

THÈSE EN CO-TUTELLE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉTAT DE TAMBOV

Discipline : MATHÉMATIQUES

Et

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Discipline : MATHÉMATIQUES

Présentée et soutenue publiquement par

Elena SARYCHEVA EVSEEVA

Le 20 septembre 2016

REPRÉSENTATIONS DU GROUPE PSEUDO-ORTHOGONAL DANS LES ESPACES DES FORMES DIFFÉRENTIELLES HOMOGÈNES

Thèse dirigée par M. **Vladimir MOLCHANOV**, Professeur, Université d'Etat de Tambov

Et par M. **Michael PEVZNER**, Professeur, Université de Reims Champagne-Ardenne

JURY

M. Jean-Louis CLERC,	, Professeur,	à l'Université de Lorraine,	, Président ,
M. Yuri NERETIN,	, Professeur,	à l'Université de Moscou et de Vienne,	, Rapporteur
Mme. Angela PASQUALE,	, Professeur,	à l'Université de Lorraine,	, Rapporteur
M. Emmanuel PEDON,	, Maître de Conférences,	à l'Université de Reims Champagne-Ardenne,	, Examineur
M. Michael PEVZNER,	, Professeur,	à l'Université de Reims Champagne-Ardenne,	, Examineur



Résumé

Dans cette thèse nous étudions des représentations du groupe de Lorentz dans les sections du fibré cotangent sur le cône isotrope. Grâce aux transformations de Fourier et de Poisson nous construisons explicitement tous les opérateurs de brisure de symétrie qui apparaissent dans les lois de branchement des produits tensoriels de telles représentations.

Mots clés

Représentations, groupe de Lorentz, formes différentielles, opérateurs d'entrelacement.

Abstract

In this thesis we study representations of the Lorentz group acting on sections of the cotangent bundle over the isotropic cone. Using Fourier and Poisson transforms we construct explicitly all the symmetry breaking operators that appear in branching laws of tensor products of such representations.

Keywords

Representations, Lorentz group, differential forms, intertwining operators.

TABLE DES MATIÈRES

Содержание

Introduction	6
Введение	10
Chapitre I	14
1 Représentations du groupe de Lorentz généralisé associées au cône	14
2 Analyse harmonique sur l'espace des formes différentielles de degré un sur la sphère	17
3 Représentations du groupe de Lorentz généralisé dans l'espace des formes différentielles homogènes de degré un sur le cône isotrope.	22
4 Les opérateurs d'entrelacement	25
5 Le produit tensoriel $T_{\sigma-1} \otimes \rho$	26
Глава I	29
1 Представления обобщенной группы Лоренца, связанные с конусом	29
2 Гармонический анализ в пространстве дифференциальных форм первого порядка на сфере	37
3 Представления обобщенной группы Лоренца в однородных дифференциальных формах первой степени на конусе	43
4 Сплетающие операторы	48
5 Тензорное произведение $T_{\sigma-1} \otimes \rho$	50
Chapitre II	53
6 Des représentations du groupe $SL(2, \mathbb{R})$	53
7 Le produit tensoriel $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$: la réalisation compacte	58
8 Le produit tensoriel $\pi_l \otimes \pi_m$: la réalisation non compacte	60
9 Le produit tensoriel $\pi_l \otimes \pi_m$ et l'hyperboloïde	62
10 Le produit tensoriel et le noyau de Poisson	66

Глава II	68
6 Представления группы $SL(2, \mathbb{R})$	68
7 Тензорное произведение $T_{\sigma, \varepsilon} \otimes \pi_m$: компактная картина	79
8 Тензорное произведение $\pi_l \otimes \pi_m$: некомпактная картина	89
9 Тензорное произведение $\pi_l \otimes \pi_m$ и гиперboloид	98
10 Тензорные произведения и ядро Пуассона	102
11 Conclusions	109
12 Литература	114

Introduction

La présente thèse est composée de deux chapitres. Tout d'abord, nous étudions les représentations du groupe de Lie pseudo-orthogonal opérant sur les formes différentielles homogènes sur le cône isotrope de dimension $n - 1$ dans $\mathbb{R}^n$.

Les représentations des groupes de Lie pseudo-orthogonaux dans les espaces des formes différentielles définies sur les espaces de Lobatchevski ont été étudiés par les mathématiciens de l'école française (P. Gaillard [15], E. Pedon [21] etc.). Leur méthode est basée sur l'analyse des K -types. Comme le montre l'expérience, il est parfois plus judicieux d'étudier les représentations associées au cône et les utiliser ensuite dans les décompositions des représentations associées aux hyperboloïdes. Par conséquent, la première étape était de décrire une série de représentations du groupe de Lorentz généralisé, c'est-à-dire le groupe pseudo-orthogonal $SO_o(1, n - 1)$, agissant dans les formes différentielles homogènes de degré un sur le cône isotrope de dimension $n - 1$ dans $\mathbb{R}^n$. Ce résultat est le contenu du chapitre I.

D'autre part, il est clair que les représentations dans les espaces des formes différentielles sont des facteurs des produits tensoriels des représentations dans les fonctions sur le cône et de la représentation tautologique du groupe pseudo-orthogonal ou de ces puissances extérieures. Nous nous sommes donc donnés un problème plus général: étudier des produits tensoriels des représentations dans les fonctions sur le cône et des représentations de dimension finie quelconques. Ainsi formulé ce problème à l'heure actuelle est extrêmement difficile (voir par exemple [25]). Nous avons donc commencé par le cas le plus simple et révélateur à la fois, celui du groupe $SO_0(1, 2)$ et de son recouvrement $SL(2, \mathbb{R})$. La décomposition des produits tensoriels des représentations du groupe $SL(2, \mathbb{R})$ est un sujet classique. L'aspect non trivial de cette thématique est l'étude des opérateurs d'entrelacement entre les produits tensoriels et leurs composantes irréductibles. Nous avons obtenu plusieurs résultats nouveaux qui sont présentés dans le chapitre II.

Dans le chapitre II, nous considérons deux situations: d'abord, le produit tensoriel $T_\sigma \otimes \pi_m$ d'une représentation de dimension infinie et d'une autre de dimension finie, ensuite, le produit tensoriel $\pi_l \otimes \pi_m$ de deux représentations de dimension finie.

Il est bien connu, que ces produits tensoriels se décomposent en somme directe de représentations irréductibles sans multiplicités. Nous décrivons explicitement les opérateurs d'entrelacement entre les produits tensoriels et leurs composantes irréductibles. Nous les appelons "transformées de Fourier" et leurs opérateurs formellement adjoints: "transformées de Poisson". Ces transformations sont des opérateurs différentiels. Pour la transformation de Poisson nous donnons trois approches possibles. Cette transformation de Fourier s'avère être proportionnelle aux crochets de Rankin-Cohen, ce qui correspond à la construction des opérateurs d'entrelacement explicite pour les décompositions des restrictions des représentations des groupes pseudo-orthogonaux à leurs sous-groupes réductifs dernièrement obtenue

dans une série de papiers de Kobayashi-Pevzner [17,18] et de Kobayashi-Kubo-Pevzner [16,19,20].

Nous développons trois méthodes basées sur trois idées différentes et pensons qu'elles peuvent être utiles dans un cadre plus général du problème. Premièrement, nous utilisons les vecteurs propres du produit des opérateurs de création et d'annihilation dans le produit tensoriel. Deuxièmement, nous utilisons l'analyse harmonique sur l'hyperboloïde à une nappe. En fait, les produits tensoriels $T_l \otimes T_m$ que nous considérons sont équivalents à la représentation du groupe $G = \text{SL}(2, \mathbb{R})$ dans les fonctions sur hyperboloïde à une nappe vu comme un espace homogène G/H dans $\mathbb{R}^3$, induite par un caractère de sous-groupe diagonal H . Et enfin, nous utilisons des équations différentielles en différences vérifiées par le noyau de Poisson.

Enfin, la décomposition du produit tensoriel de deux représentations de dimension infinie est un problème analytique difficile. Le calcul explicite de la mesure de Plancherel correspondante a été obtenu par V.F. Molchanov [6]. Nous n'utilisons pas cette méthode car dans le cas où l'une des représentations est de dimension finie, le problème revêt un aspect plus algébrique.

Fixons les notations.

On note $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres entiers, réels et complexes, respectivement, $\mathbb{R}^*$ – le groupe multiplicatif des réels: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Le symbole $\equiv$ désignera toujours la congruence modulo 2.

Nous utilisons la notation suivante pour le caractère (homomorphisme dans le groupe multiplicatif des nombres complexes) du groupe $\mathbb{R}^*$:

$$t^{\mu, \varepsilon} = |t|^\mu \text{sgn}^\varepsilon t, \quad (0.1)$$

où $t \in \mathbb{R}^*$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\varepsilon \in \mathbb{Z}$. Ce caractère ne dépend que de la classe de ε modulo 2, donc, nous considérons $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Nous notons $\text{Mat}(m, F)$ l'espace des matrices d'ordre m sur le corps F et E la matrice identité ou l'opérateur identité.

Soit $\mathcal{D}(M)$ l'espace des fonctions complexes à support compact infiniment dérivables sur une variété M , muni de la topologie usuelle. Soit $\mathcal{D}'(M)$ l'espace des fonctions généralisées sur M , i.e. celui des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(M)$.

Nous utilisons des notations standard pour les groupes de Lie classiques: $\text{SO}_0(p, q)$ (pour la composante connexe de l'unité du groupe des transformations linéaires de $\mathbb{R}^{p+q}$ conservant le forme quadratique de signature (p, q)), $\text{O}(n)$, $\text{SO}(n)$, $\text{SL}(n, \mathbb{R})$, $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, $\text{SL}(n, \mathbb{C})$.

Soit φ un automorphisme du groupe de Lie G , alors nous notons G^φ l'ensemble (le sous-groupe) d'éléments du groupe G , fixés par φ .

Un groupe de Lie est noté par une lettre majuscule, et son algèbre de Lie par la lettre gothique correspondante.

Étant donné une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on note $\text{Env}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante.

Nous définissons dans $\text{Env}(\mathfrak{g})$ une application linéaire $X \mapsto X^\vee$ de la façon

suivante. Pour des monômes $X = X_1 X_2 \dots X_m$, où $X_i \in \mathfrak{g}$, nous posons

$$X^\vee = (-X_m) \dots (-X_2)(-X_1) = (-1)^m X_m \dots X_2 X_1 \quad (0.2FR)$$

et la prolongeons à $\text{Env}(\mathfrak{g})$ par linéarité. Cette application est une anti-involution. Elle commute à la représentation adjointe:

$$(\text{ad } L \cdot X)^\vee = \text{ad } L \cdot X^\vee. \quad (0.3FR)$$

Une représentation T d'un groupe de Lie G induit une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (différentielle de la représentation T) et, par conséquent, une représentation de l'algèbre $\text{Env}(\mathfrak{g})$. Nous gardons le même symbole (dans ce cas T) pour ces trois représentations.

Considérons une forme bilinéaire sur $\mathcal{D}(M)$

$$(F, f) = \int_M F(x) f(x) dx \quad (0.4FR)$$

(dx – une mesure sur M) invariante par rapport à la paire de représentations (T, S) du groupe de Lie G , agissant dans $\mathcal{D}(M)$, c'est-à-dire

$$(T(g)F, S(g)f) = (F, f), \quad g \in G,$$

ou, également

$$(T(g)F, f) = (F, S(g^{-1})f), \quad g \in G. \quad (0.5FR)$$

Nous pouvons prolonger la représentation T sur l'espace $\mathcal{D}'(M)$ des fonctions généralisées sur M en utilisant la formule (0.5FR), où (F, f) désigne la valeur de la forme linéaire F de $\mathcal{D}'(M)$ sur la fonction test f de $\mathcal{D}(M)$. Nous conservons le même symbole (dans ce cas T) pour la représentation dans les fonctions généralisées qui nous avons construite. Il s'agit en effet d'un prolongement de la représentation T car l'espace $\mathcal{D}(M)$ est contenu dans $\mathcal{D}'(M)$. Si nous associons à la fonction $F \in \mathcal{D}(M)$ la forme linéaire $f \mapsto (F, f)$ appartenant à $\mathcal{D}'(M)$ en utilisant la formule (0.4FR), nous voyons que la formule (0.5FR) donne le prolongement recherché.

De même, si l'opérateur A dans $\mathcal{D}(M)$ est symétrique par rapport à la forme (0.4FR):

$$(AF, f) = (F, Af), \quad (0.6FR)$$

alors nous pouvons le prolonger dans $\mathcal{D}'(M)$ en utilisant la formule (0.6FR).

Soient T et S deux représentations d'un groupe G agissant dans les espaces V et W respectivement, soit $C : V \rightarrow W$ un opérateur d'entrelacement, c'est-à-dire un opérateur linéaire continu

$$C T(g) = S(g) C, \quad g \in G.$$

Alors nous dirons que: C entrelace T et S , et nous écrirons $C : T \curvearrowright S$.

Par irréductibilité nous entendons l'irréductibilité topologique, à savoir l'absence sous-espaces invariants propres fermés.

Nous utilisons la notation suivante pour les "puissances généralisées" ("factorielles décalées"):

$$a^{[m]} = a(a+1) \dots (a+m-1), \quad a^{(m)} = a(a-1) \dots (a-m+1), \quad (0.7FR)$$

où a est un nombre ou un opérateur et $m \in \mathbb{N}$ (nous utiliserons la notation $a^{[m]}$ plutôt que le symbole de Pochhammer $(a)_m$). De plus, nous définissons les puissances généralisées "de pas deux":

$$a^{\langle m \rangle} = a(a-2) \dots (a-2m+2).$$

Les puissances généralisées vérifient la formule binomiale suivante (voir [13] chapitre I, No. 35):

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{[j]} b^{[n-j]}. \quad (0.8FR)$$

Enfin nous écrivons $\Gamma(x)$ pour la fonction Gamma d'Euler et $B(x, y)$ pour la fonction Bêta d'Euler.

Введение

Диссертация состоит из двух глав. Ее структура отражает процесс работы над задачами.

Первоначальной задачей, поставленной перед автором, было изучение представлений псевдо-ортогональных групп, действующих в однородных дифференциальных формах на *изотропном конусе* в n -мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Изучение представлений псевдо-ортогональных групп, действующих в дифференциальных формах на *пространствах Лобачевского* было предпринято в работах математиков французской школы (П. Гайяр [15], Э. Педон [22] и др), однако, это исследование сопряжено с крайне громоздкими формулами, оно ведется с привлечением K -типов и т. д. Но, как показывает опыт работы с представлениями в функциях на гиперboloидах, надо сначала изучить представления, связанные с конусом, и затем использовать эти представления в разложении представлений на гиперboloидах.

Поэтому первым этапом (результатом) автора было описание серий представлений обобщенной группы Лоренца, то есть псевдо-ортогональной группы $SO_0(1, n - 1)$, действующих в однородных дифференциальных формах первой степени на изотропном конусе в n -мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$. Здесь пришлось преодолеть нетривиальные и значительные трудности. Этот результат составляет содержание главы I.

С другой стороны, было понятно, что представления в *дифференциальных формах* являются фактор-представлениями тензорных произведений представлений в *функциях* на конусе и тавтологического представления группы и внешних степеней тавтологического представления. Поэтому появилось желание заняться более общей задачей: изучить тензорные произведения представлений в *функциях* на конусе и произвольных конечномерных представлений группы. Но в такой широкой постановке задача, во всяком случае, в настоящее время, чрезвычайно трудна. Поэтому автор начал деятельность в этом направлении с изучения самого простого – но и ключевого – случая: с группы $SO_0(1, 2)$ и группы, ее накрывающей, – группы $SL(2, \mathbb{R})$. Разложение тензорных произведений представлений группы $SL(2, \mathbb{R})$, – это совершенно классическая тема. Здесь интерес представляет изучение *сплетающих операторов* – операторов, сплетающих само тензорное произведение и его неприводимые составляющие. Несмотря на указанную классичность, автору удалось получить несколько новых и интересных результатов. Это – содержание главы II.

В главе II мы рассматриваем два варианта: во-первых, тензорное произве-

дение $T_\sigma \otimes \pi_m$ бесконечномерного и конечномерного представления, во-вторых, тензорное произведение $\pi_l \otimes \pi_m$ двух конечномерных представлений.

Хорошо известно, что указанные тензорные произведения раскладываются в прямую однократную сумму неприводимых представлений. Мы пишем в явном виде операторы, сплетающие эти тензорные произведения и их неприводимые составляющие, мы называем их преобразованиями Пуассона и Фурье, они двойственны друг другу. Эти преобразования оказываются *дифференциальными* операторами. Для преобразования Пуассона мы даем три варианта. Преобразование Фурье с точностью до множителя совпадает со скобками Ранкина–Коэна.

Для получения наших результатов мы применяем три совершенно *разных* метода, они основаны на трех разных идеях. Мы полагаем, что эти три метода могут оказаться полезными при различных обобщениях задачи. Во-первых, мы используем собственные векторы произведения повышающего и понижающего операторов в тензорном произведении. Во-вторых, мы используем гармонический анализ на однополостном гиперboloиде. В самом деле, рассматриваемые тензорные произведения $T_l \otimes T_m$ эквивалентны представлению группы $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ в функциях на однополостном гиперboloиде G/H в $\mathbb{R}^3$, индуцированному характером диагональной подгруппы H . В-третьих, мы используем некоторое дифференциально-разностное уравнение для ядра Пуассона.

Что касается третьего варианта: разложение тензорного произведения двух *бесконечномерных представлений*, то он представляет собой весьма сложную аналитическую задачу. Явное вычисление меры Планшереля было получено в работе [Молчанов 1979]. Мы оставляем в стороне этот вариант. Случай, когда одно из представлений конечномерно, вносит в задачу значительный алгебраический аспект. Именно поэтому мы исследуем эти два варианта.

Приведем некоторые обозначения, формулы, а также некоторые стандартные рассуждения, используемые в работе.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ – множества целых, вещественных, комплексных чисел, соответственно, $\mathbb{R}^*$ – мультипликативная группа вещественных чисел: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Знак сравнения $\equiv$ обозначает сравнение по модулю 2.

Мы используем следующее обозначение для характера (гомоморфизма в мультипликативную группу комплексных чисел) группы $\mathbb{R}^*$:

$$t^{\mu, \varepsilon} = |t|^\mu \operatorname{sgn}^\varepsilon t, \quad (0.1)$$

где $t \in \mathbb{R}^*$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\varepsilon \in \mathbb{Z}$. Этот характер зависит только от класса вычетов числа ε по модулю 2, так что обычно мы берем $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Через $\operatorname{Mat}(m, F)$ обозначается пространство матриц m -го порядка над полем F .

Через E обозначается единичная матрица или единичный (тождественный) оператор.

Для многообразия M через $\mathcal{D}(M)$ обозначается пространство комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций на M с компактным носителем, снабженное обычной топологией. Через $\mathcal{D}'(M)$ обозначается пространство обобщенных функций на M – линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(M)$.

Мы используем стандартные обозначения для классических групп Ли: $SO_0(p, q)$ (это – связная компонента единицы группы линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^{p+q}$, сохраняющих квадратичную форму сигнатуры (p, q)), $O(n)$, $SO(n)$, $SL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$.

Для группы Ли G через G_e обозначается связная компонента единицы.

Если φ – автоморфизм группы Ли G , то через G^φ обозначается множество (подгруппа) элементов группы G , неподвижных для φ .

Если группа Ли обозначается заглавной латинской буквой, то ее алгебра Ли обозначается соответствующей строчной готической буквой.

Для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ мы обозначаем через $\text{Env}(\mathfrak{g})$ ее универсальную обертывающую алгебру.

Определим в $\text{Env}(\mathfrak{g})$ линейное отображение $X \mapsto X^\vee$ следующим образом. Для одночленов $X = X_1 X_2 \dots X_m$, где $X_i \in \mathfrak{g}$, положим

$$X^\vee = (-X_m) \dots (-X_2)(-X_1) = (-1)^m X_m \dots X_2 X_1 \quad (0.2)$$

и распространим на $\text{Env}(\mathfrak{g})$ по линейности. Это отображение является антиинволюцией. Оно коммутирует с присоединенным представлением:

$$(\text{ad } L \cdot X)^\vee = \text{ad } L \cdot X^\vee. \quad (0.3)$$

Представление T группы Ли G порождает представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (дифференциал представления T) и, тем самым, представление алгебры $\text{Env}(\mathfrak{g})$. Для этих порожденных представлений мы сохраняем тот же самый символ (в данном случае T), который обозначает представление группы.

Пусть билинейная форма на $\mathcal{D}(M)$

$$(F, f) = \int_M F(x) f(x) dx \quad (0.4)$$

(dx – некоторая мера на M) инвариантна относительно пары представлений (T, S) группы Ли G , действующих в $\mathcal{D}(M)$, то есть

$$(T(g)F, S(g)f) = (F, f),$$

или, что все равно,

$$(T(g)F, f) = (F, S(g^{-1})f). \quad (0.5)$$

Тогда мы можем распространить представление T на пространство $\mathcal{D}'(M)$ обобщенных функций на M – с помощью формулы (0.5), в которой (F, f) обозначает значение функционала F из $\mathcal{D}'(M)$ на основной функции f из $\mathcal{D}(M)$. Для полученного представления в обобщенных функциях мы сохраняем тот же символ

(в данном случае T). Это в самом деле есть расширение первоначального представления T , в самом деле, пространство $\mathcal{D}(M)$ вкладывается в $\mathcal{D}'(M)$, если мы сопоставим функции F из $\mathcal{D}(M)$ функционал $f \mapsto (F, f)$ из $\mathcal{D}'(M)$ с помощью формулы (0.4), а формула (0.5) и дает требуемое расширение.

Аналогично, если оператор A в $\mathcal{D}(M)$ симметричен относительно формы (0.4):

$$(AF, f) = (F, Af), \quad (0.6)$$

то мы можем распространить его на $\mathcal{D}'(M)$ с помощью формулы (0.6).

Пусть представления T и S группы G действуют в пространствах V и W соответственно, пусть оператор $C : V \rightarrow W$ – сплетающий оператор, то есть

$$CT(g) = S(g)C, \quad g \in G.$$

Тогда для краткости мы говорим: C сплетает T и S , и пишем $C : T \curvearrowright S$.

Под неприводимостью представления понимается топологическая неприводимость, то есть отсутствие собственных инвариантных подпространств.

Мы используем следующие обозначения для "обобщенных степеней" ("сдвинутых факториалов"):

$$a^{[m]} = a(a+1) \dots (a+m-1), \quad a^{\langle m \rangle} = a(a-1) \dots (a-m+1), \quad (0.7)$$

здесь a – число или оператор, $m \in \mathbb{N}$ (мы предпочитаем обозначение $a^{[m]}$ символу Похгаммера $(a)_m$). Кроме того, мы используем обобщенные степени "с шагом два":

$$a^{\langle m \rangle} = a(a-2) \dots (a-2m+2).$$

Для обобщенных степеней справедлива следующая биномиальная формула (см. [Полиа, Сеге] гл. I, No. 35):

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{[j]} b^{[n-j]}. \quad (0.8)$$

$\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера, $B(x, y)$ – бета-функция Эйлера.

Chapitre I. Représentations du groupe de Lorentz généralisé dans les formes différentielles sur le cône isotrope

1 Représentations du groupe de Lorentz généralisé associées au cône

Soit

$$[x, y] = -x_1 y_1 + x_2 y_2 \dots + x_n y_n \quad (1.1)$$

une forme bilinéaire dans l'espace $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, de signature $(1, n-1)$ (signature de Lorentz). Soit G le sous-groupe connexe du groupe de toutes les transformations linéaires de $\mathbb{R}^n$, préservant cette forme:

$$[xg, yg] = [x, y]. \quad (1.2)$$

En notation standard $G = \text{SO}_0(1, n-1)$. Ce groupe pseudo-orthogonal est aussi appelé le groupe de Lorentz généralisé.

Nous supposons que le groupe G agit dans $\mathbb{R}^n$ à droite: $x \mapsto xg$, de sorte que nous écrivons un vecteur de $\mathbb{R}^n$ comme une ligne.

Nous notons A le sous-groupe des matrices à un paramètre de la forme:

$$a_t = \begin{pmatrix} \text{ch } t & 0 & \text{sh } t \\ 0 & E_{n-2} & 0 \\ \text{sh } t & 0 & \text{ch } t \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Le groupe G admet la décomposition de Cartan

$$G = KAK,$$

où $K = \text{SO}(n)$. Cela signifie que chaque élément $g \in G$ peut être représenté comme $g = k_1 a k_2$, où $k_1, k_2 \in K$, $a \in A$ (qui n'est pas défini d'une façon unique).

Soit

$$I_{p,q} = \text{diag}\{-1, \dots, -1, +1, \dots, +1\}.$$

En particulier, on note $I = I_{1,n-1}$ la matrice de la forme bilinéaire $[\cdot, \cdot]$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note λ_i ses éléments diagonaux de telle sorte que $I = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G est composée de matrices réelles X d'ordre n , satisfaisant la relation

$$X' = -IXI,$$

où X' dénote la matrice transposée. Fixons une base de $\mathfrak{g}$ formée de matrices $L_{ij} = E_{ij} - \lambda_i \lambda_j E_{ji}$, $i < j$, où E_{ij} est une "unité matricielle" dont tous les coefficients sont nuls sauf l'élément (i, j) qui vaut 1.

La forme de Killing de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est donnée par $(n-2) \operatorname{tr}(XY)$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ se décompose en somme directe $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, où $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie du groupe K , et $\mathfrak{p}$ est le sous-espace orthogonal à $\mathfrak{k}$ par rapport à la forme de Killing.

Nous avons les relations de commutation suivantes:

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

L'élément de Casimir de l'algèbre enveloppante $\operatorname{Env}(\mathfrak{g})$ est donnée par $(2(n-2))^{-1} \Delta_{\mathfrak{g}}$, où

$$\Delta_{\mathfrak{g}} = - \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j L_{ij}^2.$$

Cet élément $\Delta_{\mathfrak{g}}$ sera également appelé l'élément de Casimir, car il appartient au centre de l'algèbre enveloppante.

Le rang de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ est égal à $[(n-1)/2]$ (nous notons $[a]$ la partie entière de $a \in \mathbb{R}$). Considérons la sous-algèbre $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{k}$ engendrée par les éléments $L_{2k, 2k+1}$, $k = 1, \dots, [(n-1)/2]$.

Soit $\mathcal{C}$ le cône $[x, x] = 0$, $x_1 > 0$ (la nappe supérieure du cône $[x, x] = 0$, $x \neq 0$). Le groupe G y agit transitivement.

Soit S la section du cône $\mathcal{C}$ par l'hyperplan $x_1 = 1$. Elle est composée de $s = (1, s_2, \dots, s_n)$, $s_2^2 + \dots + s_n^2 = 1$, de telle sorte qu'elle s'identifie à la sphère unité dans $\mathbb{R}^{n-1}$.

La représentation T_{σ} , $\sigma \in \mathbb{C}$, du groupe G agit dans $\mathcal{D}(S)$ par la formule

$$(T_{\sigma}(g)\varphi)(s) = \varphi\left(\frac{sg}{(sg)_1}\right)(sg)_1^{\sigma}.$$

L'élément de Casimir $\Delta_{\mathfrak{g}}$ se réduit à un opérateur scalaire:

$$T_{\sigma}(\Delta_{\mathfrak{g}}) = \sigma(\sigma + n - 2) \cdot E.$$

Soient Δ_S et ds l'opérateur de Laplace - Beltrami et la mesure sur S , correspondant à la métrique euclidienne sur S , à savoir, nous choisissons comme coordonnées locales sur S^{n-2} $n-2$ variables parmi les $s_2, \dots, s_n$. Alors

$$\begin{aligned} \Delta_S &= \sum \frac{\partial^2}{\partial s_i^2} - D_1^2 - (n-3)D_1, \quad D_1 = \sum s_i \frac{\partial}{\partial s_i}, \\ ds &= |s_k|^{-1} ds_1 \dots \widehat{ds_k} \dots ds_{n-1}, \end{aligned}$$

où l'on omet $\widehat{ds_k}$ (pour des k différents ces expressions définissent la même mesure). Cette mesure est invariante par rapport au sous-groupe K . Le volume de S , noté $\operatorname{vol} S = \Omega_{n-1}$, où

$$\Omega_r = \frac{2\pi^{r/2}}{\Gamma(r/2)}$$

est le volume de la sphère unité dans $\mathbb{R}^{n-1}$.

Sous l'application $s \mapsto \tilde{s} = (sg)/(sg)_1$ la mesure ds se transforme de la façon suivante: $d\tilde{s} = (sg)_1^{2-n} ds$. Par conséquent, la forme hermitienne

$$\langle \psi, \varphi \rangle_S = \int_S \psi(s) \overline{\varphi(s)} ds \quad (1.8)$$

est invariante par rapport à la paire $(T_\sigma, T_{2-n-\bar{\sigma}})$, c'est-à-dire

$$\langle T_\sigma(g)\psi, \varphi \rangle_S = \langle \psi, T_{2-n-\bar{\sigma}}(g^{-1})\varphi \rangle_S, \quad g \in G. \quad (1.9)$$

Nous définissons sur $\mathcal{D}(S)$ l'opérateur A_σ par:

$$(A_\sigma \varphi)(s) = \int_S (-[s, t])^{2-n-\sigma} \varphi(t) dt.$$

L'intégrale converge absolument pour $\operatorname{Re} \sigma < (2-n)/2$, et peut être prolongée méromorphiquement dans tout le plan σ . Ce prolongement admet des pôles (simples) en $\sigma \in (2-n)/2 + \mathbb{N}$. L'opérateur A_σ entrelace T_σ avec $T_{2-n-\sigma}$, c'est-à-dire

$$T_{2-n-\sigma}(g) A_\sigma = A_\sigma T_\sigma(g), \quad \forall g \in G.$$

De plus:

$$\langle A_\sigma \psi, \varphi \rangle_S = \langle \psi, A_{\bar{\sigma}} \varphi \rangle_S. \quad (1.10)$$

La forme sesquilineaire $\langle A_\sigma \psi, \varphi \rangle_S$ est invariante par rapport à la paire $(T_\sigma, T_{\bar{\sigma}})$. En particulier, pour $\sigma \in \mathbb{R}$ cette forme est la forme hermitienne invariante par rapport à T_σ .

2 Analyse harmonique sur l'espace des formes différentielles de degré un sur la sphère

Soit $K = \text{SO}(p)$ le groupe orthogonal des matrices d'ordre p de déterminant 1. Nous supposons que K agit de façon linéaire dans $\mathbb{R}^p$ à droite: $x \mapsto xk$. Soit

$$Q = x_1^2 + \dots + x_p^2$$

et S est la sphère $Q = 1$. Nous notons $\Lambda^1(M)$ l'espace des formes différentielles de degré un à coefficients lisses sur une variété M . Soit $\pi^{(1)}$ la représentation du groupe K par translations dans l'espace $\Lambda^1(S)$. Notre objectif est de décomposer cette représentation en irréductibles, voir Théorème 2.2 ci-dessous.

Tout d'abord, nous considérons le cas général $p \geq 4$. Les cas $p = 4$ et $p = 3$ sont un peu différents du cas général, nous les considérerons séparément plus loin.

Il est connu [3] que la représentation $\pi^{(0)}$ du groupe K par translations dans l'espace $C^\infty(S)$ se décompose en une somme directe sans multiplicités de représentations irréductibles de plus haut poids π_l , $(l, 0, \dots, 0)$, où $l \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, et le nombre de coordonnées du plus haut poids est $[p/2]$ (partie entière). Soit H_l l'espace des polynômes harmoniques homogènes dans $\mathbb{R}^p$ de degré l . La représentation π_l est la représentation du groupe K par translations dans H_l , elle est équivalente à l'action dans l'espace $H_l(S)$ des restrictions à la sphère S des polynômes en H_l .

Tout d'abord, nous considérons la représentation $U^{(1)}$ du groupe K par translations dans $\Lambda^1(\mathbb{R}^p)$. Elle est une somme directe des représentations $\pi_l \otimes \pi_1$, $l \in \mathbb{N}$, qui agissent dans les espaces $H_l \otimes dH_1$, où d est la différentielle, dH_1 a pour base $(dx_1, \dots, dx_p)$. La représentation $\pi_l \otimes \pi_1$ se décompose de la façon suivante, voir [19]:

$$\pi_l \otimes \pi_1 = \pi_{l-1} + \pi_{l,1} + \pi_{l+1}, \quad p > 4, \quad (2.1)$$

$$\pi_l \otimes \pi_1 = \pi_{l-1} + \pi_{l,1} + \pi_{l,-1} + \pi_{l+1}, \quad p = 4, \quad (2.2)$$

où $\pi_{l,\varepsilon}$ est la représentation irréductible de plus haut poids $(l, \varepsilon, 0, \dots, 0)$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ du groupe K admet une base $L_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$, $i < j$, où E_{ij} est une unité matricielle (en position (i, j) , 0 ailleurs). Le rang d'algèbre $\mathfrak{k}$ est égal à $[p/2]$. Nous prenons la sous-algèbre $\mathfrak{a}$ comme la sous-algèbre de Cartan, avec la base $L_{2k-1,2k}$, $k = 1, \dots, [p/2]$. L'algèbre radicielle positive $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{k}^\mathbb{C}$ est engendrée par les éléments

$$E_{k,m}^\pm = \frac{1}{2} \{L_{2k-1,2m-1} + iL_{2k-1,2m} \pm i(L_{2k-1,2m} + iL_{2k,2m})\}$$

–pour pair p . Si p est impair il faut ajouter $E_k = L_{2k-1,p} + iL_{2k,p}$.

Nous donnons les vecteurs de plus haut poids (les formes qui sont annulées par l'action de la sous-algèbre $\mathfrak{n}$) dans les termes de droite dans (2.1) et (2.2). Pour (2.1) ce sont les formes

$$(x_1 + ix_2)^{l-1} dQ, \quad (2.3)$$

$$(x_1 + ix_2)^{l-1} \{ (x_3 + ix_4)(dx_1 + idx_2) - (x_1 + ix_2)(dx_3 + idx_4) \}, \quad (2.4)$$

$$d \{ (x_1 + ix_2)^{l+1} \}, \quad (2.5)$$

pour (2.2) le premier et dernier vecteur sont les mêmes, et pour $\pi_{l,\pm 1}$ il faut dans (2.4) prendre $\pm x_4$ au lieu de x_4 . Ainsi, nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 2.1 (voir [21]) *La représentation $U^{(1)}$ du groupe K agissant par translations dans l'espace $\Lambda^1(\mathbb{R}^p)$ se décompose en somme directe des représentations irréductibles π_l , $l \geq 0$, et $\pi_{l,1}$, $l \geq 1$, pour $p > 4$, et des représentations π_l , $l \geq 0$, et $\pi_{l,\pm 1}$, $l \geq 1$ pour $p = 4$. Les multiplicités des représentations π_0 , $\pi_{l,1}$ et $\pi_{l,\pm 1}$ valent 1, les multiplicités des représentations π_l , $l \geq 1$, valent 2. Les vecteurs de plus haut poids des représentations irréductibles sont donnés ci-dessus, voir (2.3), (2.4), (2.5). Les représentations π_l agissent dans les espaces $H_l dQ$ et dH_l .*

La représentation $\pi^{(1)}$ est obtenue à partir de $U^{(1)}$ en restreignant les formes de $\Lambda^1(\mathbb{R}^p)$ sur la sphère S . En tant que sur la sphère S nous avons $Q = 1$ et, donc, $dQ = 0$, est la série des représentations π_l , $l \geq 0$, qui agir dans $H_l dQ$, disparaît. Nous obtenons

Théorème 2.2 (voir [21]) *La représentation $\pi^{(1)}$ du groupe K par translations dans $\Lambda^1(S)$ se décompose en somme directe de représentations irréductibles sans multiplicités. Les représentations π_l , $\pi_{l,1}$ pour $p > 4$ et π_l , $\pi_{l,\pm 1}$ pour $p = 4$. Ici $l \geq 1$. Les vecteurs de plus haut poids sont donnés dans (2.4) et (2.5) (dans (2.5) il faut remplacer $l + 1$ par l).*

Nous allons donner quelques informations supplémentaires pour $p = 4$. Nous venons d'établir que la représentation $\pi^{(1)}$ se décompose en somme directe sans multiplicités de représentations irréductibles π_l et $\pi_{l,\pm 1}$, $l = 1, 2, 3, \dots$, du groupe $K = \text{SO}(4)$. Les dimension des représentations π_l et $\pi_{l,\pm 1}$ est, respectivement, $(l + 1)^2$ et $l^2 + 2l$.

Nous introduisons les variables

$$u = x_1 + ix_2, \quad \bar{u} = x_1 - ix_2, \quad v = x_3 + ix_4, \quad \bar{v} = x_3 - ix_4.$$

à la place des variables x_1, x_2, x_3, x_4 dans $\mathbb{R}^4$. La base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ du groupe K est composée de six matrices

$$L_{km} = E_{km} - E_{mk}, \quad 1 \leq k < m \leq 4,$$

où E_{km} est une unité matricielle. Nous fixons dans $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ la sous-algèbre de Cartan engendrée par $L = -iL_{12}$, $M = -iL_{34}$. Les vecteurs radiciels sont:

$$E_{\pm} = \frac{1}{2} \left(L_{13} + iL_{23} \pm i(L_{14} + iL_{24}) \right),$$

$$F_{\pm} = \frac{1}{2} \left(L_{13} - iL_{23} \mp i(L_{14} - iL_{24}) \right).$$

Les $E_{\pm}$ correspondent aux racines positives. Nous écrivons les opérateurs de Lie correspondants:

$$L = u \frac{\partial}{\partial u} - \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{u}}, \quad M = v \frac{\partial}{\partial v} - \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{v}},$$

$$E_+ = -v \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + u \frac{\partial}{\partial \bar{v}}, \quad E_- = -\bar{v} \frac{\partial}{\partial u} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial v},$$

$$F_+ = -\bar{v} \frac{\partial}{\partial u} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial v}, \quad F_- = -v \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + u \frac{\partial}{\partial \bar{v}}.$$

Les formes:

$$e_l = u^{l-1} du, \quad f_l = u^{l-1} v du - u^l dv, \quad f_l^- = u^{l-1} \bar{v} du - u^l d\bar{v}.$$

sont les vecteurs de plus haut poids pour π_l , $\pi_{l,1}$, $\pi_{l,-1}$, (annulés par les opérateurs $E_{\pm}$), respectivement.

Pour étudier les représentations du groupe de Lorentz généralisé (groupe de de Sitter) $\text{SO}_0(1,4)$ il faut savoir, comment les opérateurs $\partial/\partial v - \partial/\partial \bar{v} = -i\partial/\partial x_4$ et $v - \bar{v}$ (multiplication par $v - \bar{v} = 2ix_4$) agissent sur les formes dans l'espace de la représentations $\pi_{l,\pm 1}$ où l'opérateur $\partial/\partial v - \partial/\partial \bar{v}$ est compris dans le sens que nous l'appliquons d'abord aux formes appropriées sur $\mathbb{R}^4$, puis nous prenons la restriction à S). Ces opérateurs commutent avec le sous-groupe $K' = \text{SO}(3)$, qui conserve x_4 , donc, ils préservent les sous-espaces invariants par rapport à K' . Soit π'_m la représentation irréductible de groupe K' de plus haut poids m (et dimension $2m+1$). Alors la restriction à K' admet la décomposition suivante:

$$\pi_l = \pi'_l + \dots + \pi'_0, \quad \pi_{l,\pm 1} = \pi'_l + \dots + \pi'_1. \quad (2.6)$$

Pour étudier l'action des opérateurs $\partial/\partial v - \partial/\partial \bar{v}$ et $v - \bar{v}$ il faut observer des vecteurs de plus haut poids relativement à K' qui sont annulés par l'opérateur de création $X = E_+ + E_-$. Nous considérons d'abord $\pi_{l,1}$. Nous notons $e_l^{(k)}$ et $f_l^{(k)}$ les

vecteurs de plus haut poids dans les représentations π'_k respectivement pour π_l et $\pi_{l,1}$ dans les décompositions (2.6). Nous avons:

$$e_l^{(k)} = \sum_{r=0}^{l-k} \frac{(k-l)^{[r]}(k+1)^{[r]}}{(-l)^{[r]}r!} (-1)^r F_-^{l-k-r} F_+^r e_l, \quad (2.7)$$

$$f_l^{(k)} = \sum_{r=0}^{l-k} \frac{(k-l)^{[r]}k^{[r]}}{(-l-1)^{[r]}r!} (-1)^r F_-^{l-k-r} F_+^r f_l. \quad (2.8)$$

Remarquons un lien entre les formules (2.7), (2.8) avec les polynômes hypergéométriques:

$$e_l^{(k)} = F(k-l, k+l; -l; -t), \quad f_l^{(k)} = F(k-l, k; -l-1; -t).$$

Théorème 2.3 (voir [21]) *Nous avons la formule suivante:*

$$\left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \right) f_l^{(k)} = \lambda e_l^{(k)} + \mu f_{l-1}^{(k)},$$

$$(v - \bar{v}) f_l^{(k)} = p f_{l+1}^{(k)} + q e_l^{(k)} + r f_{l-1}^{(k)},$$

où λ, μ, p, q, r sont des coefficients, dépendant de l et k , à savoir,

$$\lambda = \frac{k(k+1)}{l(l+1)}, \quad \mu = -\frac{(l-1)(l-k)(l+k+1)}{l},$$

$$p = -\frac{1}{l}, \quad q = -\frac{2}{l+2}\lambda, \quad r = -\frac{1}{l+1}\mu.$$

Ainsi, les opérateurs $\partial/\partial v - \partial/\partial \bar{v}$ et $v - \bar{v}$ entrelacent $\pi_{l,1}$ avec π_l , $\pi_{l-1,1}$ et avec $\pi_{l+1,1}$, π_l , $\pi_{l-1,1}$, respectivement. Des formules analogues sont vraies pour $\pi_{l,-1}$.

Enfin, nous considérons le cas $p = 3$. Alors K est le groupe orthogonal $SO(3)$, qui agit par rotations dans $\mathbb{R}^3$. Soient x, y, z , les coordonnées dans $\mathbb{R}^3$. Il est connu [3] que la représentation quasi-régulière R du groupe K sur la sphère unitaire S (dans l'espace $L^2(S)$) se décompose en somme directe de représentations irréductibles π_l de plus haut poids $l \in \mathbb{N}$. La représentation π_l agit dans l'espace V_l des restrictions à S des polynômes de H_l , où H_l est l'espace des polynômes harmoniques en x, y, z , de degré d'homogénéité l .

Tout d'abord, nous considérons la représentation $\pi^{(1)}$ du groupe K dans l'espace $\Lambda^1(S)$.

Théorème 2.4 (voir [21]) *La représentation $\pi^{(1)}$ se décompose en somme directe de représentations π_l , $l \geq 1$, avec multiplicité 2. Par conséquent, l'espace $\Lambda^1(S)$ se décompose en somme directe d'espaces irréductibles $W_{l,i}$, où $i = 1, 2$,*

$l \in \{1, 2, \dots\}$. Ces sous-espaces sont définis comme suit. Nous considérons deux opérateurs différentiels D_1 et D_2 :

$$D_1 = dx \cdot \frac{\partial}{\partial x} + dy \cdot \frac{\partial}{\partial y} + dz \cdot \frac{\partial}{\partial z},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ dx & dy & dz \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{vmatrix},$$

ainsi $D_1 f = df$, $D_2 f = (zf_y - yf_z)dx + (xf_z - zf_x)dy + (yf_x - xf_y)dz$. Alors $W_{l,i}$ est composé des restrictions sur S des formes $D_i f$, où $f \in H_l$.

3 Représentations du groupe de Lorentz généralisé dans l'espace des formes différentielles homogènes de degré un sur le cône isotrope.

Nous rappelons, voir § 1, que $\mathcal{C}$ est le cône dans $\mathbb{R}^n$, défini par les conditions $[x, x] = 0$, $x_1 > 0$. Le groupe $G = \text{SO}_0(1, n-1)$ y agit transitivement.

Soit S la section du cône $\mathcal{C}$ par l'hyperplan $x_1 = 1$.

$S = \{(1, s_2, \dots, s_n), s_2^2 + \dots + s_n^2 = 1\}$ donc S s'identifie à la sphère unité dans $\mathbb{R}^{n-1}$.

Les représentations T_σ du groupe $G = \text{SO}_0(1, n-1)$, opérant dans les fonctions homogènes sur le cône $\mathcal{C}$, sont décrites dans § 1. Voici quelques précisions relatives aux K -types, indiqués dans § 2.

La restriction de la représentation T_σ au sous-groupe $K = \text{SO}(n-1)$ du groupe G est la représentation $\pi^{(0)}$, voir § 2. Elle est somme directe sans multiplicités de représentations π_l , $l \geq 0$, du groupe K , agissant dans les espaces H_l .

Sous-espace $\mathfrak{p}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ relie les K -types de la façon suivante:

$$T_\sigma(\mathfrak{p})H_l = (\sigma - l)H_{l+1} + (\sigma + n - 3 + l)H_{l-1}.$$

Ces fonctions de barrière $\sigma - l$ et $\sigma + n - 3 + l$ vues comme des fonctions de l , permettent de décrire la structure des représentations T_σ . A savoir,

Théorème 3.1 (voir [3]) *Pour chaque $\sigma \in \mathbb{C}$, tel que $\sigma \notin \mathbb{N}$ et $\sigma \notin 2 - n - \mathbb{N}$, la représentation T_σ est irréductible. Si $\sigma \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{D}(S)$ a un sous-espace invariant irréductible V_σ . Ce dernier est de dimension finie et est la somme des sous-espaces H_l avec $l \leq \sigma$. L'espace quotient est irréductible. Si $\sigma \in 2 - n - \mathbb{N}$, alors nous avons une situation duale: l'espace $\mathcal{D}(S)$ contient un sous-espace invariant irréductible, ce dernier est la somme des sous-espaces H_l avec $l \geq 3 - n - \sigma$, espace quotient correspondant est irréductible et de dimension finie.*

Maintenant, nous considérons les représentations du groupe G dans l'espace des formes différentielles de degré un homogènes de degré σ sur le cône $\mathcal{C}$.

Fixons sur le cône $\mathcal{C}$ des coordonnées $(x_2, \dots, x_n)$. Rappelons que $\Lambda^1(\mathcal{C})$ est l'espace des formes différentielles

$$\omega = \sum_{k=2}^n \omega_k(x) dx_k \quad (3.1)$$

de degré 1 sur le cône $\mathcal{C}$.

Le groupe G agit dans l'espace $\Lambda^1(\mathcal{C})$ par translations. A savoir, l'élément $g \in G$ transforme le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ en le vecteur $\tilde{x} = xg$. Alors, cet élément transforme une forme différentielle (3.1) en la forme différentielle

$$\tilde{\omega} = \sum \omega_k(\tilde{x}) d\tilde{x}_k.$$

Soit $\Lambda_\sigma^1(\mathcal{C})$ avec $\sigma \in \mathbb{C}$, le sous-espace de $\Lambda^1(\mathcal{C})$, constitué des formes homogènes de degré d'homogénéité σ :

$$\omega|_{x \mapsto tx} = t^\sigma \omega, \quad t > 0.$$

Le groupe G conserve ce sous-espace. Nous notons $T_\sigma^{(1)}$ la représentation du groupe G dans $\Lambda_\sigma^1(\mathcal{C})$.

Nous introduisons sur le cône $\mathcal{C}$ des coordonnées polaires $x = rs$, où $r = x_1 > 0$, $s \in S$. Toute forme $\omega \in \Lambda_\sigma^1(\mathcal{C})$ se décompose en la somme suivante:

$$\omega = df + r^\sigma \zeta, \quad (3.2)$$

où

$$f = r^\sigma \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}(S), \quad \zeta \in \Lambda^1(S).$$

Le groupe G agit sur les fonctions de la forme $f = r^\sigma \varphi$ et donc sur leurs différentielles par la représentation T_σ . Ainsi, la formule (3.2) donne la décomposition $T_\sigma^{(1)}$ comme somme de deux représentations:

$$T_\sigma^{(1)} = T_\sigma + R_\sigma.$$

La représentation R_σ agit dans $\Lambda^1(S)$ de la façon suivante. Fixons comme coordonnées locales sur S les variables $s_2, \dots, s_n$, en omettant une d'entre-elles. Donc pour une forme $\zeta = \sum \zeta_j(s) ds_j \in \Lambda^1(S)$ nous avons

$$R_\sigma(g)\zeta = (sg)_1^\sigma \sum \zeta(\tilde{s}_j) d\tilde{s}_j,$$

où $\tilde{s} = (sg)/(sg)_1$.

La restriction à K de la représentation R_σ est la représentation $\pi^{(1)}$ du groupe K par rotations dans $\Lambda^1(S)$, discutée au § 2. Elle ne dépend pas de σ . La décomposition de la représentation $\pi^{(1)}$ a été obtenue au § 2.

Dans le cas $n = 4$ la représentation $\pi^{(1)}$ se décompose en somme directe de représentations π_l , $l \geq 1$, avec multiplicité 2 et la représentation R_σ se décompose en somme directe de deux copies de la représentation $T_{\sigma-1}$: $R_\sigma = T_{\sigma-1} + T_{\sigma-1}$.

Soit $n > 5$ (de sorte que $n - 1 > 4$). Ainsi $\pi^{(1)}$ se décompose en somme directe des représentations irréductibles sans multiplicités π_l et $\pi_{l,1}$ de plus haut poids $(l, 0, \dots, 0)$ et $(l, 1, 0, \dots, 0)$, respectivement, ici $l = 1, 2, \dots$. Soit V_l et W_l les espaces des représentations π_l et $\pi_{l,1}$, respectivement. Nous notons V et W leur somme sur l .

Théorème 3.2 (voir [21]) Soit $n > 5$. Les opérateurs $R_\sigma(X)$ avec $X \in \mathfrak{p}$ entrelacent les K -types V_l et W_l de la façon suivante:

$$R_\sigma(\mathfrak{p})W_l = (\sigma + n - 4 + l)W_{l-1} + (\sigma + 1)V_l + (\sigma - l - 1)W_{l+1},$$

$$R_\sigma(\mathfrak{p})V_l = (\sigma + n - 4 + l)V_{l-1} + \sigma W_l + (\sigma - l - 1)V_{l+1}.$$

Les fonctions de barrière $\sigma + n - 1 + l$, $\sigma + 1$ $\sigma - l - 1$ donnent des informations complètes sur la structure de R_σ . A savoir, nous avons

Théorème 3.3 (voir [21]) Soit $n > 5$. La représentation R_σ est irréductible sauf dans les cas $\sigma = -1, 0, 1, \dots$ et $\sigma = 3 - n, 2 - n, 1 - n, \dots$. Dans le cas $\sigma = 1, 2, 3, \dots$ l'espace $\Lambda^1(S)$ a un sous-espace invariant irréductible de dimension finie $\sum(V_l + W_l)$, $l \leq \sigma - 1$, l'espace quotient correspondant est irréductible. Dans le cas $\sigma = 3 - n, 2 - n, \dots$ la situation est duale: l'espace $\Lambda^1(S)$ a un sous-espace invariant irréductible de dimension infinie $\sum(V_l + W_l)$, $l \geq 4 - n - \sigma$, l'espace quotient correspondant est de dimension finie et est irréductible. Si $\sigma = 0$ ou $\sigma = -1$ nous avons un sous-espace irréductible V et W , respectivement, dont l'espace quotient est irréductible.

4 Les opérateurs d'entrelacement

Nous continuons l'analyse des représentations $T_\sigma^{(1)}$ du groupe de Lorentz généralisé $G = \mathrm{SO}_0(1, n-1)$ dans l'espace $\Lambda_\sigma^1(\mathcal{C})$, $\sigma \in \mathbb{C}$, des formes différentielles degré un et de degré d'homogénéité σ sur le cône $\mathcal{C}$. Nous avons montré dans le § 3 que la représentation $T_\sigma^{(1)}$ se décompose en somme de deux représentations:

$$T_\sigma^{(1)} = T_\sigma + R_\sigma. \quad (4.1)$$

La première d'entre-elles est la représentation associée au cône. De telles représentations sont décrites dans § 1.

Dans cette section, nous explicitons les opérateurs d'entrelacement pour les représentations $T_\sigma^{(1)}$:

Théorème 4.1 (voir [21]) *Soit $n > 5$. L'opérateur B dans $\Lambda^1(S)$, entrelaçant $R_\sigma \curvearrowright R_\nu$, existe seulement pour $\nu = \sigma$ et $\nu = 4 - n - \sigma$. Dans les deux cas, il est unique à un facteur scalaire près. Pour $\nu = \sigma$ c'est un opérateur scalaire. Si $\nu = 4 - n - \sigma$ la représentation R_σ est réductible, alors l'opérateur B dégénère sur un sous-espace irréductible pour R_σ , et son image est un sous-espace irréductible pour $R_{4-n-\sigma}$.*

Ce théorème découle des formules explicites pour les valeurs propres $v_l(\sigma)$ et $w_l(\sigma)$ de l'opérateur B sur les K -types V_m et W_m , respectivement. Ces formules sont prouvées à l'aide du théorème 3.1 et sont données à la page 18.

5 Le produit tensoriel $T_{\sigma-1} \otimes \rho$

La représentation $T_{\sigma}^{(1)}$ du groupe $G = \text{SO}_0(1, n-1)$ introduite dans le paragraphe précédent est une composante isotypique du produit tensoriel $\widehat{T}_{\sigma} = T_{\sigma-1} \otimes \rho$, où ρ est la représentation triviale du groupe G .

Nous conservons les notations du § 1. L'étude du produit tensoriel a été possible grâce à l'utilisation d'une nouvelle réalisation de la représentation T_{σ} . Cette réalisation est la suivante:

Soit $f \in \mathcal{D}_{\sigma}(\mathcal{C})$. Alors la fonction

$$h(x_2, \dots, x_n) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right), \quad x \in \mathcal{C},$$

est une fonction sur $\mathbb{R}^{n-1}$, homogène de degré 0. La fonction f peut être recoustituée à partir de h de la façon suivante:

$$f(x) = h(x_2, \dots, x_n).$$

La représentation T_{σ} dans les fonctions h agit de la façon suivante:

$$(T_{\sigma}(g)h)(x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\tilde{x}_1}{x_1}\right)^{\sigma} h(\tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n),$$

où $\tilde{x} = xg$. L'avantage de cette réalisation est que les éléments de la base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ correspondent aux opérateurs, avec des expressions très simples:

$$\begin{aligned} T_{\sigma}(L_{1k})h &= \sigma \frac{x_k}{x_1} h + x_1 \frac{\partial h}{\partial x_k}, \\ T_{\sigma}(L_{ij})h &= -x_j \frac{\partial h}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial h}{\partial x_j}, \quad 1 < i < j. \end{aligned}$$

La représentation triviale ρ du groupe G est donnée par la formule $\rho(g) = g$.

Soit $\widehat{\mathcal{D}}_{\sigma}(\mathcal{C})$ l'espace des fonctions vectorielles (les colonnes)

$$\alpha(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ \alpha_2(x) \\ \dots \\ \alpha_n(x) \end{pmatrix},$$

où les composants $\alpha_i(x)$ appartiennent à l'espace $\mathcal{D}_{\sigma-1}(\mathcal{C})$. Les vecteurs-colonnes des fonctions vectorielles, seront écrits sous forme des lignes.

Le produit tensoriel $\widehat{T}_{\sigma} = T_{\sigma-1} \otimes \rho$ agit dans l'espace $\widehat{\mathcal{D}}_{\sigma}(\mathcal{C})$ de la façon suivante:

$$(\widehat{T}_{\sigma}(g)\alpha)(x) = g \alpha(xg).$$

Soit $Q : \widehat{\mathcal{D}}_\sigma(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}_\sigma(\mathcal{C})$ l'opérateur suivant:

$$(Q\alpha)(x) = x\alpha(x) = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i(x).$$

Le noyau $\text{Ker } Q$ de cet opérateur se décompose en somme de deux sous-espaces V_0 et V_2 . Le sous-espace V_0 est composé des fonctions vectorielles $\alpha(x) = \mu(x) \cdot (-x_1, x_2, \dots, x_n)$, où $\mu \in \mathcal{D}_{\sigma-2}(\mathcal{C})$, l'espace V_2 est composé de fonctions vectorielles

$$\alpha(x) = (0, \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x))$$

de telle sorte que $\sum x_i \alpha_i(x) = 0$. En outre, soit V_1 le sous-espace de $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma(\mathcal{C})$, consistant des gradients de la fonction $f \in \mathcal{D}_\sigma(\mathcal{C})$:

$$\text{grad } f = x_1^{\sigma-1} \left(\sigma h, x_1 \frac{\partial h}{\partial x_2}, \dots, x_1 \frac{\partial h}{\partial x_n} \right).$$

Nous avons $Q \text{ grad } f = \sigma f$.

Théorème 5.1 (voir [22]) Soit $\sigma \neq 0$. Alors $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma(\mathcal{C})$ se décompose en somme directe de sous-espaces V_0 , V_1 et V_2 .

Théorème 5.2 Soit $\sigma \neq 0$. Alors dans "la base" V_0 , V_1 , V_2 nous avons

$$\widehat{T}_\sigma = \begin{pmatrix} T_{\sigma-2} & A_\sigma & B_\sigma \\ 0 & T_\sigma & 0 \\ 0 & 0 & R_\sigma \end{pmatrix}.$$

Ici R_σ est la représentation du groupe G dans V_2 , introduite dans § 3. Le produit tensoriel $\widehat{T}_\sigma = T_{\sigma-1} \otimes \rho$ diffère de la représentation dans les formes différentielles de la représentation V_0 , de telle sorte que dans la matrice de $\widehat{T}_\sigma$ il faut supprimer la première ligne et la première colonne.

La version infinitésimale est donnée par le théorème suivant. Soit P_k l'opérateur de la projection sur la k -ème coordonnée. Soit $L \in \mathfrak{g}$.

Théorème 5.3 Soit $\sigma \neq 0$. Alors dans "la base" V_0 , V_1 , V_2 nous avons

$$\widehat{T}_\sigma(L) = \begin{pmatrix} T_{\sigma-2}(L) & A_\sigma(L) & B_\sigma(L) \\ 0 & T_\sigma(L) & 0 \\ 0 & 0 & R_\sigma(L) \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} A_\sigma(L_{1k}) &= -T_{-\sigma}(L_{1k}), \\ B_\sigma(L_{1k}) &= -P_k, \\ A_\sigma(L_{ij}) &= 0, \quad B_\sigma(L_{ij}) = 0, \quad 1 < i < j. \end{aligned}$$

Il est intéressant d'écrire l'élément de Casimir

$$\Delta_{\mathfrak{g}} = \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j L_{ij}^2.$$

Dans la représentation T_σ il agit par la multiplication par $\sigma(\sigma + n - 2)$. Pour le produit tensoriel $\hat{T}_\sigma = T_{\sigma-1} \otimes \rho$ nous avons

Théorème 5.4 *Soit $\sigma \neq 0$. L'opérateur $\hat{T}_\sigma(\Delta_{\mathfrak{g}})$ dans "le base" V_0, V_1, V_2 s'écrit*

$$\hat{T}_\sigma(\Delta_{\mathfrak{g}}) = \begin{pmatrix} (\sigma - 2)(\sigma + n - 4) & -2\Delta + 2\sigma(\sigma - 1) & -2 \operatorname{div} \\ 0 & \sigma(\sigma + n - 2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(\sigma + n - 4) \end{pmatrix},$$

où Δ et div sont l'opérateur de Laplace et la divergence, respectivement:

$$\Delta h = x_1^2 \sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_k^2},$$

$$\operatorname{div} v = x_1 \sum_{k=2}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k},$$

où v est la fonction vectorielle $(0, v_2, \dots, v_n)$ sur V_2 , dont toutes les composantes sont de degré d'homogénéité 0.

Глава I. Представления обобщенной группы Лоренца в дифференциальных формах на изотропном конусе

1 Представления обобщенной группы Лоренца, связанные с конусом

Возьмем в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, билинейную форму

$$[x, y] = -x_1 y_1 + x_2 y_2 \dots + x_n y_n \quad (1.1)$$

сигнатуры $(1, n-1)$ (Лоренцовой сигнатуры). Пусть G – связная подгруппа в группе всех линейных преобразований n -мерного вещественного пространства, сохраняющих эту форму:

$$[xg, yg] = [x, y]. \quad (1.2)$$

В стандартных обозначениях $G = \text{SO}_0(1, n-1)$. Эта псевдо-ортогональная группа называется также обобщенной группой Лоренца.

Мы будем считать, что группа G действует в $\mathbb{R}^n$ справа: $x \mapsto xg$, так что мы будем записывать вектор из $\mathbb{R}^n$ в виде строки.

Через $I_{p,q}$ мы будем обозначать диагональную матрицу

$$I_{p,q} = \text{diag}\{-1, \dots, -1, +1, \dots, +1\}$$

(p минусов, q плюсов).

Матрица формы (1.1) есть $I = I_{1,n-1}$, ее диагональные элементы обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, так что

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1.$$

Условие (1.2) равносильно тому, что

$$gIg' = I, \quad (1.3)$$

где штрих означает матричное транспонирование.

Разобьем матрицы g из G на блоки (4 блока) соответственно разбиению $n = 1 + (n-1)$:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

где α – число, β – строка из $\mathbb{R}^{n-1}$, γ – столбец из $\mathbb{R}^{n-1}$, δ – матрица порядка $n-1$. Условие (1.3) равносильно тому, что

$$g^{-1} = I g' I,$$

для матрицы g блочного вида (1.4) имеем

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma' \\ -\beta' & \delta' \end{pmatrix},$$

так что

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta\beta' &= 1, \\ -\alpha\gamma' + \beta\delta &= 0, \\ \alpha\gamma - \delta\beta' &= 0, \\ -\gamma\gamma' + \delta^2 &= E_{n-1}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

через E_m обозначается единичная матрица порядка m .

Число α из (1.4) удовлетворяет неравенству $\alpha \geq 1$. В самом деле, из (1.5) следует, что $\alpha^2 \geq 1$. Поскольку для единичной матрицы выполняется $\alpha = 1$, по непрерывности получаем требуемое неравенство.

Пусть K – подгруппа блочно диагональных матриц

$$k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

где δ принадлежит ортогональной группе $SO(n-1)$. Эта подгруппа есть максимальная компактная подгруппа в G , она изоморфна $SO(n-1)$. Матрицы из K коммутируют с матрицей I .

Обозначим через A однопараметрическую подгруппу матриц

$$a_t = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & 0 & \operatorname{sh} t \\ 0 & E_{n-2} & 0 \\ \operatorname{sh} t & 0 & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Для группы G справедливо разложение Картана

$$G = KAK,$$

это означает, что всякий элемент $g \in G$ можно представить в виде $g = k_1 a k_2$, где $k_1, k_2 \in K$, $a \in A$ (неоднозначно).

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G состоит из вещественных матриц X порядка n , удовлетворяющих соотношению

$$X' = -IXI.$$

Базис в $\mathfrak{g}$ образован матрицами $L_{ij} = E_{ij} - \lambda_i \lambda_j E_{ji}$, $i < j$, где E_{ij} – "матричная единица" – матрица с единицей на месте (i, j) и нулями на остальных местах.

Форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$ есть $(n-2) \operatorname{tr}(XY)$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ распадается в прямую сумму $\mathfrak{k} + \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{k}$ – алгебра Ли группы K , а $\mathfrak{p}$ – подпространство, ортогональное $\mathfrak{k}$ в смысле формы Киллинга.

Имеют место следующие коммутационные соотношения:

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

В блочном виде, отвечающем разбиению $n = 1 + (n - 1)$, см. выше, матрицы из $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{p}$ имеют, соответственно, вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ \xi' & 0 \end{pmatrix},$$

где φ – кососимметрическая матрица порядка $n - 1$, ξ – строка из $\mathbb{R}^{n-1}$. Базис в $\mathfrak{k}$ образован матрицами L_{ij} с $1 < i < j$, базис в $\mathfrak{p}$ образован матрицами L_{1i} , $i > 1$.

Элемент Казимира в универсальной обертывающей алгебре $\text{Env}(\mathfrak{g})$ есть элемент $[2(n - 2)]^{-1} \Delta_{\mathfrak{g}}$, где

$$\Delta_{\mathfrak{g}} = - \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j L_{ij}^2.$$

Этот элемент $\Delta_{\mathfrak{g}}$ мы тоже будем называть элементом Казимира, он принадлежит центру универсальной обертывающей алгебры.

Ранг алгебры Ли $\mathfrak{k}$ равен $[(n - 1)/2]$ (через $[a]$ обозначается целая часть числа $a \in \mathbb{R}$). В качестве картановской подалгебры в $\mathfrak{k}$ мы берем подалгебру $\mathfrak{a}$ с базисом $L_{2k, 2k+1}$, $k = 1, \dots, [(n - 1)/2]$.

Пусть $\mathfrak{n}$ и $\bar{\mathfrak{n}}$ обозначают положительную и отрицательную подалгебры в $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$. Для нечетного n базис в $\mathfrak{n}$ образован элементами

$$E_{k,m}^{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ L_{2k, 2m} + iL_{2k, 2m+1} \pm i(L_{2k+1, 2m} + iL_{2k+1, 2m+1}) \right\},$$

где $1 \leq k < m \leq [(n - 1)/2]$. Для четного n к этим элементам надо добавить элементы

$$E_k = L_{2k, n} + iL_{2k+1, n}, \quad 1 \leq k \leq [(n - 2)/2].$$

Чтобы получить базис в $\bar{\mathfrak{n}}$, надо взять комплексное сопряжение от элементов базиса в $\mathfrak{n}$.

Всякая максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{p}$ одномерна, в качестве таковой возьмем подалгебру $\mathfrak{a}$, базисом которой служит матрица

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

так что $a_t = \exp tA_0$, см. (1.7).

Напомним [Виленкин] некоторый материал о представлениях группы G , связанных с конусом (представлениях класса один). Мы будем использовать "компактную картину".

Пусть $\mathcal{C}$ есть конус $[x, x] = 0, x_1 > 0$ (верхняя пола конуса $[x, x] = 0, x \neq 0$). Группа G действует транзитивно на нем.

Пусть S – сечение конуса $\mathcal{C}$ плоскостью $x_1 = 1$. Это сечение состоит из точек $s = (1, s_2, \dots, s_n)$, $s_2^2 + \dots + s_n^2 = 1$, так что оно есть единичная сфера в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Представление T_σ , $\sigma \in \mathbb{C}$, группы G действует в $\mathcal{D}(S)$ по формуле

$$(T_\sigma(g)\varphi)(s) = \varphi\left(\frac{sg}{(sg)_1}\right)(sg)_1^\sigma.$$

Элемент Казимира $\Delta_{\mathfrak{g}}$ переходит в скалярный оператор:

$$T_\sigma(\Delta_{\mathfrak{g}}) = \sigma(\sigma + n - 2) \cdot E.$$

Пусть Δ_S и ds – оператор Лапласа–Бельтрами и мера на S , отвечающие евклидовой метрике на S , а именно, возьмем в качестве локальных координат на S переменные $s_2, \dots, s_n$, кроме какой-нибудь одной из них, например, s_k , тогда

$$\begin{aligned} \Delta_S &= \sum \frac{\partial^2}{\partial s_i^2} - D_1^2 - (n-3)D_1, \quad D_1 = \sum s_i \frac{\partial}{\partial s_i}, \\ ds &= |s_k|^{-1} ds_1 \dots \widehat{ds_k} \dots ds_{n-1}, \end{aligned}$$

где дифференциал с крышкой надо опустить (при разных k эти выражения определяют одну и ту же меру). Эта мера инвариантна относительно подгруппы K . Объем всего S равен $\text{vol } S = \Omega_{n-1}$, где

$$\Omega_r = \frac{2\pi^{r/2}}{\Gamma(r/2)}$$

есть объем единичной сферы в $\mathbb{R}^r$.

При отображении $s \mapsto \tilde{s} = (sg)/(sg)_1$ мера ds преобразуется следующим образом: $d\tilde{s} = (sg)_1^{2-n} ds$. Отсюда следует, что эрмитова форма

$$\langle \psi, \varphi \rangle_S = \int_S \psi(s) \overline{\varphi(s)} ds \quad (1.8)$$

инвариантна относительно пары $(T_\sigma, T_{2-n-\bar{\sigma}})$, то есть

$$\langle T_\sigma(g)\psi, \varphi \rangle_S = \langle \psi, T_{2-n-\bar{\sigma}}(g^{-1})\varphi \rangle_S, \quad g \in G. \quad (1.9)$$

Определим на $\mathcal{D}(S)$ оператор A_σ :

$$(A_\sigma\varphi)(s) = \int_S (-[s, t])^{2-n-\sigma} \varphi(t) dt.$$

Интеграл абсолютно сходится при $\text{Re } \sigma < (2-n)/2$, его можно продолжить мероморфно на всю плоскость σ , он имеет полюсы (простые) в точках $\sigma \in (2-n)/2 + \mathbb{N}$. Оператор A_σ сплетает T_σ с $T_{2-n-\sigma}$, т. е.

$$T_{2-n-\sigma}(g) A_\sigma = A_\sigma T_\sigma(g).$$

С формой (1.8) оператор A_σ взаимодействует следующим образом:

$$\langle A_\sigma \psi, \varphi \rangle_S = \langle \psi, A_{\bar{\sigma}} \varphi \rangle_S. \quad (1.10)$$

Полуторалинейная форма $\langle A_\sigma \psi, \varphi \rangle_S$ инвариантна относительно пары $(T_\sigma, T_{\bar{\sigma}})$. В частности, для $\sigma \in \mathbb{R}$ эта форма – инвариантная эрмитова форма для T_σ .

Приведем некоторые сведения о гармоническом анализе на сфере S . Обозначим через R представление группы K вращениями в $\mathcal{D}(S)$:

$$(R(k)\varphi)(s) = \varphi(sk),$$

Это представление разлагается в прямую однократную сумму неприводимых представлений π_l , действующих в пространствах H_l , $l \in \mathbb{N}$ (напомним, что $n \geq 4$). Пространство H_l состоит из ограничений на S однородных гармонических многочленов от переменных $x_2, \dots, x_n$ степени l . Это пространство является собственным пространством для оператора Лапласа-Бельтрами Δ_S с собственным значением

$$\mu_l = l(3 - n - l). \quad (1.11)$$

Сферической (зональной) функцией относительно стационарной подгруппы точки $s^0 = (1, 0, \dots, 0, 1)$ в H_l является функция

$$\psi_l(s) = C_l^{(n-3)/2}(s_n) / C_l^{(n-3)/2}(1),$$

где $C_l^\lambda(t)$ – многочлен Гегенбауэра. Размерность пространства H_l равна

$$d_l = (2l + n - 3) \frac{(l + n - 4)!}{l! (n - 3)!}. \quad (1.12)$$

Скалярный квадрат сферической функции связан с размерностью d_l пространства H_l :

$$\langle \psi_l, \psi_l \rangle_S = \frac{\text{vol } S}{d_l}. \quad (1.13)$$

Пусть E_l – проектор в $\mathcal{D}(S)$ (или в $L^2(S, ds)$) на подпространство H_l :

$$(E_l \varphi)(s^0 k) = \frac{\langle \pi(k) \varphi, \psi_l \rangle_S}{\langle \psi_l, \psi_l \rangle_S}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(S). \quad (1.14)$$

Из (1.14) с помощью неравенства Коши-Буняковского и (1.13) мы находим оценку для проекций (компонент Фурье):

$$|(E_l \varphi)(s)| \leq \sqrt{\frac{d_l}{\text{vol } S}} \cdot \|\varphi\|_S, \quad (1.15)$$

где норма отвечает скалярному произведению (1.8). В частности, из (1.15) получаем оценку

$$|\psi_l(s)| \leq 1.$$

Применим (1.15) к $\Delta_S^k \varphi$ вместо φ . Используя перестановочность Δ_S и E_l , мы получим оценку

$$\left| E_l \varphi(s) \right| \leq \sqrt{\frac{d_l}{\text{vol } S}} \cdot |\lambda_l|^{-k} \|\Delta_S^k \varphi\|_S. \quad (1.16)$$

Поскольку размерность d_l , см. (1.12), при $l \rightarrow \infty$ растет как $C \cdot l^{n-3}$, а $|\lambda_l|$, см. (1.11), растет как l^2 , из (1.16) следует быстрое убывание как компонент Фурье $\varphi_l = E_l \varphi$, так и их норм, т. е. для всякого $h \in \mathbb{N}$ существует постоянная C такая, что

$$\begin{aligned} |\varphi_l(s)| &\leq C (l+1)^{-h}, \\ \|\varphi_l\|_S &\leq C (l+1)^{-h}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Всякая функция $\varphi \in \mathcal{D}(S)$ разлагается в сумму своих проекций (компонент Фурье):

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l.$$

И обратно, если последовательность функций $\varphi_l \in H_l$ быстро убывает в смысле (1.17), то ряд $\sum \varphi_l$ сходится абсолютно и равномерно к некоторой функции $\varphi \in \mathcal{D}(S)$, компонентами Фурье которой и являются φ_l .

Ограничение представления T_σ на подгруппу K есть как раз представление R группы K вращениями на $\mathcal{D}(S)$, оно не зависит от σ .

Пространство H_l является собственным пространством для оператора A_σ с собственным значением

$$a(\sigma, l) = (-1)^l 2^{-\sigma} \pi^{(n-2)/2} \frac{\Gamma(-\sigma - (n-2)/2) \Gamma(3-n-\sigma)}{\Gamma(3-n-\sigma-l) \Gamma(-\sigma+l)}. \quad (1.18)$$

Композиция $A_{2-n-\sigma} A_\sigma$ есть скалярный оператор:

$$A_{2-n-\sigma} A_\sigma = \gamma(\sigma) \cdot E,$$

где

$$\gamma(\sigma)^{-1} = (2\pi)^{-n+1} (2\sigma + n - 2) \sin\left(\sigma + \frac{n}{2}\right) \pi \cdot \Gamma(-\sigma) \Gamma(\sigma + n - 2).$$

Представление T_σ можно распространить на пространство $\mathcal{D}'(S)$ обобщенных функций на S посредством формулы (1.9). Аналогично, оператор A_σ можно распространить на $\mathcal{D}'(S)$ посредством (1.10).

Представление T_σ неприводимо при $\sigma \in \mathbb{C}$, за исключением $\sigma \in \mathbb{N}$ и $\sigma \in 2 - n - \mathbb{N}$. Если T_σ неприводимо, то T_σ эквивалентно $T_{2-n-\sigma}$ с помощью оператора A_σ или его вычета.

Оператор A_σ имеет простые полюсы в точках $\sigma = (2 - n)/2 + k$, $k \in \mathbb{N}$. Это видно из формулы (1.18), полюсы происходят от первой гамма-функции в числителе в (1.18). Поэтому оператор

$$\tilde{A}_\sigma = \Gamma\left(\frac{2-n}{2} - \sigma\right)^{-1} A_\sigma$$

является целой функцией от σ , нигде не обращающейся в нуль. Он сплетает T_σ с $T_{2-n-\sigma}$ для всех $\sigma \in \mathbb{C}$.

На подпространстве H_l оператор $\tilde{A}_\sigma$ есть умножение на число:

$$\tilde{A}_\sigma \varphi = \tilde{a}(\sigma, l) \varphi, \quad \varphi \in H_l,$$

где

$$\tilde{a}(\sigma, l) = (-1)^l 2^{-\sigma} \pi^{(n-2)/2} \frac{\Gamma(3 - n - \sigma)}{\Gamma(3 - n - \sigma - l) \Gamma(-\sigma + l)}$$

В полюсах оператора A_σ оператор $\tilde{A}_\sigma$ есть многочлен степени k от оператора Лапласа–Бельтрами Δ_S , а именно,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{k+(2-n)/2} &= (-1)^k \frac{2^{-k+(n-2)/2} \pi^{(n-2)/2}}{\Gamma(k + \frac{n-2}{2})} \times \\ &\times \prod_{r=1}^k \left[\Delta_S - \left(\frac{n-4}{2} + r \right) \left(\frac{n-2}{2} - r \right) \right], \end{aligned}$$

при $k = 0$ произведение считается равным 1, так что

$$\tilde{A}_{(2-n)/2} = (2\pi)^{(n-2)/2} / \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right).$$

Для $n \geq 4$ имеются три серии неприводимых унитаризуемых представлений: *непрерывная серия* состоит из представлений T_σ , $\sigma = (2 - n)/2 + i\rho$, $\rho \in \mathbb{R}$, скалярное произведение есть (1.8); *дополнительная серия* состоит из представлений T_σ , $2 - n < \sigma < 0$, скалярное произведение есть $(\psi, \varphi)_\sigma = c_\sigma \langle \tilde{A}_\sigma \psi, \varphi \rangle_S$. Нормирующий множитель c_σ возьмем так, чтобы на пространстве H_0 (константы) скалярное произведение $(\psi, \varphi)_\sigma$ совпадало с (1.8), для этого надо взять

$$c_\sigma = \frac{1}{\tilde{a}(\sigma, 0)} = 2^\sigma \pi^{(2-n)/2} \Gamma(-\sigma);$$

дискретная серия состоит из представлений $T_r^{(d)}$, $r \in \mathbb{N}$, действующих в факторпространствах $V_r = \mathcal{D}(S)/E_r$, скалярное произведение есть

$$(\hat{\psi}, \hat{\varphi})_r = c_r (\tilde{A}_r \psi, \varphi)_S,$$

где $\hat{\varphi}$ обозначает класс смежности $\varphi + E_r$, возьмем множитель c_r так, чтобы на подпространстве с наименьшим весом $r + 1$ в V_r , т.е. на элементах $\hat{\varphi} = \varphi + E_r$, $\varphi \in H_{r+1}$, скалярное произведение совпадало с (1.8), а именно,

$$c_r = \frac{1}{\tilde{a}(r, r+1)} = 2^r \pi^{(2-n)/2} \frac{\Gamma(n+r-2)}{\Gamma(n+2r-1)},$$

представления $T_r^{(d)}$ эквивалентны представлениям $T_{2-n-r}^{(d)}$ в V_{2-n-r} .

Оператор $\tilde{A}_\sigma$ обращается в нуль на E_σ при $\sigma \in \mathbb{N}$ и на V_σ при $\sigma \in 2 - n - \mathbb{N}$ и порождает эквивалентность представлений в подфакторах: пусть $r \in \mathbb{N}$, тогда

$$\mathcal{D}(S)/E_r \sim V_{2-n-r}, \quad \mathcal{D}(S)/V_{2-n-r} \sim E_r.$$

2 Гармонический анализ в пространстве дифференциальных форм первого порядка на сфере

Пусть $K = \text{SO}(p)$ – ортогональная группа матриц порядка p с определителем 1. Мы будем считать, что K линейно действует в $\mathbb{R}^p$ справа: $x \mapsto xk$, в соответствии с этим будем писать вектор в виде строки. Пусть

$$Q = x_1^2 + \dots + x_p^2$$

и пусть S обозначает сферу $Q = 1$. Для многообразия M мы обозначаем через $\Lambda^1(M)$ пространство дифференциальных форм на M первого порядка с гладкими коэффициентами. Пусть $\pi^{(1)}$ – представление группы K сдвигами в пространстве $\Lambda^1(S)$. Наша цель – разложить это представление на неприводимые, см. теорему 2.2 ниже.

Сначала мы рассмотрим общий случай $p \geq 4$. Случаи $p = 4$ и $p = 3$ имеют некоторые отличия от общего случая, мы рассмотрим их отдельно ниже.

Известно [3], что представление $\pi^{(0)}$ группы K сдвигами в пространстве $C^\infty(S)$ функций на S разлагается в прямую однократную сумму неприводимых представлений π_l , где $l \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, со старшим весом $(l, 0, \dots, 0)$, количество координат в старшем весе равно $[p/2]$ (целая часть). Пусть H_l обозначает пространство однородных гармонических многочленов в $\mathbb{R}^p$ степени l . Представление π_l – это представление группы K сдвигами в H_l , оно же эквивалентно действует и в пространстве $H_l(S)$ ограничений на сферу S многочленов из H_l .

Сначала рассмотрим представление $U^{(1)}$ группы K сдвигами в $\Lambda^1(\mathbb{R}^p)$. Оно есть прямая сумма представлений $\pi_l \otimes \pi_1$, $l \in \mathbb{N}$, действующих в пространствах $H_l \otimes dH_1$, здесь d – дифференциал, dH_1 имеет базис $dx_1, \dots, dx_p$. Представление $\pi_l \otimes \pi_1$ разлагается так, см. [19]:

$$\pi_l \otimes \pi_1 = \pi_{l-1} + \pi_{l,1} + \pi_{l+1}, \quad p > 4, \quad (2.1)$$

$$\pi_l \otimes \pi_1 = \pi_{l-1} + \pi_{l,1} + \pi_{l,-1} + \pi_{l+1}, \quad p = 4, \quad (2.2)$$

здесь $\pi_{l,\varepsilon}$ – неприводимое представление со старшим весом $(l, \varepsilon, 0, \dots, 0)$.

Алгебра Ли $\mathfrak{k}$ группы K имеет своим базисом матрицы $L_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$, $i < j$, где E_{ij} – матричная единица (1 на месте (i, j) , 0 на остальных местах). Ранг алгебры $\mathfrak{k}$ равен $[p/2]$. В качестве картановской подалгебры возьмем подалгебру $\mathfrak{a}$ с базисом $L_{2k-1,2k}$, $k = 1, \dots, [p/2]$. Положительная корневая подалгебра $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{k}^\mathbb{C}$ натянута на элементы

$$E_{k,m}^\pm = \frac{1}{2} \{L_{2k-1,2m-1} + iL_{2k-1,2m} \pm i(L_{2k-1,2m} + iL_{2k,2m})\}$$

– при четном p , а при нечетном p надо к ним добавить $E_k = L_{2k-1,p} + iL_{2k,p}$.

Укажем старшие векторы (формы, аннулируемые подалгеброй $\mathfrak{n}$) в правых частях (2.1) и (2.2). Для (2.1) – это, соответственно, формы

$$(x_1 + ix_2)^{l-1} dQ, \quad (2.3)$$

$$(x_1 + ix_2)^{l-1} \{ (x_3 + ix_4)(dx_1 + idx_2) - (x_1 + ix_2)(dx_3 + idx_4) \}, \quad (2.4)$$

$$d \{ (x_1 + ix_2)^{l+1} \}, \quad (2.5)$$

для (2.2) первый и последний вектор – те же самые, а для $\pi_{l,\pm 1}$ надо в (2.4) взять $\pm x_4$ вместо x_4 . Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 2.1 ([21]) *Представление $U^{(1)}$ группы K сдвигами в пространстве $\Lambda^1(\mathbb{R}^p)$ разлагается в прямую сумму неприводимых представлений π_l , $l \geq 0$, и $\pi_{l,1}$, $l \geq 1$, – для $p > 4$, и представлений π_l , $l \geq 0$, и $\pi_{l,\pm 1}$, $l \geq 1$ – для $p = 4$. Кратности представлений π_0 , $\pi_{l,1}$ и $\pi_{l,\pm 1}$ равны 1, кратности представлений π_l , $l \geq 1$, равны 2. Старшие векторы неприводимых представлений указаны выше, см. (2.3), (2.4), (2.5). Представления π_l действуют в пространствах $H_l dQ$ и dH_l .*

Представление $\pi^{(1)}$ получается из $U^{(1)}$ при ограничении форм из $\Lambda^1(\mathbb{R}^p)$ на сферу S . Поскольку на сфере S мы имеем $Q = 1$ и, стало быть, $dQ = 0$, серия представлений π_l , $l \geq 0$, действующих в $H_l dQ$, исчезает. Мы получаем

Теорема 2.2 ([21]) *Представление $\pi^{(1)}$ группы K сдвигами в $\Lambda^1(S)$ разлагается в прямую однократную сумму неприводимых представлений π_l , $\pi_{l,1}$ для $p > 4$ и π_l , $\pi_{l,\pm 1}$ для $p = 4$. Здесь $l \geq 1$. Старшие векторы указаны в (2.4) и (2.5) (в (2.5) надо заменить $l + 1$ на l).*

Дадим некоторую дополнительную информацию для $p = 4$. Как мы только что выяснили, представление $\pi^{(1)}$ разлагается в прямую однократную сумму неприводимых представлений π_l и $\pi_{l,\pm 1}$, $l = 1, 2, 3, \dots$, группы $K = \text{SO}(4)$. Размерности представлений π_l и $\pi_{l,\pm 1}$ равны, соответственно, $(l + 1)^2$ и $l^2 + 2l$.

Вместо переменных x_1, x_2, x_3, x_4 в $\mathbb{R}^4$ нам удобно ввести переменные

$$u = x_1 + ix_2, \quad \bar{u} = x_1 - ix_2, \quad v = x_3 + ix_4, \quad \bar{v} = x_3 - ix_4.$$

Базис алгебры Ли $\mathfrak{k}$ группы K состоит из шести матриц

$$L_{km} = E_{km} - E_{mk}, \quad 1 \leq k < m \leq 4,$$

E_{km} – матричная единица. Возьмем в $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ картановскую подалгебру с базисом $L = -iL_{12}$, $M = -iL_{34}$. Корневыми векторами служат элементы

$$E_{\pm} = \frac{1}{2} \left(L_{13} + iL_{23} \pm i(L_{14} + iL_{24}) \right),$$

$$F_{\pm} = \frac{1}{2} \left(L_{13} - iL_{23} \mp i(L_{14} - iL_{24}) \right).$$

Положительным корням отвечают $E_{\pm}$. Напишем соответствующие операторы Ли:

$$\begin{aligned} L &= u \frac{\partial}{\partial u} - \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{u}}, & M &= v \frac{\partial}{\partial v} - \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{v}}, \\ E_+ &= -v \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + u \frac{\partial}{\partial \bar{v}}, & E_- &= -\bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + u \frac{\partial}{\partial v}, \\ F_+ &= -\bar{v} \frac{\partial}{\partial u} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial v}, & F_- &= -v \frac{\partial}{\partial u} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{v}}. \end{aligned}$$

Старшими векторами (аннулируемыми операторами $E_{\pm}$) для π_l , $\pi_{l,1}$, $\pi_{l,-1}$ являются соответственно формы:

$$e_l = u^{l-1} du, \quad f_l = u^{l-1} v du - u^l dv, \quad f_l^- = u^{l-1} \bar{v} du - u^l d\bar{v}.$$

Для исследования представлений обобщенной группы Лоренца (группы де Ситтера) $SO_0(1, 4)$ надо знать, как действуют операторы $\partial/\partial v - \partial/\partial \bar{v} = -i\partial/\partial x_4$ и $v - \bar{v}$ (умножение на $v - \bar{v} = 2ix_4$) на формы из пространства представления $\pi_{l,\pm 1}$ оператор $\partial/\partial v - \partial/\partial \bar{v}$ понимается в следующем смысле: сначала применяем его к соответствующим формам в $\mathbb{R}^4$, а затем берем ограничение на S). Эти операторы коммутируют с подгруппой $K' = SO(3)$, сохраняющей x_4 , следовательно, сохраняют подпространства, инвариантные относительно K' . Пусть π'_m обозначает неприводимое представление группы K' со старшим весом m (и размерностью $2m + 1$). При ограничении на K' мы имеем следующие разложения:

$$\pi_l = \pi'_l + \dots + \pi'_0, \quad \pi_{l,\pm 1} = \pi'_l + \dots + \pi'_1. \quad (2.6)$$

Для изучения действия операторов $\partial/\partial v - \partial/\partial \bar{v}$ и $v - \bar{v}$ достаточно проследить за старшими векторами относительно K' , аннулируемыми повышающим оператором $X = E_+ + E_-$. Рассмотрим сначала $\pi_{l,1}$. Обозначим через $e_l^{(k)}$ и $f_l^{(k)}$ старшие векторы в представлениях π'_k соответственно для π_l и $\pi_{l,1}$ в разложениях (2.6). Мы имеем:

$$e_l^{(k)} = \sum_{r=0}^{l-k} \frac{(k-l)^{[r]}(k+1)^{[r]}}{(-l)^{[r]}r!} (-1)^r F_-^{l-k-r} F_+^r e_l, \quad (2.7)$$

$$f_l^{(k)} = \sum_{r=0}^{l-k} \frac{(k-l)^{[r]}k^{[r]}}{(-l-1)^{[r]}r!} (-1)^r F_-^{l-k-r} F_+^r f_l. \quad (2.8)$$

Отметим очевидную связь формул (2.7), (2.8) с гипергеометрическими многочленами:

$$e_l^{(k)} = F(k-l, k+l; -l; -t), \quad f_l^{(k)} = F(k-l, k; -l-1; -t).$$

Теорема 2.3 ([21]) *Имеют место следующие формулы:*

$$\left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial \bar{v}}\right)f_l^{(k)} = \lambda e_l^{(k)} + \mu f_{l-1}^{(k)},$$

$$(v - \bar{v})f_l^{(k)} = p f_{l+1}^{(k)} + q e_l^{(k)} + r f_{l-1}^{(k)},$$

где λ, μ, p, q, r – коэффициенты, зависящие от l и k , а именно,

$$\lambda = \frac{k(k+1)}{l(l+1)}, \quad \mu = -\frac{(l-1)(l-k)(l+k+1)}{l},$$

$$p = -\frac{1}{l}, \quad q = -\frac{2}{l+2}\lambda, \quad r = -\frac{1}{l+1}\mu.$$

Таким образом, операторы $\partial/\partial v - \partial/\partial \bar{v}$ и $v - \bar{v}$ зацепляют $\pi_{l,1}$ соответственно с π_l , $\pi_{l-1,1}$ и с $\pi_{l+1,1}$, π_l , $\pi_{l-1,1}$. Аналогичные формулы справедливы для $\pi_{l,-1}$.

Наконец, рассмотрим случай $p = 3$. Тогда K – ортогональная группа $SO(3)$, она действует вращениями в $\mathbb{R}^3$. Пусть x, y, z , – координаты в $\mathbb{R}^3$. Известно [Вилленкин], что квазирегулярное представление R группы K на единичной сфере S (в пространстве $L^2(S)$) разлагается в прямую однократную сумму неприводимых представлений π_l со старшим весом $l \in \mathbb{N}$. Подпространство V_l , в котором действует π_l , состоит из ограничений на S многочленов из H_l – пространства гармонических многочленов от x, y, z , однородных степени l .

Сначала мы рассмотрим представление $\pi^{(1)}$ группы K сдвигами в пространстве $\Lambda^1(S)$ дифференциальных форм на S степени 1 (с гладкими коэффициентами).

Теорема 2.4 *Представление $\pi^{(1)}$ разлагается в прямую сумму представлений π_l , $l \geq 1$, с кратностью 2. Соответственно пространство $\Lambda^1(S)$ разлагается в прямую сумму неприводимых подпространств $W_{l,i}$, где $i = 1, 2$, $l \in \{1, 2, \dots\}$. Эти подпространства описываются следующим образом. Рассмотрим два дифференциальных оператора D_1 и D_2 :*

$$D_1 = dx \cdot \frac{\partial}{\partial x} + dy \cdot \frac{\partial}{\partial y} + dz \cdot \frac{\partial}{\partial z},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ dx & dy & dz \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{vmatrix},$$

так что $D_1 f = df$, $D_2 f = (zf_y - yf_z)dx + (xf_z - zf_x)dy + (yf_x - xf_y)dz$. Тогда $W_{l,i}$ состоит из ограничений на S форм $D_i f$, где $f \in H_l$.

Доказательство. Пусть L_i , $i = 1, 2, 3$, – элементы из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G , отвечающие вращениям вокруг координатных осей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующие элементы из комплексификации $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$:

$$L_0 = -iL_3, \quad E_+ = L_2 - iL_1, \quad E_- = -L_2 - iL_1.$$

Соотношения коммутации таковы:

$$[L_0, E_+] = E_+, \quad [L_0, E_-] = -E_-, \quad [E_+, E_-] = 2L_0.$$

Вместо x, y введем новые переменные: $u = x + iy$, $\bar{u} = x - iy$. В переменных $u, \bar{u}, z$ имеем

$$L_0 = u \frac{\partial}{\partial u} - \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{u}}, \quad E_+ = 2z \frac{\partial}{\partial \bar{u}} - u \frac{\partial}{\partial z}, \quad E_- = -2z \frac{\partial}{\partial u} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Оператор E_+ в H_l аннулирует u^l (старший вектор).

В линейном пространстве $\tilde{H}_1$ с базисом dx, dy, dz , или, что все равно, с базисом $du, d\bar{u}, dz$, действует представление π_1 .

Пространство дифференциальных форм в $\mathbb{R}^3$ степени 1 с коэффициентами из пространства H гармонических многочленов есть тензорное произведение $H \otimes \tilde{H}_1$. В нем действует тензорное произведение $(\sum \pi_l) \otimes \pi_1 = \sum (\pi_l \otimes \pi_1)$, сумма берется по $l \in \mathbb{N}$. Известно, что $\pi_l \otimes \pi_1 = \pi_{l-1} + \pi_l + \pi_{l+1}$. Соответственно этому, пространство $H \otimes \tilde{H}_l$ распадается в сумму $V_l^{(-1)} + V_l^{(0)}$. Следовательно, представление π_l с $l \geq 1$ появляется в разложении пространства $H \otimes \tilde{H}_1$ три раза, и оно действует в пространствах $V_{l-1}^{(-1)}$, $V_l^{(0)}$, $V_{l-1}^{(+1)}$. Старшие векторы в этих подпространствах имеют выражения, соответственно:

$$\begin{aligned} & 2lu^{l-1}(z^2 + u\bar{u})du - (2l+1)u^l(\bar{u}du + 2zdz + u d\bar{u}), \\ & u^{l-1}zdu - u^l dz, \\ & u^{l-1}du. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Представление π_0 (размерности 1) входит однократно, оно действует в $V_l^{(-1)}$, базис есть $\bar{u}du + 2zdz + u d\bar{u}$.

При ограничении на сферу S мы должны учесть еще соотношение

$$\bar{u}du + 2zdz + u\bar{u} = 0,$$

вытекающее из $z^2 + u\bar{u} = 1$. Тогда мы видим, что (2.9) превращается в $2lu^{l-1}du$, так что на S имеем $V_{l+1}^{(-1)} = V_{l-1}^{(+1)}$, а $V_l^{(-1)}$ исчезает. Обозначим через $W_{l,1}$ и $W_{l,2}$ ограничения на S соответственно пространств $V_{l-1}^{(+1)}$ и $V_l^{(0)}$. Мы получим

указанное в теореме разложение ограничения пространства $H \otimes \tilde{H}_1$ на S . Наконец, прямая проверка показывает, что $V_{l-1}^{(+1)} = D_1 H_l$ и $V_l^{(0)} = D_2 H_l$. $\square$

Отметим, в частности, что элементы в $W_{l,1}$ и $W_{l,2}$, инвариантные относительно вращений вокруг третьей оси, – это $P'_l(z)dz$ и $P'_l(z)(ydx - xdy)$, где $P_l(z)$ – многочлен Лежандра, штрих – дифференцирование.

Теперь рассмотрим пространства $\Lambda^k(S)$ и $\Lambda^k(\mathbb{R}^3)$ дифференциальных форм с гладкими коэффициентами степени k на S и на $\mathbb{R}^3$, соответственно. Здесь $k = 0, 1, 2$ и $k = 0, 1, 2, 3$ для S и $\mathbb{R}^3$, соответственно. Пусть $\pi^{(k)}$ и $U^{(k)}$ – представления группы K сдвигами в $\Lambda^k(S)$ и $\Lambda^k(\mathbb{R}^3)$, соответственно.

Мы уже рассмотрели выше разложение представления $\pi^{(1)}$. Сейчас мы рассмотрим $\pi^{(2)}$. Поскольку существует G -инвариантная форма $\omega \in \Lambda^2(S)$ – элемент площади на S , мы имеем $\Lambda^{(2)}(S) = \Lambda^{(0)}(S) \cdot \omega$, так что $\pi^{(2)}$ эквивалентно $\pi^{(0)} = R$ (разложение указано выше). Однако, мы хотим выяснить, как $\pi^{(2)}$ взаимодействует с $U^{(2)}$ и $\pi^{(1)}$. Эти построения будут полезными в более общих ситуациях (сфера в $\mathbb{R}^n$ и др.).

Напомним, что $U^{(1)}$ разлагается в прямую сумму представлений π_l с кратностью 3 для $l \geq 1$ и с кратностью 1 для $l = 0$. Выше указаны явные выражения для старших векторов в неприводимых подпространствах.

Представления $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ эквивалентны с помощью оператора $\star$, отображающего $\Lambda^{(1)}(\mathbb{R}^3)$ на $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$:

$$\star(Pdx + Qdy + Rdz) = Pdydz + Qdzdx + Rdx dy.$$

В частности, вводя новые переменные $u = x + iy$, $\bar{u} = x - iy$ имеем

$$\star du = i dz du, \quad \star d\bar{u} = -i dz d\bar{u}, \quad \star dz = \frac{i}{2} du d\bar{u}.$$

Следовательно, $U^{(2)}$ разлагается точно так же, как и $U^{(1)}$. Старшие векторы получаем с помощью $\star$, а именно, для $l \geq 1$ – это три формы

$$(a) : 2lu^{l-1}Qi dz du - (2l + 1)u^l(\star dQ),$$

$$(b) : u^{l-1}z idz du - \frac{i}{2}u^l du d\bar{u},$$

$$(c) : u^{l-1}i dz du,$$

а для $l = 0$ – это форма $\star dQ$.

Теперь ограничим $\Lambda^{(2)}(\mathbb{R}^3)$ на сферу S . На S мы имеем:

$$\star d\sigma = 2\omega, \quad dz du = -iu\omega, \quad du d\bar{u} = -2iz\omega.$$

Следовательно, при ограничении на S форма (b) исчезает, а формы (a) и (c) совпадают с точностью до множителя: (a) есть $-2(l + 1)u^l\omega$, (c) есть $u^l\omega$, она же для $l = 0$ дает 2ω .

В частности, композиция операторов D_1 и D_2 , оператора $\star$ и ограничения на S таковы: $\star D_1 f = lf\omega$ для $f \in H_l$, $\star D_2 = 0$.

3 Представления обобщенной группы Лоренца в однородных дифференциальных формах первой степени на конусе

Напомним, см. § 1, что $\mathcal{C}$ есть конус в $\mathbb{R}^n$, задаваемый условиями $[x, x] = 0$, $x_1 > 0$. Группа $G = \text{SO}_0(1, n-1)$ действует на нем транзитивно.

Пусть S – сечение конуса $\mathcal{C}$ плоскостью $x_1 = 1$. Это сечение состоит из точек $s = (1, s_2, \dots, s_n)$, $s_2^2 + \dots + s_n^2 = 1$, так что оно есть единичная сфера в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Представления T_σ группы $G = \text{SO}_0(1, n-1)$, действующие в однородных функциях на конусе $\mathcal{C}$, описаны в § 1. Приведем некоторые уточнения, связанные с K -типами, указанными в § 2.

Ограничение представления T_σ на подгруппу $K = \text{SO}(n-1)$ группы G есть представление $\pi^{(0)}$, см. § 2. Оно есть прямая однократная сумма представлений π_l , $l \geq 0$, группы K , действующих в пространствах H_l .

Подпространство $\mathfrak{p}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ связывает K -типы следующим образом:

$$T_\sigma(\mathfrak{p})H_l = (\sigma - l)H_{l+1} + (\sigma + n - 3 + l)H_{l-1}.$$

Эти барьерные функции $\sigma - l$ и $\sigma + n - 3 + l$ – как функции от l – дают возможность описать структуру представлений T_σ . Именно,

Теорема 3.1 ([21]) *Для всякого σ , исключая $\sigma \in \mathbb{N}$ и $\sigma \in 2 - n - \mathbb{N}$, представления T_σ неприводимы. Если $\sigma \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{D}(S)$ имеет инвариантное неприводимое подпространство V_σ , оно конечномерно и есть сумма подпространств H_l с $l \leq \sigma$. Фактор-пространство неприводимо. Если $\sigma \in 2 - n - \mathbb{N}$, то картина двойственная: пространство $\mathcal{D}(S)$ содержит инвариантное неприводимое подпространство, оно есть сумма подпространств H_l с $l \geq 3 - n - \sigma$, фактор-пространство по нему неприводимо и конечномерно.*

Теперь рассмотрим представления группы G в дифференциальных формах степени один на конусе $\mathcal{C}$ степени однородности σ .

Возьмем на конусе $\mathcal{C}$ в качестве координат переменные $x_2, \dots, x_n$. Напомним, что $\Lambda^1(\mathcal{C})$ есть пространство дифференциальных форм

$$\omega = \sum_{k=2}^n \omega_k(x) dx_k \quad (3.1)$$

степени 1 на конусе $\mathcal{C}$.

Группа G действует на пространстве $\Lambda^1(\mathcal{C})$ сдвигами. А именно, пусть элемент $g \in G$ переводит вектор $x \in \mathbb{R}^n$ в вектор $\tilde{x} = xg$. Тогда этот элемент $g \in G$ переводит дифференциальную форму (3.1) в дифференциальную форму

$$\tilde{\omega} = \sum \omega_k(\tilde{x}) d\tilde{x}_k.$$

Пусть $\Lambda_\sigma^1(\mathcal{C})$, $\sigma \in \mathbb{C}$, обозначает подпространство в $\Lambda^1(\mathcal{C})$, состоящее из однородных форм степени однородности σ :

$$\omega|_{x \mapsto tx} = t^\sigma \omega, \quad t > 0.$$

Группа G сохраняет это подпространство. Обозначим через $T_\sigma^{(1)}$ соответствующее представление группы G .

Введем теперь на конусе $\mathcal{C}$ полярные координаты $x = rs$, где $r = x_1 > 0$, $s \in S$. Всякая форма ω из $\Lambda_\sigma^1(\mathcal{C})$ разлагается в следующую сумму:

$$\omega = df + r^\sigma \zeta, \quad (3.2)$$

где

$$f = r^\sigma \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}(S), \quad \zeta \in \Lambda^1(S).$$

На функциях $f = r^\sigma \varphi$, и следовательно на их дифференциалах, группа G действует посредством представления T_σ . Следовательно, формула (3.2) дает разложение $T_\sigma^{(1)}$ в сумму двух представлений:

$$T_\sigma^{(1)} = T_\sigma + R_\sigma.$$

Представление R_σ действует на $\Lambda^1(S)$ следующим образом. Возьмем в качестве локальных координат на S переменные $s_2, \dots, s_n$, опуская одну из них. Тогда для формы $\zeta = \sum \zeta_j(s) ds_j$ из $\Lambda^1(S)$ мы имеем

$$R_\sigma(g)\zeta = (sg)_1^\sigma \sum \zeta(\tilde{s}_j) d\tilde{s}_j,$$

где $\tilde{s} = (sg)/(sg)_1$. Остается изучить R_σ .

Ограничение представления R_σ на K есть представление $\pi^{(1)}$ группы K вращениями в $\Lambda^1(S)$, рассмотренное выше в § 2. Оно не зависит от σ . Разложение представления $\pi^{(1)}$ было сделано в § 2.

В случае $n = 4$ представление $\pi^{(1)}$ разлагается в прямую двукратную сумму представлений π_l , $l \geq 1$, представление R_σ распадается в прямую сумму двух экземпляров представлений $T_{\sigma-1}$: $R_\sigma = T_{\sigma-1} + T_{\sigma-1}$.

Пусть теперь $n > 5$ (так что $n - 1 > 4$). Тогда $\pi^{(1)}$ разлагается в прямую однократную сумму неприводимых представлений π_l и $\pi_{l,1}$ со старшими весами $(l, 0, \dots, 0)$ и $(l, 1, 0, \dots, 0)$, соответственно, здесь $l = 1, 2, \dots$. Пусть V_l и W_l обозначают пространства представлений π_l и $\pi_{l,1}$, соответственно. Обозначим через V и W их суммы по l .

Теорема 3.2 ([21]) Пусть $n > 5$. Операторы $R_\sigma(X)$, $X \in \mathfrak{p}$ зацепляют указанные K -типы следующим образом:

$$R_\sigma(\mathfrak{p})W_l = (\sigma + n - 4 + l)W_{l-1} + (\sigma + 1)V_l + (\sigma - l - 1)W_{l+1},$$

$$R_\sigma(\mathfrak{p})V_l = (\sigma + n - 4 + l)V_{l-1} + \sigma W_l + (\sigma - l - 1)V_{l+1}.$$

Барьерные функции $\sigma + n - 1 + l$, $\sigma + 1$, $\sigma - l - 1$ дают полную информацию о структуре R_σ . А именно, мы имеем

Теорема 3.3 ([21]) Пусть $n > 5$. Представление R_σ неприводимо за исключением случаев $\sigma = -1, 0, 1, \dots$ и $\sigma = 3 - n, 2 - n, 1 - n, \dots$. В случае $\sigma = 1, 2, 3, \dots$ пространство $\Lambda^1(S)$ имеет неприводимое конечномерное инвариантное подпространство $\sum(V_l + W_l)$, $l \leq \sigma - 1$, фактор-пространство по которому неприводимо. В случае $\sigma = 3 - n, 2 - n, \dots$ ситуация двойственная: пространство $\Lambda^1(S)$ имеет неприводимое бесконечномерное инвариантное подпространство $\sum(V_l + W_l)$, $l \geq 4 - n - \sigma$, фактор-пространство по которому конечномерно и неприводимо. При $\sigma = 0$ и $\sigma = -1$ имеется одно неприводимое подпространство V и W , соответственно, фактор-пространство по которому неприводимо.

Наконец, пусть $n = 5$, тогда представление $\pi^{(1)}$ разлагается в прямую однократную сумму неприводимых представлений π_l , $\pi_{l,1}$ и $\pi_{l,-1}$, $l \geq 1$, действующих в пространствах V_l , W_l^+ , W_l^- . Формулы из теоремы 1 изменяются соответственно:

$$R_\sigma(\mathfrak{p})W_l^\pm = (\sigma + l + 1)W_{l-1}^\pm + (\sigma + 1)V_l + (\sigma - l - 1)W_{l+1}^\pm,$$

$$R_\sigma(\mathfrak{p})V_l = (\sigma + l + 1)V_{l-1} + \sigma W_l^+ + \sigma W_l^- + (\sigma - l - 1)V_{l+1}.$$

Отсюда получаем теорему, аналогичную теореме 2.

Приведем *пример* [21]: покажем в явном виде, как элемент $L \in \mathfrak{p}$ зацепляет K -типы в представлении R_σ для $n = 7$. Достаточно рассмотреть только один элемент $L \in \mathfrak{p}$. В качестве такового мы возьмем L_{12} .

Вместо $x_2, \dots, x_7$ удобно ввести новые переменные:

$$u = x_2 + ix_3, \quad v = x_4 + ix_5, \quad w = x_6 + ix_7,$$

$$\bar{u} = x_2 - ix_3, \quad \bar{v} = x_4 - ix_5, \quad \bar{w} = x_6 - ix_7.$$

Обозначим для краткости

$$\xi = du, \quad \eta = dv, \quad \zeta = dw,$$

$$\bar{\xi} = d\bar{u}, \quad \bar{\eta} = d\bar{v}, \quad \bar{\zeta} = d\bar{w}.$$

Вот операторы, отвечающие элементам отрицательной корневой подалгебры $\bar{\mathfrak{n}}$ в представлении $\pi^{(1)}$:

$$\begin{aligned} F_1 &= -\bar{v} \frac{\partial}{\partial u} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial v} - \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} + \bar{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ F_2 &= -v \frac{\partial}{\partial u} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{v}} - \eta \frac{\partial}{\partial \xi} + \bar{\xi} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}}, \\ S_1 &= -\bar{w} \frac{\partial}{\partial u} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial w} - \bar{\zeta} \frac{\partial}{\partial \xi} + \bar{\xi} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}, \\ S_2 &= -w \frac{\partial}{\partial u} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} - \zeta \frac{\partial}{\partial \xi} + \bar{\xi} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}, \\ H_1 &= -\bar{w} \frac{\partial}{\partial v} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial w} - \bar{\zeta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}, \\ H_2 &= -w \frac{\partial}{\partial v} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} - \zeta \frac{\partial}{\partial \eta} + \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}. \end{aligned}$$

Старшие векторы в V_l и W_l таковы

$$e_l = u^{l-1} \xi, \quad f_l = u^{l-1} v \xi - u^l \eta,$$

соответственно. Мы имеем, во-первых,

$$R_\sigma(L_{12}) e_l = (\sigma - l - 1) X e_{l+1} + \sigma Y f_{l,1} + (\sigma + l + 3) c e_{l-1},$$

где

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{(l+1)(l+2)} (F_1 F_2 + S_1 S_2) \right\}, \\ Y &= -\frac{1}{(l+1)(l+3)} \left(S_1 H_2 + S_2 H_1 + \frac{1}{2} H_2 H_1 F_2 \right), \\ c &= \frac{(l-1)(l+4)}{2(l+2)(l+3)}, \end{aligned}$$

и, во-вторых,

$$R_\sigma(L_{12}) f_l = (\sigma - l - 1) X f_{l+1} + (\sigma + 3) Y e_l + (\sigma + l + 3) c f_{l-1},$$

где

$$X = \frac{1}{2l(l+2)^2(l+4)} \left\{ 1 - (l^2 + 5l + 9)F_1F_2 + H_1H_2F_2^2 \right. \\ \left. - l(l+5) [3H_1S_2F_2 + H_2S_1F_2 + S_1S_2] \right\},$$

$$Y = \frac{1}{l(l+4)} F_2,$$

$$c = \frac{(l^2 - 1)(l + 4)}{2l(l + 2)}.$$

4 Сплетающие операторы

Мы продолжаем § 3 о представлениях $T_\sigma^{(1)}$ обобщенной группы Лоренца $G = \text{SO}_0(1, n-1)$ в пространстве $\Lambda_\sigma^1(\mathcal{C})$, $\sigma \in \mathbb{C}$, однородных дифференциальных формах первой степени на конусе $\mathcal{C}$. Там мы показали, что представление $T_\sigma^{(1)}$ распадается в сумму двух представлений:

$$T_\sigma^{(1)} = T_\sigma + R_\sigma. \quad (4.1)$$

Первое из них есть представление, связанное с конусом, такие представления описаны в § 1.

В настоящем параграфе мы хотим написать сплетающие операторы для представлений $T_\sigma^{(1)}$.

Пусть C – оператор на $\Lambda^1(\mathcal{C})$, сплетающий $T_\sigma^{(1)} \curvearrowright T_\lambda^{(1)}$.

В силу разложения (4.1) он есть сумма двух операторов A и B , которые сплетают $T_\sigma \curvearrowright T_\mu$ и $R_\sigma \curvearrowright R_\nu$, соответственно.

Напомним (§ 1) результат об операторе A . Пусть A – оператор в $\mathcal{D}(S)$, сплетающий $T_\sigma \curvearrowright T_\mu$, то есть

$$T_\mu(g)A = AT_\sigma(g), \quad g \in G.$$

Такой оператор A существует только для $\mu = \sigma$ и $\mu = 2 - n - \sigma$. Если $\mu = \sigma$, то A – скалярный оператор. Пусть $\mu = 2 - n - \sigma$, тогда оператор A на каждом H_l есть умножение на число $a_l(\sigma)$. В неприводимом случае, т. е. для всех σ , исключая $\sigma \in \mathbb{N}$ и $\sigma \in 2 - n - \mathbb{N}$, при условии $a_0(\sigma) = 1$ эти числа таковы:

$$a_l(\sigma) = \frac{\Gamma(\sigma + n - 2 + l)\Gamma(-\sigma)}{\Gamma(l - \sigma)\Gamma(\sigma + n - 2)} \quad (4.2)$$

$$= \frac{(\sigma + n - 2)^{[l]}}{(-\sigma)^{[l]}}. \quad (4.3)$$

Если $\sigma \in \mathbb{N}$, то A исчезает на V_σ и

$$a_l(\sigma) = C \cdot \frac{(\sigma + n + l - 3)!}{(l - \sigma - 1)!}.$$

Если $\sigma \in 2 - n - \mathbb{N}$, то A исчезает на V_σ^+ , а коэффициенты $a_l(\sigma)$ с $l \leq 2 - n - \sigma$ выражаются теми же самыми формулами (4.2), (4.3).

Для оператора B мы имеем следующую теорему.

Теорема 4.1 ([21]) Пусть $n > 5$. Оператор B в $\Lambda^1(S)$, сплетающий $R_\sigma \curvearrowright R_\nu$, существует только для $\nu = \sigma$ и $\nu = 4 - n - \sigma$. В обоих случаях он – единственный с точностью до множителя, при $\nu = \sigma$ – он скалярный оператор. Если $\nu = 4 - n - \sigma$ и представление R_σ приводимо, то оператор B вырождается на неприводимом подпространстве для R_σ , а его образ есть неприводимое подпространство для $R_{4-n-\sigma}$.

Эта теорема следует из явных формул для собственных чисел $v_l(\sigma)$ и $w_l(\sigma)$ оператора B на K -типах V_m и W_m , соответственно. Эти формулы доказываются с помощью теоремы 3.1. Для $\nu = \sigma$ эти собственные числа все равны друг другу. Для $\nu = 4 - n - \sigma$, исключая неприводимый случай $\sigma \in \mathbb{N}$ и $\sigma \in 2 - n - \mathbb{N}$, мы имеем (с точностью до множителя)

$$\begin{aligned} v_l(\sigma) &= \frac{\Gamma(\sigma + n - 3 + l)\Gamma(1 - \sigma)}{\Gamma(\sigma + n - 3)\Gamma(1 - \sigma + l)} \\ &= \frac{(\sigma + n - 3)^{[l]}}{(1 - \sigma)^{[l]}}, \\ w_l(\sigma) &= \frac{\Gamma(\sigma + n - 3 + l)\Gamma(-\sigma)}{\Gamma(\sigma + n - 4)\Gamma(1 - \sigma + l)} \\ &= \frac{(\sigma + n - 4)^{[l+1]}}{(-\sigma)^{[l+1]}}. \end{aligned}$$

Если $\sigma = 1, 2, \dots$, то

$$\begin{aligned} v_l(\sigma) &= \frac{(\sigma + n - 3)^{[l]}}{(l - \sigma)!}, \\ w_l(\sigma) &= -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{(\sigma + n - 4)^{[l+1]}}{(l - \sigma)!}. \end{aligned}$$

Если $\sigma = 4 - n - k$, $k = 1, 2, \dots$, то

$$\begin{aligned} v_l(\sigma) &= (-1)^l \cdot \frac{(k - 1)!}{(k - l - 1)!} \cdot \frac{1}{(k + n - 3)^{[l]}}, \\ w_l(\sigma) &= (-1)^{l+1} \cdot \frac{k!}{(k - l - 1)!} \cdot \frac{1}{(k + n - 4)^{[l+1]}}. \end{aligned}$$

Наконец, если $\sigma = 0$, то

$$v_l(\sigma) = 0, \quad w_l(\sigma) = \frac{(n - 4 + l)!}{l!},$$

а если $\sigma = 4 - n$, то

$$v_l(\sigma) = \frac{m!}{(n - 4 + m)!}, \quad w_l(\sigma) = 0.$$

5 Тензорное произведение $T_{\sigma-1} \otimes \rho$

Представление $T_{\sigma}^{(1)}$ группы $G = \text{SO}_0(1, n-1)$ из предыдущего параграфа является фактор-представлением тензорного произведения $\hat{T}_{\sigma} = T_{\sigma-1} \otimes \rho$, где ρ – тавтологическое представление группы G . Приведем результат.

Мы сохраняем обозначения § 1. Исследование указанного тензорного произведения оказалось возможным благодаря использованию *новой* реализации представлений T_{σ} . Эта реализация состоит в следующем.

Пусть $f \in \mathcal{D}_{\sigma}(\mathcal{C})$. Тогда функция

$$h(x_2, \dots, x_n) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right), \quad x \in \mathcal{C},$$

есть функция на $\mathbb{R}^{n-1}$, однородная степени 0. Функция f восстанавливается по функции h так:

$$f(x) = h(x_2, \dots, x_n).$$

Представление T_{σ} в функциях h действует следующим образом:

$$(T_{\sigma}(g)h)(x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\tilde{x}_1}{x_1}\right)^{\sigma} h(\tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n),$$

где $\tilde{x} = xg$. Достоинство этой реализации состоит в том, что базисным элементам алгебры Ли $\mathfrak{g}$ отвечают операторы, имеющие весьма простые выражения. А именно,

$$\begin{aligned} T_{\sigma}(L_{1k})h &= \sigma \frac{x_k}{x_1} h + x_1 \frac{\partial h}{\partial x_k}, \\ T_{\sigma}(L_{ij})h &= -x_j \frac{\partial h}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial h}{\partial x_j}, \quad 1 < i < j. \end{aligned}$$

Тавтологическое представление ρ группы G дается формулой $\rho(g) = g$.

Пусть $\hat{\mathcal{D}}_{\sigma}(\mathcal{C})$ есть пространство вектор-функций (столбцов)

$$\alpha(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ \alpha_2(x) \\ \dots \\ \alpha_n(x) \end{pmatrix},$$

где компоненты $\alpha_i(x)$ принадлежат пространству $\mathcal{D}_{\sigma-1}(\mathcal{C})$. Для экономии места дальше столбцы вектор-функций мы все-таки будем записывать в виде строк.

Тензорное произведение $\hat{T}_{\sigma} = T_{\sigma-1} \otimes \rho$ действует на пространстве $\hat{\mathcal{D}}_{\sigma}(\mathcal{C})$ следующим образом:

$$(\hat{T}_{\sigma}(g)\alpha)(x) = g \alpha(xg).$$

Пусть Q – следующий оператор $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}_\sigma(\mathcal{C})$:

$$(Q\alpha)(x) = x\alpha(x) = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i(x).$$

Ядро Кер Q этого оператора распадается на два подпространства V_0 и V_2 . Подпространство V_0 состоит из вектор-функций вида $\alpha(x) = \mu(x) \cdot (-x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $\mu \in \mathcal{D}_{\sigma-2}(\mathcal{C})$, подпространство V_2 состоит из вектор-функций

$$\alpha(x) = (0, \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x))$$

таких, что $\sum x_i \alpha_i(x) = 0$. Далее, пусть V_1 – подпространство в $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma(\mathcal{C})$, состоящее из градиентов функций $f \in \mathcal{D}_\sigma(\mathcal{C})$:

$$\text{grad} f = x_1^{\sigma-1} \left(\sigma h, x_1 \frac{\partial h}{\partial x_2}, \dots, x_1 \frac{\partial h}{\partial x_n} \right).$$

Мы имеем $Q \text{ grad} f = \sigma f$.

Теорема 5.1 ([22]) Пусть $\sigma \neq 0$. Тогда $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma(\mathcal{C})$ распадается в прямую сумму подпространств V_0 , V_1 и V_2 .

Теорема 5.2 Пусть $\sigma \neq 0$. Тогда в "базисе" V_0 , V_1 , V_2 мы имеем

$$\widehat{T}_\sigma = \begin{pmatrix} T_{\sigma-2} & A_\sigma & B_\sigma \\ 0 & T_\sigma & 0 \\ 0 & 0 & R_\sigma \end{pmatrix}.$$

Здесь R_σ – представление группы G в V_2 , это – в точности представление R_σ , изученное в § 3. При переходе от тензорного произведения $\widehat{T}_\sigma = T_{\sigma-1} \otimes \rho$ к представлению в дифференциальных формах исчезает представление в пространстве V_0 , так что в матрице $\widehat{T}_\sigma$ надо удалить первую строку и первый столбец.

Инфинитезимальный вариант дается следующей теоремой. Пусть P_k – оператор проектирования на k -ую координату. Пусть $L \in \mathfrak{g}$.

Теорема 5.3 Пусть $\sigma \neq 0$. Тогда в "базисе" V_0 , V_1 , V_2 мы имеем

$$\widehat{T}_\sigma(L) = \begin{pmatrix} T_{\sigma-2}(L) & A_\sigma(L) & B_\sigma(L) \\ 0 & T_\sigma(L) & 0 \\ 0 & 0 & R_\sigma(L) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} A_\sigma(L_{1k}) &= -T_{-\sigma}(L_{1k}), \\ B_\sigma(L_{1k}) &= -P_k, \\ A_\sigma(L_{ij}) &= 0, \quad B_\sigma(L_{ij}) = 0, \quad 1 < i < j. \end{aligned}$$

Интересно еще написать действие элемента Казимира

$$\Delta_{\mathfrak{g}} = \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j L_{ij}^2$$

из универсальной обертывающей алгебры. В представлении T_σ он есть умножение на число $\sigma(\sigma + n - 2)$. Для тензорного произведения $\widehat{T}_\sigma = T_{\sigma-1} \otimes \rho$ мы имеем

Теорема 5.4 Пусть $\sigma \neq 0$. Оператор $\widehat{T}_\sigma(\Delta_{\mathfrak{g}})$ в "базисе" V_0, V_1, V_2 есть

$$\widehat{T}_\sigma(\Delta_{\mathfrak{g}}) = \begin{pmatrix} (\sigma-2)(\sigma+n-4) & -2\Delta + 2\sigma(\sigma-1) & -2\operatorname{div} \\ 0 & \sigma(\sigma+n-2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(\sigma+n-4) \end{pmatrix},$$

где Δ и div – оператор Лапласа и дивергенция:

$$\Delta h = x_1^2 \sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_k^2},$$

$$\operatorname{div} v = x_1 \sum_{k=2}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k},$$

здесь v – вектор-функция $(0, v_2, \dots, v_n)$ из V_2 , состоящая из функций степени однородности 0.

Chapitre II. Les produits tensoriels des représentations du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

6 Des représentations du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

Le groupe $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ est composé des matrices réelles de taille 2×2 de déterminant un:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

On note

H le sous-groupe des matrices diagonales:

$$h = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

Q^- et Q^+ les sous-groupes des matrices unipotentes inférieures et supérieures, respectivement:

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

P^- et P^+ les sous-groupes des matrices triangulaires inférieures et supérieures, respectivement:

$$\begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c^{-1} & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

K le sous-groupe des matrices orthogonales:

$$k_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

En échangeant dans (2) α et δ , β et γ , nous obtenons la matrice

$$\widehat{g} = \theta(g) = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

L'algebre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G est composée des matrices réelles de trace nulle. Nous fixons la base suivante:

$$L^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad L^+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Les relations de commutation sont:

$$[L^+, L^-] = -2L^1, \quad [L^+, L^1] = -L^+, \quad [L^1, L^-] = -L^-.$$

Le sous-groupe de matrices orthogonales K correspond à l'élément

$$L^0 = L^- + L^+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le centre de l'algèbre enveloppante $\text{Env}(\mathfrak{g})$ est engendré par l'élément de Casimir

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathfrak{g}} &= (L_1)^2 - \frac{1}{2} (L^+ L^- + L^- L^+) \\ &= (L^1)^2 + L^1 - L^- L^+. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Soit $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$. Nous considérons une série de représentations $T_{\sigma, \varepsilon}$ du groupe G , induites par les caractères $p \mapsto c^{2\sigma, \varepsilon}$ du sous-groupe triangulaire supérieur P^+ , ici p est la deuxième matrice de (6.1).

Nous supposons que le groupe G agit dans le plan $\mathbb{R}^2$ à droite, les vecteurs $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ sont écrits en ligne. Nous notons $\mathcal{D}_{\sigma, \varepsilon}(\mathbb{R}^2)$ l'espace des fonctions f sur $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, satisfaisant la condition d'homogénéité

$$f(\lambda x) = \lambda^{2\sigma, \varepsilon} f(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

La représentation $T_{\sigma, \varepsilon}$ agit par translations à droite dans l'espace $\mathcal{D}_{\sigma, \varepsilon}(\mathbb{R}^2)$:

$$(T_{\sigma, \varepsilon}(g)f)(x) = f(xg)$$

Nous notons $\widehat{T}_{\sigma, \varepsilon}$ la représentation "contragrédiente" de la représentation $T_{\sigma, \varepsilon}$, à savoir,

$$\widehat{T}_{\sigma, \varepsilon}(g) = T_{\sigma, \varepsilon}(\widehat{g}),$$

voir (6.2). Cette représentation est induite à partir du sous-groupe triangulaire inférieur P^- . Puisque P^+ et P^- sont conjugués dans G , les représentations $T_{\sigma, \varepsilon}$ et $\widehat{T}_{\sigma, \varepsilon}$ sont équivalentes. Dans l'espace $\mathcal{D}_{\sigma, \varepsilon}(\mathbb{R}^2)$ l'équivalence est donnée par l'opérateur C , échangeant les coordonnées d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$:

$$(Cf)(x_1, x_2) = f(x_2, x_1).$$

Considérons deux réalisations des représentations $T_{\sigma, \varepsilon}$ et $\widehat{T}_{\sigma, \varepsilon}$: une compacte et une autre non compacte.

Tout d'abord, dans la réalisation *compacte*. Soit $|x|$ longueur euclidienne du vecteur $x = (x_1, x_2)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$: $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Soit S le cercle $|x| = 1$.

Nous restreignons les fonctions f dans $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$ à S . Nous obtenons le sous-espace $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ des fonctions φ dans $\mathcal{D}(S)$ de parité ε :

$$\varphi(-s) = (-1)^\varepsilon \varphi(s).$$

La représentation $T_{\sigma,\varepsilon}$ agit dans $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ de la façon suivante:

$$(T_{\sigma,\varepsilon}(g)\varphi)(s) = \varphi\left(\frac{sg}{|sg|}\right) |sg|^{2\sigma}.$$

Soit α la coordonnée sur S : un point s de S s'écrit $s = (\sin \alpha, \cos \alpha)$. Parfois, au lieu de $\varphi(s)$ nous écrirons $\varphi(\alpha)$.

Nous introduisons l'opérateur $A_{\sigma,\varepsilon}$, agissant dans les fonctions dans $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$:

$$(A_{\sigma,\varepsilon}\varphi)(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\sin(\alpha - \beta)]^{-2\sigma-2,\varepsilon} \varphi(\beta) d\beta.$$

Il entrelace $T_{\sigma,\varepsilon} \curvearrowright T_{-\sigma-1,\varepsilon}$.

Fixons dans $\mathcal{D}(S)$ la famille

$$\varphi_k(\alpha) = e^{ik\alpha}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Une base de $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ est composée des fonctions φ_k , pour lesquelles $k \equiv \varepsilon$. L'opérateur $A_{\sigma,\varepsilon}$ transforme φ_k en φ_k avec un multiplicateur:

$$A_{\sigma,\varepsilon}\varphi_k = a(\sigma, \varepsilon; k) \varphi_k,$$

où

$$\begin{aligned} a(\sigma, \varepsilon; k) &= i^{-k} \pi 2^{2\sigma+2} \frac{\Gamma(-2\sigma-1)}{\Gamma(-\sigma-k/2) \Gamma(-\sigma+k/2)} \\ &= i^{-k} \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(-\sigma) \Gamma(-\sigma-1/2)}{\Gamma(-\sigma-k/2) \Gamma(-\sigma+k/2)} \end{aligned}$$

Par conséquent, la composition $A_{\sigma,\varepsilon}$ et $A_{-\sigma-1,\varepsilon}$ est un opérateur scalaire:

$$A_{-\sigma-1,\varepsilon} A_{\sigma,\varepsilon} = \omega_0(\sigma, \varepsilon) \cdot E, \tag{6.7}$$

où

$$\begin{aligned} \omega_0(\sigma, \varepsilon) &= \frac{2\pi}{2\sigma+1} \cdot \frac{1 - (-1)^\varepsilon \cos 2\sigma\pi}{\sin 2\sigma\pi} = \\ &= \frac{2\pi}{2\sigma+1} \cdot (-1)^\varepsilon \cdot \operatorname{tg} \left(\sigma - \frac{\varepsilon}{2} \right) \pi. \end{aligned}$$

L'élément $\Delta_{\mathfrak{g}}$ correspond à un opérateur scalaire:

$$T_{\sigma,\varepsilon}(\Delta_{\mathfrak{g}}) = \hat{T}_{\sigma,\varepsilon}(\Delta_{\mathfrak{g}}) = \sigma(\sigma+1) \cdot E.$$

La forme bilinéaire

$$\langle \psi, \varphi \rangle_S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \psi(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha \tag{6.8}$$

sur $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ est invariante par rapport aux paires $(T_{\sigma,\varepsilon} T_{-\sigma-1,\varepsilon})$ et $(\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon} \widehat{T}_{-\sigma-1,\varepsilon})$:

$$\langle T_{\sigma,\varepsilon}(g)\psi, \varphi \rangle_S = \langle \psi, T_{-\sigma-1,\varepsilon}(g^{-1})\varphi \rangle_S \quad (6.9)$$

et de manière analogue pour $\widehat{T}$.

Dans la représentation $T_{\sigma,\varepsilon}$ les éléments de la base (6.4) correspondent aux opérateurs:

$$\begin{aligned} T_\sigma(L^-) &= \cos^2 \alpha \cdot \frac{d}{d\alpha} + \sin 2\alpha \cdot \sigma, \\ T_\sigma(L^+) &= \sin^2 \alpha \cdot \frac{d}{d\alpha} - \sin 2\alpha \cdot \sigma, \\ T_\sigma(L^1) &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot \frac{d}{d\alpha} - \cos 2\alpha \cdot \sigma, \end{aligned}$$

ainsi

$$T_\sigma(L^0) = \frac{d}{d\alpha}, \quad (6.11)$$

La représentation $T_{\sigma,\varepsilon}$ est *irréductible*, sauf si $2\sigma \in \mathbb{Z}$ et $2\sigma \equiv \varepsilon$.

Soit $2\sigma \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \equiv 2\sigma$, alors la représentation $T_{\sigma,\varepsilon}$ a un sous-espace invariant de dimension finie

$$V_\sigma = \{\varphi_k : -2\sigma \leq k \leq 2\sigma, k \equiv \varepsilon\},$$

ainsi $\dim V_\sigma = 2\sigma + 1$. Dans ce cas, nous notons π_σ et $\widehat{\pi}_\sigma$ les restrictions sur V_σ des représentations $T_{\sigma,\varepsilon}$ et $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$, respectivement. Le nombre σ s'appelle *le plus haut poids* de la représentation π_σ . Les représentations π_σ et $\widehat{\pi}_\sigma$ sont équivalentes. Les représentations π_σ , $2\sigma \in \mathbb{N}$, décrivent toutes les représentations de dimension finie du groupe G .

Soit $2\sigma \in -\mathbb{N} - 1$, $\varepsilon \equiv 2\sigma$. Ainsi la représentation $T_{\sigma,\varepsilon}$ a deux sous-espaces invariants de dimension infinie :

$$V_\sigma^+ = \{\varphi_k : k \geq -2\sigma, k \equiv \varepsilon\},$$

$$V_\sigma^- = \{\varphi_k : k \leq 2\sigma, k \equiv \varepsilon\},$$

d'intersection nulle. L'espace quotient par leur somme $V_\sigma^+ + V_\sigma^-$ est de dimension finie, il est isomorphe à $V_{-\sigma-1}$, la représentation dans cet espace quotient est équivalente à $\pi_{-\sigma-1}$.

Nous considérons maintenant la réalisation *non compacte*.

Nous restreignons les fonctions de $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$ à la droite $x = (t, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles restrictions. Il est composé des fonctions f dans $C^\infty(\mathbb{R})$ telles que

$$\widehat{f}(t) = t^{2\sigma,\varepsilon} f\left(\frac{1}{t}\right)$$

est également inclus dans $C^\infty(\mathbb{R})$. Les représentations $T_{\sigma,\varepsilon}$ et $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$ sont définies respectivement par:

$$(T_{\sigma,\varepsilon}(g)f)(t) = f(\widetilde{t})(\beta t + \delta)^{2\sigma,\varepsilon},$$

et

$$\left(\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}(g)f\right)(t) = f(\widehat{t})(\gamma t + \alpha)^{2\sigma,\varepsilon},$$

où, voir (6.3):

$$\widetilde{t} = t \bullet g = \frac{\alpha t + \gamma}{\beta t + \delta}, \quad \widehat{t} = t \circ g = \frac{\delta t + \beta}{\gamma t + \alpha}.$$

Les représentations $T_{\sigma,\varepsilon}$ et $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$ sont équivalentes via l'application $f \mapsto \widehat{f}$.

L'opérateur $A_{\sigma,\varepsilon}$ de la réalisation compacte devient un opérateur intégral de noyau $(t - s)^{-2\sigma-2,\varepsilon}$. Cependant, il sera plus commode de considérer un opérateur intégral de noyau $(1 - ts)^{-2\sigma-2,\varepsilon}$. Nous le notons par le même symbole $A_{\sigma,\varepsilon}$. Ainsi, nous avons l'opérateur $A_{\sigma,\varepsilon}$, définie par la formule:

$$(A_{\sigma,\varepsilon}f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - ts)^{-2\sigma-2,\varepsilon} f(s) ds.$$

Il entrelace $T_{\sigma,\varepsilon}$ et $\widehat{T}_{-\sigma-1,\varepsilon}$:

$$\widehat{T}_{-\sigma-1,\varepsilon}(g)A_{\sigma,\varepsilon} = A_{\sigma,\varepsilon}T_{\sigma,\varepsilon}(g),$$

ainsi que $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$ et $T_{-\sigma-1,\varepsilon}$.

La composée de $A_{\sigma,\varepsilon}$ et $A_{-\sigma-1,\varepsilon}$ est un opérateur scalaire:

$$A_{-\sigma-1,\varepsilon}A_{\sigma,\varepsilon} = \frac{1}{c(\sigma,\varepsilon)} \cdot E,$$

où

$$c(\sigma,\varepsilon) = \frac{2\sigma + 1}{2\pi} \cdot \frac{(-1)^\varepsilon + \cos 2\sigma\pi}{\sin 2\sigma\pi}.$$

L'opérateur $A_{\sigma,\varepsilon}$ est symétrique par rapport à la forme (3.6).

Dans la base $\{t^m\}$ de $\text{Pol}(\mathbb{R})$ la représentations T_σ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est donnée par:

$$\begin{aligned} T_\sigma(L_-)t^m &= m t^{m-1}, \\ T_\sigma(L_1)t^m &= (m - \sigma)t^m, \\ T_\sigma(L_+)t^m &= (m - 2\sigma)t^{m+1}, \end{aligned}$$

L'espace $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$ est composé des combinaisons linéaires de la fonction delta $\delta(t)$ et de ses dérivées $\delta^{(m)}(t)$. Dans cette base, nous avons

$$\begin{aligned} T_\sigma(L_-)\delta^{(m)}(t) &= \delta^{(m+1)}(t), \\ T_\sigma(L_1)\delta^{(m)}(t) &= (-\sigma - 1 - m)\delta^{(m)}(t), \\ T_\sigma(L_+)\delta^{(m)}(t) &= m(2\sigma + m + 1)\delta^{(m-1)}(t). \end{aligned}$$

Les espace $\text{Pol}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$ sont des modules de Verma sous-jacents à T_σ .

7 Le produit tensoriel $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$: la réalisation compacte

Dans cette section, nous considérons le produit tensoriel $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$ des représentations du groupe $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Ici $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$, $2m \in \mathbb{N}$. La représentation $T_{\sigma,\varepsilon}$ est de dimension infinie. Nous supposons, que σ est en position générale, c'est-à-dire $2\sigma \notin \mathbb{N}$. La représentation π_m est de dimension $2m + 1$, voir § 6.

Toutes ces représentations sont considérées dans leur *réalisation compacte*.

Nous décomposons le produit tensoriel $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$ en irréductibles, voir le théorème 7.1, et nous trouvons explicitement les opérateurs, entrelaçant les composantes irréductibles et le produit tensoriel (les transformations de Poisson et de Fourier), voir les théorèmes 7.4 et 7.5.

Notre méthode est d'utiliser les vecteurs propres *du produit des opérateurs de création et d'annihilation*.

Le produit tensoriels $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$ agit dans l'espace $\mathcal{D}_\varepsilon(S) \otimes V_m$ des fonctions $f(s, t)$ définies sur le produit direct $S \times S$ de deux cercles de parité $\varepsilon + 2m$:

$$f(-s, -t) = (-1)^{\varepsilon+2m} f(s, t).$$

Théorème 7.1 *Le produit tensoriel $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$ se décompose en somme directe sans multiplicités de représentations irréductibles*

$$T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m = T_{\sigma-m,\nu} + T_{\sigma-m+1,\nu} + \dots + T_{\sigma+m,\nu},$$

où $\nu \equiv \varepsilon + 2m$. Respectivement, l'espace $\mathcal{D}_\varepsilon(S) \otimes V_m$ se décompose en somme directe sans multiplicités d'espaces irréductibles W_k , $k = 0, 1, 2, \dots, 2m$. Le sous-espace W_k est l'image de la transformation de Poisson M_k , de l'espace $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ dans l'espace $\mathcal{D}_\varepsilon(S) \otimes V_m$ et entrelaçant la représentations $T_{\sigma-m+k,\nu}$ avec le produit tensoriel $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$. La forme explicite de la transformation de Poisson est donnée dans le théorème 7.2 ci-dessous.

Théorème 7.2 *La transformation de Poisson M_k , $k = 0, 1, 2, \dots, 2m$, est un*

opérateur différentiel, définie par l'une des deux expressions explicites suivantes:

$$\begin{aligned}
M_k = & (\sin v)^{2m-k} \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \binom{k}{r} (2\tau - k + 1)^{[k-r]} \times \\
& \times (i \sin v)^r e^{i(k-r)v} \cdot \left(2\tau - i \frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^{\langle r \rangle}, \\
M_k = & (\sin v)^{2m-k} \left[(\sin v) \frac{\partial}{\partial \alpha} - (2\tau - k + 1) \cos v \right] \times \\
& \times \left[(\sin v) \frac{\partial}{\partial \alpha} - (2\tau - k + 2) \cos v \right] \times \\
& \dots \\
& \times \left[(\sin v) \frac{\partial}{\partial \alpha} - 2\tau \cos v \right].
\end{aligned}$$

8 Le produit tensoriel $\pi_l \otimes \pi_m$: la réalisation non compacte

Dans cette section, nous considérons le produit tensoriel $\pi_l \otimes \pi_m$ des représentations irréductibles de dimension finie du groupe $G = \text{SL}(2, \mathbb{R})$ de plus haut poids l et m respectivement. Il est connu qu'il se décompose comme suit (soit $l \geq m$):

$$\pi_l \otimes \pi_m = \pi_{l-m} + \pi_{l-m+1} + \dots + \pi_{l+m-1} + \pi_{l+m}.$$

Notre but est d'écrire explicitement les opérateurs d'entrelacement, donnant la décomposition en composantes irréductibles du produit tensoriel. Nous les appelons les transformées de Fourier et de Poisson. Il se trouve que ces opérateurs sont des opérateurs différentiels.

Chaque représentation irréductible de dimension finie π_k du groupe G est donnée par le nombre k (*le plus haut poids*), de telle sorte que $2k \in \mathbb{N}$. Elle agit dans l'espace V_k des polynômes $\varphi(x)$ par rapport à x de degré $\leq 2k$ (de telle sorte que $\dim V_k = 2k + 1$) de la façon suivante

$$(\pi_k(g)\varphi)(x) = \varphi(x \cdot g)(\beta x + \delta)^{2k}, \quad x \cdot g = \frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta},$$

nous considérons que G agit à droite. Le produit tensoriel $V_{lm} = V_l \otimes V_m$ est composé des polynômes $f(x, y)$ de degré $\leq 2l$ par rapport à x et de degré $\leq 2m$ par rapport à y . Le produit tensoriel $\pi_{lm} = \pi_l \otimes \pi_m$ du groupe G agit sur V_{lm} de la façon suivante

$$(\pi_{lm}(g)f)(x, y) = f(x \cdot g, y \cdot g)(\beta x + \delta)^{2l}(\beta y + \delta)^{2m}.$$

Comme nous avons vu, ce produit tensoriel se décompose en somme directe sans multiplicités:

$$\pi_{lm} = \sum_k \pi_k, \tag{8.1}$$

où k appartient à l'ensemble

$$l - m, l - m + 1, \dots, l + m - 1, l + m. \tag{8.2}$$

Pour simplifier l'écriture, nous indiquons la dépendance en l, m dans la partie droite (8.1). D'après (8.1) l'espace V_{lm} se décompose en somme de sous-espaces:

$$V_{lm} = \sum_k W_k,$$

invariants et irréductibles par rapport à π_{lm} . La restriction de la représentation π_{lm} à W_k est équivalente à π_k . Nous notons:

$$r = m - l. \tag{8.3}$$

Théorème 8.1 *Les opérateurs d'entrelacement $M_k : V_k \rightarrow W_k$ sont donnés par la formule suivante:*

$$\begin{aligned} (M_k \varphi)(x, y) &= \sum_{s=0}^{k+r} \binom{k+r}{s} (k-r+1)^{[s]} \times \\ &\times (y-x)^{2m-s} \left(\frac{d}{dx} \right)^{k+r-s} \varphi(x). \end{aligned}$$

Ces opérateurs d'entrelacement s'écrivent également comme une composition d'opérateurs différentiels d'ordre un:

$$M_k = (y-x)^{l+m-k} \left\{ (y-x) \frac{d}{dx} + k-r+1 \right\}^{[k+r]},$$

ou comme une seule puissance de la dérivation:

$$(M_k \varphi)(x, y) = (y-x)^{l+m+k+1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{k+r} (y-x)^{-k+r-1} \varphi(x).$$

Nous passons maintenant à la transformation de Fourier.

Pour une fonction $f(x, y)$ nous utilisons la notation

$$f^{(a,b)} = \frac{\partial^{a+b} f}{\partial x^a \partial y^b}.$$

Théorème 8.2 *La transformation de Fourier $F_k : V_{lm} \rightarrow V_k$ (rappelons que (8.5) est vérifié) est donnée par la formule suivante. Soit $f(x, y)$ un polynôme de V_{lm} . Alors*

$$(F_k f)(t) = c_k \sum_{p=0}^j (-1)^{j-p} \binom{2l-j+p}{p} \binom{2m-p}{j-p} f^{(j-p,p)}(t, t), \quad (8, 17)$$

où j est donné par la formule (8.4), et

$$c_k^{-1} = \frac{1}{2k+1} (l+m+k+1)^{(2m+1)}.$$

Nous retrouvons donc ici les crochets de Rankin-Cohen.

9 Le produit tensoriel $\pi_l \otimes \pi_m$ et l'hyperboloïde

Dans ce paragraphe nous continuons l'étude du produit tensoriel $\pi_l \otimes \pi_m$ des représentations de dimension finie du groupe $SL(2, \mathbb{R})$ de plus haut poids l et m respectivement. Nous savons qu'il se décompose de la façon suivante (on considère que $l \geq m$):

$$\pi_l \otimes \pi_m = \pi_{l-m} + \pi_{l-m+1} + \dots + \pi_{l+m-1} + \pi_{l+m}. \quad (9.1)$$

Maintenant nous allons utiliser l'analyse harmonique sur l'hyperboloïde à une nappe $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Le produit tensoriel $W_{lm} = V_l \otimes V_m$ est réalisé dans les polynômes $\varphi(x, y)$ de degré $\leq 2l$ par rapport à x et de degré $\leq 2m$ par rapport à y . La représentation $\pi_{lm} = \pi_l \otimes \pi_m$ du groupe G agit dans W_{lm} par la formule

$$(\pi_{lm}(g)\varphi)(x, y) = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y})(\beta x + \delta)^{2l}(\beta y + \delta)^{2m}.$$

Théorème 9.1 *Le produit tensoriel $W_{lm} = V_l \otimes V_m$ se décompose en somme de sous-espaces:*

$$V_l \otimes V_m = W_{l-m}^{(l,m)} + W_{l-m+1}^{(l,m)} + \dots + W_{l+m-1}^{(l,m)} + W_{l+m}^{(l,m)}, \quad (9.2)$$

invariants et irréductibles par rapport à $\pi_{lm} = \pi_l \otimes \pi_m$. La restriction de la représentation π_{lm} au $W_k^{(l,m)}$ de (9.2) est équivalente à π_k , de sorte que nous avons la formule (9.1). Les opérateurs d'entrelacement $M_k^{(l,m)} : V_k \rightarrow W_k^{(l,m)}$ sont donnés par la formule suivante:

$$\begin{aligned} \left(M_k^{(l,m)} \varphi \right)(x, y) &= \sum_{s=0}^{k+m-l} \binom{k+m-l}{s} (k+l-m+1)^{[s]} \times \\ &\times (y-x)^{2m-s} \left(\frac{d}{dx} \right)^{k+m-l-s} \varphi(x). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Démonstration. La représentation contragrediente $\hat{\pi}_l$ du groupe G est définie par:

$$(\hat{\pi}_l(g)\varphi)(x) = \varphi(\hat{x})(\gamma x + \alpha)^{2l},$$

où nous écrivons,

$$\hat{x} = x \cdot \hat{g} = \frac{\delta x + \beta}{\gamma x + \alpha}, \quad \hat{g} = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

La représentation π_ℓ est équivalente à π_ℓ via l'application:

$$\varphi \mapsto \hat{\varphi}, \quad \hat{\varphi}(x) = x^{2l} \varphi\left(\frac{1}{x}\right). \quad (9.4)$$

Rappelons que nous avons choisi une base

$$L^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad L^+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. L'action infinitésimale est alors donnée par

$$\pi_l(L^1) = -\widehat{\pi}(L^1) = x \frac{d}{dx} - l, \quad (9.4)$$

$$\pi_l(L^+) = -\widehat{\pi}_l(L^-) = x^2 \frac{d}{dx} - 2l x, \quad (9.5)$$

$$\pi_l(L^-) = -\widehat{\pi}_l(L^+) = \frac{d}{dx}. \quad (9.6)$$

Maintenant, au lieu de la représentation $\pi_{lm} = \pi_l \otimes \pi_m$ nous considérons la représentation $R_{lm} = \pi_l \otimes \widehat{\pi}_m$ qui lui est équivalente. Cette dernière agit dans W_{lm} par

$$(R_{lm}(g)f)(\xi, \eta) = f(\widetilde{\xi}, \widehat{\eta})(\beta\xi + \delta)^{2l}(\gamma\eta + \alpha)^{2m}.$$

Les décompositions de la représentation R_{lm} et de l'espace W_{lm} sont données par les formules (9.1) et (9.2). On les réalise maintenant sur l'hyperboloïde à une nappe $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^3$ que l'on voit comme ensemble des matrices

$$x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_2 + x_1 & 1 + x_3 \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

de déterminant nul. Le groupe G y agit transitivement par conjugaison $x \mapsto g^{-1}xg$. Le stabilisateur de l'élément

$$x^0 = (0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est le sous-groupe H des matrices diagonales

$$h = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Introduisons sur $\mathcal{X}$ des coordonnées orisphériques ξ, η :

$$x = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} -\eta\xi & -\eta \\ \xi & 1 \end{pmatrix}, \quad N = 1 - \xi\eta. \quad (9.9)$$

Ainsi l'image $g^{-1}xg$ de l'élément x de coordonnées (ξ, η) est de coordonnées $\widetilde{\xi}, \widehat{\eta}$. La matrice $g \in G$ envoie x^0 de coordonnées $\xi = 0, \eta = 0$ en $g^{-1}x^0g$ de coordonnées $\xi = \gamma/\delta, \eta = \beta/\alpha$, de telle sorte que $N = (\alpha\delta)^{-1}$. En particulier, la matrice suivante convient:

$$g_x = \begin{pmatrix} 1/N & \eta/N \\ \xi & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.10)$$

L'application

$$f \mapsto F = N^{-2m}f, \quad f \in W_{lm}, \quad (9.11)$$

envoie W_{lm} sur l'espace H_{lm} de certaines fonctions rationnelles F de ξ et de η . D'après (9.8) et (9.9) ces fonctions sont polynomiales en x_1, x_2 et x_3 sur $\mathcal{X}$. En particulier, au polynôme $f = 1$ correspond le polynôme $2^{-2m}(x_3 + 1)^{2m}$.

L'application (9.11) entrelace R_{lm} avec la représentation U_r , $r = m - l$, du groupe G induit par le caractère $h \mapsto \lambda^{-2r}$ du sous-groupe H . En coordonnées orisphériques U_r est donnée par

$$(U_r(g)F)(\xi, \eta) = F\left(\tilde{\xi}, \hat{\eta}\right) (\beta\xi + \delta)^{-2r}.$$

On note $H_k^{(l,m)}$ l'image de l'espace $W_k^{(l,m)}$ par l'application (9.11).

Soit Z l'espace de distributions sur $\mathbb{R}$ supportées en $t = 0$. Les formules (9.5), (9.6), (9.7) définissent une représentation, notée toujours π_l , de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans Z . De plus, celle-ci est définie pour tout $l \in \mathbb{R}$. En particulier, la représentation π_{-k-1} , $2k \in \mathbb{N}$ agit de la façon suivante:

$$\pi_{-k-1}(L^1)\delta^{(p)}(t) = (k-p)\delta^{(p)}(t),$$

$$\pi_{-k-1}(L^+)\delta^{(p)}(t) = p(p-2k-1)\delta^{(p-1)}(t),$$

$$\pi_{-k-1}(L^-)\delta^{(p)}(t) = \delta^{(p+1)}(t).$$

Elle admet dans Z un sous-espace invariant engendré par $\delta^{(p)}(t)$, $p \geq 2k+1$. On note Z_{-k-1} l'espace quotient correspondant. L'action π_{-k-1} dans Z_{-k-1} est équivalente à π_k et s'intègre au groupe G .

Considérons la forme bilinéaire

$$\langle F, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) f(t) dt \quad (9.12)$$

sur $Z \times V_k$. Elle est invariante par rapport à (π_{-k-1}, π_k) , i.e.

$$\langle \pi_{-k-1}(g^{-1})F, f \rangle = \langle F, \pi_k(g)f \rangle, \quad g \in G. \quad (9.13)$$

Ainsi, la distribution $\delta^{(k+r)}(t)$ (on note que $k+r$ est entier) est une fonction propre du sous-groupe H de valeur propre λ^{2r} . C'est pourquoi l'application $P_{k,r} : V_k \rightarrow H_{lm}$, donnée par

$$(P_{k,r}f)(x) = (-1)^{k+r} \langle T_{-k-1}(g_x^{-1})\delta^{(k+r)}, f \rangle,$$

avec $x \in \mathcal{X}$, g_x comme dans (9.10), entrelace π_k avec U_r . Par conséquent, l'image de cette application est l'espace $H_k^{(l,m)}$.

D'après (9.13), (9.12), (9.10) nous avons:

$$(P_{k,r}f)(x) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{k+r} \Big|_{t=0} f\left(\frac{(1/N)t + \xi}{(\eta/N)t + 1}\right) \left(\frac{\eta}{N}t + 1\right)^{2k}.$$

Une simple recurrence donne:

$$(P_{k,r}f)(x) = \sum_{s=0}^{k+r} \binom{k+r}{s} (k-r+1)^{[s]} \left(\frac{\eta}{N}\right)^s f^{(k+r-s)}(\xi). \quad (9.14)$$

Revenons de l'hyperboloïde au produit tensoriel $\pi_l \otimes \pi_m$. Il suffit donc de poser $\xi = x$, $\eta = 1/y$ (de telle sorte que $N = 1 - x/y$), remplacer f par ϕ et multiplier par N^{2m} . Cela donne (9.3). $\square$

Notons que les résultats obtenus dans ce paragraphe peuvent être généralisés dans la cadre du groupe $SL(n, \mathbb{R})$ en utilisant l'analyse harmonique sur les espaces parahermitiens développée dans [24].

10 Le produit tensoriel et le noyau de Poisson

Chaque représentation irréductible de dimension finie π_k du groupe G est donnée par le nombre k (*le plus haut poids*), de telle sorte que $2k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Elle agit dans l'espace V_k de polynômes $\varphi(x)$ de degré $\leq 2k$ par rapport à x (telle que $\dim V_k = 2k + 1$) par la formule

$$(\pi_k(g) \varphi)(x) = \varphi(x \cdot g) (\beta x + \delta)^{2k}, \quad x \cdot g = \frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}.$$

L'espace V_k admet une forme bilinéaire invariante non dégénérée définie à une constante près. Une telle forme est proportionnelle à

$$\langle \psi, \varphi \rangle_k = \frac{1}{(2k)!} \sum_{p=0}^{2k} (-1)^p \cdot \psi^{(p)}(0) \cdot \varphi^{(2k-p)}(0),$$

Elle est symétrique pour $2k$ pair et anti-symétrique pour $2k$ impair:

$$\langle \psi, \varphi \rangle_k = (-1)^k \langle \varphi, \psi \rangle_k. \quad (10.1)$$

L'invariance signifie que:

$$\langle T_k(X) \psi, \varphi \rangle_k = -\langle \psi, T_k(X) \varphi \rangle_k, \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Pour des éléments de la base $\{x^s\}$, $s = 0, 1, \dots, 2k$, de l'espace V_k cette forme est non nulle seulement pour les paires x^s, x^{2k-s} ;

$$\langle x^s, x^{2k-s} \rangle_k = (-1)^s \binom{2k}{s}^{-1}.$$

A l'aide du noyau de Poisson P_k nous définissons deux applications: *la transformation de Poisson* $M_k : V_k \rightarrow V_l \otimes V_m$ et *la transformation de Fourier* $F_k : V_l \otimes V_m \rightarrow V_k$. A savoir,

$$(M_k \varphi)(x, y) = \langle P_k(x, y; t), \varphi(t) \rangle_k, \quad (10.9)$$

$$(F_k f)(t) = \langle f(x, y), P_k(x, y; t) \rangle_{lm}. \quad (10.10)$$

En raison de (10.8) les opérateurs M_k et F_k *entrelacent* les représentations $T_l \otimes T_m$ et T_k du groupe G , à savoir,

$$M_k T_k(g) = (T_l \otimes T_m)(g) M_k,$$

$$T_k(g) F_k = F_k (T_l \otimes T_m)(g).$$

Les transformations de Poisson et de Fourier sont conjuguées l'une à l'autre:

$$\langle f, M_k \varphi \rangle_{lm} = \langle F_k f, \varphi \rangle_k.$$

En raison de (10.2) il vient que les transformations de Poisson et de Fourier envoient les noyaux reproduisants des espaces V_k et $V_l \otimes V_m$ sur le noyau de Poisson:

$$(M_k(t - \xi)^{2k})(x, y) = P_k(x, y; \xi),$$

$$(F_k(\xi - x)^{2l}(\eta - y)^{2m})(t) = P_k(\xi, \eta; t).$$

Théorème 10.1 *La transformation de Poisson $M_k : V_k \rightarrow V_l \otimes V_m$ s'écrit de trois façons suivantes. Soit $\varphi \in V_k$. Alors,*

$$(M_k \varphi)(x, y) = \sum_{\alpha=0}^{k+r} \binom{k+r}{\alpha} \frac{1}{(2k)^{(\alpha)}} (y-x)^{j+\alpha} \left(\frac{d}{dx} \right)^\alpha \varphi(x), \quad (10.11)$$

$$= c_k \cdot (y-x)^j \left\{ (y-x) \frac{d}{dx} + k - r + 1 \right\}^{[k+r]} \varphi(x), \quad (10.12)$$

$$= c_k \cdot (y-x)^{l+m+k+1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{k+r} (y-x)^{-k+r-1} \varphi(x), \quad (10.13)$$

où r et j sont donnés par les formules (10.4) et (10.6), et

$$c_k = \frac{1}{(2k)^{(k+r)}}.$$

Théorème 10.2 *La transformation de Fourier $F_k : V_l \otimes V_m \rightarrow V_k$ est donnée par la formule suivante. Soit $f(x, y)$ un polynôme de $V_l \otimes V_m$. Alors*

$$(F_k f)(t) = \sum_{\alpha=0}^j \binom{j}{\alpha} (-1)^{j-\alpha} \frac{1}{(2l)^{(j-\alpha)}(2m)^{(\alpha)}} \cdot f^{(j-\alpha, \alpha)}(t, t). \quad (10.14)$$

où j est donné par la formule (10.6).

Глава II. Тензорные произведения представлений группы $SL(2, \mathbb{R})$

6 Представления группы $SL(2, \mathbb{R})$

В этом параграфе мы напоминаем некоторый материал о представлениях групп $SL(2, \mathbb{R})$ и $SO_0(1, 2)$, см., например, [3], [4].

Группа $G = SL(2, \mathbb{R})$ состоит из вещественных матриц второго порядка с определителем единица:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Отметим некоторые ее подгруппы:

H – подгруппа диагональных матриц:

$$h = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

Q^- и Q^+ – подгруппы нижних и верхних унипотентных матриц, соответственно:

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

P^- и P^+ – подгруппы нижних и верхних треугольных матриц, соответственно:

$$p = \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} c^{-1} & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

K – подгруппа ортогональных матриц:

$$k_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Меняя в g α с δ и β с γ , мы получим матрицу

$$\widehat{g} = \theta(g) = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Отображение $\theta : g \mapsto \widehat{g}$ является инволюцией в группе G .

Имеет место разложение Гаусса $G = \overline{Q^+ H Q^-}$, а также разложение, которое мы назовем разложением "анти-Гаусса": $G = \overline{Q^- H Q^+}$, черта означает замыкание: а именно, почти всякий элемент g из G может быть представлен в виде

$g = nhz$ и $g = zhn$, соответственно. Эти разложения однозначны. Они порождают действия группы G на Q^- и на Q^+ дробно-линейными преобразованиями:

$$\xi \mapsto \tilde{\xi} = \xi \bullet g = \frac{\alpha\xi + \gamma}{\beta\xi + \delta}, \quad \eta \mapsto \hat{\eta} = \eta \circ g = \frac{\delta\eta + \beta}{\gamma\eta + \alpha}. \quad (6.3)$$

Группа G действует справа. С помощью инволюции θ второе действие можно свести к первому: $\eta \circ g = \eta \bullet \hat{g}$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G состоит из вещественных матриц второго порядка со следом 0. Возьмем в ней следующий базис:

$$L^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad L^+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Соотношения коммутации таковы:

$$[L^+, L^-] = -2L^1, \quad [L^+, L^1] = -L^+, \quad [L^1, L^-] = -L^-.$$

Подгруппе K ортогональных матриц отвечает элемент

$$L^0 = L^- + L^+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Центр универсальной обертывающей алгебры $\text{Env}(\mathfrak{g})$ порождается элементом Казимира

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathfrak{g}} &= L_1^2 - \frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+) \\ &= (L^1)^2 + L^1 - L^-L^+. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Введем еще следующие элементы из комплексификации $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$E^+ = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}, \quad E^- = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Они являются собственными для оператора $\text{ad } L^0$ в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ с собственными значениями $2i$ и $-2i$, соответственно, а их коммутатор пропорционален L^0 :

$$[E^+, E^-] = -iL^0.$$

Пусть $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$. Рассмотрим серию представлений $T_{\sigma, \varepsilon}$ группы G , индуцированных характерами $p \mapsto c^{2\sigma, \varepsilon}$ верхней треугольной подгруппы P^+ , здесь p – вторая матрица из (6.1).

Мы считаем, что группа G действует на плоскости $\mathbb{R}^2$ справа, соответственно этому векторы $x = (x_1, x_2)$ из $\mathbb{R}^2$ мы записываем в виде строки. Обозначим через $\mathcal{D}_{\sigma, \varepsilon}(\mathbb{R}^2)$ пространство функций f из $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, удовлетворяющих условию однородности

$$f(\lambda x) = \lambda^{2\sigma, \varepsilon} f(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ действует правыми сдвигами в пространстве $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$:

$$(T_{\sigma,\varepsilon}(g)f)(x) = f(xg)$$

Обозначим через $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$ представление, "контраградиентное" представлению $T_{\sigma,\varepsilon}$, а именно,

$$\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}(g) = T_{\sigma,\varepsilon}(\widehat{g}),$$

см. (6.2). Это представление индуцируется характером нижней треугольной подгруппы P^- . Поскольку P^+ и P^- сопряжены в G , представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ и $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$ эквивалентны. В реализации в $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$ эквивалентность дается оператором C , переставляющим координаты вектора $x \in \mathbb{R}^2$:

$$(Cf)(x_1, x_2) = f(x_2, x_1).$$

Рассмотрим две реализации представлений $T_{\sigma,\varepsilon}$ и $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$: в компактной и некомпактной картинах.

Сначала – в *компактной* картине. Пусть $|x|$ – евклидова длина вектора $x = (x_1, x_2)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$: $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Пусть S – окружность $|x| = 1$.

Ограничим функции f из $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$ на S . Мы получим пространство $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ функций φ из $\mathcal{D}(S)$ четности ε :

$$\varphi(-s) = (-1)^\varepsilon \varphi(s).$$

Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ действует в $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ так:

$$(T_{\sigma,\varepsilon}(g)\varphi)(s) = \varphi\left(\frac{sg}{|sg|}\right) |sg|^{2\sigma}.$$

Пусть α – координата на S : точка s из S есть $s = (\sin \alpha, \cos \alpha)$. Иногда вместо $\varphi(s)$ мы будем писать $\varphi(\alpha)$.

Введем оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$, действующий в функциях из $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$:

$$(A_{\sigma,\varepsilon}\varphi)(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\sin(\alpha - \beta)]^{-2\sigma-2,\varepsilon} \varphi(\beta) d\beta.$$

Он сплетает $T_{\sigma,\varepsilon} \curvearrowright T_{-\sigma-1,\varepsilon}$. Множитель перед интегралом поставлен для удобства формул в дальнейшем. Интеграл абсолютно сходится при $\operatorname{Re} \sigma < -1/2$ и распространяется по аналитичности в плоскость σ до мероморфной функции.

Возьмем в $\mathcal{D}(S)$ базис

$$\varphi_k(\alpha) = e^{ik\alpha}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Базис в $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ состоит из функций φ_k , для которых $k \equiv \varepsilon$. Оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$ переводит φ_k в φ_k с множителем:

$$A_{\sigma,\varepsilon}\varphi_k = a(\sigma, \varepsilon; m) \varphi_k,$$

где

$$\begin{aligned} a(\sigma, \varepsilon; k) &= i^{-k} \pi 2^{2\sigma+2} \frac{\Gamma(-2\sigma-1)}{\Gamma(-\sigma-k/2) \Gamma(-\sigma+k/2)} \\ &= i^{-k} \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(-\sigma) \Gamma(-\sigma-1/2)}{\Gamma(-\sigma-k/2) \Gamma(-\sigma+k/2)}, \end{aligned}$$

при вычислении использовалась формула [1] 1.5 (30). Отсюда следует, что композиция $A_{\sigma, \varepsilon}$ и $A_{-\sigma-1, \varepsilon}$ есть скалярный оператор:

$$A_{-\sigma-1, \varepsilon} A_{\sigma, \varepsilon} = \omega_0(\sigma, \varepsilon) \cdot E, \quad (6.7)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_0(\sigma, \varepsilon) &= \frac{2\pi}{2\sigma+1} \cdot \frac{1 - (-1)^\varepsilon \cos 2\sigma\pi}{\sin 2\sigma\pi} = \\ &= \frac{2\pi}{2\sigma+1} \cdot (-1)^\varepsilon \cdot \operatorname{tg} \left(\sigma - \frac{\varepsilon}{2} \right) \pi. \end{aligned}$$

Элементу $\Delta_{\mathfrak{g}}$ отвечает скалярный оператор (умножение на число):

$$T_{\sigma, \varepsilon}(\Delta_{\mathfrak{g}}) = \widehat{T}_{\sigma, \varepsilon}(\Delta_{\mathfrak{g}}) = \sigma(\sigma+1) \cdot E.$$

Билинейная форма

$$\langle \psi, \varphi \rangle_S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \psi(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha \quad (6.8)$$

на $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ инвариантна относительно пар $(T_{\sigma, \varepsilon} T_{-\sigma-1, \varepsilon})$ и $(\widehat{T}_{\sigma, \varepsilon} \widehat{T}_{-\sigma-1, \varepsilon})$:

$$\langle T_{\sigma, \varepsilon}(g)\psi, \varphi \rangle_S = \langle \psi, T_{-\sigma-1, \varepsilon}(g^{-1})\varphi \rangle_S \quad (6.9)$$

и аналогично для $\widehat{T}$. Оператор $A_{\sigma, \varepsilon}$ симметричен относительно этой формы

$$\langle A_{\sigma, \varepsilon}\psi, \varphi \rangle_S = \langle \psi, A_{\sigma, \varepsilon}\varphi \rangle_S. \quad (6.10)$$

Билинейная форма

$$B_{\sigma, \varepsilon}(\psi, \varphi) = \langle A_{\sigma, \varepsilon}\psi, \varphi \rangle_S$$

на $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ инвариантна относительно представления $T_{\sigma, \varepsilon}$ и представления $\widehat{T}_{\sigma, \varepsilon}$. На парах экспонент имеем

$$B_{\sigma, \varepsilon}(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} \pi \cdot a(\sigma, \varepsilon; k), & l = -k, \\ 0, & l \neq -k. \end{cases}$$

Представления $T_{\sigma, \varepsilon}$, $\widehat{T}_{\sigma, \varepsilon}$ и оператор $A_{\sigma, \varepsilon}$ мы можем распространить с пространства $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ на пространство $\mathcal{D}'_\varepsilon(S)$ обобщенных функций на S четности ε – с помощью формул (6.9) и (6.10), как это указано в конце Введения.

Дифференциальные операторы, отвечающие элементам алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в представлении $T_{\sigma,\varepsilon}$, не зависят от ε , поэтому мы опустим значок ε при записи этих операторов.

В представлении $T_{\sigma,\varepsilon}$ элементам базиса (6.4) отвечают операторы:

$$\begin{aligned} T_\sigma(L^-) &= \cos^2 \alpha \cdot \frac{d}{d\alpha} + \sin 2\alpha \cdot \sigma, \\ T_\sigma(L^+) &= \sin^2 \alpha \cdot \frac{d}{d\alpha} - \sin 2\alpha \cdot \sigma, \\ T_\sigma(L^1) &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot \frac{d}{d\alpha} - \cos 2\alpha \cdot \sigma, \end{aligned}$$

так что

$$T_\sigma(L^0) = \frac{d}{d\alpha}, \quad (6.11)$$

а элементам $E^\pm$, см. (6.6), отвечают операторы:

$$\begin{aligned} T_\sigma(E^+) &= \frac{1}{2} e^{2i\alpha} \cdot \left(2\sigma + i \frac{d}{d\alpha} \right), \\ T_\sigma(E^-) &= \frac{1}{2} e^{-2i\alpha} \cdot \left(2\sigma - i \frac{d}{d\alpha} \right). \end{aligned}$$

Экспоненты φ_k являются собственными функциями для оператора $T_\sigma(L^0)$, см. (6.11):

$$T_\sigma(L^0)\varphi_k = ik \varphi_k, \quad (6.12)$$

а операторы $T_\sigma(E^\pm)$ действуют на них так:

$$T_\sigma(E^+)\varphi_k = \frac{1}{2} (2\sigma - k) \varphi_{k+2}, \quad (6.13)$$

$$T_\sigma(E^-)\varphi_k = \frac{1}{2} (2\sigma + k) \varphi_{k-2}, \quad (6.14)$$

так что элементы E^+ и E^- дают повышающие и понижающие операторы, соответственно.

Из формул (6.12), (6.13), (6.14) получаем следующие утверждения о структуре представлений T_σ .

Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ неприводимо, за исключением случая, когда $2\sigma \in \mathbb{Z}$ и $2\sigma \equiv \varepsilon$.

Пусть $2\sigma \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \equiv 2\sigma$, тогда представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ имеет инвариантное конечномерное подпространство

$$V_\sigma = \{\varphi_k : -2\sigma \leq k \leq 2\sigma, k \equiv \varepsilon\},$$

так что $\dim V_\sigma = 2\sigma + 1$. В этом случае обозначим через π_σ и $\widehat{\pi}_\sigma$ ограничения на V_σ представлений $T_{\sigma,\varepsilon}$ и $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$, соответственно. Число σ называется *старшим*

весом представления π_σ . Представления π_σ и $\widehat{\pi}_\sigma$ эквивалентны. Представления π_σ , $2\sigma \in \mathbb{N}$, исчерпывают конечномерные представления группы G .

Пусть $2\sigma \in -\mathbb{N} - 1$, $\varepsilon \equiv 2\sigma$, тогда представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ имеет два инвариантных бесконечномерных подпространства:

$$V_\sigma^+ = \{\varphi_k : k \geq -2\sigma, k \equiv \varepsilon\},$$

$$V_\sigma^- = \{\varphi_k : k \leq 2\sigma, k \equiv \varepsilon\},$$

пересекающихся по нулю. Фактор-пространство по их сумме $V_\sigma^+ + V_\sigma^-$ конечномерно, оно изоморфно $V_{-\sigma-1}$, представление в этом фактор-пространстве эквивалентно $\pi_{-\sigma-1}$.

Пусть $2m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \equiv 2m$. Оператор $A_{m,\varepsilon}$, а также форма $B_{m,\varepsilon}$, обращаются в нуль на пространстве V_m . Производная

$$\left. \frac{\partial}{\partial \sigma} B_{\sigma,\varepsilon} \right|_{\sigma=m}$$

есть билинейная форма на пространстве V_m , инвариантная относительно π_m . Нормируем ее так, чтобы ее значение на паре $\varphi_{2m}, \varphi_{-2m}$ было равно 1. Обозначим эту форму через B_m . Мы получим

$$B_m(\varphi_k, \varphi_{-k}) = (-1)^{(2m-k)/2} \left(\frac{2m}{(2m-k)/2} \right)^{-1},$$

здесь k – целые числа такие, что $-2m \leq k \leq 2m$, $k \equiv 2m$. На остальных парах из V_m эта форма B_m равна нулю. Таким образом, эта форма симметрична при четном $2m$ и кососимметрична при нечетном $2m$:

$$B_m(\psi, \varphi) = (-1)^{2m} B_m(\varphi, \psi).$$

Инвариантность означает:

$$B_m(\pi_m(X)\psi, \varphi) = -B_m(\psi, \pi_m(X)\varphi), \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Мы будем использовать аргументные обозначения для функций, находящиеся внутри билинейной формы: повторяющийся аргумент является немым.

Функция

$$\Phi_m(\alpha, \beta) = \{e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)}\}^{2m} = \{2i \sin(\alpha - \beta)\}^{2m}$$

есть воспроизводящее ядро (играет роль дельта-функции), а именно, для всякой функции $\varphi \in V_m$ имеет место

$$B_m(\Phi_m(\alpha, \beta), \varphi(\beta)) = \varphi(\alpha),$$

так что $\Phi_m(\alpha, \beta)$ есть аналог ядра Бергмана для базиса φ_k пространства V_m .

Перейдем теперь к *некомпактной* картине.

Ограничим функции из $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$ на горизонтальную прямую, состоящую из точек $x = (t, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R})$ обозначает получившееся множество на прямой. Оно состоит из функций f из $C^\infty(\mathbb{R})$ таких, что функция

$$\widehat{f}(t) = t^{2\sigma,\varepsilon} f\left(\frac{1}{t}\right)$$

тоже входит в $C^\infty(\mathbb{R})$. Представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ и $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$ действуют соответственно по формулам:

$$\begin{aligned} (T_{\sigma,\varepsilon}(g)f)(t) &= f(\widetilde{t})(\beta t + \delta)^{2\sigma,\varepsilon}, \\ (\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}(g)f)(t) &= f(\widehat{t})(\gamma t + \alpha)^{2\sigma,\varepsilon}, \end{aligned}$$

где, см. (6.3):

$$\widetilde{t} = t \bullet g = \frac{\alpha t + \gamma}{\beta t + \delta}, \quad \widehat{t} = t \circ g = \frac{\delta t + \beta}{\gamma t + \alpha}.$$

Представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ и $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$ эквивалентны с помощью отображения $f \mapsto \widehat{f}$.

Оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$ из компактной картины становится интегральным оператором с ядром $(t - s)^{-2\sigma-2,\varepsilon}$. Однако, нам будет удобнее вместо него рассматривать интегральный оператор с ядром $(1 - ts)^{-2\sigma-2,\varepsilon}$. Мы сохраним для него тот же символ $A_{\sigma,\varepsilon}$. Таким образом, мы имеем оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$, задаваемый формулой:

$$(A_{\sigma,\varepsilon}f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - ts)^{-2\sigma-2,\varepsilon} f(s) ds.$$

Он сплещает $T_{\sigma,\varepsilon}$ и $\widehat{T}_{-\sigma-1,\varepsilon}$:

$$\widehat{T}_{-\sigma-1,\varepsilon}(g)A_{\sigma,\varepsilon} = A_{\sigma,\varepsilon}T_{\sigma,\varepsilon}(g),$$

а также $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$ и $T_{-\sigma-1,\varepsilon}$.

Композиция $A_{\sigma,\varepsilon}$ и $A_{-\sigma-1,\varepsilon}$ есть скалярный оператор:

$$A_{-\sigma-1,\varepsilon} A_{\sigma,\varepsilon} = \frac{1}{c(\sigma,\varepsilon)} \cdot E,$$

где

$$c(\sigma,\varepsilon) = \frac{2\sigma + 1}{2\pi} \cdot \frac{(-1)^\varepsilon + \cos 2\sigma\pi}{\sin 2\sigma\pi}.$$

Оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$ симметричен относительно формы (1.8).

Билинейная форма (6.8) становится формой

$$\langle F, f \rangle_{\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) g(t) dt.$$

Она инвариантна относительно тех же пар, что и (6.8). Пусть $\mathcal{D}'_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R})$ обозначает образ пространства $\mathcal{D}'_\varepsilon(S)$ при переходе от компактной картины к некомпактной. Оно содержится в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ обобщенных функций на прямой. В свою очередь, пространство $\text{Pol}(\mathbb{R})$ многочленов на $\mathbb{R}$ содержится в $\mathcal{D}'_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R})$.

Для элементов базиса (6.4) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ в $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R})$ или в $\mathcal{D}'_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R})$ дается следующими формулами:

$$T_{\sigma,\varepsilon}(L_-) = \frac{d}{dt}, \quad (6.15)$$

$$T_{\sigma,\varepsilon}(L_1) = t \frac{d}{dt} - \sigma, \quad (6.16)$$

$$T_{\sigma,\varepsilon}(L_+) = t^2 \frac{d}{dt} - 2\sigma t, \quad (6.17)$$

Контраградиентное представление $\hat{T}_{\sigma,\varepsilon}$ дается следующими формулами:

$$\hat{T}_{\sigma,\varepsilon}(L_-) = -t^2 \frac{d}{dt} + 2\sigma t,$$

$$\hat{T}_{\sigma,\varepsilon}(L_1) = -t \frac{d}{dt} + \sigma,$$

$$\hat{T}_{\sigma,\varepsilon}(L_+) = -\frac{d}{dt}.$$

Элементу $\Delta_{\mathfrak{g}}$ из $\text{Env}(\mathfrak{g})$, см. (6.5), отвечает скалярный оператор (умножение на число):

$$T_{\sigma,\varepsilon}(\Delta_{\mathfrak{g}}) = \hat{T}_{\sigma,\varepsilon}(\Delta_{\mathfrak{g}}) = \sigma(\sigma + 1) \cdot E.$$

Формулы (6.15)–(6.17) порождают представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ не только в $\mathcal{D}'_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R})$, но и в других пространствах, например, в пространстве $C^\infty(\mathbb{R})$, в пространстве $\text{Pol}(\mathbb{R})$ многочленов на $\mathbb{R}$, в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ обобщенных функций на $\mathbb{R}$, в пространстве $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$ обобщенных функций на $\mathbb{R}$, сосредоточенных в нуле. Поскольку указанные формулы не зависят от ε , мы будем эти представления обозначать T_σ . То же самое относится и к $\hat{T}_{\sigma,\varepsilon}$.

На базисе t^m в $\text{Pol}(\mathbb{R})$ представление T_σ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ таково:

$$\begin{aligned} T_\sigma(L_-) t^m &= m t^{m-1}, \\ T_\sigma(L_1) t^m &= (m - \sigma) t^m, \\ T_\sigma(L_+) t^m &= (m - 2\sigma) t^{m+1}, \end{aligned}$$

Пространство $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$ состоит из линейных комбинаций дельта-функции $\delta(t)$ и ее производных $\delta^{(m)}(t)$. На этом базисе имеем

$$\begin{aligned} T_\sigma(L_-) \delta^{(m)}(t) &= \delta^{(m+1)}(t), \\ T_\sigma(L_1) \delta^{(m)}(t) &= (-\sigma - 1 - m) \delta^{(m)}(t), \\ T_\sigma(L_+) \delta^{(m)}(t) &= m(2\sigma + m + 1) \delta^{(m-1)}(t). \end{aligned}$$

Пространства $\text{Pol}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$ являются модулями Верма относительно T_σ .

Оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$ переводит базис $\{t^m\}$ в $\text{Pol}(\mathbb{R})$ в базис $\{\delta^{(m)}\}$ в $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$ (с множителями):

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1-ts)^{-2\sigma-2,\varepsilon} t^m dt = \omega_m(\sigma,\varepsilon) \delta^{(m)}(s), \quad (6.18)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_m(\sigma,\varepsilon) &= \frac{1}{(2\sigma)^{(m)}} \cdot \omega_0(\sigma,\varepsilon) = \\ &= \frac{2\pi}{(2\sigma+1)^{(m+1)}} \cdot \text{tg} \left(\sigma - \frac{\varepsilon}{2} \right) \pi, \end{aligned}$$

и обратно, оператор $A_{-\sigma-1,\varepsilon}$ переводит базис $\{\delta^{(m)}\}$ в базис $\{t^m\}$ (с множителями):

$$A_{-\sigma-1,\varepsilon} \delta^{(m)} = (2\sigma)^{(m)} t^m \quad (6.19)$$

(формула (6.19) получается быстрым вычислением, формула (6.18) получается из нее и из (6.7); формулу (6.18) можно получить и другим способом: при $m=0$ она эквивалентна (6.7), а для $m>0$ получается дифференцированием).

Структура представлений $T_{\sigma,\varepsilon}$ для некомпактной картины выглядит так.

Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ неприводимо, кроме случая, когда $2\sigma \in \mathbb{Z}$, $2\sigma \equiv \varepsilon$.

Пусть $2\sigma \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \equiv 2\sigma$, тогда представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ имеет инвариантное конечномерное подпространство V_σ , состоящее из многочленов степени $\leq 2\sigma$, так что $\dim V_\sigma = 2\sigma + 1$. В этом случае обозначим через π_σ и $\hat{\pi}_\sigma$ ограничения соответственно $T_{\sigma,\varepsilon}$ и $\hat{T}_{\sigma,\varepsilon}$ на V_σ . Число σ называется *старшим весом* представления π_σ .

Оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$ обращается в нуль на V_σ , а его производная

$$A'_\sigma = \left. \frac{\partial}{\partial \mu} A_{\mu,\varepsilon} \right|_{\mu=\sigma, \varepsilon \equiv 2\sigma}$$

порождает оператор, отображающий эквивалентно пространство V_σ на конечномерное фактор-пространство для $T_{-\sigma-1,\varepsilon}$. Кроме того, из (5.6) получаем

$$A_{-\sigma-1,\varepsilon} A'_\sigma = \omega'_0(\sigma) \cdot E,$$

где

$$\omega'_0(\sigma) = \frac{2\pi^2}{2\sigma+1}.$$

Всякое неприводимое конечномерное представление группы G и алгебры Ли $\mathfrak{g}$ эквивалентно одному из π_σ .

Для $2\sigma \in \mathbb{N}$ модуль Z относительно $T_{-\sigma-1}$ или $\hat{T}_{-\sigma-1}$ имеет $\mathfrak{g}$ -инвариантный подмодуль, порожденный $\delta^{(k)}$ с $k \geq 2\sigma+1$. Оператор $A_{-\sigma-1,\varepsilon}$ на нем обращается в нуль. Обозначим фактор-модуль через $Z_{-\sigma-1}$, он порождается $\delta^{(k)}$, $0 \leq k \leq 2\sigma$.

Оператор $A_{-\sigma-1,\varepsilon}$ отображает $Z_{-\sigma-1}$ на V_σ . Оператор A'_σ переводит базис t^m в V_σ в базис $\delta^{(m)}$ в $Z_{-\sigma-1}$ (с множителями):

$$A'_\sigma t^m = \omega'_0(\sigma) \cdot \frac{1}{(2\sigma)^{(m)}} \delta^{(m)}.$$

На V_σ существует единственная с точностью до множителя билинейная форма, инвариантная относительно π_σ . В базисе t^k она отлична от нуля только на парах $t^k, t^{2\sigma-k}$ и имеет на такой паре значение

$$\text{const} \cdot (-1)^k \binom{2\sigma}{k}^{-1}.$$

Нам такая форма потребуется только для целых σ (так что $\sigma \in \mathbb{N}$). При этом условии обозначим через B_σ такую форму с нормировкой

$$B_\sigma(1, t^{2\sigma}) = 1.$$

Таким образом,

$$B_\sigma(t^k, t^{2\sigma-k}) = (-1)^{2\sigma-k} \binom{2\sigma}{k}^{-1}.$$

Аналогично, на V_σ существует единственная с точностью до множителя билинейная форма $\overset{\circ}{B}_\sigma$, инвариантная относительно пары $(\pi_\sigma, \widehat{\pi}_\sigma)$. В базисе t^m она диагональна:

$$\overset{\circ}{B}_\sigma(t^k, t^m) = (-1)^m \binom{2\sigma}{m}^{-1} \delta_{k,m},$$

где $\delta_{k,m}$ – дельта Кронекера. Ее можно записать следующим образом:

$$\overset{\circ}{B}_\sigma(f_1, f_2) = \omega'_0(\sigma)^{-1} (A'_\sigma f_1, f_2),$$

в правой части стоит форма (5.13).

Наконец, рассмотрим реализацию представлений группы G на конусе. Здесь мы получаем представления с $\varepsilon = 0$.

Введем в $\mathbb{R}^3$ билинейную форму

$$[x, y] = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

здесь x, y – векторы $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. Пусть $\mathcal{C}$ обозначает конус (верхнюю полу конуса), задаваемый условиями $[x, x] = 0$, $x_1 > 0$.

Рассмотрим квадратичное отображение Q плоскости $\mathbb{R}^2$ в трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$: вектору $u = (u_1, u_2)$ из $\mathbb{R}^2$ оно сопоставляет вектор

$$x = (u_1^2 + u_2^2, u_1^2 - u_2^2, 2u_1 u_2).$$

Образ этого отображения Q состоит из векторов, удовлетворяющих условиям $[x, x] = 0$, $x_1 \geq 0$. Следовательно, плоскость $\mathbb{R}^2$ без начала координат переходит как раз в конус $\mathcal{C}$.

Отображение Q дает квадратичное отображение группы G на группу $\tilde{G}$, а именно, если вектор u переходит в вектор ug , где g дается формулой (6.1), то соответствующий вектор $x = Qu$ переходит в вектор $x\tilde{g}$, где

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}{2} & \frac{\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2}{2} & \alpha\beta + \gamma\delta \\ \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2}{2} & \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2}{2} & \alpha\beta - \gamma\delta \\ \alpha\gamma + \beta\delta & \alpha\gamma + \beta\delta & \alpha\delta + \beta\gamma \end{pmatrix}$$

Группа $\tilde{G}$ связна и сохраняет билинейную форму $[x, y]$, следовательно, $\tilde{G} = \text{SO}_0(1, 2)$

Этот же гомоморфизм $G \rightarrow \tilde{G}$ можно получить еще так. Реализуем пространство $\mathbb{R}^3$ как множество вещественных матриц второго порядка со следом единица:

$$x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - x_3 & -x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & 1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\det x = (1/4)(1 - [x, x])$. Группа G действует на этих матрицах сопряжениями:

$$x \mapsto g^{-1}xg.$$

На конусе $\mathcal{C}$ она действует транзитивно.

Пусть $\sigma \in \mathbb{C}$. Обозначим через $\mathcal{D}_\sigma(\mathcal{C})$ пространство функций $\varphi(x)$ на конусе $\mathcal{C}$, однородных степени σ :

$$\varphi(tx) = t^\sigma \varphi(x), \quad t > 0.$$

Это пространство изоморфно пространству $\mathcal{D}_{\sigma,0}(\mathbb{R}^2)$: функции $\psi \in \mathcal{D}_\sigma(\mathcal{C})$ отвечает функция $\varphi \in \mathcal{D}_{\sigma,0}(\mathbb{R}^2)$:

$$\psi(x) = \varphi(u), \quad x = Qu.$$

Представление $T_{\sigma,0}$ группы G реализуется как представление T_σ сдвигами в $\mathcal{D}_\sigma(\mathcal{C})$:

$$(T_\sigma(g)\psi)(x) = \psi(x\tilde{g}).$$

Пусть S – сечение конуса $\mathcal{C}$ плоскостью $x_1 = 1$. Это сечение состоит из точек $s = (1, \sin t, \cos t)$, так что оно есть единичная окружность в $\mathbb{R}^2$.

Представление T_σ , $\sigma \in \mathbb{C}$, группы G действует в $\mathcal{D}(S)$ по формуле

$$(T_\sigma(g)\psi)(s) = \psi\left(\frac{s\tilde{g}}{(s\tilde{g})_1}\right)(s\tilde{g})_1^\sigma.$$

7 Тензорное произведение $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$: компактная картина

В этом параграфе мы рассматриваем тензорное произведение $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$ представлений группы $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Здесь $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$, $2m \in \mathbb{N}$. Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ – бесконечномерное, для определенности мы будем считать, что σ – общего проложения, то есть $2\sigma \notin \mathbb{N}$, представление π_m – конечномерное, его размерность равна $2m + 1$, см. § 6.

Все эти представления мы берем в *компактной картине*.

Мы разлагаем тензорное произведение $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$ на неприводимые составляющие, см. теорему 7.1, и находим в явном виде операторы, сплетающие эти неприводимые составляющие и наше тензорное произведение (преобразования Пуассона и Фурье), см. теорему 7.4.

Метод исследования – это использование собственных векторов *произведения повышающего и понижающего операторов*.

Тензорное произведение $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$ действует в пространство $\mathcal{D}_\varepsilon(S) \otimes V_m$ функций $f(s, t)$ на прямом произведении $S \times S$ двух окружностей четности $\varepsilon + 2m$:

$$f(-s, -t) = (-1)^{\varepsilon+2m} f(s, t).$$

Теорема 7.1 *Тензорное произведение $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$ распадается в прямую однократную сумму неприводимых представлений*

$$T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m = T_{\sigma-m,\nu} + T_{\sigma-m+1,\nu} + \dots + T_{\sigma+m,\nu},$$

где $\nu \equiv \varepsilon + 2m$. Соответственно, $\mathcal{D}_\varepsilon(S) \otimes V_m$ распадается в прямую однократную сумму неприводимых подпространств W_k , $k = 0, 1, 2, \dots, 2m$. Подпространство W_k есть образ преобразования Пуассона M_k , отображающего пространство $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ в пространство $\mathcal{D}_\varepsilon(S) \otimes V_m$ и сплетающего представление $T_{\sigma-m+k,\nu}$ с тензорное произведением $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$. Явный вид преобразований Пуассона дается в Теореме 7.4 ниже.

Дальше мы приводим доказательство этой теоремы, оно как раз состоит в построении преобразований Пуассона и Фурье.

Для простоты записи будем обозначать $\mathcal{D}_\varepsilon(S) \otimes V_m = \tilde{\mathcal{D}}$ и $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m = \tilde{T}$, мы не проявляем индексы σ, ε, m .

Для точек s первой окружности из прямого произведения $S \times S$ берем параметр α , так что $s = (\sin \alpha, \cos \alpha)$, а для точек t второй окружности берем параметр β , так что $t = (\sin \beta, \cos \beta)$. Функции f из $\tilde{\mathcal{D}}$ имеют вид

$$f(s, t) = f(\alpha, \beta) = \sum f_k(\alpha) e^{ik\beta},$$

где k пробегает множество

$$\{-2m, -2m+2, \dots, 2m-2, 2m\}, \quad (7.1)$$

функции $f_k(\alpha)$ принадлежат $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$. Представление $\tilde{T}$ группы G действует в $\tilde{\mathcal{D}}$ по формуле

$$\left(\tilde{T}(g)f\right)(s, t) = f\left(\frac{sg}{|sg|}, \frac{tg}{|tg|}\right) \cdot |sg|^{2\varepsilon} \cdot |tg|^{2m},$$

см. § 6.

Элементом X алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в представлении $\tilde{T}$ отвечают операторы $\tilde{T}(X)$, для краткости записи обозначим их через $\tilde{X}$, мы имеем

$$\tilde{X} = T_{\sigma,\varepsilon}(X) \otimes 1 + 1 \otimes \pi_m(X).$$

В частности,

$$\tilde{L}^0 = \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad (7.2)$$

$$\tilde{E}^+ = \frac{1}{2} e^{2i\alpha} \cdot \left(2\sigma + i \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) + \frac{1}{2} e^{2i\beta} \cdot \left(2m + i \frac{\partial}{\partial \beta}\right), \quad (7.3)$$

$$\tilde{E}^- = \frac{1}{2} e^{-2i\alpha} \cdot \left(2\sigma - i \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) + \frac{1}{2} e^{-2i\beta} \cdot \left(2m - i \frac{\partial}{\partial \beta}\right). \quad (7.4)$$

Возьмем в $\tilde{\mathcal{D}}$ базис, состоящий из экспонент:

$$\varphi_{r,h}(\alpha, \beta) = e^{ir\alpha} e^{ih\beta},$$

где h принадлежит множеству (7.1), $r \in \mathbb{Z}$, $r \equiv \varepsilon$, так что $r + h \equiv \varepsilon + 2m$. Эти экспоненты – собственные для оператора $\tilde{L}^0$:

$$\tilde{L}^0 \varphi_{r,h} = i(r + h) \varphi_{r,h}.$$

Повышающий и понижающий операторы $\tilde{E}^+$ и $\tilde{E}^-$ действуют на них так:

$$\tilde{E}^+ \varphi_{r,h} = \frac{1}{2} (2\sigma - r) \varphi_{r+2,h} + \frac{1}{2} (2m - h) \varphi_{r,h+2}, \quad (7.5)$$

$$\tilde{E}^- \varphi_{r,h} = \frac{1}{2} (2\sigma + r) \varphi_{r-2,h} + \frac{1}{2} (2m + h) \varphi_{r,h-2}. \quad (7.6)$$

Обозначим через H_p подпространство в $\tilde{\mathcal{D}}$ с базисом $\varphi_{r,h}$, $r+h=2p$, так что $2p \equiv \varepsilon + 2m$. Это подпространство – собственное для оператора $\tilde{L}^0$ с собственным значением $2pi$. Все пространство $\tilde{\mathcal{D}}$ распадается в прямую однократную сумму подпространств H_p , $2p \in \mathbb{Z}$, $2p \equiv \varepsilon + 2m$. Размерность H_p равна $2m+1$. Обозначим через $\tilde{E}_p^\pm$ ограничение на H_p операторов $\tilde{E}^\pm$.

Базис в H_p расположим следующим образом:

$$\varphi_{2p-2m,2m}, \varphi_{2p-2m+2,2m-2}, \dots, \varphi_{2p+2m,-2m}. \quad (7.7)$$

Для краткости обозначим эти элементы так:

$$\psi_k^{(p)} = \varphi_{2p-2m+2k,2m-2k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2m. \quad (7.8)$$

Оператор $\tilde{E}_p^+$ переводит H_p в H_{p+1} . Из (7.5) следует, что

$$\tilde{E}_p^+ \psi_k^{(p)} = (\sigma - p + m - k) \psi_k^{(p+1)} + k \psi_{k-1}^{(p+1)}. \quad (7.9)$$

Следовательно, матрица оператора $\tilde{E}_p^+$ есть

$$\tilde{E}_p^+ = \begin{pmatrix} \sigma - p + m & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma - p + m - 1 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - p + m - 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma - p - m \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Это – верхняя треугольная матрица, в которой отлична от нуля главная диагональ и первая следующая диагональ (двудиagonalная матрица). Мы сейчас считаем, что координаты вектора из H_p в базисе (7.7) записаны в виде *столбца*, так что матрица действует на эти столбцы слева.

Оператор $\tilde{E}_{p+1}^-$ переводит H_{p+1} в H_p . Из (7.6) следует, что

$$\tilde{E}_{p+1}^- \psi_k^{(p+1)} = (\sigma + p - m + 1 + k) \psi_k^{(p)} + (2m - k) \psi_{k+1}^{(p)}, \quad (7.11)$$

так что матрица оператора $\tilde{E}_{p+1}^-$ есть

$$\tilde{E}_{p+1}^- = \begin{pmatrix} \sigma + p - m + 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2m & \sigma + p - m + 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2m - 1 & \sigma + p - m + 3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2m - 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma + p + m + 1 \end{pmatrix}. \quad (7.12)$$

Это – нижняя треугольная двудиagonalная матрица.

Композиция $R_p = \tilde{E}_{p+1}^- \tilde{E}_p^+$ (сначала выполняется $\tilde{E}_p^+$, а затем $\tilde{E}_{p+1}^-$) отображает H_p в H_p . Мы хотим вычислить собственные векторы и собственные значения оператора R_p и его сопряженного R_p^* .

Для этого найдем собственные векторы и собственные значения матриц операторов $\tilde{E}_p^+$, $\tilde{E}_{p+1}^-$ и сопряженных к ним.

Собственные векторы (столбцы) матрицы $\tilde{E}_p^+$ таковы:

$$h_k = (1, -(2m-k), \binom{2m-k}{2}, -\binom{2m-k}{3}, \dots, (-1)^{2m-k}, 0, \dots, 0),$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, 2m$, так что i -ая координата вектора h_k равна

$$(-1)^i \binom{2m-k}{i},$$

соответствующие собственные значения равны $\sigma - p - m + k$. Например, для $m = 2$ имеем

$$h_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, h_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем соответствующие векторы (функции) $h_k^{(p)}$ из H_p в терминах экспонент (как линейные комбинации экспонент), мы получим

$$h_k^{(p)} = e^{2pi\alpha} e^{-ikv} [e^{-iv} - e^{iv}]^{2m-k},$$

где

$$v = \alpha - \beta. \quad (7.13)$$

Таким образом,

$$\tilde{E}_p^+ h_k^{(p)} = (\sigma - p - m + k) h_k^{(p+1)}. \quad (7.14)$$

Матрица $\tilde{E}_{p+1}^-$ имеет $2m+1$ собственных векторов (столбцов) $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{2m}$, координата вектора ξ_k с номером i равна

$$(-1)^{2m-i} \binom{2m-k}{2m-i},$$

так что последняя координата равна 1. Например, для $m = 2$ имеем

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения для ξ_k равны $\sigma + p - m + k + 1$.

В терминах экспонент (как линейных комбинаций экспонент из H_p), имеем

$$\xi_k^{(p)} = e^{2pi\alpha} e^{ikv} [e^{iv} - e^{-iv}]^{2m-k}, \quad (7.15)$$

где v дается формулой (7.13). Таким образом,

$$\tilde{E}_{p+1}^- \xi_k^{(p+1)} = (\sigma + p - m + k + 1) \xi_k^{(p)}. \quad (7.16)$$

Кроме того, мы имеем

$$\tilde{E}_p^+ \xi_k^{(p)} = (\sigma - p - m + k) \xi_k^{(p+1)} - k \xi_{k-1}^{(p+1)}. \quad (7.17)$$

Формулы (7.14), (7.16) и (7.17) доказываются либо вычислениями в терминах матриц, либо непосредственным применением операторов $\tilde{E}_p^+$ и $\tilde{E}_{p+1}^-$ к экспонентам.

Из (7.16) и (7.17) следует, что

$$R_p \xi_k^{(p)} = (\sigma + p - m + k + 1)(\sigma - p - m + k) \xi_k^{(p)} - k(\sigma + p - m + k) \xi_{k-1}^{(p)}. \quad (7.18)$$

Для сокращения записи обозначим

$$\sigma - p - m = a, \quad \sigma + p - m = b, \quad (7.19)$$

тогда формула (7.18) переписется так:

$$R_p \xi_k^{(p)} = (a + k)(b + k + 1) \xi_k^{(p)} - k(b + k) \xi_{k-1}^{(p)}. \quad (7.20)$$

Это означает, что в базисе $\xi_0^{(p)}, \xi_1^{(p)}, \dots, \xi_{2m}^{(p)}$ в H_p оператор R_p имеет верхнюю треугольную двудиагональную матрицу:

$$R_p = \begin{pmatrix} a(b+1) & -(b+1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (a+1)(b+2) & -2(b+2) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (a+2)(b+3) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -2m(b+2m) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (a+2m)(b+2m+1) \end{pmatrix}. \quad (7.21)$$

Лемма 7.2 Пусть A – верхняя треугольная двудиагональная матрица порядка $n+1$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \mu_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \mu_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Она имеет следующие собственные векторы (столбцы) $g_0, g_1, \dots, g_n$:

$$\begin{aligned} g_0 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots), \\ g_1 &= (\mu_0, \lambda_1 - \lambda_0, 0, 0, 0, 0, \dots), \\ g_2 &= (\mu_0 \mu_1, (\lambda_2 - \lambda_0) \mu_1, (\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_1), 0, 0, 0, \dots), \\ g_3 &= (\mu_0 \mu_1 \mu_2, (\lambda_3 - \lambda_0) \mu_1 \mu_2, (\lambda_3 - \lambda_0)(\lambda_3 - \lambda_1) \mu_2, \\ &\quad (\lambda_3 - \lambda_0)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2), 0, 0, \dots), \\ &\dots \end{aligned}$$

Из этой леммы вместо g_k возьмем $g_k/k!$, тогда для оператора R_p получим следующие собственные векторы $w_0^{(p)}, w_1^{(p)}, \dots, w_{2m}^{(p)}$:

$$\begin{aligned} w_0^{(p)} &= \xi_0^{(p)}, \\ w_1^{(p)} &= -(b+1)\xi_0^{(p)} + (a+b+2)\xi_1^{(p)}, \\ w_2^{(p)} &= (b+1)(b+2)\xi_0^{(p)} - 2(b+2)(a+b+3)\xi_1^{(p)} \\ &\quad + (a+b+3)(a+b+4)\xi_2^{(p)}, \\ w_3^{(p)} &= -(b+1)(b+2)(b+3)\xi_0^{(p)} + 3(b+2)(b+3)(a+b+4)\xi_1^{(p)} \\ &\quad - 3(b+3)(a+b+4)(a+b+5)\xi_2^{(p)} + (a+b+4)(a+b+5)(a+b+6)\xi_3^{(p)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

собственный вектор с номером k есть

$$w_k^{(p)} = \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \binom{k}{r} (b+k)^{(k-r)} (a+b+k+1)^{[r]} \xi_r^{(p)}, \quad (7.22)$$

заметим, что верхний индекс (p) *не есть* обозначение обобщенной степени. Соответствующее собственное значение есть

$$\lambda_k^{(p)} = (a+k)(b+k+1), \quad (7.23)$$

так что

$$R_p w_k^{(p)} = \lambda_k^{(p)} w_k^{(p)}. \quad (7.24)$$

Подставим в (7.22) выражения (7.15) для $\xi_r^{(p)}$, получим

$$\begin{aligned} w_k^{(p)} &= e^{2pi\alpha} \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \binom{k}{r} (b+k)^{(k-r)} (a+b+k+1)^{[r]} \times \\ &\quad \times e^{irv} [e^{iv} - e^{-iv}]^{2m-r}, \end{aligned} \quad (7.25)$$

где v дается формулой (7.13).

Вычислим действия на векторы (функции) $w_k^{(p)}$ из H_p операторов $\tilde{E}_p^+$ и $\tilde{E}_p^-$.

Пусть w из H_p – собственный вектор для R_p , то есть $R_p w = \lambda w$. Из соотношения коммутации $[E^+, E^-] = -iL^0$ получаем

$$E^+ E^- E^+ = E^- E^+ E^+ - iL^0 E^+.$$

Поэтому $\tilde{E}_p^+ R_p w = R_{p+1} \tilde{E}_p^+ w - i\tilde{L}^0 \tilde{E}_p^+ w$. Вектор $\tilde{E}_p^+$ принадлежит пространству H_{p+1} , оно – собственное для оператора $i\tilde{L}^0$ с собственным значением $2p+2$. Следовательно, $\lambda \tilde{E}_p^+ w = R_{p+1} \tilde{E}_p^+ w + (2p+2) \tilde{E}_p^+ w$. Отсюда

$$R_{p+1} \tilde{E}_p^+ w = (\lambda - 2p - 2) \tilde{E}_p^+ w.$$

Таким образом, оператор $\tilde{E}_p^+$ переводит собственный вектор для R_p в собственный вектор для R_{p+1} . Но для собственных чисел λ справедливо соотношение

$$\lambda_k^{(p)} - 2p - 2 = \lambda_k^{(p+1)},$$

поэтому $\tilde{E}_p^+$ переводит вектор $w_k^{(p)}$ именно в $w_k^{(p+1)}$ – с некоторым множителем. Найдем этот множитель. Достаточно проследить за последним слагаемым у $w_k^{(p)}$, оно есть $(a + b + k + 1)^{[k]} \xi_k^{(p)}$, коэффициент не зависит от p . По (7.17) оператор $\tilde{E}_p^+$ переводит $\xi_k^{(p)}$ в $(\sigma - m + k - p) \xi_k^{(p+1)}$ – с точностью до меньших номеров. Поэтому

$$\tilde{E}_p^+ w_k^{(p)} = (\sigma - m + k - p) w_k^{(p+1)}. \quad (7.26)$$

Аналогично показываем, что

$$\tilde{E}_p^- w_k^{(p)} = (\sigma - m + k + p) w_k^{(p-1)}. \quad (7.27)$$

Обозначим

$$\tau = \sigma - m + k. \quad (7.28)$$

Тогда формулы (7.26) и (7.27) можно переписать так:

$$\tilde{E}_p^+ w_k^{(p)} = (\tau - p) w_k^{(p+1)}, \quad (7.29)$$

$$\tilde{E}_p^- w_k^{(p)} = (\tau + p) w_k^{(p-1)}. \quad (7.30)$$

Обозначим через W_k , $k = 0, 1, 2, \dots, 2m$, подпространство в $\tilde{\mathcal{D}}$, натянутое на векторы (функции) $w_k^{(p)}$, $2p \in \mathbb{Z}$, $2p \equiv \nu$, напомним, что $\nu \equiv \varepsilon + 2m$. Оно изоморфно пространству $\mathcal{D}_\nu(S)$. Все пространство $\tilde{\mathcal{D}}$ есть прямая однократная сумма подпространств W_k .

Из формул (7.29) и (7.30) следует, что действие операторов $\tilde{E}^+$ и $\tilde{E}^-$ на векторы $w_k^{(p)}$, точно такое же, что и действие операторов $T_{\tau,\nu}(E^+)$ и $T_{\tau,\nu}(E^-)$ на экспоненты $\varphi_{2p}(s)$ из $\mathcal{D}_\nu(S)$.

С помощью тех же формул вычисляем, что оператор, отвечающий элементу Казимира $\Delta_{\mathfrak{g}}$, действует на $w_k^{(p)}$ так:

$$\tilde{T}(\Delta_{\mathfrak{g}}) w_k^{(p)} = \tau(\tau + 1) w_k^{(p)}. \quad (7.29)$$

Следовательно, ограничение представления $\tilde{T}$ на W_k эквивалентно представлению $T_{\tau,\nu}$, а само представление $\tilde{T}$ есть прямая однократная сумма:

$$\tilde{T} = \sum T_{\tau,\nu},$$

суммирование происходит по $\tau \in \{\sigma - m, \sigma - m + 1, \dots, \sigma + m\}$. Это доказывает Теорему 7.1.

Обозначим через M_k оператор $\mathcal{D}_\nu(S) \rightarrow W_k$, сплетающий $T_{\tau,\nu}$ и $\tilde{T}$. Нам будет удобно нормировать вектор $w_k^{(p)}$, а именно, вместо этого вектора мы возьмем вектор

$$u_k^{(p)} = (-1)^k (2i)^{-2m+k} w_k^{(p)}. \quad (7.31)$$

Таким образом, оператор M_k экспоненте $\varphi_{2p}(s)$ из $\mathcal{D}_\nu(S)$ сопоставляет вектор $u_k^{(p)}$ из $\tilde{\mathcal{D}}$, а функции $\varphi(s) = \sum c_{2p} \varphi_{2p}(s)$ он сопоставляет вектор $\sum c_{2p} u_k^{(p)}$ из $\tilde{\mathcal{D}}$. Напишем явные выражения этого сплетающего оператора M_k .

В формулу (7.25) внесем указанный выше множитель, заменим r на $k-r$, вспомним выражения (7.19) для a и b и выражение (7.28) для τ . Мы получим

$$\begin{aligned} u_k^{(p)} &= e^{2pi\alpha} (\sin v)^{2m-k} (-1)^k \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (2\tau - r)^{(k-r)} \times \\ &\times e^{i(k-r)v} (-2i \sin v)^r \cdot (\tau + p)^{(r)}, \end{aligned} \quad (7.32)$$

Поэтому значение оператора M_k на функции $\varphi(\alpha) = \sum c_{2p} e^{2pi\alpha}$ равно

$$\begin{aligned} (M_k \varphi)(\alpha, \beta) &= (\sin v)^{2m-k} (-1)^k \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (2\tau - r)^{(k-r)} \times \\ &\times e^{i(k-r)v} (-2i \sin v)^r \cdot \sum (\tau + p)^{(r)} c_{2p} e^{2pi\alpha}, \end{aligned} \quad (7.33)$$

внутренняя сумма берется по $2p \in \mathbb{Z}$. Так как

$$p e^{2pi\alpha} = \frac{1}{2i} \frac{d}{d\alpha} e^{2pi\alpha},$$

то внутренняя сумма в (7.32) есть

$$\left(\tau + \frac{1}{2i} \frac{d}{d\alpha} \right)^{(r)} \varphi(\alpha).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (M_k \varphi)(\alpha, \beta) &= (\sin v)^{2m-k} (-1)^k \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (2\tau - r)^{(k-r)} \times \\ &\times e^{i(k-r)v} (-2i \sin v)^r \cdot \left(\tau + \frac{1}{2i} \frac{d}{d\alpha} \right)^{(r)} \varphi(\alpha). \end{aligned}$$

Обозначим для краткости

$$D = \frac{d}{d\alpha}, \quad A = 2\tau \quad (7.33)$$

и введем дифференциальный оператор

$$Z = A - iD. \quad (7.34)$$

Кроме того, введем обобщенную степень "с шагом 2":

$$x^{\langle n \rangle} = x(x-2)(x-4) \dots (x-2n+2) \quad (7.35)$$

(n сомножителей). Тогда оператор M_k запишется так:

$$M_k = (\sin v)^{2m-k} Q_k, \quad (7.36)$$

где

$$Q_k = \sum_{r=0}^k (A-k+1)^{[k-r]} \cdot \binom{k}{r} (-1)^{k-r} \cdot (i \sin v)^r e^{i(k-r)v} \cdot Z^{\langle r \rangle} \quad (7.37)$$

Лемма 7.3 Оператор Q_k см. (7.37), можно разложить в следующее произведение линейных дифференциальных операторов:

$$\begin{aligned} Q_k &= [i(\sin v)(Z-k+1) - (A-k+1)e^{iv}] \times \\ &\quad \times [i(\sin v)(Z-k+2) - (A-k+2)e^{iv}] \times \\ &\quad \dots \\ &\quad \times [i(\sin v)(Z-1) - (A-1)e^{iv}] \times \\ &\quad \times [i(\sin v)Z - Ae^{iv}], \end{aligned} \quad (7.38)$$

всего k операторов, они между собой не коммутируют.

Доказательство проводим индукцией по k . При $k=0$ равенство (7.38) тривиально: $1=1$. При $k=1$ равенство (7.37) есть $Q_1 = -e^{iv}A + i(\sin v)Z$, это совпадает с последним множителем в (7.38). Индукционный шаг означает:

$$Q_{k+1} = [i(\sin v)(Z-k) - (A-k)e^{iv}] Q_k. \quad (7.39)$$

Вычислим правую часть этого равенства. Мы опираемся на соотношение операторов:

$$\begin{aligned} i(\sin v)(Z-k) \circ (i \sin v)^r e^{i(k-r)v} &= r(i \sin v)^r e^{i(k+1-r)v} \\ &\quad + (i \sin v)^{r+1} e^{i(k-r)v} (Z-2r). \end{aligned} \quad (7.40)$$

Оно доказывается непосредственной проверкой. Используя это соотношение, получаем

$$\begin{aligned} &i(\sin v)(Z-k) \circ (i \sin v)^r e^{i(k-r)v} Q_k = \\ &= \sum_{r=1}^k (A-k+1)^{[k-r]} \cdot \binom{k}{r} (-1)^{k-r} \cdot r(i \sin v)^r e^{i(k+1-r)v} \cdot Z^{\langle r \rangle} + \\ &+ \sum_{r=0}^k (A-k+1)^{[k-r]} \cdot \binom{k}{r} (-1)^{k-r} \cdot (i \sin v)^{r+1} e^{i(k-r)v} \cdot Z^{\langle r+1 \rangle} + \\ &+ \sum_{r=0}^k (A-k)^{[k+1-r]} \cdot \binom{k}{r} (-1)^{k+1-r} \cdot (i \sin v)^r e^{i(k+1-r)v} \cdot Z^{\langle r \rangle} \end{aligned} \quad (7.41)$$

Из третьей суммы выделим слагаемое с $r = 0$, во второй сумме выделим слагаемое с $r = k$, а в остальных слагаемых второй суммы заменим r на $r - 1$. Тогда правая часть (7.41) превратится в

$$(A - k)^{[k+1]}(-1)^{k+1}e^{i(k+1)v} + \sum_{r=1}^k \{ \dots \} + (i \sin v)^{k+1} Z^{\langle k+1 \rangle}, \quad (7.42)$$

здесь в сумме слагаемое с номером r есть

$$\begin{aligned} & (-1)^{k+1-r}(i \sin v)^r e^{i(k+1-r)v} (A - k + 1)^{[k-r]} \times \\ & \times \left\{ -r \binom{k}{r} + (A - r + 1) \binom{k}{r-1} + (A - k) \binom{k}{r} \right\}, \end{aligned} \quad (7.43)$$

выражение в фигурных скобках равно

$$(A - k) \binom{k+1}{r},$$

поэтому все слагаемое (7.43) равно

$$(-1)^{k+1-r}(i \sin v)^r e^{i(k+1-r)v} (A - k + 1)^{[k+1-r]} \binom{k+1}{r},$$

так что (7.42) есть в точности Q_{k+1} . Это доказывает лемму 7.3.

Вспоминая Z , A , D , см. (7.33), (7.34), находим, что множитель с номером q , $q = 0, 1, \dots, k - 1$, в (7.38) есть

$$i(\sin v)(Z - q) - (A - q)e^{iv} = \sin v \frac{\partial}{\partial \alpha} - (2\tau - q) \cos v.$$

Это вместе с (7.36) дает нам возможность сформулировать теорему 7.4. Напоминаем, что $\tau = \sigma - m + k$, $v = \alpha - \beta$, и мы используем обозначение (7.35).

Теорема 7.4 *Преобразование Пуассона M_k , $k = 0, 1, 2, \dots, 2m$, см. теорему 7.1, есть дифференциальный оператор, он дается одним из следующих двух явных выражений:*

$$\begin{aligned} M_k &= (\sin v)^{2m-k} \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \binom{k}{r} (2\tau - k + 1)^{[k-r]} \times \\ & \times (i \sin v)^r e^{i(k-r)v} \cdot \left(2\tau - i \frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^{\langle r \rangle}, \\ M_k &= (\sin v)^{2m-k} \left[(\sin v) \frac{\partial}{\partial \alpha} - (2\tau - k + 1) \cos v \right] \times \\ & \times \left[(\sin v) \frac{\partial}{\partial \alpha} - (2\tau - k + 2) \cos v \right] \times \\ & \dots \\ & \times \left[(\sin v) \frac{\partial}{\partial \alpha} - 2\tau \cos v \right]. \end{aligned}$$

8 Тензорное произведение $\pi_l \otimes \pi_m$: некомпактная картина

В этом параграфе мы рассматриваем тензорное произведение $\pi_l \otimes \pi_m$ неприводимых конечномерных представлений группы $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ со старшими весами l и m . Известно, что оно раскладывается следующим образом (для определенности будем считать $l \geq m$):

$$\pi_l \otimes \pi_m = \pi_{l-m} + \pi_{l-m+1} + \dots + \pi_{l+m-1} + \pi_{l+m}.$$

Сейчас наша цель состоит в том, чтобы написать в явном виде сплетающие операторы, дающие разложение на неприводимые составляющие этого тензорного произведения, мы называем их преобразованиями Пуассона и Фурье. Оказывается, что эти операторы являются дифференциальными операторами. Наш метод сейчас состоит в использовании собственных векторов произведения повышающего и понижающего операторов. Это тот же метод, что и в § 7, но там мы работали в компактной картине. Отметим, что компактная картина более трудна для вычислений.

Преобразование Фурье совпадает с точностью до множителя со скобками Ранкина–Козна.

Напоминаем, что группа $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ состоит из вещественных матриц второго порядка с определителем единица:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Всякое конечномерное неприводимое представление π_k группы G задается числом k (*старшим весом*), таким, что $2k \in \mathbb{N}$. Оно действует в пространстве V_k многочленов $\varphi(x)$ от x степени $\leq 2k$ (так что $\dim V_k = 2k + 1$) по формуле

$$(\pi_k(g)\varphi)(x) = \varphi(x \cdot g)(\beta x + \delta)^{2k}, \quad x \cdot g = \frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta},$$

мы считаем, что G действует справа. Тензорное произведение $V_{lm} = V_l \otimes V_m$ состоит из многочленов $f(x, y)$ степени $\leq 2l$ по x и степени $\leq 2m$ по y . Тензорное представление $\pi_{lm} = \pi_l \otimes \pi_m$ группы G действует в V_{lm} по формуле

$$(\pi_{lm}(g)f)(x, y) = f(x \cdot g, y \cdot g)(\beta x + \delta)^{2l}(\beta y + \delta)^{2m}.$$

Как мы уже отметили, это тензорное произведение раскладывается в прямую однократную сумму:

$$\pi_{lm} = \sum_k \pi_k, \tag{8.1}$$

где k пробегает множество

$$l - m, l - m + 1, \dots, l + m - 1, l + m. \quad (8.2)$$

Чтобы упростить запись, мы не указываем зависимость от l, m – как в правой части (8.1), так и в дальнейшем. Соответственно разложению (8.1) пространство V_{lm} разлагается в сумму подпространств:

$$V_{lm} = \sum_k W_k,$$

инвариантных и неприводимых относительно π_{lm} . Ограничение представления π_{lm} на W_k эквивалентно π_k . Обозначим для краткости

$$r = m - l. \quad (8.3)$$

Мы будем использовать "обобщенные степени" $a^{[s]}$ и $a^{(s)}$, см. Введение.

Пусть k принадлежит множеству (8.2). Обозначим

$$j = l + m - k, \quad (8.4)$$

так что $2l - j = k - r$, $2m - j = k + r$. Рассмотрим операторы $M_k : V_k \rightarrow V_{lm}$ и $F_k : V_{lm} \rightarrow V_k$, сплетающие представления π_{lm} и π_k , то есть

$$M_k \pi(g) = \pi_{lm}(g) M_k, \quad \pi(g) F_k = F_k \pi_{lm}(g),$$

где $g \in G$. Мы называем операторы M_k и F_k *преобразованиями Пуассона и Фурье*, соответственно. Поскольку разложение (8.1) свободно от кратностей, образ оператора M_k есть подпространство W_k , а оператор F_k исчезает на всех W_s , исключая W_k . Следовательно, преобразования M_k и F_k определены однозначно с точностью до множителя. Композиция $F_k M_k$ есть скалярный оператор V_k (умножение на число). Сначала мы построим M_k , а затем мы нормируем F_k так, чтобы $F_k M_k = \text{id}$, то есть F_k на W_k – обратный оператор для M_k :

$$F_k = M_k^{-1} \text{ на } W_k. \quad (8.5)$$

Многочлен $f \in V_{lm}$ восстанавливается по своим компонентам Фурье $\varphi_k = F_k f$ следующим образом:

$$f = \sum M_k \varphi_k.$$

Теорема 8.1 *Сплетающие операторы $M_k : V_k \rightarrow V_{lm}$ даются следующей формулой:*

$$\begin{aligned} (M_k \varphi)(x, y) &= \sum_{s=0}^{k+r} \binom{k+r}{s} (k-r+1)^{[s]} \times \\ &\times (y-x)^{2m-s} \left(\frac{d}{dx} \right)^{k+r-s} \varphi(x). \end{aligned}$$

Эти сплетающие операторы можно записать также в виде композиции дифференциальных операторов первого порядка:

$$M_k = (y - x)^{l+m-k} \left\{ (y - x) \frac{d}{dx} + k - r + 1 \right\}^{[k+r]},$$

а также с помощью одного дифференцирования:

$$(M_k \varphi)(x, y) = (y - x)^{l+m+k+1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{k+r} (y - x)^{-k+r-1} \varphi(x).$$

Доказательство. Напоминаем, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G состоит из вещественных матриц второго порядка со следом 0. Базис в ней состоит из матриц:

$$L^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad L^+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

Элемент Казимира $\Delta_{\mathfrak{g}}$ в $\mathfrak{g}$ есть

$$\Delta_{\mathfrak{g}} = (L^1)^2 + L^1 - L^- L^+.$$

В представлении π_k базисным элементам из $\mathfrak{g}$ отвечают операторы

$$\pi_k(L^-) = \frac{d}{dx}, \quad \pi_k(L^1) = x \frac{d}{dx} - k, \quad \pi_k(L^+) = x^2 \frac{d}{dx} - 2kx,$$

элементу Казимира отвечает скалярный оператор (умножение на число):

$$\pi_k(\Delta_{\mathfrak{g}}) = k(k+1).$$

Следовательно, собственные числа элемента Казимира разделяют неприводимые представления.

Для упрощения записи обозначим

$$2l = \lambda, \quad 2m = \mu.$$

Числа λ и μ – целые.

Разложим пространство V_{lm} на подпространства H_q , $q = 0, 1, \dots, \lambda + \mu$, собственные для оператора

$$\pi_{lm}(2L^1) = 2x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y} - \lambda - \mu.$$

Подпространство H_q состоит из однородных многочленов от x, y степени однородности q , принадлежащих V_{lm} . Ограничение L_q^1 оператора $\pi_{lm}(L_1)$ на H_q является скалярным оператором:

$$2L_q^1 = 2q - \lambda - \mu. \quad (8.7)$$

Базис в H_q состоит из одночленов

$$x^q, x^{q-1}y, x^{q-2}y^2, \dots, x^{q-\mu}y^\mu,$$

причем подразумевается, что отсутствуют одночлены, содержащие x^i , для которых $i < 0$ и $i > \lambda$. Следовательно, размерность пространства H_q равна $\mu + 1$ для $\mu \leq q \leq \lambda$, равна $q + 1$ для $q \leq \mu$, равна $\lambda + \mu - q + 1$ для $q \geq \lambda$.

Оператор

$$\pi_{lm}(L^+) = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y} - \lambda x - \mu y$$

переводит H_q в H_{q+1} , обозначим его ограничение на H_q через L_q^+ , а оператор

$$\pi_{lm}(L^-) = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

переводит H_q в H_{q-1} , обозначим его ограничение на H_q через L_q^- . Поэтому оператор

$$R_q = L_{q+1}^- L_q^+$$

переводит H_q в себя.

Найдем собственные векторы и собственные значения оператора R_q .

Возьмем следующие базисы $\{\xi_{q,\alpha}\}$ в H_q . Для $q \leq \lambda$ полагаем

$$\xi_{q,\alpha} = (y-x)^{\mu-\alpha} \cdot x^{\alpha-\mu+q},$$

здесь $\alpha = 0, 1, \dots, \mu$ для $\mu \leq q \leq \lambda$ и $\alpha = \mu - q, \dots, \mu$ для $q \leq \mu$. Для $q \geq \lambda$ полагаем

$$\xi_{q,\alpha} = (y-x)^{\mu-\alpha} \cdot x^{\alpha-\mu+\lambda} \cdot y^{q-\lambda},$$

здесь $\alpha = q - \lambda, \dots, \mu$. Операторы L_q^+ , L_q^- действуют на эти базисы следующим образом:

$$L_q^+ \xi_{q,\alpha} = \begin{cases} (q - \lambda - \alpha) \xi_{q+1,\alpha} - \alpha \xi_{q+1,\alpha-1}, & q < \lambda, \\ (q - \lambda - \alpha) \xi_{q+1,\alpha}, & q \geq \lambda, \end{cases} \quad (8.8)$$

$$L_q^- \xi_{q,\alpha} = \begin{cases} (\alpha - \mu + q) \xi_{q-1,\alpha}, & q \leq \lambda, \\ (\alpha - \mu + q) \xi_{q-1,\alpha} + (\alpha - \mu + \lambda) \xi_{q-1,\alpha-1}, & q > \lambda. \end{cases} \quad (8.9)$$

Поэтому

$$R_q \xi_{q,\alpha} = \begin{cases} (q - \lambda - \alpha)(\alpha - \mu + q + 1) \xi_{q,\alpha} - \alpha(\alpha - \mu + q) \xi_{q,\alpha-1}, & q \leq \lambda, \\ (q - \lambda - \alpha) [(\alpha - \mu + q + 1) \xi_{q,\alpha} + (\alpha - \mu + \lambda) \xi_{q,\alpha-1}], & q > \lambda. \end{cases} \quad (8.10)$$

Эти формулы (8.10) показывают, что оператор R_q в базисе $\{\xi_{q,\alpha}\}$ в H_q (индексы α расположены в возрастающем порядке) дается верхней треугольной двудиagonalной матрицей. Вспомним лемму 7.2. В силу этой леммы собственные векторы $w_{q,\alpha}$ оператора R_q являются линейными комбинациями векторов $\xi_{q,i}$, $i \leq \alpha$. Собственное число оператора R_q , соответствующее вектору $w_{q,\alpha}$, есть $(q - \lambda - \alpha)(\alpha - \mu + q + 1)$. Нормируем $w_{q,\alpha}$ так, чтобы последние коэффициенты векторов $w_{q,\alpha}$, то есть коэффициенты при $\xi_{q,\alpha}$, не зависели от q . Тогда, как следует из (8.7), (8.8), (8.9), операторы $2L_q^1$, L_q^+ , L_q^- действуют на $w_{q,\alpha}$ следующим образом:

$$2L_q^1 w_{q,\alpha} = (2q - \lambda - \mu) w_{q,\alpha}, \quad (8.11)$$

$$L_q^+ w_{q,\alpha} = (q - \lambda - \alpha) w_{q+1,\alpha}, \quad (8.12)$$

$$L_q^- w_{q,\alpha} = (\alpha - \mu + q) w_{q-1,\alpha}. \quad (8.13)$$

Пусть k принадлежит множеству (8.2). Построим оператор $M_k : V_k \rightarrow V_{lm}$ следующим образом. Положим

$$\alpha = k + r, \quad (8.14)$$

см (8.3). Возьмем в V_k базис $1, x, x^2, \dots, x^{2k}$. Оператор M_k сопоставляет одночлену x^v вектор $w_{q,\alpha}$, где

$$q = \mu - \alpha + v = j + v, \quad (8.15)$$

см. (8.4). В силу (8.11)–(8.13) действие на векторы $w_{q,\alpha}$ операторов, отвечающих базисным элементам (8.6) в представлении π_{lm} , точно такое же, что и действие на одночлены x^v операторов, отвечающих тем же базисным элементам (8.6) в представлении π_k . Кроме того, оператор, отвечающий элементу Казимира в представлении π_{lm} , умножает $w_{q,\alpha}$ на $k(k+1)$, так что вектор $w_{q,\alpha}$ принадлежит пересечению $H_q \cap W_k$. Следовательно, построенный оператор есть сплетающий изоморфизм $M_k : V_k \rightarrow W_k$.

Укажем явные выражения для $w_{q,\alpha}$. Для $\mu \leq q \leq \lambda$, используя лемму 7.2, возьмем

$$w_{q,\alpha} = \sum_{i=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} (\alpha - \mu + q)^{(\alpha-i)} (\alpha - \mu + \lambda + 1)^{[i]} \xi_{q,i}. \quad (8.16)$$

Тогда для $q > \lambda$ получим

$$w_{q,\alpha} = (\lambda - \mu + 2\alpha) \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} (\alpha - \mu + q - 1)^{(\alpha-i-1)} (\alpha - \mu + q)^{[i]} \xi_{q,q-\lambda+i},$$

где $\alpha = q - \lambda + s$, а для $q < \mu$ получим

$$w_{q,\alpha} = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} \alpha^{(s-i)} (\alpha - \mu + \lambda + 1)^{[\mu-q+i]} \xi_{q,\mu-q+i},$$

где $\alpha = \mu - q + s$.

Укажем явные выражения для оператора M_k . Поскольку он – дифференциальный оператор, достаточно рассмотреть $w_{q,\alpha}$ для $\mu \leq q \leq \lambda$, см. (8.16). Используя (8.14) и (8.15), мы представим $\xi_{q,i}$ в следующем виде

$$\begin{aligned}\xi_{q,i} &= (y-x)^{\mu-i} x^{i-\mu+q} \\ &= (y-x)^{\mu-i} x^{i+v-\alpha} \\ &= \frac{1}{v(\alpha-i)} \cdot (y-x)^{\mu-i} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{k+r-i} x^v.\end{aligned}$$

Подставляя это в (8.16), получим

$$M_k x^v = \sum_{i=0}^{k+r} \binom{k+r}{i} (k-r+1)^{[i]} (y-x)^{\mu-i} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{k+r-i} x^v.$$

Это и доказывает теорему 8.1.

Теперь перейдем к преобразованию Фурье.

Для функции $f(x, y)$ мы используем обозначение

$$f^{(a,b)} = \frac{\partial^{a+b} f}{\partial x^a \partial y^b}.$$

Теорема 8.2 Преобразование Фурье $F_k : V_{lm} \rightarrow V_k$ (напомним, что (8.5) выполняется) дается следующей формулой. Пусть $f(x, y)$ – многочлен из V_{lm} . Тогда

$$(F_k f)(t) = c_k \sum_{p=0}^j (-1)^{j-p} \binom{2l-j+p}{p} \binom{2m-p}{j-p} f^{(j-p,p)}(t, t), \quad (8, 17)$$

где j дается формулой (8.4),

$$c_k^{-1} = \frac{1}{2k+1} (l+m+k+1)^{(2m+1)}.$$

Доказательство. Пространство H_q^* , сопряженное к H_q (над $\mathbb{C}$), состоит из линейных функционалов z на H_q . Нам достаточно будет рассматривать основной случай, то есть $\mu \leq q \leq \lambda$. Пространство H_q^* можно отождествить с $\mathbb{C}^{\mu+1}$ следующим образом: значение функционала $z = (z_0, z_1, \dots, z_\mu)$ на многочлене $f = \sum c_s x^{q-s} y^s$ из H_q равно

$$\langle z, f \rangle = \sum_{s=0}^{\mu} z_s c_s.$$

Возьмем базис в H_q^* , состоящий из функционалов

$$\eta_{q,j} = (0^{(j)}, 1^{(j)}, 2^{(j)}, \dots, \mu^{(j)}), \quad j = 0, 1, \dots, \mu.$$

Функционал $\eta_{q,j}$ действует как дифференцирование:

$$\langle \eta_{q,j}, f \rangle = \left(\left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^j f \right) (1, 1). \quad (8.18)$$

Сопряженные операторы $(L_q^-)^*$, $(L_q^+)^*$ действуют на $\eta_{q,j}$ так:

$$(L_q^-)^* \eta_{q,j} = (q - j) \eta_{q-1,j},$$

$$(L_q^+)^* \eta_{q,j} = (j - \mu - \lambda + q) \eta_{q+1,j} + j(j - \mu - 1) \eta_{q+1,j-1}.$$

Поэтому

$$R_q^* \eta_{q,j} = (q + 1 - j) \{ (j - \mu - \lambda + q) \eta_{q,j} + j(j - \mu - 1) \eta_{q,j-1} \}. \quad (8.19)$$

Формула (8.19) показывает, что оператор R_q^* в базисе $\{\eta_{q,j}\}$ в H_q^* дается верхней треугольной двудиагональной матрицей. Поэтому его собственные векторы $z_{q,j}$ являются линейными комбинациями векторов $\eta_{q,i}$, $i \leq j$. Мы получаем (с помощью леммы 7.2):

$$z_{q,j} = \sum_{s=0}^j (-1)^s \binom{j}{s} (\mu - s)^{(j-s)} (q - s)^{(j-s)} (\lambda + \mu - j + 1)^{(s)} \eta_{q,s}.$$

Собственное число оператора R_q^* , соответствующее собственному вектору $z_{q,j}$, есть $(q + 1 - j)(j - \mu - \lambda + q)$. Сравнивая с оператором R_q , видим, что это собственное число совпадает с собственным числом оператора R_q , отвечающим вектору $w_{q,\alpha}$, где $\alpha = \mu - j$. Поэтому базис $\{z_{q,j}\}$ ортогонален базису $\{w_{q,\alpha}\}$. Соотношения ортогональности таковы:

$$\langle z_{q,j}, w_{q,\alpha} \rangle = \begin{cases} \varepsilon_k, & \alpha = \mu - j, \\ 0, & \alpha \neq \mu - j, \end{cases} \quad (8.20)$$

где

$$\varepsilon_k = (-1)^j j! \frac{(k - r + 1)^{[\mu+1]}}{2k + 1}, \quad j = l + m - k, \quad (8.21)$$

см. (8.4), (8.3).

Собственный вектор $z_{q,j}$ порождает отображение Z_k , $k = l + m - j$, пространства V_{lm} в пространство V_k , а именно, Z_k сопоставляет многочлену $f \in H_q$ одночлен

$$(Z_k f)(x) = \langle z_{q,j}, f \rangle \cdot x^{q-j}.$$

Для $f \in H_q$ имеем

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^s f \right) (1, 1) \cdot x^{q-s} = \left(\left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^s f \right) (x, x),$$

Поэтому, в силу (8.20) и (8.18), получаем

$$\begin{aligned} (Z_k f)(x) &= \sum_{s=0}^j (-1)^s \binom{j}{s} (\mu - s)^{(j-s)} \times \\ &\times (\lambda + \mu - j + 1)^{(s)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{j-s} \left(\left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^s f \right) (x, x). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Повторное дифференцирование здесь равно сумме:

$$\sum_{p=0}^{j-s} \binom{j-s}{p} f^{(p, j-p)}(x, x).$$

Подставим это в (8.22) и изменим порядок суммирования. Мы получим

$$\begin{aligned} (Z_k f)(x) &= \sum_{p=0}^j f^{(p, j-p)}(x, x) \times \\ &\times \sum_{s=0}^{j-p} (-1)^s \binom{j}{s} \binom{j-s}{p} (\mu - s)^{(j-s)} (\lambda + \mu - j + 1)^{(s)}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Внутренняя сумма здесь равна

$$\binom{j}{p} (\mu - j + 1)^{[p]} \sum_{s=0}^{j-p} \binom{j-p}{s} (\mu - j + p + 1)^{[j-p-s]} (-\lambda - \mu + j - 1)^{[s]}. \quad (8.24)$$

Она сворачивается с помощью биномиальной формулы для обобщенных степеней, так что (8.24) равно

$$\binom{j}{p} (\mu - j + 1)^{[p]} (-\lambda + p)^{[j-p]},$$

поэтому, по (8.23),

$$(Z_k f)(x) = \sum_{p=0}^j \binom{j}{p} (\mu - j + 1)^{[p]} (-\lambda + p)^{[j-p]} f^{(p, j-p)}(x, x).$$

Заменим p на $j - p$, используем $(-\lambda + j - p)^{[p]} = (-1)^p (\lambda - j + p)^{(p)}$ и перейдем от обобщенных степеней к биномиальным коэффициентам, получим:

$$(Z_k f)(x) = j! \sum_{p=0}^j (-1)^p \binom{\mu - p}{j - p} \binom{\lambda - j + p}{p} f^{(j-p, p)}(x, x). \quad (8.25)$$

Из (8.20) следует, что отображение Z_k обращается в нуль на всех векторах $w_{q,\alpha}$, для которых $\alpha \neq \mu - j$, а вектор $w_{q,\mu-j}$ оно переводит в $\varepsilon_k \cdot x^{q-j}$, см. (8.21). Следовательно, отображение $\varepsilon_k^{-1} \cdot Z_k$ является обратным отображением для преобразования Пуассона $M_k : V_k \rightarrow W_k$ и потому совпадает с преобразованием Фурье F_k . Формула (8.25) дает формулу (8.17), поскольку $\varepsilon_k^{-1} \cdot j! = c_k (-1)^j$.

9 Тензорное произведение $\pi_l \otimes \pi_m$ и гиперboloид

В этом параграфе, как и в предыдущем, мы рассматриваем тензорное произведение $\pi_l \otimes \pi_m$ неприводимых конечномерных представлений представлений группы $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ со старшими весами l и m . Мы знаем, что оно раскладывается следующим образом (для определенности будем считать $l \geq m$):

$$\pi_l \otimes \pi_m = \pi_{l-m} + \pi_{l-m+1} + \dots + \pi_{l+m-1} + \pi_{l+m}. \quad (9.1)$$

Как и в предыдущем параграфе, мы находим преобразования Пуассона, сплетающие представления π_k с представлением $\pi_l \otimes \pi_m$. Но сейчас мы используем принципиально другой метод, а именно, мы используем гармонический анализ на однополостном гиперboloиде $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}^3$.

Мы продолжаем § 8 и используем обозначения и формулы оттуда, а также из § 6 и Введения.

Тензорное произведение $W_{lm} = V_l \otimes V_m$ состоит из многочленов $\varphi(x, y)$ степени $\leq 2l$ по x и степени $\leq 2m$ по y . Представление $\pi_{lm} = \pi_l \otimes \pi_m$ группы G действует в W_{lm} по формуле

$$(\pi_{lm}(g)\varphi)(x, y) = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y})(\beta x + \delta)^{2l}(\beta y + \delta)^{2m}.$$

Теорема 9.1 *Тензорное произведение $W_{lm} = V_l \otimes V_m$ разлагается в сумму подпространств:*

$$V_l \otimes V_m = W_{l-m}^{(l,m)} + W_{l-m+1}^{(l,m)} + \dots + W_{l+m-1}^{(l,m)} + W_{l+m}^{(l,m)}, \quad (9.2)$$

инвариантных и неприводимых относительно $\pi_{lm} = \pi_l \otimes \pi_m$. Ограничение представления π_{lm} на $W_k^{(l,m)}$ из (9.2) эквивалентно π_k , так что имеет место формула (9.1). Сплетающие операторы $M_k^{(l,m)} : V_k \rightarrow W_k^{(l,m)}$ даются следующей формулой:

$$\begin{aligned} \left(M_k^{(l,m)}\varphi\right)(x, y) &= \sum_{s=0}^{k+m-l} \binom{k+m-l}{s} (k+l-m+1)^{[s]} \times \\ &\times (y-x)^{2m-s} \left(\frac{d}{dx}\right)^{k+m-l-s} \varphi(x). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Доказательство. Меняя α с δ и β с γ , мы получим контраградиентное представление $\hat{\pi}_l$ группы G :

$$(\hat{\pi}_l(g)\varphi)(x) = \varphi(\hat{x})(\gamma x + \alpha)^{2l},$$

где

$$\widehat{x} = x \cdot \widehat{g} = \frac{\delta x + \beta}{\gamma x + \alpha}, \quad \widehat{g} = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Представление $\widehat{\pi}_l$ эквивалентно представлению π_l с помощью отображения

$$\varphi \mapsto \widehat{\varphi}, \quad \widehat{\varphi}(x) = x^{2l} \varphi\left(\frac{1}{x}\right). \quad (9.4)$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G состоит из вещественных матриц второго порядка со следом 0. Базис в ней состоит из матриц:

$$L^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad L^+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для этих базисных элементов из $\mathfrak{g}$ имеем

$$\pi_l(L^1) = -\widehat{\pi}(L^1) = x \frac{d}{dx} - l, \quad (9.5)$$

$$\pi_l(L^+) = -\widehat{\pi}_l(L^-) = x^2 \frac{d}{dx} - 2l x, \quad (9.6)$$

$$\pi_l(L^-) = -\widehat{\pi}_l(L^+) = \frac{d}{dx}. \quad (9.7)$$

Теперь нам будет удобно вместо тензорного произведения $\pi_{lm} = \pi_l \otimes \pi_m$ взять эквивалентное ему тензорное произведение $R_{lm} = \pi_l \otimes \widehat{\pi}_m$. Вместо переменных x, y возьмем переменные ξ, η , соответственно, и вместо φ пишем f . Представление R_{lm} действует в W_{lm} по формуле

$$(R_{lm}(g)f)(\xi, \eta) = f(\widehat{\xi}, \widehat{\eta})(\beta\xi + \delta)^{2l}(\gamma\eta + \alpha)^{2m}.$$

Представление R_{lm} и пространство W_{lm} разлагаются по формулам (9.1) и (9.2).

"Посадим" R_{lm} и W_{lm} на однополостный гиперболоид $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}^3$, задаваемый уравнением $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Реализуем его как множество матриц

$$x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_2 + x_1 & 1 + x_3 \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

с определителем равным нулю. Группа G действует на нем: $x \mapsto g^{-1}xg$, причем транзитивно. Стационарной подгруппой точки

$$x^0 = (0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является подгруппа H диагональных матриц

$$h = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Введем на $\mathcal{X}$ орисферические координаты ξ, η :

$$x = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} -\eta\xi & -\eta \\ \xi & 1 \end{pmatrix}, \quad N = 1 - \xi\eta. \quad (9.9)$$

Действие группы G в этих координатах разделяется: если точка x имеет координаты ξ, η , то точка $g^{-1}xg$ имеет координаты $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$. Базисная точка x^0 имеет координаты $\xi = 0, \eta = 0$. Элемент $g \in G$ переводит x^0 в точку с координатами $\xi = \gamma/\delta, \eta = \beta/\alpha$, так что $N = (\alpha\delta)^{-1}$. В частности, таковым является элемент

$$g_x = \begin{pmatrix} 1/N & \eta/N \\ \xi & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.10)$$

Отображение

$$f \mapsto F = N^{-2m} f, \quad f \in W_{lm}, \quad (9.11)$$

переводит W_{lm} в пространство H_{lm} некоторых рациональных функций F от ξ, η . В силу (9.8) и (9.9) эти рациональные функции являются *многочленами* от x_1, x_2, x_3 на $\mathcal{X}$. В частности, многочлену $f = 1$ отвечает многочлен $2^{-2m}(x_3 + 1)^{2m}$.

Отображение (9.11) сплетает R_{lm} и представление U_r , $r = m - l$, группы G , индуцированное характером $h \mapsto \lambda^{-2r}$ подгруппы H . В орисферических координатах представление U_r есть

$$(U_r(g)F)(\xi, \eta) = F(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) (\beta\xi + \delta)^{-2r}.$$

Обозначим через $H_k^{(l,m)}$ образ подпространства $W_k^{(l,m)}$ при отображении (9.11).

Пусть Z обозначает пространство обобщенных функций на $\mathbb{R}$, сосредоточенных в точке $t = 0$. Оно состоит из линейных комбинаций дельта-функции $\delta(t)$ и ее производных $\delta^{(p)}(t)$. Формулы (9.5), (9.6), (9.7) определяют представление, обозначим его снова π_l , алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в Z . Более того, оно определено не только для $2l \in \mathbb{N}$, но и для произвольных $l \in \mathbb{R}$. Нам потребуются целые и полуцелые отрицательные l . В частности, представление π_{-k-1} , $2k \in \mathbb{N}$, действует на $\delta^{(p)}(t)$ следующим образом:

$$\pi_{-k-1}(L^1)\delta^{(p)}(t) = (k-p)\delta^{(p)}(t),$$

$$\pi_{-k-1}(L^+)\delta^{(p)}(t) = p(p-2k-1)\delta^{(p-1)}(t),$$

$$\pi_{-k-1}(L^-)\delta^{(p)}(t) = \delta^{(p+1)}(t).$$

Оно имеет в Z инвариантное подпространство, натянутое на $\delta^{(p)}(t)$, $p \geq 2k+1$. Фактор-пространство по нему обозначим через Z_{-k-1} . Фактор-представление π_{-k-1} в Z_{-k-1} эквивалентно π_k , поэтому оно поднимается на группу G .

Рассмотрим билинейную форму

$$\langle F, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) f(t) dt \quad (9.12)$$

на $Z \times V_k$. Она инвариантна относительно пары (π_{-k-1}, π_k) , то есть

$$\langle \pi_{-k-1}(g^{-1}) F, f \rangle = \langle F, \pi_k(g) f \rangle, \quad g \in G. \quad (9.13)$$

Обобщенная функция $\delta^{(k+r)}(t)$ (заметим, что $k+r$ есть целое число) является собственной функцией для подгруппы H с собственным значением λ^{2r} . Поэтому отображение $P_{k,r} : V_k \rightarrow H_{lm}$, задаваемое формулой

$$(P_{k,r} f)(x) = (-1)^{k+r} \langle T_{-k-1}(g_x^{-1}) \delta^{(k+r)}, f \rangle,$$

где $x \in \mathcal{X}$, g_x см. (9.10), сплетает π_k с U_r . Следовательно, образ этого отображения есть как раз $H_k^{(l,m)}$. В силу (9.13), (9.12), (9.10) мы имеем:

$$(P_{k,r} f)(x) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{k+r} \Big|_{t=0} f \left(\frac{(1/N)t + \xi}{(\eta/N)t + 1} \right) \left(\frac{\eta}{N} t + 1 \right)^{2k}.$$

Вычисление (например, с помощью индукции по $k+r$) дает

$$(P_{k,r} f)(x) = \sum_{s=0}^{k+r} \binom{k+r}{s} (k-r+1)^{[s]} \left(\frac{\eta}{N} \right)^s f^{(k+r-s)}(\xi). \quad (9.14)$$

Вернемся теперь от гиперболоида к $\pi_l \otimes \pi_m$. Для этого по (9.4) надо в (9.14) взять $\xi = x$, $\eta = 1/y$ (так что $N = 1 - x/y$), вместо f написать φ и умножить (в силу (9.11)) правую часть (9.14) на N^{2m} . Мы получим (9.3). $\square$

10 Тензорные произведения и ядро Пуассона

В настоящем параграфе мы продолжаем § 8 о тензорных произведениях $\pi_l \otimes \pi_m$ представлений группы $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Сейчас мы предлагаем (следуя [8]) еще один способ вычисления преобразований Пуассона и Фурье. Он основан на *ядре Пуассона* и его свойствах

Мы используем обозначения и формулы из § 8, а также из § 6 и Введения.

Всякое конечномерное неприводимое представление π_k группы G задается числом k (*старшим весом*), таким, что $2k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Оно действует в пространстве V_k многочленов $\varphi(x)$ от x степени $\leq 2k$ (так что $\dim V_k = 2k + 1$) по формуле

$$(\pi_k(g) \varphi)(x) = \varphi(x \cdot g) (\beta x + \delta)^{2k}, \quad x \cdot g = \frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}.$$

На пространстве V_k существует единственная с точностью до множителя билинейная инвариантная невырожденная форма. В качестве таковой возьмем форму

$$\langle \psi, \varphi \rangle_k = \frac{1}{(2k)!} \sum_{p=0}^{2k} (-1)^p \cdot \psi^{(p)}(0) \cdot \varphi^{(2k-p)}(0),$$

в правой части стоят производные. Она симметрична при четном $2k$ и кососимметрична при нечетном $2k$:

$$\langle \psi, \varphi \rangle_k = (-1)^k \langle \varphi, \psi \rangle_k. \quad (10.1)$$

Инвариантность означает:

$$\langle T_k(X) \psi, \varphi \rangle_k = -\langle \psi, T_k(X) \varphi \rangle_k, \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Для элементов базиса x^s , $s = 0, 1, \dots, 2k$, пространства V_k эта форма отлична от нуля только на парах x^s, x^{2k-s} :

$$\langle x^s, x^{2k-s} \rangle_k = (-1)^s \binom{2k}{s}^{-1}.$$

Мы будем использовать аргументные обозначения для многочленов, находящихся внутри билинейных форм $\langle \cdot, \cdot \rangle$: повторяющийся аргумент является немым. Например, вместо $\langle \psi, \varphi \rangle_k$ мы можем написать $\langle \psi(x), \varphi(x) \rangle_k$.

Функция $(x - \xi)^{2k}$ есть воспроизводящее ядро (играет роль дельта-функции), а именно, для всякого многочлена $\varphi \in V_k$ имеет место

$$\langle (x - \xi)^{2k}, \varphi(\xi) \rangle_k = \varphi(x), \quad (10.2)$$

так что $(x - \xi)^{2k}$ есть аналог ядра Бергмана для базиса x^s , $s = 0, 1, \dots, 2k$, пространства V_k . Дифференцируя (10.2), получаем:

$$\langle (x - \xi)^{2k-b}, \varphi(\xi) \rangle_k = \frac{1}{(2k)^{(b)}} \cdot \frac{d^b \varphi(x)}{dx^b}. \quad (10.3)$$

Тензорное произведение $V_l \otimes V_m$ состоит из многочленов $f(x, y)$ от x, y степени $\leq 2l$ по x и степени $\leq 2m$ по y . В том пространстве действует тензорное произведение $\pi_l \otimes \pi_m$ представлений π_l и π_m группы G :

$$((\pi_l \otimes \pi_m)(g)f)(x, y) = f(x \cdot g, y \cdot g) \cdot (\beta x + \delta)^{2l} (\beta y + \delta)^{2m}.$$

Обозначим

$$r = m - l. \quad (10.4)$$

Тензорное произведение $\pi_l \otimes \pi_m$ раскладывается (см. § 8) в прямую однократную сумму:

$$\pi_l \otimes \pi_m = \sum_k \pi_k,$$

где k пробегает множество чисел

$$|r|, |r| + 1, \dots, l + m - 1, l + m. \quad (10.5)$$

Соответственно этому, $V_l \otimes V_m$ разлагается в сумму подпространств:

$$V_l \otimes V_m = \sum_k W_k,$$

инвариантных и неприводимых относительно $\pi_l \otimes \pi_m$. Для облегчения записи мы не будем проявлять зависимость от l, m — как здесь в правой части, так и ниже. Ограничение представления $\pi_l \otimes \pi_m$ на W_k эквивалентно π_k .

Билинейные формы на V_l и V_m порождают билинейную форму $\langle f, h \rangle_{lm}$ на $V_l \otimes V_m$:

$$\langle f, h \rangle_{lm} = \frac{1}{(2l)!(2m)!} \sum_{p, q} (-1)^{p+q} \cdot f^{(p, q)}(0, 0) h^{(2l-p, 2m-q)}(0, 0).$$

Она инвариантна относительно представления $\pi_l \otimes \pi_m$. Подпространства W_k ортогональны относительно билинейной формы $\langle f, h \rangle_{lm}$.

Пусть k принадлежит множеству (10.5). Обозначим

$$j = l + m - k, \quad (10.6)$$

так что $2l - j = k - r$, $2m - j = k + r$, см. (10.4). Назовем *ядром Пуассона* следующий многочлен из $V_l \otimes V_m \otimes V_k$:

$$\begin{aligned} P_k(x, y; t) &= (y - t)^{2m-j} (x - t)^{2l-j} (y - x)^j \\ &= (y - t)^{k+r} (x - t)^{k-r} (y - x)^j. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Он инвариантен относительно представления $T_l \otimes T_m \otimes T_k$ группы G :

$$((T_l(g) \otimes T_m(g) \otimes T_k(g) P_k)(x, y; t) = P_k(x, y; t), \quad g \in G. \quad (10.8)$$

С помощью ядра Пуассона P_k определим два отображения: *преобразование Пуассона* $M_k : V_k \rightarrow V_l \otimes V_m$ и *преобразование Фурье* $F_k : V_l \otimes V_m \rightarrow V_k$. А именно,

$$(M_k \varphi)(x, y) = \langle P_k(x, y; t), \varphi(t) \rangle_k, \quad (10.9)$$

$$(F_k f)(t) = \langle f(x, y), P_k(x, y; t) \rangle_{lm}. \quad (10.10)$$

В силу (10.8) операторы M_k и F_k *сплетают* представления $T_l \otimes T_m$ и T_k группы G , а именно,

$$M_k T_k(g) = (T_l \otimes T_m)(g) M_k,$$

$$T_k(g) F_k = F_k (T_l \otimes T_m)(g).$$

Преобразования Пуассона и Фурье сопряжены друг другу:

$$\langle f, M_k \varphi \rangle_{lm} = \langle F_k f, \varphi \rangle_k.$$

Из (10.2) следует, что преобразования Пуассона и Фурье переводят воспроизводящие ядра в пространствах V_k и $V_l \otimes V_m$ в ядро Пуассона:

$$(M_k(t - \xi)^{2k})(x, y) = P_k(x, y; \xi),$$

$$(F_k(\xi - x)^{2l}(\eta - y)^{2m})(t) = P_k(\xi, \eta; t).$$

Теорема 10.1 *Преобразование Пуассона $M_k : V_k \rightarrow V_l \otimes V_m$ можно записать в одном из следующих трех видов. Пусть $\varphi \in V_k$. Тогда*

$$(M_k \varphi)(x, y) = \sum_{\alpha=0}^{k+r} \binom{k+r}{\alpha} \frac{1}{(2k)^{(\alpha)}} (y - x)^{j+\alpha} \left(\frac{d}{dx} \right)^\alpha \varphi(x), \quad (10.11)$$

$$= c_k \cdot (y - x)^j \left\{ (y - x) \frac{d}{dx} + k - r + 1 \right\}^{[k+r]} \varphi(x), \quad (10.12)$$

$$= c_k \cdot (y - x)^{l+m+k+1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{k+r} (y - x)^{-k+r-1} \varphi(x), \quad (10.13)$$

где r и j даются формулами (10.4) и (10.6),

$$c_k = \frac{1}{(2k)^{(k+r)}}.$$

Доказательство. Докажем сначала (10.11). В ядре Пуассона (10.7) заменим $y - t$ на $(y - x) + (x - t)$ и применим формулу бинома Ньютона, получим это ядро в виде

$$P_k(x, y; t) = (y - x)^j \sum_{\alpha=0}^{k+r} \binom{k+r}{\alpha} (y - x)^\alpha (x - t)^{2k-\alpha}.$$

Подставим это в (10.9) и используем (10.3), мы получим (10.11). После этого формулы (10.12) и (10.13) доказываются непосредственной проверкой. $\square$

Теорема 10.2 Преобразование Фурье $F_k : V_l \otimes V_m \rightarrow V_k$ дается следующей формулой. Пусть $f(x, y)$ – многочлен из $V_l \otimes V_m$. Тогда

$$(F_k f)(t) = \sum_{\alpha=0}^j \binom{j}{\alpha} (-1)^{j-\alpha} \frac{1}{(2l)^{(j-\alpha)} (2m)^{(\alpha)}} \cdot f^{(j-\alpha, \alpha)}(t, t). \quad (10.14)$$

где j дается формулой (10.6).

Доказательство. Теперь в ядре Пуассона (10.7) заменим $y - x$ на $(y - t) - (x - t)$ и применим формулу бинома Ньютона, получим это ядро в виде

$$P_k(x, y; t) = \sum_{\alpha=0}^j \binom{j}{\alpha} (-1)^\alpha (y - t)^{2m-\alpha} (x - t)^{2l-(j-\alpha)}.$$

Подставим это в (10.10) и используем (10.1) и (10.3), мы получим (10.14). $\square$

Теперь покажем, что преобразование Фурье F_k с точностью до множителя совпадает с операторами Ранкина-Коэна. Для этого напомним некоторый материал [18].

Тензорное произведение двух голоморфных унитарных дискретных серий представлений π_{k_1} и π_{k_2} группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, дается известной формулой

$$\pi_{k_1} \otimes \pi_{k_2} = \sum_{n \geq 0}^{\oplus} 1 \cdot \pi_{k_1+k_2+2n}$$

где k_1 и k_2 – старшие веса представлений π_{k_1} и π_{k_2} , соответственно и $n \in \mathbb{N}$.

Сплетающие операторы для этого разложения есть скобки Ранкина-Коэна степени n :

$$RC_{k_1, k_2}^n(f_1, f_2)(z) := \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{k_1 + n - 1}{l} \binom{k_2 + n - 1}{n - l} f_1^{(n-l)}(z) f_2^{(l)}(z),$$

где f_1 и f_2 голоморфные модулярные формы для группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ и $f^{(a)}(z) = \frac{d^a f}{dz^a}(z)$.

В [18] было показано, что скобки Ранкина-Коэна могут быть выражены в терминах ортогональных многочленов.

Определение 1 Каждому многочлену $f(t)$ степени не больше l ставится в соответствие многочлен, двух переменных, по следующему правилу:

$$(I_l g)(x, y) = (-y)^l g\left(-\frac{x}{y}\right).$$

Теорема 10.3 Пусть для $(-2m, -2l, -2k) \in \mathbb{C}^3$ и $\tilde{l} = \frac{1}{2}(-2k + 2m + 2l) \in \mathbb{N}$, $\gamma = -2m - 1$, $\beta = 1 + 2k$, бидифференциальный оператор Ранкина-Коэна дается формулой:

$$RC_{-2m, -2l}^{-2k} = Rest_{z_1=z_2=z} \circ \left(I_{\tilde{l}} P_{\tilde{l}}^{\gamma, \beta} (1 - 2\alpha) \right) \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2} \right),$$

где

$$P_{\tilde{l}}^{\gamma, \beta}(t) = \frac{\Gamma(\gamma + \tilde{l} + 1)}{\Gamma(\gamma + \beta + \tilde{l} + 1)} \sum_{n=0}^{\tilde{l}} \binom{\tilde{l}}{n} \frac{\Gamma(\gamma + \beta + \tilde{l} + n + 1)}{\Gamma(\gamma + n + 1) \tilde{l}!} \left(\frac{t-1}{2} \right)^n.$$

Тогда имеет место равенство:

$$(RC_{\tilde{l}}^{\gamma, \beta}(f))(t) = \frac{(2m)^{(j)}(m-l-k-1)^{(j)}}{j!} (F_k f)(t). \quad (10.3)$$

Доказательство.

Вычислим $RC_{-2m, -2l}^{-2k}$ где $(-2m, -2l, -2k) \in \mathbb{C}^3$. Для этого, сначала, запишем многочлен

$$P_{\tilde{l}}^{\gamma, \beta}(1 - 2\alpha) = \frac{\Gamma(\gamma + \tilde{l} + 1)}{\Gamma(\gamma + \beta + \tilde{l} + 1)} \sum_{n=0}^{\tilde{l}} \binom{\tilde{l}}{n} \frac{\Gamma(\gamma + \beta + \tilde{l} + n + 1)}{\Gamma(\gamma + n + 1) \tilde{l}!} (-\alpha)^n$$

как многочлен от двух переменных x и y :

$$(I_{\tilde{l}} P_{\tilde{l}}^{\gamma, \beta})(x, y) = (-y)^{\tilde{l}} P_{\tilde{l}}^{\gamma, \beta} \left(-\frac{x}{y} \right).$$

Тогда получим:

$$(I_{\tilde{l}} P_{\tilde{l}}^{\gamma, \beta}(1 - 2\alpha)) \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = (-1)^{\tilde{l}} \frac{\Gamma(\gamma + \tilde{l} + 1)}{\Gamma(\gamma + \beta + \tilde{l} + 1)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\tilde{l}} \binom{\tilde{l}}{n} \frac{\Gamma(\gamma + \beta + \tilde{l} + n + 1)}{\Gamma(\gamma + n + 1)\tilde{l}!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\tilde{l}-n}.$$

Тогда бидифференциальный оператор Ранкина-Коена запишется в виде:

$$(RC_{\tilde{l}}^{\gamma, \beta}(f))(t) = Rest_{x=y=t} \circ \left((-1)^{\tilde{l}} \frac{\Gamma(\gamma + \tilde{l} + 1)}{\Gamma(\gamma + \beta + \tilde{l} + 1)} \sum_{n=0}^{\tilde{l}} \binom{\tilde{l}}{n} \frac{\Gamma(\gamma + \beta + \tilde{l} + n + 1)}{\Gamma(\gamma + n + 1)\tilde{l}!} f^{(n, \tilde{l}-n)}(x, y) \right).$$

Лемма 10.1

$$\frac{\Gamma(\gamma + \tilde{l} + 1)}{\Gamma(\gamma + \beta + \tilde{l} + 1)} \sum_{n=0}^{\tilde{l}} \frac{\Gamma(\gamma + \beta + \tilde{l} + n + 1)}{\Gamma(\gamma + n + 1)} = \sum_{\alpha=0}^j (-1)^{-\alpha} \frac{(2m)^{(j)}(m-l-k-1)^{(j)}}{(2m)^{(\alpha)}(2l)^{(j-\alpha)}}.$$

где $j = \tilde{l} = l + m - k$, $\gamma = -2m - 1$, $\beta = 1 + 2k$

Доказательство.

$j = \tilde{l} = l + m - k$, $\gamma = -2m - 1$, $\beta = 1 + 2k$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\gamma + \tilde{l} + 1)}{\Gamma(\gamma + \beta + \tilde{l} + 1)} \sum_{n=0}^{\tilde{l}} \frac{\Gamma(\gamma + \beta + \tilde{l} + n + 1)}{\Gamma(\gamma + n + 1)} = \frac{(\gamma + \tilde{l})!}{(\gamma + \beta + \tilde{l})!} \sum_{n=0}^{\tilde{l}} \frac{(\gamma + \beta + \tilde{l} + n)!}{(\gamma + n)!} = \\ & = \frac{(\gamma + \tilde{l})!}{\gamma!} + \frac{(\gamma + \tilde{l})!(\gamma + \beta + \tilde{l} + 1)!}{(\gamma + \beta + \tilde{l})!(\gamma + 1)!} + \dots + \frac{(\gamma + \tilde{l})!(\gamma + \beta + 2\tilde{l} - 1)!}{(\gamma + \beta + \tilde{l})!(\gamma + \tilde{l} - 1)!} + \frac{(\gamma + \beta + 2\tilde{l})!}{(\gamma + \beta + \tilde{l})!} = \\ & = (-1)^j (2m)^{(j)} + (-1)^{j-1} \frac{-(2m)^{(j)}(m-l-k-1)^{(j)}}{(-1)^{j-1} 2m (l-m+k+j)^{(j-1)}} + \dots \\ & \dots + \frac{(-1)^{j-1} (2m)^{(j)}(m-l-k-1)^{(j)}}{(2m)^{(j-1)}(l-m+k+j)} + (-1)^j (m-l-k-1)^{(j)} = \\ & = \sum_{\alpha=0}^j (-1)^{-\alpha} \frac{(2m)^{(j)}(m-l-k-1)^{(j)}}{(2m)^{(\alpha)}(2l)^{(j-\alpha)}}. \end{aligned}$$

□

Тогда, учитывая что $\tilde{l} = j$, $n = \alpha$, формулу для оператора Ранкина-Коена можно переписать в виде:

$$(RC_{\tilde{l}}^{\gamma, \beta}(f))(t) = Rest_{x=y=t} \circ \left((-1)^j \sum_{\alpha=0}^j (-1)^{-\alpha} \binom{j}{\alpha} \frac{(2m)^{(j)}(m-l-k-1)^{(j)}}{(2m)^{(\alpha)}(2l)^{(j-\alpha)}j!} f^{(\alpha, j-\alpha)}(x, y) \right).$$

Поменяем x и y местами и вынесем постоянные множители не зависящие от α за знак суммы.

Получим:

$$(RC_l^{\gamma, \beta}(f))(t) = \frac{(2m)^{(j)}(m-l-k-1)^{(j)}}{j!} \times \\ \times \left\{ Rest_{x=y=t} \circ \left(\sum_{\alpha=0}^j (-1)^{j-\alpha} \binom{j}{\alpha} \frac{1}{(2m)^{(\alpha)}(2l)^{(j-\alpha)}} f^{(j-\alpha, \alpha)}(x, y) \right) \right\}.$$

Тогда, учитывая формулу (2), получаем:

$$(RC_l^{\gamma, \beta}(f))(t) = \frac{(2m)^{(j)}(m-l-k-1)^{(j)}}{j!} (F_k f)(t).$$

□

11 Conclusions

Dans la première partie de cette thèse nous avons décrit une série de représentations $T_\sigma^{(1)}$ du groupe de Lorentz généralisé agissant dans l'espace des formes différentielles homogènes de degré un sur le cône isotrope dans $\mathbb{R}^n$. De telles représentations se décomposent en somme de deux représentations irréductibles:

$$T_\sigma^{(1)} = T_\sigma + R_\sigma. \quad (4.1)$$

Le K -type $\pi^{(1)}$ de la représentation R_σ est donné par

Théorème A *La représentation $\pi^{(1)}$ du groupe K par translations dans $\Lambda^1(S)$ se décompose en somme directe de représentations irréductibles sans multiplicités. Les représentations π_l , $\pi_{l,1}$ pour $p > 4$ et π_l , $\pi_{l,\pm 1}$ pour $p = 4$. Ici $l \geq 1$. Les vecteurs de plus haut poids sont donnés dans (2.4) et (2.5) (dans (2.5) il faut remplacer $l+1$ sur l).*

D'une façon plus générale les K -types sont liés entre-eux par le résultat suivant:

Théorème B *Soit $n > 5$. Les opérateurs $R_\sigma(X)$ avec $X \in \mathfrak{p}$ entrelacent les K -types V_l et W_l de la façon suivante:*

$$R_\sigma(\mathfrak{p})W_l = (\sigma + n - 4 + l)W_{l-1} + (\sigma + 1)V_l + (\sigma - l - 1)W_{l+1},$$

$$R_\sigma(\mathfrak{p})V_l = (\sigma + n - 4 + l)V_{l-1} + \sigma W_l + (\sigma - l - 1)V_{l+1}.$$

Les fonctions de barrière $\sigma + n - 1 + l$, $\sigma + 1$, $\sigma - l - 1$ donnent des informations complètes sur la structure de R_σ . A savoir, nous avons

Théorème C *Soit $n > 5$. La représentation R_σ est irréductible sauf dans les cas $\sigma = -1, 0, 1, \dots$ et $\sigma = 3 - n, 2 - n, 1 - n, \dots$. Dans le cas $\sigma = 1, 2, 3, \dots$ l'espace $\Lambda^1(S)$ a un sous-espace invariant irréductible de dimension finie $\sum(V_l + W_l)$, $l \leq \sigma - 1$, l'espace quotient correspondant est irréductible. Dans le cas $\sigma = 3 - n, 2 - n, \dots$ la situation est duale: l'espace $\Lambda^1(S)$ a un sous-espace invariant irréductible de dimension infinie $\sum(V_l + W_l)$, $l \geq 4 - n - \sigma$, l'espace quotient correspondant est de dimension fini et est irréductible. Si $\sigma = 0$ et $\sigma = -1$ nous avons un sous-espace irréductible V et W , respectivement, dont l'espace quotient est irréductible.*

Le produit tensoriel de T_σ par la représentation triviale se comporte comme suit: Soit $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma(\mathcal{C})$ l'espace des fonctions vectorielles (les colonnes)

$$\alpha(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ \alpha_2(x) \\ \vdots \\ \alpha_n(x) \end{pmatrix},$$

où les composants $\alpha_i(x)$ appartiennent à l'espace $\mathcal{D}_{\sigma-1}(\mathcal{C})$. Les vecteurs-colonnes des fonctions vectorielles, seront écrits sous forme des lignes.

Le produit tensoriel $\widehat{T}_\sigma = T_{\sigma-1} \otimes \rho$ agit dans l'espace $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma(\mathcal{C})$ de la façon suivante:

$$\left(\widehat{T}_\sigma(g)\alpha\right)(x) = g \alpha(xg).$$

Soit Q l'opérateur suivant $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}_\sigma(\mathcal{C})$:

$$(Q\alpha)(x) = x\alpha(x) = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i(x).$$

Le noyau $\text{Ker } Q$ de cet opérateur se décompose en somme de deux sous-espaces V_0 et V_2 . Le sous-espace V_0 est composé des fonctions vectorielles $\alpha(x) = \mu(x) \cdot (-x_1, x_2, \dots, x_n)$, où $\mu \in \mathcal{D}_{\sigma-2}(\mathcal{C})$, l'espace V_2 est composé de fonctions vectorielles

$$\alpha(x) = (0, \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x))$$

de telle sorte que $\sum x_i \alpha_i(x) = 0$. En outre, soit V_1 sous-espace dans $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma(\mathcal{C})$, consistant des gradients de la fonction $f \in \mathcal{D}_\sigma(\mathcal{C})$:

$$\text{grad} f = x_1^{\sigma-1} \left(\sigma h, x_1 \frac{\partial h}{\partial x_2}, \dots, x_1 \frac{\partial h}{\partial x_n} \right).$$

Nous avons $Q \text{ grad} f = \sigma f$.

Théorème D Soit $\sigma \neq 0$. Alors $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma(\mathcal{C})$ se décompose en somme directe de sous-espaces V_0, V_1 et V_2 .

Théorème E Soit $\sigma \neq 0$. Alors dans "la base" V_0, V_1, V_2 nous avons

$$\widehat{T}_\sigma = \begin{pmatrix} T_{\sigma-2} & A_\sigma & B_\sigma \\ 0 & T_\sigma & 0 \\ 0 & 0 & R_\sigma \end{pmatrix}.$$

Ici R_σ est la représentation du groupe G dans V_2 , introduite dans § 3. Le produit tensoriel $\widehat{T}_\sigma = T_{\sigma-1} \otimes \rho$ diffère de la représentation dans les formes différentielles de la représentation V_0 , de telle sorte que dans la matrice de $\widehat{T}_\sigma$ il faut supprimer la première ligne et la première colonne.

La version infinitésimale est donnée par le théorème suivant. Soit P_k l'opérateur de la projection sur la k -ème coordonnée. Soit $L \in \mathfrak{g}$.

Théorème F Soit $\sigma \neq 0$. Alors dans "la base" V_0, V_1, V_2 nous avons

$$\widehat{T}_\sigma(L) = \begin{pmatrix} T_{\sigma-2}(L) & A_\sigma(L) & B_\sigma(L) \\ 0 & T_\sigma(L) & 0 \\ 0 & 0 & R_\sigma(L) \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} A_\sigma(L_{1k}) &= -T_{-\sigma}(L_{1k}), \\ B_\sigma(L_{1k}) &= -P_k, \\ A_\sigma(L_{ij}) &= 0, \quad B_\sigma(L_{ij}) = 0, \quad 1 < i < j. \end{aligned}$$

Il est intéressant d'écrire l'élément de Casimir

$$\Delta_{\mathfrak{g}} = \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j L_{ij}^2.$$

Dans la représentation T_σ il agit par la multiplication par $\sigma(\sigma + n - 2)$. Pour le produit tensoriel $\hat{T}_\sigma = T_{\sigma-1} \otimes \rho$ nous avons

Théorème G Soit $\sigma \neq 0$. L'opérateur $\hat{T}_\sigma(\Delta_{\mathfrak{g}})$ dans "le base" V_0, V_1, V_2 s'écrit

$$\hat{T}_\sigma(\Delta_{\mathfrak{g}}) = \begin{pmatrix} (\sigma - 2)(\sigma + n - 4) & -2\Delta + 2\sigma(\sigma - 1) & -2 \operatorname{div} \\ 0 & \sigma(\sigma + n - 2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(\sigma + n - 4) \end{pmatrix},$$

où Δ et div sont l'opérateur de Laplace et la divergence, respectivement:

$$\Delta h = x_1^2 \sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_k^2},$$

$$\operatorname{div} v = x_1 \sum_{k=2}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k},$$

où v est la fonction vectorielle $(0, v_2, \dots, v_n)$ sur V_2 , dont toutes les composantes sont de degré d'homogénéité 0.

Le produit tensoriels $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$ agit dans l'espace $\mathcal{D}_\varepsilon(S) \otimes V_m$ des fonctions $f(s, t)$ définies sur le produit direct $S \times S$ de deux cercles de parité $\varepsilon + 2m$:

$$f(-s, -t) = (-1)^{\varepsilon+2m} f(s, t).$$

Théorème H Le produit tensoriel $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$ se décompose en somme directe sans multiplicités de représentations irréductibles

$$T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m = T_{\sigma-m,\nu} + T_{\sigma-m+1,\nu} + \dots + T_{\sigma+m,\nu},$$

où $\nu \equiv \varepsilon + 2m$. Respectivement, l'espace $\mathcal{D}_\varepsilon(S) \otimes V_m$ se décompose en somme directe sans multiplicités d'espaces irréductibles W_k , $k = 0, 1, 2, \dots, 2m$. Le sous-espace W_k est l'image de la transformation de Poisson M_k , de l'espace $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ dans l'espace $\mathcal{D}_\varepsilon(S) \otimes V_m$ et entreliant la représentations $T_{\sigma-m+k,\nu}$ avec le produit tensoriel $T_{\sigma,\varepsilon} \otimes \pi_m$. La forme explicite de la transformation de Poisson est donnée dans le théorème 7.2 ci-dessous.

Théorème I La transformation de Poisson M_k , $k = 0, 1, 2, \dots, 2m$, est un opérateur différentiel, définie par l'une des deux expressions explicites suivantes:

$$\begin{aligned} M_k &= (\sin v)^{2m-k} \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \binom{k}{r} (2\tau - k + 1)^{[k-r]} \times \\ &\quad \times (i \sin v)^r e^{i(k-r)v} \cdot \left(2\tau - i \frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^{\langle r \rangle}, \\ M_k &= (\sin v)^{2m-k} \left[(\sin v) \frac{\partial}{\partial \alpha} - (2\tau - k + 1) \cos v \right] \times \\ &\quad \times \left[(\sin v) \frac{\partial}{\partial \alpha} - (2\tau - k + 2) \cos v \right] \times \\ &\quad \dots \\ &\quad \times \left[(\sin v) \frac{\partial}{\partial \alpha} - 2\tau \cos v \right]. \end{aligned}$$

Les opérateurs d'entrelacement pour ces lois de branchements sont donnés par:

Théorème J Les opérateurs d'entrelacement $M_k : V_k \rightarrow W_k$ sont donnés par la formule suivante:

$$\begin{aligned} (M_k \varphi)(x, y) &= \sum_{s=0}^{k+r} \binom{k+r}{s} (k-r+1)^{[s]} \times \\ &\quad \times (y-x)^{2m-s} \left(\frac{d}{dx} \right)^{k+r-s} \varphi(x). \end{aligned}$$

Ces opérateurs d'entrelacement s'écrivent également comme une composition d'opérateurs différentiels d'ordre un:

$$M_k = (y-x)^{l+m-k} \left\{ (y-x) \frac{d}{dx} + k-r+1 \right\}^{[k+r]},$$

on comme une seule puissance de la dérivation:

$$(M_k \varphi)(x, y) = (y-x)^{l+m+k+1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{k+r} (y-x)^{-k+r-1} \varphi(x).$$

Pour une fonction $f(x, y)$ nous utilisons la notation

$$f^{(a,b)} = \frac{\partial^{a+b} f}{\partial x^a \partial y^b}.$$

Théorème K La transformation de Fourier $F_k : V_{lm} \rightarrow V_k$ (rappelons que (8.5) est vérifié) est donnée par la formule suivante. Soit $f(x, y)$ un polynôme de V_{lm} . Alors

$$(F_k f)(t) = c_k \sum_{p=0}^j (-1)^{j-p} \binom{2l-j+p}{p} \binom{2m-p}{j-p} f^{(j-p,p)}(t, t), \quad (8.17)$$

où j est donné par la formule (8.4), et

$$c_k^{-1} = \frac{1}{2k+1}(l+m+k+1)^{(2m+1)}.$$

Nous retrouvons donc ici les crochets de Rankin-Cohen.

12 Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука, 1965
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966
3. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965
4. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962.
5. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е.. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958.
6. В. Ф. Молчанов. Тензорные произведения унитарных представлений трехмерной группы Лоренца. Известия АН СССР, серия математическая, 1979, том 4, № 4, 860–891.
7. В. Ф. Молчанов. Преобразования Пуассона для тензорных произведений представлений группы матриц второго порядка. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, 2013, том 18, вып. 5, 2613–2616.
8. В. Ф. Молчанов. Преобразования Пуассона и Фурье для тензорных произведений. Функциональный анализ и его приложения, 2015, том 49, вып. 4, 50–60.
9. В. Ф. Молчанов, Е. В. Евсеева. Преобразования Пуассона и Фурье для тензорных произведений представлений группы матриц второго порядка. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, 2015, том 20, вып. 5, 1317–1325.
10. В. Ф. Молчанов, Е. В. Сарычева. Тензорные произведения представлений трехмерной группы Лоренца и тавтологического представления. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, 2012, том 17, вып. 1, 99–104.
11. В. Ф. Молчанов, Е. В. Сарычева. О тензорных произведениях представлений группы матриц второго порядка. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, 2013, том 18, вып. 1, 120–124.
12. В. Ф. Молчанов, Е. В. Сарычева. О тензорных произведениях представлений трехмерной группы Лоренца. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, 2014, том 19, вып. 2, 491–495.
13. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Часть I, М.: Гостехиздат, 1956.
14. E. V. Evseeva. Poisson and Fourier transforms for tensor products for repre-

sentations of $SL(2; \mathbb{R})$. Международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения V, Ростов-на-Дону". Издательский центр ДГТУ, Ростов н/Д, 2015, 28.

15. P.-Y. Gaillard, Transformation de Poisson de formes différentielles. Le cas de l'espace hyperbolique. *Comment. Math. Helv.* 61 (1986), no. 4, 581–616.

16. T. Kobayashi, T. Kubo, M. Pevzner, Vector-valued covariant differential operators for the Möbius transformation in Lie Theory and Its Applications in Physics, V. Dobrev, Edt. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 111, 2015, pp. 67–86.

17. T. Kobayashi, M. Pevzner, Differential symmetry breaking operators: I. General theory and F-method. *Selecta Math.* (N.S.) 22 (2016), no. 2, 801–845.

18. T. Kobayashi, M. Pevzner, Differential symmetry breaking operators: II. Rankin–Cohen operators for symmetric pairs. *Selecta Math.* (N.S.) 22 (2016), no. 2, 847–911.

19. T. Kobayashi, T. Kubo, M. Pevzner, Classification of differential symmetry breaking operators for differential forms. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 354 (2016), no. 7, 671–676.

20. T. Kobayashi, T. Kubo, M. Pevzner, Conformal symmetry breaking operators for differential forms on spheres. *Lecture Notes in Mathematics* 2170 (2016), pp. x+200.

21. A.V. Opimakh, Representations of the generalized Lorentz group on Differential forms on a cone. *Vestnik TGU*, 10.4 (2005), pp. 425–432.

22. D. Levine Systems of singular integrals on spheres, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1969, vol. 144, 493–522.

23. E. Pedon, Harmonic analysis for differential forms on complex hyperbolic spaces. *J. Geom. Phys.* 32 (1999), no. 2, 102–130.

24. G. van Dijk, V.F. Molchanov, Tensor products of maximal degenerate series representations of the group $SL(n, \mathbb{R})$, *J. Math. Pures Appl.*, **78**, (1999), pp. 99–119.

25. G. Zuckerman, Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie groups. *Ann. of Math.* (2) 106 (1977), no. 2, 295–308.

REPRÉSENTATIONS DU GROUPE PSEUDO-ORTHOGONAL DANS LES FORMES DIFFÉRENTIELLES HOMOGÈNES

Dans cette thèse nous étudions des représentations du groupe de Lorentz dans les sections du fibré cotangent sur le cône isotrope. Grâce aux transformations de Fourier et de Poisson nous construisons explicitement tous les opérateurs de brisure de symétrie qui apparaissent dans les lois de branchement des produits tensoriels de telles représentations.

Représentations, groupe de Lorentz, formes différentielles, opérateurs d'entrelacement.

REPRESENTATIONS OF THE PSEUDO-ORTHOGONAL GROUP IN HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL FORMS

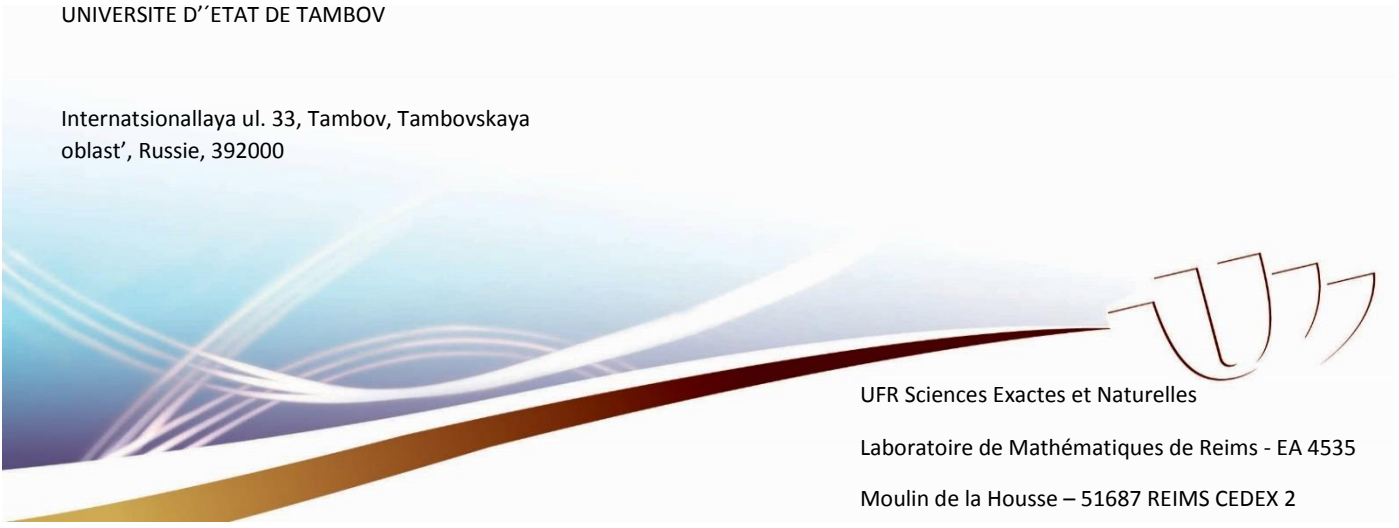
In this thesis we study representations of the Lorentz group acting on sections of the cotangent bundle over the isotropic cone. Using Fourier and Poisson transforms we construct explicitly all the symmetry breaking operators that appear in branching laws of tensor products of such representations.

Representations, Lorentz group, differential forms, intertwining operators.

Discipline : MATHÉMATIQUES

UNIVERSITE D'ÉTAT DE TAMBOV

Internatsionallaya ul. 33, Tambov, Tambovskaya
oblast', Russie, 392000



UFR Sciences Exactes et Naturelles

Laboratoire de Mathématiques de Reims - EA 4535

Moulin de la Housse – 51687 REIMS CEDEX 2