

THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

pour le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et applications

École doctorale MATISSE

présentée par

Ophélie Rouby

préparée à l'unité de recherche 6625 du CNRS : IRMAR
Institut de Recherche Mathématique de Rennes
UFR de Mathématiques

**Conditions de
quantification de
Bohr-Sommerfeld
pour des opérateurs
semi-classiques
non auto-adjoints.**

Thèse soutenue à Rennes

le 29 novembre 2016

devant le jury composé de :

Laurent CHARLES / Maître de conférences,
Université Pierre et Marie Curie / examinateur

Clotilde FERMANIAN KAMMERER
/ Professeur, Université Paris Est - Créteil Val de
Marne / examinatrice

Michael HITRIK / Professeur, Université de
Californie à Los Angeles / rapporteur

Karel PRAVDA-STAROV / Professeur,
Université de Rennes 1 / examinateur

Thierry RAMOND / Maître de conférences,
Université Paris Sud / rapporteur

Johannes SJÖSTRAND / Directeur de
recherches émérite, Université de Bourgogne /
examinateur

San VŨ NGỌC / Professeur, Université de
Rennes 1 / directeur de thèse

Remerciements

Comme il est de coutume de le faire, je commence ce manuscrit (ou plutôt dans la chronologie d'écriture de ce dernier je finis) par quelques remerciements.

Bien entendu, je souhaite d'abord remercier mon directeur de thèse, San, qui en premier lieu a accepté la lourde responsabilité de me prendre en thèse et qui m'a soutenue pendant toute la durée de celle-ci. Merci de m'avoir emmenée en conférences que ce soit en France ou à l'étranger (et d'avoir accepté notamment de m'accompagner pour mes premiers vols car je n'étais pas vraiment rassurée à l'idée de quitter la terre ferme). Merci d'avoir encadré mon travail lors de rendez-vous hebdomadaires, ce qui me convenait parfaitement (même si parfois, lors de ces derniers, je n'avais pas toujours quelque-chose de mathématique à raconter). Merci bien sûr de m'avoir appris des mathématiques et de m'avoir fait découvrir qu'on peut être passionné par elles. Enfin, merci également pour ta patience et ta gentillesse tout au long de ce travail.

Merci à Laurent Charles, Clotilde Fermanian Kammerer, Michael Hitrik, Karel Pravda-Starov, Thierry Ramond et Johannes Sjöstrand d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Merci plus précisément à Michael Hitrik et à Thierry Ramond d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Thank you Michael for the accurate comments on my PhD manuscript in your report and thank you very much for having supported my postdoctoral applications this year, it is probably partly thanks to your recommendation letter that I obtained a postdoctoral position. Merci à Thierry Ramond pour son rapport détaillé et encourageant pour la suite concernant mon manuscrit de thèse et merci également d'avoir pris le temps de discuter avec moi de mon manuscrit par téléphone. Merci maintenant à Laurent Charles, Clotilde Fermanian Kammerer, Karel Pravda-Starov et Johannes Sjöstrand d'avoir accepté d'endosser le rôle d'examineurs pour cette thèse et d'être là aujourd'hui. Merci à Laurent Charles de m'avoir accueillie à plusieurs reprises à Jussieu, de m'avoir aidée notamment à comprendre les opérateurs de Toeplitz et un peu de géométrie et merci également de m'avoir soutenue lorsque j'étais complètement perdue. Merci à Karel pour les discussions intéressantes sur le magistère, l'agrégation, les classes prépa ... Enfin, merci à Johannes Sjöstrand de m'avoir soutenue lors de mes candidatures de post-doc et d'Atter cette année, merci de l'intérêt porté à mon travail et d'avoir consacré du temps notamment à mon premier article dans lequel l'application aux opérateurs $\mathcal{PT}$ -symétriques n'existerait pas sinon, merci également pour les nombreux commentaires très intéressants sur cet article qui m'ont permis une bien meilleure compréhension de la théorie mathématique sous-jacente.

Pour tous les autres (et vous êtes nombreux), il faudra faire un petit effort pour savoir si oui ou non, vous vous trouvez dans ces remerciements, mais d'un autre côté, il faut bien que vous ayez quelque-chose à faire pendant cette soutenance qui doit être désormais très ennuyante !

197						1				2	253									3	312	
4	199		5	215		6			7			257	261	267	272				293	298	303	
8		205			221				9								10					11
12													13			279						14
	15						16	236	240		17						18					306
	19					20					248						21					318
22			23	216			24						25			273		285				
	26	206							27									28	299		307	313
	29					30	231					254							31			
32						33						34		268				35				
36				37	222		38			39	255		40					286			41	319
42			43					44	241		45					46						47
48							49				50			51	274			52			308	
53			54			55				56							287		57			
58			59		223					242				262			280			60		61
			62				63							64						65		
66					67	227				68			263			69	288	294				
		207			70							71				275				72		314
73	200			217								74				75				300		76
77							78		243		256									79	304	309
80			211				81					258		82	276	281		83			84	
85					86					87				88			289			89		
	90		212						244		91		264								92	321
93					94	228	232		95	249					96						97	
98						99				100				269			101	295	301			
					102				245		103											
104		208			105					250			106				107					
108				218		109	237				110					282						
111			112		224					113			114			277				115		315
	116	209							117				118			119			296			120
198		121				122				123			124									
125	201			126			127				128										129	316
130				131					246	251				132			290			305		133
	134	210	213				135						136						137		310	
						138		139	229	233					265				297		140	
141	202										142	259				143	283	291			144	
145					146		147	247		148				270						149		
150						151	234					152										
		153		219		154					155										156	311
157	203			158	225			238		252							159				160	
161			214				162					163	271							164		
165						230			166			167					168			169		324
		170				171			172				173				174			175		
176	204			220		177						178								179		
180				181	226			182				260									183	
184				185					186					187	278	284	292		302		188	
189			190				235	239				191	266								192	325
193			194							195										196		

Horizontal

- 1 mot enfantin
- 2 langue du sud
- 3 poème lyrique ou abréviation d'analyste anglais
- 4 ancienne note ou à l'envers pronom personnel
- 5 orbital atomique
- 6 quand on rit, on le répète trois fois
- 7 merci à lui pour sa passion de l'algèbre et à elle pour l'initiation au Perudo!
- 8 c'est le nom d'un mathématicien allemand et c'est un mot important de la thèse
- 9 illuminent une journée
- 10 hélicoïde en indonésien
- 11 note de musique ou marque de déodorant
- 12 plante qu'on fait macérer dans l'eau de vie pour faire un apéritif typique de Vendée
- 13 merci à cette nouvelle joueuse d'Hanabi et de tarot du midi notamment pour ses chouquettes ...
- 14 qualificatif de quelqu'un qui a la classe ou à l'envers négation
- 15 adjectif pouvant décrire le nouveau président américain ou à faire sur la balance avant de peser quelque-chose
- 16 station de radio vendéenne
- 17 heure d'affluence
- 18 un groupe peut l'être mais S_3 ne l'est pas
- 19 lettre grecque ou organisation basque indépendantiste
- 20 cavités qui se forment lors du développement embryonnaire
- 21 habitant de Bosc-Roger-sur-Buchy
- 22 ante meridiem ou suis en anglais
- 23 bruit de la pendule ou mouvement compulsif
- 24 fit l'animal emblématique du Poitou-Charentes
- 25 merci à mon "petit" frère de partager une passion commune avec moi des mathématiques, au moins on se comprend!
- 26 nom d'une transformée qu'on a détesté en agreg
- 27 merci pour ta gentillesse, ton aide et ton efficacité concernant les tâches administratives qui ont rendu notamment la gestion de la publicité du séminaire Landau beaucoup plus simple
- 28 le télescope est un exemple d'un tel système
- 29 nous le sommes tous un peu, surtout les matheux
- 30 $COCH_3$ en anglais
- 31 grossit ou arnaque
- 32 mathématicien hongrois qui a laissé son nom à une mesure

Vertical

- 2 céréale utilisée principalement pour la préparation de la bière et du whisky
- 3 club de foot des encagneurs
- 5 c'est un des mots du titre mais en solo
- 6 abréviation pour l'hypertension en anglais
- 7 outil de dessin
- 20 utilisé à l'université pour évaluer les étudiants au cours des semestres
- 24 mathématicien russe toujours collé à un mathématicien allemand
- 25 merci pour tes cours de claquettes toujours au top et motivant et ta bonne humeur communicative
- 30 fleuve du nord ou type de pile
- 32 héros aux douze travaux (indication : ce n'est pas un doctorant)
- 34 merci pour ta bonne humeur, ton retard systématique pour aller manger, d'avoir essayé de cacher le thé des séminaires et n'oublie pas la page entière de remerciements me concernant dans ton manuscrit de thèse
- 35 parti politique malgache
- 37 merci de m'avoir fait travailler mon anglais en première année de thèse, merci pour ton "pin-pin", merci pour tes cookies au piment et merci pour les bières et les épices
- 43 merci pour ta cuisine du sud si délicieuse
- 49 danse des cabarets français ou bavardage
- 55 matière détestée par la plupart en classe prépa
- 56 merci pour ta gentillesse et surtout merci pour ton gâteau au chocolat et à la soupe de tomate
- 73 pas de base des claquettes constitué de deux sons
- 74 monnaie du moyen-âge
- 78 assurance ou nom d'un chanteur de variété française
- 82 bible des géomètres
- 83 désolé en langage sms ou à l'envers drogue chantée par les Beatles
- 89 on peut faire des constructions géométriques en s'aidant de ces dernières et de compas
- 93 manganèse
- 94 plat sénégalais
- 102 voir en latin
- 104 épuisé ou à l'envers sel en portugais
- 110 merci pour des discussions toujours très intéressantes ou très animées sur la politique lors des manifestations et surtout un grand merci pour le TD à l'Ensai!
- 117 merci à mon grand-frère de thèse pour toutes les informations qu'il m'a données notamment sur l'après-thèse et la recherche des post-docs et encore bravo pour ton poste de Maître de conférences!

Horizontal

33 merci pour tes cours de claquettes en débutant qui étaient supers et dynamiques, j'y ai appris entre autre la rigueur en claquettes
34 Notre-Dame-des-Champs ou National Drug Code
35 instrument à cordes pincées ancêtre du luth
36 fleuve du nord-ouest de l'Allemagne ou société mathématique
37 article défini breton ou arabe
38 homme de foi
39 ville de l'est des Pays-Bas ou Elvis Presley Enterprises
40 merci à tes tenues d'entretien d'embauche, merci pour les fleurs, merci pour ta bonne humeur et ton sourire, merci pour toutes ces parties de carte qu'on a perdues ensemble, c'est ça une vraie amie !
41 il peut être de symétrie ou de rotation
42 second membre de la loi d'Ohm ou exprime son amusement
43 un des tice de plus en plus utilisé dans les collèges et lycées
44 satellite de Jupiter
45 plus utilisable
46 merci pour tes mails
47 préposition anglaise
48 merci de m'avoir aidée à gérer mes premiers déplacements et notamment celui au CIRM où grâce à ton contact sur place je n'ai pas eu à avancer de frais
49 chaîne de télévision américaine
50 arobase
51 résonance magnétique nucléaire
52 relatif au jour
53 Université Laval ou à l'envers marque de biscuit
54 grognement ou relativité restreinte
55 statistique annuelle des établissements de santé
56 s'effondra sous le poids
57 termine une démonstration
58 article défini ou largeur d'une étoffe
59 merci de nous avoir accueillis à plusieurs reprises dans la campagne nantaise, merci à lui pour ses mails incroyables, je me demande à chaque fois où tu peux bien trouver tout ça
60 sous-genre musical du punk-rock ou ville du Japon
61 service de renseignements français
62 university of western ontario
63 associé à pédieuse quand on parle d'orthèse relative à la cuisse
64 boisson chaude appréciée à 17 heures
65 fête de fin d'année
66 oui espagnol

Vertical

122 merci de m'avoir permis de faire des TD pendant 3 ans avec toi, ça fait plaisir de voir un prof de fac autant investi dans ce qu'il fait
123 merci à eux pour les soirées (notamment déguisées), merci à lui de m'avoir aidée à comprendre le cours de M2 de son directeur de thèse
124 merci pour ton survêtement violet et vert des années 80 (c'est un grand traumatisme)
129 enlève les courbures d'une voûte
137 partenaire du tableau noir
141 c'est l'analyse qui permet de faire le lien entre la mécanique classique et la mécanique quantique (c'est pour voir si vous avez un peu suivi la soutenance)
143 merci pour les cours de danse et de tissu aérien, ils sont vraiment supers et m'ont permis de m'évader pendant cette thèse, merci aussi pour le stage à Saint-Malo, la danse sur la plage c'est sympa aussi
146 merci pour le travail que tu fais pour l'UFR et merci d'avoir toujours le sourire quand je te croise
147 temps que met la terre pour effectuer une révolution autour du soleil
156 sans restriction ou limite, contraire de relatif, peut caractériser le temps
172 intervalle de temps géochronologique
187 abréviation automobile qui apparaît dans le nom de certains modèles de voitures
190 outil de travail qui sera peut-être un jour quantique
197 liquida
198 système anti-blocage des roues
199 je la remercie même si je ne l'ai pas choisie et merci en particulier aux membres de cette dernière qui sont présents aujourd'hui
200 je les remercie car sans eux le métier d'enseignant chercheur aurait moins d'intérêt, j'ai adoré vous faire TD (même si ce n'est peut-être pas réciproque)
201 peut s'accompagner d'un hochement de tête de haut en bas
202 couteau utilisé par les inuits
203 poisson qui peut être à grosses lèvres, à museau pointu ou encore à tête noire
204 on la lève pour s'en aller
205 peut être qualifié d'amoureux ou de folâtre
206 ils sont à plumes dans les cabarets
207 merci pour le Kouign Amann, merci pour toutes ces parties de coinche et n'oublie pas qu'il faut qu'on fasse notre article sur les modes propres du Laplacien dans le café! (désolé je n'ai pas pu résister à la tentation de mettre le surnom que je t'ai trouvé plutôt que ton prénom)

Horizontal

67 abimai
68 homme des neiges
69 merci d'avoir accepté de me prendre en post-doc à Lisbonne et merci de m'aider énormément à préparer mon arrivée
70 armes dotées d'un fer emmanché sur une hampe
71 merci d'avoir réussi à me supporter comme cobureau! (ou bien en fait peut-être que c'est le contraire, ça expliquerai pourquoi je ne te vois jamais plusieurs jours de suite)
72 révisé
73 merci bonhomme pour ta bonne humeur communicative et de m'avoir engueulée à chaque fois que je ne prenais pas au tarot; amuse-toi bien à Nancy
74 axe du vent ou exaocet
75 entreprise faisant des espadrilles ou prénom de Lupin
76 impôts sur les sociétés ou verbe être conjugué à la troisième personne du singulier en anglais
77 parfois utile pour démontrer des théorèmes
78 merci d'avoir eu l'idée de la sortie à Disney l'année dernière, c'était super et surtout merci pour tes cris suraiguës dans les attractions!
79 ronds comme des queues de pelles
80 la finesse au Hanabi en est une
81 il est au centre de ma vie, c'est donc normal qu'il occupe une place centrale dans ce mot croisé, merci de m'avoir soutenue, merci de croire en mes capacités, merci d'avoir su me reconforter à chaque fois que je désespérai à cause des difficultés rencontrées au cours de cette thèse, bref je pourrai te remercier pour beaucoup d'autres choses mais ça risque d'allonger énormément ces remerciements, donc merci parce que
82 prénom féminin (d'actrice ou d'écologiste) ou à l'envers salut à César
83 doublé c'est un cheval enfantin ou oui russe
84 enlevé
85 for each ou à l'envers établissement scolaire où peu de professeurs souhaitent enseigner
86 merci à mon collègue de TD que ce soit en licence 1 ou en agreg pour son implication dans ces derniers à mes côtés
87 association américaine qui aime beaucoup les armes
88 physicien américain qui a donné son nom à une mesure et à un phénomène
89 station de radio du centre de la Bretagne
90 fit l'orage
91 merci pour ta gentillesse et ton efficacité autour des manifestations du CHL

Vertical

208 bismuth
209 borne mathématique
210 merci pour ta gentillesse lors de la reliure de mon manuscrit, lors des problèmes de salles de TD ou lorsque j'étais étudiante
211 unité mixte de recherche
212 état dans lequel je dois être
213 brouta
214 adverbe qui précédé de deçà signifie de divers côtés
215 pâturage d'une chaîne de montagne française
216 pronom personnel
217 inhibiteurs de l'enzyme de conversion
218 célèbre trafiquant de drogue de Colombie
219 c'est mon copain de café (et c'est également le seul qui a pensé à me souhaiter mon anniv cette année!), merci donc pour ces petites (ou pas) pauses dans la journée qui sont toujours ponctuées de discussions intéressantes, merci pour les invitations chez toi et la découverte de jeux et surtout merci de m'avoir emmenée voir les lapins géants du mail!
220 merci à tous ses membres et en particulier à ceux dont j'ai oublié de citer de noms, j'en profite pour remercier l'équipe d'entretien qui fait un travail formidable et merci à Jeannick pour l'approvisionnement en thés et café des séminaires doctorants
221 deux en chiffres romains
222 dépôt qui se forme au fond d'une bouteille ou type de groupe
223 merci pour ces 7 années et demi de danse modern, tes choré sont vraiment supers
224 syndicat
225 kaputt
226 regarda avec insistance ou dressa
227 mieux vaut deux fois qu'une donc encore merci de m'avoir encadrée pendant ces 3 années et demi
228 radical obtenu en enlevant le groupement hydroxyle d'un acide carboxylique (oui j'aime bien la chimie)
229 merci de ne pas m'avoir trop aidée à préparer le pot d'Arnaud
230 c'est mon petit frère de thèse, je lui souhaite donc bon courage pour la suite de sa thèse!
231 contribution sociale généralisée
232 merci à la secrétaire de mon équipe que j'ai énormément sollicité pendant ma thèse avec tous mes déplacements et qui m'a toujours accueillie dans son bureau avec des mots gentils
233 complètement si on ajoute de avant et qu'on sépare les deux lettres par à
234 chanteur corse ayant vendu plus de 500 millions de disques
235 prêtresse d'Héra transformée en génisse

Horizontal

92 avant *patres* pour signifier tuer ou avant *libitum* pour signifier à volonté
93 pantoufle ou associée au mot tête permet de qualifier quelqu'un d'entêté
94 merci d'avoir assisté à l'inauguration de l'agence Lebesgue, je me suis sentie moins seule!
95 merci à ma co-organisatrice du séminaire Landau car elle a assuré, merci pour les pauses thés tout au long de la journée, merci pour les discussions cinémas et claquettes et merci pour les bonnes recettes de cuisine
96 nom d'une bourse de thèse
97 mégaoctet ou main-d'œuvre
98 note de la rédaction
99 contrat d'accompagnement dans l'emploi
100 merci de m'avoir fait visiter Marseille, merci pour les concerts avec l'orchestre universitaire, merci pour les nombreuses soirées et merci pour les vacances dans les Pyrénées
101 merci pour ta réactivité et tes compétences en informatique lorsqu'on avait des problèmes avec le site du séminaire Landau
102 merci d'être un joueur assidu de la pause de midi, merci de simplifier le Avalon en ayant toujours un rôle de méchant et merci de m'avoir fait redécouvrir la comédie musicale de l'Ens
103 inciter quelqu'un à se déshonorer ou fréquenter des gens douteux si on le précède d'un s
104 c'est l'endroit où vous êtes actuellement
105 merci à ce nouveau membre du club jeu de la pause de midi car c'est quasiment le seul avec qui j'arrive à gagner à la coinche!
106 atoll des îles Carolines de 1 km^2
107 merci à ce probabiliste à qui il arrive toujours des choses incroyables et qui me font bien rire
108 ayant le goût d'une plante qu'on trouve dans un alcool associé au nombre 51
109 flétan belge
110 parti de la chancelière allemande
111 homme pieux
112 c'est pas avec un salaire de prof qu'on risque de payer cet impôt
113 néon ou arrivé
114 merci pour ta gentillesse, ton efficacité administrative et d'avoir su nous expliquer et nous aider à gérer les invitations du séminaire Landau
115 comme les doigts de la main ou les minutes Lebesgue
116 série télévisée humoristique
117 oui anglais ou groupe de rock anglais
118 carte intéressante à la belote mais beaucoup moins au tarot
119 envoi ou publie

Vertical

236 merci à tous les deux d'avoir gardé si souvent Möbius, merci à lui pour sa modestie, merci de nous avoir invités à votre mariage c'était vraiment génial!
237 fromage parfois dit de Meaux ou de Melun
238 antimoine
239 copernicium
240 produit dérivé de la vitamine B9
241 pronom indéfini neutre
242 cuivre ou communauté urbaine
243 type de routes souvent assez grandes
244 on l'ajoute parfois à un mail
245 merci de m'avoir proposé de faire les TD d'agreg en algèbre et géométrie, j'ai trouvé cet enseignement très formateur, merci aussi pour les oraux blancs qu'on a fait ensemble
246 mécanisme informatique permettant de faire communiquer un réseau local avec internet
247 merci pour la gestion de la bibliothèque!
248 merci pour la gestion de la bibliothèque et pour les mails intéressants sur de l'édition scientifique
249 inverse de down
250 association pour le tourisme équitable et solidaire (on découvre des choses quand on crée un mot croisé)
251 c'est ce qui nous distingue les uns des autres en anglais
252 ville du Limousin
253 agence de renseignements américaine
254 disposer des poissons salés les uns au-dessus des autres
255 roi de l'Égypte antique
256 merci pour nos repas du vendredi midi quand j'étais en stage à Jussieu et bien sûr merci pour tous tes cadeaux, notamment les thés
257 fonction trigonométrique
258 merci pour la découverte du Perudo et merci pour nos ballades à vélo suivies de marches en centre-ville durant toute l'année dernière
259 contrôle en classe ou qualificatif d'une nintendo
260 prénom breton et quartier du sud de Rennes
261 sorte d'équerre
262 parcouru des yeux ou marque de biscuits
263 petit morceau de terre entouré de mer
264 merci de m'avoir forcée à prendre des vacances et merci d'avoir fait partie de notre équipe pour l'escape room car sans toi, je crois qu'on aurait un peu plus galéré!
265 je les remercie de m'avoir laissée choisir mes études et de m'avoir soutenue pendant ces dernières, merci d'être là aujourd'hui et merci pour tout ce que vous avez fait aujourd'hui

Horizontal

120 sans lui on perdrait la tête
121 préfixe indiquant l'originalité
122 unité de la quantité de matière
123 compte-rendu ou chargé de recherche
124 c'est le nom d'un parc naturel de Californie
125 marque le peu d'enthousiasme pour quelque-chose
126 il est petit à Saint-Malo et est du à Vauban
127 marque une exclamation ou unité de charge électrique
128 merci d'avoir toujours été à l'écoute lors de mes problèmes informatiques et merci pour la visio concernant la soutenance
129 travail à faire à la maison ou 0,1 mètre
130 appris ou connu
131 merci à ce collègue de TD de L1 avec qui je pouvais partager mes expériences, merci pour les oublis au Fatday qui faisaient enrager certaines personnes, c'était amusant
132 un des grands des claquettes
133 bergerie
134 pratique en théâtre ou en danse qui demande de l'inventivité
135 y'a du soleil et des ... (oui je commence à faire mes remerciements de plus en plus tard le soir, ça risque de ne pas s'arranger)
136 personnage central de Matrix
137 boisson des Bretons
138 abréviation d'un organisme qui organise des réunions où la plupart des Bretons (voir des Français) pourraient se rendre
139 merci pour le travail que tu fais pour l'Irmar, merci pour tous les tampons que je t'ai fait faire pour mes candidatures d'Ater et merci de m'avoir expliqué quel était mon statut cette année
140 ce sont ses membres qui sont intervenus quand le tableau de mon bureau est tombé!
141 poignardier
142 prénom germanique ou poisson
143 coup en hongrois
144 célèbre chevalier (et non Richard, je ne te remercie pas une deuxième fois)
145 choisit ou ville d'Iran
146 abréviation du nom du dernier pays où je suis allée en conférence
147 type de radio
148 défricher
149 résonance paramagnétique électrique ou réserve pays émergents
150 changer de peau ou de voix
151 volcan le plus haut d'Europe
152 se tenait debout

Vertical

266 symbole d'un métal précieux
267 vase à détrempier la chaux
268 merci pour les soirées à la fois intellectuelles et arrosées chez toi!
269 merci d'être là aujourd'hui pour me soutenir!
270 département français
271 merci pour tes mails sur l'enseignement et les étudiants
272 acide nitrilotriacétique
273 smiley qui rigole
274 pote anglais
275 fleuve du Vietnam
276 merci à mon partenaire de décollage de tapisserie occasionnel pour ses soirées
277 merci à ma sœur pour nos coups de téléphone à durée indéterminée lors de nos études!
278 formule utilisée en probabilités
279 merci à eux d'être venu nous voir cette année et merci à elle avec qui j'ai beaucoup aimé partager ma scolarité à l'Ens
280 frapper ou écrire à l'aide d'un ordinateur
281 marque d'anti-vol de vélos ou exagération
282 merci de m'avoir bien fait rire lors des pauses du midi où tu étais là (désolé je n'ai pas résister à la tentation de mettre ton surnom)
283 village de Finlande
284 abréviation désignant un facteur qui peut être positif ou négatif
285 c'est mon lapin, lui je le remercie d'être trop mignon! (si vous ne trouvez pas son prénom, il y en a un qui a passé une partie de ballade à Montréal à deviner)
286 indication de lieu
287 pronom personnel
288 je remercie cette école pour les 4 années d'études que j'y ai passées, j'ai trouvé que l'ambiance était super et les cours de grandes qualités, j'en profite pour remercier Benoît qui m'a aidé concernant la problématique de la demande de mise en dispo afin de pouvoir faire un post-doc, merci également à Benjamin avec qui j'ai enseigné en calcul scientifique et qui est un très bon collègue, merci également à Mihai pour l'encadrement lors de ma scolarité
289 merci à ce vendéen ancien habitué de la pause de midi pour ses gâteaux chocolat/crème de marron et pour des discussions intéressantes car on n'a pas les mêmes avis
290 piste centrale d'un amphithéâtre romain
291 merci pour des discussions toujours très intéressantes (parfois par mails comme actuellement), j'ai apprécié faire partie du conseil de Matisse (même si je regrette de ne pas avoir pu faire plus concernant tu sais qui)

Horizontal

153 note maximale accordée par une agence de notation financière ou type de piles
154 doublé c'était mon surnom quand j'étais petite (pour trouver ce mot là, il faudra l'aide de ma famille)
155 c'est ma copine d'anglais (car on était dans le groupe des nuls toutes les deux à l'Ens) et je suis contente de pouvoir dire que maintenant c'est tout simplement mon amie, merci pour ton accent qui nous a bien souvent fait sourire (coquelicot, chien, rose ...), merci pour le "goelang", merci pour toutes les superbes soirées passées chez toi et toutes les bonnes choses que tu nous as préparées lors de ces dernières, tu es la meilleure pâtissière que je connaisse!
156 ancienne commune du nord de la France maintenant associée à Villeneuve
157 confédération des syndicats nationaux
158 merci pour ta gentillesse et tes compétences au service du CHL, merci notamment pour les préparations des conseils scientifiques qui m'ont beaucoup aidées dans mon travail de représentante
159 unité de mesure d'une grande force
160 c'est un mot du titre mais ce physicien est surtout connu pour son modèle de l'atome d'hydrogène
161 département du sud-ouest de la France
162 selon l'intégriste protestant de notre promo de l'Ens, c'est ce que dit l'homme à la femme dans le couple en plus de "tu te tais"
163 c'est la spécialité d'Hélène en mathématiques
164 surveillance médicale renforcée
165 satellite d'Uranus ou sirène
166 poteau
167 compagnie française fabriquant des hélicoptères
168 commande Linux permettant de supprimer des fichiers
169 ville de Croatie ou oublié
170 élément chimique utilisé dans les piscines ou abréviation d'un journal du fin fond de la Charente
171 argon ou à l'envers dieu égyptien
172 nom des éléments chimiques composés d'une double liaison carbone-carbone et d'un groupement hydroxyle
173 sorte de crack
174 abréviation d'une personne que les profs n'aiment pas quand ils le voient
175 desservi
176 ville de la banlieue d'Osaka au Japon
177 on la passe pour une trêve
178 il sert à faire des cocktails

Vertical

292 exclamation de douleur
293 diminua le poids
294 direction du travail et de l'emploi
295 parti de Dupont-Aignan
296 cours en amphi
297 merci à eux d'avoir repris le séminaire Landau!
298 ville de nord
299 merci pour la machine à café, j'ai grâce à toi redécouvert ce que c'était !
300 réfuta
301 dème près d'Athènes
302 article défini contracté
303 maladie dont le nom ressemble à la ville où habite les parents de Blandine (quand elle le prononce, c'est à s'y méprendre)
304 merci pour la gestion parfaitement maîtrisée de la licence aussi bien quand j'étais élève, que quand je faisais des TDs, cela simplifie beaucoup de choses
305 canard migrateur
306 fleuve du nord de l'Espagne
307 californium
308 nous en faisons partie
309 mémoire à lecture seule ou commune des Deux-Sèvres
310 c'est une figure de tissu aérien (par exemple) qui impressionne
311 c'est un physicien qui se trouve dans le titre de cette thèse
312 déterminé
313 merci pour des discussions intéressantes sur le vin !
314 pays dont la capitale est Hanoï
315 nobélium
316 merci à ce couple atypique que je vois de temps en temps en conférences et qui ont toujours des histoires incroyables à me raconter !
317 abréviation désignant un groupement d'élus
318 crasseux
319 meilleure saison de l'année
320 rignoché (si vous ne comprenez pas la définition c'est normal, c'est du patois charentais, il fallait bien que ça arrive)
321 merci pour la gestion de la bibliothèque !
322 spécialité vietnamienne
323 type de décomposition de matrice (une révision d'agreg, ça ne peut pas faire de mal)
324 sélénium (décidément des éléments chimiques, il y en a pleins)
325 doublé, il est synonyme de salut

Horizontal

- 179 commune du Pays-Basque
- 180 à la mode ou dans en anglais
- 181 webradio de Rhône Alpes
- 182 jamais en allemand ou rejette
- 183 précéder de mer il et
- 184 type d'exercice qui pouvait conduire à une note négative en ALGB ou qui sert à noter les étudiants en médecines
- 185 révolutionnaire communiste
- 186 option d'agrégatif
- 187 merci à tous les membres de cette famille qui m'ont très bien accueillie il y a déjà plus de 8 ans, j'aime toujours autant passer du temps avec chacun d'entre eux et ils font partie de ma famille maintenant !
- 188 érythropoïétine
- 189 ville de Mésopotamie
- 190 merci de m'avoir aidée quand j'avais des problèmes avec l'accès au site du séminaire Landau cette année
- 191 merci de m'avoir poussée à reprendre mes TD d'algèbre et géométrie en agreg alors que je ne m'en sentais pas capable et merci donc de m'avoir fait confiance pour ces derniers
- 192 c'est le nom de l'appareil qui produit les effets décrits dans une chanson de Téléphone
- 193 village des Pays-Bas ou abréviation d'un parti politique français
- 194 invention de l'autrichien Joseph Hardtmuth utilisée tous les jours
- 195 tempo relativement lent
- 196 à l'endroit c'est le nom de mon équipe en anglais à l'envers c'est son nom en français, je remercie tous ses membres, qui sont vraiment très gentils et avec qui j'ai apprécié manger de temps en temps (si si c'est vrai)

Table des matières

Introduction	15
I1 Contexte historique	15
I1.1 Mécanique classique et mécanique quantique	15
I1.2 Analyse semi-classique	18
I1.3 Conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld	20
I1.4 Opérateurs semi-classiques	23
I1.5 Opérateurs non auto-adjoints	24
I2 Les résultats de la thèse	25
I2.1 Conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld pour des perturbations non auto-adjointes d'opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints en dimension un	25
I2.2 Quantifications de Berezin-Toeplitz et de Weyl du tore $\mathbb{T}^2$	32
I3 Plan du manuscrit	36
 I Conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld pour des perturbations non auto-adjointes d'opérateurs auto-adjoints en dimension un	 37
1 Un premier exemple	39
1.1 Conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld	39
1.2 Simulations numériques	43
2 Conditions de Bohr-Sommerfeld pour les opérateurs pseudo-différentiels	49
2.1 Quantification de Weyl de $\mathbb{R}^2$ et conditions de Bohr-Sommerfeld	49
2.2 Quantification de Weyl de $\mathbb{R}^2$, quantification de Weyl de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ et conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld	53
2.2.1 Quantification de Weyl de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ et conditions de Bohr-Sommerfeld	53
2.2.2 Transformation canonique complexe, quantification de Weyl complexe et problème de Grushin	55
2.2.3 Quantification de Weyl de $\mathbb{R}^2$ et quantification de Weyl de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.	90

3 Applications	95
3.1 Opérateurs $\mathcal{PT}$ -symétriques	95
3.2 Opérateurs de Berezin-Toeplitz du plan complexe	98
4 Simulations numériques	115
4.1 Opérateurs pseudo-différentiels agissant sur $L^2(\mathbb{S}^1)$	115
4.2 Opérateurs pseudo-différentiels agissant sur $L^2(\mathbb{R})$	118
II Quantification de Berezin-Toeplitz et quantifications de Weyl du tore $\mathbb{T}^2$	127
5 Quantification de Berezin-Toeplitz du tore	129
5.1 Fibré préquantifiant	129
5.2 Sections holomorphes	133
5.3 Espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$	138
5.4 Quantification de Berezin-Toeplitz du tore	144
5.5 Exemples	146
6 Quantifications de Weyl du tore	153
6.1 Quantification de Weyl classique du tore	153
6.1.1 Espace de distributions $\mathcal{L}_k$	153
6.1.2 Opérateurs pseudo-différentiels agissant sur l'espace $\mathcal{L}_k$	158
6.2 Quantification de Weyl complexe du tore	166
6.2.1 La transformée de Bargmann	167
6.2.2 Opérateurs pseudo-différentiels agissant sur l'espace $\mathcal{H}_k$	181
7 Lien entre les différentes quantifications du tore	193
7.1 Quantification de Berezin-Toeplitz et quantification de Weyl du plan complexe	193
7.2 Quantifications de Berezin-Toeplitz du tore et du plan complexe	195
7.3 Quantification de Berezin-Toeplitz et quantification de Weyl complexe du tore	202
8 Exemples de perturbations non auto-adjointes d'opérateurs de Berezin-Toeplitz du tore auto-adjoints et conjecture	205
8.1 Spectre numérique d'opérateurs de Berezin-Toeplitz du tore non auto-adjoints	205
8.2 Conjecture	210
Table des figures	211
Bibliographie	213

Introduction

Dans les travaux présentés ici, on s'intéresse à la théorie spectrale des opérateurs semi-classiques non auto-adjoints en dimension un en relation avec les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld. On montre que ces conditions, initialement développées pour des opérateurs auto-adjoints, donnent également une très bonne approximation du spectre de certains opérateurs non auto-adjoints dans la limite semi-classique. Dans un premier temps, on étudie plus particulièrement les opérateurs pseudo-différentiels à symboles analytiques sur $\mathbb{R}^2$. Puis, on s'intéresse aux opérateurs de Berezin-Toeplitz du tore et aux opérateurs pseudo-différentiels à symboles sur le tore et à leurs relations. Pour finir, on présente des simulations numériques montrant le spectre d'opérateurs de Berezin-Toeplitz du tore non auto-adjoints afin de mettre en exergue ce que pourraient être des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld pour cette classe d'opérateurs.

I1 Contexte historique

I1.1 Mécanique classique et mécanique quantique

La mécanique classique, aussi appelée mécanique newtonienne, est basée principalement sur des travaux d'Isaac Newton (1643-1727). On peut la diviser en plusieurs parties distinctes :

- la cinématique, qui étudie le mouvement des corps sans se soucier de ce qui le cause ;
- la statique, qui consiste en l'étude des corps qui sont au repos ;
- la dynamique, qui étudie le mouvement des corps en tenant compte des causes de ces mouvements.

À la fin du xix-ème siècle, la plupart des phénomènes physiques connus sont expliqués par la physique classique au travers notamment de la mécanique d'Isaac Newton et de l'électromagnétisme de James Maxwell (1831-1879). Ces deux théories reposent sur les hypothèses suivantes :

- le temps et l'espace sont absolus ;
- connaissant les conditions initiales et l'évolution d'un système physique, on peut à chaque instant avoir accès à tous les paramètres du système ;
- ces paramètres peuvent être mesurés avec une précision infiniment grande.

Les résultats théoriques s'accordent avec les expériences lorsqu'on étudie des phénomènes macroscopiques ayant une vitesse faible par rapport à la vitesse de la lumière $c = 3.10^8 m.s^{-1}$. Cependant, au début du xx-ème siècle, ces hypothèses ont été remises en question. Plus précisément la théorie de la relativité d'Albert Einstein (1879-1955) en 1905 nécessite l'abandon de la première hypothèse et la théorie quantique développée notamment par Erwin Schrödinger (1887-1961) et Werner Heisenberg (1901-1976) en 1925 modifie la deuxième et la troisième hypothèse. De plus, à cette époque, on observe certains phénomènes que la mécanique classique n'arrive pas à expliquer, en voici des exemples.

- Le rayonnement du corps noir : un corps noir est une cavité dont les parois et l'intérieur sont portés à une température T fixée. Les atomes constituant la paroi sont alors susceptibles d'émettre ou d'absorber du rayonnement électromagnétique. Lorsque l'équilibre thermodynamique est atteint, la paroi émet et absorbe la même puissance pour chacune des fréquences ν qui composent le spectre de ce rayonnement. La densité d'énergie électromagnétique est donc constante et on peut la mesurer expérimentalement. C'est après cette expérience que Max Planck (1858-1947) proposa que les seules valeurs possibles de l'énergie échangée sont données par :

$$E = n\hbar\nu \quad \text{où } n \text{ est un entier.}$$

Max Planck introduisit à cette occasion la constante $\hbar$ appelée aujourd'hui constante de Planck.

- L'effet photoélectrique : c'est le fait qu'un rayonnement électromagnétique peut arracher des électrons à un métal. Albert Einstein expliqua cet effet en postulant que le rayonnement électromagnétique est constitué de photons, chacun a une énergie $\hbar\nu$ et une vitesse c . Ainsi un photon peut être absorbé par un électron et c'est cette interaction qui peut l'arracher du métal.
- L'effet Compton : c'est la diffusion de la lumière par les électrons du milieu éclairé. Ce phénomène peut s'interpréter comme la diffusion élastique du photon d'énergie $E = \hbar\nu$ avec un électron libre.
- La stabilité des atomes : c'est le modèle de Bohr qui permet d'expliquer la structure électronique des atomes et leurs stabilités en quantifiant les moments angulaires des électrons (des précisions sur ce modèle se trouvent dans le paragraphe I1.3 sur les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld).

Ainsi, la mécanique quantique constitue une théorie qui permet d'expliquer les expériences au niveau atomique (voir [LL66]). Pour plus de détails sur la naissance de la mécanique quantique, voir le livre [BDD⁺08]. Du point de vue mathématique, la mécanique quantique se formalise à l'aide de quatre postulats (voir [Dat09]).

- Postulat 1 : à tout système physique isolé, on associe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ appelé espace d'états du système. Le système est alors complètement décrit par son vecteur d'états qui est un vecteur unitaire de l'espace d'états.
- Postulat 2 : l'évolution d'un système quantique est décrit par un opérateur unitaire.

- Postulat 3 : en mécanique quantique, on mesure des observables (qui correspondent en mathématiques à des opérateurs linéaires auto-adjoints agissant sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$) et les valeurs possibles de ces observables correspondent aux valeurs propres des opérateurs.
- Postulat 4 : l'espace des états d'un système physique composite est le produit tensoriel des espaces d'états des composants du système physique.

On s'intéresse maintenant à un exemple de système physique qu'on peut décrire d'un point de vue classique et d'un point de vue quantique c'est l'oscillateur harmonique.

Exemple II.1 (Oscillateur harmonique classique). *On considère une masse ponctuelle m accrochée à un ressort de constante de raideur k , puis on écarte le point m de sa position d'équilibre.*



FIGURE II – Oscillateur harmonique.

D'après le principe fondamental de la dynamique, l'équation différentielle qui régit le mouvement de la masse m est :

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t).$$

Cette équation admet pour solution la fonction suivante :

$$x(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi \right),$$

où A et ϕ sont des constantes déterminées par les conditions initiales du système. On peut reformuler ce problème sous forme hamiltonienne en s'intéressant aux variables position x et moment $p = mv$ (où v désigne la vitesse) du système. On sait que l'énergie E du système est donnée par la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, autrement dit :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{m} + kx^2 \right).$$

Si on effectue le changement de variable : $x \mapsto \frac{x}{(km)^{1/4}}$ et qu'on pose : $\xi = \frac{p}{(km)^{1/4}}$, l'énergie E se réécrit sous la forme :

$$E = \frac{1}{2}\omega(\xi^2 + x^2) =: H(x, \xi) \quad \text{où } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

On définit ainsi le hamiltonien du système H sur l'espace des phases $\mathbb{R}^2$ à partir de l'énergie

ergie. Le flot hamiltonien associé à H par les équations :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial H(x(t), \xi(t))}{\partial \xi}, \\ \frac{d\xi(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x(t), \xi(t))}{\partial x}, \end{cases}$$

permet de retrouver l'équation de Newton.

Exemple I1.2 (Oscillateur harmonique quantique). *L'oscillateur harmonique quantique est le quantifié de Weyl de l'oscillateur harmonique classique (on reviendra plus tard sur la définition précise de cette quantification). Autrement dit c'est l'opérateur différentiel obtenu à partir du hamiltonien de l'oscillateur harmonique classique en remplaçant la variable ξ par $-i\hbar\partial_x$, c'est-à-dire :*

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\omega \left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right).$$

Cet opérateur agit sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$ qui correspond à l'espace de Hilbert du Postulat 1. En mécanique quantique, on utilise les opérateurs dits de création et d'annihilation (qui représentent la création et la destruction de particules respectivement) pour étudier les opérateurs différentiels. Ces derniers sont définis de la façon suivante sur $L^2(\mathbb{R})$:

$$A_+ = \frac{1}{\sqrt{2}\hbar} \left(x - \hbar \frac{d}{dx} \right) \quad \text{et} \quad A_- = \frac{1}{\sqrt{2}\hbar} \left(x + \hbar \frac{d}{dx} \right),$$

où A_+ désigne l'opérateur de création et A_- l'opérateur d'annihilation. L'opérateur $\hat{H}$ définissant l'oscillateur harmonique quantique se réécrit alors de la façon suivante :

$$\hat{H} = 2\hbar^2(A_+A_-) + \hbar.$$

Du point de vue quantique, on s'intéresse au spectre d'un tel opérateur (l'étude de ce dernier peut être simplifiée par l'écriture de l'opérateur en terme des opérateurs A_+ et A_- , voir le chapitre 4).

On peut trouver d'autres exemples intéressants de systèmes physiques décrits de manière classique et de manière quantique dans le livre de San Vũ Ngọc [VN06].

I1.2 Analyse semi-classique

L'analyse semi-classique est une théorie mathématique qui permet de faire un lien entre d'un côté la mécanique classique et de l'autre la mécanique quantique. Ce lien se fait dans le régime où la constante de Planck $\hbar$ tend vers zero. Comme on l'a vu, en mécanique quantique, on mesure des observables et à chaque observable, on associe un opérateur. Puis, les valeurs possibles de l'observable correspondent au spectre de l'opérateur, d'où l'intérêt porté à l'étude du spectre d'opérateurs en physique. De plus, d'après le Postulat 2, les opérateurs étudiés en mécanique quantique sont des opérateurs auto-adjoints puisqu'ils

ont un spectre réel et correspondent donc à des observables réelles.

En mathématiques, on appelle quantification l'opération qui consiste à associer un système quantique à un système classique. Par exemple, considérons l'équation fondamentale de la mécanique quantique, l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} = -\hbar^2 \Delta \psi(t, x) + V(x) \psi(t, x) =: \hat{H} \psi(t, x),$$

où :

- $\psi(t, x)$ est une fonction qui dépend du temps t et de l'observable position x ;
- V est une fonction régulière.

Si on s'intéresse aux états stationnaires, autrement dit aux fonctions ψ qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$\psi(t, x) = e^{-itE/\hbar} \phi(x),$$

où E est un nombre réel et ϕ une fonction régulière ; l'équation de Schrödinger pour un tel état stationnaire se réécrit sous de la façon suivante :

$$\hat{H} \psi(t, x) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-itE/\hbar} \phi(x) \right) = E \psi(t, x).$$

On appelle : $\hat{H} \psi = E \psi$, l'équation aux valeurs propres associée à l'équation de Schrödinger. On s'intéresse ici à la description des solutions d'une telle équation lorsque le paramètre semi-classique $\hbar$ tend vers zéro. En particulier, un des buts de l'analyse semi-classique est de mettre en évidence le lien entre le comportement des solutions de cette équation quantique et le comportement des solutions classiques du hamiltonien défini par :

$$H(x, \xi) = \xi^2 + V(x),$$

où (x, ξ) sont les coordonnées position et moment dans l'espace des phases. On peut donc également voir l'analyse semi-classique comme l'étude des équations aux dérivées partielles dépendant d'un petit paramètre de façon singulière. Pour une introduction plus détaillée sur l'analyse semi-classique, on pourra consulter le cours en ligne de Clotilde Fermanian Kammerer [FK14].

I1.3 Conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld



Niels BOHR
(1868-1951)



Arnold SOMMERFELD
(1886-1962)

Niels Henrik David Bohr (1886-1962) est un physicien danois qui est notamment connu pour avoir participé à l'élaboration de la mécanique quantique. En 1913, Niels Bohr établit une théorie, connue aujourd'hui sous le nom de modèle de Bohr. Ce modèle permet de comprendre la composition de l'atome et est basé sur le modèle planétaire du physicien et chimiste Ernest Rutherford (1871-1937). Plus précisément, Ernest Rutherford propose une analogie entre la description de l'atome et celle des planètes. En mécanique classique les corps s'attirent jusqu'à entrer en collisions et c'est *a priori* notamment le cas pour les particules chargées négativement et celles chargées positivement. Cependant, les orbites des planètes sont stables, donc Ernest Rutherford suggère que de la même façon les électrons gravitent autour du noyau de l'atome plutôt que d'entrer en collision avec ce dernier. Un nouveau problème se pose alors car à l'époque on sait qu'un corps chargé doit rayonner, ce qui signifie que les électrons doivent rayonner et donc perdre de l'énergie, autrement dit que le rayon de leurs orbites diminue et par conséquent les électrons doivent finir par s'écraser sur le noyau de l'atome. Ainsi, pour que les atomes soient stables, il faut qu'il n'y ait pas de rayonnement des électrons et c'est pour cela que Niels Bohr introduit son modèle dans lequel il suppose qu'il existe des orbites stables sur lesquelles les électrons ne rayonnent pas (ces derniers rayonnent uniquement lorsqu'ils changent d'orbites en émettant un photon). Plus précisément, Niels Bohr introduit son modèle pour l'atome d'hydrogène afin de pouvoir expliquer les expériences physiques menées sur le spectre de ce dernier. Son modèle postule que les électrons dans l'atome d'hydrogène peuvent exister uniquement sur certaines orbites stables, qui sont circulaires, satisfaisant la condition suivante :

$$\frac{1}{2\pi} \oint p \cdot dq = n\hbar,$$

où n est un entier, où le couple (q, p) désigne les coordonnées position et moment de l'élec-

tron et où l'intégrale est calculée sur une certaine orbite fermée de l'espace des phases. Cette expression se traduit physiquement par le fait que le moment orbital de l'électron ne peut prendre que certaines valeurs quantifiées. Par la suite, d'autres expériences sur l'atome d'hydrogène viendront valider ce modèle, cependant il ne permet pas d'expliquer dans le cas général le spectre des autres atomes, comme par exemple celui de l'atome d'hélium. De plus, on découvre par la suite l'existence de la structure fine des raies de l'atome d'hydrogène et c'est pour prendre en compte ces dernières que le physicien allemand Arnold Sommerfeld (1868-1951) étendit le modèle de Niels Bohr en suggérant que les électrons peuvent également se déplacer le long d'orbites elliptiques. On parle alors du modèle de Bohr-Sommerfeld. Ce modèle est considéré comme l'un des premiers résultats semi-classiques puisqu'il permet de décrire des objets classiques que sont les trajectoires des électrons et que le résultat en lui-même est quantique puisqu'il consiste en la quantification de niveaux d'énergie (et fait intervenir la constante de Planck $\hbar$).

Du point de vue mathématique, les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld permettent de décrire le spectre d'une certaine classe d'opérateurs auto-adjoints en dimension un. Plus précisément, on dit qu'un opérateur pseudo-différentiel auto-adjoint $P_\hbar$ en dimension un satisfait les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld si ses valeurs propres sont les nombres réels E tels que :

$$\int_{\gamma_E} \alpha_0 + \hbar \int_{\gamma_E} \kappa + \hbar \frac{\pi}{2} \mu(\gamma_E) \in 2\pi\hbar\mathbb{Z} + \mathcal{O}(\hbar^2),$$

où :

- γ_E est un lacet dans l'ensemble de niveau $\Lambda_E = p^{-1}(E)$ (où p désigne le symbole principal de l'opérateur $P_\hbar$) ;
- $\mu(\gamma_E)$ est l'indice de Maslov du lacet γ_E ;
- α_0 est la 1-forme de Liouville sur l'espace des phases ;
- κ est la 1-forme sous-principale sur l'espace des phases (le terme *sous-principale* soulignant ici le fait qu'elle dépend du terme sous-principal du symbole $p_\hbar$ associé à l'opérateur $P_\hbar$).

Les conditions de Bohr-Sommerfeld en mathématiques sont donc des conditions implicites sur les valeurs propres E de l'opérateur $P_\hbar$. Elles peuvent néanmoins se réécrire de manière explicite comme suit : il existe une fonction régulière $g_\hbar$ admettant un développement asymptotique en puissances du paramètre semi-classique $\hbar$ telle que les valeurs propres E de l'opérateur $P_\hbar$ s'écrivent sous la forme suivante :

$$E = g_\hbar(\hbar k) \quad \text{où } k \text{ est un entier relatif.}$$

Afin de comprendre un peu mieux ces conditions de quantification, nous allons les illustrer à l'aide d'un exemple, celui de l'oscillateur harmonique.

Exemple 11.3 (Oscillateur harmonique). *On considère l'opérateur pseudo-différentiel suiv-*

ant :

$$P_h = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^2.$$

C'est un opérateur auto-adjoint non-borné agissant sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrable sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. Grâce à la théorie de la quantification de Weyl, on peut lui associer un symbole qui est une fonction, notée p_h , d'un couple de réels $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$ à valeurs réelles (où ici l'ensemble $\mathbb{R}^2$ représente l'espace des phases). Cette fonction p_h peut être obtenue à partir de l'expression de l'opérateur P_h et elle est donnée, pour $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$p_h(x, \xi) = \xi^2 + x^2,$$

(pour déterminer cette fonction p_h à partir de l'opérateur P_h , il suffit de remplacer $-i\hbar\partial_x$ par ξ dans l'expression de l'opérateur).

Afin d'expliciter les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld, nous avons besoin de déterminer l'ensemble de niveau Λ_E associé à une valeur propre réelle E . Soit donc $E \in \mathbb{R}$, on a :

$$\Lambda_E = p^{-1}(E) = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2; x^2 + \xi^2 = E\},$$

car $p_h = p$ puisque le symbole p_h ne dépend pas du paramètre semi-classique $\hbar$. Ainsi l'ensemble de niveau Λ_E est un cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{E}$. Nous allons choisir pour le lacet γ_E ce cercle orienté dans le sens trigonométrique. L'indice de Maslov de ce

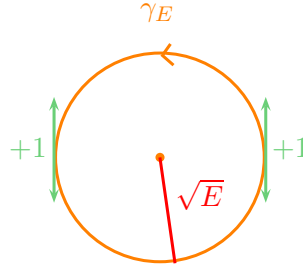


FIGURE I2 – Lacet γ_E et indice de Maslov.

lacet vaut ici 2, on peut le déterminer de manière géométrique en traçant les tangentes verticales à la courbe γ_E et en regardant la position relative de ces tangentes par rapport à la courbe. Plus précisément, partant d'un indice nul, lorsqu'on se déplace le long de la courbe, si la tangente est à notre droite on ajoute 1 à la valeur de l'indice et si elle se trouve à gauche, on retranche 1 (voir la figure I2).

Ensuite, l'énoncé des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld fait intervenir deux 1-formes. La première est la 1-forme de Liouville sur l'espace des phases $\mathbb{R}^2$ qui est donnée, dans les coordonnées sur $\mathbb{R}^2$, par :

$$\alpha_0 = \xi dx.$$

La seconde est la 1-forme sous-principale κ qui dans cet exemple est nulle puisqu'elle dépend du symbole sous-principal (i.e. du terme d'ordre $\hbar$ dans l'expression du symbole p_h) qui est

nul. In fine, les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\gamma_E} \alpha_0 + \hbar \int_{\gamma_E} \kappa + \hbar \frac{\pi}{2} \mu(\gamma_E) \in 2\pi\hbar\mathbb{Z} + \mathcal{O}(\hbar^2) \quad \text{c'est-à-dire,} \\
 & \int_{x^2+\xi^2=E} \xi dx + \hbar \frac{\pi}{2} 2 \in 2\pi\hbar\mathbb{Z} + \mathcal{O}(\hbar^2) \quad \text{ou encore,} \\
 & \int_{x^2+\xi^2 \leq E} d\xi \wedge dx + \hbar\pi \in 2\pi\hbar\mathbb{Z} + \mathcal{O}(\hbar^2) \quad \text{d'après la formule de Stokes ; ainsi,} \\
 & \pi E + \hbar\pi \in 2\pi\hbar\mathbb{Z} + \mathcal{O}(\hbar^2) \quad \text{soit :} \\
 & E \in \hbar(2\mathbb{Z} - 1) + \mathcal{O}(\hbar^2).
 \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve que le premier terme du développement asymptotique en puissances de $\hbar$ des valeurs propres de l'oscillateur harmonique est le produit de la constante de Planck $\hbar$ par un entier impair. De plus, on sait par ailleurs que les valeurs propres de l'oscillateur harmonique sont exactement les nombres réels qui s'écrivent sous cette forme, ce qui implique qu'il n'y a pas de termes d'ordres supérieurs dans le développement asymptotique des valeurs propres.

11.4 Opérateurs semi-classiques

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux opérateurs pseudo-différentiels. Ces opérateurs constituent un des outils fondamentaux de l'analyse semi-classique et leur intérêt provient notamment du fait qu'ils permettent d'étudier des systèmes physiques en prenant en compte à la fois la variable de position et la variable d'impulsion. Les opérateurs pseudo-différentiels ont été introduits dans le milieu des années 60 par André Unterberger et Juliane Bokobza [UB64] et en parallèle par Joseph Kohn et Louis Nirenberg [KN65]. Ils ont notamment été étudiés dans les années 60 par Lars Hörmander [Hör65, Hör66, Hör67]. Dans un second temps, nous allons nous attarder sur les opérateurs dits $\mathcal{PT}$ -symétriques. Ces opérateurs sont étudiés en mécanique quantique comme une alternative aux opérateurs auto-adjoints car ils sont considérés comme une généralisation naturelle des observables quantiques (voir [Ben05]). Ces opérateurs ont également la particularité d'avoir sous certaines conditions un spectre réel bien qu'ils ne soient pas nécessairement auto-adjoints d'où leur intérêt en matière d'observables.

Enfin, les opérateurs de Berezin-Toeplitz sont également des opérateurs auxquels nous allons nous intéresser. Ces opérateurs ont été introduits par Feliks Berezin [Ber75] et ont été étudiés par Louis Boutet de Monvel et par Victor Guillemin [BdMG81] comme une généralisation des matrices de Toeplitz. L'étude des opérateurs de Berezin-Toeplitz a été motivée par le fait que la théorie des opérateurs pseudo-différentiels ne prend en compte que des espaces des phases qui s'écrivent comme des cotangents de variétés alors qu'en mécanique classique, on peut être amené à considérer d'autres types d'espaces. Pour une introduction plus détaillée sur les opérateurs de Berezin-Toeplitz, on pourra lire l'article

de Yves Colin de Verdière [CdV95].

I1.5 Opérateurs non auto-adjoints

Comme nous l'avons vu, un des outils de la mécanique quantique sont les opérateurs et plus particulièrement ceux qui sont auto-adjoints. Cependant, dans cette thèse, nous nous intéressons à des opérateurs non auto-adjoints. Ces opérateurs sont également d'intérêt du point de vue de la physique. Par exemple, l'équation des ondes amorties est un système physique typiquement non auto-adjoint, elle est définie de la façon suivante :

$$\frac{d^2 u}{dt^2}(t, x) - \frac{d^2 u}{dx^2}(t, x) = a \frac{du}{dt}(t, x),$$

où a est une constante réelle, t désigne le temps et x la position. D'autre part, les opérateurs non auto-adjoints apparaissent aussi lorsqu'on étudie des résonances (voir [Dav02]). Les résonances d'un opérateur auto-adjoint correspondent aux valeurs propres d'un opérateur non auto-adjoint associé et on peut interpréter la partie imaginaire de ces valeurs propres comme le temps de demi-vie des états quantiques issus des solutions de l'équation de Schrödinger associée à l'opérateur de départ. En effet, si on s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) = A \psi(t, x) & \text{où } A = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x) + i\epsilon W(x), \\ \psi(t = 0, x) = \psi_0(x), \end{cases}$$

où V et W sont des fonctions régulières, t désigne la variable de temps et x l'observable position ; alors les solutions d'une telle équation s'écrivent formellement sous la forme suivante :

$$\psi(t, x) = e^{itA/\hbar} \psi_0(x).$$

Et si on s'intéresse au spectre de l'opérateur non auto-adjoint A et plus précisément à l'une de ses valeurs propres λ , alors on remarque que, si ψ_0 est une fonction propre associée :

- si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $|\psi(t)| = |\psi_0|$;
- si $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, alors $|\psi(t)| = e^{-bt/\hbar} |\psi_0|$ et pour $b > 0$, on a une décroissance exponentielle et la durée de vie d'un état quantique est donnée par $\frac{\hbar}{b}$.

L'étude des opérateurs non auto-adjoints en relation avec les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld implique que nous devons considérer des espace des phases complexes et donc des symboles complexes sur ces espaces d'où la nécessité de supposer qu'ils sont holomorphes. Une des difficultés inhérente à cette complexification réside dans le fait qu'on ne pourra pas appliquer la théorie réelle et qu'on a donc besoin d'utiliser une théorie *ad-hoc*.

De plus, un second problème se pose lorsqu'on étudie des opérateurs non auto-adjoints : on sait que déterminer le spectre de tels opérateurs n'est *a priori* pas une tâche aisée en raison des effets pseudo-spectraux. On entend par effets pseudo-spectraux, le fait que si on considère un opérateur et qu'on le perturbe légèrement, alors le spectre peut être modifié

de façon très importante. Plus précisément, la notion de pseudo-spectre est définie de la façon suivante.

Définition I1.1 (Pseudo-spectre). *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur. Soit $\epsilon > 0$ arbitraire. On définit le pseudo-spectre de l'opérateur A , noté $\sigma_\epsilon(A)$, par la relation suivante :*

$$\sigma_\epsilon(A) = \left\{ z \in \mathbb{C}; \|(z - A)^{-1}\| > \frac{1}{\epsilon} \right\}.$$

On peut caractériser le pseudo-spectre en terme de spectres d'opérateurs perturbés au sens de la proposition qui suit (voir par exemple [TE05]).

Proposition I1.2 (Caractérisation du pseudo-spectre).

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur. Soit $\epsilon > 0$ arbitraire. Alors :

$$\sigma_\epsilon(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \|B\| < \epsilon} \sigma(A + B),$$

où $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ désigne l'ensemble des opérateurs bornés agissant sur $\mathcal{H}$.

Ainsi cette caractérisation nous dit que le pseudo-spectre d'un opérateur A correspond à la réunion des spectres des perturbations de A . Pour une bonne introduction aux effets pseudo-spectraux, on peut consulter le livre de Marc Embree et Lloyd Trefethen [TE05]. Autrement dit, puisque nous allons nous intéresser à des perturbations d'opérateurs, nous n'avons *a priori* aucune garantie concernant une potentielle écriture du spectre sous la forme de conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld. Cependant, nous allons montrer que sous des hypothèses d'analyticité et pour des perturbations non auto-adjointes assez faibles, il n'y a pas d'effets pseudo-spectraux. Les conditions de Bohr-Sommerfeld vont permettre de décrire un spectre stable, localisé sur des courbes analytiques proches de l'axe réel.

I2 Les résultats de la thèse

I2.1 Conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld pour des perturbations non auto-adjointes d'opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints en dimension un

Les premiers travaux mathématiques sur les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld dans le cadre de l'analyse semi-classique ont porté sur les opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints en dimension un et ont été menés par Bernard Helffer et Didier Robert dans [HR84]. Ensuite, Anne-Marie Charbonnel [Cha88] et plus tard San Vũ Ngọc [VN00] se sont intéressés au cas de la dimension plus grande en considérant des systèmes complètement intégrables d'opérateurs auto-adjoints (c'est-à-dire des systèmes d'opérateurs auto-adjoints qui commutent deux à deux). Cependant, ici ce sont les conditions de

quantification de Bohr-Sommerfeld pour des opérateurs non auto-adjoints sur lesquelles nous allons travailler et, comme nous l'avons évoqué, l'étude de ce type d'opérateurs fait apparaître des problèmes d'instabilité pseudo-spectrale. Plus précisément, beaucoup de mathématiciens se sont intéressés à ces effets en considérant des perturbations aléatoires d'opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints, comme Mildred Hager [Hag06], Johannes Sjöstrand [HS08], William Bordeaux-Montrieux [BM11] et Martin Vogel [Vog14] où dans cette série d'articles, ils cherchent à estimer le nombre de valeurs propres dans un domaine complexe donné. Dans ces différents travaux, ils obtiennent que les valeurs propres se répartissent uniformément dans un domaine du plan complexe ce qui est à l'opposé de ce qu'on veut démontrer puisqu'on souhaite écrire des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld et ainsi obtenir que les valeurs propres se répartissent le long d'une courbe de dimension un. Le cas des perturbations aléatoires d'opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints constitue en quelque sorte un cas extrême pour lequel on ne peut pas avoir de conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld. De plus, une autre question se pose maintenant : comment peut-on définir des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld dans un cadre non auto-adjoint, puisqu'*a priori* le spectre de ce type d'opérateurs est instable. Une réponse à cette question a été apportée par les travaux d'Anders Melin et de Johannes Sjöstrand [MS03] dans un premier temps, puis par ceux de Michael Hitrik et de Johannes Sjöstrand [HS04] et ceux de Michael Hitrik, Johannes Sjöstrand et San Vũ Ngọc [HSN07] dans un second temps, dans le cadre de la dimension deux et pour une certaine classe d'opérateurs non auto-adjoints (que nous préciserons par la suite). Le comportement asymptotique semi-classique des valeurs propres (en relation avec les conditions de Bohr-Sommerfeld) de quelques exemples d'opérateurs non auto-adjoints a également été étudié dans l'article [ES13] de Anna Esina et Andreï Shafarevich, plus précisément ils considèrent l'équation de Schrödinger avec un potentiel imaginaire et l'équation d'induction magnétique. Afin de pouvoir énoncer quelques résultats sur le sujet, nous allons maintenant rappeler la définition de la quantification de Weyl.

Définition I2.1 (Quantification de Weyl de $\mathbb{R}^2$). *Soit $p_h(x, \xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ une fonction de l'espace de Schwartz (qu'on suppose dans une bonne classe de symboles) définie sur l'espace cotangent $T^*\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$ et admettant un développement asymptotique en puissances du paramètre semi-classique $\hbar$. On définit la quantification de Weyl du symbole p_h , notée $\text{Op}^w(p_h)(x, \hbar D_x)$ (où $D_x = -i\partial_x$), par la formule intégrale suivante, pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:*

$$\text{Op}^w(p_h)(x, \hbar D_x)u(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{(i/\hbar)(x-y)\xi} p_h\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi.$$

$\text{Op}^w(p_h)$ est un opérateur pseudo-différentiel. On appelle la fonction $p_h(x, \xi)$ le symbole de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h)$ et on note $p(x, \xi)$ son symbole principal (c'est le premier terme dans le développement asymptotique en puissances de $\hbar$ de p_h).

Dans toute la suite, lorsqu'on parlera d'opérateur pseudo-différentiel, on fera référence à cette définition et on supposera que les symboles des opérateurs sont dans une bonne

classe que nous expliciterons plus loin lorsque nous en aurons besoin.

Dans l'article d'Anders Melin et de Johannes Sjöstrand, les auteurs démontrent que pour une classe d'opérateurs pseudo-différentiels non auto-adjoints en dimension deux, si le crochet de Poisson des parties réelles et imaginaires du symbole est assez petit, alors on peut déterminer les valeurs propres de ces opérateurs dans un domaine du plan complexe et ces valeurs propres sont données par des conditions de quantification Bohr-Sommerfeld. Plus précisément, ils considèrent un opérateur pseudo-différentiel $\text{Op}^w(p_h)(x, \hbar D_x, z)$ agissant sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ à symbole analytique dépendant de manière holomorphe d'un paramètre $z \in \text{Vois}(0; \mathbb{C})$ (un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$) et montrent le résultat suivant.

Théorème I2.2 (Melin-Sjöstrand [MS03]). *Il existe $\theta_0 \in \left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}^2\right)$ et une fonction :*

$$\theta_h(z) \sim \theta_0 + \theta_1(z)\hbar + \dots \in \mathcal{C}^\infty(\text{Vois}(0; \mathbb{C})),$$

admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$, tels que pour $z \in \text{Vois}(0; \mathbb{C})$ et pour $\hbar > 0$ suffisamment petit, z est une valeur propre de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h)$ si et seulement si :

$$\frac{1}{2\pi\hbar}I(z) = k - \theta_h(z),$$

où $k \in \mathbb{Z}^2$ et où $I(z) = (I_1(z), I_2(z))$ avec pour $i \in \{1, 2\}$, $I_i(z)$ des intégrales d'actions sur des cycles fondamentaux γ_i de $\Gamma(z) \subset p^{-1}(0, z)$ (où $\Gamma(z)$ est un tore de dimension 2 et où p désigne le symbole principal de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h)$).

Ensuite, l'article de Michael Hitrik et de Johannes Sjöstrand traite des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld pour des perturbations non auto-adjointes d'opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints en dimension deux. Plus précisément, ils considèrent des opérateurs non auto-adjoints qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$\text{Op}^w(f_h^\epsilon)(x, \hbar D_x) + i\epsilon \text{Op}^w(q_h^\epsilon)(x, \hbar D_x),$$

où $\text{Op}^w(f_h^\epsilon)$ et $\text{Op}^w(q_h^\epsilon)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints dépendant de manière régulière d'un petit paramètre ϵ , c'est ce qu'on entend par perturbations non auto-adjointes d'opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints dans la suite. Leur résultat donne une description du spectre de ce type d'opérateurs dans un rectangle dépendant du paramètre semi-classique $\hbar$ et du petit paramètre de perturbation ϵ . Plus précisément, on peut l'énoncer comme suit.

Théorème I2.3 (Hitrik-Sjöstrand [HS04]). *Soit $\text{Op}^w(p_h^\epsilon) = \text{Op}^w(f_h^\epsilon) + i\epsilon \text{Op}^w(q_h^\epsilon)$ un opérateur pseudo-différentiel agissant sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ à symbole analytique sur $\mathbb{R}^4$ tel que le flot du symbole principal f^ϵ est périodique. Soit ϵ un petit paramètre tel que $\epsilon \gg \hbar$ et*

$\epsilon \leq \mathcal{O}(\hbar^\delta)$ pour $0 < \delta < 1$. Soit :

$$R_{C,\epsilon} = \left\{ z \in \mathbb{C}, |\Re(z)| < \frac{1}{C}, |\Im(z)| < \frac{\epsilon}{C} \right\} \quad \text{où } C > 0 \text{ est une constante.}$$

Alors, le spectre de cet opérateur, noté $\sigma(\text{Op}^w(p_h^\epsilon))$, dans le rectangle $R_{C,\epsilon}$ est donné pour $\hbar$ suffisamment petit par :

$$\sigma(\text{Op}^w(p_h^\epsilon)) \cap R_{C,\epsilon} = \left\{ g_h \left(\hbar k, \epsilon, \frac{\hbar}{\epsilon} \right) + \mathcal{O}(\hbar^\infty); k \in \mathbb{Z}^2 \right\} \cap R_{C,\epsilon},$$

où $g_h \left(\xi, \epsilon, \frac{\hbar}{\epsilon} \right)$ est une fonction holomorphe en $\xi \in \text{Vois}(0; \mathbb{C}^2)$ régulière par rapport à $\frac{\hbar}{\epsilon}$ et ϵ et admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$.

Un autre résultat a également été obtenu par Michael Hitrik, Johannes Sjöstrand et San Vũ Ngọc dans l'article [HSN07] concernant les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld pour des perturbations non auto-adjointes d'opérateurs auto-adjoints, c'est-à-dire qu'ils considèrent des opérateurs de la forme suivante :

$$\text{Op}^w(f_h^\epsilon)(x, \hbar D_x) + i\epsilon \text{Op}^w(q_h^\epsilon)(x, \hbar D_x).$$

La différence avec le théorème précédent réside dans le fait que la condition de périodicité du symbole f^ϵ est remplacée par une hypothèse d'existence de plusieurs tores invariants diophantiens pour ce symbole. On peut énoncer leur résultat de la façon suivante.

Théorème I2.4 (Hitrik-Sjöstrand-Vũ Ngọc [HSN07]). *Soit $\text{Op}^w(p_h^\epsilon) = \text{Op}^w(f_h^\epsilon) + i\epsilon \text{Op}^w(q_h^\epsilon)$ un opérateur pseudo-différentiel agissant sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ à symbole analytique sur $\mathbb{R}^4$ tel que le flot du symbole principal f^ϵ admet plusieurs tores invariants diophantiens. Soit ϵ un petit paramètre tel que $\epsilon \geq \hbar^K$ (où K est une constante arbitraire) et $\epsilon = \mathcal{O}(\hbar^\delta)$ pour $0 < \delta < 1$. Soit :*

$$R_{C,\epsilon} = \left\{ z \in \mathbb{C}, |\Re(z)| < \frac{\hbar^\delta}{C}, |\Im(z)| < \frac{\epsilon \hbar^\delta}{C} \right\} \quad \text{où } C > 0 \text{ est une constante.}$$

Alors, le spectre de cet opérateur, noté $\sigma(\text{Op}^w(p_h^\epsilon))$, dans le rectangle $R_{C,\epsilon}$ est donné pour $\hbar$ suffisamment petit par :

$$\sigma(\text{Op}^w(p_h^\epsilon)) \cap R_{C,\epsilon} = \left\{ g_h(\hbar k, \epsilon) + \mathcal{O}(\hbar^\infty); k \in \mathbb{Z}^2 \right\} \cap R_{C,\epsilon},$$

où $g_h(\xi, \epsilon)$ est une fonction régulière par rapport à $\xi \in \text{Vois}(0; \mathbb{R}^2)$, par rapport à $\epsilon \in \text{Vois}(0; \mathbb{R})$ et admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$.

Le cas des perturbations non auto-adjointes d'opérateurs auto-adjoints en dimension un n'avait cependant pas été traité et c'est donc à ce cas-là que nous nous sommes intéressés dans la première partie de cette thèse. Plus précisément, on considère un opérateur pseudo-

différentiel non auto-adjoint $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$, à symbole analytique, de la forme suivante :

$$\text{Op}^w(p_h^\epsilon)(x, \hbar D_x) = \text{Op}^w(f_h^\epsilon)(x, \hbar D_x) + i\epsilon \text{Op}^w(q_h^\epsilon)(x, \hbar D_x),$$

où les opérateurs pseudo-différentiels $\text{Op}^w(f_h^\epsilon)$ et $\text{Op}^w(q_h^\epsilon)$ sont auto-adjoints et dépendent de manière régulière du paramètre ϵ . Sous de bonnes hypothèses sur l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$, on arrive à montrer le résultat qui suit.

Théorème A. *Soit $\text{Op}^w(p_h^\epsilon) = \text{Op}^w(f_h^\epsilon) + i\epsilon \text{Op}^w(q_h^\epsilon)$ un opérateur pseudo-différentiel dépendant de manière régulière du paramètre ϵ , agissant sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et soit $E_0 \in \mathbb{R}$ un réel fixé. Il existe $\epsilon_0 > 0$ un paramètre suffisamment petit tel que, pour :*

$$R_{C, \epsilon_0} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |\Re(z) - E_0| < \frac{1}{C}, |\Im(z)| < \frac{\epsilon_0}{C} \right\} \quad \text{où } C > 0 \text{ est une constante,}$$

les valeurs propres de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ dans le rectangle R_{C, ϵ_0} sont simples et données, pour $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ et pour $\hbar$ suffisamment petit, par :

$$\sigma(\text{Op}^w(p_h^\epsilon)) \cap R_{C, \epsilon_0} = \{g_h^\epsilon(\hbar k) + \mathcal{O}(\hbar^\infty), k \in \mathbb{Z}\} \cap R_{C, \epsilon_0},$$

où g_h^ϵ est une fonction analytique, admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$ et dépendant de manière régulière du paramètre ϵ . De plus, le premier terme du développement asymptotique de la fonction g_h^ϵ est la réciproque d'une intégrale d'action.

Ainsi ce résultat nous dit que les valeurs propres de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ dans le rectangle R_{C, ϵ_0} se trouvent le long d'une courbe, le graphe de la fonction g_h^ϵ . De plus, ce résultat donne une description du spectre dans un rectangle qui ne dépend pas du paramètre semi-classique $\hbar$ ce qui constitue une différence avec le résultat de Michael Hitrik et de Johannes Sjöstrand en dimension deux.

À partir de ce premier résultat, on peut déduire un second théorème dans le cas particulier des opérateurs $\mathcal{PT}$ -symétriques.

Définition I2.5 (Opérateur $\mathcal{PT}$ -symétrique). *On dit qu'un opérateur pseudo-différentiel $\text{Op}^w(p_h)$ est $\mathcal{PT}$ -symétrique si $[\text{Op}^w(p_h), \mathcal{PT}] = \text{Op}^w(p_h)\mathcal{PT} - \mathcal{PT}\text{Op}^w(p_h) = 0$ où :*

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) & \mathcal{T} : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ u(x) &\longmapsto u(-x) & u(x) &\longmapsto \overline{u(x)}. \end{aligned}$$

On appelle $\mathcal{P}$ l'opérateur de parité et $\mathcal{T}$ l'opérateur d'inversion du temps.

Dans le cadre des perturbations d'opérateurs auto-adjoints, Naima Boussekkine et Nawal Mecherout montrent dans [BM13] qu'une perturbation $\mathcal{PT}$ -symétrique d'un opérateur de Schrödinger semi-classique avec un potentiel à un puits a un spectre réel.

Théorème I2.6 (Boussekkine-Mecherout [BM13]). *Soit $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)(x, \hbar D_x) = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + V_\epsilon(x)$ où :*

$$V_\epsilon(x) = V_0(x) + i\epsilon W(x),$$

avec V_0 un potentiel à un puits. Soit $E_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Sous des hypothèses d'analyticité sur le symbole p_h^ϵ , il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que le spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ dans $D(E_0, \epsilon_0)$ (le disque de centre E_0 et de rayon ϵ_0) est inclus dans $\mathbb{R}$.

De plus, il existe une fonction $g_h^\epsilon(E)$ définie sur le disque $D(E_0, \epsilon_0)$ holomorphe en E , régulière par rapport à ϵ et admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$ telle que :

1. $g_h^\epsilon(E) \in \mathbb{R}$ quand $E, \epsilon \in \mathbb{R}$;
2. pour $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, le spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ dans le disque $D(E_0, \epsilon_0)$ est donné par :

$$\exists k \in \mathbb{Z}; \quad E = E_k; \quad g_h^\epsilon(E_k) = 2\pi k \hbar.$$

Ensuite, Naima Boussekkine, Nawal Mecherout, Thierry Ramond et Johannes Sjöstrand ont montré dans [BMRS15] qu'une perturbation $\mathcal{PT}$ -symétrique exponentiellement petite d'un opérateur de Schrödinger semi-classique avec un potentiel à double puits admet aussi un spectre réel. Ils ont également établi que même pour des perturbations exponentiellement petites, le spectre peut devenir complexe. En nous plaçant dans le même cadre que celui du théorème A, on prouve le résultat qui suit.

Théorème B. *Soit $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ un opérateur pseudo-différentiel dépendant de manière régulière de ϵ , agissant sur $L^2(\mathbb{R})$ et soit $E_0 \in \mathbb{R}$ un réel fixé. On suppose de plus que l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ est $\mathcal{PT}$ -symétrique. Il existe $\epsilon_0 > 0$ un petit paramètre (indépendant de $\hbar$) tel que, pour :*

$$R_{C, \epsilon_0} = \left\{ z \in \mathbb{C}, |\Re(z) - E_0| < \frac{1}{C}, |\Im(z)| < \frac{\epsilon_0}{C} \right\} \quad \text{où } C > 0 \text{ est une constante,}$$

le spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ dans le rectangle R_{C, ϵ_0} est réel pour $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ et pour $\hbar$ suffisamment petit.

De plus les valeurs propres de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ dans le rectangle R_{C, ϵ_0} sont simples et données par le théorème A, i.e. pour $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ et pour $\hbar$ suffisamment petit, on a :

$$\sigma(\text{Op}^w(p_h^\epsilon)) \cap R_{C, \epsilon_0} = \{g_h^\epsilon(\hbar k) + \mathcal{O}(\hbar^\infty), k \in \mathbb{Z}\} \cap R_{C, \epsilon_0},$$

où g_h^ϵ est une fonction analytique, admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$ et dépendant de manière régulière de ϵ . De plus, le premier terme du développement asymptotique de la fonction g_h^ϵ est la réciproque d'une intégrale d'action.

Ainsi, ce résultat montre que pour des perturbations non auto-adjointes d'opérateurs auto-adjoints en dimension un qui sont $\mathcal{PT}$ -symétriques, le spectre dans un rectangle se

trouve le long de l'axe réel. On peut également retrouver le résultat de Naima Boussekkine et de Nawal Mecherout à partir de ce théorème pour les nombres réels E_0 qui ne sont pas des points critiques et à l'aide d'un résultat de Michael Hitrik [Hit04] pour les points critiques E_0 .

Enfin, on peut également déduire du théorème A un résultat sur les opérateurs de Berezin-Toeplitz du plan complexe $\mathbb{C}$. Pour définir ces opérateurs, on introduit les notations suivantes.

Notations: soit Φ une forme quadratique réelle strictement sousharmonique (*i.e.* $\partial_{z,\bar{z}}^2 \Phi > 0$) sur $\mathbb{C}$. Soit $k \geq 1$. On note :

- $L(dz)$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$ donnée par : $L(dz) = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$;
- $L_k^2(\mathbb{C}, \Phi) := L^2(\mathbb{C}, e^{-2k\Phi(z)} L(dz))$ l'espace de fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{C}$ par rapport à la mesure à poids exponentiel $e^{-2k\Phi(z)} L(dz)$;
- $H_k(\mathbb{C}, \Phi) := \text{Hol}(\mathbb{C}) \cap L_k^2(\mathbb{C}, \Phi)$ l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ appartenant à l'espace $L_k^2(\mathbb{C}, \Phi)$;
- $\Pi_{\Phi,k} : L_k^2(\mathbb{C}, \Phi) \longrightarrow H_k(\mathbb{C}, \Phi)$ la projection orthogonale de l'espace de fonctions $L_k^2(\mathbb{C}, \Phi)$ (muni du produit scalaire L^2 à poids) sur l'espace de fonctions holomorphes $H_k(\mathbb{C}, \Phi)$.

Définition I2.7 (Quantification de Berezin-Toeplitz du plan complexe $\mathbb{C}$). *Soit $k \geq 1$ (ici l'entier k joue le rôle de $1/\hbar$). Soit $q_k \in L^\infty(\mathbb{C})$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$. On définit la quantification de Berezin-Toeplitz de la fonction q_k par la suite d'opérateurs $T_{q_k} = (T_k)_{k \geq 1}$, où pour tout $k \geq 1$, l'opérateur T_k est défini par :*

$$T_k := \Pi_{\Phi,k} M_{q_k} \Pi_{\Phi,k},$$

où $M_{q_k} : L_k^2(\mathbb{C}, \Phi) \longrightarrow L_k^2(\mathbb{C}, \Phi)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction q_k .

On appelle la fonction q_k le symbole de l'opérateur de Berezin-Toeplitz T_{q_k} .

Étant donné qu'on peut faire un lien entre la quantification de Berezin-Toeplitz du plan complexe $\mathbb{C}$ et la quantification de Weyl d'un symbole sur $\mathbb{R}^2$, on obtient le résultat qui suit.

Théorème C. *Soit $T_{p_k^\epsilon}$ un opérateur de Berezin-Toeplitz du plan complexe de la forme suivante :*

$$T_{p_k^\epsilon} = T_{f_k^\epsilon} + i\epsilon T_{q_k^\epsilon},$$

où $T_{f_k^\epsilon}$ et $T_{q_k^\epsilon}$ sont des opérateurs de Berezin-Toeplitz auto-adjoints du plan complexe $\mathbb{C}$ dépendant de manière régulière du petit paramètre ϵ . Soit $E_0 \in \mathbb{R}$ un réel fixé. Il existe $\epsilon_0 > 0$ un petit paramètre tel que, pour :

$$R_{C,\epsilon_0} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |\Re(z) - E_0| < \frac{1}{C}, |\Im(z)| < \frac{\epsilon_0}{C} \right\} \quad \text{où } C > 0 \text{ est une constante,}$$

les valeurs propres de l'opérateur de Berezin-Toeplitz $T_{p_k^\epsilon} := (T_k)_{k \geq 1}$ dans le rectangle R_{C, ϵ_0} sont simples et données pour $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ et pour k suffisamment grand, par :

$$\sigma(T_k) \cap R_{C, \epsilon_0} = \{g_k^\epsilon(k^{-1}j) + \mathcal{O}(k^{-\infty}), j \in \mathbb{Z}\} \cap R_{C, \epsilon_0},$$

où g_k^ϵ est une fonction analytique, admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ et dépendant de manière régulière du paramètre ϵ . De plus, le premier terme du développement asymptotique de la fonction g_k^ϵ est la réciproque d'une intégrale d'action.

I2.2 Quantifications de Berezin-Toeplitz et de Weyl du tore $\mathbb{T}^2$

Comme nous venons de le voir, on peut obtenir des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld pour des perturbations non auto-adjointes d'opérateurs de Berezin-Toeplitz auto-adjoints du plan complexe $\mathbb{C}$. Par conséquent, la question naturelle qui s'ensuit est : peut-on donner des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld pour des perturbations non auto-adjointes d'opérateurs de Berezin-Toeplitz auto-adjoints d'une surface compacte arbitraire ? Une première étape pour répondre à cette question est d'étudier le cas particulier du tore. Les opérateurs de Berezin-Toeplitz du tore sont intéressants puisqu'il existe déjà des résultats de Laurent Charles [Cha03, Cha06] et de Yohann Le Floch [LF14b, LF14c] donnant des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld lorsqu'ils sont auto-adjoints. Cependant, nous sommes confrontés aux mêmes difficultés *a priori* que dans le cas des opérateurs pseudo-différentiels si on considère des opérateurs de Berezin-Toeplitz non auto-adjoints, c'est-à-dire qu'on peut avoir des problèmes d'instabilité pseudo-spectrale. Ces problèmes ont notamment été étudiés dans le cadre des matrices de Toeplitz par Johannes Sjöstrand et Martin Vogel dans [SV15], dans le cadre des opérateurs de Berezin-Toeplitz par David Borthwick et Alejandro Uribe dans [BU03] et par Tanya Christiansen et Maciej Zworski dans [CZ10] dans le cadre des opérateurs de Berezin-Toeplitz du tore. Nous introduisons maintenant quelques notations afin de pouvoir définir les opérateurs de Berezin-Toeplitz du tore.

Notations : soit $k \geq 1$, soient u et v des nombres complexes de module 1 :

- si $z \in \mathbb{C}$, on note indifféremment $z = (p, q) \in \mathbb{R}^2$ via l'identification de $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ ou $z = p + iq$;
- $\mathcal{G}_k$ est l'espace de fonctions sur $\mathbb{C}$ invariantes par l'action de Heisenberg du réseau $\mathbb{Z}^2$ et de carré intégrable sur $[0, 2\pi] \times [0, 1]$ i.e. :

$$\mathcal{G}_k = \left\{ g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; \quad g \in L^2([0, 2\pi] \times [0, 1], e^{-kq^2} dp dq), \right. \\ \left. g(p + 2\pi, q) = u^k g(p, q), \quad g(p, q + 1) = v^k e^{-i(p+iq)k+k/2} g(p, q) \right\}.$$

- $\mathcal{H}_k$ est l'espace des fonctions holomorphes appartenant à l'espace $\mathcal{G}_k$, i.e. :

$$\mathcal{H}_k = \left\{ g \in \text{Hol}(\mathbb{C}); \quad g(p + 2\pi, q) = u^k g(p, q), \quad g(p, q + 1) = v^k e^{-i(p+iq)k+k/2} g(p, q) \right\}.$$

- Π_k est le projecteur orthogonal de l'espace $\mathcal{G}_k$ (muni du produit scalaire L^2 à poids sur $[0, 2\pi] \times [0, 1]$) sur l'espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$.

Définition I2.8 (Quantification de Berezin-Toeplitz du tore). *Soit $f_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$ et telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :*

$$f_k(x + 2\pi, y) = f_k(x, y) = f_k(x, y + 1).$$

On définit la quantification de Berezin-Toeplitz de la fonction f_k par la suite d'opérateurs $T_{f_k} := (T_k)_{k \geq 1}$ où pour tout $k \geq 1$, l'opérateur T_k est défini par :

$$T_k = \Pi_k M_{f_k} \Pi_k,$$

où $M_{f_k} : \mathcal{G}_k \longrightarrow \mathcal{G}_k$ est l'opérateur de multiplication par la fonction f_k .

On appelle la fonction f_k le symbole de l'opérateur de Berezin-Toeplitz T_{f_k} .

Étant donné que dans le cas des perturbations non auto-adjointes d'opérateurs de Berezin-Toeplitz auto-adjoints du plan complexe, on a utilisé le fait qu'on pouvait faire un lien entre ces opérateurs et des opérateurs pseudo-différentiels, nous avons décidé de commencer par expliciter un lien entre la quantification de Berezin-Toeplitz du tore et la quantification de Weyl du tore. La quantification de Weyl du tore a notamment été étudiée par Monique Combesure et Didier Robert dans le livre [CR12] ainsi que par Stéphane Nonnenmacher dans sa thèse [Non98].

Plus précisément, nous faisons un lien entre la quantification de Berezin-Toeplitz du tore et la quantification de Weyl complexe du tore dont nous introduisons la définition dans ce manuscrit.

Définition I2.9 (Quantification de Weyl complexe du tore).

Soit $\Lambda_{\Phi_1} = \{(z, -\Im(z)); z \in \mathbb{C}\} = \{(z, (2/i)\partial_z \Phi_1(z)); z \in \mathbb{C}\}$. Soit $a_k \in \mathcal{C}^\infty(\Lambda_{\Phi_1})$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$ et telle que pour tout $(z, w) \in \Lambda_{\Phi_1}$:

$$a_k(z + 2\pi, w) = a_k(z, w) = a_k(z + i, w - 1).$$

On définit la quantification de Weyl du symbole a_k par la formule suivante, pour u dans un bon espace de fonctions (nous verrons plus précisément lequel dans la deuxième partie) et $z \in \mathbb{C}$, par :

$$\text{Op}_{\Phi_1, k}^w(a_k)u(z) = \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m, n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} e^{inz} u\left(z - \frac{2\pi m}{k} + \frac{in}{k}\right),$$

où les coefficients $(a_{m, n}^k)_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} \in \mathbb{C}$ sont donnés par l'écriture suivante de la fonction a_k ,

pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$:

$$a_k(z, w) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m,n}^k e^{in(z+iw)} e^{-2i\pi mw}.$$

On appelle la fonction a_k le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel $\text{Op}_{\Phi_1, k}^w(a_k)$.

Cette notion de quantification de Weyl complexe du tore définit des opérateurs dont on peut montrer qu'ils agissent sur l'espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$. Ainsi, on obtient deux quantifications du tore qui nous donnent des opérateurs agissant sur cet espace et on peut montrer le résultat qui suit.

Théorème D. Soit $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ et telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f_k(x + 2\pi, y) = f_k(x, y) = f_k(x, y + 1).$$

Soit $T_{f_k} = (T_k)_{k \geq 1}$ l'opérateur de Berezin-Toeplitz du tore de symbole f_k . Alors pour tout $k \geq 1$, on a :

$$T_k = \text{Op}_{\Phi_1, k}^w(a_k) + \mathcal{O}(k^{-\infty}) \quad \text{sur l'espace } \mathcal{H}_k,$$

où a_k est un symbole sur Λ_{Φ_1} donné par la formule suivante, pour tout $z \in \Lambda_{\Phi_1} \simeq \mathbb{C}$:

$$a_k(z) = \exp\left(\frac{1}{k} \partial_z \partial_{\bar{z}}\right)(f_k(z)).$$

Ainsi, ce résultat est une première étape de la démonstration d'un potentiel résultat sur des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld pour des perturbations non auto-adjointes d'opérateurs de Berezin-Toeplitz auto-adjoints puisqu'il nous dit qu'on peut identifier un opérateur de Berezin-Toeplitz du tore $\mathbb{T}^2$ à un opérateur pseudo-différentiel complexe. Ensuite, afin d'appréhender un peu mieux ce que pourrait être un résultat sur le spectre des opérateurs de Berezin-Toeplitz non auto-adjoints du tore, nous avons effectué des simulations numériques (voir figure I3). Ces simulations nous poussent à faire la conjecture suivante.

Conjecture E. Soient $f_k^\epsilon, q_k^\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ deux fonctions admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$, dépendant de manière régulière de ϵ et telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{cases} f_k^\epsilon(x + 2\pi, y) = f_k^\epsilon(x, y) = f_k^\epsilon(x, y + 1), \\ q_k^\epsilon(x + 2\pi, y) = q_k^\epsilon(x, y) = q_k^\epsilon(x, y + 1). \end{cases}$$

Soit $T_{p_k^\epsilon} = T_{f_k^\epsilon} + i\epsilon T_{q_k^\epsilon}$ un opérateur de Berezin-Toeplitz du tore tel que $T_{f_k^\epsilon}$ et $T_{q_k^\epsilon}$ sont des opérateurs de Berezin-Toeplitz auto-adjoints du tore. Soit $E_0 \in \mathbb{R}$. Il existe $\epsilon_0 > 0$ un petit paramètre tel que, pour :

$$R_{C, \epsilon_0} = \left\{ z \in \mathbb{C}, |\Re(z) - E_0| < \frac{1}{C}; |\Im(z)| < \frac{\epsilon_0}{C} \right\} \quad \text{où } C > 0 \text{ est une constante,}$$

le spectre de l'opérateur de Berezin-Toeplitz $T_{p_k^\epsilon} = (T_k)_{k \geq 1}$ est donné, pour $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ et pour k assez grand, par :

$$\sigma(T_k) \cap R_{C, \epsilon_0} = \{g_k^\epsilon(k^{-1}j) + \mathcal{O}(k^{-\infty}), j \in \mathbb{Z}\} \cap R_{C, \epsilon_0},$$

où g_k^ϵ est une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ et dépendant de manière régulière du paramètre ϵ . De plus, le premier terme du développement asymptotique de la fonction g_k^ϵ est la réciproque d'une intégrale d'action.

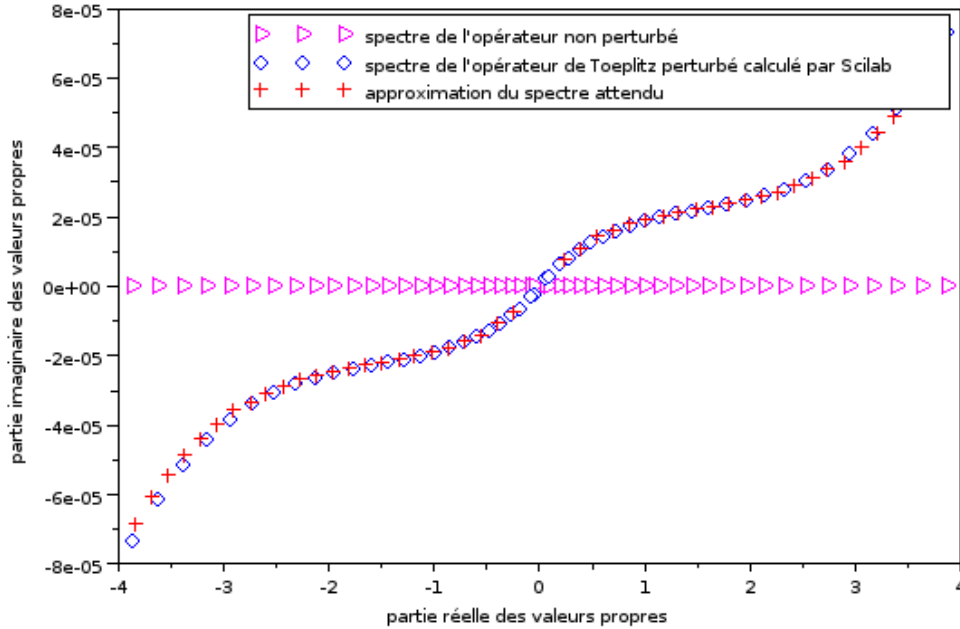


FIGURE I3 – Spectre d'une perturbation non auto-adjointe d'un opérateur de Berezin-Toeplitz auto-adjoint du tore.

I3 Plan du manuscrit

Cette thèse se découpe en deux grandes parties. Dans la première partie, on aborde les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld pour des perturbations non auto-adjointes d'opérateurs auto-adjoints en dimension un et plus précisément cette partie est découpée en quatre chapitres :

- le chapitre un traite un exemple de perturbations non auto-adjointes d'opérateurs auto-adjoints pour lequel la détermination du spectre est élémentaire ;
- le chapitre deux aborde le théorème A et sa démonstration ;
- le chapitre trois porte sur les applications du théorème A, c'est-à-dire celle sur les opérateurs $\mathcal{PT}$ -symétriques (théorème B) et celle sur les opérateurs de Berezin-Toeplitz du plan complexe (théorème C) ;
- le chapitre quatre illustre le théorème A à l'aide de simulations numériques.

Puis dans la seconde partie, on s'intéresse aux différentes quantifications du tore. Cette partie est découpée comme suit :

- le chapitre cinq rappelle la construction de la quantification de Berezin-Toeplitz du tore ;
- le chapitre six traite de deux quantifications de Weyl du tore, la quantification de Weyl classique et la quantification de Weyl complexe (définition I2.9) ;
- le chapitre sept fait le lien entre les chapitres cinq et six (théorème D) ;
- le chapitre huit montre des exemples numériques sur le spectre de perturbations non auto-adjointes d'opérateurs de Berezin-Toeplitz du tore auto-adjoints et énonce une conjecture (conjecture E).

Première partie

Conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld pour des perturbations non auto-adjointes d'opérateurs auto-adjoints en dimension un

Chapitre 1

Un premier exemple

Dans ce premier chapitre, nous allons étudier un opérateur pseudo-différentiel non auto-adjoint pour lequel nous allons pouvoir déterminer le spectre à l'aide des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld sans utiliser la théorie développée par Anders Melin et Johannes Sjöstrand dans [MS03] et par Michael Hitrik et Johannes Sjöstrand dans [HS04, HS15]. Ce chapitre permet donc d'aborder les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld dans un cadre non auto-adjoint dans un cas simple.

1.1 Conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld

Soit $0 < \hbar \leq 1$ le paramètre semi-classique. Soit $\epsilon \geq 0$ un petit paramètre qui va représenter la perturbation. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On considère l'opérateur pseudo-différentiel $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ agissant sur l'espace $L^2(\mathbb{S}^1)$ défini par la formule suivante :

$$\text{Op}^w(p_h^\epsilon) \left(\theta, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \alpha \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} + i\epsilon q(\theta),$$

où q est une fonction régulière de la variable $\theta \in \mathbb{S}^1$.

On se place sur l'espace des phases $T^*\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ muni de la forme symplectique $dI \wedge d\theta$. Soit p_h^ϵ le symbole associé à l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$, autrement dit cette fonction p_h^ϵ est définie pour $(\theta, I) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ par :

$$p_h^\epsilon(\theta, I) = \alpha I + i\epsilon q(\theta),$$

(on rappelle que pour obtenir le symbole à partir de l'opérateur pseudo-différentiel, il suffit de remplacer $-i\hbar\partial_\theta$ par I).

Remarque 1.1.1. *Le symbole p_h^ϵ ne dépend pas du paramètre semi-classique $\hbar$, par conséquent dans la suite, on le notera simplement p^ϵ .*

On peut montrer que les valeurs propres de cet opérateur non auto-adjoint en dimension un sont simples et de plus, on peut en donner une description explicite sous la forme de conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld. C'est ce que donne la proposition qui suit.

Proposition 1.1.2. *Soit $\text{Op}^w(p^\epsilon)$ la quantification de Weyl du symbole p^ϵ défini ci-dessous qui est une fonction holomorphe sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$. Alors, le spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(p^\epsilon)$, noté $\sigma(\text{Op}^w(p^\epsilon))$, est donné par l'égalité suivante :*

$$\sigma(\text{Op}^w(p^\epsilon)) = \{\alpha\hbar k + i\epsilon\langle q \rangle; k \in \mathbb{Z}\},$$

où :

$$\langle q \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\theta) d\theta.$$

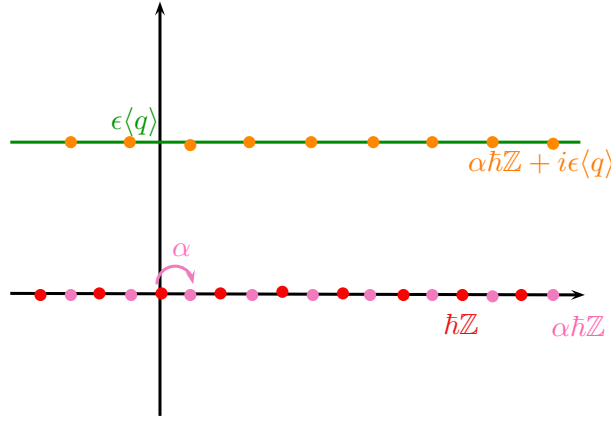


FIGURE 1.1 – Représentation schématique des valeurs propres de l'opérateur $\text{Op}^w(p^\epsilon)$.

Démonstration. La démonstration se découpe en trois étapes qui sont intéressantes pour la suite puisqu'on retrouvera ces étapes dans la démonstration du théorème A.

Étape 1 : construction d'une transformation canonique complexe et de nouvelles coordonnées. On souhaite écrire le symbole $p^\epsilon(\theta, I)$ sous la forme $g^\epsilon(\tilde{I})$ avec $(\tilde{\theta}, \tilde{I})$ de nouvelles coordonnées. Soit :

$$\begin{aligned} \kappa : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}, \\ (\theta, I) &\longmapsto (\tilde{\theta}, \tilde{I}) := \left(\theta, I + \frac{i\epsilon}{\alpha} q(\theta) - \frac{i\epsilon}{\alpha} \langle q \rangle \right). \end{aligned}$$

On vérifie que κ est une transformation canonique globale en montrant que : $d\tilde{I} \wedge d\tilde{\theta} = dI \wedge d\theta$. Puis, on remarque que dans ces nouvelles coordonnées le symbole p^ϵ s'écrit sous la forme suivante pour $(\tilde{\theta}, \tilde{I}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$:

$$p^\epsilon \circ \kappa^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{I}) = \alpha\tilde{I} + i\epsilon\langle q \rangle =: g^\epsilon(\tilde{I}).$$

On souhaite maintenant écrire κ sous la forme d'un flot hamiltonien pour ce faire, on considère, pour $(\theta, I) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$ le hamiltonien $H(\theta, I) = -\frac{i\epsilon}{\alpha} Q(\theta)$, où la fonction Q est

définie pour $\theta \in \mathbb{S}^1$ par :

$$Q'(\theta) = q(\theta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\theta) d\theta = q(\theta) - \langle q \rangle.$$

On remarque que la fonction Q est 2π -périodique car la fonction q l'est. Les équations de Hamilton s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial I} \\ -\frac{\partial H}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i\epsilon}{\alpha} Q'(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i\epsilon}{\alpha} q(\theta) - \frac{i\epsilon}{\alpha} \langle q \rangle \end{pmatrix}$$

Les solutions de ce système d'équations sont données pour $(\theta_0, I_0) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0; \\ I(t) = I_0 + t \frac{i\epsilon}{\alpha} (q(\theta_0) - \langle q \rangle). \end{cases}$$

Donc le flot hamiltonien ϕ_t s'écrit comme suit, pour $(\theta, I) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$:

$$\phi_t(\theta, I) = \left(\theta, I + t \frac{i\epsilon}{\alpha} (q(\theta) - \langle q \rangle) \right).$$

Ainsi ϕ_1 correspond à la transformation canonique κ , puisque :

$$\phi_1(\theta, I) = \left(\theta, I + \frac{i\epsilon}{\alpha} (q(\theta) - \langle q \rangle) \right) = \kappa(\theta, I).$$

Étape 2 : quantification de la transformation canonique κ . On souhaite maintenant associer un opérateur à la transformation canonique κ . Comme la transformation κ s'écrit comme un flot hamiltonien, alors on sait facilement trouver l'opérateur qui lui est associé, c'est le suivant :

$$\begin{aligned} U : L^2(\mathbb{S}^1) &\longrightarrow L^2(\mathbb{S}^1), \\ \psi &\longmapsto \exp\left(\frac{\epsilon Q(\theta)}{\alpha \hbar}\right) \psi. \end{aligned}$$

On remarque que cet opérateur n'est pas unitaire, ce qui reflète le fait que la transformation canonique κ est complexe (cependant à $\hbar$ fixé, c'est un opérateur borné inversible). Déterminons maintenant le conjugué de l'opérateur $\text{Op}^w(p^\epsilon)$ par cet opérateur U .

$$\begin{aligned} U^{-1} \text{Op}^w(p^\epsilon) U &= U^{-1} \left(\alpha \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} + i\epsilon q(\theta) \right) U, \\ &= U^{-1} \left(\alpha \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) U + U^{-1} (i\epsilon q(\theta)) U. \end{aligned}$$

Or, on a, pour $\psi \in L^2(\mathbb{S}^1)$:

$$\begin{aligned}
 U^{-1} \left(\alpha \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (U\psi) &= U^{-1} \left(\alpha \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\exp \left(\frac{\epsilon Q(\theta)}{\alpha \hbar} \right) \psi \right) \right), \\
 &= U^{-1} \left(\alpha \frac{\hbar}{i} \exp \left(\frac{\epsilon Q(\theta)}{\alpha \hbar} \right) \left(\frac{\epsilon}{\alpha \hbar} Q'(\theta) \psi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right), \\
 &= U^{-1} \left(\exp \left(\frac{\epsilon Q(\theta)}{\alpha \hbar} \right) \left(\frac{\epsilon}{i} Q'(\theta) \psi + \alpha \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right), \\
 &= U^{-1} U \left(\frac{\epsilon}{i} Q'(\theta) \psi + \alpha \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right), \\
 &= \alpha \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - i\epsilon Q'(\theta) \psi.
 \end{aligned}$$

Et on a également :

$$U^{-1} (i\epsilon q(\theta)) U = i\epsilon q(\theta).$$

Ainsi on obtient :

$$U^{-1} \text{Op}^w(p^\epsilon) U = U^{-1} \left(\alpha \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) U + U^{-1} (i\epsilon q(\theta)) U = \alpha \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} + i\epsilon \langle q \rangle.$$

On pose :

$$\text{Op}^w(\tilde{p}^\epsilon) = U^{-1} \text{Op}^w(p^\epsilon) U = \alpha \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} + i\epsilon \langle q \rangle,$$

alors cet opérateur $\text{Op}^w(\tilde{p}^\epsilon)$ a pour symbole :

$$g^\epsilon(\tilde{I}) = \alpha \tilde{I} + i\epsilon \langle q \rangle.$$

Étape 3 : spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(p^\epsilon)$. Comme le spectre de l'opérateur $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta}$ est discret et donné par l'ensemble $\hbar \mathbb{Z}$ des entiers multipliés par le paramètre semi-classique $\hbar$, alors on peut en déduire que le spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(\tilde{p}^\epsilon)$ est donné par :

$$\sigma(\text{Op}^w(\tilde{p}^\epsilon)) = g^\epsilon(\hbar \mathbb{Z}) = \alpha \hbar \mathbb{Z} + i\epsilon \langle q \rangle.$$

Ensuite, puisque le spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(p^\epsilon)$ est égal au spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(\tilde{p}^\epsilon)$, on en déduit que le spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(p^\epsilon)$ est donné par :

$$\sigma(\text{Op}^w(p^\epsilon)) = \alpha \hbar \mathbb{Z} + i\epsilon \langle q \rangle.$$

□

Remarque 1.1.3. L'opérateur U qui apparaît dans la démonstration précédente et est

défini par :

$$U : L^2(\mathbb{S}^1) \longrightarrow L^2(\mathbb{S}^1),$$

$$\psi \longmapsto \exp\left(\frac{\epsilon Q(\theta)}{\alpha \hbar}\right) \psi,$$

vérifie les propriétés suivantes :

- c'est un opérateur borné à $\hbar$ fixé ;
- c'est un opérateur unitaire si on le voit comme agissant sur l'espace de fonctions $L^2(\mathbb{S}^1, e^{2\epsilon Q(\theta)/(\alpha \hbar)} d\theta)$.

1.2 Simulations numériques

Dans ce paragraphe, nous allons illustrer à l'aide du logiciel de calcul scientifique **Scilab** le résultat de la proposition 1.1.2 en choisissant différentes fonctions q . Plus précisément, on s'intéresse à un opérateur $\text{Op}^w(p^\epsilon)$ agissant sur $L^2(\mathbb{S}^1)$ et de la forme suivante :

$$\text{Op}^w(p^\epsilon) \left(\theta, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \alpha \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} + i\epsilon q(\theta),$$

où la fonction q est un polynôme trigonométrique en θ de degré $D \in \mathbb{N}^*$ dont les coefficients sont choisis par le programme de façon aléatoire. Nous décrivons ci-dessous la méthode d'implémentation que nous avons utilisée pour définir l'opérateur pseudo-différentiel $\text{Op}^w(p^\epsilon)$ dans **Scilab**.

1. On remarque que la famille $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}} = (e^{il\theta})_{l \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de l'espace $L^2(\mathbb{S}^1)$ et on définit l'opérateur $\text{Op}^w(p^\epsilon)$ par son action sur les éléments de la base. On obtient alors une matrice infinie $\mathcal{P}^\epsilon$.
2. Ensuite, on choisit un entier $N \geq 1$ et on tronque la matrice $\mathcal{P}^\epsilon$ en une matrice $\mathcal{P}_{2N+1}^\epsilon$ de taille $(2N+1) \times (2N+1)$ en choisissant de considérer l'action de l'opérateur $\text{Op}^w(p^\epsilon)$ uniquement sur les vecteurs $(e_l)_{-N \leq l \leq N}$.
3. Enfin, on détermine le spectre de la matrice $\mathcal{P}_{2N+1}^\epsilon$ à l'aide de la fonction **spec**.

Remarque 1.2.1. On peut décomposer la fonction $q \in L^2(\mathbb{S}^1)$ dans la base $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ de la façon suivante :

$$q(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle q, e_k \rangle e_k.$$

Et on remarque que le coefficient de Fourier pour $k = 0$ est :

$$\langle q, e_0 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\theta) d\theta = \langle q \rangle.$$

Ainsi, si on fait agir l'opérateur $\text{Op}^w(p^\epsilon)$ sur e_l avec $l \in \mathbb{Z}$ fixé, on a :

$$\begin{aligned} \text{Op}^w(p^\epsilon) \left(\theta, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (e^{il\theta}) &= \left(\alpha \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} + i\epsilon q(\theta) \right) (e^{il\theta}), \\ &= \alpha \hbar l e^{il\theta} + i\epsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle q, e_k \rangle e^{ik\theta} e^{il\theta}, \\ &= (\alpha \hbar l + i\epsilon \langle q \rangle) e^{il\theta} + i\epsilon \sum_{k \neq 0} \langle q, e_k \rangle e^{i(k+l)\theta}. \end{aligned}$$

Par conséquent la matrice $\mathcal{P}^\epsilon$ a des coefficients diagonaux de la forme $\alpha \hbar l + i\epsilon \langle q \rangle$ pour $l \in \mathbb{Z}$, autrement dit la matrice $\mathcal{P}^\epsilon$ est à diagonale propre.

Nous présentons maintenant les graphiques que nous avons obtenus avec **Scilab**. Pour ces simulations, nous avons choisi les paramètres ci-dessous :

1. $N = 66$;
2. $\hbar = 10^{-2}$;
3. $\alpha = 1$;
4. $\epsilon = 10^{-3}$.

On obtient les graphiques suivants, selon le choix du degré D du polynôme q .

Remarque 1.2.2.

- Sur les graphiques, les points bleus représentent les valeurs propres calculées à partir du résultat de la proposition 1.1.2 et les points rouges représentent les valeurs propres de la matrice $\mathcal{P}_{2N+1}^\epsilon$ calculées par la fonction **spec** de **Scilab**.
- La figure 1.3 est un zoom de la figure 1.2 sur lequel on observe que les valeurs propres exactes et les valeurs propres approchées se superposent. Si on effectue un zoom des zones où les valeurs propres semblent confondues pour les figures 1.4 et 1.5, on voit également cette superposition.
- On observe un écart entre le spectre approché calculé par **Scilab** (points rouges) et le spectre calculé avec le résultat (points bleus) aux bords des différentes figures, ceci est dû au fait qu'on a tronqué la matrice $\mathcal{P}^\epsilon$.
- Plus on augmente le degré du polynôme trigonométrique q et plus le spectre numérique de l'opérateur $\text{Op}^w(p^\epsilon)$ s'éloigne du spectre exact.
- Plus on diminue le paramètre ϵ et plus le spectre numérique se rapproche du spectre exact.
- Si on diminue le paramètre $\hbar$, on observe des effets pseudo-spectraux sur le spectre de la matrice $\mathcal{P}_{2N+1}^\epsilon$, ceci est dû aux limitations de **Scilab** en terme de calculs du spectre pour des matrices mal conditionnées. Par contre, on observe que le spectre calculé à partir de la proposition 1.1.2 ne se déforme pas, ceci découle du fait que dans cet exemple le spectre est exact.
- Si on diminue le paramètre $\hbar$ sans augmenter le paramètre N (qui correspond au paramètre de troncature pour la matrice $\mathcal{P}^\epsilon$), alors l'intervalle sur lequel les valeurs propres nous intéressent diminue de plus en plus.

Remarque 1.2.3. *Dans le cas général, le spectre ne sera pas donné de manière exacte, contrairement au cas particulier de l'exemple que nous venons de traiter dans ce chapitre, c'est ce que nous verrons dans le chapitre 2. Une des difficultés que nous allons rencontrer dans la suite résidera dans le fait que nous aurons une transformation canonique uniquement locale, contrairement à ici, ce qui nous poussera à utiliser l'analyse microlocale et à imposer des hypothèses d'analyticité sur le symbole en chaque variable.*

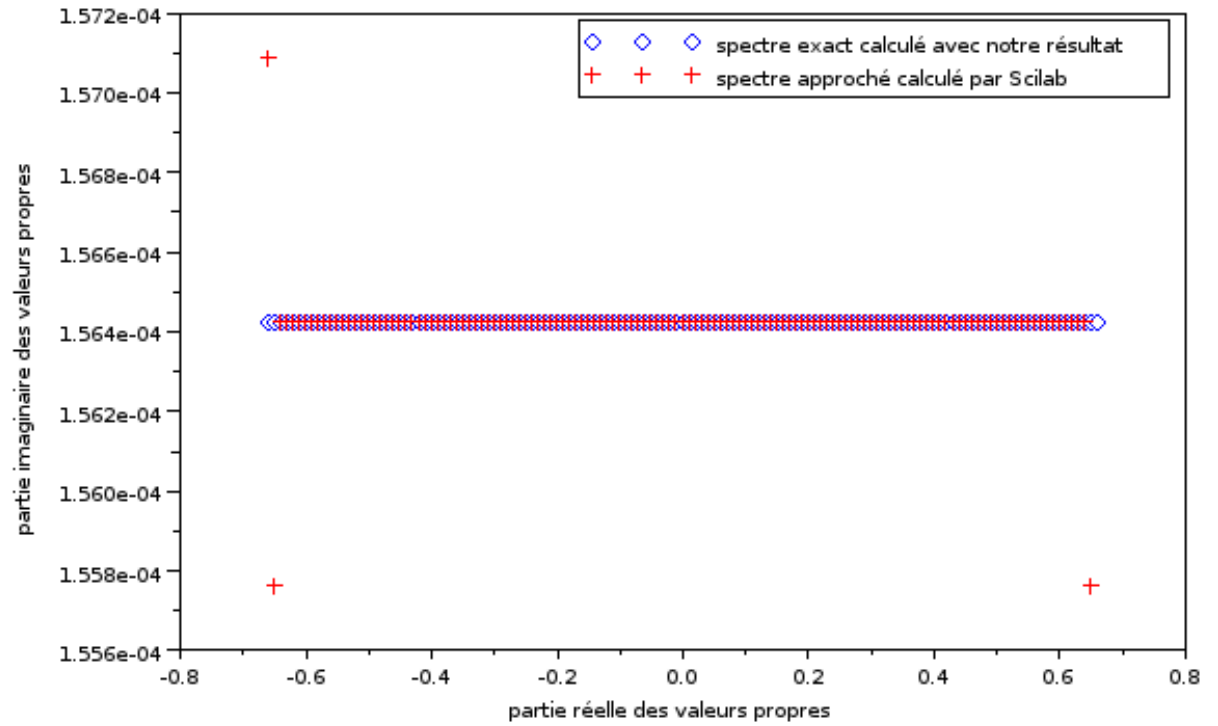


FIGURE 1.2 – $D = 2$.

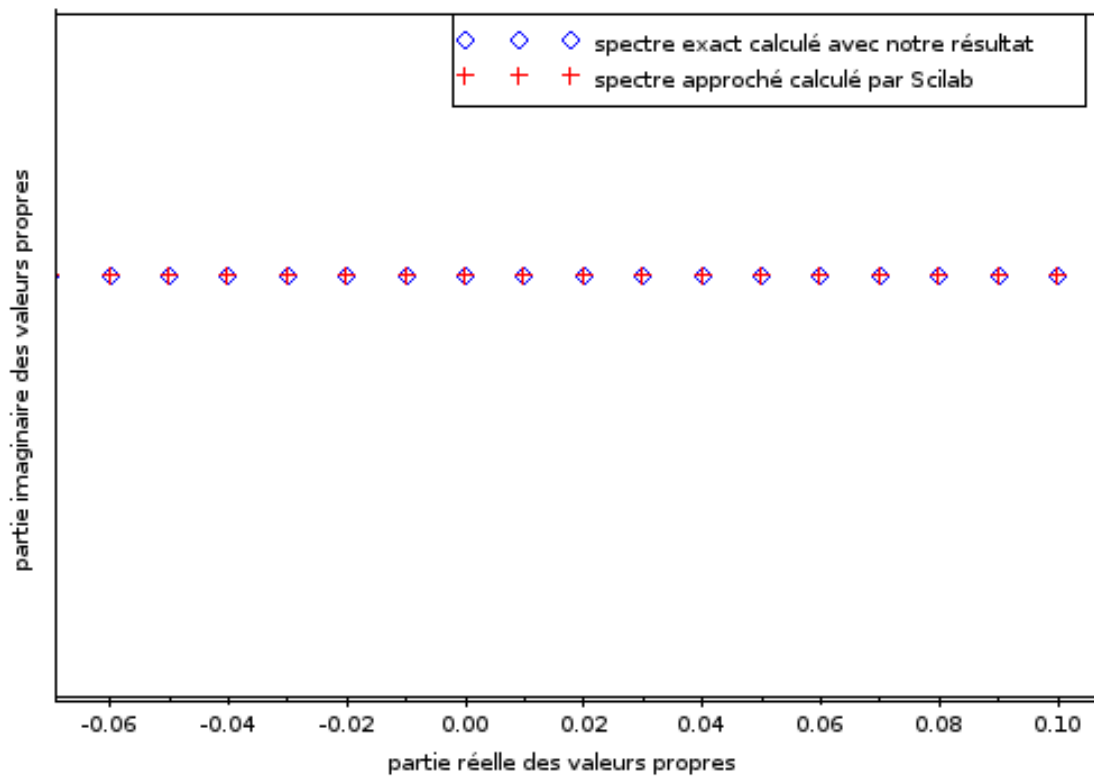
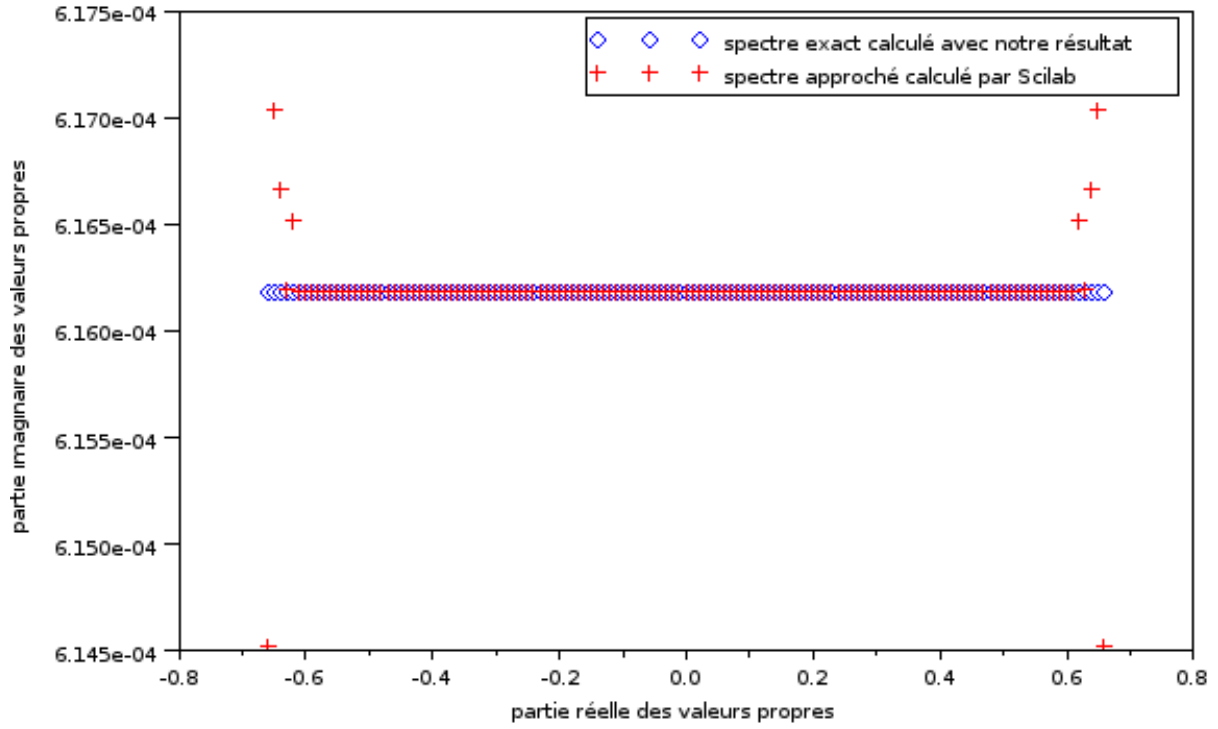
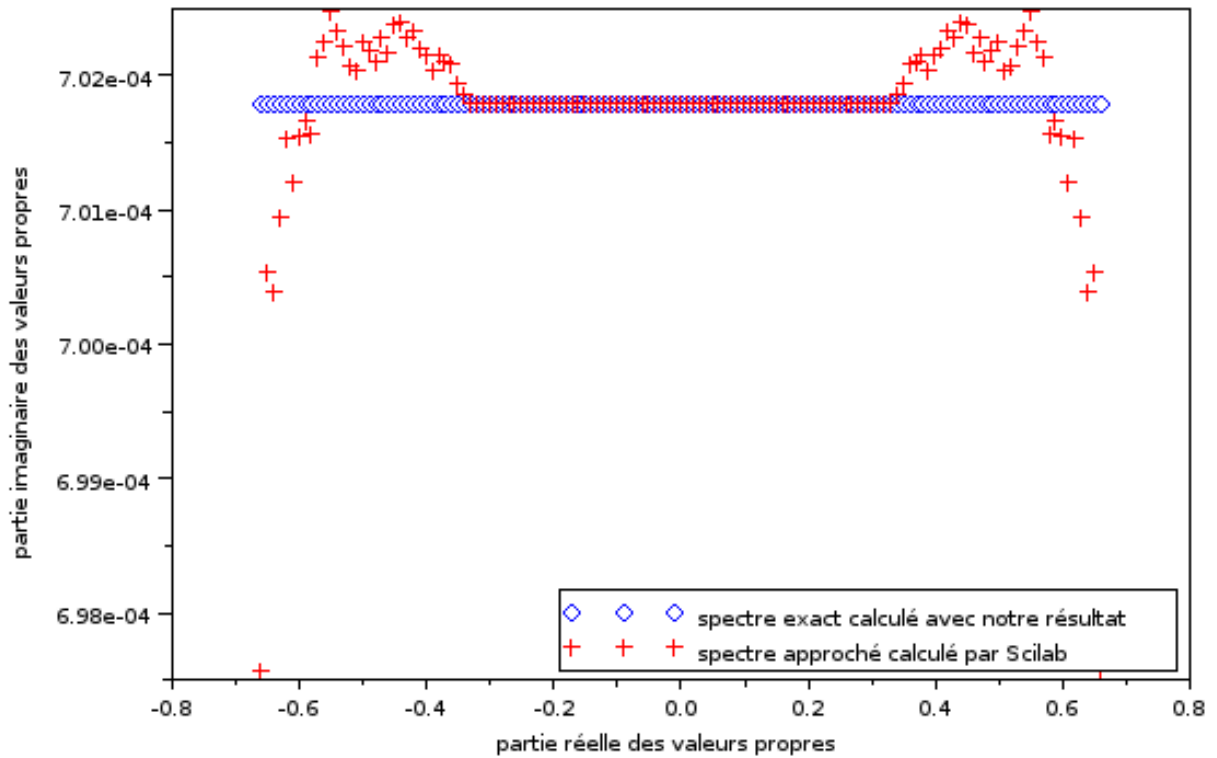


FIGURE 1.3 – $D = 2$.


FIGURE 1.4 – $D = 5$.

FIGURE 1.5 – $D = \frac{N}{2}$.

Chapitre 2

Conditions de Bohr-Sommerfeld pour les opérateurs pseudo-différentiels

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld pour des perturbations non auto-adjointes d'opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints en dimension un, puisque c'est pour ce type d'opérateurs que nous allons pouvoir donner un résultat spectral qui n'est pas soumis aux problèmes pseudo-spectraux. Le contenu de ce chapitre se trouve dans l'article [Rou15]. Dans ce dernier, on s'intéresse à la transformée de FBI et à la théorie développée par Anders Melin, Michael Hitrik et Johannes Sjöstrand autour de cette transformée (voir [MS03, HS04, HS15, Sjö02]) ; ainsi qu'à la théorie des problèmes de Grushin (voir [SZ07]).

2.1 Quantification de Weyl de $\mathbb{R}^2$ et conditions de Bohr-Sommerfeld

Dans ce paragraphe nous donnons les hypothèses dont nous avons besoin pour démontrer le théorème A, puis nous énonçons le théorème en question. Comme on l'a vu dans l'introduction, puisqu'on s'intéresse à des opérateurs pseudo-différentiels non auto-adjoints, nous allons devoir considérer des symboles définis sur un espace des phases complexe et donc imposer des hypothèses d'holomorphicité sur ces symboles. Auparavant, nous rappelons la définition de la quantification de Weyl qui sera utilisée dans toute la suite lorsque nous parlerons d'opérateurs pseudo-différentiels. On rappelle que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ désigne l'espace de Schwartz sur $\mathbb{R}^2$ défini de la façon suivante :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) = \left\{ \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2); \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < +\infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^2 \right\}.$$

Définition 2.1.1 (Quantification de Weyl de $\mathbb{R}^2$). *Soit $p_h(x, \xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ une fonction appartenant à l'espace de Schwartz (on suppose que cette fonction est dans une bonne classe de symboles que nous définirons dans la suite) définie sur l'espace cotangent $T^*\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$ et admettant un développement asymptotique en puissances du paramètre semi-classique $\hbar$. On*

définit la quantification de Weyl du symbole p_h , notée $\text{Op}^w(p_h)(x, \hbar D_x)$ (où $D_x = -i\partial_x$), par la formule intégrale suivante, pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\text{Op}^w(p_h)(x, \hbar D_x)u(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{(i/\hbar)(x-y)\xi} p_h\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi.$$

$\text{Op}^w(p_h)$ est un opérateur pseudo-différentiel. On appelle la fonction $p_h(x, \xi)$ le symbole de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h)$ et $p(x, \xi)$ son symbole principal (c'est le premier terme dans le développement asymptotique en puissances de $\hbar$ de p_h). Cette définition peut être étendue à d'autres classes de symboles comme dans le livre [Zwo12].

Nous allons maintenant énoncer les hypothèses propres à notre résultat. Ces dernières sont proches de celles considérées par Michael Hitrik et Johannes Sjöstrand dans l'article [HS04] dans le cadre de la dimension deux.

Soit $0 < \hbar \leq 1$ le paramètre semi-classique. Soit $\epsilon > 0$ un petit paramètre qui jouera le rôle de paramètre perturbatif. On considère la quantification de Weyl de $\mathbb{R}^2$ de la fonction p_h^ϵ de la forme suivante $p_h^\epsilon = f_h^\epsilon + i\epsilon q_h^\epsilon$, qui dépend de manière $\mathcal{C}^\infty$ du petit paramètre ϵ et telle que :

- (A) les symboles f_h^ϵ et q_h^ϵ sont des fonctions analytiques sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles qui dépendent de manière $\mathcal{C}^\infty$ du petit paramètre ϵ ;
- (B) p_h^ϵ est une fonction holomorphe sur un voisinage tubulaire de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que sur ce voisinage, on a :

$$\exists C > 0, \quad |p_h^\epsilon(x, \xi)| \leq Cm(\mathfrak{R}(x, \xi)), \quad (\text{E2.1})$$

où m est une fonction d'ordre sur $\mathbb{R}^2$, i.e. :

1. $m \geq 1$;
2. il existe des constantes $C_0 \geq 0$ et $N_0 \geq 0$ telles que pour tous $X, \hat{X} \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$m(X) \leq C_0 \langle X - \hat{X} \rangle^{N_0} m(\hat{X}),$$

où la notation $\langle \cdot \rangle$ est définie pour $X \in \mathbb{R}^2$ par la relation : $\langle X \rangle = (1 + |X|^2)^{1/2}$;

- (C) p_h^ϵ admet un développement asymptotique en puissances du paramètre semi-classique $\hbar$ dans l'espace de fonctions satisfaisant la borne (E2.1) de la forme suivante :

$$p_h^\epsilon(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j^\epsilon(x, \xi) \hbar^j ;$$

autrement dit, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout (x, ξ) dans un voisinage tubulaire de $\mathbb{R}^2$, la fonction $p_h^\epsilon - \sum_{j=0}^N p_j^\epsilon \hbar^j$ est holomorphe et satisfait l'inégalité suivante :

$$\exists C > 0, \quad \left| p_h^\epsilon(x, \xi) - \sum_{j=0}^N p_j^\epsilon(x, \xi) \hbar^j \right| \leq C \hbar^{N+1} m(\mathfrak{R}(x, \xi));$$

(D) le symbole principal, noté p^ϵ :

$$p^\epsilon(x, \xi) = f^\epsilon(x, \xi) + i\epsilon q^\epsilon(x, \xi),$$

avec $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$, est elliptique à l'infini, *i.e.* pour (x, ξ) dans un voisinage tubulaire de $\mathbb{R}^2$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|p^\epsilon(x, \xi)| \geq \frac{1}{C} m(\Re(x, \xi)), \quad \text{pour } |(x, \xi)| \geq C.$$

On considère un opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$, éventuellement non borné, agissant sur l'espace des fonctions de carré intégrable $L^2(\mathbb{R})$ et qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{Op}^w(p_h^\epsilon)(x, \hbar D_x) = \text{Op}^w(f_h^\epsilon)(x, \hbar D_x) + i\epsilon \text{Op}^w(q_h^\epsilon)(x, \hbar D_x),$$

où $\text{Op}^w(f_h^\epsilon)$ et $\text{Op}^w(q_h^\epsilon)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ du petit paramètre ϵ . C'est cela qu'on appelle une perturbation non auto-adjointe d'opérateurs auto-adjoints. Afin de pouvoir appliquer le théorème des coordonnées action-angle (que nous reverrons par la suite), on considère pour $E_0 \in \mathbb{R}$ un réel fixé l'ensemble de niveau suivant :

$$\Lambda_{E_0} = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2; p^\epsilon(x, \xi)|_{\epsilon=0} = E_0\}.$$

Et on ajoute l'hypothèse suivante :

(E) Λ_{E_0} est un ensemble compact, connexe et régulier, *i.e.* $d(p^\epsilon|_{\epsilon=0}) = d(f^\epsilon|_{\epsilon=0}) \neq 0$ sur Λ_{E_0} .

Remarque 2.1.2. *L'hypothèse d'ellipticité à l'infini implique que l'ensemble de niveau Λ_{E_0} est compact pour des réels E_0 petits.*

On introduit maintenant une notation concernant les voisinages tubulaires.

Notation: $\text{VoisTub}(\mathbb{R}^2)$ désigne un voisinage tubulaire de $\mathbb{R}^2$ dans l'espace $\mathbb{C}^2$.

Explicitons maintenant la notion d'intégrale d'action qui apparaît dans l'énoncé du théorème A. Soit $C > 0$ une constante, soit $\epsilon_0 > 0$ un réel suffisamment petit et soit :

$$E \in \left\{ z \in \mathbb{C}; |\Re(z) - E_0| < \frac{1}{C}, |\Im(z)| < \frac{\epsilon_0}{C} \right\}.$$

On considère l'ensemble de niveau complexe Λ_E^ϵ donné par la relation qui suit :

$$\Lambda_E^\epsilon = \{(x, \xi) \in \text{VoisTub}(\mathbb{R}^2); p^\epsilon(x, \xi) = E\}.$$

D'après l'hypothèse (E), cet ensemble de niveau complexe est connexe et $df^\epsilon \neq 0$ sur l'ensemble Λ_E^ϵ pour ϵ suffisamment petit. Dans la suite, on va définir une intégrale d'action

$I(E)$ par :

$$I(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_E} \xi dx,$$

où γ_E est un lacet particulier dans l'ensemble de niveau Λ_E^ϵ . Nous verrons un peu plus loin comment est défini exactement ce lacet et nous montrerons, entre autres, que la fonction $E \mapsto I(E)$ est inversible.

Remarque 2.1.3. *Sous les hypothèses (A) à (D), le spectre de la fermeture de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ est discret dans un voisinage du réel E_0 (voir [HS04]).*

Nous sommes désormais en mesure d'énoncer un des principaux résultats de cette thèse.

Théorème A. *Soit $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ un opérateur pseudo-différentiel dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ du paramètre ϵ , agissant sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et soit $E_0 \in \mathbb{R}$ un réel fixé tels que les hypothèses (A) à (E) soient satisfaites. En particulier l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ est de la forme suivante :*

$$\text{Op}^w(p_h^\epsilon)(x, \hbar D_x) = \text{Op}^w(f_h^\epsilon)(x, \hbar D_x) + i\epsilon \text{Op}^w(q_h^\epsilon)(x, \hbar D_x),$$

où $\text{Op}^w(f_h^\epsilon)$ et $\text{Op}^w(q_h^\epsilon)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints. Il existe $\epsilon_0 > 0$ un paramètre suffisamment petit tel que, pour :

$$R_{C, \epsilon_0} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |\Re(z) - E_0| < \frac{1}{C}, |\Im(z)| < \frac{\epsilon_0}{C} \right\} \quad \text{où } C > 0 \text{ est une constante,}$$

les valeurs propres de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ dans le rectangle R_{C, ϵ_0} sont simples et données, pour $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ et pour $\hbar$ suffisamment petit, par :

$$\sigma(\text{Op}^w(p_h^\epsilon)) \cap R_{C, \epsilon_0} = \{g_h^\epsilon(\hbar k) + \mathcal{O}(\hbar^\infty), k \in \mathbb{Z}\} \cap R_{C, \epsilon_0},$$

où g_h^ϵ est une fonction analytique sur un voisinage de $I(E_0)$ dans $\mathbb{C}$, admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$ et dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ du paramètre ϵ . De plus, le premier terme du développement asymptotique de cette fonction g_h^ϵ , noté g^ϵ , est la réciproque de l'intégrale d'action $E \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_E} \xi dx$.

Remarque 2.1.4. *Ce résultat donne une description du spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ dans un rectangle R_{C, ϵ_0} qui ne dépend pas du paramètre semi-classique $\hbar$ contrairement au résultat obtenu par Michael Hitrik and Johannes Sjöstrand dans [HS04] en dimension deux.*

Remarque 2.1.5. *On a supposé que l'ensemble de niveau Λ_{E_0} était connexe. Cependant, il devrait être possible d'énoncer un résultat similaire s'il admet plusieurs composantes connexes. Dans ce cas, on devra alors donner des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld pour chaque composante connexe, puis considérer la réunion de toutes les composantes.*

2.2 Quantification de Weyl de $\mathbb{R}^2$, quantification de Weyl de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ et conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld

Nous allons nous focaliser sur la démonstration du théorème A. Cette dernière se divise en deux parties :

1. on considère un opérateur pseudo-différentiel $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ agissant sur l'espace $L^2(\mathbb{S}^1)$ de la forme suivante :

$$\text{Op}^w(p_h^\epsilon)(\theta, \hbar D_\theta) = \text{Op}^w(f_h^\epsilon)(\theta, \hbar D_\theta) + i\epsilon \text{Op}^w(q_h^\epsilon)(\theta, \hbar D_\theta),$$

où $f_h^\epsilon(\theta, I) = f^\epsilon(I) + \mathcal{O}(\hbar)$ et on montre un résultat (Théorème A') du même type que le théorème A pour cet opérateur ;

2. on étend le théorème A' au cas d'un opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ agissant sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et satisfaisant les hypothèses (A) à (E) que nous avons données.

2.2.1 Quantification de Weyl de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ et conditions de Bohr-Sommerfeld

Dans ce paragraphe, nous présentons un analogue du théorème A dans le cadre d'opérateurs pseudo-différentiels agissant sur l'espace des fonctions de carré intégrable $L^2(\mathbb{S}^1)$. Afin de pouvoir énoncer un tel résultat, nous avons besoin d'introduire de nouvelles notations.

Notations :

- $\mathbb{S}^1$ est le tore 1-dimensionnel réel $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$;
- $\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R} = \{x + iy; x \in \mathbb{S}^1, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$;
- $(T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}}$ est l'espace cotangent complexe de $\mathbb{S}^1$, *i.e.* $(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}) \times \mathbb{C}$;
- $L^2(\mathbb{S}^1)$ est l'espace de Hilbert des fonctions f mesurables 2π -périodiques telles que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta < \infty;$$

- $\text{VoisTub}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$ est un voisinage tubulaire de l'ensemble $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ dans l'espace $(T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}}$;
- $\text{Vois}(A; B)$ est un voisinage de l'ensemble A dans l'espace B .

Nous allons maintenant pouvoir nous pencher sur les hypothèses dont nous allons avoir besoin. Ces dernières sont analogues aux hypothèses (A) à (E) que nous avons énoncées dans le cadre d'opérateurs pseudo-différentiels agissant sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$. On considère la quantification de Weyl du symbole :

$$p_h^\epsilon(\theta, I) = f_h^\epsilon(\theta, I) + i\epsilon q_h^\epsilon(\theta, I),$$

qui est une fonction périodique en θ , dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ de ϵ et satisfaisant les

conditions suivantes :

(A') les symboles f_h^ϵ et q_h^ϵ sont des fonctions analytiques sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ à valeurs réelles qui dépendent de manière $\mathcal{C}^\infty$ du petit paramètre ϵ ;

(B') p_h^ϵ est une fonction holomorphe sur un voisinage tubulaire de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ telle que sur ce voisinage, on a :

$$\exists C > 0, \quad |p_h^\epsilon(\theta, I)| \leq Cm(\Re(I)), \quad (\text{E2.2})$$

où m est une fonction d'ordre sur $\mathbb{R}$;

(C') p_h^ϵ admet un développement asymptotique en puissances du paramètre semi-classique $\hbar$ dans l'espace de fonctions satisfaisant la borne (E2.2) de la forme suivante :

$$p_h^\epsilon(\theta, I) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j^\epsilon(\theta, I) \hbar^j,$$

autrement dit, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout (θ, I) dans un voisinage tubulaire de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, la fonction $p_h^\epsilon - \sum_{j=0}^N p_j^\epsilon \hbar^j$ est holomorphe et satisfait l'inégalité suivante :

$$\exists C > 0, \quad \left| p_h^\epsilon(\theta, I) - \sum_{j=0}^N p_j^\epsilon(\theta, I) \hbar^j \right| \leq C \hbar^{N+1} m(\Re(I)),$$

(D') le symbole principal, noté p^ϵ :

$$p^\epsilon(\theta, I) = f^\epsilon(I) + i\epsilon q^\epsilon(\theta, I),$$

avec $(\theta, I) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, est elliptique à l'infini, *i.e.* pour (θ, I) dans un voisinage tubulaire de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|p^\epsilon(\theta, I)| \geq \frac{1}{C} m(\Re(I)), \quad \text{pour } |(\theta, I)| \geq C.$$

Soit $E_0 \in \mathbb{R}$ un réel fixé, on considère l'ensemble de niveau suivant :

$$\Lambda_{E_0} = \{(\theta, I) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}; p^\epsilon(\theta, I)|_{\epsilon=0} = E_0\}.$$

Et on suppose que :

(E') Λ_{E_0} est un ensemble connexe et régulier, *i.e.* $d(p^\epsilon|_{\epsilon=0}) = (f^\epsilon|_{\epsilon=0})' \neq 0$ sur Λ_{E_0} .

Remarque 2.2.1. *L'hypothèse (B') sur le symbole p_h^ϵ implique que les dérivées de ce symbole vont être bornées par une fonction d'ordre (grâce à la formule de Cauchy) et donc qu'il se trouve dans une bonne classe de symboles.*

Soit $C > 0$ une constante, soit $\epsilon_0 > 0$ un réel suffisamment petit et soit :

$$E \in \left\{ z \in \mathbb{C}; |\Re(z) - E_0| < \frac{1}{C}, |\Im(z)| < \frac{\epsilon_0}{C} \right\}.$$

On considère l'ensemble de niveau complexe Λ_E^ϵ donné par la relation qui suit :

$$\Lambda_E^\epsilon = \{(\theta, I) \in \text{VoisTub}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}); p^\epsilon(\theta, I) = E\}.$$

D'après l'hypothèse (E'), cet ensemble de niveau complexe est connexe et $(f^\epsilon)' \neq 0$ sur Λ_E^ϵ pour ϵ suffisamment petit (f^ϵ est un difféomorphisme local sur Λ_E^ϵ). Soit γ_E un lacet dans l'ensemble Λ_E^ϵ qui engendre $\pi_1(\Lambda_E^\epsilon)$ le groupe fondamental de Λ_E^ϵ , on définit une intégrale d'action $\tilde{I}$ (nous expliquerons par la suite pourquoi cette intégrale est bien définie et inversible) par :

$$\tilde{I}(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_E} Id\theta.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un analogue du théorème A dans le cadre d'opérateurs agissant sur l'espace $L^2(\mathbb{S}^1)$.

Théorème A'. *Soit $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ un opérateur pseudo-différentiel dépendant de manière C^∞ du paramètre ϵ , agissant sur l'espace $L^2(\mathbb{S}^1)$ et soit $E_0 \in \mathbb{R}$ un réel fixé tels que les hypothèses (A') à (E') soient satisfaites. En particulier l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ est de la forme suivante :*

$$\text{Op}^w(p_h^\epsilon)(\theta, \hbar D_\theta) = \text{Op}^w(f_h^\epsilon)(\theta, \hbar D_\theta) + i\epsilon \text{Op}^w(q_h^\epsilon)(\theta, \hbar D_\theta),$$

où $\text{Op}^w(f_h^\epsilon)(\theta, \hbar D_\theta) = \text{Op}^w(f^\epsilon)(\hbar D_\theta) + \mathcal{O}(\hbar)$. Il existe $\epsilon_0 > 0$ un paramètre suffisamment petit tel que, pour :

$$R_{C, \epsilon_0} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |\Re(z) - E_0| < \frac{1}{C}, |\Im(z)| < \frac{\epsilon_0}{C} \right\} \quad \text{où } C > 0 \text{ est une constante,}$$

les valeurs propres de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ dans le rectangle R_{C, ϵ_0} sont simples et données pour $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ et pour $\hbar$ suffisamment petit par :

$$\sigma(\text{Op}^w(p_h^\epsilon)) \cap R_{C, \epsilon_0} = \{g_h^\epsilon(\hbar k) + \mathcal{O}(\hbar^\infty), k \in \mathbb{Z}\} \cap R_{C, \epsilon_0},$$

où g_h^ϵ est une fonction analytique sur un voisinage de $\tilde{I}(E)$ dans $\mathbb{C}$, admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$ et dépendant de manière C^∞ du paramètre ϵ . De plus, le premier terme du développement asymptotique de la fonction g_h^ϵ , noté g^ϵ , est la réciproque de l'intégrale d'action $E \mapsto \tilde{I}(E)$.

2.2.2 Transformation canonique complexe, quantification de Weyl complexe et problème de Grushin

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer le théorème A' et pour ce faire, nous allons suivre les étapes ci-dessous.

- **Étape 1 :** on construit une transformation canonique complexe κ et des coordonnées

action-angle complexes $(\tilde{\theta}, \tilde{I})$ telles que :

$$\begin{aligned} \kappa : \text{Vois}(\Lambda_E^\epsilon, (T^*\mathbb{S}^1)_\mathbb{C}) &\longrightarrow \text{Vois}(\tilde{I} = \text{cst}, (T^*\mathbb{S}^1)_\mathbb{C}), \\ (\theta, I) &\longmapsto (\tilde{\theta}, \tilde{I}), \end{aligned}$$

de sorte que pour $(\tilde{\theta}, \tilde{I}) \in (T^*\mathbb{S}^1)_\mathbb{C}$ on a :

$$p^\epsilon \circ \kappa^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{I}) = g^\epsilon(\tilde{I}),$$

où g^ϵ est une fonction analytique dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ du paramètre ϵ .

– **Étape 2** : on quantifie la transformation canonique κ en suivant la procédure ci-contre :

1. on conjugue par une transformation unitaire l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ agissant sur l'espace $L^2(\mathbb{S}^1)$ en un opérateur $\text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ agissant sur un espace de type Bargmann, ainsi leurs spectres sont égaux ;
2. on construit un opérateur microlocalement unitaire $\tilde{U}_0$ tel que microlocalement :

$$\tilde{U}_0 \text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) = \text{Op}^w(g^\epsilon) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \right) \tilde{U}_0 + \mathcal{O}(\hbar);$$

puis, par une procédure itérative, on construit un opérateur microlocalement unitaire $\tilde{U}$ tel que microlocalement :

$$\tilde{U} \text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) = \text{Op}^w(g_h^\epsilon) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \right) \tilde{U} + \mathcal{O}(\hbar^\infty).$$

– **Étape 3** : on détermine le spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ en utilisant deux problèmes de Grushin, un pour l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ et l'autre pour l'opérateur $\text{Op}^w(g_h^\epsilon) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \right)$ obtenu dans l'étape 2.

2.2.2.1 Construction de la transformation canonique κ

La construction de la transformation canonique κ que nous allons donner est analogue à celle faite par Michael Hitrik et Johannes Sjöstrand dans l'article [HS04]. On considère l'ensemble de niveau complexe :

$$\Lambda_E^\epsilon = \{(\theta, I) \in \text{VoisTub}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}); p^\epsilon(\theta, I) = E\}.$$

On peut montrer une première propriété sur cet espace.

Proposition 2.2.2 (Réécriture de l'ensemble de niveau Λ_E^ϵ). *L'ensemble de niveau Λ_E^ϵ se réécrit de la façon suivante :*

$$\Lambda_E^\epsilon = \{(\theta, I) \in \text{VoisTub}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}); I = l^\epsilon(\theta, E)\},$$

où l^ϵ est une fonction holomorphe qui dépend de manière $\mathcal{C}^\infty$ du paramètre ϵ .

Démonstration. Par définition, on a :

$$\Lambda_E^\epsilon = \{(\theta, I) \in \text{VoisTub}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}); p^\epsilon(\theta, I) = E\}.$$

Comme la fonction $p^\epsilon - E$ est holomorphe et qu'on a la relation suivante pour tout $(\theta, I) \in \Lambda_E^\epsilon$:

$$\frac{\partial p^\epsilon}{\partial I}(\theta, I) = \frac{df^\epsilon}{dI}(I) + i\epsilon \frac{\partial q^\epsilon}{\partial I}(\theta, I) \neq 0,$$

pour ϵ suffisamment petit car $(f^\epsilon)' \neq 0$ et $\partial_I q^\epsilon$ est borné sur l'ensemble Λ_E^ϵ . Alors, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction holomorphe $l^\epsilon(\theta, E)$ telle que :

$$p^\epsilon(\theta, I) = E \quad \text{si et seulement si} \quad I = l^\epsilon(\theta, E).$$

D'où le fait qu'on puisse récrire l'ensemble de niveau Λ_E^ϵ sous la forme suivante :

$$\Lambda_E^\epsilon = \{(\theta, I) \in \text{VoisTub}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}); I = l^\epsilon(\theta, E)\}.$$

□

Nous allons maintenant définir la coordonnée d'action $\tilde{I}$ en intégrant la 1-forme $Id\theta$. Comme l'ensemble de niveau Λ_E^ϵ est homotopiquement équivalent à l'ensemble $\mathbb{S}^1$, alors il existe un lacet γ_E dans l'ensemble Λ_E^ϵ dont la classe d'homotopie engendre le groupe fondamental $\pi_1(\Lambda_E^\epsilon)$. On définit alors la coordonnée $\tilde{I}$ par la relation suivante :

$$\tilde{I}(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_E} Id\theta.$$

On peut définir le lacet γ_E par le paramétrage suivant, pour $t \in [0, 2\pi[$:

$$\begin{cases} \theta(t) = t; \\ I(t) = l^\epsilon(\theta(t), E). \end{cases}$$

Ainsi, on peut réécrire la coordonnée $\tilde{I}(E)$ sous la forme suivante :

$$\tilde{I}(E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} l^\epsilon(\theta(t), E) dt.$$

Maintenant que cette coordonnée a été définie, on peut établir deux propriétés intéressantes la concernant.

Proposition 2.2.3 (Relation entre $\tilde{I}(E)$ et γ_E). *La coordonnée $\tilde{I}(E)$ ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet γ_E choisi dans l'ensemble de niveau Λ_E .*

Démonstration. La 1-forme $Id\theta|_{\Lambda_E^\epsilon}$ est fermée, car :

$$d\left(Id\theta|_{\Lambda_E^\epsilon}\right) = d(l^\epsilon(\theta, E)d\theta) = \frac{\partial l^\epsilon}{\partial \theta}(\theta, E)d\theta \wedge d\theta = 0,$$

puisque la fonction l^ϵ est holomorphe. Ainsi d'après le théorème de Stokes, $\tilde{I}(E)$ ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet γ_E dans l'ensemble de niveau Λ_E^ϵ . $\square$

Proposition 2.2.4 ($\tilde{I}$ est un difféomorphisme local). *La fonction $R_{C, \epsilon_0} \ni E \mapsto \tilde{I}(E)$ est un difféomorphisme local.*

Démonstration. Comme la fonction f^ϵ est un difféomorphisme local, alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{I}}{dE}(E) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial l^\epsilon}{\partial E}(\theta(t), E) dt, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d(f^\epsilon)^{-1}}{dE}(E) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) dt, \\ &= \frac{d(f^\epsilon)^{-1}}{dE}(E) + \mathcal{O}(\epsilon) \neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, comme $\tilde{I}(E)$ est holomorphe par rapport à E (car la fonction l^ϵ l'est), d'après le théorème d'inversion locale holomorphe l'application $E \mapsto \tilde{I}(E)$ est un difféomorphisme local. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de construire la transformation canonique κ .

Proposition 2.2.5 (Construction de la transformation canonique κ). *Il existe une transformation canonique κ et une fonction g^ϵ telles que :*

$$\begin{aligned} \kappa : \text{Vois}(\Lambda_E^\epsilon, (T^*\mathbb{S}^1)_\mathbb{C}) &\longrightarrow \text{Vois}(\tilde{I} = \text{cst}, (T^*\mathbb{S}^1)_\mathbb{C}), \\ (\theta, I) &\longmapsto (\tilde{\theta}, \tilde{I}), \end{aligned}$$

et :

$$p^\epsilon \circ \kappa^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{I}) = g^\epsilon(\tilde{I}).$$

La fonction g^ϵ définie ainsi est la réciproque de l'intégrale d'action $\tilde{I}$.

Démonstration. Pour ϵ suffisamment petit et $E \in R_{C, \epsilon_0}$, il existe un réel positif δ_0 tel que pour $(\theta, I) \in \Lambda_E^\epsilon$, $\theta \in \mathbb{S}^1 + i] - \delta_0, \delta_0[$. Nous allons définir la transformation canonique κ par une fonction génératrice $h(\theta, \tilde{I})$, i.e. que κ satisfera l'égalité suivante :

$$\kappa\left(\theta, \frac{\partial h}{\partial \theta}\right) = \left(\frac{\partial h}{\partial \tilde{I}}, \tilde{I}\right).$$

On rappelle que le nombre complexe $E \in R_{C, \epsilon_0}$ est fixé et on considère la 1-forme suivante :

$$\omega_E = Id\theta|_{\Lambda_E^\epsilon}.$$

Soit :

$$\begin{aligned} j : \mathbb{S}^1 + i] - \delta_0, \delta_0[&\longrightarrow \Lambda_E^\epsilon \\ \theta &\longmapsto (\theta, l^\epsilon(\theta, E)). \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$j^* \omega_E = l^\epsilon(\theta, E) d\theta.$$

Comme l^ϵ est une fonction holomorphe en θ , alors $d_\theta(j^* \omega_E) = 0$. Ensuite, on remarque que :

$$j^* \omega_E - \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} j^* \omega_E \right) d\theta = j^* \omega_E - \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_E} \omega_E \right) d\theta \quad \text{est d'intégrale nulle,}$$

où γ_E est le lacet défini précédemment. Par conséquent, il existe une fonction $h_E(\theta)$ définie sur $\mathbb{S}^1 + i] - \delta_0, \delta_0[$ telle que :

$$d_\theta h_E = j^* \omega_E - \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_E} \omega_E \right) d\theta = j^* \omega_E - \tilde{I}(E) d\theta,$$

par définition de la coordonnée $\tilde{I}(E)$. Soit $\hat{h}_E(\theta)$ la fonction définie sur $\mathbb{S}^1 + i] - \delta_0, \delta_0[$ par :

$$d_\theta \hat{h}_E(\theta) = d_\theta h_E(\theta) + \tilde{I}(E) d\theta.$$

Alors elle vérifie la condition suivante :

$$p^\epsilon \left(\theta, \frac{\partial \hat{h}_E}{\partial \theta}(\theta) \right) = E.$$

D'après la proposition 2.2.4, l'application $E \longmapsto \tilde{I}(E)$ est un difféomorphisme local, donc on peut considérer la fonction $\hat{h}_{E(\tilde{I})}(\theta)$ comme une fonction des variables θ et $\tilde{I}$ où $E(\tilde{I})$ est la réciproque de la fonction $\tilde{I}(E)$. Finalement, on pose :

$$\kappa(\theta, I) = \left(\frac{\partial \hat{h}_{E(\tilde{I})}(\theta)}{\partial \tilde{I}}, \tilde{I} \right),$$

(cette définition a un sens car $\tilde{I}$ ne dépend que de E , qu'on peut voir comme une fonction de θ et de I). Et on remarque que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{h}_{E(\tilde{I})}(\theta + 2\pi)}{\partial \tilde{I}} - \frac{\partial \hat{h}_{E(\tilde{I})}(\theta)}{\partial \tilde{I}} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{I}} \left(\hat{h}_{E(\tilde{I})}(\theta + 2\pi) - \hat{h}_{E(\tilde{I})}(\theta) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tilde{I}} \left(\int_{\mathbb{S}^1} \frac{\partial \hat{h}_{E(\tilde{I})}(\theta)}{\partial \theta} d\theta \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tilde{I}} (2\pi \tilde{I}) = 2\pi. \end{aligned}$$

Ainsi la transformation κ est bien définie et est localement une transformation symplectique holomorphe car :

$$d\tilde{I} \wedge d\tilde{\theta} = \frac{\partial^2 \hat{h}_{E(\tilde{I})}(\theta)}{\partial \theta \partial \tilde{I}} d\tilde{I} \wedge d\theta = dI \wedge d\theta,$$

et elle envoie l'ensemble de niveau Λ_E^ϵ sur l'ensemble $\{\tilde{I} = cst\}$ (car $\tilde{I}$ ne dépend que de E), en outre :

$$p^\epsilon \circ \kappa^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{I}) = g^\epsilon(\tilde{I}),$$

car $\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}}$ le champ de vecteurs tangent à $\{\tilde{I} = cst\}$ est envoyé par l'application κ^{-1} sur le champ de vecteurs tangent à Λ_E^ϵ , en d'autres termes :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}}(p^\epsilon \circ \kappa^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{I})) = 0 \quad \Rightarrow \quad p^\epsilon \circ \kappa^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{I}) = g^\epsilon(\tilde{I}).$$

Enfin, on déduit de cette équation que la fonction g^ϵ est la réciproque de l'intégrale d'action $\tilde{I}$ car :

$$g^\epsilon(\tilde{I}(E)) = p \circ \kappa^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{I}(E)) = E.$$

□

Remarque 2.2.6. *On parle de coordonnées action-angle complexes pour le couple $(\tilde{\theta}, \tilde{I})$ car la coordonnée $\tilde{I}$ est définie par une intégrale d'action :*

$$\tilde{I} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_E} Id\theta,$$

et la coordonnée $\tilde{\theta}$ est définie à partir de la fonction génératrice de la transformation canonique κ par :

$$\tilde{\theta} = \frac{\partial h}{\partial \tilde{I}}(\theta, \tilde{I}).$$

Remarque 2.2.7. *Si $\epsilon = 0$, alors la transformation canonique κ est l'identité (de fonction génératrice $h(\theta, \tilde{I}) = \theta \tilde{I}$). On pouvait s'y attendre puisque dans ce cas, le symbole principal p^ϵ s'écrit déjà sous la forme d'une fonction de la variable d'action.*

2.2.2.2 Quantification de la transformation canonique κ

On souhaite construire un opérateur associé à la transformation canonique κ . Le problème réside dans le fait qu'on ne peut pas directement appliquer le théorème d'Egorov car nous ne sommes pas dans le cadre réel. Nous allons donc plutôt écrire la transformation canonique κ comme une composition de plusieurs transformations canoniques qui elles seront plus facilement quantifiables. Auparavant, nous allons nous intéresser à la théorie des transformées de FBI. Pour une introduction à cette théorie, on pourra consulter le livre de Maciej Zworski [Zwo12, Chapter 13] ou bien le cours en ligne de Michael Hitrik et de Johannes Sjöstrand [HS15] ou encore celui de Johannes Sjöstrand [Sjö02]. Commençons

par introduire les notations dont nous allons avoir besoin.

Notations: soit Φ une forme quadratique strictement sosharmonique sur $\mathbb{C}$ et à valeurs réelles. On considère les notations suivantes :

- $L(dz)$ est la mesure de Lebesgue $\frac{i}{2}dz \wedge d\bar{z}$;
- $L_h^2(\mathbb{C}, \Phi) = L_h^2(\mathbb{C}, e^{-2\Phi(z)/h} L(dz))$ est l'ensemble des fonctions mesurables f telles que :

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-2\Phi(z)/h} L(dz) < +\infty;$$

- $L_h^2(\mathbb{C}, \Phi, m) = L_h^2(\mathbb{C}, m^2 e^{-2\Phi(z)/h} L(dz))$ est l'ensemble des fonctions mesurables f telles que :

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 m(z)^2 e^{-2\Phi(z)/h} L(dz) < +\infty,$$

où m est une fonction d'ordre (m désignera dans la suite une fonction d'ordre sur $\mathbb{C}$ associée à un opérateur agissant sur l'espace $L_h^2(\mathbb{C}, \Phi)$ dans un sens que nous préciserons plus tard) ;

- $H_h(\mathbb{C}, \Phi) = \text{Hol}(\mathbb{C}) \cap L_h^2(\mathbb{C}, \Phi)$ est l'espace des fonctions holomorphes qui appartiennent à l'espace $L_h^2(\mathbb{C}, \Phi)$;
- $H_h(\mathbb{C}, \Phi, m) = \text{Hol}(\mathbb{C}) \cap L_h^2(\mathbb{C}, \Phi, m)$ est l'espace des fonctions holomorphes qui appartiennent à l'espace $L_h^2(\mathbb{C}, \Phi, m)$.

Remarque 2.2.8. *Comme par définition une fonction d'ordre m est supérieure ou égale à 1, alors on a l'inclusion suivante :*

$$H_h(\mathbb{C}, \Phi, m) \subset H_h(\mathbb{C}, \Phi).$$

Nous rappelons la définition de fonction holomorphe quadratique dont nous allons avoir besoin dans la suite (voir par exemple [Zwo12, Chapitre 13]).

Définition 2.2.9 (Fonction holomorphe quadratique). *Une fonction holomorphe quadratique ϕ sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ est une fonction qui s'écrit sous la forme suivante pour tout $(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$:*

$$\phi(z, x) = \frac{1}{2}az^2 + bzx + \frac{1}{2}dx^2,$$

où a, b, d sont des nombres complexes.

Nous donnons maintenant la définition de la transformée de FBI (Fourier-Bros-Iagoniltzer) dans le cadre de la dimension un (voir par exemple [Zwo12, Chapter 13]).

Définition 2.2.10 (Transformée de FBI et sa transformation canonique). *Soit $\phi(z, x)$ une fonction quadratique holomorphe sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ telle que :*

1. $\Im \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)$ est un nombre réel positif;
2. $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \neq 0$.

La transformée de FBI associée à la fonction ϕ est l'opérateur T_ϕ défini sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par :

$$T_\phi u(z) = \frac{c_\phi}{\hbar^{3/4}} \int_{\mathbb{R}} e^{(i/\hbar)\phi(z,x)} u(x) dx,$$

où :

$$c_\phi = \frac{1}{2^{1/2}\pi^{3/4}} \frac{|\det \partial_x \partial_z \phi|}{(\det \Im(\partial_x^2 \phi))^{1/4}}.$$

On définit la transformation canonique associée à l'opérateur T_ϕ par l'application suivante :

$$\begin{aligned} \kappa_\phi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \\ (x, -\partial_x \phi(z, x)) &\longmapsto (z, \partial_z \phi(z, x)). \end{aligned}$$

Nous rappelons maintenant les propriétés importantes de la transformée de FBI (voir par exemple [Zwo12, p.309]).

Proposition 2.2.11 (La transformée de FBI envoie $L^2(\mathbb{R})$ sur $H_h(\mathbb{C}, \Phi)$). *Soit, pour $z \in \mathbb{C}$:*

$$\Phi(z) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (-\Im(\phi(z, x))).$$

Cette fonction Φ est une forme quadratique strictement sousharmonique sur $\mathbb{C}$ et à valeurs réelles. Alors $T_\phi : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow H_h(\mathbb{C}, \Phi)$ est une transformation unitaire.

De plus, si $T_\phi^* : L_h^2(\mathbb{C}, \Phi) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ est l'adjoint de l'opérateur T_ϕ , alors il est donné par la formule intégrale suivante pour tout $v \in L_h^2(\mathbb{C}, \Phi)$:

$$T_\phi^* v(x) = c_\phi \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{C}} e^{(i/\hbar)\overline{\phi(z,x)}} e^{-2\Phi(z)/\hbar} v(z) L(dz).$$

Et on a :

1. $T_\phi T_\phi^* = \text{id}$ sur l'espace $H_h(\mathbb{C}, \Phi)$;
2. $T_\phi^* T_\phi = \text{id}$ sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration. Pour la démonstration de cette proposition, on pourra aller voir le livre de Maciej Zworski [Zwo12, p.309-311]. $\square$

Remarque 2.2.12. La transformation canonique κ_ϕ envoie l'espace $\mathbb{R}^2$ sur la IR -variété (I -Lagrangienne et R -symplectique) $\Lambda_\Phi = \left\{ \left(z, \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z) \right) ; z \in \mathbb{C} \right\}$ où Φ est la forme quadratique strictement sousharmonique associée à la fonction ϕ au sens de la proposition 2.2.11. De plus, on identifie la variété Λ_Φ avec $\mathbb{C}$ grâce à l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \Lambda_\Phi \\ z &\longmapsto \left(z, \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z) \right). \end{aligned}$$

Exemple 2.2.1. Soit ϕ_1 la fonction définie pour tout $(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ par :

$$\phi_1(z, x) = \frac{1}{2}(z - x)^2.$$

Alors, par un calcul, on trouve que la forme quadratique strictement sousharmonique Φ_1 associée à cette fonction ϕ_1 est donnée pour $z \in \mathbb{C}$ par :

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2} |\Im(z)|^2.$$

La transformation canonique associée s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \kappa_{\phi_1} : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, \xi) &\longmapsto (x - i\xi, \xi). \end{aligned}$$

Et elle envoie l'espace $\mathbb{R}^2$ sur l'ensemble :

$$\Lambda_{\Phi_1} = \{(z, -\Im(z)), z \in \mathbb{C}\}.$$

Nous recroiserons cet exemple, car il va s'avérer fondamental pour la suite. Nous allons maintenant énoncer des résultats utilisant la transformée de FBI et qui permettent de faire un lien entre un opérateur agissant sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et un opérateur agissant sur l'espace $H_h(\mathbb{C}, \Phi)$.

Proposition 2.2.13 (Opérateur pseudo-différentiel agissant sur l'espace $H_h(\mathbb{C}, \Phi)$). Soit $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ un opérateur pseudo-différentiel agissant sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et satisfaisant les hypothèses (A) à (D). Soit Φ_0 une forme quadratique sur $\mathbb{C}$ strictement sousharmonique et à valeurs réelles (on peut associer à cette fonction Φ_0 une forme quadratique holomorphe ϕ_0 dans le sens de la proposition 2.2.11). Soit $\text{Op}_{\Phi_0}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) := T_{\phi_0} \circ \text{Op}^w(p_h^\epsilon) \circ T_{\phi_0}^*$. Alors :

1. $\text{Op}_{\Phi_0}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) : H_h(\mathbb{C}, \Phi_0, \tilde{m}) \longrightarrow H_h(\mathbb{C}, \Phi_0)$ est uniformément borné par rapport au paramètre semi-classique $\hbar$ et au paramètre ϵ (pour $\hbar < 1$ et $\epsilon < \epsilon_0$ où ϵ_0 est un réel positif fixé) et $\tilde{m} = m \circ \kappa_{\phi_0}^{-1}$ est une fonction d'ordre sur l'ensemble :

$$\Lambda_{\Phi_0} = \left\{ (y, \eta) \in \mathbb{C}^2; \eta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}(y) \right\},$$

(on rappelle que m est la fonction d'ordre associée à l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ dans l'hypothèse (B));

2. $\text{Op}_{\Phi_0}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ est donné par l'intégrale sur un contour suivante, pour $u \in H_h(\mathbb{C}, \Phi_0)$:

$$\text{Op}_{\Phi_0}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)u(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(x)} e^{(i/\hbar)(x-y)\eta} \tilde{p}_h^\epsilon\left(\frac{x+y}{2}, \eta\right) u(y) dy d\eta,$$

où $\Gamma(x) = \left\{ (y, \eta) \in \mathbb{C}^2; \eta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}\left(\frac{x+y}{2}\right) \right\}$ et où le symbole $\tilde{p}_h^\epsilon$ est donné par

$$\tilde{p}_h^\epsilon = p_h^\epsilon \circ \kappa_{\phi_0}^{-1}.$$

Démonstration. Nous présentons ici uniquement un résumé des étapes de la démonstration, pour plus de détails voir par exemple les cours en ligne [Sjö02, p.139-142] et [HS15] ou bien l'article [MS03].

Étape 1 : on montre la formule :

$$(T_{\phi_0} \circ \text{Op}^w(p_h^\epsilon) \circ T_{\phi_0}^*)u(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(x)} e^{(i/\hbar)(x-y)\eta} \tilde{p}_h^\epsilon\left(\frac{x+y}{2}, \eta\right) u(y) dy d\eta,$$

en utilisant le fait que les symboles peuvent se décomposer sous la forme de sommes de symboles exponentiels bornés.

Étape 2 : on montre que $\text{Op}_{\Phi_0}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) : \text{Hol}(\mathbb{C}) \longrightarrow \text{Hol}(\mathbb{C})$ en remarquant que $\text{Op}_{\Phi_0}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ se réécrit de la façon suivante :

$$\text{Op}_{\Phi_0}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)u(x) = \frac{C}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{C}} k_h(x, y) dy d\bar{y},$$

où la fonction k_h est donnée pour $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ par :

$$k_h(x, y) = e^{(1/\hbar)(\Phi_0(x) - \Phi_0(y))} e^{(i/\hbar)\Im(i(x-y)(2/i)\partial_x \Phi_0(x+y/2))} \tilde{p}_h^\epsilon\left(\frac{x+y}{2}, \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right),$$

et où C est une constante indépendante de $\hbar$. Puis on remarque que k_h vérifie l'équation suivante :

$$\partial_{\bar{x}} k_h = \partial_{\bar{y}} k_h,$$

ainsi en dérivant sous le signe intégral et en utilisant une intégration par parties, on obtient l'holomorphicité de $\text{Op}_{\Phi_0}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)u$ pour $u \in \text{Hol}(\mathbb{C})$.

Étape 3 : on montre que $\text{Op}_{\Phi_0}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) = \mathcal{O}(1) : L_h^2(\mathbb{C}, \Phi_0, \tilde{m}) \longrightarrow L_h^2(\mathbb{C}, \Phi_0)$ en utilisant la formule de Stokes pour réécrire l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_0}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{Op}_{\Phi_0}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)u(x) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma_1(x)} e^{(i/\hbar)(x-y)\eta} \tilde{p}_h^\epsilon\left(\frac{x+y}{2}, \eta\right) u(y) dy d\eta \\ &+ \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{G_{[0,1]}(x)} e^{(i/\hbar)(x-y)\eta} u(y) \partial_{\bar{y}, \bar{\eta}} \tilde{p}_h^\epsilon\left(\frac{x+y}{2}, \eta\right) \wedge dy d\eta, \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma_1(x)} e^{(i/\hbar)(x-y)\eta} \tilde{p}_h^\epsilon\left(\frac{x+y}{2}, \eta\right) u(y) dy d\eta \quad \text{car } \tilde{p}_h^\epsilon \text{ est holomorphe,} \end{aligned}$$

où le contour $\Gamma_t(x)$ est défini pour $0 \leq t \leq 1$ et pour $x \in \mathbb{C}$ fixé par :

$$\eta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}\left(\frac{x+y}{2}\right) + it \frac{\overline{x-y}}{\langle x-y \rangle},$$

et où le contour $G_{[0,1]}(x)$ est obtenu en considérant t comme une variable. Puis on montre

que :

$$\text{Op}_{\Phi_0}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)u(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\Phi_0(x)/\hbar} \int_{\mathbb{C}} e^{-\Phi_0(y)/\hbar} f_h(x, y) \tilde{m}(y) u(y) \mathcal{O}(1) dy d\bar{y},$$

où $f_h(x, y) = e^{-|x-y|^2/(\hbar\langle x-y \rangle)} \tilde{p}_h^\epsilon \left(\frac{x+y}{2}, \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \left(\frac{x+y}{2} \right) + i \frac{\overline{x-y}}{\langle x-y \rangle} \right) \frac{1}{\tilde{m}(y)}$ est une fonction bornée par $\langle x-y \rangle^{N_0} e^{-|x-y|^2/(\hbar\langle x-y \rangle)}$ sur $\Gamma_1(x)$. À partir de cette estimation, on déduit le caractère uniformément borné de l'opérateur. $\square$

À partir de cette proposition, on peut rappeler la définition de quantification de Weyl complexe de $\mathbb{R}^2$ (voir le livre [Zwo12] ou le mini-cours [HS15]) dans laquelle on n'a pas besoin de supposer que les symboles considérés soient holomorphes.

Définition 2.2.14 (Quantification de Weyl complexe de $\mathbb{R}^2$). *On note :*

$$S(\Lambda_{\Phi_0}) = \{\tilde{p}_h \in \mathcal{C}^\infty(\Lambda_{\Phi_0}); \forall \alpha, \exists C_\alpha > 0, |\partial^\alpha \tilde{p}_h| \leq C_\alpha\} \simeq S(\mathbb{C}).$$

Soit $\tilde{p}_h^\epsilon \in S(\Lambda_{\Phi_0})$ une fonction dans la classe de symboles $S(\Lambda_{\Phi_0})$ admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$ et dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ de ϵ . On définit la quantification de Weyl complexe du symbole $\tilde{p}_h^\epsilon$ par la formule intégrale suivante, pour $u \in H_h(\mathbb{C}, \Phi_0)$:

$$\text{Op}_{\Phi_0}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)u(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(x)} e^{(i/\hbar)(x-y)\eta} \tilde{p}_h^\epsilon \left(\frac{x+y}{2}, \eta \right) u(y) dy d\eta,$$

$$\text{où } \Gamma(x) = \left\{ (y, \eta) \in \mathbb{C}^2; \eta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \left(\frac{x+y}{2} \right) \right\}.$$

Comme le symbole $\tilde{p}_h^\epsilon$, défini dans la proposition 2.2.13, est une fonction holomorphe et bornée par une fonction d'ordre $\tilde{m}$ sur un voisinage tubulaire de l'ensemble Λ_{Φ_0} , on peut considérer des déformations du contour $\Gamma(x)$ et donc d'autres fonctions poids.

Proposition 2.2.15 (Opérateur pseudo-différentiel agissant sur l'espace $H_h(\mathbb{C}, \Phi)$ avec Φ plus général). *Avec les notations de la proposition 2.2.13, soit $\Phi \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ (l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ à gradient lipschitzien) une fonction proche de la forme quadratique Φ_0 dans le sens où $\Phi = \Phi_0 + f$ avec $f \in \mathcal{C}_0^{1,1}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ une fonction telle que les normes $\|\nabla f\|_{L^\infty}$ et $\|\nabla^2 f\|_{L^\infty}$ soient suffisamment petites. Alors $\text{Op}_{\Phi_0}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) : H_h(\mathbb{C}, \Phi, \tilde{m}) \longrightarrow H_h(\mathbb{C}, \Phi)$ est un opérateur uniformément borné par rapport au paramètre semi-classique $\hbar$ et au paramètre ϵ (pour $\hbar < 1$ et $\epsilon < \epsilon_0$ où ϵ_0 est un réel positif fixé).*

Démonstration. On donne ici aussi un résumé des étapes de la démonstration pour plus de détails voir [Sjö02, p.139-142] ou [HS15] ou [MS03].

Étape 1 : on montre via la formule de Stokes que $\text{Op}_{\Phi_0}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ se réécrit de la façon suivante :

$$\text{Op}_{\Phi_0}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)u(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma_\Phi(x,y)} e^{(i/\hbar)(x-y)\eta} \tilde{p}_h^\epsilon \left(\frac{x+y}{2}, \eta \right) u(y) dy d\eta,$$

où le contour $\Gamma_\Phi(x, y)$ est défini par :

$$\eta = \frac{2}{i} \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial x}(tx + (1-t)y) dt + \frac{i}{C} \frac{\overline{x-y}}{\langle x-y \rangle}.$$

Étape 2 : on montre que l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_0}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ est borné sur l'espace $H_h(\mathbb{C}, \Phi, \tilde{m})$ en utilisant le fait que le long de $\Gamma_\Phi(x, y)$, on a :

$$\left| e^{(1/h)(i(x-y)\eta) - \Phi(x) + \Phi(y)} \right| \leq e^{-C|x-y|^2/\langle x-y \rangle}.$$

□

Remarque 2.2.16. Soit Φ_0 une forme quadratique sur $\mathbb{C}$ strictement sousharmonique et à valeurs réelles. Soit $\Phi \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ une fonction telle que $\Phi - \Phi_0$ soit bornée. Alors les espaces $H_h(\mathbb{C}, \Phi)$ et $H_h(\mathbb{C}, \Phi_0)$ coïncident.

Notation : soit Φ_0 une forme quadratique sur $\mathbb{C}$ strictement sousharmonique et à valeurs réelles. Soit $\Phi \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ une fonction proche de la forme quadratique Φ_0 au sens de la proposition 2.2.15. Soit $\text{Op}_{\Phi_0}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ l'opérateur défini dans la proposition 2.2.13. D'après les propositions 2.2.13 et 2.2.15, on sait que cet opérateur agit sur l'espace $H_h(\mathbb{C}, \Phi_0)$ et sur l'espace $H_h(\mathbb{C}, \Phi)$. On note désormais $\text{Op}_{\Phi_0}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ lorsqu'on considère l'opérateur comme agissant sur l'espace $H_h(\mathbb{C}, \Phi_0)$ et $\text{Op}_\Phi^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ lorsqu'on le considère comme agissant sur l'espace $H_h(\mathbb{C}, \Phi)$.

Étant donné que nous avons rappelé les principales propriétés de la transformée de FBI et le lien entre la quantification de Weyl de $\mathbb{R}^2$ et la quantification de Weyl complexe de $\mathbb{R}^2$, nous allons maintenant nous intéresser au cadre de l'énoncé du théorème A' et donc aux quantifications de Weyl de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. On se focalise plus particulièrement sur la forme quadratique strictement sousharmonique Φ_1 étudiée dans l'exemple 2.2.1 et définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_1 : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2} |\Im(x)|^2 \end{aligned}$$

Comme on l'a vu, cette forme quadratique est associée à une fonction holomorphe quadratique ϕ_1 dans le sens de la proposition 2.2.11, définie pour tous $z, x \in \mathbb{C}$ par :

$$\phi_1(z, x) = \frac{i}{2} (z - x)^2.$$

La transformation canonique κ_{ϕ_1} étant donnée par :

$$\begin{aligned} \kappa_{\phi_1} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \\ (x, \xi) &\longmapsto (x - i\xi, \xi). \end{aligned}$$

On remarque que pour $(x, \xi) \in \mathbb{C}^2$, on a :

$$\kappa_{\phi_1}(x + 2\pi, \xi) = \kappa_{\phi_1}(x, \xi) + (2\pi, 0).$$

Ainsi, il existe une application $\bar{\kappa}_{\phi_1} : (\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}) \times \mathbb{C} \longrightarrow (\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}) \times \mathbb{C}$ telle que $\pi \circ \kappa_{\phi_1} = \bar{\kappa}_{\phi_1} \circ \pi$ où $\pi : (\mathbb{R} + i\mathbb{R}) \times \mathbb{C} \longrightarrow (\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}) \times \mathbb{C}$ est la projection.

On considère maintenant les transformations suivantes :

1. $\bar{\kappa}_{\phi_1} : (T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}} \longrightarrow (T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}}$ qui envoie l'espace $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ sur l'espace Λ_{Φ_1} où :

$$\Lambda_{\Phi_1} = \left\{ (x, \xi) \in (T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}}, \xi = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x) = -\Im(x) \right\};$$

2. $\tilde{\kappa}^{-1}$ définie par :

$$\tilde{\kappa}^{-1} = \bar{\kappa}_{\phi_1} \circ \kappa^{-1} \circ \bar{\kappa}_{\phi_1}^{-1} : (T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}} \longrightarrow (T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}},$$

qui ne préserve pas l'ensemble Λ_{Φ_1} (car κ n'est pas une transformation réelle) mais l'envoie sur une autre IR -variété, notée Λ_{Φ_2} , où Φ_2 est une fonction régulière proche de Φ_1 .

En résumé, on a le diagramme commutatif suivant au niveau des espaces des phases :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset (T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\kappa} & (T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}} \supset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ \textcolor{red}{(\theta, I)} & & \textcolor{red}{(\tilde{\theta}, \tilde{I})} \\ \bar{\kappa}_{\phi_1} \downarrow & & \downarrow \bar{\kappa}_{\phi_1} \\ \Lambda_{\Phi_1} \subset (T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}} & \xleftarrow{\tilde{\kappa}^{-1}} & (T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}} \supset \Lambda_{\Phi_1} \\ \Lambda_{\Phi_2} \subset (T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}} & & \textcolor{red}{(x, \xi)} \\ \textcolor{red}{(y, \eta)} & & \end{array}$$

On souhaite maintenant quantifier ces transformations. D'abord, nous allons montrer comment on peut construire un opérateur unitaire associé à la transformation $\tilde{\kappa}$, en suivant l'article [MS03] (qui traite le cas de la dimension deux). Par soucis de complétude, nous allons rappeler la théorie en dimension un. On considère la transformation :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}^{-1} &= \bar{\kappa}_{\phi_1} \circ \kappa^{-1} \circ \bar{\kappa}_{\phi_1}^{-1} : (T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}} \longrightarrow (T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}}, \\ &(x, \xi) \longmapsto (y, \eta). \end{aligned}$$

Nous allons commencer par montrer qu'il existe une fonction Φ_2 telle que la transformation $\tilde{\kappa}^{-1}$ envoie la IR -variété Λ_{Φ_1} sur Λ_{Φ_2} .

Proposition 2.2.17 (La transformation $\tilde{\kappa}^{-1}$ envoie Λ_{Φ_1} sur Λ_{Φ_2}). *Il existe une fonction régulière Φ_2 définie sur un domaine de l'ensemble $\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}$ contenant le lacet $\bar{\kappa}_{\phi_1}(\gamma_E)$ et telle que :*

1. Φ_2 est proche de Φ_1 dans le sens de la proposition 2.2.15 ;

2. $\tilde{\kappa}^{-1}(\Lambda_{\Phi_1}) = \Lambda_{\Phi_2} = \left\{ (y, \eta) \in (T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}} ; \eta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(y) \right\}.$

Démonstration. Comme la transformation $\tilde{\kappa}^{-1}$ est la composition de trois transformations symplectiques, alors $\tilde{\kappa}^{-1}(\Lambda_{\Phi_1})$ est une IR -variété. Ensuite, en utilisant le fait que la transformation κ est proche de l'identité lorsque le paramètre ϵ est petit, on montre que $\tilde{\kappa}^{-1}(\Lambda_{\Phi_1})$ peut s'écrire sous la forme Λ_{Φ_2} avec Φ_2 une fonction régulière. De plus, comme le paramètre ϵ est petit, la transformation $\tilde{\kappa}^{-1}$ est également proche de l'identité, donc Λ_{Φ_2} est proche de Λ_{Φ_1} et on peut montrer que Λ_{Φ_2} est inclus dans $\Lambda_{\Phi_1} + W$ où W est un voisinage de $(0, 0)$ dans $(T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}}$. Ainsi, on peut réécrire la fonction Φ_2 comme somme de deux fonctions, la fonction Φ_1 et une fonction régulière f telle que la norme $\|\nabla f\|_{L^\infty}$ soit petite. De plus, on montre que la fonction f est à gradient lipschitzien et comme $\|\nabla f\|_{Lip} = \|\nabla^2 f\|_{L^\infty}$, on obtient que la norme $\|\nabla^2 f\|_{L^\infty}$ est petite. $\square$

Soit $graph(\tilde{\kappa}) = \{(x, \xi; y, \eta) \in \Lambda_{\Phi_1} \times \Lambda_{\Phi_2}; (x, \xi) = \tilde{\kappa}(y, \eta)\}$. En suivant l'article [MS03], on peut construire une fonction $\psi(x, y)$, définie au voisinage de chaque point de l'ensemble $\pi_{x,y}(graph(\tilde{\kappa}))$ (la projection de l'ensemble $graph(\tilde{\kappa})$), telle que :

1. $\psi(x, y)$ est holomorphe par rapport à x et anti-holomorphe par rapport à y sur l'ensemble $\pi_{(x,y)}(graph(\tilde{\kappa}))$;
2. $\partial_x \psi(x, y) = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x)$ et $\partial_{\bar{y}} \psi(x, y) = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{y}}(y)$, $\forall (x, y) \in \pi_{(x,y)}(graph(\tilde{\kappa}))$;
3. $\Phi_1(x) + \Phi_2(y) + \Im(\psi(x, y)) \sim \text{dist}((x, y), \pi_{(x,y)}(graph(\tilde{\kappa})))^2$.

Remarque 2.2.18. On peut considérer l'ensemble $\pi_{x,y}(graph(\tilde{\kappa}))$ car les espaces Λ_{Φ_1} et Λ_{Φ_2} sont paramétrés par x et y respectivement, ainsi le produit $\Lambda_{\Phi_1} \times \Lambda_{\Phi_2}$ est paramétré par le couple (x, y) . Par conséquent $\pi_{x,y}(graph(\tilde{\kappa}))$ est une sous-variété régulière de $\pi_{x,y}(\Lambda_{\Phi_1} \times \Lambda_{\Phi_2})$.

D'après les conditions 1. et 2. on a :

$$d\psi = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x) dx + \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{y}}(y) d\bar{y} \quad \text{sur } \pi_{(x,y)}(graph(\tilde{\kappa})).$$

Si on restreint la fonction ψ à l'espace $\pi_{(x,y)}(graph(\tilde{\kappa}))$ et qu'on l'identifie à une fonction sur $graph(\tilde{\kappa})$, on obtient :

$$d\left(\psi|_{graph(\tilde{\kappa})}\right) = \xi dx - \bar{\eta} d\bar{y} \quad \text{pour } (x, \xi; y, \eta) \in graph(\tilde{\kappa}).$$

On veut étudier la continuité analytique de la fonction ψ le long d'un lacet γ dans $graph(\tilde{\kappa})$.

D'abord, on remarque que :

$$\begin{aligned}\Im(\xi dx)|_{\Lambda_{\Phi_1}} &= \Im\left(\frac{2}{i}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}dx\right), \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{2}{i}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}dx - \overline{\frac{2}{i}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}dx}\right), \\ &= -\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi_1}{\partial\bar{x}}d\bar{x}\right), \\ &= -d\Phi_1,\end{aligned}$$

donc la forme $\Im(\xi dx)|_{\Lambda_{\Phi_1}}$ est exacte. De même la forme $\Im(\bar{\eta}d\bar{y})|_{\Lambda_{\Phi_2}}$ est exacte. Soit $\hat{\gamma} = \{(\tilde{\kappa}(\rho), \rho); \rho \in \gamma\}$ où γ est un lacet dans Λ_{Φ_2} . On a :

$$\begin{aligned}\int_{\hat{\gamma}} d\psi &= \int_{(\tilde{\kappa} \circ \gamma, \gamma)} (\xi dx - \bar{\eta}d\bar{y}), \\ &= \int_{\tilde{\kappa} \circ \gamma} \xi dx - \int_{\gamma} \bar{\eta}d\bar{y}, \\ &= \int_{\tilde{\kappa} \circ \gamma} (\Re(\xi dx) + i\Im(\xi dx)) - \int_{\gamma} (\Re(\bar{\eta}d\bar{y}) + i\Im(\bar{\eta}d\bar{y})), \\ &= \int_{\tilde{\kappa} \circ \gamma} \Re(\xi dx) - \int_{\gamma} \Re(\eta dy), \\ &=: -J(\gamma).\end{aligned}$$

Ainsi le long d'un lacet la fonction ψ change d'une constante réelle puisque c'est la différence de deux intégrales d'actions réelles. On appelle cette différence une indice de Floquet, ce nombre dépend de la transformation $\tilde{\kappa}$ et de la classe d'homotopie du lacet γ .

Introduisons maintenant de nouvelles notations.

Notations:

– $L^2_J(\mathbb{S}^1)$ est l'espace des fonctions mesurables et Floquet-périodiques f telles que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty,$$

où la condition de Floquet-périodicité est la suivante :

$$f(x + 2\pi) = e^{-(i/\hbar)J} f(x);$$

– $L^2_J(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi)$ est l'espace des fonctions multivaluées Floquet-périodiques f telles que :

$$\int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(z)|^2 e^{-2\Phi(z)/\hbar} L(dz) < +\infty,$$

où $z = x + iy \in \mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}$;

– $H_J(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi)$ est l'espace des fonctions holomorphes appartenant à l'espace $L_J^2(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi)$.

Nous pouvons maintenant quantifier la transformation $\tilde{\kappa}$.

Proposition 2.2.19 (Quantification de la transformation $\tilde{\kappa}$). *Soit A l'opérateur défini par l'intégrale suivante :*

$$Au(x) = \frac{1}{\hbar} \int_{\mathbb{C}} e^{(i/\hbar)\psi(x,y)} a(x,y) \chi(x,y) u(y) e^{-(2/\hbar)\Phi_2(y)} L(dy),$$

où $a(x,y)$ est un symbole tel que :

1. $a(x,y) \sim \sum a_j(x,y) \hbar^j$ dans l'espace de fonctions $\mathcal{C}^\infty(\text{Vois}(\pi_{(x,y)}(\text{graph}(\tilde{\kappa})))$;
2. $a_j \in \mathcal{C}^\infty$;
3. $\partial_{\bar{x}} a_j = \mathcal{O}((\text{dist}((x,y), \pi_{(x,y)} \text{graph}(\tilde{\kappa})))^\infty + \hbar^\infty)$;
4. $\partial_y a_j = \mathcal{O}((\text{dist}((x,y), \pi_{(x,y)} \text{graph}(\tilde{\kappa})))^\infty + \hbar^\infty)$;
5. a est elliptique, i.e. a_0 ne s'annule pas ;

et où χ est une fonction de troncature égale à 1 dans un voisinage de $\pi_{(x,y)}(\text{graph}(\tilde{\kappa}))$. Soit $U \subset \Lambda_{\Phi_2}$ et soit $V \subset \Lambda_{\Phi_1}$ tels que $\tilde{\kappa}(U) = V$. Alors :

1. $A = L_h^2(\pi(U), e^{-2\Phi_2/\hbar} L(dy)) \longrightarrow L_J^2(\pi(V), e^{-2\Phi_1/\hbar} L(dx))$ est un opérateur borné ;
2. $\|(\bar{\partial} \circ A)u\|_{L_h^2(\Phi_1)} \leq \mathcal{O}(\hbar^\infty) \|u\|_{L_h^2(\Phi_2)}$.

Démonstration. Nous donnons ci-dessous un résumé des grandes étapes de la démonstration de cette proposition qui se trouve dans [MS03].

Étape 1 : on montre que pour $u \in L_h^2(\pi(U), e^{-2\Phi_2/\hbar} L(dy))$, $Au(x)$ est une fonction Floquet-périodique en utilisant le fait que :

$$\int_{\tilde{\gamma}} d\psi = -J(\gamma).$$

Étape 2 : on montre que si $u \in L_h^2(\pi(U), e^{-2\Phi_2/\hbar} L(dy))$, alors $Au \in L_J^2(\pi(V), e^{-2\Phi_1/\hbar} L(dx))$ en utilisant la condition 3. sur la fonction ψ et le lemme de la phase stationnaire.

Étape 3 : on montre que $\|(\bar{\partial} \circ A)u\|_{L_h^2} \leq \mathcal{O}(\hbar^\infty) \|u\|_{L_h^2}$ en exprimant $\bar{\partial} \circ A$ par dérivation sous le signe intégral (qui est légale en utilisant les hypothèses 3. et 4. sur le symbole a et l'hypothèse 1. sur la fonction ψ), puis en estimant cette intégrale avec le lemme de la phase stationnaire (et l'hypothèse 3. sur la fonction ψ). $\square$

Remarque 2.2.20. Soit A^* l'adjoint de l'opérateur A . Alors, cet opérateur A^* est associé à la transformation $\tilde{\kappa}^{-1}$ et on peut choisir le symbole a de telle sorte que, à un $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ -près (avec les notations de la proposition 2.2.19) :

- A^*A est le projecteur orthogonal $L_h^2(\pi(U), e^{-2\Phi_2/\hbar} L(dy)) \longrightarrow H_h(\pi(U), \Phi_2)$;
- AA^* est le projecteur orthogonal $L_J^2(\pi(V), e^{-2\Phi_1/\hbar} L(dx)) \longrightarrow H_J(\pi(V), \Phi_1)$.

Ainsi, on a construit un opérateur unitaire A , microlocalement défini sur les espaces $L^2(\Phi)$, associé à la transformation $\tilde{\kappa}$, qui envoie l'ensemble des fonctions holomorphes sur lui-même à un $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ -près. Nous avons également un théorème d'Egorov dans ce cadre donné par la proposition qui suit.

Proposition 2.2.21 (Théorème d'Egorov sur les espaces $H_h(\Phi)$). *Avec les notations de la proposition 2.2.19, il existe un opérateur $\text{Op}_{\Phi_1}^w(\hat{p}_h^\epsilon)$ dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ du paramètre ϵ , défini par la formule intégrale suivante :*

$$\text{Op}_{\Phi_1}^w(\hat{p}_h^\epsilon)u(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(x)} e^{(i/\hbar)(x-y)\eta} (\chi \hat{p}_h^\epsilon) \left(\frac{x+y}{2}, \eta \right) u(y) dy d\eta,$$

où $\Gamma(x) = \left\{ (y, \eta) \in (T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}}; \eta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \left(\frac{x+y}{2} \right) \right\}$ et où χ est une fonction de troncature adaptée, tel que :

1. le symbole principal $\hat{p}^\epsilon$ de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_1}^w(\hat{p}_h^\epsilon)$ satisfait l'équation $\hat{p}^\epsilon = \tilde{p}^\epsilon \circ \tilde{\kappa}^{-1}$;
2. $\text{Op}_{\Phi_1}^w(\hat{p}_h^\epsilon)A = A\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ et $A^*\text{Op}_{\Phi_1}^w(\hat{p}_h^\epsilon) = \text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)A^*$ à un $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ -près au sens où :

$$\begin{aligned} \|(\text{Op}_{\Phi_1}^w(\hat{p}_h^\epsilon)A - A\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon))u\|_{L^2_h(\tilde{V}, \Phi_1)} &\leq \mathcal{O}(\hbar^\infty)\|u\|_{H_h(U, \Phi_2)}, \\ \|(A^*\text{Op}_{\Phi_1}^w(\hat{p}_h^\epsilon) - \text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)A^*)u\|_{L^2_h(\tilde{U}, \Phi_2)} &\leq \mathcal{O}(\hbar^\infty)\|u\|_{H_J(V, \Phi_1)}, \end{aligned}$$

où $\tilde{V}$ est un sous-ensemble compact de $\pi(V)$ et $\tilde{U}$ en est un de $\pi(U)$.

Démonstration. Nous résumons les étapes de la démonstration de cette proposition qu'on pourra consulter dans l'article [MS03].

Étape 1 : l'existence d'un opérateur $\text{Op}_{\Phi_1}^w(\hat{p}_h^\epsilon)$ de symbole principal $\hat{p}^\epsilon = \tilde{p}^\epsilon \circ \tilde{\kappa}^{-1}$ et tel que à un $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ -près, il satisfait les relations suivantes :

$$\text{Op}_{\Phi_1}^w(\hat{p}_h^\epsilon)A = A\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) \quad \text{et} \quad A^*\text{Op}_{\Phi_1}^w(\hat{p}_h^\epsilon) = \text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)A^*,$$

est assurée par la proposition 2.2.19.

Étape 2 : la formule intégrale de cet opérateur se déduit d'un calcul. □

Précédemment, on a défini un opérateur $T_{\phi_1} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow H_h(\mathbb{C}, \Phi_1)$ associé à la transformation canonique κ_{ϕ_1} . On souhaite maintenant construire un opérateur agissant sur les espaces de Floquet et associé à la transformation canonique $\bar{\kappa}_{\phi_1}$, autrement dit on cherche un opérateur B tel que :

$$B : H_J(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_1) \longrightarrow L^2_J(\mathbb{S}^1).$$

On introduit pour ce faire quelques notations.

Notation : on note k_h le noyau de la transformée de FBI $T_{\phi_1} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow H_h(\mathbb{C}, \Phi_1)$ associée à la fonction ϕ_1 , *i.e.* pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$:

$$T_{\phi_1} u(z) = c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-(1/2\hbar)(z-x)^2} u(x) dx = \int_{\mathbb{R}} k_h(z-x) u(x) dx,$$

avec $c_{\phi_1} \geq 0$ la constante donnée dans la définition 2.2.10.

L'adjoint complexe $T_{\phi_1}^* : L_h^2(\mathbb{C}, \Phi_1) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ peut également se réécrire sous la forme suivante pour tout $v \in L_h^2(\mathbb{C}, \Phi_1)$:

$$\begin{aligned} T_{\phi_1}^* v(x) &= c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{C}} e^{-(1/2\hbar)(\bar{z}-\bar{x})^2} e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} v(z) L(dz), \\ &= \int_{\mathbb{C}} \overline{k_h(z-x)} e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} v(z) L(dz). \end{aligned}$$

Dans la suite, on identifie les fonctions de l'espace $L_J^2(\mathbb{S}^1)$ avec des fonctions localement de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et Floquet-périodiques et on fait de même pour les fonctions de l'espace $H_J(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_1)$.

Proposition 2.2.22 (Quantification de la transformation $\bar{\kappa}_{\phi_1}$).

1. La transformée de Bargmann T_{ϕ_1} induit un opérateur $B^* : L_J^2(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H_J(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_1)$ donné par la formule suivante :

$$B^* u(z) = \int_{\mathbb{R}} k_h(z-x) u(x) dx = \int_{\mathcal{E}} \sum_{\nu \in 2\pi\mathbb{Z}} k_h(z-x+\nu) e^{(i/2\pi\hbar)J\nu} u(x) dx,$$

où $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ est un domaine fondamental pour le réseau $2\pi\mathbb{Z}$.

2. L'adjoint complexe de l'opérateur B^* est défini quant à lui par :

$$\begin{aligned} Bv(x) &= \int_{\mathcal{E}+i\mathbb{R}} \sum_{\nu \in 2\pi\mathbb{Z}} \overline{k_h(z-x+\nu)} e^{(i/2\pi\hbar)J\nu} e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} v(z) L(dz), \\ &= \int_{\mathbb{C}} \overline{k_h(z-x)} e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} v(z) L(dz). \end{aligned}$$

Ainsi le noyau de l'opérateur B coïncide avec le noyau de $T_{\phi_1}^*$ l'adjoint de la transformée de FBI.

Démonstration. Nous donnons un résumé des étapes de la démonstration de cette proposition qu'on trouve dans l'article [MS03].

Étape 1 : on montre que pour u une fonction Floquet-périodique, la fonction B^*u est aussi Floquet-périodique par un changement de variable dans l'intégrale.

Étape 2 : on montre la formule suivante :

$$B^* u(z) = \int_{\mathcal{E}} \sum_{\nu \in 2\pi\mathbb{Z}} k_h(z-x+\nu) e^{(i/2\pi\hbar)J\nu} u(x) dx,$$

en utilisant l'égalité $B^*u(x + \nu) = e^{-(i/\hbar)J\nu}B^*u(x)$ puis en remarquant qu'intégrer sur $\mathbb{R}$ revient à intégrer sur le domaine $\mathcal{E}$ puis à translater l'intégrale par le réseau.

Étape 3 : on exploite ce qu'on a fait dans les étapes précédentes pour montrer les formules sur l'adjoint B . $\square$

Comme la transformée de FBI T_{ϕ_1} est une transformation unitaire d'après la proposition 2.2.11, alors on en déduit que B^* est également un opérateur unitaire.

Proposition 2.2.23 (La transformée B^* est unitaire).

1. $BB^* = \text{id}$ sur $L_J^2(\mathbb{S}^1)$;
2. $B^*B = \text{id}$ sur $H_J(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_1)$.

Démonstration. Nous résumons ici les grandes étapes de la démonstration de cette proposition. Une démonstration plus détaillée de ce résultat se trouve dans l'article [MS03].

Étape 1 : $BB^* = \text{id}$ sur $L_J^2(\mathbb{S}^1)$ découle directement de l'égalité : $T_{\phi_1}^*T_{\phi_1} = \text{id}$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

Étape 2 : $B^*B = \text{id}$ sur $H_J(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_1)$. La démonstration de cette égalité est plus complexe, pour commencer on montre que pour $v \in L_h^2(\mathbb{C}, e^{-2\Phi_1(w)/\hbar}L(dw))$, on a :

$$T_{\phi_1}T_{\phi_1}^*v(x) = C\hbar^{-1} \int_{\mathbb{C}} e^{(2/\hbar)\psi_1(x,w)} e^{-(2/\hbar)\Phi_1(w)} v(w) L(dw),$$

où $\psi_1(x, w) = -\frac{1}{8}(x - \bar{w})^2$ et où C est une constante indépendante de $\hbar$, pour en déduire l'inégalité suivante pour $v \in L_h^2(\mathbb{C}, e^{-2\Phi_1(w)/\hbar}L(dw))$:

$$\|T_{\phi_1}T_{\phi_1}^*v\|_{H_h}^2 \leq C^2\hbar^{-2}\|v\|_{L_h^2}^2 \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} e^{-(1/2\hbar)|x-w|^2} L(dw)L(dx) < +\infty.$$

À partir de là, on considère $u \in H_J(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_1)$ normalisé et on montre qu'on peut approcher la fonction u par une suite de fonctions $(u_R)_{R \geq 1} \in H_h(\mathbb{C}, \Phi_1)$ telle que :

1. $\|u_R\|_{H_h(\mathbb{C}, \Phi_1)} = \mathcal{O}_h(1)R$;
2. $\|u - u_R\|_{L_h^2(B(0, R/4), \Phi_1)} = \mathcal{O}_h(1)e^{-R^2/C_0\hbar}$ avec $C_0 > 0$ une constante.

La fonction u_R est donnée par la formule suivante pour $x \in \mathbb{C}$:

$$u_R(x) = \left(g(x) \star \chi\left(\frac{x}{R}\right)\right) \chi\left(\frac{x}{R}\right) u(x),$$

avec :

- $g(x) = e^{-(C/\hbar)x^2}$ où $C > 0$ est une constante qu'on peut choisir comme cela nous arrange ;
- $\chi\left(\frac{x}{R}\right)$ une fonction de troncature qui vaut 1 sur la boule $B\left(0, \frac{R}{2}\right)$ et 0 en dehors de la boule $B(0, R)$.

Ensuite, comme $u_R \in H_h(\mathbb{C}, \Phi_1)$, alors $T_{\phi_1}T_{\phi_1}^*u_R = u_R$ et on en déduit que $B^*Bu = u$. $\square$

On a également un théorème d'Egorov dans le cadre des espaces de fonctions Floquet-périodiques qu'on peut déduire de la proposition 2.2.13.

Proposition 2.2.24 (Opérateur pseudo-différentiel agissant sur $H_J(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_1)$). *Soit $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ un opérateur pseudo-différentiel agissant sur l'espace $L_J^2(\mathbb{S}^1)$ et satisfaisant les hypothèses (A') à (D'). Soit $\text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) = B^* \circ \text{Op}^w(p_h^\epsilon) \circ B$. Alors :*

1. $\text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) : H_J(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_1, \tilde{m}) \longrightarrow H_J(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_1)$ est uniformément borné par rapport au paramètre semi-classique $\hbar$ et au petit paramètre ϵ (pour $\hbar < 1$ et $\epsilon < \epsilon_0$ où ϵ_0 est un réel positif fixé) et $\tilde{m} = m \circ \bar{\kappa}_{\phi_1}^{-1}$ est une fonction d'ordre sur l'ensemble :

$$\Lambda_{\Phi_1} = \left\{ (y, \eta) \in (T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}}; \eta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(y) = -\Im(y) \right\};$$

2. $\text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ est donné par la formule intégrale suivante :

$$\text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)u(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(x)} e^{(i/\hbar)(x-y)\eta} \tilde{p}_h^\epsilon\left(\frac{x+y}{2}, \eta\right) u(y) dy d\eta,$$

où $\Gamma(x) = \left\{ (y, \eta) \in (T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}}; \eta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\left(\frac{x+y}{2}\right) = -\Im\left(\frac{x+y}{2}\right) \right\}$ et où le symbole $\tilde{p}_h^\epsilon$ est donné par $\tilde{p}_h^\epsilon = p_h^\epsilon \circ \bar{\kappa}_{\phi_1}^{-1}$.

Proposition 2.2.25 (Opérateur pseudo-différentiel sur l'espace $H_J(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2)$). *Avec les notations de la proposition 2.2.24, soit Φ_2 une fonction de classe $\mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}; \mathbb{R})$ proche de Φ_1 dans le sens où $\Phi_2 = \Phi_1 + f$ avec $f \in \mathcal{C}_0^{1,1}(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}; \mathbb{R})$ une fonction telle que les normes $\|\nabla f\|_{L^\infty}$ et $\|\nabla^2 f\|_{L^\infty}$ soient suffisamment petites.*

Alors $\text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) : H_J(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2, \tilde{m}) \longrightarrow H_J(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2)$ est uniformément borné par rapport au paramètre semi-classique $\hbar$ et au paramètre ϵ (pour $\hbar < 1$ et $\epsilon < \epsilon_0$ où ϵ_0 est un réel positif fixé).

Pour résumer, on a le diagramme suivant (avec les notations des propositions 2.2.19 et 2.2.24) :

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{S}^1) & \xrightarrow{\quad} & L_J^2(\mathbb{S}^1) \\ B^* \downarrow & & \downarrow B^* \\ H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_1) & \xrightarrow{A} & H_J(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_1) \\ H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2) & & \end{array}$$

En appliquant la proposition 2.2.25 à l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ agissant sur $L^2(\mathbb{S}^1)$ on obtient un opérateur :

$$\text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) = B^* \text{Op}^w(p_h^\epsilon) B : H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2) \longrightarrow H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2).$$

On rappelle que l'opérateur A est associé à la transformation $\tilde{\kappa} : \Lambda_{\Phi_2} \longmapsto \Lambda_{\Phi_1}$ et que l'opérateur B est associé à la transformation $\bar{\kappa}_{\phi_1}^{-1} : \Lambda_{\Phi_1} \longmapsto \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Ainsi la transformation $\bar{\kappa}_{\phi_1}^{-1} \circ \tilde{\kappa}$ envoie l'ensemble Λ_{Φ_2} sur l'ensemble $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Par conséquent, on obtient un théorème d'Egorov car si on pose $\tilde{U}_0 = BA$, on a une équivalence entre un opérateur pseudo-différentiel agissant sur l'espace $H_h(\pi(U), \Phi_2)$ et un opérateur pseudo-différentiel

microlocalement défini dans un voisinage de $\tilde{I} = cst$ dans $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ et agissant sur l'espace $L_J^2(\mathbb{S}^1)$. Autrement dit, microlocalement on a :

$$\tilde{U}_0 \text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) = \text{Op}^w(g^\epsilon) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \tilde{U}_0 + \mathcal{O}(\hbar),$$

où g^ϵ est la fonction donnée par la proposition 2.2.5 et où $\text{Op}^w(g^\epsilon)$ est la quantification de Weyl du symbole $g^\epsilon(\tilde{I})$ sur l'espace $L_J^2(\mathbb{S}^1)$.

On peut résumer ce qu'on a fait dans ce paragraphe par la proposition qui suit.

Proposition 2.2.26 (Quantification de la transformation $\bar{\kappa}_{\phi_1}^{-1} \circ \tilde{\kappa}$). *Il existe un opérateur $\tilde{U}_0 : H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2) \longrightarrow L_J^2(\mathbb{S}^1)$ tel que :*

1. $\tilde{U}_0$ est uniformément borné par rapport au paramètre semi-classique $\hbar$;
2. $\tilde{U}_0$ est concentré sur $\overline{\text{graph}(\bar{\kappa}_{\phi_1}^{-1} \circ \tilde{\kappa})}$;
3. $\tilde{U}_0$ est microlocalement unitaire dans le sens suivant :
 - (a) pour toute fonction $\chi_1 \in \mathcal{C}_0^\infty(\text{Vois}(\tilde{I} = cst; \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}))$ indépendante du paramètre $\hbar$, on a :

$$(\tilde{U}_0 \tilde{U}_0^* - \text{id}) \text{Op}^w(\chi_1) = \mathcal{O}(\hbar^\infty) : L_J^2(\mathbb{S}^1) \longrightarrow L_J^2(\mathbb{S}^1);$$

- (b) pour toute fonction $\chi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(\text{Vois}(\pi(U); \Lambda_{\Phi_2}))$ indépendante du paramètre $\hbar$, on a :

$$(\tilde{U}_0^* \tilde{U}_0 - \text{id}) \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi_2) : L_h^2(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2) \longrightarrow L_h^2(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2);$$

où $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi_2)$ désigne la quantification complexe du symbole χ_2 qui est définie par la formule intégrale de la proposition 2.2.24 en remplaçant le contour d'intégration par celui qui suit :

$$\Gamma(x) = \left\{ (y, \eta) \in (T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}}; \eta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \left(\frac{x+y}{2} \right) + \frac{i}{C} \frac{\overline{x-y}}{\langle x-y \rangle} \right\}.$$

4. microlocalement, on a :

$$\tilde{U}_0 \text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) = \text{Op}^w(g^\epsilon) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \tilde{U}_0 + \mathcal{O}(\hbar),$$

où g^ϵ est une fonction analytique dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ du paramètre ϵ et dont la réciproque est l'intégrale d'action $E \longmapsto \tilde{I}(E)$. Plus précisément, cela signifie :

$$\begin{cases} \text{Op}^w(\chi_1) \left(\tilde{U}_0 \text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - \text{Op}^w(g^\epsilon) \tilde{U}_0 \right) = \mathcal{O}(\hbar), \\ \left(\tilde{U}_0 \text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - \text{Op}^w(g^\epsilon) \tilde{U}_0 \right) \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi_2) = \mathcal{O}(\hbar); \end{cases}$$

où les symboles χ_1 et χ_2 sont choisis comme dans l'assertion 3.

On peut améliorer la proposition précédente en utilisant une méthode itérative et ainsi obtenir la proposition qui suit.

Proposition 2.2.27 (Quantification de la transformation $\bar{\kappa}_{\phi_1}^{-1} \circ \tilde{\kappa}$). *Il existe un opérateur microlocalement unitaire $\tilde{U} : H_{\hbar}(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2) \longrightarrow L_J^2(\mathbb{S}^1)$ tel que microlocalement, on a :*

$$\tilde{U} \text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) = \text{Op}^w(g_h^\epsilon) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \tilde{U} + \mathcal{O}(\hbar^\infty),$$

où g_h^ϵ est une fonction analytique admettant un développement asymptotique en puissances du paramètre semi-classique $\hbar$, dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ du petit paramètre ϵ et dont le premier terme du développement asymptotique g^ϵ est la réciproque de l'intégrale d'action $E \longmapsto \tilde{I}(E)$.

Démonstration. Soit $\tilde{U}_0$ l'opérateur défini dans la proposition 2.2.26, si on note $S_0 := \text{Op}^w(g^\epsilon)$, alors on a :

$$\tilde{U}_0 \text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) = S_0 \tilde{U}_0 + \mathcal{O}(\hbar) =: (S_0 + \hbar R_1) \tilde{U}_0. \quad (\text{E2.3})$$

Nous allons modifier l'opérateur $\tilde{U}_0$ pour obtenir le résultat. Plus précisément, on cherche d'abord un opérateur unitaire V tel que :

$$V(\tilde{U}_0 \text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)) = (S_0 + \hbar S_1) V \tilde{U}_0 + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad (\text{E2.4})$$

avec $S_1 = \text{Op}^w(g_1^\epsilon) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$ et où g_1^ϵ est une fonction à déterminer. D'après les équations (E2.3) et (E2.4), on veut que l'opérateur V satisfasse l'équation suivante :

$$V(\tilde{U}_0 \text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)) = V(S_0 \tilde{U}_0 + \hbar R_1 \tilde{U}_0) = (S_0 + \hbar S_1) V \tilde{U}_0 + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

On peut réécrire cette équation comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} V S_0 \tilde{U}_0 + \hbar V R_1 \tilde{U}_0 &= S_0 V \tilde{U}_0 + \hbar S_1 V \tilde{U}_0 + \mathcal{O}(\hbar^2), \\ V S_0 - S_0 V &= \hbar S_1 V - \hbar V R_1 + \mathcal{O}(\hbar^2), \\ [V, S_0] &= \hbar S_1 V - \hbar V R_1 + \mathcal{O}(\hbar^2). \end{aligned}$$

En terme de symboles principaux, cela signifie :

$$\frac{1}{i} \{v(\tilde{\theta}, \tilde{I}), s_0(\tilde{\theta}, \tilde{I})\} = v(\tilde{\theta}, \tilde{I})(s_1(\tilde{\theta}, \tilde{I}) - r_1(\tilde{\theta}, \tilde{I})) \quad \text{pour } (\tilde{\theta}, \tilde{I}) \in (T^*\mathbb{S}^1)_{\mathbb{C}}.$$

Soit $v = e^{ia}$, alors on a :

$$\frac{1}{i} \{v, s_0\} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial e^{ia}}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial s_0}{\partial \tilde{I}} - \frac{\partial e^{ia}}{\partial \tilde{I}} \frac{\partial s_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) = \frac{1}{i} e^{ia} \left(\frac{\partial a}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial s_0}{\partial \tilde{I}} - \frac{\partial a}{\partial \tilde{I}} \frac{\partial s_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) = e^{ia} \{a, s_0\}.$$

Donc $e^{ia}\{a, s_0\} = e^{ia}(s_1 - r_1)$, i.e. $\{a, s_0\} = s_1 - r_1$. De plus, on sait que $s_0 = g^\epsilon(\tilde{I})$, donc :

$$s_1 - r_1 = \{a, g^\epsilon(\tilde{I})\} = \frac{\partial a}{\partial \tilde{\theta}} \frac{dg^\epsilon}{d\tilde{I}} \quad i.e. \quad \frac{\partial a}{\partial \tilde{\theta}} = \left(\frac{dg^\epsilon}{d\tilde{I}} \right)^{-1} (s_1 - r_1). \quad (\text{E2.5})$$

Comme $\{a, s_0\} = s_1 - r_1$, alors :

$$s_1 = \frac{1}{2\pi} \int r_1 d\tilde{\theta}. \quad (\text{E2.6})$$

Par conséquent, on peut déterminer la fonction s_1 en utilisant l'équation (E2.6) et $\partial_{\tilde{\theta}} a$ en utilisant l'équation (E2.5). Ensuite, comme $\int \partial_{\tilde{\theta}} a d\tilde{\theta} = 0$, on peut définir la fonction a . On obtient ainsi :

$$(V\tilde{U}_0)\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) =: \left(\text{Op}^w(g^\epsilon + \hbar g_1^\epsilon) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \hbar^2 R_2 \right) (V\tilde{U}_0).$$

On réitère ensuite ce processus avec l'opérateur $W = Id + \hbar V$ ce qui donne le résultat. $\square$

2.2.2.3 Spectre et problèmes de Grushin

Nous allons maintenant déterminer le spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ à l'aide du spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(g_h^\epsilon)$ et de celui de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$. Nous commençons par faire un lien entre le spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ et le spectre de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$.

Remarque 2.2.28. Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert. Soient $P_h : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ et $\tilde{P}_h : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ des opérateurs pseudo-différentiels. Soit $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ un opérateur unitaire tel que $P_h = U^* \tilde{P}_h U$. Alors $\sigma(P_h) = \sigma(\tilde{P}_h)$.

On peut déduire de la remarque 2.2.28 un lien entre le spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ et celui de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$.

Proposition 2.2.29 (Spectre de $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ et spectre de $\text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$). Soient $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ et $\text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ les opérateurs pseudo-différentiels définis précédemment.

Alors on a : $\sigma(\text{Op}^w(p_h^\epsilon)) = \sigma(\text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{p}_h^\epsilon))$.

Démonstration. Il existe un opérateur unitaire $B^* : L^2(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_1)$ tel que $\text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) = B^* \text{Op}^w(p_h^\epsilon) B$, par conséquent le spectre de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ est égal au spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$. $\square$

On souhaite maintenant décrire le spectre de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ en utilisant la connaissance qu'on a du spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(g_h^\epsilon)$. Pour ce faire, on suit les méthodes utilisées dans les articles [HS04, MS03] sauf que dans notre cas, l'opérateur $\text{Op}^w(g_h^\epsilon)$ obtenu par conjugaison à partir de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ est plus facile à manipuler. Plus précisément, on veut déterminer le spectre de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ dans le rectangle suivant :

$$R_{C, \epsilon_0} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |\Re(z) - E_0| < \frac{1}{C}, |\Im(z)| < \frac{\epsilon_0}{C} \right\},$$

pour $E_0 \in \mathbb{R}$, où $\epsilon_0 > 0$ est un paramètre fixé suffisamment petit. Nous allons donc utiliser de l'analyse micro-locale dans un voisinage de $\{\tilde{p}_h^\epsilon = E\}$ où $E \in R_{C, \epsilon_0}$.

Notations:

- $\tilde{\Lambda}_E^\epsilon = \{(y, \eta) \in \Lambda_{\Phi_2}; \tilde{p}^\epsilon(y, \eta) = p^\epsilon \circ \bar{\kappa}_{\phi_1}^{-1}(y, \eta) = E\}$ (où la fonction Φ_2 est telle que l'ensemble de niveau $\tilde{\Lambda}_E^\epsilon$ contient $\bar{\kappa}_{\phi_1}(\Lambda_E^\epsilon)$);
- soit $I_0 \in \mathbb{R}$ la constante telle que $(\bar{\kappa}_{\phi_1}^{-1} \circ \tilde{\kappa})(\tilde{\Lambda}_{E_0}) = \{\tilde{I} = I_0\}$ où :

$$\tilde{\Lambda}_{E_0} = \{(y, \eta) \in \Lambda_{\Phi_1}; \tilde{p}^\epsilon(y, \eta)|_{\epsilon=0} = E_0\}.$$

On considère l'ensemble des quasi-valeurs propres pour l'opérateur $\text{Op}^w(g_h^\epsilon)$, *i.e.* :

$$\Sigma(\epsilon, \hbar) = \left\{ g_h^\epsilon \left(\hbar k - \frac{J}{2\pi} \right), k \in \mathbb{Z} \right\} \cap R_{C, \epsilon_0}.$$

Tout d'abord, on peut estimer la distance entre deux éléments de l'ensemble $\Sigma(\epsilon, \hbar)$. En effet, soit $z = g_h^\epsilon \left(\hbar k - \frac{J}{2\pi} \right)$ et soit $\tilde{z} = g_h^\epsilon \left(\hbar l - \frac{J}{2\pi} \right)$ avec $k, l \in \mathbb{Z}$ et $k \neq l$. On suppose que $z, \tilde{z} \in \Sigma(\epsilon, \hbar)$. Alors :

$$|z - \tilde{z}| \geq \frac{\hbar |k - l|}{\mathcal{O}(1)}.$$

Soit :

$$\delta_h = \frac{1}{4} \inf_{k \neq l} \text{dist} \left(g_h^\epsilon \left(\hbar k - \frac{J}{2\pi} \right), g_h^\epsilon \left(\hbar l - \frac{J}{2\pi} \right) \right) > \frac{\hbar}{\mathcal{O}(1)};$$

et considérons la famille de disques ouverts suivante :

$$\Omega_k(\hbar) = \left\{ z \in R_{C, \epsilon_0}; \left| z - g_h^\epsilon \left(\hbar k - \frac{J}{2\pi} \right) \right| < \delta_h \right\}.$$

Remarque 2.2.30. *Les ensembles $\Omega_k(\hbar)$ sont disjoints (car la distance entre deux éléments de l'ensemble $\Sigma(\epsilon, \hbar)$ est supérieure à δ_h).*

On souhaite montrer que le spectre de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ dans le rectangle R_{C, ϵ_0} est contenu dans l'union des disques $\Omega_k(\hbar)$. Par conséquent, on considère l'équation suivante pour $z \in R_{C, \epsilon_0}$:

$$(\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z)u = v \quad \text{avec } u, v \in H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2). \quad (\text{E2.7})$$

On rappelle que la fonction Φ_2 est définie localement dans un voisinage du lacet $\bar{\kappa}_{\phi_1}(\gamma_E)$ dans la proposition 2.2.17. On étend maintenant cette fonction sur $\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}$ de telle sorte qu'elle reste proche de la fonction Φ_1 et égale à Φ_1 en dehors d'un voisinage de $\bar{\kappa}_{\phi_1}(\gamma_E)$.

On peut déjà montrer une première propriété sur le spectre de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ concernant la localisation des valeurs propres.

Proposition 2.2.31 (Propriété de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$). *En dehors d'un petit voisinage de l'ensemble de niveau $\tilde{\Lambda}_E^\epsilon$ dans l'ensemble Λ_{Φ_2} , il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$|\Re(\tilde{p}_h^\epsilon(y, \eta) - E)| > \frac{1}{C}.$$

Démonstration. Tout d'abord, montrons qu'en dehors d'un petit voisinage de l'ensemble de niveau $\tilde{\Lambda}_E^\epsilon$ dans l'ensemble Λ_{Φ_2} , il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|\tilde{p}_h^\epsilon(y, \eta) - E| > \frac{1}{C}.$$

Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_E^\epsilon &= \{(y, \eta) \in \Lambda_{\Phi_2}; \tilde{p}^\epsilon(y, \eta) = E\}, \\ &= \{(y, \eta) \in \Lambda_{\Phi_2}; |\tilde{p}^\epsilon(y, \eta) - E| = 0\}. \end{aligned}$$

Donc, pour $(y, \eta) \notin V$ un petit voisinage de $\tilde{\Lambda}_E^\epsilon$ dans Λ_{Φ_2} , il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :

$$|\tilde{p}^\epsilon(y, \eta) - E| > \frac{1}{C_1}.$$

De plus, d'après l'hypothèse (D'), pour $(y, \eta) \in \Lambda_{\Phi_2}$, on a :

$$|\tilde{p}^\epsilon(y, \eta)| \geq \frac{1}{C} \tilde{m}(\Re(\eta)), \quad \text{pour } |y, \eta| \geq C.$$

Soit $K = \{(y, \eta) \in \Lambda_{\Phi_2}; |(y, \eta)| \leq C\}$. On suppose que l'ensemble K est tel que pour $(y, \eta) \notin K$, on a : $|E| \leq \frac{1}{2C} \tilde{m}(\Re(\eta))$. On distingue deux cas :

– soit $(y, \eta) \notin V$ et $(y, \eta) \in K$, alors par continuité :

$$\frac{|\tilde{p}^\epsilon(y, \eta) - E|}{\tilde{m}(\Re(\eta))} \neq 0,$$

donc il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\frac{|\tilde{p}^\epsilon(y, \eta) - E|}{\tilde{m}(\Re(\eta))} \geq \frac{1}{C} \quad \text{i.e.} \quad |\tilde{p}^\epsilon(y, \eta) - E| \geq \frac{1}{C} \tilde{m}(\Re(\eta));$$

– soit $(y, \eta) \notin V$ et $(y, \eta) \notin K$, alors par ellipticité, on a :

$$|\tilde{p}^\epsilon(y, \eta)| \geq \frac{1}{C} \tilde{m}(\Re(\eta)),$$

donc :

$$|\tilde{p}^\epsilon(y, \eta) - E| \geq |\tilde{p}^\epsilon(y, \eta)| - |E| \geq \frac{1}{C} \tilde{m}(\Re(\eta)) - \frac{1}{2C} \tilde{m}(\Re(\eta)) = \frac{1}{2C} \tilde{m}(\Re(\eta)).$$

Par conséquent, pour $(y, \eta) \notin V$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|\tilde{p}^\epsilon(y, \eta) - E| \geq \frac{1}{2C} \tilde{m}(\Re(\eta)).$$

On note $\tilde{r}_h^\epsilon$ la fonction telle que $\tilde{p}_h^\epsilon(y, \eta) = \tilde{p}^\epsilon(y, \eta) + \hbar \tilde{r}_h^\epsilon(y, \eta)$. Ainsi, pour $(y, \eta) \notin V$, on a :

$$\begin{aligned} |\tilde{p}_h^\epsilon(y, \eta) - E| &= |\tilde{p}_h^\epsilon(y, \eta) - \tilde{p}^\epsilon(y, \eta) + \tilde{p}^\epsilon(y, \eta) - E|, \\ &\geq |\tilde{p}^\epsilon(y, \eta) - E| - |\tilde{p}_h^\epsilon(y, \eta) - \tilde{p}^\epsilon(y, \eta)|, \\ &\geq \frac{1}{2C} \tilde{m}(\Re(\eta)) - |\hbar r_h^\epsilon(y, \eta)|, \\ &\geq \frac{1}{2C} \tilde{m}(\Re(\eta)) - \hbar C \tilde{m}(\Re(\eta)) \quad \text{d'après l'hypothèse (C')}, \\ &= \left(\frac{1}{2C} - \hbar C \right) \tilde{m}(\Re(\eta)). \end{aligned}$$

Donc, pour $(y, \eta) \notin V$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|\tilde{p}_h^\epsilon(y, \eta) - E| > \frac{1}{C}.$$

Soit $U = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z - E| < \frac{1}{C} \right\}$ un voisinage ouvert de E dans $\mathbb{C}$. On considère l'ensemble suivant :

$$(\tilde{p}_h^\epsilon)^{-1}(U) = \{(y, \eta) \in \Lambda_{\Phi_2}; \tilde{p}_h^\epsilon(y, \eta) \in U\}.$$

Comme $\tilde{p}_h^\epsilon$ est une fonction continue alors $(\tilde{p}_h^\epsilon)^{-1}(U)$ est un ensemble ouvert. De plus, $(\tilde{p}_h^\epsilon)^{-1}(U)$ contient l'ensemble $\tilde{\Lambda}_E^\epsilon$. Donc, $(\tilde{p}_h^\epsilon)^{-1}(U)$ est un voisinage ouvert de $\tilde{\Lambda}_E^\epsilon$. On peut choisir le voisinage U tel que si $(y, \eta) \notin (\tilde{p}_h^\epsilon)^{-1}(U)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|\Re(\tilde{p}_h^\epsilon(y, \eta) - E)| > \frac{1}{C}.$$

□

On introduit maintenant une notation concernant la quantification de Weyl complexe d'un symbole régulier sur Λ_{Φ_2} .

Notation : soit $a \in \mathcal{C}_b^\infty(\Lambda_{\Phi_2})$. On note $\text{Op}_{\Phi_2}^w(a)$ la quantification du symbole a définie, pour $u \in H_\hbar(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2)$, par :

$$\text{Op}_{\Phi_2}^w(a)u(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(x)} e^{(i/\hbar)(x-y)\eta} \tilde{a}\left(\frac{x+y}{2}, \eta\right) u(y) dy d\eta,$$

où $\Gamma(x) = \left\{ (y, \eta) \in (T^*\mathbb{S}^1)_\mathbb{C}; \eta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \left(\frac{x+y}{2} \right) + \frac{i}{C} \frac{\overline{x-y}}{\langle x-y \rangle} \right\}$ où $C > 0$ est une constante et où $\tilde{a}$ est une extension presque holomorphe de a .

On rappelle que $\text{Op}_{\Phi_2}^w(a) : H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2) \longrightarrow H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2)$ à un $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ -près.

Soit $X_{p^\epsilon|_{\epsilon=0}}$ le champ de vecteurs hamiltonien associé à $p^\epsilon|_{\epsilon=0}$. Soit $X_{\tilde{p}^\epsilon|_{\epsilon=0}}$ l'image par la fonction $\bar{\kappa}_{\phi_1}$ du champ de vecteurs réel $X_{p^\epsilon|_{\epsilon=0}}$. On considère une partition de l'unité sur Λ_{Φ_2} :

$$1 = \chi + \psi_1^+ + \psi_1^-,$$

avec :

1. $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Lambda_{\Phi_2})$ une fonction régulière telle que $\chi = 1$ dans un voisinage de $\tilde{\Lambda}_E^\epsilon$ et telle que son support est contenu dans un petit voisinage de l'ensemble de niveau $\tilde{\Lambda}_E^\epsilon$ où :

$$\tilde{U}\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi) = \text{Op}^w(g_h^\epsilon)\tilde{U}\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi) + \mathcal{O}(\hbar^\infty);$$

2. $\psi_1^\pm \in \mathcal{C}_b^\infty(\Lambda_{\Phi_2})$ une fonction régulière à support dans la région :

$$\pm \Re(\tilde{p}_h^\epsilon - E) > \frac{1}{C}.$$

Pour montrer la pertinence de cette partition de l'unité, nous allons nous intéresser à quelques propriétés dans lesquelles elle va intervenir.

Proposition 2.2.32 (Estimation sur la norme de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(1 - \chi)$).

Soient $u, v \in H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2)$ satisfaisant l'équation (E2.7). Alors, on a l'estimation suivante :

$$\|\text{Op}_{\Phi_2}^w(1 - \chi)u\| \leq \mathcal{O}(1)\|v\| + \mathcal{O}(\hbar^\infty)\|u\|.$$

Démonstration. Nous allons donner les grandes étapes de la démonstration de cette proposition. Cette démonstration est analogue à celle de l'article [HS04] qui est faite dans le cas de la dimension deux.

On considère pour $N \in \mathbb{N}$, $\psi_0 \prec \psi_1 \prec \dots \prec \psi_N$ avec $\psi_0 = \psi_1^+$ des fonctions de troncature dans l'espace $\mathcal{C}_0^\infty(\Lambda_{\Phi_2}; [0, 1])$ à support dans une région où $\Re(\tilde{p}_h^\epsilon - E) \sim 1$ et on montre une série d'estimations sur ces fonctions (on note $f \prec g$ si le support de la fonction f est inclus dans l'ensemble où la fonction g est égale à 1).

Étape 1 : on montre en utilisant le support de la fonction ψ_j que pour tout $0 \leq j \leq N$:

$$[\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon), \text{Op}_{\Phi_2}^w(\psi_j)] = \mathcal{O}(\hbar).$$

Étape 2 : on montre en utilisant le support de la fonction ψ_j et le fait que $E \in R_{C, \epsilon_0}$ qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $0 \leq j \leq N$:

$$\langle \Re(\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z)\text{Op}_{\Phi_2}^w(\psi_j)u | \text{Op}_{\Phi_2}^w(\psi_j)u \rangle \geq \frac{1}{C}\|\text{Op}_{\Phi_2}^w(\psi_j)u\|^2.$$

Étape 3 : on montre en utilisant les étapes 1 et 2 et à l'aide de l'inégalité de Cauchy-

Schwartz que pour tout $0 \leq j \leq N$:

$$\begin{aligned} & |\langle \Re(\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z) \text{Op}_{\Phi_2}^w(\psi_j)u | \text{Op}_{\Phi_2}^w(\psi_j)u \rangle | \\ & \leq \mathcal{O}(1) \|(\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z)u\| \|\text{Op}_{\Phi_2}^w(\psi_j)u\| + \mathcal{O}(\hbar) \|\text{Op}_{\Phi_2}^w(\psi_{j+1})u\|^2 + \mathcal{O}(\hbar^\infty) \|u\|^2. \end{aligned}$$

Étape 4 : on montre en utilisant les étapes 2 et 3 que pour tout $0 \leq j \leq N$, on a :

$$\frac{1}{C} \|\text{Op}_{\Phi_2}^w(\psi_j)u\|^2 \leq \mathcal{O}(1) \|(\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z)u\| \|\text{Op}_{\Phi_2}^w(\psi_j)u\| + \mathcal{O}(\hbar) \|\text{Op}_{\Phi_2}^w(\psi_{j+1})u\|^2 + \mathcal{O}(\hbar^\infty) \|u\|^2.$$

Étape 5 : on montre en utilisant l'étape 4 et l'inégalité de Young que pour tout $0 \leq j \leq N$, on a :

$$\frac{1}{C} \|\text{Op}_{\Phi_2}^w(\psi_j)u\|^2 \leq \frac{1}{2C} \|\text{Op}_{\Phi_2}^w(\psi_j)u\|^2 + \mathcal{O}(1) \|(\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z)u\|^2 + \mathcal{O}(\hbar) \|\text{Op}_{\Phi_2}^w(\psi_{j+1})u\|^2 + \mathcal{O}(\hbar^\infty) \|u\|^2.$$

Étape 6 : on montre en utilisant l'étape 5 que pour tout $0 \leq j \leq N$, on a :

$$\|\text{Op}_{\Phi_2}^w(\psi_j)u\|^2 \leq \mathcal{O}(1) \|(\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z)u\|^2 + \mathcal{O}(\hbar) \|\text{Op}_{\Phi_2}^w(\psi_{j+1})u\|^2 + \mathcal{O}(\hbar^\infty) \|u\|^2.$$

Étape 7 : on montre en utilisant l'étape 6 et une relation de récurrence sur les fonctions ψ_j que si $u, v \in H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2)$ vérifient l'équation E2.7, alors on a :

$$\|\text{Op}_{\Phi_2}^w(\psi_1^+)u\| \leq \mathcal{O}(1) \|v\| + \mathcal{O}(\hbar^\infty) \|u\|.$$

□

Ensuite, d'après l'équation (E2.7), on a :

$$(\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z) \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u = \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)v + w \quad \text{avec } w = [\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon), \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)]u. \quad (\text{E2.8})$$

Comme w est microlocalisé dans le support de $[\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon), \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)]$, qui est en dehors d'un voisinage de $\tilde{\Lambda}_E^\epsilon$, on peut montrer en utilisant la proposition 2.2.32 que :

$$\|w\| \leq \mathcal{O}(\hbar) \|v\| + \mathcal{O}(\hbar^\infty) \|u\|. \quad (\text{E2.9})$$

En appliquant l'opérateur $\tilde{U}$ à l'équation (E2.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{U}((\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z) \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u) &= \tilde{U}(\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)v + w), \\ \tilde{U} \text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u - z \tilde{U} \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u &= \tilde{U} \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)v + \tilde{U}w, \\ (\text{Op}^w(g_h^\epsilon) \tilde{U} + \mathcal{O}(\hbar^\infty)) \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u - z \tilde{U} \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u &= \tilde{U} \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)v + \tilde{U}w, \end{aligned}$$

car $\tilde{U} \text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi) = \text{Op}^w(g_h^\epsilon) \tilde{U} \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi) + \mathcal{O}(\hbar^\infty)$ par définition de la partition de

l'unité. Ainsi, on a :

$$(\text{Op}^w(g_h^\epsilon) - z)\tilde{U}\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u = \tilde{U}\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)v + \tilde{U}w + T_\infty u, \quad (\text{E2.10})$$

où $T_\infty = \mathcal{O}(\hbar^\infty) : H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2) \longrightarrow L_J^2(\mathbb{S}^1)$. On peut alors montrer la proposition qui suit.

Proposition 2.2.33 (Inversibilité de l'opérateur $\text{Op}^w(g_h^\epsilon)$). *Soit $z \in R_{C,\epsilon_0} \setminus \bigcup \Omega_k(\hbar)$. Alors l'opérateur $\text{Op}^w(g_h^\epsilon) - z : L_J^2(\mathbb{S}^1) \longrightarrow L_J^2(\mathbb{S}^1)$ est microlocalement inversible dans la région où $|\tilde{I} - I_0| \leq \frac{1}{\mathcal{O}(1)}$ (qui correspond au domaine où l'opérateur $\text{Op}^w(g_h^\epsilon)$ est bien défini) et d'inverse microlocal de norme $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\hbar}\right)$.*

Démonstration. On montre cette proposition en calculant de manière explicite l'inverse de l'opérateur $\text{Op}^w(g_h^\epsilon)$ puis en l'estimant. $\square$

Proposition 2.2.34 (Estimation sur la norme de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)$).

Soit $z \in R_{C,\epsilon_0} \setminus \bigcup \Omega_k(\hbar)$. Soient $u, v \in H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2)$ satisfaisant l'équation (E2.10). Alors, on a l'estimation suivante :

$$\|\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u\| \leq \frac{\mathcal{O}(1)}{\hbar}\|v\| + \mathcal{O}(\hbar^\infty)\|u\|.$$

Démonstration. On multiplie l'équation (E2.10) par $\tilde{U}^{-1}(\text{Op}^w(g_h^\epsilon) - z)^{-1}$ (où $\tilde{U}^{-1}$ est l'inverse microlocal de $\tilde{U}$ qui existe dans le domaine de la fonction χ), ce qui donne :

$$\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u = \tilde{U}^{-1}(\text{Op}^w(g_h^\epsilon) - z)^{-1}\tilde{U}\left(\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)v + w + \tilde{U}^{-1}T_\infty u\right).$$

Puis on utilise l'estimation de la proposition 2.2.33 sur la norme de l'opérateur $(\text{Op}^w(g_h^\epsilon) - z)^{-1}$, l'estimation sur w et la définition de T_∞ pour en déduire l'inégalité. $\square$

On peut maintenant déduire des propositions 2.2.32 et 2.2.34, la proposition qui suit.

Proposition 2.2.35 (Injectivité de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z$). *Soit $z \in R_{C,\epsilon_0} \setminus \bigcup \Omega_k(\hbar)$, alors l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z : H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2) \longrightarrow H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2)$ est injectif.*

De plus l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ vérifie également une autre propriété.

Proposition 2.2.36 (L'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z$ est de Fredholm).

L'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z : H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2, \tilde{m}) \longrightarrow H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2)$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0 (i.e. c'est un opérateur dont le noyau et le conoyau sont de dimensions finies et ces dimensions sont égales).

Démonstration. Grâce à l'ellipticité du symbole principal $\tilde{p}^\epsilon$, on peut construire un inverse à l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z + K$ où K est un opérateur compact. Ainsi, on obtient que l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z + K$ est de Fredholm d'indice 0 et cela démontre que l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z$ est également de Fredholm d'indice 0. $\square$

On déduit des propositions 2.2.35 et 2.2.36, le caractère bijectif de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z$.

Proposition 2.2.37 (Bijektivité de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z$). *Soit $z \in R_{C,\epsilon_0} \setminus \bigcup \Omega_k(\hbar)$, alors $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z : H_\hbar(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2, \tilde{m}) \longrightarrow H_\hbar(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2)$ est bijectif.*

On peut résumer ce que nous venons de faire en disant que les valeurs propres de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ dans le rectangle R_{C,ϵ_0} sont localisées dans les disques ouverts $\Omega_k(\hbar)$. Nous concentrons maintenant notre attention sur l'un de ces disques, donc on considère les couples $(\hbar, k)$ tel que $z \in \Omega_k(\hbar)$. On souhaite montrer que les valeurs propres z de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ dans $\Omega_k(\hbar)$ sont de la forme suivante :

$$z = g_h^\epsilon \left(\hbar k - \frac{J}{2\pi} \right) + \mathcal{O}(\hbar^\infty).$$

Pour ce faire, nous allons étudier deux problèmes de Grushin, un pour l'opérateur $\text{Op}^w(g_h^\epsilon) - z$ et l'autre pour l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z$; on rappelle la définition de ce problème (pour plus de détails sur cet outil, on pourra aller consulter l'article [SZ07]).

Définition 2.2.38 (Problème de Grushin). *Un problème de Grushin pour un opérateur $P : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ entre deux espaces de Hilbert est un système :*

$$\begin{cases} Pu + R_- u_- = v, \\ R_+ u = v_+; \end{cases}$$

où $R_- : \mathcal{H}_- \longrightarrow \mathcal{H}_2$, $R_+ : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_+$, avec $\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+$ deux espaces de Hilbert et où $(u, u_-) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_-$, $(v, v_+) \in \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_+$. La matrice du problème de Grushin est définie par :

$$\mathcal{P} := \begin{pmatrix} P & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_- \longrightarrow \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_+.$$

Tout d'abord, on considère un problème de Grushin pour l'opérateur $\text{Op}^w(g_h^\epsilon) - z$. Ce problème est globalement défini si on considère une extension de la fonction g_h^ϵ telle que sa partie réelle croît ou décroît partout et est constante au voisinage de l'infini. De cette façon, on n'ajoute pas de nouvelles valeurs propres dans le rectangle R_{C,ϵ_0} et les valeurs propres de l'opérateur $\text{Op}^w(g_h^\epsilon)$ sont simples.

Soit $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ une famille de fonctions où pour $l \in \mathbb{Z}$ et $\tilde{\theta} \in [0, 2\pi]$ on a :

$$e_l(\tilde{\theta}) = e^{(i/2\pi\hbar)(2\pi\hbar l - J)\tilde{\theta}} = e^{il\tilde{\theta}} e^{-(i/2\pi\hbar)J\tilde{\theta}}.$$

Cette famille de fonctions $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de l'espace $L_J^2(\mathbb{S}^1)$. Soient $\hat{R}_+$ et $\hat{R}_-$ les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} \hat{R}_+ : L_J^2(\mathbb{S}^1) &\longrightarrow \mathbb{C} & \hat{R}_- : \mathbb{C} &\longrightarrow L_J^2(\mathbb{S}^1), \\ u &\longmapsto \langle u | e_k \rangle & \tilde{u} &\longmapsto \tilde{u} e_k. \end{aligned}$$

On s'intéresse au problème de Grushin suivant, pour $(u, \tilde{u})$ et $(v, \tilde{v}) \in L_J^2(\mathbb{S}^1) \times \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} (\text{Op}^w(g_h^\epsilon) - z)u + \hat{R}_- \tilde{u} = v, \\ \hat{R}_+ u = \tilde{v}. \end{cases} \quad (\text{E2.11})$$

Proposition 2.2.39 (Problème de Grushin pour l'opérateur $\text{Op}^w(g_h^\epsilon) - z$). *Soit :*

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \text{Op}^w(g_h^\epsilon) - z & \hat{R}_- \\ \hat{R}_+ & 0 \end{pmatrix} : L_J^2(\mathbb{S}^1) \times \mathbb{C} \longrightarrow L_J^2(\mathbb{S}^1) \times \mathbb{C}.$$

Alors l'opérateur $\mathcal{S}$ admet un inverse défini par :

$$\hat{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \hat{E}(z) & \hat{E}_+ \\ \hat{E}_- & \hat{E}_{-,+}(z) \end{pmatrix},$$

avec :

1. $\hat{E}_+ = \hat{R}_-$;
2. $\hat{E}_- = \hat{R}_+$;
3. $\hat{E}_{-,+}(z) = z - g_h^\epsilon \left(\hbar k - \frac{J}{2\pi} \right)$.

De plus, les composantes de l'opérateur $\hat{\mathcal{E}}$ satisfont les estimations suivantes :

- (i) $\hat{E}(z) = \frac{\mathcal{O}(1)}{\hbar} : L_J^2(\mathbb{S}^1) \longrightarrow L_J^2(\mathbb{S}^1)$;
- (ii) $\hat{E}_+ = \mathcal{O}(1) : \mathbb{C} \longrightarrow L_J^2(\mathbb{S}^1)$;
- (iii) $\hat{E}_- = \mathcal{O}(1) : L_J^2(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathbb{C}$;
- (iv) $\hat{E}_{-,+}(z) = \mathcal{O}(\hbar) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

De plus, pour tous $(u, \tilde{u}), (v, \tilde{v}) \in L_J^2(\mathbb{S}^1) \times \mathbb{C}$ satisfaisant $\mathcal{S}(u, \tilde{u}) = (v, \tilde{v})$, on a l'estimation qui suit :

$$\hbar \|u\|_{L_J^2} + |\tilde{u}| \leq \mathcal{O}(1)(\|v\|_{L_J^2} + \hbar |\tilde{v}|). \quad (\text{E2.12})$$

Démonstration. On inverse le système $\mathcal{S}(u, \tilde{u}) = (v, \tilde{v})$ avec $(u, \tilde{u}), (v, \tilde{v}) \in L_J^2(\mathbb{S}^1) \times \mathbb{C}$ en utilisant la base orthonormée $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ et l'expression explicite de l'opérateur $\text{Op}^w(g_h^\epsilon)$ pour obtenir l'expression de $\hat{\mathcal{E}}$. Ensuite, les estimations (i), (ii), (iii) et (iv) se déduisent directement de 1., 2. et 3. toujours en utilisant le caractère orthonormé de la famille $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}}$. Enfin, l'estimation (E2.12) se déduit des estimations (i), (ii), (iii) et (iv). $\square$

On s'intéresse maintenant à un problème de Grushin pour l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z$. On considère les opérateurs qui suivent, pour tout couple $(\hbar, k)$ tel que $z \in \Omega_k(\hbar)$:

$$\begin{aligned} R_+ : H_\hbar(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2) &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ u &\longmapsto \hat{R}_+ \tilde{U} \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u = \langle \tilde{U} \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u | e_k \rangle \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} R_- : \mathbb{C} &\longrightarrow H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2), \\ \tilde{u} &\longmapsto \tilde{U}^{-1} \hat{R}_- \tilde{u} = \tilde{u} \tilde{U}^{-1} e_k. \end{aligned}$$

où $\tilde{U}$ est l'opérateur défini dans la proposition 2.2.27 tel que microlocalement :

$$\tilde{U} \text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi) = \text{Op}^w(g_h^\epsilon) \tilde{U} \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi) + \mathcal{O}(\hbar^\infty),$$

et où $\tilde{U}^{-1}$ désigne l'inverse microlocal de l'opérateur $\tilde{U}$.

Remarque 2.2.40.

- L'opérateur R_+ est bien défini car la fonction χ localise dans un voisinage où l'opérateur $\tilde{U}$ est bien défini.
- L'opérateur R_- est bien défini car la fonction e_k localise dans un voisinage où l'opérateur $\tilde{U}^{-1}$ est bien défini.

D'abord, comme dans l'article [HS04], on remarque qu'on a la propriété suivante concernant l'opérateur R_- :

$$\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi) R_- = R_- + \mathcal{O}(\hbar^\infty) : \mathbb{C} \longrightarrow H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2),$$

(car les fonctions e_k et χ sont localisées dans le même voisinage). On considère le problème de Grushin suivant, pour $(u, \tilde{u})$ et $(v, \tilde{v}) \in H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2) \times \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} (\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z)u + R_- \tilde{u} = v, \\ R_+ u = \tilde{v}. \end{cases} \quad (\text{E2.13})$$

Proposition 2.2.41 (Problème de Grushin pour l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z$).

Pour tout $(v, \tilde{v}) \in H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2) \times \mathbb{C}$, le problème de Grushin (E2.13) admet une unique solution $(u, \tilde{u}) \in H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2, \tilde{m}) \times \mathbb{C}$ satisfaisant l'estimation suivante :

$$\hbar \|u\|_{H_h(\Phi_2)} + |\tilde{u}| \leq \mathcal{O}(1) (\|v\|_{H_h(\Phi_2)} + \hbar |\tilde{v}|). \quad (\text{E2.14})$$

Démonstration. Pour démontrer cette proposition, nous allons ramener le problème de Grushin (E2.13) au problème de Grushin (E2.11), ainsi nous pourrons appliquer la proposition 2.2.39. Commençons par appliquer l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)$ à la première équation du problème de Grushin (E2.13) :

$$\begin{cases} \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi) (\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z)u + \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi) R_- \tilde{u} = \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi) v, \\ R_+ u = \tilde{v}. \end{cases}$$

Comme $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)R_- = R_- + \mathcal{O}(\hbar^\infty) =: R_- - R_-^\infty$, alors on a :

$$\begin{cases} \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)(\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_\hbar^\epsilon) - z)u + R_- \tilde{u} = \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)v + R_-^\infty \tilde{u}, \\ R_+ u = \tilde{v}. \end{cases}$$

Comme :

$$\begin{aligned} \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)(\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_\hbar^\epsilon) - z)u &= \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_\hbar^\epsilon)u - z\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u, \\ &= \text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_\hbar^\epsilon)\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u - [\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_\hbar^\epsilon), \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)]u - z\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u, \\ &= (\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_\hbar^\epsilon) - z)\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u - [\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_\hbar^\epsilon), \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)]u, \end{aligned}$$

alors, si $w := [\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_\hbar^\epsilon), \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)]u$, on a :

$$\begin{cases} (\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_\hbar^\epsilon) - z)\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u + R_- \tilde{u} = \text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)v + w + R_-^\infty \tilde{u}, \\ R_+ u = \tilde{v}. \end{cases}$$

où w satisfait l'estimation suivante :

$$\|w\| \leq \mathcal{O}(\hbar) \|v\| + \mathcal{O}(\hbar^\infty)(\|u\| + |\tilde{u}|).$$

On applique l'opérateur $\tilde{U}$ à la première équation :

$$\begin{cases} \tilde{U}(\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_\hbar^\epsilon) - z)\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u + \tilde{U}R_- \tilde{u} = \tilde{U}\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)v + \tilde{U}w + \tilde{U}R_-^\infty \tilde{u}, \\ R_+ u = \tilde{v}. \end{cases}$$

De plus, comme $R_- = \tilde{U}^{-1}\hat{R}_-$ et $\tilde{U}(\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_\hbar^\epsilon) - z)\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi) = (\text{Op}^w(g_\hbar^\epsilon) - z)\tilde{U}\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi) + \mathcal{O}(\hbar^\infty)$, le système devient :

$$\begin{cases} (\text{Op}^w(g_\hbar^\epsilon) - z)\tilde{U}\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u + \hat{R}_- \tilde{u} = \tilde{U}\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)v + \tilde{U}w + \tilde{w}, \\ R_+ u = \tilde{v}. \end{cases}$$

où $\tilde{w}$ satisfait l'estimation suivante : $|\tilde{w}| \leq \mathcal{O}(\hbar^\infty)(\|u\| + |\tilde{u}|)$. De plus, par définition $R_+ = \hat{R}_+ \tilde{U}\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)$, ainsi le système se réécrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} (\text{Op}^w(g_\hbar^\epsilon) - z)\tilde{U}\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u + \hat{R}_- \tilde{u} = \tilde{U}\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)v + \tilde{U}w + \tilde{w}, \\ \hat{R}_+ \tilde{U}\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)u = \tilde{v}. \end{cases}$$

On reconnaît le problème de Grushin (E2.11), on en déduit donc le résultat. Pour finir, la démonstration de l'estimation (E2.14) utilise l'estimation (E2.12), les estimations sur les normes des fonctions w et $\tilde{w}$ et l'estimation :

$$\|\text{Op}_{\Phi_2}^w(1 - \chi)u\| \leq \mathcal{O}(1)\|v\| + \mathcal{O}(\hbar^\infty)(\|u\| + |\tilde{u}|).$$

□

Soit :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2) \times \mathbb{C} \longrightarrow H_h(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2) \times \mathbb{C}.$$

Alors, d'après la proposition 2.2.41, l'opérateur $\mathcal{P}$ est injectif pour $z \in \Omega_k(\hbar)$ et comme c'est une perturbation de rang un d'un opérateur de Fredholm d'indice 0, on sait que l'opérateur $\mathcal{P}$ est bijectif pour $z \in \Omega_k(\hbar)$. On note l'inverse de $\mathcal{P}$ de la façon suivante :

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E(z) & E_+ \\ E_- & E_{-,+}(z) \end{pmatrix},$$

et on rappelle que le spectre de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ dans $\Omega_k(\hbar)$ est égal à l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $E_{-,+}(z) = 0$. Ainsi, on souhaite déterminer la composante $E_{-,+}(z)$.

Proposition 2.2.42 (Composantes de $\mathcal{E}$). *Les composantes de l'opérateur $\mathcal{E}$ sont données par les équations suivantes :*

1. $E_+ = \tilde{U}^{-1}\hat{E}_+ + \mathcal{O}(\hbar^\infty);$
2. $E_{-,+}(z) = \hat{E}_{-,+}(z) + \mathcal{O}(\hbar^\infty) = z - g_h^\epsilon \left(\hbar k - \frac{J}{2\pi} \right) + \mathcal{O}(\hbar^\infty).$

Démonstration. Comme $\mathcal{P}\mathcal{E} = \text{id}$, alors :

$$\begin{cases} (\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z)E_+ + R_-E_{-,+}(z) = 0, \\ R_+E_+ = 1. \end{cases}$$

On veut montrer qu'à un $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ -près on a :

$$\begin{cases} (\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z)\tilde{U}^{-1}\hat{E}_+ + R_-\hat{E}_{-,+}(z) \equiv 0, \\ R_+\tilde{U}^{-1}\hat{E}_+ \equiv 1. \end{cases}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} & R_+\tilde{U}^{-1}\hat{E}_+ \\ &= \hat{R}_+\tilde{U}\text{Op}_{\Phi_2}^w(\chi)\tilde{U}^{-1}\hat{E}_+ \quad \text{par définition de } R_+, \\ &\equiv 1 \quad \text{par définition de } \chi \text{ et car } \mathcal{S}\hat{\mathcal{E}} = \text{id d'après la proposition 2.2.39.} \end{aligned}$$

Et, on a :

$$\begin{aligned}
 & (\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z)\tilde{U}^{-1}\hat{E}_+ + R_-\hat{E}_{-,+}(z) \\
 &= (\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z)\tilde{U}^{-1}\hat{E}_+ + \tilde{U}^{-1}\hat{R}_-\hat{E}_{-,+}(z) \quad \text{par définition de } R_-, \\
 &\equiv \tilde{U}^{-1}(\text{Op}^w(g_h^\epsilon) - z)\hat{E}_+ + \tilde{U}^{-1}\hat{R}_-\hat{E}_{-,+}(z) \quad \text{car } \tilde{U}\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) = \text{Op}^w(g_h^\epsilon)\tilde{U} + \mathcal{O}(\hbar^\infty), \\
 &\equiv 0 \quad \text{car } \mathcal{S}\hat{\mathcal{E}} = \text{id}.
 \end{aligned}$$

□

Remarque 2.2.43. *On a uniquement donné des formules pour les composantes E_+ et $E_{-,+}(z)$ de l'opérateur $\mathcal{E}$ car ce sont les plus simples à déterminer et également car on a uniquement besoin de connaître la composante $E_{-,+}(z)$ puisque c'est d'elle dont dépend le spectre. On peut cependant déterminer les autres composantes par des calculs du même type.*

On peut résumer ce que nous venons de faire dans la proposition qui suit.

Proposition 2.2.44 (Spectre de $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ et spectre de $\text{Op}^w(g_h^\epsilon)$).

Soit $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) : H_\hbar(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2) \rightarrow H_\hbar(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_2)$ l'opérateur défini précédemment. Il existe $\epsilon_0 > 0$ un petit paramètre fixé tel que, pour :

$$R_{C,\epsilon_0} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |\Re(z) - E_0| < \frac{1}{C}, |\Im(z)| < \frac{\epsilon_0}{C} \right\} \quad \text{où } C > 0 \text{ est une constante,}$$

avec les notations de la proposition 2.2.27, les valeurs propres de l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)$ sont simples et données par la formule suivante pour $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ et pour $\hbar$ suffisamment petit :

$$\begin{aligned}
 \sigma(\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon)) \cap R_{C,\epsilon_0} &= \sigma(\text{Op}^w(g_h^\epsilon)) \cap R_{C,\epsilon_0} + \mathcal{O}(\hbar^\infty), \\
 &= \left\{ g_h^\epsilon \left(\hbar k - \frac{J}{2\pi} \right) + \mathcal{O}(\hbar^\infty), k \in \mathbb{Z} \right\} \cap R_{C,\epsilon_0},
 \end{aligned}$$

où g_h^ϵ est une fonction analytique sur un petit voisinage de I_0 dans $\mathbb{C}$, admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$ et dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ du paramètre ϵ . De plus, le premier terme du développement asymptotique de la fonction g_h^ϵ , noté g^ϵ , est la réciproque de l'intégrale d'action $E \mapsto \tilde{I}(E)$.

Démonstration. Par définition du spectre, on sait que $z \in \sigma(\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon))$ si et seulement si $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z$ est non-inversible, i.e. $E_{-,+}(z) = 0$, i.e. $z = g_h^\epsilon \left(\hbar k - \frac{J}{2\pi} \right) + \mathcal{O}(\hbar^\infty)$ (car l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z$ est inversible si et seulement si $E_{-,+}(z)$ est inversible aussi, i.e. si et seulement si $E_{-,+}(z) \neq 0$). □

On peut maintenant conclure et déterminer le spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ en utilisant les propositions 2.2.44 et 2.2.29, ce qui termine la démonstration du théorème A'.

2.2.3 Quantification de Weyl de $\mathbb{R}^2$ et quantification de Weyl de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$

Pour démontrer le théorème A, nous allons faire appel à des symboles sur l'espace des phases $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ et ensuite nous appliquerons les techniques développées dans la démonstration du théorème A'. On considère l'opérateur pseudo-différentiel $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ agissant sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$, dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ du petit paramètre ϵ , de la forme suivante :

$$\text{Op}^w(p_h^\epsilon)(x, \hbar D_x) = \text{Op}^w(f_h^\epsilon)(x, \hbar D_x) + i\epsilon \text{Op}^w(q_h^\epsilon)(x, \hbar D_x),$$

et satisfaisant les hypothèses (A) à (E). On souhaite obtenir des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld pour cet opérateur. On cherche une transformation canonique réelle de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\kappa} : \text{Vois}(f^\epsilon = \text{cst}, \mathbb{R}^2) &\longrightarrow \text{Vois}(I = \text{cst}, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}), \\ (x, \xi) &\longmapsto (\theta, I), \end{aligned}$$

et telle que :

$$f^\epsilon \circ \hat{\kappa}^{-1}(\theta, I) = \hat{f}^\epsilon(I),$$

où $\hat{f}^\epsilon$ est une fonction analytique qui dépend de manière $\mathcal{C}^\infty$ du paramètre ϵ . Pour construire une telle transformation canonique $\hat{\kappa}$, nous allons utiliser le théorème des coordonnées action-angle. Soit $E_0 \in \mathbb{R}$, on considère l'ensemble de niveau :

$$\Lambda_{E_0} = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2, f^\epsilon(x, \xi) = E_0\};$$

on rappelle que cet ensemble de niveau est compact, connexe et régulier. Soit $\hat{\gamma}_{E_0}$ un lacet qui engendre le groupe $\pi_1(\Lambda_{E_0})$ et soit :

$$I(E_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{\gamma}_{E_0}} \xi dx.$$

Alors, en appliquant le théorème des coordonnées action-angle avec le paramètre ϵ , on sait qu'il existe un difféomorphisme :

$$\begin{aligned} \hat{\kappa} : \text{Vois}(f^\epsilon = E_0, \mathbb{R}^2) &\longrightarrow \text{Vois}(I = \text{cst}, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}), \\ (x, \xi) &\longmapsto (\theta, I), \end{aligned}$$

tel que :

$$f^\epsilon \circ \hat{\kappa}^{-1}(\theta, I) = \hat{f}^\epsilon(I).$$

La transformation canonique $\hat{\kappa}$ envoie le symbole principal $p^\epsilon(x, \xi)$ sur un symbole principal de la forme suivante :

$$p^\epsilon \circ \hat{\kappa}^{-1}(\theta, I) = \hat{f}^\epsilon(I) + i\epsilon \hat{q}^\epsilon(\theta, I) =: \hat{p}^\epsilon(\theta, I);$$

où $\hat{q}^\epsilon(\theta, I) = q^\epsilon \circ \hat{\kappa}^{-1}(\theta, I)$. Ainsi, on a transformé le symbole principal $p^\epsilon(x, \xi)$ en un symbole principal $\hat{p}^\epsilon(\theta, I)$ défini localement et de la forme utilisée dans le théorème A'. Comme dans la démonstration du théorème A', on a seulement besoin de travailler avec des symboles principaux définis sur des petits domaines de l'espace des phases pour pouvoir construire des transformations canoniques, nous allons pouvoir utiliser ici les mêmes techniques.

De plus, on peut choisir la transformation $\hat{\kappa}$ de telle sorte que pour tout lacet $\hat{\gamma}$, on a :

$$\int_{\hat{\gamma}} \hat{\kappa}^* Id\theta - \xi dx = 0.$$

En effet, puisque $\hat{\kappa}$ est une transformation canonique, alors :

$$\hat{\kappa}^*(dI \wedge d\theta) = d\xi \wedge dx.$$

Par conséquent, la 1-forme $\hat{\kappa}^*(Id\theta) - \xi dx$ est fermée et d'après le théorème de Stokes, on obtient que l'intégrale suivante sur le lacet $\hat{\gamma}$:

$$\int_{\hat{\gamma}} \hat{\kappa}^*(Id\theta) - \xi dx,$$

ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet $\hat{\gamma}$, ainsi il existe une constante réelle $c_{\hat{\gamma}}(\hat{\kappa})$ telle que :

$$\int_{\hat{\gamma}} \hat{\kappa}^*(Id\theta) - \xi dx = c_{\hat{\gamma}}(\hat{\kappa}),$$

et on peut choisir cette constante égale à zéro (quitte à changer la transformation $\hat{\kappa}$ si nécessaire). De plus, on peut étendre la transformation canonique réelle $\hat{\kappa}$ en une transformation canonique complexe telle que :

$$p^\epsilon \circ \hat{\kappa}^{-1}(\theta, I) = \hat{f}^\epsilon(I) + i\epsilon \hat{q}^\epsilon(\theta, I), \quad \text{pour } (\theta, I) \text{ des coordonnées complexes.}$$

Par conséquent, pour $\hat{\gamma}$ un lacet complexe, la relation suivante est encore vraie :

$$\int_{\hat{\gamma}} \hat{\kappa}^*(Id\theta) - \xi dx = 0.$$

Soit $C > 0$ une constante et soit ϵ_0 un réel suffisamment petit fixé. Soit :

$$E \in \left\{ z \in \mathbb{C}, |\Re(z) - E_0| < \frac{1}{C}, |\Im(z)| < \frac{\epsilon_0}{C} \right\}.$$

On peut considérer un lacet γ_E dans l'ensemble de niveau :

$$\hat{\Lambda}_E^\epsilon = \{(\theta, I) \in \text{VoisTub}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}), \hat{p}^\epsilon(\theta, I) = p^\epsilon \circ \hat{\kappa}^{-1}(\theta, I) = E\}.$$

Ainsi le lacet $\hat{\kappa}^* \gamma_E =: \hat{\gamma}_E$ est inclus dans l'ensemble de niveau :

$$\Lambda_E^\epsilon = \{(x, \xi) \in \text{VoisTub}(\mathbb{R}^2), p^\epsilon(x, \xi) = E\}.$$

Et l'intégrale d'action suivante est bien définie :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\hat{\gamma}_E} \xi dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_E} Id\theta.$$

Ceci explique pourquoi on peut exprimer le premier terme du développement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ à l'aide de l'intégrale d'action $\int \xi dx$.

On souhaite maintenant quantifier la transformation canonique complexe $\hat{\kappa}$ définie par :

$$\begin{aligned} \hat{\kappa} : \text{Vois}(\Lambda_E^\epsilon, \text{VoisTub}(\mathbb{R}^2)) &\longrightarrow \text{Vois}(\hat{\Lambda}_E^\epsilon, \text{VoisTub}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})), \\ (x, \xi) &\longmapsto (\theta, I), \end{aligned}$$

où (x, ξ) et (θ, I) désignent des coordonnées complexes. Or, d'après la proposition 2.2.5, on sait qu'il existe une transformation canonique complexe :

$$\begin{aligned} \kappa : \text{Vois}(\hat{\Lambda}_E^\epsilon, \text{VoisTub}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})) &\longrightarrow \text{Vois}(\tilde{I} = \text{cst}, (T^*\mathbb{S}^1)_\mathbb{C}), \\ (\theta, I) &\longmapsto (\tilde{\theta}, \tilde{I}), \end{aligned}$$

telle que :

$$\hat{p}^\epsilon \circ \kappa^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{I}) = g^\epsilon(\tilde{I}).$$

Ainsi, plutôt que de quantifier la transformation $\hat{\kappa}$, on va directement quantifier la transformation $\kappa \circ \hat{\kappa}$. Pour ce faire, on suit les mêmes étapes que dans la démonstration du théorème A', ainsi on considère le diagramme commutatif suivant sur les espaces des phases :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\kappa \circ \hat{\kappa}} & (T^*\mathbb{S}^1)_\mathbb{C} \supset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ \kappa_{\phi_1} \downarrow & & \downarrow \bar{\kappa}_{\phi_1} \\ \Lambda_{\Phi_1} \subset \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\tilde{\kappa}} & (T^*\mathbb{S}^1)_\mathbb{C} \supset \Lambda_{\Phi_1} \\ \Lambda_{\Phi_2} \subset \mathbb{C}^2 & & \end{array}$$

On quantifie les différentes transformations comme précédemment et on obtient le diagramme suivant (avec les notations des propositions 2.2.15, 2.2.19 et 2.2.24) :

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L_J^2(\mathbb{S}^1) \\ T_{\phi_1} \downarrow & & \downarrow B^* \\ H_h(\mathbb{C}, \Phi_1) & \xrightarrow{A} & H_J(\mathbb{S}^1 + i\mathbb{R}, \Phi_1) \\ H_h(\mathbb{C}, \Phi_2) & & \end{array}$$

Notation: $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) = T_{\phi_1} \circ \text{Op}^w(p_h^\epsilon) \circ T_{\phi_1}^* : H_h(\mathbb{C}, \Phi_2) \longrightarrow H_h(\mathbb{C}, \Phi_2)$.

On peut résumer ce que nous venons de faire dans la proposition qui suit. La démonstration de cette dernière utilise la même procédure itérative que la démonstration de la proposition 2.2.27.

Proposition 2.2.45 (Quantification de la transformation $\kappa_{\phi_1}^{-1} \circ \tilde{\kappa}$). *Il existe un opérateur microlocalement unitaire $\tilde{U} : H_h(\mathbb{C}, \Phi_2) \longrightarrow L_J^2(\mathbb{S}^1)$ tel que microlocalement :*

$$\tilde{U} \text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) = \text{Op}^w(g_h^\epsilon) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \tilde{U} + \mathcal{O}(\hbar^\infty),$$

où g_h^ϵ est une fonction analytique sur un voisinage de $I(E_0)$ dans $\mathbb{C}$, admettant un développement asymptotique en puissances du paramètre semi-classique $\hbar$, dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ du paramètre ϵ et telle que le premier terme du développement asymptotique, noté g^ϵ , est la réciproque de l'intégrale d'action $\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_E} \xi dx$.

Afin de déterminer le spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$, on utilise les mêmes arguments que dans la démonstration du théorème A'. Plus précisément, on considère deux problèmes de Grushin, un pour l'opérateur $\text{Op}^w(g_h^\epsilon) - z$ et l'autre pour l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_2}^w(\tilde{p}_h^\epsilon) - z$ et on utilise le fait que l'opérateur $\text{Op}^w(g_h^\epsilon)$ satisfait les mêmes hypothèses que l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$, ainsi ses valeurs propres sont simples et de la forme $g_h^\epsilon(\hbar k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ si on considère la fonction g_h^ϵ comme globalement définie. Ceci clos la démonstration du théorème A.

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre, nous donnons deux applications du théorème A, la première concernant des perturbations $\mathcal{PT}$ -symétriques non auto-adjointes d'opérateurs auto-adjoints et la seconde des perturbations non auto-adjointes d'opérateurs de Berezin-Toeplitz auto-adjoints du plan complexe.

3.1 Opérateurs $\mathcal{PT}$ -symétriques

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux opérateurs pseudo-différentiels $\mathcal{PT}$ -symétriques. Nous allons donc donner la définition de tels opérateurs et pour cela nous introduisons d'abord la classe de symboles qui va nous intéresser.

Définition 3.1.1 (Classe de symboles sur $\mathbb{R}^2$). *On définit la classe de symboles $S(\mathbb{R}^2)$ par la relation suivante :*

$$S(\mathbb{R}^2) = \{p_h \in C^\infty(\mathbb{R}^2); \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \text{ il existe une constante } C_\alpha > 0 \text{ telle que : } |\partial^\alpha p_h| \leq C_\alpha\}.$$

Soit $0 \leq \hbar < 1$ le paramètre semi-classique. Soit $p_h \in S(\mathbb{R}^2)$ un symbole admettant un développement asymptotique en puissances du paramètre semi-classique $\hbar$. Soit $\text{Op}^w(p_h)$ la quantification de Weyl du symbole p_h agissant sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$. Rappelons la définition d'opérateur pseudo-différentiel $\mathcal{PT}$ -symétrique.

Définition 3.1.2 (Opérateur $\mathcal{PT}$ -symétrique). *On dit qu'un opérateur pseudo-différentiel $\text{Op}^w(p_h)$ est $\mathcal{PT}$ -symétrique si $[\text{Op}^w(p_h), \mathcal{PT}] = 0$, où :*

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) & \mathcal{T} : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}), \\ u(x) &\longmapsto u(-x) & u(x) &\longmapsto \overline{u(x)}. \end{aligned}$$

On appelle $\mathcal{P}$ l'opérateur de parité et $\mathcal{T}$ l'opérateur d'inversion du temps.

On peut caractériser le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel $\mathcal{PT}$ -symétrique via la proposition suivante.

Proposition 3.1.3 (Symbole d'un opérateur $\mathcal{PT}$ -symétrique). *Soit $\text{Op}^w(p_h)$ un opérateur pseudo-différentiel $\mathcal{PT}$ -symétrique agissant sur $L^2(\mathbb{R})$. Alors le symbole p_h de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h)$ vérifie la relation suivante, pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$:*

$$p_h(x, \xi) = \overline{p_h(-x, \xi)}.$$

Démonstration. Par définition de la quantification de Weyl et des opérateurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$, on a pour $u \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \text{Op}^w(p_h)\mathcal{PT}u(x) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{(i/\hbar)(x-y)\xi} p_h\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) \mathcal{PT}u(y) dy d\xi, \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{(i/\hbar)(x-y)\xi} p_h\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) \overline{u(-y)} dy d\xi. \end{aligned}$$

Et, on a également pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{PT}\text{Op}^w(p_h)u(x) &= \mathcal{PT} \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{(i/\hbar)(x-y)\xi} p_h\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi \right), \\ &= \mathcal{P} \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{(-i/\hbar)(x-y)\xi} \overline{p_h\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)} \overline{u(y)} dy d\xi \right), \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{(-i/\hbar)(-x-y)\xi} \overline{p_h\left(\frac{-x+y}{2}, \xi\right)} \overline{u(y)} dy d\xi, \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{(i/\hbar)(x+y)\xi} \overline{p_h\left(\frac{-x+y}{2}, \xi\right)} \overline{u(y)} dy d\xi, \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{(i/\hbar)(x-y)\xi} \overline{p_h\left(\frac{-x-y}{2}, \xi\right)} \overline{u(-y)} dy d\xi, \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $y \mapsto -y$. Ainsi la relation $[\text{Op}^w(p_h), \mathcal{PT}] = 0$ se réécrit de la façon suivante, pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{(i/\hbar)(x-y)\xi} \overline{p_h\left(\frac{-x-y}{2}, \xi\right)} \overline{u(-y)} dy d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{(i/\hbar)(x-y)\xi} p_h\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) \overline{u(-y)} dy d\xi. \end{aligned}$$

Autrement dit, au niveau symbolique, on obtient pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$ la relation qui suit :

$$p_h(x, \xi) = \overline{p_h(-x, \xi)}.$$

□

On peut également déduire du caractère $\mathcal{PT}$ -symétrique d'un opérateur une propriété de symétrie du spectre.

Proposition 3.1.4 (Symétrie du spectre d'un opérateur $\mathcal{PT}$ -symétrique). *Soit $\text{Op}^w(p_h)$ un*

opérateur pseudo-différentiel $\mathcal{PT}$ -symétrique agissant sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$. Alors le spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h)$ est symétrique par rapport à l'axe des réels.

Démonstration. Soit $\lambda \in \sigma(\text{Op}^w(p_h))$. Montrons que $\bar{\lambda} \in \sigma(\text{Op}^w(p_h))$.

Soit $\lambda \in \sigma(\text{Op}^w(p_h))$, alors par définition du spectre, l'opérateur $\text{Op}^w(p_h) - \lambda$ n'est pas inversible dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$. Par conséquent, l'opérateur $\mathcal{PT}(\text{Op}^w(p_h) - \lambda)$ n'est également pas inversible dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$. De plus, pour $u \in L^2(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{PT}(\text{Op}^w(p_h) - \lambda)u(x) &= \mathcal{PT}\text{Op}^w(p_h)u(x) - \mathcal{PT}\lambda u(x), \\ &= \text{Op}^w(p_h)\mathcal{PT}u(x) - \bar{\lambda}\mathcal{PT}u(x) \quad \text{car } \text{Op}^w(p_h) \text{ est } \mathcal{PT}\text{-symétrique}, \\ &= (\text{Op}^w(p_h) - \bar{\lambda})\mathcal{PT}u(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'opérateur $(\text{Op}^w(p_h) - \bar{\lambda})\mathcal{PT}$ n'est pas inversible dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$, d'où le fait que $\text{Op}^w(p_h) - \bar{\lambda}$ ne soit pas inversible non plus, ce qui signifie que $\bar{\lambda} \in \sigma(\text{Op}^w(p_h))$. $\square$

On peut maintenant énoncer une première application du théorème A.

Théorème B. Soit $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ un opérateur pseudo-différentiel dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ de ϵ , agissant sur $L^2(\mathbb{R})$ et soit $E_0 \in \mathbb{R}$ tels que les hypothèses (A) à (E) soient satisfaites. En particulier, l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ est de la forme suivante :

$$\text{Op}^w(p_h^\epsilon)(x, \hbar D_x) = \text{Op}^w(f_h^\epsilon)(x, \hbar D_x) + i\epsilon \text{Op}^w(q_h^\epsilon)(x, \hbar D_x),$$

où $\text{Op}^w(f_h^\epsilon)$ et $\text{Op}^w(q_h^\epsilon)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints. On suppose de plus que l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ est $\mathcal{PT}$ -symétrique. Il existe $\epsilon_0 > 0$ un petit paramètre (indépendant de $\hbar$) tel que, pour :

$$R_{C, \epsilon_0} = \left\{ z \in \mathbb{C}, |\Re(z) - E_0| < \frac{1}{C}, |\Im(z)| < \frac{\epsilon_0}{C} \right\} \quad \text{où } C > 0 \text{ est une constante,}$$

le spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ dans le rectangle R_{C, ϵ_0} est réel pour $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ et pour $\hbar$ suffisamment petit.

De plus les valeurs propres de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ dans le rectangle R_{C, ϵ_0} sont simples et données par le théorème A, i.e. pour tout $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ et pour $\hbar$ suffisamment petit, on a :

$$\sigma(\text{Op}^w(p_h^\epsilon)) \cap R_{C, \epsilon_0} = \{g_h^\epsilon(\hbar k) + \mathcal{O}(\hbar^\infty), k \in \mathbb{Z}\} \cap R_{C, \epsilon_0},$$

où g_h^ϵ est une fonction analytique dans un voisinage de $I(E_0)$ dans $\mathbb{C}$, admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$ et dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ de ϵ . De plus, le premier terme du développement asymptotique, noté g^ϵ , est la réciproque de l'intégrale d'action $E \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_E} \xi dx$.

Démonstration. D'après le théorème A, on sait que le spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ dans

le rectangle R_{C,ϵ_0} est donné pour $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ et pour $\hbar$ suffisamment petit par :

$$\sigma(\text{Op}^w(p_h^\epsilon)) \cap R_{C,\epsilon_0} = \{g_h^\epsilon(\hbar k) + \mathcal{O}(\hbar^\infty), k \in \mathbb{Z}\} \cap R_{C,\epsilon_0},$$

où g_h^ϵ est une fonction analytique. Ce qui signifie que les valeurs propres dans ce rectangle se trouvent le long d'une courbe à un $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ -près. De plus, comme l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ est $\mathcal{PT}$ -symétrique, d'après la proposition 3.1.4, on sait que l'ensemble $\sigma(\text{Op}^w(p_h^\epsilon))$ est symétrique par rapport à l'axe des réels. Ainsi si on choisit une valeur propre dans l'ensemble $\sigma(\text{Op}^w(p_h^\epsilon))$, alors le conjugué de cette valeur propre doit aussi être dans l'ensemble $\sigma(\text{Op}^w(p_h^\epsilon))$. Or, la distance entre les parties réelles de deux valeurs propres est d'au moins $\hbar/\mathcal{O}(1)$, donc comme le conjugué d'une valeur propre a la même partie réelle que cette valeur propre, alors le conjugué d'une valeur propre est la valeur propre elle-même. Autrement dit le spectre $\sigma(\text{Op}^w(p_h^\epsilon))$ dans le rectangle R_{C,ϵ_0} est réel. $\square$

3.2 Opérateurs de Berezin-Toeplitz du plan complexe

Dans cette partie, on introduit un entier $k \geq 1$ qui jouera le rôle de $1/\hbar$. Par convention, les opérateurs pseudo-différentiels s'écrivent avec le paramètre semi-classique $\hbar$ et les opérateurs de Berezin-Toeplitz avec l'inverse de ce paramètre k ; nous allons donc jongler avec ces deux paramètres. Nous rappelons d'abord la définition de la quantification de Berezin-Toeplitz du plan complexe $\mathbb{C}$ (qu'on peut notamment trouver dans le livre de Maciej Zworski [Zwo12, Chapitre 13]) pour ce faire, on introduit les notations qui suivent.

Notations: soit Φ une forme quadratique réelle strictement sousesharmonique sur $\mathbb{C}$. Soit $k \geq 1$. On note :

- Λ_Φ l'ensemble défini par la relation suivante :

$$\Lambda_\Phi = \left\{ \left(z, \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z) \right), z \in \mathbb{C} \right\};$$

- $L(dz)$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$ donnée par : $L(dz) = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$;
- $L_k^2(\mathbb{C}, \Phi) := L^2(\mathbb{C}, e^{-2k\Phi(z)} L(dz)) = L^2(\mathbb{C}, e^{-2\Phi(z)/\hbar} L(dz)) =: L_\hbar^2(\mathbb{C}, \Phi)$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{C}$ par rapport à la mesure à poids exponentiel $e^{-2k\Phi(z)} L(dz)$;
- $H_k(\mathbb{C}, \Phi) := \text{Hol}(\mathbb{C}) \cap L_k^2(\mathbb{C}, \Phi) = \text{Hol}(\mathbb{C}) \cap L_\hbar^2(\mathbb{C}, \Phi) =: H_\hbar(\mathbb{C}, \Phi)$ l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ appartenant à l'espace $L_k^2(\mathbb{C}, \Phi)$;
- $\Pi_{\Phi,k} = \Pi_{\Phi,\hbar} : L_k^2(\mathbb{C}, \Phi) \longrightarrow H_k(\mathbb{C}, \Phi)$ la projection orthogonale de l'espace de fonctions de carré intégrable $L_k^2(\mathbb{C}, \Phi)$ (muni du produit scalaire L^2 à poids) sur l'espace de fonctions holomorphes $H_k(\mathbb{C}, \Phi)$.

Définition 3.2.1 (Quantification de Berezin-Toeplitz du plan complexe $\mathbb{C}$). *Soit $k \geq 1$. Soit $q_k \in L^\infty(\mathbb{C})$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de*

$1/k$. On définit la quantification de Berezin-Toeplitz de la fonction q_k par la suite d'opérateur $T_{q_k} := (T_k)_{k \geq 1}$, où pour tout $k \geq 1$, l'opérateur T_k est défini par :

$$T_k := \Pi_{\Phi,k} M_{q_k} \Pi_{\Phi,k},$$

où $M_{q_k} : L_k^2(\mathbb{C}, \Phi) \longrightarrow L_k^2(\mathbb{C}, \Phi)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction q_k . On appelle la fonction q_k le symbole de l'opérateur de Berezin-Toeplitz T_{q_k} .

Remarque 3.2.2. Ici, on a choisi de considérer une définition pour la quantification de Berezin-Toeplitz du plan complexe qui dépend d'une fonction Φ . En général, quand on parle de cette quantification notamment dans les articles de Yohann Le Floch ([LF14b], [LF14c]), on la considère uniquement pour une fonction Φ particulière : $\Phi_0(z) = \frac{1}{2}|z|^2$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Nous allons maintenant rappeler la définition de la quantification de Weyl complexe de $\mathbb{R}^2$ en suivant le livre de Maciej Zworski [Zwo12, Chapitre 13] ou le mini-cours en ligne de Michael Hitrik et de Johannes Sjöstrand [HS15]. Auparavant, on rappelle qu'on peut identifier l'ensemble Λ_Φ avec $\mathbb{C}$ via l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \Lambda_\Phi \\ z &\longmapsto \left(z, \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, on peut identifier les espaces de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{S}(\Lambda_\Phi)$, ainsi que les classes de symboles $S(\mathbb{C})$ et $S(\Lambda_\Phi)$ où on rappelle que (voir la définition 2.2.14) :

$$S(\Lambda_\Phi) = \{p_h \in \mathcal{C}^\infty(\Lambda_\Phi); \forall \alpha, \exists C_\alpha > 0, |\partial^\alpha p_h| \leq C_\alpha\} \simeq S(\mathbb{C}).$$

On rappelle maintenant la définition de la quantification de Weyl complexe d'un symbole sur $\mathbb{R}^2$ que nous avons vue dans le chapitre 2 (définition 2.2.14).

Définition 3.2.3 (Quantification de Weyl complexe de $\mathbb{R}^2$). Soit $p_h \in S(\Lambda_\Phi)$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$. On définit la quantification de Weyl complexe de la fonction p_h , notée $\text{Op}_\Phi^w(p_h)$, par la formule suivante :

$$\text{Op}_\Phi^w u(z) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(z)} e^{(i/\hbar)(z-w)\zeta} p_h\left(\frac{z+w}{2}\right) u(w) dw \wedge d\zeta,$$

où on intègre sur le contour $\Gamma(z)$ défini par :

$$\Gamma(z) = \left\{ (w, \zeta); \zeta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial z}\left(\frac{z+w}{2}\right) \right\}.$$

On rappelle que cette quantification de Weyl complexe définit un opérateur pseudo-différentiel agissant sur l'espace $H_h(\mathbb{C}, \Phi)$.

Proposition 3.2.4 (Opérateur pseudo-différentiel sur $H_h(\mathbb{C}, \Phi)$). Soit $p_h \in S(\Lambda_\Phi)$. Alors

l'opérateur $\text{Op}_\Phi^w(p_h) : H_h(\mathbb{C}, \Phi) \longrightarrow H_h(\mathbb{C}, \Phi)$ est uniformément borné par rapport au paramètre semi-classique $\hbar$.

Démonstration. La démonstration de cette proposition a déjà été abordée avec la proposition 2.2.13 (voir aussi le livre de Maciej Zworski [Zwo12, Chapitre 13]). $\square$

On rappelle qu'on a déjà vu le lien entre la quantification de Weyl classique de $\mathbb{R}^2$ et la quantification de Weyl complexe de $\mathbb{R}^2$, c'est la proposition 2.2.13 qui nous le donne. On va maintenant établir un lien entre la quantification de Berezin-Toeplitz du plan complexe $\mathbb{C}$ et la quantification de Weyl complexe de $\mathbb{R}^2$, pour ce faire, on introduit auparavant une notation.

Notation: soit $a \in S(\Lambda_\Phi)$ et soit $q \in S(\mathbb{C})$, lorsqu'on écrit la relation qui suit, pour tout $z \in \Lambda_\Phi \simeq \mathbb{C}$:

$$a(z) = \exp \left(\frac{1}{4k} \frac{1}{(\partial_{z,\bar{z}}^2 \Phi)} \partial_z \partial_{\bar{z}} \right) (q(z)),$$

cela signifie que $a(z) =: \tilde{a}(1, z)$ est la solution évaluée au temps 1 de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{a}(t, z) = \frac{1}{4k} \frac{1}{(\partial_{z,\bar{z}}^2 \Phi)} \partial_z \partial_{\bar{z}} \tilde{a}(t, z), \\ \tilde{a}(0, z) = q(z). \end{cases}$$

Proposition 3.2.5 (Quantification complexe et quantification de Berezin-Toeplitz du plan complexe $\mathbb{C}$).

1. Soit $q_k \in S(\mathbb{C})$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$. Soit $T_{q_k} = (T_k)_{k \geq 1}$ l'opérateur de Berezin-Toeplitz de symbole q_k . Alors pour tout $k \geq 1$,

$$T_k = \text{Op}_\Phi^w(a_{\hbar}) \quad \text{sur } H_k(\mathbb{C}, \Phi),$$

où $a_{\hbar} \in S(\Lambda_\Phi)$ est un symbole donné par la formule suivante, pour tout $z \in \Lambda_\Phi \simeq \mathbb{C}$:

$$a_{\hbar}(z) = \exp \left(\frac{1}{4k} \frac{1}{(\partial_{z,\bar{z}}^2 \Phi)} \partial_z \partial_{\bar{z}} \right) (q_k(z)). \quad (\text{E3.1})$$

2. Soit $a_{\hbar} \in S(\Lambda_\Phi)$ un symbole admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$. Alors il existe un symbole $q_k \in S(\mathbb{C})$ admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ tel que pour tout $k \geq 1$:

$$\text{Op}_\Phi^w(a_{\hbar}) = T_k + \mathcal{O}(k^{-\infty}) \quad \text{sur } H_k(\mathbb{C}, \Phi),$$

où $(T_k)_{k \geq 1} = T_{q_k}$ est l'opérateur de Berezin-Toeplitz de symbole q_k , où pour tout

$N \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction q_k est donnée par :

$$q_k(z) = \sum_{j=0}^N \frac{\hbar^j}{4^j j!} \left(\frac{1}{(\partial_{z,\bar{z}}^2 \Phi)} D_z D_{\bar{z}} \right)^j (a_{\hbar}(z)) + \mathcal{O}(\hbar^{N+1}).$$

Démonstration. La démonstration détaillée de ce résultat se trouve dans le livre de Maciej Zworski [Zwo12, Chapitre 13] dans le cas multidimensionnel. On reproduit ici un résumé des différentes étapes de cette démonstration.

Étape 1 : la seconde assertion découle de la première. On suppose que la première assertion est vraie. Soit $a_{\hbar} \in S(\Lambda_{\Phi})$. Montrons qu'il existe q_k un symbole sur $\mathbb{C}$ tel que pour tout $k \geq 1$:

$$\text{Op}_{\Phi}^w(a_{\hbar}) = T_k + \mathcal{O}(k^{-\infty}) \quad \text{sur l'espace } H_{\hbar}(\mathbb{C}, \Phi),$$

où $T_{q_k} = (T_k)_{k \geq 1}$ est l'opérateur de Berezin-Toeplitz de symbole q_k . Pour ce faire, on considère la fonction q_k définie, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, par :

$$q_k(z) = \sum_{j=0}^N \left(\frac{\hbar}{4} \right)^j \frac{1}{j!} \frac{1}{(\partial_{z,\bar{z}}^2 \Phi)^j} (D_z D_{\bar{z}})^j a_{\hbar}(z) + \mathcal{O}(\hbar^{N+1}). \quad (\text{E3.2})$$

Par définition, $q_k \in S(\mathbb{C})$ donc d'après la première assertion on sait qu'il existe un symbole $b_{\hbar} \in S(\Lambda_{\Phi})$ tel que pour tout $k \geq 1$:

$$T_k = \text{Op}_{\Phi}^w(b_{\hbar}) \quad \text{sur l'espace } H_k(\mathbb{C}, \Phi),$$

et qui est donné, pour $z \in \Lambda_{\Phi}$, par :

$$b_{\hbar}(z) = \exp \left(\frac{1}{4k} \frac{1}{(\partial_{z,\bar{z}}^2 \Phi)} \partial_z \partial_{\bar{z}} \right) (q_k(z)).$$

En remplaçant q_k par l'expression donnée dans l'équation (E3.2), on trouve que pour tout $z \in \Lambda_{\Phi}$:

$$b_{\hbar}(z) = a_{\hbar}(z) + \mathcal{O}(\hbar^{\infty}).$$

Ainsi, pour tout $k \geq 1$, on a :

$$T_k = \text{Op}_{\Phi}^w(a_{\hbar}) + \mathcal{O}(\hbar^{\infty}) \quad \text{sur l'espace } H_k(\mathbb{C}, \Phi).$$

Ainsi, la seconde assertion est bien vérifiée et il suffit donc maintenant de montrer la première.

Étape 2 : simplification du problème. Soit $q_k \in S(\mathbb{C})$ et soit $T_{q_k} = (T_k)_{k \geq 1}$ l'opérateur de Berezin-Toeplitz de symbole q_k . D'abord, d'après la proposition 2.2.13, on sait que si $a_{\hbar} \in S(\Lambda_{\Phi})$, alors :

$$\text{Op}_{\Phi}^w(a_{\hbar}) = T_{\phi} \text{Op}^w(\kappa_{\phi}^* a_{\hbar})(x, \hbar D_x) T_{\phi}^*,$$

où Op^w désigne la quantification de Weyl classique de $\mathbb{R}^2$. On souhaite montrer que pour tout $k \geq 1$:

$$T_k = \text{Op}_\Phi^w(a_\hbar) \quad \text{sur l'espace } H_k(\mathbb{C}, \Phi).$$

Donc, il suffit de montrer que :

$$T_\phi^* M_{q_k} T_\phi = T_\phi^* \Pi_{\Phi, k} M_{q_k} \Pi_{\Phi, k} T_\phi = T_\phi^* T_k T_\phi = \text{Op}^w(\kappa_\phi^* a_\hbar)(x, \hbar D_x) \quad \text{sur l'espace } L^2(\mathbb{R}).$$

Ensuite, on peut considérer $q_k \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C})$ car une fonction $q_k \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ peut s'écrire comme limite d'une suite de fonctions $(q_k^j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C})$ dans l'espace $\langle z \rangle^2 L^\infty(\mathbb{C})$. Et si on considère la suite d'opérateurs $T_\phi^* M_{q_k^j} T_\phi$, on montre qu'elle converge, comme opérateur de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, vers l'opérateur $T_\phi^* M_{q_k} T_\phi$. La suite d'opérateurs $\text{Op}^w(\kappa_\phi^* a_\hbar^j)(x, \hbar D_x)$ converge pour la même topologie vers l'opérateur $\text{Op}^w(\kappa_\phi^* a_\hbar)(x, \hbar D_x)$.

Étape 3 : calcul formel du symbole. Soit $q_k \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C})$. Le symbole de l'opérateur $T_\phi^* M_{q_k} T_\phi$ dans la quantification standard, est donné formellement, pour $(x, \eta) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$b_{q_k}(x, \eta) = e^{-(i/\hbar)x\eta} (T_\phi^* M_{q_k} T_\phi) \left(e^{(i/\hbar)\eta} \right) (x).$$

Ainsi, si $b_{q_k} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$T_\phi^* M_{q_k} T_\phi = \text{Op}(b_{q_k})(x, \hbar D_x),$$

où Op désigne la quantification standard. Déterminons une expression formelle du symbole b_{q_k} . Par définition, on a :

$$\begin{cases} T_\phi u(z) = c_\phi \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{R}} e^{(i/\hbar)\phi(z,x)} u(x) dx, \\ T_\phi^* v(x) = c_\phi \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{C}} e^{-(i/\hbar)\overline{\phi(w,x)}} v(w) e^{-(2/\hbar)\Phi(w)} dL(w). \end{cases}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} & T_\phi^* M_{q_k} T_\phi \left(e^{(i/\hbar)x\eta} \right) \\ &= T_\phi^* M_{q_k} \left(c_\phi \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{R}} e^{(i/\hbar)\phi(x,y)} e^{(i/\hbar)y\eta} dy \right), \\ &= T_\phi^* \left(c_\phi \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{R}} e^{(i/\hbar)\phi(x,y)} q_k(x) e^{(i/\hbar)y\eta} dy \right), \\ &= c_\phi \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{C}} e^{-(i/\hbar)\overline{\phi(w,x)}} \left(c_\phi \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{R}} e^{(i/\hbar)\phi(w,y)} q_k(w) e^{(i/\hbar)y\eta} dy \right) e^{-(2/\hbar)\Phi(w)} dL(w), \\ &= c_\phi^2 \hbar^{-3/2} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{R}} e^{(i/\hbar)(\phi(w,y) - \overline{\phi(w,x)} + 2i\Phi(w))} q_k(w) e^{(i/\hbar)y\eta} dy dL(w). \end{aligned}$$

Donc pour tout $(x, \eta) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
 b_{q_k}(x, \eta) &= e^{-(i/\hbar)x\eta} (T_\phi^* M_{q_k} T_\phi) \left(e^{(i/\hbar)\cdot\eta} \right) (x), \\
 &= e^{-(i/\hbar)x\eta} c_\phi^2 \hbar^{-3/2} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{R}} e^{(i/\hbar)(\phi(w,y) - \overline{\phi(w,x)} + 2i\Phi(w))} q_k(w) e^{(i/\hbar)y\eta} dy dL(w), \\
 &= c_\phi^2 \hbar^{-3/2} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{R}} e^{(i/\hbar)(\phi(w,y) - \overline{\phi(w,x)} + 2i\Phi(w))} q_k(w) e^{(i/\hbar)(y-x)\eta} dy dL(w), \\
 &= c_\phi^2 \hbar^{-3/2} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{R}} e^{(i/\hbar)\Theta(w,y;x,\eta)} q_k(w) dy dL(w),
 \end{aligned}$$

avec $\Theta(w, y; x, \eta) = \phi(w, y) - \overline{\phi(w, x)} + 2i\Phi(w) + (y - x)\eta$ pour $(w, y, x, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^3$. En utilisant la relation suivante entre la fonction ϕ et la fonction Φ :

$$\Phi(w) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (-\Im(\phi(w, x))),$$

on montre que la partie imaginaire de la fonction Θ est strictement positive. Les points critiques de la fonction Θ sont donnés par les équations :

$$\begin{cases} \partial_w \Theta = 0, \\ \partial_{\overline{w}} \Theta = 0 \Leftrightarrow -\overline{\partial_w \Theta} = 0, \\ \partial_y \Theta = 0, \end{cases}$$

qui se réécrivent de la façon suivante pour $(w, y, x, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \partial_w \phi(w, y) + 2i\partial_w \Phi(w) = 0, \\ \partial_w \phi(w, x) + 2i\partial_w \Phi(w) = 0, \\ \partial_y \phi(w, y) + \eta = 0. \end{cases}$$

Si on note $x(w)$ l'unique point réel où la fonction $-\Im\phi(w, x)$ atteint son maximum, ces équations se réécrivent encore sous la forme qui suit pour $(w, y, x, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \partial_w \phi(w, y) - \partial_w \phi(w, x(w)) = 0, \\ \partial_w \phi(w, x) - \partial_w \phi(w, x(w)) = 0, \\ \partial_y \phi(w, y) + \eta = 0, \end{cases}$$

car par définition $\Phi(w) = -\Im\phi(w, x(w)) = -\frac{\phi(w, x(w)) - \overline{\phi(w, x(w))}}{2i}$. Ensuite, on rappelle que d'après la définition de la fonction κ_ϕ , on a :

$$\kappa_\phi(x, -\partial_x \phi(w, x)) = (w, \partial_w \phi(w, x)),$$

et on rappelle que :

$$\partial_w \phi(w, x(w)) = \frac{2}{i} \partial_w \Phi(w),$$

ainsi :

$$\kappa_\phi(x(w), -\partial_x \phi(x(w), w)) = w \quad \text{via l'identification de } \Lambda_\Phi \text{ avec } \mathbb{C}.$$

Par conséquent les deux premières équations définissant le point critique sont équivalentes à $x = y = x(w)$. Et l'unique point critique de la fonction Θ est donné par :

$$w = \kappa_\phi(x, \eta) \quad \text{et} \quad y = x.$$

On montre par un calcul que la valeur de la fonction Θ en ce point critique est nulle.

On effectue ensuite le changement de variable suivant :

$$w = \kappa_\phi(x', \eta') = -\frac{1}{b}(dx' + \eta') \quad \text{avec } (x', \eta') \in \mathbb{R}^2,$$

où pour $(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, on a posé :

$$\phi(z, x) = \frac{1}{2}az^2 + bzx + \frac{1}{2}dx^2,$$

avec $a, b, d \in \mathbb{C}$ (voir la définition 2.2.9). La matrice jacobienne du changement de variable s'écrit sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} -\Re(b^{-1}d) & -\Re(b^{-1}) \\ -\Im(b^{-1}d) & -\Im(b^{-1}) \end{pmatrix}.$$

Ainsi le déterminant de cette matrice vaut :

$$\det M = \frac{-c}{|b|^2} \quad \text{où } c = \Im(d).$$

D'après la définition 2.2.10, on a :

$$c_\phi = \frac{1}{2^{1/2}\pi^{3/4}} \frac{|\det \partial_x \partial_z \phi|}{(\det \Im \partial_x^2 \phi)^{1/4}}.$$

On peut exprimer c_ϕ^2 en fonctions des constantes $(b, c) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ comme suit :

$$c_\phi^2 = \frac{1}{2\pi^{3/2}} \frac{|b|^2}{c^{1/2}}.$$

Ainsi, on peut réécrire la fonction b_{q_k} de la façon suivante pour $(x, \eta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} b_{q_k}(x, \eta) &= c_\phi^2 \hbar^{-3/2} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{R}} e^{(i/\hbar)\Theta(w, y; x, \eta)} q_k(w) dy dL(w), \\ &= \frac{1}{2\pi^{3/2}} \frac{|b|^2}{c^{1/2}} \frac{c}{|b|^2} \hbar^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{(i/\hbar)\Theta(\kappa_\phi(x', \eta'), y; x, \eta)} (\kappa_\phi^* q_k)(x', \eta') dx' d\eta' dy, \\ &= \frac{1}{2(\pi \hbar)^{3/2}} c^{1/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{(i/\hbar)\tilde{\Theta}(x', \eta'; x, \eta)} (\kappa_\phi^* q_k)(x', \eta') dx' d\eta' dy, \end{aligned}$$

où $\tilde{\Theta}(x', \eta', y; x, \eta) = \Theta(\kappa_\phi(x', \eta'), y; x, \eta)$.

Par le calcul, on trouve que, pour $(x', \eta', y, x, \eta) \in \mathbb{R}^5$, on a :

$$\tilde{\Theta}(x', \eta', y; x, \eta) = (y - x) \left(d \left(\frac{1}{2} (y + x) - x' \right) + (\eta - \eta') \right) + ic(x' - x)^2.$$

En appliquant un résultat du type méthode de la phase stationnaire, on trouve que pour $(x, \eta) \in \mathbb{R}^2$:

$$b_{q_k}(x, \eta) = e^{-(\hbar/4)(c^{-1}D_x^2 + c^{-1}|d|^2D_\eta^2 - 2c^{-1}dD_\eta D_x)}(\kappa_\phi^* q_k)(x, \eta). \quad (\text{E3.3})$$

Étape 4 : lien entre la quantification standard et la quantification de Weyl. Pour $q_k \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C})$, on a obtenu une expression formelle du symbole b_{q_k} satisfaisant l'égalité :

$$T_\phi^* M_{q_k} T_\phi = \text{Op}(b_{q_k})(x, \hbar D_x),$$

avec $\text{Op}(b_{q_k})$ la quantification standard du symbole b_{q_k} . Nous devons donc maintenant faire le lien entre la quantification standard et la quantification de Weyl, puisqu'on veut un résultat de la forme suivante :

$$T_\phi^* M_{q_k} T_\phi = \text{Op}^w(a_{q_k})(x, \hbar D_x).$$

Or ce lien se fait au niveau symbolique via la formule qui suit, pour $(x, \eta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} a_{q_k}(x, \eta) &= \exp \left(-i \frac{\hbar}{2} D_x D_\eta \right) b_{q_k}(x, \eta), \\ &= \exp \left(-\frac{\hbar}{4c} (D_x - dD_\eta) (D_x - \bar{d}D_\eta) \right) (\kappa_\phi^* q_k)(x, \eta) \quad \text{en utilisant l'équation (E3.3)}. \end{aligned}$$

En exploitant le changement de variable $z = \kappa_\phi(x, \eta) = -\frac{1}{b}(dx + \eta)$, on réécrit le symbole a_{q_k} pour $(x, \eta) \in \mathbb{R}^2$ sous la forme suivante :

$$a_{q_k}(x, \eta) = \exp \left(-\frac{\hbar}{4} \frac{1}{(\partial_{z, \bar{z}}^2 \Phi)} D_z D_{\bar{z}} q_k \right) (\kappa_\phi(x, \eta)) = \exp \left(\frac{\hbar}{4} \frac{1}{(\partial_{z, \bar{z}}^2 \Phi)} \partial_z \partial_{\bar{z}} q_k \right) (\kappa_\phi(x, \eta)).$$

Ainsi, $a_{q_k}(x, \eta) = a_\hbar(\kappa_\phi(x, \eta))$, donc au niveau des opérateurs, on a :

$$T_\phi^* M_{q_k} T_\phi = \text{Op}^w(a_{q_k})(x, \hbar D_x) = \text{Op}^w(\kappa_\phi^* a_\hbar)(x, \hbar D_x).$$

D'où le résultat. □

Maintenant qu'on a fait un lien entre la quantification de Berezin-Toeplitz du plan complexe $\mathbb{C}$ et la quantification de Weyl complexe de $\mathbb{C}$, il ne reste plus qu'à traduire les hypothèses du théorème A portant sur un symbole sur $\mathbb{R}^2$ en des hypothèses portant sur le symbole d'un opérateur de Berezin-Toeplitz du plan complexe $\mathbb{C}$. Pour ce faire, on

procède en deux étapes, la première consiste à traduire les hypothèses (A) à (E) portant sur un symbole sur $\mathbb{R}^2$ en des hypothèses sur un symbole sur Λ_Φ , puis on traduira à l'aide de la proposition 3.2.5 les hypothèses sur un symbole sur Λ_Φ en des hypothèses sur un symbole sur $\mathbb{C}$. Rappelons à cet effet les hypothèses du théorème A. On considère la fonction $p_h^\epsilon := f_h^\epsilon + i\epsilon q_h^\epsilon$ définie sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$ dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ de ϵ et satisfaisant les hypothèses suivantes :

- (A) les symboles f_h^ϵ et q_h^ϵ sont des fonctions analytiques sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ du petit paramètre ϵ ;
- (B) p_h^ϵ est une fonction holomorphe sur un voisinage tubulaire de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et sur ce voisinage, on a :

$$\exists C > 0, \quad |p_h^\epsilon(x, \xi)| \leq C m(\Re(x, \xi)), \quad (\text{E3.4})$$

où m est une fonction d'ordre sur $\mathbb{R}^2$;

- (C) p_h^ϵ admet un développement asymptotique en puissances du paramètre semi-classique $\hbar$ dans l'espace de fonctions holomorphes satisfaisant la borne (E3.4) de la forme suivante :

$$p_h^\epsilon(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j^\epsilon(x, \xi) \hbar^j ;$$

- (D) le symbole principal, noté p^ϵ :

$$p^\epsilon(x, \xi) = f^\epsilon(x, \xi) + i\epsilon q^\epsilon(x, \xi),$$

pour $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$, est elliptique à l'infini, *i.e.* pour $(x, \xi) \in \text{VoisTub}(\mathbb{R}^2)$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|p^\epsilon(x, \xi)| \geq \frac{1}{C} m(\Re(x, \xi)), \quad \text{pour } |(x, \xi)| \geq C ;$$

- (E) soit $E_0 \in \mathbb{R}$ un réel fixé, alors l'ensemble de niveau :

$$\Lambda_{E_0} = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 ; p^\epsilon(x, \xi)|_{\epsilon=0} = E_0\},$$

est compact, connexe et régulier.

Proposition 3.2.6 (Hypothèses sur un symbole sur Λ_Φ). *Soit $a_h^\epsilon := b_h^\epsilon + i\epsilon c_h^\epsilon$ une fonction définie sur $\Lambda_\Phi \simeq \mathbb{C}$ dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ du petit paramètre ϵ et satisfaisant les hypothèses suivantes :*

- (A') les symboles b_h^ϵ et c_h^ϵ sont des fonctions analytiques sur Λ_Φ à valeurs réelles dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ du petit paramètre ϵ ;
- (B') a_h^ϵ est une fonction holomorphe sur un voisinage tubulaire de Λ_Φ et sur ce voisinage, on a :

$$\exists C > 0, \quad |a_h^\epsilon(z)| \leq C \tilde{m}(\Re(z)), \quad (\text{E3.5})$$

où $\tilde{m}$ est une fonction d'ordre sur Λ_Φ et où ici la notation partie réelle $\Re$ signifie que si $z \in \text{VoisTub}(\Lambda_\Phi)$, alors $\Re(z) \in \Lambda_\Phi$ (par analogie avec les fonctions d'ordre sur $\mathbb{R}^2$);

(C') a_h^ϵ admet un développement asymptotique en puissances de $\hbar$ dans l'espace de fonctions holomorphes satisfaisant la borne (E3.5) de la forme suivante :

$$a_h^\epsilon(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j^\epsilon(z) \hbar^j;$$

(D') le symbole principal, noté a^ϵ :

$$a^\epsilon(z) = b^\epsilon(z) + i\epsilon c^\epsilon(z),$$

pour $z \in \Lambda_\Phi$, est elliptique à l'infini, i.e. pour tout $z \in \text{VoisTub}(\Lambda_\Phi)$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|a^\epsilon(z)| \geq \frac{1}{C} \tilde{m}(\Re(z)) \quad \text{pour } |z| \geq C;$$

(E') soit $E_0 \in \mathbb{R}$ un réel fixé, alors l'ensemble de niveau :

$$\tilde{\Lambda}_{E_0} = \{z \in \Lambda_\Phi; a^\epsilon(z)|_{\epsilon=0} = E_0\},$$

est compact, connexe et régulier.

Soit p_h^ϵ un symbole sur $\mathbb{R}^2$ défini par la relation suivante pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$:

$$p_h^\epsilon(x, \xi) = a_h^\epsilon \circ \kappa_\phi(x, \xi),$$

où on rappelle que κ_ϕ est la fonction définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \kappa_\phi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \\ (x, -\partial_x \phi(z, x)) &\longmapsto (z, \partial_z \phi(z, x)). \end{aligned}$$

Alors le symbole p_h^ϵ satisfait les hypothèses (A) à (E).

Démonstration. Soit a_h^ϵ un symbole sur Λ_Φ satisfaisant les hypothèses (A') à (E'). Soit $p_h^\epsilon = a_h^\epsilon \circ \kappa_\phi$. D'abord, on remarque que la fonction p_h^ϵ est bien définie sur l'espace $\mathbb{R}^2$ car la transformation κ_ϕ envoie $\mathbb{R}^2$ sur Λ_Φ d'après la remarque 2.2.12. On remarque également que si on pose, pour $a, b, d \in \mathbb{C}$ et pour $(z, x) \in \mathbb{C}^2$:

$$\phi(z, x) = \frac{1}{2}az^2 + bzx + \frac{1}{2}dx^2,$$

(voir la définition 2.2.9) alors la transformation κ_ϕ se réécrit :

$$\kappa_\phi : (x, -(bz + dx)) \mapsto (z, az + bx).$$

Montrons que le symbole a_h^ϵ satisfait les hypothèses (A) à (E).

- (A) Par définition, on a : $f_h^\epsilon = b_h^\epsilon \circ \kappa_\phi$ et $q_h^\epsilon = c_h^\epsilon \circ \kappa_\phi$ donc on en déduit que les fonctions f_h^ϵ et q_h^ϵ sont analytiques sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles et dépendent de manière $\mathcal{C}^\infty$ du petit paramètre ϵ .
- (B) Par définition la fonction κ_ϕ envoie un voisinage tubulaire de $\mathbb{R}^2$ sur un voisinage tubulaire de Λ_Φ , donc p_h^ϵ est une fonction holomorphe sur $\text{VoisTub}(\mathbb{R}^2)$ car a_h^ϵ l'est sur $\text{VoisTub}(\Lambda_\Phi)$ et sur ce voisinage, on a :

$$\begin{aligned} |p_h^\epsilon(x, \xi)| &= |a_h^\epsilon \circ \kappa_\phi(x, \xi)|, \\ &= |a_h^\epsilon(z)| \quad \text{où } z = \kappa_\phi(x, \xi) \in \text{VoisTub}(\Lambda_\Phi), \\ &\leq C\tilde{m}(\Re(z)), \\ &\leq C\tilde{m}(\kappa_\phi(\Re(x, \xi))), \\ &\leq Cm(\Re(x, \xi)), \end{aligned}$$

où on a posé $m = \tilde{m} \circ \kappa_\phi$, ce qui définit bien une fonction d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

- (C) Comme le symbole a_h^ϵ admet un développement asymptotique en puissances de $\hbar$ et que la transformation κ_ϕ est indépendante du paramètre semi-classique, alors le symbole p_h^ϵ admet aussi un développement asymptotique en puissances de $\hbar$.
- (D) Soit p^ϵ le symbole principal de la fonction p_h^ϵ , soit $(x, \xi) \in \text{VoisTub}(\mathbb{R}^2)$, alors on a :

$$\begin{aligned} |p^\epsilon(x, \xi)| &= |a^\epsilon(z)|, \\ &\geq \frac{1}{C}\tilde{m}(\Re(z)) \quad \text{pour } |z| \geq C, \\ &\geq \frac{1}{C}m(\Re(x, \xi)) \quad \text{pour } |(x, \xi)| \geq C, \end{aligned}$$

d'où l'ellipticité à l'infini du symbole principal p^ϵ .

- (E) Soit $E_0 \in \mathbb{R}$, on considère l'ensemble de niveau suivant :

$$\begin{aligned} \Lambda_{E_0} &= \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2; p^\epsilon(x, \xi)|_{\epsilon=0} = E_0\}, \\ &= \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2; a^\epsilon \circ \kappa_\phi(x, \xi)|_{\epsilon=0} = E_0\}, \\ &= \{z \in \Lambda_\Phi; a^\epsilon(z)|_{\epsilon=0} = E_0\}, \\ &= \tilde{\Lambda}_{E_0}, \end{aligned}$$

d'où le fait que l'ensemble de niveau Λ_{E_0} soit compact, connexe et régulier.

□

Proposition 3.2.7 (Hypothèse sur un symbole sur $\mathbb{C}$). *Soit $p_k^\epsilon := f_k^\epsilon + i\epsilon q_k^\epsilon$ une fonction définie sur $\mathbb{C}$ dépendant de manière C^∞ du petit paramètre ϵ et satisfaisant les hypothèses suivantes :*

- (A'') *les symboles f_k^ϵ et q_k^ϵ sont des fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$ à valeurs réelles dépendant de manière C^∞ du petit paramètre ϵ ;*
- (B'') *p_k^ϵ est une fonction holomorphe sur un voisinage tubulaire de $\mathbb{C}$ et sur ce voisinage, on a :*

$$|p_k^\epsilon(z)| \leq C\hat{m}(\Re(z)), \quad (\text{E3.6})$$

où $\hat{m}$ est une fonction d'ordre sur $\mathbb{C}$ et où ici la partie réelle signifie que si $z \in \text{VoisTub}(\mathbb{C})$, alors $\Re(z) \in \mathbb{C}$ (par analogie avec les fonctions d'ordre sur Λ_Φ) ;

- (C'') *p_k^ϵ admet un développement asymptotique en puissances de $1/k$ dans l'espace de fonctions holomorphes satisfaisant la borne (E3.6) de la forme suivante :*

$$p_k^\epsilon(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j^\epsilon(z) k^{-j};$$

- (D'') *le symbole principal, noté p^ϵ :*

$$p^\epsilon(z) = f^\epsilon(z) + i\epsilon q^\epsilon(z),$$

pour $z \in \mathbb{C}$, est elliptique à l'infini, i.e. pour tout $z \in \text{VoisTub}(\mathbb{C})$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|p^\epsilon(z)| \geq \frac{1}{C}\hat{m}(\Re(z)), \quad \text{pour } |z| \geq C.$$

- (E'') *soit $E_0 \in \mathbb{R}$ un réel fixé, alors l'ensemble de niveau :*

$$\hat{\Lambda}_{E_0} = \{z \in \mathbb{C}; p^\epsilon(z)|_{\epsilon=0} = E_0\},$$

est compact, connexe et régulier.

Soit $T_{p_k^\epsilon} = (T_k)_{k \geq 1}$ l'opérateur de Berezin-Toeplitz de symbole p_k^ϵ . Alors le symbole a_h^ϵ obtenu par application de la proposition 3.2.5 défini pour tout $z \in \Lambda_\Phi \simeq \mathbb{C}$ par :

$$a_h^\epsilon(z) = \exp\left(\frac{1}{4k} \frac{1}{(\partial_{z,\bar{z}}^2 \Phi)} \partial_z \partial_{\bar{z}}\right)(p_k^\epsilon(z)),$$

satisfait les hypothèses (A') à (E') de la proposition 3.2.6.

Démonstration. Soit p_k^ϵ un symbole satisfaisant les hypothèses (A'') à (E''). Soit $T_{p_k^\epsilon} = (T_k)_{k \geq 1}$ l'opérateur de Berezin-Toeplitz du plan complexe de symbole p_k^ϵ . Alors d'après la proposition 3.2.5, on sait qu'il existe une fonction a_h^ϵ définie sur Λ_Φ telle que pour tout $k \geq 1$:

$$T_k = \text{Op}_\Phi^w(a_h^\epsilon) \quad \text{sur l'espace } H_k(\mathbb{C}, \Phi),$$

et où le symbole a_h^ϵ est donné par la formule suivante pour tout $z \in \Lambda_\Phi \simeq \mathbb{C}$:

$$a_h^\epsilon(z) = \exp \left(\frac{1}{4k} \frac{1}{(\partial_{z,\bar{z}}^2 \Phi)} \partial_z \partial_{\bar{z}} \right) (p_k^\epsilon(z)).$$

Autrement dit la fonction a_h^ϵ est la solution au temps 1 de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \partial_t a_h^\epsilon(t, z) = \frac{\hbar}{4} \frac{1}{(\partial_{z,\bar{z}}^2 \Phi)} \partial_z \partial_{\bar{z}} a_h^\epsilon(t, z), \\ a_h^\epsilon(0, z) = p_k^\epsilon(z) \end{cases}$$

Montrons que le symbole a_h^ϵ satisfait les hypothèses (A') à (E').

(A') Soient b_h^ϵ et c_h^ϵ des fonctions sur Λ_Φ définies par les relations suivantes, pour tout $z \in \Lambda_\Phi$:

$$\begin{cases} b_h^\epsilon(z) = \exp \left(\frac{1}{4k} \frac{1}{(\partial_{z,\bar{z}}^2 \Phi)} \partial_z \partial_{\bar{z}} \right) (f_k^\epsilon(z)), \\ c_h^\epsilon(z) = \exp \left(\frac{1}{4k} \frac{1}{(\partial_{z,\bar{z}}^2 \Phi)} \partial_z \partial_{\bar{z}} \right) (q_k^\epsilon(z)), \end{cases}$$

comme les fonctions f_k^ϵ et q_k^ϵ sont analytiques sur $\mathbb{C}$, alors les fonctions b_h^ϵ et c_h^ϵ le sont sur Λ_Φ . De plus, b_h^ϵ est la solution au temps de 1 de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \partial_t b_h^\epsilon(t, z) = \frac{\hbar}{4} \frac{1}{(\partial_{z,\bar{z}}^2 \Phi)} \partial_z \partial_{\bar{z}} b_h^\epsilon(t, z), \\ b_h^\epsilon(0, z) = f_k^\epsilon(z) \end{cases}$$

qui est invariante par conjugaison complexe, donc b_h^ϵ est à valeurs réelles sur Λ_Φ . Il en est de même pour la fonction c_h^ϵ .

(B') Comme la fonction p_k^ϵ est définie sur un voisinage tubulaire de $\mathbb{C}$, alors la fonction a_h^ϵ est bien définie sur un voisinage tubulaire de Λ_Φ et de plus comme la fonction p_k^ϵ est holomorphe sur $\text{VoisTub}(\mathbb{C})$, alors a_h^ϵ sera holomorphe sur $\text{VoisTub}(\Lambda_\Phi)$. Si on considère l'équation différentielle ci-dessus pour $z \in \text{VoisTub}(\mathbb{C})$, alors on a :

$$a_h^\epsilon(z) = p_k^\epsilon(z),$$

d'où la majoration (E3.5).

(C') Comme la fonction p_k^ϵ admet un développement asymptotique en puissances de $1/k$ de la forme suivante pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$p_k^\epsilon(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j^\epsilon(z) k^{-j},$$

alors on peut considérer pour tout $j \in \mathbb{N}$, les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t a_j^\epsilon(t, z) = \frac{\hbar}{4} \frac{1}{(\partial_{z, \bar{z}}^2 \Phi)} \partial_z \partial_{\bar{z}} a_j^\epsilon(t, z), \\ a_j^\epsilon(0, z) = p_j^\epsilon(z). \end{cases}$$

Si on note $a_j^\epsilon(z)$ la solution au temps 1 de cette équation, alors cette solution admet un développement asymptotique en puissances de $\hbar$ et donc on peut en déduire que le symbole a_h^ϵ admet un développement asymptotique en puissances de $\hbar$ de la forme suivante pour tout $z \in \text{VoisTub}(\Lambda_\Phi)$:

$$a_h^\epsilon(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j^\epsilon(z) \hbar^j.$$

(D') Soit a^ϵ le symbole principal de la fonction a_h^ϵ , alors on peut montrer que pour tout $z \in \text{VoisTub}(\Lambda_\Phi)$, on a :

$$a^\epsilon(z) = p^\epsilon(z),$$

d'où l'ellipticité à l'infini du symbole principal a^ϵ .

(E') Soit $E_0 \in \mathbb{R}$ un réel fixé ; on considère l'ensemble de niveau suivant :

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{E_0} &= \{z \in \Lambda_\Phi; a^\epsilon(z)|_{\epsilon=0} = E_0\}, \\ &= \{z \in \Lambda_\Phi; p^\epsilon(z)|_{\epsilon=0} = E_0\} \quad \text{d'après l'hypothèse (D')}, \\ &= \{z \in \mathbb{C}; p^\epsilon(z)|_{\epsilon=0} = E_0\} \quad \text{par identification de } \Lambda_\Phi \text{ et } \mathbb{C}, \\ &= \hat{\Lambda}_{E_0}, \end{aligned}$$

d'où le fait que cet ensemble de niveau soit compact, connexe et régulier.

□

On peut maintenant énoncer une deuxième application du théorème A qui porte sur le spectre d'opérateurs de Berezin-Toeplitz du plan complexe non auto-adjoints.

Théorème C. Soit $T_{p_k^\epsilon}$ un opérateur de Berezin-Toeplitz du plan complexe dépendant de manière C^∞ du petit paramètre ϵ et soit $E_0 \in \mathbb{R}$ tels que les hypothèses (A'') à (E'') soient satisfaites (voir la proposition 3.2.7). En particulier l'opérateur $T_{p_k^\epsilon}$ est de la forme suivante :

$$T_{p_k^\epsilon} = T_{f_k^\epsilon} + i\epsilon T_{q_k^\epsilon},$$

où $T_{f_k^\epsilon}$ et $T_{q_k^\epsilon}$ sont des opérateurs de Berezin-Toeplitz du plan complexe $\mathbb{C}$ auto-adjoints. Il existe $\epsilon_0 > 0$ un petit paramètre tel que, pour :

$$R_{C, \epsilon_0} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |\Re(z) - E_0| < \frac{1}{C}, |\Im(z)| < \frac{\epsilon_0}{C} \right\} \quad \text{où } C > 0 \text{ est une constante,}$$

les valeurs propres de l'opérateur de Berezin-Toeplitz $T_{p_k^\epsilon} := (T_k)_{k \geq 1}$ dans le rectangle R_{C, ϵ_0}

sont simples et données pour $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ et pour k suffisamment grand, par :

$$\sigma(T_k) \cap R_{C, \epsilon_0} = \{g_k^\epsilon(k^{-1}j) + \mathcal{O}(k^{-\infty}), j \in \mathbb{Z}\} \cap R_{C, \epsilon_0},$$

où g_k^ϵ est une fonction analytique admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ et dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ du paramètre ϵ . De plus, le premier terme du développement asymptotique de la fonction g_k^ϵ est la réciproque de l'intégrale d'action :

$$R_{C, \epsilon_0} \ni E \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{\gamma}_E} w dz,$$

où $\hat{\gamma}_E$ est un lacet dans l'ensemble de niveau complexe :

$$\hat{\Lambda}_E^\epsilon = \{(z, w) \in \text{VoisTub}(\mathbb{C}); p^\epsilon(z, w) = E\}.$$

Démonstration. Comme le symbole p_k^ϵ satisfait les hypothèses (A'') à (E''), alors si on applique les propositions 3.2.5 et 3.2.7, le symbole a_h^ϵ défini sur l'ensemble Λ_Φ par :

$$a_h^\epsilon(z) = \exp \left(\frac{1}{4k} \frac{1}{(\partial_{z, \bar{z}}^2 \Phi)} \partial_z \partial_{\bar{z}} \right) (p_k^\epsilon(z)),$$

satisfait les hypothèses (A') à (E'). Si on applique maintenant la proposition 3.2.6, le symbole $p_h^\epsilon = a_h^\epsilon \circ \kappa_\phi$ satisfait les hypothèses (A) à (E). Par conséquent, on est dans le cadre d'application du théorème A, ainsi si on note $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ la quantification de Weyl du symbole p_h^ϵ , on sait qu'il existe un petit paramètre ϵ_0 tel que pour $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, le spectre de l'opérateur $\text{Op}^w(p_h^\epsilon)$ dans le rectangle R_{C, ϵ_0} est donné pour $\hbar$ suffisamment petit par :

$$\sigma(\text{Op}^w(p_h^\epsilon)) \cap R_{C, \epsilon_0} = \{g_h^\epsilon(\hbar j) + \mathcal{O}(\hbar^\infty), j \in \mathbb{Z}\} \cap R_{C, \epsilon_0},$$

où g_h^ϵ est une fonction analytique dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ de ϵ et admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$. Ensuite, d'après la proposition 2.2.29, on sait que :

$$\sigma(\text{Op}^w(p_h^\epsilon)) = \sigma(\text{Op}_\Phi^w(a_h^\epsilon)),$$

et d'après la proposition 3.2.5, on sait que pour tout $k \geq 1$, on a :

$$T_k = \text{Op}_\Phi^w(a_h^\epsilon) \quad \text{sur } H_k(\mathbb{C}, \Phi),$$

donc on en déduit que pour tout $k \geq 1$,

$$\sigma(T_k) = \sigma(\text{Op}_\Phi^w(a_h^\epsilon)),$$

autrement dit pour k suffisamment grand et pour tout $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, on a :

$$\sigma(T_k) \cap R_{C, \epsilon_0} = \{g_k^\epsilon(k^{-1}j) + \mathcal{O}(k^{-\infty}), j \in \mathbb{Z}\} \cap R_{C, \epsilon_0},$$

où on a remplacé le paramètre semi-classique $\hbar$ par $1/k$. Il reste maintenant à déterminer le premier terme du développement asymptotique de la fonction g_k^ϵ . D'après le théorème A, on sait que ce premier terme est la réciproque de l'intégrale d'action :

$$E \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_E} \xi dx,$$

où γ_E est un lacet dans l'ensemble de niveau complexe :

$$\Lambda_E^\epsilon = \{(x, \xi) \in \text{VoisTub}(\mathbb{R}^2); p^\epsilon(x, \xi) = E\}.$$

Comme κ_ϕ est une transformation canonique, alors on peut montrer que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_E} \xi dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}_E} \eta dy,$$

où (y, η) sont des coordonnées sur $\text{VoisTub}(\Lambda_\Phi)$ et où $\tilde{\gamma}_E = \kappa_\phi^* \gamma_E$ est un lacet dans l'ensemble de niveau :

$$\tilde{\Lambda}_E^\epsilon = \{(y, \eta) \in \text{VoisTub}(\Lambda_\Phi), a^\epsilon(y, \eta) = E\}.$$

Par identification de Λ_Φ avec $\mathbb{C}$ et d'après l'équation (E3.1) qui relie le symbole a_h^ϵ et le symbole p_k^ϵ , cet ensemble de niveau se réécrit :

$$\tilde{\Lambda}_E^\epsilon = \{(z, w) \in \text{VoisTub}(\mathbb{C}); p^\epsilon(z, w) = E\} = \hat{\Lambda}_E^\epsilon,$$

et l'intégrale d'action vérifie :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_E} \xi dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}_E} \eta dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{\gamma}_E} w dz,$$

où $\hat{\gamma}_E = \tilde{\gamma}_E$. D'où le fait que le premier terme du développement asymptotique en puissances de $1/k$ de la fonction g_k^ϵ soit la réciproque de l'intégrale d'action :

$$E \mapsto \int_{\hat{\gamma}_E} w dz.$$

□

Chapitre 4

Simulations numériques

Dans ce chapitre, nous illustrons à l'aide de simulations numériques les résultats des théorèmes A et A'. Nous allons donc observer que pour des perturbations non auto-adjointes d'opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints, les valeurs propres se répartissent le long d'une courbe.

4.1 Opérateurs pseudo-différentiels agissant sur $L^2(\mathbb{S}^1)$

Soit $0 \leq \hbar < 1$ le paramètre semi-classique. Soit $\epsilon > 0$ un petit paramètre. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On considère l'opérateur pseudo-différentiel $\text{Op}^w(p^\epsilon)$ agissant sur l'espace $L^2(\mathbb{S}^1)$ et défini par la formule suivante :

$$\text{Op}^w(p^\epsilon)(\theta, \hbar D_\theta) = \alpha \hbar D_\theta + i\epsilon \text{Op}^w(q)(\theta, \hbar D_\theta),$$

où le symbole $q(\theta, I)$ de l'opérateur $\text{Op}^w(q)$ est une fonction analytique sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ qui ne dépend pas du paramètre semi-classique $\hbar$. Nous décrivons ci-dessous la méthode d'implémentation que nous avons utilisée pour définir l'opérateur pseudo-différentiel $\text{Op}^w(p^\epsilon)$ avec le logiciel de calcul scientifique **Scilab** :

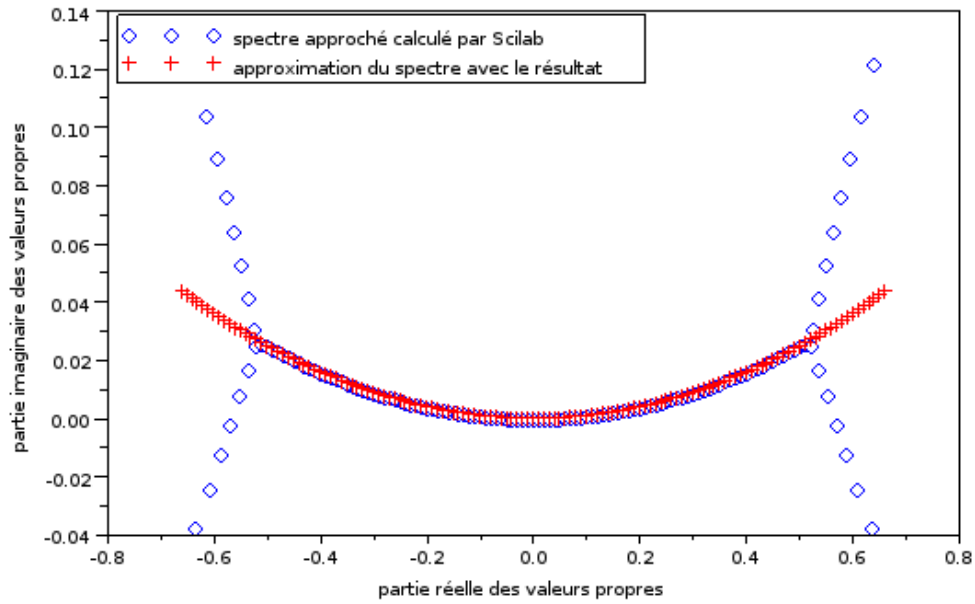
1. on remarque que la famille $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}} = (e^{il\theta})_{l \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de l'espace $L^2(\mathbb{S}^1)$, donc on définit l'opérateur $\text{Op}^w(p^\epsilon)$ par son action sur les éléments de la base ; on obtient alors une matrice infinie $\mathcal{P}^\epsilon$;
2. on choisit un entier $N \geq 1$ et on tronque la matrice $\mathcal{P}^\epsilon$ en une matrice $\mathcal{P}_{2N+1}^\epsilon$ de taille $(2N+1) \times (2N+1)$ en choisissant de considérer l'action de l'opérateur $\text{Op}^w(p^\epsilon)$ uniquement sur les vecteurs $(e_l)_{-N \leq l \leq N}$;
3. on détermine le spectre de la matrice $\mathcal{P}_{2N+1}^\epsilon$ à l'aide de la fonction **spec**.

Ensuite, pour comparer le spectre obtenu par **Scilab** avec celui obtenu dans le théorème A', on détermine une approximation de la fonction g^ϵ (qui donne le spectre exact) en considérant la moyenne par rapport à la variable $\theta \in \mathbb{S}^1$ du symbole $p^\epsilon(\theta, I) = \alpha I + i\epsilon q(\theta, I)$ de l'opérateur $\text{Op}^w(p^\epsilon)$ pour $(\theta, I) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. On obtient les graphiques ci-dessous avec les paramètres suivant :

1. $N = 66$;
2. $\hbar = 10^{-2}$;
3. $\alpha = 1$;
4. $\epsilon = 10^{-1}$.

Remarque 4.1.1.

- Dans les figures, les points bleus désignent les valeurs propres de la matrice tronquée $\mathcal{P}_{2N+1}^\epsilon$ calculées avec la fonction `spec` de Scilab et les points rouges désignent une approximation du spectre calculée grâce au résultat du théorème A'.
- Le choix du petit paramètre ϵ explique l'écart entre les points bleus et les points rouges. Plus on choisit le paramètre ϵ petit et plus cet écart diminue.
- Dans les figures 4.1 et 4.3, on observe une explosion des valeurs propres aux bords, ce phénomène est dû au fait qu'on a tronqué la matrice infinie $\mathcal{P}^\epsilon$.
- Les figures 4.2 et 4.4 sont des zooms des figures 4.1 et 4.3 respectivement.


 FIGURE 4.1 – $p^\epsilon(\theta, I) = \alpha I + i\epsilon(\cos \theta + I^2)$.

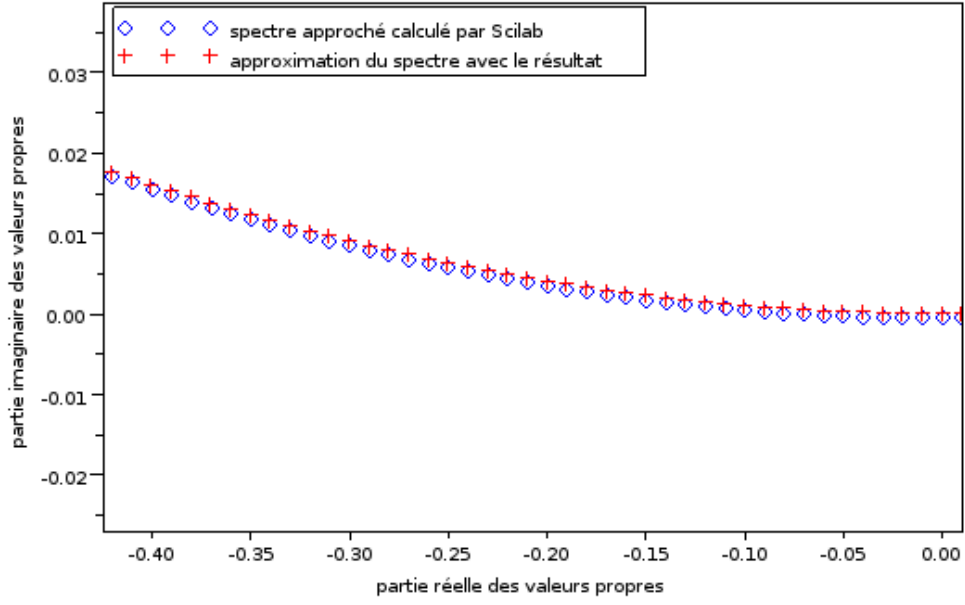


FIGURE 4.2 – $p^\epsilon(\theta, I) = \alpha I + i\epsilon(\cos \theta + I^2)$.

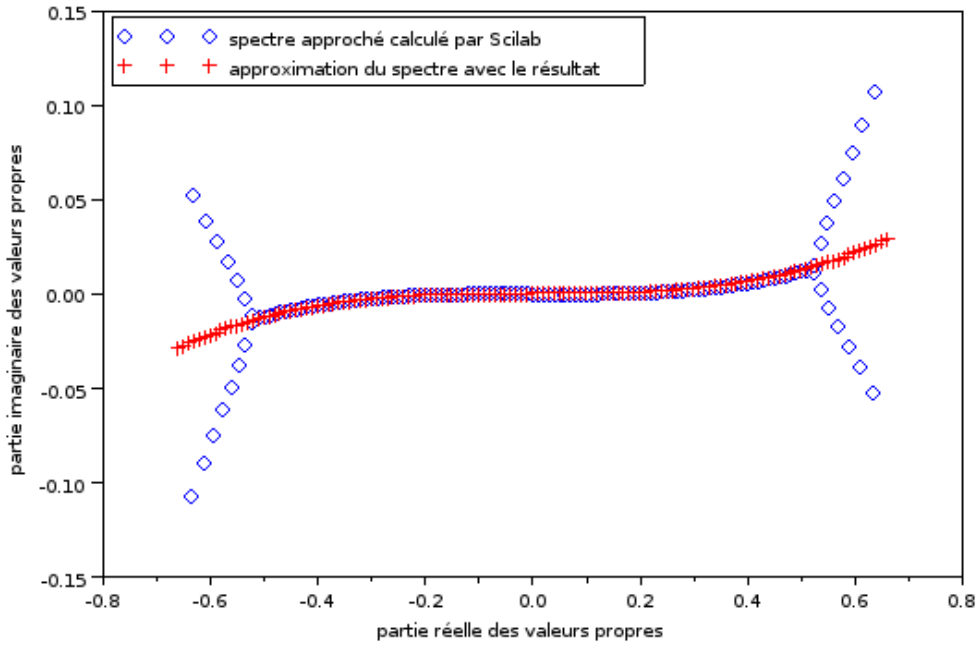
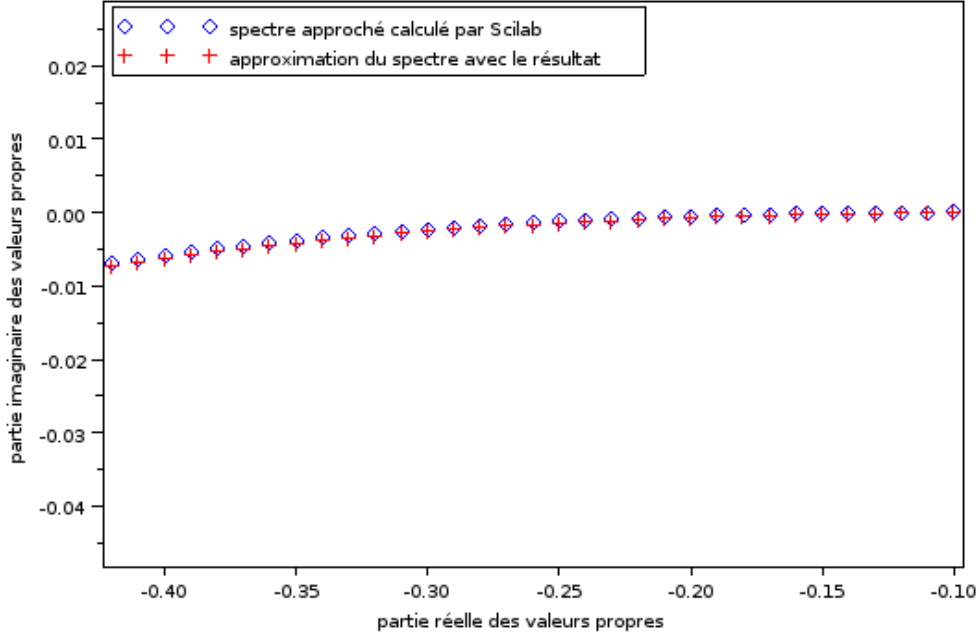


FIGURE 4.3 – $p^\epsilon(\theta, I) = \alpha I + i\epsilon(\cos \theta + I^3)$.


 FIGURE 4.4 – $p^\epsilon(\theta, I) = \alpha I + i\epsilon(\cos \theta + I^3)$.

4.2 Opérateurs pseudo-différentiels agissant sur $L^2(\mathbb{R})$

Dans ce paragraphe, on considère l'opérateur pseudo-différentiel $\text{Op}^w(p^\epsilon)$ agissant sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et défini par la formule suivante :

$$\text{Op}^w(p^\epsilon)(x, \hbar D_x) = \text{Op}^w(p_0)(x, \hbar D_x) + i\epsilon \text{Op}^w(q)(x, \hbar D_x),$$

où $\text{Op}^w(p_0)(x, \hbar D_x) = x^2 + (\hbar D_x)^2$ est l'oscillateur harmonique et où le symbole $q(x, \xi)$ de l'opérateur $\text{Op}^w(q)$ est une fonction polynomiale en x et en ξ qui ne dépend pas du paramètre semi-classique $\hbar$. Pour implémenter ce type d'opérateurs dans **Scilab**, nous introduisons un nouvel espace (voir par exemple [RS75]).

Définition 4.2.1 (Espace de Fock). *L'espace de Fock, noté $\mathcal{F}$, est l'ensemble des fonctions holomorphes $f(z)$ sur $\mathbb{C}$ satisfaisant la condition d'intégrabilité suivante :*

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2/\hbar} L(dz) < +\infty.$$

Une première propriété intéressante de cet espace est qu'il admet une base orthonormée, pour l'introduire, nous avons auparavant besoin de la notation qui suit.

Notation: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire sur l'espace de Fock $\mathcal{F}$ défini pour $u, v \in \mathcal{F}$ par :

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{u(z)} v(z) e^{-|z|^2/\hbar} L(dz).$$

Proposition 4.2.2 (Base orthonormée de $\mathcal{F}$). *Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Soit pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

$$\zeta_\alpha(z) = \frac{z^\alpha}{\sqrt{\hbar^{\alpha+1}} \alpha!}.$$

Alors la famille $(\zeta_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $\mathcal{F}$.

Démonstration. Nous rappelons ici une esquisse de la démonstration de cette proposition.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \langle z^\alpha, z^\beta \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{z^\alpha} z^\beta e^{-|z|^2/\hbar} dz, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \overline{(re^{i\theta})^\alpha} (re^{i\theta})^\beta e^{-r^2/\hbar} r dr d\theta \quad \text{en posant } z = re^{i\theta}, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} r^{\alpha+\beta+1} e^{-r^2/\hbar} dr \int_0^{2\pi} e^{i(\beta-\alpha)\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Ainsi si $\alpha \neq \beta$, alors on a :

$$\langle z^\alpha, z^\beta \rangle = 0,$$

autrement dit la famille $(\zeta_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathcal{F}$. Maintenant, si on suppose que $\alpha = \beta$, alors :

$$\begin{aligned} \langle z^\alpha, z^\alpha \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} r^{2\alpha+1} e^{-r^2/\hbar} dr \int_0^{2\pi} d\theta, \\ &= 2 \int_0^{+\infty} r^{2\alpha+1} e^{-r^2/\hbar} dr, \\ &= \int_0^{+\infty} r^\alpha e^{-r/\hbar} dr, \\ &= \alpha! \hbar^{\alpha+1} \quad \text{par intégration par parties.} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\|z^\alpha\|_{\mathcal{F}} = \sqrt{\alpha!} \sqrt{\hbar^{\alpha+1}}.$$

Autrement dit, la famille $(\zeta_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{F}$. □

Afin de faire le lien entre l'espace de Fock $\mathcal{F}$ et l'espace $L^2(\mathbb{R})$, nous allons également rappeler la définition de la transformée de Bargmann, étudiée par Valentine Bargmann dans [Bar67] dans un cadre non semi-classique.

Définition 4.2.3 (Transformée de Bargmann semi-classique). *Soit $u \in L^2(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Bargmann semi-classique de la fonction u , pour tout $z \in \mathbb{C}$, par :*

$$(Tu)(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(z^2 - 2\sqrt{2}xz + x^2)/(2\hbar)} u(x) dx.$$

Cette transformée envoie l'espace $L^2(\mathbb{R})$ sur l'espace de Fock $\mathcal{F}$.

Maintenant qu'on a introduit un nouvel espace admettant une base orthonormée et une transformée permettant de passer de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ à l'espace de Fock, nous allons maintenant expliquer pourquoi l'opérateur $\text{Op}^w(p^\epsilon)$ que nous considérons s'exprime de manière plus simple dans ce nouvel espace. Pour ce faire, on introduit les opérateurs de création et d'annihilation.

Définition 4.2.4 (Opérateurs de création et d'annihilation sur $L^2(\mathbb{R})$). *On pose :*

$$\begin{cases} A_+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(x - \hbar \frac{d}{dx} \right), \\ A_- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(x + \hbar \frac{d}{dx} \right). \end{cases}$$

L'opérateur A_+ est appelé opérateur de création et l'opérateur A_- opérateur d'annihilation. Ces opérateurs agissent tous les deux sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

L'intérêt des opérateurs de création et d'annihilation réside, entre autres, dans le fait qu'ils s'expriment de manière simple dans l'espace de Fock.

Proposition 4.2.5 (Opérateurs de création et d'annihilation sur $\mathcal{F}$). *Soient A_+ et A_- les opérateurs de création et d'annihilation. Alors :*

$$\begin{cases} TA_+T^{-1} = \frac{1}{\hbar}z, \\ TA_-T^{-1} = \frac{d}{dz}. \end{cases}$$

Autrement dit, l'opérateur de création dans l'espace de Fock correspond à l'opérateur de multiplication par la fonction $\frac{1}{\hbar}z$ et l'opérateur d'annihilation correspond à l'opérateur de dérivation par rapport à la variable z .

Démonstration. Cette proposition se démontre par un calcul explicite. □

Nous allons maintenant pouvoir expliciter l'action de l'oscillateur harmonique sur l'espace de Fock.

Proposition 4.2.6 (Oscillateur harmonique dans l'espace de Fock $\mathcal{F}$). *Soit $\text{Op}^w(p_0) = x^2 + (\hbar D_x)^2$ l'oscillateur harmonique agissant sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$. Alors, on a :*

$$T\text{Op}^w(p_0)T^{-1} = 2\hbar z \frac{d}{dz} + \hbar : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}.$$

Démonstration. La démonstration de cette propriété est élémentaire, on la donne ci-dessous. On exprime d'abord l'opérateur $\text{Op}^w(p_0)$ en fonction des opérateurs A_+ et A_- . Soit

$u \in L^2(\mathbb{R})$, alors on a :

$$\begin{aligned} (A_+ A_-)(u(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2}\hbar} \left(x - \hbar \frac{d}{dx} \right) \frac{1}{\sqrt{2}\hbar} \left(x + \hbar \frac{d}{dx} \right) (u(x)), \\ &= \frac{1}{2\hbar^2} \left(x^2 u(x) + \hbar x \frac{du}{dx}(x) - \hbar \frac{d}{dx}(xu(x)) - \hbar^2 \frac{d^2 u}{dx^2}(x) \right), \\ &= \frac{1}{2\hbar^2} \left(x^2 - \hbar - \hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) (u(x)). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$2\hbar^2(A_+ A_-) + \hbar = x^2 - \hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} = \text{Op}^w(p_0)(x, \hbar D_x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\begin{aligned} T\text{Op}^w(p_0)T^{-1} &= T(2\hbar^2(A_+ A_-) + \hbar)T^{-1}, \\ &= 2\hbar^2 T A_+ T^{-1} T A_- T^{-1} + \hbar, \\ &= 2\hbar z \frac{d}{dz} + \hbar. \end{aligned}$$

□

Remarque 4.2.7. On peut retrouver facilement le spectre de l'oscillateur harmonique à partir de son expression dans l'espace de Fock donnée dans la proposition 4.2.6. En effet, on rappelle que le spectre de l'oscillateur harmonique est :

$$\sigma(\text{Op}^w(p_0)) = \{\hbar(2k+1), k \in \mathbb{N}\}.$$

Nous expliquons maintenant la méthode d'implémentation que nous avons utilisée pour définir l'opérateur $\text{Op}^w(p^\epsilon)$ de manière numérique :

1. on calcule $T\text{Op}^w(p^\epsilon)T^{-1} = T\text{Op}^w(p_0)T^{-1} + i\epsilon T\text{Op}^w(q)T^{-1}$ en utilisant les opérateurs de création et d'annihilation et on définit l'opérateur $T\text{Op}^w(p^\epsilon)T^{-1}$ par son action sur la base $(\zeta_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$, on obtient alors une matrice infinie $\mathcal{P}^\epsilon$;
2. on choisit un entier $N \geq 1$ et on tronque la matrice $\mathcal{P}^\epsilon$ en une matrice $\mathcal{P}_{N+1}^\epsilon$ de taille $(N+1) \times (N+1)$ en choisissant de considérer l'action de l'opérateur $T\text{Op}^w(p^\epsilon)T^{-1}$ uniquement sur les fonctions $(\zeta_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq N}$;
3. on détermine le spectre de la matrice $\mathcal{P}_{N+1}^\epsilon$ avec la fonction `spec` de Scilab.

Ensuite, pour comparer le spectre obtenu en déterminant les valeurs propres de la matrice $\mathcal{P}_{N+1}^\epsilon$ à l'aide de la fonction `spec` de **Scilab** et celui obtenu dans le théorème A, on détermine une approximation de la fonction g^ϵ en explicitant des coordonnées action-angle pour l'oscillateur harmonique et en calculant ensuite une approximation à l'ordre ϵ de la fonction g^ϵ (en moyennant q). On obtient les graphiques ci-dessous avec les paramètres suivants :

1. $N = 66$;

2. $\hbar = 10^{-2}$;
3. $\epsilon = 10^{-1}$.

Remarque 4.2.8.

- Les figures 4.5 et 4.6 portent sur l'oscillateur harmonique perturbé par $i\epsilon x^2$ qui est un cas particulier pour lequel on sait déterminer le spectre de manière exacte.
- La figure 4.7 est une comparaison entre l'oscillateur harmonique perturbé par $i\epsilon x^2$ et l'oscillateur harmonique perturbé par $i\epsilon(x^2 + x^3)$, afin de mettre en exergue qu'une perturbation en x de puissance impaire n'affecte pas le spectre. Dans ce graphique, on observe une explosion des valeurs propres aux bords de la figure ; ceci est dû au fait qu'on a tronqué la matrice $\mathcal{P}^\epsilon$.
- Les figures 4.8 et 4.9 portent sur l'oscillateur harmonique perturbé par $i\epsilon x^4$. Dans ces graphiques, les points bleus représentent les valeurs propres de la matrice tronquée $\mathcal{P}_{N+1}^\epsilon$ calculées avec la fonction `spec`, c'est pourquoi on observe une explosion des valeurs propres aux bords de la figure.
- Dans les différents graphiques, les points roses représentent les valeurs propres de l'oscillateur harmonique et les points rouges (sauf pour la figure 4.7) représentent une approximation du spectre calculée à partir du résultat du théorème A.
- Les figures 4.6 et 4.9 sont des zooms des figures 4.5 et 4.8 respectivement dans la zone où les points du spectre semblent confondus.

Nous allons maintenant expliciter les calculs dont nous avons eu besoin pour l'implémentation dans `Scilab` sur l'exemple de l'oscillateur harmonique perturbé par $i\epsilon x^2$.

Exemple 4.2.1 (Oscillateur harmonique perturbé par $i\epsilon x^2$). On considère l'opérateur $\text{Op}^w(p^\epsilon)$ donné par :

$$\text{Op}^w(p^\epsilon) = x^2 - \hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + i\epsilon x^2.$$

La première étape de l'implémentation numérique consiste à calculer $T\text{Op}^w(p^\epsilon)T^{-1}$. Comme nous avons déjà déterminé l'opérateur $T\text{Op}^w(p_0)T^{-1}$, il ne reste plus qu'à déterminer l'opérateur $T\text{Op}^w(x^2)T^{-1}$. Par un calcul, on trouve que :

$$T\text{Op}^w(x^2)T^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(z + \hbar \frac{d}{dz} \right) \right)^2.$$

Ainsi, on en déduit que :

$$T\text{Op}^w(p^\epsilon)T^{-1} = 2\hbar z \frac{d}{dz} + \hbar + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(z + \hbar \frac{d}{dz} \right) \right)^2.$$

On peut alors en déduire la matrice tronquée à l'ordre $N + 1$ de cet opérateur dans la base

$(\zeta_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$:

$$\mathcal{P}_{N+1}^\epsilon = \begin{pmatrix} \hbar + \frac{i\epsilon\hbar}{2} & 0 & \frac{i\epsilon\hbar}{2}\sqrt{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 3\hbar + \frac{i\epsilon 3\hbar}{2} & 0 & \frac{i\epsilon\hbar}{2}\sqrt{6} & \ddots & & \vdots \\ \frac{i\epsilon\hbar}{2}\sqrt{2} & 0 & 5\hbar + \frac{i\epsilon 5\hbar}{2} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{i\epsilon\hbar}{2}\sqrt{6} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \frac{i\epsilon\hbar}{2}\sqrt{N(N-1)} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{i\epsilon\hbar}{2}\sqrt{N(N-1)} & 0 & (2N+1)\hbar + \frac{i\epsilon(2N+1)\hbar}{2} \end{pmatrix}$$

Cette matrice se détermine en calculant $T\text{Op}^w(p^\epsilon)T^{-1}(\zeta_\alpha)$ pour $0 \leq \alpha \leq N+1$ (pour les simulations numériques ci-dessus, nous n'avons pas utilisé le spectre de cette matrice, étant donné que dans ce cas particulier, on connaît le spectre de manière exacte).

Il reste maintenant à déterminer une approximation de la fonction g^ϵ . On remarque à cette fin que si on pose :

$$\begin{cases} x = -\sqrt{2I} \cos \theta, \\ \xi = \sqrt{2I} \sin \theta. \end{cases}$$

Alors (θ, I) sont les coordonnées action-angle pour l'oscillateur harmonique et on vérifie que l'application $\kappa_0 : (x, \xi) \mapsto (\theta, I)$ est une transformation canonique. Dans ces nouvelles coordonnées, le symbole de l'opérateur se réécrit pour $(\theta, I) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ comme suit :

$$\begin{aligned} p^\epsilon \circ \kappa_0^{-1}(\theta, I) &= (-\sqrt{2I} \cos \theta)^2 + (\sqrt{2I} \sin \theta)^2 + i\epsilon q(-\sqrt{2I} \cos \theta, \sqrt{2I} \sin \theta), \\ &= 2I + i\epsilon 2I \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Ainsi cette première transformation canonique κ_0 nous permet d'écrire la partie réelle du symbole comme une fonction de I . On souhaite maintenant écrire le terme d'ordre ϵ comme une fonction de la variable I , pour ce faire, on considère une transformation κ_1 de la forme suivante :

$$\kappa_1 = \exp(i\epsilon\chi_G) = id + i\epsilon\chi_G + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

où G est une fonction analytique et χ_G désigne le champ de vecteurs associé à G . Ainsi :

$$\begin{aligned} \exp(i\epsilon\chi_G)(p_0) &= (id + i\epsilon\chi_G + \mathcal{O}(\epsilon^2))(p_0), \\ &= p_0 + i\epsilon\chi_G(p_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ &= p_0 - i\epsilon\chi_{p_0}(G) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Pour que le terme d'ordre ϵ ne dépende que de I , on choisit la fonction G satisfaisant la

relation suivante :

$$\chi_{p_0}(G) = q - \langle q \rangle = q - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\theta, I) d\theta.$$

Ainsi :

$$\exp(i\epsilon\chi_G)(p^\epsilon) = p_0 + i\epsilon\langle q \rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} p^\epsilon \circ \kappa_0^{-1} \circ \kappa_1^{-1}(\theta, I) &= 2I + i\epsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2I \cos^2 \theta d\theta + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ &= 2I + i\epsilon I + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

C'est avec cette expression qu'on détermine une approximation de la fonction g^ϵ dans les illustrations numériques.

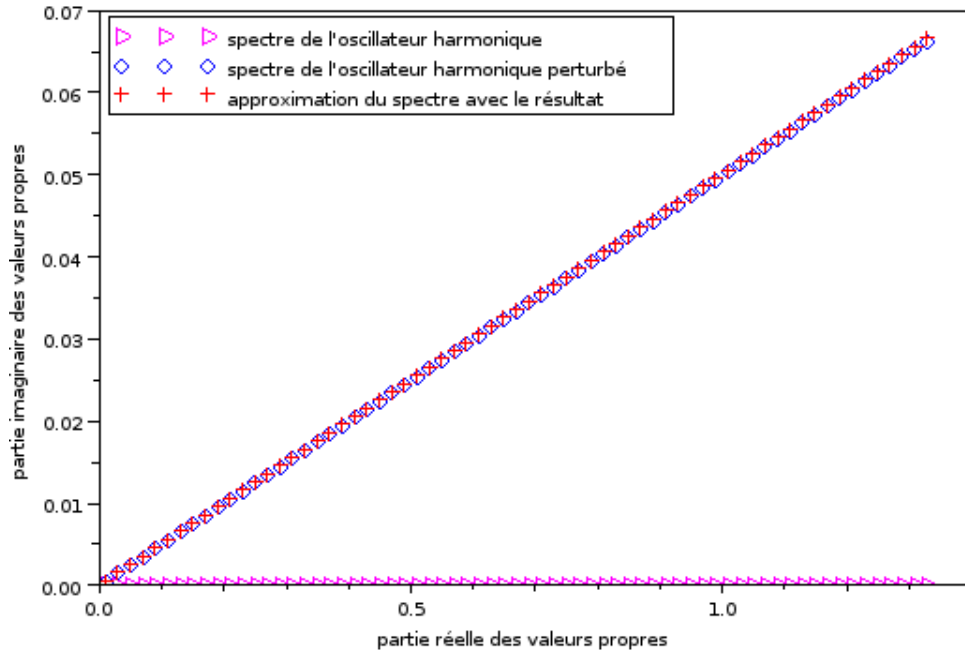
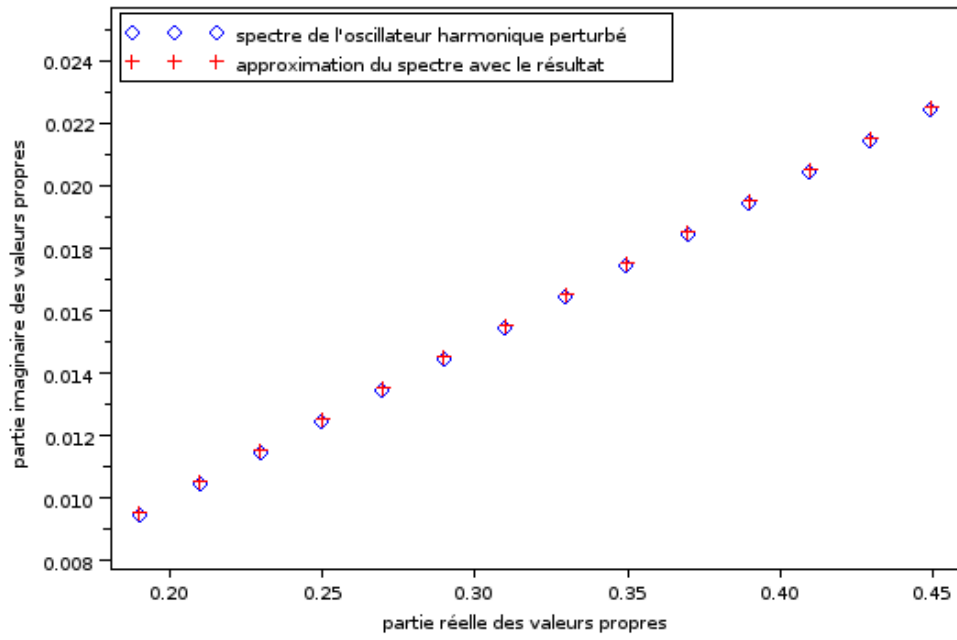
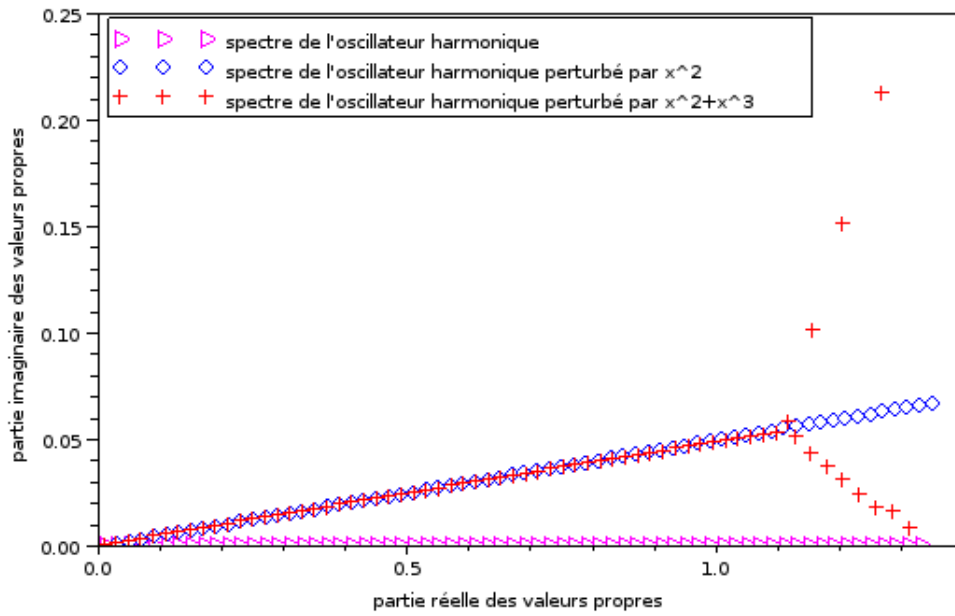


FIGURE 4.5 – $p^\epsilon(x, \xi) = x^2 + \xi^2 + i\epsilon x^2$.


 FIGURE 4.6 – $p^\epsilon(x, \xi) = x^2 + \xi^2 + i\epsilon x^2$.

 FIGURE 4.7 – $p^\epsilon(x, \xi) = x^2 + \xi^2 + i\epsilon(x^2 + x^3)$.

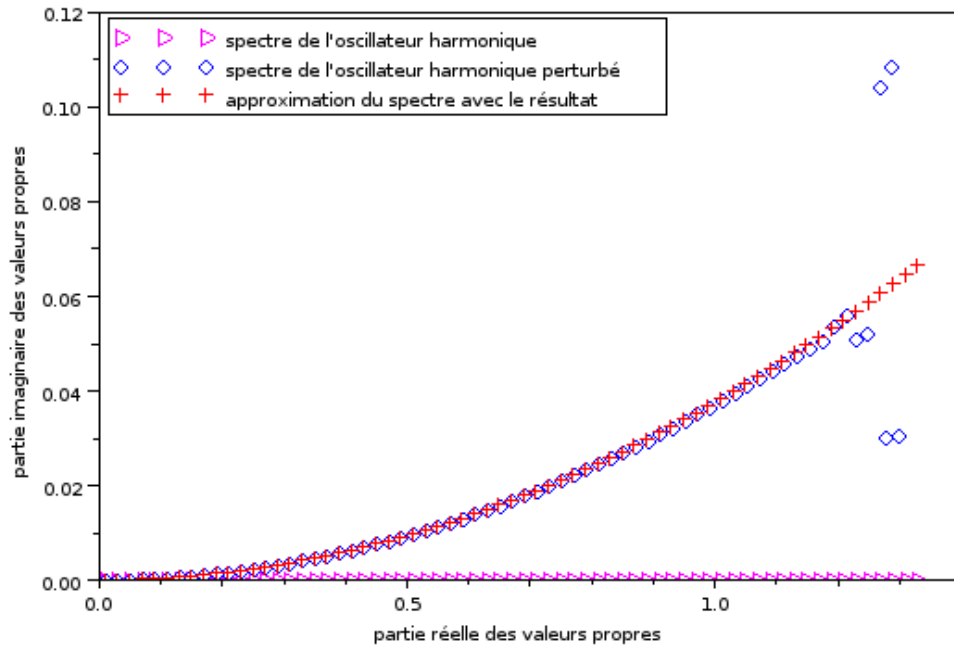


FIGURE 4.8 – $p^\epsilon(x, \xi) = x^2 + \xi^2 + i\epsilon x^4$.

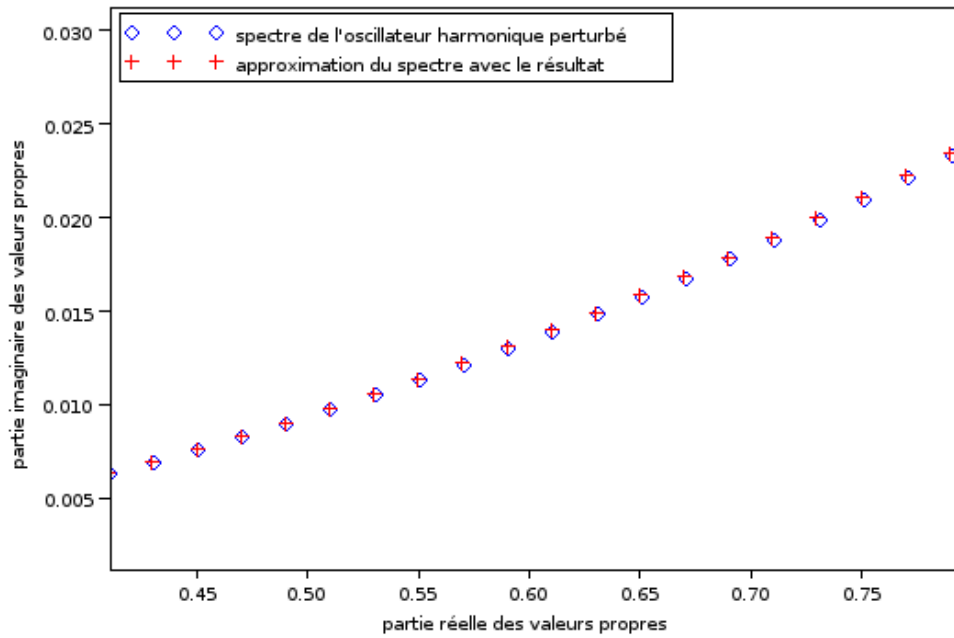


FIGURE 4.9 – $p^\epsilon(x, \xi) = x^2 + \xi^2 + i\epsilon x^4$.

Deuxième partie

Quantification de Berezin-Toeplitz et quantifications de Weyl du tore $\mathbb{T}^2$

Chapitre 5

Quantification de Berezin-Toeplitz du tore

Dans ce chapitre, nous allons rappeler la définition de la quantification de Berezin-Toeplitz du tore $\mathbb{T}^2$. Pour ce faire, nous allons identifier l'espace des sections holomorphes du fibré en droites complexes trivial sur le tore $\mathbb{T}^2$ avec un espace de fonctions holomorphes que nous pourrons plus facilement manipuler. Pour construire cet espace de fonctions holomorphes, on s'inspire de l'article de Laurent Charles et de Julien Marché [CM15]. La différence entre le cadre de leur article et ce que nous présentons ici réside dans le choix des translations invariantes que nous allons considérer pour définir le tore.

5.1 Fibré préquantifiant

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au $\mathbb{C}$ -fibré trivial sur un espace vectoriel symplectique E quelconque avant de passer au cas particulier qui nous intéresse, c'est-à-dire le tore. Pour ce faire nous faisons quelques rappels de géométrie symplectique.

Définition 5.1.1 (Forme symplectique sur un espace vectoriel). *Soit E un espace vectoriel. Une forme symplectique sur E est une forme bilinéaire $\omega : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

1. ω est anti-symétrique, i.e. pour tous $x, y \in E$, $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$ (et donc alternée) ;
2. ω est non-dégénérée, i.e. pour $x \in E$, si $\omega(x, y) = 0$ pour tout $y \in E$, alors $x = 0$.

Définition 5.1.2 (Forme symplectique sur une variété). *Sur une variété différentielle $\mathcal{C}^\infty$, une forme symplectique ω est une 2-forme différentielle non-dégénérée et fermée, i.e. :*

1. en tout point x , la forme bilinéaire anti-symétrique ω_x est non-dégénérée ;
2. la différentielle extérieur $d\omega$ est nulle.

Définition 5.1.3 (Variété symplectique). *Une variété symplectique est une variété différentielle munie d'une forme différentielle de degré 2 fermée et non dégénérée, appelée forme symplectique.*

Soit (E, ω) un espace vectoriel symplectique de dimension deux tel que pour tout $x \in E$, $\omega_x = \omega$ est constante, ainsi la forme symplectique ω est invariante par translation. Soit $L_E = E \times \mathbb{C}$ le fibré en droites complexes trivial de base E muni d'une métrique constante m et de la connexion $\nabla = d + \frac{1}{i}\alpha$ où $\alpha \in \Omega^1(E, \mathbb{R})$ est une 1-forme réelle sur E primitive de ω donnée par, pour $x, y \in E$:

$$\alpha_x(y) = \frac{1}{2}\omega(x, y).$$

On peut donner un premier exemple de ce type d'espace que nous reverrons par la suite.

Exemple 5.1.1. $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel symplectique muni de la métrique euclidienne et de la 2-forme $\omega = dp \wedge dq$ où $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ sont des coordonnées sur $\mathbb{R}^2$ et la 1-forme définissant la connexion est donnée par la formule suivante :

$$\alpha = \frac{1}{2}(pdq - qdp).$$

On introduit maintenant deux notations qui vont nous être utiles.

Notations :

- $\mathcal{C}^\infty(E, L_E)$ est l'espace des sections $\mathcal{C}^\infty$ du fibré L_E ;
- $\Omega^1(E, L_E)$ est l'espace des 1-formes à valeurs dans le fibré L_E .

On souhaite relever des translations au fibré L_E . Plus précisément, pour $x \in E$, on veut construire une application $\psi_x : L_E \longrightarrow L_E$ qui relève la translation de vecteur x et qui soit un automorphisme de (L_E, ∇, m) . La proposition qui suit répond à cette question.

Proposition 5.1.4 (Relevé d'une translation au fibré avec connexion). *Soit $u \in U(1)$ (l'ensemble des nombres complexes de module 1). Alors l'automorphisme :*

$$\begin{aligned} \psi_x : L_E = E \times \mathbb{C} &\longrightarrow L_E = E \times \mathbb{C} \\ (z, w) &\longmapsto \left(z + x, uwe^{(i/2)\omega(x, z)} \right), \end{aligned}$$

relève la translation de vecteur x .

Démonstration. On rappelle la démonstration de cette proposition qu'on peut notamment trouver dans l'article [CM15].

On veut construire un automorphisme ψ_x sur le fibré $L_E = E \times \mathbb{C}$ et qui relève la translation de vecteur x . Par conséquent ψ_x est de la forme suivante, pour $(z, w) \in L_E$:

$$\psi_x(z, w) = (z + x, a(z)w),$$

avec $a(z) \in \mathbb{C}^*$, car ψ_x doit être linéaire par rapport à w . Comme ψ_x doit préserver la métrique, alors pour tout $z \in E$, $|a(z)| = 1$. Ensuite, ψ_x doit aussi préserver la connexion

∇ , ce qui signifie que le diagramme suivant doit commuter :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(E, L_E) & \xrightarrow{\nabla} & \Omega^1(E, L_E) \\ \downarrow \psi_x^* & & \downarrow \psi_x^* \\ \mathcal{C}^\infty(E, L_E) & \xrightarrow{\nabla} & \Omega^1(E, L_E) \end{array}$$

Comme $L_E = E \times \mathbb{C}$, alors on peut identifier l'espace de sections $\mathcal{C}^\infty(E, L_E)$ avec l'espace de fonctions $\mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{C})$ et de même on identifie l'espace de 1-formes $\Omega^1(E, L_E)$ avec l'espace $\Omega^1(E, \mathbb{C})$. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{C})$, on a :

$$(\psi_x^* f)(z) = \frac{1}{a(z)} f(z + x) = \frac{1}{a(z)} t_x^* f(z),$$

où t_x^* est le tiré en arrière de la translation par x . Soit $\beta \in \Omega^1(E, \mathbb{C})$, alors de même, on a :

$$(\psi_x^* \beta) = \frac{1}{a} t_x^* \beta.$$

Ensuite, comme $|a(z)| = 1$ alors il existe une fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{R})$ telle que pour tout $z \in E$:

$$a(z) = e^{i\phi(z)}.$$

Ainsi pour que le diagramme commute, il faut que pour $f \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{C})$, on ait :

$$e^{-i\phi} t_x^* \left(df + \frac{1}{i} \alpha f \right) = \left(d + \frac{1}{i} \alpha \right) (e^{-i\phi} t_x^* f). \quad (\text{E5.1})$$

Le deuxième terme de cette égalité se réécrit sous la forme suivante pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \left(d + \frac{1}{i} \alpha \right) (e^{-i\phi} t_x^* f) &= d(e^{-i\phi} t_x^* f) + \frac{1}{i} \alpha e^{-i\phi} t_x^* f, \\ &= e^{-i\phi} \left(\frac{1}{i} d\phi(t_x^* f) + d(t_x^* f) + \frac{1}{i} \alpha t_x^* f \right). \end{aligned}$$

Et, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{C})$, on a également :

$$e^{-i\phi} t_x^* \left(df + \frac{1}{i} \alpha f \right) = e^{-i\phi} \left(d(t_x^* f) + \frac{1}{i} (t_x^* \alpha)(t_x^* f) \right).$$

Ainsi l'équation (E5.1), nous donne, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{C})$:

$$(t_x^* \alpha - d\phi - \alpha)(t_x^* f) = 0.$$

Donc l'équation (E5.1) est satisfaite si et seulement si la fonction ϕ satisfait la relation suivante :

$$d\phi = t_x^* \alpha - \alpha.$$

Or par définition, on sait que pour tous $y, z \in E$, on a :

$$\alpha_y(z) = \frac{1}{2}\omega(y, z).$$

Donc pour tous $y, z \in E$, on a :

$$(t_x^* \alpha)_y(z) = \alpha_{y+x}(z) = \frac{1}{2}\omega(x + y, z).$$

Autrement dit, pour tout $z \in E$, on a :

$$d_y \phi(z) = \frac{1}{2}\omega(x + y, z) - \frac{1}{2}\omega(y, z) = \frac{1}{2}\omega(x, z).$$

Ainsi $\phi(z) = \frac{1}{2}\omega(x, z) + c$, où c est une constante, car la différentielle extérieure d'une forme linéaire est la forme elle-même. Enfin, si on pose $u = e^{ic} \in U(1)$, on obtient le résultat voulu. $\square$

Nous allons maintenant expliciter une action de groupe sur le fibré L_E . Pour ce faire, on introduit une nouvelle notation.

Notation : on note " $\cdot$ " l'opération sur $E \times U(1)$ définie, pour (x, u) et $(z, w) \in E \times U(1)$, par :

$$(x, u) \cdot (z, w) = \left(z + x, uwe^{(i/2)\omega(x, z)} \right).$$

Remarque 5.1.5. L'opération " $\cdot$ " définit une loi de groupe sur l'espace produit $E \times U(1)$. Cet espace $E \times U(1)$ s'appelle le groupe de Heisenberg.

Puisque $L_E = E \times \mathbb{C}$, on obtient la proposition qui suit.

Proposition 5.1.6 (Action du groupe de Heisenberg sur le fibré L_E). *Le groupe $E \times U(1)$ agit sur le fibré L_E via la relation suivante :*

$$(x, u) \cdot (z, w) = \left(z + x, uwe^{(i/2)\omega(x, z)} \right),$$

pour $(x, u) \in E \times U(1)$ et $(z, w) \in L_E$.

Nous allons maintenant préciser quelles translations nous intéressent. Soit $x \in E$ non nul. $\mathbb{Z}x$ agit symplectiquement sur E par translation via : $n.z = z + nx$. On peut donc munir $E/\mathbb{Z}x$ de la structure symplectique quotient et pour tout choix de $u \in U(1)$, on définit un fibré préquantifiant sur $E/\mathbb{Z}x$ comme quotient de L_E par $\mathbb{Z}$ où 1 agit via :

$$1.(z, w) = (x, u) \cdot (z, w).$$

On appelle le nombre complexe u un indice de Floquet.

De la même manière, on peut considérer une action de $\mathbb{Z}^2$ sur E . Soient $x, y \in E$ tels que le couple (x, y) forme une base de E . Le groupe $\mathbb{Z}x \oplus \mathbb{Z}y$ agit par translation sur E (où $(x, 0)$ est la translation de vecteur x et $(0, y)$ celle de vecteur y). On veut relever ces translations au fibré L_E et comme ces translations commutent sur la base E , on cherche les couples $(x, u), (y, v) \in E \times U(1)$ tels que les translations commutent au sens suivant :

$$(x, u) \cdot (y, v) = (y, v) \cdot (x, u),$$

i.e. :

$$(y + x, uve^{(i/2)\omega(x,y)}) = (x + y, vue^{(i/2)\omega(y,x)}),$$

i.e. $e^{i\omega(x,y)} = 1$, autrement dit cela impose une condition sur les translations x et y :

$$\omega(x, y) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Les nombres complexes u et v sont aussi appelés indices de Floquet. Nous reverrons cette condition lorsque nous étudierons le tore $\mathbb{T}^2$ puisque nous devons choisir deux translations.

5.2 Sections holomorphes

Dans cette partie, nous nous intéressons au cas particulier du tore et plus précisément à ses sections holomorphes puisque la définition des opérateurs de Berezin-Toeplitz fait intervenir cet espace.

Notations :

- si $z \in \mathbb{C}$, on note indifféremment $z = (p, q)$ ou $z = p + iq$ via l'identification de $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$;
- $L^2(E, L_E) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(L_E); \int_E |f|^2 \omega < +\infty\}$ désigne l'espace des sections de carré intégrable du fibré L_E ;
- $H(E, L_E)$ désigne l'espace des sections holomorphes du fibré L_E .

Désormais $E = \mathbb{R}^2$, cet espace est muni de la métrique euclidienne, de sa structure complexe habituelle et de la forme symplectique $\omega = dp \wedge dq$. Soit $L_E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}$ le fibré trivial muni de la connexion $\nabla = d + \frac{1}{i}\alpha = d + \frac{1}{2i}(pdq - qdp)$. On cherche à décrire de manière simple l'espace des sections holomorphes $H(E, L_E)$ du fibré L_E , c'est-à-dire les sections f satisfaisant la condition : $\nabla_{\bar{z}}f = 0$.

Proposition 5.2.1 (Caractérisation des sections holomorphes du fibré L_E).

Soit $f \in H(E, L_E)$. Alors f satisfait la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f + \frac{1}{4}zf = 0.$$

Démonstration. On identifie l'espace de sections $\mathcal{C}^\infty(E, L_E)$ avec l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{C})$; ainsi par définition une section f est holomorphe si $\nabla_{\partial_{\bar{z}}} f = 0$, i.e. si :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f + \frac{1}{i} \alpha \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) f = 0.$$

Comme on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} dp \left(\frac{\partial}{\partial p} \right) = 1 & \text{et} & dp \left(\frac{\partial}{\partial q} \right) = 0, \\ dq \left(\frac{\partial}{\partial p} \right) = 0 & \text{et} & dq \left(\frac{\partial}{\partial q} \right) = 1, \end{cases}$$

alors, on a :

$$\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \left(\frac{1}{2} (pdq - qdp) \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial p} + i \frac{\partial}{\partial q} \right) \right) = \frac{i}{4} z.$$

D'où la relation voulue. $\square$

Exemple 5.2.1 (Section holomorphe du fibré L_E). La fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{C})$ définie pour $z \in \mathbb{C}$ par $f(z) = e^{-(1/4)|z|^2}$ correspond à une section holomorphe. On note $s \in \mathcal{C}^\infty(E, L_E)$ cette section holomorphe.

Proposition 5.2.2 (Espace des sections holomorphes $H(E, L_E)$). Le sous-espace des sections de carré intégrable $L^2(E, L_E)$ constitué des sections holomorphes, noté $H(E, L_E)$, s'identifie avec l'espace de Bargmann donné par la relation suivante :

$$\mathcal{B} = \left\{ g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe; } \int_{\mathbb{C}} |g(z)|^2 e^{-(1/2)|z|^2} dz d\bar{z} < +\infty \right\}.$$

Démonstration. Comme on a déterminé une section $s \in H(E, L_E)$ dans l'exemple 5.2.1 et comme l'espace des sections holomorphes est de dimension un, alors toutes les sections sont de la forme gs où $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe. De plus, on remarque que :

$$|gs| = |g| e^{-(1/4)|z|^2}.$$

D'où le résultat puisqu'on s'intéresse uniquement aux sections de carré intégrable. $\square$

On s'intéresse maintenant à l'espace des sections holomorphes du fibré $L_{E/\mathbb{Z}}$. Pour déterminer un tel espace, nous allons d'abord donner un autre exemple de sections holomorphes du fibré L_E .

Exemple 5.2.2 (Section holomorphe du fibré L_E). La fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{C})$ définie pour $z = (p, q) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$f(z) = \exp \left(\frac{izq}{2} \right) = \exp \left(\frac{iz}{2} \frac{1}{2i} (z - \bar{z}) \right) = \exp \left(\frac{1}{4} (z^2 - z\bar{z}) \right),$$

est aussi une section holomorphe car elle satisfait l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f + \frac{1}{4} z f = 0.$$

On note $r \in \mathcal{C}^\infty(E, L_E)$ la section holomorphe associée à f . On remarque que :

$$|f(z)| = \left| e^{(i/2)zq} \right| = e^{\Re((i/2)zq)} = e^{(1/2)\Re((ip-q)q)} = e^{-q^2/2} = e^{-(\Im z)^2/2}.$$

Nous introduisons maintenant la première translation que nous allons considérer. Soit $x = 2\pi \frac{\partial}{\partial p}$, autrement dit si on note t_x la translation de vecteur x , elle est définie par :

$$\begin{aligned} t_x : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (p, q) &\longrightarrow (p + 2\pi, q) \end{aligned}$$

Proposition 5.2.3 (Espace des sections holomorphes $H(E/\mathbb{Z}, L_{E/\mathbb{Z}})$). *Pour tout $u \in U(1)$, le sous-espace des sections de carré intégrable $L^2(E/\mathbb{Z}, L_{E/\mathbb{Z}})$ constitué des sections holomorphes, noté $H(E/\mathbb{Z}, L_{E/\mathbb{Z}})$, s'identifie avec l'espace donné par la relation suivante :*

$$\left\{ g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe; } g(p + 2\pi, q) = ug(p, q) \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |g(p, q)|^2 e^{-q^2} dp dq < +\infty \right\}.$$

Démonstration. Pour déterminer l'espace des sections holomorphes $H(E/\mathbb{Z}, L_{E/\mathbb{Z}})$ du fibré $L_{E/\mathbb{Z}}$, on s'intéresse au relevé de la translation de vecteur x au fibré L_E . D'après la proposition 5.1.4, on peut choisir $u \in U(1)$ et relever la translation t_x au fibré L_E via l'application :

$$\begin{aligned} \psi_x : L_E &\longrightarrow L_E \\ (z, w) &\longmapsto (x, u) \cdot (z, w) = \left(z + x, uwe^{(i/2)\omega(x, z)} \right). \end{aligned}$$

Or une section holomorphe de la forme gr (où $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction et $r \in \mathcal{C}^\infty(E, L_E)$) est la section définie dans l'exemple 5.2.2) descend en une section holomorphe du fibré $L_{E/\mathbb{Z}}$ de l'espace $E/\mathbb{Z}$ si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1. la fonction g est holomorphe (*i.e.* $\partial_{\bar{z}} g(z) = 0$);
2. $\psi_x^*(gr) = gr$.

Explicitons maintenant ce que signifie la deuxième condition. Soit $z = p + iq \in \mathbb{C}$, soit $f \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{C})$ la section définie dans l'exemple 5.2.2, alors on a :

$$(\psi_x^* f)(z) = u^{-1} e^{-(i/2)\omega(x, z)} f(z + x).$$

Or, pour tout $z = p + iq \in \mathbb{C}$, on a :

$$f(z + x) = e^{(i/2)(p+2\pi+iq)q}.$$

Ensuite, pour tout $z = p + iq \in \mathbb{C}$, on a également :

$$\omega(x, z) = (dp \wedge dq) \left(2\pi \frac{\partial}{\partial p}, p \frac{\partial}{\partial p} + q \frac{\partial}{\partial q}, \right) = 2\pi q.$$

Donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} (\psi_x^* f)(z) &= u^{-1} e^{-(i/2)\omega(x, z)} f(z + x), \\ &= u^{-1} e^{-(i/2)2\pi q} e^{(i/2)(p+2\pi+iq)q}, \\ &= u^{-1} f(z). \end{aligned}$$

Ainsi, la section holomorphe $r \in \mathcal{C}^\infty(E, L_E)$ associée à $f \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{C})$ et de norme $|r| = e^{-(1/2)(\Im z)^2}$ d'après l'exemple 5.2.2 satisfait la relation suivante : $\psi_x^* r = u^{-1} r$. Par conséquent, la relation $\psi_x^*(gr) = gr$ se réécrit sous la forme suivante, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$g(z + x) u^{-1} r(z) = g(z) r(z),$$

autrement dit, pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, la fonction g doit satisfaire la relation suivante :

$$g(p + 2\pi, q) = u g(p, q).$$

De plus, comme on s'intéresse au sous-espace des sections de carré intégrable, on remarque que pour toute fonction holomorphe g :

$$\int_{E/\mathbb{Z}} |gr|^2 \omega = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |g(p, q)|^2 e^{-q^2} dp dq < +\infty.$$

D'où le fait qu'on puisse identifier l'espace des sections holomorphes $H(L_{E/\mathbb{Z}}, E/\mathbb{Z})$ avec l'espace :

$$\left\{ g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe; } g(p + 2\pi, q) = u g(p, q), \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |g(p, q)|^2 e^{-q^2} dp dq < +\infty \right\}.$$

□

Pour finir, on s'intéresse aux sections holomorphes du tore $E/\mathbb{Z}^2$. On a déjà choisi un vecteur $x = 2\pi \frac{\partial}{\partial p}$ pour définir la translation t_x , on choisit un deuxième vecteur $y = \frac{\partial}{\partial q}$ qui correspond à la translation t_y donnée par :

$$\begin{aligned} t_y : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ (p, q) &\longmapsto (p, q + 1). \end{aligned}$$

Remarque 5.2.4. La condition $\omega(x, y) \in 2\pi\mathbb{Z}$ est satisfaite.

Nous avons déterminé l'espace des sections holomorphes $H(E/\mathbb{Z}, L_{E/\mathbb{Z}})$ du fibré $L_{E/\mathbb{Z}}$,

de même nous pouvons déterminer l'espace des sections holomorphes $H(E/\mathbb{Z}^2, L_{E/\mathbb{Z}^2})$ du fibré $L_{E/\mathbb{Z}^2}$.

Proposition 5.2.5 (Espace des sections holomorphes $H(E/\mathbb{Z}^2, L_{E/\mathbb{Z}^2})$). *Pour tous $u, v \in U(1)$, le sous-espace des sections de carré intégrable $L^2(E/\mathbb{Z}^2, L_{E/\mathbb{Z}^2})$ constitué des sections holomorphes, noté $H(E/\mathbb{Z}^2, L_{E/\mathbb{Z}^2})$, s'identifie avec l'espace donné par la relation suivante :*

$$\left\{ g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{holomorphe}; \quad \begin{cases} g(p + 2\pi, q) = ug(p, q) \\ g(p, q + 1) = ve^{-i(p+iq)+1/2}g(p, q) \end{cases} \right\}.$$

Démonstration. Pour identifier l'espace des sections holomorphes $H(E/\mathbb{Z}^2, L_{E/\mathbb{Z}^2})$ du fibré $L_{E/\mathbb{Z}^2}$, on s'intéresse au relevé de la translation de vecteur y au fibré L_E . D'après la proposition 5.1.4, on peut choisir $v \in U(1)$ et relever la translation t_y au fibré L_E via l'application :

$$\begin{aligned} \psi_y : L_E &\longrightarrow L_E, \\ (z, w) &\longmapsto (y, v) \cdot (z, w) = \left(z + y, vwe^{(i/2)\omega(y, z)} \right). \end{aligned}$$

Une section holomorphe de la forme gr (où $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction et $r \in \mathcal{C}^\infty(E, L_E)$) est la section définie dans l'exemple 5.2.2) descend en une section holomorphe du fibré $L_{E/\mathbb{Z}^2}$ de l'espace $E/\mathbb{Z}^2$ si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :

1. la fonction g est holomorphe (*i.e.* $\partial_{\bar{z}}g(z) = 0$) ;
2. $\psi_x^*(gr) = gr$ et $\psi_y^*(gr) = gr$.

Il faut donc qu'on explicite la relation $\psi_y^*(gr) = gr$. Pour $z = p + iq \in \mathbb{C}$ et pour f la section de l'exemple 5.2.2, on a :

$$(\psi_y^*f)(z) = v^{-1}e^{-(i/2)\omega(y, z)}f(z + y).$$

Or, pour $z = p + iq \in \mathbb{C}$, on a :

$$\omega(y, z) = (dp \wedge dq) \left(\frac{\partial}{\partial q}, p \frac{\partial}{\partial p} + q \frac{\partial}{\partial q} \right) = -p.$$

Et on a, pour f la section de l'exemple 5.2.2 et pour $z = p + iq \in \mathbb{C}$:

$$f(z + y) = e^{(i/2)(p+i(q+1))(q+1)} = e^{(i/2)p}e^{-(1/2)(2q+1)}f(z).$$

Donc, pour $z = p + iq \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} (\psi_y^*f)(z) &= v^{-1}e^{-(i/2)\omega(y, z)}f(z + y), \\ &= v^{-1}e^{(i/2)p}e^{(i/2)p}e^{-(1/2)(2q+1)}f(z), \\ &= v^{-1}e^{iz-1/2}f(z). \end{aligned}$$

Ainsi, la section holomorphe $r \in \mathcal{C}^\infty(E, L_E)$ associée à $f \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{C})$ et de norme $|r| = e^{-(1/2)(\Im z)^2}$ d'après l'exemple 5.2.2 satisfait la relation suivante : $\psi_y^* r = v^{-1} e^{iz-1/2} r$. Par conséquent, la relation $\psi_y^*(gr) = gr$ se réécrit sous la forme suivante, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\psi_y^*(gr)(z) = g(z+y)(\psi_y^* r)(z) = g(z+y)v^{-1}e^{iz-1/2}r(z) = g(z)r(z),$$

autrement dit, pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, la fonction g doit vérifier la relation suivante :

$$g(p, q+1) = v e^{-i(p+iq)+1/2} g(p, q).$$

De plus, comme on s'intéresse aux sections de carré intégrable, on remarque que pour toute fonction g holomorphe, on a :

$$\int_{E/\mathbb{Z}^2} |gr|^2 \omega = \int_0^{2\pi} \int_0^1 |g(p, q)|^2 e^{-q^2} dp dq < +\infty.$$

D'où le fait qu'on puisse identifier l'espace des sections holomorphes $H(L_{E/\mathbb{Z}^2}, E/\mathbb{Z}^2)$ avec l'espace :

$$\left\{ g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{holomorphe;} \quad \begin{cases} g(p+2\pi, q) = u g(p, q) \\ g(p, q+1) = v e^{-i(p+iq)+1/2} g(p, q) \end{cases} \right\}.$$

□

Remarque 5.2.6. On a construit l'espace des sections holomorphes du fibré $L_{E/\mathbb{Z}^2}$. Si on considère le fibré tensoriel $L_{E/\mathbb{Z}^2}^{\otimes k}$ pour $k \geq 1$ muni de la mesure produit, on peut identifier l'espace des sections holomorphes $H(E/\mathbb{Z}^2, L_{E/\mathbb{Z}^2}^{\otimes k})$ avec l'espace qui suit, noté $\mathcal{H}_k$:

$$\mathcal{H}_k := \left\{ g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{holomorphe;} \quad \begin{cases} g(p+2\pi, q) = u^k g(p, q), \\ g(p, q+1) = v^k e^{-i(p+iq)k+k/2} g(p, q) \end{cases} \right\}.$$

5.3 Espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$

Soit $k \geq 1$. Dans cette partie, nous allons étudier plus précisément l'espace $\mathcal{H}_k$ qui s'identifie avec l'espace des sections holomorphes du fibré $L_{E/\mathbb{Z}^2}^{\otimes k}$ et est défini par la relation suivante :

$$\mathcal{H}_k = \left\{ g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{holomorphe;} \quad \begin{cases} g(p+2\pi, q) = u^k g(p, q), \\ g(p, q+1) = v^k e^{-i(p+iq)k+k/2} g(p, q) \end{cases} \right\}.$$

Pour ce faire, on peut déjà réécrire les éléments de cet espace grâce à la proposition ci-dessous.

Proposition 5.3.1 (Caractérisation des éléments de $\mathcal{H}_k$). *Soit $g \in \mathcal{H}_k$.*

Alors $g \in L^2([0, 2\pi] \times [0, 1]; e^{-kq^2} dp dq)$ et s'écrit sous la forme suivante pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$g(z) = u^{kz/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l e^{ilz} \quad \text{avec } \forall l \in \mathbb{Z}, g_{l+k} = v^{-k} e^{-l-k/2} u^{ik/(2\pi)} g_l.$$

Démonstration. Pour démontrer cette proposition, on procède par analyse-synthèse. Soit $g \in \mathcal{H}_k$. On sait que pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, on a : $g(p + 2\pi, q) = u^k g(p, q)$, par conséquent, on peut écrire la fonction g sous la forme suivante, pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$:

$$g(p, q) = u^{kp/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l(q) e^{ilp},$$

car la fonction $\tilde{g}(p, q) := u^{-kp/(2\pi)} g(p, q)$ est 2π -périodique en p et la famille $(e^{ilp})_{p \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de l'espace $L^2(\mathbb{S}^1)$. Ensuite, comme $g \in \mathcal{H}_k$, alors la fonction g est holomorphe, i.e. $\partial_{\bar{z}} g(z) = 0$, autrement dit pour $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial p} + i \frac{\partial}{\partial q} \right) g(p, q) = 0.$$

Or, en posant $u = e^{ic}$ avec $c \in \mathbb{R}$ (car $u \in U(1)$), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial p} g(p, q) = \frac{\partial}{\partial p} \left(u^{kp/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l(q) e^{ilp} \right) = u^{kp/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l(q) \left(\frac{ikc}{2\pi} + il \right) e^{ilp}, \\ \frac{\partial}{\partial q} g(p, q) = \frac{\partial}{\partial q} \left(u^{kp/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l(q) e^{ilp} \right) = u^{kp/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g'_l(q) e^{ilp}, \end{cases}$$

Donc l'holomorphie de la fonction g se réécrit, pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, de la façon suivante :

$$u^{kp/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l(q) \left(\frac{ikc}{2\pi} + il \right) e^{ilp} + i u^{kp/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g'_l(q) e^{ilp} = 0.$$

Ainsi la fonction g_l vérifie l'équation différentielle suivante :

$$g'_l(q) + \left(\frac{kc}{2\pi} + l \right) g_l(q) = 0.$$

Et donc, pour tout $q \in \mathbb{R}$, on a :

$$g_l(q) = g_l e^{-(l+kc/(2\pi))q}.$$

Ainsi par un calcul, on trouve que la fonction g se réécrit sous la forme suivante pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$g(z) = u^{kz/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l e^{ilz}.$$

Enfin la fonction g vérifie aussi la condition de périodicité suivante pour tout $z \in \mathbb{C}$:
 $g(z+i) = v^k e^{-izk+k/2} g(z)$. Or pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{aligned} g(z+i) &= u^{k(z+i)/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l e^{il(z+i)}, \\ &= u^{kz/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l u^{ik/(2\pi)} e^{-l} e^{ilz}. \end{aligned}$$

Tandis que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} v^k e^{-izk+k/2} g(z) &= u^{kz/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l v^k e^{-izk+k/2} e^{ilz}, \\ &= u^{kz/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l v^k e^{k/2} e^{i(l-k)z}, \\ &= u^{kz/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{l+k} v^k e^{k/2} e^{ilz} \quad \text{par changement d'indice } l \mapsto l+k. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $l \in \mathbb{Z}$, la condition de périodicité en g est équivalente à :

$$g_l e^{-l} u^{ik/(2\pi)} = v^k e^{k/2} g_{l+k} \quad \text{i.e.} \quad g_{l+k} = v^{-k} e^{-l-k/2} u^{ik/(2\pi)} g_l.$$

D'où la caractérisation des éléments de l'ensemble $\mathcal{H}_k$, puisque réciproquement si on considère une fonction g qui s'écrit sous la forme suivante pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$g(z) = u^{kz/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l e^{ilz} \quad \text{avec } \forall l \in \mathbb{Z}, g_{l+k} = v^{-k} e^{-l-k/2} u^{ik/(2\pi)} g_l,$$

alors cette fonction appartient à l'espace $\mathcal{H}_k$. □

Exemple 5.3.1. On considère la suite $(g_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ définie, pour tout $l \in \mathbb{Z}$, par :

$$g_l = v^{-l} e^{-l^2/(2k)} u^{il/(2\pi)},$$

alors cette suite vérifie la condition $g_{l+k} = v^{-k} e^{-l-k/2} u^{ik/(2\pi)} g_l$, car en effet :

$$\begin{aligned} g_{l+k} &= v^{-(l+k)} e^{-(l+k)^2/(2k)} u^{i(l+k)/(2\pi)}, \\ &= v^{-k} v^{-l} e^{-(l^2+k^2+2lk)/(2k)} u^{il/(2\pi)} u^{ik/(2\pi)}, \\ &= v^{-k} e^{-k^2/(2k)} e^{-2lk/(2k)} u^{ik/(2\pi)} v^{-l} e^{-l^2/(2k)} u^{il/(2\pi)}, \\ &= v^{-k} e^{-k/2} e^{-l} u^{ik/(2\pi)} g_l. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction définie pour $z \in \mathbb{C}$ par la série absolument convergente :

$$g(z) = u^{kz/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} v^{-l} e^{-l^2/(2k)} u^{il/(2\pi)} e^{ilz},$$

appartient à l'espace $\mathcal{H}_k$.

Grâce à la caractérisation des éléments de l'espace $\mathcal{H}_k$, on va pouvoir déterminer une base orthogonale de cet espace. Un premier pas dans cette direction réside dans la proposition ci-dessous mettant en évidence une famille génératrice de cet espace.

Proposition 5.3.2 (Famille génératrice de $\mathcal{H}_k$). *Soit $l \in \{0, \dots, k-1\}$. On considère la fonction e_l définie pour tout $z \in \mathbb{C}$, par :*

$$e_l(z) = u^{kz/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-l-kj/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j e^{i(l+jk)z}.$$

Alors la famille $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ est une famille génératrice de l'espace $\mathcal{H}_k$.

Démonstration.

Étape 1 : pour tout $l \in \{0, \dots, k-1\}$, $e_l \in \mathcal{H}_k$. Soit $l \in \{0, \dots, k-1\}$. On remarque tout d'abord que la fonction $e_l(z)$ est holomorphe en z , car c'est une série de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur tout compact. Ensuite pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} e_l(z + 2\pi) &= u^{k(z+2\pi)/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-l-kj/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j e^{i(l+jk)(z+2\pi)}, \\ &= u^k u^{kz/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-l-kj/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j e^{i(l+jk)z} e^{i(l+jk)2\pi}, \\ &= u^k e_l(z). \end{aligned}$$

Et pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a également :

$$\begin{aligned} e_l(z + i) &= u^{k(z+i)/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-l-kj/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j e^{i(l+jk)(z+i)}, \\ &= u^{ik/(2\pi)} u^{kz/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-l-kj/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j e^{i(l+jk)z} e^{-(l+jk)}, \\ &= u^{ik/(2\pi)} e^{-l} u^{kz/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-l-k-kj/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j e^{i(l+jk)z}, \\ &= u^{ik/(2\pi)} e^{-l} u^{kz/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-l-k/2-kj/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^{j-1} e^{i(l+jk)z} e^{-ikz} \quad \text{via } j \mapsto j-1, \\ &= e^{-ikz} u^{ik/(2\pi)} e^{-l} u^{kz/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\left(v^{-k} e^{-l-k/2-kj/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j}{\left(v^{-k} e^{-l-k/2-kj/2} u^{ik/(2\pi)} \right)} e^{i(l+jk)z}, \\ &= v^k e^{-ikz+k/2} u^{kz/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-l-kj/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j e^{i(l+jk)z}, \\ &= v^k e^{-ikz+k/2} e_l(z). \end{aligned}$$

Étape 2 : la famille $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ est génératrice. Soit $g \in \mathcal{H}_k$, alors d'après la proposition

5.3.1, il existe une suite $(g_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$g(z) = u^{kz/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l e^{ilz}.$$

Par conséquent, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} g(z) &= u^{kz/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l e^{ilz}, \\ &= u^{kz/(2\pi)} \left(\sum_{l=0}^{k-1} g_l e^{ilz} + \sum_{l=k}^{2k-1} g_l e^{ilz} + \dots + \sum_{l=-k}^{-1} g_l e^{ilz} + \dots \right), \\ &= u^{kz/(2\pi)} \left(\sum_{l=0}^{k-1} g_l e^{ilz} + \sum_{l=0}^{k-1} g_{l+k} e^{i(l+k)z} + \dots + \sum_{l=0}^{k-1} g_{l-k} e^{i(l-k)z} + \dots \right), \\ &= u^{kz/(2\pi)} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_{l+jk} e^{i(l+jk)z}. \end{aligned}$$

Exprimons les coefficients g_{l+jk} en fonction de g_l . D'après la proposition 5.3.1, on sait que la suite $(g_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ vérifie pour tout $l \in \mathbb{Z}$ la relation suivante :

$$g_{l+k} = v^{-k} e^{-l-k/2} u^{ik/(2\pi)} g_l.$$

Pour tout $j \in \mathbb{Z}_+$ et pour tout $l \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} g_{l+jk} &= g_{l+(j-1)k+k}, \\ &= v^{-k} e^{-l-k/2} u^{ik/(2\pi)} e^{-(j-1)k} g_{l+(j-1)k}, \\ &= v^{-k} e^{-l-k/2} u^{ik/(2\pi)} e^{-(j-1)k} v^{-k} e^{-l-k/2} u^{ik/(2\pi)} e^{-(j-2)k} g_{l+(j-2)k}, \\ &\vdots \\ &= \left(v^{-k} e^{-l-k/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j e^{-j^2 k} \prod_{n=1}^j e^{nk} g_l, \\ &= \left(v^{-k} e^{-l-kj/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j g_l. \end{aligned}$$

De même, par un calcul, on montre que pour tout $j \in \mathbb{Z}_+$ et pour tout $l \in \mathbb{Z}$, on a :

$$g_{l-jk} = \left(v^{-k} e^{-l+kj/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^{-j} g_l.$$

Autrement dit pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et pour tout $l \in \mathbb{Z}$, on a :

$$g_{l+jk} = \left(v^{-k} e^{-l-kj/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j g_l.$$

On en déduit que pour l et k fixés, la série $\sum_j g_{l+jk} e^{i(l+jk)z}$ est absolument convergente.

Ainsi une fonction g de l'espace $\mathcal{H}_k$ se réécrit sous la forme suivante, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
 g(z) &= u^{kz/(2\pi)} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_{l+jk} e^{i(l+jk)z}, \\
 &= u^{kz/(2\pi)} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-l-kj/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j g_l e^{i(l+jk)z}, \\
 &= \sum_{l=0}^{k-1} g_l u^{kz/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-l-kj/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j e^{i(l+jk)z}, \\
 &= \sum_{l=0}^{k-1} g_l e_l(z).
 \end{aligned}$$

Par conséquent la famille $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ est une famille génératrice de l'espace $\mathcal{H}_k$. $\square$

Remarque 5.3.3. *D'après la démonstration de la proposition précédente, on sait qu'une fonction g appartenant à l'espace $\mathcal{H}_k$ peut s'écrire sous la forme d'une somme de série convergente, on en déduit donc que la série définissant la fonction g dans la proposition 5.3.1 est également convergente.*

Proposition 5.3.4 (Base orthogonale de $\mathcal{H}_k$). *La famille $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ est une base orthogonale de l'espace $\mathcal{H}_k$.*

Démonstration. D'après la proposition 5.3.2, on sait que la famille $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ est génératrice, montrons qu'elle est orthogonale pour le produit scalaire sur l'espace $\mathcal{H}_k$. Soient $m, l \in \{0, \dots, k-1\}$ tels que $l \neq m$, alors on a :

$$\begin{aligned}
 \langle e_l, e_m \rangle &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-l-kj/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j \sum_{j' \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-m-kj'/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^{j'} \left\langle u^{kz/(2\pi)} e^{i(l+jk)z}, u^{kz/(2\pi)} e^{i(m+j'k)z} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Il suffit donc de calculer le produit scalaire suivant :

$$\left\langle u^{kz/(2\pi)} e^{i(l+jk)z}, u^{kz/(2\pi)} e^{i(m+j'k)z} \right\rangle.$$

Par définition, on a, avec la notation $z = p + iq \in \mathbb{C}$ et en posant $u = e^{ic}$ avec $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 &\left\langle u^{kz/(2\pi)} e^{i(l+jk)z}, u^{kz/(2\pi)} e^{i(m+j'k)z} \right\rangle \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \overline{u^{kz/(2\pi)} e^{i(l+jk)z}} u^{kz/(2\pi)} e^{i(m+j'k)z} e^{-kq^2} dp dq, \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \overline{u^{kz/(2\pi)}} e^{-i(l+jk)\bar{z}} u^{kz/(2\pi)} e^{i(m+j'k)z} e^{-kq^2} dp dq, \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{-ckq/\pi} e^{-i(l+jk)p} e^{-(l+jk)q} e^{i(m+j'k)p} e^{-(m+j'k)q} e^{-kq^2} dp dq.
 \end{aligned}$$

Il faut donc calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(l+jk)p} e^{i(m+j'k)p} dp = \int_0^{2\pi} e^{ip(m-l+k(j'-j))} dp.$$

Or cette intégrale est non nulle si et seulement si $m - l + k(j' - j) = 0$, autrement dit si $l - m = k(j' - j)$, donc k doit diviser $l - m$. Or $l, m \in \{0, \dots, k-1\}$, donc pour que k divise $l - m$, il faut que $l - m = 0$ ce qui contredit l'hypothèse $l \neq m$. Ainsi cette intégrale est toujours nulle. Donc pour tous $l, m \in \{0, \dots, k-1\}$ et $l \neq m$:

$$\langle e_l, e_m \rangle = 0.$$

Ainsi $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthogonale de l'espace $\mathcal{H}_k$ et on déduit de la proposition 5.3.2 que c'est une base orthogonale de cet espace. $\square$

Remarque 5.3.5. On déduit de la proposition précédente que la dimension de l'espace $\mathcal{H}_k$ est k .

5.4 Quantification de Berezin-Toeplitz du tore

Nous allons maintenant rappeler la définition de la quantification de Berezin-Toeplitz du tore, puis nous verrons comment relier cette définition à l'espace de fonctions $\mathcal{H}_k$ que nous venons d'étudier. Pour ce faire, on introduit quelques notations.

Notations : soit $k \geq 1$ entier,

- Π_k est le projecteur orthogonal de l'espace des sections de carré intégrable $L^2(\mathbb{T}^2, L_{\mathbb{T}^2}^{\otimes k})$ sur l'espace fermé des sections holomorphes $H(\mathbb{T}^2, L_{\mathbb{T}^2}^{\otimes k})$;
- $M_f : L^2(\mathbb{T}^2, L_{\mathbb{T}^2}^{\otimes k}) \longrightarrow L^2(\mathbb{T}^2, L_{\mathbb{T}^2}^{\otimes k})$ est l'opérateur de multiplication pour une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$;
- $\mathcal{G}_k$ est l'espace de fonctions sur $\mathbb{C}$ invariante par l'action de Heisenberg du réseau $\mathbb{Z}^2$ et de carré intégrable sur $[0, 2\pi] \times [0, 1]$, i.e. :

$$\mathcal{G}_k = \left\{ g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; \quad g \in L^2([0, 2\pi] \times [0, 1], e^{-kq^2} dp dq); \right. \\ \left. g(p + 2\pi, q) = u^k g(p, q), \quad g(p, q + 1) = v^k e^{-i(p+iq)k+k/2} g(p, q) \right\}.$$

- $\tilde{\Pi}_k$ est le projecteur orthogonal de l'espace de fonctions de carré intégrable $\mathcal{G}_k$ (muni du produit scalaire L^2 à poids sur $[0, 2\pi] \times [0, 1]$) sur l'espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$.

Définition 5.4.1 (Quantification de Berezin-Toeplitz du tore). Soit $f_k \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ pour la topologie C^∞ . On définit la quantification de Berezin-Toeplitz de la fonction f_k par la suite d'opéra-

teurs $T_{f_k} := (T_k)_{k \geq 1}$ où pour tout $k \geq 1$, l'opérateur T_k est défini par :

$$T_k = \Pi_k M_{f_k} \Pi_k.$$

On appelle la fonction f_k le symbole de l'opérateur de Berezin-Toeplitz T_{f_k} .

Nous allons maintenant utiliser l'identification de l'espace des sections holomorphes $H(\mathbb{T}^2, L_{\mathbb{T}^2}^{\otimes k})$ avec l'espace de fonctions $\mathcal{H}_k$ afin de pouvoir donner une seconde définition de la quantification de Berezin-Toeplitz du tore, qui s'avérera plus simple à utiliser par la suite.

Proposition 5.4.2 (Propriété de la quantification de Berezin-Toeplitz du tore). *Soit $f_k \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$. Soit $T_{f_k} = (T_k)_{k \geq 1}$ l'opérateur de Berezin-Toeplitz de symbole f_k . Alors il existe une fonction $\tilde{f}_k \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que :*

1. pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\tilde{f}_k(x + 2\pi, y) = \tilde{f}_k(x, y) = \tilde{f}_k(x, y + 1),$$

2. la suite d'opérateurs $(\tilde{T}_k)_{k \geq 1}$ définis pour tout $k \geq 1$, par :

$$\tilde{T}_k = \tilde{\Pi}_k M_{\tilde{f}_k} \tilde{\Pi}_k + \mathcal{O}(k^{-\infty}),$$

(où $M_{\tilde{f}_k} = \mathcal{G}_k \longrightarrow \mathcal{G}_k$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $\tilde{f}_k$) s'identifie avec la suite d'opérateurs $T_{f_k} = (T_k)_{k \geq 1}$.

Démonstration. Commençons par identifier les espaces de sections. Soit $\psi \in L^2(\mathbb{T}^2, L_{\mathbb{T}^2}^{\otimes k})$ une section de carré intégrable, alors on peut lui associer une fonction $g \in \mathcal{G}_k$ invariante par l'action de Heisenberg du réseau $\mathbb{Z}^2$ via l'application :

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{T}^2, L_{\mathbb{T}^2}^{\otimes k}) &\longrightarrow \mathcal{G}_k, \\ \psi &\longmapsto g(\tilde{x}), \end{aligned}$$

où $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ et $\tilde{x} = x_0 + (n_1, n_2)$ avec $x_0 \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$ et $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ et où :

$$(\tilde{x}, g(\tilde{x})) = ((n_1, n_2), 1) \cdot (x_0, \psi(x_0)).$$

Soit $f_k \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Par définition l'opérateur de Berezin-Toeplitz $T_{f_k} = (T_k)_{k \geq 1}$ s'écrit pour tout $k \geq 1$ et pour tout $\psi \in H(\mathbb{T}^2, L_{\mathbb{T}^2}^{\otimes k})$ sous la forme suivante :

$$T_k \psi = \Pi_k (f_k \psi) + \mathcal{O}(k^{-\infty}),$$

où la multiplication $f_k \psi \in L^2(\mathbb{T}^2, L_{\mathbb{T}^2}^{\otimes k})$ est bien définie. On a besoin de donner un sens à la multiplication de la fonction f_k par une fonction $g \in \mathcal{H}_k$. Déterminons alors l'image

de $f_k\psi$ (où $f_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ et $\psi \in H(\mathbb{T}^2, L_{\mathbb{T}^2}^{\otimes k})$) par l'isomorphisme qui permet d'identifier l'espace de sections $L^2(\mathbb{T}^2, L_{\mathbb{T}^2}^{\otimes k})$ avec l'espace de fonctions $\mathcal{G}_k$. Si on note $w(\tilde{x})$ l'image par l'isomorphisme, alors on a :

$$\begin{aligned} (\tilde{x}, w(\tilde{x})) &= ((n_1, n_2), 1) \cdot (x_0, f_k(x_0)\psi(x_0)), \\ &= (\tilde{x}, f_k(x_0)g(\tilde{x})). \end{aligned}$$

Ainsi, l'image de $f_k\psi$ par l'isomorphisme ci-dessus est $w(\tilde{x}) = f_k(x_0)g(\tilde{x}) = \tilde{f}_k(\tilde{x})g(\tilde{x})$ où $\tilde{f}_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ est une fonction 2π -périodique par rapport à sa première variable, 1-périodique par rapport à sa deuxième et qui s'identifie avec la fonction f_k . Autrement dit, on peut identifier l'opérateur de Berezin-Toeplitz $T_{f_k} = (T_k)_{k \geq 1}$ avec une suite d'opérateurs, notée $(\tilde{T}_k)_{k \geq 1}$, définie pour $k \geq 1$ et $g \in \mathcal{H}_k$, par :

$$\tilde{T}_k g = \tilde{\Pi}_k(\tilde{f}_k g) + \mathcal{O}(k^{-\infty}),$$

où $\tilde{\Pi}_k$ désigne le projecteur orthogonal de l'espace de fonctions $\mathcal{G}_k$ sur l'espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$ qui s'identifie avec le projecteur orthogonal Π_k de l'espace des sections de carré intégrable $L^2(\mathbb{T}^2, L_{\mathbb{T}^2}^{\otimes k})$ sur l'espace des sections holomorphes $H(\mathbb{T}^2, L_{\mathbb{T}^2}^{\otimes k})$. $\square$

Grâce à cette proposition, on peut définir d'une autre façon la quantification de Berezin-Toeplitz du tore et c'est cette définition qu'on utilisera dans toute la suite (on abandonne désormais la notation "tilde").

Définition 5.4.3 (Quantification de Berezin-Toeplitz du tore). *Soit $f_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$ et telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :*

$$f_k(x + 2\pi, y) = f_k(x, y) = f_k(x, y + 1).$$

On définit la quantification de Berezin-Toeplitz de la fonction f_k par la suite d'opérateurs $T_{f_k} := (T_k)_{k \geq 1}$ où pour tout $k \geq 1$, l'opérateur T_k est défini par :

$$T_k = \Pi_k M_{f_k} \Pi_k,$$

où $M_{f_k} : \mathcal{G}_k \rightarrow \mathcal{G}_k$ est l'opérateur de multiplication par la fonction f_k . On appelle la fonction f_k le symbole de l'opérateur de Berezin-Toeplitz T_{f_k} .

5.5 Exemples

Dans cette partie, nous allons donner quelques exemples d'opérateurs de Berezin-Toeplitz du tore $\mathbb{T}^2$ à l'aide d'un résultat de l'article de Laurent Charles et de Julien Marché [CM15] qui va nous aider à construire de tels opérateurs. Pour ce faire, on introduit la notation qui suit.

Notation: soit $x \in E$. Soit $u \in U(1)$ un nombre complexe de module 1. On note ψ_x^k l'automorphisme du fibré tensoriel $L_{\mathbb{T}^2}^{\otimes k}$ donné par :

$$\begin{aligned} \psi_x^k : L_{\mathbb{T}^2}^{\otimes k} &\longrightarrow L_{\mathbb{T}^2}^{\otimes k}, \\ (z, w) &\longmapsto (x, u) \cdot (z, w) = \left(z + x, u^k w e^{(ik/2)\omega(x, z)} \right). \end{aligned}$$

et on note $(\psi_x^k)^*$ le tiré en arrière par la fonction ψ_x^k . Cette application représente l'action du groupe de Heisenberg sur le fibré tensoriel $L_{\mathbb{T}^2}^{\otimes k}$.

Nous introduisons maintenant deux exemples simples d'opérateurs de Berezin-Toeplitz du tore à partir desquels on va pouvoir en construire d'autres. Ces exemples ont notamment été étudiés dans la thèse de Yohann Le Floch [LF14a]. Dans cette partie, nous supposons désormais que les indices de Floquet u et v apparaissant dans la définition de l'espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$ valent 1. Ainsi la base orthogonale de cet espace est maintenant donnée pour tout $l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, par :

$$e_l(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(e^{-l-kj/2} \right)^j e^{i(l+jk)z}.$$

Dans ce cadre, on peut facilement calculer la norme des fonctions e_l :

$$\|e_l\|_{\mathcal{G}_k} = (2)^{1/2} (\pi)^{3/4} k^{-1/4} e^{l^2/(2k)}.$$

Ainsi, on en déduit une base orthonormée de l'espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$, donnée pour tout $l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, par :

$$\tilde{e}_l(z) = \frac{e_l(z)}{\|e_l\|_{\mathcal{G}_k}}.$$

Cette base orthonormée de l'espace $\mathcal{H}_k$ va nous permettre de simplifier l'écriture matricielle des opérateurs de Berezin-Toeplitz. Avant de donner des exemples, on rappelle le résultat suivant concernant les opérateurs de Berezin-Toeplitz.

Proposition 5.5.1 (Exemple d'opérateurs de Berezin-Toeplitz). *Soit ν un élément du réseau $\mathbb{Z}^2$. Soit, pour tout $k \geq 1$:*

$$T_k = \left(\psi_{\nu/k}^k \right)^*.$$

Alors la suite $(T_k)_{k \geq 1}$ est un opérateur de Berezin-Toeplitz du tore de symbole principal $f_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ donné pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$f_0(p, q) = \exp \left(i\omega \left(p \frac{\partial}{\partial p} + q \frac{\partial}{\partial q}, \nu \right) \right),$$

et de symbole sous-principal nul.

Démonstration. La démonstration de cette proposition se trouve dans l'article [CM15]. $\square$

Grâce à cette proposition, on peut construire une famille d'exemples d'opérateurs de Berezin-Toeplitz du tore.

Exemple 5.5.1. Soit $k \geq 1$. Soit $x = 2\pi \frac{\partial}{\partial p}$. Soit $M_k = \left(\psi_{x/k}^k\right)^*$. Alors la suite d'opérateurs $(M_k)_{k \geq 1}$ est un opérateur de Berezin-Toeplitz de symbole principal m_0 donné pour $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$m_0(p, q) = e^{-2i\pi q}.$$

De plus pour tout $l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, on a :

$$M_k \tilde{e}_l = e^{2i\pi l/k} \tilde{e}_l.$$

Ainsi la matrice de l'opérateur de Berezin-Toeplitz M_k dans la base orthonormée $(\tilde{e}_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$, notée $\mathcal{M}_k$, est une matrice diagonale de la forme suivante :

$$\mathcal{M}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & e^{2i\pi/k} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & e^{2i\pi(k-2)/k} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e^{2i\pi(k-1)/k} \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.5.2. Soit $k \geq 1$. Soit $y = \frac{\partial}{\partial q}$. Soit $L_k = \left(\psi_{y/k}^k\right)^*$. Alors la suite d'opérateurs $(L_k)_{k \geq 1}$ est un opérateur de Berezin-Toeplitz de symbole principal l_0 donné pour $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$l_0(p, q) = e^{ip}.$$

De plus pour tout $l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, on a :

$$L_k \tilde{e}_l = \tilde{e}_{l+1},$$

(pour obtenir cette relation, on montre que $L_k e_l = e^{-1/(2k)} e^{-l/k} e_{l+1}$). Ainsi la matrice de cet opérateur de Berezin-Toeplitz, notée $\mathcal{L}_k$, dans la base orthonormée $(\tilde{e}_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ est la suivante :

$$\mathcal{L}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

À partir de ces deux premiers exemples, on peut construire des exemples d'opérateurs de Berezin-Toeplitz auto-adjoints du tore.

Exemple 5.5.3. Soit $k \geq 1$, soit $A_k = M_k + M_k^*$. Alors la suite d'opérateurs $(A_k)_{k \geq 1}$ est un opérateur de Berezin-Toeplitz du tore auto-adjoint de symbole principal, noté a_0 , donné pour $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$a_0(p, q) = 2 \cos(2\pi q).$$

De plus, pour tout $l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, on a :

$$A_k \tilde{e}_l = 2 \cos\left(\frac{2\pi l}{k}\right) \tilde{e}_l.$$

Exemple 5.5.4. Soit $k \geq 1$, soit $B_k = \frac{1}{2i}(M_k - M_k^*)$. Alors la suite d'opérateurs $(B_k)_{k \geq 1}$ est un opérateur de Berezin-Toeplitz du tore auto-adjoint de symbole principal, noté b_0 , donné pour $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$b_0(p, q) = -\sin(2\pi q).$$

De plus pour tout $l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, on a :

$$B_k \tilde{e}_l = \sin\left(\frac{2\pi l}{k}\right) \tilde{e}_l.$$

Exemple 5.5.5. Soit $k \geq 1$, soit $C_k = L_k + L_k^*$. Alors la suite d'opérateurs $(C_k)_{k \geq 1}$ est un opérateur de Berezin-Toeplitz du tore auto-adjoint de symbole principal, noté c_0 , donné pour $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$c_0(p, q) = 2 \cos(p).$$

De plus, pour tout $l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, on a :

$$C_k \tilde{e}_l = \tilde{e}_{l+1} + \tilde{e}_{l-1}.$$

Nous introduisons maintenant deux exemples physiques un peu plus complexes d'opérateurs de Berezin-Toeplitz du tore auto-adjoints.

Exemple 5.5.6 (Hamiltonien de Harper). L'hamiltonien de Harper (notamment étudié par Bernard Helffer et Johannes Sjöstrand dans l'article [HS90]) est défini pour $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ par la relation suivante :

$$h_0(p, q) = 2 (\cos(p) + \cos(2\pi q)).$$

D'après les exemples 5.5.3 et 5.5.5, l'opérateur de Berezin-Toeplitz du tore $(H_k)_{k \geq 1}$ donné pour tout $k \geq 1$ par :

$$H_k = A_k + C_k = M_k + M_k^* + L_k + L_k^*,$$

est un opérateur de symbole principal h_0 . La matrice de cet opérateur, notée $\mathcal{H}_k$, dans la base orthonormée $(\tilde{e}_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ est la suivante :

$$\mathcal{H}_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 2 \cos\left(\frac{2\pi}{k}\right) & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 & 2 \cos\left(\frac{2\pi(k-2)}{k}\right) & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \cos\left(\frac{2\pi(k-1)}{k}\right) \end{pmatrix}.$$

Une étude des valeurs propres de cet opérateur de Berezin-Toeplitz auto-adjoint en relation avec les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld réelles se trouve dans les articles [LF14b] et [LF14c] de Yohann Le Floch et dans sa thèse [LF14a, Chapitre 5].

Exemple 5.5.7 (Fonction hauteur du tore). On considère le tore $\mathbb{T}^2$ obtenu dans $\mathbb{R}^3$ par rotation d'un cercle de rayon r autour d'un cercle de rayon R contenu dans le plan (y, z) où $R > r$ (voir la figure 5.1). Dans le repère orthonormé (x, y, z) , les coordonnées du tore sont :

$$\begin{cases} x = r \sin(p); \\ y = (R + r \cos(p)) \cos(2\pi q); \\ z = (R + r \cos(p)) \sin(2\pi q). \end{cases}$$

On s'intéresse à la fonction hauteur du tore, autrement dit au hamiltonien suivant, pour $(p, q) \in \mathbb{R}^2$:

$$d_0(p, q) = (R + r \cos(p)) \sin(2\pi q).$$

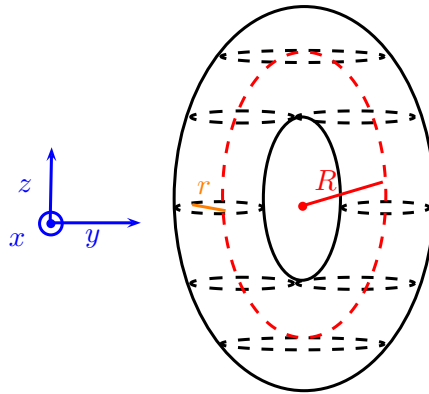


FIGURE 5.1 – Fonction hauteur du tore.

D'après l'exemple 5.5.5, on sait que l'opérateur de Berezin-Toeplitz E_k donné pour tout $k \geq 1$, par :

$$E_k = R\Pi_k + \frac{r}{2}C_k,$$

admet pour symbole principal pour $(p, q) \in \mathbb{R}^2$:

$$e_0(p, q) = R + r \cos(p);$$

(on rappelle que l'opérateur Π_k est le projecteur orthogonal de l'espace de fonctions $\mathcal{G}_k$ sur l'espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$). Et d'après l'exemple 5.5.4, on sait que l'opérateur de Berezin-Toeplitz du tore F_k donné pour tout $k \geq 1$ par :

$$F_k = -B_k$$

admet pour symbole principal pour $(p, q) \in \mathbb{R}^2$:

$$f_0(p, q) = \sin(2\pi q).$$

Ainsi l'opérateur de Berezin-Toeplitz auto-adjoint D_k donné pour tout $k \geq 1$ par :

$$D_k = \frac{1}{2}(E_k F_k + F_k E_k),$$

admet pour symbole principal la fonction d_0 par le calcul symbolique pour les opérateurs de Berezin-Toeplitz (voir par exemple [Cha06]). Une étude du spectre de cet opérateur de Berezin-Toeplitz auto-adjoint du tore en relation avec les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld réelles se trouve dans l'article [LF14c] et dans la thèse [LF14a, Chapitre 5] de Yohann Le Floch.

Ces premiers exemples d'opérateurs de Berezin-Toeplitz du tore $\mathbb{T}^2$ vont nous être utiles dans la suite et notamment dans le chapitre 8 où nous allons ajouter à ces opérateurs des perturbations (dans l'esprit de ce qui a été fait dans le chapitre 2) et étudier le comportement de leurs spectres de manière numérique.

Chapitre 6

Quantifications de Weyl du tore

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la quantification de Weyl classique du tore $\mathbb{T}^2$, qui a notamment été étudiée par Monique Combescure et Didier Robert dans le livre [CR12, Chapitre 6], et plus précisément à ce qu'elle devient si on la conjugue par la transformée de Bargmann. C'est cet outil qu'on appellera la quantification de Weyl complexe du tore par analogie avec le cas du plan $\mathbb{R}^2$ vu dans les chapitres 2 (voir définition 2.2.14) et 3 (voir définition 3.2.3).

6.1 Quantification de Weyl classique du tore

6.1.1 Espace de distributions $\mathcal{L}_k$

Dans ce paragraphe, nous allons introduire un sous-espace de l'espace des distributions sur $\mathbb{R}$, que nous noterons $\mathcal{L}_k$, et qui sera l'espace naturel sur lequel vont agir les opérateurs pseudo-différentiels à symboles sur le tore $\mathbb{T}^2$. Pour introduire cet espace nous rappelons quelques définitions dont nous allons avoir besoin (on peut les trouver par exemple dans le livre de Macej Zworski [Zwo12, chapitre 3]).

Définition 6.1.1 (Espace de Schwartz). *L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un espace de fonctions régulières qui est défini de la façon suivante :*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}); \|\phi\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < +\infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} \right\}.$$

Définition 6.1.2 (Transformée de Fourier semi-classique sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). *Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier semi-classique de ϕ , notée $\mathcal{F}_h \phi$, pour $\xi \in \mathbb{R}$, par :*

$$\mathcal{F}_h \phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(i/\hbar)x\xi} \phi(x) dx.$$

C'est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même et l'inverse de la transformée de Fourier

semi-classique est donné par la formule suivante, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}_h^{-1}\phi(x) = \frac{1}{2\pi h} \int_{\mathbb{R}} e^{(i/h)x\xi} \phi(\xi) d\xi.$$

Définition 6.1.3 (Distributions tempérées). *L'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est le dual de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, i.e. c'est l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Notation: $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}$ désigne le crochet de dualité entre les espaces $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Définition 6.1.4 (Transformée de Fourier semi-classique sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$). *Soit $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier semi-classique de ψ , notée $\mathcal{F}_h\psi$, pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, par la relation qui suit :*

$$\langle \mathcal{F}_h\psi, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle \psi, \mathcal{F}_h\phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$

On s'intéresse à la quantification de Weyl d'un symbole sur le tore, c'est donc un symbole périodique ce qui va induire des conditions de périodicités sur l'espace sur lequel va agir l'opérateur pseudo-différentiel. Par conséquent, nous avons également besoin d'introduire la notion de périodicité pour les distributions.

Notation: soit $a \in \mathbb{R}$, on note la translation de vecteur a dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tau_a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto x + a. \end{aligned}$$

On rappelle que la translation de vecteur a d'une distribution $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est définie de la façon suivante, pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\langle \tau_a\psi, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle \psi, \tau_{-a}\phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$

Définition 6.1.5 (Distributions périodiques). *Soit $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Soit $a \in \mathbb{R}$. La distribution ψ est dite a -périodique si $\tau_a\psi = \psi$.*

Remarque 6.1.6. *Toute distribution périodique est tempérée (voir par exemple [Bon11]).*

Les distributions périodiques ont la particularité de s'écrire sous forme de sommes.

Proposition 6.1.7 (Propriété des distributions périodiques). *Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit ψ une distribution a -périodique. Alors ψ s'écrit sous la forme d'une série de Fourier convergente dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:*

$$\psi = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_l e^{ilt2\pi/a},$$

où la suite $(\psi_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ est à croissance lente, i.e. pour tout $l \in \mathbb{Z}$, il existe un entier $N \geq 0$ tel que :

$$|\psi_l| \leq C(1 + |l|)^N.$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition se trouve par exemple dans le livre de Jean-Michel Bony [Bon11]. $\square$

Nous allons maintenant nous intéresser à un sous-espace des distributions tempérées. Cet espace a notamment été introduit par Monique Combescure et Didier Robert dans le livre [CR12, Chapitre 6]. Soit $k \geq 1$. Soient $u, v \in U(1)$ des nombres complexes de module 1. On considère l'espace suivant :

$$\mathcal{L}_k = \left\{ \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}); \quad \tau_{2\pi}\psi = u^k\psi, \quad \tau_1\mathcal{F}_h(\psi) = v^{-k}\mathcal{F}_h(\psi) \right\}.$$

Remarque 6.1.8. *La définition de cet espace fait apparaître deux nombres complexes u et v , on a choisi de les noter ainsi puisque lorsque nous ferons le lien entre les différentes quantifications du tore, nous verrons que ces nombres correspondent aux indices de Floquet qui ont été introduits dans la définition de l'espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$ (voir la proposition 6.2.20).*

Nous allons maintenant étudier un peu plus en détails l'espace de distributions $\mathcal{L}_k$ dans le but d'en déterminer une base.

Proposition 6.1.9 (Caractérisation des éléments de l'espace $\mathcal{L}_k$). *Soit $\psi \in \mathcal{L}_k$. Alors $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et s'écrit sous la forme suivante :*

$$\psi = u^{kt/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_l e^{ilt} \quad \text{avec } \forall l \in \mathbb{Z}, \psi_{l+k} = v^{-k}\psi_l,$$

où la somme converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Démonstration. Comme $\psi \in \mathcal{L}_k$, alors ψ vérifie la relation suivante :

$$\tau_{2\pi}\psi = u^k\psi.$$

Ainsi, d'après la proposition 6.1.7, on peut écrire cette distribution $\psi \in \mathcal{L}_k$ sous la forme :

$$\psi = u^{kt/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_l e^{ilt}.$$

Comme $\psi \in \mathcal{L}_k$, alors on a également la relation suivante :

$$\tau_1\mathcal{F}_h(\psi) = v^{-k}\mathcal{F}_h(\psi).$$

Or, au sens des distributions, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{\hbar}(\psi) &= \mathcal{F}_{\hbar} \left(u^{kt/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_l e^{ilt} \right), \\
 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_l \mathcal{F}_{\hbar} \left(u^{kt/(2\pi)} e^{ilt} \right) \quad \text{car } \mathcal{F}_{\hbar} \text{ est continue sur } \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \\
 &= 2\pi\hbar \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_l \delta_{\hbar ck/(2\pi) + \hbar l} \quad \text{où on a posé } u = e^{ic}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a, pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
 \langle \tau_1 \mathcal{F}_{\hbar} \psi, \phi \rangle &= \langle \mathcal{F}_{\hbar} \psi, \tau_{-1} \phi \rangle, \\
 &= \left\langle 2\pi\hbar \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_l \delta_{\hbar ck/(2\pi) + \hbar l}, \tau_{-1} \phi \right\rangle, \\
 &= 2\pi\hbar \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_l \langle \delta_{\hbar ck/(2\pi) + \hbar l}, \tau_{-1} \phi \rangle, \\
 &= 2\pi\hbar \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_l \langle \tau_1 \delta_{\hbar ck/(2\pi) + \hbar l}, \phi \rangle, \\
 &= 2\pi\hbar \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_l \langle \delta_{\hbar ck/(2\pi) + \hbar l - 1}, \phi \rangle.
 \end{aligned}$$

Et pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a également :

$$\begin{aligned}
 \langle v^{-k} \mathcal{F}_{\hbar} \psi, \phi \rangle &= v^{-k} \langle \mathcal{F}_{\hbar} \psi, \phi \rangle, \\
 &= v^{-k} \left\langle 2\pi\hbar \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_l \delta_{\hbar ck/(2\pi) + \hbar l}, \phi \right\rangle, \\
 &= 2\pi\hbar \sum_{l \in \mathbb{Z}} v^{-k} \psi_l \langle \delta_{\hbar ck/(2\pi) + \hbar l}, \phi \rangle.
 \end{aligned}$$

Donc au sens des distributions, on a :

$$2\pi\hbar \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_l \delta_{\hbar ck/(2\pi) + \hbar l - 1} = 2\pi\hbar \sum_{l \in \mathbb{Z}} v^{-k} \psi_l \delta_{\hbar ck/(2\pi) + \hbar l}.$$

Ainsi, pour que l'espace $\mathcal{L}_k$ soit non vide, il doit exister des entiers $l, l' \in \mathbb{Z}$ tels que : $\hbar l - 1 = \hbar l'$, autrement dit $l - l' = \frac{1}{\hbar}$. Par conséquent, il doit exister un entier $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $k' = \frac{1}{\hbar}$. Cet entier k' correspond dans la notation de l'espace $\mathcal{L}_k$ à l'indice k , donc on note désormais k à la place de k' . On en déduit également que la suite de coefficients $(\psi_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ doit vérifier la condition suivante, pour tout $l \in \mathbb{Z}$:

$$\psi_{l+k} = v^{-k} \psi_l.$$

□

Dans la démonstration précédente, nous avons vu que le nombre $k \geq 1$ doit être l'inverse du paramètre semi-classique $\hbar$. Par conséquent, nous jonglerons entre ces deux notations dans la suite.

Proposition 6.1.10 (Base de l'espace $\mathcal{L}_k$). *Soit $l \in \{0, \dots, k-1\}$. Soit :*

$$\epsilon_l = u^{kt/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k}\right)^j e^{i(l+jk)t} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Alors la famille $(\epsilon_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ est une base de l'espace $\mathcal{L}_k$.

Démonstration.

Étape 1 : pour tout $l \in \{0, \dots, k-1\}$, $\epsilon_l \in \mathcal{L}_k$. Soit $l \in \{0, \dots, k\}$, alors ϵ_l est bien une distribution tempérée (car $|v^{-k}|^j = 1$) et elle vérifie pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \langle \tau_{2\pi} \epsilon_l, \phi \rangle &= \langle \epsilon_l, \tau_{-2\pi} \phi \rangle, \\ &= \int_{\mathbb{R}} u^{kt/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k}\right)^j e^{i(l+jk)t} \phi(t-2\pi) dt, \\ &= \int_{\mathbb{R}} u^{k(t+2\pi)/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k}\right)^j e^{i(l+jk)(t+2\pi)} \phi(t) dt, \\ &= \langle u^k \epsilon_l, \phi \rangle. \end{aligned}$$

On a également au sens des distributions :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h(\epsilon_l) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k}\right)^j \mathcal{F}_h \left(u^{kt/(2\pi)} e^{i(l+jk)t}\right), \\ &= \frac{2\pi}{k} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k}\right)^j \delta_{c/(2\pi)+l/k+j} \quad \text{car } \hbar = \frac{1}{k} \text{ et où on a posé } u = e^{ic}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a, pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \langle \tau_1 \mathcal{F}_h(\epsilon_l), \phi \rangle &= \langle \mathcal{F}_h(\epsilon_l), \tau_{-1} \phi \rangle, \\ &= \frac{2\pi}{k} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k}\right)^j \langle \delta_{c/(2\pi)+l/k+j}, \tau_{-1} \phi \rangle, \\ &= \frac{2\pi}{k} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k}\right)^j \langle \delta_{c/(2\pi)+l/k+j-1}, \phi \rangle, \\ &= v^{-k} \frac{2\pi}{k} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k}\right)^j \langle \delta_{c/(2\pi)+l/k+j}, \phi \rangle \quad \text{par changement d'indice } j \mapsto j+1, \\ &= \langle v^{-k} \mathcal{F}_h(\epsilon_l), \phi \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $l \in \{0, \dots, k-1\}$, on a : $\epsilon_l \in \mathcal{L}_k$.

Étape 2 : la famille $(\epsilon_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ est génératrice. Soit $\psi \in \mathcal{L}_k$, alors d'après la proposition

6.1.9, on a, au sens des distributions :

$$\begin{aligned}
 \psi &= u^{kt/(2\pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_l e^{ilt}, \\
 &= u^{kt/(2\pi)} \left(\sum_{l=0}^{k-1} \psi_l e^{ilt} + \sum_{l=k}^{2k-1} \psi_l e^{ilt} + \dots + \sum_{l=-k}^{-1} \psi_l e^{ilt} + \dots \right), \\
 &= u^{kt/(2\pi)} \left(\sum_{l=0}^{k-1} \psi_l e^{ilt} + \sum_{l=0}^{k-1} v^{-k} \psi_l e^{i(l+k)t} + \dots + \sum_{l=0}^{k-1} v^k \psi_l e^{i(l-k)t} + \dots \right), \\
 &= u^{kt/(2\pi)} \sum_{l=0}^{k-1} \psi_l \sum_{j \in \mathbb{Z}} (v^{-k})^j e^{i(l+jk)t}, \\
 &= \sum_{l=0}^{k-1} \psi_l \epsilon_l.
 \end{aligned}$$

Ainsi la famille $(\epsilon_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ engendre l'espace $\mathcal{L}_k$.

Étape 3 : la famille $(\epsilon_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ est une base. Comme les distributions e^{ilt} sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, alors la famille $(\epsilon_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ est bien une base de l'espace $\mathcal{L}_k$. On en déduit également que l'espace $\mathcal{L}_k$ est de dimension k . $\square$

Comme $\mathcal{L}_k$ est un espace linéaire complexe de dimension finie k admettant pour base la famille $(\epsilon_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$, alors on peut considérer sur cet espace, la structure d'espace de Hilbert telle que la famille $(\epsilon_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ soit une base orthonormée de $\mathcal{L}_k$.

6.1.2 Opérateurs pseudo-différentiels agissant sur l'espace $\mathcal{L}_k$

Nous allons maintenant définir de deux manières différentes la quantification de Weyl du tore $\mathbb{T}^2$. Nous commençons par une formulation intégrale de cette quantification. Nous rappelons que la notation $S(\mathbb{R}^2)$ introduite dans la définition 3.1.1 désigne l'ensemble suivant :

$$S(\mathbb{R}^2) = \{a_h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2); \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \text{ il existe une constante } C_\alpha > 0 \text{ telle que : } |\partial^\alpha a_h| \leq C_\alpha\}.$$

Remarque 6.1.11. Soit $a_h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances du paramètre semi-classique $\hbar$ et telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$a_h(x + 2\pi, y) = a_h(x, y) = a_h(x, y + 1).$$

Alors la fonction a_h appartient à la classe de symboles $S(\mathbb{R}^2)$.

Définition 6.1.12 (Quantification de Weyl du tore). Soit $a_h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$a_h(x + 2\pi, y) = a_h(x, y) = a_h(x, y + 1).$$

On définit la quantification de Weyl du symbole a_h , notée $\text{Op}^w(a_h)(x, \hbar D_x)$, par la formule intégrale suivante, pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\text{Op}^w(a_h)(x, \hbar D_x)u(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi/\hbar} a_h\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi.$$

On appelle la fonction a_h le symbole de l'opérateur $\text{Op}^w(a_h)(x, \hbar D_x)$.

Nous rappelons maintenant qu'un opérateur pseudo-différentiel agit sur l'espace de Schwartz et sur l'espace des distributions tempérées.

Proposition 6.1.13 (Action d'un opérateur pseudo-différentiel sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$).
Soit $a_h \in S(\mathbb{R}^2)$ un symbole. Alors :

1. $\text{Op}^w(a_h)(x, \hbar D_x) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$;
2. $\text{Op}^w(a_h)(x, \hbar D_x) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$;

sont des transformations linéaires continues. De plus, l'opérateur $\text{Op}^w(a_h)$ agit sur l'espace des distributions de la façon suivante pour $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\langle \text{Op}^w(a_h)\psi, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle \psi, \text{Op}^w(\tilde{a}_h)\phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}},$$

où pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{a}_h(x, y) = a_h(x, -y) \in S(\mathbb{R}^2)$.

Démonstration. Pour une démonstration de cette proposition, on pourra consulter le livre de Maciej Zworski [Zwo12, Chapitre 3]. $\square$

Nous pouvons maintenant montrer qu'un opérateur pseudo-différentiel à symbole sur le tore agit sur l'espace de distributions $\mathcal{L}_k$ que nous avons introduit précédemment.

Proposition 6.1.14 (Opérateur pseudo-différentiel agissant sur l'espace $\mathcal{L}_k$). Soit $a_h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$a_h(x + 2\pi, y) = a_h(x, y) = a_h(x, y + 1).$$

Alors si $\hbar = \frac{1}{k}$ pour $k \geq 1$ entier, on a :

$$\text{Op}^w(a_h)(x, \hbar D_x) : \mathcal{L}_k \longrightarrow \mathcal{L}_k,$$

où on rappelle que $\mathcal{L}_k = \{\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}); \quad \tau_{2\pi}\psi = u^k\psi, \quad \tau_1\mathcal{F}_h(\psi) = v^{-k}\mathcal{F}_h(\psi)\}$.

Démonstration. On donne ci-dessous les principales étapes de la démonstration.

Étape 1 : $\text{Op}^w(a_h) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. D'après la remarque 6.1.11 et la proposition 6.1.13, on sait que l'opérateur $\text{Op}^w(a_h)$ agit sur l'espace des distributions $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Étape 2 : $\tau_{2\pi}\text{Op}^w(a_h)\psi = u^k\text{Op}^w(a_h)\psi$ pour $\psi \in \mathcal{L}_k$. Soient $\psi \in \mathcal{L}_k$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors

on a :

$$\begin{aligned}\langle \tau_{2\pi} \text{Op}^w(a_h)\psi, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} &= \langle \text{Op}^w(a_h)\psi, \tau_{-2\pi}\phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}, \\ &= \langle \psi, \text{Op}^w(\tilde{a}_h)\tau_{-2\pi}\phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.\end{aligned}$$

Or, pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\text{Op}^w(\tilde{a}_h)(x, \hbar D_x)(\tau_{-2\pi}\phi(x)) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi/\hbar} \tilde{a}_h\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) \tau_{-2\pi}\phi(y) dy d\xi, \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y-2\pi)\xi/\hbar} a_h\left(\frac{x+y+2\pi}{2}, -\xi\right) \phi(y) dy d\xi,\end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $y \mapsto y+2\pi$. Ainsi, on a, pour $\psi \in \mathcal{L}_k$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\langle \psi, \text{Op}^w(\tilde{a}_h)\tau_{-2\pi}\phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \text{Op}^w(\tilde{a}_h)(x, \hbar D_x)(\tau_{-2\pi}\phi)(x) dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y-2\pi)\xi/\hbar} a_h\left(\frac{x+y+2\pi}{2}, -\xi\right) \phi(y) dy d\xi dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x+2\pi) \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi/\hbar} a_h\left(\frac{x+y}{2} + 2\pi, -\xi\right) \phi(y) dy d\xi dx \quad \text{via } x \mapsto x+2\pi, \\ &= \int_{\mathbb{R}} u^k \psi(x) \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi/\hbar} a_h\left(\frac{x+y}{2} + 2\pi, -\xi\right) \phi(y) dy d\xi dx \quad \text{car } \psi \in \mathcal{L}_k, \\ &= \int_{\mathbb{R}} u^k \psi(x) \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi/\hbar} a_h\left(\frac{x+y}{2}, -\xi\right) \phi(y) dy d\xi dx \quad \text{car } a_h(x+2\pi, \xi) = a_h(x, \xi), \\ &= \int_{\mathbb{R}} u^k \psi(x) \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi/\hbar} \tilde{a}_h\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) \phi(y) dy d\xi dx, \\ &= \langle u^k \psi, \text{Op}^w(\tilde{a}_h)\phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}, \\ &= \langle u^k \text{Op}^w(a_h)\psi, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a, pour $\psi \in \mathcal{L}_k$: $\tau_{2\pi} \text{Op}^w(a_h)\psi = u^k \text{Op}^w(a_h)\psi$.

Étape 3 : $\tau_1 \mathcal{F}_h(\text{Op}^w(a_h)\psi) = v^{-k} \mathcal{F}_h(\text{Op}^w(a_h)\psi)$ pour $\psi \in \mathcal{L}_k$. Soient $\psi \in \mathcal{L}_k$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

on a :

$$\begin{aligned}\langle \tau_1 \mathcal{F}_h(\text{Op}^w(a_h)\psi), \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} &= \langle \mathcal{F}_h(\text{Op}^w(a_h)\psi), \tau_{-1}\phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}, \\ &= \langle \text{Op}^w(a_h)\psi, \mathcal{F}_h(\tau_{-1}\phi) \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}, \\ &= \langle \psi, \text{Op}^w(\tilde{a}_h) \mathcal{F}_h(\tau_{-1}\phi) \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.\end{aligned}$$

Or, pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_h(\tau_{-1}\phi)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi/\hbar} \tau_{-1}\phi(x) dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi/\hbar} e^{-i\xi/\hbar} \phi(x) dx \quad \text{via } x \mapsto x+1, \\ &= e^{-i\xi/\hbar} \mathcal{F}_h(\phi)(\xi).\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\text{Op}^w(\tilde{a}_h)(x, \hbar D_x) \mathcal{F}_h(\tau_{-1}\phi)(x) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi/\hbar} \tilde{a}_h\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) \mathcal{F}_h(\tau_{-1}\phi)(y) dy d\xi, \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi/\hbar} \tilde{a}_h\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{-iy/\hbar} \mathcal{F}_h(\phi)(y) dy d\xi, \\ &= e^{-ix/\hbar} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)(\xi+1)/\hbar} a_h\left(\frac{x+y}{2}, -\xi\right) \mathcal{F}_h(\phi)(y) dy d\xi, \\ &= e^{-ix/\hbar} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi/\hbar} a_h\left(\frac{x+y}{2}, -\xi+1\right) \mathcal{F}_h(\phi)(y) dy d\xi \quad \text{via } \xi \mapsto \xi-1, \\ &= e^{-ix/\hbar} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi/\hbar} a_h\left(\frac{x+y}{2}, -\xi\right) \mathcal{F}_h(\phi)(y) dy d\xi \quad \text{car } a_h(x, \xi+1) = a_h(x, \xi), \\ &= e^{-ix/\hbar} \text{Op}^w(\tilde{a}_h)(x, \hbar D_x) (\mathcal{F}_h\phi)(x).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a, pour $\psi \in \mathcal{L}_k$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\langle \psi, \text{Op}^w(\tilde{a}_h) \mathcal{F}_h(\tau_{-1}\phi) \rangle_{S', S} &= \langle e^{-i./\hbar} \psi, \text{Op}^w(\tilde{a}_h) (\mathcal{F}_h(\phi)) \rangle_{S', S}, \\ &= \langle \text{Op}^w(a_h) (e^{-i./\hbar} \psi), \mathcal{F}_h(\phi) \rangle_{S', S}, \\ &= \langle \mathcal{F}_h(\text{Op}^w(a_h) (e^{-i./\hbar} \psi)), \phi \rangle_{S', S}, \\ &= \langle \mathcal{F}_h(\text{Op}^w(a_h) (\mathcal{F}_h^{-1} \mathcal{F}_h e^{-i./\hbar} \psi)), \phi \rangle_{S', S}, \\ &= \langle \mathcal{F}_h(\text{Op}^w(a_h) (\mathcal{F}_h^{-1} \tau_1 \mathcal{F}_h \psi)), \phi \rangle_{S', S}, \\ &= \langle \mathcal{F}_h(\text{Op}^w(a_h) (\mathcal{F}_h^{-1} v^{-k} \mathcal{F}_h \psi)), \phi \rangle_{S', S} \quad \text{car } \psi \in \mathcal{L}_k, \\ &= \langle v^{-k} \mathcal{F}_h(\text{Op}^w(a_h) \psi), \phi \rangle_{S', S}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a, pour $\psi \in \mathcal{L}_k$: $\tau_1 \mathcal{F}_h(\text{Op}^w(a_h) \psi) = v^{-k} \mathcal{F}_h(\text{Op}^w(a_h) \psi)$. D'où le résultat. $\square$

Nous allons définir d'une autre façon la quantification de Weyl du tore $\mathbb{T}^2$ à l'aide de la méthode utilisée dans le livre de Monique Combescure et de Didier Robert [CR12, Chapitre 6]. Cette définition fait intervenir par convention l'inverse de la constante de Planck, notée k . Désormais, lorsque nous notons les symboles a_k , cela signifie qu'ils admettent un développement asymptotique en puissances de $1/k$. Auparavant, nous allons écrire d'une nouvelle façon un symbole sur le tore.

Proposition 6.1.15 (Réécriture d'un symbole sur le tore). *Soit $a_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction*

admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ et telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$a_k(x + 2\pi, y) = a_k(x, y) = a_k(x, y + 1).$$

Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$a_k(x, y) = \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m, n}^k e^{ixn} e^{-i2\pi ym},$$

où $(a_{m, n}^k)_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2}$ est une suite de coefficients complexes dépendant du paramètre k .

Démonstration. L'écriture du symbole a_k sous forme de sommes s'obtient en faisant un développement en série de Fourier. $\square$

Nous introduisons maintenant une seconde définition de la quantification de Weyl du tore qui s'écrit sous forme de sommes (voir [CR12, Chapitre 6]).

Définition 6.1.16 (Quantification de Weyl du tore). *Soit $a_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ et telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:*

$$a_k(x + 2\pi, y) = a_k(x, y) = a_k(x, y + 1).$$

On définit la quantification de Weyl du symbole a_k , notée $\text{Op}_k^w(a_k)$, par la formule suivante :

$$\text{Op}_k^w(a_k) = \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m, n}^k \hat{T}\left(\frac{2\pi m}{k}, \frac{n}{k}\right),$$

où la suite de coefficients $(a_{m, n}^k)_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2}$ est celle définie dans la proposition 6.1.15 et où $\hat{T}(p, q)$ est l'opérateur de translation de Weyl-Heisenberg par un vecteur $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ défini, pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, par :

$$\hat{T}(p, q)\phi(x) = e^{-iqpk/2} e^{ixqk} \phi(x - p).$$

L'opérateur pseudo-différentiel défini par la quantification de Weyl du tore ci-dessus est également un opérateur qui va agir sur l'espace de distributions $\mathcal{L}_k$.

Proposition 6.1.17 (Opérateur pseudo-différentiel agissant sur l'espace $\mathcal{L}_k$). *Soit $a_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:*

$$a_k(x + 2\pi, y) = a_k(x, y) = a_k(x, y + 1).$$

Alors :

$$\text{Op}_k^w(a_k) : \mathcal{L}_k \longrightarrow \mathcal{L}_k,$$

où on rappelle que : $\mathcal{L}_k = \{\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}); \quad \tau_{2\pi}\psi = u^k\psi, \quad \tau_1\mathcal{F}_h(\psi) = v^{-k}\mathcal{F}_h(\psi)\}$.

Démonstration. On donne ici les différentes étapes de la démonstration de la proposition (voir également [CR12, Chapitre 6]).

Étape 1 : $\text{Op}_k^w(a_k) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} x^\alpha \partial_x^\beta (\text{Op}_k^w(a_k)\phi(x)) &= x^\alpha \partial_x^\beta \left(\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m,n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{inx} \phi\left(x - \frac{2\pi m}{k}\right) \right), \\ &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m,n}^k e^{-i\pi mn/k} x^\alpha \partial_x^\beta \left(e^{inx} \phi\left(x - \frac{2\pi m}{k}\right) \right), \\ &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m,n}^k e^{-i\pi mn/k} x^\alpha \sum_{j=0}^{\beta} \binom{\beta}{j} \partial_x^j (e^{inx}) \partial_x^{\beta-j} \left(\phi\left(x - \frac{2\pi m}{k}\right) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$:

$$\begin{aligned} \left| x^\alpha \partial_x^\beta \text{Op}_k^w(a_k)\phi(x) \right| &= \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m,n}^k e^{-i\pi mn/k} x^\alpha \sum_{j=0}^{\beta} \binom{\beta}{j} \partial_x^j (e^{inx}) \partial_x^{\beta-j} \left(\phi\left(x - \frac{2\pi m}{k}\right) \right) \right|, \\ &\leq \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} |a_{m,n}^k| |x^\alpha| \sum_{j=0}^{\beta} \binom{\beta}{j} |\partial_x^j (e^{inx})| \left| \partial_x^{\beta-j} \left(\phi\left(x - \frac{2\pi m}{k}\right) \right) \right|, \\ &\leq \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} |a_{m,n}^k| \|\phi\|_{\alpha,\beta}, \\ &\leq C \|\phi\|_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$: $\|\text{Op}_k^w(a_k)\phi\|_{\alpha,\beta} \leq C \|\phi\|_{\alpha,\beta}$.

Étape 2 : $\text{Op}_k^w(a_k) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Soient $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors, on a :

$$\begin{aligned} \langle \text{Op}_k^w(a_k)\psi, \phi \rangle_{\mathcal{S},\mathcal{S}} &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m,n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{inx} \psi\left(x - \frac{2\pi m}{k}\right) \phi(x) dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m,n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{in(x+2\pi m/k)} \psi(x) \phi\left(x + \frac{2\pi m}{k}\right) dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m,n}^k e^{i\pi mn/k} e^{inx} \phi\left(x + \frac{2\pi m}{k}\right) dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{-m,n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{inx} \phi\left(x - \frac{2\pi m}{k}\right) dx \quad \text{via } m \mapsto -m, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{-m,n}^k \hat{T}\left(\frac{2\pi m}{k}, \frac{n}{k}\right) \phi(x) dx, \\ &=: \langle \psi, \text{Op}_k^w(\tilde{a}_k)\phi \rangle_{\mathcal{S},\mathcal{S}}, \end{aligned}$$

où pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a posé : $\tilde{a}_k(x, y) = a_k(x, -y)$. Or d'après l'étape 1, on sait que $\text{Op}_k^w(\tilde{a}_k)\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ainsi $\text{Op}_k^w(a_k)\psi$ est bien défini pour $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Autrement dit :

$$\text{Op}_k^w(a_k) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Étape 3 : $\text{Op}_k^w(a_k) : \mathcal{L}_k \longrightarrow \mathcal{L}_k$. Soient $\psi \in \mathcal{L}_k$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \langle \tau_{2\pi} \text{Op}_k^w(a_k) \psi, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} &= \langle \text{Op}_k^w(a_k) \psi, \tau_{-2\pi} \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}, \\ &= \langle \psi, \text{Op}_k^w(\tilde{a}_k) \tau_{-2\pi} \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}. \end{aligned}$$

Or, on a, pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\text{Op}_k^w(\tilde{a}_k) \tau_{-2\pi} \phi(x) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{-m,n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{ixn} \phi\left(x - \frac{2\pi m}{k} - 2\pi\right).$$

Ainsi, pour $\psi \in \mathcal{L}_k$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a :

$$\begin{aligned} &\langle \psi, \text{Op}_k^w(\tilde{a}_k) \tau_{-2\pi} \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{-m,n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{ixn} \phi\left(x - \frac{2\pi m}{k} - 2\pi\right) dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x+2\pi) \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{-m,n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{i(x+2\pi)n} \phi\left(x - \frac{2\pi m}{k}\right) dx \quad \text{via } x \longmapsto x+2\pi, \\ &= \int_{\mathbb{R}} u^k \psi(x) \text{Op}_k^w(\tilde{a}_k) \phi(x) dx \quad \text{car } \psi \in \mathcal{L}_k, \\ &= \langle u^k \psi, \text{Op}_k^w(\tilde{a}_k) \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}, \\ &= \langle u^k \text{Op}_k^w(a_k) \psi, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}. \end{aligned}$$

Donc pour $\psi \in \mathcal{L}_k$, on a : $\tau_{2\pi} \text{Op}_k^w(a_k) \psi = u^k \text{Op}_k^w(a_k) \psi$. Ensuite, on a également pour $\psi \in \mathcal{L}_k$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \langle \tau_1 \mathcal{F}_h(\text{Op}_k^w(a_k) \psi), \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} &= \langle \mathcal{F}_h(\text{Op}_k^w(a_k) \psi), \tau_{-1} \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}, \\ &= \langle \text{Op}_k^w(a_k) \psi, \mathcal{F}_h(\tau_{-1} \phi) \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}, \\ &= \langle \psi, \text{Op}_k^w(\tilde{a}_k) \mathcal{F}_h(\tau_{-1} \phi) \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}. \end{aligned}$$

Or, on rappelle que pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathcal{F}_h(\tau_{-1} \phi)(\xi) = e^{-i\xi/\hbar} \mathcal{F}_h(\phi)(\xi).$$

Ainsi pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
 \text{Op}_k^w(\tilde{a}_k)(\mathcal{F}_h \tau_{-1} \phi)(x) &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{-m,n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{ixn} \tau_{-2\pi m/k} \mathcal{F}_h(\tau_{-1} \phi)(x), \\
 &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{-m,n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{ixn} \tau_{-2\pi m/k} \left(e^{-ix/\hbar} \mathcal{F}_h(\phi)(x) \right), \\
 &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{-m,n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{ixn} e^{-i(x-2\pi m/k)/\hbar} \mathcal{F}_h(\phi) \left(x - \frac{2\pi m}{k} \right), \\
 &= e^{-ix/\hbar} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{-m,n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{ixn} e^{i2\pi m} \mathcal{F}_h(\phi) \left(x - \frac{2\pi m}{k} \right) \quad \text{car } k = \frac{1}{\hbar}, \\
 &= e^{-ix/\hbar} \text{Op}_k^w(\tilde{a}_k)(\mathcal{F}_h \phi)(x).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on a, pour $\psi \in \mathcal{L}_k$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
 \langle \psi, \text{Op}_k^w(\tilde{a}_k) \mathcal{F}_h(\tau_{-1} \phi) \rangle_{S',S} &= \langle \psi, e^{-i \cdot / \hbar} \text{Op}_k^w(\tilde{a}_k)(\mathcal{F}_h \phi) \rangle_{S',S}, \\
 &= \langle \text{Op}_k^w(a_k)(e^{-i \cdot / \hbar} \psi), \mathcal{F}_h \phi \rangle_{S',S}, \\
 &= \langle \mathcal{F}_h \text{Op}_k^w(a_k)(\mathcal{F}_h^{-1} \mathcal{F}_h(e^{-i \cdot / \hbar} \psi)), \phi \rangle_{S',S}, \\
 &= \langle \mathcal{F}_h \text{Op}_k^w(a_k)(\mathcal{F}_h^{-1} \tau_1 \mathcal{F}_h(\psi)), \phi \rangle_{S',S}, \\
 &= \langle \mathcal{F}_h \text{Op}_k^w(a_k)(\mathcal{F}_h^{-1} v^{-k} \mathcal{F}_h(\psi)), \phi \rangle_{S',S} \quad \text{car } \psi \in \mathcal{L}_k, \\
 &= \langle v^{-k} \mathcal{F}_h \text{Op}_k^w(a_k) \psi, \phi \rangle_{S',S}.
 \end{aligned}$$

Donc, pour $\psi \in \mathcal{L}_k$, on a : $\tau_1 \mathcal{F}_h(\text{Op}_k^w(a_k) \psi) = v^{-k} \mathcal{F}_h(\text{Op}_k^w(a_k) \psi)$. D'où le résultat. $\square$

Nous montrons maintenant que les deux quantifications d'un symbole sur le tore que nous venons de définir, c'est-à-dire la quantification sous forme intégrale et la quantification sous forme de sommes, définissent des opérateurs pseudo-différentiels qui coïncident sur l'espace de distributions $\mathcal{L}_k$.

Proposition 6.1.18 (Identification des deux quantifications de Weyl du tore).

Soit $a_\hbar = a_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$ et telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$a_\hbar(x + 2\pi, y) = a_\hbar(x, y) = a_\hbar(x, y + 1).$$

Alors, on a :

$$\text{Op}^w(a_\hbar) = \text{Op}_k^w(a_k) \quad \text{sur l'espace } \mathcal{L}_k.$$

Démonstration.

Étape 1 : $\text{Op}^w(a_h) = \text{Op}_k^w(a_k)$ sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors on a :

$$\begin{aligned}
 & \text{Op}^w(a_h)(x, \hbar D_x)\phi(x) \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi/\hbar} a_h\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) \phi(y) dy d\xi, \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi/\hbar} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m,n}^{\hbar} e^{i(x+y)n/2} e^{-2i\pi\xi m} \phi(y) dy d\xi \quad \text{d'après la proposition 6.1.15,} \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} e^{i(x-y-2\pi m\hbar)\xi/\hbar} a_{m,n}^{\hbar} e^{i(x+y)n/2} \phi(y) dy d\xi, \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi/\hbar} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m,n}^{\hbar} e^{i(x-y)n/2} e^{iyn} e^{-i\pi mn\hbar} \phi(y - 2\pi m\hbar) dy d\xi, \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi/\hbar} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m,n}^{\hbar} e^{-i\pi mn\hbar} e^{iyn} \phi(y - 2\pi m\hbar) dy d\xi \quad \text{via } \xi \mapsto \xi - \frac{n\hbar}{2}, \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi/\hbar} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m,n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{iyn} \phi\left(y - \frac{2\pi m}{k}\right) dy d\xi \quad \text{car } k = \frac{1}{\hbar}, \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi/\hbar} (\text{Op}_k^w(a_k)\phi)(y) dy d\xi, \\
 &= \text{Op}_k^w(a_k)\phi(x).
 \end{aligned}$$

Ainsi les deux opérateurs pseudo-différentiels à symbole sur le tore coïncident sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Étape 2 : $\text{Op}^w(a_h) = \text{Op}_k^w(a_k)$ sur l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Soient $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors on a :

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Op}^w(a_h)\psi, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} &= \langle \psi, \text{Op}^w(\tilde{a}_h)\phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \quad \text{où pour } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tilde{a}_h(x, y) = a_h(x, -y), \\
 &= \langle \psi, \text{Op}_k^w(\tilde{a}_k)\phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \quad \text{d'après l'étape 1,} \\
 &= \langle \text{Op}_k^w(a_k)\psi, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \quad \text{d'après la démonstration de la proposition 6.1.17.}
 \end{aligned}$$

Ainsi ces deux opérateurs coïncident sur l'espace des distributions $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Étape 3 : $\text{Op}^w(a_h) = \text{Op}_k^w(a_k)$ sur l'espace $\mathcal{L}_k$. D'après l'étape 2, $\text{Op}^w(a_h) = \text{Op}_k^w(a_k)$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et comme $\mathcal{L}_k \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ alors par restriction de ces opérateurs à ce sous-espace, on obtient le résultat voulu. $\square$

6.2 Quantification de Weyl complexe du tore

Dans ce paragraphe, nous allons introduire la notion de quantification de Weyl complexe du tore dans le même esprit que la quantification de Weyl complexe de $\mathbb{R}^2$ a été introduite dans le chapitre 2 (voir définition 2.2.14). À notre connaissance, la quantification de Weyl complexe du tore n'apparaît pas dans la littérature existante. Dans le cadre du plan $\mathbb{R}^2$, on a vu que le lien entre la quantification de Weyl classique et la quantification de Weyl

complexe se fait grâce à la transformée de Bargmann, c'est pourquoi dans un premier temps, nous allons focaliser notre attention sur cette transformée.

6.2.1 La transformée de Bargmann

Dans ce paragraphe, nous allons étudier de manière plus approfondie la transformée de Bargmann semi-classique utilisée notamment par Anders Melin, Michael Hitrik et Johannes Sjöstrand dans les articles [MS02, MS03, HS04] et par les deux derniers auteurs dans le mini-cours en ligne [HS15]. On s'intéresse plus précisément à l'action de cette transformée sur l'espace de Schwartz, puis sur l'espace des distributions et enfin sur l'espace $\mathcal{L}_k$. On s'inspire du travail de Valentine Bargmann [Bar67] sur le sujet, la différence entre ce travail et ce qui va suivre est qu'on se place ici dans un cadre semi-classique. D'autre part, dans l'article [Bar67], le poids exponentiel utilisé pour définir l'espace de Bargmann est différent.

6.2.1.1 Rappels sur la transformée de Bargmann

Commençons par rappeler la définition de la transformée de Bargmann, ainsi que les premières propriétés que nous avons sur cette transformée (voir le livre de Maciej Zworski [Zwo12, Chapitre 13]).

Notations: soit pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\Phi_1(z) = \frac{1}{2}|\Im z|^2$. On note :

1. $L(dz) = \frac{i}{2}dz \wedge d\bar{z}$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$;
2. $L_h^2(\mathbb{C}, \Phi_1) := L^2(\mathbb{C}, e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} L(dz))$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{C}$ par rapport à la mesure à poids exponentiel $e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} L(dz)$;
3. $H_h(\mathbb{C}, \Phi_1) := \text{Hol}(\mathbb{C}) \cap L_h^2(\mathbb{C}, \Phi_1)$ l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ appartenant à l'espace $L_h^2(\mathbb{C}, \Phi_1)$.

Définition 6.2.1 (Transformée de Bargmann). *Soit ϕ_1 la fonction quadratique holomorphe définie pour $(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ par :*

$$\phi_1(z, x) = \frac{i}{2}(z - x)^2.$$

La transformée de FBI associée à la fonction ϕ_1 est l'opérateur T_{ϕ_1} défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par :

$$T_{\phi_1} u(z) = c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{R}} e^{(i/\hbar)\phi_1(z,x)} u(x) dx = c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-(1/2\hbar)(z-x)^2} u(x) dx,$$

où :

$$c_{\phi_1} = \frac{1}{2^{1/2}\pi^{3/4}} \frac{|\det \partial_x \partial_z \phi_1|}{(\det \Im \partial_x^2 \phi_1)^{1/4}} = \frac{1}{2^{1/2}\pi^{3/4}}. \quad (\text{E6.1})$$

On appelle T_{ϕ_1} la transformée de Bargmann.

Rappelons quelques propriétés de cette transformée que nous avons déjà rencontrées dans le chapitre 2 mais dans le cas d'une fonction poids Φ arbitraire (voir les propositions 2.2.11 et 2.2.13).

Proposition 6.2.2 (Projecteur orthogonal sur $H_{\hbar}(\mathbb{C}, \Phi_1)$). *Soit ψ_1 l'unique forme quadratique holomorphe sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

$$\psi_1(z, \bar{z}) = \Phi_1(z).$$

Alors le projecteur orthogonal $\Pi_{\Phi_1} : L_{\hbar}^2(\mathbb{C}, \Phi_1) \longrightarrow H_{\hbar}(\mathbb{C}, \Phi_1)$ est donné par :

$$\Pi_{\Phi_1} u(z) = \frac{2 \det \partial_{z,w}^2 \psi_1}{\pi \hbar} \int_{\mathbb{C}} e^{2(\psi_1(z, \bar{w}) - \Phi_1(w))/\hbar} u(w) dw d\bar{w}.$$

Proposition 6.2.3 (La transformée de Bargmann est unitaire).

1. $T_{\phi_1} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow H_{\hbar}(\mathbb{C}, \Phi)$ est une transformation unitaire.
2. Si $T_{\phi_1}^* : L_{\hbar}^2(\mathbb{C}, \Phi_1) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ désigne l'adjoint de T_{ϕ_1} , alors il est donné par la formule suivante pour tout $v \in L_{\hbar}^2(\mathbb{C}, \Phi_1)$:

$$T_{\phi_1}^* v(x) = c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{C}} e^{-(1/2\hbar)(\bar{z}-x)^2} e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} v(z) L(dz).$$

De plus, $\Pi_{\Phi_1} = T_{\phi_1} T_{\phi_1}^*$.

Proposition 6.2.4 (Quantification de Weyl classique et quantification de Weyl complexe). *Soit $a_{\hbar} \in S(\mathbb{R}^2)$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$. Soit $\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar}) := T_{\phi_1} \text{Op}^w(a_{\hbar}) T_{\phi_1}^*$. Alors :*

1. $\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar}) : H_{\hbar}(\mathbb{C}, \Phi_1) \longrightarrow H_{\hbar}(\mathbb{C}, \Phi_1)$ est un opérateur uniformément borné en $\hbar$;
2. $\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar})$ est donné par l'intégrale sur un contour suivante :

$$\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar}) u(z) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(z)} e^{(i/\hbar)(z-w)\zeta} b_{\hbar} \left(\frac{z+w}{2}, \zeta \right) u(w) dw d\zeta,$$

où $\Gamma(z) = \left\{ (w, \zeta) \in \mathbb{C}^2; \zeta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \left(\frac{z+w}{2} \right) = -\Im \left(\frac{z+w}{2} \right) \right\}$, où le symbole $b_{\hbar}$ est donné par $b_{\hbar} = a_{\hbar} \circ \kappa_{\phi_1}^{-1}$ et où la transformation canonique κ_{ϕ_1} est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \kappa_{\phi_1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \Lambda_{\Phi_1} = \{(z, -\Im(z)); z \in \mathbb{C}\} \\ (x, \xi) &\longmapsto (x - i\xi, \xi). \end{aligned}$$

Pour plus de détails sur la quantification de Weyl complexe de $\mathbb{R}^2$, on peut consulter le cours en ligne [HS15].

6.2.1.2 Transformée de Bargmann et espace de Schwartz

Introduisons maintenant les espaces de fonctions sur lesquels nous allons travailler. Pour démontrer comment agit la transformée de Bargmann sur l'espace de Schwartz, nous introduisons une seconde définition de cet espace équivalente à celle vue précédemment mais avec laquelle on pourra travailler plus facilement (voir définition 6.1.1).

Définition 6.2.5 (Espace $\mathcal{S}^j(\mathbb{R})$). *Soit $j \in \mathbb{N}$. On définit l'espace, noté $\mathcal{S}^j(\mathbb{R})$, par la relation suivante :*

$$\mathcal{S}^j(\mathbb{R}) = \left\{ \phi \in \mathcal{C}^j(\mathbb{R}); \|\phi\|_j := \max_{m \leq j} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |(1+x^2)^{(j-m)/2} \partial_x^m \phi(x)| \right) < +\infty \right\}.$$

On peut ainsi donner une nouvelle définition de l'espace de Schwartz.

Proposition 6.2.6 (Espace de Schwartz). *L'espace de Schwartz, noté $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, vérifie la relation suivante :*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathcal{S}^j(\mathbb{R}) = \{ \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}); \forall j \in \mathbb{N}, \|\phi\|_j < +\infty \}.$$

Nous allons maintenant définir de nouveaux espaces de fonctions qui correspondront aux images des espaces $\mathcal{S}^j(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ respectivement par la transformée de Bargmann.

Définition 6.2.7 (Espace $\mathfrak{S}^j(\mathbb{C})$). *Soit $j \in \mathbb{N}$. On définit l'espace, noté $\mathfrak{S}^j(\mathbb{C})$, par la relation suivante :*

$$\mathfrak{S}^j(\mathbb{C}) = \left\{ \psi \in \text{Hol}(\mathbb{C}); |\psi|_j := \sup_{z \in \mathbb{C}} \left((1+|z|^2)^{j/2} e^{-\Phi_1(z)/\hbar} |\psi(z)| \right) < +\infty \right\}.$$

Définition 6.2.8 (Espace $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$). *On définit l'espace, noté $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$, par la relation suivante :*

$$\mathfrak{S}(\mathbb{C}) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathfrak{S}^j(\mathbb{C}) = \{ \psi \in \text{Hol}(\mathbb{C}); \forall j \in \mathbb{N}, |\psi|_j < +\infty \}.$$

Nous pouvons maintenant établir un lien entre les espaces $\mathcal{S}^j(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{S}^j(\mathbb{C})$ pour $j \in \mathbb{N}$.

Proposition 6.2.9 (Transformée de Bargmann et espace $\mathcal{S}^j(\mathbb{R})$). *Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $\phi \in \mathcal{S}^j(\mathbb{R})$, alors :*

1. $T_{\phi_1} \phi$ est holomorphe ;
2. pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|T_{\phi_1} \phi(z)| \leq a_j^\hbar (1+|z|^2)^{-j/2} e^{\Phi_1(z)/\hbar} \|\phi\|_j$ où $a_j^\hbar$ est une constante dépendant de j et du paramètre semi-classique $\hbar$.

Démonstration. Nous donnons les principales étapes de cette démonstration. Pour plus de détails, on peut consulter l'article de Valentine Bargmann [Bar67] bien que dans ce dernier le poids est différent.

Étape 1 : on montre que la transformée de Bargmann $T_{\phi_1} \phi$ est une fonction holomorphe.

Étape 2 : on montre le résultat dans le cas où $j = 0$ (qui est un cas simple), *i.e.* on montre, en utilisant des estimations intégrales simples, que pour tout $\phi \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R})$, il existe une constante $a_0^{\hbar}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|T_{\phi_1}\phi(z)| \leq a_0^{\hbar} e^{\Phi_1(z)/\hbar} \|\phi\|_0.$$

Étape 3 : on montre le résultat dans le cas où $j \geq 1$, *i.e.* on montre que pour tout $\phi \in \mathcal{S}^j(\mathbb{R})$, il existe une constante $a_j^{\hbar}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|T_{\phi_1}\phi(z)| \leq a_j^{\hbar} (1 + |z|^2)^{-j/2} e^{\Phi_1(z)/\hbar} \|\phi\|_j.$$

Cette étape se décompose en plusieurs sous-étapes qui sont les suivantes.

- **Étape 3.1 :** on montre, en utilisant des estimations simples, les inégalités suivantes pour $x \in \mathbb{R}$:

$$(a) \quad |\partial_x^m \phi(x)| \leq \|\phi\|_j \text{ pour } m \leq j;$$

$$(b) \quad |\phi(x)| \leq \|\phi\|_j (1 + x^2)^{-j/2}.$$

- **Étape 3.2 :** pour $z \in \mathbb{C}$ et $\tau \in \mathbb{R}$, on pose $F(\tau) = (T_{\phi_1}\phi)(\tau z)$, ainsi $F(1) = (T_{\phi_1}\phi)(z)$ et on utilise cette nouvelle fonction F pour décomposer $(T_{\phi_1}\phi)(z)$ en deux fonctions, *i.e.* :

$$F(1) = p_j(z) + r_j(z),$$

où :

$$\begin{cases} p_j(z) = \sum_{l=0}^{j-1} \frac{F^{(l)}(0)}{l!}, \\ r_j(z) = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{j-1}}{(j-1)!} F^{(j)}(\tau) d\tau. \end{cases}$$

Puis on estime chacune de ces fonctions de la façon suivante :

$$\begin{cases} |p_j(z)| \leq \sum_{l=0}^{j-1} |z|^l \eta_l(0), \\ |r_j(z)| \leq \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{j-1}}{(j-1)!} |z|^j \eta_j(\tau z) d\tau, \end{cases}$$

où $\eta_l(z)$ est une borne pour $\partial^l(T_{\phi_1}\phi)(z)$.

- **Étape 3.3 :** on montre que la fonction η_l satisfait la relation suivante pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\eta_l(z) = \beta e^{\Phi_1(z)/\hbar} \text{ pour } l \leq j,$$

où $\beta = (\pi\hbar)^{-1/4} \|\phi\|_j$ en utilisant le théorème de Lebesgue et des estimations intégrales.

– **Étape 3.4** : on déduit des étapes 3.2 et 3.3 que pour $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{cases} |p_j(z)| \leq \beta \sum_{l=0}^{j-1} |z|^l, \\ |r_j(z)| \leq \beta |z|^j (2\hbar)^j e^{1/2\hbar} (1 + \Im(z)^2)^{-j} e^{\Phi_1(z)/\hbar}. \end{cases}$$

– **Étape 3.5** : on montre, en utilisant l'étape 3.4, que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|T_{\phi_1}\phi(z)| \leq \rho'_\hbar \|\phi\|_j (1 + |z|^2)^{j/2} (1 + \Im(z)^2)^{-j} e^{\Phi_1(z)/\hbar} \quad \text{où } \rho'_\hbar \text{ est une constante.}$$

– **Étape 3.6** : on montre, en utilisant l'étape 3.1 (b), que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|T_{\phi_1}\phi(z)| \leq \rho''_\hbar \|\phi\|_j (1 + \Re(z)^2)^{-j/2} e^{\Phi_1(z)/\hbar} \quad \text{où } \rho''_\hbar \text{ est une autre constante.}$$

– **Étape 3.7** : on compare les estimations des étapes 3.5 et 3.6 et on montre que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$|T_{\phi_1}\phi(z)| \leq \rho_\hbar \|\phi\|_j (1 + |z|^2)^{-j/2} e^{\Phi_1(z)/\hbar} \quad \text{où } \rho_\hbar = \max(2^j \rho'_\hbar, 2^{j/2} \rho''_\hbar).$$

□

Proposition 6.2.10 (La transformée de Bargmann envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$).

1. Soit $j \in \mathbb{N}$, alors $T_{\phi_1}\mathcal{S}^j(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{S}^j(\mathbb{C})$.
2. $T_{\phi_1}\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{S}(\mathbb{C})$.

Démonstration. Pour la démonstration de cette proposition, on peut également consulter l'article [Bar67].

Étape 1 : montrons la première assertion. Soit $j \in \mathbb{N}$, soit $\phi \in \mathcal{S}^j(\mathbb{R})$, alors d'après la proposition 6.2.9, on sait qu'il existe une constante $a_j^\hbar$ dépendant de j et de $\hbar$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|T_{\phi_1}\phi(z)| \leq a_j^\hbar (1 + |z|^2)^{-j/2} e^{\Phi_1(z)/\hbar} \|\phi\|_j.$$

Autrement dit, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$(1 + |z|^2)^{j/2} e^{-\Phi_1(z)/\hbar} |T_{\phi_1}\phi(z)| \leq a_j^\hbar \|\phi\|_j.$$

Donc :

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \left((1 + |z|^2)^{j/2} e^{-\Phi_1(z)/\hbar} |T_{\phi_1}\phi(z)| \right) \leq a_j^\hbar \|\phi\|_j.$$

Par définition de la norme sur l'espace $\mathfrak{S}^j(\mathbb{C})$, on a donc :

$$|T_{\phi_1}\phi|_j \leq a_j^\hbar \|\phi\|_j < +\infty.$$

Donc, la transformée de Bargmann T_{ϕ_1} envoie l'espace $\mathcal{S}^j(\mathbb{R})$ sur l'espace $\mathfrak{S}^j(\mathbb{C})$.

Étape 2 : la seconde assertion découle de l'étape 1, de la proposition 6.2.6 et de la définition 6.2.8. $\square$

On s'intéresse maintenant à l'inverse de la transformée de Bargmann $T_{\phi_1}^*$ et à son action sur l'espace $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$.

Remarque 6.2.11. D'après les propositions 6.2.3 et 6.2.10, on a :

$$T_{\phi_1} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow H_h(\mathbb{C}, \Phi_1) \quad \text{et} \quad T_{\phi_1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{C}).$$

Or, comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, alors $\mathfrak{S}(\mathbb{C}) \subset H_h(\mathbb{C}, \Phi_1)$.

Proposition 6.2.12 (Inverse de la transformée de Bargmann et espace $\mathfrak{S}^\mu(\mathbb{C})$). Soit $\mu = 1 + j + \tau$ avec $j \in \mathbb{N}$ et $\tau \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $\psi \in \mathfrak{S}^\mu(\mathbb{C})$, on a :

$$\|T_{\phi_1}^* \psi\|_j \leq a_{j,\tau}^h |\psi|_\mu,$$

où $a_{j,\tau}^h$ est une constante indépendante de ψ , qui dépend du paramètre semi-classique $\hbar$ et des entiers j et τ .

Démonstration. Nous donnons ici les grandes étapes de la démonstration de cette proposition (voir l'article de Valentine Bargmann [Bar67] pour plus de détails).

Étape 1 : comme $\psi \in \mathfrak{S}^\mu(\mathbb{C})$, on montre que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$|\psi(z)| \leq (1 + |z|^2)^{-\mu/2} e^{\Phi_1(z)/\hbar} |\psi|_\mu.$$

Étape 2 : on estime $\partial^m T_{\phi_1}^* \psi$ pour $m \leq j$ en suivant les étapes ci-contre.

- **Étape 2.1 :** on montre, en utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégral, que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|\partial_x^m (T_{\phi_1}^* \psi(x))| \leq |c_{\phi_1}| \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{C}} B_m(z, x) L(dz),$$

où pour $(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$:

$$B_m(z, x) = \left| \partial_x^m \left(e^{-(1/2\hbar)(\bar{z}-x)^2} \right) e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} \psi(z) \right|.$$

- **Étape 2.2 :** on montre, en utilisant des estimations sur les polynômes de Hermite, que pour tout $(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ et pour tout $m \leq j$, on a :

$$B_m(z, x) \leq \delta_h^j 2^m \left(1 + \frac{1}{2\hbar} (\Re(z) - x)^2 \right)^{m/2} e^{-(1/2\hbar)(\Re(z)-x)^2} (1 + |z|^2)^{(m-\mu)/2} |\psi|_\mu,$$

où δ_h^j est une constante dépendant de j et de $\hbar$.

– **Étape 2.3** : on déduit des étapes 2.1 et 2.2 que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|\partial_x^m(T_{\phi_1}^* \psi(x))| \leq a_{j,\tau}^{\hbar} (1+x^2)^{(m-j)/2} |\psi|_{\mu},$$

où $a_{j,\tau}^{\hbar}$ est une constante dépendant de j , τ et $\hbar$.

Étape 3 : on déduit de l'étape 2 que pour $x \in \mathbb{R}$ et $\mu = 1 + j + \tau$, on a :

$$(1+x^2)^{(j-m)/2} |\partial_x^m(T_{\phi_1}^* \psi(x))| \leq a_{j,\tau}^{\hbar} |\psi|_{\mu}.$$

Donc :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left((1+x^2)^{(j-m)/2} |\partial_x^m(T_{\phi_1}^* \psi(x))| \right) \leq a_{j,\tau}^{\hbar} |\psi|_{\mu}.$$

Par conséquent, on a :

$$\|T_{\phi_1}^* \psi\|_j = \max_{m \leq j} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \left((1+x^2)^{(j-m)/2} |\partial_x^m(T_{\phi_1}^* \psi(x))| \right) \right) \leq a_{j,\tau}^{\hbar} |\psi|_{\mu}.$$

□

Proposition 6.2.13 (L'adjoint de la transformée de Bargmann envoie $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).

1. Soit $\mu = 1 + j + \tau$ avec $j \in \mathbb{N}$ et $\tau \in \mathbb{N}^*$. Alors $T_{\phi_1}^* \mathfrak{S}^{\mu}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{S}^j(\mathbb{R})$.
2. $T_{\phi_1}^* \mathfrak{S}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Pour la démonstration de cette proposition, on peut également consulter l'article [Bar67].

Étape 1 : montrons la première assertion. D'après la proposition 6.2.12, on sait qu'il existe une constante $a_{j,\tau}^{\hbar}$ dépendant de j , de τ et de $\hbar$ telle que pour tout $\psi \in \mathfrak{S}^{\mu}(\mathbb{C})$, on a :

$$\|T_{\phi_1}^* \psi\|_j \leq a_{j,\tau}^{\hbar} |\psi|_{\mu} < +\infty.$$

On en déduit donc que $T_{\phi_1}^* \mathfrak{S}^{\mu}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{S}^j(\mathbb{R})$.

Étape 2 : la seconde assertion découle de l'étape 1, de la définition 6.2.8 et de la proposition 6.2.6. □

6.2.1.3 Transformée de Bargmann et espace des distributions

Dans ce paragraphe on s'intéresse à l'image de l'espace des distributions par la transformée de Bargmann T_{ϕ_1} . On commence donc par introduire l'espace qui sera cette image.

Définition 6.2.14 (Espace $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$). *L'espace $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ est le dual de l'espace $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$, i.e. c'est l'espace des formes linéaires continues sur $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$.*

Notation : $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}}$ désigne le crochet de dualité entre les espaces $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$.

On souhaite maintenant décrire les éléments d'un tel espace afin de pouvoir l'étudier plus facilement. On introduit auparavant une nouvelle notation.

Notation : soient $f, g \in \text{Hol}(\mathbb{C})$, on note $\langle g, f \rangle$ le produit suivant :

$$\langle g, f \rangle = \int_{\mathbb{C}} \overline{g(z)} f(z) e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} L(dz),$$

lorsque cette intégrale converge absolument.

Remarque 6.2.15.

- Le crochet défini ci-dessus coïncide avec le produit scalaire $\langle g, f \rangle_{L_h^2(\mathbb{C}, \Phi_1)}$ lorsque $g, f \in H_h(\mathbb{C}, \Phi_1)$.
- Si $g \in \mathfrak{S}^\rho(\mathbb{C})$ et $f \in \mathfrak{S}^\sigma(\mathbb{C})$ avec $\rho + \sigma > 2$, alors le crochet $\langle g, f \rangle$ est bien défini.

On considère un tel crochet car on va montrer que les formes linéaires continues sur $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ peuvent s'écrire à l'aide de ce dernier.

Proposition 6.2.16 (Réécriture des éléments de $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$). *Toute forme linéaire continue L sur $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ s'écrit sous la forme suivante, pour tout $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$:*

$$L(f) = \langle g, f \rangle = \int_{\mathbb{C}} \overline{g(z)} f(z) e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} L(dz),$$

où g est un élément de l'espace $\mathfrak{S}^{-l}(\mathbb{C})$ pour $l \in \mathbb{N}$ et est uniquement déterminé, pour tout $a \in \mathbb{C}$, par $g(a) = \overline{L(e_a)}$ (où pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e_a(z) = e^{-1/(4\hbar)(\bar{a}-z)^2}$).

Inversement, toute expression de la forme $L(f) = \langle g, f \rangle$ avec $g \in \mathfrak{S}^{-l}(\mathbb{C})$ définit une forme linéaire continue sur $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$.

Démonstration. Comme précédemment, nous allons uniquement donner les différentes étapes de la démonstration de cette proposition (pour plus de détails, voir [Bar67]).

Étape 1 : on remarque que $|L(f)| \leq C|f|_k$ pour $L \in \mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ et $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$.

Étape 2 : pour $a \in \mathbb{C}$, on définit une fonction g par la relation suivante $g(a) = \overline{L(e_a)}$ où la fonction e_a est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour $a \in \mathbb{C}$ fixé par :

$$e_a(z) = e^{-1/(4\hbar)(\bar{a}-z)^2}.$$

On montre que $e_a \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$ et $g \in \mathfrak{S}^{-l}(\mathbb{C})$ (e_a est un noyau reproduisant pour les espaces $H_h(\mathbb{C}, \Phi_1)$ et $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$).

Étape 3 : on considère la forme linéaire continue L_1 définie pour $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$ par $L_1(f) = \langle g, f \rangle$ où g est la fonction définie à l'étape 2. On montre que pour tout $a \in \mathbb{C}$:

$$L_1(e_a) = L(e_a),$$

puis on en déduit que $L = L_1$ en montrant que l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de l'ensemble $\mathcal{B} = \{e_a, a \in \mathbb{C}\}$ est dense dans $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$. $\square$

Remarque 6.2.17. Comme l'espace $\mathcal{H}_k$ est inclus dans l'espace $\mathfrak{S}^0(\mathbb{C})$, alors d'après la proposition 6.2.16, l'espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$ est inclus dans l'espace $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$.

On peut maintenant déterminer l'image de l'espace des distributions par la transformée de Bargmann.

Proposition 6.2.18 (La transformée de Bargmann envoie $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ sur $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$).

1. $T_{\phi_1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ est définie, pour $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$, par :

$$\langle T_{\phi_1} v, f \rangle_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}} = \langle v, T_{\phi_1}^* f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$

2. $T_{\phi_1}^* : \mathfrak{S}'(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est définie, pour $L \in \mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, par :

$$\langle T_{\phi_1}^* L, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle L, T_{\phi_1} \phi \rangle_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}}.$$

Démonstration. Pour la démonstration de cette proposition, on peut également consulter l'article [Bar67].

Soit $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on rappelle qu'on note pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (voir définition 6.1.3) :

$$v(\phi) = \langle v, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$

On veut définir la transformée de Bargmann de la distribution v . Soit $L(f)$ la fonction définie par :

$$L(f) = \langle v, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}},$$

où $f = T_{\phi_1} \phi \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$ d'après la proposition 6.2.10. Montrons que $L(f)$ est une forme linéaire continue sur $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et soient $f, g \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$, alors on a :

$$\begin{aligned} L(\lambda f + g) &= \langle v, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \quad \text{où } \lambda f + g = T_{\phi_1} \phi, \\ &= \langle v, T_{\phi_1}^* (\lambda f + g) \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}, \\ &= \langle v, \lambda T_{\phi_1}^* (f) + T_{\phi_1}^* (g) \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}, \\ &= \lambda \langle v, T_{\phi_1}^* f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} + \langle v, T_{\phi_1}^* g \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \quad \text{car } v \text{ est linéaire sur } \mathcal{S}(\mathbb{R}), \\ &= \lambda L(f) + L(g). \end{aligned}$$

Soit $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$, alors on a :

$$\begin{aligned} |L(f)| &= |\langle v, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}| \quad \text{où } f = T_{\phi_1} \phi, \\ &\leq C \|\phi\|_k \quad \text{car } v \text{ est continue sur } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ et où } k \in \mathbb{N}, \\ &\leq C \|T_{\phi_1}^* f\|_k, \\ &\leq a_{k, \tau}^h |f|_\mu \quad \text{d'après la proposition 6.2.12 et où } \mu = 1 + k + \tau \text{ avec } \tau > 0. \end{aligned}$$

Par conséquent $L \in \mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ (inversement, si on considère $L \in \mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ et qu'on pose :

$$v(\phi) = \langle v, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = L(f) \quad \text{où } f = T_{\phi_1} \phi,$$

alors v est bien une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). Ainsi d'après la proposition 6.2.16, on sait qu'il existe une fonction $g \in \mathfrak{S}^{-l}(\mathbb{C})$ telle que :

$$L(f) = \langle g, f \rangle.$$

Autrement dit pour tout $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle v, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle g, T_{\phi_1} \phi \rangle.$$

Cette égalité permet d'établir une bijection linéaire entre les espaces $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$. On pose :

$$g = T_{\phi_1} v \quad \text{et} \quad v = T_{\phi_1}^* g.$$

D'où le résultat. □

Pour finir, nous établissons une proposition qui permet d'écrire de manière plus simple l'action de l'opérateur T_{ϕ_1} sur l'espace des distributions. Cette dernière nous permettra de simplifier un peu les démonstrations qui vont suivre.

Proposition 6.2.19 (Réécriture de l'action de T_{ϕ_1} sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$). *Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Alors on peut écrire $T_{\phi_1} u$ sous la forme suivante :*

$$T_{\phi_1} u(z) = \left\langle u, c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} e^{-(1/2\hbar)(z-\cdot)^2} \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$

Démonstration. Pour plus de détails sur la démonstration de cette proposition, voir le cours en ligne [HS15].

Comme la fonction $f(x) := e^{-(1/2\hbar)(z-x)^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors pour tout $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ le crochet :

$$\left\langle u, c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} e^{-(1/2\hbar)(z-\cdot)^2} \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}},$$

est bien défini. De plus, si on considère $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors :

$$\left\langle u, c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} e^{-(1/2\hbar)(z-\cdot)^2} \right\rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} = T_{\phi_1} u(z).$$

Par conséquent, comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et que l'opérateur T_{ϕ_1} est étendu de manière continu à l'espace des distributions $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a bien pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$T_{\phi_1} u(z) = \left\langle u, c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} e^{-(1/2\hbar)(z-\cdot)^2} \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$

□

6.2.1.4 Espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$ et espace de distributions $\mathcal{L}_k$

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'image de l'espace de distributions $\mathcal{L}_k$ par la transformée de Bargmann et nous allons montrer que cette image est l'espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$ que nous avons étudié dans le chapitre 5. Rappelons les définitions des deux espaces auxquels nous nous intéressons. Soient $u, v \in U(1)$:

$$\mathcal{L}_k = \left\{ \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}); \quad \tau_{2\pi}\psi = u^k\psi, \quad \tau_1\mathcal{F}_h(\psi) = v^{-k}\mathcal{F}_h(\psi) \right\},$$

$$\mathcal{H}_k = \left\{ g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{holomorphe}; \quad \begin{cases} g(p+2\pi, q) = u^k g(p, q), \\ g(p, q+1) = v^k e^{-i(p+iq)k+k/2} g(p, q) \end{cases} \right\}.$$

Un premier résultat fondamental pour la suite est donné dans la proposition qui suit.

Proposition 6.2.20 (La transformée de Bargmann envoie $\mathcal{L}_k$ sur $\mathcal{H}_k$). *Soit $k \geq 1$. Soit T_{ϕ_1} la transformée de Bargmann. Alors $T_{\phi_1} : \mathcal{L}_k \longrightarrow \mathcal{H}_k$.*

Démonstration. Bien que cette proposition ne soit pas difficile à démontrer, nous en donnons tout de même une preuve car c'est une propriété qui n'avait pas été étudiée auparavant dans la littérature sur le sujet à notre connaissance.

D'après la proposition 6.2.18, on sait que : $T_{\phi_1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{S}'(\mathbb{C})$. Ensuite, comme $\mathcal{L}_k \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, alors l'opérateur T_{ϕ_1} est bien défini sur cet espace. De plus, d'après la proposition 6.1.10, l'espace de distributions $\mathcal{L}_k$ admet une base $(\epsilon_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ et d'après la proposition 5.3.4, l'espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$ admet également une base $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$. Montrons que l'opérateur T_{ϕ_1} envoie la base $(\epsilon_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ sur la base $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$. Soit $l \in \{0, \dots, k-1\}$. Déterminons $T_{\phi_1}\epsilon_l$ en faisant usage de la proposition 6.2.19 pour simplifier les calculs. Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $u = e^{ic}$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} T_{\phi_1}\epsilon_l(z) &= \left\langle \epsilon_l, c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} e^{-(1/2\hbar)(z-\cdot)^2} \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}, \\ &= \left\langle u^{k \cdot / (2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} \right)^j e^{i(l+jk) \cdot}, c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} e^{-(1/2\hbar)(z-\cdot)^2} \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}, \\ &= c_{\phi_1} k^{3/4} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} \right)^j \left\langle u^{k \cdot / (2\pi)} e^{i(l+jk) \cdot}, e^{-(k/2)(z-\cdot)^2} \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \quad \text{car } k = \frac{1}{\hbar}, \\ &= c_{\phi_1} k^{3/4} u^{kz/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} \right)^j e^{i(l+jk)z} \left\langle u^{k \cdot / (2\pi)} e^{i(l+jk) \cdot}, e^{-(k/2)(\cdot)^2} \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}, \\ &= c_{\phi_1} k^{3/4} u^{kz/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} \right)^j e^{i(l+jk)z} \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \exp \left(-\frac{1}{2k} \left(\frac{ck}{2\pi} + l + jk \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Or :

$$\left(\frac{ck}{2\pi} + l + jk \right)^2 = \left(\frac{ck}{2\pi} + l \right)^2 + j^2 k^2 + 2jk \left(\frac{ck}{2\pi} + l \right) = \left(\frac{ck}{2\pi} + l \right)^2 + j^2 k^2 + 2jkl + \frac{jck^2}{\pi}.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2k} \left(\frac{ck}{2\pi} + l + jk \right)^2 = \frac{1}{2k} \left(\frac{ck}{2\pi} + l \right)^2 + \frac{j^2 k}{2} + jl + \frac{jck}{2\pi}.$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} T_{\phi_1} e_l(z) &= c_{\phi_1} k^{3/4} u^{kz/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} \right)^j e^{i(l+jk)z} \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \exp \left(-\frac{1}{2k} \left(\frac{ck}{2\pi} + l + jk \right)^2 \right), \\ &= c_{\phi_1} k^{3/4} \sqrt{\frac{2\pi}{k}} u^{kz/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} \right)^j e^{i(l+jk)z} \exp \left(-\left(\frac{1}{2k} \left(\frac{ck}{2\pi} + l \right)^2 + \frac{j^2 k}{2} + jl + \frac{jck}{2\pi} \right) \right), \\ &= c_k^l u^{kz/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} \right)^j e^{i(l+jk)z} e^{-j^2 k/2 - lj - ckj/(2\pi)}, \\ &= c_k^l u^{kz/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} \right)^j e^{i(l+jk)z} \left(e^{-jk/2 - l - ck/(2\pi)} \right)^j, \\ &= c_k^l u^{kz/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-jk/2 - l} u^{ik/(2\pi)} \right)^j e^{i(l+jk)z}, \\ &= c_k^l e_l(z), \end{aligned}$$

où le coefficient c_k^l est donné par l'égalité suivante :

$$c_k^l = c_{\phi_1} \sqrt{2\pi} k^{1/4} \exp \left(-\frac{1}{2k} \left(\frac{ck}{2\pi} + l \right)^2 \right).$$

Par conséquent, l'opérateur T_{ϕ_1} envoie la base $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ de l'espace de distributions $\mathcal{L}_k$ sur la base $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ de l'espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$. $\square$

Nous allons maintenant montrer que l'adjoint de la transformée de Bargmann envoie l'espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$ sur l'espace de distributions $\mathcal{L}_k$.

Proposition 6.2.21 (L'adjoint de la transformée de Bargmann envoie $\mathcal{H}_k$ sur $\mathcal{L}_k$). *Soit $k \geq 1$. Soit $T_{\phi_1}^*$ l'adjoint de la transformée de Bargmann T_{ϕ_1} . Alors $T_{\phi_1}^* : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{L}_k$.*

Démonstration. Nous donnons également la démonstration de cette proposition car elle est fondamentale pour la suite.

Montrons que $T_{\phi_1}^*$ envoie l'espace $\mathcal{H}_k$ sur l'espace $\mathcal{L}_k$. Pour ce faire, nous allons calculer $T_{\phi_1}^* e_l$ où $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ est la base de l'espace $\mathcal{H}_k$. Comme $\mathcal{H}_k \subset \mathfrak{S}^0(\mathbb{C})$ et comme la fonction $z \mapsto e^{-(1/2h)(z-x)^2} \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$, alors pour $v \in \mathcal{H}_k$, on a (d'après la remarque 6.2.15) :

$$\left\langle c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} e^{-(1/2h)(\cdot-x)^2}, v \right\rangle = c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{C}} e^{-1/(2h)(\bar{z}-x)^2} e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} e_l(z) L(dz) < +\infty.$$

Soit $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $u = e^{ic}$, alors on a :

$$\begin{aligned}
 & T_{\phi_1}^* e_l(x) \\
 &= c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{C}} e^{-1/(2\hbar)(\bar{z}-x)^2} e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} e_l(z) L(dz), \\
 &= c_{\phi_1} k^{3/4} \int_{\mathbb{C}} e^{-(k/2)(\bar{z}-x)^2} e^{-k(\Im z)^2} e_l(z) L(dz) \quad \text{car } \Phi_1(z) = \frac{1}{2}(\Im z)^2 \text{ et } k = \frac{1}{\hbar}, \\
 &= c_{\phi_1} k^{3/4} \int_{\mathbb{C}} e^{-(k/2)(\bar{z}-x)^2} e^{-k(\Im z)^2} u^{kz/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-l-jk/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j e^{i(l+jk)z} L(dz), \\
 &= c_{\phi_1} k^{3/4} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-l-jk/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j \int_{\mathbb{C}} e^{-(k/2)(\bar{z})^2} e^{-k(\Im(z+x))^2} u^{k(z+x)/(2\pi)} e^{i(l+jk)(z+x)} L(dz), \\
 &= c_{\phi_1} k^{3/4} u^{kx/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-l-jk/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j e^{i(l+jk)x} \int_{\mathbb{C}} e^{-(k/2)(\bar{z})^2} e^{-k(\Im z)^2} u^{kz/(2\pi)} e^{i(l+jk)z} L(dz), \\
 &= c_{\phi_1} k^{3/4} u^{kx/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-l-jk/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j e^{i(l+jk)x} \int_{\mathbb{C}} e^{-(k/2)(\bar{z})^2} e^{-k(\Im z)^2} e^{iz(l+jk+ck/(2\pi))} L(dz).
 \end{aligned}$$

On doit donc calculer l'intégrale suivante (après le changement de variable $z = p + iq$) :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(k/2)(p-iq)^2} e^{-kq^2} e^{i(p+iq)(l+jk+ck/(2\pi))} dp \wedge dq \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(k/2)p^2} e^{-(k/2)q^2} e^{ikpq} e^{ip(l+jk+ck/(2\pi))} e^{-q(l+jk+ck/(2\pi))} dp \wedge dq.
 \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}} e^{-(k/2)p^2} e^{ikpq} e^{ip(l+jk+ck/(2\pi))} dp \\
 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-(k/2)p^2} e^{ip(l+jk+ck/(2\pi)+kq)} dp, \\
 &= \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \exp \left(-\frac{1}{2k} \left(l + jk + \frac{ck}{2\pi} + kq \right)^2 \right), \\
 &= \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \exp \left(-\frac{1}{2k} \left(l + jk + \frac{ck}{2\pi} \right)^2 - \frac{kq^2}{2} - q \left(l + jk + \frac{ck}{2\pi} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-kp^2/2} e^{-kq^2/2} e^{ikpq} e^{ip(l+jk+ck/(2\pi))} e^{-q(l+jk+ck/(2\pi))} dp \wedge dq, \\
 &= \sqrt{\frac{2\pi}{k}} e^{-1/(2k)(l+jk+ck/(2\pi))^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-kq^2/2} e^{-q(l+jk+ck/(2\pi))} e^{-kq^2/2} e^{-q(l+jk+ck/(2\pi))} dq, \\
 &= \sqrt{\frac{2\pi}{k}} e^{-1/(2k)(l+jk+ck/(2\pi))^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-kq^2} e^{-2q(l+jk+ck/(2\pi))} dq, \\
 &= \sqrt{\frac{2\pi}{k}} e^{-1/(2k)(l+jk+ck/(2\pi))^2} e^{k(l/k+j+c/(2\pi))^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-k(q+l/k+j+c/(2\pi))^2} dq, \\
 &= \sqrt{2\frac{\pi}{k}} e^{1/(2k)(l+jk+ck/(2\pi))^2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
 & T_{\phi_1}^* e_l(x) \\
 &= c_{\phi_1} k^{3/4} \sqrt{2\frac{\pi}{k}} u^{kx/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-l-jk/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j e^{i(l+jk)x} e^{1/(2k)(l+jk+ck/(2\pi))^2}, \\
 &= c_{\phi_1} k^{-1/4} \sqrt{2\pi} e^{1/(2k)(l+ck/(2\pi))^2} u^{kx/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-l-jk/2} u^{ik/(2\pi)} \right)^j e^{i(l+jk)x} e^{1/(2k)(j^2 k^2 + 2jk(l+ck/(2\pi)))}, \\
 &= c_{\phi_1} k^{-1/4} \sqrt{2\pi} e^{1/(2k)(l+ck/(2\pi))^2} u^{kx/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-l-jk/2} u^{ik/(2\pi)} e^{jk/2} e^l e^{ck/(2\pi)} \right)^j e^{i(l+jk)x}, \\
 &= c_{\phi_1} k^{-1/4} \sqrt{2\pi} e^{1/(2k)(l+ck/(2\pi))^2} u^{kx/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} e^{-ck/(2\pi)} e^{ck/(2\pi)} \right)^j e^{i(l+jk)x}, \\
 &= c_{\phi_1} k^{-1/4} \sqrt{2\pi} e^{1/(2k)(l+ck/(2\pi))^2} u^{kx/(2\pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v^{-k} \right)^j e^{i(l+jk)x}, \\
 &= c_{\phi_1} k^{-1/4} \sqrt{2\pi} e^{1/(2k)(l+ck/(2\pi))^2} \epsilon_l(x), \\
 &= \tilde{c}_k^l \epsilon_l(x),
 \end{aligned}$$

$$\text{où } \tilde{c}_k^l = c_{\phi_1} k^{-1/4} \sqrt{2\pi} e^{1/(2k)(l+ck/(2\pi))^2}.$$

Ainsi l'opérateur $T_{\phi_1}^*$ envoie bien l'espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$ sur l'espace de distributions $\mathcal{L}_k$. $\square$

Pour finir, on peut montrer la proposition suivante concernant le caractère unitaire de la transformée de Bargmann envoyant l'espace de distributions $\mathcal{L}_k$ sur l'espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$.

Proposition 6.2.22 (La transformée de Bargmann est unitaire). *Soit T_{ϕ_1} la transformée de Bargmann et $T_{\phi_1}^*$ son adjoint. Alors :*

1. $T_{\phi_1}^* T_{\phi_1} = \text{id sur } \mathcal{L}_k$;
2. $T_{\phi_1} T_{\phi_1}^* = \text{id sur } \mathcal{H}_k$.

Démonstration. D'après la démonstration de la proposition 6.2.20, on sait que pour tout $l \in \{0, \dots, k-1\}$, on a :

$$T_{\phi_1} e_l = c_k^l e_l \quad \text{avec } c_k^l = c_{\phi_1} \sqrt{2\pi} k^{1/4} e^{-1/(2k)(ck/(2\pi)+l)^2}.$$

Ainsi, on peut définir l'opérateur T_{ϕ_1} par sa matrice dans la base $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$, si on note $\mathcal{C}$ cette matrice, on a :

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} c_k^0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & c_k^{k-1} \end{pmatrix}.$$

De même d'après la démonstration de la proposition 6.2.21, on sait que pour tout $l \in \{0, \dots, k-1\}$, on a :

$$T_{\phi_1}^* e_l = \tilde{c}_k^l e_l \quad \text{avec } \tilde{c}_k^l = c_{\phi_1} k^{-1/4} \sqrt{2\pi} e^{1/(2k)(l+ck/(2\pi))^2}.$$

Ainsi, on peut définir l'opérateur $T_{\phi_1}^*$ par sa matrice dans la base $(e_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$, si on note $\mathcal{C}^*$ cette matrice, on a :

$$\mathcal{C}^* = \begin{pmatrix} \tilde{c}_k^0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \tilde{c}_k^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Désormais pour montrer que l'opérateur T_{ϕ_1} est unitaire, il suffit de montrer que $\mathcal{C}\mathcal{C}^* = \mathcal{C}^*\mathcal{C} = I_k$. Pour ce faire, on a besoin de déterminer le produit suivant pour $k \geq 1$ et $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$:

$$\begin{aligned} c_k^l \tilde{c}_k^l &= c_{\phi_1} \sqrt{2\pi} k^{1/4} e^{-1/(2k)(ck/(2\pi)+l)^2} c_{\phi_1} k^{-1/4} \sqrt{2\pi} e^{1/(2k)(l+ck/(2\pi))^2}, \\ &= c_{\phi_1}^2 2\pi^{3/2}. \end{aligned}$$

Or d'après la définition 2.2.10, on a :

$$c_{\phi_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{3/4}}.$$

Par conséquent, on a, pour $k \geq 1$ et $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$:

$$c_k^l \tilde{c}_k^l = c_{\phi_1}^2 2\pi^{3/2} = \frac{1}{2\pi^{3/2}} 2\pi^{3/2} = 1 = \tilde{c}_k^l c_k^l.$$

Donc :

$$\mathcal{C}\mathcal{C}^* = \mathcal{C}^*\mathcal{C} = I_k.$$

D'où le résultat. $\square$

6.2.2 Opérateurs pseudo-différentiels agissant sur l'espace $\mathcal{H}_k$

Nous allons maintenant définir ce que nous allons appeler la quantification de Weyl complexe du tore. Comme dans le cas de la quantification de Weyl classique du tore,

nous pouvons obtenir deux formulations pour la quantification complexe, une sous forme intégrale et l'autre sous forme de sommes. Avant d'introduire la définition de quantification complexe, nous allons montrer un analogue du théorème d'Egorov qui va mettre en exergue la notion que nous voulons définir. Mais auparavant, nous allons nous attarder sur la classe de symboles que nous voulons étudier, l'introduction de cette classe étant motivée par la proposition 6.2.20. On rappelle que Λ_{Φ_1} désigne l'ensemble suivant :

$$\Lambda_{\Phi_1} = \left\{ \left(z, \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}(z) \right), z \in \mathbb{C} \right\} = \{(z, -\Im(z)), z \in \mathbb{C}\}.$$

Et, on rappelle la définition de la transformation canonique κ_{ϕ_1} (voir définition 2.2.10) :

$$\begin{aligned} \kappa_{\phi_1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \Lambda_{\Phi_1}, \\ (x, y) &\longmapsto (z, w) := (x - iy, y). \end{aligned}$$

Proposition 6.2.23 (Symboles sur Λ_{Φ_1}). *Soit $a_k \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ et telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :*

$$a_k(x + 2\pi, y) = a_k(x, y) = a_k(x, y + 1).$$

Soit b_k la fonction définie par la relation suivante pour tout $(z, w) \in \Lambda_{\Phi_1}$:

$$b_k(z, w) := a_k \circ \kappa_{\phi_1}^{-1}(z, w).$$

Alors $b_k \in C^\infty(\Lambda_{\Phi_1})$ est une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ et pour $(z, w) \in \Lambda_{\Phi_1}$, on a :

$$b_k(z + 2\pi, w) = b_k(z, w) = b_k(z + i, w - 1).$$

De plus, en identifiant l'ensemble Λ_{Φ_1} avec le plan complexe $\mathbb{C}$, on peut réécrire la fonction b_k sous la forme d'une série convergente pour $z \in \mathbb{C} \simeq \Lambda_{\Phi_1}$:

$$b_k(z) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} b_{m,n}^k e^{in\Re(z)} e^{2i\pi m\Im(z)},$$

où la suite de coefficients $(b_{m,n}^k)_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ est définie de la façon suivante :

$$b_{m,n}^k = a_{m,n}^k \quad \text{où pour } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad a_k(x, y) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m,n}^k e^{inx} e^{-2i\pi my}.$$

Démonstration. On rappelle que $\kappa_{\phi_1}(\mathbb{R}^2) = \Lambda_{\Phi_1} = \{(z, -\Im(z)), z \in \mathbb{C}\}$. Ainsi, pour $(z, w) \in \Lambda_{\Phi_1}$, on a :

$$b_k(z, w) := a_k \circ \kappa_{\phi_1}^{-1}(z, w) = a_k(z + iw, w) = a_k(\Re(z), -\Im(z)).$$

Donc pour $(z, w) \in \Lambda_{\Phi_1}$, on a :

$$\begin{aligned}
 b_k(z + 2\pi, w) &= a_k(\Re(z + 2\pi), -\Im(z + 2\pi)), \\
 &= a_k(\Re(z) + 2\pi, -\Im(z)), \\
 &= a_k(\Re(z), -\Im(z)) \quad \text{car } a_k(x + 2\pi, y) = a_k(x, y), \\
 &= b_k(z, w).
 \end{aligned}$$

Et pour $(z, w) \in \Lambda_{\Phi_1}$, on a également :

$$\begin{aligned}
 b_k(z + i, w - 1) &= a_k(\Re(z + i), -\Im(z + i)), \\
 &= a_k(\Re(z), -\Im(z) - 1), \\
 &= a_k(\Re(z), -\Im(z)) \quad \text{car } a_k(x, y + 1) = a_k(x, y), \\
 &= b_k(z, w).
 \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que $b_k \in \mathcal{C}^\infty(\Lambda_{\Phi_1})$ et que pour $(z, w) \in \Lambda_{\Phi_1}$, b_k vérifie les conditions de périodicités voulues. De plus, considérons l'écriture sous forme de série de Fourier de la fonction a_k donnée par la proposition 6.1.15, *i.e.* pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$a_k(x, y) = \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m, n}^k e^{ixn} e^{-2i\pi ym}.$$

Alors, pour $(z, w) \in \Lambda_{\Phi_1}$, on a, en composant par la transformation canonique κ_{ϕ_1} :

$$\begin{aligned}
 b_k(z, w) &= a_k \circ \kappa_{\phi_1}^{-1}(z, w), \\
 &= \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m, n}^k e^{in(z+iw)} e^{-2i\pi mw}, \\
 &= \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m, n}^k e^{in(z-i\Im(z))} e^{2i\pi m\Im(z)}, \\
 &= \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m, n}^k e^{in\Re(z)} e^{2i\pi m\Im(z)}.
 \end{aligned}$$

□

Nous allons maintenant montrer un analogue du théorème d'Egorov afin de faire le lien entre un opérateur pseudo-différentiel agissant sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et un opérateur pseudo-différentiel agissant sur l'espace $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$. Ce lien va se faire à l'aide de la transformée de Bargmann comme on pouvait s'y attendre après avoir démontré la proposition 6.2.10.

Proposition 6.2.24 (Opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et sur $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$).

Soit $a_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances

de $1/k$ et telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$a_k(x + 2\pi, y) = a_k(x, y) = a_k(x, y + 1).$$

Alors, on a :

$$T_{\phi_1} \text{Op}_k^w(a_k) = \text{Op}_{\Phi_1, k}^w(a_k \circ \kappa_{\phi_1}^{-1}) T_{\phi_1} \quad \text{sur l'espace } \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

où l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_1, k}^w(a_k \circ \kappa_{\phi_1}^{-1})$ est défini par la formule suivante, pour $u \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$ et $z \in \mathbb{C}$:

$$\text{Op}_{\Phi_1, k}^w(a_k \circ \kappa_{\phi_1}^{-1})u(z) = \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m, n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} e^{inz} u\left(z - \frac{2\pi m}{k} + \frac{in}{k}\right),$$

où $(a_{m, n}^k)_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2}$ est la suite de coefficients définie dans la proposition 6.1.15.

Démonstration. Montrons que $T_{\phi_1} \text{Op}_k^w(a_k) = \text{Op}_{\Phi_1, k}^w(a_k \circ \kappa_{\phi_1}^{-1}) T_{\phi_1}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. D'après la démonstration de la proposition 6.1.17, on sait que $\text{Op}_k^w(a_k) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors on a :

$$\begin{aligned} & T_{\phi_1}(\text{Op}_k^w(a_k)\phi)(z) \\ &= c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-(1/2\hbar)(z-x)^2} (\text{Op}_k^w(a_k)\phi)(x) dx, \\ &= c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-(1/2\hbar)(z-x)^2} \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m, n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{ixn} \phi\left(x - \frac{2\pi m}{k}\right) dx, \\ &= c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{R}} \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m, n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{-(1/2\hbar)(z-x)^2} e^{ixn} \phi\left(x - \frac{2\pi m}{k}\right) dx, \\ &= c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{R}} \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m, n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{izn} e^{-(1/2\hbar)(z-x)^2} e^{-i(z-x)n} \phi\left(x - \frac{2\pi m}{k}\right) dx, \\ &= c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{R}} \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m, n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{izn} e^{-(1/2\hbar)(z-x+in\hbar)^2} e^{-n^2\hbar/2} \phi\left(x - \frac{2\pi m}{k}\right) dx, \\ &= c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{R}} \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m, n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{izn} e^{-(1/2\hbar)(z-x+in\hbar-2\pi m\hbar)^2} e^{-n^2\hbar/2} \phi(x) dx, \\ &= \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m, n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{-n^2\hbar/2} e^{izn} c_{\phi_1} \hbar^{-3/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-(1/2\hbar)(z-x+in\hbar-2\pi m\hbar)^2} \phi(x) dx, \\ &= \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m, n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} e^{inz} (T_{\phi_1}\phi)\left(z - \frac{2\pi m}{k} + \frac{in}{k}\right) \quad \text{car } \hbar = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que, pour $u \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$, on peut poser :

$$\text{Op}_{\Phi_1, k}^w(a_k \circ \kappa_{\phi_1}^{-1})u(z) = \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m, n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} e^{inz} u\left(z - \frac{2\pi m}{k} + \frac{in}{k}\right).$$

□

Cette proposition nous pousse donc à introduire une nouvelle définition, celle de quantification de Weyl complexe du tore, qui est l'analogue de la quantification de Weyl complexe de $\mathbb{R}^2$. À notre connaissance, cette définition consitute une nouvelle notion de la littérature sur le sujet.

Définition 6.2.25 (Quantification de Weyl complexe du tore). *Soit $b_k \in \mathcal{C}^\infty(\Lambda_{\Phi_1})$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ et telle que pour tout $(z, w) \in \Lambda_{\Phi_1}$:*

$$b_k(z + 2\pi, w) = b_k(z, w) = b_k(z + i, w - 1).$$

On définit la quantification de Weyl complexe du symbole b_k , notée $\text{Op}_{\Phi_1, k}^w(b_k)$, par la formule suivante, pour $u \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$ et $z \in \mathbb{C}$:

$$\text{Op}_{\Phi_1, k}^w(b_k)u(z) = \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} b_{m, n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} e^{inz} u\left(z - \frac{2\pi m}{k} + \frac{in}{k}\right),$$

où la suite de coefficients $(b_{m, n}^k)_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2}$ est donnée par la relation suivante pour tout $(z, w) \in \Lambda_{\Phi_1}$:

$$b_k(z, w) = \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} b_{m, n}^k e^{in(z+iw)} e^{-2i\pi mw}.$$

A priori l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_1, k}^w(b_k)$, défini ci-dessus, agit sur l'espace $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$. Cependant nous allons maintenant montrer que la quantification de Weyl complexe du tore donne un opérateur pseudo-différentiel agissant sur l'espace $\mathcal{H}_k$ (comme on peut s'y attendre puisqu'on a déjà montré que la transformée de Bargmann envoie l'espace $\mathcal{L}_k$ sur l'espace $\mathcal{H}_k$ dans la proposition 6.2.20).

Proposition 6.2.26 (Opérateur pseudo-différentiel agissant sur l'espace $\mathcal{H}_k$). *Soit $b_k \in \mathcal{C}^\infty(\Lambda_{\Phi_1})$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ et telle que pour tout $(z, w) \in \Lambda_{\Phi_1}$, on a :*

$$b_k(z + 2\pi, w) = b_k(z, w) = b_k(z + i, w - 1).$$

Alors $\text{Op}_{\Phi_1, k}^w(b_k)$ s'étend en un opérateur de $\mathcal{H}_k$ dans $\mathcal{H}_k$.

Démonstration.

Étape 1 : $\text{Op}_{\Phi_1, k}^w(b_k) : \mathfrak{S}'(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{S}'(\mathbb{C})$. D'après la proposition 6.2.24, on sait que $\text{Op}_{\Phi_1, k}^w(b_k) : \mathfrak{S}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{C})$. Montrons tout d'abord que $\text{Op}_{\Phi_1, k}^w(b_k)$ définit naturellement

un opérateur de $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$. Soient $u, v \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$, alors on a :

$$\begin{aligned}
 & \langle \text{Op}_{\Phi_1, k}^w(b_k)u, v \rangle_{\mathfrak{S}, \mathfrak{S}} \\
 &= \int_{\mathbb{C}} \overline{\text{Op}_{\Phi_1, k}^w(b_k)u(z)} v(z) e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} L(dz), \\
 &= \int_{\mathbb{C}} \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} \overline{b_{m, n}^k} e^{i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} e^{-in\bar{z}} u\left(z - \frac{2\pi m}{k} + \frac{in}{k}\right) v(z) e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} L(dz), \\
 &= \int_{\mathbb{C}} \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} \overline{b_{m, n}^k} e^{i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} e^{-in(\overline{z+2\pi m/k})} u\left(z + \frac{in}{k}\right) v\left(z + \frac{2\pi m}{k}\right) e^{-2\Phi_1(z+2\pi m/k)/\hbar} L(dz), \\
 &= \int_{\mathbb{C}} \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} \overline{b_{m, n}^k} e^{-i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} e^{-in\bar{z}} u\left(z + \frac{in}{k}\right) v\left(z + \frac{2\pi m}{k}\right) e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} L(dz), \\
 &= \int_{\mathbb{C}} \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} \overline{b_{m, n}^k} e^{-i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} e^{-in(\overline{z-in/k})} u(z) v\left(z + \frac{2\pi m}{k} - \frac{in}{k}\right) e^{-2\Phi_1(z-in/k)/\hbar} L(dz), \\
 &= \int_{\mathbb{C}} \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} \overline{b_{m, n}^k} e^{-i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} e^{-in\bar{z}} e^{n^2/k} \overline{u(z)} v\left(z + \frac{2\pi m}{k} - \frac{in}{k}\right) e^{-(\Im(z-in/k))^2/\hbar} L(dz), \\
 &= \int_{\mathbb{C}} \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} \overline{b_{m, n}^k} e^{-i\pi mn/k} e^{n^2/2k} e^{-in\bar{z}} \overline{u(z)} v\left(z + \frac{2\pi m}{k} - \frac{in}{k}\right) e^{(-1/\hbar)(\Im(z)-n/k)^2} L(dz), \\
 &= \int_{\mathbb{C}} \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} \overline{b_{m, n}^k} e^{-i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} e^{-in(\Re(z)-i\Im(z))} e^{2n\Im(z)} \overline{u(z)} v\left(z + \frac{2\pi m}{k} - \frac{in}{k}\right) e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} L(dz), \\
 &= \int_{\mathbb{C}} \overline{u(z)} \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} \overline{b_{m, n}^k} e^{-i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} e^{-inz} v\left(z + \frac{2\pi m}{k} - \frac{in}{k}\right) e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} L(dz), \\
 &= \int_{\mathbb{C}} \overline{u(z)} \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} \overline{b_{-m, n}^k} e^{i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} e^{-inz} v\left(z - \frac{2\pi m}{k} - \frac{in}{k}\right) e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} L(dz) \quad \text{via } m \mapsto -m, \\
 &= \int_{\mathbb{C}} \overline{u(z)} \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} \overline{b_{-m, -n}^k} e^{-i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} e^{inz} v\left(z - \frac{2\pi m}{k} + \frac{in}{k}\right) e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} L(dz) \quad \text{via } n \mapsto -n, \\
 &= \int_{\mathbb{C}} \overline{u(z)} \text{Op}_{\Phi_1, k}^w(\tilde{b}_k)v(z) e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} L(dz), \\
 &= \langle u, \text{Op}_{\Phi_1, k}^w(\tilde{b}_k)v \rangle_{\mathfrak{S}, \mathfrak{S}},
 \end{aligned}$$

où la fonction $\tilde{b}_k \in \mathcal{C}^\infty(\Lambda_{\Phi_1})$ est définie pour $(z, w) \in \Lambda_{\Phi_1}$, par :

$$\begin{aligned}
 \tilde{b}_k(z, w) &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \overline{b_{-m,-n}^k} e^{in(z+iw)} e^{-2i\pi mw}, \\
 &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \overline{b_{m,-n}^k} e^{in(z+iw)} e^{2i\pi mw} \quad \text{via } m \mapsto -m, \\
 &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \overline{b_{m,n}^k} e^{-in(z+iw)} e^{2i\pi mw} \quad \text{via } n \mapsto -n, \\
 &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \overline{b_{m,n}^k} e^{-in(z-i\Im(z))} e^{-2i\pi m\Im(z)} \quad \text{car } (z, w) \in \Lambda_{\Phi_1}, \text{ donc } w = -\Im(z), \\
 &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \overline{b_{m,n}^k} e^{-in\Re(z)} e^{-2i\pi m\Im(z)}, \\
 &= \overline{b_k(z, w)}.
 \end{aligned}$$

Comme $v \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$ et $\tilde{b}_k \in S(\Lambda_{\Phi_1})$, alors $\text{Op}_{\Phi_1,k}^w(\tilde{b}_k)v \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$ et ainsi on peut définir la quantification de Weyl complexe $\text{Op}_{\Phi_1,k}^w(b_k)$ sur $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ par la formule suivante pour $u \in \mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ et $v \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$:

$$\langle \text{Op}_{\Phi_1,k}^w(b_k)u, v \rangle_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}} := \langle u, \text{Op}_{\Phi_1,k}^w(\tilde{b}_k)v \rangle_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}}.$$

Étape 2 : $\text{Op}_{\Phi_1,k}^w(b_k) : \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_k$. Comme $\mathcal{H}_k \subset \mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ (d'après la remarque 6.2.17), alors pour tout $u \in \mathcal{H}_k$, on a bien $\text{Op}_{\Phi_1,k}^w(b_k)u \in \text{Hol}(\mathbb{C})$.

Soient $u \in \mathcal{H}_k$ et $z \in \mathbb{C}$, alors on a :

$$\begin{aligned}
 &\text{Op}_{\Phi_1,k}^w(b_k)u(z + 2\pi) \\
 &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} b_{m,n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} e^{in(z+2\pi)} u\left(z + 2\pi - \frac{2\pi m}{k} + \frac{in}{k}\right), \\
 &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} b_{m,n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} e^{inz} e^{in2\pi} u^k u\left(z - \frac{2\pi m}{k} + \frac{in}{k}\right) \quad \text{car } u \in \mathcal{H}_k, \\
 &= u^k \text{Op}_{\Phi_1,k}^w(b_k)u(z).
 \end{aligned}$$

Et pour $u \in \mathcal{H}_k$ et $z \in \mathbb{C}$, on a aussi :

$$\begin{aligned}
 & \text{Op}_{\Phi_1, k}^w(b_k)u(z+i) \\
 &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} b_{m,n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} e^{in(z+i)} u\left(z+i - \frac{2\pi m}{k} + \frac{in}{k}\right), \\
 &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} b_{m,n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} e^{inz} e^{-n} v^k e^{-ik(z-2\pi m/k+in/k)+k/2} u\left(z - \frac{2\pi m}{k} + \frac{in}{k}\right) \quad \text{car } u \in \mathcal{H}_k, \\
 &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} b_{m,n}^k e^{-i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} e^{inz} e^{-n} v^k e^{-ikz+k/2} e^{i2\pi m} e^n u\left(z - \frac{2\pi m}{k} + \frac{in}{k}\right), \\
 &= v^k e^{-ikz+k/2} \text{Op}_{\Phi_1, k}^w(b_k)u(z).
 \end{aligned}$$

Donc $\text{Op}_{\Phi_1, k}^w(b_k) : \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_k$. □

Nous allons maintenant définir la quantification de Weyl complexe du tore sous forme intégrale. Pour ce faire, on rappelle d'abord la définition de la quantification de Weyl complexe de $\mathbb{R}^2$. Comme lorsqu'on a défini de deux façons différentes la quantification de Weyl classique du tore, on va jongler entre le paramètre semi-classique $\hbar$ et l'inverse de ce paramètre k .

Définition 6.2.27 (Quantification de Weyl complexe de $\mathbb{R}^2$). *Soit $b_{\hbar} \in S(\Lambda_{\Phi_1})$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$. On définit la quantification de Weyl complexe du symbole $b_{\hbar}$, notée $\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar})$, par la formule suivante, pour $u \in H_{\hbar}(\mathbb{C}, \Phi_1)$:*

$$\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar})u(z) = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(z)} e^{(i/\hbar)(z-w)\zeta} b_{\hbar}\left(\frac{z+w}{2}, \zeta\right) u(w) dw d\zeta,$$

où on intègre sur le contour :

$$\Gamma(z) = \left\{ (w, \zeta) \in \mathbb{C}^2; \zeta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \left(\frac{z+w}{2} \right) = -\Im \left(\frac{z+w}{2} \right) \right\}.$$

Nous allons maintenant montrer qu'on peut encore donner un sens à cette formulation intégrale lorsqu'on considère un symbole $b_{\hbar}$ admettant des conditions de périodicités sur l'ensemble Λ_{Φ_1} .

Proposition 6.2.28 (Opérateur pseudo-différentiel agissant sur l'espace $\mathcal{H}_k$). *Soit $b_{\hbar} \in \mathcal{C}^{\infty}(\Lambda_{\Phi_1})$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$ et telle que pour $(z, w) \in \Lambda_{\Phi_1}$, on a :*

$$b_{\hbar}(z + 2\pi, w) = b_{\hbar}(z, w) = b_{\hbar}(z + i, w - 1).$$

Alors, $\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar})$ s'étend en un opérateur de $\mathcal{H}_k$ dans $\mathcal{H}_k$.

Démonstration.

Étape 1 : $\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_h) : \mathfrak{S}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{C})$. Soit $a_h = b_h \circ \kappa_{\phi_1}$, alors $a_h \in S(\mathbb{R}^2)$ et d'après la proposition 6.1.13, $\text{Op}^w(a_h) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$. D'après la proposition 6.2.10, on sait que la transformée de Bargmann T_{ϕ_1} envoie l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur l'espace $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ et avec la proposition 6.2.4, on obtient que :

$$\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_h) = T_{\phi_1} \text{Op}^w(a_h) T_{\phi_1}^* : \mathfrak{S}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{C}).$$

Étape 2 : $\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_h) : \mathfrak{S}'(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{S}'(\mathbb{C})$. Pour cette seconde étape, on peut procéder de la même façon que dans l'étape 1, cependant nous avons préféré faire une autre démonstration. Soient $u, v \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$, alors on a (la remarque 6.2.15 assure que les quantités ci-dessous sont bien définies) :

$$\begin{aligned} & \langle \text{Op}_{\Phi_1}^w(b_h)u, v \rangle_{\mathfrak{S}, \mathfrak{S}} \\ &= \int_{\mathbb{C}} \overline{(\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_h)u)(z)} v(z) e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} L(dz), \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(z)} e^{(-i/\hbar)(z-w)\zeta} \overline{b_h\left(\frac{z+w}{2}, \zeta\right)} \overline{u(w)} dw d\zeta v(z) e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} L(dz), \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{C}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{C}} e^{(-i/\hbar)(z-w)(-\Im(z+w/2))} \overline{b_h\left(\frac{z+w}{2}, -\Im\left(\frac{z+w}{2}\right)\right)} \overline{u(w)} L(dw) v(z) e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} L(dz), \end{aligned}$$

où on a utilisé la définition du contour $\Gamma(z)$ pour déterminer cette dernière expression et où $C > 0$ est une constante. Exprimons maintenant d'une autre façon les différents termes apparaissant dans cette intégrale. Pour $z \in \Lambda_{\Phi_1} \simeq \mathbb{C}$, on a :

$$b_h(z, -\Im(z)) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} b_{m,n}^h e^{in\Re(z)} e^{2i\pi m\Im(z)} \quad \text{d'après la proposition 6.2.23.}$$

Donc pour tout $z \in \Lambda_{\Phi_1}$, on a :

$$\overline{b_h(z, -\Im(z))} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \overline{b_{m,n}^h} e^{-in\Re(z)} e^{-2i\pi m\Im(z)} =: \tilde{b}_h(z, -\Im(z)).$$

Donc l'intégrale se réécrit sous la forme suivante, pour tous $u, v \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} & \langle \text{Op}_{\Phi_1}^w(b_h)u, v \rangle_{\mathfrak{S}, \mathfrak{S}} \\ &= \frac{C}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} e^{(i/\hbar)(\bar{z}-\bar{w})\Im(z+w/2)} \overline{b_h\left(\frac{z+w}{2}, -\Im\left(\frac{z+w}{2}\right)\right)} \overline{u(w)} v(z) e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} L(dw) L(dz), \\ &= \frac{C}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} e^{(i/\hbar)(\bar{z}-\bar{w})\Im(z+w/2)} \tilde{b}_h\left(\frac{z+w}{2}, -\Im\left(\frac{z+w}{2}\right)\right) \overline{u(w)} v(z) e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} L(dw) L(dz). \end{aligned}$$

Par un calcul, on montre que :

$$\frac{i}{\hbar}(\bar{z} - \bar{w})\Im\left(\frac{z+w}{2}\right) - \frac{2}{\hbar}\Phi_1(z) = \frac{i}{\hbar}(z-w)\Im\left(\frac{z+w}{2}\right) - \frac{2}{\hbar}\Phi_1(w).$$

Ainsi, on obtient, pour tous $u, v \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} & \langle \text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar})u, v \rangle_{\mathfrak{S}, \mathfrak{S}} \\ &= \frac{C}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} e^{(i/\hbar)(\bar{z}-\bar{w})\Im(z+w/2)} \tilde{b}_{\hbar}\left(\frac{z+w}{2}, -\Im\left(\frac{z+w}{2}\right)\right) \overline{u(w)}v(z) e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} L(dw)L(dz), \\ &= \frac{C}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} e^{(i/\hbar)(z-w)\Im(z+w/2)} \tilde{b}_{\hbar}\left(\frac{z+w}{2}, -\Im\left(\frac{z+w}{2}\right)\right) \overline{u(w)}v(z) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw)L(dz), \\ &= \int_{\mathbb{C}} \overline{u(w)} \frac{C}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{C}} e^{(i/\hbar)(w-z)(-\Im(z+w/2))} \tilde{b}_{\hbar}\left(\frac{z+w}{2}, -\Im\left(\frac{z+w}{2}\right)\right) v(z) L(dz) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw), \\ &= \int_{\mathbb{C}} \overline{u(w)} \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(w)} e^{(i/\hbar)(w-z)\zeta} \tilde{b}_{\hbar}\left(\frac{z+w}{2}, \zeta\right) v(z) L(dz) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw), \\ &= \int_{\mathbb{C}} \overline{u(w)} (\text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{b}_{\hbar})v)(w) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw), \\ &= \langle u, \text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{b}_{\hbar})v \rangle_{\mathfrak{S}, \mathfrak{S}}, \end{aligned}$$

où $\Gamma(w) = \left\{ (z, \zeta) \in \mathbb{C}^2; \zeta = -\Im\left(\frac{z+w}{2}\right) \right\}$. Comme pour $v \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$, $\text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{b}_{\hbar})v \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$, alors la quantification de Weyl complexe est bien définie par la formule suivante pour $u \in \mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ et $v \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$:

$$\langle \text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar})u, v \rangle_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}} = \langle u, \text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{b}_{\hbar})v \rangle_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}}.$$

Étape 3 : $\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar}) : \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_k$. D'après l'étape 2, l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar})$ est bien défini sur l'espace $\mathcal{H}_k$ car il est inclus dans l'espace $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$. Il reste donc à vérifier que $\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar})u \in \mathcal{H}_k$ pour $u \in \mathcal{H}_k$. Comme pour $u \in \mathcal{H}_k$, $\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar})u \in \mathfrak{S}'(\mathbb{C})$, alors on a : $\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar})u \in \text{Hol}(\mathbb{C})$. Soient $u \in \mathcal{H}_k$ et $z \in \mathbb{C}$, alors on a :

$$\begin{aligned} \text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar})u(z+2\pi) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(z+2\pi)} e^{(i/\hbar)(z+2\pi-w)\zeta} b_{\hbar}\left(\frac{z+2\pi+w}{2}, \zeta\right) u(w) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw), \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(z)} e^{(i/\hbar)(z-w)\zeta} b_{\hbar}\left(\frac{z+w}{2} + 2\pi, \zeta\right) u(w+2\pi) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw), \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(z)} e^{(i/\hbar)(z-w)\zeta} b_{\hbar}\left(\frac{z+w}{2}, \zeta\right) u^k(w) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw), \\ &= u^k \text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar})u(z). \end{aligned}$$

Et pour $u \in \mathcal{H}_k$ et $z \in \mathbb{C}$, on a aussi :

$$\begin{aligned}
 & \text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar})u(z+i) \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(z+i)} e^{(i/\hbar)(z+i-w)\zeta} b_{\hbar}\left(\frac{z+i+w}{2}, \zeta\right) u(w) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw), \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(z)} e^{(i/\hbar)(z-w)(\zeta-1)} b_{\hbar}\left(\frac{z+w}{2} + i, \zeta - 1\right) u(w+i) e^{-2\Phi_1(w+i)/\hbar} L(dw), \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(z)} e^{(i/\hbar)(z-w)\zeta} e^{-ik(z-w)} b_{\hbar}\left(\frac{z+w}{2}, \zeta\right) v^k e^{-iwk+k/2} u(w) e^{-2\Phi_1(w+i)/\hbar} L(dw), \\
 &= v^k e^{-izk+k/2} \text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar})u(z).
 \end{aligned}$$

Donc $\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar}) : \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_k$. □

Nous avons introduit deux définitions de la quantification de Weyl complexe du tore et on s'intéresse maintenant au lien qui les unit.

Proposition 6.2.29 (Identification des deux quantifications de Weyl complexe du tore).
Soit $b_{\hbar} = b_k \in C^\infty(\Lambda_{\Phi_1})$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$ et telle que pour tout $(z, w) \in \Lambda_{\Phi_1}$:

$$b_{\hbar}(z + 2\pi, w) = b_{\hbar}(z, w) = b_{\hbar}(z + i, w - 1).$$

Alors, on a :

$$\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar}) = \text{Op}_{\Phi_1, k}^w(b_k) \quad \text{sur l'espace } \mathcal{H}_k.$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition est analogue à celle donnée dans le cadre de l'identification des deux quantifications de Weyl classique du tore (proposition 6.1.18).

Étape 1 : $\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar}) = \text{Op}_{\Phi_1, k}^w(b_k)$ sur $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$. Comme $b_{\hbar}$ satisfait les conditions de périodicité suivantes, pour tout $(z, w) \in \Lambda_{\Phi_1}$:

$$b_{\hbar}(z + 2\pi, w) = b_{\hbar}(z, w) = b_{\hbar}(z + i, w - 1),$$

alors d'après la proposition 6.2.23, on peut réécrire la fonction $b_{\hbar}$, pour $(z, w) \in \Lambda_{\Phi_1}$, comme suit :

$$b_{\hbar}(z, w) = \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} b_{m, n}^{\hbar} e^{in(z+iw)} e^{-2i\pi mw}.$$

Par conséquent, on a, pour $u \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned}
 & \text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar})u(z) \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(z)} e^{(i/\hbar)(z-w)\zeta} b_{\hbar} \left(\frac{z+w}{2}, \zeta \right) u(w) dw d\zeta, \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(z)} e^{(i/\hbar)(z-w)\zeta} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} b_{m,n}^{\hbar} e^{in((z+w)/2+i\zeta)} e^{-2i\pi m\zeta} u(w) dw d\zeta, \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(z)} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} e^{(i/\hbar)(z-w+2\pi m/k)\zeta} b_{m,n}^{\hbar} e^{in((z+w-2\pi m/k)/2+i\zeta)} e^{-2i\pi m\zeta} u \left(w - \frac{2\pi m}{k} \right) dw d\zeta, \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(z)} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} e^{(i/\hbar)(z-w)\zeta} b_{m,n}^{\hbar} e^{in((z+w)/2+i\zeta)} e^{-i\pi mn/k} u \left(w - \frac{2\pi m}{k} \right) dw d\zeta \quad \text{car } k = \frac{1}{\hbar}, \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(z)} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} e^{(i/\hbar)(z-w-in/k)(\zeta-n/2k)} b_{m,n}^{\hbar} e^{in((z+w+in/k)/2+i(\zeta-n/2k))} \\
 &\quad e^{-i\pi mn/k} u \left(w + \frac{in}{k} - \frac{2\pi m}{k} \right) dw d\zeta, \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(z)} e^{(i/\hbar)(z-w)\zeta} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} b_{m,n}^{\hbar} e^{-i\pi mn/k} e^{-n^2/2k} u \left(w + \frac{in}{k} - \frac{2\pi m}{k} \right) dw d\zeta \quad \text{car } k = \frac{1}{\hbar}, \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Gamma(z)} e^{(i/\hbar)(z-w)\zeta} (\text{Op}_{\Phi_1,k}^w(b_k)u)(w) dw d\zeta, \\
 &= \text{Op}_{\Phi_1,k}^w(b_k)u(z),
 \end{aligned}$$

où on a utilisé le changement de variables : $\Gamma(z) \ni (w, \zeta) \mapsto \left(w + \frac{in}{k}, \zeta - \frac{n}{2k} \right) \in \Gamma(z)$.

Ainsi, on obtient que :

$$\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar}) = \text{Op}_{\Phi_1,k}^w(b_k) \quad \text{sur l'espace } \mathfrak{S}(\mathbb{C}).$$

Étape 2 : $\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar}) = \text{Op}_{\Phi_1,k}^w(b_k)$ sur $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$. Soient $u \in \mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ et $v \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$, alors on a :

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar})u, v \rangle_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}} &= \langle u, \text{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{b}_{\hbar})v \rangle_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}}, \\
 &= \langle u, \text{Op}_{\Phi_1,k}^w(\tilde{b}_k)v \rangle_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}} \quad \text{d'après l'étape 1,} \\
 &= \langle \text{Op}_{\Phi_1,k}^w(b_k)u, v \rangle_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}}.
 \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar}) = \text{Op}_{\Phi_1,k}^w(b_k) \quad \text{sur l'espace } \mathfrak{S}'(\mathbb{C}).$$

Étape 3 : $\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar}) = \text{Op}_{\Phi_1,k}^w(b_k)$ sur $\mathcal{H}_k$. D'après l'étape 2, $\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar}) = \text{Op}_{\Phi_1,k}^w(b_k)$ sur l'espace $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ et comme $\mathcal{H}_k \subset \mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ alors par restriction de ces opérateurs à ce sous-espace, on obtient le résultat. $\square$

Chapitre 7

Lien entre les différentes quantifications du tore

Dans ce chapitre, nous allons faire le lien entre la quantification de Berezin-Toeplitz du tore $\mathbb{T}^2$ et la quantification de Weyl complexe du tore $\mathbb{T}^2$. Le lien entre ces deux quantifications constitue à notre connaissance un nouveau résultat sur le sujet.

7.1 Quantification de Berezin-Toeplitz et quantification de Weyl du plan complexe

Nous commençons par rappeler la proposition qui permet de faire le lien entre la quantification de Weyl et la quantification de Berezin-Toeplitz du plan complexe $\mathbb{C}$ que nous avons vue dans le chapitre 3 dans le cas d'une fonction poids Φ quelconque. Pour ce faire on introduit auparavant les notations dont nous avons besoin. Comme dans le chapitre précédent, on va jongler entre la notation $\hbar$ du paramètre semi-classique et son inverse k .

Notations: soit Φ_1 la forme quadratique réelle strictement sousharmonique sur $\mathbb{C}$ définie pour $z \in \mathbb{C}$, par $\Phi_1(z) = \frac{1}{2}\Im(z)^2$. Soit $k \geq 1$ l'inverse du paramètre semi-classique $\hbar$. On note :

- Λ_{Φ_1} l'ensemble défini par la relation suivante :

$$\Lambda_{\Phi_1} = \left\{ \left(z, \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}(z) \right), z \in \mathbb{C} \right\} = \{(z, -\Im(z)), z \in \mathbb{C}\};$$

- $L(dz)$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$ donnée par : $L(dz) = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$;
- $L_k^2(\mathbb{C}, \Phi_1) := L^2(\mathbb{C}, e^{-2k\Phi_1(z)} L(dz)) = L^2(\mathbb{C}, e^{-2\Phi_1(z)/\hbar} L(dz)) =: L_{\hbar}^2(\mathbb{C}, \Phi_1)$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{C}$ par rapport à la mesure à poids exponentiel $e^{-2k\Phi_1(z)} L(dz)$;
- $H_k(\mathbb{C}, \Phi_1) := \text{Hol}(\mathbb{C}) \cap L_k^2(\mathbb{C}, \Phi_1) = \text{Hol}(\mathbb{C}) \cap L_{\hbar}^2(\mathbb{C}, \Phi_1) =: H_{\hbar}(\mathbb{C}, \Phi_1)$ l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ appartenant à l'espace $L_k^2(\mathbb{C}, \Phi_1)$;

- $\Pi_{\Phi_1, k} = \Pi_{\Phi_1, \hbar} : L_k^2(\mathbb{C}, \Phi_1) \longrightarrow H_k(\mathbb{C}, \Phi_1)$ la projection orthogonale de l'espace de fonctions $L_k^2(\mathbb{C}, \Phi_1)$ (muni du produit scalaire L^2 à poids) sur l'espace de fonctions holomorphes $H_k(\mathbb{C}, \Phi_1)$;
- $S(\mathbb{C})$ est l'espace des symboles sur $\mathbb{C}$ (voir la définition 3.1.1).

On rappelle maintenant la définition de la quantification de Berezin-Toeplitz du plan complexe dans le cas particulier où la fonction poids $\Phi = \Phi_1$ (voir la définition 3.2.1).

Définition 7.1.1 (Quantification de Berezin-Toeplitz du plan complexe $\mathbb{C}$). *Soit $k \geq 1$. Soit $f_k \in S(\mathbb{C})$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$. On définit la quantification de Berezin-Toeplitz de la fonction f_k par la suite d'opérateurs $T_{f_k} := (T_k)_{k \geq 1}$, où pour tout $k \geq 1$, l'opérateur T_k est défini par :*

$$T_k := \Pi_{\Phi_1, k} M_{f_k} \Pi_{\Phi_1, k},$$

où $M_{f_k} : L_k^2(\mathbb{C}, \Phi_1) \longrightarrow L_k^2(\mathbb{C}, \Phi_1)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction f_k . On appelle la fonction f_k le symbole de l'opérateur de Berezin-Toeplitz T_{f_k} .

La proposition faisant le lien entre la quantification de Berezin-Toeplitz et la quantification de Weyl complexe du plan complexe $\mathbb{C}$ se réécrit de la façon suivante dans le cas particulier où $\Phi = \Phi_1$ (voir la proposition 3.2.5).

Proposition 7.1.2 (Quantification complexe et quantification de Berezin-Toeplitz du plan complexe $\mathbb{C}$).

1. *Soit $f_k \in S(\mathbb{C})$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$. Soit $T_{f_k} = (T_k)_{k \geq 1}$ l'opérateur de Berezin-Toeplitz de symbole f_k . Alors pour tout $k \geq 1$,*

$$T_k = \text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar}) \quad \text{sur } H_k(\mathbb{C}, \Phi_1),$$

où $b_{\hbar} \in S(\Lambda_{\Phi_1})$ est un symbole donné par la formule suivante, pour tout $z \in \Lambda_{\Phi_1} \simeq \mathbb{C}$:

$$b_{\hbar}(z) = \exp\left(\frac{1}{k} \partial_z \partial_{\bar{z}}\right) (f_k(z)).$$

2. *Soit $b_{\hbar} \in S(\Lambda_{\Phi_1})$ un symbole admettant un développement asymptotique en puissances de $\hbar$. Alors il existe $f_k \in S(\mathbb{C})$ un symbole sur $\mathbb{C}$ admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ tel que pour tout $k \geq 1$:*

$$\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar}) = T_k + \mathcal{O}(k^{-\infty}) \quad \text{sur } H_{\hbar}(\mathbb{C}, \Phi_1),$$

où $(T_k)_{k \geq 1} = T_{f_k}$ est l'opérateur de Berezin-Toeplitz de symbole f_k et où pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction f_k est donnée par :

$$f_k(z) = \sum_{j=0}^N \frac{\hbar^j}{j!} (D_z D_{\bar{z}})^j (b_{\hbar}(z)) + \mathcal{O}(\hbar^{N+1}).$$

Remarque 7.1.3. *On ne s'intéresse ici qu'à la proposition ci-dessus pour la fonction Φ_1 . Ceci est du au fait que c'est avec ce poids particulier que nous avons étudié les quantifications du tore.*

7.2 Quantifications de Berezin-Toeplitz du tore et du plan complexe

Notre objectif dans ce chapitre est de montrer un analogue de la proposition 7.1.2 dans le cadre des quantifications du tore. Pour aboutir à un tel résultat, nous allons établir un lien entre la quantification de Berezin-Toeplitz du plan complexe et la quantification de Berezin-Toeplitz du tore. Commençons alors par montrer que la quantification de Berezin-Toeplitz du plan complexe permet de définir un opérateur agissant sur les espaces $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ que nous avons rencontrés dans le chapitre 6 (voir les définitions 6.2.8 et 6.2.14).

Proposition 7.2.1 (Opérateurs de Berezin-Toeplitz agissant sur $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ et sur $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$). *Soit $f_k \in S(\mathbb{C})$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$. Soit $T_{f_k} = (T_k)_{k \geq 1}$ l'opérateur de Berezin-Toeplitz du plan complexe $\mathbb{C}$ de symbole f_k . Alors pour tout $k \geq 1$:*

1. T_k s'étend en un opérateur de $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ et est défini pour tout $v \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$ par :

$$T_k v = \Pi_{\Phi_1, k}(f_k v),$$

où l'opérateur $\Pi_{\Phi_1, k}$ est ici vu comme un opérateur de $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$.

2. T_k s'étend en un opérateur de $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ et est défini pour $u \in \mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ et $v \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$ par :

$$\langle T_k u, v \rangle_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}} = \langle u, \tilde{T}_k v \rangle_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}},$$

où $(\tilde{T}_k)_{k \geq 1} =: T_{\tilde{f}_k}$ est un opérateur de Berezin-Toeplitz de symbole $\tilde{f}_k$ défini pour $z \in \mathbb{C}$ par :

$$\tilde{f}_k(z) = \overline{f_k(z)}.$$

Démonstration.

Étape 1 : $T_k : \mathfrak{S}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{C})$ et $T_k : \mathfrak{S}'(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{S}'(\mathbb{C})$. Comme $T_{f_k} = (T_k)_{k \geq 1}$ est un opérateur de Berezin-Toeplitz du plan complexe $\mathbb{C}$, alors d'après la proposition 7.1.2, on sait qu'il existe un symbole $b_h \in S(\Lambda_{\Phi_1})$ tel que pour tout $k \geq 1$:

$$T_k = \text{Op}_{\Phi_1}^w(b_h) \quad \text{sur l'espace } H_k(\mathbb{C}, \Phi_1).$$

De plus, d'après la proposition 6.2.4 on sait que :

$$T_{\phi_1}^* \text{Op}_{\Phi_1}^w(b_h) T_{\phi_1} = \text{Op}^w(b_h \circ \kappa_{\phi_1}) : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}).$$

Comme $b_{\hbar} \circ \kappa_{\phi_1} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, alors d'après la proposition 6.1.13, on sait que :

$$\mathrm{Op}^w(b_{\hbar} \circ \kappa_{\phi_1}) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Op}^w(b_{\hbar} \circ \kappa_{\phi_1}) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

De plus, d'après les propositions 6.2.10, 6.2.13 et 6.2.18, on sait que la transformée de Bargmann et son inverse se comportent de la façon suivante :

$$\begin{cases} T_{\phi_1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{C}) & \text{et} & T_{\phi_1}^* : \mathfrak{S}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), \\ T_{\phi_1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{S}'(\mathbb{C}) & \text{et} & T_{\phi_1}^* : \mathfrak{S}'(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Donc on en déduit que pour tout $k \geq 1$,

$$T_k : \mathfrak{S}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad T_k : \mathfrak{S}'(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{S}'(\mathbb{C}).$$

Étape 2 : définition de l'opérateur T_k sur $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$. Par définition, $\Pi_{\Phi_1, k} = T_{\phi_1} T_{\phi_1}^*$. Or, on a vu que T_{ϕ_1} envoie l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur l'espace $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ et que son adjoint envoie l'espace $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, par conséquent l'opérateur $\Pi_{\Phi_1, k}$ s'étend en un opérateur de $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ dans lui-même. De plus, comme $\mathfrak{S}(\mathbb{C}) \subset H_{\hbar}(\mathbb{C}, \Phi_1)$ (voir la remarque 6.2.11), alors pour tout $v \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$, on a :

$$\Pi_{\Phi_1, k} v = v.$$

Et pour $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ et $v \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$, on a $\Pi_{\Phi_1, k}(f_k v) \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$. D'où le fait que pour $v \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$, l'opérateur de Berezin-Toeplitz $T_{f_k} = (T_k)_{k \geq 1}$ est défini de la façon suivante pour tout $k \geq 1$ et pour tout $v \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$:

$$T_k v = \Pi_{\Phi_1, k} M_{f_k} \Pi_{\Phi_1, k} v = \Pi_{\Phi_1, k}(f_k v).$$

Étape 3 : définition de l'opérateur T_k sur $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$. Pour $v = T_{\phi_1} \psi \in \mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ et $u = T_{\phi_1} \phi \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$, on a :

$$\begin{aligned} \langle T_k v, u \rangle_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}} &= \langle \mathrm{Op}_{\Phi_1}^w(b_{\hbar}) v, u \rangle_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}} \quad \text{d'après la proposition 7.1.2,} \\ &= \langle v, \mathrm{Op}_{\Phi_1}^w(\tilde{b}_{\hbar}) u \rangle_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}} \quad \text{d'après la démonstration de la proposition 6.2.28,} \\ &=: \langle v, \tilde{T}_k u \rangle_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}}. \end{aligned}$$

où pour $z \in \Lambda_{\Phi_1} \simeq \mathbb{C}$ on a posé :

$$\tilde{b}_{\hbar}(z) = \overline{b_{\hbar}(z)}.$$

On souhaite maintenant déterminer le symbole de l'opérateur de Berezin-Toeplitz $(\tilde{T}_k)_{k \geq 1}$. D'après la proposition 7.1.2, on sait que pour $z \in \Lambda_{\Phi_1} \simeq \mathbb{C}$, on a :

$$b_{\hbar}(z) = \exp\left(\frac{1}{k} \partial_z \partial_{\bar{z}}\right)(f_k(z)).$$

Par conséquent pour $z \in \Lambda_{\Phi_1} \simeq \mathbb{C}$, on a :

$$\tilde{b}_h(z) = \exp\left(\frac{1}{k}\partial_z\partial_{\bar{z}}\right)(\overline{f_k(z)}).$$

Autrement dit, la suite d'opérateurs $(\tilde{T}_k)_{k \geq 1}$ est un opérateur de Berezin-Toeplitz de symbole $\tilde{f}_k$ défini par la relation suivante pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\tilde{f}_k(z) = \overline{f_k(z)}.$$

□

Remarque 7.2.2. Soit $f_k \in S(\mathbb{C})$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ et telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$f_k(z + 2\pi) = f_k(z) = f_k(z + i).$$

Soit $T_{f_k} = (T_k)_{k \geq 1}$ l'opérateur de Berezin-Toeplitz du plan complexe $\mathbb{C}$ de symbole f_k . Alors pour tout $k \geq 1$, l'opérateur T_k est bien défini sur l'espace $\mathcal{H}_k$, car d'après la proposition 7.2.1, on sait que l'opérateur T_k est bien défini sur l'espace $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ et car $\mathcal{H}_k \subset \mathfrak{S}'(\mathbb{C})$.

Rappelons maintenant les notations dont nous allons avoir besoin concernant les opérateurs de Berezin-Toeplitz du tore.

Notations: pour $k \geq 1$,

- $\mathcal{G}_k$ est l'espace de fonctions sur $\mathbb{C}$ invariantes par l'action de Heisenberg du réseau $\mathbb{Z}^2$ et de carré intégrable sur $[0, 2\pi] \times [0, 1]$ i.e. :

$$\mathcal{G}_k = \left\{ g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; \quad g \in L^2([0, 2\pi] \times [0, 1], e^{-kq^2} dp dq); \right. \\ \left. g(p + 2\pi, q) = u^k g(p, q), \quad g(p, q + 1) = v^k e^{-i(p+iq)k+k/2} g(p, q) \right\};$$

- $\mathcal{H}_k$ est l'espace de fonctions holomorphes et invariantes par l'action de Heisenberg du réseau $\mathbb{Z}^2$, i.e. :

$$\mathcal{H}_k = \left\{ g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{holomorphe}; \quad \left\{ \begin{array}{l} g(p + 2\pi, q) = u^k g(p, q), \\ g(p, q + 1) = v^k e^{-i(p+iq)k+k/2} g(p, q) \end{array} \right. \right\};$$

- Π_k est le projecteur orthogonal de l'espace de fonctions $\mathcal{G}_k$ (muni du produit scalaire L^2 à poids sur $[0, 2\pi] \times [0, 1]$) sur l'espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$.

On souhaite maintenant déterminer comment agit un opérateur de Berezin-Toeplitz du plan complexe à symbole périodique sur l'espace $\mathcal{H}_k$. Pour ce faire, nous allons montrer qu'on peut identifier le projecteur orthogonal $\Pi_{\Phi_1, k}$ sur l'espace $H_k(\mathbb{C}, \Phi_1)$ avec le projecteur orthogonal Π_k sur l'espace $\mathcal{H}_k$.

Proposition 7.2.3 (Lien entre les projecteurs orthogonaux $\Pi_{\Phi_1, k}$ et Π_k).

Soit $\Pi_{\Phi_1, k}$ le projecteur orthogonal de l'espace de fonctions de carré intégrable $L_k^2(\mathbb{C}, \Phi_1)$ sur l'espace de fonctions holomorphes $H_k(\mathbb{C}, \Phi_1)$. Alors :

1. $\Pi_{\Phi_1, k}$ s'étend en un opérateur de $\mathcal{G}_k$ dans $\mathcal{H}_k$;
2. $\Pi_{\Phi_1, k} = \text{id}$ sur $\mathcal{H}_k$.

Autrement dit, l'opérateur $\Pi_{\Phi_1, k}$ ainsi étendu coïncide avec l'opérateur Π_k .

Démonstration.

Étape 1 : $\Pi_{\Phi_1, k}$ est bien défini sur $\mathcal{G}_k$. La difficulté pour démontrer cette étape réside dans le fait que l'ensemble de fonctions $\mathcal{G}_k$ n'est pas inclus dans l'ensemble $\mathfrak{S}'(\mathbb{C})$, donc on ne peut pas s'appuyer sur l'analyse de Valentine Bargmann sur les distributions tempérées. Par définition, l'opérateur $\Pi_{\Phi_1, k}$ est donné par la formule intégrale suivante, pour tout $u \in L_h^2(\mathbb{C}, \Phi_1)$ (voir la proposition 6.2.2) :

$$\Pi_{\Phi_1, k} u(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{-(1/4\hbar)(z-\bar{w})^2} u(w) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw).$$

Réécrivons l'intégrale ci-dessous pour montrer qu'elle est bien convergente pour $u \in \mathcal{G}_k$. Soit $u \in \mathcal{G}_k$, alors on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}} \left| e^{-(1/4\hbar)(z-\bar{w})^2} u(w) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} \right| L(dw), \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{[0, 2\pi] + i\mathbb{R}} \left| e^{-(1/4\hbar)(z-\overline{(w+2\pi m)})^2} u(w+2\pi m) e^{-2\Phi_1(w+2\pi m)/\hbar} \right| L(dw), \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{[0, 2\pi] + i\mathbb{R}} \left| e^{-(1/4\hbar)(z-\bar{w}-2\pi m)^2} (u^k)^m u(w) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} \right| L(dw), \\ &= \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} \int_{[0, 2\pi] + i[0, 1]} \left| e^{-(1/4\hbar)(z-\overline{(w+in)}-2\pi m)^2} (u^k)^m u(w+in) e^{-2\Phi_1(w+in)/\hbar} \right| L(dw), \\ &= \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} \int_{[0, 2\pi] + i[0, 1]} \left| e^{-(1/4\hbar)(z-\bar{w}+in-2\pi m)^2} (u^k)^m (v^k e^{-iwk+kn/2})^n u(w) \right. \\ & \quad \left. e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} e^{-n^2/\hbar} e^{-2n\Im(w)/\hbar} \right| L(dw), \\ &= \sum_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2} \int_{[0, 2\pi] + i[0, 1]} \left| e^{-(1/4\hbar)(z-\bar{w}+in-2\pi m)^2} (u^k)^m (v^k)^n e^{-kn^2/2} e^{-ink\bar{w}} u(w) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} \right| L(dw). \end{aligned}$$

Montrons que cette série est convergente, pour ce faire déterminons une estimation du

module de son terme général. On a pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
& \int_{[0,2\pi]+i[0,1]} \left| e^{-(1/4\hbar)(z-\bar{w}+in-2\pi m)^2} (u^k)^m (v^k)^n e^{-kn^2/2} e^{-ink\bar{w}} u(w) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} \right| L(dw) \\
& \leq \|u\|_{\mathcal{G}_k}^2 \int_{[0,2\pi]+i[0,1]} \left| e^{-(1/4\hbar)(z-\bar{w}+in-2\pi m)^2} (u^k)^m (v^k)^n e^{-kn^2/2} e^{-ink\bar{w}} \right|^2 e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw), \\
& \leq \|u\|_{\mathcal{G}_k}^2 \int_{[0,2\pi]+i[0,1]} \left| e^{-(1/4\hbar)(z-\bar{w}+in-2\pi m)^2} e^{-ink\bar{w}} \right|^2 e^{-kn^2} e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw), \\
& \leq C \|u\|_{\mathcal{G}_k}^2 e^{-k\Re(z^2)/2} e^{-2k\pi^2 m^2} e^{-kn^2/2} \max \left(e^{2\pi m k \Re(z)}, e^{2\pi(m+1)k \Re(z)} \right) \max \left(e^{nk \Im(z)}, e^{(n+1)k \Im(z)} \right),
\end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de k . On reconnaît le terme général d'une série convergente en m et n , donc la série converge d'après le théorème de Fubini et ainsi l'intégrale définissant l'opérateur $\Pi_{\Phi_1,k}$ est également convergente. Autrement dit l'opérateur $\Pi_{\Phi_1,k}$ est bien défini sur l'espace $\mathcal{G}_k$ et on a la formule suivante, pour $u \in \mathcal{G}_k$:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\Phi_1,k} u(z) &= \int_{\mathbb{C}} e^{-(1/4\hbar)(z-\bar{w})^2} u(w) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw), \\
&= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \int_{[0,2\pi]+i[0,1]} e^{-(1/4\hbar)(z-\bar{w}+in-2\pi m)^2} (u^k)^m (v^k)^n e^{-kn^2/2} e^{-ink\bar{w}} u(w) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw).
\end{aligned}$$

Étape 2 : $\Pi_{\Phi_1,k}$ envoie l'espace $\mathcal{G}_k$ sur l'espace $\mathcal{H}_k$. Soit $u \in \mathcal{G}_k$. Alors, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
& \partial_{\bar{z}} (\Pi_{\Phi_1,k} u(z)) \\
&= \partial_{\bar{z}} \left(\int_{\mathbb{C}} e^{-(1/4\hbar)(z-\bar{w})^2} u(w) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw) \right), \\
&= \partial_{\bar{z}} \left(\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \int_{[0,2\pi]+i[0,1]} e^{-(1/4\hbar)(z-\bar{w}+in-2\pi m)^2} (u^k)^m (v^k)^n e^{-kn^2/2} e^{-ink\bar{w}} u(w) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw) \right), \\
&= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \int_{[0,2\pi]+i[0,1]} \partial_{\bar{z}} \left(e^{-(1/4\hbar)(z-\bar{w}+in-2\pi m)^2} (u^k)^m (v^k)^n e^{-kn^2/2} e^{-ink\bar{w}} u(w) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} \right) L(dw), \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'après le théorème de dérivation sous le signe somme. Soit $u \in \mathcal{G}_k$ et $z \in \mathbb{C}$, alors on a également :

$$\begin{aligned}
\Pi_{\Phi_1,k} u(z + 2\pi) &= \int_{\mathbb{C}} e^{-(1/4\hbar)(z+2\pi-\bar{w})^2} u(w) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw), \\
&= \int_{\mathbb{C}} e^{-(1/4\hbar)(z+2\pi-\overline{(w+2\pi)})^2} u(w + 2\pi) e^{-2\Phi_1(w+2\pi)/\hbar} L(dw) \quad \text{via } w \mapsto w + 2\pi, \\
&= \int_{\mathbb{C}} e^{-(1/4\hbar)(z-\bar{w})^2} u^k u(w) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw) \quad \text{car } u \in \mathcal{G}_k, \\
&= u^k \Pi_{\Phi_1,k} u(z).
\end{aligned}$$

Soit $u \in \mathcal{G}_k$ et $z \in \mathbb{C}$, alors on a :

$$\begin{aligned}
 & \Pi_{\Phi_1, k} u(z + i) \\
 &= \int_{\mathbb{C}} e^{-(1/4\hbar)(z+i-\bar{w})^2} u(w) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw), \\
 &= \int_{\mathbb{C}} e^{-(1/4\hbar)(z+i-\overline{(w+i)})^2} u(w+i) e^{-2\Phi_1(w+i)/\hbar} L(dw) \quad \text{via } w \mapsto w+i, \\
 &= v^k e^{k/2} \int_{\mathbb{C}} e^{-(1/4\hbar)(z-\bar{w}+2i)^2} e^{-i w k} u(w) e^{-2\Phi_1(w+i)/\hbar} L(dw) \quad \text{car } u \in \mathcal{G}_k, \\
 &= v^k e^{k/2} \int_{\mathbb{C}} e^{-(1/4\hbar)((z-\bar{w})^2 - 4 + 4i(z-\bar{w}))} e^{-i w k} u(w) e^{-(1/\hbar)(\Im(w+i))^2} L(dw), \\
 &= v^k e^{k/2} \int_{\mathbb{C}} e^{-(1/4\hbar)(z-\bar{w})^2} e^{1/\hbar} e^{-(i/\hbar)(z-\bar{w})} e^{-i w k} u(w) e^{-(1/\hbar)\Im(w)^2} e^{-1/\hbar} e^{-(2/\hbar)\Im(w)} L(dw), \\
 &= v^k e^{k/2} \int_{\mathbb{C}} e^{-(1/4\hbar)(z-\bar{w})^2} e^{-(i/\hbar)z} e^{(i/\hbar)w} e^{-i w k} u(w) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw), \\
 &= v^k e^{-ikz+k/2} \int_{\mathbb{C}} e^{-(1/4\hbar)(z-\bar{w})^2} u(w) e^{-2\Phi_1(w)/\hbar} L(dw) \quad \text{car } \hbar = \frac{1}{k}, \\
 &= v^k e^{-ikz+k/2} \Pi_{\Phi_1, k} u(z).
 \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que :

$$\Pi_{\Phi_1, k} : \mathcal{G}_k \longrightarrow \mathcal{H}_k.$$

Étape 3 : $\Pi_{\Phi_1, k} = \text{id}$ sur $\mathcal{H}_k$. D'après la proposition 6.2.22, on sait que $\Pi_{\Phi_1, k} = T_{\phi_1} T_{\phi_1}^* = \text{id}$ sur l'espace $\mathcal{H}_k$, d'où le résultat. $\square$

Maintenant que nous avons identifié les projecteurs orthogonaux $\Pi_{\Phi_1, k}$ et Π_k et que nous avons vu qu'un opérateur de Berezin-Toeplitz du plan complexe à symbole périodique est bien défini sur l'espace $\mathcal{H}_k$, nous sommes en mesure de préciser l'action de cet opérateur sur cet espace.

Proposition 7.2.4 (Action d'un opérateur de Berezin-Toeplitz du plan complexe $\mathbb{C}$ sur l'espace $\mathcal{H}_k$). *Soit $f_k \in S(\mathbb{C})$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ et telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

$$f_k(z + 2\pi) = f_k(z) = f_k(z + i).$$

Soit $T_{f_k} = (T_k)_{k \geq 1}$ l'opérateur de Berezin-Toeplitz du plan complexe $\mathbb{C}$ de symbole f_k . Alors pour tout $k \geq 1$ et pour tout $v \in \mathcal{H}_k$, on a :

$$T_k v = \Pi_{\Phi_1, k}(f_k v),$$

où $\Pi_{\Phi_1, k}$ est ici vu comme un opérateur agissant sur l'espace de fonctions $\mathcal{G}_k$ et à valeurs dans l'espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$.

Démonstration. Soit $v \in \mathcal{H}_k$ et soit $u \in \mathfrak{S}(\mathbb{C})$, alors d'après la proposition 7.2.1 pour tout

$k \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
 \langle T_k v, u \rangle_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}} &= \langle v, \tilde{T}_k u \rangle_{\mathfrak{S}', \mathfrak{S}}, \\
 &= \langle g, \tilde{T}_k u \rangle \quad \text{avec } g \in \mathfrak{S}^{-l}(\mathbb{C}) \text{ pour } l \in \mathbb{N} \text{ d'après la proposition 6.2.16,} \\
 &= \langle g, \Pi_{\Phi_1, k} M_{\tilde{f}_k} \Pi_{\Phi_1, k} u \rangle \quad \text{par définition de } \tilde{T}_k \text{ sur } \mathfrak{S}(\mathbb{C}), \\
 &= \langle \Pi_{\Phi_1, k}^* g, M_{\tilde{f}_k} \Pi_{\Phi_1, k} u \rangle \quad \text{car } \Pi_{\Phi_1, k} \text{ s'étend à } \mathfrak{S}'(\mathbb{C}), \\
 &= \langle M_{\tilde{f}_k} \Pi_{\Phi_1, k} g, \Pi_{\Phi_1, k} u \rangle \quad \text{car } \Pi_{\Phi_1, k}^* = \Pi_{\Phi_1, k}, \\
 &= \langle \Pi_{\Phi_1, k} M_{f_k} \Pi_{\Phi_1, k} g, u \rangle,
 \end{aligned}$$

où, d'après la proposition 7.2.1, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$\tilde{f}_z(z) = \overline{f_k(z)}.$$

Ainsi pour $v \in \mathcal{H}_k$ et pour $k \geq 1$, on a :

$$T_k v = \Pi_{\Phi_1, k} M_{f_k} \Pi_{\Phi_1, k} v.$$

De plus, d'après la proposition 7.2.3, on sait que $\Pi_{\Phi_1, k} v = v$ pour tout $v \in \mathcal{H}_k$, donc pour tout $k \geq 1$, on a :

$$T_k v = \Pi_{\Phi_1, k} (f_k v).$$

□

Nous sommes maintenant en mesure d'établir un lien entre un opérateur de Berezin-Toeplitz du plan complexe et un opérateur de Berezin-Toeplitz du tore.

Proposition 7.2.5 (Quantification de Berezin-Toeplitz du plan complexe et quantification de Berezin-Toeplitz du tore). *Soit $f_k \in S(\mathbb{C})$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ et telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

$$f_k(z + 2\pi) = f_k(z) = f_k(z + i).$$

Soit $T_{f_k}^{\mathbb{C}} = (T_k^{\mathbb{C}})_{k \geq 1}$ l'opérateur de Berezin-Toeplitz du plan complexe $\mathbb{C}$ de symbole f_k et soit $T_{f_k}^{\mathbb{T}^2} = (T_k^{\mathbb{T}^2})_{k \geq 1}$ l'opérateur de Berezin-Toeplitz du tore de symbole f_k . Alors pour tout $k \geq 1$:

$$T_k^{\mathbb{C}} = T_k^{\mathbb{T}^2} + \mathcal{O}(k^{-\infty}) \quad \text{sur l'espace } \mathcal{H}_k.$$

Autrement dit, l'opérateur de Berezin-Toeplitz du plan complexe à symbole périodique coïncide avec l'opérateur de Berezin-Toeplitz du tore.

Démonstration. D'après la définition 5.4.3, l'opérateur de Berezin-Toeplitz du tore $T_{f_k}^{\mathbb{T}^2} = (T_k^{\mathbb{T}^2})_{k \geq 1}$ est donné pour tout $v \in \mathcal{H}_k$ et pour tout $k \geq 1$ par :

$$T_k^{\mathbb{T}^2} v = \Pi_k(f_k v) + \mathcal{O}(k^{-\infty}),$$

où Π_k est le projecteur orthogonal de l'espace de fonctions $\mathcal{G}_k$ sur l'espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$. D'après la proposition 7.2.4, l'opérateur de Berezin-Toeplitz $T_{f_k}^{\mathbb{C}} = (T_k^{\mathbb{C}})_{k \geq 1}$ est donné pour tout $v \in \mathcal{H}_k$ et pour tout $k \geq 1$ par :

$$T_k^{\mathbb{C}} v = \Pi_{\Phi_1, k}(f_k v),$$

où ici $\Pi_{\Phi_1, k}$ est vu comme le projecteur orthogonal de l'espace de fonctions $\mathcal{G}_k$ sur l'espace de fonctions holomorphes $\mathcal{H}_k$ (voir la proposition 7.2.3). Par conséquent, pour tout $v \in \mathcal{H}_k$ et pour tout $k \geq 1$, on a :

$$T_k^{\mathbb{C}} v = T_k^{\mathbb{T}^2} v + \mathcal{O}(k^{-\infty}).$$

□

7.3 Quantification de Berezin-Toeplitz et quantification de Weyl complexe du tore

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette seconde partie qui permet d'établir un lien entre la quantification de Berezin-Toeplitz du tore $\mathbb{T}^2$ et la quantification de Weyl complexe du tore $\mathbb{T}^2$.

Théorème D. *Soit $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ et telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :*

$$f_k(x + 2\pi, y) = f_k(x, y) = f_k(x, y + 1).$$

Soit $T_{f_k} = (T_k)_{k \geq 1}$ l'opérateur de Berezin-Toeplitz du tore de symbole f_k . Alors pour tout $k \geq 1$, on a :

$$T_k = \text{Op}_{\Phi_1}^w(b_h) + \mathcal{O}(k^{-\infty}) \quad \text{sur l'espace } \mathcal{H}_k,$$

où $b_h \in S(\Lambda_{\Phi_1})$ est donné par la formule suivante, pour tout $z \in \Lambda_{\Phi_1} \simeq \mathbb{C}$:

$$b_h(z) = \exp\left(\frac{1}{k} \partial_z \partial_{\bar{z}}\right)(f_k(z)), \tag{E7.1}$$

de plus le symbole b_h vérifie les conditions de périodicités suivantes, pour tout $z \in \Lambda_{\Phi_1} \simeq \mathbb{C}$:

$$b_h(z + 2\pi) = b_h(z) = b_h(z + i).$$

Démonstration. Par hypothèse, on sait que $f_k \in S(\mathbb{C})$, ainsi si on considère l'opérateur de Berezin-Toeplitz du plan complexe de symbole f_k , noté $T_{f_k}^{\mathbb{C}} = (T_k^{\mathbb{C}})_{k \geq 1}$, alors d'après la proposition 7.1.2, il existe une fonction $b_h \in S(\Lambda_{\Phi_1})$ telle que pour tout $k \geq 1$, on a :

$$T_k^{\mathbb{C}} = \text{Op}_{\Phi_1}^w(b_h) \quad \text{sur l'espace } H_h(\mathbb{C}, \Phi_1),$$

où le symbole b_h est donné par la formule suivante pour tout $z \in \Lambda_{\Phi_1} \simeq \mathbb{C}$:

$$b_h(z) = \exp \left(\frac{1}{k} \partial_z \partial_{\bar{z}} \right) (f_k(z)).$$

Comme l'espace $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$ est inclus dans l'espace $H_h(\mathbb{C}, \Phi_1)$ (voir la remarque 6.2.11), alors par restriction à cet espace, on a :

$$T_k^{\mathbb{C}} = \text{Op}_{\Phi_1}^w(b_h) \quad \text{sur l'espace } \mathfrak{S}(\mathbb{C}).$$

Par dualité, on en déduit que :

$$T_k^{\mathbb{C}} = \text{Op}_{\Phi_1}^w(b_h) \quad \text{sur l'espace } \mathfrak{S}'(\mathbb{C}).$$

Enfin comme $\mathcal{H}_k \subset \mathfrak{S}'(\mathbb{C})$ (voir la remarque 6.2.17), on en déduit que :

$$T_k^{\mathbb{C}} = \text{Op}_{\Phi_1}^w(b_h) \quad \text{sur l'espace } \mathcal{H}_k.$$

On remarque de plus que la périodicité de la fonction f_k et l'équation (E7.1) donne les conditions de périodicités voulues sur le symbole b_h , ce qui permet de justifier le fait que l'opérateur $\text{Op}_{\Phi_1}^w(b_h)$ est également bien défini sur l'espace $\mathcal{H}_k$.

Enfin, d'après la proposition 7.2.5, si on considère l'opérateur de Berezin-Toeplitz du tore, noté $T_{f_k}^{\mathbb{T}^2} = (T_k^{\mathbb{T}^2})_{k \geq 1}$, pour tout $k \geq 1$ on a :

$$T_k^{\mathbb{C}} = T_k^{\mathbb{T}^2} + \mathcal{O}(k^{-\infty}) \quad \text{sur l'espace } \mathcal{H}_k.$$

Par conséquent, pour tout $k \geq 1$, on a :

$$T_k^{\mathbb{T}^2} = \text{Op}_{\Phi_1}^w(b_h) + \mathcal{O}(k^{-\infty}) \quad \text{sur l'espace } \mathcal{H}_k.$$

□

Chapitre 8

Exemples de perturbations non auto-adjointes d'opérateurs de Berezin-Toeplitz du tore auto-adjoints et conjecture

Dans ce chapitre, nous allons étudier des exemples de perturbations non auto-adjointes d'opérateurs de Berezin-Toeplitz auto-adjoints du tore $\mathbb{T}^2$. Plus précisément, nous allons déterminer de manière numérique le spectre de tels opérateurs afin de mettre en évidence le fait que leurs valeurs propres se trouvent le long d'une courbe comme dans le cas des perturbations non auto-adjointes d'opérateurs de Berezin-Toeplitz auto-adjoints du plan complexe. Ce qui nous conduira à formuler une conjecture concernant des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld pour les perturbations non auto-adjointes d'opérateurs de Berezin-Toeplitz auto-adjoints du tore.

8.1 Spectre numérique d'opérateurs de Berezin-Toeplitz du tore non auto-adjoints

Dans cette partie nous allons reprendre les exemples d'opérateurs de Berezin-Toeplitz auto-adjoints du tore que nous avons rencontrés dans le chapitre 5 et nous allons les perturber. Tout d'abord, considérons l'exemple du Hamiltonien de Harper (voir l'exemple 5.5.6).

Exemple 8.1.1 (Hamiltonien de Harper). *Le hamiltonien de Harper est donné pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ par :*

$$h_0(p, q) = 2 (\cos(p) + \cos(2\pi q)) .$$

On considère l'opérateur de Berezin-Toeplitz du tore défini par la suite $(H_k)_{k \geq 1}$ et de sym-

CHAPITRE 8. EXEMPLES DE PERTURBATIONS NON AUTO-ADJOINTES
D'OPÉRATEURS DE BEREZIN-TOEPLITZ DU TORE AUTO-ADJOINTS ET
CONJECTURE

bole principal h_0 . Cette suite d'opérateurs est définie pour tout $k \geq 1$ par :

$$H_k = A_k + C_k = M_k + M_k^* + L_k + L_k^*,$$

où les opérateurs M_k et L_k ont été définis dans les exemples 5.5.1 et 5.5.2. On rappelle également que la matrice de l'opérateur H_k dans la base orthonormée $(\tilde{e}_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ (définie dans le chapitre 5) est la suivante :

$$\mathcal{H}_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 2 \cos\left(\frac{2\pi}{k}\right) & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 & 2 \cos\left(\frac{2\pi(k-2)}{k}\right) & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \cos\left(\frac{2\pi(k-1)}{k}\right) \end{pmatrix}.$$

On considère une perturbation trigonométrique du hamiltonien de Harper, plus précisément, on s'intéresse à l'opérateur suivant :

$$H_k^\epsilon = H_k + i\epsilon I_k,$$

où I_k est un opérateur de Berezin-Toeplitz auto-adjoint dont le symbole est une fonction trigonométrique en les variables p et q . On obtient alors les graphiques ci-dessous avec les paramètres suivants :

- $k = 50$;
- $\epsilon = 10^{-5}$.

Sur les figures 8.1, 8.2, 8.3, les points roses représentent le spectre de l'opérateur auto-adjoint H_k , les points bleus représentent le spectre de l'opérateur H_k^ϵ calculé par la fonction `spec` de `Scilab` et les points rouges représentent une approximation du spectre auquel on s'attend si on a un résultat du type Bohr-Sommerfeld. Plus précisément, ces points rouges ont été calculés numériquement en déterminant une fonction g^ϵ d'un réel E de la forme suivante :

$$g^\epsilon(E) = g(E) + i\epsilon r(E) + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

où g est la fonction correspondant aux conditions de Bohr-Sommerfeld pour l'opérateur H_k et r est la moyenne le long du flot du hamiltonien de Harper du symbole principal de la perturbation I_k (pour calculer cette moyenne, on a utilisé un schéma d'Euler symplectique pour résoudre de manière numérique l'équation du hamiltonien de Harper).

8.1. SPECTRE NUMÉRIQUE D'OPÉRATEURS DE BEREZIN-TOEPLITZ DU TORE NON AUTO-ADJOINTS

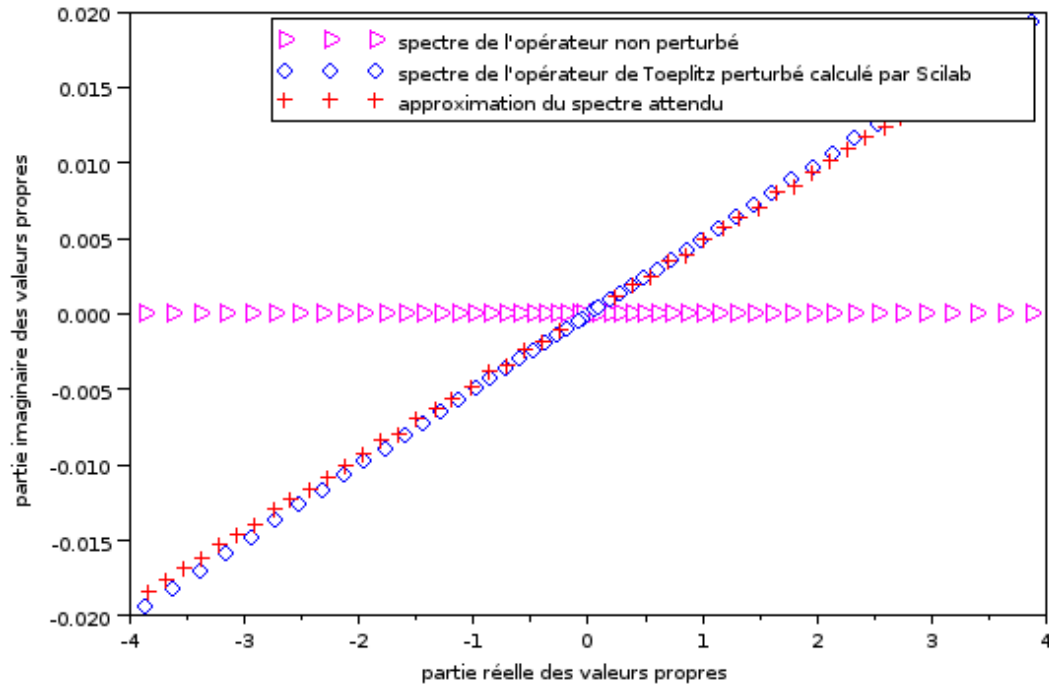


FIGURE 8.1 – $H_k^\epsilon = H_k + i\epsilon A_k$,
 $h^\epsilon(p, q) = h_0(p, q) + i\epsilon 2 \cos(2\pi q)$.

Nous nous intéressons maintenant à un second exemple, celui de l'opérateur de Berezin-Toeplitz dont le symbole principal est la fonction hauteur d'un tore (voir l'exemple 5.5.7)

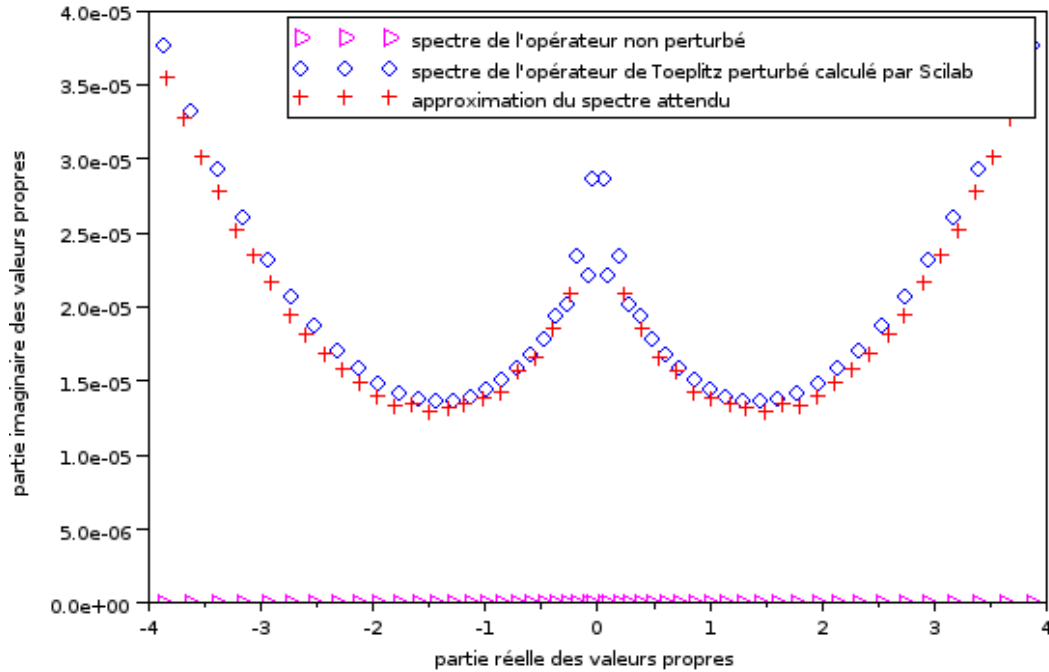


FIGURE 8.2 – $H_k^\epsilon = H_k + i\epsilon A_k^2$,
 $h^\epsilon(p, q) = h_0(p, q) + i\epsilon (2 \cos(2\pi q))^2$.

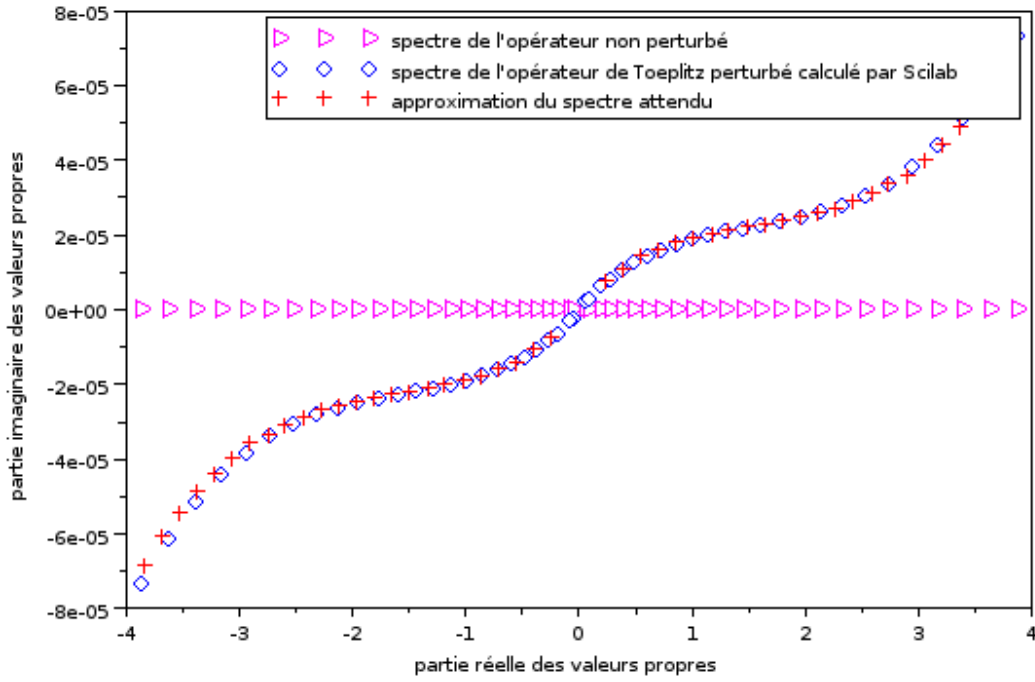


FIGURE 8.3 – $H_k^\epsilon = H_k + i\epsilon C_k^3$,
 $h^\epsilon(p, q) = h_0(p, q) + i\epsilon (2 \cos(p))^3$.

Exemple 8.1.2 (Fonction hauteur du tore). *La fonction hauteur du tore de l'exemple 5.5.7 est donnée pour $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ par :*

$$d_0(p, q) = (R + r \cos(p)) \sin(2\pi q),$$

où R et r sont deux grandeurs caractéristiques du tore. On considère l'opérateur de Berezin-Toeplitz du tore défini par la suite $(D_k)_{k \geq 1}$ et de symbole principal d_0 . Cette suite d'opérateurs est définie pour tout $k \geq 1$ par :

$$D_k = \frac{1}{2}(E_k F_k + F_k E_k),$$

où $E_k = R\Pi_k + \frac{r}{2}C_k = R\Pi_k + \frac{r}{2}(L_k + L_k^)$ et $F_k = -B_k = \frac{1}{2i}(M_k^* - M_k)$. On considère une perturbation trigonométrique de la fonction hauteur du tore, plus précisément, on s'intéresse à l'opérateur suivant :*

$$D_k^\epsilon = D_k + i\epsilon I_k,$$

où I_k est un opérateur de Berezin-Toeplitz auto-adjoint dont le symbole est une fonction trigonométrique en les variables p et q . On obtient les graphiques ci-dessous avec les paramètres suivants :

- $k = 50$;
- $\epsilon = 10^{-2}$;
- $R = 4$;

– $r = 1$.

Sur les figures 8.4, 8.5, 8.6, les points roses représentent le spectre de l'opérateur auto-adjoint D_k , les points bleus représentent le spectre de l'opérateur D_k^ϵ calculé par la fonction `spec` de Scilab et les points rouges représentent une approximation du spectre auquel on s'attend si on a un résultat du type Bohr-Sommerfeld. Plus précisément, ces points ont été calculés de la même manière que dans l'exemple précédent. Une des principales différences dans l'implémentation numérique réside dans le fait que le schéma d'Euler symplectique nécessite l'utilisation de la méthode de Newton. On remarque que sur la figure 8.4, on observe deux courbes symétriques qui correspondent chacune à une composante connexe de l'ensemble de niveau. Tandis que sur les figures 8.5 et 8.6, on n'observe pas un tel phénomène car les valeurs propres de chaque composante connexe se superposent.

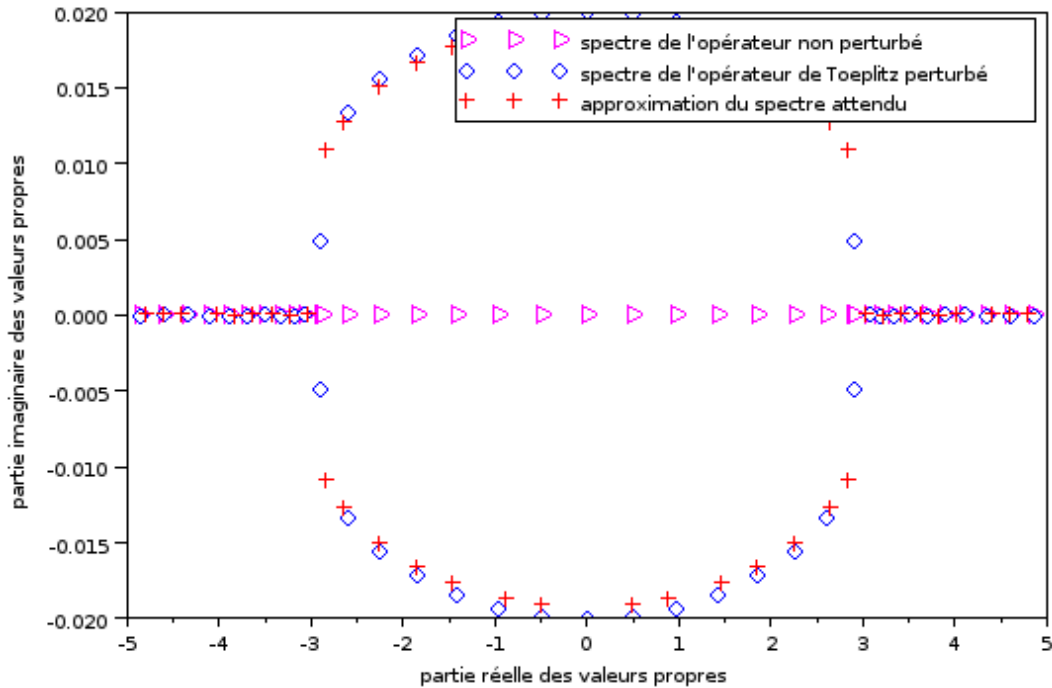


FIGURE 8.4 – $D_k^\epsilon = D_k + i\epsilon A_k$,
 $d^\epsilon(p, q) = d_0(p, q) + i\epsilon 2 \cos(2\pi q)$.

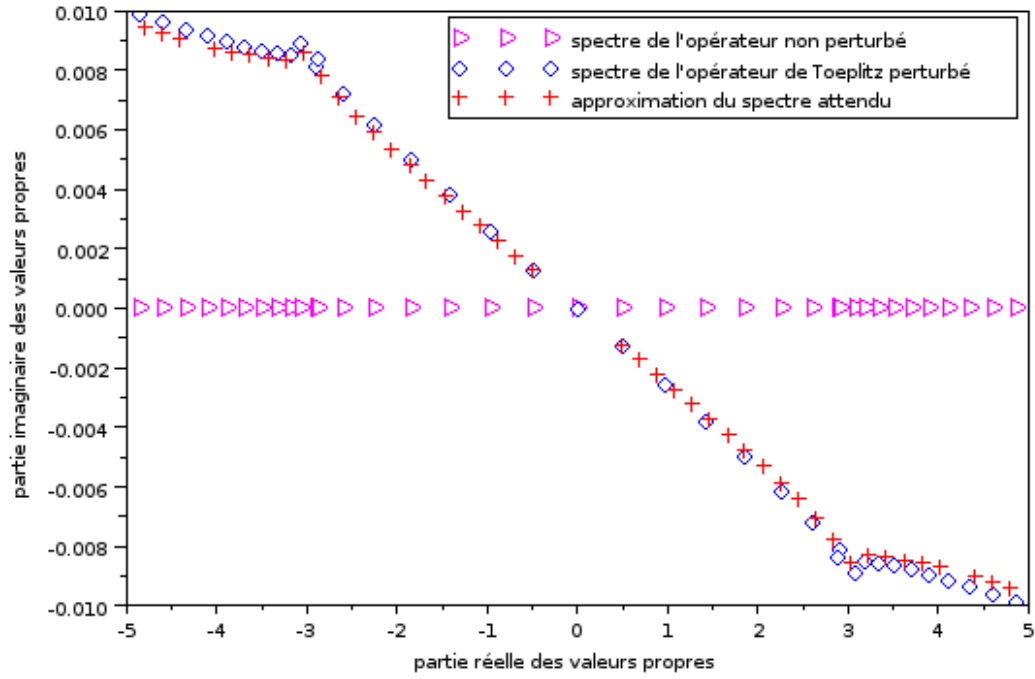


FIGURE 8.5 – $D_k^\epsilon = D_k + i\epsilon B_k$,
 $d^\epsilon(p, q) = d_0(p, q) - i\epsilon \sin(2\pi q)$.

8.2 Conjecture

Sur les deux exemples que nous venons de considérer, on remarque que les valeurs propres se répartissent le long de courbes et sont espacées de manière régulière. Ces résultats

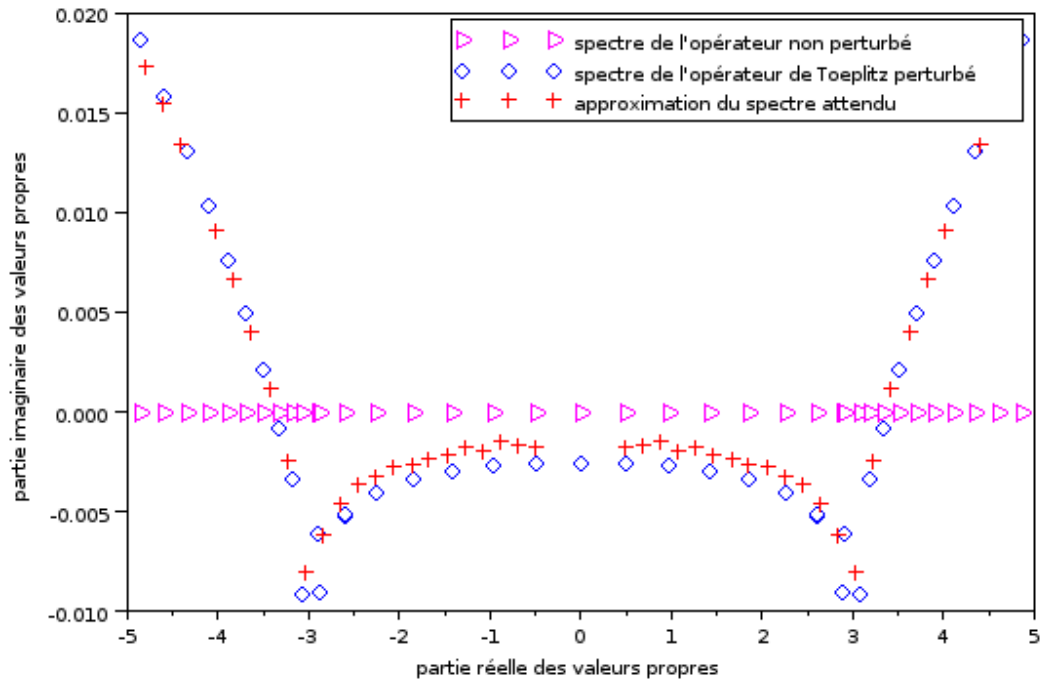


FIGURE 8.6 – $D_k^\epsilon = D_k + i\epsilon C_k$,
 $d^\epsilon(p, q) = d_0(p, q) + i\epsilon 2 \cos(p)$.

numériques nous poussent donc à formuler la conjecture suivante sur les perturbations non-auto-adjointes d'opérateurs de Berezin-Toeplitz auto-adjoints du tore.

Conjecture E. *Soient $f_k^\epsilon, q_k^\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ deux fonctions admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$, dépendant de manière C^∞ de ϵ et telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :*

$$\begin{cases} f_k^\epsilon(x + 2\pi, y) = f_k^\epsilon(x, y) = f_k^\epsilon(x, y + 1), \\ q_k^\epsilon(x + 2\pi, y) = q_k^\epsilon(x, y) = q_k^\epsilon(x, y + 1). \end{cases}$$

Soit $T_{p_k^\epsilon} = T_{f_k^\epsilon} + i\epsilon T_{q_k^\epsilon}$ un opérateur de Berezin-Toeplitz du tore tel que $T_{f_k^\epsilon}$ et $T_{q_k^\epsilon}$ sont des opérateurs de Berezin-Toeplitz auto-adjoints du tore. Soit $E_0 \in \mathbb{R}$. Il existe $\epsilon_0 > 0$ un petit paramètre tel que, pour :

$$R_{C, \epsilon_0} = \left\{ z \in \mathbb{C}, |\Re(z) - E_0| < \frac{1}{C}; |\Im(z)| < \frac{\epsilon_0}{C} \right\} \quad \text{où } C > 0 \text{ est une constante,}$$

le spectre de l'opérateur de Berezin-Toeplitz $T_{p_k^\epsilon} := (T_k)_{k \geq 1}$ est donné, pour $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ et pour k suffisamment grand, par :

$$\sigma(T_k) \cap R_{C, \epsilon_0} = \{g_k^\epsilon(k^{-1}j) + \mathcal{O}(k^{-\infty}), j \in \mathbb{Z}\} \cap R_{C, \epsilon_0},$$

où g_k^ϵ est une fonction admettant un développement asymptotique en puissances de $1/k$ et dépendant de manière C^∞ du paramètre ϵ . De plus, le premier terme du développement asymptotique de la fonction g_k^ϵ est la réciproque d'une intégrale d'action.

Une première idée pour démontrer cette conjecture serait d'adapter la démonstration des théorèmes A et C au cadre du tore $\mathbb{T}^2$. Un premier pas dans cette direction est donné par le théorème D car ce théorème permet de faire un lien entre la quantification de Berezin-Toeplitz du tore $\mathbb{T}^2$ et la quantification de Weyl complexe du tore $\mathbb{T}^2$, c'est l'équivalent de la proposition 3.2.5 (dans le cadre du plan $\mathbb{R}^2$) qui nous a permis de montrer le théorème C. Cette conjecture constitue un objectif à court terme dans mes recherches post-doctorales.

Table des figures

I1	Oscillateur harmonique.	17
I2	Lacet γ_E et indice de Maslov.	22
I3	Spectre d'une perturbation non auto-adjointe d'un opérateur de Berezin-Toeplitz auto-adjoint du tore.	35
1.1	Représentation schématique des valeurs propres de l'opérateur $\text{Op}^w(p^\epsilon)$. . .	40
1.2	$D = 2$	46
1.3	$D = 2$	46
1.4	$D = 5$	47
1.5	$D = \frac{N}{2}$	47
4.1	$p^\epsilon(\theta, I) = \alpha I + i\epsilon(\cos \theta + I^2)$	116
4.2	$p^\epsilon(\theta, I) = \alpha I + i\epsilon(\cos \theta + I^2)$	117
4.3	$p^\epsilon(\theta, I) = \alpha I + i\epsilon(\cos \theta + I^3)$	117
4.4	$p^\epsilon(\theta, I) = \alpha I + i\epsilon(\cos \theta + I^3)$	118
4.5	$p^\epsilon(x, \xi) = x^2 + \xi^2 + i\epsilon x^2$	124
4.6	$p^\epsilon(x, \xi) = x^2 + \xi^2 + i\epsilon x^2$	125
4.7	$p^\epsilon(x, \xi) = x^2 + \xi^2 + i\epsilon(x^2 + x^3)$	125
4.8	$p^\epsilon(x, \xi) = x^2 + \xi^2 + i\epsilon x^4$	126
4.9	$p^\epsilon(x, \xi) = x^2 + \xi^2 + i\epsilon x^4$	126
5.1	Fonction hauteur du tore.	150
8.1	$H_k^\epsilon = H_k + i\epsilon A_k$, $h^\epsilon(p, q) = h_0(p, q) + i\epsilon 2 \cos(2\pi q)$	207
8.2	$H_k^\epsilon = H_k + i\epsilon A_k^2$, $h^\epsilon(p, q) = h_0(p, q) + i\epsilon (2 \cos(2\pi q))^2$	207
8.3	$H_k^\epsilon = H_k + i\epsilon C_k^3$, $h^\epsilon(p, q) = h_0(p, q) + i\epsilon (2 \cos(p))^3$	208
8.4	$D_k^\epsilon = D_k + i\epsilon A_k$, $d^\epsilon(p, q) = d_0(p, q) + i\epsilon 2 \cos(2\pi q)$	209
8.5	$D_k^\epsilon = D_k + i\epsilon B_k$, $d^\epsilon(p, q) = d_0(p, q) - i\epsilon \sin(2\pi q)$	210
8.6	$D_k^\epsilon = D_k + i\epsilon C_k$, $d^\epsilon(p, q) = d_0(p, q) + i\epsilon 2 \cos(p)$	210

TABLE DES FIGURES

Bibliographie

- [Bar67] Valentine Bargmann. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. Part II. A family of related function spaces. Application to distribution theory. *Comm. Pure Appl. Math.*, 20 :1–101, 1967.
- [BDD⁺08] Nicolas Billy, Jean Desbois, Marie-Alix Duval, Mady Elias, Pascal Monceau, Aude Plaszczyński, and Michel Toulmonde. *CAPEs de Sciences physiques*. Belin, 2008.
- [BdM71] Louis Boutet de Monvel. Boundary problems for pseudo-differential operators. *Acta Math.*, 126, 1971.
- [BdMG81] Louis Boutet de Monvel and Victor Guillemin. *The spectral theory of Toeplitz operators*, volume 99 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1981.
- [Ben05] Carl M. Bender. Introduction to PT-symmetric quantum theory. *Contemporary Physics*, 46 :277–292, July 2005.
- [Ber75] Feliks A. Berezin. General concept of quantization. *Comm. Math. Phys.*, 40 :153–174, 1975.
- [BM11] William Bordeaux Montrieux. Loi de Weyl presque sûre pour un système différentiel en dimension 1. *Ann. Henri Poincaré*, 12(1) :173–204, 2011.
- [BM13] Naima Boussekkine and Nawal Mecherout. PT-symmetry and Schrödinger operators - The simple well case. *ArXiv e-prints*, 2013.
- [BMRS15] Naima Boussekkine, Nawal Mecherout, Thierry Ramond, and Johannes Sjöstrand. PT-symmetry and Schrödinger operators - The double well case. *ArXiv e-prints*, 2015.
- [Bon11] Jean-Michel Bony. *Cours d'analyse : Théorie des distributions et analyse de Fourier*. Les éditions de l'école polytechnique, 2011.
- [BU03] David Borthwick and Alejandro Uribe. On the pseudospectra of Berezin-Toeplitz operators. *Methods Appl. Anal.*, 10(1) :31–65, 2003.
- [CdV95] Yves Colin de Verdière. Une introduction aux opérateurs de Toeplitz. In *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, No. 13, Année 1994–1995*, volume 13 of *Sémin. Théor. Spectr. Géom.* Univ. Grenoble I, Saint-Martin-d'Hères, 1995.
- [Cha88] Anne-Marie Charbonnel. Comportement semi-classique du spectre conjoint d'opérateurs pseudodifférentiels qui commutent. *Asymptotic Anal.*, 1(3) :227–261, 1988.
- [Cha03] Laurent Charles. Quasimodes and Bohr-Sommerfeld conditions for the Toeplitz operators. *Comm. Partial Differential Equations*, 28(9-10) :1527–1566, 2003.
- [Cha06] Laurent Charles. Symbolic calculus for Toeplitz operators with half-form. *J. Symplectic Geom.*, 4(2) :171–198, 2006.

-
- [CM15] Laurent Charles and Julien Marché. Knot state asymptotics I : AJ conjecture and Abelian representations. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 121 :279–322, 2015.
- [Cor79] Heinz O. Cordes. *Elliptic pseudodifferential operators—an abstract theory*, volume 756 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.
- [CR12] Monique Combescure and Didier Robert. *Coherent states and applications in mathematical physics*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer, Dordrecht, 2012.
- [CZ10] Tanya J. Christiansen and Maciej Zworski. Probabilistic Weyl laws for quantized tori. *Comm. Math. Phys.*, 299(2) :305–334, 2010.
- [Dat09] Nilanjana Datta. Prerequisites for quantum information theory. *Course at the University of Cambridge*, 2009.
- [Dav02] Edward B. Davies. Non-self-adjoint differential operators. *Bull. London Math. Soc.*, 34(5) :513–532, 2002.
- [ES13] Anna I. Esina and Andreï I. Shafarevich. Analogs of Bohr-Sommerfeld-Maslov quantization conditions on Riemann surfaces and spectral series of nonself-adjoint operators. *Russ. J. Math. Phys.*, 20(2) :172–181, 2013.
- [FK14] Clotilde Fermanian Kammerer. Opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques. <http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups14-02.pdf>, 2014.
- [Fri70] Kurt O. Friedrichs. *Pseudo-differential operators. An introduction*. Notes prepared with the assistance of R. Vaillancourt. Revised edition. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, 1970.
- [Gru70] Viktor V. Grušin. Pseudodifferential operators in R^n with bounded symbols. *Funkcional. Anal. i Priložen*, 4, 1970.
- [Hag06] Mildred Hager. Instabilité spectrale semiclassique d’opérateurs non-autoadjoints. II. *Ann. Henri Poincaré*, 7(6) :1035–1064, 2006.
- [Hit04] Michael Hitrik. Boundary spectral behavior for semiclassical operators in dimension one. *Int. Math. Res. Not.*, (64) :3417–3438, 2004.
- [Hör65] Lars Hörmander. Pseudo-differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 18, 1965.
- [Hör66] Lars Hörmander. Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems. *Ann. of Math. (2)*, 83, 1966.
- [Hör67] Lars Hörmander. Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations. In *Singular integrals (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. X, Chicago, Ill., 1966)*, pages 138–183. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967.
- [Hör79] Lars Hörmander. The Weyl calculus of pseudodifferential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 32(3) :360–444, 1979.
- [HR84] Bernard Helffer and Didier Robert. Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 41(3) :291–331, 1984.
- [HS90] Bernard Helffer and Johannes Sjöstrand. Analyse semi-classique pour l’équation de Harper. II. Comportement semi-classique près d’un rationnel. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (40), 1990.
- [HS04] Michael Hitrik and Johannes Sjöstrand. Non-selfadjoint perturbations of self-adjoint operators in 2 dimensions. I. *Ann. Henri Poincaré*, 5(1) :1–73, 2004.

- [HS08] Mildred Hager and Johannes Sjöstrand. Eigenvalue asymptotics for randomly perturbed non-selfadjoint operators. *Math. Ann.*, 342(1) :177–243, 2008.
- [HS15] Michael Hitrik and Johannes Sjöstrand. Two minicourses on analytic microlocal analysis. <http://arxiv.org/pdf/1508.00649v1.pdf>, 2015.
- [HSN07] Michael Hitrik, Johannes Sjöstrand, and San Vū Ngoc. Diophantine tori and spectral asymptotics for nonselfadjoint operators. *Amer. J. Math.*, 129(1) :105–182, 2007.
- [KN65] Joseph J. Kohn and Louis Nirenberg. An algebra of pseudo-differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 18, 1965.
- [LF14a] Yohann Le Floch. *Inverse spectral theory for 1D Toeplitz operators*. Theses, Université Rennes 1, 2014.
- [LF14b] Yohann Le Floch. Singular Bohr-Sommerfeld conditions for 1D Toeplitz operators : elliptic case. *Comm. Partial Differential Equations*, 39(2) :213–243, 2014.
- [LF14c] Yohann Le Floch. Singular Bohr-Sommerfeld conditions for 1D Toeplitz operators : hyperbolic case. *Anal. PDE*, 7(7) :1595–1637, 2014.
- [LL66] Lev Landau and Evguéni Lifchitz. *Physique théorique. Tome III : Mécanique quantique. Théorie non relativiste*. Traduit du Russe par Edouard Gloukhian. Éditions Mir, Moscow, 1966.
- [MS02] Anders Melin and Johannes Sjöstrand. Determinants of pseudodifferential operators and complex deformations of phase space. *Methods Appl. Anal.*, 9(2) :177–237, 2002.
- [MS03] Anders Melin and Johannes Sjöstrand. Bohr-Sommerfeld quantization condition for non-selfadjoint operators in dimension 2. *Astérisque*, (284) :181–244, 2003. Autour de l’analyse microlocale.
- [Non98] Stéphane Nonnenmacher. *Etats propres de systèmes classiquement chaotiques dans l’espace des phases*. PhD thesis, Université Paris Sud - Paris XI, 1998.
- [Rou15] Ophélie Rouby. Bohr-Sommerfeld quantization conditions for non-selfadjoint perturbations of selfadjoint operators in dimension one. *ArXiv e-prints*, 2015.
- [RS72] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*. Academic Press, New York-London, 1972.
- [RS75] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975.
- [Shu01] Mikhail A. Shubin. *Pseudodifferential operators and spectral theory*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2001. Translated from the 1978 Russian original by Stig I. Andersson.
- [Sjö02] Johannes Sjöstrand. Lectures on resonances. <http://sjostrand.perso.math.cnrs.fr/Coursgbg.pdf>, 2000-2002.
- [SV15] Johannes Sjöstrand and Martin Vogel. Large bi-diagonal matrices and random perturbations. *ArXiv e-prints*, 2015.
- [SZ07] Johannes Sjöstrand and Maciej Zworski. Elementary linear algebra for advanced spectral problems. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 57(7) :2095–2141, 2007. Festival Yves Colin de Verdière.

BIBLIOGRAPHIE

- [Tay74] Michael Taylor. *Pseudo differential operators*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 416. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.
- [TE05] Lloyd N. Trefethen and Mark Embree. *Spectra and pseudospectra*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005. The behavior of nonnormal matrices and operators.
- [UB64] André Unterberger and Juliane Bokobza. Les opérateurs de Calderon-Zygmund précisés. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 259, 1964.
- [VN00] San Vũ Ngọc. Bohr-Sommerfeld conditions for integrable systems with critical manifolds of focus-focus type. *Comm. Pure Appl. Math.*, 53(2) :143–217, 2000.
- [VN06] San Vũ Ngọc. *Systèmes intégrables semi-classiques : du local au global*, volume 22 of *Panoramas et Synthèses*. Société Mathématique de France, Paris, 2006.
- [Vog14] Martin Vogel. The precise shape of the eigenvalue intensity for a class of non-selfadjoint operators under random perturbations. *ArXiv e-prints*, 2014.
- [Zwo12] Maciej Zworski. *Semiclassical analysis*, volume 138 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

Résumé

On s'intéresse à la théorie spectrale d'opérateurs semi-classiques non auto-adjoints en dimension un et plus précisément aux développements asymptotiques des valeurs propres. Ces derniers font intervenir des objets géométriques issus de la mécanique classique dans l'espace des phases complexifié et correspondent à une généralisation des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld au cadre non auto-adjoint. Plus précisément, dans un premier temps, on étudie le spectre de perturbations non auto-adjointes d'opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints en dimension un à l'aide de techniques d'analyse microlocale analytique et en corollaire, on établit que pour des perturbations $\mathcal{PT}$ -symétriques d'opérateurs auto-adjoints, le spectre est réel. Ensuite, on présente des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld pour des perturbations non auto-adjointes d'opérateurs de Berezin-Toeplitz du plan complexe auto-adjoints. Dans un second temps, on s'intéresse aux différentes quantifications du tore $\mathbb{T}^2$ et plus précisément à la quantification de Berezin-Toeplitz du tore, à la quantification de Weyl classique du tore et à la quantification de Weyl complexe du tore. On établit des liens entre ces différentes quantifications notamment grâce à la transformée de Bargmann, puis à l'aide de simulations numériques, on met en évidence une conjecture sur des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld pour des perturbations non auto-adjointes d'opérateurs de Berezin-Toeplitz du tore auto-adjoints.

ABSTRACT

We interest ourselves in the spectral theory of non self-adjoint semi-classical operators in dimension one and in asymptotic expansions of eigenvalues. These expansions are written in terms of geometrical objects in a complex phase space coming from classical mechanics and correspond to a generalization of Bohr-Sommerfeld quantization conditions in the non self-adjoint case. First, we study non self-adjoint perturbations of self-adjoint pseudo-differential operators in dimension one by using techniques of analytic microlocal analysis. As a corollary, we establish for $\mathcal{PT}$ -symmetric perturbations of self-adjoint operators, that the spectrum is real. Then we show Bohr-Sommerfeld quantization conditions for non self-adjoint perturbations of self-adjoint Berezin-Toeplitz operators of the complex plane. In the second part, we look into quantizations of the torus $\mathbb{T}^2$, namely the Berezin-Toeplitz, the classical Weyl and the complex Weyl quantizations of the torus. We establish links between these different quantizations using Bargmann transform. We propose a conjecture, supported by numerical simulations, on Bohr-Sommerfeld quantization conditions for non self-adjoint perturbations of self-adjoint Berezin-Toeplitz operators of the torus.