éléments fins constituant le volume homogénéisé de la zone béton armé

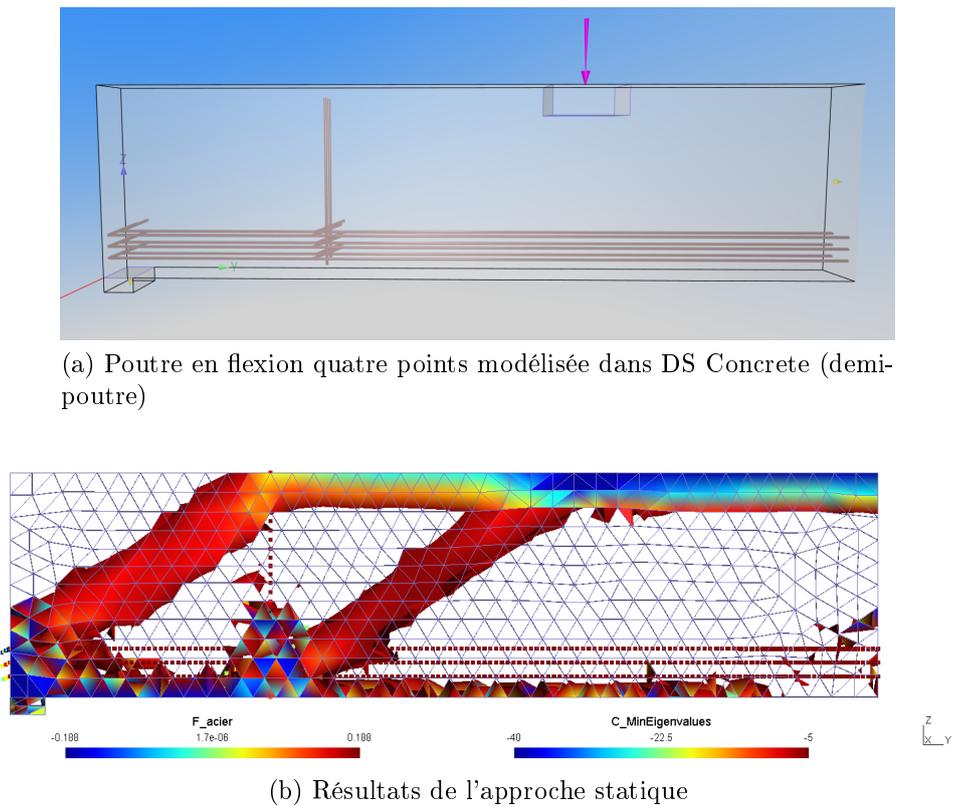


FIGURE 5.2 – Prise en compte des armatures sans mailler les zones homogénéisées

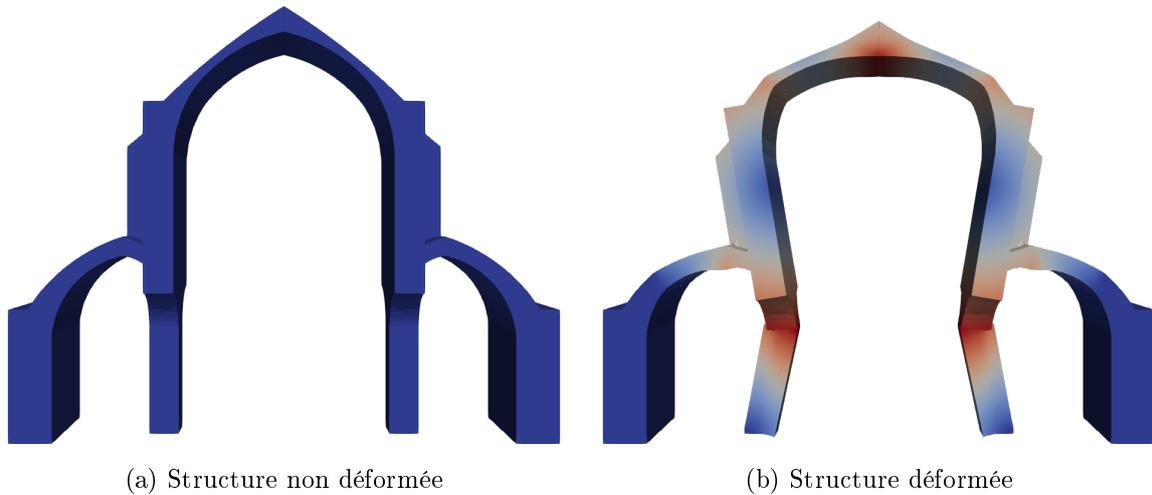


FIGURE 5.3 – Résultats de l’approche cinématique sur l’abbaye Notre de Dame de Sénanque étudiée sous poids propre

Par ailleurs, en fin de thèse, un bureau d’étude spécialisé en structures maçonnées s’est montré intéressé par les méthodes de calcul proposées par STRAINS. Nous avons alors pu réaliser quelques calculs sur l’abbaye Notre Dame de Sénanque, située dans le sud de la France, avec l’outil ainsi développé. Les observations sur site réalisées par le bureau d’étude ont montré des désordres (fissures) au niveau de certaines pierres. Nous avons donc étudié une arche de l’abbaye sous poids propre par les approches statique et cinématique du calcul à la rupture en modélisant la résistance des pierres par un critère de Rankine. Les résultats de l’approche cinématique sont visibles sur la Figure 5.3, où la norme du champ de vitesse virtuelle est représentée sur la structure déformée permettant de visualiser le mécanisme de ruine. Les approches statique et cinématique permettent également d’estimer un facteur de sécurité (supérieur à 1 dans ce cas).

Pour compléter l’étude et continuer à enrichir le logiciel, nous avons développé la possibilité de définir un critère d’interaction (de Coulomb) à l’interface entre les pierres (avec un angle de frottement et une cohésion) permettant alors, en définissant les pierres comme infiniment résistantes, d’étudier la ruine de la structure par rupture au niveau des joints (décollement, ouverture des joints par exemple) [Vincent *et al.*, 2018c].

## 5.2 Perspectives

Si le travail réalisé au cours de cette thèse a permis de mettre au point un outil numérique (directement utilisable par l’ingénieur) capable d’évaluer la capacité portante ultime de structures massives en béton armé, il existe beaucoup d’améliorations et de

## 5.2. Perspectives

---

prolongements possibles. Nous allons proposer des perspectives à la fois théoriques et applicatives. Nous distinguons ces deux types de perspectives car nous estimons que certains points d'amélioration sont nécessaires pour que l'outil soit utilisable par des ingénieurs.

### ✓ *Prise en compte de l'interface entre acier et béton*

La modélisation choisie pour prendre en compte les armatures dans le calcul a été expliquée en détail (Chapitre 2) et utilisée (Chapitres 3 et 4), que ce soit dans le cas où le renforcement est périodique ou dans le cas d'armatures isolées. L'hypothèse nous plaçant dans le cas particulier de la méthode d'homogénéisation est l'*adhérence parfaite* admise entre les armatures et le béton. Cependant, nous sommes bien conscients que cette hypothèse est assez forte et que certains accidents sur des structures proviennent de la *perte d'adhérence* des armatures. Il peut donc être utile de pouvoir prendre en compte l'interaction entre ces deux composants du béton armé. La *modélisation multiphasique*, déjà évoquée et brièvement présentée dans cette thèse (la formulation numérique générale au Chapitre 3 a été faite dans le cas général de la modélisation multiphasique) permet de prendre en compte une telle interaction.

Le paramètre gouvernant l'interaction dans la modélisation multiphasique devra alors être calibré, par des essais d'arrachement par exemple. Ces essais pourraient alors être reproduits numériquement afin de s'assurer de la pertinence du modèle proposé.

### ✓ *Prise en compte des interfaces*

Un travail sur le contact ayant déjà été engagé à partir de l'étude de l'abbaye, il pourrait être intéressant de le compléter pour pouvoir traiter des structures mixtes, mêlant acier et béton armé, qui sont de plus en plus courantes. Chez STRAINS, un travail important est déjà mené pour prendre en compte les contacts dans le logiciel DS Steel. En effet, l'assemblage d'éléments structuraux pour les constructions métalliques (plaques, poutres, boulons, etc.) rend indispensable la prise en compte de contacts tant ils peuvent avoir un rôle dans la ruine.

### ✓ *Remaillage adaptatif et localisé*

L'outil développé s'est montré capable d'estimer assez précisément le chargement extrême des structures étudiées (assez faible écart entre l'approche statique et l'approche cinématique). Cela a parfois été possible seulement au prix d'un effort de remaillage très important. Les problèmes de grande taille ainsi générés ont pu être résolus grâce à l'utilisation de serveurs disposant d'une grande puissance de calcul, ainsi que d'une grande capacité mémoire.

L'objectif étant de traiter des structures de plus en plus massives et de plus en

plus complexes (avec de nombreuses armatures), il semble opportun de développer une méthode de remaillage adaptatif qui permettra d'« économiser » des éléments finis dans les zones qui ne présentent pas de complexité du point de vue numérique et de ne mailler finement que les zones d'intérêt. La taille du problème serait alors fortement réduite. Il semblerait que le remaillage adaptatif pourrait aider l'approche statique à converger plus rapidement en remaillant les zones où une évolution importante des contraintes principales de compression est observée (remaillage autour des bielles). Les zones tendues n'ont pas d'intérêt à être remaillées. Concernant l'approche cinématique, un remaillage adaptatif basé sur le taux de déformation semble être pertinent. Il est déjà en place pour l'approche cinématique pour DS Steel et pourrait être utilisé pour DS Concrete avec quelques ajustements.

Une amélioration de l'outil numérique développé et présenté dans cette thèse passe donc par la mise en place d'une *procédure de remaillage adaptatif et localisé* permettant aux approches statique et cinématique de converger plus rapidement (et à moindre coût numérique) vers le chargement extrême recherché. Du point de vue de l'ingénieur, pour lequel les temps de calcul sont cruciaux, il est important de proposer des méthodes rapides pour qu'elles soient utilisées dans la pratique du dimensionnement.

### ✓ *Amélioration de l'optimisation numérique*

Comme nous l'avons évoqué tout au long de ce manuscrit, nous avons utilisé Mosek pour résoudre les approches statique et cinématique du calcul à la rupture reformulées comme des problèmes d'optimisation. Mosek est un solveur mathématique d'optimisation qui présente l'avantage d'être très souple et très performant. Il se comporte en revanche comme une « boîte noire » : il renvoie un résultat au problème posé sans avoir à se soucier de l'algorithme de résolution.

Mosek s'est montré par exemple très sensible au conditionnement des matrices, ce qui conduisait parfois à la non convergence de l'optimisation. Nous n'avons pas pu véritablement cerner ce problème et le résoudre. Nous pensons qu'en développant un algorithme de point intérieur « maison », permettant de s'affranchir de l'utilisation de Mosek, l'outil développé gagnerait en performance. En effet, le fait que Mosek soit un solveur généraliste est un inconvénient pour l'utilisation particulière que nous en avons. Les méthodes de résolutions sont très sensibles à la structure du problème posé. Une grande partie du travail de Mosek avant la résolution du problème numérique en tant que tel réside dans l'organisation du problème posé. Les problèmes que nous posons étant tous de la même forme, nous gagnerions à maîtriser toutes les étapes de la résolution. Un algorithme de point intérieur est en cours de développement chez STRAINS. Il est presque opérationnel pour la programmation conique du second ordre et pourra donc être intégré à DS Steel. Il faudra ensuite l'adapter à la SDP pour l'implémenter dans DS Concrete.

## 5.2. Perspectives

---

Les algorithmes de point intérieur sont également très sensibles aux combinaisons linéaires entre les lignes d'une matrice et un travail doit être fait pour les éliminer (des méthodes existent, comme la méthode de Gram-Schmidt, mais ne peuvent être appliquées sur des matrices de grande taille). L'approche statique semble être l'approche qui génère le plus de redondances. Il est toutefois possible de construire des éléments finis de telle façon que les redondances soient limitées [Kempeneers, 2005].

En disposant d'un algorithme de résolution (par la méthode du point intérieur) que nous maîtriserions, il pourrait être envisagé de faire démarrer l'algorithme à partir d'une solution connue pour aider à sa convergence. Par exemple, après un premier calcul effectué sur un maillage grossier, un calcul sur un maillage plus fin pourrait alors être lancé à partir de la solution obtenue sur le premier maillage qui serait alors projetée sur le nouveau. Les algorithmes de résolution progressent assez rapidement vers la solution dans les premières itérations puis ils ralentissent à l'approche de celle-ci. On pourrait alors envisager d'arrêter le calcul avant la convergence complète (chose qui n'est pas possible avec Mosek), pour effectuer une première itération de remaillage adaptatif localisé et lancer un nouveau calcul. En effet, dans l'optique de remailler, un premier résultat approximatif pourrait suffire.

### ✓ *Confrontation à des résultats expérimentaux*

Enfin, nous refermerons ce travail de thèse sur une dernière piste de prolongement. Dans le but d'une diffusion massive de l'utilisation d'un outil basé sur le calcul à la rupture, notamment par des ingénieurs, il serait judicieux de valider la méthode proposée par des résultats expérimentaux. Beaucoup de campagnes expérimentales ont déjà été menées et il serait intéressant de réaliser un travail de comparaison approfondi entre ces résultats et ceux obtenus par la méthode proposée. La méfiance dans l'utilisation du calcul à la rupture pour dimensionner les structures en béton armé provenant en partie du fait que le comportement du béton armé n'est pas toujours ductile, les essais expérimentaux choisis pourraient alors montrer où se situe la méthode proposée quand la rupture est considérée comme étant fragile.

Pour compléter ce travail de comparaison avec des résultats expérimentaux, des essais pourraient être réalisés sur des géométries complexes (configuration non prévues dans la réglementation par exemple) qui voient de plus en plus le jour, notamment avec le développement de la construction robotisée.

\*        \*  
          \*  
          \*



# Bibliographie

- ABDI, R., de BUHAN, P. et PASTOR, J. (1994). Calculation of the critical height of a homogenized reinforced soil wall : a numerical approach. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 18:485–505. 10
- ANTHOINE, A. (1989). Mixed modelling of reinforced soils within the framework of the yield design theory. *Computers and Geotechnics*, 7(1-2):67–82. 37
- AVERBUCH, D. (1996). *A yield design-based approach to reinforced concrete structures*. Thèse de doctorat, ENPC, Paris. 13, 102
- AVERBUCH, D. et de BUHAN, P. (1999). Shear design of reinforced concrete deep beams : A numerical approach. *Journal of Structural Engineering*, 125(3):309–318. 13, 30, 32, 37, 39, 43
- BISBOS, C. D. (2006). Linear matrix inequality representations of the Mohr-Coulomb and Tresca failure criteria with applications in shakedown analysis. *J. Mech. Behav. Mater*, 17(4):253–268. 70
- BISBOS, C. D. (2007). Semidefinite optimization models for limit and shakedown analysis problems involving matrix spreads. *Opt. Lett.*, 1(1):101–109. 70
- BLEYER, J. et de BUHAN, P. (2014a). A computational homogenization approach for the yield design of periodic thin plates. Part I : Construction of the macroscopic strength criterion. *International Journal of Solids and Structures*, 51(13):2448–2459. 12
- BLEYER, J. et de BUHAN, P. (2014b). A computational homogenization approach for the yield design of periodic thin plates. Part II : Upper bound yield design calculation of the homogenized structure. *International Journal of Solids and Structures*, 51(13): 2460–2469. 12
- BLEYER, J. et de BUHAN, P. (2014c). Lower bound static approach for the yield design of thick plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 100(11): 814–833. 12
- BLEYER, J., LE, C. et de BUHAN, P. (2015a). Locking-free discontinuous finite elements for the upper bound yield design of thick plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 103(12):894–913. 12

- BLEYER, J., PHAM, D. et de BUHAN, P. (2015b). Failure design of high-rise concrete panels under fire loading. *Engineering and Computational Mechanics*, 168:178–185. 30, 32
- BLEYER, J., PHAM, D. T., de BUHAN, P. et FLORENCE, C. (2015c). Yield design of periodically heterogeneous plates. In *Direct Methods for Limit and Shakedown Analysis of Structures*, pages 143–158. Springer. 13
- BROOMS, C. (2005). Concrete flat slabs and footings : Design method for punching and detailing for ductility. *PhD thesis. Stockholm, Sweden : Department of Structural Engineering, Royal Institute of Technology*. 133
- CHEN, W. (1982). Plasticity in reinforced concrete. *McGraw-Hill, New York*. 30
- CORRE, G. (2018). *Higher-order elastoplastic beam models*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est. 15
- COULOMB, C. (1773). Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. *Mémoires présentés à l'Académie Royale des Sciences, Paris*, pages 343–382. 9
- de BUHAN, P. (2007). Plasticité et calcul à la rupture. *Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*. 22, 23
- de BUHAN, P., BLEYER, J. et HASSEN, G. (2017). Elastic, plastic and yield design of reinforced structures. *ISTE Press - Elsevier*. 37, 40, 41, 42, 43, 73
- de BUHAN, P. et de FELICE, G. (1997). A homogenization approach to the ultimate strength of brick masonry. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(7): 1085–1104. 10
- de BUHAN, P. et HASSEN, G. (2008). Multiphase approach as a generalized homogenization procedure for modelling the macroscopic behaviour of soils reinforced by linear inclusions. *European Journal of Mechanics*, 27(4):662–679. 10
- de BUHAN, P. et HASSEN, G. (2010). Macroscopic yield strength of reinforced soils : From homogenization theory to a multiphase approach. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(3):132–138. 40, 42
- de BUHAN, P., MANGIAVACCHI, R., NOVA, R., PELLEGRINI, G. et SALENÇON, J. (1989). Yield design of reinforced earth walls by a homogenization method. *Géotechnique*, 39(2):189–201. 43
- de BUHAN, P. et TALIERCIO, A. (1991). A homogenization approach to the yield strength of composite materials. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 10(2):129–150. 43

## Bibliographie

---

- DRUCKER, D. C. (1961). On structural concrete and the theorems of limit analysis. *International Association for Bridge and Structural Engineering*, 21:49–60. 8
- FERRADI, M. K., LEBÉE, A., FLISCOUNAKIS, A., CESPÉDES, X. et SAB, K. (2016). A model reduction technique for beam analysis with the asymptotic expansion method. *Computers and Structures*, 172:11–28. 15
- FIGUEIREDO, M., MAGHOUS, S. et FILHO, A. (2013). Three-dimensional finite element analysis of reinforced concrete structural elements regarded as elastoplastic multi-phase media. *Materials and Structures*, 46:383–404. 13, 21, 50
- FREUND, R. M. (2007). Introduction to Semidefinite Programming(SDP). *MIT course*. 68
- GUEGUIN, M. (2014). *Approche par une méthode d’homogénéisation du comportement des ouvrages en sols renforcés par colonnes ou tranchées*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est. 10
- HALLGREN, M. et BJERKE, M. (2002). Concrete flat slabs and footings : Design method for punching and detailing for ductility. *Cement and Concrete Composites*, 24:491–496. 133
- HILLERBORG, A. (1996). *Strip method design handbook*. CRC Press. 10
- JOHANSEN, K. (1962). Yield line theory. *Cement and Concrete Association London*. 10
- KEMPENEERS, M. (2005). *Eléments finis statiquement admissibles et estimation d’erreur par analyse duale*. Thèse de doctorat, Université de Liège. 173
- KRABBENHØFT, K., LYAMIN, A. et SLOAN, S. (2008). Three-dimensional Mohr-Coulomb limit analysis using semidefinite programming. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24(11):1107–1119. 70
- KRABBENHØFT, K., LYAMIN, A., HJIAJ, M. et SLOAN, S. (2005). A new discontinuous upper bound limit analysis formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63:1069–1088. 12
- KUERES, D., SIBURG, C., HERBRAND, M., CLASSEN, M. et HEGGER, J. (2017). Uniform design method for punching shear in flat slabs and column bases. *Engineering Structures*, 136:146–164. 133
- LEONHARDT, F. (1965). Reducing the shear reinforcement in reinforced concrete beams and slabs. *Magazine of Concrete Research*, 17(53):187. 3
- LEONHARDT, F. et MÖNNING, E. (1975). Sonderfälle der Bemessung im Stahlbetonbau, Vorlesungen über Massivbau. *Zweiter Teil, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York*, page 174. 3

- LLAU, A., JASON, L., DUFOUR, F. et J., B. (2016). Finite element modelling of 1d steel components in reinforced and pre-stressed concrete structures. *Engineering Structures*, 127:769–783. 13, 50
- LYAMIN, A. et SLOAN, S. (2002). Upper bound limit analysis using finite elements and non-linear programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26:181–216. 12
- MAKRODIMOPOULOS, A. et MARTIN, C. (2007). Upper bound limit analysis using simplex strain elements and second-order cone programming. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 31(6):835–865. 82
- MARTI, P. (1985). Basic tools of reinforced concrete beams design. *ACI Journal*, pages 44–56. 3
- MARTIN, C. et MAKRODIMOPOULOS, A. (2008). Finite–element limit analysis of Mohr–Coulomb materials in 3D using semidefinite programming. *Jl. Eng Mech. ASCE*, 134:339–347. 12, 68, 69, 116, 117, 119, 120, 121, 163
- MOSEK (2018). The Mosek optimization software. <https://www.mosek.com>. 57, 58, 70, 80, 112
- MÖRSCH, E. (1912). Der Eisenbetonbau, seine Theorie und Anwendung (Reinforced concrete, theory and application). *Stuttgart, Verlag Konrad Wittwer*. 2
- MUELLER, P. (1978). Plastische Berechnung von Stahlbetonscheiben und Balken (Plastic analysis of reinforced concrete deep beams and beams). *Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich*. 3
- MUTTONI, A. (2008). Punching shear strength of reinforced concrete slabs without transverse reinforcement. *ACI Structural Journal*, 105(4). 133
- MUTTONI, A. et FERNÁNDEZ RUIZ, M. (2008). Champs de contraintes pour le béton structural. *Tracés*, 133(5):17–21. 6
- MUTTONI, A., SCHWARTZ, J. et THÜRLIMANN, B. (1987). Bemessen und Konstruieren von Stahlbetontragwerken mit Spannungsfeldern. *Unterlagen zum Fortbildungskurs*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich. 3
- MUTTONI, A., SCHWARTZ, J. et THÜRLIMANN, B. (1997). *Design of Concrete Structures with Stress Fields*. Birkhäuser. 3
- NF EN 1990 (2003). Eurocodes structureaux : bases de calcul des structures. Normes Européennes. 2
- NF EN 1992-1-1 (2007). Eurocode 2 : Calcul des structures en béton - Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments. Normes Européennes. 2, 6

## Bibliographie

---

- NIELSEN, M. et HOANG, L. (2010). *Limit analysis and concrete plasticity*. CRC Press. 3, 13, 133
- PASTOR, J. et TURGEMAN, S. (1976). Mise en oeuvre numerique des methodes de l'analyse limite pour les materiaux de von mises et de coulomb standards en deformation plane. *Mechanics Resaerch Communications*, 3(6):469–474. 10
- PHAM, D., de BUHAN, P., FLORENCE, C., HECK, J.-V. et NGUYEN, H. N. (2015). Interaction diagrams of reinforced concrete sections in fire : a yield design approach. *Engineering structures*, 90:38–47. 102
- PRANDTL, L. (1920). Über die Härte plastischer Körper. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pages 74–85. 9, 11
- RITTER, W. (1899). Die Bauweise Hennebique (The Hennebique system). *Schweizerische Bauzeitung, Bd. XXXIII*, 7. 2
- SALENÇON, J. (1983). Calcul à la rupture et analyse limite. *Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*. 7, 9, 22
- SALENÇON, J. (2013). Yield design. *ISTE Ltd, Wiley, London*. 10, 22, 31
- SCHLAICH, J. et SCHÄFER, K. (1991). Design and detailing of structural concrete using strut-and-tie models. *The structural Engineer*, 69(6). 3
- SCHLAICH, J., SCHÄFER, K. et JENNEWEIN, M. (1987). Toward a consistent design of structural concrete. *PCI Journal*, 32(3):74–150. 3, 4
- SCHWARTZ, J. (2002). Stress field design of reinforced concrete members with circular cross sections. *Structural Engineering International*, 12:36–39. 3
- SIMÕES, J., FARIA, D., FERNÁNDEZ RUIZ, M. et MUTTONI, A. (2016). Strength of reinforced concrete footings without transverse reinforcement according to limit analysis. *Engineering Structures*, 112:146–161. 116, 133, 134, 135, 139, 141, 152
- SLOAN, S. (1988). Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming. *International Journal for Numerical and Analalytical Methods in Geomechanics*, 12:61–67. 12
- SLOAN, S. (1989). Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming. *International Journal for Numerical and Analalytical Methods in Geomechanics*, 13:263–282. 12
- SUDRET, B. et de BUHAN, P. (1999). Modélisation multiphasique de matériaux renforcés par inclusions linéaires. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, 327:7–12. 40

- TALBOT, A. N. (1913). Reinforced concrete wall footings and column footings. *Bulletin 67, Engineering Experiment Station, University of Illinois*. 133
- TERRADE, B. (2017). *Évaluation structurale des murs de soutènement en maçonnerie*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est. 10
- THAI SON, Q., HASSEN, G. et de BUHAN, P. (2009). A multiphase approach to the stability analysis of reinforced earth structures accounting for a soil–strip failure condition. *Computers and Geotechnics*, 36(3):454–462. 40
- THÜRLIMANN, B., MARTI, P., PRALONG, J., RITZ, P. et ZIMMERLI, B. (1983). Anwendung der Plastizitätstheorie auf Stahlbeton (Application of the Theory of Plasticity to Structural Concrete). *Unterlagen zum Fortbildungskurs*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich. 3
- VANDENBERGHE, L. et BOYD, S. (1996). Semidefinite programming. *SIAM Rev*, 38(1): 49–95. 68
- VINCENT, H., ARQUIER, M., BLEYER, J. et de BUHAN, P. (2018a). Ultimate limit state design of three-dimensional reinforced concrete structures : A numerical approach. *Proceedings of the conference on computational modelling of concrete and concrete structures (EURO-C 2018), Bad Hofgastein, Austria*. 128
- VINCENT, H., ARQUIER, M., BLEYER, J. et de BUHAN, P. (2018b). Yield design-based numerical analysis of three-dimensional reinforced concrete structures. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, pages 1–16. 100, 128
- VINCENT, H., ARQUIER, M., BLEYER, J. et de BUHAN, P. (2018c). Yield design-based numerical analysis of three-dimensional reinforced concrete structures. *Proceedings of IABSE conference, Nantes, France*. 170