Université Fédérale

Toulouse Midi-Pyrénées

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace

Présentée et soutenue par :
Florian MAHIDDINI

le jeudi 24 mai 2018

Titre :

Modélisation couplée Compatibilité Électromagnétique - Thermique d'architectures de câblages électriques embarquées

---

École doctorale et discipline ou spécialité :

ED AA : Physique

Unité de recherche :

Équipe d'accueil ISAE-ONERA EDyF

Directeur(s) de Thèse :

M. Pierre MILLAN (directeur de thèse)
M. Michael RIDEL (co-directeur de thèse)

Jury :

M. Denis MAILLET, Professeur Université de Lorraine - Président
M. David DONJAT, Ingénieur de Recherche ONERA
M. Christophe LE NILLOT, Professeur Aix-Marseille Université - Rapporteur
M. Pierre MILLAN, Directeur de Recherche ONERA - Directeur de thèse
Mme Françoise PALADIAN, Professeur Université Clermont Auvergne
M. Philippe REULET, Ingénieur de Recherche ONERA
M. Michael RIDEL, Ingénieur de Recherche ONERA - Co-directeur de thèse
M. Christian VOLLAIRE Professeur École Centrale de Lyon - Rapporteur

Page intentionnellement blanche

À mon père, Patrice MAHIDDINI, pour n'avoir jamais rien lâché
À ma grand-mère, Éliane BERQUIER, pour son dévouement sans faille
À Jules YVRAUT, pour qui sa génération est en droit de demander un monde meilleur...
.. Et bien sûr, aux Muses !

Page intentionnellement blanche

Remerciements

Bien qu'étant un travail personnel (relevant parfois de l'introspection), la réalisation d'un doctorat est tout sauf une activité solitaire.

Qu'il me soit donc ici permis de remercier toutes celles et ceux qui ont rendu possible l'écriture de ce manuscrit, et notamment le premier d'entre eux, mon directeur *executif* de thèse **Michael RIDEL** dont le sujet des présents travaux est l'une de ses idées originales.
Ainsi, merci à **Philippe REULET**, **David DONJAT** et **Pierre MILLAN** pour le temps qu'ils ont consacré à l'encadrement de ces travaux.

Merci encore à tous les **membres du Jury** pour leurs retours et commentaires très constructifs, à la fois lors de leur lecture du manuscrit ainsi qu'au moment de la soutenance.

Enfin, merci aux **amis**, **personnels de l'ONERA** et **membres de ma famille** qui m'ont soutenu tout au long de cette aventure, parfois compliquée, mais toujours enrichissante !

Page intentionnellement blanche

Table des matières

Introduction **1**

I Contexte **3**
I.1 Évolution des architectures électriques embarquées des aéronefs . . . 3
I.1.1 Historique . . . 3
I.1.2 Architecture globale d'un aéronef « conventionnel » . . . 5
I.1.3 L'avion « plus électrique » . . . 9
I.1.4 L'avion tout électrique . . . 11
I.2 Contraintes sur les réseaux de câblage . . . 12
I.2.1 Influence des conditions environnementales . . . 13
I.2.2 Prise en compte de l'ensemble des contraintes . . . 17
I.3 Objectifs de la thèse . . . 17
I.4 Conclusion . . . 18

II Analyse bibliographique. Partie I : lignes de transmission et topologie électromagnétique **19**
II.1 Le modèle électrodynamique classique . . . 20
II.1.1 Les équations de Maxwell . . . 20
II.1.2 Le mode Transverse Électromagnétique (TEM) . . . 21
II.2 Ligne de transmission élémentaire . . . 22
II.2.1 Les équations des lignes de transmission . . . 22
II.2.2 Prise en compte du couplage champ-câble . . . 26
II.2.3 Passage au domaine fréquentiel . . . 28
II.3 Domaine de validité du modèle des lignes de transmission . . . 29
II.3.1 Uniformité de la ligne . . . 29
II.3.2 Contraintes sur la longueur de la ligne . . . 29
II.3.3 Contraintes sur les dimensions transverses . . . 29
II.3.4 Validité du mode de propagation TEM . . . 30
II.3.5 Courant de mode différentiel et courant de mode commun . . . 31
II.4 Théorie des lignes de transmission multiconducteurs . . . 32
II.4.1 Généralisation à N conducteurs . . . 33
II.4.2 Résolution des équations des télégraphistes généralisées . . . 35
II.5 L'approche topologique . . . 36
II.5.1 Principe . . . 36
II.5.2 Application aux réseaux de câblages . . . 38
II.5.3 Établissement et résolution de l'équation BLT . . . 38
II.6 Conclusion . . . 41

III Analyse bibliographique. Partie II : transferts thermiques et applications 43
III.1 La théorie des transferts de chaleur . . . 43
III.1.1 Les trois modes de transfert . . . 43
III.1.2 Transferts conductifs et équation de la chaleur . . . 44
III.1.3 Transferts de chaleur par convection naturelle . . . 46
III.1.4 Coefficient de transfert de chaleur en espace libre . . . 49
III.2 Méthodes de simulation des transferts de chaleur appliquées aux câbles électriques aéronautiques . . . 51
III.2.1 Modèles empiriques . . . 53
III.2.2 Homogénéisation des propriétés thermiques . . . 55
III.2.3 Résolution numérique de l'équation de la chaleur . . . 58
III.3 Énergie thermique dissipée par les lignes de transmission . . . 59
III.3.1 Relation générale . . . 59
III.3.2 Détermination de la permittivité effective $\varepsilon(\omega)$ . . . 61
III.3.3 Variation de la résistivité électrique en fonction de la température . . . 63
III.3.4 Puissance thermique dissipée dans les lignes de transmission . . . 65
III.4 Conclusion . . . 66

IV Simulation couplée CEM-Thermique de réseaux de lignes de transmission multiconducteurs 69
IV.1 Introduction à la résolution couplée CEM-Themique . . . 70
IV.1.1 Équivalence entre les problèmes thermiques et électrostatiques . . . 70
IV.1.2 Choix d'une méthode numérique . . . 70
IV.2 Représentations intégrales d'un potentiel arbitraire . . . 70
IV.2.1 Milieu homogène unique et borné . . . 71
IV.2.2 Milieu homogène par morceaux et borné . . . 72
IV.2.3 Prise en compte des milieux ouverts . . . 73
IV.3 Résolution numérique de l'équation intégrale de frontière . . . 74
IV.3.1 Les équations intégrales de frontière . . . 74
IV.3.2 La méthode des moments . . . 76
IV.3.3 Les éléments de frontière constants . . . 77
IV.3.4 Développement des schémas numériques . . . 78
IV.3.5 Calcul des éléments d'interaction . . . 80
IV.4 Application aux réseaux de lignes de transmission . . . 86
IV.4.1 Stratégie de couplage . . . 86
IV.4.2 Calcul des paramètres électriques primaires de la ligne . . . 89
IV.4.3 Calcul du champ de température . . . 92
IV.5 Exemples d'application . . . 96
IV.5.1 Exemple n° 1 : simulation couplée CEM-Thermique . . . 96
IV.5.2 Exemple n° 2 : calcul d'abaque . . . 97
IV.6 Conclusion . . . 98

V Validation et essais expérimentaux 101
V.1 Démarche générale . . . 102
V.2 Détermination du coefficient de température de la résistance électrique . . . 104
V.2.1 Dispositif expérimental . . . 104
V.2.2 Protocole expérimental et résultats de mesure . . . 104
V.3 Détermination du coefficient d'échange thermique . . . 107
V.3.1 Dispositif expérimental . . . 107
V.3.2 Protocole expérimental et corrélation mesurée . . . 110
V.3.3 Visualisation des mouvements de convection naturelle . . . 111
V.4 Comparaisons simulations thermiques et mesures thermocouples . . . 113
V.4.1 Cas du tube chauffant . . . 114
V.4.2 Cas d'un harnais électrique réel . . . 117

V.4.3 Conclusion 122
V.5 Expérimentations sur les lignes de transmission 122
V.5.1 Dispositif expérimental et protocole de mesure 122
V.5.2 Modélisation électromagnétique de la configuration expérimentale 124
V.5.3 Analyse des résultats 126
V.6 Conclusion 129

A Démonstration : représentation intégrale d'un potentiel arbitraire 133

B Représentation matricielle des deux types d'équations intégrales 137

C Mesure de l'influence de la température sur la mesure de paramètres S 141

Page intentionnellement blanche

Table des figures

1 Avion moyen-courrier moderne et ses principaux constituants électriques. Crédit image : Safran . . . 2

I.1 Evolution des harnais électriques embarqués sur aéronef . . . 5
I.2 Evolution des puissances électriques embarquées [13] . . . 6
I.3 (a) Dénominations générales des diverses zones de l'A320 – (b) Dénominations des surfaces de commande de vol [98] . . . 6
I.4 Architecture conventionnelle faisant apparaître les quatre vecteurs d'énergie. (a) : [169] ; (b) : [161] repris dans [59] . . . 7
I.5 Schéma de principe de la génération des différentes énergies auxiliaires à partir d'un moteur d'avion [98] . . . 7
I.6 Architecture simplifiée des réseaux hydrauliques et électriques d'un bimoteur Airbus. Cas d'un avion « conventionnel ». Mise en évidence de la partie du réseau utilisée en secours. [98] 8
I.7 Principaux consommateurs de puissance électrique dans le cadre d'une architecture « plus » électrique (reproduit à l'identique depuis [170]) . . . 9
I.8 Architecture simplifiée des réseaux hydrauliques et électriques d'un bimoteur Airbus. Cas d'un avion « plus électrique ». Mise en évidence de la partie du réseau utilisée en secours [98] 10
I.9 Architecture bleedless (identique à celle du B787) (a) : [168] (b) : [161] repris dans [59] . . 11
I.10 Exemple d'architecture bleedless identique à celle utilisée sur le B-787 [169] . . . 11
I.11 Concept d'avion tout électrique développé à l'ONERA . . . 13
I.12 Étape de définition et d'analyse d'une architecture électrique embarquée . . . 14
I.13 Exemples d'abaques de correction graphique des courants admissibles. Tiré de [1] . . . 16
I.14 Principales contraintes s'appliquant lors de la conception des harnais électriques . . . 17

II.1 Schéma de la ligne de transmission élémentaire à deux conducteurs . . . 23
II.2 Description des contours d'intégration pour l'établissement de la première équation des lignes de transmission . . . 23
II.3 Description des contours d'intégration pour l'établissement de la seconde équation des lignes de transmission . . . 25
II.4 Schéma de la ligne de transmission élémentaire à deux conducteurs illuminée par une onde électromagnétique plane . . . 26
II.5 Décomposition du courant total sur la ligne en courant de mode différentiel et commun . . 32
II.6 Tracés des contributions des courants de ligne de transmission pour deux configurations . . 33
II.7 Représentation circuit d'une ligne de transmission multiconducteurs arbitraire . . . 34
II.8 Schéma de la maquette radio-électrique d'un aéronef. Issu de [147] . . . 37
II.9 Diagramme topologique associé à la maquette radio-électrique. Issu de [147] . . . 37
II.10 Différentes représentations d'une architecture électrique . . . 39
II.11 Établissement de l'équation de propagation . . . 40
II.12 Établissement de l'équation de répartition. Reproduit de [29] . . . 40

III.1 Les différents modes de transfert thermique appliqués à une portion de câble électrique . . 44
III.2 Volume infinitésimal pour l'établissement de l'équation de la chaleur 45
III.3 Géométrie considérée pour le coefficient de transfert thermique en *espace libre* fourni par la relation (III.23) 52
III.4 Coefficient d'échange thermique global pour un cylindre de diamètre 16 mm d'après la relation (III.23) et (III.24) 52
III.5 Exemple d'abaque de coefficient de transfert thermique pour différentes configurations en fonction du diamètre de câble.Tiré de [48] 55
III.6 Schéma de principe de la méthode d'homogénéisation thermique pour les câbles multiples. Adapté de [81, 112] 56
III.7 Géométrie d'un câble élémentaire et détails de l'étape 1. Adapté de [81, 112] 57
III.8 Détail des étapes 2 et 3. Adapté de [81, 112] 57
III.9 Principe d'isotropisation. Reproduit de [112] 58
III.10 Différentes applications de la méthode des volumes finis pour la simulation d'échauffement de câbles 60
III.11 Visualisation du maillage et de la distribution de température d'un multicâble. Reproduit de [75] 61
III.12 Variation de la résistivité électrique du cuivre en fonction de la température. Tiré de [81] . 64
III.13 Variation typique de la résistance électrique des métaux purs pour des températures proches du zéro absolu. Tiré de [157]. 65

IV.1 Exemple de domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 71
IV.2 Exemple de domaines homogènes par morceaux $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 72
IV.3 Traitement des domaines ouverts en thermique 74
IV.4 Contour d'intégration pour le traitement des domaines ouverts en électrostatique 75
IV.5 Exemple de domaines homogènes par morceaux $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 77
IV.6 Fonctions de base de type « pulse » 78
IV.7 Exemple de discrétisation surfacique et localisation des points de collocation 78
IV.8 Intégration numérique sur un triangle arbitraire 82
IV.9 Calcul des éléments $\mathcal{D}_X(y)$ et $\mathcal{E}_X(y)$ de la matrice interaction 83
IV.10 Exemple de maillage triangulaire pour les domaines possédant une contribution volumique non-nulle 85
IV.11 Intégration numérique sur un triangle arbitraire 85
IV.12 Différence entre les représentations topologiques EM et thermiques 87
IV.13 Réseau topologique arbitraire et géométrie transverse de chacun des tubes 88
IV.14 Stratégie de couplage du calcul des paramètres électriques primaires (p.u.l) et de la température de coupe droite transverse 90
IV.15 Zones de transferts thermiques dans le cas de câbles blindés (tube n° 2) 93
IV.16 Ajout d'une surface fictive à la cross-section du tube 1 94
IV.17 Ajout d'une surface fictive à la cross-section du tube n° 3 94
IV.18 Construction de la frontière de domaine fictive dans le cas d'un toron de câble cylindrique en espace libre 95
IV.19 Description du cas d'application 96
IV.20 Illustration de la méthode couplée de simulation CEM-Thermique 98
IV.21 Comparaison abaques simulés par la méthode des moments et la norme IEC 60287 100

V.1 Données d'entrées et observables fournis par la partie *thermique* de la chaîne de calcul . . . 102
V.2 Types de torons de câbles utilisés 103
V.3 Schéma de principe du dispositif expérimental 104
V.4 Photographie du banc de mesure et de la chaine d'acquisition 105
V.5 Détails du bain thermostaté 105
V.6 Photographie des câbles utilisés pour la détermination des coefficients de température de la résistance électrique 106
V.7 Principe de la mesure 4-fils. Source :[127] 106

V.8 Représentation graphique de la courbe de résistance électrique en fonction de la température 107
V.9 Caractéristiques principales de l'enceinte climatique . . . 108
V.10 Photographie de côté du dispositif expérimental . . . 109
V.11 Photographie de trois quarts du dispositif expérimental . . . 109
V.12 Représentation graphique et corrélation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh . . . 111
V.13 Représentation graphique et corrélation en fonction de la puissance dissipée et de la température de surface . . . 112
V.14 Caractéristiques de la méthode BOS . . . 113
V.15 Visualisation du flux de convection par la méthode BOS . . . 114
V.16 Géométrie et propriété thermophysique de la coupe droite simulée . . . 115
V.17 Analyse de l'influence de la valeur de conductivité thermique du milieu inter-câble. Échelle de température en °C. . . . 116
V.18 Comparaisons simulation/mesure de la température de surface. Conductivité du milieu inter-câble $\lambda = 1$ W.m^{-1}.K^{-1} . . . 117
V.19 Évolution de la différence de température moyenne relevée entre les thermocouples de surfaces supérieurs et inférieurs en fonction de la puissance thermique dissipée . . . 119
V.20 Définition géométrique du domaine de calcul pour la simulation du harnais réaliste . . . 120
V.21 Tracé des différentes courbes de comparaison simulations/mesures dans le cas d'une conductivité thermique $\lambda_{\text{inter-câble}}$=0.1 W.m^{-1}.K^{-1} . . . 121
V.22 Schéma du montage utilisé pour l'expérimentation « hyperfréquence » . . . 123
V.23 Montage de l'expérimentation couplée CEM-Thermique . . . 123
V.24 Détail des lignes et connexions SMA . . . 124
V.25 Détails du harnais sous test . . . 124
V.26 Schéma du réseau topologique associé à la modélisation CRIPTE . . . 125
V.27 Géométrie de la coupe droite fournie par ALEACAB . . . 126
V.28 Exemple de comparaison mesure-CRIPTE sur la transmission d'une ligne . . . 127
V.29 Exemple de comparaison mesure-CRIPTE sur le couplage entre les lignes . . . 129
V.30 Optimisation de l'échauffement d'un toron de 33 câbles par application d'algorithme génétique. (a) Cross-sections initiales (b) Résultats obtenus après optimisation. Source : [112] . 132

A.1 Exemple de domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ augmenté d'un disque ϵ en un point ξ de sa frontière . 135

Page intentionnellement blanche

Liste des tableaux

I.1 Usage et consommation électrique typique d'un bombardier dans les années suivant la fin de la Seconde Guerre mondiale [56] . . . 4
I.2 Critères de température et d'altitude en fonction des tests et du type d'équipement. Tiré de [171] . . . 15
I.3 Valeurs de pressions normalisées en fonction de l'altitude. Tiré de [171] . . . 15

II.1 Sommaire des références bibliographiques par type de contenu . . . 42

III.1 Déclinaison des différentes parties de la norme IEC/CEI 60287 . . . 54
III.2 Reproduit de [49] . . . 64
III.3 Résumé des différentes ressources bibliographiques . . . 67

IV.1 Correspondance entre les problèmes thermiques et électrostatiques . . . 70
IV.2 Équivalence entre les problèmes électrostatiques et thermiques . . . 86
IV.3 Prise en compte des domaines fermés/ouverts . . . 92
IV.4 Détails des résultats pour la simulation couplée Thermique-EM d'un toron de 11 câbles . . . 99

V.1 Exemple de mesures de la résistance électrique en fonction de la température . . . 107
V.2 Relevé des températures en différents points de la surface du tube de cuivre . . . 111
V.3 Température interne moyenne estimée à partir du couple tension-courant . . . 115
V.4 Relevés des températures de surface dans le cas du harnais électrique réaliste . . . 118
V.5 Relevés des températures internes dans le cas du harnais électrique réaliste . . . 118
V.6 Comparaison mesures/simulations pour différentes valeurs de conductivité thermique inter-câble dans le cas du harnais réaliste . . . 121
V.7 Relevées des températures pour l'expérimentation « hyperfréquence » . . . 125

Page intentionnellement blanche

Introduction

« *Au début de l'aviation, l'homme constituait l'unique source d'énergie embarquée dans l'avion, en excluant la propulsion. Il effectuait manuellement toutes les commandes nécessaires au pilotage. Rapidement, des sources d'énergies ont été introduites afin d'alimenter l'instrumentation de vol facilitant la navigation. L'augmentation progressive de la taille des avions a mené les constructeurs à utiliser des énergies complémentaires à celle de l'homme. Depuis, le transport massif de passagers a encouragé le confort et le développement d'appareils de divertissement, faisant croître les besoins énergétiques. Les énergies mécaniques, pneumatiques et hydrauliques étaient, et sont encore, massivement exploitées dans les aéronefs. L'électricité avait, jusqu'à récemment, une place faible comparée à l'ensemble des énergies précitées. Aujourd'hui, l'énergie électrique prend une part de plus en plus importante, au détriment des autres énergies. Le terme d'avion* plus électrique *est couramment employé. Cette progression s'explique en partie par le développement de l'électronique de puissance, qui permet une grande souplesse d'utilisation des équipements électriques. L'usage de technologies désormais compétitives et fiables permet de surpasser des solutions non-électriques déjà optimisées, n'ayant pas un potentiel d'amélioration significatif. L'électricité simplifie également la distribution, en limitant le risque de fuites et en facilitant l'isolation d'un secteur défectueux.* » [98] Ce verbatim issu de la thèse d'Olivier Langlois résume parfaitement la situation dans l'aéronautique mais aussi dans l'industrie des transports en général. Avec l'apparition de nombreux systèmes électroniques, l'amélioration du confort à bord des véhicules et le développement des nouvelles électroniques de puissance basées sur des matériaux dits à « grands gaps », les véhicules s'électrisent de plus en plus jusqu'à atteindre aujourd'hui des puissances embarquées de l'ordre du MWe (cf. Figure 1).

Il subsiste cependant de nombreux verrous technologiques empêchant la mise sur le marché rapide d'aéronefs entièrement électriques pour le transport de masse. Parmi les difficultés rencontrées, la plus critique est sans nul doute celle concernant le stockage et la production d'électricité : il est en effet impossible actuellement de rivaliser avec les 43 MJ/kg de densité d'énergie du kérosène... L'avion plus électrique peut donc être vu comme une étape intermédiaire qui permettrait de tirer dès à présent parti des avantages de ces systèmes électriques, tout en acquérant progressivement l'expérience nécessaire à une exploitation plus vaste de l'électricité. Les restrictions tant thermiques qu'électromagnétiques (échauffement des terminaux et des câbles, qualité du réseau, compatibilité inter-systèmes) prennent et prendront encore plus d'importance dans le développement des architectures plus électriques de demain. Les réseaux de câblage, en tant que principaux éléments de distribution d'énergie et de signaux électriques, se trouvent donc particulièrement sensibles à ces nouvelles contraintes d'intégration auxquelles s'ajoutent évidemment le problème de la masse totale embarquée. Dans ces travaux de doctorat, je propose donc une contribution à ce sujet de recherche en présentant le développement d'une chaîne de calcul couplée CEM-Thermique qui posera, je l'espère, les premières bases d'une optimisation industrielle des routes de câbles pour les futurs développements d'aéronefs plus électriques.

Dans le chapitre I, je présenterai le contexte général dans lequel se situent ces travaux, à savoir l'évolution des architectures *énergétiques* des aéronefs ainsi que la place de l'électricité au sein de celles-ci. Ce

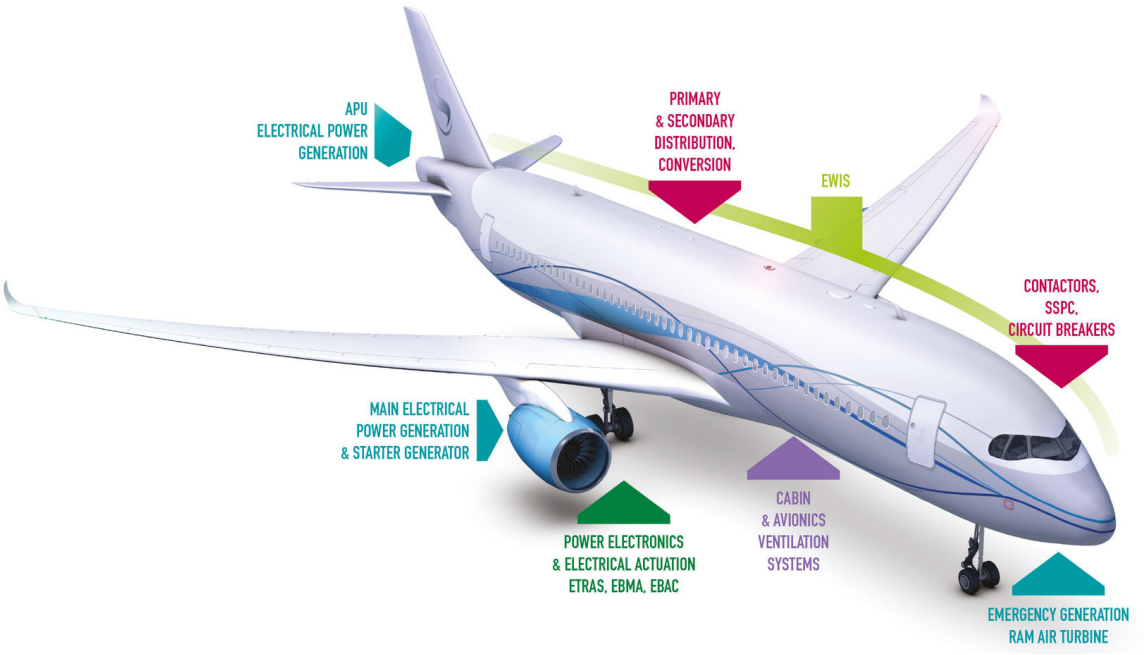


Figure 1 – Avion moyen-courrier moderne et ses principaux constituants électriques. Crédit image : Safran

chapitre sera l'occasion d'expliciter clairement les problématiques auxquelles je tâcherai de répondre dans la suite du manuscrit.

Aux chapitres II et III, je réaliserai deux analyses bibliographiques qui couvriront respectivement les phénomènes *électromagnétiques* et *thermiques* liés aux câblages électriques. Ces chapitres seront ainsi l'occasion d'introduire le formalisme des *lignes de transmission* et l'*équation de la chaleur* entre lesquels nous verrons qu'il existe des similitudes.

Sur la base de ces similarités, je détaillerai au chapitre IV la mise en oeuvre d'une chaîne de calcul couplée CEM-Thermique permettant la prédiction à la fois des courants induits par et sur les réseaux de câblage ainsi que l'échauffement des torons de câbles constituant ces réseaux. Les algorithmes et méthodes numériques développés dans ce chapitre, et primés au cours de la thèse [1], constituent l'originalité de ces travaux de doctorat.

Enfin, dans un dernier chapitre, nous validerons expérimentalement certaines parties du noyau de calcul développé. Ces expérimentations seront de plus l'occasion d'introduire des dispositifs expérimentaux qui pourront servir de base à la caractérisation rapide des propriétés thermophysique et de refroidissement des torons de câbles.

1. John McCarthy Student Award lors du 30th International Council of the Aeronautical Sciences Congress qui s'est tenu à Daejeon (Corée du sud) en Septembre 2016 – http://www.icas.org/media/pdf/Awards/ICAS%202016%20awardees.pdf

CHAPITRE I

Contexte

Table des matières

I.1 Évolution des architectures électriques embarquées des aéronefs . . . 3
I.1.1 Historique . . . 3
I.1.2 Architecture globale d'un aéronef « conventionnel » . . . 5
I.1.3 L'avion « plus électrique » . . . 9
I.1.4 L'avion tout électrique . . . 11
I.2 Contraintes sur les réseaux de câblage . . . 12
I.2.1 Influence des conditions environnementales . . . 13
I.2.2 Prise en compte de l'ensemble des contraintes . . . 17
I.3 Objectifs de la thèse . . . 17
I.4 Conclusion . . . 18

L'objectif de ce chapitre est d'introduire le contexte général afférant aux récents développements des aéronefs « plus » voire « tout » électriques. Dans un premier temps, les évolutions des architectures énergétiques seront abordées d'un point de vue historique avant que les stratégies d'électrification actuelles mises en oeuvre par les industriels soient présentées. Enfin, une analyse détaillée de l'ensemble des contraintes d'intégration liées aux faisceaux de câbles électriques (aussi appelés *harnais*) permettra d'expliciter clairement les objectifs de ces travaux de thèse.

I.1 Évolution des architectures électriques embarquées des aéronefs

L'analyse des évolutions liées à l'augmentation des puissances embarquées à bord des aéronefs sera dans un premier temps présentée d'un point de vue historique, ce qui permettra l'introduction des différentes approches mises en oeuvre autour des architectures électriques.

I.1.1 Historique

D'une manière générale, le déploiement de l'électricité à bord des aéronefs remonte aux tous premiers développements de l'aéronautique avec l'introduction des systèmes intégrés d'allumage des moteurs à explosion. Toutefois, ce type d'équipement primaire ne requiert aucun câblage complexe puisque la bobine d'allumage, équipée d'un aimant permanent, n'est connectée à aucun autre équipement électrique car l'ignition nécessite une action mécanique alors souvent humaine.
Avant la première transmission radio réussie à bord du ballon dirigeable militaire *Bêta* en 1911, le besoin en électricité des aéronefs se limitait à la fourniture d'énergie pour de simples systèmes d'éclairage, cet apport de puissance supplémentaire étant alors fourni par des batteries auxiliaires identiques à celles utilisées dans les premières automobiles [56]. Ces avancées techniques coïncident avec l'apparition

des premiers problèmes de *compatibilité électromagnétique* observés lors d'essais de radioélectrification d'équipements militaires [2].

Bien que jusqu'au début de la Seconde Guerre mondiale, l'essentiel de la puissance électrique des aéronefs était tirée de batteries, il apparaît dès 1917 des sources de courant issues de générateurs entraînés par des hélices (« independant airscrew-driven generators mounted in the slip stream of the aircraft ») [56]. C'est à cette même époque qu'apparaissent, du fait de l'augmentation des puissances requises, des alternateurs intégrés directement à l'arbre de transmission du moteur. Hockmeyer dresse un état de l'art du développement de tels générateurs dans la période englobant l'entre-deux-guerres ce qui permet d'apprécier les évolutions significatives liées aux puissances embarquées [74].

Les besoins en électricité augmentant très significativement durant la Seconde Guerre mondiale, il apparait dès lors nécessaire de faire cohabiter un réseau électrique hybride alternatif/continu. Pour donner un ordre de grandeur des puissances nécessaires, les avions Lancaster fabriqués à la fin du conflit embarquaient deux générateurs dual AC ϟ DC (1,2 kW AC et 3 kW DC) ainsi que deux générateurs DC de 3 kW chacun. Les fonctions assurées par l'énergie électrique se sont alors considérablement diversifiées, comme l'indique le tableau I.1.

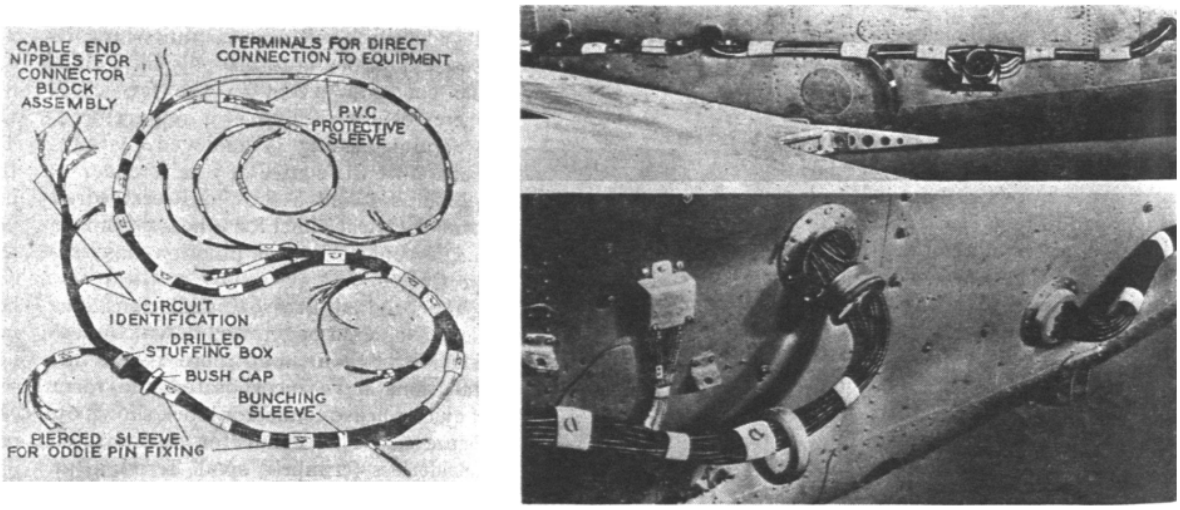
Application	Type of supply	Special requirements of supply	Approximate power consumption
			kW
Radiocommunication equipment	D.C. primary supply	Voltage regulation	1
Radar bombing and navigation equipment	400 and 1 600 c/s 3-phase and single-phase	Voltage regulation within ±2%. Frequency regulation within ±2%. Voltage modulation not to exceed 0·15%	12
Special gyroscopic equipment	A.C.	±0·05% frequency tolerance	0·1
Instrument supplies (Gyro-compasses, Artificial horizons, Position-indicating devices (synchros), etc.)	400 c/s 3-phase	Voltage and frequency regulation within ±5%	1
Automatic pilots	400 c/s 3-phase	Voltage regulation within ±5%	0·50
Gyro gunsight	D.C. primary supply	—	0·15
Fuel pumps	D.C. primary supply	—	5
Flying controls	D.C. primary supply	—	10
De-icing (*a*) Airframe (*b*) Windscreens (*c*) Propellers	Primary supply or special generator	—	30–60
Undercarriage operation	D.C. primary	—	50
Food heating	D.C. primary	—	0·6
Camera supply	D.C. primary supply	—	6
Gun firing	1 400 c/s	—	0·050 (short rated, e.g. for 1 min)
Landing lamps	Primary supply	—	0·5
Navigation lights	Primary supply	—	0·050
General lighting	Primary supply	—	0·150
Engine-control instruments	400 c/s	—	0·200
Bomb-release circuits	D.C. primary supply	—	—

Table I.1 – Usage et consommation électrique typique d'un bombardier dans les années suivant la fin de la Seconde Guerre mondiale [56]

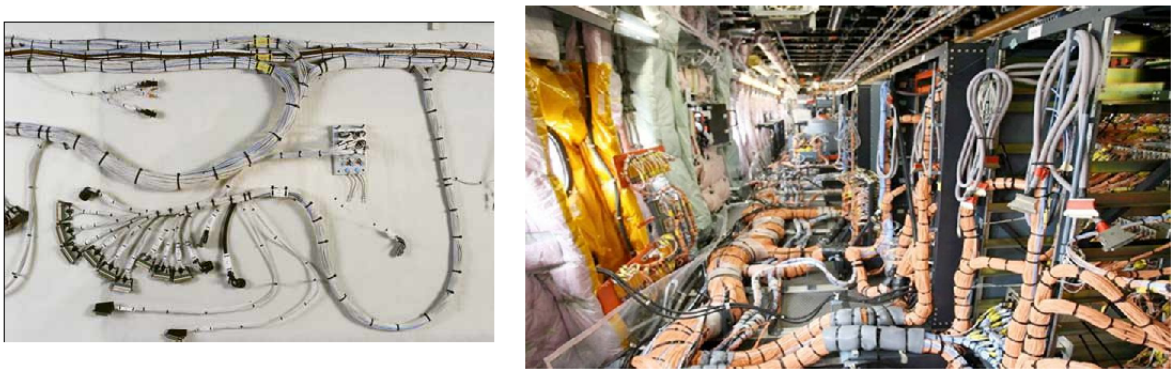
Dès la fin de la Seconde Guerre mondiale, les équipements électriques aéronautiques passent du statut « d'utiles mais non essentiels » à celui « d'indispensables pour la sécurité ». De plus, les conditions d'utilisation bien particulières de ces équipements sont, dès leur introduction, clairement identifiées et les besoins en exigences normatives se font très vite ressentir (premiers travaux de normalisation de la Royal Aircraft Establishment sous la direction de G.E Bairsto). Ils concernent notamment la tenue aux conditions climatiques et vibratoires, la recherche du gain de masse des équipements et des installations, ainsi que les éventuelles interférences du réseau de câblage avec les équipements radio et de navigation (tels que le compas magnétique) [56].
Ces retours d'expérience mèneront à la définition de l'environnement normatif particulièrement complexe et dense de l'industrie aéronautique.

Le transport de l'énergie électrique des organes de production (générateurs) et/ou de stockage (batteries) jusqu'aux systèmes finaux nécessite l'emploi de conducteurs électriques assemblés en *harnais* pour faciliter leur intégration et leur cheminement dans la structure de l'aéronef. Sur ce point, peu

de choses ont évolué jusqu'à ce jour, si ce n'est dans les technologies de câbles et la densité du réseau électrique comme le montre la comparaison des figures I.1(a) et I.1(b).



(a) Harnais électriques typiquement employés dans les avions de combat de la Royal Air Force à la fin de la Seconde Guerre mondiale [76]



(b) Harnais électriques actuellement déployés dans l'A380

Figure I.1 – Evolution des harnais électriques embarqués sur aéronef

La nette densification des réseaux électriques s'explique par les avancées dans l'aviation civile et commerciale grâce, notamment à la généralisation des commandes de vol électriques, à l'introduction massive d'électronique pour l'aide au pilotage, ainsi qu'à l'amélioration du confort de bord. En effet, depuis le premier vol commercial moyen-courrier en 1955 (celui de la Caravelle SE 210), les puissances embarquées ont augmenté de manière exponentielle pour atteindre aujourd'hui l'ordre de grandeur du MW [13] (soit la production d'une éolienne de diamètre compris entre 50 et 60 m) comme le montre la figure I.2.

Depuis une quinzaine d'années, ce phénomène d'électrification croissante porte le nom *d'avion « plus » électrique* (ou MEA pour *More Electrical Aircraft*). Notons simplement que l'électrification des aéronefs s'est déroulée de manière graduelle et non pas de manière aussi disruptive que l'on pourrait croire. A cet égard, de nombreuses problématiques soulevées par l'intégration optimale des équipements électriques et publiées avant 1960 dans [56, 74, 76] restent d'actualité.

I.1.2 Architecture globale d'un aéronef « conventionnel »

Avant d'aborder l'étude des véhicules « plus » ou « tout » électriques, il est nécessaire de rappeler les fondamentaux d'architecture énergétique des aéronefs commerciaux. Tout d'abord, la figure I.3(a) rappelle brièvement les différentes zones d'un A320 avec les terminologies standards utilisées par

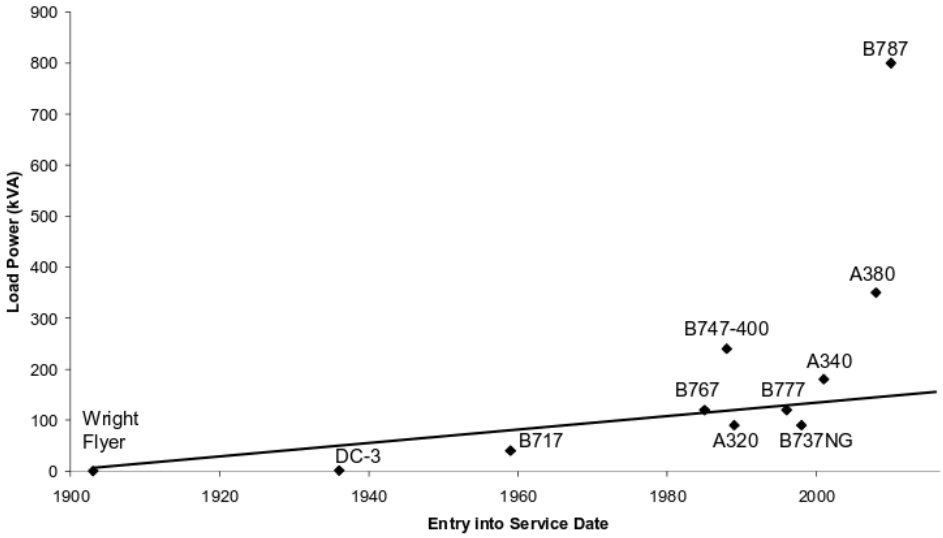


Figure I.2 – Evolution des puissances électriques embarquées [13]

Airbus, et plus particulièrement les éléments liés aux commandes de vol I.3(b).

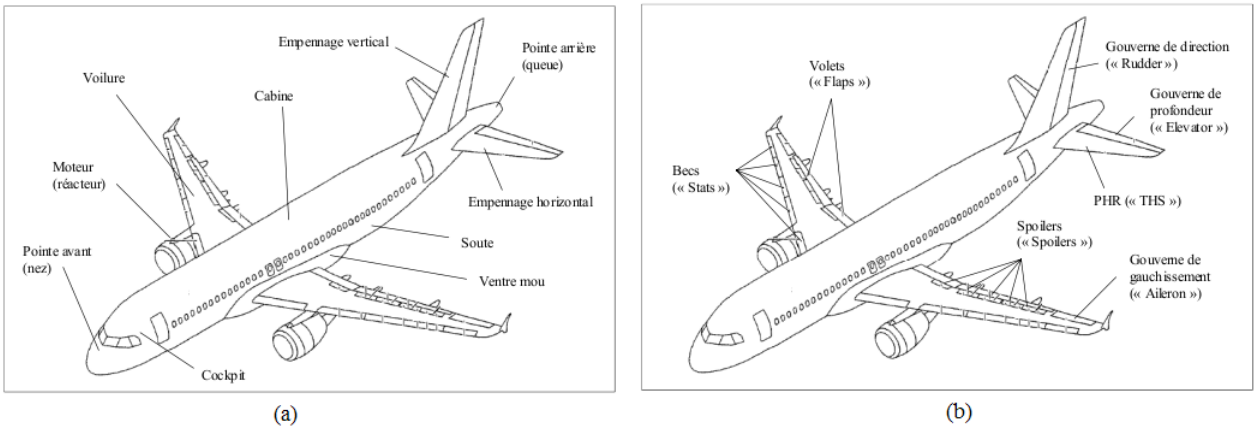


Figure I.3 – (a) Dénominations générales des diverses zones de l'A320 – (b) Dénominations des surfaces de commande de vol [98]

Les quatre formes d'énergie utilisées (mécanique, hydraulique, pneumatique, électrique) à bord des aéronefs, ainsi que la localisation des systèmes consommateurs, sont représentées schématiquement sur les figures I.4(a) et I.4(b).

Utilisation des énergies hydrauliques et pneumatiques

Dans un avion conventionnel, la pressurisation et la climatisation de l'aéronef sont assurées par un système de conditionnement d'air (encore appelé système ECS pour *Environmental Control System*) découlant d'un prélèvement *direct* d'air sur les étages compresseurs de basse et haute pression des réacteurs appelé « bleed » (cf Fig.I.4(b) et partie gauche de la figure I.5)
L'énergie hydraulique est quant à elle obtenue par une pompe entraînée mécaniquement par le moteur. Ce réseau hydraulique est principalement utilisé pour actionner les différents systèmes de commandes de vol nécessaires à la manoeuvre de l'avion. Il assure également la sortie et la rentrée du train d'atterrissage ainsi que les fonctions de freinage.
Depuis les années 80, les avions de la gamme Airbus sont toutefois dits « à commandes électriques », c'est-à-dire que les liaisons mécaniques *directes* sont remplacées par des liaisons électriques entre les leviers de commande du pilote et les servocommandes. Les actionneurs des commandes de vol restent donc à puissance hydraulique mais leurs commandes, elles, sont électriques.

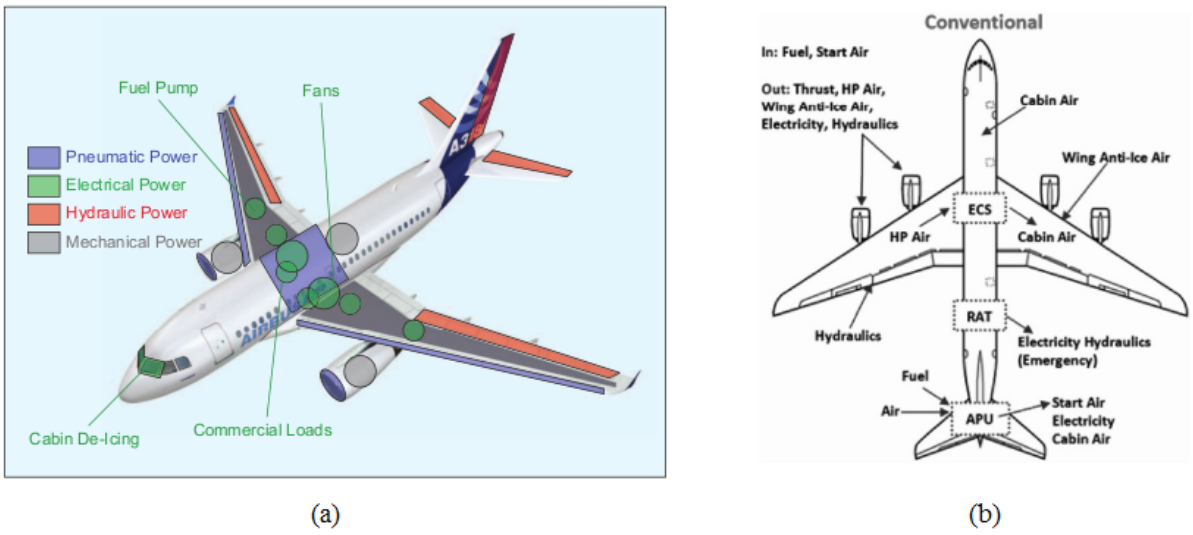


Figure I.4 – Architecture conventionnelle faisant apparaître les quatre vecteurs d'énergie. (a) : [169] ; (b) : [161] repris dans [59]

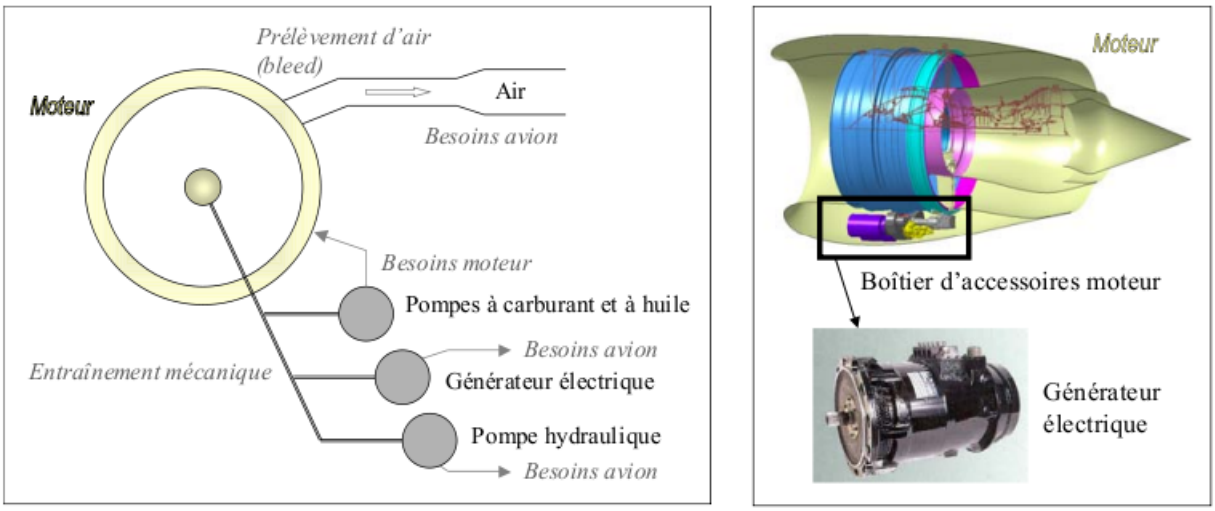


Figure I.5 – Schéma de principe de la génération des différentes énergies auxiliaires à partir d'un moteur d'avion [98]

Ce type d'architecture « conventionnelle » est dit « 3H » car il comporte trois réseaux hydrauliques du fait des redondances (deux réseaux principaux plus un de secours). La figure I.6 représente le schéma synoptique d'un réseau électro-hydraulique d'un Airbus bi-moteur conventionnel [98].

La plupart des avions commerciaux disposent de ces trois circuits de puissance hydraulique pour actionner les gouvernes, les becs et les volets, les freins et les trains d'atterrissage. De cette manière, l'alimentation des actionneurs se répartit sur ces trois circuits hydrauliques, permettant de conserver partiellement les commandes de vol en cas de problème sur un ou deux circuits [99].
Cette redondance est caractéristique des systèmes aéronautiques et fait partie des contraintes à prendre en compte dans le dimensionnement des architectures. La génération hydraulique est obtenue par des pompes (*Engine Driven Pump* ou EDP) entraînées par le compresseur haute pression des réacteurs. Un accumulateur (Accu) est également disposé sur chaque circuit afin d'éviter les variations de pression lors du fonctionnement d'actionneurs puissants. Comme source de secours, la RAT (*Ram Air turbine*) se déploie en cas de besoin et entraîne elle aussi une pompe hydraulique permettant de pressuriser l'un des trois circuits. Le système de freinage du train d'atterrissage possède quant à lui son propre accumulateur hydraulique local [99].

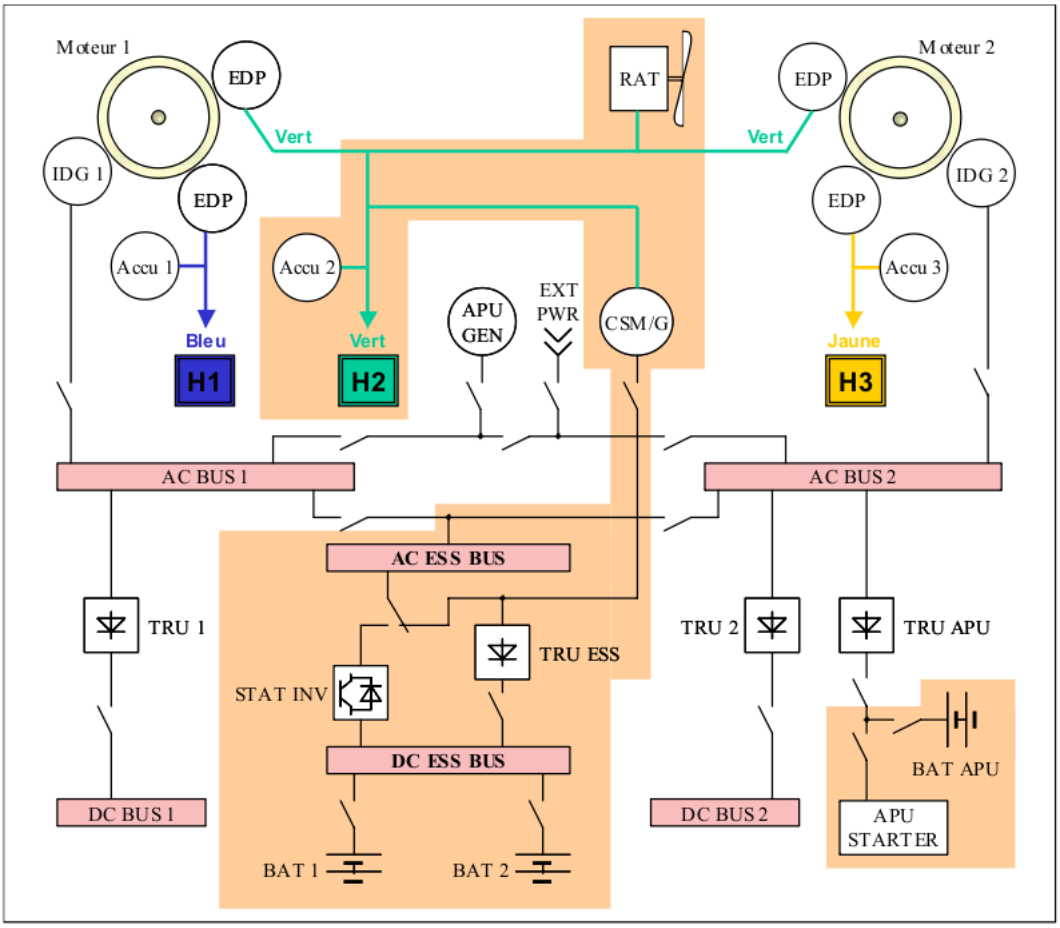


Figure I.6 – Architecture simplifiée des réseaux hydrauliques et électriques d'un bimoteur Airbus. Cas d'un avion « conventionnel ». Mise en évidence de la partie du réseau utilisée en secours. [98]

Utilisation de l'énergie électrique

Le réseau électrique de ce type d'aéronef est constitué d'une partie alternative (AC : triphasé 115/200V – 400 Hz) et d'une partie continue (DC : 28V). Comme c'est généralement le cas pour les avions moyens et long-courriers, le réseau primaire est *alternatif*, et le sous-réseau *continu*. Les principaux consommateurs sont alimentés en AC tandis que les petits le sont en DC. Sur chaque réacteur est couplé un IDG (*Integrated Device Generator*) permettant la génération électrique primaire (115/200 V AC) (Fig. I.5). L'IDG est entraîné en rotation par le compresseur haute pression comme la pompe hydraulique. Chaque générateur alimente l'un des bus alternatifs (AC BUS). Pour un bi-moteur, les deux réseaux fonctionnent indépendamment l'un de l'autre, bien que dans le cas d'une défaillance, un générateur peut alimenter simultanément les deux bus via un jeu d'interrupteurs. Le réseau continu est obtenu à partir du réseau alternatif, à l'aide de plusieurs blocs transformateurs-redresseurs (TRU).

En plus des IDG, il existe les sources auxiliaires suivantes :

- APU (Auxiliary Power Unit) : il s'agit souvent d'un turbogénérateur fonctionnant au kérosène utilisé au sol pour alimenter divers systèmes quand les moteurs sont à l'arrêt. Il permet notamment la génération d'air pour le démarrage des moteurs ainsi que pour le conditionnement de la cabine.
- Des batteries : elles peuvent être utilisées pour la mise sous tension de l'avion. Dans les situations d'urgence, elles assurent la continuité énergétique. Initialement chargées, elles peuvent assurer un niveau de tension suffisant pendant plusieurs dizaines de minutes.
- Un CSM/G (Constant Speed Motor/Generator) : c'est le générateur électrique de secours. Il permet d'alimenter le réseau en AC 115/200V – 400 Hz, à partir d'un circuit hydraulique. De faible puissance, il alimente la partie vitale du réseau électrique en cas de perte des générateurs

principaux. Il est alimenté par la RAT.
L'énergie électrique alimente de nombreux équipements à savoir : calculateurs, instruments de navigation, commandes d'actionneur, équipements de dégivrage, éclairages et diverses charges commerciales.

I.1.3 L'avion « plus électrique »

D'un point de vue général, l'approche *« plus » électrique* consiste à remplacer les circuits hydrauliques et/ou pneumatiques par des systèmes électriques plus fiables, de maintenance simplifiée et présageant des gains en masse et en volumes significatifs. Ces fonctions nouvellement assurées sont présentées en figure I.7. Industriellement, les principaux intégrateurs Airbus et Boeing ont suivi des approches distinctes, dîtes respectivement *hydraulicless* et *bleedless*.

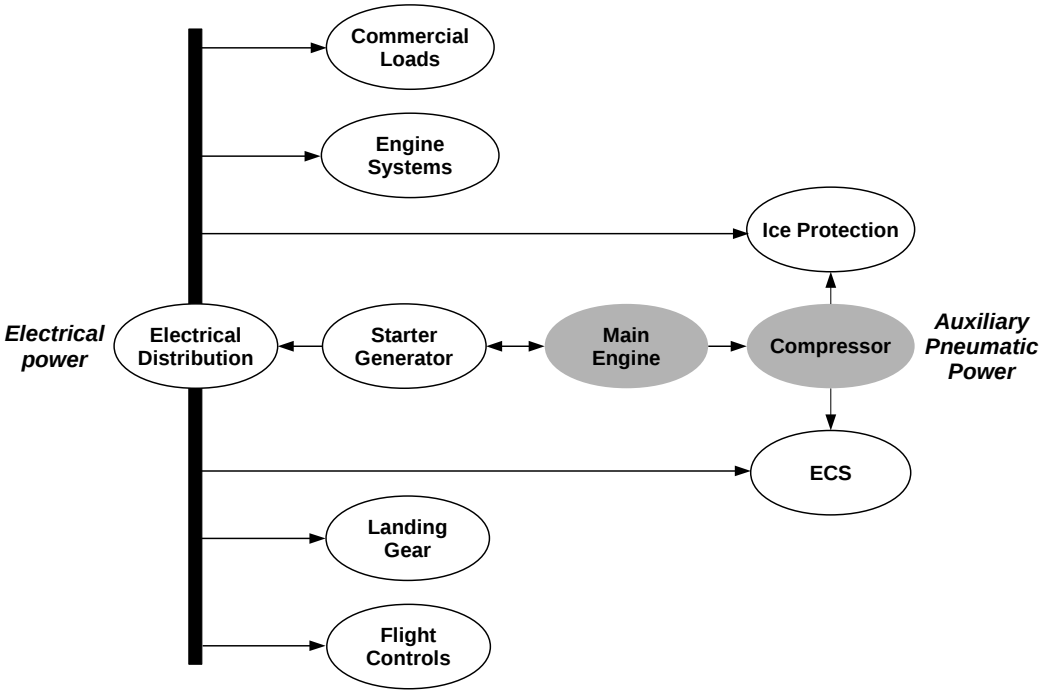


Figure I.7 – Principaux consommateurs de puissance électrique dans le cadre d'une architecture « plus » électrique (reproduit à l'identique depuis [170])

Historiquement, l'approche *hydraulicless* précède l'approche *bleedless* mais les puissances engagées par cette dernière sont de l'ordre du MW électrique.
Il peut être utile de se référer dès à présent à [99], dans lequel est proposée une très bonne introduction des concepts clés liés à l'avion plus électrique. Dans [168, 169], les changements d'architecture que ces concepts entraînent sur le réseau électrique embarqué sont abordés plus en détails. Enfin, les références [46, 59, 173] constituent une revue des réalisations concrètes et des éléments prospectifs associés à la propulsion distribuée qui sera présentée un peu plus loin dans le chapitre.

L'approche *hydraulicless*

Pour l'A380 et l'actuel A350, plusieurs innovations majeures ont été introduites comme la refonte des propriétés de la génération électrique (fréquence variable et tension nominale AC) ainsi que le remplacement du réseau de secours hydraulique par un réseau entièrement électrique. Cette architecture est par conséquent dite « 2H+2E » et est parfois appelée *hydraulicless* (voir Fig. I.8). De plus, un tiers des actionneurs manles gouvernes sont remplacés par des EHA (*Electro-Hydrostatic Actuator*), et/ou des EMA (*Electro-Mechanical Actuator*).
Comme évoqué précédemment, une différence fondamentale intervient sur le réseau électrique par rapport aux précédents appareils de la gamme Airbus. En effet, le réseau alternatif possède une fréquence variable, comprise entre 360 et 800 Hz, grâce à l'utilisation de VFG (*Variable Frequency Generator*) et non plus d'IDG. Dans ce cas, la génératrice est directement couplée à l'étage haute pression du réacteur, ce qui a l'avantage de réduire considérablement les dimensions et la masse des

générateurs, car le système de régulation mécanique de vitesse est supprimé. En ce qui concerne la structure du réseau, chaque réacteur entraîne un VFG qui alimente sa propre barre d'alimentation. Les actionneurs électriques de commande de vol sont quant à eux alimentés par deux barres dédiées. La source de secours devient elle aussi électrique : la RAT hydraulique est remplacée par une RAT électrique alimentant le bus AC essentiel en cas de défaillance [99].
Les TRU (*Transformer-Rectifier Unit*) introduits dans les précédents aéronefs sont remplacés par des BCRU (*Battery Charger Rectifier Unit*), lesquels permettent d'alimenter les barres DC et de gérer la charge des batteries [99].

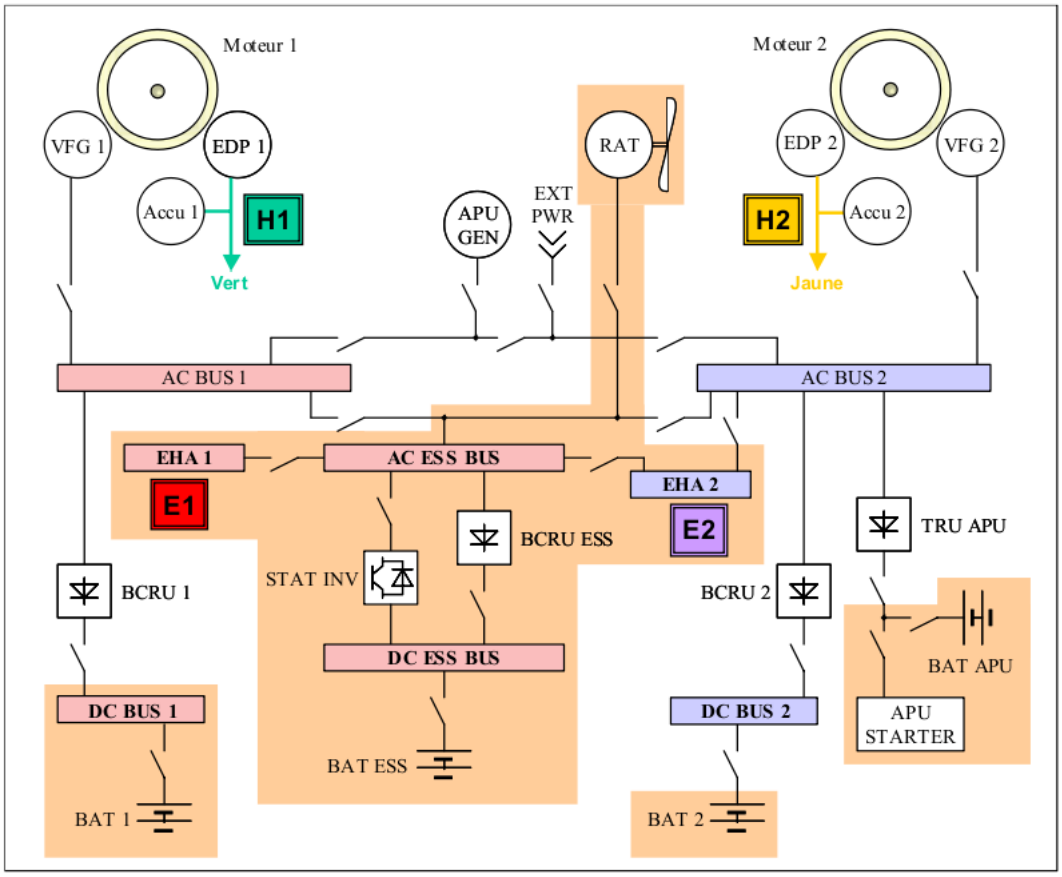


Figure I.8 – Architecture simplifiée des réseaux hydrauliques et électriques d'un bimoteur Airbus. Cas d'un avion « plus électrique ». Mise en évidence de la partie du réseau utilisée en secours [98]

L'approche *bleedless*

L'approche suivie par Boeing dans le cas du B787 Dreamliner pousse encore un peu plus la philosophie « plus » électrique. Elle consiste principalement à remplacer la fonction de conditionnement d'air, classiquement pneumatique, par un système électrique équivalent, ce qui conduit à éliminer la prise d'air au niveau des moteurs (voir Fig. I.9). Cette configuration est ainsi dite *bleedless*. Cette architecture ne vaut pas seulement pour l'ECS (*Environmental Conditionning System*) mais aussi pour le système de « de-icing » (ou WIPS pour *Wing Ice Protection System*).
Dans le même temps, ce changement radical d'architecture fut aussi l'occasion d'introduire de nouvelles innovations technologiques comme :

- le passage à un système de freinage électromécanique fabriqué par *Messier-Bugatti-Dowty* (Fig.I.9(a))
- le démarrage électrique des moteurs est assuré grâce à des VFSG (Variable Frequency Stator Generators), délivrant une puissance unitaire de 250 kW (Fig.I.9(b)). La taille des VFSG n'est pas modifiée par cette nouvelle utilisation puisque la puissance requise par les nouveaux besoins (ECS, WIPS) est équivalente.
- le sous-réseau continu change lui aussi et ne fournit plus seulement une tension de 28V mais

aussi de ± 270V [168, 169].

Ces modifications majeures impliquent donc d'embarquer une puissance de l'ordre du MW [168].

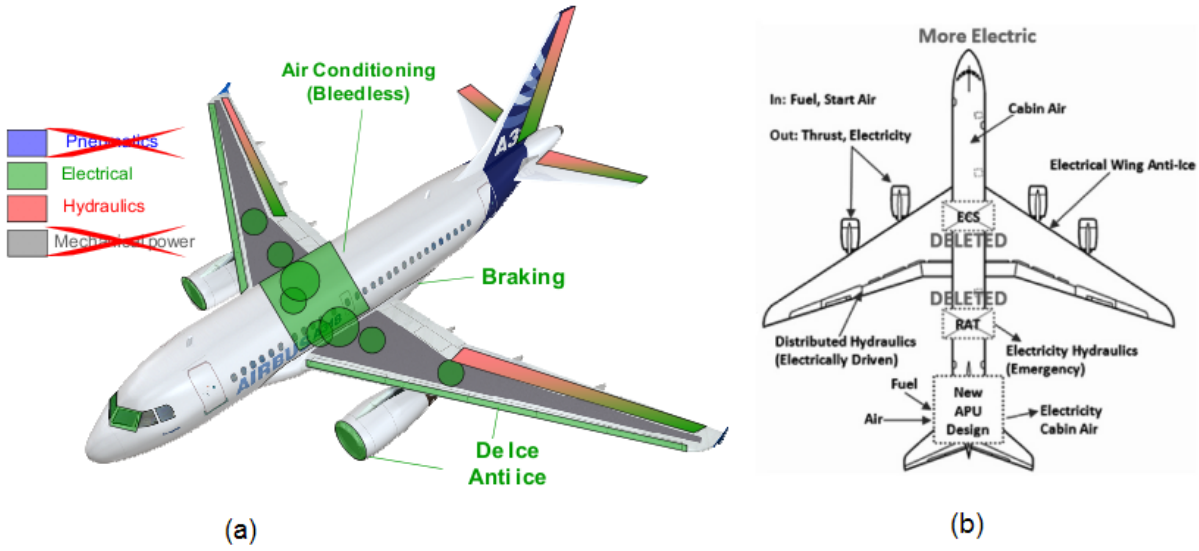


Figure I.9 – Architecture bleedless (identique à celle du B787) (a) : [168] (b) : [161] repris dans [59]

A titre d'illustration, le synopotique typique d'une architecture *bleedless* est donné en figure I.10

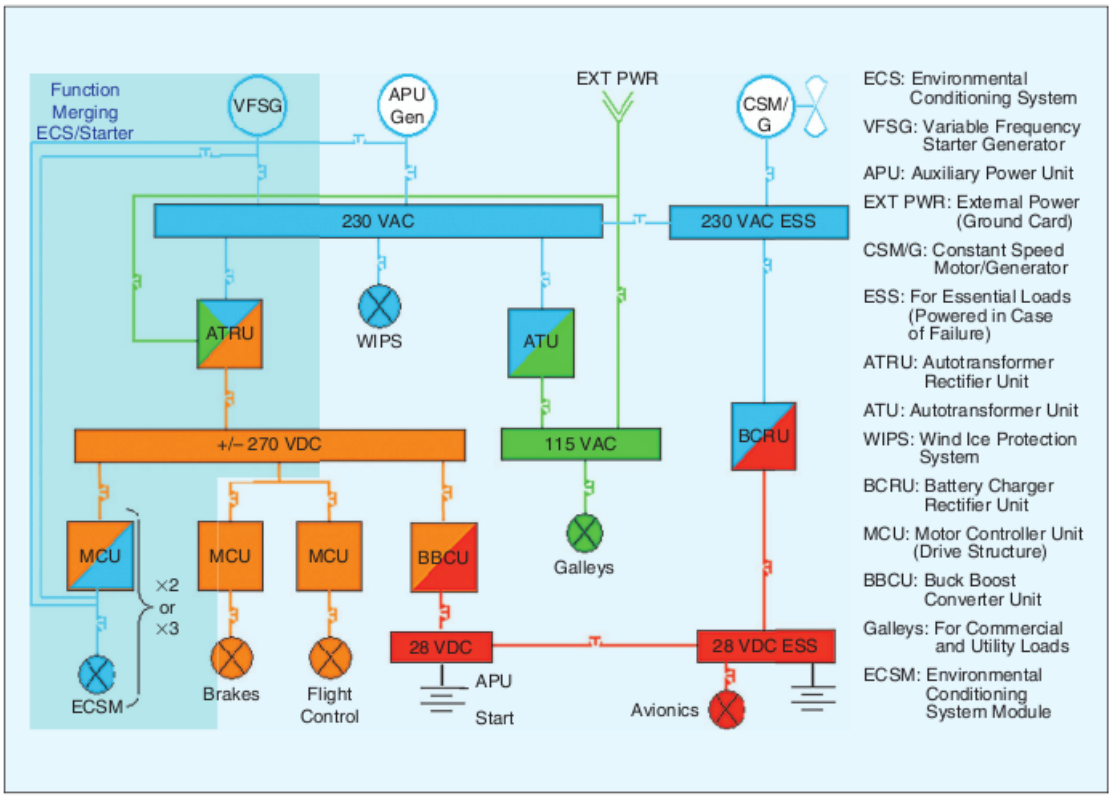


Figure I.10 – Exemple d'architecture bleedless identique à celle utilisée sur le B-787 [169]

I.1.4 L'avion tout électrique

Les verrous technologiques empêchant les industriels du secteur aéronautique (fournisseurs, intégrateurs et même compagnies aériennes) de proposer des moyen-courriers entièrement électriques ne

devraient pas être levés avant au moins une dizaine d'années [1] [2].

Néanmoins, le secteur devrait massivement et rapidement bénéficier des avancées réalisées dans le domaine automobile, où le développement des voitures électriques a permis d'élever le niveau de maturité de certaines technologies clés comme : les sources embarquées (batteries et piles à combustible), les moteurs électriques et l'électronique de puissance.

Déjà, le transfert de ces technologies à l'aviation légère a permis de développer des avions à propulsion électrique tel que l'e-Fan d'Airbus [85]. Ce phénomène d'électrification totale porte désormais l'appellation de « All Electrical Aircraft » (AEA) pour se distinguer du MEA (*More Electrical Aircraft*).

Forts de ces succès, les acteurs du milieu aéronautique réfléchissent à la transposition de ces concepts d'aéronefs légers à des aéronefs de plus grande capacité [83]. Or, cette transposition nécessite de considérer des puissances à embarquer de plusieurs dizaines de MégaWatts. En effet, pour de tels types de véhicules, le niveau de puissance maximale concernant les aspects propulsifs est évalué à environ 30 MW pour la phase de décollage d'un bi-moteur type A320. Or, les densités d'énergie massique et les puissances spécifiques des batteries actuelles ne permettent pas de satisfaire la contrainte de masse maximale autorisée au décollage.

Une large partie de la littérature scientifique traite des problématiques d'hybridation des sources d'énergie (combinaison de batteries, de piles à combustible à hydrogène et de générateurs à base de kérosène) [184] ainsi que de l'hybridation des moteurs thermiques par une aide électrique appliquée sur l'arbre de transmission [184].

Les recherches menées dans ce cadre sont aussi l'occasion d'introduire de nouveaux concepts de propulsion comme la propulsion distribuée sur laquelle travaille notamment l'ONERA [72, 166].

La figure I.11(b) présente le synoptique d'une architecture électrique basée sur ce principe de propulsion distribuée [166]. Dans l'architecture présentée, des clusters indépendants de propulsion ont été implémentés afin de répondre à la fois aux exigences de sécurité (redondance / perte moteur) mais aussi de contrôle (en lacet par exemple) de l'avion via les fans électriques. Chaque cluster, composé de 4 *fans* électriques, est alimenté par une pile à combustible (hydrogène à 700 bars), permettant de fournir l'énergie et la puissance moyenne, et par un pack batterie permettant de couvrir les besoins de puissances ponctuelles lors des phases dynamiques. Dans ce cas d'application, l'aéronef est dimensionné pour une puissance d'environ 440 kW pour une énergie totale de 550 kWh.

I.2 Contraintes sur les réseaux de câblage

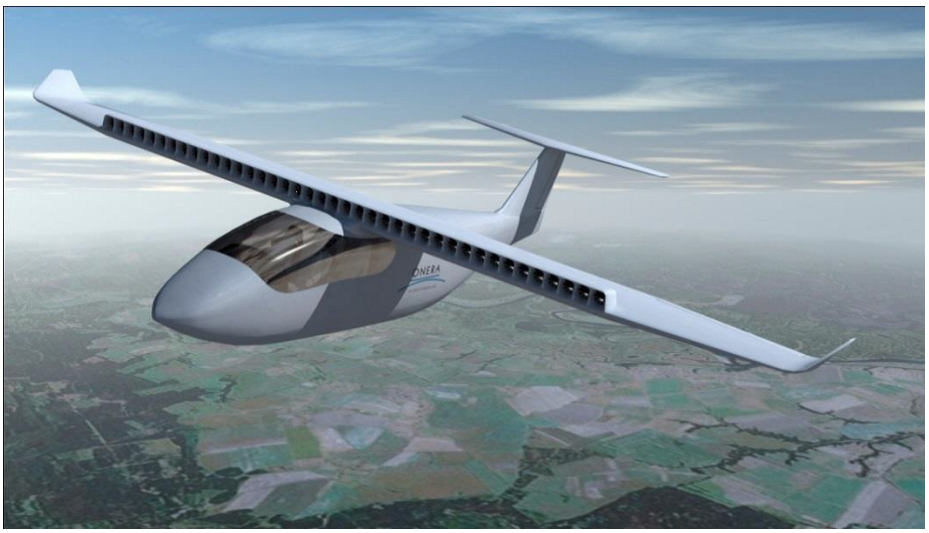
L'apparition de nouveaux aéronefs à propulsion électrique nécessitera de gérer, d'embarquer et donc d'intégrer encore plus d'énergie électrique à bord. La gestion et l'intégration de cette énergie passera obligatoirement par la définition d'une architecture électrique qui devra être à la fois reconfigurable, sûre et optimisée du point de vue des contraintes d'intégration (masse, volume, tenue aux divers environnements).

La figure I.12 synthétise les principales étapes de définition et d'analyse d'une architecture électrique. A partir de l'analyse des différents systèmes électriques, l'ensemble des liaisons fonctionnelles dites « point à point » (liaison portant un signal utile entre deux équipements) est identifié, permettant ainsi de décrire l'architecture électrique globale (AE) à déployer.

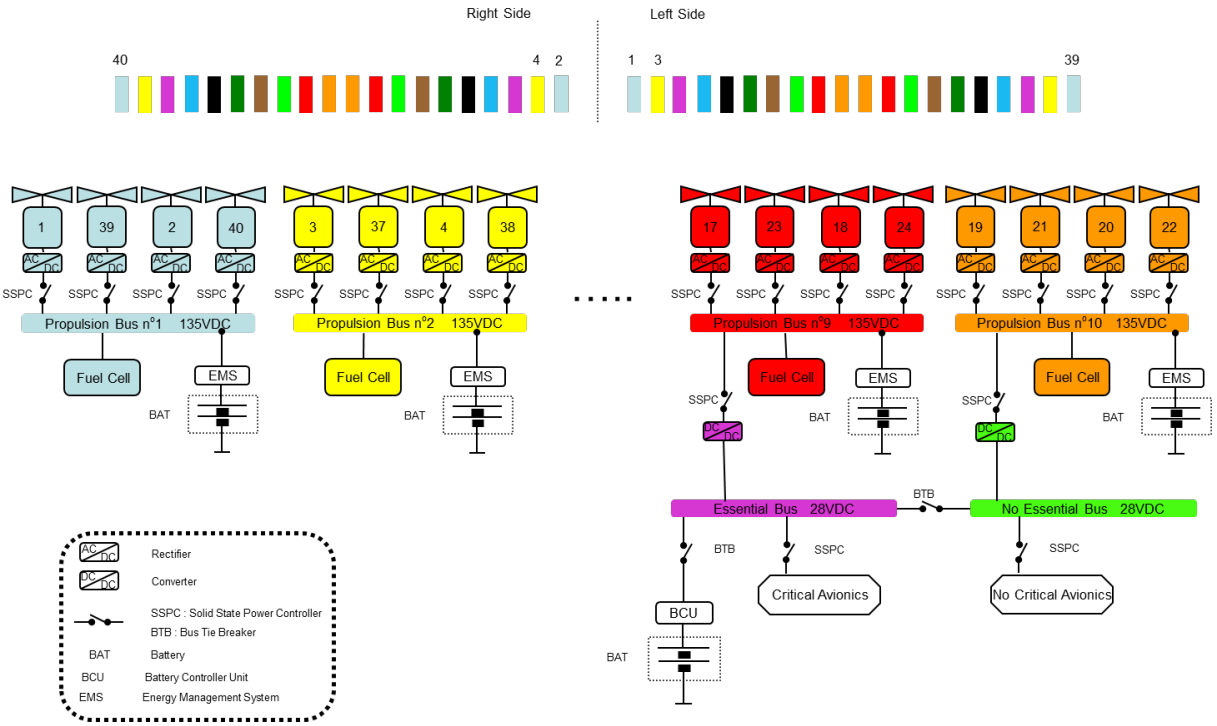
Afin de concevoir une installation viable respectant à la fois les exigences de sécurité préconisées (redondance, ségrégation) et l'espace disponible dans la structure, les supports physiques (fibres optiques, câblages, canaux de propagation...) de ces liaisons fonctionnelles sont « projetés » dans la géométrie 3D de l'aéronef.

Le regroupement d'un ensemble de câbles en une structure mécaniquement unie est appelée *harnais électrique*. L'ensemble des harnais électriques constitue l'*Electrical Wiring Interconnection System* ou EWIS qui est devenu depuis peu un système à part entière.

1. http://lexpansion.lexpress.fr/actualite-economique/easyjet-presente-un-prototype-d-avion-electrique_1947346.html
2. https://www.usinenouvelle.com/article/l-audacieux-pari-d-easyjet-dans-l-avion-electrique.N592978



(a) Vue d'artiste du prototype d'avion tout électrique Ampère



(b) Architecture électrique de propulsion distribuée à 40 moteurs

Figure I.11 – Concept d'avion tout électrique développé à l'ONERA

I.2.1 Influence des conditions environnementales

La nature des câbles à déployer ainsi que les niveaux de courants admissibles dépendent de diverses conditions environnementales et notamment de l'environnement thermique d'installation (température et pression ambiante).

La norme DO-160 / Eurocae ED-14G

En aéronautique, les paramètres environnementaux sont consignés dans la norme *DO-160 / Eurocae ED-14G*. Le but de ce document, édité par la RTCA (Radio Technical Commission for Aeronautics), est de fournir une série de procédures et de standards minimums pour le test en laboratoire d'équipements aéronautiques. La norme *DO-160* est constituée de 26 sections qui couvrent diverses problématiques allant de la tenue thermique des équipements aux spécifications ayant trait aux problématiques de compatibilité électromagnétique.

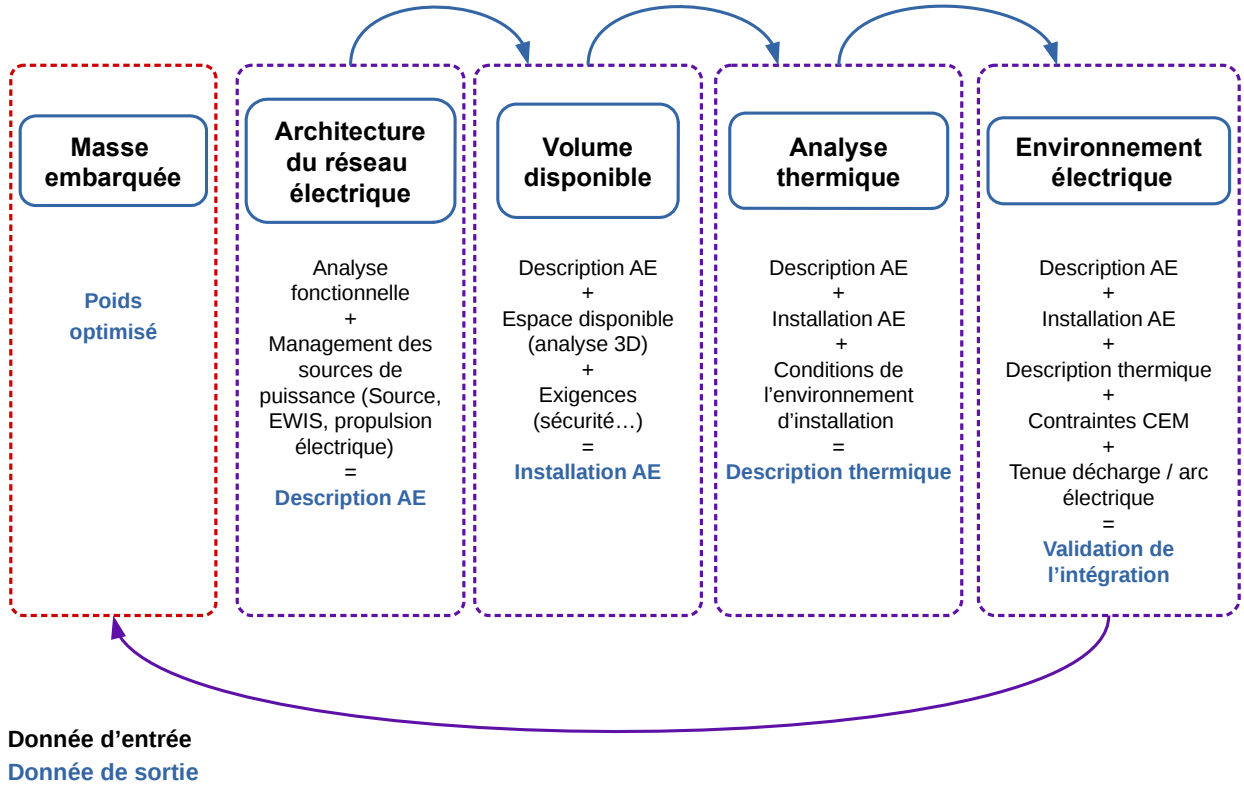


Figure I.12 – Étape de définition et d'analyse d'une architecture électrique embarquée

Les valeurs fournies par ce document normatif permettent de fixer les bornes minimales et maximales de paramètres environnementaux fréquemment rencontrés [171]. On trouve à titre d'exemple les valeurs typiques de pression et de température pour différentes phases de vol dans les tableaux I.2 et I.3.
Or les conditions extérieures de pression et de température ont une influence directe sur le calcul des courants admissibles des câblages déployés. Celles-ci sont prises en compte dans les spécifications de la norme *MIL-W-5088L* (et de son actualisation récente la norme *SAE AS50881*).

Les spécifications MIL-W-5088L / SAE AS50881

Ces spécifications couvrent tous les aspects de l'utilisation des câbles électriques dans les véhicules aérospatiaux, c'est-à-dire à partir de la sélection unitaire des fils jusqu'à leur installation dans le véhicule. Éditée par le « *Defense Standardization Program* » états-unien, elle s'applique aux systèmes militaires suivants : avions, hélicoptères, missiles et véhicules légers (*lighter-than air*).

Dans les faits, ces spécifications s'appliquent au-delà et fournissent des bases de travail utiles pour les applications civiles. En effet, en plus d'apporter des directives d'installation et de conception, elles livrent des informations importantes sur la limitation des courants admissibles en fonction du nombre de conducteurs composant la mise en toron (Fig. I.13(a)) mais aussi en fonction de la pression extérieure de l'air environnant (Fig. I.13(b))
Ces limitations, également connues sous le terme de coefficient de « *derating* » se révèlent ainsi réellement contraignantes et la question de leur sévérité peut être légitimement posée dans le cadre du développement d'architectures « plus » voire *toutes* électriques.
A titre d'exemple, considérons le cas d'un toron de 13 fils *identiques* alimenté à 80 % de son taux de chargement maximal. Pour un fil simple, le courant admissible unitaire I_{adm} correspond au courant maximal à ne pas dépasser pour que l'échauffement par effet Joule n'excède pas une certaine température (typiquement +25 °C). La lecture du premier coefficient de *derating* donné par la courbe reproduite en Figure I.13(a) est de **0,45**. En supposant que le toron est censé fonctionner à une altitude de 35 000 pieds (altitude de croisière typique d'un avion de ligne), il s'ajoute un *derating* supplémentaire donné par la courbe de la Figure I.13(b) à **0.85**. Ainsi le facteur de limitation total est dans ce

cas égal à 0.45×0.85 soit environ **0.38**, ce qui signifie que le courant admissible *total* imposé est égal à $0,38 \times I_{\text{adm}}$.
Ainsi, si le courant admissible *total* est inférieur à l'intensité nécessaire à l'alimentation nominale d'un équipement, il est alors obligatoire d'augmenter la section (ou *gauge*) des fils unitaires, ce qui conduit

Environmental Tests	Category Paragraph 4.3																			
	A				B				C				D			E		F		
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	1	2	1	2	3
Operating Low Temp.																				
Degrees C Paragraph 4.5.1	-15	-15	-15	-15	-20	-45	-45	Note (4)	-20	-55	-55	Note (4)	-20	-55	-55	-55	-55	-20	-55	-55
Operating High Temp.																				
Degrees C Paragraph 4.5.3	+55	+70	+70	Note (3)	+55	+70	Note (3)	Note (4)	+55	+70	Note (3)	Note (4)	+55	+70	Note (3)	Note (3)	Note (3)	+55	+70	Note (3)
Short-Time Operating High Temp.																				
Degrees C Paragraph 4.5.2	+70	+70	+85	Note (3)	+70	+70	Note (3)	Note (4)	+70	+70	Note (3)	Note (4)	+70	+70	Note (3)	Note (3)	Note (3)	+70	+70	Note (3)
Loss of Cooling Test																				
Degrees C Paragraph 4.5.4	+30	+40	+45	Note (3)	+30	+40	Note (3)	Note (3)	+30	+40	Note (3)	Note (3)	+30	+40	Note (3)	Note (3)	Note (3)	+30	+40	Note (3)
Ground Survival Low Temperature																				
Degrees C Paragraph 4.5.1	-55	-55	-55	Note (3)	-55	-55	Note (3)	-55	-55	-55	Note (3)	-55	-55	-55	-55	-55	-55	-55	-55	-55
Ground Survival High Temperature																				
Degrees C Paragraph 4.5.2	+85	+85	+85	Note (3)	+85	+85	Note (3)	+85	+85	+85	Note (3)	+85	+85	+85	Note (3)	+85	Note (3)	+85	+85	Note (3)
Altitude																				
Thousands of Feet Thousands of Meters Paragraph 4.6.1	15 4.6	15 4.6	15 4.6	15 4.6	25 7.6	25 7.6	25 7.6	25 7.6	35 10.7	35 10.7	35 10.7	35 10.7	50 15.2	50 15.2	50 15.2	70 21.3	70 21.3	55 16.8	55 16.8	55 16.8
Decompression Test	Note (1) (4)	Note (1) (4)	Note (1) (4)	Note (1) (4)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Paragraph 4.6.2																				
Overpressure Test	Note (2)	Note (2)	Note (2)	Note (2)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Paragraph 4.6.3																				

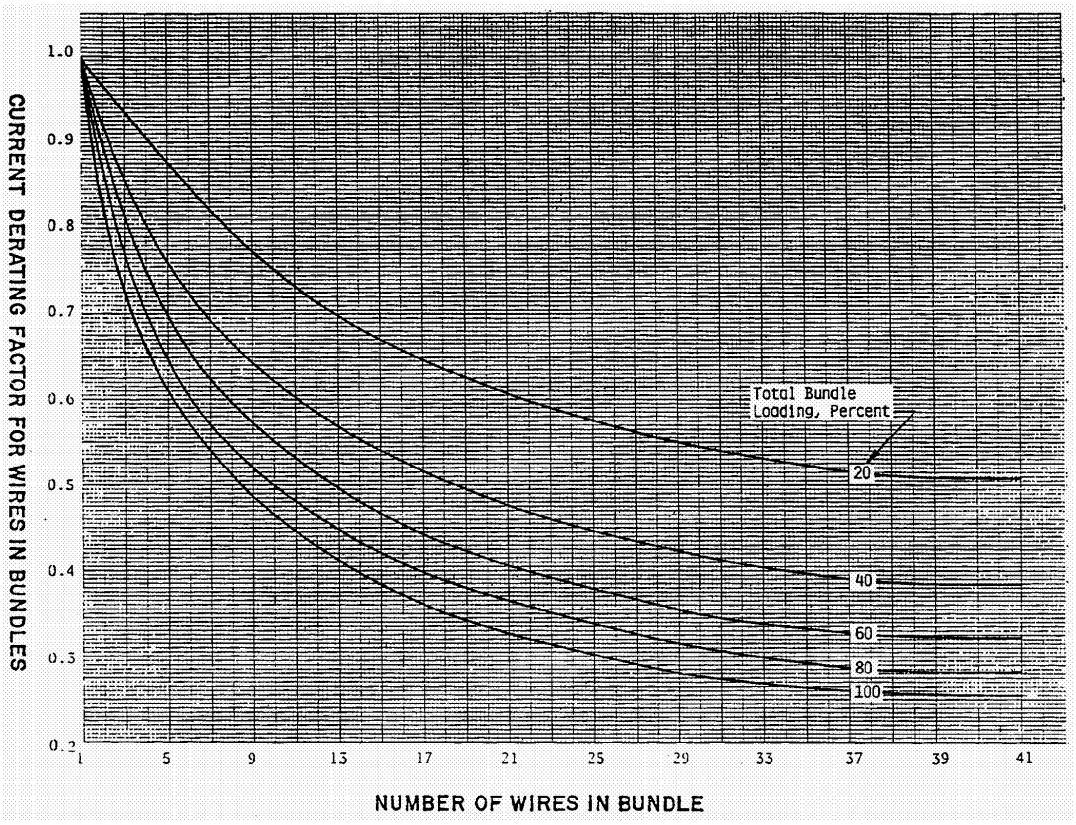
Notes: (1) The lowest pressure applicable for the decompression test is the maximum operating altitude for the aircraft in which the equipment will be installed.
(2) The absolute pressure is 170 kPa (-15,000 ft or -4,600 m).
(3) To be declared by the equipment manufacturer relative to temperature extremes.
(4) To be declared by the equipment manufacturer and defined in the manufacturer's installation instructions when specific critical criteria exist.

Table I.2 – Critères de température et d'altitude en fonction des tests et du type d'équipement. Tiré de [171]

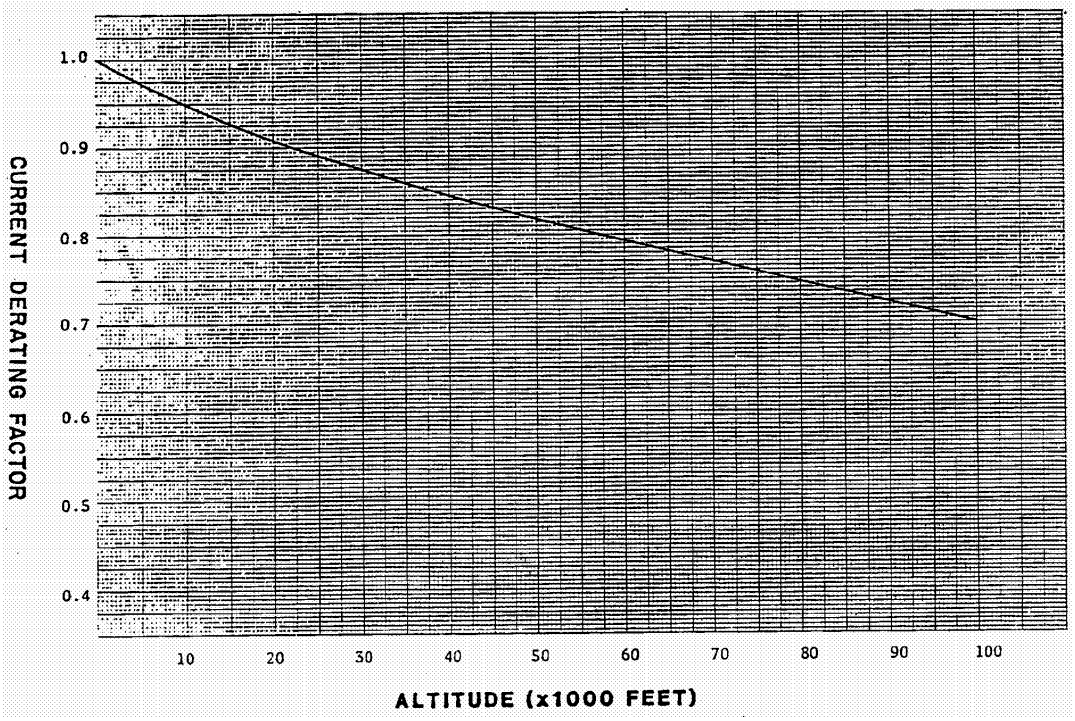
Pressure Altitude	Absolute Pressure			
	kPa	(mbars)	(in Hg)	mm Hg
-15,000 ft (-4,572 m)	169.73	1697.3	50.12	1273.0
-1,500 ft (-457 m)	106.94	1069.4	31.58	802.1
0 ft (0m)	101.32	1013.2	29.92	760.0
+8,000 ft (+2,438 m)	75.26	752.6	22.22	564.4
+15,000 ft (+4,572 m)	57.18	571.8	16.89	429.0
+25,000 ft (+7,620 m)	37.60	376.0	11.10	282.0
+35,000 ft (+10,668 m)	23.84	238.4	7.04	178.8
+50,000 ft (+15,240 m)	11.60	116.0	3.42	87.0
+55,000 ft (+16,764 m)	9.12	91.2	2.69	68.3
+70,000 ft (+21,336 m)	4.44	44.4	1.31	33.3

Table I.3 – Valeurs de pressions normalisées en fonction de l'altitude. Tiré de [171]

à une augmentation directe de la masse du toron à déployer.



(a) Coefficient de réduction de l'intensité en fonction du nombre de câbles composant le toron



(b) Coefficient de réduction de l'intensité en fonction de la pression extérieure.

Figure I.13 – Exemples d'abaques de correction graphique des courants admissibles. Tiré de [1]

I.2.2 Prise en compte de l'ensemble des contraintes

Les contraintes environnementales ne sont pas les seules à s'appliquer aux réseaux de câblages (voir Figure I.14). En effet, les notions de *volume* disponible et de *masse embarquée* complexifient significativement l'intégration des harnais au sein des véhicules. De plus, avec la densification des réseaux de câblages, les aspects de *compatibilité électromagnétique* et de *thermique* deviennent de plus en plus critiques.

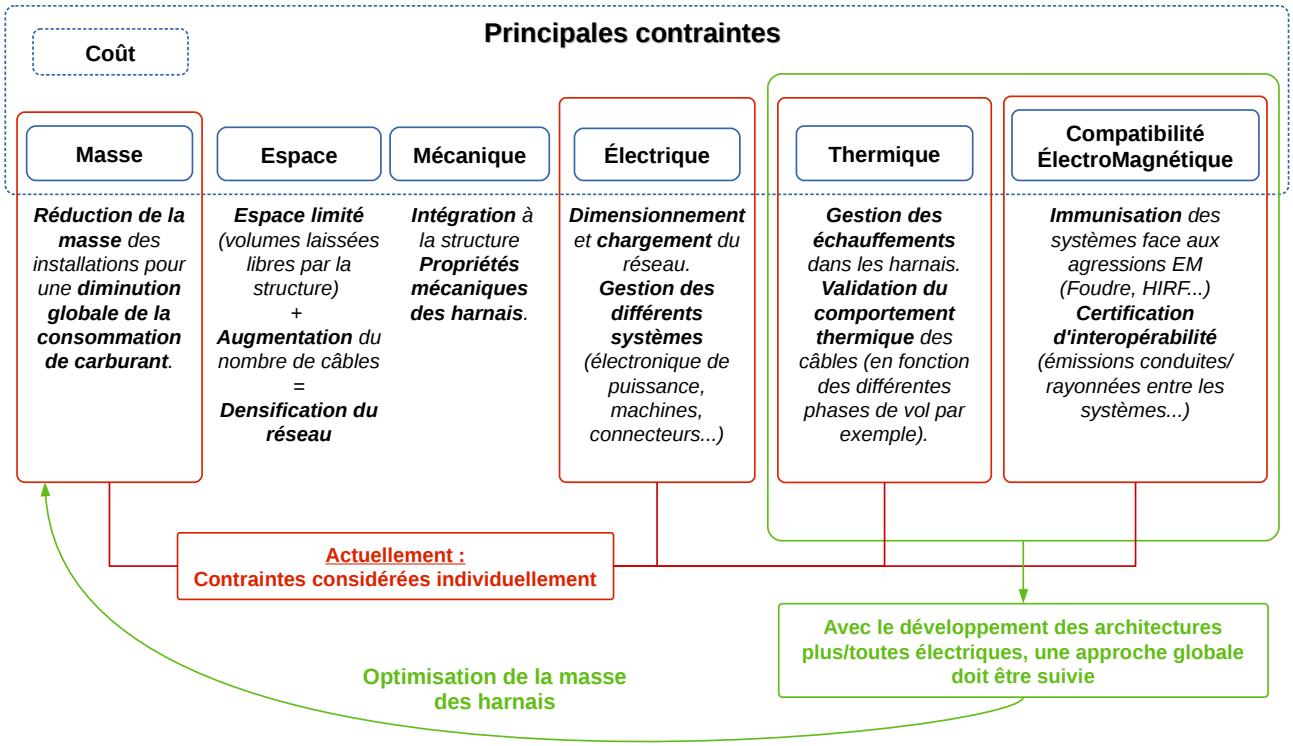


Figure I.14 – Principales contraintes s'appliquant lors de la conception des harnais électriques

Or, du point de vue des phénomènes physiques, ces contraintes sont étroitement liées. Ainsi, les exigences thermiques imposent les caractéristiques des câbles à mettre en oeuvre et plus particulièrement les sections de gauges ; celles-ci interviennent ensuite dans les aspects électriques et CEM. Actuellement, chaque contrainte est considérée individuellement et non pas de manière globale. Si l'on ajoute que, du fait de leur ancienneté, les normes et abaques couramment utilisés peinent à rendre compte de la complexité des installations rencontrées, on peut raisonnablement penser que l'on passe à côté d'optimisations qui pourraient conduire à de meilleures performances du câblage, tant du point de vue fonctionnel que de sa masse.
Pour pallier ces difficultés, il est donc nécessaire de disposer, lors de la phase de conception des harnais, d'un modèle multiphysique thermique, électrique et CEM permettant une meilleure appréhension des phénomènes physiques sous-jacents (cf Fig. I.14)

I.3 Objectifs de la thèse

D'une manière générale, les industriels se heurtent à deux problématiques majeures. D'une part, il leur faut assurer une production d'électricité à bord de l'avion capable de couvrir ces nouveaux besoins. D'autre part, il leur est nécessaire de certifier l'intégration de ces nouvelles installations en tenant compte à la fois des contraintes critiques de masse et d'encombrement, mais aussi des aspects thermiques, électromagnétiques et de stabilité réseau dus à la présence de systèmes d'électronique de puissance et de câblages toujours plus denses.
C'est sur la prise en compte transverse des *contraintes multiphysiques* dans le processus de conception des harnais électriques que se concentrent ces travaux de thèse. Dans ce contexte, les objectifs identifiés sont les suivants :

— réunir dans un même formalisme la topologie électromagnétique (permettant de modéliser les

phénomènes CEM) et la prédiction d'échauffement et de tenue en température du réseau électrique embarqué
— optimiser en encombrement et en masse le réseau de câbles déployé dans les aéronefs.

I.4 Conclusion

Les problématiques soulevées par l'intégration des équipements électriques au sein des aéronefs ont fait l'objet d'études poussées dès les débuts de l'industrie aéronautique. Cependant, les contraintes d'intégrations auxquelles se trouvent actuellement confrontés les industriels deviennent de plus en plus critiques en raison du développement d'architectures « plus » voire « toutes » électriques.
Une conséquence directe de ces innovations est donc l'augmentation du nombre de faisceaux de câbles électriques à déployer au sein des aéronefs, tant pour le transport de puissance que de signal, au point de représenter une part conséquente de la masse de ces derniers. Ainsi, en devenant un « système » à part entière, le réseau de câblage doit répondre à des contraintes toujours plus strictes de *compatibilité électromagnétique* et de tenue aux échauffements. De nouvelles méthodologies permettant une prise en compte globale de ces contraintes dès les phases amonts de conception doivent donc être développées afin de mener à des optimisations notamment en terme de masse embarquée.
Une analyse bibliographique des différents modèles mis en œuvre pour la prédiction des niveaux de couplages et de courants admissibles dans les faisceaux de câbles est établie dans le chapitre suivant.

CHAPITRE II

Analyse bibliographique. Partie I : lignes de transmission et topologie électromagnétique

Table des matières

II.1 Le modèle électrodynamique classique 20
II.1.1 Les équations de Maxwell 20
II.1.2 Le mode Transverse Électromagnétique (TEM) 21
II.2 Ligne de transmission élémentaire 22
II.2.1 Les équations des lignes de transmission 22
II.2.2 Prise en compte du couplage champ-câble 26
II.2.3 Passage au domaine fréquentiel 28
II.3 Domaine de validité du modèle des lignes de transmission 29
II.3.1 Uniformité de la ligne 29
II.3.2 Contraintes sur la longueur de la ligne 29
II.3.3 Contraintes sur les dimensions transverses 29
II.3.4 Validité du mode de propagation TEM 30
II.3.5 Courant de mode différentiel et courant de mode commun 31
II.4 Théorie des lignes de transmission multiconducteurs 32
II.4.1 Généralisation à N conducteurs 33
II.4.2 Résolution des équations des télégraphistes généralisées 35
II.5 L'approche topologique 36
II.5.1 Principe 36
II.5.2 Application aux réseaux de câblages 38
II.5.3 Établissement et résolution de l'équation BLT 38
II.6 Conclusion 41

Ce chapitre est dédié à l'étude électromagnétique des lignes de transmission. Dans un premier temps, les équations fondamentales seront introduites en vertu de l'application *stricte* de l'hypothèse de propagation *transverse électromagnétique* (TEM), c'est-à-dire quand les conducteurs possèdent une conductivité infinie. Le traitement des pertes résistives sera effectué dans un second temps lors d'une discussion détaillée de la validité de l'hypothèse TEM. Les relations obtenues seront alors généralisées à un nombre arbitraire de conducteurs. Enfin, les principes de topologie électromagnétique seront introduits et appliqués aux problématiques des réseaux de câbles embarqués sur aéronefs.

II.1 Le modèle électrodynamique classique

II.1.1 Les équations de Maxwell

Le système d'équations suivant, largement connu sous le nom d'équations de *Maxwell*, permet de décrire complètement les phénomènes électromagnétiques macroscopiques *classiques*.

Formulation locale :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho & \text{(II.1a)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{(II.1b)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(II.1c)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \text{(II.1d)} \end{cases}$$

Formulation intégrale :

$$\begin{cases} \oiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{dS} = \iiint_{V} \rho dV & \text{(II.2a)} \\ \oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0 & \text{(II.2b)} \\ \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -\iint_{\Sigma} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS} & \text{(II.2c)} \\ \oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot \vec{d\ell} = \iint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{dS} + \iint_{\Sigma} \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{dS} & \text{(II.2d)} \end{cases}$$

Avec :

- $\vec{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, le champ de vecteur intensité du champ électrique, exprimé en $V.m^{-1}$
- $\vec{H} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, le champ de vecteur intensité du champ magnétique, exprimé en $A.m^{-1}$
- $\vec{D} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, le champ de vecteur densité du champ électrique, exprimé en $C.m^{-2}$
- $\vec{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, le champ de vecteur densité du champ magnétique, exprimé en T
- $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la densité volumique de charge, exprimée en $C.m^{-3}$
- $\vec{J} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la densité de courant électrique, exprimée en $A.m^{-2}$

A ces équations, s'ajoutent les relations constitutives suivantes permettant de relier les vecteurs *densité* aux vecteurs *d'intensité* des champs électriques et magnétiques :

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} & \text{avec } \varepsilon \text{ : permittivité électrique (en } F.m^{-1}) & \text{(II.3a)} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} & \text{avec } \mu \text{ : perméabilité magnétique (en } H.m^{-1}) & \text{(II.3b)} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} & \text{avec } \sigma \text{ : conductivité électrique (en } S.m^{-1}) & \text{(II.3c)} \end{cases}$$

Il existe de nombreuses relations permettant de modéliser le comportement des milieux de propagation grâce à des expressions plus ou moins élaborées de ces différents coefficients. Dans le cas du traitement des excitations sinusoïdales, nous ferons notamment apparaître la dépendance de ces différents coefficients à la fréquence angulaire ω des signaux.
Toutefois, afin de simplifier les expressions introduites dans la suite du manuscrit, nous considérerons sauf mention contraire des milieux d'étude *homogènes*, *linéaires* et *isotropes*, c'est-à-dire dont les valeurs de permittivité électrique, de perméabilité magnétique et de conductivité électrique seront considérées **constantes**.

Référence : [143]

II.1.2 Le mode Transverse Électromagnétique (TEM)

Il existe un cas particulier où les vecteurs intensités des champs électriques et magnétiques ne possèdent aucune composante dans l'une des directions de l'espace. Cette particularité, connue sous le nom de *mode électromagnétique transverse* (TEM) revêt un intérêt particulier dans l'étude des lignes de transmission puisqu'il s'agit de l'hypothèse *fondamentale* préalable à leur étude.
En prenant le plan $(x-y)$ comme plan transverse (c'est-à-dire en imposant nulle la composante des champs dans la direction z), nous noterons ainsi respectivement les vecteurs intensités *transverses* des champs électrique et magnétique sous cette hypothèse :

$$\overrightarrow{E}_t = \begin{pmatrix} E_x(x,y,z,t) \\ E_y(x,y,z,t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{H}_t = \begin{pmatrix} H_x(x,y,z,t) \\ H_y(x,y,z,t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

La séparation des contributions *transverses* et *longitudinales* de l'opérateur différentiel $\overrightarrow{\nabla}$ s'exprime en coordonnées cartésiennes de la manière suivante :

$$\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{\nabla}_t + \overrightarrow{\nabla}_z \quad \text{avec :} \quad \overrightarrow{\nabla}_z = \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{u_z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\nabla}_t = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{u_y} \tag{II.4}$$

L'application directe des relations (II.4) aux équations de Maxwell (II.1c) et (II.1d) donne :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla}_t \times \overrightarrow{E}_t = \overrightarrow{0} & \text{(II.5a)} \\ \overrightarrow{\nabla}_t \times \overrightarrow{H}_t = \overrightarrow{0} & \text{(II.5b)} \\ \overrightarrow{u_z} \times \dfrac{\partial \overrightarrow{E}_t}{\partial z} = -\mu \dfrac{\partial \overrightarrow{H}_t}{\partial t} & \text{(II.5c)} \\ \overrightarrow{u_z} \times \dfrac{\partial \overrightarrow{H}_t}{\partial z} = \sigma \overrightarrow{E}_t + \varepsilon \dfrac{\partial \overrightarrow{E}_t}{\partial t} & \text{(II.5d)} \end{cases}$$

D'après les règles de calcul différentiel, il apparaît que les champs de vecteurs à rotationnel nul découlent directement d'un gradient de potentiel. Ainsi, d'après (II.5a) et (II.5b), les champs $\overrightarrow{E}_t$ et $\overrightarrow{H}_t$ sont issus d'une distribution équivalente statique dans le plan, notée respectivement ϕ et $\psi(x,y)$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla}_t \times \overrightarrow{E}_t = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{E}_t = K_1(z,t)\overrightarrow{\nabla}_t\ \phi(x,y) & \text{(II.6a)} \\ \overrightarrow{\nabla}_t \times \overrightarrow{H}_t = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{H}_t = K_2(z,t)\overrightarrow{\nabla}_t\ \psi(x,y) & \text{(II.6b)} \end{cases}$$

Avec :

- $K_1(z,t)$ et $K_2(z,t)$: deux fonctions à déterminer
- ϕ : le potentiel électrostatique équivalent dans le plan transverse (en V)
- ψ : le potentiel magnétostatique équivalent dans le plan transverse (en Wb)

En introduisant les relations constitutives de la suite de relation (II.3) et en faisant l'hypothèse des milieux diélectriques $\rho = 0$, les équations (II.1a) et (II.2b) deviennent :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{D} = \overrightarrow{\nabla}_t \cdot \overrightarrow{E}_t = 0$$
$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla}_t \cdot \overrightarrow{H}_t = 0$$

ce qui conduit, après réinjection des relations (II.6a) et (II.6b), aux équations de Laplace suivante :

$$\begin{cases} \Delta_t\ \phi(x,y) = 0 & \text{(II.7a)} \\ \Delta_t\ \psi(x,y) = 0 & \text{(II.7b)} \end{cases}$$

Avec :

- $\Delta_t = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$: l'opérateur Laplacien dans le plan transverse

L'étude des potentiels répondant aux équations de Laplace (II.7) montre qu'il est possible de définir de manière *unique* les notions suivantes de *tension* et de *courant* liées aux champs électriques et magnétiques dans le plan transverse :

Tension entre deux points P_1 et P_2 du plan transverse

$$V(z,t) = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_t \cdot \vec{d\ell} \tag{II.8}$$

Courant à travers le contour fermé $\mathcal{C}$ contenu dans le plan transverse

$$I(z,t) = \oint_{\mathcal{C}} \vec{H}_t \cdot \vec{d\ell} \tag{II.9}$$

Référence : [153]

II.2 Ligne de transmission élémentaire

Dans cette section, les équations fondamentales de propagation des signaux électromagnétiques le long d'une ligne de transmission élémentaire *uniforme*, c'est-à-dire dont la géométrie ne varie pas dans la direction de propagation, seront établies. L'étude débutera par le cas le plus simple, à savoir la ligne à deux conducteurs sans perte. Les équations obtenues seront généralisées aux applications de couplage champ-câble par l'introduction dans le formalisme d'un champ électromagnétique incident extérieur à la ligne.

II.2.1 Les équations des lignes de transmission

Les équations des lignes de transmission (aussi appelées *première* et *deuxième* équations des télégraphistes) dérivent directement des équations de Maxwell sous l'hypothèse du mode de propagation TEM. Le but de ce formalisme est d'expliciter les paramètres électriques primaires (*par unité de longueur*) permettant de décrire complètement le comportement de la ligne.

Description du problème

Considérons la portion de ligne présentée en Figure II.4. Celle-ci est composée de deux conducteurs cylindriques de diamètre a, de résistivité nulle et de longueur L supposée grande devant la longueur d'onde λ maximale du champ total. Les conducteurs sont de plus parallèles, colinéaires à la direction de propagation $\vec{u}_z$ et séparés sur toute leur longueur par une distance d grande devant a et dans le même temps petite devant λ. La ligne possède à ses extrémités deux impédances terminales Z_1 et Z_2. Elle est plongée dans un milieu diélectrique homogène aux propriétés constantes dans le temps.

Établissement de la première équation des lignes de transmission

Pour établir la première équation, la relation intégrale (II.2c) est intégrée sur le contour fermé $\mathcal{C}$ présenté en Figure II.2(a). Chaque côté de l'égalité peut être calculé de manière indépendante.

$$\underbrace{\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{d\ell}}_{\boxed{1}} = \underbrace{-\mu \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{dS}}_{\boxed{2}} \tag{II.10}$$

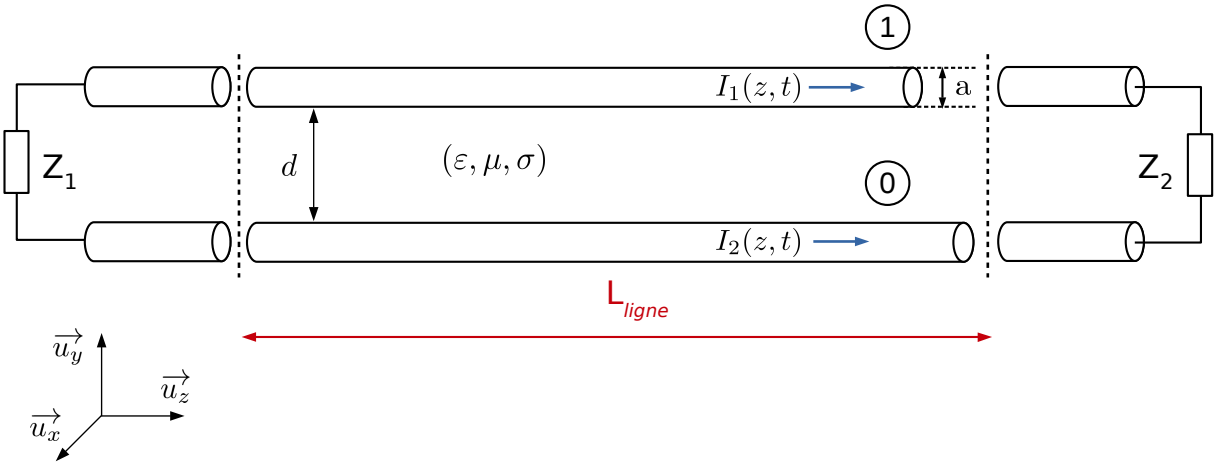
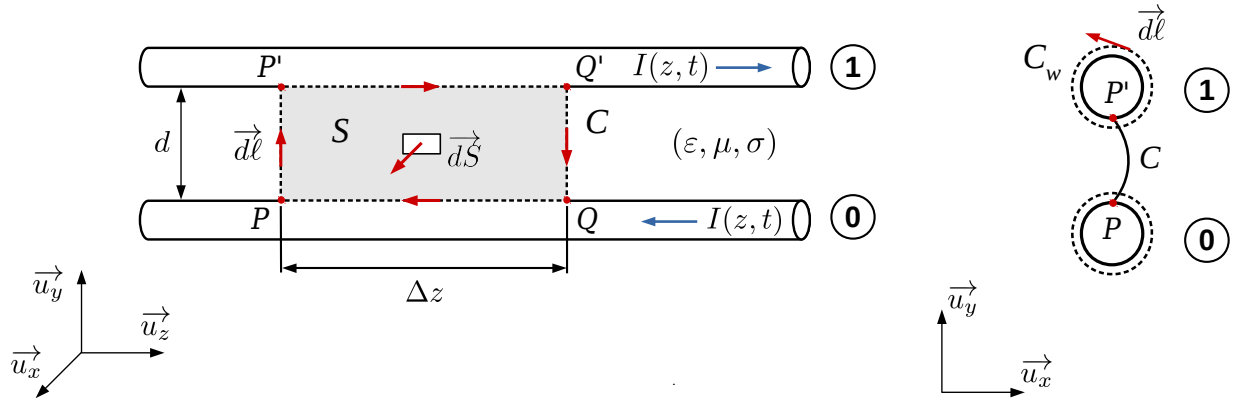


Figure II.1 – Schéma de la ligne de transmission élémentaire à deux conducteurs



(a) Contour d'intégration dans le plan longitudinal

(b) Contours d'intégration dans le plan transverse

Figure II.2 – Description des contours d'intégration pour l'établissement de la première équation des lignes de transmission

Calcul de 1 :

Le chemin C se décompose grâce aux relations de Chasles de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{E}\cdot\vec{d\ell} &= \int_P^{P'} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl_1} + \int_{P'}^{Q'} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl_2} + \int_{Q'}^{Q} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl_3} + \int_{Q}^{P} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl_4} \\ &= \int_P^{P'} \left(\vec{E}\cdot\overrightarrow{u_y}\right) dy + \underbrace{\int_{P'}^{Q'} \left(\vec{E}\cdot\overrightarrow{u_z}\right) dz}_{=\,0} - \int_{Q'}^{Q} \left(\vec{E}\cdot\overrightarrow{u_y}\right) dy - \underbrace{\int_{Q}^{P} \left(\vec{E}\cdot\overrightarrow{u_z}\right) dz}_{=\,0} \\ &= \int_P^{P'} E_y dy - \int_{Q'}^{Q} E_y dy \end{aligned} \tag{II.11}$$

Or, dans le cadre de l'hypothèse TEM, comme expliqué précédemment dans la section II.1.2, il est possible de définir de manière unique la notion de *tension* entre deux points A et B comme l'intégrale de contour du champ électrique dans le plan transverse entre n'importe quel chemin reliant les points A et B. Il vient ainsi, en gardant en mémoire le fait que $E_y = E_y(x,y,z,t)$:

$$V(z,t) = -\int_P^{P'} \vec{E}(x,y,z,t)\cdot\overrightarrow{dl_1} = -\int_0^d E_y(x,y,z,t)dy$$

$$V(z+\Delta z,t) = -\int_Q^{Q'} \vec{E}(x,y,z+\Delta z,t)\cdot\overrightarrow{dl_3} = -\int_0^d E_y(x,y,z+\Delta z,t)dy$$

Ce qui donne, après réinjection dans la relation (II.11) :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = V(z+\Delta z,t) - V(z,t)$$

Après division par Δz et passage à la limite en zéro, on obtient alors l'expression recherchée de **1** :

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{V(z+\Delta z,t) - V(z,t)}{\Delta z} = \frac{\partial V(z,t)}{\partial z} \tag{II.12}$$

Calcul de 2 :

Le terme **2** représente le taux de variation par rapport au temps du flux magnétique entre les deux conducteurs produits par les courants $I(z,t)$ s'écoulant dans chacun d'eux. En faisant l'hypothèse que ces courants sont *uniformément répartis* sur la circonférence des fils (condition assurée par $a \ll d$) et que la distance séparant les lignes est faible par rapport à la longueur d'onde des signaux considérés ($d \ll \lambda$) alors, il existe une relation de proportionnalité reliant le flux du champ magnétique aux courants nets circulant dans la ligne :

$$\mu \iint_S \vec{H} \cdot \vec{dS} = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = L.I(z,t)$$

Ce coefficient de proportionnalité, noté L, est appelé *inductance* de la ligne exprimée en Henry (H).

Au passage à la limite quand Δz tend vers zéro, il vient :

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} \left(\int_0^d \vec{B}_x dy \right) dz = \int_0^d \vec{B}_x dy = \ell I(z,t) = \ell \oint_{C_w} \vec{H} \cdot \vec{dl}$$

où ℓ est l'inductance par unité de longueur de la ligne (p.u.l). Finalement :

$$\mathbf{2} = -\ell \frac{\partial I(z,t)}{\partial t} \tag{II.13}$$

Réunification des termes :

En remplaçant les termes **1** et **2** dans la relation (II.10), il vient naturellement la première équation des télégraphistes :

$$\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} + \ell \frac{\partial I(z,t)}{\partial t} = 0 \tag{II.14}$$

Références : [153, 191]

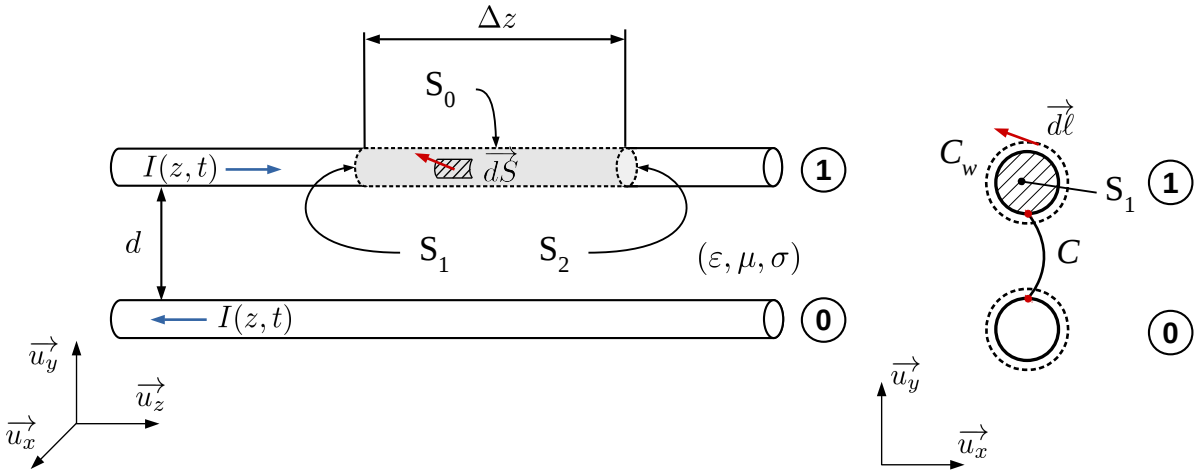
Établissement de la seconde équation des lignes de transmission

Soit l'équation (II.1d) :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{II.15}$$

Intégrons la relation (II.15) sur la surface fermée $\mathcal{S}$ présentée en Figure II.3(a) (partie grisée entourant le conducteur).
Une application élémentaire des règles de calcul vectoriel montre que le flux du rotationnel d'un champ de vecteur à travers une surface fermée est nul, d'où :

$$\oiint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} \right) \cdot \vec{dS} = \underbrace{\oiint_S \vec{J} \cdot \vec{dS}}_{\mathbf{1}} + \underbrace{\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS}}_{\mathbf{2}} = 0 \tag{II.16}$$



(a) Contour d'intégration dans le plan longitudinal

(b) Contours d'intégration dans le plan transverse

Figure II.3 – Description des contours d'intégration pour l'établissement de la seconde équation des lignes de transmission

Comme pour l'établissement de la première équation des ligne de transmission, les contributions sont séparées en deux parties indépendantes **1** et **2**.

Calcul de 1 :

La surface est scindée en deux parties telles que présentées à la Figure II.3(a)

$$S = S_0 + S_1 + S_2 \implies \oiint_S \vec{J}\cdot\vec{dS} = \underbrace{\iint_{S_1} \vec{J}\cdot\vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{J}\cdot\vec{dS}}_{\mathbf{1'}} + \underbrace{\iint_{S_0} \vec{J}\cdot\vec{dS}}_{\mathbf{1''}}$$

Le terme **1'** traduit la variation de courant le long de l'élément Δz ce qui donne en tenant compte de la direction opposée des courants sur les lignes, et après passage à la limite :

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{1}{\Delta z} \iint_{S_1+S_2} \vec{J}\cdot\vec{dS} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{I(z+\Delta z,t) - I(z,t)}{\Delta z} = \frac{\partial I(z,t)}{\partial z}$$

Lorsque la conductivité du milieu séparant les deux conducteurs possède un conductivité finie, le terme **1''** peut lui aussi être relié par une relation de proportionnalité via la notion de *conductance* exprimée en Siemens (S) [153]. En passant à la limite $\Delta z \to 0$, cette relation est définie par :

$$\oint_{C_w} \vec{J}\cdot\vec{dS} = \sigma \oint_{C_w} \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = -g \int_P^{P'} \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = gV \tag{II.17}$$

où g est la conductance par unité de longueur (p.u.l) de la ligne.

Calcul de 2 :

Pour rappel, la relation **2** est donnée par :

$$\mathbf{2} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot\vec{dS} \tag{II.18}$$

Or, d'après l'équation (II.2a) (aussi appelée loi de Gauss), on a :

$$\varepsilon \oiint_{\mathcal{S}_0} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iiint_V \rho \, dV = Q \tag{II.19}$$

Il est possible, de manière identique à l'établissement de la première équation des lignes de transmission, de relier *proportionnellement* cette quantité de charge Q à la tension du champ électrique entre deux points de la ligne dans le plan transverse. Ce coefficient de proportionnalité est dans ce cas appelé *capacité*, ce qui après passage à la limite $\Delta z \to 0$ se traduit par :

$$q = cV(z,t)$$

où q et c sont respectivement la charge (en Coulomb) et la capacité (en Farad) de la ligne par unité de longueur (p.u.l).

Réunification des termes :

En remplaçant les termes **1** = **1'** + **1"** et **2** dans la relation (II.15), il vient naturellement :

$$\frac{\partial I(z,t)}{\partial z} + gV(z,t) + c\frac{\partial V(z,t)}{\partial t} = 0 \tag{II.20}$$

II.2.2 Prise en compte du couplage champ-câble

Dans le cas d'une ligne illuminée par un champ électromagnétique, il est utile de distinguer les contributions *incidentes* et *diffractées* du champ électromagnétique :

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}^{inc} + \vec{E}^{scat} & \text{(II.21a)} \\ \vec{H} = \vec{H}^{inc} + \vec{H}^{scat} & \text{(II.21b)} \end{cases}$$

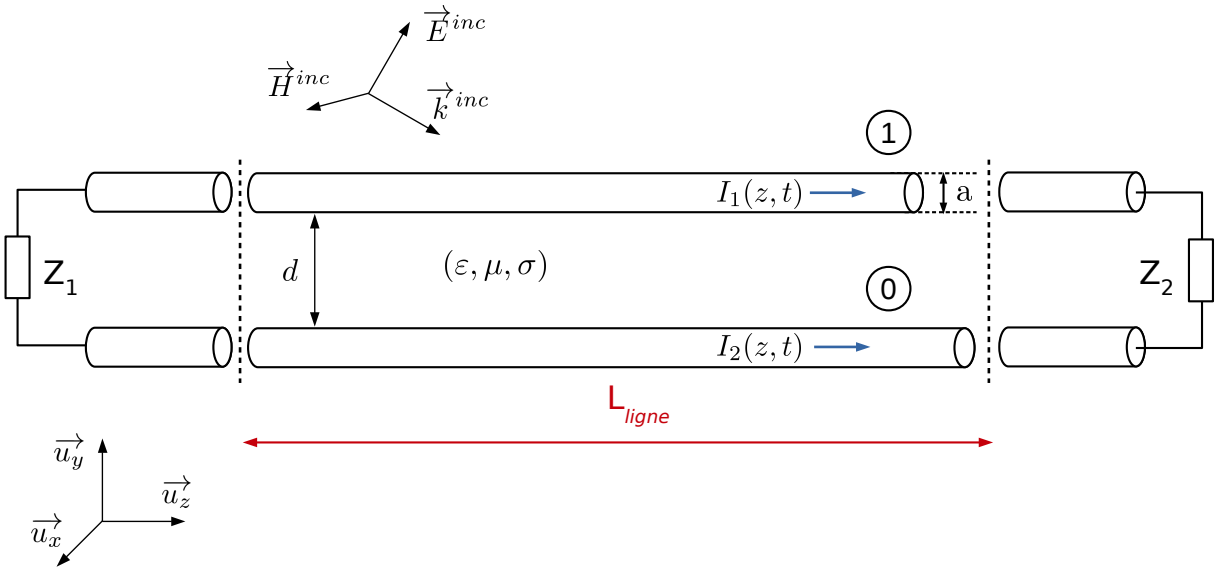


Figure II.4 – Schéma de la ligne de transmission élémentaire à deux conducteurs illuminée par une onde électromagnétique plane

Modification de la première équation des lignes de transmission

En considérant à nouveau la partie **2** de la relation II.16, l'intégration sur la surface S délimitée par le contour fermé C mène a :

$$\begin{aligned}
-\mu \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{dS} &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\mathcal{S}} \vec{H}^{inc} \cdot \vec{dS} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\mathcal{S}} \vec{H}^{scat} \cdot \vec{dS} \\
&= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\mathcal{S}} \left(\vec{H}^{inc} \cdot \vec{u_x} \right) dy\ dz - \mu \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\mathcal{S}} \left(\vec{H}^{scat} \cdot \vec{u_x} \right) dy\ dz \\
&= \underbrace{-\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_z^{z+\Delta z} \left(\int_0^d \vec{H}_x^{inc} dy \right) dz}_{\textbf{2'}} \underbrace{- \mu \frac{\partial}{\partial t} \int_z^{z+\Delta z} \left(\int_0^d \vec{H}_x^{scat} dy \right) dz}_{\textbf{2''}}
\end{aligned}$$

Le terme **2'** représente un terme source d'excitation provenant du champ incident et caractérisant le couplage entre la ligne et le champ magnétique incident. En effet, le passage à la limite $\frac{1}{\Delta z} \to 0$ a pour conséquence que le contour fermé $\mathcal{C}$ tend vers le chemin PP'. En application de (II.2c) il vient donc :

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \textbf{2'} = \mu \int_P^{P'} \vec{H}^{inc} \cdot \vec{d\ell} = V_s(z) \tag{II.22}$$

où $V_s(z)$ représente un terme source excitateur de la ligne (p.u.l).
Le terme **2''** correspond au champ magnétique rayonné par la ligne. Dans le cadre d'une absence d'excitation par un champ extérieur, ce terme est identique au champ magnétique *total* calculé précédemment.
Finalement, la relation finale est donnée par :

$$\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} + \ell \frac{\partial I(z,t)}{\partial t} = V_s(z,t) \tag{II.23}$$

Modification de la seconde équation des lignes de transmission

Puisque le champ électrique est la somme des contributions *incidentes* et *diffractées*, la tension *totale* peut elle aussi être décomposée comme la contribution de ces mêmes champs, ce qui se traduit par :

$$V(z,t) = V^{inc}(z,t) + V^{scat}(z,t) = -\int_0^d E_z^{inc} dz - \int_0^d E_z^{scat} dz \tag{II.24}$$

La relation (II.20) étant exprimée en terme de tension *diffractée*, la relation tenant compte du couplage champ-câble est donnée par :

$$\frac{\partial I(z,t)}{\partial t} + gV(z,t) + c\frac{\partial V(z,t)}{\partial t} = \underbrace{-g \int_0^d E^{inc} dz - c\frac{\partial}{\partial z} \int_0^d E^{inc} dz}_{I_s(z,t)} \tag{II.25}$$

où le dernier terme de la relation (II.25) est homogène à une source de courant (exprimée en ampère) provenant du champ incident sur la ligne.
Les relations (II.23) et (II.25) sont connues comme les équations du couplage champs-câble suivant le formalisme de Taylor [146, 191] (expression des équations de ligne en tension totale).

II.2.3 Passage au domaine fréquentiel

Réécriture des équations de Maxwell

Les équations de Maxwell adoptent une forme particulièrement simple dans le cas où les champs électriques et magnétiques sont harmoniques dans le domaine temporel. Dans le cas d'une pulsation (*fréquence angulaire*) ω fixe, l'expression du champ électrique peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{pmatrix} \cos(\omega t + \theta) = \vec{E}_r \cos(\omega t + \theta) \tag{II.26}$$

soit en notation complexe :

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathbf{E}}\right] = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathbf{E_r}}\ e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\vec{E}_r\ e^{j\theta} e^{j\omega t}\right] \tag{II.27}$$

Dans ce cadre, les dérivées temporelles s'écrivent alors naturellement :

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{X}}}{\partial t} = j\omega \vec{\mathbf{X}} \tag{II.28}$$

En remplaçant les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ dans les équations de Maxwell par leurs équivalents *complexes*, il vient donc :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho \tag{II.29}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \tag{II.30}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -j\omega \vec{\mathbf{B}} \tag{II.31}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}} + j\omega \vec{\mathbf{D}} \tag{II.32}$$

Grâce à la transformation inverse de Fourier, il est alors possible de construire une solution générale des équations de Maxwell comme la combinaison linéaire de solutions *monochromatiques* telle que :

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\mathbf{E}}(x,y,z,\omega) e^{j\omega t} d\omega\right] \tag{II.33}$$

Référence : [143]

Application à la propagation du mode TEM

Pour établir l'équation de propagation des ondes suivant le mode TEM, il est nécessaire d'employer la propriété vectorielle suivante :

$$\begin{cases} \vec{u_z} \times \vec{u_z} \times \dfrac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -\dfrac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} \\ \vec{u_z} \times \vec{u_z} \times \dfrac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = -\dfrac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} \end{cases} \tag{II.34}$$

On obtient donc ainsi après réinjection dans (II.5a) et (II.5b), et dérivation par rapport à z :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial t^2} \tag{II.35a}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}_t}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}_t}{\partial t^2} \tag{II.35b}$$

Ce qui, en notation complexe donne le système d'équation différentielle d'ordre 2 suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 \vec{\mathbf{E}}_t}{dz^2} = \gamma^2 \vec{\mathbf{E}}_t \\ \dfrac{d^2 \vec{\mathbf{H}}_t}{dz^2} = \gamma^2 \vec{\mathbf{H}}_t \end{cases} \quad \text{avec} \quad \gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta \tag{II.36}$$

Les solutions de ce type d'équation sont la superposition de deux types d'ondes, l'une progressant dans le sens positif de l'axe de propagation et l'autre dite « rétrograde » progressant dans le sens négatif de l'axe de propagation. De plus, les champs électrique et magnétique sont liés à l'impédance intrinsèque du milieu par la relation suivante :

$$\vec{\mathbf{H}}_t = \pm\frac{1}{\eta}\vec{u}_z \times \vec{\mathbf{E}}_t \quad \text{avec} \quad \eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \tag{II.37}$$

On obtient ainsi pour solution :

$$\vec{\mathbf{E}}_t = \vec{\mathbf{E}}_+(x,y)e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} + \vec{\mathbf{E}}_-(x,y)e^{\alpha z}e^{j\beta z}$$
$$\vec{\mathbf{H}}_t = \frac{1}{\eta}\vec{\mathbf{E}}_+(x,y)e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} - \frac{1}{\eta}\vec{\mathbf{E}}_-(x,y)e^{\alpha z}e^{j\beta z}$$

où les fonctions $\vec{\mathbf{E}}_+$ et $\vec{\mathbf{E}}_+$ dépendent des conditions aux limites ou terminales du système.

Références : [143, 153]

Équations des lignes de transmission dans le domaine fréquentiel

L'application de ces principes amène donc à réécrire les équations des lignes de transmission dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{V}(z)}{\partial z} + j\omega\ell\mathbf{I}(z) = \mathbf{V_s}(z) & \text{(II.38a)} \\ \dfrac{\partial \mathbf{I}(z)}{\partial z} + g\mathbf{V}(z) + j\omega c\mathbf{V}(z) = \mathbf{I_s}(z) & \text{(II.38b)} \end{cases}$$

II.3 Domaine de validité du modèle des lignes de transmission

Nous présenterons de manière succincte dans la suite de cette section les hypothèses nécessaires à l'utilisation des lignes de transmission. En effet, comme tout modèle, ce dernier formalisme possède un domaine d'applicabilité pour lequel ses prédictions sont assurées.

II.3.1 Uniformité de la ligne

Des changements de géométrie peuvent apparaitre sur une portion de la ligne provoqués par exemple par l'ajout d'un diélectrique autour de la ligne ou bien par la variation de distance entre les lignes et le conducteur de retour. Ces discontinuités entraînent une non-uniformité des paramètres électriques primaires le long de l'ensemble de la ligne. Dans ce cas, la méthodologie générale consiste à partitionner la ligne en plusieurs sous-problèmes uniformes. On trouvera dans [29] un traitement rigoureux de telles lignes de transmission non-uniformes.

II.3.2 Contraintes sur la longueur de la ligne

Le formalisme des lignes de transmission possède un intérêt lorsque la longueur longitudinale de la ligne est du même ordre de grandeur ou, encore mieux, significativement supérieure à la longueur d'onde des signaux transportés, on parle alors de lignes *électriquement grandes*.

II.3.3 Contraintes sur les dimensions transverses

Des modes de propagation d'ordres supérieurs de nature *transverse électrique* (TE) ou *transverse magnétique* (TM) apparaissent lorsque :

- la distance de séparation entre les fils n'est pas électriquement petite
- les dimensions transverses de la ligne sont supérieures à un certain pourcentage de la longueur d'onde des signaux transportés

L'apparition des modes dépend du type de ligne utilisé. Selon [153], dans le cas de la ligne bifilaire élémentaire présentée en II.4, ces effets de propagation multimode apparaissent dès lors que les dimensions transverses approchent $\frac{\lambda}{40}$ soit 2.5% de la longueur d'onde. En général, cela limite la fréquence des signaux à quelques centaines de MégaHertz. Par exemple :

$$\text{si } f_{\max} = 500 \text{ MHz} \implies \frac{\lambda}{40} = 1.5\text{cm}$$

II.3.4 Validité du mode de propagation TEM

Milieux diélectriques inhomogènes

La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dépend des valeurs de permittivité ε et de perméabilité μ de ce dernier. Dans le cas d'un milieu homogène aux propriétés constantes, cette vitesse de propagation est donnée par la relation suivante :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{II.39}$$

Or, la présence de plusieurs milieux diélectriques aux valeurs de permittivité et de perméabilité différentes entrainent des vitesses de propagation différentes dans chaque milieu, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de propagation du mode TEM.
Néanmoins, lorsque les différentes vélocités (et donc ε_i et ε_j) ne sont pas sensiblement différentes, on considérera comme un postulat le fait que les équations des lignes de transmission restent inchangées. Dans ces conditions, la détermination du potentiel électrostatique répond au problème de Laplace homogène par morceaux auquel il est nécessaire d'adjoindre des conditions de continuité entre les différents matériaux diélectriques. En notant ε_1 la permittivité d'un premier milieu 1 et ε_2 la permittivité d'un second milieu, et Γ la frontière de séparation des deux milieux, la condition de continuité s'exprime par :

$$\varepsilon_1 \vec{\nabla}\phi(x,y) \cdot \vec{n}_{\Gamma^+} = \varepsilon_2 \vec{\nabla}\phi(x,y) \cdot \vec{n}_{\Gamma^-} \tag{II.40}$$

Références : [153, 185]

Pertes résistives dues aux conducteurs

Dans le cas général, la conductivité des conducteurs électriques est finie. Le champ électrique tangent à la surface des conducteurs n'est donc pas nul, ce qui est une contradiction directe de l'hypothèse de propagation TEM. Néanmoins, en présence de bons conducteurs, le champ résultant est alors *quasi* transverse d'où l'hypothèse de travail de champ dit *quasi-TEM*. Dans ce cadre, les équations des lignes de transmission sont considérées valides avec l'introduction d'une ***impédance surfacique*** permettant de relier le champ électrique tangentiel *total* de surface à la quantité de courant parcourant la ligne.
En reprenant le schéma de la figure II.2(a), le calcul de **1** doit donc être modifié, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{E}\cdot\vec{d\ell} &= \int_P^{P'} \vec{E}\cdot\vec{dl_1} + \int_{P'}^{Q'} \vec{E}\cdot\vec{dl_2} + \int_{Q'}^{Q} \vec{E}\cdot\vec{dl_3} + \int_{Q}^{P} \vec{E}\cdot\vec{dl_4} \\ &= \underbrace{\int_P^{P'} \left(\vec{E}\cdot\vec{u_y}\right) dy}_{=-V(z,t)} + \underbrace{\int_{P'}^{Q'} \left(\vec{E}\cdot\vec{u_z}\right) dz}_{=Zr_1\Delta z I(z,t)} - \underbrace{\int_{Q'}^{Q} \left(\vec{E}\cdot\vec{u_y}\right) dy}_{=V(z+\Delta z,t)} - \underbrace{\int_{Q}^{P} \left(\vec{E}\cdot\vec{u_z}\right) dz}_{=Zr_0\Delta z I(z,t)}\end{aligned}$$

où Z_{ri} est l'impédance introduite définie comme la résistance par unité de longueur du conducteur i.

Ainsi, le système d'équation (II.38) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{V}(z)}{\partial z} + Z(\omega)\mathbf{I}(z) = \mathbf{V_s}(z) & \text{(II.41a)} \\ \dfrac{\partial \mathbf{I}(z)}{\partial z} + Y(\omega)\mathbf{V}(z) = \mathbf{I_s}(z) & \text{(II.41b)} \end{cases}$$

- $Z(\omega) = (Z_{r0} + Z_{r1} + j\omega\ell)$, *l'impédance* par unité de longueur de la ligne, composée des termes de résistance, et d'inductance mutuelle entre ligne.
- $Y(\omega) = (g + j\omega c)$, l'*admittance* par unité de longueur de la ligne contenant les termes de conductance et de capacité.

Dans le cadre d'un fil cylindrique plein, l'expression de cette impédance est sensible à la pulsation ω des champs. La formulation analytique suivante couvre notamment les effets dits « de peau » :

$$Z_{ri} = \frac{\eta_w}{2\pi a}\frac{I_0(\gamma_w a)}{I_1(\gamma_w a)} = r_i(\omega) + j\omega\ell_{ii}(\omega) \quad \text{(II.42)}$$

Avec :

- ε_w, μ_w et σ_w, respectivement la permittivité électrique, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique du conducteur
- $\eta_w = \sqrt{\dfrac{j\omega\mu_w}{\sigma_w + j\omega\varepsilon_w}}$: l'impédance caractéristique du matériau conducteur exprimée en Ω
- a : le diamètre du fil en m
- $\gamma_w = \sqrt{j\omega\mu_w(\sigma_w + j\omega\varepsilon_w)}$: la constante de propagation dans le matériau conducteur
- $I_0(\cdot)$ et $I_1(\cdot)$: les deux premières fonctions de Bessel de première espèce
- r_i : La partie réelle de l'impédance correspondant au terme de résistance électrique
- ℓ_{ii} : La partie imaginaire de l'impédance correspondant au terme de self-inductance.

Références : [143, 153, 191]

II.3.5 Courant de mode différentiel et courant de mode commun

Afin d'être tout à fait valide, l'hypothèse du mode de propagation TEM impose que la somme des courants traversant le plan transverse soit nulle (le conducteur de référence porte la somme de **tous** les courants de la ligne). Or, il est possible de représenter le courant total comme la contribution de deux types de courants, de mode commun et de mode différentiel tels que décrits en figure II.5.
Ceux-ci se caractérisent par :

— **le courant de mode différentiel :** noté I_{tl} , il est encore appelé *courant de ligne de transmission*. De magnitude égale mais de sens contraire sur les deux fils de la ligne, il s'agit du courant prédit par le modèle des lignes de transmission dans le cas de l'application stricte du mode de propagation TEM.

— **le courant de mode commun :** noté I_a, encore appelé *courant d'antenne*, il est de magnitude et de direction égale sur les deux conducteurs de la ligne.

La distinction entre les deux types de courant est d'une importance capitale lors de l'étude des champs rayonnés. En effet, bien que les magnitudes des courants de mode commun soient d'ordinaire plus faibles que ceux de mode différentiel, ces derniers tendent à *additionner* leurs contributions au champ électrique rayonné tandis que les courants de mode différentiel tendent, dans le même temps, à *s'annuler*.
Ainsi, un « petit » courant de mode commun peut donner les mêmes amplitudes d'émission rayonnée qu'un courant de mode différentiel bien plus important.
Ces phénomènes ne sont pas négligeables dans au moins deux cas :

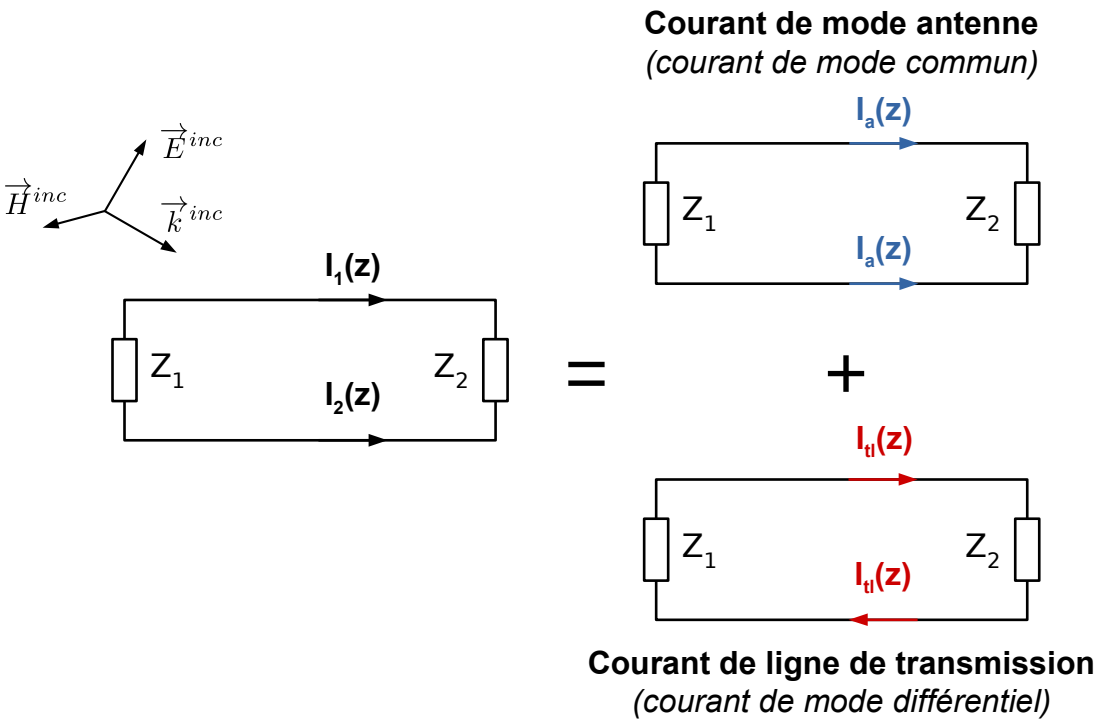


Figure II.5 – Décomposition du courant total sur la ligne en courant de mode différentiel et commun

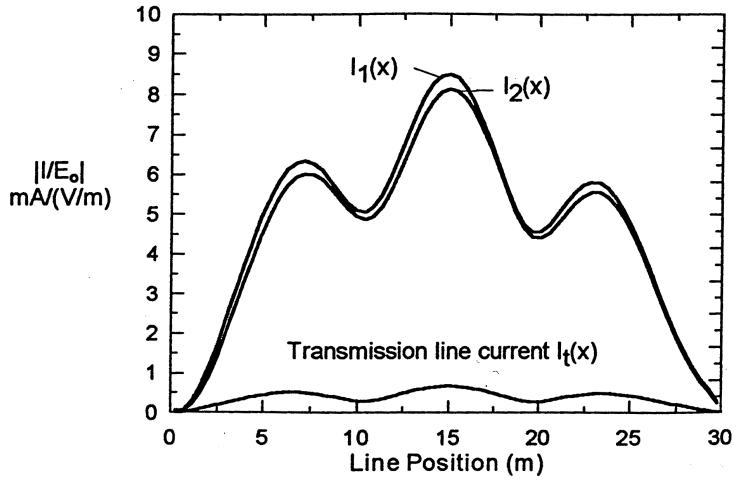
- lorsque la longueur de la ligne n'est pas assez grande par rapport à la distance de séparation des conducteurs. Dans ce cas, la ligne apparait comme une antenne à boucle (*loop antenna*)
- lorsque la ligne présente des dissymétries, qui peuvent être causées par un obstacle métallique dans la direction de la ligne par exemple ou bien simplement au niveau des sources et des terminaisons de la ligne.

L'influence de ces conditions sur la validité du formalisme des lignes de transmission est discutée à l'aide de deux exemples.
Dans un premier cas, la ligne est composée d'une structure bifilaire de 30 m de longueur dont les conducteurs, de rayon $a = 0,15$ cm, sont séparés d'une distance $d = 20$ cm. Les deux conducteurs, supposés sans perte, sont réliés à leurs extremités par une impédance d'une valeur de 293 Ω environ égale à la moitié de l'impédance caractéristique de la ligne. La ligne est illuminée par une onde incidente de fréquence $f = 20$ MHz et faisant un angle de 60 degrés par rapport à la surface des conducteurs. Le tracé des courants totaux présenté en Figure II.6(a) est obtenu par une méthode numérique dite *full-wave*. Il montre clairement que la contribution du courant de ligne de transmission est *négligeable* ce qui signifie qu'ici le formalisme des lignes de transmission n'est pas adapté dans le cas présent.
Il existe toutefois de nombreuses configurations pour lesquelles le formalisme des lignes de transmission est particulièrement bien adapté notamment lorsqu'une symétrie parfaite est respectée. Dans le deuxième exemple, le second conducteur du cas d'application précédent est remplacé par un plan de masse parfaitement conducteur placé à mi-hauteur, soit $d/2 = 10$ cm. Les courants calculés par le formalisme des lignes de transmission se superposent presque parfaitement aux courants calculés par une méthode *full-wave* étiquetée « NEC » (*Numerical Electromagnetic Code*) sur le graphique de la figure II.6(b)).

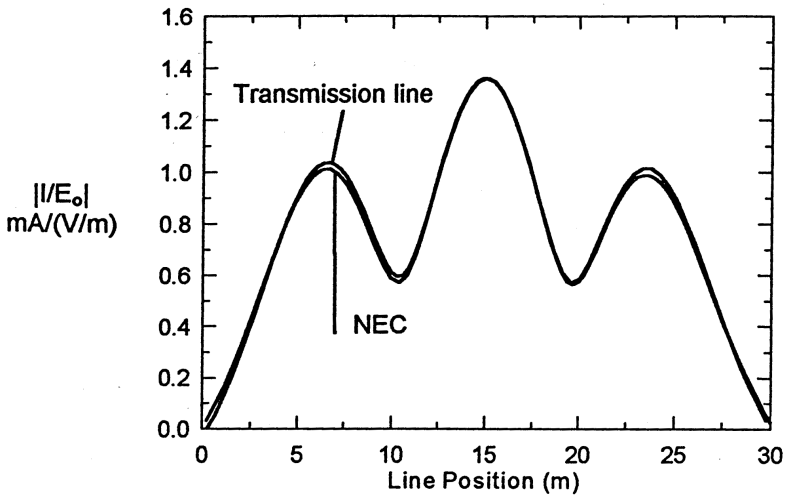
Références : [153, 191]

II.4 Théorie des lignes de transmission multiconducteurs

Dans cette section, les résultats obtenus jusqu'à présent seront généralisés à un nombre arbitraire $n+1$ de conducteurs. Dans un premier temps, la représentation de la ligne à l'aide d'éléments de circuit servira à introduire formellement les matrices R, L, C et G permettant de décrire complètement la



(a) Différence des courants de mode antenne et de lignes de transmission. Tiré de [191]



(b) Comparaison des courants calculés par un modèle de lignes de transmission ou par un code à base d'équation intégrale. Tiré de [191]

Figure II.6 – Tracés des contributions des courants de ligne de transmission pour deux configurations

ligne. La question de la solution des équations couplées de lignes de transmission sera également abordée.

II.4.1 Généralisation à N conducteurs

En considérant une ligne composée de N conducteurs possédant un conducteur de référence, l'application des principes exposés ci-avant permettent d'établir la représentation circuit de la Figure II.7.

L'hypothèse du mode de propagation *quasi*-TEM impose que la somme des courants traversant le plan transverse soit nulle, ce qui signifie que le conducteur de référence porte la somme de tous les courants de retour. Le système d'équations généralisées des lignes de transmission adopte dans ce cas la forme

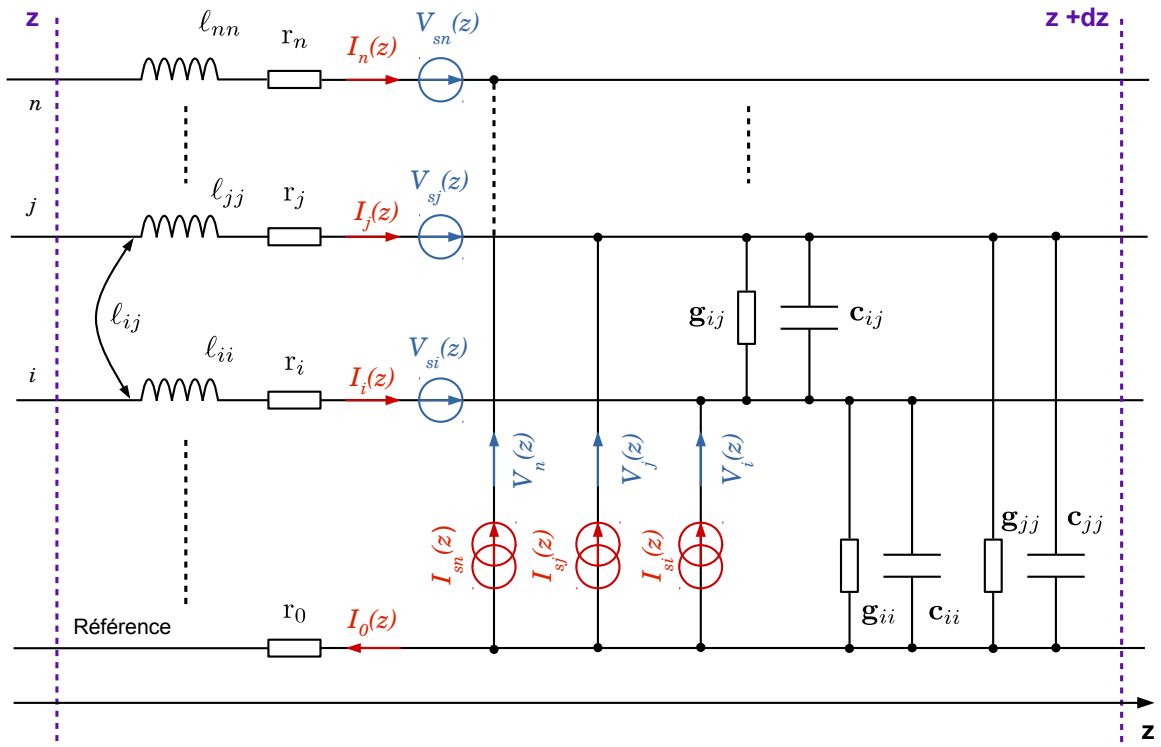


Figure II.7 – Représentation circuit d'une ligne de transmission multiconducteurs arbitraire

matricielle suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}[\mathbf{V}(z)] + \underbrace{(\mathrm{R} + j\omega\mathrm{L})}_{=[\mathrm{Z}(\omega)]}[\mathbf{I}(z)] = [\mathbf{V_s}(z)] & \text{(II.43a)} \\ \dfrac{\partial}{\partial z}[\mathbf{I}(z)] + \underbrace{(\mathrm{G} + j\omega\mathrm{C})}_{=[\mathrm{Y}(\omega)]}[\mathbf{V}(z)] = [\mathbf{I_s}(z)] & \text{(II.43b)} \end{cases}$$

Avec :

$$[\mathbf{V}(z)] = \begin{bmatrix} \mathbf{V_1}(z) \\ \mathbf{V_2}(z) \\ \vdots \\ \mathbf{V_n}(z) \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{I}(z)] = \begin{bmatrix} \mathbf{I_1}(z) \\ \mathbf{I_2}(z) \\ \vdots \\ \mathbf{I_n}(z) \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{I_s}(z)] = \begin{bmatrix} \mathbf{I_{s1}}(z) \\ \mathbf{I_{s2}}(z) \\ \vdots \\ \mathbf{I_{sn}}(z) \end{bmatrix} \text{ et } [\mathbf{V_s}(z)] = \begin{bmatrix} \mathbf{V_{s1}}(z) \\ \mathbf{V_{s2}}(z) \\ \vdots \\ \mathbf{V_{sn}}(z) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{R} = \begin{bmatrix} (r_1 + r_0) & r_0 & \dots & r_0 \\ r_0 & (r_2 + r_0) & \dots & r_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_0 & r_0 & \dots & (r_n + r_0) \end{bmatrix} \qquad \mathrm{L} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \dots & \ell_{1n} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \dots & \ell_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \dots & \ell_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{G} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} g_{1k} & -g_{12} & \dots & -g_{1n} \\ -g_{21} & \sum_{k=1}^{n} g_{2k} & \dots & -g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -g_{n1} & -g_{n2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} g_{nk} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} c_{1k} & -c_{12} & \dots & -c_{1n} \\ -c_{21} & \sum_{k=1}^{n} c_{2k} & \dots & -c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{n1} & -c_{n2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} c_{nk} \end{bmatrix}$$

II.4.2 Résolution des équations des télégraphistes généralisées

Le système d'équation (II.43) est un système d'équations couplées qu'il est possible de réécrire sous la forme *non-couplée* suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}[\mathbf{V}(z)] - [\mathbf{Z}(\omega)][\mathbf{Y}(\omega)][\mathbf{V}(z)] = \dfrac{\partial}{\partial z}[\mathbf{V_s}(z)] - [\mathbf{Z}(\omega)][\mathbf{I_s}(z)] & \text{(II.44a)} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}[\mathbf{I}(z)] - [\mathbf{Y}(\omega)][\mathbf{Z}(\omega)][\mathbf{I}(z)] = \dfrac{\partial}{\partial z}[\mathbf{I_s}(z)] - [\mathbf{Y}(\omega)][\mathbf{V_s}(z)] & \text{(II.44b)} \end{cases}$$

Les multiplications de matrices étant généralement non-commutatives, l'ordre de multiplication est importante. L'étude débute par la recherche des solutions *homogènes* des équations du système, c'est-à-dire sans second membre (absence de source). Dans ce cas, on est amené à introduire la matrice des constantes de propagation $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\begin{cases} [\mathbf{V}(z)] = [\mathbf{V}_1(z)]e^{-\boldsymbol{\gamma} z} + [\mathbf{V}_2(z)]e^{+\boldsymbol{\gamma} z} \\ [\mathbf{I}(z)] = [\mathbf{I}_1(z)]e^{-\boldsymbol{\gamma} z} + [\mathbf{I}_2(z)]e^{+\boldsymbol{\gamma} z} \end{cases} \tag{II.45}$$

avec :

$$\boldsymbol{\gamma} = [\mathbf{Z}(\omega)\mathbf{Y}(\omega)]^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad e^{\pm\boldsymbol{\gamma} z} = \begin{bmatrix} e^{\pm\gamma_1 z} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\pm\gamma_2 z} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\pm\gamma_n z} \end{bmatrix} \tag{II.46}$$

Les termes $[\mathbf{V}_1(z)]$ et $[\mathbf{V}_2(z)]$ ainsi que $[\mathbf{I}_1(z)]$ et $[\mathbf{I}_2(z)]$ sont les vecteurs de coefficients inconnus qui dépendent des conditions terminales Z_{1i} et Z_{2i}

A ce stade, il est utile d'introduire la matrice impédance caractéristique $\mathbf{Z_c}$ obtenue par la réinjection des expressions de (II.45) dans (II.43) :

$$[\mathbf{Z_c}] = \boldsymbol{\gamma}[\mathbf{Y}(\omega)]^{-1} = \boldsymbol{\gamma}^{-1}[\mathbf{Z}(\omega)] \tag{II.47}$$

Les changements de variables suivants permettent d'exprimer les solutions de (II.43) sous la forme d'ondes de tension *directes* et *retrogrades* :

$$\begin{cases} [\mathbf{V}_+(z)] = [\mathbf{V}(z)] + [\mathbf{Z_c}][\mathbf{I}(z)] & \text{(II.48a)} \\ [\mathbf{V}_-(z)] = [\mathbf{V}(z)] - [\mathbf{Z_c}][\mathbf{I}(z)] & \text{(II.48b)} \\ [\mathbf{V}_{s+}(z)] = [\mathbf{V_s}(z)] + [\mathbf{Z_c}][\mathbf{I_s}(z)] & \text{(II.48c)} \\ [\mathbf{V}_{s-}(z)] = [\mathbf{V_s}(z)] - [\mathbf{Z_c}][\mathbf{I_s}(z)] & \text{(II.48d)} \end{cases}$$

soit,

$$[\mathbf{V}(z)] = \frac{1}{2}[\mathbf{V}_+(z) + \mathbf{V}_-(z)] \quad \text{et} \quad [\mathbf{I}(z)] = \frac{1}{2}[\mathbf{Z_c}][\mathbf{V}_+(z) - \mathbf{V}_-(z)] \tag{II.49}$$

En réinjectant le changement de variable dans (II.43), le système s'exprime uniquement sous la forme d'un système *non-couplé* d'ondes de tension *directes* et *rétrogrades* :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}[\mathbf{V}_+(z)] + \boldsymbol{\gamma}[\mathbf{V}_+(z)] = [\mathbf{V}_{s+}(z)] & \text{(II.50a)} \\ \dfrac{\partial}{\partial z}[\mathbf{V}_-(z)] - \boldsymbol{\gamma}[\mathbf{V}_-(z)] = [\mathbf{V}_{s-}(z)] & \text{(II.50b)} \end{cases}$$

qui est un système d'équations différentielles du premier ordre.
Ainsi, en posant le changement de variable suivant $z' = L - z$ pour les ondes *rétrogrades*, les équations de propagation suivantes sont obtenues :

$$\begin{cases} [\mathbf{V}_+(z=L)] = e^{-\gamma L}[\mathbf{V}_+(z=0)] + \displaystyle\int_0^L \left(e^{-\gamma(L-z)}\,[\mathbf{V}_{s+}(z)]\right) \mathrm{d}z & \text{(II.51a)} \\ \left[\mathbf{V}_+(z'=L)\right] = e^{-\gamma L}[\mathbf{V}_+(z'=0)] + \displaystyle\int_0^L \left(e^{-\gamma(L-z')}\left[\mathbf{V}_{s+}(z')\right]\right) \mathrm{d}z' & \text{(II.51b)} \end{cases}$$

Les solutions du problème homogène sont ainsi exprimées sous la forme de deux ondes directes de directions opposées.

Références : [29, 146]

II.5 L'approche topologique

II.5.1 Principe

La théorie de la *topologie électromagnétique* a été introduite dans les années 1970 comme un support de conception pour les programmes de durcissement à l'IEMN (**I**mpulsion **É**lectro**M**agnétique d'origine **N**ucléaire). C'est dans ce but qu'elle fait intervenir des notions de découpage en volumes, en fonction de la géométrie du problème. Ce découpage repose sur le principe de l'approximation des bons blindages (Good Shielding Approximation) qui suppose que la rétroaction de l'intérieur des volumes sur l'extérieur est faible et peut être négligée [17, 148].
Du point de vue quantitatif, ce principe théorique de découpage en volumes inclus les uns dans les autres s'avère très peu pratique pour des systèmes réels, en particulier à cause de la présence incontournable des câbles. C'est pourquoi, avant 1990, l'essentiel des publications sur le sujet a conservé un caractère purement académique.

En 1990, la théorie de la topologie électromagnétique a été adaptée avec succès aux applications de Compatibilité Électromagnétique à l'ONERA [147] avec pour objectif la résolution des problématiques de couplage sur les câblages.
Ainsi dès 1991, l'ONERA a montré l'intérêt d'une telle approche, concrétisée par la programmation d'un code numérique dans le domaine fréquentiel, dénommé CRIPTE pour *Calcul sur Réseaux des Interactions Perturbatrices en Topologie Électromagnétique*.

La première étape de l'approche topologique consiste en une description géométrique du problème. Cette description fait appel aux notions de « volumes » et de « surfaces » et conduit à l'établissement d'un « diagramme topologique » associé au problème. En faisant l'approximation raisonnable que les surfaces topologiques affaiblissent significativement le niveau des signaux transmis, le problème global peut être ramené à une série de problèmes élémentaires propres à chaque volume topologique.
Pour illustrer cette approche, celle-ci a été appliquée à la configuration décrite en figure II.8.
Elle représente une maquette radioélectrique d'un aéronef sur lequel quatre « grands » volumes physiques apparaissent et correspondent à :

- l'aile droite,
- l'aile gauche,
- le fuselage,
- une partie intermédiaire permettant de raccorder les trois volumes précédents.

De plus, les cheminements de deux câblages apparaissent clairement sur la figure II.8. Ils correspondent à :

- une liaison reliant les deux extrémités des deux ailes,
- une liaison reliant l'extrémité de l'aile gauche au nez du fuselage.

Deux voies de pénétrations génériques de l'énergie électromagnétique à l'intérieur de l'avion sont aussi identifiées. Il s'agit de :

- pénétrations par ouvertures (ouvertures 1 et 2),

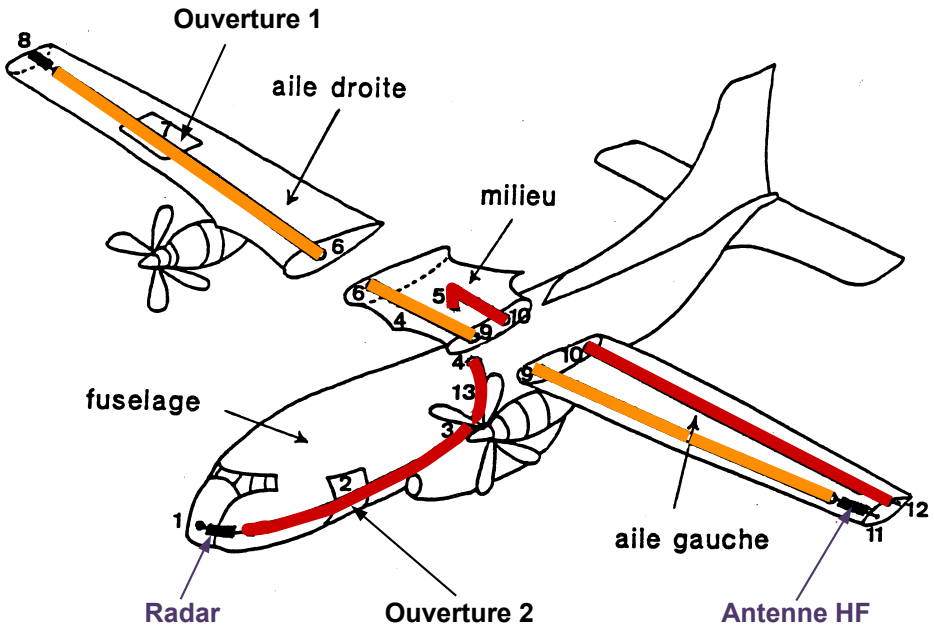


Figure II.8 – Schéma de la maquette radio-électrique d'un aéronef. Issu de [147]

— dissipations par les parois en fonction de la nature des matériaux (métallique / composite pouvant être soumises au phénomène de diffusion EM).

A ce découpage « en volumes » est associé une représentation duale consistant à décrire l'ensemble des interactions entre les différents volumes topologiques sous forme de graphe dit « graphe topologique » (cf Figure II.9) ; à chaque volume topologique, un nœud du graphe est associé ; à chaque surface (parois, boitiers, câbles) délimitant deux volumes topologiques, une arrête reliant les deux nœuds correspondant aux volumes est aussi définie.

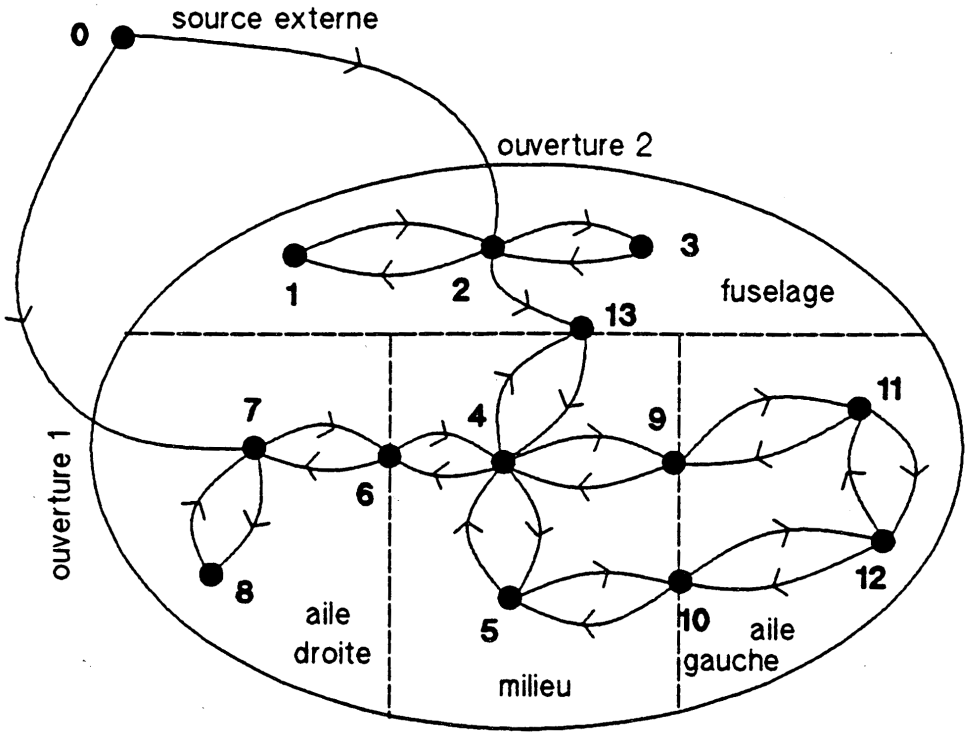


Figure II.9 – Diagramme topologique associé à la maquette radio-électrique. Issu de [147]

Enfin à la frontière entre plusieurs volumes adjacents, des conditions aux limites physiques doivent

être vérifiées (elles sont représentées par des noeuds dans le diagramme topologique).

II.5.2 Application aux réseaux de câblages

Afin de modéliser de larges réseaux de câblages comme ceux embarqués dans les aéronefs, encore appelé EWIS pour *Electrical Wiring Interconnection System*, il est nécessaire de réduire au maximum la complexité de ce dernier étant donné qu'une modélisation 3D est exclue. L'approche topologique est dans ce cas particulièrement bien adaptée puisqu'une analyse fonctionnelle de l'installation permet de différencier *intuitivement* les différents volumes élémentaires.
Une méthodologie de construction d'un réseau topologique à partir d'une analyse fonctionnelle est développée en détail dans [164].
La première étape de la méthode consiste à lister tous les éléments d'intérêt concernant d'une part, l'intégration du câblage dans la structure (route de câble dans la maquette CAO 3D complète, connexion locale aux équipements) et d'autre part, l'ensemble des propriétés physiques propres au câblage (type de câbles utilisés, nombre de conducteurs par toron, blindages éventuels).
A partir des données extraites de l'architecture, les *liens* et *groupes* dits *fonctionnels* sont respectivement définis par :

- des *liens fonctionnels* connectant au minimum deux terminaisons entres elles (équipement ou connecteur). Ces liens sont caractérisés par les types de signaux, les impédances terminales ainsi que par les types de câbles utilisés.
- des *groupes fonctionnels* regroupant un ensemble de liens fonctionnels partageant la même route d'installation.

Un exemple d'architecture de câblage est donné en figure II.10(a). Dans cette illustration, chacun des trois équipements est relié par trois groupes fonctionnels.
Les principes de la topologie électromagnétique sont alors appliqués. Chaque groupe de câble (toron) composant tout ou partie d'un groupe fonctionnel et partageant les mêmes conditions d'installations est placé au sein d'un même volume topologique dénommé *tube*.
Les nœuds du réseau topologique sont appelés *jonctions*. Celles-ci permettent d'assurer la continuité électrique entre les tubes mais permettent également de modéliser les impédances terminales des équipements.
Le réseau topologique associé à l'architecture introduite est donné en figure Fig.II.10(b). Ce dernier est composé de trois *tubes* et de quatre *jonctions*.

II.5.3 Établissement et résolution de l'équation BLT

La résolution de l'équation **BLT**, nommée ainsi en l'honneur de ses inventeurs Carl E. **B**aum, Tom K. **L**iu et Frederick M. **T**esche, donne accès au couple courant-tension sur chacun des fils du réseau. Elle consiste à déterminer les *ondes sources* en chacune des jonctions du réseau.

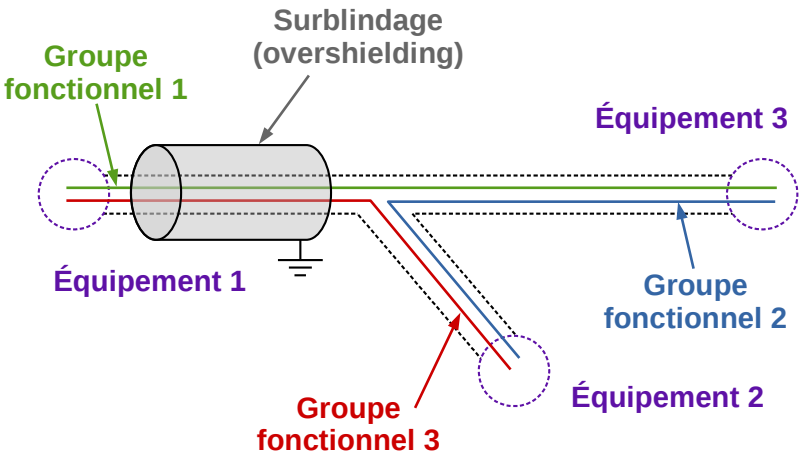
Équation de propagation sur tubes

Par convention avec la littérature, on note $\mathbf{W}$ les ondes directes dont les expressions ont été déterminées lors de l'établissement des équations de lignes de transmission, soit :

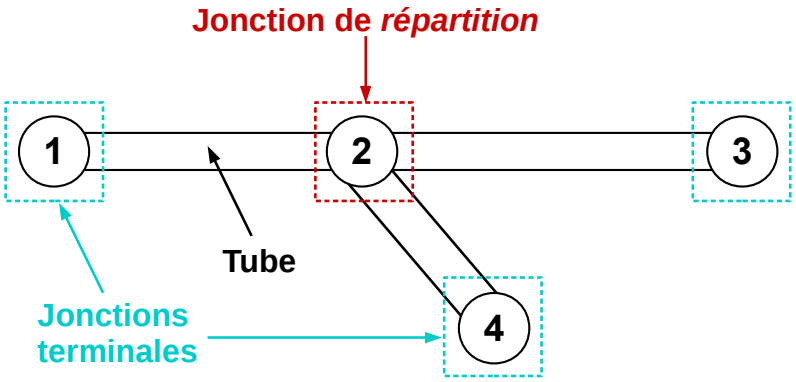
$$[\mathbf{W}(z)] = [\mathbf{V}_+(z)] \tag{II.52}$$

Dans le cas d'un unique tube comme présenté en figure II.11, la relation de propagation est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{W}_1(z=L)] \\ [\mathbf{W}_2(z'=L)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\gamma L} & [0] \\ [0] & e^{-\gamma L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{W}_1(z=0)] \\ [\mathbf{W}_2(z'=0)] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^L \left(e^{-\gamma(L-z)} [\mathbf{W}_{s+}(z)] \right) \mathrm{d}z \\ \int_0^L \left(e^{-\gamma(L-z')} [\mathbf{W}_{s+}(z')] \right) \mathrm{d}z' \end{bmatrix} \tag{II.53}$$



(a) Représentation fonctionnelle d'un réseau électrique



(b) Réseau topologique associé à l'architecture

Figure II.10 – Différentes représentations d'une architecture électrique

Cette relation se généralise à un nombre arbitraire N de tubes, c'est à dire qu'il existe $2N$ ondes directes permettant de décrire le réseau. On obtient donc la relation générale de propagation suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [\mathbf{W}_1(z=L)] \\ [\mathbf{W}_2(z=L)] \\ \vdots \\ [\mathbf{W}_{2N}(z=L)] \end{bmatrix}}_{[[\mathbf{W}(L)]]} = \underbrace{\begin{bmatrix} [\Gamma_1] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\Gamma_2] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [\Gamma_{2N}] \end{bmatrix}}_{[[\Gamma]]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} [\mathbf{W}_1(z=0)] \\ [\mathbf{W}_2(z=0)] \\ \vdots \\ [\mathbf{W}_{2N}(z=0)] \end{bmatrix}}_{[[\mathbf{W}(0)]]} + \underbrace{\begin{bmatrix} [\mathbf{W}_1^s] \\ [\mathbf{W}_2^s] \\ \vdots \\ [\mathbf{W}_{2N}^s] \end{bmatrix}}_{[[\mathbf{W}^s]]} \tag{II.54}$$

où $[[\bullet]]$: est le super-vecteur de $\bullet$

Équation de répartition aux jonctions

Comme évoqué précédemment, il existe deux types de jonction, à savoir les jonctions *terminales* et les jonctions de *répartition* représentées en figure II.12.
L'équation de dispersion (« scattered » en anglais) reliant l'onde sortante d'un tube k à toutes les autres ondes entrantes dans la jonction J_n (Fig. II.12) est donnée par l'expression suivante :

$$[\mathbf{W}_{m+k}(0)] = \underbrace{[S_{kk}] \cdot [\mathbf{W}_k(L)]}_{\text{reflexion}} + \overbrace{\sum_{x \neq k}^{m} [S_{kx}] \cdot [\mathbf{W}_x(L)]}^{\text{transmission}} \tag{II.55}$$

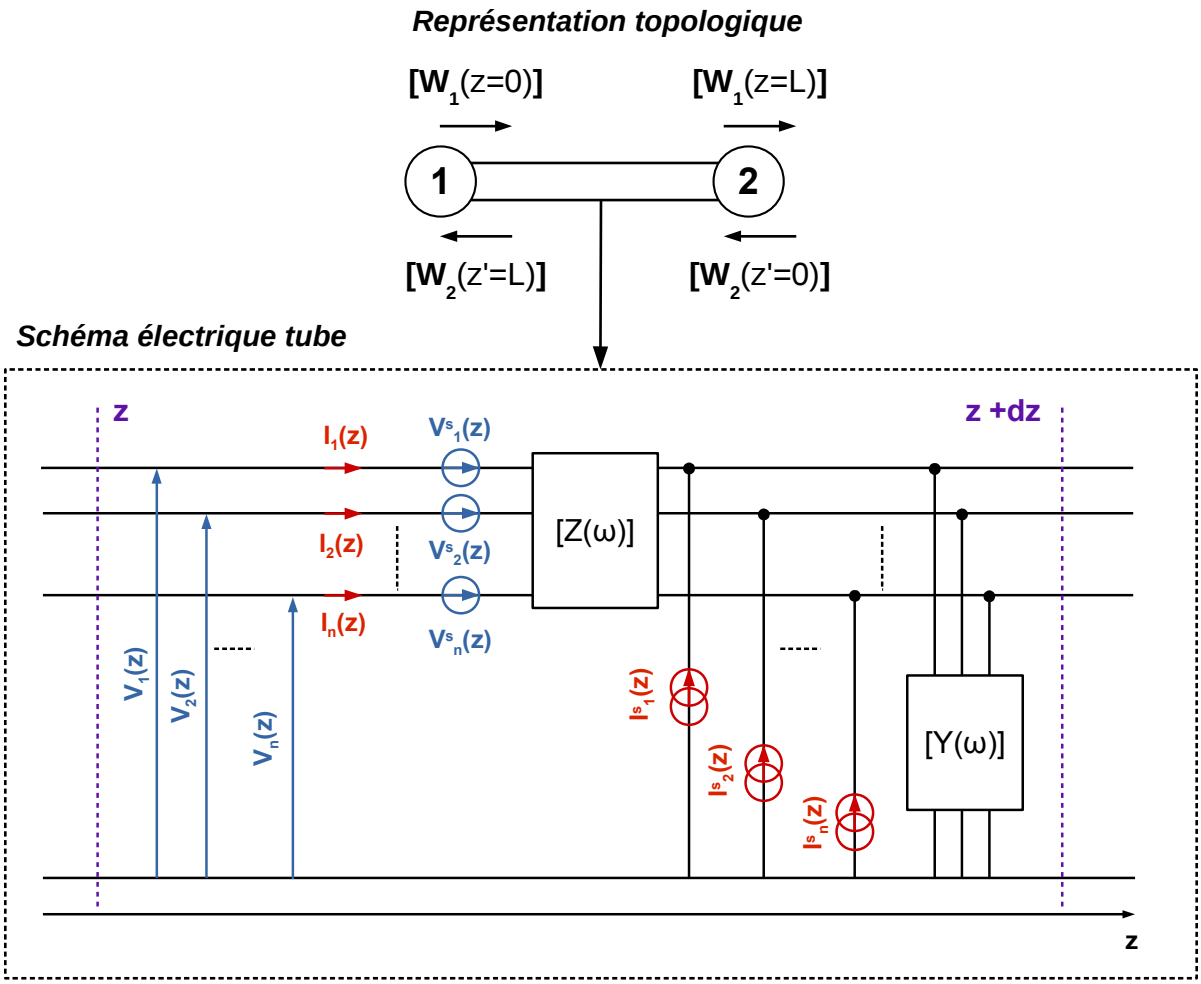


Figure II.11 – Établissement de l'équation de propagation

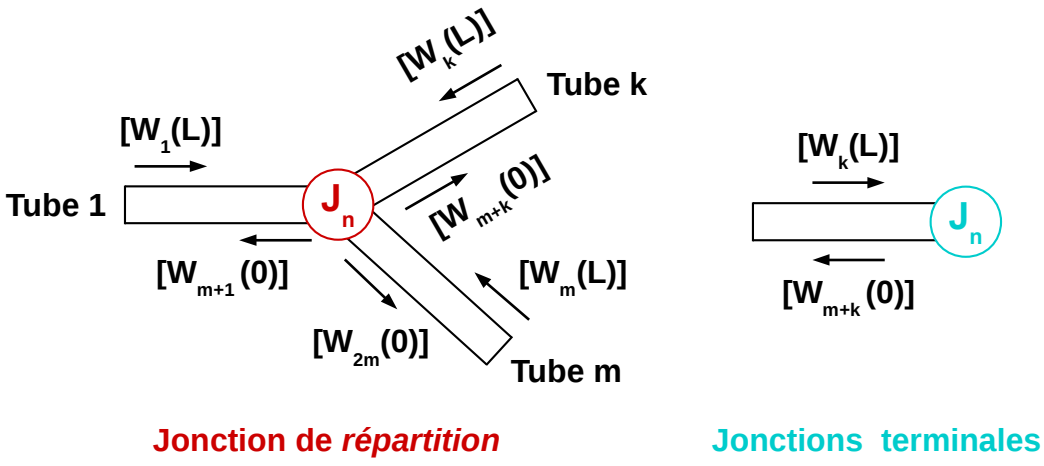


Figure II.12 – Établissement de l'équation de répartition. Reproduit de [29]

Dans le cas des jonctions terminales, seule la partie réflexion subsiste dans l'expression (II.55).

La généralisation à l'ensemble des jonctions du réseau mène à la définition d'une supermatrice de répartition topologique $[[S_{topo}]]$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [\mathbf{W}_1(z=L)] \\ [\mathbf{W}_2(z=L)] \\ \vdots \\ [\mathbf{W}_{2N}(z=L)] \end{bmatrix}}_{[[\mathbf{W}(L)]]} = \underbrace{\begin{bmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] & \cdots & [S_{1,2N}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] & \cdots & [S_{2,2N}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [S_{2N,1}] & [S_{2N,2}] & \cdots & [S_{2N,2N}] \end{bmatrix}}_{[[S_{topo}]]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} [\mathbf{W}_1(z=0)] \\ [\mathbf{W}_2(z=0)] \\ \vdots \\ [\mathbf{W}_{2N}(z=0)] \end{bmatrix}}_{[[\mathbf{W}(0)]]} \tag{II.56}$$

Combinaison des termes de propagation et de répartition : équation BLT

La combinaison des équations (II.54) et (II.56) conduit finalement à la relation dite **BLT** :

$$(\mathbf{I_d} - [[S_{topo}]].[[\Gamma]]) .[[\mathbf{W}(0)]] = [[S_{topo}]].[[\mathbf{W}^s]] \tag{II.57}$$

Avec :

- $\mathbf{I_d}$: la matrice identité

Références : [29, 146]

Conversion des ondes en tension et courant

La résolution de l'équation BLT (II.57) permet d'accéder à la connaissance des ondes inconnues à l'origine $[[\mathbf{W}(0)]]$ de chaque tube. Celles-ci mènent alors aux expressions du couple tension-courant suivantes établies dans [29] :

- Si $[[S_{topo}]]$ est non singulière (i.e inversible) :

$$[[\mathbf{V}(0)]] = \left([[\alpha]] \cdot [[\mathbf{Z_c}]]^{-1} + [[\mathbf{Z_c}]]^{-1} \cdot [[\alpha]]\right)^{-1} + \left([[\alpha]] \cdot [[\mathbf{Z_c}]]^{-1} + [[\mathbf{Z_c}]]^{-1} \cdot [[S_{topo}]]^{-1}\right) \cdot [[\mathbf{W}(0)]]$$
$$[[\mathbf{I}(0)]] = ([[\alpha]] \cdot [[\mathbf{Z_c}]] + [[\mathbf{Z_c}]] \cdot [[\alpha]])^{-1} + \left([[\alpha]] - [[S_{topo}]]^{-1}\right) \cdot [[\mathbf{W}(0)]]$$

- Si $[[S_{topo}]]$ est singulière :

$$[[\mathbf{V}(0)]] = \left([[\alpha]] \cdot [[\mathbf{Z_c}]]^{-1} + [[\mathbf{Z_c}]]^{-1} \cdot [[\alpha]]\right)^{-1} + \left([[\alpha]] \cdot [[\mathbf{Z_c}]]^{-1} \cdot [[\mathbf{W}(0)]] + [[\mathbf{Z_c}]]^{-1} \cdot ([[\Gamma]] \cdot [[\mathbf{W}(0)]] + [[\mathbf{W}^s]])\right)$$

$$[[\mathbf{I}(0)]] = ([[\alpha]] \cdot [[\mathbf{Z_c}]] + [[\mathbf{Z_c}]] \cdot [[\alpha]])^{-1} + (([[\alpha]] - [[\Gamma]]) \cdot [[\mathbf{W}(0)]] - [[\mathbf{W}^s]])$$

II.6 Conclusion

Dans ce chapitre, les équations des lignes de transmission ont été établies directement à partir des équations de Maxwell. A cette occasion, la prise en compte du couplage champ-câble a également été clairement explicitée. Le formalisme des lignes permet alors de représenter le comportement électromagnétique d'une ligne multiconducteur à l'aide de quatre paramètres électriques primaires, à savoir :

- la matrice *inductance*, qui caractérise les différents couplages *magnétiques* sur et entre les conducteurs.
- la matrice *capacité*, qui caractérise les différents couplages *électriques* entre les conducteurs.
- la matrice *conductance*, qui caractérise les pertes dans les diélectriques.

- la matrice *résistance*, qui caractérise les pertes dans les conducteurs. Naturellement, ces pertes engendrent des échauffements dans les conducteurs.

Les réseaux de câblage, de par leur construction, se prêtent particulièrement bien aux principes de la *topologie électromagnétique*. Dans ce cadre, le formalisme des lignes à été intégré à cette approche topologique, ce qui a permis d'établir l'équation **BLT**.
La résolution de cette équation donne alors accès au couple courant-tension en chaque point du réseau de câblage, ce qui en fait « un outil performant pour la modélisation du comportement CEM d'un réseau » [29].
Ces problématiques de compatibilité électromagnétique sur les réseaux de câblage couvrent de larges domaines de recherche et il ne pourrait être possible de citer ici l'ensemble des travaux qui ont été publiés sur le sujet. A titre d'exemple, le tableau ci-dessous présente un aperçu de différentes lectures présentant un intérêt dans le cadre de ces travaux de doctorat.

Index des références bibliographiques		
Sujet	**Description**	**Références**
Théorie électromagnétique	Monographies de références sur les lignes de transmission et l'électrodynamique classique	[29, 143, 153, 185, 191]
Modélisation des câblages	Généralités sur les câbles et les lignes électriques	[12, 55, 86, 100, 142, 167, 189]
Topologie électromagnétique	Généralités et applications aux câblages	[29, 146, 148, 165]

Table II.1 – Sommaire des références bibliographiques par type de contenu

A retenir :

- Le modèle des lignes de transmission multiconducteurs se fonde sur l'hypothèse de propagation *quasi*-TEM du champ électromagnétique. Mathématiquement, le potentiel électrostatique est décrit dans le plan transverse par une équation de *Laplace* :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon \vec{\nabla} \Phi \right) = 0$$

- Une ligne multiconducteurs est totalement définie par la connaissance de ses éléments *circuits* distribués, appelés paramètres électriques primaires par unité de longueur (p.u.l). Il s'agit des matrices résistance (R), inductance (L), capacité (C) et conductance (G)
- L'application des principes de la *topologie électromagnétique* au formalisme des lignes de transmission permet d'accéder aux courants et tensions en chaque point de la ligne via la résolution de l'équation BLT à l'aide du code de calcul CRIPTE développé à l'ONERA.

CHAPITRE III

Analyse bibliographique. Partie II : transferts thermiques et applications

Table des matières

III.1 La théorie des transferts de chaleur 43
III.1.1 Les trois modes de transfert 43
III.1.2 Transferts conductifs et équation de la chaleur 44
III.1.3 Transferts de chaleur par convection naturelle 46
III.1.4 Coefficient de transfert de chaleur en espace libre 49
III.2 Méthodes de simulation des transferts de chaleur appliquées aux câbles électriques aéronautiques 51
III.2.1 Modèles empiriques 53
III.2.2 Homogénéisation des propriétés thermiques 55
III.2.3 Résolution numérique de l'équation de la chaleur 58
III.3 Énergie thermique dissipée par les lignes de transmission 59
III.3.1 Relation générale 59
III.3.2 Détermination de la permittivité effective $\varepsilon(\omega)$ 61
III.3.3 Variation de la résistivité électrique en fonction de la température 63
III.3.4 Puissance thermique dissipée dans les lignes de transmission 65
III.4 Conclusion 66

Le but de ce chapitre est d'introduire les diverses notions liées à la prédiction des échauffements apparaissant au sein des torons de câbles électriques. Notre étude débutera par une revue des fondements théoriques concernant la conduction de la chaleur (le mode privilégié des transferts au sein des torons) et les phénomènes de transfert par convection qui sont à la base du refroidissement passif des équipements.
Dans une seconde section, nous présenterons un aperçu des modèles « ingénieur » développés par les industriels, notamment aéronautiques, pour le dimensionnement des câbles en fonction des diverses contraintes d'intégration.
Enfin, grâce à une approche théorique de *l'effet Joule*, nous aborderons la notion de couplage électromagnétique-thermique. Nous mettrons ainsi en évidence les liens profonds unissant les paramètres électriques primaires d'une ligne de transmission à sa température.

III.1 La théorie des transferts de chaleur

III.1.1 Les trois modes de transfert

On distingue classiquement trois modes de transfert de chaleur, (illustrés en Fig. III.1), à savoir :

— **la conduction** : unique mode de transfert dans les milieux continus *solides*. Il s'agit du phénomène de transfert thermique le mieux maîtrisé car l'équation de base peut être aisément résolue, même en cas de non-linéarités. De plus, d'un point de vue expérimental, les observables de température et de puissance électrique dissipée par effet Joule sont mesurables avec une assez grande précision, ce qui assure un large domaine de validité des modèles.

— **le rayonnement** : consiste au transfert d'une partie de l'énergie thermique d'un corps sous forme de rayonnement électromagnétique, le plus souvent dans le domaine de l'infrarouge (IR). Ce phénomène dépend fortement des températures et de la géométrie des corps échangeants mais reste néanmoins assez facilement modélisable lorsque certaines hypothèses simplificatrices sont introduites. Cependant, lors de l'étude des « hautes températures », une analyse fine des phénomènes de rayonnement est nécessaire puisqu'il s'agit alors du mode de transfert privilégié.

— **la convection** : phénomène de transfert dans les milieux continus *fluides* (liquide ou gaz). On distingue deux types de convection. La première, dite *naturelle*, consiste en un mouvement macroscopique de fluide sous l'effet combiné d'une différence locale de température et de la force de pesanteur.
La seconde est dite *forcée* car elle consiste en une mise en mouvement du fluide par l'action d'une force extérieure.
Dans les deux cas, ces phénomènes sont difficilement modélisables car les équations de la Mécanique des Fluides auxquelles elles font appel sont notoirement complexes et fortement non-linéaires. [1]

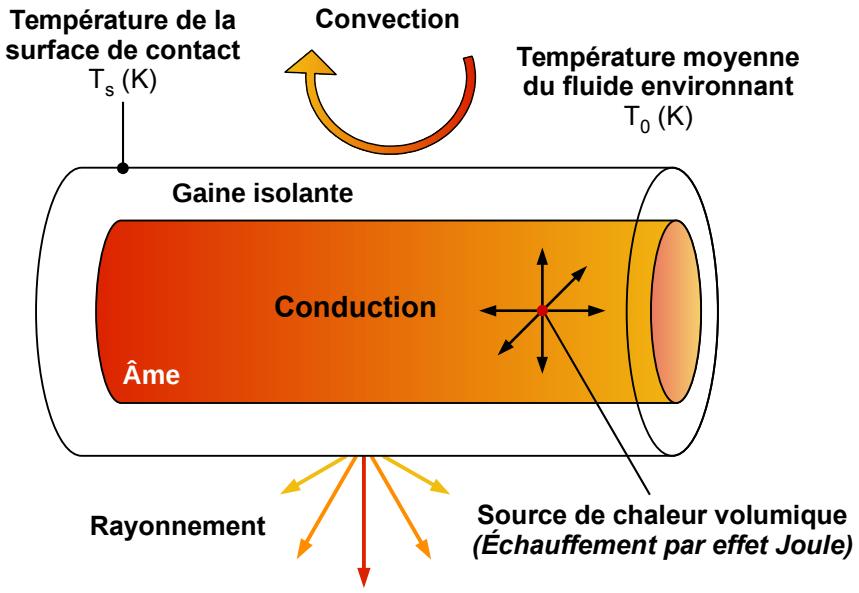


Figure III.1 – Les différents modes de transfert thermique appliqués à une portion de câble électrique

III.1.2 Transferts conductifs et équation de la chaleur

Afin d'établir l'équation de la chaleur dans un milieu solide, il est nécessaire de reprendre l'équation de conservation de l'énergie, qui s'écrit pour un volume infinitésimal dV (cf Fig. III.2) :

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_{gen} - \dot{E}_{out} = \dot{E}_{st} \tag{III.1}$$

Avec :

- $\dot{E}_{in}$: Taux d'énergie entrant dans le volume de contrôle par unité de temps. Exprimé en W (notion surfacique)

1. L'existence ainsi que la régularité des solutions des équations de Navier-Stokes en trois dimensions font partie des *problèmes du millénaire* soumis par l'Institut Mathématique Clay [51]

- $\dot{E}_{gen}$: Taux d'énergie créée dans le volume de contrôle par unité de temps. Exprimé en W (notion volumique)
- $\dot{E}_{out}$: Taux d'énergie quittant le volume de contrôle par unité de temps. Exprimé en W (notion surfacique)
- $\dot{E}_{st}$: Taux de variation d'énergie stockée dans le volume de contrôle par unité de temps. Exprimé en W (notion volumique)

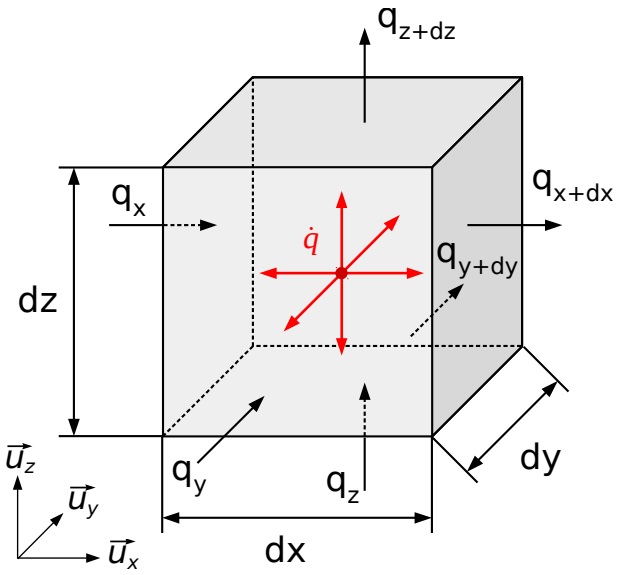


Figure III.2 – Volume infinitésimal pour l'établissement de l'équation de la chaleur

Les densités de flux de chaleur *surfaciques* reliées aux puissances de la relation (III.1) sont, dans le cas du phénomène de conduction, une donnée vectorielle définie par la loi de Fourier analogue à la loi d'Ohm utilisée en électromagnétisme. Cette propriété reliant les flux surfaciques aux champs de température s'énonce ainsi :

$$\overrightarrow{q^{cd}} = -\lambda \overrightarrow{\nabla} T \tag{III.2}$$

Avec :
- λ : la conductivité thermique locale du matériau, exprimée en $W.m^{-1}.K^{-1}$
- $\overrightarrow{\nabla}$, l'opérateur différentiel *gradient*
- T : le champ scalaire de température, exprimé en K

Dans ce cas, l'équation de la chaleur découle directement de l'application du principe de conservation de l'énergie, avec :

$$\dot{E}_{in} = q_x + q_y + q_z \quad \text{et} \quad \dot{E}_{out} = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}$$

où les flux de chaleur surfaciques projetés sur les faces d'entrée du volume de contrôle sont définis par :

$$\begin{cases} q_x = \overrightarrow{q^{cd}} \cdot \overrightarrow{dS_x} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} \, dy \, dz \\ q_y = \overrightarrow{q^{cd}} \cdot \overrightarrow{dS_y} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial y} \, dx \, dz \\ q_z = \overrightarrow{q^{cd}} \cdot \overrightarrow{dS_z} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial z} \, dx \, dy \end{cases} \tag{III.3}$$

En utilisant *l'hypothèse* d'un développement de Taylor à l'ordre 1 pour les flux de chaleur de la relation (III.3), on obtient les relations suivantes pour les flux de chaleur sortant du volume de contrôle :

$$\begin{cases} q_{x+dx} \approx q_x + \dfrac{\partial q_x}{\partial x}\ \mathrm{d}x \\ q_{y+dy} \approx q_y + \dfrac{\partial q_y}{\partial y}\ \mathrm{d}y \\ q_{z+dz} \approx q_z + \dfrac{\partial q_z}{\partial z}\ \mathrm{d}z \end{cases} \tag{III.4}$$

On pose de plus les expressions respectives suivantes pour les flux d'énergie *générés* et *stockés* dans le volume élémentaire :

$$\begin{cases} \dot{E}_{gen} = \dot{q}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \\ \dot{E}_{st} = \rho C \dfrac{\partial T}{\partial t}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \end{cases} \tag{III.5}$$

où $\dot{q}$ représente un flux de chaleur volumique exprimé en W.m^{-3}, ρ la masse volumique du solide exprimée en kg.m^{-3} et C la capacité calorifique massique exprimée en J.kg^{-1}.K^{-1}.
En reprenant l'expression de la conservation de l'énergie (III.1) et en réinjectant les éléments des relations (III.3) et (III.4), on obtient ainsi l'expression de *l'équation de la chaleur* :

$$\begin{aligned} & q_x + q_y + q_z + \dot{q}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{\partial q_x}{\partial x}\ \mathrm{d}x - \frac{\partial q_y}{\partial y}\ \mathrm{d}y - \frac{\partial q_z}{\partial z}\ \mathrm{d}z + \dot{q}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \tag{III.6}$$

Dans le cas stationnaire (variation de température nulle dans le temps) et en adoptant une forme d'écriture plus compacte, on obtient l'expression de l'équation de diffusion de la chaleur dans un milieu solide, communément appelée *équation de la chaleur* :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T\right) + \dot{q} = 0 \tag{III.7}$$

Référence : [82]

III.1.3 Transferts de chaleur par convection naturelle

Par la suite, nous étudierons le refroidissement *passif* des réseaux de câblages électriques, c'est-à-dire ne requérant pas de système de refroidissement dédié mais nécessitant un dimensionnement particulier dépendant de l'environnement d'installation.
Le processus de refroidissement passif est dû au phénomène de *convection* naturelle qui apparait spontanément dans les fluides au repos lorsque les différences de température entre deux régions induisent une modification locale de masse volumique, mettant par la même occasion les fluides en mouvement (principe de la *poussée d'Archimède*).
Pour établir l'équation des transferts de chaleur dans un fluide soumis à des mouvements de convection naturelle, il est là encore nécessaire de se référer au bilan d'énergie pour un volume élémentaire. Cependant, les phénomènes de transport qui apparaissent dans les milieux fluides complexifient fortement l'équation de la chaleur, qui doit alors être couplée aux équations mécaniques de conservation de la masse et de quantité de mouvement, comme nous le verrons dans les prochains développements de la section.

Équations du mouvement en convection naturelle

Dans la suite du mémoire, nous supposerons vraies les propriétés suivantes :
1) une variation de masse volumique *négligeable* sous l'action d'une faible perturbation de pression
2) une variation de masse volumique *faible* sous l'action d'un *faible* gradient de température
3) une valeur maximale du champ de vitesse *très faible* devant la vitesse du son dans le fluide.
Il s'agit d'hypothèses réalistes pour la plupart des liquides et on pourra considérer qu'elles sont également valables pour l'air dans le cadre de cette thèse.
Dans ce cas précis de *pseudo-incompressibilité*, les équations de continuité et de conservation de la quantité de mouvement mènent au système d'équations suivant, classiquement appelé équations de *Navier-Stokes* :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 & \textbf{(conservation de la masse)} \quad \text{(III.8a)} \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v} = \nu \Delta \vec{v} - \dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{f}(x,t) & \textbf{(quantité de mouvement)} \quad \text{(III.8b)} \end{cases}$$

- $\vec{v}$: le champ de vitesse du fluide dont la norme est exprimée en $m.s^{-1}$
- ν : la viscosité cinématique du fluide exprimée en $m^2.s^{-1}$
- p : le champ de pression interne du fluide exprimé en Pa
- $\vec{f} = m\vec{a}$: la somme des forces extérieures s'appliquant à un volume élémentaire de fluide (principe fondamental de la dynamique) exprimée en N

Dans la suite des calculs, nous noterons le champ de température T sous la forme :

$$T = T_0 + T' \tag{III.9}$$

où T_0 est une température moyenne constante et T' est une variation de température faible devant T_0. On note de manière similaire la variation de masse volumique ρ' sous la forme :

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad \text{avec} \quad \rho_0 \text{ une constante} \tag{III.10}$$

Une conséquence directe des hypothèses **1)** et **2)** est que les grandeurs thermodynamiques ne seront plus considérées constantes par rapport à la *masse volumique* mais par rapport à la *pression*.
La variation de température étant faible, on peut introduire l'hypothèse de *Boussinesq* qui permet de linéariser la variation de masse volumique ρ à l'aide d'un développement limité au premier ordre :

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial T}\right)_p T' = -\rho_0 \beta T' \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{-1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right) \tag{III.11}$$

où β représente le coefficient d'expansion thermique du fluide exprimé en K^{-1}

La variation de pression p' peut elle aussi s'exprimer par $p = p_0 + p'$. Dans ce cas cependant, la pression p_0 n'est pas une pression moyenne constante puisque celle-ci varie avec la position du fluide en vertu de l'équation hydrostatique, à savoir :

$$p_0 = \rho_0 \vec{g} \cdot \vec{r} + K = -\rho_0 g z + K \quad \text{avec} \quad \text{K une constante} \tag{III.12}$$

On montre aisément que les changements de *masse volumique* et de *température* induits par la différence de pression hydrostatique sont très faibles et par conséquent négligeables pour l'air.
Un développement limité à l'ordre 1 du terme contenant le gradient de pression dans l'expression (III.8) mène à l'expression suivante :

$$\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = \frac{\vec{\nabla} p_0}{\rho_0} + \frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} - \frac{\vec{\nabla} p_0}{\rho_0^2}\rho' \tag{III.13}$$

ce qui donne après injection des relations (III.11) et (III.12) :

$$\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = \vec{g} + \frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} + \beta T' \vec{g} \tag{III.14}$$

En présence d'un champ de gravitation, la seconde relation des équations de Navier-Stokes (III.8) devient donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} &= -\left(\frac{1}{\rho}\right) \vec{\nabla} p + \vec{g} + \nu \Delta \vec{v} \\ &= -\frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} - \beta T' \vec{g} + \nu \Delta \vec{v} \end{aligned} \tag{III.15}$$

Référence : [97]

Équation de la chaleur dans un fluide

Par analogie à l'établissement de l'équation de la chaleur pour les milieux solides, il est nécessaire d'établir l'équation du transfert de chaleur dans un fluide incompressible à partir de la loi de conservation de l'énergie en tenant toutefois compte dans ce cas des phénomènes de transport de masse.
Ainsi, en négligeant les effets de dissipation d'énergie par frictions internes, l'équation de transfert thermique dans un fluide est donné par :

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T' = \vec{\nabla} \cdot \left(\chi \vec{\nabla} T'\right) \tag{III.16}$$

Avec :
- $\chi = \dfrac{\lambda}{\rho_0 C}$: la diffusivité thermique du fluide exprimée en $\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$
- C : la capacité calorifique des fluides à pression constante, exprimée en $\mathrm{J.kg}^{-1}.\mathrm{K}^{-1}$

Référence : [97]

Équation couplée de la convection naturelle

Le regroupement des relations (III.8a), (III.15) et (III.16) au sein d'un même système couplé mène aux lois de mouvement en convection naturelle :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 & \text{(III.17a)} \\ \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} = -\dfrac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} - \beta T' \vec{g} + \nu \Delta \vec{v} & \text{(III.17b)} \\ \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla} \cdot \left(\chi \vec{\nabla} T'\right) & \text{(III.17c)} \end{cases}$$

Référence : [97]

Nombres adimensionnels caractéristiques

Il est possible de représenter l'écoulement de convection naturelle à l'aide d'un nombre restreint de paramètres adimensionnels comme le stipule le théorème de Vaschy-Buckingham [2]. En effet, on peut montrer que la solution des équations couplées (III.17) ne dépend principalement que d'une *longueur caractéristique* ℓ, d'une vitesse U et d'une différence de température caractéristique $\Theta = T_1 - T_0$. On définit alors à partir de ces propriétés les nombres suivants :

2. https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Vaschy-Buckingham

— **Nombre de *Prandtl*** : permet d'évaluer l'influence des effets visqueux sur les phénomènes thermiques. Il est défini comme le rapport de la viscosité cinématique sur la diffusivité du fluide, soit :

$$\mathcal{P}_r = \frac{\nu}{\chi} \tag{III.18}$$

Ainsi, plus le nombre de Prandtl est élevé et plus le profil de température est « corrélé » au profil de vitesse.

— **Nombre de *Rayleigh*** : permet de mesurer l'*intensité* du phénomène de convection naturelle. Il est défini comme le rapport des phénomènes moteurs (comme la variation de densité volumique entraînant la poussée d'Archimède) sur les phénomènes résistants comme la diffusion thermique et la viscosité. Dans le cas de la convection naturelle, il est déterminé par l'expression suivante :

$$\mathcal{R}a = \frac{\beta g \Theta \ell^3}{\nu \chi} \tag{III.19}$$

Il existe en réalité un nombre de Rayleigh critique $\mathcal{R}a_c$ à partir duquel le phénomène de convection apparaît inéluctablement. D'un point de vue thermique, ce nombre marque la séparation entre les phénomènes conductifs ($< \mathcal{R}a_c$) et convectifs ($> \mathcal{R}a_c$).

— **Nombre de *Nusselt*** : permet de quantifier le flux de chaleur réellement transmis par rapport au flux qui serait transmis en régime purement conductif. Il est défini par la relation adimensionnelle suivante :

$$\mathcal{N}u = \frac{h_{conv}\ell}{\lambda} \tag{III.20}$$

où h_{conv} est le coefficient de transfert de chaleur qui caractérise les puissances thermiques échangées par convection entre la surface d'un corps solide et son fluide environnant. Il est exprimé en $\mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}}$

Il existe une dernière donnée adimensionnelle qui intervient spécifiquement dans l'étude de la convection *forcée* et non naturelle. On rappelle toutefois ici la définition du **nombre de *Reynolds*** qui permet dans ce cas de caractériser le régime d'écoulement du fluide, à savoir laminaire, transitoire et turbulent et donc indirectement les vitesses caractéristiques d'écoulement, puisque plus le nombre de Reynolds est élevé et plus les vitesses d'écoulement sont grandes. Il est défini comme le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses, soit par la relation suivante :

$$\mathcal{R}e = \frac{U\ell}{\nu} \tag{III.21}$$

Dans les problématiques de convection naturelle, le nombre de Nusselt est fonction *seulement* des nombres de Rayleigh et de Prandtl ($\mathcal{N}u = f(\mathcal{R}a, \mathcal{P}_r)$)[3], ce qui signifie qu'une compréhension fine de ces paramètres donne accès aux propriétés d'échange de chaleur dans le fluide.

Références : [97, 105]

III.1.4 Coefficient de transfert de chaleur en espace libre

La connaissance précise de la valeur de h_{conv} est d'une importance **fondamentale** pour nos applications puisque ce coefficient permettra de dimensionner les câblages en vue d'un refroidissement passif par convection.
Ainsi, le coefficient de transfert de chaleur interviendra comme *condition aux limites* dans l'équation de la chaleur *dans les solides* et influera directement sur les prédictions de distribution de température au sein des torons de câbles.

3. Dans le cas de la convection *forcée*, le nombre de Nusselt est fonction des nombres de Reynolds et de Prandtl

Corrélation applicable pour le transfert convectif

A l'interface entre le solide et le fluide environnant, le flux de chaleur **local** transféré aux frontière du domaine solide par convection et radiation s'exprime à l'aide de la relation suivante, appelée parfois *relation de Newton* :

$$q^{\text{cond}} = -\lambda \overrightarrow{\nabla} T \cdot \overrightarrow{n} = h_{\text{conv}} \left(T_s - T_0\right) + q_{\text{rad}} \tag{III.22}$$

Avec :
- λ : la conductivité thermique du solide exprimée en $\text{W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$
- $\overrightarrow{n}$: le vecteur normal à la surface dirigé vers l'extérieur du solide
- h_{conv} : le coefficient de transfert thermique local par convection exprimé en $\text{W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$
- q_{rad} : flux de chaleur local transféré par radiation exprimé en W.m^{-2}
- T_s : la température locale de surface en K
- T_0 : la température du fluide ambiant en K

Le nombre de Nusselt, et par la même le coefficient de transfert de chaleur, est difficilement accessible *numériquement* du fait que l'on ne sache pas résoudre simplement les équations de Navier-Stokes.
Il n'existe donc aucune expression particulière susceptible de s'appliquer universellement à toutes les configurations d'installation de câblages rencontrées. Cette situation concrète se rencontre dans l'exemple de la figure III.5, qui fournit par lecture graphique quelques exemples de coefficients de transfert pour différents cas d'application.
De très nombreuses relations empiriques permettant d'approcher plus ou moins précisément la valeur de ce coefficient d'échange pour différentes géométries et/ou types d'écoulement ont été publiées et certaines de ces références bibliographiques sont recensées dans le Tableau III.3
Il est utile de fournir des valeurs de coefficient physiquement réalistes pour la réalisation de certains calculs. Le cas le plus pertinent pour nos applications consiste en un cylindre de diamètre d et de longueur infinie (Figure III.3) supposé s'approcher de la géométrie réelle d'un toron de câble. Nous prendrons alors comme corrélation de test les valeurs suivantes issues de [81, 112] applicables à un refroidissement par convection naturelle en *espace libre*, c'est-à-dire où les influences de nature thermique et dynamique d'éventuels obstacles alentours sont négligées :

$$h_{\text{conv}} = \left[\overbrace{0,752\sqrt{\frac{\lambda_a}{\ell}}}^{\textbf{conduction dans le fluide}} + \underbrace{0,387\sqrt{\lambda_a}\left(\frac{\beta g \mathcal{P}r \Theta}{\nu^2 \left[1 + \left(\frac{0,559}{\mathcal{P}r}\right)^{\frac{9}{16}}\right]^{\frac{16}{9}}} \right)^{\frac{1}{6}}}_{\textbf{contribution de la convection } \textit{seule}} \right]^2 \tag{III.23}$$

Avec :
- $\ell = \dfrac{d}{2}\pi$: la longueur caractéristique de l'élément
- λ_a : la conductivité thermique de l'air
- β : le coefficient d'expansion thermique du fluide
- g : la norme de l'accélération gravitationnelle
- $\mathcal{P}r$: le nombre de Prandtl
- $\Theta = \left| T_s - T_0 \right|$: la différence de température caractéristique
- ν : la viscosité cinématique de l'air

L'expression (III.23), qui n'est qu'une corrélation existante parmi tant d'autres, fait apparaitre deux termes distincts, l'un lié à la conduction dans le fluide et l'autre quantifiant le phénomène de transfert de chaleur par convection *pure*.

La plupart des coefficients physiques introduits précédemment variant plus ou moins sensiblement avec la température, on trouve dans [112] les corrections empiriques suivantes :

- $T_m = \dfrac{T_s + T_0}{2}$, une température moyenne
- $\beta(T_m) = \dfrac{0.993048}{T_m}$
- $\nu(T_m) = 1.3466e^{-17}\ T_m^4 - 4.0352e^{-14}\ T_m^3 + 1.0979e^{-10}\ T_m + 8.8761e^{-8}\ T_m + 1.3520e^{-5}$
- $\lambda_a(T_m) = -1.0648e^{-14}\ T_m^4 + 3.1098e^{-11}\ T_m^3 - 4.0303e^{-8}\ T_m^2 + 7.6575e^{-5}\ T_m + 2.4340e^{-2}$
- $\mathrm{Pr}(T_m) = 2.1796e^{-13}\ T_m^4 - 6.1980e^{-10}\ T_m^3 + 5.8848e^{-7}\ T_m^2 + 1.5775e^{-4}\ T_m + 7.1091e^{-1}$

Prise en compte des transferts radiatifs

Les phénomènes de transferts radiatifs sont particuliers puisque, contrairement aux phénomènes de conduction et de convection, ils peuvent se produire dans le vide. Il existe sur le sujet des monographies très complètes comme [77]. Néanmoins, nous nous restreignons dans cette thèse à l'étude simplifiée des phénomènes de transferts radiatifs en rappelant seulement la relation de Stefan-Boltzmann permettant d'établir l'expression du flux de chaleur échangé par rayonnement entre un corps gris et son environnement considéré comme un corps noir :

$$q^{\mathrm{rad}} = \epsilon\sigma_b \left(T_s^4 - T_0^4\right) \tag{III.24}$$

Avec :

- ϵ : l'émissivité totale hémisphérique de la surface, sans unité
- $\sigma_b = 5.670373(21) \times 10^{-8}$: la constante de Stefan-Boltzmann exprimée en W.m^{-2}.K^{-4}
- T_s : la température de surface (en K) du matériau émetteur
- T_0 : la température du milieu ambiant exprimée en K

Références : [82, 112]

Coefficient d'échange thermique global

En remarquant dans l'expression (III.24) du flux de chaleur échangé par rayonnement l'identité remarquable suivante :

$$\left(T_s^4 - T_0^4\right) = \left(T_s + T_0\right)\left(T_s^2 + T_0^2\right)\left(T_s - T_0\right) \tag{III.25}$$

il est possible de regrouper les expressions (III.22) et (III.24) sous une forme plus compacte appelée coefficient d'échange *global*. Le flux de chaleur surfacique local adopte alors la forme suivante :

$$q^{\mathrm{tot}} = \underbrace{\left(h_{\mathrm{conv}} + h_{\mathrm{rad}}\right)}_{h_{\mathrm{tot}}}\left(T_s - T_0\right) \quad \text{avec} \quad h_{\mathrm{rad}} = \epsilon\sigma_b \left(T_s + T_0\right)\left(T_s^2 + T_0^2\right) \tag{III.26}$$

On donne en Figure III.4 un exemple de courbe obtenue grâce à la réunification des relations (III.23) et (III.24) pour un cylindre de diamètre 16 mm et d'émissivité 0.95 pour une température ambiante de $T_0 = 287$ K. On note à ce propos qu'à partir de 420 K, les phénomènes de transferts radiatifs deviennent rapidement prépondérants sur les phénomènes de transfert par convection.

III.2 Méthodes de simulation des transferts de chaleur appliquées aux câbles électriques aéronautiques

Les premiers travaux concernant la prédiction de l'échauffement d'un ensemble de câbles électriques ont été publiés très tôt (dès 1890). On distingue dans la littérature trois grandes classes de méthodes développées pour le dimensionnement thermique des câbles électriques. La plus ancienne d'entre elle se fonde sur des résultats empiriques à la base de la plupart des normes et abaques utilisés *actuellement* par les industriels. Ceux-ci deviennent néanmoins de plus en plus inappropriés pour les applications

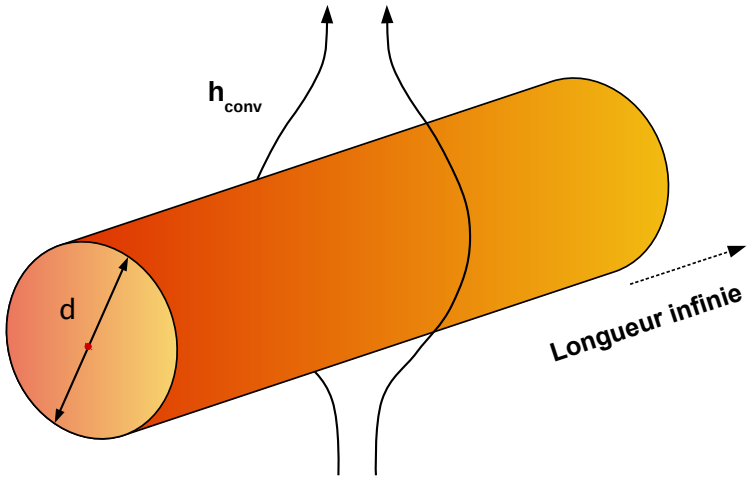


Figure III.3 – Géométrie considérée pour le coefficient de transfert thermique en *espace libre* fourni par la relation (III.23)

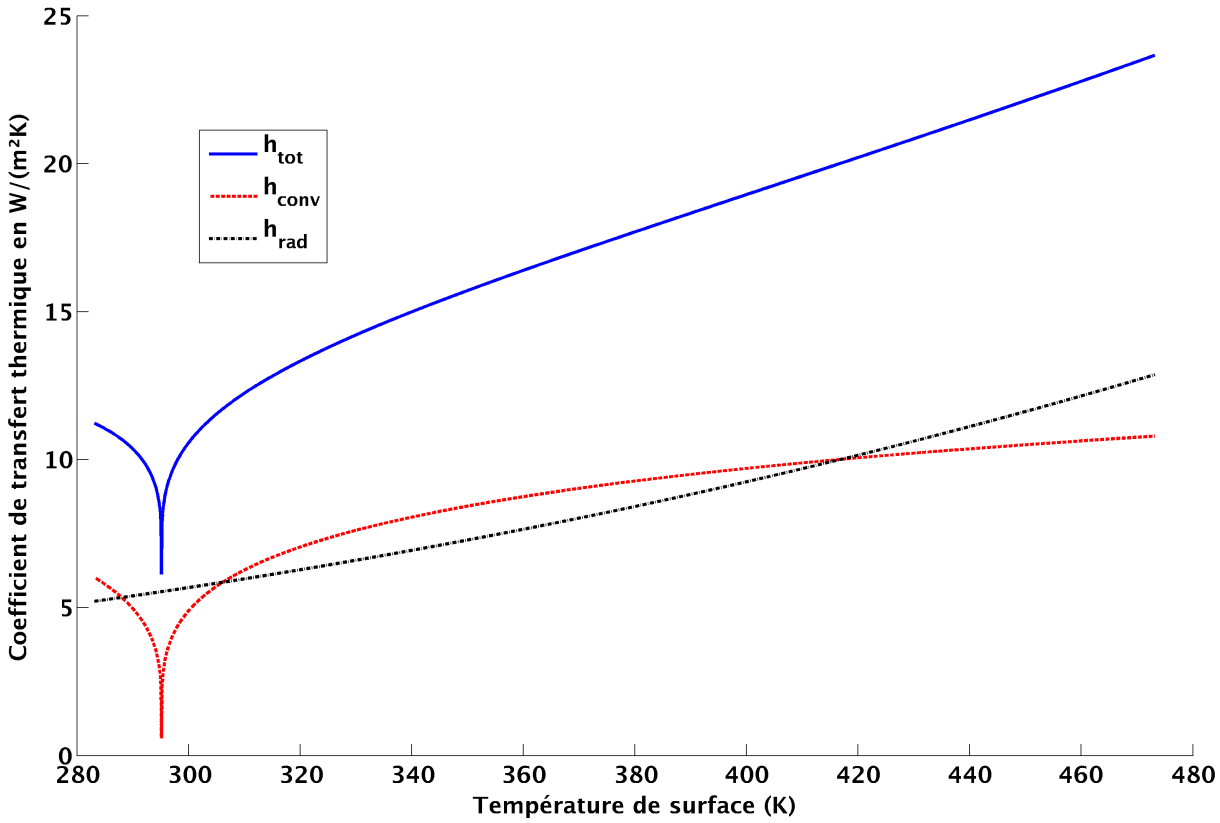


Figure III.4 – Coefficient d'échange thermique global pour un cylindre de diamètre 16 mm d'après la relation (III.23) et (III.24)

actuelles et surestiment souvent les marges de sécurité à appliquer, ce qui implique un surdimensionnement systématique des câblages.

C'est la raison pour laquelle d'autres modèles ont été développés ces dernières années. Parmi ceux-ci, la seconde classe de méthodes tire profit de la géométrie circulaire des torons de câbles afin de résoudre une formulation radiale et isotrope de l'équation de la chaleur, basée sur une homogénéisation géométrique des propriétés thermiques. De résolution simple et rapide, ces méthodes présentent néanmoins certaines limitations notamment lorsque les inhomogénéités géométriques et d'alimentation en puissance sont fortes.

Il reste toutefois que l'échauffement des câbles peut être calculé à l'aide des nombreux logiciels de calcul numérique existant sur le marché et résolvant l'équation de la chaleur de manière précise, à condition toutefois de bien maîtriser les modèles physiques sous-jacents.
Cependant, les méthodes numériques présentent des temps de calcul rédhibitoires dans le cas de larges structures comme celle d'un avion complet. Elles sont de plus compliquées à mettre en œuvre dans les phases de pré-développement quand de nombreux calculs de dimensionnement doivent être effectués.
Une comparaison de ces trois types de méthodes a été conduite sur un multicâble réel dans un article publié en 2014 et intitulé « *Simulation and measurement of the steady-state temperature in multicore cables* » dans lequel les auteurs dressent un remarquable état de l'art des problématiques liées à l'échauffement des câbles électriques [75].

III.2.1 Modèles empiriques

Une revue complète des différentes méthodes permettant de calculer les courants acceptables dans les câbles est donnée dans [9]. L'auteur, G.J. Anders, est le contributeur le plus productif sur le sujet, avec la rédaction de nombreux articles constituant le fond documentaire de ces deux ouvrages de référence *« Rating of Electric Power Cables : Ampacity Computations For Transmission, Distribution, And Industrial Applications »* et *« Rating of Electric Power Cables In Unfavorable Thermal Environment »*.
Pour réaliser des dimensionnements fonctionnels rapides à partir de calculs normés, il peut être utile de consulter le résumé assez exhaustif des standards en vigueur, aux pages 80 et 159-185 de [10] ainsi qu'aux dernières pages de [9].

La norme IEC 60287

La première famille de modèles permettant de calculer l'échauffement d'un ensemble de câbles se base sur le calcul préalable de « facteurs de forme » permettant d'approcher la résistance thermique totale d'un multicâble. Pour rappel, la résistance thermique est une notion dérivée d'une approche *circuit* permettant de résoudre l'équation de la chaleur. Sa valeur est donnée par l'expression suivante :

$$R_{th} = \frac{(T_2 - T_1)}{\Phi} \tag{III.27}$$

où Φ est le flux de chaleur traversant deux surfaces isothermes de températures respectives T_1 et T_2.
Les fondements théoriques de ces travaux se trouvent dans [128, 129], cité dans [71] et [179]. Ces travaux ont été synthétisés et largement complétés par Neher et McGrath dans [136, 137] et constituent aujourd'hui encore une référence. C'est la raison pour laquelle ces derniers ont été repris dans la norme 60287 de la Commission Électrotechnique Internationale (IEC) que nous présenterons ici.

Le standard concerne le dimensionnement des câbles électriques soumis à des tensions inférieures à 5 kV (alternatif/continu) pour diverses configurations comme les lignes de puissances aériennes en espace libre. Il nécessite, pour être applicable, l'hypothèse du régime permanent pour pouvoir atteindre les 100 % de chargement du câblage (pas de prise en compte des régimes transitoires).

La norme est divisée en trois grandes parties qui sont : le calcul des courants admissibles dans les âmes, le calcul des résistances thermiques et les corrections à apporter en fonction des conditions extérieures de fonctionnement. La liste des publications constituant cette norme est donnée par le tableau III.1

Nom	Description
IEC 60287-1-1	Electric Cables – Calculation of the current rating – Part 1-1 : Current rating equation (100 % load) and calculation of losses – General
IEC 60287-1-2	Electric Cables – Calculation of the current rating – Part 1 : Current rating equation (100 % load) and calculation of losses – Section 2 : Sheath eddy current loss factors for two circuit in flat formation
IEC 60287-1-3	Electric Cables – Calculation of the current rating – Part 1-3 : Current rating equation (100 % load) and calculation of losses – Current sharing between parallel single-core cables and calculation of circulationg current losses
IEC 60287-2-1	Electric Cables – Calculation of the current rating – Part 2-1 : Thermal resistance – Calculation of thermal resistance
IEC 60287-2-2	Electric Cables – Calculation of the current rating – Part 2 : Thermal resistance – Section 2 : A method for calculating reduction factors for goups of cables in free air, protected from solar radiation
IEC 60287-3-1	Electric cables - Calculation of the current rating - Part 3 : Sections on operating conditions - Section 1 : Reference operating conditions and selection of cable type
IEC 60287-3-2	Electric cables - Calculation of the current rating - Part 3-2 : Sections on operating conditions - Economic optimization of power cable size
IEC 60287-3-3	Electric cables - Calculation of the current rating - Part 3-3 : Sections on operating conditions - Cables crossing external heat sources

Table III.1 – Déclinaison des différentes parties de la norme IEC/CEI 60287

A titre d'exemple, la formule préconisée pour le calcul de l'échauffement d'un câble dans une conduite enterrée dans un sol sec ou bien placé à l'air libre est donnée par l'expression (III.28)

$$\Delta T = \left[R_{elec} I^2 + \frac{1}{2} W_d\right] R_{th1} + \left[R_{elec}\left(1+\lambda_1\right) I^2 + W_d\right] n R_{th2} + \left[R_{elec}\left(1+\lambda_1+\lambda_2\right) I^2 + W_d\right] n \left(R_{th3} + R_{th4}\right) \quad \text{(III.28)}$$

Avec :

- I : intensité TRMS (True Root Mean Square) du courant circulant dans l'âme en A
- W_d : pertes diélectriques par unité de longueur et par phase en W.m^{-1}
- ΔT : différence de température entre l'âme et le l'air ambiant en K
- R_{elec} : résistance électrique de l'âme en courant alternatif, par unité de longueur, à sa température maximum de service en Ω . m^{-1}.
- n : nombre d'âmes dans un câble, sans unité
- R_{th1} : Résistance thermique (p.u.l) entre l'âme et la gaine en K.m.W^{-1}
- R_{th2} : Résistance thermique (p.u.l) entre la gaine et l'armure K.m.W^{-1}
- R_{th3} : Résistance thermique (p.u.l) du revêtement extérieur du câble en K.m.W^{-1}
- R_{th4} : Résistance thermique (p.u.l) entre la surface du câble et le milieu environnant en K.m.W^{-1}
- λ_1 : Rapport des pertes dans la gaine métallique aux pertes totales dans toutes les âmes du câble
- λ_2 : Rapport des pertes dans l'armure aux pertes totales dans toutes les âmes du câble

En fixant ΔT et en isolant l'intensité I dans la relation précédente, on en déduit le courant maximal admissible à ne pas dépasser. Lorsque le câble est exposé librement au rayonnement solaire, une correction est apportée pour tenir compte de cet apport de puissance thermique rayonnée. Le calcul des différentes pertes électriques R_{elec}, W_d, λ_1, λ_2 est détaillé dans la première partie de la norme pour diverses configurations fréquemment rencontrées comprenant jusqu'à trois câbles .
Le calcul des résistances thermiques est détaillé dans la seconde sous-série de la norme et est basé sur l'utilisation de facteurs de forme plus ou moins empiriques (jusqu'à trois câbles là aussi). Par exemple,

pour un câble simple contenant une âme massive, la résistance thermique par unité de longueur entre l'âme et la gaine découle directement de l'équation de la chaleur axisymétrique et se calcule de la manière suivante :

$$R_{th1} = \frac{1}{2\pi\lambda} G \quad \text{avec} \quad G = \ln\left(\frac{d_{isol}}{d_{cond}}\right), \text{ un facteur de forme} \tag{III.29}$$

Comme pour l'évaluation des résistances électriques, nous ne détaillerons pas les calculs étant donné qu'il existe une formule spécifique pour chaque cas d'application que l'on trouvera dans [48, 49]. On notera cependant que les configurations données par la norme ne dépassent pas plus de trois câbles chargés en courant.
Pour une généralisation de la détermination de facteurs de forme à un nombre arbitraire n de câbles, il existe une méthode exposée dans [179] (correction graphique des calculs de [128, 129], citée dans [71]) qui semble donner de bons résultats, d'après les auteurs de [75].
La norme fournit enfin des valeurs de coefficients de transfert thermique sous forme de courbes pour une douzaine d'installations d'intérêt. On reproduit à la figure III.5 les résultats pour quatre d'entre elles. Les coefficients sont exprimés en $\mathrm{W.m^{-2}.K^{-\frac{5}{4}}}$. Le nombre de câble a une influence significative sur le coefficient d'échange puisque le passage de 1 à 3 câbles réduit de moitié sa valeur. D'une manière générale, plus le diamètre est élevé et moins le coefficient d'échange est élevé.

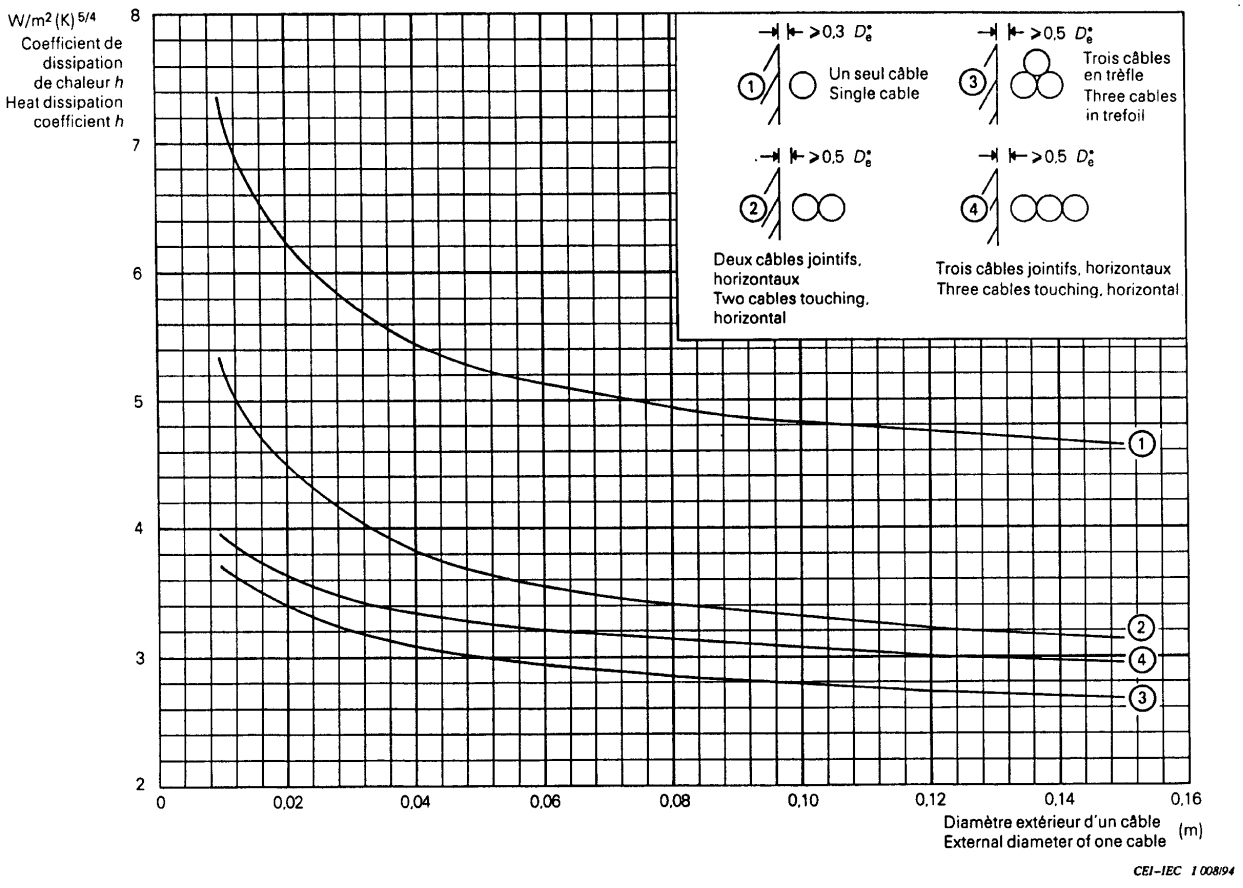


Figure III.5 – Exemple d'abaque de coefficient de transfert thermique pour différentes configurations en fonction du diamètre de câble.Tiré de [48]

III.2.2 Homogénéisation des propriétés thermiques

Le principe de la méthode est décrit dans [81, 112]. Elle consiste à ramener la géométrie apparemment complexe d'un ensemble de câbles (« *bundle* ») à celle d'un câble simple dont la valeur de conductivité thermique serait la moyenne des diverses conductivités du câble réel. Le but est donc de ramener l'équation de chaleur anisotrope complexe du câble réel à une équation isotrope classique facile à ré-

soudre analytiquement en moyennant les propriétés thermiques des matériaux (Figure III.6).

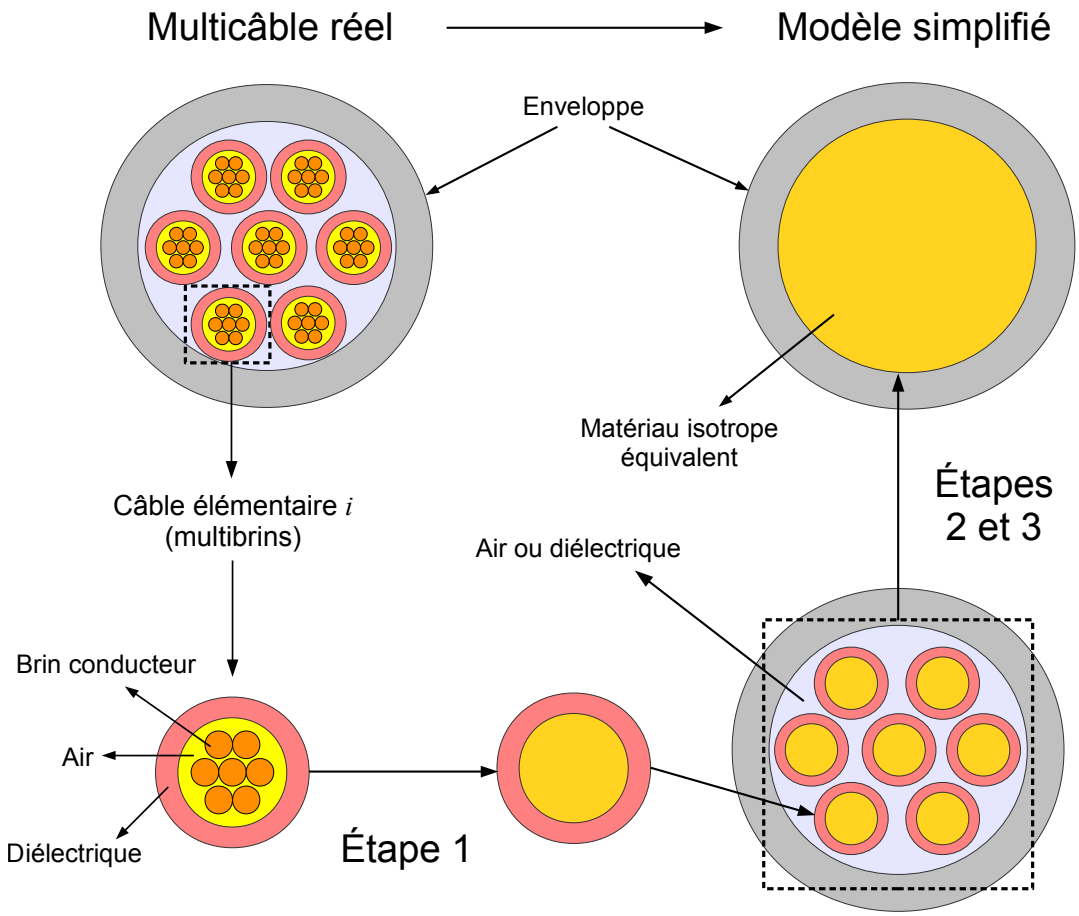


Figure III.6 – Schéma de principe de la méthode d'homogénéisation thermique pour les câbles multiples. Adapté de [81, 112]

La méthode se base sur une approximation géométrique de la coupe droite d'un toron de câbles. Le processus d'homogénéisation thermique est composé des étapes suivantes :

— **Étape 1** : On réduit d'abord la complexité des câbles unitaires en les rendant massifs d'un point de vue thermique. En effet, dans la majorité des cas, l'âme des câbles est composée de plusieurs brins. On suppose que le transfert thermique à travers l'air se fait par conduction (hypothèse réaliste en regard des faibles volumes d'air). Ainsi, la conductivité thermique équivalente de l'âme du câble unitaire i est donnée par :

$$\lambda^i_{\text{âme}} = \Gamma_1 \lambda^i_{\text{cond}} + (1-\Gamma_1)\,\lambda_{\text{air}} \quad \text{avec} \quad \Gamma_1 = \frac{\sum_{j=1}^{N\text{brins}} d_j^2}{d^2_{\text{âme}}} \tag{III.30}$$

où Γ_1 est un coefficient de remplissage géométrique (« *filling factor* ») défini comme le rapport de la somme des aires géométriques des brins sur l'aire totale de l'âme du fil élémentaire i (cf Fig. III.7).

— **Étape 2** : On détermine la conductivité thermique *composite* $\lambda_{\text{composite}}$ des fils composant l'intérieur du toron (Fig. III.8). En notant $A^{\text{âme}} = a^2$, l'aire occupé par l'ensemble des âmes précédemment unifiées des conducteurs et $A^{\text{diel}} = b^2 - a^2$ la surface totale occupée par les diélectriques (cf. Figure III.9), la conductivité thermique composite est donnée par la relation suivante :

$$\lambda_{\text{composite}} = \frac{1}{r^{(1)}} + \frac{1}{r^{(2)}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\lambda_{\text{cond}}} + \dfrac{b-a}{a}\dfrac{1}{\lambda_{\text{isol}}}} + \frac{b-a}{b}\lambda_{\text{isol}} \tag{III.31}$$

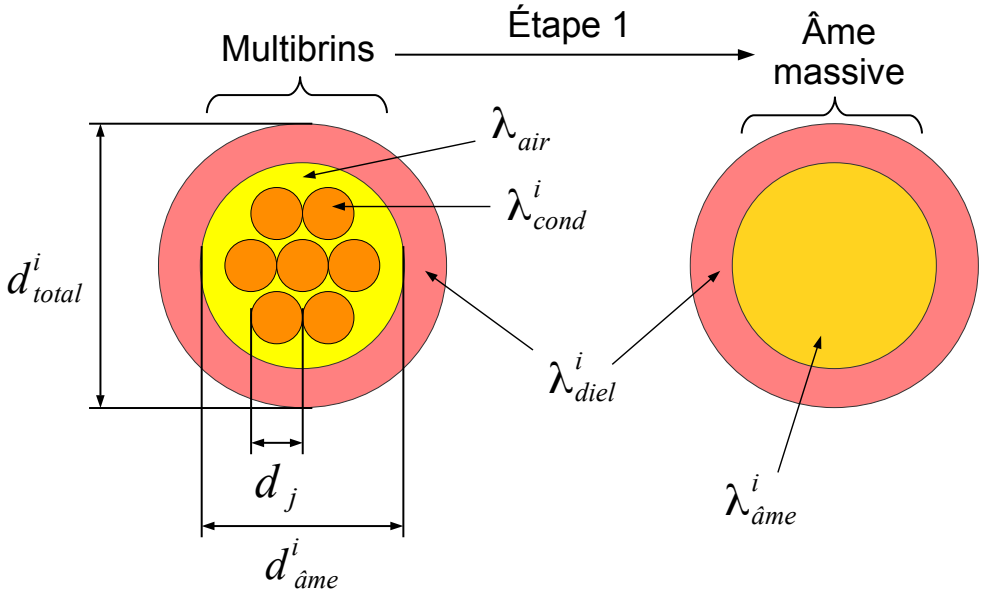


Figure III.7 – Géométrie d'un câble élémentaire et détails de l'étape 1. Adapté de [81, 112]

La relation (III.31) fait apparaître l'existence de deux « chemins » thermiques distincts (le premier passant dans les diélectriques seuls et le second à la fois dans les âmes et dans les diélectriques comme exposé en Fig. III.9). La signification géométrique des aires a^2 et b^2 apparaît plus explicitement lorsqu'ils sont représentés en tant que surfaces carrées.

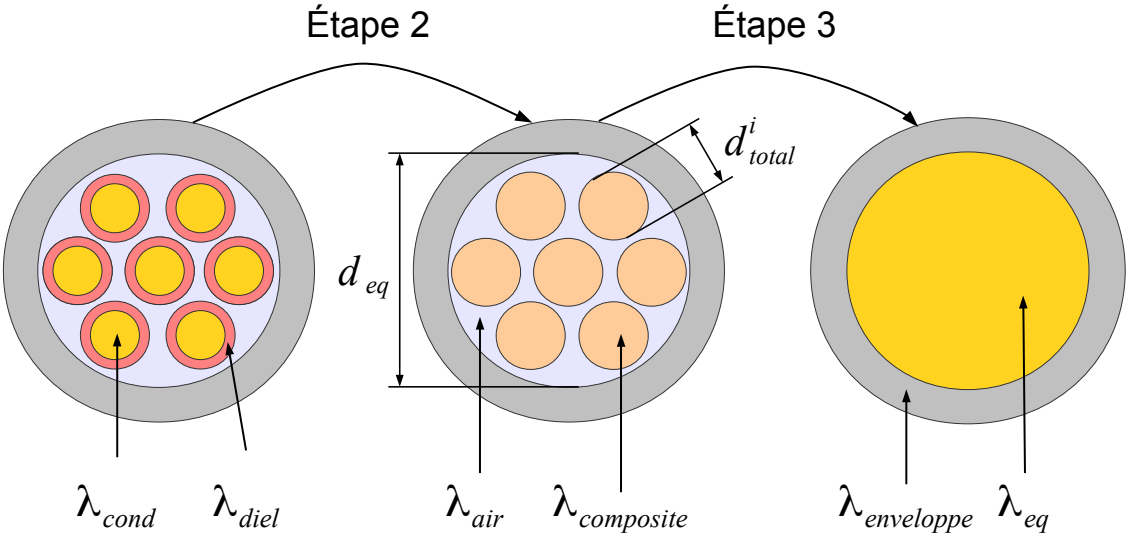


Figure III.8 – Détail des étapes 2 et 3. Adapté de [81, 112]

— **Étape 3** : Il reste à présent à déterminer la conductivité thermique moyenne de l'intérieur du toron. En notant respectivement A^{diel}, $A^{\text{âme}}$ et A^{air} les aires occupées par les diélectriques, les âmes conductrices et l'air environnant, la conductivité thermique équivalente est donnée de manière similaire à l'étape 1 par :

$$\lambda_{\text{eq}} = \frac{A^{\text{diel}} + A^{\text{cond}}}{A^{\text{total}}}\lambda_{\text{composite}} + \frac{A^{\text{air}}}{A^{\text{total}}}\lambda_{\text{air}} \tag{III.32}$$

Selon les auteurs du modèle, ce dernier présente des écarts dans au moins deux cas [75] :
— lorsque le rapport quantité de matériau diélectrique / conducteur augmente
— lorsque le taux de chargement du toron (i.e le nombre de câbles sous tension par rapport au nombre total) diminue

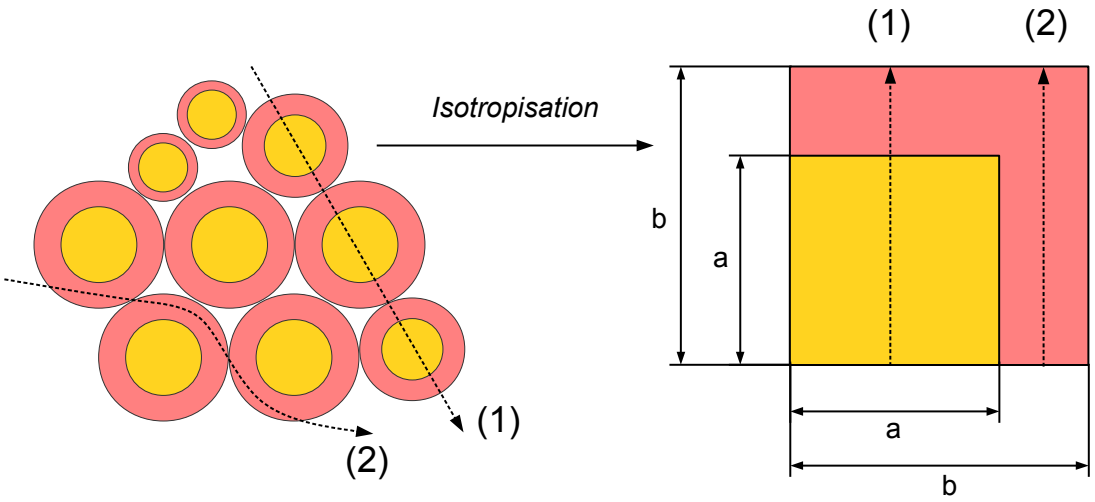


Figure III.9 – Principe d'isotropisation. Reproduit de [112]

Ce modèle s'applique lorsque les conducteurs sont répartis de manière symétrique dans le toron et si, dans le même temps, les puissances dissipées sont du même ordre de grandeur, ce qui en fait dans certains cas un outil d'estimation des températures assez efficace.

III.2.3 Résolution numérique de l'équation de la chaleur

La résolution de l'équation de la chaleur par des méthodes numériques (différences finies, volumes finis, éléments finis et éléments de frontières) repose sur la discrétisation géométrique d'une scène physique à modéliser. Pour les câbles électriques, les transferts thermiques sont bien simulés par ces méthodes et elles permettent d'avoir des résultats plus précis que ceux fournis par les méthodes approchées que nous avons introduites précédemment (surtout quand le câblage est complexe et que les chargements en courant sont dissymétriques et/ou transitoires ou enfin que les conditions aux limites sont fortement non-linéaires).
Il s'agit aussi souvent du seul moyen disponible de coupler les physiques entre elles, dans notre cas *l'électromagnétisme* et la *thermique*. Des marges d'amélioration sont de plus possibles tant du point de vue mathématique (algorithme de résolution) qu'informatique (calcul massivement parallèle sur GPU par exemple, qui offre des gains de temps très significatifs selon [163]) ce qui continue à faire de ces méthodes un sujet de recherche très actif.
Cependant, les méthodes numériques souffrent d'une certaine lourdeur dans leur mise en oeuvre et dans leur impossibilité à simuler rapidement un grand nombre d'éléments sans faire des approximations conséquentes sur la géométrie ou sur le maillage.
Notons que leur utilisation ne présente parfois aucun intérêt puisqu'il n'est pas utile d'obtenir des résultats très précis du phénomène de *conduction* dans la mesure où les conditions aux limites fluide/solide sont elles difficiles à estimer précisément (on pense notamment au coefficient d'échange thermique par convection h_{conv}).

Volumes finis

L'ouvrage de Suhas V. Patankar [152] est une référence pour le traitement des problèmes thermiques par la méthode des volumes finis. La méthode présente plusieurs avantages dont celui de pouvoir réaliser des maillages conformes permettant de gérer des géométries complexes. De plus, il s'agit de la méthode numérique la plus « intuitive » car les équations sont intégrées sur un volume ce qui assure la conservation des grandeurs physiques. C'est la raison pour laquelle elle se prête particulièrement bien à la résolution des problèmes de thermique. Les équations intégrées pour chaque volume de contrôle sont assemblées en un système matriciel dont la résolution peut faire intervenir différentes méthodes d'analyse numérique pour gérer les non-linéarités comme dans [81] où le système d'équation 1D est résolu selon une méthode itérative de Newton-Raphson afin de pouvoir gérer la dépendance à la température du coefficient de transfert convecto-radiatif.

Dans [22], les volumes finis sont appliqués aux calculs de courants admissibles pour un câble de puissance XLPE (*cross-linked polyethylene*). Une compilation des résultats est présentée en Fig. III.10(a). Sur la base des travaux de Patankar, un outil de calcul en volume fini a été développé au début de cette thèse. Le code, créé dans l'environnement MATLAB, présente notamment l'avantage de calculer les courants admissibles de *mono*-cable en fonction de conditions variant selon l'angle de la surface extérieure. Sur l'exemple de la Figure III.10(b), un fil de puissance simple, composé de deux couches diélectriques et parcouru par un courant de 150A, est supposé placé près d'une paroi *fictive* isolante, ce qui se traduit par un coefficient d'échange très faible du côté gauche du câble. La répartition de température est alors typique : maximale près de la « paroi » et minimale dans la direction diamétralement opposée. Ce type d'outil de dimensionnement rapide permet de calculer rapidement les courants admissibles de câblages simples pour des configurations d'installations typiques.

Éléments finis

La méthode des éléments finis est souvent appliquée à la résolution de problèmes complexes, afin de fournir des résultats de référence. Son utilisation est coûteuse en temps de calcul mais sa grande souplesse d'utilisation en fait souvent un outil de calcul indispensable. Il existe de nombreux logiciels permettant de mailler et de résoudre un problème physique, citons notamment COMSOL (logiciel propriétaire) qui sert dans [112] mais aussi ELMER (logiciel libre) utilisé dans [75].
Pour plus de détails sur cette méthode, le lecteur pourra trouver dans [121] les fondements mathématiques nécessaires à sa mise en oeuvre. Précisons simplement qu'elle se base sur une formulation *variationnelle* du problème tandis que la méthode des volumes finis se base sur une formulation *forte*. On trouvera dans [40, 88, 91, 92, 107, 201] des résultats de simulations concernant l'échauffement de câbles électriques de hautes puissances dans différentes configurations. La figure III.11 présente un exemple de résultats pour un toron de cinq câbles où seuls trois d'entre-eux sont alimentés.

Éléments de frontière

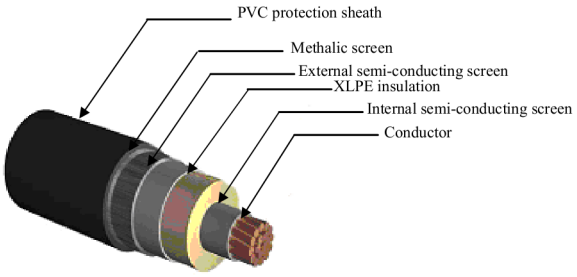
La méthode des éléments de frontière, ou BEM pour *Boundary Element Methods* se fonde sur une représentation intégrale du problème à résoudre et présente l'avantage de toujours « confiner » le processus de discrétisation aux *frontières* du domaine, même en présence de contributions volumiques et de milieu et/ou de conditions aux limites non-linéaires ([188, 200]). Cette dernière propriété est intéressante dans la résolution pratique de problèmes industriels puisqu'elle entraine une réduction significative du jeu de données à traiter. Depuis sa création dans les années 70, la méthode à été très largement appliquée aux sciences thermiques tant pour la résolution de problèmes *directs* [200] qu'*inverses* [150].
De plus, de récents travaux promettent des gains en temps de calcul considérables avec l'application des principes de programmation massivement parallèle sur cartes graphiques (GPU) puisque les algorithmes de résolution par éléments de frontière sont naturellement parallélisables [25, 95, 195].
Pour des raisons qui seront motivées en introduction du chapitre IV, il s'agit de la méthode que nous appliquerons pour la résolution du problème couplé CEM-Thermique.

III.3 Énergie thermique dissipée par les lignes de transmission

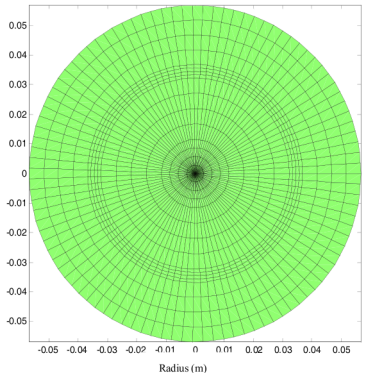
Dans cette section, nous aborderons la notion de couplage électromagnétique-thermique à partir d'une formulation très simplifiée du modèle de Drude. Cette approche permettra d'établir une relation causale entre augmentation de température et augmentation de la résistance électrique dans un conducteur. Les résultats obtenus seront appliqués à l'étude des lignes de transmission introduite au chapitre précédent.

III.3.1 Relation générale

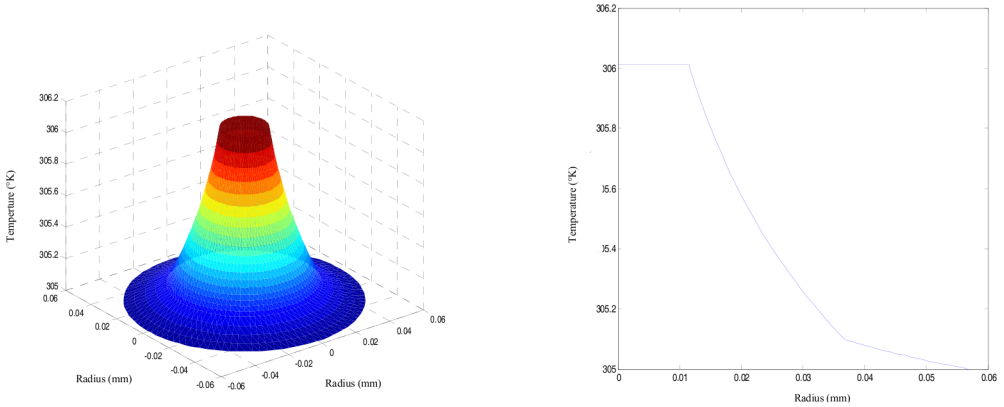
D'un point de vue général, la densité de puissance thermique $\dot{q}$ (en W.m^{-3}) dissipée par un champ électromagnétique quelconque est donnée par l'expression suivante :



Standard configuration of MV cables.

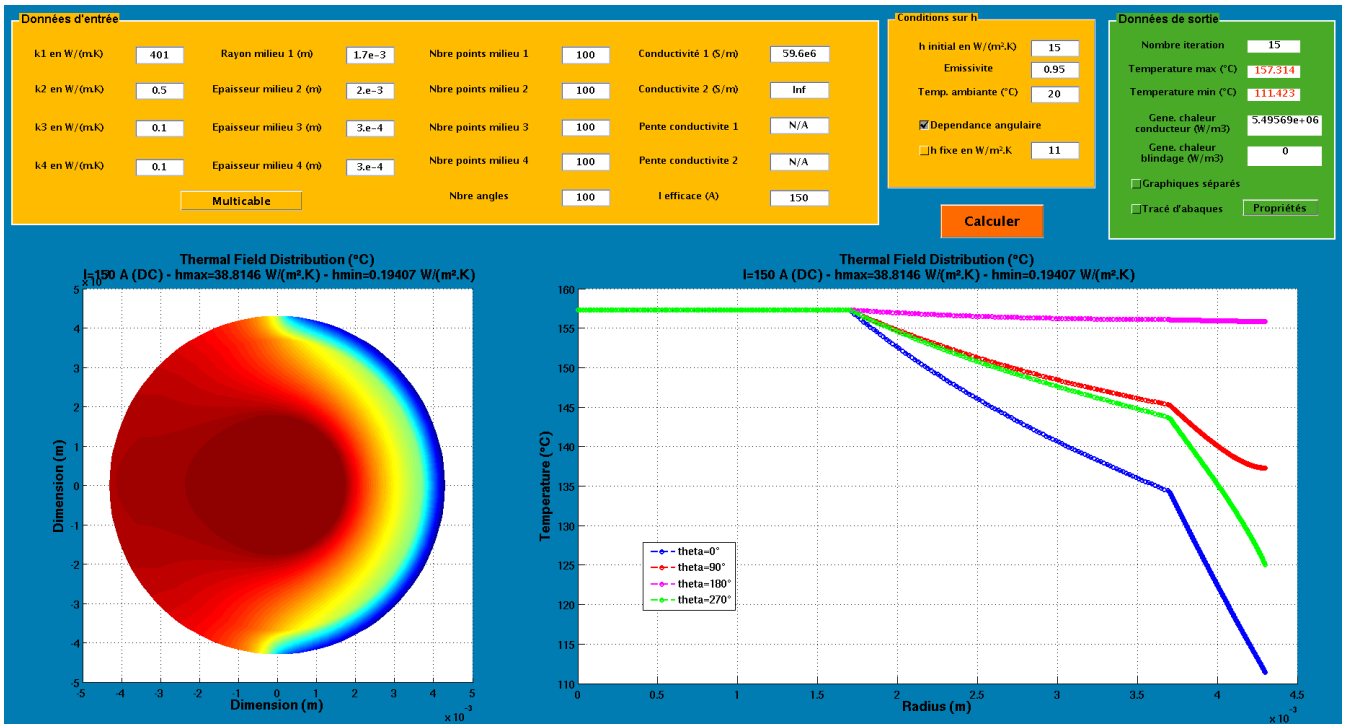


Mesh of XLPE insulation cable.



XLPE cable distribution temperature for an applied current of 300A.

(a) Application de la méthode des volumes finis à un câble XLPE haute puissance [22]



(b) Exemple de résultat obtenu par la méthode des volumes finis pour un câble coaxial. Outil développé sous MATLAB

Figure III.10 – Différentes applications de la méthode des volumes finis pour la simulation d'échauffement de câbles

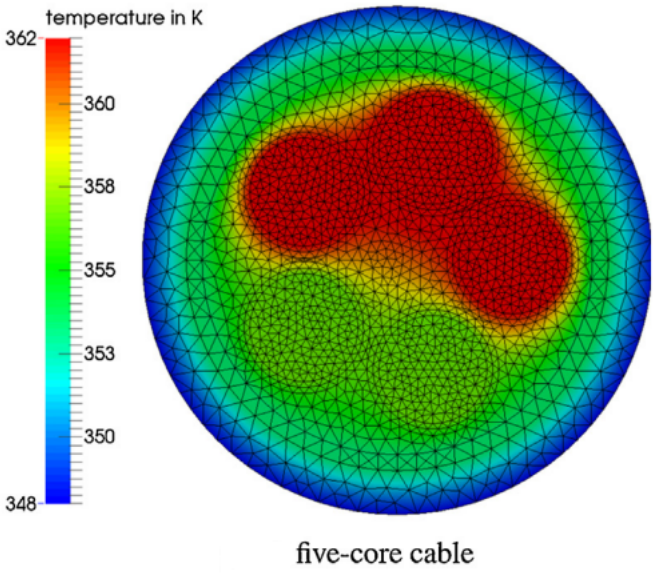


Figure III.11 – Visualisation du maillage et de la distribution de température d'un multicâble. Reproduit de [75]

$$\dot{q} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} = \vec{J} \cdot \vec{E} \tag{III.33}$$

En reprenant l'équation d'Ampère dans le domaine fréquentiel (II.32) et en faisant l'hypothèse que les différentes relations constitutives dépendent de la fréquence, il est possible de séparer les contributions dues aux courants de conduction et de déplacement de la manière suivante :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \underbrace{\vec{\mathbf{J}} + j\omega\vec{\mathbf{D}}}_{\overrightarrow{\mathbf{J_{tot}}}} = \underbrace{\sigma_c(\omega)\vec{\mathbf{E}}}_{\text{conduction}} + \underbrace{j\omega\varepsilon_d(\omega)\vec{\mathbf{E}}}_{\text{déplacement}} = j\omega\varepsilon(\omega)\vec{\mathbf{E}} \tag{III.34}$$

La permittivité effective $\varepsilon(\omega)$ est dans le cas général une grandeur complexe qui admet ainsi une partie réelle et imaginaire que l'on note :

$$\varepsilon(\omega) = \left(\varepsilon_d(\omega) + \frac{\sigma_c(\omega)}{j\omega}\right) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega) \tag{III.35}$$

Dans ces conditions, la puissance moyenne thermique dissipée par une onde électromagnétique de fréquence angulaire ω dans un milieu quelconque est donnée par :

$$P(\omega) = \iiint \mathrm{Re}\left[\overrightarrow{\mathbf{J_{tot}}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{E}^*}\right] dV = \frac{1}{2} \iiint \omega\varepsilon''(\omega)\,|E|^2\, dV \tag{III.36}$$

Référence : [143]

III.3.2 Détermination de la permittivité effective $\varepsilon(\omega)$

Contribution des charges libres

Le modèle de *l'électron amorti* ou modèle de *Drude* est un modèle classique simple considérant les porteurs de charges libres dans la matière (électrons, ions) comme des particules *indépendantes* et dont les mouvements peuvent être décrits dans le cadre de la théorie cinétique des gaz.

Ainsi, l'équation différentielle du mouvement d'un électron libre dans un métal découle directement du principe fondamental de la dynamique :

$$\overrightarrow{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathrm{F}_L} - \Gamma \overrightarrow{v} \tag{III.37}$$

Avec :
- $\overrightarrow{v}$: le vecteur vitesse de l'électron
- $\overrightarrow{p}$: le vecteur quantité de mouvement de l'électron
- $\overrightarrow{\mathrm{F}_L} = e\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{H}\right)$, la force de Lorentz appliquée à l'électron
- Γ : le coefficient de frottement traduisant l'amortissement du système dû aux *collisions* freinant l'électron

Dans le cadre d'une excitation sinusoïdale, l'équation (III.37) admet les simplifications introduites au chapitre II sur les dérivées temporelles. On sait de plus que le courant de conduction par une densité volumique ρ de charges libres est donné par :

$$\overrightarrow{\mathbf{J}} = \rho \overrightarrow{v} = Ne\overrightarrow{v} = \sigma_c(\omega)\overrightarrow{\mathbf{E}} \quad \text{avec} \quad N \text{ le nombre de charges libres par unité de volume.}$$

Or, la résolution de l'équation (III.37) dans le cas non-relativiste donne alors l'expression de $\overrightarrow{v}$ ce qui permet de proposer l'expression suivante de la conductivité électrique :

$$\sigma_c(\omega) = \frac{Ne^2}{m_e\left(\gamma + j\omega\right)} \tag{III.38}$$

Avec :
- m_e : la masse de l'électron en kg
- $\gamma = \dfrac{\Gamma}{m_e}$ le taux de collisions moyen par unité de temps

Dans le cas des bons conducteurs, un calcul rapide montre que pour des fréquences $\omega \ll \gamma$ (ce qui est très largement le cas dans nos applications), on peut négliger sans perte de précision la dépendance fréquentielle de la conductivité σ_c et ainsi considérer sa valeur constante dans le cas continu, c'est-à-dire en posant $\omega = 0$.
La permittivité électrique d'un milieu conducteur est alors donnée par :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{\sigma_c}{j\omega} = \varepsilon_0\left(1 - j\frac{\sigma_c}{\omega\varepsilon_0}\right) \tag{III.39}$$

Référence : [143]

Contribution des charges liées

Dans le cas où les porteurs de charges sont liés aux noyaux des atomes ou bien des molécules, il est nécessaire d'introduire une force de rappel reliant le centre de masse de ces derniers à leur position d'équilibre. En appliquant une nouvelle fois le principe fondamental de la dynamique, il est possible de modifier le modèle de Drude pour tenir compte de cet effet :

$$\overrightarrow{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathrm{F}_L} - k\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \Gamma \overrightarrow{v} \tag{III.40}$$

Avec :
- k : une constante de rappel exprimée en $\mathrm{N.m^{-1}}$

Sous les mêmes conditions d'excitation sinusoïdale, la résolution de (III.40) permet de trouver pour expression de la permittivité diélectrique :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0 \omega_{dp}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\gamma} \tag{III.41}$$

Avec :

- $\omega_{dp}^2 = \dfrac{N_d e^2}{\varepsilon_0 m_e}$: la fréquence de plasma dépendant du nombre de dipôles par unité de volume N_d, de la charge électrique e de l'électron et de sa masse m_e.
- $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$: la fréquence de résonance de l'oscillateur harmonique

Les diélectriques réels possèdent plusieurs fréquences de résonance correspondant à différents modes de vibration et divers mécanismes de polarisation. Ainsi, la permittivité est la somme de plusieurs de ces termes :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \sum_i^N \frac{\varepsilon_0 \omega_{dpi}^2}{\omega_i^2 - \omega^2 + j\omega\gamma_i} \tag{III.42}$$

Référence : [143]

Réunification des termes

Dans le cas d'un matériau présentant des propriétés à la fois diélectriques et conductrices, la permittivité électrique est trivialement la somme des contributions (III.39) et (III.41). On obtient ainsi simplement :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_{cp}^2}{j\omega(\gamma_c + j\omega)} + \frac{\omega_{dp}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\gamma}\right) \tag{III.43}$$

Avec :

- $\omega_{cp}^2 = \sigma_c(\gamma + j\omega) = \dfrac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e}$: la fréquence de plasma du conducteur

Référence : [143]

III.3.3 Variation de la résistivité électrique en fonction de la température

La température est une grandeur d'état *macroscopique* des corps ce qui signifie que la notion n'a de sens que lorsque le nombre de particules ou de molécules est fabuleusement grand. C'est le domaine d'étude de la *physique statistique* dont les fondements théoriques dépassent très largement le cadre de cette thèse. La température dérive directement de la notion *d'entropie* puisqu'à l'équilibre thermodynamique, elle est égale à l'inverse de la dérivée de l'entropie par rapport à l'énergie [96] :

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}E} = \frac{1}{T} \tag{III.44}$$

On appréhende classiquement la température comme *la mesure moyenne de l'énergie cinétique* des particules ou des molécules composant un corps. Dans le cadre de la théorie cinétique des gaz il existe à cet effet le modèle de distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann.
Une manière de penser les effets de la température sur l'évolution de la conductivité électrique consiste alors à considérer qu'un accroissement de la température d'un corps augmente l'agitation thermique de ses constituants. Ainsi, une augmentation de l'énergie cinétique des molécules augmente dans le même temps le nombre de collisions par unité de temps entre particules. Or la probabilité de collisions γ intervient dans l'expression de la conductivité électrique dans notre modèle simple *d'électron amorti*.

En effet, comme le montre la relation (III.38), une augmentation de la température induit une baisse de la conductivité électrique et ce, indépendamment de la fréquence.
La figure III.12 présente la variation typique de la conductivité électrique dans la gamme de températures comprises entre 0°C et 1100°C pour le cuivre.

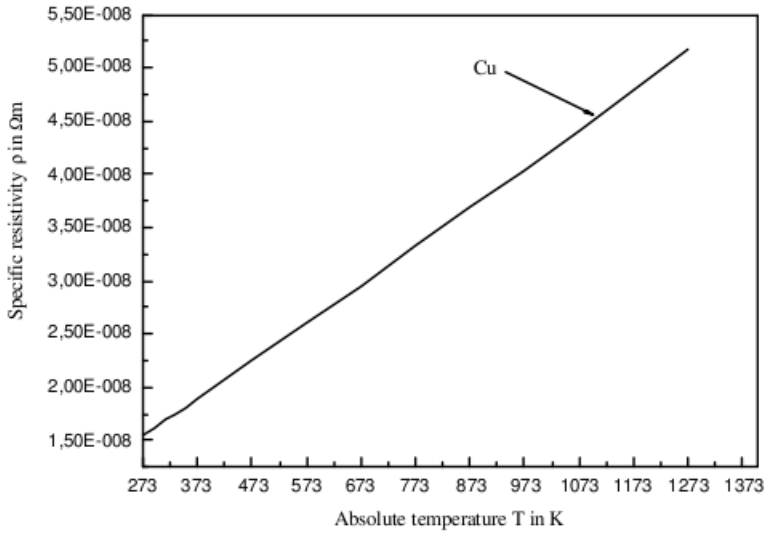


Figure III.12 – Variation de la résistivité électrique du cuivre en fonction de la température. Tiré de [81]

La très grande *linéarité* de la courbe d'évolution de la résistivité électrique en fonction de la température est valable pour la plupart des métaux. A titre d'exemple, le tableau III.2 donne les taux de variations pour divers métaux.

Résistivités électriques et coefficients de variation de la résistivité avec la température des métaux utilisés

Matériaux	Résistivité (ρ) ohm · m à 20 °C	Température coefficient (α_{20}) par K à 20 °C
a) *Ames*		
Cuivre	$1{,}724\ 1 \times 10^{-8}$	$3{,}93 \times 10^{-3}$
Aluminium	$2{,}826\ 4 \times 10^{-8}$	$4{,}03 \times 10^{-3}$
b) *Matériaux de gaines et d'armure*		
Plomb et alliage de plomb	$21{,}4 \times 10^{-8}$	$4{,}0 \times 10^{-3}$
Acier	$13{,}8 \times 10^{-8}$	$4{,}5 \times 10^{-3}$
Bronze	$3{,}5 \times 10^{-8}$	$3{,}0 \times 10^{-3}$
Acier inoxydable	70×10^{-8}	Négligeable
Aluminium	$2{,}84 \times 10^{-8}$	$4{,}03 \times 10^{-3}$
NOTE Les valeurs se rapportant au cuivre constituant les âmes sont prises dans la CEI 60028. Les valeurs se rapportant à l'aluminium constituant les âmes sont prises dans la CEI 60889.		

Table III.2 – Reproduit de [49]

Cas particulier de la supraconductivité

Enfin, il n'est pas possible d'aborder ce sujet sans parler de la *supraconductivité*, qui promet des applications industrielles intéressantes, notamment pour le transport de puissance dans le cas de lignes HVDC (*High Voltage Direct Current*). On trouvera dans [192] des compléments intéressants sur le sujet des lignes de transmission supraconductrices.

Dans les faits, le phénomène de supraconductivité se caractérise par une chute brutale de la résistance électrique qui devient alors totalement nulle lorsque la température approche quelques Kelvins (Fig. III.13) [157]. Typiquement, les métaux deviennent supraconducteurs lorsqu'il sont plongés dans l'hélium liquide, soit à une température de 4 K. Les raisons d'un tel phénomène font appel à des éléments de mécanique quantique qui dépassent très largement le cadre de cette thèse.

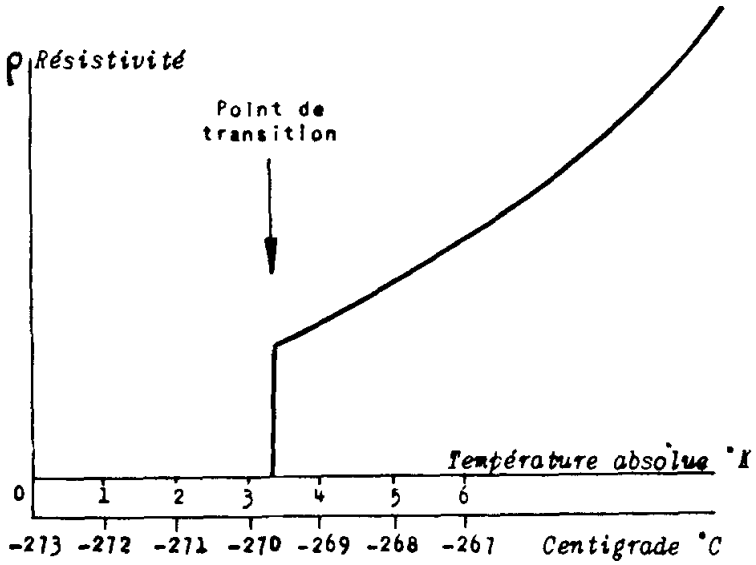


Figure III.13 – Variation typique de la résistance électrique des métaux purs pour des températures proches du zéro absolu. Tiré de [157].

III.3.4 Puissance thermique dissipée dans les lignes de transmission

La théorie des lignes de transmission, introduite au chapitre II, est basée sur l'**approximation** des bons conducteurs (mode de propagation *quasi*-TEM) qui consiste à négliger les contributions liées aux courants de déplacement. En effet, un matériau est dit bon conducteur lorsque le ratio des deux types de courant répond à la contrainte suivante :

$$\frac{\| \overrightarrow{\mathbf{J_{cond}}} \|}{\| \overrightarrow{\mathbf{J_{disp}}} \|} \gg 1 \quad \Longrightarrow \quad \sigma \gg \omega\varepsilon_0 \tag{III.45}$$

Une connaissance précise des champs à l'intérieur des conducteurs permettrait d'appliquer l'expression (III.36) afin de déterminer la puissance volumique dissipée. Cependant, aux fréquences d'études, les champs électrique et magnétique ne pénètrent que sur une très courte longueur, appelée *épaisseur de peau*.
Cette longueur, notée δ est donnée par la relation suivante :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu\sigma}} \tag{III.46}$$

Il est ainsi possible de déterminer des quantités de surface telles que des courants et des impédances ; il s'agit déjà là de notions introduites dans l'établissement des équations des lignes de transmission dans le cadre de l'approximation *quasi-TEM* au chapitre précédent.
A l'aide de la notion d'effet de peau, les pertes ohmiques par unité de surface sont alors données par :

$$\dot{q}' = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}A} = \frac{1}{2} R_s \| \vec{\mathbf{J}}_\mathbf{s} \|^2 \quad \text{avec} \quad R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{1}{\sigma\delta}, \tag{III.47}$$

la résistance *surfacique* des conducteurs.

Sous ces hypothèses, les courants surfaciques $\vec{\mathbf{J_s}}$ sont reliés aux champs électriques et magnétiques transverses par :

$$\vec{\mathbf{J_s}} = \vec{n} \times \vec{\mathbf{H}}_t = \vec{n} \times \frac{\left(\vec{u_z} \times \vec{\mathbf{E}}_t\right)}{\eta} = \frac{\left(\vec{n} \cdot \vec{\mathbf{E}}_t\right)}{\eta} \vec{u}_z \tag{III.48}$$

Cependant, comme $\vec{n}$ (vecteur normale à la surface du conducteur) est colinéaire à $\vec{\mathbf{E}}_t$, on obtient ainsi :

$$\vec{n} \cdot \vec{\mathbf{E}}_t = \| \vec{\mathbf{E}}_t \| \Longrightarrow \vec{\mathbf{J_s}} = \frac{\| \vec{\mathbf{E}}_t \|}{\eta} \vec{u_z} = \| \vec{\mathbf{H}}_t \| \vec{u_z} \tag{III.49}$$

ce qui d'après la relation (III.47) mène à :

$$\| \vec{\mathbf{J_s}} \| = \| \vec{\mathbf{H}}_t \| \Longrightarrow \dot{q}' = R_s \| \vec{\mathbf{H}}_t \|^2 \tag{III.50}$$

Référence : [143, 158]

III.4 Conclusion

Au sein des câblages, les échauffements apparaissent lors du passage d'un courant dans un milieu de conductivité électrique finie (effet *Joule*). Or cette conductivité électrique dépend elle-même linéairement de la température du solide, ce qui tend à rendre les câblages moins performants au fur et à mesure que leur température augmente. La puissance thermique ainsi créée se diffuse selon trois modes :

— par conduction au sein des harnais de câbles
— par convection et rayonnement dans le milieu fluide environnant, c'est-à-dire en surface des câblages

La conduction est de loin le phénomène de transfert le mieux maîtrisé. A contrario, les phénomènes de convection sont très difficiles à modéliser précisément parce qu'ils font intervenir les équations de Navier-Stokes, notoirement connues pour être fortement non-linéaires. Or la prédiction précise de l'échauffement des câblages, qui est une donnée importante pour le développement de futures générations d'aéronefs, fait intervenir l'ensemble de ces phénomènes. La problématique constitue donc un sujet de recherche en constante évolution, comme en témoigne les nombreux compléments de littérature résumés dans le Tableau III.3.

Pourtant, malgré l'abondance de publications, il n'existe à notre connaissance aucun modèle réunissant dans un seul et même formalisme étude *thermique* et *électromagnétique* des réseaux de câblages approchés selon la théorie des lignes de transmission multiconducteurs. C'est la raison pour laquelle un tel modèle est développé dans le chapitre suivant.

Aspects thermiques		
Généralités : modèles *état de l'art*, modèles empiriques (abaques, normes), compléments expérimentaux	Règles et loi acquises par l'expérience. Ex : (norme IEC60287, spécifications d'installation intégrateur)	[3-9, 23, 24, 35, 39, 60, 62, 63, 75, 108, 126, 128, 129, 131, 136, 137, 156, 175-177, 179, 197]
Isotropisation de l'équation de la chaleur	Réduction de la complexité du problème par homogénéisation de propriétés thermiques et résolution d'un problème thermique axisymétrique simplifié	[81, 112-115, 172, 180, 181, 190, 196]
Résolution numérique de l'équation de la chaleur	Application de diverses méthodes numériques pour la détermination des champs de température (volumes finis, éléments finis, éléments de frontière)	[18, 22, 37, 47, 61, 69, 73, 79, 80, 87, 91, 106, 125, 134, 135, 138, 141, 144, 145, 150, 151]
Coefficient de transferts thermiques par rayonnement et convection	Corrélations applicables pour le refroidissement par convection naturelle ou mixte en espace clos/ouvert	[14, 34, 44, 54, 82, 89, 105, 124, 132, 133, 155, 159, 186, 187, 194]
Autres	Divers : compléments théoriques, comparaison des différentes méthodes, optimisation des échauffements au sein des harnais, etc	[28, 32, 36, 38, 41, 43, 53, 90, 94, 102, 109, 178, 183]
Couplage électromagnétique-thermique		
Application câble	Résolution du problème couplé électromagnétique-thermique pour les architectures électriques et les systèmes de câbles	[20, 30, 31, 40, 45, 57, 64, 84, 88, 92, 107, 130, 162, 174, 201]
Propriétés thermophysiques	Variation en fonction de la température des propriétés des lignes de transmission	[65, 70, 157, 160]
Autres	Divers : compléments théoriques, applications aux systèmes électroniques	[15, 16, 50, 66, 101, 118-120, 163]

Table III.3 – Résumé des différentes ressources bibliographiques

A retenir :

- En stationnaire, les transferts de chaleur dans les milieux solides sont décrits par l'*équation de la chaleur*, qui est un exemple typique d'équation de *Poisson* :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T \right) = -\dot{q}$$

- Le coefficient de transfert thermique *convectif* peut être estimé approximativement à l'aide de corrélations basées sur des nombres adimensionnels (*Rayleigh* et *Prandtl* en convection naturelle)
- La conduction électrique dépend linéairement de la température, puisque le taux de collisions moyen des électrons augmente avec l'agitation thermique du milieu

Page intentionnellement blanche

CHAPITRE IV

Simulation couplée CEM-Thermique de réseaux de lignes de transmission multiconducteurs

Table des matières

IV.1 Introduction à la résolution couplée CEM-Themique 70
IV.1.1 Équivalence entre les problèmes thermiques et électrostatiques 70
IV.1.2 Choix d'une méthode numérique 70
IV.2 Représentations intégrales d'un potentiel arbitraire 70
IV.2.1 Milieu homogène unique et borné 71
IV.2.2 Milieu homogène par morceaux et borné 72
IV.2.3 Prise en compte des milieux ouverts 73
IV.3 Résolution numérique de l'équation intégrale de frontière 74
IV.3.1 Les équations intégrales de frontière 74
IV.3.2 La méthode des moments 76
IV.3.3 Les éléments de frontière constants 77
IV.3.4 Développement des schémas numériques 78
IV.3.5 Calcul des éléments d'interaction 80
IV.4 Application aux réseaux de lignes de transmission 86
IV.4.1 Stratégie de couplage 86
IV.4.2 Calcul des paramètres électriques primaires de la ligne 89
IV.4.3 Calcul du champ de température 92
IV.5 Exemples d'application 96
IV.5.1 Exemple n° 1 : simulation couplée CEM-Thermique 96
IV.5.2 Exemple n° 2 : calcul d'abaque 97
IV.6 Conclusion 98

Le but de ce chapitre est de présenter en détail la chaîne de calcul couplée CEM-Thermique développée dans ces travaux de doctorat. Dans un premier temps, l'étude introduira une méthode *originale* permettant de déterminer *simultanément* la distribution de température ainsi que les paramètres électriques primaires de torons de câbles. Dans une seconde étape, la résistivité électrique sera corrigée en fonction de la température précédemment calculée avant d'être réinjectée dans le code de calcul CRIPTE pour la résolution de l'équation BLT associée au réseau topologique défini. Enfin, le chapitre s'achèvera sur la présentation de deux cas-tests qui permettront d'évaluer, d'une part, l'influence des courants de couplage sur l'échauffement total d'un toron et d'autre part l'influence du coefficient d'échange thermique sur le calcul des courants admissibles.

IV.1 Introduction à la résolution couplée CEM-Themique

IV.1.1 Équivalence entre les problèmes thermiques et électrostatiques

L'analyse bibliographique des chapitres II et III permet de démontrer que l'équation stationnaire de la chaleur est mathématiquement *identique* à l'équation du problème électrostatique équivalent intervenant dans la propagation des ondes électromagnétiques sous l'hypothèse *quasi*-TEM. En effet, les phénomènes *électrostatiques* et de *conduction stationnaire de la chaleur* dérivent directement de la notion plus générale de *potentiel* dans les *milieux continus* [52]. Ces derniers se distinguent toutefois par la signification physique des différents coefficients ainsi que par les conditions aux limites propres à chacune des deux physiques.
Pour rappel, dans le cas de domaines homogènes par morceaux, les relations suivantes s'appliquent en chacun des sous-domaines :

Expression générale d'un potentiel arbitraire $\vec{\nabla} \cdot \left(\kappa \vec{\nabla} F\right) = S$		
	Équation stationnaire de la chaleur $\vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T\right) = -\dot{q}$	**Problème électrostatique équivalent** $\vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon \vec{\nabla} \varphi\right) = 0$
κ	Conductivité thermique λ	Permittivité électrique $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$
F	Température T	Potentiel électrostatique Φ
S	Source de chaleur $-\dot{q}$	Densité de charges libres 0

Table IV.1 – Correspondance entre les problèmes thermiques et électrostatiques

Bien que les notions de *température* et de *champ électromagnétique* soient indépendantes du point de vue phénoménologique, le fait que ces dernières soient gouvernées par la même relation de base autorise le développement d'une méthode de résolution fortement couplée.

IV.1.2 Choix d'une méthode numérique

La résolution consiste en la recherche d'une solution satisfaisant une équation classique de Laplace / Poisson. Le choix de la méthode numérique de résolution s'est porté sur la méthode des *éléments de frontière* .
Celle-ci se base sur la connaissance préalable d'une solution fondamentale du problème ainsi que sur l'existence d'une formulation intégrale de l'équation différentielle à résoudre. Ces deux conditions sont « triviales » dans le cas de l'équation de Laplace / Poisson, ce qui rend la méthode particulièrement bien adaptée à la résolution des problèmes de potentiel.

Comme cela apparaitra dans la stratégie de couplage présentée dans la section IV.4.1 en page 86, la méthode possède des avantages intéressants pour notre problème couplé notamment en terme de ressource machine et de temps de calcul par une mutualisation des données et des routines de calcul. De plus, comme la prise en compte des conditions aux limites est une conséquence directe de la formulation intégrale, il est possible de traiter dans un même formalisme les conditions de type *Dirichlet*, *Neumann* ou *Robin*. La méthode permet aussi de traiter des milieux infinis, ce qui s'avèrera indispensable lors du calcul des matrices capacité, conductance et inductance des lignes de transmission.

IV.2 Représentations intégrales d'un potentiel arbitraire

Dans cette section, les représentations intégrales de frontière d'un potentiel arbitraire F classiquement décrit par l'équation de Poisson (équation de Laplace avec second membre) seront rigoureusement établies. L'étude débutera par la prise en compte de domaines homogènes uniques puis par morceaux mais néanmoins toujours **bornés** et contenus dans $\mathbb{R}^n$ où $n \in \{2;3\}$. La prise en compte de domaine

ouvert se fera sur la base d'un postulat qui sera introduit dans un second temps.

IV.2.1 Milieu homogène unique et borné

Considérons le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ délimité par la frontière **fermée** Γ_f et dont un exemple de représentation est donné en figure IV.1.

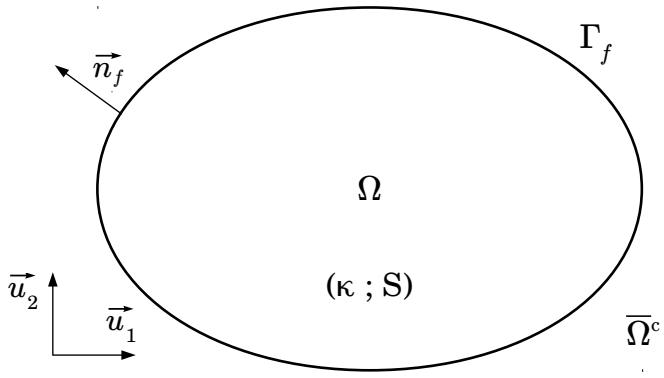


Figure IV.1 – Exemple de domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Pour trouver l'expression du *potentiel arbitraire* F en chaque point du domaine considéré, il faut résoudre le système différentiel suivant :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\kappa \vec{\nabla} F(x)\right) = S(x) \quad \text{si} \quad x \in \Omega \tag{IV.1}$$

$$\alpha F(x) + \beta \frac{\partial F(x)}{\partial \vec{n_f}} = \gamma \quad \text{si} \quad x \in \Gamma_f \tag{IV.2}$$

Avec :

- $\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \vec{u_i} \right)$, l'opérateur différentiel *gradient*
- $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, le potentiel arbitraire défini comme un champ scalaire continu et deux fois dérivable sur Ω
- $x \in \Omega$, le vecteur de coordonnées cartésiennes du point M par rapport au référentiel d'origine
- $\kappa : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, une application *constante* sur Ω
- $S : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une application *continue* sur Ω
- $\vec{n_f}$, le vecteur normal au contour orienté $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur du domaine Ω
- $\frac{\partial F(x)}{\partial \vec{n_f}} = \vec{\nabla} F(x) \cdot \vec{n_f}$, la dérivée de surface du potentiel F sur le contour $\partial\Omega$
- $(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{R}^3$, le vecteur de *coefficients* relatifs aux conditions à la limite du domaine
- $\overline{\Omega}^C$: le complémentaire de l'adhérence

La forme intégrée des équations (IV.1) et (IV.2) est donnée par l'expression suivante :

$$C(y)F(y) = \oint_{\Gamma_f} \kappa \left(\mathrm{G}(x,y) \frac{\partial F(x)}{\partial \vec{n_f}} - F(x) \frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \vec{n_f}} \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \mathrm{G}(x,y) S(x) d\Omega \tag{IV.3}$$

Avec :

- $y \in \mathbb{R}^n$, le vecteur de coordonnées cartésiennes du point d'observation P par rapport au référentiel d'origine
- $C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, une application constante par morceaux dont la valeur vaut respectivement $\left\{ \kappa; \frac{\kappa}{2}; 0 \right\}$ suivant que $y \in \left\{ \Omega; \Gamma_f; \overline{\Omega}^C \right\}$
- $\mathrm{G}(x,y) : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la solution fondamentale de l'opérateur Laplacien $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial u_i^2} \right)$. Suivant

les cas, on trouve :

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln(\| x-y \|) \quad \text{pour} \quad n=2$$
$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi \| x-y \|} \quad \text{pour} \quad n=3$$

où $\| x-y \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ est la distance *euclidienne* entre les points M et P de coordonnées respectives x et y

La démonstration permettant d'établir la relation (IV.3) est donnée en Annexe A.

Références : [11, 26, 78, 93, 104, 200]

IV.2.2 Milieu homogène par morceaux et borné

On considère à présent le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de la Fig. IV.2, composé des sous-domaines Ω_1 et Ω_2 répondant aux contraintes de partition suivantes :

$$\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$$
$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$$

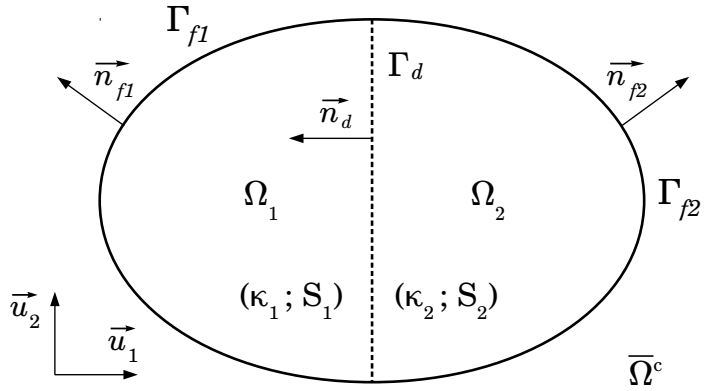


Figure IV.2 – Exemple de domaines homogènes par morceaux $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

L'expression du *potentiel arbitraire* F est toujours obtenue en chacun des sous-domaines à partir des équations (IV.1) et (IV.2) auxquelles on rajoute les conditions de continuité à la frontière de *discontinuité* Γ_d séparant les sous-domaines Ω_1 et Ω_2. On a ainsi le système d'équations différentielles suivantes :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\kappa_i \vec{\nabla} F(x) \right) = S_i(x) \quad \text{si} \quad x \in \Omega_i \ , \ i \in \{1;2\} \tag{IV.4}$$

$$\left.\begin{array}{c} [F(x)]_{\pm} = 0 \\ \left[\kappa_i \dfrac{\partial F(x)}{\partial \vec{n}_d} \right]_{\pm} = Q(x) \end{array}\right\} \quad \text{si} \quad x \in \Gamma_d \ , \ i \in \{1;2\} \tag{IV.5}$$

$$\alpha_i F(x) + \beta_i \frac{\partial F(x)}{\partial \vec{n_{fi}}} = \gamma_i \quad \text{si} \quad x \in \Gamma_{fi} \ , \ i \in \{1;2\} \tag{IV.6}$$

Avec :

- $[\ ]_{\pm}$, la différence des valeurs prises par l'application entre crochet de part et d'autre de la frontière Γ_d relativement à la normale $\vec{n}_d$

- $Q : \Gamma_d \to \mathbb{R}$, une application continue sur l'ensemble caractérisant l'égalité des flux à la frontière Γ_d

Chacun des domaines homogènes Ω_1 et Ω_2 possédant une représentation intégrale identique à celle de l'équation (IV.3), la représentation intégrale des équations (IV.4)-(IV.6) sur le domaine Ω est par conséquent la *superposition* des représentations intégrales obtenues pour chacun des sous-domaines. On obtient ainsi :

$$C(y)F(y) = \int_{\Gamma_{f1}} \kappa_1 \left(\mathrm{G}(x,y) \frac{\partial F(x)}{\partial \overrightarrow{n_{f1}}} - F(x) \frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{f1}}} \right) d\Gamma$$
$$+ \int_{\Gamma_{f2}} \kappa_2 \left(\mathrm{G}(x,y) \frac{\partial F(x)}{\partial \overrightarrow{n_{f2}}} - F(x) \frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{f2}}} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \left((\kappa_2 - \kappa_1) F(x) \frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_d}} + \mathrm{G}(x,y) Q(x) \right) d\Gamma$$
$$- \int_{\Omega_1} \mathrm{G}(x,y) S_1(x) d\Omega - \int_{\Omega_2} \mathrm{G}(x,y) S_2(x) d\Omega$$

Avec :
- $C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, une application constante par morceaux dont la valeur vaut respectivement $\left\{ \kappa_1; \kappa_2; \frac{\kappa_1}{2}; \frac{\kappa_2}{2}; \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}; 0 \right\}$ suivant que $y \in \left\{ \Omega_1; \Omega_2; \Gamma_{f1}; \Gamma_{f2}; \Gamma_d; \overline{\Omega}^{\mathsf{C}} \right\}$

En généralisant cette expression à un domaine homogène par morceaux composé de N_f frontière dites de *domaine* Γ_f sur lesquelles s'appliquent les conditions aux limites et de N_d surfaces de discontinuités Γ_d, on obtient l'expression générale suivante qui servira d'expression de départ à la méthode de résolution numérique exposée dans la suite du mémoire :

$$C(y)F(y) + \sum_{i=1}^{N_f} \left[\int_{\Gamma_{fi}} \kappa^- F(x) \frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}} d\Gamma \right] - \sum_{i=1}^{N_f} \left[\int_{\Gamma_{fi}} \kappa^- \mathrm{G}(x,y) \frac{\partial F(x)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}} d\Gamma \right]$$
$$+ \sum_{j=1}^{N_d} \left[\int_{\Gamma_{dj}} (\kappa^+ - \kappa^-) F(x) \frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{dj}}} d\Gamma \right] = \sum_{j=1}^{N_d} \left[\int_{\Gamma_{dj}} \mathrm{G}(x,y) Q_j(x) d\Gamma \right] - \sum_{k=1}^{N_k} \left[\int_{\Omega_k} \mathrm{G}(x,y) S_k(x) d\Omega \right] \quad \text{(IV.7)}$$

Avec :
- $\kappa^{\pm}$: la valeur prise par l'application κ de part et d'autre du vecteur normale spécifié
- $C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, une application constante par morceaux dont la valeur vaut respectivement $\left\{ \kappa_i; \frac{\kappa^-}{2}; \frac{\kappa^+ + \kappa^-}{2}; 0 \right\}$ suivant que $y \in \left\{ \Omega_i; \Gamma_f; \Gamma_d; \overline{\Omega}^{\mathsf{C}} \right\}$
- N_f : le nombre de *frontières* de domaine sur lesquelles s'appliquent les conditions aux limites
- N_d : le nombre de surfaces de *discontinuités* séparant les sous-domaines deux à deux
- N_k : le nombre de sous-domaines homogènes

Références : [11, 26, 78, 93, 104, 200]

IV.2.3 Prise en compte des milieux ouverts

Le traitement des milieux ouverts se fera directement suivant les phénomènes physiques à résoudre :

- **En thermique** : Dans l'étude du refroidissement passif d'un solide par un fluide, nous avons montré dans le chapitre II que les phénomènes de diffusion de la chaleur étaient radicalement différents entre les états (fluide ou solide) des milieux. Ainsi, les phénomènes de conduction de la chaleur ne

seront étudiés que dans le cas de **domaines strictement fermés** sur lesquels viendront s'appliquer les conditions aux limites convecto-radiatives (Fig. IV.3).

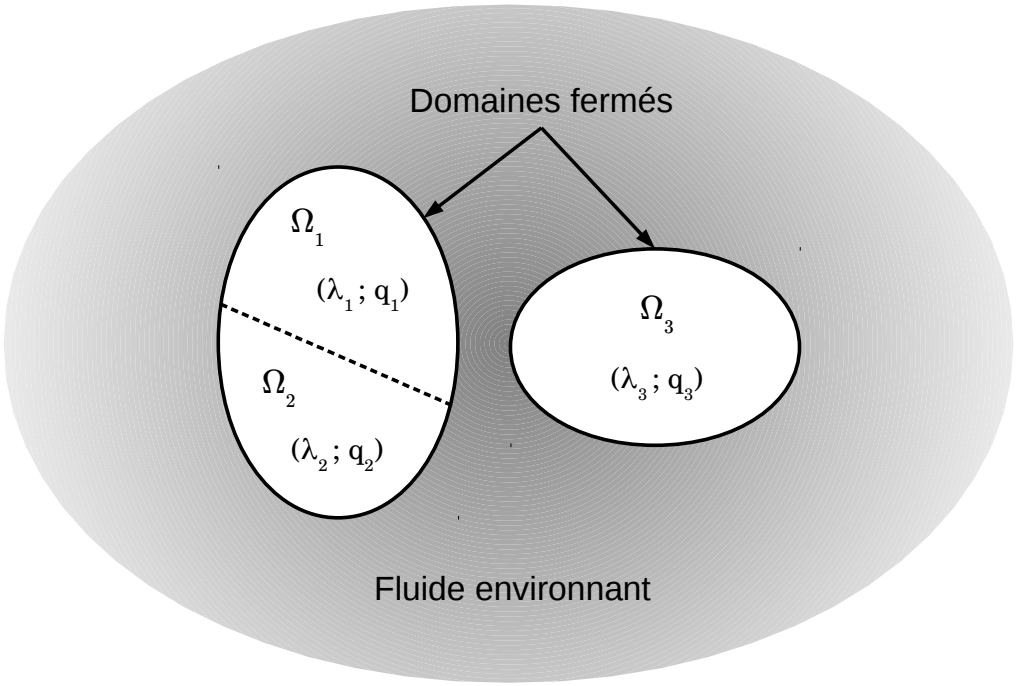


Figure IV.3 – Traitement des domaines ouverts en thermique

- **En électrostatique** : Dans un espace à **trois dimensions**, le traitement des domaines ouverts se fait en prenant comme surface une sphère de rayon arbitraire englobant l'ensemble des sous-domaines internes du problème (cf Fig. IV.4). Il suffit alors de faire tendre le rayon de cette sphère vers l'infini pour montrer que les intégrales sur ce contour tendent vers 0 par rapport aux potentiels sur les autres contours. Or, dans un espace à **deux dimensions**, cette condition n'est pas naturellement assurée puisqu'une analyse asymptotique montre que la contribution du cercle infini ne tend pas vers zéro. La contribution non-nulle correspond alors au *potentiel moyen à l'infini*.
  Toutefois, la *condition de neutralité* peut ici toujours être assurée si l'on ne cherche pas de potentiels absolus mais des *différences* de potentiels [149]. On admet donc ainsi la relation (IV.7) comme un postulat valable pour l'étude des domaines ouverts en deux dimensions. Une méthode de neutralisation sera présentée en page 89. Elle consistera à trouver le potentiel « d'ajustement » permettant d'annuler la charge totale sur l'ensemble des sous domaines.

IV.3 Résolution numérique de l'équation intégrale de frontière

Dans cette section, le schéma numérique permettant de résoudre l'équation intégrale de frontière, issue de la représentation du même nom donnée par l'équation (IV.7), est développé. Nous adopterons, pour des questions de lisibilité, le schéma des *éléments de frontières constants* en *deux dimensions*.

IV.3.1 Les équations intégrales de frontière

L'inconnue recherchée doit, pour être solution du problème, respecter les conditions aux limites initialement données. On rappelle que l'on a en chacune des frontières Γ_{fi} :

$$\alpha_i F(x) + \beta_i \frac{\partial F(x)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}} = \gamma_i \tag{IV.8}$$

Il est possible de distinguer deux types d'équations intégrales de frontière en fonction des valeurs prises par le vecteur de conditions aux limites :

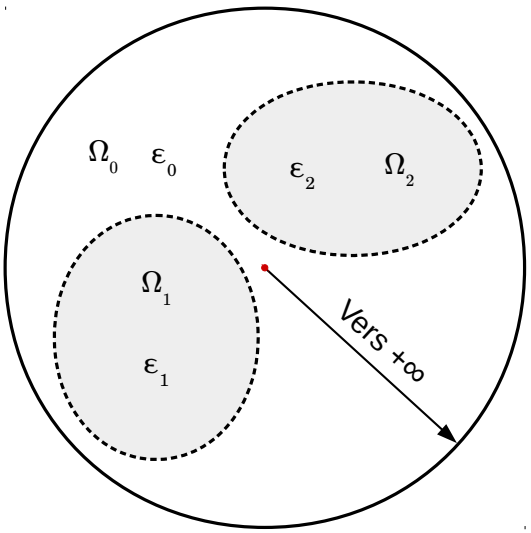


Figure IV.4 – Contour d'intégration pour le traitement des domaines ouverts en électrostatique

Type n° 1

Pour ce premier cas, imposons $\beta_i \neq 0$. D'après la relation (IV.8), on peut exprimer la dérivée partielle du potentiel sur les contours de domaine en fonction de la valeur du potentiel prise sur ce même contour :

$$\frac{\partial F(x)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}} = \frac{1}{\beta_i}\left(\gamma_i - \alpha_i F(x)\right) \tag{IV.9}$$

En injectant dans la représentation intégrale (IV.7) cette expression, l'équation intégrale suivante est alors obtenue :

$$\begin{aligned} C(y)F(y) + \sum_{i=1}^{N_f}\left[\int_{\Gamma_{fi}} \kappa^- F(x)\frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}}d\Gamma\right] + \sum_{i=1}^{N_f}\left[\int_{\Gamma_{fi}} \frac{\kappa^-\alpha_i}{\beta_i}F(x)\,\mathrm{G}(x,y)d\Gamma\right] \\ + \sum_{j=1}^{N_d}\left[\int_{\Gamma_{dj}} \left(\kappa^+ - \kappa^-\right)F(x)\frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{dj}}}d\Gamma\right] \\ = \sum_{i=1}^{N_f}\left[\int_{\Gamma_{fi}} \frac{\kappa^-\gamma_i}{\beta_i}\mathrm{G}(x,y)d\Gamma\right] + \sum_{j=1}^{N_d}\left[\int_{\Gamma_{dj}} \mathrm{G}(x,y)Q_j(x)d\Gamma\right] - \sum_{k=1}^{N_k}\left[\int_{\Omega_k} \mathrm{G}(x,y)S_k(x)d\Omega\right] \end{aligned} \tag{IV.10}$$

Avec :

- $C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, une application constante par morceaux dont la valeur vaut respectivement $\left\{\frac{\kappa^-}{2}; \frac{\kappa^+ + \kappa^-}{2}\right\}$ suivant que $y \in \left\{\Gamma_{fi}; \Gamma_{dj}\right\}$

Ici, l'inconnue est par conséquent la valeur du potentiel F sur l'ensemble des frontières de domaine Γ_{fi} et des frontières de discontinuité Γ_{dj}.

Type n° 2

Pour le second cas, nous imposons $\alpha_i \neq 0$. Ainsi, la relation (IV.8) peut se mettre sous la forme :

$$F(x) = \frac{1}{\alpha_i}\left(\gamma_i - \beta_i \frac{\partial F_i(x)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}}\right) \tag{IV.11}$$

C'est en réinjectant cette expression dans la représentation intégrale (IV.7) que le second type d'équations intégrales de frontière est obtenu :

- Si $y \in \Gamma_{fi}$:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\kappa^- \beta_i}{2\alpha_i}\frac{\partial F(y)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}} - \sum_{i=1}^{N_f}\left[\int_{\Gamma_{fi}} \frac{\kappa^- \beta_i}{\alpha_i}\frac{\partial F(x)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}}\frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}} d\Gamma\right] \\
- \sum_{i=1}^{N_f}\left[\int_{\Gamma_{fi}} \kappa^- \frac{\partial F(x)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}}\,\mathrm{G}(x,y) d\Gamma\right] + \sum_{j=1}^{N_d}\left[\int_{\Gamma_{dj}} \left(\kappa^+ - \kappa^-\right) F(x)\frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{dj}}} d\Gamma\right] \\
= -\frac{\kappa^- \gamma_i}{2\alpha_i} - \sum_{i=1}^{N_f}\left[\int_{\Gamma_{fi}} \frac{\kappa^- \gamma_i}{\alpha_i}\frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}} d\Gamma\right] + \sum_{j=1}^{N_d}\left[\int_{\Gamma_{dj}} \mathrm{G}(x,y) Q_j(x) d\Gamma\right] \\
- \sum_{k=1}^{N_k}\left[\int_{\Omega_k} \mathrm{G}(x,y) S_k(x) d\Omega\right] \qquad \text{(IV.12)}
\end{aligned}
$$

- Si $y \in \Gamma_{dj}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\kappa^+ + \kappa^-}{2} F(y) - \sum_{i=1}^{N_f}\left[\int_{\Gamma_{fi}} \frac{\kappa^- \beta_i}{\alpha_i}\frac{\partial F(x)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}}\frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}} d\Gamma\right] - \sum_{i=1}^{N_f}\left[\int_{\Gamma_{fi}} \kappa^- \frac{\partial F(x)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}}\,\mathrm{G}(x,y) d\Gamma\right] \\
+ \sum_{j=1}^{N_d}\left[\int_{\Gamma_{dj}} \left(\kappa^+ - \kappa^-\right) F(x)\frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{dj}}} d\Gamma\right] \\
= -\sum_{i=1}^{N_f}\left[\int_{\Gamma_{fi}} \frac{\kappa^- \gamma_i}{\alpha_i}\frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}} d\Gamma\right] + \sum_{j=1}^{N_d}\left[\int_{\Gamma_{dj}} \mathrm{G}(x,y) Q_j(x) d\Gamma\right] - \sum_{k=1}^{N_k}\left[\int_{\Omega_k} \mathrm{G}(x,y) S_k(x) d\Omega\right] \qquad \text{(IV.13)}
\end{aligned}
$$

A présent, les inconnues sont d'une part la valeur de la dérivée normale du potentiel sur les frontières de domaine Γ_{fi} et d'autre part les valeurs prises par le potentiel F sur les frontières de discontinuité Γ_{dj}

IV.3.2 La méthode des moments

La méthode des moments est une méthode de résolution numérique de la classe des méthodes variationnelles. Elle consiste à trouver une solution au problème général suivant :

$$\mathcal{L}(f) = g \qquad \text{(IV.14)}$$

Avec :
- L est un opérateur linéaire
- f est la fonction inconnue solution de l'équation
- g est une fonction *source* connue

Cette solution est approchée après développement de la fonction f sur un ensemble fini et connu de *fonctions de base*. On cherche alors à déterminer f sous sa forme approchée :

$$f = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n \qquad \text{(IV.15)}$$

Ainsi, en utilisant la linéarité de l'opérateur $\mathcal{L}$, on obtient l'expression du résidu associé à la projection de la solution sur l'ensemble des fonctions de base :

$$R = g - \sum_{n=1}^{N} a_n \mathcal{L}(f_n) \qquad \text{(IV.16)}$$

On cherche alors à minimiser ce résidu en donnant une valeur nulle au produit scalaire de ce dernier sur un ensemble de fonctions *tests* w_m :

$$\forall\ m \in 1, 2, \ldots, N : \langle w_m, R \rangle = \int w_m R\ dx = 0$$

ce qui donne en remplaçant le résidu par son expression :

$$\forall\ m \in 1,2,\ldots,N : \langle w_m, R\rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle w_m, \sum_{n=1}^{N} a_n \mathcal{L}\left(f_n\right)\right\rangle = \langle w_n, g\rangle \tag{IV.17}$$

L'équation IV.17 peut alternativement s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \langle w_1, \mathcal{L}(f_1)\rangle & \langle w_1, \mathcal{L}(f_2)\rangle & \ldots & \langle w_1, \mathcal{L}(f_N)\rangle \\ \langle w_2, \mathcal{L}(f_1)\rangle & \langle w_2, \mathcal{L}(f_2)\rangle & \ldots & \langle w_2, \mathcal{L}(f_N)\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_N, \mathcal{L}(f_1)\rangle & \langle w_N, \mathcal{L}(f_2)\rangle & \ldots & \langle w_N, \mathcal{L}(f_N)\rangle \end{bmatrix}}_{[\ell]} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}}_{[\mathbf{a_n}]} = \underbrace{\begin{bmatrix} \langle w_1, g\rangle \\ \langle w_2, g\rangle \\ \vdots \\ \langle w_N, g\rangle \end{bmatrix}}_{[\mathbf{g_m}]} \tag{IV.18}$$

Si la matrice $[\ell]$ est inversible et en notant $\left[\tilde{f}\right] = [f_1\ f_2\ \ldots\ f_N]$, on obtient ainsi que la solution du problème est donnée par :

$$f = \left[\tilde{f}\right][\mathbf{a_n}] = \left[\tilde{f}\right][\ell]^{-1}[\mathbf{g_m}] \tag{IV.19}$$

Références : [58, 68]

IV.3.3 Les éléments de frontière constants

Afin d'établir le schéma numérique des éléments de frontière constants, nous nous intéressons au domaine $\Omega = \bigcup_{i=1}^{3} \Omega_i$ présenté en figure IV.5.

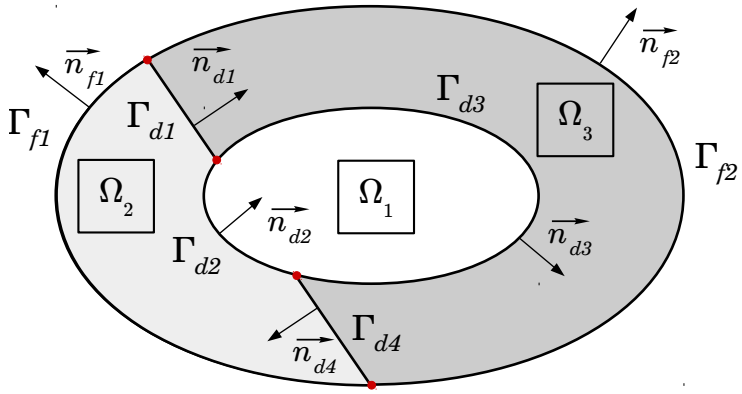


Figure IV.5 – Exemple de domaines homogènes par morceaux $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Ce schéma se distingue par le choix particulièrement *simple* et *intuitif* des fonctions de base et de test.

Choix des fonctions de base

La méthode des éléments de frontière constants est un cas d'application particulier de la méthode des moments consistant à choisir pour fonction de base des fonctions rectangles de largeur $\Delta\Gamma_n$ (Fig. IV.6) :

$$\forall n \in \{1,2,\ldots,N\} :\ f_n = \Pi_{\Delta\Gamma_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Delta\Gamma_n \\ 0 & \text{si } x \notin \Delta\Gamma_n \end{cases} \tag{IV.20}$$

Afin de pouvoir s'adapter aux géométries les plus complexes, les sous-domaines $\Delta\Gamma_n$ sont définis par des *segments* comme illustré en Fig. IV.7. Ceux-ci permettent alors de reproduire exactement la géométrie initiale lorsque le nombre de fonctions de base tend vers l'infini. Une conséquence directe de l'utilisation de fonctions de base rectangles est que la solution recherchée est alors identifiable aux constantes a_n issues de la projection sur l'ensemble des fonctions de base (équation IV.15). La forme *approchée* du potentiel est donc *constante* sur chaque élément de frontière.
Référence : [68]

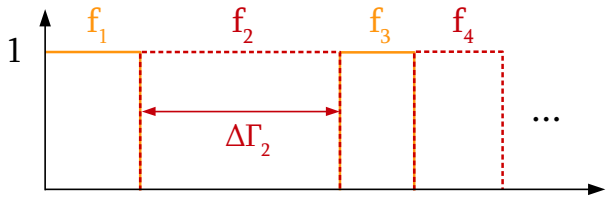


Figure IV.6 – Fonctions de base de type « pulse »

Choix des fonctions de test

Les fonctions *tests* peuvent être choisies comme des distributions de Dirac $\delta(x, y)$ centrées en chacun des points P_j milieux des segments $\Delta\Gamma_j$. Dans ce cas, la méthode est aussi connue sous le nom de *collocation par point*.
Cette méthode assure que le résidu de la relation (IV.16) est effectivement nul en P_j mais pas nécessairement sur le reste des points appartenant au sous domaine considéré, cette dernière condition étant assurée lorsque le nombre de points de collocation tend vers l'infini.
Référence : [68]

IV.3.4 Développement des schémas numériques

Chacune des frontières Γ_{dj} et Γ_{fi} apparaissant dans l'expression (IV.7) de la représentation intégrale de frontière sont respectivement discrétisées en $N_m(j)$ et $N_\ell(i)$ segments comme illustré en Fig. IV.7.

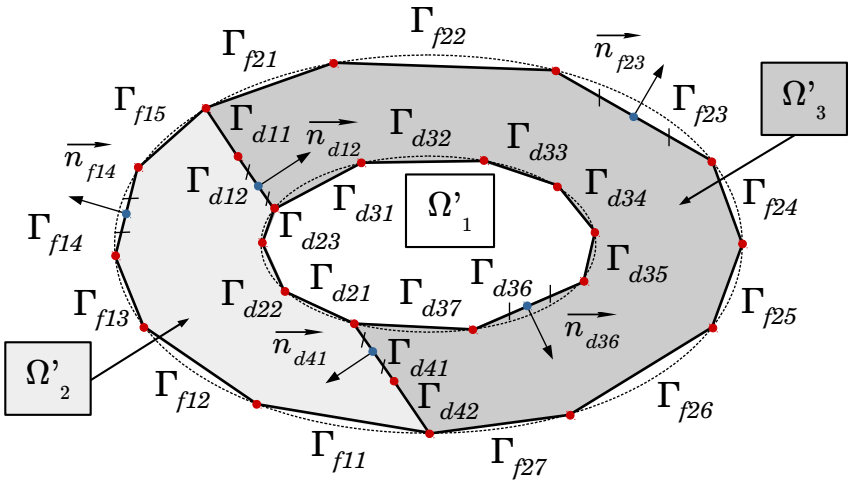


Figure IV.7 – Exemple de discrétisation surfacique et localisation des points de collocation

On choisit alors pour fonctions de base, les fonctions rectangles de type « pulse » atteignant leur valeur unitaire une unique fois sur l'un des segments de discrétisation. Ainsi, le nombre de fonctions de base N dépend du nombre de segments nécessaires à la discrétisation des contours, soit égal à :

$$N = \sum_{i=1}^{N_f} N_\ell(i) + \sum_{j=1}^{N_d} N_m(j) \tag{IV.21}$$

Les fonctions de tests consistent à rendre nul le résidu de la solution approchée en chacun des points P milieux des segments de discrétisation grâce à l'application de N distributions de Dirac. Dans la suite des développements, nous noterons P_{fil} et P_{djm} les coordonnées des points milieux des segments respectifs $\Gamma_{fi\ell}$ et Γ_{djm}
Ce schéma numérique est appliqué aux deux types d'équations intégrales correspondant respectivement à l'application des conditions aux limites (IV.9) et (IV.11) dans la relation (IV.7).

Type n° 1

La connaissance des flux de potentiel aux limites du domaine permet de calculer le potentiel en tout point de la frontière. On a donc, comme évoqué précédemment, une unique inconnue à savoir le

potentiel en chacun des contours de *frontière* et de *discontinuité*. En respectant les notations introduites dans la section IV.3.2, posons :

$$\begin{cases} w = \delta(x, P_{fi\ell}) + \delta(x, P_{djm}) \\ F = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n = \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{\ell=1}^{N_\ell(i)} F(P_{fi\ell}) \Pi_{\Gamma_{fi\ell}} + \sum_{j=1}^{N_d} \sum_{m=1}^{N_m(j)} F(P_{djm}) \Pi_{\Gamma_{djm}} \\ \mathcal{L} = \left(C(y)\mathbf{I_d} + \sum_{i=1}^{N_f} \int_{\Gamma_{fi}} \kappa^- \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i} \mathrm{G}(x,y) + \frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}} \right) d\Gamma + \sum_{j=1}^{N_d} \int_{\Gamma_{dj}} (\kappa^+ - \kappa^-) \frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{dj}}} d\Gamma \right) \\ g = \left(\sum_{i=1}^{N_f} \int_{\Gamma_{fi}} \frac{\kappa^- \gamma_i}{\beta_i} \mathrm{G}(x,y) d\Gamma + \sum_{j=1}^{N_d} \int_{\Gamma_{dj}} \mathrm{G}(x,y) Q_j(x) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_k} \int_{\Omega_k} \mathrm{G}(x,y) S_k(x) d\Omega \right) \end{cases}$$

L'application directe des principes de la méthode des moments à l'expression de l'équation intégrale de frontière (IV.7), conduit alors au système de N équations suivant :

$$\begin{aligned} & C(y)F(y) + \sum_{i=1}^{N_f} \left[\sum_{\ell=1}^{N_\ell(i)} F(P_{fi\ell}) \int_{\Gamma_{fi\ell}} \kappa^- \frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{fi\ell}}} d\Gamma \right] + \sum_{i=1}^{N_f} \left[\sum_{\ell=1}^{N_\ell(i)} F(P_{fi\ell}) \int_{\Gamma_{fi\ell}} \frac{\kappa^- \alpha_i}{\beta_i} \mathrm{G}(x,y) d\Gamma \right] \\ & \qquad + \sum_{j=1}^{N_d} \left[\sum_{m=1}^{N_m(j)} F(P_{djm}) \int_{\Gamma_{dj}} (\kappa^+ - \kappa^-) \frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{dj}}} d\Gamma \right] \\ & = \sum_{i=1}^{N_f} \left[\sum_{\ell=1}^{N_\ell(i)} \int_{\Gamma_{fi\ell}} \frac{\kappa^- \gamma_i}{\beta_i} \mathrm{G}(x,y) d\Gamma \right] + \sum_{j=1}^{N_d} \left[\sum_{m=1}^{N_m(j)} \int_{\Gamma_{dj}} \mathrm{G}(x,y) Q_{jm}(x) d\Gamma \right] - \sum_{k=1}^{N_k} \left[\int_{\Omega_k} \mathrm{G}(x,y) S_k(x) d\Omega \right] \end{aligned} \tag{IV.22}$$

Avec :

- $\forall\ y \in \left\{ \bigcup_{i=1}^{N_f} \bigcup_{\ell=1}^{N_\ell(i)} \Gamma_{fi\ell} \cup \bigcup_{j=1}^{N_d} \bigcup_{m=1}^{N_m(j)} \Gamma_{djm} \right\}$: les coordonnées des points milieux des segments de discrétisation
- $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, une application constante par morceaux dont la valeur vaut respectivement $\left\{ \frac{\kappa^-}{2}; \frac{\kappa^+ + \kappa^-}{2} \right\}$ suivant que $y \in \{\Gamma_{fi}; \Gamma_{dj}\}$
- $N_\ell(i)$: Le nombre de segments discrétisant le contour Γ_{fi}
- $N_m(j)$: Le nombre de segments discrétisant le contour Γ_{dj}

Type n° 2

La connaissance du potentiel aux limites du domaine permet de calculer, d'une part, la densité de flux $\varphi = \frac{\partial F(x)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}}$ à la surface des contours de frontières et, d'autre part, la valeur prise par le potentiel à la surface des contours de discontinuité $F_d = F(x)$. Il existe donc, comme évoqué plus haut, deux types d'inconnues. En respectant les notations introduites dans la section IV.3.2, on peut donc réécrire sous forme compacte :

$$\mathcal{L}(f) = g \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ F_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \tag{IV.23}$$

Avec :

$$\begin{cases} w = \delta(x, P_{fi\ell}) + \delta(x, P_{djm}) \\ \varphi = \dfrac{\partial F(x)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n f_n = \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{\ell=1}^{N_\ell(i)} \varphi(P_{fi\ell}) \Pi_{\Gamma_{fi\ell}} \quad \text{et} \quad F_d = \sum_{n=1}^{N} a'_n f_n = \sum_{j=1}^{N_d} \sum_{m=1}^{N_m(j)} F_d(P_{djm}) \Pi_{\Gamma_{djm}} \\ \mathcal{L}_{21} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N_f} \int_{\Gamma_{fi}} \kappa^- \left(\mathrm{G}(x,y) + \frac{\beta_i}{\alpha_i} \frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}} \right) d\Gamma \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{11} = \mathcal{L}_{21} - \frac{\kappa^- \beta_i}{2\alpha_i} \mathbf{I_d} \\ \mathcal{L}_{12} = \displaystyle\sum_{j=1}^{N_d} \int_{\Gamma_{dj}} (\kappa^+ - \kappa^-) \frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{dj}}} d\Gamma \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{22} = \mathcal{L}_{12} + \frac{\kappa^+ + \kappa^-}{2} \mathbf{I_d} \\ g_2 = -\displaystyle\sum_{i=1}^{N_f} \left[\int_{\Gamma_{fi}} \frac{\kappa^- \gamma_i}{\alpha_i} \frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}} d\Gamma \right] + \sum_{j=1}^{N_d} \left[\int_{\Gamma_{dj}} \mathrm{G}(x,y) Q_j(x) d\Gamma \right] - \sum_{k=1}^{N_k} \left[\int_{\Omega_k} \mathrm{G}(x,y) S_k(x) d\Omega \right] \\ g_1 = g_2 - \dfrac{\kappa^- \gamma_i}{2\alpha_i} \end{cases}$$

Ce qui correspond au système discrétisé suivant :

- Si $y \in \Gamma_{fi}$:

$$\begin{aligned} &-\frac{\kappa^- \beta_i}{2\alpha_i} \varphi(y) - \sum_{i=1}^{N_f} \left[\sum_{\ell=1}^{N_\ell(i)} \varphi(P_{fi\ell}) \int_{\Gamma_{fi\ell}} \kappa^- \left(\mathrm{G}(x,y) + \frac{\beta_i}{\alpha_i} \frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{fi\ell}}} \right) d\Gamma \right] \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{N_d} \left[\sum_{m=1}^{N_m(j)} F_d(P_{djm}) \int_{\Gamma_{djm}} (\kappa^+ - \kappa^-) \frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{djm}}} d\Gamma \right] \\ &= -\frac{\kappa^- \gamma_i}{2\alpha_i} - \sum_{i=1}^{N_f} \left[\sum_{\ell=1}^{N_\ell(i)} \int_{\Gamma_{fi\ell}} \frac{\kappa^- \gamma_i}{\alpha_i} \frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{fi}}} d\Gamma \right] + \sum_{j=1}^{N_d} \left[\sum_{m=1}^{N_m(j)} \int_{\Gamma_{djm}} \mathrm{G}(x,y) Q_j(x) d\Gamma \right] \\ &\qquad - \sum_{k=1}^{N_k} \left[\int_{\Omega_k} \mathrm{G}(x,y) S_k(x) d\Omega \right] \end{aligned} \tag{IV.24}$$

- Si $y \in \Gamma_{dj}$:

$$\begin{aligned} &\frac{\kappa^+ + \kappa^-}{2} F_d(y) - \sum_{i=1}^{N_f} \left[\sum_{\ell=1}^{N_\ell(i)} \varphi(P_{fi\ell}) \int_{\Gamma_{fi\ell}} \kappa^- \left(\mathrm{G}(x,y) + \frac{\beta_i}{\alpha_i} \frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{fi\ell}}} \right) d\Gamma \right] \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{N_d} \left[\sum_{m=1}^{N_m(j)} F_d(P_{djm}) \int_{\Gamma_{djm}} (\kappa^+ - \kappa^-) \frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{djm}}} d\Gamma \right] \\ &= -\sum_{i=1}^{N_f} \left[\sum_{\ell=1}^{N_\ell(i)} \int_{\Gamma_{fi}} \frac{\kappa^- \gamma_i}{\alpha_i} \frac{\partial \mathrm{G}(x,y)}{\partial \overrightarrow{n_{fi\ell}}} d\Gamma \right] + \sum_{j=1}^{N_d} \left[\sum_{m=1}^{N_m(j)} \int_{\Gamma_{djm}} \mathrm{G}(x,y) Q_j(x) d\Gamma \right] \\ &\qquad - \sum_{k=1}^{N_k} \left[\int_{\Omega_k} \mathrm{G}(x,y) S_k(x) d\Omega \right] \end{aligned} \tag{IV.25}$$

IV.3.5 Calcul des éléments d'interaction

Les deux types d'équations intégrales admettent une représentation matricielle du type $AX = B$. Ces systèmes matriciels sont donnés en Annexe B aux pages 138 et 139.

La matrice A est appelée matrice *interaction* car elle quantifie les contributions de chacune des fonctions de base au potentiel sur les frontières de contrastes et de discontinuités. La matrice B est quant à elle appelée matrice *source*.

Les éléments qui composent A et B sont appelés *éléments d'interaction* et sont définis par :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_X(y) = \displaystyle\int_{\Gamma_X} \mathrm{G}(x,y)d\Gamma & \text{(IV.26a)} \\ \mathcal{E}_X(y) = \displaystyle\int_{\Gamma_X} \frac{\partial\,\mathrm{G}(x,y)}{\partial\overrightarrow{n_X}}d\Gamma & \text{(IV.26b)} \\ \mathcal{Q}_X(y) = \displaystyle\int_{\Gamma_X} \mathrm{G}(x,y)Q(x)d\Gamma & \text{(IV.26c)} \\ \mathcal{S}_k(y) = \displaystyle\int_{\Omega_k} S_k(x)\,\mathrm{G}(x,y)d\Omega & \text{(IV.26d)} \end{cases}$$

Dans le cas des problèmes de potentiel résolus par la méthode des éléments de frontières constants, les divers éléments $\mathcal{D}_X(y)$ et $\mathcal{E}_X(y)$ peuvent être calculés analytiquement. En général, il est nécessaire d'intégrer numériquement ces éléments. On s'intéresse dans la suite à la méthode *classique* d'intégration par quadrature de Gauss.

Outil n° 1 : Méthode d'intégration numérique par quadrature de Gauss-Legendre en une dimension

La méthode de quadrature de Gauss fait appel aux polynômes de Legendre. Concrètement, elle consiste à approcher les intégrales non singulières de la manière suivante :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \omega_i f(x_i) + E_N \tag{IV.27}$$

Avec :

- $x_i, \quad i \in \{1;\ldots;N\}$: la i-ème racine du polynôme de Legendre d'ordre N, noté P_N
- $\omega_i = \dfrac{2}{\left(1-x_i^2\right)P'_N(x_i)^2}, \quad i \in \{1;\ldots;N\}$: le i-ème coefficient de pondération
- $\lim\limits_{N\to\infty} E_N = 0$, la fonction erreur à l'ordre N

Pour une quadrature à 8 points, les valeurs numériques suivantes sont applicables :

$$\begin{matrix} x_i & \omega_i \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} -0.9602898564975363 & 0.1012285362903764 \\ -0.7966664774136267 & 0.2223810344533743 \\ -0.5255324099163290 & 0.3137066458778874 \\ -0.1834346424956498 & 0.3626837833783619 \\ 0.1834346424956498 & 0.3626837833783619 \\ 0.5255324099163290 & 0.3137066458778874 \\ 0.7966664774136267 & 0.2223810344533743 \\ 0.9602898564975363 & 0.1012285362903764 \end{bmatrix} \tag{IV.28}$$

Outil n° 2 : Méthode d'intégration numérique par quadrature de Gauss en deux dimensions sur un triangle de référence

On cherche à développer une méthode de quadrature de Gauss *symétrique* pour le triangle standard décrit par la figure IV.8 :

$$\iint_{T_{st}} f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_g} \omega_i f(\xi_i,\eta_i) + E_N \tag{IV.29}$$

Dans ce cas, la détermination des coefficients de pondération ω_i et des points d'intégration (ξ_i,η_i) n'est pas aussi triviale que dans le cas d'une intégration à une dimension. Pour obtenir ces valeurs, on

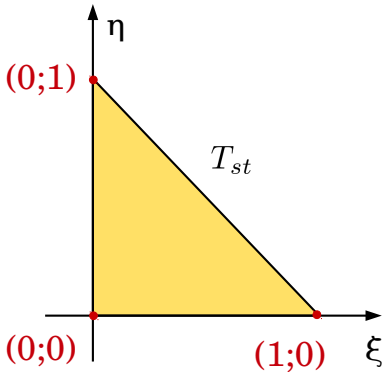


Figure IV.8 – Intégration numérique sur un triangle arbitraire

connait néanmoins l'identité remarquable suivante :

$$\iint_{T_{st}} \xi^i \eta^j d\xi d\eta = \frac{i!j!}{(i+j+2)!} \tag{IV.30}$$

L'ordre d'intégration N correspond au degré du polynôme pour lequel la quadrature de Gauss donnera une valeur exacte. Pour un ordre arbitraire N, les valeurs ω_i et (ξ_i, η_i) sont donc les solutions du système *linéaire* suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{N_g} \omega_k = \dfrac{0!0!}{(0+0+2)!} \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{N_g} \omega_k \xi_k = \dfrac{1!0!}{(1+0+2)!} \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{N_g} \omega_k \eta_k = \dfrac{0!1!}{(0+1+2)!} \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{N_g} \omega_k \xi_k \eta_k = \dfrac{1!1!}{(1+1+2)!} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{N_g} \omega_k \xi_k^i \eta_k^j = \dfrac{i!j!}{(i+j+2)!} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{N_g} \omega_k \xi_k^N \eta_k^N = \dfrac{N!N!}{(N+N+2)!} \end{cases} \tag{IV.31}$$

En fonction du nombre de points d'intégration N_g considérés, le système peut ne pas avoir de solution unique. Pour une quadrature d'ordre 8 et un nombre de points $N_g = 16$, on a par exemple les valeurs

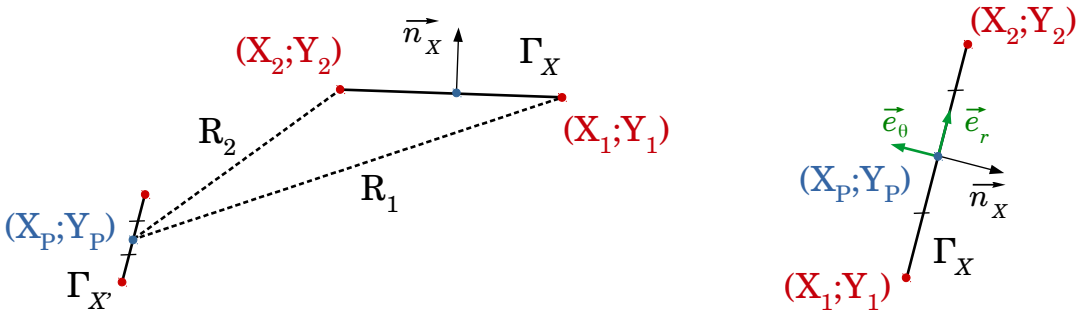
suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \xi_i & \eta_i & \omega_i \\ \left[\begin{array}{ccc} 0.33333333333333 & 0.33333333333333 & 0.14431560767779 \\ 0.45929258829272 & 0.45929258829272 & 0.09509163426728 \\ 0.45929258829272 & 0.08141482341455 & 0.09509163426728 \\ 0.08141482341455 & 0.45929258829272 & 0.09509163426728 \\ 0.17056930775176 & 0.17056930775176 & 0.10321737053472 \\ 0.17056930775176 & 0.65886138449648 & 0.10321737053472 \\ 0.65886138449648 & 0.17056930775176 & 0.10321737053472 \\ 0.05054722831703 & 0.05054722831703 & 0.03245849762320 \\ 0.05054722831703 & 0.89890554336594 & 0.03245849762320 \\ 0.89890554336594 & 0.05054722831703 & 0.03245849762320 \\ 0.26311282963464 & 0.72849239295540 & 0.02723031417443 \\ 0.72849239295540 & 0.00839477740996 & 0.02723031417443 \\ 0.00839477740996 & 0.26311282963464 & 0.02723031417443 \\ 0.72849239295540 & 0.26311282963464 & 0.02723031417443 \\ 0.26311282963464 & 0.00839477740996 & 0.02723031417443 \\ 0.00839477740996 & 0.72849239295540 & 0.02723031417443 \end{array}\right] \end{array} \tag{IV.32}$$

Référence : [42]

Calcul des éléments $\mathcal{D}_X(y)$

L'intégration de ce type d'éléments d'interaction sur les segments discrétisés s'appuie sur les figures IV.9(a) et IV.9(b)



(a) Intégration par rapport à un point d'observation extérieur à Γ_X

(b) Intégration sur Γ_X

Figure IV.9 – Calcul des éléments $\mathcal{D}_X(y)$ et $\mathcal{E}_X(y)$ de la matrice interaction

A partir des notations introduites sur les figures IV.9(a) et IV.9(b), nous poserons :

$$\begin{cases} A_X = \dfrac{X_2 - X_1}{2} \\ A_Y = \dfrac{Y_2 - Y_1}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B_X = \dfrac{X_2 + X_1}{2} \\ B_Y = \dfrac{Y_2 + Y_1}{2} \end{cases} \tag{IV.33}$$

Deux cas se présentent alors, suivant le positionnement du point d'observation y.

- Si $y \notin \Gamma_X$, c'est-à-dire si le point d'observation n'est pas contenu dans le segment à intégrer (Figure IV.9(a)), l'intégration numérique mène à :

$$\mathcal{D}_X(y) \approx -\frac{\sqrt{A_X^2 + A_Y^2}}{8\pi} \sum_{i=1}^{N} \left[\omega_i \ln\left(\left(X_P - A_X x_i + B_X\right)^2 + \left(Y_P - A_Y x_i + B_Y\right)^2\right)\right] \tag{IV.34}$$

- Si $y \in \Gamma_X$ (cf. figure IV.9(b)), c'est-à-dire si le point d'observation est contenu dans le segment à intégrer. Dans ce cas, l'intégrale doit être calculée analytiquement car il y a une singularité. On doit donc faire appel au théorème des *valeurs principales* de Cauchy. La valeur de l'élément d'interaction est donnée par :

$$\mathcal{D}_X(y) = \frac{\sqrt{A_X^2 + A_Y^2}}{2\pi}\left[1 - \ln\left(\sqrt{A_X^2 + A_Y^2}\right)\right] \tag{IV.35}$$

Référence : [26]

Calcul des éléments $\mathcal{E}_X(y)$

Là encore, deux cas se présentent en fonction de la position du point d'observation y.

- Si $y \notin \Gamma_X$ (cf. figure IV.9(a)), on trouve les expressions suivantes par l'intégration de la méthode de Gauss-Legendre :

$$\mathcal{E}_X(y) \approx \frac{K_1 K_2 \sqrt{A_X^2 + A_Y^2}}{2\pi} \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\omega_i}{\left(X_P - A_X x_i + B_X\right)^2 + \left(Y_P - A_Y x_i + B_Y\right)^2}\right] \tag{IV.36}$$

Avec :

$$K_1 = \begin{cases} -1, & \text{si } (X_1 - X_P)(Y_2 - Y_P) - (X_2 - X_P)(Y_1 - Y_P) > 0 \\ 1, & \text{si } (X_1 - X_P)(Y_2 - Y_P) - (X_2 - X_P)(Y_1 - Y_P) \leqslant 0 \end{cases}$$

et

$$K_2 = \begin{cases} |X_P - X_1| & \text{si } X_2 = X_1 \\ \left|\dfrac{\left(\dfrac{A_Y}{A_X}\right)(X_P - X_1) + Y_P - Y_1}{\sqrt{\left(\dfrac{A_Y}{A_X}\right)^2 + 1}}\right| & \text{si } X_2 \neq X_1 \end{cases}$$

- Si $y \in \Gamma_X$ (cf. figure IV.9(a)), il vient naturellement pour des raisons évidentes d'orthogonalité :

$$\vec{\nabla}\,\mathrm{G}(x,y) \cdot \vec{n} = 0 \implies \mathcal{E}_X(y) = 0 \tag{IV.37}$$

Référence : [26]

Calcul des éléments $\mathcal{S}_k(y)$

Classiquement, il est possible d'approcher plus ou moins finement n'importe quelle surface à l'aide d'un maillage triangulaire comme cela est illustré en figure IV.10.

Lorsque les termes sources ne sont pas nuls sur l'un des domaines Ω_k, les intégrales surfaciques sont ainsi les sommes des intégrales sur chacun des triangles du maillage. En notant N_t le nombre de triangles nécessaires à la discrétisation du domaine Ω_k et $\mathcal{S}_{kt}(y)$ le résultat de l'intégration sur le triangle d'indice $t \in \{1; \ldots; N_t\}$, il vient :

$$\mathcal{S}_k(y) = \int_{\Omega_k} \mathrm{G}(x,y) S_k(y) d\Omega = \sum_{t=1}^{N_t} \int_{\Omega_{kt}} \mathrm{G}(x,y) S_k(y) d\Omega = \sum_{t=1}^{N_t} \mathcal{S}_{kt}(y) \tag{IV.38}$$

En notant respectivement $y\begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \end{pmatrix}$ et $x\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ les coordonnées du point d'observation P et d'intégration,

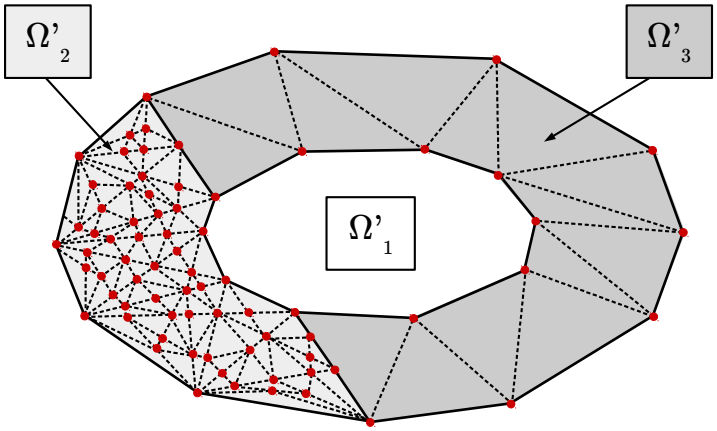


Figure IV.10 – Exemple de maillage triangulaire pour les domaines possédant une contribution volumique non-nulle

on pose alors :

$$f(x) = f(X,Y) = \underbrace{-\frac{1}{2\pi}\ln\left(\sqrt{(X-X_P)^2+(Y-Y_P)^2}\right)}_{\mathrm{G}(x,y)}\mathcal{S}_k(X,Y) \tag{IV.39}$$

Il est nécessaire de transformer chacun des triangles de formes arbitraires en triangle unitaire de référence pour lesquels les formules d'intégration numériques par quadrature de Gauss-Legendre s'appliquent (cf figure IV.11). Il existe en effet une transformation linéaire de l'espace permettant de passer d'un système de coordonnées lié au triangle de base à celui du triangle de référence (*conformal mapping*). Sous ces conditions, il vient :

$$\mathcal{S}_{kt}(y) = \iint_{\Omega_k t} f(X,Y)dXdY = \iint_{T_{st}} f\left(P(\xi,\eta),Q(\xi,\eta)\right)|J(\xi,\eta)|\,d\xi d\eta \tag{IV.40}$$

Avec :

- $x = P(\xi,\eta) = (1-\xi-\eta)\,x_1 + \xi x_2 + \eta x_3$
- $y = Q(\xi,\eta) = (1-\xi-\eta)\,y_1 + \xi y_2 + \eta y_3$
- $J(\xi,\eta) = \mathbf{det}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{pmatrix} = X_1(Y_2-Y_3)+X_2(Y_3-Y_1)+X_3(Y_1-Y_2)$: le *Jacobien* associé à la transformation.

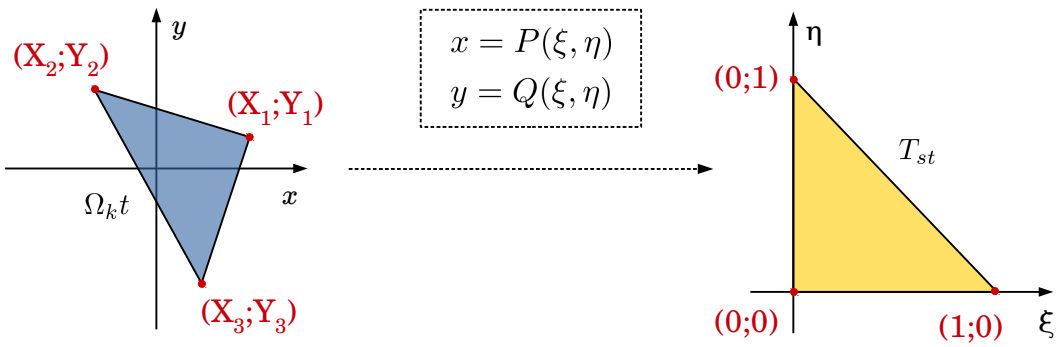


Figure IV.11 – Intégration numérique sur un triangle arbitraire

Ainsi, la formule d'intégration numérique pour un triangle arbitraire est donnée par :

$$\mathcal{S}_{kt}(y) \approx \frac{|X_1(Y_2-Y_3)+X_2(Y_3-Y_1)+X_3(Y_1-Y_2)|}{2}\sum_{i=i}^{N_g}\omega_i f\left(P(\xi_i,\eta_i),Q(\xi_i,\eta_i)\right) \tag{IV.41}$$

Référence : [42]

IV.4 Application aux réseaux de lignes de transmission

IV.4.1 Stratégie de couplage

Le tableau IV.2 complète celui introduit en début de chapitre à la page 70 :

Expression du potentiel arbitraire (IV.4) – (IV.6)		
	Problème électrostatique équivalent	**Équation stationnaire de la chaleur**
κ_i	Permittivité électrique $\varepsilon_i = \varepsilon_i' - j\varepsilon_i''$	Conductivité thermique λ_i
F	Potentiel électrostatique Φ	Température T
S_i	Densité de charges libres 0	Source de chaleur $-q_{gen}$
Q_i	Conditions de continuité 0	Résistance thermique de contact 0
$(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$	Condition aux limites de type Dirichlet $(\alpha_i = 1;\beta_i = 0;\gamma_i = \phi_i)$	Condition aux limites de type Robin $(\alpha_i = h;\beta_i = 1;\gamma_i = -hT_\infty)$
Inconnue(s)	Densité surfacique de charges σ_i Potentiel sur les diélectriques ϕ_d	Température T_i
Résolution	Type équation intégrale 2	Type équation intégrale 1

Table IV.2 – Équivalence entre les problèmes électrostatiques et thermiques

L'analogie unissant les problèmes électrostatiques et de conduction stationnaire de la chaleur nous permet d'élaborer la stratégie de couplage présentée en Figure IV.14. Ce processus de résolution couplée se compose des étapes suivantes :

1) Définition du réseau topologique *général* : Le réseau topologique est établi suivant des critères *électromagnétiques* mais aussi *thermiques*, puisque la représentation topologique se fonde sur l'analyse des conditions d'installation des harnais. Ainsi, chaque groupe de câbles ayant des caractéristiques environnementales communes (plan de masse de référence, zones aéronef, distance entre harnais) sont placés au sein d'un même *tube*. Les *jonctions* du réseau, connectant les différents tubes et permettant la continuité électrique des signaux, sont représentées par des nœuds dans l'arbre topologique.
Comme présenté au chapitre II, les critères environnementaux définissant le réseau topologique se sont jusqu'ici basés sur des considérations exclusivement électromagnétiques. Dans une démarche de résolution couplée, cette classification topologique doit également intégrer les paramètres environnementaux thermiques ayant une influence sur les transferts de chaleur au niveau du harnais tels que la *température*, la *pression* et l'*humidité* ambiante.
Ces critères de classification *thermique* et *électromagnétique* peuvent conduire à des représentations topologiques légèrement différentes comme le montre le schéma de la Figure IV.12. Dans cet exemple, un toron de câbles traverse deux *milieux thermiques* distincts alors que d'un point de vue électromagnétique, sa configuration reste inchangée. Néanmoins, les aspects environnementaux thermiques et électromagnétiques étant découplés, on montre que leurs représentations topologiques peuvent être

vues comme deux raffinements d'un même graphe, celui-la plus général.

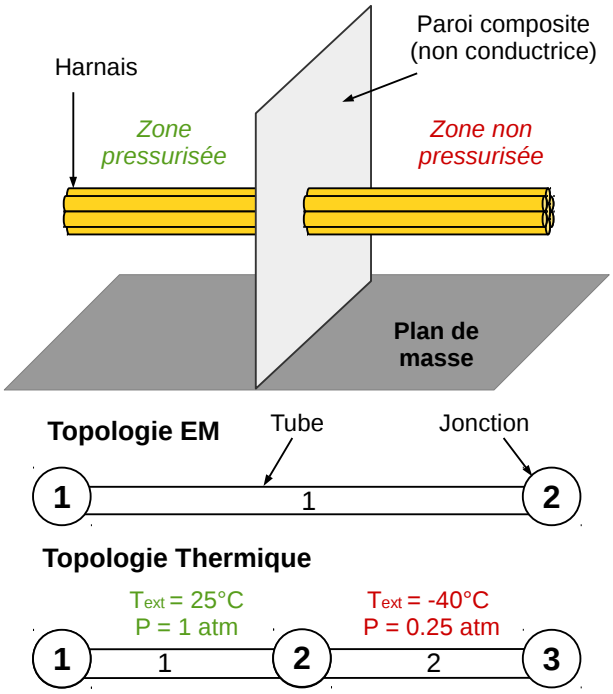


Figure IV.12 – Différence entre les représentations topologiques EM et thermiques

2) Création des *cross-section* aléatoires : Les caractéristiques géométriques liées aux tubes permettent de définir une coupe transverse, ou *cross-section* pour chacune des branches définies (Figure IV.13). Cette étape est assurée grâce à l'outil de génération aléatoire *ALEACAB* développé dans les travaux de doctorat de Charles Jullien [86].

3) Discrétisation : Dans un premier temps, les contours de toutes les coupes transverses ou *cross-section* sont approchées par des segments à la manière de la Figure IV.7. Dans un second temps, les inconnues sont développées sur une série de fonctions de base et recherchées sur les points de collocation établis sur ces frontières conformément aux principes de la Méthode des Moments (MoM).

4) Calculs des éléments d'interaction : C'est à cette étape que tous les termes liés à la solution fondamentale du Laplacien (encore appelée fonction de Green G) sont calculés. Bien que les systèmes matriciels à résoudre soient différents (équations intégrales de type 1 et 2), les éléments $\mathcal{D}_X(y)$, $\mathcal{E}_X(y)$, $\mathcal{Q}_X(y)$ et $\mathcal{S}_X(y)$ qui composent les matrices *interactions* et *sources* sont **communs** aux calculs *thermiques* et *électrostatiques* (comme le montrent les systèmes matriciels de l'annexe B en pages 138 et 139).
Cette méthode de construction des systèmes matriciels constitue l'avantage de la méthode développée dans ces travaux et justifie ici l'emploi de la Méthode des Moments pour une résolution optimale du problème couplé CEM-thermique.
En effet, le calcul des éléments d'interaction est l'étape requérant le plus long temps de calcul et occupant le plus de place mémoire. Or, ces derniers ne sont fonctions *que* de la géométrie du problème, puisque la solution fondamentale ne dépend elle-même que de la *distance* entre les points de collocation. *La maîtrise et l'application de cette propriété à la résolution couplée thermique-CEM constitue l'originalité de ces travaux de doctorat.*

5) Construction des systèmes matriciels et séparation des problèmes thermiques et EM : D'un point de vue physique, les phénomènes thermiques et électromagnétiques se distinguent par l'application de coefficients (cf. Table IV.2) et de conditions aux limites spécifiques à chacune des deux physiques. Les systèmes matriciels correspondant aux équations intégrales de type 1 (problème élec-

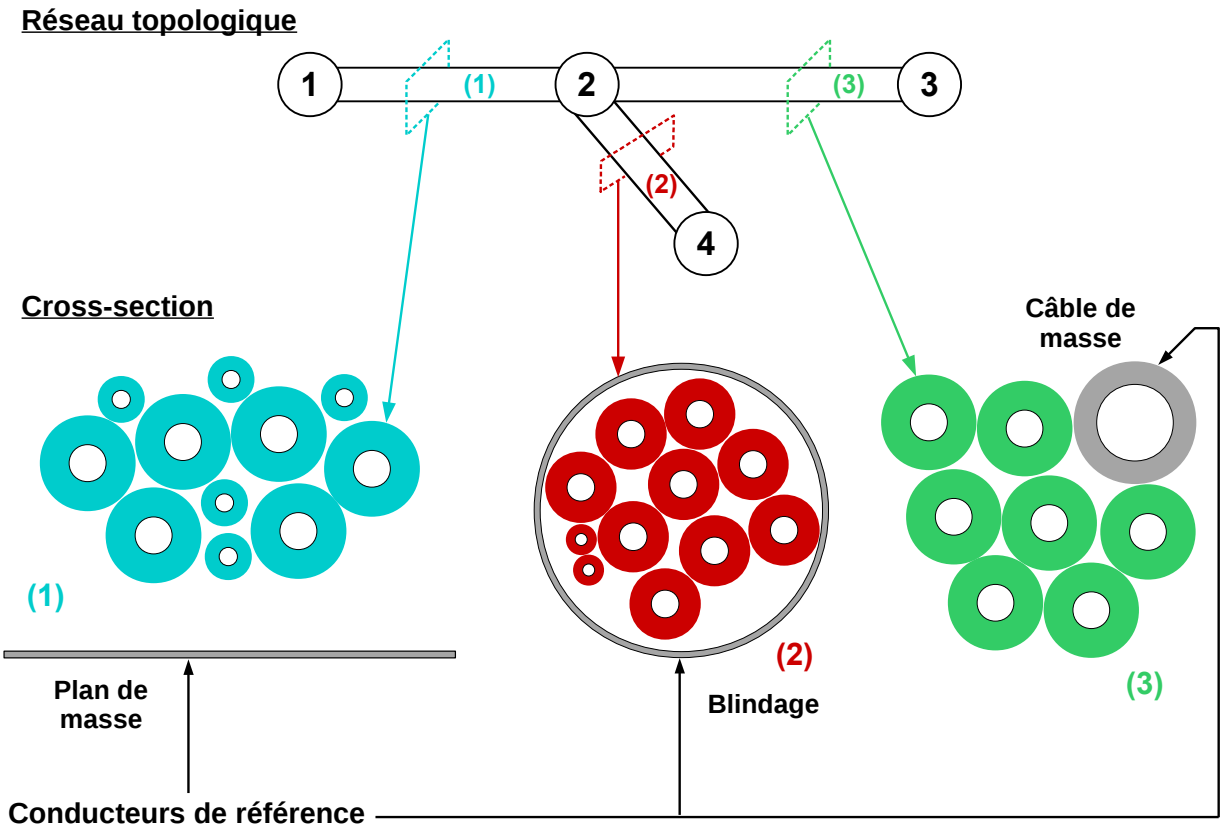


Figure IV.13 – Réseau topologique arbitraire et géométrie transverse de chacun des tubes

trostatique) et de type 2 (problème thermique) sont alors formés à partir d'une combinaison linéaire des éléments d'interaction pondérés par les valeurs physiques s'y rapportant. Ainsi, cette étape mène à la définition et au stockage de matrices *interactions* denses, de taille $n \times n$ où n représente le nombre total de points de collocation et de matrices *sources* de taille $n \times 1$.

6) Calcul de la température : Le calcul thermique nécessite de traiter les non-linéarités introduites par les conditions aux limites de domaines. En effet, comme le montre la relation (III.23) introduite au III, les corrélations applicables au coefficient d'échange thermique dépendent fortement de la température. Ainsi, le terme source devient non linéaire et nécessite la mise en place d'un solveur capable de gérer cette difficulté. A ce stade du processus, le résultat obtenu est une distribution *initiale* de température uniquement fonction des données d'entrées et ne tenant donc pas compte des échauffements créés par les courants de couplages qui seront injectés ultérieurement.

7) Détermination des paramètres RLCG (p.u.l) de la ligne : La poursuite des calculs implique la détermination des paramètres électriques primaires R, L, C, et G auxquels il est alors possible d'appliquer une correction introduite par la précédente estimation de température.

Sans rentrer dans le détail des calculs qui seront présentés dans la section suivante, la détermination de la matrice *inductance* se fait sur la base d'une matrice *capacité* intermédiaire calculée par le retrait de l'ensemble des diélectriques de la cross-section considérée. Les matrices *capacité* et *conductance* se calculent quant à elles à partir de la cross-section complète. Il faut donc résoudre **deux** fois l'équation intégrale pour calculer les matrices L,C et G. Puisque la matrice *résistance* est une propriété intrinsèque des conducteurs, elle ne peut être donnée par la résolution du problème électrostatique. Elle est donc formée *a postériori* à partir des valeurs de conductivité des câblages tenant compte de la correction thermique à apporter à partir de la première estimation de température.

8) Résolution de l'équation BLT : Les paramètres primaires sont réinjectés dans l'équation BLT du réseau topologique. Une fois résolue grâce au code de calcul CRIPTE, cette dernière donne accès à la

tension et au courant en chaque point de la ligne.

9) Actualisation des courants efficaces : Les tensions et courants calculés par CRIPTE sont moyennés et exprimés en termes *efficaces*. Ils servent alors de données d'entrée à une nouvelle analyse thermique. Le processus est ainsi répété à partir de l'étape **6)** jusqu'à la satisfaction d'un critère de convergence fixé.
On note que la méthode développée tire son avantage du fait que les calculs thermiques et électrostatiques successifs sont très rapides, puisque les éléments d'interactions composant les systèmes matriciels ont été déterminés lors de l'étape **4)**.

IV.4.2 Calcul des paramètres électriques primaires de la ligne

Les matrices capacité et conductance

La détermination des matrices capacité et conductance se fait directement à partir de la répartition des charges sur les conducteurs une fois le potentiel fixé sur ces derniers (conditions de *Dirichlet* dans l'équation intégrale). En effet, on relie la charge totale par unité de longueur de chaque conducteur σ_i au potentiel sur ce même conducteur à l'aide de la matrice capacité *généralisée* $\mathcal{C}$ [153] :

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{N_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{00} & \mathcal{C}_{01} & \dots & \mathcal{C}_{0N_f} \\ \mathcal{C}_{10} & \mathcal{C}_{11} & \dots & \mathcal{C}_{1N_f} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_{N_f0} & \mathcal{C}_{N_f1} & \dots & \mathcal{C}_{N_fN_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{N_f} \end{bmatrix} \tag{IV.42}$$

Avec :

- $q_i = \displaystyle\int_{\Gamma_{fi}} \varepsilon \frac{\partial F}{\overrightarrow{n_{fi}}} d\Gamma = \sum_{\ell=1}^{N_\ell(i)} \sigma_i(P_{fi\ell}) \Delta\Gamma_i, \forall i \in \{0;1;\dots;N_f\}$: la charge totale portée par le conducteur i
- $\phi_i, \forall i \in \{0;1;\dots;N_f\}$: le potentiel fixé sur le conducteur i dans les conditions aux limites

Pour des raisons qui ont été exposées dans le cas de domaines ouverts, la condition de neutralité n'est pas naturellement assurée. Il faut donc déterminer le *potentiel de jauge* ou *potentiel à l'infini* permettant d'assurer la neutralité de la charge totale de la ligne à laquelle répondent les lignes de transmission. On cherche alors ϕ_∞ tel que :

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{N_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{00} & \mathcal{C}_{01} & \dots & \mathcal{C}_{0N_f} \\ \mathcal{C}_{10} & \mathcal{C}_{11} & \dots & \mathcal{C}_{1N_f} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_{N_f0} & \mathcal{C}_{N_f1} & \dots & \mathcal{C}_{N_fN_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 - \phi_\infty \\ \phi_1 - \phi_\infty \\ \vdots \\ \phi_{N_f} - \phi_\infty \end{bmatrix}$$

satisfaisant la relation de neutralité :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N_f} \sigma_k = 0 &\Leftrightarrow (\phi_0 - \phi_\infty) \sum_{k=0}^{N_f} \mathcal{C}_{0k} + (\phi_1 - \phi_\infty) \sum_{k=0}^{N_f} \mathcal{C}_{1k} + \dots + \left(\phi_{N_f} - \phi_\infty\right) \sum_{k=0}^{N_f} \mathcal{C}_{N_fk} = 0 \\ &\Leftrightarrow \phi_\infty = \frac{\phi_0 \sum_{k=0}^{N_f} \mathcal{C}_{0k} + \phi_1 \sum_{k=0}^{N_f} \mathcal{C}_{1k} + \dots + \phi_{N_f} \sum_{k=0}^{N_f} \mathcal{C}_{N_fk}}{\sum_{i=0}^{N_f} \sum_{j=0}^{N_f} \mathcal{C}_{ij}} \end{aligned} \tag{IV.43}$$

Les éléments de la matrice capacité généralisée satisfaisant la condition de neutralité sont alors calculés par la relation suivante :

$$\mathcal{C}_{ij} = \left. \frac{q_i}{(\phi_j - \phi_\infty)} \right|_{\phi_k - \phi_\infty = 0,\ \forall k \neq j} \tag{IV.44}$$

Cette matrice, de taille $\left(N_f + 1\right) \times \left(N_f + 1\right)$, n'est toutefois pas la véritable matrice capacité puisqu'elle ne « ferme » pas le circuit sur le conducteur de référence. En prenant comme référence de potentiel

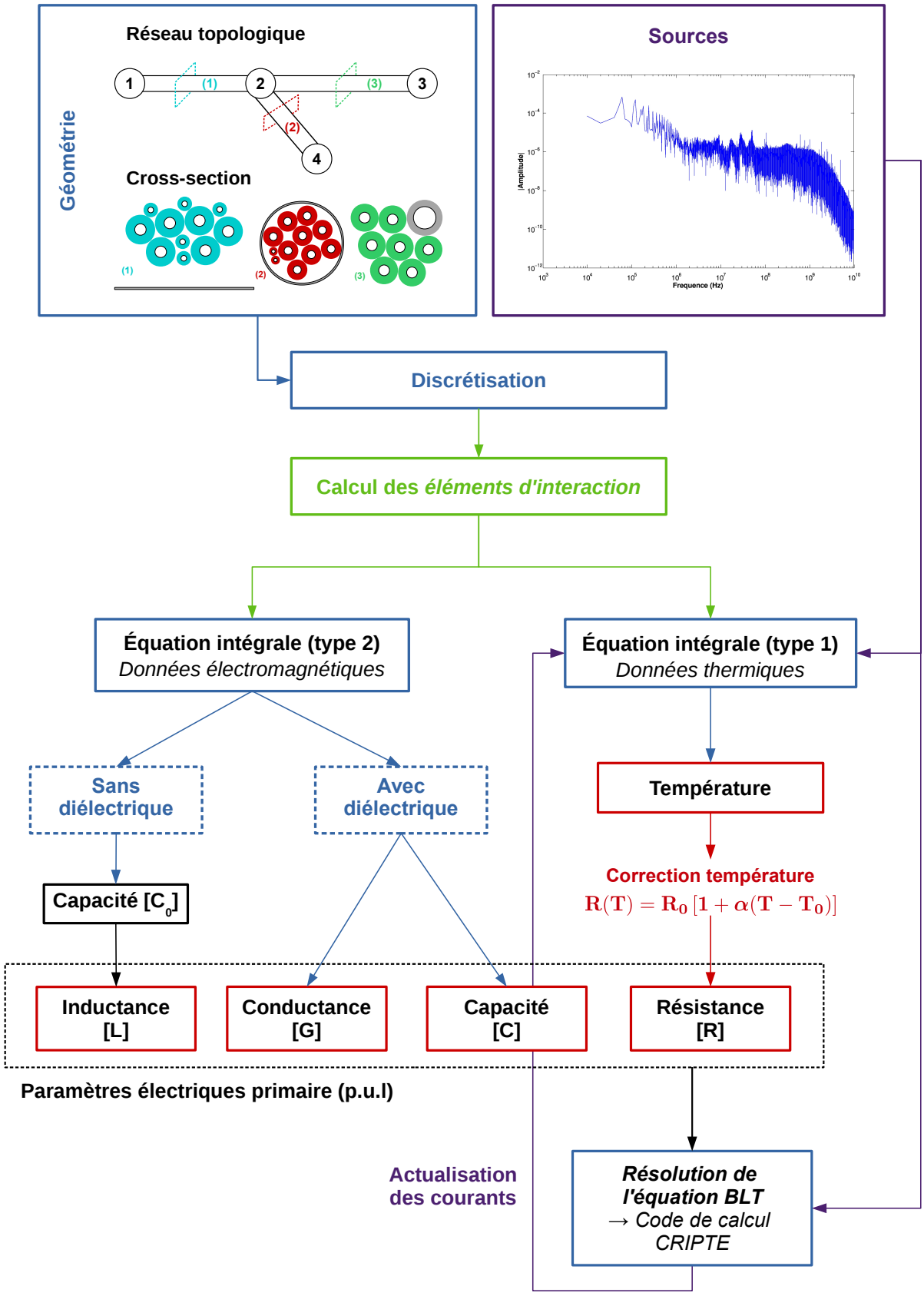


Figure IV.14 – Stratégie de couplage du calcul des paramètres électriques primaires (p.u.l) et de la température de coupe droite transverse

(par exemple mais non nécessairement) le conducteur n^o 0 , on a vu que l'on pouvait définir la tension de façon unique entre les conducteurs i et 0 de la manière suivante [153] :

$$V_i = (\phi_i - \phi_\infty) - (\phi_0 - \phi_\infty) = \phi_i - \phi_0 \tag{IV.45}$$

La matrice capacité de ligne de transmission $\mathbf{C}$, de taille $N_f \times N_f$ permet de relier la charge par unité de longueur portée par le $i^{ème}$ conducteur à toutes les autres tensions de la ligne par rapport aux conducteurs de référence. Elle est donc définie par une relation de la forme :

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \dots & \mathbf{C}_{1N_f} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \dots & \mathbf{C}_{2N_f} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{N_f1} & \mathbf{C}_{N_f2} & \dots & \mathbf{C}_{N_fN_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{N_f} \end{bmatrix}$$

où l'élément de ligne i et de colonne j est obtenu grâce à la relation suivante [153] :

$$\mathbf{C}_{ij} = \mathcal{C}_{ij} - \frac{\left(\sum_{k=0}^{N_f} \mathcal{C}_{ik}\right)\left(\sum_{m=0}^{N_f} \mathcal{C}_{mj}\right)}{\sum_{p=0}^{N_f}\sum_{q=0}^{N_f} \mathcal{C}_{pq}} \tag{IV.46}$$

La matrice capacité de ligne de transmission $\mathbf{C}$ est une matrice complexe, puisque la permittivité utilisée dans les calculs électrostatiques est elle aussi une grandeur complexe. Finalement, les matrices capacité et conductance recherchées, respectivement notées C et G sont données par [153] :

$$\mathrm{C} = \mathrm{Re}\,(\mathbf{C}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G} = -\omega \mathrm{Im}\,(\mathbf{C}) \tag{IV.47}$$

La matrice inductance

La matrice inductance se déduit directement de la matrice capacité $\mathbf{C}_0$ calculée sans les diélectriques par la relation suivante [153] :

$$\mathrm{L} = \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{C}_0^{-1} \tag{IV.48}$$

La matrice résistance

La matrice résistance *en courant continu* (DC) est construite comme la somme d'une matrice diagonale contenant les résistances électriques (p.u.l) de chacun des fils de la ligne et d'une matrice dense uniformément remplie des valeurs de résistance du conducteur de référence, soit :

$$R_{DC} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{N_f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_0 & r_0 & \dots & r_0 \\ r_0 & r_0 & \dots & r_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_0 & r_0 & \dots & r_0 \end{bmatrix} \tag{IV.49}$$

En première approximation, on doit tient compte des effets de la température et de la fréquence sur l'expression de la matrice résistance de la manière suivante :

- **Correction par la température** : Comme nous l'avons évoqué dans l'analyse bibliographique au chapitre III, la résistivité possède la relation de dépendance *linéaire* suivante avec la température :

$$\rho_{\mathrm{DC}}(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \tag{IV.50}$$

soit pour la résistance (p.u.l) :

$$R_{\mathrm{DC}}(T) = \frac{\rho_{\mathrm{DC}}(T)}{S} = R_0[1 + \alpha(T - T_0)] \tag{IV.51}$$

où R_0 est la résistance de référence relevée à la température T_0 et α est le coefficient de température exprimé en K^{-1}.

- **Correction par la fréquence** : Comme nous l'avons évoqué dans l'analyse bibliographique au chapitre III, la résistivité d'un matériau varie significativement avec la fréquence. Cette dépendance est due à un phénomène appelé *effet de peau* dont l'expression est donnée par la relation (III.47). A titre d'exemple, la formule de résistance suivante, tirée de [2] permet de tenir compte de cet effet à partir de la valeur de résistance en courant continu (DC) dans le cadre d'un fil plein :

$$R(f) = R_{\mathrm{DC}}\left[1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu f}{R_{\mathrm{DC}}}}\right] \tag{IV.52}$$

En tenant compte de la correction de température introduite plus haut, la précédente relation devient simplement :

$$R(f) = R_{\mathrm{DC}}(T)\left[1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu f}{R_{\mathrm{DC}}(T)}}\right] \tag{IV.53}$$

D'autres relations de ce type existent permettant de tenir compte en plus des *effets de proximité*, notamment dans la norme IEC60287 [49].

IV.4.3 Calcul du champ de température

Dans le cas du calcul des échauffements thermiques, il est nécessaire de considérer des domaines **strictement fermés**. Lorsque les domaines sont naturellement ouverts, l'intégration de l'équation de la chaleur se fait sur des surfaces *fictivement* fermées. Ces surfaces doivent alors être choisies de manière à représenter le plus fidèlement possible les phénomènes physiques de convection et de rayonnement aux frontières du domaine.

Considérations géométriques

Trois cas d'applications typiques rencontrés lors de l'intégration des câblages dans les véhicules sont donnés en figure IV.13
Dans cette représentation topologique, les cross-sections des tubes 1 et 3 de la Figure IV.13 sont des domaines ouverts, car il n'existe aucune courbe fermée unique sur laquelle intégrer les équations.
Comme nous l'avons vu en début de ce chapitre, la considération de domaines ouverts dans le cas de problèmes électrostatiques se fait à partir d'un postulat pour lequel les représentations intégrales sont supposées vraies si la condition de neutralité (IV.43) est assurée (Tableau IV.3)

Domaine	Calcul matrices L, C, et G (p.u.l)	Calcul des champs de température
Fermé	**OUI**	**OUI**
Ouvert	**OUI** (si système neutre)	**NON** (si autres modes de transferts que la conduction)

Table IV.3 – Prise en compte des domaines fermés/ouverts

Or, cette dernière condition n'est pas applicable dans le cas des problèmes de thermique puisque les phénomènes de diffusion de la chaleur sont différents suivant la nature du milieu considéré (fluide ou solide). Dans cette section, nous verrons comment choisir les surfaces d'intégration lorsque la géométrie de la cross-section présente les propriétés d'un domaine ouvert.

Domaines naturellement fermés

Dans le cas de la cross-section du second tube, la frontière de blindage permet de séparer naturellement les zones de transferts thermiques par conduction et convection/rayonnement (Figure IV.15). Ainsi, dans ce cas, les conditions aux limites sont appliquées sur le contour extérieur du blindage.

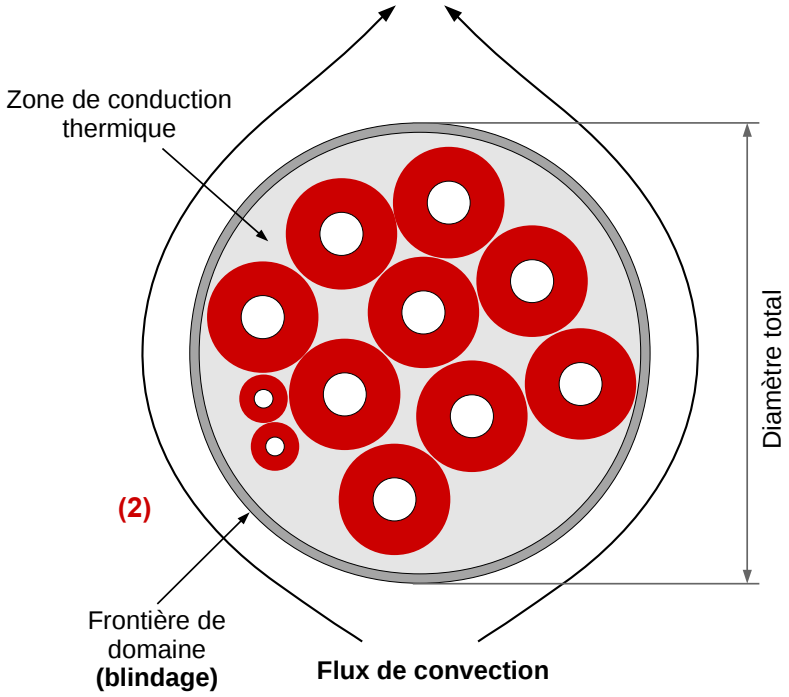


Figure IV.15 – Zones de transferts thermiques dans le cas de câbles blindés (tube n° 2)

Transformation des domaines ouverts

Dans le cas des domaines ouverts, il est nécessaire de « fermer » la géométrie à l'aide d'une frontière de domaine *fictive* permettant d'y appliquer les conditions aux limites de type convecto-radiative. La manière la plus intuitive consiste simplement à entourer le toron de câbles à l'aide d'une courbe similaire à l'allure moyenne de la géométrie comme cela est le cas pour le traitement du premier tube présenté en Figure IV.16.
Ici, l'application d'une ellipse peut constituer une première approximation satisfaisante. Cet exemple présente de plus une particularité intéressante puisque le conducteur de référence (un plan de masse) n'est pas contenu dans la zone de conduction thermique alors que celui-ci fait partie intégrante du calcul électromagnétique.
Dans ce cas, le plan de masse est considéré comme neutre thermiquement, c'est-à-dire, en équilibre thermique avec le fluide environnant et donc n'échangeant pas de chaleur avec le toron de câbles. Cette hypothèse est justifiée dans le cas où les sections conductrices du plan de masse sont surdimensionnées par rapport aux valeurs de retour des courants.
Cependant, même thermiquement neutre, le plan de masse modifie toujours l'écoulement des fluides autour du toron et dans ce cas, les corrélations de h en espace libre (comme celle introduite par la relation (III.23)) peuvent ne plus être valable. Il est donc nécessaire de raffiner localement sur la frontière de domaine l'application du coefficient en h en fonction de la nature du problème. La détermination du coefficient de transfert thermique adapté à une géométrie ou une application donnée est un domaine de recherche en constante évolution et il existe de nombreuses études dans la littérature notamment en fonction du type d'écoulement (convection naturelle ou mixte) considéré. Des corrélations intéressantes applicables aux problématiques de câblage peuvent être trouvées dans l'ouvrage de référence [186].

Dans le cas des géométries *pseudo*-circulaires (Figure IV.17), les corrélations permettant d'obtenir le coefficient d'échange thermique h dépendent souvent du diamètre géométrique *apparent* de la structure

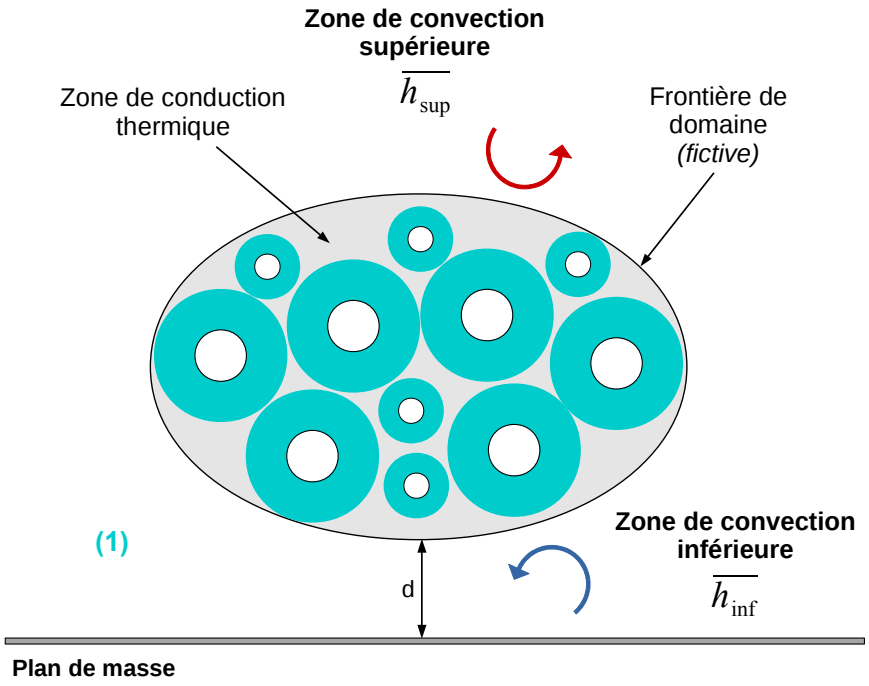


Figure IV.16 – Ajout d'une surface fictive à la cross-section du tube 1

D_{app} mais aussi de la surface d'échange S_{ech} (dîte « mouillée ») des matériaux avec le milieu ambiant. En particulier lorsque le harnais de câbles ne possède pas de gaine isolante « lisse », la surface d'échange réelle est généralement différente de celle de l'enveloppe associée, ce qui se traduit par :

$$S_{ech} \neq \frac{1}{4}\pi D_{app}^2 \tag{IV.54}$$

Nous proposons dans ce cas particulier une méthode très simple permettant d'approcher la frontière fictive au plus près de la frontière réelle d'échange thermique comme présenté en Figure IV.17

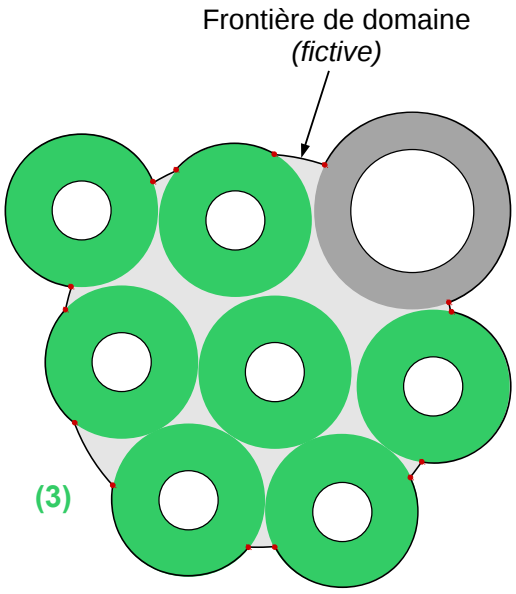
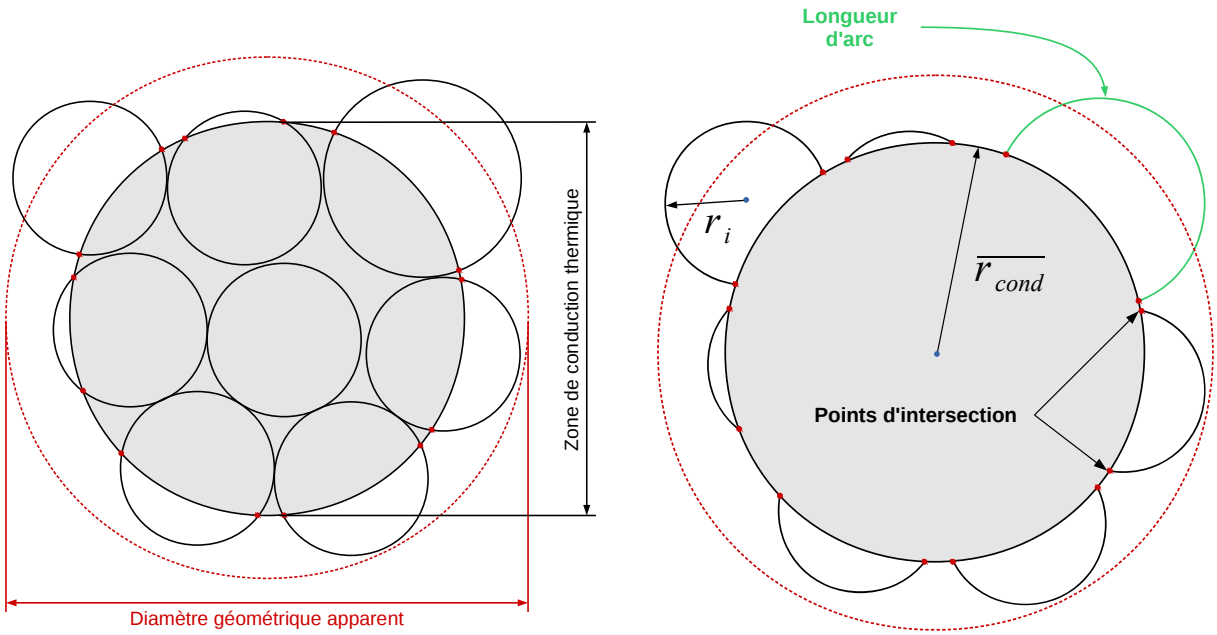


Figure IV.17 – Ajout d'une surface fictive à la cross-section du tube n° 3

La première étape consiste à déterminer la zone circulaire dans laquelle on va pouvoir considérer la conduction comme le mode de diffusion thermique dominant (Figure IV.18(a)). Il est ensuite nécessaire de déterminer chacune des longueurs d'arc « dépassant » du cercle de conduction, c'est à dire, les contributions participant à l'augmentation de surface des câbles en dehors de la zone de conduction



(a) Différentiation des différentes zones thermique **(b)** Localisation des points d'intersection

Figure IV.18 – Construction de la frontière de domaine fictive dans le cas d'un toron de câble cylindrique en espace libre

thermique (analogue à la notion de *mouillabilité*). Pour cela, on détermine les *longueurs d'arc* comprises entre les points d'intersection de chacun des câbles avec le cercle de conduction.
Pour deux cercles de rayons respectifs r_i et $\overline{r_{cond}}$, les coordonnées des éventuels points d'intersection sont données par la résolution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (x_{cond} - x)^2 + (y_{cond} - y)^2 = r_{cond}^2 \\ (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 = r_i^2 \end{cases} \tag{IV.55}$$

Suivant les cas, on trouve les résultats suivants :

• Si $y_{cond} \neq y_i$, on peut alors poser :

$$K_1 = \frac{x_{cond} - x_i}{y_{cond} - y_i} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{r_{cond}^2 - r_i^2 - x_i^2 + -x_{cond}^2 - y_i^2 + y_{cond}^2}{2\,(y_{cond} - y_i)} \tag{IV.56}$$

Les abscisses des points d'intersection sont alors données par la résolution de l'équation du second degré suivante :

$$\left(K_1^2 + 1\right) x^2 + 2\left(y_{cond} K_1 - K_1 K_2 - x_{cond}\right) x + \left(x_{cond}^2 + y_{cond}^2 + K_2^2 - r_{cond}^2 - 2 y_{cond} K_1\right) = 0 \tag{IV.57}$$

Ce qui donne ensuite accès aux valeurs des ordonnées grâce à la relation suivante :

$$y = K_2 - K_1 x \tag{IV.58}$$

• Si $y_{cond} = y_i$, il n'est plus possible d'utiliser les relations précédentes. Cependant les équations se simplifient. Dans ce cas les coordonnées du ou des points recherchés sont conditionnées par l'équation du second degré suivante :

$$y^2 - 2 y_i y + \left(x_i^2 + x^2 - 2 x_i x + y_i^2 - r_i^2\right) \tag{IV.59}$$

avec :

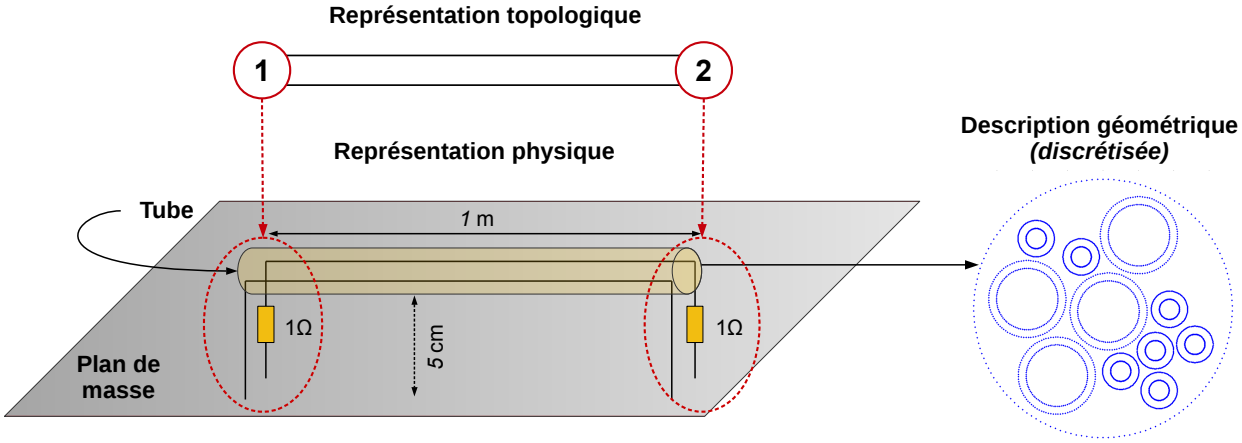
$$x = \frac{r_i^2 - r_{cond}^2 - x_i^2 + x_{cond}^2}{2\,(x_{cond} - x_i)}$$

IV.5 Exemples d'application

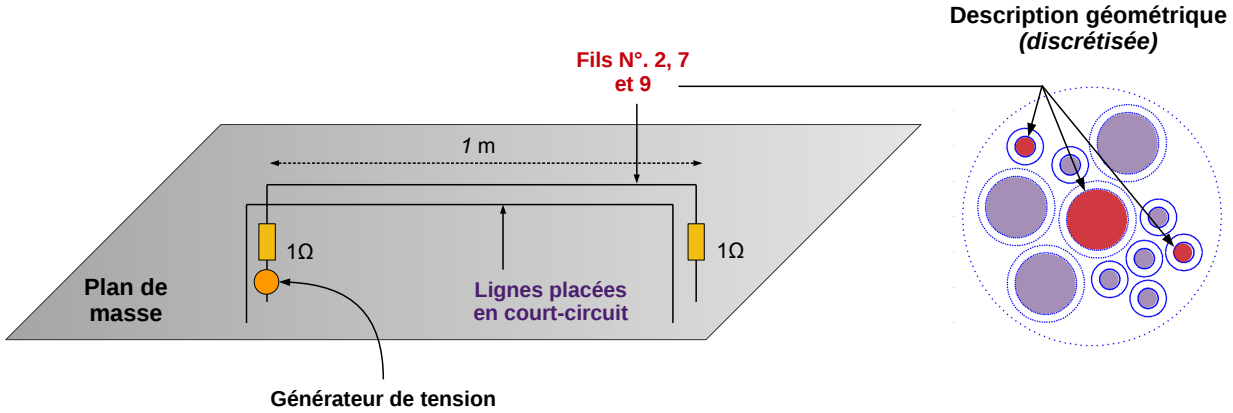
Dans cette section, la méthode développée sera appliquée à deux cas tests d'intérêt industriel. Dans le premier nous montrerons les capacités de la chaine de calcul à prédire simultanément les courants de couplage ainsi que de la distribution de température au sein d'un toron de câbles de composition et de taille arbitraire. Dans une seconde application, nous montrerons comment les résultats fournis peuvent être utilisés dans le tracé d'*abaques* de courants admissibles nettement plus précis que ceux fournis par les normes actuelles tout en présentant l'avantage de s'affranchir de campagne expérimentale.

IV.5.1 Exemple n° 1 : simulation couplée CEM-Thermique

Le cas d'application présenté dans la suite constitue un exemple purement numérique permettant de tester l'ensemble de la chaîne de calcul. Ce dernier a fait l'objet des publications [117] et [116]
D'un point de vue physique, la configuration testée consiste en un toron de 11 câbles, de cross-section aléatoire, et composée de fils de gauges respectives AWG24 et AWG14, le tout inséré dans une gaine diélectrique placée à 5 cm au-dessus d'un plan de masse métallique parfaitement conducteur comme illustré en Fig. IV.19(a).
D'un point de vue topologique l'ensemble est modélisé dans le logiciel CRIPTE par un tube de longueur unitaire dont les jonctions terminales portent les impédances terminales et les différentes sources de tensions. L'ensemble des fils de la ligne est placé en court-circuit par rapport au plan de masse conducteur, à l'exception des trois câbles 2, 7 et 9 qui sont eux reliés par des impédances terminales de 1 Ω en chacune de leurs extrémités auxquelles on rajoute pour chacun de ces câbles une source de tension indépendante comme indiqué en Fig. IV.19(b)



(a) Description topologique et physique du cas de l'exemple d'application



(b) Localisation des sources de tensions et description des impédances terminales du tube

Figure IV.19 – Description du cas d'application

Afin de visualiser les courants induits par diaphonie, application clé des simulations CEM, les trois câbles non placés en court-circuit sont alimentés par des signaux TTL de fréquence 200 kHz, de rapport

cyclique 0.5, et de tensions efficaces respectives 13 Volt (pour les deux premières injections se faisant sur deux câbles de section AWG24) et de 48 Volt pour la dernière injection (câble de gauge AWG14).

Le reste de la ligne est placé en **court-circuit** afin *d'accentuer* les couplages et les niveaux de courants induits. Les amplitudes des tensions d'injection sont imposées *empiriquement* de manière à ce que l'échauffement créé par effet Joule se situe autour de +40 °C.

Les injections de tension devant être réalisées dans le domaine fréquentiel, la FFT des signaux est fournie au logiciel sur une bande s'étalant du continu jusqu'à 100 MHz. La géométrie de la cross-section est arbitraire puisque générée aussi à l'aide de l'outil ALEACAB intégré dans CRIPTE.

Dans un premier calcul, on considère comme source de chaleur *uniquement* la puissance dissipée par les câbles sur lesquels les tensions d'injection sont appliquées en prenant comme valeur de résistivité électrique celle fournie pour le cuivre dans la norme IEC60287, soit : $\rho = 1,7241.10^{-8}\ \Omega.m$. Cette première détermination de la température au sein du toron permet de modifier la valeur de résistance linéique de chacun des câbles. Pour cela, la valeur du coefficient de température considéré est une nouvelle fois prise dans la norme IEC60287, fixée pour le cuivre à $\alpha = 3,93.10^{-3}\ K^{-1}$ (voir tableau III.2). Le coefficient d'échange thermique en espace libre caractérisant la dissipation de chaleur entre le toron et le milieu ambiant est donné par les relations (III.23) et (III.24).

Le calcul des courants induits pour l'ensemble des fils du tube sont réalisés à l'aide du logiciel CRIPTE. Une fois déterminé, ces courants induits servent de donnée d'entrée pour un nouveau calcul thermique.

La visualisation des champs de température ainsi que les niveaux de tension peuvent être visualisées en Figure IV.20. Les détails des niveaux de courants sont données dans le Tableau IV.4.

Il apparait clairement la contribution significative des courants de couplage sur l'échauffement total du toron puisque la puissance thermique dissipée passe de 10,84 W à 13,16 W (cf tableau IV.4). Ce phénomène de couplage (qui est, pour rappel, *accentué* par la mise en court circuit des lignes) a pour conséquence une augmentation moyenne de la température moyenne du toron de +7°C entre les deux calculs (cf Figure IV.20). Si cette augmentation température semble faible de manière absolue, elle n'en reste pas moins très contraignante au vue de certaines règles d'installation de câblage. En effet, pour des raisons de sécurité et de maintenance, les routes de câbles ne doivent pas dépasser dans la majorité des cas une limite de température souvent fixée +40°C par rapport à la température ambiante. Lorsque cette condition n'est pas assurée, il est alors nécessaire de passer à des gauges supérieures, ce qui a pour effet direct un budget en masse supplémentaire.

IV.5.2 Exemple n° 2 : calcul d'abaque

La détermination sous forme d'abaque des courants admissibles en fonction de l'échauffement par effet Joule est un objectif ambitieux d'un point de vue industriel. Le code de calcul développé permet, à partir d'une géométrie arbitraire, de déterminer la valeur de ces courants admissibles en fonction de la température atteinte par l'âme des câbles.
Dans l'analyse suivante, afin de valider nos résultats par rapport à ceux de la norme IEC60287 (calcul des courants admissibles jusqu'à des puissances de 5 kVA), nous ne considérons que des câbles simples, composés d'une âme conductrice entourée d'une gaine diélectrique. Le diamètre des conducteurs étudiés varie de la gauge AWG14 (Ø = 1.63 mm) à la gauge AWG4 (Ø = 5.19 mm). On n'étudie, à des fins de simplification, que le cas de courants continus (pas de prise en compte des effets fréquentiels sur les paramètres RLCG). Les résultats sont présentés à la Figure IV.21. Les courbes issues de notre outil montrent un décalage par rapport à celles fournies par la norme IEC 60287. Celui-ci s'explique par les différentes corrélations appliquées par la norme pour modéliser la résistance thermique de l'air environnant, unique terme quantifiant le taux de chaleur dissipée. En augmentant la valeur fournie par la norme d'un facteur compris entre +10% et +20% suivant le diamètre des câbles, les courbes corrigées se superposent alors parfaitement à nos résultats. Ce facteur correctif, s'il n'est pas négligeable, est toutefois dans la limite de précision que l'on s'accorde pour déterminer le coefficient de transfert global de chaleur.

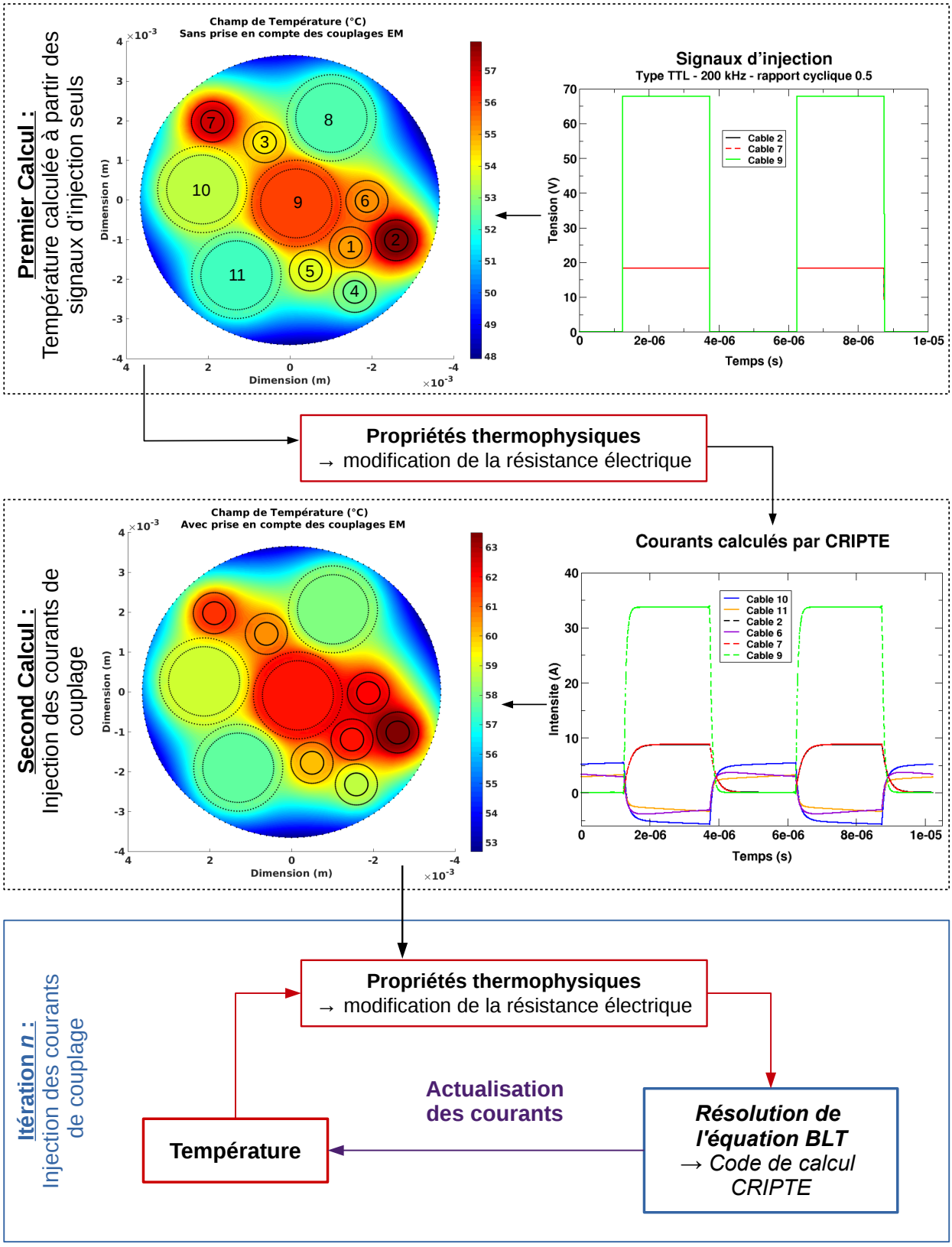


Figure IV.20 – Illustration de la méthode couplée de simulation CEM-Thermique

IV.6 Conclusion

Dans ce chapitre, les principes fondamentaux d'une chaine de résolution couplée CEM-Thermique ont été présentés. La méthode de résolution se fonde sur la similarité des équations entre les problèmes électrostatiques et de diffusion stationnaire de la chaleur. Ces travaux se sont ainsi concrétisée par le développement d'un outil numérique permettant de résoudre simultanément ces deux problèmes.

Premier calcul : sans couplage EM					
Câble	**R à 20°C (mΩ/m)**	**I injection (A)**	**Température (°C)**	**R (mΩ/m)**	**Augmentation résistance (%)**
1	67,47	0	54,57	76,64	**+ 13,59**
2	67,47	6,29	57,21	77,34	**+ 14,63**
3	67,47	0	53,81	76,44	**+ 13,29**
4	67,47	0	52,21	76,01	**+ 12,66**
5	67,47	0	53,28	76,30	**+ 13,09**
6	67,47	0	54,61	76,65	**+ 13,60**
7	67,47	6,29	56,44	77,13	**+ 14,32**
8	7,26	0	51,92	8,17	**+ 12,53**
9	7,26	23,91	55,47	8,27	**+ 13,91**
10	7,26	0	52,98	8,20	**+ 12,95**
11	7,26	0	51,83	8,17	**+ 12,53**
Puissance dissipée par effet Joule (W) : 10,84					
Second calcul : avec couplages EM					
Câble	**R à 20°C (mΩ/m)**	**I calculé par CRIPTE (A)**	**Température (°C)**	**R (mΩ/m)**	**Augmentation résistance (%)**
1	67,47	3,07	61,85	78,56	**+ 16,44**
2	67,47	5,92	63,39	78,97	**+ 17,04**
3	67,47	2,83	60,54	78,22	**+ 15,93**
4	67,47	0,91	58,67	77,72	**+ 15,19**
5	67,47	1,88	60,02	78,08	**+ 15,73**
6	67,47	3,35	62,12	78,63	**+ 16,54**
7	67,47	5,95	61,62	78,50	**+ 16,35**
8	7,26	4,25	58,10	8,35	**+ 15,01**
9	7,26	23,31	61,94	8,46	**+ 16,53**
10	7,26	5,02	58,83	8,37	**+ 15,29**
11	7,26	2,85	57,74	8,34	**+ 14,88**
Puissance dissipée par effet Joule (W) : 13,16					

Table IV.4 – Détails des résultats pour la simulation couplée Thermique-EM d'un toron de 11 câbles

La chaine de calcul couplée CEM-thermique mise en place a été appliquée à deux types d'applications avec des résultats prometteurs, comme le calcul d'abaques de courant admissible par exemple et l'étude de l'influence des signaux de couplage sur l'échauffement global d'un toron.
Les prédictions fournies par la chaine de calcul doivent toutefois être validées expérimentalement, ce qui fera l'objet du chapitre suivant.

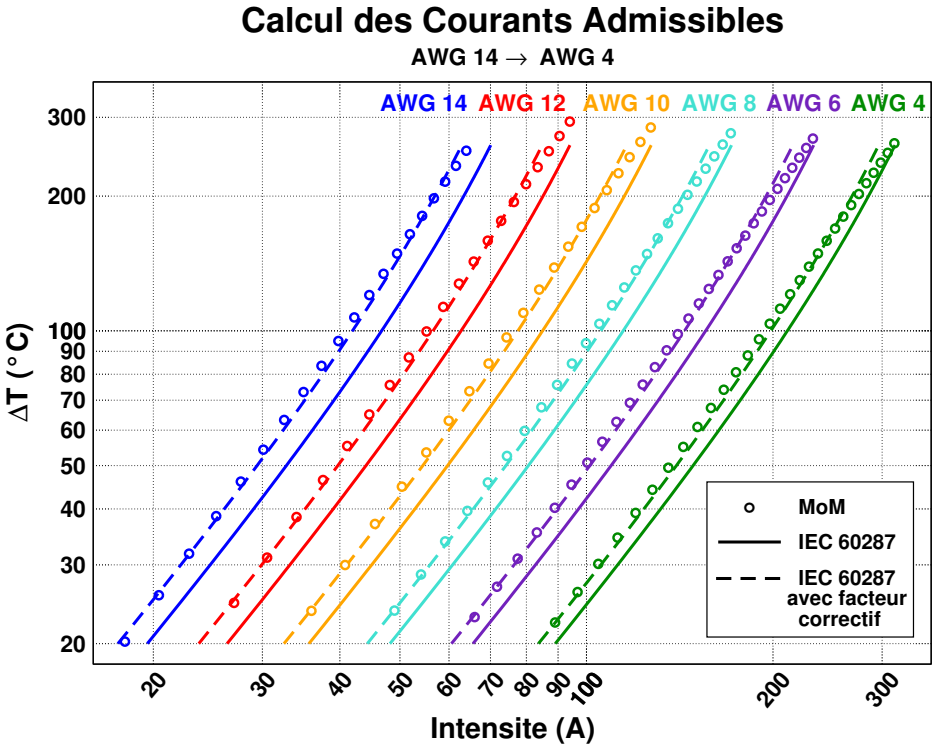


Figure IV.21 – Comparaison abaques simulés par la méthode des moments et la norme IEC 60287

CHAPITRE V

Validation et essais expérimentaux

Table des matières

V.1 Démarche générale 102
V.2 Détermination du coefficient de température de la résistance électrique 104
V.2.1 Dispositif expérimental 104
V.2.2 Protocole expérimental et résultats de mesure 104
V.3 Détermination du coefficient d'échange thermique 107
V.3.1 Dispositif expérimental 107
V.3.2 Protocole expérimental et corrélation mesurée 110
V.3.3 Visualisation des mouvements de convection naturelle 111
V.4 Comparaisons simulations thermiques et mesures thermocouples 113
V.4.1 Cas du tube chauffant 114
V.4.2 Cas d'un harnais électrique réel 117
V.4.3 Conclusion 122
V.5 Expérimentations sur les lignes de transmission 122
V.5.1 Dispositif expérimental et protocole de mesure 122
V.5.2 Modélisation électromagnétique de la configuration expérimentale 124
V.5.3 Analyse des résultats 126
V.6 Conclusion 129

Dans ce chapitre, nous présenterons de manière détaillée les méthodes et moyens mis en oeuvre pour la validation du modèle de calcul développé au chapitre IV. Plus que sur les résultats, l'accent sera mis sur les procédures de mesure afin de poser les premiers jalons d'une procédure d'essais systématiques sur les câblages aéronautiques. Après avoir introduit le protocole expérimental général, nous nous attarderons sur les dispositifs expérimentaux permettant de déterminer pour un toron de câble donné son coefficient de *variation de la résistance électrique en fonction de la température* ainsi que son coefficient d'*échange thermique*. Une fois ces paramètres déterminés, nous comparerons les résultats obtenus pour deux types de toron. Le premier, entouré d'une gaine de cuivre massive, permettra de maitriser parfaitement la température ainsi que la surface d'échange entre le toron et l'air. Le second toron présentera l'allure générale des câblages aéronautiques qui sont la plupart du temps fermement sanglés par des colliers de serrage environ tous les 5 centimètres. Enfin, dans une dernière expérimentation nous comparerons de manière *directe* mais aussi par *simulation* les effets de la température sur les propriétés électromagnétiques d'un ensemble de lignes de transmission inséré au sein d'un faisceau de câble de puissance dégageant de la chaleur par effet Joule.

V.1 Démarche générale

Afin de pouvoir valider la partie thermique de la chaîne de calcul développée dans le chapitre IV, il est nécessaire de connaitre précisément les données d'entrées suivantes (Fig. V.1) :

— **le coefficient de température de la résistance électrique** : noté α et exprimé en K^{-1}, il est égal au coefficient de régression linéaire de la variation de résistance électrique en fonction de la température (Cf. Fig. III.12 du chapitre III).

— **le coefficient de transfert thermique** : noté h et exprimé en $W.m^{-2}.K^{-1}$, il est fonction de la géométrie du toron (ici circulaire), du régime d'écoulement des fluides et des conditions physiques de mesures (température, pression). Une estimation assez précise de ce coefficient est possible lorsque l'ensemble de ces paramètres est parfaitement maîtrisé, mais les résultats obtenus sont difficilement généralisables à d'autres configurations.

— **la conductivité thermique des matériaux** : notée λ et exprimée en $W.m^{-1}.K^{-1}$, elle représente la capacité d'un corps à conduire la chaleur comme la quantité d'énergie transférée par unité de surface et de temps sous un gradient de température de 1 K par mètre. Dans la suite de l'étude, nous considérerons la valeur de la conductivité thermique des matériaux (hors air) comme constante (leurs valeurs pouvant être trouvées dans diverses tables).

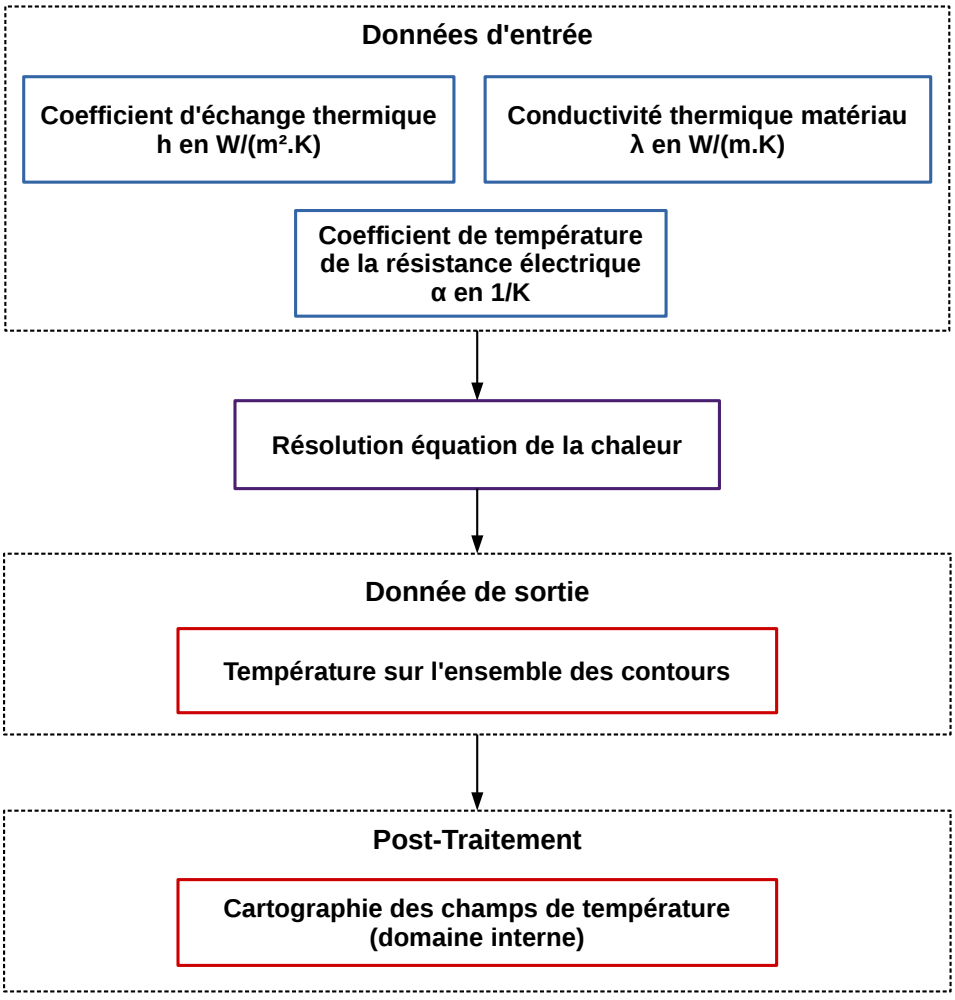


Figure V.1 – Données d'entrées et observables fournis par la partie *thermique* de la chaîne de calcul

A partir de ces paramètres déterminés, la résolution de l'équation de la chaleur par la méthode des moments donne accès à la température sur chacun des contours de domaine et de frontière selon la procédure établie au chapitre précédent. L'établissement des cartographies de températures internes tel que présenté en Fig. IV.20 se fait dans un second temps grâce à une opération supplémentaire de post-traitement.

Les mesures locales de température à l'aide de thermocouples étant aisément réalisables, il est possible d'effectuer une *comparaison directe* des températures simulées *et* mesurées.
Par conséquent, la validation expérimentale de la chaine de calcul CEM-thermique a suivi les étapes suivantes :

Étape 1 : *Détermination du coefficient de température des câbles*

Les différents câbles utilisés ont été testés à l'aide d'un banc de mesure dont le fonctionnement est très largement inspiré des travaux expérimentaux présentés dans [81]. Le montage expérimental ainsi que la procédure de mesure sont détaillés dans la section V.2. Ce banc de mesure réutilisable permet, grâce à une procédure automatisée, de déterminer rapidement la pente α de n'importe quel type de câblage.

Étape 2 : *Détermination du coefficient d'échange thermique. Comparaison mesure-simulation des échauffements créés par un courant continu*

Une enceinte climatique, caractérisée pour l'étude des phénomènes de convection *mixte* dans les travaux de thèse de Ludovic Perrin [155], a été adaptée à la mesure du coefficient de transfert thermique pour le refroidissement passif des câblages. Dans ce cadre, la géométrie fixée consiste en un barreau de cuivre chauffant de diamètre 16 mm. La corrélation obtenue pour le coefficient d'échange thermique sera appliquée au second type de toron de caractéristiques géométriques équivalentes.
Les deux types d'éléments chauffants sont présentés sur la photographie de la Figure V.2.

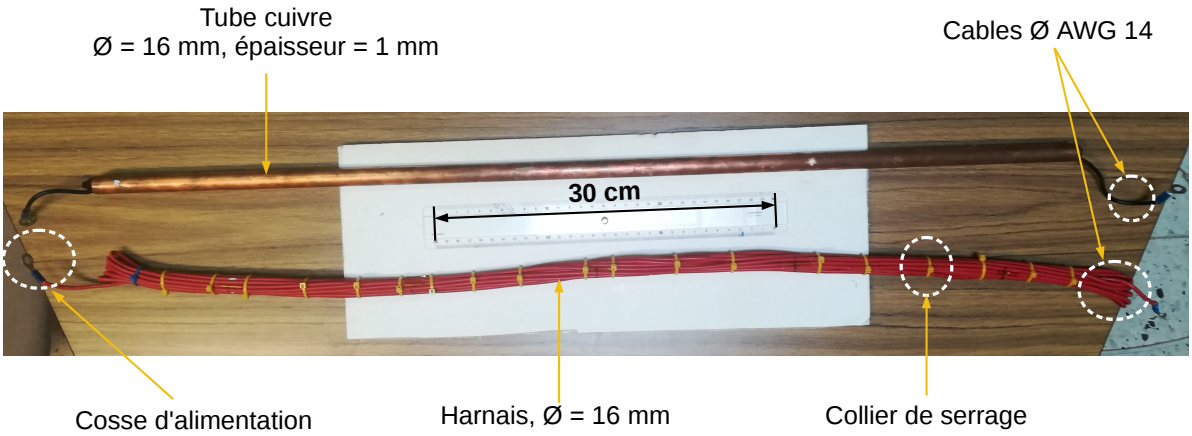


Figure V.2 – Types de torons de câbles utilisés

Dans le détail, ces derniers présentent les caractéristiques suivantes :
— **barreau en cuivre** : Le barreau chauffant utilisé pour la caractérisation du coefficient d'échange thermique est composé d'un câble de puissance effectuant plusieurs aller-retours au sein d'un tube de cuivre (élément supérieur de la Fig. V.2). Le cuivre présentant une haute conductivité thermique, les températures sont attendues homogènes sur l'ensemble de sa surface d'échange avec l'air. L'ensemble du dispositif est simulé en section V.4.1 afin de vérifier la capacité du modèle à retrouver la température de surface mesurée après réinjection des données d'entrée précédemment déterminées.
— **harnais électrique** : Le second cas d'étude correspond à un toron réel de câble de puissance dans le cas où tous les conducteurs sont parcourus par le même courant continu. Les conducteurs sont maintenus en toron à l'aide de *tyrap* encore appelé *collier de serrage* placés tous les 50 millimètres le long de la longueur du câblage. Les résultats de simulation pour ce cas sont donnés en section V.4.2

Étape 4 : *Comparaison mesures-simulations de l'influence de la température sur le paramètre S de lignes de transmission*

Dans une dernière expérimentation, le toron de câble de la figure V.2 ainsi que l'enceinte climatique seront légèrement modifiés afin de pouvoir visualiser et simuler l'influence de la température sur les

paramètres de transmission et de couplage entre lignes, et ce sur une large bande de fréquence grâce à l'emploi d'un analyseur de réseau. Une visualisation aussi directe des effets de la température sur les caractéristiques des lignes de transmission est à notre connaissance totalement originale, et les enseignements qui en découleront seront détaillés dans la section V.5.

V.2 Détermination du coefficient de température de la résistance électrique

V.2.1 Dispositif expérimental

Le banc de mesure est composé de plusieurs éléments indépendants présentés sur le synoptique de la figure V.3 et complétés par les photographies des figures V.4 et V.5.

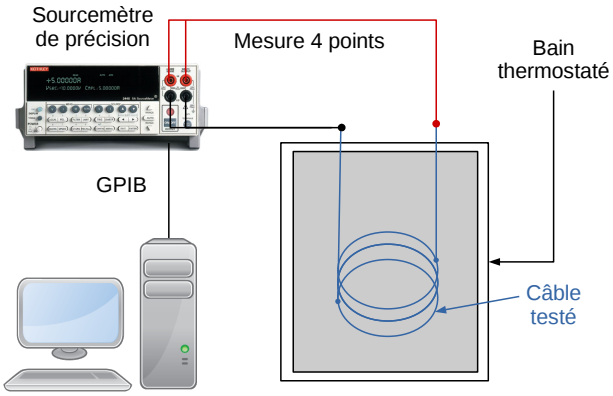


Figure V.3 – Schéma de principe du dispositif expérimental

Il consiste à porter le conducteur sous test à une température donnée puis à mesurer sa conductivité électrique une fois cette température atteinte.

Pour cela, les câbles sous tests sont plongés dans un bain thermostaté permettant de porter et de maintenir à température un fluide liquide (ici de l'eau ce qui limite la température maximale d'étude à 100°C).

Les conducteurs électriques ayant par définition une faible résistivité électrique (typiquement quelques mΩ par mètre), il est nécessaire de prendre des longueurs de câbles de quelques mètres afin d'obtenir des valeurs de résistivités mesurables. Afin de faciliter la manipulation et la mesure des câbles testés, ces derniers sont sertis de cosses standards en chacune de leurs extrémités et enroulés comme présenté en Fig. V.6.

La mesure de la résistance se fait à l'aide d'un sourcemètre Keithley 2400 possédant une résolution de $6\frac{1}{2}$ digit capable théoriquement de mesurer des $\mu\Omega$ [182]. La méthode utilisée est dite « *4-fils* » ou encore « *4-points* », et est spécialement adaptée dans la mesure de faibles résistances puisque les relevés d'intensité et de tension sont décorrélés afin de pouvoir s'affranchir des biais de mesure introduits par la longueur des fils de test eux-même ainsi que par l'apparition de résistances de contact (cf Fig. V.7)

L'acquisition des résultats se fait à l'aide d'une connexion GPIB (*General Purpose Interface Bus*) et du logiciel propriétaire *LabTracer* permettant d'exploiter facilement les données recueillies sous format tableur.

V.2.2 Protocole expérimental et résultats de mesure

Parmi les différents câbles testés, on distinguera les câbles de *puissance*, de section efficace assez élevée pour pouvoir supporter quelques dizaines d'Ampère, et les fils de *signaux* qui ont vocation à transporter des courants faibles de l'ordre du mA. Ces deux types de câblages sont parfaitement visibles sur la figure V.6. Le câble de puissance utilisé dans la confection du barreau chauffant et du toron de câble possède une section AWG14 et est composé d'une multitude de brins élémentaires de

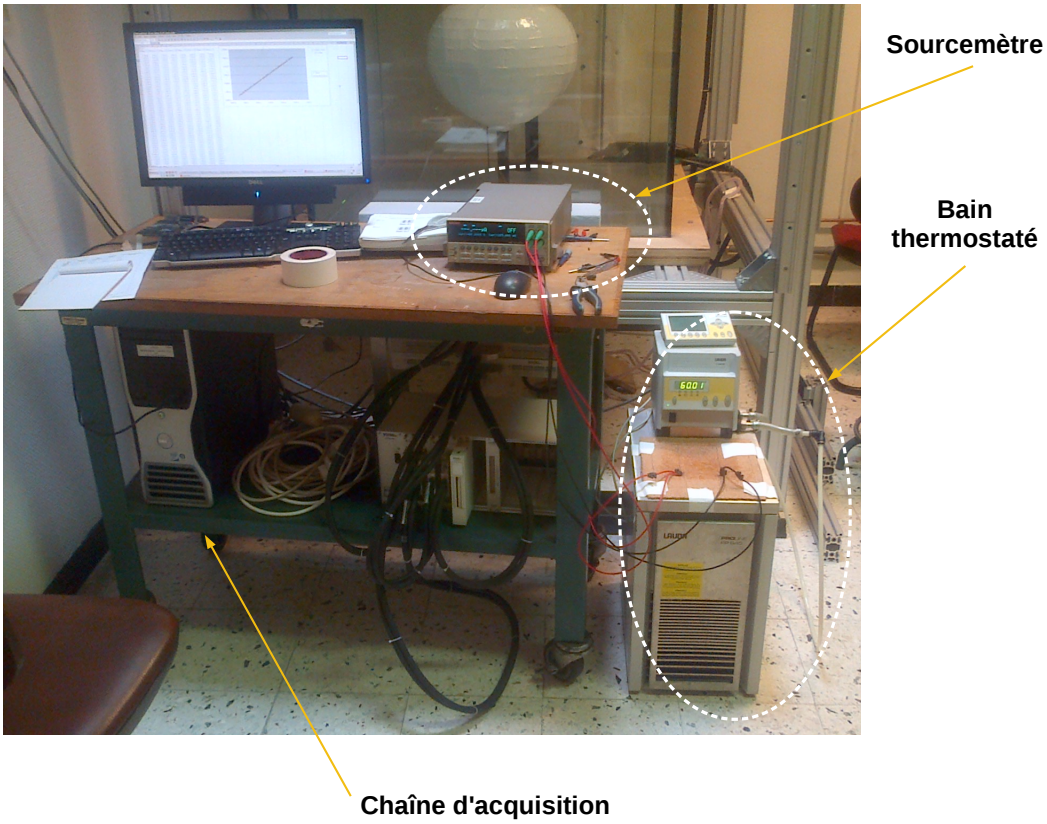


Figure V.4 – Photographie du banc de mesure et de la chaine d'acquisition

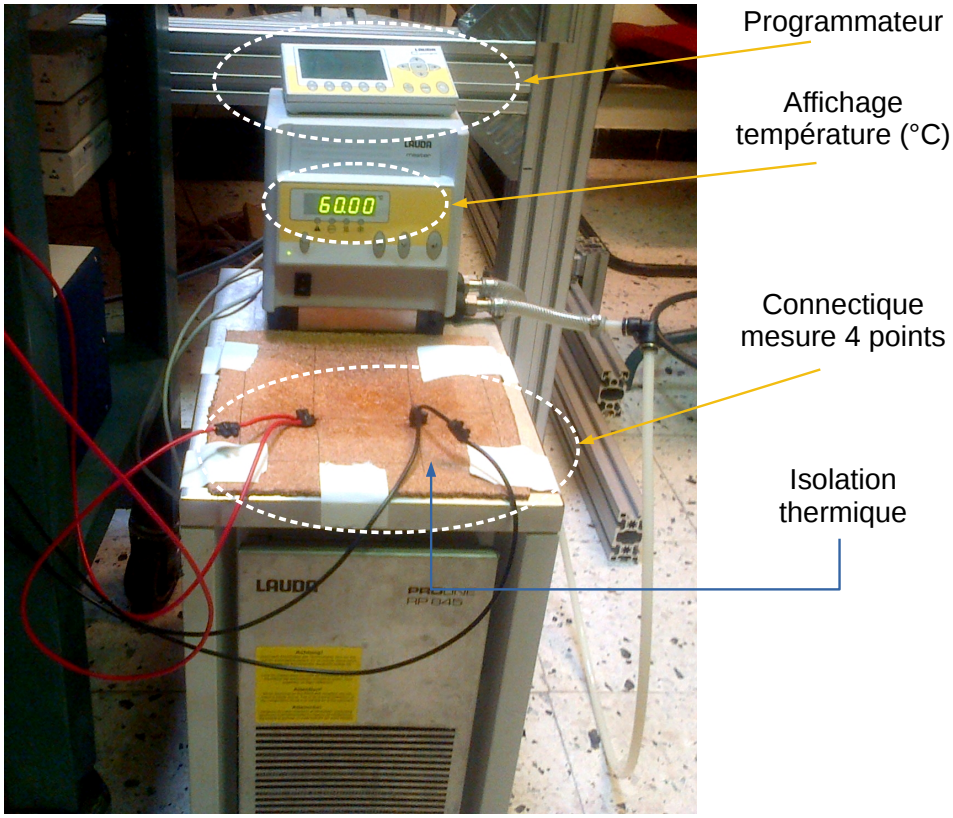


Figure V.5 – Détails du bain thermostaté

cuivre[1]. Les câbles de signaux qui composent les lignes de transmission de la dernière expérimentation

1. Les données techniques du câble utilisé peuvent être consulté à l'adresse suivante : http://www.farnell.com/datasheets/2573984.pdf

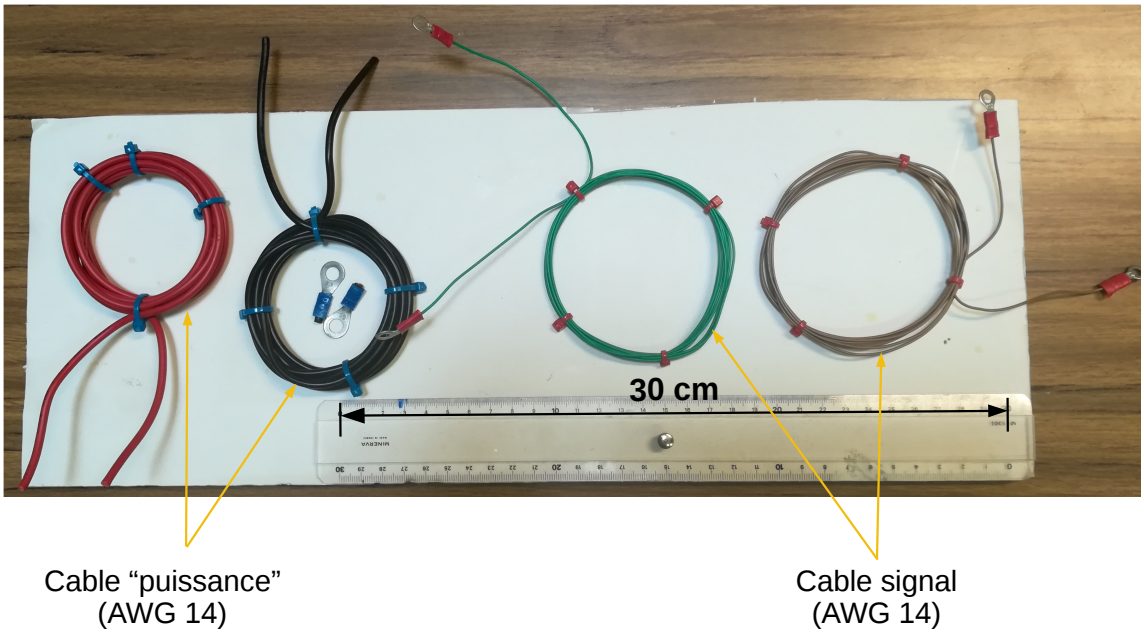


Figure V.6 – Photographie des câbles utilisés pour la détermination des coefficients de température de la résistance électrique

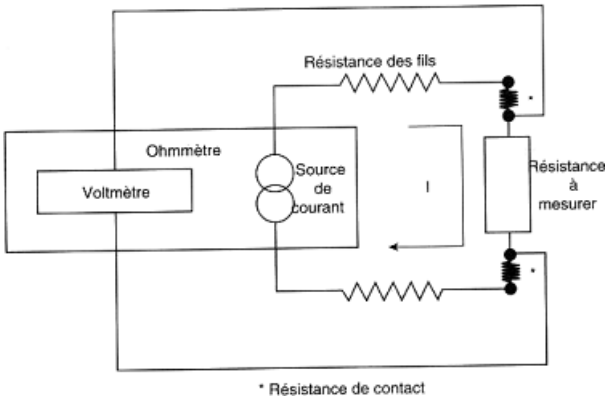


Figure V.7 – Principe de la mesure 4-fils. Source :[127]

en hyperfréquence sont quant à eux des fils de diamètre AWG24, composés de brins de *cuivre étamé*.
A partir du moment où la température désirée est atteinte par le bain thermostaté, le retour d'expérience acquis lors de divers essais préliminaires montre que l'âme du câble atteint cette même température de manière certaine en environ une heure, ce qui en ajoutant la cinétique du bain thermostaté, porte le temps d'acquisition total à environ une heure trente de mesure par échelon de température.
Le tableau V.1 consigne les résultats obtenus pour ces deux types de câbles dans la gamme de température [20°C– 80°C].
La première observation qui peut être faite est la très grande linéarité des mesures. Cette linéarité est par ailleurs confirmée par les tables thermophysiques des matériaux disponibles dont la figure III.12 introduite à l'occasion de l'analyse bibliographique est un exemple.
La valeur du coefficient relevé dans le cas du câble de puissance est cohérente avec celle fournie par la norme CEI60287 [49], à savoir $\alpha = 3,93 \times 10^{-3}$. Le léger décalage entre les deux valeurs (+8 % pour la valeur mesurée) peut s'expliquer par la nature réelle de l'alliage de cuivre composant l'âme du câble qui peut différer de celle obtenue pour du cuivre pur.
Concernant le coefficient de température du câble de signal, bien que celle-ci reste du même ordre de grandeur, sa valeur ($\alpha = 4,40 \times 10^{-3}$) est sensiblement plus élevée sans doute à cause de l'ajout de la couche d'étain, ce dernier matériau présentant des propriétés thermophysiques différentes de celle du cuivre.

Fil de puissance noir ProPower AWG 14 (Cf. Fig. V.6) : cuivre				
Température (°C)	**Essai 1 Résistance (Ω)**	**Essai 2 Résistance (Ω)**	**Essai 3 Résistance (Ω)**	**Essai 4 Résistance (Ω)**
$20,0$	$0,015685\ (345)$	$0,015680\ (698)$	$0,015676\ (629)$	$0,015669\ (925)$
$35,0$	$0,016592\ (219)$	$0,016598\ (755)$	$0,016594\ (440)$	$0,016595\ (273)$
$50,0$	$0,017489\ (117)$	$0,017488\ (531)$	$0,017488\ (453)$	$0,017487\ (027)$
$65,0$	$0,018426\ (508)$	$0,018421\ (289)$	$0,018415\ (618)$	$0,018415\ (561)$
$80,0$	$0,019381\ (424)$	$0,019374\ (079)$	$0,019372\ (377)$	$0,019373\ (317)$
Coefficient de température α en $(K^{-}1)$	$4,25984 \times 10^{-3}$	$4,25090 \times 10^{-3}$	$4,25372 \times 10^{-3}$	$4,26216 \times 10^{-3}$
Valeur retenue	$\mathbf{4,25665 \times 10^{-3}}$			

Fil de signal bleu : cuivre étamé				
Température (°C)	**Essai 1 Résistance (Ω)**	**Essai 2 Résistance (Ω)**	**Essai 3 Résistance (Ω)**	**Essai 4 Résistance (Ω)**
$20,0$	$0,171783\ (384)$	$0,171776\ (950)$	$0,171778\ (751)$	$0,171788\ (741)$
$35,0$	$0,181890\ (183)$	$0,181881\ (332)$	$0,181882\ (372)$	$0,181886\ (861)$
$50,0$	$0,192306\ (658)$	$0,192303\ (956)$	$0,192292\ (680)$	$0,192294\ (816)$
$65,0$	$0,203047\ (297)$	$0,203041\ (810)$	$0,203041\ (046)$	$0,203038\ (209)$
$80,0$	$0,213301\ (831)$	$0,213298\ (162)$	$0,213292\ (346)$	$0,213292\ (241)$
Coefficient de température α en $(K^{-}1)$	$4,40377 \times 10^{-3}$	$4,40438 \times 10^{-3}$	$4,40359 \times 10^{-3}$	$4,40209 \times 10^{-3}$
Valeur retenue	$\mathbf{4,40346 \times 10^{-3}}$			

Table V.1 – Exemple de mesures de la résistance électrique en fonction de la température

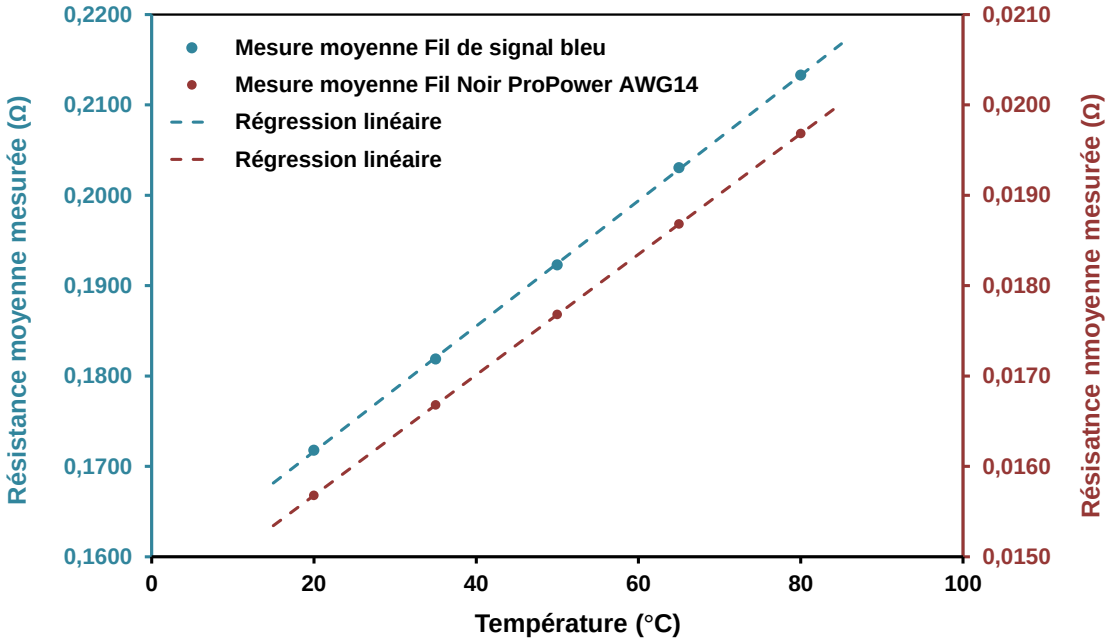


Figure V.8 – Représentation graphique de la courbe de résistance électrique en fonction de la température

V.3 Détermination du coefficient d'échange thermique

V.3.1 Dispositif expérimental

Le banc de mesure est composé des différents éléments suivants, schématiquement introduits sur le synoptique de la Fig. V.9 ainsi que sur les photographies des figures V.10 et V.11 :

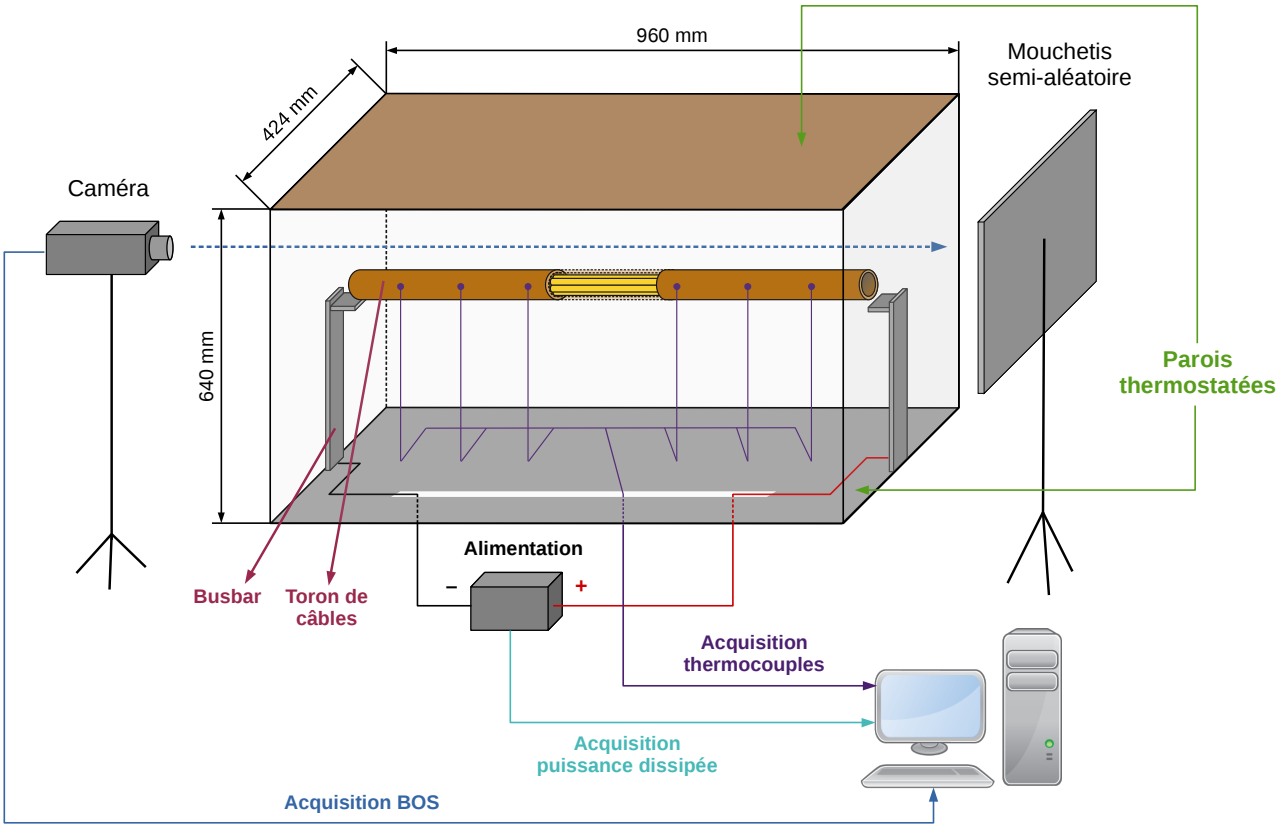


Figure V.9 – Caractéristiques principales de l'enceinte climatique

— **Enceinte climatique** : Il s'agit d'une cavité latéralement transparente initialement développée pour l'étude des mouvements de *convection mixte* à grand nombre de Rayleigh à l'occasion des travaux de doctorat de Ludovic Perrin [155]. Ses dimensions sont celles d'un parallélépipède de longueur et de largeur *fixes* respectives *960 mm* et *424 mm* et de hauteur *variable* maximale *640 mm*.
Les parois supérieures et inférieures sur lesquelles s'effectuent les échanges avec l'air sont maintenues à température constante à l'aide d'un circuit d'eau relié à un bain thermostaté déporté. L'homogénéité des températures est contrôlée à l'aide de 40 thermocouples répartis uniformément sur ces surfaces d'échange air/acier.
Les parois latérales sont réalisées en verre double vitrage composées par deux plaques de verre d'épaisseur *8 mm* séparées par un espacement de *16 mm* rempli d'Argon afin de limiter les échanges thermiques avec l'extérieur.
Les figures V.10 et V.11 présentent des photographies commentées du montage expérimental. Pour plus amples détails, le lecteur pourra consulter les pages 36–40 de [155].

— **Acquisitions thermocouples** : La mesure des températures se fait à l'aide de thermocouples de type K de la marque *Omega*[2]. Ces derniers ont une précision de ± 1,5 °C sur la mesure de température. Les connecteurs d'acquisition sont déportés en dehors de l'enceinte et les signaux mesurés sont traités à l'aide d'un programme Labview permettant de suivre l'évolution précise des valeurs des thermocouples. Le rack de mesure National Instrument sur lequel viennent se brancher les thermocouples permettant de prendre jusqu'à 40 entrées simultanées est visible sur la photo de la Figure V.4.

— **Acquisitions puissance thermique dissipée** : La mesure de la puissance électrique dissipée par l'alimentation de courant continu se fait sur la base des mesures de tension-courant aux bornes du câblage. Un shunt 40A-75mV permet de mesurer l'intensité du courant continu à l'extérieur

2. Référence : 5TC-TT-KI-36-2M. Specifications : thermocouples isolés en PFA de type K. Longueur : 2m, diamètre de fil : 0,25 mm, diamètre extérieur : 0,6 x 1,0mm

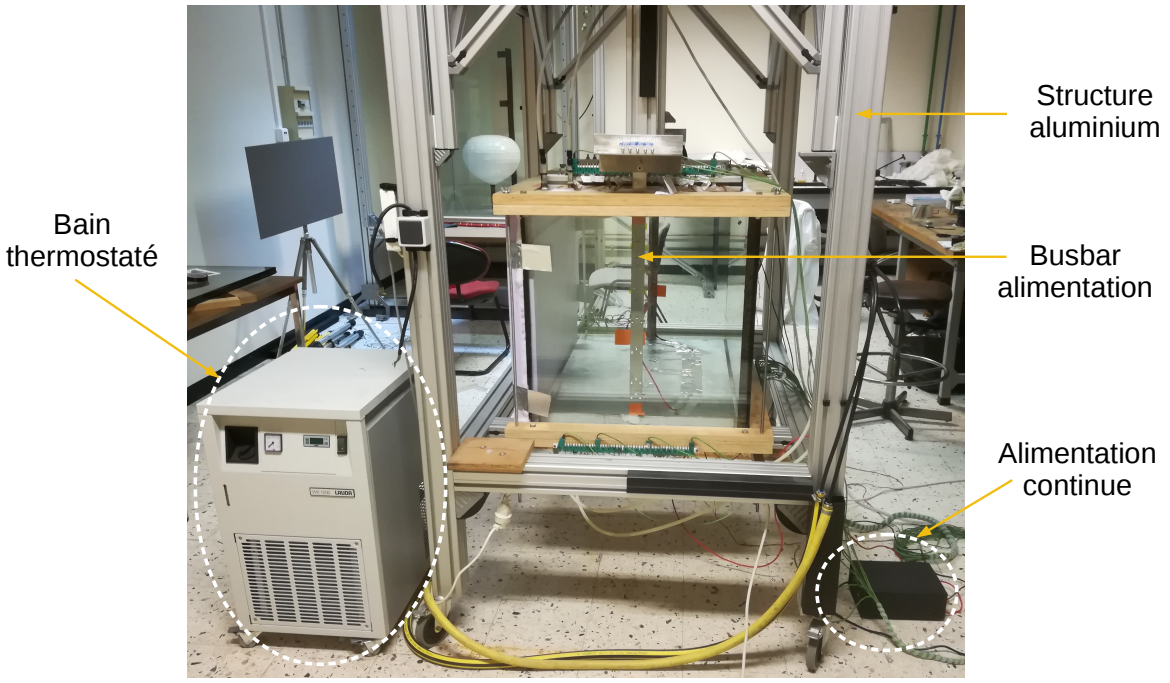


Figure V.10 – Photographie de côté du dispositif expérimental

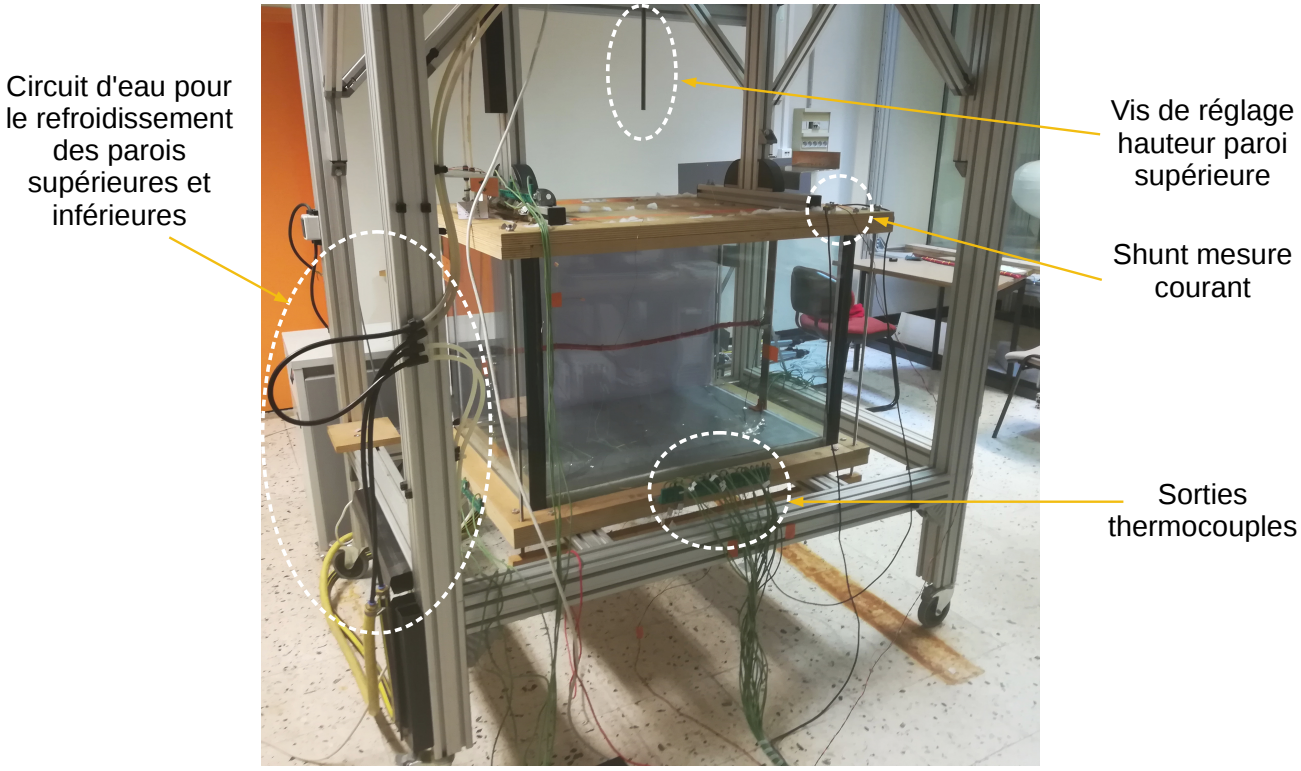


Figure V.11 – Photographie de trois quarts du dispositif expérimental

de l'enceinte. La mesure de tension est quant à elle effectuée directement au niveau des busbars. Les tensions mesurées aux bornes du shunt et du câblage sont relevées par la chaine d'acquisition Texas Instrument grâce à l'ajout d'un module spécifique (SCXI 1125 + SCXI 1328). Les valeurs, une fois amplifiées et filtrées sont traitées à l'aide du même programme Labview permettant de recueillir les données issues des thermocouples.

— **Alimentation** : Le dispositif chauffant, c'est-à-dire le tube de cuivre ou le harnais sous test, est maintenu en position horizontale est alimenté grâce aux *busbars* d'aluminium de largeur 4 cm et

d'épaisseur 3 mm spécialement conçu pour l'expérimentation. Leur section transverse est telle que la puissance thermique dissipée par ces derniers au sein de l'enceinte peut être totalement négligée, et ce pour des niveaux de courant efficaces dépassant 40 A continu.
L'alimentation à découpage utilisée permet d'assurer une alimentation en courant continu de 0 à 40 A pour des tensions comprises dans la gamme [5V – 15V]. La fréquence fondamentale de hachage de 60 kHz a été relevée à l'aide d'une pince de courant et d'un oscilloscope.

V.3.2 Protocole expérimental et corrélation mesurée

Le coefficient d'échange thermique est estimé à partir du relevé des températures de surface du barreau de cuivre à partir de la puissance thermique dissipée par la traversée d'un courant continu fourni par l'alimentation. Ce dernier est donné par l'expression suivante :

$$h = \frac{P_{\text{élec}}}{\pi D L \Delta T} \tag{V.1}$$

- $P_{élec} = UI$: la puissance thermique dissipée par effet Joule où I est le courant continu parcourant le harnais et U la tension aux bornes du câblage.
- D : le diamètre du tube en m
- L : la longueur du tube en m
- ΔT : la différence de température entre la surface et le fluide ambiant (en K)

Les valeurs de courants testées ont été limitées afin de ne pas dépasser la température maximale de la gaine fixée à 105°C, ce qui situe les puissances dissipées dans une gamme de valeurs comprises entre 1 et 26 W.
Les températures des parois inférieures et supérieures sont maintenues quant à elles à une température la plus proche possible de la température de la pièce grâce au bain thermostaté. La température moyenne de l'intérieur de la cavité est acquise à l'aide de 4 thermocouples placés en plusieurs points éloignés des mouvements de convection attendus.

Dès l'instant de la mise en marche de l'alimentation, le relevé en continu de la température de surface du tube présente une évolution exponentielle, dont le temps caractéristique est de l'ordre de l'heure et demi. Ainsi, pour chaque valeur de puissance, le système est considéré stable au bout d'une huitaine d'heures, ce qui réduit en pratique le nombre d'acquisition à une unique mesure par jour.

L'ensemble des résultats obtenus a été consigné dans le tableau V.2.
Le relevé des températures de surface le long du tube (repéré en centimètre par rapport à l'une ou l'autre des extrémités du tube) présente un profil remarquable. En effet, les températures relevées sont systématiquement plus élevées au centre du tube qu'en ses extrémités, ce qui signifie que le coefficient d'échange est plus faible au centre de la cavité. Cette particularité semble être due à :
— d'une part, par l'existence de phénomène de conduction thermique au niveau des busbars et des premiers centimètres du toron
— d'autre part, l'existence de plusieurs modes de convection au sein de l'enceinte, modes dont les apparitions sont régies en partie par les dimensions caractéristiques de cette dernière.
Dans ces conditions, et puisque les écarts de température restent malgré tout assez faible, on choisit de travailler à partir d'un coefficient d'échange h *moyen* pour l'ensemble du barreau. La température globale retenue pour le calcul du coefficient d'échange est ainsi la valeur moyenne des températures intégrées (par la méthode des trapèzes) le long du barreau chauffant.
Le coefficient d'échange thermique est obtenu à partir de la Figure V.12 (corrélation expérimentale du Nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh).
Afin de pouvoir être injecté directement dans le noyau de calcul développé, le coefficient d'échange thermique obtenu est tracé en Figure V.13 en fonction d'une part de la puissance thermique dissipée (courbe orange) et d'autre part en fonction de la différence de température caractéristique ΔT (courbe bleue).Ces deux courbes s'approchent de manière acceptable à l'aide d'un polynôme d'ordre 4.

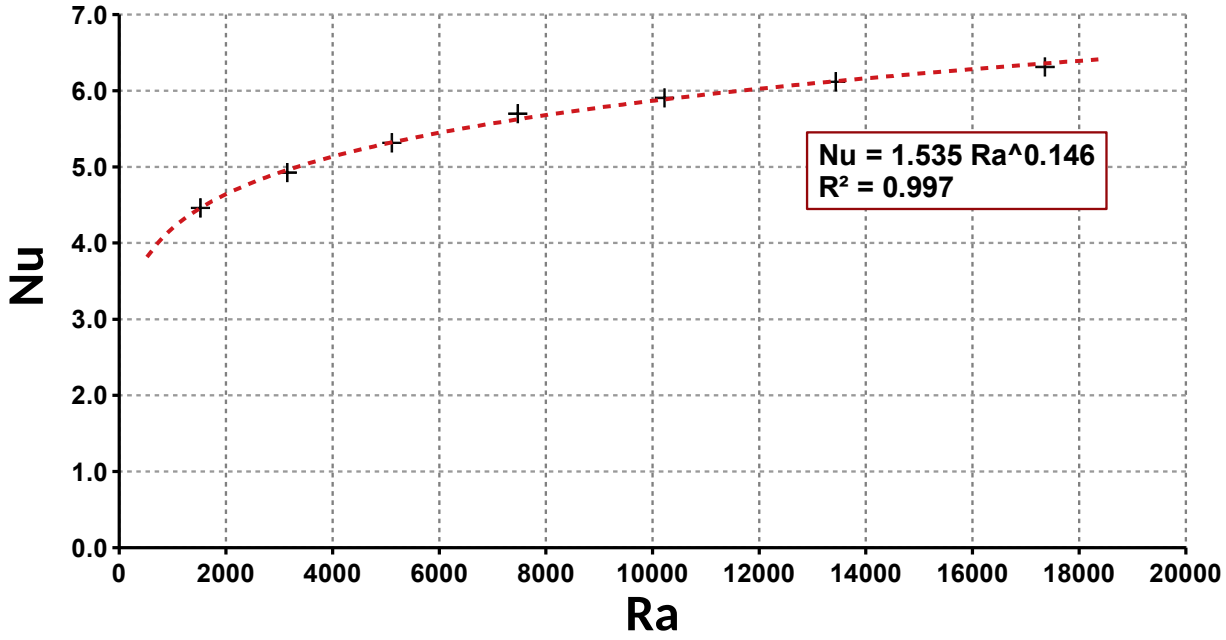


Figure V.12 – Représentation graphique et corrélation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh

V.3.3 Visualisation des mouvements de convection naturelle

La mesure par méthode BOS (pour *Background Oriented Schlieren*) consiste à estimer le déplacement optique provoqué par la présence d'un objet de phase, c'est-à-dire marqué par une variation d'indice optique sensible à deux grandeurs thermodynamiques essentielles que sont la température et la pression, placé sur le chemin entre un fond de référence et le dispositif de visualisation. Un schéma de principe est donné en Figure V.14(a). On trouvera de nombreux compléments théoriques sur cette méthode d'observation *récente* (développée dans les années 2000) dans les manuscrits de thèse de Violaine Todoroff [193] et de François Nicolas [139].

Relevé des températures de surface							
Position (cm)	**I = 16,04 (A)**	**I = 13,96 (A)**	**I = 12,01 (A)**	**I = 10,12 (A)**	**I = 8,12 (A)**	**I = 6,15 (A)**	**I = 4,08 (A)**
5,3	75,7	62,8	52,0	43,7	36,6	31,6	24,8
15,9	78,8	65,3	54,1	45,4	38,0	32,7	25,8
26,5	79,1	65,4	53,9	44,9	37,4	31,9	25,0
37,1	80,1	66,3	54,8	45,6	38,0	32,5	25,6
42,4	80,5	66,7	55,3	46,0	38,4	32,7	25,9
47,7	80,1	66,2	54,8	45,6	37,9	32,3	25,4
58,3	79,4	65,7	54,5	45,4	37,8	32,2	25,4
68,9	78,9	65,4	54,2	45,4	37,9	32,5	25,7
79,5	77,0	64,0	53,3	44,8	37,6	32,1	25,6
Moyenne tube (°C)	79,0	65,4	54,2	45,3	37,8	32,3	25,5
Moyenne température ambiante (°C)	22,4	22,6	22,2	22,2	22,2	22,8	20,9

Table V.2 – Relevé des températures en différents points de la surface du tube de cuivre

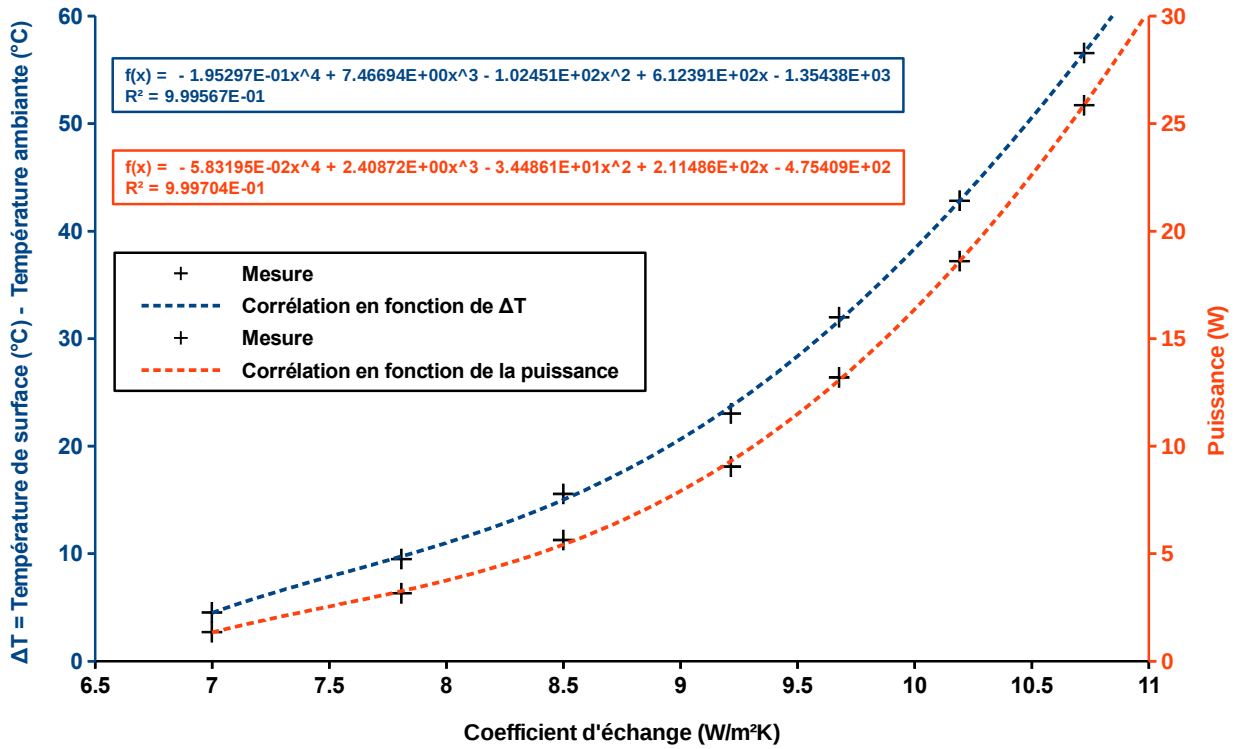
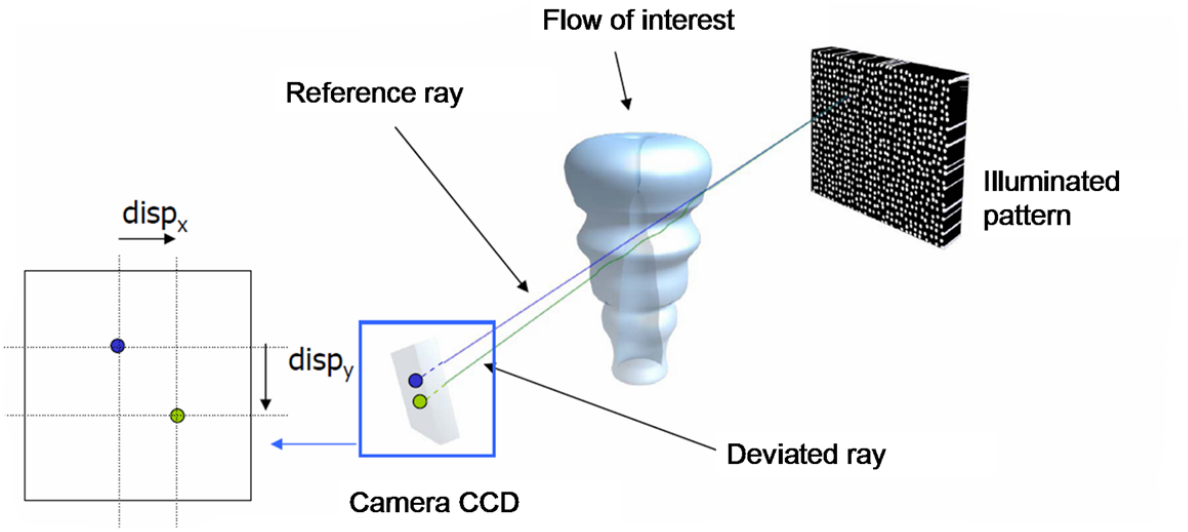


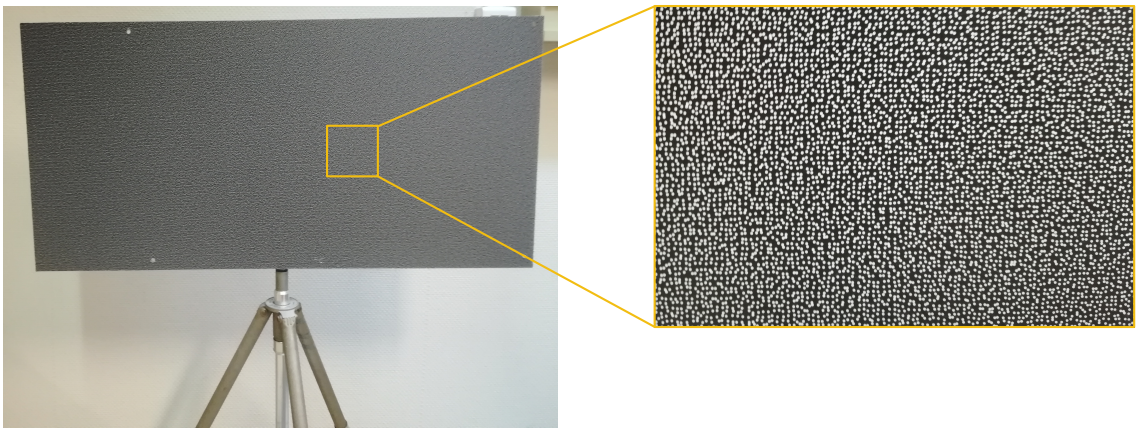
Figure V.13 – Représentation graphique et corrélation en fonction de la puissance dissipée et de la température de surface

Sur le principe, la méthode se base sur la relation de *Gladstone–Dale* qui relie la masse volumique d'un fluide à son indice optique. Ainsi, des variations locales de masse volumique dans un fluide, provoquées par des différences de température dans le cas de la convection naturelle (voir chapitre III), induiront dans le même temps des variations locales d'indice optique qui courberont ainsi différemment les rayons lumineux.
Les mouvements de convection naturelle, d'ordinaires invisibles à l'oeil nu, peuvent ainsi être observés de manière directe. Bien que la méthode ne fournisse que des résultats purement *qualitatifs*, les images obtenues fournissent toutefois de précieuses informations quant à la nature des écoulements autour des objets à refroidir par exemple.

Les images du fond moucheté (cf Figure V.14(b)) acquises durant le processus de refroidissement par convection naturelle sont comparées une à une à l'image de référence qui correspond à une photographie du même motif lorsque les phénomènes de convection sont absents. Le déplacement des points blancs peut alors être précisément calculé en nombre de pixels déplacés (via une méthode de flot optique) ce qui fournit une visualisation directe de la variation d'indice dans la direction d'observation. Il est important toutefois de retenir que les grandeurs sont intégrées le long du chemin optique entre la caméra et le fond d'observation.
Le post-traitement des images acquises par la méthode BOS est réalisé à partir du logiciel FOLKI. Après capture d'une image de référence, le déplacement des points du fond moucheté se visualise directement par une image du type de celle donnée en Figure V.15.
Le déplacement des pixels étant fonction des deux directions de la grille 2D, l'observable de la figure V.15 est la *norme* du vecteur déplacement. L'échelle de couleur permet alors de visualiser directement les mouvements de convection dans la direction longitudinale de l'enceinte (des mesures dans le plan transverse n'ont pas été effectuées). Une couleur bleu foncée correspond à une zone de déplacement nul tandis qu'une couleur rouge foncée indique une zone dont le déplacement de pixel est maximal (en fait à ces endroits la zone est saturée car la variation d'indice optique est trop forte et apparait donc « floue » à la caméra).
La forme générale de l'écoulement, appelée *plume* ou *panache* de convection ressemble à bien des égards au foyer de combustion d'une bougie et on distingue nettement, malgré les zones de forte saturation,



(a) Schéma de principe de la méthode BOS. Issu de : [140]



(b) Mouchetis semi-aléatoire utilisé pour la mesure BOS

Figure V.14 – Caractéristiques de la méthode BOS

deux régimes distincts d'écoulement.

La première zone, rectiligne et longue d'une quinzaine de centimètre pour une largeur de l'ordre de grandeur du diamètre du tube, correspond à la zone d'écoulement *laminaire*. Bien que cela ne soit pas visible à cause du cache optique introduit lors des opérations de post-traitement, c'est dans ce mode d'écoulement que l'air se meut autour de l'ensemble du tube.

La seconde zone correspond quant à elle à un régime d'écoulement turbulent qui se caractérise par de nombreuses irrégularités et un élargissement de l'écoulement au niveau des parois supérieures de l'enceinte. Il s'agit du mode de transfert de chaleur le plus efficace mais aussi le plus difficile à caractériser.

Ces résultats sont présentés ici à titre exploratoire et ont vocation à être interprétés de manière seulement qualitative. Ces mesures pourront être corroborées à l'aide d'autres méthodes bien établies telles que la *PIV* (*Particle Imaging Velocimetry*) et pourront servir de référence expérimentale à une simulation numérique des écoulements au sein de la cavité.

V.4 Comparaisons simulations thermiques et mesures thermocouples

Afin de valider l'outil de calcul thermique, une série de simulations a été réalisée en prenant comme données d'entrée celles obtenues lors de la détermination du coefficient d'échange de chaleur et le coefficient de température de la résistance électrique.

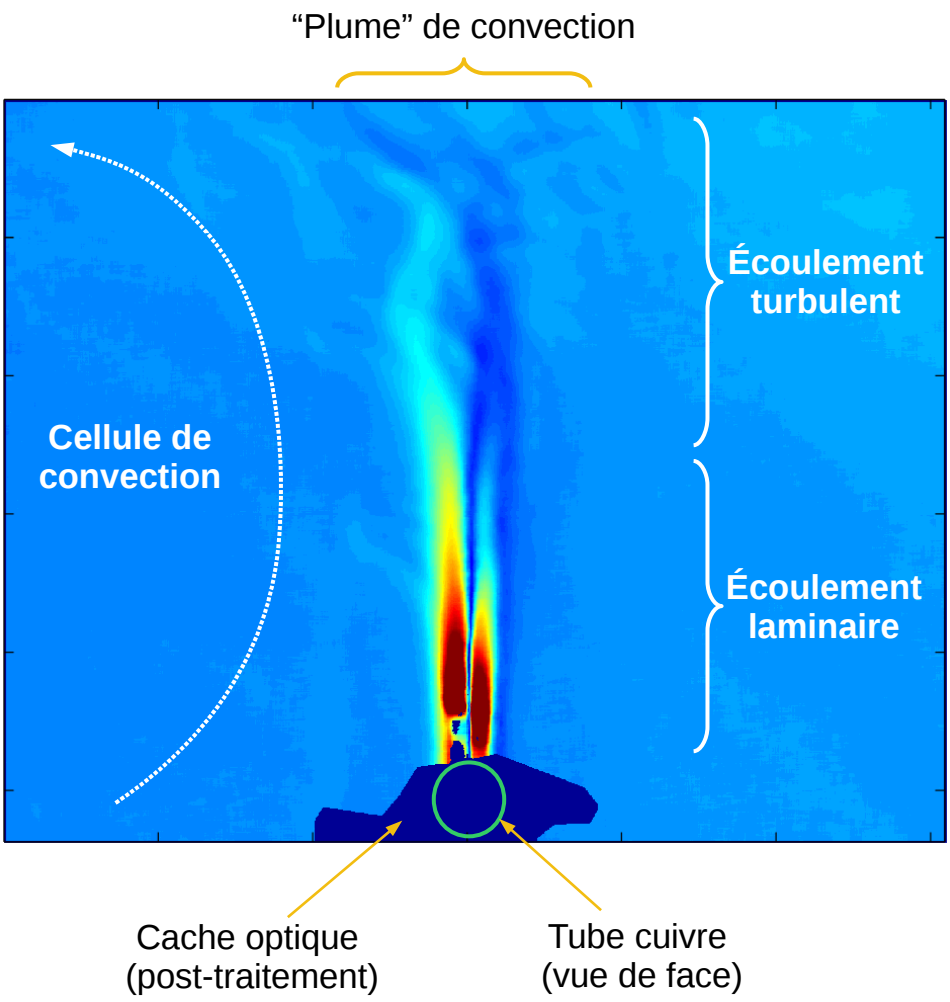


Figure V.15 – Visualisation du flux de convection par la méthode BOS

V.4.1 Cas du tube chauffant

Pour rappel, l'expérience consistait à faire parcourir un courant électrique continu dans un câble effectuant plusieurs aller-retours à l'intérieur d'un tube de cuivre. Dans le détail, le dispositif de chauffe présenté en Fig.V.6 est constitué de *11* câbles de puissance *AWG14* (modélisée par une section pleine de section efficace 2.5 mm2) insérés dans un tube de cuivre de diamètre 16 mm et d'épaisseur 1 mm. La première étape du processus de simulation est la définition géométrique et des propriétés thermophysiques de la coupe transverse à simuler. La Figure V.16 donne le détail de la géométrie finale retenue pour la simulation.

La cross-section retenue est ensuite discrétisée à l'aide de 50 segments pour les contours liés aux câbles et de 150 segments pour les contours du tube de cuivre, soit un total de *1400 éléments*. L'intégration numérique sur chacun de ces segments se fait par une quadrature de Gauss d'ordre 10.

Les données de conductivité thermique des différents matériaux (à savoir, le cuivre pour tube et âme, le PVC pour les diélectriques) ont été prises constantes à partir de données aisément accessibles dans diverses tables [3].

Le milieu inter-câble est quant à lui composé d'air mais aussi de *graisse silicone* nécessaire à l'introduction *pratique* des fils dans le tube de cuivre. La conductivité thermique de la graisse silicone est estimée à environ $\lambda = 5$ W.m^{-1}.K^{-1}, cependant la proportion du mélange air-graisse est une donnée difficilement accessible et n'a pas été mesurée durant la mise en place de l'expérimentation. Par conséquent, la conductivité thermique du milieu inter-câble sera *estimée* à l'aide de plusieurs simulations.

L'étude paramétrique a ainsi vu la valeur de la conductivité thermique du milieu inter-câble varier de

3. https://fr.wikipedia.org/wiki/Conductivit%C3%A9_thermique et https://fr.wikipedia.org/wiki/Liste_de_conductivit%C3%A9s_thermiques

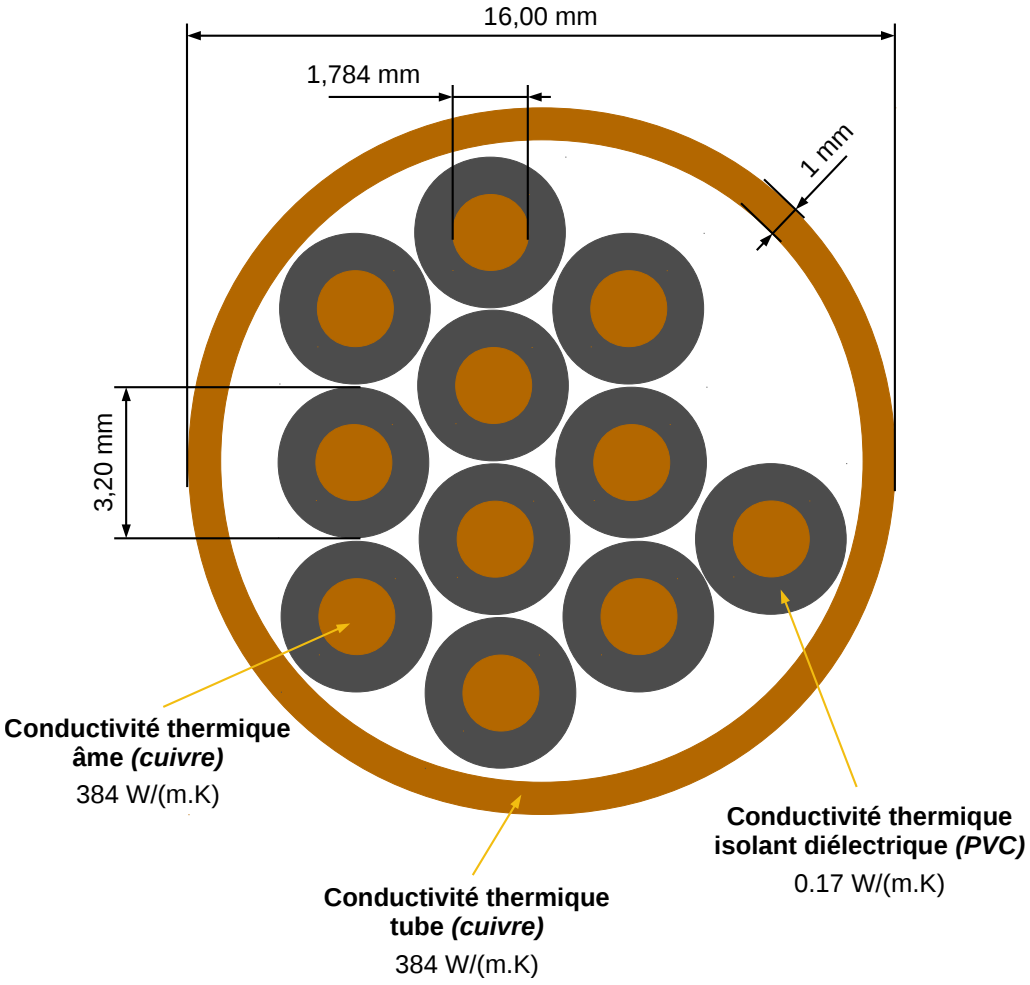


Figure V.16 – Géométrie et propriété thermophysique de la coupe droite simulée

$\lambda = 0.070$ W.m^{-1}.K^{-1} (cas minorant) à $\lambda = 5$ W.m^{-1}.K^{-1} (cas majorant). Les résultats de ces simulations sont donnés en Figure V.17 pour le courant maximal appliqué de 16,04 A.
Puisqu'aucun thermocouple n'a été placé dans le tube, le seul moyen d'estimer la température moyenne interne consiste à mesurer la résistance du câblage, puis à en extraire une température moyenne à partir du coefficient de température α. Les résultats obtenus par cette méthode ont été consignés dans le Tableau V.3.

Intensité (A)	**Résistance mesurée (Ω)**	**Température estimée (°C)**
16,04	0,100452 (283)	82.4
13,96	0,095517 (391)	67.9
12,01	0,091495 (913)	56.1
10,12	0,088269 (856)	46.6
8,12	0,0855631 (870)	38.7
6,15	0,0834699 (460)	32.5
4,08	0,0811628 (650)	25.7
Résistance de référence (Ω)	0,0799958	
Coefficient de température α (K^{-1})	$4,25665 \times 10^{-3}$	
Température de référence (°C)	$22,3$	

Table V.3 – Température interne moyenne estimée à partir du couple tension-courant

Il apparaît alors que les simulations s'approchant le plus des températures internes estimées situent la valeur de conductivité thermique autour de $\lambda = 1$W.m^{-1}.K^{-1}, ce qui semble cohérent avec l'ajout de

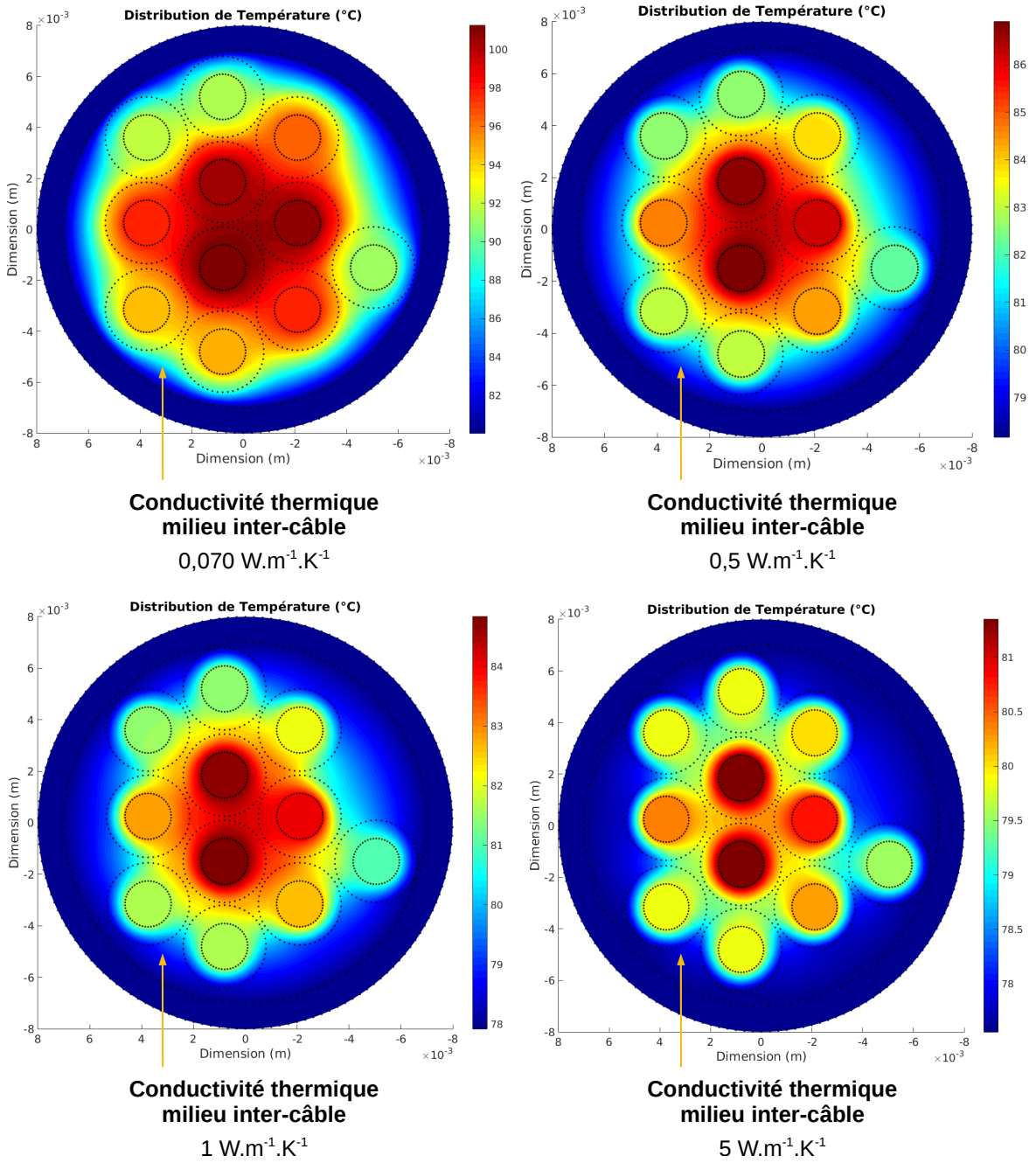


Figure V.17 – Analyse de l'influence de la valeur de conductivité thermique du milieu inter-câble. Échelle de température en °C.

graisse de silicone.

Pour les températures surfaciques, une comparaison directe des simulations aux mesures est possible puisque le barreau de cuivre est équipé de thermocouples sur toute sa longueur. Le graphique de la Figure V.18, présente la comparaison des températures moyennes *simulées* à celles *mesurées* pour les différents niveaux de courants testés.

On observe dans ces conditions une très bonne concordance entre les valeurs obtenues par simulation et celles mesurées. Cependant, comme l'indique la courbe des écarts absolus, le modèle présente une erreur systématique croissante en fonction de l'intensité. Cette surévaluation des températures externes simulées provient principalement du fait que l'interpolation polynomiale utilisée pour établir la corrélation de h a été établie sur la base de températures moyennes à l'ensemble de la surface du tube. Or, comme nous l'avons évoqué précédemment, le profil de température sur la surface du barreau se caractérise par des températures plus élevées au centre qu'en ses extrémités, cette différence de température tendant à augmenter avec les puissances dissipées comme le montre le tableau V.2. Pour

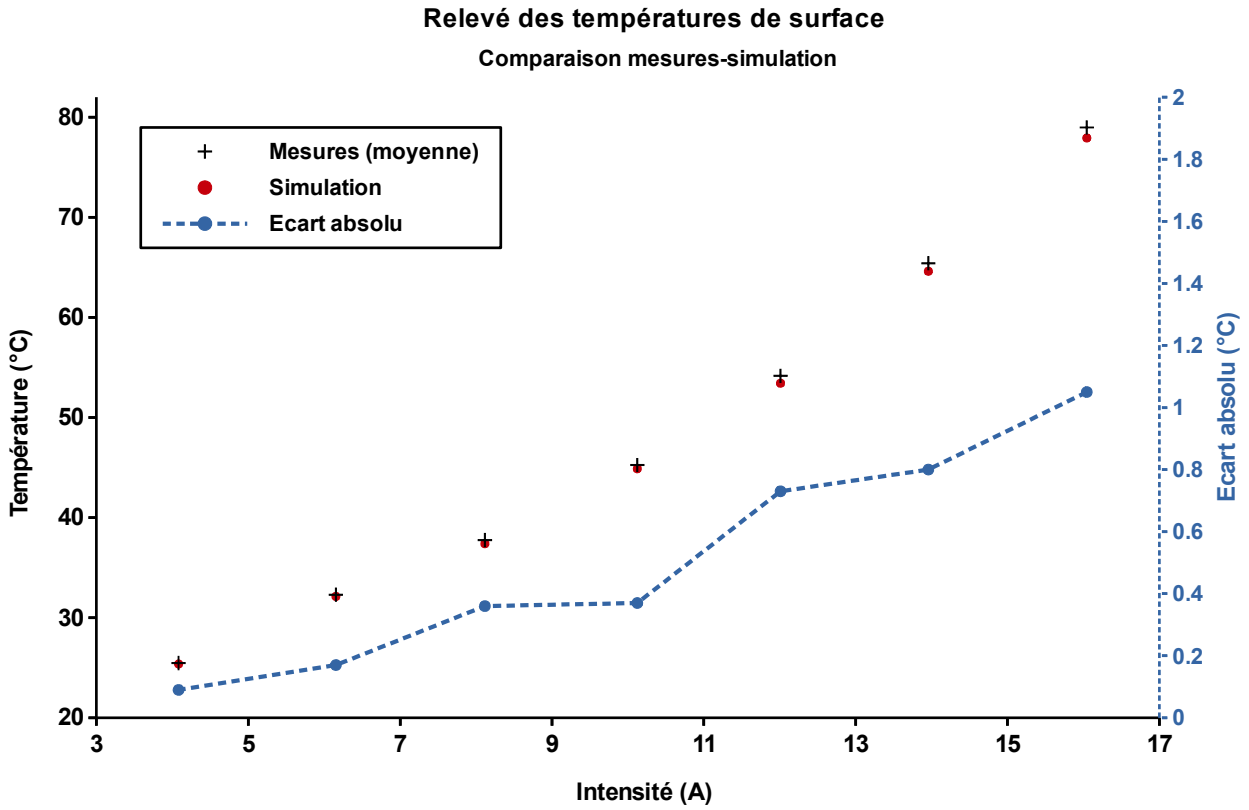


Figure V.18 – Comparaisons simulation/mesure de la température de surface. Conductivité du milieu inter-câble $\lambda = 1$ W.m^{-1}.K^{-1}

cette raison, le coefficient de transfert thermique *global* est en pratique de moins en moins bien estimé au fur et à mesure que la puissance dissipée augmente.

V.4.2 Cas d'un harnais électrique réel

Dans cette section, on présente une seconde série d'expérimentation mise en oeuvre afin de vérifier les capacités du code de calcul à modéliser correctement l'échauffement de harnais de câbles réels, mécaniquement maintenus à l'aide de collier de serrage, encore appelé *tyrap*.

Dispositif expérimental et résultats de mesure thermocouples

Le harnais de câbles testé est présenté en Figure V.2. Il est constitué d'un unique câble AWG14 effectuant 8 A/R sur une longueur de 915 mm. Géométriquement, cette configuration est équivalente dans le plan transverse à 17 câbles parcourus par un courant continu de même intensité.
Les thermocouples de type K sont placés à intervalles réguliers le long du harnais. Cinq d'entre eux sont insérés au centre du harnais afin de relever les *températures internes*. Concernant la mesure des températures de surface, cinq thermocouples ont été placés sur la « face » supérieure du harnais, les cinq derniers thermocouples sur la « face » inférieure (c'est-à-dire diamétralement opposé).
L'enceinte climatique ainsi que les dispositifs d'acquisition sont identiques à ceux utilisés dans la configuration précédente. On relève ainsi comme précédemment les différentes températures pour différents niveaux de courant.
Les valeurs présentées dans la première partie du tableau V.4 sont les températures moyennes entre les thermocouples *supérieurs* et *inférieurs* après intégration par la méthode des trapèzes sur toute la longueur du câble.
Le profil de température longitudinal présente les mêmes caractéristiques que celui du tube chauffant, c'est-à-dire que les températures relevées sont systématiquement plus élevées au centre du câblage qu'en ses extrémités. Les raisons évoquées pour expliquer ce phénomène sont les mêmes que pour la précédente expérience à savoir, l'existence de modes de convection longitudinaux ainsi qu'un phénomène de conduction thermique entre les extrémités du toron et les busbars d'alimentation.

Mesure des températures de surface						
Position (cm)	**I = 13,37 A**	**I = 11,40 A**	**I = 9,44 A**	**I = 8,21 A**	**I = 6,35 A**	**I = 4,94 A**
12,00	55,4	46.0	38,1	34,1	28,5	25,2
28,00	56,8	47.1	38,8	34,6	28,8	25,3
44,00	56,9	47.3	39,1	34,8	29,1	25,6
61,00	57,6	47.5	39,1	34,7	28,8	25,3
78,50	53,4	44.6	37,1	33,3	28,1	25,0
Température moyenne (°C)	**56,4**	**46,8**	**38,6**	**34,4**	**28,7**	**25,3**
Température ambiante (°C)	**21,3**	**20,9**	**20,4**	**20,3**	**20,0**	**19,8**
Coefficient d'échange thermique h $W.^{-1}.K^{-1}$	**10,73**	**10,18**	**9,59**	**9,18**	**8,49**	**7,87**
Correction surface effective (%)	**+ 65,2 %**	**+ 64,8 %**	**+ 64,6 %**	**+ 64,4 %**	**+ 67,8 %**	**+ 71,6 %**

Table V.4 – Relevés des températures de surface dans le cas du harnais électrique réaliste

Mesure des températures internes						
Position (cm)	**I = 13,37 A**	**I = 11,40 A**	**I = 9,44 A**	**I = 8,21 A**	**I = 6,35 A**	**I = 4,94 A**
12,00	62,9	51,3	41,5	36,4	29,8	25,8
28,00	66,0	53,8	43,4	38,1	31,2	27,0
44,00	66,4	53,8	43,2	37,8	30,6	26,3
61,00	65,7	53,4	43,0	37,7	30,7	26,5
78,50	60,4	49,5	40,3	35,6	29,3	25,6
Température moyenne (°C)	**64,9**	**52,8**	**42,6**	**37,4**	**30,5**	**26,4**

Table V.5 – Relevés des températures internes dans le cas du harnais électrique réaliste

Dans le détail, la température de surface le long du rayon du harnais présente toutefois une seconde caractéristique d'intérêt puisque les températures relevées dans la partie basse du harnais sont systématiquement plus élevées que dans la partie supérieure. Cette différence de température entre partie inférieure et supérieure augmentent de plus linéairement avec la puissance thermique dissipée comme le montre le tracé de la figure V.19.

Cet effet était absent lors de la précédente expérimentation puisque le tube de cuivre avait pour effet d'*homogénéiser* la température sur l'ensemble de la surface. Une interprétation directe est que le coefficient de transfert thermique est plus faible dans la partie supérieure de l'enceinte que dans sa partie inférieure ce qui tendrait à prouver l'existence de plusieurs modes de convection dans l'enceinte. Néanmoins, la preuve de cet effet n'a pas été formellement démontrée ici.

En comparaison avec l'expérimentation précédente faisant intervenir le tube de cuivre, il apparait *gloabalement* que les température relevées à la surface du harnais sont sensiblement plus faibles (de

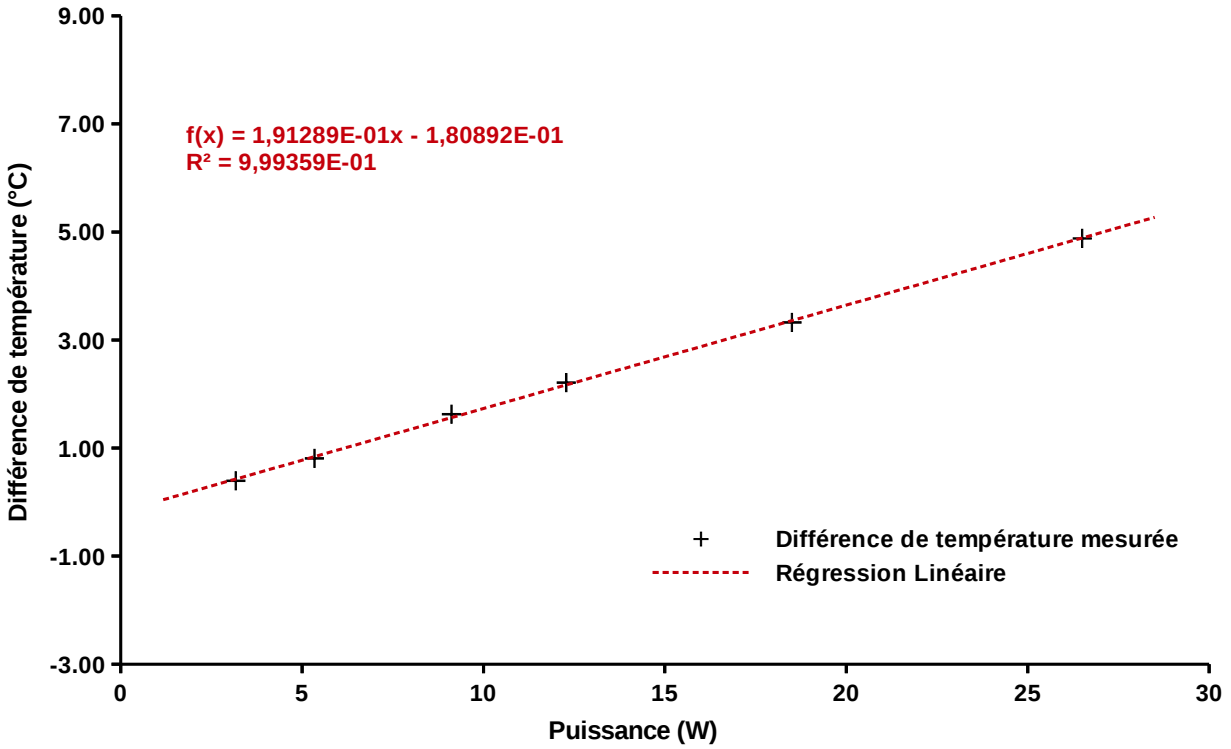


Figure V.19 – Évolution de la différence de température moyenne relevée entre les thermocouples de surfaces supérieurs et inférieurs en fonction de la puissance thermique dissipée

l'ordre de la vingtaine de degrés en moins pour le test à l'intensité la plus élevée), et ce alors que les puissances thermiques dissipées sont du même ordre de grandeur.
Cette observation peut s'expliquer à l'aide de l'hypothèse introduite au chapitre IV concernant la différence existante entre le diamètre apparent du toron et sa surface d'échange effective associée (augmentation de la surface de *mouillabilité*). En effet, la surface géométrique de contact air/solide du harnais testé semble significativement plus grande pour un même diamètre géométrique apparent (dans le cas du cuivre, le tube étant lisse, la surface d'échange était donnée par la surface du cylindre associé).
En notant α l'augmentation de surface, β la diminution de température associée, et en faisant l'hypothèse que le coefficient de transfert reste inchangé, on obtient :

$$h = \frac{P}{S\Delta T} = \frac{P}{\alpha S \beta \Delta T}$$

avec P est la puissance thermique dissipée en W, S la surface d'échange en m^2 et ΔT, la différence de température caractéristique. Cette relation implique :

$$\alpha h = \frac{P}{S\beta\Delta T}$$

Ainsi, en considérant que la corrélation obtenue pour le coefficient d'échange thermique h est toujours valable dans le cas du toron réaliste, il est possible d'estimer l'augmentation de surface par rapport à l'expérimentation précédente à environ +65,4% (voir dernière ligne du tableau V.4).

Simulations thermiques

La méthode proposée au chapitre IV et permettant de fermer *au mieux* un domaine de calcul *circulaire* n'ayant pas fini d'avoir été formellement codé au moment de la rédaction du manuscrit, nous proposons ci-après une adaptation triviale de la précédente série de simulation permettant de rendre compte de l'augmentation de surface d'échange observée.
La cross-section de 17 câbles AWG14 est simplement fermée par une frontière circulaire *fermée* à l'intérieur de laquelle seul le phénomène de conduction thermique est considéré (cf Figure V.20). Le

diamètre minimum permettant d'entourer la structure est de 16, 9 mm, soit 0, 9 mm de plus que dans le cas du barreau de cuivre.
La prise en compte de l'effet d'augmentation de « mouillabilité » sera ainsi appliquée à l'ensemble du contour de frontière de manière uniforme via une modification dans les mêmes proportions de la corrélation du coefficient de transfert de chaleur. Concrètement, l'astuce de calcul revient à appliquer sur la frontière de domaine une corrélation de h augmentée de +59.78 % (ici, la valeur n'est pas exactement égale à 65,4% puisque le diamètre du contour de frontière n'est pas égal à 16 mm mais à 16,9 mm).

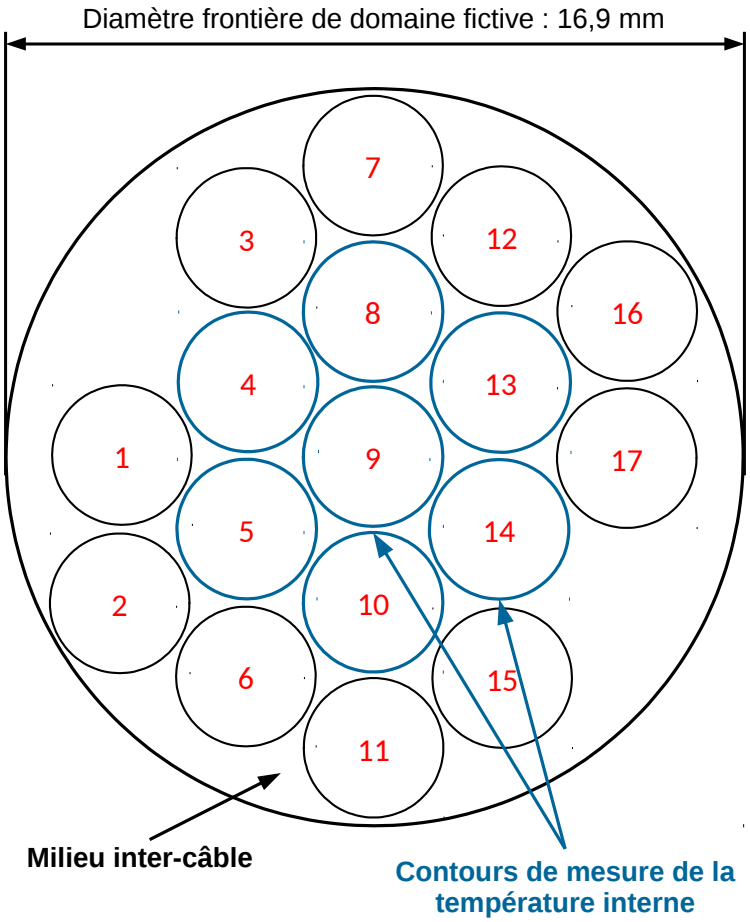


Figure V.20 – Définition géométrique du domaine de calcul pour la simulation du harnais réaliste

A l'intérieur de la zone de conduction, plusieurs valeurs de conductivité thermique *constantes* ont été testées pour modéliser le milieu inter-câble, l'objectif étant de se rapprocher le plus possible de la conductivité thermique de l'air comprise entre 0.020 et 0.030 $W.m^{-1}.K^{-1}$ dans la gamme de température visée.
La température de surface retenue correspond à la moyenne des températures relevées sur la frontière du domaine. La température intérieure est quant à elle prise comme la moyenne des températures relevées sur les contours proches du centre du toron et apparaissant en bleu sur la figure V.20. Les résultats bruts obtenus ainsi qu'un exemple de comparaison simulations/mesures sont respectivement reportés dans le Tableau V.6 et la Figure V.21.
L'analyse des résultats montre une fois de plus la difficulté d'estimer la conductivité du milieu interne, notamment lorsque celle-ci varie sensiblement avec la température comme c'est le cas pour l'air. Si la valeur de $\lambda = 0.0270$ $W.m^{-1}.K^{-1}$ tend à reproduire correctement les températures de surfaces mesurées avec des écarts absolus ne dépassant pas 0,9 °C, cette valeur de conductivité surestime grandement les températures internes (jusqu'à +30 °C).
Il apparaît d'après le Tableau V.6 que la valeur de conductivité du milieu inter-câble $\lambda = 0.1$ présente le meilleur accord avec les valeurs mesurées. La courbe présentée montre que les températures de surface simulées tendent à être surestimées par le code tandis que dans le même temps la simulation des tempé-

Comparaison simulation / mesure des températures de surface					
Intensité (A)	**Mesure directe**	**Simulation $\lambda_{inter\text{-}cable}$= 0.0270 W.m^{-1}.K^{-1}**	**Simulation $\lambda_{inter\text{-}cable}$= 0.050 W.m^{-1}.K^{-1}**	**Simulation $\lambda_{inter\text{-}cable}$= 0.0750 W.m^{-1}.K^{-1}**	**Simulation $\lambda_{inter\text{-}cable}$= 0.1 W.m^{-1}.K^{-1}**
13,37	56,4	56,3	54,8	54,2	53,9
11,40	46,8	45,9	45,1	44,8	44,7
9,44	38,6	37,6	37,3	37,1	37,1
8,21	34,4	33,5	33,3	33,2	33,2
6,35	28,7	28,2	28,2	28,1	28,1
4,94	25,3	25,1	25,0	25,0	25,0
Comparaison simulation / mesure des températures internes					
Intensité (A)	**Mesure directe**	**Simulation $\lambda_{inter\text{-}cable}$= 0.0270 W.m^{-1}.K^{-1}**	**Simulation $\lambda_{inter\text{-}cable}$= 0.050 W.m^{-1}.K^{-1}**	**Simulation $\lambda_{inter\text{-}cable}$= 0.0750 W.m^{-1}.K^{-1}**	**Simulation $\lambda_{inter\text{-}cable}$= 0.1 W.m^{-1}.K^{-1}**
13,37	64,9	94,5	77,5	71,0	67,7
11,40	52,8	71,7	60,8	56,5	54,3
9,44	42,6	54,3	47,5	44,8	43,4
8,21	37,4	45,7	40,8	38,9	37,9
6,35	30,5	35,3	32,6	31,4	30,9
4,94	26,4	29,2	27,6	27,0	26,6

Table V.6 – Comparaison mesures/simulations pour différentes valeurs de conductivité thermique inter-câble dans le cas du harnais réaliste

ratures internes fournit systématiquement des valeurs plus faibles que celles mesurées. Néanmoins, les résultats obtenus sont cohérents avec ceux mesurés, malgré les nombreux biais de mesure concernant l'estimation du coefficient d'échange thermique et la valeur de conductivité thermique inter-câble.

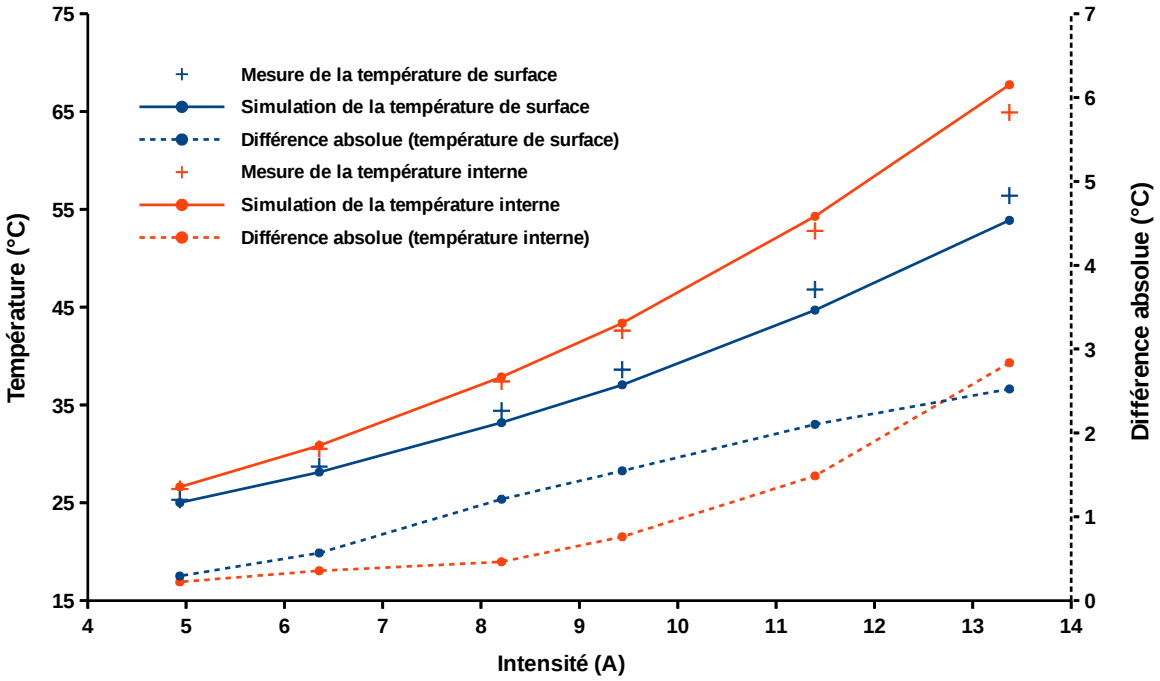


Figure V.21 – Tracé des différentes courbes de comparaison simulations/mesures dans le cas d'une conductivité thermique $\lambda_{inter\text{-}câble}$=0.1 W.m^{-1}.K^{-1}

V.4.3 Conclusion

Les prédictions fournies par le code de calcul développé sur la base des éléments de frontière sont conditionnées par la connaissance précise des données d'entrées suivantes :

— le coefficient de température de la résistance électrique
— le coefficient d'échange thermique
— la conductivité thermique des différents éléments composant la géométrie

La détermination des différentes conductivités thermiques n'ayant pas fait l'objet d'expérimentation dans ce chapitre, les résultats obtenus restent acceptables dans la mesure où les valeurs de conductivité pour les différents milieux inter-câble ont été choisis à chaque fois parmi plusieurs possibles. Ce recalage nécessaire des modèles devra faire l'objet d'améliorations à apporter dans le code de calcul, notamment par une meilleure estimation des valeurs de base ainsi que par la prise en compte des milieux non-linéaires pour lesquels la valeur de conductivité varie sensiblement avec la température.

Le second enseignement de ces comparaisons concerne la difficulté de définir correctement les surfaces d'échange air/toron dans le cas des milieux ouverts comme dans le cas du harnais électrique réaliste. A cette fin, la stratégie spécifique mise en place au chapitre IV devra être programmée et intégrée au code de calcul.

V.5 Expérimentations sur les lignes de transmission

L'analyse bibliographique des chapitres II et III a montré que les paramètres électriques primaires dépendent à la fois de la *fréquence* des signaux transportés et de la *température* des lignes. Afin de pouvoir visualiser de manière directe ces effets et tenter de reproduire ces résultats par simulation, le dispositif expérimental introduit précédemment a été modifié pour permettre de mesurer les réponses électromagnétiques entre différents fils en fonction de la température de la ligne.

Une modélisation du dispositif expérimental sera également entreprise à l'aide du code de calcul CRIPTE afin de réaliser une comparaison directe simulations-mesures.

V.5.1 Dispositif expérimental et protocole de mesure

Le dispositif expérimental permettant de mesurer les couplages EM reprend la plupart des équipements introduits lors des deux précédentes expérimentations. Les busbars ont été rallongés afin de pouvoir sortir de l'enceinte climatique comme indiqué sur le schéma de la figure V.22.

La configuration testée consiste en un harnais de câbles monofilaires AWG14 (effectuant 6 A/R), de diamètre similaire à celui utilisé lors de l'expérimentation précédente dans lequel 4 câbles de signaux (trois monofilaires AWG 22 et une paire torsadée AWG24) ont été insérés (cf. Figure V.25). Ces différentes lignes ont été reliées en leurs extrémités à l'aide de connecteurs de type SMA. Ces connecteurs sont supportés par deux équerres d'aluminium électriquement connectés aux busbars (Cf V.24).

Le circuit d'alimentation est réalisé en connectant le « - » de l'alimentation à l'un des busbars et le « + » de l'alimentation directement à l'une des bornes du câble « chauffant » comme le montrent les Figures V.22 et V.25. Les deux busbars ainsi que la seconde borne du câble chauffant sont portés au même potentiel par l'intermédiaire d'un monofilaire AWG14 placé au centre du harnais (fil noir de référence sur la figure V.27).

Afin de mesurer les températures internes et de surfaces, un ensemble de 15 thermocouples a été disposé uniformément le long du harnais.

Les mesures de couplage et de transmission ont été réalisées via l'utilisation d'un analyseur de réseau (VNA pour *Vectorial Network Analyser*) de marque Agilent (Figure V.23). Les paramètres S ont été relevés sous une condition de charge de 50 Ω pour l'ensemble des lignes.

Afin d'évaluer l'influence de la température sur la mesure des paramètres S dans la bande fréquentielle [5 Hz – 500 MHz], deux séries de mesures ont été effectuées :

— la première sans courant d'échauffement dans le câble de puissance (Alimentation Off), c'est-à-dire que le harnais est à l'équilibre thermique avec l'ensemble de l'enceinte
— la seconde avec courant d'échauffement (Alimentation On) faisant avoisiner la température interne du harnais autour de 100 °C

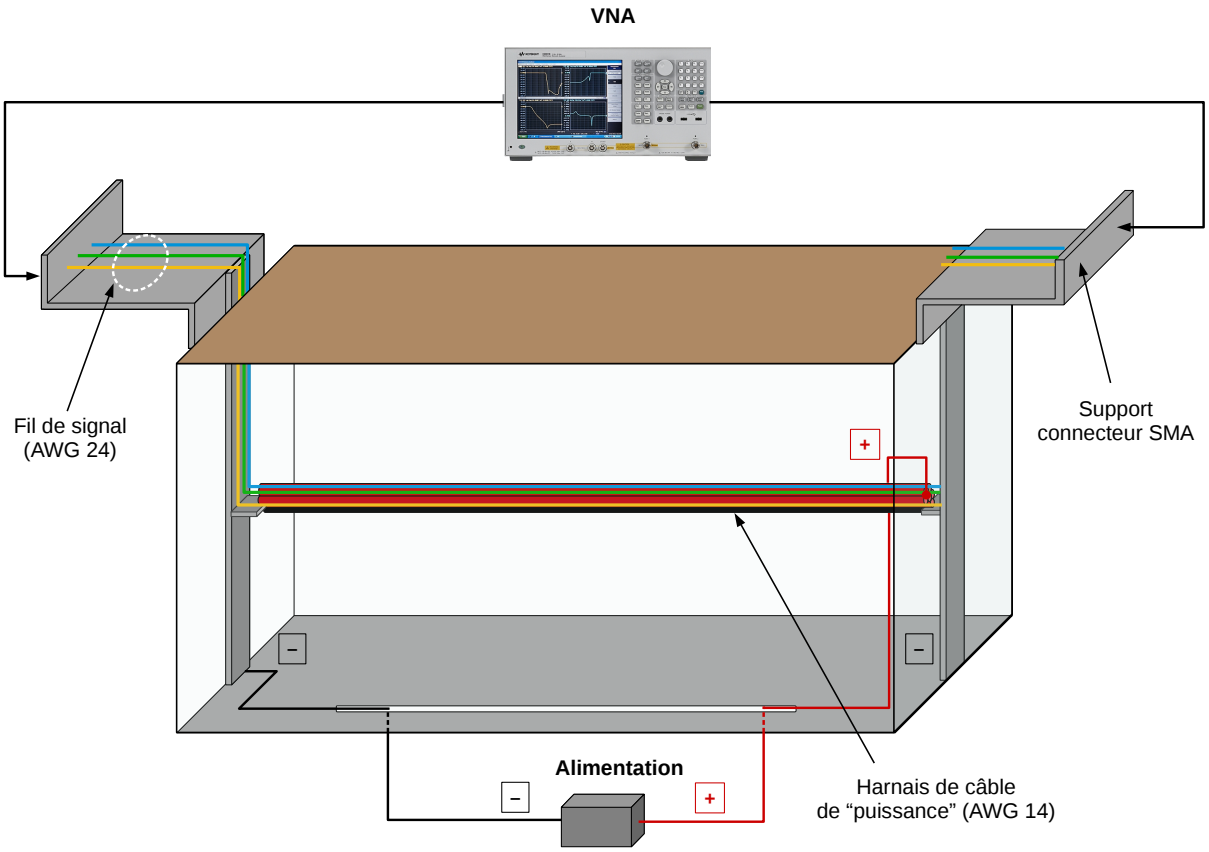


Figure V.22 – Schéma du montage utilisé pour l'expérimentation « hyperfréquence »

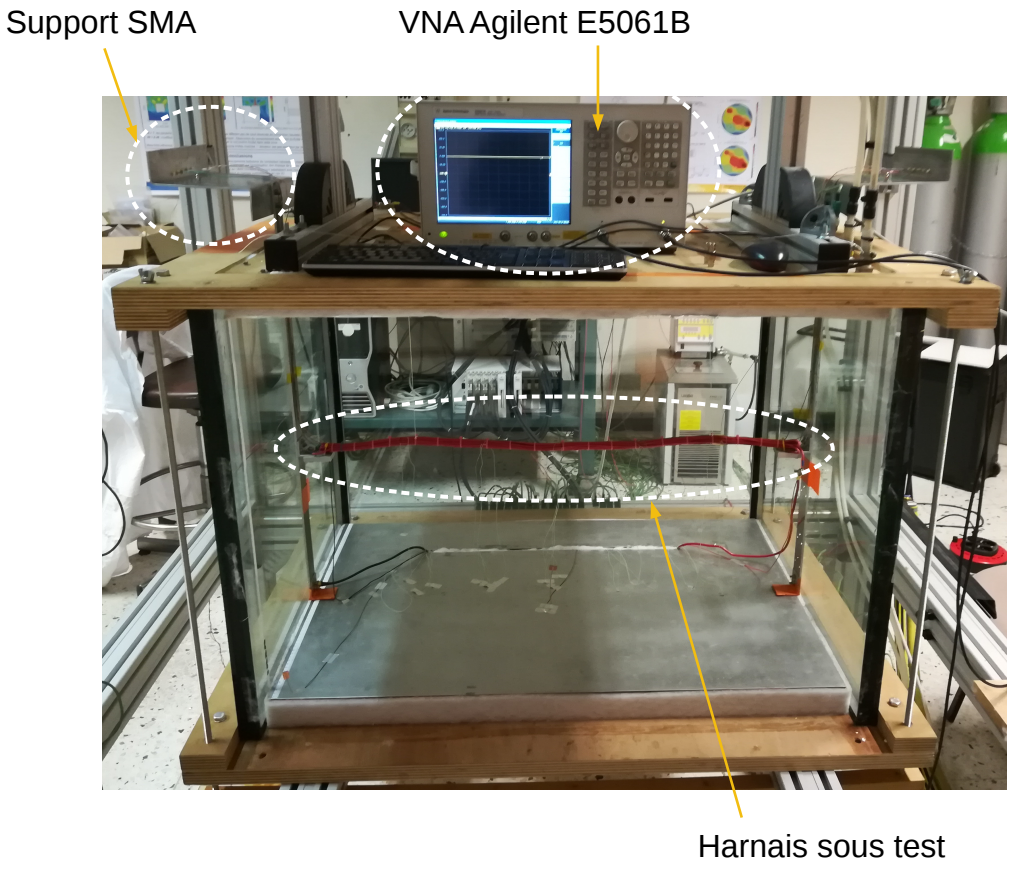


Figure V.23 – Montage de l'expérimentation couplée CEM-Thermique

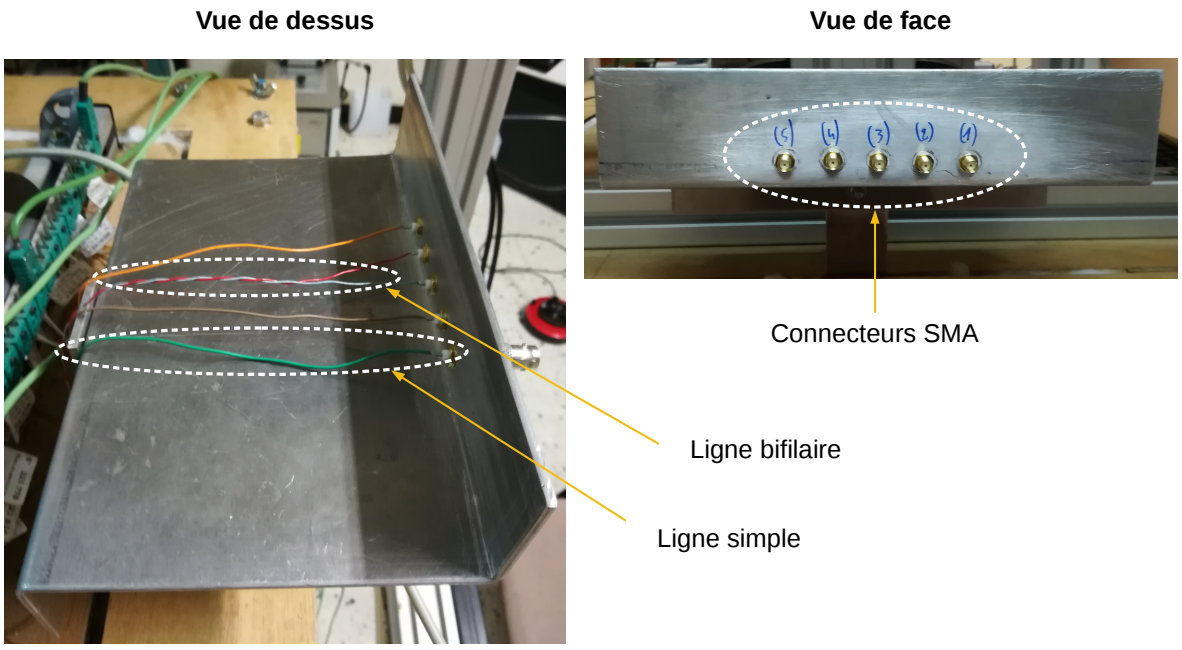


Figure V.24 – Détail des lignes et connexions SMA

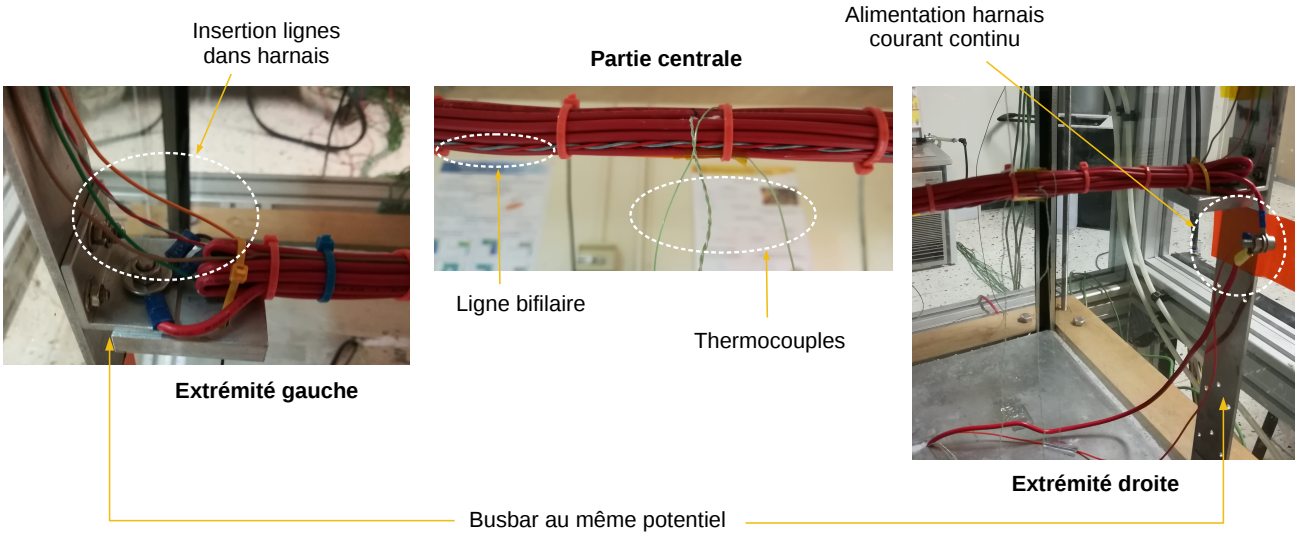


Figure V.25 – Détails du harnais sous test

De manière similaire aux deux précédentes expérimentations, les températures relevées lors de l'échauffement du toron sont consignées dans le tableau V.7

V.5.2 Modélisation électromagnétique de la configuration expérimentale

Dans cette expérimentation, nous mesurerons directement l'évaluation de l'influence de la température sur la réponse fréquentielle du harnais de câbles précédemment décrit. Afin de disposer d'observables de simulation susceptibles d'être directement comparés à ces mesures, nous emploierons le logiciel CRIPTE.

Ce logiciel est basé sur l'application de la topologie électromagnétique décrite dans la section II.5 du Chapitre II. La première étape de la simulation consiste donc à décomposer *topologiquement* notre configuration expérimentale en plusieurs « zones » représentant le harnais sous test ainsi que ses conditions d'interconnexion (voir Figure V.26).

Le toron principal, comportant à la fois le câble « chauffant », les câbles signaux et le câble de référence de masse entre les deux busbars, peut être vue comme une partie unitaire, représenté par le *Tube n° 3* en Figure V.26. Une vue schématique détaillée de la cross-section du Tube n° 3 est donnée en Figure

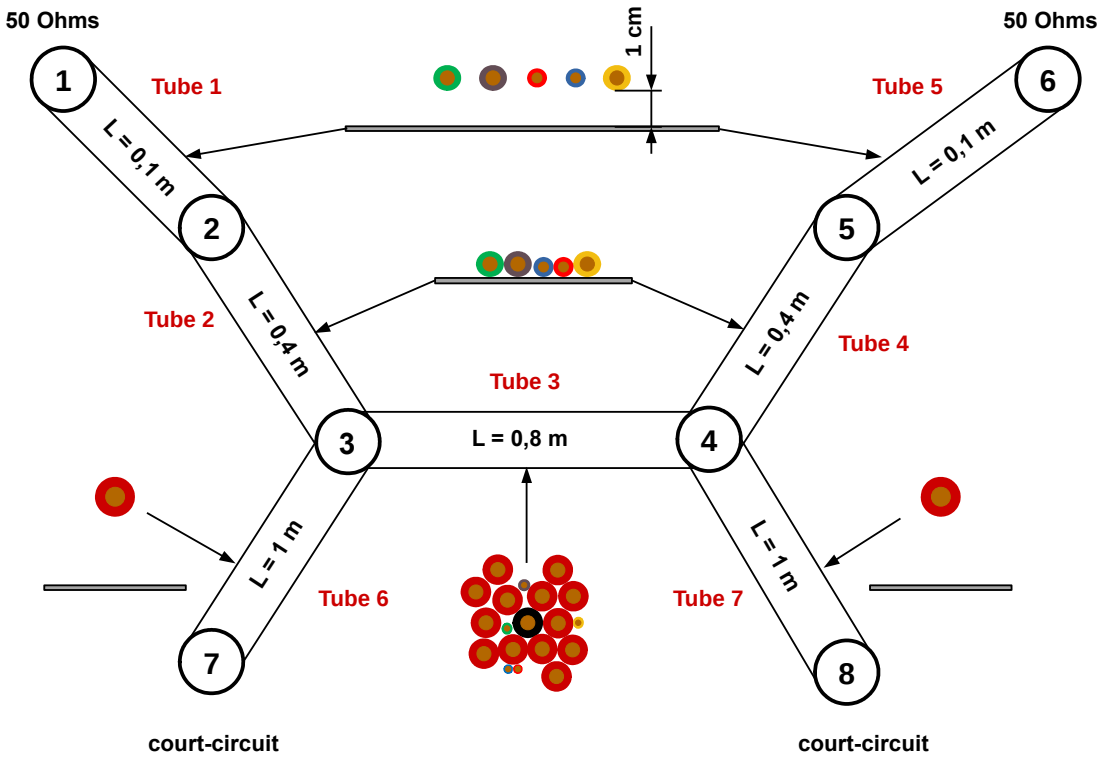


Figure V.26 – Schéma du réseau topologique associé à la modélisation CRIPTE

V.27.

Les tubes n° 2 et 4 modélisent le cheminement des câbles de signaux le long des busbars jusqu'aux équerres de connexion situées à l'extérieur de l'enceinte. Les tubes n° 1 et 5 modélisent quant à eux le cheminement des câbles le long des équerres jusqu'aux connecteurs SMA (cf partie gauche de la Figure V.24).

Enfin, la modélisation du circuit d'alimentation des câbles de puissance se fait à l'aide des Tubes n° 6 et 7. Dans la représentation topologique, les continuités électriques sont réalisées au travers de jonctions représentées par des cercles dans le graphe. Au niveau des jonctions terminales des Tubes 1

Alimentation On → I=19,6 A / P=44,47 W						
Position (cm)	**12,00**	**28,00**	**44,00**	**61,00**	**78,50**	**Température moyenne (°C)**
Température interne (°C)	89,2	95,1	93,6	95,4	87,0	**93,0**
Température de la surface supérieure (°C)	80,9	83,2	85,9	81,4	77,7	**82,4**
Température de la surface inférieure (°C)	73,7	78,3	82,6	72,0	69,0	**76,0**
Alimentation Off → Température enceinte et harnais : 23,0 °C						

Table V.7 – Relevées des températures pour l'expérimentation « hyperfréquence »

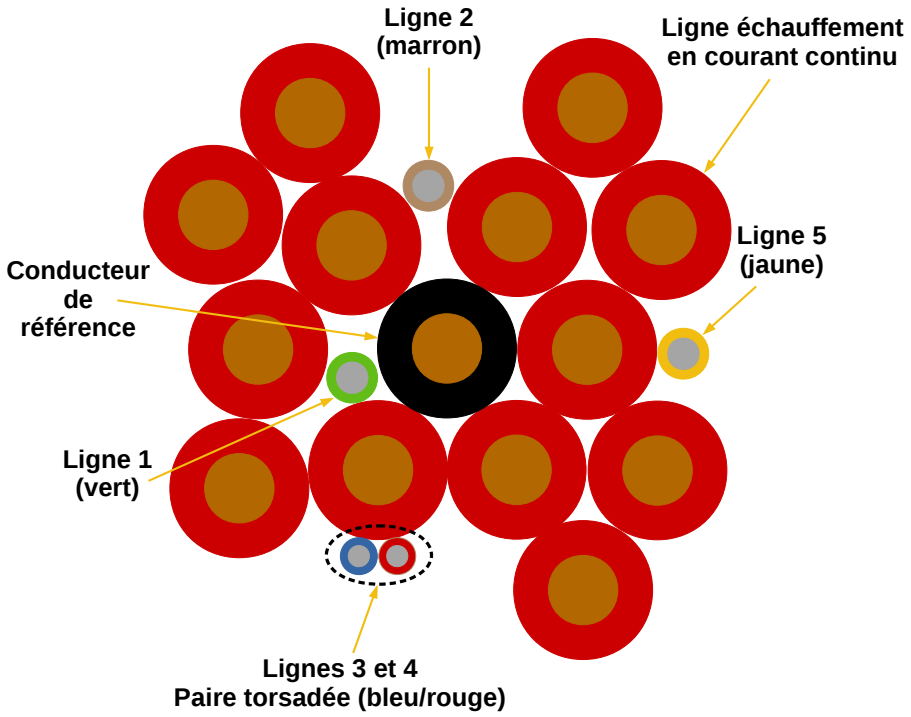


Figure V.27 – Géométrie de la coupe droite fournie par ALEACAB

et 5, les lignes de transmission ont été chargées sur des impédances de $50\ \Omega$ tandis que des éléments de type *court-circuit* placés aux jonctions 7 et 8 permettent de modéliser la faible impédance interne du générateur de courant débitant sur les câbles de puissance.
La seconde étape de la modélisation consiste à déterminer, à partir des cross-sections obtenues par ALEACAB, les matrices R,L,C et G de chacun des tubes.
Dans un premier temps, le calcul des paramètres électriques primaires est réalisé sans tenir compte de l'échauffement de la ligne. Ceux-ci servent alors de base à une première résolution de l'équation BLT permettant ainsi de déterminer une première réponse des lignes du harnais sous la forme de paramètres S.
Dans l'expérimentation « réelle », l'échauffement du harnais sous test est réalisé en faisant parcourir un courant continu dans le câble de puissance. Dans la simulation CRIPTE, l'influence de la température sur les paramètres électriques primaires se fait en première approximation en modifiant seulement les matrices résistances des tubes n° 3, 6 et 7 selon la procédure détaillée en Chapitre IV avant de recalculer de nouveaux paramètres S de la ligne.

V.5.3 Analyse des résultats

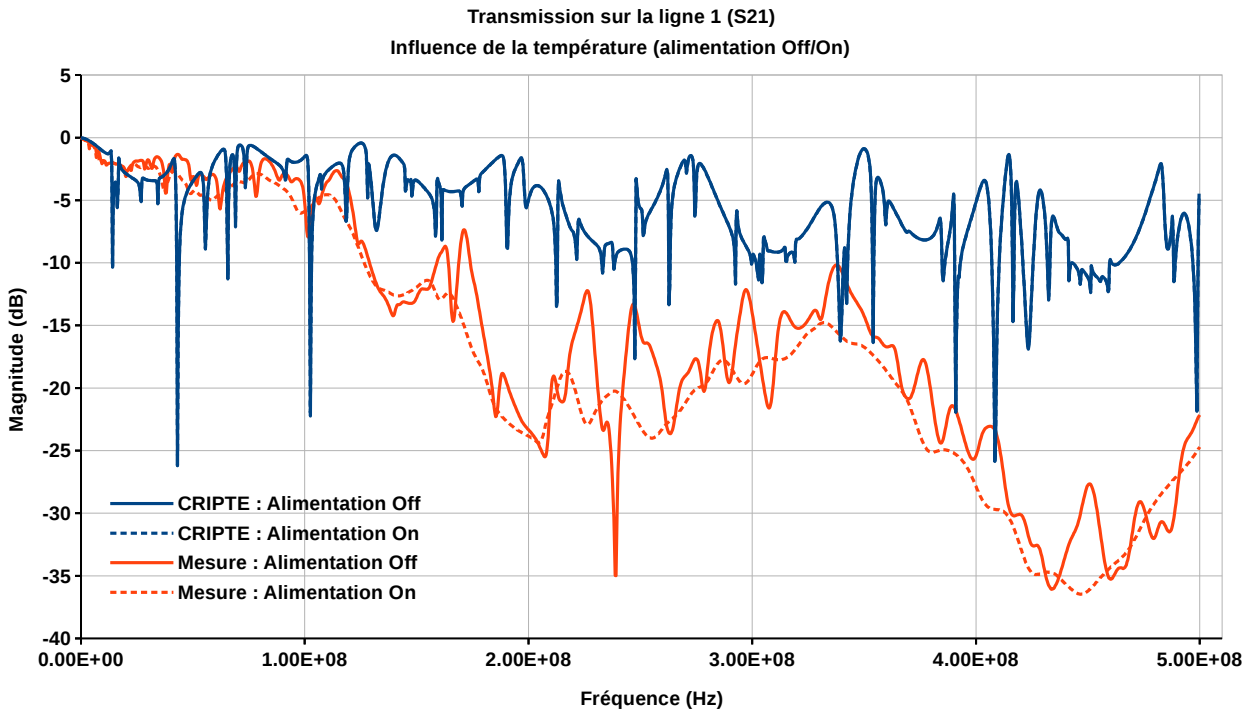
La totalité des mesures de paramètres S est donnée en Annexe B. On s'intéresse en particulier aux phénomènes de transmission et de couplages entre deux lignes.
L'analyse effectuée ici a largement bénéficié des expertises de Michael RIDEL et de Jean-Philippe PARMENTIER. La très grande largeur de bande considérée, [5 Hz – 500 MHz], couvre les applications de type ligne de puissance pour lesquelles une borne fréquentielle haute de 10 MHz est envisageable mais aussi les applications de type *courant porteur en ligne* (CPL) haut débit pour lesquelles l'emploi d'une fréquence haute de 500 MHz peut être justifiée.

Mesures en transmission

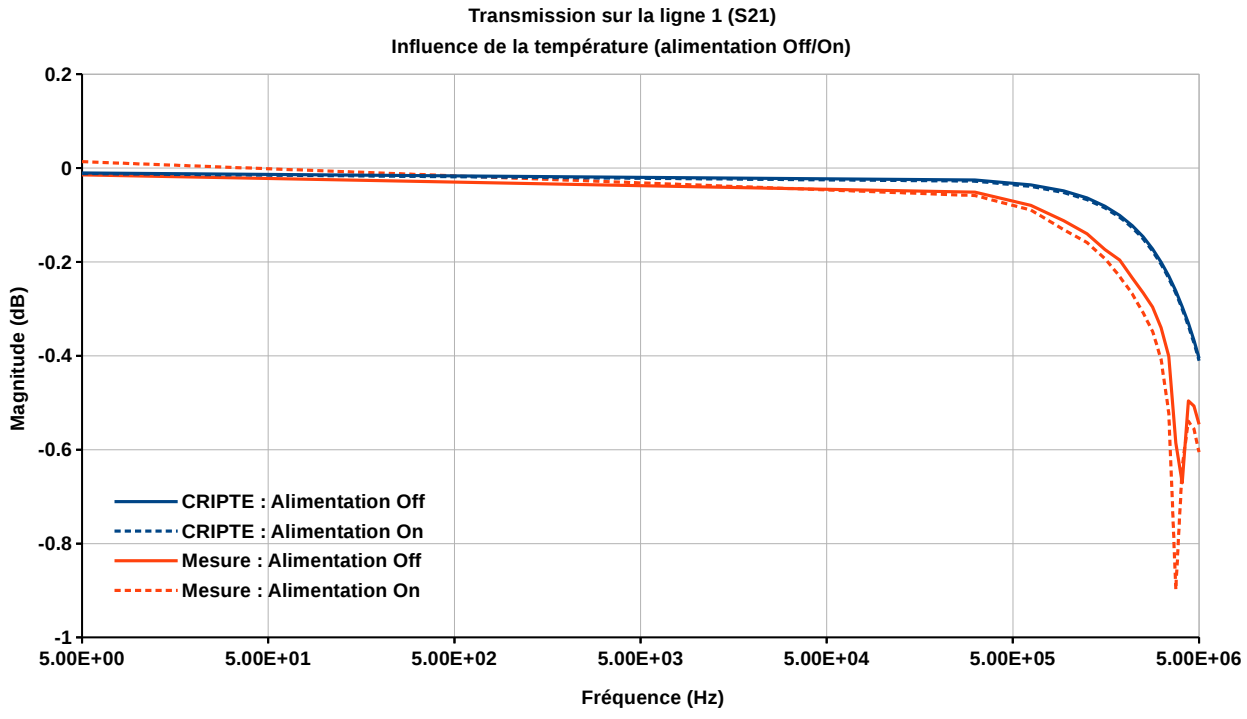
La Figure V.28 présente la réponse d'un paramètre de transmission « S_{21} » (courbe en orange sur la figure), obtenue sur l'un des câbles monofilaires en prenant en compte l'influence d'un éventuel échauffement (alimentation Off / On).
En basse fréquence, et ce indépendamment de l'échauffement, la réponse de transmission mesurée montre que l'énergie est complétement transmise aux pertes résistives près. Ces pertes résistives sont

liées principalement à la résistance « continue » de la ligne ainsi qu'au phénomène d'effet de peau apparaissant un peu plus haut en fréquence (cf Figure V.28(a)).

A partir de 100 MHz, on observe une décroissance « moyenne » de la réponse. Cette observation est régulièrement faite dans cette gamme fréquentielle au niveau de la réponse des câbles. Cette décroissance peut être reliée à plusieurs phénomènes physiques. Les travaux menés dans la thèse de Laurent Paletta [146] ont montré qu'en présence de pertes diélectriques élevées, le paramètre S_{21} décroissait fortement au-delà d'une centaine MHz mettant en évidence que l'énergie injectée dans la ligne était, entre autre, dissipée en pertes diélectriques. Laurent Paletta a également démontré que



(a) Vue sur l'ensemble de la bande 5 Hz - 500 MHz



(b) Focus sur la partie basse fréquence. Bande : 5 Hz - 5 MHz

Figure V.28 – Exemple de comparaison mesure-CRIPTE sur la transmission d'une ligne

l'effet des pertes par effet de peau apparaissait négligeable par rapport à celle-ci en haute fréquence, les pertes diélectriques variant en $j\omega$ [146].
Une seconde cause possible pour expliquer cette décroissance est liée au phénomène de rayonnement lorsque la ligne possède un comportement de type « antenne ». Du point de vue de la ligne, les pertes énergétiques par rayonnement peuvent se traduire par une résistance linéique supplémentaire. Cette résistance dépend de la géométrie de la ligne et de la géométrie de son environnement. Celle-ci est donc difficile à évaluer sans l'utilisation d'un modèle 3D. Il est cependant établi que ces pertes sont bien supérieures à celle par effet de peau [123].
Concernant les différentes variations du signal, on observe que les maximums sont bien liés à la réponse de la ligne correspondant aux fréquences de résonance en $\lambda/2$ de celle-ci ; une fréquence de 84 MHz est identifiée et équivalente à une longueur de ligne d'environ 1,78 m ce qui est cohérent avec la valeur moyenne de la configuration d'essai. Concernant les autres variations, celles-ci peuvent être causées par les inhomogénéités d'installation du harnais sous test (5 tronçons différents au niveau de la configuration, cassure sur le routage du câble et circuit de référence de masse non uniforme).

Mesures en couplage

La figure V.29 présente le couplage entre deux monofilaires exprimé sous la forme d'un paramètre S. On constate une nouvelle fois l'existence de fortes pertes au-delà de 100 MHz. Les mêmes hypothèses que celles formulées pour la réponse en transmission sur un fil (Figure V.28), peuvent être formulées ici. Néanmoins, ces pertes sont moins prononcées, à cause du couplage de nature différentielle.

Influence de la température sur les résultats de mesure/simulation

La prise en compte de l'échauffement dans la mesure des paramètre S (Figures V.28 et V.29) met en évidence une modification très *faible* de la résistance continue en basse fréquence, ainsi que son prolongement sur le phénomène d'effet de peau.
Au-delà de 100 MHz, on observe néanmoins une atténuation supplémentaire ainsi qu'un amortissement prononcé des pics de résonance. Ceci démontre que les deux types de pertes mentionnées précédemment (diélectrique et/ou en rayonnement) sont influencés par la montée en température de leur environnement.
Du point de vue des simulations CRIPTE, la modification seule de la matrice résistance en fonction de la température n'a aucun effet sur les résultats de simulation, ce qui se traduit par une impossibilité de distinguer les courbes obtenues avec ou sans échauffement du harnais.
Ces résultats tendent à montrer la nécessité d'inclure la dépendance à la température dans tous les modèles de perte en ligne qu'ils soient de nature conducteur, diélectrique ou rayonné.

Comparaisons mesures/simulations CRIPTE

D'une manière générale, la comparaison entre mesures et simulations présente de bons accords en dessous de 500 kHz (domaine hors résonance de la ligne). Notons que le modèle aurait mérité la prise en compte des résistances de contact parasites mais celle-ci n'étaient pas accessibles aisément dans les conditions de montage.

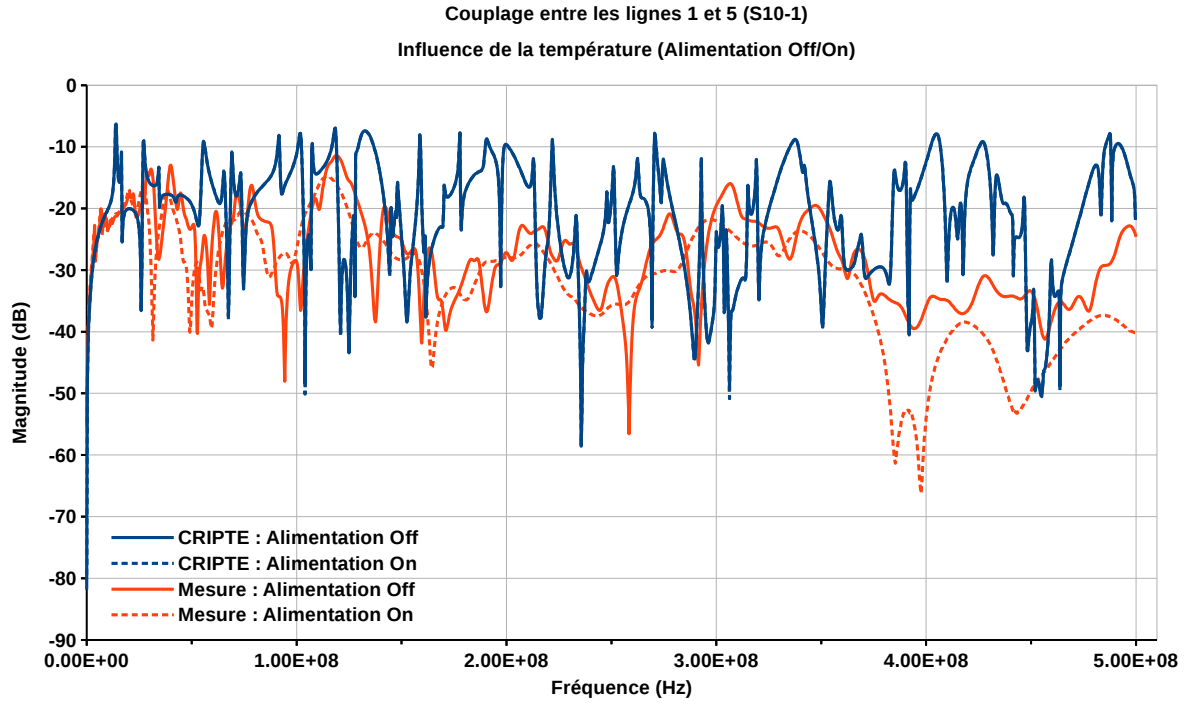
Jusqu'à 100 MHz, la corrélation calcul / mesure peut être jugée satisfaisante d'un point de vue « global » ce qui tend à montrer que les diverses résistances introduites dans le modèle CRIPTE (résistance continue, effet de peau, tangente de perte diélectrique) traduisent bien les pertes observées expérimentalement.

Au-delà de 100 MHz, deux hypothèses peuvent être formulées pour traduire la différence entre simulations et mesures. D'un part, soit la valeur de la tangente de perte est insuffisante pour traduire correctement les pertes diélectriques [146] ou le modèle de ligne de transmission ne prend pas en compte par nature les pertes par rayonnement. Si cela venait à être confirmé dans le cadre de notre configuration, le modèle de ligne de transmission utilisé dans CRIPTE devrait être couplé à un modèle électromagnétique complet (full 3D) de la géométrie environnante.

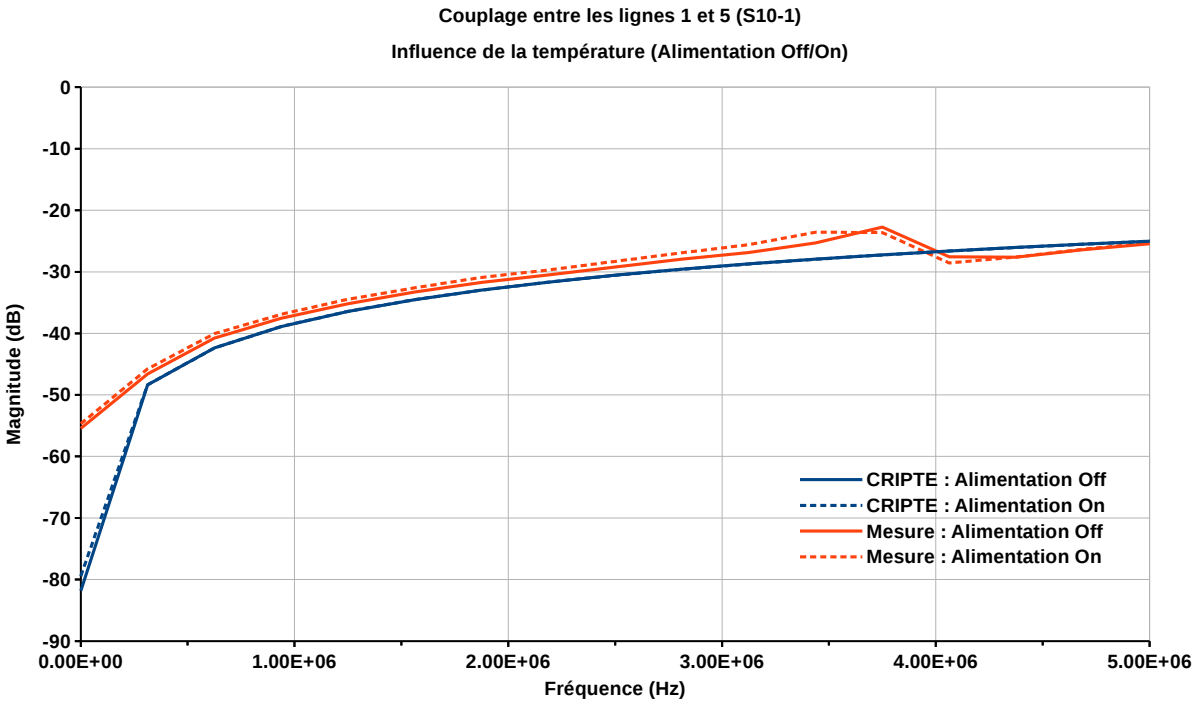
V.6 Conclusion

Dans ce chapitre, plusieurs expérimentations ont été mises en place afin de valider tout ou partie de la chaine de calcul couplée CEM-Thermique développée au Chapitre IV.

Dans un premier temps, les tests ont porté sur la caractérisation des données d'entrée nécessaires au développement d'un outil de prédiction des échauffements thermiques apparaissant au sein des torons de câbles. Ainsi, la détermination d'une corrélation applicable au coefficient d'échange thermique dans des conditions parfaitement maîtrisées a autorisé des comparaisons directes entre températures simu-



(a) Vue sur l'ensemble de la bande 5 Hz - 500 MHz



(b) Focus sur la partie basse fréquence. Bande : 5 Hz - 5 MHz

Figure V.29 – Exemple de comparaison mesure-CRIPTE sur le couplage entre les lignes

lées et mesurées. Bien que les résultats obtenus soient globalement satisfaisants, les enseignements tirés doivent être modérés par la difficulté de connaitre précisément les valeurs de conductivité thermique à utiliser. Les futurs développements devront donc passer par une étude plus approfondie de cette problématique afin de s'assurer du plein potentiel de prédiction de la chaine de calcul.

Dans un second temps, les effets de la température sur les paramètres de transmission et de couplage de différentes lignes de transmission ont été abordés à l'aide d'une comparaison directe mesures/simulations CRIPTE. L'analyse des résultats de simulation présente globalement une bonne cohérence avec les mesures de paramètres S jusqu'à 100 MHz et ce, malgré les incertitudes du montage (résistances de contact, topologie et géométrie d'installation). En haute fréquence toutefois, le modèle CRIPTE diverge alors totalement des observations expérimentales car d'autres phénomènes physiques entrent en jeu. L'amélioration des différents modèles de perte notamment par la prise en compte de l'influence de la température sur ces derniers devra être impérativement abordée dans de futurs développements afin de corriger en conséquence la chaîne de calcul couplée CEM-Thermique développée dans cette thèse.

Conclusion et perspectives

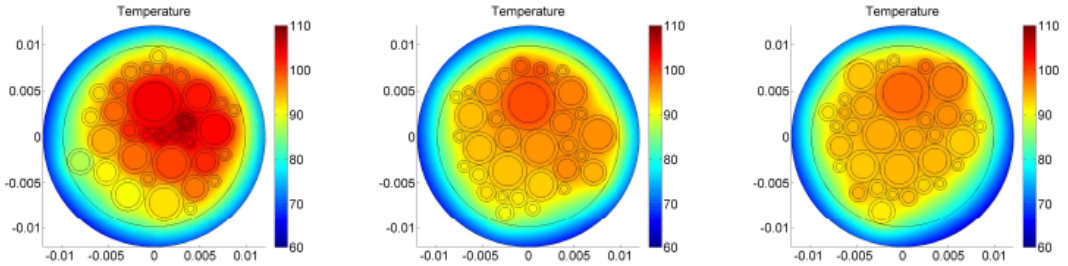
Ces travaux de doctorat ont été consacrés au développement et à la validation expérimentale d'une chaine de calcul couplée CEM (Compatibilité Électromagnétique) - Thermique dédiée à l'étude des réseaux de câblages électriques embarquées sur aéronefs. Dans ce cadre, nous avons démontré que les équations de base des modèles électromagnétiques et thermiques présentaient une similarité mathématique autorisant une résolution simultanée de ces deux types de problèmes. Les principes généraux d'une telle résolution ont été exposés au chapitre IV. Ces travaux devront être poursuivis s'ils veulent mener à de véritables optimisations industrielles en terme notamment de masse.

Ainsi, dans la continuité directe de ces travaux, un premier axe de recherche envisageable concerne la poursuite des validations expérimentales du code de calcul à de nouveaux cas d'application. En effet, les conditions environnementales d'installation jouent un rôle prépondérant sur la manière dont se dissipe la chaleur créée par effet Joule dans les câblages. Or, le coefficient d'échange thermique est difficilement accessible d'un point de vue numérique et même expérimental. Il reste que pour fournir des résultats fiables, le code de calcul doit disposer de ce type de données d'entrée. On peut alors envisager pour de futurs développements une *base de données* permettant d'avoir accès rapidement à des corrélations précises pour des cas d'installations normalisés tels que des routes de câbles dans des raceways par exemple.

Sur le plan théorique, la dernière série d'expérimentation concernant la variation des propriétés de transmission et de couplage d'un signal en fonction de la température a mis en lumière la nécessité de poursuivre l'effort de modélisation des pertes résistives dans le code de calcul **CRIPTE**. Les futures recherches devront mener à de nouvelles corrections en fonction de la fréquence et de la température afin de pouvoir rendre compte des écarts observés entre la mesure et les simulations par le modèle des *lignes de transmission*. Ces travaux sur les caractéristiques électromagnétiques et thermiques de la matière devront être l'occasion de pousser plus loin l'analyse de sensibilité des effets thermiques sur la conductivité électrique ainsi que sur la permittivité des milieux diélectriques afin d'en raffiner le cas échéant leur modèle.

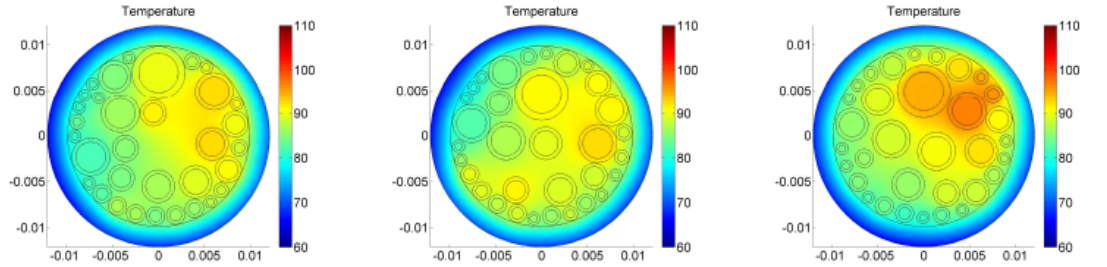
L'application finale de ces travaux étant l'allègement en masse des réseaux de câblages, il sera nécessaire pour atteindre cet objectif de coupler la chaine de calcul développée à des algorithmes numérique d'optimisation. Sur ce dernier point, des avancées considérables ont été réalisées dans les travaux de doctorat de Florian Loos grâce à l'utilisation d'algorithmes *génétiques* appliqués à la minimisation des échauffements par effet Joule au sein de torons de câbles automobiles (voir Figure V.30).

L'application de ces méthodes d'optimisation nécessitera de raccourcir au maximum les temps de calculs. Pour cela, les nouvelles voies de recherche ouvertes par l'algorithmie parallèle sur carte graphique (GPU) devraient permettre de trouver, pour un aéronef donné, l'architecture électrique optimale possédant les sections de câbles les plus faibles tout en assurant une dissipation maximale de la chaleur.



INL ($J(\Omega) = 116.2$). OUL ($J(\Omega) = 108.3$). OPP ($J(\Omega) = 106.1$).

(a) *Temperature distributions in multicables with 33 single cables for different initial template assignments.*



Best config. ($J(\Omega) = 92.43$). Second config. ($J(\Omega) = 93.81$). Third config. ($J(\Omega) = 96.89$).

(b) *Cable configurations obtained via the genetic algorithm for multicables with 33 single cables.*

Figure V.30 – Optimisation de l'échauffement d'un toron de 33 câbles par application d'algorithme génétique. (a) Cross-sections initiales (b) Résultats obtenus après optimisation. Source : [112]

Enfin, bien que cette approche « d'optimisation » n'ait pas été abordée dans cette thèse au profit d'une approche plus expérimentale, l'espoir est que ces travaux de recherches débouchent dans un futur proche à la mise en place d'un outil industriel stable permettant à terme de se substituer complètement aux abaques expérimentales utilisées pour l'intégration des câblages.

ANNEXE A

Démonstration : représentation intégrale d'un potentiel arbitraire

Pour établir l'équation (IV.3), il est nécessaire d'introduire la seconde identité de Green dont l'énoncé est rappelé ci-après.

Théorème (*Seconde identité de Green*)**.** *Soient φ et ψ deux applications de $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continues et au moins deux fois dérivables dans Ω et soit κ une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Il existe alors l'identité suivante, découlant de l'application directe du théorème de la Divergence sur le champ vectoriel $\overrightarrow{\Lambda} = \psi\kappa\overrightarrow{\nabla}\varphi - \varphi\kappa\overrightarrow{\nabla}\psi$*

$$\int_\Omega \left[\psi\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\kappa\overrightarrow{\nabla}\varphi\right) - \varphi\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\kappa\overrightarrow{\nabla}\psi\right)\right] d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \kappa\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\overrightarrow{n}} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial\overrightarrow{n}}\right) d\Gamma$$

En particulier, si κ est une application constante dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on obtient :

$$\int_\Omega [\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi]\, d\Omega = \oint_{\partial\Omega}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\overrightarrow{n}} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial\overrightarrow{n}}\right) d\Gamma \tag{A.1}$$

Introduisons à présent la solution fondamentale de l'opérateur Laplacien Δ, notée G, et définie *au sens des distributions* par :

$$\Delta\,\mathrm{G}(x,y) = -\,\delta(x,y) \tag{A.2}$$

où $\delta(x,y)$ est la distribution de Dirac. Parmi ces propriétés remarquables, deux vont particulièrement nous intéresser :

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ \infty & \text{si } x = y \end{cases} \tag{A.3}$$

$$\int_\Omega F(x)\,\delta(x,y)d\Omega = F(y) \tag{A.4}$$

Avec ces propriétés, on obtient alors aisément la relation (IV.3) en remplaçant dans la relation (A.1) :
- ψ par la solution fondamentale $\mathrm{G}(x,y)$
- φ par l'expression de F donné par (IV.1)

La solution fondamentale du Laplacien répond à des critères de symétrie. En particulier, elle est invariante par rotation autour du point source de coordonnées x et ne dépend que de la distance euclidienne $r = \| x - y \|$ du même point source avec le point d'observation de coordonnées y. Pour établir son expression, nous discriminons les cas suivants :

— Pour $n = 2$: On est amené à réécrire l'opérateur Laplacien en coordonnées polaires :

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

On cherche alors $\mathrm{G}(r)$ tel que, par définition :

$$\Delta \mathrm{G}(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathrm{G}(r)}{\partial r}\right) = -\delta(r)$$

soit $\forall\ r \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathrm{G}(r)}{\partial r}\right) = 0 \tag{A.5}$$

ce qui, après intégration directe, donne :

$$\mathrm{G}(r) = A\ln(r) + B \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

En posant $B = 0$, il est alors possible de déterminer la valeur de A après intégration sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ symétrique par rapport au point P de coordonnées x et de rayon R constant, c'est-à-dire un disque D_R. En effet, on a toujours par définition :

$$\int_\Omega \Delta \mathrm{G} d\Omega = -\int_\Omega \delta(r) d\Omega = -1 \tag{A.6}$$

Or, d'après le théorème de la Divergence, on a :

$$\int_\Omega \Delta \mathrm{G} d\Omega = \oint_{\Gamma_R} \vec{\nabla} G.\vec{n}\, d\Gamma \tag{A.7}$$

avec Γ_R le cercle de circonférence $2\pi\mathrm{R}$.
En combinant les relations (A.6) et (A.7), on obtient :

$$\oint_{\Gamma_R} \vec{\nabla} G.\vec{n}\, d\Gamma = \oint_{\Gamma_R} \frac{\partial G}{\partial r} d\Gamma = \oint_{\Gamma_R} \frac{A}{r} r d\theta = -1$$

soit enfin :

$$A = \frac{-1}{2\pi} \implies \mathrm{G}(r) = \frac{-1}{2\pi}\ln(r)$$

— Pour $n = 3$: Dans ce cas, on introduit l'opérateur Laplacien en coordonnées sphériques :

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) \tag{A.8}$$

De même, on cherche alors la fonction $\mathrm{G}(r)$ solution de l'équation :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \mathrm{G}(r)}{\partial r}\right) = 0 \quad \forall\ r \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{G}(r) = \frac{A'}{r} + B' \quad \text{avec} \quad A', B' \in \mathbb{R}$$

Comme précédemment, en posant $B' = 0$, il est possible de déterminer la valeur de A après intégration sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ symétrique par rapport au point P de coordonnées x et de rayon R constant, c'est-à-dire une boule B_R centrée à l'origine, ce qui conduit finalement à :

$$\oint_{\Gamma_R} \vec{\nabla} G.\vec{n}\, d\Gamma = \oint_{\Gamma_R} \frac{\partial G}{\partial r} d\Gamma = \oint_{\Gamma_R} \frac{-A'}{r^2} r^2\sin(\theta) d\theta d\phi = -1 \tag{A.9}$$

soit enfin :

$$A' = \frac{1}{4\pi} \implies \mathrm{G}(r) = \frac{1}{4\pi r} \tag{A.10}$$

Il reste enfin à définir la valeur de la constante d'intégration $C(y)$ en discriminant les cas d'application :

— Si $y \in \overline{\Omega}^{C}$: Dans ce cas, la distribution de Dirac est nulle $\forall y$, ce qui signifie que :

$$\int_{\Omega} F(x)\,\delta(x,y)d\Omega = 0 \implies C(y) = 0$$

— Si $y \in \Omega$: Dans ce cas, le point P est contenu dans le domaine d'intégration. Ainsi, la relation (A.4) est verifiée et il vient naturellement $C(y) = 1$

— Si $y \in \partial\Omega$: Dans ce cas, $C(y) = \dfrac{1}{2}$ lorsque la surface est lisse (*smooth*) c'est- à-dire lorsque y n'est pas placé sur un point de discontinuité.
La démonstration de ce dernier item fait intervenir la notion de potentiel de double couche pour le cas à deux ou trois dimensions. Pour cela, il faut se placer au point ξ appartenant initialement à la frontière Γ_f puis augmenter la surface du disque de rayon ϵ centré en ξ comme illustré en Fig A.1

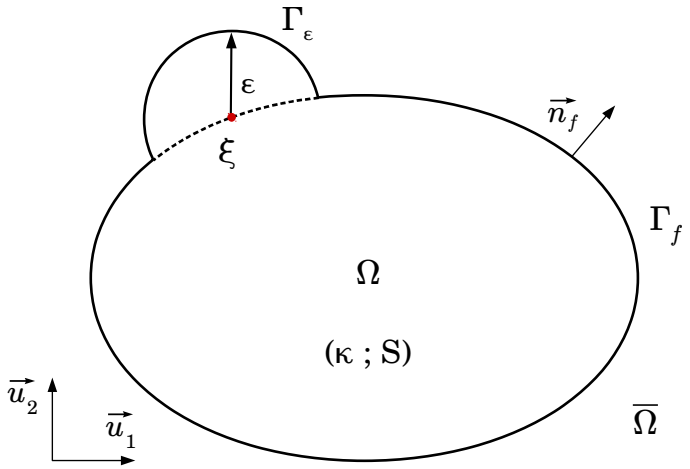


Figure A.1 – Exemple de domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ augmenté d'un disque ϵ en un point ξ de sa frontière

Les différents développements de ces calculs se trouvent dans les références [104, 188].

Page intentionnellement blanche

ANNEXE B

Représentation matricielle des deux types d'équations intégrales

Représentation matricielle de l'équation intégrale de type 1

$$A = \begin{bmatrix}
\kappa^-\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha_1}{\beta_1}\mathcal{D}_{f11}(P_{f11})+\mathcal{E}_{f11}(P_{f11})\right) & \kappa^-\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\mathcal{D}_{f12}(P_{f11})+\mathcal{E}_{f12}(P_{f11})\right) & \dots & (\kappa^+-\kappa^-)\,\mathcal{E}_{d11}(P_{f11}) & \dots & (\kappa^+-\kappa^-)\,\mathcal{E}_{dXY}(P_{f11}) \\
\kappa^-\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\mathcal{D}_{f11}(P_{f12})+\mathcal{E}_{f11}(P_{f12})\right) & \kappa^-\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha_1}{\beta_1}\mathcal{D}_{f12}(P_{f12})+\mathcal{E}_{f12}(P_{f12})\right) & \dots & (\kappa^+-\kappa^-)\,\mathcal{E}_{d11}(P_{f12}) & \dots & (\kappa^+-\kappa^-)\,\mathcal{E}_{dXY}(P_{f12}) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\kappa^-\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\mathcal{D}_{f11}(P_{d11})+\mathcal{E}_{f11}(P_{d11})\right) & \kappa^-\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\mathcal{D}_{f12}(P_{d11})+\mathcal{E}_{f12}(P_{d11})\right) & \dots & \frac{\kappa^++\kappa^-}{2}+(\kappa^+-\kappa^-)\,\mathcal{E}_{d11}(P_{d11}) & \dots & (\kappa^+-\kappa^-)\,\mathcal{E}_{dXY}(P_{d11}) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\kappa^-\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\mathcal{D}_{f11}(P_{dXY})+\mathcal{E}_{f11}(P_{dXY})\right) & \kappa^-\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\mathcal{D}_{f12}(P_{dXY})+\mathcal{E}_{f12}(P_{dXY})\right) & \dots & (\kappa^+-\kappa^-)\,\mathcal{E}_{d11}(P_{dXY}) & \dots & \frac{\kappa^++\kappa^-}{2}+(\kappa^+-\kappa^-)\,\mathcal{E}_{dXY}(P_{dXY})
\end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} F(P_{f11}) \\ F(P_{f12}) \\ \vdots \\ F(P_{d11}) \\ \vdots \\ F(P_{dXY}) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix}
\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{\ell=1}^{N_\ell(i)}\frac{\kappa^-\gamma_i}{\beta_i}\mathcal{D}_{fi\ell}(P_{f11})+\sum_{j=1}^{N_d}\sum_{m=1}^{N_m(j)}\mathcal{Q}_{djm}(P_{f11})-\sum_{k=1}^{N_k}\mathcal{S}_k(P_{f11}) \\
\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{\ell=1}^{N_\ell(i)}\frac{\kappa^-\gamma_i}{\beta_i}\mathcal{D}_{fi\ell}(P_{f12})+\sum_{j=1}^{N_d}\sum_{m=1}^{N_m(j)}\mathcal{Q}_{djm}(P_{f12})-\sum_{k=1}^{N_k}\mathcal{S}_k(P_{f12}) \\
\vdots \\
\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{\ell=1}^{N_\ell(i)}\frac{\kappa^-\gamma_i}{\beta_i}\mathcal{D}_{fi\ell}(P_{d11})+\sum_{j=1}^{N_d}\sum_{m=1}^{N_m(j)}\mathcal{Q}_{djm}(P_{d11})-\sum_{k=1}^{N_k}\mathcal{S}_k(P_{d11}) \\
\vdots \\
\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{\ell=1}^{N_\ell(i)}\frac{\kappa^-\gamma_i}{\beta_i}\mathcal{D}_{fi\ell}(P_{dXY})+\sum_{j=1}^{N_d}\sum_{m=1}^{N_m(j)}\mathcal{Q}_{djm}(P_{dXY})-\sum_{k=1}^{N_k}\mathcal{S}_k(P_{dXY})
\end{bmatrix}$$

Représentation matricielle de l'équation intégrale de type 2

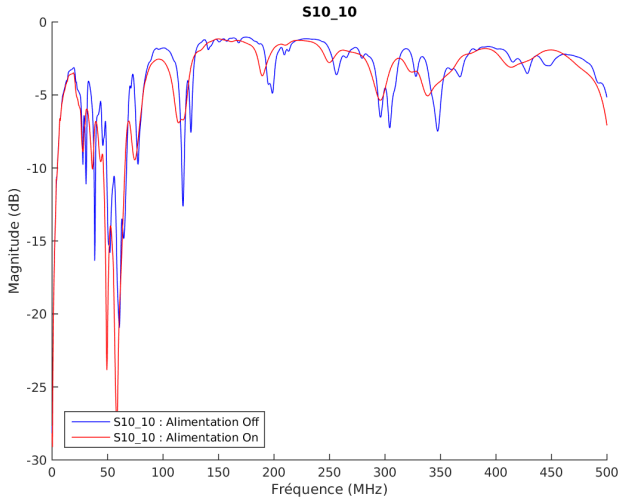
$$A = \begin{bmatrix}
-\kappa^- \left(\dfrac{\beta_1}{2\alpha_1} + \mathcal{D}_{f11}(P_{f11}) + \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\mathcal{E}_{f11}(P_{f11}) \right) & -\kappa^- \left(\mathcal{D}_{f12}(P_{f11}) + \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\mathcal{E}_{f12}(P_{f11}) \right) & \dots & (\kappa^+ - \kappa^-)\,\mathcal{E}_{d11}(P_{f11}) & \dots & (\kappa^+ - \kappa^-)\,\mathcal{E}_{dXY}(P_{f11}) \\
-\kappa^- \left(\mathcal{D}_{f11}(P_{f12}) + \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\mathcal{E}_{f11}(P_{f12}) \right) & -\kappa^- \left(\dfrac{\beta_1}{2\alpha_1} + \mathcal{D}_{f12}(P_{f12}) + \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\mathcal{E}_{f12}(P_{f12}) \right) & \dots & (\kappa^+ - \kappa^-)\,\mathcal{E}_{d11}(P_{f12}) & \dots & (\kappa^+ - \kappa^-)\,\mathcal{E}_{dXY}(P_{f12}) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-\kappa^- \left(\mathcal{D}_{f11}(P_{d11}) + \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\mathcal{E}_{f11}(P_{d11}) \right) & -\kappa^- \left(\mathcal{D}_{f12}(P_{d11}) + \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\mathcal{E}_{f12}(P_{d11}) \right) & \dots & \dfrac{\kappa^+ + \kappa^-}{2} + (\kappa^+ - \kappa^-)\,\mathcal{E}_{d11}(P_{d11}) & \dots & (\kappa^+ - \kappa^-)\,\mathcal{E}_{dXY}(P_{d11}) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-\kappa^- \left(\mathcal{D}_{f11}(P_{dXY}) + \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\mathcal{E}_{f11}(P_{dXY}) \right) & -\kappa^- \left(\mathcal{D}_{f12}(P_{dXY}) + \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\mathcal{E}_{f12}(P_{dXY}) \right) & \dots & (\kappa^+ - \kappa^-)\,\mathcal{E}_{d11}(P_{dXY}) & \dots & \dfrac{\kappa^+ + \kappa^-}{2} + (\kappa^+ - \kappa^-)\,\mathcal{E}_{dXY}(P_{dXY})
\end{bmatrix}$$

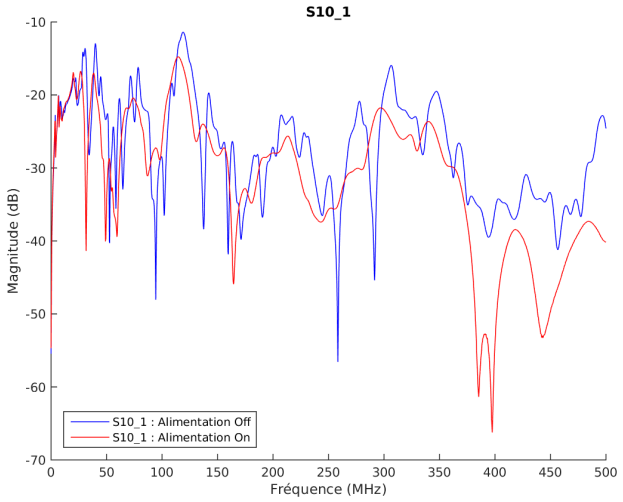
$$X = \begin{bmatrix} \varphi(P_{f11}) \\ \varphi(P_{f12}) \\ \vdots \\ F_d(P_{d11}) \\ \vdots \\ F_d(P_{dXY}) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix}
-\dfrac{\kappa^-\gamma_1}{2\alpha_1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{\ell=1}^{N_\ell(i)} \frac{\kappa^-\gamma_i}{\alpha_i}\mathcal{E}_{fi\ell}(P_{f11}) + \sum_{j=1}^{N_d}\sum_{m=1}^{N_m(j)} \mathcal{Q}_{djm}(P_{f11}) - \sum_{k=1}^{N_k} \mathcal{S}_k(P_{f11}) \\
-\dfrac{\kappa^-\gamma_1}{2\alpha_1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{\ell=1}^{N_\ell(i)} \frac{\kappa^-\gamma_i}{\alpha_i}\mathcal{E}_{fi\ell}(P_{f12}) + \sum_{j=1}^{N_d}\sum_{m=1}^{N_m(j)} \mathcal{Q}_{djm}(P_{f12}) - \sum_{k=1}^{N_k} \mathcal{S}_k(P_{f12}) \\
\vdots \\
-\displaystyle\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{\ell=1}^{N_\ell(i)} \frac{\kappa^-\gamma_i}{\alpha_i}\mathcal{E}_{fi\ell}(P_{d11}) + \sum_{j=1}^{N_d}\sum_{m=1}^{N_m(j)} \mathcal{Q}_{djm}(P_{d11}) - \sum_{k=1}^{N_k} \mathcal{S}_k(P_{d11}) \\
\vdots \\
-\displaystyle\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{\ell=1}^{N_\ell(i)} \frac{\kappa^-\gamma_i}{\alpha_i}\mathcal{E}_{fi\ell}(P_{dXY}) + \sum_{j=1}^{N_d}\sum_{m=1}^{N_m(j)} \mathcal{Q}_{djm}(P_{dXY}) - \sum_{k=1}^{N_k} \mathcal{S}_k(P_{dXY})
\end{bmatrix}$$

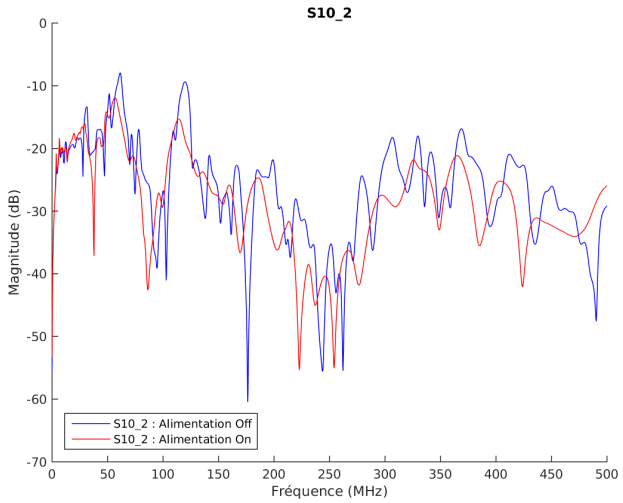
Page intentionnellement blanche

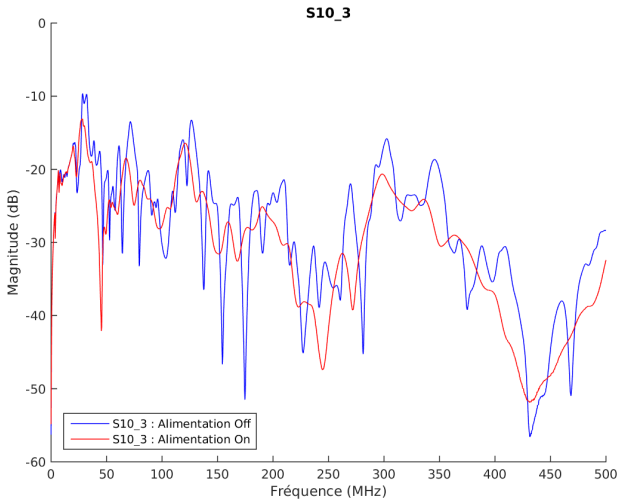
ANNEXE C

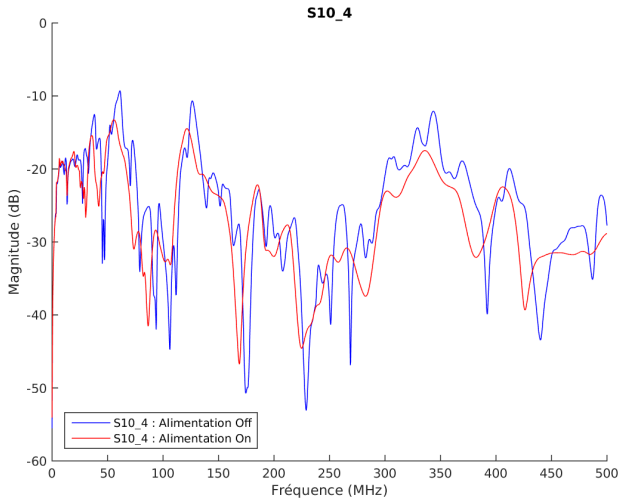
Mesure de l'influence de la température sur la mesure de paramètres S

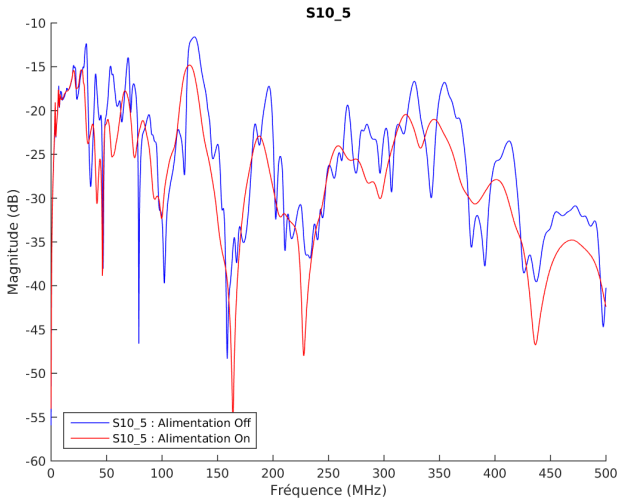

S10_10
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S10_10 : Alimentation Off
S10_10 : Alimentation On

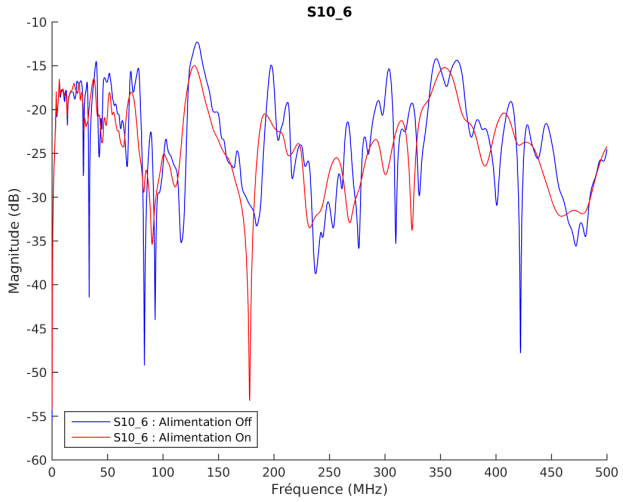

S10_1
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S10_1 : Alimentation Off
S10_1 : Alimentation On

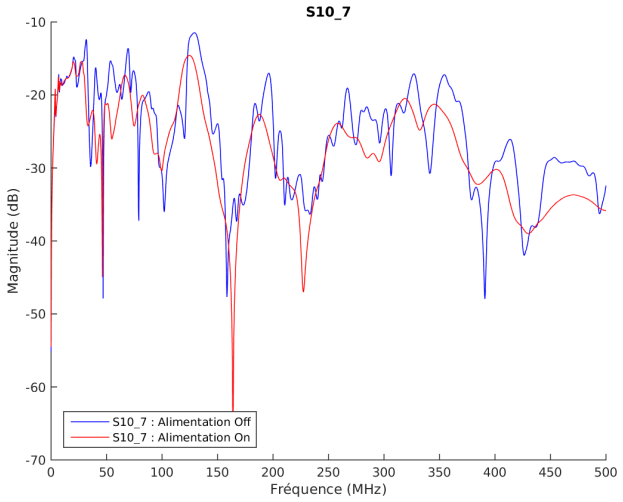

S10_2
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S10_2 : Alimentation Off
S10_2 : Alimentation On

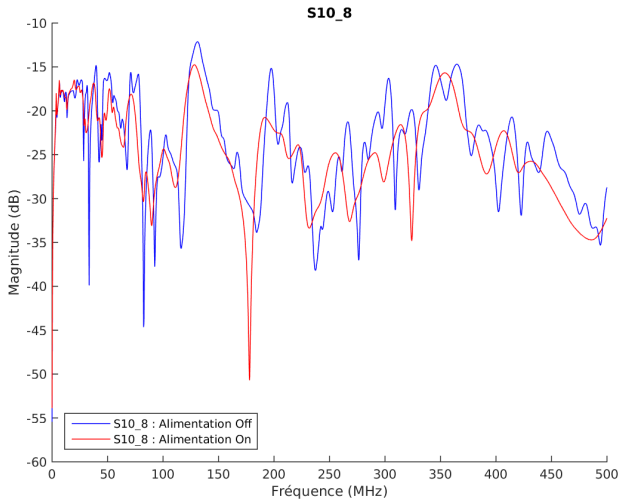

S10_3
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S10_3 : Alimentation Off
S10_3 : Alimentation On

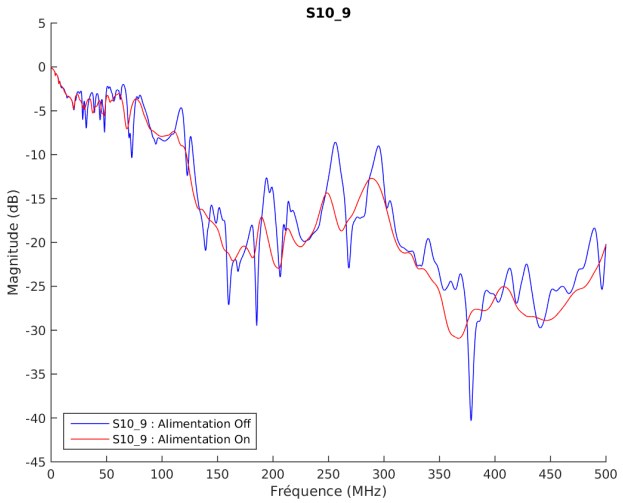

S10_4
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S10_4 : Alimentation Off
S10_4 : Alimentation On

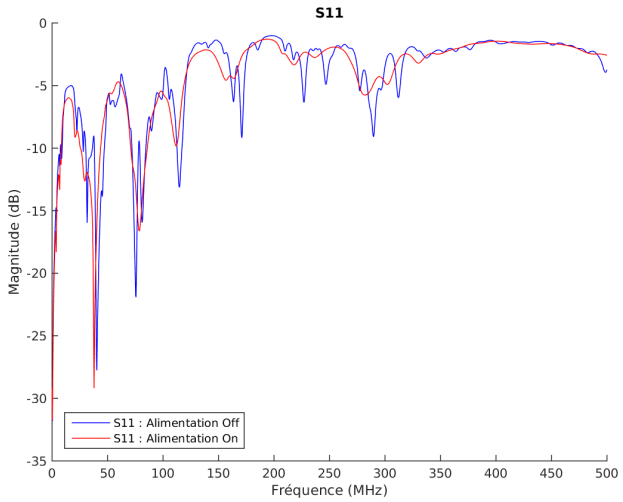

S10_5
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S10_5 : Alimentation Off
S10_5 : Alimentation On

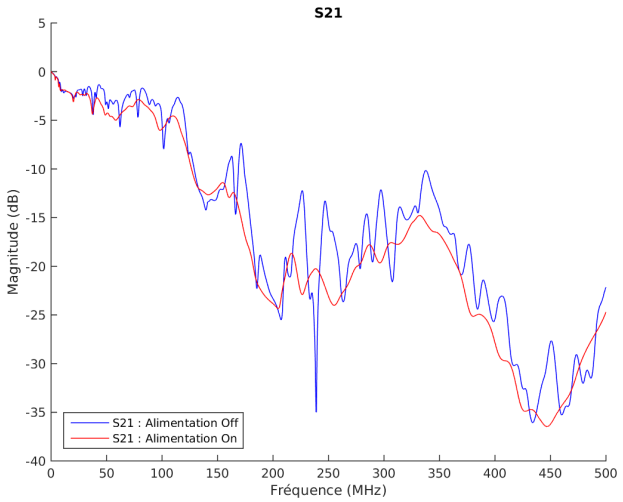

S10_6
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S10_6 : Alimentation Off
S10_6 : Alimentation On

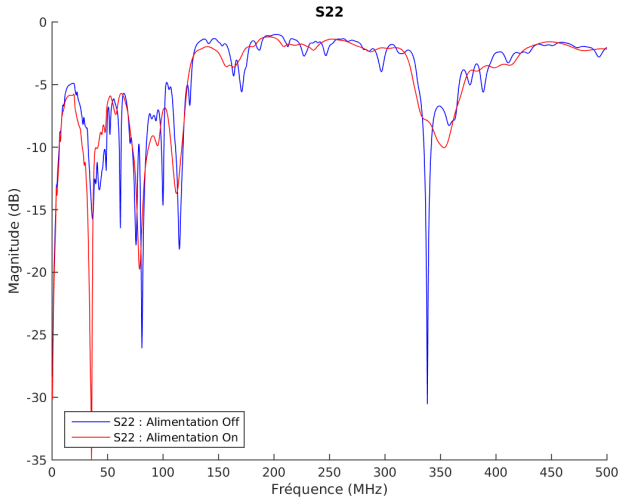

S10_7
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S10_7 : Alimentation Off
S10_7 : Alimentation On

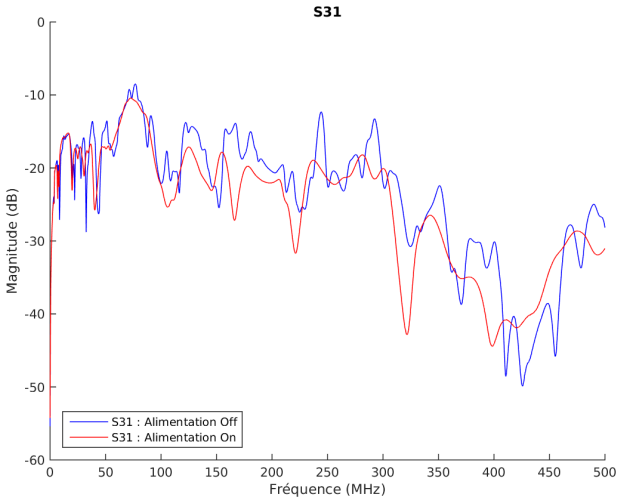

S10_8
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S10_8 : Alimentation Off
S10_8 : Alimentation On

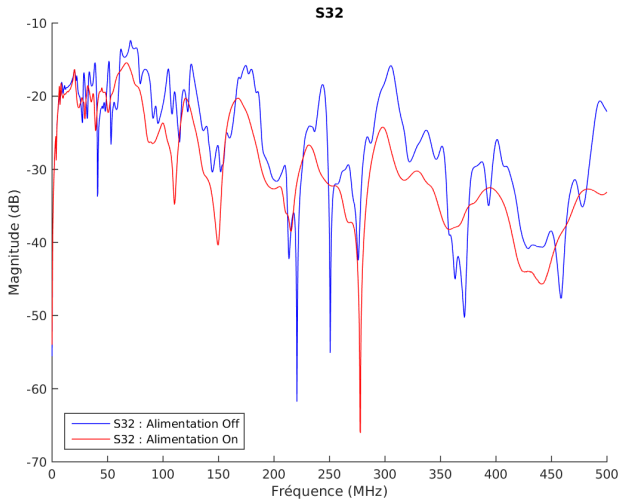

S10_9
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S10_9 : Alimentation Off
S10_9 : Alimentation On

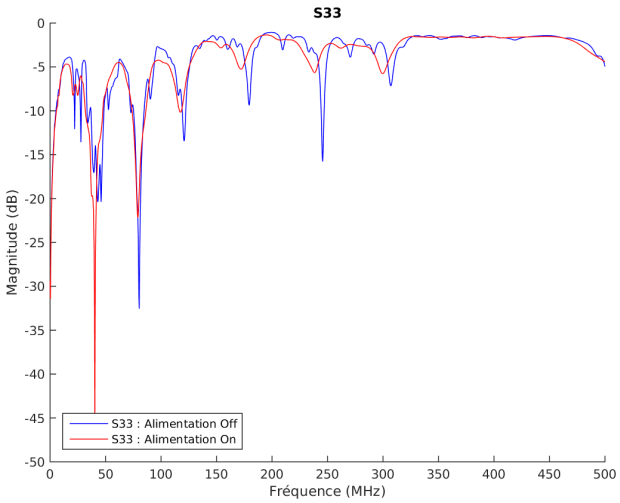

S11
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S11 : Alimentation Off
S11 : Alimentation On

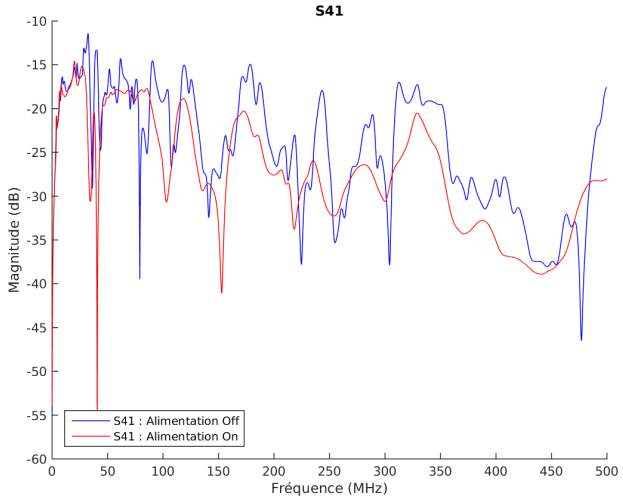

S21
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S21 : Alimentation Off
S21 : Alimentation On

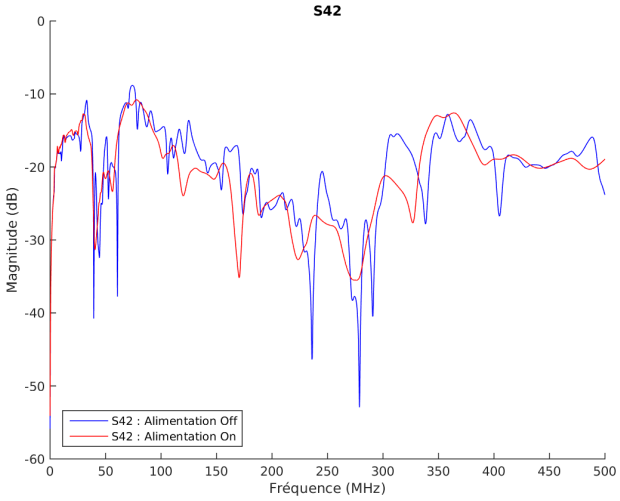

S22
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S22 : Alimentation Off
S22 : Alimentation On

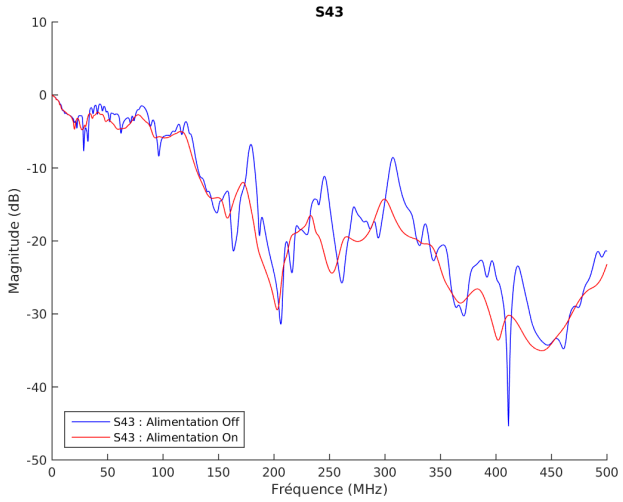

S31
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S31 : Alimentation Off
S31 : Alimentation On

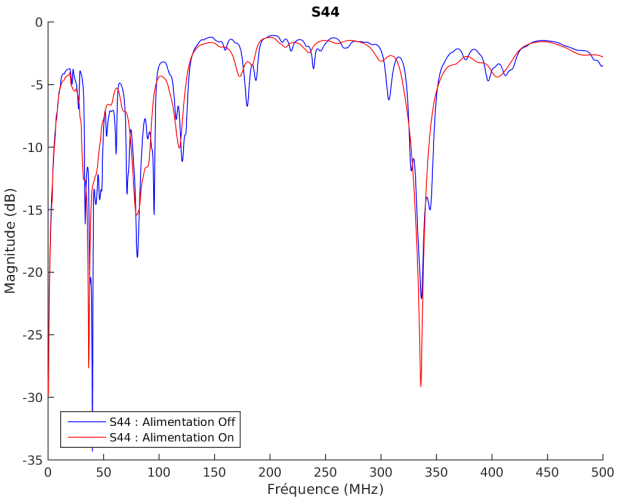

S32
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S32 : Alimentation Off
S32 : Alimentation On

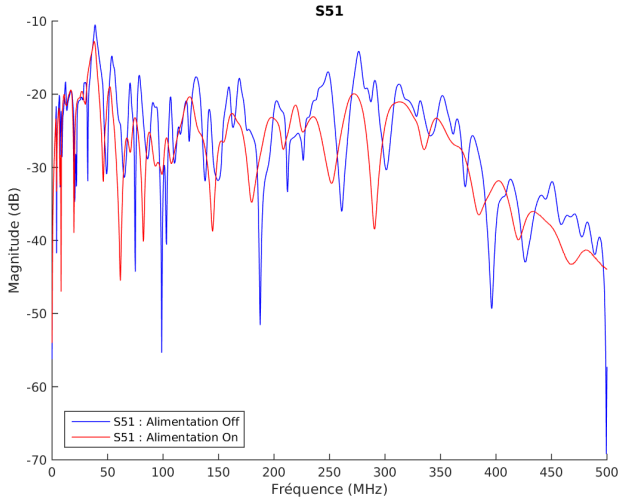

S33
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S33 : Alimentation Off
S33 : Alimentation On

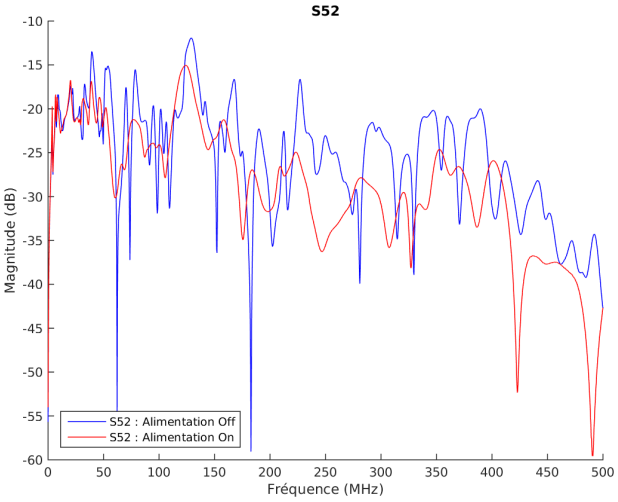

S41
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S41 : Alimentation Off
S41 : Alimentation On

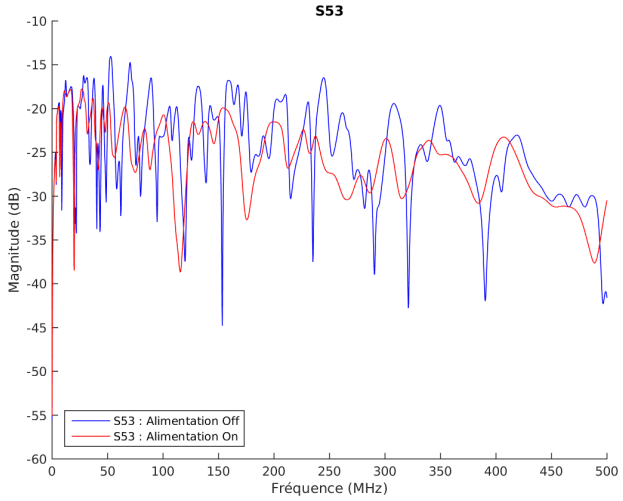

S42
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S42 : Alimentation Off
S42 : Alimentation On

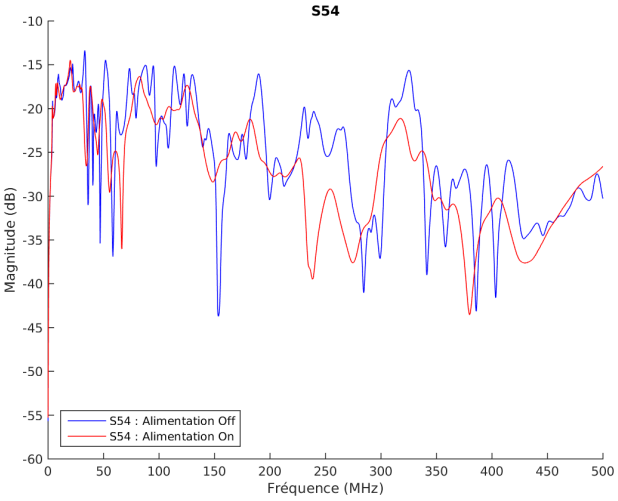

S43
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S43 : Alimentation Off
S43 : Alimentation On

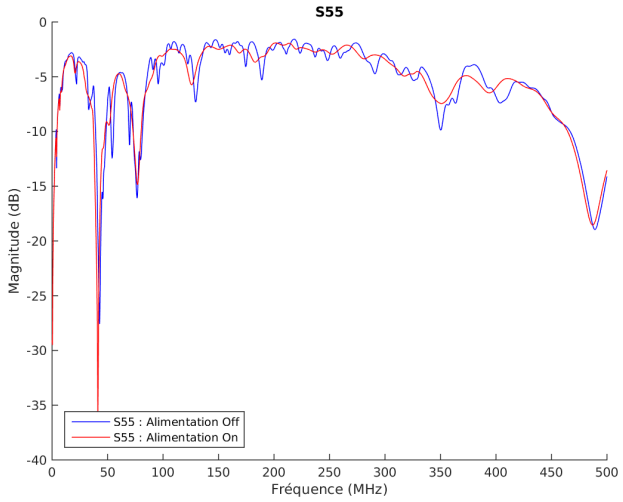

S44
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S44 : Alimentation Off
S44 : Alimentation On

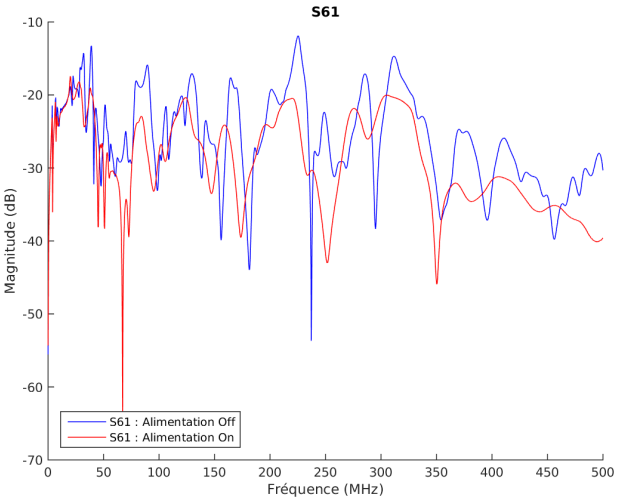

S51
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S51 : Alimentation Off
S51 : Alimentation On

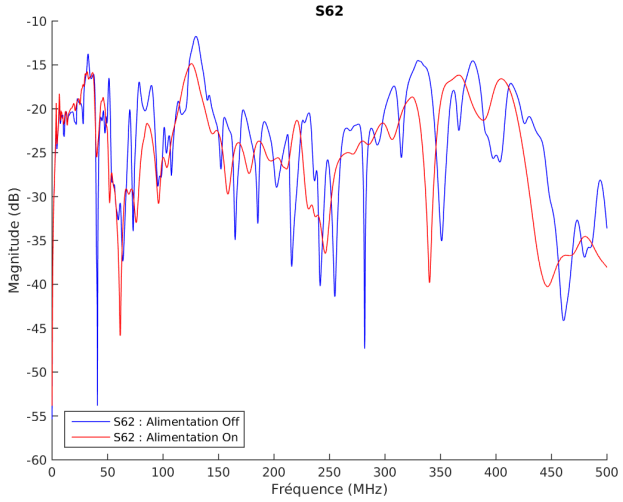

S52
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S52 : Alimentation Off
S52 : Alimentation On

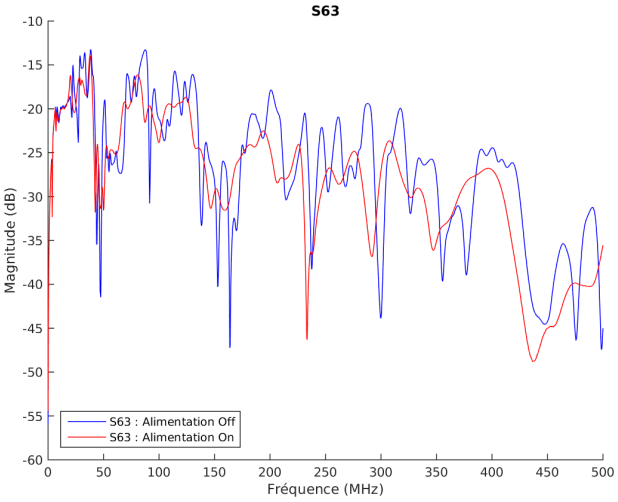

S53
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S53 : Alimentation Off
S53 : Alimentation On

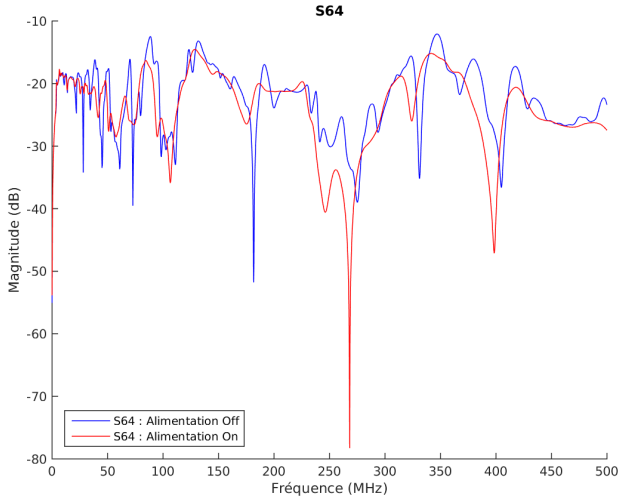

S54
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S54 : Alimentation Off
S54 : Alimentation On

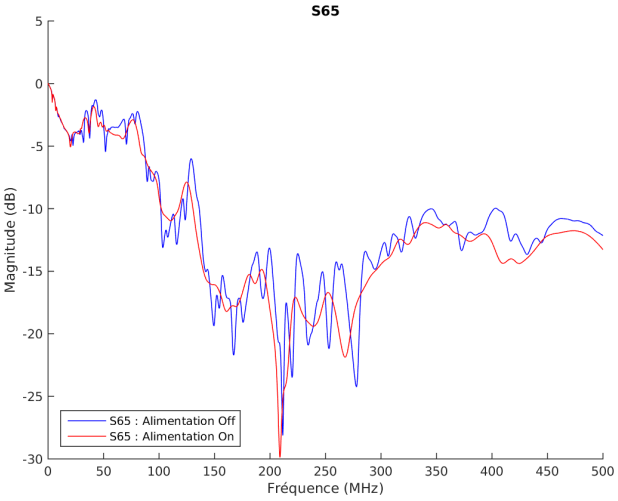

S55
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S55 : Alimentation Off
S55 : Alimentation On

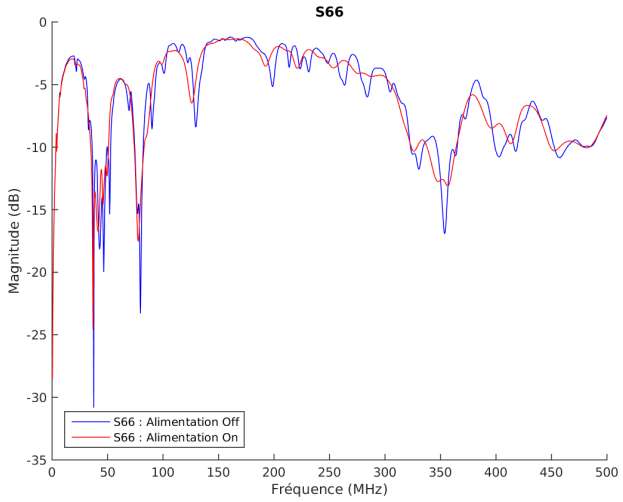

S61
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S61 : Alimentation Off
S61 : Alimentation On

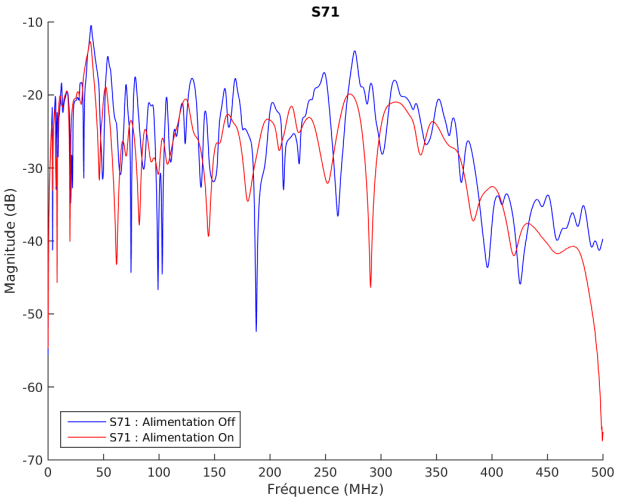

S62
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S62 : Alimentation Off
S62 : Alimentation On

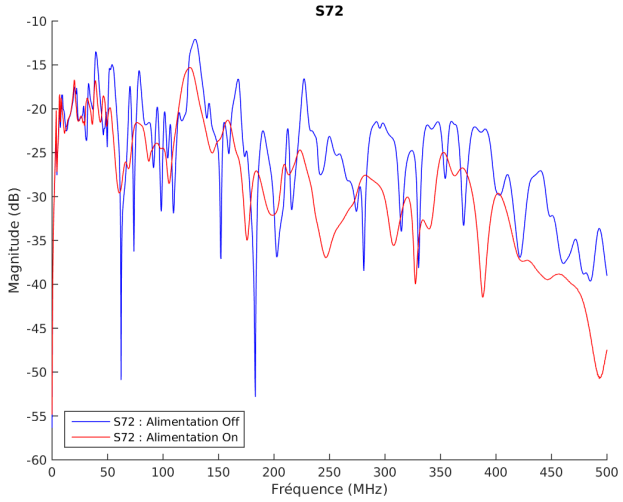

S63
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S63 : Alimentation Off
S63 : Alimentation On

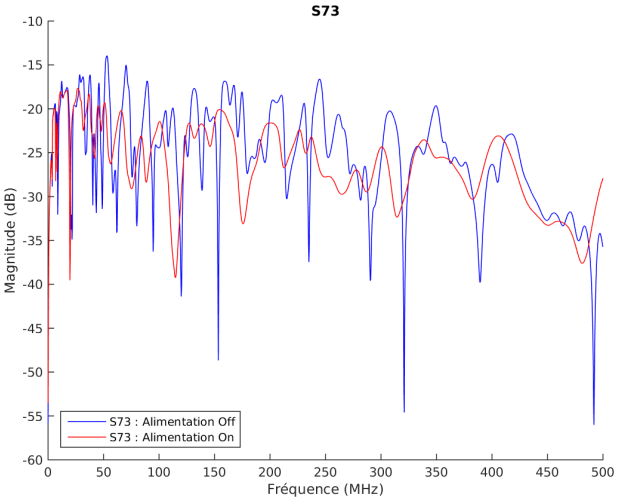

S64
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S64 : Alimentation Off
S64 : Alimentation On

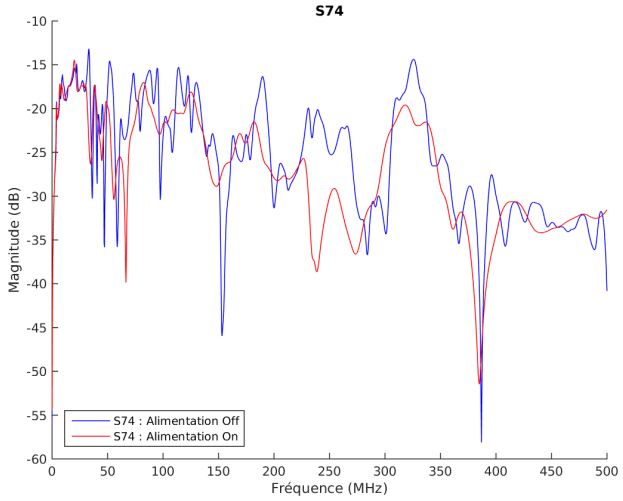

S65
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S65 : Alimentation Off
S65 : Alimentation On

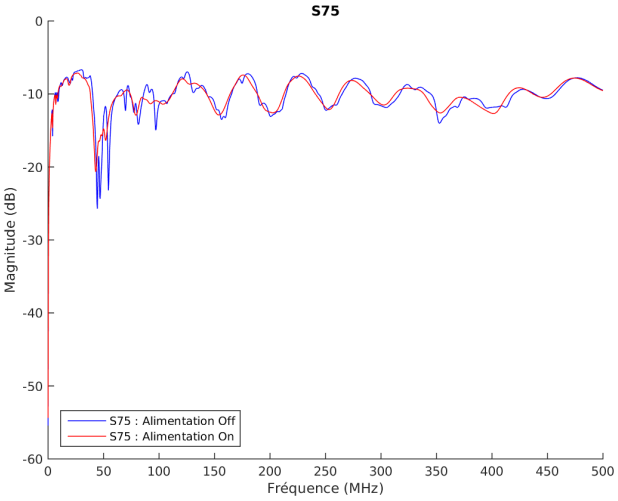

S66
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S66 : Alimentation Off
S66 : Alimentation On

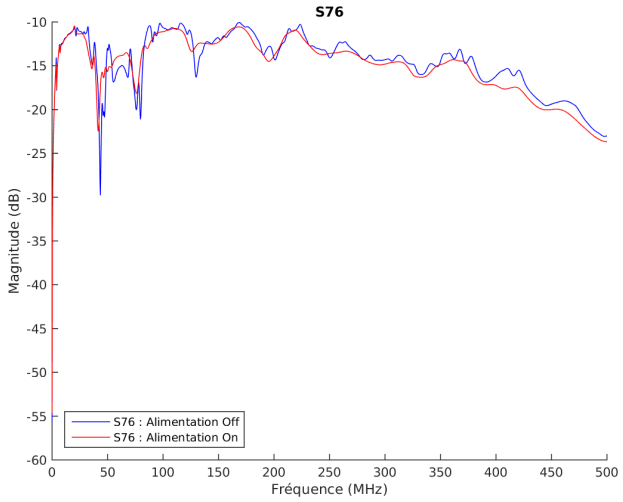

S71
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S71 : Alimentation Off
S71 : Alimentation On

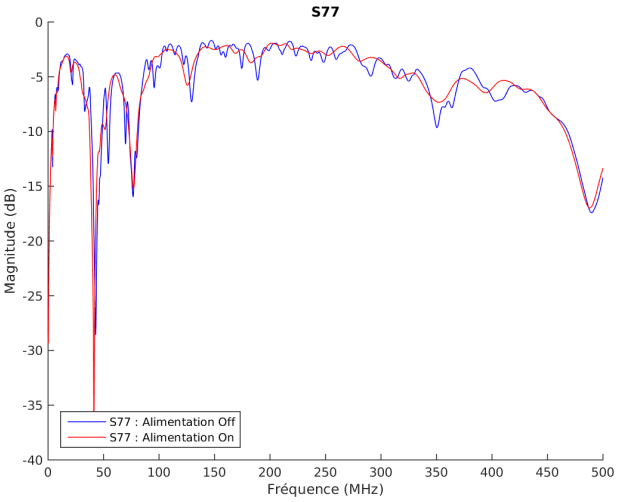

S72
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S72 : Alimentation Off
S72 : Alimentation On

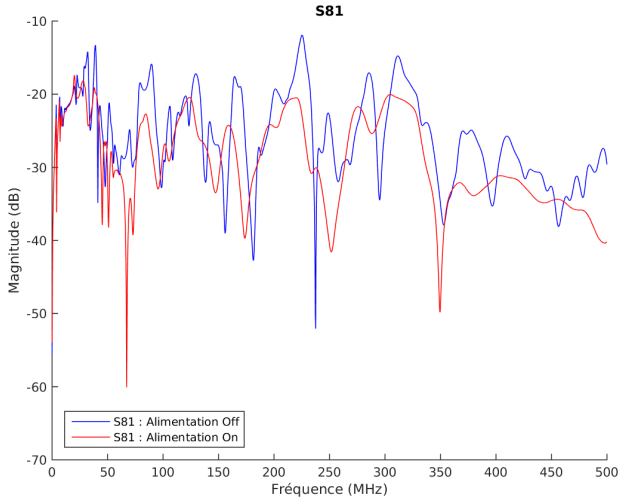

S73
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S73 : Alimentation Off
S73 : Alimentation On

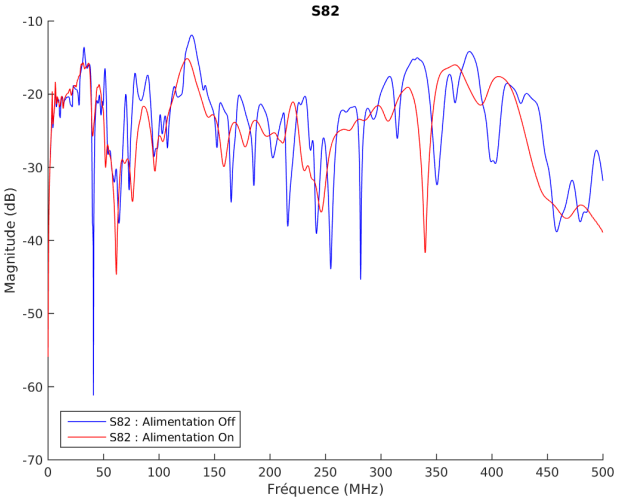

S74
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S74 : Alimentation Off
S74 : Alimentation On

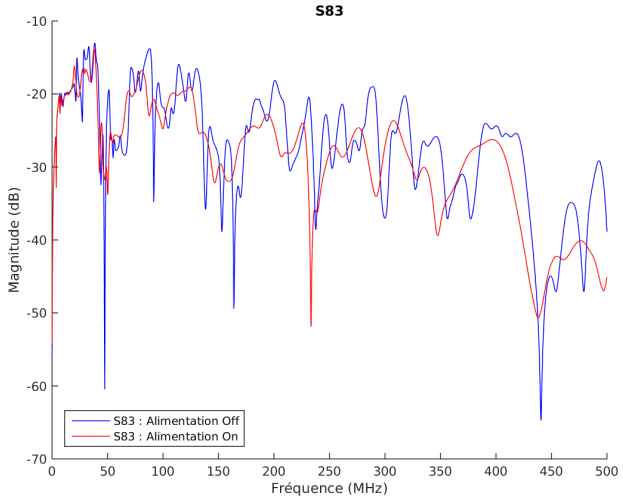

S75
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S75 : Alimentation Off
S75 : Alimentation On

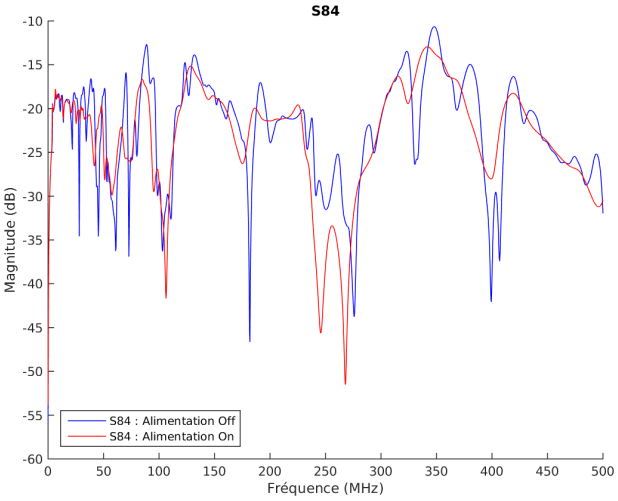

S76
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S76 : Alimentation Off
S76 : Alimentation On

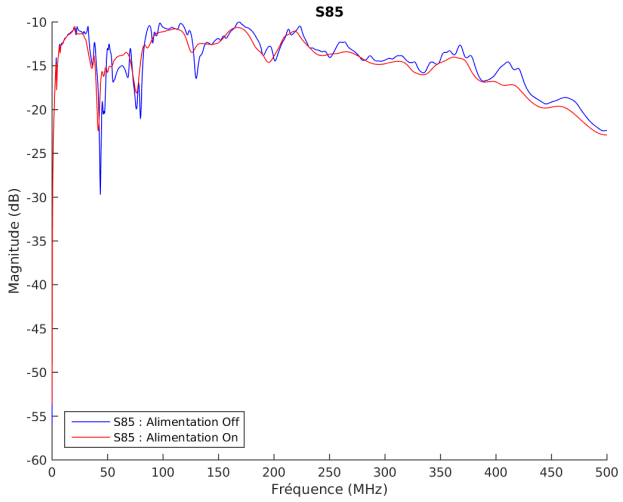

S77
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S77 : Alimentation Off
S77 : Alimentation On

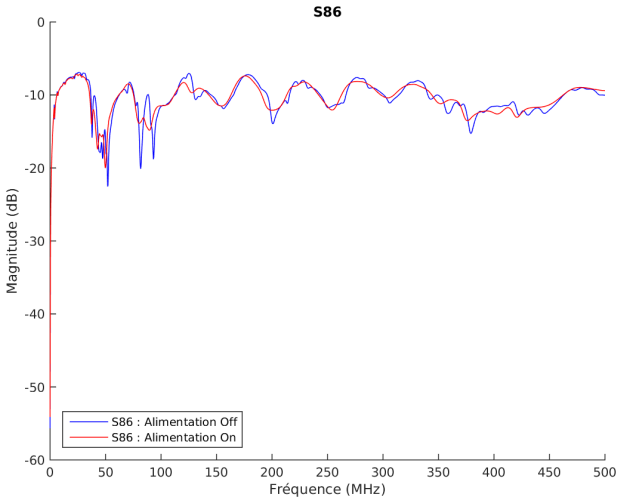

S81
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S81 : Alimentation Off
S81 : Alimentation On

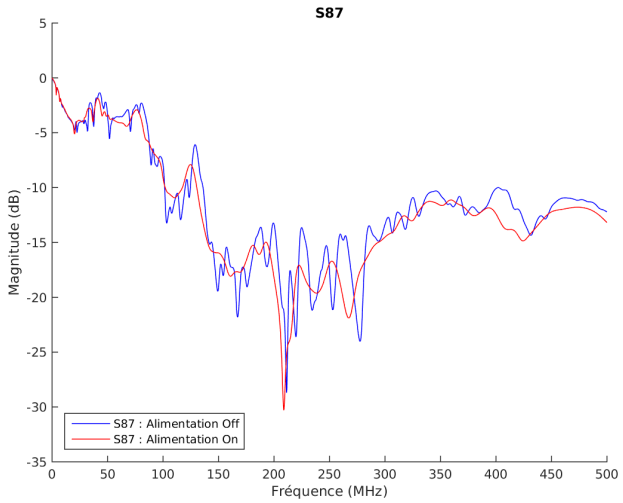

S82
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S82 : Alimentation Off
S82 : Alimentation On

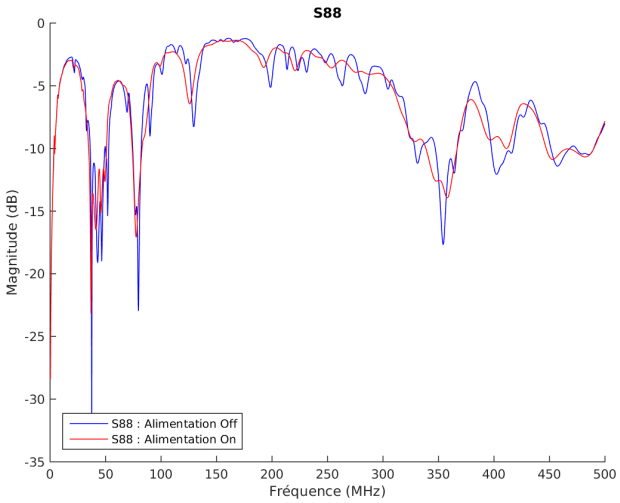

S83
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S83 : Alimentation Off
S83 : Alimentation On

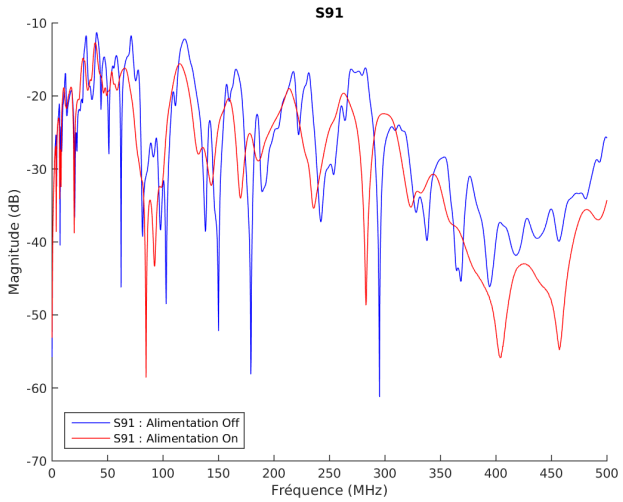

S84
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S84 : Alimentation Off
S84 : Alimentation On

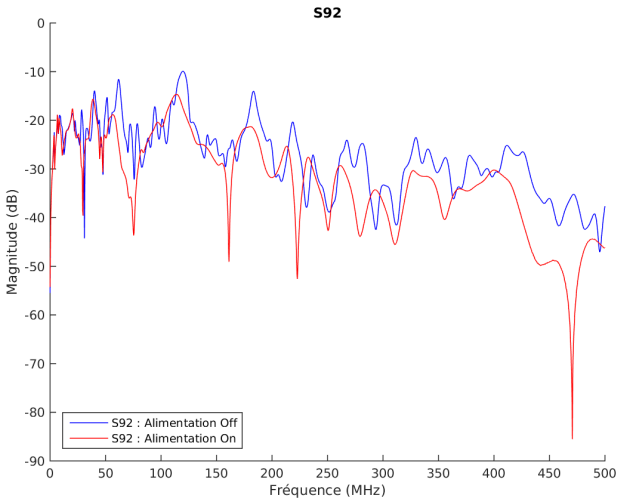

S85
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S85 : Alimentation Off
S85 : Alimentation On

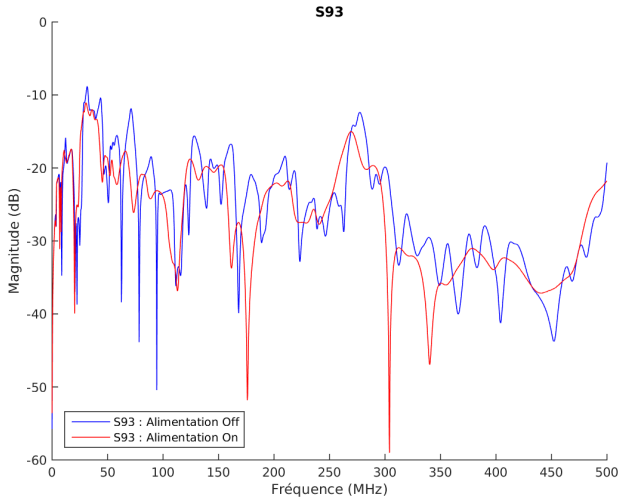

S86
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S86 : Alimentation Off
S86 : Alimentation On

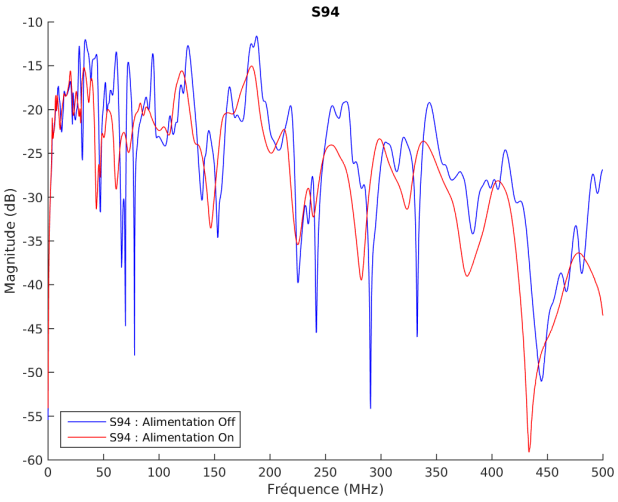

S87
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S87 : Alimentation Off
S87 : Alimentation On

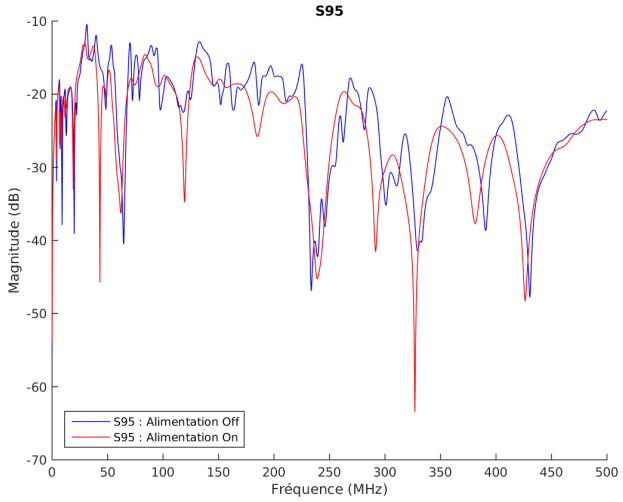

S88
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S88 : Alimentation Off
S88 : Alimentation On

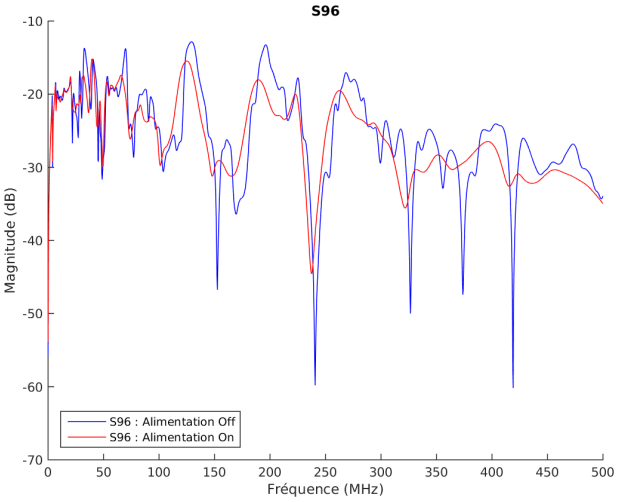

S91
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S91 : Alimentation Off
S91 : Alimentation On

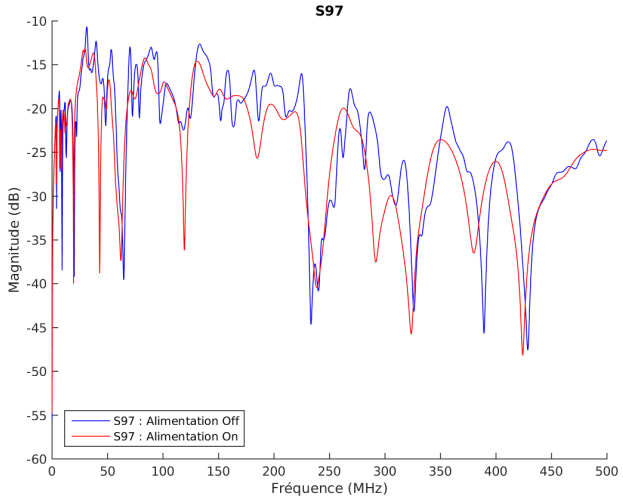

S92
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S92 : Alimentation Off
S92 : Alimentation On

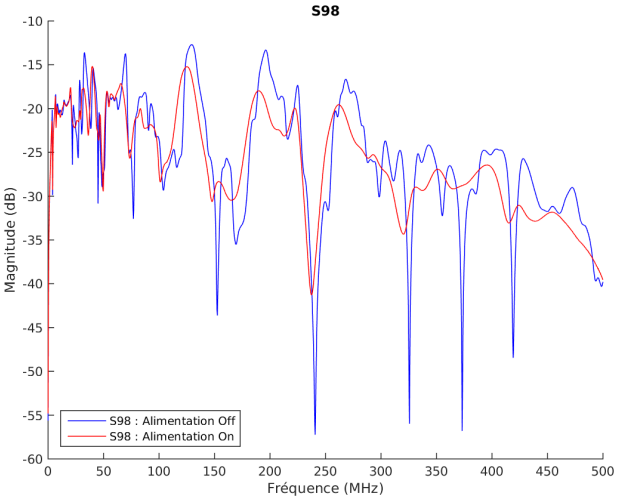

S93
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S93 : Alimentation Off
S93 : Alimentation On

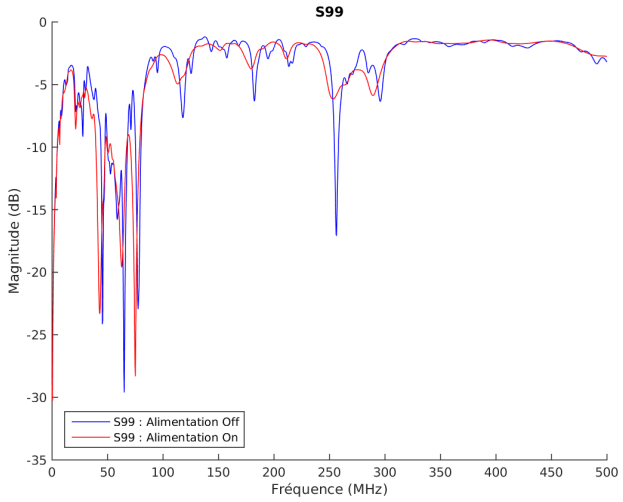

S94
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S94 : Alimentation Off
S94 : Alimentation On


S95
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S95 : Alimentation Off
S95 : Alimentation On


S96
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S96 : Alimentation Off
S96 : Alimentation On


S97
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S97 : Alimentation Off
S97 : Alimentation On


S98
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S98 : Alimentation Off
S98 : Alimentation On


S99
Magnitude (dB)
Fréquence (MHz)
S99 : Alimentation Off
S99 : Alimentation On
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-35
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

Page intentionnellement blanche

Bibliographie

[1] *Aerospace Standard AS50881 – Rev B. Wiring Aerospace Vehicle*. SAE Aerospace. 2003.

[2] Jean-Claude Alliot et al. *Compatibilité Electromagnétique. Des concepts de base aux applications*. Sous la dir. de Pierre Degauque et Ahmed Zeddam. Lavoisier, 2007.

[3] G. J. Anders et H. Brakelmann. « Improvement in cable rating calculations by consideration of dependence of losses on temperature ». In : *IEEE Transactions on Power Delivery* 19.3 (juil. 2004), p. 919-925. issn : 0885-8977. doi : 10.1109/TPWRD.2003.822973.

[4] G. J. Anders et E. Dorison. « Derating factor for cable crossings with consideration of longitudinal heat flow in cable screen ». In : *IEEE Transactions on Power Delivery* 19.3 (juil. 2004), p. 926-932. issn : 0885-8977. doi : 10.1109/TPWRD.2003.822961.

[5] G. J. Anders, A. K. T. Napieralski et W. Zamojski. « Calculation of the internal thermal resistance and ampacity of 3-core unscreened cables with fillers ». In : *IEEE Transactions on Power Delivery* 13.3 (juil. 1998), p. 699-705. issn : 0885-8977. doi : 10.1109/61.686962.

[6] G. J. Anders, A. Napieralski et Z. Kulesza. « Calculation of the internal thermal resistance and ampacity of 3-core screened cables with fillers ». In : *IEEE Transactions on Power Delivery* 14.3 (juil. 1999), p. 729-734. issn : 0885-8977. doi : 10.1109/61.772307.

[7] G. J. Anders et H. S. Radhakrishna. « Power cable thermal analysis with consideration of heat and moisture transfer in the soil ». In : *IEEE Transactions on Power Delivery* 3.4 (oct. 1988), p. 1280-1288. issn : 0885-8977. doi : 10.1109/61.193921.

[8] G. Anders et al. « Rating of cables in a nonuniform thermal environment ». In : *1999 IEEE Transmission and Distribution Conference (Cat. No. 99CH36333)*. T. 1. Avr. 1999, 83-88 vol.1. doi : 10.1109/TDC.1999.755321.

[9] George J. Anders. « Review of Power Cable Standard Rating Methods ». In : *Rating of Electric Power Cables in Unfavorable Thermal Environment*. Wiley-IEEE Press, 2005, p. 1-75. isbn : 9780471718741. doi : 10.1109/9780471718741.ch1. url : http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=5444124.

[10] Anonyme. *Technical Information Handbook. Wire and Cable*. 2013. isbn : 978-0-615-24926-1.

[11] Heinz Antes. « A Short Course on Boundary Element Methods ». Lecture. Technische Universität Braunschweig, Germany, nov. 2010. url : https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-01352830.

[12] C.A. Arkell et al. *Electric Cables Handbook*. Sous la dir. de G. F. Moore. Blackwell Science, 1997. isbn : 0-632-04075-0. url : http://s1.downloadmienphi.net/file/downloadfile6/192/1385052.pdf.

[13] C. R. Avery, S. G. Burrow et P. H. Mellor. « Electrical generation and distribution for the more electric aircraft ». In : *2007 42nd International Universities Power Engineering Conference*. Sept. 2007, p. 1007-1012. doi : 10.1109/UPEC.2007.4469088.

[14] Frédéric Bailer et al. « Simulation numérique de l'écoulement et du transfer de chaleur autour d'un cylindre ». In : *Revue Générale de Thermique* 36.10 (1997), p. 744-754. ISSN : 0035-3159. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/S0035-3159(97)84835-0. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0035315997848350.

[15] Emmanuel Batista. « Nouvelles structures électroniques pour le transport électrique : impacts des nouvelles contraintes d'intégration sur les interférences électromagnétiques et moyens de prévision de la compatibilité électromagnétique ». 2009TOU30206. Thèse de doct. 2009, 1 vol. (205 p.) URL : http://www.theses.fr/2009TOU30206/document.

[16] W. Batty et al. « Global coupled EM-electrical-thermal simulation and experimental validation for a spatial power combining MMIC array ». In : *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 50.12 (déc. 2002), p. 2820-2833. ISSN : 0018-9480. DOI : 10.1109/TMTT.2002.805142.

[17] Carl E. Baum. « The Theory Of Electromagnetic Interference Control ». In : *Interaction Notes* (1989). 478. URL : http://ece-research.unm.edu/summa/notes/In/0478.pdf.

[18] Ryszard Bialecki et Andrzej Józef Nowak. « Boundary value problems in heat conduction with nonlinear material and nonlinear boundary conditions ». In : *Applied Mathematical Modelling* 5.6 (1981), p. 417-421. ISSN : 0307-904X. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/S0307-904X(81)80024-8. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X81800248.

[19] Markus Biegert et Mahamadi Warma. « The heat equation with nonlinear generalized Robin boundary conditions ». In : *Journal of Differential Equations* 247.7 (2009), p. 1949-1979. ISSN : 0022-0396. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2009.07.017. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039609002769.

[20] M. Bockarjova et G. Andersson. « Transmission Line Conductor Temperature Impact on State Estimation Accuracy ». In : *2007 IEEE Lausanne Power Tech*. Juil. 2007, p. 701-706. DOI : 10.1109/PCT.2007.4538401.

[21] Fabrizio Bonani et Giovanni Ghione. « On the application of the Kirchhoff transformation to the steady-state thermal analysis of semiconductor devices with temperature-dependent and piecewise inhomogeneous thermal conductivity ». In : *Solid-State Electronics* 38.7 (1995), p. 1409-1412. ISSN : 0038-1101. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/0038-1101(94)00255-E. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/003811019400255E.

[22] L. Boukezzi, Y. Saadi et A. Boubakeur. « The radial distribution of temperature in XLPE cable : An analysis with the Finite Volume Numerical Method (FVM) ». In : *2010 Annual Report Conference on Electrical Insulation and Dielectic Phenomena*. Oct. 2010, p. 1-4. DOI : 10.1109/CEIDP.2010.5723951.

[23] H. Brakelmann et G. Anders. « Ampacity reduction factors for cables crossing thermally unfavorable regions ». In : *IEEE Transactions on Power Delivery* 16.4 (oct. 2001), p. 444-448. ISSN : 0885-8977. DOI : 10.1109/61.956718.

[24] H. Brakelmann, P. Lauter et G. J. Anders. « Current rating of multicore cables ». In : *IEEE Transactions on Industry Applications* 41.6 (nov. 2005), p. 1566-1573. ISSN : 0093-9994. DOI : 10.1109/TIA.2005.857471.

[25] Berenger Bramas. « Optimization and parallelization of the boundary element method for the wave equation in time domain ». Theses. Université de Bordeaux, fév. 2016. URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01306571.

[26] Carlos Alberto Brebbia. *The Boundary Element Method for Engineers*. 2e éd. Pentech Press Limited, 1980. ISBN : 0-7273-0205-1.

[27] A. Bugajev, G. Jankevičiūtė et N. Tumanova. « The Mathematical Modelling of Heat Transfer in Electrical Cables ». In : *Electrical, Control and Communication Engineering* 5 (1 mai 2014), p. 46-53. DOI : 10.2478/ecce-2014-0007. URL : https://www.degruyter.com/downloadpdf/j/ecce.2014.5.issue-1/ecce-2014-0007/ecce-2014-0007.pdf.

[28] C. Butler, D. Newport et M. Geron. « Optimising the locations of thermally sensitive equipment in an aircraft crown compartment ». In : *Aerospace Science and Technology* 28.1 (2013), p. 391-400. ISSN : 1270-9638. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.ast.2012.12.005. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1270963812002040.

[29] Christophe Castanie. « Modèle de lignes de transmission non uniformes pour l'étude de couplages électromagnétiques sur des réseaux de câbles ». Thèse de Doctorat. Université Paul Sabatier, 2002. URL : http://www.sudoc.fr/070129770.

[30] Valentina Cecchi. « Temperature-Dependent Transmission Line Models for Electric Power Systems and Their Impacts on System Studies ». PhD Dissertation. Drexel University, 2010.

[31] Valentina Cecchi et Matthew Knudson. « Study of the Effects of Temperature-dependent Electric Power Transmission Line Models on Estimation of Transfer Capabilities ». In : *Proceedings of the 11th International Conference on Applications of Electrical and Computer Engineering*. ACA'12. Athens, Greece : World Scientific, Engineering Academy et Society (WSEAS), 2012, p. 64-69. ISBN : 978-1-61804-074-9. URL : http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2209408.2209420.

[32] Vasilis Chatziathanasiou et al. « Dynamic thermal analysis of underground medium power cables using thermal impedance, time constant distribution and structure function ». In : *Applied Thermal Engineering* 60.1 (2013), p. 256-260. ISSN : 1359-4311. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2013.07.009. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359431113004973.

[33] Jongkeun Choi et Seick Kim. « Green's functions for elliptic and parabolic systems with Robin-type boundary conditions ». In : *Journal of Functional Analysis* 267.9 (2014), p. 3205-3261. ISSN : 0022-1236. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2014.08.011. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022123614003383.

[34] S. W. Churchill et R. Usagi. « A general expression for the correlation of rates of transfer and other phenomena ». In : *AIChE Journal* 18.6 (1972), p. 1121-1128. ISSN : 1547-5905. DOI : 10.1002/aic.690180606. URL : http://dx.doi.org/10.1002/aic.690180606.

[35] R. Čiegis et al. « Mathematical Modelling of the Heat Transfer in a Multi-Wire Bundle ». In : *Mathematical Modelling and Analysis* (2005), p. 413-417.

[36] R. Čiegis et al. « Parallel numerical algorithms for optimization of electrical cables ». In : *Mathematical Modelling and Analysis* 13.4 (2008), p. 471-482. DOI : 10.3846/1392-6292.2008.13.471-482. eprint : http://dx.doi.org/10.3846/1392-6292.2008.13.471-482. URL : http://dx.doi.org/10.3846/1392-6292.2008.13.471-482.

[37] R. Čiegis et al. « Numerical simulation of the heat conduction in electrical cables ». In : *Mathematical Modelling and Analysis* 12.4 (2007), p. 425-439. DOI : 10.3846/1392-6292.2007.12.425-439. eprint : http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.3846/1392-6292.2007.12.425-439. URL : http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.3846/1392-6292.2007.12.425-439.

[38] R Čiegis et al. « Determination of Heat Conductivity Coefficient of a Cable Bundle by Inverse Problem Solution Method. » In : *Electronics & Electrical Engineering* 90 (2009).

[39] R. T. Coneybeer, W. Z. Black et R. A. Bush. « Steady-state and transient ampacity of bus bar ». In : *IEEE Transactions on Power Delivery* 9.4 (oct. 1994), p. 1822-1829. ISSN : 0885-8977. DOI : 10.1109/61.329515.

[40] D. Dai, M. Hu et L. Luo. « Calculation of thermal distribution and ampacity for underground power cable system by using electromagnetic-thermal coupled model ». In : *2014 IEEE Electrical Insulation Conference (EIC)*. Juin 2014, p. 303-306. DOI : 10.1109/EIC.2014.6869397.

[41] N. Dalir et S. S. Nourazar. « Analytical Solution of the Problem on the Three-Dimensional Transient Heat Conduction in a Multilayer Cylinder ». In : *Journal of Engineering Physics and Thermophysics* 87.1 (jan. 2014), p. 89-97. ISSN : 1573-871X. DOI : 10.1007/s10891-014-0988-2. URL : https://doi.org/10.1007/s10891-014-0988-2.

[42] Shaozhong Deng. *Quadrature Formulas in Two Dimensions*. Math 5172 - Finite Element Method. University of North Carolina at Charlotte, 2010. URL : http://math2.uncc.edu/~shaodeng/TEACHING/math5172/Lectures/Lect_15.PDF.

[43] M. Diebig et S. Frei. « Simulation-Based Optimization of Multi Voltage Automotive Power Supply Systems ». In : *2013 IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC)*. Oct. 2013, p. 1-6. DOI : 10.1109/VPPC.2013.6671739.

[44] Lénine Djanna Koffi Francis. « Convection naturelle turbulente en cavité différentiellement chauffée à grands nombres de Rayleigh : caractérisation expérimentale des écoulements et des transferts thermiques, étude numérique du couplage convection-rayonnement ». Theses. ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechique - Poitiers, avr. 2011. URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00595352.

[45] Victor Dmitriev et Luciana Gonzalez. « Electrical and thermal analysis on optical ground wire cables in short-circuit regime by coupled equations ». In : *Electric Power Systems Research* 101 (2013), p. 80-87. ISSN : 0378-7796. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.epsr.2013.03.015. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378779613000941.

[46] Naraindranath Doorgah. « Contribution à la modélisation prédictive CEM d'une chaine d'entrainement ». Theses. Ecole Centrale de Lyon, déc. 2012. URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00838823.

[47] Karl Dvorsky. « Analysis of a Nonlinear Boundary Value Problem with Application to Heat Transfer in Electric Cables, » PhD Dissertation. Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, 2012.

[48] *Electric cables – Calculation of the current rating. Part 2 : Thermal resistance – section 2.1 Calculation of thermal resistance*. Commission Electrotechnique Internationale. BSI British Standard, 1997.

[49] *Electric cables – Calculation of the current rating. Partie 1-1 : Equations de l'intensité du courant admissible (facteur de charge 100 %) et calcul des pertes – Généralités*. Seconde Edition. Commission Electrotechnique Internationale. 2006.

[50] Roland Ernst, Philippe Grosse et Laurent Philippe. « An electromagnetic-thermal coupling example solved on a high frequency inductive system with the Matlab finite elements solver ». In : *International Journal of Thermal Sciences* 38.6 (1999), p. 481-491. ISSN : 1290-0729. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/S1290-0729(99)80021-0. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1290072999800210.

[51] Charles F. Fefferman. *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation*. Clay Mathematics Institute. URL : http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf.

[52] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton et Matthew Sands. *The Feynamn lectures on Physics*. The NEW Millenium. T. II : Mainly Electromagnetism and Matter. Basic Books, 2010. URL : http://www.feynmanlectures.caltech.edu/.

[53] M.P. Filippakou et al. « Electrical contact overheating under short-circuit currents ». In : *Electric Power Systems Research* 57.2 (2001), p. 141-147. ISSN : 0378-7796. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/S0378-7796(01)00081-5. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378779601000815.

[54] D. Fiscaletti et al. « Buoyancy-induced transitional flows around an enclosed horizontal cylinder : An experiment ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 58.1 (2013), p. 619-631. ISSN : 0017-9310. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.11.039. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931012009027.

[55] J.A. Fleming. *The Propagation of Electric Currents in Telephone and Telegraph Conductors. A course of post-graduate lectures delivered before the University of London*. Constable & Company ltd, 1912. URL : https://archive.org/details/propagationofele030887mbp.

[56] S. F. Follett. « Electrical equipment in aircraft : survey of past and present practice and future trends in design ». In : *Proceedings of the IEE - Part A : Power Engineering* 103.1 (mai 1956), p. 4-. issn : 0369-8882. doi : 10.1049/pi-a.1956.0003.

[57] Antoine Gerlaud. « Simulation multiphysique pour la conception busbars laminés ». In : *Symposium de Génie Électrique 2014*. Cachan, France, juil. 2014. url : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01065284.

[58] Walton C. Gibson. *The Method of Moments in Electromagnetics*. Chapman & Hall/CRC – Taylor & Francis Group, 2008.

[59] Amir S. Gohardani, Georgios Doulgeris et Riti Singh. « Challenges of future aircraft propulsion : A review of distributed propulsion technology and its potential application for the all electric commercial aircraft ». In : *Progress in Aerospace Sciences* 47.5 (2011), p. 369-391. issn : 0376-0421. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.paerosci.2010.09.001. url : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042110000497.

[60] H. Goldenberg. « External thermal resistance of two buried cables. Restricted application of superposition ». In : *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of* 116.5 (mai 1969), p. 822-826. issn : 0020-3270. doi : 10.1049/piee.1969.0156.

[61] J. Gołębiowski et M. Zaręba. « The method of analysis of the stationary thermal field in insulation of a lead with the variable heat transfer coefficient ». English. In : *Przegląd Elektrotechniczny* R. 89, nr 9 (2013), p. 227-231.

[62] J. Grandvuillemin et al. « Thermal Modelling Of Enclosed Cables In Automotive Applications ». In : *2007 IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference*. Sept. 2007, p. 730-735. doi : 10.1109/VPPC.2007.4544220.

[63] J. Grandvuillemin et al. « Ampacity of power bus bars for Hybrid-Electric or Electric Vehicles ». In : *2008 IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference*. Sept. 2008, p. 1-6. doi : 10.1109/VPPC.2008.4677660.

[64] Johann Grandvuillemin et al. *Dimensionnement électrothermique d'une architecture électrique embarquée – Application aux faisceaux automobiles*. 2011. url : https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/ingenierie-des-transports-th14/systemes-de-transport-intelligents-42575210/dimensionnement-electrothermique-d-une-architecture-electrique-embarquee-d5590/dimensionnement-electrothermique-des-faisceaux-d5590niv10001.html.

[65] J.A. Greenwood et J.B.P. Williamson. « Electrical conduction in solids II. Theory of temperature-dependent conductors ». In : *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 246.1244 (1958), p. 13-31. issn : 0080-4630. doi : 10.1098/rspa.1958.0103. eprint : http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/246/1244/13.full.pdf. url : http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/246/1244/13.

[66] Wasim Habra. « Développement de modèles thermiques compacts en vue de la modélisation électrothermique des composants de puissance ». Theses. Université Paul Sabatier - Toulouse III, juin 2007. url : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00159791.

[67] Roger F. Harrington. « The Method of Moments in Electromagnetics ». In : *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* 1.3 (1987), p. 181-200. doi : 10.1163/156939387X00018. eprint : https://doi.org/10.1163/156939387X00018. url : https://doi.org/10.1163/156939387X00018.

[68] Roger F. Harrington. *Field Computation by Moment Methods*. WILEY - IEEE Press, 1993. isbn : 978-0-7803-1014-8.

[69] T. A. Haskew, R. F. Carwile et L. L. Grigsby. « An algorithm for steady-state thermal analysis of electrical cables with radiation by reduced Newton-Raphson techniques ». In : *IEEE Transactions on Power Delivery* 9.1 (jan. 1994), p. 526-533. issn : 0885-8977. doi : 10.1109/61.277725.

[70] C. M. Hebbert. « The transmission characteristics of toll telephone cables at carrier frequencies ». In : *The Bell System Technical Journal* 20.3 (juil. 1941), p. 293-330. ISSN : 0005-8580. DOI : 10.1002/j.1538-7305.1941.tb03139.x.

[71] Wolfram Hergert. « Gustav Mie : From Electromagnetic Scattering to an Electromagnetic View of Matter ». In : *The Mie Theory. Basics and Applications*. Sous la dir. de Wolfram Hergert et Thomas Wriedt. T. 169. Springer Series in Optical Sciences. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012. ISBN : 978-3-642-28737-4. DOI : 10.1007/978-3-642-28738-1. URL : https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-28738-1.

[72] Jean Hermetz, Michael Ridel et Carsten Doll. « Distributed electric propulsion for small business aircraft a concept-plane for key-technologies investigations. » In : *ICAS 2016*. DAEJEON, South Korea, sept. 2016. URL : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01408988.

[73] A. Hiranandani. « Calculation of conductor temperatures and ampacities of cable systems using a generalized finite difference model ». In : *IEEE Transactions on Power Delivery* 6.1 (jan. 1991), p. 15-24. ISSN : 0885-8977. DOI : 10.1109/61.103717.

[74] I. O. Hockmeyer. « The generation and regulation of electric power in aircraft : a survey of design features of generators and their control ». In : *Electrical Engineers - Part II : Power Engineering, Journal of the Institution of* 93.31 (fév. 1946), p. 2-. DOI : 10.1049/ji-2.1946.0002.

[75] C. Holyk et al. « Simulation and measurement of the steady-state temperature in multi-core cables ». In : *Electric Power Systems Research* 116 (2014), p. 54-66. ISSN : 0378-7796. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.epsr.2014.05.001. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378779614001746.

[76] H. J. Horn. « Electric-wiring installations in British aircraft ». In : *Electrical Engineering* 63.12 (déc. 1944), p. 896-899. ISSN : 0095-9197. DOI : 10.1109/EE.1944.6440621.

[77] John R. Howell, Robert Siegel et M. Pinar Mengüç. *Thermal Radiation Heat Transfer*. Fifth Edition. CRC Press, 2011.

[78] Peter Hunter et Andrew Pullan. « FEM/BEM NOTES ». Department of Engineering Science, The University of Auckland, 2001. URL : https://www.cs.rutgers.edu/~suejung/fembemnotes.pdf.

[79] Dülk I et T Kovácsházy. « A Method for Computing the Analytical Solution of the Steady-State Heat Equation in Multilayered Media ». In : *Journal oh Heat Transfer* 136 (9 2014). Sous la dir. d'ASME. DOI : 10.1115/1.4027838. URL : http://heattransfer.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1881897.

[80] A. Ilgevičius et H.-D. Liess. « Calculation of the heat transfer in cylindrical wires and electrical fuses by implicit finite volume method ». In : *Mathematical Modelling and Analysis* 8.3 (2003), p. 217-227. DOI : 10.1080/13926292.2003.9637225. eprint : http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/13926292.2003.9637225. URL : http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/13926292.2003.9637225.

[81] Audrius Ilgevicius. « Analytical and numerical analysis and simulation of heat transfer in electrical conductors and fuses ». PhD Dissertation. Universität des Bundeswehr München, 2004. URL : http://athene-forschung.unibw.de/doc/85275/85275.pdf.

[82] Frank P. Incropera et David P. De Witt. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Second Edition. John Wiley et Sons, 1985. ISBN : 0-471-88550-9.

[83] A. T. Isikveren. « The future of more electrical aircraft ». In : ICAS Workshop 2013. Bauhaus-Luftfahrt. Cape Town, South Africa, 2013. URL : http://www.icas.org/media/pdf/Workshops/2013/Future%20electrical%20AV%20Isikveren.pdf.

[84] T. L. Jones. « The calculation of cable parameters using combined thermal and electrical circuit models ». In : *IEEE Transactions on Power Delivery* 4.3 (juil. 1989), p. 1529-1540. ISSN : 0885-8977. DOI : 10.1109/61.32640.

[85] Emmanuel Joubert, Denis Chapuis, Didier Esteyne et al. « The e-fan all electrical aircraft demonstrator and its industrialization ». In : 30th Congress of the International Council of the Aeronautical Science. Airbus Group, VoltAir SAS. Daejeon, South Korea, 2016. URL : http://www.icas.org/ICAS_ARCHIVE/ICAS2016/data/papers/2016_0731_paper.pdf.

[86] Charles Jullien. « Contribution à l'analyse et à la modélisation des couplages électromagnétiques au sein de torons de câbles à grand nombre de liaisons : application aux câblages aéronautiques ». 2013ISAR0002. Thèse de doct. 2013. URL : http://www.theses.fr/2013ISAR0002/document.

[87] H. Kalis et A. Lasis. « Simple algorithms for calculation of the axial-symmetric heat transport problem in a cylinder ». In : *Mathematical Modelling and Analysis* 6.2 (2001), p. 262-269. DOI : 10.1080/13926292.2001.9637165. eprint : http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/13926292.2001.9637165. URL : http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/13926292.2001.9637165.

[88] Murat Karahan et Özcan Kalenderli. « Coupled Electrical and Thermal Analysis of Power Cables Using Finite Element Method ». In : *Heat Transfer. Engineering Applications*. Sous la dir. de Vyacheslav S. Vikhrenko. InTech, 2011. Chap. 9, p. 412. ISBN : 978-953-307-361-3. DOI : 10.5772/2434. URL : https://www.intechopen.com/books/heat-transfer-engineering-applications.

[89] Alain J. Kassab et Eduardo Divo. « A generalized boundary integral equation for isotropic heat conduction with spatially varying thermal conductivity ». In : *Engineering Analysis with Boundary Elements* 18.4 (1996), p. 273-286. ISSN : 0955-7997. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/S0955-7997(96)00057-4. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799796000574.

[90] J. K. Kim et al. « Compact Thermal Network Model of the Thermal Interface Material Measurement Apparatus With Multi-Dimensional Heat Flow ». In : *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology* 1.8 (août 2011), p. 1186-1194. ISSN : 2156-3950. DOI : 10.1109/TCPMT.2011.2150748.

[91] S. W. Kim et al. « Coupled finite-element-analytic technique for prediction of temperature rise in power apparatus ». In : *IEEE Transactions on Magnetics* 38.2 (mar. 2002), p. 921-924. ISSN : 0018-9464. DOI : 10.1109/20.996237.

[92] N. Kovac, I. Sarajcev et D. Poljak. « Nonlinear-coupled electric-thermal modeling of underground cable systems ». In : *IEEE Transactions on Power Delivery* 21.1 (jan. 2006), p. 4-14. ISSN : 0885-8977. DOI : 10.1109/TPWRD.2005.852272.

[93] Laurent Krähenbühl. « The boundary integral equation method for solving potential problems in electrical engineering, and its formulation in axisymmetry ». Theses. Ecole Centrale de Lyon, déc. 1983. URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012060.

[94] A. Kushino, M. Ohkubo et K. Fujioka. « Thermal conduction measurement of miniature coaxial cables between 0.3 and 4.5K for the wiring of superconducting detectors ». In : *Cryogenics* 45.9 (2005), p. 637-640. ISSN : 0011-2275. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.cryogenics.2005.07.002. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0011227505001001.

[95] Josua Labaki, Luiz Otavio Saraiva Ferreira et Euclides Mesquita. « Constant Boundary Elements on graphics hardware : a GPU-CPU complementary implementation ». en. In : *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 33 (déc. 2011), p. 475-482. ISSN : 1678-5878. URL : http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-58782011000400011&nrm=iso.

[96] L.D. Landau et E.M. Lifshitz. *Statistical Physics. Course of Theoretical Physics, Volume 5*. Third Edition, Revised and Enlarged. T. 12. Pergamon Press, 1980.

[97] L.D. Landau et E.M. Lifshitz. *Fluid Mechanics. Course of theoretical physics, Volume 6*. Trad. par J.B Sykes et W.H. Reid. Third Revised English Edition. 12 t. Pergamon Press, 1987. URL : https://archive.org/details/FluidMechanics.

[98] Olivier Langlois. « Conception d'un réseau de secours électrique pour l'aéronautique ». Thèse de Doctorat. Institut National Polytechnique de Toulouse, 2006. URL : http://ethesis.inp-toulouse.fr/archive/00000243/01/langlois.pdf.

[99] Olivier Langlois et al. « De l'avion plus électrique à l'avion tout électrique : état de l'art et prospective sur les réseaux de bord ». In : *J3eA, Journal sur l'enseignement des sciences et technologies de l'information et des systèmes* 4 (Hors-Série 1 2005). DOI : https://doi.org/10.1051/bib-j3ea:2005601. URL : https://www.j3ea.org/articles/j3ea/pdf/2005/06/j3ea2005601.pdf.

[100] Thomas Larhzaoui. « Reliability of the power line technology in rder to drive aircraft actuators ». Theses. INSA de Rennes, juil. 2014. URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01123745.

[101] Anthony Lefèvre. « Contribution à la modélisation électrique, électromagnétique et thermique des transformateurs : Application à l'étude de l'échauffement sur chatges non-linéaires ». Thèse. Université de Nantes, oct. 2006. URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00116335.

[102] M. Lei et al. « Study on thermal model of dynamic temperature calculation of single-core cable based on Laplace calculation method ». In : *2010 IEEE International Symposium on Electrical Insulation*. Juin 2010, p. 1-7. DOI : 10.1109/ELINSL.2010.5549825.

[103] John Lekner. « Conducting cylinders in an external electric field : Polarizability and field enhancement ». In : *Journal of Electrostatics* 71.6 (2013), p. 1104-1110. ISSN : 0304-3886. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.elstat.2013.10.003. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304388613001290.

[104] Hervé Lemonnier. « Résolution de l'équation de Laplace par la méthode des éléments de frontière ». DTP/SMTH, CEA/Grenoble, 2004. URL : http://herve.lemonnier.sci.free.fr/BEM/Laplace.pdf.

[105] Gillian Leplat. « Stabilité en écoulement de convection naturelle en milieu confiné ». Thèse de doctorat. ISAE, Toulouse, 2009. URL : http://www.theses.fr/2009ESAE0011.

[106] Wang Li et al. « A finite volume method for cylindrical heat conduction problems based on local analytical solution ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 55.21 (2012), p. 5570-5582. ISSN : 0017-9310. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.05.043. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001793101200364X.

[107] Y. Li et al. « Coupled Electromagnetic-Thermal Modeling the Temperature Distribution of XLPE Cable ». In : *2009 Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference*. Mar. 2009, p. 1-4. DOI : 10.1109/APPEEC.2009.4918246.

[108] Yongchun Liang et al. « Cable load dynamic adjustment based on surface temperature and thermal circuit model ». In : *2008 International Conference on Condition Monitoring and Diagnosis*. Avr. 2008, p. 705-708. DOI : 10.1109/CMD.2008.4580382.

[109] H.-D. Liess et A. Ilgevičius. « Analytical versus numerical calculations of physical problems. The benefits of its combination ». In : *Mathematical Modelling and Analysis* 8.4 (2003), p. 291-302. DOI : 10.1080/13926292.2003.9637231. eprint : http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/13926292.2003.9637231. URL : http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/13926292.2003.9637231.

[110] I. V. Lindell. « On the Quasi-TEM Modes in Inhomogeneous Multiconductor Transmission Lines ». In : *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 29.8 (août 1981), p. 812-817. ISSN : 0018-9480. DOI : 10.1109/TMTT.1981.1130452.

[111] S. B. Liu. « Calculation of the Steady-State and Transient Temperature Rises of Round Cable Bundles ». In : *IEEE Transactions on Power Delivery* 25.3 (juil. 2010), p. 1229-1235. ISSN : 0885-8977. DOI : 10.1109/TPWRD.2010.2046681.

[112] Florian Peter Loos. « Joule Heating in Connecting Structures of Automotive Electric Devices. Modelling, Simulation and Optimization ». PhD Dissertation. Universität des Bundeswehr München, 2014. URL : https://athene-forschung.unibw.de/doc/92056/92056.pdf.

[113] X. Lu, P. Tervola et M. Viljanen. « Transient analytical solution to heat conduction in composite circular cylinder ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 49.1 (2006), p. 341-348. ISSN : 0017-9310. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.06.019. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931005004400.

[114] P. R. M. Lyra et al. « An axisymmetric finite volume formulation for the solution of heat conduction problems using unstructured meshes ». en. In : *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 27 (déc. 2005), p. 407-414. ISSN : 1678-5878. URL : http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-58782005000400009&nrm=iso.

[115] Chien-Ching Ma et Shin-Wen Chang. « Analytical exact solutions of heat conduction problems for anisotropic multi-layered media ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47.8 (2004), p. 1643-1655. ISSN : 0017-9310. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2003.10.022. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931003006124.

[116] Florian Mahiddini et al. « Coupled EMC-Thermal Modeling Of Electrical Harnesses Within "More Electrical Aircraft" ». In : *ICAS 2016*. DAEJEON, South Korea, sept. 2016. URL : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01393389.

[117] Florian Mahiddini et al. « Simulations Multiphysiques CEM-Thermique de Torons de Câbles. » In : *18ème Colloque international et Exposition sur la Compatibilité Electromagnétique (CEM 2016)*. Rennes, France, juil. 2016. URL : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01353691.

[118] Irina Makhkamova, Khamid Mahkamov et Philip Taylor. « CFD thermal modelling of Lynx overhead conductors in distribution networks with integrated Renewable Energy Driven Generators ». In : *Applied Thermal Engineering* 58.1 (2013), p. 522-535. ISSN : 1359-4311. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2013.04.066. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359431113003372.

[119] D. V. Malyna et al. « Combined electrical and thermal modeling in power supplies ». In : *2005 European Conference on Power Electronics and Applications*. Sept. 2005. DOI : 10.1109/EPE.2005.219264.

[120] Sylvain Mandray. « Optimisation des convertisseurs d'électronique de puissance selon des critères thermiques et CEM. Application aux dispositifs dédiés à l'aéronautique ». Theses. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, juin 2009. URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00405641.

[121] Vincent Manet. « La Méthode des Éléments Finis : vulgarisation des aspects mathématiques et illustrationde la méthode ». Lecture. ViM2, Lyon, France, juin 2016. URL : https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00763690.

[122] François Marquier et Jean-Jacques Greffet. *Electromagnétisme*. 2017. URL : http://paristech.institutoptique.fr/site.php?id=19&fileid=13533.

[123] STEPHANE MARTEAU. « Etude du couplage d'une onde electromagnetique avec un guide d'onde ouvert au moyen d'une representation modale des champs ». 1995PA066772. Thèse de doct. 1995, 160 P. URL : http://www.theses.fr/1995PA066772.

[124] Philippe Marty. *Transferts Thermiques Convectifs*. Cours Master 2 GdP. Université Joseph Fourier, Grenoble, 2012-2013. URL : http://www.legi.grenoble-inp.fr/people/Philippe.Marty/cours-convection-M2.pdf.

[125] Eliette Mathey. « Optimisation numérique du refroidissement des moules d'injection de thermoplastiques basée sur la simulation des transferts thermiques par la méthode des éléments frontières ». 2004TOU30264. Thèse de doct. 2004, 1 vol. (243 p.) URL : http://www.theses.fr/2004TOU30264.

[126] G. De Mey et V. Chatziathanasiou. « A theoretical model for effective thermal conductivity of multicore power cables ». In : *Electric Power Systems Research* 87 (2012), p. 10-12. ISSN : 0378-7796. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.epsr.2012.01.006. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378779612000089.

[127] *MICROHMMETRE,MILLIOHMMETRE-OHMMETRE*. URL : https://www.sefelec.fr/fr/MICROHMMETRE-MILLIOHMMETRE-OHMMETRE.php.

[128] Gustav Mie. « Das Problem der Wärmeleitung in einem verseilten elektrischen Kabel ». In : *Nat.-Ver. Mitteil.* 36 (1904), p. 155-188.

[129] Gustav Mie. « Das Problem der Wärmeleitung in einem verseilten elektrischen Kabel ». In : *Elektrotechn. Zeitschrift* 137 (1905), p. 137-143.

[130] Hatem Mokhtari. « Simulation de la Perturbation Thermique dans un Câble Coaxial : Proposition d'un Nouveau Type de Capteur de Température ». Thèse de doctorat. Université de Metz, 1992. URL : http://docnum.univ-lorraine.fr/public/UPV-M/Theses/1992/Mokhtari.Hatem.SMZ923.pdf.

[131] V. T. Morgan. « The radial temperature distribution and effective radial thermal conductivity in bare solid and stranded conductors ». In : *IEEE Transactions on Power Delivery* 5.3 (juil. 1990), p. 1443-1452. ISSN : 0885-8977. DOI : 10.1109/61.57987.

[132] V. T. Morgan. « Effect of mixed convection on the external thermal resistance of single-core and multicore bundled cables in air ». In : *IEE Proceedings C - Generation, Transmission and Distribution* 139.2 (mar. 1992), p. 109-116. ISSN : 0143-7046. DOI : 10.1049/ip-c.1992.0018.

[133] V. T. Morgan et R. D. Findlay. « Effects of axial tension and reduced air pressure on the radial thermal conductivity of a strained conductor ». In : *IEEE Transactions on Power Delivery* 8.2 (avr. 1993), p. 553-558. ISSN : 0885-8977. DOI : 10.1109/61.216859.

[134] D. Mushamalirwa, N. Germay et J. C. Steffens. « A 2-D finite element mesh generator for thermal analysis of underground power cables ». In : *IEEE Transactions on Power Delivery* 3.1 (jan. 1988), p. 62-68. ISSN : 0885-8977. DOI : 10.1109/61.4227.

[135] Janardan G. Negi et Rishi Narain Singh. « A matrix method for heat conduction in multilayered media ». In : *pure and applied geophysics* 73.1 (déc. 1969), p. 143-151. ISSN : 1420-9136. DOI : 10.1007/BF00875132. URL : https://doi.org/10.1007/BF00875132.

[136] J. H. Neher. « The Transient Temperature Rise of Buried Cable Systems ». In : *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems* 83.2 (fév. 1964), p. 102-114. ISSN : 0018-9510. DOI : 10.1109/TPAS.1964.4765976.

[137] J. H. Neher et M. H. McGrath. « The calculation of the temperature rise and load capability of cable systems ». In : *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. Part III : Power Apparatus and Systems* 76.3 (avr. 1957), p. 752-764. ISSN : 0097-2460. DOI : 10.1109/AIEEPAS.1957.4499653.

[138] Alain Neveu et K EL KHOURI. « Réduction d'un modèle thermique non linéaire par modes de branche. Application à un cable chauffant : Analyse vibratoire non linéaire sur base modale ». In : *RFM Revue française de mécanique* 2 (2000), p. 115-124.

[139] François NICOLAS. « Reconstruction de champs instantanés de masse volumique par BOS 3D. Application à l'étude des écoulements complexes en grande soufflerie ». Theses. Université de Toulouse ; Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE), mar. 2017. URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01576594.

[140] François Nicolas et al. « Experimental study of a co-flowing jet in ONERA's F2 research wind tunnel by 3D background oriented schlieren ». In : *Measurement Science and Technology* 28.8 (2017), p. 085302. URL : http://stacks.iop.org/0957-0233/28/i=8/a=085302.

[141] Paweł Ocłoń et al. « Numerical simulation of heat dissipation processes in underground power cable system situated in thermal backfill and buried in a multilayered soil ». In : *Energy Conversion and Management* 95 (2015), p. 352-370. ISSN : 0196-8904. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.enconman.2015.01.092. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196890415001065.

[142] Marc Olivas Carrion. « Communications sur le réseau d'énergie électrique d'un véhicule : modélisation et analyse du canal de propagation ». 2006LIL10105. Thèse de doct. 2006, 1 vol. (v-117 p.) URL : http://www.theses.fr/2006LIL10105/document.

[143] Sophocles J. Orfanidis. *Electromagnetic Waves and Antennas*. Rutgers University, 2014. URL : http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa.

[144] Brahim Ould Sidi Fall. « Modélisation des problèmes de conduction de chaleur par la méthode des éléments de frontière : application à la solidification en fonderie ». Thèse de doctorat. Université Lille1 - Sciences et Technologies, 1991.

[145] Abdelhakim Oulefki. « Réduction de modèles thermiques par amalgame modal ». Theses. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, fév. 1993. URL : https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00523620.

[146] LAURENT PALETTA. « Demarche topologique pour l'etude des couplages electromagnetiques sur des systemes de cablages industriels de grande dimension ». 1998PA112253. Thèse de doct. 1998, 286 P. URL : http://www.theses.fr/1998PA112253.

[147] Jean-Philippe Parmantier. « Approche topologique pour l'étude des couplages électromagnétiques ». 1991LIL10167. Thèse de doct. 1991, 1 vol. (349 p.) URL : http://www.theses.fr/1991LIL10167.

[148] Jean-Philippe Parmantier, Vincent Gobin et Jean-Claude Alliot. « La topologie électromagnétique. Une méthode originale pour organiser et prédire les problèmes de CEM dès la phase de conception d'un système ». In : *REE* (4 Avril 1996), p. 63-70. URL : http://www.ree.see.asso.fr/IMG/pdf/024ee3c134/pdf04/1996_0004_11.pdf.

[149] Jean-Philippe Parmantier et al. *Amélioration dans le logiciel CRIPTE : code LAPLACE, création de tubes, calcul en des positions intermédiaires sur un tube*. Rapport Technique de Synthèse n° RTS 12/6767 PY. ONERA, Février 1997.

[150] R. Pasquetti et C. Le Nilliot. « Conduction inverse par éléments de frontière. Cas stationnaire ». In : *Revue de Physique Appliquee* 25.1 (1990), p. 99-107. DOI : 10.1051/rphysap:0199000250109900. URL : https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00246167.

[151] Suhas V Patankar. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Series on Computational Methods in Mechanics and Thermal Science. Hemisphere Publishing Corporation (CRC Press, Taylor & Francis Group), 1980. ISBN : 978-0891165224. URL : http://www.crcpress.com/product/isbn/9780891165224.

[152] Suhas V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Computational methods in mechanics and thermal sciences. Hemisphere Publing Corporation, 1980. ISBN : 0-07-048740-5.

[153] Clayton R. Paul. *Analysis of Multiconductor Transmission Lines*. Sous la dir. de Kai Chang. Microwave and Optical Engineering. John Wiley et Sons, Inc, 1994. ISBN : 0-471-02080-X.

[154] João Peres et al. « Accurate numerical method to evaluate the capacitances of multi-conductor power cables ». In : *Electric Power Systems Research* 103 (2013), p. 184-191. ISSN : 0378-7796. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.epsr.2013.05.022. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037877961300151X.

[155] Ludovic Perrin. « Analyse expérimentale des écoulements de convection naturelle et mixte en espace confiné ». Thèse de doctorat dirigée par Millan, Pierre Énergétique et transferts Toulouse, ENSAE 2006. Thèse de doct. 2006, 1 vol. (VIII-169 p.) URL : http://depozit.isae.fr/theses/2006/2006_Perrin_Ludovic.pdf.

[156] J. A. Pilgrim et al. « Rating methods for cables installed in unventilated and partially ventilated surface troughs ». In : *2011 Electrical Insulation Conference (EIC)*. Juin 2011, p. 74-78. DOI : 10.1109/EIC.2011.5996119.

[157] Georges Pocholle. « Le courant électrique et la mécanique quantique ». In : *Annales des Télécommunications* 12.9 (sept. 1957), p. 290-298. ISSN : 1958-9395. DOI : 10.1007/BF03013728. URL : https://doi.org/10.1007/BF03013728.

[158] Zoya Popovic et Branko D. Popovic. *Introductory Electromagnetics*. Prentice-Hall Inc, 2000. ISBN : 0-201-32678-7. URL : http://ecee.colorado.edu/~ecen3400/.

[159] Henry Power. « On the existence of Kassab and Divo's generalized boundary integral equation formulation for isotropic heterogeneous steady state heat conduction problems ». In : *Engineering Analysis with Boundary Elements* 20.4 (1997), p. 341-345. ISSN : 0955-7997. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/S0955-7997(97)00114-8. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799797001148.

[160] Pierre M. Prache. « Influence des variations de température sur l'affaiblissement des circuits de télécommunications en câbles enterrés ». In : *Annales Des Télécommunications* 2.6 (juin 1947), p. 190-202. ISSN : 1958-9395. DOI : 10.1007/BF03026459. URL : https://doi.org/10.1007/BF03026459.

[161] M. J. Provost. « The More Electric Aero-engine : a general overview from an engine manufacturer ». In : *2002 International Conference on Power Electronics, Machines and Drives (Conf. Publ. No. 487)*. Juin 2002, p. 246-251. DOI : 10.1049/cp:20020122.

[162] Wang Quanyong et Wu Zhaohua. « Collaborative simulation analysis and research of coupled electromagnetic-thermal field of cable bundles ». In : *2010 11th International Conference on Electronic Packaging Technology High Density Packaging*. Août 2010, p. 961-964. DOI : 10.1109/ICEPT.2010.5582641.

[163] C. Richter, S. Schöps et M. Clemens. « GPU Acceleration of Finite Difference Schemes Used in Coupled Electromagnetic/Thermal Field Simulations ». In : *IEEE Transactions on Magnetics* 49.5 (mai 2013), p. 1649-1652. ISSN : 0018-9464. DOI : 10.1109/TMAG.2013.2238662.

[164] M. Ridel et J. P. Parmantier. « Determination of EM coupling on an electrical wiring interconnection system : Application of condensation approaches on cable models ». In : *2014 International Symposium on Electromagnetic Compatibility, Tokyo*. Mai 2014, p. 21-24.

[165] M. Ridel et al. « Numerical simulation of aeronautic cable topology and experimental validation ». In : *2011 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications*. Sept. 2011, p. 1356-1359. DOI : 10.1109/ICEAA.2011.6046274.

[166] M. Ridel et al. « A Concept Plane using electric distributed propulsion Evaluation of advanced power architecture ». In : *More Electric Aircraft - MEA 2015*. TOULOUSE, France, fév. 2015. URL : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01145376.

[167] Sandrine Roblot. « Characterization of electromagnetic couplings within copper networks to optimize high bit rate transmissions ». Theses. Université de Limoges, oct. 2007. URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00257975.

[168] X. Roboam. « New trends and challenges of electrical networks embedded in "more electrical aircraft" ». In : *2011 IEEE International Symposium on Industrial Electronics*. Juin 2011, p. 26-31. DOI : 10.1109/ISIE.2011.5984130.

[169] X. Roboam, B. Sareni et A. D. Andrade. « More Electricity in the Air : Toward Optimized Electrical Networks Embedded in More-Electrical Aircraft ». In : *IEEE Industrial Electronics Magazine* 6.4 (déc. 2012), p. 6-17. ISSN : 1932-4529. DOI : 10.1109/MIE.2012.2221355.

[170] J. A. Rosero et al. « Moving towards a more electric aircraft ». In : *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine* 22.3 (mar. 2007), p. 3-9. ISSN : 0885-8985. DOI : 10.1109/MAES.2007.340500.

[171] *RTCA/DO-160D. Environmental Conditions and Test Procedures for Airborne Equipment.* RTCA. 1997.

[172] D. Sarkar et al. « Analytical modeling of temperature distribution in an anisotropic cylinder with circumferentially-varying convective heat transfer ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 79 (2014), p. 1027-1033. ISSN : 0017-9310. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.08.060. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931014007583.

[173] B. Sarlioglu et C. T. Morris. « More Electric Aircraft : Review, Challenges, and Opportunities for Commercial Transport Aircraft ». In : *IEEE Transactions on Transportation Electrification* 1.1 (juin 2015), p. 54-64. DOI : 10.1109/TTE.2015.2426499.

[174] H.-P. Schmidt. « Thermal and Electrical Investigation of Power Bus Cables for Industrial Applications ». In : Proceedings of COMSOL Users Conference 2006 Frankfurt. University of Applied Sciences Amberg-Weiden, Department Electrical Engineering et Information Technology, Kaiser Wilhelm Ring 23, 92224 Amberg, Germany. 2006.

[175] A. Sedaghat et F. de León. « Thermal Analysis of Power Cables in Free Air : Evaluation and Improvement of the IEC Standard Ampacity Calculations ». In : *IEEE Transactions on Power Delivery* 29.5 (oct. 2014), p. 2306-2314. ISSN : 0885-8977. DOI : 10.1109/TPWRD.2013.2296912.

[176] S. M. Sellers et W. Z. Black. « Refinements to the Neher-McGrath model for calculating the ampacity of underground cables ». In : *IEEE Transactions on Power Delivery* 11.1 (jan. 1996), p. 12-30. ISSN : 0885-8977. DOI : 10.1109/61.483997.

[177] Y. O. Shaker et al. « Thermal modeling of medium voltage cable terminations under square pulses ». In : *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation* 21.3 (juin 2014), p. 932-939. ISSN : 1070-9878. DOI : 10.1109/TDEI.2014.6832234.

[178] L. Sicard et al. « Influence de la variation du coefficient de conductivité thermique avec la température sur la propagation de la chaleur en régime périodique ». In : *J. Phys. Radium* 21.10 (1960), p. 696-698. DOI : 10.1051/jphysrad:019600021010069600. URL : https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00236358.

[179] D. M. Simons. « Cable geometry and the calculation of current-carrying capacity ». In : *Journal of the American Institute of Electrical Engineers* 42.5 (mai 1923), p. 525-539. ISSN : 0360-6449. DOI : 10.1109/JoAIEE.1923.6594116.

[180] Suneet Singh, Prashant K. Jain et Rizwan-uddin. « Analytical solution to transient heat conduction in polar coordinates with multiple layers in radial direction ». In : *International Journal of Thermal Sciences* 47.3 (2008), p. 261-273. ISSN : 1290-0729. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2007.01.031. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1290072907000609.

[181] Suneet Singh, Prashant K. Jain et Rizwan-uddin. « Finite integral transform method to solve asymmetric heat conduction in a multilayer annulus with time-dependent boundary conditions ». In : *Nuclear Engineering and Design* 241.1 (2011), p. 144-154. ISSN : 0029-5493. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.nucengdes.2010.10.010. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029549310006898.

[182] *SourceMeter SMU Instruments*. Keithley, A Tecktronix company. URL : http://www.farnell.com/datasheets/1708016.pdf?_ga=2.242499655.450713776.1499842582-1530823304.1499842582.

[183] Adam B. Stein, Ephraim M. Sparrow et John M. Gorman. « Numerical simulation of cables in widespread use in the nuclear power industry subjected to fire ». In : *Fire Safety Journal* 53 (2012), p. 28-34. ISSN : 0379-7112. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.firesaf.2012.06.004. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0379711212000768.

[184] Matthias Strack, Thomas Zill et Nagel Björn. « Integration of Hybrid propulsion system in a CS 23 Commuter design ». In : 30th Congress of the International Council of the Aeronautical Science. German Aerospace Center (DLR). Daejeon, South Korea, 2016. URL : http://www.icas.org/ICAS_ARCHIVE/ICAS2016/data/papers/2016_0595_paper.pdf.

[185] Julius Adam Stratton. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill Book Company, 1941. URL : https://archive.org/details/electromagnetict031016mbp.

[186] Jean Taine et Jean-Pierre Petit. *Transferts Thermiques. Cours et données de base*. Mécanique des fluides anisothermes. Sous la dir. de Dunod. Avec une préf. de Roger Séméria. 1998.

[187] J. Taler. « Determination of local heat transfer coefficient from the solution of the inverse heat conduction problem ». In : *Forschung im Ingenieurwesen* 71.2 (juin 2007), p. 69-78. ISSN : 1434-0860. DOI : 10.1007/s10010-006-0044-2. URL : https://doi.org/10.1007/s10010-006-0044-2.

[188] Weifeng Tang. *Transforming Domain into Boundary Integrals in BEM : A Generalized Approach*. Springer Berlin Heidelberg, 1988. ISBN : 978-3-642-83465-3. DOI : 10.1007/978-3-642-83465-3_1. URL : https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-642-83465-3.pdf.

[189] Philippe Tanguy. « Power Line Communication study and optimization en embedded vehicle ». Theses. INSA de Rennes, juin 2012. URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00837810.

[190] Peter Teertstra, M. Yovanovich et J. Culham. « Conduction Shape Factor Models for 3-D Enclosures ». In : Reno, Nevada : AIAA, jan. 2003. DOI : https://doi.org/10.2514/6.2003-159. URL : https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2003-159.

[191] Frederick M. Tesche, Michel V. Ianoz et Torbjörn Karlson. *EMC Analysis Methods and Computational Models*. John Wiley & Sons, Inc, 1997.

[192] Heiko Thomas et al. « Superconducting transmission lines – Sustainable electric energy transfer with higher public acceptance ? » In : *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 55.Supplement C (2016), p. 59-72. ISSN : 1364-0321. DOI : https://doi.org/10.1016/j.rser.2015.10.041. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S136403211501120X.

[193] Violaine Todoroff. « Mesure d'un champ de masse volumique par Background Oriented Schlieren 3D. Etude d'un dispositif expérimental et des méthodes de traitement pour la résolution du problème inverse ». Thèse de Doctorat. Décembre 2013. URL : http://ethesis.inp-toulouse.fr/archive/00002491/01/todoroff.pdf.

[194] Marie-Laure Toulouse. « Analyse et caractérisation de la convection naturelle et de la convection mixte des enceintes confinées ». Thèse de doctorat. Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 2004.

[195] K. Vater, T. Betcke et B. Dilba. « Simple and efficient GPU parallelization of existing H-Matrix accelerated BEM code ». In : *ArXiv e-prints* (nov. 2017). arXiv : 1711.01897 [cs.DC].

[196] J.S. Vrentas et C.M. Vrentas. « Axial conduction with boundary conditions of the mixed type ». In : *Chemical Engineering Science* 62.12 (2007), p. 3104-3111. ISSN : 0009-2509. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.ces.2007.03.009. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0009250907002333.

[197] S. Whitehead et E. E. Hutchings. « Current rating of cables for transmission and distribution ». In : *Electrical Engineers, Journal of the Institution of* 83.502 (oct. 1938), p. 517-557. DOI : 10.1049/jiee-1.1938.0170.

[198] Wikipedia. *Drude model — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online ; accessed 2-August-2017]. 2017. URL : https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Drude_model&oldid=769981306.

[199] Wikipédia. *Modèle de Drude — Wikipédia, l'encyclopédie libre*. [En ligne ; Page disponible le 2-août-2017]. 2017. URL : http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Mod%C3%A8le_de_Drude&oldid=136181445.

[200] L. C. Wrobel et C. A. Brebbia, éd. *Boundary Element Methods in Heat Transfer*. nternational Series on Computational Engineering. Elsevier Applied Science, 1992.

[201] Hanyu Ye et al. « Coupled Electro-thermal Field Simulation in HVDC-Cables ». In : *Proceedings of the 2011 COMSOL Conference*. Sous la dir. de Bergische Universität Wuppertal. Stuttgart, Germany, 2011. URL : https://www.comsol.fr/paper/download/83647/ye_paper.pdf.

Résumé

Le développement d'aéronefs « plus » voire « tout » électriques a pour conséquence la conception d'architectures électriques embarquées de plus en plus complexes entraînant une très nette augmentation du nombre de câbles électriques à déployer au sein des véhicules. Parmi les contraintes rencontrées lors des phases de définition et d'intégration des réseaux de câblages, les aspects de compatibilité électromagnétique et de gestion des échauffements thermiques deviennent de plus en plus critiques. Ainsi, ces travaux de thèse sont dédiés au développement d'une méthodologie permettant la prédiction d'une part, des courants induits par et sur les réseaux de câblages et d'autre part, de leur niveaux d'échauffement. En particulier, l'analyse bibliographique effectuée à cette occasion montre que les phénomènes électrostatiques (à la base de la théorie des lignes de transmission) et de conduction stationnaire de la chaleur sont strictement analogues, ce qui autorise une résolution simultanée de ces deux problèmes pour les réseaux de câblages considérés. Les présents travaux démontrent que le calcul des paramètres électriques primaires (p.u.l) du réseau et de la distribution de température dans le plan transverse peut se faire de manière totalement couplé à l'aide d'un schéma numérique basé sur la Méthode des Moments (MoM). Le choix de l'utilisation des équations intégrales pour la résolution de ce problème de potentiel se fonde sur plusieurs avantages tels qu'une utilisation optimisée des ressources de calcul et l'utilisation d'algorithmes efficaces de résolution, de surcroît naturellement parallélisables pour de futurs développements. Les outils de calculs thermiques développés dans le cadre de cette thèse, et qui ont vocation à être intégrés dans la suite logicielle CRIPTE de l'ONERA, ont fait l'objet d'une validation expérimentale pour plusieurs configurations de harnais électriques. Les comparaisons simulations-mesures présentent de bons accords bien que les expérimentations menées aient montré la difficulté d'obtenir précisément des valeurs du coefficient d'échange thermique, même dans des conditions parfaitement maîtrisées. Les travaux ouvrent enfin des perspectives nouvelles sur l'optimisation en terme de masse des réseaux de câblage (EWIS).

Mots clés : Équation Intégrale, Lignes de Transmission, Compatibilité Électromagnétique, Transfert Thermique, Avion plus électrique

Abstract

The on-going development of "more" or "all" electrical aircraft leads to the design of ever-complex embedded electrical networks, which causes a significant increase of electrical cables to be used within these innovative vehicles. Among the constraints encountered during the definition and integration phases of the network, those related to the electromagnetic compatibility between equipment as well as the management of thermal heating by Joule's effect become more and more stringent. Thus, this thesis is dedicated to the development of an original methodology enabling the prediction of both induced and crosstalk currents as well as the heating up state in complex bundles of cables. Indeed, literature review explicitly shows that electrostatic and stationary heat transfer phenomena are, from a mathematical standpoint, strictly the same which allows the simultaneous computation of these two problems for an arbitrary network. This research work demonstrates that the determination of primary electrical parameters (per unit length) and the temperature distribution within a given cross-section can be handled with the numerical Method Of Moment (MoM). This choice is motivated by the several inherent advantages of the method like an optimized use of the computer resource and the natural parallelization of the algorithms. The developed numerical tools, intended to be fully integrated in the in-house software suite CRIPTE, has been validated during an experimental campaign that has involved several types of bundles. Although the comparisons between experimental and simulated results comply with each other, experiments reveal the hard task of getting a precise estimation of the heat transfer coefficients, even in a well-controlled environment. Finally, these works open new and very promising perspectives for future EWIS (Electrical Wiring Interconnection System) in term of mass optimization.

Keywords : Integral Equations, Transmission lines, Electromagnetic Compatibility, Thermal Transfer, More Electrical Aircraft