

THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

pour le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et leurs interactions

Ecole doctorale MathSTIC

présentée par

Olivier Thom

Préparée à l'unité de recherche UMR CNRS 6625 (IRMAR)
Institut de Recherche Mathématique de Rennes
U.F.R. de Mathématiques

**Structures
bifeuilletées en
codimension 1**

Thèse rapportée par :

Jasmin RAISSY

Maitre de Conférences à l'Université de Toulouse Paul
Sabatier / *rapporteur*

Sergei YAKOVENKO

Professeur au Weizmann Institute of Science / *rapporteur*

et soutenue à Rennes

le 1^{er} décembre 2017

devant le jury composé de :

Jasmin RAISSY

Maitre de Conférences à l'Université de Toulouse Paul
Sabatier / *rapporteur*

Felipe CANO

Professeur à l'Université de Valladolid / *examineur*

Bertrand DEROIN

DR CNRS à l'Université Cergy-Pontoise / *examineur*

Jean-Marie LION

Professeur à l'Université de Rennes 1 / *examineur*

Dominique CERVEAU

Professeur à l'Université de Rennes 1 / *directeur de thèse*

Frank LORAY

DR CNRS à l'Université de Rennes 1 / *directeur de thèse*

Remerciements

Merci à tous pour les moments que l'on a pu partager pendant cette thèse ; mais j'imagine que des remerciements plus personnels seraient plus adaptés ! Et par qui commencer si ce n'est par Frank et Dominique : suffira-t-il de dire que ce fut un vrai plaisir de travailler avec vous pendant la thèse ? Je n'hésiterais pas non plus à dire que je m'estime heureux d'avoir pu faire ma thèse avec vous, et que je vois mal comment j'aurais pu avoir de meilleurs directeurs ! Pour continuer dans le même ordre d'idées, j'aimerais remercier plus généralement toute l'équipe de géométrie analytique pour la bonne ambiance qui y règne : autant dire que c'est certainement le meilleur environnement dans lequel on puisse commencer la recherche. Merci également à mon voisin Felix pour les différents sujets, mathématiques ou non, dont on a pu discuter durant tout ce temps.

J'aimerais aussi remercier Jasmin et Sergei d'avoir bien voulu rapporter ma thèse, et pour m'avoir permis, via leurs remarques, d'améliorer le manuscrit. Merci également à Felipe, Bertrand et Jean-Marie d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Et maintenant arrive le moment de remercier tous mes collègues doctorants et ex-doctorants sans oublier personne... La tâche paraît ardue, mais allons-y méthodiquement ! Pour commencer, j'aimerais remercier de manière groupée tous les participants au groupe de travail sur les probabilités cartésiennes pour l'ardeur au travail et la régularité avec laquelle on se retrouve les midis. Merci en particulier à Ophélie puis Blandine, Hélène, Camille et Florian d'avoir bien voulu nous héberger. Un merci tout particulier à Tristan pour essayer des stratégies... innovantes.

Un autre merci groupé pour tous les participants du Fatday, même si ce groupe a une forte intersection avec le groupe précédent (et oui ! je n'hésite pas à remercier plusieurs fois les mêmes personnes, n'en déplaise à ceux que je ne citerais qu'une fois !) Ainsi, merci à Jesus David, merci à Benoît d'encore venir de temps en temps, merci à Thi d'avoir toujours un regard critique sur nos œuvres, et merci à Mercedes pour m'avoir parlé des palmiers au jambon. Pendant qu'on est dans ce sujet, j'en profite pour remercier José Andrés pour nous avoir fait découvrir des mets mexicains.

Je crois que maintenant est venu le temps pour moi de remercier le bureau 634 et ses divers occupants. Vient d'abord l'ancien bureau 634 : merci au Professeur

Rogue pour tous les jeux que tu nous fais découvrir ; merci à Alex pour faire autant rêver avec tes cahiers de brouillon ; et encore merci à vous deux d'avoir rendu ce bureau aussi sympathique pendant les deux ans où on l'a partagé. Merci ensuite au nouveau bureau 634 : María, pour avoir apporté ta bonne humeur, et Arame pour avoir apporté un peu de chaleur dans ce bureau.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement tous les membres de ma promo à l'ens pour tous les moments passés en votre compagnie. Merci en particulier à Cyril, Yon, Salim, Théo, Antonin et Lauriane : le lemme-clé est pour vous ! Merci aussi à Grégory d'égayer l'ambiance au piano. Et j'en profite également pour remercier Marine et Adrien pour la raclette et Coco et Basile pour Halloween !

Un grand merci aussi à Vincent pour les discussions mathématiques, à Yvan pour les discussions musicales et à Youenn pour les petits cochons. Merci également à Federico et Christian pour les différentes soirées organisées chez eux. Merci Türkü pour nous avoir fait découvrir la cuisine turque. Merci aussi aux habitués du quimpériodique Caroline, Dewi et Clément : ça fait toujours plaisir de vous y retrouver.

Les talents littéraires me manquent pour remercier proprement tout le monde, mais je tenais aussi à remercier (sans ordre particulier) Mac, Simon, Arnaud, Andrès, Phuong, Sheng, Mario, Zoïs, Joackim, Kevin, Adrien, Ninon, Pierre et Paul.

Une petite pensée également pour ceux qui ne sont plus là et que je n'ai pas encore cité : Arnaud, merci pour être toujours au courant de tout ; Damien et Nestor, merci pour les parties de frisbee ; mais aussi merci à Hélène (Hélène H. cette fois), Julie, Florian, Richard, Jean-Philippe et Charles.

Pour conclure les remerciements, j'aimerais remercier toute ma famille, en commençant par mes parents : n'arrivant pas à choisir un sujet de remerciement précis, laissez-moi juste dire merci pour la vie ! Merci à Mariette et Daniel pour tous les moments passés ensemble ! Et merci à Nonio d'être aussi marron.

Table des matières

Table des matières	5
1 Introduction	7
1.1 Motivations	7
1.2 Étude semi-locale	10
1.3 Étude locale	12
2 Voisinages de courbes, étude préliminaire et genre 1	19
2.1 Structure affine	19
2.2 Représentations d'holonomie	22
2.3 Genre 1	24
3 Étude de paires de fonctions	27
3.1 Généralités	27
3.2 Paires avec une fonction lisse	39
3.3 Paires de fonctions de Morse	50
3.4 Un exemple où la tangence est constituée de deux courbes doubles et d'une courbe simple	62
4 Voisinages de courbes, genre 2 et plus	69
4.1 Invariants locaux et holonomies entre les courbes de tangence . . .	69
4.2 Résultats généraux	71
4.3 Genre 2	74
Bibliographie	77

Chapitre 1

Introduction

1.1 Motivations

Le but premier de cette thèse est de contribuer à l'étude des voisinages de dimension 2 des courbes complexes. Plus précisément, si C est une courbe complexe de genre g , un voisinage de dimension 2 de C est une surface S munie d'une inclusion $C \hookrightarrow S$, deux surfaces S et S' étant identifiées si il existe des voisinages U et U' de C dans S et S' et un difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow U'$ qui induit l'identité sur C . L'équivalence de deux voisinages est donc donnée par des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} C & \hookrightarrow & U \subset S \\ \parallel \textit{id} & & \downarrow \varphi \\ C & \hookrightarrow & U' \subset S' \end{array}$$

On distingue différents cas selon l'auto-intersection $C \cdot C$ de la courbe dans S . Tout d'abord, dans la situation $C \cdot C < 0$, on peut utiliser le théorème de Grauert (voire [Gra] ou [CaMo]) qui implique par exemple le résultat suivant :

Théorème. *Soient C une courbe de genre g , S et S' deux voisinages de dimension 2 de C . Supposons que pour S et S' ,*

- $C \cdot C < 0$ si $g = 0$;
- $C \cdot C < 2(2 - 2g)$ si $g \geq 1$.

Alors S et S' sont équivalents dès que les fibré normaux de C dans S et S' sont égaux.

Plus généralement, le théorème de Grauert dit qu'un voisinage de C est déterminé par l'un des ses voisinages infinitésimaux ; autrement dit, si S et S' sont deux voisinages avec des recouvrements (U_i) et (U'_i) et des fonctions de transition (φ_{ij}) ,

(φ'_{ij}) , si on a égalité entre les k -jets le long de C pour k assez grand : $j^k \varphi_{ij} = j^k \varphi'_{ij}$, alors S et S' sont difféomorphes ([Gra], [CaMo]).

Pour le cas $C \cdot C > 0$, on peut citer les travaux de Ilyashenko sur les voisinages strictement positifs de courbes elliptiques [Ily], où il montre qu'à un voisinage générique S d'une courbe elliptique d'auto-intersection p on peut associer une application $\mu_S : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ qui classe le voisinage. Plus précisément, il donne le théorème :

Théorème (cf. [Ily]). *Soient C une courbe elliptique et S un voisinage de C tel que $C \cdot C = p > 0$. On peut associer à S un germe $\mu_S : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ vérifiant*

$$\mu_S = (\mu_1, \dots, \mu_p), \quad \mu_1(x, 0) \equiv 0, \quad d\mu_1(0) \neq 0,$$

appelé module du voisinage.

Deux voisinages sont équivalents si et seulement si ils ont le même module μ .

Le cas des courbes de genre $g \geq 2$ d'auto-intersection grande $p = C \cdot C > 2g - 2$ a été étudié par Mishustin dans [Mis1]. Il montre qu'à un tel voisinage S on peut associer deux applications $f_S : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2p}, 0)$ et $h_S : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{4g-4}, 0)$ qui classifient le voisinage S .

Le cas $C \cdot C = 0$ a reçu un apport essentiel de la part d'Arnol'd dans le cas des courbes elliptiques dans un mémoire célèbre ([Arn1], [Arn2]). Dans ce cas, un voisinage est isomorphe à un voisinage de la section nulle de son fibré normal génériquement (au sens : si le fibré normal est générique dans la jacobienne). Pour être plus précis, Arnol'd montre que le voisinage S est équivalent à un voisinage de la section nulle dans son fibré normal si le fibré normal n'est pas de torsion et satisfait une certaine condition diophantienne.

Les preuves de Ilyashenko et Mishustin dans le cas $C \cdot C > 0$ suivaient la même stratégie : utiliser l'existence d'une déformation (C_λ) de la courbe $C_0 = C$ dans le voisinage. Mais dans le cas $C \cdot C = 0$ et $g > 0$, on ne peut plus espérer construire de déformations de C dans S . On ne va donc plus chercher à déformer C en une famille de courbes, mais en un feuilletage, ie on cherche à trouver des feuilletages ayant C comme feuille.

Cette méthode ne peut malheureusement pas espérer être applicable en toute généralité, car Mishustin a montré dans [Mis2] qu'il existe des voisinages de C qui n'ont pas de feuilletages holomorphes ayant C comme feuille. Ce résultat n'exclut pas que l'on puisse trouver des feuilletages formels ; c'est ce qui a été fait dans l'article [LTT] où un pinceau de feuilletages formels $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$ sur S est construit, où \mathcal{F}_t admet C comme feuille si $t \in \mathbb{C}$.

Pour résumer la stratégie de classification des voisinages via les feuilletages, voici ce en quoi cela consiste :

1. Construire des feuilletages réguliers (analytiques ou formels selon la classification que l'on vise) sur S ayant C comme feuille.
2. Classifier les triplets $(S, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ où \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux feuilletages différents sur S ayant C comme feuille commune (on parlera dans la suite de *voisinage bifeuilleté*).
3. Étudier précisément combien il y a de feuilletages sur S pour pouvoir choisir deux feuilletages "canoniques" \mathcal{F} et \mathcal{G} à qui appliquer l'étape (2); ou, à défaut, pour pouvoir décider quand deux voisinages bifeuilletés $(S, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $(\tilde{S}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ donnent le même voisinage $S = \tilde{S}$.

Par exemple, l'article [LTT] utilise cette stratégie pour donner le théorème suivant. Ce théorème fait intervenir le type de Ueda du voisinage, qui est un entier introduit par Ueda dans [Ued] (deux voisinages difféomorphes auront le même type de Ueda).

Théorème (cf. [LTT]). *Soient C une courbe elliptique et S un voisinage de C de fibré normal N_C d'ordre m et de type de Ueda $k = mk'$. On peut associer à S une paire*

$$(\lambda, (\lambda_0, \dots, \lambda_{k'-1})) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{k'}$$

de sorte que deux voisinages soient formellement conjugués si et seulement si les paires correspondantes sont conjuguées sous l'action des racines k' -ièmes de l'unité définie par $(\lambda_i) \mapsto (\mu^{-i} \lambda_i)$.

Cette thèse explique comment classifier les voisinages bifeuilletés (l'étape (2) ci-dessus), dans le cas où C est de genre $g = 1$ aussi bien que dans le cas $g \geq 2$. On pourra d'ailleurs retrouver le chapitre 2 comme étant une partie de l'article [LTT].

On commencera dans un premier temps par présenter le problème et donner la classification en genre 1, plus simple à obtenir. On parlera parfois de *problème semi-local* pour qualifier le problème de la classification des voisinages bifeuilletés. On verra ainsi que pour le genre $g \geq 2$, on pourrait obtenir des configurations locales (c'est à dire au voisinage d'un point) arbitrairement compliquées.

On s'intéressera donc dans un deuxième temps aux paires de feuilletages au voisinage d'un point. Pour cela, il sera souvent plus pratique de présenter les feuilletages comme étant les lignes de niveau d'une fonction; la classification des paires de feuilletages au voisinage d'un point se ramène alors naturellement à la classification des paires de fonctions. On étudiera ainsi plus généralement les paires de fonctions, certains résultats se généralisant à la dimension quelconque. Une fois cette étude locale réalisée, on pourra revenir sur le problème semi-global.

1.2 Étude semi-locale

On considère ici une courbe compacte C , un voisinage S de dimension 2 de C et deux feuilletages réguliers \mathcal{F} et \mathcal{G} sur S ayant C comme feuille commune.

Commençons par présenter les invariants globaux qui interviennent.

Si F_0 est une intégrale première minimale de \mathcal{F} au voisinage d'un point p_0 de C , on peut prolonger F_0 le long de tout chemin sur C . Si γ est un lacet sur C basé en p_0 , alors le prolongement de F_0 le long de γ donne une autre intégrale première $F_\gamma = \varphi_\gamma \circ F_0$. Les difféomorphismes φ_γ donnent une représentation $\rho_{\mathcal{F}} : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ appelée représentation d'holonomie du feuilletage \mathcal{F} . On obtient de cette manière deux représentations d'holonomie $\rho_{\mathcal{F}}$ et $\rho_{\mathcal{G}}$.

L'ensemble de tangence $\text{Tang}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ défini localement comme étant l'ensemble $\{dF \wedge dG = 0\}$ pour des intégrales premières F et G minimales donne un autre invariant géométrique. Par exemple, le nombre de composantes irréductibles de $\text{Tang}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ différentes de C et intersectant C (que l'on appellera *courbes de tangence*) est un entier invariant par difféomorphisme.

La 2-forme $dF \wedge dG$ s'annule sur C , son ordre d'annulation est un entier invariant par difféomorphisme, que l'on appellera *nombre de tangence* entre \mathcal{F} et \mathcal{G} le long de C .

En outre, si F et G sont deux intégrales premières minimales locales de \mathcal{F} et \mathcal{G} , alors le résidu de $dF \wedge dG$ le long de C donne une structure affine avec branchements sur C (le lecteur pourra trouver plus de détails sur les structures affines dans [Man] et dans sa bibliographie). Les points de branchement de cette structure affine correspondent aux points d'intersection entre l'ensemble de tangence T et C .

Exemple. *Pour illustrer cette notion, considérons le fibré trivial S au-dessus d'une courbe elliptique $C = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ muni de coordonnées x sur C et y sur la fibre. Si $F = y$ et $G = e^x y$, alors $dF \wedge dG$ vaut $-ye^x dx \wedge dy$ donc le résidu de $dF \wedge dG$ est $\omega = -e^x dx$. C'est une 1-forme définie sur C à une constante multiplicative près, donc si on choisit un recouvrement de C par des ouverts simplement connexes U_i et des intégrales premières z_i de ω sur chaque U_i , les fonctions de transition entre les z_i seront des fonctions affines. On obtient donc une structure affine sur C et le fait qu'elle n'a pas de points de branchements nous indique que l'ensemble de tangence T n'intersecte pas C dans ce cas précis.*

Si $(S, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ est un voisinage bifeuilleté de C , au voisinage de chaque point $p \in C$, le couple de feuilletages $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ donne une paire de feuilletages avec une feuille commune. On verra que si le point p n'est pas situé sur une courbe de tangence, cette paire est déterminée à difféomorphisme près par le nombre de contact entre \mathcal{F} et \mathcal{G} et par la structure affine. Si on considère deux voisinages

$(S, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $(\tilde{S}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ de C tels qu'en tout point $p \in C$, les paires de feuilletages soient difféomorphes, alors on obtient une famille de difféomorphismes ϕ_p de (S, p) dans (\tilde{S}, p) . Il ne reste alors plus qu'à montrer qu'on peut recoller (ou qu'on ne le peut pas) ces difféomorphismes pour former un difféomorphisme global $\phi : S \rightarrow \tilde{S}$.

On voit ainsi que pour obtenir la classification, il va falloir :

1. Contrôler l'ensemble de tangence T entre \mathcal{F} et \mathcal{G} : les points d'intersection entre T et C donneront des configurations locales non triviales.
2. Classifier les configurations non triviales qui apparaissent.
3. Étudier si les difféomorphismes locaux se recollent le long de lacets $\gamma \in \pi_1(C)$.

Pour le point (1), on utilise la structure affine : dans [Man], Mandelbaum montre qu'une structure affine sur une courbe de genre g a exactement $2g-2$ points de branchements comptés avec multiplicité. Comme les points de branchements correspondent aux intersection entre l'ensemble de tangence T et la courbe C , on obtient une borne sur la complexité des modèles locaux.

Le point (2) donnera lieu à l'étude locale.

Le point (3) se traite en remarquant que si les représentations d'holonomie sont égales : $\rho_{\mathcal{F}} = \rho_{\tilde{\mathcal{F}}}$ et $\rho_{\mathcal{G}} = \rho_{\tilde{\mathcal{G}}}$, alors les difféomorphismes locaux se recollent le long de tout lacet $\gamma \in \pi_1(C)$.

Par exemple, si C est une courbe elliptique, deux feuilletages distincts n'ont pas de tangence en dehors de C et la classification s'énonce simplement.

Théorème (2.3.2). *Soit C une courbe elliptique, $(U, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $(\tilde{U}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ deux voisinages bifeuilletés de C d'ordre de contact $k+1$. Ces voisinages sont analytiquement conjugués si et seulement si il existe deux difféomorphismes $\phi_1, \phi_2 \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tels que $\phi_1 = \phi_2 \bmod y^{k+2}$ et pour tout lacet $\gamma \in \pi_1(C)$,*

$$\phi_1 \circ \rho_{\mathcal{F}}(\gamma) \circ \phi_1^{-1} = \rho_{\tilde{\mathcal{F}}}(\gamma), \quad \text{et} \quad \phi_2 \circ \rho_{\mathcal{G}}(\gamma) \circ \phi_2^{-1} = \rho_{\tilde{\mathcal{G}}}(\gamma).$$

De plus, pour tout couple de représentations $\rho_1, \rho_2 : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ vérifiant la condition de compatibilité (2.1) pour une certaine coordonnée affine, il existe un voisinage bifeuilleté $(U, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ de C tel que $\rho_{\mathcal{F}} = \rho_1$ et $\rho_{\mathcal{G}} = \rho_2$.

En genre $g = 2$, il y a deux points d'intersection entre l'ensemble de tangence et C . Dans la situation générique ces deux points sont distincts (notons-les p_1 et p_2), on peut fixer une coordonnée t_1 sur la courbe de tangence T_1 qui passe par p_1 et considérer les intégrales premières F et G de \mathcal{F} et \mathcal{G} qui valent t_1 sur T_1 . On peut calculer les représentations d'holonomie et une coordonnée affine pour ces intégrales premières particulières.

On voit aussi apparaître à partir du genre 2 un nouvel invariant global : les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{G} induisent des transports d'holonomie entre les courbes de tangence $\varphi_{12}^{\mathcal{F}}, \varphi_{12}^{\mathcal{G}} : T_1 \rightarrow T_2$ dont la composée $\varphi_{12}^{\mathcal{F}\mathcal{G}} = (\varphi_{12}^{\mathcal{G}})^{-1} \varphi_{12}^{\mathcal{F}}$ donne un difféomorphisme de T_1 que l'on calculera aussi dans la coordonnée t_1 .

L'équivalence des invariants est donnée par le changement de la coordonnée t_1 ; on obtient alors le résultat suivant :

Théorème (4.3.1). *Supposons que C soit une courbe de genre 2 et que $p_1 \neq p_2$ soient deux points de C . Soient $(U, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $(\tilde{U}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ deux voisinages bifeuilletés de C dont l'ensemble de tangence intersecte C en p_1 et p_2 . Ces voisinages sont analytiquement équivalents si et seulement si ils ont les mêmes invariants $(k, u, \rho_{\mathcal{F}}, \rho_{\mathcal{G}}, \varphi_{12}^{\leftrightarrow})$ modulo l'action de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ donnée par :*

$$\phi \cdot (k, u, \rho_{\mathcal{F}}, \rho_{\mathcal{G}}, \varphi_{12}^{\leftrightarrow}) = (k, \phi'(0)^{-k}u, \phi\rho_{\mathcal{F}}\phi^{-1}, \phi\rho_{\mathcal{G}}\phi^{-1}, \phi\varphi_{12}^{\leftrightarrow}\phi^{-1}).$$

De même que pour les courbes elliptiques, on a un résultat de réalisation des invariants : tout quintuplet $(k, u, \rho_1, \rho_2, \varphi^{\leftrightarrow})$ qui vérifie les conditions de compatibilité (2.1) et (4.1) donne un voisinage bifeuilleté de C (ces conditions de compatibilité sont juste des conditions techniques reliant k et u d'une part et les holonomies d'autre part ; par exemple, ρ_1 et ρ_2 doivent être tangentes à l'ordre k et leur différence à l'ordre $k + 1$ est dictée par u).

1.3 Étude locale

On note $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^n, 0)}$ l'ensemble des germes en 0 de fonctions holomorphes sur \mathbb{C}^n . Comme on s'intéresse à la fois à la classification des paires de feuilletages et des paires de fonctions, on va regrouper les deux études sous un formalisme commun comme expliqué ci-dessous. Par abus, on utilisera aussi le vocabulaire des feuilletages dans le cadre des études de fonctions : par exemple, on pourra parler d'une feuille d'une fonction f pour désigner la feuille du feuilletage défini par les hypersurfaces de niveau de f .

Si \mathcal{S} est un groupe agissant sur les paires de fonctions $p = (f, g)$ de $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^n, 0)}$, on dit que deux paires p_1 et p_2 sont \mathcal{S} -équivalentes si elles sont dans la même \mathcal{S} -orbite, ie. s'il existe $\varphi \in \mathcal{S}$ tel que $\varphi \cdot p_1 = p_2$. On s'intéressera aux groupes $\mathcal{R} = \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ des difféomorphismes à la source, $\mathcal{A} = \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ des difféomorphismes à la source et au but ainsi qu'à la classification des paires de feuilletages modulo difféomorphisme à la source, que l'on peut aussi exprimer comme une \mathcal{F} -classification pour le groupe de difféomorphismes $\mathcal{F} = \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0) \times (\text{Diff}(\mathbb{C}, 0))^2$. En effet, une fonction de $(\mathbb{C}^n, 0)$ dans $(\mathbb{C}, 0)$ modulo le groupe des difféomorphismes au but peut être considérée comme un feuilletage (peut-être singulier). On peut aussi exprimer ces équivalences en termes de diagrammes :

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{C}^n, 0) & \xrightarrow{(f_2, g_2)} & (\mathbb{C}^2, 0) \\
\downarrow \varphi & & \downarrow id \\
(\mathbb{C}^n, 0) & \xrightarrow{(f_1, g_1)} & (\mathbb{C}^2, 0)
\end{array}$$

 \mathcal{R} -équivalence

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{C}^n, 0) & \xrightarrow{(f_2, g_2)} & (\mathbb{C}^2, 0) \\
\downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\
(\mathbb{C}^n, 0) & \xrightarrow{(f_1, g_1)} & (\mathbb{C}^2, 0)
\end{array}$$

 \mathcal{A} -équivalence

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{C}^n, 0) & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_2} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} & (\mathbb{C}, 0) \\
\downarrow \varphi & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \xrightarrow{g_1} \end{array} & \downarrow \psi_f \\
(\mathbb{C}^n, 0) & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \xrightarrow{g_1} \end{array} & (\mathbb{C}, 0) \\
& & \downarrow \psi_g
\end{array}$$

 \mathcal{F} -équivalence

Du fait que $\mathcal{R} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, on a une hiérarchie dans ces trois relations : la \mathcal{R} -équivalence est la plus fine, puis vient la \mathcal{F} -équivalence puis la \mathcal{A} -équivalence. La \mathcal{F} -équivalence étant l'équivalence des paires de feuilletages, c'est elle qu'il est le plus naturel d'étudier dans le but que l'on s'est fixé. La \mathcal{A} -équivalence est certainement celle qui a été le plus étudiée, en particulier dans le cadre des applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p où l'on retrouve la théorie des singularités traditionnelle. Dans les deux cas, il est souvent plus naturel de passer d'abord par la \mathcal{R} -classification, d'où l'intérêt tout particulier qu'on lui portera dans la suite.

On retrouvera tout naturellement dans le chapitre 3 certains résultats déjà connus à propos de germes stables, citons par exemple les travaux de Mather (cf. [Mat]), ou encore les résultats de théorie des catastrophes, que l'on pourra trouver par exemple dans [BL]. Un exposé plus complet des résultats classiques de théorie des singularités pourra être trouvé par exemple dans [AVG-Z] ou [Mar]. Malheureusement, le cas qui nous intéresse le plus est celui de deux fonctions avec une feuille commune, qui n'est évidemment pas stable et ne tombe donc pas dans

le cadre classique. Cela dit, les outils utilisés pour cette étude locale sont très similaires à ceux décrits dans [Mat].

Dans certains cas, on s'intéressera aussi à d'autres équivalences comme l'équivalence des quotients f/g , qui correspond à la \mathcal{Q} -classification pour le groupe $\mathcal{Q} = \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0) \rtimes \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^n, 0)}^*$ agissant par $(\varphi, U) \cdot p = Up \circ \varphi^{-1}$. Dans le cas où f et g ont une feuille $L = \{f = 0\} = \{g = 0\}$ en commun, on s'intéressera aussi à la \mathcal{R}_L -équivalence et à la \mathcal{F}_L -équivalence : deux paires p_1 et p_2 sont \mathcal{R}_L -équivalentes si il existe un difféomorphisme φ fixant L ponctuellement tel que $p_1 \circ \varphi = p_2$. Deux paires (f_1, g_1) et (f_2, g_2) sont \mathcal{F}_L -équivalentes si il existe des difféomorphismes ψ_f, ψ_g tels que (f_1, g_1) et $(\psi_f \circ f_2, \psi_g \circ g_2)$ sont \mathcal{R}_L -équivalents.

On va voir que l'étude des paires à \mathcal{S} -équivalence près est principalement basée sur un objet de nature géométrique : l'ensemble de tangence de la paire. Plus précisément, si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^n, 0)}$, on note $I(f, g)$ et on appelle *idéal de tangence* l'idéal engendré par les coefficients de $df \wedge dg$; on note $\text{Tang}(f, g)$ et on appelle *ensemble de tangence* l'ensemble des zéros de $I(f, g)$.

C'est cet ensemble de tangence $\text{Tang}(f, g)$ qui permet de faire un premier tri parmi les couples de fonctions : de manière informelle, plus cet ensemble va être compliqué, plus la classification va être complexe. Pour illustrer ce principe général, on peut remarquer que si $\text{Tang}(f, g)$ est vide, alors f et g sont transverses au voisinage de 0, donc le couple (f, g) est \mathcal{R} -équivalent au couple (x_1, x_2) où $(x_i)_{i \leq n}$ est un système de coordonnées sur $(\mathbb{C}^n, 0)$. En conséquence, le couple (f, g) va aussi être équivalent à (x_1, x_2) pour la \mathcal{A} - et la \mathcal{F} -équivalence.

En fait, l'idéal $I(f, g)$ donne un invariant plus précis que $\text{Tang}(f, g)$: si l'idéal est radical, se donner l'idéal est équivalent à se donner l'ensemble de tangence d'après le nullstellensatz; si la dimension est $n = 2$ et que $\text{Tang}(f, g)$ est une réunion de courbes, $I(f, g)$ est déterminé par les ordres de tangence entre f et g le long de ces courbes. Mais, dans le cas général, l'idéal $I(f, g)$ est plus compliqué à décrire, et on se limitera pour certains résultats à la dimension $n = 2$ qui est celle qui nous intéresse pour classifier les voisinages bifeuilletés.

Ainsi, dans le cas général, cet invariant $I(f, g)$ va rester un peu abstrait, mais on peut quand même chercher à classifier les couples (f, g) à idéal de tangence fixé. Dans cette optique, on obtient le lemme-clé :

Lemme (Lemme-clé 3.1.1). *Soient f, g_0 et g_1 trois fonctions sur $(\mathbb{C}^n, 0)$. Supposons que les idéaux de tangence $I(f, g_0)$ et $I(f, g_1)$ soient égaux et supposons de plus qu'une des deux hypothèses suivantes soit vérifiée :*

1. f a un point singulier en 0 et $g_1 - g_0 \in I(f, g_0)$.
2. $g_1 - g_0 \in \mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^n, 0)} I(f, g_0)$.

Alors (f, g_0) et (f, g_1) sont \mathcal{R} -équivalents.

En dimension $n = 2$, on utilisera surtout le corollaire suivant :

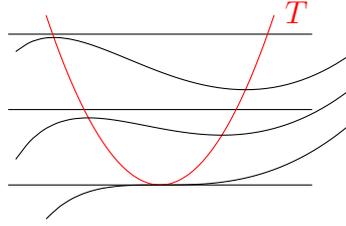
Corollaire (Corollaire 3.1.8). *Soient (f, g_0) et (f, g_1) deux couples de fonctions de $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2, 0)}$ tels que f soit régulière et que les idéaux $I(f, g_i)$ soient égaux.*

- *Si f et g_i n'ont pas de feuille commune, on suppose que $\text{Tang}(f, g_i)$ n'est pas vide et que les restrictions des g_i à l'ensemble de tangence sont égales.*
- *Si f et g_i ont une feuille commune L , on suppose que $\text{Tang}(f, g_i) \neq L$, que les restrictions des g_i à l'ensemble de tangence sont égales et que $g_1 - g_0$ s'annule au moins au même ordre que $df \wedge dg$ le long de L .*

Alors (f, g_0) et (f, g_1) sont \mathcal{R} -conjugués.

Le lemme-clé et son corollaire permettent par exemple de montrer les résultats suivants (cf. théorèmes 3.2.6 et 3.3.4) :

Le premier exemple concerne la classification des couples (f, g) dont l'ensemble de tangence est une courbe qui est tangente à $\{f = 0\}$. Un cas particulier de cet exemple est le couple $f = y$ et $g = y + xy - x^3/3$, qui ont comme ensemble de tangence $T = \{y = x^2\}$, illustré ci-dessous.

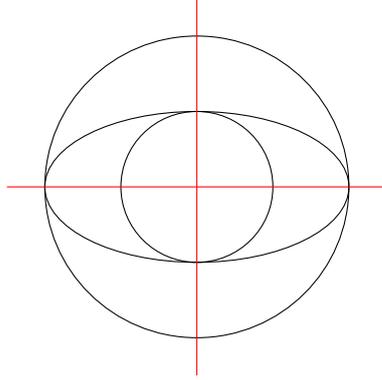


Cet exemple se ramène à l'énoncé suivant.

Théorème. *Soient (f_i, g_i) deux couples de fonctions de $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2, 0)}$ avec $f_i = y$, dont les ensembles de tangence $T_0 = T_1$ sont donnés par l'équation $y = x^2$. On suppose que g_i n'est pas constant sur $\{y = 0\}$, et que les ordres d'annulation de $df_i \wedge dg_i$ le long de T_0 ne dépendent pas de i .*

Alors les couples (f_0, g_0) et (f_1, g_1) sont \mathcal{R} -conjugués si et seulement si il existe un difféomorphisme φ de T_0 qui conjugue les restrictions $(f_i, g_i)|_{T_0}$.

L'exemple ci-après est celui des paires génériques de fonctions de Morse, comme dessiné ci-dessous dans le plan réel.



Théorème. *Toute paire générique de fonctions de Morse de $(\mathbb{C}^n, 0)$ dans $(\mathbb{C}, 0)$ est difféomorphe à une paire (f, g) avec*

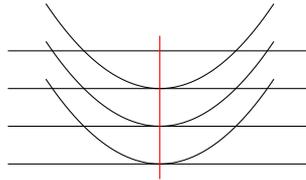
$$f = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad g = \sum_{i=1}^n u_i(x_i)$$

où $u_i : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ est une fonction de Morse.

Cette forme normale est unique à l'action d'un groupe fini près.

Ces deux exemples illustrent deux classes de paires de fonctions étudiées plus en détail : tout d'abord les paires de fonctions lisses, qui ont fait l'objet de l'article [Tho1] et qui sont présentées ici à la section 3.2 ; et les paires de fonctions de Morse, qui ont été étudiées dans [Tho2] et qui sont présentées dans la section 3.3.

Si la \mathcal{R} -classification d'une certaine classe de paires de fonctions est suffisamment simple, on peut en déduire la \mathcal{A} - et la \mathcal{F} -classification sans trop de difficultés. Par exemple, on peut s'intéresser à la classe des paires de fonctions (f, g) sans feuille commune, avec f lisse et une courbe de tangence lisse et transverse à $\{f = 0\}$, comme dans le dessin :



Le lemme-clé permet d'obtenir la forme \mathcal{R} -normale $(y, \varphi(y) + x^p)$ avec $p \geq 2$. Si on rajoute des difféomorphismes au but aux difféomorphismes à la source, on obtient la forme \mathcal{A} -normale (y, x^p) . Si on s'intéresse à la classification des paires de feuilletages (ie. la \mathcal{F} -classification), on obtient la forme \mathcal{F} -normale $(y, y^q + x^p)$.

On remarque que pour $p = 2$, il y a une unique forme normale pour la \mathcal{A} -équivalence : cette application est un pli. On retrouve donc un résultat bien connu sur la \mathcal{A} -équivalence des fonctions plan sur plan. Plus généralement, le théorème de Whitney dit que les seules applications plan sur plan stables en un point sont à \mathcal{A} -équivalence près l'application régulière, le pli et la fonce (cf. [AVG-Z]). Les cas singuliers se distinguent par le fait que l'image du lieu de tangence, le contour apparent, soit régulier dans le cas du pli et soit un cusp pour la fonce. Ce résultat se retrouve avec les résultats énoncés plus haut, à savoir que si la \mathcal{R} -classification d'une classe de paires de fonctions est donnée par les valeurs de cette paire sur le lieu de tangence, alors la \mathcal{A} -classification est donnée par la classe du contour apparent modulo difféomorphismes au but.

Chapitre 2

Voisinages de courbes, étude préliminaire et genre 1

Soit C une courbe munie d'un point base p_0 fixé. Soit S un voisinage de dimension 2 de C tel qu'il existe deux feuilletages lisses \mathcal{F} et \mathcal{G} différents ayant la courbe C comme feuille commune. Localement, si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont définis par des 1-formes α et β , l'indice de contact entre \mathcal{F} et \mathcal{G} est par définition l'ordre d'annulation de $\alpha \wedge \beta$ le long de C . Cet indice de contact donne un invariant local qui est en fait global ; on le notera $k+1$ dans la suite. On cherchera dans ce chapitre à décrire les autres invariants qui interviennent dans la classification des triplets $(S, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ pour pouvoir donner la classification dans le cas où C est de genre 1. On verra de cette manière les points qu'il faudra préciser dans le but d'obtenir une classification si C est de genre supérieur.

Les résultats de ce chapitre, en particulier le théorème 2.3.2 pourront être retrouvés dans l'une des parties de l'article [LTT].

2.1 Structure affine

Soit (U_i) un recouvrement ouvert de S avec des coordonnées (x_i, y_i) tel que $C \cap U_i = \{y_i = 0\}$. Les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{G} sont définis respectivement par

$$\begin{aligned} dy_i &= a_i^1(x_i)y_i dx_i + a_i^2(x_i)y_i^2 dx_i + \dots =: \alpha_i \\ dy_i &= b_i^1(x_i)y_i dx_i + b_i^2(x_i)y_i^2 dx_i + \dots =: \beta_i \end{aligned}$$

avec $a_i^p, b_i^p \in \mathcal{O}(U_i)$. Notons que $\beta_i - \alpha_i = y_i^{k+1} h_i(x_i, y_i) dx_i$ avec $h_i(x_i, 0) \neq 0$ de sorte que $a_i^p = b_i^p$ pour $p = 1, \dots, k$. À un changement de coordonnées près, on peut supposer que α_i est nul pour tout i , ce qui entraîne que $\beta_i = y_i^{k+1} b_i^{k+1} dx_i + \dots$

Notons φ_{ij} le changement de coordonnées

$$(x_i, y_i) = \varphi_{ij}(x_j, y_j) = (*, \lambda_{ij} y_j + \dots),$$

on peut vérifier que

$$b_j^{k+1}(x_j)dx_j = \lambda_{ij}^k b_i^{k+1}(x_i)dx_i.$$

Posons $\omega_i = h_i(x_i, 0)dx_i$. Les formes ω_i se recollent pour donner une 1-forme holomorphe ω sur le revêtement universel de C telle que si γ est un lacet de C , γ peut être recouvert par des ouverts U_{i_0}, U_{i_1}, \dots (indicés dans l'ordre) de sorte que

$$\gamma^* \omega = \left(\prod_j \lambda_{i_j i_{j+1}}^k \right) \omega.$$

Pour tout $c \in \mathbb{C}$, la forme ω définit une structure affine branchée \mathfrak{s} sur C donnée par la coordonnée $c + \int_{p_0}^x \omega$. La classe d'équivalence de cette structure est intrinsèquement définie car chaque changement de variables préservant le premier feuilletage (ie. chaque difféomorphisme $(x, y) \mapsto (\psi(x, y), \varphi(y))$) et chaque changement de constante $c \in \mathbb{C}$ induisent une structure affine équivalente.

Soit $\rho_{\mathfrak{s}} : \pi_1(C) \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{C})$ la représentation de monodromie de cette structure. Elle peut être calculée pour la coordonnée $c + \int_{p_0}^x \omega$ par la formule

$$\begin{aligned} \rho_{\mathfrak{s}}(\gamma)(z) &= \left(\prod_j \lambda_{i_j i_{j+1}}^k \right) (z - c) + \int_{p_0}^{\gamma^* p_0} \omega + c \\ &=: \lambda_{\gamma}^k z + \mu_{\gamma} \end{aligned}$$

où le produit est défini comme avant.

On peut trouver la constante c grâce au lemme suivant.

Lemme 2.1.1. *Soient F, G deux équations réduites de $C = \{y = 0\}$ tels que le diviseur des zéros de $dF \wedge dG$ soit $(k+1)C$ et tels que F et G sont tangents à l'ordre k . Il existe un unique système de coordonnées locales (\tilde{x}, \tilde{y}) tel que*

$$(\tilde{x}, \tilde{y})|_C = (x, 0) \quad F = \tilde{y} \quad \text{et} \quad G = \begin{cases} e^{u(\tilde{x})}\tilde{y} & \text{si } k = 0 \\ \tilde{y} + \tilde{y}^{k+1}u(\tilde{x}) & \text{sinon} \end{cases}$$

pour une fonction u unique (à $2i\pi$ près dans le cas $k = 0$).

Si on autorise les changements de coordonnées qui ne préservent C que globalement (et non pas ponctuellement comme dans le lemme), la forme normale devient alors

$$F = \tilde{y} \quad G = \begin{cases} e^{(c+\tilde{x})}\tilde{y} & \text{si } k = 0 \\ \tilde{y} + \tilde{y}^{k+1}(c + \tilde{x}) & \text{sinon} \end{cases}$$

où $c = u(0)$.

La fonction u peut être trouvée grâce aux formules

$$u = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{G - F}{F^{k+1}} \quad \text{si } k > 0 \quad \text{et} \quad u = \log \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{G}{F} \right) \quad \text{si } k = 0.$$

De plus, les feuilletages $F = cte$ et $G = cte$ sont donnés par

$$\begin{aligned} 0 &= d\tilde{y} \\ \text{et } 0 &= d\tilde{y} + (k+1)y^k u(\tilde{x}) d\tilde{y} + \tilde{y}^{k+1} u'(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad \text{si } k > 0, \\ \text{ou } 0 &= d\tilde{y} + y u'(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad \text{si } k = 0. \end{aligned}$$

La forme ω peut être retrouvée avec la formule $\omega = du$, donc la fonction u est une coordonnée de la structure affine.

Démonstration. Faisons la preuve dans le cas $k \geq 1$. Commençons par poser $\tilde{y} = F$ (que l'on renomme y dans un soucis de simplicité) et développons $G = y + g_{k+1}(x)y^{k+1} + \dots$. Alors $dF \wedge dG = -(g'_{k+1}(x)y^{k+1} + \dots)dx \wedge dy$ de sorte que $g'_{k+1}(0) \neq 0$ et $g_{k+1}(x) = c + \varphi(x)$ avec $c = g_{k+1}(0)$ et $\varphi(x)$ une coordonnée locale. En conséquence de quoi $G = y + (c + \phi(x, y))y^{k+1}$ où

$$\phi(x, y) = \varphi(x) + \sum_{n>0} g_{n+k+1}(x)y^n = \frac{G - F}{y^{k+1}} - c.$$

Il apparait donc clairement que $(\tilde{x}, y) = (\phi, y)$ est l'unique système de coordonnées réalisant la forme normale $G = y + (c + \tilde{x})y^{k+1}$. Finalement, la coordonnée $\varphi^{-1} \circ \phi$ induit l'identité sur C et conjugue G avec $y + (c + \varphi(x))y^{k+1}$.

Le cas $k = 0$ peut être traité de manière similaire, en remarquant que $g_1(0)$ n'est pas nul puisque G est une équation réduite de C . \square

Comme annoncé dans l'introduction, la structure affine permet de contrôler l'ensemble de tangence. Rappelons que l'on définit l'ensemble de tangence par $\text{Tang}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{dF \wedge dG = 0\}$, on appellera *courbe de tangence* toute composante irréductible de $\text{Tang}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ différente de C . Le long d'une courbe de tangence T , on a $dF \wedge dG = 0$ donc si T intersecte C , le point d'intersection donne un zéro de la forme ω , ie. un point de branchement de la structure affine. Or, le nombre de points de branchements d'une structure affine est régi par le théorème suivant :

Théorème ([Man]). *Sur une courbe de genre g , une structure affine a $2g-2$ points de branchements comptés avec multiplicité.*

On obtient ainsi une borne sur le nombre de courbes de tangence qui intersectent C .

2.2 Représentations d'holonomie

On a donc deux invariants donnés par l'indice de contact et la structure affine. Les troisièmes et quatrièmes invariants sont les représentations d'holonomie de la feuille commune pour les deux feuilletages

$$\rho_{\mathcal{F}}, \rho_{\mathcal{G}} : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0),$$

chacune étant définie à conjugaison près. Pour être plus précis, soit F une intrégrale première minimale (ie. submersive) de \mathcal{F} au voisinage de p_0 telle que $C = F^{-1}(0)$ près de p_0 . Pour tout lacet γ basé en p_0 , la continuation analytique F^γ de F le long de γ est encore une intégrale première de \mathcal{F} et prend donc la forme

$$F^\gamma = \varphi_\gamma \circ F.$$

La représentation d'holonomie est donc définie par $\rho_{\mathcal{F}}(\gamma) = \varphi_\gamma$. On remarque que par définition de λ_γ , $\varphi_\gamma(z) = \lambda_\gamma^{-1}z + \dots$

Dans des coordonnées locales (x, y) , si les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{G} s'écrivent

$$\begin{aligned} dy &= 0 \\ dy &= -\omega y^{k+1} + \dots \end{aligned}$$

et si T est une transversale fixée paramétrisée par y_0 et intersectant C en p_0 , la feuille de \mathcal{G} passant en y_0 a pour équation (par exemple dans le cas $k \geq 1$) $y = \Phi(x, y_0)$ avec

$$\Phi(x, y_0) = y_0 - \left(\int_{p_0}^x \omega \right) y_0^{k+1} + \dots = y_0 - u(x)y_0^{k+1} + \dots$$

avec u donné par $c = 0$. Soit G l'intégrale première de \mathcal{G} telle que $G|_T = F|_T$. Elle peut s'écrire (rappelons que $F = y$)

$$G = y + u(x)y^{k+1} + \dots = F + u(x)F^{k+1} + \dots$$

La continuation analytique de G le long de γ est donc

$$\begin{aligned} G^\gamma &= F^\gamma + (\lambda_\gamma^k u(x) + \mu_\gamma) (F^\gamma)^{k+1} + \dots \\ &= (\lambda_\gamma^{-1}y + \dots) + \left(u(x) + \frac{\mu_\gamma}{\lambda_\gamma^k} \right) (\lambda_\gamma^{-1}y^{k+1} + \dots) \\ &= [\lambda_\gamma^{-1} (y + u(x)y^{k+1}) + \dots] + \mu_\gamma [\lambda_\gamma^{-1} (y + u(x)y^{k+1}) + \dots]^{k+1} + \dots \\ &= \rho_{\mathcal{F}}(\gamma) \circ G + \mu_\gamma (\rho_{\mathcal{F}}(\gamma) \circ G)^{k+1} + \dots \end{aligned}$$

On a donc montré que la représentation d'holonomie vérifie la relation

$$\rho_{\mathcal{G}} = \zeta_{k,s} \circ \rho_{\mathcal{F}} \text{ modulo } y^{k+2} \quad (2.1)$$

où

$$\zeta_{k,s}(\gamma)(y) = \begin{cases} \exp(\mu_{\gamma})y & \text{si } k = 0 \\ y + \mu_{\gamma}y^{k+1} & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Dans tous ces calculs, deux choix ont été faits : le choix d'une transversale T passant par p_0 et celui d'une coordonnée y sur T , qui détermine les intégrales premières F et G de \mathcal{F} et \mathcal{G} par le fait que $G = F = y$ sur T . Si y est changé en λy , F est changé en λF , G devient λG , u se transforme en $\lambda^k u$ de sorte que μ_{γ} devient $\lambda^k \mu_{\gamma}$ et les représentations $\rho_{\mathcal{F}}$ et $\rho_{\mathcal{G}}$ sont conjugués par λid , ce qui montre que la condition (2.1) est respectée. Si y est changée en $\psi \circ y$ avec ψ tangent à l'identité, ω est inchangé et la condition (2.1) est encore respectée. Finalement, si on choisit une autre transversale, on peut aussi choisir une coordonnée de dessus de sorte que u et F ne soient pas affectés, et alors G se retrouve composé avec un difféomorphisme tangent à l'identité à l'ordre $k+1$. Dans ce cas, l'équation (2.1) est encore préservée.

Un invariant est donc un quadruplet $(k, u, \rho_{\mathcal{F}}, \rho_{\mathcal{G}})$ où u est une coordonnée affine sur C , $\rho_{\mathcal{F}}$ et $\rho_{\mathcal{G}}$ sont deux représentations vérifiant certaines règles de compatibilité, c'est à dire : la relation (2.1) et le fait que si λ_{γ}^{-1} est la partie linéaire de $\rho_{\mathcal{F}}$, celle de $\rho_{\mathcal{G}}$ est λ_{γ}^k (cette condition n'a de sens que quand $k \neq 0$, auquel cas $\rho_{\mathcal{F}}$ et $\rho_{\mathcal{G}}$ sont tangents à un ordre supérieur ou égal à 1). Deux quadruplets (k, u, ρ_1, ρ_2) et $(k, \tilde{u}, \tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)$ sont équivalents si il existe $\psi_1, \psi_2 \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tangents à l'ordre k tels que

$$\tilde{\rho}_i = \psi_i \circ \rho_i \circ \psi_i^{-1}$$

et, si $\lambda = \psi_1'(0)$ et μ vérifie

$$\psi_2 = \psi_1 + \mu \psi_1^{k+1} + \dots,$$

les fonctions u et \tilde{u} vérifient les relations

$$\tilde{u} = \frac{1}{\lambda^k} u + \mu \quad \text{dans le cas } k \neq 0, \text{ et}$$

$$\tilde{u} = u + \log(\mu) \quad \text{quand } k = 0.$$

La condition sur les coordonnées u et \tilde{u} vient du fait que si $\psi_1(z) = \lambda z$ et $\psi_2(z) = \lambda z + \mu(\lambda z)^{k+1}$, alors

$$\frac{\psi_2 \circ G - \psi_1 \circ F}{(\psi_1 \circ F)^{k+1}} = \frac{1}{\lambda^k} \frac{G - F}{F^{k+1}} + \mu \left(\frac{G}{F} \right)^{k+1}$$

quand $k > 0$. Si $k = 0$, pour $\psi_1(z) = \lambda z$ et $\psi_2(z) = \mu\psi_1(z)$,

$$\frac{\psi_2 \circ G}{\psi_1 \circ F} = \mu \frac{G}{F}.$$

Au vu de ce qui a été fait, il ne reste qu'à vérifier que chaque difféomorphisme tangent à l'identité à l'ordre $k + 1$ peut être réalisé par un changement de transversale qui intersecte encore C en p_0 . Soient $\psi \in \text{Diff}^{k+1}(\mathbb{C}, 0)$ et $T = \{(x, y) \mid \Phi(x, \psi^{-1}(y)) = y\}$. Comme p_0 est générique, ce n'est pas un zéro de ω donc par inversion locale, la composante irréductible de T transverse à C est la transversale recherchée (la fonction $\Phi(x, y_0)$ est la même que définie précédemment : c'est l'équation de la feuille de \mathcal{G} passant par p_0 en y_0).

2.3 Genre 1

Dans le cas où C est une courbe de genre 1, la structure affine n'a pas de points de branchements et les deux feuilletages n'ont pas de tangence en dehors de C . Les seuls invariants sont donc le quadruplet $(k, u, \rho_{\mathcal{F}}, \rho_{\mathcal{G}})$, deux invariants étant équivalents si ils peuvent être déduits l'un de l'autre par un changement du choix de la transversale T_0 passant par p_0 et d'une coordonnée dessus. On obtient ainsi le résultat :

Proposition 2.3.1. *Soient C une courbe de genre 1, $(U, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $(\tilde{U}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ deux voisinages bifeuilletés de C . Ces voisinages sont analytiquement équivalents si et seulement si ils ont les mêmes invariants $(k, u, \rho_{\mathcal{F}}, \rho_{\mathcal{G}})$ modulo l'équivalence décrite avant.*

De plus, pour chaque quadruplet (k, u, ρ_1, ρ_2) vérifiant les conditions de compatibilité, il existe un voisinage bifeuilleté $(U, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ réalisant ces invariants (et il est unique à isomorphisme près).

Démonstration. Soient $(U, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $(\tilde{U}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ deux voisinages ayant les mêmes invariants modulo équivalence, prouvons qu'ils sont difféomorphes. On remarque d'abord que l'étude se réduit au cas où les holonomies et la structure affine sont exactement les mêmes (quitte à changer le choix de la transversale et de sa coordonnée dans lesquelles les invariants sont calculés).

Fixons un point $p \in C$ et considérons des intégrales premières (F, G) et (\tilde{F}, \tilde{G}) tangentés à l'ordre k . La courbe C étant de genre 1, la structure affine n'a aucun point de branchement et le diviseur des zéros de $dF \wedge dG$ (et de $d\tilde{F} \wedge d\tilde{G}$) est $(k + 1)C$. Par le lemme 2.1.1, il existe un unique germe de difféomorphisme $\phi : (U, p) \rightarrow (\tilde{U}, p)$ qui conjugue les deux paires et tel que $\phi|_C = id$. Par unicité de ϕ en chaque point, ϕ s'étend à chaque ouvert simplement connexe suffisamment

proche de C . Les monodromies de (F, G) et (\tilde{F}, \tilde{G}) sont les mêmes donc ϕ est bien définie globalement et réalise le difféomorphisme recherché.

Pour prouver qu'on peut réaliser tout invariant, considérons k, u, ρ_1 et ρ_2 vérifiant la condition de compatibilité. Considérons $\tilde{C} = \mathbb{C}_x$ le revêtement universel de C et le fibré trivial $\tilde{C} \times \mathbb{C}_y$, avec deux fonctions $F = y$ et $G = y + u(x)y^{k+1}$ définies dessus. On cherche à construire pour chaque lacet γ un difféomorphisme ϕ_γ d'un voisinage de \tilde{C} qui préserve \tilde{C} , induit la translation de γ dessus et qui conjugue (F, G) avec $(\rho_1 \circ F, \rho_2 \circ G)$.

Étant donné que les représentations ρ_1 et ρ_2 vérifient la condition de compatibilité, la paire $(\rho_1 \circ F, \rho_2 \circ G)$ aura les mêmes invariants que (F, G) , ce qui implique l'existence de ϕ_γ autour de chaque point par le lemme 2.1.1. Par unicité, ces difféomorphismes locaux se recollent globalement ce qui donne une action de groupes $\gamma \mapsto \phi_\gamma$. En passant au quotient, on obtient un voisinage $U \supset C$ avec deux feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{G} d'holonomies respectives $\rho_{\mathcal{F}} = \rho_1$ et $\rho_{\mathcal{G}} = \rho_2$ (et ayant donc un ordre de contact k et la bonne coordonnée affine u). \square

On peut améliorer ce résultat en remarquant que l'entier k est déterminé par les représentations d'holonomie, et que la structure affine donnée par u est déterminée par ses périodes qui sont elles-mêmes déterminées par les représentations d'holonomie.

Théorème 2.3.2. *Soit C une courbe elliptique, $(U, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $(\tilde{U}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ deux voisinages bifeuilletés de C d'ordre de contact $k+1$. Ces voisinages sont analytiquement conjugués si et seulement si il existe deux difféomorphismes $\phi_1, \phi_2 \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tels que $\phi_1 = \phi_2 \bmod y^{k+2}$ et pour tout lacet $\gamma \in \pi_1(C)$,*

$$\phi_1 \circ \rho_{\mathcal{F}}(\gamma) \circ \phi_1^{-1} = \rho_{\tilde{\mathcal{F}}}(\gamma), \quad \text{et} \quad \phi_2 \circ \rho_{\mathcal{G}}(\gamma) \circ \phi_2^{-1} = \rho_{\tilde{\mathcal{G}}}(\gamma).$$

De plus, pour tout couple de représentations $\rho_1, \rho_2 : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ vérifiant la condition de compatibilité (2.1) pour une certaine coordonnée affine, il existe un voisinage bifeuilleté $(U, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ de C tel que $\rho_{\mathcal{F}} = \rho_1$ et $\rho_{\mathcal{G}} = \rho_2$.

Démonstration. Il faut juste montrer que la fonction u est déterminée par les périodes de du , ie. que si $\int_\gamma du = 0$ pour tout $\gamma \in \pi_1(C)$, alors $u = 0$.

Si les périodes de du sont nulles, alors comme $u(p_0) = 0$ par les choix effectués, la fonction u a une monodromie multiplicative. Il en résulte que $\frac{du}{u}$ est une 1-forme bien définie sur C , donc que $\frac{du}{u} = a dx$ pour un $a \in \mathbb{C}$. Mais comme $u(p_0) = 0$, on en déduit que $u = 0$. \square

Chapitre 3

Étude de paires de fonctions

Pour pouvoir continuer l'étude semi-globale en genre supérieur, on a vu qu'il fallait d'abord s'intéresser aux configurations locales qui pourraient intervenir. On s'intéressera donc dans ce chapitre aux questions suivantes : si f et g sont deux germes de fonctions sur $(\mathbb{C}^n, 0)$, peut-on caractériser le couple (f, g) à difféomorphisme près (ie. à \mathcal{R} -équivalence près) ? Peut-on caractériser le couple des feuilletages $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ donnés par les lignes de niveau de f et g à difféomorphisme près (ie. caractériser le couple (f, g) à \mathcal{F} -équivalence près) ?

On commencera par présenter le lemme-clé (3.1.1) qui permet de donner une réponse à la première question en dimension n , puis on expliquera comment répondre à la deuxième question à partir de la première en dimension 2, puis on explicitera les résultats obtenus dans les cas particuliers qui nous intéressent pour la classification des voisinages bifeuilletés (ie. si une des fonctions est régulière). On présentera ensuite une étude détaillée des paires de fonctions de Morse qui est le cas le plus simple après avoir considéré les cas où une des deux fonctions est régulière. On finira par examiner un exemple plus singulier pour tester si le lemme-clé est utilisable dans des cas plus dégénérés.

On pourra retrouver certains résultats de la section 3.2 (à savoir : les résultats de classification de paires de feuilletages lisses avec une feuille commune) dans [Tho1] ; on pourra aussi retrouver l'étude des paires de fonctions de Morse, l'exemple plus singulier qui suit et le lemme-clé dans [Tho2].

3.1 Généralités

3.1.1 \mathcal{R} -équivalence

Dans cette section, on cherche principalement à prouver le lemme suivant :

Lemme 3.1.1 (Lemme-clé). *Soient f , g_0 et g_1 trois fonctions sur $(\mathbb{C}^n, 0)$. Supposons que les idéaux de tangence $I(f, g_0)$ et $I(f, g_1)$ soient égaux et supposons de plus qu'une des deux hypothèses suivantes soit vérifiée :*

1. f a un point singulier en 0 et $g_1 - g_0 \in I(f, g_0)$.
2. $g_1 - g_0 \in \mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^n, 0)} I(f, g_0)$.

Alors (f, g_0) et (f, g_1) sont \mathcal{R} -équivalents.

La preuve de ce lemme est basée sur la méthode du chemin de Moser (cf. [Mos]) : on construit un chemin (f, g_t) entre (f, g_0) et (f, g_1) et on montre que tous les (f, g_t) sont difféomorphes. Posons $g_t = g_0 + t(g_1 - g_0)$ et $g(t, \cdot) = g_t(\cdot) \in \mathcal{O}(U)$ pour un voisinage U de $[0, 1] \times \{0\}$ dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. Introduisons aussi $I = I(f, g)$ (qui est un idéal de $\mathcal{O}(U)$) et pour tout t , $I_t = I(f, g_t)$ (qui est un idéal de $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^n, 0)}$). Écrivons finalement $d_x f \wedge d_x g = \sum_{i < j} h_{ij} dx_i \wedge dx_j$ pour un système de coordonnées (x_i) sur \mathbb{C}^n , $J = \langle h_{ij} \rangle_{i < j}$ et remarquons que $I_t = \langle h_{ij}(t, \cdot) \rangle_{i < j}$.

On va d'abord étudier ces idéaux pour montrer que $J = I_0 \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}(U)$ où \mathcal{O}_x désigne l'ensemble des germes de fonctions holomorphes en les variables x_1, \dots, x_n .

Proposition 3.1.2. *Supposons que $I_0 = I_1$, alors $I_0 = I_t$ pour t générique.*

Démonstration. Considérons les idéaux $I_0 \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}(U) = \langle h_{ij}(0, \cdot) \rangle$ et $J = \langle h_{ij} \rangle$. Les fonctions h_{ij} sont affines en t , donc

$$h_{ij}(t, \cdot) = th_{ij}(1, \cdot) + (1 - t)h_{ij}(0, \cdot).$$

Comme $I_0 = I_1$, les fonctions $h_{ij}(0, \cdot)$ et $h_{ij}(1, \cdot)$ engendrent le même idéal I_0 donc $h_{ij}(t, \cdot) \in I_0$ pour tout t puis $h_{ij} \in I_0 \otimes \mathcal{O}(U)$ et $J \subset I_0 \otimes \mathcal{O}(U)$. L'ensemble des zéros de l'idéal J est un ensemble analytique E et $I_0 \otimes \mathcal{O}(U)/J$ est un idéal de l'anneau $\mathcal{O}_{t,x}/J$ dont le support est un sous-ensemble analytique F de E . Comme $h_{ij}(t, \cdot)|_{t=0} = h_{ij}(0, \cdot)$, le point 0 n'appartient pas à F . La droite $D = \{x = 0\}$ contient des points qui ne sont pas dans F donc $F \cap D$ ne consiste qu'en un nombre fini de points. L'ensemble F étant fermé, les restrictions $I_0 \otimes \mathcal{O}(U)|_{t=t_0} = I_0$ et $J|_{t=t_0} = I_{t_0}$ sont égales pour tout t_0 sauf un nombre fini. \square

Dans la suite, on supposera de plus que I_t est constant le long de l'intervalle $[0, 1]$. Si ce n'est pas le cas, on peut trouver un point $t_0 \in \mathbb{C}$ tel que $I_t = I_0$ pour tout t dans chacun des segments $[0, t_0]$ et $[t_0, 1]$ (grâce à la proposition précédente). On pourra alors utiliser le raisonnement qui va suivre sur ces segments pour prouver que $(f, g_0) \simeq (f, g_{t_0}) \simeq (f, g_1)$. L'hypothèse que I_t est constant le long de $[0, 1]$ n'est donc pas restrictive.

Proposition 3.1.3. *Supposons $I_t = I_0$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors pour tout $t_0 \in [0, 1]$, le localisé $J_{(t_0)}$ de J en t_0 vérifie $J_{(t_0)} = I_0 \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathbb{C}\{t - t_0, x\}$.*

Démonstration. Il suffit de prouver que $J_{(t_0)} = I_{t_0} \otimes \mathbb{C}\{t - t_0, x\}$ car $I_{t_0} = I_0$.

On a déjà vu que les h_{ij} sont affines en t de sorte que $h_{ij}(t) = h_{ij}(t_0) + \frac{t-t_0}{1-t_0}(h_{ij}(1) - h_{ij}(t_0))$ (dans le cas où $t_0 \neq 1$; le cas $t_0 = 1$ peut être traité de manière similaire). Notons $H(t)$ le vecteur $(h_{ij}(t))_{i < j}$; l'hypothèse $I_1 = I_{t_0}$ nous donne une matrice A à coefficients indépendants de t telle que $H(1) = AH(t_0)$, d'où l'existence d'une matrice B vérifiant $H(t) = (id + (t - t_0)B)H(t_0)$.

Pour t proche de t_0 , la matrice $id + (t - t_0)B$ est inversible donc les composantes des vecteurs $H(t)$ et $H(t_0)$ engendrent le même germe d'idéal au voisinage du point t_0 . Pour conclure, on remarque que le germe d'idéal engendré par les composantes de $H(t_0)$ est $I_0 \otimes \mathbb{C}\{t - t_0, x\}$. \square

Un corollaire de cette proposition est que pour tout point $p_0 = (t_0, x_0) \in U \subset \mathbb{C}_t \times \mathbb{C}^n$, on a la relation $J_{(p_0)} = (I_0)_{(x_0)} \otimes_{\mathbb{C}\{x-x_0\}} \mathbb{C}\{t - t_0, x - x_0\}$.

Proposition 3.1.4. $J = I_0 \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}(U)$.

Démonstration. On peut supposer que le voisinage U est Stein. L'idéal J (resp. $I_0 \otimes \mathcal{O}(U)$) définit un faisceau d'idéaux \mathcal{J} (resp. \mathcal{K}) par $\mathcal{J}_{(p_0)} = J_{(p_0)}$ pour $p_0 \in U$ (resp. $\mathcal{K}_{(p_0)} = (I_0)_{(x_0)} \otimes \mathbb{C}\{t - t_0, x - x_0\}$ pour $p_0 = (t_0, x_0) \in U$). Ces faisceaux sont localement de type fini; si a_1, \dots, a_k sont des sections locales de \mathcal{J} (resp. \mathcal{K}), le faisceau des relations $\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$ peut être vu comme les relations des sections a_i du faisceau \mathcal{O} . Ainsi, par le théorème d'Oka (voire par exemple [Hör1]), $\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$ est localement de type fini et \mathcal{J} et \mathcal{K} sont cohérents.

Prenons $a \in I_0 \otimes \mathcal{O}(U)$, alors $a_{(p)} \in \mathcal{K}_{(p)} = \mathcal{J}_{(p)}$ pour tout $p \in U$; comme U est Stein et comme les sections globales h_{ij} engendrent \mathcal{J} localement, il existe des $r_{ij} \in \mathcal{O}(U)$ holomorphes tels que $a = \sum r_{ij}h_{ij}$, ie. $a \in J$ (cf. [Hör1]).

La réciproque se traite de manière similaire, avec $h_{ij}(0, \cdot)$ comme sections globales engendrant \mathcal{K} localement. \square

Si de plus $g_1 - g_0 \in I_0$ comme dans les hypothèses du lemme, on déduit que $g_1 - g_0 \in J$ par la proposition précédente. On remarque alors que J est égal à I puisque $df \wedge dg = d_x f \wedge d_x g + (g_1 - g_0)df \wedge dt$.

On est maintenant en mesure de démontrer le lemme-clé :

Preuve du lemme-clé. Comme noté ci-avant, l'hypothèse $g_1 - g_0 \in I_0$ utilisée avec la proposition 3.1.4 implique l'existence de fonctions holomorphes $r_{ij}(t, x)$ (pour $i < j$) telles que $g_1 - g_0 = \sum_{i < j} r_{ij}h_{ij}$.

Pour utiliser la méthode du chemin, on doit trouver un champ de vecteurs $X = \sum_{i=1}^n X_i \partial_{x_i} + \partial_t$ défini dans un voisinage de $\{0\} \times [0, 1] \subset \mathbb{C}^n \times [0, 1]$ tel que $X \cdot f = X \cdot g = 0$. On cherche aussi à avoir $X(0, t) = \partial_t$ de sorte que le flot $\varphi_s(x, t)$ de X soit défini dans un voisinage de $\{0\} \times [0, 1]$. Le difféomorphisme $\varphi : x \mapsto \varphi_1(x, 0)$ vérifiera alors $(f \circ \varphi, g_0 \circ \varphi) = (f, g_1)$ sur $(\mathbb{C}^n, 0)$.

Rappelons que

$$X \cdot f = \sum_{i=1}^n X_i \partial_{x_i} f \quad \text{et}$$

$$X \cdot g = \sum_{i=1}^n X_i \partial_{x_i} g_t + (g_1 - g_0).$$

On remarque alors qu'il suffit de trouver pour chaque $j = 2, \dots, n$ un champ de vecteur X^j satisfaisant aux conditions $X^j \cdot f = 0$ et

$$\sum_{i=1}^n X_i^j \partial_{x_i} g_t + \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} h_{ij} = 0$$

car le champ de vecteurs $X = \sum_{j=2}^n X^j + \partial_t$ satisfaira alors nos exigences.

Sur l'ouvert $U_j = \{\partial_{x_j} f \neq 0\}$, on peut imposer que

$$X_j^j = \frac{-1}{\partial_{x_j} f} \left(\sum_{i \neq j} (\partial_{x_i} f) X_i^j \right)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} (\partial_{x_j} f) \left(\sum_{i=1}^n X_i^j \partial_{x_i} g_t + \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} h_{ij} \right) &= \sum_{i \neq j} (\partial_{x_j} f \partial_{x_i} g_t - \partial_{x_i} f \partial_{x_j} g_t) X_i^j + (\partial_{x_j} f) \left(\sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} h_{ij} \right) \\ &= \sum_{i \neq j} -h_{ij} X_i^j + (\partial_{x_j} f) \left(\sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} h_{ij} \right). \end{aligned}$$

On peut donc choisir $X_i^j = r_{ij} \partial_{x_j} f$ si $i < j$ et $X_i^j = 0$ pour $i > j$, ce qui donne $X_j^j = -\sum_{i < j} r_{ij} \partial_{x_i} f$. On voit que chaque composante X_i^j est holomorphe au voisinage de $\{\partial_{x_j} f = 0\}$ ce qui signifie que le champ de vecteurs X^j est défini sur $(\mathbb{C}^n, 0) \times [0, 1]$. De plus, d'après les hypothèses, ou bien f est singulière en 0 et chaque $\partial_{x_i} f$ s'annule en 0 ou bien tous les r_{ij} peuvent être choisis nuls un 0, donc chaque X^j s'annule sur $\{0\} \times [0, 1]$.

Le champ de vecteurs $X = \sum_j X^j + \partial_t$ est celui que l'on cherchait. \square

Remarque 3.1.5. *On peut espérer simplifier l'hypothèse $g_1 - g_0 \in \mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^n, 0)} I(f, g_0)$ pour obtenir $g_1 - g_0 \in I(f, g_0)$ dans certains cas, par exemple si $g_1 - g_0$ s'annule à un ordre assez grand à l'origine.*

Un autre cas utile où on peut simplifier est le cas de la dimension $n = 2$ que l'on décrit dans le lemme suivant.

Lemme 3.1.6. *Soient $f, g_t \in \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2, 0)}$ avec f régulière et g_t dépendant holomorphiquement de t .*

- *Si f et g_t n'ont pas de feuille commune, on suppose que $\text{Tang}(f, g_t)$ n'est pas vide, que $I(f, g_t)$ est indépendant de t et que $\partial_t g_t$ s'annule sur $\text{Tang}(f, g_t)$.*
- *Si f et g_t ont une feuille commune L , on suppose que $\text{Tang}(f, g_t) \neq L$, que $I(f, g_t)$ est indépendant de t , que $\partial_t g_t$ s'annule sur $\text{Tang}(f, g_t)$ et que $\partial_t g_t$ s'annule au moins au même ordre que $df \wedge dg_t$ le long de L .*

Alors $\partial_t g_t \in \mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^2, 0)} I(f, g_t)$.

Remarque 3.1.7. *Comme g_t peut être singulière, il serait plus correct de parler de séparatrice de g_t en reprenant le langage des feuilletages. La propriété "f et g_t ont une feuille commune" deviendrait alors "la feuille $\{f = 0\}$ coïncide avec une séparatrice du feuilletage induit par g_t ".*

Démonstration. Sous ces hypothèses, on peut supposer que les coordonnées sont (x, y) et que $f = y$. Notons $g(t, \cdot) = g_t$ et $\dot{g} = \partial_t g$. Or, l'idéal $I(f, g_t)$ s'écrit $\langle \partial_x g_t \rangle$ donc nécessairement $\partial_x \dot{g}$ appartient à $\langle \partial_x g \rangle$. En effet, il existe une fonction a inversible telle que $\partial_x g_t = a(t) \partial_x g_{t_0}$ donc $\partial_x \dot{g}(t_0) = \partial_t a(t_0) \partial_x g_{t_0}$.

Supposons dans un premier temps que g_t n'est pas constante sur $y = 0$. On peut alors appliquer le théorème de préparation de Weierstrass et écrire $\partial_x g = u(x, y, t) P(x, y, t) = u \prod (x - x_i)^{k_i}$ avec $u = u(t, x, y)$ inversible holomorphe, P polynomial en x , $x_i = x_i(y)$ et $k_i = k_i(y)$ a priori pas holomorphes. En intégrant on obtient pour tout i : $g = c_i + (x - x_i)^{k_i+1} v$ donc $\dot{g} = \dot{c}_i + (x - x_i)^{k_i+1} \dot{v}$, et comme \dot{g} s'annule en x_i , il s'ensuit que $\dot{c}_i = 0$ donc que $(x - x_i)^{k_i+1}$ divise \dot{g} . Ceci étant vrai pour tout i , le produit $\prod (x - x_i)^{k_i+1}$ divise \dot{g} et on trouve une fonction $w = w(t, x, y)$ holomorphe en x (a priori seulement en x) telle que $\dot{g} = w \partial_x g$.

On remarque finalement que $w = \dot{g} / \partial_x g$ est méromorphe et bornée, donc holomorphe, ce qui permet de conclure que $\dot{g} \in \langle \partial_x g \rangle$. De plus, w s'annule le long de l'ensemble de tangence, donc dès que $I(f, g_t)$ n'est pas trivial, $\dot{g} \in \mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^2, 0)} I(f, g_t)$.

Maintenant, si g_t est constante sur $y = 0$, alors $\{y = 0\} \subset \text{Tang}(f, g_t)$ et \dot{g} doit s'annuler sur $y = 0$ par hypothèse. On peut donc supposer que $g = 0$ sur $y = 0$ quitte à enlever une constante. Alors on peut refaire la même preuve que précédemment et trouver une fonction w holomorphe en dehors de $\{y = 0\}$ (et ayant peut-être un pôle en $\{y = 0\}$) telle que $\dot{g} = w \partial_x g$. Ainsi, l'hypothèse que \dot{g} s'annule (au moins) au même ordre que $\partial_x g$ sur la feuille commune permet de conclure que w n'a pas de pôle et est donc holomorphe. \square

Corollaire 3.1.8. *Soient (f, g_0) et (f, g_1) deux couples de fonctions de $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2, 0)}$ tels que f soit régulière et les idéaux $I(f, g_i)$ soient égaux.*

- *Si f et g_t n'ont pas de feuille commune, on suppose que $\text{Tang}(f, g_i)$ n'est pas vide et que les restrictions des g_i à l'ensemble de tangence sont égales.*

- Si f et g_t ont une feuille commune L , on suppose que $\text{Tang}(f, g_i) \neq L$, que les restrictions des g_i à l'ensemble de tangence sont égales et que $g_1 - g_0$ s'annule au moins au même ordre que $df \wedge dg$ le long de L .

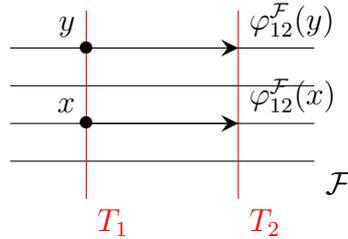
Alors (f, g_0) et (f, g_1) sont \mathcal{R} -conjugués.

Plus généralement, (par exemple dans le cas sans feuille commune), on peut supposer qu'il existe un difféomorphisme φ de $(\mathbb{C}^2, 0)$ qui conjugue les idéaux de tangence, qui préserve f et qui conjugue les restrictions des (f, g_i) aux ensembles de tangence. Si l'ensemble de tangence est suffisamment simple, on peut remplacer la dernière condition par "on suppose que les restrictions des (f, g_i) à chaque courbe de tangence sont conjuguées", mais en général, des difféomorphismes de plusieurs courbes ne se recollent pas en un difféomorphisme global.

3.1.2 \mathcal{F} -équivalence

Dans cette section, on s'intéresse à la \mathcal{F} -équivalence des couples de fonctions (f, g) , ie. à l'équivalence des feuilletages $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ donnés par les hypersurfaces de niveau de f et g . Bien que les invariants présentés ici soient définissables en toute dimension, on va se restreindre à la dimension 2 car on essaiera d'adapter le corollaire 3.1.8 pour obtenir un résultat sur les feuilletages.

On cherche maintenant à introduire un nouvel invariant : le *transport d'holonomie*. Dans le cas où le feuilletage \mathcal{F} est lisse et où T_1 et T_2 sont deux courbes transverses à \mathcal{F} , chaque feuille de \mathcal{F} coupe T_1 et T_2 en un point chacun, et on peut définir le transport d'holonomie $\varphi_{12}^{\mathcal{F}} : T_1 \rightarrow T_2$ comme étant la fonction qui à $x_1 \in T_1$ associe l'unique $x_2 \in T_2$ qui appartient à la feuille de \mathcal{F} passant par x_1 .



Notre but sera dans cette partie de généraliser cette définition au cas où \mathcal{F} est singulier et où les T_i peuvent avoir un point singulier en 0, et de voir comment les transports d'holonomie dans le cas où les T_i sont les courbes de tangence interviennent dans la classification des paires de feuilletages.

Le principal problème vient du fait qu'une feuille d'un feuilletage singulier peut couper une courbe en plusieurs points, donc pour généraliser la construction précédente, il va falloir choisir parmi ces points d'intersection ; et pour espérer pouvoir obtenir des résultats intéressants, ce choix devra être fait de manière cohérente.

Si les T_i sont lisses et en position générique, on peut considérer l'holonomie évanescente en éclatant l'origine et en fixant des chemins sur le diviseur exceptionnel E entre les différentes intersections $T_i \cap E$ (cf [IY]); mais en général, après un éclatement, les T_i intersectent peut-être encore plusieurs fois les feuilles du feuilletage.

On réalise alors une suite d'éclatements d'abord en 0 puis sur les différents diviseurs exceptionnels qui apparaissent pour que les courbes de tangences ne s'intersectent plus, soient transverses aux composantes du diviseur exceptionnel, et n'intersectent plus les transformées strictes de $\{f = 0\}$ et $\{g = 0\}$. On dira qu'une telle suite d'éclatements choisie minimale est un éclatement standard du couple (f, g) .

Définition 3.1.9. *Un éclatement standard du couple (f, g) est une suite d'éclatements*

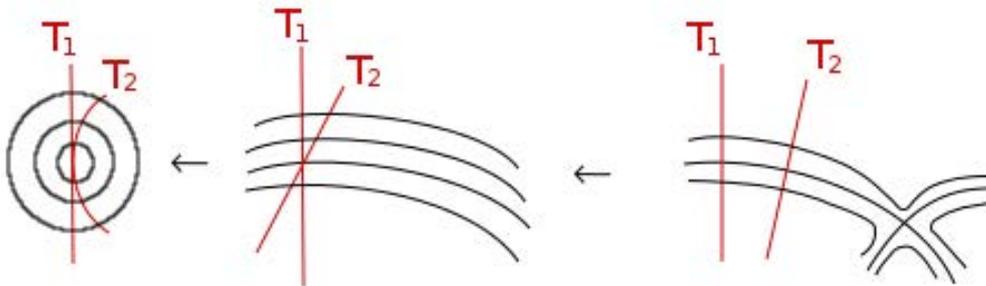
$$B_n \xrightarrow{\pi_n} B_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \dots \xrightarrow{\pi_1} B_0 = (\mathbb{C}^2, 0)$$

où à chaque étape π_i est un éclatement centré en un point p du diviseur exceptionnel de B_{i-1} telle que ou bien

- p appartienne à deux courbes T_i et T_j , ou bien
- p appartienne à une courbe T_i et la transformée stricte de $\{f = 0\}$ ou $\{g = 0\}$, ou bien
- p appartienne à une courbe T_i qui n'est pas transverse au diviseur exceptionnel;

on suppose de plus que la suite (B_i, π_i) est maximale parmi les suites vérifiant les conditions ci-dessus, ie. toutes les courbes T_i ont été désingularisées, ne s'intersectent plus et n'intersectent plus les transformées strictes de $\{f = 0\}$ et $\{g = 0\}$.

Exemple. *Voici un exemple d'éclatement standard avec $\text{Tang}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = T_1 \cup T_2$ (dessiné avec un seul feuilletage pour des raisons de lisibilité).*



Un éclatement standard est uniquement déterminée (à réordonnement près) par l'ensemble de tangence et les feuilles $\{f = 0\}$ et $\{g = 0\}$. En particulier, si ces trois objets sont fixés, on peut parler de la multiplicité de f le long d'une composante du diviseur exceptionnel, ce qui permet la définition suivante :

Définition 3.1.10. *On appelle type d'un couple (f, g) la famille formée par le triplet $(\text{Tang}(f, g), \{f = 0\}, \{g = 0\})$ modulo difféomorphisme et des ordres de f (resp. g) le long de chaque composante du diviseur exceptionnel d'un éclatement standard du couple (f, g) (comme décrit ci-dessus).*

Deux couples \mathcal{F} -équivalents ont nécessairement le même type donc le même éclatement standard, donc le même diviseur exceptionnel $L = E_1 \cup \dots \cup E_m$. Cependant, la courbe L peut avoir des automorphismes non triviaux, donc un difféomorphisme entre deux couples \mathcal{F} -équivalents peut se restreindre à L pour donner un automorphisme non trivial. On ne considèrera dans la suite que le cas où L est fixé pour pouvoir définir proprement les transports d'holonomie ; on discutera des défauts de ce choix après.

Étant donné un chemin γ dans une composante E_i de L , si γ ne passe pas par les points d'intersection entre E_i et les autres E_j ou entre E_i et la transformée stricte de $\{f = 0\}$, alors \mathcal{F} est lisse au-dessus de γ et permet de définir le transport d'holonomie $\varphi_{12}^{\mathcal{F}}$ entre deux courbes T_1 et T_2 transverse à E_i passant par les extrémités de γ .

Quitte à fixer des chemins dans les composantes E_i de L , on peut donc définir proprement les transports d'holonomie entre des courbes qui passent par un même E_i . Si E_i et E_j s'intersectent en un point p , on peut fixer des coordonnées locales (x, y) sur un voisinage de p de sorte que $E_i = \{y = 0\}$ et $E_j = \{x = 0\}$. La fonction f s'écrit dans ces coordonnées $f = ux^{k_i}y^{k_j} = (\tilde{u}x^{k'_i}y^{k'_j})^d$ où k_i, k_j sont les multiplicités de f sur E_i et E_j , u est inversible et $d = \text{pgdc}(k_i, k_j)$. On choisit \tilde{u} de sorte que $\tilde{u}(p)$ soit n'importe quelle racine d -ième de $u(p)$ et que \tilde{u} soit continue au voisinage de p .

Fixons deux transversales $T_i = \{x = \varepsilon_i\}$ sur E_i et $T_j = \{y = \varepsilon_j\}$ sur E_j proches de p . Si on pose $\tilde{f} = \tilde{u}x^{k'_i}y^{k'_j}$, f et \tilde{f} ont les mêmes feuilles, donc la feuille F_t de \mathcal{F} qui passe par le point de coordonnée $y = t$ sur T_i a pour équation

$$F_t : \tilde{u}(x, y)x^{k'_i}y^{k'_j} = \tilde{u}(\varepsilon_i, t)\varepsilon_i^{k'_i}t^{k'_j}.$$

Ainsi l'intersection entre F_t et T_j est

$$F_t \cap T_j = \left\{ y = \varepsilon_j, x^{k'_i} = \frac{\tilde{u}(\varepsilon_i, t)}{\tilde{u}(x, \varepsilon_j)} \varepsilon_i^{k'_i} \varepsilon_j^{-k'_j} t^{k'_j} \right\}.$$

Le quotient $\frac{\tilde{u}(\varepsilon_i, t)}{\tilde{u}(x, \varepsilon_j)}$ vaut à peu près 1 donc il y a k'_i points d'intersection entre F_t et T_j . Le transport d'holonomie entre T_i et T_j est donc une application multivaluée (à

k'_i valuations différentes), et il y a k'_i choix pour le définir. De même, pour passer de T_j vers T_i , il y a k'_j choix.

On fixe donc $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ proches de 0 et une détermination des racines k'_i -ième et k'_j -ième pour que les transports d'holonomie $\varphi_{T_i T_j}^{\mathcal{F}}$ et $\varphi_{T_j T_i}^{\mathcal{F}}$ soient bien définis. Ainsi, pour définir le transport d'holonomie entre une courbe T_1 passant par E_i et une courbe T_2 passant par E_j , on choisit un chemin γ_i de $T_1 \cap E_i$ à $T_i \cap E_i$ et un chemin γ_j de $T_j \cap E_j$ vers $T_2 \cap E_j$; le transport d'holonomie de T_1 vers T_2 est alors défini comme la composée des transports de T_1 vers T_i le long de γ_i puis de T_i vers T_j comme précisé ci-avant, puis de T_j vers T_2 le long de γ_j . Pour simplifier, on omettra de préciser ces choix dans la suite et on parlera du transport d'holonomie de T_1 vers T_2 le long d'un chemin γ (passant par $E_i \cap E_j$).

Remarquons que tous les choix ont été faits sur L : on a fixé des coordonnées locales x, y sur des composantes de L , choisi $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ dans les coordonnées x et y , des déterminations des racines dans les coordonnées x et y et des chemins dans L . Ce sont donc des choix intrinsèques si on considère que L est fixé comme on l'a fait.

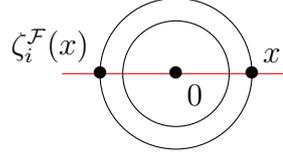
Remarque 3.1.11. *Dans toute cette construction, on a supposé que l'éclatement effectué est minimal pour être sûr que deux courbes identiques soient éclatées de la même manière de sorte à pouvoir effectuer les mêmes choix et à définir les mêmes transports d'holonomie pour les deux.*

Cependant, on peut se demander ce qu'il se passerait si on éclatait trop : pourrait-on définir les mêmes transports d'holonomie ? Autrement dit, si on effectue un éclatement en plus après l'éclatement standard, peut-on définir les mêmes transports d'holonomie ? Supposons que l'on cherche à calculer le transport d'holonomie de \mathcal{F} entre deux courbes T_1 et T_2 . Si T_1 et T_2 intersectent le diviseur exceptionnel L sur la même composante E_i de L , alors un éclatement supplémentaire ne changera rien. Il suffit donc de vérifier le cas où T_1 intersecte une composante E_1 de L et T_2 une composante E_2 avec $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ et où on éclate le point $E_1 \cap E_2$.

Notons E_3 le diviseur obtenu lors de l'éclatement superflu et φ_{12} le transport d'holonomie de T_1 vers T_2 . Soit $p_1 \in T_1$ et F la feuille de \mathcal{F} passant par p_1 . Le choix de φ_{12} est équivalent au choix d'un point p_2 dans l'intersection $F \cap T_2$ et d'un chemin γ entre p_1 et p_2 dans F . On considère maintenant une transversale T_3 à E_3 qui intersecte γ . Le chemin γ détermine donc un choix pour le transport d'holonomie entre T_1 et T_3 , φ_{13} , et un choix pour φ_{32} . Par construction, $\varphi_{32} \circ \varphi_{13} = \varphi_{12}$ donc en ce sens, un éclatement supplémentaire n'influe pas sur la construction effectuée.

Il reste une dernière sorte de transport d'holonomie à définir : le transport d'holonomie d'une courbe T_i vers elle-même. Ce concept n'a évidemment de sens que si T_i intersecte chaque feuille de \mathcal{F} plusieurs fois, mais si c'est le cas, ce transport d'holonomie devra être une fonction qui permute ces points d'intersection, ie. un

difféomorphisme de T_i qui préserve f (si f n'est pas une puissance d'une fonction). Si f est d'ordre p sur T_i , l'ensemble des difféomorphismes de T_i qui préservent f est un groupe cyclique d'ordre p . L'image d'une demi-droite $\mathbb{R}^+ \subset T_i$ sous l'action de ce groupe est la réunion de p demi-courbes d_k tangentes à $\exp(2ik\pi/p)\mathbb{R}^+$ ($k = 0, \dots, p-1$). On choisit pour définir le transport d'holonomie de T_i dans lui-même le générateur $\zeta_i^{\mathcal{F}}$ de ce groupe qui envoie la demi-courbe d_0 sur d_1 .



On sait donc définir le transport d'holonomie entre deux courbes, mais si ces courbes n'ont pas de signification géométrique, le transport d'holonomie correspondant n'en aura pas non plus. Mais si on considère le transport d'holonomie entre deux courbes de tangence, modulo difféomorphismes à la source et au but, on obtient un objet invariant par l'action du groupe \mathcal{F} .

Notons T_1, \dots, T_r les courbes de tangence, introduisons une courbe lisse générique T_0 et choisissons des chemins γ_{0i} dans L entre les points d'intersection de L avec T_i . Fixons des coordonnées t_i sur T_i pour calculer les transports d'holonomie $\varphi_{0i}^{\mathcal{F}}, \varphi_{0i}^{\mathcal{G}} : T_0 \rightarrow T_i$ le long des γ_{0i} . On supposera que les coordonnées t_i sont choisies de sorte que $\varphi_{0i}^{\mathcal{F}}(0) = 1$.

Définition 3.1.12. On appelle transport d'holonomie du couple (f, g) (exprimé sur la courbe T_0 , dans les coordonnées t_i , le long des chemins γ_{0i}) la famille

$$TH(f, g) = ((\zeta_0^{\mathcal{F}}, \zeta_0^{\mathcal{G}}), (\varphi_{0i}^{\mathcal{F}}, \varphi_{0i}^{\mathcal{G}})_{i=1, \dots, r}).$$

Les applications φ_{0i}^{\bullet} sont les applications multivaluées de T_0 dans T_i définies ci-dessus, et les ζ_0^{\bullet} sont les difféomorphismes de T_0 définis ci-dessus.

Par construction, si $\varphi_{0i}^{\mathcal{F}}$ est de multi-valuation d_i , alors $\varphi_{0i}^{\mathcal{F}}$ peut être vu comme une application d'un revêtement ramifié T_0^{1/d_i} de T_0 vers T_i . Sous ce point de vue, les d_i autres choix pour l'application de transport d'holonomie de T_0^{1/d_i} vers T_i sont les $\varphi_{0i}^{\mathcal{F}} \circ (\tilde{\zeta}_0^{\mathcal{F}})^k$, $k = 1, \dots, d_i$ où $\tilde{\zeta}_0^{\mathcal{F}}$ est un relèvement de $\zeta_0^{\mathcal{F}}$ à T_0^{1/d_i} .

Considérons des changements de coordonnées ψ_i sur les T_i et voyons comment ces changements de coordonnées agissent sur les transports d'holonomie. On peut trouver un revêtement $T_0^{1/m}$ de T_0 d'ordre m où m est un multiple commun des degrés de multi-valuation des φ_{0i}^{\bullet} et considérer les φ_{0i}^{\bullet} comme des applications de $T_0^{1/m}$ dans T_i . On peut relever ψ_0 à $T_0^{1/m}$ en $\tilde{\psi}_0$, et on considère que $(\psi_i)_{i=0, \dots, n}$ agit sur le transport d'holonomie TH par

$$(\psi_i) \cdot TH = ((\psi_0 \zeta_0^{\mathcal{F}} \psi_0^{-1}, \psi_0 \zeta_0^{\mathcal{G}} \psi_0^{-1}), (\psi_i \varphi_{0i}^{\mathcal{F}}(\tilde{\psi}_0)^{-1}, \psi_i \varphi_{0i}^{\mathcal{G}}(\tilde{\psi}_0)^{-1})_i).$$

Si on change la courbe T_0 en T'_0 , les transports d'holonomie entre T_0 et T'_0 donnent deux difféomorphismes ψ_f et ψ_g de T_0 dans T'_0 qui transforment la famille TH en

$$(\psi_f, \psi_g) \cdot TH = ((\psi_f \zeta_0^{\mathcal{F}} \psi_f^{-1}, \psi_g \zeta_0^{\mathcal{G}}), (\varphi_{0i}^{\mathcal{F}} \widetilde{\psi}_f^{-1}, \varphi_{0i}^{\mathcal{G}} \widetilde{\psi}_g^{-1})_i),$$

où $\widetilde{\psi}_l$ est un relèvement de ψ_l à $T_0^{1/m}$ pour $l = f, g$.

La prochaine proposition donne l'ordre de tangence entre les transports d'holonomie de \mathcal{F} et \mathcal{G} en fonction de l'ordre d'annulation à l'origine de f , g et $df \wedge dg$. Par "ordre d'annulation" d'une fonction h à l'origine, on entend l'entier k tel que $h \in \mathfrak{m}^k \setminus \mathfrak{m}^{k+1}$.

Proposition 3.1.13. *Si $df \wedge dg$ s'annule à l'ordre κ à l'origine, f à l'ordre p_f et g à l'ordre p_g et si T_0 et T'_0 sont deux courbes génériques non tangentées, alors les composantes $\varphi^{\mathcal{F}}$ et $\varphi^{\mathcal{G}}$ du transport d'holonomie de T_0 vers T'_0 sont des difféomorphismes tangents à l'ordre $\kappa - p_f - p_g + 3$, ie.*

$$(\varphi^{\mathcal{G}})^{-1} \circ \varphi^{\mathcal{F}} - id_{T_0} \in \mathfrak{m}_{T_0}^{\kappa - p_f - p_g + 3}.$$

Démonstration. Éclatons l'origine et notons \tilde{f}, \tilde{g} les fonctions obtenues dans les variables x, z où $y = xz$. Si $df \wedge dg = h dx \wedge dy$, alors $d\tilde{f} \wedge d\tilde{g}(x, z) = h(x, zx) x dx \wedge dz$. Ainsi, $d\tilde{f} \wedge d\tilde{g}$ s'annule à l'ordre $\kappa + 1$ le long du diviseur exceptionnel E . Comme les courbes T_0 et T'_0 sont choisies génériques, les feuilletages éclatés $\tilde{\mathcal{F}}$ et $\tilde{\mathcal{G}}$ sont transverses près de T_0 et T'_0 en dehors de E . Ainsi, on peut écrire $\tilde{f} = x^{p_f} \hat{f}$ et $\tilde{g} = x^{p_g} \hat{g}$ avec \hat{f}, \hat{g} non nulles au voisinage de T_0 et T'_0 et p_l l'ordre d'annulation de \hat{l} sur E donc de l en 0. Quitte à choisir T_0 proche de T'_0 , on peut supposer que \hat{f} et \hat{g} ne s'annulent pas sur un voisinage ouvert U d'un petit chemin sur E reliant $T_0 \cap E$ et $T'_0 \cap E$. On peut alors écrire $\tilde{f} = \bar{f}^{p_f}$ et $\tilde{g} = \bar{g}^{p_g}$ avec \bar{f} et \bar{g} submersives sur U . Les fonctions \bar{f} et \bar{g} induisent les mêmes feuilletages que \tilde{f} et \tilde{g} , donc on peut les utiliser pour calculer les transports d'holonomie.

On remarque que $d\tilde{f} \wedge d\tilde{g} = p_f p_g \bar{f}^{p_f-1} \bar{g}^{p_g-1} d\bar{f} \wedge d\bar{g}$ donc que $d\bar{f} \wedge d\bar{g}$ s'annule à l'ordre $\bar{\kappa} := \kappa - p_f - p_g + 3$ sur E . Comme \bar{f} et \bar{g} sont lisses, on peut supposer que $\bar{f} = x$ auquel cas $d\bar{f} \wedge d\bar{g} = \partial_z \bar{g} dx \wedge dz$ donc $\partial_z \bar{g} = x^{\bar{\kappa}} u$ avec u non nulle sur $E \cap U$. Par suite, $\bar{g}(x, z) = \bar{g}(x, 0) + \int_0^z x^{\bar{\kappa}} u = \zeta(x) + x^{\bar{\kappa}} v$ (on a supposé que z était choisi nul sur T_0). La fonction ζ est une submersion donc \bar{g} définit le même feuilletage que $\zeta^{-1} \circ \bar{g} = x + x^{\bar{\kappa}} w$. Il est alors clair que les transports d'holonomie entre T_0 et T'_0 sont tangents à l'ordre (au moins) $\bar{\kappa}$ si T_0 et T'_0 sont assez proches, donc aussi si ils sont génériques. L'ordre de tangence est exactement $\bar{\kappa}$ car u ne s'annule pas sur $E \cap U$, donc v non plus, donc w ne s'annule que sur T_0 au voisinage de T_0 . \square

Remarquons que les degrés p_f et p_g de f et g en 0, les degrés de multi-valuation d_i^f et d_i^g des transports d'holonomie sont déterminés par le type t de la paire (f, g) , ainsi que l'ordre de tangence $\kappa(t)$ des transports d'holonomie selon \mathcal{F} et \mathcal{G} entre deux courbes génériques T_0 et T'_0 . On peut donc poser la définition suivante :

Définition 3.1.14. À type t de paires de fonctions fixé, on note $\mathcal{TH}(t)$ l'ensemble des familles $((\zeta^f, \zeta^g), (\varphi_i^f, \varphi_i^g)_{i=1, \dots, r})$ d'applications holomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$ telles que ζ^l soit un difféomorphisme d'ordre p_l et que φ_i^l soit de multi-valuation d_i^l .

On note $G(t)$ le groupe des changements admissibles, ie. le produit des groupes de difféomorphismes induits par les changements de coordonnées sur les T_i et par le changement de la courbe T_0 :

$$G(t) = \text{Diff}(T_0, 0) \times \prod_{i=1}^r \text{Diff}^1(T_i, 0) \times \text{Diff}^{\kappa(t)}(\mathbb{C}, 0).$$

Le groupe $G(t)$ agit sur les transports d'holonomie comme décrit ci-avant.

Deux éléments $TH_1, TH_2 \in \mathcal{TH}(t)$ sont dits équivalents si il existe un élément $\psi \in G(t)$ tel que $\psi \cdot TH_1 = TH_2$.

Théorème 3.1.15. Soient (f_i, g_i) , $i = 1, 2$ deux paires ayant le même type et des transports d'holonomie $TH_i \in \mathcal{TH}(t)$ équivalents. On suppose de plus que les feuilletages induits par les f_i sont égaux : $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ et que $I(f_1, g_1) = I(f_2, g_2)$, alors les deux couples sont \mathcal{F} -équivalents.

Démonstration. Les transports d'holonomie TH_j correspondent à des transports entre une courbe T_0^j et les courbes de tangence T_i , écrits dans des coordonnées t_i^j . On retrouve les transports d'holonomie entre T_1 et T_j en les composant. On peut trouver de nouvelles coordonnées $t_i'^2$ telles que les transports exprimés dans ces coordonnées soient égaux. Quitte à composer au but, on peut supposer que $f_1 = f_2$, mais aussi que g_1 et g_2 sont égales sur T_1 . Du fait que les transports d'holonomie sont égaux, on trouve que sur T_i , l_1 dans la coordonnée t_i^1 et l_2 dans la coordonnée $t_i'^2$ sont égales, ie. il existe un difféomorphisme ψ_i de T_i tel que $(f_1, g_1)|_{T_i} = (f_2, g_2)|_{T_i} \circ \psi_i$ pour tout i .

Les difféomorphismes ψ_i sont tangents à l'identité d'après la définition d'équivalence dans $\mathcal{TH}(t)$, ainsi ψ_i est un difféomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$ tangent à l'identité qui conjugue f_1 et $f_2 = f_1$: c'est l'identité. Ainsi $g_1 = g_2$ sur les T_i ; si \mathcal{F}_1 et \mathcal{G}_1 ont une feuille commune, g_1 est tangent à g_2 à un ordre suffisant d'après la proposition 3.1.13 et on peut appliquer le corollaire 3.1.8. \square

On voit dans la preuve que ce théorème ne permet d'obtenir que des difféomorphismes tangents à l'identité (dans le cas où $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ et $I(f_1, g_1) = I(f_2, g_2)$). Cependant, comme on l'a déjà fait remarquer, il peut y avoir des idéaux I stabilisés par des difféomorphismes non tangents à l'identité; il peut donc exister des couples difféomorphes pour lesquels le théorème ne permet pas de conclure.

On remarque cependant que dès que l'idéal I s'annule sur suffisamment de composantes (par exemple 3 composantes deux à deux non tangentes), alors un difféomorphisme ne peut fixer I que s'il est tangent à une homothétie, auquel cas

il préserve aussi les chemins sur lesquels on calcule les transports d'holonomie. En ce sens, le théorème précédent décrit la situation générique.

Dans un cas où l'idéal I admet des difféomorphismes qui ne préservent pas ces chemins, on peut avoir des paires décrites par des transports d'holonomie (φ_{0i}) et $(\tilde{\varphi}_{0i})$ non équivalents, mais qui sont pourtant difféomorphes. Dans ces cas (et si on suppose encore que $f_1 = f_2$), un tel difféomorphisme ψ fixe chacune des restrictions $f|_{T_i}$. Donc si $f|_{T_i}$ est d'ordre k_i , $\psi|_{T_i}$ est tangent à $\mu_i id$ où μ_i est une racine k_i -ème de l'unité, et il y a donc k_i difféomorphismes de T_i possibles. Ainsi, même dans ces cas, la classification donnée est valide à un groupe d'ordre fini près (d'ordre inférieur ou égal à $\prod k_i$).

On obtient immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.16. *On considère deux couples \mathcal{F} -équivalents. Si un difféomorphisme φ conjugue les ensembles de tangence, les transports d'holonomie et les restrictions à une courbe de tangence, alors φ réalise une \mathcal{R} -équivalence entre ces couples.*

On a aussi un corollaire similaire pour les équivalences modulo les difféomorphismes qui préservent une feuille commune dans le cas où il y en a une.

Corollaire 3.1.17. *On considère deux couples \mathcal{F}_L -équivalents. Si un difféomorphisme φ conjugue les ensembles de tangence, les transports d'holonomie et les restrictions à une courbe de tangence, alors φ réalise une \mathcal{R}_L -équivalence entre ces couples.*

3.2 Paires avec une fonction lisse

Après ces quelques généralités, on peut examiner les cas particuliers les plus simples pour préciser les résultats obtenus. On commence par le cas des paires (f, g) de fonctions de $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^n, 0)}$ avec f régulière. Certains des résultats de cette partie sont déjà bien connus et pourront être trouvés par exemple dans [AVG-Z] ou [Mar] : il s'agit principalement du cas de la \mathcal{A} -équivalence, où on reconnaît l'étude des applications de $(\mathbb{C}^n, 0)$ dans $(\mathbb{C}^2, 0)$. Ainsi, si f et g n'ont pas de feuille commune, on reconnaît un pli quand $\text{Tang}(f, g)$ est une courbe lisse transverse à f et une fonce quand $\text{Tang}(f, g)$ est irréductible et intersecte $\{f = 0\}$ à l'ordre 2.

On peut trouver un système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) avec $f = x_n$, donc si on note $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$, on peut écrire

$$g = \sum_{i \in \mathbb{N}^{n-1}} a_i(f) x^i = \varphi(f) + f^k u(x_1, \dots, x_n)$$

avec $\varphi = a_0$ et k la plus grande puissance de f qui divise $\sum_{i>0} a_i(f)x^i$. L'idéal de tangence est alors engendré par les composantes de

$$df \wedge dg = f^k dx_1 \wedge du.$$

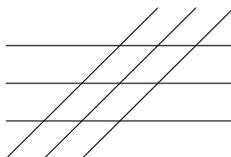
On remarque que la feuille $\{f = 0\}$ est incluse dans l'ensemble de tangence dès que $k \geq 1$; commençons par traiter le cas $k = 0$. On s'intéressera tout particulièrement au cas où l'ensemble de tangence est une réunion de courbes, ce qui est toujours vrai quand $k = 0$ en dimension 2, mais seulement pour des fonctions génériques en dimension plus grande.

3.2.1 Sans feuille commune ($k = 0$)

On étudie ici les couples $(f, g) = (f, \varphi(f) + u)$ où f ne divise pas u et l'ensemble de tangence est une réunion de courbes. On peut distinguer plusieurs sous-cas selon la nature de l'idéal de tangence $I(f, g)$, plus précisément selon le nombre d'intersection entre l'ensemble de tangence et la feuille $\{f = 0\}$. Ce nombre d'intersection concerne bien l'ensemble de tangence géométrique (qui correspond au radical de l'idéal de tangence), par opposition au nombre de tangence algébrique, que l'on peut détecter par exemple en dimension $n = 2$ comme étant le plus petit entier $i \geq 1$ tel que $a_i(0) \neq 0$, auquel on retranche 1.

3.2.1.1 L'idéal $I(f, g)$ est égal à $\langle 1 \rangle$, ie. f et g sont transverses

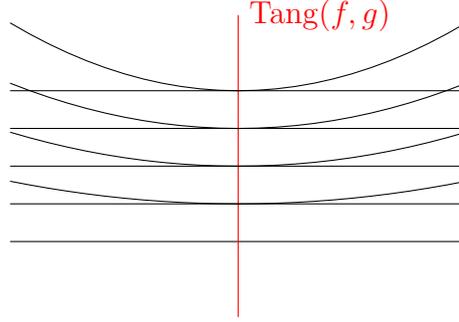
Exemple. C'est le cas pour $f = y$ et $g = y - x$.



Nécessairement g est lisse; on peut donc compléter la famille (f, g) en un difféomorphisme $(f, g, f_3, \dots, f_n) =: \varphi$ de $(\mathbb{C}^n, 0)$ dans $(\mathbb{C}^n, 0)$. L'application φ conjugue alors le couple (f, g) avec (x_1, x_2) pour la \mathcal{R} -équivalence.

3.2.1.2 L'ensemble $\text{Tang}(f, g)$ est une courbe lisse transverse à f

Exemple. Le couple $f = y, g = y - x^2$ est de cette sorte.



On peut dans ce cas supposer que $\text{Tang}(f, g)$ est l'axe des x_n . Pour pouvoir appliquer le corollaire 3.1.8, il ne reste plus qu'à caractériser l'idéal de tangence. Cet idéal est facile à comprendre lorsque la dimension vaut $n = 2$: l'idéal de tangence est alors une puissance de son radical ; il est donc caractérisé par l'ordre de contact p entre f et g le long de l'ensemble de tangence. On obtient alors :

Théorème 3.2.1. *Soient (f_i, g_i) deux couples de fonctions sur $(\mathbb{C}^2, 0)$. On suppose les f_i régulières et que l'ensemble de tangence T_i est une courbe lisse transverse à f_i . Alors (f_0, g_0) et (f_1, g_1) sont \mathcal{R} -conjugués si et seulement si les ordres de tangence entre f_i et g_i sont égaux et si les couples de restrictions $(f_i, g_i)|_{T_i}$ sont \mathcal{R} -conjugués.*

Démonstration. Comme expliqué ci-avant, si les coordonnées sont (x, y) , on peut supposer que $f_i = y$ et $T_i =: T$ est l'axe des y . Les hypothèses impliquent l'existence d'un difféomorphisme φ de T qui fixe f et conjugue g_0 et g_1 , donc $\varphi = id$ et $g_0 = g_1$ sur T . On peut alors appliquer le corollaire 3.1.8 pour conclure. \square

Corollaire 3.2.2. *Tout couple (f, g) vérifiant les hypothèses du théorème 3.2.1 est \mathcal{R} -conjugué à un unique couple $(y, \varphi(y) + x^p)$.*

Démonstration. L'entier p qui est l'ordre d'annulation de $df \wedge dg$ le long de l'ensemble de tangence est invariant sous l'action de \mathcal{R} . De même, φ est entièrement déterminée par la relation $g|_T = \varphi \circ f|_T$ où T est l'ensemble de tangence. Pour finir, un couple (f, g) d'invariants p et φ est \mathcal{R} -conjugué à $(y, \varphi(y) + x^p)$ par le théorème 3.2.1. \square

Proposition 3.2.3. *Tout couple (f, g) vérifiant les hypothèses du théorème 3.2.1 est \mathcal{A} -conjugué à un unique couple (y, x^p) .*

Démonstration. L'entier p est invariant sous l'action de \mathcal{A} . On remarque que le couple $(y, \varphi(y) + x^p)$ est équivalent à (y, x^p) via le difféomorphisme au but $(z, w) \mapsto (z, w - \varphi(z))$; le corollaire précédent permet alors de conclure. \square

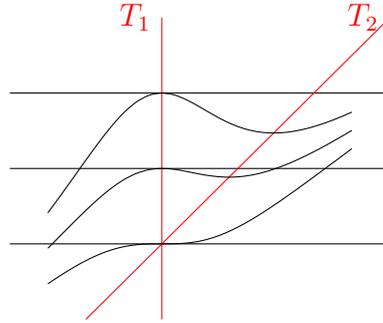
Proposition 3.2.4. *Tout couple (f, g) vérifiant les hypothèses du théorème 3.2.1 est \mathcal{F} -conjugué à un unique couple $(y, y^q + x^p)$.*

Démonstration. D'après le corollaire 3.2.2, on peut se restreindre aux couples $(y, \varphi(y) + x^p)$. Si $\varphi(y) = ay^q + \dots$ avec $a \neq 0$, on peut écrire $\varphi(y) = \psi(y)^q$ pour un difféomorphisme ψ . Par suite, $(y, \varphi(y) + x^p) \underset{\mathcal{F}}{\sim} (\psi^{-1}(y), y^q + x^p)$ et on conclut en conjuguant $f(x, y) = \psi^{-1}(y)$ au but par ψ . \square

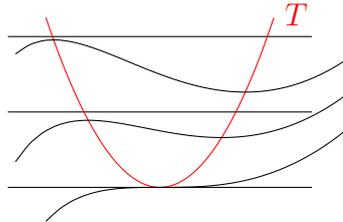
Remarque 3.2.5. *L'entier q est invariant sous l'action de \mathcal{F} en tant qu'ordre de tangence entre les ensembles $\{f = 0\}$ et $\{g = 0\}$ en 0.*

3.2.1.3 L'ensemble $\text{Tang}(f, g)$ intersecte la feuille $\{f = 0\}$ à l'ordre 2

Exemple. *Il y a deux sortes d'exemple : premièrement $\text{Tang}(f, g) = T_1 \cup T_2$ peut être réductible, c'est par exemple le cas si $f = y$ et $g = y + x^2(\frac{y}{2} - \frac{x}{3})$.*



Deuxièmement, $\text{Tang}(f, g) = T$ peut être irréductible comme pour $f = y$ et $g = y + xy - x^3/3$.



On peut alors supposer que $\text{Tang}(f, g) =: T$ a pour équations $x_1 = \dots = x_{n-2} = 0, x_n^r - x_{n-1}^2 = 0$ pour un entier $r \geq 1$. On remarque déjà qu'il existe un difféomorphisme non trivial de T qui préserve f : l'application $x_{n-1} \mapsto -x_{n-1}$. Comme précédemment, l'idéal $I(f, g)$ n'est facile à caractériser que si $n = 2$, auquel cas il est entièrement déterminé par l'ordre de tangence entre f et g le long des composantes de l'ensemble de tangence (si r est pair, l'ensemble de tangence a deux composantes).

Le *type* de la paire (f, g) revient à la famille formée par l'entier r et les ordres de contacts le long des composantes de l'ensemble de tangence. On dit que le type de (f, g) est *asymétrique* si r est pair et si les ordres de contact p_1 et p_2 le long des deux composantes de l'ensemble de tangence diffèrent : $p_1 \neq p_2$. On dit que (f, g) est de type *symétrique* dans les autres cas. On a donc :

Théorème 3.2.6. *Soient (f_i, g_i) deux couples de fonctions de $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2, 0)}$ avec f_i lisse, dont l'ensemble de tangence T_i intersecte $\{f_i = 0\}$ à l'ordre 2. On suppose que les deux couples sont de même type, et de plus,*

- *dans le cas symétrique on suppose que les restrictions de (f_i, g_i) à T_i sont \mathcal{R} -conjuguées ;*
- *dans le cas asymétrique les ensembles T_i se décomposent $T_i = T_i^1 \cup T_i^2$ de sorte que les ordres de tangence le long de T_0^j et T_1^j sont égaux ; on suppose alors que les restrictions de (f_i, g_i) à T_i^j sont conjuguées deux à deux.*

Sous ces hypothèses, (f_0, g_0) et (f_1, g_1) sont \mathcal{R} -conjugués.

La réciproque est vraie dans les deux cas.

Démonstration. Comme énoncé, on se ramène au cas où $f_i = y$ et $T_i = T = \{y^r = x^2\}$.

Dans le cas asymétrique, $T = T^1 \cup T^2$ et par hypothèse, il existe deux difféomorphismes φ_1, φ_2 de T^1 et T^2 respectivement qui conjuguent les restrictions de (f, g_i) aux T^j . Les T^j sont transverses à f donc $\varphi_j^* f = f$ implique $\varphi_j = id$ et par suite $g_0 = g_1$ en restriction à chaque T^j .

De plus, les idéaux $I(f, g_0)$ et $I(f, g_1)$ sont déterminés par l'ensemble de tangence et le type des paires, qui sont égaux, donc $I(f, g_0) = I(f, g_1)$. On peut appliquer le corollaire 3.1.8 pour conclure.

Dans une situation symétrique, ou bien T se décompose et le difféomorphisme φ de T préserve cette décomposition auquel cas on se ramène à la situation asymétrique ; ou bien φ ne préserve pas cette décomposition, auquel cas, si $\tau(x, y) = (-x, y)$, $\varphi \circ \tau$ la préserve et conjugue $(f, g_0) \circ \tau^{-1}$ avec (f, g_1) . On se ramène donc au cas précédent en remarquant que $(f, g_0) \circ \tau^{-1} \sim (f, g_0)$. Finalement, si T est irréductible, les hypothèses donnent un difféomorphisme φ de T qui conjugue (f, g_0) et (f, g_1) . En particulier, $\varphi^* f = f$ donc $\varphi = id$ ou $\varphi = \tau|_T$ pour le même τ que précédemment. Si $\varphi = id$, alors $g_0 = g_1$ sur T , sinon on se ramène à $\varphi = id$ en considérant $(f, g_0) \circ \tau^{-1}$ et (f, g_1) . Dans tous les cas, on peut appliquer le corollaire 3.1.8 pour conclure.

Pour étudier la réciproque, on suppose que f et T sont normalisés comme précédemment. On remarque alors qu'un difféomorphisme φ qui conjugue une paire (f, g_0) avec une paire (f, g_1) préserve T donc les restrictions de (f, g_i) à T . Les ordres de tangence sont aussi préservés par φ donc les types des deux couples sont les mêmes. On remarque de plus que dans le cas asymétrique, ce difféomorphisme

doit préserver la décomposition $T = T^1 \cup T^2$ puisqu'il doit préserver les ordres de tangence le long des composantes de l'ensemble de tangence. Ainsi, dans le cas asymétrique, φ se décompose en deux difféomorphismes φ_1, φ_2 de T^1 et T^2 respectivement. La réciproque est donc vraie. \square

Pour la \mathcal{F} -équivalence, on peut reprendre les invariants du théorème 3.1.15, ie. les transports d'holonomie TH . Il y a plusieurs cas à distinguer. Si l'ensemble de tangence T est indécomposable (r impair), alors TH est donné par les deux involutions (ζ^f, ζ^g) et l'équivalence des transports est donnée par les reparamétrages de T ; si $T = T_1 \cup T_2$ est décomposable, TH est donné par les transports d'holonomie $(\varphi_{12}^f, \varphi_{12}^g)$ et l'équivalence des transports est donnée par les reparamétrages de T_1 et T_2 . Dans les cas symétriques, on a une involution i qui préserve f et l'idéal de tangence. Cette involution permute T_1 et T_2 et sa restriction à T_1 est égale à φ_{12}^f . Si T_i est munie d'une coordonnée t_i , l'action de cette involution sur les transports d'holonomie s'exprime naturellement dans les coordonnées t_2 sur T_1 et t_1 sur T_2 via les formule : $i \cdot (\zeta^f, \zeta^g) = (\varphi_{12}^f \zeta^f (\varphi_{12}^f)^{-1}, \varphi_{12}^g \zeta^g (\varphi_{12}^g)^{-1})$ et $i \cdot (\varphi_{12}^f, \varphi_{12}^g) = ((\varphi_{12}^f)^{-1}, (\varphi_{12}^g)^{-1})$. Finalement, l'équivalence des invariants est donnée dans les situations asymétriques par le groupe G des reparamétrages, et dans les cas symétriques par le groupe $G \times \langle i \rangle$.

Proposition 3.2.7. *Soient (f_i, g_i) deux couples de fonctions de $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2, 0)}$ avec f_i lisse, dont l'ensemble de tangence T_i intersecte $\{f = 0\}$ à l'ordre 2. On suppose que les deux couples sont de même type, et de plus,*

- dans le cas asymétrique on suppose que les transports d'holonomie TH_1 et TH_2 sont conjugués sous l'action du groupe G des reparamétrages des courbes de tangence;
- dans le cas symétrique on suppose que les transports d'holonomie sont conjugués sous l'action de $G \times \langle i \rangle$ où l'action de i est décrite ci-dessus.

Sous ces hypothèses, (f_0, g_0) et (f_1, g_1) sont \mathcal{F} -conjugués.

La réciproque est vraie dans les deux cas.

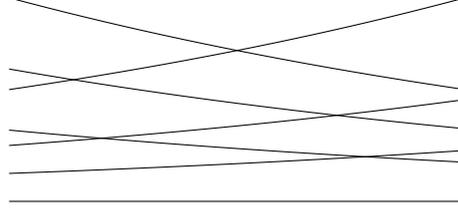
3.2.2 Avec feuille commune ($k \geq 1$)

On étudie ici les couples $(f, g) = (f, \varphi(f) + f^k u)$ où f divise u et $k \geq 1$. Rappelons que l'ensemble $\text{Tang}(f, g)$ est constitué de la feuille $\{f = 0\}$ et de $\text{Tang}(f, u)$; on suppose comme avant que $\text{Tang}(f, u)$ est une réunion de courbes, ce qui est vrai en dimension 2 et est le cas générique en dimension plus grande.

On remarque que la \mathcal{R} -classification de couples $(f, \varphi(f) + f^k u)$ à φ et k fixés est équivalente à la \mathcal{R} -classification des couples (f, u) , qui a été faite au paragraphe précédent. On distingue encore plusieurs cas selon le nombre d'intersection entre la feuille $\{f = 0\}$ et l'ensemble de tangence $\text{Tang}(f, u)$.

3.2.2.1 f et g n'ont pas de tangence en dehors de la feuille commune

Exemple. Le couple $f = ye^{-x}$, $g = ye^x$ est de cette sorte.



L'étude précédente montre qu'on peut se ramener aux couples de la forme $(f, g) = (x_n, \varphi(x_n) + x_n^k x_1)$. On remarque alors que si l'ordre de φ vérifie $\text{ord}(\varphi) > k$, on peut faire le changement de variables $(x_1, x_n) \mapsto (x_1 + \varphi(x_n)/x_n^k, x_n)$ pour se ramener au couple $(f, g) = (x_n, x_n^k x_1)$.

Inversement, soient P un polynôme de degré au plus k , $(f, g) = (x_n, P(x_n) + x_n^k x_1)$ et ψ un difféomorphisme de $(\mathbb{C}^n, 0)$ qui préserve x_n . Alors, en notant $\psi^{(k)}$ le k -jet de ψ , on obtient que $x_n \circ \psi^{(k)} = x_n$ donc que $P(x_n) \circ \psi^{(k)} = P(x_n)$ puis que ψ préserve le k -jet de g . Finalement, on obtient la forme normale suivante :

Proposition 3.2.8. *Tout couple (f, g) de fonctions de $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^n, 0)}$ où f est lisse, divise g et où l'ensemble de tangence est réduit à la feuille commune $\{f = 0\}$ est \mathcal{R} -équivalent à un unique couple $(x_n, P(x_n) + x_n^k x_1)$ avec $\deg(P) \leq k$.*

On en déduit la \mathcal{A} -classification ...

Proposition 3.2.9. *Sous les mêmes hypothèses, (f, g) est \mathcal{A} -équivalent à un unique couple $(x_n, x_n^k x_1)$.*

... puis la \mathcal{F} -classification.

Proposition 3.2.10. *Sous les mêmes hypothèses, (f, g) est \mathcal{F} -équivalent à un unique couple $(x_n, x_n^q + x_n^k x_1)$ avec $q \leq k$.*

Démonstration. On peut supposer que $f = x_n$ et $g = P(x_n) + x_n^k x_1$. Si $P(x_n) = ax_n^q + \dots$ avec $a \neq 0$, alors il existe un difféomorphisme ψ tel que $P(x_n) = \psi(x_n)^q$. Alors $(x_n, P(x_n) + x_n^k x_1) \underset{\mathcal{F}}{\sim} (\psi^{-1}(x_n), x_n^q + \psi^{-1}(x_n)^k x_1)$ mais en composant au but $\psi^{-1}(x_n)$ par ψ , on obtient $(x_n, x_n^q + \psi^{-1}(x_n)^k x_1)$. Par suite, si $\psi^{-1}(x_n)^k = x_n^k u$ (avec u inversible), le changement de variable à la source $x_1 \mapsto x_1 u$ met le couple sous la forme voulue. \square

On s'intéresse aussi à la \mathcal{R} -classification modulo les difféomorphismes qui fixent la feuille commune L , ie. la \mathcal{R}_L -classification :

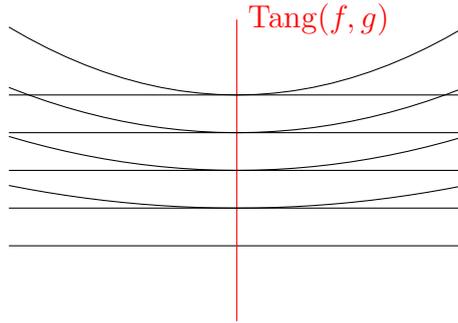
Proposition 3.2.11. *Sous les mêmes hypothèses, (f, g) est \mathcal{R}_L -équivalent à un unique couple $(x_n, P(x_n) + x_n^k u(x_1, \dots, x_{n-1}))$ avec $\deg(P) \leq k$ et u une fonction holomorphe nulle en 0 telle que $du(0) \neq 0$.*

Démonstration. Il existe un difféomorphisme φ tel que $(f, g) \circ \varphi = (x_n, P(x_n) + x_n^k x_1)$. Ce difféomorphisme préserve nécessairement la feuille commune $L = \{x_n = 0\}$, notons $\hat{\phi} = \varphi|_L$ que l'on étend à $(\mathbb{C}^n, 0)$ par $\phi(x_1, \dots, x_n) = (\hat{\phi}(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$ pour donner un difféomorphisme. Alors $\varphi \circ \hat{\phi}^{-1}$ fixe L et $(f, g) \circ \varphi \circ \hat{\phi}^{-1} = (x_n, P(x_n) + x_n^k x_1) \circ \hat{\phi}^{-1}$ donc $(f, g) \underset{\mathcal{R}_L}{\sim} (x_n, P(x_n) + x_n^k u(x_1, \dots, x_{n-1}))$ pour $u = x_1 \circ \hat{\phi}^{-1}$.

Le polynôme P est uniquement déterminé pour les mêmes raisons que dans la \mathcal{R} -classification, et l'unicité de u découle de celle de P puisque $u = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{g - P(f)}{f^k}$. \square

3.2.2.2 Tang(f, u) est une courbe lisse transverse à la feuille $\{f = 0\}$

Exemple. *C'est le cas pour $f = y$ et $g = y(1 - x^2)$:*



Par l'étude précédente, si la dimension est $n = 2$, on peut se ramener à la forme $(f, g) = (y, \varphi(y) + y^k x^p)$. Les entiers $k \geq 1$ et $p \geq 2$ représentent des ordres de contact donc sont des invariants, la fonction φ est entièrement déterminée par la condition $g = \varphi(f)$ sur la courbe de tangence. On obtient ainsi :

Proposition 3.2.12. *Soit (f, g) un couple de fonctions de $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2, 0)}$ où f est lisse, $f \mid g$ et l'ensemble de tangence hors de la feuille commune $\{f = 0\}$ est une courbe lisse transverse à la feuille commune. Alors (f, g) est \mathcal{R} -équivalente à un unique couple $(y, \varphi(y) + y^k x^p)$.*

Comme précédemment, la \mathcal{A} -classification en découle...

Proposition 3.2.13. *Sous les mêmes hypothèses, (f, g) est \mathcal{A} -équivalente à un unique couple $(y, y^k x^p)$.*

... ainsi que la \mathcal{F} -classification...

Proposition 3.2.14. *Sous les mêmes hypothèses, (f, g) est \mathcal{F} -équivalente à un unique couple $(y, y^q + y^k x^p)$.*

Démonstration. D'après la proposition 3.2.12, on peut supposer que $f = y$ et $g = \varphi(y) + y^k x^p$. Si $\varphi(y) = ay^q + \dots$ avec $a \neq 0$, alors il existe un difféomorphisme ψ tel que $\varphi(y) = \psi(y)^q$. Alors $(y, \varphi(y) + y^k x^p) \sim (\psi^{-1}(y), y^q + \psi^{-1}(y)^k x^p)$ mais $\psi^{-1}(y)$ et y définissent le même feuilletage, et $\psi^{-1}(y)^k x^p = y^k x^p u(y)$ avec u inversible. Ainsi, le changement de variable $x \mapsto xu(y)^{1/p}$ met le couple sous la forme voulue. \square

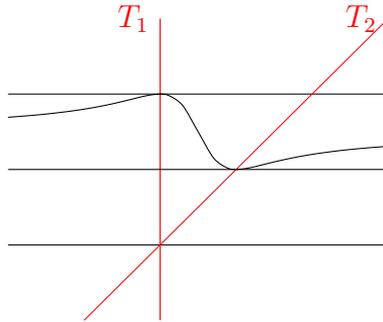
... et pour finir la \mathcal{R}_L -classification aussi.

Proposition 3.2.15. *Sous les mêmes hypothèses, (f, g) est \mathcal{R}_L -équivalent à un unique couple $(y, \varphi(y) + y^k u(x))$ avec u holomorphe telle que $u(0) = u'(0) = 0$ et $u''(0) \neq 0$.*

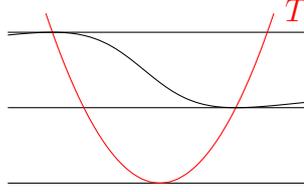
Démonstration. Par la proposition 3.2.12, il existe un difféomorphisme ψ tel que $(f, g) \circ \psi = (y, \varphi(y) + y^k x^p)$. Le difféomorphisme ψ stabilise la feuille commune L donc induit un difféomorphisme ϕ de L que l'on étend à $(\mathbb{C}^2, 0)$ par $\phi(x, y) = (\phi(x), y)$. Alors $\psi \circ \phi^{-1}$ fixe L et conjugue (f, g) avec $(y, \varphi(y) + y^k \phi^{-1}(x)^p)$. La fonction $u(x) = \phi^{-1}(x)^p$ est uniquement déterminée par le fait que $u = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{g - \varphi(f)}{f^k}$. \square

3.2.2.3 Tang(f, u) intersecte la feuille $\{f = 0\}$ à l'ordre 2

Exemple. *Comme quand il n'y avait pas de feuille commune, on distingue les cas où l'ensemble de tangence est irréductible et ceux où il ne l'est pas. Pour $f = y$ et $g = y + x^2 y (\frac{y}{2} - \frac{x}{3})$, l'ensemble de tangence $T_1 \cup T_2$ n'est pas irréductible :*



Pour $f = y$ et $g = y + xy(y - \frac{x}{3})$, l'ensemble de tangence T est irréductible.



On va encore se ramener à l'étude faite dans le cas sans feuille commune, mais pour cela, on écrit plutôt $(f, g) = (f, P(f) + f^k v)$ où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à k , f ne divise pas v et $v(0) = 0$. Le polynôme P est invariant sous l'action de \mathcal{R} en tant que k -jet de g donc $(f, P_1 + f^{k_1} v_1)$ est \mathcal{R} -équivalent à $(f, P_2 + f^{k_2} v_2)$ si et seulement si $P_1 = P_2$, $k_1 = k_2$ et si (f, v_1) est \mathcal{R} -équivalent à (f, v_2) .

On définit alors le *type* de la paire (f, g) comme la famille formée par l'entier r qui caractérise l'ensemble de tangence, les ordres de contact le long des composantes de l'ensemble de tangence, l'ordre de contact le long de la feuille commune et le polynôme P défini ci-dessus. On fait la même distinction entre types *symétrique* et *asymétrique* : $(f, P + f^k v)$ est symétrique si et seulement si (f, v) l'est.

On obtient ainsi le théorème :

Théorème 3.2.16. *Soient (f_i, g_i) deux couples de fonctions lisses de $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2, 0)}$ avec une feuille commune L . On suppose que l'ensemble de tangence s'écrit $T_i \cup L$ et que T_i intersecte L à l'ordre 2. On suppose que les deux couples sont de même type, et de plus,*

- dans le cas symétrique on suppose que les restrictions de (f_i, g_i) à T_i sont \mathcal{R} -conjuguées ;
- dans le cas asymétrique les ensembles T_i se décomposent $T_i = T_i^1 \cup T_i^2$ de sorte que les ordres de tangence le long de T_0^j et T_1^j sont égaux ; on suppose alors que les restrictions de (f_i, g_i) à T_i^j sont conjuguées deux à deux.

Sous ces hypothèses, (f_0, g_0) et (f_1, g_1) sont \mathcal{R} -conjugués. La réciproque est vraie dans les deux cas.

Démonstration. Si on fixe l'ensemble de tangence et le type de la paire (qui sont évidemment des invariants), on peut conclure en remarquant que les restrictions de $(f, P + f^k v)$ à T sont données par celles de (f, v) et en appliquant le théorème 3.2.6. \square

On obtient la \mathcal{F} -classification de la même manière que quand il n'y avait pas de feuille commune. Si l'ensemble de tangence T est indécomposable, le transport d'holonomie TH est donné par les deux involutions (ζ^f, ζ^g) ; si $T = T_1 \cup T_2$ alors TH est donné par les transports $(\varphi_{12}^f, \varphi_{12}^g)$. Dans les cas asymétriques, l'équivalence des invariants est donnée par le groupe G des reparamétrages. Dans les cas symétriques, il existe une involution i qui préserve f et l'idéal de tangence ; elle

agit sur les transports d'holonomie par $i \cdot (\zeta^f, \zeta^g) = (\varphi_{12}^f \zeta^f (\varphi_{12}^f)^{-1}, \varphi_{12}^g \zeta^g (\varphi_{12}^g)^{-1})$ et $i \cdot (\varphi_{12}^f, \varphi_{12}^g) = ((\varphi_{12}^f)^{-1}, (\varphi_{12}^g)^{-1})$. L'équivalence des invariants est donnée par le groupe $G \times \langle i \rangle$.

Proposition 3.2.17. *Soient (f_i, g_i) deux couples de fonctions lisses de $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2, 0)}$ avec une feuille commune L . On suppose que l'ensemble de tangence s'écrit $T_i \cup L$ et que T_i intersecte L à l'ordre 2. On suppose que les deux couples sont de même type, et de plus,*

- dans le cas asymétrique on suppose que les transports d'holonomie TH_1 et TH_2 sont conjugués sous l'action du groupe G des reparamétrages des courbes de tangence ;
- dans le cas symétrique on suppose que les transports d'holonomie sont conjugués sous l'action de $G \times \langle i \rangle$ où l'action de i est décrite ci-dessus.

Sous ces hypothèses, (f_0, g_0) et (f_1, g_1) sont \mathcal{F} -conjugués. La réciproque est vraie dans les deux situations.

3.2.2.4 Généralités

Il peut être intéressant d'établir des liens entre les différentes classifications en dimension 2 sans hypothèses supplémentaires sur la géométrie de l'ensemble de tangence. En effet, on peut toujours définir l'invariant u comme avant. On obtient facilement la proposition suivante :

Proposition 3.2.18. *Soient c_1 et c_2 deux couples de fonctions de $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2, 0)}$ dont la première coordonnée est lisse. On suppose que les deux couples ont une feuille commune L , que l'invariant u est le même pour les deux couples et que ceux-ci sont conjugués par un difféomorphisme φ tangent à l'identité. Alors φ fixe L et réalise une \mathcal{R}_L -équivalence entre les deux couples.*

Démonstration. On remarque tout d'abord que φ préserve nécessairement la feuille commune L . Le fait que $c_1 \circ \varphi = c_2$ implique que $u_1 \circ \varphi|_L = u_2$, mais $u_1 = u_2$ donc φ préserve u . Or, φ est tangente à l'identité, donc $\varphi|_L = id_L$. \square

Proposition 3.2.19. *Soient (f_1, g_1) et (f_2, g_2) deux couples de fonctions de $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2, 0)}$ dont la première composante est lisse et ayant une feuille commune. On suppose que les transports d'holonomie calculés sur une courbe générique T_0^i pour une coordonnée t_0^i ($i = 1, 2$) sont égaux, que les $l_i(t_0^i)$ sont tous égaux et que les invariants u sont les mêmes pour les deux couples. Alors les deux couples sont \mathcal{F}_L -conjugués.*

C'est une conséquence de la proposition précédente puisque les difféomorphismes réalisant la \mathcal{F} -équivalence sont tangents à l'identité comme on l'a vu dans la preuve du théorème 3.1.15. Pour obtenir un énoncé plus naturel il faut remarquer que l'action des difféomorphismes au but ne préservent pas l'invariant u :

changer f en $\psi(f)$ a pour effet de multiplier u par un facteur $(\psi'(0))^{-k}$, et changer g en $\psi(g)$ a pour effet de multiplier u par un facteur $\psi'(0)$. On peut donc montrer qu'un couple est déterminé par ses invariants (TH, u) modulo l'action d'un groupe G où les transports d'holonomie TH sont calculés sur une transversale T_0 pour une coordonnée t_0 et u est calculée par rapport à des intégrales premières f, g égales à t_0 sur T_0 . Le groupe G correspond encore aux changements de courbes et de coordonnées et agit sur TH et u simultanément.

3.3 Paires de fonctions de Morse

Après l'étude des paires (f, g) où f est régulière, on peut étudier les paires (f, g) où f et g sont des fonctions de Morse. Commençons par rappeler la \mathcal{R} -classification des paires de formes quadratiques sur \mathbb{C}^n (cf. [HP]). Vues sous forme de matrices, deux formes non dégénérées q_f et q_g peuvent être simultanément diagonalisées par blocs avec des blocs

$$\begin{pmatrix} (0) & & & 1 \\ & & \ddots & \\ & & & \\ 1 & & & (0) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} (0) & & & \lambda \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \\ \lambda & 1 & & (0) \end{pmatrix}.$$

Par exemple, on voit que la paire $(f, g) = (2xy, 2xy + y^2)$, donnée par les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} :$$

ne peut pas être simultanément diagonalisée.

Cependant, on se rend compte en comptant les paramètres dans cette diagonalisation par blocs qu'une paire générique (hors d'un ensemble de codimension 1) de formes quadratiques peut être simultanément diagonalisée.

Le théorème de Morse ([Mor]) utilisé avec l'étude des formes quadratiques précédente permet donc de supposer génériquement que $f = \sum x_i^2$ et que la partie quadratique de g vaut $q_g = \sum \lambda_i x_i^2$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j \neq 0$ si $i \neq j$.

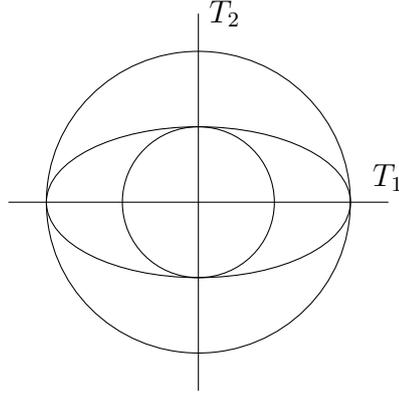
On va montrer que les idéaux de tangences de paires de fonctions de Morse sont tous difféomorphes. Le lemme-clé permettra alors de dire que la classification est donnée par les restrictions des paires aux ensemble de tangence.

3.3.1 \mathcal{R} -classification

On dit qu'une paire de fonctions de Morse (f, g) est \mathcal{R} -générique si les parties quadratiques q_f et q_g sont diagonales (à un isomorphisme linéaire près) : $q_f(x) =$

$\sum x_i^2$ et $q_g(x) = \sum \lambda_i x_i^2$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Dans la suite, on se place dans le cas où (f, g) est une paire de fonctions de Morse générique.

On cherche tout d'abord à comprendre l'ensemble de tangence $\text{Tang}(f, g)$. Si f et g sont quadratiques et diagonaux, un calcul immédiat montre que l'ensemble de tangence est la réunion des axes de coordonnées. Par exemple, le couple $f = x^2 + y^2$, $g = x^2 + 2y^2$ en dimension 2 donne le portrait de phase réel suivant :



En général, on a la proposition suivante :

Proposition 3.3.1. *Les ensembles $\text{Tang}(f, g)$ et $\text{Tang}(q_f, q_g)$ sont difféomorphes et tangents.*

Démonstration. On suppose que $f = \sum x_i^2$ et $q_g = \sum \lambda_i x_i^2$. Éclatons l'origine pour trouver (en recyclant les coordonnées x_i comme coordonnées dans l'éclatement) les transformées de f et g :

$$\tilde{f} = x_1^2(1 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \quad \text{et} \quad \tilde{g} = x_1^2(\lambda_1 + \lambda_2 x_2^2 + \dots) + x_1^3(\dots).$$

On va simultanément calculer les lieux de tangence $\text{Tang}(f, g)$ et $\text{Tang}(q_f, q_g)$ dans l'éclaté pour prouver cette proposition (comme on connaît déjà $\text{Tang}(q_f, q_g)$, cela permettra de comprendre $\text{Tang}(f, g)$). Écrivons $\hat{f} = \tilde{f} = \tilde{q}_f$ et $\hat{g} = \tilde{q}_g + x_1^3\varepsilon$ avec $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = x_1^{-3}(\tilde{g} - \tilde{q}_g)$.

On remarque que l'hypothèse de généricité sur le n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ implique que q_f et q_g ne sont pas tangents près d'un point de la surface $\{f = 0\}$ (excepté en 0). Dans l'éclaté, posons $S := \{1 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0\}$ et $E := \{x_1 = 0\}$. La remarque précédente entraîne que les composantes de l'ensemble de tangence entre \tilde{q}_f et \tilde{q}_g différentes de E n'intersectent pas $E \cap S$. Ceci est donc le cas pour \hat{f} et \hat{g} indépendamment de ε . Le changement de coordonnées $x_1 \mapsto \sqrt{\hat{f}}$ est licite près de chaque point de E éloigné de l'hypersurface S et chaque composante de $\text{Tang}(\hat{f}, \hat{g})$

différente de E est loin de cette hypersurface (notez aussi que ce changement de coordonnée ne dépend pas de ε).

Dans ces nouvelles coordonnées locales,

$$\hat{f} = x_1^2 \quad \text{et} \quad \hat{g} = x_1^2 u = x_1^2(u_0 + x_1 \varepsilon')$$

avec u_0 qui ne dépend pas de x_1 et ε' holomorphe loin de S ($\varepsilon' = 0$ dans le cas $\varepsilon = 0$). L'ensemble de tangence est la réunion des variétés données par les équations $x_1 = 0$ et $dx_1 \wedge du = 0$. Mais $dx_1 \wedge du = dx_1 \wedge (du_0 + x_1 d\varepsilon')$ donc sur le diviseur exceptionnel, les solutions de $dx_1 \wedge du = 0$ sont les mêmes que les solutions de $dx_1 \wedge du_0 = 0$. Ainsi les solutions de $dx_1 \wedge du = 0$ sur E ne dépendent pas de ε , ce sont donc n points simples correspondant aux axes.

Finalement, on remarque que $dx_1 \wedge du = 0$ est donnée par $n - 1$ équations donc l'ensemble de ses solutions est de dimension au moins 1. Chaque point p solution de ces équations sur E donne donc naissance à un ensemble T_p de dimension au moins 1, mais $T_p \cap E = \{p\}$ de sorte que $\dim(T_p) = 1$. Le fait que p soit un point simple signifie que T_p est une courbe lisse simple intersectant E transversalement. Ainsi, avant d'éclater, il y avait n courbes de tangence lisse et simples tangentes aux axes de coordonnées ; ceci implique de plus que $\text{Tang}(f, g)$ est difféomorphe à $\text{Tang}(q_f, q_g)$. \square

On peut même dire mieux :

Proposition 3.3.2. *Il existe un difféomorphisme ϕ qui conjugue $\text{Tang}(f, g)$ avec $\text{Tang}(q_f, q_g)$ et f avec q_f .*

Démonstration. Si on suppose que f est quadratique et q_g diagonal, il suffit de trouver ϕ qui conjugue $\text{Tang}(f, g)$ avec $\text{Tang}(q_f, q_g)$ et qui préserve $f : f \circ \phi = f$. Nommons D_n l'axe des x_n et T_n la courbe de tangence tangente à D_n . Il suffit de trouver un difféomorphisme ϕ qui préserve f et qui fixe les points de $\{x_n = 0\}$ tel que $\phi(D_n) = T_n$. En effet, un tel ϕ transforme T_n en D_n , mais si $\tilde{\phi}$ est un difféomorphisme similaire obtenu en échangeant les rôles de x_n et x_{n-1} , appliquer $\tilde{\phi}$ transforme (le nouveau) T_{n-1} en D_{n-1} et stabilise D_n . On peut répéter ceci pour chaque T_j pour obtenir un difféomorphisme préservant les fibres de f et conjuguant les lieux de tangence.

La courbe T_n est tangente à D_n de sorte qu'elle a pour équations $x_i = x_n^2 \alpha_i(x_n)$ ($i = 1, \dots, n - 1$). On peut chercher ϕ sous la forme

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - x_n^2 \alpha_1(x_n), \dots, x_{n-1} - x_n^2 \alpha_{n-1}(x_n), (1 + u)x_n)$$

où u est une fonction holomorphe inconnue. La condition que ϕ préserve f peut s'écrire

$$\sum_{i \leq n} x_i^2 - 2x_n^2 \sum_{i < n} x_i \alpha_i(x_n) + x_n^4 \sum_{i < n} \alpha_i(x_n)^2 + 2x_n^2 u + x_n^2 u^2 = \sum_{i \leq n} x_i^2,$$

c'est à dire

$$2u + u^2 = 2 \sum_{i < n} x_i \alpha_i - x_n^2 \sum_{i < n} \alpha_i^2.$$

Le théorème de la fonction implicite donne alors une solution holomorphe $u \in \mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^n, 0)}$ qui donne à son tour le difféomorphisme ϕ (notez que $\phi(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$). \square

Ceci termine la description de l'ensemble de tangence ; l'idéal de tangence est alors déterminé par la proposition suivante.

Proposition 3.3.3. *Si (f, g) est une paire de fonctions de Morse \mathcal{R} -générique, alors l'idéal de tangence $I(f, g)$ est radical.*

Démonstration. Supposons que $f = \sum x_i^2$, $g = \sum \lambda_i x_i^2$ et que $T := \text{Tang}(f, g)$ est la réunion des axes de coordonnées. On écrit $df \wedge dg = \sum_{i < j} h_{ij} dx_i \wedge dx_j$ avec $h_{ij} = 4(\lambda_j - \lambda_i)x_i x_j + O(\mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^n, 0)}^3)$. L'idéal des fonctions s'annulant sur T est $\langle x_i x_j \rangle$ donc $\langle h_{ij} \rangle \subset \langle x_i x_j \rangle$ et on doit montrer que $\langle h_{ij} \rangle = \langle x_i x_j \rangle$.

Introduisons $N = \frac{n(n-1)}{2}$ et les vecteurs $H = (h_{ij})_{i < j} \in (\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^n, 0)})^N$ et $X = (x_i x_j)_{i < j} \in (\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^n, 0)})^N$. On remarque que $h_{ij} - 4(\lambda_j - \lambda_i)x_i x_j \in \mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^n, 0)} \langle x_i x_j \rangle$ de sorte qu'il existe une matrice A à coefficients dans $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^n, 0)}$ telle que $H = AX$. On remarque de plus que $A = \Lambda + B$ où $\Lambda = \text{diag}(4(\lambda_j - \lambda_i))$ est inversible et B a ses coefficients dans $\mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^n, 0)}$. Ainsi, A est inversible et les coefficients des vecteurs H et X engendrent le même idéal. \square

Avec ces propositions, on peut utiliser le lemme-clé pour conclure la \mathcal{R} -classification des paires de fonctions de Morse :

Théorème 3.3.4. *Soient (f_0, g_0) et (f_1, g_1) deux paires de fonctions de Morse \mathcal{R} -génériques sur $(\mathbb{C}^n, 0)$. Supposons que l'on puisse numéroter les courbes de tangence T_j^i ($j = 1, \dots, n$ et $i = 0, 1$) de telle manière que les paires de fonctions de Morse $(f_i|_{T_j^i}, g_i|_{T_j^i})$ soient conjuguées sous l'action de $\text{Diff}(T_j^0, T_j^1)$ à droite. Alors il existe un difféomorphisme φ tel que $(f_0 \circ \varphi, g_0 \circ \varphi) = (f_1, g_1)$.*

Démonstration. Par la proposition 3.3.2 on peut supposer que $f_0 = f_1 = q_f$ et que les lieux de tangence des deux couples sont les mêmes. Par hypothèse, (f, g_0) et (f, g_1) sont égaux en restriction à chaque courbe de tangence. Comme les idéaux $I(f, g_0)$ et $I(f, g_1)$ sont radicaux par la proposition 3.3.3, cela signifie que $I(f, g_0) = I(f, g_1)$ et que $g_1 - g_0 \in I(f, g_0)$. La preuve se termine alors par le lemme 3.1.1 \square

En particulier, on obtient

Corollaire 3.3.5. *Une paire de fonctions de Morse (f, g) \mathcal{R} -générique est \mathcal{R} -conjuguée à ses parties quadratiques si et seulement si f et g sont \mathbb{C} -proportionnels sur chaque courbe de tangence.*

Remarque 3.3.6. *Étant données n courbes lisses T_j dont les tangentes en 0 engendrent \mathbb{C}^n et n couples (u_j, v_j) de fonctions de Morse sur T_j , il existe une paire de fonctions de Morse ayant T_j comme courbes de tangence et égale à (u_j, v_j) sur T_j . En effet, on peut supposer que T_j est l'axe des x_j de sorte que l'on puisse prendre $f(x_1, \dots, x_n) = \sum u_j(x_j)$ et $g = \sum v_j(x_j)$.*

Par suite, comme f peut être normalisée, l'espace des modules des paires de fonctions de Morse génériques est donné par l'ensemble des n -uplets non ordonnés génériques (v_1, \dots, v_n) de germes de fonctions de Morse sur $(\mathbb{C}, 0)$ modulo les relations $(v_1, \dots, v_n) \sim (v_1 \circ (\pm \text{id}), \dots, v_n \circ (\pm \text{id}))$, les signes \pm étant indépendants.

On peut aussi noter le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.7. *Soient (f_0, g_0) et (f_1, g_1) deux paires de fonctions de Morse \mathcal{R} -génériques sur \mathbb{C}^n . Si ces paires sont topologiquement conjuguées, elles le sont analytiquement.*

Démonstration. Premièrement, remarquons que les points de tangence entre f_0 et g_0 sont donnés par les points où le nombre de Milnor de g_0 restreint à une feuille de f_0 est plus grand ou égal à 1. Cette caractérisation des points de tangence montre qu'une conjugaison topologique entre ces deux couples respecte les courbes de tangence.

En conséquence, les restrictions des couples (f_i, g_i) à chaque courbe de tangence sont topologiquement conjugués, et pour chaque courbe de tangence C , il existe un homeomorphisme ϕ de C tel que $l_0 \circ \phi = l_1$ pour $l = f, g$ sur C . Pour des coordonnées z, w sur C telles que $f_0(z) = z^2$ et $f_1(w) = w^2$, cette équation s'écrit $\phi(z)^2 = w^2$ de sorte que $\phi(z) = \pm w$. Ceci montre que ϕ est holomorphe et que les couples $(f_i, g_i)|_{T_j^i}$ sont conjugués sous l'action de $\text{Diff}(T_j^0, T_j^1)$ à droite.

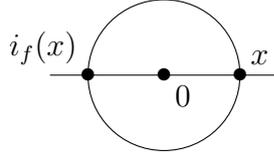
Le théorème 3.3.4 peut donc être appliqué. □

Remarque 3.3.8. *Il y a aussi un lien entre les conjugaisons formelles et analytiques : le théorème d'approximation d'Artin montre que si deux paires de germes de fonctions de Morse sont formellement conjuguées, elles le sont aussi analytiquement.*

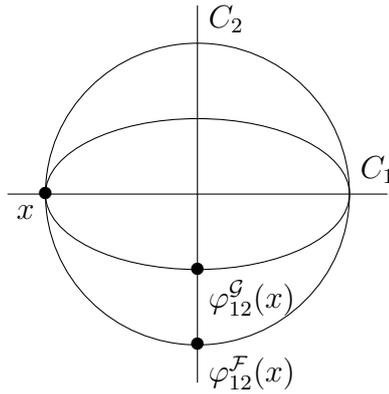
3.3.2 Paires de feuilletages de Morse

On définit un feuilletage de Morse comme étant un feuilletage ayant une intégrale première qui est une fonction de Morse. La classification des paires de feuilletages de Morse modulo difféomorphisme est équivalente à la \mathcal{F} -classification des paires de fonctions de Morse. On dira qu'une paire de feuilletages de Morse $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est \mathcal{F} -générique si elle a une paire d'intégrales premières (f, g) qui est \mathcal{R} -générique.

Les invariants $(f_i|_{T_j^i}, g_i|_{T_j^i})$ modulo conjugaison à droite ne sont maintenant plus définis que modulo conjugaison à gauche et à droite. Pour commencer, ces nouveaux invariants peuvent être réécrits en terme d'involutions : sur $(\mathbb{C}, 0)$, la donnée d'une fonction de Morse modulo conjugaison à gauche est équivalente à la donnée d'une involution via $f \mapsto i_f$ où i_f est la fonction qui associe à x l'autre solution de $f(i_f(x)) = f(x)$.



Mais si on ne considère que les paires d'involutions ainsi trouvées, on perd de l'information : pour chaque paire de courbes C_1, C_2 transverses à \mathcal{F} et \mathcal{G} et passant par l'origine, on peut considérer les transports d'holonomie $\varphi_{12}^{\mathcal{F}}, \varphi_{12}^{\mathcal{G}}$ de C_1 vers C_2 en suivant les feuilles de \mathcal{F} ou de \mathcal{G} :



Plus précisément, on va considérer les transports d'holonomie $\varphi_{ij}^{\mathcal{F}}$ et $\varphi_{ij}^{\mathcal{G}}$ entre les courbes de tangence T_i et T_j . On voit sur la figure qu'il y a deux façons de définir $\varphi_{nj}^{\mathcal{F}}$ et $\varphi_{nj}^{\mathcal{G}}$, donc on va devoir faire un choix (qui est équivalent à choisir une détermination locale de la racine carrée). Posons ensuite $\varphi_{njn} = (\varphi_{nj}^{\mathcal{G}})^{-1} \circ \varphi_{nj}^{\mathcal{F}} \in \text{Diff}(T_n)$; cette fonction permet de retrouver la paire $(f|_{T_j}, g|_{T_j})$ à partir de $(f|_{T_n}, g|_{T_n})$. En effet, soient $\alpha_j(t)$ et $\alpha_n(t)$ deux paramétrisations de T_j et T_n telles que $\alpha_j = \varphi_{nj}^{\mathcal{F}} \circ \alpha_n$. On veut calculer $g \circ \alpha_j$, mais $g(\alpha_j(t)) = g((\varphi_{nj}^{\mathcal{G}})^{-1}(\alpha_j(t)))$ et $\alpha_j(t) = \varphi_{nj}^{\mathcal{F}}(\alpha_n(t))$ de sorte que $g(\alpha_j(t)) = g(\varphi_{njn}(\alpha_n(t)))$.

Définition 3.3.9. On définit l'invariant de la paire $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ comme étant $\text{Inv}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = ((i_f^n, i_g^n), (\varphi_{njn})_{j < n})$. Deux invariants $\text{Inv}_0, \text{Inv}_1$ sont équivalents si il existe un difféomorphisme $\psi \in \text{Diff}(T_n^0, T_n^1)$ tel que $\psi^{-1} \circ \text{Inv}_1 \circ \psi = \text{Inv}_0$.

Théorème 3.3.10. *Soient $(\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0)$ et $(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)$ deux paires de feuilletages de Morse \mathcal{F} -génériques sur $(\mathbb{C}^n, 0)$. On suppose qu'on peut numéroter leurs courbes de tangence T_j^i ($j = 1, \dots, n$ et $i = 0, 1$) de sorte que leurs invariants $\text{Inv}(f, g)$ soient équivalents. Alors $(\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0)$ et $(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)$ sont analytiquement conjugués.*

Démonstration. Soient (f_i, g_i) des intégrales premières de $(\mathcal{F}_i, \mathcal{G}_i)$; on peut supposer que leurs invariants $((i_f^n, i_g^n), (\varphi_{njn})_{j < n})$ sont exactement les mêmes et que $f_0 = f_1 = \sum x_i^2$. On peut aussi composer g_1 avec un difféomorphisme à gauche de sorte que $g_0|_{T_n^0} = g_1|_{T_n^1}$ car les involutions i_g^n sont les mêmes. Alors, comme on l'a vu ci-avant, g_0 et g_1 sont égales sur chaque courbe de tangence du fait que les φ_{njn} sont les mêmes.

Ainsi le théorème 3.3.4 peut être appliqué et les paires (f_i, g_i) sont conjuguées. \square

On remarque aussi que pour chaque invariant $((i_1, i_2), (\varphi_{njn})_{j < n})$ il y a une paire de feuilletages de Morse avec cet invariant. En effet, on peut supposer que $i_1 = -id$, $f = \sum x_i^2$ et que les T_j sont les axes de coordonnées. On choisit une fonction de Morse g sur T_n invariante par i_2 et pour tout $p_j = (0, \dots, 0, x_j, 0, \dots, 0) \in T_j$ on pose $g(p_j) = g(\varphi_{njn}(p_n))$ pour $p_n = (0, \dots, 0, x_n)$ avec $x_n = x_j$. On a par suite pour chaque courbe T_j une paire de fonctions de Morse qui peut être étendue à $(\mathbb{C}^n, 0)$, comme remarqué précédemment (dans la remarque 3.3.6).

Pour mieux appréhender ces invariants, on peut trouver la classification des paires d'involutions dans [Vor] ou [CeMo]. En particulier, on voit que les classifications formelles et analytiques des paires de feuilletages de Morse ne sont pas les mêmes, car il existe des paires d'involutions qui sont formellement mais non analytiquement conjuguées.

3.3.3 \mathcal{A} -classification des paires de fonctions de Morse

On dit qu'une application $\Phi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ dont les composantes (f, g) sont des fonctions de Morse est \mathcal{A} -générique si la paire (f, g) est \mathcal{R} -générique.

Remarquons que l'ensemble des telles applications Φ n'est pas stable sous l'action des difféomorphismes au but (par exemple, le difféomorphisme $(y_1, y_2) \mapsto (y_1, y_2 - \lambda_1 y_1)$ transforme $(\sum x_i^2, \sum \lambda_i x_i^2)$ en $(\sum x_i^2, \sum \mu_i x_i^2)$ avec $\mu_1 = 0$). Néanmoins, une paire de fonctions obtenue à partir d'une paire de fonctions de Morse \mathcal{R} -générique après un difféomorphisme au but a encore le même lieu de tangence et est encore classifié par ses valeurs sur le lieu de tangence.

Dans cette section, on continuera à considérer des paires de fonction de Morse pour éviter des notations inutiles, mais les résultats s'étendront aux paires \mathcal{A} -équivalents à une paire de fonctions de Morse \mathcal{R} -générique.

Définition 3.3.11. Soient $\Gamma \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ une courbe irréductible et $\sigma_1, \sigma_2 : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \Gamma$ deux paramétrages de Γ . On dit que les courbes paramétrées (Γ, σ_1) et (Γ, σ_2) sont σ -équivalentes si il y a un difféomorphisme $\phi \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tel que $\sigma_1 \circ \phi = \sigma_2$. Une classe d'équivalence $[(\Gamma, \sigma)]$ est appelée une σ -courbe; on définit sa σ -multiplicité comme étant l'entier n tel que $\sigma(t) = (at^n + \dots, bt^n + \dots)$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

Si le paramétrage est clair d'après le contexte, on pourra omettre de le mentionner.

Remarque 3.3.12. Une σ -courbe $[(\Gamma, \sigma)]$ est entièrement déterminée par Γ et sa σ -multiplicité.

Une σ -courbe $[(\Gamma, \sigma)]$ est de σ -multiplicité 2 dans exactement deux cas : soit Γ est difféomorphe à une courbe $y^2 - x^{2k+1}$ ($k \geq 1$) et σ est une bijection, soit Γ est lisse et σ est un revêtement double. Le dernier cas arrive par exemple quand $\sigma(t) = (t^2, b(t^2))$.

On a vu que les paires de fonctions de Morse sont classifiées modulo l'action des difféomorphismes à la source seulement par les restrictions de $\Phi = (f, g)$ sur les courbes de tangence T_i entre f et g , ie. sur le lieu critique de Φ . Dit d'une autre manière, la classification est donnée par les fonctions $\Phi|_{T_i}$ avec les difféomorphismes à la source agissant comme des reparamétrages, c'est à dire que la classification est donnée par les σ -courbes $\Phi(T_i) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$.

Chacune de ces σ -courbes a une σ -multiplicité de 2 à l'origine et a la droite $(t^2, \lambda_i t^2)$ comme cône tangent si $f|_{T_i}(t) = t^2 + \dots$ et $g|_{T_i}(t) = \lambda_i t^2 + \dots$

Ainsi, le résultat est le suivant :

Théorème 3.3.13. On considère deux paires de fonctions de Morse \mathcal{A} -génériques Φ_1 et Φ_2 ayant pour courbes de tangences respectives $(T_i^1)_{i \leq n}$ et $(T_i^2)_{i \leq n}$. Alors Φ_1 et Φ_2 sont \mathcal{A} -conjuguées si et seulement si les ensembles de σ -courbes $\{\Phi_1(T_i^1)\}_{i \leq n}$ et $\{\Phi_2(T_i^2)\}_{i \leq n}$ sont conjugués par un difféomorphisme de $(\mathbb{C}^2, 0)$.

De plus, pour chaque ensemble de n σ -courbes $\{C_i\}$ dans $(\mathbb{C}^2, 0)$ avec une σ -multiplicité de 2 et des cônes tangents distincts, il existe une application $\Phi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ dont les composantes sont des fonctions de Morse pour laquelle $C_i = \Phi(T_i)$.

Remarque 3.3.14. Un difféomorphisme ψ de $(\mathbb{C}^2, 0)$ conjugue deux familles de σ -courbes $([C_i^1, \sigma_i^1])$ et $([C_i^2, \sigma_i^2])$ si et seulement si pour tout i les σ -courbes C_i^1 et C_i^2 ont la même multiplicité et ψ conjugue les familles de courbes (C_i^1) et (C_i^2) .

Démonstration. Clairement, si deux paires sont conjuguées par des difféomorphismes à la source et au but, leur ensembles critiques sont conjugués à la source, donc les images des ensembles critiques sont conjugués au but.

Réciproquement, supposons que pour deux paires génériques $\Phi_j = (f_j, g_j)$ il existe un difféomorphisme $\psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ qui conjugue les ensembles de σ -courbes $\{\Phi_j(T_i^j)\}_{i \leq n}$. Alors on peut supposer que ces ensembles sont égaux, ce qui veut dire que pour la bonne numérotation des courbes de tangence, les σ -courbes $\Phi_1(T_i^1)$ et $\Phi_2(T_i^2)$ sont égales pour tout i . Ceci donne pour chaque i un difféomorphisme $\varphi_i : T_i^1 \rightarrow T_i^2$ tel que $\Phi_1|_{T_i^1} = \Phi_2|_{T_i^2} \circ \varphi_i$.

On peut alors conclure par le théorème 3.3.4.

Pour la partie "réalisation" du théorème, prenons n σ -courbes C_i dans $(\mathbb{C}^2, 0)$ avec σ -multiplicité 2 et des cônes tangents distincts. On remarque d'abord qu'on peut supposer qu'aucune courbe n'a un axe comme cône tangent, de sorte que ces σ -courbes peuvent être paramétrées par $\sigma_i(t) = (t^2, \lambda_i t^2 + O(t^3)) =: (u_i(t), v_i(t))$ avec $\lambda_i \neq 0$. Mais ces courbes sont les images du lieu critique de la paire $(\sum u_i(x_i), \sum v_i(x_i))$ qui est \mathcal{A} -générique du fait que $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, ce qui conclut la preuve. \square

3.3.4 Quotients de fonctions de Morse

On peut aussi s'intéresser aux fonctions méromorphes $h = g/f$ avec $f, g \in \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^n, 0)}$ fonctions de Morse satisfaisant la condition de généricité. On veut classifier de telles fonctions à difféomorphisme à la source près.

Tout d'abord, considérons le lieu critique de h : il est donné par les zéros de $\omega = gdf - fdg$, qui contient le lieu d'indétermination $\{f = 0\} \cap \{g = 0\}$. Quand $f = \sum x_i^2$ et $g = \sum \lambda_i x_i^2$, le lieu critique contient non seulement $\{f = 0\} \cap \{g = 0\}$ mais aussi la réunion des axes. On commence par montrer qu'après une perturbation générique, seul le lieu d'indétermination subsiste. Notons $I(\omega)$ l'idéal engendré par les composantes de ω .

On dit qu'une paire de fonctions de Morse est \mathcal{Q} -générique si elle est difféomorphe à $(\sum x_i^2, \sum \lambda_i x_i^2 + \alpha_i x_i^3 + O(\mathfrak{m}^4))$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ et $\alpha_i \neq 0$; on dit qu'un quotient g/f est \mathcal{Q} -générique si la paire (f, g) est \mathcal{Q} -générique.

Lemme 3.3.15. *Pour une paire de fonctions de Morse (f, g) \mathcal{Q} -générique, l'idéal $I(\omega)$ contient $\langle f, g \rangle \cdot \mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^n, 0)}^4$.*

Démonstration. Par soucis de simplicité, notons $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^n, 0)}$. Par le théorème 3.3.4, on peut supposer que $f = \sum x_i^2$ et $g = \sum u_i(x_i)$. L'hypothèse de généricité signifie alors que $u_i(x_i) = \lambda_i x_i^2 + \alpha_i x_i^3 + O(x_i^4)$ avec $\alpha_i \neq 0$. Si on écrit $\omega = \sum \omega_i dx_i$, le coefficient ω_i est

$$\omega_i = 2 \sum_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i) x_i x_j^2 + O(\mathfrak{m}^4)$$

de sorte que $\omega_i = 2x_i(g - \lambda_i f) + O(\mathfrak{m}^4)$. D'où les égalités $x_j \omega_i - x_i \omega_j = 2x_i x_j (\lambda_j - \lambda_i) f + O(\mathfrak{m}^5)$ et $\lambda_j x_j \omega_i - \lambda_i x_i \omega_j = 2x_i x_j (\lambda_j - \lambda_i) g + O(\mathfrak{m}^5)$. En conséquence, pour

tout monôme m de degré 4 sauf $m = x_k^4$ et tout $l = f, g, ml \in I(\omega) + \mathfrak{m}^7$. De plus,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_i x_i \omega_i &= \sum_i \frac{1}{2} x_i (g \partial_{x_i} f - f \partial_{x_i} g) \\ &= g \sum_i \frac{1}{2} x_i \partial_{x_i} f - \frac{1}{2} f \sum_i x_i \partial_{x_i} g \\ &= gf - \frac{1}{2} f \sum_i x_i \partial_{x_i} g \\ &= f \left(g - \sum_i \frac{1}{2} x_i \partial_{x_i} g \right) \\ &= f \left(\frac{-1}{2} \sum_i \alpha_i x_i^3 + O(\mathfrak{m}^4) \right). \end{aligned}$$

Par suite, $x_i \sum_j x_j \omega_j = \beta_i x_i^4 f + \sum_{j \neq i} \beta_j x_j x_i^3 f + O(\mathfrak{m}^7)$ pour certains coefficients β_k non nuls, et $x_i^4 f \in I(\omega) + \mathfrak{m}^7$.

Un calcul similaire montre que $x_i^4 g \in I(\omega) + \mathfrak{m}^7$; donc pour chaque monôme m de degré 4 et chaque $l = f, g$, on a $ml \in I(\omega) + \mathfrak{m}^7$. En fait, ml appartient à l'idéal $I(\omega) + \langle f, g \rangle \cdot \mathfrak{m}^5$ parce que $I(\omega)$ est évidemment un sous-ensemble de $\langle f, g \rangle$. Il s'ensuit que pour tout entier $k \geq 4$, tout monôme m de degré k et tout $l = f, g$, $ml \in I(\omega) + \langle f, g \rangle \cdot \mathfrak{m}^{k+1}$. Ceci signifie que ml appartient formellement à l'idéal $I(\omega)$ donc par platitude, $\langle f, g \rangle \cdot \mathfrak{m}^4 \subset I(\omega)$. \square

Remarque 3.3.16. *On peut remarquer que la preuve est encore valide pour des familles à 1 paramètre $(f_t), (g_t)$ avec des 3-jets fixés. En effet, on peut montrer exactement de la même manière que $ml \in I(\omega) + \mathfrak{m}^7$ pour tout monôme m en x de degré 4 et $l = f, g$, la seule différence est que f, g et ω dépendent de t (ici, \mathfrak{m} est encore $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$).*

Remarquons aussi que pour des familles à 1 paramètres $(f_t), (g_t)$ de 3-jets fixés, être une paire de fonctions de Morse \mathcal{Q} -générique pour tout $t \in \mathbb{C}$ est équivalent à être une paire de fonctions de Morse \mathcal{Q} -générique pour $t = 0$ parce que la généricité ne dépend que des 3-jets.

On obtient ainsi :

Lemme 3.3.17. *Considérons deux fonctions $f, g \in \mathcal{O}(t, x_1, \dots, x_n)$ définies dans un voisinage de $\mathbb{C}_t \times \{0\} \subset \mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_x^n$ de 3-jets indépendants de t . Supposons que $(f(t, \cdot), g(t, \cdot))$ est une paire de fonctions de Morse \mathcal{Q} -générique pour tout t . Considérons $\omega_x = g d_x f - f d_x g$ et $\mathfrak{m} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, alors $\langle f, g \rangle \mathfrak{m}^4 \subset I(\omega_x)$.*

Théorème 3.3.18. *Soient h_0 et h_1 deux quotients de fonctions de Morse \mathcal{Q} -génériques avec $h_i = g_i/f_i$. Supposons que l'on ait égalité entre les 3-jets : $j^3 f_0 =$*

$j^3 f_1$ et $j^3 g_0 = j^3 g_1$. Alors il existe un difféomorphisme $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ tel que $h_0 \circ \varphi = h_1$.

Démonstration. D'après le théorème 3.3.4, on peut supposer que $g_k = \sum_i u_i^k(x_i)$ et $f_k = \sum_i x_i^2$ avec $u_i^k(x) = \lambda_i x^2 + \alpha_i x^3 + \varepsilon_i^k$ pour des $\alpha_i \neq 0$ et $\varepsilon_i^k \in \mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^n, 0)}^4$. Posons pour t dans un voisinage de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} $f(t, \cdot) = f_t = f_0 = f_1$, $g(t, \cdot) = g_t = g_0 + t(g_1 - g_0)$, $h(t, \cdot) = h_t = g_t/f_t$ et $\omega = gdf - fdg = \omega_x + rdt$.

On remarque que $r = -f\partial_t g \in \langle f, g \rangle \mathfrak{m}^4$ et que par le lemme 3.3.17, cela implique que $r \in I(\omega_x)$. On peut donc trouver un champ de vecteurs $X = \sum_i X_i \partial_{x_i} + \partial_t$ tel que $\omega(X) = 0$ (notez que $X_i \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ car il n'y a pas de relations linéaires à coefficients constants entre les termes dominants des composantes de ω_x). Mais ceci signifie que h est constant le long des trajectoires de X de sorte que le flot $\varphi_s(x, t)$ de X (qui est défini sur un voisinage de $\{0\} \times [0, 1]$) donne un difféomorphisme $\varphi : x \mapsto \varphi_1(x, 0)$ tel que $h_0 \circ \varphi = h_1$ sur $(\mathbb{C}^n, 0)$. \square

Corollaire 3.3.19. *Soit h un quotient \mathcal{Q} -générique de fonctions de Morse. Il existe $\lambda_i, \alpha_i \in \mathbb{C}^*$ tel que h est difféomorphe à*

$$\frac{\sum_i \lambda_i x_i^2 + \alpha_i x_i^3}{\sum_i x_i^2}.$$

Remarque 3.3.20. *Comme la forme précédente est stable par homothéties, on peut même supposer que $\alpha_1 = 1$.*

3.3.5 Restriction d'une fonction de Morse à un cône quadratique

Dans cette section, on cherche à étudier les restrictions de fonctions de Morse g à un "cône quadratique" (ie. une hypersurface $\{f = 0\}$ où f est aussi une fonction de Morse).

Remarque 3.3.21. *On peut voir par un argument cohomologique que chaque fonction et chaque difféomorphisme défini sur un cône quadratique s'étend à $(\mathbb{C}^n, 0)$ (respectivement en une fonction ou un difféomorphisme de $(\mathbb{C}^n, 0)$). Ainsi, étudier les fonctions sur un cône quadratique à difféomorphisme près revient à étudier les fonctions de $(\mathbb{C}^n, 0)$ en restriction à un cône quadratique à difféomorphisme de $(\mathbb{C}^n, 0)$ fixant le cône près.*

Théorème 3.3.22. *Soient f, g_0 et g_1 trois fonctions de Morse où (f, g_i) sont des paires \mathcal{R} -génériques et où les 2-jets $j^2 g_0$ et $j^2 g_1$ sont égaux. Alors il existe un difféomorphisme φ tel que $f \circ \varphi = f$ et $g_0 \circ \varphi = g_1$ en restriction à $\{f = 0\}$.*

Démonstration. On pose $g_t = g_0 + t(g_1 - g_0)$ et $g(t, \cdot) = g_t(\cdot)$. On veut trouver un difféomorphisme φ tel que $f \circ \varphi = f$ et $g_0 \circ \varphi - g_1 \in \langle f \rangle$; on va utiliser la méthode du chemin de Moser pour le trouver comme le flot d'un champ de vecteurs $X = \sum X_i \partial_{x_i} + \partial_t$ tel que $X \cdot g \in \langle f \rangle$ et $X \cdot f = 0$. On remarque qu'on peut trouver X vérifiant $X \cdot g = X \cdot f = 0$ dès que $\partial_t g \in I(f, g)$, de sorte que l'on peut trouver le champ X recherché dès lors que $\partial_t g \in \langle f \rangle + I(f, g)$. Pour un tel X , les composantes de $X - \partial_t$ s'annuleront sur l'axe des t parce qu'il n'y a pas de relations linéaires à coefficients constants entre f et les composantes de $df \wedge dg$.

On a vu dans la preuve de la proposition 3.3.3 que $I(f, g) = \langle x_i x_j + \dots \rangle$, or x_i^3 est égal à $x_i f$ modulo l'idéal $I(f, g) + \mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^n, 0)}^4$ de sorte que chaque monôme de degré 3 appartient à $\langle f \rangle + I(f, g) + \mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^n, 0)}^4$. L'inclusion $\mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^n, 0)}^3 \subset \langle f \rangle + I(f, g)$ en découle; on en déduit que $\partial_t g \in \langle f \rangle + I(f, g)$ ce qui conclut la preuve. \square

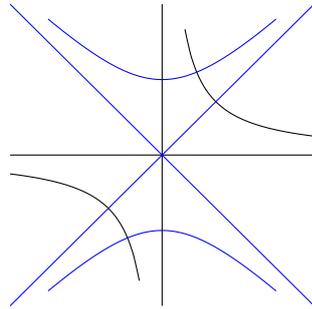
Remarque 3.3.23. On peut aussi remarquer que g et $g + \lambda f$ représentent la même fonction sur $\{f = 0\}$ de sorte qu'on obtient :

Corollaire 3.3.24. Étant donnée une fonction de Morse f , chaque fonction de Morse g telle que la paire (f, g) soit \mathcal{R} -générique est difféomorphe en restriction à $\{f = 0\}$ à une fonction quadratique $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i^2$.

3.3.6 Fonctions de Morse réelles

On peut aussi s'intéresser aux classification réelles (on se restreindra à la \mathcal{R} -classification ici), ie la classification des paires (f, g) réelles \mathcal{R} -génériques (vues comme des fonctions complexes).

On cherche évidemment à utiliser la classification complexe pour résoudre le problème : on peut définir l'ensemble de tangence complexe de la paire, qui n'est peut-être pas inclus dans \mathbb{R}^n . Par exemple, si $f = x^2 - y^2$ et $g = xy$, il n'y a pas de tangence réelle en dehors de 0.



Cependant, si on suppose que f est définie positive (c'est à dire $f \sim \sum x_i^2$), alors toute paire de formes quadratiques (f, g) est codiagonalisable sur \mathbb{R} . Par suite, les

composantes de $df \wedge dg$ sont des produits de termes d'ordre 1 et les tangences sont toutes réelles. On peut alors exactement comme dans le cas complexe redresser les courbes de tangence.

Considérons deux couples (f, g_i) et un chemin qui les relie (f_t, g_t) pour réaliser la méthode du chemin. Si les invariants complexes (qui sont donc des fonctions réelles) sont égaux, la méthode du chemin utilisée donne un champ de vecteurs X (a priori complexe) tel que $X \cdot df = 0$ et $X \cdot dg = g_1 - g_0$. Ces équations étant linéaires en X , le champ X est alors réel, et la preuve faite dans le cas complexe ne fait intervenir que des objets réels, ce qui prouve que les couples sont conjugués sur \mathbb{R} . On obtient ainsi :

Proposition 3.3.25. *Soient (f_i, g_i) deux couples de fonctions de Morse sur \mathbb{R}^n avec f_i définie positive. Alors les deux couples sont conjugués sur \mathbb{R} si et seulement si ils sont conjugués sur \mathbb{C} .*

3.4 Un exemple où la tangence est constituée de deux courbes doubles et d'une courbe simple

Il peut aussi être intéressant de trouver un exemple où l'idéal de tangence n'est pas radical. Pour cela, prenons $f = x^3 + y^2 + z^2$ et $g = \lambda x^3 + \mu y^2 + \nu z^2$ avec $\lambda \neq \mu \neq \nu \neq 0$ dans $(\mathbb{C}^3, 0)$. L'idéal de tangence de ce couple est $I(f, g) = \langle x^2y, x^2z, yz \rangle$ et correspond à $D_x \cup 2D_y \cup 2D_z$ si D_l est l'axe des l . On va donc chercher à classifier les paires de fonctions qui "ressemblent" à cette paire. Tout d'abord, rappelons la proposition suivante :

Proposition 3.4.1. *Soit f une fonction sur $(\mathbb{C}^3, 0)$ ayant un point singulier de nombre de Milnor 2 à l'origine ; alors dans le bon système de coordonnées, $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2$.*

Démonstration. Puisque le nombre de Milnor (cf. [AVG-Z] par exemple) de f est 2, la matrice hessienne de f en 0 est de rang 2 et dans un bon système de coordonnées, elle peut s'écrire $diag(0, 2, 2)$. Alors $f(x, y, z) = y^2 + z^2 + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in \mathfrak{m}^3$ et f peut être vue comme une déformation de $f(0, \cdot, \cdot)$ qui a un point singulier non dégénéré en 0. D'après le lemme de Morse à paramètre, il existe une fonction φ et des coordonnées telles que $f(x, y, z) = \varphi(x) + y^2 + z^2$ (on peut trouver le lemme de Morse à paramètre par exemple dans [Hör2], mais aussi dans [Mar] sans être nommé).

Comme le nombre de Milnor de f est 2, φ est difféomorphe à x^3 et après un dernier changement de coordonnées, on peut écrire $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2$. \square

En fait, on s'intéresse aux paires de fonctions (f, g) de nombre de Milnor 2, ayant des hessiennes $H(f)$, $H(g)$ qui peuvent être simultanément diagonalisées avec le 0 au même endroit. Pour de telles fonctions, on peut supposer que

$$f = x^3 + y^2 + z^2 \quad \text{et} \quad g = \lambda x^3 + \mu y^2 + \nu z^2 + \varepsilon \quad (3.1)$$

avec $\varepsilon \in \mathfrak{m}^3$ qui n'a pas de composante en x^3 .

L'ensemble de tangence pourrait ne pas être difféomorphe à la réunion d'une courbe simple et de deux courbes doubles : les courbes doubles pourraient se dédoubler. Par exemple, pour $f = x^3 + y^2 + z^2$ et $g = x^3 + \mu y^2 + \nu z^2 + x^2 y$, l'axe des y se scinde en deux courbes tangentes respectivement à l'axe des y et à la droite $\{z = 0 = 3(\mu - 1)x - 2y\}$. Supposons que les courbes doubles ne se scindent pas. On appelle une telle paire (f, g) une paire de cuspoïdes exceptionnelle.

Proposition 3.4.2. *Si (f, g) est une paire de cuspoïde exceptionnelle écrite sous la forme (3.1), alors $\text{Tang}(f, g)$ est tangent et difféomorphe à la réunion des axes. De plus, la courbe de tangence tangente à l'axe des x lui est tangente à l'ordre 2.*

Démonstration. La preuve est très similaire à celle de la proposition 3.3.1. On a :

$$\begin{aligned} df \wedge dg &= (3x^2(2\mu y + \partial_y \varepsilon) - 2y(3\lambda x^2 + \partial_x \varepsilon)) dx \wedge dy + \\ &\quad (3x^2(2\nu z + \partial_z \varepsilon) - 2z(3\lambda x^2 + \partial_x \varepsilon)) dx \wedge dz + \\ &\quad (2y(2\nu z + \partial_z \varepsilon) - 2z(2\mu y + \partial_y \varepsilon)) dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Introduisons le 3-jet ε_3 de ε . On rappelle que $\varepsilon \in \mathfrak{m}^3$ de sorte qu'après projectivisation, le cône tangent est donné dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ par le système d'équations

$$\begin{cases} 4(\nu - \mu)yz = 0 \\ 2(3(\mu - \lambda)x^2 - \partial_x \varepsilon_3) y = 0 \\ 2(3(\nu - \lambda)x^2 - \partial_x \varepsilon_3) z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, l'hypothèse que les courbes de tangence ne se scindent pas implique que $\partial_x \varepsilon_3 = 0$, ie. $\varepsilon_3 \in \langle y^3, y^2 z, y z^2, z^3 \rangle$, et dans ce cas chaque composante de l'ensemble de tangence est tangent à un axe.

Pour montrer que $\text{Tang}(f, g)$ est en effet difféomorphe à la réunion des axes, éclatons l'origine. Si on éclate dans la direction y (ce sera la même chose dans la direction z), on obtient $\tilde{f} = y^2(yx^3 + 1 + z^2)$ et $\tilde{g} = y^2(\lambda yx^3 + \mu + \nu z^2 + y\tilde{\varepsilon})$. Par suite, près du point $(0, 0, 0)$ on peut faire le changement de coordonnée $y \mapsto \sqrt{\tilde{f}}$ pour obtenir $\tilde{f} = y^2$, $\tilde{g} = y^2 u$ avec

$$\begin{aligned} u &= u_0(z^2) + y u_1(x^3, z) + O(y^2) \\ &= (\mu + (\nu - \mu)z^2 + O(z^4)) + y(a + (\lambda - \mu)x^3 + O(z)) + O(y^2) \end{aligned}$$

où a dépend de ε . On voit que sur le diviseur exceptionnel E , l'équation $dy \wedge du = 0$ est équivalente à $dy \wedge du_0 = 0$, c'est à dire $z = 0$: c'est une droite et non un point comme c'était le cas avant. Mais, un point de tangence est un point singulier de $u|_{\{y=y_0\}}$ pour un certain y_0 donc on n'a qu'à chercher les points singuliers de $u|_{\{y=y_0\}}$. On note que

$$\partial_z u = 2(\nu - \mu)z + O(z^2) + O(y) \quad \text{et} \quad \partial_x u = y(x^2(3(\lambda - \mu) + \dots) + O(y))$$

donc, pour y_0 proche de 0, il y a deux points singuliers tendant vers 0 quand y_0 tend vers 0. Ces points forment un ensemble qui intersecte E en 0 avec multiplicité 2, et notre hypothèse que la courbe double ne s'est pas scindée montre que ces deux points sont égaux et qu'il y a une courbe de tangence double tangente à l'axe des y .

Ensuite, si on éclate dans la direction x , on obtient $\tilde{f} = x^2(x + y^2 + z^2)$ et $\tilde{g} = x^2(\lambda x + \mu y^2 + \nu z^2 + x\tilde{\varepsilon})$. On ne peut pas faire le changement de coordonnées près de $(0, 0, 0)$ donc éclatons une fois de plus :

$$\hat{f} = x^3(1 + xy^2 + xz^2) \quad \text{et} \quad \hat{g} = x^3(\lambda + \mu xy^2 + \nu xz^2 + x\hat{\varepsilon})$$

et notons E le diviseur exceptionnel qui correspond au dernier éclatement. On peut alors faire le changement de coordonnées $x \mapsto \hat{f}^{1/3}$ et obtenir $\hat{f} = x^3$, $\hat{g} = x^3 u$. Ici, u vaut $(\lambda + \mu xy^2 + \nu xz^2 + x\hat{\varepsilon})(1 + xy^2 + xz^2)^{-1} + O(x^2)$ mais rappelons que $\varepsilon_3 \in \langle y^3, y^2 z, yz^2, z^3 \rangle$ ce qui fait que $\tilde{\varepsilon}$ n'a pas de terme constant et $\hat{\varepsilon}$ est en fait divisible par x . Ainsi,

$$u = u_0 + O(x^2) \quad \text{avec} \quad u_0 = (\lambda + \mu xy^2 + \nu xz^2)(1 + xy^2 + xz^2)^{-1}.$$

Mais du_0 est nul en restriction à E donc on enlève le terme constant en remplaçant \hat{g} par $\hat{g} - \lambda \hat{f}$: on peut le faire car $d\hat{f} \wedge d\hat{g} = d\hat{f} \wedge d(\hat{g} - \lambda \hat{f})$. Finalement, $\hat{g} - \lambda \hat{f} = x^4 v$ avec $v = v_0 + O(x)$ et $v_0 = v_0(y, z)$ est une fonction de Morse en 0. Par suite l'équation $d\hat{f} \wedge dv = 0$ a un ensemble de solutions de dimension 1 mais seulement une solution sur E : la solution de $d\hat{f} \wedge dv_0 = 0$. Il y a alors une courbe de tangence tangente à l'axe des x . Comme cette courbe de tangence n'a pas été séparée de l'axe des x après 2 éclatements, elles sont tangentes à l'ordre (au moins) deux.

Finalement, on doit montrer qu'il n'y a pas d'autres tangences. On a déjà étudié les éclatements dans les directions y et z , donc on ne doit plus étudier que l'ensemble de tangence près de l'axe des x . Rappelons que près de l'axe des x , on a

$$\tilde{f} = x^2(x + y^2 + z^2) \quad \text{et} \quad \tilde{g} = x^2(\lambda x + \mu y^2 + \nu z^2 + x\tilde{\varepsilon}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} d\tilde{f} \wedge d\tilde{g} &= x^3 [6(\mu - \lambda)xy + O(\mathfrak{m}^3)] dx \wedge dy \\ &\quad + x^3 [6(\mu - \lambda)xz + O(\mathfrak{m}^3)] dx \wedge dz \\ &\quad + x^4 [4(\nu - \mu)yz + O(\mathfrak{m}^3)] dy \wedge dz \end{aligned}$$

où $\mathbf{m} = \langle x, y, z \rangle$. Par conséquent, près du point d'intersection entre l'axe des x et le diviseur exceptionnel, après avoir enlevé les puissances de x , on voit que chaque composante de l'ensemble de tangence est tangente à un des axes (dans les coordonnées de l'éclaté) et qu'il peut y avoir au plus une courbe tangente à chaque axe. Mais on a déjà montré qu'il y a une courbe de tangence tangente à l'axe des x , et on a trouvé deux courbes dans le diviseur exceptionnel qui sont solutions de $d\tilde{f} \wedge d\tilde{g} = 0$, qui étaient tangentes à l'axe des y et l'axe des z . Ainsi il ne peut pas y avoir d'autres tangences proches de l'axe des x . \square

Proposition 3.4.3. *Si (f, g) est une paire de cuspoïdes exceptionnelle sous la forme (3.1), il existe un difféomorphisme φ préservant f tel que $\text{Tang}(f \circ \varphi, g \circ \varphi)$ est la réunion des axes.*

Démonstration. On va suivre le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 3.3.2 : appelons D_l l'axe des l ($l = x, y, z$) et T_l la courbe de tangence tangente à D_l . On veut montrer qu'il existe un difféomorphisme φ qui fixe $\{x = 0\}$ et qui envoie T_x sur D_x . Pour $l = y, z$, on peut trouver un difféomorphisme qui fixe $\{l = 0\}$ et envoie T_l sur D_l exactement de la même manière qui dans la proposition 3.3.2, mais pour $l = x$ un petit changement doit être fait. La courbe T_x est tangente à D_x à l'ordre 2 donc elle a pour equations $y = x^3\alpha_2(x), z = x^3\alpha_3(x)$. On cherchera φ sous la forme

$$\varphi(x, y, z) = ((1 + u)x, y - x^3\alpha_2(x), z - x^3\alpha_3(x))$$

où u est une fonction holomorphe inconnue. On doit avoir

$$(1+3u+3u^2+u^3)x^3+y^2+z^2-2x^3(y\alpha_2(x)+z\alpha_3(x))+x^6(\alpha_2(x)^2+\alpha_3(x)^2) = x^3+y^2+z^2,$$

c'est à dire

$$3u + 3u^2 + u^3 = 2(y\alpha_2 + z\alpha_3) - x^3(\alpha_2^2 + \alpha_3^2).$$

Le théorème des fonctions implicites donne une solution $u \in \mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^3, 0)}$ et le difféomorphisme recherché φ en découle. \square

Comme l'idéal n'est pas radical, l'ensemble de tangence ne suffit plus à caractériser l'idéal. La proposition suivante donne une description géométrique de l'idéal.

Proposition 3.4.4. *Soit (f, g) une paire de cuspoïdes exceptionnelle sous la forme (3.1) avec $\text{Tang}(f, g)$ égal à l'union des axes. Alors il y a un champ de vecteur X tel que $X(0) = \partial_x$ et*

$$I(f, g) = \{a \in \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^3, 0)} \quad \text{tel que } a|_{T_x} = a|_{T_y} = a|_{T_z} = 0 \quad \text{et } (X \cdot a)|_{T_y} = (X \cdot a)|_{T_z} = 0\}.$$

On dira qu'un tel champ de vecteurs caractérise l'idéal de tangence.

Démonstration. Dans les calculs faits avant, on voit que $I(f, g)$ est engendré par les fonctions $h_1 = x^2y + O(\mathfrak{m}^4)$, $h_2 = x^2z + O(\mathfrak{m}^4)$ et $h_3 = yz + O(\mathfrak{m}^3)$. On remarque que le cône tangent en 0 à la variété $\{h_3 = 0\}$ est la réunion des plans $\{y = 0\}$ et $\{z = 0\}$. De plus, on sait d'après les hypothèses que $h_3(T_y) = h_3(T_z) = \{0\}$ donc pour tout z proche de 0, il y a un unique plan tangent à $\{h_3 = 0\}$ au point $(0, 0, z)$. Ce plan contient la direction T_z donc est défini par une autre direction $X(z)$ que l'on peut choisir régulier en z avec $X(0) = \partial_x$. De manière similaire, le plan tangent à $\{h_3 = 0\}$ le long de T_y est défini par un champ de vecteur long de T_y que l'on peut choisir de sorte que les deux champs de vecteurs s'étendent en un champ de vecteurs X sur $(\mathbb{C}^3, 0)$ avec $X(0) = \partial_x$.

Posons

$$J = \{a \in \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^3, 0)} \text{ tels que } a|_{T_x} = a|_{T_y} = a|_{T_z} = 0 \text{ et } (X \cdot a)|_{T_y} = (X \cdot a)|_{T_z} = 0\}.$$

L'ensemble J est un idéal on doit d'abord montrer que $I(f, g) \subset J$, ie. que $(X \cdot h_i)|_{T_l} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$ et $l = y, z$. Par construction, $(X \cdot h_3)|_{T_y}$ et $(X \cdot h_3)|_{T_z}$ sont nuls. Ensuite, on sait que $h_1 \in \langle xy, yz, zx \rangle$ donc quitte à changer h_1 en $h_1 - \sum_{i=2,3} \lambda_i h_i$ avec $\lambda_i \in \mathfrak{m}_{(\mathbb{C}^3, 0)}$, on peut supposer que $h_1 = ux^2y + x\alpha(y) + x\beta(z)$ avec u inversible, α et β dans $\mathfrak{m}_{(\mathbb{C}, 0)}^3$.

La condition que les courbes de tangence ne se scindent pas implique que quand on coupe la courbe T_y par un plan $y = y_0$, on obtient un point avec multiplicité 2. Mais si $\alpha \neq 0$, alors $\alpha(y_0)$ est génériquement inversible et $h_1(\cdot, y_0, \cdot)$ est génériquement régulier. La fonction $h_3(\cdot, y_0, \cdot)$ est aussi génériquement régulière, donc si $\alpha \neq 0$, on obtient un point simple ; ainsi $\alpha = 0$. Pour les mêmes raisons, $\beta = 0$ et $I(f, g) = \langle x^2y, h_2, h_3 \rangle$. De manière similaire, $I(f, g) = \langle x^2y, x^2z, h_3 \rangle$ et il est maintenant clair que $I(f, g) \subset J$.

Pour la réciproque, on va montrer que (x^2y, x^2z, h_3) engendrent J : supposons que $a \in J$ et que P soit son polynôme homogène dominant (et $k+1$ son degré). Comme $J \subset \langle xy, yz, zx \rangle$, P n'a pas de terme en l^{k+1} pour $l = x, y$ ou z . Les seuls termes qui ne sont pas engendrés par les coefficients dominants de x^2y , x^2z ou h_3 sont les xl^k pour $l = y, z$. Mais si $X = (1 + a_1)\partial_x + a_2\partial_y + a_3\partial_z$, alors $X \cdot xy^k = (1 + a_1)y^k + ka_2xy^{k-1}$ n'est pas nul sur T_y : il ne peut donc pas y avoir de tels termes dans P . Par suite, (x^2y, x^2z, h_3) engendrent J et $I(f, g) = J$. \square

Proposition 3.4.5. *Si (f, g) est une paire de cuspoïdes exceptionnelle sous la forme (3.1), il existe un difféomorphisme φ qui préserve f tel que $I(f \circ \varphi, g \circ \varphi) = \langle x^2y, x^2z, yz \rangle$.*

Démonstration. Par la proposition 3.4.3, on peut supposer que l'ensemble de tangence est la réunion des axes. Par la proposition 3.4.4, on peut trouver un champ de vecteurs X tel que $X(0) = \partial_x$ qui caractérise l'idéal de tangence. On veut transformer X en ∂_x en utilisant un difféomorphisme φ qui préserve f et les axes de coordonnées.

Comme précédemment, on va construire φ en deux étapes en transformant le champ de vecteurs d'abord sur l'axe des y puis sur l'axe des z . On cherche le premier difféomorphisme sous la forme $\varphi_1(x, y, z) = (x + yxa(y), y + yxb(y), z + yxc(y))$, de sorte que

$$\varphi_1^* \partial_x = (1 + ya, yb, yc).$$

On voit que pour chaque champ de vecteurs X tangent à ∂_x en 0, sa restriction à l'axe des y peut être obtenue de cette façon. Remarquons que φ_1 fixe $\{y = 0\}$ et préserve l'axe des y de sorte que si on fait la même construction pour l'axe des z , le nouveau difféomorphisme φ_2 préservera le champ de vecteur le long de l'axe des y . Ainsi $\varphi = \varphi_2 \varphi_1$ conjuguera $I(f, g)$ avec $\langle x^2y, x^2z, yz \rangle$. \square

Théorème 3.4.6. *Soient (f_0, g_0) et (f_1, g_1) deux paires de cuspoïdes exceptionnelles sur $(\mathbb{C}^3, 0)$ avec des courbes de tangence T_j^i ($i = 0, 1, j = 1, 2, 3$ et T_1^1 la courbe simple). Supposons qu'il existe un difféomorphisme ψ qui conjugue les courbes de tangence et les restrictions $(f_i|_{T_j^i}, g_i|_{T_j^i})$. Alors il existe un difféomorphisme φ tel que $(f_0 \circ \varphi, g_0 \circ \varphi) = (f_1, g_1)$.*

Démonstration. Après ce qui a déjà été fait, on peut supposer que chaque couple est sous la forme (3.1), avec comme idéaux de tangence $I = \langle x^2y, x^2z, yz \rangle$, avec $f_0 = f_1$ partout et $g_0 = g_1$ en restriction au lieu de tangence T .

Soit X un champ de vecteur qui caractérise l'idéal I . Si Y n'est pas tangent à T , alors $\lambda X + \mu Y$ caractérise aussi I pour tous $\lambda, \mu \in \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^3, 0)}$ si λ ne s'annule pas sur T donc on peut supposer que $X \in \text{Ker}(df_0)$ en chaque point de T (remarquez que $\text{Ker}(df_0)$ est transverse à T en chaque point différent de l'origine). Par définition de l'ensemble de tangence, X appartient alors aussi au noyau de dg_i pour chaque i sur T , d'où $g_1 - g_0 \in I$. Le lemme-clé peut alors être appliqué pour finir la preuve de ce théorème. \square

Chapitre 4

Voisinages de courbes, genre 2 et plus

On continue dans ce chapitre l'étude menée dans le chapitre 2, dont on reprend les notations.

4.1 Invariants locaux et holonomies entre les courbes de tangence

En chaque point $p \in C$, la classe de \mathcal{F}_L -équivalence du germe de $(S, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ autour de p donne un invariant global, mais pour un point p générique, les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{G} sont transverses en dehors de C donc les seuls invariants locaux sont l'ordre de tangence $k + 1$ le long de C et la structure affine \mathfrak{s} .

Cependant, pour chaque point p zéro de ω (donc pour tout point de branchement de la structure affine \mathfrak{s}), l'ensemble de tangence $\text{Tang}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ intersecte C en p (et cela n'arrive qu'en ces points). On voit donc apparaître en ces points des invariants locaux supplémentaires : chaque classe d'équivalence du couple $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ autour de p (modulo les difféomorphismes à la source qui préservent C) donne un invariant global.

La structure affine \mathfrak{s} a exactement $2g - 2$ points de branchements comptés avec multiplicité donc le nombre d'intersection entre $\text{Tang}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ et C est $2g - 2$. L'ensemble de tangence est alors génériquement constitué de $2g - 2$ courbes transverses à C , mais le cas général peut être plus compliqué.

On supposera dans la suite qu'il y a n points de branchements distincts (sans compter la multiplicité) p_1, \dots, p_n et on suppose avoir choisi p_0 différent de ces p_i . On fixe aussi des chemins γ_{ij} sur C entre p_i et p_j . L'ensemble de tangence (privé de C) autour de p_n sera noté T_n . On a vu que les invariants locaux autour de p_i sont donnés par des difféomorphismes calculés sur une transversale générique

T^i . On fixe donc pour tout $i \geq 0$ une courbe T^i générique passant par p_i et une coordonnée t_i sur T^i .

On considère les transports d'holonomie $(\varphi_{0i}^{\mathcal{F}}, \varphi_{0i}^{\mathcal{G}})$ entre T^0 et T^i calculé le long de γ_{0i} dans les coordonnées t_0 et t_i .

Définition 4.1.1. *Les transports d'holonomie $(\varphi_{0i}^{\mathcal{F}}, \varphi_{0i}^{\mathcal{G}})$ entre T^0 et T^i sont appelés les invariants de transport entre p_0 et p_i . On notera $IT(0, i)$ ce couple.*

Remarque 4.1.2. *Les quantités qui sont vraiment invariantes par difféomorphismes sont plutôt les transports d'holonomie entre deux courbes de tangence, mais on peut aussi passer par les T^i pour simplifier un peu l'écriture et permettre de faire apparaître les invariants locaux. On peut retrouver les transports entre courbes de tangence en composant les transports d'holonomie entre les différentes courbes.*

Lemme 4.1.3. *Un invariant de transport $IT(0, i)$ et des intégrales premières (F_0, G_0) de $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ sur T^0 déterminent entièrement des intégrales premières (F_i, G_i) sur T^i .*

Démonstration. On a en effet $L_i(t_i) = L_0((\varphi_{0i}^{\mathcal{L}})^{-1}(t_i))$ pour $L = F, G$. □

De même qu'il y avait un lien entre l'holonomie globale et la structure affine, on peut trouver un lien entre les invariants de transport et la structure affine : si u est la coordonnée affine donnée par un couple (F, G) près de p_0 vérifiant $u(p_0) = 0$ (ie. $G = F + u(x)F^{k+1} + \dots$ dans le cas $k > 0$), si on étend F et G analytiquement jusqu'à p_i , alors on a toujours $G = F + u(x)F^{k+1} + \dots$ au voisinage de p_i . On en conclut donc que $\varphi_{0i}^{\mathcal{G}}(y) = y - u(p_i)y^{k+1} + \dots$ d'après l'expression de $\varphi_{0i}^{\mathcal{G}}$ vue dans la preuve précédente, dans la coordonnée $y = F$. On trouve ainsi une formule similaire à la condition (2.1), à savoir :

$$\varphi_{0i}^{\mathcal{G}} = \zeta_{k,s}(\gamma_{0i}) \circ \varphi_{0i}^{\mathcal{F}} \quad \text{modulo } y^{k+2} \quad (4.1)$$

où

$$\zeta_{k,s}(\gamma)(y) = \begin{cases} \exp\left(-\int_{\gamma} \omega\right) y & \text{si } k = 0 \\ y - \left(\int_{\gamma} \omega\right) y^{k+1} & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

pour tout chemin γ .

Ainsi, dans le cas général, on définit l'invariant du voisinage $(S, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ comme suit :

Définition 4.1.4. Fixons des transversales génériques T^i passant par p_i et des coordonnées t_i sur T^i . On définit $\text{Inv}(S, \mathcal{F}, \mathcal{G}) = (k, u, \rho_{\mathcal{F}}, \rho_{\mathcal{G}}, (TH_i)_{i=1, \dots, n}, (IT(0, i))_{i=1, \dots, n})$ où TH_i est l'ensemble des transports d'holonomie locaux autour du point p_i (calculés sur T^i pour la coordonnée t_i , cf étude des feuilletages locaux), où les invariants de transports $IT(0, i)$ sont calculés entre T^0 et T^i dans les coordonnées t_0 et t_i , où $\rho_{\mathcal{F}}, \rho_{\mathcal{G}}$ sont définis pour les intégrales premières F et G égales à t_0 sur T^0 et où u est la coordonnée de la structure affine calculée pour F et G .

L'équivalence des invariants est donnée par les changements de T^i et de t_i .

4.2 Résultats généraux

On va maintenant essayer de simplifier le problème pas à pas pour mieux comprendre comment les différents invariants caractérisent le voisinage.

Comme les points p_i vont jouer un rôle particulier, mettons-les de côté en fixant un petit voisinage Y de $\cup_{i \geq 1} \gamma_{0i}$ dans S (petit voulant dire simplement connexe). Comme Y est simplement connexe, les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{G} ont des intégrales premières F et G sur Y .

Lemme 4.2.1. Soient $(S, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $(\tilde{S}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ deux voisinages bifeuilletés. On suppose que $\cup_{i \geq 1} \gamma_{0i}$ a des voisinages Y, \tilde{Y} munis de paires de fonctions (F, G) et (\tilde{F}, \tilde{G}) tels que les représentations d'holonomie $(\rho_{\mathcal{F}}, \rho_{\mathcal{G}})$ et $(\rho_{\tilde{\mathcal{F}}}, \rho_{\tilde{\mathcal{G}}})$ calculées pour ces intégrales premières soient égales, et tels que (Y, F, G) et $(\tilde{Y}, \tilde{F}, \tilde{G})$ soient diffeomorphes via un diffeomorphisme qui fixe la feuille commune.

Alors les voisinages $(S, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $(\tilde{S}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ sont diffeomorphes.

Démonstration. Soit ϕ un diffeomorphisme qui fixe la feuille commune et qui conjugue (Y, F, G) avec $(\tilde{Y}, \tilde{F}, \tilde{G})$. Les paires (F, G) et (\tilde{F}, \tilde{G}) peuvent être prolongées analytiquement le long de n'importe quel chemin dans $C \setminus Y$, et pour tout point p sur $C \setminus Y$, il existe par le lemme 2.1.1 un unique diffeomorphisme ϕ_p qui conjugue les prolongements de (F, G) et (\tilde{F}, \tilde{G}) (suivant un chemin γ) au voisinage de p .

Par unicité, ces diffeomorphismes se recollent sur tout ouvert simplement connexe $U \subset S$. Comme les représentations d'holonomie des couples (F, G) et (\tilde{F}, \tilde{G}) sont égales, ces diffeomorphismes se recollent aussi le long de lacets $\gamma \subset C$ non triviaux, ce qui livre un diffeomorphisme ϕ entre les paires $(S, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $(\tilde{S}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$. \square

On peut donc se restreindre à l'étude des triplets (Y, F, G) pour des intégrales premières (F, G) de $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ sur un voisinage Y de $\cup_{i \geq 1} \gamma_{0i}$. Le lemme 2.1.1 dit que les points différents des p_i ne jouent aucun rôle particulier donc qu'il suffit de regarder ce qui se passe au voisinage des p_i , ce qui est précisé dans le lemme suivant :

Lemme 4.2.2. *Soient (Y, F, G) et $(\tilde{Y}, \tilde{F}, \tilde{G})$ deux triplets tels que les germes de (F, G) et (\tilde{F}, \tilde{G}) au voisinage de p_i soient \mathcal{R}_L -équivalents pour tout $i \geq 1$, alors il existe un difféomorphisme fixant C conjuguant (Y, F, G) et $(\tilde{Y}, \tilde{F}, \tilde{G})$.*

Démonstration. Pour tout $i \geq 1$, il existe un (unique) difféomorphisme ϕ_{p_i} qui conjugue (F, G) et (\tilde{F}, \tilde{G}) au voisinage de p_i . Si $p \neq p_i$, il existe aussi un unique difféomorphisme ϕ_p qui conjugue les deux paires au voisinage de p d'après le lemme 2.1.1. Par unicité ces difféomorphismes se recollent. \square

On peut choisir des coordonnées (x, y) sur Y telles que $\mathcal{F} = \{y = cte\}$ et une transversale T^0 passant par p_0 . Le lemme 4.1.3 dit qu'on peut alors retrouver les intégrales premières au voisinage de p_i avec les invariants de transport ; plus précisément, on a :

Lemme 4.2.3. *Soient (Y, F, G) et $(\tilde{Y}, \tilde{F}, \tilde{G})$ deux triplets et T^i, \tilde{T}^i des transversales passant par p_i munis de coordonnées t_i, \tilde{t}_i . On suppose que $(F, G)|_{T^0} = (\tilde{F}, \tilde{G})|_{\tilde{T}^0}$, que les invariants de transports $IT(0, i)$ calculés sur T^i pour la coordonnée t_i sont égaux avec ou sans tildes, que les configurations locales au voisinage de p_i sont de même type pour tout i , que les invariants locaux TH_i et \tilde{TH}_i au voisinage de p_i sont égaux pour tout i et que $u = \tilde{u}$.*

Alors les triplets (Y, F, G) et $(\tilde{Y}, \tilde{F}, \tilde{G})$ sont difféomorphes.

Démonstration. D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que les germes de (F, G) et de (\tilde{F}, \tilde{G}) en p_i sont \mathcal{R}_L -conjugués pour tout i .

On remarque d'abord que les couples sont \mathcal{F}_L -équivalents au voisinage de tout p_i d'après la proposition 3.2.19.

Or, on peut supposer à difféomorphisme près que $Y = \tilde{Y}$ et que $F = \tilde{F}$. Comme les transports φ_{0i}^L et $\tilde{\varphi}_{0i}^L$ sont les mêmes, on obtient $L(t_i) = \tilde{L}(\tilde{t}_i)$ pour tout i et $L = F, G$ d'après le lemme 4.1.3. De même, L et \tilde{L} sont égales en restriction à toute courbe de tangence au voisinage de p_i car les invariants locaux sont les mêmes, donc par le corollaire 3.1.17 les paires locales sont \mathcal{R}_L -conjuguées. \square

Théorème 4.2.4. *Soient C une courbe, $(S, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $(\tilde{S}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ deux voisinages bifeuilletés de C . On suppose que les ensembles de tangence dans S et \tilde{S} coupent C en n points p_1, \dots, p_n (les mêmes pour S et \tilde{S}). On suppose de plus que les invariants $Inv(S, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $Inv(\tilde{S}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ sont équivalents.*

Alors les voisinages $(S, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $(\tilde{S}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ sont difféomorphes.

Démonstration. Comme les invariants sont équivalents, on peut trouver des transversales T^i , des coordonnées t_i et pareil avec des tildes telles que les invariants dans ces coordonnées soient égaux. Si on prend les intégrales premières F et G qui valent t_0 sur T^0 (idem avec des tildes), alors des voisinages (Y, F, G) et $(\tilde{Y}, \tilde{F}, \tilde{G})$

sont difféomorphes par le lemme 4.2.3. De plus, $\rho_{\mathcal{F}} = \rho_{\tilde{\mathcal{F}}}$ et $\rho_{\mathcal{G}} = \rho_{\tilde{\mathcal{G}}}$ donc le lemme 4.2.1 permet de conclure. \square

Théorème 4.2.5. *On peut réaliser tout invariant $(k, u, \rho_1, \rho_2, (TH_i)_{i=1,\dots,n}, (IT(0, i))_{i=1,\dots,n})$ dès que les représentations ρ_1, ρ_2 vérifient la règle de compatibilité (2.1) et que les invariants de transport φ_{0i} vérifient la règle de compatibilité (4.1).*

Démonstration. Notons \tilde{C} le revêtement universel de C et X un petit voisinage d'un domaine fondamental. On va construire le voisinage bifeuilleté en deux temps : on commence par considérer des petits voisinages U_i de p_i ($i \geq 1$) dans X , $C_{\text{th}} = X \setminus \cup U_i$, et le fibré trivial $S_{\text{th}} := C_{\text{th}} \times \mathbb{C}_y$. On va essayer de trouver deux fonctions F et G sur S_{th} de sorte à pouvoir recoller les bords externes de S_{th} pour faire une surface \check{S} , voisinage de C avec des trous H_i autour des points p_i ($i \geq 1$), munie de deux feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{G} . On cherchera bien sûr les fonctions F et G sur S_{th} de sorte à réaliser les représentations d'holonomie et ayant la structure affine recherchée.

Dans un second temps, on va chercher à construire pour chaque $i \geq 1$ un modèle local (F_i, G_i) sur un voisinage P_i de p_i et à recoller ces modèles locaux sur les trous H_i .

Fixons une transversale T_0 passant par p_0 dans S_{th} et $F = y$: on considère alors que les invariants sont calculés pour F sur T_0 . Posons $G = y + u(x)y^{k+1}$ (dans le cas $k > 0$, le cas $k = 0$ se traite similairement) sur S_{th} où la coordonnée affine u est choisie de sorte que $u(p_0) = 0$. Pour pouvoir recoller les bords de S_{th} , il faut trouver pour tout lacet fondamental γ un difféomorphisme ψ_γ qui fixe C et conjugue $(\rho_1(\gamma) \circ f, \rho_2(\gamma) \circ G)$ avec $(F \circ \gamma, G \circ \gamma)$. Il faut donc vérifier que ces deux couples sont \mathcal{R}_L -équivalents, ce qui est le cas d'après la proposition 3.2.11 car ils sont tangents à l'ordre k et ont le même invariant u par la condition de compatibilité. On forme ainsi la surface \check{S} .

On doit maintenant fabriquer des modèles locaux et les recoller sur les trous H_i . Il est plus pratique de considérer que les trous H_i sont des trous de S_{th} et de recoller les modèles locaux dessus. On considère ainsi pour tout i une configuration locale $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ sur un voisinage P_i de p_i et une intégrale première F_i de \mathcal{F} . Ce choix détermine via l'invariant de transport une intégrale première G_i de \mathcal{G} . La coordonnée affine donnée par le couple (F_i, G_i) est u d'après la règle de compatibilité (4.1).

Par suite, au voisinage d'un point $p \in C$ proche de p_i , les couples (F, G) et (F_i, G_i) ont les mêmes \mathcal{R}_L -invariants donc sont conjugués par un (unique) difféomorphisme ψ_p . Par unicité, ces difféomorphismes se recollent pour former un difféomorphisme entre un voisinage du trou H_i et un voisinage du bord de P_i . On peut se servir de ce difféomorphisme pour recoudre la pièce P_i sur le trou H_i . \square

4.3 Genre 2

Dans le cas où C est une courbe de genre 2, la structure affine a deux points de branchements (en comptant les multiplicités) ce qui implique que le lieu de tangence entre \mathcal{F} et \mathcal{G} intersecte C en deux points (toujours en comptant les multiplicités). Ceci nous donne quatre situations distinctes : soit il y a deux courbes D_1 et D_2 intersectant C transversalement en différents points, soit D_1 et D_2 intersectent C transversalement en le même point, soit $D_1 = D_2$ est une courbe double qui intersecte C transversalement, soit il y a une courbe simple irréductible D qui intersecte C avec un ordre de tangence de 2.

Commençons par le premier cas : D_1 et D_2 intersectent C transversalement en différents points p_1 et p_2 . On fixe donc un point p_0 , une transversale T_0 et des coordonnées t_0, t_1 et t_2 sur les différentes courbes. Celles-ci déterminent des fonctions F, G et donc les invariants $(k, u, \rho_{\mathcal{F}}, \rho_{\mathcal{G}}, IT(0, 1), IT(0, 2))$.

La donnée des invariants de transport $(\varphi_{0i}^{\mathcal{F}}, \varphi_{0i}^{\mathcal{G}})$ modulo difféomorphisme au but est équivalente à la donnée de leur composition $\varphi_{0i}^{\leftrightarrow} = \varphi_{\mathcal{G}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{F}}$ qui est un difféomorphisme de T_0 défini dans la coordonnée t_0 . On remarque que ce difféomorphisme est donné par

$$\varphi_{0i}^{\leftrightarrow}(y) = y - \left(\int_{p_0}^{p_i} \omega \right) y^{k+1} + \dots$$

Étudions les invariants locaux en chaque point où l'ensemble de tangence intersecte C : l'indice de contact entre \mathcal{F} et \mathcal{G} le long de D_i est donné par la multiplicité du zéro de ω (qui est 1) ; les invariants locaux sont donc de fait triviaux.

On peut encore simplifier le problème en choisissant $T_0 = D_1$: on obtient ainsi que le voisinage est caractérisé par l'invariant $(k, u, \rho_{\mathcal{F}}, \rho_{\mathcal{G}}, \varphi_{12}^{\leftrightarrow})$ où ces invariants sont calculés sur D_1 , pour une coordonnée t_1 , et l'équivalence des invariants est donnée par le changement de coordonnée t_1 .

On obtient alors le théorème :

Théorème 4.3.1. *Supposons que C soit une courbe de genre 2 et que $p_1 \neq p_2$ soient deux points de C . Soient $(U, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $(\tilde{U}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ deux voisinages bifeuilletés de C dont l'ensemble de tangence intersecte C en p_1 et p_2 . Ces voisinages sont analytiquement équivalents si et seulement si ils ont les mêmes invariants $(k, u, \rho_{\mathcal{F}}, \rho_{\mathcal{G}}, \varphi_{12}^{\leftrightarrow})$ modulo l'équivalence décrite ci-dessus.*

De plus, pour chaque quintuplet $(k, u, \rho_{\mathcal{F}}, \rho_{\mathcal{G}}, \varphi_{12}^{\leftrightarrow})$ vérifiant les conditions de compatibilité, il existe un voisinage bifeuilleté $(U, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ réalisant ces invariants.

Ce théorème découle du cas général.

Considérons le prochain cas : les courbes de tangence D_1 et D_2 intersectent C transversalement au même point p_1 que l'on peut supposer différent de p_0 . On choisit alors deux transversales T_0 et T_1 passant par p_0 et p_1 ainsi que des coordonnées t_0, t_1 sur les T_i et t^1, t^2 sur les D_i . Les invariants sont alors $(k, u, \rho_{\mathcal{F}}, \rho_{\mathcal{G}}, IT(0, 1), TH_1)$. On peut aussi simplifier en supposant que $T_0 = T_1$ et en composant les difféomorphismes $\varphi_{0i}^{\mathcal{F}}$ et $\varphi_{0i}^{\mathcal{G}}$ comme avant. On obtient donc un invariant de la forme $(k, u, \rho_{\mathcal{F}}, \rho_{\mathcal{G}}, \varphi_{01}^{\leftrightarrow}, \varphi_{02}^{\leftrightarrow})$, l'équivalence des invariants étant donnée par le changement de courbe T_0 et de coordonnée t_0 .

La classification est donnée par le théorème :

Théorème 4.3.2. *Supposons que C soit une courbe de genre 2 et que $p_1 \in C$. Soient $(U, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $(\tilde{U}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ deux voisinages bifeuilletés de C dont l'ensemble de tangence est constitué de deux courbes intersectant C transversalement en p_1 . Ces voisinages sont analytiquement équivalents si et seulement si ils ont les mêmes invariants $(k, u, \rho_{\mathcal{F}}, \rho_{\mathcal{G}}, \varphi_{01}^{\leftrightarrow}, \varphi_{02}^{\leftrightarrow})$ modulo équivalence.*

De plus, pour chaque ensemble d'invariants vérifiant la condition de compatibilité il existe un voisinage bifeuilleté $(U, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ réalisant ces invariants.

Les autres cas se traitent exactement de la même manière. Remarquons cependant que quand $D_1 = D_2$, \mathcal{F} et \mathcal{G} sont tangents à l'ordre 2 le long de D_1 .

Bibliographie

- [Arn1] V. I. Arnol'd. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, (1980), Editions Mir.
- [Arn2] V. I. Arnol'd. *Bifurcations of invariant manifolds of differential equations, and normal forms of neighborhoods of elliptic curves*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 10 (1976), p.1-12.
- [AVG-Z] V. I. Arnol'd, A. N. Varchenko, S. M. Gusein-Zade. *Singularités des applications différentiables*, (1982), Editions Mir.
- [BL] T. Bröcker and L. Lander. *Differential germs and catastrophes*, London Mathematical Society Lecture Note Series. 17, (1975), Cambridge University Press.
- [CaMo] C. Camacho and H. Movasati. *Neighborhoods of analytic varieties*, Monografías del Instituto de Matemática y Ciencias Afines, 35, Instituto de Matemática y Ciencias Afines, IMCA, Lima ; Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, (2003), p.v+90.
- [CeMo] D. Cerveau et R. Moussu. *Groupes d'automorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$ et équations différentielles $xdy + \dots = 0$* , Bulletin de la S.M.F., tome no.4 (1988), p.459-488.
- [Duf] J.-P. Dufour. *Sur la stabilité des diagrammes d'applications différentiables*, 1977, Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 10, no.2 (1977), p.153-174.
- [Gra] H. Grauert. *Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen*, Math. Ann. 146 (1962), p.331-368.
- [HP] W.V.D. Hodge and D. Pedoe. *Methods of algebraic geometry volume 2*, (1952), Cambridge University Press.
- [Hör1] L. Hörmander. *An introduction to complex analysis in several variables*, (1966), The University Series In Higher Mathematics.
- [Hör2] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators, 3, Pseudo-differential operators*, (1985), Springer.

- [Ily] Yu. S. Ilyashenko. *Imbeddings of positive type of elliptic curves into complex surfaces*, Trudy Moskov. Mat. Obshch. 45 (1982), p.37-67.
- [IY] Yu. S. Ilyashenko, S. Yakovenko. *Lectures on Analytic Theory of Ordinary Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, 86, Amer. Math. Soc. (2008).
- [LTT] F. Loray, O. Thom, F. Touzet. *Two dimensional neighborhoods of elliptic curves : formal classification and foliations*, <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01509317>> (2017)
- [Man] R. Mandelbaum. *Branched structures on Riemann surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 163 (1972), p.261-275.
- [Mar] J. Martinet. *Singularités des fonctions et applications différentiables*, Monografias de Matemática da PUC/RJ, No. 1., Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, (1977).
- [Mat] J. N. Mather. *Stability of C^∞ mappings. I-VI*, Ann. of Math. 87 (1968), p.89-104, Ann. of Math. 89 (1969), p.254-291, Publ. Sci. IHES 35 (1969), p.127-156, Publ. Sci. IHES 37 (1970), p.223-248, Advan. in Math. 4 (1970), p.301-335, Lecture Notes in Math. 192 (1971), p.207-253.
- [Mis1] M. B. Mishustin. *Neighborhoods of Riemann curves in complex surfaces*, Funct. Anal. Appl. 29, no.1 (1995), p.20-31.
- [Mis2] M. B. Mishustin. *On foliations in neighborhoods of elliptic curves*, Arnold Math. J. 2, no.2 (2016), p.195-199.
- [Mor] M. Morse. *Relations between the critical points of a real function of n independent variables*, Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), p.345-396.
- [Mos] J. Moser. *On the volume elements on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. 120 (1965), p.286-294.
- [Sad] P. Sad. *Regular foliations along curves*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 8 (1999), p.661-675.
- [Tho1] O. Thom. *Classification locale de bifeuillements holomorphes sur les surfaces complexes*, Bull. Braz. Math. Soc (N.S.) 47, no.4 (2016), p.989-1005.
- [Tho2] O. Thom. *Pairs of Morse functions*, J. Singul. 16 (2016), p.115-129.
- [Ued] T. Ueda. *On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle*, J. Math. Kyoto Univ. 22 (1982/83), p.583-607.
- [Vey] J. Vey. *Sur le lemme de Morse*, Inventiones math. 40 (1977), p.1-9.
- [Vor] S. M. Voronin. *Analytic classification of pairs of involutions and its applications*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 16, no. 2 (1982), p.21-29, 96.