

UNIVERSITÉ PARIS 13, SORBONNE PARIS CITÉ  
INSTITUT GALILEE  
LABORATOIRE DE PHYSIQUE DES LASERS

Thèse présentée par  
**Camilla De Rossi**

Pour obtenir le grade de  
**Docteur de l'Université Paris 13,  
Sorbonne Paris Cité**

Sujet :

**Gaz de Bose en dimension deux : modes collectifs,  
superfluidité et piège annulaire**

Soutenue le 24 novembre 2016 devant le jury composé de :

M.	Thomas BOURDEL	Rapporteur
M.	Jean-Claude GARREAU	Rapporteur
Mme	Anne AMY KLEIN	Examinatrice
Mme	Agnès MAITRE	Examinatrice
M.	Jérôme BEUGNON	Examineur
Mme	Hélène PERRIN	Directrice de thèse



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>7</b>
<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Gaz de Bose en dimension deux</b>	<b>15</b>
1.1 La condensation de Bose-Einstein . . . . .	16
1.1.1 Critères pour la condensation . . . . .	16
1.1.2 Gaz parfait bidimensionnel . . . . .	18
1.1.3 Prise en compte des interactions . . . . .	21
1.2 Réalisation expérimentale et régime quasi 2-D . . . . .	21
1.2.1 Potentiel delta . . . . .	22
1.2.2 Invariance d'échelle de l'équation d'état . . . . .	22
1.3 Description en champ moyen du condensat . . . . .	23
1.3.1 Équation de Gross-Pitaevskii stationnaire . . . . .	24
1.3.2 GPE dépendant du temps . . . . .	27
1.3.3 Méthode de Bogoliubov . . . . .	28
1.4 Modes collectifs . . . . .	29
1.4.1 Piège isotrope et modes collectifs quantifiés . . . . .	29
1.4.2 Piège à symétrie cylindrique . . . . .	30
1.5 Transition BKT . . . . .	31
1.5.1 Saut universel de la densité superfluide . . . . .	31
1.5.2 Critère de Landau pour la superfluidité . . . . .	32
1.6 Gaz en rotation dans un anneau . . . . .	32
1.6.1 Atome unique dans un anneau . . . . .	33
1.6.2 Deux critères de superfluidité . . . . .	34
1.6.3 Quantification de la circulation et mesures de $l$ . . . . .	35
<b>2 Production du gaz 2D</b>	<b>39</b>
2.1 Système des lasers . . . . .	39
2.1.1 Laser doublé . . . . .	40
2.1.2 Laser à cavité étendue . . . . .	40

2.1.3	Diodes laser . . . . .	40
2.1.4	Laser Azur Light System . . . . .	42
2.1.5	Laser Verdi . . . . .	42
2.2	Séquence expérimentale . . . . .	42
2.2.1	Piège magnéto-optique 2D . . . . .	42
2.2.2	Piège magnéto-optique 3D . . . . .	43
2.2.3	Transport magnétique . . . . .	44
2.2.4	Piège quadrupolaire bouché . . . . .	45
2.2.5	Évaporation radio-fréquence . . . . .	46
2.2.6	Piège habillé . . . . .	47
2.2.7	Compression . . . . .	52
2.2.8	Détection du nuage . . . . .	53
2.3	Système d'imagerie horizontale . . . . .	53
2.4	Système d'imagerie verticale . . . . .	53
2.5	Fréquences d'oscillation dans le piège habillé . . . . .	55
2.5.1	Fréquences horizontales . . . . .	55
2.5.2	Fréquence verticale . . . . .	55
2.5.3	Mesure de la fréquence de Rabi . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Modes collectifs d'un gaz 2D</b> . . . . .	<b>57</b>
3.1	Introduction . . . . .	57
3.2	Analyse en composantes principales . . . . .	58
3.2.1	Principe de la méthode . . . . .	58
3.3	Préparation du gaz . . . . .	60
3.3.1	Analyse du bruit . . . . .	60
3.3.2	Excitation du nuage et analyse des modes . . . . .	60
3.3.3	Oscillations des poids de chaque PC . . . . .	62
3.4	Composantes principales et modes de Bogoliubov . . . . .	64
3.5	Simulations numériques . . . . .	67
3.6	Conclusion . . . . .	69
3.7	Annexe : simulations numériques . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Mode ciseaux et superfluidité</b> . . . . .	<b>71</b>
4.1	Introduction . . . . .	71
4.2	Piège anisotrope et mode ciseaux . . . . .	72
4.2.1	Oscillation de la fraction superfluide . . . . .	72
4.2.2	Oscillation de la fraction normale . . . . .	73
4.3	Le modèle adopté dans notre expérience . . . . .	74
4.4	Réalisation expérimentale . . . . .	75
4.4.1	Excitation du mode ciseaux . . . . .	76
4.4.2	Régime quasi-2D . . . . .	76
4.4.3	Potentiel chimique réduit . . . . .	77
4.4.4	Potentiel chimique et température avant excitation . . . . .	77
4.4.5	Excitation du nuage et prise des images . . . . .	77
4.5	Analyse des données . . . . .	78

4.5.1	Calcul de la moyenne et méthode d'ajustement . . . . .	78
4.5.2	Moyenne calculée sur le nuage entier . . . . .	79
4.5.3	Analyse de la moyenne locale . . . . .	81
4.5.4	Comparaison avec l'expérience de Desbuquois et al. . . . .	87
4.6	Conclusions . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Réalisation d'un piège annulaire</b>	<b>89</b>
5.1	Description du piège . . . . .	90
5.1.1	Transfert des atomes dans l'anneau . . . . .	90
5.1.2	Rayon de l'anneau . . . . .	91
5.1.3	Fréquences d'oscillation . . . . .	92
5.1.4	Dimensions restreintes . . . . .	92
5.2	La double nappe de lumière . . . . .	93
5.2.1	Modélisation de la nappe . . . . .	94
5.2.2	Procédure d'alignement . . . . .	98
5.3	Focalisation de la nappe . . . . .	101
5.4	Mise en rotation des atomes . . . . .	101
5.4.1	Touillette laser . . . . .	103
5.4.2	Impression de phase : l'hélice d'intensité . . . . .	104
5.4.3	Transfert Raman de moment cinétique orbital . . . . .	105
5.5	Le SLM . . . . .	106
5.5.1	Généralités sur le SLM à cristaux liquides . . . . .	106
5.5.2	Caractérisation technique du SLM . . . . .	108
5.5.3	Mise en forme d'un faisceau Laguerre-Gauss . . . . .	113
5.5.4	Réduction de la résolution . . . . .	115
5.5.5	Regularité au sommet d'un LG . . . . .	115
5.5.6	Fabrication de l'hélice d'intensité . . . . .	115
5.6	Conclusions . . . . .	120
	<b>Conclusion</b>	<b>123</b>

## Annexes

<b>A</b>	<b>Détection du nuage</b>	<b>125</b>
A.1	Introduction . . . . .	125
A.1.1	Imagerie par absorption d'un nuage dilué . . . . .	126
A.1.2	Imagerie par absorption d'un nuage dense . . . . .	126
A.2	Imagerie par absorption avec une caméra CCD . . . . .	128
A.2.1	Calibration du grandissement . . . . .	130
A.2.2	Mise au point de la caméra selon l'axe vertical . . . . .	131
A.2.3	Calibration de la conversion photons/coup . . . . .	131
A.2.4	Calibration du paramètre alpha . . . . .	133
A.2.5	Conditions pour l'impulsion sonde . . . . .	136

[Bibliographie](#)

139

# Remerciements

Les résultats présentés dans cette thèse sont en premier le fruit d'un travail d'équipe, mais aussi des interactions avec les autres collègues, les amis et la famille, que je souhaite ici remercier.

Je commence par remercier ma directrice de thèse Hélène Perrin, pour m'avoir accueillie dans son équipe en tant que doctorante. En plus qu'une brillante chercheuse, elle possède des capacités pédagogiques remarquables, beaucoup de patience, une mémoire d'éléphant et une rigueur incomparables. Je suis pleine de gratitude envers elle pour son encouragement dans les moments d'hésitation et pour son regard toujours bienveillant envers moi.

Je remercie Jean-Claude Garreau et Thomas Bourdel, pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce manuscrit, ainsi que Anne Amy-Klein, Angès Maître et Jérôme Beugnon pour leur présence en tant qu'examineurs. En particulier je tiens à exprimer ma gratitude Agnès, qui était responsable du Master 2 que j'ai fait, pour son humanité, sa disponibilité et son suivi lors du choix des thèses.

C'était un vrai plaisir de partager ces trois ans avec tous les autres membres de l'équipe. Merci à Laurent Longchambon pour son temps passé avec moi sur l'expérience, pour sa patience, ses qualités pédagogiques et sa capacité de mettre la bonne ambiance à table. À Thomas Badr, qui s'est souvent inquiété pour moi, pour sa disponibilité, sa rigueur et sa précieuse contribution en manip. Un merci et une bonne continuation à Mathieu de Goër, qui a pris le relais sur l'expérience à une vitesse surprenante, et qui est toujours prêt à s'embarquer dans des grandes discussions. Romain Dubessy mériterait même plus que des remerciements, pour sa contribution significative à l'expérience, toutes les idées qu'il a apportées, son efficacité...et pour ses blagues ! Enfin un grand merci aussi à Aurélien Perrin, pour sa contribution à l'expérience et pour les nombreuses conversations à table, toujours enrichissantes, pour son ouverture d'esprit, sa bienveillance et son savoir écouter. Je souhaite enfin une très bonne année à Avinash, nouveau arrivé en tant que post-doctorant dans l'équipe.

Ces résultats ont été également le produit de la collaboration fructueuse de notre équipe avec Maxim Olshanii et Barry Garraway, que je souhaite ici remercier.

Au delà des membres l'équipe, je tiens à exprimer ma gratitude à tous les membres du laboratoire, aux techniciens, en particulier à Fabrice Wiotte, avec qui j'ai le plus

eu occasion d'interagir, pour sa disponibilité et ses compétences en électronique, au personnel administratif, Solen Guezennec, Maryse Medina et Carole Grangier, dont le soutien a été indispensable, et au directeur Olivier Gorceix pour son implication. Je souhaite également remercier les personnes que j'ai pu côtoyer conférences, séminaires et pots, Bruno, Franck, Paolo et les autres doctorants et permanents.

Enfin je tiens à remercier ma famille, ma sœur Tullia et mon frère Guido, et tous mes amis. À Giulia, pour ces cinq années de soutien et sorties, à Rita pour ses bons plans et pour nous avoir appris la couture, à Joseba, le bon-vivant, à qui je souhaite bonne chance pour demain, à l'esprit libre et à la trompette de Lolli et Dudo, à Roberto et Annasilvia qui me font sentir à la maison, à Louise pour les sorties culturelles, à Marco qui fait une super bonne (et grasse) cuisine, au coloc Mattia pour ne pas encore avoir tué l'ortie géante qui pousse dans la salle à manger, et à tous ceux qui sont partis de Paris avant moi, Nico, Marzia, Fede, Martino, Vito, Valerio, Giulio e Silvia. Merci également aux amis du M2, ceux de La Sapienza, et ceux de toujours, Nicola, Enrica, et *Rosa and her sisters* en particulier, pour toutes ces années d'écoute et de partage ! Enfin merci à Fred, pour tous les jours qu'on a passé ensemble, et pour son soutien ces dernières semaines !

# Introduction

Les gaz quantiques constituent un domaine de la physique qui a connu un important développement ces vingt dernières années, à partir du moment où les condensats de Bose-Einstein ont été observés pour la première fois, en 1995 [1, 2].

Le paramètre pertinent pour donner une définition de gaz quantique est la longueur d'onde de de Broglie  $\lambda_T$ , proportionnelle à  $T^{-1/2}$ . Les premiers effets quantiques apparaissent lorsque  $\lambda_T$  devient plus grande que la portée des interactions  $r_0$ , tout en restant petite par rapport à la distance interatomique  $n^{-1/3}$ . Les collisions entre atomes doivent être traitées d'un point de vue quantique et des effets liés à l'indiscernabilité des particules commencent à apparaître. La situation où  $\lambda_T$  devient beaucoup plus grande que  $n^{-1/3}$  avait été considérée déjà en 1924 par Einstein. En élargissant aux atomes la manière de compter les états microscopiques qui correspondent à un état macroscopique donné, introduite par Bose dans le cas des photons, il prédit qu'en dessous d'une certaine température critique  $T_c$  un nombre macroscopique d'atomes occupent l'état fondamental du récipient qui les contient. Le calcul d'Einstein montra que la condition  $T < T_c$  est équivalente à  $\lambda_T > n^{-1/3}$ .

Le travail d'Einstein fut invoqué en 1937 par London [3] pour interpréter la transition de phase de l'hélium liquide vers l'état superfluide, en dessous de 2.17 K. Il remarqua que cette température est très proche de la température critique de condensation d'un gaz parfait de même densité, ce qui suggéra que les deux phénomènes sont liés.

Le développement des techniques de refroidissement laser, en premier sur des ions [4, 5], plus tard sur des atomes neutres [6], qui s'est fait en parallèle avec le développement des techniques de piégeage magnétique [7], puis optique [8], ont abouti à la réalisation du piège magnéto-optique [9]. Cela a valu le prix Nobel de physique en 1997 à Claude Cohen Tannoudji, Steven Chu et William D. Phillips et a joué un rôle décisif dans la quête de la condensation, qui a été observée pour la première fois dans des systèmes gazeux en 1995 [1, 2]. Le prix Nobel pour la réalisation des premiers condensats de Bose-Einstein a été remis en 2001 à W. Ketterle, E. Cornell et C. Wieman.

À partir de ce moment, le domaine des atomes froids a connu un important développement. Dans les années qui ont suivi ont été étudiés les propriétés statiques et dynamiques, leur degré de cohérence et l'importance des interactions a été mise en évi-

dence [10]. L'utilisation de potentiels de piégeage modulés spatialement et contrôlables a permis d'explorer des modèles très variés. Par exemple les réseaux optiques [11], créés par des ondes stationnaires formées avec des faisceaux très désaccordés selon une ou plusieurs direction de l'espace, qui contraignent les atomes à se répartir de façon périodique, comme les électrons dans un solide, ont permis la réalisation expérimentale d'un modèle fondamental dans la physique de l'état solide : le hamiltonien de Hubbard [12]. Cette correspondance entre les atomes dans un potentiel optique et les électrons dans un solide représente la réalisation du concept de *simulateur quantique*, introduit par Feynman en 1982 [13]. Un simulateur quantique est un système simple qui réalise un hamiltonien très difficile à calculer, et qui fournit les grandeurs d'intérêt à travers une simple mesure, permettant ainsi de mieux comprendre des phénomènes de physique à  $N$  corps, comme par exemple la supraconductivité à haute température, à travers l'étude de la superfluidité, ou l'effet Hall quantique fractionnaire. Il est également possible de réaliser l'analogie d'un SQUID [14, 15, 16] (*Superconducting QUantum Interference Device*. Dans la physique de l'état solide, il s'agit d'un magnétomètre utilisé pour mesurer des champs magnétiques très faibles, constitué de deux jonctions Josephson en parallèle dans une boucle supraconductrice).

Dans l'étude des condensats gazeux un problème important concerne la prise en compte des interactions entre particules. Les systèmes dilués sont naturellement faiblement interagissant, et cela se prête bien à une description de champ moyen. Avec une approche variationnelle il est possible de trouver la fonction d'onde qui approxime le mieux l'état fondamental de  $N$  atomes comme produit de  $N$  fonctions d'onde identiques à une particule. Chacune de ces fonctions d'onde obéit à une équation de type Schrödinger, appelée équation de Gross-Pitaevskii, décrivant l'évolution de chaque atome dans le champ moyen créé par les  $N - 1$  autres atomes. Cette équation permet de décrire de nombreuses propriétés du condensat et prend une forme simple dans la limite de Thomas-Fermi.

Les premières expériences avec des condensats se sont faites dans le cadre de l'approximation de champ moyen et ont eu pour objectif la démonstration de la nature ondulatoire du condensat, à travers des expériences d'interférence [17], et de la cohérence à longue portée [18], qui a mené à la réalisation d'un laser à atomes [19, 20, 21]. La formulation dépendant du temps de l'équation de Gross-Pitaevskii peut se réécrire sous la forme d'équations hydrodynamiques pour un superfluide. Cela permet de décrire les excitations élémentaires sous la forme de modes normaux de vibration, dont l'énergie varie de manière continue. Les premières études sur des modes collectifs ont commencé en 1996 dans les équipes de Cornell [22] et Ketterle [23], où ils ont mesuré les oscillations de taille d'un condensat en forme de disque et de cigare respectivement, obtenant des résultats cohérents avec les prédictions hydrodynamiques des superfluides. Plus tard l'équipe de Ketterle a montré une différence de la réponse aux excitations collectives d'un gaz thermique par rapport à un condensat [24]. L'observation du mode ciseaux a permis de mettre en évidence le caractère superfluide d'un condensat tridimensionnel [25, 26].

Pour aller au-delà de la description de l'état fondamental, la méthode de Bogoliubov fournit une description plus élaborée pour un gaz d'atomes en interactions faibles. Elle

permet de trouver l'état fondamental et les premiers états excités. L'énergie de ces excitations est quantifiée et la connaissance de leur spectre permet de comprendre par exemple le comportement superfluide du gaz. En effet le spectre peut être tel qu'une perturbation externe qui se déplace dans le gaz ne peut pas créer une excitation élémentaire, parce que les conditions de conservation de l'énergie et de l'impulsion ne sont pas satisfaites. L'impossibilité d'un tel transfert d'excitation définit le critère de Landau et explique des propriétés de superfluidité. Un premier exemple qui illustre cette propriété est l'absence de chauffage lorsque une impureté mobile traverse un gaz homogène avec une vitesse inférieure à la vitesse du son. Aucun frottement n'est présent entre le défaut et le fluide : ce dernier a une viscosité nulle. Un autre exemple peut être donné en considérant un condensat dans un récipient en rotation avec une vitesse angulaire  $\Omega$ . Si  $\Omega$  est inférieure à une certaine vitesse critique  $\Omega_c$  aucune excitation élémentaire ne peut être créée par les parois du récipient. Le condensat reste au repos et aucun moment cinétique ne lui est communiqué. Le caractère superfluide d'un condensat a été prouvé en dimension trois à travers l'existence d'une vitesse critique [27] et à travers l'observation de vortex quantifiés [28, 29], puis de leur arrangement dans un réseau d'Abrikosov [30].

Pour étudier la superfluidité d'un gaz quantique une géométrie « naturelle » est la géométrie annulaire. Comme dans un vortex la densité s'annule au centre et en parcourant l'anneau le moment cinétique de la fonction d'onde est quantifiée en unités de  $\hbar$  sur chaque tour. Le supercourant qui en résulte a été observé dans des supraconducteurs [31], dans l'hélium liquide [32, 33], et dans des gaz ultrafroids [34, 35, 36]. Sa métastabilité et les effets de la dissipation ont été étudiés par le groupe de Hadzibabic [36] et de Campbell [37]. Les supercourants dans un condensat peuvent être créés de manière déterministe en faisant tourner un défaut [16] ou en communiquant du moment cinétique aux atomes à l'aide d'un laser [34, 36, 38]. Dans une expérience récente [39, 40] la charge et la direction d'un supercourant ont été mesurées par interférence entre l'anneau et un disque central de référence. Un tel système pourrait être utilisé pour réaliser un gyromètre [38] et l'idéal serait de pouvoir ajuster le rayon de l'anneau [41, 42]. En effet un anneau de grand diamètre [43, 44, 45] est souhaitable pour mener des expériences de mesure interférométriques de rotation [46], la sensibilité de l'interféromètre étant proportionnelle à son aire. Un anneau de petit diamètre est plus adapté à l'observation de vortex de charge multiple [34] et facilite le maintien de la cohérence tout autour.

L'utilisation de potentiels de piégeage qui compriment très fortement le gaz dans une ou plusieurs directions ( $i, j$ ) permet d'explorer la physique des dimensions réduites. Les degrés de liberté  $i$  (et  $j$ ) sont alors gelés et la fonction d'onde du condensat s'écrit comme le produit de l'état fondamental selon la direction  $i$  (et  $j$ ) par une fonction d'onde Thomas-Fermi dans la ou les autres directions, avec un paramètre d'interaction  $g$  renormalisé.

À trois dimensions la superfluidité et la condensation de Bose-Einstein sont strictement liées, mais cela n'est pas le cas en dimensions restreintes. En effet, *stricto sensu*, la condensation de Bose-Einstein n'apparaît pas en dimension 1 ou 2, dans un système homogène et à la limite thermodynamique. En revanche, V. Bagnato et

D. Kleppner ont montré en 1991 [47] que l'on retrouve le phénomène de condensation si les atomes sont confinés dans un piège harmonique. Cependant, la physique est notablement différente en dimensions restreintes. Par exemple la présence d'interactions dans un système bidimensionnel fait apparaître une transition vers l'état superfluide, même en l'absence de condensation. La théorie de cette transition a été développée par Kosterlitz et Thouless [48], qui ont reçu cette année 2016 le prix Nobel de physique, et Berezinskii [49]. Les premiers systèmes possédant une fraction superfluide non nulle qui ont été étudiés sont les films d'hélium [50]. En 1978 Rudnick [51] donna une première estimation du saut de la densité superfluide à la transition BKT, suivie d'une mesure sur un système de films d'hélium 2D adsorbés sur un substrat plastique oscillant réalisée par Bishop et Reppy [52]. Dans les gaz froids la première observation expérimentale a été faite par le groupe de Dalibard en 2006 [53]. En faisant interférer deux nuages quasi-2D ils ont montré que la prolifération de vortex libres et l'extinction d'ordre à quasi-longue portée apparaissent au-dessus d'une même température critique. Des mesures de la cohérence autour de la transition BKT ont été rapportées par plusieurs équipes, par interférence [53, 54, 55] et après temps de vol [56]. Une observation de la superfluidité en termes de résistance à la mise en mouvement a été rapportée en 2012 par l'équipe de J. Dalibard en faisant tourner un défaut localisé dans le nuage [57].

Ce manuscrit porte essentiellement sur l'étude des modes collectifs dans un gaz de bosons en dimension deux et sur la réalisation d'un montage pour piéger les atomes dans une géométrie annulaire. Une étude des modes collectifs, avait déjà été effectuée dans le cadre la thèse de K. Merloti, soutenue en 2013 [58], mais nous introduisons ici une nouvelle méthode d'analyse, appelée *Principal Component Analysis*. Ensuite je me focaliserai sur un mode propre en particulier, le mode ciseaux, déjà utilisé auparavant pour sonder le caractère superfluide d'un gaz en dimension trois [25, 59, 26]. En effet la réponse du gaz à une excitation de type ciseau change suivant la nature du gaz, et un changement de la fréquence de ce mode peut être utilisé pour sonder la transition de la phase normale à la phase superfluide. L'étude des mécanismes de mise en place et dissipation d'un supercourant dans un anneau est l'un des objectifs principaux de notre expérience. Pour cela la réalisation d'un piège en anneau représente l'autre partie de mon travail de thèse.

Le plan de ce manuscrit s'articule de la manière suivante.

- Dans le premier chapitre j'introduis les outils théoriques nécessaires pour la compréhension des travaux de cette thèse. Je traite la condensation de Bose-Einstein d'un gaz confiné en dimensions deux, suivie de la description en champ moyen du système dilué en présence d'interactions par l'équation de Gross-Pitaevskii. Cette description est reliée aux équations hydrodynamiques d'un superfluide et la notion de vortex est introduite. Je traite ensuite du régime quasi-2D d'un gaz très confiné dans une direction de l'espace et de la transition BKT qui peut se produire dans ce gaz vers le régime superfluide. Après avoir caractérisé cette transition, je discute de la possibilité de la détecter par l'étude des modes collectifs dans un gaz dégénéré en dimension deux.
- Le chapitre 2 contient une description générale du montage expérimental. Je présente d'abord les sources laser, ensuite les différents éléments à partir de la

source d'atomes, un piège magnéto-optique 2D, puis l'enceinte octogonale, où l'on produit le piège magnéto-optique 3D et la cellule science, où la condensation a lieu. Enfin, je parle des deux systèmes d'imagerie par absorption des atomes qui permettent d'observer le nuage *in situ* ou après temps de vol.

- Le chapitre 3 est dédié à l'analyse des modes collectifs du gaz à travers une décomposition en composantes principales. Nous avons en effet montré que ces dernières coïncident avec les modes de Bogoliubov.
- Le chapitre 4 est consacré à une analyse locale du mode ciseaux, utilisé pour sonder la transition vers l'état superfluide dans le gaz.
- Le chapitre 5 est consacré à la réalisation d'un piège en anneau, obtenu en superposant au piège précédemment décrit un potentiel optique en forme de double nappe.

Une conclusion générale et une discussion des perspectives clôturent le manuscrit.



# Chapitre 1

## Gaz de Bose en dimension deux

Le but de ce chapitre est de rappeler les notions théoriques nécessaires pour comprendre les enjeux de nos travaux, sans prétention d'exhaustivité. Un panorama des connaissances actuelles de la physique des gaz bidimensionnels (2D) est donné dans la revue [60], et le cours de J. Dalibard tenu au collège de France en 2016 [61] est consacré entièrement à l'étude des propriétés de cohérence et de superfluidité des condensats de Bose-Einstein.

Les propriétés d'un système quantique dépendent fortement de sa dimensionnalité. Par exemple, dans un gaz idéal uniforme à la limite thermodynamique, la condensation de Bose-Einstein (BEC) a lieu à température non nulle pour un gaz tridimensionnel, tandis qu'en deux dimensions il n'y a pas de transition de phase BEC stricto sensu pour un gaz homogène. Néanmoins, la taille finie du système peut faire apparaître la condensation à  $T \neq 0$  aussi dans des systèmes bidimensionnels. En incluant les interactions entre atomes, à 3D elles modifient quelques prédictions quantitatives de la température de transition BEC, mais la physique reste essentiellement la même, tandis qu'en 2D elles rendent possible une transition de phase vers un état superfluide.

Une autre propriété qui dépend de la dimensionnalité du système est la superfluidité. En 3D elle se manifeste en parallèle avec la condensation, alors qu'à 2D une transition de phase, autre que la condensation, caractérise le passage entre phase normale et phase superfluide du gaz : la transition de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT). Les vortex jouent un rôle essentiel dans cette physique : en phase superfluide ils existent seulement sous forme de paires, au-dessus de la température de transition les paires se brisent et la prolifération de vortex libres détruit le caractère superfluide du système.

Tandis que la condensation implique l'apparition d'une cohérence de phase sur tout le système, et peut donc être mise en évidence par des expériences d'interférence, la superfluidité apparaît sans besoin qu'il y ait cohérence de phase sur tout le système et elle ne peut pas être définie avec un seul concept, via une seule équation. Pour cela la preuve du caractère superfluide d'un gaz n'est pas immédiate. Elle est en effet caractérisée par un ensemble de propriétés, comme l'absence de chauffage si une impureté mobile traverse le gaz, l'existence de courants permanents métastables ou la rigidité du fluide vis-à-vis de la mise en rotation, pour une fréquence de rotation suffisamment

petite. Ces deux dernières propriétés suggèrent que la géométrie annulaire est naturelle pour observer la superfluidité.

Ce premier chapitre est organisé en cinq sections. Dans la première 1.1 je rappelle les spécificités de la condensation de Bose-Einstein d'un gaz à 2D. En particulier, pour un gaz idéal infini à trois dimensions la condensation a lieu si le nombre de particules pouvant occuper les états excités est borné ; si la taille du système est finie, la saturation des niveaux excités peut ne pas survivre à la limite thermodynamique, et ce critère n'est plus pertinent. Un critère plus général pour la condensation, valable pour des gaz piégés et en présence d'interactions, est alors celui de Penrose et Onsager, également introduit dans cette première section. Pour avoir une vision plus réaliste du système je prends en compte ensuite le rôle des interactions, en particulier des interactions faibles qui correspondent au cas de notre expérience. Dans 1.2 je discute le régime quasi-2D, dans lequel le gaz est considéré comme bidimensionnel du point de vue de la statistique, mais tridimensionnel en ce qui concerne la dynamique des collisions entre atomes. Expérimentalement on atteint ce régime grâce à un potentiel de piégeage très confinant suivant une direction (la direction verticale  $z$  dans notre cas). Ensuite j'introduis au paragraphe 1.3 l'équation de Gross-Pitaevskii dans sa formulation hydrodynamique, particulièrement adaptée à l'étude de la dynamique superfluide, et la méthode de Bogoliubov, qui permet de calculer le spectre d'excitation du superfluide. La transition de phase normale-superfluide et sa mise en évidence du point de vue expérimental sont traitées dans 1.5. Le dernier paragraphe 1.6 est consacré au cas d'un gaz piégé en anneau et mis en rotation : les spécificités liées à la symétrie et deux critères de superfluidité sont introduits.

## 1.1 La condensation de Bose-Einstein

### 1.1.1 Critères pour la condensation

#### La saturation des états excités

On considère un gaz parfait, c'est à dire une assemblée d'atomes sans interactions, à l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ . On décrit la statistique des états dans l'ensemble grand canonique. Le potentiel chimique est  $\mu$  et le taux d'occupation moyen d'un état  $j$  d'énergie  $E_j$  est donné par la statistique de Bose-Einstein :

$$N_j = \frac{1}{e^{(E_j - \mu)/k_B T} - 1}. \quad (1.1)$$

Le nombre moyen total d'atomes est

$$N = \sum_{j=0}^{\infty} N_j. \quad (1.2)$$

Pour que tous les  $N_j$  soient définis et positifs, le potentiel chimique  $\mu$  doit être inférieur à l'énergie de l'état fondamental, qu'on peut supposer nulle,

$$\mu < E_0 = 0. \quad (1.3)$$

On peut décomposer (1.2) en deux contributions, la première étant celle de l'état fondamental et la seconde celle des états excités :

$$N = N_0 + N_{exc}, \quad N_0 = \frac{Z}{1 - Z}, \quad N_{exc} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Z^j}{e^{E_j/k_B T} - Z}, \quad (1.4)$$

où on a introduit la fugacité

$$Z = e^{\mu/k_B T}. \quad (1.5)$$

Du fait que  $\mu < 0$ , la fugacité est un nombre compris entre 0 et 1 strictement, ce qui permet de donner une borne supérieure à la population des états excités :

$$N_{exc} < N_{exc}^{(max)}(T) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{e^{E_j/k_B T} - 1}. \quad (1.6)$$

Un des arguments pour la condensation de Bose-Einstein dans un gaz parfait est la saturation des états excités à une particule à température non nulle. Pour une température donnée, si

$$N_{exc}^{(max)}(T) \quad \text{est fini}$$

le nombre de bosons occupant l'ensemble des états excités est borné. Toutes les particules excédant ce nombre  $N - N_{exc}^{(max)}(T)$  vont alors s'accumuler dans l'état fondamental de l'hamiltonien à une particule et conduisent à un état macroscopiquement peuplé et donc cohérent [62, 63]. Néanmoins, dans les expériences d'atomes froids les conditions ne correspondent quasiment jamais à celles d'un gaz idéal et les effets de taille finie ou les interactions jouent un rôle non négligeable. Ainsi la condensation est rendue possible même en l'absence de saturation des états excités. La condition que je viens de mentionner est donc une condition suffisante, mais pas nécessaire, pour cela Penrose et Onsager en 1956 ont introduit un critère autre que compter les atomes dans l'état fondamental.

### Le critère de Penrose et Onsager

La longueur de corrélation  $l_c$  permet de caractériser le comportement d'un ensemble d'atomes. Elle est calculée à partir de l'échelle de longueur typique sur laquelle la fonction de corrélation à un corps  $g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  décroît, et si on considère la fonction d'onde d'un atome à deux points différents  $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , cette longueur distingue les distances pour lesquelles les valeurs de la fonction d'onde sont corrélées ( $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < l_c$ ) et celles pour lesquelles il n'y a plus de corrélation ( $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > l_c$ ).

Pour un gaz en interaction Penrose et Onsager [64] formulèrent le critère qui associe la condensation de Bose-Einstein à l'existence d'une valeur propre macroscopique  $\Pi_0$ , appelée fraction condensée, valeur propre de l'opérateur densité à une particule  $\rho_1$  :

$$g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \mathbf{r}' | \rho_1 | \mathbf{r} \rangle. \quad (1.7)$$

On peut montrer que le critère de condensation du paragraphe précédent (1.6) est équivalent, dans une boîte 3D de taille  $L$  avec des conditions aux limites périodiques,

à une limite finie non nulle  $\Pi_0/L^3$  pour  $g_1(\mathbf{r},\mathbf{r}')$  lorsque  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ , traduisant un ordre à longue portée (LRO, pour l'anglais « long range order »). La fonction  $g_1(\mathbf{r},\mathbf{r}')$  représente la caractérisation la plus directe de l'ordre en phase qui peut apparaître entre deux points du fluide. Pour le gaz homogène elle ne dépend que de la distance  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  [61]. En pratique, dans la limite  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ , on peut rencontrer trois types de situations :

- $g_1(\mathbf{r},\mathbf{r}')$  tend vers une limite finie non nulle : on est en présence d'un condensat. Cela se produit pour un gaz de Bose à 3D, et si les atomes sont en interaction répulsive le gaz est aussi superfluide.
- $g_1(\mathbf{r},\mathbf{r}')$  tend vers zéro mais avec une décroissance lente (algébrique) ; il n'y a pas d'échelle de longueur associée à cette décroissance. On parle de quasi-condensat avec un quasi-ordre à longue portée. Cela se produit par exemple dans un gaz de Bose homogène à 2D et conduit également à un état superfluide.
- $g_1(\mathbf{r},\mathbf{r}')$  tend vers zéro avec une décroissance rapide (exponentielle ou gaussienne), qui peut être caractérisée par une longueur de corrélation. On est en présence d'un fluide normal, non superfluide et non condensé.

Je vais à présent présenter la situation attendue pour un gaz bidimensionnel idéal, avant d'ajouter les interactions.

### 1.1.2 Gaz parfait bidimensionnel

#### Gaz homogène à la limite thermodynamique

Un gaz de Bose 2D homogène, c'est à dire non piégé ou piégé dans une boîte dont on ferait tendre la taille vers l'infini, contrairement à son équivalent 3D, ne subit pas de transition de condensation de Bose-Einstein pour  $T \neq 0$ . Nous pouvons illustrer cette propriété en considérant  $N$  particules dans une boîte bidimensionnelle de côté  $L$ , à l'intérieur de laquelle le potentiel est nul. À la limite semi-classique ( $k_B T \gg \frac{\hbar^2}{mL^2}$ ) on peut remplacer la somme discrète sur les états (1.4) par un intégrale

$$N_{exc} = \int_0^\infty \frac{\mathcal{D}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} d\epsilon. \quad (1.8)$$

La densité d'états est constante  $\mathcal{D}(\epsilon) = mL^2/2\pi\hbar^2$ , d'où

$$N_{exc} = \frac{L^2}{\lambda_T^2} \ln(1 - e^{\beta\mu}), \quad (1.9)$$

où on a introduit la longueur d'onde de de Broglie thermique  $\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi mk_B T}}$ ,  $m$  étant la masse de l'atome. À la limite thermodynamique ( $N, L \rightarrow \infty$ , avec  $n = \frac{N}{L^2}$  constant)  $N_{exc}$  peut devenir arbitrairement grand : il n'y a pas de saturation des états excités et la condensation ne peut pas se produire. On peut aussi montrer que la densité dans l'espace des phases vaut

$$\mathcal{D} = n\lambda_T^2 = -\ln(1 - e^{\beta\mu}), \quad (1.10)$$

qui représente l'équation d'état du gaz. On voit également que  $\mathcal{D}$  diverge lorsque  $\mu \rightarrow 0$ . Le même résultat se retrouve, selon le critère de Penrose et Onsager, en regardant la décroissance de la fonction de corrélation à un corps. Pour un gaz 2D idéal et infini  $g_1(r,0) = g_1(r)$  décroît exponentiellement  $g_1(r) \sim e^{-r/l_c}$ , avec la longueur de corrélation qui vaut  $l_c = \frac{\lambda_T}{\sqrt{4\pi}} e^{\mathcal{D}/2}$  [60]. La décroissance rapide de  $g_1(r)$  se traduit donc par l'absence d'un ordre à longue portée à température non nulle et, en accord avec le théorème de Mermin-Wagner [65], aucun état ne peut être macroscopiquement peuplé.

### Système fini

Dans la plupart des expériences, et en particulier dans la nôtre, le gaz n'est pas homogène mais confiné dans un piège. Les résultats précédents sont alors modifiés. En effet, bien qu'un système infini ne présente pas de phénomène de condensation, dans le cas d'un gaz piégé les effets de taille finie affectent les propriétés du système en rendant la condensation possible.

— Boîte de taille  $L$ .

Pour un système homogène dans une boîte de taille finie  $L$ , on a vu que la longueur d'onde de corrélation  $l_c$  croît exponentiellement avec  $\mathcal{D}$  dans le régime dégénéré. Il existe ainsi une température non nulle  $T$  telle que les corrélations de phase entre deux points quelconques du système sont non nulles : pour cette température il y aura corrélation de phase entre deux points et, lorsque  $l_c \sim L$ , la condensation se produit.

— Piège harmonique.

Le potentiel de piégeage le plus utilisé dans les expériences d'atomes froids est le potentiel harmonique. Dans ce type de piège la condensation se produit aussi à la limite thermodynamique.

Si on considère un potentiel harmonique, isotrope de pulsation  $\omega$

$$V_{trap}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2, \quad (1.11)$$

la densité d'états est  $\mathcal{D}(\epsilon) = \epsilon/(\hbar\omega)^2$  et l'équation (1.8) montre que les niveaux excités sont saturés à la valeur

$$N_{exc}^{max} = \frac{\pi^2}{6} \left( \frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^2. \quad (1.12)$$

À  $N$  fixé, la condensation se produit à la température

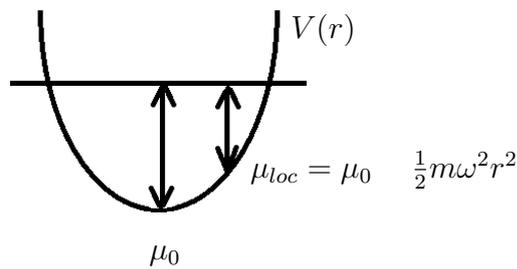
$$k_B T_c = \hbar\omega \frac{\sqrt{6N}}{\pi}. \quad (1.13)$$

La saturation des niveaux excités reste valable à la limite thermodynamique ( $N \rightarrow \infty$ ,  $\omega \rightarrow 0$ , avec  $N\omega^2 = \text{constant}$ ), ce qui permet l'accumulation macroscopique des atomes dans l'état fondamental : le gaz de Bose idéal dans un piège harmonique subit la condensation de Bose-Einstein [47]. Il est également possible d'établir l'équation d'état pour le gaz en appliquant l'approximation de la densité locale (abrégé LDA, pour « local

density approximation » ). Cela se fait sous l'hypothèse que la variation du potentiel de piégeage est suffisamment lente pour pouvoir le considérer constant sur une région où les particules se trouvent à l'équilibre thermodynamique. L'état du fluide en un point  $\mathbf{r}$  est alors celui d'un fluide homogène à la même température, mais avec un potentiel chimique réduit

$$\mu_{loc} = \mu_0 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (1.14)$$

appelé potentiel chimique local, comme illustré dans la figure 1.1. Notons que, du point



**Figure 1.1** — Illustration du principe de la LDA. Le gaz en un point  $\mathbf{r}$  du piège peut être traité comme homogène, à condition d'utiliser un potentiel chimique réduit obtenu par différence entre le potentiel chimique au centre et la valeur du potentiel en ce point.

*Principle of the Local Density Approximation (LDA). The inhomogeneous gas at a given point  $\mathbf{r}$  can be treated as an homogeneous gas having a reduced chemical potential, obtained as the difference between the chemical potential at the trap center and the value of the trapping potential at that point :  $\mu_{loc} = \mu_0 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ .*

de vue expérimental, un avantage de ce type de piégeage est que, contrairement au cas homogène, il permet d'explorer dans une même réalisation différentes densités dans l'espace des phases (étant donné que le potentiel chimique varie de  $\mu_0$  au centre à  $-\infty$  dans les ailes). À la limite thermodynamique ( $N \rightarrow \infty$ ,  $\omega \rightarrow 0$ , avec  $N\omega^2$  constant) la forme de l'équation d'état est la même que pour un système homogène :

$$\mathcal{D}(r) = \ln(1 + e^{\beta\mu_0 - \beta\frac{1}{2}m\omega^2 r^2}). \quad (1.15)$$

Notons que cette relation présente un comportement pathologique à la condensation ( $\mu_0 = 0$ ,  $r = 0$ ) : la densité dans l'espace des phases diverge au centre du piège. Contrairement au cas 3D il n'existe donc pas de critère local sur la densité pour la condensation de Bose-Einstein dans un piège harmonique [66].

On verra dans le prochain paragraphe que la prise en compte des interactions entre atomes, nécessaire pour une description plus réaliste du système, est cruciale. En effet, dans l'exemple du gaz piégé développé ci-dessus, les interactions répulsives, même faibles, vont dépléter le centre du piège et empêcher d'atteindre une densité infinie au centre.

### 1.1.3 Prise en compte des interactions

Nous avons vu au paragraphe précédent que dans un gaz idéal à la limite thermodynamique la condensation se manifeste par une accumulation macroscopique des particules dans l'état fondamental, qui correspond à l'état fondamental à  $N$  particules. Dans les expériences cette vision n'est pas correcte puisque les atomes interagissent. La prise en compte des interactions entre atomes implique que l'état à  $N$  corps est déformé, et que l'état propre à une particule ne joue plus un rôle privilégié. Le critère pertinent pour la condensation est dans ce cas celui de Penrose et Onsager.

#### Cas homogène

Pour un gaz homogène à  $T \neq 0$  en interactions répulsives, comme pour le cas idéal, l'absence de condensation reste valable [67]. En effet les fluctuations de phase empêchent l'établissement d'un ordre à longue portée à la limite thermodynamique [65], ce qui peut être vérifié par la décroissance algébrique de la fonction de corrélation à un corps  $g^{(1)}(r)$ .

#### Cas piégé

À la différence du cas homogène, un gaz piégé à très basse température peut exhiber une cohérence de phase sur toute son extension. En augmentant la température on rentre dans le régime de quasi-condensat, où les fluctuations de phase dominent.

## 1.2 Réalisation expérimentale et régime quasi 2-D

Jusqu'à ce moment l'existence de la troisième dimension n'a pas été prise en compte, et j'ai traité un problème strictement bidimensionnel. Cette vision n'est pas complètement réaliste, pour cela je discuterai dans cette partie l'approximation qui est faite dans le cadre de notre expérience. La réalisation expérimentale du régime bidimensionnel repose sur un potentiel harmonique  $V_{trap}(\mathbf{r})$  très confinant suivant la direction  $z$ . À suffisamment basse température ( $k_B T \ll \hbar\omega_z$  et  $|\mu - \frac{1}{2}\hbar\omega_z| \ll \hbar\omega_z$ ) le système se trouve entièrement dans l'état fondamental suivant  $z$  et la fonction d'onde peut se factoriser en un terme en  $z$  et en un terme qui dépend des coordonnées radiales et qui contient toute la dynamique.

$$\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,y,t)\varphi_0(z), \quad (1.16)$$

où  $\varphi_0(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2l_z^2}}}{(\pi l_z^2)^{1/4}}$  est l'état fondamental de l'oscillateur harmonique, avec  $l_z = \sqrt{\hbar/m\omega_z}$ . On peut alors moyenner selon  $z$  le Hamiltonien 3D du système pour en déduire le Hamiltonien 2D. Bien que la dynamique du système ne se passe que dans le plan transverse, cette troisième direction introduit la longueur caractéristique  $l_z$ , équivalente à l'étalement spatial de l'état fondamental de la fonction d'onde dans la direction  $z$ .

### 1.2.1 Potentiel delta

À 3D, pour les systèmes et températures qui nous intéressent, les collisions entre atomes mettent en jeu principalement des collisions binaires de basse énergie (dans l'onde s). Elles peuvent être modélisées par la longueur de diffusion  $a_s$  via un potentiel de contact effectif [10]

$$V_{int}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = g_{3D} \delta_{3D}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (1.17)$$

$g_{3D}$  étant la constante d'interaction qui fait intervenir la longueur de diffusion et  $\delta_{3D}$  est la distribution de Dirac en dimension 3. La constante de couplage vaut

$$g_{3D} = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s, \quad (1.18)$$

et l'énergie d'interaction prend la forme simple :

$$E_{int} = \frac{g_{3D}}{2} \int n^2 d^3r, \quad (1.19)$$

où  $n = |\Psi_{3D}|^2$ . Au passage en 2D [68], pour connaître le caractère de la diffusion il faut comparer  $l_z$  à  $a_s$  :

- si  $l_z \ll a_s$  le problème est 2D aussi du point de vue collisionnel, en plus du point de vue dynamique (état fondamental seul peuplé selon  $z$ ). La description des collisions nécessite de traiter la théorie de la diffusion à 2D, qui est en général un problème difficile. Pour être dans ce régime il est nécessaire d'avoir un confinement très fort selon  $z$  ou de modifier la longueur de diffusion via des résonances de Feshbach [69].
- si  $l_z \gg a_s$ , on est en régime quasi-2D : le système peut-être considéré bidimensionnel d'un point de vue statistique, mais il n'y a pas de direction privilégiée pour la dynamique des collisions, qui donc reste 3D. En particulier la longueur de diffusion 3D reste la même.

Notre expérience se situe dans ce deuxième régime :  $l_z = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_z}} = 252$  nm,  $a_s \sim 5.3$  nm pour le  $^{87}\text{Rb}$  dans l'état ( $F = 1, m_F = -1$ ),  $\omega_z = 2\pi \times 1.83$  kHz.

### 1.2.2 Invariance d'échelle de l'équation d'état

L'expression (1.19) est également valable pour un gaz quasi-2D, mais dans ce cas la densité spatiale est séparable :

$$n(\mathbf{r}, z) = |\psi(\mathbf{r})|^2 |\varphi_0(z)|^2, \quad (1.20)$$

où  $\mathbf{r} = (x, y)$  est un vecteur dans le plan 2D,  $|\psi(\mathbf{r})|^2$  désigne la densité spatiale à 2D, et  $\varphi_0(z)$  est la fonction propre associée au niveau fondamental du mouvement selon  $z$  (dans notre cas l'état fondamental de l'oscillateur harmonique selon  $z$ ). On choisit la normalisation de la manière suivante :  $\int |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = N$  et  $\int |\varphi_0(z)|^2 dz = 1$ . En injectant (1.20) dans (1.19) on a donc

$$E_{int} = \frac{g_{2D}}{2} \int n^2 d^2r, \quad (1.21)$$

avec

$$g_{2D} = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s \int |\varphi_0(z)|^4 dz. \quad (1.22)$$

En posant

$$g_{2D} = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g} \quad (1.23)$$

on voit que l'amplitude du couplage est contenue dans le paramètre  $\tilde{g} = 4\pi a_s \int |\varphi_0(z)|^4 dz$  qui est une grandeur sans dimension. Dans le régime quasi-2D, les interactions n'introduisent donc pas d'échelle de longueur, contrairement au cas 3D. L'intégrale de la fonction d'onde du niveau fondamental de l'oscillateur harmonique donne  $\int |\varphi_0(z)|^4 dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l_z}$ , d'où

$$g_{2D} = \frac{g_{3D}}{\sqrt{2\pi}l_z} = \frac{\hbar^2}{m} \tilde{g} \quad (1.24)$$

où

$$\tilde{g} = \sqrt{8\pi} \frac{a_s}{l_z}. \quad (1.25)$$

Dorénavant pour alléger la notation je poserai  $g_{2D} = g$ . Dès lors que les interactions sont caractérisées par un paramètre sans dimension, la température  $T$  et le potentiel chimique  $\mu$  représentent les seules échelles d'énergie. Par conséquent, toute grandeur sans dimension décrivant le système est une fonction du rapport  $\frac{\mu}{k_B T}$ . Donc, si l'on change simultanément le potentiel chimique et la température par un même facteur, les valeurs de la densité dans l'espace des phases et de la pression réduite restent inchangées. C'est en ce sens que l'équation d'état du gaz de Bose quasi-2D est invariante par changement d'échelle. Une vérification expérimentale est montrée par exemple dans [70, 71, 69]. Il a été montré au sein de l'équipe que dans un piège harmonique la présence d'états excités peuplés suivant  $z$ , du fait des interactions, brise l'invariance d'échelle [72]. On définit aussi la longueur de cicatrisation, qui représente l'échelle de longueur caractéristique associée aux interactions, comme l'échelle de longueur typique sur laquelle la densité d'un système uniforme s'annule en présence d'une barrière infinie.

$$\xi_c = \frac{\hbar}{\sqrt{mgn}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}n}}. \quad (1.26)$$

### 1.3 Description en champ moyen du condensat

Une approche simple pour tenir compte des interactions est de décrire les forces entre les atomes par un terme de champ moyen. Cette approche, appelée « approximation de champ moyen », est valable si la distance moyenne entre les particules est grande devant la longueur de diffusion  $na_s^3 \ll 1$  (gaz dilué), ce qui assure que les particules sont très faiblement corrélées. Sous cette hypothèse la fonction d'onde décrivant le système est factorisable comme le produit de  $N$  fonctions d'onde à une particule  $\phi(i)$ . Le problème à  $N$  corps est simplifié à celui d'une particule en mouvement dans un potentiel effectif composé du potentiel externe plus un terme de champ moyen, proportionnel à la densité atomique. On considère  $N$  bosons piégés dans un potentiel  $V_{trap}(\mathbf{r})$  à l'équilibre

à température nulle. Si le gaz est idéal les atomes se trouvent dans l'état fondamental du piège  $|\phi_0\rangle$  et la fonction d'onde à  $N$  corps du condensat est

$$|\Psi\rangle = |\phi_0(1)\rangle \otimes |\phi_0(2)\rangle \dots \otimes |\phi_0(N)\rangle. \quad (1.27)$$

En présence d'interactions, modélisées par le potentiel de contact introduit précédemment, l'Hamiltonien à  $N$  corps devient

$$\mathcal{H}_N = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{p_i^2}{2m} + V_{trap}(\mathbf{r}_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (1.28)$$

où le deuxième terme tient compte des interactions à deux corps.  $\mathcal{H}_N$  n'est plus factorisable, donc l'état fondamental n'est plus le produit des états fondamentaux de l'Hamiltonien à une particule. Néanmoins, sous l'hypothèse des interactions faibles, on peut chercher par analogie au cas idéal, une solution pour la fonction d'onde à  $N$  particules du condensat sous la forme

$$|\Psi_N\rangle = |\phi(1)\rangle \otimes |\phi(2)\rangle \dots \otimes |\phi(N)\rangle, \quad (1.29)$$

où  $|\phi(i)\rangle$  est une fonction d'onde à un corps, normalisée à 1 et différente de l'état fondamental à une particule, qu'il s'agit de déterminer.

### Gaz faiblement dégénéré : approximation d'Hartree Fock

On considère en premier une faible densité dans l'espace des phases (ce qui correspond par exemple aux ailes thermiques du nuage atomique). On peut montrer [73] que la prise en compte des interactions dans cette approximation se fait en introduisant un décalage en énergie  $2gn$  et que chaque particule est solution de :

$$\left( \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{trap}(\mathbf{r}) + 2gn \right) \phi(\mathbf{r}) = E\phi(\mathbf{r}). \quad (1.30)$$

Le problème ainsi décrit correspond à celui du gaz idéal avec un potentiel effectif  $V_{eff} = V(r) + 2gn$ . On retrouve pour un gaz piégé harmoniquement l'équation d'état :

$$\mathcal{D}(r) = \ln(1 - e^{\beta(\mu - \frac{m\omega^2 r^2}{2} - 2gn(r))}). \quad (1.31)$$

où  $\mu$  peut prendre n'importe quelle valeur. Contrairement au cas idéal, les interactions répulsives empêchent d'atteindre une densité  $\mathcal{D}(r)$  infinie en  $r = 0$ , nécessaire pour atteindre une vraie condensation.

### 1.3.1 Équation de Gross-Pitaevskii stationnaire

Dans le sous espace des fonctions d'onde (1.29) l'état qui approxime au mieux l'état fondamental de  $\mathcal{H}_N$  minimise le fonctionnel défini comme :

$$E_{tot}[\phi, N] = \langle \mathcal{H}_N \rangle = \frac{\langle \Psi_N | \mathcal{H}_N | \Psi_N \rangle}{\langle \Psi_N | \Psi_N \rangle}, \quad (1.32)$$

avec la condition  $\langle \Psi_N | \Psi_N \rangle = 1$ . La méthode des multiplicateurs de Lagrange ramène ce problème à la minimisation de  $\langle \Psi_N | \mathcal{H}_N | \Psi_N \rangle - \mu \langle \Psi_N | \Psi_N \rangle$ , où  $\mu$  est le multiplicateur de Lagrange introduit pour assurer la conservation de la norme de  $\Psi_N$ . La différentiation  $\delta(\langle \Psi_N | \mathcal{H}_N | \Psi_N \rangle - \mu \langle \Psi_N | \Psi_N \rangle)$  mène à une équation similaire à l'équation de Schrödinger

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi(\mathbf{r}) + V_{trap}(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) + (N-1) \left[ \int d^3r' V(\mathbf{r}-\mathbf{r}') |\phi(\mathbf{r}')|^2 \right] \phi(\mathbf{r}) = \mu \phi(\mathbf{r}), \quad (1.33)$$

décrivant l'évolution de chaque atome dans le potentiel de piégeage et dans le champ moyen créé à sa position par les  $(N-1)$  autres atomes. Le potentiel dans l'intégrale peut être remplacé par celui de contact (1.17), et puisque  $N \gg 1$ , dans le terme d'interaction on a remplacé  $(N-1)$  par  $N$ . On aboutit ainsi à l'équation de Gross-Pitaevskii (GPE, pour l'anglais « Gross-Pitaevskii equation ») :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi(\mathbf{r}) + V_{trap}(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) + Ng |\phi(\mathbf{r})|^2 \phi(\mathbf{r}) = \mu \phi(\mathbf{r}). \quad (1.34)$$

Il s'agit d'une équation de Schrödinger non linéaire, décrivant l'évolution de la fonction d'onde du condensat dans un potentiel qui est la somme du potentiel externe plus le terme non linéaire lié au champ moyen produit par les autres  $(N-1)$  bosons. Le multiplicateur de Lagrange  $\mu$ , introduit pour assurer la conservation de la norme de la fonction d'onde  $\Psi_N$ , correspond à la variation de l'énergie totale lorsque  $N$  varie d'une unité, ce qui représente la définition du potentiel chimique [74]; à noter que  $\mu$  diffère de l'énergie totale par particule  $E/N$  d'un terme égal à l'énergie d'interaction par particule : cette différence est due au fait que l'équation de Gross-Pitaevskii est non linéaire, dans le cas sans interactions  $g = 0$  et elle se réduit en effet à l'équation de Schrödinger linéaire<sup>1</sup>. En posant  $\Phi(\mathbf{r}) = \sqrt{N} \phi(\mathbf{r})$ , l'équation (1.34) devient

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Phi(\mathbf{r}) + V_{trap}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) + g |\Phi(\mathbf{r})|^2 \Phi(\mathbf{r}) = \mu \Phi(\mathbf{r}), \quad (1.35)$$

connue sous le nom d'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire.

### Gaz fortement dégénéré : approximation de Thomas Fermi

L'équation d'état du gaz quasi-2D prend également une forme simple dans la limite des hautes densités dans l'espace des phases. Le point de départ est l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire pour la fonction d'onde macroscopique du système  $\Phi(\mathbf{r})$ . L'approximation de Thomas-Fermi consiste à négliger l'énergie cinétique dans le hamiltonien, de sorte que l'équation se simplifie sous la forme

$$|\Phi(\mathbf{r})|^2 = \frac{\mu_0 - V_{trap}(\mathbf{r})}{g}. \quad (1.36)$$

1. Bien qu'il s'agit toutes les deux de théories de champ moyen, dans Hartree Fock les interactions sont prises en compte avec le terme  $2gn$  et la valeur propre est l'énergie par particule  $E$ , tandis que dans Gross-Pitaevskii l'interaction entre atomes est décrite par le potentiel effectif et la valeur propre est le potentiel chimique  $\mu$ .

L'équation d'état s'obtient en multipliant les deux membres par  $\lambda_T^2$ . Dans le cas spécifique d'un piégeage harmonique isotrope<sup>2</sup>  $V_{trap}(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2/2$  et une densité atomique  $n(\mathbf{r}) = |\Phi(\mathbf{r})|^2$ , l'Eq. (1.36) a la forme d'une parabole inversée qui reflète la forme du potentiel externe

$$n(\mathbf{r}) = [\mu_0 - m\omega^2 r^2/2] / g, \quad (1.37)$$

qui peut se réécrire, en introduisant le rayon de Thomas-Fermi  $R_{TF} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega^2}}$  :

$$n(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{g} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_{TF}} \right)^2 \right]. \quad (1.38)$$

Un autre paramètre qu'on peut calculer analytiquement dans le régime Thomas-Fermi est le potentiel chimique, obtenu de la condition de normalisation

$$N = \int d^3r |\Phi(\mathbf{r})|^2 = \left( \frac{2\mu_{3D}}{\hbar\omega^2} \right)^2 \frac{a_{oh}}{15a_s}, \quad (1.39)$$

d'où

$$\mu_{3D} = \frac{\hbar\omega}{2} \left( \frac{15Na_s}{a_{oh}} \right)^{2/5} \propto N^{2/5}. \quad (1.40)$$

On revient enfin à l'équation d'état du gaz, donnée par

$$\mathcal{D}(r) = \lambda_T^2 n(\mathbf{r}) = \frac{2\pi}{\tilde{g}} \alpha(\mathbf{r}), \quad (1.41)$$

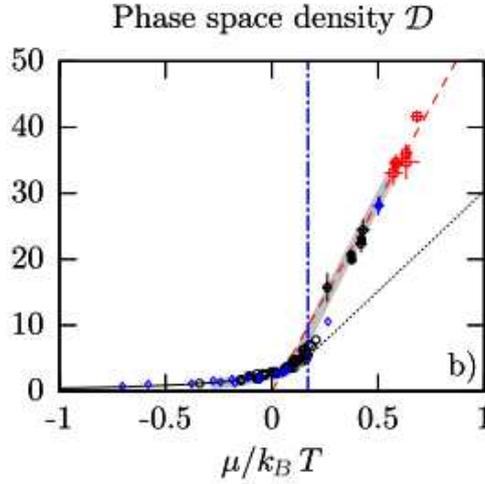
où  $\alpha(\mathbf{r}) = \alpha_0 - \frac{1}{2} \frac{m\omega^2 r^2}{k_B T}$  et  $\alpha_0 = \frac{\mu_0}{k_B T}$  ;  $\alpha(\mathbf{r})$  est appelé potentiel chimique réduit. On balaye la valeur de  $\alpha$  en se déplaçant du centre vers la périphérie du nuage. En d'autres termes, un seul échantillon expérimental contient l'équation d'état pour les valeurs de  $\alpha$  allant de  $-\infty$  à  $\alpha_0$ . Notons que l'hypothèse sous-jacente est qu'on est dans le cadre de l'approximation de densité locale, puisque en chaque point on a pris la densité locale  $n(\mathbf{r})$  et le potentiel chimique local  $\mu = \mu_0 - V_{trap}(\mathbf{r})$ . Cette approximation est valable si le potentiel  $V_{trap}(\mathbf{r})$  est suffisamment mou pour que l'échelle de distance sur laquelle varie la densité soit grande devant les échelles de longueur microscopiques du problème : typiquement la longueur de cicatrisation  $\xi_c$ , la longueur d'onde thermique  $\lambda_T$  et la portée des interactions. Pour la plupart des situations où les interactions sont bien décrites par un potentiel de contact, la LDA est donc valable.

### Régime intermédiaire : théorie de Prokof'ev et Svistunov

Le deux limites que je viens de décrire, Hartree-Fock et de Thomas-Fermi, correspondent à des théories de champ moyen, et les deux équations ne diffèrent que par le coefficient qui précède le terme d'interaction  $gn$ , qui vaut 1 dans le régime de Thomas-Fermi et 2 dans le régime Hartree-Fock. Entre ces deux régimes il n'existe pas de forme

2. Le potentiel harmonique s'écrit  $V_{trap} = \frac{1}{2} m \sum_i \omega_i^2 r_i^2$ . Pour alléger la notation il est utile de définir  $\omega_{oh} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ ,  $a_{oh} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{oh}}}$  et de prendre le cas de symétrie sphérique  $\omega = \omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega_{oh}$ .

analytique de l'équation d'état. Prokof'ev et Svistunov [75] ont proposé un calcul numérique à partir de simulations de type Monte-Carlo classique dans le cas d'interactions faibles. Cela a été vérifié expérimentalement par le groupe de Cheng Chin [69], qui a montré l'invariance d'échelle pour la densité dans l'espace des phases  $\mathcal{D}$ , et par le groupe de Dalibard [70, 76], où la mesure de l'équation d'état a fait l'objet de la thèse de T. Yefsah [77, 71] (voir la figure 1.2).



**Figure 1.2** — Figure extraite de [71] illustrant l'équation d'état pour la densité dans l'espace des phases  $\mathcal{D}$  d'un gaz de Bose 2D. La ligne noire correspond à la prédiction Hartree Fock, tandis que la ligne en tirets rouges correspond à la prédiction Thomas-Fermi.

*Figure taken from [71]. It reports a measurement of the equation of state for the phase space density  $\mathcal{D}$  of a 2D Bose gas. The Hartree-Fock prediction is plotted in black line, while the dashed red line is the Thomas-Fermi prediction.*

### 1.3.2 GPE dépendant du temps

L'équation introduite dans 1.3.1 décrit le condensat à l'équilibre. En ce qui concerne la dynamique de la fonction d'onde du condensat  $\Phi(\mathbf{r},t)$ , elle est dictée par l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps :

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \left( \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + g |\Phi(\mathbf{r},t)|^2 \right) \Phi(\mathbf{r},t), \quad (1.42)$$

Ici la fonction d'onde du condensat  $\Phi(\mathbf{r},t)$ , appelée aussi paramètre d'ordre, est normalisée au nombre d'atomes :  $\int |\Phi(\mathbf{r},t)|^2 d\mathbf{r} = N$ . Elle peut s'exprimer en fonction de la densité  $n(\mathbf{r},t)$  et d'une phase  $\theta(\mathbf{r},t)$  :

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \sqrt{n(\mathbf{r},t)} e^{i\theta(\mathbf{r},t)}. \quad (1.43)$$

En définissant la vitesse superfluide

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta(\mathbf{r}, t). \quad (1.44)$$

On montre facilement que l'équation de Gross-Pitaevskii (1.42) est équivalente aux équations couplées pour la densité  $n = n(\mathbf{r}, t)$  et la vitesse  $\mathbf{v} = v(\mathbf{r}, t)$  :

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla(V_{trap}(\mathbf{r}) + gn - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \nabla^2 \sqrt{n} + \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2) = 0, \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n \cdot \mathbf{v}) = 0, \quad (1.46)$$

appelées respectivement équation d'Euler et équation de continuité, qui révèlent la structure typique des équations dynamiques d'un superfluide à température nulle [10]. La nature irrotationnelle du fluide est la conséquence immédiate de la définition de la vitesse. Puisqu'elle est le gradient de la fonction scalaire  $\theta(\mathbf{r}, t)$ , son rotationnel est nul  $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$  sauf là où  $\theta(\mathbf{r}, t)$  est singulière. Ces zones de singularité se produisent à des endroits où le module de la fonction d'onde du condensat s'annule, et sa phase est donc indéfinie : elles sont appelées vortex. La circulation de la vitesse sur un contour fermé autour d'un vortex vaut :

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi l \frac{\hbar}{m}, \quad (1.47)$$

où l'intégrale est prise sur un contour fermé évitant les points de singularité de  $\theta(\mathbf{r}, t)$ , et  $l$  est un nombre entier appelé charge du vortex. Cela implique que la seule manière d'avoir une rotation du superfluide est par l'apparition de vortex quantifiés. Une preuve expérimentale de l'irrotationnalité de la vitesse superfluide a été obtenue dans les équipes de J. Dalibard et W. Ketterle à travers l'observation d'un réseau de vortex dans un condensat en rotation [29, 30]. On verra dans le paragraphe suivant que les vortex jouent un rôle essentiel dans la description microscopique de la transition vers l'état superfluide du gaz.

### 1.3.3 Méthode de Bogoliubov

L'approximation de Bogoliubov permet de linéariser les équations hydrodynamiques et d'obtenir le spectre d'excitation du gaz.

On considère un gaz uniforme. Le point de départ de cette méthode est la fonction d'onde macroscopique du condensat  $\Phi(\mathbf{r}, t)$ , à laquelle on ajoute des fluctuations de phase et de densité qui tiennent compte des états excités  $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0 + \Phi_{exc}$ , où  $\Phi_0 = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} e^{i\theta(\mathbf{r}, t)}$  décrit le système à  $T = 0$  (plus précisément, il décrit le comportement collectif du système, pas les particules du condensat singulièrement) et  $\Phi_{exc}$  est associé aux particules dans les états excités, non condensées. À 2D, cette approche n'est a priori pas adaptée car le passage de  $T = 0$  à  $T \neq 0$  s'accompagne de fluctuations thermiques qui détruisent l'ordre à longue portée caractérisé par  $\Phi_0$ . Néanmoins cette approche reste valable si les fluctuations de densité restent petites et l'on peut définir

un paramètre d'ordre local [78, 79]. Pour un gaz uniforme cette méthode, détaillée en [60], conduit au spectre des excitations de Bogoliubov.

$$E(k) = \hbar\omega_k^B = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2gn \right)}, \quad (1.48)$$

$E(k)$  étant l'énergie d'une excitation de vecteur d'onde  $k$ .

- À basse énergie le terme  $\sim k^2$  domine et la relation de dispersion devient linéaire  $\hbar\omega_k^B = \hbar ck$ . Les excitations correspondent à des phonons se propageant dans le condensat à la vitesse du son  $c = \sqrt{\frac{gn}{m}}$ .
- Pour  $k$  grand le terme quartique  $\sim k^4$  domine et  $\hbar\omega_k^B \sim \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + gn$  : le premier terme est l'énergie cinétique d'une particule libre, et le terme de correction  $gn$  va s'ajouter à cause de l'interaction avec les particules du condensat.

Dans cette section on a vu que dans un système uniforme les excitations sont des phonons (ondes avec une relation de dispersion linéaire). Dans la prochaine section j'analyserai le cas d'un système piégé harmoniquement, où d'autres types d'excitations sont présentes, et correspondent à des oscillations collectives du gaz.

## 1.4 Modes collectifs

Avec une approche similaire à celle de Bogoliubov pour linéariser les équations hydrodynamiques on peut aussi décrire le mouvement des oscillations de petite amplitude en présence d'un potentiel de piégeage (modes propres d'oscillation). L'étude de ces modes permet de caractériser quelques propriétés du gaz, comme par exemple la superfluidité d'un gaz de Bose [59, 80] ou de Fermi [81, 82], où la dimensionnalité du système [72, 83]. Dans le chapitre 3 je décrirai un nouvel outil pour l'analyse de la dynamique du gaz, implementé pendant ma thèse. Il s'agit d'une technique d'analyse d'images déjà bien connue dans d'autres domaines, appelée « Principal Component Analysis » [84] (abrégée PCA), qui permet d'obtenir le spectre d'excitation de Bogoliubov du gaz.

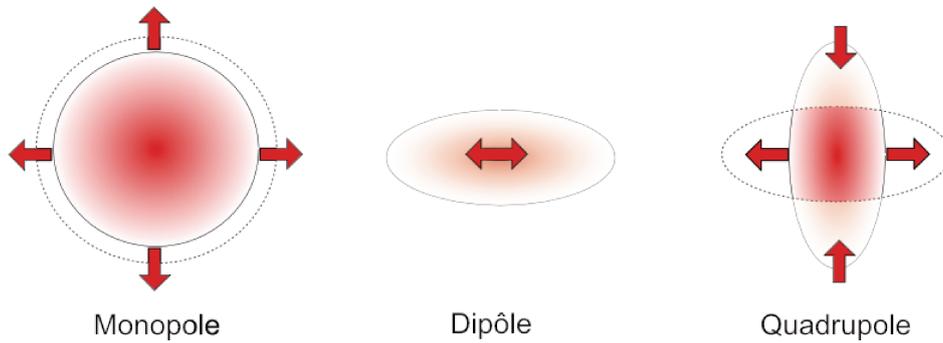
### 1.4.1 Piège isotrope et modes collectifs quantifiés

Je considère d'abord l'exemple d'un confinement harmonique isotrope à 3D,  $V_{trap}(\mathbf{r}) = m\omega_r^2 r^2/2$ , développé par S. Stringari en [85], sous l'hypothèse que le condensat se trouve initialement dans le régime de Thomas Fermi, à température nulle et en présence d'interactions répulsives. La loi de dispersion des modes propres de basse énergie obtenue est de la forme :

$$\omega(n,l) = \omega_r(2n^2 + 2nl + 3n + l)^{1/2}. \quad (1.49)$$

Les nombres quantiques  $n$  et  $l$  désignent respectivement le nombre quantique radial et le moment cinétique orbital de l'excitation. Pour un gaz idéal la loi de dispersion se réduit, comme attendu, au spectre discret de l'oscillateur harmonique  $\omega(n,l) = \omega_r(2n + l)$ . Différents couples de  $(n,l)$  décrivent chaque mode propre, par exemple (Figure 1.3) :

- le mode monopole  $n = 1, l = 0$  est un mode de densité. Il consiste en une oscillation en phase du rayon du nuage (fig. 1.3, à gauche), et est appelé usuellement le « mode de respiration » ;
- le mode dipolaire  $n = 0, l = 1$  est un mode d'ensemble. Il consiste en une oscillation du centre de masse à la fréquence du piège (fig. 1.3, au centre) ;
- le mode quadrupolaire  $n = 0, l = 2$  est un mode de surface. Il consiste en une oscillation en opposition de phase du rayon du nuage (fig. 1.3, à droite).



**Figure 1.3** — Quelques exemples de modes propres

*Some examples of collective modes.*

### 1.4.2 Piège à symétrie cylindrique

La symétrie cylindrique est l'une des symétries les plus utilisées dans les expériences parce qu'elle permet, en confinant très fortement suivant une ou deux directions, de se ramener au cas d'un piège bidimensionnel ou en forme de cigare. Le cas de ce potentiel anisotrope a été traité en [86] et il est de la forme :

$$V_{trap}(\mathbf{r}, z) = \frac{m}{2}\omega_r^2 r^2 + \frac{m}{2}\omega_z^2 z^2, \quad (1.50)$$

où  $\mathbf{r}$  ici est dans le plan  $(x, y)$  ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ). En particulier dans le régime quasi-2D, où les conditions  $\hbar\omega_z \gg \mu$  et  $\frac{1}{2}\hbar\omega_z \gg \hbar\omega_r$  sont satisfaites pour l'équation de Gross-Pitaevskii, la loi de dispersion hydrodynamique est :

$$\omega^2(n, m) = \omega_r^2(2n^2 + 2nm + n + m). \quad (1.51)$$

où le nombre quantique  $m$  est la projection selon  $z$  du moment cinétique  $l$  en unités de  $\hbar$ . Dans un piège à symétrie cylindrique la composante du moment angulaire le long de l'axe de symétrie est une quantité conservée : si le condensat est mis en rotation avec une certaine vitesse angulaire autour de cet axe, il tournera à l'infini.

Je présenterai dans la section 4.2 le cas où une légère anisotropie du piège brise la symétrie cylindrique, afin d'introduire le mode ciseaux, qui sera le sujet du chapitre 4.

## 1.5 Transition BKT

Pour un système bi-dimensionnel homogène à température non nulle, en présence d'interactions répulsives entre atomes, la condensation ne se produit pas à cause des fluctuations de phase, qui empêchent l'établissement d'un ordre à longue portée. Cependant, grâce aux interactions, les fluctuations de densité sont supprimées à une échelle de longueur plus grande que la longueur de relaxation  $\xi^{2D}$ , ce qui permet l'existence d'une transition vers un état superfluide présentant un ordre à quasi-longue portée, et cela reste vrai pour un gaz piégé. L'origine microscopique de cette transition a été découverte par Berezinskii [49] et Kosterlitz et Thouless [48], qui ont donné leur nom à la théorie correspondante, et des signatures expérimentales dans un gaz de Bose piégé ont été observées à partir de 2006 [53, 55, 56]. Cette théorie prédit que pour une température inférieure à une valeur critique  $T_c$ , une densité superfluide non nulle  $n_s$  est présente dans le gaz. Le quasi-ordre à longue portée est assuré par la décroissance algébrique avec la distance :

$$g^{(1)}(r) \propto r^{-\eta}, \quad (1.52)$$

avec  $\eta = (n_s \lambda_T^2)^{-1}$  [67]. Cette décroissance est consistante avec l'absence d'ordre à longue portée : la fonction de corrélation tend vers 0 pour une distance infinie, mais très lentement par rapport au cas idéal, de telle sorte à faire apparaître une cohérence localement, qui permet de définir une phase dans le gaz. Pour  $T > T_c$  la décroissance de  $g^{(1)}(r)$  devient exponentielle, traduisant l'absence totale d'ordre à longue portée. L'ingrédient clé de la théorie BKT sont les vortex, déjà mentionnés au paragraphe précédent 1.3.2 : des points du gaz où la densité s'annule et autour desquels la phase  $\theta$  de la fonction d'onde associée tourne de  $\pm 2\pi$ . À  $T < T_c$ , les vortex n'existent que par paires de circulation opposées. Puisque la charge nette est nulle, la circulation effective sur un contour de diamètre supérieur à l'extension spatiale d'une paire, qui est de l'ordre de la longueur de cicatrisation  $\xi_c$ , est aussi nulle. Par conséquent, ces paires de vortex-antivortex n'ont qu'un effet local et ne perturbent pas la superfluidité. Lorsque la température augmente, la taille de ces paires augmente progressivement et elles finissent par se disloquer en vortex individuels, et pour  $T > T_c$  cette prolifération de vortex individuels détruit la superfluidité en marquant la transition vers l'état normal. Cela a été mis en évidence expérimentalement par le groupe de Y. Shin [87].

### 1.5.1 Saut universel de la densité superfluide

À la transition, la plupart des quantités thermodynamiques varient lentement, à l'exception de la densité superfluide  $n_s$ , qui subit un saut de 0 à  $\frac{4}{\lambda_T^2(T_c)}$  [88]. La valeur de la densité superfluide à la transition est universelle et indépendante du paramètre d'interaction. Une première mesure du saut a été effectuée par Bishop et Reppy sur des films 2D d'hélium [52], mais dans le cas des systèmes bosoniques gazeux, cette mesure est encore aujourd'hui manquante. Le résultat  $n_s = \frac{4}{\lambda_T^2}$  ne suffit pas pour avoir une prédiction du point de transition. Cela parce qu'à la transition la densité totale  $n_{tot} = n_s + n_{th}$  (où  $n_{th}$  est la densité de la phase thermique) n'est pas universelle et dépend des interactions entre atomes. La théorie BKT ne permet donc pas de prédire

la température critique  $T_c$  à laquelle elle a lieu, pour une densité totale  $n_{tot}$  et une force d'interaction données. On a vu que pour un gaz avec des interactions faibles dans une géométrie quasi-2D les interactions ne dépendent que de la constante adimensionnelle  $\tilde{g}$  (1.25). Dans la limite d'interactions faibles, on note la densité totale critique  $n_{tot} = n_c$  [89] et l'équation d'état pour un tel système est fonction du potentiel chimique  $\mu$ , de la température  $T$  et de  $\tilde{g}$ . Pour chaque température  $T$  il existe ainsi un potentiel chimique critique  $\mu_c$ , auquel ils ont fait correspondre une densité critique dans l'espace des phases :

$$n_c \lambda_T^2 = \mathcal{D}_c = \ln\left(\frac{C}{\tilde{g}}\right), \quad (1.53)$$

La valeur de la constante  $C$  a été calculée par Prokof'ev et al. [90] par des simulations Monte-Carlo de champ classique dans un gaz homogène 2D en interaction faible :  $C = 380 \pm 3$ . Avec les paramètres de notre expérience,  $\tilde{g} \sim 0.1$  et nous obtenons :  $\mathcal{D}_c \sim 8.2$ . Notons que du fait des faibles variations (logarithmiques) de  $\mathcal{D}_c$  avec  $\tilde{g}$ , les expériences avec des gaz de Bose 2D présentent toutes des valeurs de  $\mathcal{D}_c$  assez proches ( $\mathcal{D}_c \sim 8$ ). Dans un article ultérieur [75], déjà mentionné au 1.3.1, Prokof'ev et Svistunov ont calculé numériquement l'équation d'état autour du point critique pour un système infini, permettant de relier les deux cas limites vus précédemment.

### 1.5.2 Critère de Landau pour la superfluidité

La superfluidité étant une caractéristique dynamique du gaz, l'étude des excitations qui se propagent dans le gaz, et en particulier de leur énergie, peut mettre en évidence le caractère superfluide d'un gaz de Bose 2D en interaction. Cela se fait dans le cadre de la méthode de Bogoliubov. Une des conséquences majeures de 1.48 est que selon le critère de Landau un condensat de Bose-Einstein est superfluide, avec une vitesse critique donnée par la vitesse du son. Le critère de Landau exprime la stabilité de l'état superfluide vis-à-vis d'une faible perturbation de vitesse relative inférieure à  $c$ . Considérons un fluide au repos et une impureté ponctuelle se déplaçant dans le fluide à la vitesse  $v$ . Elle ne peut ressentir de résistance qu'en échange de la création d'excitations dans le fluide, dont l'énergie  $E(k)$  vérifie (1.48). La conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement du fluide lors de la création de l'excitation, ainsi que la relation de dispersion phononique, imposent :

$$v > c \quad . \quad (1.54)$$

Ce simple argument, appelé critère de Landau, montre qu'en dessous de la vitesse critique  $c$ , le fluide s'écoule sans résistance. Il est superfluide.

## 1.6 Gaz en rotation dans un anneau

L'étude d'un gaz de Bose en rotation est cruciale pour la mise en évidence des propriétés superfluides. Par exemple, elle a permis l'observation de vortex quantifiés [29, 30], ou la mesure de la vitesse critique de rotation [57]. La géométrie annulaire se révèle

particulièrement intéressante dans le cas de gaz de Bose parce qu'elle permet de faire le lien entre superfluidité et stabilité de l'écoulement dans l'anneau, qui sera permanent en l'absence de friction. En particulier le cas 3D a été étudié dans le groupe de G. Campbell au NIST [40, 91]. Le cas bidimensionnel est en cours d'étude dans notre équipe, et la réalisation du piège en anneau est un résultat important de mon travail de thèse (voir chap. 5). Dorénavant je considérerai le cas d'un fluide dans un anneau d'axe  $z$ , rayon moyen  $r_0$  et éventuellement en rotation autour de l'axe  $z$  avec une vitesse  $\Omega$ . Pour simplifier les notations je considérerai la limite d'un anneau fin, dans laquelle la position d'une particule est caractérisée par la seule variable azimutale  $\phi$ . Pour plus de détails, on peut consulter [61].

### 1.6.1 Atome unique dans un anneau

Considérons pour commencer le mouvement d'une particule unique sur cet anneau. Sa fonction d'onde dépend uniquement de  $\phi$  et pour qu'elle soit monovaluée elle doit satisfaire les conditions aux limites périodiques  $\psi(\phi) = \psi(\phi + 2\pi)$ , avec  $\int_0^{2\pi} |\psi(\phi)|^2 r_0 d\phi = 1$ .

#### Anneau au repos

Pour un potentiel constant le long de l'anneau le seul terme de l'hamiltonien est l'énergie cinétique

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \frac{d^2}{d\phi^2}, \quad (1.55)$$

avec états et énergies propres

$$\psi_n(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\phi}, \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} n^2. \quad (1.56)$$

#### Anneau en rotation

Dans un potentiel annulaire en rotation la rugosité inévitable des parois va créer un potentiel dépendant du temps sur la particule, ce qui rend difficile la recherche des états stationnaires dans le référentiel du laboratoire. Le problème se simplifie si on passe dans le référentiel en rotation avec l'anneau, où l'on trouve un potentiel de rugosité indépendant du temps. Cela se fait en rajoutant à l'hamiltonien le terme

$$\Omega L_z = i\hbar\Omega \frac{d}{d\phi}, \quad (1.57)$$

et en écrivant l'hamiltonien pour faire apparaître le carré parfait

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \left( i \frac{d}{d\phi} + \frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^2 + E_{centr}, \quad (1.58)$$

où

$$\Omega_c = \frac{\hbar}{mr_0^2} \quad (1.59)$$

est la vitesse de rotation caractéristique et

$$E_{centr} = \frac{1}{2}m\Omega^2r_0^2 \quad (1.60)$$

l'énergie centrifuge, qu'on peut omettre par la suite puisqu'elle ne dépend pas de  $\phi$ , à condition de redéfinir l'origine des énergies pour chaque valeur de  $\Omega$ . Les fonctions propres restent les mêmes que pour le cas au repos, mais les énergies propres deviennent

$$E_n(\Omega) = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \left( n - \frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^2. \quad (1.61)$$

Le spectre d'énergie en fonction de  $\Omega$  est une série de paraboles centrées sur chaque multiple entier de  $\Omega_c$ . L'état fondamental n'est plus uniquement le fluide au repos, mais dépend de la vitesse de rotation. Si  $\Omega \sim \Omega_c$  ce sera un état de circulation  $n = 1$ , si  $\Omega \sim 2\Omega_c$  ce sera un état de circulation  $n = 2$  et ainsi de suite.

## 1.6.2 Deux critères de superfluidité

### Premier critère : l'anneau en rotation lente

Si on utilise la physique classique pour décrire le système, le fluide va se mettre en rotation grâce à l'interaction parois-atomes pour atteindre une vitesse  $v(r) = \Omega \times r$ . Le moment cinétique du gaz à l'équilibre vaut  $L = I_{class}\Omega$ , où  $I_{class}$  est le moment d'inertie du gaz le long de l'axe  $z$  et peut être approximé, pour le cas d'un anneau fin, par  $L = Nmr_0^2$ . Pour un fluide quantique, le premier critère de superfluidité est qu'il ne se met pas en rotation pour des vitesses faibles de l'anneau. Cela peut s'exprimer comme une réduction du moment d'inertie  $I < I_{class}$ . Dans un anneau fin la condition  $\Omega \ll \Omega_c$  s'écrit  $L \ll N\hbar$ , ce qui signifie que le moment cinétique est beaucoup trop faible pour donner à chaque atome un quantum  $\hbar$  de moment cinétique.

### Deuxième critère : existence de courants permanents

On suppose maintenant que l'anneau a une vitesse  $\Omega > \Omega_c$ , de sorte que le gaz est en rotation même s'il est superfluide. On arrête l'anneau et on laisse le fluide évoluer librement. Deux situations sont possibles :

- dans le cas d'un fluide classique les interactions avec les parois conduisent à une immobilisation du fluide.
- dans le cas d'un superfluide le courant qui existait avant l'arrêt de la rotation perdure, en théorie indéfiniment, dans la pratique seulement pendant des secondes à cause des collisions avec le gaz résiduel. Ces courants sont des états métastables du système, l'état fondamental étant au repos.

On peut montrer à partir du spectre d'énergie qu'un gaz parfait ne présente pas de courants métastables, ce deuxième critère n'est donc jamais satisfait. Les interactions répulsives sont donc indispensables pour assurer ce deuxième critère de superfluidité lié à la métastabilité, ce deuxième critère est également nécessaire pour la superfluidité

du gaz. Une analyse des processus de dissipation pour le courant superfluide circulant dans cette géométrie annulaire a été faite au sein de l'équipe par Dubessy, Liennard et al. [92]. Une expérience qui a montré ces courants metastables et le phénomène d'hysteresis qui l'accompagne est celle du groupe de Campbell [91]. Ils ont produit un condensat dans un piège en forme d'anneau, fabriqué avec des nappes de lumière. Un laser vertical désaccordé vers le bleu et tournant à une vitesse ajustable crée un défaut local, qui joue le rôle d'une paroi rugueuse. Pour savoir si un courant permanent est présent dans l'anneau ils regardent si, après temps de vol, le profil de densité au centre présente un trou ou pas. Si le gaz au moment de la coupure du piège possède un moment cinétique par atome  $L/N = l\hbar$ , cela crée une barrière centrifuge qui empêche les atomes de s'étaler jusqu'au centre lors de l'expansion. La taille de ce trou permet de déterminer la valeur de  $l$  [36].

### 1.6.3 Quantification de la circulation et mesures de $l$

On a vu au 1.3.2 que la vitesse superfluide est définie à partir du paramètre d'ordre complexe  $\Phi = \sqrt{n(r,t)}e^{i\theta(r,t)}$  comme  $v = (\hbar/m)\nabla\theta$ . Étant proportionnelle au gradient d'une fonction scalaire son rotationnel est nul. Cela comporte deux implications majeures : la quantification de la circulation et la réduction du moment d'inertie du fluide. Pour que la fonction d'onde ait une seule valeur possible l'intégrale  $\oint \nabla\theta \cdot dl$  doit être égale à  $2\pi l$  où  $l$  est un entier. Cette quantification de  $l$  impose au courant circulant dans un anneau de rayon  $R$  d'être quantifié, avec une vitesse angulaire  $\Omega_0 = \hbar/mR^2$ . Ainsi la vitesse angulaire du courant doit être un multiple entier  $\Omega = l\Omega_0$ . Je présente ici quelques exemples d'expériences de mesure de la circulation, pour deux différents types de piégeage. Dans un piège harmonique, une mesure du signe et de la charge d'un vortex quantifié a été réalisée à travers la mesure de la précession de l'oscillation quadrupolaire [93], comme suggéré par Zambelli et Stringari [94]. Dans un piège annulaire différents types d'expériences ont été réalisées :

- après temps de vol (abrégé TOF) à travers une mesure de la taille du trou, qui est proportionnelle à  $l$  [95].
- par interférence entre un anneau en rotation et un disque central de référence [39, 40]. Cette méthode permet de compter plus précisément la charge  $l$  ;
- à travers une mesure Doppler : en créant une onde stationnaire par interférence entre deux ondes ayant la même longueur d'onde et se propageant en sens horaire et anti-horaire respectivement [37]. Si un courant permanent circule dans l'anneau, l'effet Doppler modifiera la fréquence relative des deux ondes. Ce décalage Doppler fait précesser l'onde stationnaire. Une mesure de la vitesse azimuthale du maximum d'intensité permet de connaître  $l$ .

### Réduction du moment d'inertie dans un superfluide en rotation

Un fluide classique dans le référentiel du laboratoire a pour moment cinétique  $L = I_{class}\Omega$ , et un moment cinétique nul dans le référentiel tournant (puisque le fluide classique est stationnaire dans ce référentiel). Il tourne toujours à la vitesse de l'anneau,

aussi basse soit-elle (pour une démonstration consulter par exemple [61]). Pour  $\Omega \ll \Omega_c$  un superfluide, ayant une partie qui reste immobile dans référentiel du laboratoire, aura un moment cinétique différent de zéro aussi dans le référentiel tournant. On peut relier les densités normale et superfluide à partir de la réduction du moment d'inertie  $I$  par rapport à sa valeur classique

$$\frac{\rho_n}{\rho} = \frac{I}{I_{class}}, \quad \rho_s = \rho - \rho_n. \quad (1.62)$$

Le moment cinétique mesuré dans le référentiel tournant vaut alors

$$\langle \mathcal{L}_z \rangle = \frac{\rho_s}{\rho} I_{class} \Omega, \quad (1.63)$$

nul pour un gaz classique et égal à  $I_{class} \Omega$  pour un superfluide parfait, puisque ce dernier reste immobile dans le référentiel du laboratoire. Sur le plan énergétique les conséquences de cette définition sont que l'état superfluide correspond à un accroissement de l'énergie, et donc pour avoir une densité superfluide il y aura un prix à payer en énergie [10].

## Conclusion

Dans ce premier chapitre j'ai présenté quelques spécificités d'un gaz de Bose bidimensionnel. En ce qui concerne la condensation de Bose-Einstein, elle est possible à température non nulle seulement pour un gaz piégé, et j'ai mentionné en particulier le cas du piégeage dans une boîte et d'un piégeage harmonique. Dans ces systèmes les interactions entre atomes jouent un rôle fondamental : à température suffisamment basse une transition de phase vers un état superfluide est prévue pour un gaz en interaction, appelé transition de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless. Le lien entre la condensation, définie à l'équilibre, et la superfluidité, principalement liée à des phénomènes de transport, se fait à travers l'introduction du paramètre d'ordre  $\Phi(r,t) = \sqrt{n(r,t)} e^{i\theta(r,t)}$  (1.43), décrivant la fonction d'onde du condensat, et en définissant la vitesse superfluide  $\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta$  (1.44). Dans l'approximation de champ moyen, la dynamique de  $\Phi(r,t)$  est dictée par l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps, équivalente aux équations hydrodynamiques décrivant un superfluide. Plusieurs phénomènes, comme les tourbillons quantiques et les modes collectifs de vibration peuvent être décrits avec ces équations. L'étude de ces propriétés peut donner des informations sur la nature superfluide du gaz, et en particulier dans le chapitre 4 je traiterai le cas du mode cis-axis. Parmi les différentes géométries de piégeage, pour des études de superfluidité la géométrie annulaire est particulièrement intéressante. En effet l'état stationnaire d'un fluide ordinaire mis en rotation correspond à la rotation du fluide, de manière solidaire avec le récipient, mais la superfluidité change radicalement ce comportement. Pour une vitesse suffisamment petite, le superfluide ne se met pas en mouvement, tandis qu'au-dessus d'une certaine fréquence de rotation des vortex apparaissent [96] et le fluide peut circuler sans dissipation, donnant lieu à un courant permanent. Un des objectifs de notre équipe est l'étude de l'établissement et de la dissipation d'un tel courant dans

un anneau, pour cela une partie de mon travail de thèse, que je décrirai dans le chapitre 5, a été la réalisation d'un piège annulaire. Pour cette raison j'ai consacré le dernier paragraphe de ce premier chapitre [1.6](#) à la description d'un gaz en rotation dans un anneau, en établissant deux critères de superfluidité.



# Chapitre 2

## Production et détection du gaz 2D

L'expérience qui a produit les résultats de cette thèse a été construite il y a quelques années. Pour cela une description plus détaillée des différents éléments peut se trouver dans les thèses soutenues précédemment dans l'équipe [58, 97]. Dans ce chapitre je donnerai un aperçu du montage expérimental, en présentant les différentes étapes qui mènent à la production d'un gaz bidimensionnel. Je soulignerai les améliorations apportées pendant les trois années de ma thèse et en particulier la réalisation du piège annulaire.

La production et la détection d'un BEC requièrent une complexe séquence d'étapes contrôlées par ordinateur, avec un timing très précis. Notre séquence expérimentale est définie par un programme codé en C++, appelé « manip », basé sur un programme précédemment écrit par Jakob Reichel. Plus de détails se trouvent dans la thèse de T. Liennard [97].

Notre source d'atomes est un piège magnéto optique (PMO) 2D, qui produit un jet d'atomes ralenti chargeant le PMO 3D. Comme dans la plupart d'expériences d'atomes froids, il est essentiel d'avoir un vide de haute qualité dans la cellule de travail, pour minimiser les collisions avec le gaz résiduel. Pour cela un tube fin maintenant une différence de pression sépare la source d'atomes de la cellule où on charge un PMO 3D. Ce dernier est un bon point de départ pour atteindre la condensation, qui se fait par évaporation dans une autre cellule, appelée par la suite cellule science. Le passage du PMO 3D à la cellule science a lieu en transférant d'abord le gaz dans un piège magnétique quadrupolaire, ensuite en déplaçant le piège même jusqu'à la cellule science, où ils sont transférés dans un piège quadrupolaire bouché et ultérieurement refroidis par évaporation radiofréquence ( RF ). La détection des atomes se fait par imagerie par absorption.

### 2.1 Système des lasers

Le système laser est conçu pour piéger et imager des atomes de  $^{87}\text{Rb}$  et est composé par six sources différentes : quatre à 780 nm et deux à 532 nm. Il s'agit d'un laser télécom

doublé, d'une diode laser à cavité étendue, deux diodes laser, d'un laser Verdi et d'un laser Azur Light Systems.

### 2.1.1 Laser doublé

Ce laser, conçu au laboratoire par P. E. Pottie, est basé sur le doublement de fréquence d'une diode laser télécom à 1560 nm amplifiée dans un amplificateur fibré Keopsys. On obtient 10 W de lumière infrarouge qui est doublée dans un cristal de PPLN en simple passage. Le faisceau à 780 nm obtenu peut atteindre une puissance de 2 W et il fournit les faisceaux refroidisseurs des PMO 2D et 3D, ainsi que le faisceau pousseur, guidant les atomes du PMO 2D vers le PMO 3D. Il peut atteindre jusqu'à 2W de lumière et sa fréquence est asservie autour de +102 MHz de la transition cyclante  $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 3\rangle$ , appelée par la suite ( $2 \rightarrow 3$ ), par battement avec le faisceau provenant du laser à cavité étendue, qui sert de référence de fréquence.

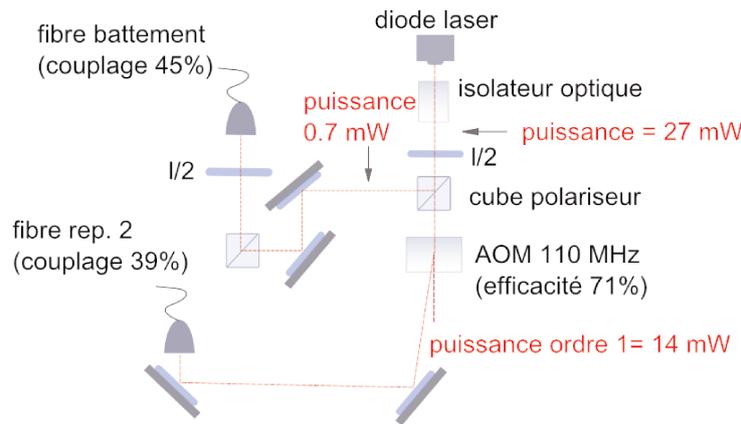
### 2.1.2 Laser à cavité étendue

Le laser à cavité étendue fournit les deux faisceaux d'imagerie et un faisceau qui sert comme référence de fréquence pour le battement avec le laser doublé. Il est asservi par absorption saturée sur la raie de croisement ( $2 \rightarrow 1$ ) et ( $2 \rightarrow 3$ ), à 212.15 MHz de la transition ( $2 \rightarrow 3$ ).

### 2.1.3 Diodes laser

Deux diodes Sanyo indépendantes sont utilisées pour les faisceaux repompeurs. Le choix de deux faisceaux indépendants a été dicté par le besoin d'un désaccord différent suivant le type de nuage et de mesure. Le premier, appelé repompeur 1, repompe les atomes perdus lors du cycle de refroidissement et est accordé sur la transition ( $1 \rightarrow 2$ ). Plus précisément, il est asservi par absorption saturée sur le croisement entre les transitions ( $1 \rightarrow 1$ ) et ( $1 \rightarrow 2$ ) puis décalé de +78.5 MHz par un modulateur acousto optique (AOM) afin de se retrouver sur la bonne transition. Il est ensuite divisé en deux pour se mélanger aux faisceaux refroidisseurs du PMO 2D et 3D. Le deuxième faisceau, appelé repompeur 2, est destiné à l'imagerie par absorption suivant l'axe vertical et il a été mis en place pendant ma thèse. Il est utilisé pour l'acquisition d'images selon l'axe vertical, qu'on réalise *in situ*, c'est-à-dire au moment où on coupe le piège, sans laisser les atomes en chute libre. Cela implique que la densité atomique est très élevée lors de la prise d'une image : pour empêcher que tout le faisceau sonde soit absorbé on choisit ainsi de repomper seulement une petite fraction des atomes [98]. Par ailleurs, pour que le repompeur soit absorbé de façon homogène par ce nuage très dense, il est nécessaire de limiter l'absorption en désaccordant fortement le faisceau. C'est la raison pour laquelle on a voulu qu'il soit désaccordable entre 200 MHz et 1 GHz de la transition  $1 \rightarrow 2$ , ajustable pour s'adapter aux différents types de nuage. Actuellement on travaille avec un décalage de 300 MHz de la résonance, en repompant les atomes pendant 0.1 ms avec une puissance ajustée au cas par cas. Puisqu'on ne détecte que la fraction des atomes repompée, pour accéder au nombre total d'atomes il a été nécessaire

de procéder à une calibration. À un désaccord et une durée de l'impulsion fixés, on fait varier la puissance du laser repompeur 2 de 0 à la puissance maximale, de façon à voir un effet de saturation. Le nombre d'atomes qu'on détecte à la saturation est normalisé au nombre total d'atomes, mesuré en imagerie horizontale.



**Figure 2.1** — Schéma de la table optique pour le laser repompeur 2.

*Sketch of the optical bench for the repumping 2 laser beam.*

Le laser repompeur 2 est injecté dans une fibre et ramené directement sur l'expérience. En arrivant, une fraction de laser est prélevée pour être mélangée avec le repompeur 1 et focalisée sur une photodiode rapide. Un schéma du montage est donné dans 2.1. Le signal de battement en sortie de la photodiode, ayant une fréquence de 300 MHz et une puissance de 0 dBm, est envoyé dans un boîtier construit par l'atelier d'électronique, qui d'abord divise la fréquence par 10, ensuite la compare avec le signal à 30 MHz qui sort d'un DDS et génère le signal d'erreur qu'on utilise pour corriger le courant de la diode du repompeur 2. Lors de la mise en place de ce système on a rencontré deux difficultés. La première était des fluctuations de puissance de l'ordre de 30% en sortie de fibre pour le battement avec le repompeur 1. On a pu la résoudre en changeant notre montage : pour des questions d'encombrement on avait placé le dernier miroir avant l'injection de fibre à  $\sim 30^\circ$  par rapport au faisceau incident : cela faisait tourner la polarisation en entrée de fibre, modulant ainsi l'injection de celle-ci. On a donc placé le miroir à  $45^\circ$ , suivi d'un cube polariseur juste avant la lame de phase  $\lambda/2$ . La deuxième était une dérive continue du laser, qui empêchait l'asservissement de tenir plus qu'une minute. Cette dérive étant due aux effets thermiques, on a réussi à l'annuler grâce à un capotage en polystyrène, à la fois du support de la diode laser et de la partie de la table où se trouve l'optique de ce laser.

### 2.1.4 Laser Azur Light System

Le laser ALS a une puissance maximale de 10 W à 532 nm et il a été acheté pendant ma troisième année pour remplacer le laser Millenia. Il sert comme bouchon optique du piège quadrupolaire pendant la production du condensat [99], ensuite une petite fraction de sa puissance est prélevée et envoyée sur le banc qui crée la « touillette », c'est à dire un faisceau qui tourne dans l'axe vertical au niveau des atomes (voir section 5).

### 2.1.5 Laser Verdi

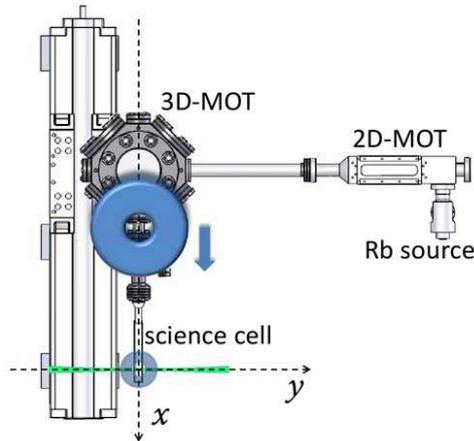
Le laser Verdi de Cohérent a une puissance maximale de 5 W à 532 nm et il est mis en forme pour créer une nappe de lumière qui, combinée au piège magnétique, permet de piéger les atomes en anneau (voir section 5).

## 2.2 Séquence expérimentale

Le piège magnéto-optique (PMO) refroidit et confine les atomes en utilisant la pression de radiation, modifiée par l'effet Doppler dû à la vitesse des atomes, et par l'effet Zeeman créé par un gradient de champ magnétique (voir par exemple [Metcalf 03] pour une revue). Le PMO 3D agit dans les trois directions de l'espace, tandis que MOT 2D ne confine et refroidit les atomes que dans deux directions, ce qui crée un jet d'atomes collimaté dans la troisième direction. Comme illustré dans la figure 2.2, nous utilisons le MOT 2D pour capturer les atomes à partir d'une vapeur de rubidium dans l'enceinte de collection et les transférer dans la chambre de science où ils sont capturés et refroidis par un MOT 3D. Une fois dans le MOT 3D, les atomes seront encore refroidis, puis transférés dans une troisième enceinte où un piège dipolaire optique est superposé au piège magnétique, par évaporation les atomes sont menés à la condensation de Bose-Einstein, et ensuite habillés par la radio-fréquence.

### 2.2.1 Piège magnéto-optique 2D

Nous utilisons un piège magnéto-optique 2D compact, acheté au SYRTE. Une description détaillée est donnée dans la thèse de Patrick Cheinet [100]. Il est composé en deux parties : la zone de refroidissement où le PMO est créé, reliée à la réserve d'atomes, et la zone de sortie, reliée à la chambre du PMO 3D par un tube où le jet horizontal d'atomes ralenti et collimaté passe pour charger le PMO 3D. Un petit trou de diamètre 1.5 mm permet d'assurer une différence de pression entre les deux enceintes. Le principe de fonctionnement est le même que pour le PMO 3D sauf qu'il présente 2, au lieu de 3, paires de faisceaux refroidisseurs contrapropageants, de polarisation circulaire et de fréquence désaccordée vers le rouge de la transition atomique  $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F = 3\rangle$ . Un troisième faisceau permet de transférer plus efficacement les atomes vers l'octogone en les poussant à travers le trou de pompage différentiel ( $\sim 1,5$  mm de diamètre) : il est pour cela appelé pousseur. La pression de vapeur de rubidium dans la zone de sortie du jet est de  $10^{-9}$  mbar ; cette zone est reliée



**Figure 2.2** — Schéma du système vu de dessus. On y voit le PMO 2D, relié au réservoir de Rb, le PMO 3D et les bobines de transport. On peut distinguer également les bobines du quadrupole autour de la cellule science en verre et le laser bouchon qui la traverse.

*Sketch of the setup seen from above. One can see the 2D MOT, connected to the Rb source, the 3D MOT and the transport magnetic coils. One can also distinguish quadrupole coils outside the glass science cell and the plug beam.*

à la chambre du PMO 3D par un tube de diamètre 16 mm et de longueur 18 cm et le flux maximal que l'on peut obtenir est  $\phi_{max} = 10^8$  atomes en 50 ms.

### 2.2.2 Piège magnéto-optique 3D

Le piège magnéto-optique 3D est réalisé dans une chambre métallique octogonale (appelée « l'octogone »). Elle est reliée d'une part au piège magnéto-optique 2D, d'autre part à une cellule en verre, appelée « cellule science », dans laquelle a lieu la condensation (voir fig. 2.2). Une pompe ionique assure le vide à mieux que  $10^{-9}$  mbar, correspondant à une durée de vie des atomes d'environ 30 s. Le PMO 3D se charge en 8 s avec  $1.2 \times 10^9$  atomes, valeur calculée à partir de la fluorescence captée par une lentille placée à 20 cm des atomes et focalisée sur une photodiode. En présence d'un champ quadrupolaire, les atomes sont ralentis et piégés au centre par la force de friction et la force de rappel exercée par trois paires de faisceaux contrapropageants, disposés perpendiculairement entre eux et désaccordés à  $\pm 3$  de la transition  $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F = 3\rangle$  du  $^{87}\text{Rb}$ . Un laser repompeur (repompeur 1), asservi sur la transition  $|5S_{1/2}, F = 1\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F = 2\rangle$ , est aussi présent dans ces faisceaux pour ramener les atomes qui se désexcitent vers le niveau hyperfin  $|5S_{1/2}, F = 1\rangle$  dans la transition cyclante. Les six faisceaux du PMO 3D proviennent d'un système commercial de division de faisceaux, FiberPort cluster de Schäfter+Kirchhoff : il reçoit en entrée les deux faisceaux refroidisseur et repompeur, qu'il mélange et divise en six à l'aide de cubes polariseurs et lames  $\frac{\lambda}{2}$ . Les lames nous permettent de régler la répartition de puissance entre les six faisceaux à tout moment. En pratique, comme le diviseur de faisceau est protégé par une boîte en mousse, nous

ne procédons à un réglage que tous les 5 mois environ. Les six faisceaux sont injectés dans des fibres à maintien de polarisation, à la sortie desquelles il y a des collimateurs fabriqués sur mesure par le SYRTE. Des  $\frac{\lambda}{4}$  sont intégrées aux collimateurs, qui produisent un faisceau de polarisation circulaire et diamètre à  $\frac{1}{e^2}$  égal à 24 mm, diaphragmé à un diamètre de 1 pouce [97]. Pour monitorer les puissances de ces deux lasers des photodiodes intégrées au Schäfer+Kirchhoff collectent 1% de leur puissance avant qu'ils soient séparés. Nous avons typiquement 40 mW de refroidisseur et 450  $\mu$ W de repompeur en moyenne par faisceau, ce qui correspond à un signal à l'oscilloscope de -6.8 V et -48 mV. Le champ magnétique quadrupolaire est créé par une paire de bobines, appelées « bobines de transport ». Elles sont refroidies par l'eau qui circule dans les fils creux, sont situées à l'extérieur de l'octogone et reposent sur un support en résine Damival (choisie pour minimiser les courants de Foucault). Celui-ci est posé sur un rail de translation, permettant aux bobines de se déplacer et de transporter les atomes, piégés magnétiquement, vers la cellule science. Au début de ma thèse les alimentations ont été changées pour atteindre un gradient radial plus important (100 G/cm) et pouvoir ainsi transporter plus d'atomes. Cela a nécessité aussi l'installation de nouveaux switches et de nouveaux câbles électriques et tubes de refroidissement.

Les bobines sont reliées à deux alimentations Delta-Elektronika SM 15-400, de tension maximale 15 V et courant maximal 400 A. La coupure rapide du courant est assurée par quatre interrupteurs IGBTs<sup>1</sup>. Ils sont montés en parallèle, deux pour chaque alimentation, et permettent l'établissement des 400 A dans les bobines de transport en 15-20 ms (temps nécessaire à l'établissement du 95% du champ, mesuré en l'absence des courants de Foucault et avec l'alimentation utilisée en modalité courant constant). En ce qui concerne le temps de coupure, celui est limité à 100 A en 370  $\mu$ s (temps au bout duquel il ne reste que le 5% du champ maximal) par la roue libre qui est insérée en parallèle à chacune des bobines de transport pour écrêter le pic de tension qui se crée aux bornes de l'interrupteur au moment de la coupure du courant.

Après chargement des atomes dans le PMO 3D, une phase de compression et refroidissement permet d'adapter la forme du nuage au piège magnétique. En environ 40 ms le désaccord des faisceaux refroidisseurs passe de 5 à 12 et le gradient magnétique de 5.5 à 20 G/cm (ce qui correspond à un courant dans les bobines I de 22 A à 80 A, étant le gradient du champ quadrupolaire  $b' = 0.25 \text{ Gcm}^{-1} \text{A}^{-1}$  [58]). Ensuite on coupe les faisceaux et on augmente le gradient jusqu'à 87.5 G/cm en 150 ms.

### 2.2.3 Transport magnétique

Le transport des atomes de l'octogone à la cellule science se fait en déplaçant physiquement les bobines. La translation utilisée est entraînée par un moteur<sup>2</sup> contrôlé par ordinateur via un module de contrôle<sup>3</sup> où une séquence de déplacement correspondant au transport des atomes est chargée : les bobines parcourent alors une distance de 28 cm en 1.08 s jusqu'à la cellule science, où les atomes sont transférés dans le deuxième

1. *Insulated Gated Bipolar Transistor*, est un semi-conducteur utilisé comme interrupteur électronique dans des montages de haute puissance.

2. Translation Parker type 404XR, servomoteur brushless Parker SMH60.

3. Programmable Logic Controller Compax 3.

piège quadrupolaire, avant que les bobines du transport soient ramenées à leur position initiale autour de l'octogone. Vu le déplacement important des bobines, le positionnement des gros câbles d'alimentation et des tuyaux d'eau durant la phase de transport doit être bien contrôlé, pour éviter des contraintes mécaniques. Pour cela un système de chaînes a été choisi pour les guider. Lors du déplacement des bobines, les câbles et les tubes sont guidés dans une chenille.

### 2.2.4 Piège quadrupolaire bouché

Une fois transportés au niveau de la cellule science, les atomes sont transférés dans le nouveau piège magnétique, en baissant le courant dans les bobines de transport et en augmentant simultanément le courant des bobines autour de la cellule science. La cellule est fabriquée en quartz traité antireflet sur les surfaces extérieures à 532 nm et 650-1100 nm. La section est un carré de  $10 \times 10$  mm, pour une longueur de 83.5 mm. Elle est pompée par une pompe ionique 20 L/s et une pompe à sublimation de titane. La pression résiduelle est estimée à  $10^{-11}$  mbar et correspond à une durée de vie d'environ 150 s. Les bobines qui créent le piège magnétique sont de forme conique, chacune composée de 40 tours de fil de cuivre creux, refroidies à l'eau et d'axe vertical. Le champ quadrupolaire statique résultant est :

$$\mathbf{B}_0(x,y,z) = b'(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y - 2z\mathbf{e}_z), \quad (2.1)$$

où  $x$  est la direction du transport magnétique,  $y$  la direction de l'axe d'imagerie horizontale et  $z$  la direction verticale (voir fig. 2.2). La valeur du gradient magnétique radial est  $b' = 1.98 \text{ G cm}^{-1} \text{ A}^{-1}$ . Les surfaces isomagnétiques sont définies par  $r_e(\mathbf{r}) = r_0$ , où le rayon effectif  $r_e$  est

$$r_e(\mathbf{r}) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}. \quad (2.2)$$

Ces surfaces sont des ellipsoïdes d'axe de symétrie  $z$  et demi-axes de longueur  $r_0$  et  $r_0/2$  le long des directions horizontale et verticale respectivement. L'écart Zeeman correspondant dans l'état fondamental de spin  $F$  est

$$\hbar\alpha r_e(\mathbf{r}), \quad (2.3)$$

où on a introduit le gradient en unité de fréquences

$$\alpha = |g_F| \mu_B g' / \hbar, \quad (2.4)$$

$g_F$  étant le facteur de Landé et  $\mu_B$  le magnéton de Bohr. L'inconvénient majeur du piège quadrupolaire est que son champ est nul au centre, ce qui mène à des pertes Majorana. Elles sont causées par un suivi non adiabatique du moment magnétique de l'atome lors du passage par une région de champ magnétique faible ou nul, qui le mène dans un sous-niveau Zeeman non piégeant. Le taux de pertes est d'autant plus important que le nuage est proche de la condensation, parce que les atomes s'accumulent davantage autour du minimum du champ. Pour cette raison, dans le piège magnétique seul, les pertes Majorana posent une limite à la densité dans l'espace des phases que l'on peut atteindre. Il y a plusieurs possibilités pour contourner ce problème. On peut citer

des pièges TOP (time orbiting potential) [101], où le champ magnétique effectif vu par l'atome ne s'annule pas au centre, ou des pièges hybrides obtenus en combinant un piège magnétique quadrupolaire avec un potentiel lumineux, attractif ou répulsif [102, 103, 2]. Sur notre montage cette dernière solution a été envisagée. Le potentiel lumineux est créé par un laser à 532 nm se propageant perpendiculairement l'axe du quadrupole  $z$ , le long de l'axe  $y$  [99, 58]. Le potentiel dans le piège bouché est donc la somme d'une partie magnétique  $U_B(\mathbf{r})$ , d'une partie optique  $U_D(\mathbf{r})$  et de la gravité :

$$U(\mathbf{r}) = U_B(\mathbf{r}) + U_D(\mathbf{r}) + Mgz, \quad (2.5)$$

où  $g$  est l'accélération gravitationnelle. Les deux autres composantes sont respectivement :

$$U_B(\mathbf{r}) = \mu_m b' \sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2} \quad \text{et} \quad (2.6)$$

$$U_D(\mathbf{r}) = U_0 \exp \left[ -2 \frac{(x - x_c)^2 + (z - z_c)^2}{w_0^2} \right], \quad (2.7)$$

où  $\mu_m = m_F g_F \mu_B$  est la projection du moment magnétique de l'atome sur l'axe de quantification,  $m_F$  est le sous-niveau Zeeman du niveau  $F$  dans lequel se trouve l'atome, et  $b'$  le gradient magnétique horizontal. En ce qui concerne le potentiel optique,  $(x_c, y_c)$  est la position de focalisation du laser bouchon,  $w_0$  est son waist et  $U_0$  le déplacement lumineux maximum, proportionnel à la puissance  $P$  du faisceau et à l'inverse du carré du waist  $U_0 \propto \frac{P}{w_0^2}$ . À la position des atomes, la puissance du laser bouchon vaut environ 7.7 W (estimé en mesurant la puissance avant et après la cellule), et son waist  $50 \mu\text{m}$  (mesuré avec la méthode du couteau). Son alignement est assez critique, pour cela le miroir le plus proche des atomes a été choisi comme miroir de réglage et il est contrôlé à distance grâce à deux éléments piézoélectriques pilotés par une carte analogique. Pour allumer et couper rapidement le laser on utilise une cellule à effet Pockels. La Pockels est pilotée par un module haute tension, ce qui permet une coupure rapide du faisceau (en  $100 \mu\text{s}$ ). Cela sert aussi pour basculer le faisceau entre deux voies, la première correspondant au faisceau bouchon incident sur la cellule suivant l'axe  $y$ , la deuxième voie qui crée la « touillette à atomes ».

On a aussi dû rajouter deux obturateurs pour éliminer le fond de lumière présent aussi quand la Pockels est éteinte. Une caractérisation des pertes Majorana a été réalisée pendant la thèse de K. Merloti, et une description détaillée est fournie dans son manuscrit [72].

### 2.2.5 Évaporation radio-fréquence

Pour augmenter la densité dans l'espace des phases on refroidit par évaporation le gaz dans le piège quadrupolaire bouché. L'évaporation se fait en trois étapes :

- pré-évaporation : à gradient constant maximal 216 G/cm (correspondant à 110 A dans les bobines), le champ radio-fréquence est allumé à 50 MHz, et en 13,6 s la fréquence RF est diminuée suivant une rampe linéaire jusqu'à 4 MHz ;
- puis on réduit le gradient de champ magnétique linéairement à 55.4 G/cm (28 A dans les bobines) en 50 ms, et la fréquence du champ RF reste constante ;

- pendant l'évaporation finale la fréquence RF est baissée de 2 MHz jusqu'à 350 kHz en 5 s, à gradient constant et égal à 55.4 G/cm.

À la fin de l'évaporation on obtient un condensat quasi-pur d'environ  $2 \times 10^5$  atomes. L'antenne qui permet de refroidir les atomes jusqu'à la condensation est rectangulaire et d'axe  $y$ . La phase d'évaporation est divisée en deux parties : dans la première le champ est créé par un synthétiseur DDS<sup>4</sup> « Tabor WW1072 », dans la deuxième par un synthétiseur Stanford DS-345.

### 2.2.6 Piège habillé

Après un premier refroidissement par évaporation dans le piège bouché, on éteint le laser vert et on allume progressivement des champs radiofréquences produits par des antennes placées autour de la cellule science. Cette combinaison de champs magnétiques, statiques et oscillants, est utilisée pour « habiller » les atomes avec la RF<sup>5</sup> : les atomes sont ainsi piégés par les photons radiofréquence, et avec les configurations de polarisation utilisées, cela permet de créer un piège qui confine les atomes à la surface d'une bulle. La fréquence des photons RF détermine le rayon de la bulle et permet de l'ajuster facilement. Si le rayon de la bulle est grand, on peut ainsi créer un confinement quasi-2D : la gravité fait tomber les atomes au fond de la bulle, où ils subissent un fort confinement vertical. Les fréquences de piégeage des atomes sont de quelques dizaines de hertz dans les directions horizontales alors que la fréquence verticale atteint 2 kHz. On réalise alors une deuxième phase d'évaporation directement dans le piège habillé. Deux antennes radio-fréquence, qu'on appellera H1 et H2, sont destinées à l'habillage des atomes. Elles sont situées à l'extérieur de la cellule science, selon les axes  $y$  et  $x$  respectivement et constituées de 10 tours de fil de cuivre de diamètre 0.71 mm. Elles ont une forme carrée de côté 16 mm pour que l'antenne H2 puisse entourer la cellule et s'approcher des atomes. Étant données les dimensions des antennes entre deux et trois ordres de grandeur supérieures à la taille typique du nuage atomique, on peut supposer que le champ produit soit homogène au niveau des atomes. On écrit les champs produits comme :

$$\mathbf{B}_{rf1}(t) = B_1 \cos(\omega_{rf}t + \phi_1) \mathbf{e}_y \quad (2.8)$$

$$\mathbf{B}_{rf2}(t) = B_2 \cos(\omega_{rf}t + \phi_2) \mathbf{e}_x \quad (2.9)$$

Pour avoir un habillage en polarisation elliptique arbitraire, la phase et l'amplitude de chaque antenne peuvent être contrôlées indépendamment. En particulier, on peut avoir une polarisation linéaire ou circulaire dans le plan horizontal. La polarisation linéaire est obtenue avec les deux champs RF en phase, c'est à dire  $\phi_1 = \phi_2$ , et sa direction est déterminée par les amplitudes  $B_1$  et  $B_2$ . La polarisation circulaire est obtenue quand  $B_1 = B_2$  et  $|\phi_1 - \phi_2| = \frac{\pi}{2}$ . Le potentiel résultant de la somme d'un champ magnétique quadrupolaire, d'un champ radiofréquence et de la gravité est :

$$U_H(\mathbf{r}) = m_F \hbar \sqrt{\delta(\mathbf{r})^2 + \Omega(\mathbf{r})^2} + Mgz, \quad (2.10)$$

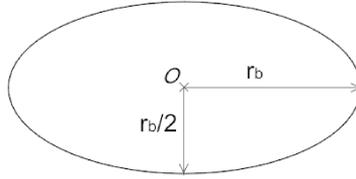
4. Acronyme anglais pour synthèse numérique directe (Direct Digital Synthesis).

5. Pour un très récent article de review sur ce type de potentiels adiabatiques vous pouvez consulter [104].

où  $m_F$  indique l'état habillé et peut valoir  $-1, 0$  ou  $+1$  pour un atome de spin  $F = 1$ . Par convention l'orientation locale de l'axe de quantification est choisie de sorte que les états habillés piégés correspondent à  $m_F > 0$ .  $\Omega(\mathbf{r})$  est le couplage radiofréquence dépendant de la position et

$$\delta(\mathbf{r}) = \omega_{rf} \frac{|g_F| \mu_B}{\hbar} B(\mathbf{r}). \quad (2.11)$$

La surface définie par  $\delta(\mathbf{r}) = 0$  correspond à la surface où le champ RF est résonnant avec la différence d'énergie entre les sous-niveaux Zeeman et un croisement évité se forme. L'état habillé de plus haute énergie  $|m_F = +1\rangle$  est confiné proche de cette surface résonnante, qui correspond à des ellipsoïdes deux fois plus écrasés dans la direction  $z$ , comme illustré dans la figure 2.3. Leur dimensions sont fixées par la fréquence



**Figure 2.3** – Condensat au fond du piège habillé. L'ellipse représente schématiquement une coupe dans le plan vertical de la surface équipotentielle sur laquelle est contraint le nuage. Elle présente un petit axe de demi-longueur  $r_b/2$  selon la direction  $z$  et un axe dans le plan horizontal de longueur  $r_b$ . Les atomes condensés, en présence de la gravité, se réunissent au fond de la bulle, à une altitude d'environ  $z = r_b/2$ .

*Condensate at the bottom of the dressed trap. The ellipse represents a cut in the vertical plane of the iso-potential trapping surface on which the cloud is trapped. It exhibits a short axis of length  $r_b/2$  in the vertical direction and a radius  $r_b$  in the horizontal plane. The condensed atoms, in the presence of gravity, lay close to the vertical position  $z = r_b/2$ .*

d'habillage :

$$\omega_{rf} = \frac{|g_F| \mu_B}{\hbar} b' \sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}, \quad (2.12)$$

ou encore

$$r_e(\mathbf{r}) = \frac{\omega_{rf}}{\alpha} = r_b. \quad (2.13)$$

où  $\alpha$  et  $r_e(\mathbf{r})$  sont définis en (2.4) et (2.2). La qualité de la source radiofréquence est très importante : une fluctuation de fréquence ferait déplacer la position du nuage entraînant un chauffage dipolaire, tandis qu'une fluctuation d'amplitude modifierait la fréquence d'oscillation du piège conduisant un chauffage paramétrique [105]. Le spin des atomes habillés par la radio-fréquence tourne autour du champ magnétique local. Un saut de phase ferait changer brusquement l'orientation du champ local et le spin, ne pouvant plus suivre le champ, se décompose en plusieurs sous-états selon le nouvel axe propre, en particulier des états non piégés, entraînant une perte d'atomes. Pour des excursions de phase importantes un synthétiseur numérique est mieux adapté qu'un

synthétiseur analogique, puisqu'il produit un signal point à point avec phase continue. Le synthétiseur a été construit pendant la thèse de K. Merloti [58] et se compose d'un DDS, un microcontrôleur, un synthétiseur commercial pour fournir la fréquence d'échantillonnage et des amplificateurs. Je vais à présent discuter de la forme du piège habillé en fonction des paramètres choisis.

### Polarisation linéaire

On considère le cas d'un champ radiofréquence polarisé linéairement dans le plan (xy) selon un axe arbitraire  $y'$  :

$$\mathbf{B}_{rf}(t) = B_{rf} \cos(\omega_{rf} t) \mathbf{e}_{y'} . \quad (2.14)$$

On définit le couplage maximal  $\Omega_0$  obtenu dans le plan ( $x'z$ ) où l'onde radiofréquence est orthogonale au champ statique :

$$\Omega_0 = \frac{|g_F| \mu_B}{2\hbar} B_{rf} . \quad (2.15)$$

Le couplage est

$$\Omega(\mathbf{r}) = \Omega_0 \frac{\sqrt{x'^2 + 4z^2}}{r_e(\mathbf{r})} , \quad (2.16)$$

nul dans l'axe de polarisation de la RF. Un point de couplage nul entre le moment magnétique atomique et le champ radiofréquence correspond à un trou du potentiel à travers lesquels les atomes peuvent s'échapper après avoir subi un changement de spin (voir fig. 2.4). Pour cela dans le cas de polarisation linéaire le piège habillé présentera deux points de fuite pour les atomes le long de l'axe de polarisation de la RF. Cependant, la gravité permet dans notre expérience de déplacer le minimum du potentiel au fond de l'ellipsoïde, loin des trous. On définit  $\epsilon = Mg/(2m_F \hbar \alpha)$ . Les conditions nécessaires à l'existence de ce minimum sont alors [72] :

$$\begin{cases} \epsilon < 1, \\ \frac{\Omega_0}{\omega_{rf}} < \frac{\epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2}}{1 - 2\epsilon^2} \end{cases} . \quad (2.17)$$

La première indique que le gradient magnétique doit au moins compenser la gravité, la deuxième que le gradient vertical de la fréquence de Rabi doit être plus petit que la force gravitationnelle pour empêcher les atomes de s'accumuler autour des trous du piège. Dans la limite  $\epsilon^2 \ll 1$  ces deux conditions peuvent être approximées par

$$m_F \hbar \Omega_0 < \frac{M g r_b}{2} < m_F \hbar \omega_{rf} . \quad (2.18)$$

On remarque que  $\frac{M g r_b}{2}$  est la différence d'énergie potentielle gravitationnelle entre le fond de la bulle et l'équateur où se situent les zéros. Le minimum du potentiel se trouve en ( $x = 0, y = 0, z = R$ ),  $R$  étant donné par :

$$R = \frac{r_b}{2} \left( 1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \frac{\Omega_0}{\omega_{rf}} \right) . \quad (2.19)$$

La brisure de symétrie entre  $x'$  et  $y'$  par la direction de polarisation de la RF entraîne une différence entre les fréquences d'oscillation horizontales du piège habillé. Les trois fréquences sont déduites d'un développement au second ordre du potentiel de piégeage autour de son minimum. Elles valent [72] :

$$\omega_{x'} = \sqrt{\frac{g}{4R}}, \quad (2.20)$$

$$\omega_{y'} = \sqrt{\frac{g}{4R}} \left[ 1 - \frac{m_F \hbar \Omega_0}{MgR} \sqrt{1 - \epsilon^2} \right]^{1/2}, \quad (2.21)$$

$$\omega_z = 2\alpha \sqrt{\frac{m_F \hbar}{M\Omega_0}} (1 - \epsilon^2)^{3/4}. \quad (2.22)$$

### Polarisation circulaire

On applique un champ radio-fréquence de fréquence  $\omega_{rf}$  polarisé circulairement, qui induit des transitions entre sous-niveaux Zeeman à une distance donnée du zéro du champ magnétique.

$$\mathbf{B}_{rf}(\mathbf{r}, t) = B_1 [\cos(\omega_{rf}t)\mathbf{e}_x + \sin(\omega_{rf}t)\mathbf{e}_y]. \quad (2.23)$$

Le couplage de Rabi effectif entre différents sous-niveaux Zeeman dépend de l'orientation locale du champ magnétique statique  $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$  [72]

$$\Omega(\mathbf{r}) = \frac{\Omega_0}{2} \left[ 1 - \frac{2z}{r_\epsilon(\mathbf{r})} \right], \quad (2.24)$$

où  $\hbar\Omega_0 = |g_F|\mu_B B_1$ . Le couplage, sur une surface isomagnétique donnée, est maximum au fond de l'ellipsoïde et s'annule en haut (voir fig. 2.4), où les atomes peuvent être perdus à cause d'un suivi non adiabatique du moment magnétique. Ceci est utile pour constituer un piège proche du fond de la bulle en se servant de la gravité, le trou étant placé loin des atomes. Les conditions d'existence d'un minimum de potentiel proche du bas de l'isomagnétique dans le cas d'une polarisation circulaire sont :

$$\begin{cases} \epsilon < 1, \\ \frac{\Omega_0}{\omega_{rf}} < \frac{2\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2}}{1-3\epsilon^2} \end{cases}. \quad (2.25)$$

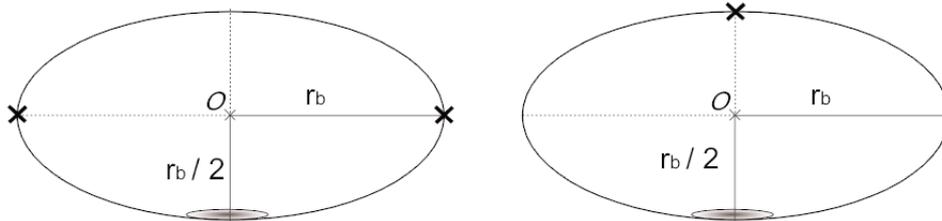
Dans la limite  $\epsilon^2 \ll 1$

$$m_F \hbar \Omega_0 < Mgr_b < 2m_F \hbar \omega_{rf}. \quad (2.26)$$

L'écart entre la position d'équilibre et le trou étant à présent  $r_b$ , c'est  $Mgr_b$  qui intervient dans cette expression. L'expression pour le rayon reste inchangée, mais les fréquences d'oscillations sont modifiées dans le plan horizontal. Le piège est à symétrie cylindrique, avec une seule fréquence radiale  $\omega_r$ . Les deux fréquences obtenues par un développement au second ordre du potentiel autour de son minimum sont :

$$\omega_r = \sqrt{\frac{g}{4R}} \left[ 1 - \frac{m_F \hbar \Omega_0}{2MgR} \sqrt{1 - \epsilon^2} \right]^{1/2}, \quad (2.27)$$

$$\omega_z = 2\alpha\sqrt{\frac{m_F\hbar}{M\Omega_0}}(1 - \epsilon^2)^{3/4}. \quad (2.28)$$



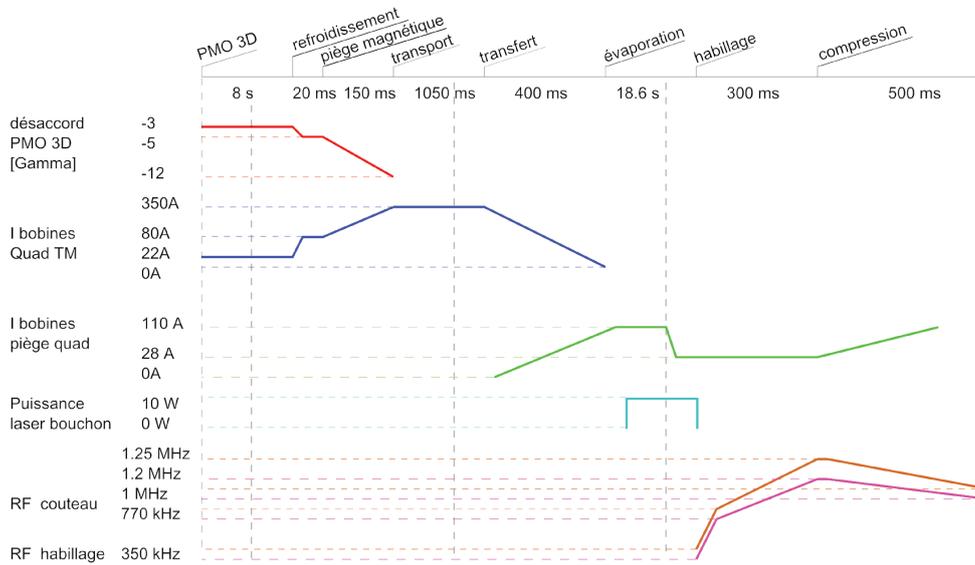
**Figure 2.4** — Schéma de la bulle, vue de coté. Les atomes se trouvent au fond, tandis que les croix noires indiquent la position des trous, où le couplage entre le moment magnétique et la radiofréquence est nul. À gauche : cas d'un champ radiofréquence avec polarisation linéaire, les trous se trouvent à l'équateur. À droite : cas d'une polarisation circulaire, le trou est situé au sommet de la bulle.

*Sketch of the bubble, seen from aside. The atoms are situated on the bottom, while the black crosses indicate the regions where the coupling between the magnetic moment and the radiofrequency is zero, called « holes » because atoms are no more trapped at these points. The case of a linear radiofrequency polarization is sketched on the left, while the case of a circular polarization is sketched on the right.*

### Contrôle fin de la géométrie

Une simple analyse à l'ordre 0 en  $\epsilon$  nous donne des informations importantes sur les paramètres expérimentaux les plus pertinents dont dépendent  $R$  et les fréquences d'oscillations du piège. Les paramètres expérimentaux contrôlables sont  $b', \omega_{rf}, \Omega_0$  et  $\phi$ . Le gradient magnétique peut être modifié à travers un contrôle analogique de l'alimentation du piège quadrupolaire. Un synthétiseur commercial permet de contrôler et modifier  $\omega_{rf}$  au cours de la séquence expérimentale et un micro-contrôleur présent dans notre synthétiseur maison permet la programmation de rampes linéaires de l'amplitude et de la phase du champ RF, ce qui modifie directement  $\Omega_0$  et la polarisation de la radio-fréquence. À l'ordre zéro  $\epsilon$ ,  $R \propto \omega_{rf}/b'$  et  $\omega_z \propto b'/\sqrt{\Omega_0}$ . Donc une fois  $\omega_{rf}$  et  $b'$  choisis, les fréquences horizontales sont pratiquement fixées. La fréquence d'oscillation verticale par contre ne dépend pas de  $\omega_{rf}$  : pour augmenter  $\omega_z$  nous pouvons augmenter le gradient magnétique et/ou diminuer le couplage RF. Si par ailleurs on veut modifier l'anisotropie du piège, c'est-à-dire diminuer le rapport entre les fréquences horizontales et verticale, on peut par exemple augmenter le gradient magnétique et la fréquence RF proportionnellement : cela garde  $R$  à une valeur presque constante tout en faisant croître  $\omega_z$ . La possibilité de jouer indépendamment sur ces trois paramètres nous donne une grande flexibilité dans le choix des caractéristiques du piège, notamment nous permet de passer du régime 3D au régime 2D. En plus de celles pour le refroidissement et l'habillage, deux autres sources radio-fréquence sont présentes : une pour la spectroscopie et l'autre pour la RF d'évaporation dans le piège habillé, appelée

« couteau ». L'antenne de spectroscopie est reliée directement au synthétiseur Stanford DS-345, tandis que la rampe du couteau est générée par un Tabor WW2571A.



**Figure 2.5** – Schéma de la séquence expérimentale pour créer le gaz de Bose 2D à partir du PMO 3D. Les différentes étapes sont : refroidissement laser dans le PMO 3D (8 s), piège magnétique (20 ms), compression (150 ms), transport (1050 ms), transfert dans le deuxième piège magnétique (400 ms), évaporation radio-fréquence dans le piège quadrupolaire bouché (18.6 s), habillage (300 ms) et compression (500 ms).

*Main experimental steps for creating the 2D Bose gas after the atoms have been charged in the 3D MOT. The various steps are : laser cooling in the 3D MOT (8 s), magnetic trap (20 ms), compression for the cloud to be transported (150 ms), transport (1050 ms), transfert in a second magnetic trap (400 ms), radio frequency evaporation in the plugged magnetic trap (18.6 s), atom dressing (300 ms) and final compression (500 ms).*

### 2.2.7 Compression

À la fin des étapes que je viens de décrire on obtient un gaz dégénéré. En tirant parti de l'anisotropie naturelle du piège quadrupolaire habillé et de sa souplesse on peut produire des gaz fortement confinés dans la direction  $z$ . On a vu également qu'une manière efficace d'accentuer l'anisotropie est d'augmenter simultanément le gradient magnétique et la fréquence RF. Si le changement est proportionnel pour les deux et réalisé à couplage constant, la fréquence verticale sera augmentée tout en gardant les fréquences horizontales et le rayon constants. Cette procédure s'appelle « compression ».

### 2.2.8 Détection du nuage

Pour imager un nuage d'atomes ultrafroids on a principalement trois options : l'imagerie par absorption, par fluorescence ou par contraste de phase. Dans notre expérience la technique utilisée est l'imagerie par absorption, qui consiste à envoyer un faisceau collimaté quasi-résonant avec la transition atomique ( $2 \rightarrow 3$ ) et regarder l'ombre induite sur ce faisceau après l'absorption des photons par les atomes : cela revient à mesurer l'épaisseur optique locale du nuage d'atomes intégré dans la direction de propagation du faisceau d'illumination. Il s'agit d'une mesure destructive : l'interaction entre les atomes et la lumière cause un chauffage et la conséquente désintégration du nuage, pour cela seulement un image par échantillon peut être prise. Une description détaillée de la manière de détecter le nuage, avec les nombreuses calibrations requises, sera donnée dans l'annexe A.

Selon la quantité que l'on veut mesurer, nous avons la possibilité d'imager suivant l'axe  $x$  (imagerie horizontale) après temps de vol, ou *in situ* suivant l'axe  $z$  (imagerie verticale)<sup>6</sup>. La première technique (abrégée en anglais TOF, pour « time of flight ») consiste à laisser le nuage en chute libre pendant quelque millisecondes avant détection, tandis que la deuxième technique consiste à détecter le nuage dans son piège. Dans le piège la densité atomique est élevée et cela introduit une difficulté supplémentaire dans la détection, liée aux effets de diffusion multiple. Je présenterai dans l'annexe A la façon de contourner ce problème, qui a été implémentée et décrite dans le groupe de J. Dalibard, en particulier dans le cadre de la thèse de T. Yefsah [77].

## 2.3 Système d'imagerie horizontale

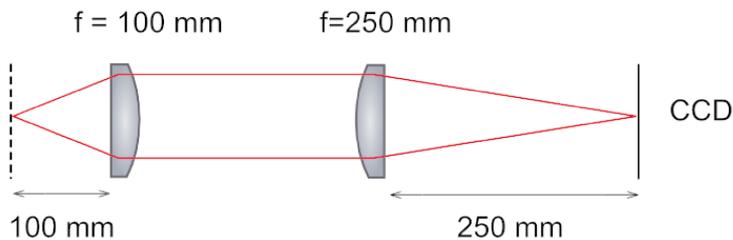
La caméra utilisée pour l'imagerie horizontale est une EMCCD iXon 885D de Andor. Son capteur est une matrice de  $1004 \times 1002$  pixels, chacun mesurant  $8\mu m \times 8\mu m$ .

Le faisceau sonde est collimaté en sortie de fibre et son rayon à  $1/e^2$  vaut 2.7 mm. Un champ directeur de 1.9 G est appliqué dans l'axe d'imagerie lors de l'impulsion sonde, et une lame  $\lambda/4$  assure la polarisation circulaire du faisceau. Comme  $y$  est aussi l'axe du faisceau bouchon à 532 nm, on filtre la lumière à 532 nm en deux étapes : juste après la cellule un cube séparateur de polarisation à 532 nm réfléchit la lumière du plug et transmet celle de la sonde, ensuite un filtre interférentiel placé avant le capteur bloque les derniers photons à 532 nm. Le facteur de conversion de photons/coup lors de la dernière calibration était  $\gamma = 13.1$ . On observe les atomes avec un grandissement  $G = 2.17$  grâce à un télescope, schématisé dans la figure 2.6, formé de deux lentilles de focales 100 mm et 250 mm.

## 2.4 Système d'imagerie verticale

Dans le but d'imager le nuage dans le piège habillé on a construit un système d'imagerie verticale avec un grandissement de l'ordre de 8, nous permettant d'obtenir

6. Pour une description très pédagogique de l'imagerie *in situ* vous pouvez consulter [106].



**Figure 2.6** – Lentilles du système d’imagerie horizontale, permettant d’imager les atomes sur la CCD avec un grandissement de 2.17. La méthode de calibration du grandissement sera expliquée dans la section A.2.1.

*Lenses of the horizontal imaging telescope, allowing for a magnification of 2.17. The calibration method will be explained in section A.2.1 .*

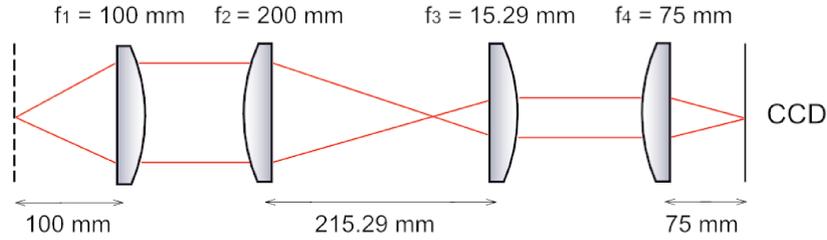
une image correcte de nuages très petits. On utilise une caméra EMCCD de ANDOR, model Luca-R. Son capteur est composé de  $1004 \times 1002$  pixels de taille  $8\mu\text{m} \times 8\mu\text{m}$ . Leur taille effective sur les atomes est de  $8/G \sim 1\mu\text{m}$ , étant  $G = 8.4$  le grandissement du système optique. Le gain n’est pas réglable, pour cela on a calibré directement le taux de conversion photons/coup  $\gamma = 6.26$ .

La résolution de ce système d’imagerie a été mesurée à l’aide d’une mire USAF 1951, constituée de plusieurs groupes de traits rectangulaires de largeur bien connue et différente selon le groupe. On a analysé le profil intégré transmis par différents motifs de la mire, en modélisant la fonction de réponse avec une convolution d’une gaussienne et une fonction porte :

$$I(x) = y_0 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} A w_x \left( \text{erf} \left( \sqrt{2} \frac{(R - x_0 - x)}{w_x} \right) + \text{erf} \left( \sqrt{2} \frac{(R - x_0 + x)}{w_x} \right) \right), \quad (2.29)$$

où  $2R$  est la largeur des traits de la mire. Le paramètre  $w_x$ , multiplié par la taille effective d’un pixel  $8/G \sim 1\mu\text{m}$  pour tenir compte du grandissement, peut être interprété comme une mesure de la résolution du système. Elle vaut  $5\mu\text{m}$  pour notre montage.

La caméra est solidaire d’un système optique composé de quatre lentilles et est montée sur trois translations, qui permettent de déplacer l’ensemble du système dans les trois directions de l’espace. La translation suivant l’axe  $z$  est celle qui permet la mise au point de la caméra. Les deux autres déplacements se font dans le plan horizontal, mais pour des raisons d’encombrement les axes de translations ne coïncident pas avec  $x$  et  $y$ . Le faisceau sonde est collimaté en sortie de fibre et une lame  $\lambda/4$  assure sa polarisation circulaire. Il est perpendiculaire au plan atomique 2D et, après la cellule il traverse un système optique composé de deux télescopes avant d’arriver au capteur de la caméra. Pour en assurer la coaxialité, les quatre lentilles des télescopes sont placées à l’intérieur d’un tube Thorlabs, coudé et contenant aussi un miroir pre-aligné à  $45^\circ$ . Une vue dépliée du système optique est donnée dans la figure 2.7.



**Figure 2.7** – Lentilles du système d'imagerie verticale, permettant d'imager les atomes sur la CCD avec un grandissement théorique de 9 (8.4 expérimentalement).

*Lenses of the vertical imaging system, allowing for a theoretical magnification of 9 (8.4 experimentally).*

## 2.5 Fréquences d'oscillation dans le piège habillé

### 2.5.1 Fréquences horizontales

La méthode la plus directe pour mesurer les fréquences d'oscillation dans un piège harmonique consiste à exciter le mode dipolaire du nuage. Ce mode est toujours présent, mais normalement les paramètres sont ajustés pour le minimiser. Cependant, lorsqu'on veut déterminer précisément  $\nu_x$  et  $\nu_y$  on peut l'exciter volontairement en éteignant le faisceau bouchon rapidement. Le nuage commence alors à osciller dans le piège final, et on enregistre la position du centre de masse du nuage en fonction du temps. Pour ce faire, on prend des images *in situ* après différents temps d'attente dans le piège et on ajuste avec un profil bimodal chaque image pour identifier le centre du condensat  $(x_0, y_0)$  ainsi que les axes du piège dans chaque image. Les axes  $x, y$  de l'image correspondent à peu près aux axes du piège, pour cela on trace les points  $(x_0, y_0)$  en fonction des temps d'attente et on ajuste avec un modèle à deux sinusoides, dont la fréquence trouvée sera celle de piégeage. Les fréquences typiques sont de l'ordre de quelques dizaines de Hz.

### 2.5.2 Fréquence verticale

Pour mesurer la fréquence de piégeage verticale l'excitation se fait en modifiant la rampe radiofréquence de compression après l'habillage des atomes, ce qui revient à une légère modification non adiabatique du rayon de la bulle. Après coupure du piège on mesure la position des atomes après un temps de vol (typiquement 20 ms). Il faut regarder à des temps d'attente dans le piège final assez courts ( $\sim 8$  ms) et échantillonner au moins pendant 3 périodes chaque  $\sim 100\mu\text{s}$ . On ajuste enfin les données avec un sinusoides ; des valeurs typiques sont de l'ordre de 2 kHz. Si l'oscillation verticale présente un amortissement, la cause est probablement due au fait qu'on a trop excité le nuage, et que son amplitude d'oscillation dans le piège  $\Delta z_0$  est trop grande. Si  $A$  est l'amplitude d'oscillation après un temps de vol  $dt_{tof}$  (obtenue avec un ajustement sinusoidale de la position du nuage), on peut remonter à l'amplitude d'oscillation *in situ*  $\Delta z_0$  de la manière suivante. On prend une valeur vraisemblable pour  $\omega_z$  (même si on ne connaît pas encore sa valeur précise), dans notre cas  $1.8 \times 10^3$  Hz. L'amplitude  $A$  après temps de vol est  $A = v_z \times dt_{tof}$ , où  $v_z = \Delta z_0 \times \omega_z$ , d'où on déduit  $\Delta z_0$ .

Expérimentalement on a observé qu'elle doit être  $\Delta z_0 < 200$  nm. Typiquement une excitation acceptable pour une fréquence d'habillage de  $\omega_{rf} = 2\pi \times 1$  MHz et fort gradient  $b' = 216$  g/cm (109 A de courant dans les bobines) est la suivante : on modifie la fréquence d'habillage jusqu'à une valeur légèrement au-dessus de  $\omega_{rf}$ , par exemple  $\omega_{rf} = 2\pi 10$  kHz, on reste sur cette valeur pendant une dizaine de millisecondes, pour ensuite revenir rapidement (en  $\sim 100\mu s$ ) à  $\omega_{rf}$  et attendre un certain temps (que l'on fait varier) avant de couper le piège et faire un temps de vol. En connaissant la valeur de la fréquence de Rabi  $\Omega_0/(2\pi)$  on peut enfin comparer les résultats obtenus avec les expressions données en (2.28) et (2.22).

### 2.5.3 Mesure de la fréquence de Rabi

La fréquence de Rabi  $\Omega_0/(2\pi)$  peut être mesurée par spectroscopie avec une résolution de 0.5 kHz, et peut prendre des valeurs comprises entre 4 et 50 kHz. Pour la mesurer on ajoute une sonde radiofréquence de faible intensité qui couple les états habillés pendant une durée de l'ordre de la centaine de millisecondes. On enregistre le nombre d'atomes qui restent en fonction de la fréquence de la sonde : une résonance apparaît à la fréquence de Rabi<sup>7</sup>, qui peut être déterminée par un ajustement lorentzien.

---

7. Cela est vrai pour une spectroscopie à basse fréquence. Dans le cas d'une spectroscopie à haute fréquence deux résonances apparaissent, à  $\omega_{rf} - \Omega_0$  et à  $\omega_{rf} + \Omega_0$  [107].

# Chapitre 3

## Modes collectifs d'un gaz 2D

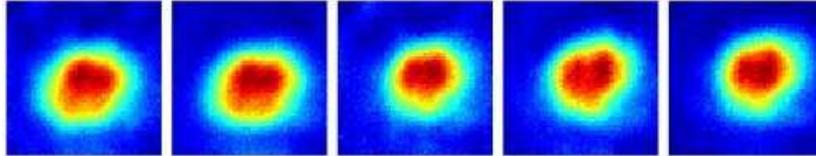
### 3.1 Introduction

On a vu au chapitre 1 que les excitations collectives sont fortement affectées par la géométrie du piège. En effet, en l'absence de confinement leur relation de dispersion à basse énergie est linéaire  $\omega = ck$ , et elles correspondent à des ondes sonores se propageant avec une vitesse  $c = \sqrt{gn_0/m}$  ( $n_0$  étant la densité à l'équilibre), tandis que dans un système inhomogène d'autres solutions apparaissent, correspondant à des modes collectifs d'oscillation quantifiés : ils consistent en un mouvement périodique du nuage entier et ils ont une énergie de l'ordre de l'énergie de piégeage. L'étude des excitations collectives dans un gaz quantique bidimensionnel a commencé au sein de l'équipe pendant la thèse de K. Merloti. En tirant parti de la souplesse du piège et du contrôle de la source radiofréquence, il a été possible d'exciter plusieurs modes collectifs, en particulier les modes quadrupolaire, monopolaire et ciseaux, et de mesurer leur fréquences et amortissements. L'étude consistait jusqu'à ce moment à suivre l'évolution temporelle d'une observable définie « a priori », comme par exemple le rayon de Thomas-Fermi. Entre temps, des progrès sur l'extraction de la température et du potentiel chimique à partir d'une image *in situ* du gaz, et une amélioration de système d'imagerie (voir l'annexe A, ont permis une analyse plus quantitative. En parallèle, on a montré comment une méthode générique d'analyse du signal, l'analyse en composantes principales (en anglais principal component analysis [84] ou PCA), permet d'extraire toute l'information contenue dans les corrélations entre images d'absorption, sans besoin d'aucune hypothèse sur le modèle à adopter pour décrire le nuage atomique. Cette méthode a déjà été utilisée auparavant pour filtrer les images en isolant la contribution due au bruit [108, 109, 110], extraire la phase d'un signal interférométrique [111, 112] et en tomographie quantique [113]. D'autres exemples d'applications sont donnés dans les références [84, 108]. À notre connaissance, avant ce travail de thèse, cette méthode n'avait été jamais appliquée pour effectuer une « spectroscopie de Bogoliubov » du système, c'est-à-dire mettre en évidence les modes d'excitation du nuage, mesurer leur populations et leur fréquences [114].

## 3.2 Analyse en composantes principales

### 3.2.1 Principe de la méthode

Dans cette section je décrirai en grandes lignes le fonctionnement de la PCA. On considère une série de  $N$  images de profils de densité du nuage, dans notre cas un ensemble d'images d'absorption, où le signal est proportionnel à la densité atomique intégrée (voir figure 3.1).



**Figure 3.1** — Série d'images du profil de densité du nuage. Les images ont été prises *in situ* et suivant l'axe vertical.

*Set of images of the cloud's density profile. Images are taken in situ along the vertical axis.*

Dans le cas où l'on veut faire une analyse du bruit, chaque image est prise dans les mêmes conditions, et les variations d'une image à l'autre sont dues exclusivement à des facteurs externes, comme des fluctuations du profil d'intensité de la sonde, des vibrations de la caméra,... Si au contraire on s'intéresse à la dynamique du gaz, par exemple à l'étude des modes collectifs, les images sont prises après différents temps d'attente dans le piège, de manière à suivre l'évolution du gaz. Ensuite, l'idée principale est d'extraire les corrélations entre les images d'une certaine série de données. Qu'il existe des corrélations entre images est évident : par exemple, si le mode dipôle est excité, le long de l'axe d'excitation les pixels qui à un instant donné ont récolté le plus de signal, après un certain temps auront un minimum de signal et ils seront corrélés avec les pixels se trouvant sur l'extrémité opposée de l'axe d'oscillation.

Pour extraire les corrélations des images on applique la procédure suivante. On considère un jeu de données de  $N$  images, chacune se composant de  $P$  pixels. On suppose que tous les pixels d'une image sont organisés en une ligne, de sorte que la  $n$ -ième image, où  $n = 1 \dots N$ , s'écrive sous la forme d'un vecteur ligne  $X_i^{(n)}$ , où  $i = 1 \dots P$  indique le pixel. On centre le jeu de données en soustrayant à chaque image l'image moyenne, de sorte que chaque vecteur représente la déviation de l'image  $n$  (avec  $1 \leq n \leq N$ ) à la valeur moyenne commune. On travaille donc avec

$$\tilde{X}_i^{(n)} = X_i^{(n)} - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_i^{(k)}.$$

Le jeu de données dans son entier peut être organisé dans une seule matrice, appelée  $B$ , de dimension  $N \times P$ . De cette manière l'élément  $B_{i,j}$  sera le  $j$ -ème pixel de la  $i$ -ème image centrée. Le principe de fonctionnement de la PCA consiste à calculer la matrice de covariance entre les différents pixels  $S = B^T B / (N - 1)$ ,  $B^T$  étant la transposée

de la matrice  $B$ , et à la diagonaliser pour extraire les composantes principales (qui seront les vecteurs propres) et leur poids (qui coïncident avec les valeurs propres). Les éléments diagonaux de cette matrice contiennent la variance entre les pixels, les éléments non diagonaux quantifient la corrélation entre pixels. Si par exemple les images ne contiennent que du bruit, il n'y a pas de corrélation entre les pixels et la matrice est diagonale. Si au contraire les images contiennent un profil atomique, dans ce cas la densité dans un pixel donnée est fortement corrélée à la densité des pixels voisins, et la matrice de corrélation aura des éléments hors diagonale non nuls.

La matrice de covariance s'écrit donc :

$$S_{ij} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \tilde{X}_i^n \tilde{X}_j^n = \frac{1}{N-1} (B^T B)_{ij}, \quad (3.1)$$

qu'on veut diagonaliser en résolvant l'équation aux valeurs propres

$$\Sigma Y = \lambda Y. \quad (3.2)$$

La dimension de  $S$  est  $P \times P$ , donc très grande, ce qui rend la diagonalisation très difficile<sup>1</sup>.

Une astuce de calcul consiste à diagonaliser à sa place une matrice plus petite. En effet on peut montrer que son rang est au plus  $N$ , puisqu'on est parti de  $N$  images indépendantes.

Si  $Y$  est un vecteur propre de  $S$  avec la valeur propre  $\lambda$

$$SY = \frac{1}{N-1} B^T B Y = \lambda Y, \quad (3.3)$$

alors  $Z = BY$  est vecteur propre de la matrice  $N \times N$  carrée, obtenue en multipliant à gauche par  $B$ ,  $\Sigma = BB^T / (N-1)$  avec la même valeur propre  $\lambda$  :

$$\frac{1}{N-1} BB^T B Y = \lambda B Y. \quad (3.4)$$

Ainsi  $S$  et  $\Sigma$  ont le même spectre, avec au plus  $N$  valeurs propres réelles non nulles<sup>2</sup>.

C'est donc  $BB^T$ , une matrice  $N \times N$  ( $N \times N \ll P \times P$ ), qu'on essaye de diagonaliser afin de résoudre l'équation aux valeurs propres pour le vecteur  $Z = BY$ . Connaissant un vecteur propre  $Z$  de  $\Sigma$ , le vecteur propre de  $S$  correspondant sera simplement  $Y = B^T Z$ . Ces vecteurs sont enfin orthogonaux puisque la matrice  $S$  est réelle et symétrique.

Dans le cas d'un grand nombre d'images  $N$  et de pixels  $P$  la diagonalisation de  $S$  et  $\Sigma$  est difficile à calculer. Cependant, puisqu'on est intéressé *a priori* seulement par

1. Tout le jeu de données étant stocké dans une matrice  $P \times N$ , la dimension de la matrice  $(B^T B)_{ij}$  est donc  $P \times P$ , où  $P$  est le nombre de pixels d'une image (typiquement  $P = 60 \times 60$ ).

2. Pour la précision, le nombre de valeurs propres sera  $\min(P, N) - 1$ , où le  $-1$  est dû au fait que les images sont centrées. En effet, si j'ai  $N$  images, j'ai  $N$  informations, mais puisque j'enlève la moyenne, j'aurai  $N - 1$  informations. Si de plus deux images sont identiques j'aurai deux fois la même valeur propre (par exemple dans la limite où l'on prend  $N$  fois la même image, on aura seulement une valeur propre).

les composantes avec la plus grande variance, la diagonalisation peut se faire par des méthodes itératives en commençant par les plus grandes valeurs propres [115].

On définit les composantes principales (ou PCs) associées en normalisant les vecteurs propres à l'unité. Les composantes principales forment une base orthonormale. Chaque image peut être donc reconstruite comme somme de l'image moyenne et les contributions pondérées de chaque composante principale, le poids de chaque composante étant calculé en projetant l'image centrée sur la composante principale correspondante. Une petite valeur propre signifie que la contribution du vecteur propre (donc la composante principale) est négligeable pour décrire le jeu de données. De plus, si lors de la recombinaison de l'image on ne sélectionne que les composantes les plus importantes, l'image reconstruite sera filtrée du bruit [84].

### 3.3 Préparation du gaz

Le point de départ est le gaz quasi-2D produit dans le piège quadrupolaire habillé par la radiofréquence, décrit en 2.2.6. Les fréquences de piégeage, mesurées suivant la procédure décrite en 2.5, sont  $\omega_x = 2\pi \times 33$  Hz,  $\omega_y = 2\pi \times 44$  Hz et  $\mu/(\hbar\omega_z) \sim 1.5$ . La détection se fait *in situ* suivant l'axe vertical, et la densité optique pic est maintenue inférieure à 6 en repompant seulement une petite fraction du nuage, de l'état fondamental hyperfin  $F = 1$  vers la transition cyclante utilisée pour l'imagerie. Ainsi on limite les problèmes de saturation de l'absorption (voir l'annexe A).

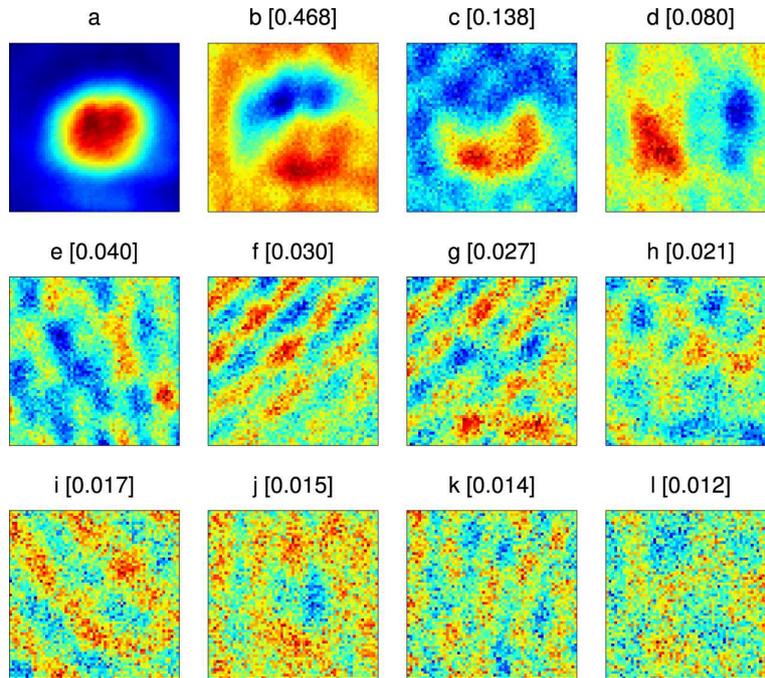
#### 3.3.1 Analyse du bruit

On commence par analyser une série de 27 images prises dans les mêmes conditions et sans exciter le nuage. Les images ne seront pas parfaitement identiques à cause des vibrations mécaniques, de la lumière parasite, des fluctuations du nombre d'atomes. La décomposition PCA identifie toutes ces sources de bruit, comme l'illustre la fig. 3.2.

La figure 3.2(c) représente probablement les fluctuations du nombre d'atomes (voir figure 3.3), les figures 3.2(b) et (d) indiquent des vibrations de la caméra [108] et les composantes suivantes (figures 3.2(e) à (h)) reflètent la présence de franges d'interférence dans le profil d'intensité de la sonde. Pour chacune de ces composantes, la valeur propre correspondante indique son poids sur la variance totale.

#### 3.3.2 Excitation du nuage et analyse des modes

Une excitation sélective des modes est possible grâce au contrôle précis de la géométrie du piège, à travers la radiofréquence ou le champ magnétique. Dans le but de prouver que l'algorithme de la PCA associe chaque mode d'oscillation à une composante principale, on déplace le minimum du piège, on tourne ses axes et on varie légèrement les fréquences de piégeage, de façon à exciter un grand nombre de modes. Dans le nouveau piège le gaz est ainsi hors équilibre et on enregistre son évolution en prenant des images (133 en tout) après différents temps d'attente, couvrant un intervalle de temps jusqu'à 100 ms.



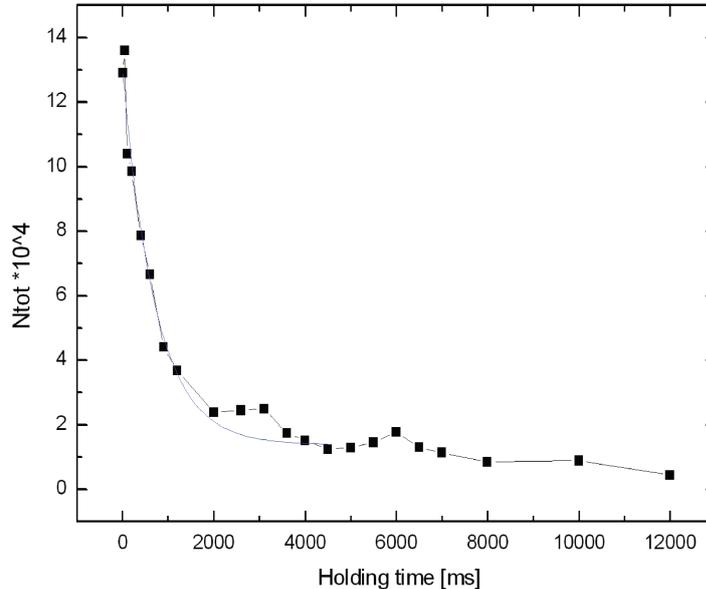
**Figure 3.2** — Analyse du bruit en utilisant la PCA. Figure a : image moyenne ( $61 \times 61$  pixels). Figures b à l : les premières 11 composantes principales, par ordre de valeur propres décroissantes. Le nombre entre crochets est la valeur propre de la composante principale, exprimée comme fraction de la variance totale.

*Noise analysis using PCA. Figure a : averaged image ( $61 \times 61$  pixels). Figures b through l : the eleven largest principal components, sorted by decreasing eigenvalue. The number in brackets is the eigenvalue of the principal component, expressed as a fraction of the total variance.*

On applique la PCA à ce nouveau jeu de données. Le résultat, illustré dans la figure 3.4, montre que par rapport à la figure 3.2 les composantes principales ont changé.

Les deux premières (figure 3.4(b) et (c)) montrent deux lobes orientés respectivement le long de deux axes orthogonaux : cela est caractéristique de l'oscillation dipolaire. Ce mouvement du centre de masse est dû au déplacement du minimum du piège lors de l'excitation. La troisième composante principale (figure 3.4 (d)) indique une variation globale du signal, qui peut être interprétée comme une variation du nombre total d'atomes. Cela est dû en partie à la durée de vie finie des atomes dans le piège : au fur et à mesure que le temps d'attente dans le piège final augmente on perd de plus en plus d'atomes. La quatrième composante (figure 3.4 (e)) possède le motif à 4 lobes caractéristique de l'excitation ciseaux [25]. Les lobes sont orientés à  $45^\circ$  par rapport aux axes du piège (alignés avec les deux premières composantes principales). Les deux composantes suivantes (figure 3.4(f) et (g)) sont des modes de compression : un minimum de densité au centre correspond à un maximum de densité sur les bords du nuage.

Les composantes principales sont présentées par valeur propre décroissante : elles contribuent de moins en moins à la variance totale. Pour ce jeu de données l'excitation principale est l'oscillation du centre de masse, suivie par la réponse à la rotation des



**Figure 3.3** – Mesure de durée de vie des atomes dans la configuration initiale du piège (compression à 109 A,  $\nu_{RF} = 850$  kHz). On mesure le nombre d’atomes *in situ* suivant l’axe verticale après différents temps d’attente dans le piège.

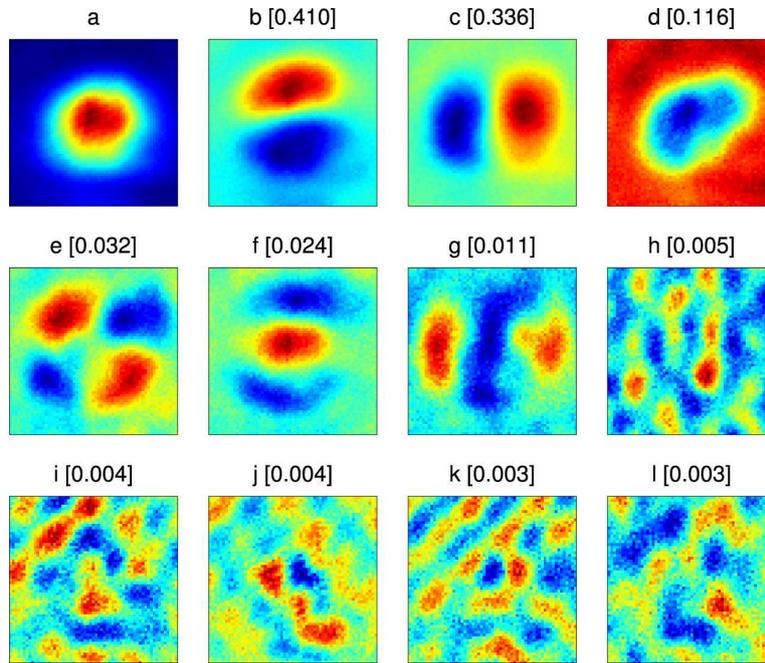
*Atoms’s lifetime measurement, in the initial trapping configuration (compression current 109 A,  $\nu_{RF} = 850$  kHz). We measured the atoms number in situ in the vertical axis after different holding times.*

axes du piège et par la compression du piège. Dans une autre expérience on a vérifié que le mode ciseaux n’apparaît pas si les axes du piège n’étaient pas tournés pendant l’excitation.

### 3.3.3 Oscillations des poids de chaque PC

Pour regarder comment le poids de chaque composante principale varie dans le temps, on projette la série de données centrée sur les composantes. On obtient ainsi l’évolution temporelle montrée dans la figure 3.5 pour trois PCs différentes.

On considère d’abord les deux premiers poids (figure 3.4 (b) et (c)) : ils oscillent sinusoïdalement à des fréquences égales à celles du piège (33 Hz et 44 Hz), comme attendu pour les deux modes dipolaires. Cela prouve que la PCA a identifié correctement, comme composantes indépendantes, le mouvement du centre de masse du nuage suivant les axes de piégeage. L’oscillation du mode ciseaux est plus compliquée. Le meilleur ajustement est donné par une somme de trois sinusoides à 12 Hz, 55 Hz et 77 Hz. Cela est lié au fait qu’à la fois la partie thermique et la partie superfluide du gaz sont présentes dans la composante ciseaux trouvée par la PCA [25]. La présence simultanée des trois fréquences a été déjà mise en évidence dans des condensats de Bose-Einstein tridimensionnels [26] à travers des ajustements bimodaux des profils d’intensités de la partie superfluide et de la partie thermique du gaz. Pour nos paramètres l’oscillation de la fraction superfluide se produit à  $\omega_{hd} = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ , tandis que la fraction thermique oscille à  $\omega_{\pm} = |\omega_x \pm \omega_y|$  (une explication sera donnée dans le chapitre suivant).



**Figure 3.4** – Premières composantes principales d’un jeu de données de 133 images ( $61 \times 61$  pixels). La figure a est l’image moyenne, et les images successives (b jusqu’à l) sont les composantes principales par ordre de valeur propre décroissante. Le nombre entre parenthèses est la valeur propre correspondante, exprimée comme fraction de la variance totale.

*First principal components of an ensemble of 133 images ( $61 \times 61$  pixels sampling an interval of 100 ms. Figure a is the mean, and the subsequent images (b through l) are the first principal components sorted by decreasing eigenvalue. The number into brackets is the corresponding eigenvalue, expressed as a fraction of the total variance.*

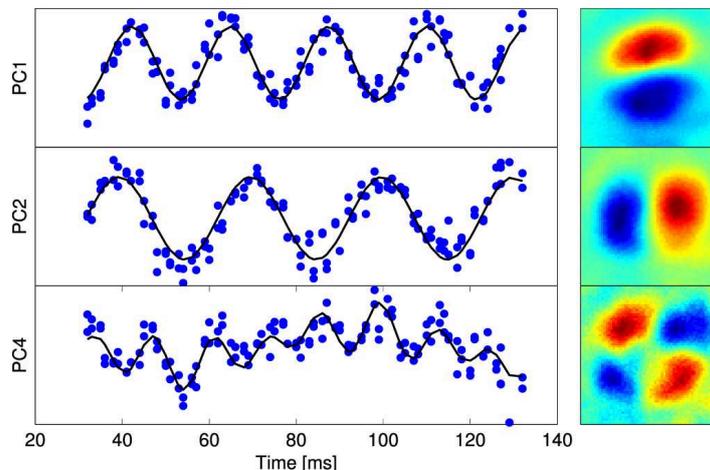
Les composantes (f) et (g) de la figure 3.4 sont les modes monopole et quadrupole. On s’attendrait donc à que leurs poids oscillent aux fréquences propres de ces modes qui, pour un piège 2D anisotrope<sup>3</sup>, valent [116, 117] :

$$\omega_M^2 = \frac{3}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \sqrt{\omega_x^2 \omega_y^2 + \frac{9}{4}(\omega_x^2 - \omega_y^2)^2}, \quad (3.5)$$

$$\omega_Q^2 = \frac{3}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2) - \sqrt{\omega_x^2 \omega_y^2 + \frac{9}{4}(\omega_x^2 - \omega_y^2)^2}. \quad (3.6)$$

Cependant, leur poids n’étant pas suffisamment grands, on n’a pas réussi à ajuster leurs oscillations et identifier ces fréquences. Les simulations numériques présentées dans la section 3.5 montreront qu’il s’agit bien du mode monopole et quadrupole.

3. Dans le cas d’un piège 2D isotrope de fréquence  $\omega_0$  ces fréquences se simplifient à  $\omega_M = 2\omega_0$  et  $\omega_Q = \sqrt{2}\omega_0$ .



**Figure 3.5** — Les disques bleus représentent le poids des deux dipôles et des ciseaux en fonction du temps. Les lignes noires sont leurs ajustements sinusoïdaux. L'échelle verticale est arbitraire et indépendante pour chaque courbe. La première composante principale peut être identifiée avec la plus forte direction de confinement horizontale, oscillant à 44 Hz, la deuxième à la plus faible direction de confinement, correspondant à une fréquence de 33 Hz. La troisième composante présente une oscillation plus compliquée, à 12 Hz, 55 Hz et 77 Hz. On estime avec la procédure de fit une incertitude sur la fréquence de 1 Hz.

*Solid blue disks : time-dependent weight of the two dipoles and scissors components. Solid black line : sinusoidal fit to the data. The vertical scale is arbitrary and independent for each curve. The first principal component can be identified with the strongest horizontal harmonic trap direction, oscillating at 44 Hz, the second to the weakest, corresponding to a frequency of 33 Hz. The third component exhibits a more complicated behavior, with oscillations at 12 Hz, 55 Hz and 77 Hz. The uncertainty of the frequency determination is estimated at the 1-Hz level by the fitting procedure.*

### 3.4 Composantes principales et modes de Bogoliubov

La question qu'on s'est d'abord posée a été de savoir si l'on peut identifier les composantes principales avec les modes de Bogoliubov.

On peut montrer que l'approche de Bogoliubov mène à une expression équivalente à la matrice des covariances diagonalisée, ce qui nous permettra d'identifier les modes propres du gaz piégé avec les composantes principales. Pour ce faire on part de la formulation hydrodynamique de l'équation de Gross-Pitaevskii, sous la forme de deux équations couplées pour la densité et la vitesse (1.45) et (1.46). La méthode de Bogoliubov montre que la densité  $n$  d'un gaz piégé peut se décomposer sur des modes propres discrets de fréquence  $\omega_n$  (avec  $n = 1 \dots M$ , où  $M$  est le nombre de modes).

Pour un condensat près de l'équilibre sa densité et sa vitesse peuvent être écrites sous la forme

$$n = n_0 + \delta n(\mathbf{r}, t), \quad (3.7)$$

où  $n_0$  est la densité à l'équilibre et  $\delta n(\mathbf{r}, t)$  représente les fluctuations, et

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} + \delta \mathbf{v}, \quad (3.8)$$

qu'on peut écrire dans notre cas puisque le système est quasiment à l'équilibre (on n'aurait pas le droit d'écrire la vitesse de cette manière si par exemple le gaz était en rotation). Les équations hydrodynamiques (1.45) et (1.46) réécrites avec (3.7) et (3.8) donnent à l'ordre zéro :

$$\nabla \left( V_{trap}(\mathbf{r}) + gn_0 - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n_0}} \nabla^2 \sqrt{n_0} \right) = 0, \quad (3.9)$$

et à l'ordre 1

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 \delta \mathbf{v}) = 0, \quad (3.10)$$

$$m \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left( g \delta n + \frac{dQP(n)}{dn} \Big|_{n=n_0} \delta n \right) = 0, \quad (3.11)$$

où  $QP(n) = \left( \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \nabla^2 \sqrt{n} \right)$  est le terme de pression quantique. Ces deux équations couplées conduisent à

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left\{ \frac{n_0}{m} \nabla \left[ \left( g + \frac{dQP(n)}{dn} \Big|_{n=n_0} \right) \delta n \right] \right\} = 0. \quad (3.12)$$

On cherche une solution de la forme

$$\delta n(\mathbf{r}, t) = \delta n(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \phi), \quad (3.13)$$

qui insérée dans (3.12) donne :

$$\omega^2 \delta n(\mathbf{r}) - \frac{1}{m} \nabla \cdot \left\{ n_0 \nabla \left[ \left( g + \frac{dQP(n)}{dn} \Big|_{n=n_0} \right) \delta n(\mathbf{r}) \right] \right\} = 0. \quad (3.14)$$

Cette équation, linéaire en  $\delta n$ , représente une équation aux valeurs propres dont  $\delta n$  est le vecteur propre et  $\omega^2$  la valeur propre. On peut montrer que l'opérateur apparaissant dans l'équation (3.14) est réel et symétrique, les vecteurs propres  $\{\delta n_m(\mathbf{r})\}$  sont donc orthonormés :  $\int \delta n_m(\mathbf{r}) \delta n_{m'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \propto \delta_{m,m'}$ . On peut alors écrire la densité spatiale  $n$  comme sa valeur moyenne plus une combinaison linéaire sur toutes les  $\delta n_m$  possibles, de fréquence  $\omega_m$  :

$$n = n_0 + \sum_m c_m \delta n_m(\mathbf{r}) \cos(\omega_m t + \phi_m). \quad (3.15)$$

Le coefficient  $c_m$  est proportionnel à la population dans le mode propre  $m$ , de fréquence  $\omega_m$  et phase initiale de l'excitation  $\phi_m$ .

Si maintenant on reprend le calcul de la matrice de covariance (3.1), on peut noter qu'il revient à multiplier les profils de densité centrés ( $n - n_0$ ), dont l'expression est donnée par (3.15) :  $\delta n = n - n_0 = \sum_m c_m \delta n_m(\mathbf{r}) \cos(\omega_m t + \phi_m)$ . On a donc

$$S_{ij} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^N \sum_{m,m'} c_m \delta n_m(r_i) \cos(\omega_m t_n + \phi_m) c_{m'} \delta n_{m'}(r_j) \cos(\omega_{m'} t_n + \phi_{m'}), \quad (3.16)$$

ou bien

$$S_{ij} = \frac{1}{N-1} \sum_{m,m'} c_m c_{m'} \delta n_m(r_i) \delta n_{m'}(r_j) \sum_{n=0}^N \cos(\omega_m t_n + \phi_m) \cos(\omega_{m'} t_n + \phi_{m'}). \quad (3.17)$$

Le produit des cosinus à droite dans (3.17) se décompose en un terme proportionnel à  $\cos((\omega_m + \omega_{m'})t_n + \phi_m + \phi_{m'})$  et un terme  $\propto \cos((\omega_m - \omega_{m'})t_n + \phi_m - \phi_{m'})$ . Le premier terme se moyenne à zéro si on explore suffisamment de temps  $t_n$  différents, tandis que le deuxième tend vers  $N\delta_{m,m'}$ . Dans le cas de notre expérience la phase initiale de l'excitation est fixe et on fait varier le temps en prenant des images après différents temps d'attente  $t_n$  dans le piège après l'excitation, mais on pourrait également envisager de regarder à temps fixe et au contraire faire varier la phase initiale, par exemple en forçant l'excitation pendant différents temps pour chaque prise d'image. Au final on obtient donc :

$$S_{ij} = \frac{N}{2(N-1)} \sum_m c_m^2 \delta n_m(r_i) \delta n_m(r_j), \quad (3.18)$$

En définissant la matrice  $B = (b_{ij})$  avec  $b_{ij} = c_i \delta n_i(r_j)$ , sa transposée est  $B^T = (b'_{ij})$  avec  $b'_{ij} = c_j \delta n_j(r_i)$  et on retrouve l'expression (3.2)  $S \propto B^T B$ , où

$$(B^T B)_{ij} = \sum_m c_m \delta n_m(r_i) c_m \delta n_m(r_j) = \sum_m c_m^2 \delta n_m(r_i) \delta n_m(r_j) = \sum_m b'_{im} b_{mj}.$$

De la même manière, en multipliant à gauche par  $B$ , on peut définir la matrice  $\Sigma \propto B B^T$  :

$$\Sigma_{ij} \propto \sum_m c_i \delta n_i(r_m) c_j \delta n_j(r_m) = c_i c_j \sum_m \delta n_i(r_m) \delta n_j(r_m) = c_i^2 \delta_{ij}$$

qui, grâce à l'orthogonalité des  $\delta n_m$ , est diagonale. De cette manière on voit que les modes propres coïncident avec les vecteurs propres de la PCA, ce qui veut dire qu'on a utilisé la bonne base, la base propre, pour la décomposition.

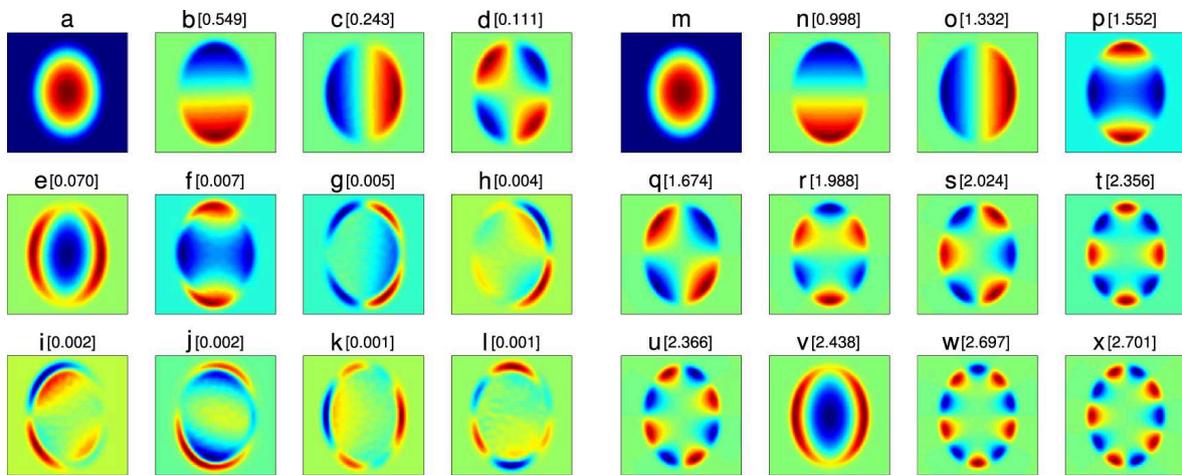
De ces considérations on peut en tirer deux conclusions. La première est que la PCA identifie correctement les modes propres les plus excités du système<sup>4</sup>. En effet  $\delta n$  est le produit entre la fonction d'onde moyenne et la fonction d'onde du mode  $\delta n = 2\psi_0 \delta\psi = 2\sqrt{n_0} \delta\psi$  : en connaissant  $\sqrt{n_0}$ , on peut remonter à la fonction d'onde du mode  $\delta\psi$ . La deuxième est que le temps total d'échantillonnage  $T$  doit être assez grand, afin de résoudre le battement entre deux différents modes  $T \gg (\min_{k \neq k'} |\omega_k - \omega_{k'}|)^{-1}$ . Expérimentalement on a pu constater qu'un temps total d'acquisition  $T$  de l'ordre de la période de battement est suffisant, voir par exemple la figure 3.5. Si la durée totale du temps d'acquisition ou la fréquence d'échantillonnage ne sont pas suffisamment grandes, cela n'empêche pas de faire une analyse des PCA. Tout simplement on ne pourra pas résoudre par exemple deux modes ayant fréquences proches. Un critère qu'on a trouvé expérimentalement pour poser une limite inférieure au nombre d'images acquises a été d'en prendre suffisamment pour que les deux modes dipolaires soient bien résolus et leurs axes bien identifiés avec ceux du piège.

4. À condition que le coefficient  $c_m^2$  associé au mode  $m$  (qui est proportionnel au nombre d'atomes dans ce mode) soit suffisamment grand pour sortir du bruit.

### 3.5 Simulations numériques

Romain Dubessy a effectué une simulation numérique pour comparer les composantes principales et les modes normaux, que je présenterai ici. On utilise pour le nuage un modèle de champ moyen, à température nulle et à 2D, et on effectue une simulation qui reproduit la séquence expérimentale. On extrait ensuite les profils de densité simulés en utilisant un échantillonnage temporel régulier pour obtenir un jeu de données de 152 images.

On applique la PCA sur cette série et on compare le résultat avec les vrais modes normaux du piège, obtenus en utilisant les équations de Bogoliubov-de Gennes.



**Figure 3.6** — Comparaison entre les composantes principales et les modes propres du nuage. À gauche : analyse en composantes principales du nuage, obtenu par une simulation numérique de l’expérience, après six périodes d’oscillations, suivant l’axe de piégeage le plus faible. L’image moyenne (figure a) et les premières 11 composantes principales sont classées par valeurs propres décroissantes, indiquées entre crochets et normalisées à la variance totale. À droite : profil de densité du nuage (figure m) et les 11 premiers modes de Bogoliubov du gaz dans le piège final. Les modes sont classés par fréquence croissante, indiquée entre parenthèses en unités de  $\omega_x$ .

*Comparison of the principal components and the exact normal modes of the trapped cloud. Left panel : principal component analysis of the cloud shape during oscillations for six trap periods (of the weakest axis). The average cloud (image a) and the first 11 principal components are shown by decreasing eigenvalue, indicated between brackets (and normalized to the total variance). Right panel : density profile of the cloud (image m) and the first 11 Bogoliubov modes for a gas at rest in the final trap. The modes are sorted by increasing mode frequency, indicated between brackets in units of  $\omega_x$ .*

La figure 3.6 résume le résultat obtenu des simulations. Sur la gauche sont reportés les résultats obtenus avec la PCA : les premières composantes sont les mêmes que sur figure 3.4 sauf pour les variations du nombre d’atomes, qui ne sont pas prises en compte

dans la simulation. En particulier on observe les modes dipôles, ciseaux, monopole et quadrupole (figure 3.6(b) à (f)).

Cette interprétation est confirmée par le calcul des modes normaux dans la figure 3.6 à droite, et en particulier par les profils d'intensité des figures 3.6(n)-(q) et (v). Pour comparer de manière quantitative ces profils on calcule le produit scalaire entre l'image de la composante principale et celle du mode propre. On trouve un bon recouvrement pour les premières cinq composantes principales projetées sur le mode propre correspondant (dipôles : 99.7% et 99.4%, ciseaux : 98.5%, monopole : 98.8% et quadrupole 89.2%). Cela prouve que les premières composantes principales peuvent être identifiées avec un mode normal bien défini. Comme j'avais mentionné à la section 3.3.3, l'analyse des oscillations du poids des composantes (f) et (g) de la figure 3.4 n'avait pas permis d'identifier ces deux profils avec les modes monopole et quadrupole. Les simulations montrent qu'ils sont présents dans notre piège, et qu'ils oscillent aux fréquences attendues (3.5) et (3.6). On peut noter que le profil du mode monopole dans la figure 3.6 ((e) et (v)) ne correspond pas à celui que donne la PCA (dans la figure 3.4 profil (f), et également pour le profil du mode quadrupole ((f) et (p) dans la figure 3.6 et (g) dans la figure 3.4). Cela s'explique par le fait que dans les simulations les axes sont tournés par rapport à l'expérience, et que le code couleur est arbitraire pour chaque série d'images.

Pour confirmer ce résultat on compare les fréquences d'oscillation des composantes principales  $\omega_{pca}$  (obtenues avec un ajustement sinusoïdal du poids, dépendent du temps, des profils de densité simulés) avec la fréquence du mode donnée par les équations de Bogoliubov-de Gennes  $\omega_{diag}$  et avec le modèle hydrodynamique analytique  $\omega_{th}$  [85]. Les résultats obtenus avec les données de la figure 3.6 sont reportés dans le tableau 3.1.

Label	$\omega_{pca}$	$\omega_{diag}$	$\omega_{th}$
Dipôle (x)	0.999	0.998	1
Dipôle (y)	1.332	1.332	1.334
Quadrupole	1.547	1.552	1.548
Ciseaux	1.674	1.674	1.667
Monopole	2.441	2.438	2.438

**Tableau 3.1** — Comparaison entre les fréquences d'oscillation des premières composantes principales  $\omega_{pca}$ , les fréquences des modes de Bogoliubov  $\omega_{diag}$  et d'un modèle Thomas-Fermi hydrodynamique  $\omega_{th}$ . Toutes les fréquences sont données en unités de la plus petite fréquence dipolaire  $\omega_x$ .

*Comparison of the first principal component oscillation frequency  $\omega_{pca}$  with the Bogoliubov mode frequency  $\omega_{diag}$  and a hydrodynamic Thomas-Fermi model  $\omega_{th}$ . All frequencies are given in units of the smallest dipole frequency  $\omega_x$ .*

On trouve que pour les premières composantes principales la simple oscillation sinusoïdale ajuste correctement les données et donne une valeur compatible avec la théorie de Bogoliubov-de Gennes. Pour les modes collectifs on s'attend à ce que la valeur correcte pour la fréquence soit donnée par la procédure de diagonalisation, puisque le modèle hydrodynamique est seulement une approximation. Il y a un excellent accord

entre  $\omega_{pca}$  et  $\omega_{diag}$  pour les valeurs reportées dans le tableau 3.1, ce qui valide l'interprétation de nos résultats expérimentaux. Cependant, cela n'est pas vrai pour les composantes principales ayant une petite variance, qui possèdent une oscillation compliquée. On observe que pour ces composantes le recouvrement avec les modes n'est pas suffisant : la PCA n'est pas capable de les identifier.

On peut conclure de cet exemple que la PCA est un moyen robuste de mettre en évidence les modes excités dominants dans un gaz ultra-froid hors équilibre. Une fois les composantes principales isolées, la PCA nous permet d'extraire la dépendance temporelle du mode sans qu'il y ait besoin de faire d'hypothèse sur le modèle à adopter.

## 3.6 Conclusion

On a montré dans ce chapitre que la PCA est un moyen robuste de mettre en évidence les modes excités dominants dans un gaz ultra-froid hors équilibre.

Il faut pourtant mentionner le fait que, comme il s'agit d'une méthode statistique, un des inconvénients de la PCA est que le jeu de données doit recouvrir un nombre de configurations suffisamment large pour que les corrélations entre deux modes différents se moyennent à zéro. En particulier, pour résoudre deux modes de fréquences proches, le temps d'acquisition total doit être plus grand que la période de battement. Cependant, si les populations des deux modes sont très différentes, ce qui résulte en contributions à la variance totale très différentes, la PCA peut les séparer de manière efficace, même pour des courts temps d'observation. En plus, un bruit blanc est présent dans chaque composante de Fourier, tandis qu'il est filtré par la PCA. En conclusion, on a montré que la PCA fournit un outil statistique puissant pour analyser des jeux de données, aussi bien expérimentaux que numériques. Appliquée à systèmes dépendants du temps, elle permet une reconnaissance des modes normaux, une mesure de leur fréquences et de leur populations sans besoin de reposer sur un modèle. Pour cela on s'attend à qu'elle puisse être employée dans l'étude de systèmes où les fluctuations jouent un rôle majeur, comme la création de défauts dans le mécanisme de Kibble-Zurek [39] ou les corrélations entre paires vortex-antivortex dans un superfluide bidimensionnel [87].

## 3.7 Annexe : simulations numériques

Le système est modélisé par une équation de Gross-Pitaevskii à 2D et  $T=0$  :

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left( \frac{\Delta^2}{2} + V(x,y) + g_{2D} N |\Psi|^2 \right) \Psi, \quad (3.19)$$

où  $t$  est exprimé en unités de  $\omega_x^{-1}$ ,  $x$  et  $y$  en unités de  $a_x = \sqrt{\hbar/(M\omega_x)}$ , et  $\Psi \equiv \Psi(x,y,t)$  en unités de  $a_x^{-1}$ .  $M$  est la masse atomique,  $N$  le nombre d'atomes, et  $g_{2D} = \sqrt{8\pi} a_s / a_z$  est la constante de couplage réduite, où  $a_s$  est longueur de diffusion et  $a_z = \sqrt{\hbar/(M\omega_z)}$  est la taille de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique. Le potentiel est :

$$V(x + x_0, y + y_0) = \alpha \frac{(x \cos \theta + y \sin \theta)^2 + \epsilon (x \sin \theta - y \cos \theta)^2}{2}, \quad (3.20)$$

où  $\epsilon = \omega_y^2/\omega_x^2$  quantifie l'anisotropie du piège et l'angle  $\theta$  est l'angle de rotation des axes du piège. Les paramètres auxiliaires  $x_0$ ,  $y_0$  et  $\alpha$  peuvent être utilisés pour déplacer et comprimer le piège.

Le tableau 3.2 résume en détail les valeurs des paramètres qui apparaissent en (3.20) avant et après l'excitation.

	$\alpha$	$\epsilon$	$x_0$	$y_0$	$\theta$
Initial	0.95	1.68	0.5	0.25	10°
Final	1	1.78	0	0	0°

**Tableau 3.2** — Valeurs des paramètres du potentiel de piégeage utilisé dans la simulation avant et après l'excitation.

*Values of the trapping potential parameters used in the simulation before and after the excitation.*

# Chapitre 4

## Mode ciseaux et superfluidité

### 4.1 Introduction

L'étude des excitations élémentaires est une des techniques standard utilisées pour caractériser les propriétés de systèmes quantiques à  $N$  corps. Ces excitations déterminent les propriétés thermodynamiques et peuvent expliquer, par exemple, la superfluidité de l'hélium liquide.

Dans le contexte de l'étude des condensats de Bose-Einstein elles sont obtenues en linéarisant les équations hydrodynamiques ou, de manière équivalente, l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps (voir 1.4).

L'étude expérimentale des modes collectifs a commencé tout de suite après l'obtention du premier condensat de Bose-Einstein par Cornell et Ketterle à travers les oscillations de taille dans un piège en forme de disque [22] et de cigare [23] respectivement. Elle a été ensuite poursuivie par de nombreuses équipes, dans différentes géométries de piégeage, espèces atomiques et dimensionnalités du système [59, 118, 119, 120, 121], et un amortissement et à un déplacement de la fréquence des modes propres du condensat à cause de l'interaction de ce dernier avec le nuage thermique a été mise en évidence [119, 118, 24].

En particulier, D. Guéry-Odélin et S. Stringari en 2009 ont montré que, parmi ces modes, le mode ciseaux peut être utilisé pour sonder le caractère superfluide du gaz [25]. La première étude expérimentale de ce mode a été réalisée par le groupe de C. Foot, dans l'objectif de prouver la superfluidité d'un condensat 3D [59].

Pour une géométrie quasi-2D on dispose d'une étude numérique, présentée par Simula, Davis et Blakie dans [122]. D'un point de vue expérimental le cas quasi-2D a été exploré en premier par notre équipe, dans le cadre de la thèse de K. Merloti [58]. Une mesure des fréquences et amortissements des modes monopole, quadrupole et ciseaux ont mis en évidence le caractère superfluide du gaz et un amortissement dû à la population thermique des modes de Bogoliubov.

Cependant à l'époque la méthode d'analyse n'avait pas permis la mesure de la fréquence la plus basse de l'observable ciseaux dans un gaz thermique, prédite dans [25,

[122] et il n'était pas possible d'avoir accès au potentiel chimique  $\mu$  et à la température de façon quantitative.

Ces dernières années nous avons implémenté une méthode d'ajustement des données permettant de déduire ces deux paramètres, ce qui a permis de réaliser une étude plus quantitative. Cela représente le sujet de ce quatrième chapitre. Non seulement nous avons à présent accès à ces deux quantités, mais nous employons aussi une nouvelle technique pour l'analyse de la dynamique du gaz, appelée « analyse de la moyenne locale », qui a permis la mesure de la fréquence la plus basse, pas encore observée jusqu'à ce moment. Dans le même esprit que la LDA, en supposant que la densité reste constante dans la zone étudiée, cette technique consiste en une mesure locale des fréquences d'oscillation et amortissements du mode ciseaux, ce qui permet non seulement de prouver le caractère superfluide du gaz, mais aussi d'identifier dans le nuage l'endroit où la transition BKT a lieu [80].

## 4.2 Piège anisotrope et mode ciseaux

En reprenant la description des modes collectifs d'un gaz piégé dans un potentiel à symétrie cylindrique (1.50), je considère maintenant le cas où une légère anisotropie du piège brise la symétrie, traité par S. Stringari et D. Guéry Odélin en [25]. Le potentiel de piégeage peut se réécrire :

$$V_{trap}(x,y,z) = \frac{m}{2}\omega_x^2 x^2 + \frac{m}{2}\omega_y^2 y^2 + \frac{m}{2}\omega_z^2 z^2, \quad (4.1)$$

avec  $\omega_x^2 = \omega_0^2(1 + \epsilon)$  et  $\omega_y^2 = \omega_0^2(1 - \epsilon)$ , où  $\epsilon$  donne la déformation du piège dans le plan  $(x,y)$ . Du fait de la rupture de symétrie, le nuage est soumis à un couple  $\mathbf{r} \times (\nabla V_{trap})/m)_z \propto \epsilon xy$  et le moment cinétique est couplé au mode quadrupolaire [74]; pour cette raison une étude des modes de surface donne accès à des informations sur le moment d'inertie du nuage [123]. Parmi les modes de surface on trouve le mode ciseaux. Il peut être excité par une rotation, rapide et de petite amplitude, du potentiel de piégeage autour de l'axe  $z$ . Si l'angle de rotation  $\theta$  est assez petit, le nuage atomique commence à osciller par rapport aux axes de symétrie du potentiel de piégeage, et cette oscillation se fait de manière différente pour la phase normale et pour la phase superfluide coexistant dans le gaz.

### 4.2.1 Oscillation de la fraction superfluide

À température nulle les équations décrivant cette oscillation sont obtenues à partir de l'équation de Gross-Pitevskii dans le régime Thomas-Fermi (1.36) et on peut montrer que le mouvement de la partie superfluide est celui d'un pendule dans le plan  $(x,y)$  :

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2\omega_0^2\theta = 0, \quad (4.2)$$

dont la solution correspondant aux conditions initiales  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\theta'(0) = 0$ , est une oscillation harmonique  $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$  à la fréquence  $\omega = \sqrt{2}\omega_0 = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} \equiv \omega_{hd}$ .

### 4.2.2 Oscillation de la fraction normale

Une description de l'oscillation dans le régime classique peut se faire à partir des équations de Boltzmann avec la méthode des moyennes [124]. Cela mène à un système de quatre équations couplées :

$$\begin{aligned}
\frac{d\langle xy \rangle}{dt} &= \langle xv_y + yv_x \rangle \\
\frac{d\langle xv_y + yv_x \rangle}{dt} &= (\omega_x^2 + \omega_y^2)\langle xy \rangle + 2\langle v_x v_y \rangle \\
\frac{d\langle v_x v_y \rangle}{dt} &= \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{2}\langle xv_y + yv_x \rangle - \frac{\langle v_x v_y \rangle}{\tau} - \frac{\omega_y^2}{2}\langle yv_x - xv_y \rangle \\
\frac{d\langle yv_x - xv_y \rangle}{dt} &= (\omega_y^2 - \omega_x^2)\langle xy \rangle
\end{aligned} \tag{4.3}$$

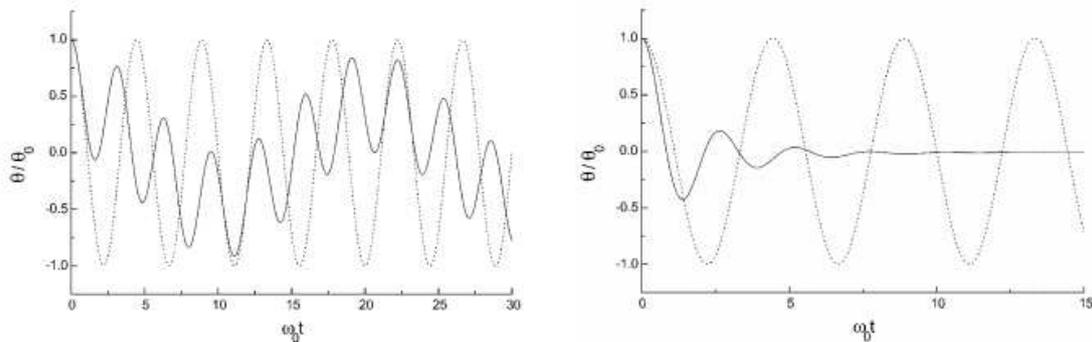
Le temps de relaxation introduit dans la troisième équation est  $\tau = 5/(4\gamma_{coll})$  (pour un système à 3D) [25], proportionnel à l'inverse du taux de collisions  $\gamma_{coll} = n(0)v_{th}\sigma/2$ , où  $n(0)$  est la densité pic du nuage,  $v_{th} = \sqrt{8k_B T/\pi m}$  est la moyenne de la norme de  $v$ , et  $\sigma = 8\pi a_s^2$  la section efficace de collisions élastiques. Les conditions initiales correspondant à une rotation rapide des axes propres de symétrie du piège sont données par  $\langle xy \rangle_{t=0} = \epsilon\theta_0\langle x^2 + y^2 \rangle_{t=0}$ ,  $\langle xv_y + yv_x \rangle_{t=0} = 0$  et  $\langle v_x v_y \rangle_{t=0} = 0$ . On peut déterminer numériquement pour chaque  $\tau$  la solution de ces quatre équations (4.3). On indique cette solution  $f_\tau(t) = \langle xy \rangle(t)$ , avec les conditions initiales  $f_\tau(0) = \langle xy \rangle_0$  (une valeur arbitraire différente de zéro),  $\langle yv_x - xv_y \rangle_{t=0} = 0$  et  $\langle v_x v_y \rangle_{t=0} = 0$ . Pour des petites valeurs de  $\tau$  cette fonction est proche d'un cosinus amorti avec fréquence  $\omega_{hd}$ , pour des grandes valeurs de  $\tau$  elle est proche de la somme de deux cosinus amortis avec fréquences  $\omega_\pm = |\omega_x \pm \omega_y|$ .

On peut montrer que les deux premières équations de (4.3) peuvent être réécrites sous la forme :

$$\left( \frac{d^4\theta(t)}{dt^4} + 4\omega_0^2 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 4\epsilon^2\omega_0^4\theta \right) + \frac{1}{\tau} \left( \frac{d^3\theta(t)}{dt^3} + 2\omega_0^2 \frac{d\theta(t)}{dt} \right) = 0, \tag{4.4}$$

avec des conditions initiales  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $\theta''(0) = 2\omega_0^2\theta(0)$  et  $\theta'(0) = \theta'''(0) = 0$ . L'équation (4.4) à deux solutions, se propageant une à basse et l'autre haute fréquence, la branche inférieure étant comprise entre  $[0, \omega_-]$ , et la branche supérieure dans l'intervalle  $[\omega_{hd}, \omega_+]$ , où  $\omega_\pm = |\omega_x \pm \omega_y|$ . On peut identifier deux régimes limites : le régime sans collisions  $\omega_0\tau \gg 1$ , caractérisé par la présence de deux fréquences non amorties  $\omega_\pm = |\omega_x \pm \omega_y|$ , et le régime hydrodynamique  $\omega_0\tau \ll 1$ , où seulement la solution haute fréquence  $\omega_{hd} = \sqrt{2}\omega_0 = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$  survit, l'autre étant suramortie (puisque  $\tau \rightarrow 0$ ).

Je montrerai par la suite que dans notre expérience la phase normale du gaz est toujours peu dense et se situe dans le régime sans collisions (voir fig. 4.10) : l'observation de la fréquence  $\omega_{hd}$  ne peut donc être justifiée que par la présence d'une fraction superfluide dans le nuage.



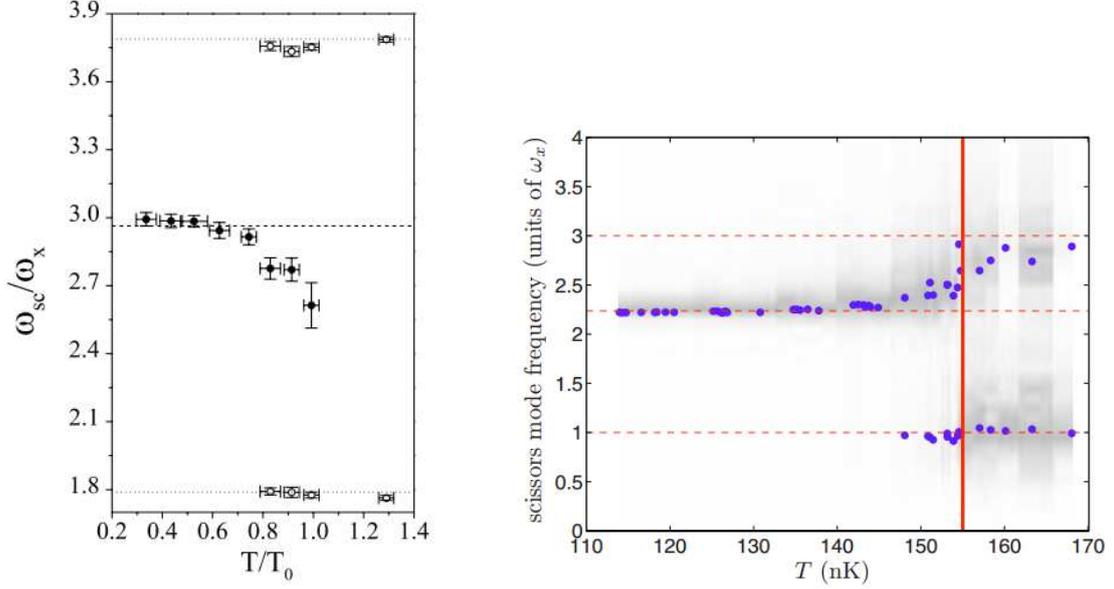
**Figure 4.1** — Figure extraite de [25] montrant l’angle  $\theta$  en fonction du temps pour un gaz classique (ligne continue) et dans le régime superfluide (ligne pointillée). À gauche le gaz classique est dans le régime sans collisions ( $\epsilon\omega_0\tau = 6$  and  $\epsilon = 0.3$ ), tandis que à droite le gaz classique se trouve dans le régime hydrodynamique ( $\epsilon\omega_0\tau = 0.5$  and  $\epsilon = 0.3$ ).

*Figure taken from [25] showing the angle  $\theta$  as a function of time for a classical gas (solid line) and for the superfluid regime (dashed line). On the left the classical gas is in the collisionless regime ( $\epsilon\omega_0\tau = 6$  and  $\epsilon = 0.3$ ), while on the right the classical gas is in the hydrodynamic regime ( $\epsilon\omega_0\tau = 0.5$  and  $\epsilon = 0.3$ ).*

### 4.3 Le modèle adopté dans notre expérience

À température suffisamment basse les trois fréquences  $\omega_+$ ,  $\omega_-$  et  $\omega_{hd}$  prédites pour un gaz classique sont présentes,  $\omega_{hd}$  étant relative à la fraction superfluide dans notre système. Le fait qu’on puisse explorer tous les deux régimes prédits par (4.4), a suggéré l’adoption de ce modèle classique. Bien que a priori il ne décrit pas un gaz partiellement superfluide dont la phase normale est sans collisions, une justification de la validité de cette hypothèse sera donnée par la suite (voir 4.5.3). Pour des régimes intermédiaires un modèle théorique est encore manquant. On dispose des résultats expérimentaux obtenus pour un gaz 3D dans le groupe de C. Foot [59]. Le nuage a été excité en tournant les axes du piège et à partir des images (prises après temps de vol et pour différents temps d’attente) ils ont extrait par un fit gaussien la valeur de l’angle du nuage par rapport aux axes du pièges. La fréquence d’oscillation de l’angle permet de sonder le caractère superfluide du gaz, et l’étude de son évolution en fonction de la température a mis en évidence un décalage négatif, pour des températures croissantes autour de la température critique (voir Fig. 4.2 à gauche). Pour une géométrie quasi-2D, au contraire, un décalage positif pour des températures croissantes est prévu par une simulation numérique [122] : la fréquence passe rapidement de la valeur  $\omega_{hd}$ , prédite pour un superfluide, vers la fréquence classique la plus haute  $\omega_+$  (voir Fig. 4.2 à droite). On cherche des solutions à (4.4) sous une forme exponentielle complexe  $\theta = \theta_0 e^{i\Omega t}$  où la fréquence complexe  $\Omega$  est définie par  $\Omega = \omega + i\gamma$ . Le signal étant proportionnel à  $\propto \text{Re}[e^{i\Omega t}] = \text{Re}[e^{i\omega t} e^{-\gamma t}] = \cos(\omega t) e^{-\gamma t}$ , il consiste en une oscillation harmonique à la fréquence  $\omega$ , amortie avec un taux  $\gamma$ . L’eq. (4.4) devient

$$\Omega^4 - 4\omega_0^2\Omega^2 + 4\epsilon^2\omega_0^4 + \frac{i}{\tau}(\Omega^3 + 2\Omega\omega_0^2), \quad (4.5)$$



**Figure 4.2** — Décalage de la fréquence du mode ciseaux en fonction de la température. À gauche : résultats expérimentaux extraits de [26] pour un gaz 3D. À droite : simulation pour un gaz de Bose quasi-2D extraite de [122]. Le trait vertical en rouge indique la transition BKT.

*Temperature dependent frequency shift of the scissors excitation of the condensate. On the left : figure taken from [26] for a 3D gas. On the right : simulation for a quasi-2D Bose gas taken from [122]. The vertical red line indicates the BKT transition.*

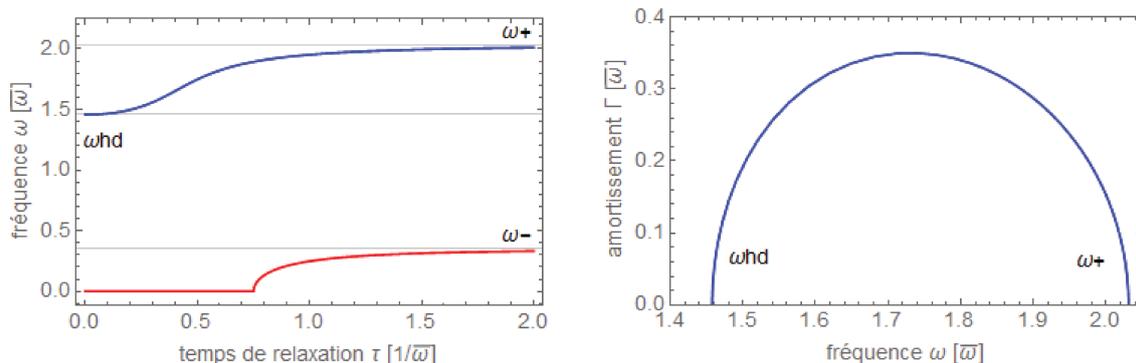
et en utilisant les relations  $2\omega_0^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 = \omega_{hd}^2$  et  $\epsilon = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{2\omega_0^2} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2\omega_0}$  on peut la réécrire sous la forme :

$$i\frac{\Omega}{\tau}(\Omega^2 \quad \omega_{hd}^2) + (\Omega^2 \quad \omega_+^2)(\Omega^2 \quad \omega_-^2) = 0, \quad (4.6)$$

Dont les solutions sont reportées dans la figure 4.3.

## 4.4 Réalisation expérimentale

On a vu au paragraphe 4.2 que le mode ciseaux consiste en une oscillation angulaire de l'axe du gaz, et pour que ce dernier soit bien défini le gaz doit être anisotrope. On utilise pour cela une radiofréquence pour l'habillage des atomes polarisée linéairement : deux antennes produisent un signal en phase avec deux amplitudes légèrement différentes, qui se traduit en deux fréquences de piégeage  $\omega_x \neq \omega_y$ , avec  $\omega_x = 2\pi \times 33.8 \pm 0.2$  Hz et  $\omega_y = 2\pi \times 48.0 \pm 0.2$  Hz. L'anisotropie est alors  $\epsilon = (\omega_y^2 - \omega_x^2)/(\omega_y^2 + \omega_x^2) = 0.34$ . La fréquence verticale est  $\omega_z = 2\pi \times 1.83 \pm 0.01$  kHz. Les fréquences ont été mesurées suivant la procédure décrite en 2.5.

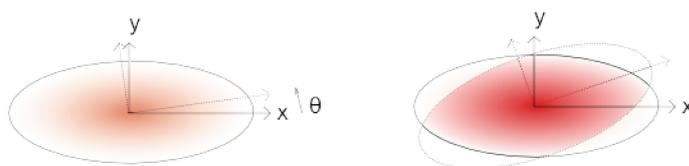


**Figure 4.3** — À gauche : solutions de l'équation (4.6). On distingue les deux branches : une basse qui croit de 0 à  $\omega_-$  et une haute qui croit de  $\omega_{hd}$  à  $\omega_+$ . À droite : amortissement  $\Gamma$  pour la branche supérieure en fonction de  $\omega$ , solution de l'équation (4.6). Les valeurs sont données en unités de  $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_x \omega_y}$ .

*On the left : solutions of the equation (4.6). We can distinguish two branches : the low one going from 0 to  $\omega_-$ , the higher one going from  $\omega_{hd}$  to  $\omega_+$ . On the right : damping  $\Gamma$  of the upper branch as a function of  $\omega$ , solution of the equation (4.6). The values are given in units of  $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_x \omega_y}$ .*

#### 4.4.1 Excitation du mode ciseaux

Le mode ciseaux est excité en tournant rapidement l'orientation des axes horizontaux du piège, d'un angle  $\theta \sim 10^\circ$  en  $400\mu s$ , tout en maintenant les fréquences du piège constantes. Cela se fait en appliquant simultanément aux deux antennes une rampe linéaire de puissance, l'une croissante et l'autre décroissante, de manière à garder à peu près le même couplage ( $\frac{\Omega_R}{2\pi} = 30$  kHz pour nos paramètres).



**Figure 4.4** — Excitation du mode ciseaux en tournant les axes du piège

*Scissors mode's excitation by turning the trapping axis*

#### 4.4.2 Régime quasi-2D

Le système se trouve dans le régime quasi-2D puisque l'énergie de confinement selon l'axe vertical est comparable au potentiel chimique et à la température  $\hbar\omega_z \sim \mu_{2D}, k_B T$ . La fréquence de piégeage suivant  $z$  vaut  $\omega_z = 2\pi \times 1.83$  kHz et l'énergie correspondante  $\hbar\omega_z = h \times 1830$  Hz =  $k_B \times 88$  nK est comparable à la température et au potentiel

chimique, qui dans ce régime vaut  $\mu_{2D} = \hbar\bar{\omega}\sqrt{\frac{N\tilde{g}}{\pi}}$ , où  $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_x\omega_y}$ , et la constante de couplage vaut  $\tilde{g} = \sqrt{8\pi}a/l_z = 0.1056$  (voir (1.25)). Pour ces paramètres la fraction d'atomes qui peuple les états excités selon  $z$  est toujours inférieure à 20% : le système présente donc les caractéristiques de la physique 2D.

#### 4.4.3 Potentiel chimique réduit

Dans un gaz homogène avec  $\tilde{g} = 1.056$ , la transition BKT est attendue pour une densité dans l'espace des phases de  $\mathcal{D}_c = 8.188$ , qui correspond à un potentiel chimique réduit  $\alpha_c = \mu/(k_B T) = 0.162$ . Cette valeur augmente légèrement en tenant compte de la population dans états excités de l'oscillateur harmonique [125] : la densité dans l'espace des phases critique devient  $\mathcal{D}_c = 11.2$  dans notre expérience (correspondant à  $\alpha_c = \mu/(k_B T) = 0.19$ ). Pour explorer la physique du gaz autour de la transition normale-superfluide on prépare différents nuages en faisant varier la température et le nombre total d'atomes, de sorte à faire varier le potentiel chimique réduit des deux cotés du seuil, avec des valeurs comprises dans l'intervalle [0.09 – 0.88]. La température est ajustée en faisant varier la valeur finale du couteau RF dans la dernière phase de préparation du nuage, tandis que le nombre d'atomes est ajusté en variant le temps d'attente dans le piège final : les atomes chauffent à cause des collisions et sont éjectés du piège par le couteau rf, résultant en une baisse du nombre total d'atomes et en une température constante.

#### 4.4.4 Potentiel chimique et température avant excitation

Pour déterminer les propriétés du nuage à l'équilibre on suit la procédure décrite dans [66]. Sans exciter le nuage, on prend une image *in situ* des atomes dans le piège initial en utilisant une impulsion sonde de faible intensité ( $\sim 0.7I_{sat}$ ) pour bien imager les ailes du nuage, thermiques et peu denses optiquement. Le centre du nuage, au contraire, sera écrêté, puisque la sonde sera entièrement absorbée avant qu'elle ne traverse tout le nuage. Le profil d'intensité est ajusté avec un modèle Hartree Fock incluant jusqu'aux dix premiers états excités selon  $z$ . De cette procédure on déduit le potentiel chimique  $\mu$  et la température  $T$  [66]. Le nombre d'atomes total et l'efficacité de détection sont calibrés indépendamment en observant le nuage après temps de vol suivant l'axe horizontal. Le nombre d'atomes dans l'état fondamental de l'oscillateur harmonique vertical  $N_{0z}$  sont estimés à partir des valeurs de  $\mu$  et  $T$  obtenues et de l'équation d'état du gaz quasi-2D. L'hypothèse que le système se trouve dans le régime quasi 2D a été vérifiée par des simulations Monte Carlo Quantique pour nos paramètres, effectuées par Markus Holzmann. Les paramètres à l'équilibre pour les différents nuages sont résumés dans le tableau 4.1.

#### 4.4.5 Excitation du nuage et prise des images

Une fois les propriétés à l'équilibre déterminées, on excite le nuage en tournant les axes du piège et on observe la dynamique en prenant des images après différents temps

Données	$\mu/h$ (Hz)	$T$ (nK)	$\alpha_0 = \mu_0/k_B T$	$N_{0z}/N$
1	$2165 \pm 380$	$133 \pm 7$	$0.78 \pm 0.18$	0.90
2	$2651 \pm 190$	$157 \pm 5$	$0.81 \pm 0.08$	0.88
3	$2633 \pm 68$	$167 \pm 4$	$0.76 \pm 0.04$	0.86
4	$2936 \pm 84$	$161 \pm 3$	$0.88 \pm 0.04$	0.88
5	$2057 \pm 63$	$148 \pm 3$	$0.67 \pm 0.03$	0.86
6	$3081 \pm 91$	$200 \pm 4$	$0.74 \pm 0.04$	0.82
7	$3169 \pm 85$	$209 \pm 4$	$0.73 \pm 0.03$	0.81
8	$3598 \pm 140$	$227 \pm 5$	$0.76 \pm 0.05$	0.8
9	$396 \pm 86$	$217 \pm 5$	$0.09 \pm 0.02$	0.42
10	$1955 \pm 130$	$254 \pm 5$	$0.37 \pm 0.03$	0.59

**Tableau 4.1** – Propriétés du gaz à l’équilibre, avant l’excitation ciseaux : le potentiel chimique  $\mu$ , la température  $T$ , le potentiel chimique réduit au centre  $\alpha_0 = \mu_0/k_B T$  et le ratio entre le nombre d’atomes dans l’état fondamental de l’oscillateur harmonique vertical  $N_{0z}$  et le nombre d’atomes total  $N$ . Les données de la figure 4.5 et 4.7 correspondent aux séries 1 et 9. La série 7 est également utilisée dans la figure 4.7 et 4.8.

*Equilibrium properties of the cold atom ensembles, prior to the scissors excitation : chemical potential  $\mu$ , temperature  $T$ , reduced chemical potential at the trap centre  $\alpha_0 = \mu_0/k_B T$  and ratio of the number of atoms in the vertical oscillator  $N_{0z}$  to the total atom number  $N$ . The data plotted in 4.5 and 4.7 come from datasets 1 and 9. Dataset 7 is also used for figure 4.7 and 4.8.*

d’attente, typiquement trois par temps d’attente, jusqu’à 200 ms. Les images sont prises *in situ* suivant l’axe vertical, et avec une sonde d’intensité moyenne ( $I \sim 8_{sat}$ ), afin de résoudre à la fois les ailes et le centre du nuage. La densité au centre est cependant sous-estimée avec cette intensité sonde, ce qui n’est pas critique dans la mesure où le mode ciseaux est un mode de surface qui affecte peu le centre du nuage. De chaque image on extrait l’observable  $\langle xy \rangle$ . Les détails techniques et la méthode d’analyse sont expliqués au paragraphe suivant.

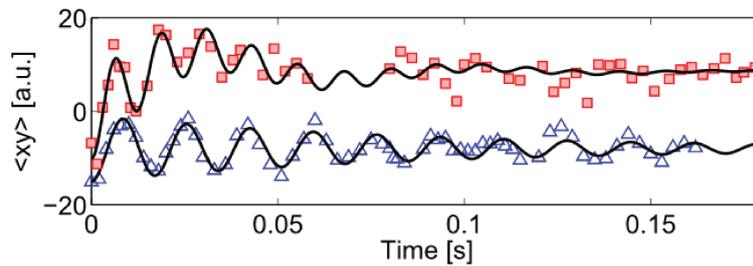
## 4.5 Analyse des données

### 4.5.1 Calcul de la moyenne et méthode d’ajustement

Avant de rentrer dans les détails de l’analyse, il est nécessaire d’expliquer comment la moyenne  $\langle xy \rangle$  est calculée. Chaque image est une matrice de pixels, chacun repéré par deux indices  $(i, j)$ . D’après la procédure de calibration (décrite dans la section relative à l’imagerie), on connaît la correspondance entre le signal d’un pixel et le nombre d’atomes  $M_{ij}$  dans la région imagée correspondante. Ce signal peut être interprété comme une probabilité : on peut en effet obtenir une normalisation à l’unité en divisant par le nombre total d’atomes  $p_{ij} = M_{ij}/N_{tot}$ . On peut alors calculer par exemple  $\langle x \rangle = \sum_{ij} p_{ij} x_i$ ,  $\langle y \rangle = \sum_{ij} p_{ij} y_j$  et  $\langle xy \rangle = \sum_{ij} p_{ij} x_i y_j$ . Pour qu’elle soit reliée au mode ciseaux, l’observable  $\langle xy \rangle$  doit être calculée dans le repère non pas de la caméra mais

du piège tourné. L'identification des axes propres du piège est rendue possible grâce au mode dipôle, toujours faiblement excité en même temps que le mode ciseaux : un ajustement de l'oscillation du centre de masse nous donne accès aux fréquences de piégeage, au centre du nuage et à l'orientation des axes par rapport à la caméra.

La figure 4.5 montre des points expérimentaux, c'est à dire les oscillations de  $\langle xy \rangle$  pour deux séries de données, en fonction du temps d'attente dans le piège final. Les carrés correspondent à un nuage thermique ( $\alpha = 0.09$ ), les triangles à un gaz dégénéré ( $\alpha = 0.78$ ).



**Figure 4.5** — Oscillations de  $\langle xy \rangle$ , où  $\langle xy \rangle$  est calculée sur le nuage entier. Chaque point est obtenu en moyennant deux mesures.

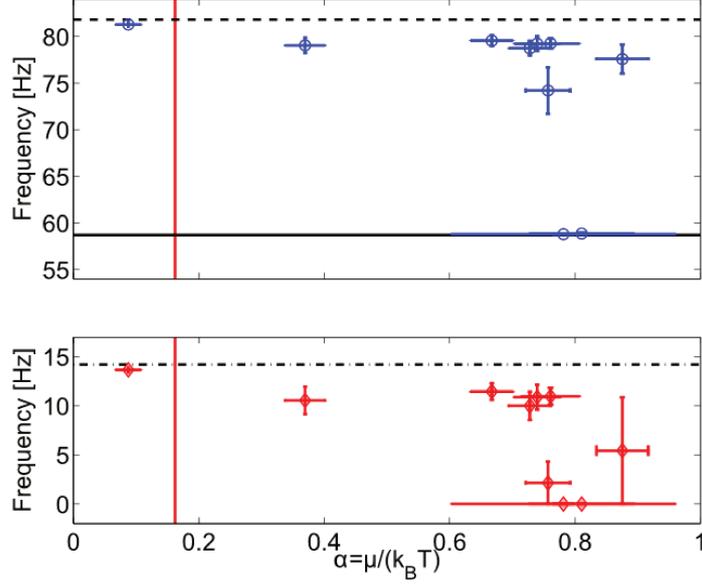
*Oscillations of the  $\langle xy \rangle$  average. Here  $\langle xy \rangle$  is computed on the whole cloud. Each point is an average of two measurements.*

On peut noter sur la figure 4.5 que pour le nuage thermique (données représentées avec des carrés) il est difficile de déterminer avec un ajustement sinusoïdal si une ou deux fréquences sont présentes. Pour cette raison on a introduit une nouvelle méthode pour extraire des données les fréquences du mode ciseaux, que je détaillerai dans le paragraphe suivant. L'idée générale est de déterminer le  $\tau$  qui mieux ajuste le  $\langle xy \rangle(t)$ , et ensuite utiliser ce paramètre pour trouver la fréquence complexe  $\Omega$  solution de (4.6).

Pour chaque série de données,  $\langle xy \rangle$  présente des oscillations amorties, qu'on indique avec la fonction  $f_\tau(t) = \langle xy \rangle(t)$ , comme mentionné dans la section 4.2.2. On choisit ensuite les trois paramètres réels  $A, B$  et  $\tau$  pour que la fonction  $g(\tau, A, B) : t \rightarrow Af_\tau(t) + B$  ajuste au mieux les données. Le  $\tau$  ainsi trouvé, permet de résoudre l'équation (4.6) et extraire fréquences et taux d'amortissement à partir de la fréquence complexe  $\Omega$ , reportées dans la fig. 4.3. Cela est possible parce qu'on peut effectuer une mesure précise et indépendante 2.5 des fréquences de piégeage  $\omega_x$  et  $\omega_y$ , nous permettant de connaître les valeurs de  $\omega_{hd}$  et  $\omega_\pm$  à insérer dans (4.6).

### 4.5.2 Moyenne calculée sur le nuage entier

Une première analyse a été effectuée en calculant la moyenne  $\langle xy \rangle$  sur le nuage entier. Les fréquences mesurées en fonction du potentiel chimique réduit  $\alpha = \mu/(k_B T)$  sont reportées dans la figure 4.6. Pour  $\alpha < \alpha_c$  on reconnaît les deux fréquences classiques  $\omega_\pm$ . Pour  $\alpha > \alpha_c$  on trouve une fréquence  $\omega_{hd}$ , ou deux fréquences légèrement en dessous de la valeur classique  $\omega_\pm$ . Les données confirment donc une augmentation de



**Figure 4.6** — Fréquences d’oscillation mesurées en fonction du potentiel chimique réduit au centre  $\alpha_0 = \mu_0 / (k_B T)$ . Les points bleus correspondent à la branche haute fréquence, les losanges en rouge correspondent à la branche basse fréquence. Les lignes horizontales indiquent les fréquences attendues dans les limites de basse et haute température : en continu  $\omega_{hd} / (2\pi)$ , en pointillé  $\omega_+ / (2\pi)$  et  $\omega_- / (2\pi)$ . La ligne verticale indique la position attendue pour la transition BKT  $\alpha_c = 0.162$  pour un gaz de Bose 2D avec nos paramètres. Les barres d’erreur sont les écarts-type estimés en utilisant les résidus du fit.

*Measured oscillations frequencies as a function of the reduced chemical potential at the center  $\alpha_0 = \mu_0 / (k_B T)$ . The blue circles correspond to the upper frequency branch, the red diamonds to the lower frequency branch. The three horizontal lines indicate the expected frequencies in the low/high temperature limits :  $\omega_{hd} / (2\pi)$  (solid line),  $\omega_+ / (2\pi)$  and  $\omega_- / (2\pi)$  (dashed lines). The vertical red solid line indicates the estimated position for the BKT transition  $\alpha_c = 0.162$  for a 2D Bose gas with our parameters. The error bars are the standard deviations estimated using the fit residuals.*

la fréquence de  $\omega_{hd}$  à  $\omega_+$  lorsque  $\alpha$  décroît, en accord avec les simulations 2D [122] et en opposition à ce qui a été observé dans le cas tridimensionnel [26]. Par rapport à l’analyse qui avait été effectuée lors de la thèse de K. Merloti (un fit de l’angle du nuage avec 11 paramètres libres), on observe pour la première fois la fréquence  $\omega_-$ . On remarque pourtant que le critère se basant sur l’observable  $\langle xy \rangle$  calculée sur tout le nuage n’est pas suffisant pour décrire le décalage en fréquence à la valeur critique de  $\alpha_c$ . En particulier, les fréquences caractéristiques de la phase normale  $\omega_{\pm}$  sont encore présentes pour  $\alpha > \alpha_c$ . En effet dans ces conditions phases normale et superfluide coexistent, et avec une moyenne  $\langle xy \rangle$  calculée sur le nuage entier il est difficile d’isoler leur signature respective.

### 4.5.3 Analyse de la moyenne locale

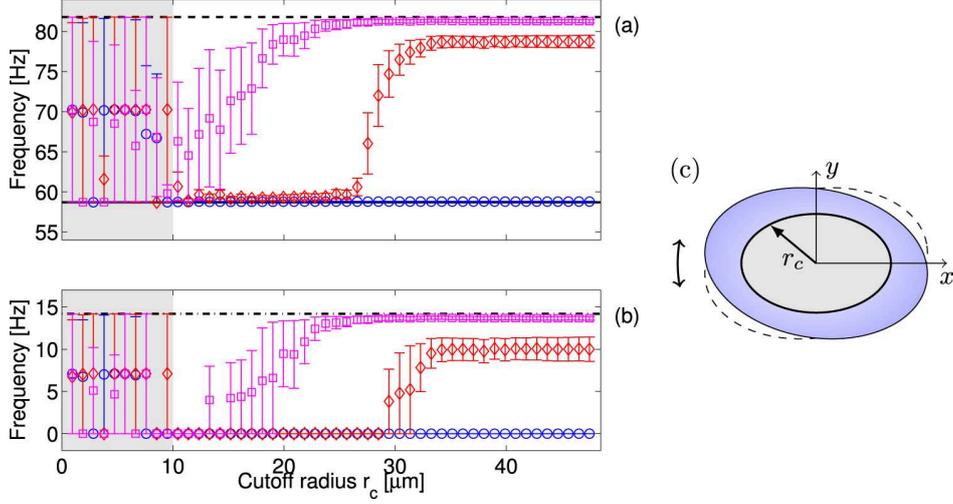
#### Moyenne sur un disque

En s'inspirant du principe de la LDA, on introduit une nouvelle technique d'analyse, appelée analyse de la moyenne locale. Cela consiste à calculer notre observable localement dans le nuage. En variant la zone de moyennage on explore sur le même nuage tous les régimes : du superfluide au centre au gaz normal dans les ailes. Cela permet donc d'isoler les signatures respectives de la phase normale et superfluide du gaz et mettre en évidence le décalage des fréquences autour de la transition. On procède de la manière suivante. La densité étant constante sur un ellipsoïde, on introduit un rayon effectif suivant une isodensité autour du centre du piège  $\bar{r} = \sqrt{(\omega_x/\omega_y)x^2 + (\omega_y/\omega_x)y^2}$  et on calcule l'observable  $\langle xy \rangle_{r_c}$  uniquement sur les pixels dans la région  $\bar{r} < r_c$ , de sorte à isoler la partie superfluide, localisée au centre du piège, de la partie normale, présente surtout dans les ailes. Pour trois nuages différents, la figure 4.7 présente les fréquences mesurées en fonction du rayon de coupure  $r_c$ . On observe que pour les données en bleu on mesure la fréquence  $\omega_{hd}$  partout dans le nuage : le nuage est entièrement superfluide. Pour les données en magenta on observe un décalage positif des fréquences en allant du cœur du nuage vers les ailes, mais on n'arrive pas à mesurer la fréquence superfluide. Le nuage est donc entièrement thermique. Pour les données en rouge par contre on peut définir trois couronnes.

- Pour  $r_c < 10\mu m$  on n'est pas capable d'identifier d'oscillations. Cela peut s'expliquer par le fait que l'excitation ciseaux est un mode de surface et n'affecte pas le cœur du nuage.
- Pour  $10 < r_c < 30\mu m$  une seule fréquence est présente, en bon accord avec la prédiction pour la fréquence hydrodynamique  $\omega_{hd}$ . Cela n'avait pas été mis en évidence par l'analyse globale pour ce jeu de données (voir figure 4.6).
- Pour  $r_c > 30\mu m$  on retrouve le résultat obtenu aussi avec la première méthode : deux fréquences  $\omega_{\pm}$ , relatives à la phase normale.

#### Moyenne sur un anneau

On pousse l'analyse encore plus loin en réduisant la zone sur laquelle la moyenne  $\langle xy \rangle$  est calculée à un anneau d'isodensité centré sur  $\bar{r} = r_a$  et d'épaisseur  $\delta r = 4$  pixels (voir fig. 4.8(c)). On note  $\langle xy \rangle_{r_c}$  cette moyenne. La figure 4.8 montre les fréquences mesurées en fonction de  $r_a$  pour la série de données 7 (voir table 4.1), avec  $\alpha = 0.73$ . Les barres d'erreur sont plus grandes que dans le cas précédent à cause du fait que la moyenne est calculée sur un nombre plus petit de pixels. Cette analyse est plus sensible aux changements de fréquence : on voit clairement que les fréquences d'oscillation de  $\langle xy \rangle$  autour du point de transition changent, de la valeur hydrodynamique aux deux fréquences thermiques, en accord avec les prédictions théoriques. Elle est aussi plus précise dans la localisation de l'endroit de la transition BKT : en accord avec les simulations, la transition a lieu à une distance d'environ  $20\mu m$  du centre du nuage, tandis que précédemment on l'avait localisé plutôt à  $30\mu m$ . Cela peut s'expliquer par



**Figure 4.7** — Fréquences d’oscillation de l’observable  $\langle xy \rangle_{r_c}$  mesurées en fonction du rayon de coupure  $r_c$ . (a) correspond à la branche haute fréquence, (b) correspond à la branche basse fréquence. Chaque branche présente trois courbes, obtenues pour trois conditions expérimentales différentes :  $\alpha = 0.78$  (cercles bleus, données 1 de la Table 4.1),  $\alpha = 0.73$  (losanges rouges, données 7 de la Table 4.1) et  $\alpha = 0.09$  (carreaux magenta, données 9 de la Table 4.1). Les lignes continues horizontales correspondent aux trois fréquences attendues, comme dans la figure 4.6. Les zones grises correspondent à la partie centrale du nuage, où l’amplitude du signal est trop faible pour extraire une fréquence. Les barres d’erreur sont les écarts types calculés en utilisant la méthode des résidus. (c) Pour le calcul de  $\langle xy \rangle_{r_c}$  seulement les pixels qui se trouvent dans la région  $\bar{r} < r_c$  sont pris en compte (ellipse en gris).

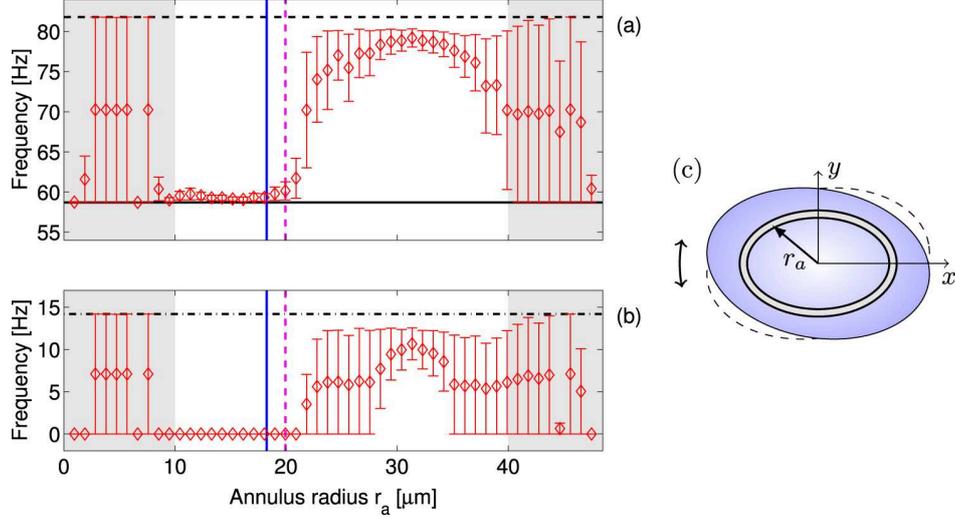
*Measured oscillation frequencies of the  $\langle xy \rangle_{r_c}$  observable as a function of the cutoff radius  $r_c$ . (a) corresponds to the upper branch, (b) to the lower branch. Measurements for three different experimental conditions are presented :  $\alpha = 0.78$  (blue circles),  $\alpha = 0.73$  (red diamonds) and  $\alpha = 0.09$  (magenta squares), see Table 4.1, data set number 1, 7 and 9. The three horizontal solid lines correspond to the three expected frequencies, as in figure 4.6. The grey shaded areas indicate the central part of the cloud where the signal to noise ratio is too small to extract a frequency. The error bars are the standard deviations estimated using the fit residuals. (c) The computation of  $\langle xy \rangle_{r_c}$  uses only the pixel located at a scaled radius  $\bar{r} < r_c$  (grey shaded ellipse).*

le fait que moyenné sur un disque donnait un poids trop important à la zone centrale, ce qui résultait en un décalage de la frontière à laquelle la transition a lieu.

Dans les figures précédentes on a tracé les fréquences en fonction de la distance  $r$  du centre. Le lien avec le potentiel chimique réduit est immédiat :

$$\alpha = \frac{\mu_0}{k_B T} \frac{m\omega_x^2\omega_y^2 r^2}{2}.$$

Au delà du fait qu’on a préféré réaliser le graphique avec la quantité mesurée expérimentalement, on voit tout se suite que les courbes ne se superposent pas l’une sur l’autre, comment attendu d’après l’universalité de la transition BKT. On observe que



**Figure 4.8** — Fréquences mesurées pour  $\langle xy \rangle_{r_a}$ , calculées sur un anneau d’isodensité au rayon  $r_a$  et d’épaisseur  $\delta r = 4$  pixels, comme montré en (c). Les barres d’erreur sont les écarts-type estimés en utilisant les résidus du fit. Les zones grises correspondent à un bas rapport signal à bruit, au centre du nuage (gauche) et dans les ailes (droite). Les deux lignes verticales sont des estimations pour la limite entre phases normale et superfluide dans un gaz quasi-2D, basées respectivement sur l’approximation de densité locale [125] (bleu continue), et sur le taux de collisions locales (magenta pointillé).

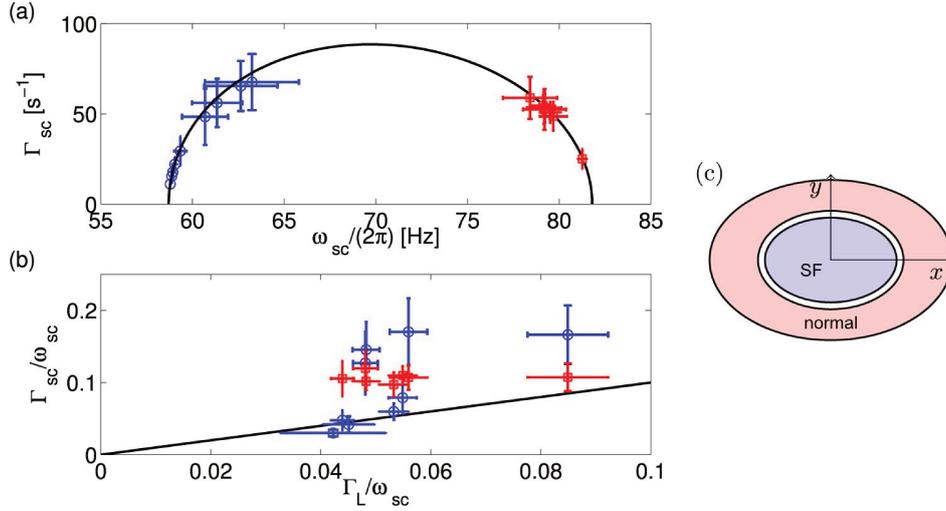
*Measured frequencies for  $\langle xy \rangle_{r_a}$ , computed on a thin annulus of width  $\delta r = 4$  pixels, centered on a given radius  $r_a$ , as sketched in (c). The error bars are the standard deviations estimated using the fit residuals. The grey shaded areas indicate the low signal to noise ratio regions, at the cloud center (left) and in the wings (right). The two vertical solid lines are estimates of the boundary between superfluid and normal phases in a trapped quasi-2D Bose gas, based on the local density approximation [125] (solid blue), and on the local collision time (dashed magenta).*

au contraire, elles dépendent de la température à cause des niveaux excités de l’oscillateur harmonique suivant  $z$ . En effet, des simulations Monte-Carlo effectuées par M. Holzmann ont montré que à cause des paramètres de notre piège on perd l’universalité de la transition BKT. En particulier, les effets de taille finie empêchent le saut de la densité superfluide (c’est à dire que  $n_s$  ne présente pas de discontinuité) et modifient légèrement la valeur du potentiel chimique réduit critique  $\alpha_c$ . En effet la densité superfluide s’annule pour un potentiel chimique réduit supérieur au cas idéal, ce qui dans notre piège correspond à un déplacement de l’endroit où la transition a lieu de  $2 \mu\text{m}$ . Ce décalage, et le fait qu’on moyenne sur une couronne qui a un certain épaisseur, peuvent expliquer le désaccord avec le potentiel chimique réduit critique théorique  $\alpha_c = 0.192$ .

### Amortissement

On vient maintenant à l’interprétation du temps typique local de relaxation  $\tau(r_a)$ , déduit de l’analyse locale. Sa valeur est en bon accord avec l’inverse du taux de collisions

locales  $\gamma_{coll}(r_a) \sim n_{2D}(r_a)\tilde{g}^2\hbar/m$ , évaluée par Petrov et Shlyapnikov [126], où  $n_{2D}(r_a)$  est la densité moyenne mesurée sur l'anneau. On part alors de  $\tau(r_a)$  pour estimer  $\gamma_{coll}(r_a)$  et remonter à la densité dans l'espace des phases, connaissant la température. La ligne magenta verticale dans la figure 4.8 indique le rayon où la densité dans l'espace des phases estimée de cette manière devient plus grande que la densité dans l'espace des phases critique  $\mathcal{D}_c = 11.2$ . L'analyse de la dynamique confirme donc la validité de cette limite entre phase normale et phase superfluide.



**Figure 4.9** — Dans la figure en haut à gauche sont reportés les taux d'amortissement et les fréquences mesurées pour la phase superfluide au centre (cercles bleus) et pour la phase normale (carrés rouges). Tous les points se placent sur la courbe noire, qui correspond à la prédiction du modèle classique (4.6) utilisé pour les ajuster. Dans la figure en bas à gauche sont reportés les taux d'amortissement en unité de fréquence ciseaux relatifs à la phase superfluide (cercles bleus) et normale (carrés rouges), en fonction du taux d'amortissement de Landau réduit (4.7), calculé pour chaque série à partir de mesures de  $\mu$  et  $T$ . La droite noire, de pente 1, est un guide pour les yeux. La figure sur la droite montre comment la contribution superfluide et celle de la phase normale ont été isolées dans le calcul de  $\langle xy \rangle$  : l'anneau blanc qui a été exclu correspond à la transition.

*The figure on the left (top) shows measured damping rate and frequencies for the central superfluid phase (blue circles) and for the normal phase (red squares), for all the datasets. All the points are on the black solid curve, which is the prediction of the classical model (4.6) used to fit them. The figure on the left (bottom) shows the measured damping rate, in units of the scissors oscillation frequency, for the central superfluid phase (blue circles) and for the normal phase (red squares), as a function of the reduced damping Landau rate of equation (4.7), estimated for each dataset from the values of  $\mu$  and  $T$ . The black solid line is a guide for the eye (slope 1). The figure on the right shows how the superfluid contribution is isolated from the normal phase for the computation of  $\langle xy \rangle$  : the excluded area (white annulus) corresponds to the crossover.*

Pour une analyse quantitative du taux d'amortissement de l'oscillation ciseaux sc

on considère seulement la branche supérieure, celle inférieure étant très amortie. On exclut la région annulaire où la transition a lieu, comme illustré dans 4.9 afin de mieux distinguer fréquence et amortissement de la phase normale de la phase superfluide. On compare les taux d'amortissement réduits  $\frac{sc}{\omega_{sc}}$  avec l'amortissement réduit de Landau  $\frac{L}{\omega_{sc}}$ , calculé par Fedichev et al. [127, 128].

$$\frac{L}{\omega_{sc}} = \frac{3\pi}{8} \frac{k_B T a_s}{\hbar c}, \quad (4.7)$$

où  $c = \sqrt{2\mu/(3m)}$  est la vitesse du son pour un gaz de Bose bidimensionnel [129]. Les nuages les plus froids présentent un amortissement de la fraction superfluide très proche de (4.7), mais pour les nuages avec une fraction thermique importante l'amortissement de la fraction superfluide s'éloigne de cette prédiction et il est du même ordre de grandeur que l'amortissement dans la phase normale, ce qui suggère qu'il est dû aux collisions avec le gaz normal. Au contraire, le taux d'amortissement réduit de la phase normale reste presque constant pour toutes les données.

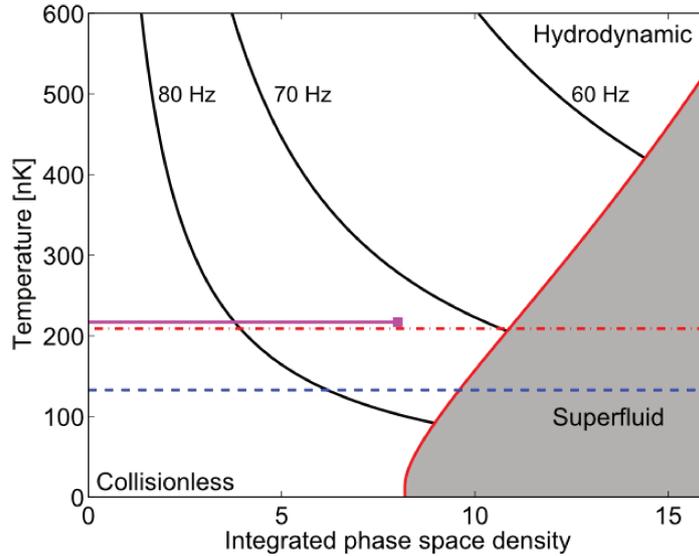
### Phase superfluide ou hydrodynamique classique ?

Dans le modèle classique la fréquence des oscillations du mode ciseaux prédite pour un gaz normal dans la limite hydrodynamique est la même que pour un gaz en phase superfluide. Il est donc nécessaire de vérifier que le système est loin du régime classique hydrodynamique avant de pouvoir affirmer que le gaz est superfluide à partir d'une mesure de  $\omega_{hd}$ . Pour s'en convaincre on part de mesures indépendantes pour les valeurs à l'équilibre de  $\mu$  et  $T$  et on évalue à quelle distance du centre le potentiel chimique réduit  $\alpha(\bar{r}) = \mu_{loc}(\bar{r})/k_B T$ , avec  $\mu_{loc}(\bar{r}) = \mu_0 - m\omega_x\omega_y\bar{r}^2/2$ , atteint la valeur critique pour la transition BKT [125]. Cela est indiqué sur la figure 4.6 par la ligne rouge verticale. On peut noter un léger décalage entre le saut observé et la prédiction, qui peut s'expliquer de deux manières :

- d'une part par le fait que près du rayon critique on moyenne sur une épaisseur qui contient les deux phases ;
- d'autre part par des effets de taille finie qui, dans un nuage piégé, modifient le seuil pour la transition BKT.

Markus Holzmann a effectué une simulation Monte Carlo quantique avec nos paramètres (communication privée), en montrant que le seuil de transition normal-superfluide est élargi d'environ  $2 \mu m$  dans notre système, et cela se traduit par la présence d'une fraction superfluide aussi pour des densités dans l'espace des phases inférieures à la densité critique.

Le diagramme de phase dans la figure 4.10 représente la densité dans l'espace des phases intégrée en  $z$  en fonction de la température. Un échantillon donné correspond à une ligne horizontale (température fixe) : en suivant cette ligne de gauche à droite on explore différentes densités dans l'espace des phases jusqu'à atteindre (ou non, selon les jeux de données) le seuil pour la transition BKT. On peut constater que la fraction normale du gaz se situe entièrement dans le régime sans collision. Cependant, pour le



**Figure 4.10** — Diagramme de phase d'un gaz de  $^{87}\text{Rb}$  quasi-2D dans un piège harmonique avec fréquence verticale  $\nu_z = 1830$  Hz et fréquences horizontales  $\nu_x = 33.8$  Hz et  $\nu_y = 48.0$  Hz. La région grise indique les paramètres pour lesquels une fraction superfluide finie est présente dans le système, selon la théorie BKT. Les trois courbes hyperboliques correspondent à une fréquence d'excitation du mode ciseaux donnée, fixée par le taux de collisions. Pour nos paramètres de piégeage le régime sans collisions correspond à des fréquences supérieures à 80 Hz, le régime hydrodynamique à des fréquences inférieures à 60 Hz. Les trois lignes horizontales balayent les paramètres explorés dans les trois jeux de données présentés dans la figure 4.7, du bord du nuage (faible densité dans l'espace des phases, à gauche), jusqu'au centre (forte densité dans l'espace des phases, à droite). Deux échantillons atteignent le régime superfluide. Pour la température la plus basse (tirets bleus), la phase classique se trouve loin dans les ailes du nuage et sa contribution à l'oscillation n'est pas observable.

*Phase diagram of a quasi two dimensional gas of  $^{87}\text{Rb}$  in a oblate trap with vertical frequency  $\nu_z = 1830$  Hz. The grey shaded area indicates the parameters for which a finite superfluid fraction exists in the system, according to the BKT theory. The three hyperbolic curves correspond to a given value of the classical scissors excitation frequency, set by the collision rate, in an harmonic trap with in-plane frequencies  $\nu_x = 33.8$  Hz and  $\nu_y = 48.0$  Hz. The collisionless (hydrodynamic) region corresponds to frequencies above 80 Hz (below 60 Hz) with our trap parameters. The three horizontal lines scan the parameters explored in the three datasets presented in figure 4.7, from the edge of the cloud (low phase space density, left) to its center (high phase space density, right). The superfluid regime is reached for two of the samples. For the lowest temperature (dashed blue), the classical phase is located at the very edge of the cloud, and its contribution to the observed oscillation cannot be detected.*

jeu de données en magenta, (correspondant au jeu de données 9 de la Table 4.1) qui est le plus proche au régime hydrodynamique (située en haut à droite du diagramme 4.10), on observe une réduction de la fréquence dans la figure 4.7. Ce décalage peut s'expliquer

par la contribution d'une fraction normale qui ne se trouve pas complètement dans le régime sans collisions. En effet le diagramme de phase montre que pour un nuage thermique on s'attend à une diminution de la fréquence ciseaux en se rapprochant du centre, jusqu'à environ 74 Hz.

#### 4.5.4 Comparaison avec l'expérience de Desbuquois et al.

Dans ce bref paragraphe je ferai une comparaison entre notre expérience et celle réalisée au Collège de France en 2012, par le groupe de J. Dalibard, qui est décrite en [57]. Elle a permis d'observer pour la première fois le comportement superfluide d'un gaz de Bose 2D en terme de résistance à l'écoulement, cela à travers sa réponse à l'effet d'une forte perturbation locale (en l'occurrence un laser désaccordé vers le bleu et très focalisé), et également de mettre en évidence l'apparition d'une fraction superfluide.

Dans les deux expériences il s'agit d'une visualisation directe, *in situ*, de la transition BKT, dans un cas à travers l'existence d'une vitesse critique, dans l'autre cas à travers le changement soudain des fréquences d'oscillation du gaz. On peut affirmer que les deux expériences sont complémentaires et, dans un certain sens, symétriques.

En effet, Desbuquois et al. ont excité *localement* le nuage en tournant un faisceau très focalisé à une certaine vitesse le long d'un rayon d'isodensité  $n_{2D}$ . Après avoir arrêté et éteint le laser qui crée l'excitation, ils attendent 100 ms et ils mesurent la température *globale* du nuage à l'équilibre, à travers des profils de densité *in situ*. Pour chaque configuration (pour une température, nombre d'atomes et distance du centre donnés) ils répètent l'expérience pour différentes vitesses. Pour des températures suffisamment basses ils observent un effet de seuil : à partir d'une certaine vitesse  $v > v_c$  du chauffage est créé dans le système.

En traçant la vitesse critique en fonction du potentiel chimique réduit ils observent un saut à l'endroit où la transition BKT a lieu, impliquant l'apparition soudaine d'une densité superfluide non nulle. Cependant ils ont trouvé un potentiel chimique réduit critique de 0.24, valeur un peu au-dessus de la valeur prédite pour un gaz uniforme par [75]. Ce décalage peut s'expliquer par le fait que lorsque le défaut tourne exactement sur la zone où la transition BKT a lieu, la moitié des atomes seulement seront superfluides, et l'autre moitié thermiques suffira à induire le chauffage.

Dans notre expérience on induit une excitation *globale* au nuage, ensuite on regarde également *in situ* mais pendant l'excitation, sans attendre que le système retourne à son état d'équilibre. Pour chaque configuration (pour une température et nombre d'atomes donnés) on explore différents régimes à l'intérieur du même nuage, en mesurant localement la fréquence d'oscillation du mode ciseaux dans des régions d'isodensité à différentes distances du centre du nuage. On trace ensuite les fréquences mesurées en fonction de la distance du centre et on repère l'endroit où une densité superfluide apparaît soudainement. Il est localisé à une distance de  $22\mu\text{m}$  du centre. Cette valeur est un peu supérieure aux estimations faites à partir de [125] ce qui veut dire qu'on trouve la transition pour un potentiel chimique réduit plus faible que celui attendu.

## 4.6 Conclusions

Dans ce chapitre j'ai décrit les améliorations apportées dans l'analyse du mode ciseaux dans un gaz quasi-2D. Le traitement des données a été fait essentiellement par Romain Dubessy, tandis que mon travail a concerné surtout la prise de données. En partant du modèle classique décrit en [25], on mesure la fréquence et l'amortissement de ce mode à travers l'observable  $\langle xy \rangle$ . Cette nouvelle approche nous a permis d'observer pour la première fois la fréquence la plus lente  $\omega$ . De plus, inspiré par la LDA, nous avons introduit une nouvelle technique d'analyse, qui consiste à mesurer localement la fréquence du mode ciseaux dans le nuage. Le cas où on moyenne sur une région annulaire d'isodensité s'avère être le plus sensible aux changements de fréquence, en permettant ainsi de déterminer avec précision la limite où la phase superfluide apparaît dans le nuage. On observe pour la première fois un décalage clair et positif de la fréquence du superfluide vers une des fréquences classiques, comme prédit par les simulations [122]. Après avoir vérifié que la phase normale du gaz se trouve dans le régime sans collisions et loin du régime hydrodynamique, on peut conclure en affirmant que cette nouvelle technique d'analyse a permis l'observation de la transition BKT à travers la réponse dynamique du gaz, au-delà des analyses thermodynamiques à l'équilibre [130, 57], en ouvrant ainsi la voie à une mesure dynamique de la fraction superfluide.

Comme M. Holzmann a montré, avec nos paramètres expérimentaux on ne pourra pas observer un saut de la densité superfluide; cependant, à ce stade un travail de simulations numériques pourrait permettre de mieux comprendre le mécanisme de disparition de la fraction superfluide, et tenter de relier la fréquence locale du mode ciseaux à la fraction superfluide (voir 4.7). On peut également (pour d'autres paramètres expérimentaux, notamment un piège plus 2D) espérer observer le comportement universel de la transition (même si le système est de taille finie, un comportement universel est possible [69]).

# Chapitre 5

## Réalisation d'un piège annulaire

Historiquement les premières études sur la superfluidité ont été menées avec l'hélium liquide [131], mais plus récemment les gaz d'atomes dégénérés ont offert de nouvelles possibilités pour l'étude de l'état superfluide. Les premières expériences consacrées à la superfluidité des condensats de Bose-Einstein ont été effectuées dans des pièges simplement connectés en mettant en évidence une vitesse critique [27] ou la présence de tourbillons quantiques [96, 28].

À l'heure actuelle, le développement de nouveaux potentiels de piégeage pour des condensats a permis d'explorer d'autres propriétés. Une des géométries les plus intéressantes est la géométrie annulaire, qui peut servir comme guide d'onde pour l'interférométrie atomique [132], pour des études de superfluidité [34, 133, 134, 40], comme circuit « atomtronique » [135], comme réseau optique périodique [136] ou pour développer l'analogie du SQUID<sup>1</sup> avec un condensat [35, 137, 15].

En particulier dans le cadre des études de superfluidité une propriété remarquable est le phénomène du courant permanent : en analogie avec un superconducteur, où un courant électrique circule sans résistance, dans un superfluide un flux sans dissipation s'établit, et la géométrie annulaire est la mieux adaptée pour l'observation de ce phénomène. Une première étude à ce sujet a été faite dans le groupe de Phillips en 2007, dans un piège toroïdal 3D [34].

Dans les dernières années ce domaine s'est beaucoup développé, et de nombreuses techniques ont été mises au point. Des anneaux peuvent être obtenus avec des pièges magnétiques [138, 43, 139, 140], éventuellement habillés par la RF [42, 141]. Ils ont l'avantage de pouvoir générer des potentiels très lisses, mais leur utilité est limitée aux seuls états qu'on peut piéger magnétiquement, avec des durées de vie limitées par les pertes Landau-Zener.

Plus récemment des pièges optiques en forme d'anneau ont été développés, utilisant des forces attractives (ou répulsives) provenant de l'interaction dipolaire entre atomes et lumière désaccordée vers le rouge (ou le bleu) de la transition atomique. Une variété

---

1. De l'anglais *Superconducting QUantum Interference Device*, est un magnétomètre utilisé pour mesurer des champs magnétiques très faibles. Il est constitué généralement de deux jonctions Josephson montées en parallèle dans une boucle supraconductrice.

de techniques est donc apparue, utilisant des faisceaux de Laguerre-Gauss [133, 35, 142], des potentiels optiques moyennés dans le temps [143, 144], la réfraction conique dans un cristal biaxe [145], la superposition de faisceaux désaccordés l'un vers le bleu l'autre vers le rouge [146], et plus récemment en utilisant des dispositifs à micromiroirs [37].

Dans ce chapitre je décrirai la réalisation d'un piège annulaire hybride magnéto-optique [41, 147], obtenu par superposition du piège magnétique habillé par la radio-fréquence avec le piège dipolaire créé par une double nappe de lumière. Je donnerai en particulier les détails pratiques de ce dernier, en incluant ceux sur son alignement qui est un aspect crucial. L'étude théorique détaillée d'une version de ce piège utilisant une onde stationnaire pour le confinement vertical a été faite dans la thèse d'Olivier Morizot, en collaboration avec Barry Garraway [41].

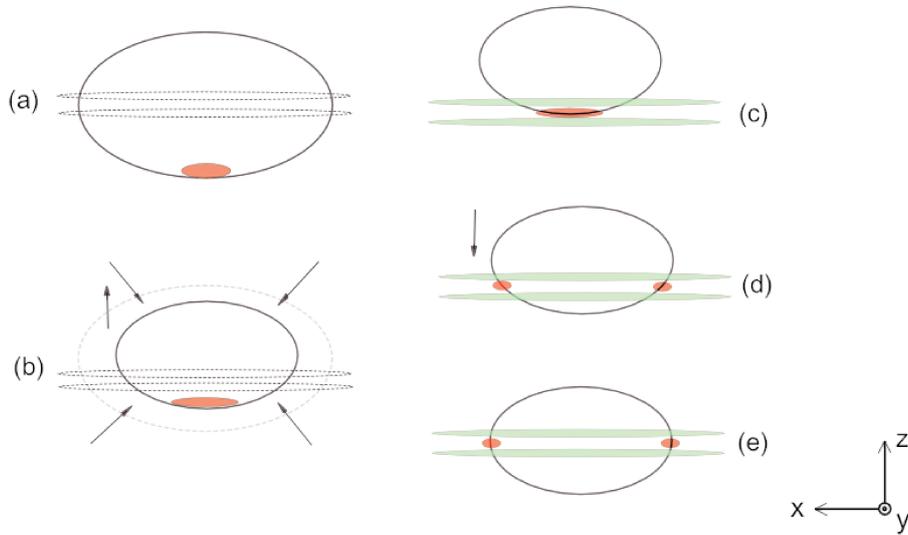
## 5.1 Description du piège

Dans le chapitre 2 j'ai décrit le potentiel adiabatique en forme d'ellipsoïde dans lequel on obtient un gaz bidimensionnel. À partir de ce piège, l'obtention de l'anneau se fait en superposant le potentiel optique produit par deux nappes de lumière désaccordées vers le bleu. Le rôle de ce laser est de fixer, par force dipolaire, l'altitude du gaz sur l'équateur de l'ellipsoïde isomagnétique, ce qui résulte en un piégeage en anneau pour les atomes, à l'intersection entre la bulle et le plan imposé par la nappe de lumière. La symétrie d'axe vertical, alliée au choix d'une polarisation RF circulaire d'axe  $z$ , assure que l'anneau a une forme circulaire et non elliptique. Le rayon de l'anneau est le rayon horizontal de la bulle, soit  $r_0 = \omega_{rf}/\alpha$ , où  $\alpha$  est défini par (2.4). Un grand avantage de ce système est que ce rayon est réglable directement par le choix de la fréquence RF. De plus, les fréquences de piégeage axiale et verticale sont ajustables indépendamment, l'une étant imposée par le potentiel adiabatique et l'autre par le piège optique. La fréquence d'oscillation verticale étant donnée par le confinement dipolaire lumineux de la nappe de lumière, elle peut être élevée. De plus, pour une fréquence d'habillage donnée, le rayon peut être varié en choisissant l'endroit où le piège optique coupe la bulle : il sera nul si cela se fait au fond de la bulle, et maximal si cela se fait à l'équateur de la bulle.

### 5.1.1 Transfert des atomes dans l'anneau

Pour des raisons pratiques on a choisi de garder le piège optique fixe, aligné sur le centre du piège quadrupolaire, et de translater verticalement et horizontalement ce dernier, à l'aide de deux bobines d'axe  $z$  et une bobine d'axe  $x$ . Le degré de liberté horizontal a été rajouté par la suite, afin d'optimiser le chargement, mais son rôle n'est pas crucial.

La procédure de chargement est illustrée par la figure 5.1. Les atomes habillés se trouvant dans le fond de la bulle (a), pour charger le piège hybride il est nécessaire de monter le piège magnétique jusqu'à que le fond coïncide avec le zéro de champ entre les deux nappes ; cela se fait au moment de la compression, qui a lieu en 500 ms (b). Ensuite on augmente la puissance du piège optique (c). Une fois les atomes



**Figure 5.1** — Schéma de la procédure pour charger les atomes dans l'anneau.

*Sketch for the loading of the ring trap.*

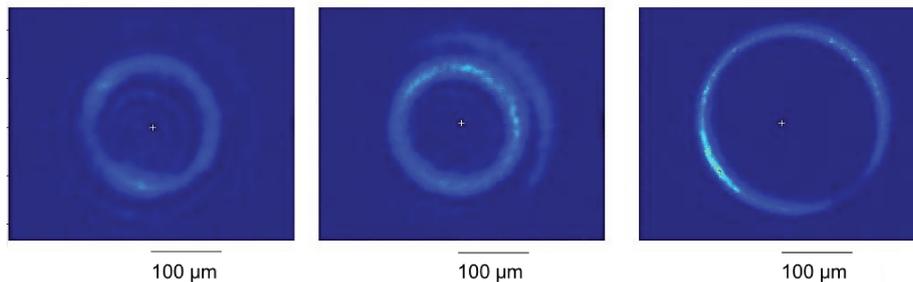
chargés, ils seront contraints à la fois dans le plan imposé par la nappe et sur la surface d'isopotentielle magnétique (d). On peut à ce moment redescendre la bulle pour que l'anneau se crée (e).

Le champ qui déplace la bulle verticalement est créé par deux bobines d'axe  $z$  placées autour de la cellule et mises en série, parcourues par des courants de même sens. Le courant est fourni par une alimentation Delta Electronika ES015-10 (0-10 A et 0-15 V) commandée analogiquement depuis le programme manip. Le déplacement est de  $44\mu\text{m}/\text{A}$ , pour une fréquence d'habillage  $\nu_{rf} = 1$  MHz et compression à 51 A.

Le champ qui déplace la bulle suivant  $x$  est créé par une seule bobine, placée à côté de la cellule, reliée à une alimentation Delta Electronika SM 35-45 (0-35 V et 0-45 A) commandée manuellement, il n'est donc pas possible de programmer une rampe de champ magnétique dans cette direction. Le courant est allumé brutalement et un filtre passe-bas fixe à quelques millisecondes le temps de montée.

### 5.1.2 Rayon de l'anneau

Le rayon de l'anneau est fixé par l'altitude du faisceau qui crée les nappes  $r_b/2 < z_n < r_b/2$ ,  $r_b$  étant défini par (2.13). Les atomes piégés dans le plan  $z_n$  ressentent aussi le potentiel habillé et se répartissent le long d'un cercle centré sur l'axe du quadrupole et de rayon  $R = \sqrt{r_b^2 - z_n^2}$ . Ce rayon dépend de la fréquence d'habillage  $\nu_{rf}$  et du gradient du champ magnétique, et il est maximal à l'équateur de la bulle, où il vaut  $R = r_b = \frac{\omega_{rf}}{\alpha} = 145\mu\text{m}$ , pour une fréquence d'habillage de 1 MHz et un courant dans les bobines de 51 A. La figure 5.2 montre des anneaux obtenus pour différentes altitudes de la bulle.



**Figure 5.2** — Anneaux obtenus à différentes hauteurs des nappes.

*Rings obtained for different heights of the double sheet.*

### 5.1.3 Fréquences d'oscillation

Le confinement transverse est dû uniquement au potentiel habillé, et la fréquence de piégeage vaut [105] :

$$\omega_r = \alpha \sqrt{\frac{2\hbar}{M\Omega_0}}. \quad (5.1)$$

Le confinement vertical est essentiellement imposé par la nappe (complètement si on se place à l'équateur de la bulle), et son expression sera dérivée dans la section 5.2.

Il vaut (5.13) :  $\omega_z(x) = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha P_0}{mw_z^3 w_x}} e^{\frac{x^2}{w_x^2}}$ .

#### Mesure de la fréquence d'oscillation verticale

Pour mesurer la fréquence d'oscillation verticale, dans le piège hybride quadrupolaire et optique avec les atomes qui se trouvent au fond de la bulle, on coupe le courant quelques millisecondes avant le piège optique : le nuage se trouve piégé uniquement entre les deux nappes et commence à osciller. On coupe ensuite le laser vert et on laisse le nuage tomber pendant un temps de vol de 20 ms avant de prendre une image suivant l'axe horizontal. On répète cette mesure pour différents temps d'attente dans le piège optique seul, afin d'observer des oscillations. On a mesuré une fréquence verticale de 3 kHz, qui sera également attendue dans l'anneau.

### 5.1.4 Dimensions restreintes

Pour estimer dans quel régime le gaz dégénéré se trouve, il faut comparer son potentiel chimique  $\mu$  aux fréquences d'oscillations du piège. Le potentiel chimique peut s'évaluer dans l'approximation de Thomas-Fermi en ayant fixé au préalable la dimensionnalité. Les trois régimes 3D, 2D et 1D correspondent respectivement aux conditions :  $\mu > \hbar\omega_z$ ,  $\hbar\omega_z > \mu > \hbar\omega_r$  et  $\hbar\omega_r > \mu$ . Le calcul détaillé dans les différents régimes se trouve dans la thèse de O. Morizot [105].

À 3D le potentiel chimique est donné par l'expression

$$\mu_{3D} = \hbar\bar{\omega} \sqrt{\frac{2Na}{\pi r_b}}, \quad (5.2)$$

où  $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_r \omega_z}$  est la moyenne géométrique des fréquences d'oscillation,  $N$  le nombre d'atomes et  $a$  la longueur de diffusion en 3D. En terme de nombre d'atomes, la condition pour que le gaz reste dans le régime 3D peut s'exprimer sous la forme

$$N > \frac{\pi r_b \omega_z}{2a \omega_r}, \quad (5.3)$$

ce qui correspond à  $N > 2,2 \times 10^6$  atomes. Ce nombre est suffisamment grand pour qu'il soit possible d'obtenir un condensat dans le régime bidimensionnel sans difficultés.

Dans le cas 2D, suivant la direction  $z$  seulement l'état fondamental est peuplé et le potentiel chimique s'écrit :

$$\mu_{2D} = \hbar \bar{\omega} \left( \frac{\omega_r}{\omega_z} \right)^{1/6} \left( \frac{3Na}{4\sqrt{\pi} r_b} \right)^{2/3}, \quad (5.4)$$

et le nuage serait unidimensionnel si  $\mu_{2D} < \omega_r$ , donc

$$N < \frac{4\sqrt{\pi} r_b}{3a} \sqrt{\frac{\omega_r}{\omega_z}}, \quad (5.5)$$

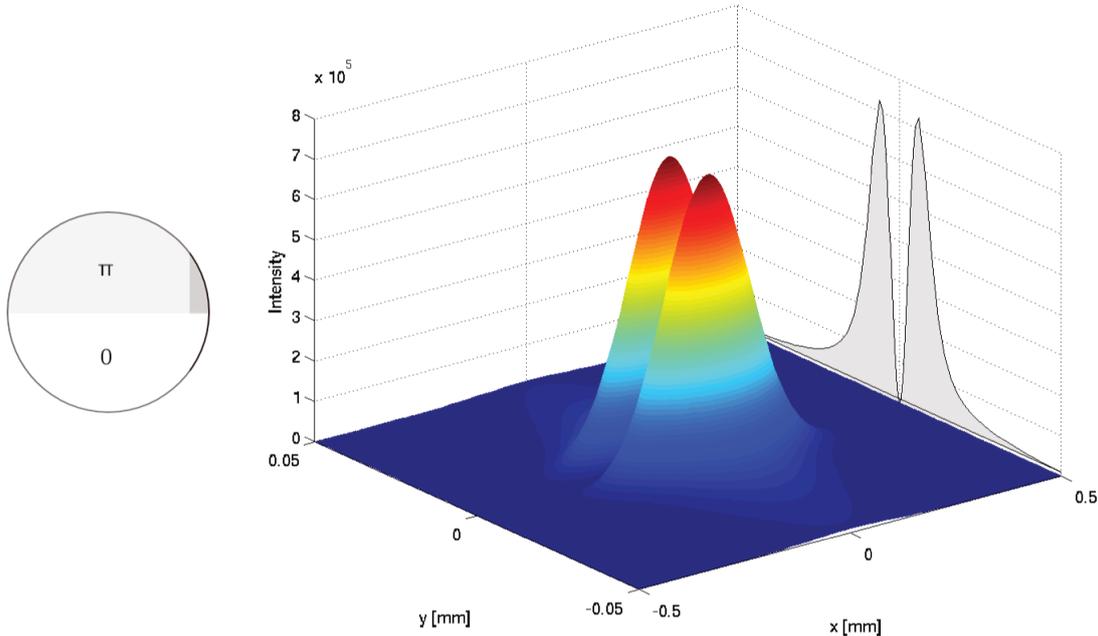
soit  $N < 2 \times 10^3$  atomes.

## 5.2 La double nappe de lumière

La mise en forme du faisceau gaussien qui produit les deux nappes se fait grâce à la traversée d'une lame de phase. Il s'agit d'une lame qui présente une discontinuité le long de la direction  $z$  et imprime une phase de  $\pi$  à la moitié haute du faisceau par rapport à la moitié basse :  $\Phi_z = \pi$  si  $z > 0$ ,  $\Phi_z = 0$  si  $z \leq 0$ .

Cette lame est placée le long de l'axe de propagation d'un faisceau elliptique ayant un rapport d'anisotropie de 3 : 1 suivant l'axe vertical. Dans le plan du saut de phase, la lumière interfère destructivement et l'intensité est nulle : on obtient ainsi deux maxima entre lesquels on peut confiner les atomes (voir fig. 5.3). Après la traversée de la lame le faisceau est focalisé sur les atomes par une lentille asphérique convergente (voir figure 5.5). À la position des atomes le waist est  $w_z$ . Les deux autres grandeurs pertinentes sont la longueur de Rayleigh  $z_R = \frac{\pi w_z^2}{\lambda}$  suivant l'axe de propagation  $y$ , et le waist  $w_x = \sqrt{2} z_R$  suivant l'axe transverse  $x$ . Ce dernier a été choisi pour assurer l'isotropie du confinement dans le plan  $(x, y)$ . En effet, en parcourant le contour de l'anneau on aura deux maxima d'intensité le long de l'axe de propagation  $y$  (qui coïncident avec le pic de la gaussienne) et deux minima sur l'axe  $x$ , qui se trouve dans les ailes de la gaussienne, et ce choix pour  $w_x$  est celui qui minimise ces inhomogénéités.

Pour donner une description quantitative de l'effet sur les atomes de ce faisceau désaccordé vers le bleu ( $\lambda = 532$  nm), on doit calculer les variations spatiales du profil d'intensité  $I$  à la position des atomes.



**Figure 5.3** — À gauche : représentation schématique du saut de phase induit par la lame. À droite : profil d'intensité de la double nappe de lumière obtenue après traversée de la lame de phase.

*On the left : schematic representation of the phase step wave plate. On the right : double sheet obtained after passing through the phase step wave plate.*

### 5.2.1 Modélisation de la nappe

Des atomes soumis à un champ électrique ressentent une force qui peut être divisée en deux composantes : la force de pression de radiation et la force dipolaire. La première est due aux cycles d'absorption-émission spontanée des photons, est non conservative et proportionnelle à  $(\omega_0 - \omega)^{-2}$  (où  $\omega_0$  est la fréquence de transition atomique entre deux niveaux et  $\omega$  la fréquence laser), la deuxième au contraire est conservative, et proportionnelle à  $I/(\omega_0 - \omega)$  ( $I$  étant l'intensité laser). Si la fréquence laser  $\omega$  est suffisamment désaccordée par rapport à la transition atomique  $\omega_0$ , l'absorption de photons est négligeable et la contribution principale est due à la force dipolaire.

Une approximation courante dans l'expression de la force dipolaire est l'approximation de l'onde tournante (pour l'anglais « rotating wave approximation », abrégé RWA), qui consiste à négliger les termes proportionnels à  $1/(\omega_0 + \omega)$  par rapport aux termes en  $1/(\omega_0 - \omega)$ . Cette approximation est correcte pour des petits désaccord, mais dans le cas de notre expérience la fréquence de transition correspondante à la raie  $D_2$  du  $^{87}\text{Rb}$  est  $\omega_0 = 2\pi \times 3.77 \times 10^{14}\text{Hz}$ , et la fréquence laser est  $\omega = 2\pi \times 5.65 \times 10^{14}\text{Hz}$  (correspondant à la longueur d'onde 532 nm de notre laser Verdi W). Si on applique la RWA on peut commettre des erreur de l'ordre de 20% :  $|(\omega_0 - \omega)/(\omega_0 + \omega)| = 0.2$ .

Dans notre cas, on doit inclure la contribution des deux raies  $D_1$  à  $\lambda_{D_1} = 795$  nm et  $D_2$  à  $\lambda_{D_2} = \lambda_0 = 780$  nm, qui ne sont séparées que de 15 nm. En tenant compte des

constantes de couplage le potentiel dipolaire peut s'écrire :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\omega_{D_2}^3} \left( \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\omega_{D_2} - \omega} + \frac{1}{\omega_{D_2} + \omega} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\omega_{D_1} - \omega} + \frac{1}{\omega_{D_1} + \omega} \right) \right) I(\mathbf{r}). \quad (5.6)$$

Où  $\omega = 2\pi \times 5.97$  MHz est la largeur naturelle de la transition  $D$  du  $^{87}\text{Rb}$ . Puisque toutes les quantités sont fixées, à l'exception de l'intensité laser, elles peuvent être écrites sous forme d'une constante multiplicative :  $U = \eta I$ . L'application numérique donne

$$\eta = 1.22 \times 10^9 \text{Hz}\mu\text{m}^2\text{W}^{-1}. \quad (5.7)$$

Des calculs de propagation du champ dans l'approximation paraxiale se trouvent dans la thèse de S.P. Rath [76]. Dans cette approximation, le champ électrique à la focale de la dernière lentille est donné tout simplement par la transformée de Fourier du champ en sortie de la lame de phase, qui est un faisceau gaussien multiplié par le profil de phase imposé par la lame. On considère d'abord un faisceau gaussien incident sur une lentille convergente de focale  $f$  et placée en  $y = 0$ . Le faisceau se propage le long de l'axe  $y$ ,  $w_x$  et  $w_z$  sont les waists en  $y = 0$  selon les deux autres directions de l'espace<sup>2</sup> et  $P_0$  est la puissance.

Pour simplifier je considère un faisceau collimaté dans la direction  $x$ . Ce n'est pas le cas de notre montage puisque la dernière lentille sert à collimater en  $x$  et focaliser en  $z$ , mais cela ne change pas grand chose puisque le waist  $w_x$  est assez grand et on s'intéresse plutôt à la direction  $z$ .

Le champ<sup>3</sup> incident sur la lentille peut alors s'écrire :

$$E(\mathbf{r}, 0) = \sqrt{\frac{2P_0}{\pi w_x w_z}} e^{-\frac{x^2}{w_x^2}} e^{-\frac{z^2}{w_z^2}}. \quad (5.8)$$

La lentille imprime une phase quadratique au champ, pour cette raison dans le plan focal on trouve encore une gaussienne

$$E(\mathbf{r}', f) = \sqrt{\frac{2P_0}{\pi w'_x w'_z}} e^{-\frac{x'^2}{w_x'^2}} e^{-\frac{z'^2}{w_z'^2}}, \quad (5.9)$$

où  $w'_x = \frac{\lambda f}{\pi w_x}$  et  $w'_z = \frac{\lambda f}{\pi w_z}$ .

Pour prendre en compte la lame de phase on la place juste avant la lentille. On peut négliger la propagation entre ces deux éléments puisqu'ils sont séparés d'une distance beaucoup plus petite que la longueur de Rayleigh. Au niveau de la lentille  $w_z \sim 3$  mm, donc  $z_R = \frac{\pi w_z^2}{\lambda} \sim 17$  m. L'effet de la marche de phase  $0 \rightarrow \pi$  sur le champ peut être modélisé en découpant le champ en deux parties de signe opposé. Si on rajoute ensuite l'effet de la lentille et qu'on considère un champ incident gaussien, on peut montrer que le champ au niveau des atomes peut se décomposer comme le produit entre une fonction qui ne fait intervenir que les coordonnées dans le plan horizontal  $A_{x'y'}$  et une

2. Suivant l'axe de propagation  $y$  la grandeur pertinente est la longueur de Rayleigh  $z_R = \frac{\pi w_z^2}{\lambda}$ .  
3. Par abus de langage, j'appelle ici champ électrique la racine carrée de l'intensité.

fonction de  $zy$ ,  $A_{z'y'}$ . Par la suite j'omettrai les primes pour alléger la notation, sachant pourtant que je suis en train de décrire le champ au niveau des atomes et après traversée de la lentille. Les fonctions  $A_{xy}$  et  $A_{zy}$  s'écrivent :

$$A_{xy} = \sqrt{\frac{2P_0}{\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{w_x^2 \left(1 + \left(\frac{y}{z_R[w_x]}\right)^2\right)^2}}}{\sqrt{w_x \left(1 + \left(\frac{y}{z_R[w_x]}\right)^2\right)}}, \quad (5.10)$$

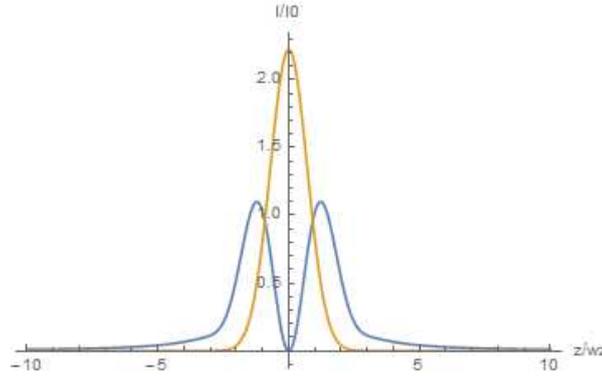
$$A_{zy} = \frac{2}{\sqrt{\pi w_z}} \int_0^\infty \sin\left(2u \frac{z}{w_z}\right) e^{i \frac{u^2 y}{z_R[w_z]}} e^{-u^2} du, \quad (5.11)$$

où  $z_R[w] = \frac{\pi w^2}{\lambda}$ . Le champ est  $E = A_{xy}A_{zy}$ , l'intensité sera donc  $I = |A_{xy}A_{zy}|^2$  et le potentiel  $U = \eta I$ . Près du centre, au niveau des atomes l'intensité peut être approximée par :

$$I(x, y = 0, z \ll w_z) \sim I_0 \frac{4}{\pi w_z^2} z^2 e^{-2 \frac{x^2}{w_x^2}}, \quad (5.12)$$

où  $I_0 = \frac{2P_0}{\pi w_z w_x}$  et  $w_z$ ,  $w_x$  sont les waists au niveau des atomes. Cela mène à un confinement harmonique suivant  $z$  de fréquence d'oscillation

$$\omega_z(x) = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\eta P_0}{m w_z^3 w_x}} e^{-\frac{x^2}{w_x^2}}. \quad (5.13)$$

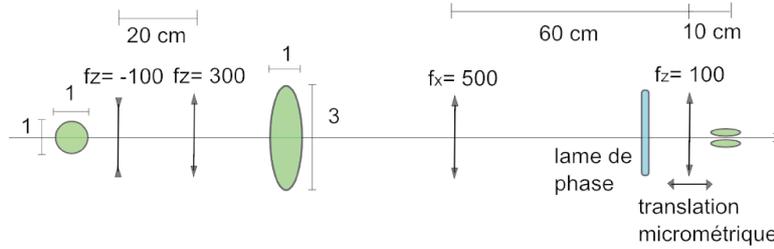


**Figure 5.4** — Intensité dans le plan focal (en bleu) normalisée à l'intensité pic du même faisceau sans la lame de phase (en orange).

*Intensity distribution in the focal plane (blue line), normalised to the peak intensity of the same beam in the absence of the phase plate (orange line).*

On peut noter tout de suite que plus les waists sont petits, plus le confinement sera fort. On a donc intérêt à choisir un petit  $w_z$  pour se placer dans le régime bidimensionnel. Néanmoins  $z_R[w_z]$  et  $w_x$  ne peuvent pas être trop petits puisqu'on veut un confinement uniforme dans le plan horizontal. On a choisi un montage tel que  $w_z = 5 \mu\text{m}$ ,

$z_R = \frac{\pi w_z^2}{\lambda} = 147 \mu\text{m}$  et  $w_x = \sqrt{2}z_R = 208 \mu\text{m}$  au niveau des atomes. Expérimentalement on a mesuré  $w_z = 6 \mu\text{m}$  et  $z_R = 180 \mu\text{m}$ . Pour donner l'anisotropie souhaitée on a utilisé deux télescopes ayant trois lentilles cylindriques et une dernière lentille sphérique : le premier télescope pour un grandissement  $\times 3$  suivant  $z$ , le deuxième pour un grandissement  $1/5$  suivant  $x$  et la focalisation de l'axe vertical sur les atomes.

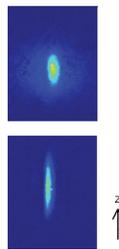


**Figure 5.5** — Mise en forme de la double nappe.

*Light sheet shaping optics.*

Le potentiel total vu par les atomes est donné par la somme du potentiel magnétique de la bulle plus celui exercé par la nappe et la fréquence d'oscillation verticale est calculée en évaluant la dérivée seconde de ce potentiel à l'endroit des atomes. Les atomes au fond du piège magnétique plus le potentiel optique de la double nappe ont une fréquence de piégeage verticale de  $\nu_z = 3$  kHz, pour un courant de 109 A dans les bobines, une fréquence d'habillage de 1 MHz et une fréquence de Rabi de 30 Hz.

La figure ?? montre que l'anisotropie d'un condensat mesuré après un temps de vol de 20 ms, est plus grande une fois qu'il est chargé dans la nappe que lorsqu'il est dans le piège habillé seul.



**Figure 5.6** — Expansion d'un nuage d'atomes condensés après 20 ms de temps de vol dans le piège RF seul (haut) et dans le piège hybride (bas). On voit que le piège optique augmente le confinement vertical, ce qui explique l'augmentation de l'anisotropie.

*Expansion after 20 ms of time of flight of the cloud released from the RF trap (top) and from the hybrid trap (bottom). The optical potential increases the vertical trapping, which justifies the enhanced anisotropy of the cloud.*

### 5.2.2 Procédure d'alignement

À partir de l'expression (5.12), quand on s'éloigne du centre suivant  $z$  on doit multiplier par un facteur  $(1 + \frac{y^2}{z_{R[wz]}^2})^{-1}$ . On peut alors écrire un potentiel simplifié de la forme :

$$U(\mathbf{r}) = U_0 \frac{e^{-\frac{2x^2}{w_x^2(y)}}}{1 + \frac{y^2}{z_{R[wz]}^2}} f(z, y), \quad (5.14)$$

si on se place à  $y$  fixe, et autour du centre  $y \approx 0$ . On pose ensuite  $f_0(z) = f(z, 0)$ , et on obtient :

$$U(x, 0, z) = U_0 e^{-\frac{2x^2}{w_x^2(0)}} f_0(z). \quad (5.15)$$

La fonction  $f_0(z)$  est celle représentée en figure 5.4. Ayant pris comme origine de notre repère la position des atomes, on veut que le faisceau soit centré en  $z = 0$  et  $x = 0$ .

Pour réaliser cet alignement on a développé une technique qui nous permet de mesurer directement le profil  $f_0(z)$  et sa dérivée  $f'_0(z)$ . Dans la séquence expérimentale habituelle on allume le faisceau nappe lentement, pour ne pas créer d'excitations, et on le laisse à la puissance maximale jusqu'à la détection *in situ*. On n'a donc pas d'information directe sur sa position par rapport aux atomes. Si au contraire on mesure la position des atomes en temps de vol après qu'ils ont subi une impulsion de faisceau nappe (suffisamment courte pour ne pas détruire le nuage), on peut observer ses effets sur les atomes. En effet, pendant l'impulsion de durée  $\tau \sim 100\mu\text{s}$  les atomes sont accélérés : leur vitesse initiale change, mais leur position n'a pas le temps de changer. L'effet de la force qu'a exercée la nappe sera de cette manière visible sur leur vitesse, qu'on sait mesurer après temps de vol.

Cela offre un moyen de réglage fin pour notre faisceau : pour avoir un bon alignement on vise à maximiser la force selon  $z$  et minimiser celle selon  $x$ . Pour ce faire, il faut se mettre dans le référentiel de la gravité, c'est-à-dire tourner les axes  $x \rightarrow x'$ ,  $z \rightarrow z'$  pour se mettre dans le référentiel où  $g_{x'} = 0$  et  $g_{z'} = g$ . Seulement dans ce référentiel si on mesure  $F_x$  on est sûr qu'elle est due à un mauvais réglage de la nappe (par exemple elle n'est pas horizontale) et non pas à la projection de  $Mg$  le long de l'axe  $x$ . Pour mesurer l'angle entre l'axe de la gravité et celui de la caméra on laisse les atomes tomber en chute libre pendant différents temps. Le mouvement des atomes dans le plan  $(x, y)$  sera décrit par :

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}g_z t^2, \quad (5.16)$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}g_x t^2. \quad (5.17)$$

L'inclinaison de l'axe de la gravité par rapport au repère de la caméra se déduit du rapport entre les accélérations :  $\alpha = \arctan \frac{g_x}{g_z}$ , dans notre cas  $1,2^\circ$ . Pour les mesures des positions du nuage on se placera donc dans le repère tourné, mais que je continuerai à l'indiquer avec la notation classique  $x, y, z$  pour alléger la notation.

Ensuite pour la mesure de  $F_z$  et  $F_x$  on procède de la manière suivante : dans le piège habillé (les atomes se trouvent au fond de la bulle) on allume la nappe à la puissance maximale et on détecte la position du nuage après temps de vol en prenant une image

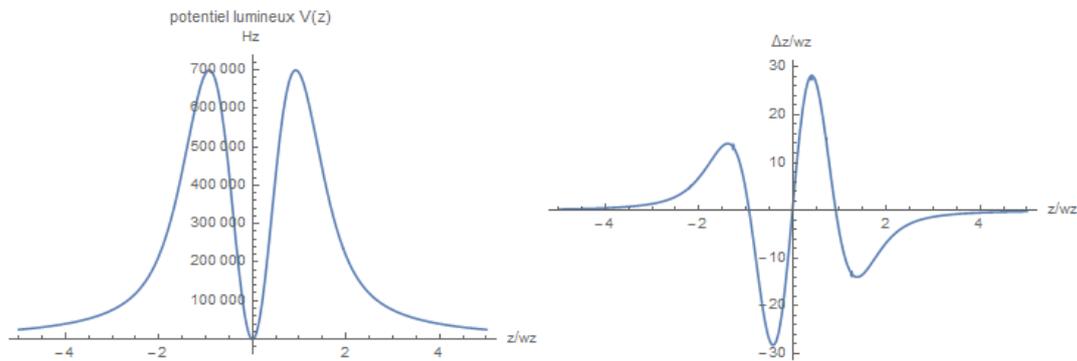
suivant l'axe horizontal  $y$ . La durée de l'impulsion et le temps de vol (typiquement  $100\mu\text{s}$  et  $20\text{ ms}$  respectivement) peuvent être ajustés pour que le nuage ne sorte pas du champ de la caméra. La puissance au contraire est gardée toujours au maximum pour être certain que le mode spatial reste le même. On répète cette séquence plusieurs fois, en variant la position des atomes par rapport à la nappe, cela se fait en déplaçant le centre du piège avec un champ magnétique constant. Les courbes obtenues expérimentalement sont montrées dans la figure 5.10.

### Déplacement vertical

La force le long de  $z$  peut s'écrire comme la dérivée du potentiel (5.15) :

$$v_z \propto F_z = \frac{\partial U(x,0,z)}{\partial z} = f'_0(z)U_0 e^{-\frac{2x^2}{w_x^2}}. \quad (5.18)$$

Sachant que la variation de vitesse est proportionnelle à la force, on peut observer que  $v_z \propto f'_0(z)$ . En traçant la position  $z$  mesurée après temps de vol en fonction de la position des atomes par rapport à la nappe, on s'attend à obtenir un profil qui a la même forme que la dérivée du potentiel  $f'_0(z)$  (voir 5.7, figure à droite). Les

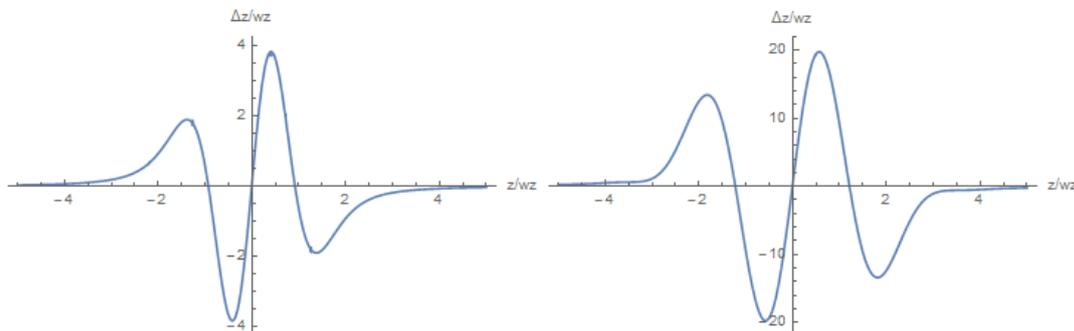


**Figure 5.7** — Potentiel lumineux (gauche) et déplacement vertical des atomes après une impulsion de  $100\mu\text{s}$  dans le cas où la nappe est parfaitement réglée (droite).

*Light potential (left) and corresponding atomic vertical displacement after a pulse of  $100\mu\text{s}$  (right).*

figures 5.8 montrent des situations où les deux nappes ne sont pas bien centrées sur les atomes. Pour tracer ces courbes on a juste écrit l'expression du potentiel optique et calculé sa dérivée en différentes positions. On observe que si le faisceau n'est pas centré horizontalement, son effet sur le déplacement vertical des atomes sera plus faible (voir fig. 5.8 à gauche). Si de plus le laser n'est pas focalisé, mais son point focal se trouve une unité de waist en avant ou en arrière par rapport aux atomes, son waist sera plus large (voir fig. 5.8 à droite).

Cette mesure est particulièrement utile pour deux réglages :



**Figure 5.8** — À gauche : laser décalé de  $w_x$  le long de l'axe  $x$ . À droite : laser défocalisé le long de  $y$  d'une longueur de Rayleigh  $z_R[w_z]$ .

*On the left : the laser is misaligned of  $w_x$  along the  $x$  axis. On the right : the laser is misaligned along  $y$  of  $z_R[w_z]$  along the  $y$  axis.*

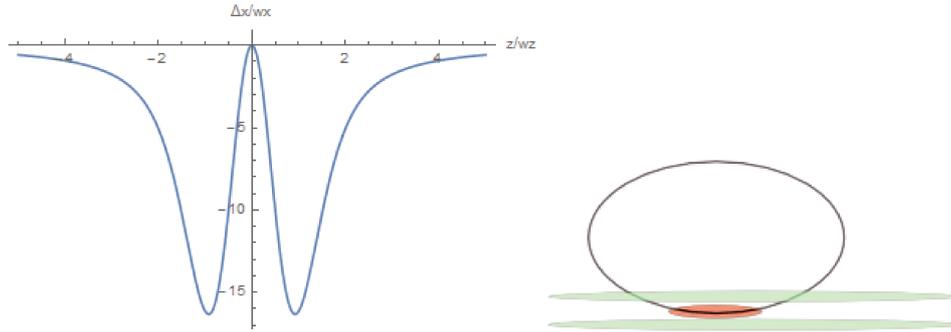
- optimiser la focalisation des nappes. Si le laser est bien focalisé sur les atomes sa force sera maximale, et également la variation de vitesse induite par une impulsion ;
- détecter une asymétrie dans le faisceau, due par exemple à un mauvais centrage sur la lame de phase. En effet, si l'un des deux lobes est plus puissant que l'autre on le détectera sur une asymétrie dans la courbe des déplacements : les atomes seront poussés plutôt vers le haut ou vers le bas.

### Déplacement horizontal

On peut faire le même type d'observations que je viens de décrire, mais en mesurant cette fois-ci la position horizontale après temps de vol en fonction de l'altitude initiale du nuage atomique. Le raisonnement est analogue à celui le long de  $z$  (5.18). La variation de vitesse le long de l'axe  $x$  (mesurée à travers la position des atomes après temps de vol) est proportionnelle à la force subie au moment de l'impulsion :

$$F_x = \frac{\partial U(x,0,z)}{\partial x} = \frac{4x}{w_x^2} U_0 e^{-\frac{2x^2}{w_x^2}} f_0(z). \quad (5.19)$$

On observe que cette fois-ci  $v_x \propto x f_0(z)$ . Si on trace la position  $x$  du nuage après temps de vol en fonction de la position relative entre atomes et nappe, on s'attend à obtenir un profil qui a la forme du potentiel des deux nappes (fig. 5.7 à gauche) avec une amplitude qui change de signe avec  $x$ . La dérivée du potentiel suivant  $x$  (voir figure fig. 5.9) a la même forme que le potentiel. L'information utile pour le réglage s'obtient en faisant la comparaison entre les courbes prises pour différentes positions (suivant  $x$ ) de la nappe par rapport aux atomes : si on passe d'un côté à l'autre du centre les courbes s'inversent, et l'optimum est lorsqu'on est positionné sur le point d'inversion ( $x = 0$ ) et que les atomes ne se déplacent presque pas ( $F_x$  minimale).



**Figure 5.9** — À gauche : simulation avec le laser décalé, par rapport au centre, d'une unité de waist en  $x$ . À droite : dessin, vu d'en face, de la bulle et des nappes, légèrement décalées suivant l'axe  $x$ .

*On the left : simulation of the effect on the atoms's velocity of a short pulse of double sheet, the laser being misaligned of one unity of waist along the  $x$  axis. On the right : a sketch, seen from in front, to reproduce the misalignment of the double sheet along the  $x$  axis.*

### 5.3 Focalisation de la nappe

Un fort confinement s'obtient seulement à la focale du faisceau nappe, où le waist du faisceau nappe est minimal et vaut  $w_z$ . S'éloignant de la focale il augmente :

$$w'_z(y) = w_z \sqrt{1 + (y - y_0)^2 / \left(\frac{\pi w_z^2}{\lambda}\right)^2}, \quad (5.20)$$

La fréquence de piégeage verticale dépend alors de la position du foyer  $y_0$  par rapport à la position des atomes  $y_{at}$  :

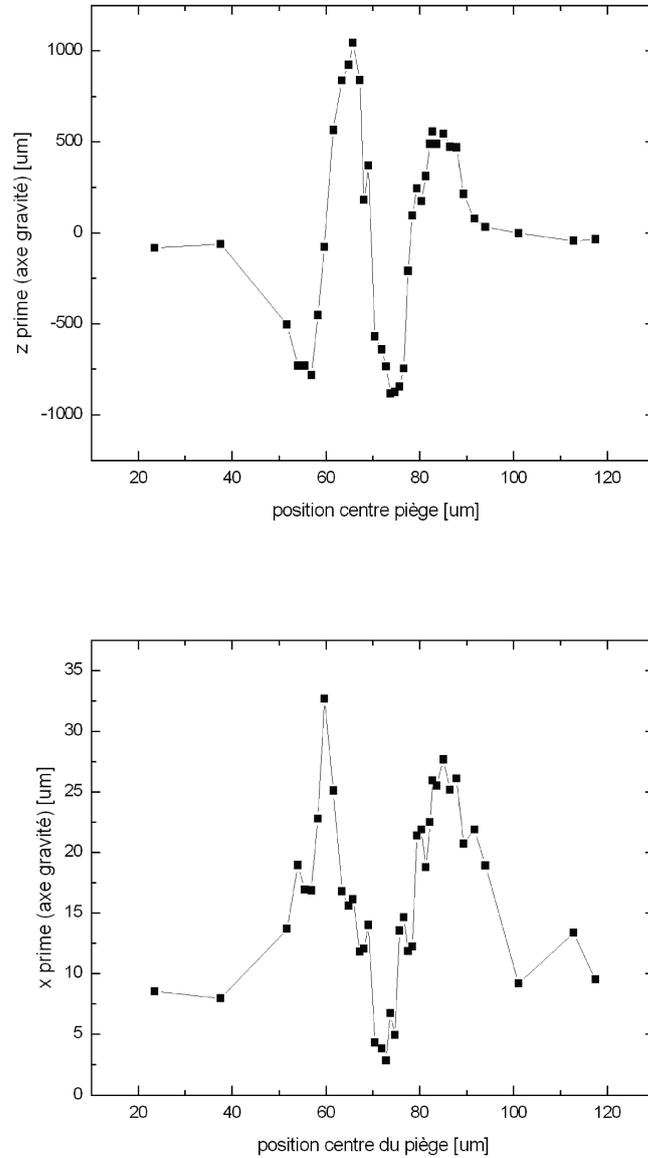
$$\omega'_z(y_{at}, \omega_z, y_0, z_{Ry}) = \frac{\omega_z}{\left[1 + \left(\frac{y_{at} - y_0}{z_{Ry}}\right)^2\right]^{3/4}}, \quad (5.21)$$

et est maximale lorsque les deux coïncident. On peut faire varier le point de focalisation à l'aide d'une translation micrométrique suivant la direction longitudinale  $y$ , sur laquelle est montée la dernière lentille. Pour chaque position on a une estimation de la force ressentie par les atomes à partir des courbes de déplacement suivant  $z$  : à la position pour laquelle l'amplitude est maximale, le foyer du faisceau nappe se trouve à l'endroit des atomes.

En conclusion, la méthode que je viens de décrire permet de régler le centre des nappes suivant la direction verticale avec une précision d'environ  $4\mu\text{m}$  (voir fig. 5.10).

### 5.4 Mise en rotation des atomes

J'avais déjà mentionné dans la section 1.6 que la géométrie annulaire est particulièrement intéressante pour étudier le gaz en rotation et les propriétés liées à la



**Figure 5.10** — Mesures de la position du nuage après temps de vol, et après une impulsion des nappes (sachant que dans l'axe  $x$  1 A correspond à un déplacement verticale du centre du piège de  $44\mu\text{m}$ ).

*Measurements of the cloud's position after time of flight and after a short pulse of the double sheet laser (knowing that 1 A on the  $x$  axis corresponds to a vertical shift of the trap center of  $44\mu\text{m}$ ).*

superfluidité. Pour réaliser des études de ce type on a envisagé de mettre en rotation les atomes dans le piège en anneau que je viens de décrire avec trois techniques différentes. La première, la « touillette laser », consiste à faire tourner un laser focalisé le

long de l'anneau, les deux autres consistent à façonner le profil du laser de manière à utiliser ou bien la force dipolaire exercée par une hélice d'intensité, ou bien transférer directement du moment angulaire aux atomes grâce à une transition Raman à deux photons, faite avec un faisceau Laguerre-Gauss.

### 5.4.1 Touillette laser

Un obstacle qui se déplace en tournant dans le fluide représente la solution la plus intuitive pour mettre en rotation le gaz. Ainsi on a appelé « touillette à atomes » un faisceau désaccordé vers le bleu, dont le waist est petit par rapport à la taille de l'anneau, et qui parcourt une trajectoire circulaire. Cela a été construite par T. Badr et intégrée sur l'expérience lors du stage de M. de Goër, actuellement en deuxième année de thèse.

#### Source laser

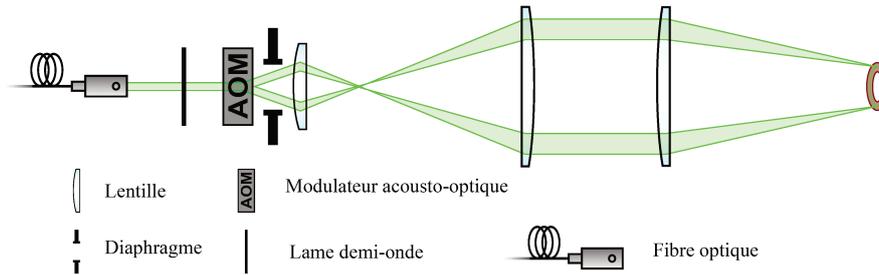
Le laser qui crée la touillette est le même qui sert de bouchon dans le piège quadrupolaire : le laser à 532 nm de Azur Light systems. On prélève une petite partie de sa puissance (quelques centaines de  $\mu\text{W}$ ) et on lui fait traverser un prisme de Glan pour purifier la polarisation (l'efficacité des AOMs étant très sensible à ce paramètre). Le laser est ensuite mené à la table optique grâce à une fibre à maintien de polarisation, et en sortie de fibre une lame  $\lambda/2$  permet de régler la polarisation.

#### Mise en forme du faisceau

La mise en forme du faisceau a lieu avec un premier AOM, aligné à l'angle de Bragg, de sorte à envoyer la plupart de la puissance dans le premier ordre du faisceau dévié, qui traverse ensuite un deuxième AOM orienté à  $90^\circ$  par rapport au premier. On peut ainsi défléchir le faisceau dans n'importe quelle direction (dans la limite des angles de déflexion des AOMs).

En contrôlant les radio fréquences envoyées aux AOMs on peut modifier la direction du faisceau au cours du temps, et par exemple choisir de lui faire parcourir un anneau au niveau des atomes.

La figure 5.11, extraite de [148], montre le schéma optique pour la mise en forme de la touillette. Un système de trois lentilles focalise le faisceau au niveau des atomes. Le waist du spot final doit mesurer  $5\mu\text{m}$  et les contraintes d'encombrement imposent une distance de 20 cm entre les atomes et la dernière lentille. Cela impose un diamètre avant focalisation très important : pour cela la première lentille après les AOMs fait diverger le faisceau, une deuxième lentille le collimate, et la troisième focalise le faisceau sur les atomes. Le passage par un faisceau collimaté dissocie la dernière lentille du reste du système optique, en rendant sa position réglable, pour faciliter l'ajustement de la focalisation sur les atomes.



**Figure 5.11** — Schéma optique de la touillette. Les deux AOMs croisés produisent un faisceau diffracté d'un angle variant au cours du temps, de façon à parcourir un cercle au niveau des atomes.

*Sketch of the optical bench for the laser spoon. The two acousto optic modulators make the beam position rotate on a circle at the position of the atoms.*

### Contrôle des AOMs

Le système qui génère les radio fréquences envoyées aux AOMs a été réalisé par l'atelier d'électronique du laboratoire. Il s'agit d'un synthétiseur de fréquences numérique (DDS) piloté par un microcontrôleur. Le choix du numérique par rapport à l'analogique a été dictée par l'exigence d'une très bonne stabilité en fréquence (et donc un faible bruit de pointé). Une fois la direction du faisceau fixée par les deux fréquences envoyées aux AOMs, la vitesse de rotation est déterminée par l'horloge du microcontrôleur, que l'on asservit en fréquence sur un quartz piézoélectrique (la fréquence propre du microcontrôleur est de 800 kHz, asservie sur un cristal de fréquence propre 8 MHz).

Les paramètres qui déterminent la trajectoire du spot touillette au niveau des atomes sont :

- la suite des couples de fréquences envoyées aux AOMs. Puisqu'on veut décrire un cercle on définit un couple de fréquences centrales et un rayon (défini en fréquence) ;
- la temporisation utilisée au niveau du microcontrôleur, c'est-à-dire le nombre de cycles d'horloge qu'on compte entre deux changements de fréquences successifs, qui détermine la fréquence de rotation de la touillette.

Plus de détails sur le montage et la calibration de la touillette se trouvent dans le rapport de stage de Mathieu de Goër [148]. À l'heure actuelle on teste l'alignement et fait des essais de déplacement dans le piège simplement connecté.

### 5.4.2 Impression de phase : l'hélice d'intensité

Au paragraphe 1.6.3 j'ai mentionné la quantification de la circulation dans un superfluide en rotation, caractérisé par une phase de la forme  $e^{il\theta}$ , où  $l$  est un nombre entier. Il existent plusieurs manières d'introduire un tel enroulement de phase : la technique de la touillette décrite au paragraphe précédent consiste à faire rentrer un vortex en tournant un laser focalisé dans le gaz, ici je considérerai le cas où l'on modifie directement la phase de la fonction d'onde, pour passer d'une phase uniforme à une phase  $e^{il\theta}$ . Une phase de cette forme peut être générée par la force dipolaire exercée par un

faisceau ayant un profil d'intensité modulé en forme d'hélice. Un tel profil d'intensité peut être généré grâce à un modulateur spatial de lumière (SLM), que je présenterai dans la section 5.5.

Pour calculer la puissance et la durée nécessaires pour engendrer une rotation des atomes, on considère un potentiel qui dépend de la position  $\mathbf{r}$  dans le plan  $(\mathbf{r}, \theta)$  et qui est non nul seulement pendant la durée de l'impulsion  $\tau$ , ayant une forme en hélice :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\theta}{2\pi} U_0. \quad (5.22)$$

Le Hamiltonien du système est indépendant du temps et l'équation de Schrödinger peut se résoudre :

$$i\hbar\partial_t\Psi = H\Psi, \quad (5.23)$$

$$\Psi(t + \tau) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_t^{t+\tau} H(t') dt'} \Psi(t) = e^{-i\frac{U(\mathbf{r})\tau}{\hbar}} \Psi(t). \quad (5.24)$$

On veut par ailleurs

$$e^{-i\frac{U(\mathbf{r})\tau}{\hbar}} \Psi(t) = e^{-i\theta} \Psi(t), \quad (5.25)$$

d'où  $\frac{U(\mathbf{r})\tau}{\hbar} = l\theta$ , c'est à dire

$$\frac{U_0}{\hbar} = \frac{l}{\tau}. \quad (5.26)$$

On connaît par ailleurs [92]  $\frac{U_0}{\hbar} = q\frac{P}{w_0^2}$ , où  $w_0 = 48\mu\text{m}$  et  $P$  sont respectivement le waist et la puissance du laser et  $q = 776.6 \text{ MHz } \mu\text{m}^2\text{W}^{-1}$ . On peut remonter à l'intensité locale vue par les atomes :

$$\frac{U_0}{\hbar} = \eta I(r), \quad (5.27)$$

où  $\eta$  est défini en (5.7).

Pour avoir une idée de la puissance minimale nécessaire on peut considérer un anneau de puissance totale  $P$ , l'intensité maximale sera  $I_{\text{mim}} = \frac{P}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)}$  (la puissance a été divisée par un facteur 2 est pour tenir compte du fait que je découpe l'hélice dans l'anneau). En prenant un anneau de rayon  $r = 50\mu\text{m}$  d'épaisseur  $20\mu\text{m}$ ,  $l = 1$  et  $\tau = 20\mu\text{s}$  on obtient une puissance  $P = 130 \text{ mW}$ .

En ce qui concerne la durée de l'impulsion, la condition est que la fonction d'onde du condensat n'ait pas le temps d'évoluer

$$\frac{\mu\tau}{\hbar} \ll 1. \quad (5.28)$$

### 5.4.3 Transfert Raman de moment cinétique orbital

Une autre manière de transférer à l'anneau du moment cinétique orbital que l'hélice de puissance, est à l'aide d'un faisceau de Laguerre-Gauss ( $LG$ ). La différence par rapport au cas précédent est que au lieu d'utiliser la force dipolaire exercée par la lumière désaccordée, on agit directement sur la phase de la fonction d'onde avec la phase de la lumière. En effet, le mode spatial d'un  $LG$  est caractérisé par un enroulement de la phase autour d'une singularité du champ, et le nombre d'enroulements de phase

correspond à un moment cinétique orbital quantifié de ce mode, qui peut être transféré aux atomes à travers des transitions Raman à deux photons. Une première démonstration de ce transfert sur des atomes froids a été donnée en 2006 par le groupe de W. Phillips [149].

Lors d'un transfert Raman de moment cinétique orbital, trois états sont couplés par les deux lasers de façon à que les atomes qui se trouvent initialement dans un sous niveau de l'état fondamental soient transférés de manière cohérente dans un autre sous niveau, sans peupler l'état excité. La conservation du moment cinétique impose le transfert aux atomes du moment contenu dans le faisceau  $LG$ .

Pour cette technique on a besoin que les deux faisceaux soient de fréquence proche de la transition  $D_2$  à 780 nm et que le décalage en fréquence entre les deux soit de l'ordre de l'écart hyperfin. Une difficulté supplémentaire provient du fait que l'on souhaite coupler les états habillés par la RF, pour cela il y a encore une étude théorique en cours au sein de l'équipe. En tout cas la génération d'un mode  $LG$  comme le profil en spirale de la section précédente peuvent se faire à partir d'un faisceau gaussien avec un modulateur spatial de lumière, que je vais décrire dans la section suivante.

## 5.5 Le SLM

Dans cette section je commencerai par décrire le fonctionnement d'un modulateur spatial de lumière (dorénavant abrégé SLM), ensuite je montrerai la manière de générer une hélice de puissance et un mode  $LG$ . Les résultats obtenus sont le produit d'une collaboration démarrée en décembre 2015 avec l'équipe de Laurence Pruvost au laboratoire Aimé Cotton (LAC). En effet, n'étant pas familier avec ce dispositif, on a effectué les tests sur une de leurs tables optiques pour pouvoir profiter de leur savoir faire en matière de SLMs.

### 5.5.1 Généralités sur le SLM à cristaux liquides

Il existe plusieurs méthodes pour modifier le front d'onde de manière très précise afin d'obtenir la répartition d'éclairement souhaitée après propagation du faisceau laser. On peut citer comme exemples les masques de phase, les micromiroirs ou les modulateurs spatiaux de lumière. On a choisi d'utiliser ce dernier parce qu'il permet de modifier point par point dans un plan et de manière continue la phase, la polarisation ou l'intensité du champ électromagnétique.

Les applications sont extrêmement diverses, par exemple l'application la plus répandue de la modulation d'intensité est l'affichage. En effet les afficheurs alphanumériques de calculatrices, les écrans matriciels LCD (Liquid Crystal Display) ou encore la première génération de vidéo-projecteurs utilisent des cristaux liquides. La modulation de phase peut être utilisée pour la correction du front d'onde. En ophtalmologie par exemple elle permet des mesures à haute résolution du fond oculaire. En astronomie, lorsque les turbulences atmosphériques vont dégrader les images produites par les grands télescopes, elle permet d'imprimer sur le front d'onde les défauts inverses à ceux produits par l'atmosphère, ainsi l'image sans défauts est reproduite. Un exemple

supplémentaire d'application est l'amélioration, en compensant les anomalies de phase, du mode des lasers de puissance, qui peut être altéré par des effets thermiques; Cela permet une meilleure propagation et une meilleure focalisation.

De nombreuses applications peuvent être également citées dans le domaine de la physique atomique. Par exemple Bergamini et al. [150] ont utilisé un SLM pour créer des puits de potentiel dans lesquels piéger un atome unique, Boyer et al. [151] pour piéger et séparer en deux parties un condensat de Bose-Einstein, Andersen et al. [149] pour mettre en rotation les atomes dans un anneau en utilisant le moment cinétique orbital transporté par un mode Laguerre-Gauss.

Les deux SLMs qu'on a utilisés fonctionnent avec des cristaux liquides. Ceux-ci sont des composés dans un état intermédiaire entre l'état solide et l'état liquide : ils s'écoulent comme des liquides plus ou moins visqueux, mais les molécules les composant sont ordonnées de façon similaire à un solide. Un cristal liquide peut posséder plusieurs états mésomorphes (nommés aussi mésophases), qui diffèrent suivant la nature et la structure du mésogène, molécule à l'origine de la mésophase, ainsi que des conditions de température, de pression et de concentration. Les modèles de SLM qu'on a utilisés fonctionnent avec une couche cristaux liquides en phase nématique. Ce type de cristaux ne possèdent pas de polarisation permanente, mais lorsqu'on applique un champ électrique une polarisation induite apparaît. L'axe des molécules tourne alors sur lui-même pour s'orienter selon la direction du champ, ce qui modifie localement la biréfringence du cristal liquide. Quand on éteint le champ électrique, la direction des molécules revient à son état initial. Ces SLM permettent donc une modulation continue et locale de la phase par adressage électrique. La surface est pour cela divisée en grille de pixels, dont chacun dispose d'une électrode et d'un transistor dédiés. Le nombre de pixels disponibles pour le système d'adressage correspond à celui d'un écran d'ordinateur  $800 \times 600$ . La réponse en phase du SLM peut ne pas être linéaire par rapport au signal d'adressage et peut être plus étendue que  $[0 \quad 2\pi]$ , pour cela il est nécessaire d'effectuer une calibration. Le signal d'adressage est codé sur 8 bits, qui correspondent à 256 niveaux de phase (appelés par la suite niveaux de gris  $N_g$ ), suffisamment élevé pour les considérer continus.

Les SLMs qu'on a utilisés permettent de moduler la phase ou la polarisation de l'onde électromagnétique. On parle donc de deux différentes modalités d'utilisation du SLM :

- Modulation de phase. Cette modalité, appelée également holographie, consiste à observer l'intensité du champ électrique diffracté par le SLM. La polarisation du laser incident doit être parallèle à la direction des molécules du cristal liquide. Pour observer la figure diffractée en général on doit se placer dans le régime de Fraunhofer : l'intensité est observée à l'infini ou dans le plan focale d'une lentille convergente.
- Modulation d'intensité. Comme le SLM n'agit pas sur l'amplitude de l'onde, mais seulement sur la phase ou la polarisation, afin de moduler l'intensité il faut associer le SLM à deux polariseurs, qui traduisent la modulation de polarisation en modulation d'intensité. L'image que l'on souhaite obtenir, couramment appelée masque d'intensité, est directement adressée au SLM et reprise par un système

optique qui la ramène au niveau des atomes. On a constaté expérimentalement que la meilleure façon d'imager la surface du SLM est de mettre une lentille entre la surface du SLM et l'écran pour se mettre en configuration 2f-2f.

On doit enfin tenir compte de deux exigences majeures :

- le rayon du faisceau dans le plan atomique doit mesurer environ  $50\mu\text{m}$  pour bien se superposer à l'anneau ;
- on doit obtenir un profil lisse, pour que le potentiel soit localement homogène.

### 5.5.2 Caractérisation technique du SLM

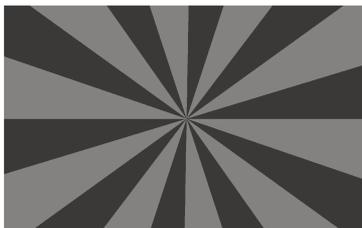
Les deux méthodes de mise en rotation des atomes que j'ai mentionnées au début du chapitre requièrent la première une longueur d'onde de 532 nm, la deuxième de 780 nm. Le seul modèle permettant l'utilisation sur une aussi large plage de longueurs d'onde est le X10468-07, produit par Hamamatsu. Il est utilisable entre 633 nm et 1100 nm et fonctionnant en réflexion. La différence avec les autres modèles est qu'il ne possède pas de miroir diélectrique optimisé à une longueur d'onde spécifique et il a été testé en fabrique entre 620 nm et 1100 nm. Avant l'achat on a donc voulu vérifier son fonctionnement à 532 nm, sur un modèle commercial que la société même nous a prêté temporairement. En parallèle, on a pu utiliser aussi le SLM de l'équipe de L. Pruvost, un Holoeye, modèle PLUTO NIR 011. Les résultats que je vais décrire par la suite de ce chapitre ont été donc obtenus avec les deux.

#### Dispositif expérimental

Dans ce paragraphe je décris brièvement le montage optique, schématisé dans la figure 5.14, que nous avons utilisé pour tester les SLMs. La source de lumière utilisée pour les tests est un laser commercial SDL-200T (Shanghai dream laser) émettant un faisceau gaussien  $TEM_{00}$  monomode longitudinal à 532 nm à une puissance de 160 mW. Le SLM peut moduler la phase à condition que la polarisation du laser incidente soit parallèle à la direction des molécules du cristal liquide, dans notre cas, verticale : il est donc nécessaire de polariser verticalement le laser avec un cube. En plus, afin d'éclairer une assez grande surface du SLM on fait diverger un peu le faisceau avec une lentille de focale  $f=300$  mm. Si le SLM est utilisé dans une configuration de modulation uniquement de phase, la polarisation du laser réfléchi est identique à celle du laser incident, donc verticale sur tout le montage : il est impossible de séparer la lumière retro-réfléchi de celle incidente avec un cube polariseur. Ce modèle étant optimisé pour fonctionner en incidence normale, on a vérifié que avec un petit angle d'incidence ( $\alpha \sim 5^\circ$ ) entre le SLM et le faisceau incident, de sorte que le faisceau incident et réfléchi ne soient pas superposés, les performances du SLM restent les mêmes (pour un angle plus important on a observé des franges d'interférence verticales dans le faisceau réfléchi). Après réflexion, le faisceau est focalisé par une lentille placée à une distance du SLM égale à sa distance focale. Cette disposition a l'avantage de placer l'image géométrique du SLM à l'infini afin de perturber le moins possible la figure de diffraction,

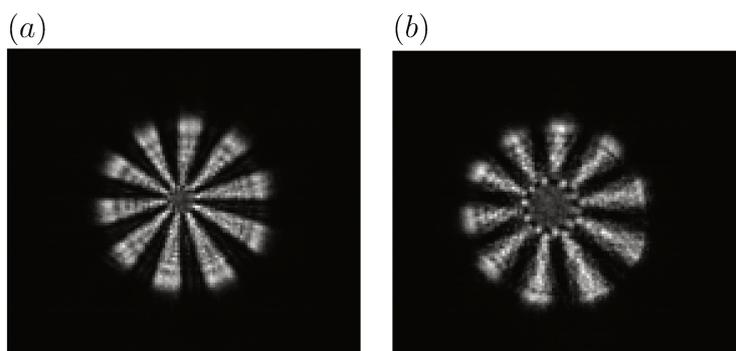
dont la position longitudinale coïncide avec l'image géométrique d'un objet à l'infini.<sup>4</sup> Le profil d'intensité est mesuré par une caméra CCD Gentec.

Pour mettre au point la caméra une méthode rapide consiste à regarder une modulation d'intensité en éventail, montrée dans la figure 5.12, et ajuster finement la position de la caméra jusqu'à obtenir un profil net (voir figure 5.13 à gauche).



**Figure 5.12** — Masque d'intensité utilisé pour la mise au point de la caméra CCD.

*Intensity mask used to focus the CCD camera.*

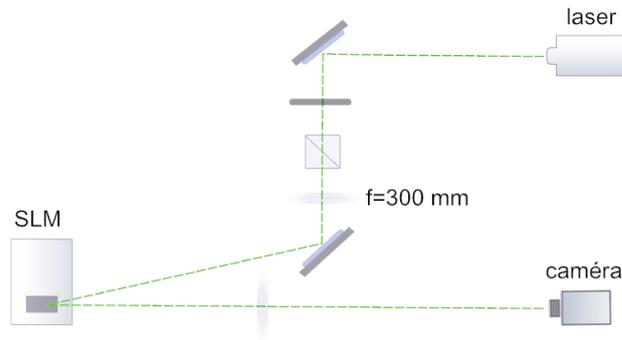


**Figure 5.13** — Mise au point de la caméra. Dans la figure de gauche la caméra est au point, dans la figure de droite la caméra est trop proche de la dernière lentille.

*Focusing the CCD camera. The image on the left is taken with a well focused camera, while for the image on the right the camera was too close to the last lens.*

En ce qui concerne le pilotage du SLM, il est préférable de disposer de deux écrans : un de contrôle et l'autre pour une copie de ce qui est affiché sur la surface du SLM. Pour que l'hologramme affiché sur le SLM soit correct, ce deuxième écran doit être réglé avec les bons paramètres : une « résolution écran » de  $800 \times 600$ , un taux de rafraîchissement de 60 Hz, un codage sur 8 bits (256 niveaux de gris). Un logiciel de traitement d'image vectoriel (par exemple gimp, ImageJ,...) est utilisé pour manipuler les hologrammes. Dans notre cas on a utilisé le logiciel en libre accès « ImageJ ».

4. Cependant nous n'avons pu utiliser cette configuration puisque le faisceau incident sur le SLM n'était pas collimaté, on s'est donc mis à une distance empirique pour laquelle on obtenait sur la CCD le profil souhaité.



**Figure 5.14** — Montage pour caractériser le SLM.

*Mounting to characterize the SLM.*

### Calibration des niveaux de gris

La correspondance entre les 256 niveaux de gris et le déphasage induit est bien établie par le constructeur uniquement entre 633 nm et 1100 nm. À 532 nm, on ne peut pas obtenir un hologramme correct tant qu'on ne connaît pas le déphasage introduit par le SLM en fonction du niveau de gris d'adressage. Je décrirai dans ce paragraphe comment il est possible de modifier les niveaux de gris d'adressage en jouant directement sur la carte graphique, à travers un ajustement du contraste.

Avec le logiciel fourni avec le SLM on dessine un point proche du centre (l'hologramme correspondant est un réseau blazé) et on regarde la figure de diffraction sur un écran. Au lieu d'un seul point on en obtient deux : l'ordre zéro ne disparaît pas, indiquant une mauvaise efficacité de diffraction, due à un problème de calibration. On décide de travailler dans le rouge, où l'efficacité de diffraction a déjà été calibrée par le constructeur : avec la lumière provenant d'une diode laser à 635 nm et un point de travail, sélectionné dans le logiciel, à 630 nm on obtient une bonne diffraction (on est donc sûr que le problème est seulement lié à la calibration et non pas à l'imagerie par exemple). En utilisant encore cette longueur d'onde, mais en choisissant dans le logiciel qui pilote le SLM une calibration à 753 nm, on garde le même rapport de longueur d'onde que l'on a dans le cas où notre laser est à 532 nm et la calibration est faite à 633 nm. On obtient d'abord un spot diffracté très flou, mais on peut espérer que si on arrive à compenser en jouant sur le contraste au niveau de la carte graphique, cette calibration sera correcte aussi quand on utilisera le laser à 532 nm et on choisira au niveau du logiciel la calibration à 633 nm. On ouvre l'hologramme qui avec un logiciel qui permet de jouer sur le contraste (Gimp par exemple) : à partir du maximum, correspondant aux 256 niveaux de gris, on baisse jusqu'à obtenir la meilleure image de diffraction. On l'observe pour 112 niveaux de gris. On repasse au laser vert et on choisit à nouveau la calibration pour 633 nm : maintenant on observe une figure de diffraction plus nette, que l'on optimise en jouant sur le contraste plus finement. Au final on obtient un déphasage de  $2\pi$  pour 105 niveaux de gris.

### Étude des effets thermiques

Puisqu'on envisage de travailler avec des intensités lumineuses assez grandes (environ 3 W dans le vert), ici on s'intéresse à la façon dont les effets thermiques jouent sur l'efficacité de diffraction.

Un premier essai a été de chauffer la surface du SLM et monitorer la puissance diffractée dans l'ordre +1. Pour cela nous avons choisi un niveau de gris qui correspond à un endroit de la courbe où la pente est la plus raide (donc ni au maximum ni à l'extinction de l'ordre +1), pour mieux mesurer les variations. On augmente la température de la surface du SLM de 27° à 31° (mesurée avec une caméra thermique), mais on se rend compte que l'observable la puissance diffractée dans l'ordre +1 n'est pas pertinente, puisque des variations brusques de température modifient le déphasage, sans pour cela endommager le dispositif.

On essaye donc une autre approche, qui consiste à voir quelle puissance laser on peut envoyer sur la surface du SLM avant d'observer une dégradation de l'efficacité de diffraction. Nous effectuons cette mesure avec un laser Millenia de puissance maximale 10 W, pour être capable de mesurer des effets thermiques. On augmente progressivement la puissance incidente sur le SLM, tout en mesurant l'efficacité de diffraction. On commence à observer une légère variation pour une puissance incidente de 1.3 W, c'est à dire une densité de puissance de  $2.2 \times 10^5 W \cdot m^{-2}$ .

En conclusion, jusqu'à une densité de puissance de  $2.2 \times 10^5 \frac{W}{m^2}$  on n'a pas observé des variations dans l'efficacité de diffraction. De plus, pour l'utilisation qu'on envisage, on a besoin de faire des impulsion très courtes,  $\tau \sim 20\mu s$  à des intervalles de la minute : on ne s'attend pas à observer des effets thermiques indésirables.

### Mesure de l'efficacité de diffraction et de l'absorption

On mesure la puissance diffractée dans l'ordre +1 (avec  $\lambda = 532$  nm) avec un réseau blazé de période 16 pixels (3 paires de lignes par millimètre), chaque pixel étant de taille  $20\mu m$ ) et en se restreignant à 0-105 niveaux de gris.

On définit l'efficacité de diffraction comme le rapport entre la puissance  $P_{+1}$  diffractée dans l'ordre +1 et celle réfléchiée par le SLM adressé uniformément avec un fond noir  $P_0$ , tout en corrigeant les deux mesures d'un offset  $P_{off}$  (mesuré en cachant la lumière laser). On obtient au mieux :

$$\eta = \frac{P_{+1} - P_{off}}{P_0 - P_{off}} = 81\% . \quad (5.29)$$

De manière similaire on mesure le rapport entre la puissance avant  $P_{av}$  et après réflexion sur le SLM  $P_{ap}$ , celui-ci étant éteint :

$$\rho = \frac{P_{ap} - P_{off}}{P_{av} - P_{off}} = 80\% . \quad (5.30)$$

L'absorption, due à la réflexion sur le miroir et à l'absorption des cristaux liquides, est donc de l'ordre du 20%.

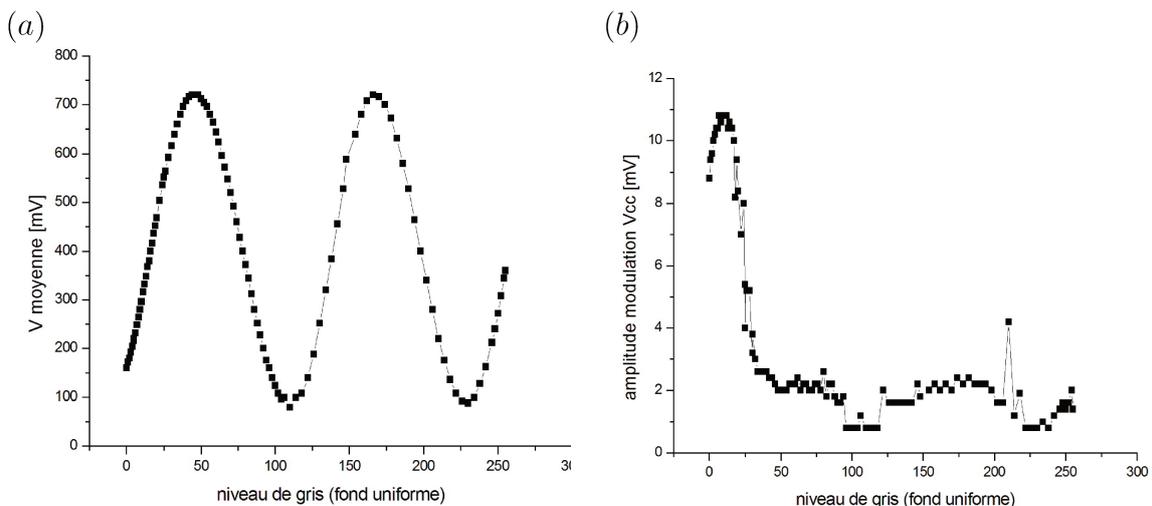
### Modulation parasite d'amplitude

Une modulation parasite de l'intensité réfléchiée est présente dans les deux modèles de SLMs, soit en mode hologramme soit en mode masque d'intensité.

Pour essayer d'en comprendre l'origine on mesure avec une photodiode la lumière réfléchiée par un fond de niveau de gris uniforme, qu'on fait varier pour chaque mesure. La lumière est focalisée en entier sur la photodiode, donc on mesure le motif en entier. La courbe obtenue est montrée dans la figure 5.1 pour le SLM Hamamatsu et dans la figure 5.15 pour le SLM Holoeye.

Dans le modèle Hamamatsu on a l'impression que la plupart de la modulation ne se produit que pour les 30 premiers niveaux de gris, pourtant même en rajoutant un offset aux niveaux de gris, nous ne sommes pas parvenus à un résultat satisfaisant. La modulation observée se fait pour une fréquence de 240 Hz et a toujours une amplitude inférieure à 10% (mesurée en modulation d'intensité) crête-crête, et en diffraction elle est de l'ordre de 4% dans l'ordre 0 et de 2% dans l'ordre 1.

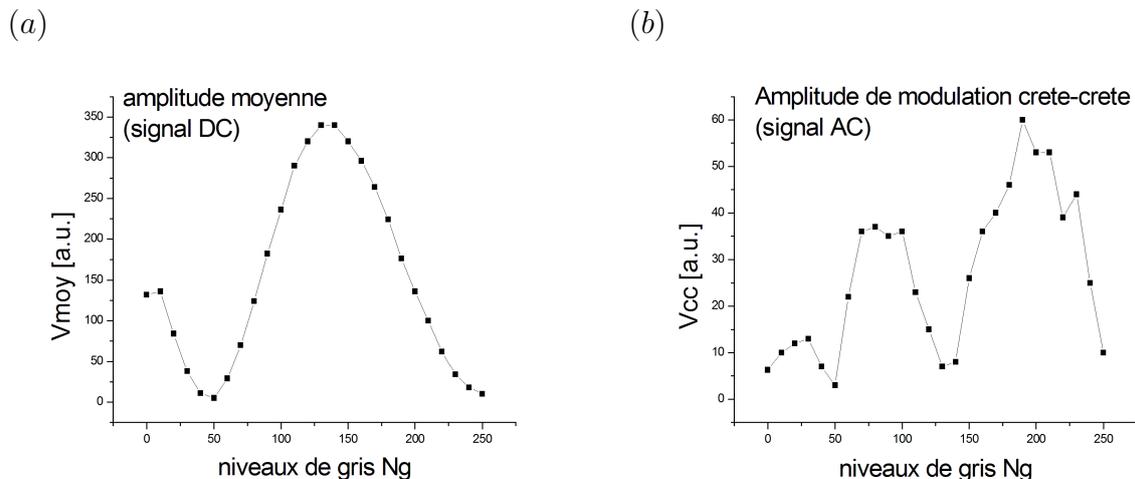
Dans le modèle Holoeye la modulation se fait à une fréquence de 300 Hz. On peut observer une modulation de l'ordre de 10 – 20%, donc beaucoup plus importante que dans le Hamamatsu.



**Tableau 5.1** — Modulation parasite de l'intensité réfléchiée par le SLM Hamamatsu. Le signal est mesuré à la photodiode et correspond : (a) à la composante continue (valeur moyenne du signal), (b) à la composante alternative (amplitude de modulation crête-crête).

*Modulation of the intensity in the SLM Hamamatsu, measured with a photodiode : (a) direct signal, (b) alternating signal.*

Des tentatives pour minimiser cette modulation ont été d'essayer différents hologrammes, en éliminant une famille de niveaux de gris, en utilisant un autre logiciel pour dessiner les hologrammes, de refroidir le SLM (d'environ 10°C) et de jouer sur la tension de polarisation des pixels. Parmi tous ces essais seulement ce dernier a eu un



**Figure 5.15** — Modulation parasite de l'intensité réfléchiée par le SLM Holoeye. Le signal est mesuré à la photodiode et correspond : (a) composante continue, (b) composante alternative.

*Modulation of the intensity in the SLM Holoeye, measured with a photodiode : (a) direct signal, (b) alternating signal.*

effet positif. Cette option n'est permise que sur le Holoeye, à partir du logiciel fourni par le constructeur. En baissant la tension de polarisation on observe que la modulation est beaucoup plus faible, mais le problème est que maintenant on n'a que un déphasage total de  $\pi$ , alors qu'on a besoin d'un déphasage de  $2\pi$ . En conclusion, cela n'est pas une solution envisageable, du moins si l'on a besoin d'un déphasage de  $2\pi$ .

Finalement on peut conclure que cette modulation est présente dans les deux modèles et qu'elle est probablement liée à la fréquence de permutation de la tension des pixels, qui se fait à 60 Hz. Une possibilité pour s'affranchir de ce problème serait la synchronisation avec une horloge à 60 Hz, de telle sorte que les atomes voient tout le temps le même signal, mais pour l'instant on n'a pas exploré cette piste. Cependant, le fait que ce bruit soit réduit dans le Hamamatsu a été le critère qui nous a guidé pour l'achat de celui-ci.

Le tableau 5.2 résume les caractéristiques des deux SLMs.

### 5.5.3 Mise en forme d'un faisceau Laguerre-Gauss

Je présenterai ici les résultats obtenus pour la mise en forme de modes Laguerre Gauss ( $LG$ ) par méthode holographique<sup>5</sup>.

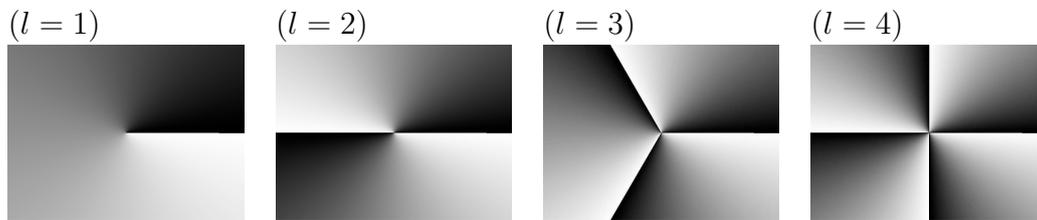
L'hologramme pour produire un Laguerre-Gauss est de la forme  $\phi = l\theta$ , étant  $l$  l'ordre du Laguerre Gauss et  $\theta$  l'angle polaire sur l'hologramme. Ceux qui génèrent des  $LG_0^l$  sont donc des hélices de phase, et le nombre de secteurs de l'hologramme, chacun allant de 0 à  $2\pi$ , est égal à  $l$  (comme montré dans la figure 5.16). La majorité

5. Même s'il n'est pas possible de réaliser un  $LG$  complètement par cette méthode [152], elle donne des bons résultats si l'objectif est de générer des modes creux en forme d'anneau avec un centre très noir.

Paramètre	Hamamatsu x10468-07	Holoeye Pluto NIR 011
pixels	792 × 600	1920 × 1080
période pixels	20 μm	8 μm
surface active	15.8 × 12 mm	15.36 × 8.64 mm
adressage	8 bit (256 niveaux de gris)	8 bits (256 niveaux de gris)
absorption (532 nm)	20%	33%
eff. de diffr. (532 nm)	80%	85%
domaine de λ	420-1100 nm	620-1100 nm
taux de rafraichissement	60 Hz	60 Hz
modulation parasite	<10%	~ 20%

**Tableau 5.2** – Comparaison entre les deux modèles de SLM testés.

*Comparison between the two models of SLM we tested.*



**Figure 5.16** – Hologrammes de phase permettant de générer des modes Laguerre Gauss  $LG_0^l$ . Ici  $l = 1, 2, 3, 4$ .

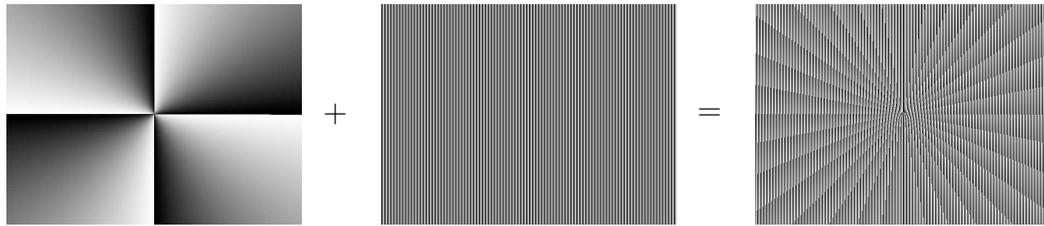
*Phase holograms to generate Laguerre Gauss beams  $LG_0^l$ . Here  $l = 1, 2, 3, 4$*

de l'intensité incidente sur un SLM est déviée par diffraction. Cependant, étant donnée l'efficacité de diffraction maximale de 80%, il reste toujours une fraction qui n'est pas diffractée (l'ordre 0) et qui suit la même trajectoire que si la face active du SLM était remplacée par un miroir. Pour éviter que la lumière non diffractée se superpose avec le motif désiré on peut incorporer à l'hologramme en hélice un réseau blazé, de phase  $\phi = kx$ . La phase totale sera donc  $\phi = l\theta + kx$ , où  $x$  est la direction de diffraction du réseau blazé (ici horizontale), et  $k = \frac{2\pi}{a}$ ,  $a$  étant le pas du réseau. La figure 5.17 montre l'hologramme « fourchette » obtenu pour  $l = 4$  et une période de réseau de 8 pixels.

Nous avons créé des modes Laguerre-Gauss avec  $l$  qui varie de 1 à 10. <sup>6</sup> La figure 5.18 présente les images des modes  $LG$  avec leurs profils, obtenus par une coupe le long de  $x$ . Les images sont prises loin du SLM (à l'infini) et sans optiques.

Deux paramètres critiques pour l'obtention d'un Laguerre-Gauss sont la qualité du faisceau incident et l'imagerie. Le faisceau incident sur le SLM doit être un faisceau gaussien bien collimaté, et pour imager correctement un  $LG$  il est nécessaire de filtrer spatialement avec un diaphragme pour éviter l'interférence avec d'autres modes d'ordre supérieur, et faire attention à ne pas mettre la CCD à l'endroit où on fait l'image du plan du SLM. En effet le mode se crée par interférence après propagation et pour l'imager il faut regarder à l'infini ou dans le plan focal d'une lentille car après propagation il ne

6. L'expression mathématique qui permet de dessiner l'hologramme avec ImageJ est  $v = (l * \frac{a}{2\pi} + \frac{x \% 8}{8}) \% 1 * 144 + 38$ .



**Figure 5.17** – Ajout d’un hologramme réseau blazé à un hologramme  $LG_0^4$ . La somme des deux donne un hologramme en fourchette : dans l’ordre 1 diffracté on trouvera le mode Laguerre Gauss, tandis que dans l’ordre zéro le mode gaussien non diffracté.

*Addition of a grid to the hologram of an  $LG_0^4$ . The diffracted beam in the +1 order is a Laguerre Gauss mode, while the zero order is the gaussian non diffracted mode.*

reste qu’un seul mode. Si au contraire on image près de la surface du SLM, plein de modes seront imagés.

On observe en premier que le rayon du Laguerre-Gauss augmente et que son intensité maximale diminue quand  $l$  augmente. De même, on remarque que le profil est de plus en plus plat au centre à mesure que  $l$  augmente. Ces observations sont en parfait accord avec les propriétés générales des modes de Laguerre-Gauss.

#### 5.5.4 Réduction de la résolution

Au niveau des atomes le rayon de l’anneau doit être de l’ordre  $\sim 50\mu\text{m}$  : réduire la taille du faisceau pour obtenir un rayon si petit est un enjeu. Cela sera d’autant plus facile si on a au départ un faisceau petit et collimaté. Mais jusqu’à combien on peut réduire la taille du faisceau incident pour ne pas avoir des effets de pixellisation ?

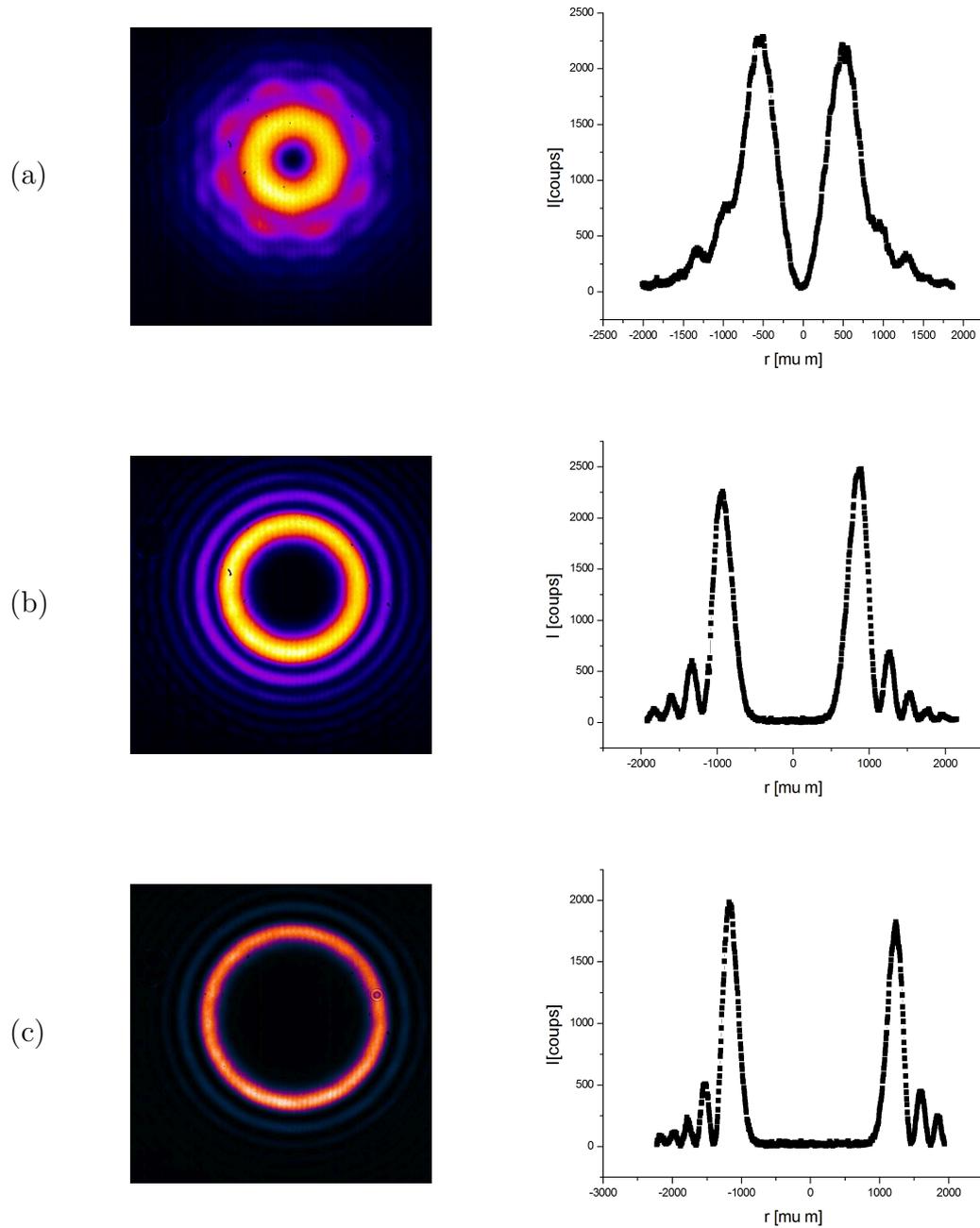
Au lieu de réduire la taille du faisceau un premier test facile à réaliser est de simuler une réduction de la taille du faisceau incident sur le SLM en groupant les pixels. On essaye de voir cet effet avec un  $LG$  de  $l = 9$  et un réseau de période 8 pixels. On peut grouper jusqu’à 4 pixels en un seul. On ne peut pas aller plus loin à cause de la périodicité du réseau (pas moins que 2 pixels par période). On a ainsi réduit la résolution initiale de  $800*600$  pixels à  $200*150$  pixels : jusque là on n’observe pas des effets de pixellisation.

#### 5.5.5 Régularité au sommet d’un LG

On veut estimer la régularité d’un profil Laguerre-Gauss. Pour avoir une estimation des fluctuations d’intensité on a tracé le profil azimutal d’un mode avec  $l = 10$ , montré dans la figure 5.19. On peut observer qu’elles sont de l’ordre de 10%.

#### 5.5.6 Fabrication de l’hélice d’intensité

Dans ce paragraphe je décrirai les trois techniques différentes qu’on a essayé pour fabriquer une hélice d’intensité.



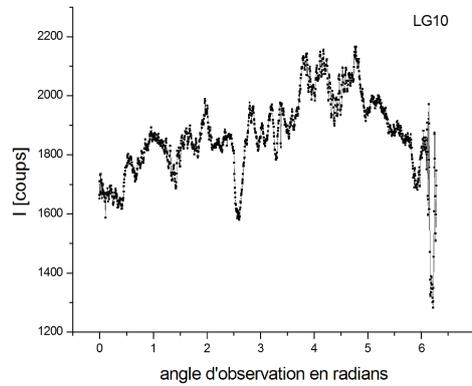
**Figure 5.18** — Modes de Laguerre-Gauss, obtenus expérimentalement : (a)  $LG_0^1$ , (b)  $LG_0^5$ , (c)  $LG_0^{10}$ .

*Laguerre-Gauss modes, experimentally obtained : (a)  $LG_0^1$ , (b)  $LG_0^5$ , (c)  $LG_0^{10}$ .*

### Hologramme de l'hélice

La manière la plus directe d'obtenir un profil en hélice est de faire calculer le motif qui génère un hologramme en hélice directement au logiciel du SLM.

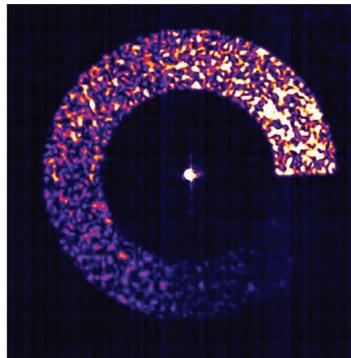
L'inconvénient majeur de cette méthode est le bruit de nature numérique (appelé



**Figure 5.19** – Profil azimutal du mode  $LG_0^{10}$  pris le long du rayon d'intensité maximale.

*Azimuthal profile of the  $LG_0^{10}$ , taken along the radius of maximal intensity.*

également bruit de reconstruction), qui résulte en une image très granuleuse, comme on peut le voir sur la figure 5.20. Notamment on observe des points puisque l'algorithme de Gerchberg Saxton, utilisé par le logiciel, calcule des transformées de Fourier entre le plan objet et le plan image, toutes les deux composées de pixels. Une possible amélioration



**Figure 5.20** – Hologramme d'une hélice obtenue en diffraction.

*Hologram of the helix.*

pour cette technique serait de sélectionner une zone du motif où on autorise n'importe quelle valeur de l'intensité, ce qui enlève des contraintes ailleurs et autorise l'algorithme à rejeter ici le bruit résiduel.

Au delà de la facilité de mise en œuvre, l'avantage principal est lié aux faibles pertes. En effet elles sont dues seulement à l'efficacité de diffraction et à l'absorption du SLM. Pour une puissance  $P_{\text{inc}}$  donnée, la puissance efficace  $P_{\text{eff}}$  sera donc :

$$P_{\text{eff}} = \rho\eta P_{\text{inc}} \sim 0.64, \quad (5.31)$$

Pour une estimation de la puissance incidente nécessaire on indiquera  $w'$  le waist du faisceau Laguerre-Gauss  $LG_0^l$  qui se propage,  $w_0$  le waist du faisceau gaussien incident.

On peut montrer que l'épaisseur  $e$  du  $LG_0^l$  vaut  $w'$  (précisément à  $\frac{1}{e^4}$  du max). Puisque le profil en intensité du  $LG$  est gaussien il faut que l'épaisseur de l'anneau atomique soit inférieure au dixième de l'épaisseur de l'anneau  $LG$ , c'est à dire qu'il faut  $w' = 20\mu m$  pour recouvrir un anneau atomique d'épaisseur  $e = 2\mu m$ . Dans un  $LG_0^l$  la relation entre le waist et le rayon est  $r = w'\sqrt{\frac{l}{2}}$ , ce qui veut dire qu'il faudrait  $l \sim 12$  pour  $w' = 20\mu m$ .

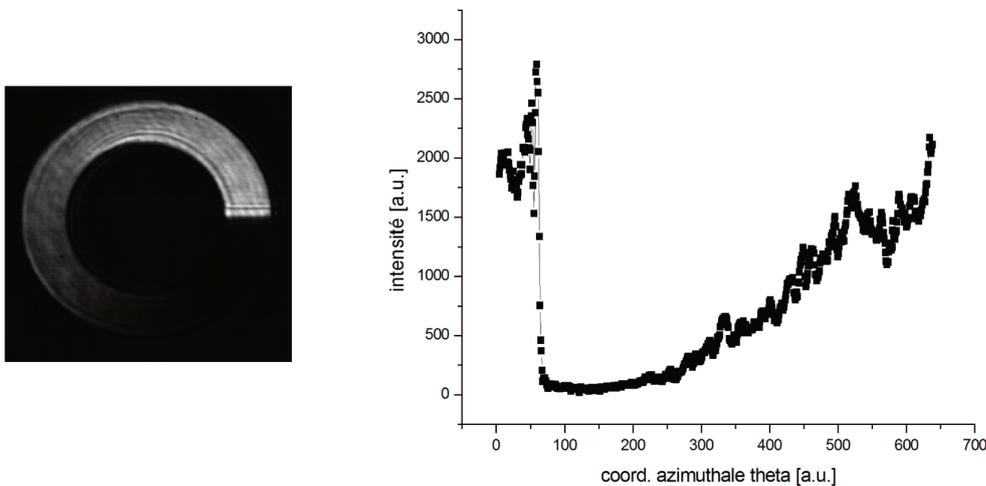
$$P_{holo} = \sqrt{\frac{2\pi^3}{l}} R^2 \frac{1}{\eta\tau} = 275mW. \quad (5.32)$$

### Masque d'intensité

Une deuxième manière de faire serait d'utiliser le SLM en modulation d'intensité pour créer un masque en hélice et ensuite découper un profil en anneau. De cette manière on obtient sur les atomes la même image présente sur la surface du SLM, obtenue avec ImageJ avec l'expression suivante :

$$v = \left( \left( \frac{a}{2\pi} \times 72 \right) \% 72 \right) \times (d > 75) \times (d < 120). \quad (5.33)$$

Le résultat obtenu (avec le Holoeye) est montré dans la figure 5.21.



**Figure 5.21** — À gauche : image prise avec la caméra CCD de l'anneau modulé. À droite : profil azimuthal de l'anneau modulé.

*On the left : image of the modulated ring, taken with the CCD camera. On the right : corresponding azimuthal intensity profile.*

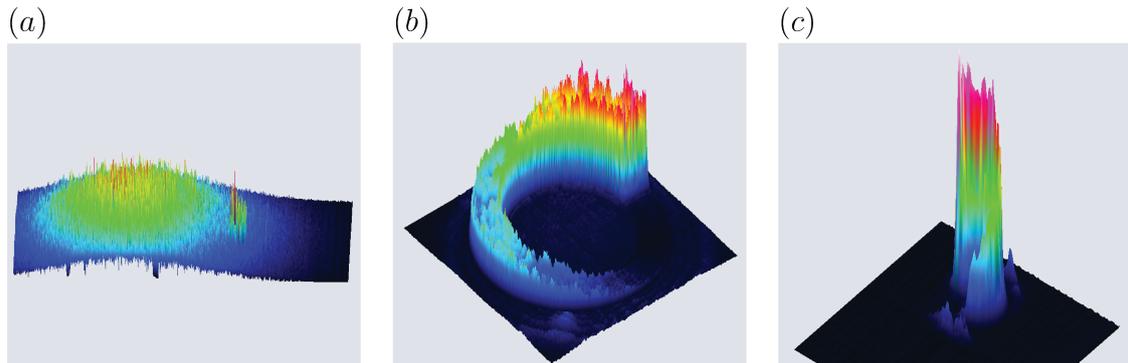
On s'aperçoit que la mise au point de la caméra est assez critique car, si elle est mauvaise, il y a un maximum d'intensité qui apparaît au centre de l'anneau.

L'avantage principal par rapport à la méthode précédente est qu'il n'y a pas de bruit de reconstruction, l'inconvénient est qu'on perd une fraction plus importante de puissance (jusqu'au 50%).

Comme j'avais mentionné auparavant, réussir à réduire la taille jusqu'à un rayon d'environ  $50\mu\text{m}$  est un enjeu. Vu qu'avec cette méthode on a réussi à obtenir un résultat satisfaisant, on essaye maintenant de réduire la taille. On commence par un masque d'intensité de rayon interne 200 pixels et externe de 350 pixels sur la caméra. On veut un grandissement de  $\frac{1}{32}$  afin d'obtenir un anneau de diamètre  $150\mu\text{m}$  sur la caméra. Pour cela on fait l'image de l'hélice avec deux télescopes, le premier ayant un grandissement  $\frac{1}{8}$  ( $f_1 = 400$  mm et  $f_2 = 50$ mm) et le deuxième  $\frac{1}{4}$  ( $f_3 = 200$  mm et  $f_4 = 50$  mm).

On obtient sur la caméra un anneau de rayon  $\sim 75\mu\text{m}$ , donc compatible avec le grandissement attendu (le rayon moyen de l'anneau au niveau du SLM étant 2.2 mm on s'attend à un rayon sur la caméra de  $\frac{2.2\text{mm}}{32} = 70\mu\text{m}$ ). La coupure est assez franche et on remarque que l'alignement des deux télescope est assez critique pour obtenir un bon profil (mieux vaudrait avoir un système de cages). Le profil en intensité présente encore du bruit à haute fréquence, mais on soupçonne un artefact de la caméra, puisque on l'observe aussi sur le faisceau gaussien en sortie du filtre spatial (là où on s'attend avoir un beau profil gaussien sans bruit). Il faudra essayer avec une autre caméra.

On crée une hélice en masque d'intensité avec un grandissement  $\gamma = 1/8$ . On observe toujours un profil très bruité mais la coupure est bonne.



**Figure 5.22** — profil du faisceau (a) avant le SLM, en sortie du filtre spatial, (b) après le premier télescope, (c) après le deuxième télescope.

*Beam profile (a) before the SLM, after spatial filter, (b) after the first telescope, (c) after the second telescope.*

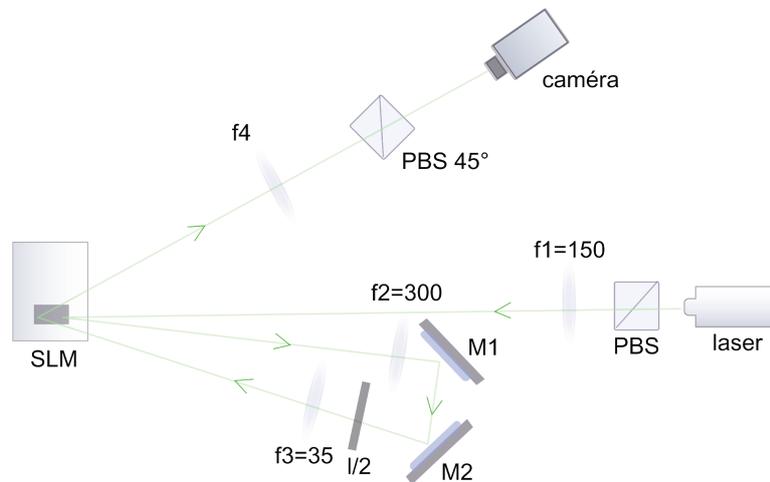
Pour une estimation de la puissance nécessaire en masque d'intensité, on sait que l'intensité maximale que les atomes peuvent expérimenter est donnée par l'expression (5.26), où il faut prendre  $l = 1$ , qui correspond à un déphasage de  $2\pi$ . D'après (5.27) on obtient  $I_{max} = \frac{1}{\eta\tau}$ . L'éclairement vaut pour un faisceau gaussien  $I(r) = \frac{2P}{\pi w_0^2} e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}}$ . Il existe une relation entre le waist du faisceau gaussien  $w_0$  et le rayon de l'anneau qui optimise l'intensité :  $w_0 = \sqrt{2}R$ . Si le faisceau incident a le waist optimal on aura donc le maximum d'éclairement :  $I_{max} = \frac{P}{e\pi R^2}$ . Pour  $R = 50\mu\text{m}$  et  $\tau = 20\mu\text{s}$  on obtient  $P = \frac{e\pi R^2}{\eta\tau} = 850$  mW. En tenant compte aussi de l'absorption, une estimation de la puissance nécessaire en masque d'intensité est :

$$P_{masque} = 850/0.8 \sim 1W . \quad (5.34)$$

### Double passage

Une troisième méthode que l'on a essayée a été de couper en deux parties la surface du SLM pour réaliser un schéma en double passage. On crée en premier un mode  $LG$ , ensuite on module l'intensité azimutale de l'anneau lors d'une deuxième réflexion sur le SLM.

Le montage utilisé pour cette troisième méthode est montré dans la figure 5.23.



**Figure 5.23** — Schéma du montage pour la réalisation d'un faisceau Laguerre-Gauss avec un profil d'intensité en hélice.

*Breadboard scheme to obtain a Laguerre Gauss beam with a helical intensity distribution.*

L'avantage de cette méthode est bien évidemment l'optimisation de la puissance, parce que pour un mode  $LG$  toute la puissance du faisceau gaussien est répartie sur un anneau. On estime :

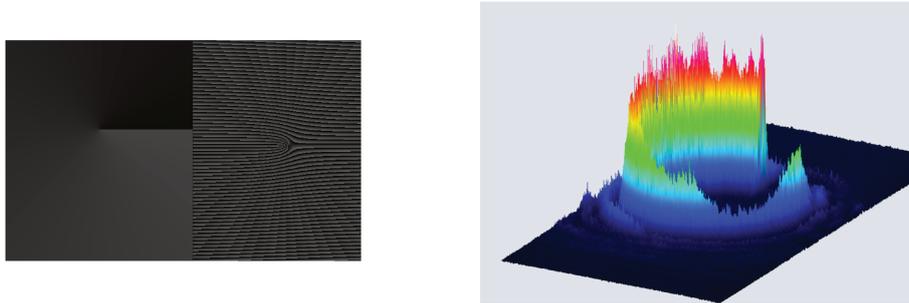
$$P_{\text{eff}} = 0.5\rho^2\alpha'\eta P_{\text{inc}} < 0.25, \quad (5.35)$$

où le facteur  $\alpha'$  tient compte des pertes dues au lissage que nécessitera le faisceau  $LG$ .

Le profil obtenu, montré dans la figure 5.24, n'est pas très satisfaisant : il présente une modulation en intensité et il est très bruité à haute fréquence. En effet cette méthode requiert beaucoup d'optiques et l'alignement est rendu encore plus critique par le fait que les angles d'incidence sur le SLM doivent être petits.

## 5.6 Conclusions

Dans ce chapitre, j'ai expliqué comment on piège les atomes en un géométrie annulaire et les techniques envisagées pour mettre en rotation les atomes. L'anneau est obtenu en rajoutant au piège magnétique décrit au chapitre 2 le potentiel optique produit par un laser désaccordé vers le bleu à 532 nm. Le rôle de ce laser est de fixer, par force dipolaire, la hauteur du gaz sur l'équateur de l'ellipsoïde isomagnétique, ce qui



**Figure 5.24** — Hélice obtenue avec le double passage. Sur la gauche de l’image il est montré ce qu’on affiche sur l’écran du SLM pour d’abord créer un *LG* (le motif en fourchette à droite), et ensuite moduler son intensité avec un masque en hélice (le motif à gauche). Sur la droite une image 3D du profil ainsi obtenu, prise avec la caméra CCD.

*Helix obtained with a double passage. On the left of the image it is shown the pattern we display on the screen of the SLM to first create an *LG* mode (the fork-like pattern on the right) and then to modulate its intensity (the pattern on the left). On the right it is shown a 3D image of the beam we obtained in this way, taken with the CCD camera.*

résulte en un piégeage en anneau pour les atomes. La configuration laser est une double nappe obtenue avec une lame de phase  $0 - \pi$  placée le long de l’axe de propagation du faisceau. Le rayon du piège (typiquement entre 20 et 500  $\mu\text{m}$ ) et la fréquence de piégeage (de 300 Hz à 2 kHz) peuvent être ajustés avec la fréquence et l’amplitude de la radiofréquence utilisée pour l’habillage des atomes. La fréquence de piégeage verticale dépend du confinement optique et on a montré qu’elle est de l’ordre de 3 kHz. Avec un tel confinement vertical on est dans le régime quasi-2D. Le chargement des atomes dans l’anneau se fait en allumant le piège optique à la positions des atomes confinés dans le potentiel magnétique habillé seul et en déplaçant ensuite l’ellipsoïde magnétique verticalement à l’aide d’un champ magnétique statique additionnel.

Pour que le condensat puisse circuler dans l’anneau il faut que le potentiel chimique soit plus grand que la variation de potentiel (par exemple si l’anneau est tilté de 1.7  $\mu\text{m}$  la variation du potentiel gravitationnel correspond à 72 nK [147]).

À l’état de l’art on arrive à charger les atomes dans ce piège, mais des mesures après temps de vol montrent qu’ils ne sont pas condensés. Cela est dû sans doute aux inhomogénéités du potentiel, qu’on peut observer par des images prises *in situ*. On ne peut pas encore quantifier la profondeur des puits car on n’a pas encore mise en place une procédure qui permet de mesurer le nombre d’atomes dans l’anneau. Pour améliorer le profil du potentiel on envisage un nouveau montage avec un AOM en quartz Gooch and Housego, qui devrait moins dégrader le faisceau qui crée les nappes. Si on constate que les inhomogénéités sont en bonne partie dues à la lame de phase, on optera pour un montage avec une onde stationnaire verticale dans laquelle on pourra piéger les atomes.

En ce qui concerne la mise en rotation des atomes on a envisagé trois options : une touillette à atomes, déjà installée sur l’expérience, une mise en rotation par force dipolaire ou une transition Raman avec transfert de moment cinétique orbital. Ces

dernières deux techniques requièrent l'utilisation d'un modulateur spatial de lumière. Après en avoir testé la faisabilité, dans le cadre d'une collaboration avec l'équipe de L. Pruvost, on a acheté le modèle Hamamatsu X10468-07, qui vient d'être livré et qui sera installé prochainement sur le montage.

# Conclusion

Dans ce travail j'ai présenté en premier l'étude des modes collectifs d'oscillation d'un gaz de Bose bidimensionnel, j'ai ensuite décrit l'analyse de l'un de ces modes en particulier, le mode ciseaux, et enfin la réalisation d'un piège en anneau pour les atomes.

L'étude des modes collectifs d'oscillation a été menée avec une technique d'analyse qui se base sur l'existence de corrélations entre chaque image du nuage, l'*analyse en composantes principales*. Elle permet de décomposer l'oscillation du gaz dans le piège en la contribution des différents modes collectifs d'excitation, et de mesurer leurs fréquences et leurs poids statistiques. Cette méthode avait déjà été employée dans le domaine des gaz ultra-froids pour filtrer le bruit des images, mais nous avons montré qu'elle peut être utilisée en toute généralité pour analyser tout signal dépendant du temps, et en particulier pour réaliser une *spectroscopie de Bogoliubov*.

En général, l'étude des modes propres d'oscillation est très utile pour extraire des informations du système, du fait que la réponse du gaz à l'excitation peut varier en fonction de sa nature (dimensionnalité, interactions,...). Pour cette raison nous sommes par la suite intéressés au mode ciseaux. Il peut être excité dans un piège anisotrope et sa fréquence d'oscillation subit un décalage lorsque le gaz devient superfluide. Nous avons pour cela développé une nouvelle technique d'analyse, appelée *analyse de la moyenne locale*, qui consiste en une mesure locale et *in situ* de l'observable considérée. Nous avons pu ainsi discriminer la phase normale de la phase superfluide à l'intérieur d'un même nuage, et l'endroit où la transition BKT, en ouvrant la voie à une mesure dynamique et à des études des mécanismes de dissipation de la fraction superfluide.

Dans le cadre des études de superfluidité, parmi les différentes configurations de piégeage, la réalisation d'un anneau semble particulièrement prometteuse. Une des raisons en est qu'un superfluide dans un anneau est l'analogue d'un supraconducteur, où la rotation et la quantification du moment cinétique jouent le rôle du champ magnétique et de la quantification du flux. Dans l'esprit des simulateurs quantiques on pourrait envisager de réaliser un magnetomètre, en analogie avec un SQUID [15]. Dans notre expérience, nous avons réalisé un piège annulaire en superposant aux atomes habillés, qui sont contraints sur une surface isomagnétique en forme d'ellipsoïde, le potentiel optique vertical créé par un faisceau gaussien très désaccordé vers le bleu traversant

une lame de phase  $0 \rightarrow \pi$ . De cette manière on crée deux nappes de lumière, séparées dans la direction horizontale par un plan d'intensité nulle, où les atomes sont très fortement confinés et se trouvent dans le régime quasi-2D. À l'intersection de ce plan avec le piège habillé un anneau se crée, dont le rayon est très simplement ajustable via la fréquence RF ou l'altitude du laser bleu. Cela est un très grand avantage de ce type de piège annulaire. À l'état de l'art des problèmes de rugosité du potentiel créent dans l'anneau des puits de potentiel où les atomes restent piégés, en empêchant une répartition uniforme sur toute la circonférence. La cause de ces inhomogénéités n'est pas encore claire, on soupçonne le modulateur acousto-optique et la lame de phase. Ce premier a été récemment remplacé, et si cela ne résout pas le problème on envisage un montage avec une onde stationnaire.

L'étude de courants permanents circulant dans l'anneau est l'un des objectifs à plus long terme. Pour induire la rotation du gaz dans l'anneau nous avons prévu trois méthodes. La première consiste en une « touillette » laser, un laser désaccordé vers le bleu et très focalisé qui traverse deux modulateurs acousto optiques croisés qui lui permettent de tourner le long de l'anneau à une vitesse contrôlable. La deuxième option prévoit l'utilisation d'un faisceau Laguerre-Gauss pour communiquer son moment cinétique orbital au gaz, à travers une transition Raman à deux photons. L'étude de la faisabilité de cette méthode sur notre montage est encore en cours dans l'équipe. Une troisième option est de mettre en rotation les atomes grâce à la force dipolaire exercée par un faisceau dont l'intensité est en forme d'hélice. J'ai montré qu'il est possible de créer un tel profil avec un modulateur spatial de lumière, qu'il reste à intégrer sur l'expérience.

Les perspectives de l'expérience sont donc prometteuses, et nous espérons élucider des questions encore ouvertes dans ce domaine, comme par exemple la stabilité d'un supercourant, ou étudier le gaz piégé en dimension 1.

# Annexe A

## Détection du nuage

### A.1 Introduction

Considérons d'abord un faisceau sonde d'intensité  $I$  et longueur d'onde  $\lambda = 780$  nm, se propageant selon l'axe  $z$ , et un nuage d'atomes de densité  $n_{3D}(x,y,z)$ . Les équations de Bloch optiques, sous l'hypothèse que les atomes sont maintenus à résonance et à densité constante, donnent la relation suivante :

$$\frac{dI}{dz} = n_{3D}(x,y,z)\sigma_0 \frac{I}{1 + I/I_{sat}} = n_{3D}(x,y,z)\sigma(I)I \quad (\text{A.1})$$

où  $I_{sat}$  est l'intensité de saturation de la transition utilisée,  $\sigma_0$  la section efficace à résonance, définie par :

$$\sigma_0 = \frac{3\lambda^2}{2\pi}, \quad (\text{A.2})$$

ou de manière équivalente

$$\sigma_0 = \frac{\hbar\omega}{2I_{sat}}, \quad (\text{A.3})$$

où  $\omega$  est la pulsation du laser et  $\hbar\omega = 2\pi \times 6$  MHz la largeur naturelle du niveau excité. Pour la transition utilisée dans notre expérience  $\sigma_0 \sim 291\mu\text{m}^2$  et  $I_{sat} \sim 1.67$  mW/cm<sup>2</sup> [153].

On définit la densité colonne  $n(x,y)$  à partir de la densité spatiale  $n_{3D}(x,y,z)$ , en intégrant selon l'axe de la sonde (par exemple  $z$ ) :

$$n(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} n_{3D}(x,y,z)dz. \quad (\text{A.4})$$

Son expression en fonction de l'intensité avant le nuage  $I_i(x,y)$  et après  $I_t(x,y)$  se déduit à partir de A.1 :

$$n(x,y) = \frac{1}{\sigma_0} \left\{ \ln \left( \frac{I_t(x,y)}{I_i(x,y)} \right) + \frac{I_i(x,y) - I_t(x,y)}{I_{sat}} \right\} \quad (\text{A.5})$$

On appelle densité optique la quantité  $od(x,y) = \sigma_0 n(x,y)$ , utilisée par la suite. À partir de la relation (A.5) je décrirai les deux types de mesures que l'on effectue dans notre expérience, et qui correspondent aux deux cas limites de nuage dilué et de nuage dense. Ensuite je montrerai la procédure de calibration nécessaire pour convertir l'intensité de la sonde contenue dans l'expression (A.5) en terme de nombre d'atomes.

### A.1.1 Imagerie par absorption d'un nuage dilué

Dans notre montage il est possible d'observer le nuage atomique de côté, après expansion pendant le temps de vol, il s'agira donc d'un nuage dilué. On peut imager ce type de nuage avec une sonde de faible intensité, ce qui revient à négliger le deuxième terme en (A.5), et nous ramène à la loi de Beer-Lambert<sup>1</sup>. La densité optique devient :

$$od(x,z) = \sigma_0 n(x,z) = \ln \left( \frac{I_i(x,z)}{I_t(x,z)} \right), \quad (\text{A.6})$$

La section efficace d'absorption  $\sigma_0$  étant constante, la densité colonne  $n(x,z)$  peut se déduire simplement à partir des profils d'intensité du faisceau incident  $I_i(x,z)$  et transmis  $I_t(x,z)$ .

### A.1.2 Imagerie par absorption d'un nuage dense

#### Dans le régime de saturation

Si on veut réaliser l'image de nuages très denses l'imagerie par absorption non saturante n'est pas adaptée : si le faisceau incident n'est pas assez intense, il sera totalement absorbé par le nuage, et le profil de densité mesuré sera écrêté ; de plus les effets collectifs, type diffusion multiple, deviennent non négligeables. Au contraire, en travaillant avec une sonde proche de la résonance et des intensités très élevées, de l'ordre de quelques dizaines de  $I_{sat}$ , on excite fortement le nuage atomique : chaque atome est alors excité par les photons du faisceau incident, et puisque dans ce régime de saturation chaque atome passe la moitié de son temps dans l'état excité, il devient moins sensible aux photons provenant de la désexcitation des atomes voisins. De cette manière les effets collectifs dus à la diffusion multiple d'un seul photon sont réduits. Dans ce régime chaque atome diffuse  $\frac{1}{2}$  photons par seconde, donc si on sonde un nuage 2D de densité  $n(x,y)$  avec un faisceau incident d'intensité  $I_i(x,y)$  et fréquence  $\frac{\omega_L}{2\pi}$  (proche de la résonance), l'intensité détectée par la caméra est :

$$I_t(x,y) = I_i(x,y) - n(x,y) \times \frac{1}{2} \times \hbar\omega_L. \quad (\text{A.7})$$

On peut alors déduire  $n(x,y)$  à partir des profils d'intensité  $I_i(x,y)$  et  $I_t(x,y)$

$$od(x,y) = n(x,y)\sigma_0 = \frac{I_i(x,y) - I_t(x,y)}{I_{sat}}. \quad (\text{A.8})$$

1. La sonde se propageant le long de  $y$ , j'ai réécrit l'équation (A.1) et la densité colonne (A.4) pour cet axe d'imagerie.

On retrouve ainsi le deuxième terme de l'expression (A.5). Nous avons encore accès à la densité optique  $od(x,y)$  en mesurant  $I_i(x,y)$  et  $I_t(x,y)$ . Cependant, pour un nuage dense c'est la différence entre les deux qui intervient, qui nécessite donc une calibration précise de l'imagerie, tandis que dans le cas précédent la connaissance du rapport des deux suffisait.

Cette méthode, appelée « imagerie par absorption fortement saturante » a été initiée par Reinaudi et al. [154] pour l'étude de gaz tri-dimensionnels optiquement épais. Notons toutefois que la relation entre l'atténuation du faisceau et la densité atomique proposée par Reinaudi et al. pour une intensité incidente quelconque ne s'étend pas de façon immédiate au cas bi-dimensionnel. La relation entre l'atténuation du faisceau incident et la densité atomique à 2D pour une intensité quelconque a été étudiée plus tard [155], et les détails se trouvent dans la thèse de T. Yefsah [77].

### À intensité arbitraire

On vient de voir comment l'imagerie avec une sonde intense peut donner accès à une mesure fiable de la densité. Néanmoins, elle utilise des intensités sonde plus élevées que la traditionnelle technique non saturante, et par conséquent le shot noise dans  $I_i(x,y)$  et  $I_t(x,y)$  rendra le bruit sur la densité atomique mesurée plus important. Plus la densité est faible, plus ce bruit, en relatif, sera important. On peut donc conclure que pour les régions à basse intensité les deux techniques, saturée et non-saturée, donnent une estimation fiable de la densité atomique, mais pour introduire moins de bruit il est préférable d'utiliser la deuxième.

La méthode développée dans l'équipe de J. Dalibard, que je vais décrire par la suite, est une combinaison de la technique où l'on sature la transition avec des impulsions sonde intenses et de la technique traditionnelle, plus fiable dans les zones à basse intensité (par exemple les ailes du nuage atomique).

À partir de l'équation (A.1) on a

$$\sigma(I) = \sigma_0 \frac{1}{1 + I/I_{sat}}. \quad (\text{A.9})$$

On définit le taux de diffusion des photons  $\gamma_{diff} = \frac{\sigma(I)I}{\hbar\omega}$ , et en utilisant (A.3) pour  $\sigma_0$  on obtient :

$$\gamma_{diff} = \frac{I}{2 I + I_{sat}}. \quad (\text{A.10})$$

Dans la pratique, cette relation est modifiée car on doit tenir compte de la polarisation du faisceau sonde, de la structure de l'état excité, des champs magnétiques parasites, la largeur de raie du laser sonde, des effets de pompage optique,... Pour modéliser ces effets on introduit l'intensité de saturation effective  $\alpha I_{sat}$  vue par les atomes, obtenue en multipliant l'intensité de saturation de la transition à deux niveaux par un facteur adimensionnel  $\alpha$ . Alors le nombre de photons  $N_{ph}$  diffusés pendant une impulsion d'imagerie de durée  $\tau$  est

$$N_{ph} = \gamma_{diff}\tau = \frac{I}{2 I + \alpha I_{sat}}\tau, \quad (\text{A.11})$$

et donc

$$\sigma(I) = \sigma_0 \frac{1}{\alpha + I/I_{sat}}. \quad (\text{A.12})$$

À basse intensité  $N_{ph}$  est proportionnel à  $I$  comme dans le cas à deux niveaux, mais avec un coefficient  $1/\alpha$ , à haute intensité le nombre de photons diffusés sature à  $N_{ph} = \frac{1}{2}\tau$ . On peut alors réécrire la loi (A.1), en tenant compte du coefficient  $\alpha$ , sous la forme :

$$\frac{dI}{dz} = n\sigma_0 \frac{I}{\alpha + I/I_{sat}} = n\sigma(I)I. \quad (\text{A.13})$$

L'expression de la densité optique pour un nuage tridimensionnel 3D dilué  $\sigma n_{3D} \ll 1$  est donc similaire à (A.5), exception faite du facteur  $\alpha$  :

$$od(x,y) = \sigma_0 \int n_{3D}(x,y,z) dz = \alpha \ln \left( \frac{I_t(x,y)}{I_i(x,y)} \right) + \frac{I_i(x,y)}{I_{sat}} \frac{I_t(x,y)}{I_{sat}}. \quad (\text{A.14})$$

- Le terme  $\alpha \ln \left( \frac{I_t(x,y)}{I_i(x,y)} \right)$  est dominant à basse intensité et correspond à la loi de Beer-Lambert. Le paramètre  $\alpha$  doit être déterminé indépendamment, par une procédure de calibration que je décrirai par la suite.
- Le terme  $\frac{I_i(x,y)}{I_{sat}} \frac{I_t(x,y)}{I_{sat}}$  est dominant à haute intensité. Dans ce régime la section efficace d'absorption est réduite et indépendante de l'intensité incidente  $\frac{\hbar\omega_L}{2I_{sat}}$ . Cela permet une mesure fiable de la densité optique à partir des images (si on connaît  $I_i(x,y)$  et  $I_t(x,y)$ ) :  $od(x,y) = \sigma_0 n(x,y) = \frac{I_i(x,y)}{I_{sat}} \frac{I_t(x,y)}{I_{sat}}$

En conclusion, connaissant  $\alpha$  on est capable de remonter à la densité optique à partir de simples mesures de l'intensité incidente et transmise quelle que soit l'intensité de la sonde. Dans son travail de thèse, T. Yefsah a montré que dans le cas d'un nuage 2D on peut établir un résultat encore plus général que le précédent cas 3D, sans restriction au cas du gaz dilué [77], et que l'équation (A.14) reste donc valable à 2D.

## A.2 Imagerie par absorption avec une caméra CCD

Pour convertir l'expression (A.14) en termes de nombre d'atomes intégré sur la surface du pixel on note  $\mathcal{S}(i,j)$  la région du plan objet imagée sur le pixel  $(i,j)$  et on intègre la densité colonne :

$$N(i,j) = \iint_{\mathcal{S}(i,j)} n(x,y) dx dy, \quad (\text{A.15})$$

et on appelle  $s$  la surface imagée par pixel<sup>2</sup>

$$s = \iint_{\mathcal{S}(i,j)} dx dy. \quad (\text{A.16})$$

---

2. Dans la pratique on prend  $s = \left(\frac{s_c}{G}\right)^2$ , où  $s_c$  indique la taille du pixel de la caméra et  $G$  le grandissement de l'imagerie.

On a

$$N(i,j) = n(x,y)s = \alpha \frac{s}{\sigma_0} \ln \left( \frac{I_t(i,j)}{I_i(i,j)} \right) + \frac{s}{I_{sat}} \frac{I_i(i,j)}{\sigma_0} I_t(i,j). \quad (\text{A.17})$$

La caméra CCD permet de mesurer, à un facteur près, le nombre de photons incidents sur un pixel donné.

Le nombre de photons incidents sur la CCD  $N_{ph}$  dépend de l'intensité  $I$  et de la durée de l'impulsion de la sonde  $\tau$ , par conséquent les autres quantités aussi, mais pour alléger la notation on pose  $N_{ph}(I,\tau) = N_{ph}$ . Son expression est donnée par :

$$N_{ph} = \frac{I s \tau}{\hbar \omega_L}, \quad (\text{A.18})$$

où on a négligé la transmittance de l'intérieur de la cellule à la CCD. Les photons incidents sur un pixel de la CCD sont convertis en photoélectrons dans le semiconducteur avec un rendement quantique  $\eta$  :

$$N^e = \eta N_{ph}. \quad (\text{A.19})$$

Le signal analogique est ensuite converti sous format numérique en nombre de coups, avec un gain électronique  $g$  :

$$N^{coups} = g N^e = g \eta N_{ph}, \quad (\text{A.20})$$

Dans notre expérience on n'a pas accès au gain de la caméra  $g$ , pour cela on a calibré directement le taux de conversion  $\gamma = \frac{1}{g\eta}$  des photons incidents sur un pixel en coups, avec la procédure illustrée en A.2.3 :

$$N^{coups} = \frac{N_{ph}}{\gamma}. \quad (\text{A.21})$$

Pour des conditions expérimentales habituelles  $N^{coups}$  comprend aussi des photons provenant de la lumière parasite et du bruit de la CCD. Pour se débarrasser de ce bruit, à chaque fois trois images sont acquises : une image de la sonde en présence des atomes ( $N_{abs}^{coups}$ ), une image de la sonde en absence des atomes ( $N_{probe}^{coups}$ ) et une image de fond sans la sonde ( $N_{fond}^{coups}$ ). Le fond est éliminé de la manière suivante :

$$N_i^{coups} = N_{probe}^{coups} - N_{fond}^{coups}, \quad (\text{A.22})$$

$$N_t^{coups} = N_{abs}^{coups} - N_{fond}^{coups}. \quad (\text{A.23})$$

En utilisant la relation entre le nombre de photons sur un pixel  $N_{ph}$  et l'intensité correspondante

$$N_{ph}(i,j) = \gamma N^{coups} = \frac{s \tau I(i,j)}{\hbar \omega_L} \quad (\text{A.24})$$

et

$$\sigma_0 = \frac{\hbar \omega}{2 I_{sat}}, \quad (\text{A.25})$$

on peut exprimer le nombre d'atomes intégrés sur le pixel  $(i,j)$  en fonction des nombres de coups, et l'équation (A.14) devient :

$$N(i,j) = \frac{s}{\sigma_0} \alpha \ln \left( \frac{N_t^{coups}(i,j)}{N_i^{coups}(i,j)} \right) + \frac{2\gamma}{\tau} (N_i^{coups}(i,j) - N_t^{coups}(i,j)). \quad (\text{A.26})$$

Dans le premier terme, contribution dominante aux faibles intensités, le nombre de photons diffusés par atome est proportionnel à l'intensité, et ne dépend que de  $\sigma_0$  et du grandissement intervenant dans  $s$ . L'avantage de travailler à faible intensité est qu'on peut déduire le nombre d'atomes, indépendamment des caractéristiques de la caméra. Dans le second terme, contribution dominante aux fortes intensités, où la transition est saturée, le taux de diffusion de photons par atome est constant. Aux intensités élevées, chaque atome diffuse des photons à raison d'un taux de  $\frac{2}{\tau}$ . En comptant le nombre de photons « manquants », on remonte aisément au nombre d'atomes. Ce terme ne dépend que de la largeur naturelle et des caractéristiques du système optique inclus dans  $\gamma$ .

### A.2.1 Calibration du grandissement

On a vu dans A.16 qu'un paramètre important est la surface du plan objet  $s$  imagée sur un pixel. Elle est connue à partir du grandissement du système optique et de la taille des pixels de la CCD, qui est parfaitement connue. Il suffit de mesurer le grandissement avec précision, une fois le système optique mis au point sur les atomes.

#### Calibration du grandissement horizontal

Pour calibrer le grandissement de l'imagerie horizontale on mesure la position du centre de masse d'un condensat de Bose-Einstein pour différents temps de vol  $t_{TOF}$ . Dans la réalité cette trajectoire est décrite par ces deux équations :

$$x(t) = x_0 + v_x t_{TOF} \quad (\text{A.27})$$

$$z(t) = z_0 + v_z t_{TOF} + \frac{1}{2} g t_{TOF}^2, \quad (\text{A.28})$$

tandis que sur la caméra on a :

$$X(t) = X_0 + v_X t_{TOF} + \frac{1}{2} A_X t_{TOF}^2 \quad (\text{A.29})$$

$$Z(t) = Z_0 + v_Z t_{TOF} + \frac{1}{2} A_Z t_{TOF}^2. \quad (\text{A.30})$$

On ajuste la trajectoire dans le plan  $(X,Z)$  avec une fonction parabolique, qui permet, à travers les valeurs de  $A_x$  et  $A_z$ , de déterminer l'axe vertical et de mesurer le grandissement  $G_h$ . En effet, si l'axe vertical de la caméra est légèrement inclinée d'un angle  $\theta$ , le mouvement parabolique le long de l'axe  $z$  se projette sur l'axe  $X$  (pour rappel : l'axe  $y$  est l'axe de propagation de la sonde). L'angle d'inclinaison de la caméra se calcule alors comme

$$\theta = \arctan(A_x/A_z), \quad (\text{A.31})$$

tandis que le grandissement du système d'imagerie est donné par

$$G_h = \frac{g}{\sqrt{A_x^2 + A_z^2}}. \quad (\text{A.32})$$

Nous avons mesuré  $G_h = 2.17$  et  $\theta = 1.7^\circ$ .

### Calibration du grandissement vertical

Pour calibrer le grandissement de l'imagerie verticale, on procède de la manière suivante. On image un BEC assez froid et on pointe le centre pour obtenir ses coordonnées. En décalant la caméra selon deux axes horizontaux orthogonaux grâce à des platines de translation, on peut calibrer la correspondance entre le déplacement connu et le déplacement du nuage observé sur la CCD. On peut traduire la CCD dans le plan  $(x,y)$  avec une précision de  $5\mu\text{m}$ . On trace sur un graphique la distance mesurée sur l'image (qui tient compte du grandissement qu'on a précédemment inséré) en fonction de la distance lue sur la translation. Idéalement, si le grandissement avec lequel les images sont calculées est correct on devrait avoir une correspondance 1 : 1, et donc une droite de pente  $b' = 1$ . Dans notre dernière calibration on a trouvé un grandissement  $G_v = 8.4$ .

#### A.2.2 Mise au point de la caméra selon l'axe vertical

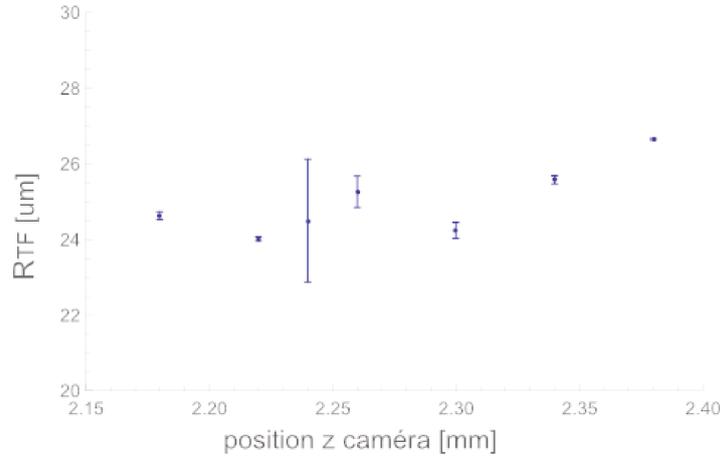
On image un BEC très froid et rond (polarisation RF circulaire) pour différentes positions verticales de la caméra Luca. On peut varier avec une précision de  $5\mu\text{m}$  la position puisque la caméra est montée sur une translation micrométrique. Pour chaque position verticale on prend trois images, on ajuste chaque image avec un fit Thomas-Fermi et on prend la moyenne du rayon de Thomas-Fermi. Ensuite on trace le rayon du nuage en fonction de la position de la caméra, comme illustré dans la figure A.1. La position optimale, pour laquelle la caméra est au point, est celle qui minimise la taille du nuage. Cette technique a l'avantage d'être simple et rapide, et permet de mettre au point avec une précision de  $\pm 25\mu\text{m}$ .

#### A.2.3 Calibration de la conversion photons/coup

On a vu dans la section A.2 que, lors d'une mesure d'absorption atomique avec un caméra CCD, les photons  $N_{ph}$  qui arrivent sur un pixel donné sont convertis d'abord en photoélectrons  $N^e$ , avec une efficacité  $\eta$ , et que ensuite les photoélectrons sont convertis en coups  $N^{coups}$ , avec un facteur de proportionnalité donné par le gain  $g$  de la caméra.

Or, comme nos caméras ne nous donnent pas accès au gain, on calibre directement le taux de conversion de photons en coups, qu'on a appelé  $\gamma$ . Pour ce faire, on mesure d'abord combien de photons contient une impulsion sonde de durée  $\tau$ . On prend l'exemple de  $\tau = 25\mu\text{s}$ .

On doit vérifier d'abord la durée effective de l'impulsion, avec un oscilloscope. Dans notre cas  $\tau = 24.7\mu\text{s}$ . Ensuite on mesure la puissance reçue pendant l'impulsion avec



**Figure A.1** – Rayon de Thomas-Fermi du nuage (moyenne sur trois images) en fonction de la position verticale de la caméra Luca. La position qui minimise la taille du nuage (2.25 mm) coïncide avec la distance focale.

*Thomas-Fermi radius (average on three images) as a function of the vertical position of the Luca camera. The position which minimizes the size is the focal distance.*

une photodiode rapide, modèle PDA55 de Thorlabs. Cela nous donne une tension  $V=782$  mV, que l'on doit convertir en puissance suivant la calibration de la photodiode. Dans notre cas, pour un gain de transimpédance de 0dB le facteur de conversion est  $1.5 \cdot 10^4$  V/A. Pour ensuite convertir en puissance, on doit encore diviser par un facteur (donné pour 780 nm) de 0.533 A/W, ce qui nous donne enfin une puissance  $P = 94.3 \mu\text{W}$ .

Pour savoir combien de puissance arrive effectivement aux atomes on estime les pertes en mesurant les puissances avant et après les parois de la cellule et on en fait la moyenne pour avoir une estimation à niveau des atomes  $P_{at}$ . Le nombre de photons qui arrive aux atomes est donc  $N_{ph} = \frac{P_{at}\tau}{\hbar\omega}$ .

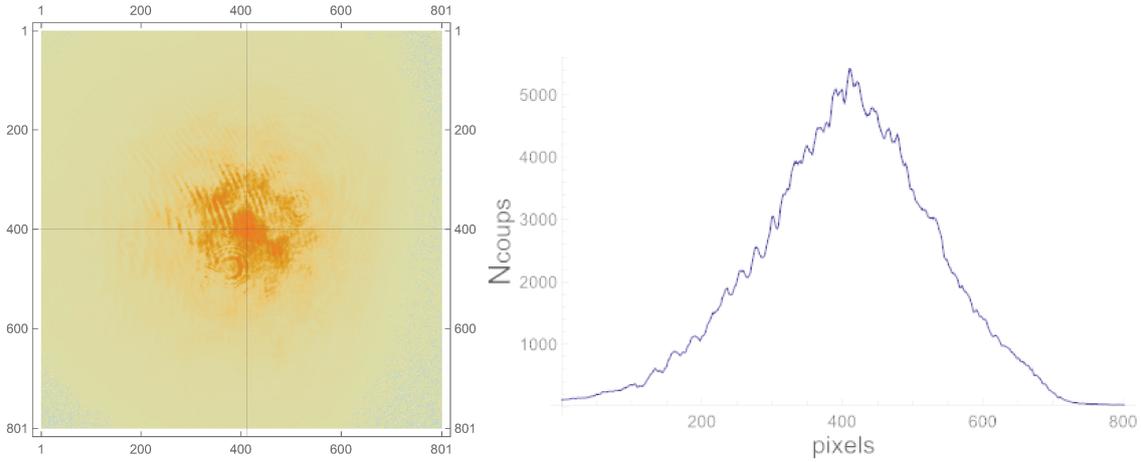
Ensuite on prend une image avec la caméra CCD de la sonde en l'absence d'atomes, pour la même durée d'impulsion<sup>3</sup> et on en fait la moyenne (fonction « mean » de Mathematica), illustrée dans la figure A.2.

On ajuste le profil avec une gaussienne  $Ae^{-2\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{w^2}}$ , centrée en  $(x_0, y_0)$ , d'amplitude  $A$  et écart-type  $w/2$ . Une bonne approximation pour le nombre de coups mesurés est  $N_{probe}^{coups} \sim \frac{\pi w^2 A}{2}$ .

On peut ainsi obtenir  $\gamma$  comme le rapport entre photons au niveau des atomes  $N_{ph}$  et le nombre de coups  $N_{probe}^{coups}$  mesurés avec la caméra CCD. Ce facteur dépend donc du montage optique entre les atomes et la caméra, et peut changer au cours du temps.

On a calibré pour la caméra Luca  $\gamma = 6.26$  photons/coup, et pour la caméra iXon  $\gamma = 13.1$  photons/coup.

3. Cela se fait automatiquement à chaque fois qu'on prend une image. Il s'agit de l'image  $N_{probe}^{coups}$ , décrite en A.2.



**Figure A.2** — À gauche : image de la sonde prise avec la caméra Luca (*in situ* dans la direction verticale), moyenné suivant l’axe de propagation de la sonde  $z$ . À droite : profil du faisceau sonde obtenu en moyennant les colonnes de la figure à droite.

*On the left : probe’s image taken with the Luca camera (in situ and along the vertical axis), averaged following the probe’s propagation axis  $z$ . On the right : probe’s profile obtained by averaging the columns of the image on the left.*

#### A.2.4 Calibration du paramètre alpha

Le paramètre  $\alpha$  qui, à partir de cette équation (A.26), permet de calculer la densité optique, dépend du système d’imagerie et doit être calibré expérimentalement. Pour cela, on choisit un nuage atomique de densité optique typiquement de  $od \sim 3 - 4$ . Le nuage se trouve dans le piège habillé avec une fréquence RF de 1 MHz et un couteau de 1.12 MHz. Seulement une petite fraction d’atomes est imagée, pour cela elle est repompée, pendant 0.1 ms, avec le repompneur 2 désaccordé de 720 MHz de la résonance. On choisit une polarisation RF circulaire pour que le nuage soit rond, ce qui justifie l’hypothèse que les points équidistants du centre ont la même densité. On prend ensuite une série d’images du nuage, *in situ* et suivant l’axe vertical, pour différents paramètres de saturation  $\frac{I}{I_{sat}}$  (en faisant varier l’intensité de l’impulsion sonde  $I \sim 0.1I_{sat} - 20I_{sat}$ ), en adaptant la durée de l’impulsion  $\tau$  de conséquence.

À partir des données de la caméra (en termes de nombre de coups) on calcule la densité optique pixel par pixel,  $od(i,j) = N(i,j)\frac{\sigma_0}{s}$  suivant la formule (A.26) :

$$od(i,j) = \alpha \ln \left( \frac{N_t^{coups}(i,j)}{N_i^{coups}(i,j)} \right) + \frac{\gamma \hbar \omega_L}{I_{sat} s \tau} (N_i^{coups}(i,j) - N_t^{coups}(i,j)), \quad (\text{A.33})$$

en obtenant ainsi le profil du nuage en termes de densité optique pixel par pixel.

#### Méthode de la minimisation de l’écart type

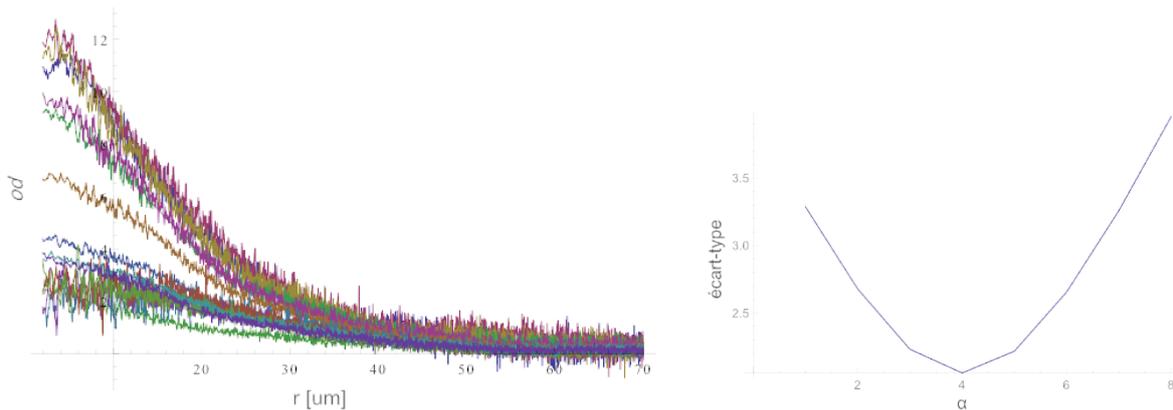
Pour les premières calibrations du paramètre  $\alpha$  on a suivi la méthode que j’expliquerai dans ce paragraphe, initiée par Reinaudi et al. en 2007 [154].

Pour chaque profil du nuage en termes de densité optique, calculé selon (A.33), on veut calculer la densité optique au centre. On commence par repérer le centre du nuage  $(x_0, y_0)$  en ajustant le profil du nuage avec avec une gaussienne :

$$y = Ae^{-2\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{w^2}}, \quad (\text{A.34})$$

Ensuite on fait moyenne radiale, en prenant la moyenne de tous les pixels qui se trouvent à la même distance du centre : le profil obtenu en fonction de la distance au centre est aussi une gaussienne, dont l'amplitude représente la densité optique au centre du nuage. Ce calcul est fait pour chaque image et pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

Ensuite, pour un  $\alpha$  donné, on superpose sur le même graphique tous les profils obtenus, comme dans la figure A.3 à gauche (on peut noter que près du centre les courbes sont plus bruitées car la moyenne est calculée sur moins de pixels). La valeur optimale de  $\alpha$  est celle qui minimise l'écart-type des densités optiques au centre (voir figure A.3 à droite).



**Figure A.3** — À gauche : courbes de densité optique calculées selon l'eq. (A.33) avec  $\alpha = 1$ , en moyennant radialement des zones équidistantes du centre du nuage  $(x_0, y_0)$ . On peut noter que les courbes ne se superposent pas, indiquant un mauvais choix du paramètre  $\alpha$ . À droite : écart type des densités optiques au centre, obtenues par l'ajustement gaussien (A.34) des courbes montrées à gauche, en fonction de la valeur de  $\alpha$ . Dans l'exemple ici reporté la valeur optimale pour  $\alpha$  est 4.

*On the left : plot of the optical densities, computed as in (A.33), for  $\alpha = 1$ , as a function of the distance from the center of the cloud. As we can see, the plots are not superposed, which means that the chosen value for  $\alpha$  is not optimal. On the right : standard deviation of the optical densities at the trap center, obtained with the gaussian fit (A.34) of the curves shown on the left, as a function of the value of  $\alpha$ . In this example the optimal value for  $\alpha$  is 4.*

Le problème qu'on a rencontré avec cette méthode a été le fait que on ne peut pas tenir compte des courbes obtenues avec une sonde à faible intensité de saturation. En effet, ces courbes étant très bruitées, elles donnent des écarts-types très importants. Mais en même temps, si on ne prend en considération que des fortes intensités de

saturation, dans l'expression de la densité optique (A.33) c'est surtout le deuxième terme qui compte, et il ne dépend pas de  $\alpha$ . Pour cette raison on trouve des valeurs de  $\alpha$  très différentes, suivant le type de nuage, et on n'a jamais pu converger sur une valeur fiable.

On a aussi analysé les profils de la figure A.3 (à gauche) par secteurs, en calculant le  $\alpha$  optimal pour différentes régions du nuage. Dans le cas de nuages peu denses on trouve une valeur commune aux différentes zones, mais dans le cas de nuages denses  $\alpha$  dépend de la densité optique et varie en parcourant le nuage du centre aux ailes (typiquement de  $\alpha \sim 6$  à  $\alpha = 1$ ). Ce comportement avait déjà été observé pendant la thèse de K. Merloti [58], et à l'époque ils n'avaient pas poussé plus loin l'analyse. Durant la dernière calibration on a pour cela décidé de changer de méthode, ce qui fera le sujet de la section suivante.

### Méthode de la régression linéaire

La méthode que je viens de décrire a été reprise et améliorée pendant la thèse de L.Chomaz [156].

En partant l'équation (A.33), on décompose le membre de droite en deux termes :

$$d_{log} = \ln \left( \frac{N_t^{coups}(i,j)}{N_i^{coups}(i,j)} \right), \quad (A.35)$$

$$d_{diff} = \frac{\gamma \hbar \omega_L}{I_{sat} s \tau} (N_i^{coups}(i,j) - N_t^{coups}(i,j)). \quad (A.36)$$

L'équation (A.33) peut ainsi se réécrire

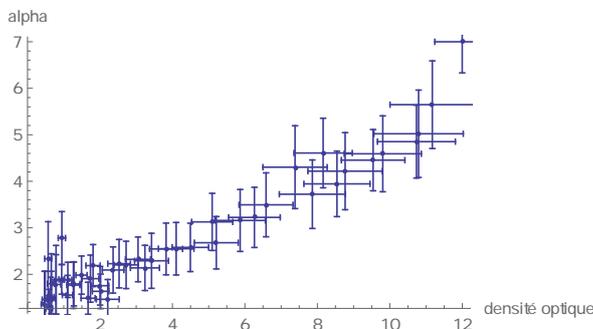
$$d_{diff} = \alpha d_{log} + n \sigma_0. \quad (A.37)$$

Si  $d_{diff}$  et  $d_{log}$  sont mesurées pour différentes valeurs d'intensité sonde, les deux termes interviennent avec poids différents et doivent satisfaire une relation linéaire. Ainsi, la valeur de  $\alpha$  peut se déterminer à partir de la pente de  $d_{log}$  en fonction de  $d_{diff}$ , et son ordonnée à l'origine correspond à la densité optique (le calcul doit donc être fait dans une région de densité optique constante).

Cependant, expérimentalement, le facteur  $\alpha$  n'est plus une constante, mais pour des densités optiques importantes il dépend de la densité optique, probablement à cause des effets collectifs. Dans le travail de L. Chomaz [156] au contraire, ce comportement avait été observé seulement à partir d'une densité optique de 3. En traçant  $\alpha$  en fonction de la densité optique ils observent un plateau jusqu'à 3, ensuite une rupture de pente et une croissance linéaire avec la densité optique. La nouveauté par rapport à la méthode Reinaudi consiste donc dans le fait de ne pas chercher une valeur globale pour  $\alpha$ , mais associer une différente valeur pour chaque densité optique.

Toujours sous l'hypothèse que les pixels équidistants du centre ont la même densité, on calcule les différentes  $od$  en fonction du rayon en faisant une moyenne radiale et on trace sur un graphique  $d_{log}$  en fonction de  $d_{diff}$ . Pour être sûr que la sonde ne soit pas entièrement absorbée on s'est autorisés à prendre des durées  $\tau$  jusqu'à 20  $\mu s$  pour  $\frac{I}{I_{sat}} < 1$  (on a vérifié qu'on n'a pas encore d'effets liés à la durée de l'impulsion sonde

en faisant la comparaison avec  $\tau = 10\mu\text{s}$ ). On rejette les images avec densité optique  $od < 0.7$  puisqu'elles sont trop bruitées.



**Figure A.4** — Densité optique en fonction du paramètre  $\alpha$ . On peut observer que  $\alpha$  dépend de la valeur de la densité optique, et aucune zone de plateau n'est observée, cela probablement à cause des effets collectifs.

*Optical density as a function of the  $\alpha$  parameter. We can notice that  $\alpha$  varies continuously with the optical density, and this is probably due to collective effects.*

Cependant, avec nos paramètres, nous n'observons pas de plateau, comme montré dans la figure A.4. On suppose que cela est dû aux caractéristiques du piège et au fait que probablement on est tout le temps en présence des effets collectifs. En partant de l'équation (A.37), au lieu de prendre un  $\alpha$  constant, on l'autorise à avoir une dépendance linéaire avec la densité optique. On a donc :

$$od = \alpha(d)d_{log} + d_{diff}, \quad (\text{A.38})$$

où

$$\alpha(d) = \alpha_0 + \alpha_{slope}od. \quad (\text{A.39})$$

L'expression de la densité optique finale est donc :

$$od = \frac{\alpha_0 d_{log} + d_{diff}}{\alpha_{slope}d_{log} + 1} \quad (\text{A.40})$$

On a trouvé  $\alpha_{slope} = 0.38$  et  $\alpha_0 = 1.74$ .

### A.2.5 Conditions pour l'impulsion sonde

On vient de voir qu'il est possible de mesurer la densité optique avec une sonde de n'importe quelle intensité. Pour que la mesure soit fiable, il existe pourtant des contraintes sur le choix du couple intensité-durée de l'impulsion  $(I, \tau)$  : les atomes doivent maintenir la condition de résonance et leur densité doit rester constante pendant l'impulsion, en même temps la sonde doit être détectable après traversée des atomes. Ces contraintes sont liées au fait que lorsqu'on envoie un laser proche de la résonance sur le nuage atomique le photon n'est pas seulement absorbé par l'atome,

mais il communique aussi son impulsion  $\hbar k$  (où  $v_{rec} = \frac{\hbar k}{m}$ , appelée vitesse de recul), en exerçant une force, « force de pression de radiation », proportionnelle au taux de diffusion et ayant la même direction que le faisceau sonde. Cette force se traduit en une accélération communiquée aux atomes, qui vaut en moyenne  $a(s) = v_{rec} \frac{s}{2(1+s)}$  (où  $R_{sc} = \frac{s}{2(1+s)}$  est le taux de diffusion de photons pour un atome à deux niveaux). Pendant une impulsion de durée  $\tau$  l'atome acquiert ainsi une vitesse  $v(s, \tau) = a(s)\tau$ . Ce changement de vitesse a une double conséquence : il mène les atomes hors résonance par effet Doppler, et il déplace physiquement le nuage jusqu'à ce qu'il sorte du champ de la caméra.

### Effet Doppler

S'il était possible de changer la fréquence du laser de détection durant l'impulsion, il serait possible de rester en permanence à résonance, mais nous ne disposons pas du matériel nécessaire. Le désaccord induit pour une impulsion initialement à résonance est  $\delta = kv(s, \tau) = \frac{2\pi v(s, \tau)}{\lambda}$ , en raison de l'effet Doppler. En effet, chaque transfert d'impulsion  $\hbar k$  du photon à l'atome se traduit en  $\Delta\omega = kv_{rec} = \frac{\hbar k}{m}$  : la fréquence de la sonde s'éloigne de la résonance au fur et à mesure que les photons sont diffusés. On peut estimer l'ordre de grandeur de durée de l'impulsion maximale pour laquelle l'effet Doppler est négligeable, i.e. que le taux de diffusion de photons est constant. Pour garder le désaccord proche de  $\delta \sim 0$ , il suffit d'estimer la vitesse à la fin de l'impulsion de durée  $\tau$ . On obtient

$$v(s, \tau) \sim v_{rec} \tau \frac{s}{2(1+s)}. \quad (\text{A.41})$$

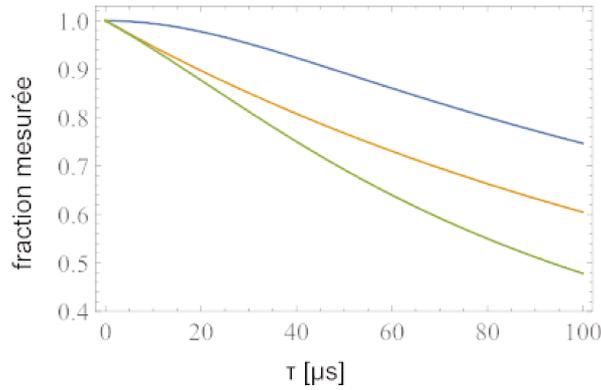
Pour que l'effet Doppler soit négligeable, il faut que le décalage Doppler soit en permanence faible devant la largeur naturelle, donc en particulier pour la vitesse finale, soit  $v(s, \tau) \frac{2\pi}{\lambda} \ll$

$$\tau \frac{s}{1+s} \ll \frac{2m}{\hbar k^2}, \quad (\text{A.42})$$

qui donne  $\tau \frac{s}{s+1} \ll 40 \mu\text{s}$ . Pour des impulsions lumineuses très intenses ( $s \gtrsim 1$ ) la durée  $\tau$  doit être de l'ordre de la microseconde, tandis que pour des impulsions faibles on peut s'autoriser une durée de quelques dizaines de  $\mu\text{s}$ .

### Dépompage

Un autre effet lié à la durée de l'impulsion sonde qui peut fausser la mesure du nombre d'atomes s'il n'est pas pris en compte est le dépompage des atomes vers l'état  $F = 1$  par le biais de l'état  $F' = 2$  (absorption vers  $F' = 2$  et émission spontanée vers  $F = 1$ ). On se trouve donc avec un surplus de photons arrivant sur la caméra à la fin de la prise d'image, qui fausse la mesure du nombre d'atomes. Comme pour l'effet Doppler, cet effet est d'autant plus important que l'intensité de la sonde est élevée. Ces effets ont été étudiés par M. de Goër pendant son stage de Master 2, et plus de détails se trouvent dans son rapport de stage [148]. La figure A.5, illustre la fraction d'atomes mesurée en fonction de la durée de l'impulsion sonde pour un intensité  $I = 9I_{sat}$ , en tenant compte de l'effet Doppler et du dépompage. Néanmoins si les photons incidents ont



**Figure A.5** — Évolution simulée de la fraction d’atomes détectée (rapport entre le nombre d’atomes détectés et le nombre d’atomes réellement présents) en fonction de la durée d’une impulsion sonde d’intensité  $9I_{sat}$  non polarisée. En bleu-haut seulement l’effet Doppler est pris en compte. En jaune-milieu seulement le dépompage est pris en compte. En vert-bas les deux effets sont combinés.

*Simulated evolution of the ratio of detected atoms as a function of a  $9I_{sat}$ , non polarised probe’s pulse duration. On the top-blue line only the Doppler effect has been taken into account. In the middle-yellow only the depumping effect is taken into account. The effect of both is showed on the bottom-green line.*

une polarisation circulaire (ce qui est le cas pour l’imagerie verticale), la conservation du moment cinétique interdit la transition  $F = 2, m_F = +2 \rightarrow F' = 2, m_{F'} = 2$  et le dépompage est très faible.

# Bibliographie

- [1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269(5221) :198–201, 1995.
- [2] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Bose-Einstein condensation in a gas of Sodium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :3969–3973, Nov 1995.
- [3] F. London. On the Bose-Einstein condensation. *Phys. Rev.*, 54 :947, 1938.
- [4] D. J. Wineland, R. E. Drullinger, and F. L. Walls. Radiation-pressure cooling of bound resonant absorbers. *Phys. Rev. Lett.*, 40 :1639–1642, Jun 1978.
- [5] W. Neuhauser, M. Hohenstatt, P. Toschek, and H. Dehmelt. Optical-sideband cooling of visible atom cloud confined in parabolic well. *Phys. Rev. Lett.*, 41 :233–236, Jul 1978.
- [6] Steven Chu, L. Hollberg, J. E. Bjorkholm, Alex Cable, and A. Ashkin. Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 55 :48–51, Jul 1985.
- [7] Alan L. Migdall, John V. Prodan, William D. Phillips, Thomas H. Bergeman, and Harold J. Metcalf. First observation of magnetically trapped neutral atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 54 :2596–2599, Jun 1985.
- [8] Steven Chu, J. E. Bjorkholm, A. Ashkin, and A. Cable. Experimental observation of optically trapped atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 57 :314–317, Jul 1986.
- [9] E. L. Raab, M. Prentiss, Alex Cable, Steven Chu, and D. E. Pritchard. Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 59 :2631–2634, Dec 1987.
- [10] Pitaevskii and Stringari. *Bose-Einstein Condensation*. Oxford University Press, 2003.
- [11] Immanuel Bloch. Ultracold quantum gases in optical lattices. *Nat Phys*, 1 :23–30, 2005.
- [12] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller. Cold bosonic atoms in optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :3108–3111, Oct 1998.

- [13] R P Feynman. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21 :467–488, 1982.
- [14] I Chiorescu, Y Nakamura, C. J. P. M. Harmans, and J. E. Mooij. Coherent quantum dynamics of a Superconducting Flux Qubit. *Science*, 299(5614) :1869–1871, 2003.
- [15] R. Mathew, A. Kumar, S. Eckel, F. Jendrzejewski, G. K. Campbell, Mark Edwards, and E. Tiesinga. Self-heterodyne detection of the *in situ* phase of an atomic superconducting quantum interference device. *Phys. Rev. A*, 92 :033602, Sep 2015.
- [16] K. C. Wright, R. B. Blakestad, C. J. Lobb, W. D. Phillips, and G. K. Campbell. Driving phase slips in a superfluid atom circuit with a rotating weak link. *Phys. Rev. Lett.*, 110 :025302, Jan 2013.
- [17] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Observation of interference between two Bose condensates. *Science*, 275(5300) :637–641, 1997.
- [18] I Bloch, T W Hansch, and T Esslinger. Measurement of the spatial coherence of a trapped Bose gas at the phase transition. *Nature*, 403 :166–170, 2000.
- [19] B. P. Anderson and M. A. Kasevich. Macroscopic quantum interference from atomic tunnel arrays. *Science*, 282(5394) :1686–1689, 1998.
- [20] E. W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, J. Wen, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips. A well-collimated quasi-continuous atom laser. *Science*, 283(5408) :1706–1709, 1999.
- [21] Immanuel Bloch, Theodor W. Hänsch, and Tilman Esslinger. Atom laser with a cw output coupler. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :3008–3011, Apr 1999.
- [22] D. S. Jin, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a dilute gas. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :420–423, Jul 1996.
- [23] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, and W. Ketterle. Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a magnetic trap. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :988–991, Aug 1996.
- [24] D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, S. Inouye, M. R. Andrews, and W. Ketterle. Collisionless and hydrodynamic excitations of a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :500–503, Jul 1998.
- [25] D. Guéry-Odelin and S. Stringari. Scissors mode and superfluidity of a trapped Bose-Einstein condensed gas. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :4452–4455, Nov 1999.
- [26] Onofrio Maragò, Gerald Hechenblaikner, Eleanor Hodby, and Christopher Foot. Temperature dependence of damping and frequency shifts of the scissors mode of a trapped Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :3938–3941, Apr 2001.
- [27] C. Raman, M. Köhl, R. Onofrio, D. S. Durfee, C. E. Kuklewicz, Z. Hadzibabic, and W. Ketterle. Evidence for a critical velocity in a Bose-Einstein condensed gas. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :2502–2505, Sep 1999.

- [28] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Vortices in a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :2498–2501, Sep 1999.
- [29] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard. Vortices in a stirred Bose-Einstein condensate. *J. Mod. Opt.*, 47 :2715, 2000.
- [30] J.M. Vogels J.R. Abo-Shaeer, J. R.C. Raman and W. Ketterle. Observation of vortex lattices in Bose-Einstein condensates. *Science*, 292 :476–479, 2001.
- [31] J. File and R. G. Mills. Observation of persistent current in a superconducting solenoid. *Phys. Rev. Lett.*, 10 :93–96, Feb 1963.
- [32] J. B. Mehl and W. Zimmermann. Flow of superfluid helium in a porous medium. *Phys. Rev.*, 167 :214–229, Mar 1968.
- [33] I. Rudnick, H. Kojima, W. Veith, and R. S. Kagiwada. Observation of superfluid-helium persistent current by Doppler-shifted splitting of fourth-sound resonance. *Phys. Rev. Lett.*, 23 :1220–1223, Nov 1969.
- [34] C. Ryu, M. F. Andersen, P. Cladé, Vasant Natarajan, K. Helmerson, and W. D. Phillips. Observation of persistent flow of a Bose-Einstein condensate in a toroidal trap. *Phys. Rev. Lett.*, 99(260401), 2007.
- [35] A. Ramanathan, K. C. Wright, S. R. Muniz, M. Zelan, W. T. Hill, C. J. Lobb, K. Helmerson, W. D. Phillips, and G. K. Campbell. Superflow in a toroidal Bose-Einstein condensate : An atom circuit with a tunable weak link. *Phys. Rev. Lett.*, 106 :130401, Mar 2011.
- [36] Stuart Moulder, Scott Beattie, Robert P. Smith, Naaman Tammuz, and Zoran Hadzibabic. Quantized supercurrent decay in an annular Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 86 :013629, Jul 2012.
- [37] A Kumar, N Anderson, W D Phillips, S Eckel, G K Campbell, and S Stringari. Minimally destructive, Doppler measurement of a quantized flow in a ring-shaped Bose-Einstein condensate. *New Journal of Physics*, 18(2) :025001, 2016.
- [38] A. L. Gaunt, T. F. Schmidutz, I. Gotlibovych, R.P. Smith, and Z. Hadzibabic. Bose-Einstein condensation of atoms in a uniform potential. *Phys. Rev. Lett.*, 110, 2013.
- [39] L. Corman, L. Chomaz, T. Bienaimé, R. Desbuquois, C. Weitenberg, S. Nascimbène, J. Dalibard, and J. Beugnon. Quench-induced supercurrents in an annular Bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 113 :135302, Sep 2014.
- [40] S. Eckel, F. Jendrzejewski, A. Kumar, C. J. Lobb, and G. K. Campbell. Interferometric measurement of the current-phase relationship of a superfluid weak link. *Phys. Rev. X*, 4 :031052, Sep 2014.
- [41] Olivier Morizot, Yves Colombe, Vincent Lorent, Hélène Perrin, and Barry M. Garraway. Ring trap for ultracold atoms. *Phys. Rev. A*, 74 :023617, Aug 2006.
- [42] Igor Lesanovsky and Wolf von Klitzing. Time-averaged adiabatic potentials : Versatile matter-wave guides and atom traps. *Phys. Rev. Lett.*, 99 :083001, Aug 2007.

- [43] J. A. Sauer, M. D. Barrett, and M. S. Chapman. Storage ring for neutral atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :270401, Dec 2001.
- [44] A. S. Arnold and E. Riis. Bose-Einstein condensates in « giant » toroidal magnetic traps. *Journal of Modern Optics*, 49(5-6) :959–964, 2002.
- [45] A S Arnold. Adaptable-radius, time-orbiting magnetic ring trap for bose–einstein condensates. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 37(2) :L29, 2004.
- [46] Richard E. Packard and Stefano Vitale. Principles of superfluid-helium gyroscopes. *Phys. Rev. B*, 46 :3540–3549, Aug 1992.
- [47] Vanderlei Bagnato and Daniel Kleppner. Bose-Einstein condensation in low-dimensional traps. *Phys. Rev. A*, 44 :7439–7441, Dec 1991.
- [48] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. *J. Phys. C : Solid State Phys.*, 6(7) :1181–1203, 1973.
- [49] V. Berezinskii. Destruction of long-range order in one-dimensional systems having a continuous symmetry group, 2-quantum systems. *Sov. Phys. JETP-USSR*, 34 :610, 1972.
- [50] I. Rudnick, R. S. Kagiwida, J. C. Fraser, and E. Guyon. Third sound in adsorbed superfluid films. *Phys. Rev. Lett.*, 20 :430–432, Feb 1968.
- [51] Isadore Rudnick. Critical surface density of the superfluid component in  $^4\text{He}$  films. *Phys. Rev. Lett.*, 40 :1454–1455, May 1978.
- [52] D. J. Bishop and J. D. Reppy. Study of the superfluid transition in two-dimensional  $^4\text{He}$  films. *Phys. Rev. Lett.*, 40 :1727–1730, Jun 1978.
- [53] Z. Hadzibabic, P. Krüger, M. Cheneau, B. Battelier, and J. Dalibard. Berenziskii-Kosterlitz-Thouless crossover in a trapped atomic gas. *Nature*, 441 :1118–1121, 2006.
- [54] Peter Krüger, Zoran Hadzibabic, and Jean Dalibard. Critical point of an interacting two-dimensional atomic Bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 99 :040402, Jul 2007.
- [55] P. Cladé, C. Ryu, A. Ramanathan, K. Helmerson, and W. D. Phillips. Observation of a 2d Bose gas : from thermal to quasicondensate to superfluid. *Phys. Rev. Lett.*, 102(170401), 2009.
- [56] S. Tung, G. Lamporesi, D. Lobser, L. Xia, and E. A. Cornell. Observation of the presuperfluid regime in a two-dimensional bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 105 :230408, Dec 2010.
- [57] R. Desbuquois, L. Chomaz, T. Yefsah, J. Léonard, J. Beugnon, C. Weitenberg, and J. Dalibard. Superfluid behavior of a two-dimensional Bose gas. *Nat. Phys.*, 87(645), 2012.
- [58] K. Merloti. *Condensats de Bose-Einstein dans un piège habillé : modes collectifs d'un superfluide en dimension deux*. Thèse de doctorat, Université Paris 13, 2013.
- [59] O. M. Maragò, S. A. Hopkins, J. Arlt, E. Hodby, G. Hechenblaikner, and C. J. Foot. Observation of the scissors mode and evidence for superfluidity of a trapped Bose-Einstein condensed gas. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :2056–2059, Mar 2000.

- [60] Z. Hadzibabic and J. Dalibard. Two-dimensional Bose fluids : An atomic physics perspective. In R. Kaiser and D. Wiersma, editors, *Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, Course CLXXIII*, 2010.
- [61] J. Dalibard. Cohérence et superfluidité dans les gaz atomiques, cours au Collège de France, 2015-2016.
- [62] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse*, page 261, 1924.
- [63] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. 2. Abhandlung. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Physikalisch-mathematische Klasse*, page 3, 1925.
- [64] Oliver Penrose and Lars Onsager. Bose-Einstein condensation and liquid helium. *Phys. Rev.*, 104 :576–584, Nov 1956.
- [65] N. D. Mermin and H. Wagner. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models. *Phys. Rev. Lett.*, 17 :1133–1136, Nov 1966.
- [66] Z Hadzibabic, P Krüger, M Cheneau, S P Rath, and J Dalibard. The trapped two-dimensional Bose gas : from Bose–Einstein condensation to Berezinskii–Kosterlitz–Thouless physics. *New Journal of Physics*, 10(4) :045006, 2008.
- [67] Immanuel Bloch, Jean Dalibard, and Wilhelm Zwerger. Many-body physics with ultracold gases. *Rev. Mod. Phys.*, 80 :885–964, Jul 2008.
- [68] D. S. Petrov, M. Holzmann, and G. V. Shlyapnikov. Bose-Einstein condensation in quasi-2D trapped gases. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :2551–2555, Mar 2000.
- [69] Hung Chen-Lung, Zhang Xibo, Gemelke Nathan, and Chin Cheng. Observation of scale invariance and universality in two-dimensional Bose gases. *Nature*, 2011.
- [70] S. P. Rath, T. Yefsah, K. J. Gunter, M. Cheneau, R. Desbuquois, M. Holtzmann, W. Krauth, and J. Dalibard. Equilibrium state of a trapped two-dimensional Bose gas. *Phys. Rev. A*, 82, 2010.
- [71] Tarik Yefsah, Rémi Desbuquois, Lauriane Chomaz, Kenneth J. Günter, and Jean Dalibard. Exploring the thermodynamics of a two-dimensional Bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 107 :130401, Sep 2011.
- [72] K. Merloti, R. Dubessy, L. Longchambon, M. Olshanii, and H. Perrin. Breakdown of scale invariance in a quasi-two-dimensional Bose gas due to the third dimension. *Phys. Rev. A*, 88(061603), 2013.
- [73] C.J. Pethick and H. Smith. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2002.
- [74] Claude Cohen-Tannoudji and David Guéry-Odelin. *Advances in Atomic Physics-An Overview*. World Scientific, 2011.
- [75] Nikolay Prokof’ev and Boris Svistunov. Two-dimensional weakly interacting Bose gas in the fluctuation region. *Phys. Rev. A*, 66 :043608, Oct 2002.

- [76] Steffen Patrick Rath. *Production and investigation of quasi-two-dimensional Bose gases*. Theses, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, February 2010.
- [77] T. Yefsah. *Thermodynamique du gaz de Bose à deux dimensions*. PhD thesis, Université Paris 6, 2004.
- [78] Christophe Mora and Yvan Castin. Extension of Bogoliubov theory to quasicondensates. *Phys. Rev. A*, 67 :053615, May 2003.
- [79] Y. Castin. Simple theoretical tools for low dimension Bose gases. *J. Phys. IV France*, 116 :89–132, 2004.
- [80] Camilla De Rossi, Romain Dubessy, Karina Merloti, Mathieu de Goër de Herve, Thomas Badr, Aurélien Perrin, Laurent Longchambon, and Hélène Perrin. Probing superfluidity in a quasi two-dimensional Bose gas through its local dynamics. *New Journal of Physics*, 18(6) :062001, 2016.
- [81] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. Hecker Denschlag, and R. Grimm. Collective excitations of a degenerate gas at the bec-bcs crossover. *Phys. Rev. Lett.*, 92 :203201, May 2004.
- [82] S. Nascimbène, N. Navon, K. J. Jiang, L. Tarruell, M. Teichmann, J. McKeever, F. Chevy, and C. Salomon. Collective oscillations of an imbalanced Fermi gas : Axial compression modes and polaron effective mass. *Phys. Rev. Lett.*, 103 :170402, Oct 2009.
- [83] Bess Fang, Giuseppe Carleo, Aisling Johnson, and Isabelle Bouchoule. Quench-induced breathing mode of one-dimensional bose gases. *Phys. Rev. Lett.*, 113 :035301, Jul 2014.
- [84] I. T. Jolliffe. *Principal Component Analysis*. Springer New York, 2002.
- [85] S. Stringari. Collective excitations of a trapped Bose-condensed gas. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :2360–2363, Sep 1996.
- [86] S. Stringari. Dynamics of Bose-Einstein condensed gases in highly deformed traps. *Phys. Rev. A*, 58 :2385–2388, Sep 1998.
- [87] Jae-yoon Choi, Sang Won Seo, and Yong-il Shin. Observation of thermally activated vortex pairs in a quasi-2D Bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 110 :175302, Apr 2013.
- [88] D. R. Nelson and J. M. Kosterlitz. Universal jump in the superfluid density of two-dimensional superfluids. *Phys. Rev. Lett.*, 39 :1201–1205, 1977.
- [89] Daniel S. Fisher and P. C. Hohenberg. Dilute Bose gas in two dimensions. *Phys. Rev. B*, 37 :4936–4943, Apr 1988.
- [90] Nikolay Prokof'ev, Oliver Ruebenacker, and Boris Svistunov. Critical point of a weakly interacting two-dimensional Bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :270402, Dec 2001.
- [91] S. Eckel, G. Lee, F. Jendrzejewski, N. Murray, C. W. Clark, C. J. Lobb, W. D. Phillips, M. Edwards, and G. Campbell. Hysteresis in a quantized superfluid 'atomtronic' circuit. *Nature*, (506) :200–203, 2014.

- [92] R. Dubessy, T. Liennard, P. Pedri, and H. Perrin. Critical rotation of an annular superfluid Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 86 :011602, Jul 2012.
- [93] F. Chevy, K. W. Madison, and J. Dalibard. Measurement of the angular momentum of a rotating Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :2223–2227, Sep 2000.
- [94] Francesca Zambelli and Sandro Stringari. Quantized vortices and collective oscillations of a trapped Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :1754–1757, Aug 1998.
- [95] Noel Murray, Michael Krygier, Mark Edwards, K. C. Wright, G. K. Campbell, and Charles W. Clark. Probing the circulation of ring-shaped Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 88 :053615, Nov 2013.
- [96] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard. Vortex formation in a stirred Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :806–809, Jan 2000.
- [97] T. Liennard. *Construction d'un montage de condensation de Bose-Einstein de rubidium et étude théorique d'un superfluide en rotation dans un anneau*. Thèse de doctorat, Université Paris 13, 2011.
- [98] Anand Ramanathan, Sérgio R. Muniz, Kevin C. Wright, Russell P. Anderson, William D. Phillips, Kristian Helmerson, and Gretchen K. Campbell. Partial-transfer absorption imaging : A versatile technique for optimal imaging of ultracold gases. *Review of Scientific Instruments*, 83(8), 2012.
- [99] R. Dubessy, K. Merloti, L. Longchambon, P.-E. Pottie, T. Liennard, A. Perrin, V. Lorent, and H. Perrin. Rubidium-87 Bose-Einstein condensate in an optically plugged quadrupole trap. *Phys. Rev. A*, 85 :013643, Jan 2012.
- [100] P. Cheinet. *Conception et réalisation d'un gravimètre á atomes froids*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, 2006.
- [101] Wolfgang Petrich, Michael H. Anderson, Jason R. Ensher, and Eric A. Cornell. Stable, tightly confining magnetic trap for evaporative cooling of neutral atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 74 :3352–3355, Apr 1995.
- [102] Y.-J. Lin, A. R. Perry, R. L. Compton, I. B. Spielman, and J. V. Porto. Rapid production of  $^{87}\text{Rb}$  Bose-Einstein condensates in a combined magnetic and optical potential. *Phys. Rev. A*, 79 :063631, Jun 2009.
- [103] D. S. Naik and C. Raman. Optically plugged quadrupole trap for Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 71 :033617, Mar 2005.
- [104] Barry M Garraway and Hélène Perrin. Recent developments in trapping and manipulation of atoms with adiabatic potentials. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 49(17) :172001, 2016.
- [105] O. Morizot. *Pièges radiofréquence très anisotropes pour un condensat de Bose-Einstein*. PhD thesis, Université Paris 13, 2007.
- [106] M. Horikoshi, A Ito, T Ikemachi, Y Aratake, M Kuwatat-Gonokami, and M Koashi. Accurate *in situ* acquisition of column density of a dense cloud of ultracold  $^6\text{Li}$  atoms using absorption imaging. [arxiv.org/abs/1608.07152](https://arxiv.org/abs/1608.07152), 2016.

- [107] R Kollengode Easwaran, L Longchambon, P-E Pottie, V Lorent, H Perrin, and B M Garraway. RF spectroscopy in a resonant RF-dressed trap. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 43(6) :065302, 2010.
- [108] Stephen R. Segal, Quentin Diot, Eric A. Cornell, Alex A. Zozulya, and Dana Z. Anderson. Revealing buried information : Statistical processing techniques for ultracold-gas image analysis. *Phys. Rev. A*, 81 :053601, May 2010.
- [109] Sheng-wei Chiow, Tim Kovachy, Hui-Chun Chien, and Mark A. Kasevich.  $102\hbar k$  large area atom interferometers. *Phys. Rev. Lett.*, 107 :130403, Sep 2011.
- [110] Rémi Desbuquois. *Thermal and superfluid properties of the two-dimensional Bose gas*. Theses, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, June 2013.
- [111] Alex Sugarbaker, Susannah M. Dickerson, Jason M. Hogan, David M. S. Johnson, and Mark A. Kasevich. Enhanced atom interferometer readout through the application of phase shear. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :113002, Sep 2013.
- [112] Susannah M. Dickerson, Jason M. Hogan, Alex Sugarbaker, David M. S. Johnson, and Mark A. Kasevich. Multiaxis inertial sensing with long-time point source atom interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :083001, Aug 2013.
- [113] S. Lloyd, M. Mosheni, and P. Rebentrost. Quantum principal component analysis. *Nature Physics*, 10 :631–633, June 2014.
- [114] Romain Dubessy, Camilla De Rossi, Thomas Badr, Laurent Longchambon, and Hélène Perrin. Imaging the collective excitations of an ultracold gas using statistical correlations. *New Journal of Physics*, 16(12) :122001, 2014.
- [115] Richard B Lehoucq, Danny C Sorensen, and Chao Yang. *ARPACK users' guide : solution of large-scale eigenvalue problems with implicitly restarted Arnoldi methods*, volume 6. Siam, 1998.
- [116] Y. Castin and R. Dum. Bose-Einstein condensates in time dependent traps. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :5315–5319, Dec 1996.
- [117] K Merloti, R Dubessy, L Longchambon, A Perrin, P-E Pottie, V Lorent, and H Perrin. A two-dimensional quantum gas in a magnetic trap. *New Journal of Physics*, 15(3) :033007, 2013.
- [118] D. S. Jin, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Temperature-dependent damping and frequency shifts in collective excitations of a dilute Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :764–767, Feb 1997.
- [119] F. Chevy, V. Bretin, P. Rosenbusch, K. W. Madison, and J. Dalibard. Transverse breathing mode of an elongated Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 88 :250402, Jun 2002.
- [120] Marco Cozzini, Sandro Stringari, Vincent Bretin, Peter Rosenbusch, and Jean Dalibard. Scissors mode of a rotating Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 67 :021602, Feb 2003.
- [121] S. E. Pollack, D. Dries, R. G. Hulet, K. M. F. Magalhães, E. A. L. Henn, E. R. F. Ramos, M. A. Caracanhas, and V. S. Bagnato. Collective excitation of a Bose-Einstein condensate by modulation of the atomic scattering length. *Phys. Rev. A*, 81 :053627, May 2010.

- [122] T. P. Simula, M. J. Davis, and P. B. Blakie. Superfluidity of an interacting trapped quasi-two-dimensional Bose gas. *Phys. Rev. A*, 77 :023618, Feb 2008.
- [123] F. Zambelli and S. Stringari. Moment of inertia and quadrupole response function of a trapped superfluid. *Phys. Rev. A*, 63 :033602, Feb 2001.
- [124] David Guéry-Odelin, Francesca Zambelli, Jean Dalibard, and Sandro Stringari. Collective oscillations of a classical gas confined in harmonic traps. *Phys. Rev. A*, 60 :4851–4856, Dec 1999.
- [125] Markus Holzmann, Maguelonne Chevallier, and Werner Krauth. Universal correlations and coherence in quasi-two-dimensional trapped Bose gases. *Phys. Rev. A*, 81 :043622, Apr 2010.
- [126] D. S. Petrov and G. V. Shlyapnikov. Interatomic collisions in a tightly confined Bose gas. *Phys. Rev. A*, 64 :012706, Jun 2001.
- [127] P. O. Fedichev, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven. Damping of low-energy excitations of a trapped Bose-Einstein condensate at finite temperatures. *Phys. Rev. Lett.*, 80 :2269–2272, Mar 1998.
- [128] L.P. Pitaevskii and S. Stringari. Landau damping in dilute Bose gases. *Physics Letters A*, 235(4) :398 – 402, 1997.
- [129] Giulia De Rosi and Sandro Stringari. Collective oscillations of a trapped quantum gas in low dimensions. *Phys. Rev. A*, 92 :053617, Nov 2015.
- [130] Rémi Desbuquois, Tarik Yefsah, Lauriane Chomaz, Christof Weitenberg, Laura Cormann, Sylvain Nascimbène, and Jean Dalibard. Determination of scale-invariant equations of state without fitting parameters : Application to the two-dimensional Bose gas across the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition. *Phys. Rev. Lett.*, 113 :020404, Jul 2014.
- [131] J.F. Allen and A. D. Misener. Flow phenomena in liquid helium ii. *Nature*, 141(75) :643–644, 1938.
- [132] P Navez, S Pandey, H Mas, K Poulios, T Fernholz, and W von Klitzing. Matter-wave interferometers using TAAP rings. *New Journal of Physics*, 18(7) :075014, 2016.
- [133] Scott Beattie, Stuart Moulder, Richard J. Fletcher, and Zoran Hadzibabic. Persistent currents in spinor condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 110 :025301, Jan 2013.
- [134] F. Jendrzejewski, S. Eckel, N. Murray, C. Lanier, M. Edwards, C. J. Lobb, and G. K. Campbell. Resistive flow in a weakly interacting Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 113 :045305, Jul 2014.
- [135] B. T. Seaman, M. Krämer, D. Z. Anderson, and M. J. Holland. Atomtronics : Ultracold-atom analogs of electronic devices. *Phys. Rev. A*, 75 :023615, Feb 2007.
- [136] Luigi Amico, Andreas Osterloh, and Francesco Cataliotti. Quantum many particle systems in ring-shaped optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :063201, Aug 2005.

- [137] C. Ryu, P. W. Blackburn, A. A. Blinova, and M. G. Boshier. Experimental realization of Josephson junctions for an atom SQUID. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :205301, Nov 2013.
- [138] P. F. Griffin, E. Riis, and A. S. Arnold. Smooth inductively coupled ring trap for atoms. *Phys. Rev. A*, 77 :051402, May 2008.
- [139] S. Gupta, K. W. Murch, K. L. Moore, T. P. Purdy, and D. M. Stamper-Kurn. Bose-Einstein condensation in a circular waveguide. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :143201, Sep 2005.
- [140] A. S. Arnold, C. S. Garvie, and E. Riis. Large magnetic storage ring for Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 73 :041606, Apr 2006.
- [141] B. E. Sherlock, M. Gildemeister, E. Owen, E. Nugent, and C. J. Foot. Time-averaged adiabatic ring potential for ultracold atoms. *Phys. Rev. A*, 83 :043408, Apr 2011.
- [142] E. M. Wright, J. Arlt, and K. Dholakia. Toroidal optical dipole traps for atomic Bose-Einstein condensates using Laguerre-Gaussian beams. *Phys. Rev. A*, 63 :013608, Dec 2000.
- [143] S. K. Schnelle, E. D. van Ooijen, M. J. Davis, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop. Versatile two-dimensional potentials for ultra-cold atoms. *Opt. Express*, 16(3) :1405–1412, Feb 2008.
- [144] K Henderson, C Ryu, C MacCormick, and M G Boshier. Experimental demonstration of painting arbitrary and dynamic potentials for Bose-Einstein condensates. *New Journal of Physics*, 11(4) :043030, 2009.
- [145] A. Turpin, J. Polo, Yu. V. Loiko, J. Küber, F. Schmaltz, T. K. Kalkandjiev, V. Ahufinger, G. Birkl, and J. Mompart. Blue-detuned optical ring trap for Bose-Einstein condensates based on conical refraction. *Opt. Express*, 23(2) :1638–1650, Jan 2015.
- [146] G. Edward Marti, Ryan Olf, and Dan M. Stamper-Kurn. Collective excitation interferometry with a toroidal Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 91 :013602, Jan 2015.
- [147] W. H. Heathcote, E. Nugent, B. T. Sheard, and C. J. Foot. A ring trap for ultracold atoms in an rf-dressed state. *New Journal of Physics*, 10(4) :043012, 2008.
- [148] M de Goër de Herve. Mise en place dd’un touillette laser et imagerie de nuages atomiques denses. Master’s thesis, Université Paris 6, Juillet 2015.
- [149] M. F. Andersen, C. Ryu, Pierre Cladé, Vasant Natarajan, A. Vaziri, K. Helmerson, and W. D. Phillips. Quantized rotation of atoms from photons with orbital angular momentum. *Phys. Rev. Lett.*, 97 :170406, Oct 2006.
- [150] Silvia Bergamini, Benoît Darquié, Matthew Jones, Lionel Jacubowicz, Antoine Browaeys, and Philippe Grangier. Holographic generation of microtrap arrays for single atoms by use of a programmable phase modulator. *J. Opt. Soc. Am. B*, 21(11) :1889–1894, Nov 2004.

- 
- [151] V. Boyer, R. M. Godun, G. Smirne, D. Cassettari, C. M. Chandrashekar, A. B. Deb, Z. J. Laczik, and C. J. Foot. Dynamic manipulation of Bose-Einstein condensates with a spatial light modulator. *Phys. Rev. A*, 73 :031402, Mar 2006.
- [152] Fredrik K. Fatemi and Mark Bashkansky. Focusing properties of high charge number vortex laser beams. *Appl. Opt.*, 46(30) :7573–7578, Oct 2007.
- [153] Daniel A. Steck. Rubidium 87 D line data, Janvier 2015.
- [154] G. Reinaudi, T. Lahaye, Z. Wang, and D. Guery-Odélin. Strong saturation absorption imaging of dense clouds of ultracold atoms. *Optics Letters*, 32(21), 2007.
- [155] L. Chomaz, L. Corman, T. Yefsah, R. Desbuquois, and J. Daibard. Absorption imaging of a quasi-two-dimensional gas : a multiple scattering analysis. *New Journal of Physics*, 14, 2012.
- [156] Lauriane Chomaz. *Coherence and superfluidity of Bose gases in reduced dimensions : from harmonic traps to uniform fluids*. Theses, Ecole normale supérieure - ENS PARIS, November 2014.



## Résumé

Les gaz atomiques dégénérés représentent des systèmes modèles pour étudier la superfluidité. Ils offrent la possibilité d'explorer la physique en dimensions restreintes, profondément différente par rapport au cas tridimensionnel.

Nous disposons d'un gaz de Bose bidimensionnel dégénéré confiné dans un potentiel très anisotrope et dont on peut changer la géométrie dynamiquement. Une déformation contrôlée du piège permet d'exciter les modes collectifs du gaz. Nous avons fait d'abord une analyse en composantes principales du gaz, et nous avons montré que ces dernières coïncident avec les modes de Bogoliubov. Nous avons ensuite effectué une étude détaillée du mode ciseaux, dont nous nous servons pour sonder le caractère superfluide du gaz, en développant une nouvelle technique d'analyse, appelée « analyse de la moyenne locale ». Enfin nous avons réalisé un piège en anneau, obtenu à l'intersection d'un piège en forme de bulle et du potentiel optique d'un faisceau qui présente un noeud d'intensité au centre, la « double nappe », et nous proposons différents protocoles de mise en rotation des atomes dans l'anneau.

## Abstract

Degenerate atomic gases can be a versatile tool to study superfluidity. They also offer the possibility to explore the low-dimensions physics, which is deeply different from the three dimensional case.

We prepare a degenerate Bose gas in a very anisotropic trap, dynamically adjustable. A controlled deformation of the trapping potential can excite the collective modes of the trapped cloud. First we perform a « principal components analysis » of the gas and we show that the principal components coincide with the Bogoliubov modes. We then restrain our analysis on the scissors mode, which we use to probe superfluidity of the sample, by introducing a new analysis technique, called « local average analysis ». Finally I will report on the realization of a ring trap, obtained by superposing a double sheet light beam to a bubble trap, and describe the different possibilities we planned to set atoms into rotation.