

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

Mathématiques

Présentée par
MBAREK Aiman

Pour obtenir le grade de
DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ de CERGY-PONTOISE

Sujet de la thèse :

**Études théorème d'absorption limite pour les
opérateurs de Schrödinger et Dirac avec un
potentiel oscillant.**

soutenu le "date" devant le jury composé de :

Rapporteurs :

Examineurs :

Directeur de thèse : **Thierry JECKO**, Université de Cergy-Pontoise

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier grandement mon directeur de thèse, Thierry Jekko, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et sa disponibilité malgré ses nombreuses charges. Sa compétence, sa rigueur scientifique et sa clairvoyance m'ont beaucoup appris. Ils ont été et resteront des moteurs de mon travail de chercheur.

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	L'équation de Schrödinger	5
1.2	L'équation de Dirac	7
1.3	Récapitulation	8
2	Helffer-Sjöstrand formula for Unitary Operators.	13
2.1	Introduction	13
2.2	Usual Helffer-Sjöstrand formula	15
2.3	Cayley transform	19
2.4	Helffer-Sjöstrand formula for Unitary Operators	21
3	L'opérateur de Schrödinger avec un potentiel oscillant	25
3.1	Introduction	25
3.1.1	Présentation	25
3.1.2	Objectif	26
3.1.3	Plan	26
3.1.4	Remarques	27
3.2	Estimation de Mourre sur $]0, \frac{k^2}{4}[$	28
3.3	Étude des éventuels vecteurs propres de H dont les valeurs propres associées appartiennent à $]0, \frac{k^2}{4}[$	35
3.4	Théorème d'absorption limite sur $]0, \frac{k^2}{4}[$	47
3.4.1	Suites spéciales et structure de la preuve	47
3.4.2	Preuve des théorèmes principaux	52
3.4.3	Cas d'un potentiel à longue portée symbolique	61
3.5	Estimation de Mourre au dela de $k^2/4$	63
3.6	Appendice A. Calculs Symboliques[GJ2]	73
3.7	Appendice B Développement de Commutateur[GJ2]	74
3.8	Appendice C Calculs pseudo-différentiels[GJ2]	75
3.9	Appendice D	77
4	L'opérateur de Dirac avec un potentiel oscillant	87
4.1	Introduction	87
4.1.1	Présentation	87
4.1.2	Objectif	89
4.2	Estimation de Mourre	90
4.3	Théorème d'absorption limite	95

5	Opérateur de Dirac : problème spectrale inverse	99
5.1	Coordonnées sphériques	99
5.2	Appendice.E	109

Résumé :

Dans cette thèse nous avons étudié, d'une part le théorème d'absorption limite pour des opérateurs de Schrödinger et de Dirac avec des potentiels oscillants. Le fait de considérer des potentiels oscillants est intéressant dans la mesure où ses opérateurs peuvent avoir des valeurs propres plongées dans le spectre continu (c'est le cas pour Schrödinger), ce qui est plutôt inhabituel et introduit de nouvelles difficultés. L'étude du théorème d'absorption limite est très importante pour la théorie de la diffusion. Un intérêt particulier du sujet réside dans le fait que l'outil naturel pour procéder à l'étude en question, à savoir la théorie du commutateur de Mourre, ne s'applique pas. Une alternative récente a été développée par les co-directeurs de la thèse Thierry Jecko et Sylvain Golénia. Elle a été appliquée à un opérateur de Schrödinger avec potentiel oscillant. Il s'agit donc d'améliorer les résultats sur les opérateurs de Schrödinger et de traiter le cas des opérateurs de Dirac. D'autre part, nous avons montré un résultat de type Helffer-Sjöstrand pour les opérateurs unitaires. Et pour finir, nous avons pu montrer l'existence des valeurs propre plongées pour l'opérateur de Dirac avec des potentiels relativement compact par rapport à l'opérateur de Dirac libre sur son spectre essentiel.

Abstract :

In this thesis, we have studied the limit absorption theorem for Schrödinger and Dirac operators with oscillating potentials. Considering oscillating potentials is interesting insofar as its operators can have of the eigenvalues plunged into the continuous spectrum (this is the case for Schrödinger), which is rather unusual and introduces new difficulties. The study of the limit absorption theorem is very important for the theory of diffusion. A particular interest of the subject lies in the fact that the natural tool for the study in question, namely the Mourre switch theory, does not apply. A recent alternative has been developed by the co-directors Thierry Jecko and Sylvain Golénia. It has been applied to a Schrödinger operator with oscillating potential. It is therefore a question of improving the results on the Schrödinger operators and of treating the case of Dirac operators. Secondly, we have shown a Helffer-Sjöstrand formula for the unit operators and finally we have been able to show the existence of the eigenvalues plunged for the Dirac operator with relatively compact potentials relative to the operator of free Dirac on its essential spectrum.

Notations

$\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{R}$: le corps des nombres réels.

$\mathbb{C}$: le corps des nombres complexes.

$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) > 0\}$.

$\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) < 0\}$.

$\mathcal{B}$: la boule ouverte de centre 0 de rayon ϵ .

$D(0, 1)$: le disque unité ouvert.

$\mathbb{S}^1$: la sphère unité de centre 0 dans $\mathbb{R}^d$.

$\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, 1)}$ est le complémentaire de disque de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{C}$.

$\bar{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe $z \in \mathbb{C}$.

∇f : le gradient de f .

$\nabla_{x,y,z} f$: le gradient cartésien dans $\mathbb{R}^3$ de f .

$\nabla_{r,\theta,\varphi} f$: le gradient sphérique dans $\mathbb{R}^3$ de f .

$\partial_{x_j} f$: la dérivé partielle de f par rapport à x_j .

$\partial_r f$: la dérivé partielle de f par rapport à r .

$\partial_\theta f$: la dérivé partielle de f par rapport à θ .

$\partial_\varphi f$: la dérivé partielle de f par rapport à φ .

$\partial_z = \frac{\partial_x - i\partial_y}{2}$.

$\partial_{\bar{z}} = \frac{\partial_x + i\partial_y}{2}$.

$dz \wedge d\bar{z}$ est la mesure de Lebesgue dans le plan complexe $\mathbb{C}$.

ω est un ouvert de plan complexe $\mathbb{C}$.

$\partial\omega$ est l'adhérence de ω dans $\mathbb{C}$.

$\varphi^{(k)}$ est le k -ème dérivé de φ .

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$: l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable.

$\mathcal{L}^\infty$: l'espace des fonctions mesurables bornées.

$\mathcal{H}^s$: l'espace de Sobolev d'ordre s .

$\mathcal{C}^k$: l'espace des fonctions f k -fois dérivables et f^k est continue.

$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$: l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}^d$.

$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$: l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^d$.

$\mathbf{L}^t$: l'opérateur transposé de $\mathbf{L}$.

$\mathbf{L}^*$: l'opérateur autoadjoint de $\mathbf{L}$.

$\mathbf{L}^{-1}$: l'opérateur inverse de $\mathbf{L}$.

$\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert.

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est l'espace des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

I est l'opérateur Identité sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

$\|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \sup_{\{u \in \mathcal{H}; u \neq 0\}} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$.

$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$.

Introduction et Historique

Chapitre 1

Introduction

1.1 L'équation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger a fait rêver des générations d'étudiants qui abordaient la physique quantique. Sa forme est assez simple mais ses implications sont fondamentales et pour tout dire très exotiques. Tout d'abord je vais aborder l'équation dépendant du temps lorsque la particule est immergée dans un potentiel scalaire U (par exemple dans un champ électrique) :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x) \right) \psi(x, t) = H\psi(x, t), \quad (1.1.0.1)$$

où $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U = -\frac{\hbar^2}{2m} p^2 + U$ est l'opérateur hamiltonien du système, l'observable correspondant à l'énergie totale du système,

$\hbar$ est la constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi}$,

i est l'unité imaginaire : $i^2 = -1$,

x est l'observable position,

p est l'observable impulsion.

Cette équation de base de la mécanique quantique décrivant l'évolution dans le temps du vecteur d'état ψ d'un système quantique arbitraire. En théorie de la diffusion on se restreint à la partie absolument continue de l'opérateur H qui est plus stable. Rappelons que pour tout opérateur auto-adjoint H , il correspond (d'après le théorème spectral) une fonction $E(\lambda)$ à valeur projecteur auto-adjoint sur l'espace $\mathcal{H}$ telle que pour tout ϕ, ψ ,

$$(H\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda) \phi, \psi$$

Un vecteur $\psi \in \mathcal{H}$ appartient au sous-espace absolument continu de $\mathcal{H}$, noté $\mathcal{H}^{ac}$, si la mesure $m_\psi(\Delta) = (E(\Delta)\psi, \psi)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Une solution de (1.1.0.1) s'écrit alors $\psi(t) = e^{itH}\psi$ où l'opérateur e^{itH} est défini par la forme quadratique

$$(e^{itH}\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dE(\lambda) \phi, \psi$$

Son interprétation physique est généralement faite dans le cadre de l'interprétation de Copenhague de la mécanique quantique même si d'autres interprétations ont été proposées. Plusieurs expériences, en particulier, les fentes de Young, laissaient à penser que la fonction ψ pouvait avoir un rapport plus ou moins lointain avec une probabilité de présence de la particule dans un endroit donné.

Elle a été établie sous sa forme primitive en 1926 par Erwin Schrödinger et a été généralisée par Paul Dirac quelques années après.

Schrödinger découvrit donc une équation aux dérivées partielles décrivant un système mécanique Hamiltonien à l'aide d'un scalaire de champ ψ se propageant dans l'espace à 6N dimensions des coordonnées généralisé de ce système. Comme son découvreur l'avait compris, elle montre que la quantification de l'énergie des systèmes atomiques résulte d'une formulation en terme de problème de Sturm Liouville, ou de problème de valeurs propres pour un opérateur différentiel linéaire H . Initialement, elle n'était pas sous forme relativiste pour les particules, c'est encore Dirac qui en a trouvé une généralisation. Cette équation introduit fondamentalement des nombres complexes pour décrire l'état d'un système quantique et ses solutions sont les amplitudes de probabilités pour le système d'être mesuré dans un état donné, proton ou neutron, spin up ou down... .

Pour une particule évoluant dans un potentiel constant ou nul, il existe des états d'énergie dits "stationnaires". Dans ces états, la densité de probabilité de présence $\|\psi\|^2$ est indépendante du temps. Dans ce cas, la fonction d'onde $\psi(x, t)$ répond à la contrainte $\|\psi(x, t)\|^2 = \|\psi(x)\|^2$. La forme des solutions de cette équation sont $\psi_n(x, t) = \psi(x)e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$ où $\psi_n(x, t)$ décrit l'état stationnaire d'énergie E_n . Si l'on reporte cette écriture dans l'équation de Schrödinger. Elle est équivalente à un problème aux valeurs propres dans la théorie des espaces de Hilbert, on obtient donc que ces états sont solutions de l'équation aux états et valeurs propres,

$$H\psi_n = E_n\psi_n$$

qui porte parfois le nom d'équation de Schrödinger indépendante du temps. L'état propre ψ_n est associé à la valeur propre E_n , énergie de la particule dont ψ_n est l'état. Les valeurs de l'énergie peuvent être discrètes, il en résulte une quantification des niveaux d'énergie. Elles peuvent aussi être continues. Il arrive souvent que plusieurs états ψ_n correspondent à une même valeur de l'énergie : on parle alors de niveaux d'énergie dégénérés.

Certains modèles simples, bien que non tout à fait conformes à la réalité, peuvent être résolus analytiquement et s'avèrent très utiles ;
particule libre (potentiel nul) ;

oscillateur harmonique ;
 particule se déplaçant sur un anneau ;
 particule dans un puit de potentiel rectangulaire ;
 particule dans un guide d'onde annulaire ;
 particule dans un potentiel à symétrie sphérique ;
 particule dans un potentiel oscillant.

Il existe d'autres équations de type Schrödinger, non-linéaires, comme l'équation de Schrödinger semi-linéaire, ou comme l'équation de Gross-Pitaevskii, qui interviennent en théorie des atomes ultra froids, des plasmas, des lasers, etc...

La généralisation de l'équation au domaine relativiste mène à l'équation de Dirac ; cette dernière établit naturellement l'existence du spin et des antiparticules.

1.2 L'équation de Dirac

L'équation de Dirac est une équation formulée par Paul Dirac en 1928 dans le cadre de sa mécanique quantique relativiste de l'électron. Dirac y exprime la relation de la relativité restreinte d'Einstein, $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$, entre l'énergie E , la masse m et l'impulsion p , sous une forme linéaire appropriée à une interprétation en mécanique quantique.

Dans ce but, il introduit un ensemble de quatre matrices hermitiennes $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ et β à quatre lignes et quatre colonnes agissant sur le spineur ψ . Ces matrices, qu'on appelle les matrices de Dirac, ont les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 0, i, j = 1, 2, 3 \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0, i = 1, 2, 3 \\ \alpha_i^2 = \beta^2 &= I_4, i = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

L'équation de Dirac est donnée par :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = (c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + mc^2 \beta) \psi(x, t),$$

où $x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \vec{p} = -i\hbar \nabla, \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Cette équation décrit le comportement de particules élémentaires de spins demi-entiers, comme les électrons. Dirac cherchait à transformer l'équation de Schrödinger afin de la rendre invariante par l'action du groupe de Lorentz, en d'autres termes à la rendre compatible avec les principes de la relativité restreinte.

Cette équation prend en compte de manière naturelle la notion de spin introduite peu de temps avant et permet de prédire l'existence des antiparticules. En effet, outre la solution correspondant à l'électron, il découvre une nouvelle solution correspondant à une particule d'énergie négative et de charge opposée à celle de l'électron.

En 1932 Carl Anderson, alors qu'il étudiait des photons de haute énergie en provenance de l'espace, constate que l'interaction de ces photons avec la chambre à bulles produit une particule qui s'identifie à la particule conjecturée par Dirac, le positron.

Il est par ailleurs tout à fait étonnant que l'opérateur de Dirac, découvert pour des raisons absolument physiques (et théoriques) aura en mathématiques un glorieux avenir par son usage indispensable dans l'un des plus profonds résultats du siècle, le théorème d'Atiyah et Singer démontré dans les années 1960.

1.3 Récapitulation

Cette thèse est décomposé en quatre parties :

1. La formule d'Helffer-Sjöstrand pour les opérateurs unitaires.
2. Étude du théorème d'absorption limite de l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel oscillant sur $]0, \frac{k^2}{4}[$.
3. Étude du théorème d'absorption limite de l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel de type Wiener- Von Neumann sur $] \frac{k^2}{4}, +\infty[$.
4. Étude du théorème d'absorption limite de l'opérateur de Dirac avec un potentiel de type Wiener- Von Neumann sur $] -\sqrt{m^2 + k^2/4}, -m[\cup]m, \sqrt{m^2 + k^2/4}[$, et problème spectral inverse pour l'opérateur de Dirac.

1. La formule d'Helffer-Sjöstrand pour les opérateurs unitaires.

La première partie a pour objectif de trouver une formule similaire à celle de Helffer-Sjöstrand pour les opérateurs unitaires, en se basant sur les résultats de l'analyse complexe et de la théorie des opérateurs. Nous sommes arrivés à trouver une expression simple pour $f(U)$ où f est une fonction lisse supporté dans $\mathbb{S}^1$ loin de 1 et U est un opérateur unitaire, j'en profite pour remercier Golénia Sylvain qui a attiré notre attention sur cette formule que je trouve un outil mathématique très important, utilisé dans différents travaux et elle a des applications extrêmement intéressantes. Je vais citer d'une part la formule d'Helffer-Sjöstrand usuelle, et d'autre part je vais balancer le résultat obtenu dans ce premier chapitre.

Théorème 1 (Helffer-Sjöstrand) : Soit f une fonction lisse à support compacte dans $\mathbb{R}$ et A est un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on a

$$f(A) = (2i\pi)^{-1} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} f^{\mathbb{C}}(z) (z - A)^{-1} dz \wedge d\bar{z},$$

où $f^{\mathbb{C}}$ est une certaine extension presque analytique de f , $dz \wedge d\bar{z}$ est la mesure de Lebesgue sur le plan complexe et $f(A)$ est donné par le calcul fonctionnel pour l'opérateur auto-adjoint A . Cette égalité a lieu au sens norme d'opérateurs.

Théorème 2 (Mbarek) : Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1)$ supportée loin de 1 et U est un opérateur unitaire sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soit ψ est la transformation de Cayley. Soit $(f \circ \psi)^\mathbb{C}$ est une extension presque analytique de $f \circ \psi$ donnée par (3.6.1) telle que $(f \circ \psi)^\mathbb{C}$ est supportée dans $\{x + iy; x \in \text{supp}(f \circ \psi), |y| \leq C\}, 0 < C < 1$. Soit $f_{\mathbb{S}^1}^\mathbb{C} = (f \circ \psi)^\mathbb{C} \circ \psi^{-1}$. On a

$$f(U) = (2i\pi)^{-1} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} f_{\mathbb{S}^1}^\mathbb{C}(z) (z - U)^{-1} dz \wedge d\bar{z}. \quad (1.3.0.2)$$

Si f est définie proche de 1 avec un certain comportement, nous pensons qu'on peut avoir une telle expression similaire à celle de la notre peut être avec un terme explicite mais nous n'avons pas encore fait cela d'une manière rigoureuse.

2. Étude du théorème d'absorption limite de l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel oscillant sur $]0, \frac{k^2}{4}[$.

Nous avons commencé par la démonstration de l'estimation de Mourre, et en adaptant le lemme de Froese-Herbst à notre espèce d'opérateurs nous avons obtenu le résultat de finitude locale des valeurs propres avec multiplicité : car nous sommes dans un cas plus difficile à cause de la mauvaise régularité entre notre opérateur de Schrödinger par rapport à l'opérateur de dilatation, en particulier nous ne pouvons pas appliquer le lemme de Viriel, et enfin en se basant sur un article de [GJ] nous avons réussi à montrer le théorème d'absorption limite sur $]0, k^2/4[$ avec la caractérisation par des suites spéciales. Ce résultat s'énonce de la manière suivante

Théorème 3 (Jecko-Mbarek) : Soit A l'opérateur de dilatation défini par $A = \frac{Q \cdot \nabla + \nabla \cdot Q}{2i}$. Soit $H = -\Delta + V_{l,r} + V_{s,r} + q \frac{\sin(k|x|)}{\langle x \rangle^\beta}$, où β tel que $\beta + \inf(\beta, r_0) > 1$. Soit $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ supporté dans $]0, \frac{k^2}{4}[$ à support petit, on a

$\theta(H)[H, iA]\theta(H)$ s'étend à une forme quadratique bornée sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)^2$.

Il existe une constante $c > 0$ et K_1 un opérateur compact sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ tels que

$$\theta(H)(-\Delta + C_{1,\beta})\theta(H) \geq c \theta(H)^2 + K_1.$$

Théorème 4 (Jecko-Mbarek) : Soit $\psi \in \mathbf{H}^2$ tel que $H\psi = E\psi$. Soit $\rho(x) = (1 + |x|^2)^{1/2}$. Alors pour tout $\lambda > 0$,

$$\rho^\lambda \psi, \rho^\lambda \nabla \psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d).$$

Théorème 5 (Jecko-Mbarek) :

Soit I un intervalle compact de $]0, k^2/4[$. Supposons $(f_n)_n$ une suite de vecteurs propres de H dans I . $(f_n)_n$ sont finis et de multiplicité fini dans I .

Théorème 6 (Jecko-Mbarek) :

Soit $I \subset]0, k^2/4[$ un intervalle fermé tel que $I \cap \sigma_{disc}(H_1) = \emptyset$. Soit $H = -\Delta + V_{lr} + V_{sr} + W_{1,\beta}$, avec $r_0, r_1 > 0$ et $\beta + \inf(\beta, r_0) > 1$, et $1/2 < s < 1/2 + r_1/2$. Alors on a le théorème d'absorption des limites sur I ,

$$\sup_{\operatorname{Re} z \in I', \operatorname{Im} z \neq 0} \|\langle Q \rangle^{-s} (H - z)^{-1} \langle Q \rangle^{-s}\| < \infty.$$

3. Étude du théorème d'absorption limite de l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel de type Wiener- Von Neumann sur $] \frac{k^2}{4}, +\infty[$.

Dans ce paragraphe nous avons montré l'estimation de Mourre au delà de $k^2/4$ pour H , avec $\beta = 1$, en utilisant des techniques différentes par rapport à ceux que nous avons fait précédemment et nous sommes entrain d'étudier le TAL.

Théorème 7 (Jecko-Mbarek) :

Soit $\lambda > \frac{k^2}{4}$. Soit $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ à support petit autour de λ . Alors il existe une constante $c_1 > 0$ et un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\theta(H)[H, iA]\theta(H) \geq c_1 \theta(H)^2 + K$$

4. Étude du théorème d'absorption limite de l'opérateur de Dirac avec un potentiel de type Wiener- Von Neumann sur $] -\sqrt{m^2 + k^2/4}, -m[\cup]m, \sqrt{m^2 + k^2/4}[$, et problème spectral inverse pour l'opérateur de Dirac.

Par la même stratégie que dans [GJ2], nous avons montré l'estimation de Mourre, et en utilisant le lemme de Viriel nous obtenons le résultat de finitude locale des valeurs propres avec multiplicité et finalement nous finirons avec le TAL sur $] -\sqrt{m^2 + k^2/4}, -m[\cup]m, \sqrt{m^2 + k^2/4}[$.

En quatrième lieu et enfin, nous finirons cette thèse avec un problème spectral inverse : nous trouverons des potentiels de telle façon que l'opérateur de Dirac a une vraie valeur propre plongée dans le spectre continu.

Théorème 8 (Jecko-Mbarek) :

Soit D_0 l'opérateur de Dirac libre (qui est défini dans le quatrième chapitre). Soit $\lambda \in]-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, +\infty[$, Il existe un potentiel réel V , D_0 -compact et λ est une valeur propre de $D = D_0 + V$.

La formule d'Helffer-Sjöstrand pour les opérateurs unitaires

Chapitre 2

Helffer-Sjöstrand formula for Unitary Operators.

ABSTRACT. The objective of this paper to give a formula for unitary operators that corresponds to the Helffer-Sjöstrand formula for self-adjoint operators.

2.1 Introduction

First, we recall the usual formula of Helffer-Sjöstrand. If f a smooth function with compact support in $\mathbb{R}$ and A is a self-adjoint operator on a Hilbert space $\mathcal{H}$, we have

$$f(A) = (2i\pi)^{-1} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} f^{\mathbb{C}}(z) (z - A)^{-1} dz \wedge d\bar{z},$$

where $f^{\mathbb{C}}$ is some almost analytic extension of f , $dz \wedge d\bar{z}$ is the Lebesgue measure on the complex plane and $f(A)$ is given by the functional calculus for the self-adjoint operator A . This formula also holds true for a larger class of functions f having some prescribed behaviour at infinity (See. $\{[DG],[GJ],...\}$). For instance (See $[DG]$), one can require, for $\rho < 0$, that $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ such that

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \langle t \rangle^{-\rho+k} |f^{(k)}(t)| < +\infty.$$

The Helffer-Sjöstrand formula is extensively used in many different works, for example $([DG],[GJ],[BG],[Ca],[GN],...)$. A first application is an expansion of commutators of the following type. Given f a smooth function with compact support in $\mathbb{R}$, A a self-adjoint operator and B a bounded operator satisfying certain properties on a Hilbert space $\mathcal{H}$, one has

$$[f(A), B] = f'(A)[A, B] + R,$$

where $[A, B]$ is the commutator of A and B , $f(A)$ is given by the functional calculus for A and R is a rest that has better properties in some sense. One can generalize this formula with iterated commutators $([A, [A, B]], [A, [A, [A, B]]], ...)$ to get a Taylor-type formula.

A second application is provided in [GN]. Given a self-adjoint operator A on $\mathcal{H}$ and a smooth function f with compact support in $\mathbb{R}$, one gets a control on the norm $\|f(A)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ in terms of the norm of the resolvent of A , $\|(A - z_0)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$, for some $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. There are also results of this kind where $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ is replaced by a Schatten class norm.

Let us mention a third application in the context of linear PDE. For $\zeta > 0$, let V be the multiplication operator by a function $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto V(x)$ such that $x \mapsto |\langle x \rangle^\zeta V|$ is bounded, $\langle Q \rangle$ be the multiplication operator by the map $x \mapsto \langle x \rangle = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$, f be a smooth function with compact support in $\mathbb{R}$ and $-\Delta$ be the positive Laplacian on $\mathbb{R}^d$. Let $H_1 = H_0 + V = -\Delta + V$, the self-adjoint realization on $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$. By the Helffer-Sjöstrand formula one can show that

$$((f(H_1) - f(H_0))\langle Q \rangle^\epsilon \langle H_0 \rangle^\alpha)_{0 \leq \epsilon < \zeta, 0 \leq \alpha < 1}$$

is a family of compact operators.

Our objective is to find a kind of Helffer-Sjöstrand formula for unitary operators U and for smooth functions defined on the 1-dimensional sphere $\mathbb{S}^1$. Since U is a unitary operator, its spectrum is contained in $\mathbb{S}^1$ and a functional calculus is well defined. Here we shall take a smooth function $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ with compact support in the interior of $\mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$. The latter condition corresponds to the condition of compact support for the Helffer-Sjöstrand formula. For a unitary operator on some Hilbert space $\mathcal{H}$, we shall derive the formula

$$f(U) = (2i\pi)^{-1} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} f_{\mathbb{S}^1}^{\mathbb{C}}(z) (z - U)^{-1} dz \wedge d\bar{z}, \quad (2.1.0.1)$$

where $f_{\mathbb{S}^1}^{\mathbb{C}}$ is some almost analytic extension of f , $dz \wedge d\bar{z}$ is the Lebesgue measure on the complex plane and $f(U)$ is given by the functional calculus for the unitary operator U . We will show the formula (2.1.0.1) in Theorem 2.4.3. We expect that our formula (2.1.0.1) holds true under a weaker assumption on the behaviour of f near 1.

The tools used in this paper come from complex analysis (Cayley transform...), the theory of self-adjoint, unitary and normal operators and the functional calculus for the corresponding operators.

The paper is organized as follows. In Section 2, we formulate the theorem of Helffer-Sjöstrand and we give a slightly different proof from that of [HeS]. In Section 3, we recall some properties on the Cayley transform and we prove some complex analysis results that will be used in the proof of our main theorem. In Section 4, we prove the main theorem of this paper. The paper ends with a paragraph of notation.

I would like to thank S. Golénia, who drew our attention to the fact that a formula of the type (2.1.0.1) should exist and would be very interesting and useful. I also thank T. Jecko for guiding, abetting, counseling me throughout the preparation of this paper.

2.2 Usual Helffer-Sjöstrand formula

We state the theorem of Helffer Sjöstrand and we will give another proof other than in the article [HeS]. Our proof is based on results in [DG] and results of complex analysis.

First we will start with constructing almost analytic extensions.

Let $k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ be a map, we denote by $\text{supp}k$ the support of k .

Proposition 2.2.1 [DG] *Let f a smooth function with compact support in $\mathbb{R}$. Then there exists a function $f^{\mathbb{C}} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C})$, called an almost analytic extension of f , such that there exists $0 < C < 1$ such that for all $l \in \mathbb{N}$ there exists $C_l \geq 0$ such that,*

$$f^{\mathbb{C}}|_{\mathbb{R}} = f, \text{supp}f^{\mathbb{C}} \subset \{x + iy; x \in \text{supp}f, |y| \leq C\}, \quad (2.2.0.2)$$

$$|\partial_{\bar{z}}f^{\mathbb{C}}(z)| \leq C_l |Im(z)|^l. \quad (2.2.0.3)$$

where $Im(z)$ is the imaginary of z .

Preuve : we follow the argument of [DG], checking that we can ensure the formula (3.6.0.12) with $C < 1$.

Let $M_n = \sup_{0 \leq k \leq n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$ for all $n \in \mathbb{N}$. Let $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ such that $\chi = 1$ on $[-1/2, 1/2]$ and $\chi = 0$ on $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. We choose

$$f^{\mathbb{C}}(z) = f^{\mathbb{C}}(x + iy) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} f^{(n)}(x) \chi\left(\frac{y}{T_n}\right), \quad (2.2.0.4)$$

for a decreasing and positive sequence $(T_n)_n$ satisfying, $T_0 < 1$ and

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n M_{2n} \leq 2^{-n}. \quad (2.2.0.5)$$

For example we can take $(T_n)_n$ defined by $0 < T_0 < 1$ and $T_n = \min(T_{n-1}, \frac{1}{2^n M_{2n}})$, for $n \geq 1$. With this choice we will see that our sum (2.2.0.4) is uniformly convergent. Then, for x real,

$$f^{\mathbb{C}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i0)^n}{n!} f^{(n)}(x) \chi\left(\frac{0}{T_n}\right) = \frac{(i0)^0}{0!} f(x) \chi\left(\frac{0}{T_0}\right) = f(x).$$

We deduce that $f^{\mathbb{C}}$ is an extension of f to $\mathbb{C}$.

Let $C = T_0$. Let $H_{f,C} := \{x + iy; x \in \text{supp}f, |y| \leq C\}$. If $x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ such that the distance $d(x_0 + iy_0, H_{f,C}) > 0$ then $x_0 \notin \text{supp}f$ or $|y_0| > C$. If $x_0 \notin \text{supp}f$ therefore $f^{(n)}(x_0) = 0, n \geq 0$ for all $n \in \mathbb{N}$, and $f^{\mathbb{C}}(x_0 + iy_0) = 0$. If $|y_0| > C$ then, for all $n \in \mathbb{N}, |y_0| > C \geq T_n$, since $(T_n)_n$ decreases. Thus, for all $n, \chi(\frac{y_0}{T_n}) = 0$ and $f^{\mathbb{C}}(x_0 + iy_0) = 0$. We get (3.6.0.12)

To show that our sum (2.2.0.4) exists and belongs to $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$, we simply have to show that, for $(p, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \partial_x^p \partial_y^q \left(\frac{(iy)^n}{n!} f^{(n)}(x) \chi\left(\frac{y}{T_n}\right) \right) \quad (2.2.0.6)$$

is uniformly convergent.

Let $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, take $n \geq \max(p, q)$. Using the Leibnitz formula we have

$$\begin{aligned} & \left| \partial_x^p \partial_y^q \left(\frac{(iy)^n}{n!} f^{(n)}(x) \chi\left(\frac{y}{T_n}\right) \right) \right| \\ &= \left| i^n (\partial_x^{p+n} f)(x) \sum_{r=0}^q \frac{C_q^r}{(n-q+r)! T_n^r} y^{n-q+r} \chi^{(r)}\left(\frac{y}{T_n}\right) \right|. \end{aligned}$$

where $C_q^r = \frac{q!}{r!(q-r)!}$, $0 \leq r \leq q$. For all $0 \leq r \leq q \leq n$, $\chi^{(r)}(\frac{\cdot}{T_n})$ is supported in $\{0 \leq |\cdot| \leq T_n\}$.

Let $x, y \in \mathbb{R}$, we have

$$\begin{aligned} \left| \partial_x^p \partial_y^q \left(\frac{(iy)^n}{n!} f^{(n)}(x) \chi\left(\frac{y}{T_n}\right) \right) \right| &\leq M_{p+n} \sum_{r=0}^q \frac{C_q^r}{(n-q+r)! T_n^r} |y|^{n-q+r} |\chi^{(r)}\left(\frac{y}{T_n}\right)| \\ &\leq M_{p+n} T_n^{n-q} \sum_{r=0}^q \frac{C_q^r}{(n-q+r)!} \|\chi^{(r)}\|_\infty \\ &\leq D_q M_{p+n} T_n^{n-q}. \end{aligned}$$

As $T_n < 1$, we have $T_n^{n-q} M_{p+n} \leq T_n M_{2n} \leq 2^{-n}$, by (2.2.0.5).

Thus

$$\sup_{x,y} \left| \partial_x^p \partial_y^q \left(\frac{(iy)^n}{n!} f^{(n)}(x) \chi\left(\frac{y}{T_n}\right) \right) \right| \leq D_q 2^{-n}.$$

This yields the normal convergence of the series (2.2.0.6). In particular, $f^{\mathbb{C}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$.

It remains to show (3.6.0.13). For $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 2\partial_{\bar{z}} f^{\mathbb{C}}(z) &= (\partial_x + i\partial_y) f^{\mathbb{C}}(x + iy) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(iy)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) \chi\left(\frac{y}{T_n}\right) + i \frac{i^n}{(n-1)!} f^{(n)}(x) y^{n-1} \chi\left(\frac{y}{T_n}\right) \right. \\ &\quad \left. + i \frac{(iy)^n}{n!} f^{(n)}(x) \frac{1}{T_n} \chi'\left(\frac{y}{T_n}\right) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) \chi\left(\frac{y}{T_n}\right) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!} \left(i^n n y^{n-1} \chi\left(\frac{y}{T_n}\right) \right. \\ &\quad \left. + (iy)^n \frac{1}{T_n} \chi'\left(\frac{y}{T_n}\right) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) \left(\chi\left(\frac{y}{T_n}\right) - \chi\left(\frac{y}{T_{n+1}}\right) \right) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n! T_n} i^{n+1} y^n \chi'\left(\frac{y}{T_n}\right). \end{aligned}$$

Let $l \in \mathbb{N}$. Denoting by $\mathbf{1}_I$ the characteristic function of I , we have, for $y \neq 0$,

$$\begin{aligned}
2|y|^{-l}|\partial_{\bar{z}}\tilde{f}(z)| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} M_{n+1}|y|^{n-l}2\|\chi\|_{\infty}\mathbf{1}_{\{T_{n+1}/2 \leq |\cdot| \leq T_n\}}(y) \\
&+ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M_n}{T_n}|y|^{n-l}\|\chi'\|_{\infty}\mathbf{1}_{\{T_n/2 \leq |\cdot| \leq T_n\}}(y) \\
&\leq C \sum_{n=1}^l M_{n+1} \left(\frac{T_{n+1}}{2}\right)^{n-l} + C' \sum_{n=l+1}^{+\infty} M_{n+1} (T_n)^{n-l} \\
&+ C'' \sum_{n=0}^l \frac{M_n}{T_n} \left(\frac{T_n}{2}\right)^{n-l} + C''' \sum_{n=l+1}^{+\infty} \frac{M_n}{T_n} (T_n)^{n-l} \\
&\leq C'_l + D \sum_{n=l+2}^{+\infty} (M_n + M_{n+1})T_n.
\end{aligned}$$

By (2.2.0.5) and the definition of $(M_n)_n$ we have $(M_n + M_{n+1})T_n \leq 2T_n M_{2n} \leq 2.2^{-n}$. This yields (3.6.0.13). $\blacksquare$

Proposition 2.2.2 *[H]*

Let ω be an open set in the complex plane $\mathbb{C}$ and $u \in \mathcal{C}^1(\omega)$. For all $\xi \in \omega$, the second integral in (2.2.0.7) is convergent. Moreover, for all $\xi \in \omega$,

$$u(\xi) = (2i\pi)^{-1} \left\{ \int_{\partial\omega} \frac{u(z)}{z - \xi} dz + \int_{\omega} \frac{\partial_{\bar{z}} u(z)}{z - \xi} dz \wedge d\bar{z} \right\}. \quad (2.2.0.7)$$

Corollaire 2.2.3 *If $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ with compact support in ω then, for all $\xi \in \omega$,*

$$u(\xi) = (2i\pi)^{-1} \int_{\omega} \frac{\partial_{\bar{z}} u(z)}{z - \xi} dz \wedge d\bar{z}. \quad (2.2.0.8)$$

Preuve : Just apply Proposition 2.2.2 and use the fact that u is zero on $\partial\omega$. $\blacksquare$

We will recall some results on the theory of normal operators. Let $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ with compact support K and let N is a normal operator on a Hilbert space $\mathcal{H}$. Denote by $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ the set of bounded operators on $\mathcal{H}$ and $f(N)$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ given by the functional calculus for N .

Proposition 2.2.4 *[Co] For z outside $\sigma(N)$, the spectrum of the operator N , we have*

$$\|(z - N)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \frac{1}{d(z, \sigma(N))}.$$

Proposition 2.2.5 *[Co] Let K a compact of $\mathbb{C}$. Let, for $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ with $\text{supp} f_n \subset K$ and $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ with $\text{supp} f \subset K$ such that $(f_n)_n$ converges to f , uniformly on K . Then $(f_n(N))_n$ converges to $f(N)$ for the operator norm.*

Preuve :

By combining the lemma 1.9 page 257 and Theorem 4.7 page 321 in the book [Co], we found the following inequality

$$\|f_n(N) - f(N)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \|f_n - f\|_{\infty, K} := \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)|.$$

Therefore by passing to the limit we conclude

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n(N) - f(N)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = 0.$$

■

If we replace u by an almost analytic extension satisfying $\omega = \mathbb{C}$ and (2.2.0.7) and (2.2.3), the generalized integral in (2.2.0.8) converges uniformly, w.r.t. ξ , as proved in the following proposition.

For a map $k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ and $D \subset \mathbb{C}$, we define

$$\|k\|_{\infty, D} := \sup_{x \in D} |k(x)|. \quad (2.2.0.9)$$

Proposition 2.2.6 *Let $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ be a function with compact support K and $f^\mathbb{C}$ be an almost analytic extension of f given by Proposition 3.6.1. We have the following uniform convergence on K*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \int_{|Im(z)| > 1/n} \partial_{\bar{z}} f^\mathbb{C}(z) (z - \cdot)^{-1} dz \wedge d\bar{z} - f(\cdot) \right\|_{\infty, K} = 0. \quad (2.2.0.10)$$

Preuve : Let $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ be a function with compact support K . By Proposition 3.6.1, $f^\mathbb{C}$ is an almost analytic extension of f such that $\text{supp } f^\mathbb{C} \subset K^\mathbb{C}$, where $K^\mathbb{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in K, |y| \leq C < 1\}$. Let ω an open in the complex plane $\mathbb{C}$ that contains $K^\mathbb{C}$.

From the corollary 2.2.3 with $u = f^\mathbb{C}$, we have, for all $\xi \in K$,

$$f(\xi) = (2i\pi)^{-1} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial_{\bar{z}} f^\mathbb{C}(z)}{z - \xi} dz \wedge d\bar{z}. \quad (2.2.0.11)$$

Using the (2.2.0.8) with $l = 1$, we have, for $\xi \in K$,

$$\int_{K^\mathbb{C}} |\partial_{\bar{z}} f^\mathbb{C}(z) (z - \xi)^{-1}| dz \wedge d\bar{z} \leq C_1 \int_{K^\mathbb{C}} |Im(z)| |Im(z)|^{-1} dz \wedge d\bar{z} < +\infty. \quad (*)$$

Thus this integral (2.2.0.11) is absolutely convergent. Now we will show the uniform convergence on K , let $\xi \in K$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|Im(z)| > 1/n} \partial_{\bar{z}} f^\mathbb{C}(z) (z - \xi)^{-1} dz \wedge d\bar{z} - f(\xi) \right| \\ &= \left| \int_{|Im(z)| < 1/n} \partial_{\bar{z}} f^\mathbb{C}(z) (z - \xi)^{-1} dz \wedge d\bar{z} \right| \\ &\leq C_1 \int_{|Im(z)| < 1/n} |Im(z)| |Im(z)|^{-1} dz \wedge d\bar{z} \\ &\leq \frac{C}{n}, \text{ where } C \text{ is independent of } \xi. \end{aligned}$$

Therefore

$$\sup_{\xi \in K} \left| \int_{|Im(z)| > 1/n} \partial_{\bar{z}} f^{\mathbb{C}}(z)(z - \xi)^{-1} dz \wedge d\bar{z} - f(\xi) \right| < \frac{C}{n},$$

proving (2.2.0.10). ■

We are able to reprove Helffer-Sjöstrand theorem.

Théorème 2.2.7 [HeS] *Let $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ be a function with compact support K and $f^{\mathbb{C}}$ be an almost analytic extension of f given by Proposition 3.6.1. Let A be a self-adjoint operator on a Hilbert space $\mathcal{H}$. The integral*

$$\int_{\mathbb{C}} \|\partial_{\bar{z}} f^{\mathbb{C}}(z)(z - A)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} dz \wedge d\bar{z} \quad (**)$$

converges, the integral in the following formula converges in operator norm in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, and we have

$$f(A) = (2i\pi)^{-1} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} f^{\mathbb{C}}(z)(z - A)^{-1} dz \wedge d\bar{z}. \quad (2.2.0.12)$$

Preuve : By Proposition 2.2.4,* holds true with ξ replaced by A . This proves the convergence of **. In particular, the integral in (2.2.0.12) converges in the operator norm of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. By (2.2.0.10) and Proposition 2.2.5 we get (2.2.0.12). ■

2.3 Cayley transform

In this section, we give some properties on the Cayley transform and we prove a known result in complex analysis that will be used in the proof of our main theorem.

We will need some estimates on the Cayley transform on specific regions.

Définition 2.3.1 *The Cayley transform is the map*

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{C} \setminus \{i\} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z &\longmapsto \psi(z) = \frac{z+i}{z-i}. \end{aligned}$$

We denote by $\mathbb{S}^1$ is the unit sphere in $\mathbb{C}$, $D(0,1)$ the open disk with center the origin and of radius 1, $\overline{D(0,1)}$ the closure of $D(0,1)$, $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}; Im(z) > 0\}$ and $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C}; Im(z) < 0\}$, where $Im(z)$ is the imaginary of z .

Proposition 2.3.2 [H] *ψ is an analytic, bijective function and ψ^{-1} is given by $\psi^{-1}(\xi) = i\frac{\xi+1}{\xi-1}$, for all $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Furthermore,*

$$\begin{aligned} \psi(\mathbb{R}) &= \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}, \psi(\mathbb{C}^+ \setminus \{i\}) = \mathbb{C} \setminus \{\overline{D(0,1)}\}, \psi(\mathbb{C}^-) = D(0,1), \\ \psi(0) &= -1, \psi(-1) = i, \lim_{z \rightarrow \infty} \psi(z) = 1, \lim_{z \rightarrow i} |\psi(z)| = \infty. \end{aligned}$$

Let $a, b, c \in \mathbb{R}$ such that $a < b$ and $0 \leq c < 1$. We define

$$\Omega := \psi([a, b] \times [-c, c]).$$

Lemme 2.3.3 *There exists $C > 0$, such that*

$$\|\partial_x(\psi^{-1})\|_{\infty, \Omega} \leq C, \|\partial_y(\psi^{-1})\|_{\infty, \Omega} \leq C, \quad (2.3.0.13)$$

and, for all $\xi \in \Omega$,

$$|Im(\psi^{-1}(\xi))| \leq Cd(\xi, \mathbb{S}^1).$$

where $\|\cdot\|_{\infty, \Omega}$ defined in (2.2.0.9) and $d(\xi, \mathbb{S}^1)$ is the distance between ξ and $\mathbb{S}^1$.

Preuve : Let $\xi \in \Omega$. Then $|Im(\psi^{-1}(\xi))| = \left| \frac{|\xi|^2 - 1}{|\xi - 1|^2} \right|$,

$$\frac{|Im(\psi^{-1}(\xi))|}{d(\xi, \mathbb{S}^1)} = \frac{|\xi| + 1}{|\xi - 1|^2}.$$

Call $C_\Omega = d(1, \Omega)$, $d_\Omega = \sup_{\xi \in \Omega} |\xi|$. We have, for all $\xi \in \Omega$,

$$C_1 := \frac{1}{(2d_\Omega)^2} \leq \frac{|Im(\psi^{-1}(\xi))|}{d(\xi, \mathbb{S}^1)} = \frac{|\xi| + 1}{|\xi - 1|^2} \leq \frac{d_\Omega + 1}{C_\Omega^2} =: C_2.$$

$\partial_x(\psi^{-1}) = \frac{-2i}{(\xi-1)^2}$ and $\partial_y(\psi^{-1}) = \frac{2}{(\xi-1)^2}$. As there exists $r > 0$, such that, for all $\xi \in \Omega$, $|\xi - 1| \geq r$, we get (2.3.0.13). ■

Lemme 2.3.4 *Let h be an analytic function on $\mathbb{C}$ and g be a smooth function on $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. We have*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \partial_{\bar{z}}(g \circ h)(z) = (\partial_{\bar{z}}g)(h(z))\overline{\partial_z h(z)}.$$

Preuve : Writing $z = x + iy$ and $h(z) = h_1(x, y) + ih_2(x, y)$, we have

$$\begin{aligned} 2\partial_{\bar{z}}(g \circ h)(z) &= \partial_x(g \circ h)(z) + i\partial_y(g \circ h)(z) \\ &= (\partial_x g)(h(z))\partial_x h_1(x, y) + (\partial_y g)(h(z))\partial_x h_2(x, y) \\ &\quad + i((\partial_x g)(h(z))\partial_y h_1(x, y) + (\partial_y g)(h(z))\partial_y h_2(x, y)) \\ &= ((\partial_z + \partial_{\bar{z}})g)(h(z))\partial_x h_1(x, y) + (\frac{\partial_{\bar{z}} - \partial_z}{i}g)(h(z))\partial_x h_2(x, y) \\ &\quad + i(((\partial_z + \partial_{\bar{z}})g)(h(z))\partial_y h_1(x, y) + ((\frac{\partial_{\bar{z}} - \partial_z}{i}g)(h(z))\partial_y h_2(x, y))) \\ &= (\partial_z g)(h(z))(\partial_x h_1(x, y) + i\partial_x h_2(x, y) + i\partial_y h_1(x, y) - \partial_y h_2(x, y)) \\ &\quad + (\partial_{\bar{z}} g)(h(z))(\partial_x h_1(x, y) - i\partial_x h_2(x, y) + i\partial_y h_1(x, y) + \partial_y h_2(x, y)). \end{aligned}$$

As h is analytic, h satisfies the Cauchy Riemann relations $\partial_x h_1(x, y) = \partial_y h_2(x, y)$ and $\partial_y h_1(x, y) = -\partial_x h_2(x, y)$, therefore

$$\begin{aligned} 2\partial_{\bar{z}}(g \circ h)(z) &= 2(\partial_{\bar{z}}g)(h(z))(\partial_x h_1(x, y) + i\partial_y h_1(x, y)) \\ &= 2(\partial_{\bar{z}}g)(h(z))(\frac{\partial_x + i\partial_y}{2}h_1(x, y) + \frac{\partial_x + i\partial_y}{2}h_1(x, y)) \\ &= 2(\partial_{\bar{z}}g)(h(z))(\frac{\partial_x + i\partial_y}{2}h_1(x, y) + \frac{\partial_y - i\partial_x}{2}h_2(x, y)) \\ &= 2(\partial_{\bar{z}}g)(h(z))(\frac{\partial_x + i\partial_y}{2}h_1(x, y) - i\frac{\partial_x + i\partial_y}{2}h_2(x, y)) \\ &= 2(\partial_{\bar{z}}g)(h(z))\partial_{\bar{z}}h(z). \end{aligned}$$

■

2.4 Helffer-Sjöstrand formula for Unitary Operators

We want a formula similar to (2.2.0.12), replacing the self-adjoint operator A by a unitary operator U .

We start with some reminders on unitary operators.

Définition 2.4.1 U is called a unitary operator on a Hilbert space $\mathcal{H}$, if

$$UU^* = U^*U = I.$$

Proposition 2.4.2 The spectrum of a unitary operator U on a Hilbert space $\mathcal{H}$ is included in $\mathbb{S}^1$.

Preuve : Let $z \in \mathbb{C}$ such that $|z| > 1$. We have $\|z^{-1}U\| < 1$, then $(I - z^{-1}U)$ is invertible and its inverse is bounded and it is given by the following series $\sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-1}U)^n$.

Therefore

$$z^{-1}(I - z^{-1}U)^{-1} = (z - U)^{-1}.$$

Let now $z \in \mathbb{C}$ such that $|z| < 1$, we have $|zU^*| < 1$, then

$$U^*(zU^* - I)^{-1} = (zUU^* - U)^{-1} = (z - U)^{-1}.$$

This shows that the spectrum of U is included in $\mathbb{S}^1$. ■

We are able to demonstrate the main theorem of this paper.

Théorème 2.4.3 Let $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1)$ supported away from 1 and U be a unitary operator on a Hilbert space $\mathcal{H}$. Let $(f \circ \psi)^\mathbb{C}$ be an almost analytic extension of $f \circ \psi$ given by (3.6.1) such that $(f \circ \psi)^\mathbb{C}$ is supported in $\{x + iy; x \in \text{supp}(f \circ \psi), |y| \leq C\}, 0 < C < 1$. Let $f_{\mathbb{S}^1}^\mathbb{C} = (f \circ \psi)^\mathbb{C} \circ \psi^{-1}$. The integral

$$\int_{\mathbb{C}} \|\partial_{\bar{z}} f_{\mathbb{S}^1}^\mathbb{C}(z)(z - U)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} dz \wedge d\bar{z} \quad (2.4.0.14)$$

converges, the integral in the following formula converges in operator norm in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, and we have

$$f(U) = (2i\pi)^{-1} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} f_{\mathbb{S}^1}^\mathbb{C}(z)(z - U)^{-1} dz \wedge d\bar{z}. \quad (2.4.0.15)$$

Preuve : Let $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1)$ supported away from 1 and U is a unitary operator on a Hilbert space $\mathcal{H}$.

$f \circ \psi$ is a smooth function with compact support in $\mathbb{R}$. By Proposition 3.6.1 there exists an almost analytic extension $(f \circ \psi)^\mathbb{C}$ of $f \circ \psi$, such that $(f \circ \psi)^\mathbb{C}$ supported in $\{x + iy; x \in \text{supp} f \circ \psi, |y| \leq C < 1\}$.

Let $f_{\mathbb{S}^1}^\mathbb{C} = (f \circ \psi)^\mathbb{C} \circ \psi^{-1}$ defined on $\mathbb{C}$. It is a smooth function, supported in $\Omega_0 := \psi(\text{supp}(f \circ \psi) \times [-C, C])$.

For $\xi \in \mathbb{S}^1$, $f^\mathbb{C}(\xi) = (f \circ \psi)^\mathbb{C} \circ \psi^{-1}(\xi) = f \circ \psi \circ \psi^{-1}(\xi) = f(\xi)$, since $\psi^{-1}(\xi) \in \mathbb{R}$.

As in the proof of Theorem 2.2.0.12 we show that (2.4.0.14) converges. Making a call to lemma 2.3.4 with $h = \psi^{-1}$ and $g = (f \circ \psi)^{\mathbb{C}}$ and to proposition 3.6.1 with $l = 1$, and to lemma 2.3.3, we get the following uniform convergence on $\mathbb{S}^1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \int_{d(z, \mathbb{S}^1) > 1/n} \partial_{\bar{z}} f_{\mathbb{S}^1}^{\mathbb{C}}(z)(z - \cdot)^{-1} dz \wedge d\bar{z} - f(\cdot) \right\|_{\infty, \mathbb{S}^1} = 0.$$

Therefore, by Proposition 2.2.5,

$$\int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} f_{\mathbb{S}^1}^{\mathbb{C}}(z)(z - U)^{-1} dz \wedge d\bar{z}$$

converges in operator norm in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ and we have (2.4.0.15). ■

Acknowledgement

The author wishes to address a special thanks firstly, to my co-director of this thesis Golénia Sylvain who drew our attention for to work on this subject, and secondly to Jecko Thierry for her help and permanent support.

Études du théorème d'absorption
limite pour l'opérateur de
Schrödinger avec un potentiel de
type oscillant

Chapitre 3

L'opérateur de Schrödinger avec un potentiel oscillant

3.1 Introduction

3.1.1 Présentation

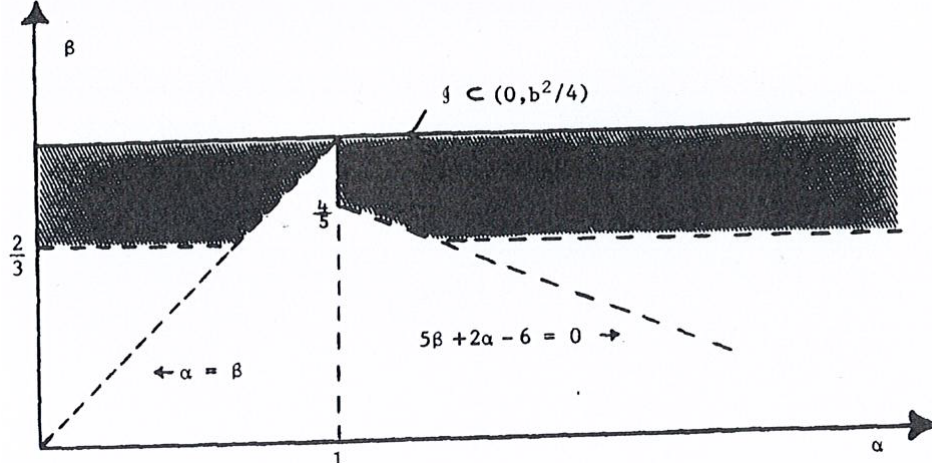
L'étude en toute généralité de l'opérateur de Schrödinger a intéressé de nombreux mathématiciens pour ses implications fondamentales. Nous sommes intéressés dans cette première partie de ma thèse de savoir si le spectre est absolument continu pour une espèce des opérateurs de type Schrödinger perturbés sur une partie du leur spectre essentiel, le demi axe réel positif, pour cela nous avons évoqué quelques résultats qui sont traités dans la littérature et après nous avons cité les améliorations que nous avons obtenues par rapport à ceux qui nous ont précédés.

Soit $H_0 = -\Delta = -\sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2$ est l'opérateur Laplacien positif sur $\mathbb{R}^d$. Soit $V_{l,r}, V_{s,r}$ deux fonctions telles qu'il existe $C > 0, r_0, r_1, r_2 > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|\langle x \rangle^{r_0} V_{l,r}(x)| \leq C, |\langle x \rangle^{1+r_1} \nabla V_{l,r}(x)| \leq C, |\langle x \rangle^{1+r_2} V_{s,r}(x)| \leq C, \quad (3.1.1.1)$$

on dit que $V_{l,r}$ est un potentiel à longue portée et $V_{s,r}$ est un potentiel à courte portée.

En utilisant des techniques des équations différentielles, en 1983 "Rejto et Deviatz" ont étudié sur $]0, \frac{k^2}{4}[$: $H_1 = -\Delta + V_{s,r} + q \frac{\sin(k|x|^\alpha)}{\langle x \rangle^\beta}$, où $q, k \in \mathbb{R}$ et α, β sont dans les régions noires suivantes :



Ensuite 1991 "Rejto et Moeckel et Devinatz" ont étudié sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{\frac{k^2}{4}\}$: $H'_1 = -\Delta + V_{s,r} + q \frac{\sin(k|x|)}{\langle x \rangle}$, et en 1997 "Rejto et Taboada" ont étudié sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{\frac{k^2}{4}\}$: $H''_1 = -\Delta + V_{s,r} + q \frac{\sin(k|x|)}{\langle x \rangle^\beta}$, où $2/3 < \beta \leq 1$. Dans ces différents travaux, il ne savent traiter que des potentiels $V_{l,r}$ radiaux. Il y a dans la littérature [C],[CG] des résultats qui traitent $-\Delta + \mu(\nabla V_{s,r})$.

Eric Mourre a développé un outil puissant pour montrer le caractère purement absolument continu du spectre d'un opérateur auto-adjoint en se basant sur la théorie des commutateurs, en particulier on peut l'appliquer sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ pour $H_1 = -\Delta + V_{s,r} + V_{l,r}$. En 2013 Jecko et Golénia ont étudié sur $]0, \frac{k^2}{4}[$: $H_1 = -\Delta + V_{s,r} + V_{l,r} + q \frac{\sin(k|x|)}{\langle x \rangle}$ avec un autre démarche que celui de Mourre qui ne s'applique pas dans ce cadre à cause d'une hypothèse de régularité qui n'est pas remplie.

3.1.2 Objectif

Notons par

$$\begin{aligned} H &= H_0 + V_{l,r} + W_{1,\beta} \\ &= -\Delta + V_{l,r} + q \frac{\sin(k|x|)}{\langle x \rangle^\beta}, \quad \beta > 0. \end{aligned}$$

Notre objectif dans ce chapitre est d'avoir le théorème d'absorption limite (TAL) pour l'opérateur de Schrödinger perturbé par des potentiels à longue portée, à courte portée, et de type Wigner-Von Neumann et améliorer les résultats qui existent dans la littérature.

3.1.3 Plan

Nous avons procédé de la manière suivante : En premier lieu, nous avons fait la démonstration de l'estimation de Mourre en utilisant quelques résultats utilisés dans l'article [GJ2], en deuxième lieu, en adaptant un théorème de Froese-Herbst qui montre la régularité des éventuelles vecteurs propres d'énergie positive et cela nous permet de retrouver le théorème de Viriel qui donne la locale finitude du spectre

ponctuel alors qu'on a pas la régularité suffisante de l'opérateur de Schrödinger par rapport à l'opérateur de dilatation pour appliquer le théorème de Viriel. On améliore aussi un résultat de [GJ2], et enfin en s'inspirant de [GJ] on démontre le théorème d'absorption limite pour notre opérateur avec la caractérisation par les suites spéciales.

3.1.4 Remarques

Remarque 3.1.1 *Dans le cas où $\alpha > 1$, nous sommes arrivés dans [JM] à montrer le théorème d'absorption limite pour H sur $]0, k^2/4[$: nous avons utilisé essentiellement le résultat suivant : pour tout $p > 0$ on a $\langle x \rangle^p \sin(k|x|^\alpha) \theta(H_0)$ est compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.*

Remarque 3.1.2 *Nous ne pouvons pas écrire le terme d'oscillation sous la forme $\mu \cdot (\nabla V_{s,r})$, où μ est une constante de $\mathbb{R}^d$ et $V_{s,r}$ est donné comme dans (3.1.1.1). Nous avons fait ça au moins en dimension une dans (3.4.9), les résultats de [CG] ne s'applique donc pas ici.*

3.2 Estimation de Mourre sur $]0, \frac{k^2}{4}[$

Soit A l'opérateur de dilatation défini par $A = \frac{1}{2i}(Q \cdot \nabla + \nabla \cdot Q)$. Soit

$$C_{1,\beta} = -x \cdot \nabla V_{l,r} + W_{1,\beta} x \cdot \nabla - \nabla \cdot x W_{1,\beta} + dW_{1,\beta}$$

est une forme quadratique bien définie sur $(\mathcal{D}(\langle Q \rangle^{\frac{1-\beta}{2}}) \cap \mathbf{H}^1)^2$. Soit $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est à support petit dans $]0, \frac{k^2}{4}[$, et β tel que $\beta + \inf(\beta, r_0) > 1$.

$-2\Delta + C_{1,\beta}$ est une forme quadratique bien défini sur $(\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H))^2$, de plus on a

$$[H, iA] = -2\Delta + C_{1,\beta} \quad \text{sur } (\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H))^2.$$

Théorème 3.2.1 *Sous les mêmes hypothèses sur β et θ . On a $\theta(H_0)C_{1,\beta}\theta(H_0)$ s'étend vers une forme quadratique bornée sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)^2$. Ils existent $c > 0$ et K un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)^2$ tels que*

$$\theta(H_0)(-2\Delta + C_{1,\beta})\theta(H_0) \geq c \theta(H_0)^2 + K.$$

Remarque 3.2.2 *cette dernière inégalité d'opérateurs est une inégalité du type de l'estimation de Mourre.*

L'objectif de cette première partie est de montrer le théorème 3.2.1.

Lemme 3.2.3 [GJ2] *Soit $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, est à support petit dans $]0, k^2/4[$. $\theta(H_0) \sin(k|Q|)\theta(H_0)$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.*

Lemme 3.2.4 *Soit $s > 0$ et $0 \leq s' < 1$. Soit $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. $\theta(H_0)\langle x \rangle^{-s}, [\theta(H_0), \langle x \rangle^{s'}]$ et $[x_j^{s'}, \theta(H_0)]$ sont des opérateurs compacts sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve : Pour $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, d'une part on a $\theta(|\xi|^2) \in S(\langle \xi \rangle^{-\infty}, g)$ et $\langle x \rangle^{-s} \in \mathcal{S}(\langle x \rangle^{-s}, g)$ alors d'après la paragraphe 2.2 dans [GJ2] on a $\theta(|\xi|^2)\langle x \rangle^{-s} \in S(\langle \xi \rangle^{-\infty}\langle x \rangle^{-s}, g)$, d'autre part on a

$$\begin{aligned} [\theta(H_0), \langle x \rangle^{s'}] &= [\{\theta(|\xi|^2)\}^w, \{\langle x \rangle^{s'}\}^w] \\ &= \{\theta(|\xi|^2), \langle x \rangle^{s'}\}^w + a_0^w(x, \xi) \end{aligned}$$

où $\{\theta(|\xi|^2), \langle x \rangle^{s'}\} = \partial_\xi \theta(|\xi|^2) \partial_x \langle x \rangle^{s'} - \partial_x \theta(|\xi|^2) \partial_\xi \langle x \rangle^{s'}$ est le crochet de Poisson, qui est dans $S(\langle \xi \rangle^{-\infty}\langle x \rangle^{s'-1}, g)$ et $a_0(x, \xi) \in S(\langle \xi \rangle^{-\infty}\langle x \rangle^{s'-2}, g)$. En utilisant de nouveau la paragraphe 2.2 dans [GJ] on en déduit que $\theta(H_0)\langle x \rangle^{-s}, [\theta(H_0), \langle x \rangle^{s'}]$ sont des opérateurs compacts sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Par le même argument $[\theta(H_0), \langle x \rangle^{s'}]$, on montre que $[x_j^{s'}, \theta(H_0)]$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$. ■

Lemme 3.2.5 *Soit K est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$. La famille des opérateurs $(K\langle\eta x\rangle^{-1})_{\eta>0}$ converge en norme $\mathcal{B}(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d))$ vers l'opérateur K lorsque η tend vers 0.*

Preuve : Puisque

$$\begin{aligned} \varphi_\eta : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\longmapsto \varphi_\eta(t) = \frac{1}{(1+\eta^2 t^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$(\varphi_\eta)_\eta$ est une famille des fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}$, $\lim_{\eta \rightarrow 0} \varphi_\eta(t) = 1$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\sup_{\eta, t \in \mathbb{R}} |\varphi_\eta(t)| < 1$ alors

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \varphi_\eta(Q) = Id$$

aux sens de la convergence forte d'opérateurs, et par suite on obtient que $K\varphi_\eta(Q)$ converge en norme vers K . $\blacksquare$

Proposition 3.2.6 *Soit $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est à support petit dans $]0, \frac{k^2}{4}[$ et $\beta > \frac{1}{2}$. $\theta(H_0)(-2\Delta + C_{1,\beta})\theta(H_0)$ s'étend à une forme quadratique bornée sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)^2$. Il existe une constante $c > 0$ et un opérateur compact K sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ tels que*

$$\theta(H_0)(-2\Delta + C_{1,\beta})\theta(H_0) \geq c \theta(H_0)^2 + K.$$

Preuve : Posons, pour $\eta > 0$,

$$C_{1,\beta}(\eta) = -x \cdot \nabla V_{l,r} + W_{1,\beta} \frac{x}{\langle \eta x \rangle} \cdot \nabla - \nabla \cdot \frac{x}{\langle \eta x \rangle} W_{1,\beta} + dW_{1,\beta}.$$

Montrons tout d'abord que

$$\left(\theta(H_0) W_{1,\beta} \frac{x}{\langle \eta x \rangle} \cdot \nabla \theta(H_0) \right)_{\eta>0}$$

est une famille d'opérateurs compacts sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et qu'elle converge en norme lorsque η tend vers 0.

Soit χ telle que $\chi\theta = \theta$,

$$\begin{aligned} \theta(H_0) W_{1,\beta} \frac{x}{\langle \eta x \rangle} \cdot \nabla \theta(H_0) &= \theta(H_0) \sin(k|x|) \theta(H_0) \frac{x}{\langle \eta x \rangle \langle x \rangle^\beta} \cdot \nabla \chi(H_0) \\ &\quad + \theta(H_0) \sin(k|x|) \left[\frac{x}{\langle \eta x \rangle \langle x \rangle^\beta}, \theta(H_0) \right] \cdot \nabla \chi(H_0) \end{aligned}$$

Or

$$\left[\frac{x}{\langle \eta x \rangle \langle x \rangle^\beta}, \theta(H_0) \right] = x \left[\frac{1}{\langle \eta x \rangle \langle x \rangle^\beta}, \theta(H_0) \right] + [x, \theta(H_0)] \frac{1}{\langle \eta x \rangle \langle x \rangle^\beta}.$$

D'après (4.6) du Lemme 4.3 de [GJ], $\theta(H_0) \sin(k|x|) \theta(H_0) \langle x \rangle$ est borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et le lemme (3.2.4) nous donne que

$$\left(\frac{\langle x \rangle^{-1} x}{\langle x \rangle^\beta \langle \eta x \rangle} \cdot \nabla \chi(H_0) \right)_{\eta>0}$$

est une famille d'opérateurs compacts sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et d'après le Lemme 3.2.5 convergent en norme lorsque η tend vers 0 alors l'opérateur limite est compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

De même par le Lemme 3.2.4 $\langle x \rangle^\beta [x, \theta(H_0)] \frac{1}{\langle \eta x \rangle \langle x \rangle^\beta}$ est un opérateur borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et $\langle x \rangle^{-\beta} \theta(H_0)$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et on conclut de la même façon que la famille des opérateurs

$$\left([x, \theta(H_0)] \frac{1}{\langle \eta x \rangle \langle x \rangle^\beta} \cdot \nabla \chi(H_0) \right)_{\eta > 0}$$

a un opérateur limite compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ quand η tend vers 0.

Étudions maintenant

$$\left[\frac{1}{\langle \eta x \rangle \langle x \rangle^\beta}, \theta(H_0) \right]$$

. Le Lemme 3.2.4 nous donne que $\theta(H_0) \langle x \rangle^{-\frac{\beta}{2}}$ est un opérateur compact, il nous reste à démontrer que

$$\left(\langle x \rangle^{1+\frac{\beta}{2}} \left[\frac{1}{\langle \eta x \rangle \langle x \rangle^\beta}, \theta(H_0) \right] \right)_{\eta > 0}$$

est une famille des opérateurs bornés sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Soit $B = \theta(H_0)$, $A = \langle Q \rangle$, $\varphi_\eta(t) = \frac{1}{(1-\eta^2+\eta^2 t^2)^{\frac{1}{2}} t^\beta} \chi(t)$, où $\chi(t) = 1, t > \frac{1}{2}$ et $\chi(t) = 0, 0 < t < \frac{1}{3}$ et $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

$\theta(H_0)$ est un opérateur borné, $\theta(H_0) \in \mathbf{C}^\infty(\langle Q \rangle)$.

Appliquant la proposition 2.6 dans [GJ], avec $\rho = -\beta, k = 1$ et pour tout η , $\varphi_\eta \in \mathbf{S}^{-\beta}$.

$$\left[\varphi_\eta(A), B \right] = \frac{i}{2\pi} \int_C \partial_{\bar{z}} \varphi^C(z) (z - \langle Q \rangle)^{-1} [\langle Q \rangle, \theta(H_0)] (z - \langle Q \rangle)^{-1} dz \wedge d_{\bar{z}}$$

Or d'après le lemme 3.1 dans [JM] on a $\theta(H_0) \in \mathbf{C}^\infty(\langle Q \rangle)$, $[\langle Q \rangle, \theta(H_0)]$ est un opérateur borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, en utilisant maintenant la proposition 2.7 de [GJ] pour $s = 1 + \frac{\beta}{2} < 1 - (-\beta)$ on trouve que

$$\| \langle Q \rangle^{1+\frac{\beta}{2}} I_k(\varphi_\eta) \| \leq C \| ad_A^k(B) \|^k$$

avec C ne dépend pas de η et par suite on conclut par le même argument

$$\theta(H_0) \sin(k|x|) \left(\langle x \rangle \left[\frac{1}{\langle \eta x \rangle}, \theta(H_0) \right] \right)_{\eta > 0}$$

est une famille d'opérateurs compacts sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ converge vers un opérateur limite compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Nous concluons alors que

$$\left(\theta(H_0) W_{1,\beta} \frac{x}{\langle \eta x \rangle} \cdot \nabla \theta(H_0) \right)_{\eta > 0}$$

est une famille d'opérateurs compacts sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et qu'elle converge en norme lorsque η tend vers 0 vers l'opérateur limite est compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

En suivant le même démarche on montre que

$$\left(\theta(H_0) \nabla \cdot \frac{x}{\langle \eta x \rangle} W_{1,\beta} \theta(H_0) \right)_{\eta > 0}$$

est une famille des opérateurs compacts sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et converge en norme et alors que l'opérateur limite est compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

D'après ce qu'on a fait, pour toute $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \langle f, \theta(H_0) W_{1,\beta} \langle \eta x \rangle^{-1} x \cdot \nabla \theta(H_0) f \rangle = \langle f, K' f \rangle$$

où K' est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

D'autre part, si on prend $f \in \mathcal{D}(\langle Q \rangle^{1-\beta})$ par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \langle f, \theta(H_0) W_{1,\beta} \langle \eta x \rangle^{-1} x \cdot \nabla \theta(H_0) f \rangle = \langle f, \theta(H_0) W_{1,\beta} x \cdot \nabla \theta(H_0) f \rangle.$$

Comme $\mathcal{D}(\langle Q \rangle^{1-\beta})$ dense dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ donc $\theta(H_0) W_{1,\beta} x \cdot \nabla \theta(H_0)$ s'étend à une forme quadratique compact sur $L^2(\mathbb{R}^d)^2$. On refait le même raisonnement pour la famille d'opérateurs $(\theta(H_0) W_{1,\beta} \nabla \cdot x \langle \eta x \rangle^{-1} \theta(H_0))_{\eta > 0}$, et on obtient que $(\theta(H_0) W_{1,\beta} \nabla \cdot x \theta(H_0))$ s'étend à une forme quadratique compact sur $L^2(\mathbb{R}^d)^2$.

D'après le lemme 3.2.4 on a les opérateurs $\theta(H_0) \langle x \rangle^{-\beta}$ et $\theta(H_0) \langle x \rangle^{-r_1}$ sont compacts sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et $\langle x \rangle^{r_1} x \cdot \nabla V_{l,r}$, $\langle x \rangle^\beta W_{1,\beta}$ sont des opérateurs bornés sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et donc $x \cdot \nabla V_{l,r} \theta(H_0)$, $W_{1,\beta} \theta(H_0)$ sont des opérateurs compacts sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Nous concluons alors que $\theta(H_0) C_{1,\beta} \theta(H_0)$ s'étend à une forme quadratique compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)^2$.

D'autre part, puisque pour tout $t > 0$, $t \cdot \theta(t)^2$ est borné, par le calcul fonctionnel pour les opérateurs auto-adjoint on en déduit que $\theta(H_0)(-2\Delta)\theta(H_0)$ est un opérateur borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Nous concluons enfin que $\theta(H_0)(-2\Delta + C_{1,\beta})\theta(H_0)$ s'étend à une forme quadratique bornée sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)^2$.

En deuxième lieu, puisque pour tout $t > 0$, $t \cdot \theta(t)^2 \geq c \theta^2(t)$ où $c > 0$ est le minimum de support de θ car elle supporte loin de zéro et par suite en utilisant le calcul fonctionnel pour les opérateurs auto-adjoint on trouve que

$$\theta(H_0)(-2\Delta)\theta(H_0) \geq c \theta(H_0)^2, \quad (3.2.0.1)$$

et comme $\theta(H_0)C_{1,\beta}\theta(H_0)$ s'étend à une forme quadratique compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)^2$, on en déduit

$$\theta(H_0)(-2\Delta + C_{1,\beta})\theta(H_0) \geq c \theta(H_0)^2 + K.$$

■

Remarque : on peut redémontrer (3.2.0.1) modulo une erreur d'un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ en utilisant les techniques du calcul pseudo-différentiels.

Théorème 3.2.7 *Soit*

$$C_{1,\beta} = -x \cdot \nabla V_{l,r} + W_{1,\beta} x \cdot \nabla - \nabla \cdot x W_{1,\beta} + dW_{1,\beta}$$

est une forme quadratique bien définie sur $(\mathcal{D}(\langle Q \rangle^{\frac{1-\beta}{2}}) \cap \mathbf{H}^1)^2$, $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ supporté dans $]0, \frac{k^2}{4}[$ à support petit et β tel que $\beta + \inf(\beta, r_0) > 1$.

$\theta(H)C_{1,\beta}\theta(H)$ s'étend à une forme quadratique bornée sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)^2$.

Il existe une constante $c > 0$ et K_1 un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ tels que

$$\theta(H)(-\Delta + C_{1,\beta})\theta(H) \geq c \theta(H)^2 + K_1.$$

Preuve : Soit $\eta > 0$. on a

$$\begin{aligned} \theta(H)C_{1,\beta}(\eta)\theta(H) &= (\theta(H) - \theta(H_0))C_{1,\beta}(\eta)\theta(H_0) + \theta(H_0)C_{1,\beta}(\eta)(\theta(H) - \theta(H_0)) \\ &\quad + (\theta(H) - \theta(H_0))C_{1,\beta}(\eta)(\theta(H) - \theta(H_0)) + \theta(H_0)C_{1,\beta}(\eta)\theta(H_0) \end{aligned}$$

$$= B_{1,\eta} + B_{2,\eta} + B_{3,\eta} + B_{4,\eta}.$$

La proposition 3.2.6 nous montre qu'il existe une constante $c > 0$ et K un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ tels que

$$\theta(H_0)(-\Delta + C_{1,\beta})\theta(H_0) \geq c \theta(H_0)^2 + K$$

donc l'objectif de ce paragraphe est de montrer pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$ que $(B_{j,\eta})_{\eta>0}$ est une famille d'opérateurs compacts sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et converge en norme.

Étudions tout d'abord $(B_{1,\eta})_{\eta>0}$. D'après la formule de Helffer-Sjöstrand on a

$$\theta(H) - \theta(H_0) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z) (z - H_1)^{-1} (W_{1,\beta} + V_{l,r}) (z - H_0)^{-1} dz \wedge d\bar{z}. \quad (3.2.0.2)$$

où $\theta^{\mathbb{C}}$ est donné par 3.6.1 Or $(W_{1,\beta} + V_{l,r})\langle x \rangle^{\inf(r_0, \beta)}$ est un opérateur borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, d'après (2.8) de proposition 2.5 de [GJ] on peut majorer $[(z - H_0)^{-1}, \langle x \rangle^{\inf(r_0, \beta)}]$ par $C \langle \operatorname{Re}(z) \rangle |\operatorname{Im}(z)|^{-2}$ où $C > 0$, par suite en utilisant (3.6.1) et (3.2.0.2) on obtient que

$$(\theta(H) - \theta(H_0))\langle x \rangle^{\inf(r_0, \beta)}$$

est un opérateur borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Le Lemme 3.2.4 nous montre que $\langle x \rangle^{-inf(\beta, r_0)} H_0 \theta(H_0)$ et $\langle x \rangle^{-inf(\beta, r_1)} \theta(H_0)$ sont des opérateurs compacts sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ alors

$$(\theta(H) - \theta(H_0)) H_0 \theta(H_0), (\theta(H) - \theta(H_0)) x \cdot \nabla V_{l,r} \theta(H_0), (\theta(H) - \theta(H_0)) W_{1,\beta}$$

sont des opérateurs compacts sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, il suffit maintenant d'étudier la compacité des opérateurs limites des familles d'opérateurs

$$((\theta(H) - \theta(H_0)) \langle \eta x \rangle^{-1} \langle x \rangle^{-\beta} W_{1,\beta} x \cdot \nabla \theta(H_0))_{\eta > 0}$$

et

$$((\theta(H) - \theta(H_0)) \nabla \cdot W_{1,\beta} \langle \eta x \rangle^{-1} \langle x \rangle^{-\beta} x \theta(H_0))_{\eta > 0}$$

lorsque η tend vers 0.

Puisque $(\theta(H) - \theta(H_0)) \langle x \rangle^{inf(r_0, \beta)}$ et $\langle x \rangle^\beta W_{1,\beta}$ sont des opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Appliquons les lemmes (3.2.4) et (3.2.5) pour la famille d'opérateurs $(\langle x \rangle^{-inf(r_0, \beta) - \beta} \langle \eta x \rangle^{-1} x \cdot \nabla \theta(H_0))_{\eta > 0}$ sous l'hypothèse $\beta + inf(\beta, r_0) > 1$ on obtient que

$$((\theta(H) - \theta(H_0)) \langle \eta x \rangle^{-1} \langle x \rangle^{-\beta} W_{1,\beta} x \cdot \nabla \theta(H_0))_{\eta > 0}$$

est une famille d'opérateurs compacts sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et converge en norme lorsque η tend vers 0.

Le lemme (3.2.4) nous donne que $(\langle x \rangle^{-inf(r_0, \beta) - \beta} \langle \eta x \rangle^{-1} x \theta(H_0))_{\eta > 0}$ est une famille d'opérateurs compacts sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et converge en norme lorsque η tend vers 0 sous l'hypothèse $\beta + inf(\beta, r_0) > 1$, il suffit de montrer que $(\theta(H) - \theta(H_0)) \nabla \langle x \rangle^{inf(\beta, r_0)}$ est borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

D'après (2.8) de proposition 2.5 de [GJ], $(z - H_0)^{-1} \nabla$ est majoré par $C_1 \langle Re(z) \rangle |Im(z)|^{-1}$ où $C_1 > 0$ et $[(z - H_0)^{-1} \nabla, \langle x \rangle^{inf(\beta, r_0)}]$ est aussi majoré par $C_2 \langle Re(z) \rangle^2 |Im(z)|^{-2}$ où $C_2 > 0$ et par (3.6.1) et (3.2.0.2) on en déduit que $(\theta(H) - \theta(H_0)) \nabla \langle x \rangle^{inf(\beta, r_0)}$ est borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Le même démarche montre que $(B_{2,\eta})_{\eta > 0}$ est une famille d'opérateurs compacts sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et converge en norme et alors l'opérateur limite est compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Pour étudier $(B_{3,\eta})_{\eta > 0}$, il suffit d'étudier

$$((\theta(H) - \theta(H_0)) \langle \eta x \rangle^{-1} \langle x \rangle^{-\beta} W_{1,\beta} x \cdot \nabla (\theta(H) - \theta(H_0)))_{\eta > 0}. \quad (3.2.0.3)$$

Comme $(\theta(H) - \theta(H_0))$ est compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, $W_{1,\beta} \langle \eta x \rangle^{-1} \langle x \rangle^{-inf(\beta, r_0)} x$ est borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ sous l'hypothèse $\beta + inf(\beta, r_0) > 1$ et par suite on en déduit que (3.2.0.3) est une famille d'opérateurs compacts sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et converge en norme sous l'hypothèse $\beta + inf(\beta, r_0) > 1$ et alors l'opérateur limite est compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

D'où il existe une constante $c > 0$ et K'_1 un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ tels que

$$\theta(H) C_{1,\beta} \theta(H) \geq c \theta(H_0)^2 + K'_1.$$

Puisque $(\theta(H) - \theta(H_0))$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ donc

$$\begin{aligned} \theta(H)C_{1,\beta}\theta(H) &\geq c \theta(H_0)\theta(H) + c \theta(H_0)(\theta(H_0) - \theta(H)) + K'_1 \\ &= c \theta(H_0)\theta(H) + K'_2 \\ &\geq c \theta(H)^2 + c (\theta(H_0) - \theta(H))\theta(H) + K'_2 \\ &\geq c \theta(H)^2 + K_1 \end{aligned}$$

où K_1, K'_1 et K'_2 sont des opérateurs compacts sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$. On conclut finalement l'inégalité de Mourre . ■

3.3 Étude des éventuels vecteurs propres de H dont les valeurs propres associées appartiennent à $]0, \frac{k^2}{4}[$

L'objectif de ce deuxième paragraphe est de montrer tout d'abord qu'un vecteur propre de l'opérateur H est dans $\mathcal{D}(A)$ où $A = \frac{x \cdot \nabla + \nabla \cdot x}{2i}$ et en deuxième étape on va montrer que les valeurs propres de H dans $I \subset]0, \frac{k^2}{4}[$ sont de multiplicité finie. Nous avons suivi le raisonnement de l'article de Froese-Herbst même si le cadre est un peu différent.

Soit $\rho(x) = (1 + |x|^2)^{1/2}$. Pour $\epsilon > 0$ et $\lambda > 0$ soit

$$F(x) = \lambda \ln(\rho(1 + \epsilon\rho)^{-1}).$$

Par un calcul explicite on montre que

$$\nabla F(x) = \lambda \frac{(1 + \epsilon\rho)}{\rho} \nabla \left(\frac{\rho}{1 + \epsilon\rho} \right) = \lambda \frac{(1 + \epsilon\rho)}{\rho} \frac{(1 + \epsilon\rho)x/\rho - \rho\epsilon x/\rho}{(1 + \epsilon\rho)^2} = \frac{\lambda x}{\rho^2(1 + \epsilon\rho)} = xg(x)$$

alors

$$(\nabla F)^2 = \lambda^2(1 - \rho^{-2})\rho^{-2}(1 + \epsilon\rho)^{-2}$$

par suite $|\nabla F| \leq \lambda\rho^{-1}$.

Le troisième résultat du lemme suivant (3.3.1) rassemble à celui de Froese-Herbst, mais à cause de la mauvaise régularité de notre opérateur H par rapport à A on ne peut pas définir $\langle \psi_F, [H, iA]\psi_F \rangle$. C'est pour cela que nous avons introduit la notion de la limite, par contre les deux premières résultats sont dans [FH].

Lemme 3.3.1

Soit $\psi \in \mathbf{H}^2$ tel que $H(\psi) = E\psi$. Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ avec $\chi = 1$ proche de 0 et, pour $m > 0$, soit $\chi_m(x) = \chi(x/m)$. Soit $\psi_F = \exp(F)\psi$ et on définit l'opérateur

$$H(F) := H - (\nabla F)^2 + iP \cdot \nabla F + \nabla F \cdot iP; \quad \mathcal{D}(H(F)) = \mathbf{H}^2 \quad (3.3.0.4)$$

Alors $\psi_F \in \mathbf{H}^2$ et

$$H(F)\psi_F = E\psi_F,$$

$$\langle \psi_F, H\psi_F \rangle = \langle \psi_F, ((\nabla F)^2 + E)\psi_F \rangle,$$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \langle \chi_m(Q)\psi_F, [H, iA]\chi_m(Q)\psi_F \rangle &= -4\|g^{\frac{1}{2}}(Q)A\psi_F\|^2 \\ &\quad + \langle \psi_F, \{(x \cdot \nabla)^2 g - x \cdot \nabla (\nabla F)^2\}\psi_F \rangle \end{aligned}$$

3.3. ÉTUDE DES ÉVENTUELS VECTEURS PROPRES DE H DONT LES VALEURS PROPRES ASSOCIÉES APPARTIENNENT À $]0, \frac{K^2}{4}]$ 36

Preuve :

Soit $\psi \in \mathbf{H}^2$ tel que $H(\psi) = E\psi$. Soit $H(F) := H - (\nabla F)^2 + iP \cdot \nabla F + \nabla F \cdot iP$. $H(F)$ est défini sur $\mathcal{D}(H(F)) = \mathcal{D}(H_0) = \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^d)$. On a $\psi_F \in \mathcal{D}(H_0)$ et

$$\begin{aligned}
 H(F)\psi_F &= (H - (\nabla F(Q))^2 + iP \cdot \nabla F + \nabla F \cdot iP)e^F \psi \\
 &= (-\Delta + V - (\nabla F(Q))^2 + iP \cdot \nabla F + \nabla F \cdot iP)e^F \psi \\
 &= (-\Delta F)\psi_F - |\nabla F(Q)|^2 \psi_F + 2P(F)e^F P\psi + e^F(-\Delta)\psi \\
 &\quad + V\psi_F - |\nabla F(Q)|^2 \psi_F + (\Delta F)\psi_F + |\nabla F(Q)|^2 \psi_F + i\nabla F e^F P\psi \\
 &\quad + |\nabla F(Q)|^2 \psi_F + i\nabla F e^F P\psi \\
 &= e^F(-\Delta\psi + V\psi) = e^F(-\Delta + V)\psi \\
 &= e^F H\psi \\
 &= e^F E\psi \\
 &= E\psi_F.
 \end{aligned}$$

Ou aussi on peut voir que $H(F) = e^{F(Q)} H e^{-F(Q)}$, et alors

$$H(F)\psi_F = e^{F(Q)} H e^{-F(Q)} e^{F(Q)} \psi = e^{F(Q)} H \psi = e^{F(Q)} E \psi = E \psi_F.$$

D'autre part, comme $H(F)\psi_F = E\psi_F$, alors

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_F, H(F)\psi_F \rangle &= E \|\psi_F\|^2 \\
 &= \operatorname{Re} \langle \psi_F, H(F)\psi_F \rangle \\
 &= \langle \psi_F, (H - |\nabla F(Q)|^2) \psi_F \rangle
 \end{aligned}$$

et par suite on conclut que

$$\langle \psi_F, H\psi_F \rangle = \langle \psi_F, ((\nabla F(Q))^2 + E)\psi_F \rangle.$$

Notons que $\chi_m(Q)\psi_F \in \mathcal{D}(\langle Q \rangle \langle P \rangle)$. Le terme $\langle \chi_m(Q)\psi_F, [H, iA]\chi_m(Q)\psi_F \rangle$ est bien défini et on va montrer que

$$\begin{aligned}
 2\operatorname{Re} \langle A\chi_m(Q)\psi_F, i((H(F) - E)\chi_m(Q)\psi_F) \rangle &= -\langle \chi_m(Q)\psi_F, [H, iA]\chi_m(Q)\psi_F \rangle \\
 &\quad - 4\|g(Q)^{1/2} A\chi_m(Q)\psi_F\|^2 \\
 &\quad + \langle \chi_m(Q)\psi_F, G(Q)\chi_m(Q)\psi_F \rangle,
 \end{aligned}$$

où $G(x) = ((x \cdot \nabla)^2 g)(x) - (x \cdot \nabla |\nabla F|^2)(x)$. En effet, soit I_m définie par

$I_m := \langle \chi_m(Q)\psi_F, [H, iA]\chi_m(Q)\psi_F \rangle$. On a

$$I_m = \langle H\chi_m(Q)\psi_F, iA\chi_m(Q)\psi_F \rangle - \langle A\chi_m(Q)\psi_F, iH\chi_m(Q)\psi_F \rangle,$$

d'après (3.3.0.4) on trouve que

$$\begin{aligned}
 I_m &= \langle (H(F) + |\nabla F|^2 - (P \cdot i\nabla F + iP \cdot \nabla F))\chi_m(Q)\psi_F, iA\chi_m(Q)\psi_F \rangle \\
 &\quad - \langle A\chi_m(Q)\psi_F, i(H(F) + |\nabla F|^2 - (P \cdot i\nabla F + iP \cdot \nabla F))\chi_m(Q)\psi_F \rangle,
 \end{aligned}$$

on obtient donc que

$$\begin{aligned}
 I_m &= 2\operatorname{Re} \langle A\chi_m(Q)\psi_F, i((H(F) - E)\chi_m(Q)\psi_F) \rangle \\
 &\quad - \langle \chi_m(Q)\psi_F, (Q \cdot \nabla (|\nabla F|^2))\chi_m(Q)\psi_F \rangle \\
 &\quad - \langle (P \cdot \nabla F + \nabla F \cdot P)\chi_m(Q)\psi_F, A\chi_m(Q)\psi_F \rangle \\
 &\quad - \langle A\chi_m(Q)\psi_F, (P \cdot \nabla F + \nabla F \cdot P)\chi_m(Q)\psi_F \rangle,
 \end{aligned}$$

3.3. ÉTUDE DES ÉVENTUELS VECTEURS PROPRES DE H DONT LES VALEURS PROPRES ASSOCIÉES APPARTIENNENT À $]0, \frac{K^2}{4}]$ 37

comme $([P, g].Q + 2gA) = P.\nabla F + \nabla F.P$, on en déduit que

$$I_m = 2Re\langle A\chi_m(Q)\psi_F, i((H(F) - E)\chi_m(Q)\psi_F) - \langle \chi_m(Q)\psi_F, (Q.\nabla(|\nabla F|^2))\chi_m(Q)\psi_F \rangle - \langle ([p, g].Q + g2A)\chi_m(Q)\psi_F, A\chi_m(Q)\psi_F \rangle - \langle A\chi_m(Q)\psi_F, ([p, g].Q + g2A)\chi_m(Q)\psi_F \rangle$$

en développant le commutateur $[p, g]$ on obtient

$$\begin{aligned} I_m &= 2Re\langle A\chi_m(Q)\psi_F, i((H(F) - E)\chi_m(Q)\psi_F) - \langle \chi_m(Q)\psi_F, (Q.\nabla(|\nabla F|^2))\chi_m(Q)\psi_F \rangle \\ &\quad - 4\langle A\chi_m(Q)\psi_F, gA\chi_m(Q)\psi_F \rangle - \langle -i(Q.\nabla g)\chi_m(Q)\psi_F, A\chi_m(Q)\psi_F \rangle, \\ &\quad - \langle A\chi_m(Q)\psi_F, -i(Q.\nabla g)\chi_m(Q)\psi_F \rangle, \\ &= 2Re\langle A\chi_m(Q)\psi_F, i((H(F) - E)\chi_m(Q)\psi_F) - \langle \chi_m(Q)\psi_F, (Q.\nabla(|\nabla F|^2))\chi_m(Q)\psi_F \rangle \\ &\quad - 4\langle A\chi_m(Q)\psi_F, gA\chi_m(Q)\psi_F \rangle - i\langle A(Q.\nabla g)\chi_m(Q)\psi_F, \chi_m(Q)\psi_F \rangle \\ &\quad + i\langle A\chi_m(Q)\psi_F, (Q.\nabla g)\chi_m(Q)\psi_F \rangle, \end{aligned}$$

dans les deux derniers termes on constate la formule de commutateur de $[A, Q.\nabla g]$ on trouve

$$I_m = 2Re\langle A\chi_m(Q)\psi_F, i((H(F) - E)\chi_m(Q)\psi_F) - \langle \chi_m(Q)\psi_F, (Q.\nabla(|\nabla F|^2))\chi_m(Q)\psi_F \rangle - 4\langle A\chi_m(Q)\psi_F, gA\chi_m(Q)\psi_F \rangle - i\langle [A, Q.\nabla g]\chi_m(Q)\psi_F, \chi_m(Q)\psi_F \rangle,$$

donc on a

$$I_m = 2Re\langle A\chi_m(Q)\psi_F, i((H(F) - E)\chi_m(Q)\psi_F) - \langle \chi_m(Q)\psi_F, (Q.\nabla(|\nabla F|^2))\chi_m(Q)\psi_F \rangle - 4\langle A\chi_m(Q)\psi_F, gA\chi_m(Q)\psi_F \rangle + \langle \chi_m(Q)\psi_F, ((Q.\nabla)^2 g)\chi_m(Q)\psi_F \rangle,$$

par suite on trouve que

$$I_m = -2Re\langle A\chi_m(Q)\psi_F, i((H(F) - E)\chi_m(Q)\psi_F) - 4\|g(Q)^{1/2}A\chi_m(Q)\psi_F\|^2 + \langle \chi_m(Q)\psi_F, G(Q)\chi_m(Q)\psi_F \rangle.$$

3.3. ÉTUDE DES ÉVENTUELS VECTEURS PROPRES DE H DONT LES VALEURS PROPRES ASSOCIÉES APPARTIENNENT À $]0, \frac{K^2}{4}]$ **38**

Comme $H(F)\psi_F = E\psi_F$, on peut déduire que

$$2\operatorname{Re}\langle A\chi_m(Q)\psi_F, i((H(F) - E)\chi_m(Q)\psi_F) \rangle = 2\operatorname{Re}\langle A\chi_m(Q)\psi_F, i[H(F), \chi_m(Q)]\psi_F \rangle.$$

Puisque $x.\nabla\chi_m(x) = O(1)$ uniformément, et converge ponctuellement vers 0, quand $m \rightarrow +\infty$, en appliquant le théorème de la convergence dominée, on trouve $\lim_{m \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}\langle A\chi_m(Q)\psi_F, i[H(F), \chi_m(Q)]\psi_F \rangle = 0$. En passant à la limite dans (3.3) lorsque m tend vers $+\infty$, on trouve que la limite $\lim_{m \rightarrow +\infty} \langle \chi_m(Q)\psi_F, [H, iA]\chi_m(Q)\psi_F \rangle$ existe et on a (3.3.1).

■

Lemme 3.3.2 Soit $\psi_\epsilon = e^F \frac{\psi}{\|\psi_F\|}$. La famille $(\langle Q \rangle(1 - \theta(H))\psi_\epsilon)_{0 < \epsilon < 1}$ est bornée sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Preuve : Comme ψ est un vecteur propre de H associée à E , et $\theta(E) = 1$ alors

$$\begin{aligned} (1 - \theta(H))e^F \frac{\psi}{\|\psi_F\|} &= [1 - \theta(H), e^F] \frac{\psi}{\|\psi_F\|} + e^F(1 - \theta(H)) \frac{\psi}{\|\psi_F\|} \\ &= [1 - \theta(H), e^F] \frac{\psi}{\|\psi_F\|} \\ &= [1 - \theta(H), e^F] e^{-F} \psi_\epsilon = [1 - \theta(H), e^F] \left(\frac{\langle x \rangle}{1 + \epsilon \langle x \rangle} \right)^{-\lambda} \psi_\epsilon \\ &= [\theta(H), \left(\frac{\langle x \rangle}{1 + \epsilon \langle x \rangle} \right)^\lambda] \left(\frac{\langle x \rangle}{1 + \epsilon \langle x \rangle} \right)^{-\lambda} \psi_\epsilon \end{aligned}$$

Soit $\varphi_\epsilon(t) = \left(\frac{t}{1 + \epsilon t} \right)^\lambda$. La famille $(\varphi_\epsilon)_{0 < \epsilon < 1}$ est bornée dans S^λ , en effet, pour $k \in \mathbb{N}$, $0 < \epsilon < 1$, $\lambda > 0$, on a

$$\begin{aligned} \langle t \rangle^{k-\lambda} \partial^k \varphi(t) &= \sum_{j=0}^k \langle t \rangle^{k-\lambda} C_k^j \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+j+1) t^{\lambda-k+j} \\ &\quad (-\lambda)(-\lambda-1)\dots(-\lambda-j+1)(1+\epsilon t)^{-\lambda-j} \epsilon^j \\ &= \sum_{j=0}^k C_{j,k,\lambda} (\epsilon t)^j (1+\epsilon t)^{-j} t^{\lambda-k} \langle t \rangle^{k-\lambda} (1+\epsilon t)^{-\lambda} \\ &= \sum_{j=0}^k C_{j,k,\lambda} (t \langle t \rangle^{-1})^{k-\lambda} \left(\frac{\epsilon t}{1+\epsilon t} \right)^j \frac{1}{(1+\epsilon t)^\lambda} \\ &\leq C_{k,\lambda} \end{aligned} \tag{3.3.0.5}$$

où $C_{j,k,\lambda}$ et $C_{k,\lambda}$ des constantes ne dépendent que de j, k, λ ce qui prouve le résultat. En plus, pour $g_{k,\epsilon}$ donnée par

$$g_{k,\epsilon} : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto g_{k,\epsilon}(t) = t \frac{\varphi_\epsilon^{(k)}(t)}{\varphi_\epsilon(t)}$$

$$\begin{aligned} g_{k,\epsilon}(t) &= t \sum_{j=0}^k C_{j,k,\lambda} (\epsilon t)^j (1+\epsilon t)^{-j} t^{\lambda-k} (1+\epsilon t)^{-\lambda} \left(\frac{1+\epsilon t}{t} \right)^\lambda \\ &= \sum_{j=0}^k C_{j,k,\lambda} \left(\frac{\epsilon t}{1+\epsilon t} \right)^j t^{\lambda-k+1} \\ &\leq C_{\lambda,k}^1 \end{aligned} \tag{3.3.0.6}$$

donc $(g_{k,\epsilon})_{0 < \epsilon < 1}$ est bornée dans $\mathcal{L}^\infty$.

3.3. ÉTUDE DES ÉVENTUELS VECTEURS PROPRES DE H DONT LES VALEURS PROPRES ASSOCIÉES APPARTIENNENT À $]0, \frac{K^2}{4}]$ 39

Soit $B = \theta(H)$ et $A = \langle Q \rangle$, $\varphi(t) = (\frac{t}{1+\epsilon t})^\lambda$. Comme dans la proposition (2.6) dans [GJ2], pour $k > \lambda + 1$ on a,

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle [\theta(H), (\frac{\langle Q \rangle}{1+\epsilon \langle Q \rangle})^\lambda] (\frac{\langle Q \rangle}{1+\epsilon \langle Q \rangle})^{-\lambda} &= \sum_{j=1}^k \langle Q \rangle ad_B^j(\langle Q \rangle) \varphi^j(\langle Q \rangle) (\frac{1}{\varphi})(\langle Q \rangle) \\ &\quad + \langle Q \rangle I_2(\varphi) (\frac{1}{\varphi})(\langle Q \rangle) \\ &= \sum_{j=1}^k \langle Q \rangle ad_B^j(\langle Q \rangle) \langle Q \rangle^{-1} \langle Q \rangle \varphi^j(\langle Q \rangle) (\frac{1}{\varphi})(\langle Q \rangle) \\ &\quad + \langle Q \rangle I_2(\varphi) (\frac{1}{\varphi})(\langle Q \rangle) \\ &= \sum_{j=1}^k \langle Q \rangle ad_B^j(\langle Q \rangle) \langle Q \rangle^{-1} g_j(\langle Q \rangle) \\ &\quad + \langle Q \rangle I_2(\varphi) (\frac{1}{\varphi})(\langle Q \rangle). \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.1 de [JM] on a $H \in \mathcal{C}^\infty(\langle Q \rangle)$ alors pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a $\langle Q \rangle ad_B^j(\langle Q \rangle) \langle Q \rangle^{-1}$, et d'après (3.3.0.6), $g_j(\langle Q \rangle)$ sont bornés sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ indépendamment de ϵ , alors

$\sum_{j=1}^k \langle Q \rangle ad_B^j(\langle Q \rangle) \langle Q \rangle^{-1} g_j(\langle Q \rangle)$ bornés sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ indépendamment de ϵ .

Il nous reste qu'à étudier $\langle Q \rangle I_2(\varphi) (\frac{1}{\varphi})(\langle Q \rangle)$. D'après la proposition (2.7) de [GJ2] avec $s = 1, s' = 0, \lambda + 1 < k$, $\langle Q \rangle I_2(\varphi)$, et $\frac{1}{\varphi}(\langle Q \rangle)$ sont bornés indépendamment de ϵ sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$. On conclut alors que $\langle Q \rangle (1 - \theta(H)) \psi_\epsilon$ est borné indépendamment de ϵ sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$. ■

Lemme 3.3.3

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \langle \chi_m(Q) \psi_F, [H, iA] \chi_m(Q) \psi_F \rangle &= \langle \theta(H) \psi_F, [H, iA] \theta(H) \psi_F \rangle \\ &\quad + \langle \psi_F, (K_1 B_{1,\epsilon} + B_{2,\epsilon} K_2) \psi_F \rangle, \end{aligned}$$

où sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, K_1, K_2 sont des opérateurs compacts indépendants de ϵ , et $B_{1,\epsilon}, B_{2,\epsilon}$ sont des opérateurs bornés satisfont $\|B_{1,\epsilon}\| + \|B_{2,\epsilon}\| = O(\epsilon^0)$.

Preuve : Pour chaque m on a

$$\begin{aligned} \langle \chi_m(Q) \psi_F, [H, iA] \chi_m(Q) \psi_F \rangle &= \langle \theta(H) \chi_m(Q) \psi_F, [H, iA] \theta(H) \chi_m(Q) \psi_F \rangle \\ &\quad + \langle (1 - \theta(H)) \chi_m(Q) \psi_F, [H, iA] \theta(H) \chi_m(Q) \psi_F \rangle \\ &\quad + \langle \theta(H) \chi_m(Q) \psi_F, [H, iA] (1 - \theta(H)) \chi_m(Q) \psi_F \rangle \\ &\quad + \langle (1 - \theta(H)) \chi_m(Q) \psi_F, [H, iA] (1 - \theta(H)) \chi_m(Q) \psi_F \rangle. \end{aligned}$$

Puisque $(1 - \theta(H)) \psi = 0$, alors

$$\begin{aligned} (1 - \theta(H)) \chi_m(Q) \psi_F &= -[\theta(H), \chi_m(Q)] \psi_F - \chi_m(Q) [\theta(H), e^{F(Q)}] \psi \\ p(1 - \theta(H)) \chi_m(Q) \psi_F &= -p[\theta(H), \chi_m(Q)] \psi_F - [p, \chi_m(Q)] [\theta(H), e^{F(Q)}] \psi \\ &\quad - \chi_m(Q) p[\theta(H), e^{F(Q)}] \psi \end{aligned}$$

et d'après (3.3.2) on a $\langle Q \rangle (1 - \theta(H)) \psi_\epsilon$ est borné, et $\|\langle Q \rangle [\theta(H), \chi_m(Q)]\| = O(1)$ nous obtenons, en utilisant (3.3) que

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \langle \theta(H) \chi_m(Q) \psi_F, p Q W_{\alpha,\beta} (1 - \theta(H)) \chi_m(Q) \psi_F \rangle \\ = -\langle K \psi_F, W_{\alpha,\beta} \langle Q \rangle^\beta Q \langle Q \rangle^{-\beta/2} [\theta(H), e^{F(Q)}] e^{-F(Q)} \psi_F \rangle, \end{aligned}$$

où K est un vecteur d'opérateurs compacts et l'opérateur borné qu'il agit sur ψ_F à droite est uniformément borné par rapport à ϵ . Similaire, en utilisant toujours (3.3),

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \langle \theta(H) \chi_m(Q) \psi_F, W_{\alpha,\beta} Q p (1 - \theta(H)) \chi_m(Q) \psi_F \rangle \\ = -\langle K' \psi_F, W_{\alpha,\beta} \langle Q \rangle^\beta Q \langle Q \rangle^{-\beta/2} p [\theta(H), e^{F(Q)}] e^{-F(Q)} \psi_F \rangle, \end{aligned}$$

3.3. ÉTUDE DES ÉVENTUELS VECTEURS PROPRES DE H DONT LES VALEURS PROPRES ASSOCIÉES APPARTIENNENT À $]0, \frac{K^2}{4}]$

avec K est un vecteur d'opérateurs compacts et l'opérateur borné qu'il agit sur ψ_F à droite est uniformément borné. De nouveau en utilisant (3.3) nous trouvons aussi

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} & \langle (1 - \theta(H))\chi_m(Q)\psi_F, W_{\alpha,\beta}Q.p(1 - \theta(H))\chi_m(Q)\psi_F \rangle \\ &= \langle \langle Q \rangle^{-\beta/2} [\theta(H), e^{F(Q)}] e^{-F(Q)} \langle Q \rangle^{\beta/2} \langle p \rangle K'' \psi_F, \\ & \quad W_{\alpha,\beta} \langle Q \rangle^\beta Q \langle Q \rangle^{-\beta/2} p [\theta(H), e^{F(Q)}] e^{-F(Q)} \psi_F \rangle, \end{aligned}$$

avec $K'' = \langle p \rangle^{-1} \langle Q \rangle^{-\beta/2}$ et l'opérateur uniformément borné qui agit sur ψ_F à droite et sur $K''\psi_F$. De la même manière, nous pouvons traiter le dernier terme de la contribution du $[W_{\alpha,\beta}, iA]'$ et la contribution de $[V_{s,r}, iA]'$, $[V_{l,r}, iA]'$, et $[H_0, iA]'$ ■

Nous combinons maintenant (3.3.3) et le troisième résultat de (3.3.1) on trouve

$$\begin{aligned} \langle \theta(H)\psi_F, [H, iA]\theta(H)\psi_F \rangle &= -4\|g(Q)^{1/2}A\psi_F\|^2 + \langle \psi_F, G(Q)\psi_F \rangle \\ &\quad - \langle \psi_F, (K_1B_{1,\epsilon} + B_{2,\epsilon}K_2)\psi_F \rangle, \end{aligned}$$

où $G(x) = (x \cdot \nabla)^2 g(x) - (x \cdot \nabla)(\nabla F)^2(x)$

Pour montrer le théorème principal de ce paragraphe, on suit le même démarche que dans [FH].

Théorème 3.3.4 *Soit $\psi \in \mathbf{H}^2$ tel que $H\psi = E\psi$. Soit $\rho(x) = (1 + |x|^2)^{1/2}$ Alors pour tout $\lambda > 0$,*

$$\rho^\lambda \psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d).$$

Preuve : Raisonnons par absurde, supposons qu'il existe $\lambda > 0$, $\rho^\lambda \psi \notin \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Soit $F = \ln(\rho(1 + \epsilon\rho)^{-1})$ et $\psi_\epsilon = \frac{\psi_F}{\|\psi_F\|_2}$. Comme $((\rho/(1 + \epsilon\rho))^{2\lambda}|\psi|^2)_{\epsilon>0}$ est une famille des fonctions mesurables positives décroissantes car si $\epsilon < \epsilon'$ alors $(\rho/(1 + \epsilon'\rho))^{2\lambda}|\psi|^2 < (\rho/(1 + \epsilon\rho))^{2\lambda}|\psi|^2$, par le théorème de convergence monotone $\|\psi_F\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (\rho/(1 + \epsilon\rho))^{2\lambda}|\psi|^2 dx$ converge vers $\int_{\mathbb{R}^d} \rho^{2\lambda}|\psi|^2 dx = +\infty$ lorsque ϵ tend vers 0. Soit B une boule de $\mathbb{R}^d$ on a

$$\begin{aligned} \int_B |\psi_\epsilon|^2 dx &= \frac{1}{\|\psi_F\|} \int_B \left(\frac{\langle x \rangle}{1 + \epsilon \langle x \rangle}\right)^{2\lambda} |\psi|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{\|\psi_F\|} \int_B C^{2\lambda} |\psi|^2 dx \\ &\leq \frac{C_1 \|\psi\|}{\|\psi_F\|} \end{aligned} \tag{3.3.0.7}$$

Or par hypothèse $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \|\psi_F\| = +\infty$ on en déduit que $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_B |\psi_\epsilon|^2 dx = 0$.

Lemme 3.3.5 *Soit $\psi_F = \exp(F)\psi$ et $\psi_\epsilon = \psi_F/\|\psi_F\|$. La famille $(\|\nabla \psi_\epsilon\|_2)_{0 < \epsilon < 1}$ est bornée.*

Preuve : Soit $V = V_{l,r} + W_{1,\beta}$. Comme $V_{l,r}, W_{1,\beta}$ sont Δ compacts donc

$$\langle \psi_\epsilon, V\psi_\epsilon \rangle \leq c \langle \psi_\epsilon, -\Delta \psi_\epsilon \rangle \leq c \|\nabla \psi_\epsilon\|_2^2, \quad c < 1$$

3.3. ÉTUDE DES ÉVENTUELS VECTEURS PROPRES DE H DONT LES VALEURS PROPRES ASSOCIÉES APPARTIENNENT À $]0, \frac{K^2}{4}]$

D'une part

$$\langle \psi_\epsilon, H\psi_\epsilon \rangle = \langle \psi_\epsilon, ((\nabla F)^2 + E)\psi_\epsilon \rangle \quad (3.3.0.8)$$

et alors $\langle \psi_\epsilon, H\psi_\epsilon \rangle$ est borné uniformément en ϵ , d'autre part

$$\begin{aligned} \langle \psi_\epsilon, H\psi_\epsilon \rangle &= \langle \psi_\epsilon, -\Delta\psi_\epsilon \rangle + \langle \psi_\epsilon, V\psi_\epsilon \rangle = \|\nabla\psi_\epsilon\|^2 + \langle \psi_\epsilon, V\psi_\epsilon \rangle \\ &\geq (1-c)\|\nabla\psi_\epsilon\|^2 \end{aligned}$$

d'où $\|\nabla\psi_\epsilon\|^2 \leq \frac{1}{1-c}|\langle \psi_\epsilon, H\psi_\epsilon \rangle|$ en utilisant (3.3.0.8), on en déduit que $(\|\nabla\psi_\epsilon\|_2)_{0 < \epsilon < 1}$ est bornée. ■

Lemme 3.3.6 *Soit $\psi_F = \exp(F)\psi$ et $\psi_\epsilon = \psi_F/\|\psi_F\|$. La famille $(\|(-\Delta+1)\psi_\epsilon\|_2)_{0 < \epsilon < 1}$ est bornée.*

Preuve : Comme $H(F) = H - (\nabla F)^2 + (D.\nabla F + \nabla F.D)$.

Or $\|H(F)\psi_\epsilon\| = |E|$, $\|\nabla F\psi_\epsilon\| \leq \lambda\rho^{-1}$, d'après le Lemme 3.3.5, on a $\|D.\nabla F\psi_\epsilon\|$ et $\|\nabla F.D\psi_\epsilon\|$ sont bornés uniformément en ϵ , d'autre part, comme

$$\begin{aligned} (-\Delta + V)\psi_\epsilon + \psi_\epsilon &= (-\Delta + I)\psi_\epsilon + V\psi_\epsilon \\ &= (V(-\Delta + I)^{-1} + I)(-\Delta + I)\psi_\epsilon \\ &= (H(F) + (\nabla F)^2 - (D.\nabla F + \nabla F.D) + I)\psi_\epsilon. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &(-\Delta + I)\psi_\epsilon \\ &= (V(-\Delta + I)^{-1} + I)^{-1}(H(F) + (\nabla F)^2 - (D.\nabla F + \nabla F.D) + I)\psi_\epsilon. \end{aligned}$$

Or

$$\|(-\Delta + I)\psi_\epsilon\| \leq \|(-\Delta + I)(H + i)^{-1}(H + i)\psi_\epsilon\| \leq \|(-\Delta + I)(H + i)^{-1}\| \|(H + i)\psi_\epsilon\|$$

comme V est Δ compact, on a le résultat. ■

Proposition 3.3.7 *$(-\Delta + I)\psi_\epsilon$ converge faiblement dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ vers 0 lorsque ϵ tend vers 0.*

Preuve : Soit $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, il existe une suite $(\varphi_k)_k$ tels que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\varphi_k - \varphi\|_2 = 0$. Soit $\delta > 0$, $\varphi_{k_1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support dans une boule $B \subset \mathbb{R}^d$ tel que $\|\varphi_{k_1} - \varphi\|_2 < \frac{\delta}{2M}$ où $M := \max_{\epsilon > 0} (\|(-\Delta + 1)\psi_\epsilon\|_2)$ qui est fini d'après Lemme 3.3.6. D'après (3.3.0.7) il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_1$ on a $\int_B |\psi_\epsilon|^2 dx < \left(\frac{\delta}{2M}\right)^2$. Soit $0 < \epsilon < \epsilon_1$, on a

$$\begin{aligned} \langle (-\Delta + 1)\psi_\epsilon, \varphi \rangle &= \langle (-\Delta + 1)\psi_\epsilon, \varphi_{k_1} - \varphi + \varphi_{k_1} \rangle \\ &= \langle (-\Delta + 1)\psi_\epsilon, \varphi_{k_1} - \varphi \rangle + \langle (-\Delta + 1)\psi_\epsilon, \varphi_{k_1} \rangle \\ &= \langle (-\Delta + 1)\psi_\epsilon, \varphi_{k_1} - \varphi \rangle + \langle \psi_\epsilon, (-\Delta + 1)\varphi_{k_1} \rangle \\ &= \langle (-\Delta + 1)\psi_\epsilon, \varphi_{k_1} - \varphi \rangle + \int_B \psi_\epsilon(x)(-\Delta + 1)\varphi_{k_1}(x) dx \end{aligned}$$

Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve que

$$\begin{aligned} |\langle (-\Delta + 1)\psi_\epsilon, \varphi \rangle| &\leq \|(-\Delta + 1)\psi_\epsilon\|_2 \|\varphi_{k_1} - \varphi\|_2 \\ &\quad + \|(-\Delta + 1)\varphi_{k_1}\|_2 \left(\int_B \psi_\epsilon(x)^2 dx \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

3.3. ÉTUDE DES ÉVENTUELS VECTEURS PROPRES DE H DONT LES VALEURS PROPRES ASSOCIÉES APPARTIENNENT À $]0, \frac{K^2}{4}]$

Or $\|(-\Delta + 1)\psi_\epsilon\|_2 \|\varphi_{k_1} - \varphi\|_2 < \delta/2$ et puisque $\|(-\Delta + 1)\varphi_{k_1}\|_2$ est fini et d'après (3.3.0.7) il existe ϵ_2 tel que pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_2$,

$$\|(-\Delta + 1)\varphi_{k_1}\|_2 \left(\int_B \psi_\epsilon(x)^2 dx \right)^{1/2} \leq \delta/2.$$

Finalement nous avons montré que, pour tout $\delta > 0$, il existe ϵ_1 tel que pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_1$ on a $|\langle (-\Delta + 1)\psi_\epsilon, \varphi \rangle| \leq \delta$. On obtient alors le résultat. ■

Corollaire 3.3.8

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|G(Q)\psi_\epsilon\| = 0$$

Preuve :

$$\|G(Q)\psi_\epsilon\| = \|G(Q)(-\Delta + 1)^{-1}(-\Delta + 1)\psi_\epsilon\|$$

comme $G(Q)(-\Delta + 1)^{-1}$ est compact, en passant par la limite lorsque ϵ tend vers 0, on trouve que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|G(Q)\psi_\epsilon\| = 0$$

■

Lemme 3.3.9 Soit $\psi \in \mathbf{H}^2$ tel que $H\psi = E\psi$. Alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|(H - E)\psi_\epsilon\| = 0. \quad (3.3.0.9)$$

Preuve : D'après (3.3.1) on a

$$(H - E)\psi_F = (-|\nabla F|^2 + ip \cdot \nabla F + \nabla F \cdot ip)\psi_F$$

alors on obtient

$$(H - E)\psi_\epsilon = (-|\nabla F|^2 + ip \cdot \nabla F + \nabla F \cdot ip)\psi_\epsilon.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|\nabla F \cdot ip \psi_\epsilon\| &\leq \lambda \|\rho^{-1} ip \psi_\epsilon\| \\ &= \lambda \|\rho^{-1} ip (-\Delta + 1)^{-1} (-\Delta + 1)\psi_\epsilon\|, \end{aligned}$$

de même puisque $\|(\nabla F)^2 \psi_\epsilon\| = \|(\nabla F)^2 \rho^2 \rho^{-2} (-\Delta + 1)^{-1} (-\Delta + 1)\psi_\epsilon\|$ et

$$\|(ip \cdot \nabla F)\psi_\epsilon\| = \|(ip \cdot \nabla F) \rho \rho^{-1} (-\Delta + 1)^{-1} (-\Delta + 1)\psi_\epsilon\|$$

grâce à la compacité de $\rho^{-1} ip (-\Delta + 1)^{-1}$, $\rho^{-2} (-\Delta + 1)^{-1}$. On en déduit que $\|(\nabla F)^2 \psi_\epsilon\|$, $\|(ip \cdot \nabla F)\psi_\epsilon\|$, $\|(\nabla F \cdot ip)\psi_\epsilon\|$ convergent vers 0 lors que ϵ tend vers 0, et nous concluons que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|(H - E)\psi_\epsilon\| = 0.$$

■

Lemme 3.3.10 Soit $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\theta = 1$ près de E et K l'opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \psi_\epsilon, K\psi_\epsilon \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|(1 - \theta)(H)\psi_\epsilon\| = 0, \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\theta(H)\psi_\epsilon\| = 1 \quad (3.3.0.10)$$

3.3. ÉTUDE DES ÉVENTUELS VECTEURS PROPRES DE H DONT LES VALEURS PROPRES ASSOCIÉES APPARTIENNENT À $]0, \frac{K^2}{4}]$ 43

Preuve : D'une part on a

$$|\langle \psi_\epsilon, K\psi_\epsilon \rangle| \leq \|K\psi_\epsilon\| \leq \|K(-\Delta + 1)^{-1}(-\Delta + 1)\psi_\epsilon\| \longrightarrow 0$$

d'où on obtient que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \psi_\epsilon, K\psi_\epsilon \rangle = 0$, et d'autre part

$$1 = \|\psi_\epsilon\|^2 = \|\theta(H)\psi_\epsilon\|^2 + \|(1 - \theta(H))\psi_\epsilon\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \theta(H)\psi_\epsilon, (1 - \theta(H))\psi_\epsilon \rangle,$$

or on a sur le support de $(1 - \theta)$, $|t - E| > \delta$ donc $\frac{t-E}{\delta} > 1$ alors

$$\begin{aligned} \|(1 - \theta)(H)\psi_\epsilon\| &\leq \left\| \frac{H-E}{\delta} (1 - \theta)(H)\psi_\epsilon \right\| \\ &\leq \frac{1}{\delta} \|(1 - \theta)(H)(H - E)\psi_\epsilon\| \end{aligned}$$

donc $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|(1 - \theta)(H)\psi_\epsilon\| = 0$, et comme par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a $|\langle \theta(H)\psi_\epsilon, (1 - \theta(H))\psi_\epsilon \rangle| \leq \|\theta(H)\psi_\epsilon\| \cdot \|(1 - \theta(H))\psi_\epsilon\|$ alors $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{Re}\langle \theta(H)\psi_\epsilon, (1 - \theta(H))\psi_\epsilon \rangle = 0$ et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\theta(H)\psi_\epsilon\| = 1$. ■

Lemme 3.3.11

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \|(-\Delta + 1)(1 - \theta)(H)\psi_\epsilon\| = 0.$$

Preuve : Puisque

$$\begin{aligned} \|(H + i)(1 - \theta)(H)\psi_\epsilon\| &\leq \|(1 - \theta)(H)(H - E)\psi_\epsilon\| \\ &\quad + |E + i| \|(1 - \theta)(H)\psi_\epsilon\| \end{aligned}$$

D'après (3.3.0.9) et (3.3.0.10) alors

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \|(H + i)(1 - \theta)(H)\psi_\epsilon\| = 0, \tag{3.3.0.11}$$

et comme aussi V est Δ -compact on en déduit que

$$\|(-\Delta + 1)(1 - \theta)(H)\psi_\epsilon\| \leq \|(-\Delta + 1)(H + i)^{-1}\| \|(H + i)(1 - \theta)(H)\psi_\epsilon\|$$

et par (3.3.0.11) on trouve que

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \|(-\Delta + 1)(1 - \theta)(H)\psi_\epsilon\| = 0. \quad \blacksquare$$

En utilisant l'estimation de Mourre et en passant par la limite inf dans les deux cotés on en déduit qu'il existe $c > 0$ et un opérateur K compact tel que

$$\begin{aligned} \liminf_{\epsilon \downarrow 0} \langle \psi_\epsilon, \theta(H)[H, A]\theta(H)\psi_\epsilon \rangle &\geq \liminf_{\epsilon \downarrow 0} (c\|\theta(H)\psi_\epsilon\|^2 + \langle \psi_\epsilon, K\psi_\epsilon \rangle) \\ &= c > 0 \end{aligned} \tag{3.3.0.12}$$

En divisant par $\|\psi_F\|^2$ dans (3.3) et en passant par la limite inf dans les deux cotés on trouve

$$\liminf_{\epsilon \downarrow 0} \langle \psi_\epsilon, \theta(H)[H, A]\theta(H)\psi_\epsilon \rangle = -4 \liminf_{\epsilon \downarrow 0} \|g(Q)^{1/2} A\psi_\epsilon\|^2 \leq 0,$$

3.3. ÉTUDE DES ÉVENTUELS VECTEURS PROPRES DE H DONT LES VALEURS PROPRES ASSOCIÉES APPARTIENNENT À $]0, \frac{K^2}{4}]$

ceci contredit le fait qu'on a (3.3.0.12). Alors

$$\rho^\lambda \psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \quad \text{pour tout } \lambda > 0. \quad (3.3.0.13)$$

■

Maintenant on va montrer que $\rho^\lambda \nabla \psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\lambda > 0$.

Proposition 3.3.12 *Soit $\psi \in \mathbf{H}^2, E \in]0, \frac{K^2}{4}[$ tel que $H\psi = E\psi$. Soit $\rho(x) = (1 + |x|^2)^{1/2}$. Alors pour tout $\lambda > 0$*

$$\rho^\lambda \nabla \psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d).$$

Preuve : Comme

$$\langle \psi_F, H\psi_F \rangle = \|\nabla \psi_F\|^2 + \langle \psi_F, V\psi_F \rangle = \langle \psi_F, ((\nabla F)^2 + E)\psi_F \rangle$$

Donc

$$\|\nabla \psi_F\|^2 = E\|\psi_F\|^2 + \langle \psi_F, (\nabla F)^2 \psi_F \rangle - \langle \psi_F, V\psi_F \rangle. \quad (3.3.0.14)$$

Or, en premier lieu, on a

$$\|\psi_F\| = \|(\frac{\rho}{1 + \epsilon\rho})^\lambda \psi\| \leq \|\rho^\lambda \psi\| \leq C$$

où C ne dépend pas de ϵ , en deuxième lieu,

$$|\langle \psi_F, (\nabla F)^2 \psi_F \rangle| \leq C\|\rho^\lambda \psi\|^2 \leq C$$

et finalement, puisque V est Δ -compact

$$|\langle \psi_F, V\psi_F \rangle| \leq C_2 |\langle \psi_F, (-\Delta + C.i)\psi_F \rangle| \leq C_2 \|\nabla \psi_F\|^2 + C, \text{ avec } C_2 < 1$$

par suite, d'après (3.3.0.14)

$$\|\nabla \psi_F\|^2 \leq C_2 \|\nabla \psi_F\|^2 + C$$

on conclut alors

$$\|\nabla \psi_F\|^2 \leq C \quad (3.3.0.15)$$

où C ne dépend pas de ϵ .

D'autre part,

$$\nabla(\exp^F \psi) = \nabla F \exp^F \psi + \exp^F \nabla \psi,$$

d'après (3.3.0.15) $\|\nabla \psi_F\|^2 \leq C$ et grâce à (3.3.0.13) $\|\nabla F \exp^F \psi\| \leq \|\rho^\lambda \psi\| \leq C$ on en déduit que $\|\exp^F \nabla \psi\| = \|(\frac{\rho}{1 + \epsilon\rho})^\lambda \nabla \psi\| \leq C$ par suite

$$\|\rho^\lambda \nabla \psi\| \leq C$$

où C ne dépend pas de ϵ .

■

3.3. ÉTUDE DES ÉVENTUELS VECTEURS PROPRES DE H DONT LES VALEURS PROPRES ASSOCIÉES APPARTIENNENT À $]0, \frac{k^2}{4}[$ 45

Théorème 3.3.13 *Pour $\lambda = 1$, on a le premier résultat de ce paragraphe, c'est-à-dire si on prend un vecteur propre associé à une valeur propre dans $]0, \frac{k^2}{4}[$ de l'opérateur H , il est dans $\mathcal{D}(A)$ où $A = \frac{x \cdot \nabla + \nabla \cdot x}{2i}$.*

Preuve : Soit $A = \frac{x \cdot \nabla + \nabla \cdot x}{2i}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) &= \{u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d), (x \cdot \nabla + \nabla \cdot x)u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)\} \\ &= \{u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d), (2x \cdot \nabla + d)u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)\} \\ &= \{u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d), x \cdot \nabla u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)\}. \end{aligned}$$

■

Ce théorème améliore l'article [GJ], on peut enlever l'hypothèse de $\text{Ker}(H - E) \in \mathcal{D}(A)$ dans le théorème (4.15) dans [GJ2], car en utilisant ce nouveau résultat elle est automatiquement remplie.

Un résultat général de ce genre a été montré dans [Ca] pour H et A deux opérateurs autoadjoints quelconques vérifiant l'estimation de Mourre mais ils ont besoin d'une condition de régularité au moins $H \in C^3(A)$ et dans notre cas on prouve le résultat qu'on n'a pas même la régularité $C^1(A)$.

On montre maintenant que le spectre discret de H dans $]0, k^2/4[$ est localement fini.

On ne peut pas alors appliquer le théorème de Viriel car le commutateur $[H, iA]$ n'est pas bien défini à cause de l'hypothèse de régularité. Mais grâce au théorème 3.3.13, on a

Proposition 3.3.14 *Soit $I \subset]0, k^2/4[$. Soit ψ un vecteur propre de H associé à E dans I . Alors $\langle \psi, [H, iA]\psi \rangle$ est bien défini et*

$$\langle \psi, [H, iA]\psi \rangle = 0$$

Preuve : D'après le théorème 3.3.13 on a $\psi \in \mathcal{D}(A)$, alors $\langle \psi, [H, iA]\psi \rangle$ est bien défini, puisque $E \in \mathbb{R}$ et A auto-adjoint, on a

$$\langle \psi, [H, iA]\psi \rangle = E\langle \psi, iA\psi \rangle - iE\langle A\psi, \psi \rangle = 0.$$

■

3.3. ÉTUDE DES ÉVENTUELS VECTEURS PROPRES DE H DONT LES VALEURS PROPRES ASSOCIÉES APPARTIENNENT À $]0, \frac{K^2}{4}]$ 46

Théorème 3.3.15 *Soit I un interval compact de $]0, k^2/4[$. Supposons $(f_n)_n$ une suite de vecteurs propres de H dans I . $(f_n)_n$ sont finis et de multiplicité fini dans I .*

Preuve : Raisonnant par absurde, soit $I \subset \subset]0, k^2/4[$, supposons qu'il existe une famille $(f_n)_n$ orthonormale de vecteurs propres de H associés à des valeurs propres appartenant à I .

Soit $n \in \mathbb{N}$, f_n une valeur propre de H associée à E et $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, k^2/4[)$ a support petit tel que $\theta(E) = 1$.

Par l'estimation de Mourre on trouve que

$$\begin{aligned} \langle f_n, \theta(H)[H, iA]\theta(H)f_n \rangle &\geq c\|\theta(H)f_n\|^2 + \langle Kf_n, f_n \rangle \\ &\geq c + \langle Kf_n, f_n \rangle. \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 3.3.14, on obtient

$$0 \geq c + \langle Kf_n, f_n \rangle$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on aboutit à une Contradiction, donc $\sigma_{disc}(H) \cap I$ est fini (avec multiplicité). ■

3.4 Théorème d'absorption limite sur $]0, \frac{k^2}{4}[$

3.4.1 Suites spéciales et structure de la preuve

Tout d'abord on va citer un résultat de [GJ2] qui nous donne le théorème d'absorption limite, mais qu'on ne sait pas appliquer dans notre cas.

Théorème 3.4.1 *{[GJ]} Soit $\tilde{H}$ est un opérateur auto-adjoint. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $I \cap \sigma_{pp}(\tilde{H}) = \emptyset$ et I' un sous intervalle fermé de I . Soit B, C deux opérateurs bornés, auto-adjoints, C est injective. Supposons que, pour une certaine fonction borélienne, bornée θ sur $\mathbb{R}$ avec $\theta = 1$ sur I' et $\text{supp} \theta \subset I$, $C\theta(\tilde{H})C^{-1}$ et CBC^{-1} s'étendent aux opérateurs bornés. Supposons l'estimation de Mourre stricte suivante est satisfaite*

$$E_I(\tilde{H})[\tilde{H}, iB]E_I(\tilde{H}) \geq E_I(\tilde{H})C^2E_I(\tilde{H}), \quad (3.4.1.1)$$

soit $\sigma \in \{-1, 1\}$ et choisissons un réel μ tel que $\sigma B' \geq 0$ avec $B' := B + \mu$. Alors

$$\sup_{\text{Re} z \in I', -\sigma \text{Im} z > 0} \|C(\tilde{H} - z)^{-1}C\| \leq 2 \cdot \|CB'C^{-1}\| \cdot \|C^{-1}\theta(\tilde{H})C\| + d^{-1} \cdot \|1 - \theta\|_{\mathcal{L}^\infty} \cdot \|C\|^2, \quad ,$$

où d est la distance entre le support de $1 - \theta$ et I' .

Remarque : Nous pouvons prendre par exemple $\mu = \sigma \|B\|$ nous assure que $\sigma(B + \mu) \geq 0$.

Nous ne savons pas comment montrer (3.4.1.1). Nous allons suivre une méthode introduite dans [GJ].

Définition 3.4.2 *[GJ2] Soit C un opérateur auto-adjoint, borné et injective. I' un intervalle dans $\mathbb{R}$. Une suite spéciale $(f_n, z_n)_n$ pour $\tilde{H}$ associée à (I, C) , si la suite $(f_n, z_n) \in (\mathcal{D}(\tilde{H}) \times \mathbb{C})^\mathbb{N}$ tel que, pour un certain $\eta \geq 0$, $\text{Re}(z_n) \in I'$, $0 \neq \text{Im}(z_n) \rightarrow 0$, $\|Cf_n\| \rightarrow \eta$, $(\tilde{H} - z_n)f_n \in \mathcal{D}(C^{-1})$, et $\|C^{-1}(\tilde{H} - z_n)f_n\| \rightarrow 0$. La limite η s'appelle la masse de la suite spéciale.*

Proposition 3.4.3 *{[GJ]} Soit $\tilde{H}$ est un opérateur auto-adjoint. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $I \cap \sigma_{pp}(\tilde{H}) = \emptyset$ et I' un intervalle de $\mathbb{R}$, Prenons C un opérateur auto-adjoint, borné et injective tel que, pour une certaine fonction χ borélienne, bornée sur $\mathbb{R}$ avec $\chi = 1$ près de I' , l'opérateur $C\chi(\tilde{H})C^{-1}$ s'étend à un opérateur borné. Soit θ une fonction borélienne sur $\mathbb{R}$ tel que $\theta\chi = \chi$. Alors*

$$\sup_{\text{Re} z \in I', \text{Im} z \neq 0} \|C(\tilde{H} - z)^{-1}C\| < \infty \quad (3.4.1.2)$$

si et seulement si
pour toute suite spéciale $(f_n, z_n)_n$ pour $\tilde{H}$ associé à (I', C) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta(\tilde{H})f_n = f_n$ est de masse nulle.

Preuve : Pour montrer le premier sens on va poser qu'on a (3.4.1.2) est vrai et on va montrer que toutes les suites spéciales ont de masse nul. Soit (f_n, z_n) comme dans (3.4.2). En utilisant la théorème d'absorption des limites il existe $c > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \|Cf_n\| &\leq \|C(\tilde{H} - z_n)^{-1}C\| \|C^{-1}(\tilde{H} - z_n)f_n\| \\ &\leq c \|C^{-1}(\tilde{H} - z_n)f_n\| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Il nous reste qu'à montrer le deuxième sens. Supposons que (3.4.1.2) est fausse alors il existe $(f_n, z_n)_n \in (\mathcal{D}(\tilde{H}) \times \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ tel que $Re(z_n) \in I$ et $Im(z_n) \longrightarrow 0$ tel que

$$\frac{\|C(\tilde{H} - z_n)^{-1}Cf_n\|}{\|f_n\|} \longrightarrow +\infty. \quad (3.4.1.3)$$

On peut trouver $(u_n)_n \in \mathcal{H}$ et $0 < k_n \rightarrow 0$ tel que

$$\|C(\tilde{H} - z_n)^{-1}\chi(\tilde{H})Cu_n\| = 1 = \frac{\|u_n\|}{k_n}. \quad (3.4.1.4)$$

Posons

$$u_n = \frac{f_n}{\|C(\tilde{H} - z_n)^{-1}\chi(\tilde{H})Cf_n\|}.$$

alors nous avons (3.4.1.4) avec $0 < k_n \rightarrow 0$.

Nous pouvons montrer que $0 < k_n \rightarrow 0$. Par (3.4.1.3), et comme $(\tilde{H} - z_n)^{-1}(1 - \chi)(\tilde{H})$ est borné uniformément, car $t \mapsto \frac{1 - \chi(t)}{t - z_n}$ est uniformément borné en n donc

$$\frac{\|C(\tilde{H} - z_n)^{-1}(1 - \chi)(\tilde{H})Cf_n\|}{\|f_n\|}$$

est borné. Par suite

$$\frac{\|C(\tilde{H} - z_n)^{-1}\chi(\tilde{H})Cf_n\|}{\|f_n\|} \longrightarrow +\infty.$$

On conclut (3.4.1.4). Soit

$$g_n = k_n(\tilde{H} - z_n)^{-1}\chi(\tilde{H})Cu_n / \|u_n\|$$

$\theta(\tilde{H})g_n = g_n$ et

$$\|Cg_n\| = \frac{k_n}{\|u_n\|} \|C(\tilde{H} - z_n)^{-1}\chi(\tilde{H})Cu_n\| = 1.$$

Puisque $C\chi(\tilde{H})C^{-1}$ est borné, $\chi(\tilde{H})$ préserve $\mathcal{D}(C^{-1})$, l'image de C . Alors $(\tilde{H} - z_n)g_n \in \mathcal{D}(C^{-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, nous concluons que

$$\|C^{-1}(\tilde{H} - z_n)g_n\| \leq \|C^{-1}\chi(\tilde{H})C\|k_n \longrightarrow 0.$$

■

Proposition 3.4.4 [GJ2] Soit (I', C) est comme dans (3.4.2). Soit $(f_n, z_n)_n$ est une suite spéciale pour un opérateur $\tilde{H}$ auto-adjoint associé à (I', C) avec $s > 0$ et $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Pour un opérateur borné B , tel que $CB\theta(\tilde{H})C^{-1}$ s'étend à un opérateur borné, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f_n, [\tilde{H}, B]f_n \rangle = 0.$$

Preuve : Puisque $[\tilde{H}, B] = [\tilde{H} - z_n, B]$,

$$\begin{aligned} \langle f_n, [\tilde{H}, B]f_n \rangle &= 2i \operatorname{Im}(z_n) \langle f_n, Bf_n \rangle \\ &\quad + \langle (\tilde{H} - z_n)f_n, Bf_n \rangle - \langle B^*f_n, (\tilde{H} - z_n)f_n \rangle. \end{aligned}$$

Par la définition de (3.4.2) et comme $CB\theta(\tilde{H})C^{-1}$ est borné, alors il existe $c > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |\langle (\tilde{H} - z_n)f_n, Bf_n \rangle| &= |\langle (\tilde{H} - z_n)f_n, B\theta(\tilde{H})f_n \rangle| \\ &\leq |\langle C^{-1}(\tilde{H} - z_n)f_n, CB\theta(\tilde{H})C^{-1}Cf_n \rangle| \\ &\leq \|C^{-1}(\tilde{H} - z_n)f_n\| \cdot \|CB\theta(\tilde{H})C^{-1}\| \cdot \|Cf_n\| \\ &\leq c \|C^{-1}(\tilde{H} - z_n)f_n\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Similaire on peut prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle B^*f_n, (\tilde{H} - z_n)f_n \rangle = 0$. Puisque

$$|\operatorname{Im}(z_n) \langle f_n, Bf_n \rangle| \leq |\operatorname{Im}(z_n)| \cdot \|f_n\|^2 \cdot \|B\|,$$

D'autre part, en utilisant la définition (3.4.2),

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(z_n) \|f_n\|^2 &= \operatorname{Im} \langle f_n, (\tilde{H} - z_n)f_n \rangle \\ &= \operatorname{Im} \langle Cf_n, C^{-1}(\tilde{H} - z_n)f_n \rangle \rightarrow 0 \end{aligned} \tag{3.4.1.5}$$

par suite nous obtenons (3.4.4). ■

Comme nous l'avons évoqué précédemment on ne sait pas avoir l'estimation de Mourre stricte à poids (3.4.1.1) mais on peut avoir une espèce d'inégalité à l'infini de ce genre modulo une erreur.

Prenons un interval ouvert I de $I \subset]0, k^2/4[$ et I' un sous fermé de I . Soit $\theta \in \mathcal{C}^\infty(I)$ avec $\theta = 1$ sur I' . Considérons $(f_n, z_n)_n$ une suite spéciale comme dans (3.4.2) pour $H = -\Delta + V_{lr} + V_{sr} + W_{1,\beta}$, $\beta > 1/2$, $r_0 > 1$ associé aux $(I, \langle Q \rangle^{-s})$, avec $1/2 < s < 1/2 + r_1/2$ et $\theta(H)f_n = f_n$. Notre objectif est de montrer que la masse est

$$\eta = 0. \quad (3.4.1.6)$$

Pour $R > 1$. Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que

$$\chi = 1 \text{ sur } [-1, 1] \text{ et } \chi = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus [-2, 2]. \quad (3.4.1.7)$$

Soit $\chi_R = \chi(\frac{\cdot}{R})$ et $\tilde{\chi}_R = 1 - \chi_R$.

$\chi_R + \tilde{\chi}_R = 1$ est une partition régulier de l'unité sur $\mathbb{R}$ avec χ_R localisé dans $\{t \in \mathbb{R}; |t| \leq 2R\}$. Définissons pour $\delta > 0$ tel que $1 + \delta = 2s$, l'opérateur $B_{\delta,R}$ par

$$B_{\delta,R} = f_{\delta,R}(Q) \cdot \frac{P}{2} + \frac{P}{2} \cdot f_{\delta,R}(Q),$$

où $P = \frac{1}{i} \nabla$ et $f_{\delta,R}(x) = \tilde{\chi}_R(x)^2 (2 - \langle x \rangle^{-\delta}) \frac{x}{\langle x \rangle} = \tilde{\chi}_R(x)^2 f_\delta(x)$.

Il suffit de montrer que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\| = 0$ et $\lim_{R \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|\chi_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\| = 0$.

Théorème 3.4.5 *Soit un interval ouvert I de $I \subset]0, k^2/4[$ et I' un sous fermé de I tel que $I' \cap \sigma_{pp}(\tilde{H}) = \emptyset$. Soit $(f_n, z_n)_n$ est une suite spéciale pour H associée à $(I', s, \langle Q \rangle^{-s})$ avec $1/2 < s < 1$. Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ satisfait (3.4.1.7). Alors il existe $C > 0$, $R_1 > 2$, et la famille d'opérateurs $(B_{\delta,R})_{R > 1}$ tel que pour tout $R \geq R_1$,*

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} |\langle f_n, [H, iB_{\delta,R}] f_n \rangle| &\geq C \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\|^2 \\ &\quad + O(R^{2s-1-\beta}) \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\| \\ &\quad + O(R^{2s-2-\beta}). \end{aligned}$$

Corollaire 3.4.6 *Sous les hypothèses de théorème (3.4.5), pour $R \geq R_1$ on a*

$$\forall \alpha \geq 2s - 1 - \beta, \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\| = O(R^\alpha). \quad (3.4.1.8)$$

Preuve : [GJ2] Notons tout d'abord que, pour $a > 0, \epsilon \geq 0$, and $b, c \in \mathbb{R}$,

$$\epsilon \geq aX^2 + bX + c^2 \implies |X| \leq \sqrt{\frac{\epsilon}{a}} + O(|b| + |c|) \quad (3.4.1.9)$$

Ce dernier terme étant indépendante de ϵ . Il suffit de prouver (3.4.1.8) pour R assez grand. Soit $R \geq R_1$, nous combinons (3.4.5) avec (3.4.1.9) et la proposition (3.4.4), on obtient que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{\chi}_R(Q)\langle Q \rangle^{-s} f_n\| &\leq O(R^{2s-1-\beta}) + O(R^{s-1-\beta/2}) \\ &\leq O(R^{2s-1-\beta}), \\ &\text{où } 1/2 < s < 1/2 + r_1/2. \end{aligned} \quad (3.4.1.10)$$

Alors on en déduit (3.4.1.8). ■

Théorème 3.4.7 *Sous les hypothèses de théorème (3.4.5), on a*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|\chi_R(Q)f_n\| = 0$$

Théorème 3.4.8 *Soit $I \subset]0, k^2/4[$ un intervalle ouvert tel que $I \cap \sigma_{disc}(H_1) = \emptyset$ et I' un sous fermé de I . Soit $H = -\Delta + V_{lr} + W_{1,\beta}, \beta > 1/2, r_0 > 1, r_1 > 0$, avec, $1/2 < s < 1/2 + r_1/2$. Alors on a le théorème d'absorption des limites sur I' ,*

$$\sup_{\text{Re } z \in I', \text{Im } z \neq 0} \|\langle Q \rangle^{-s} (H - z)^{-1} \langle Q \rangle^{-s}\| < \infty.$$

Preuve : Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ satisfait (3.4.1.7). Par les théorèmes (3.4.5) et (3.4.7) et le corollaire (3.4.6) nous obtenons que

$$\begin{aligned} \eta &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\langle Q \rangle^{-s} f_n\| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\|\tilde{\chi}_R(Q)\langle Q \rangle^{-s} f_n\| + \|\chi_R(Q)\langle Q \rangle^{-s} f_n\|) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\|\tilde{\chi}_R(Q)\langle Q \rangle^{-s} f_n\| + \|\chi_R(Q)f_n\|) = O(R^{3s-1-\beta}) \end{aligned}$$

avec $O(R^\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ est le symbole de Landau O et l'indice R signifie que la borne est uniforme par rapport à les autres variables.

Après tendons R vers l'infini et nous obtenons $\eta = 0$. Par la proposition (3.4.3) le TAL est vrai pour H respectivement à $(I', s, \langle Q \rangle^{-s})$. ■

3.4.2 Preuve des théorèmes principaux

Preuve : théorème 3.4.5

Dans tout ce qui suit $[H, iB_{\delta,R}]$ est une forme quadratique bien définie sur $\mathcal{H}^3 \times \mathcal{H}^3$. On commence tout d'abord par l'étude de l'opérateur $[H_0, iB_{\delta,R}]$

$$\begin{aligned}
[H_0, iB_{\delta,R}] &= [H_0, i(f_{\delta,R}(Q) \cdot \frac{P}{2} + \frac{P}{2} \cdot f_{\delta,R}(Q))] \\
&= [H_0, iP f_{\delta,R}(Q) + [f_{\delta,R}(Q), i\frac{P}{2}]] \\
&= [P^2, iP f_{\delta,R}(Q)] + \frac{1}{2}[P^2, -f'_{\delta,R}(Q)] \\
&= iP^3 f_{\delta,R}(Q) - iP f_{\delta,R}(Q)P^2 + \frac{1}{2}(-P^2 f'_{\delta,R}(Q) + f'_{\delta,R}(Q)P^2) \\
&= iP^3 f_{\delta,R}(Q) - P(iP f_{\delta,R}(Q) + [f_{\delta,R}(Q), iP])P \\
&\quad + \frac{1}{2}(-P^2 f'_{\delta,R}(Q) + P f'_{\delta,R}(Q)P + \frac{1}{i}[f'_{\delta,R}(Q), iP]P) \\
&= iP^3 f_{\delta,R}(Q) - iP^2 f_{\delta,R}(Q)P - P f'_{\delta,R}(Q)P - \frac{1}{2}P^2 f'_{\delta,R}(Q) \\
&\quad + \frac{1}{2}P f'_{\delta,R}(Q)P - \frac{1}{2i}f''_{\delta,R}(Q)P \\
&= \frac{3}{2}P f'_{\delta,R}(Q)P + iP^3 f_{\delta,R}(Q) - \frac{1}{2}P^2 f'_{\delta,R}(Q) - P^2(iP f_{\delta,R}(Q) - f'_{\delta,R}(Q)) \\
&\quad + \frac{1}{2}(iP f''_{\delta,R}(Q) + f'''_{\delta,R}(Q)) \\
&= \frac{3}{2}P f'_{\delta,R}(Q)P - f'''_{\delta,R}(Q) + \frac{1}{2}f'''_{\delta,R}(Q) + f'''_{\delta,R}(Q) - f'''_{\delta,R}(Q) \\
&\quad + \frac{1}{2}f'''_{\delta,R}(Q) + \frac{1}{2}f'''_{\delta,R}(Q) \\
&= \frac{3}{2}P f'_{\delta,R}(Q)P + \frac{1}{2}f'''_{\delta,R}(Q) \\
&= \frac{3}{2}P \tilde{\chi}_R(Q) f'_\delta(Q) \tilde{\chi}_R(Q)P + 3P \tilde{\chi}_R(Q) \nabla \tilde{\chi}_R(Q) \otimes Q^{\frac{(2-\langle Q \rangle - \delta)}{\langle Q \rangle}} P + \frac{1}{2}f'''_{\delta,R}(Q).
\end{aligned} \tag{3.4.2.1}$$

Où $\otimes$ est le produit tensoriel. Tout d'abord on va commencer par montrer que

$$P \tilde{\chi}_R(x) \nabla \tilde{\chi}_R(x) \otimes x \frac{(2 - \langle x \rangle - \delta)}{\langle x \rangle} P$$

est un opérateur positive, il suffit de prouver que la matrice $\nabla \tilde{\chi}_R(x) \otimes x$ est positive.

Or

$$\nabla \tilde{\chi}_R(x) = \frac{1}{R} \tilde{\chi}'\left(\frac{|x|}{R}\right) \frac{x}{|x|}$$

donc

$$\nabla \tilde{\chi}_R(x) \otimes x = \left(\frac{1}{R} \tilde{\chi}'\left(\frac{|x|}{R}\right) \frac{x_i x_j}{|x|} \right)_{1 \leq i, j \leq d}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
\langle x, (\nabla \tilde{\chi}_R(x) \otimes x)x \rangle &= \frac{\tilde{\chi}'\left(\frac{|x|}{R}\right)}{R|x|} \sum_{i=1}^d x_i \sum_{j=1}^d x_i x_j x_j = \left(\frac{\tilde{\chi}'\left(\frac{|x|}{R}\right)^{1/2}}{R^{1/2}|x|^{1/2}} \sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.4.2.2}$$

Soit (f_n, z_n) une suite spéciale. D'après (3.4.2.1) on a,

$$\begin{aligned}
\langle f_n, [H_0, iB_{\delta,R}]f_n \rangle &= 3\langle f_n, P \tilde{\chi}_R(Q) \nabla \tilde{\chi}_R(Q) \otimes Q^{\frac{(2-\langle Q \rangle - \delta)}{\langle Q \rangle}} P f_n \rangle \\
&\quad + \frac{3}{2}\langle f_n, P \tilde{\chi}_R(Q) f'_\delta(Q) \tilde{\chi}_R(Q)P f_n \rangle + \frac{1}{2}\langle f_n, f'''_{\delta,R}(Q)f_n \rangle.
\end{aligned} \tag{3.4.2.3}$$

D'après (3.4.2.2) il nous reste à étudier que le deuxième et le troisième membre de (3.4.2.3). Commençons par le troisième c'est le membre plus simple.

$$\langle f_n, f_{\delta,R}'''(Q)f_n \rangle = \langle \langle Q \rangle^{-s} f_n, \langle Q \rangle^s f_{\delta,R}'''(Q) \langle Q \rangle^s \langle Q \rangle^{-s} f_n \rangle$$

Or

$$\| \langle Q \rangle^s f_{\delta,R}'''(Q) \langle Q \rangle^s \| = O(R^{2s-3})$$

Comme $\| \langle Q \rangle^{-s} f_n \|$ est borné, nous en déduisons que

$$| \langle f_n, f_{\delta,R}'''(Q)f_n \rangle | = O(R^{2s-3}).$$

Étudions maintenant le deuxième membre. Soit $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\theta(H)f_n = f_n$,

$$\begin{aligned} & \langle \theta(H)f_n, P\tilde{\chi}_R(Q)f_\delta'(Q)\tilde{\chi}_R(Q)P\theta(H)f_n \rangle \\ &= \langle f_n, \theta(H)P\tilde{\chi}_R(Q)f_\delta'(Q)\tilde{\chi}_R(Q)P\theta(H)f_n \rangle \\ &= \langle f_n, \tilde{\chi}_R(Q)\theta(H)Pf_\delta'(Q)P\theta(H)\tilde{\chi}_R(Q)f_n \rangle \\ &+ \langle f_n, [\theta(H)P, \tilde{\chi}_R(Q)]f_\delta'(Q)P\theta(H)\tilde{\chi}_R(Q)f_n \rangle \\ &+ \langle f_n, \tilde{\chi}_R(Q)\theta(H)Pf_\delta'(Q)[\tilde{\chi}_R(Q), P\theta(H)]f_n \rangle \\ &+ \langle f_n, [\theta(H)P, \tilde{\chi}_R(Q)]f_\delta'(Q)[\tilde{\chi}_R(Q), P\theta(H)]f_n \rangle \\ &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \end{aligned}$$

Commençons par A_1 ,

$$\begin{aligned} A_1 &= \langle f_n, \tilde{\chi}_R(Q)\theta(H)Pf_\delta'(Q)P\theta(H)\tilde{\chi}_R(Q)f_n \rangle \\ &= \langle f_n, \tilde{\chi}_R(Q)(\theta(H) - \theta(H_0))Pf_\delta'(Q)P(\theta(H) - \theta(H_0))\tilde{\chi}_R(Q)f_n \rangle \\ &+ \langle f_n, \tilde{\chi}_R(Q)(\theta(H) - \theta(H_0))Pf_\delta'(Q)P\theta(H_0)\tilde{\chi}_R(Q)f_n \rangle \\ &+ \langle f_n, \tilde{\chi}_R(Q)\theta(H_0)Pf_\delta'(Q)P(\theta(H) - \theta(H_0))\tilde{\chi}_R(Q)f_n \rangle \\ &+ \langle f_n, \tilde{\chi}_R(Q)\theta(H_0)Pf_\delta'(Q)P\theta(H_0)\tilde{\chi}_R(Q)f_n \rangle \\ &= A_1^1 + A_1^2 + A_1^3 + A_1^4 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} f_\delta'(x) &= \partial_x \left((2 - \langle x \rangle^{-\delta}) \frac{x}{\langle x \rangle} \right) \\ &= \delta \langle x \rangle^{-\delta-1} (\langle x \rangle^{-1} x)^2 + (2 - \langle x \rangle^{-\delta}) \langle x \rangle^{-1} (1 - (\langle x \rangle^{-1} x)^2) \end{aligned} \quad (3.4.2.4)$$

Étudions A_1^4 . On a

$$\begin{aligned} \theta(H_0)Pf_\delta'(Q)P\theta(H_0) &= (\theta(|\xi|^2)^2 \langle \xi, f_\delta'(x)\xi \rangle)^w + b(x, \xi)^w, \\ &\text{où } b \in S(\langle x \rangle^{-2} \langle \xi \rangle^{-\infty}, g) \end{aligned}$$

D'après (3.4.2.4) il existe $C' > 0$ tel que

$$\theta(|\xi|^2)^2 \langle \xi, f_\delta'(x)\xi \rangle \geq C' |\xi|^2 \theta(|\xi|^2)^2 \langle x \rangle^{-1-\delta}$$

Soit $C_1 = \inf \text{supp} \theta$ donc $|\xi|^2 \theta(|\xi|^2)^2 \geq C_1^2 \theta(|\xi|^2)^2$. Nous concluons à l'existence d'une constante positive $C > 0$ tel qu'on a

$$\theta(|\xi|^2)^2 \langle \xi, f_\delta'(x)\xi \rangle \geq C \theta(|\xi|^2)^2 \langle x \rangle^{-1-\delta}. \quad (3.4.2.5)$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Garding au symbole

$$\theta(|\xi|^2)^2 \langle \xi, f'_\delta(x) \xi \rangle - C \theta(|\xi|^2)^2 \langle x \rangle^{-1-\delta}$$

qui est positif d'après (3.4.2.5). Nous en déduisons qu'il existe un opérateur de Weyl de symbole $b_1 \in S(\langle x \rangle^{-2} \langle \xi \rangle^{-\infty}, g)$ qui vérifie l'inégalité des opérateurs suivante

$$\theta(H_0) P f'_\delta(Q) P \theta(H_0) - C \theta(H_0) \langle Q \rangle^{-1-\delta} \theta(H_0) \geq b_1^w$$

alors

$$\theta(H_0) P f'_\delta(Q) P \theta(H_0) \geq C \theta(H_0) \langle Q \rangle^{-1-\delta} \theta(H_0) + b_1^w$$

On conclut que

$$\begin{aligned} A_1^4 &\geq C \langle f_n, \tilde{\chi}_R(Q) \theta(H_0) \langle Q \rangle^{-1-\delta} \theta(H_0) \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle \\ &\quad + \langle f_n, \tilde{\chi}_R(Q) b_1^w \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle \\ &\geq C (\langle f_n, \tilde{\chi}_R(Q) (\theta(H_0) - \theta(H)) \langle Q \rangle^{-1-\delta} \theta(H) \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle \\ &\quad + \langle f_n, \tilde{\chi}_R(Q) (\theta(H_0) - \theta(H)) \langle Q \rangle^{-1-\delta} (\theta(H_0) - \theta(H)) \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle \\ &\quad + \langle f_n, \tilde{\chi}_R(Q) \theta(H) \langle Q \rangle^{-1-\delta} (\theta(H_0) - \theta(H)) \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle \\ &\quad + \langle f_n, \tilde{\chi}_R(Q) \theta(H) \langle Q \rangle^{-1-\delta} \theta(H) \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle) \\ &\quad + \langle \langle Q \rangle^{-s} f_n, \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{2s} b_1^w \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n \rangle \\ &\geq A_1^{4,1} + A_1^{4,2} + A_1^{4,3} + A_1^{4,4} + O(R^{2s-2}) \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\|^2. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} A_1^{4,4} &= C (\langle f_n, \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-1-\delta} \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle \\ &\quad + \langle f_n, \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-1-\delta} [\theta(H), \tilde{\chi}_R(Q)] f_n \rangle \\ &\quad + \langle f_n, [\tilde{\chi}_R(Q), \theta(H)] \langle Q \rangle^{-1-\delta} \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle \\ &\quad + \langle f_n, [\tilde{\chi}_R(Q), \theta(H)] \langle Q \rangle^{-1-\delta} [\theta(H), \tilde{\chi}_R(Q)] f_n \rangle) \\ &= C (\langle \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n, \langle Q \rangle^{2s-1-\delta} \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n \rangle \\ &\quad + \langle \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n, \langle Q \rangle^{s-1-\delta} [\theta(H), \tilde{\chi}_R(Q)] \langle Q \rangle^s \langle Q \rangle^{-s} f_n \rangle \\ &\quad + \langle \langle Q \rangle^{-s} f_n, \langle Q \rangle^s [\tilde{\chi}_R(Q), \theta(H)] \langle Q \rangle^{s-1-\delta} \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n \rangle \\ &\quad + \langle \langle Q \rangle^{-s} f_n, \langle Q \rangle^s [\tilde{\chi}_R(Q), \theta(H)] \langle Q \rangle^{-1-\delta} [\theta(H), \tilde{\chi}_R(Q)] \langle Q \rangle^s \langle Q \rangle^{-s} f_n \rangle) \end{aligned}$$

Soit δ tel que $1 + \delta = 2s$. Pour $R \geq R_1$ assez grand on obtient que

$$A_1^{4,4} \geq C \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\|^2 + O(R^{-1}) \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\| + O(R^{-2}).$$

$A_1^{4,1}, A_1^{4,3}$ se traitent de la même manière. Étudions par exemple $A_1^{4,3}$.

D'après (3.2.0.2) on a

$$\langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)} (\theta(H) - \theta(H_0)) \langle H_0 \rangle$$

est un opérateur borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned}
A_1^{4,3} &= \langle f_n, \tilde{\chi}_R(Q) \theta(H) \langle Q \rangle^{-1-\delta} (\theta(H_0) - \theta(H)) \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle \\
&= \langle f_n, \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-1-\delta} (\theta(H_0) - \theta(H)) \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle \\
&+ \langle f_n, [\tilde{\chi}_R(Q), \theta(H)] \langle Q \rangle^{-1-\delta} (\theta(H_0) - \theta(H)) \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle \\
&= \langle \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n, \langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)-1-\delta} \langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)} (\theta(H_0) \\
&- \theta(H)) \langle Q \rangle^s \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n \rangle + \langle \langle Q \rangle^{-s} f_n, \langle Q \rangle^s [\tilde{\chi}_R(Q), \theta(H)] \\
&\langle Q \rangle^{-1-\delta-\inf(\beta, r_0)} \langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)} (\theta(H_0) - \theta(H)) \langle Q \rangle^s \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n \rangle \\
&= \langle \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n, \langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)-1-\delta} \langle Q \rangle^s \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)} \\
&(\theta(H_0) - \theta(H)) \langle Q \rangle^{-s} f_n \rangle + \langle \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n, \langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)-1-\delta} \\
&[\langle Q \rangle^s \tilde{\chi}_R(Q), \langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)} (\theta(H_0) - \theta(H)) \langle Q \rangle^s f_n] \\
&+ \langle \langle Q \rangle^{-s} f_n, \langle Q \rangle^s [\tilde{\chi}_R(Q), \theta(H)] \langle Q \rangle^{-1-\delta-\inf(\beta, r_0)} \langle Q \rangle^s \langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)} \\
&(\theta(H_0) - \theta(H)) \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n \rangle \\
&+ \langle \langle Q \rangle^{-s} f_n, \langle Q \rangle^s [\tilde{\chi}_R(Q), \theta(H)] \langle Q \rangle^{-1-\delta-\inf(\beta, r_0)} \\
&[\langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)} (\theta(H_0) - \theta(H)), \langle Q \rangle^s] \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n \rangle, \\
|A_1^{4,3}| &= O(R^{-\inf(\beta, r_0)}) \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\|
\end{aligned}$$

Nous concluons que

$$|A_1^{4,1}| = |A_1^{4,3}| = O(R^{-\inf(\beta, r_0)}) \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\|$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
A_1^{4,2} &= \langle f_n, \tilde{\chi}_R(Q) (\theta(H_0) - \theta(H)) \langle Q \rangle^{-1-\delta} (\theta(H_0) - \theta(H)) \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle \\
&= \langle \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n, \langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)} \langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)} (\theta(H_0) - \theta(H)) \langle Q \rangle^{-1-\delta-\inf(\beta, r_0)} \\
&\quad \langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)} (\theta(H_0) - \theta(H)) \langle Q \rangle^s \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n \rangle \\
&= \langle \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n, \langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)} (\theta(H_0) - \theta(H)) \langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)} \langle Q \rangle^{-1-\delta-\inf(\beta, r_0)} \\
&\quad \langle Q \rangle^s \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)} (\theta(H_0) - \theta(H)) \langle Q \rangle^{-s} f_n \rangle \\
&+ \langle \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n, [\langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)} (\theta(H_0) - \theta(H)), \langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)}] \langle Q \rangle^{-1-\delta-\inf(\beta, r_0)} \\
&\quad \langle Q \rangle^s \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)} (\theta(H_0) - \theta(H)) \langle Q \rangle^{-s} f_n \rangle \\
&+ \langle \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n, \langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)} (\theta(H_0) - \theta(H)) \langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)} \langle Q \rangle^{-1-\delta-\inf(\beta, r_0)} \\
&\quad [\langle Q \rangle^s \tilde{\chi}_R(Q), \langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)} (\theta(H_0) - \theta(H))] \langle Q \rangle^{-s} f_n \rangle \\
&+ \langle \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n, [\langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)} (\theta(H_0) - \theta(H)), \langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)}] \langle Q \rangle^{-1-\delta-\inf(\beta, r_0)} \\
&\quad [\langle Q \rangle^s \tilde{\chi}_R(Q), \langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)} (\theta(H_0) - \theta(H))] \langle Q \rangle^{-s} f_n \rangle \\
|A_1^{4,2}| &= O(R^{-2\inf(\beta, r_0)}) \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\|.
\end{aligned}$$

Par suite on trouve que

$$A_1^4 \geq C \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\|^2 + O(R^{-\inf(\beta, r_0)}) \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\| + O(R^{-2})$$

A_1^2, A_1^3 se traitent de la même manière. Étudions par exemple A_1^3 ,

$$\begin{aligned}
A_1^3 &= \langle f_n, \theta(H_0) P f'_\delta(Q) P (\theta(H) - \theta(H_0)) \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle \\
&= \langle \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n, \langle Q \rangle^s \theta(H_0) P f'_\delta(Q) P (\theta(H) - \theta(H_0)) \langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)} \\
&\quad \langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)} \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n \rangle \\
&= \langle \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n, \langle Q \rangle^s \theta(H_0) P f'_\delta(Q) \langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)} \tilde{\chi}_R(Q) \\
&\quad P (\theta(H) - \theta(H_0)) \langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)} \langle Q \rangle^{-s} f_n \rangle \\
&+ \langle \tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n, \langle Q \rangle^s \theta(H_0) P f'_\delta(Q) [P (\theta(H) - \theta(H_0)) \langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)}, \\
&\quad \langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)} \tilde{\chi}_R(Q)] \langle Q \rangle^{-s} f_n \rangle \\
|A_1^2| = |A_1^3| &= O(R^{2s-1-\inf(\beta, r_0)}) \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\|.
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
A_1^1 &= \langle f_n, \tilde{\chi}_R(Q)(\theta(H) - \theta(H_0))Pf'_\delta(Q)P(\theta(H) - \theta(H_0))\tilde{\chi}_R(Q)f_n \rangle \\
&= \langle \tilde{\chi}_R(Q)\langle Q \rangle^{-s}f_n, \langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)}\langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)}(\theta(H) - \theta(H_0)) \\
&\quad Pf'_\delta(Q)P(\theta(H) - \theta(H_0))\langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)}\langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)}\tilde{\chi}_R(Q)\langle Q \rangle^{-s}f_n \rangle \\
&= \langle \tilde{\chi}_R(Q)\langle Q \rangle^{-s}f_n, \langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)}(\theta(H) - \theta(H_0))P\langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)}f'_\delta(Q) \\
&\quad \langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)}\tilde{\chi}_R(Q)P(\theta(H) - \theta(H_0))\langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)}\langle Q \rangle^{-s}f_n \rangle \\
&\quad + \langle \tilde{\chi}_R(Q)\langle Q \rangle^{-s}f_n, [\langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)}(\theta(H) - \theta(H_0))P, \langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)}]f'_\delta(Q) \\
&\quad \langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)}\tilde{\chi}_R(Q)P(\theta(H) - \theta(H_0))\langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)}\langle Q \rangle^{-s}f_n \rangle \\
&\quad + \langle \tilde{\chi}_R(Q)\langle Q \rangle^{-s}f_n, \langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)}(\theta(H) - \theta(H_0))P\langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)}f'_\delta(Q) \\
&\quad [\langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)}\tilde{\chi}_R(Q), P(\theta(H) - \theta(H_0))\langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)}\langle Q \rangle^{-s}f_n] \\
&\quad + \langle \tilde{\chi}_R(Q)\langle Q \rangle^{-s}f_n, [\langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)}(\theta(H) - \theta(H_0))P, \langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)}]f'_\delta(Q) \\
&\quad [\langle Q \rangle^{s-\inf(\beta, r_0)}\tilde{\chi}_R(Q), P(\theta(H) - \theta(H_0))\langle Q \rangle^{\inf(\beta, r_0)}\langle Q \rangle^{-s}f_n] \rangle \\
|A_1^1| &= O(R^{2s-1-2\inf(\beta, r_0)})\|\tilde{\chi}_R(Q)\langle Q \rangle^{-s}f_n\|
\end{aligned}$$

Étudions maintenant A_2 et A_3 qu'ils se traitent de la même manière. Étudions A_2

$$\begin{aligned}
A_2 &= \langle f_n, [\theta(H)P, \tilde{\chi}_R(Q)]f'_\delta(Q)P\theta(H)\tilde{\chi}_R(Q)f_n \rangle \\
&= \langle \langle Q \rangle^{-s}f_n, \langle Q \rangle^s[\theta(H)P, \tilde{\chi}_R(Q)]f'_\delta(Q)P\theta(H)\langle Q \rangle^s\tilde{\chi}_R(Q)\langle Q \rangle^{-s}f_n \rangle \\
&= \langle \langle Q \rangle^{-s}f_n, \langle Q \rangle^s[\theta(H)P, \tilde{\chi}_R(Q)]f'_\delta(Q)\langle Q \rangle^sP\theta(H)\tilde{\chi}_R(Q)\langle Q \rangle^{-s}f_n \rangle \\
&\quad + \langle \langle Q \rangle^{-s}f_n, \langle Q \rangle^s[\theta(H)P, \tilde{\chi}_{R/2}(Q)]f'_\delta(Q)[P\theta(H), \langle Q \rangle^s]\tilde{\chi}_R(Q)\langle Q \rangle^{-s}f_n \rangle \\
|A_2| &= O(R^{2s-2})\|\tilde{\chi}_R(Q)\langle Q \rangle^{-s}f_n\|
\end{aligned}$$

Il nous reste qu'à étudier A_4 .

$$\begin{aligned}
A_4 &= \langle f_n, [\theta(H)P, \tilde{\chi}_R(Q)]f'_\delta(Q)[\tilde{\chi}_R(Q), P\theta(H)]f_n \rangle \\
&= \langle \langle Q \rangle^{-s}f_n, \langle Q \rangle^s[\theta(H)P, \tilde{\chi}_R(Q)]f'_\delta(Q)[\tilde{\chi}_R(Q), P\theta(H)]\langle Q \rangle^s\langle Q \rangle^{-s}f_n \rangle \\
|A_4| &= O(R^{2s-3}).
\end{aligned}$$

Finalement on peut conclure l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
\langle f_n, [H_0, iB_{\delta, R}]f_n \rangle &\geq C\|\tilde{\chi}_R(Q)\langle Q \rangle^{-s}f_n\|^2 + O(R^{2s-1-\inf(\beta, r_0)})\|\tilde{\chi}_R(Q)\langle Q \rangle^{-s}f_n\| \\
&\quad + O(R^{2s-3})
\end{aligned}$$

En deuxième lieu on va étudier $\langle f_n, [V_{lr}, iB_{\delta, R}]f_n \rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle f_n, [V_{lr}, iB_{\delta, R}]f_n \rangle &= \langle f_n, f_{\delta, R}(Q) \cdot \nabla V_{lr}f_n \rangle \\
&= \langle \tilde{\chi}_R(Q)\langle Q \rangle^{-s}f_n, \tilde{\chi}_{R/2}(Q)\langle Q \rangle^s(2 - \langle Q \rangle^{-\delta})\langle Q \rangle^{-1-r_1} \\
&\quad \langle Q \rangle^{r_1}Q \cdot \nabla V_{lr}(Q)\langle Q \rangle^s\tilde{\chi}_R(Q)\langle Q \rangle^{-s}f_n \rangle \\
|\langle f_n, [V_{lr}, iB_{\delta, R}]f_n \rangle| &= O(R^{2s-1-r_1})\|\tilde{\chi}_R(Q)\langle Q \rangle^{-s}f_n\|^2, \quad \text{où } 1/2 < s < 1/2 + r_1/2
\end{aligned}$$

En troisième lieu et finalement, il nous reste qu'à étudier

$$\langle f_n, [W_{1, \beta}, iB_{\delta, R}]f_n \rangle. \tag{3.4.2.6}$$

On peut remplacer la forme quadratique dans (3.4.2.6) $[W_{1, \beta}, iB_{\delta, R}]$ par $W_{1, \beta}if_{\delta, R}(Q) \cdot P$. Soit θ tel que $\theta(H)f_n = f_n$

$$\begin{aligned}
\langle f_n, W_{1, \beta}iB_{\delta, R}f_n \rangle &= \langle f_n, \theta(H)W_{1, \beta}if_{\delta, R}(Q) \cdot P\theta(H)f_n \rangle \\
&= \langle \tilde{\chi}_R(Q)\theta(H)f_n, W_{1, \beta}if_{\delta, R}(Q)\tilde{\chi}_R(Q)P\theta(H)f_n \rangle \\
&= \langle \tilde{\chi}_R(Q)f_n, \theta(H)W_{1, \beta}if_{\delta, R}(Q)\tilde{\chi}_R(Q)P\theta(H)f_n \rangle \\
&\quad + \langle [\tilde{\chi}_R(Q), \theta(H)]f_n, W_{1, \beta}if_{\delta, R}(Q)\tilde{\chi}_R(Q)P\theta(H)f_n \rangle \\
&= C_1 + C_2
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
 |C_2| &\leq |\langle [\tilde{\chi}_R(Q), \theta(H)]f_n, W_{1,\beta} i f_\delta(Q) P\theta(H) \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle| \\
 &+ |\langle [\tilde{\chi}_R(Q), \theta(H)]f_n, W_{1,\beta} i f_\delta(Q) [\tilde{\chi}_R(Q), P\theta(H)]f_n \rangle| \\
 &\leq \|\langle Q \rangle^{-s} f_n\| \cdot \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\| \cdot \|\langle Q \rangle^s [\tilde{\chi}_R(Q), \theta(H)] W_{1,\beta} i f_\delta(Q) P\theta(H) \langle Q \rangle^s\| \\
 &+ \|\langle Q \rangle^{-s} f_n\|^2 \cdot \|\langle Q \rangle^s [\tilde{\chi}_R(Q), \theta(H)] W_{1,\beta} i f_\delta(Q) [\tilde{\chi}_R(Q), P\theta(H)] \langle Q \rangle^s\| \\
 &\leq O(R^{2s-1-\beta}) \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\| + O(R^{2s-2-\beta})
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 |C_1| &\leq |\langle \tilde{\chi}_R(Q) f_n, \theta(H) W_{1,\beta} i f_\delta(Q) P\theta(H) \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle| \\
 &+ |\langle \tilde{\chi}_R(Q) f_n, \theta(H) W_{1,\beta} i f_\delta(Q) [\tilde{\chi}_R(Q), P\theta(H)]f_n \rangle| \\
 &\leq C_1^1 + C_1^2
 \end{aligned}$$

Puisque on a

$$\begin{aligned}
 |C_1^2| &\leq \|\langle Q \rangle^{-s} f_n\| \cdot \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\| \cdot \|\langle Q \rangle^s \theta(H) W_{1,\beta} i f_\delta(Q) [\tilde{\chi}_R(Q), P\theta(H)] \langle Q \rangle^s\| \\
 &\leq O(R^{2s-2-\beta}) \cdot \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\|
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 |C_1^1| &\leq |\langle \tilde{\chi}_R(Q) f_n, (\theta(H) - \theta(H_0)) W_{1,\beta} i f_\delta(Q) P\theta(H) \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle| \\
 &+ |\langle \tilde{\chi}_R(Q) f_n, \theta(H_0) W_{1,\beta} i f_\delta(Q) P(\theta(H) - \theta(H_0)) \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle| \\
 &+ |\langle \tilde{\chi}_R(Q) f_n, \theta(H_0) W_{1,\beta} i f_\delta(Q) P\theta(H_0) \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle|
 \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
 &|\langle \tilde{\chi}_R(Q) f_n, (\theta(H) - \theta(H_0)) W_{1,\beta} i f_\delta(Q) P\theta(H) \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle| \\
 &\leq \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\|^2 \cdot \|\tilde{\chi}_{R/2}(Q) \langle Q \rangle^s (\theta(H) - \theta(H_0)) W_{1,\beta} i f_\delta(Q) P\theta(H) \langle Q \rangle^s\| \\
 &\leq O(R^{2s-\beta-\inf(\beta, r_0)}) \cdot \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\|^2
 \end{aligned} \tag{3.4.2.7}$$

$|\langle \tilde{\chi}_R(Q) f_n, \theta(H_0) W_{1,\beta} i f_\delta(Q) P(\theta(H) - \theta(H_0)) \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle|$ se traite de la même façon que (3.4.2.7). Il nous reste que l'étude de

$$|\langle \tilde{\chi}_R(Q) f_n, \theta(H_0) W_{1,\beta} i f_\delta(Q) P\theta(H_0) \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle|.$$

Or d'après [GJ] $\langle x \rangle \theta(H_0) \sin(k|x|) \theta(H_0)$ est un opérateur borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
 &|\langle \tilde{\chi}_R(Q) f_n, \theta(H_0) W_{1,\beta} i f_\delta(Q) P\theta(H_0) \tilde{\chi}_R(Q) f_n \rangle| \\
 &\leq O(R^{2s-1-\beta}) \cdot \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\|^2
 \end{aligned}$$

Finalement obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
 |\langle f_n, [W_{1,\beta}, i B_{\delta,R}] f_n \rangle| &\leq O(R^{2s-1-\beta}) \cdot \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\| \\
 &+ O(R^{2s-\beta-\inf(\beta, r_0)}) \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\|^2 \\
 &+ O(R^{2s-2-\beta}).
 \end{aligned}$$

Pour $R \geq R_1$ assez grand

$$\begin{aligned}
 |\langle f_n, [H, i B_{\delta,R}] f_n \rangle| &= |\langle f_n, [H_0 + V_{lr} + V_{sr} + W_{1,\beta}, i B_{\delta,R}] f_n \rangle| \\
 &\geq C \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\|^2 + O(R^{2s-1-\inf(\beta, r_0)}) \|\tilde{\chi}_R(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n\| \\
 &+ O(R^{2s-2-\beta}), \\
 &\text{où } 1/2 < s < 1/2 + r_1/2.
 \end{aligned} \tag{3.4.2.8}$$

En passant par la limite supérieur lorsque n tend vers $+\infty$ dans (3.4.2.8) on trouve le théorème 3.4.5. $\blacksquare$

Preuve : théorème 3.4.7 D'après [M] on applique l'estimation de Mourre avec $K_1 = 0$ à $\chi_R(Q)f_n$ on obtient

$$\langle \chi_R(Q)f_n, [H, i\theta(H)A\theta(H)]\chi_R(Q)f_n \rangle \geq C\|\theta(H)\chi_R(Q)f_n\|^2 \quad (3.4.2.9)$$

Or, comme H est très régulier par rapport à Q , c'est à dire que $H \in \mathcal{C}^\infty(Q)$, on a

$$\begin{aligned} \theta(H)\chi_R(Q)f_n &= \chi_R(Q)f_n + [\chi_R(Q), \theta(H)]\langle Q \rangle^s \langle Q \rangle^{-s} f_n \\ &= \chi_R(Q)f_n + O(R^{s-1}), \end{aligned}$$

Car d'après la formule d'Helffer-Sjöstrand on a

$$\begin{aligned} [\chi_R(Q), \theta(H)]\langle Q \rangle^s &= [Q, \theta(H)]\chi'_R(Q)\langle Q \rangle^s \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \chi_R^{\mathbb{C}}(z) (z - \frac{Q}{R})^{-2} [[\theta(H), \frac{Q}{R}], \frac{Q}{R}] (z - \frac{Q}{R})^{-1} \langle Q \rangle^s dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

et donc

$$\|[\chi_R(Q), \theta(H)]\langle Q \rangle^s\| = O(R^{s-1})$$

alors l'inégalité (3.4.2.9) devient

$$\begin{aligned} |\langle \chi_R(Q)f_n, [H, i\theta(H)A\theta(H)]\chi_R(Q)f_n \rangle| &\geq C\|\chi_R(Q)f_n\|^2 \\ &\quad + O(R^{s-1})\|\chi_R(Q)f_n\| \\ &\quad + O(R^{2s-2}). \end{aligned}$$

D'autre part comme

$$\begin{aligned} &\langle \chi_R(Q)f_n, [H, i\theta(H)A\theta(H)]\chi_R(Q)f_n \rangle \\ &= \langle f_n, [H, i\chi_R(Q)\theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)]f_n \rangle \\ &\quad + 2\operatorname{Re}\langle [H, \chi_R(Q)]f_n, i\theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)f_n \rangle. \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} &\langle f_n, [H, i\chi_R(Q)\theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)]f_n \rangle + 2\operatorname{Re}\langle [H, i\chi_R(Q)]f_n, i\theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)f_n \rangle \\ &= i\langle f_n, H\chi_R(Q)\theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)f_n \rangle - i\langle f_n, \chi_R(Q)\theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)Hf_n \rangle \\ &\quad + \langle [H, \chi_R(Q)]f_n, i\theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)f_n \rangle + \overline{\langle [H, \chi_R(Q)]f_n, i\theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)f_n \rangle} \\ &= i\langle f_n, H\chi_R(Q)\theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)f_n \rangle - i\langle f_n, \chi_R(Q)\theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)Hf_n \rangle \\ &\quad + i\langle f_n, \chi_R(Q)H\theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)f_n \rangle - i\langle f_n, H\chi_R(Q)\theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)f_n \rangle \\ &\quad - i\langle f_n, \chi_R(Q)\theta(H)A\theta(H)H\chi_R(Q)f_n \rangle + i\langle f_n, \chi_R(Q)\theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)Hf_n \rangle \\ &= i\langle f_n, \chi_R(Q)H\theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)f_n \rangle - i\langle f_n, \chi_R(Q)\theta(H)A\theta(H)H\chi_R(Q)f_n \rangle \\ &= \langle \chi_R(Q)f_n, [H, i\theta(H)A\theta(H)]\chi_R(Q)f_n \rangle. \end{aligned}$$

Or

$$[H, i\chi_R(Q)] = [-\Delta, i\chi_R(Q)] = -2(\nabla \cdot \nabla \chi_R)(Q) - (\Delta \chi_R)(Q). \quad (3.4.2.10)$$

En utilisant (3.4.2.10),

$$\begin{aligned}
 & Re\langle [H, \chi_R(Q)]f_n, i\theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)f_n \rangle \\
 &= Re\langle (-2(\nabla \cdot \nabla \chi_R)(Q) - (\Delta \chi_R)(Q))f_n, i\theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)f_n \rangle \\
 &= Re\langle (-2\langle Q \rangle (\nabla \chi_R)(Q) \langle Q \rangle^s \widetilde{\chi_{R/2}}(Q) \langle Q \rangle^{-s} f_n, i\langle Q \rangle^{-1} \nabla \theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)f_n) \\
 &\quad + \langle -\langle Q \rangle (\Delta \chi_R)(Q) \langle Q \rangle^s \langle Q \rangle^{-s} f_n, i\langle Q \rangle^{-1} \theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)f_n) \rangle,
 \end{aligned} \tag{3.4.2.11}$$

Comme $\langle Q \rangle^{-1} \nabla \theta(H)A\theta(H)$ est un opérateur borné et en utilisant (3.4.1.8) pour $\alpha = 2s - 1 - \beta$ nous obtenons que

$$\begin{aligned}
 2Re\langle [H, i\chi_R(Q)]f_n, i\theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)f_n \rangle &= O(R^{3s-1-\beta})\|\chi_R(Q)f_n\| \\
 &\quad + O(R^{s-1})\|\chi_R(Q)f_n\| \\
 &= O(R^{3s-1-\beta})\|\chi_R(Q)f_n\|.
 \end{aligned}$$

Par suite on obtient que

$$\begin{aligned}
 \langle f_n, [H, i\chi_R(Q)\theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)]f_n \rangle &\geq C\|\chi_R(Q)f_n\|^2 \\
 &\quad + O(R^{3s-1-\beta})\|\chi_R(Q)f_n\| \\
 &\quad + O(R^{2s-2}).
 \end{aligned}$$

D'après le théorème 3.4.4 nous trouvons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, [H, i\chi_R(Q)\theta(H)A\theta(H)\chi_R(Q)]f_n \rangle = 0. \tag{3.4.2.12}$$

Par suite en utilisant (3.4.1.9) nous obtenons

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|\chi_R(Q)f_n\| = O(R^{3s-1-\beta}).$$

Puisque $\beta > 1/2$, on peut trouver s tel que $3s - 1 - \beta < 0$. Il résulte de cela et (3.4.1.8) que $\eta = 0$. ■

Remerciement : Après avoir fini ce travail, qui a pris un long moment, l'auteur ne peut pas oublier tous les sacrifices de Thierry Jecko et le remercie grandement.

Proposition 3.4.9 *En dimension $d = 1$. Nous ne pouvons pas voir $W_{1,\beta} = \frac{\sin(k|Q|)}{\langle Q \rangle^\beta}$, $\beta > 0$ comme $\mu(\nabla V_{s,r})$, où μ est une constante de $\mathbb{R}^d$ et $V_{s,r}$ est un potentiel à courte portée.*

Preuve : Raisonnons par l'absurde, supposons en une dimension que

$$W_{1,\beta}(x) = \frac{\sin(k|x|)}{\langle x \rangle^\beta} = \mu(\nabla V_{s,r})(x), \quad (3.4.2.13)$$

Soit $a, x > 0$. En intégrant par partie on trouve que

$$\begin{aligned} \int_x^a \frac{\sin(ks)}{\langle s \rangle^\beta} ds &= \left[\frac{(1-\cos(ks))}{k(1+s^2)^{\beta/2}} \right]_x^a + \beta \int_x^a \frac{(1-\cos(ks))}{k} \frac{s}{(1+s^2)^{\beta/2+1}} ds \\ &= \frac{(1-\cos(ka))}{k(1+a^2)^{\beta/2}} - \frac{(1-\cos(kx))}{k(1+x^2)^{\beta/2}} + \beta \int_x^a \frac{(1-\cos(ks))}{k} \frac{s}{(1+s^2)^{\beta/2+1}} ds. \end{aligned}$$

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos(ks))}{k} \frac{s}{(1+s^2)^{\beta/2+1}} ds$ est fini, et puisque

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{(1-\cos(ka))}{k(1+a^2)^{\beta/2}} = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos(kx))}{k(1+x^2)^{\beta/2}} = 0,$$

alors on a $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ks)}{\langle s \rangle^\beta} ds$ est défini. Comme $s \rightarrow \frac{(1-\cos(ks))}{k} \frac{s}{(1+s^2)^{\beta/2+1}}$ est une fonction continue et strictement positive sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et

$$\int_0^a \frac{(1-\cos(ks))}{k} \frac{s}{(1+s^2)^{\beta/2+1}} ds$$

converge lorsque a tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin(k|s|)}{\langle s \rangle^\beta} ds = l > 0$$

D'autre part d'après (3.4.2.13) on a

$$V_{s,r}(a) = 1/\mu \int_0^a \frac{\sin(k|s|)}{\langle s \rangle^\beta} ds.$$

Donc, pour tout $\rho_0 > 0$,

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \langle a \rangle^{1+\rho_0} V_{s,r}(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} 1/\mu \langle a \rangle^{1+\rho_0} \int_0^a \frac{\sin(k|s|)}{\langle s \rangle^\beta} ds = +\infty,$$

ce qui contredit le fait que $V_{s,r}$ est un potentiel à courte portée.

■

3.4.3 Cas d'un potentiel à longue portée symbolique

Quelques propriétés symboliques

Proposition 3.4.10 *[GJ] Soit $a \in S(m, g)$. Soit $e_{\pm}(|\cdot|) = \chi_1(|\cdot|)e^{\pm ik|\cdot|}$ où χ_1 est donné par (3.4.1.7). Ils existent des symboles $a_{\pm} \in S(m, g)$, $b_{\pm} \in S(m\langle x \rangle^{-\infty}, g)$, et $c_{\pm} \in S(m\langle x \rangle^{-1}\langle \xi \rangle^{-1}, g)$ tel que*

$$e_{\pm}a^w = a_{\pm}^we_{\pm} + e_{\pm}b_{\pm}^w + c_{\pm}^we_{\pm}.$$

En plus, dans la région où $\chi_1(x) \neq 0$, $a_{\pm}$ est donné par $a_{\pm}(x, \xi) = a(x, \xi \mp k|x|^{-1}x)$.

Proposition 3.4.11 *Soit $V_{l,r}$ est un symbole d'un opérateur pseudo-différentiel à long portée dans $S(\langle Q \rangle^{-r_0}, g)$. Les résultats (3.2) et (3.4.8) de ce chapitre sont valables en remplaçant l'hypothèse $\beta + \inf(r_0, \beta) > 1$ par $r_0 > 0$ et $\beta > 1/2$.*

Preuve : La condition sur β est apparue lors du passage de $\theta(H_0)$ à $\theta(H)$.

En premier lieu, pour tout $0 \leq \delta < 1$, on a $\theta(-\Delta + V_{l,r}) \sin(k|x|) \theta(-\Delta + V_{l,r}) \langle x \rangle^{\delta}$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ lorsque θ est supporté dans $]0, \frac{k^2}{4}[$ à support petit autour de λ . Soit $\chi_1 \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ tel que

$$\chi_1 = 0 \text{ sur } [-1, 1] \quad \text{et} \quad \chi_1 = 1 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus [-2, 2]. \quad (3.4.3.1)$$

$$\begin{aligned} & \theta(-\Delta + V_{l,r}) \sin(k|x|) \theta(-\Delta + V_{l,r}) \\ &= \theta(-\Delta + V_{l,r}) \chi_1(x) \sin(k|x|) \theta(-\Delta + V_{l,r}) + K_1 \\ &= \theta(-\Delta + V_{l,r}) \chi_1(x) \sin(k|x|) \{ \theta(\xi^2 + V_{l,r}) \}^w + K_2 \\ &= \{ \theta(\xi^2 + V_{l,r}) \}^w \left(\frac{e_+ - e_-}{2i} \right) \{ \theta(\xi^2 + V_{l,r}) \}^w + K_3, \end{aligned}$$

en appliquant maintenant la proposition(3.4.11) on trouve

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2i} \{ \theta(\xi^2 + V_{l,r}) \}^w (a_{\pm}^w e_{\pm} + e_{\pm} b_{\pm}^w + c_{\pm}^w e_{\pm}) + K_3 \\ &= \frac{1}{2i} \{ \theta(\xi^2 + V_{l,r}) \}^w a_{\pm}^w e_{\pm} + K_4 \\ &= \frac{1}{2i} \{ \theta(\xi^2 + V_{l,r}) a_{\pm} \}^w e_{\pm} + K_5 \\ &= \frac{1}{2i} \{ \theta(\xi^2 + V_{l,r}) \chi_1 a_{\pm} \}^w e_{\pm} + K_6 \\ &= \frac{1}{2i} \{ \theta(\xi^2 + V_{l,r}) \chi_1 \theta((\xi \mp k \frac{x}{|x|})^2 + V_{l,r}) \}^w e_{\pm} + K_6 \end{aligned}$$

Où $(K_j)_{j=1,\dots,6}$ sont de la forme suivante $B_1 b_1^w$ ou $b_2^w B_2$ avec $b_1, b_2 \in S(\langle x \rangle^{-1} \langle \xi \rangle^{-1}, g)$ alors $b_1 \langle x \rangle^{\delta}, b_2 \langle x \rangle^{\delta} \in S(\langle x \rangle^{\delta-1} \langle \xi \rangle^{-1}, g)$ et B_1, B_2 sont des opérateurs bornés sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, et par suite pour tout $1 \leq j \leq 6, 0 \leq \delta < 1$ on a $K_j \langle x \rangle^{\delta}$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

On va montrer que $\theta(\xi^2 + V_{l,r})\chi_1\theta((\xi \pm k\frac{x}{|x|})^2 + V_{l,r}) = 0$ sous les conditions que nous avons pris sur θ . Étudions le support de la fonction $\theta(\cdot^2 + V_{l,r})\theta((\pm k\frac{x}{|x|})^2 + V_{l,r})$.

Soit $\theta \in \mathcal{C}^\infty(]0, \frac{k^2}{4}[)$ à support petit dans $[a, b] \subset]0, \frac{k^2}{4}[$. Soit a tel que $\frac{k^2}{4}(1 - \frac{b-a}{k^2})^2 \geq \frac{\frac{k^2}{4}-b}{2}$. Soit $R > 0$ tel que pour tout $x > R$ on a $|V(x)| \leq \frac{\frac{k^2}{4}-b}{2}$. Soit $A := (\{(x, \xi); |x| > R, |\xi|^2 + V_{l,r}(x) \in [a, b]\})$, et $B := \{(x, \xi); |x| > R, |\xi \pm k\frac{x}{|x|}|^2 + V_{l,r}(x) \in [a, b]\}$. Soit $(x, \xi) \in A \cap B$ donc

$$a - V_{l,r}(x) < \xi^2 < b - V_{l,r}(x) \quad \text{et} \quad a - V_{l,r}(x) < (\xi \pm k\frac{x}{|x|})^2 + V_{l,r}(x) < b - V_{l,r}(x)$$

avec une opération de soustraction entre ces deux inégalités on retrouve la même situation que dans [GJ] car la translation porte que sur ξ . On retrouve les conditions apparues dans [GJ]

$$||\xi|^2 - |\xi - \pm k\frac{x}{|x|}|^2 \leq b - a$$

équivalent à

$$|\mp 2k\xi\frac{x}{|x|} + k^2| \leq b - a$$

équivalent à

$$|\mp \xi\frac{x}{|x|} + \frac{k}{2}| \leq \frac{b-a}{2k}$$

donc

$$-\frac{b-a}{2k} - \frac{k}{2} \leq \mp \xi\frac{x}{|x|} \leq \frac{b-a}{2k} - \frac{k}{2}$$

donc

$$\frac{k}{2} - \frac{b-a}{2k} \leq \pm \xi\frac{x}{|x|} \leq \frac{b-a}{2k} + \frac{k}{2}.$$

Ceci contredit le fait que

$$\frac{k}{2} - \frac{b-a}{2k} \leq \pm \xi\frac{x}{|x|} \leq |\xi| \leq \sqrt{b+\epsilon}$$

qui implique

$$\frac{k^2}{4}(1 - \frac{b-a}{k^2})^2 \leq |\xi| \leq b + \epsilon$$

équivalent à

$$\frac{k^2}{4}(1 - \frac{b-a}{k^2})^2 - b \leq |\xi| \leq \frac{\frac{k^2}{4}-b}{2}.$$

par suite on trouve que l'intersection des supports vide. En deuxième lieu on refait le même argument de Helffer-Sjöstrand pour $\theta(H) - \theta(-\Delta + V_{l,r})$ au lieu de $\theta(H) - \theta(-\Delta)$ on obtient que $(\theta(H) - \theta(-\Delta + V_{l,r}))\langle Q \rangle^\beta$ est un opérateur bornée sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Grâce à ces deux propriétés la condition $\beta + \inf(r_0, \beta) > 1$ devient $r_0 > 0$ et $\beta > 1/2$ dans le cas où le potentiel à longue porté est symbolique dans $S(0, g)$. ■

3.5 Estimation de Mourre au dela de $k^2/4$.

Nous ne pouvons pas suivre le même raisonnement de la première partie car pour θ supporté au dela de $k^2/4$ à support petit et pour $0 < \delta < 1$, $\langle Q \rangle^\delta \theta(H_0) \sin(k|Q|) \theta(H_0)$ n'est pas compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, $d > 1$. On va exploiter le caractère radial du potentiel W pour montrer le théorème suivant :

Théorème 3.5.1 *Soit $\lambda > k^2/4$. Soit $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ à support petit autour de λ . Alors pour tout $\epsilon > 0$, ils existent $B_\epsilon, \tilde{B}_\epsilon$, bornés sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, uniformément en ϵ , et il existe C_ϵ tels que*

$$\theta(H_0)e_\pm(Q)\theta(H_0) = C_\epsilon + \langle Q \rangle^{-1}B_\epsilon + \tilde{B}_\epsilon\langle Q \rangle^{-1}, \text{ et } \|C_\epsilon\| \leq \epsilon,$$

avec $e_\pm(|x|) = e^{\pm ik|x|}\chi_1(|x|)$, où $\chi_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\chi_1 = 0$ sur $[-1, 1]$ et $\chi_1 = 1$ sur $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

Preuve :

Soit $\lambda > k^2/4$. Soit $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ à support petit autour de λ . Soit U l'opérateur unitaire suivant :

$$\begin{aligned} U : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathcal{L}^2([0, +\infty[, dr) \otimes \mathcal{L}^2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \tilde{f}(x_1, \dots, x_d) &\longmapsto (U\tilde{f})(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{d-1}) \\ &= r^{\frac{d-1}{2}} \tilde{f}(x_1(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{d-1}), \dots, x_d(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{d-1})), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} x_1(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{d-1}) &= r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{d-1}, \\ x_2(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{d-1}) &= r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{d-2} \cos \varphi_{d-1}, \\ x_3(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{d-1}) &= r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{d-3} \cos \varphi_{d-2}, \\ &\vdots \\ x_{d-1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{d-1}) &= r \sin \varphi_2 \cos \varphi_1, \\ x_d(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{d-1}) &= r \cos \varphi_2 \cos \varphi_1. \end{aligned}$$

D'après [BD]. En utilisant l'opérateur unitaire U , on en déduit que H_0 sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ est unitairement équivalent à $-\partial_r^2 - \Delta_S/r^2$ sur $\mathcal{L}^2([0, +\infty[) \otimes \mathcal{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})$, où $-\Delta_S$ est le Laplacien sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$. Or

$$\theta(H_0)e_\pm(|Q|)\theta(H_0) = U\theta(-\partial_r^2 - \frac{\Delta_S}{r^2})U^*e_\pm(Q)U\theta(-\partial_r^2 - \frac{\Delta_S}{r^2})U^*.$$

Comme $e_\pm(|\cdot|)$ est radiale, on a $U^*e_\pm(Q)U = (e_\pm(Q_r) \otimes \mathbf{1})$, où Q_r est la réalisation auto-adjointe de l'opérateur de multiplication par r sur $\mathcal{L}^2([0, +\infty[)$. En effet, soit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}(e_{\pm}(Q)U\tilde{f})(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{d-1}) &= e_{\pm}(Q_r)r^{\frac{d-1}{2}}\tilde{f}(x_1(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{d-1}), \dots, x_d(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{d-1})) \\ &= U((e_{\pm}(Q_r) \otimes \mathbf{1})\tilde{f})(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{d-1}).\end{aligned}$$

Donc

$$\theta(H_0)e_{\pm}(Q)\theta(H_0) = U\theta(-\partial_r^2 - \frac{\Delta_S}{r^2})(e_{\pm}(Q_r) \otimes \mathbf{1})\theta(-\partial_r^2 - \frac{\Delta_S}{r^2})U^*.$$

Par suite l'étude de $\theta(H_0)e_{\pm}(Q)\theta(H_0)$ nous ramène à l'étude de

$$\theta(-\partial_r^2 - \frac{\Delta_S}{r^2})(e_{\pm}(Q_r) \otimes \mathbf{1})\theta(-\partial_r^2 - \frac{\Delta_S}{r^2}).$$

On décompose maintenant l'opérateur $-\Delta_S$ en harmoniques sphériques. Pour tout $j \geq 0$, soit Π_j le projecteur orthogonal sur l'espace vectorielle engendré par l'harmonique sphérique $Y_{\kappa_j}^{m_j - \frac{1}{2}}$. Rappelons que $(Y_{\kappa_j}^{m_j - \frac{1}{2}})_{j=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots; m_j=-j, \dots, j; \kappa_j=\pm(j+\frac{1}{2})}$ forment une base de $\mathcal{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})$ des vecteurs propres de $-\Delta_S$ donnée par :

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\varphi}$$

et

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} (x^2-1)^l,$$

avec $m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$, $l = 0, 1, 2, \dots$ et P_l^m sont les polynômes de Legendre.

Soit $\alpha(j) := j(j+d-2)$ l'énergie associé à Π_j .

$$-\Delta_S = \bigoplus_{j=0}^{+\infty} \alpha(j) \Pi_j.$$

D'après le théorème 2.1 qui est dans [BD], H_0 est unitairement équivalent à

$$\bigoplus_{j=0}^{+\infty} h_{\alpha(j)} = \bigoplus_{j=0}^{+\infty} \left(-\partial_r^2 + \frac{\alpha(j)}{r^2} \right) (\mathbf{1} \otimes \Pi_j),$$

où $h_{\alpha(j)}$ est auto-adjoint agissant sur $\mathcal{H}^2([0, +\infty[) \otimes \mathcal{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})$ avec les conditions au bord suivantes :

pour $j = 0$ et $d = 1, 3$;

$$\lim_{r \rightarrow 0} u(r) = 0$$

et pour $j = 0$ et $d = 2$;

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{1/2} (\ln(r))^{-1} u'(r) = 0,$$

dans les autres cas, c'est à dire, lorsque $j = 0$ et $d > 3$, et $j \geq 1$, il n'y a pas des conditions au bord.

Comme $\mathbf{1}_{\mathcal{L}^2([0,+\infty]) \otimes \mathcal{L}^2(\mathbb{S}^{d-1})} = \bigoplus_{j=0}^{+\infty} (\mathbf{1} \otimes \Pi_j)$, alors

$$\begin{aligned} \theta(-\partial_r^2 - \frac{\Delta_S}{r^2}) &= \bigoplus_{j=0}^{+\infty} \theta(-\partial_r^2 - \frac{\Delta_S}{r^2}) \mathbf{1} \otimes \Pi_j \\ &= \bigoplus_{j=0}^{+\infty} \theta(h_{\alpha(j)}) (\mathbf{1} \otimes \Pi_j). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\theta(-\partial_r^2 - \frac{\Delta_S}{r^2})(e_{\pm}(Q_r) \otimes \mathbf{1})\theta(-\partial_r^2 - \frac{\Delta_S}{r^2}) \\ &= \bigoplus_{j=0}^{+\infty} \theta(h_{\alpha(j)}) (\mathbf{1} \otimes \Pi_j) (e_{\pm}(Q_r) \otimes \mathbf{1}) \bigoplus_{s=0}^{+\infty} \theta(h_{\alpha(s)}) (\mathbf{1} \otimes \Pi_s) \\ &= \bigoplus_{j=0}^{+\infty} \bigoplus_{s=0}^{+\infty} \theta(h_{\alpha(j)}) (\mathbf{1} \otimes \Pi_j) (e_{\pm}(Q_r) \otimes \mathbf{1}) (\mathbf{1} \otimes \Pi_s) \theta(h_{\alpha(s)}) \end{aligned}$$

or pour $s, t \in \mathbb{N}$ on a

$$(\mathbf{1} \otimes \Pi_j)(e_{\pm}(Q_r) \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \Pi_s) = (e_{\pm}(Q_r) \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \Pi_j \Pi_s).$$

par suite, on en déduit que

$$\begin{aligned} &\theta(-\partial_r^2 - \frac{\Delta_S}{r^2})(e_{\pm}(Q_r) \otimes \mathbf{1})\theta(-\partial_r^2 - \frac{\Delta_S}{r^2}) \\ &= \bigoplus_{j=0}^{+\infty} \theta(h_{\alpha(j)}) (e_{\pm}(Q_r) \otimes \mathbf{1}) \theta(h_{\alpha(j)}) (\mathbf{1} \otimes \Pi_j). \end{aligned}$$

Pour $\alpha \in \{\alpha(j); j = 0, 1, 2, \dots\}$, on pose $h_{\alpha} = -\partial_r^2 + \frac{\alpha}{r^2}$ agissant sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{+*})$ avec les conditions au bord suivantes : pour $j = 0$ et $d = 1, 3$; $\lim_{r \rightarrow 0} u(r) = 0$ et pour $j = 0$ et $d = 2$; $\lim_{r \rightarrow 0} r^{1/2}(\ln(r))^{-1}u'(r) = 0$, dans les autres cas, c'est à dire, lorsque $j = 0$ et $d > 3$, et $j \geq 1$, il n'y a pas des conditions au bord. En admettant provisoirement la proposition 3.5.3, on a

$$\begin{aligned} &\theta(-\partial_r^2 - \frac{\Delta_S}{r^2})(e_{\pm}(Q_r) \otimes \mathbf{1})\theta(-\partial_r^2 - \frac{\Delta_S}{r^2}) \\ &= \bigoplus_{j=0}^{+\infty} \theta(\tilde{h}_{\alpha(j)})(e_{\pm}(Q_r) \otimes \mathbf{1})\theta(\tilde{h}_{\alpha(j)}) (\mathbf{1} \otimes \Pi_j) \\ &= \bigoplus_{j=0}^{+\infty} (\langle Q_r \rangle^{-1} B_{\alpha(j),1} + B_{\alpha(j),2} \langle r \rangle^{-1} + C_{\epsilon}(\alpha(j))) (\mathbf{1} \otimes \Pi_j) \\ &= \tilde{C}_{\epsilon} + \langle Q_r \rangle^{-1} (\bigoplus_{j=0}^{+\infty} B_{\alpha(j),1} (\mathbf{1} \otimes \Pi_j)) \\ &\quad + (\bigoplus_{j=0}^{+\infty} B_{\alpha(j),2} \langle Q_r \rangle^{-1} (\mathbf{1} \otimes \Pi_j) \langle Q_r \rangle) \langle Q_r \rangle^{-1}. \end{aligned}$$

avec $\|\tilde{C}_{\epsilon}\| \leq \epsilon$. On conclut alors que

$$\theta(-\partial_r^2 - \frac{\Delta_S}{r^2})(e_{\pm}(Q_r) \otimes \mathbf{1})\theta(-\partial_r^2 - \frac{\Delta_S}{r^2}) = \tilde{C}_{\epsilon} + \langle r \rangle^{-1} B + \tilde{B} \langle r \rangle^{-1}$$

où B et $\tilde{B}$ sont des opérateurs bornés sur $\mathcal{L}^2([0, +\infty[)$.

Alors

$$\begin{aligned} \theta(H_0)e_{\pm}(Q)\theta(H_0) &= U\theta(-\partial_r^2 - \frac{\Delta_S}{r^2})(e_{\pm}(Q_r) \otimes \mathbf{1})\theta(-\partial_r^2 - \frac{\Delta_S}{r^2})U^* \\ &= U\tilde{C}_{\epsilon}U^* + U\langle r \rangle^{-1}U^*UBU^* + U\tilde{B}U^*U\langle r \rangle^{-1}U^* \\ &= C_{\epsilon} + \langle Q \rangle^{-1}B_{\epsilon} + \langle Q \rangle^{-1}\tilde{B}_{\epsilon}, \end{aligned}$$

avec $\|C_{\epsilon}\| \leq \epsilon$. ■

Théorème 3.5.2 Soit $\lambda > \frac{k^2}{4}$. Soit $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ à support petit autour de λ . Alors il existe une constante $c_1 > 0$ et un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\theta(H)[H, iA]\theta(H) \geq c_1\theta(H)^2 + K$$

Preuve : Maintenant, on va montrer l'estimation de Mourre

$$\begin{aligned} \theta(H)[H, iA]\theta(H) &= (\theta(H) - \theta(H_0))[H, iA](\theta(H) - \theta(H_0)) \\ &+ (\theta(H) - \theta(H_0))[H, iA]\theta(H_0) + \theta(H_0)[H, iA](\theta(H) - \theta(H_0)) \\ &+ \theta(H_0)[H, iA]\theta(H_0) \\ &= \theta(H_0)[H, iA]\theta(H_0) + K_1 \\ &= \theta(H_0)[H_0, iA]\theta(H_0) + \theta(H_0)[V, iA]\theta(H_0) + \theta(H_0)[W_{1,1}, iA]\theta(H_0) + K_1. \end{aligned}$$

Or $[W_{1,1}, iA]$ définie sur $\mathcal{D}(A)^2$ s'étend à une forme quadratique bornée donnée par l'opérateur de multiplication $W_{1,1} - W$, où

$$W = qk \cos(k|x|) = (qk/2).(e^{ik|x|} + e^{-ik|x|}).$$

Donc

$$\begin{aligned} \theta(H_0)[W_{1,1}, iA]\theta(H_0) &= \theta(H_0)(W_{1,1} - W)\theta(H_0) = \theta(H_0)W_{1,1}\theta(H_0) - \theta(H_0)W\theta(H_0) \\ &= K_2 - \theta(H_0)W\theta(H_0) \\ &\geq K_2 - qk\|\tilde{C}_\epsilon\| + \langle Q \rangle^{-1}B_\epsilon + \langle Q \rangle^{-1}\tilde{B}_\epsilon \\ &\geq K_2 - qk\epsilon + \langle Q \rangle^{-1}B_\epsilon + \langle Q \rangle^{-1}\tilde{B}_\epsilon. \end{aligned} \tag{3.5.0.2}$$

D'autre part on sait qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \theta(H_0)[H_0, iA]\theta(H_0) + \theta(H_0)[V, iA]\theta(H_0) &= 2\theta(H_0)H_0\theta(H_0) + K_3 \\ &\geq c\theta(H_0)^2 + K_3 \end{aligned}$$

Nous concluons que

$$\begin{aligned} \theta(H)[H, iA]\theta(H) &\geq c\theta(H_0)^2 + K_3 + K_1 + K_2 - qk\epsilon \\ &\quad + \langle Q \rangle^{-1}B_\epsilon + \langle Q \rangle^{-1}\tilde{B}_\epsilon. \end{aligned}$$

Soit $\tilde{\theta} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\tilde{\theta}\theta = \tilde{\theta}$. En appliquant $\tilde{\theta}(H_0)$ à gauche et à droite dans (3.5.0.2) on trouve

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(H_0)[H_0, iA]\tilde{\theta}(H_0) &\geq c\tilde{\theta}(H_0)^2 + \tilde{\theta}(H_0)(K_2 + K_3)\tilde{\theta}(H_0) - qk\epsilon\tilde{\theta}(H_0)^2 \\ &\quad + \tilde{\theta}(H_0)\langle Q \rangle^{-1}B_\epsilon\tilde{\theta}(H_0) + \tilde{\theta}(H_0)\langle Q \rangle^{-1}\tilde{B}_\epsilon\tilde{\theta}(H_0) \\ &\geq (c - qk\epsilon)\tilde{\theta}(H_0)^2 + K_4. \end{aligned}$$

Choisissons maintenant ϵ tel que $qk\epsilon < \frac{\epsilon}{2}$. Soit $c_1 := \frac{\epsilon}{2} > 0$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
 \theta(H)[H, iA]\theta(H) &\geq c_1 \tilde{\theta}(H_0)^2 + K_5 \\
 &\geq c_1 (\tilde{\theta}(H_0) - \tilde{\theta}(H) + \tilde{\theta}(H))^2 + K_5 \\
 &\geq c_1 \tilde{\theta}(H)^2 + c_1 (\tilde{\theta}(H_0) - \tilde{\theta}(H))^2 \\
 &\quad + c_1 (\tilde{\theta}(H_0) - \tilde{\theta}(H))\tilde{\theta}(H) + c_1 \tilde{\theta}(H)(\tilde{\theta}(H_0) - \tilde{\theta}(H)) + K_5 \\
 &\geq c_1 \tilde{\theta}(H)^2 + K_6
 \end{aligned} \tag{3.5.0.3}$$

En appliquant $\tilde{\theta}(H)$ à gauche et à droite dans (3.5.0.3) on trouve l'estimation de Mourre

$$\tilde{\theta}(H)[H, iA]\tilde{\theta}(H) \geq c_1 \tilde{\theta}(H)^2 + K,$$

où $K, K_1, \dots, K_6$ sont des opérateurs compacts sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$. ■

Il nous reste à énoncer et à montrer la proposition 3.5.3 . Comme on souhaite utiliser du calcul pseudodifférentiel, on préfère travailler sur $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}^{+*}$. Pour ce faire, on introduit, pour $\alpha \in \{\alpha(j); j = 0, 1, 2, \dots\}$, $\tilde{h}_\alpha = -\partial_r^2 + \frac{\alpha}{r^2}$ agissant sur un domaine adéquat inclu dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Voir l'appendice 3.9 pour plus de détails et pour des liens entre h_α et $\tilde{h}_\alpha$.

Proposition 3.5.3 *Soit $\lambda > \frac{k^2}{4}$. Soit $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ à support petit autour de λ . Pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $\alpha \in \{\alpha(j); j = 0, 1, 2, \dots\}$, il existe $C_\epsilon(\alpha), B_{\epsilon,1}(\alpha), B_{\epsilon,2}(\alpha)$ opérateurs bornés sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{+*})$ tels que $(\|B_{\epsilon,1}(\alpha)\| + \|B_{\epsilon,2}(\alpha)\|)_\alpha$ est une famille bornée, et $\|C_\epsilon(\alpha)\| \leq \epsilon$ et*

$$\theta(h_\alpha)(e_\pm(Q_r) \otimes \mathbf{1})\theta(h_\alpha) = C_\epsilon(\alpha) + \langle Q_r \rangle^{-1} B_{\epsilon,1}(\alpha) + B_{\epsilon,2}(\alpha) \langle Q_r \rangle^{-1}.$$

Preuve : Soit $\alpha \in \{\alpha(j); j = 0, 1, 2, \dots\}$. D'après l'appendice 3.9

$$\theta(h_\alpha)e_\pm(Q_r)\theta(h_\alpha) = \frac{1}{2}P_+^*(\theta(\tilde{h}_\alpha)e_\pm(\tilde{Q}_r)\theta(\tilde{h}_\alpha))P_+ + \frac{1}{2}P_-^*(\theta(\tilde{h}_\alpha)e_\pm(\tilde{Q}_r)\theta(\tilde{h}_\alpha))P_-.$$
(3.5.0.4)

Soit $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telles que $0 \leq \chi_j \leq 1$, pour $j \in \{1, 2\}$ et $\chi_1 = 1$ près de 0 et $\chi_1^2 + \chi_2^2 = 1$. Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi\chi_2 = 0$ et $\chi = 1$ près de 0 . Soit $\tilde{\chi} = 1 - \chi$. On pose $\hat{h}_\alpha$ la réalisation auto-adjointe de l'opérateur différentiel $-\partial_r^2 + \frac{\alpha}{r^2}$ dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Par la formule IMS qui est dans la page 28 dans [CFKS],

$$\tilde{h}_\alpha = \chi_1(-\partial_r^2 + \frac{\alpha}{r^2})\chi_1 + \chi_2(-\partial_r^2 + \frac{\alpha}{r^2})\chi_2 - \chi_1'^2 - \chi_2'^2, \tag{3.5.0.5}$$

où $\chi_1(-\partial_r^2 + \frac{\alpha}{r^2})\chi_1$ est bien défini sur $\mathcal{D}(\tilde{h}_\alpha)$ et où $\chi_2(-\partial_r^2 + \frac{\alpha}{r^2})\chi_2$ est un opérateur différentiel auto-adjoint . Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}\}$, on a, par la formule des résolvantes et

(3.5.0.5)

$$\begin{aligned}
& (\tilde{h}_\alpha - z)^{-1} - (\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 - z)^{-1} \\
&= -(\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 - z)^{-1} (\chi_1 \tilde{h}_\alpha \chi_1 - \chi_1'^2 - \chi_2'^2) (\tilde{h}_\alpha - z)^{-1} \\
&= -(\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 - z)^{-1} (\chi_1^2 \tilde{h}_\alpha + \chi_1 [\tilde{h}_\alpha, \chi_1] - \chi_1'^2 - \chi_2'^2) (\tilde{h}_\alpha - z)^{-1} \\
&= -(\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 - z)^{-1} (\chi_1^2 \tilde{h}_\alpha - 2\chi_1 \chi_1' \frac{d}{dr} - \chi_1 \chi_1'' - \chi_1'^2 - \chi_2'^2) (\tilde{h}_\alpha - z)^{-1} \\
&= -\langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} \langle \tilde{Q}_r \rangle (\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 - z)^{-1} \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} \\
&\quad \left(\langle \tilde{Q}_r \rangle \chi_1^2 \tilde{h}_\alpha - 2\langle \tilde{Q}_r \rangle \chi_1 \chi_1' \frac{d}{dr} - \langle \tilde{Q}_r \rangle \chi_1 \chi_1'' - \langle \tilde{Q}_r \rangle \chi_1'^2 - \langle \tilde{Q}_r \rangle \chi_2'^2 \right) (\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.5.0.6}$$

D'après l'appendice 3.9, on a $\langle \tilde{Q}_r \rangle (\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 - z)^{-1} \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1}$ est borné et sa norme est dominée par $\frac{C \langle \text{Re} z \rangle}{|Im z|^2}$ où $C > 0$ est indépendante de α et de z .

D'autre part, $\|\tilde{h}_\alpha (\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}\| \leq C' \frac{\langle \text{Re} z \rangle}{|Im z|}$ où $C' > 0$ est indépendante de α et de z , et pour des raisons de support de $\chi_1, \chi_1', \chi_1''$ on a $\langle \tilde{Q}_r \rangle \chi_1^2, 2\langle \tilde{Q}_r \rangle \chi_1 \chi_1'$ et $\langle \tilde{Q}_r \rangle (\chi_1 \chi_1'' + \chi_1'^2 + \chi_2'^2)$ sont bornés.

De plus on va montrer qu'il existe $C'' > 0$, indépendant de α et de z , tel que

$$\|\partial_r (\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}\| \leq C'' \frac{\langle \text{Re} z \rangle}{|Im z|}. \tag{3.5.0.7}$$

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\tilde{h}_\alpha)$,

$$\|\partial_r \varphi\|^2 \leq \langle \varphi, (\tilde{h}_\alpha + 1) \varphi \rangle \leq \frac{1}{2} (\|\varphi\|^2 + \|(\tilde{h}_\alpha + 1) \varphi\|^2).$$

Comme $\tilde{h}_\alpha$ est auto-adjoint, et -1 appartient à l'ensemble résolvant de $\tilde{h}_\alpha$ on a $\|\varphi\| \leq \|(\tilde{h}_\alpha + 1) \varphi\|$. Donc $\|\frac{d}{dr} \varphi\| \leq \|(\tilde{h}_\alpha + 1) \varphi\|$ et $\|\frac{d}{dr} (\tilde{h}_\alpha + 1)^{-1}\| \leq 1$.

De plus, par la formule des identités résolvantes,

$$\partial_r (\tilde{h}_\alpha - z)^{-1} - \partial_r (\tilde{h}_\alpha + 1)^{-1} = \partial_r (\tilde{h}_\alpha + 1)^{-1} (1 - z) (\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}$$

et on obtient (3.5.0.7). Revenant à (3.5.0.6), on en déduit que

$$(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1} - (\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 - z)^{-1} = \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} B_\alpha(z)$$

où $\|B_\alpha(z)\| \leq C \frac{\langle \text{Re} z \rangle^2}{|Im z|^3}$ et C indépendant de α et de z . Par la formule d'Helffer-Sjöstrand, on en déduit que

$$\theta(\tilde{h}_\alpha) - \theta(\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2) = \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} B_\alpha$$

avec $(B_\alpha)_\alpha$ uniformément bornée en α .

Maintenant on va montrer que

$$\theta(\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2) - \theta(\hat{h}_\alpha) = \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} B'_\alpha \tag{3.5.0.8}$$

où $(B'_\alpha)_\alpha$ uniformément bornée en α .

Dans l'appendice 3.9, on montre qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $\alpha \in \{\alpha(j); j = 0, 1, 2, \dots\}$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$\left\| \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (\hat{h}_\alpha - z)^{-1} \right\| \leq C \frac{\langle \text{Re} z \rangle}{|Im z|}. \tag{3.5.0.9}$$

On a, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
& (z - \chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2)^{-1} - (z - \hat{h}_\alpha)^{-1} \\
&= (z - \chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2)^{-1} (\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 - \hat{h}_\alpha) (z - \hat{h}_\alpha)^{-1} \\
&= (z - \chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2)^{-1} \left(-\chi_2 \partial_r^2 \chi_2 + \partial_r^2 + \frac{\alpha \chi_2^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^2} \right) (z - \hat{h}_\alpha)^{-1} \\
&= (z - \chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2)^{-1} \left(-\chi_2^2 \partial_r^2 - \chi_2 [\partial_r^2, \chi_2] + \partial_r^2 + \frac{\alpha r^2 (1 - \chi_2^2) - \alpha \chi_2^2}{r^2 \langle r \rangle^2} \right) (z - \hat{h}_\alpha)^{-1} \\
&= (z - \chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2)^{-1} \left((1 - \chi_2^2) \partial_r^2 + 2\chi_2 \chi_2' \partial_r - \chi_2 \chi_2'' + \frac{\alpha r^2 (1 - \chi_2^2) - \alpha \chi_2^2}{r^2 \langle r \rangle^2} \right) (z - \hat{h}_\alpha)^{-1} \\
&= (z - \chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2)^{-1} \left(\chi_1^2 \partial_r^2 + 2\chi_2 \chi_2' \partial_r - \chi_2 \chi_2'' + \frac{r^2 \chi_1^2 - \chi_2^2}{r^2} \cdot \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} \right) (z - \hat{h}_\alpha)^{-1} \\
&= \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} \langle \tilde{Q}_r \rangle (z - \chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2)^{-1} \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} \langle \tilde{Q}_r \rangle \left(\chi_1^2 \partial_r^2 + 2\chi_2 \chi_2' \partial_r \right. \\
&\quad \left. - \chi_2 \chi_2'' + \frac{r^2 \chi_1^2 - \chi_2^2}{r^2} \cdot \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} \right) (z - \hat{h}_\alpha)^{-1}.
\end{aligned}$$

Puisque $\langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} (z - \chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2)^{-1} \langle \tilde{Q}_r \rangle$, est borné et pour des raisons de support de χ_2 , χ_2' et χ_2'' on a $\langle \tilde{Q}_r \rangle \chi_2^2$, $\langle \tilde{Q}_r \rangle \chi_2 \chi_2'$, $\langle \tilde{Q}_r \rangle \chi_2 \chi_2''$ sont des opérateurs bornés, et grâce aux supports des fonctions χ_1 et χ_2 , on a $\langle \tilde{Q}_r \rangle \frac{r^2 \chi_1^2 - \chi_2^2}{r^2}$ est borné et d'après l'appendice 3.9 on a $\| \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_\alpha)^{-1} \| \leq C \frac{\langle \text{Rez} \rangle}{|\text{Im} z|}$ et par (3.9.0.20) en obtient que

$$\| -\partial_r^2 (m + \hat{h}_\alpha)^{-1} \| \leq \| -\partial_r^2 (-\partial_r^2 + m)^{-1} \| \cdot \| (-\partial_r^2 + m) (m + \hat{h}_\alpha)^{-1} \| \leq c,$$

et par identité résolvante on trouve que

$$\| -\partial_r^2 (z - \hat{h}_\alpha)^{-1} \| \leq \frac{C''' \langle \text{Rez} \rangle}{|\text{Im} z|},$$

en utilisant cette dernière inégalité on peut montrer que $\| \partial_r (z - \hat{h}_\alpha)^{-1} \| \leq C'' \frac{\langle \text{Rez} \rangle}{|\text{Im} z|}$. En effet,

$$\begin{aligned}
\| \partial_r (z - \hat{h}_\alpha)^{-1} \| &\leq \| \partial_r \langle \partial_r \rangle^{-2} \langle \partial_r \rangle^2 (z - \hat{h}_\alpha)^{-1} \| \\
&\leq \| \partial_r \langle \partial_r \rangle^{-2} \| \cdot \| (1 + \partial_r^2) (z - \hat{h}_\alpha)^{-1} \| \\
&\leq C'' \frac{\langle \text{Rez} \rangle}{|\text{Im} z|},
\end{aligned}$$

où c, C, C'', C''' sont indépendant de α et de z . Par l'argument d'Helffer-Sjöstrand on en déduit (3.5.0.8). On peut procéder comme dans (3.5.0.7) pour montrer $\| \partial_r (z - \hat{h}_\alpha)^{-1} \| \leq C'' \frac{\langle \text{Rez} \rangle}{|\text{Im} z|}$.

En reportant dans (3.5.0.4), on obtient

$$\begin{aligned}
\theta(h_\alpha) e_\pm(Q_r) \theta(h_\alpha) &= \frac{1}{2} P_+^* (\theta(\hat{h}_\alpha) e_\pm(\tilde{Q}_r) \theta(\hat{h}_\alpha)) P_- + \frac{1}{2} P_-^* (\theta(\hat{h}_\alpha) e_\pm(\tilde{Q}_r) \theta(\hat{h}_\alpha)) P_- \\
&\quad + \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} B_\alpha^0.
\end{aligned}$$

où (B_α^0) uniformément bornée en α .

Soit $\epsilon > 0$. Soit C_3 et C_4 sont des constantes dépendent que de θ, θ_1, χ définies dans l'appendice 3.9. Soit $\kappa \geq 1$ tel que $\frac{C_3}{\kappa} + \frac{C_4}{\kappa} < \min(1, \frac{\epsilon}{2\|\theta\|_\infty \|\theta_1\|_\infty + 1})$.

Pour $\alpha \in \{\alpha(j); j = 0, 1, 2, \dots\}$. Soit $p_{\tau, r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (r, \tau) \mapsto p_\alpha(\tau, r) = \tau^2 + \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} \tilde{\chi}(r) \chi(\frac{\alpha}{\kappa \langle r \rangle^2})$. $p_\alpha \in S(\langle \tau \rangle^2, g)$. De plus, les semi normes de p_α dans $S(\langle \tau \rangle^2, g)$ sont dominées par des constantes indépendantes de κ et de α .

Soit $\theta_1 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\theta\theta_1 = \theta$. On a, pour $\alpha \in \{\alpha(j); j = 0, 1, 2, \dots\}$, par la formule d'Helffer-Sjöstrand,

$$\begin{aligned} \theta(\hat{h}_\alpha) &= \theta(\hat{h}_\alpha)\theta_1(\hat{h}_\alpha) \\ &= \theta(p_\alpha^w)\theta_1(\hat{h}_\alpha) + \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z) (z - p_\alpha^w)^{-1} \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} \tilde{\chi}(r) \tilde{\chi}\left(\frac{\alpha}{\kappa \langle r \rangle^2}\right) (z - \hat{h}_\alpha)^{-1} dz \wedge d\bar{z} \theta_1(\tilde{h}_\alpha) \\ &= \theta(p_{\kappa,\alpha}^w)\theta_1(\hat{h}_\alpha) + R_1(\alpha), \end{aligned}$$

On va montrer dans l'appendice 3.9 que pour tout α ,

$$\|R_1(\alpha)\| \leq \frac{C_3}{\kappa} + \frac{C_4}{\kappa}, \quad (3.5.0.10)$$

et par définition de κ on trouve que

$$\|R_1\| \leq \min(1, \frac{\epsilon}{(1 + 2\|\theta\|_\infty\|\theta_1\|_\infty)}),$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} &\theta(\hat{h}_\alpha)(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})\theta(\hat{h}_\alpha) \\ &= (\theta_1(\hat{h}_\alpha)\theta(p_\alpha^w) + R_1^*(\alpha))(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})(\theta(p_\alpha^w)\theta_1(\hat{h}_\alpha) + R_1(\alpha)) \\ &= \theta_1(\hat{h}_\alpha)\theta(p_\alpha^w)(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})\theta(p_\alpha^w)\theta_1(\hat{h}_\alpha) + \tilde{C}_\epsilon(\alpha). \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\epsilon(\alpha) &= \theta_1(\hat{h}_\alpha)\theta(p_\alpha^w)(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})R_1(\alpha) \\ &\quad + R_1^*(\alpha)(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})\theta(p_\alpha^w)\theta_1(\hat{h}_\alpha) + R_1^*(\alpha)(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})R_1(\alpha). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \|\tilde{C}_\epsilon(\alpha)\| &\leq 2\|\theta\|_\infty\|\theta_1\|_\infty\|R_1(\alpha)\| + \|R_1(\alpha)\|^2 \\ &\leq (2\|\theta\|_\infty\|\theta_1\|_\infty + 1)\|R_1(\alpha)\| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

On obtient donc pour tout $\alpha \in \{\alpha(j), j = 0, 1, 2, \dots\}$,

$$\begin{aligned} \theta(\hat{h}_\alpha)(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})\theta(\hat{h}_\alpha) &= \theta_1(\hat{h}_\alpha)\theta(p_\alpha^w)(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})\theta(p_\alpha^w)\theta_1(\hat{h}_\alpha) \\ &\quad + \tilde{C}_\epsilon(\alpha), \end{aligned}$$

avec $\|\tilde{C}_\epsilon(\alpha)\| \leq \epsilon$.

Or d'après le théorème B.1 de [GJ] on a

$$\theta(p_{\kappa,\alpha}^w) = \{\theta(p_{\kappa,\alpha})\}^w + \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} b_\alpha^w$$

et $(b_\alpha^w)_\alpha$ est une famille d'opérateurs bornés sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. On obtient alors

$$\begin{aligned} &\theta(\hat{h}_\alpha)(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})\theta(\hat{h}_\alpha) \\ &= \theta_1(\hat{h}_\alpha)(\{\theta(p_\alpha)\}^w + \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} b_\alpha^w)(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})(\{\theta(p_\alpha)\}^w + \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} b_\alpha^w)\theta_1(\hat{h}_\alpha) \\ &\quad + \tilde{C}_\epsilon(\alpha) \\ &= \theta_1(\hat{h}_\alpha)\{\theta(p_\alpha)\}^w(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})\{\theta(p_\alpha)\}^w\theta_1(\hat{h}_\alpha) \\ &\quad + \theta_1(\hat{h}_\alpha)\{\theta(p_\alpha)\}^w(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})\langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} b_\alpha^w\theta_1(\hat{h}_\alpha) \\ &\quad + \theta_1(\hat{h}_\alpha)\langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} b_\alpha^w(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})\{\theta(p_\alpha)\}^w\theta_1(\hat{h}_\alpha) \\ &\quad + \theta_1(\hat{h}_\alpha)\langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} b_\alpha^w(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})\langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} b_\alpha^w\theta_1(\hat{h}_\alpha) + \tilde{C}_\epsilon(\alpha). \end{aligned}$$

Comme $\langle \tilde{Q}_r \rangle \theta_1(\tilde{h}_\alpha) \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1}$, $\{\theta(p_\alpha)\}^w$, et $b_\alpha^w \theta_1(\tilde{h}_\alpha)$ sont bornés sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, uniformément en α , nous concluons alors que

$$\begin{aligned} & \theta(\hat{h}_\alpha)(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})\theta(\hat{h}_\alpha) \\ &= \theta_1(\hat{h}_\alpha)\{\theta(p_\alpha)\}^w(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})\{\theta(p_\alpha)\}^w\theta_1(\hat{h}_\alpha) \\ &+ \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1}B_{\alpha,3} + B'_{\alpha,3}\langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} + \tilde{C}_\epsilon(\alpha), \end{aligned}$$

où $B_{\alpha,3}, B'_{\alpha,3}$ sont bornés sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ uniformément en α . Comme $\theta(\tilde{h}_\alpha) - \theta(\hat{h}_\alpha) = \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1}B'_{\alpha,1}$ avec $B'_{\alpha,1}$ uniformément borné en α , on en déduit que

$$\begin{aligned} & \theta(\tilde{h}_\alpha)(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})\theta(\tilde{h}_\alpha) \\ &= \theta_1(\tilde{h}_\alpha)\{\theta(p_\alpha)\}^w(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})\{\theta(p_\alpha)\}^w\theta_1(\tilde{h}_\alpha) \\ &+ \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1}B_{\alpha,4} + B'_{\alpha,4}\langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} + \tilde{C}_\epsilon(\alpha), \end{aligned}$$

avec $B_{\alpha,4}, B'_{\alpha,4}$ sont uniformément bornés en α . D'autre part d'après le résultat (3.4.10), qui est dans [GJ] pour $a(r, \tau) = \theta(p_\alpha)(r, \tau) \in S(1, g)$, il existe des symboles $a_\pm \in S(1, g)$, $b_\pm \in S(\langle r \rangle^{-\infty}, g)$, et $c_\pm \in S(\langle r \rangle^{-1}\langle \tau \rangle^{-1}, g)$ tel que

$$e_\pm(\tilde{Q}_r)a^w = a_\pm^w e_\pm(\tilde{Q}_r) + e_\pm(\tilde{Q}_r)b_\pm^w + c_\pm^w e_\pm(\tilde{Q}_r).$$

De plus, dans la région $\chi_1 \neq 0$, $a_\pm$ est donné par $a_\pm(r, \tau) = \theta(p_{\alpha,\pm})(r, \tau) = a(r, \tau \mp k|r|^{-1}r)$ avec $p_{\alpha,\pm}(r, \tau) = (\tau \mp k\frac{r}{|r|})^2 + \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2}\chi(r)\tilde{\chi}(\frac{\alpha}{\langle r \rangle^2})$.

$$\begin{aligned} & \theta(\tilde{h}_\alpha)(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})\theta(\tilde{h}_\alpha) = \theta_1(\tilde{h}_\alpha)\{\theta(p_\alpha)\}^w(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})\{\theta(p_\alpha)\}^w\theta_1(\tilde{h}_\alpha) \\ &+ \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1}B_{\alpha,4} + B'_{\alpha,4}\langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} + \tilde{C}_\epsilon(\alpha), \\ &= \theta_1(\tilde{h}_\alpha)\{\theta(p_\alpha)\}^w\{\theta(p_{\alpha,\pm})\}^w e_\pm(\tilde{Q}_r) + e_\pm(\tilde{Q}_r)b_\pm^w + c_\pm^w e_\pm(\tilde{Q}_r)\theta_1(\tilde{h}_\alpha) \\ &+ \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1}B_{\alpha,4} + B'_{\alpha,4}\langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} + \tilde{C}_\epsilon(\alpha), \\ &= \theta_1(\tilde{h}_\alpha)\{\theta(p_\alpha)\}^w\{\theta(p_{\alpha,\pm})\}^w e_\pm(\tilde{Q}_r)\theta_1(\tilde{h}_\alpha) + \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1}B_{\alpha,5} + B_{\alpha,2}\langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} + \tilde{C}_\epsilon(\alpha), \end{aligned}$$

où $B_{\alpha,2}, B_{\alpha,4}, B'_{\alpha,4}$ et $B_{\alpha,5}$ sont uniformément bornés en α . En utilisant la propriété de composition des opérateurs de Weyl dans la paragraphe 2.2 de [GJ] on a

$$\{\theta(p_\alpha)\}^w\{\theta(p_{\alpha,\pm})\}^w = \{\theta(p_\alpha)\theta(p_{\alpha,\pm})\}^w + v_\alpha^w,$$

où $v_\alpha \in S(\langle r \rangle^{-1}\langle \tau \rangle^{-1}, g)$ uniformément en α , et $\langle \tilde{Q}_r \rangle v_\alpha$ est uniformément borné en α .

Comme $\theta(|\cdot|^2)$ supporté loin de $k^2/4$, et comme les α sont dans le potentiel de l'opérateur alors d'après le même calcul que dans la preuve de la proposition 3.4.11 alors pour tout α on a $\theta(p_{\kappa,\alpha})\theta(p_{\kappa,\alpha,\pm}) = 0$ et par suite on obtient que

$$\theta(\tilde{h}_\alpha)(e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1})\theta(\tilde{h}_\alpha) = \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1}B_{\alpha,1} + B_{\alpha,2}\langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} + \tilde{C}_\epsilon(\alpha).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
& \theta(h_\alpha)(e_\pm(Q_r) \otimes \mathbf{1})\theta(h_\alpha) \\
&= \frac{1}{8}(P_+^*\theta(\tilde{h}_\alpha)P_+ + P_-^*\theta(\tilde{h}_\alpha)P_-)(P_+^*e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1}P_+ + P_-^*e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1}P_-) \\
& \quad (P_+^*\theta(\tilde{h}_\alpha)P_+ + P_-^*\theta(\tilde{h}_\alpha)P_-) \\
&= \frac{1}{8}(P_+^*\theta(\tilde{h}_\alpha)P_+P_+^*e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1}P_+ + P_-^*\theta(\tilde{h}_\alpha)P_-P_-^*e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1}P_-) \\
& \quad (P_+^*\theta(\tilde{h}_\alpha)P_+ + P_-^*\theta(\tilde{h}_\alpha)P_-) \\
&= \frac{1}{8}(P_+^*\theta(\tilde{h}_\alpha)P_+P_+^*e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1}P_+P_+^*\theta(\tilde{h}_\alpha)P_+ \\
& \quad + P_-^*\theta(\tilde{h}_\alpha)P_-P_-^*e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1}P_-P_-^*\theta(\tilde{h}_\alpha)P_-) \\
&= \frac{1}{8}(P_+^*\theta(\tilde{h}_\alpha)\Pi_+e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1}\Pi_+\theta(\tilde{h}_\alpha)P_+ \\
& \quad + P_-^*\theta(\tilde{h}_\alpha)\Pi_-e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1}\Pi_-\theta(\tilde{h}_\alpha)P_-) \\
&= \frac{1}{8}(P_+^*\theta(\tilde{h}_\alpha)e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1}\theta(\tilde{h}_\alpha)P_+ \\
& \quad + P_-^*\theta(\tilde{h}_\alpha)e_\pm(\tilde{Q}_r) \otimes \mathbf{1}\theta(\tilde{h}_\alpha)P_-) \\
&= \frac{1}{8}(P_+^*(\langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1}B_{\alpha,1} + B_{\alpha,2}\langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} + \tilde{C}_\epsilon(\alpha))P_+ \\
& \quad + P_-^*(\langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1}B_{\alpha,1} + B_{\alpha,2}\langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} + \tilde{C}_\epsilon(\alpha))P_-) \\
&= \langle Q_r \rangle^{-1}B_{\alpha,1} + B_{\alpha,2}\langle Q_r \rangle^{-1} + C_\epsilon(\alpha),
\end{aligned}$$

avec $C_\epsilon(\alpha), B_{\epsilon,1}(\alpha), B_{\epsilon,2}(\alpha)$ sont des opérateurs bornés sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{+*})$ tels que $(\|B_{\epsilon,1}(\alpha)\| + \|B_{\epsilon,2}(\alpha)\|)_\alpha$ est une famille bornée, et $\|C_\epsilon(\alpha)\| \leq \epsilon$. ■

Remerciement : Après la fin de la première partie de ce travail, l'auteur ne peut pas oublier d'adresser un immense merci pour Thierry Jecko.

3.6 Appendice A. Calculs Symboliques[GJ2]

Pour $\rho \in \mathbb{R}$, let $\mathcal{S}$ l'ensemble de classe des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, C_k(\varphi) := \sup_{t \in \mathbb{R}} \langle t \rangle^{-\rho+k} |\partial_t^k \varphi(t)| < \infty \quad (3.6.0.11)$$

On peut écrire φ^k pour $\partial_t^k \varphi$. La famille définie dans (3.6.0.11) est une famille des semi-normes dans $\mathcal{S}^\rho$. $\mathcal{S}^\rho$ est un espace de Fréchet. La formule de Leibniz nous donne que

$$\mathcal{S}^\rho \cdot \mathcal{S}^{\rho'} \subset \mathcal{S}^{\rho+\rho'}.$$

Lemme 3.6.1 *Soit $\varphi \in \mathcal{S}^\rho$ avec $\rho \in \mathbb{R}$. Il existe une fonction régulière $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, s'appelle extension presque analytique de φ , tel que il existe c_1 , tel que pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe c_l , tel que*

$$\varphi^\mathbb{C}|_{\mathbb{R}} = \varphi, \text{supp} \varphi^\mathbb{C} \subset \{x + iy; |y| \leq c_1 \langle x \rangle\}, \quad (3.6.0.12)$$

$$\begin{aligned} |\partial_{\bar{z}} \varphi^\mathbb{C}(z)| &\leq c_l \langle \text{Re}(z) \rangle^{\rho-1-l} |\text{Im}(z)|^l, \\ \varphi^\mathbb{C}(x + iy) &= 0, \quad \text{si } x \notin \text{supp} \varphi. \end{aligned} \quad (3.6.0.13)$$

Lemme 3.6.2 *Soit $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $\chi' \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$. Alors la famille $(\chi_R)_{R>1}$, avec $\chi_R(x) := \chi(x/R)$, est bornée dans $\mathcal{S}^0$.*

Preuve : Soit $k \in \mathbb{N}$. la semi norme $C_k(\chi)$ (3.6.0.11) est borné par $(\sup \text{supp} \chi^{(k)})^k$ multiplié par la norme $\mathcal{L}^\infty$ de $\chi^{(k)}$. Par suite $(\chi_R)_R$ est bornée dans $\mathcal{S}^0$. ■

3.7 Appendice B Développement de Commutateur[GJ2]

Soit $\rho < 0$ et $\varphi \in \mathcal{S}^\rho$. Par la formule de Helffer Sjöstrand on peut écrire l'opérateur borné $\varphi(A)$ de la manière suivante :

$$\varphi(A) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \varphi^{\mathbb{C}}(z) (z - A)^{-1} dz \wedge d\bar{z}.$$

où cette intégrale existe en norme topologique, par (3.6.1) avec $l = 1$.

Proposition 3.7.1 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et B est un opérateur borné, auto-adjoint dans $\mathcal{C}^k(A)$. Soit $\rho < k$ et $\varphi \in \mathcal{S}^\rho$. Au sens des formes sur $\mathcal{D}(\langle A \rangle^{k-1}) \times \mathcal{D}(\langle A \rangle^{k-1})$,*

$$\begin{aligned} [\varphi(A), B] &= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!} \varphi^j(A) ad_A^j(B) \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \varphi^{\mathbb{C}}(z) (z - A)^{-k} ad_A^k(B) (z - A)^{-1} dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned} \quad (3.7.0.14)$$

En particulier, si $\rho < 1$, alors $B \in \mathcal{C}^1(\varphi(A))$.

Lemme 3.7.2 *Soit $B \in \mathcal{C}^1(A)$ auto-adjoint et borné. Soit $\varphi \in \mathcal{S}^\rho$, avec $\rho < k$. Soit $I_k(\varphi)$ est le reste de développement de Taylor à l'ordre k (3.7.0.14) de $[\varphi(A), B]$. Soit $s, s' \geq 0$ tel que $s' < 1, s < k$ et $s + s' + \rho < k$. Alors $\langle A \rangle^s I_k(\varphi) \langle A \rangle^{s'}$ est borné et uniformément borné lorsque φ reste borné dans $\mathcal{S}^\rho$. En particulier, $I_k(\varphi)$ est un opérateur borné. Soit $R > 0$. Si φ reste borné dans $\{\psi \in \mathcal{S}^\rho | [-R, R] \cap \text{supp}(\varphi) = \emptyset\}$ alors $\langle R \rangle^{k-\rho-s-s'} \|\langle A \rangle^s I_k(\varphi) \langle A \rangle^{s'}\|$ est uniformément borné.*

3.8 Appendice C Calculs pseudo-différentiels[GJ2]

Dans ce paragraphe, nous évoquons quelques résultats de base sur le calcul pseudo-différentiel dont nous avons besoin dans le traitement de nos opérateurs de Schrödinger et de Dirac. Nous nous référons à [GJ2, H].

Notons par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Schwarz sur $\mathbb{R}^d$ et par $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier donnée par

$$\mathcal{F}u(\xi) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\xi} u(x) dx,$$

pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour les fonctions tests $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^D)$, soit $\Omega(u, v)$ et $\Omega'(u, v)$ sont les fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ définies par

$$\begin{aligned} \Omega(u, v)(x, \xi) &:= \bar{v}(x) \mathcal{F}u(\xi) e^{ix\xi} \\ \Omega'(u, v)(x, \xi) &:= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} u(x - y/2) \bar{v}(x + y/2) e^{-iy\xi} dy \end{aligned}$$

Prenons la distribution $b \in \mathcal{S}'(T * \mathbb{R}^d)$, donnée par les quantités formelles

$$\begin{aligned} &(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{3d}} e^{i(x-y)\xi} b(x, \xi) v(x) u(y) dx dy d\xi, \\ &(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{3d}} e^{i(x-y)\xi} b((x+y)/2, \xi) u(x) v(y) dx dy d\xi \end{aligned}$$

sont définies par dualité respectivement $\langle b, \Omega(u, v) \rangle$ et $\langle b, \Omega'(u, v) \rangle$. Ils définissent des opérateurs continus de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ qu'on note par $\text{Op} b$ et b^w . b^w est l'opérateur de Weyl de symbole b .

Exemple 3.8.1 Soit $H_0 = -\Delta$ sur $\mathbb{R}^d$. Comme $\mathcal{F}(-\Delta u)(\xi) = \xi^2 \mathcal{F}(u)(\xi)$, donc

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} \xi^2 \mathcal{F}u(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\xi} \xi^2 u(y) dy d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(x-y)\xi} \xi^2 u(y) dy d\xi \\ &= \{\xi^2\}^w u. \end{aligned}$$

Exemple 3.8.2 Soit $A = \frac{x \cdot \nabla + \nabla \cdot x}{2i}$. Comme $\mathcal{F}(\nabla(u(x)))(\xi) = i\xi \mathcal{F}(u(x))(\xi)$, $\mathcal{F}(\nabla(xu(x)))(\xi) = i\xi \mathcal{F}(xu(x))(\xi)$ alors

$$\begin{aligned} \nabla(xu(x)) &= \mathcal{F}^{-1}(i\xi \mathcal{F}(xu(x))(\xi))(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} i\xi \mathcal{F}(xu(x))(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} i\xi \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\xi} y u(y) dy d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(x-y)\xi} i\xi y u(y) dy d\xi, \end{aligned}$$

donc

$$(x \cdot \nabla + \nabla \cdot x)(u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(x-y)\xi} i(x+y) \xi u(y) dy d\xi$$

et par suite on trouve ,

$$\begin{aligned} \frac{(x \cdot \nabla + \nabla \cdot x)}{2i}(u)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(x-y)\xi} \left(\frac{x+y}{2}\right) \xi u(y) dy d\xi \\ &= \{x \cdot \xi\}^w u. \end{aligned}$$

Exemple 3.8.3 Soit $m \in \mathbb{N}$. Tout opérateur différentiel linéaire d'ordre m est un opérateur pseudo-différentiel. Soit $p(x, D) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) D_x^\alpha$, où $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_d}^{\alpha_d}$ et $D_{x_k} = -id_{x_k}$. $p(x, D)$ agit sur des fonctions suffisamment différentiables. Comme dans les exemples précédents, puisque $\mathcal{F}(D^\alpha(f))(\xi) = \xi^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi)$ alors

$$D^\alpha(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) \xi^\alpha \right) \mathcal{F}(f)(\xi) e^{i\langle \xi, x \rangle} d\xi = \left\{ \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) \xi^\alpha \right\}^w.$$

On dit que $\sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) \xi^\alpha$ est le symbole, et $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ est le symbole principale de $p(x, D)$. $p(x, D)$ est un opérateur elliptique en x , si $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \neq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. $p(x, D)$ est elliptique, si il est elliptique en tous points x .

Choisissons sur l'espace de phase $T^* \mathbb{R}^d$, une métrique g et une fonction de poids m avec appropriée propriétés (de., métrique recevable et le poids dans [GJ2]), soit $S(m, g)$ l'espace des fonctions lisses sur $T^* \mathbb{R}^d$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $c_k > 0$ tel que, pour tout $x^* = (x, \xi) \in T^* \mathbb{R}^d$, tous $(t_1, \dots, t_k) \in (T^* \mathbb{R}^d)^k$,

$$|a^{(k)}(x^*). (t_1, \dots, t_k)| \leq c_k m(x^*) g_{x^*}(t_1)^{1/2} \dots g_{x^*}(t_k)^{1/2}, \quad (3.8.0.15)$$

où $a^{(k)}$ est la k -ème dérivée de a . Nous munissons l'espace $S(m, g)$ par une famille des semi-normes $\|\cdot\|_{l, S(m, g)}$ défini par $\max_{0 \leq k \leq l} c_k$, où c_k est la meilleur constante dans (3.8.0.15). $S(m, g)$ est un espace de Fréchet. Pour $x^* = (x, \xi) \in T^* \mathbb{R}^d$, nous en tenons la métrique suivante

$$g_{x^*} := \frac{dx^2}{\langle x \rangle^2} + \frac{d\xi^2}{\langle \xi \rangle^2}$$

et le poids de la forme, pour $p, q \in \mathbb{R}$,

$$m(x^*) := \langle x \rangle^p \langle \xi \rangle^q. \quad (3.8.0.16)$$

Le gain associé à cette métrique est donné par

$$h(x^*) := \langle x \rangle^{-1} \langle \xi \rangle^{-1}.$$

Soit m_1, m_2 deux fonctions de poids de la même forme que dans (3.8.0.16). Si $a \in S(m_1, g), b \in S(m_2, g)$ alors $a \sharp b \in S(m_1 m_2, g)$ et l'opérateur de composition $a^w b^w = \{a \sharp b\}^w$, et $a \sharp b - ab \in S(m_1 m_2 h, g)$ et l'opérateur commutateur $[a^w, b^w] = [a, b]^w$ est tel que $[a, b] - \{a, b\} \in S(m_1 m_2 h^2, g)$, où $\{a, b\}$ est le crochet de Poisson, qui est donné par

$$\{a, b\} = \partial_\xi a(x, \xi) D_x b(x, \xi) - \partial_x b(x, \xi) D_\xi a(x, \xi).$$

Si $a \in S(1, g)$ alors a^w est un opérateur borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Pour $a \in S(1, g)$ on a

$$a^w \text{ est un opérateur compact sur } \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$$

si et seulement si

$$\lim_{\inf(|x|, |\xi|) \rightarrow +\infty} a(x, \xi) = 0.$$

3.9 Appendice D

Définissons $\tilde{I}$, l'opérateur identité sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et $\tilde{J}$ par

$$\begin{aligned} \tilde{J} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \\ \tilde{f}(r) &\longmapsto \tilde{f}(-r), \end{aligned}$$

$\tilde{J}^2 = \tilde{I}$. Soit $\tilde{\Pi}_{\pm} := \frac{\tilde{I} \pm \tilde{J}}{2}$ projection orthogonale sur $\text{Ker}(\tilde{J} \mp \tilde{I})$. On sait que $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \text{Ker}(\tilde{J} - \tilde{I}) \oplus \text{Ker}(\tilde{J} + \tilde{I})$. Soit

$$\begin{aligned} R : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{+*}) \\ \tilde{f}(r) &\longmapsto \tilde{f}|_{\mathbb{R}^{+*}}, \\ P_{\pm} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{+*}) &\longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \\ f(r) &\longmapsto P_{\pm}f(r) = f(r)\mathbf{1}_{\{.,>0\}}(r) \pm f(-r)\mathbf{1}_{\{.,<0\}}(r). \end{aligned}$$

On va montrer que $\tilde{J}\frac{P_+ - P_-}{2} = \frac{P_+ + P_-}{2}$. En effet, soit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{+*})$,

$$\begin{aligned} \tilde{J}\frac{P_+ - P_-}{2}f(r) &= \tilde{J}\left(\frac{f(r)\mathbf{1}_{\{.,>0\}}(r) + f(-r)\mathbf{1}_{\{.,<0\}}(r) - f(r)\mathbf{1}_{\{.,>0\}}(r) + f(-r)\mathbf{1}_{\{.,<0\}}(r)}{2}\right) \\ &= \tilde{J}(f(-r)\mathbf{1}_{\{.,<0\}}(r)) \\ &= f(r)\mathbf{1}_{\{.,>0\}}(r), \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} \frac{P_+ + P_-}{2}f(r) &= \left(\frac{f(r)\mathbf{1}_{\{.,>0\}}(r) + f(-r)\mathbf{1}_{\{.,<0\}}(r) + f(r)\mathbf{1}_{\{.,>0\}}(r) - f(-r)\mathbf{1}_{\{.,<0\}}(r)}{2}\right) \\ &= f(r)\mathbf{1}_{\{.,>0\}}(r), \end{aligned}$$

on conclut donc que $\tilde{J}\frac{P_+ - P_-}{2} = \frac{P_+ + P_-}{2}$.

De plus on montre que $\tilde{\Pi}_{\pm}P_{\pm} = P_{\pm}$ et $\tilde{\Pi}_{\mp}P_{\pm} = 0$. En effet, soit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{+*})$,

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_+P_+f(r) &= \frac{\tilde{I} + \tilde{J}}{2}(f(r)\mathbf{1}_{\{.,>0\}}(r) + f(-r)\mathbf{1}_{\{.,<0\}}(r)) \\ &= \frac{f(r)\mathbf{1}_{\{.,>0\}}(r) + f(-r)\mathbf{1}_{\{.,<0\}}(r)}{2} + \frac{f(-r)\mathbf{1}_{\{.,<0\}}(r) + f(r)\mathbf{1}_{\{.,>0\}}(r)}{2} \\ &= f(r)\mathbf{1}_{\{.,>0\}}(r) + f(-r)\mathbf{1}_{\{.,<0\}}(r) \\ &= P_+f(r), \end{aligned}$$

de même on montre $\tilde{\Pi}_-P_- = P_-$, en outre

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_-P_+f(r) &= \frac{\tilde{I} - \tilde{J}}{2}(f(r)\mathbf{1}_{\{.,>0\}}(r) + f(-r)\mathbf{1}_{\{.,<0\}}(r)) \\ &= \frac{f(r)\mathbf{1}_{\{.,>0\}}(r) + f(-r)\mathbf{1}_{\{.,<0\}}(r)}{2} - \frac{f(-r)\mathbf{1}_{\{.,<0\}}(r) + f(r)\mathbf{1}_{\{.,>0\}}(r)}{2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

de même on montre aussi que $\tilde{\Pi}_+P_- = 0$.

Soit $R_{\pm} := R|_{\text{Ker}(\tilde{J} \mp \tilde{I})}$. On a

$$R_{\pm}P_{\pm} = RP_{\pm} = I|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{+*})}, \text{ et } P_{\pm}R_{\pm} = P_{\pm}R|_{\mathcal{I}m\tilde{\Pi}_{\pm}} = I|_{\mathcal{I}m\tilde{\Pi}_{\pm}},$$

en effet, pour $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{+*})$ on a

$$R_+P_+f(r) = R_+(f(r)\mathbf{1}_{\{.,>0\}}(r) + f(-r)\mathbf{1}_{\{.,<0\}}(r)) = f(r)\mathbf{1}_{\{.,>0\}}(r),$$

donc $R_+P_+ = I_{|\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{+*})}$, de même on montre que $R_-P_- = I_{|\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{+*})}$. D'autre part pour $f \in \mathcal{I}m\Pi_+$,

$$P_+R_+f(r) = P_+(f(r)\mathbf{1}_{\{>0\}}(r)) = f(r)\mathbf{1}_{\{>0\}}(r).$$

donc $P_+R_+ = I_{|\mathcal{I}m\Pi_+}$, de même $P_-R_- = I_{|\mathcal{I}m\Pi_-}$. On en déduit que $P_\pm = R_\pm^{-1}$. Définissons par $R^{-1} := (R_+^{-1}, R_-^{-1}) = (P_+, P_-)$.

On a $P_\pm^* = 2R_\pm\tilde{\Pi}_\pm = 2R_\pm\tilde{\Pi}_\pm$. En effet, soit f, g ,

$$\begin{aligned} \langle P_\pm f, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}} P_\pm f(r)g(r) dr = \int_{\mathbb{R}} (f(r)\mathbf{1}_{\{>0\}}(r) + f(-r)\mathbf{1}_{\{<0\}}(r))g(r) dr \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(r)\mathbf{1}_{\{>0\}}(r)g(r) dr + \int_{\mathbb{R}} f(r)\mathbf{1}_{\{>0\}}(r)g(-r) dr \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(r)(g(r)\mathbf{1}_{\{>0\}}(r) + g(-r)\mathbf{1}_{\{>0\}}(r)) dr \\ &= \langle f, 2R_+\Pi_+g \rangle \end{aligned}$$

donc $R = \frac{1}{2}(P_+^*, P_-^*)$. Alors $P_\pm^*|_{\mathcal{I}m\tilde{\Pi}_\pm} = 2R_\pm$, de plus

$$P_\pm^*P_\pm = 2R_\pm\tilde{\Pi}_\pm P_\pm = 2R_\pm P_\pm = 2I \quad \text{et} \quad P_\pm P_\pm^* = 2P_\pm R_\pm\tilde{\Pi}_\pm = 2\tilde{\Pi}_\pm,$$

nous remarquons que

$$P_+^*P_+ + P_-^*P_- = 4I \quad \text{et} \quad P_+P_+^* + P_-P_-^* = 2\tilde{I}.$$

Soit H opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{D}(H)$ dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{+*})$. Soit

$$\mathcal{D}(\tilde{H}) := \{\tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}); R\tilde{f} \in \mathcal{D}(H) \quad \text{et} \quad R\tilde{J}\tilde{f} \in \mathcal{D}(H)\}.$$

Pour $\tilde{f} \in \mathcal{D}(\tilde{H})$, on pose :

$$\tilde{H}\tilde{f} = P_+HR\Pi_+\tilde{f} + P_-HR\Pi_-\tilde{f} = \frac{1}{2}(P_+HP_+^*\tilde{f} + P_-HP_-^*\tilde{f}),$$

$\tilde{H}$ est symétrique sur $\mathcal{D}(\tilde{H})$. Remarquons que $\tilde{\Pi}_\pm\mathcal{D}(\tilde{H}) \subset \mathcal{D}(\tilde{H})$. Pour $f \in \mathcal{D}(H)$,

$$P_+^*\tilde{H}P_+\tilde{f} + P_-^*\tilde{H}P_-\tilde{f} = 4Hf$$

En effet,

$$\begin{aligned} P_+^*\tilde{H}P_+\tilde{f} + P_-^*\tilde{H}P_-\tilde{f} &= P_+^*P_+HR\Pi_+\tilde{f} + P_-^*P_-HR\Pi_-\tilde{f} \\ &= 2HRP_+\tilde{f} + 2HRP_-\tilde{f} \\ &= 4Hf. \end{aligned}$$

Si $(\tilde{H} \pm i)\tilde{f} = 0$ alors $\tilde{\Pi}_+(\tilde{H} \pm i)\tilde{f} = 0$ et $\tilde{\Pi}_-(\tilde{H} \pm i)\tilde{f} = 0$. Donc

$$\begin{cases} 0 = P_+HR\Pi_+\tilde{f} \pm i\tilde{\Pi}_+\tilde{f} \\ 0 = P_-HR\Pi_-\tilde{f} \pm i\tilde{\Pi}_-\tilde{f}. \end{cases}$$

Appliquons à gauche les opérateurs P_+ et P_- respectivement à la première et la deuxième égalités on trouve

$$\begin{cases} 0 = P_+^*P_+HR\Pi_+\tilde{f} \pm iP_+^*\tilde{\Pi}_+\tilde{f} \\ 0 = P_-^*P_-HR\Pi_-\tilde{f} \pm iP_-^*\tilde{\Pi}_-\tilde{f}. \end{cases}$$

D'après les résultats qui sont dans l'appendice 3.9 on en déduit que

$$\begin{cases} 0 = 2HR\tilde{\Pi}_+\tilde{f} \pm iP_+^*\tilde{\Pi}_+\tilde{f} \\ 0 = 2HR\tilde{\Pi}_-\tilde{f} \pm iP_-^*\tilde{\Pi}_-\tilde{f}. \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} 0 = 2HR\tilde{\Pi}_+\tilde{f} \pm 2iR\tilde{\Pi}_+\tilde{f} \\ 0 = 2HR\tilde{\Pi}_-\tilde{f} \pm 2iR\tilde{\Pi}_-\tilde{f}. \end{cases}$$

$$\text{et nous concluons par suite que } \begin{cases} 0 = (H \pm i)R\tilde{\Pi}_+\tilde{f} \\ 0 = (H \pm i)R\tilde{\Pi}_-\tilde{f}. \end{cases}$$

Or comme H est un opérateur auto-adjoint on obtient alors $R\tilde{\Pi}_+\tilde{f} = 0 = R\tilde{\Pi}_-\tilde{f}$, et comme R est bijective alors $\tilde{\Pi}_\pm\tilde{f} = P_\pm R\tilde{\Pi}_\pm\tilde{f} = 0$, c'est à dire que $P_\pm P_\pm^*\tilde{f} = 0$ donc

$$P_+P_+^*\tilde{f} + P_-P_-^*\tilde{f} = 2\tilde{f} = 0$$

donc

$$\tilde{f} = 0.$$

D'où $\tilde{H}$ est auto-adjoint sur $\mathcal{D}(\tilde{H})$.

Maintenant, on va montrer que

$$\theta(h_\alpha) = \frac{1}{2}(P_+^*\theta(\tilde{h}_\alpha)P_+ + P_-^*\theta(\tilde{h}_\alpha)P_-), \quad (3.9.0.17)$$

et que

$$e_\pm(Q_r) = \frac{1}{2}(P_+^*\tilde{e}_\pm(Q_r)P_+ + P_-^*\tilde{e}_\pm(Q_r)P_-). \quad (3.9.0.18)$$

En effet, d'une part on a

$$P_+^*\tilde{h}_\alpha P_+ + P_-^*\tilde{h}_\alpha P_- = 4h_\alpha$$

alors on obtient pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} P_+^*(\tilde{h}_\alpha - z)P_+ + P_-^*(\tilde{h}_\alpha - z)P_- &= P_+^*\tilde{h}_\alpha P_+ + P_-^*\tilde{h}_\alpha P_- - z(P_+^*P_+ + P_-^*P_-) \\ &= 4h_\alpha - 4zI \\ &= 4(h_\alpha - z), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & (h_\alpha - z)(P_+^*(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}P_+ + P_-^*(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}P_-) \\ &= \frac{1}{4}(P_+^*(\tilde{h}_\alpha - z)P_+ + P_-^*(\tilde{h}_\alpha - z)P_-)(P_+^*(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}P_+ + P_-^*(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}P_-) \\ &= \frac{1}{4}(P_+^*(\tilde{h}_\alpha - z)P_+P_+^*(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}P_+ + P_-^*(\tilde{h}_\alpha - z)P_-P_-^*(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}P_-) \\ &= \frac{1}{4}(P_+^*(\tilde{h}_\alpha - z)2\tilde{\Pi}_+(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}P_+ + P_-^*(\tilde{h}_\alpha - z)2\tilde{\Pi}_-(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}P_-) \\ &= \frac{1}{4}(2P_+^*\tilde{\Pi}_+(\tilde{h}_\alpha - z)(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}P_+ + 2P_-^*\tilde{\Pi}_-(\tilde{h}_\alpha - z)(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}P_-) \\ &= \frac{1}{4}(2P_+^*\tilde{\Pi}_+P_+ + 2P_-^*\tilde{\Pi}_-P_-) \\ &= \frac{1}{4}(2P_+^*P_+ + 2P_-^*P_-), \\ &= 2I, \end{aligned}$$

de même, on a

$$\begin{aligned}
& (P_+^*(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}P_+ + P_-^*(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}P_-)(h_\alpha - z) \\
&= \frac{1}{4}(P_+^*(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}P_+ + P_-^*(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}P_-)(P_+^*(\tilde{h}_\alpha - z)P_+ + P_-^*(\tilde{h}_\alpha - z)P_-) \\
&= \frac{1}{4}(P_+^*(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}P_+P_+^*(\tilde{h}_\alpha - z)P_+ + P_-^*(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}P_-P_-^*(\tilde{h}_\alpha - z)P_-) \\
&= \frac{1}{4}(P_+^*(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}2\tilde{\Pi}_+(\tilde{h}_\alpha - z)P_+ + P_-^*(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}2\tilde{\Pi}_-(\tilde{h}_\alpha - z)P_-) \\
&= \frac{1}{4}(2P_+^*\tilde{\Pi}_+(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}(\tilde{h}_\alpha - z)P_+ + 2P_-^*\tilde{\Pi}_-(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}(\tilde{h}_\alpha - z)P_-) \\
&= \frac{1}{4}(2P_+^*\tilde{\Pi}_+P_+ + 2P_-^*\tilde{\Pi}_-P_-) \\
&= \frac{1}{4}(2P_+^*P_+ + 2P_-^*P_-), \\
&= 2I,
\end{aligned}$$

on obtient que

$$(h_\alpha - z)^{-1} = \frac{1}{2}(P_+^*(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}P_+ + P_-^*(\tilde{h}_\alpha - z)^{-1}P_-).$$

Comme P_+, P_- sont bornés. D'après la formule d'Helffer-Sjöstrand, on en déduit (3.9.0.17). D'autre part, on va montrer (3.9.0.18). En effet,

$$\begin{aligned}
& (P_+^*\tilde{e}_\pm(Q_r)P_+f(r) + P_-^*\tilde{e}_\pm(Q_r)P_-f(r)) \\
&= P_+^*\tilde{e}_\pm(Q_r)(f(r)\mathbf{1}_{\{\cdot > 0\}}(r) + f(-r)\mathbf{1}_{\{\cdot < 0\}}(r)) \\
&+ P_-^*\tilde{e}_\pm(Q_r)(f(r)\mathbf{1}_{\{\cdot > 0\}}(r) - f(-r)\mathbf{1}_{\{\cdot < 0\}}(r)) \\
&= 2R_+\left(\frac{\tilde{e}_\pm(Q_r)(f(r)\mathbf{1}_{\{\cdot > 0\}}(r) + f(-r)\mathbf{1}_{\{\cdot < 0\}}(r))}{2} + \frac{\tilde{e}_\mp(Q_r)(f(-r)\mathbf{1}_{\{\cdot < 0\}}(r) + f(r)\mathbf{1}_{\{\cdot > 0\}}(r))}{2}\right) \\
&+ 2R_-\left(\frac{\tilde{e}_\pm(Q_r)(f(r)\mathbf{1}_{\{\cdot > 0\}}(r) + f(-r)\mathbf{1}_{\{\cdot < 0\}}(r))}{2} + \frac{-\tilde{e}_\mp(Q_r)(f(-r)\mathbf{1}_{\{\cdot < 0\}}(r) + f(r)\mathbf{1}_{\{\cdot > 0\}}(r))}{2}\right) \\
&= 2\tilde{e}_\pm(Q_r)(f(r)\mathbf{1}_{\{\cdot > 0\}}(r)) \\
&= 2e_\pm(Q_r)f(r).
\end{aligned}$$

On montre que $\langle \tilde{Q}_r \rangle (\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 - z)^{-1} \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1}$ est borné et sa norme dominé par $\frac{C\langle \text{Rez} \rangle}{|\text{Im}z|^2}$ où $C > 0$ est indépendant de α et de z .

En effet, puisque

$$\begin{aligned}
& \langle \tilde{Q}_r \rangle (\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 - z)^{-1} \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} \\
&= (\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 - z)^{-1} + [\langle \tilde{Q}_r \rangle, (\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 - z)^{-1}] \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} \\
&= (\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 - z)^{-1} + (\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 - z)^{-1} [\langle \tilde{Q}_r \rangle, \chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2] (\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 - z)^{-1} \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1},
\end{aligned}$$

et comme

$$[\langle \tilde{Q}_r \rangle, \chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2] = \chi_2 [\langle \tilde{Q}_r \rangle, \tilde{h}_\alpha] \chi_2 = \chi_2 (\tilde{Q}_r \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-1} \partial_r + \langle \tilde{Q}_r \rangle^{-3}) \chi_2.$$

D'autre part, puisque $\|\partial_r \chi_2 (\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 - z)^{-1}\|$ est borné par $\frac{C'}{|Imz|}$. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \|\partial_r \chi_2 \varphi\|^2 &\leq \langle \partial_r \chi_2 \varphi, \partial_r \chi_2 \varphi \rangle \\ &= \langle \chi_2 (-\partial_r^2) \chi_2 \varphi, \varphi \rangle \\ &\leq \langle (\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 + 1) \varphi, \varphi \rangle \\ &\leq \frac{1}{2} (\|\varphi\|^2 + \|(\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 + 1) \varphi\|^2) \\ &\leq \|(\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 + 1) \varphi\|^2, \end{aligned}$$

on conclut alors

$$\|\partial_r \chi_2 (\chi_2 \tilde{h}_\alpha \chi_2 + 1)^{-1}\| \leq 1$$

et par suite par l'identité résolvante on obtient le résultat .

On va montrer qu'il existe $C_1 > 0$ telle que, pour tout $\alpha \in \{\alpha(j), j = 0, 1, 2, \dots\}$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$\left\| \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_\alpha)^{-1} \right\| \leq \frac{C_1 \langle Re z \rangle}{|Im z|}. \quad (3.9.0.19)$$

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et $m > 0$. On a

$$\begin{aligned} &\langle \varphi, (\hat{h}_\alpha + m)^2 \varphi \rangle \\ &= \langle \varphi, ((\frac{1}{i} \partial_r)^2 + \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} + m)^2 \varphi \rangle \\ &= \langle \varphi, ((\frac{1}{i} \partial_r)^2 + m)^2 \varphi \rangle + \langle \varphi, (\frac{\alpha}{\langle r \rangle^2})^2 \varphi \rangle \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \langle ((\frac{1}{i} \partial_r)^2 + m) \varphi, \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} \varphi \rangle \\ &= \langle \varphi, ((\frac{1}{i} \partial_r)^2 + m)^2 \varphi \rangle + \langle \varphi, (\frac{\alpha}{\langle r \rangle^2})^2 \varphi \rangle \\ &\quad + 2m \langle \varphi, \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} \varphi \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle (\frac{1}{i} \partial_r)^2 \varphi, \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} &2 \operatorname{Re} \langle (\frac{1}{i} \partial_r)^2 \varphi, \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} \varphi \rangle \\ &= 2 \langle \frac{1}{i} \partial_r \varphi, \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} \frac{1}{i} \partial_r \varphi \rangle - 4 \operatorname{Re} \langle \frac{1}{i} \partial_r \varphi, i \frac{\alpha r}{\langle r \rangle^4} \varphi \rangle, \end{aligned}$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} | -4 \operatorname{Re} \langle \frac{1}{i} \partial_r \varphi, i \frac{\alpha r}{\langle r \rangle^4} \varphi \rangle | &\leq 4 \left\| \frac{\alpha^{1/2}}{\langle r \rangle} \frac{1}{i} \partial_r \varphi \right\|_{\mathcal{L}^2} \left\| \frac{\alpha^{1/2} r}{\langle r \rangle^3} \varphi \right\|_{\mathcal{L}^2} \\ &\leq 4 \left\| \frac{\alpha^{1/2}}{\langle r \rangle} \frac{1}{i} \partial_r \varphi \right\|_{\mathcal{L}^2} \left\| \frac{\alpha^{1/2}}{\langle r \rangle} \varphi \right\|_{\mathcal{L}^2} \\ &\leq 2 \left(\left\| \frac{\alpha^{1/2}}{\langle r \rangle} \frac{1}{i} \partial_r \varphi \right\|_{\mathcal{L}^2}^2 + \left\| \frac{\alpha^{1/2}}{\langle r \rangle} \varphi \right\|_{\mathcal{L}^2}^2 \right). \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} |2 \operatorname{Re} \langle (\frac{1}{i} \partial_r)^2 \varphi, \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} \varphi \rangle| &\geq 2 \langle \frac{1}{i} \partial_r \varphi, \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} \frac{1}{i} \partial_r \varphi \rangle \\ &\quad - 2 \left\| \frac{\alpha^{1/2}}{\langle r \rangle} \frac{1}{i} \partial_r \varphi \right\|_{\mathcal{L}^2}^2 - 2 \left\| \frac{\alpha^{1/2}}{\langle r \rangle} \varphi \right\|_{\mathcal{L}^2}^2 \\ &\geq -2 \left\| \frac{\alpha^{1/2}}{\langle r \rangle} \varphi \right\|_{\mathcal{L}^2}^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle \varphi, (\hat{h}_\alpha + m)^2 \varphi \rangle &\geq \langle \varphi, ((\frac{1}{i}\partial_r)^2 + m)^2 \varphi \rangle \\ &\quad + 2(m-1)\langle \varphi, \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} \varphi \rangle \\ &\quad + \langle \varphi, (\frac{\alpha}{\langle r \rangle^2})^2 \varphi \rangle \end{aligned}$$

donc on a

$$\begin{aligned} \|(\hat{h}_\alpha + m)\varphi\|_{\mathcal{L}^2} &\geq \|((\frac{1}{i}\partial_r)^2 + m)\varphi\|_{\mathcal{L}^2} \\ \text{et} \\ \|(\hat{h}_\alpha + m)\varphi\|_{\mathcal{L}^2} &\geq \|\frac{\alpha}{\langle r \rangle^2}\varphi\|_{\mathcal{L}^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\|\frac{\alpha}{\langle r \rangle^2}(\hat{h}_\alpha + m)^{-1}\| \leq 1,$$

et

$$\|((\frac{1}{i}\partial_r)^2 + m)(\hat{h}_\alpha + m)^{-1}\| \leq 1. \quad (3.9.0.20)$$

En utilisant l'identité résolvante on a

$$(z - \hat{h}_\alpha)^{-1} - (m + \hat{h}_\alpha)^{-1} = (m + \hat{h}_\alpha)^{-1}(z + m)(z - \hat{h}_\alpha)^{-1}$$

donc

$$\frac{\alpha}{\langle r \rangle^2}(z - \hat{h}_\alpha)^{-1} - \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2}(m + \hat{h}_\alpha)^{-1} = \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2}(m + \hat{h}_\alpha)^{-1}(z + m)(z - \hat{h}_\alpha)^{-1}. \quad (3.9.0.21)$$

Comme

$$\|\frac{\alpha}{\langle r \rangle^2}(\hat{h}_\alpha + m)^{-1}\| \leq 1, \quad \|(z - \hat{h}_\alpha)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\Im m z|}, \quad |z + m| \leq C_1 \langle \Re z \rangle,$$

par (3.9.0.21) on en déduit (3.9.0.19).

En utilisant (3.9.0.19), on applique la formule d'Helffer-Sjöstrand et on en déduit que

$$\|\tilde{\chi}(\frac{\alpha}{\kappa \langle r \rangle^2})\theta_1(\hat{h}_\alpha)\| \leq \frac{C_2}{\kappa}.$$

où C_1 et C_2 dépendent que de θ_1 . En effet, d'après la formule d'Helffer-Sjöstrand on a

$$\theta_1(\hat{h}_\alpha) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_z \theta_1^{\mathbb{C}}(z)(z - \hat{h}_\alpha)^{-1} dz \wedge d\bar{z},$$

donc

$$\begin{aligned} \|\tilde{\chi}(\frac{\alpha}{\kappa \langle r \rangle^2})\theta_1(\hat{h}_\alpha)\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |\partial_z \theta_1^{\mathbb{C}}(z)| \cdot \|\tilde{\chi}(\frac{\alpha}{\kappa \langle r \rangle^2})(z - \hat{h}_\alpha)^{-1}\| dz \wedge d\bar{z} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |\partial_z \theta_1^{\mathbb{C}}(z)| \cdot \|\frac{(r)^2}{\alpha} \tilde{\chi}(\frac{\alpha}{\kappa \langle r \rangle^2}) \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_\alpha)^{-1}\| dz \wedge d\bar{z} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |\partial_z \theta_1^{\mathbb{C}}(z)| \cdot \frac{C_1 \langle \Re z \rangle}{\kappa |\Im m z|} dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de l'extension $\theta_1^{\mathbb{C}}$ on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |\partial_z \theta_1^{\mathbb{C}}(z)| \cdot \frac{C_1}{|\Im m z|} dz \wedge d\bar{z} \leq C_2$$

où C_2 dépend que de θ_1 .

Dans ce paragraphe on va montrer pour tout $\alpha \in \{\alpha(j), j = 1, 2, \dots\}$ on a (3.5.0.10).

En effet, comme

$$\begin{aligned}
& \|R_1(\alpha)\| \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z) (z - p_{\alpha}^w)^{-1} \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} \tilde{\chi}\left(\frac{\alpha}{\kappa \langle r \rangle^2}\right) (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} dz \wedge d\bar{z} \theta_1(\tilde{h}_{\alpha}) \right\| \\
&\leq \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z) (z - p_{\alpha}^w)^{-1} \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \tilde{\chi}\left(\frac{\alpha}{\kappa \langle r \rangle^2}\right) \theta_1(\tilde{h}_{\alpha}) dz \wedge d\bar{z} \right\| \\
&+ \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z) (z - p_{\alpha}^w)^{-1} \frac{\alpha}{r^2} [(z - \hat{h}_{\alpha})^{-1}, \tilde{\chi}\left(\frac{\alpha}{\kappa \langle r \rangle^2}\right)] \theta_1(\tilde{h}_{\alpha}) dz \wedge d\bar{z} \right\| \\
&\leq \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z) (z - p_{\alpha}^w)^{-1} \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \tilde{\chi}\left(\frac{\alpha}{\kappa \langle r \rangle^2}\right) \theta_1(\tilde{h}_{\alpha}) dz \wedge d\bar{z} \right\| \\
&+ \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z) (z - p_{\alpha}^w)^{-1} \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \right. \\
&\quad \left. [-\partial_r^2, \tilde{\chi}\left(\frac{\alpha}{\kappa \langle r \rangle^2}\right)] (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \theta_1(\tilde{h}_{\alpha}) dz \wedge d\bar{z} \right\|.
\end{aligned}$$

Puisque $\|(z - p_{\alpha}^w)^{-1}\| \leq \frac{1}{|Imz|}$, $\|\frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1}\| \leq C_1 \frac{\langle Re z \rangle}{|Imz|}$ et $\forall l \in \mathbb{N}$, $|\partial_z \theta^{\mathbb{C}}(z)| \leq d_l |Imz|^l$ et comme $\|\tilde{\chi}(\frac{\alpha}{\kappa \langle r \rangle^2}) \theta_1(\tilde{h}_{\alpha})\| \leq \frac{C_2}{\kappa}$ nous concluons alors on a

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z) (z - p_{\alpha}^w)^{-1} \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \tilde{\chi}\left(\frac{\alpha}{\kappa \langle r \rangle^2}\right) \theta_1(\tilde{h}_{\alpha}) dz \wedge d\bar{z} \right\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |\partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z)| \cdot \|(z - p_{\alpha}^w)^{-1}\| \cdot \left\| \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \right\| \cdot \|\tilde{\chi}\left(\frac{\alpha}{\kappa \langle r \rangle^2}\right) \theta_1(\tilde{h}_{\alpha})\| dz \wedge d\bar{z} \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |\partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z)| \cdot \frac{1}{|Imz|} \frac{C_1 \langle Re z \rangle}{|Imz|} \cdot \frac{C_2}{\kappa} dz \wedge d\bar{z} \\
&\leq \frac{C_3}{\kappa}.
\end{aligned}$$

où C_3 dépend que de θ . D'autre part,

$$\begin{aligned}
[-\partial_r^2, \tilde{\chi}\left(\frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa}\right)] &= -(\partial_r^2(\tilde{\chi}\left(\frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa}\right)))(Q_r) - 2(\partial_r(\tilde{\chi}\left(\frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa}\right)))(Q_r) \partial_r. \\
&= \frac{-2\langle r \rangle + 16r^2}{\langle r \rangle^3} \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa} (\tilde{\chi}')\left(\frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa}\right) \\
&+ \frac{4r^2}{\langle r \rangle^4} \left(\frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa}\right)^2 \tilde{\chi}''\left(\frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa}\right) \\
&+ \frac{4r}{\langle r \rangle^2} \left(\frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa}\right) \tilde{\chi}'\left(\frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa}\right) \partial_r \\
&= \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa} p_{\alpha}(r) + \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa} q_{\alpha}(r) \partial_r
\end{aligned}$$

où p_{α}, q_{α} sont des suites des fonctions uniformément bornés, alors

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z) (z - p_{\alpha}^w)^{-1} \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \right. \\
& \quad \left. [-\partial_r^2, \tilde{\chi}(\frac{\alpha}{\kappa \langle r \rangle^2})] (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \theta_1(\tilde{h}_{\alpha}) dz \wedge d\bar{z} \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z) (z - p_{\alpha}^w)^{-1} \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa} p_{\alpha}(r) + \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa} q_{\alpha}(r) \partial_r \right) (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \theta_1(\tilde{h}_{\alpha}) dz \wedge d\bar{z} \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z) (z - p_{\alpha}^w)^{-1} \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \left(p_{\alpha}(r) \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + q_{\alpha}(r) \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \partial_r + q_{\alpha}(r) \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} [\partial_r, \hat{h}_{\alpha}] (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \right) \theta_1(\tilde{h}_{\alpha}) dz \wedge d\bar{z} \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z) (z - p_{\alpha}^w)^{-1} \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \left(p_{\alpha}(r) \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + q_{\alpha}(r) \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \partial_r + q_{\alpha}(r) \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \frac{(-2)r}{\langle r \rangle^2} \cdot \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \right) \theta_1(\tilde{h}_{\alpha}) dz \wedge d\bar{z} \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z) (z - p_{\alpha}^w)^{-1} \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} p_{\alpha}(r) \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \theta_1(\tilde{h}_{\alpha}) dz \wedge d\bar{z} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z) (z - p_{\alpha}^w)^{-1} \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} q_{\alpha}(r) \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \partial_r \theta_1(\tilde{h}_{\alpha}) dz \wedge d\bar{z} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z) (z - p_{\alpha}^w)^{-1} \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} q_{\alpha}(r) \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2 \kappa} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \frac{(-2)r}{\langle r \rangle^2} \right. \\
& \quad \left. \cdot \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \theta_1(\tilde{h}_{\alpha}) dz \wedge d\bar{z} \right\| \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |\partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z)| \cdot \|(z - p_{\alpha}^w)^{-1}\| \cdot \left\| \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \right\| \cdot |p_{\alpha}(r)| \cdot \frac{1}{\kappa} \left\| \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \right\| \\
& \quad \cdot \|\theta_1(\tilde{h}_{\alpha})\| dz \wedge d\bar{z} \\
& \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |\partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z)| \cdot \|(z - p_{\alpha}^w)^{-1}\| \cdot \left\| \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \right\| \cdot |q_{\alpha}(r)| \cdot \frac{1}{\kappa} \left\| \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \right\| \\
& \quad \cdot \|\partial_r \theta_1(\tilde{h}_{\alpha})\| dz \wedge d\bar{z} \\
& \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |\partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z)| \cdot \|(z - p_{\alpha}^w)^{-1}\| \cdot \left\| \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \right\| \cdot |q_{\alpha}(r)| \cdot \frac{1}{\kappa} \cdot \left\| \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \right\| \cdot \left| \frac{(-2)r}{\langle r \rangle^2} \right| \\
& \quad \cdot \left\| \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \right\| \cdot \|\theta_1(\tilde{h}_{\alpha})\| dz \wedge d\bar{z}
\end{aligned}$$

Puisque $\|(z - p_{\alpha}^w)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|}$, $\left\| \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \right\| \leq C_1 \frac{\langle \operatorname{Re} z \rangle}{|\operatorname{Im} z|}$ et $\forall l \in \mathbb{N}$, $|\partial_z \theta^{\mathbb{C}}(z)| \leq d_l |\operatorname{Im} z|^l$ et comme p_{α}, q_{α} sont des suites de fonctions uniformément bornés, en plus, puisque $\theta_1(\tilde{h}_{\alpha}), \partial_r \theta_1(\tilde{h}_{\alpha})$ sont des opérateurs uniformément bornés sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, nous concluons alors que

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \theta^{\mathbb{C}}(z) (z - p_{\alpha}^w)^{-1} \frac{\alpha}{\langle r \rangle^2} (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \right. \\
& \quad \left. [-\partial_r^2, \tilde{\chi}(\frac{\alpha}{\kappa \langle r \rangle^2})] (z - \hat{h}_{\alpha})^{-1} \theta_1(\tilde{h}_{\alpha}) dz \wedge d\bar{z} \right\| \\
& \leq \frac{C_4}{\kappa}.
\end{aligned}$$

Finalement, on conclut que

$$\|R_1(\alpha)\| \leq \frac{C_3}{\kappa} + \frac{C_4}{\kappa}.$$

où C_3, C_4 , dépendent que de χ, θ et θ_1 .

Problème spectrale inverse pour
l'opérateur de Dirac avec un
potentiel relativement compact par
rapport à l'opérateur de Dirac libre

Chapitre 4

L'opérateur de Dirac avec un potentiel oscillant

4.1 Introduction

Ce paragraphe est inspiré du livre [T].

4.1.1 Présentation

Soit $m > 0$ représente la masse d'une particule, $c > 0$ la vitesse de la lumière, $\hbar$ est la constante de Planck réduite, et ∇ est le Gradient sur $\mathbb{R}^3$. Soit

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'équation de Dirac est donnée par

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi(t, x) = D_0 \psi(t, x)$$

où $D_0 = -i\hbar c \alpha \cdot \nabla + mc^2 \beta = -i\hbar c \sum_{j=1}^3 \alpha_j \partial_{x_j} + mc^2 \beta$ est l'opérateur de Dirac libre, D_0 est une matrice d'opérateurs d'ordre 4×4 .

Cette équation décrit le comportement de particules élémentaires de spins demi-entier représentées par ψ .

Soit $\mathcal{F}$ est l'opérateur de Fourier unitaire définie sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ par : pour $k = 1, 2, 3, 4$

$$(\mathcal{F}\psi_k)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix \cdot \xi} \psi_k(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^3.$$

$\mathcal{F}$ transforme D_0 en un opérateur de multiplication par matrice $\hbar c \alpha \cdot \xi + mc^2 \beta$. Pour chaque $\xi \in \mathbb{R}^3$ cette matrice est diagonalisable et a deux valeurs propres de multiplicité deux pour chacune qui représentent l'énergie $\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)$. On a $\lambda_1(\xi) = -\lambda_2(\xi) = \sqrt{c^2 \xi^2 + m^2 c^4}$.

Dans toute la suite, pour simplifier, nous supposons que $c = \hbar = 1$.

Preuve : Après la transformation de Fourier $\mathcal{F}$, la matrice de Dirac libre devient pour $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\tilde{D}_0 = \begin{pmatrix} m & 0 & \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ 0 & m & \xi_1 + i\xi_2 & -\xi_3 \\ \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 & -m & 0 \\ \xi_1 + i\xi_2 & -\xi_3 & 0 & -m \end{pmatrix}$$

En utilisant le calcul de polynôme caractéristique on va chercher les valeurs propres de cette matrice $\tilde{D}_0$. Soit $X \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\tilde{D}_0 - XI_4| &= \begin{vmatrix} m-X & 0 & \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ 0 & m-X & \xi_1 + i\xi_2 & -\xi_3 \\ \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 & -m-X & 0 \\ \xi_1 + i\xi_2 & -\xi_3 & 0 & -m-X \end{vmatrix} \\ &= (m-X) \begin{vmatrix} m-X & \xi_1 + i\xi_2 & -\xi_3 \\ \xi_1 - i\xi_2 & -m-X & 0 \\ -\xi_3 & 0 & -m-X \end{vmatrix} + \xi_3 \begin{vmatrix} 0 & \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ m-X & \xi_1 + i\xi_2 & -\xi_3 \\ -\xi_3 & 0 & -m-X \end{vmatrix} \\ &\quad - (\xi_1 + i\xi_2) \begin{vmatrix} 0 & \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ m-X & \xi_1 + i\xi_2 & -\xi_3 \\ \xi_1 - i\xi_2 & -m-X & 0 \end{vmatrix} \\ &= (m-X) \left(-\xi_3 \begin{vmatrix} \xi_1 - i\xi_2 & -m-X \\ -\xi_3 & 0 \end{vmatrix} + (-m-X) \begin{vmatrix} m-X & \xi_1 + i\xi_2 \\ \xi_1 - i\xi_2 & -m-X \end{vmatrix} \right) \\ &\quad + \xi_3 \left(- (m-X) \begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ 0 & -m-X \end{vmatrix} - \xi_3 \begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & -\xi_3 \end{vmatrix} \right) \\ &\quad - (\xi_1 + i\xi_2) \left(- (m-X) \begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ -m-X & 0 \end{vmatrix} + (\xi_1 - i\xi_2) \begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & -\xi_3 \end{vmatrix} \right) \\ &= (m-X)(\xi_3^2(m+X) + (-m-X)(X^2 - m^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2)) \\ &\quad + \xi_3(- (m-X)\xi_3(-m-X) + (-\xi_3)(-\xi_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2)) \\ &\quad - (\xi_1 + i\xi_2)(- (m-X)(m+X)(\xi_1 - i\xi_2) + (\xi_1 - i\xi_2)(-\xi_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2)) \\ &= - (m-X)(m+X)((X^2 - m^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)) \\ &\quad - \xi_3^2(X^2 - m^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2) - (\xi_1^2 + \xi_2^2)(X^2 - m^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2) \\ &= (X^2 - m^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)^2 = (X - \lambda_1(\xi))^2(X - \lambda_2(\xi))^2 \end{aligned}$$

Nous concluons alors les valeurs propres avec leurs multiplicités de la matrice de Dirac libre $\tilde{D}_0$. ■

Théorème 4.1.1 *L'opérateur de Dirac libre est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^4$, il est auto-adjoint sur $\mathcal{D}(D_0) = \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$, et son spectre est purement absolument continu, donné par*

$$\sigma(D_0) =]-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, +\infty[$$

Remarque 4.1.2 *L'opérateur de Dirac libre est unitairement équivalent à la multiplication par la matrice diagonale suivante*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(\xi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1(\xi) \end{pmatrix}.$$

4.1.2 Objectif

Notons par

$$\begin{aligned} D &= D_0 + V_{s,r}(Q) + V_{l,r}(Q) + W(Q) \\ &= -i\alpha.\nabla + m\beta + V_{s,r}(Q) + V_{l,r}(Q) + q \frac{\sin(k|x|)}{\langle x \rangle} I_4, \end{aligned}$$

où $q \in \mathbb{R}$, $k > 0$, et $V_{l,r}, V_{s,r}$ sont deux matrices d'ordre 4×4 vérifiant : ils existent $C > 0, r_0, r_1, r_2 > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$|\langle x \rangle^{r_0} V_{l,r}(x)| < C, |\langle x \rangle^{1+r_1} \nabla V_{l,r}(x)| < C, |\langle x \rangle^{1+r_2} V_{s,r}(x)| < C.$$

Soit

$$\tilde{A}_D = \frac{1}{2}(Q.F(P) + F(P).Q),$$

où $F = (F_j)_{j=1,2,3}$, $F_j(\xi) = \mu^2(\xi) \frac{\theta \circ \mu(\xi)}{|\xi^2|} \xi_j$ où $\mu(\xi) = \sqrt{\xi^2 + m^2}$.

Soit

$$A_D := \Pi_+(P) \tilde{A}_D \Pi_+(P) + \Pi_-(P) \tilde{A}_D \Pi_-(P)$$

où $\Pi_{\pm}(\xi) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 + m^2}}(\alpha.\xi + m\beta) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 + m^2}}(\sum_{j=1}^3 \xi_j \alpha_j + m\beta)$, où $\xi \in \mathbb{R}^3$.

Le choix de l'opérateur conjugué A_D est pris dans [BMP].

Notre objectif est d'avoir les résultats du premier chapitre pour l'opérateur de Dirac perturbé D .

4.2 Estimation de Mourre

Proposition 4.2.1 $D \in \mathcal{C}^1(A_D)$

Preuve : Dans [BMP], il est montré que $D_0, V_{s,r}(Q), V_{l,r}(Q) \in \mathcal{C}^1(A_D)$. Comme $W(Q)$ est borné, et la forme quadratique $[W(Q), iA_D]$ est bornée sur $\mathcal{D}(A_D)^2$ on obtient que $W(Q) \in \mathcal{C}^1(A_D)$, et on conclut que $D \in \mathcal{C}^1(A_D)$. ■

Théorème 4.2.2 Soit $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ à support petit dans $]m, \sqrt{m^2 + k^2/4}[$ ou dans $] -\sqrt{m^2 + k^2/4}, -m[$. Il existe une constante $c > 0$ et un opérateur compact K sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ telle que

$$\theta(D)[D, iA_D]\theta(D) \geq c \theta(D)^2 + K.$$

Preuve : Soit $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ à support petit autour de λ dans $]m, \sqrt{m^2 + k^2/4}[$ ou dans $] -\sqrt{m^2 + k^2/4}, -m[$.

$$\begin{aligned} \theta(D)[D, iA_D]\theta(D) &= (\theta(D) - \theta(D_0))[D, iA_D](\theta(D) - \theta(D_0)) \\ &\quad + (\theta(D) - \theta(D_0))[D, iA_D]\theta(D_0) + \theta(D_0)[D, iA_D](\theta(D) - \theta(D_0)) \\ &\quad + \theta(D_0)[D, iA_D]\theta(D_0) \\ &= M_1 + M_2 + M_3 + M_4. \end{aligned}$$

Étudions tout d'abord le terme M_4 ,

$$\begin{aligned} M_4 &= \theta(D_0)[D_0, iA_D]\theta(D_0) + \theta(D_0)[V_{l,r}(Q), iA_D]\theta(D_0) \\ &\quad + \theta(D_0)[V_{s,r}(Q), iA_D]\theta(D_0) + \theta(D_0)[W(Q), iA_D]\theta(D_0) \\ &= M_{4,1} + M_{4,2} + M_{4,3} + M_{4,4}. \end{aligned}$$

Commençons par $M_{4,1}$, l'idée de l'étude de ce terme est dans [BMP].

On peut vérifier tout d'abord que $\Pi_+(P)$ et $\Pi_-(P)$ sont des projecteurs orthogonaux :

$$\begin{aligned} (\Pi_\pm(P))^2 &= \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{P^2+m^2}}(\alpha.P + m\beta)\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2\sqrt{P^2+m^2}}(\alpha.P + m\beta) + \left(\frac{1}{2\sqrt{P^2+m^2}}(\alpha.P + m\beta)\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2\sqrt{P^2+m^2}}(\alpha.P + m\beta) + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{P^2+m^2}} \\ &= \Pi_\pm(P) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Pi_+(P)\Pi_-(P) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{P^2+m^2}}(\alpha.P + m\beta)\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{P^2+m^2}}(\alpha.P + m\beta)\right) \\ &= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2\sqrt{P^2+m^2}}(\alpha.P + m\beta)\right)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ensuite on peut vérifier aussi que D_0 est donné par $\mu(P)(\Pi_+ - \Pi_-)(P)$. Car

$$\begin{aligned}\mu(P)(\Pi_+ - \Pi_-)(P) &= \sqrt{P^2 + m^2}(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2\sqrt{P^2 + m^2}}(\alpha.P + m\beta) - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2\sqrt{P^2 + m^2}}(\alpha.P + m\beta)) \\ &= \alpha.P + m\beta = D_0.\end{aligned}$$

Revenons maintenant à $M_{4,1}$:

$$\begin{aligned}M_{4,1} &= \theta(D_0)[\mu(P)(\Pi_+ - \Pi_-)(P), i\Pi_+(P)\tilde{A}_D\Pi_+(P) + \Pi_-(P)\tilde{A}_D\Pi_-(P)]\theta(D_0) \\ &= \theta(D_0)(\Pi_+(P)[\mu(P), i\tilde{A}_D]\Pi_+(P) - \Pi_-(P)[\mu(P), i\tilde{A}_D]\Pi_-(P))\theta(D_0)\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}[\mu(P), iQ.F(P)] &= \sum_{j=1}^3 [\mu(P), iQ_j F_j(P)] \\ &= \sum_{j=1}^3 [\mu(P), iQ_j] F_j(P) + Q_j [\mu(P), iF_j(P)] \\ &= [\mu(P), iQ].F(P) + Q.[\mu(P), iF(P)] \\ &= [\mu(P), iQ].F(P) \\ &= \mu'(P)[P, iQ].F(P) \\ &= \mu(P)\theta \circ \mu(P),\end{aligned}$$

nous concluons par suite que

$$M_{4,1} = \theta(D_0)D_0\theta \circ \mu(P)\theta(D_0) \geq c \theta(D_0)^2,$$

où c est une constante strictement positive.

En deuxième lieu, traitons $M_{4,2}$. D'après l'article [BMP] on peut écrire A_D sous la forme suivante

$$\begin{aligned}A_D &= F(P).Q + \tfrac{i}{2}f(P) + i\alpha\beta G(P) \\ &= \sum_{j=1}^3 F_j(P)Q_j + \tfrac{i}{2}f(P) + i\sum_{j=1}^3 \alpha_j\beta G_j(P)\end{aligned}$$

où $f(\xi) = 2(\theta \circ \mu)(\xi) + \mu(\xi)\theta' \circ \mu(\xi) + \mu^2(\xi)(\theta \circ \mu)(\xi)\frac{1}{|\xi|^2}$, $G_j(\xi) = \frac{m\xi_j}{\mu^2(\xi)}\theta \circ \mu(\xi)$, $j = 1, 2, 3$. L'étude de $M_{4,2}$ revient à étudier les trois termes suivants :

D'une part, on a

$$\theta(D_0)[V_{l,r}(Q), f(P)]\theta(D_0) = \theta(D_0)\langle Q \rangle^{-r_0}\langle Q \rangle^{r_0}[V_{l,r}(Q), f(P)]\theta(D_0).$$

puisque $\theta(D_0)\langle Q \rangle^{-r_0}$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ et comme $\langle Q \rangle^{r_0}[V_{l,r}(Q), f(P)]\theta(D_0)$ est un opérateur borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)^4$ alors $\theta(D_0)[V_{l,r}(Q), f(P)]\theta(D_0)$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)^4$.

D'autre part, de même, comme $\theta(D_0)\langle Q \rangle^{-r_0}$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ et comme $\langle Q \rangle^{r_0}[V_{l,r}(Q), \alpha_j\beta G_j(P)]\theta(D_0)$ est un opérateur borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ alors pour $\theta(D_0)[V_{l,r}(Q), \alpha_j\beta G_j(P)]\theta(D_0)$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$.

Pour finir l'étude de $M_{4,2}$, il nous reste à voir $\theta(D_0)[V_{l,r}(Q), F_j(P)Q_j]\theta(D_0)$: D'après la proposition 2.6. de [GJ2] avec $A = P, \varphi = F_j, k = 1$ et $B = V_{l,r}$, on a $\langle Q \rangle^{r_1}I_1(F_j)\theta(D_0)$ est un opérateur borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ où $I_1(F_j)$ donné comme dans la proposition 2.6. de [GJ2], et puisque $\theta(D_0)\langle Q \rangle^{-r_1}$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$, alors $\theta(D_0)[V_{l,r}(Q), F_j(P)Q_j]\theta(D_0)$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$. Nous concluons que $M_{4,2}$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$.

Étudions le terme $M_{4,3}$: cela revient à étudier $\theta(D_0)Q.V_{s,r}(Q)F(P)\theta(D_0)$. Comme $\theta(D_0)\langle Q \rangle^{-r_2}$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ et $\langle Q \rangle^{r_2}Q.V_{s,r}(Q)F(P)\theta(D_0)$ est

un opérateur borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ alors $\theta(D_0)Q.V_{s,r}(Q)F(P)\theta(D_0)$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$.

Étudions $M_{4,4}$: cela revient à étudier $\theta(D_0)WQ.F(P)\theta(D_0)$

$$\begin{aligned}\theta(D_0)WQ.F(P)\theta(D_0) &= \theta(D_0) \sin(k|Q|) \langle Q \rangle^{-1} Q.F(P)\theta(D_0) \\ &= \theta(D_0) \sin(k|Q|) \langle x \rangle^{-1} \sum_{j=1}^3 Q_j F_j(P) \theta(D_0) \\ &= \theta(D_0) \sin(k|Q|) \theta(D_0) \langle Q \rangle^{-1} \sum_{j=1}^3 Q_j F_j(P) \\ &\quad + \theta(D_0) \sin(k|Q|) \sum_{j=1}^3 [\langle Q \rangle^{-1} Q_j F_j(P), \theta(D_0)]\end{aligned}$$

Or d'après le lemme 4.2.3 ci-dessous on a $\theta(D_0) \sin(k|Q|) \theta(D_0)$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ et pour $j = 1, 2, 3$ on a $\langle Q \rangle^{-1} Q_j F_j(P)$ est un opérateur borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ on conclut alors que $\theta(D_0) \sin(k|Q|) \theta(D_0) \langle x \rangle^{-1} \sum_{j=1}^3 Q_j F_j(P)$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$. De même comme $\theta(D_0) \langle Q \rangle^{-1}$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ et $\sin(k|Q|) \sum_{j=1}^3 \langle Q \rangle [\langle Q \rangle^{-1} Q_j F_j(P), \theta(D_0)]$ est un opérateur borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$, $\theta(D_0) \sin(k|Q|) \sum_{j=1}^3 [\langle Q \rangle^{-1} Q_j F_j(P), \theta(D_0)]$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$. On obtient alors que $M_{4,4}$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$.

M_2 et M_3 se traitent de la même manière. Étudions par exemple $M_2 = (\theta(D) - \theta(D_0))[D, iA_D]\theta(D_0)$. D'après la formule de Helffer-Sjöstrand $(\theta(D) - \theta(D_0)) \langle Q \rangle^\epsilon \langle D_0 \rangle^\delta$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ pour $0 \leq \epsilon < r_0, 0 \leq \delta < 1$ et puisque $\langle Q \rangle^{-\epsilon} \langle D_0 \rangle^{-\delta} [D, iA_D] \theta(D_0)$ est un opérateur borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ on conclut alors que M_2 est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$. Pour la même raison, puisque $(\theta(D) - \theta(D_0)) \langle Q \rangle^\epsilon \langle D_0 \rangle^\delta$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ et que $\langle Q \rangle^{-\epsilon} \langle D_0 \rangle^{-\delta} [D, iA_D] (\theta(D_0) - \theta(D))$ est un opérateur borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ on conclut alors que M_4 est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$. Nous concluons qu'il existe une constante $c > 0$ et un opérateur compact K' sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ telle que

$$\begin{aligned}\theta(D)[D, iA_D]\theta(D) &\geq c \theta(D_0)^2 + K' \\ &\geq c (\theta(D_0) - \theta(D) + \theta(D))^2 + K' \\ &\geq c (\theta(D))^2 + (\theta(D_0) - \theta(D))\theta(D) + \theta(D)(\theta(D_0) - \theta(D)) \\ &\quad + (\theta(D_0) - \theta(D))^2 + K',\end{aligned}$$

de nouveau comme $\theta(D_0) - \theta(D)$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$, donc on a $(\theta(D_0) - \theta(D))\theta(D)$, $\theta(D)(\theta(D_0) - \theta(D))$ et $(\theta(D_0) - \theta(D))^2$ sont des opérateurs compacts sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$. Nous concluons alors l'estimation de Mourre, c'est à dire, il existe une constante $c > 0$ et un opérateur compact K sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ telle que

$$\theta(D)[D, iA_D]\theta(D) \geq c \theta(D)^2 + K.$$

■

Lemme 4.2.3 Soit θ une fonction dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support petit dans $]m, \sqrt{m^2 + k^2/4}[$ ou dans $]-\sqrt{m^2 + k^2/4}, -m[$ alors pour tout $0 \leq \delta < 1$, on a $\theta(D_0) \sin(k|Q|)\theta(D_0)\langle Q \rangle^\delta$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$,

Preuve : On va suivre le même démarche que dans la preuve de la proposition 3.4.11. Soit θ une fonction dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support petit autour de λ dans $]m, \sqrt{m^2 + k^2/4}[$.

Soit $\chi_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tel que

$$\chi_1 = 0 \text{ sur } [-1, 1] \quad \text{et} \quad \chi_1 = 1 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus [-2, 2]. \quad (4.2.0.1)$$

$$\begin{aligned} & \theta(\alpha.P + m\beta) \sin(k|Q|)\theta(\alpha.P + m\beta) \\ &= \theta(\alpha.P + m\beta)\chi_1(Q) \sin(k|Q|)\theta(\alpha.P + m\beta) + K'_1 \\ &= \theta(\alpha.P + m\beta)\chi_1(Q) \sin(k|Q|)\{\theta(\alpha.\xi + m\beta)\}^w + K'_2 \\ &= \{\theta(\alpha.\xi + m\beta)\}^w \left(\frac{e_+ - e_-}{2i}\right) \{\theta(\alpha.\xi + m\beta)\}^w + K'_3. \end{aligned}$$

Puisque θ est supporté à droite de m , on trouve

$$\begin{aligned} &= \{\theta(\sqrt{m^2 + \xi^2})\Pi_+^1(\xi)\}^w \left(\frac{e_+ - e_-}{2i}\right) \{\theta(\sqrt{m^2 + \xi^2})\Pi_+^1(\xi)\}^w + K'_3, \\ &= \{\theta(\sqrt{m^2 + \xi^2})\}^w \{\Pi_+^1(\xi)\}^w \left(\frac{e_+ - e_-}{2i}\right) \{\theta(\sqrt{m^2 + \xi^2})\}^w \{\Pi_+^1(\xi)\}^w + K'_4 \end{aligned}$$

en appliquant maintenant la proposition(3.4.11) avec $a(x, \xi) = \theta(\sqrt{m^2 + \xi^2})$, on trouve

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2i} \{\Pi_+^1(\xi)\}^w \{\theta(\sqrt{m^2 + \xi^2})\}^w (a_\pm^w e_\pm + e_\pm b_\pm^w + c_\pm^w e_\pm) \{\Pi_+^1(\xi)\}^w + K'_4 \\ &= \frac{1}{2i} \{\Pi_+^1(\xi)\}^w \{\theta(\sqrt{m^2 + \xi^2})\}^w a_\pm^w e_\pm \{\Pi_+^1(\xi)\}^w + K'_5 \\ &= \frac{1}{2i} \{\Pi_+^1(\xi)\}^w \{\theta(\sqrt{m^2 + \xi^2})a_\pm\}^w e_\pm \{\Pi_+^1(\xi)\}^w + K'_6 \\ &= \frac{1}{2i} \{\Pi_+^1(\xi)\}^w \{\theta(\sqrt{m^2 + \xi^2})\chi_1 a_\pm\}^w e_\pm \{\Pi_+^1(\xi)\}^w + K'_7 \\ &= \frac{1}{2i} \{\Pi_+^1(\xi)\}^w \{\theta(\sqrt{m^2 + \xi^2})\theta(\sqrt{m^2 + (\xi \mp kx/|x|)^2})\chi_1\}^w e_\pm \{\Pi_+^1(\xi)\}^w + K'_8 \end{aligned}$$

Où $(K'_j)_{j=1,\dots,8}$ sont de la forme suivante $B'_1 b_1^w$ ou $b_2^w B'_2$ avec $b'_1, b'_2 \in S(\langle x \rangle^{-1} \langle \xi \rangle^{-1}, g)$ alors $b'_1 \langle x \rangle^\delta, b'_2 \langle x \rangle^\delta \in S(\langle x \rangle^{\delta-1} \langle \xi \rangle^{-1}, g)$ et B'_1, B'_2 sont des opérateurs bornés sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$, et par suite pour tout $1 \leq j \leq 6, 0 \leq \delta < 1$ on a $K_j \langle x \rangle^\delta$ est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$.

On peut montrer, comme dans la preuve de la même proposition 3.4.11 que $\theta(\sqrt{m^2 + \xi^2})\theta(\sqrt{m^2 + (\xi \mp kx/|x|)^2}) = 0$ sous les nouvelles conditions que nous avons prises sur θ . Étudions le support de la fonction

$$\theta(\sqrt{m^2 + \xi^2})\theta(\sqrt{m^2 + (\xi \mp kx/|x|)^2}).$$

Soit $\xi \in \text{supp}(\theta(\sqrt{m^2 + \xi^2})) \cap \text{supp}(\theta(\sqrt{m^2 + (\xi \mp kx/|x|)^2}))$ alors on a

$$\lambda - \epsilon < \sqrt{m^2 + \xi^2} < \lambda + \epsilon \quad \text{et} \quad \lambda - \epsilon < \sqrt{m^2 + (\xi \mp kx/|x|)^2} < \lambda + \epsilon$$

alors on a

$$(\lambda - \epsilon)^2 < m^2 + \xi^2 < (\lambda + \epsilon)^2 \quad \text{et} \quad (\lambda - \epsilon)^2 < m^2 + (\xi \mp kx/|x|)^2 < (\lambda + \epsilon)^2$$

avec une opération de soustraction entre ces deux inégalités on retrouve une situation similaire à celle qu'elle a apparue dans le cas de Schrödinger

$$-4\lambda\epsilon < \mp 2k\xi \frac{x}{|x|} + k^2 < 4\lambda\epsilon,$$

qui équivaut à

$$\frac{-4\lambda\epsilon}{k} < \mp |\xi| \frac{\xi}{|\xi|} \frac{x}{|x|} + \frac{k}{2} < \frac{4\lambda\epsilon}{k}.$$

Si on prend $|\xi| < k/2$, on a

$$0 < -|\xi| + \frac{k}{2} < \frac{4\lambda\epsilon}{k}$$

et on trouve $0 < \frac{k}{4\lambda}(\frac{k}{2} - |\xi|) < \epsilon$. Maintenant pour ne pas avoir ξ dans l'intersection des supports juste il suffit de prendre θ à support dans $] \lambda - \epsilon_1, \lambda + \epsilon_1[$ où $0 < \epsilon_1 < \frac{k}{4\lambda}(\frac{k}{2} - |\xi|)$. ■

4.3 Théorème d'absorption limite

Pour avoir le TAL, nous avons suivi le démarche dans [GJ2].

Théorème 4.3.1 *Soit I un intervalle ouvert dans $]m, \sqrt{m^2 + k^2/4}[$ ou dans $] - \sqrt{m^2 + k^2/4}, -m[$ tel que $I \cap \sigma_{disc}(D) = \emptyset$ et I' un sous fermé de I . Soit $D = -i\alpha.\nabla + m\beta + V_{s,r} + V_{l,r} + q \frac{\sin(k|x|)}{\langle x \rangle} I_4$. Alors,*

$$\sup_{\text{Re } z \in I', \text{Im } z \neq 0} \|\langle A_D \rangle^{-s} (D - z)^{-1} \langle A_D \rangle^{-s}\| < \infty.$$

Preuve : Soit $\theta, \chi, \tau \in \mathcal{C}_c^\infty(]m, \sqrt{m^2 + k^2/4}[)$ tel que $\tau\chi = \chi$ et $\chi\theta = \theta$ et $\theta = 1$ proche de I . On a $\chi(D) \in C^1(A_D)$. Soit $1/2 < s < 1$. Comme dans [GJ2], nous définissons $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \psi(t) := \int_{-\infty}^t \langle u \rangle^{-2s} du$, $\psi \in S^0$ est en particulier borné. Soit $R \geq 1$. $D\tau(D)$ est un opérateur borné dans $C^1(A_D)$.

$$\begin{aligned} F &:= \theta(D)[D, i\psi(A_D/R)]\theta(D) \\ &= \theta(D)[D\tau(D), i\psi(A_D/R)]\theta(D) \end{aligned}$$

Cette égalité d'opérateur a eu lieu grâce à la propriété $\tau\theta = \theta$, en fait

$$\begin{aligned} &\theta(D)[D\tau(D), i\psi(A_D/R)]\theta(D) \\ &= \theta(D)D\tau(D)i\psi(A_D/R)\theta(D) - \theta(D)i\psi(A_D/R)D\tau(D)\theta(D) \\ &= \theta(D)\tau(D)Di\psi(A_D/R)\theta(D) - \theta(D)i\psi(A_D/R)D\tau(D)\theta(D) \\ &= (\theta\tau)(D)Di\psi(A_D/R)\theta(D) - \theta(D)i\psi(A_D/R)D(\tau\theta)(D) \\ &= \theta(D)Di\psi(A_D/R)\theta(D) - \theta(D)i\psi(A_D/R)D\theta(D) \\ &= \theta(D)[D, i\psi(A_D/R)]\theta(D) = F. \end{aligned}$$

D'après la formule de Helffer-Sjöstrand on a

$$\begin{aligned} F &= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \psi^{\mathbb{C}}(z) \theta(D) (z - A_D/R)^{-1} [D\tau(D), iA_D/R] \\ &\quad (z - A_D/R)^{-1} \theta(D) dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \psi^{\mathbb{C}}(z) \theta(D) \chi(D) (z - A_D/R)^{-1} [D\tau(D), iA_D/R] \\ &\quad (z - A_D/R)^{-1} \chi(D) \theta(D) dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \psi^{\mathbb{C}}(z) \theta(D) ((z - A_D/R)^{-1} \chi(D) + [\chi(D), (z - A_D/R)^{-1}]) \\ &\quad [D\tau(D), iA_D/R] (\chi(D) (z - A_D/R)^{-1} + [(z - A_D/R)^{-1}, \chi(D)]) \theta(D) dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \psi^{\mathbb{C}}(z) \theta(D) (z - A_D/R)^{-1} \chi(D) [D\tau(D), iA_D/R] \chi(D) \\ &\quad (z - A_D/R)^{-1} \theta(D) dz \wedge d\bar{z} \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \psi^{\mathbb{C}}(z) \theta(D) (z - A_D/R)^{-1} \chi(D) [D\tau(D), iA_D/R] \\ &\quad [(z - A_D/R)^{-1}, \chi(D)] \theta(D) dz \wedge d\bar{z} \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \psi^{\mathbb{C}}(z) \theta(D) [\chi(D), (z - A_D/R)^{-1}] [D\tau(D), iA_D/R] \chi(D) \\ &\quad (z - A_D/R)^{-1} \theta(D) dz \wedge d\bar{z} \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \psi^{\mathbb{C}}(z) \theta(D) [\chi(D), (z - A_D/R)^{-1}] [D\tau(D), iA_D/R] \\ &\quad [(z - A_D/R)^{-1}, \chi(D)] \theta(D) dz \wedge d\bar{z}, \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} F &= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \psi^{\mathbb{C}}(z) \theta(D) (z - A_D/R)^{-1} \chi(D) [D\tau(D), iA_D/R] \chi(D) \\ &\quad (z - A_D/R)^{-1} \theta(D) dz \wedge d\bar{z} \\ &\quad + A_1^D + A_2^D + A_3^D. \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} A_1^D &= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \psi^{\mathbb{C}}(z) \theta(D) (z - A_D/R)^{-1} \chi(D) [D\tau(D), iA_D/R] \\ &\quad [(z - A_D/R)^{-1}, \chi(D)] \theta(D) dz \wedge d\bar{z} \\ &= \theta(D) \langle A_D/R \rangle^{-s} \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \psi^{\mathbb{C}}(z) \langle A_D/R \rangle^s (z - A_D/R)^{-1} \chi(D) [D\tau(D), iA_D/R] \\ &\quad [(z - A_D/R)^{-1}, \chi(D)] \langle A_D/R \rangle^s dz \wedge d\bar{z} \langle A_D/R \rangle^{-s} \theta(D) \\ &= \theta(D) \langle A_D/R \rangle^{-s} \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \psi^{\mathbb{C}}(z) \langle A_D/R \rangle^s (z - A_D/R)^{-1} \chi(D) [D\tau(D), iA_D/R] \\ &\quad (z - A_D/R)^{-1} [A_D/R, \chi(D)] (z - A_D/R)^{-1} \langle A_D/R \rangle^s dz \wedge d\bar{z} \langle A_D/R \rangle^{-s} \theta(D) \\ &= \theta(D) \langle A_D/R \rangle^{-s} R^{-2} \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \psi^{\mathbb{C}}(z) \langle A_D/R \rangle^s (z - A_D/R)^{-1} \chi(D) [D\tau(D), iA_D] \\ &\quad (z - A_D/R)^{-1} [A_D, \chi(D)] (z - A_D/R)^{-1} \langle A_D/R \rangle^s dz \wedge d\bar{z} \langle A_D/R \rangle^{-s} \theta(D) \\ &= \theta(D) \langle A_D/R \rangle^{-s} R^{-2} B \langle A_D/R \rangle^{-s} \theta(D), \end{aligned}$$

où B est un opérateur borné indépendamment de R sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ car $D\tau(D), \chi(D)$ dans $C^1(A_D)$ et pour tout $0 \leq s \leq 1$ on a $\langle A_D/R \rangle^s (z - A_D/R)^{-1}$ est un opérateur borné indépendamment de R sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$. Le même argument pour A_2^D et A_3^D nous permet d'écrire F sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} F &= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \psi^{\mathbb{C}}(z) \theta(D) (z - A_D/R)^{-1} \chi(D) [D\tau(D), iA_D/R] \chi(D) \\ &\quad (z - A_D/R)^{-1} \theta(D) dz \wedge d\bar{z} \\ &\quad + \theta(D) \langle A_D/R \rangle^{-s} R^{-2} B_1 \langle A_D/R \rangle^{-s} \theta(D) \end{aligned}$$

où B_1 est un opérateur borné indépendamment de R sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$.

Soit $\epsilon = \frac{r_0}{2}$. D'après le lemme (4.3.2), $(\theta(D) - \theta(D_0)) \langle A_D \rangle^\epsilon$ est compact.

Soit $G := \chi(D) [D\tau(D), iA_D/R] \chi(D)$.

$$\begin{aligned} G &= \chi(D) [D, iA_D/R] \chi(D) \\ &= \chi(D) [D, iA_D/R] (\chi(D_0) + \chi(D) - \chi(D_0)) \\ &= \chi(D) [D, iA_D/R] \chi(D_0) + \chi(D) [D, iA_D/R] (\chi(D) - \chi(D_0)) \\ &= \chi(D) [D, iA_D/R] \chi(D_0) + \chi(D) \tau(D) [D, iA_D] (\chi(D) - \chi(D_0)) \langle A_D \rangle^\epsilon R^{-1} \\ &\quad \langle A_D/R \rangle^\epsilon \langle A_D \rangle^{-\epsilon} \langle A_D/R \rangle^{-\epsilon} \\ &= \chi(D) [D, iA_D/R] \chi(D_0) + \chi(D) K_1 R^{-1} B_2 \langle A_D/R \rangle^{-\epsilon} \end{aligned}$$

où B_2 est un opérateur uniformément borné en R , et K_1 est un opérateur compact sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$.

$$\begin{aligned} G &= (\chi(D_0) + \chi(D) - \chi(D_0)) [D, iA_D/R] \chi(D_0) + \chi(D) K_1 R^{-1} B_2 \langle A_D/R \rangle^{-\epsilon} \\ &= \chi(D_0) [D, iA_D/R] \chi(D_0) + (\chi(D) - \chi(D_0)) [D, iA_D/R] \chi(D_0) \\ &\quad + \chi(D) K_1 R^{-1} B_2 \langle A_D/R \rangle^{-\epsilon} \\ &= \chi(D_0) [D, iA_D/R] \chi(D_0) + \chi(D) K_1 R^{-1} B_2 \langle A_D/R \rangle^{-\epsilon} \\ &\quad + \langle A_D/R \rangle^{-\epsilon} \langle A_D/R \rangle^\epsilon \langle A_D \rangle^{-\epsilon} \langle A_D \rangle^\epsilon (\chi(D) - \chi(D_0)) [D, iA_D] R^{-1} \chi(D_0) \\ &= \chi(D_0) [D, iA_D/R] \chi(D_0) + \chi(D) K_1 R^{-1} B_2 \langle A_D/R \rangle^{-\epsilon} \\ &\quad + \langle A_D/R \rangle^{-\epsilon} B_3 K_2 R^{-1} \chi(D_0). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.2.3, il existe un opérateur compact K_3 et un opérateur B_4 uniformément borné en R tel que

$$\chi(D_0)[W + V, iA_D]\chi(D_0) = R^{-1}\chi(D_0)K_3B_4\langle A_D/R \rangle^{-\epsilon}\chi(D_0)$$

et par suite on trouve

$$\begin{aligned} F &= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \psi^{\mathbb{C}}(z) \theta(D) (z - A_D/R)^{-1} R^{-1} \chi(D_0) D_0 \theta \circ \mu(P) \chi(D_0) \\ &\quad (z - A_D/R)^{-1} \theta(D) dz \wedge d\bar{z} \\ &\quad + \theta(D) \langle A_D/R \rangle^{-s} (R^{-2} B_1 + R^{-1} K_4) \langle A_D/R \rangle^{-s} \theta(D). \end{aligned}$$

où K_4 est un compact tel que, pour un certaine constante $c_1 > 0$,

$$\|K_4\| \leq c_1(\|\chi(D)K_1\| + \|K_2\chi(D_0)\| + \|\chi(D_0)K_3\|),$$

Soit $\tilde{\chi}$ tel que $\tilde{\chi}\chi = \tilde{\chi}$ et $\tilde{\chi}\theta = \theta$. On a

$$\begin{aligned} F &= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \psi^{\mathbb{C}}(z) \theta(D) (z - A_D/R)^{-1} R^{-1} \chi(D_0) D_0 \theta \circ \mu(P) \chi(D_0) \\ &\quad (z - A_D/R)^{-1} \theta(D) dz \wedge d\bar{z} \\ &\quad + \theta(D) \langle A_D/R \rangle^{-s} (R^{-2} B_1 + R^{-1} K_4 \tilde{\chi}(D)) \langle A_D/R \rangle^{-s} \theta(D). \end{aligned}$$

On fait commuter $R^{-1}\chi(D_0)D_0\theta \circ \mu(P)\chi(D_0)$ avec $(z - A_D/R)^{-1}$, on aura

$$\begin{aligned} F &= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \psi^{\mathbb{C}}(z) \theta(D) (z - A_D/R)^{-2} R^{-1} \\ &\quad \chi(D_0) D_0 \theta \circ \mu(P) \chi(D_0) dz \wedge d\bar{z} \theta(D) \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \psi^{\mathbb{C}}(z) \theta(D) [(z - A_D/R)^{-1}, R^{-1} \chi(D_0) D_0 \theta \circ \mu(P) \chi(D_0)] \\ &\quad (z - A_D/R)^{-1} dz \wedge d\bar{z} \theta(D) \\ &\quad + \theta(D) \langle A_D/R \rangle^{-s} (R^{-2} B_1 + R^{-1} K_4 \tilde{\chi}(D)) \langle A_D/R \rangle^{-s} \theta(D) \\ &= \theta(D) \psi'(A_D/R) R^{-1} \chi(D_0) D_0 \theta \circ \mu(P) \chi(D_0) \theta(D) \\ &\quad + \theta(D) \langle A_D/R \rangle^{-s} (R^{-2} B_4 + R^{-1} K_4) \langle A_D/R \rangle^{-s} \theta(D) \\ &= \theta(D) \langle A_D/R \rangle^{-2s} R^{-1} \chi(D_0) D_0 \theta \circ \mu(P) \chi(D_0) \theta(D) \\ &\quad + \theta(D) \langle A_D/R \rangle^{-s} (R^{-2} B_4 + R^{-1} K_4 \tilde{\chi}(D)) \langle A_D/R \rangle^{-s} \theta(D) \\ &= \theta(D) \langle A_D/R \rangle^{-s} R^{-1} \chi(D_0) D_0 \theta \circ \mu(P) \chi(D_0) \langle A_D/R \rangle^{-s} \theta(D) \\ &\quad + \theta(D) \langle A_D/R \rangle^{-s} [\langle A_D/R \rangle^{-s}, R^{-1} \chi(D_0) D_0 \theta \circ \mu(P) \chi(D_0)] \theta(D) \\ &\quad + \theta(D) \langle A_D/R \rangle^{-s} (R^{-2} B_4 + R^{-1} K_4 \tilde{\chi}(D)) \langle A_D/R \rangle^{-s} \theta(D), \end{aligned}$$

en posant, $\varphi(t) = \langle t/R \rangle^{-s}$, d'après la formule d'Helffer-Sjöstrand on trouve

$$\begin{aligned} &[\langle A_D/R \rangle^{-s}, R^{-1} \chi(D_0) D_0 \theta \circ \mu(P) \chi(D_0)] \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \varphi^{\mathbb{C}}(z) [(z - A_D/R)^{-1}, R^{-1} \chi(D_0) D_0 \theta \circ \mu(P) \chi(D_0)] dz \wedge d\bar{z} \\ &= R^{-2} \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \varphi^{\mathbb{C}}(z) (z - A_D/R)^{-1} [A_D, \chi(D_0) D_0 \theta \circ \mu(P) \chi(D_0)] \\ &= R^{-2} B' \end{aligned}$$

où B' est un opérateur borné, par suite on a

$$\begin{aligned} F &= \theta(D) \langle A_D/R \rangle^{-s} R^{-1} \chi(D_0) D_0 \theta \circ \mu(P) \chi(D_0) \langle A_D/R \rangle^{-s} \theta(D) \\ &\quad + \theta(D) \langle A_D/R \rangle^{-s} (R^{-2} B_5 + R^{-1} K_4 \tilde{\chi}(D)) \langle A_D/R \rangle^{-s} \theta(D) \\ &\geq a R^{-1} \theta(D) \langle A_D/R \rangle^{-s} \chi^2(D_0) \langle A_D/R \rangle^{-s} \theta(D) \\ &\quad + \theta(D) \langle A_D/R \rangle^{-s} (R^{-2} B_5 + R^{-1} K_4 \tilde{\chi}(D)) \langle A_D/R \rangle^{-s} \theta(D), \end{aligned}$$

où $a > 0$ est la borne inférieure de support de θ . Puisque $K_5 := \chi^2(D) - \chi^2(D_0)$ est compact.

$$\begin{aligned} F &\geq aR^{-1}\theta(D)\langle A_D/R \rangle^{-s}\chi^2(D)\langle A_D/R \rangle^{-s}\theta(D) \\ &\quad + \theta(D)\langle A_D/R \rangle^{-s}(R^{-2}B_6 + R^{-1}K_4\tilde{\chi}(D) + R^{-1}K_5\tilde{\chi}(D))\langle A_D/R \rangle^{-s}\theta(D) \\ &\geq aR^{-1}\theta(D)\langle A_D/R \rangle^{-2s}\theta(D) \\ &\quad + \theta(D)\langle A_D/R \rangle^{-s}(R^{-2}B_6 + R^{-1}K_4\tilde{\chi}(D) + R^{-1}K_5\tilde{\chi}(D))\langle A_D/R \rangle^{-s}\theta(D) \end{aligned}$$

En diminuant le support de $\tilde{\chi}$ nous assure que $\|K_4\tilde{\chi}(D)\| + \|K_5\tilde{\chi}(D)\| \leq a/2$. En choisissant $R \gg 1$, qu'il nous garantie

$$F \geq a/2R^{-1}\theta(D)\langle A_D/R \rangle^{-s}\langle A_D/R \rangle^{-s}\theta(D).$$

■

Lemme 4.3.2 *Soit $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Soit ϵ tel que $0 < \epsilon < r_0$, $(\theta(D) - \theta(D_0))\langle A_D \rangle^\epsilon$ est un opérateur compact.*

Preuve : En inspirant de [GJ2],

$$\begin{aligned} (\theta(D) - \theta(D_0))\langle A_D \rangle^\epsilon &= (\theta(D) - \theta(D_0))\langle Q \rangle^\epsilon \langle D_x \rangle^\epsilon \langle D_x \rangle^{-\epsilon} \langle Q \rangle^{-\epsilon} (A_D + i)^\epsilon \\ &\quad (A_D + i)^{-\epsilon} \langle A_D \rangle^\epsilon. \end{aligned}$$

D'après la formule d'Helffer-Sjöstrand on a $(\theta(D) - \theta(D_0))\langle Q \rangle^\epsilon \langle D_x \rangle^\epsilon$ est un opérateur compact, et comme $(A_D + i)^{-\epsilon} \langle A_D \rangle^\epsilon$ est borné. Il nous reste qu'à montrer que $\langle D_x \rangle^{-\epsilon} \langle Q \rangle^{-\epsilon} (A_D + i)^\epsilon$ est borné sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$. Par le même argument que dans [GJ2] on montre tout d'abord si $\epsilon \in \mathbb{N}$, $\langle D_x \rangle^{-\epsilon} \langle Q \rangle^{-\epsilon} (A_D + i)^\epsilon$ est compact et par interpolation on obtient le résultat pour tout $\epsilon > 0$. ■

Chapitre 5

Opérateur de Dirac : problème spectrale inverse

L'objectif de cette partie est de montrer que l'opérateur de Dirac D peut avoir une valeur propre plongée dans son spectre essentiel. Pour $\lambda \in \sigma(D_0)$, on construit un potentiel réel V D_0 -compact tel que λ est une valeur propre de $D = D_0 + V$.

Théorème 5.0.3 *Soit $\lambda \in]-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, +\infty[$. Il existe un potentiel réel V , D_0 -compact et λ est une valeur propre de D .*

Pour démontrer le théorème 5.0.3, il est utile d'utiliser des coordonnées sphériques. Nous renvoyons à [T] pour plus de détails.

5.1 Coordonnées sphériques

D'après la page 128 du livre de [T], on a

$$D_0 = \bigoplus_{j=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots}^{\infty} \bigoplus_{m_j=-j}^j \bigoplus_{\kappa_j=\pm(j+\frac{1}{2})} D_{0,\kappa_j} = \bigoplus_{\rho \in \Lambda} D_{0,\rho}$$

où $\Lambda = \{(j, m_j, \kappa_j); j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots; m_j = -j, \dots, j; \kappa_j = \pm(j + \frac{1}{2})\}$ et $D_{0,\rho}$ est l'opérateur de Dirac radial, qui est donné par l'expression suivante pour chaque $\rho \in \Lambda$:

$$D_{0,\rho} := \begin{pmatrix} 0 & -c \frac{d}{dr} \\ c \frac{d}{dr} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & c \frac{\kappa}{r} \\ c \frac{\kappa}{r} & -mc^2 \end{pmatrix}; \kappa = \kappa_j.$$

Pour $\rho \in \Lambda$, fixé, l'idée est de chercher $\varphi_{sc}, \varphi_{el}, \varphi_{am}$ pour avoir un vecteur propre à la valeur propre λ pour l'opérateur de Dirac radial avec potentiel D_ρ où

$$D_\rho := \begin{pmatrix} 0 & -c \frac{d}{dr} \\ c \frac{d}{dr} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 + \varphi_{sc} + \varphi_{el} & c \frac{\kappa}{r} + \varphi_{am} \\ c \frac{\kappa}{r} + \varphi_{am} & -mc^2 - \varphi_{sc} + \varphi_{el} \end{pmatrix}.$$

On utilise la transformation unitaire suivante, qui est dans [T].

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4 &\longrightarrow \mathcal{L}^2([0, +\infty[, dr) \otimes (\mathcal{L}^2(\mathbb{S}^2, d\sigma))^4 \\ \tilde{\psi}(x, y, z) = (\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3, \tilde{\psi}_4) &\longmapsto \psi(r, \theta, \varphi) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) \\ &= r\tilde{\psi}(x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} x(r, \theta, \varphi) &= r \sin(\theta) \cos(\varphi), \\ y(r, \theta, \varphi) &= r \sin(\theta) \sin(\varphi) \quad ; r \in [0, +\infty[, \theta \in [0, \pi[, \varphi \in [-\pi, \pi[\\ z(r, \theta, \varphi) &= r \cos(\theta). \end{aligned}$$

et dr est la mesure de Lebesgue et $d\sigma = \sin(\theta)d\theta d\varphi$ est la mesure sur la sphère $\mathbb{S}^2$.

Φ est un isomorphisme unitaire de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ dans $\mathcal{L}^2([0, +\infty[, dr) \otimes (\mathcal{L}^2(\mathbb{S}^2, d\sigma))^4$. En effet,

$$\begin{aligned} \|\Phi(\tilde{\psi})\|_{\mathcal{L}^2([0, +\infty[, dr) \otimes \mathcal{L}^2(\mathbb{S}^2, d\sigma))^4}^2 &= \|\psi\|_{\mathcal{L}^2([0, +\infty[, dr) \otimes \mathcal{L}^2(\mathbb{S}^2, d\sigma))^4}^2 \\ &= \|r\tilde{\psi}(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot))\|_{\mathcal{L}^2([0, +\infty[, dr) \otimes \mathcal{L}^2(\mathbb{S}^2, d\sigma))^4}^2 \\ &= \sum_{j=1}^4 \|r\tilde{\psi}_j(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot))\|_{\mathcal{L}^2([0, +\infty[, dr) \otimes \mathcal{L}^2(\mathbb{S}^2, d\sigma)}^2 \\ &= \sum_{j=1}^4 \int_{[0, +\infty[} \int_{\mathbb{S}^2} |r\tilde{\psi}_j(x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi))|^2 dr d\sigma \\ &= \sum_{j=1}^4 \int_{[0, +\infty[} \int_{\mathbb{S}^2} |\tilde{\psi}_j(x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi))|^2 r^2 dr d\sigma \\ &= \sum_{j=1}^4 \int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{\psi}_j(x, y, z)|^2 dx dy dz \\ &= \sum_{j=1}^4 \|\tilde{\psi}_j\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &= \|\tilde{\psi}\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4}^2 \end{aligned}$$

Dans toute la suite, ∂_r est la dérivée par rapport à r , de même pour θ et φ , notées par ∂_θ et ∂_φ . Notons par $\nabla_{r, \theta, \varphi}$ le gradient sphérique $\begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\theta \\ \partial_\varphi \end{pmatrix}$, et $\nabla_{x, y, z}$ le gradient cartésien $\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$.

Comme pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, et $\psi_j \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[\times]0, \pi[\times]-\pi, \pi[)$

$$\begin{aligned} \partial_r \psi_j(r, \theta, \varphi) &= \tilde{\psi}_j(x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)) + r \sin(\theta) \cos(\varphi) \partial_x \tilde{\psi}_j(x, y, z) \\ &\quad + r \sin(\theta) \sin(\varphi) \partial_y \tilde{\psi}_j(x, y, z) + r \cos(\theta) \partial_z \tilde{\psi}_j(x, y, z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta \psi_j(r, \theta, \varphi) &= r^2 \cos(\theta) \cos(\varphi) \partial_x \tilde{\psi}_j(x, y, z) + r^2 \cos(\theta) \sin(\varphi) \partial_y \tilde{\psi}_j(x, y, z) \\ &\quad - r^2 \sin(\theta) \partial_z \tilde{\psi}_j(x, y, z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\varphi \psi_j(r, \theta, \varphi) &= -r^2 \sin(\theta) \sin(\varphi) \partial_x \tilde{\psi}_j(x, y, z) + r^2 \sin(\theta) \cos(\varphi) \partial_y \tilde{\psi}_j(x, y, z). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\theta \\ \partial_\varphi \end{pmatrix} \psi_j(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_j(x, y, z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \\ r^2 \cos(\theta) \cos(\varphi) & r^2 \cos(\theta) \sin(\varphi) & -r^2 \sin(\theta) \\ -r^2 \sin(\theta) \sin(\varphi) & r^2 \sin(\theta) \cos(\varphi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \tilde{\psi}_j(x, y, z).$$

soit

$$\nabla_{r, \theta, \varphi} \psi_j = M. \nabla_{x, y, z} \tilde{\psi}_j + B_{\psi_j},$$

où

$$M = \begin{pmatrix} r \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \\ r^2 \cos(\theta) \cos(\varphi) & r^2 \cos(\theta) \sin(\varphi) & -r^2 \sin(\theta) \\ -r^2 \sin(\theta) \sin(\varphi) & r^2 \sin(\theta) \cos(\varphi) & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } B_{\psi_j} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \psi_j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, pour $j = 1, 2, 3, 4$, on a

$$\nabla_{x, y, z} \tilde{\psi}_j = M^{-1}.(\nabla_{r, \theta, \varphi} \psi_j - B_{\psi_j})$$

et $M^{-1} := (n_{st})_{1 \leq s, t \leq 3}$ est donnée par

$$M^{-1} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} r \sin(\theta) \cos(\varphi) & \cos(\theta) \cos(\varphi) & -\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\theta)} \\ -r \sin(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\theta) \sin(\varphi) & \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\theta)} \\ r \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\nabla_{x, y, z} \tilde{\psi} = (M^{-1} \otimes I_4).(\nabla_{r, \theta, \varphi} \psi - B \otimes I_4. \psi),$$

$$\text{où } \psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4), \nabla_{r, \theta, \varphi} \psi_j = \begin{pmatrix} \partial_r \psi_j \\ \partial_\theta \psi_j \\ \partial_\varphi \psi_j \end{pmatrix}, \nabla_{r, \theta, \varphi} \psi = \begin{pmatrix} \partial_r (\psi_j)_{j=1,2,3,4} \\ \partial_\theta (\psi_j)_{j=1,2,3,4} \\ \partial_\varphi (\psi_j)_{j=1,2,3,4} \end{pmatrix}, \nabla_{x, y, z} \psi = \begin{pmatrix} \partial_x (\psi_j)_{j=1,2,3,4} \\ \partial_y (\psi_j)_{j=1,2,3,4} \\ \partial_z (\psi_j)_{j=1,2,3,4} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B \otimes I_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} I_4 \\ 0. I_4 \\ 0. I_4 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$M^{-1} \otimes I_4 = \begin{pmatrix} n_{11} I_4 & n_{12} I_4 & n_{13} I_4 \\ n_{21} I_4 & n_{22} I_4 & n_{23} I_4 \\ n_{31} I_4 & n_{32} I_4 & n_{33} I_4 \end{pmatrix}.$$

Comme dans la page 127 de [T], $\mathcal{L}^2(\mathbb{S}^2)^4$ est une somme orthogonale de certains espaces de Hilbert k_ρ de dimension 2 :

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{S}^2)^4 = \bigoplus_{\rho \in \Lambda} k_\rho,$$

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4$ est isomorphe à $\bigoplus_{\rho \in \Lambda} \mathcal{L}^2(0, \infty, dr) \otimes k_\rho$. Pour $\psi \in \mathcal{L}^2(0, \infty, dr) \times \mathcal{L}^2(\mathbb{S}^2)^4$,

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\rho \in \Lambda} \psi_\rho^+(r) \phi_\rho^+(\theta, \varphi) + \psi_\rho^-(r) \phi_\rho^-(\theta, \varphi)$$

où $\psi_\rho^\pm(r), \phi_\rho^\pm(\theta, \varphi)$ sont données dans la page 126 du livre [T].

Preuve : Cette preuve est consacrée à la preuve du théorème 5.0.3.

D'après [T], $D := D_0 + V$ avec V est radial, est unitairement équivalent à $\bigoplus_{\rho \in \Lambda} D_{0, \rho} + V_\rho = \bigoplus_{\rho \in \Lambda} D_\rho$.

Fixons $\rho_0 = (j_0, m_j^0, \kappa_j^0) \in \Lambda$ et considérons deux cas : $|\lambda| > mc^2$ et $|\lambda| = mc^2$.

Lemme 5.1.1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $|\lambda| > mc^2$. Soit $\rho = (j, m_j, \kappa_j) \in \Lambda$. On note κ_j par κ . On considère $u_1, u_2 : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, telles que :

- * $\forall r > 0, u_1^2(r) + u_2^2(r) > 0$
- * $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{u_1^2(r) + u_2^2(r)}} \sqrt{(\partial_r u_1(r))^2 + (\partial_r u_2(r))^2} = 0;$
- * près de 0 :
 - (1) si $\kappa > 0, u_1 = 0$ et $u_2 = r^\kappa + h_2(r)$, avec $h_2(r) = O(r^{\kappa+1})$,
et $\partial_r h_2(r) = O(r^\kappa)$,
 - (2) si $\kappa < 0, u_2 = 0$ et $u_1 = r^{-\kappa} + h_1(r)$, avec $h_1(r) = O(r^{-\kappa+1})$,
et $\partial_r h_1(r) = O(r^{-\kappa})$;
- * et à l'infini, $|u_1(r)| + |u_2(r)| = O(\frac{1}{r})$.

Alors il existe un potentiel réel V_ρ de la forme

$$V_\rho = \begin{pmatrix} \varphi_{sc} + \varphi_{el} & c \frac{\kappa}{r} + \varphi_{am} \\ c \frac{\kappa}{r} + \varphi_{am} & -\varphi_{sc} + \varphi_{el} \end{pmatrix}$$

avec $\varphi_{sc}, \varphi_{am}, \varphi_{el} \in \mathcal{C}_0^\infty(]0, +\infty[)$, bornées près de 0 et tendant vers 0 à l'infini, tel que

$$\psi(r) = \begin{pmatrix} \psi_1(r) \\ \psi_2(r) \end{pmatrix} = e^{rA} \begin{pmatrix} u_1(r) \\ u_2(r) \end{pmatrix},$$

soit solution de l'équation différentielle $D_\rho \psi = \lambda \psi$.

Preuve : Soit l'équation suivante,

$$\begin{pmatrix} 0 & -c \frac{d}{dr} \\ c \frac{d}{dr} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (5.1.0.1)$$

équivalente à

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{mc^2 + \lambda}{c} \\ \frac{mc^2 - \lambda}{c} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

Donc

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} = k e^{rA} \begin{pmatrix} \psi_1(0) \\ \psi_2(0) \end{pmatrix}, \text{ où } k \in \mathbb{C} \text{ et } A := \begin{pmatrix} 0 & \frac{mc^2 + \lambda}{c} \\ \frac{mc^2 - \lambda}{c} & 0 \end{pmatrix}.$$

Par identification de trace et déterminant de la matrice A , on trouve que A a les valeurs propres suivantes $i\lambda_1 = -i\lambda_2 = \frac{i\sqrt{\lambda^2 - m^2 c^4}}{c}$, alors A est unitairement équivalente à la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} i\lambda_1 & 0 \\ 0 & i\lambda_2 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage U est donnée par :

$$U = \begin{pmatrix} -i\lambda_+ & 1 \\ 1 & i\lambda_- \end{pmatrix},$$

où $\lambda_\pm := \frac{mc^2 \pm \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - m^2 c^4}}$, par suite $UDU^{-1} = A$, et e^{rA} est donné par

$$e^{rA} = \begin{pmatrix} \cos(r\lambda_1) & \lambda_+ \sin(r\lambda_1) \\ \lambda_- \sin(r\lambda_1) & \cos(r\lambda_1) \end{pmatrix}.$$

On cherche V_{ρ_0} tel que

$$D_{\rho_0}\psi = (D_{0,\rho_0} + V_{\rho_0})\psi = \lambda\psi,$$

équivalente à

$$V_{\rho_0} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -c \frac{d}{dr} \\ c \frac{d}{dr} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

où

$$V_{\rho_0} = \begin{pmatrix} \varphi_{sc} + \varphi_{el} & c \frac{\kappa}{r} + \varphi_{am} \\ c \frac{\kappa}{r} + \varphi_{am} & -\varphi_{sc} + \varphi_{el} \end{pmatrix},$$

équivalente à

$$V_{\rho_0} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} c \frac{d}{dr} (e^{rA} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}) - \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{rA} \begin{pmatrix} d_r u_1 \\ d_r u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Posons $\varphi_{\kappa,am} := \varphi_{am} + \frac{\kappa}{r}$, et

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e^{rA} \begin{pmatrix} d_r u_1 \\ d_r u_2 \end{pmatrix}.$$

Alors l'équation est équivalente à

$$\begin{pmatrix} \varphi_{sc} + \varphi_{el} & \varphi_{\kappa,am} \\ \varphi_{\kappa,am} & -\varphi_{sc} + \varphi_{el} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

équivalent à

$$\begin{cases} \varphi_{sc}\psi_1 + \varphi_{\kappa,am}\psi_2 &= w_1 - \varphi_{el}\psi_1 \\ \varphi_{\kappa,am}\psi_1 - \varphi_{sc}\psi_2 &= w_2 - \varphi_{el}\psi_2. \end{cases}$$

Or $\forall r > 0, \psi_1^2(r) + \psi_2^2(r) > 0$, par suite équivalente à

$$\begin{cases} \varphi_{sc} &= \varphi_{el} \frac{\psi_2^2 - \psi_1^2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} + \frac{w_1\psi_1 - w_2\psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} \\ \varphi_{\kappa,am} &= -2\varphi_{el} \frac{\psi_1\psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} + \frac{w_2\psi_1 + \psi_2 w_1}{\psi_1^2 + \psi_2^2} \end{cases}$$

Près de l'infini. En imposant aussi que φ_{el} tend vers 0 à l'infini. On obtient que φ_{sc} et $\varphi_{\kappa,am}$ tendent vers 0 à l'infini. En effet, comme $\frac{\psi_2^2 - \psi_1^2}{\psi_1^2 + \psi_2^2}$ et $\frac{\psi_1\psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2}$ sont bornés alors

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi_{el} \frac{\psi_2^2 - \psi_1^2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi_{el} \frac{\psi_1\psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} = 0.$$

et

$$\frac{w_1\psi_1 - w_2\psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} = \frac{\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\|^2} = \frac{c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e^{rA} \begin{pmatrix} d_r u_1 \\ d_r u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\|^2}$$

par suite

$$\left| \frac{w_1\psi_1 - w_2\psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} \right| \leq \frac{\|e^{rA} d_r \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\|}{\|e^{rA} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\|} \leq \|e^{rA}\| \|e^{-rA}\| \frac{\|d_r \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\|}{\left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\|}$$

et puisque $e^{\pm rA}$ sont bornés, on en déduit alors

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{w_1 \psi_1 - w_2 \psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} = 0.$$

par le même argument on obtient que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{w_2 \psi_1 + w_1 \psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} = 0$.

Près de 0, En utilisant un développement de Taylor, on obtient

$$\begin{pmatrix} \psi_1(r) \\ \psi_2(r) \end{pmatrix} = e^{rA} \begin{pmatrix} 0 \\ r^\kappa + O(r^{\kappa+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r^\kappa + O(r^{\kappa+1}) \end{pmatrix} + r B_r \begin{pmatrix} 0 \\ r^\kappa + O(r^{\kappa+1}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_1(r) \\ w_2(r) \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e^{rA} \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa r^{\kappa-1} + O(r^\kappa) \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \kappa r^{\kappa-1} + O(r^\kappa) \end{pmatrix} + r B_r \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa r^{\kappa-1} + O(r^\kappa) \end{pmatrix} \right)$$

où B_r est borné uniformément en r . En faisant de nouveau le développement de Taylor en 0 de $\frac{1}{1 + (\lambda_-^2 - 1) \sin^2(r\lambda_1)}$ on trouve

$$\frac{1}{(\cos(r\lambda_1)^2 + \lambda_-^2 \sin^2(r\lambda_1))} = \frac{1}{1 + (\lambda_-^2 - 1) \sin^2(r\lambda_1)} = 1 + O(r^2),$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{w_1 \psi_1 - w_2 \psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} &= \frac{\begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}}{\psi_1^2 + \psi_2^2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}}{\psi_1^2 + \psi_2^2} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r^\kappa \end{pmatrix} \cdot c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa r^{\kappa-1} \end{pmatrix} + O(r^{2\kappa})}{(\cos(r\lambda_1)^2 + \lambda_-^2 \sin^2(r\lambda_1)) r^{2\kappa}} \\ &= \frac{0 + O(r^{2\kappa})}{(\cos(r\lambda_1)^2 + \lambda_-^2 \sin^2(r\lambda_1)) r^{2\kappa}} \\ &= O(r^0) \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{w_2 \psi_1 + w_1 \psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} &= \frac{\begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}}{\psi_1^2 + \psi_2^2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}}{\psi_1^2 + \psi_2^2} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r^\kappa \end{pmatrix} \cdot c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa r^{\kappa-1} \end{pmatrix} + O(r^{2\kappa})}{(\cos(r\lambda_1)^2 + \lambda_-^2 \sin^2(r\lambda_1)) r^{2\kappa}} \\ &= \frac{c \kappa r^{2\kappa-1} + O(r^{2\kappa})}{(\cos(r\lambda_1)^2 + \lambda_-^2 \sin^2(r\lambda_1)) r^{2\kappa}} \\ &= c \frac{\kappa}{r} \frac{1}{1 + (\lambda_-^2 - 1) \sin^2(r\lambda_1)} + O(r^0). \end{aligned}$$

par suite on obtient

$$\begin{aligned} \frac{w_2 \psi_1 + w_1 \psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} &= c \frac{\kappa}{r} (1 + O(r^2)) + O(r^0) \\ &= c \frac{\kappa}{r} + O(r^0). \end{aligned}$$

Nous concluons que

$$\begin{cases} \varphi_{sc} &= \varphi_{el} \frac{\psi_2^2 - \psi_1^2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} + O(r^0) \\ \varphi_{\kappa, am} &= -2\varphi_{el} \frac{\psi_1 \psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} + c \frac{\kappa}{r} + O(r^0) \end{cases}$$

équivalent à

$$\begin{cases} \varphi_{sc} &= \varphi_{el} \frac{\psi_2^2 - \psi_1^2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} + O(r^0) \\ \varphi_{am} + c \frac{\kappa}{r} &= -2\varphi_{el} \frac{\psi_1 \psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} + c \frac{\kappa}{r} + O(r^0) \end{cases}$$

équivalent à

$$\begin{cases} \varphi_{sc} &= \varphi_{el} \frac{\psi_2^2 - \psi_1^2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} + O(r^0) \\ \varphi_{am} &= -2\varphi_{el} \frac{\psi_1 \psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} + O(r^0). \end{cases}$$

■

Lemme 5.1.2 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $|\lambda| = mc^2$. Soit $\rho = (j, m_j, \kappa_j) \in \Lambda$. On note κ_j par κ . On considère $u_1, u_2 : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, telles que :

$$*\forall r > 0, \psi_1^2(r) + \psi_2^2(r) = (u_1(r) + 2rmc u_2(r))^2 + u_2^2(r) > 0$$

$$*\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\|e^{rB} d_r(u_1, u_2)\|}{\|e^{rB}(u_1, u_2)\|} = 0;$$

*près de 0 :

$$(1) \text{ si } \kappa_+ = 0, u_1 = 0 \text{ et } u_2 = r^{-\kappa} + q_2(r), \text{ avec } q_2(r) = O(r^{-\kappa+1}), \\ \text{et } \partial_r q_2(r) = O(r^{-\kappa}),$$

$$(2) \text{ si } \kappa_- = 0, u_2 = 0 \text{ et } u_1 = r^{-\kappa} + p_1(r), \text{ avec } p_1(r) = O(r^{-\kappa+1}), \\ \text{et } \partial_r p_1(r) = O(r^{-\kappa});$$

$$*\text{et l'infini } |u_1(r)| + |u_2(r)| = O(\frac{1}{r}).$$

Alors il existe un potentiel réel V_ρ de la forme

$$V_\rho = \begin{pmatrix} \varphi_{sc} + \varphi_{el} & c \frac{\kappa}{r} + \varphi_{am} \\ c \frac{\kappa}{r} + \varphi_{am} & -\varphi_{sc} + \varphi_{el} \end{pmatrix}$$

avec $\varphi_{sc}, \varphi_{am}, \varphi_{el} \in \mathcal{C}_0^\infty(]0, +\infty[)$, bornées près de 0 et tendant vers 0 à l'infini, tel que

$$\psi(r) = \begin{pmatrix} \psi_1(r) \\ \psi_2(r) \end{pmatrix} = e^{rB} \begin{pmatrix} u_1(r) \\ u_2(r) \end{pmatrix},$$

soit solution de l'équation différentielle

$$D_\rho \psi = \lambda \psi. \quad (5.1.0.2)$$

Preuve : Sans perte de généralité, on suppose que $\lambda = mc^2$. L'équation (5.1.0.1) est équivalent à

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2mc \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

et par suite l'ensemble des solutions sont données par

$$\begin{pmatrix} \psi_1(r) \\ \psi_2(r) \end{pmatrix} = k e^{rB} \begin{pmatrix} \psi_1(0) \\ \psi_2(0) \end{pmatrix},$$

où

$$k \in \mathbb{C}, \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 2mc \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or

$$e^{rB} = I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 2rmc \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2rmc \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour que (ψ_1, ψ_2) soit une solution de (5.1.0.2), il suffit qu'elle vérifie la relation suivante

$$V_{\rho_0} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{pmatrix}, \text{ où } \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{pmatrix} := c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e^{rB} \begin{pmatrix} d_r u_1 \\ d_r u_2 \end{pmatrix},$$

est équivalente à

$$\begin{cases} \varphi_{sc} &= \varphi_{el} \frac{\psi_2^2 - \psi_1^2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} + c \frac{\tilde{w}_1 \psi_1 - \tilde{w}_2 \psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} \\ \varphi_{\kappa, am} &= -2\varphi_{el} \frac{\psi_1 \psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} + c \frac{\tilde{w}_2 \psi_1 + \tilde{w}_1 \psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} \end{cases}$$

En imposant aussi que φ_{el} tend vers 0. On obtient que φ_{sc} et $\varphi_{\kappa, am}$ tendent vers 0 à l'infini. En effet, comme $\frac{\psi_2^2 - \psi_1^2}{\psi_1^2 + \psi_2^2}$ et $\frac{\psi_1 \psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2}$ sont bornés alors

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi_{el} \frac{\psi_2^2 - \psi_1^2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi_{el} \frac{\psi_1 \psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} = 0.$$

et

$$\frac{\tilde{w}_1 \psi_1 - \tilde{w}_2 \psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} = \frac{\begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\|^2} = \frac{c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e^{rB} \begin{pmatrix} d_r u_1 \\ d_r u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\|^2}$$

par suite

$$\frac{|\tilde{w}_1 \psi_1 - \tilde{w}_2 \psi_2|}{\psi_1^2 + \psi_2^2} \leq \frac{\|e^{rB} d_r \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\|}{\|e^{rB} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\|}$$

on en déduit alors

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{w}_1 \psi_1 - \tilde{w}_2 \psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} = 0.$$

par le même argument on obtient que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{w}_2 \psi_1 + \tilde{w}_1 \psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} = 0$.

Près de 0, d'une part

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{w}_1 \psi_1 - \tilde{w}_2 \psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} &= \frac{c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e^{rB} \begin{pmatrix} d_r u_1 \\ d_r u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}}{\psi_1^2 + \psi_2^2} \\ &= \frac{c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2rmc \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_r u_1 \\ d_r u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}}{\psi_1^2 + \psi_2^2} \\ &= \frac{c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\kappa r^{-\kappa-1} + O(r^{-\kappa}) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r^{-\kappa} + O(r^{-\kappa+1}) \\ 0 \end{pmatrix}}{r^{2\delta} (1 + O(r^0))} \\ &= \frac{c \begin{pmatrix} \kappa r^{-\kappa-1} + O(r^{-\kappa}) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r^{-\kappa} + O(r^{-\kappa+1}) \\ 0 \end{pmatrix}}{r^{-2\kappa} (1 + O(r^0))} \\ &= 0, \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{w}_2 \psi_1 + \tilde{w}_1 \psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2} &= \frac{c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e^{rB} \begin{pmatrix} d_r u_1 \\ d_r u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}}{\psi_1^2 + \psi_2^2} \\ &= \frac{c \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2rmc \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_r u_1 \\ d_r u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}}{\psi_1^2 + \psi_2^2} \\ &= \frac{c \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\kappa r^{-\kappa-1} + O(r^{-\kappa}) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r^{-\kappa} + O(r^{-\kappa+1}) \\ 0 \end{pmatrix}}{r^{-2\kappa} (1 + O(r^0))} \\ &= \frac{c \begin{pmatrix} \kappa r^{-\kappa-1} + O(r^{-\kappa}) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r^{-\kappa} + O(r^{-\kappa+1}) \\ 0 \end{pmatrix}}{r^{-2\kappa} (1 + O(r^0))} \\ &= c \frac{\kappa r^{-2\kappa-1} + O(r^{-2\kappa})}{r^{-2\kappa} (1 + O(r^0))} \\ &= c \frac{\kappa}{r} + O(r^0), \end{aligned}$$

nous concluons alors que $\varphi_{sc} = O(r^0)$, $\varphi_{am} = O(r^0)$ proche de 0. Dans le cas $\lambda = -mc^2$, la matrice transposée de B , qui joue le rôle de B .

■

Soit V donné par

$$V := U \bigoplus_{\rho \in \Lambda} V_\rho = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & 0 & V_{\rho_0} & 0 \\ \ddots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \ddots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

où U est une transformation unitaire et $V_{\rho_0} = \begin{pmatrix} \varphi_{sc} + \varphi_{el} & \varphi_{am} \\ \varphi_{am} & -\varphi_{sc} + \varphi_{el} \end{pmatrix}$ donné par les lemmes 5.1.2 et 5.1.1. Puisque φ_{sc} , φ_{el} , et $\varphi_{\kappa, am}$ sont bornées près de 0 et tendent vers 0 à l'infini, V est D_0 -compact.

Prenons le vecteur de fonctions $\psi = (...0, ...0, (\psi_1, \psi_2)_{\rho_0}, 0, ...0, ...) \in \bigoplus_{\rho \in \Lambda} \mathcal{L}^2(0, \infty, dr)^2$, où ψ_1, ψ_2 sont données par le lemme 5.1.1 et le lemme (5.1.2).

D'après la formule (4.126) dans [T] :

$$\tilde{\psi}(x(r, \theta, \phi)) = \frac{1}{r} \psi_1(r) \varphi_{\rho_0}^+ + \frac{1}{r} \psi_2(r) \varphi_{\rho_0}^-.$$

Montrons que $\tilde{\psi} \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)^4$. Comme

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{\psi}(x)|^2 dx &= \sum_{j=1}^4 \int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{\psi}_j(x)|^2 dx \\ &= \sum_{j=1}^4 \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^2} |\tilde{\psi}_j(x(r, \theta, \phi))|^2 r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi \\ &\leq \int_0^{+\infty} (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) \\ &\leq C \left(\int_0^1 r^{2\kappa} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{r^2} \right) < +\infty \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \tilde{\psi}(x)|^2 dx &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^2} \left| (M^{-1} \otimes I_4) \cdot (\nabla_{r, \theta, \varphi} (\psi_1(r) \varphi_{\rho_0}^+ + \psi_2(r) \varphi_{\rho_0}^-) \right. \\ &\quad \left. - B \otimes I_4 \cdot (\psi_1(r) \varphi_{\rho_0}^+ + \psi_2(r) \varphi_{\rho_0}^-) \right|^2 r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^2} \left| M^{-1} \otimes I_4 \cdot \begin{pmatrix} (\partial_r \psi_1 - \frac{1}{r} \psi_1) \varphi_{\rho_0}^+ + (\partial_r \psi_2 - \frac{1}{r} \psi_2) \varphi_{\rho_0}^- \\ \psi_1 A^+ \varphi_{\rho_0}^+ + \psi_2 A^- \varphi_{\rho_0}^- \\ \psi_1 R^+ \varphi_{\rho_0}^+ + \psi_2 R^- \varphi_{\rho_0}^- \end{pmatrix} \right|^2 r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi \\ &\leq C \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^2} \max \left((\partial_r \psi_1 - \frac{1}{r} \psi_1)^2, \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \psi_1^2, \frac{1}{\sin^2 \theta} \psi_1^2 \right) \varphi_{\rho_0}^{+2} \\ &\quad + \max \left((\partial_r \psi_2 - \frac{1}{r} \psi_2)^2, \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \psi_2^2, \frac{1}{\sin^2 \theta} \psi_2^2 \right) \varphi_{\rho_0}^{-2} dr \sin \theta d\theta d\phi \\ &\leq C \int_0^{+\infty} \max \left((\partial_r \psi_1 - \frac{1}{r} \psi_1)^2, \frac{1}{r^2} \psi_1^2, \psi_1^2, (\partial_r \psi_2 - \frac{1}{r} \psi_2)^2, \frac{1}{r^2} \psi_2^2, \psi_2^2 \right) dr \\ &\quad \int_{\mathbb{S}^2} \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \varphi_{\rho_0}^2 \sin \theta d\theta d\phi, \end{aligned}$$

comme $\|\frac{1}{\sin^2(\theta)}\varphi_{\rho_0}\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{S}^2)^4} < +\infty$. Il nous reste qu'à vérifier que pour notre choix de ψ_1, ψ_2 dans le lemme 5.1.1 et le lemme 5.1.2, on a pour $\kappa > 1/2$

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \max\left((\partial_r \psi_1 - \frac{1}{r}\psi_1)^2, \frac{1}{r^2}\psi_1^2, \psi_1^2, (\partial_r \psi_2 - \frac{1}{r}\psi_2)^2, \frac{1}{r^2}\psi_2^2, \psi_2^2\right) dr \\ &= \int_0^1 \max\left((\kappa - 1)^2 r^{2(\kappa-1)}, r^{2(\kappa-1)}, r^{2\kappa}\right) dr + \int_1^{+\infty} \max\left(\frac{1}{r^4}, \frac{1}{r^2}\right) dr \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

enfin, on peut conclure que

$$\|\nabla \tilde{\psi}\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)^4}^2 < +\infty.$$

■

5.2 Appendice.E

D'après l'expression de ϕ_ρ qui est dans [T], il est facile de voir que $\partial_\varphi \phi_\rho^\pm(\theta, \varphi) = -iR^\pm \phi_\rho^\pm(\theta, \varphi)$, où

$$R^+ = \begin{pmatrix} m_j-1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_j+1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_j-1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_j+1/2 \end{pmatrix}.$$

On cherche maintenant l'expression de $\partial_\theta \phi_\rho(\theta, \varphi)$ en fonction de $\phi_\rho(\theta, \varphi)$. D'après la paragraphe 4.6.4 de [T] on a $K\phi_\rho^\pm = -\kappa_j \phi_\rho^\pm$, avec $K = \beta(2S.L + 1)$ où S et L sont données par

$$L = \begin{pmatrix} iCotg\theta \cos \phi \partial_\phi - i \sin \phi \partial_\theta \\ iCotg\theta \sin \phi \partial_\phi - i \cos \phi \partial_\theta \\ -i\partial_\phi \end{pmatrix},$$

et

$$S = ((\sigma_1 \ 0), (\sigma_2 \ 0), (\sigma_3 \ 0)),$$

où $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont des matrices données par la paragraphe 1.1 dans [T], donc

$$\begin{aligned} S.L &= \sum_{i=1}^3 S_i L_i \\ &= \begin{pmatrix} -i\partial_\phi & ie^{-i\phi} Cotg\theta \partial_\phi - e^{i\phi} \partial_\theta & 0 & 0 \\ ie^{i\phi} Cotg\theta \partial_\phi + e^{-i\phi} \partial_\theta & i\partial_\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\partial_\phi & ie^{-i\phi} Cotg\theta \partial_\phi - e^{i\phi} \partial_\theta \\ 0 & 0 & ie^{i\phi} Cotg\theta \partial_\phi + e^{-i\phi} \partial_\theta & i\partial_\phi \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} K &= \beta(2S.L + 1) = \beta(2 \sum_{i=1}^3 S_i L_i + 1) \\ &= \beta \begin{pmatrix} -2i\partial_\phi + 1 & 2ie^{-i\phi} Cotg\theta \partial_\phi - 2e^{i\phi} \partial_\theta & 0 & 0 \\ 2ie^{i\phi} Cotg\theta \partial_\phi + 2e^{-i\phi} \partial_\theta & i2\partial_\phi + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i\partial_\phi + 1 & 2ie^{-i\phi} Cotg\theta \partial_\phi - 2e^{i\phi} \partial_\theta \\ 0 & 0 & 2ie^{i\phi} Cotg\theta \partial_\phi + 2e^{-i\phi} \partial_\theta & i2\partial_\phi + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme $K\varphi_\rho = -\kappa_j \varphi_\rho$, où $\varphi_\rho = c^+ \varphi_\rho^+ + c^- \varphi_\rho^-$, pour $\kappa_j = \mp(j + \frac{1}{2})$,

$$\varphi_\rho^+ = \begin{pmatrix} \psi_{j+\frac{1}{2}}^{m_j} \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_\rho^- = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{j-\frac{1}{2}}^{m_j} \end{pmatrix}$$

$$\psi_{j-\frac{1}{2}}^{m_j} = \frac{1}{\sqrt{2j}} \begin{pmatrix} i\sqrt{j+m_j} Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j-\frac{1}{2}} \\ i\sqrt{j-m_j} Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j+\frac{1}{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi_{j+\frac{1}{2}}^{m_j} = \frac{1}{\sqrt{2j+2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{j+1-m_j} Y_{j+\frac{1}{2}}^{m_j-\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{j+1+m_j} Y_{j+\frac{1}{2}}^{m_j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Pour $\kappa_j = -(j + \frac{1}{2})$, $K\varphi_\rho^+ = -\kappa_j \varphi_\rho^+$, équivalente à

$$\begin{aligned} \beta \begin{pmatrix} -2i\partial_\phi + 1 & 2ie^{-i\phi} Cotg\theta \partial_\phi - 2e^{i\phi} \partial_\theta & 0 & 0 \\ 2ie^{i\phi} Cotg\theta \partial_\phi + 2e^{-i\phi} \partial_\theta & i2\partial_\phi + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i\partial_\phi + 1 & 2ie^{-i\phi} Cotg\theta \partial_\phi - 2e^{i\phi} \partial_\theta \\ 0 & 0 & 2ie^{i\phi} Cotg\theta \partial_\phi + 2e^{-i\phi} \partial_\theta & i2\partial_\phi + 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} i\sqrt{j+m_j} Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j-\frac{1}{2}} \\ i\sqrt{j-m_j} Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j+\frac{1}{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= -\kappa_j \begin{pmatrix} i\sqrt{j+m_j} Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j-\frac{1}{2}} \\ i\sqrt{j-m_j} Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j+\frac{1}{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

alors d'une part

$$\begin{aligned} & \beta(-2i\partial_\phi + 1)i\sqrt{j+m_j}Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j-\frac{1}{2}} + \beta(2ie^{-i\phi}\text{Cotg}\theta\partial_\phi - 2e^{i\phi}\partial_\theta)i\sqrt{j-m_j}Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j+\frac{1}{2}} \\ &= -i\kappa_j\sqrt{j+m_j}Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

équivalente à

$$\begin{aligned} -2i\beta e^{i\phi}\sqrt{\frac{j-m_j}{2j}}\partial_\theta Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j+\frac{1}{2}} &= (-i\kappa_j\sqrt{\frac{j+m_j}{2j}} - 2i\beta\sqrt{\frac{j+m_j}{2j}}(m_j - \frac{1}{2}) - i\beta\sqrt{\frac{j+m_j}{2j}})Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j-\frac{1}{2}} \\ &\quad - 2i\beta\text{Cotg}\theta e^{-i\phi}\sqrt{\frac{j-m_j}{2j}}(m_j + \frac{1}{2})Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

nous concluons que

$$\begin{aligned} \partial_\theta Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j+\frac{1}{2}} &= (\frac{\kappa_j}{2\beta} + m_j)\sqrt{\frac{j+m_j}{j-m_j}}e^{-i\phi}Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j-\frac{1}{2}} \\ &\quad + \text{Cotg}\theta e^{-2i\phi}(m_j + \frac{1}{2})Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & \beta(2ie^{i\phi}\text{Cotg}\theta\partial_\phi + 2e^{-i\phi}\partial_\theta)i\sqrt{\frac{j+m_j}{2j}}Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j-\frac{1}{2}} + \beta(2i\partial_\phi + 1)i\sqrt{\frac{j-m_j}{2j}}Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j+\frac{1}{2}} \\ &= -i\kappa_j\sqrt{\frac{j-m_j}{2j}}Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

équivalente à

$$\partial_\theta Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j-\frac{1}{2}} = -\text{Cotg}\theta e^{2i\phi}(m_j - \frac{1}{2})Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j-\frac{1}{2}} - (\frac{\kappa_j}{2\beta} + m_j + 1)\sqrt{\frac{j-m_j}{j+m_j}}e^{i\phi}Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j+\frac{1}{2}}.$$

alors

$$\partial_\theta \varphi_\rho^+ = A^+ \varphi_\rho^+$$

où

$$A^+ = \begin{pmatrix} -\text{Cotg}\theta e^{2i\phi}(m_j-\frac{1}{2}) & -(\frac{\kappa_j}{2\beta}+m_j+1)e^{i\phi} & 0 & 0 \\ (\frac{\kappa_j}{2\beta}+m_j)e^{-i\phi} & \text{Cotg}\theta e^{-2i\phi}(m_j+\frac{1}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De même pour $K\varphi_\rho^- = -\kappa_j\varphi_\rho^-$, équivalente à

$$\begin{aligned} & \beta \begin{pmatrix} -2i\partial_\phi+1 & 2ie^{-i\phi}\text{Cotg}\theta\partial_\phi-2e^{i\phi}\partial_\theta & 0 & 0 \\ 2ie^{i\phi}\text{Cotg}\theta\partial_\phi+2e^{-i\phi}\partial_\theta & 2i\partial_\phi+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i\partial_\phi+1 & 2ie^{-i\phi}\text{Cotg}\theta\partial_\phi-2e^{i\phi}\partial_\theta \\ 0 & 0 & 2ie^{i\phi}\text{Cotg}\theta\partial_\phi+2e^{-i\phi}\partial_\theta & 2i\partial_\phi+1 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{j+1-m_j}Y_{j+\frac{1}{2}}^{m_j-\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{j+1+m_j}Y_{j+\frac{1}{2}}^{m_j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = -\kappa_j \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{j+1-m_j}Y_{j+\frac{1}{2}}^{m_j-\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{j+1+m_j}Y_{j+\frac{1}{2}}^{m_j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alors d'une part

$$\begin{aligned} & \beta(-2i\partial_\phi + 1)\sqrt{j+1-m_j}Y_{j+\frac{1}{2}}^{m_j-\frac{1}{2}} - \beta(2ie^{-i\phi}\text{Cotg}\theta\partial_\phi - 2e^{i\phi}\partial_\theta)\sqrt{j+1+m_j}Y_{j+\frac{1}{2}}^{m_j+\frac{1}{2}} \\ &= -\kappa_j\sqrt{j+1-m_j}Y_{j+\frac{1}{2}}^{m_j-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Bibliographie

- [ABG] W.O. AMREIN, A. BOUTET DE MONVEL, AND V. GEORGESCU : C_0 -groups, commutator methods and spectral theory of N-body hamiltonians., Birkhäuser 1996.
- [BCHM] J.-F. BONY, R. CARLES, D. HAEFFNER, L. MICHEL : Scattering theory for the Schrödinger equation with repulsive potential. J. Math. Pures Appl. 84, no. 5, 509-579, 2005
- [BD] MATANIA BEN-ARTZI, AND ALLEN DEVINATZ : Spectral and Scattering theory for the adiabatic oscillator and related potentials. J. Math. Phys Vol. 20, no. 4, April 1979
- [BFS] V. BACH, J. FRÖHLICH, AND I.M. SIGAL : Quantum electrodynamics of confined non-relativistic particles. Adv. in Math. 137, 299–395, 1998.
- [BG] N. BOUSSAID AND S. GOLÉNIA : Limiting absorption principle for some long range perturbations of Dirac systems at threshold energies. Comm. Math. Phys. 299, 677-708 (2010).
- [BMP] A. BOUTET DE MONVEL -BERTHIER, D. MANDA, AND R. PURICE : Limiting absorption principle for the Dirac operator. Annales de l'I. H. P., section A, tome 58(1993),p 413-431.
- [B] N. BURQ : Semiclassical estimates for the resolvent in non trapping geometries. Int. Math. Res. Notices, no 5, 221–241, 2002.
- [C] M. COMBESCURE : Spectral and Scattering Theory for a Class of Strongly Oscillating Potentials. Commun. Math. Phys. 73, 43-62 (1980).
- [Ca] L. CATTANEO : Mourre's inequality and embedded bound states. Bull.Sci Math.129, Issue 7, 591-614,2005.
- [Co] J. B. CONWAY : A Course in functional Analysis. GTM,1996.
- [CFKS] H.L.CYCON R.G.FROESE W.KIRSCH B. SIMON : Schrödinger Operators with Applications to Quantum Mechanics and Global Geometry.
- [CG] M. COMBESCURE AND J. GINIBRE : Spectral and scattering theory for the Schrödinger operator with strongly oscillating potentials. Annales de l'I. H. P., section A, tome 24, n 1 (1976), p. 17-30.
- [CJ] F. CASTELLA AND TH. JECKO : Besov estimates in the high-frequency Helmholtz equation, for a non-trapping and C^2 potential. J. Diff. Eq. 228, 440–485, 2006.
- [CGH] L. CATTANEO, G.M. GRAF, AND W. HUNZIKER : A general resonance theory based on Mourre's inequality, Annales Henri Poincaré 7, no 3, pp. 583–601, 2006.

- [DG] J. DERZIŃSKI AND C. GERARD : Scattering theory of classical and quantum N-particle systems Texts and Monographs in Physics. Springer, 1997.
- [DJ] J. DEREZIŃSKI AND V. JAKSIĆ : Spectral theory of Pauli-Fierz operators. J. Funct. Anal. 180, no 2, pp. 243–327, 2001.
- [FH] RICHARD FROESE AND IRA HERBST : Exponential Bounds and Absence of Positive Eigenvalues for JV-Body Schrödinger Operators Commun. Math. Phys. 87, pp. 429–447 ,1982.
- [GGé] V. GEORGESCU AND C. GÉRARD : On the Virial Theorem in Quantum Mechanics, Commun. Math. Phys. 208, 275–281, 1999.
- [GGéM] V. GEORGESCU, C. GÉRARD, AND J. S. MØLLER : Commutators, C_0 -semigroups and resolvent estimates, J. Funct. Anal. 216, no 2, pp. 303–361, 2004.
- [GGo] V. GEORGESCU AND S. GOLÉNIA : Isometries, Fock spaces and spectral analysis of Schrödinger operators on trees., J. Funct. Anal. 227, 389–429, 2005.
- [GJ] S. GOLÉNIA AND T. JECKO : Rescaled Mourre’s commutator theory, application to Schrödinger operators with oscillating potential. Journal of Operator Theory, Vol. 70, Issue 1, Summer 2013, pp 109–144.
- [GJ2] S. GOLÉNIA AND T. JECKO : A New Look at Mourre’s Commutator Theory, Compl. anal. oper. theory 1 (2007), 399–422, 2007 Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland 1661-8254/030399-24, published online April 2, 2007.
- [GN] F. GESZTESY AND R. NICHOLS : SOME APPLICATIONS OF ALMOST ANALYTIC EXTENSIONS TO OPERATOR BOUNDS IN TRACE IDEALS, arXiv :1502.01078v1 [math.FA] 4Feb 2015
- [HeS] B. HELFFER AND J. SJÖSTRAND : Opérateurs de Schrödinger avec champs magnétiques faibles et constants. Exposé No. XII, Séminaire EDP, février 1989, Ecole Polytechnique.
- [H] L. HÖRMANDER : The analysis of linear partial differential operators II., (Springer- Verlag, Berlin, Heidelberg, 1983).
- [HeS] B. HELFFER AND J. SJÖSTRAND : Opérateurs de Schrödinger avec champs magnétiques faibles et constants. Exposé No. XII, Séminaire EDP, février 1989, Ecole Polytechnique.
- [HuSi] W. HUNZIKER AND I.M. SIGAL : The quantum N-body problem, J. Math. Phys. 41 (6), 3448–3510, 2000.
- [JM] T. JECKO AND A. MBAREK : Limiting absorption principle for schrödinger operators with oscillating potential, <https://arxiv.org/abs/1610.04369>, published online october, 2016.
- [J1] TH. JECKO : From classical to semiclassical non-trapping behaviour, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 338, p. 545–548, 2004.
- [J2] TH. JECKO : Non-trapping condition for semiclassical Schrödinger operators with matrix-valued potentials. Math. Phys. Electronic Journal, vol. 11, No. 2, 2005.
- [JMP] A. JENSEN, E. MOURRE, AND P. PERRY : Multiple commutator estimates and resolvent smoothness in quantum scattering theory. Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 41, no. 2, p. 207–225, 1984.

-
- [M] E. MOURRE : Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators. Commun. in Math. Phys. 78, 391–408, 1981.
- [RSim] M. REED AND B. SIMON : Methods of modern mathematical physics, Tome IV : Analysis of operators. New York, Academic Press, 1978.
- [Sa] J. SAHBANI : The conjugate operator method for locally regular Hamiltonians. J. Oper. Theory 38, No. 2, 297–322, 1997.
- [T] B. THALLER : The Dirac Equation, ISBN 3-540-54883-1 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York