

UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE

École Doctorale en Mathématiques et Informatique de Marseille ED
184

Thèse

Présentée par

Moustapha NIANE

Pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Aix-Marseille

Discipline : Automatique

Contribution au diagnostic et à la commande de la pile à combustible de type PEM

Soutenue publiquement le 09 Octobre 2018 devant le jury composé de :

Pr. Eric BIDEAUX	INSA de Lyon	Rapporteur
Pr. Michel ZASADZINSKI	Université de Lorraine	Rapporteur
Pr. Christophe BERENGER	Grenoble-INP	Examinateur
Pr. Samira EL YACOUBI	Université de Perpignan	Examinatrice
Pr. Marie-Cécile PERA	Université de Franche-Comté	Examinatrice
Pr. Rachid OUTBIB	Université Aix-Marseille	Directeur
Dr. Mohamed ZERROUGUI	Université Aix-Marseille	Co-Encadrant

Thèse préparée au sein de laboratoire LIS (UMR CNRS 7020) de Marseille



Cette oeuvre est mise à disposition selon les termes de la [Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France](#).

Résumé

La pile à combustible (PàC) est un dispositif qui transforme l'énergie chimique en énergie électrique. Ce dispositif nécessite un certain nombre d'auxiliaires pour son fonctionnement. Afin d'assurer des performances en termes de sécurité, de fiabilité et de durée de vie de la PàC, des systèmes de diagnostic et de commande adéquats sont indispensables. Ainsi, cette thèse est une contribution au problème du diagnostic de défauts et à la commande de la PàC à Membrane d'Échange de Protons (PEM).

Le premier volet de ce travail est consacré au développement de méthodes de diagnostic appliquées à la PàC. Pour ce faire, deux approches ont été proposées. La première concerne la synthèse d'un filtre " $\mathcal{H}_- / \mathcal{H}_\infty$ " permettant la détection de défauts capteurs et actionneurs tout en assurant un niveau de robustesse vis-à-vis d'éventuelles perturbations. Plus précisément, cette approche permet d'améliorer la détection de défauts et d'atténuer l'effet des perturbations dans le système d'alimentation en air de la PàC. En tenant compte des caractéristiques du système de la PàC, les conditions d'existence et de stabilité du filtre sont données sous la forme d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI). La seconde approche traite le problème de la détection des défauts paramétriques. Pour cet objectif, un observateur adaptatif a été proposé, ce dernier permet d'estimer la valeur du paramètre susceptible de présenter une défaillance. Cette méthode donne la possibilité d'estimer simultanément les défauts paramétriques et les états non mesurés du système. Le deuxième volet de la thèse est dédié à la commande du système PàC. Le but est de synthétiser une loi de commande par rétroaction qui permet de répondre à la sollicitation de la charge tout en respectant une contrainte de fonctionnement nominal de la PàC. Un tel fonctionnement permet d'avoir un meilleur rendement tout en préservant l'état de santé de la pile. La synthèse de cette loi de commande a été réalisée en prenant compte tout le caractère non linéaire du système.

Mots clés : Pile à combustible PEM, Diagnostic, Commande, Filtre robuste, Observateur, LMI

Abstract

The fuel cell is a device that transforms the chemical energy in electricity. This device requires some auxiliaries for its operation. In order to ensure the performances in terms of security, reliability and life cycle of the fuel cell, adequate diagnostic and control systems are indispensables.

This thesis is a contribution to the problem of faults diagnosis and control of the Proton Exchange Membrane (PEM) Fuel Cell.

The first part of this work is dedicated to the development of diagnostic methods applied to the fuel cell. To do this, two approaches are proposed. The first one concerns the synthesis of a $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filter allowing the sensors and actuators faults detection while ensuring a level of robustness towards disturbances. More specifically, this approach allows to improve the faults detection and mitigate the effect of disturbances in fuel cell air-feed system. Taking into account the fuel cell system characteristics, the conditions for existence and stability of the filter are given in the form of Linear Matrix Inequalities (LMI). The second approach deals with the problem of parametric faults detection. For this purpose, an adaptive observer has been proposed, which makes it possible to estimate the value of the parameter likely to exhibit a failure. This method gives the possibility of simultaneously estimating the parametric faults and the unmeasured states of the system. The second part of the thesis is dedicated to the control of the fuel cell system. The purpose is to synthesize a feedback control law that allows to answer the load request while respecting a nominal operating constraint of the fuel cell. Such a functioning allows to have a better efficiency while preserving the state of health of the fuel cell. The control law is obtained by using the original nonlinear model and without any kind of linearization.

Keywords : PEM Fuel Cell, Diagnosis, Control, Robust filter, Observer, LMI

Remerciements

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Informatique et Systèmes (LIS) au sein de l'équipe Estimation Commande et Diagnostic (ESCODI), animé par le professeur Rachid OUTBIB.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse M. le professeur Rachid OUTBIB pour m'avoir accueilli dans son équipe de recherche. Je le remercie aussi pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, pour ses conseils, sa patience et son soutien au cours de mon travail de thèse.

Je tiens aussi à remercier mon co-encadrant M. Mohamed ZERROUGUI pour toute l'attention qu'il a porté et pour les nombreux conseils qu'il a su me prodiguer. Outre ses qualités professionnelles, j'ai pu apprécier aussi sa disponibilité et sa simplicité. Je lui suis très reconnaissant de la confiance qu'il a su me témoigner.

Je remercie aussi Mme la professeur Marie-Cécile PERA, Mme la professeur Samira EL YACOUBI et M. le professeur Christophe BERENGER d'avoir accepté de participer au jury de la soutenance de ma thèse. Je remercie également M. le professeur Eric BIDEAUX et M. le professeur Michel ZASADZINSKI pour leur intérêt porté à ce travail et pour leurs remarques, leurs commentaires et leurs rapports qui ont permis d'obtenir cette version finale du manuscrit.

J'en profite pour saluer l'ensemble du personnel du LIS qui a été formidable durant ces quatre années et qui m'a accueilli à bras ouverts, ainsi que l'ensemble des doctorants et des ingénieurs de recherche du laboratoire.

Je voudrais remercier les personnes qui ont participé à ma formation d'enseignant. Elles savent ce que ce statut représente pour moi comme responsabilité, comme considération mais aussi comme plaisir. Je voudrais témoigner ici de la chance que j'estime avoir eu de travailler aux côtés de Mme la professeur Isabel DEMONGODIN, M. Julien MAROT, M. le professeur Rachid OUTBIB et M. Mohamed ZERROUGUI. Je n'oublie pas non plus tous les autres enseignants avec qui j'ai enseigné et qui ont de ce fait contribué à ma formation.

Enfin, je remercie mes frères et sœurs, ma petite femme chérie Ndeye Maty sene KANE, ainsi que mes parents pour leur soutien au cours de ces quatre années et sans lesquels je n'en serais pas là aujourd'hui.

Table des matières

Résumé	3
Abstract	4
Remerciements	5
Liste des figures	9
Liste des tableaux	10
Introduction	15
1 Généralités sur les systèmes piles à combustible	16
1.1 Introduction	16
1.2 Bref historique sur les piles à combustible	16
1.3 Différentes technologies des piles à combustible	16
1.4 Piles à combustible de type PEM	18
1.4.1 Structure d'une cellule élémentaire	18
1.4.2 Principe de fonctionnement	19
1.4.3 Tension électrique	19
1.5 Système pile à combustible	23
1.5.1 Circuit d'alimentation en air	23
1.5.2 Circuit d'alimentation en hydrogène	24
1.5.3 Circuit de refroidissement	25
1.5.4 Circuit d'humidification	25
1.5.5 Convertisseurs statiques	25
1.5.6 Système de contrôle	25
1.6 Sources de défaillances dans un système PEMFC	26
1.6.1 Défauts liés à la gestion de l'eau	27
1.6.2 Défauts liés à la gestion des gaz et de la température	28
1.6.3 Contamination par les réactifs	28
1.6.4 Vieillessement de la pile	29
1.6.5 Défaillances dues aux auxiliaires	29
1.7 État de l'art sur le diagnostic et la commande	30
1.7.1 Diagnostic du système pile à combustible	30
1.7.2 Commande du système pile à combustible	32
1.8 Conclusion	33
2 Modélisation du système d'alimentation en air	34
2.1 Introduction	34

2.2	Modèle dynamique	34
2.2.1	Hypothèses considérées	35
2.2.2	Système moto-compresseur	36
2.2.3	Collecteur d'admission	39
2.2.4	Cathode	40
2.2.5	Système d'alimentation en air	44
2.3	Résultats de simulation	46
3	Diagnostic de défauts à base de filtrage $\mathcal{H}_- / \mathcal{H}_\infty$	51
3.1	Introduction	51
3.2	Généralités	52
3.2.1	Diagnostic à base d'observateur	52
3.2.2	Modélisation des défauts	53
3.2.3	Observateur pour une classe de systèmes non-linéaires	54
3.3	Détection de défaut à base de filtrage $\mathcal{H}_- / \mathcal{H}_\infty$	59
3.3.1	Synthèse du filtre de détection de défauts	61
3.3.2	Application au système d'alimentation en air	66
3.3.3	Résultats de simulation	70
3.4	Conclusion	71
4	Diagnostic de défauts à base d'observateur adaptatif	75
4.1	Introduction	75
4.2	Observateurs adaptatifs	75
4.2.1	Cas linéaire	76
4.2.2	Cas non-linéaire	77
4.3	Méthodologie de diagnostic considérée	78
4.4	Application au système d'alimentation en air	82
4.5	Résultats de simulation	85
4.6	Conclusion	86
5	Contrôle du rapport d'excès d'oxygène par rétroaction	90
5.1	Introduction	90
5.1.1	Énoncé du résultat principal	90
5.2	Preuve de la Proposition 1	91
5.2.1	Méthode de stabilisation considérée	92
5.2.2	Définition des points de fonctionnement	94
5.2.3	Transformation du système	96
5.2.4	Démonstration de la stabilisabilité	99
5.3	Synthèse de la loi de commande stabilisante	104
5.4	Résultats de simulation	106
5.5	Conclusion	115
	Conclusion	120

Publications	121
Bibliographie	122
Annexes	131

Liste des figures

1.1	Historique de la pile à combustible	17
1.2	Composition d'une cellule élémentaire d'une pile à combustible	18
1.3	Principe de fonctionnement d'une pile à combustible type PEM	20
1.4	Structure d'un système pile à combustible	24
1.5	Courbe de polarisation de la pile à combustible	26
2.1	Schéma d'un système pile à combustible	35
2.2	Différents types de compresseurs	36
2.3	Schéma bloc du système moto-compresseur	37
2.4	Comportement de $T_{cp,out}$ en fonction de P_{sm}	38
2.5	Schéma bloc du collecteur d'admission	40
2.6	Comportement de $W_{ca,out}$ en fonction de P_{ca}	43
2.7	Courant de sollicitation et tension d'entrée du moto-compresseur	47
2.8	Vitesse angulaire	47
2.9	Pression d'admission d'air	48
2.10	Débit de compresseur	48
2.11	Pression partielle d'oxygène	49
2.12	Pression partielle d'azote	49
2.13	Tension de la pile	50
3.1	Structure de diagnostic à base d'observateur	53
3.2	Structure du capteur de pression et disposition des capteurs de pressions piézorésistifs	68
3.3	Pression d'oxygène	72
3.4	Pression d'azote	72
3.5	Vitesse angulaire	73
3.6	Pression d'air du collecteur	73
3.7	Premier résidu	74
3.8	Deuxième résidu	74
4.1	Comportement de l'obstruction	86
4.2	Pression d'oxygène	87
4.3	Pression d'azote	87
4.4	Vitesse angulaire	88
4.5	Pression d'air du collecteur	88
4.6	Reconstruction du défaut Θ	89
5.1	Comportement de β en fonction de $\lambda_{O_2}^\infty$	96
5.2	Comportement de θ en fonction de x_4	101
5.3	Comportement de g^{x^0} en fonction de x_1	104

5.4	Courant de la charge	108
5.5	x^0 en fonction de ξ	109
5.6	Commande par rétroaction - Évolution de l'état ($\lambda_{O_2}^\infty = 2$)	110
5.7	Commande par rétroaction - Évolution des entrées/sorties ($\lambda_{O_2}^\infty = 2$)	111
5.8	Commande par rétroaction - Évolution de l'état ($\lambda_{O_2}^\infty = 2.5$)	112
5.9	Commande par rétroaction - Évolution des entrées/sorties ($\lambda_{O_2}^\infty = 2.5$)	113
5.10	Commande basée observateur - Évolution de l'état ($\lambda_{O_2}^\infty = 2$)	114
5.11	Commande basée observateur - Évolution des entrées/sorties ($\lambda_{O_2}^\infty = 2$)	116
5.12	Commande basée observateur - Évolution de l'état ($\lambda_{O_2}^\infty = 2.5$)	117
5.13	Commande basée observateur - Évolution des entrées/sorties ($\lambda_{O_2}^\infty = 2.5$)	118

Liste des tableaux

3.1	Description des perturbations et des scénarios de défauts	67
5.1	Plages de fonctionnement	107
0.2	Expressions des constantes	132
0.3	Valeurs numériques des paramètres de la simulation	133

Nomenclature

Symbole

A_{fc}	Surface active de la pile à combustible
A_T	Surface d'ouverture de la sortie
C_D	Coefficient de décharge de la buse
F	Nombre de faraday
I	Courant de la pile
J	Moment d'inertie
M	Masse molaire
R	Constante des gaz parfaits
T	Température
V	Volume des canaux
W	Débit
i	Densité du courant de la pile
m	Masse
n	Nombre de cellules
P	Pression
t_m	Épaisseur de la membrane
σ_m	Conductivité de la membrane
τ	Couple
γ	Rapport de capacité calorifique d'air
λ	Teneur en eau
ω	Vitesse angulaire
ϕ	Facteur d'humidité relative
ρ_a	Densité d'air

Indice

an	Anode
ca	Cathode
cm	Moto-compresseur
cp	Compresseur

<i>an</i>	Anode
<i>ca</i>	Cathode
<i>cm</i>	Moteur
<i>cp</i>	Compresseur
<i>rm</i>	Collecteur d'échappement
<i>sm</i>	Collecteur d'admission
<i>in</i>	Entrée
<i>out</i>	Sortie
<i>react</i>	Réaction
<i>atm</i>	Atmosphérique
<i>sat</i>	Saturation
<i>v</i>	Vapeur d'eau

Abréviations utilisées dans la thèse

<i>PàC</i>	Pile à combustible
<i>PEM</i>	Membrane échangeuse de protons
<i>AFC</i>	Pile à combustible à alcaline
<i>PEMFC</i>	Pile à combustible à membrane échangeuse de protons
<i>PAFC</i>	Pile à combustible à acide phosphorique
<i>MCFC</i>	Pile à combustible à carbone fondu
<i>SOFC</i>	Pile à combustible à oxyde solide
<i>DMFC</i>	Pile à combustible à méthanol direct
<i>LMI</i>	Inégalité matricielle linéaire
<i>PE</i>	Excitation persistante

Introduction Générale

La consommation de produits pétroliers, et plus généralement des combustibles fossiles, conduit à des répercussions néfastes sur l'environnement. Pour remédier en partie aux problèmes de pollution et de production d'énergie, diverses solutions fondées sur des sources renouvelables (à savoir : le soleil, le vent, l'hydrogène, etc.) sont envisageables.

Les piles à combustible sont considérées aujourd'hui comme des dispositifs prometteurs pour la production d'énergie propre. Ces dispositifs sont conçus pour convertir l'énergie chimique en énergie électrique. Ils peuvent être exploités dans une large gamme d'applications : le transport, (par exemple : véhicules électriques ou hybrides, navires, autobus, avions, etc.) ou en stationnaire (à savoir : petites ou grandes centrales électriques). Parmi les piles à combustible, celle à membrane échangeuse de protons (PEMFC) présente des avantages indéniables, en particulier, pour les applications dans le transport. Cependant, des verrous scientifiques restent à lever avant de rendre ce dispositif viable économiquement.

Actuellement, la fiabilité et la durabilité représentent des problématiques fondamentales pour ce type de pile. Pour garantir la fiabilité et une durée de vie pertinente, il convient de disposer de stratégies pour la détection, l'isolation et la correction des défaillances liées aux opérations du système. Ainsi, le problème du diagnostic et de la commande de la PEMFC a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs dans la littérature et plusieurs approches ont été explorées.

Parmi les approches explorées pour le diagnostic et la commande de la PEMFC, les techniques à base de modèles dynamiques ont été naturellement considérées ces dernières décennies. Dans ce cadre, le diagnostic est souvent basé sur la synthèse d'observateurs et la commande est réalisée à travers une rétroaction.

Les problématiques de diagnostic et de la commande peuvent concerner plusieurs parties du système de la pile, à savoir : l'arrivée des gaz, la partie thermique, etc. Ce travail de thèse est dédié au diagnostic et la commande du circuit d'arrivée d'oxygène. L'objectif est double. D'une part, le but est de détecter des défauts de fonctionnement du compresseur. Il s'agit de la détection d'un défaut d'obstruction de l'orifice du compresseur ainsi que la défaillance d'un capteur de pression. D'autre part, et afin de préserver l'état de santé de la pile, une problématique abordée dans la thèse est celle de la régulation du rapport d'excès d'oxygène. Plus précisément, nous prouvons qu'un modèle de nature non-linéaire, décrivant le comportement du système d'alimentation en air de la pile à combustible est stabilisable autour d'une valeur souhaitée pour le rapport d'excès d'oxygène en utilisant un retour d'état continu.

Le rapport de thèse est organisé comme suit.

Dans le premier chapitre, nous allons donner des généralités sur les systèmes piles à combustible. Après un bref rappel historique de la pile, nous introduirons les différentes technologies des piles à combustible. Puis, nous donnerons la structure d'une cellule élémentaire et le principe de fonctionnement de la pile à combustible de type PEM et nous décrirons les différents circuits auxiliaires du système pile à combustible nécessaire à son fonctionnement. Ensuite, nous ferons le point sur les différentes sources de défaillances qui peuvent surgir dans un système pile à combustible. Pour conclure le chapitre, nous proposerons un état de l'art sur les différents travaux de diagnostic et de la commande des systèmes piles à combustible.

Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation du système d'alimentation en air de la pile à combustible. Tout d'abord, nous présenterons les hypothèses de modélisation. Puis, nous donnerons le modèle d'évolution du système moto-compresseur. Ensuite, nous établirons le modèle de description global pour l'ensemble du système d'alimentation ; à savoir : le collecteur d'admission et la cathode.

Le troisième chapitre est dédié au diagnostic de défauts à base de filtrage $\mathcal{H}_- / \mathcal{H}_\infty$. Dans un premier temps, nous allons présenter des généralités sur le diagnostic à base d'observateur. Dans un deuxième temps, nous proposerons une technique de synthèse d'observateurs pour une classe de systèmes non-linéaires respectant la condition de Lipchitz. Puis, une extension sera par la suite proposée. Il s'agit du filtrage \mathcal{H}_∞ pour le cas des systèmes non-linéaires assujetti à des perturbations bornées en norme. Dans une dernière partie, nous nous intéresserons au problème de la détection de défauts à base de filtrage $\mathcal{H}_- / \mathcal{H}_\infty$.

Le quatrième chapitre traite du diagnostic de défauts à base d'observateur de type adaptatif. Tout d'abord, nous présenterons la technique de synthèse de ce type des observateurs. Ensuite, nous formulerons le problème du diagnostic de défauts dans le système d'alimentation en air de la pile à combustible. Puis, nous développerons l'approche adoptée pour la synthèse d'observateur dans l'application considérée ; à savoir : le système d'alimentation en air. Pour conclure le chapitre, et afin d'illustrer la pertinence de l'approche proposée, des résultats de simulation seront présentés.

Dans la dernière partie de ce travail, nous nous intéresserons à la commande du système d'alimentation en air. Dans ce cadre, l'objectif de la commande est d'alimenter le cœur de pile et sans excès en oxygène. Le but est de permettre le bon fonctionnement tout en préservant l'état de santé de la pile. Plus précisément, ce double objectif peut être atteint à travers une régulation d'un rapport, dit d'excès d'oxygène, à une valeur constante tout en répondant au besoin de la charge. Cet objectif est atteint en appliquant une commande par rétroaction et sans aucun type de linéarisation. Le but est de per-

mettre un fonctionnement sur une large plage.

Une conclusion générale et quelques perspectives seront données à la fin du mémoire.

1 Généralités sur les systèmes piles à combustible

1.1 Introduction

Une pile à combustible (PàC) est un générateur qui convertit l'énergie interne d'un combustible en énergie électrique, en utilisant un procédé électrochimique contrôlé. Les rendements sont théoriquement très élevés et les sous-produits peu polluants. Ces caractéristiques font de la PàC une alternative prometteuse pour la production énergétique.

Ce chapitre est dédié aux généralités sur la PàC. Nous commençons par un bref historique. Ensuite, une description détaillée du système PàC sera proposée. Enfin, un état de l'art sur les travaux concernant le diagnostic et la commande sera présenté.

1.2 Bref historique sur les piles à combustible

Le but de cette section est de présenter un bref historique sur les systèmes PàC (voir Figure 1.1). Plus précisément, ces différentes technologies et leurs principes de fonctionnement seront présentés.

1.3 Différentes technologies des piles à combustible

Les piles à combustible sont regroupées généralement en six familles selon de la nature de l'électrolyte utilisé, de la température de fonctionnement et le type de combustible utilisé ; à savoir : alcalines (AFC), à membrane échangeuse de protons (PEMFC), à acide phosphorique (PAFC), à carbonate fondu (MCFC), à oxyde solide (SOFC) et à méthanol direct (DMFC).

Les piles à combustible fonctionnant à haute température (à savoir : au-delà de 700 °C) présentent la possibilité d'utiliser directement des composés hydrogènes comme combustible. Cela est dû à la température élevée de fonctionnement qui favorise la décomposition des molécules et qui augmente la vitesse des réactions chimiques. En revanche, la durée nécessaire pour atteindre la température nominale constitue un handicap majeur pour l'utilisation de ces piles dans certaines applications de transport nécessitant des démarrages rapides et fréquents. Ainsi, les piles à combustible à basse température sont plus adaptées à ces applications, cependant, elles utilisent des cataly-

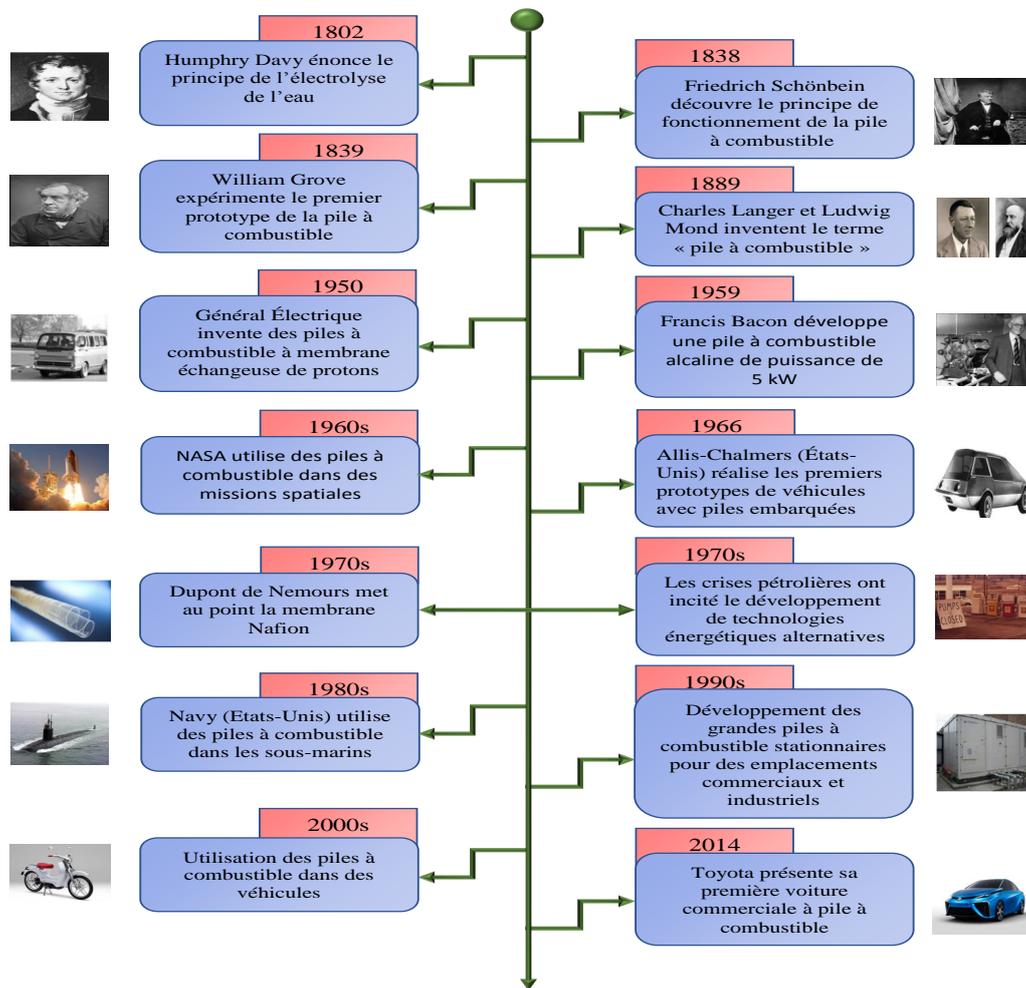


Figure 1.1 – Historique de la pile à combustible

seurs chers et sensibles à l’empoisonnement ^a, notamment par le monoxyde de carbone et certains composés soufrés.

Dans ce travail, nous nous intéressons aux piles à combustible de type PEM. Ces piles offrent l’avantage d’un fonctionnement à des températures relativement faibles et sont adaptées à des conditions vibratoires importantes, ce qui convient aux applications en transport.

a. Il s’agit de l’occupation des sites réactionnels par des molécules inertes pour la réaction électrochimique.

1.4 Piles à combustible de type PEM

1.4.1 Structure d'une cellule élémentaire

Le cœur d'une PàC est constitué d'un empilement de cellules électrochimiques élémentaires qui assemblées en série permettent d'obtenir les caractéristiques en tension de la pile et donc le niveau de la puissance souhaitée. Ces cellules sont séparées par des plaques bipolaires et chacune d'elles est constituée de deux électrodes poreuses séparées par un électrolyte assurant le transport des ions (voir Figure 1.2).

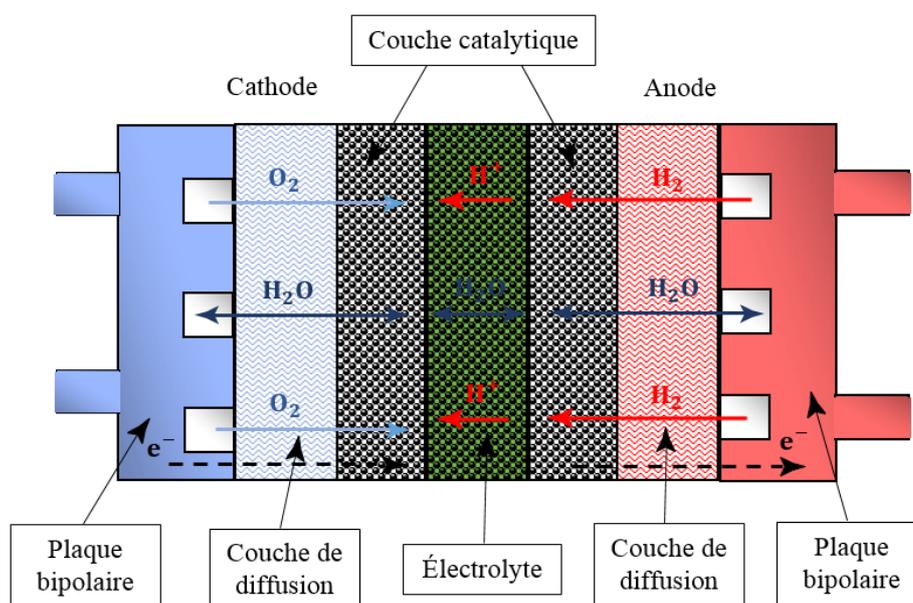


Figure 1.2 – Composition d'une cellule élémentaire d'une pile à combustible

Chaque électrode est composée d'une couche de diffusion de gaz et d'une couche catalytique. La première assure la diffusion des réactifs vers les sites de réaction, le transport de l'eau soit vers la membrane pour son hydratation, soit à partir des sites de réaction vers le canal pour réduire les phénomènes de noyage. En outre, elle permet également l'évacuation de la chaleur produite vers le milieu extérieur et le déplacement des électrons vers le collecteur ou vers les sites de réaction. La deuxième (c'est-à-dire, la couche catalytique) joue le rôle de jonction entre la couche de diffusion et l'électrolyte. C'est le siège des réactions d'oxydoréduction. La membrane servant d'électrolyte doit être imperméable aux gaz et conduire les protons d'hydrogène H^+ de l'anode vers la cathode tout en évitant le passage des électrons [84]. La membrane Nafion est celle la plus utilisée. En plus, d'être un excellent conducteur, l'électrolyte possède une bonne stabilité thermique et mécanique. L'Assemblage Membrane Électrodes (AME), constitue une cellule de la PàC. Les plaques bipolaires séparant chaque AME, distribuent les gaz réactifs et permettent la circulation des électrons entre le circuit électrique et la couche

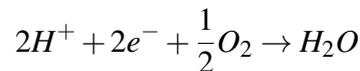
de diffusion. Elles assurent aussi l'évacuation de la chaleur et des excès de gaz par les canaux qui les traversent [20].

1.4.2 Principe de fonctionnement

Une PàC est constituée de deux électrodes poreuses, séparées par un électrolyte, assurant le transport des ions. On appelle anode et cathode les électrodes respectivement négatives et positives. La PàC de type PEM est alimentée en hydrogène au niveau de l'anode et en oxygène au niveau de la cathode. Dans l'anode, suite à la réaction d'oxydation, la molécule d'hydrogène H_2 se dissocie en protons d'hydrogène H^+ et en électrons e^- :

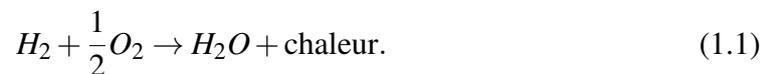


Au niveau de la cellule élémentaire, les protons d'hydrogène traversent la membrane alors que les électrons restent dans l'anode. Comme les électrons ne peuvent pas traverser l'électrolyte, ils empruntent un circuit externe pour atteindre la cathode et produisent ainsi de l'électricité. En parallèle, les protons d'hydrogène H^+ traversent l'électrolyte et arrivent à la cathode, où a eu lieu la réaction de réduction de l'oxygène : les protons d'hydrogène H^+ se combinent avec la molécule d'oxygène O_2 et aux électrons pour produire de l'eau et de la chaleur (voir Figure 1.3). La réaction chimique à l'intérieur de la cathode est exprimée sous la forme suivante :



Afin de favoriser les réactions chimiques, un catalyseur à base de platine est positionné au niveau des électrodes.

Le phénomène global de la PàC est donné par la réaction chimique :



Cette réaction chimique crée une différence de potentiel entre les électrodes de l'ordre d'un volt. Pour obtenir une tension de sortie correspondante à la charge électrique placée aux bornes de la PàC, il est nécessaire d'empiler plusieurs cellules élémentaires en série [76].

1.4.3 Tension électrique

En mode de fonctionnement, la PàC délivre une tension électrique en fonction du courant, de la pression du produit, de l'eau, des pressions partielles des gaz réactifs, de

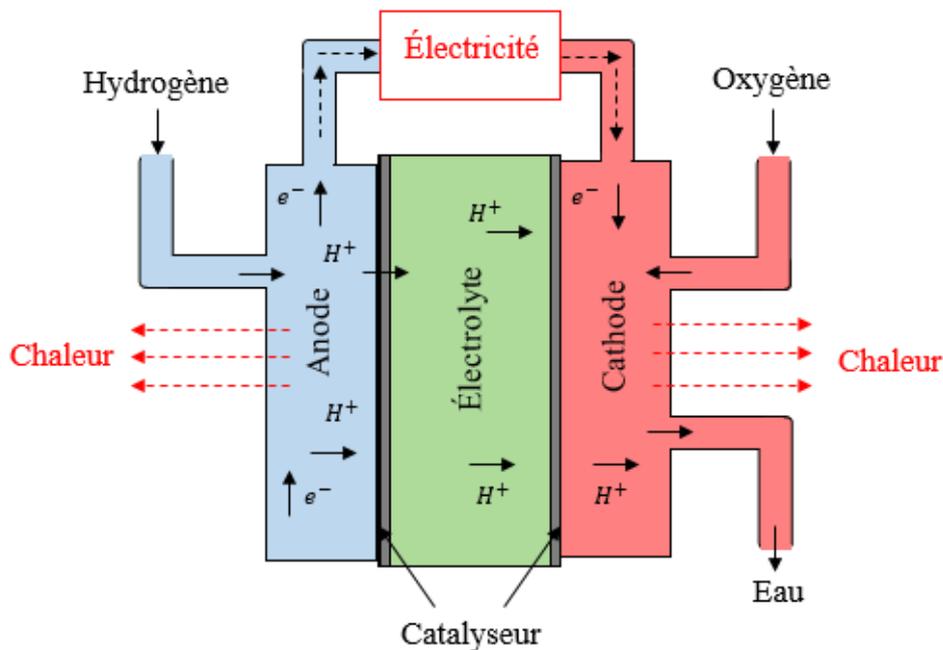


Figure 1.3 – Principe de fonctionnement d’une pile à combustible type PEM

la température et de l’humidité de la membrane.

Dans ce qui suit, nous donnerons les expressions de la tension en boucle ouverte et les différentes pertes afin de déduire la tension électrique délivrée par la pile.

1.4.3.1 Boucle ouverte

L’énergie chimique libérée lors de la réaction chimique de la PàC peut être exprimée à partir de la variation de l’énergie libre de Gibbs (ΔG_f). Cette dernière correspond à la différence entre celle des produits et des réactifs. Elle est utilisée pour représenter l’énergie disponible et exploitée dans le cadre d’un travail externe. Pour la PEMFC, la réaction chimique mise en œuvre est identique à celle donnée par (1.1).

La variation de G_f est donnée par :

$$\Delta G_f = (G_f)_{H_2O} - (G_f)_{H_2} - (G_f)_{O_2}$$

Cette variation peut être décrite en fonction de la température, des pressions partielles d’oxygène et d’hydrogène et de la pression de l’eau de la façon suivante :

$$\Delta G_f = \Delta G_f^0 - RT_c \ln \left[\frac{P_{H_2} P_{O_2}^{\frac{1}{2}}}{P_{H_2O}} \right]$$

où ΔG_f^0 désigne la variation de l'énergie libre de Gibbs de la pression atmosphérique. R est la constante universelle de gaz. T_c désigne la température de la cellule de la PàC. P_{H_2} , P_{O_2} et P_{H_2O} représentent respectivement les pressions partielles d'hydrogène, d'oxygène et de vapeur d'eau. Si la production de l'énergie de la PàC est réversible, toutes les G_f seront transformées en énergie électrique. Pour chaque mole d'hydrogène, deux moles d'électrons circulent autour du circuit externe et le travail électrique effectué est :

$$W = -2FE$$

où F désigne la constante de « Faraday ». E est la tension réversible en boucle ouverte d'une cellule. La tension réversible est due à la différence de potentiel électrique entre les deux électrodes lors de la réaction chimique. Le système est considéré réversible, il en résulte l'égalité entre W et ΔG_f [78]. Cela permet d'exprimer E par l'équation suivante :

$$E = -\frac{\Delta G_f^0}{2F} + \frac{RT_c}{2F} \ln \left[\frac{P_{H_2} P_{O_2}^{\frac{1}{2}}}{P_{H_2O}} \right].$$

Cette relation montre que la tension électrique de la pile augmente lorsque les pressions des réactifs augmentent et/ou celle du produit décroît.

1.4.3.2 Pertes d'activation

Les pertes d'activation V_{act} sont liées aux cinétiques des réactions chimiques et aux déplacements des électrons entre l'anode et la cathode. Ces pertes se produisent au niveau de chacune des deux électrodes. Cependant, elles sont plus importantes au niveau de la cathode qu'à l'anode. En effet, la réaction d'oxydation de l'hydrogène dans l'anode est plus rapide que la réaction de réduction de l'oxygène dans la cathode [3].

La relation entre les pertes d'activation et la densité de courant est décrite par l'équation de « Tafel » [56] :

$$V_{act} = a \ln \frac{i}{i_0}$$

où i_0 est la densité de courant d'échange et a est une constante. i désigne la densité de courant définie par :

$$i = \frac{I_{st}}{A_{fc}}$$

où I_{st} est le courant fourni par la pile et A_{fc} représente la surface active d'une cellule. Il est à noter que l'équation de Tafel est valable uniquement pour une densité de courant i supérieur à i_0 . La relation qui exprime les pertes d'activation est définie par (voir [55]) :

$$V_{act} = V_0 + V_a (1 - e^{-a_1 i})$$

où V_0 est la chute de tension à une densité de courant nulle. V_a et a_1 sont des constantes déterminées expérimentalement (voir par exemple [90]).

1.4.3.3 Pertes ohmiques

Les pertes ohmiques V_{ohm} dépendent linéairement du courant. Elles sont dues à la résistance de la membrane au transfert des protons et à la résistance qu'opposent les électrodes et les plaques bipolaires à la circulation des électrons. Les pertes ohmiques sont exprimées par :

$$V_{ohm} = R_{ohm} i$$

où R_{ohm} est la résistance électrique interne. Cette dernière dépend de l'épaisseur de la membrane et de la conductivité de la membrane :

$$R_{ohm} = \frac{t_m}{\sigma_m}$$

Par ailleurs, la conductivité de la membrane dépend de la teneur en eau de la membrane et de la température de la cellule. Elle a pour expression la formulation suivante :

$$\sigma_m = (a_2 \lambda_m - a_3) \exp \left[a_4 \left(\frac{1}{300} - \frac{1}{T_c} \right) \right]$$

où a_2 , a_3 et a_4 sont des constantes déterminées expérimentalement (voir [90]) et λ_m représente la teneur en eau dans la membrane.

1.4.3.4 Pertes de concentration

Les pertes de concentration V_{conc} sont dues à la baisse de concentration des réactifs à la surface des électrodes. En effet, une densité de courant élevée entraîne une augmentation rapide des pertes de concentration, ce qui induit une diminution rapide de la tension. L'expression de ces pertes est donnée comme suit :

$$V_{conc} = i \left(a_5 \frac{i}{i_{max}} \right)^{a_6}$$

où i_{max} est la densité de courant maximale atteignable par la pile. a_5 et a_6 sont des constantes déterminées expérimentalement (voir [90]).

1.4.3.5 Tension de la pile

La tension électrique d'une cellule élémentaire de la PàC est égale à la différence entre la tension en boucle ouverte de la PàC et les différentes pertes, d'activation, ohmiques et de concentration. Elle est exprimée par l'équation suivante :

$$V_c = E - V_{act} - V_{ohm} - V_{conc}$$

où V_c est la tension d'une cellule.

La tension de la PàC est donnée par :

$$V_{st} = n V_c$$

où n désigne le nombre de cellules.

1.5 Système pile à combustible

Le fonctionnement de la PàC nécessite l'utilisation de systèmes auxiliaires (voir Figure 1.4). Plus précisément, les auxiliaires principaux de la pile sont : les circuits d'alimentation en air et en hydrogène qui alimentent respectivement la cathode en oxygène et l'anode en hydrogène, les circuits de refroidisseur et d'humidification qui maintiennent respectivement la température de la pile et le degré d'humidité, les convertisseurs statiques qui permettent de faire la gestion d'énergie dans le système contenant la pile et enfin le système de contrôle qui permet de réguler les différents paramètres.

1.5.1 Circuit d'alimentation en air

L'oxygène est l'un des vecteurs indispensables au fonctionnement d'une PàC. L'injection de ce réactif dépend du domaine d'utilisation et de la puissance en jeu. Certaines piles peuvent fonctionner à partir d'oxygène pur, comme celles utilisées dans les sous-marins et les engins spatiaux. L'oxygène est alors stocké dans un réservoir à haute pression. Les PàC de faible puissance sont alimentées directement par l'air atmosphérique. En revanche, dans le cas des applications terrestres, stationnaires ou embarquées, les PàC à haute puissance sont utilisées et elles sont majoritairement alimentées en air à l'aide d'un système moto-compresseur.

Pour assurer le bon fonctionnement d'une PàC, il faut atteindre un niveau de pression et

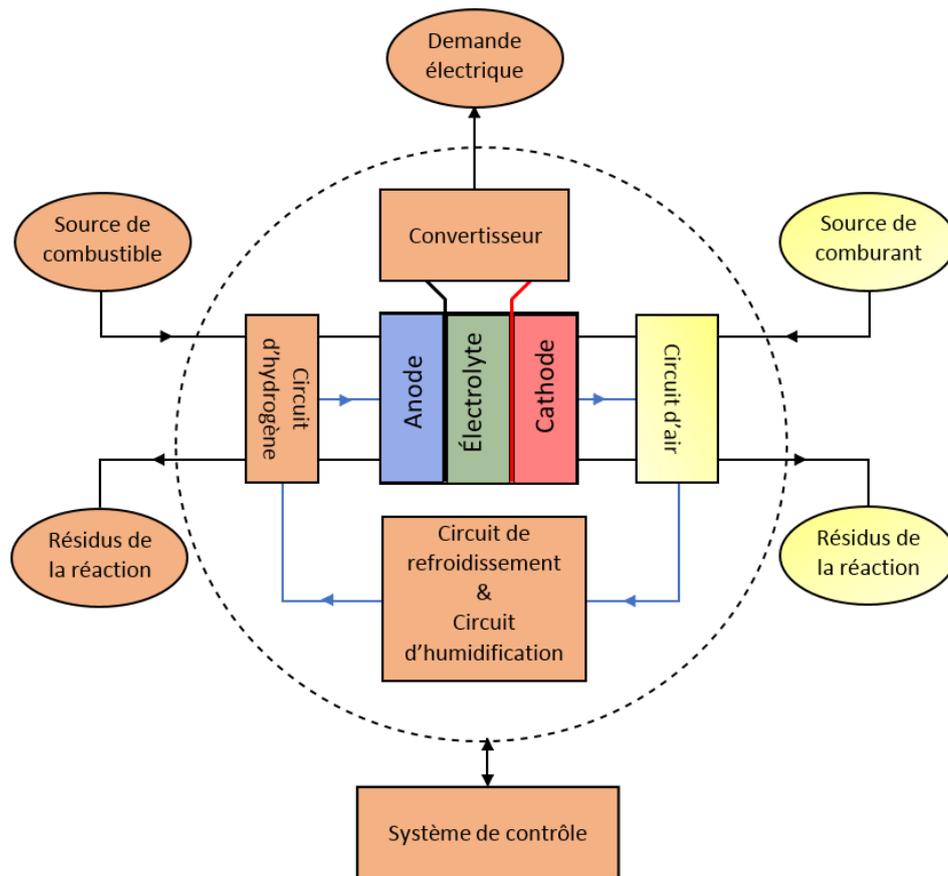


Figure 1.4 – Structure d'un système pile à combustible

de débit d'air suffisant. Ce fonctionnement à haute pression augmente le rendement et la puissance de la pile.

1.5.2 Circuit d'alimentation en hydrogène

Ce circuit permet d'alimenter la PàC en hydrogène. Ce dernier est habituellement fourni à partir d'un réservoir, où l'hydrogène est stocké de manière compressée. Grâce aux vannes, ainsi qu'aux régulateurs, la pression d'hydrogène et le débit peuvent être contrôlés. Il existe deux modes de fonctionnement de la PàC selon la configuration du circuit d'hydrogène (à savoir : mode ouvert (circuit d'hydrogène ouvert), mode fermé (circuit d'hydrogène fermé)). En mode ouvert, après le passage de l'hydrogène au travers du compartiment anodique, celui-ci est évacué vers un condenseur pour récupérer l'eau présente dans le gaz, laquelle pourra être utilisée ultérieurement par le circuit d'humidification des gaz. Après ce condenseur, le gaz restant est évacué à l'extérieur. En

mode fermé, la sortie d'hydrogène est fermée et la pile travaille à une stœchiométrie^b de un. Néanmoins, il est nécessaire d'effectuer régulièrement une purge^c pour évacuer l'eau et l'azote ayant migré depuis le compartiment cathodique [87].

1.5.3 Circuit de refroidissement

La réaction chimique qui convertit l'oxygène et l'hydrogène en électricité produit également de la chaleur. Celle-ci doit être évacuée afin de maintenir la température de la pile autour d'une valeur de fonctionnement recommandée [6]. L'évacuation de la chaleur peut être réalisée à l'aide un ventilateur pour des piles à combustible de faibles puissances. En revanche, pour évacuer la chaleur dans le cas des piles de grandes puissances, le refroidissement par un fluide est plus adapté. Généralement, des plaques de refroidissement entre les cellules élémentaires permettent de faire circuler de l'eau dans un circuit indépendant à l'intérieur de la pile. Le fonctionnement de ce circuit peut se faire grâce à une pompe, et fluide est refroidie au moyen d'un échange thermique.

1.5.4 Circuit d'humidification

Ce circuit a pour rôle d'humidifier les gaz réactifs afin d'hydrater la membrane. En effet, pour les PEMFCs, la teneur en eau de la membrane doit être constamment contrôlée afin de garantir le transport des protons H^+ de l'anode vers la cathode. Il convient de noter que l'assèchement ou la sur-humidification de la membrane diminue la production d'énergie électrique et limite la durée de vie de la pile.

1.5.5 Convertisseurs statiques

Ces composants permettent la gestion de l'énergie délivrée par le système pile à combustible. En effet, la tension délivrée par la PàC est une fonction non linéaire du courant débité (voir Figure 1.5). Ainsi, il est important de mettre un convertisseur statique entre la charge et la pile. Ce convertisseur permet l'adaptation de la tension délivrée par le système PàC au bus continu.

1.5.6 Système de contrôle

Le système PàC dispose de nombreux auxiliaires inter-connectés et interdépendants. Afin d'assurer un bon fonctionnement (à savoir : le rendement global, la sécurité, le temps de réponse, le respect des contraintes mécaniques, etc), il est indispensable de se doter un système de contrôle global. Ce système permettrait d'agir sur les différents sous-systèmes à savoir : les convertisseurs statiques, le débit des gaz, le contrôle

b. Rapport entre le débit de gaz nécessaire pour débiter un courant donné et le gaz réellement fourni à la pile.

c. Évacuation des gaz par ouverture de la vanne de sortie.

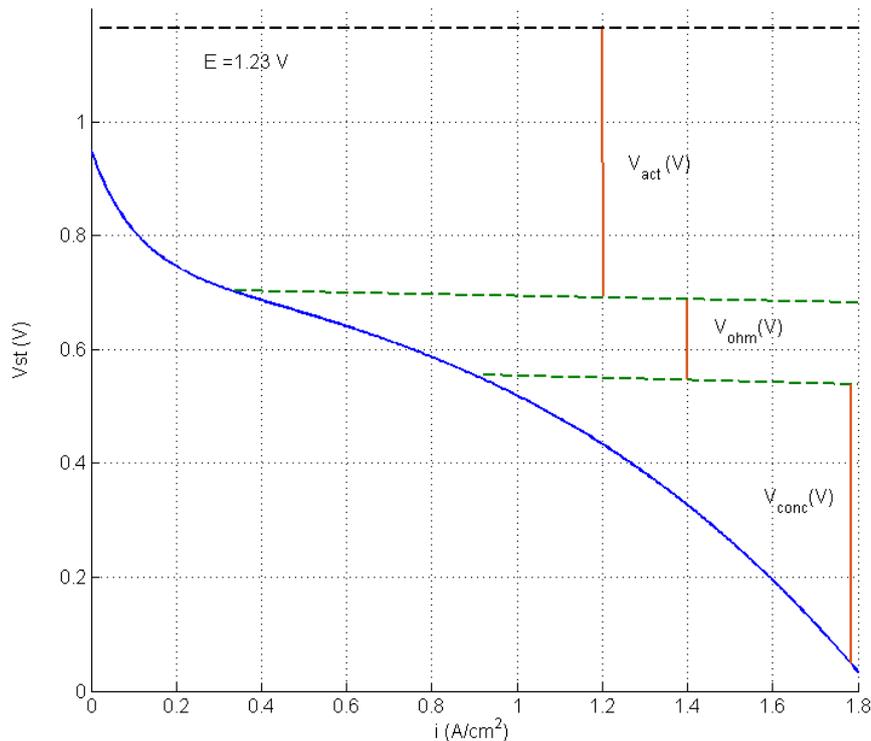


Figure 1.5 – Courbe de polarisation de la pile à combustible

le groupe moto-compresseur, la pompe gérant le système de refroidissement à eau, la température d’humidificateur, etc.

1.6 Sources de défaillances dans un système PEMFC

Le système PàC est le siège de plusieurs phénomènes multi-physiques : fluide, thermique et électrique. Il est assujéti à des défauts de fonctionnement. Ces défauts peuvent être de plusieurs natures : mécanique (par exemple la casse d’un matériau [20]), chimique (à savoir le noyage ou l’assèchement), thermique (par exemple la rupture de la membrane causée par la haute température [103]), etc.

Les défauts affectant la PàC peuvent être classés par leurs degrés de gravité. Les dégradations réversibles des performances mettent en cause la stabilité des performances et généralement une modification adéquate des conditions opératoires s’avèrent suffisantes pour retrouver les performances électriques originales. Les dégradations irréversibles des performances pourraient causer un non fonctionnement de la pile.

Les défauts qui surviennent au niveau de la pile peuvent être attribués aussi bien à un vieillissement naturel des composants du stack qu'à un mauvais contrôle du système. Des défauts qui apparaissent au niveau du stack peuvent avoir un lien direct avec des conditions opératoires qui ne sont pas bien adaptées comme par exemple une humidité relative ou des débits trop forts des gaz ou encore une température de fonctionnement trop élevée. D'autres défauts affectant la PàC peuvent survenir au niveau des catalyseurs ou au niveau des supports des catalyseurs [100].

Les causes des dégradations physiques dues principalement à une mauvaise gestion de la pile, seront présentées dans le sous-paragraphe suivant.

1.6.1 Défauts liés à la gestion de l'eau

La gestion de l'eau est un élément essentiel au bon fonctionnement d'un stack. Une quantité de l'eau peut être produite ou injectée au niveau de la cathode soit par la réaction électrochimique ou soit par humidification des gaz réactifs. Cependant, en raison d'un gradient de concentration, l'eau peut se diffuser à travers la membrane pour atteindre l'anode. L'eau peut circuler aussi à travers la membrane par électro-osmose : les protons migrent de l'anode vers la cathode sous forme hydratée entraînant un nombre de molécules d'eau. Certaines conditions opératoires appliquées à la PàC peuvent provoquer deux types de défauts antagonistes ; à savoir : le noyage et l'assèchement.

1.6.1.1 Noyage

Une accumulation excessive d'eau, à l'intérieur du cœur de la pile lors d'un processus de condensation prolongé, provoque un défaut de noyage [31]. Les causes de la condensation sont nombreuses : une évacuation inefficace de l'eau produite [82], une température de pile trop basse [68], une faible densité de courant sous certaines conditions de fonctionnement de la pile [57], une hygrométrie de l'air très élevée à l'entrée de la pile, etc.

1.6.1.2 Assèchement

Un manque hydrique au niveau de la membrane entraîne un phénomène d'assèchement. L'occurrence de ce défaut entraîne une diminution de la tension de la PàC [70]. Les causes de l'assèchement sont différentes de celles du noyage. En effet, l'assèchement peut être le résultat d'une insuffisance dans l'humidification des réactifs, d'une température de pile trop élevée, d'une sollicitation en courant très importante, etc.

1.6.1.3 Humidité relative

Les réactifs doivent être humidifiés pour hydrater la membrane. En revanche, une baisse de la valeur de l'humidité relative des réactifs de la pile provoque une augmen-

tation de la résistance de la membrane, occasionnant ainsi une réduction de la tension électrique et la durée de vie de la PàC. Par ailleurs, une forte humidité relative peut provoquer un noyage de la PàC. Ainsi, un seuil minimal d'humidité est indispensable pour garantir la réaction chimique et le passage des protons à travers la membrane.

1.6.2 Défauts liés à la gestion des gaz et de la température

Les défauts qui apparaissent au niveau du stack peuvent avoir un lien direct avec la gestion des composants utilisés dans un système pile à combustible. Ces composants ont pour rôle de fournir des conditions opératoires nécessaires au bon fonctionnement de la pile.

1.6.2.1 Alimentation en gaz

Pour fournir le courant demandé par la charge, les débits des gaz réactifs doivent être réajustés afin d'approvisionner, et dans des conditions optimales, en quantité nécessaire de réactifs au niveau de l'anode et de la cathode. Le manque d'approvisionnement en réactif peut être préjudiciable à la pile en induisant des dégradations irréversibles.

Il convient de noter que lors d'un approvisionnement insuffisant et/ou non uniforme, le courant circulera plus dans les zones à forte concentration en réactifs, ce qui peut induire à une distribution de courant hétérogène. En outre, des débits trop forts de réactifs entraîneraient un assèchement et de faibles débits provoqueraient un noyage dans la PàC. Par conséquent, un juste équilibre est souhaité en fonction de l'état hydrique de la pile.

1.6.2.2 Pression des gaz

Les membranes sont des dispositifs fragiles et une différence de pression importante entre la cathode et l'anode pourrait accélérer leur dégradation [104]. Ainsi le contrôle de la différence de pression permettrait de préserver la pile.

1.6.2.3 Température de la pile

Dans une PEMFC, un fonctionnement à des températures élevées peut causer un assèchement et/ou une anomalie de la membrane, ce qui pourrait produire une dégradation importante et irréversible. Par ailleurs, un fonctionnement à des températures trop basses peut favoriser la formation de l'eau liquide à l'intérieur de la pile.

1.6.3 Contamination par les réactifs

Une migration de l'azote contenu dans l'air alimentant le compartiment cathodique de la PàC est possible vers l'anode au travers de la membrane électrolytique. L'acheminement de l'hydrogène sur les sites catalytiques pourrait alors être bloqué et causerait

une diminution rapide de la puissance électrique délivrée par la pile. Il est à noter que dans ce cas l'évacuation de l'azote s'effectue par une purge du circuit d'hydrogène [22] [47].

L'alimentation de la PàC par de l'hydrogène issu d'un reformeur fonctionnant à partir de combustibles fossiles peut induire un empoisonnement de la pile. Ce défaut se caractérise par une baisse du rendement électrique de la pile [17].

1.6.4 Vieillessement de la pile

Les dégradations liées au vieillissement se traduisent par une diminution progressive de ses performances électriques et ne peuvent être évitées. Cette diminution pourrait être due à ses conditions de fonctionnement et aux procédures répétées de marche/arrêt. Cette baisse peut être attribuée à une réduction de la conductivité ionique de la membrane, à la formation de trous dans la membrane, à une perte de l'activité des catalyseurs, à de multiples empoisonnements, à une détérioration des propriétés de transport de masse dans les couches poreuses, à la corrosion des catalyseurs ou à des défauts de conceptions [88].

1.6.5 Défaillances dues aux auxiliaires

Le système PàC peut comporter d'autres types de défauts liés aux auxiliaires. Ces défauts peuvent influencer sur le fonctionnement de la pile et représentent les causes majeures des arrêts imprévus. Dans ce sous-paragraphe, certains de ces défauts sont présentés.

1.6.5.1 Compresseur

Une défaillance du compresseur qui alimente la pile en air pourrait provoquer un manque en réactif. Ceci entraînerait une accumulation d'eau qui ne serait plus suffisamment extraite entraînant ainsi un noyage [79].

1.6.5.2 Refroidisseur

Un défaut de refroidissement occasionne un fonctionnement à des températures élevées (à savoir : au-delà de 90 °C) et peut causer une anomalie de la membrane. Ce fonctionnement peut produire une dégradation irréversible.

1.6.5.3 Convertisseur

Un convertisseur pourrait subir des défaillances (à savoir : un court-circuit, une perte de contrôle, etc) qui, selon les topologies retenues, pourraient rendre l'ensemble générateur PàC hors-service.

1.7 État de l'art sur le diagnostic et la commande

Le but de cette sous-section est de présenter un état de l'art sur le diagnostic et sur la commande des systèmes piles à combustible.

1.7.1 Diagnostic du système pile à combustible

Dans les sections précédentes, nous avons présenté les principaux défauts pouvant apparaître sur le système PàC. Les causes provoquant ces défauts sont nombreuses. Ainsi, un grand nombre de stratégies en vue du diagnostic ont été proposées dans la littérature.

1.7.1.1 Diagnostic à base de modèle

La problématique du diagnostic du système PàC à base de modèle a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs et un grand nombre de travaux ont été consacrés à cette thématique (voir par exemple [10] et ses références). Dans les paragraphes suivants les méthodes sur la redondance analytique, l'espace de parité, les observateurs et les estimateurs paramétriques sont présentées.

Les méthodes fondées sur les approches de redondance analytique et d'espace de parité ont été utilisées pour diagnostiquer des défauts dans le système PàC. Dans [81], les auteurs ont proposé une méthode, les résidus sont générés à partir des relations de consistance construites sur la base d'un modèle de connaissance. Les défauts détectés sont nombreux, par exemple, la surchauffe du compresseur ou son mauvais contrôle. Dans le cadre des approches à base de redondance analytique, des résultats fondés sur la modélisation à base de réseaux de neurones ont été proposés (voir par exemple [51]). Par ailleurs, l'utilisation de la technique de l'espace de parité a été explorée pour aborder les défauts actionneurs et capteurs pour les arrivées des gaz [1].

La stratégie du diagnostic à base d'observateurs du système PàC est fondée sur l'utilisation de modèles mathématiques décrivant le comportement de celui-ci. Plus précisément, la détection et la localisation des défauts sont réalisées à travers l'estimation de ces états. Dans [4], les auteurs ont proposé un observateur non linéaire pour estimer la pression partielle de l'hydrogène à l'anode de la pile. Par ailleurs, un observateur d'état a été développé [35] pour estimer la teneur en eau de la membrane à partir de la mesure de la tension. Une technique de diagnostic pour détecter le défaut de noyage basée sur l'estimation du volume d'eau liquide a été développé dans [9] [10]. Les auteurs utilisent un observateur fonctionnel, permettant d'estimer la partie utile du vecteur de l'état. En outre, l'utilisation de l'observateur linéaire à paramètres variants a été explorée pour identifier et évaluer les défauts capteurs au niveau des sous-systèmes de la PàC [65].

Dans le cadre du diagnostic à base de modèle, la technique de modélisation par équivalent électrique a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs [30] [48] [92]. Plus précisément, les modèles proposés, sous forme de circuits électriques, permettent de décrire des liens entre les grandeurs de la pile en exploitant des analogies électriques. Dans cette approche la stratégie du diagnostic est fondée sur l'estimation des paramètres des composants du circuit ainsi considéré.

1.7.1.2 Méthodes guidées par les données

Les méthodes de diagnostic du système PàC à base d'analyse de données (voir par exemple [58] et ses références) ne nécessitent pas l'utilisation de modèle pour décrire les différents modes de fonctionnement. Ces méthodes reposent uniquement sur l'analyse des mesures prélevées par l'instrumentation placée sur le système.

A. Méthodes statistiques : Dans ce cadre, des approches ont été explorées pour le diagnostic des systèmes de la PàC. Dans [63], la détection et l'isolation des défauts sont réalisées en analysant les tensions individuelles des cellules. Des méthodes d'extraction de caractéristiques et de classification sont utilisées pour définir des classes liées aux états de santé (c'est-à-dire, fonctionnement sain ou en présence de défauts). Dans ces travaux, les auteurs considèrent des défauts du type courant fort, court-circuit, stœchiométrie en air haute ou un empoisonnement au CO.

B. Réseaux Bayésiens : Par ailleurs, un réseau bayésien pour le diagnostic de nombreux défauts comme la défaillance du circuit d'alimentation en air ou la défaillance du système de refroidissement a été présenté [79] [80]. Le diagnostic de ces défauts consiste à trouver des relations logiques de cause à effet contenues dans cette base de données au travers des différentes variables définies. C'est une méthode probabiliste et graphique à la fois.

C. Intelligence Artificielle : La stratégie du diagnostic à base de reconnaissance de forme est composée de deux étapes. La première, dite étape d'apprentissage, consiste à définir les différentes observations constituant la forme et les classes connues du système, puis à construire une règle de décision précisant les frontières entre ces classes. La deuxième étape, dite de décision, consiste à décider si des observations appartiennent à une des différentes classes. Différentes approches peuvent être utilisées lors de l'étape d'apprentissage : les réseaux de neurones ou la logique floue [89] [107].

D. Méthodes basées sur traitement de signal : Des méthodes à base de traitement de signal ont été employées pour le diagnostic de la PàC. Il s'agit de trouver une ou plusieurs mesures spécifiques (à savoir : impédance, tension, débit, pression, etc) pour discriminer un ou plusieurs défauts. Par exemple, dans [16], les auteurs ont proposé une méthode de diagnostic en vue de détecter une éventuelle accumulation d'eau excessive dans les compartiments anodique et cathodique. Une approche stochastique pour le

diagnostic des défauts liée à la gestion de l'eau (noyage et assèchement) d'une PàC a été présentée dans [44] [46]. Cette approche se base sur la distribution des tensions des cellules unitaires constitutives de la pile. Par ailleurs, des résultats sur le diagnostic ont été établis à partir de l'identification de zones fréquentielles [14] [25] [26]. Ces travaux visent des défauts que sont le noyage des compartiments, l'assèchement de la membrane et l'empoisonnement au monoxyde de carbone à l'électrode anodique.

1.7.2 Commande du système pile à combustible

Le problème de la commande des systèmes pile à combustible du type PEM a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs. Dans ce cadre, l'objectif de la commande est d'assurer un bon rendement, un fonctionnement sûr et une durée de vie importante. Pour ce faire, il convient de contrôler les sous-systèmes d'alimentation en réactifs [5] [52], d'humidification [15] [78] et de refroidissement [86]. Le but est d'introduire les réactifs dans la pile sous des contraintes optimales, de gérer l'eau présente à l'intérieur et d'assurer un environnement thermique favorable au bon fonctionnement.

Pour répondre au large panel des demandes de la charge, un fonctionnement idéal consisterait à assurer une puissance maximale et à préserver l'état de santé de la pile. Il s'est avéré que la problématique du contrôle de l'excès d'oxygène est centrale pour atteindre cet objectif. Il est à noter que l'excès d'oxygène est défini comme le rapport entre le débit d'oxygène entrant et de celui réagi lors de la réaction chimique. En fait, le contrôle de ce rapport permettrait de répondre aux besoins de la charge tout en évitant un excès ou un éventuel manque d'oxygène. Ainsi, le challenge scientifique consiste à assurer un fonctionnement présentant une puissance nette délivrée optimale et un rapport d'excès d'oxygène maîtrisé, c'est-à-dire, assurer un rapport compris entre deux et deux et demi [78].

Pour décrire le comportement d'une partie ou du système complet pile à combustible (à savoir : le cœur de pile et les systèmes d'alimentation en hydrogène, de refroidissement et d'humidification) différents modèles, sous forme d'équations différentielles ont été établis (voir par exemple [78] [93]). Ces modèles sont fondés sur des considérations de la physique, essentiellement de la thermodynamique, et ont été considérés en vue de l'analyse et pour la synthèse de lois de commande.

Vu la grande dimension et la nature complexe de ce type de modèles, généralement, les auteurs procèdent d'abord par une réduction de la taille et / ou par une linéarisation. Plusieurs approches ont été abordées pour la synthèse des lois de commande en vue du contrôle de l'excès d'oxygène et/ou pour optimiser la puissance nette délivrée. Le but est d'assurer une efficacité énergétique tout en préservant l'état de santé de la pile. Dans le cadre de la commande des systèmes pile à combustibles, les résultats proposés dans la littérature peuvent être regroupés en plusieurs types selon les approches considérées.

Le premier type des rétroactions employées pour la commande du système pile est

fondé sur la réduction et sur la linéarisation des modèles non-linéaires (voir [78] [93]). Ensuite, les auteurs utilisent un PID ou des stratégies de commande par anticipation, c'est-à-dire, une commande prédictive [37] [38] [39]. A titre d'exemple, dans [39], le contrôle du fonctionnement de la pile a été réalisé par une définition préalable de la trajectoire optimale de la tension d'alimentation du compresseur.

Le deuxième type des résultats sur la commande est fondé sur la technique des modes glissants [23] [77] [96]. Les modèles utilisés sont réduits, cependant, ils ont été validés expérimentalement. Ainsi, plusieurs algorithmes des modes glissants, et notamment celui dit «Super Twisting» ont été testés avec succès. Pour estimer les variables non mesurées, les auteurs considèrent des commandes à base d'observateurs.

Le troisième type pourrait être constitué des résultats fondés sur la commande optimale [72] [78] ou sur des méthodologies de contrôle avancées, par exemple, la commande prédictive non-linéaire basée sur l'utilisation des séries de Volterra [38] ou la commande synthétisée par utilisation de la méthode dit de l'«Extremum Seeking» [54] [94].

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une description globale d'une pile à combustible de type PEM, de son fonctionnement et de son intégration dans un système pile à combustible. Nous avons également vu que les systèmes piles à combustible sont des systèmes multi-physiques et multi-échelles dont la maîtrise du fonctionnement fait appel à plusieurs disciplines. De ce fait, de nombreuses stratégies de diagnostic et de commande ont été développées et chacune apporte sa contribution pour l'amélioration des performances, durabilité, fiabilité des systèmes pile à combustible.

2 Modélisation du système d'alimentation en air

2.1 Introduction

Actuellement, dans la littérature, la modélisation du système pile à combustible a été abondamment traitée (voir par exemple [91] et ses références). Le but est de décrire le comportement global (ou d'un composant) en vue de l'analyse, la simulation, la commande ou le diagnostic/pronostic. Ainsi, plusieurs approches ont été explorées en fonction de l'objectif fixé. Ces modèles peuvent être regroupés en plusieurs catégories. Une première catégorie vise une représentation statique des liens entre les grandeurs, généralement, conçue pour décrire les phénomènes qui régissent le système PàC en régime permanent. A titre d'exemple, la relation non-linéaire qui décrit le comportement de la tension de la pile par rapport au courant. Une deuxième catégorie est celle des systèmes dynamiques. Ces modèles, et selon l'objectif visé, peuvent être sous forme d'équations aux dérivées partielles [32] ou d'équations différentielles [86] [91]. Il convient de préciser, les modèles sous forme d'équations aux dérivées partielles sont utilisés uniquement pour la simulation. Une troisième catégorie est fondée sur les réseaux de neurones. Cette approche offre l'avantage d'être très proche de la technologie considérée, cependant, les résultats restent liés aux données d'apprentissage. Une quatrième catégorie utilise une logique graphique pour représenter les liens énergétiques ; à savoir : Bond graph et représentation énergétique macroscopique [19] [85]. Une cinquième catégorie se base sur les analogies avec les circuits électriques [45].

Ce chapitre est dédié à la modélisation du système d'alimentation en air. Ce composant a été analysé par plusieurs auteurs [93] [96]. Dans ce travail, le modèle considéré pour décrire le comportement de ce composant est sous la forme d'équations différentielles. Le chapitre est constitué essentiellement de deux parties. La première partie est consacrée à l'établissement du modèle dynamique du système d'alimentation en air. Dans la deuxième partie, et afin d'illustrer le modèle considéré, des résultats de simulations sont proposés.

2.2 Modèle dynamique

Le système d'alimentation en air de la PàC considéré (voir Figure 2.1) est composé essentiellement du système moto-compresseur, du collecteur d'admission, du refroidisseur, de l'humidificateur, de la cathode de la pile et du collecteur d'échappement.

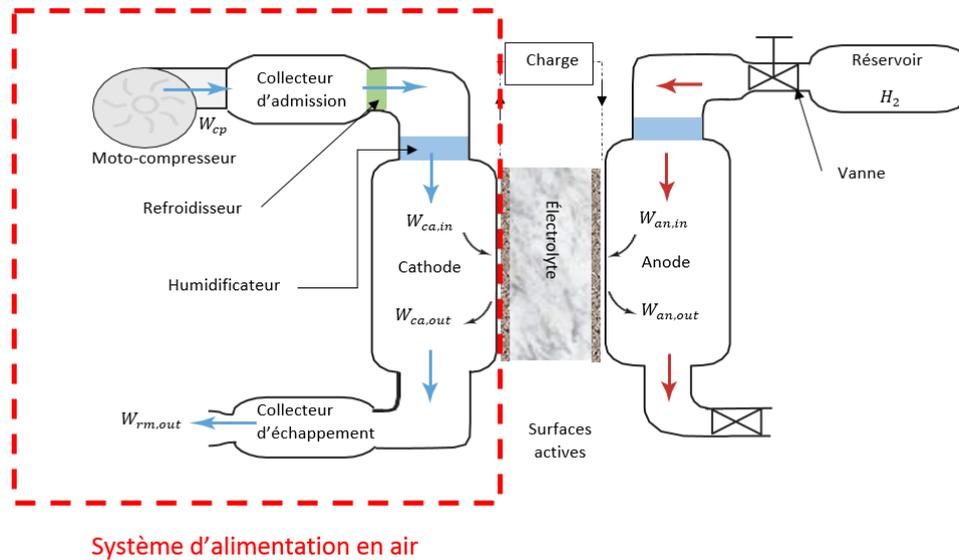


Figure 2.1 – Schéma d'un système pile à combustible

Le but de cette partie est d'introduire un modèle dynamique qui décrit le comportement du système d'alimentation en air. Il convient de préciser que dans ce travail, le comportement des systèmes de refroidissement et de l'humidificateur ne sont pas pris en compte. En fait, leurs dynamiques sont très lentes par rapport à celles des autres systèmes.

Dans les paragraphes suivants, nous présenterons d'abord les hypothèses considérées. Puis, nous introduisons le modèle du système moto-compresseur, ensuite, du collecteur d'admission et enfin de la cathode de la pile.

2.2.1 Hypothèses considérées

La modélisation dynamique du système d'alimentation en air nécessite l'adoption de certaines hypothèses. Les gaz sont assumés obéir à la loi des gaz parfaits et leurs répartitions sont homogènes à 100%. L'eau à l'intérieur est supposée à l'état vapeur. Le phénomène de noyage de la couche de diffusion est négligé. En outre, la pression de l'anode est supposée être contrôlée par une électrovanne alimentée par un système mécanique moto-compresseur. Aussi, il est assumé que les pressions à la sortie et à l'intérieur de la cathode sont similaires.

2.2.2 Système moto-compresseur

2.2.2.1 Description

L'alimentation en air de la pile de type PEM peut être effectuée par une utilisation de différents types de compresseurs (voir Figure 2.2). Ces derniers peuvent être regroupés en deux grandes familles : les turbo-compresseurs et les compresseurs volumétriques [12] [98] [102]. Le choix du compresseur s'effectue en fonction de l'application considérée et le cahier des charges.

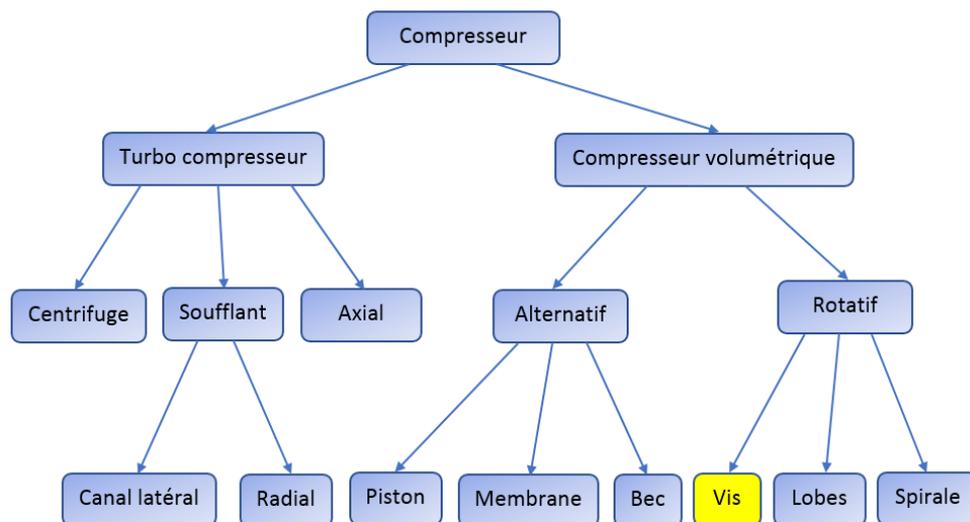


Figure 2.2 – Différents types de compresseurs

Les compresseurs permettent de contrôler le débit d'air à l'entrée de la pile à travers la régulation de leur vitesse. La complexité de la relation entre la vitesse de rotation et le débit dépend de la technologie considérée. Dans le cas des compresseurs volumétriques, cette relation peut être exprimée d'une façon linéaire. Cependant, dans le cas des turbo-compresseurs, la relation est plus complexe et nécessite des expressions non-linéaires.

2.2.2.2 Modélisation

Les compresseurs sont des procédés qui peuvent être complexes et leurs modélisations ont suscité l'intérêt de plusieurs auteurs [12] [69] [98]. Dans ce travail, nous considérons la technologie « rotatif-à-vis » de la famille des compresseurs volumétriques. Il est supposé que le compresseur est alimenté par une machine à courant continu.

Généralement, le système moto-compresseur est considéré comme étant composé de deux parties (voir Figure 2.3). La première partie, relativement au compresseur, consiste

en une fonction statique permettant de déterminer le débit d'air sortant du compresseur ainsi que sa puissance en fonction de sa vitesse de rotation et du rapport des pressions amont/aval. La deuxième partie correspond l'inertie du compresseur et du moteur et permet la détermination de la vitesse de rotation du compresseur en fonction de la puissance fournie par le moteur et de celle absorbée par le compresseur.

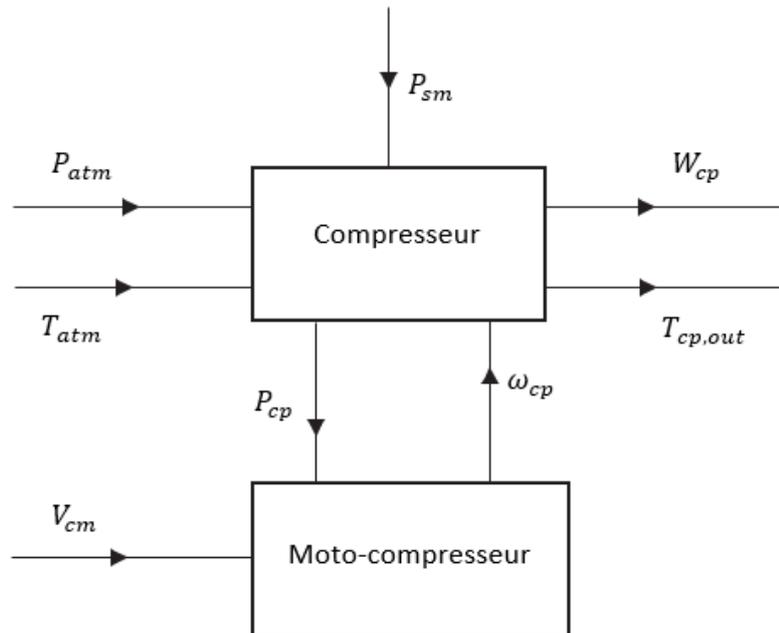


Figure 2.3 – Schéma bloc du système moto-compresseur

Les entrées du modèle du compresseur comprennent la pression d'entrée d'air, P_{atm} , sa température d'entrée, T_{atm} , la commande de tension de commande moto-compresseur, V_{cm} , et la pression du collecteur d'alimentation, P_{sm} . La commande du moteur est l'une des entrées du système de PàC.

La température de l'air sortant $T_{cp,out}$ du système moto-compresseur peut être exprimée de la façon suivante (voir Figure 2.4) :

$$T_{cp,out}(P_{sm}) = T_{atm} + \frac{T_{atm}}{\eta_{cp}} \left[\left(\frac{P_{sm}}{P_{atm}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \quad (2.1)$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifique de l'air. η_{cp} désigne le rendement du compresseur.

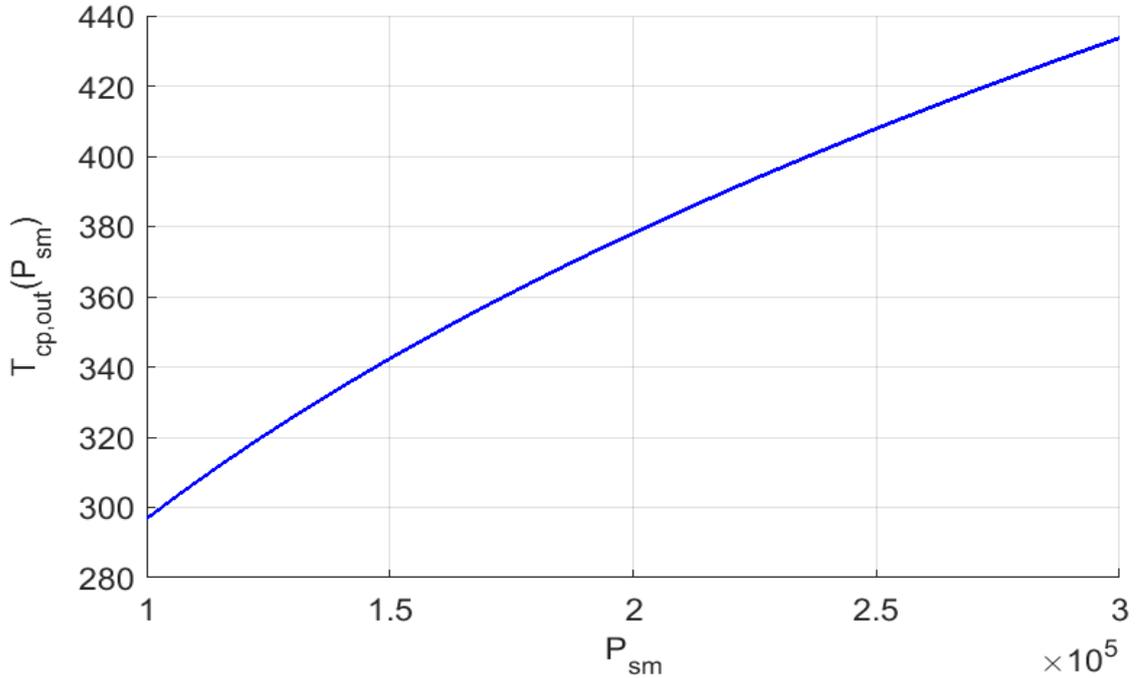


Figure 2.4 – Comportement de $T_{cp,out}$ en fonction de P_{sm}

En vertu du principe fondamental de la dynamique appliquée aux parties tournantes, la dynamique de la vitesse angulaire du moto-compresseur ω_{cp} peut être exprimée [78] :

$$\frac{d\omega_{cp}}{dt} = \frac{1}{J_{cp}} (\tau_{cm} - \tau_{cp}) \quad (2.2)$$

où τ_{cm} , τ_{cp} sont les couples respectivement du moteur et du compresseur. J_{cp} désigne l'inertie combinée du compresseur et du moteur.

Le couple nécessaire pour entraîner le compresseur est déterminé à partir des équations thermodynamiques, soit :

$$\tau_{cp}(\omega_{cp}, P_{sm}, W_{cp}) = \frac{C_p T_{atm}}{\omega_{cp} \eta_{cp}} \left[\left(\frac{P_{sm}}{P_{atm}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] W_{cp} \quad (2.3)$$

où C_p est la capacité calorifique spécifique de l'air et W_{cp} représente le débit d'air à la sortie du compresseur.

Par ailleurs, la puissance fournie par le compresseur est donnée par :

$$P_{cp}(P_{sm}, W_{cp}) = C_p \frac{T_{atm}}{\eta_{cp}} \left[\left(\frac{P_{sm}}{P_{atm}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] W_{cp} \quad (2.4)$$

L'expression du couple moto-compresseur est établie à partir de l'équation du moteur statique de la façon suivante :

$$\tau_{cm} = \eta_{cm} \frac{k_{cm}}{R_{cm}} \left[V_{cm} - k_v \omega_{cp} \right] \quad (2.5)$$

où k_{cm} , k_v et R_{cm} sont des constantes du moteur et η_{cm} représente le rendement mécanique du moteur.

Par ailleurs, la valeur de la puissance du moto-compresseur P_{cm} fournie par le moteur du compresseur peut être donnée en fonction de la tension d'entrée du moto-compresseur et de la vitesse de rotation du moto-compresseur ω_{cp} :

$$\begin{aligned} P_{cm} &= \tau_{cm} \omega_{cp} \\ &= \eta_{cm} \frac{k_{cm}}{R_{cm}} \left[V_{cm} - k_v \omega_{cp} \right] \omega_{cp} \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.2.3 Collecteur d'admission

Le collecteur d'admission relie le compresseur et la PàC en passant par le refroidisseur et l'humidificateur (voir Figure 2.1).

L'utilisation du principe de conservation de masse permet d'élaborer le débit massique de l'air à l'intérieur du collecteur d'admission (voir Figure 2.5) de la façon suivante [78] :

$$\frac{dm_{sm}}{dt} = W_{cp} - W_{sm,out} \quad (2.7)$$

où $W_{sm,out}$ est le débit massique d'air à la sortie d'admission d'air.

Puisque le volume du collecteur d'admission est assumé suffisamment faible pour la différence de pression entre le collecteur d'admission et la cathode est négligeable alors ce débit est donné par une forme linéarisée de l'équation de Nozzle de la façon suivante :

$$W_{sm,out} = k_{sm,out} (P_{sm} - P_{ca}) \quad (2.8)$$

où $K_{sm,out}$ désigne la constante de l'orifice du collecteur d'admission d'air à la sortie.

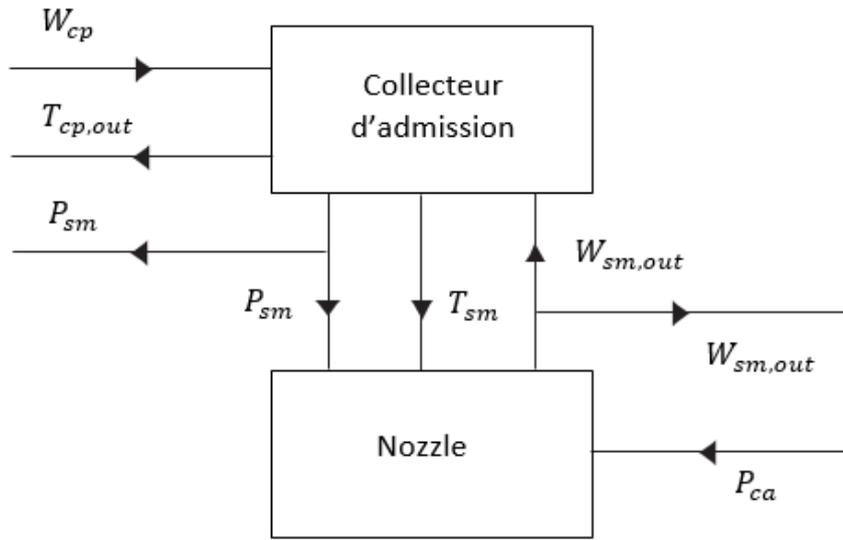


Figure 2.5 – Schéma bloc du collecteur d'admission

Dans le cas isotherme, la dynamique de la pression d'air du collecteur d'admission est déterminée en utilisant le principe de conservation de l'énergie, soit :

$$\frac{dP_{sm}}{dt} = \frac{RT_{sm}}{V_{sm}} (W_{cp} - W_{sm,out}) \quad (2.9)$$

où V_{sm} et T_{sm} sont respectivement le volume et la température de l'air dans le collecteur d'admission.

2.2.4 Cathode

Le débit massique à la cathode est décrit par le comportement du flux d'air à l'intérieur de la cathode de la PàC. Son évolution peut être exprimée à partir du principe de conservation de masse et les propriétés thermodynamiques. En effet, l'utilisation du principe de conservation de la masse permet de donner les expressions des débits massiques d'oxygène et d'azote à l'intérieur de la cathode de la façon suivante :

$$\begin{cases} \frac{dm_{O_2}}{dt} = W_{O_2,ca,in} - W_{O_2,ca,out} - W_{O_2,reagi} \\ \frac{dm_{N_2}}{dt} = W_{N_2,ca,in} - W_{N_2,ca,out} \end{cases} \quad (2.10)$$

où m_{O_2} et m_{N_2} sont respectivement la masse d'oxygène et d'azote dans la cathode.

En vertu de la loi des gaz parfaits, les pressions partielles d'oxygène et d'azote peuvent être exprimées en fonction des masses comme suit :

$$\begin{cases} P_{O_2} = \frac{R_{O_2} m_{O_2}}{V_{ca}} T_{st} \\ P_{N_2} = \frac{R_{N_2} m_{N_2}}{V_{ca}} T_{st} \end{cases} \quad (2.11)$$

où P_{O_2} et P_{N_2} sont respectivement les pressions partielles d'oxygène et d'azote dans la cathode. T_{st} est la température de la PàC. V_{ca} désigne le volume de la cathode. R_{O_2} et R_{N_2} représentent respectivement des constantes spécifiques d'oxygène et d'azote, définies par :

$$R_{O_2} = \frac{R}{M_{O_2}} \quad \text{et} \quad R_{N_2} = \frac{R}{M_{N_2}} \quad (2.12)$$

où M_{O_2} et M_{N_2} désignent les masses molaires de l'oxygène et de l'azote.

En substituant (2.11), (2.12) dans (2.10), il vient que :

$$\begin{cases} \frac{dP_{O_2}}{dt} = \frac{RT_{st}}{M_{O_2} V_{ca}} (W_{O_2,ca,in} - W_{O_2,ca,out} - W_{O_2,reaki}) \\ \frac{dP_{N_2}}{dt} = \frac{RT_{st}}{M_{N_2} V_{ca}} (W_{N_2,ca,in} - W_{N_2,ca,out}) \end{cases} \quad (2.13)$$

La pression de la cathode P_{ca} , supposée homogène tout au long du compartiment cathodique, est déterminée en utilisant la loi de Dalton [78], soit :

$$P_{ca} = P_{O_2} + P_{N_2} + P_{v,ca}$$

où $P_{v,ca}$ est la pression de la vapeur d'eau dans la cathode.

Les débits de l'oxygène et de l'azote à l'entrée de la cathode sont exprimés en fonction du débit d'air d'entrée de la cathode $W_{ca,in}$ par :

$$W_{O_2,ca,in} = \frac{x_{O_2,atm}}{1 + w_{atm}} W_{ca,in} \quad (2.14)$$

et

$$W_{N_2,ca,in} = \frac{(1 - x_{O_2,atm})}{1 + w_{atm}} W_{ca,in} \quad (2.15)$$

$W_{ca,in}$ s'exprime par :

$$W_{ca,in} = k_{ca,in} (P_{sm} - P_{ca}) \quad (2.16)$$

avec $k_{ca,in}$ est la constante d'orifice d'entrée d'air de la cathode. $x_{O_2,atm}$ représente la fraction massique de l'oxygène dans l'air atmosphérique exprimée en pourcentage. Plus précisément, elle s'exprime de la façon suivante :

$$x_{O_2,atm} = \frac{y_{O_2,atm} M_{O_2}}{y_{O_2,atm} M_{O_2} + (1 - y_{O_2,atm}) M_{N_2}} \quad (2.17)$$

où $y_{O_2,atm}$ désigne la fraction molaire de l'oxygène dans l'air. w_{atm} est le rapport d'humidité de l'air entrant et il peut être exprimé par :

$$w_{atm} = \frac{M_v}{M_a} \frac{\phi_{atm} P_{sat}(T_{atm})}{P_{atm} - \phi_{atm} P_{sat}(T_{atm})} \quad (2.18)$$

P_{sat} désigne la pression de saturation de la vapeur, et ϕ_{atm} représente l'humidité relative.

Le débit de l'oxygène réagi dépend du courant de la pile, s'exprime par :

$$W_{O_2,reagi} = M_{O_2} \frac{n}{4F} I_{st} \quad (2.19)$$

où n est le nombre de cellules élémentaires dans la pile et F est la constante de Faraday.

Les débits de l'oxygène et de l'azote à la sortie de la cathode peuvent être écrits en fonction du débit d'air à la sortie de la cathode et des fractions molaires de la façon suivante :

$$W_{O_2,ca,out} = \frac{M_{O_2} P_{O_2}}{M_{O_2} P_{O_2} + M_{N_2} P_{N_2} + M_v P_{v,ca}} W_{ca,out} \quad (2.20)$$

$$W_{N_2,ca,out} = \frac{M_{N_2} P_{N_2}}{M_{O_2} P_{O_2} + M_{N_2} P_{N_2} + M_v P_{v,ca}} W_{ca,out} \quad (2.21)$$

Par ailleurs, le débit d'air à la sortie de la cathode est défini à partir de l'équation de flux de bec ([78] [93]) par :

$$W_{ca,out}(P_{ca}) = \begin{cases} C_w P_{ca} \left(\frac{P_{atm}}{P_{ca}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{P_{atm}}{P_{ca}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right]^{\frac{1}{2}} & \text{pour } P_{ca} < \bar{\gamma} P_{atm} \\ C_w P_{ca} \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} & \text{pour } P_{ca} \geq \bar{\gamma} P_{atm} \end{cases} \quad (2.22)$$

avec

$$\bar{\gamma} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{et} \quad C_w = \frac{C_D A_T}{\sqrt{RT_{st}}}$$

C_D est le coefficient de décharge de la buse et A_T désigne la surface d'ouverture de la sortie.

Il est à noter que $W_{ca,out}$ est une fonction régulière et croissante par rapport à P_{ca} (voir Figure 2.6). Cette fonction admet un comportement linéaire pour les grandes valeurs de P_{ca} (à savoir : $P_{ca} \geq \bar{\gamma} P_{atm}$). Cependant, son comportement est non-linéaire pour les petites valeurs de P_{ca} (à savoir : $P_{ca} < \bar{\gamma} P_{atm}$).

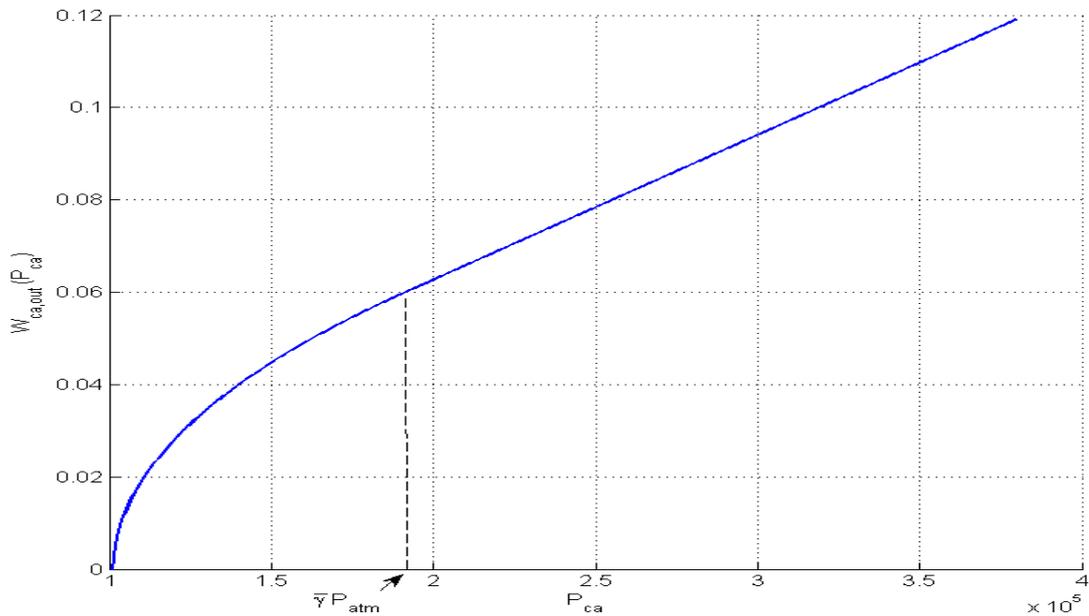


Figure 2.6 – Comportement de $W_{ca,out}$ en fonction de P_{ca}

2.2.5 Système d'alimentation en air

2.2.5.1 Modèle dynamique

Les équations dynamiques (2.2), (2.9) et (2.13) peuvent être regroupées pour établir un modèle décrivant l'évolution du système d'alimentation en air de la PàC :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_{O_2}}{dt} = \frac{RT_{st}}{M_{O_2}V_{ca}} (W_{O_2,ca,in} - W_{O_2,ca,out} - W_{O_2,reaki}) \\ \frac{dP_{N_2}}{dt} = \frac{RT_{st}}{M_{N_2}V_{ca}} (W_{N_2,ca,in} - W_{N_2,ca,out}) \\ \frac{d\omega_{cp}}{dt} = \frac{1}{J_{cp}} (\tau_{cm} - \tau_{cp}) \\ \frac{dP_{sm}}{dt} = \frac{RT_{sm}}{V_{sm}} (W_{cp} - W_{sm,out}) \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Maintenant, et en vertu des relations (2.3) (2.5) (2.8) (2.14) (2.15)(2.19)(2.20) (2.21) et (2.22), le modèle (2.23) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_{O_2}}{dt} = c_1(P_{sm} - P_{O_2} - P_{N_2} - c_2) - \frac{c_3P_{O_2}}{c_4P_{O_2} + c_5P_{N_2} + c_6} W_{ca,out}(P_{ca}) - c_7I_{st} \\ \frac{dP_{N_2}}{dt} = c_8(P_{sm} - P_{O_2} - P_{N_2} - c_2) - \frac{c_3P_{N_2}}{c_4P_{O_2} + c_5P_{N_2} + c_6} W_{ca,out}(P_{ca}) \\ \frac{d\omega_{cp}}{dt} = -c_9\omega_{cp} + c_{10} \left(\left(\frac{P_{sm}}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) + c_{12}V_{cm} \\ \frac{dP_{sm}}{dt} = c_{13} \left(1 + c_{14} \left(\left(\frac{P_{sm}}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \right) \left(c_{15}\omega_{cp} - c_{16}(P_{sm} - P_{O_2} - P_{N_2} - c_2) \right) \end{array} \right. \quad (2.24)$$

avec

$$P_{ca} = P_{O_2} + P_{N_2} + P_{v,ca}$$

Il est à noter que les valeurs numériques des constantes $c_i (i = 1, \dots, 16)$ utilisées dans ce travail sont reportées dans l'Annexe 5.5.

2.2.5.2 Entrées-sorties du système

Dans la suite de ce travail, le modèle (2.24) sera considéré pour décrire le comportement du sous-système d'alimentation en air. Il s'agit un modèle non-linéaire à quatre variables d'états :

$$\begin{aligned} x &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T \\ &= [P_{O_2} \quad P_{N_2} \quad \omega_{cp} \quad P_{sm}]^T \end{aligned}$$

où les entrées-sorties sont définies de la façon suivante. La tension V_{cm} alimentant le moteur du compresseur sera considérée comme l'entrée du système et sera donc utilisée pour la commande. Le courant de la pile I_{st} sera considéré comme une entrée exogène qui désigne la demande de la charge. Par ailleurs, le vecteur des grandeurs mesurables de la PàC est assumé être défini par :

$$\begin{aligned} y &= [y_1 \quad y_2 \quad y_3]^T \\ &= [V_{st} \quad P_{sm} \quad W_{cp}]^T \end{aligned}$$

où V_{st} est la tension de la PàC exprimée par :

$$V_{st} = n \left(-\frac{\Delta G_f^0}{2F} + \frac{RT_c}{2F} \ln \left[\frac{P_{H_2} P_{O_2}^{\frac{1}{2}}}{P_{H_2O}} \right] - V_0 - V_a (1 - e^{-a_1 i}) - R_{ohm} i - i \left(a_5 \frac{i}{i_{max}} \right)^{a_6} \right)$$

P_{sm} désigne la pression d'air dans le collecteur d'admission et W_{cp} représente le débit d'air à la sortie du compresseur .

2.2.5.3 Performance du système

Afin d'apprécier les performances du système considéré, deux variables seront analysées et le vecteur de performance du système sera défini par :

$$\begin{aligned} z &= [z_1 \quad z_2]^T \\ &= [P_{net} \quad \lambda_{O_2}]^T \end{aligned}$$

où P_{net} est la puissance nette délivrée par la PàC et λ_{O_2} est le rapport d'excès d'oxygène.

Il est à noter que le moto-compresseur peut être alimenté directement par la PàC ou par une source de puissance auxiliaire. Dans le cas où la pile alimente le moteur du

compresseur, la puissance nette délivrée à la charge P_{net} est égale à la différence entre la puissance fournie par la pile P_{st} et celle consommée par le moteur, soit :

$$P_{net} = P_{st} - P_{cm}$$

avec

$$P_{st} = V_{st} I_{st}$$

Par ailleurs, le rapport d'excès d'oxygène λ_{O_2} est défini par :

$$\lambda_{O_2} = \frac{W_{O_2,ca,in}}{W_{O_2,reagi}}$$

où $W_{O_2,ca,in}$ désigne le débit d'oxygène entrant dans la cathode et $W_{O_2,reagi}$ est celui réagi lors de la réaction chimique.

Il est opportun de réguler le rapport λ_{O_2} dans une plage de fonctionnement estimée entre deux et deux et demi. En effet, un excès d'oxygène pourrait entraîner une baisse de la puissance délivrée par la pile. A contrario, le manque d'oxygène serait néfaste sur la durée de vie de la PàC. Ainsi, le respect d'un fonctionnement où le rapport λ_{O_2} demeure dans la plage optimale est bénéfique.

2.3 Résultats de simulation

Afin de valider le modèle défini précédemment, des résultats de simulation sont proposés dans ce sous-paragraphe.

Les résultats de simulation (voir Figures 2.7-2.13) ont été obtenus par application de deux séries d'échelons respectivement en entrée du système V_{cm} et pour représenter la sollicitation de la charge I_{st} . A travers ces deux séries, le but a été d'étudier la réponse donnée à travers le modèle dans différentes situations. Tout d'abord, on peut constater que les variables liées au compresseur (voir Figures 2.8, 2.9, 2.10) évoluent d'une manière réaliste selon l'excitation d'entrée. Aussi, les pressions internes (voir Figures 2.11 et 2.12) présentent un comportement en accord avec la pression imposée par l'entrée de la pile. Plus précisément, le modèle a été testé dans des situations différentes (voir Figure 2.7), à savoir : absence de sollicitation ($\Delta 1$), présence d'une sollicitation et d'une commande de niveau faible ($\Delta 2$), présence d'une sollicitation et une commande ($\Delta 3$), augmentation simultanée de la sollicitation et de la commande ($\Delta 4$), baisse de la sollicitation et maintien de la valeur de la commande ($\Delta 5$) et finalement une augmentation brutale de la sollicitation accompagnée d'une baisse de la commande ($\Delta 6$).

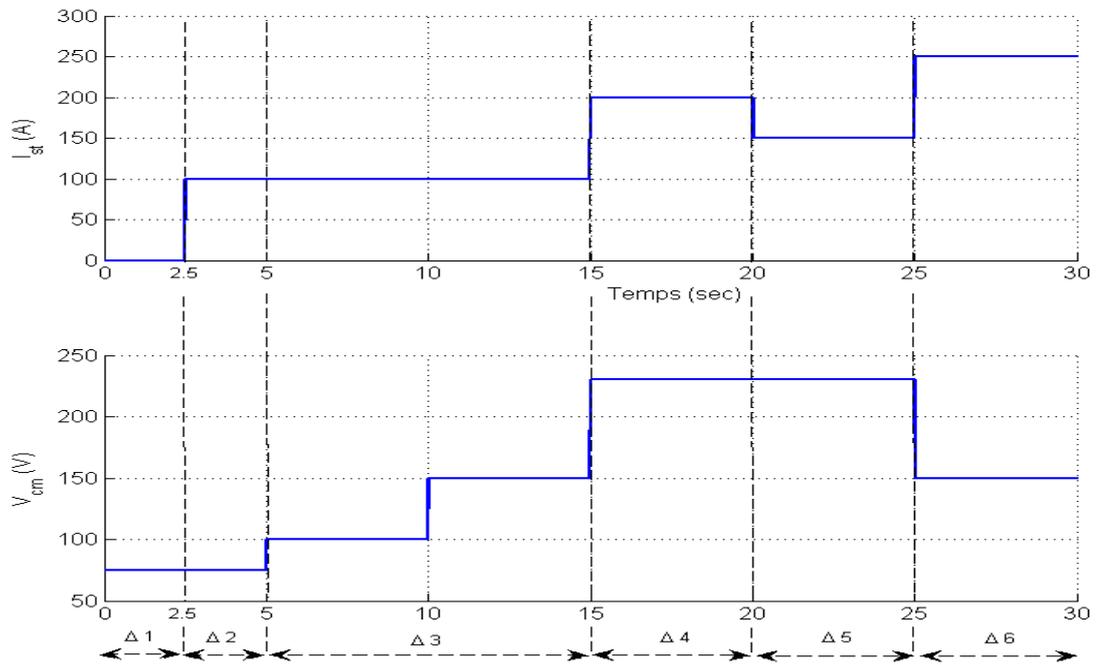


Figure 2.7 – Courant de sollicitation et tension d'entrée du moto-compresseur

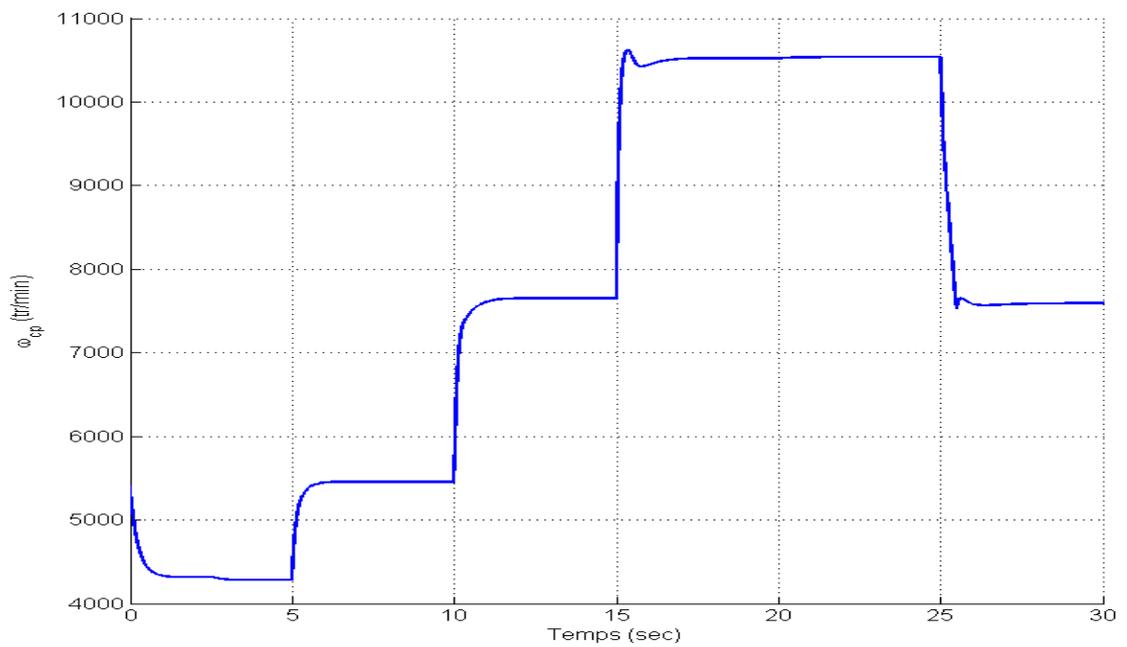


Figure 2.8 – Vitesse angulaire

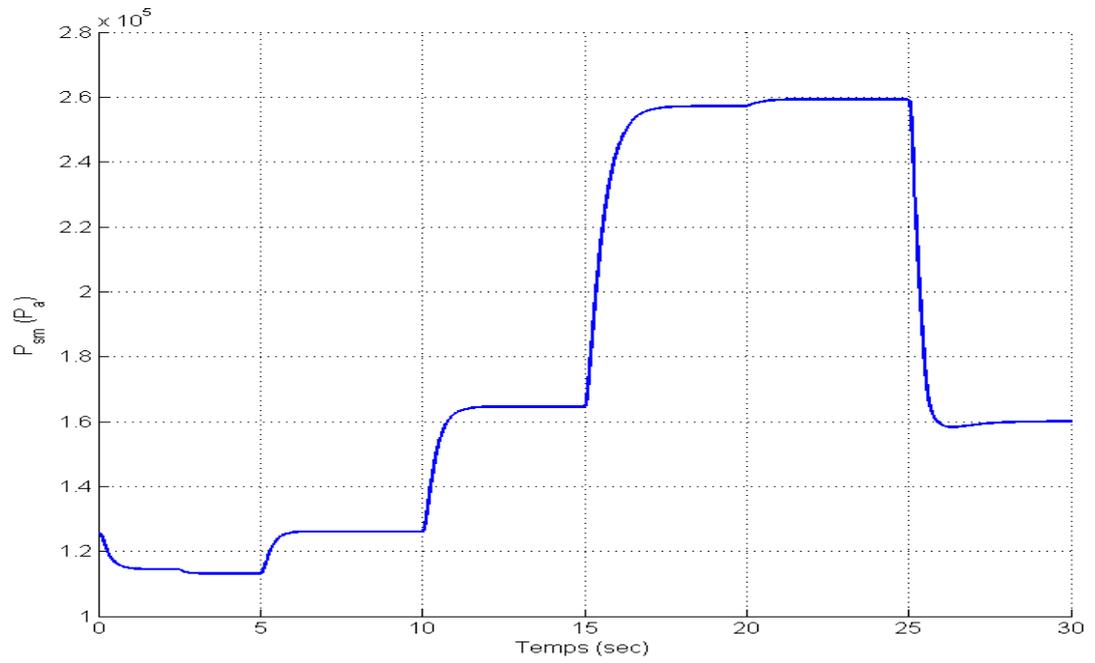


Figure 2.9 – Pression d'admission d'air

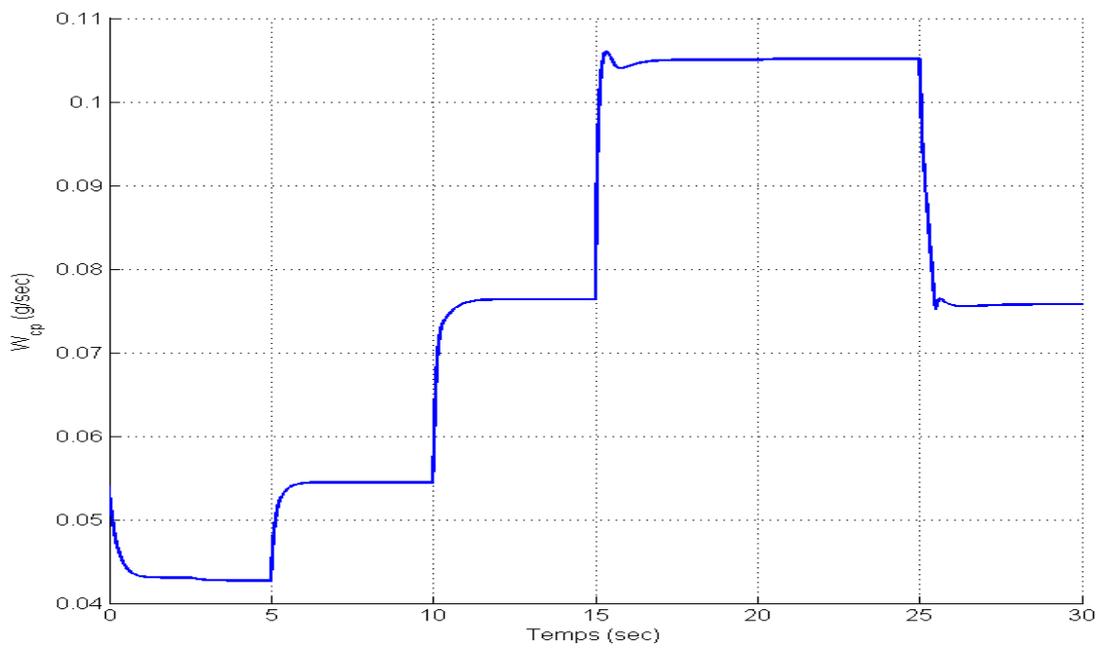


Figure 2.10 – Débit de compresseur

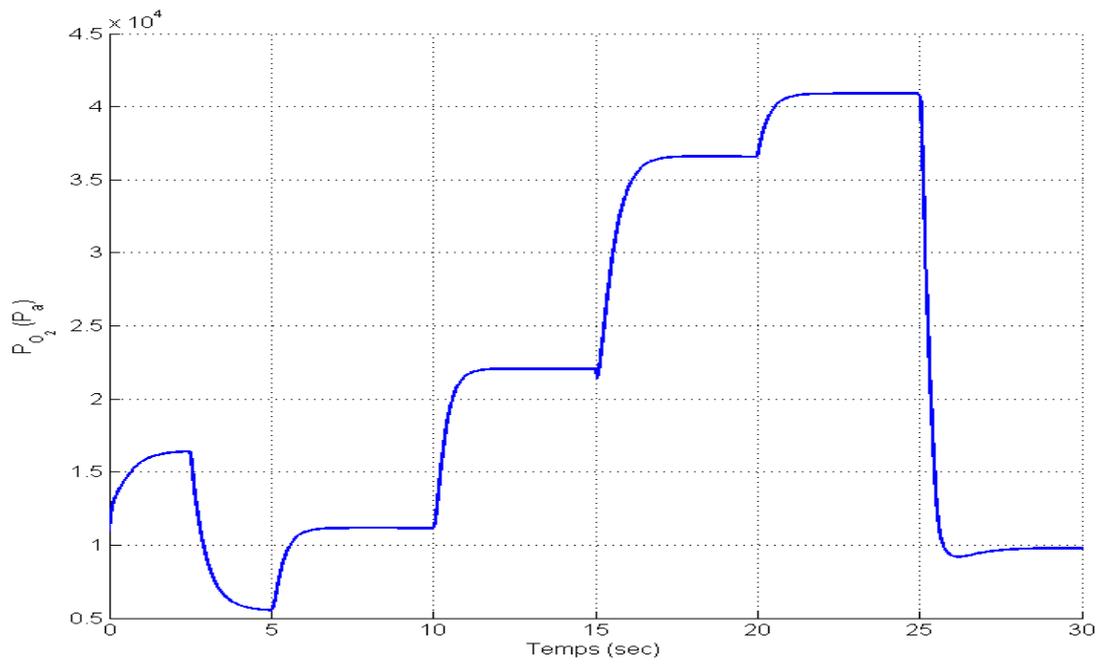


Figure 2.11 – Pression partielle d'oxygène

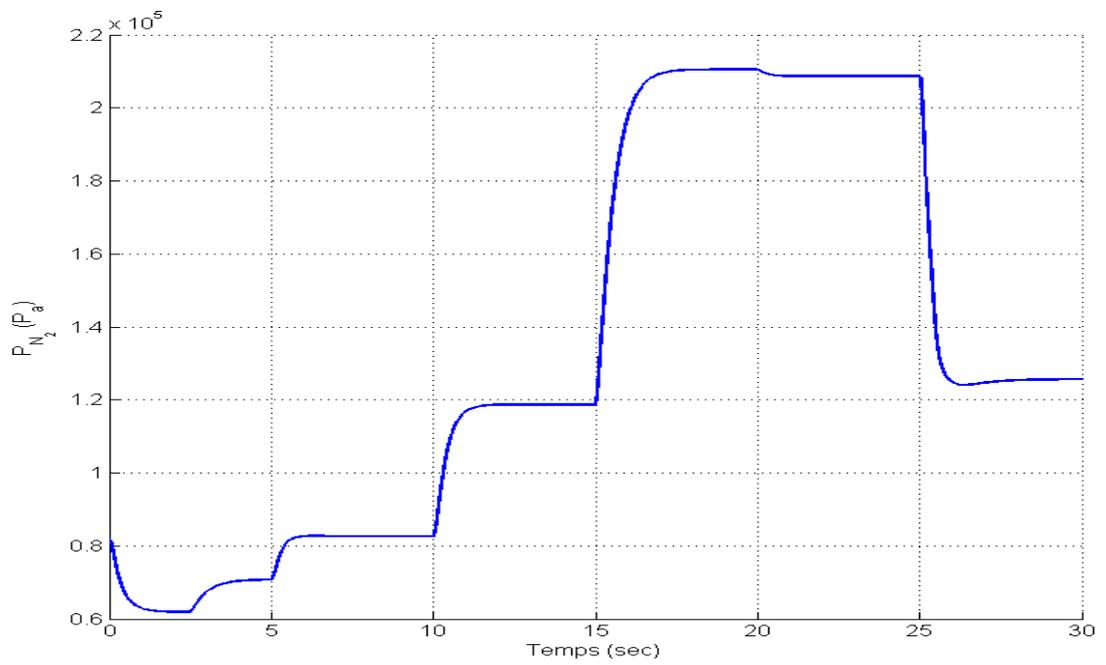


Figure 2.12 – Pression partielle d'azote

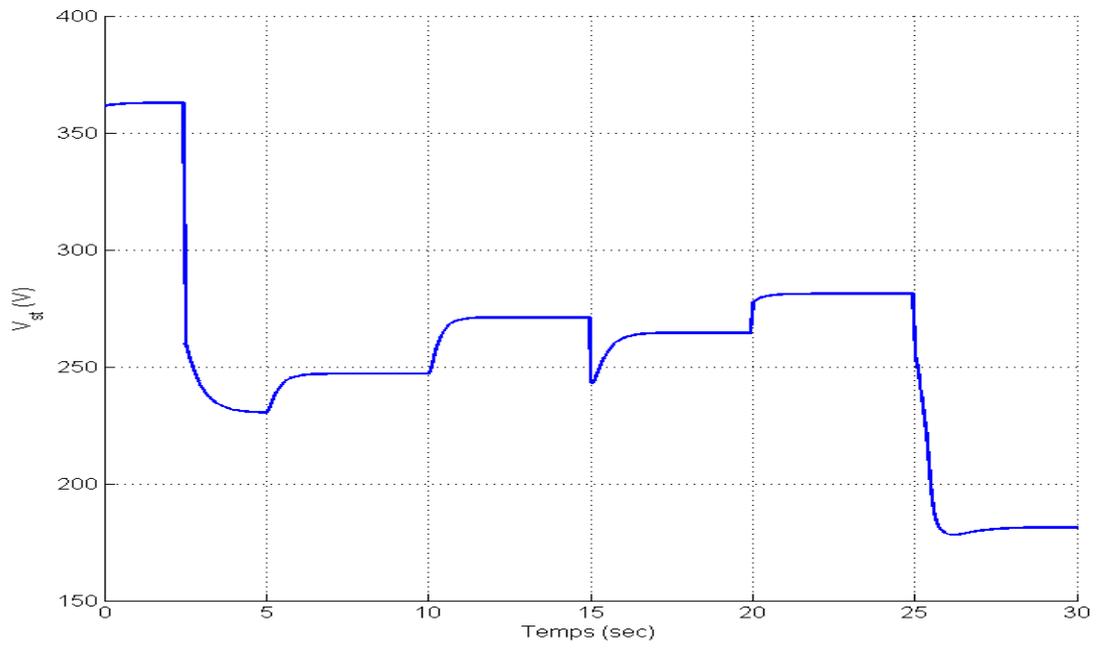


Figure 2.13 – Tension de la pile

3 Diagnostic de défauts à base de filtrage $\mathcal{H}_- / \mathcal{H}_\infty$

3.1 Introduction

Les piles à combustible sont sujets à des défauts qui peuvent provoquer des arrêts ou des dommages permanents. En effet, les systèmes PàC sont des procédés complexes en raison de la présence d'un grand nombre de systèmes auxiliaires et de dispositifs nécessaires à leur fonctionnement. Afin d'effectuer les opérations de contrôle et d'améliorer la fiabilité, la sécurité et la durée de vie, des systèmes de diagnostic efficaces pour détecter et analyser les défauts doivent être développés. Ainsi, plusieurs résultats ont été consacrés au problème du diagnostic pour les systèmes PàC.

Plusieurs résultats pour le diagnostic des piles à combustible peuvent être trouvés dans la littérature scientifique. Dans [83], les auteurs proposent des modèles de circuits équivalents d'impédance de la pile à combustible de type PEM et déterminent avec le temps les valeurs estimées des paramètres électrochimiques afin d'évaluer les processus d'érosion des performances, à savoir le noyage de la cathodique, le séchage de la membrane et l'empoisonnement anodique du catalyseur. Dans [48], les auteurs ont développé un modèle de circuit équivalent électrique de la pile à combustible afin de détecter les phénomènes de noyage. Le problème du diagnostic a également été abordé en utilisant des modèles mathématiques et en synthétisant des observateurs, par exemple, en utilisant des techniques basées sur un observateur linéaire à paramètres variants [10] [65] ou en utilisant l'approche en mode glissant [67]. Le problème du diagnostic basé sur les données a été étudié dans certains travaux récents (voir [60] [62] et les références qui y sont citées) pour détecter divers défauts en utilisant les données de tension disponibles et sans considérer aucun modèle mathématique.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de la détection des défauts en tenant compte de la présence des perturbations. En fait, la présence de ces dernières peut masquer l'effet des défauts, ce qui retarde la détection. Par conséquent, un système de détection de défauts doit être robuste aux perturbations. Cependant, il doit être aussi sensible que possible aux défauts. Le défi consiste à faire la démarcation entre l'effet des perturbations et celui des défauts. Pour ce faire, l'approche explorée repose sur l'utilisation des modèles dynamiques et sur la conception des observateurs. D'une manière générale, et indépendamment du processus considéré, les observateurs qui satisfont les attentes mentionnées ci-dessus sont connus sous le nom d'observateur $\mathcal{H}_- / \mathcal{H}_\infty$. Dans la littérature, différents résultats sont proposés pour le cas linéaires (voir [49] [59] [97] [99] [110] et les références qui y sont citées) et non-linéaires (voir par exemple [11] [36] [41] [101]). A titre d'exemple dans [97], les auteurs ont étudié le problème de la

conception d'observateur de détection de défauts pour les systèmes linéaires invariants dans le temps avec des entrées inconnues. L'objectif de conception est fixé pour minimiser un indice de performance combiné $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_-$, ce qui permet d'obtenir un bon compromis entre la robustesse aux perturbations et la sensibilité aux défauts.

Le but de cette étude est de proposer un filtre robuste pour la détection de défauts basée sur la synthèse $\mathcal{H}_-/\mathcal{H}_\infty$. L'objectif est d'améliorer la détection des défauts et l'atténuation des perturbations dans le système d'alimentation en air des piles à combustible. Ainsi, des conditions suffisantes d'existence du filtre sont données en terme d'inégalité matricielle linéaire. Ensuite, et afin d'illustrer les performances de la synthèse du filtre, un simulateur de la PàC proposé dans la littérature est utilisé.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. D'abord, nous commençons par des généralités sur le diagnostic à base d'observateur. Après nous nous intéressons à l'étude des observateurs pour des systèmes non-linéaires de type Lipschitz. Ensuite, nous établissons deux extensions. La première fait appel au filtrage \mathcal{H}_∞ et la deuxième utilise le filtrage $\mathcal{H}_-/\mathcal{H}_\infty$. Dans la troisième section nous appliquerons la synthèse proposée au système d'alimentation en air de la pile. Par la suite, les résultats de simulation sont présentés pour illustrer l'efficacité de notre approche.

3.2 Généralités

3.2.1 Diagnostic à base d'observateur

Le diagnostic à base d'observateur consiste à comparer la sortie du système $y(t)$ à celle estimée $\hat{y}(t)$ à travers un observateur (voir Figure 3.1). Le signal résultant de cette comparaison est appelé résidu et noté le plus souvent $r(t)$

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t).$$

En fonctionnement sain le signal résidu $r(t) = 0$. A l'occurrence d'un défaut ^a, le système réel s'écarte de son fonctionnement nominal, ce qui laisse apparaître une déviation du résidu $r(t)$. Dans ce cas $r(t) \neq 0$ à partir de t_f l'instant de l'occurrence du défaut f . Ce dernier peut être permanent $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) \neq 0$ ou intermittent $r(t) \neq 0$ entre t_f^1 et t_f^2 . Une méthode de décision basée sur des tests statistiques est souvent préconisée pour fixer le taux de détection et déclencher une alarme en conséquence.

Cette approche de diagnostic peut être faite en deux étapes. La première dite la détection de défauts est liée à l'étape de la génération des résidus. Celle-ci a pour but de générer des signaux révélateurs de la présence de défauts. A partir de l'analyse de ces

a. Un défaut est défini comme étant un écart indésirable entre la valeur réelle d'une caractéristique du système et sa valeur nominale.

résidus, l'étape de prise de décision doit alors indiquer si un défaut est présent ou non. La deuxième étape est nommée la localisation de défaut. Plusieurs méthodes existent pour la localisation et l'isolation des défauts. La plus adaptée aux méthodes de diagnostic à base d'observateur est celle qui consiste à utiliser un banc de plusieurs observateurs de manière à générer à l'aide de chaque observateur des résidus sensibles à une partie des défauts et insensibles aux restes. Ainsi, une table de signature théorique binaire sera construite. Les "1" et les "0" de la table représentent respectivement, la sensibilité et l'insensibilité d'un résidu à l'un des défauts à la fois.

Il est à noter qu'un observateur peut être défini comme étant un système dynamique auxiliaire, conçu pour imiter le fonctionnement du système réel. Pour la synthèse d'observateur, le modèle du système est utilisé. L'observateur est sensé donner la même sortie que le système, en appliquant la même entrée que ce dernier.

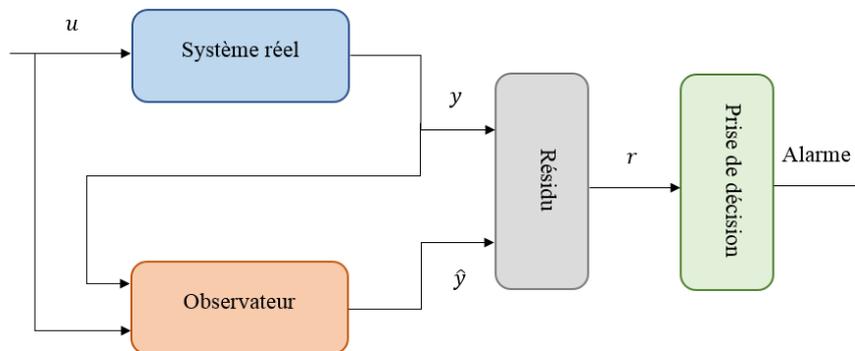


Figure 3.1 – Structure de diagnostic à base d'observateur

3.2.2 Modélisation des défauts

La modélisation des défauts est une opération de mise en équation de l'effet ou des conséquences des défauts sur le modèle du système. Les défauts affectant un système dynamique peuvent être additifs ou multiplicatifs.

Soit $s_f(t)$ la valeur défaillante de la grandeur $s(t)$.

Si le défaut $f(t)$ est additif, nous obtenons :

$$s_f(t) = s(t) - f(t) \quad (3.1)$$

Si $f(t)$ est multiplicatif, il sera exprimé sous la forme suivante :

$$s_f(t) = f(t) s(t) \quad (3.2)$$

Remarque 1. Dans certain cas, il est possible de représenter un défaut multiplicatif sous la forme d'un défaut additif, par exemple pour (3.2) nous pouvons écrire :

$$s_f(t) = s(t) + (f(t) - I) s(t)$$

En posant $\bar{f}(t) = (f(t) - I) s(t)$ nous obtenons :

$$s_f(t) = s(t) + \bar{f}(t)$$

Les défauts sont classés également en fonction des composants affectés dans le modèle du système en trois catégories, à savoir : défaut d'actionneurs, de capteurs et des paramètres. Les défauts d'actionneurs affectent la commande du système, par conséquent, il change la valeur de la commande appliquée. Il peut être dû aussi à la perte totale d'un ou de plusieurs actionneurs. Les défauts de capteurs affectent les capteurs du système, ce qui induit une ou plusieurs mesures erronées voir une perte totale d'une ou de plusieurs mesures. Les défauts paramétriques sont des dérives qui peuvent être constatés dans les valeurs des paramètres du système. Ils peuvent être dus à un défaut de fabrication, un impact externe, ... etc.

Dans la sous-section suivante, nous allons proposer un observateur pour une classe de systèmes non-linéaire. Nous supposons que le système considéré vérifie l'hypothèse d'observabilité (cette propriété est rappelée dans l'Annexe 5.5).

3.2.3 Observateur pour une classe de systèmes non-linéaires

3.2.3.1 Cas nominal

Tout d'abord, nous traitons le cas de la classe de systèmes non-linéaires, sans perturbations, décrite par les équations dynamiques suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u u + \phi(x) \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.3)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système. $u \in \mathbb{R}^m$ désigne la commande. $y \in \mathbb{R}^q$ représente la sortie. A, B_u et C sont des matrices réelles de dimensions appropriées. $\phi \in \mathbb{R}^n$ est une fonction non-linéaire de Lipschitz, c'est-à-dire, elle satisfait la propriété suivante :

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \leq \lambda_\phi \|x_1 - x_2\| \quad \text{pour tout } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n. \quad (3.4)$$

où λ_ϕ désigne la constante de Lipschitz.

Considérons pour le système (3.3), l'observateur suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_u u + \phi(\hat{x}) + K(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (3.5)$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\hat{y} \in \mathbb{R}^p$ désignent respectivement les estimés de x et de y . K représente le gain de l'observateur à déterminer.

Soit $e = x - \hat{x}$ l'erreur d'estimation, la dynamique de e est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{e} = (A - KC)e + \Delta\phi(x, \hat{x}) \quad (3.6)$$

avec $\Delta\phi(x, \hat{x}) = \phi(x) - \phi(\hat{x})$ pour tout $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$.

L'objectif de la synthèse consiste alors à déterminer le gain K tels que, le système (3.6) est asymptotiquement stable et $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour l'existence et la convergence de l'observateur (3.5).

Théorème 1. *Le système (3.5) est un observateur de (3.3), s'ils existent une matrice symétrique définie positive P , une matrice X et un scalaire positif μ , tels que l'inégalité matricielle linéaire suivante soit satisfaite :*

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A - C^T X^T - X C + \mu \lambda_\phi^2 I & P \\ & P & -\mu I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.7)$$

et le gain K de l'observateur (3.5) est donnée par $K = P^{-1}X$.

Démonstration : Soit la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(e) = e^T P e$$

Sa dérivée le long de la solution de (3.6) est donnée par :

$$\dot{V}(e) = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \quad (3.8)$$

$$= e^T \left((A - KC)^T P + P(A - KC) \right) e + \Delta\phi^T(x, \hat{x}) P e + e^T P \Delta\phi(x, \hat{x})$$

L'utilisation de l'inégalité suivante, définie pour tout $\mu > 0$ et $u, v \in \mathbb{R}^n$ [42] :

$$u^T v + v^T u \leq \mu u^T u + \frac{1}{\mu} v^T v \quad (3.9)$$

permet d'établir l'inéquation suivante :

$$\Delta\phi^T(x, \hat{x}) P e + e^T P \Delta\phi(x, \hat{x}) \leq \mu \Delta\phi^T(x, \hat{x}) \Delta\phi(x, \hat{x}) + \frac{1}{\mu} e^T P P e \quad (3.10)$$

En utilisant (3.8) (3.10), nous obtenons :

$$\dot{V}(e) = e^T \left((A - KC)^T P + P(A - KC) + \mu \lambda_\phi^2 I + \frac{1}{\mu} P P \right) e \quad (3.11)$$

Ainsi, la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation vers zéro est garantie si $\dot{V}(e) < 0$ et donc si l'inégalité

$$A^T P + P A - C^T K^T P - P K C + \mu \lambda_\phi^2 I + \frac{1}{\mu} P P < 0 \quad (3.12)$$

est vérifiée. Par l'application du complément de Schur (voir Annexe 5.5) et du changement de variable $X = KP$, nous obtenons (3.7).

Ceci termine la démonstration du Théorème 1. \square

3.2.3.2 Cas avec perturbation

Dans cette sous-section, nous proposerons une extension du résultat de la sous-section précédente, au cas des systèmes non-linéaires assujetti à des perturbations bornées en norme, ainsi le système sera écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \phi(x) + B_u u + B_w w \\ y = Cx + D_w w \end{cases} \quad (3.13)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système. $u \in \mathbb{R}^m$ désigne la commande. $y \in \mathbb{R}^q$ représente la sortie mesurée. $w \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des perturbations. A, B_u, C, B_w et D_w sont des matrices réelles de dimensions appropriées. B_w et D_w sont des matrices de poids, qui permettent de préciser l'effet de la perturbation sur chacune des dynamiques et des sorties. La fonction non-linéaire ϕ est Lipschitzienne avec une constante de Lipschitz

γ_ϕ . Il est à noter que les perturbations peuvent varier dans le temps mais sont supposées être à énergie finie, c'est-à-dire, $\|w\| \leq l$ avec $l \in \mathbb{R}^+$.

Il convient de préciser que l'utilisation de la même perturbation dans la dynamique du système et dans la sortie n'est pas restrictive. En fait, si les perturbations respectives w_1 et w_2 sont différentes, il suffit d'introduire une perturbation commune définie de la façon suivante :

$$B_w = [B_1 \quad 0], \quad D_w = [0 \quad D_1] \quad \text{et} \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

alors nous avons :

$$B_1 w_1 = B_w w \quad \text{et} \quad D_1 w_2 = D_w w.$$

L'objectif est de reconstruire l'état x du système avec une certaine précision malgré la présence des perturbations w . Pour ce faire, il est habituel d'utiliser un observateur de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \phi(\hat{x}) + B_u u + K(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (3.14)$$

Dans la suite, des conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état sont établies sous la forme d'une inégalité matricielle linéaire.

Considérons le système (3.13) et l'observateur associé (3.5). Le problème de synthèse d'observateur robuste revient à déterminer la matrice K tels que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad \text{pour} \quad w \equiv 0 \quad (3.15)$$

et

$$\|e\|_{L_2} < \lambda_w \|w\|_{L_2} \quad \text{pour} \quad w \neq 0 \quad \text{et} \quad e(0) = 0 \quad (3.16)$$

où $\lambda_w > 0$ est un scalaire positif représentant le taux d'atténuation de la perturbation w sur l'erreur d'estimation d'état e . $\|\cdot\|_{L_2}$ désigne la norme L_2 , définie pour une fonction h par :

$$\|h\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^\infty h^T h dt}$$

Afin de satisfaire les conditions (3.15) et (3.16), il suffit de faire appel à la théorie Lya-

punov. Il s'agit de trouver une fonction de Lyapunov V telle que :

$$\dot{V} + e^T e - \lambda_\omega^2 w^T w < 0 \quad (3.17)$$

L'expression de la dynamique de l'erreur d'estimation est donnée comme suit :

$$\dot{e} = (A - KC)e + \phi(x) - \phi(\hat{x}) + (B_w - KD_w)w \quad (3.18)$$

Nous avons le résultat suivant basé sur une condition suffisante sous forme d'une inégalité matricielle linéaire.

Théorème 2. *Étant donné deux scalaires $\lambda_\phi > 0$ et $\lambda_\omega > 0$, s'il existe une matrice P définie positive, une matrice X et un scalaire $\mu > 0$ tels que l'inégalité matricielle linéaire suivante soit satisfaite :*

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A - X C - C^T X^T + \mu \lambda_\phi^2 I & P B_w - X D_w & P \\ * & -\lambda_\omega^2 I & 0 \\ * & * & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.19)$$

Alors les conditions (3.15) et (3.16) sont satisfaites et le système (3.13) admet un observateur de la forme (3.5) avec $K = P^{-1} X$.

Démonstration : Soit la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V(e) = e^T P e. \quad (3.20)$$

Sa dérivée le long de la solution de (3.18) est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= e^T (A - KC)^T P e + e^T P (A - KC) e + w^T (B_w - KD_w)^T P e \\ &+ e^T (t) P (B_w - KD_w) w + \Delta\phi^T(x, \hat{x}) P e + e P \Delta\phi(x, \hat{x}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Des calculs directs montrent que :

$$\begin{aligned} \dot{V} + e^T e - \lambda_\omega^2 w^T w &= e^T (A - KC)^T P e + e^T P (A - KC) e \\ &+ w^T (B_w - KD_w)^T P e + e^T P (B_w - KD_w) w \\ &+ \Delta\phi^T(x, \hat{x}) P e + e P \Delta\phi(x, \hat{x}) + e^T e - \lambda_\omega^2 w^T w. \end{aligned} \quad (3.22)$$

D'après les inéquations (3.4) (3.9), il vient que :

$$\begin{aligned}
\dot{V} + e^T e - \lambda_\omega^2 w^T w &< e^T (A - KC)^T P e + e^T P (A - KC) e \\
&+ w^T (B_w - K D_w)^T P e + e^T P (B_w - K D_w) w \quad (3.23) \\
&+ \mu \lambda_\phi^2 e^T e + \frac{1}{\mu} e^T P P e + e^T e - \lambda_\omega^2 w^T w
\end{aligned}$$

L'inégalité (3.23) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} e \\ w \end{pmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} (A - KC)^T P + P(A - KC) + \mu \lambda_\phi^2 I + \frac{1}{\mu} P P & P B_w - P K D_w \\ * & -\lambda_\omega^2 I \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} e \\ w \end{pmatrix} < 0 \quad (3.24)$$

Ainsi, la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation est garantie si la condition suivante est satisfaite :

$$\begin{bmatrix} (A - KC)^T P + P(A - KC) + \mu \lambda_\phi^2 I + \frac{1}{\mu} P P & P B_w - P K D_w \\ * & -\lambda_\omega^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.25)$$

En appliquant le complément de Schur, le changement de variable $X = PK$, on obtient (3.19).

Ceci termine la démonstration du Théorème 2. \square

3.3 Détection de défaut à base de filtrage $\mathcal{H}_- / \mathcal{H}_\infty$

Dans cette section, nous nous intéressons au problème de la détection des défauts en tenant compte de la présence des perturbations. En fait, la présence de ces dernières peut masquer l'effet des défauts, ce qui retarde la détection et peut donc entraîner la dégradation du processus. Par conséquent, un système de détection de défaut doit être robuste aux perturbations. Cependant, il doit être aussi sensible que possible aux défauts. Le défi consiste à faire la distinction entre l'effet des perturbations et l'effet des défauts.

En ajoutant les défauts additifs d'actionneurs et de capteurs, ainsi que des perturbations au modèle du système (3.3), nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + \phi(x) + B_u u + B_w w + B_f f \\ y = C x + D_w w + D_f f \end{cases} \quad (3.26)$$

où $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ est l'état du système. $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ désigne la commande. $y \in Y \subset \mathbb{R}^q$ représente la sortie. X , U et Y sont trois compacts. $w \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des perturbations. $f \in \mathbb{R}^l$ représente le vecteur de défauts. A, B_u, C, B_w, D_w et D_f sont des matrices réelles de dimensions appropriées. Nous supposons que w et f sont des signaux à énergie finie. La fonction non-linéaire ϕ est Lipschitzienne avec une constante de Lipschitz λ_ϕ .

Le problème consiste à déterminer un filtre de détection de défauts de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A \hat{x} + \phi(\hat{x}) + B_u u + K (y - \hat{y}) \\ y = C \hat{x} \\ r = G (y - \hat{y}) \end{cases} \quad (3.27)$$

où \hat{x} est le vecteur d'estimé. \hat{y} représente la sortie estimée. r est le signal de résidu. K et G désignent respectivement la matrice de gain et celle de la pondération résiduelle.

En utilisant les équations (3.26) et (3.27), la dynamique de l'erreur d'estimation et le résidu sont donnés par :

$$\dot{e} = (A - K C) e + \Delta\phi(x, \hat{x}) + (B_w - K D_w) w + (B_f - K D_f) f \quad (3.28)$$

$$r = G C e + G D_w w + G D_f f. \quad (3.29)$$

On peut remarquer que le résidu ne dépend pas seulement de l'erreur d'estimation e mais également des défauts f et des perturbations w . Ainsi, le problème de la conception du filtre de détection de défauts (3.27) revient à déterminer les matrices K et G tels que :

(i) L'erreur d'estimation converge vers zéro si $w \equiv 0$ et $f \equiv 0$.

(ii) Le résidu (3.29) est robuste aux perturbations, soit :

$$\|r\|_{L_2} < \lambda_\omega \|w\|_{L_2} \quad (3.30)$$

(iii) Le résidu (3.29) est aussi sensible que possible au défaut, soit :

$$\|r\|_{L_2} > \beta \|f\|_{L_2} \quad (3.31)$$

λ_ω et β sont deux constantes positives.

Suite à la synthèse du filtre de détection de défauts, une tâche sera d'évaluer les résidus générés. Pour ce faire, une des approches largement adoptées consistera à choisir un seuil J_{th} de détection de présence de défauts. En fait, le seuil sera un indicateur au delà duquel le résidu sera jugé significatif d'une présence de défaut, c'est-à-dire, si $\|r\|_{L_2} > J_{th}$. Le choix de cet indicateur sera effectué comme dans [24], de la façon suivante :

$$J_{th} = \sup_{f=0} \|r\|_{L_2}$$

3.3.1 Synthèse du filtre de détection de défauts

Le but de cette partie est d'énoncer et de démontrer le résultat théorique sur la synthèse du filtre en vue de la détection de défauts du problème énoncé sur la sous-section précédente.

Théorème 3. *Considérons le système (3.26). Pour $\lambda_\phi > 0$, $\lambda_\omega > 0$ et $\beta > 0$, le système (3.28) (3.29) est asymptotiquement stable et vérifie (3.30) et (3.31) s'il existe une matrice P définie positive, des matrices X , \mathbb{Y} et G de dimensions appropriées et deux scalaires positifs μ , ε tels que les inégalités matricielles linéaires suivantes soient satisfaites :*

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - XC - C^T X^T + \mu \lambda_\phi^2 I & PB_w - XD_w & C^T G^T & P \\ * & -\lambda_\omega^2 I & D_w^T G^T & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -\mu I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.32)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -A^T P - PA + XC + C^T X^T - \mu \lambda_\phi^2 I & PB_f - XD_f \\ * & -\beta^2 I \end{bmatrix} + \mathbb{Y} & P \\ * & 0 \\ * & \mu I \\ * & \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{I} \end{bmatrix} \succ 0 \quad (3.33)$$

$$\mathbb{Y} - \Gamma^T \mathbb{I} - \mathbb{I} \Gamma + \frac{1}{1 + \varepsilon} \mathbb{I} \prec 0 \quad (3.34)$$

avec $\Gamma = [GC \quad GD_f]$. I et \mathbb{I} sont deux matrices identités de dimensions appropriées. \star représente le bloc symétrique.

Remarque 2. Le gain de l'observateur K sera donné par $K = P^{-1}X$.

Démonstration : La démonstration sera effectuée en deux étapes. La première étape est dédiée à la robustesse (ii) et la convergence de l'erreur (i). La deuxième étape consiste à prouver la sensibilité du résidu, soit (iii).

Étape 1 : Atténuation \mathcal{H}_∞

Dans cette étape, on considère l'analyse de la robustesse de l'erreur d'estimation e par rapport à la perturbation w . Pour ce faire, nous posons $f = 0$ dans les équations (3.28) et (3.29). Il vient alors :

$$\dot{e} = (A - K C) e + \Delta\phi(x, \hat{x}) + (B_w - K D_w) w \quad (3.35)$$

et

$$r = G C e + G D_w w. \quad (3.36)$$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(e) = e^T P e \quad (3.37)$$

La dérivée de V le long de la solution de l'équation (3.35) est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) = e^T & \left((A - K C)^T P + P (A - K C) \right) e + \Delta\phi^T(x, \hat{x}) P e \\ & + e^T P \Delta\phi(x, \hat{x}) + w^T (B_w - K D_w)^T P e + e^T P (B_w - K D_w) w \end{aligned} \quad (3.38)$$

La condition (3.30) est satisfaite si l'expression suivante :

$$r^T r - \lambda_\omega^2 w^T w + \dot{V} < 0 \quad (3.39)$$

est vérifiée.

En substituant les équations (3.36) et (3.38) dans (3.39), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& e^T C^T G^T G C e + e^T C^T G^T G D_w w + w^T D_w^T G^T G C e \\
& + w^T D_w^T G^T G D_w w - \lambda_\omega^2 w^T w + e^T \left((A - KC)^T P + P(A - KC) \right) e \\
& + \Delta\phi^T(x, \hat{x}) P e + e^T P \Delta\phi(x, \hat{x}) + w^T (B_w - KD_w)^T P e + e^T P (B_w - KD_w) w < 0
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (3.9), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& e^T C^T G^T G C e + e^T C^T G^T G D_w w + w^T D_w^T G^T G C e + w^T D_w^T G^T G D_w w \\
& - \lambda_\omega^2 w^T w + e^T \left((A - KC)^T P + P(A - KC) + \frac{1}{\mu} P P \right) e \tag{3.40}
\end{aligned}$$

$$+ \mu \|\Delta\phi(x, \hat{x})\|^2 + w^T (B_w - KD_w)^T P e + e^T P (B_w - KD_w) w < 0$$

Maintenant, et comme ϕ est de Lipschitz, nous déduisons que $\|\Delta\phi(x, \hat{x})\| \leq \lambda_\phi \|e\|$ et l'inégalité (3.40) devient :

$$\begin{aligned}
& e^T C^T G^T G C e + e^T C^T G^T G D_w w + w^T D_w^T G^T G C e + w^T D_w^T G^T G D_w w \\
& - \lambda_\omega^2 w^T w + e^T \left((A - KC)^T P + P(A - KC) + \mu \lambda_\phi^2 I + \frac{1}{\mu} P P \right) e \tag{3.41}
\end{aligned}$$

$$+ w^T (B_w - KD_w)^T P e + e^T P (B_w - KD_w) w < 0$$

Un réarrangement de l'inégalité (3.41) permet de la réécrire sous la forme matricielle, de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} e \\ w \end{pmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \Omega_1 & PB_w - PKD_w \\ \star & -\lambda_\omega^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T G^T G C & C^T G^T G D_w \\ \star & D_w^T G^T G D_w \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} e \\ w \end{pmatrix} < 0 \tag{3.42}$$

Pour satisfaire (3.42), il suffit de vérifier que :

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & PB_w - PKD_w \\ \star & -\lambda_\omega^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T G^T G C & C^T G^T G D_w \\ \star & D_w^T G^T G D_w \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.43}$$

avec

$$\Omega_1 = (A - KC)^T P + P(A - KC) + \mu \lambda_\phi^2 I + \frac{1}{\mu} P P$$

En utilisant le complément de Schur et en posant $X = PK$, on obtient l'inégalité (3.32). Ceci termine la première étape. \square

Étape 2 : Sensibilité de \mathcal{H}_-

Dans cette étape, on analyse la sensibilité du signal résiduel r par rapport au défaut f . En posant $w = 0$ dans les équations (3.28) et (3.29), nous obtenons :

$$\dot{e} = (A - KC) e + \Delta\phi(x, \hat{x}) + (B_f - KD_f) f \quad (3.44)$$

et

$$r = GC e + GD_f f \quad (3.45)$$

La dérivée de V définie par (3.37) le long de la trajectoire de (3.44) est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) = & e^T ((A - KC)^T P + P(A - KC)) e + \Delta\phi^T(x, \hat{x}) P e \\ & + e^T P \Delta\phi(x, \hat{x}) + f^T (B_f - KD_f)^T P e + e^T P (B_f - KD_f) f \end{aligned} \quad (3.46)$$

La condition (3.31) est satisfaite si l'expression suivante :

$$r^T r - \beta^2 f^T f - \dot{V} > 0 \quad (3.47)$$

est vérifiée.

En substituant les équations (3.45) et (3.46) dans l'équation (3.47), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & e^T C^T G^T G C e + e^T C^T G^T G D_f f + f^T D_f^T G^T G C e + f^T D_f^T G^T G D_f f - \beta^2 f^T f \\ & + e^T ((A - KC)^T P + P(A - KC)) e + \Delta\phi^T(x, \hat{x}) P e + e^T P \Delta\phi(x, \hat{x}) \\ & + f^T (B_f - KD_f)^T P e + e^T P (B_f - KD_f) f > 0 \end{aligned}$$

En utilisant l'inéquation (3.9) et la propriété de Lipschitz de ϕ , nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
& e^T C^T G^T G C e + e^T C^T G^T G D_f f + f^T D_f^T G^T G C e + f^T D_f^T G^T G D_f f \\
& - \beta^2 f^T f + e^T \left((A - KC)^T P + P(A - KC) + \mu \lambda_\phi^2 I + \frac{1}{\mu} PP \right) e \\
& + f^T (B_f - KD_f)^T P e + e^T P (B_f - KD_f) f > 0
\end{aligned}$$

Cette inégalité peut être réécrite sous la forme matricielle, par la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} -(A - KC)^T P - P(A - KC) - \mu \lambda_\phi^2 I - \frac{1}{\mu} PP & PB_f - P K D_f \\ * & -\beta^2 I \end{bmatrix} + \Gamma^T \Gamma \right) \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} > 0$$

où $\Gamma = [GC \quad GD_f]$, cette inégalité est satisfaite si et seulement si :

$$\begin{bmatrix} -(A - KC)^T P - P(A - KC) - \mu \lambda_\phi^2 I - \frac{1}{\mu} PP & PB_f - P K D_f \\ * & -\beta^2 I \end{bmatrix} + \Gamma^T \Gamma \succ 0 \quad (3.48)$$

Soit la matrice \mathbb{Y} et un scalaire positif $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\mathbb{Y} \prec (1 + \varepsilon) \Gamma^T \Gamma \quad (3.49)$$

alors l'inégalité (3.48) est satisfaite si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{bmatrix} -(A - KC)^T P - P(A - KC) - \mu \lambda_\phi^2 I - \frac{1}{\mu} PP & PB_f - P K D_f \\ * & -\beta^2 I \end{bmatrix} + \mathbb{Y} - \varepsilon \Gamma^T \Gamma \succ 0 \quad (3.50)$$

En utilisant le complément de Schur et en posant $X = PK$, on obtient l'inégalité (3.33).

On peut voir que l'inégalité (3.49) n'est pas une inégalité matricielle linéaire. De ce fait, un raisonnement simple montre que :

$$\mathbb{Y} - (1 + \varepsilon) \Gamma^T \Gamma - \frac{1}{1 + \varepsilon} \mathbb{I}^T \mathbb{I} + \frac{1}{1 + \varepsilon} \mathbb{I}^T \mathbb{I} \prec 0 \quad (3.51)$$

à partir de l'inégalité de Young [111], ceci est toujours vérifié :

$$(1 + \varepsilon) \Gamma^T \Gamma + \frac{1}{1 + \varepsilon} \mathbb{I}^T \mathbb{I} \succ \Gamma^T \mathbb{I} + \mathbb{I}^T \Gamma \quad (3.52)$$

En substituant (3.52) dans (3.51), nous obtenons (3.34).

Ceci termine la deuxième étape. \square

3.3.2 Application au système d'alimentation en air

Dans cette section, nous considérons le système d'alimentation en air de la pile à combustible (2.24). En outre, nous supposons que les valeurs du débit massique de la sortie du compresseur et la pression d'air du collecteur d'admission sont disponibles. Ce modèle est représenté comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = c_1 (-x_1 - x_2 + x_4 - c_2) - \frac{c_3 x_1 \psi(x_1, x_2)}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6} - c_7 \\ \dot{x}_2 = c_8 (-x_1 - x_2 + x_4 - c_2) - \frac{c_3 x_2 \psi(x_1, x_2)}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6} \\ \dot{x}_3 = -c_9 x_3 - c_{10} \left[\left(\frac{x_4}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + c_{12} u \\ \dot{x}_4 = c_{13} \left[1 + c_{14} \left[\left(\frac{x_4}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \right] [c_{15} x_3 - c_{16} (-x_1 - x_2 + x_4 - c_2)] \end{array} \right. \quad (3.53)$$

avec

$$\psi(x_1, x_2) = \left\{ \begin{array}{ll} c_{17} (x_1 + x_2 + c_2) \left(\frac{c_{11}}{x_1 + x_2 + c_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{c_{11}}{x_1 + x_2 + c_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} & \text{pour } (x_1 + x_2 + c_2) < \frac{c_{11}}{c_{19}} \\ c_{20} (x_1 + x_2 + c_2) & \text{pour } (x_1 + x_2 + c_2) \geq \frac{c_{11}}{c_{19}} \end{array} \right. \quad (3.54)$$

où x_1 et x_2 sont les pressions partielles d'oxygène et d'azote, x_3 est la vitesse angulaire du compresseur et x_4 est la pression du collecteur d'admission d'air.

Le modèle décrivant le comportement du système d'alimentation en air a été modifié afin d'inclure les perturbations et l'ensemble des défauts (à savoir : actionneur et capteur). Les perturbations et les défauts ainsi que leurs descriptions sont décrits dans le tableau 0.2 et la façon dont ils ont été inclus dans le modèle est expliquée ci-dessous.

Le signal de perturbations affecte à la fois la dynamique et le signal de sortie du sys-

Signal	Nature	Description
w	Perturbations	Variations de la température ambiante
f_1	Défaut actionneur	Sous-tension du moteur de compresseur
f_2	Défaut capteur	Légère déformation sur la piézorésistance

Table 3.1 – Description des perturbations et des scénarios de défauts

tème.

Le défaut f_1 est simulé avec un incrément Δu dans la tension d'entrée du compresseur u , l'effet de défaut se traduit par une modification de la dynamique du compresseur affectant directement la vitesse angulaire du compresseur x_3 . L'équation décrivant l'implémentation du défaut est représentée comme suit :

$$\dot{x}_3 = -c_9 x_3 - c_{10} \left[\left(\frac{x_4}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + c_{12} (u - \Delta u) \quad (3.55)$$

Le défaut $f_2(t)$ est un défaut dans le capteur de pression piézorésistif. Un capteur de pression piézorésistif est constitué d'un diaphragme avec quatre piézorésistances placées en haut dans une configuration en pont de Wheatstone, comme le montre la Figure 3.2. La sortie du pont de Wheatstone peut être donnée comme suit :

$$\Delta V = V \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right)$$

Si l'on considère le cas général où les quatre résistances de pont sont différentes les unes des autres par leurs augmentations respectives ΔR_1 , ΔR_2 , ΔR_3 , ΔR_4 , mais avec des valeurs très faibles autour R_0 , la tension de sortie est donnée par :

$$\frac{\Delta V}{V} = \left[\frac{R_0 (\Delta R_1 - \Delta R_2 - \Delta R_3 + \Delta R_4) + \Delta R_1 \Delta R_4 - \Delta R_2 \Delta R_4}{4R_0^2 + 4R_0 (\Delta R_1 + \Delta R_2 + \Delta R_3 + \Delta R_4)} \right] \quad (3.56)$$

Si les variations de résistance ΔR_i sont faibles par rapport à la valeur nominale R_0 , la relation (3.56) peut être simplifiée comme suit :

$$\Delta V = \frac{V}{4R_0} [\Delta R_1 - \Delta R_2 - \Delta R_3 + \Delta R_4]$$

Lorsque la pression est appliquée au diaphragme du capteur de pression, le diaphragme se déforme et induit une contrainte de flexion qui modifie la résistance dans le circuit de pont de Wheatstone en raison de l'effet piézorésistif [50]. Si l'on considère une légère déformation de la résistance R_2 , cela représente une rupture de la tension de sortie.

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{V}{4R_0} [\Delta R_1 - (\Delta R_2 - \Delta' R_2) - \Delta R_3 + \Delta R_4] \\ &= \frac{V}{4R_0} [\Delta R_1 - \Delta R_2 - \Delta R_3 + \Delta R_4] + D f_{R_2} \end{aligned} \quad (3.57)$$

D est une matrice de poids et f_{R_2} dépend du taux de déformation de la valeur nominale de R_2 .

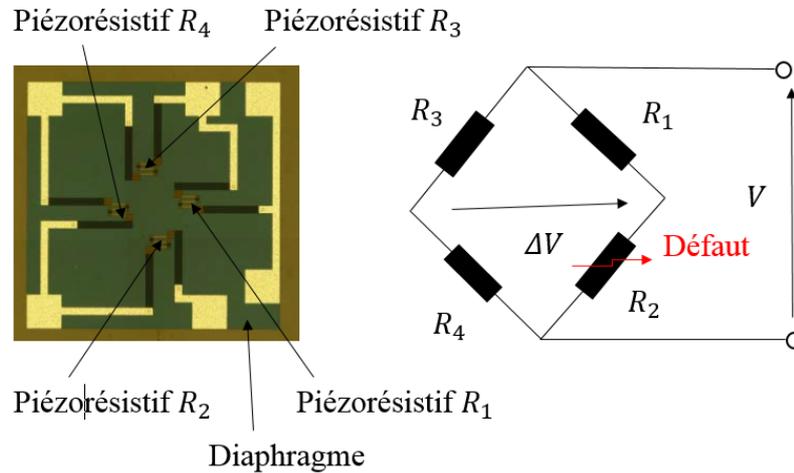


Figure 3.2 – Structure du capteur de pression et disposition des capteurs de pressions piézorésistifs

En vertu des équations (3.53), (3.55) et (3.57), nous obtenons le modèle d'état sui-

vant :

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + \phi(x) + b + B_u u + B_w w + B_f f \\ y = C x + D_w w + D_f f \end{cases} \quad (3.58)$$

Les matrices A , B_u , b , B_w , B_f , C , D_w , D_f et la fonction ϕ sont données comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} -c_1 & -c_1 & 0 & c_1 \\ -c_8 & -c_8 & 0 & c_8 \\ 0 & 0 & -c_9 & 0 \\ c_{13} & c_{16} & c_{13} & c_{16} \\ c_{13} & c_{15} & -c_{13} & c_{16} \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 & c_7 \\ 0 & 0 \\ c_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_2 \\ 0 \\ c_2 & c_{13} & c_{16} \end{bmatrix}$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} -\frac{c_3 x_1}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6} \psi(x_1, x_2) \\ -\frac{c_3 x_2}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6} \psi(x_1, x_2) \\ -c_{10} c_{15} \left(\left(\frac{x_4}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \\ c_{13} c_{14} \left(\left(\frac{x_4}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) (c_{15} x_3 - c_{16} (x_4 - x_1 - x_2 - c_2)) \end{bmatrix}$$

On peut démontrer que

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \leq \gamma_\phi \|x_1 - x_2\|.$$

Pour ce faire, nous utilisons l'égalité

$$f(x_1) - f(x_2) = \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x} (tx_1 + (1-t)x_2) dt \right) (x_1 - x_2).$$

Posons

$$M = \max_{x \in X} \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|$$

alors

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M \|x_1 - x_2\|.$$

Pour détecter le défaut sous l'effet des perturbations, nous proposons le filtre suivant :

$$\begin{cases} \hat{x} = A \hat{x} + \phi(\hat{x}) + b + B_u u + K (y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C \hat{x} \\ r = G (y - \hat{y}) \end{cases} \quad (3.59)$$

où \hat{x} et \hat{y} sont respectivement les estimées de x et y . K est le gain d'observateur.

3.3.3 Résultats de simulation

Dans ce travail, nous avons considéré un simulateur classique disponible dans la littérature [78]. En utilisant les valeurs numériques données dans l'Annexe 5.5, les gains et les constantes définies dans le Théorème 3 sont donnés par :

$$P = \begin{bmatrix} 2.76 \times 10^7 & 1.33 \times 10^7 & 18.49 & -2.98 \times 10^6 \\ 1.33 \times 10^7 & 3.33 \times 10^7 & -64.86 & -6.88 \times 10^6 \\ 18.49 & -64.86 & -1.41 \times 10^3 & 5.55 \times 10^2 \\ -2.98 \times 10^6 & -6.88 \times 10^6 & 5.55 \times 10^2 & 8.83 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 3.40 \times 10^2 & -1.28 \times 10^4 \\ -1.17 \times 10^3 & 1.63 \times 10^4 \\ 1.63 \times 10^4 & -8.24 \times 10^3 \\ 5.77 \times 10^3 & 8.78 \times 10^4 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 7.65 \times 10^{-5} & -7.46 \times 10^{-4} \\ 2.41 \times 10^{-4} & 3.25 \times 10^{-3} \\ -11.52 & 5.83 \\ 1.60 \times 10^{-3} & 1.19 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$\mu = 3.25 \times 10^{-3} \text{ et } \gamma_\phi = 21.7906.$$

Le comportement du signal de perturbations considéré est représenté sur les Figures 3.7 et 3.8 (voir ligne continue verte). Le défaut de l'actionneur f_1 est simulé par une diminution de la tension d'entrée du moteur du compresseur. Le défaut du capteur f_2 est introduit dans le simulateur en ajoutant la mesure de la pression du collecteur d'alimentation P_{sm} à une valeur négative. Les Figures 3.3 - 3.6 représentent les états et leurs estimations. A l'occurrence du défaut actionneur, on constate que le deuxième résidu est nul et le premier résidu détecte bien le défaut car il varie fortement (voir Figures 3.7). On peut expliquer ceci par le fait que par exemple le premier résidu dépend de la vitesse angulaire dont sa dérivée est en fonction de la commande. A l'apparition du défaut capteur, on observe que le premier résidu est nul ce qui est attendu et le deuxième résidu détecte le défaut (voir Figure 3.8). Les explications sont les mêmes que précédemment. En outre, on remarque que ces résidus sont robustes aux perturbations.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthodologie de synthèse de l'observateur pour des systèmes non linéaires en présence de défauts et de perturbations. Des conditions suffisantes permettant la synthèse de l'observateur robuste vis-à-vis des défauts et des perturbations ont été établies à l'aide de la méthode de Lyapunov. Un simulateur du système d'alimentation d'air de la pile à combustible de type PEM développé dans le chapitre précédent a été modifié afin d'inclure les perturbations et l'ensemble des défauts. Ce simulateur nous a permis d'illustrer la méthode de synthèse proposée ainsi que son efficacité.

L'intérêt de la méthode proposée ici est de montrer comment détecter certains défauts à savoir, un défaut de capteur et un défaut de l'actionneur du côté du compresseur en tenant compte la présence des perturbations. La stratégie proposée était basée sur l'utilisation de $\mathcal{H}_- / \mathcal{H}_\infty$ filtre.

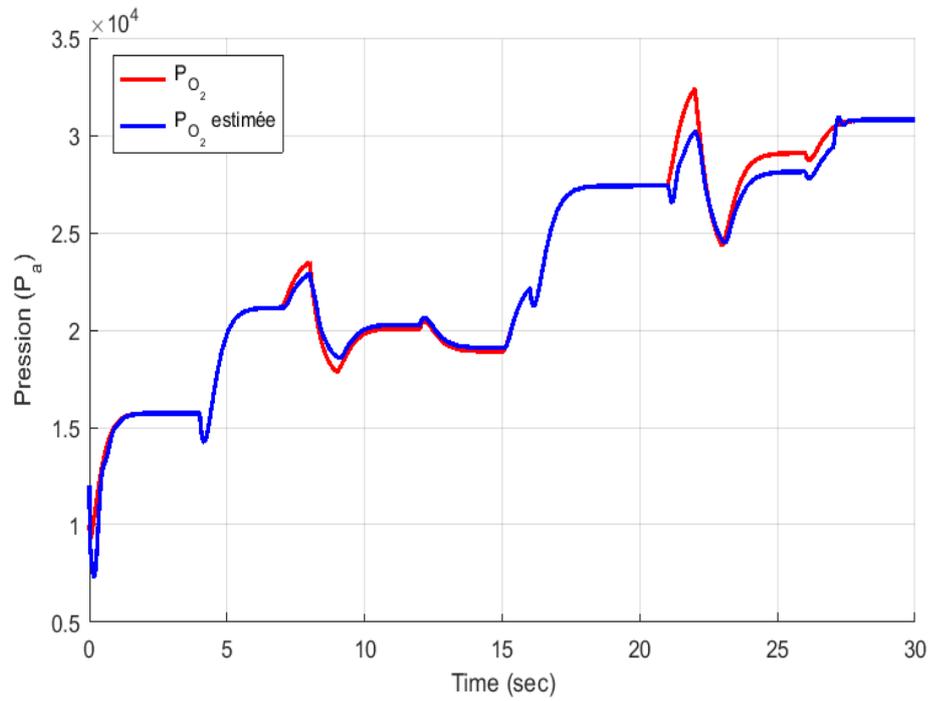


Figure 3.3 – Presson d'oxygène

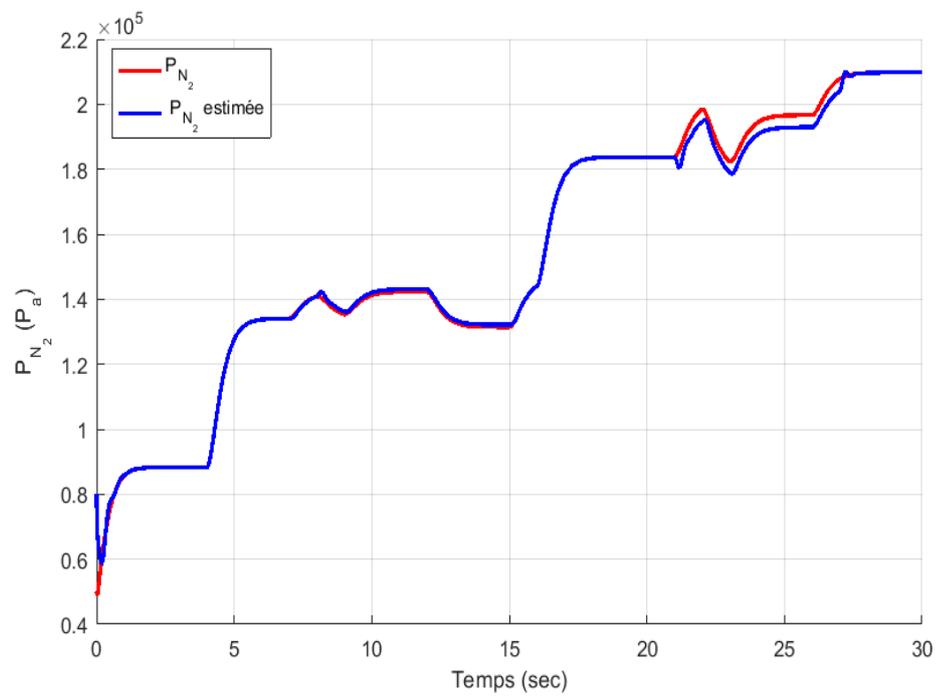


Figure 3.4 – Presson d'azote

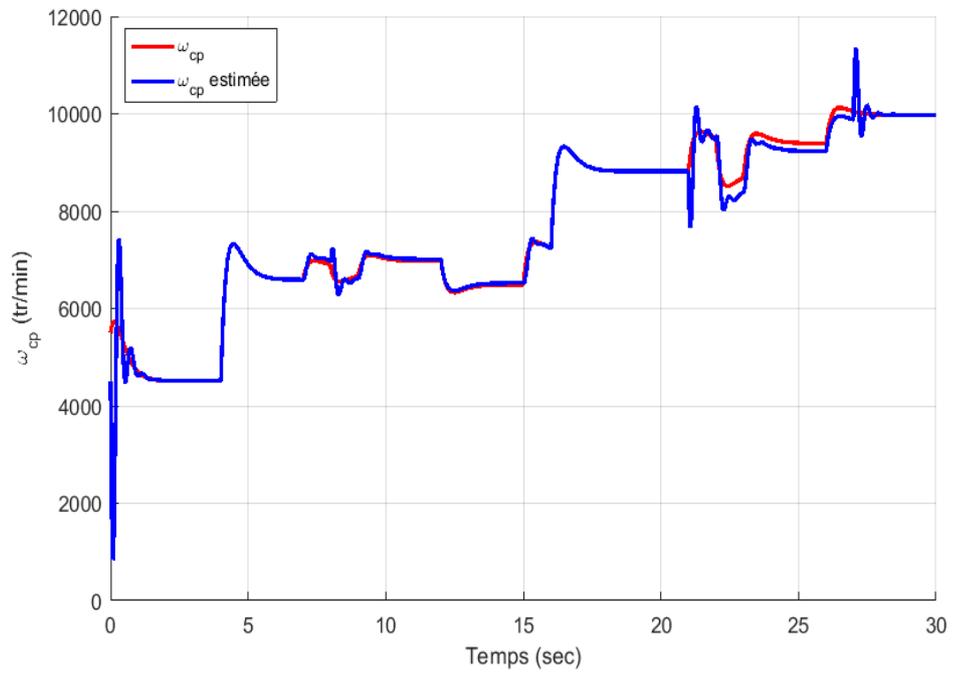


Figure 3.5 – Vitesse angulaire

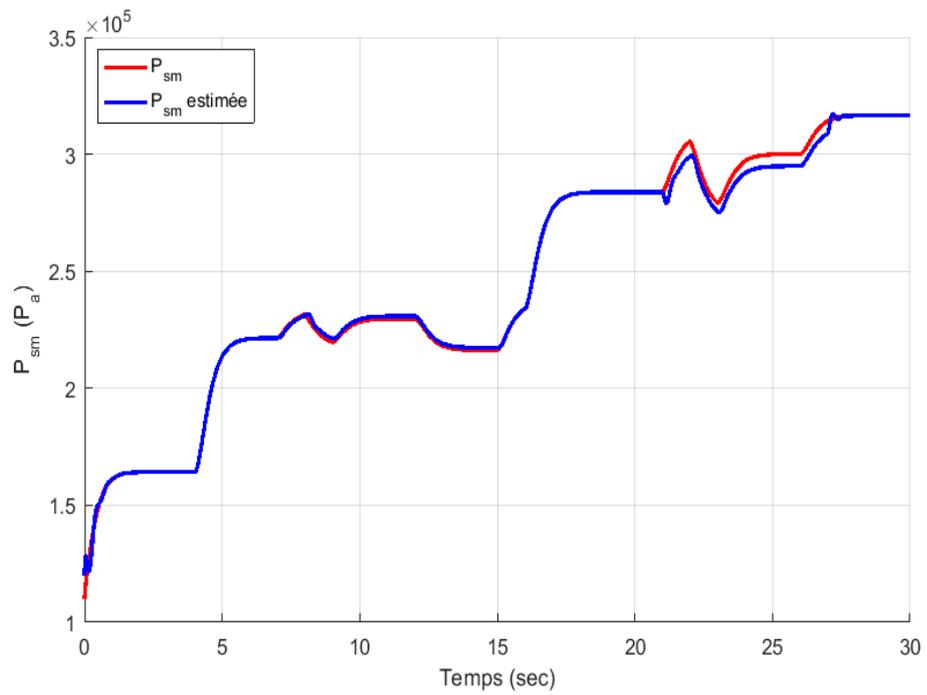


Figure 3.6 – Pression d'air du collecteur

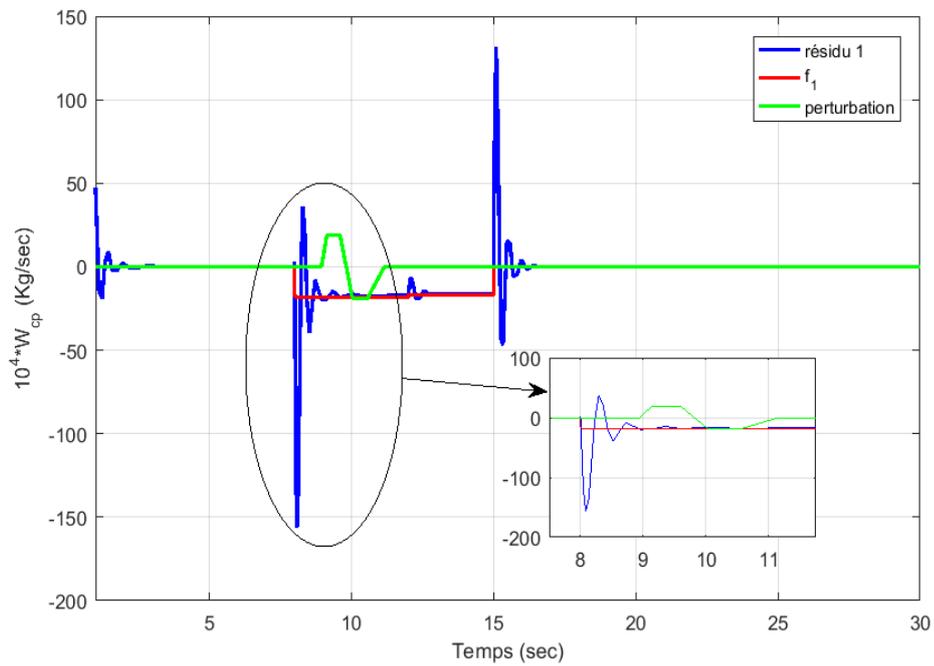


Figure 3.7 – Premier résidu

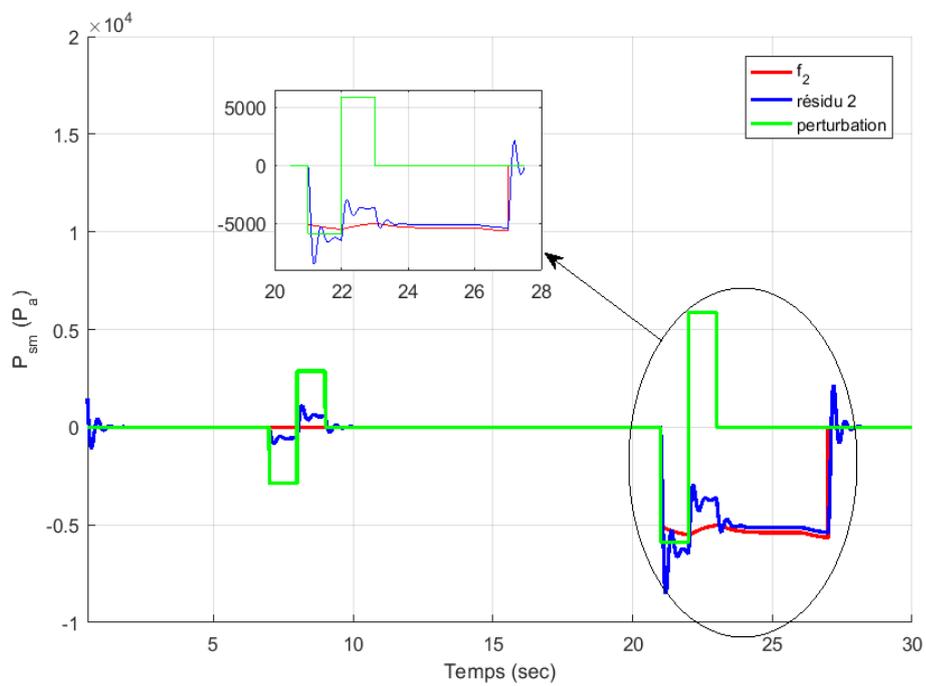


Figure 3.8 – Deuxième résidu

4 Diagnostic de défauts à base d'observateur adaptatif

4.1 Introduction

Le problème du diagnostic des systèmes piles à combustible de type PEM à susciter l'intérêt de plusieurs auteurs (voir par exemple [34] [48] [58]). Le but est de détecter les changements de comportement dus à l'apparition de défaut au sein du système en vue de garantir la fiabilité, la sécurité et la durée de vie. Ainsi, plusieurs méthodologies de diagnostic de défauts ont été explorées en fonction de l'objectif fixé ([11] [28] [61] [64] [105]).

Le diagnostic à base d'observateur adaptatif s'avère être une extension efficace aux approches d'estimation des paramètres. Cette méthode permet d'estimer les défauts multiplicatifs tout en assurant la robustesse de l'estimation de l'état par rapport aux incertitudes dues aux changements de paramètres. Ainsi, plusieurs approches ont été adaptées pour la synthèse des observateurs adaptatifs dans le cas des systèmes linéaires ([7] [108]) ou non-linéaires ([18] [29] [42]).

Le but de ce chapitre est de proposer une adaptation de certains résultats sur la synthèse d'observateur adaptatif en vue du diagnostic de défauts dans le système d'alimentation en air de la PàC. Ainsi, une condition suffisante d'existence d'observateur est donnée en terme d'inégalité matricielle linéaire. En suite, et afin d'illustrer les performances de la synthèse d'observateur, un simulateur de la PàC proposé dans la littérature est utilisé.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Une étude sur les observateurs adaptatifs sera détaillée dans la deuxième section. Dans la troisième section, nous formulerons le problème du diagnostic des défauts et nous développerons l'approche adaptée pour la synthèse d'observateur adaptatif. Dans la quatrième section nous appliquerons la synthèse proposée au système d'alimentation en air de la pile. Par la suite, les résultats de simulation sont présentés pour illustrer l'efficacité de notre approche.

4.2 Observateurs adaptatifs

L'objectif de ce paragraphe est de présenter des résultats classiques de la littérature sur les observateurs adaptatifs permettant l'estimation conjointe des vecteurs de l'état et des paramètres inconnus.

Tout d'abord, nous introduisons la notion de l'excitation persistante (PE).

Définition 1. ([2]) : Une matrice continue par morceau $\phi \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ est dite à PE avec un niveau d'excitation $\alpha > 0$, s'il existe des constantes $\beta > 0$ et $T > 0$, telles :

$$\alpha I \preceq \int_t^{t+T} \phi^T(\tau) \phi(\tau) d\tau \preceq \beta I, \quad \text{pour tout } t > 0.$$

Le concept de l'excitation persistante permet de conclure à la stabilité exponentielle établi par le résultat suivant :

Lemme 1. ([71]) : Soit $\Gamma \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ une matrice symétrique définie positive, si ϕ est à PE alors :

$$\dot{z} = -\Gamma \phi^T \phi z \tag{4.1}$$

est exponentiellement stable.

4.2.1 Cas linéaire

Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + B u + \psi \Theta \\ y = C x \end{cases} \tag{4.2}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^q$ et $y \in \mathbb{R}^m$ représentent respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie. $\Theta \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de paramètres inconnus, supposé constant. A , B , C et ψ sont des matrices de dimensions appropriées.

Théorème 4. ([108]) Soit $\Gamma \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ une matrice symétrique définie positive. Supposons que la paire (A, C) est détectable^a. Supposons aussi que ψ est bornée et PE telle que $\Sigma^{\frac{1}{2}} C \Upsilon$ est PE où Σ est une fonction symétrique définie positive et Υ est solution de $\dot{\Upsilon} = (A - KC) \Upsilon + \psi$. Alors

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A \hat{x} + B u + \psi \hat{\Theta} + K(y - \hat{y}) + \Upsilon \hat{\Theta} \\ \hat{y} = C \hat{x} \\ \dot{\hat{\Theta}} = \Gamma \Upsilon^T C^T \Sigma (y - C \hat{x}) \end{cases} \tag{4.3}$$

est un observateur adaptatif pour le système (4.2).

a. c'est-à-dire, qu'il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ telle que $\Re_e(sp(A - KC)) < 0$.

4.2.2 Cas non-linéaire

Considérons la classe de systèmes non-linéaires suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + \phi(x, u) + b f(x, u) \Theta \\ y = C x \end{cases} \quad (4.4)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^q$ et $y \in \mathbb{R}^m$ désignent respectivement le vecteur de l'état, l'entrée et la sortie. $\Theta \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des paramètres inconnus. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{n \times s}$ et $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sont des matrices constantes. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{s \times p}$ et $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions régulières de Lipschitz uniformément en u et on note γ_1 et γ_2 les constantes respectives. En outre, nous supposons que f est PE et Θ est bornée, c'est-à-dire, il existe une constante positive γ_3 , telle que : $\|\Theta\| \leq \gamma_3$.

Considérons pour le système (4.4), l'observateur adaptatif suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \phi(\hat{x}, u) + b f(\hat{x}, u) \hat{\Theta} + K(y - C\hat{x}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (4.5)$$

L'algorithme d'estimation adaptative est donné comme suit [18] :

$$\dot{\hat{\Theta}} = \frac{f(\hat{x}, u)^T b^T P \tilde{x}}{\rho}, \quad \text{pour } \rho > 0 \quad (4.6)$$

où \hat{x} , \hat{y} et $\hat{\Theta}$ sont les estimées respectives de x , y et Θ .

Soient $e_x = x - \hat{x}$ et $e_\Theta = \Theta - \hat{\Theta}$ respectivement les erreurs d'estimation de l'état et du paramètre.

La dynamique de l'erreur d'estimation de l'état e_x est donnée par :

$$\dot{e}_x = (A - KC) e_x + \psi(x, u) - \psi(\hat{x}, u) + b f(x, u) \Theta - b f(\hat{x}, u) \hat{\Theta}. \quad (4.7)$$

Le but consiste à déterminer la matrice K telle que les erreurs d'estimation convergent vers zéro.

Le théorème suivant fournit les conditions suffisantes pour la stabilité de l'observateur adaptatif (4.5).

Théorème 5. *S'il existe P et Q deux matrices symétriques définies positives et une matrice K tels que :*

$$(A - K C)^T P + P (A - K C) + (\gamma_1 + \gamma_2 \gamma_3 \|b\|) P P + (\gamma_1 + \gamma_2 \gamma_3) I \prec 0 \quad (4.8)$$

et

$$b^T P = C, \quad (A - K C)^T P + P (A - K C) = -Q, \quad \gamma_1 + \gamma_2 \gamma_3 \|b\| \leq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \quad (4.9)$$

sont satisfaites, alors (4.5)-(4.6) est un observateur adaptatif pour le système (4.4). $\lambda_{\min}(Q)$ et $\lambda_{\max}(P)$ désignent respectivement les valeurs propres minimale et maximale des matrices symétriques Q et P .

4.3 Méthodologie de diagnostic considérée

Considérons la classe de systèmes suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + f(x, \Theta) + B_u u + B_d d \\ y = C x \end{cases} \quad (4.10)$$

avec

$$f(x, \Theta) = \psi(x) + D \phi(x) \Theta$$

où $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ est l'état du système. $u \in U \subset \mathbb{R}^p$ représente la commande et $y \in Y \subset \mathbb{R}^q$ désigne la sortie. X, U et Y sont des compacts. d est le vecteur d'entrée exogène. $\Theta \in \mathbb{R}^{n_\Theta}$ désigne le vecteur des paramètres inconnus. $f : X \times \mathbb{R}^{n_\Theta} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est régulière et n_Θ désigne le nombre de dynamique affectée. $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}^{n_f \times n_\Theta}$ avec n_f est le nombre de dynamique affectée. Il est assumé que ψ et ϕ sont des fonctions de Lipschitz où γ_ψ et γ_ϕ désignent les constantes respectives. A, B_u, B_d, C sont des matrices constantes de dimensions appropriées, D représente une matrice de poids qui spécifie l'effet de défaut sur la dynamique de chaque état.

Il est à noter que ψ présente dans la décomposition de f , représente la partie non affectée par le défaut et $D\phi$ désigne la partie affectée. Ainsi, et en absence de défauts, la fonction f sera réduite à ψ . Dans ce cas, l'observateur Luenberger, développé dans le chapitre précédent, peut suffire pour estimer les variables d'états.

Dans cette partie, l'objectif est de synthétiser un observateur adaptatif pour le système (4.10), permettant l'estimation conjointe de l'état x et du vecteur de paramètres Θ .

En vue de reconstruire l'état x et le vecteur de paramètres Θ , nous adoptons les hypothèses suivantes. Nous supposons que $D\phi$ est PE, ψ est bornée, et Θ varie lentement

et est borné, c'est-à-dire, il existe des constantes positives l et ε telle que :

$$\|\Theta(t)\| \leq l \quad \text{et} \quad \|\dot{\Theta}(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0 \quad (4.11)$$

où ε est une constante positive.

Considérons pour le système (4.10), l'observateur adaptatif suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + f(\hat{x}, \hat{\Theta}) + B_u u + B_d d + K(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (4.12)$$

avec

$$f(\hat{x}, \hat{\Theta}) = \psi(\hat{x}) + D \phi(\hat{x}) \hat{\Theta}$$

L'algorithme d'estimation adaptative est choisi de la façon suivante :

$$\dot{\hat{\Theta}} = \Gamma \phi^T(\hat{x}) D^T \Sigma (y - \hat{y}) \quad (4.13)$$

où $\Gamma^{-1} = \Gamma^T > 0$ et Σ sont des matrices de dimensions appropriées.

La dynamique de l'erreur d'estimation de l'état e_x est donnée par :

$$\dot{e}_x = (A - KC)e_x + \psi(x) - \psi(\hat{x}) + D\phi(x)\Theta - D\phi(\hat{x})\hat{\Theta}. \quad (4.14)$$

Le but consiste à trouver les matrices K , Σ et Γ telles que \hat{x} et $\hat{\Theta}$ convergent respectivement vers x et Θ .

Dans ce qui suit, nous donnerons une condition suffisante qui garantit la stabilité asymptotique globale à l'origine de l'observateur (4.12) - (4.13). L'analyse de la stabilité est étudiée à l'aide d'une fonction de Lyapunov quadratique et la condition suffisante est exprimée sous la forme d'une LMI. Plus précisément, une condition suffisante pour garantir l'existence de l'observateur est présentée ci-dessous :

Théorème 6. *S'il existe une matrice symétrique et définie positive P , une matrice X et deux scalaires positifs $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ telle que la LMI :*

$$\begin{bmatrix} \eta - C^T X^T - X C & P & P D & C^T \Sigma^T \\ P^T & -\mu_1 I & 0 & 0 \\ D^T P^T & 0 & -\mu_2 I & 0 \\ \Sigma C & 0 & 0 & -\mu_2 \Phi_M^{-2} I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.15)$$

avec

$$\eta = A^T P + P A + \left(\frac{1}{\mu_1} \gamma_\psi^2 + \frac{1}{\mu_2} l_1^2 \gamma_\phi^2 \right) I \quad \text{et} \quad K = P^{-1} X$$

est satisfaite alors (4.12) - (4.13) est un observateur adaptatif pour le système donné par (4.10).

Remarque 3. Notez que la matrice Σ est obtenue sans la contrainte d'égalité habituelle $P D = \Sigma C$ qui est plus restrictive.

Démonstration : La démonstration de ce théorème est réalisée en deux étapes. Tout d'abord, nous analysons la stabilité de l'erreur. Pour ce faire, nous utilisons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = e_x^T P e_x + e_\Theta^T \Gamma^{-1} e_\Theta$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov V le long de la trajectoire de (4.14) est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_x^T [(A - K C)^T P + P(A - K C)] e_x + \Delta^T \psi P e_x + e_x^T P \Delta \psi \\ & + \Delta^T(\phi, \Theta) D^T P e_x + e_x^T P D \Delta(\phi, \Theta) + \dot{e}_\Theta^T \Gamma^{-1} e_\Theta + e_\Theta^T \Gamma^{-1} \dot{e}_\Theta \end{aligned} \quad (4.16)$$

avec

$$\Delta \psi = \psi(x) - \psi(\hat{x}) \quad \text{et} \quad \Delta(\phi, \Theta) = \phi(x) \Theta - \phi(\hat{x}) \hat{\Theta}.$$

L'utilisation de l'inégalité (3.9) permet d'établir les inégalités suivantes :

$$\Delta^T \psi P e_x + e_x^T P \Delta \psi \leq \frac{1}{\mu_1} \Delta^T \psi \Delta \psi + \mu_1 e_x^T P P e_x \quad (4.17)$$

et

$$\Delta^T(\phi, \Theta) D^T P e_x + e_x^T P D \Delta(\phi, \Theta) \leq \frac{1}{\mu_2} \Delta^T(\phi, \Theta) \Delta(\phi, \Theta) + \mu_2 e_x^T P D D^T P e_x \quad (4.18)$$

En vertu des inégalités (4.17) (4.18), nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq e_x^T & \left[(A - K C)^T P + P(A - K C) + \mu_1 P P + \mu_2 P D D^T P \right] e_x \\ & + \frac{1}{\mu_1} \Delta^T \psi \Delta \psi + \frac{1}{\mu_2} \Delta^T(\phi, \Theta) \Delta(\phi, \Theta) + e_x^T P D \Delta(\phi, \Theta) \\ & + \dot{e}_\Theta^T \Gamma^{-1} e_\Theta + e_\Theta^T \Gamma^{-1} \dot{e}_\Theta \end{aligned} \quad (4.19)$$

Puisque ϕ et Θ sont bornées, alors d'après le Lemme 3, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\left\| \phi(x) \Theta - \phi(\hat{x}) \hat{\Theta} \right\| \leq l_1 \gamma_\phi \|\hat{x} - x\| + \Phi_M \left\| \Theta - \hat{\Theta} \right\| \quad (4.20)$$

avec

$$\Phi_M = \sup_{x \in X} \|\phi(x)\|$$

En appliquant l'équation (4.20) et en utilisant la propriété Lipschitz de ψ , l'inégalité (4.19) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq e_x^T & \left[(A - K C)^T P + P(A - K C) + \mu_1 P P + \mu_2 P D D^T P \right. \\ & \left. + \frac{1}{\mu_1} \gamma_\psi^2 I + \frac{1}{\mu_2} l_1^2 \gamma_\phi^2 I \right] e_x + \frac{1}{\mu_2} \Phi_M^2 e_\Theta^T e_\Theta + \dot{e}_\Theta^T \Gamma^{-1} e_\Theta + e_\Theta^T \Gamma^{-1} \dot{e}_\Theta \end{aligned} \quad (4.21)$$

Comme Θ est supposé varier lentement, nous assumons que $\dot{e}_\Theta \simeq -\dot{\hat{\Theta}}$ ([71]).

Ainsi, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq e_x^T & \left[(A - K C)^T P + P(A - K C) + \mu_1 P P + \mu_2 P D D^T P \right. \\ & \left. + \frac{1}{\mu_1} \gamma_\psi^2 I + \frac{1}{\mu_2} l_1^2 \gamma_\phi^2 I \right] e_x + \frac{1}{\mu_2} \Phi_M^2 e_\Theta^T e_\Theta - e_x^T C^T \Sigma^T \phi(\hat{x}) e_\Theta - e_\Theta^T \phi^T(\hat{x}) \Sigma C e_x \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (3.9), on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq e_x^T & \left[(A - K C)^T P + P(A - K C) + \mu_1 P P + \mu_2 P D D^T P \right. \\
& \left. + \frac{1}{\mu_1} \gamma_\psi^2 I + \frac{1}{\mu_2} l_1^2 \gamma_\phi^2 I - \mu_3 C^T \Sigma^T \Sigma C \right] e_x + \frac{1}{\mu_2} \Phi_M^2 e_\Theta^T e_\Theta \\
& - \frac{1}{\mu_3} e_\Theta^T \phi^T(\hat{x}) \phi(\hat{x}) e_\Theta
\end{aligned} \tag{4.22}$$

De l'équation (4.13), nous pouvons démontrer l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{\mu_2} \Phi_M^2 e_\Theta^T e_\Theta - \mu_3 e_x^T C^T \Sigma^T \Sigma C e_x - \frac{1}{\mu_3} e_\Theta^T \phi^T(\hat{x}) \phi(\hat{x}) e_\Theta \leq \frac{1}{\mu_2} \Phi_M^2 e_x^T C^T \Sigma^T \Sigma C e_x.$$

Alors, l'inégalité (4.22) devient :

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq e_x^T & \left[(A - K C)^T P + P(A - K C) + \mu_1 P P + \mu_2 P D D^T P \right. \\
& \left. + \frac{1}{\mu_1} \gamma_\psi^2 I + \frac{1}{\mu_2} l_1^2 \gamma_\phi^2 I + \frac{1}{\mu_2} \Phi_M^2 C^T \Sigma^T \Sigma C \right] e_x
\end{aligned}$$

Par conséquent, une condition suffisante pour que \dot{V} soit définie négative est donnée par :

$$\begin{aligned}
& \left[(A - K C)^T P + P(A - K C) + \mu_1 P P + \mu_2 P D D^T P \right. \\
& \left. + \frac{1}{\mu_1} \gamma_\psi^2 I + \frac{1}{\mu_2} l_1^2 \gamma_\phi^2 I + \frac{1}{\mu_2} \Phi_M^2 C^T \Sigma^T \Sigma C \right] \prec 0
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme classique du complément de Schur (voir Annexe 5.5) et en faisant le changement de variable $X = PK$, nous obtenons l'inégalité (4.15). Ainsi, si (4.15) est réalisée alors la convergence asymptotique vers zéro est assurée. Ceci termine la première étape. Maintenant, et puisque ϕ est une fonction de Lipschitz et que $D\phi$ est PE alors $\phi(x) \ominus \phi(\hat{x}) \hat{\Theta}$ converge vers zéro (voir [8] [18] pour plus de détails) cela prouve que $\hat{\Theta}$ converge vers Θ .

4.4 Application au système d'alimentation en air

Dans cette section, nous considérons le système d'alimentation en air de la PàC (2.23). En outre, il est supposé que les valeurs du débit massique de la sortie du com-

presseur et la pression d'air du collecteur d'admission sont disponibles.

Le modèle décrivant le comportement du système d'alimentation en air développé dans le chapitre précédent a été modifié afin de tenir compte de la présence du défaut. Il s'agit du défaut d'obstruction de l'orifice du collecteur d'admission d'air. Ce défaut est supposé être représenté à travers une diminution de la constante d'entrée de la cathode $k_{ca,in}$. Ainsi, un incrément $\Delta k_{ca,in}$ dans la constante $k_{ca,in}$ qui se traduit par un changement du débit d'air d'entrée de la cathode $W_{ca,in} = \Delta k'_{ca,in}(x_4 - x_1 - x_2 - c_2)$ peut être constaté.

Le modèle de description du système d'alimentation en air devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + \psi(x) + D\phi(x)\Theta + B_u u + B_\xi \xi \\ y = C x \end{cases} \quad (4.23)$$

où $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ est le vecteur d'état. x_1 est la pression partielle de l'oxygène, x_2 est la pression partielle de l'azote, x_3 est la vitesse angulaire du compresseur et x_4 est la pression du collecteur d'admission d'air. u est la commande, ξ est le courant demandé par la charge et $y = [y_1 \ y_2]^T$ est le vecteur de sortie. y_1 est le débit d'air du compresseur et y_2 est la pression du collecteur d'admission d'air. Les matrices A , B_u , B_ξ , b , C , D et les fonctions ψ , ϕ sont données comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_9 & 0 \\ 0 & 0 & c_{13} & c_{15} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_\xi = \begin{bmatrix} c_7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(x)\Theta = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 (-x_1 - x_2 + x_4 - c_2) \\ \bar{c}_8 (-x_1 - x_2 + x_4 - c_2) \\ -c_{13} \left(1 + c_{14} \left(\left(\frac{x_4}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \right) (-x_1 - x_2 + x_4 - c_2) \end{bmatrix} \Delta c_{16}$$

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} -\frac{c_3 x_1}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6} g(x_1, x_2) \\ -\frac{c_3 x_2}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6} g(x_1, x_2) \\ -c_{10} c_{15} \left(\left(\frac{x_4}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \\ c_{13} c_{14} c_{15} \left(\left(\frac{x_4}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) x_3 \end{bmatrix}$$

avec

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} c_{17} (x_1 + x_2 + c_2) \left(\frac{c_{11}}{x_1 + x_2 + c_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{c_{11}}{x_1 + x_2 + c_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} & \text{pour } (x_1 + x_2 + c_2) < \frac{c_{11}}{c_{19}} \\ c_{20} (x_1 + x_2 + c_2) & \text{pour } (x_1 + x_2 + c_2) \geq \frac{c_{11}}{c_{19}} \end{cases} \quad (4.24)$$

Pour estimer les variables d'états et reconstruire le défaut simultanément, nous utilisons un observateur adaptatif de la forme :

$$\begin{cases} \hat{x} = A \hat{x} + \psi(\hat{x}) + D\phi(\hat{x})\hat{\Theta} + B_u u + B_\xi \xi + K(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C \hat{x} \end{cases} \quad (4.25)$$

où \hat{x} , \hat{y} et $\hat{\Theta}$ sont les estimées respectives de x , y et Θ . K est le gain d'observateur.

4.5 Résultats de simulation

Pour illustrer les performances de la méthode de diagnostic à base d'observateur proposé précédemment, le but de cette section est de proposer des résultats de simulation. En utilisant les valeurs numériques données dans l'annexe 5.5, les gains et les constantes définis dans le théorème 6 sont donnés par :

$$P = 10^{-16} \times \begin{bmatrix} 4.09 & 5.84 & -4,32 \times 10^{-4} & 4.39 \\ 5.84 & 4.75 & -7.88 \times 10^{-4} & 4.25 \\ -4.32 \times 10^{-4} & -7.88 \times 10^{-4} & 726.39 & 13185.78 \\ 4.39 & 4.25 & 13185.78 & 377361189.68 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0.28 & 0.01 \\ 0.51 & 0.01 \\ 760454827.18 & 1538548.71 \\ 16.23 & 169053134.68 \end{bmatrix}, \quad K = 10^{18} \times \begin{bmatrix} 2.83 & -6651.62 \\ 1.57 & -220.88 \\ 10535.69 & 20.49 \\ -3.68 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$\mu_1 = 1.22 \times 10^{-14}, \mu_2 = 3.44 \times 10^{-17}, \gamma_\phi = 25.2044 \text{ et } \gamma_\psi = 30.1900.$$

Les résultats de simulation (voir Figures 4.2- 4.6) ont été réalisés par l'application d'une série d'échelons pour représenter le défaut d'obstruction de l'orifice du collecteur d'admission Θ . A travers cette série, le but est de détecter le défaut à travers le modèle considéré. Ce dernier a été simulé dans des situations différentes (voir Figure 4.1), à savoir : absence d'obstruction ($\Delta 1$) et ($\Delta 3$), présence d'une grande obstruction qui vite disparaît ($\Delta 2$), présence d'une petite obstruction qui dure ($\Delta 4$) et finalement présence

d'une importante obstruction qui reste. Les Figures 4.2, 4.3, 4.5 représentent les évolutions des pressions internes et leurs estimations. On constate qu'à l'apparition du défaut, les pressions d'oxygène et d'azote varient fortement. On peut expliquer ceci par le fait que la dynamique de ces pressions dépend du défaut. Aussi, la variable liée au compresseur (voir Figures 4.4) évolue d'une façon indépendante en fonction de la présence du défaut. En outre, le défaut a été reconstruit via un observateur adaptatif (voir Figure 4.6). La convergence de l'observateur est de meilleure qualité comme indiqué ci-dessous.

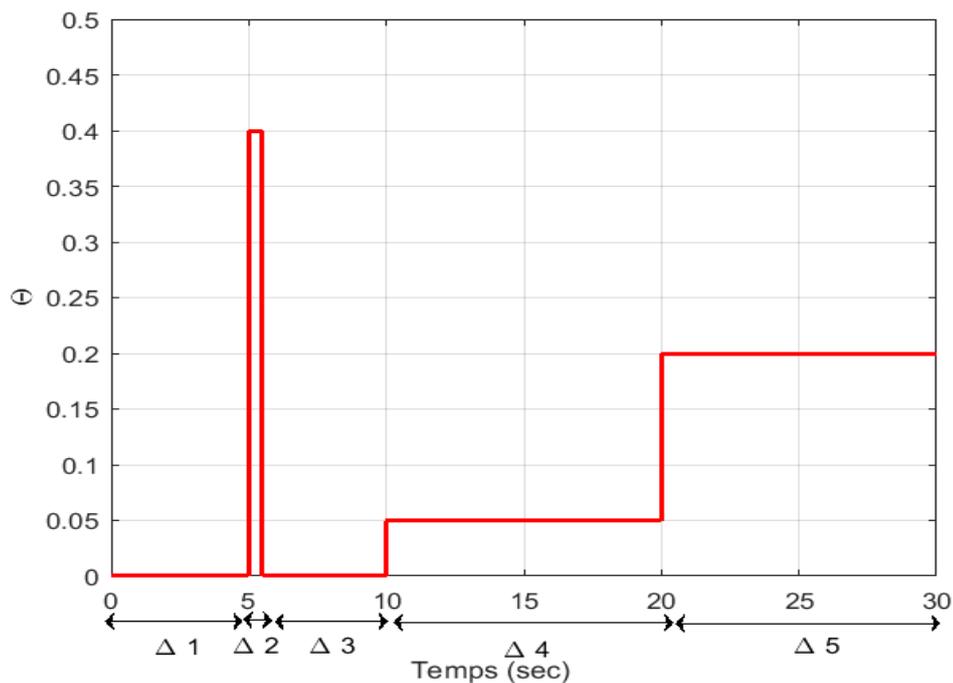


Figure 4.1 – Comportement de l'obstruction

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthodologie de diagnostic pour la pile à combustible. Plus précisément, le but a été de synthétiser un observateur adaptatif qui permet d'estimer simultanément l'état et le défaut d'obstruction de l'orifice du collecteur d'admission. La convergence de l'observateur adaptatif a été obtenue tout au long de l'inégalité matricielle linéaire. Une condition suffisante qui donne à la fois le gain de l'observateur et la matrice de l'algorithmique adaptatif assurant un taux de convergence minimum est proposée. Des résultats de simulation effectués sur le modèle du système d'alimentation en air de la PàC ont été présentés et ont démontré les bonnes performances tant au niveau de l'observateur d'état que de l'estimation paramétrique.

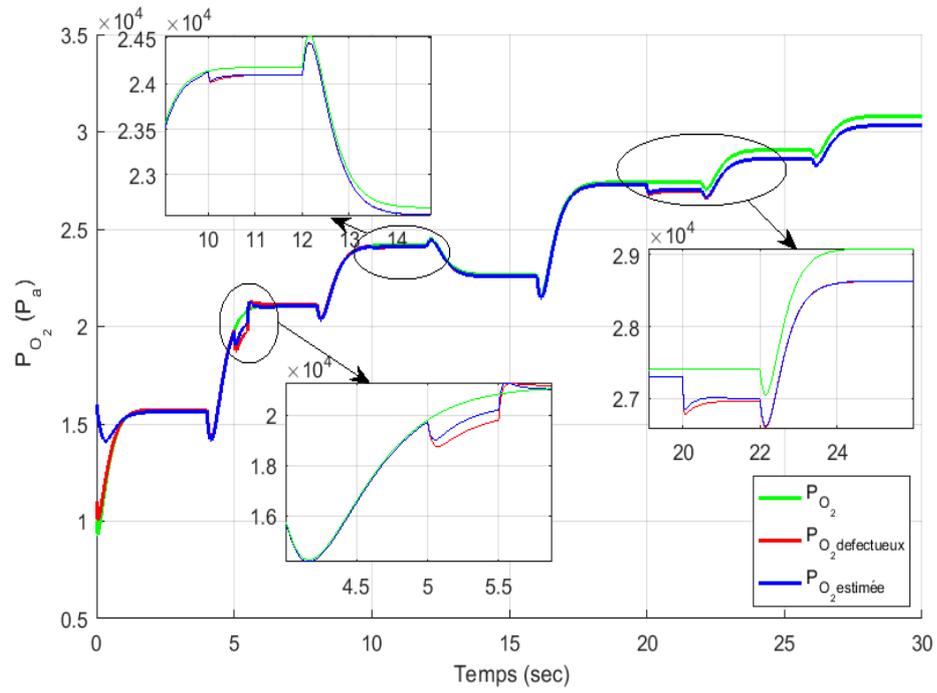


Figure 4.2 – Pression d'oxygène

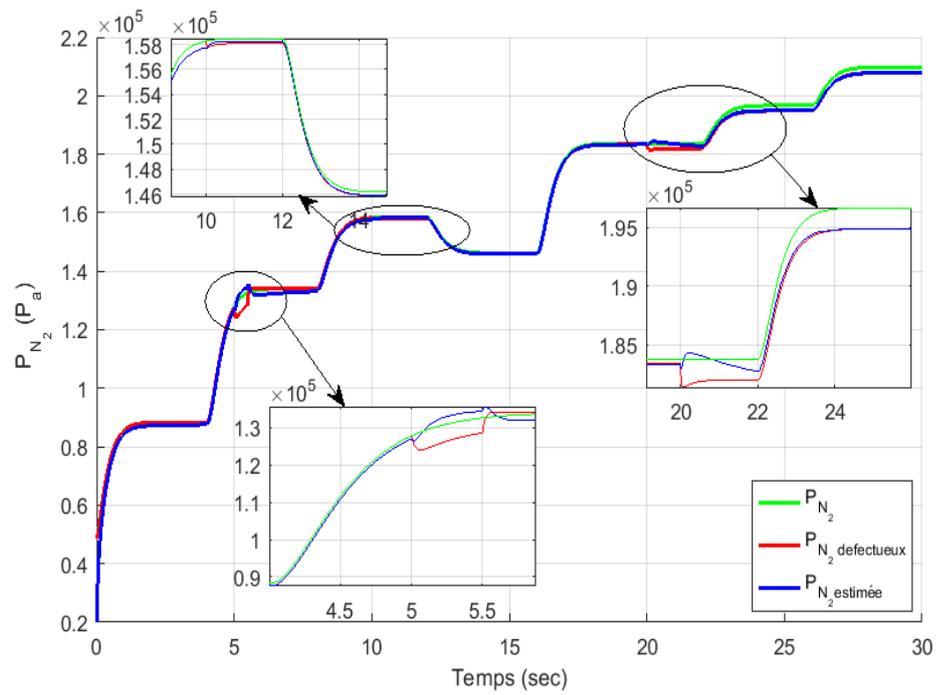


Figure 4.3 – Pression d'azote

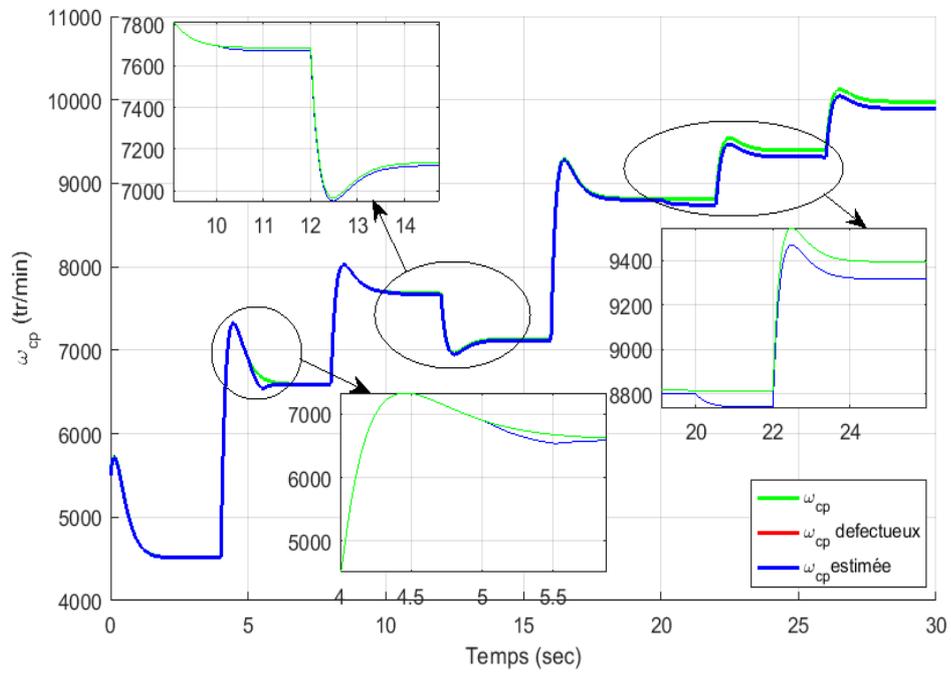


Figure 4.4 – Vitesse angulaire

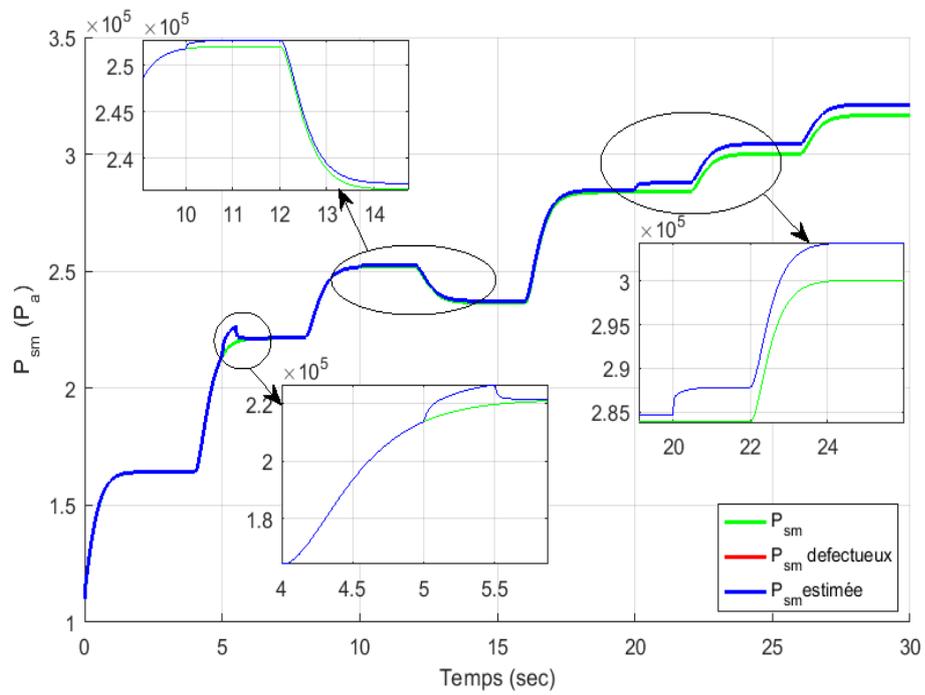


Figure 4.5 – Pression d'air du collecteur

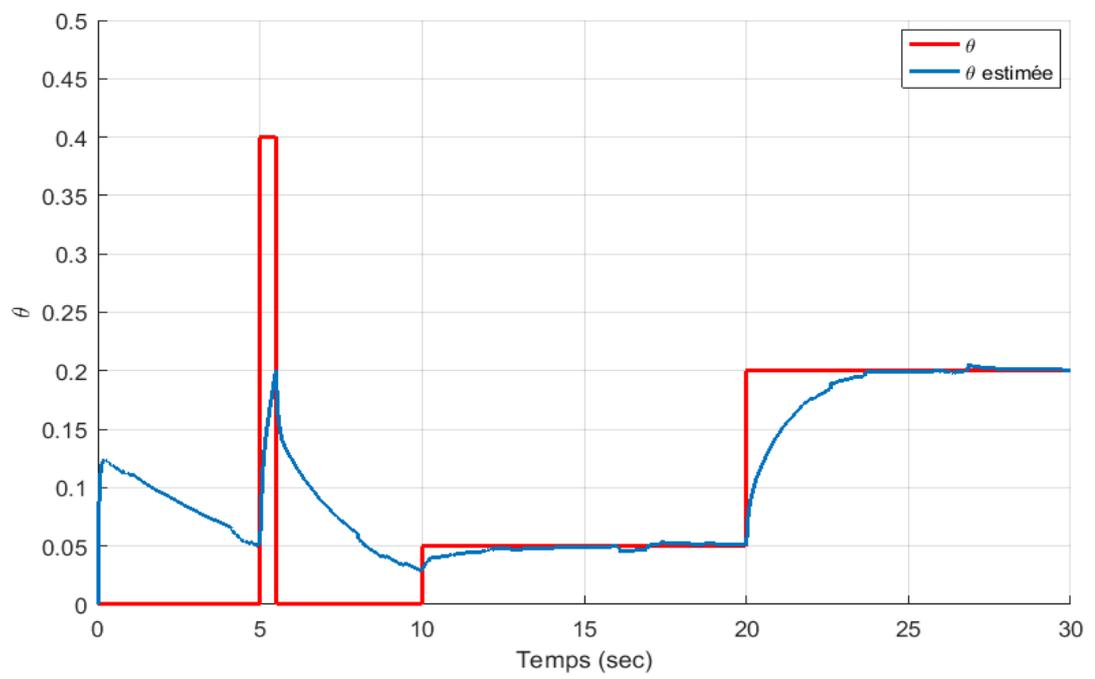


Figure 4.6 – Reconstruction du défaut Θ

5 Contrôle du rapport d'excès d'oxygène par rétroaction

5.1 Introduction

Le problème de la commande du système d'alimentation en air de la pile à combustible a attiré l'intérêt de plusieurs auteurs (voir par exemple [69] et ses références). Dans ce cadre, l'objectif de la commande est d'éviter un manque d'oxygène afin de préserver l'état de santé de la pile. Plusieurs stratégies de commandes ont été proposées pour réguler le rapport d'excès d'oxygène autour d'une valeur constante (voir [40], [69], [93], [95] et [109]).

Des résultats fondés sur la réduction et sur la linéarisation des modèles non-linéaires ont été présentés dans [39] [78] [93]. les auteurs utilisent un PID ou des stratégies de commande par anticipation, c'est-à-dire, une commande prédictive. Des commandes basées sur la technique des modes glissants ont été développées dans [23] [77] [96] pour réguler le rapport d'excès d'oxygène autour d'une valeur constante. Les modèles utilisés sont réduits, cependant, ils ont été validés expérimentalement. Ainsi, plusieurs algorithmes des modes glissants, et notamment celui dit «Super Twisting» ont été testés avec succès.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de la gestion du débit d'air. L'objectif est de proposer une commande permettant de réguler le rapport d'excès d'oxygène à une valeur constante tout en répondant au besoin de la charge. Plus précisément, nous prouvons qu'un modèle de nature non-linéaire, décrivant le comportement du système d'alimentation en air de la pile à combustible (voir [93]) est stabilisable autour d'une valeur souhaitée pour le rapport d'excès d'oxygène en utilisant un retour d'état continu. Il convient de noter que dans ce travail, la stabilisation est prouvée sans aucun type de linéarisation.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la deuxième partie, nous énoncerons un résultat de stabilisation par rétroaction. Dans la troisième section, nous décrivons la synthèse de la loi de commande stabilisante. Dans la quatrième section, les résultats de simulation sont présentés pour illustrer l'efficacité de notre commande. Enfin, une conclusion est donnée.

5.1.1 Énoncé du résultat principal

Le modèle utilisé établi au chapitre 2, décrit le comportement du système d'alimentation en air de la pile à base d'un compresseur rotatif-à-vis. Il s'agit du modèle défini

par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = c_1(-x_1 - x_2 + x_4 - c_2) - \frac{c_3 x_1}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6} \psi(x_1 + x_2 + c_2) - c_7 \xi \\ \dot{x}_2 = c_8(-x_1 - x_2 + x_4 - c_2) - \frac{c_3 x_2}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6} \psi(x_1 + x_2 + c_2) \\ \dot{x}_3 = -c_9 x_3 - c_{10} \left[\left(\frac{x_4}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + c_{12} u \\ \dot{x}_4 = c_{13} \left[1 + c_{14} \left[\left(\frac{x_4}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \right] [c_{15} x_3 - c_{16} (-x_1 - x_2 + x_4 - c_2)] \end{cases} \quad (5.1)$$

où x_1 est la pression partielle d'oxygène P_{O_2} , x_2 est la pression partielle d'azote P_{N_2} , x_3 est la vitesse angulaire du compresseur ω_{cp} et x_4 est la pression d'air du collecteur d'admission P_{sm} . La fonction ψ est le débit d'air à la sortie de la cathode, définie par :

$$\psi(y) = \begin{cases} c_{17} y \left(\frac{c_{11}}{y} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{c_{11}}{y} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} & \text{pour } y \in \left[c_{11}, \frac{c_{11}}{c_{19}} \right] \\ c_{18} y & \text{pour } y > \frac{c_{11}}{c_{19}} \end{cases} \quad (5.2)$$

ξ désigne le courant sollicité par la charge, u représente la tension d'alimentation du moteur du compresseur et est l'entrée de la commande.

Dans la suite de ce travail, nous utilisons D_z pour désigner la plage de fonctionnement où z représente une des variables ξ , λ_{O_2} , P_{O_2} , P_{N_2} , ω_{cp} ou P_{sm} . Il convient de préciser que, les valeurs numériques pour c_i et D_z sont données dans l'annexe 5.5.

Dans ce qui suit, l'objectif est de prouver le résultat suivant.

Proposition 1. *Pour tous $\xi \in D_\xi$ et $\lambda_{O_2}^\infty \in D_{\lambda_{O_2}}$, il existe $u = u(x)$ un retour d'état continu tel que le système en boucle fermée défini à partir de (5.1) vérifie*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{O_2}(t) = \lambda_{O_2}^\infty.$$

5.2 Preuve de la Proposition 1

Ce paragraphe est constitué de quatre parties. La première partie est une introduction à l'approche exploré pour prouver la stabilisation. La deuxième partie sera dédiée à la définition des points de fonctionnement autour desquels la stabilisation est réalisée.

La troisième partie donne une transformation qui permet d'écrire le système autour du point de fonctionnement. Dans la dernière partie nous prouvons la stabilisation au point de fonctionnement.

5.2.1 Méthode de stabilisation considérée

Considérons le système non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ z = g(x) \end{cases} \quad (5.3)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $z \in \mathbb{R}$.

Le but est de stabiliser le système par un retour d'état autour de $z = z^0$. La démarche de stabilisation sera effectuée en trois étapes.

La première étape consiste à déterminer x^0 solution de l'équation :

$$z^0 = g(x^0).$$

Puis, la deuxième étape est dédiée à la réécriture du système (5.3) autour de $\Delta x = x - x^0$ sous la forme suivante :

$$\widehat{\Delta \dot{x}} = f(\Delta x, u). \quad (5.4)$$

Le but est de ramener le problème autour du point de fonctionnement $\Delta x = 0$.

Finalement, dans la troisième étape, un retour d'état est synthétisé pour stabiliser le système en cascade défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, u) \end{cases} \quad (5.5)$$

Tout d'abord, on procède, quand cela est possible à un changement de feedback sous la forme :

$$v = g(x, u). \quad (5.6)$$

Dans ce cas le système (5.5) peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = v \end{cases} \quad (5.7)$$

Ensuite, on synthétise une loi de commande par utilisation d'un résultat classique de la littérature connu comme le « Lemme des intégrateurs ».

Lemme 2. ([53]) *Si le système réduit $\dot{x} = f(x, \bar{v})$ est stabilisable par un retour d'état alors (5.7) est stabilisable.*

Remarque 4. *Il convient de préciser que le résultat d'origine a été amélioré de différentes façons (voir par exemple [74]).*

Dans ce qui suit, nous présentons le principe de la démonstration.

Le système (5.7) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \bar{v}(x)) + (y - \bar{v}(x)) F(x, y) \\ \dot{y} = v \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (5.8)$$

avec

$$F(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} f(x, \tau y) d\tau. \quad (5.9)$$

Il est à noter que, et comme $y \in \mathbb{R}$, F peut être définie explicitement et par morceau de la façon suivante :

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y} (f(x, y) - f(x, 0)) & \text{si } y \neq 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, 0) & \text{si } y = 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

D'après le théorème inverse de Lyapunov [43], il existe une fonction V définie positive telle que :

$$\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x, \bar{v}(x)) \rangle < 0 \quad \text{pour tout } x \neq 0. \quad (5.11)$$

Alors, on considère la fonction définie positive suivante :

$$W(x, y) = V(x) + \frac{1}{2} (y - \bar{v}(x))^2. \quad (5.12)$$

La dérivée de W par rapport à (5.7) est :

$$\begin{aligned}
\dot{W}(x, y) &= \langle \nabla V(x), f(x, \bar{v}(x)) \rangle + (y - \bar{v}(x)) \langle \nabla V(x), F(x, y) \rangle \\
&\quad + (y - \bar{v}(x)) \langle \nabla \bar{v}(x), f(x, y) \rangle + (y - \bar{v}(x)) v \\
&= \langle \nabla V(x), f(x, \bar{v}(x)) \rangle \\
&\quad + (y - \bar{v}(x)) (\langle \nabla V(x), F(x, y) \rangle + \langle \nabla \bar{v}(x), f(x, y) \rangle + v).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

On pose

$$v = -\langle \nabla V(x), F(x, y) \rangle - \langle \nabla \bar{v}(x), f(x, y) \rangle - (y - \bar{v}(x)). \tag{5.14}$$

En remplaçant (5.14) dans (5.13), on obtient :

$$\dot{W}(x, y) = \langle \nabla V(x), f(x, \bar{v}(x)) \rangle - (y - \bar{v}(x))^2. \tag{5.15}$$

D'après (5.11), on en déduit que :

$$\dot{W}(x, y) < 0 \quad \forall (x, y) \neq (0_{\mathbb{R}^n}, 0_{\mathbb{R}}).$$

Finalement, le système bouclé, défini à partir de (5.7) avec le retour d'état (5.14) est globalement asymptotiquement stable.

5.2.2 Définition des points de fonctionnement

Soit $\lambda_{O_2}^0$ une valeur souhaitée pour le rapport d'excès d'oxygène. Soit aussi x^0 le point de fonctionnement correspondant à $\lambda_{O_2}^0$. Dans une première étape, nous définissons explicitement la valeur de x^0 . Pour ce faire, nous considérons la relation définie par (voir chapitre 2) :

$$\lambda_{O_2}^\infty = \frac{c_{20}}{c_{21}\xi} (-x_1^0 - x_2^0 + x_4^0 - c_2) \tag{5.16}$$

et les contraintes sur le point d'équilibre x^0 sont données par :

$$\begin{cases} c_1 \frac{c_{21}\xi}{c_{20}} \lambda_{O_2}^\infty - x_1^0 \psi(x_1^0 + x_2^0 + c_2) - c_7 \xi = 0 \\ c_8 \frac{c_{21}\xi}{c_{20}} \lambda_{O_2}^\infty - x_2^0 \psi(x_1^0 + x_2^0 + c_2) = 0 \\ c_{15} x_3^0 - \frac{c_{16} c_{21} \xi}{c_{20}} \lambda_{O_2}^\infty = 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

En utilisant les deux premières équations du système (5.17), nous obtenons :

$$\left(\frac{c_1 c_{21}}{c_{20}} \lambda_{O_2}^\infty - c_7 \right) \frac{1}{x_1^0} = \left(\frac{c_8 c_{21}}{c_{20}} \lambda_{O_2}^\infty - c_7 \right) \frac{1}{x_2^0}.$$

Par conséquent, nous en déduisons que :

$$x_2^0 = \beta(\lambda_{O_2}^\infty) x_1^0 \quad (5.18)$$

avec

$$\beta(\lambda_{O_2}^\infty) = \frac{c_8 c_{21} \lambda_{O_2}^\infty}{c_1 c_{21} \lambda_{O_2}^\infty - c_7 c_{20}}.$$

Cette fonction $\beta(\lambda_{O_2}^\infty)$ est positive le long de la plage de fonctionnement $D_{\lambda_{O_2}}$ (voir la Figure 5.1). En outre, à partir de l'égalité (5.16) et en utilisant l'équation (5.18), nous avons :

$$x_4^0 = (1 + \beta(\lambda_{O_2}^\infty)) x_1^0 + \eta(\lambda_{O_2}^\infty, \xi) \quad (5.19)$$

où

$$\eta(\lambda_{O_2}^\infty, \xi) = c_2 + \lambda_{O_2}^\infty \frac{c_{21} \xi}{c_{20}}.$$

Finalement, à partir de (5.18) (5.19) et en utilisant la troisième équation du système (5.17), on en déduit que le point de fonctionnement correspondant à une valeur d'excès d'oxygène donnée $\lambda_{O_2}^\infty$ est défini par :

$$x^0(\lambda_{O_2}^\infty) = (x_1^0, \beta(\lambda_{O_2}^\infty) x_1^0, \vartheta(\lambda_{O_2}^\infty, \xi), x_1^0 (1 + \beta(\lambda_{O_2}^\infty)) + \eta(\lambda_{O_2}^\infty, \xi))^T \quad (5.20)$$

avec

$$\vartheta(\lambda_{O_2}^\infty, \xi) = \frac{c_{16} c_{21} \xi \lambda_{O_2}^\infty}{c_{15} c_{20}}. \quad (5.21)$$

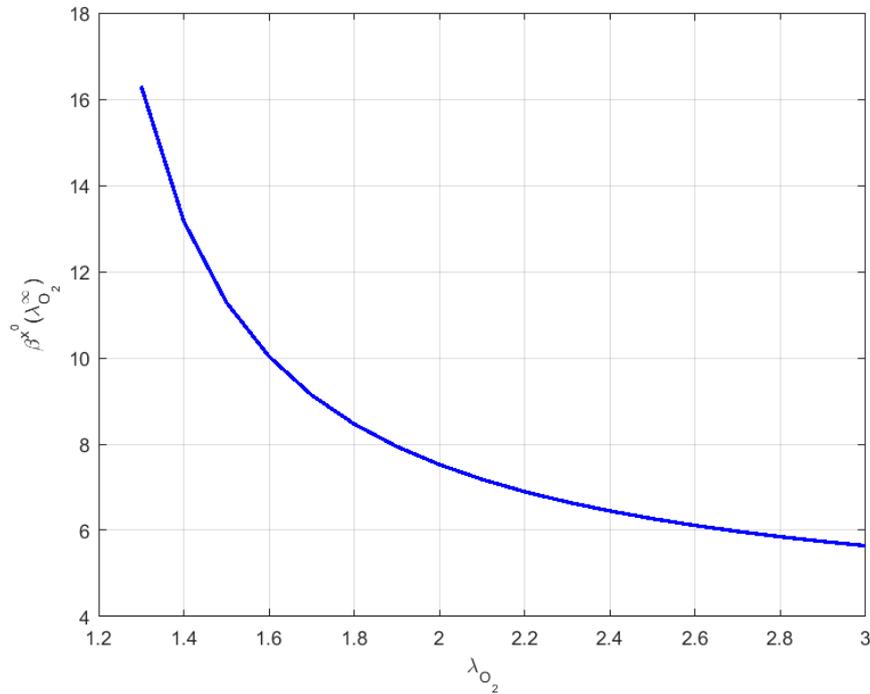


Figure 5.1 – Comportement de β en fonction de $\lambda_{O_2}^{\infty}$

Maintenant, à partir de la première équation du système (5.17) et en utilisant (5.18), nous obtenons :

$$\xi \left(\frac{c_1 c_{21} \lambda_{O_2}^{\infty}}{c_{20}} - c_7 \right) = x_1^0 \psi(x_1^0 (1 + \beta(\lambda_{O_2}^{\infty})) + c_2). \quad (5.22)$$

Puisque ψ est une fonction croissante, pour des valeurs données de $\xi \in D_{\xi}$ et $\lambda_{O_2}^{\infty} \in D_{\lambda_{O_2}}$, il existe une seule valeur de $x_1^0 \in D_{P_{O_2}}$ solution de l'équation (5.22). Finalement, pour des valeurs données de ξ et $\lambda_{O_2}^{\infty}$, il existe un seul point d'équilibre correspondant et est défini par (5.20) et (5.22).

5.2.3 Transformation du système

La deuxième étape, dans notre analyse, consiste à réécrire le modèle autour du point d'équilibre défini par (5.20) et (5.22). Pour ce faire, nous considérons la variable définie par $\Delta x = x - x^0$ et nous réécrivons le système (5.1) sous la forme $\widehat{\Delta x} = f(\Delta x, u)$ où f désigne la dynamique qui sera déterminée explicitement.

La dérivée par rapport au temps de Δx_1 est donnée par :

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta x_1} &= c_1 \left(-(\Delta x_1 + x_1^0) - (\Delta x_2 + x_2^0) + (\Delta x_4 + x_4^0) - c_2 \right) \\
&\quad - \frac{c_3 (\Delta x_1 + x_1^0) \psi (\Delta x_1 + x_1^0 + \Delta x_2 + x_2^0 + c_2)}{c_4 (\Delta x_1 + x_1^0) + c_5 (\Delta x_2 + x_2^0) + c_6} - c_7 \xi \\
&= c_1 (-\Delta x_1 - \Delta x_2 + \Delta x_4) - \frac{c_3 \Delta x_1 \psi (\Delta x_1 + \Delta x_2 + c_2^{x^0})}{c_4 \Delta x_1 + c_5 \Delta x_2 + c_6^{x^0}} \\
&\quad - \frac{c_3 x_1^0 \psi (\Delta x_1 + \Delta x_2 + c_2^{x^0})}{c_4 \Delta x_1 + c_5 \Delta x_2 + c_6^{x^0}} + c_1 (-x_1^0 - x_2^0 + x_4^0 - c_2) - c_7 \xi
\end{aligned} \tag{5.23}$$

avec

$$\begin{aligned}
c_2^{x^0} &= x_1^0 + x_2^0 + c_2 \\
&= (1 + \beta (\lambda_{O_2}^\infty)) x_1^0 + c_2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
c_6^{x^0} &= c_4 x_1^0 + c_5 x_2^0 + c_6 \\
&= (c_4 + c_5 \beta (\lambda_{O_2}^\infty)) x_1^0 + c_6.
\end{aligned}$$

Comme x^0 est un point d'équilibre, nous avons :

$$c_1 (-x_1^0 - x_2^0 + x_4^0 - c_2) - c_7 \xi = \frac{c_3 x_1^0 \psi (c_2^{x^0})}{c_6^{x^0}}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta x_1} &= c_1 (-\Delta x_1 - \Delta x_2 + \Delta x_4) - \frac{c_3 \Delta x_1 \psi (\Delta x_1 + \Delta x_2 + c_2^{x^0})}{c_4 \Delta x_1 + c_5 \Delta x_2 + c_6^{x^0}} \\
&\quad + c_3 x_1^0 \left[\frac{\psi (c_2^{x^0})}{c_6^{x^0}} - \frac{\psi (\Delta x_1 + \Delta x_2 + c_2^{x^0})}{c_4 \Delta x_1 + c_5 \Delta x_2 + c_6^{x^0}} \right].
\end{aligned} \tag{5.24}$$

La dérivée par rapport au temps de Δx_2 est donnée par :

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta x_2} &= c_8 \left(-(\Delta x_1 + x_1^0) - (\Delta x_2 + x_2^0) + (\Delta x_4 + x_4^0) - c_2 \right) \\ &\quad - \frac{c_3 (\Delta x_2 + x_2^0) \psi (\Delta x_1 + x_1^0 + \Delta x_2 + x_2^0 + c_2)}{c_4 (\Delta x_1 + x_1^0) + c_5 (\Delta x_2 + x_2^0) + c_6} \\ &= c_8 (-\Delta x_1 - \Delta x_2 + \Delta x_4) - \frac{c_3 \Delta x_2 \psi (\Delta x_1 + \Delta x_2 + c_2^{x^0})}{c_4 \Delta x_1 + c_5 \Delta x_2 + c_6^{x^0}} \\ &\quad - \frac{c_3 x_2^0 \psi (\Delta x_1 + \Delta x_2 + c_2^{x^0})}{c_4 \Delta x_1 + c_5 \Delta x_2 + c_6^{x^0}} + c_8 (-x_1^0 - x_2^0 + x_4^0 - c_2).\end{aligned}$$

Comme x^0 est un point d'équilibre, nous avons aussi :

$$c_8 (-x_1^0 - x_2^0 + x_4^0 - c_2) = \frac{c_3 x_2^0 \psi (c_2^{x^0})}{c_6^{x^0}}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta x_2} &= c_8 (-\Delta x_1 - \Delta x_2 + \Delta x_4) - \frac{c_3 \Delta x_2 \psi (\Delta x_1 + \Delta x_2 + c_2^{x^0})}{c_4 \Delta x_1 + c_5 \Delta x_2 + c_6^{x^0}} \\ &\quad + c_3 x_2^0 \left[\frac{\psi (c_2^{x^0})}{c_6^{x^0}} - \frac{\psi (\Delta x_1 + \Delta x_2 + c_2^{x^0})}{c_4 \Delta x_1 + c_5 \Delta x_2 + c_6^{x^0}} \right].\end{aligned}\tag{5.25}$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\widehat{\Delta x_3} = -c_9 (\Delta x_3 + x_3^0) - c_{10} \left[\left(\frac{\Delta x_4 + x_4^0}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + c_{12} u\tag{5.26}$$

et

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta x_4} &= c_{13} \left[1 + c_{14} \left[\left(\frac{\Delta x_4 + x_4^0}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \right] \\ &\quad \times \left[c_{15} \Delta x_3 - c_{16} [-\Delta x_1 - \Delta x_2 + \Delta x_4] + c_{15}^{x^0} \right]\end{aligned}\tag{5.27}$$

où

$$c_{15}^{x^0} = c_{15}x_3^0 - c_{16} [-x_1^0 - x_2^0 + x_4^0 - c_2]. \quad (5.28)$$

Finalement, en considérant les équations (5.24), (5.25), (5.26) et (5.27) et en adoptant la notation x à la place de Δx , le système (5.1) peut être réécrit autour de x^0 , comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = c_1(-x_1 - x_2 + x_4) - x_1 \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) + x_1^0 g^{x^0}(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = c_8(-x_1 - x_2 + x_4) - x_2 \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) + x_2^0 g^{x^0}(x_1, x_2) \\ \dot{x}_3 = -c_9(x_3 + x_3^0) - c_{10} \left[\left(\frac{x_4 + x_4^0}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + c_{12}u \\ \dot{x}_4 = c_{13} \left[1 + c_{14} \left[\left(\frac{x_4 + x_4^0}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \right] [c_{15}x_3 - c_{16}[-x_1 - x_2 + x_4] + c_{15}^{x^0}] \end{cases} \quad (5.29)$$

où les fonctions $\bar{\psi}^{x^0}$ et g^{x^0} sont définies par :

$$\bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) = c_3 \frac{\psi(x_1 + x_2 + c_2^{x^0})}{c_4x_1 + c_5x_2 + c_6^{x^0}}$$

et

$$g^{x^0}(x_1, x_2) = c_3 \left[\frac{\psi(c_2^{x^0})}{c_6^{x^0}} - \frac{\psi(x_1 + x_2 + c_2^{x^0})}{c_4x_1 + c_5x_2 + c_6^{x^0}} \right]. \quad (5.30)$$

5.2.4 Démonstration de la stabilisabilité

La troisième étape consiste à démontrer la stabilisation du système (5.29) autour de l'origine. Plus précisément, nous exploitons un résultat classique connu sous « Lemme des intégrateurs » (voir [21] [73] [74] et [75]).

Tout d'abord, considérons le feedback préliminaire défini par :

$$u_1 = -c_9(x_3 + x_3^0) - c_{10} \left[\left(\frac{x_4 + x_4^0}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + c_{12}u. \quad (5.31)$$

Le système (5.29) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = c_1(-x_1 - x_2 + x_4) - x_1 \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) + x_1^0 g^{x^0}(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = c_8(-x_1 - x_2 + x_4) - x_2 \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) + x_2^0 g^{x^0}(x_1, x_2) \\ \dot{x}_3 = u_1 \\ \dot{x}_4 = c_{13} \left[1 + c_{14} \left[\left(\frac{x_4 + x_4^0}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \right] [c_{15} x_3 - c_{16} [-x_1 - x_2 + x_4] + c_{15}^{x^0}] \end{array} \right. \quad (5.32)$$

Maintenant, afin de prouver la stabilisabilité de (5.32), et d'après Lemme 2, il suffit d'établir la stabilisation du système réduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = c_1(-x_1 - x_2 + x_4) - x_1 \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) + x_1^0 g^{x^0}(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = c_8(-x_1 - x_2 + x_4) - x_2 \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) + x_2^0 g^{x^0}(x_1, x_2) \\ \dot{x}_4 = c_{13} \left[1 + c_{14} \left[\left(\frac{x_4 + x_4^0}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \right] [c_{15} u_2 - c_{16} [-x_1 - x_2 + x_4] + c_{15}^{x^0}] \end{array} \right. \quad (5.33)$$

où u_2 désigne le nouveau contrôle.

Pour ce faire, considérons d'abord le feedback préliminaire défini par :

$$u_3 = \theta^{x^0}(x_4) (c_{15} u_2 - c_{16} (-x_1 - x_2 + x_4) + c_{15}^{x^0}) \quad (5.34)$$

avec

$$\theta^{x^0}(x_4) = c_{13} \left(1 + c_{14} \left(\left(\frac{x_4 + x_4^0}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \right).$$

Il est à noter que ce feedback préliminaire est bien défini puisque $\theta^{x^0}(x_4)$ est strictement positive le long de la plage de fonctionnement $D_{\Delta x_4}^{x^0}$ (voir la Figure 5.2).

Le système (5.33) (5.34) s'écrit explicitement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = c_1(-x_1 - x_2 + x_4) - x_1 \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) + x_1^0 g^{x^0}(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = c_8(-x_1 - x_2 + x_4) - x_2 \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) + x_2^0 g^{x^0}(x_1, x_2) \\ \dot{x}_4 = u_3 \end{array} \right. \quad (5.35)$$

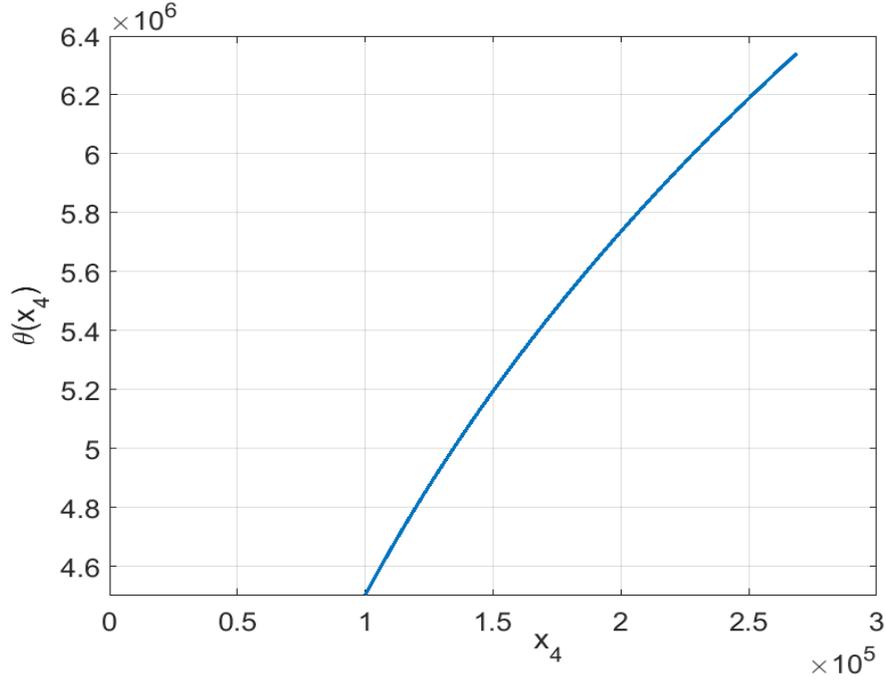


Figure 5.2 – Comportement de θ en fonction de x_4

Afin d'établir la stabilisation de (5.35), nous considérons le nouveau système réduit défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = c_1(-x_1 - x_2 + u_4) - x_1 \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) + x_1^0 g^{x^0}(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = c_8(-x_1 - x_2 + u_4) - x_2 \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) + x_2^0 g^{x^0}(x_1, x_2) \end{cases} \quad (5.36)$$

où u_4 désigne le nouveau contrôle.

Pour des raisons de simplicité, on procède d'abord par le nouveau feedback préliminaire défini par :

$$u_5 = c_1(-x_1 - x_2 + u_4). \quad (5.37)$$

Ainsi, le système (5.36) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_5 - x_1 \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) + x_1^0 g^{x^0}(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = \frac{c_1}{c_8} u_5 - x_2 \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) + x_2^0 g^{x^0}(x_1, x_2) \end{cases} \quad (5.38)$$

Dans ce qui suit, nous prouvons la stabilisation de (5.38). Soit $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction de Lyapunov définie par :

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left(x_1 - \frac{c_8}{c_1} x_2 \right)^2 + \frac{1}{2} x_2^2.$$

Il est clair que V est une fonction définie positive. La dérivée de V le long des trajectoires du système (5.36) est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \left(x_1 - \frac{c_8}{c_1} x_2 \right) \left(u_5 - x_1 \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) + x_1^0 g^{x^0}(x_1, x_2) \right) \\ &\quad + \left(x_2 - \frac{c_8}{c_1} \left(x_1 - \frac{c_8}{c_1} x_2 \right) \right) \left(\frac{c_1}{c_8} u_5 - x_2 \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) + x_2^0 g^{x^0}(x_1, x_2) \right). \end{aligned}$$

Un calcul direct montre que :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \left[\left(x_1 - \frac{c_8}{c_1} x_2 \right) + \frac{c_1}{c_8} \left(x_2 - \frac{c_8}{c_1} \left(x_1 - \frac{c_8}{c_1} x_2 \right) \right) \right] u_5 \\ &\quad - \left[x_1 \left(x_1 - \frac{c_8}{c_1} x_2 \right) + x_2 \left(x_2 - \frac{c_8}{c_1} \left(x_1 - \frac{c_8}{c_1} x_2 \right) \right) \right] \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) \quad (5.39) \\ &\quad + \left[x_1^0 \left(x_1 - \frac{c_8}{c_1} x_2 \right) + x_2^0 \left(x_2 - \frac{c_8}{c_1} \left(x_1 - \frac{c_8}{c_1} x_2 \right) \right) \right] g^{x^0}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

D'après (5.18) et en réarrangeant l'expression (5.39) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{c_1}{c_8} x_2 u_5 - \left[\left(x_1 - \frac{c_8}{c_1} x_2 \right)^2 + x_2^2 \right] \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) \\ &\quad + \left[x_1 \left(1 - \frac{c_8}{c_1} \beta(\lambda_{O_2}^\infty) \right) + x_2 \bar{\beta}(\lambda_{O_2}^\infty) \right] x_1^0 g^{x^0}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (5.40)$$

avec

$$\bar{\beta}(\lambda_{O_2}^\infty) = -\frac{c_8}{c_1} + \beta(\lambda_{O_2}^\infty) \left(1 + \left(\frac{c_8}{c_1} \right)^2 \right)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) = & x_2 \left(\frac{c_1}{c_8} u_5 + \bar{\beta}(\lambda_{O_2}^\infty) x_1^0 g^{x^0}(x_1, x_2) \right) - \left[\left(x_1 - \frac{c_8}{c_1} x_2 \right)^2 + x_2^2 \right] \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) \\ & + x_1 \left(1 - \frac{c_8}{c_1} \beta(\lambda_{O_2}^\infty) \right) x_1^0 g^{x^0}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (5.41)$$

La fonction g^{x^0} est au moins de classe C^2 . Alors, elle peut être décomposée de la façon suivante :

$$g^{x^0}(x_1, x_2) = g^{x^0}(x_1, 0) + x_2 g_1^{x^0}(x_1, x_2)$$

où $g_1^{x^0}$ est définie par :

$$g_1^{x^0}(x_1, x_2) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0}(x_1, \tau x_2) d\tau.$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) = & - \left[\left(x_1 - \frac{c_8}{c_1} x_2 \right)^2 + x_2^2 \right] \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) \\ & + x_2 \left[\frac{c_1}{c_8} u_5 + x_1^0 x_1 \left(1 - \frac{c_8}{c_1} \beta(\lambda_{O_2}^\infty) \right) g_1^{x^0}(x_1, x_2) + \bar{\beta}(\lambda_{O_2}^\infty) x_1^0 g^{x^0}(x_1, x_2) \right] \\ & + x_1 \left(1 - \frac{c_8}{c_1} \beta(\lambda_{O_2}^\infty) \right) x_1^0 g^{x^0}(x_1, 0). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Considérons la loi de commande définie par :

$$u_5 = \frac{c_8}{c_1} \left[-x_1^0 x_1 \left(1 - \frac{c_8}{c_1} \beta(\lambda_{O_2}^\infty) \right) g_1^{x^0}(x_1, x_2) - \bar{\beta}(\lambda_{O_2}^\infty) x_1^0 g^{x^0}(x_1, x_2) - x_2 \right]. \quad (5.43)$$

Alors, la dérivée de V par rapport au système bouclé (5.38) (5.43) est donnée par :

$$\dot{V}(x_1, x_2) = - \left[\left(x_1 - \frac{c_8}{c_1} x_2 \right)^2 + x_2^2 \right] \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) + \left(1 - \frac{c_8}{c_1} \beta(\lambda_{O_2}^\infty) \right) x_1^0 x_1 g^{x^0}(x_1, 0). \quad (5.44)$$

D'après les valeurs numériques considérées dans ce travail (voir l'Annexe 5.5) et selon

les valeurs des fonctions $\beta(\lambda_{O_2}^\infty)$ et g^{x^0} (voir les Figures 5.1 et 5.3), on déduit que :

$$\begin{cases} c_3 \left(1 - \frac{c_8}{c_1} \beta(\lambda_{O_2}^\infty) \right) < 0 \\ x_1 g^{x^0}(x_1, 0) \geq 0 \quad \text{pour tout } x_1 \in D_{\Delta x_1}^0. \end{cases}$$

On en déduit que \dot{V} est une fonction définie négative. Finalement, le système en boucle fermée (5.38) (5.43) est asymptotiquement stable.

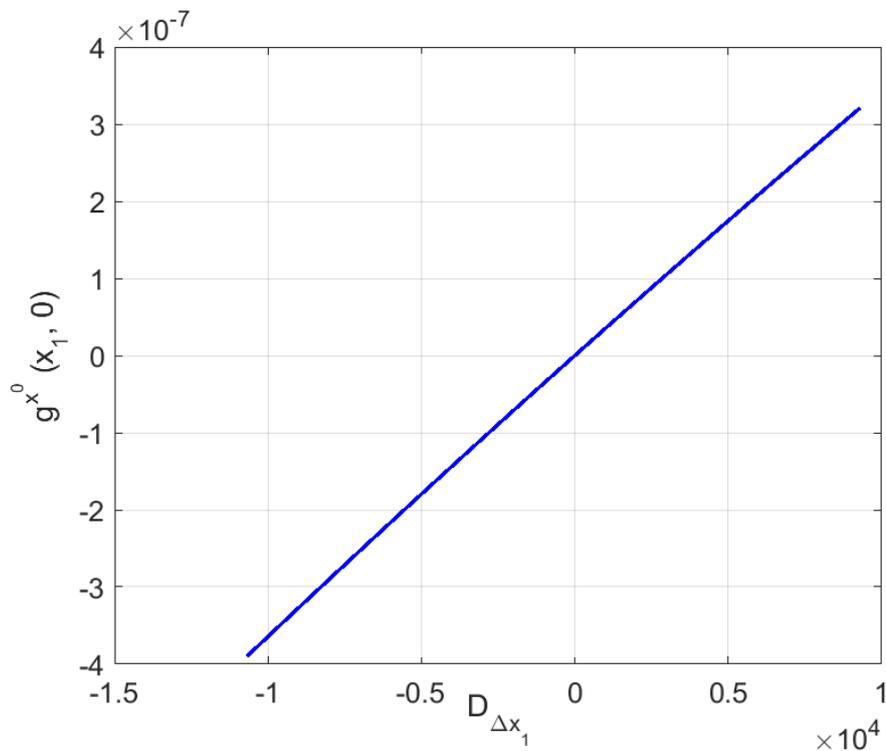


Figure 5.3 – Comportement de g^{x^0} en fonction de x_1

Ceci termine la démonstration que le système (5.29) est stabilisable à l'origine.

5.3 Synthèse de la loi de commande stabilisante

L'objectif de cette section est de donner explicitement la loi de commande par rétroaction. Des calculs directs mais longs, reportés dans l'Annexe 5.5, montrent que la commande par retour d'état est définie par :

$$\begin{aligned}
u(x) = & \frac{1}{c_{12}} \left[-c_{15} \theta^{x^0}(x_4) (x_4 - u_4(x_1, x_2)) \right. \\
& - \left[\frac{(\bar{\theta}^{x^0}(x_4) \delta_1 - c_{16})}{c_{15}} f_1^{x^0} + \frac{(\bar{\theta}^{x^0}(x_4) \delta_2 - c_{16})}{c_{15}} f_2^{x^0} + \frac{(-\bar{\theta}^{x^0}(x_4) \delta_2 + c_{16})}{c_{15}} h_3^{x^0} \right. \\
& + \theta_1^{\lambda_{O_2}^\infty}(x_4) \left[x_1 \left[\frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} g_1^{x^0} (f_1^{x^0})^2 + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_2} g_1^{x^0} (f_2^{x^0})^2 + f_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_2^{x^0} \right. \right. \\
& + f_2^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_1^{x^0} + f_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1^{x^0} + f_2^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_2^{x^0} - f_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} \\
& + f_1^{x^0} f_2^{x^0} \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} g_1^{x^0} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_2} g_1^{x^0} \right) - f_2^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} + h_3^{x^0} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_4} f_1^{x^0} + \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_4} f_2^{x^0} \right) \left. \right] \\
& + 2f_1^{x^0} f_2^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} + g_1^{x^0} \left(f_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1^{x^0} + f_2^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_1^{x^0} - f_1^{x^0} + h_3^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_4} f_1^{x^0} \right) + 2(f_1^{x^0})^2 \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} \left. \right] \\
& + \theta_2^{\lambda_{O_2}^\infty}(x_4) \left[(f_1^{x^0})^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} g^{x^0} + (f_2^{x^0})^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 x_2} g^{x^0} + 2f_1^{x^0} f_2^{x^0} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} g^{x^0} \right. \\
& + f_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1^{x^0} + f_2^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_2^{x^0} + f_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_2^{x^0} - f_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0} \\
& + f_2^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_1^{x^0} - f_2^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0} + h_3^{x^0} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_4} f_1^{x^0} + \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_4} f_2^{x^0} \right) \left. \right] \\
& + \frac{\bar{\theta}^{x^0}(x_4)}{c_{15}} \left[f_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1^{x^0} + f_2^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_1^{x^0} + \delta_3 \left(f_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_2^{x^0} + f_2^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_2^{x^0} \right) \right. \\
& + h_3^{x^0} \left(\frac{\partial}{\partial x_4} f_1^{x^0} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial x_4} f_2^{x^0} \right) \left. \right] + \Gamma^{x^0} \left. \right] + \Omega^{x^0}(x) \left. \right]
\end{aligned} \tag{5.45}$$

avec

$$\begin{aligned}
\Gamma^{x^0} = & \frac{d}{dx_4} \theta_1^{\lambda_{O_2}^\infty}(x_4) h_3^{x^0} \left[\left(g_1^{x^0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} \right) f_1^{x^0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} f_2^{x^0} - x_1 g_1^{x^0} \right] \\
& + \frac{d}{dx_4} \theta_2^{\lambda_{O_2}^\infty}(x_4) h_3^{x^0} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0} f_1^{x^0} + \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_2^{x^0} - g^{x^0} \right] \\
& + \frac{1}{c_{15}} \frac{d}{dx_4} \bar{\theta}^{x^0}(x_4) h_3^{x^0} \left[f_1^{x^0} + \delta_3 f_2^{x^0} + (x_1 \delta_1 + x_2 \delta_2 - x_4) \right]
\end{aligned} \tag{5.46}$$

et

$$\begin{aligned}
\Omega^{x^0}(x) = & -x_3 + \frac{1}{c_{15}} \left(\frac{u_3(x_1, x_2, x_4)}{\theta^{x^0}(x_4)} + c_{16}(-x_1 - x_2 + x_4) - c_{15}^{x^0} \right) \\
& + c_9(x_3 + x_3^0) + c_{10} \left(\left(\frac{x_4 + x_4^0}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)
\end{aligned} \tag{5.47}$$

où

$$\begin{aligned}
u_4 = & -\frac{c_8}{c_1^2} x_1^0 \left[x_1 \left(1 - \frac{c_8}{c_1} \beta(\lambda_{O_2}^\infty) \right) g_1^{x^0}(x_1, x_2) + \bar{\beta}(\lambda_{O_2}^\infty) g^{x^0}(x_1, x_2) \right] \\
& + x_1 + \frac{c_1^2 - c_8}{c_1^2} x_2
\end{aligned} \tag{5.48}$$

et

$$u_3 = - \langle \nabla V(x_1, x_2), F^{x^0} \rangle - \langle \nabla u_4, f^{x^0}(x_1, x_2, x_4) \rangle - (x_4 - u_4) \tag{5.49}$$

5.4 Résultats de simulation

Pour illustrer les performances de la loi de commande obtenue précédemment, le but de ce paragraphe est de proposer des résultats de simulation. Les valeurs numériques pour les plages de fonctionnement des différentes variables sont données par le Table 5.1. Tout d'abord, nous présentons l'évolution des valeurs de point de fonctionne-

Variable	Intitulé	Plage de fonctionnement	Unité
ξ	Courant de la charge	[100, 300]	Ampère
u	Tension d'entrée	[100, 240]	Volt
x_1	Pression d'oxygène	[10^4 , 4×10^4]	Pascal
x_2	Pression d'azote	[8×10^4 , 3×10^5]	Pascal
x_3	Vitesse angulaire	[3×10^3 , 1.8×10^4]	Tour par minute
x_4	Pression d'air du collecteur	[10^5 , 5×10^5]	Pascal

Table 5.1 – Plages de fonctionnement

ment en fonction des valeurs du courant de la charge et des valeurs du rapport de l'excès d'oxygène. En effet, la courbe Figure 5.5a donne le comportement de x_1^0 correspondant aux différentes valeurs du courant ξ sollicité par la charge. Ce comportement est aussi déterminé en fonction des valeurs de $\lambda_{O_2}^\infty$ souhaitées. Il convient de préciser que cette relation, exprimée à travers la relation (5.22), est non-linéaire. A partir de cette détermination, les valeurs des différentes composantes de x^0 sont déterminées à partir de (5.20). Elles sont illustrées à travers les Figures 5.5b-5.5d. La relation de linéarité, définie pour des valeurs fixes de $\lambda_{O_2}^\infty$, entre x_3^0 et ξ définie par (5.21) clairement illustré la Figure 5.5c. Les relations de non-linéarité respectivement entre, d'une part, les composantes x_2^0 , x_4^0 et, d'autres part, les valeurs de ξ et $\lambda_{O_2}^\infty$ souhaitées, sont données par Figure 5.5b et Figure 5.5d.

Tous les résultats de simulation ont été réalisés par une sollicitation de la charge assumée être constituée d'une série de trois échelons d'amplitudes différentes (voir Figure 5.4).

Deux types de résultats sont proposés selon la valeur de la commande. Plus précisément, le premier groupe est fondé sur l'utilisation directe de l'expression de la commande donnée par (5.45). Dans ce cas, les valeurs de toutes les variables d'état sont accessibles. Concernant le deuxième groupe, et afin de s'affranchir de l'hypothèse d'accessibilité de l'état du système, la loi de commande est basée sur la synthèse de l'observateur proposée dans le chapitre 4.

Pour chaque groupe, les simulations sont réalisées dans le cas de deux variables distinguées du rapport d'excès d'oxygène. Le but est d'analyser les performances dans au

moins deux cas caractérisés par des choix différents de ce rapport.

Chacun, des deux groupes, est constitué de deux sous-groupes. Le premier sous-groupe montre le comportement des variables de l'état x . Le deuxième sous-groupe donne les évolutions respectives du rapport d'excès d'oxygène, la commande appliquée sur le compresseur, la puissance nette de la pile et le rendement de la pile.

La convergence de l'état vers le point de fonctionnement s'effectue assez rapidement dans les deux scénarios considérés, à savoir : l'utilisation d'un retour d'état (voir Figures 5.6a-5.6d pour le cas $\lambda_{O_2}^\infty = 2$ et Figures 5.8a-5.8d pour le cas $\lambda_{O_2}^\infty = 2.5$) et le bouclage à travers une commande basée sur un observateur (voir Figures 5.10a-5.10d pour le cas $\lambda_{O_2}^\infty = 2$ et Figures 5.12a-5.12d pour le cas $\lambda_{O_2}^\infty = 2.5$). Cependant, une différence peut être constatée lors du changement de la valeur de l'amplitude de l'échelon en entrée. Ceci est dû à la différence des conditions initiales entre le système et l'observateur. Néanmoins, la rapidité de convergence de l'observateur assure un résultat de suivi assez intéressant.

Il est à noter que la valeur du rapport d'excès d'oxygène est stabilisée autour des valeurs souhaitées (voir les Figure 5.7a, 5.9a, 5.11a, 5.13a). La convergence est de meilleure qualité dans le cas d'un retour d'état et ceci est dû, comme indiqué ci-dessous pour la convergence de l'état, à la différence des conditions initiales. Par ailleurs, il convient de préciser que la commande est tout a fait respectueuse de la plage de fonctionnement (voir les Figures 5.7b, 5.9b, 5.11b, 5.13b).

Les Figures 5.7c, 5.9c, 5.11c, 5.13c et les Figures 5.7d, 5.9d, 5.11d, 5.13d montrent les évolutions respectives de la puissance nette et de son rendement lors de la commande de la pile. Ces courbes montrent des bonnes performances de ces deux grandeurs caractéristiques de la qualité de fonctionnement.

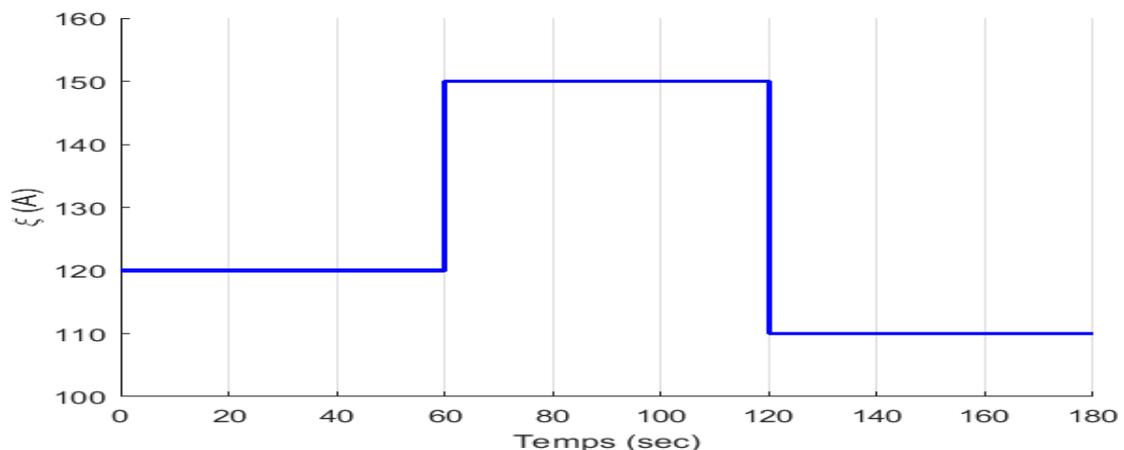
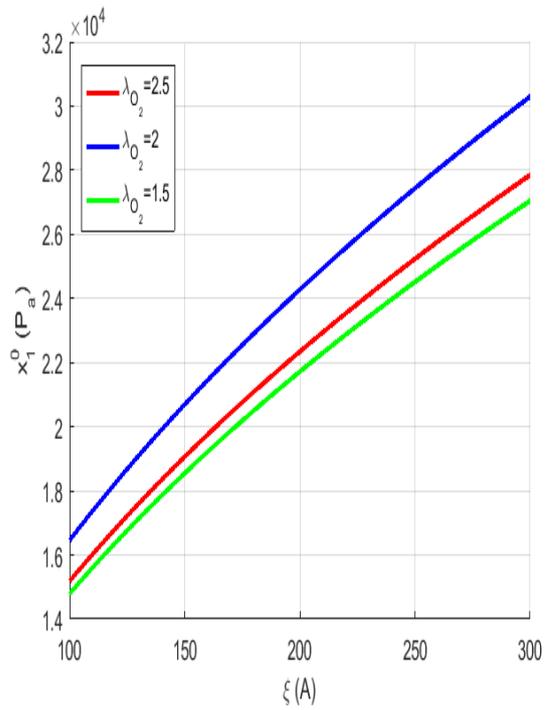
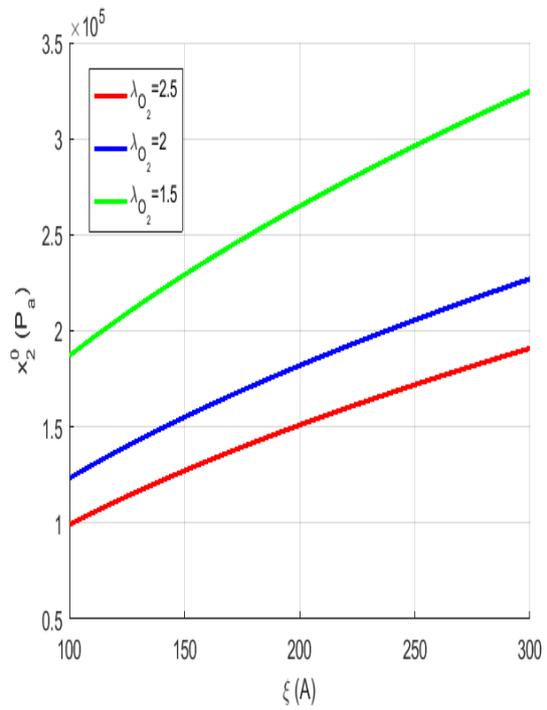


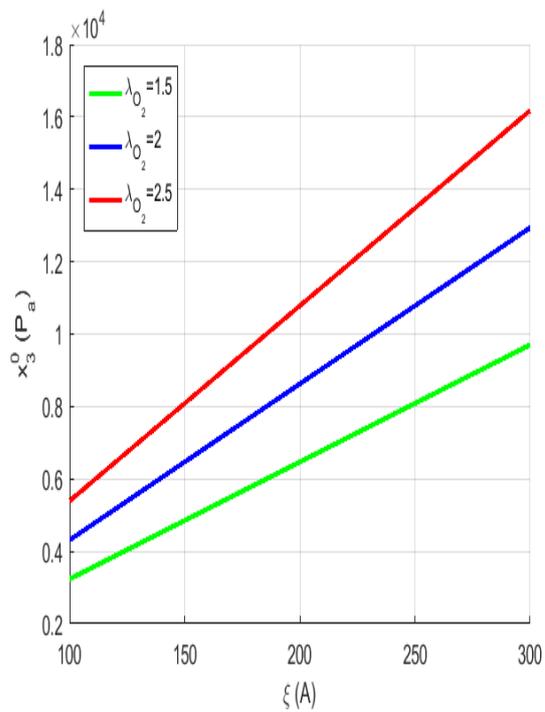
Figure 5.4 – Courant de la charge



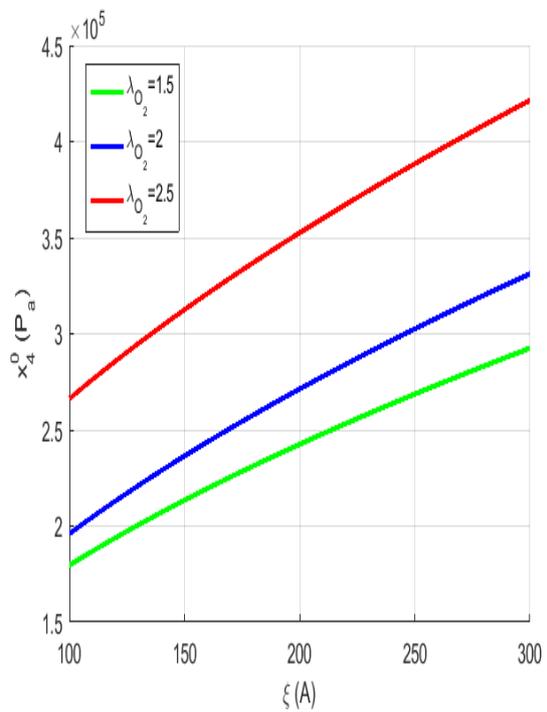
(a) x_1^0 en fonction de ξ



(b) x_2^0 en fonction de ξ

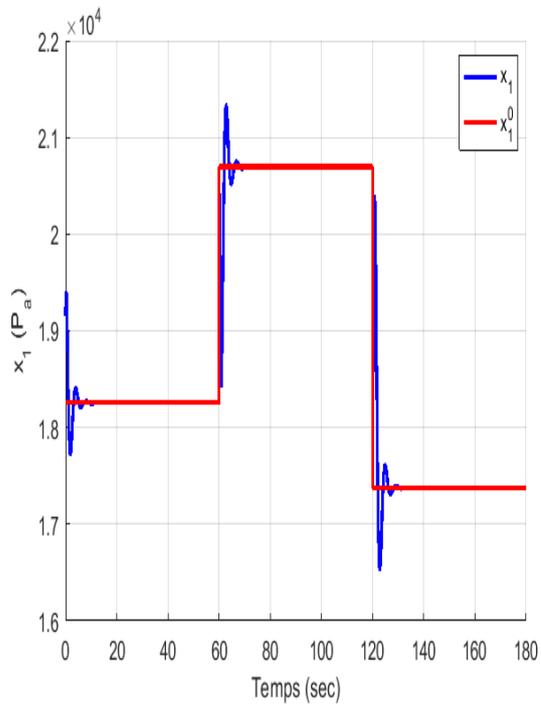


(c) x_3^0 en fonction de ξ

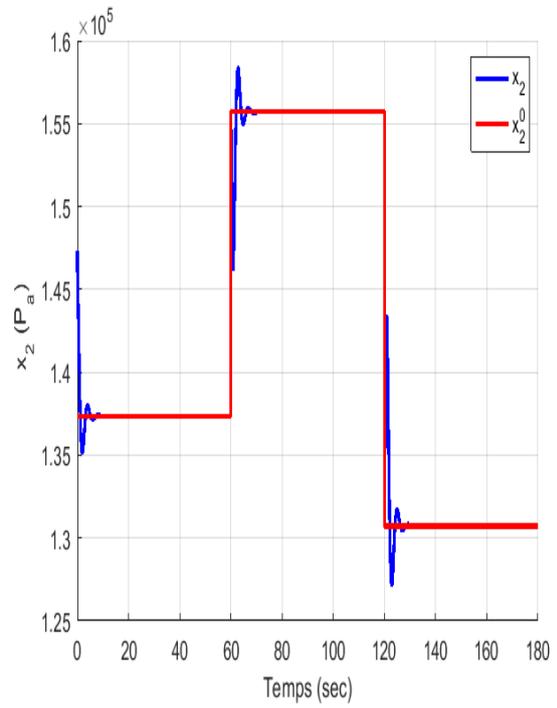


(d) x_4^0 en fonction de ξ

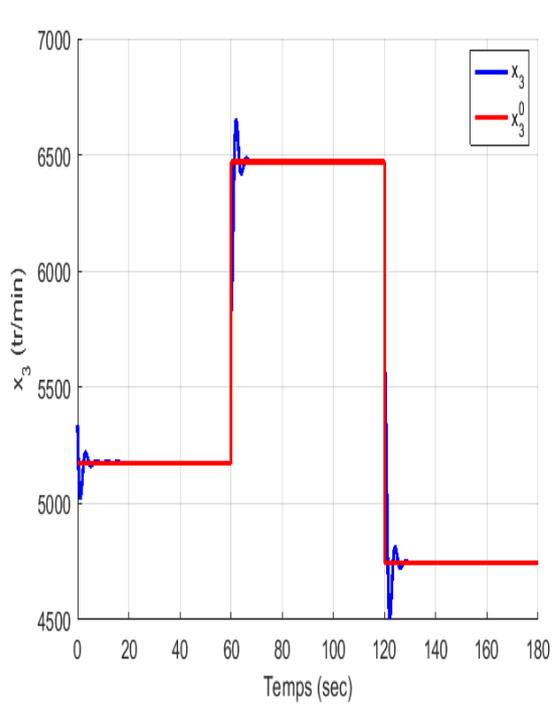
Figure 5.5 – x^0 en fonction de ξ



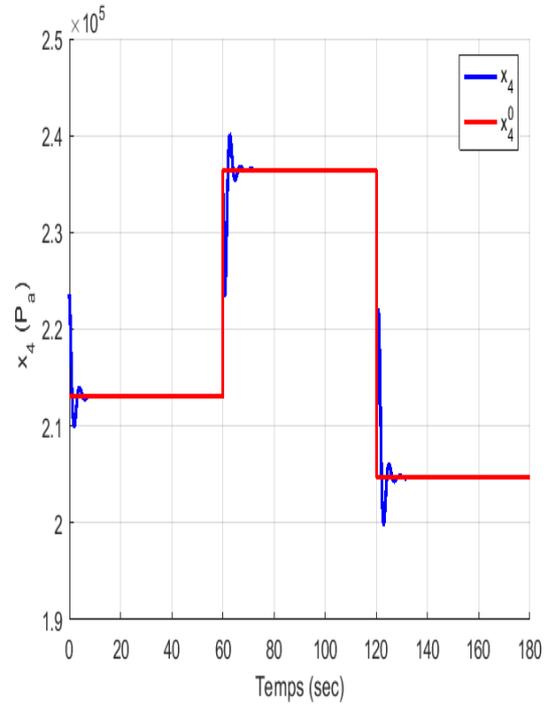
(a) Pression d'oxygène



(b) Pression d'azote

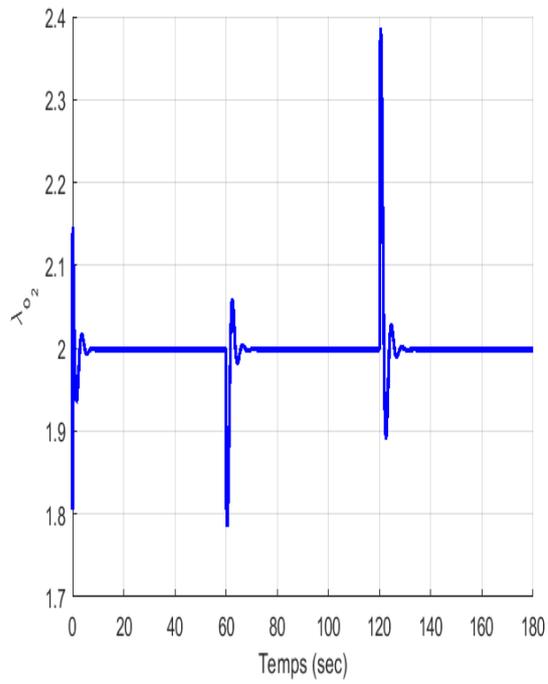


(c) Vitesse angulaire

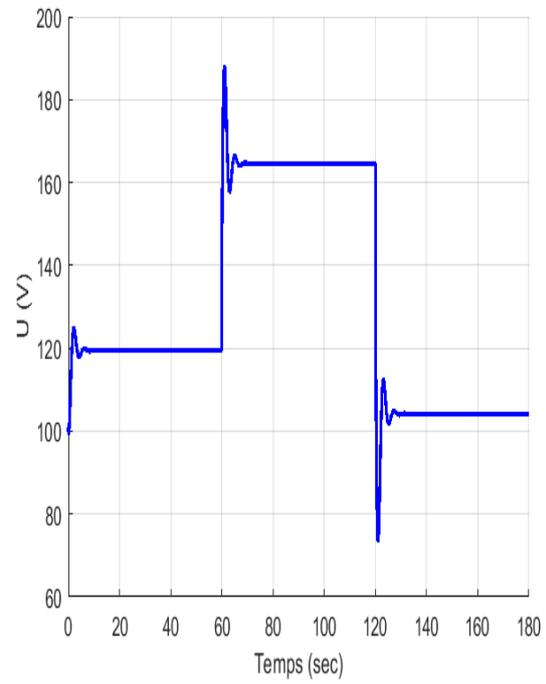


(d) Pression d'air du collecteur

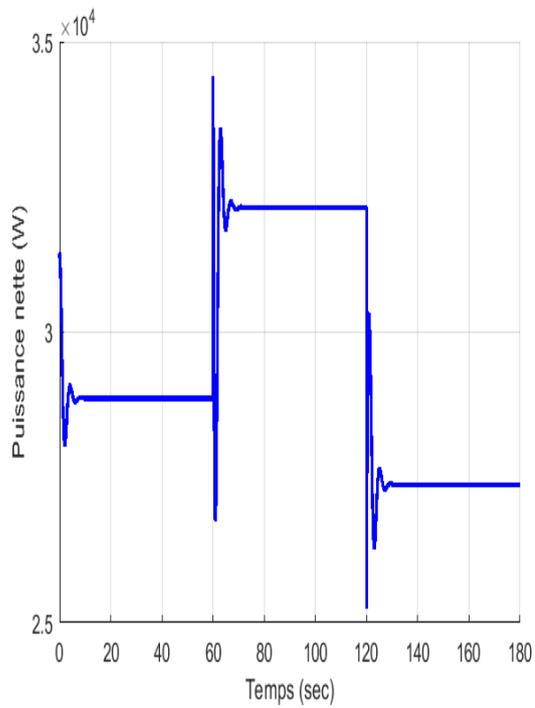
Figure 5.6 – Commande par rétroaction - Évolution de l'état ($\lambda_{O_2}^\infty = 2$)



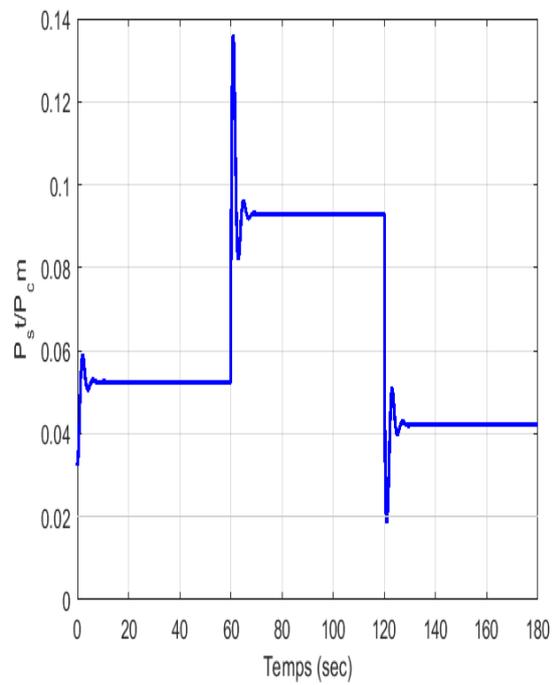
(a) Rapport d'excès d'oxygène



(b) Commande

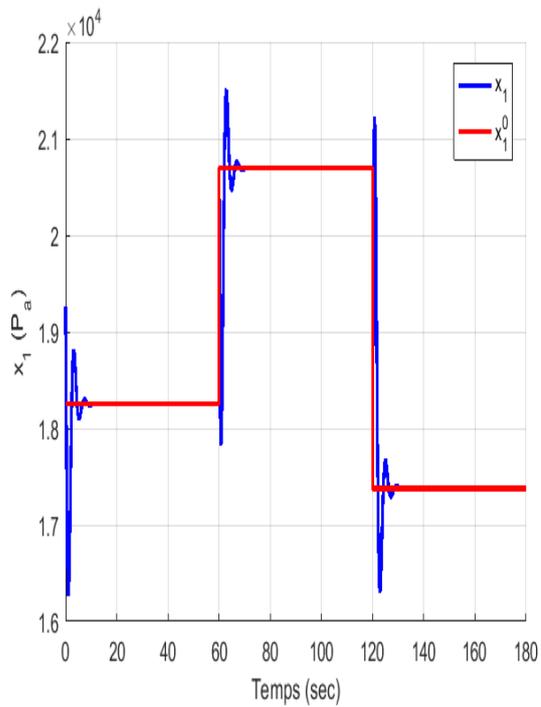


(c) Puissance

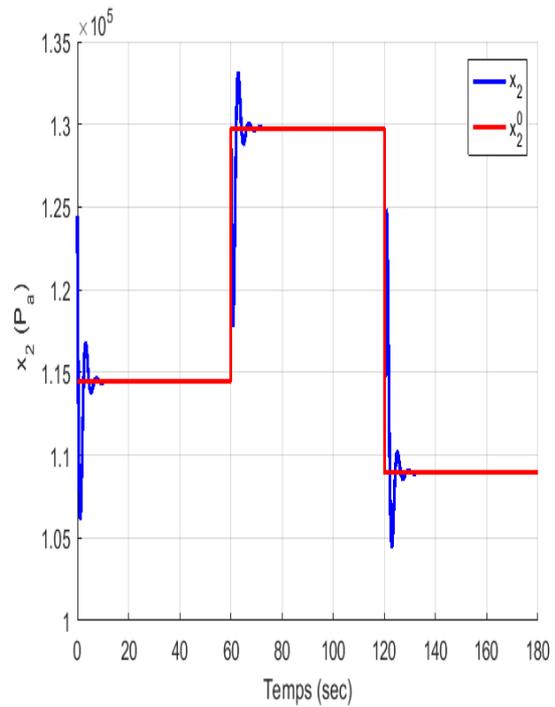


(d) Rendement

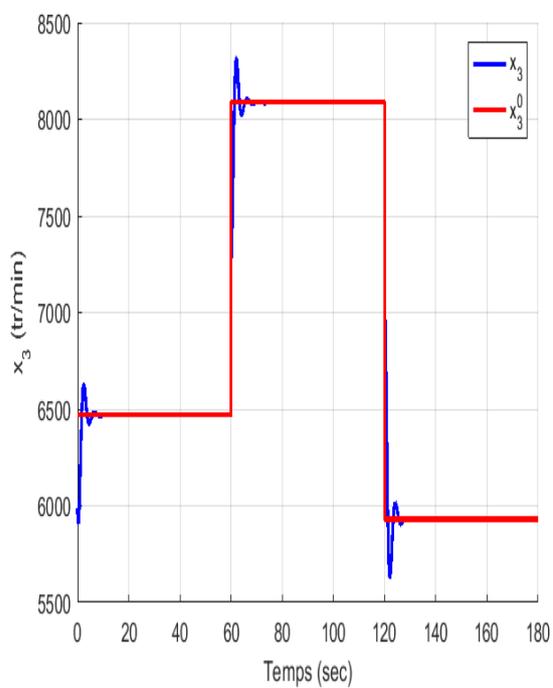
Figure 5.7 – Commande par rétroaction - Évolution des entrées/sorties ($\lambda_{O_2}^\infty = 2$)



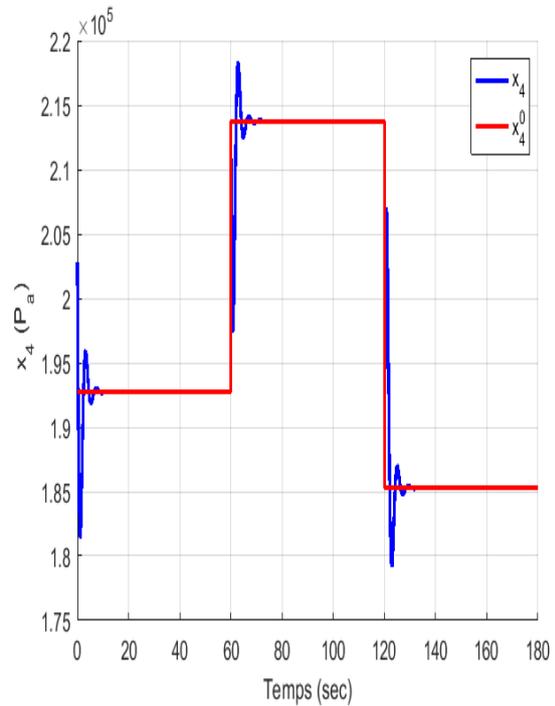
(a) Pression d'oxygène



(b) Pression d'azote

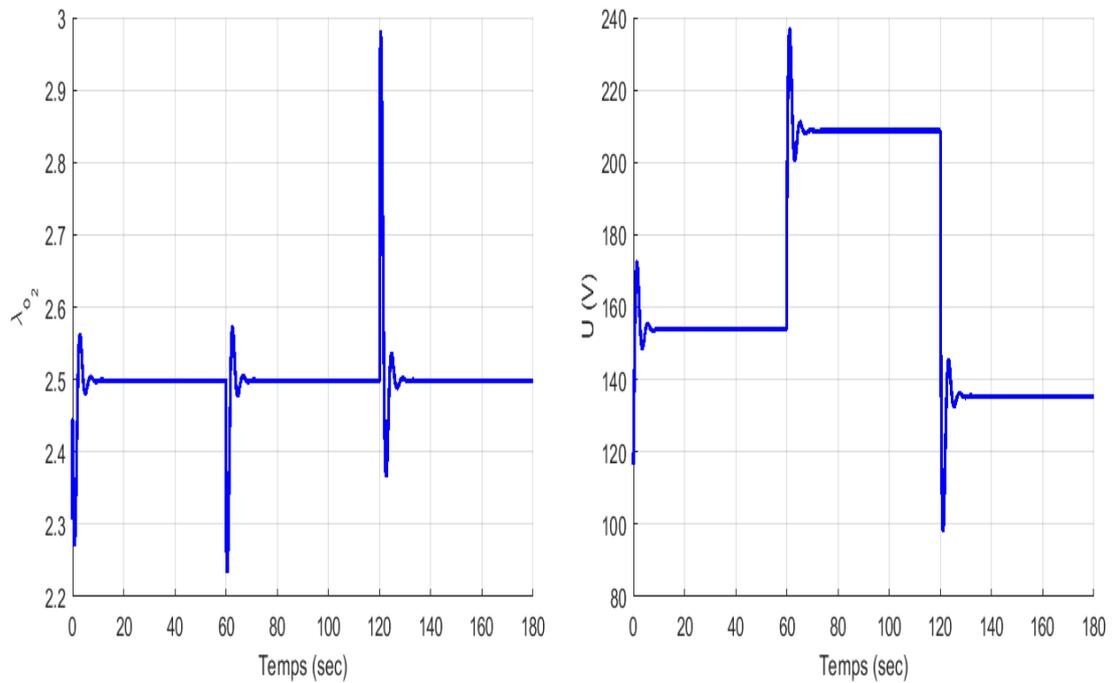


(c) Vitesse angulaire



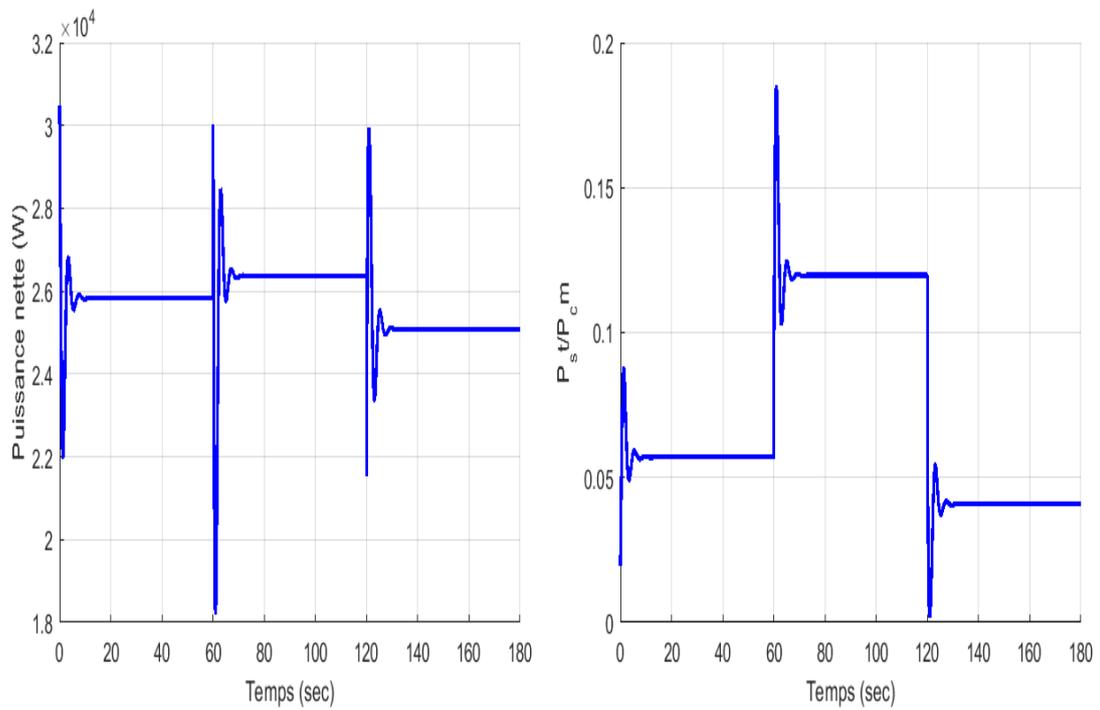
(d) Pression d'air du collecteur

Figure 5.8 – Commande par rétroaction - Évolution de l'état ($\lambda_{O_2}^\infty = 2.5$)



(a) Rapport d'excès d'oxygène

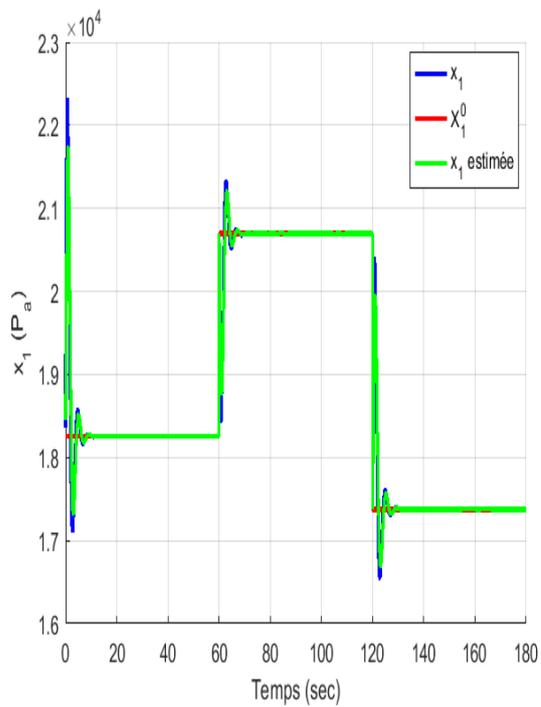
(b) Commande



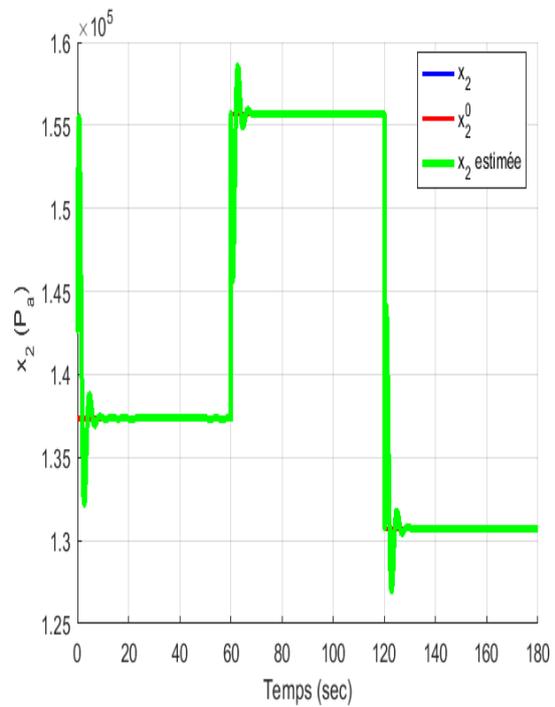
(c) Puissance

(d) Rendement

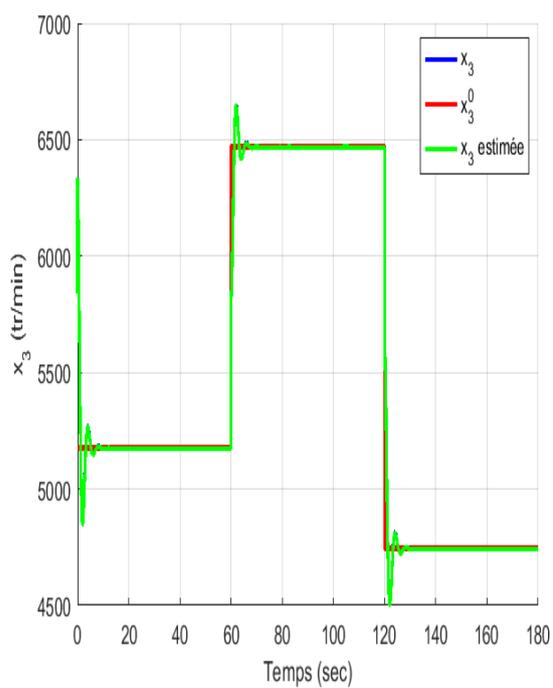
Figure 5.9 – Commande par rétroaction - Évolution des entrées/sorties ($\lambda_{O_2}^\infty = 2.5$)



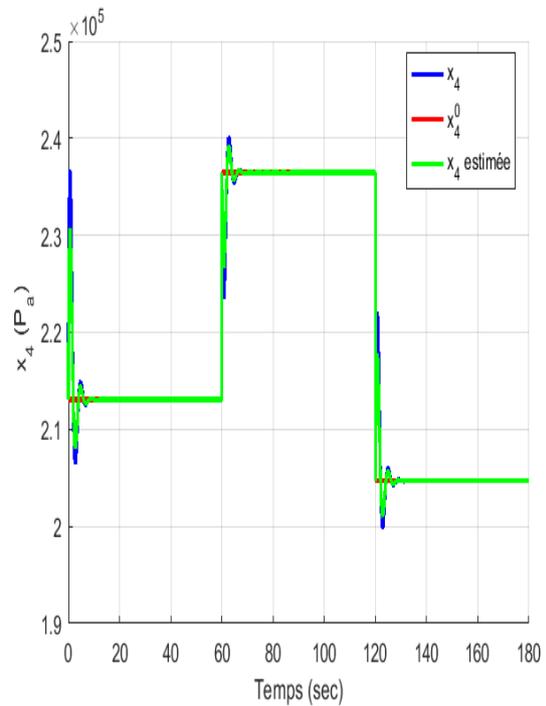
(a) Pression d'oxygène



(b) Pression d'azote



(c) Vitesse angulaire

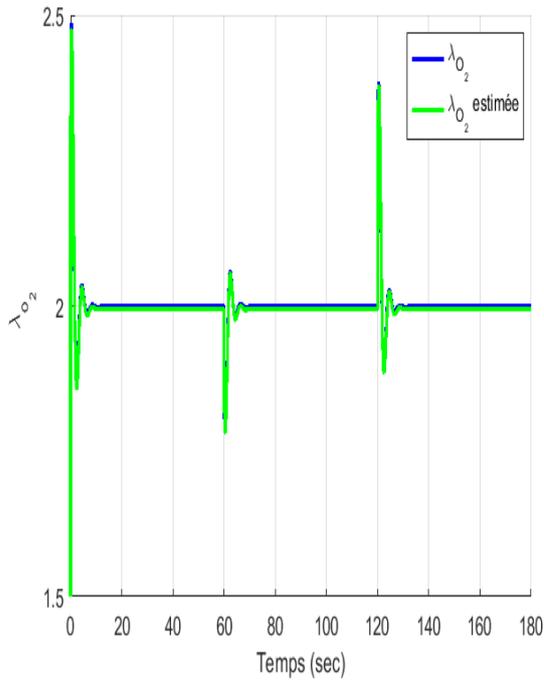


(d) Pression d'air du collecteur

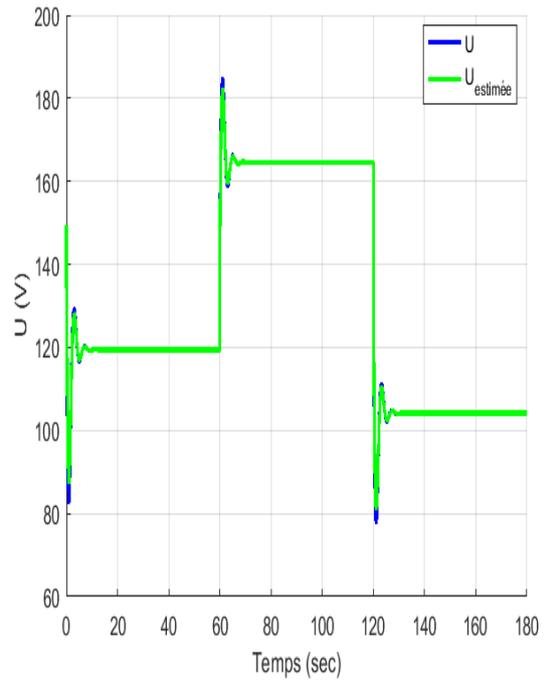
Figure 5.10 – Commande basée observateur - Évolution de l'état ($\lambda_{O_2}^\infty = 2$)

5.5 Conclusion

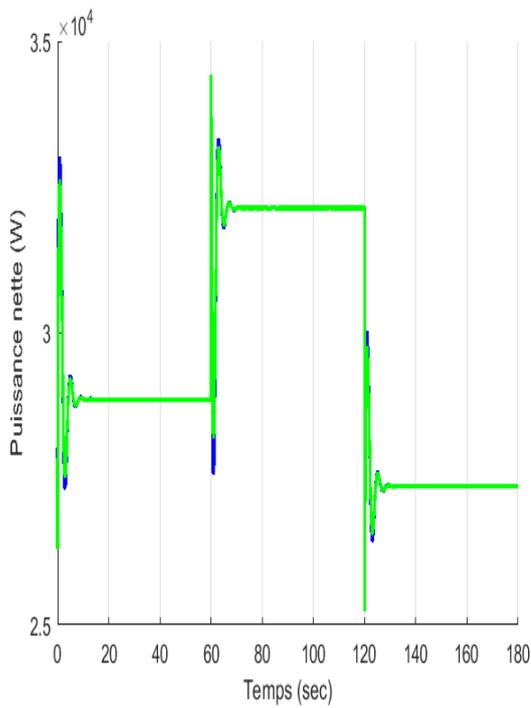
Dans ce chapitre, nous avons proposé une stratégie du contrôle pour la pile à combustible. Plus précisément, le but a été de synthétiser une loi de commande qui permet de répondre à la sollicitation de la charge tout en respectant une contrainte sur le comportement du rapport d'excès d'oxygène. Un tel fonctionnement permet d'avoir un rendement important tout en préservant l'état de santé de la pile. L'approche adoptée consiste à synthétiser une loi de commande sans aucun type de linéarisation. Une telle commande permet d'opérer dans une large plage de fonctionnement tout en tenant compte des non-linéarités inhérentes du système. Les résultats de simulation montrent les bonnes performances de la loi de commande proposée. En outre, cette loi de commande a été testée dans le cas où les valeurs de l'état sont reconstruites à partir d'un observateur.



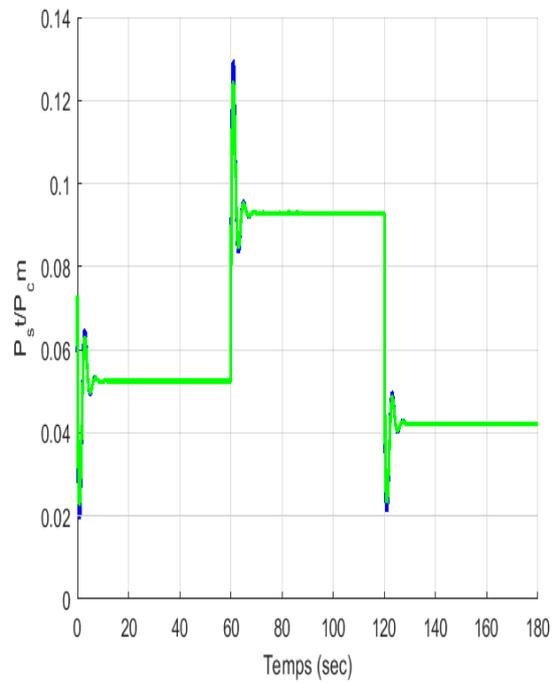
(a) Rapport d'excès d'oxygène



(b) Commande

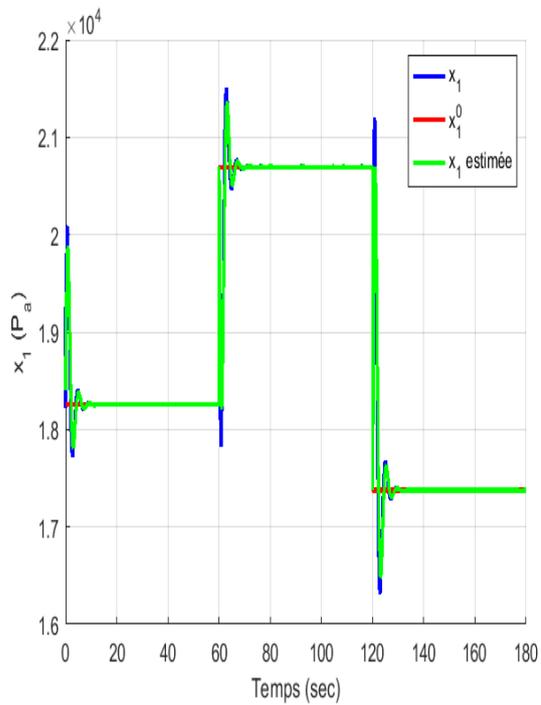


(c) Puissance

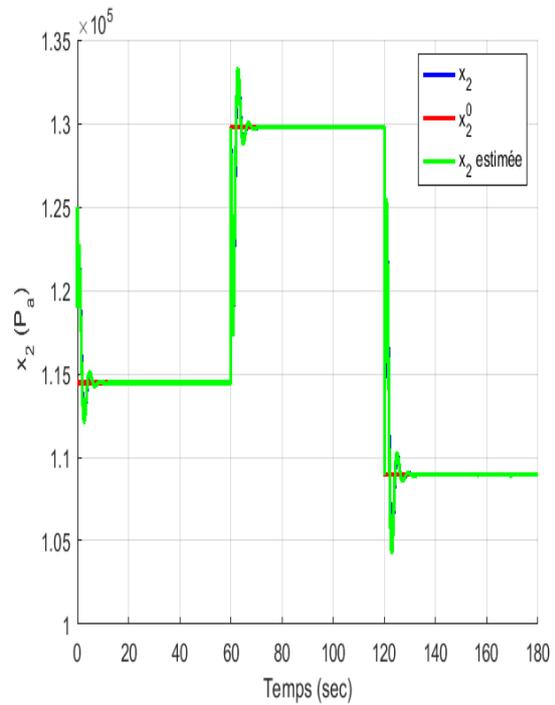


(d) Rendement

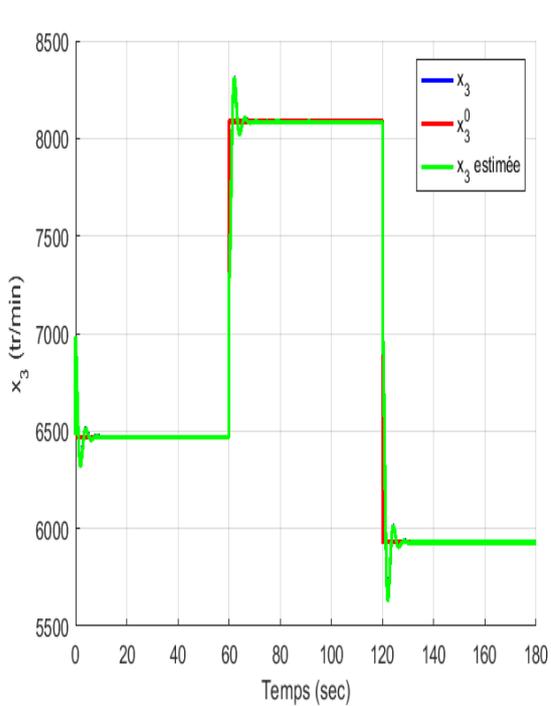
Figure 5.11 – Commande basée observateur - Évolution des entrées/sorties ($\lambda_{O_2}^\infty = 2$)



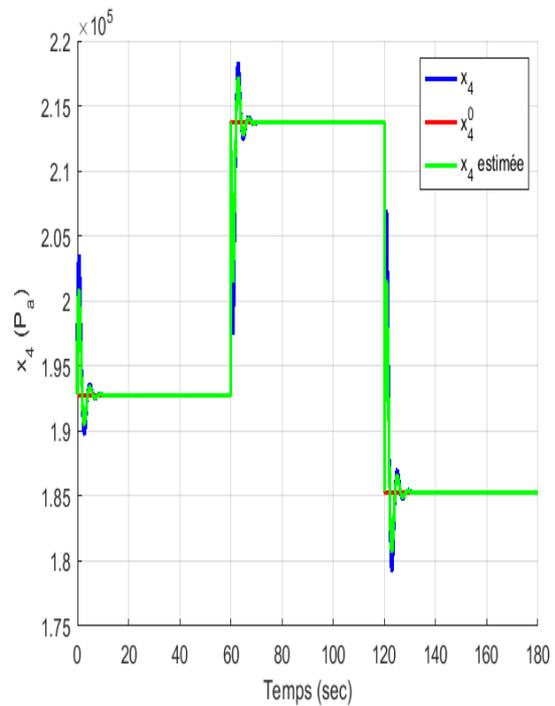
(a) Pression d'oxygène



(b) Pression d'azote

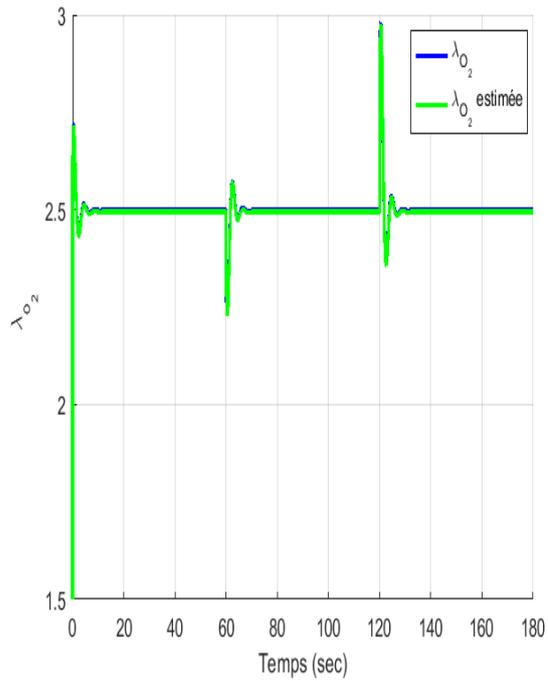


(c) Vitesse angulaire

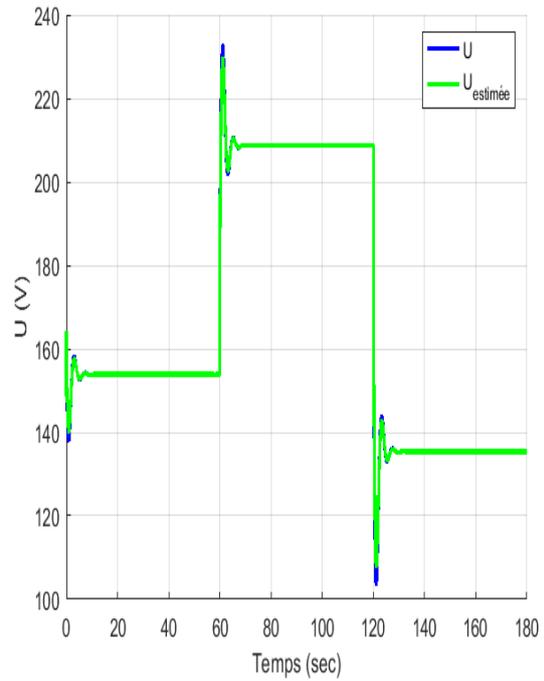


(d) Pression d'air du collecteur

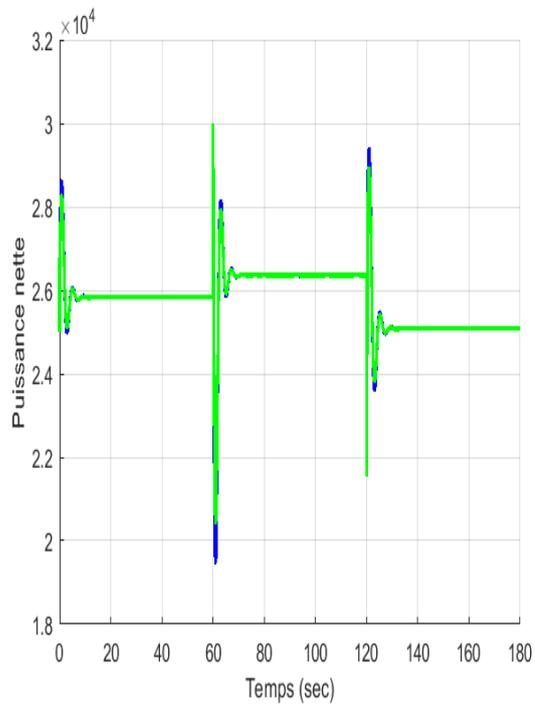
Figure 5.12 – Commande basée observateur - Évolution de l'état ($\lambda_{O_2}^\infty = 2.5$)



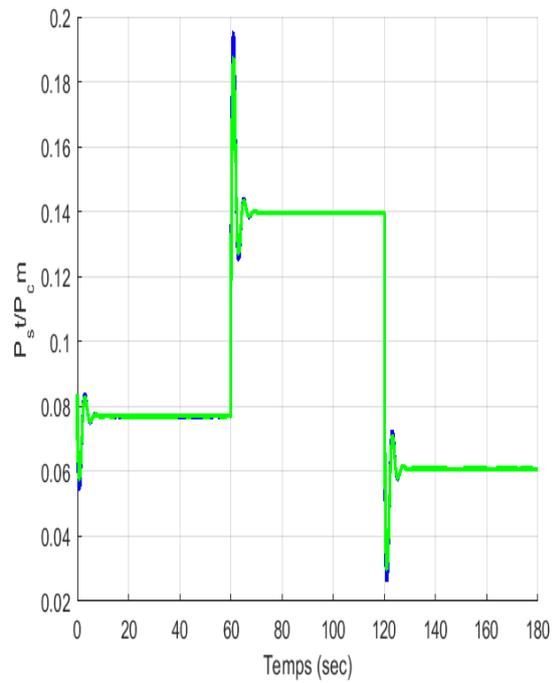
(a) Rapport d'excès d'oxygène



(b) Commande



(c) Puissance



(d) Rendement

Figure 5.13 – Commande basée observateur - Évolution des entrées/sorties ($\lambda_{O_2}^\infty = 2.5$)

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse apportent une contribution au problème du diagnostic de défauts et à la commande de la PàC à Membrane d'échange de protons. Parmi les différentes méthodes de diagnostic et de la commande, nous nous sommes intéressés plus particulièrement au diagnostic de défauts à base d'observateurs et à la commande par rétroaction. Deux approches de diagnostic destinées respectivement à la détection des défauts additifs et multiplicatifs sont présentées. La première concerne la synthèse d'un filtre robuste permettant la détection de défauts capteurs et actionneurs tout en assurant un niveau de robustesse vis-à-vis des éventuelles perturbations. Cette approche permet d'améliorer la détection de défauts et d'atténuer l'effet des perturbations dans le système d'alimentation en air de la PàC. La seconde approche traite le problème de détection des défauts paramétriques. Pour cet objectif, un observateur adaptatif permettant d'estimer la valeur du paramètre susceptible de présenter une défaillance a été proposé. Une stratégie du contrôle pour la pile à combustible est proposée. Le but a été de synthétiser une loi de commande par rétroaction qui permet de répondre à la sollicitation de la charge tout en respectant une contrainte de fonctionnement nominal de la PàC. Un tel fonctionnement permet d'avoir un meilleur rendement tout en préservant l'état de santé de la pile. La synthèse de cette loi de commande a été réalisée en préservant tout le caractère non linéaire du système.

Dans la première partie de ce travail, nous avons présenté une description globale d'une pile à combustible à Membrane d'Échange de protons, de son fonctionnement et de son intégration dans un système pile à combustible. Ensuite, un rappel sur les différentes sources de défaillances qui peuvent exister dans un système pile à combustible est présenté. En fin, un état de l'art sur les différents travaux de diagnostic et de la commande des systèmes piles à combustible est donné.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté un état de l'art de la modélisation des piles à combustible. La modélisation de la pile à combustible s'avère être complexe compte-tenu du nombre important de sous-systèmes présents et de l'hétérogénéité des phénomènes (chimique, électrique, thermodynamique). Nous avons détaillé la modélisation du système d'alimentation en air de la pile.

Dans le troisième et le quatrième chapitre, nous avons proposé deux méthodes de diagnostic appliquées à la PàC. Dans un premier temps, nous avons synthétisé un filtre $\mathcal{H}_- / \mathcal{H}_\infty$ permettant la détection de défauts capteurs et actionneurs tout en assurant un

niveau de robustesse vis-à-vis des éventuelles perturbations. L'objectif a été d'améliorer la détection des défauts et l'atténuation des perturbations dans le système d'alimentation en air des piles à combustible. Les conditions d'existence et de stabilité du filtre sont données en terme d'inégalité matricielle linéaire tout en tenant compte des caractéristiques du système PàC. Dans un second temps, nous avons traité le problème de détection de défauts paramétriques. Pour ce faire, nous avons synthétisé un observateur adaptatif permettant d'estimer la valeur du paramètre susceptible de présenter une défaillance. Cette méthode donne la possibilité d'estimer simultanément les défauts paramétriques et les états non mesurés du système.

Dans la dernière partie de ce travail, une commande du système d'alimentation en air a été proposé. L'objectif de la commande a été d'alimenter le cœur de la pile et sans excès d'oxygène. Le but a été de permettre le bon fonctionnement tout en préservant l'état de santé de la pile. Ce double objectif a été atteint à travers une régulation d'un rapport d'excès d'oxygène à une valeur constante tout en répondant au besoin de la charge.

Perspectives

Dans ce travail, nous avons abordé les contributions au niveau théorique pour le diagnostic et la commande du système d'alimentation en air de la PàC. Plusieurs pistes restent ouvertes suite à nos travaux.

Faire le diagnostic en considérant d'autres types défauts qui peuvent être soit additifs, soit qui peuvent être représenté par des modèles à travers les paramètres comme dans le cas anodique avec tous les modèles similaires.

Effectuer la Synthèse d'une loi de commande basée sur un observateur vu qu'on a synthétisé une loi de commande par retour d'état, on a remplacé les valeurs des variables d'états par leurs estimées en utilisant l'observateur développé dans le chapitre 4 et on a montré que la commande est stabilisante. Il reste à démontrer mathématiquement la stabilité du système basée sur un observateur.

Faire la commande tolérante aux défauts vu qu'on a réussi à développer des méthodes de diagnostic de défauts, on a réussi aussi à synthétiser une loi de commande par retour d'état, la prochaine étape consiste à adapter cette loi de commande au système en présence de défauts.

Liste de publications

les travaux de thèse ont fait l'objet d'une série de publications.

Revue internationale :

[1] Niane M, Zerrougui M and Outbib R, " $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Robust fault detection filter : Application to PEM Fuel Cell Air-Feed". Soumis European journal of control 2017

[2] Niane M, Zerrougui M and Outbib R, "Control of air excess ratio for PEM Fuel Cell", en préparation

Conférences internationales :

[1] Niane M, Zerrougui M and Outbib R, "A Theoretical Result on Stabilizability of Oxygen Excess Ratio for PEM Fuel Cell". 11th International Conference on Electromechanical and Power Systems (SIELMEN), Iasi, Romania 2017

[2] Niane M, Zerrougui M and Outbib R, " $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Filter-based fault detection for Polymer Electrolyte Membrane Fuel Cell ". 7th International Conference on Fundamentals & Development of Fuel Cells, Stuttgart, Germany 2017

[3] Niane M, Zerrougui M and Outbib R, "Fault Diagnosis Based on Nonlinear Adaptive Observer : Application to Fuel Cell Process". 25th Mediterranean Conference on Control and Automation, Valetta, Malta 2017

Bibliographie

- [1] A. AITOCHE et Q. Y. B. O. BOUAMAMA. « Fault Detection and Isolation of PEM Fuel Cell System based on Nonlinear Analytical Redundancy : An application via Parity Space Approach ». In : *The European Physical Journal Applied Physics* 54.2 (2011), p. 23408–23418.
- [2] Brian D. O. ANDERSON, Robert R. BITMEAD, C. Richard JOHNSON Jr. et al. *Stability of Adaptive Systems : Passivity and Averaging Analysis*. Cambridge, MA, USA : MIT Press, 1986.
- [3] A. J. APPLEBY et F. R. FOULKES, éd. *Fuel Cell Handbook*. Van Nostrand Reinhold, 1989.
- [4] M. ARCAK, H. GORGUN, L. M. PEDERSEN et al. « A Nonlinear Observer Design for Fuel Cell Hydrogen Estimation ». In : *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 12.1 (2004), p. 101–110.
- [5] C. BAO, M. OUYANG et B. YI. « Modeling and control of air stream and hydrogen flow with recirculation in a PEM fuel cell system- I control oriented modeling ». In : *International Journal of Hydrogen Energy* 31.13 (2006), p. 1879–1896.
- [6] F. BARBIR, éd. *PEM Fuel Cell : Theory and Praticce*. Elsevier, 2005.
- [7] G. BASTIN et M. R. GEVERS. « Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 33.7 (1988), p. 650–658.
- [8] G. BASTIN et M. R. GEVERS. « Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 33.7 (1988), p. 650–658.
- [9] M. BENALLOUCH. « Observation des systèmes non-linéaires à entrées inconnues - application à la pile à combustible de type PEM ». Thèse de doctorat. Université de Strasbourg, 2009.
- [10] M. BENALLOUCH et R. OUTBIB. « Functional observer for linear parameter-varying systems with application to diagnosis of PEM fuel cell ». In : *International Journal of Control* 87 (2013), p. 742–750.
- [11] M. BENALLOUCH, R. OUTBIB, M. BOUTAYEB et al. « Robust observers for a class of nonlinear systems using fuel cells a simulated case study ». In : *IEEE Transactions on Control Systems Technology* (2018).
- [12] B. BLUNIER. « Modélisation de moto-compresseurs en vue de la gestion de l'air dans les systèmes pile à combustible : simulation et validation expérimentale ». Thèse de doctorat. Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, 2007.

- [13] S.P. BOYD, L. EL GHAOUI, E. FÉRON et al., éd. *Linear Matrix Inequality in Systems and Control Theory*. T. 15. Society for Industrial et Applied Mathematics. Philadelphia, PA : SIAM, 1994.
- [14] J. M. Le CANUT, R. M. ABOUATALLAH et D.A. HARRINGTON. « Detection of Membrane Drying, Fuel Cell Flooding and Anode Catalyst Poisoning on PEMFC Stacks by Electrochemical Impedance Spectroscopy ». In : *Journal of the Electrochemical Society* 153 (2006), A857–A864.
- [15] D. CHEN, W. LI et H. PENG. « An experimental study and model validation of a membrane humidifier for PEM fuel cell humidification control ». In : *Journal of Power Sources* 180.1 (2008), p. 461–467.
- [16] J. CHEN et B. ZHOU. « Diagnosis of PEM fuel cell stack dynamic behaviors ». In : *Journal of Power Sources* 177 (2008), p. 83–95.
- [17] X. CHENG, Z. SHI, N. LASS et al. « A review of PEM hydrogen fuel cell contamination : Impacts, mechanisms and mitigation ». In : *Journal of Power Sources* 165 (2007), p. 739–756.
- [18] Y. M. CHO et R. RAJAMANI. « A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 42.4 (1997), p. 534–537.
- [19] D. CHRENKO, M. C. PÉRA et D. HISSEL. « Inversion-based control of a pem fuel cell system using energetic macroscopic representation ». In : *ASME Journal of Fuel Cell Science and Technology* (2008).
- [20] J. COOPER. « Design analysis of pemfc bipolar plates considering stack manufacturing and environment ». In : *Journal of Power Sources* 129 (2004), p. 152–169.
- [21] J. M. CORON et L. PRALY. « Adding an integrator for the stabilization problem ». In : *Systems Control Letters* 17.2 (1991), p. 89–104.
- [22] R. DEL, J. ALEJANDRO, A. ARCE et al. « Development and experimental validation of a PEM fuel cell dynamic model ». In : *Journal of Power Sources* 173.1 (2007), p. 310–324.
- [23] H. DENG, Q. LI, W. CHEN et al. « High Order Sliding Mode Observer-based OER Control for PEM Fuel Cell Air-feed System ». In : *IEEE Transactions on Energy Conversion* PP.99 (2017), p. 1–13.
- [24] S.X. DING, P.M. FRANK, E.L. DING et al. « A unified approach to the optimization of fault detection systems ». In : *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 14 (2000), p. 725–745.
- [25] W. R. M. DONIS. « Diagnosis of pemfc stack failures via electrochemical impedance spectroscopy ». Ph.D. dissertation. University of Victoria, 2002.

- [26] W. R. M. DONIS, D. A. HARRINGTON, J. M. Le CANUT et al. « Characterisation of proton exchange membrane fuel cell (PEMFC) failures via electrochemical impedance spectroscopy ». In : *Journal Power Sources* 161 (2006), p. 264–274.
- [27] K. ERIKSSON et D. JOHNSON, éd. *Applied Mathematics : Body and Soul*. T. 1. Derivatives et Geometry, publisher Springer, 2004.
- [28] T. ESCOBET, D. FEROLDI, S. de LIRA et al. « Model-based fault diagnosis in PEM fuel cell systems ». In : *Journal of Power Sources* 192.1 (juil. 2009), p. 216–223.
- [29] M. FARZA, I. BOURAOUI, T. MENARD et al. « Adaptive observers for a class of uniformly observable systems with nonlinear parametrization and sampled outputs ». In : *Automatica* 50.11 (2014), p. 2951–2960.
- [30] A. FORRAI, H. FUNATO, Y. YANAGITA et al. « Fuel-Cell Parameter Estimation and Diagnostics ». In : *Energy conversion* 20 (2005), p. 668–675.
- [31] N. FOUQUET, C. DOULET, C. NOUILLANT et al. « Model based PEM fuel cell state-of-health monitoring via ac impedance measurements ». In : *Journal of Power Sources* 159.2 (2006), p. 905–913.
- [32] T.F FULLER et J. NEWMANN. « Water and thermal management in solid polymer electrolyte fuel cell ». In : *Journal of electrochemical society* 140 (1993), p. 12–18.
- [33] J.P. GAUTHIER et G. BORNARD. « Observability for any $u(t)$ of a Class of Nonlinear Systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 26 (1981), p. 922–926.
- [34] T. GÉNEVÉ. « Méthodes de diagnostic des piles à combustible ». Ph.D. dissertation. Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse), 2016.
- [35] H. GÖRGÜN, M. ARCAK et F. BARBIR. « An algorithm for estimation of membrane water content in PEM fuel cells ». In : *Journal of Power Sources* 157.1 (2006), p. 389–394.
- [36] S. GRENAILLE, D. HENRY et A. ZOLGHADRI. « A method for designing fault diagnosis filters for LPV polytopic systems ». In : *Journal of Control Science and Engineering* (2008), p. 1–11.
- [37] J.K GRUBER, C. BORDONS et F. DORADO. « Nonlinear control of the air feed of a fuel cell ». In : *American Control Conference* (2008), p. 1121–1126.
- [38] J.K GRUBER, C. BORDONS et A. OLIVA. « Nonlinear MPC for the airflow in a PEM fuel cell using a volterra series model ». In : *Control Engineering Practice* 20.2 (2012), p. 205–217.

- [39] J.K GRUBER, M. DOLL et C. BORDONS. « Design and experimental validation of a constrained MPC for the air feed of a fuel cell ». In : *Control Engineering Practice* 17.8 (2009), p. 874–885.
- [40] M. GRUJICIC, K. M. CHITTAJALLU, E. H. LAW et al. « Model based control strategies in the dynamic interaction of air supply and fuel cell ». In : *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A : Journal of Power and Energy* 118.7 (2004), p. 487–499.
- [41] J. GUO, X. HUANG et Y. CUI. « Design and analysis of robust fault detection filter using LMI tools ». In : *Computers and Mathematics with Applications* 57 (2009), p. 1743–1747.
- [42] Q. P. HA et H. TRINH. « State and input simultaneous estimation for a class of nonlinear systems ». In : *Automatica* 40.10 (2004), p. 1779–1785.
- [43] Wolfgang HAHN, éd. *Stability of Motion*. Springer, Berlin, 1978.
- [44] A. HERNANDEZ. « Diagnostic d'une pile a combustible de type PEFC ». Thèse. Université de Technologie de Belfort Montbeliard, 2006.
- [45] A. HERNANDEZ, D. HISSEL et R. OUTBIB. « Electric equivalent model for a hydrogen fuel cell PEFC ». In : *Electrimacs 2005 Conference, Hammamet, Tunisia* (2005).
- [46] A. HERNANDEZ, D. HISSEL et R. OUTBIB. « A stochastic approach, Industrial Electronics ». In : *IEEE International Symposium* 3 (2006), p. 1984–1989.
- [47] A. HERNANDEZ, D. HISSEL et R. OUTBIB. « Méthodes de diagnostic de systèmes multi-physiques ». In : *Techniques de l'Ingenieur. Informatique industrielle, S1(S7219)* (2008).
- [48] A. HERNANDEZ, D. HISSEL et R. OUTBIB. « Modeling and Fault Diagnosis of a Polymer Electrolyte Fuel Cell Using Electrical Equivalent Analysis ». In : *IEEE Transactions on Energy Conversion* 25 (2010), p. 148–160.
- [49] M. HOU et R. J. PATTON. « An $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_-$ approach to the design of robust fault diagnosis observers based upon LMI optimization ». In : *Proceedings of the 4th European Control Conference* (1997).
- [50] T. R. HSU, éd. *MEMS and Microsystems Design and Manufacture*. 1st edition, McGraw Hill, 2006.
- [51] M.M. KAMAL, D.W. YU et D.L. YU. « Fault detection and isolation for PEM fuel cell stack with independent RBF model ». In : *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 28 (2014), p. 52–63.
- [52] A.Y. KARNIK et J. SUN. « Modeling and control of an ejector based anode recirculation system for fuel cells ». In : *In Third International Conference on Fuel Cell Science Engineering and Technology* (2005).

- [53] P. V. KOKOTOVIC et H. J. SUSSMANN. « A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems ». In : *Systems Control Letters* 13.2 (1989), p. 125–133.
- [54] S. LAGHROUCHE, I. MATRAJI, F. S. AHMED et al. « Load governor based on constrained extremum seeking for PEM fuel cell oxygen starvation and compressor surge protection ». In : *International Journal of Hydrogen Energy* 38.33 (2013), p. 14314–14322.
- [55] J. LARMINIE et A. DICKS, éd. *Fuel cell systems explained*. Chichester [England] : Wiley, 2002.
- [56] J.H. LEE, T.R. LALK et A.J. APPLEBY. « Modeling electrochemical performance in large scale proton exchange membrane fuel cell stacks ». In : *Journal of Power Sources* 70.2 (1998), p. 258–268.
- [57] H. LI, Y. TANG, Z. WANG et al. « A review of water flooding issues in the proton exchange membrane fuel cell ». In : *Journal of Power Sources* 178.1 (2008), p. 103–117.
- [58] Z. LI. « Data-driven fault diagnosis for PEMFC systems ». PhD Thesis. University of Aix Marseille, 2014.
- [59] Z. LI, E. MARZARS et I. JAÏMOUKHA. « A State space solution to the $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_\infty$ fault detection Problem ». In : *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control* (2006), p. 2177–2182.
- [60] Z. LI, R. OUTBIB, S. GIURGEA et al. « Data-driven diagnosis of PEM fuel cell : a comparative study ». In : *Control Engineering Practice* 28 (2014), p. 1–12.
- [61] Z. LI, R. OUTBIB, S. GIURGEA et al. « Online Diagnosis of PEMFC by Combining Support Vector Machine and Fluidic Model ». In : *Fuel Cells : From Fundamentals to systems* 14 (2014), p. 448–456.
- [62] Z. LI, R. OUTBIB, S. GIURGEA et al. « Diagnosis for PEMFC Systems : A Data- Driven Approach With the Capabilities of Online Adaptation and Novel Fault Detection ». In : *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 62 (2015), p. 5164–5174.
- [63] Z. LI, R. OUTBIB, S. GIURGEA et al. « Fault detection and isolation for Polymer Electrolyte Membrane Fuel Cell systems by analyzing cell voltage generated space ». In : *Applied Energy* 148 (2015), p. 260–272.
- [64] Z. LI, R. OUTBIB, S. GIURGEA et al. « Fault detection and isolation for Polymer Electrolyte Membrane Fuel Cell systems by analyzing cell voltage generated space ». In : *Applied Energy* 148.Supplement C (2015), p. 260–272.
- [65] S. De LIRA, V. PUIG, J. QUEVEDO et al. « LPV observer design for PEM fuel cell system : Application to fault detection ». In : *Journal of Power Sources* 196.9 (2011), p. 4298–4305.

- [66] F. LIU. « Synthèse d'observateurs à entrées inconnues pour les systèmes non linéaires ». Thèse de doctorat. Université de Caen Basse-Normandie-France, 2007.
- [67] S. Laghrouche and J. LIU, F. AHMED, M. HARMOUCHE et al. « Adaptive second-order sliding mode observer-based fault reconstruction for pem fuel cell air-feed system ». In : *Control Systems Technology, IEEE Transactions on control decision* 23.196 (2015), p. 1098–1109.
- [68] X. LIU, H. GUO et C. MA. « Water flooding and two-phase flow in cathode channels of proton exchange membrane fuel cells ». In : *Journal of Power Sources* 156.2 (2006), p. 267–280.
- [69] I. MATRAJI. « Contribution à la commande non-linéaire robuste des systèmes d'alimentation en air des piles à combustible de type PEM ». Thèse de doctorat. Université de Technologie de Belfort-Mont-béliard, 2013.
- [70] D. A. MCKAY, J. B. SIEGEL, W. OTT et al. « Parameterization and prediction of temporal fuel cell voltage behavior during flooding and drying conditions ». In : *Journal of Power Sources* 178.1 (2008), p. 207–222.
- [71] K.S. NARENDRA et ANNASWAMY. *Stable Adaptive Systems*. 1989.
- [72] A. NIKNEZHADI, M. ALLUÉ-FANTOVA, C. KUNUSCH et al. « Design and implementation of LQR/LQG strategies for oxygen stoichiometry control in PEM fuel cells based systems ». In : *Journal of Power Sources* 196.9 (2011), p. 4277–4282.
- [73] R. OUTBIB et W. AGGOUNE. « Feedback Stabilization of continuous systems by adding an integrator ». In : *Applied Mathematics and Computer Science* 9 (1999), p. 871–881.
- [74] R. OUTBIB et H. JGHIMA. « Comments on the stabilization of Nonlinear Systems by adding an Integrator ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 41.12 (déc. 1996), p. 1804–1807.
- [75] R. OUTBIB et G. SALLET. « A reduction Principle for Global Stabilization of Nonlinear Systems ». In : *Kybernetika* 34 (1998), p. 595–607.
- [76] B. F. C. I. PARK. *The basic structure of a fuel cell*. 2005. URL : www.fuel%20cell%20park.com.
- [77] A. PILLONI, A. PISANO et E. USAI. « Observer-Based Air Excess Ratio Control of a PEM Fuel Cell System via High-Order Sliding Mode ». In : *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 62.8 (2015), p. 5236–5246.
- [78] T. PUKRUSHPAN. « Control of Fuel Cell Power Systems : Principles, Modeling and Analysis and Feedback Design ». PhD Thesis. University of Michigan, 2004.

- [79] L. A. M. RIASCOS, F. G. COZMAN et P. E. MIYAGI. « A Bayesian network fault diagnostic system for proton exchange membrane fuel cells ». In : *Journal Power Sources* 165 (2007), p. 267–278.
- [80] L. A. M. RIASCOS, F. G. COZMAN et P. E. MIYAGI. « On-line fault diagnostic system for proton exchange membrane fuel cells ». In : *Journal Power Sources* 175 (2007), p. 419–429.
- [81] A. ROSICH, R. SARRATE et F. NEJJARI. « On-line model-based fault detection and isolation for PEM fuel cell stack systems ». In : *Applied mathematical modelling* 46 (juin 2014), p. 2744–2757.
- [82] M. A. RUBIO, A. URQUIA et S. DORMIDO. « Diagnosis of performance degradation phenomena in PEM fuel cells ». In : *International Journal of Hydrogen Energy* 35.17 (2010), p. 2586–2590.
- [83] M. A. RUBIO, A. URQUIA et S. DORMIDO. « Diagnosis of performance degradation phenomena in PEM fuel cells ». In : *International Journal of Hydrogen Energy* 35 (2010), p. 2586–2590.
- [84] R. SAISSET. « Contribution à l'étude systémique de dispositifs énergétiques à composants électrochimiques ». Ph.D. dissertation. Laboratoire d'Électrotechnique et d'Électronique Industrielle de l'ENSEEIH, 2004.
- [85] R. SAISSET, G. FONTES, C. TURPIN et al. « Bond graph model of a PEM fuel cell ». In : *Journal of Power Sources* 156.1 (2006), p. 100–107.
- [86] A. SALAH, I. GABER, R. OUTBIB et al. « Modeling and Simulation of PEM Fuel Cell Thermal Behavior on Parallel Computers ». In : *IEEE Transactions on energy conversion* 25.3 (2010), p. 768–777.
- [87] N. SAMMES, éd. *Fuel cell technology : reaching towards commercialization*. Springer, 2006.
- [88] W. SCHMITTINGER et A. VAHIDI. « A review of the main parameters influencing long-term performance and durability of PEM fuel cells ». In : *Journal of power sources* 180.1 (2008), p. 1–14.
- [89] T. SORSA, H. N. KOIVO et H. KOIVISTO. « Neural networks in process fault diagnosis ». In : *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics* 21.4 (1991), p. 815–825.
- [90] T. E. SPRINGER, T. A. ZAWODZINSKI et S. GOTTESFELD. « Polymer electrolyte fuel cell model ». In : *Journal of The Electrochemical Society* 138 (1991), p. 2334–2342.
- [91] A. G. STEFANOPOULOU, J. T. PUKRUSHPAN et H. PENG. *Control of Fuel Cell Power Systems : Principles, Modeling and Analysis and Feedback Design*. Springer, 2004.

- [92] K. SUGIURA, M. YAMAMOTO, Y. YOSHITANI et al. « Performance diagnostics of PEFC by current-pulse method ». In : *Journal Power Sources* 157 (2006), p. 695–702.
- [93] K. W. SUH. « Modeling, Analysis and Control of Fuel Cell Hybrid Power Systems ». PhD Thesis. University of Michigan, 2006.
- [94] J. SUN et L. V. KOLMANOVSKY. « Load governor for fuel cell oxygen starvation protection : A robust nonlinear reference governor approach ». In : *Control Systems Technology, IEEE Transactions on Automatic Control* 13.6 (2005), p. 911–920.
- [95] R. TALJ. « modelisation et Commandes Non Lineaires du système d'air des Piles à Combustible Type PEM (Proton Exchange Membrane) ». Thèse de doctorat. Université Paris-Sud 11, 2009.
- [96] R. J. TALJ, D. HISSEL, R. ORTEGA et al. « Experimental Validation of a PEM Fuel-Cell Reduced-Order Model and a Moto-Compressor Higher Order Sliding-Mode Control ». In : *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 57.6 (2010), p. 1906–1913.
- [97] F. TAO et Q. ZHAO. « Fault detection observer design with unknown inputs ». In : *Proceedings of 2005 IEEE Conference on Control Applications* 1-2-3 (2005), p. 1275–1280.
- [98] M. TEKIN. « Contribution à l'optimisation énergétique d'un système pile à combustible embarqué ». Thèse de doctorat. Université de Franche-Comte, 2014.
- [99] J. L. WANG, G. H. YANG et J. LIU. « An LMI approach to \mathcal{H}_2 index and mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ fault detection observer ». In : *Automatica* 43 (2007), p. 1656–1665.
- [100] S. WASTERLAIN. « Approches expérimentales et analyse probabiliste pour le diagnostic de pile à combustible de type PEM ». Ph.D. dissertation. UFC / FEMTO-ST/ENISYS, 2010.
- [101] X. WEI et M. VERHAEGEN. « LMI solutions to the mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ fault detection observer design for linear parameter-varying systems ». In : *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 25 (2011), p. 114–136.
- [102] A. WIARTALLA, S. PISCHINGER, W. BORNSCHEUER et al. « Compressor/expander units for fuel cell systems ». In : *SAE Paper, Fuel Cell Power for Transportation* (2002), p. 149–153.
- [103] J. WU, X. Z. YUAN, J. J. MARTIN et al. « A review of PEM fuel cell durability : Degradation mechanisms and mitigation strategies ». In : *Journal of Power Sources* 184.1 (2008), p. 104–119.

- [104] J. WU, X. ZI, J. J. MARTIN et al. « A review of PEM fuel cell durability : Degradation mechanisms and mitigation strategies ». In : *Journal of Power Sources* 184 (2008), p. 104–119.
- [105] X. YUAN, J. C. SUN, M. BLANCO et al. « AC impedance diagnosis of a 500 W PEM fuel cell stack : Part I : Stack impedance ». In : *Journal of Power Sources* 161.2 (oct. 2006), p. 920–928.
- [106] M. ZERROUGUI. « Observation et commande des systèmes singuliers non linéaires ». Thèse de doctorat. Université Henri Poincaré - Nancy I, 2011.
- [107] J. ZHANG et J. MORRIS. « Process modelling and fault diagnosis using fuzzy neural networks ». In : *Fuzzy Sets and Systems* 79 (1996), p. 127–140.
- [108] Q. ZHANG. « Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (mimo) linear time-varying systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 47.3 (mar. 2002), p. 525–529.
- [109] D. ZHAO. « Control of an Ultra-high Speed Centrifugal Compressor for the Air Management of Fuel Cell Systems ». PhD. dissertation. University of Technology of Belfort-Montbéliard, 2014.
- [110] M. Y. ZHONG, S. X. DING, J. LAM et al. « An LMI approach to design robust fault detection filter for uncertain LTI system ». In : *Automatica* 39 (2003), p. 543–550.
- [111] K. ZHOU et P.P. KHARGONEKAR. « Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty ». In : *Systems Control Letters* 10 (1988), p. 17–20.

Annexes

A. Valeurs numériques

Dans la première partie de cette annexe, nous définissons les expressions des constantes $c_i, i = 1, \dots, 24$, qui apparaissent dans le modèle dynamique du système d'alimentation en air (voir chapitre 2). Dans la deuxième partie, nous donnons la signification, les valeurs et les unités des paramètres physiques de la pile à combustible.

Constante	Expression	Valeur
c_1	$\frac{R T_{st} k_{ca,in}}{M_{O_2} V_{ca}} \left(\frac{x_{O_2,atm}}{1 + \omega_{atm}} \right)$	6.7
c_2	$P_{v,ca}$	47068
c_3	$\frac{R T_{st}}{V_{ca}}$	2.9×10^5
c_4	M_{O_2}	0.032
c_5	M_{N_2}	0.028
c_6	$M_v P_{v,ca}$	737.8
c_7	$\frac{R T_{st} n}{4 F V_{ca}}$	289.9
c_8	$\frac{R T_{st} k_{ca,in}}{M_{N_2} V_{ca}} \left(\frac{1 - x_{O_2,atm}}{1 + \omega_{atm}} \right)$	25.2
c_9	$\frac{\eta_{cm} k_t k_v}{J_{cp} R_{cm}}$	5.6
c_{10}	$\frac{C_p T_{atm}}{J_{cp} \eta_{cp}}$	8.25×10^4
c_{11}	P_{atm}	101325

Constante	Expression	Valeur
c_{12}	$\frac{\eta_{cm} k_{cm}}{J_{cp} R_{cm}}$	367.5
c_{13}	$\frac{R T_{atm}}{M_{a,atm} V_{sm}}$	4.5×10^6
c_{14}	$\frac{1}{\eta_{cm}}$	1.25
c_{15}	$\frac{1}{2\pi} \times \rho_{v-c} \times V_{cpt/tr} \times \rho_a$	1.1×10^{-5}
c_{16}	$k_{ca,in}$	3.6×10^{-6}
c_{17}	$\frac{C_D A_T}{\sqrt{R T_{st}}} \sqrt{\frac{2 \gamma}{\gamma - 1}}$	1.2×10^{-6}
c_{18}	$\frac{1}{\gamma}$	0.7143
c_{19}	$\left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$	0.53
c_{20}	$\frac{C_D A_T}{\sqrt{R T_{st}}} \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$	3.13×10^{-7}
c_{21}	$\frac{1}{R_{cm}}$	0.83
c_{22}	k_v	0.015
c_{23}	$k_{ca,in} \frac{x_{O_2,atm}}{1 + \omega_{atm}}$	7.3×10^{-7}
c_{24}	$\frac{n M_{O_2}}{4 F}$	3.16×10^{-5}
\bar{c}_1	$\frac{R T_{st}}{M_{O_2} V_{ca}} \left(\frac{x_{O_2,atm}}{1 + \omega_{atm}}\right)$	1.85×10^6
\bar{c}_8	$\frac{R T_{st}}{M_{N_2} V_{ca}} \left(\frac{1 - x_{O_2,atm}}{1 + \omega_{atm}}\right)$	6.94×10^6

Table 0.2 – Expressions des constantes

Symbole	Description	Unité en SI	Valeur
P_{atm}	Pression atmosphérique	Pa	1.01325×10^5
T_{atm}	Température atmosphérique	K	298.15
R	Constante universelle des gaz	$J/(mol.K)$	8.31451
C_p	Capacité calorifique spécifique de l'air	$J/(kg.K)$	1004
ρ_a	Densité de l'air	kg/m^3	1.23
M_{O_2}	Masse molaire de l'oxygène	kg/mol	32×10^{-3}
M_{N_2}	Masse molaire de l'azote	kg/mol	28×10^{-3}
M_v	Masse molaire du vapeur	kg/mol	18.02×10^{-3}
$M_{a,atm}$	Masse molaire de l'air atmosphérique	kg/mol	28.97×10^{-3}
γ	Rapport de capacité calorifique d'air	–	1.4
F	Constante de Faraday	$A.s/mol$	96485
A_T	Section de sortie de la cathode	m^2	0.002
C_D	Coefficient de décharge à la sortie de la cathode	–	0.0124
J_{cp}	Inertie moto-compresseur	$kg.m^2$	5×10^{-5}
R_{cm}	Résistance du moteur	Ω	1.2
η_{cm}	Rendement moteur	–	98%
η_{cp}	Rendement compresseur	–	80%
k_{cm}	Constante de couple du moteur	$N.m/A$	0.0225
k_v	Constante de vitesse du moteur	$V/(rad/s)$	0.0153
n	Nombre de cellules de la pile à combustible	–	380
A_{fc}	Surface active de la pile à combustible	m^2	280×10^{-4}
T_{st}	Température de la pile à combustible	K	353.15
t_m	Épaisseur de la membrane	m^2	1.275×10^{-4}
V_{ca}	Volume de la cathode	m^3	0.01
V_{sm}	Volume du collecteur d'admission	m^3	0.02
$V_{cpr/tr}$	Volume comprimé par tour	m^3/tr	6.4570×10^{-6}
$k_{ca,in}$	Constante de l'orifice à l'entrée de la cathode	$kg/(s.Pa)$	0.3629×10^{-5}
$k_{ca,out}$	Constante de l'orifice à la sortie de la cathode	$kg/(s.Pa)$	0.2177×10^{-5}
$k_{sm,out}$	Constante de l'orifice à la sortie du collecteur	$kg/(s.Pa)$	0.3629×10^{-5}
ϕ_{atm}	Humidité relative	–	0.5
$y_{O_2,atm}$	Rapport molaire d'oxygène à l'entrée de la cathode	–	0.21

Table 0.3 – Valeurs numériques des paramètres de la simulation

B. Rappels théoriques

B.1 Observabilité des systèmes non-linéaires

Afin d'assurer de l'existence d'un observateur pour un système non-linéaire, une première étape consiste à analyser la propriété dite d'observabilité. Ainsi, ce paragraphe est dédié à un rappel de résultats classiques sur l'analyse de cette propriété.

Pour les systèmes non linéaires, contrairement aux systèmes linéaires, le problème de l'observabilité est plus compliqué. Dans le cas des systèmes non linéaires, la notion d'observabilité est liée aux entrées appliquées et des conditions initiales, et peut être définie à partir de la notion distinguabilité. Dans ce qui suit, une définition d'observabilité sera donnée en considérant le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (50)$$

avec $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Définition 2. (*Distinguabilité [33, 66, 106]*) : Un couple d'états initiaux (x^0, x^1) est dit distinguable pour le système (50), si pour toute entrée $u(t)$ et pour tout $t \geq 0$, nous avons les sorties correspondantes $y_u^0(t)$ et $y_u^1(t)$ vérifient $y_u^0(t) \neq y_u^1(t)$.

Dans le cas contraire, on dit que x^0 et x^1 sont indistinguables.

Définition 3. (*Observabilité [33, 66, 106]*) : Le système non linéaire (50) est dit observable s'il ne possède pas de couple d'états initiaux distincts (x^0, x^1) indistinguables, c'est-à-dire le système (50) est observable si $\forall x^0 \in \mathbb{R}^n$, x^0 est distinguable.

Pour les systèmes mono-entrée mono-sortie, le concept d'observabilité peut être énoncé de la manière suivante : supposons que les entrées et les sorties $(u(t)$ et $y(t))$ sont connues, alors, leurs dérivées successives peuvent être calculées. Nous définissons :

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= (y \quad \dot{y} \quad \ddot{y} \quad \dots \quad y^{(n-1)})^T \\ \bar{u}(t) &= (u \quad \dot{u} \quad \ddot{u} \quad \dots \quad u^{(n-1)})^T \end{aligned}$$

Chaque dérivée $y^i(t)$ peut être exprimée en fonction de l'état $x(t)$ et $u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^i$, ce qui permet d'écrire :

$$y^i(t) = \psi_i(x(t), \bar{u}(t)).$$

La dérivée par rapport au temps de $y^i(t)$ est donnée par :

$$y^{(i+1)}(t) = \left[\frac{\partial \psi_i(x(t), \bar{u}(t))}{\partial x} \right] f(x(t), u(t)) + \left[\frac{\partial \psi_i(x(t), \bar{u}(t))}{\partial \bar{u}} \right] \frac{d\bar{u}(t)}{dt}$$

ce qui est, par définition, $\psi_{(i+1)}(x(t), \bar{u}(t))$ si $i + 1 \leq n - 1$. Nous définissons l'opérateur linéaire M_f comme suit :

$$(M_f \psi)(x(t), \bar{u}(t)) = \left[\frac{\partial \psi_i(x(t), \bar{u}(t))}{\partial x} \right] f(x(t), u(t)) + \left[\frac{\partial \psi_i(x(t), \bar{u}(t))}{\partial \bar{u}} \right] \frac{d\bar{u}(t)}{dt}$$

les dérivées par rapport au temps de la sortie $y(t)$ définies par $\bar{y}(t)$ peuvent alors écrire sous la forme :

$$\bar{y}(t) = \omega(x(t), \bar{u}(t)),$$

où :

$$\omega(x(t), \bar{u}(t)) = \begin{pmatrix} h(x(t), u(t)) \\ (M_f h)(x(t), u(t)) \\ \vdots \\ (M_f^{n-1} h)(x(t), u(t)) \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Si $\omega(x(t), \bar{u}(t))$ est inversible, c'est-à-dire il existe ω^{-1} telle que :

$$x(t) = \omega^{-1}(\bar{y}(t), \bar{u}(t))$$

alors le système (50) est dit observable. De plus, si le jacobien :

$$\Omega(x(t), \bar{u}(t)) = \frac{\partial \omega(x(t), \bar{u}(t))}{\partial x}$$

de $\omega(x(t), \bar{u}(t))$ est inversible pour $x = x^0$, alors il existe un voisinage de x^0 où $\omega(x(t), \bar{u}(t))$ est inversible, ce qui implique que le système (50) est localement observable, ce qui signifie que x^0 est distinguable de tous les points dans le voisinage de x^0 . L'étude de l'observabilité des systèmes multi-entrées multi-sorties s'effectue de manière similaire.

B.2 Inégalité Matricielle Linéaire

On appelle une inégalité matricielle linéaire notée (LMI) le problème suivant : étant données les matrices réelles, carrées et symétriques : $F^i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ et $x \in \mathbb{R}^m$ telles que :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (52)$$

Le symbole d'inégalité dans (52) signifie que $F(x)$ est une matrice définie positive, c'est-à-dire, $\forall u \in \mathbb{R}^n$ et $u \neq 0 : u^T F(x) u > 0$.

B.3 Lemme du complément de Schur

Le lemme du complément de Schur convertit une classe des inégalités non linéaires à des inégalités matricielles Linéaires LMIs convexes qui apparaissent régulièrement dans les problèmes de commande. L'idée de base est la suivante : la LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (53)$$

où $Q(x) = Q^T(x)$, $R = R^T(x)$ et $S(x)$ dépend d'une manière affine de x , est équivalente à [13] :

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0 \quad (54)$$

En d'autres termes, l'ensemble des inégalités non linéaires (54) peut être représenté par la LMI (52).

B.4 Produit de deux fonctions Lipschitz

Le lemme suivant annonce la propriété du produit de deux fonctions Lipschitz, bornées sur un intervalle.

Lemme 3. ([27]) : Soit f et g deux fonctions bornées sur un intervalle Ω et sont Lipschitziennes par rapport à x et y , avec des constantes de Lipschitz respectivement γ_f et γ_g , alors le produit $f g$ est également Lipschitzien sur Ω :

$$\|f(x)g(x) - f(y)g(y)\| \leq \gamma_g F_M \|x - y\| + \gamma_f G_M \|x - y\| \quad \forall x, y \in \Omega$$

avec

$$G_M = \sup_{y \in \Omega} \|g(y)\| \quad \text{et} \quad F_M = \sup_{x \in \Omega} \|f(x)\|.$$

C. Présentation de certaines expressions techniques

La fonction $g_1^{x^0}$ peut être définie explicitement par :

$$g_1^{x^0}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{g^{x^0}(x_1, x_2) - g^{x^0}(x_1, 0)}{x_2} & \text{pour } x_2 \neq 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0}(x_1, 0) & \text{pour } x_2 = 0. \end{cases} \quad (55)$$

En utilisant l'expression de g^{x^0} donnée par (5.30), il vient que :

$$g_1^{x^0}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{c_3}{x_2} \left[\frac{\Psi(x_1 + c_2^{x^0})}{c_4 x_1 + c_6^{x^0}} - \frac{\Psi(x_1 + x_2 + c_2^{x^0})}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x^0}} \right] & \text{pour } x_2 \neq 0 \\ c_3 \frac{c_5 \Psi(x_1 + c_2^{x^0}) - \Psi'(x_1 + c_2^{x^0})(c_4 x_1 + c_6^{x^0})}{(c_4 x_1 + c_6^{x^0})^2} & \text{pour } x_2 = 0 \end{cases} \quad (56)$$

où Ψ' est définie explicitement par :

$$\Psi'(y) = \begin{cases} \frac{\gamma-1}{\gamma} c_{17} c_{11} \frac{1}{\gamma} \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{c_{11}}{y} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{c_{11}}{y} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}} & \text{pour } y \in \left[c_{11}, \frac{c_{11}}{c_{19}} \right] \\ c_{18} & \text{pour } y > \frac{c_{11}}{c_{19}}. \end{cases} \quad (57)$$

D'après (5.37) (5.43), nous avons :

$$\begin{aligned} u_4 &= \frac{1}{c_1} u_5 + x_1 + x_2 \\ &= -\frac{c_8}{c_1^2} x_1^0 \left[x_1 \left(1 - \frac{c_8}{c_1} \beta(\lambda_{O_2}^\infty) \right) g_1^{x^0}(x_1, x_2) + \bar{\beta}(\lambda_{O_2}^\infty) g^{x^0}(x_1, x_2) \right] \\ &\quad + x_1 + \frac{c_1^2 - c_8}{c_1^2} x_2 \end{aligned} \quad (58)$$

où g^{x^0} et $g_1^{x^0}$ sont définies respectivement par (5.30) et (56).

Soit f^{x^0} la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f^{x^0}(x_1, x_2, x_4) &= \begin{pmatrix} f_1^{x^0} \\ f_2^{x^0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1(-x_1 - x_2 + x_4) - x_1 \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) + x_1^0 g^{x^0}(x_1, x_2) \\ c_8(-x_1 - x_2 + x_4) - x_2 \bar{\psi}^{x^0}(x_1, x_2) + x_2^0 g^{x^0}(x_1, x_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (59)$$

D'après la méthode de stabilisation introduite dans le paragraphe (5.2.1), une loi de commande stabilisante pour le système (5.33) (voir l'expression (5.14)) est définie par :

$$u_3 = -\langle \nabla V(x_1, x_2), F^{x^0} \rangle - \langle \nabla u_4, f^{x^0}(x_1, x_2, x_4) \rangle - (x_4 - u_4) \quad (60)$$

où u_4 est donnée par (58) et avec $F^{x^0} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_8 \end{pmatrix}$.

Pour donner la valeur du feedback (60), nous donnons explicitement les valeurs des quantités constituantes de la partie droite de (60).

Premièrement, des calculs directs montrent que :

$$\langle \nabla V(x_1, x_2), F^{x^0} \rangle = x_1 \left(c_1 - \frac{c_8^2}{c_1} \right) + x_2 \frac{c_8^3}{c_1^2}. \quad (61)$$

Deuxièmement, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} u_4 &= -\frac{c_8}{c_1^2} x_1^0 \left[\left(1 - \frac{c_8}{c_1} \beta(\lambda_{O_2}^\infty) \right) \left(g_1^{x^0}(x_1, x_2) + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0}(x_1, x_2) \right) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\beta}(\lambda_{O_2}^\infty) \frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0}(x_1, x_2) \right] + 1, \end{aligned} \quad (62)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} u_4 &= -\frac{c_8}{c_1^2} x_1^0 \left[x_1 \left(1 - \frac{c_8}{c_1} \beta(\lambda_{O_2}^\infty) \right) \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0}(x_1, x_2) + \bar{\beta}(\lambda_{O_2}^\infty) \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0}(x_1, x_2) \right] \\ &\quad + \frac{c_1^2 - c_8}{c_1^2}. \end{aligned} \tag{63}$$

D'après (59), (62) et (63), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\langle \nabla u_4, f^{x^0}(x_1, x_2, x_4) \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} u_4 f_1^{x^0}(x_1, x_2, x_4) + \frac{\partial}{\partial x_2} u_4(x_1, x_2) f_2^{x^0}(x_1, x_2, x_4) \\ &= \sigma_1(\lambda_{O_2}^\infty) \left[\left(g_1^{x^0}(x_1, x_2) + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0}(x_1, x_2) \right) f_1^{x^0}(x_1, x_2, x_4) \right. \\ &\quad \left. + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0}(x_1, x_2) f_2^{x^0}(x_1, x_2, x_4) \right] \\ &\quad + \sigma_2(\lambda_{O_2}^\infty) \left[\frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0}(x_1, x_2) f_1^{x^0}(x_1, x_2, x_4) + \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0}(x_1, x_2) f_2^{x^0}(x_1, x_2, x_4) \right] \\ &\quad + f_1^{x^0}(x_1, x_2, x_4) + \frac{c_1^2 - c_8}{c_1^2} f_2^{x^0}(x_1, x_2, x_4) \end{aligned} \tag{64}$$

avec

$$\sigma_1(\lambda_{O_2}^\infty) = -\frac{c_8}{c_1^2} x_1^0 \left(1 - \frac{c_8}{c_1} \beta(\lambda_{O_2}^\infty) \right)$$

et

$$\sigma_2(\lambda_{O_2}^\infty) = -\frac{c_8}{c_1^2} x_1^0 \bar{\beta}(\lambda_{O_2}^\infty).$$

En utilisant la relation (5.34), u_3 est donnée explicitement par :

$$\begin{aligned}
u_3 = & -x_1 \left(c_1 - \frac{c_8^2}{c_1} \right) - x_2 \frac{c_8^3}{c_1^2} + x_1 + \frac{c_1^2 - c_8}{c_1^2} x_2 - x_4 - f_1^{x^0} \\
& - \sigma_1 (\lambda_{O_2}^\infty) \left[\left(g_1^{x^0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} \right) f_1^{x^0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} f_2^{x^0} - x_1 g_1^{x^0} \right] \\
& - \sigma_2 (\lambda_{O_2}^\infty) \left[\frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0} f_1^{x^0} + \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0} f_2^{x^0} - g^{x^0} \right] - \frac{c_1^2 - c_8}{c_1^2} f_2^{x^0}
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
u_3 = & x_1 \delta_1 + x_2 \delta_2 - x_4 - f_1^{x^0} - \delta_3 f_2^{x^0} \\
& - \sigma_1 (\lambda_{O_2}^\infty) \left[\left(g_1^{x^0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} \right) f_1^{x^0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} f_2^{x^0} - x_1 g_1^{x^0} \right] \\
& - \sigma_2 (\lambda_{O_2}^\infty) \left[\frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0} f_1^{x^0} + \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0} f_2^{x^0} - g^{x^0} \right]
\end{aligned} \tag{65}$$

avec

$$\delta_1 = \left(1 - c_1 + \frac{c_8^2}{c_1} \right), \quad \delta_2 = \left(\frac{c_1^2 - c_8 - c_8^3}{c_1^2} \right) \quad \text{et} \quad \delta_3 = \frac{c_1^2 - c_8}{c_1^2}.$$

Il est à noter qu'une fonction de Lyapunov strictement positive pour le système bouclé est définie par :

$$V_1(x_1, x_2, x_4) = V(x_1, x_2) + \frac{1}{2} (x_4 - u_4(x_1, x_2))^2. \tag{66}$$

Dans ce qui suit, nous allons déduire l'expression de u_1 , ensuite celle de u .

Tout d'abord, en utilisant l'équation (5.34), nous avons :

$$u_2 = \frac{1}{c_{15}} \left(\frac{1}{\theta^{x^0}(x_4)} u_3 + c_{16} (-x_1 - x_2 + x_4) - c_{15}^{x^0} \right). \tag{67}$$

D'après (65), il vient que

$$\begin{aligned}
u_2 = & \frac{1}{c_{15}} \left[x_1 \left(\bar{\theta}^{x^0}(x_4) \delta_1 - c_{16} \right) + x_2 \left(\bar{\theta}^{x^0}(x_4) \delta_2 - c_{16} \right) + x_4 \left(-\bar{\theta}^{x^0}(x_4) + c_{16} \right) - c_{15}^{x^0} \right] \\
& + \theta_1^{\lambda_{\bar{o}_2}^\infty}(x_4) \left[\left(g_1^{x^0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} \right) f_1^{x^0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} f_2^{x^0} - x_1 g_1^{x^0} \right] \\
& + \theta_2^{\lambda_{\bar{o}_2}^\infty}(x_4) \left[\frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0} f_1^{x^0} + \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0} f_2^{x^0} - g^{x^0} \right] + \frac{\bar{\theta}^{x^0}(x_4)}{c_{15}} \left[f_1^{x^0} + \delta_3 f_2^{x^0} \right]
\end{aligned} \tag{68}$$

avec

$$\bar{\theta}^{x^0}(x_4) = \frac{1}{\theta^{x^0}(x_4)}, \quad \theta_1^{\lambda_{\bar{o}_2}^\infty}(x_4) = -\frac{\sigma_1(\lambda_{\bar{o}_2}^\infty)}{c_{15}\theta^{x^0}(x_4)}, \quad \theta_2^{\lambda_{\bar{o}_2}^\infty}(x_4) = -\frac{\sigma_2(\lambda_{\bar{o}_2}^\infty)}{c_{15}\theta^{x^0}(x_4)}.$$

Soit h^{x^0} la fonction définie par :

$$h^{x^0}(x) = \begin{pmatrix} f^{x^0}(x_1, x_2, x_4) \\ \theta^{x^0}(x_4) (c_{15}x_3 - c_{16}(-x_1 - x_2 + x_4) + c_{15}^{x^0}) \end{pmatrix} \tag{69}$$

où f^{x^0} est définie par (59).

D'après (5.14), on peut déduire que :

$$\begin{aligned}
u_1(x) = & -\langle \nabla V_1(x_1, x_2, x_4), H^{x^0}(x) \rangle - \langle \nabla u_2(x_1, x_2, x_4), h^{x^0}(x) \rangle \\
& - (x_3 - u_2(x_1, x_2, x_4))
\end{aligned} \tag{70}$$

$$\text{avec } H^{x^0}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \\ c_{15}\theta^{x^0}(x_4) \end{pmatrix}.$$

Finalement, et d'après (5.31), une loi de commande stabilisante pour le système global (5.29) est donnée par :

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{c_{12}} \left[u_1(x) + c_9(x_3 + x_3^0) + c_{10} \left(\left(\frac{x_4 + x_4^0}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \right] \\
&= \frac{1}{c_{12}} \left[-c_{15} \theta^{x^0}(x_4) (x_4 - u_4(x_1, x_2)) - \langle \nabla u_2(x_1, x_2, x_4), h^{x^0}(x) \rangle \right. \\
&\quad \left. -x_3 + \frac{1}{c_{15}} \left(\frac{u_3(x_1, x_2, x_4)}{\theta^{x^0}(x_4)} + c_{16}(-x_1 - x_2 + x_4) - c_{15}^{x^0} \right) \right. \\
&\quad \left. + c_9(x_3 + x_3^0) + c_{10} \left(\left(\frac{x_4 + x_4^0}{c_{11}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \right]
\end{aligned} \tag{71}$$

où u_3, u_4 sont données respectivement par (65) et (58).

Pour déterminer explicitement $u(x)$, on procède d'abord au calcul de la quantité $\langle \nabla u_2, h^{x^0} \rangle$.

En utilisant (69), nous obtenons

$$\langle \nabla u_2, h^{x^0} \rangle = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} f_1^{x^0} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} f_2^{x^0} + c_{15} \frac{\partial u_2}{\partial x_4} \theta^{x^0}(x_4) (c_{15} x_3 - c_{16}(-x_1 - x_2 + x_4) + c_{15}^{x^0}) \tag{72}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= \frac{\bar{\theta}^{x^0}(x_4) \delta_1 - c_{16}}{c_{15}} + \frac{\bar{\theta}^{x^0}(x_4)}{c_{15}} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} f_1^{x^0} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial x_1} f_2^{x^0} \right] \\
&\quad + \theta_1^{\lambda_{o_2}^\infty}(x_4) \left[\left(2 \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} + x_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} g_1^{x^0} \right) f_1^{x^0} + \left(g_1^{x^0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} f_1^{x^0} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} f_2^{x^0} + x_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} g_1^{x^0} f_2^{x^0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_2^{x^0} - g_1^{x^0} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} \right] \\
&\quad + \theta_2^{\lambda_{o_2}^\infty}(x_4) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} g^{x^0} f_1^{x^0} + \frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1^{x^0} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} g^{x^0} f_2^{x^0} + \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_2^{x^0} - \frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0} \right],
\end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= \frac{\bar{\theta}^{x^0}(x_4) \delta_2 - c_{16}}{c_{15}} + \frac{\bar{\theta}^{x^0}(x_4)}{c_{15}} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} f_1^{x^0} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial x_2} f_2^{x^0} \right] \\
&+ \theta_1^{\lambda_{O_2}^\infty}(x_4) \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} + x_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} g_1^{x^0} \right) f_1^{x^0} + \left(g_1^{x^0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} f_1^{x^0} \right. \\
&\quad \left. + x_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} g_1^{x^0} f_2^{x^0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_2^{x^0} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} \right] \\
&+ \theta_2^{\lambda_{O_2}^\infty}(x_4) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} g^{x^0} f_1^{x^0} + \frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_1^{x^0} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} g^{x^0} f_2^{x^0} + \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_2^{x^0} - \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0} \right]
\end{aligned} \tag{74}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_2}{\partial x_4} &= \frac{-\bar{\theta}^{x^0}(x_4) \delta_2 + c_{16}}{c_{15}} + \frac{\bar{\theta}^{x^0}(x_4)}{c_{15}} \left[\frac{\partial}{\partial x_4} f_1^{x^0} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial x_4} f_2^{x^0} \right] \\
&+ \frac{d}{dx_4} \theta_1^{\lambda_{O_2}^\infty}(x_4) \left[\left(g_1^{x^0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} \right) f_1^{x^0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} f_2^{x^0} - x_1 g_1^{x^0} \right] \\
&+ \theta_1^{\lambda_{O_2}^\infty}(x_4) \left[\left(g_1^{x^0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} \right) \frac{\partial}{\partial x_4} f_1^{x^0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_4} f_2^{x^0} \right] \\
&+ \frac{d}{dx_4} \theta_2^{\lambda_{O_2}^\infty}(x_4) \left[\frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0} f_1^{x^0} + \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_2^{x^0} - g^{x^0} \right] \\
&+ \theta_2^{\lambda_{O_2}^\infty}(x_4) \left[\frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_4} f_1^{x^0} + \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_4} f_2^{x^0} \right] \\
&+ \frac{1}{c_{15}} \frac{d}{dx_4} \bar{\theta}^{x^0}(x_4) \left[f_1^{x^0} + \delta_3 f_2^{x^0} + (x_1 \delta_1 + x_2 \delta_2 - x_4) \right]
\end{aligned} \tag{75}$$

D'après (73) (74) (75), il vient que :

$$\begin{aligned}
\langle \nabla u_2, h^{x^0} \rangle &= \frac{(\bar{\theta}^{x^0}(x_4) \delta_1 - c_{16})}{c_{15}} f_1^{x^0} + \frac{(\bar{\theta}^{x^0}(x_4) \delta_2 - c_{16})}{c_{15}} f_2^{x^0} + \frac{(-\bar{\theta}^{x^0}(x_4) \delta_2 + c_{16})}{c_{15}} h_3^{x^0} \\
&+ \theta_1^{\lambda_{\infty}^{o_2}}(x_4) \left[x_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} g_1^{x^0} (f_1^{x^0})^2 + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_2} g_1^{x^0} (f_2^{x^0})^2 + f_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_2^{x^0} \right. \right. \\
&+ f_2^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_1^{x^0} + f_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1^{x^0} + f_2^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_2^{x^0} \\
&+ f_1^{x^0} f_2^{x^0} \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} g_1^{x^0} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_2} g_1^{x^0} \right) - f_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} - f_2^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} \\
&+ h_3^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_4} f_1^{x^0} + h_3^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_4} f_2^{x^0} \left. \right) + 2f_1^{x^0} f_2^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} \\
&+ f_1^{x^0} g_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1^{x^0} + f_2^{x^0} g_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_1^{x^0} + 2f_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} - f_1^{x^0} g_1^{x^0} + h_3^{x^0} g_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_4} f_1^{x^0} \left. \right] \\
&+ \theta_2^{\lambda_{\infty}^{o_2}}(x_4) \left[(f_1^{x^0})^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} g^{x^0} + (f_2^{x^0})^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 x_2} g^{x^0} + 2f_1^{x^0} f_2^{x^0} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} g^{x^0} \right. \\
&+ f_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1^{x^0} + f_2^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_2^{x^0} + f_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_2^{x^0} - f_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0} \\
&+ f_2^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_1^{x^0} - f_2^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0} + h_3^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_4} f_1^{x^0} + h_3^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_4} f_2^{x^0} \left. \right] \\
&+ \frac{\bar{\theta}^{x^0}(x_4)}{c_{15}} \left[f_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1^{x^0} + f_2^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_1^{x^0} + \delta_3 \left(f_1^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_2^{x^0} + f_2^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_2^{x^0} \right) \right. \\
&+ h_3^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_4} f_1^{x^0} + \delta_3 h_3^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_4} f_2^{x^0} \left. \right] + \Gamma^{x^0}
\end{aligned} \tag{76}$$

avec

$$\begin{aligned}
\Gamma^{x^0} = & \frac{d}{dx_4} \theta_1^{\lambda_{O_2}^\infty}(x_4) h_3^{x^0} \left[\left(g_1^{x^0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x^0} \right) f_1^{x^0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x^0} f_2^{x^0} - x_1 g_1^{x^0} \right] \\
& + \frac{d}{dx_4} \theta_2^{\lambda_{O_2}^\infty}(x_4) h_3^{x^0} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0} f_1^{x^0} + \frac{\partial}{\partial x_2} g^{x^0} \frac{\partial}{\partial x_2} f_2^{x^0} - g^{x^0} \right] \\
& + \frac{1}{c_{15}} \frac{d}{dx_4} \bar{\theta}^{x^0}(x_4) h_3^{x^0} \left[f_1^{x^0} + \delta_3 f_2^{x^0} + (x_1 \delta_1 + x_2 \delta_2 - x_4) \right]
\end{aligned} \tag{77}$$

où $h_3^{x^0}$ est définie dans (69) et avec

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{d}{dx_4} \bar{\theta}^{x^0}(x_4) &= - \frac{\frac{\gamma-1}{\gamma} c_{13} c_{14} c_{11} \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{x_4 + x_4^0}{c_{11}} \right) \frac{-1}{\gamma}}{\left(c_{13} \left(1 + c_{14} \left(\left(\frac{x_4 + x_4^0}{c_{11}} \right) \frac{\gamma-1}{\gamma} - 1 \right) \right) \right)^2} \\
\frac{d}{dx_4} \theta_1^{\lambda_{O_2}^\infty}(x_4) &= - \frac{1}{c_{15}} \sigma_1(\lambda_{O_2}^\infty) \frac{d}{dx_4} \bar{\theta}^{x^0}(x_4) \\
\frac{d}{dx_4} \theta_2^{\lambda_{O_2}^\infty}(x_4) &= - \frac{1}{c_{15}} \sigma_2(\lambda_{O_2}^\infty) \frac{d}{dx_4} \bar{\theta}^{x^0}(x_4)
\end{aligned} \right. \tag{78}$$

Pour déterminer u , dans ce qui suit, nous donnons explicitement les dérivées respectives de g^{x^0} et de $g_1^{x^0}$.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} g^{x^0}(x_1, x_2) = -c_3 \frac{\psi'(x_1 + x_2 + c_2^{x^0}) (c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x^0}) - c_4 \psi(x_1 + x_2 + c_2^{x^0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x^0})^2}, \tag{79}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x_2} g^{x_0}(x_1, x_2) = -c_3 \frac{\psi'(x_1 + x_2 + c_2^{x_0})(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x_0}) - c_5 \psi(x_1 + x_2 + c_2^{x_0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x_0})^2}. \quad (80)$$

Par ailleurs et d'après (55) (80), on déduit que :

$$g_1^{x_0}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{c_3}{x_2} \left[\frac{\psi(x_1 + c_2^{x_0})}{c_4 x_1 + c_6^{x_0}} - \frac{\psi(x_1 + x_2 + c_2^{x_0})}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x_0}} \right] & \text{pour } x_2 \neq 0 \\ -c_3 \frac{\psi'(x_1 + c_2^{x_0})(c_4 x_1 + c_6^{x_0}) - c_5 \psi(x_1 + c_2^{x_0})}{(c_4 x_1 + c_6^{x_0})^2} & \text{pour } x_2 = 0. \end{cases} \quad (81)$$

D'après (81), nous obtenons que :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{x_0}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{c_3}{x_2} \left[\frac{\psi'(x_1 + c_2^{x_0})(c_4 x_1 + c_6^{x_0}) - c_4 \psi(x_1 + c_2^{x_0})}{(c_4 x_1 + c_6^{x_0})^2} \right. \\ \left. - \frac{\psi'(x_1 + x_2 + c_2^{x_0})}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x_0}} - \frac{c_4 \psi(x_1 + x_2 + c_2^{x_0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x_0})^2} \right] & \text{pour } x_2 \neq 0 \\ -c_3 \left[\frac{\psi''(x_1 + c_2^{x_0})}{(c_4 x_1 + c_6^{x_0})} - \frac{(c_4 + c_5) \psi'(x_1 + c_2^{x_0})}{(c_4 x_1 + c_6^{x_0})^2} \right. \\ \left. + \frac{2c_4 c_5 \psi(x_1 + c_2^{x_0})}{(c_4 x_1 + c_6^{x_0})^3} \right] & \text{pour } x_2 = 0 \end{cases} \quad (82)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{x_0}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{c_3}{x_2} \left[-\frac{1}{c_3} g_1^{x_0}(x_1, x_2) - \frac{\psi'(x_1 + x_2 + c_2^{x_0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x_0})} \right. \\ \left. + \frac{c_5 \psi(x_1 + x_2 + c_2^{x_0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x_0})^2} \right] & \text{pour } x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x_2 = 0. \end{cases} \quad (83)$$

D'après (82) (83), nous obtenons que :

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} g_1^{x_0}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{c_3}{x_2} \left[\frac{\psi''(x_1 + c_2^{x_0})}{(c_4 x_1 + c_6^{x_0})} - \frac{2c_4 \psi'(x_1 + c_2^{x_0})}{(c_4 x_1 + c_6^{x_0})^2} + \frac{2c_4^2 \psi(x_1 + c_2^{x_0})}{(c_4 x_1 + c_6^{x_0})^3} \right. \\ \left. + \frac{\psi''(x_1 + x_2 + c_2^{x_0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x_0})} - \frac{2c_4^2 \psi(x_1 + x_2 + c_2^{x_0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x_0})^3} \right] & \text{pour } x_2 \neq 0 \\ -c_3 \left[\frac{\psi'''(x_1 + c_2^{x_0})}{(c_4 x_1 + c_6^{x_0})} - \frac{(c_4 + c_5) \psi''(x_1 + c_2^{x_0})}{(c_4 x_1 + c_6^{x_0})^2} \right. \\ \left. + \frac{2c_4 (c_4 + c_5) \psi'(x_1 + c_2^{x_0})}{(c_4 x_1 + c_6^{x_0})^3} - \frac{6c_4^2 c_5 \psi(x_1 + c_2^{x_0})}{(c_4 x_1 + c_6^{x_0})^4} \right] & \text{pour } x_2 = 0, \end{cases} \quad (84)$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x_2} g_1^{x^0}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2c_3}{x_2^2} \left[\frac{1}{c_3} g_1^{x^0}(x_1, x_2) + \frac{\psi'(x_1 + x_2 + c_2^{x^0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x^0})} - \frac{c_5 \psi(x_1 + x_2 + c_2^{x^0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x^0})^2} \right] \\ + \frac{c_3}{x_2} \left[-\frac{\psi''(x_1 + x_2 + c_2^{x^0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x^0})} + \frac{2c_5 \psi'(x_1 + x_2 + c_2^{x^0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x^0})^2} \right] \\ - \frac{2c_5^2 \psi(x_1 + x_2 + c_2^{x^0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x^0})^3} \quad \text{pour } x_2 \neq 0 \\ 0 \quad \text{pour } x_2 = 0 \end{cases} \quad (85)$$

D'après (79) (80), nous obtenons que :

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} g^{x^0}(x_1, x_2) = -c_3 \left[\frac{\psi''(x_1 + x_2 + c_2^{x^0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x^0})} - \frac{2c_4 \psi'(x_1 + x_2 + c_2^{x^0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x^0})^2} + \frac{2c_4^2 \psi(x_1 + x_2 + c_2^{x^0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x^0})^3} \right], \quad (86)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x_2} g^{x^0}(x_1, x_2) = -c_3 \left[\frac{\psi''(x_1 + x_2 + c_2^{x^0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x^0})} - \frac{2c_5 \psi'(x_1 + x_2 + c_2^{x^0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x^0})^2} + \frac{2c_5^2 \psi(x_1 + x_2 + c_2^{x^0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x^0})^3} \right], \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} g^{x^0}(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} g^{x^0}(x_1, x_2) \\ &= -c_3 \left[\frac{\psi''(x_1 + x_2 + c_2^{x^0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x^0})} - \frac{(c_4 + c_5) \psi'(x_1 + x_2 + c_2^{x^0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x^0})^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2c_4 c_5 \psi(x_1 + x_2 + c_2^{x^0})}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6^{x^0})^3} \right]. \end{aligned} \quad (88)$$