

INSTITUT DE PHYSIQUE DU COLLÈGE DE FRANCE
LABORATOIRE KASTLER BROSSEL



THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité: **Physique quantique**

Mesure au-delà de la limite quantique standard de l'amplitude d'un champ électromagnétique dans le domaine micro-onde

présentée par

Mariane PENASA

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Soutenue le 2 décembre 2016 devant le jury composé de:

Pr. David GUERY-ODELIN	Rapporteur
Dr. Jean-Philippe POIZAT	Rapporteur
Pr. Luiz DAVIDOVICH	Examineur
Pr. Valia VOLIOTIS	Examinatrice
Pr. Jean-Michel RAIMOND	Directeur de thèse
Dr. Igor DOTSENKO	Invité

Table des matières

Introduction	1
I Estimation d'un paramètre	11
I.1 Un exemple usuel en métrologie : l'interférométrie	12
I.1.1 Stratégie de mesure classique	13
I.1.2 Stratégie de mesure quantique	17
I.2 Éléments de théorie classique sur l'estimation	18
I.2.1 Bases de la théorie de l'estimation	18
I.2.2 Information de Fisher	20
I.3 Information de Fisher quantique	24
I.3.1 Formulation usuelle de l'information de Fisher quantique	24
I.3.2 Autre formulation possible	29
I.3.3 Limite de Cramér-Rao et relation d'incertitude	30
I.4 Distinguer deux états : lien entre considérations géométriques et statistiques	30
I.5 Ressources et limites	33
I.5.1 Présentation générale	33
I.5.2 Dans notre expérience	34
Conclusion	36
II Principe de l'expérience - Théorie	37
II.1 Système atome - champ piégé dans une cavité	38
II.2 Oscillateur harmonique de champ	38
II.2.1 Hamiltonien de champ	38
II.2.2 Génération d'un champ cohérent	39
II.3 Le pseudo-spin atomique	40
II.4 Interaction entre atome et mode du champ	41
II.4.1 L'atome habillé	42
II.4.2 Interaction dispersive	43
II.4.3 Interaction résonnante	45
II.4.3.a Oscillations de Rabi à plusieurs photons	46
II.4.3.b Calcul de l'évolution du système couplé	46
II.4.3.c Effondrements et résurgences	54
II.5 Opération de renversement du temps	59
II.6 Séquence expérimentale	61

II.6.1	Première période d'interaction résonnante	61
II.6.2	Renversement du temps	63
II.6.3	Injection de β	63
II.6.4	Deuxième interaction résonnante	65
II.6.5	Détection de l'état atomique au temps de résurgence exact	68
II.6.6	Détection de l'état atomique autour du temps de résurgence	72
II.7	Information de Fisher	76
II.8	Information de Fisher quantique	77
	Conclusion	80
III	Mise en oeuvre expérimentale	81
III.1	Montage expérimental	82
III.1.1	Cavité et trajet atomique	82
III.1.2	Isolation thermique et magnétique	86
III.2	Le système atomique	88
III.2.1	Propriétés des atomes de Rydberg circulaires	89
III.2.2	Un système à 2 niveaux bien contrôlé	92
III.2.3	Préparation des états de Rydberg circulaires	96
III.2.4	Sélection en vitesse des échantillons atomiques	100
III.2.5	Nombre d'atomes préparés par échantillon atomique	104
III.2.6	Détection des atomes	104
III.3	Le système champ	107
III.3.1	Géométrie	107
III.3.2	Temps de vie des photons	111
	III.3.2.a Ajustement de la fréquence du mode TEM ₉₀₀	112
	III.3.2.b Injection de micro-onde dans la cavité	114
	Conclusion	115
IV	Résultats expérimentaux	117
IV.1	Séquence expérimentale	118
IV.2	Mesures préliminaires	119
IV.2.1	Mesure de la fréquence de résonance de la cavité	119
IV.2.2	Préparation d'une cavité vide	120
IV.2.3	Repérage du centre de la cavité	122
IV.2.4	Calibration de l'injection de la micro-onde	124
	IV.2.4.a Amplitude d'injection	125
	IV.2.4.b Phases des champs injectés	127
IV.2.5	Calibration de l'opération σ_z sur l'atome	130
IV.3	Mesure du champ d'amplitude β	136
IV.3.1	Quantité maximale d'information disponible dans la mesure	138
IV.3.2	Pertinence du choix de la mesure	140
IV.3.3	Proposition de mesure du champ β à partir d'un état cohérent	144
	Conclusion	145

Conclusion	147
Bibliographie	166

Table des figures

1	Rotation d'un état quantique dans l'espace des phases due à une modification de la phase de l'état	6
2	Interaction entre les objets quantiques dans notre expérience	8
I.1	Interféromètre de Mach-Zehnder	12
I.2	Distribution statistique du nombre de photons pour un état cohérent . .	14
I.3	Rotation d'un état cohérent dans l'espace des phases	14
I.4	Dispositif nécessaire à l'estimation d'un paramètre par la mesure	19
I.5	Espace des états	34
II.1	Représentation d'un état atomique sur la sphère de Bloch.	41
II.2	Énergie des états habillés	44
II.3	Vue de dessous du plan équatorial de la sphère de Bloch	51
II.4	Co-rotation des dipôles et des composantes de champ des états propres de l'interaction.	52
II.5	Diffusion des phases des composantes de champ	53
II.6	Recouvrement des composantes de champ diffusées et non diffusées . . .	53
II.7	Interprétation des effondrements et résurgences du signal en fonction de l'état du champ	55
II.8	Distance entre les composantes de champ à l'instant t	57
II.9	Oscillations de Rabi de l'atome avec un champ à résonance	60
II.10	Etat du système atome-champ au début de la séquence expérimentale . .	62
II.11	Etat du système atome-champ à la fin de la 1 ^{re} période d'interaction résonnante	62
II.12	Etat du système atome-champ après l'opération de renversement du temps	64
II.13	Déplacement des composantes de champ par l'injection d'un champ β . .	64
II.14	Décomposition des dipôles atomiques sur les états propres de la deuxième interaction résonnante	66
II.15	Etat final de la séquence expérimentale pour le système atome-champ . .	67
II.16	Fonction de Wigner d'un chat de Schrödinger impair à $\bar{n} = \sqrt{12,7}$	71

II.17	Signal interférométrique théorique	75
II.18	Comparaison entre l'information de Fisher maximale et l'information de Fisher quantique	79
III.1	Schéma des deux niveaux de Rydberg circulaires.	82
III.2	Schéma du dispositif expérimental	83
III.3	Vue de dessus de l'intérieur de la boîte d'écrantage	85
III.4	Schéma du montage traversé par les atomes depuis leur préparation jusqu'à leur détection	85
III.5	Plan d'ensemble du cryostat	87
III.6	Blindage magnétique du cryostat	89
III.7	Orbitale atomique associée à l'électron externe de l'atome de Rydberg dans l'état $ 50C\rangle$	90
III.8	Diagramme énergétique des niveaux de Rydberg $n = 50$ et $n = 51$ pour un atome hydrogénoïde dans un champ électrique statique pour $m \geq 0$	94
III.9	Étapes de la circularisation des états atomiques	98
III.10	Schéma de la boîte à circulariser	100
III.11	Distribution en vitesse des atomes	101
III.12	Sélection des atomes en vitesse	101
III.13	Principe de la sélection de vitesse en temps de vol	103
III.14	Schéma des deux détecteurs avec les potentiels appliqués sur les différentes électrodes.	105
III.15	Détection des atomes avec le détecteur à cathode plate	106
III.16	Substrat et miroirs	108
III.17	Schéma de la cavité	109
III.18	Bloc cavité	113
III.19	Ligne d'injection du champ	114
IV.1	Actions effectuées au sein de la cavité au cours du passage de l'atome	118
IV.2	Détermination de la fréquence de résonance de la cavité	120
IV.3	Efficacité de la procédure de vidage de la cavité	121
IV.4	Effet du décentrage sur le couplage vu par l'atome	123
IV.5	Centrage temporel des séquences expérimentales	123
IV.6	Centrage d'une séquence de métrologie	124
IV.7	Détermination de la fréquence de Rabi du vide	126
IV.8	Détermination du nombre de photons injectés	126
IV.9	Chronologie des injections micro-ondes dans la cavité	128

IV.10	Détermination de la fréquence d'injection ν_{inj}	130
IV.11	Chronologie des injections micro-ondes dans la cavité	131
IV.12	Etapes de la calibration de la rotation de l'état atomique	131
IV.13	Calibration de l'impulsion $\pi/2$	133
IV.14	Calibration de l'impulsion $\pi/2$	133
IV.15	Réalisation expérimentale de l'opération σ_z	135
IV.16	Evolution du transfert atomique en fonction du désaccord atome – champ	135
IV.17	Evolution du champ au cours d'une répétition de la séquence expérimentale	137
IV.18	Effondrement et résurgences des oscillations de Rabi	137
IV.19	Exemple typique d'oscillations de $P_g(\beta)$ et information de Fisher associée	139
IV.20	Comparaison des résultats expérimentaux avec les résultats d'une mesure classique et d'une mesure optimale	141
IV.21	Information de Fisher de la mesure de parité	145
IV.22	Précision de la mesure	146
IV.23	Dispositif expérimental à deux cavités	149
IV.24	Expérience avant et après déménagement	150
IV.25	Nouveaux détecteurs avec un channeltron visible et l'autre déjà protégé .	152
IV.26	Nouvelle boîte à circulariser	152
IV.27	Préparation de la superposition quantique d'état cohérent de spin	153
IV.28	Schéma de l'expérience à fontaine atomique	154

Introduction

凡事预则立，不预则废

*Estimer ne coûte presque rien,
mal estimer coûte cher.*

Proverbe chinois

L'appréhension d'un phénomène nécessite souvent de passer par un nombre. Celui-ci permet de mettre une réalité tangible sur un concept potentiellement abstrait : le nombre permet d'organiser les différents aspects du concept, de désigner une quantité au sein de ce concept, d'estimer la taille de cette quantité afin de pouvoir éventuellement la comparer à une autre. Si les théories physiques s'appliquent à développer un cadre de compréhension de la nature, c'est souvent une vérification quantitative par la mesure qui nous permet de valider ou non ce cadre. Opérée dans une certaine limite instinctivement par chaque individu, la mesure de grandeurs représente un outil de base des laboratoires de recherche ou des industries. Une mesure ne se résume toutefois pas là à l'obtention d'une valeur : il est indispensable de lui associer un niveau de confiance. La recherche du niveau de confiance "ultime" d'une mesure définit le domaine de la métrologie qui couvre des champs aussi variés que la détection des ondes gravitationnelles, la détermination de constantes fondamentales allant de pair avec la définition des unités du système international ...

Mesures classiques, mesures quantiques

Les physiciens travaillant bien souvent sur des données statistiques, il s'agit alors d'induire à partir d'un nombre fini de mesures une connaissance sur des variables aléatoires au nombre de possibilités parfois infinies. Toute mesure étant imparfaite, la valeur obtenue n'est jamais la valeur réelle mais est entachée d'une certaine erreur statistique (voire systématique). La mesure s'accompagne donc d'incertitudes qu'il s'agit de comprendre et de quantifier. En physique, les erreurs peuvent provenir de l'appareil de mesure lui-même, de la procédure de mesure ou bien, beaucoup plus fondamentalement, de la physique sous-jacente, comme c'est le cas en mécanique quantique.

On qualifie de "standard" une mesure pour laquelle les résultats sont régis par des concepts de physique classique. La limite sur la précision alors obtenue possède des noms

différents suivant le type de mesure classique. Par exemple, les mesures “standard” de l’amplitude d’un champ électromagnétique se heurtent à une limite causée par la quantification du champ, appelée *bruit de grenaille* ou *shot noise limit* en anglais. Ceci n’est pas étonnant : à l’échelle sub-atomique, c’est la physique quantique qui impose leurs comportements aux systèmes, or une mesure “standard” n’exploite en rien la nature quantique du système.

Toutes les limites classiques ont un point commun : elles ne sont pas fondamentales et peuvent toutes être franchies à condition de choisir une meilleure stratégie de mesure utilisant des caractéristiques quantiques telles que la compression (*squeezing* en anglais) ou les corrélations quantiques. Pour cette raison, nous les regrouperons sous une seule et même appellation : la *limite quantique standard* (l’acronyme couramment utilisé est l’acronyme anglais SQL). Battre la SQL reste encore un défi expérimental dans la plupart des domaines de la physique. Nous nous pencherons sur la SQL de la mesure d’un petit champ électromagnétique dans ce manuscrit.

La métrologie quantique s’efforce de réduire les erreurs sur la mesure par l’utilisation à son avantage des lois de la physique quantique. En théorie quantique, on associe généralement une observable (opérateur auto-adjoint) à la grandeur à mesurer suivant l’idée initiale de Heisenberg et sa mécanique matricielle [1]. Les résultats de mesure $X_1, \dots, X_k$ d’une observable sont des variables statistiques dont les probabilités d’obtention sont données par l’état du système mesuré. La précision sur la mesure de l’observable $\hat{X}$ est quantifiée par l’écart type ΔX . *A priori* on peut mesurer avec une précision infinie la quantité définie par l’observable, *i.e.* $\Delta X = 0$, à condition d’avoir pu préparer le système dans un état propre de cette observable. Dans ce cas notre connaissance de la valeur de X est parfaite. Toutefois, deux observables complémentaires, telles que la position $\hat{X}$ et l’impulsion $\hat{P}$, sont liées par une inégalité de Heisenberg :

$$\Delta \hat{X} \Delta \hat{P} \geq \hbar/2. \quad (1)$$

De ce fait, la précision sur la position **et** l’impulsion ne peuvent être **simultanément** arbitrairement petites : le produit des incertitudes doit être au moins de l’ordre de $\hbar$. Une conséquence importante de cette inégalité est que la mesure d’un système occasionne une action en retour quantique sur l’état du système : une mesure quantique de $\hat{X}$ annule l’incertitude sur X mais rend infinie celle sur P . Après quelques instants où on laisse une particule évoluer librement, l’incertitude sur P se traduit par une incertitude sur X et donc toute la précision sur X a été perdue.

Ce type d’inégalité a été généralisé par Robertson [2] qui a montré que, pour toutes observables $\hat{A}$ et $\hat{B}$, elle devient

$$\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle \left[\hat{A}, \hat{B} \right] \right\rangle \right|. \quad (2)$$

En ce sens, l’action en retour de la mesure quantique peut diminuer fortement la précision que l’on peut obtenir sur les mesures répétitives de $\hat{A}$ sur un même système si l’observable complémentaire $\hat{B}$ influence l’évolution temporelle de $\langle \hat{A} \rangle$. Ceci constitue une première

difficulté que la métrologie quantique s’efforce de contourner en appliquant des *mesures quantiques non destructives* sur le système : on choisit pour ce faire de mesurer des observables qui sont des constantes du mouvement. La réalisation de mesures non destructives reste cependant encore difficile expérimentalement.

Lorsque le processus de mesure n’est pas projectif au sens de von Neumann, il est décrit en termes de *mesures généralisées*. On introduit le concept de POVMs (*Positive Operator Valued Measure* en anglais) qui est une mesure décrite à l’aide d’un ensemble complet d’opérateurs hermitiens à valeurs propres positives ou nulles que l’on notera $\{\hat{E}(\xi)\}$ [3]. Ici, ξ représente l’ensemble, éventuellement continu, des résultats possibles d’une telle mesure.

Information de Fisher

Pour des paramètres comme le temps, il n’y a de toute manière pas d’opérateur hermitien associable et la description conventionnelle de la mesure par les observables n’est plus possible. Par exemple, des développements théoriques ont permis de définir un opérateur de phase de champ radiatif et un état propre associé à condition d’avoir accès à un nombre infini de photons, qui constituent les “ressources” en énergie disponibles [4, 5, 6]. Toutefois, il n’existe pas d’opérateur hermitien pour la phase dans un espace de dimension finie, physiquement plus réaliste. Il faut donc changer de cadre et contruire une théorie de l’estimation de paramètres. Un point crucial est que la mesure quantique ne donne alors plus directement la valeur du paramètre. Elle s’organise de la façon suivante : l’expérimentateur prépare un état ressource qui évolue en fonction du paramètre à mesurer. L’état est finalement mesuré. La répétition de la mesure fournit un échantillon de données à partir desquelles une estimation *classique* permet de déterminer la valeur du paramètre. Les limites sur la précision sur la valeur de la mesure du paramètre sont alors données par des expressions ressemblant aux inégalités de Heisenberg mais font intervenir des paramètres et non des observables. Elles sont appelées *relations d’incertitude généralisées*. La première de ce type a été dérivée par Mandelstam et Tamm en 1945 et reliait le temps et l’énergie [7] :

$$\Delta t \left\langle (\Delta \hat{H})^2 \right\rangle^{1/2} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (3)$$

où t est le temps et $\left\langle (\Delta \hat{H})^2 \right\rangle^{1/2}$ représente l’écart-type de l’énergie du système. La démonstration de cette relation étant éclairante sur la manière dont fonctionne l’estimation d’un paramètre t , nous nous proposons d’en retracer les grandes lignes ici. Mandelstam et Tamm ont constaté que la mesure du temps t pouvait se faire à partir d’une observable $\hat{A}$ qui varie avec le temps et qui donc, en quelque sorte, peut jouer le rôle d’horloge. Ils définissent alors l’incertitude sur t comme

$$\Delta t = \frac{\left\langle (\Delta \hat{A})^2 \right\rangle^{1/2}}{\left| d \left\langle \hat{A} \right\rangle / dt \right|}. \quad (4)$$

On utilise alors le théorème d'Ehrenfest :

$$-i\hbar \frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} = \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle, \quad (5)$$

ainsi que l'inégalité de Heisenberg "standard" :

$$\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle^{1/2} \langle (\Delta \hat{H})^2 \rangle^{1/2} \geq \frac{1}{2} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle, \quad (6)$$

que l'on combine pour obtenir l'équation (3). On retrouve l'idée centrale que le temps peut être traité comme un paramètre à déterminer par la mesure d'une autre quantité.

De manière générale, ces inégalités relient la précision que l'on peut obtenir sur un paramètre X et la variance de l'opérateur qui génère le changement de valeur de X . Leur développement a fait l'objet d'un travail approfondi par Helstrom [8] et Holevo [9] qui firent le lien entre POVMs et les limites quantiques sur la précision. Si l'on quantifie la précision sur l'estimation d'un paramètre comme dans la démonstration précédente, Cramér [10] et Rao [11] ont démontré qu'il existait des limites générales à cette précision liées à la nature statistique de la mesure. Elles sont interprétées grâce l'*information de Fisher* [12] qui représente l'information maximale sur un paramètre que l'on peut extraire d'un échantillon de ϑ mesures. Celle-ci est définie comme suit (en supposant ici que l'ensemble des résultats possibles de la mesure est discret) :

$$F(X) = \sum_k P_k(X) \left(\frac{d \ln P_k(X)}{dX} \right)^2, \quad (7)$$

où $P_k(X)$ représente la probabilité d'obtenir le résultat de mesure k . L'incertitude ΔX sur la valeur de X ne peut alors être plus petite qu'une certaine valeur donnée par la *limite de Cramér-Rao* :

$$\Delta X \geq \frac{1}{\sqrt{\vartheta F(X)}}. \quad (8)$$

Cette expression n'est toutefois pas suffisante pour l'expérimentateur puisqu'elle ne lui donne accès qu'à la meilleure précision qu'il peut espérer sur le paramètre avec l'état initial du système choisi et le processus de mesure qu'il s'est donné. Comment être sûr qu'il a fait les meilleurs choix possibles ? Comment être sûr qu'il a atteint la meilleure précision possible dans l'absolu ?

Information de Fisher quantique

Lorsqu'on se restreint à de la métrologie quantique locale, c'est-à-dire lorsqu'on souhaite déterminer la valeur d'un paramètre qui se trouve dans une certaine petite plage, l'*information de Fisher quantique* permet de répondre à ces attentes. Elle fournit l'information maximale que l'on peut obtenir à partir de la mesure *optimale* d'un état quantique

donné, et ce, même si on ne connaît pas cette mesure. L’expression de l’information de Fisher quantique est obtenue en maximisant l’information de Fisher par rapport à toutes les mesures possibles :

$$F_Q(X) = \max_{\{\hat{E}(\xi)\}} F(X, \{\hat{E}(\xi)\}), \quad (9)$$

où l’on rappelle que $\{\hat{E}(\xi)\}$ représente l’ensemble des opérateurs du POVM. L’information de Fisher quantique dépendant de l’état initial du système mesuré, il reste encore à choisir un état tel que cette information soit la plus grande possible pour achever d’optimiser l’estimation du paramètre.

Notons bien que l’information de Fisher quantique obtenue à l’aide d’un état initial “classique”, comme l’état cohérent dans le cas d’un oscillateur harmonique, nous permet de définir l’information maximale que l’on peut obtenir avec des méthodes standard. Autrement dit, l’information de Fisher quantique d’un état classique définit quantitativement la SQL. De plus, on peut montrer que l’inégalité de Cramér-Rao (8) dans laquelle on remplace l’information de Fisher F par l’information de Fisher quantique F_Q est la plus restrictive qui soit : elle marque une limite infranchissable physiquement pour la précision sur la valeur d’un paramètre [13], on l’appelle *limite de Heisenberg*.

Dépassez la limite quantique standard

Pour battre la limite quantique standard, les stratégies quantiques sont nombreuses et souvent complémentaires. Un très grand nombre d’expériences de métrologie quantique fait intervenir des mesures interférométriques et se ramène à des mesures de déphasages [14]. Le changement induit par le paramètre sur l’état quantique du système que l’on mesure est généralement infime et le signal mesuré peut être très petit. Il faut donc trouver un “mètre” capable de mesurer de tout petits déphasages, *i.e.* de tout petits déplacements de l’état quantique dans l’espace des phases pour un oscillateur harmonique (cas qui va nous intéresser spécifiquement) ou sur la sphère de Bloch pour un spin. Somme toute, nous recherchons un mètre capable de donner le signal le plus grand possible à partir de ce déplacement [15]. Dans l’espace des phases, une modification de la phase d’un état induit une petite rotation centrale de cet état. Pour être capable de mesurer avec précision l’angle de cette rotation, il est nécessaire de bien distinguer l’état final $|\psi_f\rangle$ de l’état initial $|\psi_i\rangle$, ce qui revient à estimer leur recouvrement $|\langle\psi_f|\psi_i\rangle|^2$. Un état quasi-classique prend la forme d’un disque dans cet espace (voir figure 1, cas (a)) : une infime rotation induit de ce fait une très faible diminution du recouvrement. Un état cohérent est donc une sonde assez “mauvaise” de la rotation. Ceci peut être amélioré par l’utilisation d’états hautement non classiques comme états sondes.

Les états comprimés se sont imposés naturellement comme un moyen d’augmenter la précision : ce sont des états dont une des quadratures a été fortement comprimée par rapport à celle d’un état quasi-classique (bien sûr, la quadrature orthogonale a été en

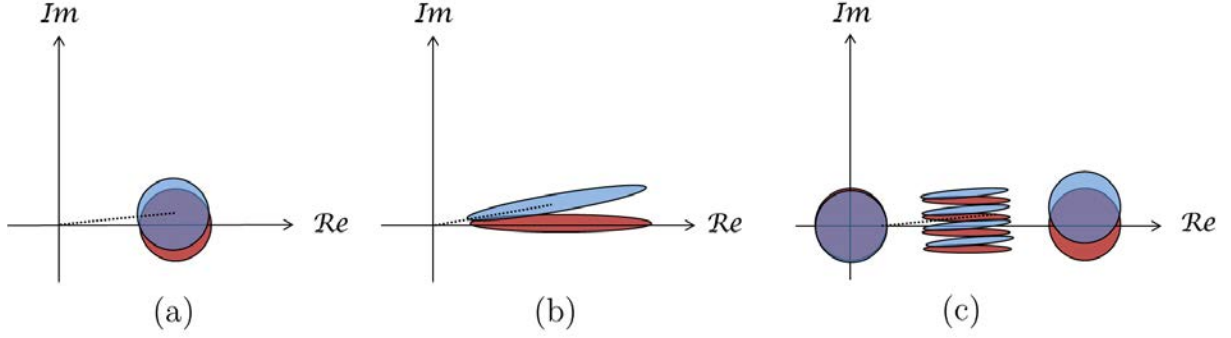


FIGURE 1 – Rotation d'un état quantique dans l'espace des phases due à une modification de la phase de l'état

(a) Rotation d'un état semi-classique. **(b)** Rotation d'un état comprimé. **(c)** Rotation d'un état chat de Schrödinger. Les états initiaux sont représentés en rouge et les états déphasés en bleu.

parallèle étirée). Il peut par exemple s'agir de spins collectifs d'un ensemble d'atomes ou d'ions dont une des composantes du moment angulaire total a une incertitude inférieure à celle obtenue par des moyens classiques [16]. La compression d'une quadrature de l'état dans la direction du déplacement permet de diminuer énormément la valeur du recouvrement comme on peut le voir sur la figure 1 (cas (b)) et la mesure sera donc beaucoup plus sensible à un même déphasage. Il est impossible d'être ici exhaustif sur les domaines qui utilisent ces états mais on peut citer entre autres la spectroscopie Ramsey [17, 18], les horloges atomiques [19], les magnétomètres [20, 21] ou bien encore les interféromètres gravitationnels [22]. La génération des états squeezés peut se faire par des interactions entre les particules d'un ensemble d'atomes [23, 24] ou d'ions [18]. En particulier, elle peut être obtenue dans des condensats de Bose-Einstein grâce aux collisions internes [25, 26, 27]. On peut également compresser la lumière [28, 29]. Ces techniques ont toutes montré une amélioration substantielle de la précision pour dépasser la SQL dans le cas de mesures de forces faibles ou de fréquences. Leur utilisation dans des interféromètres plus grands comme les interféromètres gravitationnels est en cours mais reste par bien des aspects un défi. La collaboration VIRGO/LIGO développe un interféromètre "de table" GEO 600 servant d'expérience préalable à l'utilisation d'états comprimés dans les grands interféromètres [30]. Celui-ci doit détecter un infime mouvement d'un miroir induisant une différence de phase entre les faisceaux infrarouges parcourant les deux bras. En calibrant l'état d'entrée, on peut battre la SQL.

Une voie parallèle dans laquelle s'est engagée la recherche, en sus de la précédente, est l'utilisation d'états intriqués. Pour un système contenant N ressources, la sensibilité sur la mesure est de $1/\sqrt{N}$ pour la SQL et $1/N$ pour la limite de Heisenberg. L'intrication des ressources permet de gagner un facteur $1/\sqrt{N}$ nécessaire pour atteindre la limite quantique. Il vient naturellement à l'idée d'utiliser des états maximalement intriqués pour exploiter au maximum les caractéristiques quantiques de la mesure [31]. Expérimentalement, ces états ont été utilisés pour comprimer les fluctuations dans des ensembles de

quelques ions [32, 33] et ont démontré alors une légère amélioration de 1,4 dB en précision par rapport au cas classique. Depuis ils ont été utilisés dans des ensembles contenant un grand nombre d’atomes à deux niveaux [34], offrant une amélioration de 3,4 dB par rapport à la SQL. Des états de type NOON¹ ont été réalisés avec 10 spins dans une molécule de triméthylphosphite pour être utilisés comme sondes magnétométriques [35].

Finalement, la plus grande difficulté est de préparer les états initiaux du système, intriqués et/ou comprimés. En particulier, les états NOON, dont l’intérêt en terme de métrologie n’est plus à démontrer, ont pour principale faiblesse d’être assez peu résistants à la décohérence puisque la perte d’une seule particule occasionne rapidement une perte totale de l’information. Dans le domaine de l’optique quantique, d’autres états à deux, trois ou quatre photons [36] ont été de ce fait testés expérimentalement et ont permis de battre la SQL. Le choix de l’état dépend principalement de l’utilité pratique qu’on en a. Théoriquement, on sait depuis un certain temps que la limite quantique standard peut être battue mais la plupart des propositions expérimentales constituent de fait plutôt des preuves de principe des théories de métrologie quantique. Cette dernière se tourne donc vers la recherche d’états plus modestement intriqués ou en tous cas plus robustes comme des états de Fock intriqués [37], des états non gaussiens intriqués [38], ou bien encore des états cohérents intriqués (ECS) analogues aux états NOON mais avec un mode contenant un état cohérent plutôt qu’un état de Fock [39]. Des états multi-modes sont également à l’étude : par exemple, introduire un état arbitraire (non vide) par une entrée d’un Mach-Zehnder et un état de Fock par l’autre entrée a permis d’atteindre un gain de 2,4 dB en dessous du bruit de grenaille [40]. Remplacer l’état de Fock par un mode squeezé pourrait bien sûr permettre de se rapprocher encore plus de la limite de Heisenberg.

La voie que nous proposons d’étudier dans ce manuscrit est l’utilisation de superpositions quantiques mésoscopiques pour mesurer de petits déplacements dans l’espace des phases suivant une proposition de Zurek *et al.* [41]. L’estimation de l’amplitude de petits déplacements est un domaine actif de la métrologie quantique puisque qu’elle recouvre des cas très variés : la mesure d’une force faible agissant sur un oscillateur mécanique [42, 43], ou bien optomécanique [44]. Elle correspond également à la mesure du recul d’un ion piégé causé par la diffusion d’un photon [45] ou bien à l’action d’un faible champ magnétique sur des systèmes de spins [20].

Les représentants les plus emblématiques des superpositions quantiques mésoscopiques sont bien sûr les états *chats de Schrödinger*. Ceux-ci tirent leur nom de la fameuse expérience de pensée où Schrödinger avait imaginé un chat emprisonné dans une boîte avec un atome radioactif, chat qui se trouvait alors dans la pénible situation d’être quantiquement à la fois mort **et** vivant, et dont on sait aujourd’hui que le destin final classique, mort **ou** vivant, est dû à la décohérence. Expérimentalement, un état chat de Schrödinger est une superposition d’états semi-classiques (cohérents) comme représenté sur la figure 1 (cas (c)).

1. Un état NOON est une superposition à N particules bosoniques pouvant occuper deux modes a et b de la forme $\{N \text{ particules dans le mode } a, 0 \text{ particule dans le mode } b\}$ en superposition avec $\{0 \text{ particule dans le mode } a, N \text{ particules dans le mode } b\}$: $|\psi_{\text{NOON}}\rangle = (|N\rangle_a|0\rangle_b + |0\rangle_a|N\rangle_b)/\sqrt{2}$.

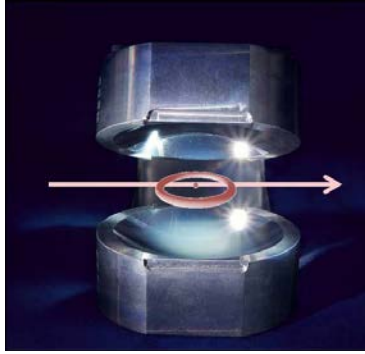


FIGURE 2 – Interaction entre les objets quantiques dans notre expérience
Un atome de Rydberg circulaire interagit avec le mode du champ électromagnétique piégé dans une cavité Fabry-Pérot micro-onde de grande finesse.

Dans l’espace des phases, le caractère quantique de l’état se retrouve en particulier dans les “moustaches” du chat, *i.e.* les franges, qui sont des structures de très petites tailles. Une infime rotation de l’état chat peut amener ces franges à avoir un recouvrement quasiment nul avec les franges de l’état de départ. Ces états sont donc de bons candidats pour faire des mesures d’estimation de déplacement. Ces mesures peuvent se faire à partir d’états du champ électromagnétique [46] contenant jusqu’à une centaine de photons : une superposition de quatre champs cohérents a ainsi pu être réalisée [47]. On peut également superposer des états atomiques : des chats contenant jusqu’à 8 ions ont été stabilisés [48, 49, 50] ainsi que des chats préparés avec des états de très grand moment angulaire [51]. De même, il est possible de superposer des spins nucléaires [52].

Présentation de l’expérience

Depuis plusieurs années, notre équipe est capable de manipuler des superpositions d’états mésoscopiques de champs micro-ondes aux phases classiques distinctes [53, 54]. Le dispositif expérimental que j’ai utilisé pendant ma thèse a été dès le départ construit dans cette optique ainsi que pour pouvoir observer la décohérence de ces superpositions [55, 56, 57]. Pour créer une telle superposition, il faut pouvoir manipuler la phase d’un champ cohérent en un temps inférieur au temps de décohérence. Ceci peut se faire à l’aide d’un atome fortement couplé au champ [53], une situation relevant typiquement de l’électrodynamique quantique en cavité lorsque le champ compte quelques photons (voir figure 2). Nous faisons ainsi interagir un atome mis dans un état de Rydberg circulaire avec le mode d’un champ micro-onde (à 51,099 GHz) piégé dans une cavité Fabry-Pérot de très grande finesse. L’atome se comporte comme un système à deux niveaux extrêmement sensible au champ électromagnétique et possède un long temps de vie, typiquement de $\tau_{\text{at}} = 31,5$ ms. Le couplage entre l’atome et le champ est caractérisé par une fréquence de Rabi qui s’élève, dans notre cas, à 46 kHz soit une période de Rabi de $T_0 = 22$ ms. A cause du couplage du mode avec l’environnement, la cavité ne retient piégés les photons “que” sur un temps

caractéristique $\tau_{\text{cav}} = 65$ ms. Toutes les conditions sont réunies pour placer l’atome et le champ en couplage fort : $T_0 \ll \tau_{\text{cav}}$ et $T_0 \ll \tau_{\text{at}}$. L’atome peut donc s’intriquer avec le mode piégé qui s’en retrouve fortement affecté.

Avec ce dispositif, nous sommes capables de préparer des états chats de Schrödinger du champ micro-onde par des méthodes dispersives ou résonantes.

La méthode dispersive de préparation des états chats utilise une interaction non résonante dans la cavité entre un champ cohérent $|\beta\rangle$ et un atome à deux niveaux ($|g\rangle$ et $|e\rangle$) préparé dans une superposition quantique $(|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2}$ [54]. Toutefois, nous ne produirons pas de chats par cette méthode car elle a l’inconvénient d’être lente.

Nous fabriquerons donc plutôt des superpositions mésoscopiques de champ par interaction résonante entre un atome et le mode piégé [58]. A résonance, l’atome et le champ échangent un quantum d’énergie périodiquement : c’est le phénomène d’*oscillations de Rabi quantiques*. La probabilité de détecter l’atome en sortie de cavité dans un état donné en fonction du temps prend alors la forme d’une sinusoïde. Un champ cohérent contenant un nombre fluctuant de photons, l’oscillation de Rabi d’un atome en interaction avec un tel champ s’effondre périodiquement à cause de la dispersion des fréquences de Rabi associées à chaque état de Fock et renaît périodiquement à cause de la granularité du champ. Ces observations ne sont rien d’autre que la manifestation de la complémentarité entre atome et champ : l’atome et le champ s’intriquent et se désintriquent périodiquement. Il faut noter que les oscillations réapparaissent spontanément mais ne reviennent toutefois jamais à leur amplitude initiale. Notre équipe a démontré dans une expérience antérieure qu’il était possible de déconstruire de façon unitaire l’intrication entre l’atome et le champ et de faire revivre les oscillations de Rabi initiales grâce une méthode de type “écho de spin” sans perte de contraste [59].

L’expérience présentée dans ce mémoire consiste donc à préparer le champ dans une superposition mésoscopique de composantes cohérentes de champ grâce à une interaction résonante avec un atome à deux niveaux. Un point crucial est que la fréquence de Rabi sera d’autant plus grande que la distance entre les composantes de champ de la superposition est grande. Nous déplaçons ensuite cette superposition en injectant un champ cohérent $|\beta\rangle$ dont l’amplitude β est le paramètre à estimer. Pour garder un signal de bon contraste à la fin de l’interaction entre l’atome et le champ, nous réalisons en outre une opération d’écho. Si les oscillations de Rabi sont suffisamment rapides, elles seront très sensibles à un petit déplacement du champ. Nous avons pu montrer au cours de ce travail que l’information de Fisher quantique de ce paramètre est en principe maximale. En outre, grâce à l’information de Fisher, nous avons pu quantifier en pratique l’information que nous avons pu extraire de notre mesure et la comparer à ce que nous espérions. En pratique, celle-ci est plus faible qu’attendue mais les causes de cette diminution, d’ordre expérimental, ont été simulées et sont bien comprises. Ces résultats ont fait l’objet de l’article [60].

Organisation du mémoire

Le premier chapitre présente les aspects de la théorie de l'estimation d'un paramètre en commençant par les aspects classiques. A partir d'un exemple simple, nous essaierons alors de percevoir les apports possibles de la physique quantique à la métrologie en faisant ressortir les caractéristiques typiquement quantiques permettant de dépasser les précisions atteignables par des mesures classiques. Nous présenterons les principaux outils que nous utiliserons pour quantifier cette précision, à savoir l'information de Fisher qui nous permettra d'estimer la précision de notre mesure et l'information de Fisher quantique qui explicite concrètement ce qu'un expérimentateur peut espérer au mieux en précision (sachant l'état du système qu'il utilise). Nous approfondirons le lien fort existant entre précision sur la mesure et distinguabilité des états initial et final du système quantique évoluant en fonction du paramètre : ceci nous permettra de raisonner indifféremment sur la statistique des mesures ou la géométrie dans l'espace des phases. Nous terminerons ce chapitre en nous attardant sur le problème des contraintes expérimentales et le moyen de les prendre en compte dans l'estimation des précisions grâce à la notion fondamentale de ressources. Nous définirons alors précisément les ressources que nous avons en main pour cette expérience.

Le chapitre suivant est consacré à l'étude théorique du système atome-champ. Nous y décrirons l'interaction entre l'oscillateur harmonique qui modélise le mode du champ piégé dans la cavité et le pseudo-spin de l'atome à deux niveaux. Nous reprendrons alors l'ensemble des actions, toujours de manière théorique, que nous faisons subir aux deux sous-systèmes. Nous nous attacherons en particulier à toujours établir l'expression de l'état du système intriqué à chaque étape de la séquence expérimentale. Ceci nous permettra de calculer explicitement la valeur de l'information de Fisher quantique correspondant à la SQL ainsi que celle correspondant à la limite de Heisenberg. Nous serons ainsi en mesure d'évaluer les performances expérimentales de notre processus de mesure en matière de métrologie dans le dernier chapitre.

Le troisième chapitre présente la préparation et la manipulation expérimentale du système atome-champ. Nous détaillerons le dispositif expérimental que nous avons utilisé. Nous détaillerons les étapes d'excitation des atomes pour les placer dans des états de Rydberg circulaires, leur sélection en vitesse et la manière dont nous les détectons. Nous exposerons également les caractéristiques de la cavité de très grande finesse que nous avons utilisée pour piéger les photons micro-ondes.

Le dernier chapitre concerne les résultats de l'estimation de l'amplitude d'un champ micro-onde contenant un nombre moyen de photons de 12,7. Nous présenterons tout d'abord toutes les calibrations que nous avons effectuées. Nous exposerons ensuite les résultats expérimentaux que nous avons obtenus. Nous situerons ces résultats entre les deux limites majeures évoquées : la SQL et la limite de Heisenberg. Nous verrons que nous avons de fait réussi à gagner 2,4 dB de précision sur la mesure par rapport à son équivalent classique.

Chapitre I

Estimation d'un paramètre

Sommaire

I.1	Un exemple usuel en métrologie : l'interférométrie	12
I.1.1	Stratégie de mesure classique	13
I.1.2	Stratégie de mesure quantique	17
I.2	Éléments de théorie classique sur l'estimation	18
I.2.1	Bases de la théorie de l'estimation	18
I.2.2	Information de Fisher	20
I.3	Information de Fisher quantique	24
I.3.1	Formulation usuelle de l'information de Fisher quantique	24
I.3.2	Autre formulation possible	29
I.3.3	Limite de Cramér-Rao et relation d'incertitude	30
I.4	Distinguer deux états : lien entre considérations géométriques et statistiques	30
I.5	Ressources et limites	33
I.5.1	Présentation générale	33
I.5.2	Dans notre expérience	34
	Conclusion	36

Nous commencerons par montrer, grâce à un exemple introductif, en quoi des techniques quantiques peuvent permettre de dépasser les limites des stratégies de mesures standard que nous appellerons “classiques”. Nous poserons ensuite un cadre plus formel à notre discussion en présentant des éléments de la théorie de l'estimation avant de développer les concepts d'*information de Fisher* et d'*information de Fisher quantique*.

I.1 Un exemple usuel en métrologie : l'interférométrie

Un type de mesure très utilisé en métrologie est la mesure par interférométrie car il s'agit de la méthode traditionnelle pour mesurer des phases. Son fonctionnement général repose sur une interférence provenant de la comparaison des phases accumulées le long de deux chemins différents. L'exemple prototype de dispositif associé est l'interféromètre de Mach-Zehnder représenté sur la figure I.1. Le principe en est le suivant : la lumière entre dans l'appareil par le mode d'entrée A d'une lame semi-réfléchissante (B étant laissé vide), se propage selon deux chemins différents avant d'être recombinaée par une deuxième lame semi-réfléchissante et de ressortir par les voies C et D . La différence de chemins optiques entre les deux bras de l'interféromètre se matérialise par un déphasage de la lumière, noté φ , sur un bras par rapport à l'autre. L'information sur cette phase, objet des mesures interférométriques, peut être obtenue en détectant la lumière issue des deux voies de sortie. On peut, par exemple, en mesurer la différence d'intensité.

Nous allons utiliser le formalisme de la mécanique quantique pour étudier ce processus de mesure. Chaque état lumineux présent dans les modes, A , B , C ou D , de l'interféromètre peut être décomposé en états de Fock de la lumière $|n\rangle$ contenant n quanta d'énergie, autrement dit n photons. Ces états correspondent aux états propres de l'opérateur $\hat{N}$ qui est appelé *opérateur nombre*. Pour le mode A , on définit les opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$, correspondant aux opérateurs *annihilation* et *création* qui sont conjugués l'un de l'autre. Leur action sur les états de Fock est la suivante :

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (\text{I.1})$$

L'opérateur $\hat{a}$ (respectivement $\hat{a}^\dagger$) fait donc, comme le nom l'indique, disparaître (resp.

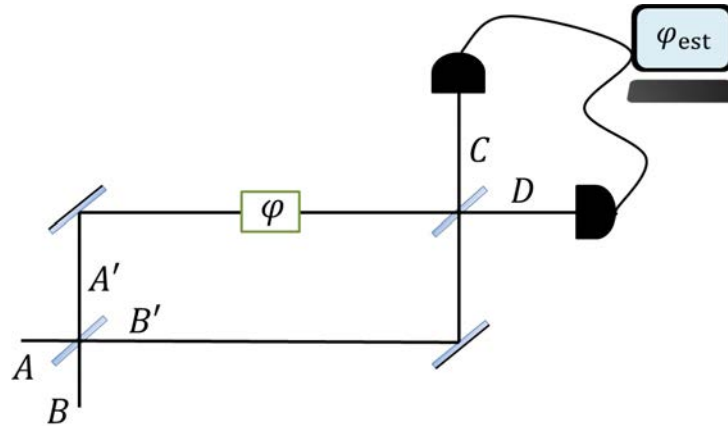


FIGURE I.1 – Interféromètre de Mach-Zehnder

Le mode A est le mode d'entrée de la lumière dans l'interféromètre. Le mode B est laissé vide. Les modes C et D sont les modes de sortie. La mesure consiste généralement à faire la différence de l'intensité entre les détecteurs sur les voie C et D . Elle permet de remonter à la valeur du déphasage φ sur le bras supérieur.

apparaître) un photon dans le mode A . Les deux opérateurs vérifient la relation de commutation suivante :

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbb{1}.$$

On définit de même les opérateurs d'annihilation pour les autres modes : $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$ associés respectivement aux modes B , C et D . Les expressions de $\hat{c}$ et $\hat{d}$ sont données par :

$$\begin{aligned}\hat{c} &\equiv (\hat{a}' + ie^{i\varphi}\hat{b}')/\sqrt{2}, \\ \hat{d} &\equiv (i\hat{a}' + e^{i\varphi}\hat{b}')/\sqrt{2},\end{aligned}\tag{I.2}$$

avec les opérateurs d'annihilation associés aux deux chemins intermédiaires A' et B' juste après la première lame séparatrice :

$$\begin{aligned}\hat{a}' &\equiv (\hat{a} + i\hat{b})/\sqrt{2}, \\ \hat{b}' &\equiv (i\hat{a} + \hat{b})/\sqrt{2}.\end{aligned}\tag{I.3}$$

Ces relations nous permettent de déduire les opérateurs d'annihilation dans les modes C et D à la sortie de l'interféromètre en fonction de ceux des modes A et B :

$$\begin{aligned}\hat{c} &= \frac{\hat{a}(1 - e^{i\varphi}) + i\hat{b}(1 + e^{i\varphi})}{2}, \\ \hat{d} &= \frac{i\hat{a}(1 + e^{i\varphi}) - \hat{b}(1 - e^{i\varphi})}{2}.\end{aligned}\tag{I.4}$$

I.1.1 Stratégie de mesure classique

Une stratégie simple de mesure classique du paramètre φ consiste à injecter par le mode A un faisceau classique. Quels sont les états classiques à choisir pour représenter les états d'excitation d'un oscillateur avec le formalisme quantique ? Il s'agit des états *cohérents*, introduits par Glauber [61] et notés $|\alpha\rangle$. Ils correspondent aux états propres de l'opérateur annihilation du mode (ici $\hat{a}$) associés aux valeurs propres α :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.\tag{I.5}$$

Ces états cohérents se décomposent dans la base des états de Fock sous la forme :

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.\tag{I.6}$$

On en déduit la probabilité d'obtenir chaque nombre de photons dans le mode :

$$P_\alpha(n) = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!},\tag{I.7}$$

ce qui veut dire qu'un état cohérent n'a pas un nombre de photons fixé mais que la distribution des photons dans chaque état de Fock est une distribution poissonnienne centrée

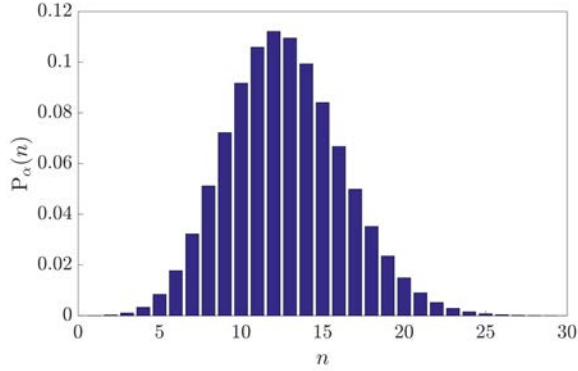


FIGURE I.2 – Distribution statistique du nombre de photons pour un état cohérent

Nous avons choisi de représenter l'état cohérent à $\bar{n} = 12.7$ photons en moyenne car il correspond à un état que nous utiliserons pour l'expérience de métrologie.

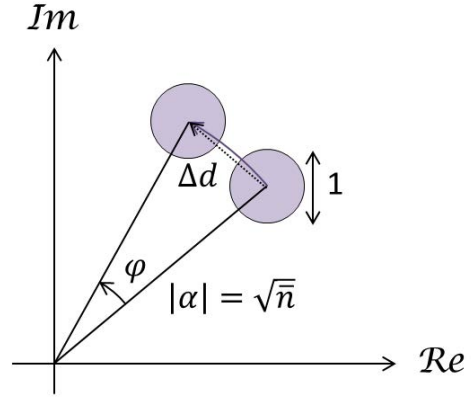


FIGURE I.3 – Rotation d'un état cohérent dans l'espace des phases

Dans l'espace des phases, un état cohérent est représenté schématiquement par un disque de diamètre 1. Un déphasage φ sur cet état cohérent va induire une rotation centrée de l'état de l'angle φ . Si le déphasage est petit, l'état sera déplacé d'une distance Δd qui correspond avec une très bonne approximation à la corde passant par les centres de l'état et son équivalent déplacé.

autour de la valeur moyenne $\bar{n} = |\alpha|^2$ de l'opérateur nombre prise pour $|\alpha\rangle$ et de variance $\Delta n = \sqrt{\bar{n}}$.

A titre d'exemple, la figure I.2 donne la distribution de probabilité $P_\alpha(n)$ des photons dans un état cohérent contenant en moyenne $\bar{n} = 12,7$ photons. Dans l'espace des phases, un état cohérent est représenté schématiquement par un disque de diamètre 1 lorsque l'amplitude du champ est adimensionnée comme sur la figure I.3.

Supposons donc que nous injectons par la voie A un état cohérent $|\alpha\rangle$ contenant un nombre $\bar{n} = N$ de photons en moyenne et le vide par la voie B . Nous noterons cet état $|\alpha, 0\rangle$. Nous pouvons calculer l'action de $\hat{c}$ et $\hat{d}$ sur cet état :

$$\begin{aligned}\hat{c}|\alpha, 0\rangle &= \frac{\alpha}{2} (1 - e^{-i\varphi}) |\alpha, 0\rangle, \\ \hat{d}|\alpha, 0\rangle &= i\frac{\alpha}{2} (1 + e^{i\varphi}) |\alpha, 0\rangle.\end{aligned}\tag{I.8}$$

Il est aisé d'en déduire le nombre de photons détectés sur chaque voie en sortie de l'interféromètre :

$$\begin{aligned}N_c &= \langle \alpha, 0 | \hat{c}^\dagger \hat{c} | \alpha, 0 \rangle = \frac{N}{2} (1 - \cos \varphi), \\ N_d &= \langle \alpha, 0 | \hat{d}^\dagger \hat{d} | \alpha, 0 \rangle = \frac{N}{2} (1 + \cos \varphi).\end{aligned}\tag{I.9}$$

Nous détecterons une fraction $\cos^2(\varphi/2)$ des photons dans la voie D et l'autre fraction $\sin^2(\varphi/2)$ dans la voie C . La différence des signaux de détection des deux voies donne un signal S d'amplitude N , oscillant en φ , et contenant toute l'information reçue par les deux détecteurs :

$$S = N_d - N_c = N \cos \varphi. \quad (\text{I.10})$$

Instinctivement, on a envie d'assimiler la précision accessible sur la mesure de φ au plus petit déphasage que l'on peut mesurer avec ces franges. De manière plus générale et systématique, on peut quantifier l'erreur sur la mesure donnée par l'interféromètre par l'écart-type $\Delta\varphi$ obtenu sur φ qui est égal à l'écart-type sur le signal S (valant $\sqrt{N}$ car S est un nombre de photons) divisé par la pente du signal :

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta S}{\left| \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right|}, \quad (\text{I.11})$$

soit,

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{N} |\sin \varphi|}. \quad (\text{I.12})$$

La sensibilité η de l'interféromètre est définie comme l'inverse de $\Delta\varphi$. Ces quantités dépendent ici de la valeur de la phase elle-même. Si l'on place l'interféromètre à la phase correspondant au maximum de pente, *i.e.* à mi-frange ($\varphi = \pi/2$ [$\pi/2$]), on peut obtenir le maximum de précision :

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (\text{I.13})$$

Cette limite sur la précision correspond ici à la Limite Quantique Standard. Elle est due à la quantification du champ qui fait apparaître les photons comme des entités individuelles.

Regardons le même dispositif expérimental dans lequel on aurait introduit un photon unique, objet résolument non-classique s'il en est, par la voie A (on laisse toujours la deuxième voie B vide). Dans ce cas, avec le même raisonnement que précédemment, on trouve que le photon est détecté avec une probabilité $\cos^2(\varphi/2)$ dans le mode D et une probabilité $\sin^2(\varphi/2)$ dans le mode C . Le signal S devient :

$$S = N_d - N_c = \cos \varphi. \quad (\text{I.14})$$

Toujours en se plaçant à mi-pente des franges ainsi obtenues, on en déduit que l'écart-type le plus petit que l'on peut avoir sur φ vaut 1. Si l'on répète la mesure un grand nombre N de fois (toujours avec un seul photon individuel), le théorème central limite établit que la moyenne d'un grand nombre de mesures indépendantes (ici N), ayant chacune un écart-type $\Delta\varphi^{(1)}$, converge vers une distribution gaussienne d'écart-type $\Delta\varphi = \Delta\varphi^{(1)}/\sqrt{N}$. On retrouve donc ici l'expression $\Delta\varphi = 1/\sqrt{N}$ qui donnait l'écart-type obtenu pour la mesure d'un état cohérent contenant en moyenne N photons. Le nom de bruit de grenaille associé au bruit de photon intrinsèque de l'état cohérent est donc très parlant. C'est en effet l'indépendance de chacun des photons dans l'état cohérent qui fixe la Limite Quantique

Standard. On peut y voir un reflet de l'inégalité de Heisenberg (qualitative ici) liant nombre de photons et phase :

$$\Delta\varphi\Delta N \geq 1, \quad (\text{I.15})$$

car le bruit sur le nombre de photons $\sqrt{N}$ de l'état initial impose alors $\Delta\varphi \geq 1/\sqrt{N}$ [13]. Toutefois, la mécanique quantique n'impose pas que ΔN soit limité à $\sqrt{N}$. On sent qu'en remédiant à ce problème d'"indépendance" des photons, on pourrait probablement augmenter encore la précision. Les stratégies basées sur des états non classiques, avec par exemple des corrélations quantiques, ont été développées pour cette raison.

Interprétation dans l'espace des phases

De manière plus générale, être capable de mesurer un déphasage φ appliqué sur un état cohérent revient à être capable de distinguer l'état cohérent de l'état cohérent déphasé. Dans l'espace des phases, la sensibilité maximale que l'on pourra avoir correspond donc au plus petit angle de rotation entre les deux états cohérents dans l'espace des phases que l'on peut mesurer comme représenté sur la figure I.3 [41]. Comme vu précédemment, la "taille" d'un état cohérent l'espace des phases est de 1. Dans cette représentation, on pourra ainsi dire que l'état initial sera distinguable de l'état final s'ils sont séparés, par exemple, d'une distance Δd d'au moins 1. On calcule facilement que la SQL dans le cas de la phase vaut alors :

$$\Delta\varphi = \Delta d/|\alpha| \quad (\text{I.16})$$

$$= 1/\sqrt{N}, \quad (\text{I.17})$$

où l'on retrouve le même facteur d'échelle en racine carré des photons pour la SQL (on rappelle qu'on a posé dans cette partie $\bar{n} = N$ pour garder les notations usuelles de la SQL). On peut remarquer qu'il est équivalent de parler directement en terme de recouvrement de l'état initial et de l'état déplacé. Dans ce cas, le même critère de distinguabilité de deux états cohérents $|\alpha\rangle_1$ et $|\alpha\rangle_2$ donne le recouvrement suivant :

$$\langle\alpha_1|\alpha_2\rangle = 0,607. \quad (\text{I.18})$$

Remarque Les opérateurs de quadrature $\hat{X}$ et $\hat{P}$ tels que :

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \hat{a}^\dagger e^{i\varphi} + \hat{a} e^{-i\varphi}, \\ \hat{P} &= \hat{a}^\dagger e^{i\varphi} - \hat{a} e^{-i\varphi}, \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

correspondent aux quadratures amplitude et phase du champ. Ils sont définis par analogie avec les observables "position" et "impulsion" d'un oscillateur harmonique. Ils vérifient la relation $[\hat{X}, \hat{P}] = 2i$ et leurs variances valent 1.

Des états dont la représentation dans l'espace des phases contient des structures de taille inférieure à 1 peuvent être obtenus quantiquement. C'est le cas par exemple des états comprimés. Ceci nous incite de nouveau à améliorer la stratégie employée pour mesurer le déphasage d'un état en utilisant des caractéristiques typiquement quantiques. Nous proposons dans ce qui suit d'employer plutôt comme état initial de la mesure du déphasage une superposition quantique d'états.

I.1.2 Stratégie de mesure quantique

Considérons à présent la situation suivante : nous envoyons cette fois les N photons ensemble dans l'interféromètre par le mode A (toujours rien dans le mode B) et nous remplaçons la première lame séparatrice par une "lame séparatrice spéciale" permettant de préparer la superposition d'états suivante dans l'interféromètre [62] :

$$|\psi_{in}\rangle = \frac{|N, 0\rangle_{A', B'} + |0, N\rangle_{A', B'}}{\sqrt{2}}. \quad (\text{I.20})$$

On peut noter qu'expérimentalement cet état maximalement intriqué multi-photons a été réalisé jusqu'à $N = 3$ à partir d'un état non intriqué. On pourra trouver le détail d'un des processus de préparation possibles pour deux photons dans la référence [63] et pour trois photons dans la référence [64].

Seuls les photons présents dans le bras supérieur vont subir un déphasage de φ et l'état devient :

$$|\psi_{out}\rangle = \frac{e^{iN\varphi}|N, 0\rangle_{A', B'} + |0, N\rangle_{A', B'}}{\sqrt{2}} \quad (\text{I.21})$$

Comme précédemment, on va relier la précision sur l'estimation de la phase à la distinguabilité de l'état initial et de l'état déphasé et donc à leur recouvrement. Le facteur N dans le déphasage accumulé dans la dynamique se retrouve directement dans la probabilité de détecter l'état final $|\psi_{out}\rangle$ identique à l'état initial $|\psi_{in}\rangle$ qui vaut ainsi $P = \cos^2(N\varphi/2)$. Cette fois l'écart-type $\Delta\varphi$ prend l'expression suivante :

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta P}{\left| \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right|} = \frac{1}{N}. \quad (\text{I.22})$$

Avec le même nombre N de photons, cette nouvelle stratégie d'intrication des photons nous a donc permis de gagner un facteur $1/\sqrt{N}$ par rapport à la limite quantique standard atteinte pour des états décorrélés. On peut montrer que le nouvel écart-type correspond à une limite physique qui ne peut être franchie pour n'importe quelle mesure de déphasage [31, 13] pour ce nombre moyen de photons : elle est appelée *Limite de Heisenberg*.

A travers l'exemple d'un processus de mesure interférométrique, nous avons montré que les caractéristiques propres à la physique quantique pouvaient permettre d'augmenter substantiellement la précision que l'on peut obtenir sur la mesure d'un paramètre. Ceci

sert de motivation aux sections qui vont suivre, posant le cadre plus général et aussi plus formel de la théorie de l'estimation d'un paramètre. Nous reviendrons sur certaines des notions que nous avons fait apparaître dans cet exemple et qui sont de fait d'importance majeure.

I.2 Éléments de théorie classique sur l'estimation

I.2.1 Bases de la théorie de l'estimation

La recherche de la valeur réelle d'un paramètre X par l'expérience se fait généralement selon le schéma représenté sur la figure I.4 [65]. Elle consiste à préparer un système dans un état initial, le laisser évoluer selon une dynamique faisant intervenir le paramètre que l'on cherche à déterminer, puis mesurer une observable sur l'état obtenu. La mesure pourra être répétée un grand nombre de fois ϑ . Les résultats qui en sont issus seront étiquetés par ξ_j où j correspond au numéro de la répétition. Ils sont supposés indépendants.

Il s'agit donc, à partir d'un échantillon de données, de modifier notre connaissance de la valeur X ¹ du paramètre (éventuellement initialement nulle!) : c'est le domaine de l'inférence statistique. Etant donné que les données expérimentales sont toujours entachées d'incertitudes statistiques qui peuvent être aussi bien dues à l'appareil de mesure qu'aux fluctuations intrinsèques du système étudié, il est impossible d'associer directement un résultat ξ à la valeur réelle du paramètre X_{vrai} . L'intégration de l'information issue des différentes répétitions, associées éventuellement à notre connaissance *a priori* sur les différentes valeurs possibles du paramètre, peuvent toutefois nous permettre de revoir notre connaissance de cette valeur. Pour chaque mesure donnant un ξ_j , la loi de probabilité $p(\xi_j|X)$ nous permet de quantifier à quel point la valeur possible X du paramètre est compatible avec le résultat de la mesure j : on l'appelle la *fonction de vraisemblance* du résultat ξ_j . La fonction X_{est} qui associe une valeur vraisemblable du paramètre X – estimée par l'expérimentateur – au résultat d'une mesure est appelée *estimateur* du paramètre. L'estimateur pourra donc être différent pour chaque mesure. L'approche qui consiste à actualiser la connaissance sur la valeur du paramètre après chaque répétition de la mesure est typiquement bayésienne. Le théorème de Bayes permet en effet d'obtenir, à partir de la fonction de vraisemblance et de la connaissance *a priori*, une connaissance *a posteriori* sur X . Il s'écrit dans la situation que nous venons de décrire :

$$\underbrace{p(X|\xi_j)}_{\text{connaissance } a \text{ posteriori}} = \frac{1}{p(\xi_j)} \times \underbrace{p(\xi_j|X)}_{\text{fonction de vraisemblance}} \times \underbrace{p(X)}_{\text{connaissance } a \text{ priori}} \quad (\text{I.23})$$

Par la suite, on appellera ξ l'ensemble de tous les résultats de mesure :

$$\xi = (\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_\vartheta). \quad (\text{I.24})$$

1. Comme habituellement en physique, on appellera X à la fois le paramètre et la valeur qu'il prend.

Idéalement, nous souhaiterions que l'estimateur donne la valeur la plus proche possible de X_{vrai} . Notre estimateur doit être non biaisé c'est-à-dire qu'il doit donner en moyenne (moment d'ordre 1) sur un grand nombre de mesure la vraie valeur de X [12]. Un estimateur non-biaisé doit vérifier en moyenne, sur les ϑ mesures :

$$\overline{X_{\text{est}}} = X_{\text{vrai}} \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\overline{X_{\text{est}}}}{dX} \right|_{X=X_{\text{vrai}}} = 1 \quad (\text{I.25})$$

Plusieurs estimateurs peuvent remplir cette condition. Naturellement, on choisit plutôt l'estimateur dont les valeurs ont tendance à être les plus regroupées autour de X . La dispersion de l'estimation autour de la valeur réelle est bien décrite par le moment d'ordre 2 de l'estimateur centré en X_{vrai} :

$$\delta X = \sqrt{[X_{\text{est}} - X_{\text{vrai}}]^2}. \quad (\text{I.26})$$

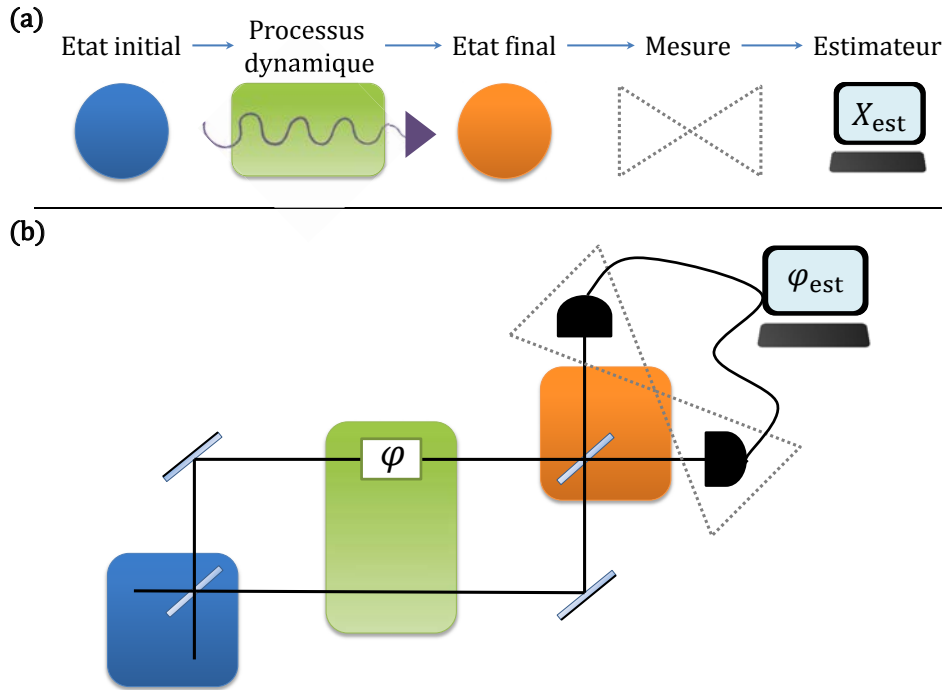


FIGURE I.4 – Dispositif nécessaire à l'estimation d'un paramètre par la mesure

Figure aimablement prêtée par L. Davidovitch [65] et adaptée pour ce manuscrit.

(a) Procédure d'estimation d'un paramètre inconnu X . Une sonde est préparée dans un état initial bien choisi. Sa dynamique d'évolution fait ensuite intervenir le paramètre X . L'expérimentateur mesure une observable sur l'état final du processus. Il peut ainsi obtenir l'estimateur dont la moyenne reflète la valeur (exacte) du paramètre X .

(b) Illustration de la procédure sur l'exemple de l'interférométrie par un dispositif Mach-Zehnder comme étudié à la section I.1 (avec comme paramètre φ).

Or comme l'estimateur est non-biaisé, on a :

$$\delta^2 X = \overline{[X_{\text{est}} - \overline{X}_{\text{est}}]^2} = (\Delta X_{\text{est}})^2. \quad (\text{I.27})$$

C'est donc la variance de l'estimateur $(\Delta X_{\text{est}})^2$, ou de manière équivalente son écart-type ΔX_{est} , qui peut nous permettre d'évaluer l'efficacité de celui-ci et donc le degré de confiance que l'on peut avoir sur ses résultats. On choisira l'écart-type comme quantificateur de l'erreur sur la mesure du paramètre. Par abus de langage, on dira également que l'écart-type nous permet de quantifier la précision obtenue par la mesure.

Nous allons à présent montrer que cet écart-type a une borne inférieure qui est indépendante de l'estimateur. Cette borne inférieure limite donc la précision que l'on peut espérer obtenir par la mesure et nous permettra de voir si notre estimateur est optimal. On présentera à ce propos la notion d'*information de Fisher*.

I.2.2 Information de Fisher

Instinctivement, on aura tendance à penser que la valeur réelle de X ressemble fortement à la plus probable des valeurs possibles du paramètre (après avoir pris en compte tous les résultats de mesure) : on procède alors implicitement à une estimation de X par un choix dit de *maximum de vraisemblance* (ML pour Maximum Likelihood en anglais). Cela revient à prendre comme estimateur du paramètre la valeur de X qui maximise $p(X|\xi)$. On notera donc cet estimateur X_{ML} . On peut remarquer que celle-ci dépend de l'échantillon ξ des résultats et peut donc varier d'un échantillon à l'autre. Pour la suite, nous supposons que le résultat de la mesure du système peut prendre un continuum de valeurs.

Regardons d'abord le cas où l'expérimentateur ne fait qu'une mesure *i.e.* $\vartheta = 1$ et $\xi = (X)$. D'après le théorème de Bayes, la probabilité conditionnelle d'obtenir X vaut :

$$p(X|\xi) = \frac{p(\xi|X)p(X)}{p(\xi)} \quad (\text{I.28})$$

Si la connaissance *a priori* de la valeur de X est nulle, $p(X) = 1$ et l'expression devient :

$$p(X|\xi) = \frac{p(\xi|X)}{\int dX p(\xi|X)p(X)}. \quad (\text{I.29})$$

Donc la valeur de X maximisant $p(X|\xi)$, soit $X_{\text{ML}}(\xi)$, maximise également $p(\xi|X)$ qui correspond à la connaissance *a posteriori* de l'expérimentateur à l'issue de la mesure. Remarquons que X_{ML} maximise en conséquence aussi $\ln p(\xi|X)$.

Si l'expérimentateur peut faire ϑ mesures identiques mais indépendantes, la probabilité $p(\xi|X)$ peut se décomposer en produits des $p(\xi_j|X)$:

$$p(\xi|X) = p(\xi_1|X) p(\xi_2|X) \cdots p(\xi_\vartheta|X). \quad (\text{I.30})$$

Donc dans le cas de plusieurs répétitions de la même mesure, X_{ML} est aussi solution de :

$$\left. \frac{\partial \ln p(\boldsymbol{\xi}|X)}{\partial X} \right|_{X=X_{\text{ML}}} = 0. \quad (\text{I.31})$$

En général, l'expérimentateur possède un modèle pour $p(\boldsymbol{\xi}|X)$. Il peut donc remonter numériquement à la valeur de X_{ML} à partir de ses résultats expérimentaux $\boldsymbol{\xi}$ et de l'expression (I.31).

Nous pouvons à présent regarder quelle précision on peut obtenir avec cet estimateur [66] : effectuons pour cela un développement de $\ln p(\boldsymbol{\xi}|X)$ autour de son maximum atteint par définition en X_{ML} :

$$\ln p(\boldsymbol{\xi}|X) = \ln p(\boldsymbol{\xi}|X_{\text{ML}}) + \frac{1}{2}(X - X_{\text{ML}})^2 \left. \frac{\partial^2 \ln p(\boldsymbol{\xi}|X)}{\partial X^2} \right|_{X=X_{\text{ML}}} + \dots \quad (\text{I.32})$$

Or, toujours parce que les mesures sont identiques et indépendantes, on a :

$$\left. \frac{\partial^2 \ln p(\boldsymbol{\xi}|X)}{\partial X^2} \right|_{X=X_{\text{ML}}} = \sum_{j=1}^{\vartheta} \left. \frac{\partial^2 \ln p(\xi_j|X)}{\partial X^2} \right|_{X=X_{\text{ML}}} \xrightarrow{\vartheta \rightarrow +\infty} \vartheta \int d\xi p(\xi|X) \left. \frac{\partial^2 \ln p(\xi|X)}{\partial X^2} \right|_{X=X_{\text{ML}}}, \quad (\text{I.33})$$

où l'on prendra soin de noter la différence entre $\boldsymbol{\xi}$ désignant l'ensemble discret des résultats expérimentaux et ξ désignant le continuum des résultats possibles d'une seule mesure. On introduit la fonction F appelée *information de Fisher* telle que :

$$F : X \mapsto - \int d\xi p(\xi|X) \frac{\partial^2 \ln p(\xi|X)}{\partial X^2} = \int d\xi p(\xi|X) \left[\frac{\partial \ln p(\xi|X)}{\partial X} \right]^2. \quad (\text{I.34})$$

On a ainsi montré que lorsque le nombre de mesures ϑ devenait très grand :

$$\ln p(\boldsymbol{\xi}|X) = -\vartheta F(X_{\text{ML}}), \quad (\text{I.35})$$

i.e. en enlevant le logarithme :

$$p(\boldsymbol{\xi}|X) = p(\boldsymbol{\xi}|X_{\text{ML}}) e^{-\vartheta F(X_{\text{ML}}) \frac{(X-X_{\text{ML}})^2}{2}}. \quad (\text{I.36})$$

Grâce au théorème de Bayes, on peut revenir à l'expression de $p(X|\boldsymbol{\xi})$ valable uniquement pour ϑ grand :

$$p(X|\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\Delta X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-X_{\text{ML}})^2}{2(\Delta X_{\text{est}})^2}}. \quad (\text{I.37})$$

qui est une gaussienne de valeur moyenne X_{ML} et d'écart-type ΔX tel que :

$$\Delta X = \frac{1}{\sqrt{\vartheta F(X_{\text{ML}})}}. \quad (\text{I.38})$$

Etant donnée la forme de la distribution de probabilités, la précision accessible avec cet estimateur est bien évaluée par l'écart-type de la gaussienne. Comme l'estimateur du maximum de vraisemblance semble être, par construction, un très bon estimateur, nous sommes tentés de dire que la précision maximale que l'on puisse obtenir par le processus de mesure choisi doit être proche de celle que l'on vient de calculer. En réalité, l'écart-type sur le paramètre donnée est même très exactement limité par l'écart-type (I.38) pour sa valeur inférieure. Nous allons le démontrer.

Le point de départ de la démonstration est l'expression très simple suivante [62] :

$$\overline{X_{\text{est}}} = \int d\boldsymbol{\xi} p(\boldsymbol{\xi}|X) X_{\text{est}} = \int d\xi_1 \cdots d\xi_{\vartheta} p(\xi_1|X) \cdots p(\xi_{\vartheta}|X) X_{\text{est}}. \quad (\text{I.39})$$

La valeur moyenne de l'estimateur dépend de X parce que les probabilités $p(\xi|X)$ en dépendent. On peut différentier l'expression (I.39) par rapport à X :

$$\frac{d\overline{X_{\text{est}}}}{dX} = \int d\xi_1 \cdots d\xi_{\vartheta} p(\xi_1|X) \cdots p(\xi_{\vartheta}|X) (X_{\text{est}} - \overline{X_{\text{est}}}) \left(\sum_{j=1}^{\vartheta} \frac{\partial \ln p(\xi_j|X)}{\partial X} \right). \quad (\text{I.40})$$

On reconnaît l'expression d'un produit scalaire entre les vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ définis comme :

$$\mathbf{A} = (X_{\text{est}} - \overline{X_{\text{est}}}, \dots, X_{\text{est}} - \overline{X_{\text{est}}}) \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \left(\frac{\partial \ln p(\xi_1|X)}{\partial X}, \dots, \frac{\partial \ln p(\xi_{\vartheta}|X)}{\partial X} \right), \quad (\text{I.41})$$

avec la mesure $p(\xi_1|X) \cdots p(\xi_{\vartheta}|X)$. On peut alors utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dont on redonne l'énoncé en notant $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire :

$$\|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2 \geq |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|^2 \quad (\text{I.42})$$

On a donc :

$$\overline{(X_{\text{est}} - \overline{X_{\text{est}}})^2} \int d\xi_1 \cdots d\xi_{\vartheta} p(\xi_1|X) \cdots p(\xi_{\vartheta}|X) \left(\sum_{j=1}^{\vartheta} \frac{\partial \ln p(\xi_j|X)}{\partial X} \right)^2 \geq \left(\frac{d\overline{X_{\text{est}}}}{dX} \right)^2. \quad (\text{I.43})$$

Or dans la somme du membre de gauche, on peut éliminer les termes croisés car :

$$\int d\xi_j p(\xi_j|X) \frac{\partial \ln p(\xi_j|X)}{\partial X} = \frac{d}{dX} \left[\int d\xi_j p(\xi_j|X) \right] = 0, \quad (\text{I.44})$$

ce qui permet de transformer la somme en :

$$\left(\sum_{j=1}^{\vartheta} \frac{\partial \ln p(\xi_j|X)}{\partial X} \right)^2 = \sum_{j=1}^{\vartheta} \left(\frac{\partial \ln p(\xi_j|X)}{\partial X} \right)^2. \quad (\text{I.45})$$

L'inégalité devient ainsi :

$$\overline{(X_{\text{est}} - \overline{X_{\text{est}}})^2} \sum_{j=1}^{\vartheta} \left[\int d\xi_1 \cdots d\xi_{\vartheta} p(\xi_1|X) \cdots p(\xi_{\vartheta}|X) \left(\frac{\partial \ln p(\xi_j|X)}{\partial X} \right)^2 \right] \geq \left(\frac{d\overline{X_{\text{est}}}}{dX} \right)^2. \quad (\text{I.46})$$

On peut remarquer que chaque terme j de la somme est formé d'un produit d'intégrales de la forme $\int d\xi_i p(\xi_i|X)$ (valant toutes 1) à l'exception du j^{e} facteur qui prend la forme de l'information de Fisher (I.34). Ceci étant valable pour tous les termes de la somme, celle-ci peut donc être remplacée par ϑ fois l'information de Fisher. De plus, comme l'estimateur est non biaisé, nous pouvons utiliser les expressions (I.25) et (I.27) en se plaçant en $X = X_{\text{vrai}}$, ce qui simplifie considérablement l'expression :

$$(\Delta X_{\text{est}})^2 \geq \frac{1}{\vartheta F(X_{\text{vrai}})}. \quad (\text{I.47})$$

On obtient aussi, de manière strictement équivalente, une limite inférieure sur l'écart-type de l'estimateur, appelée *limite de Cramér-Rao* [10, 11] :

$$\Delta X_{\text{est}} \geq \frac{1}{\sqrt{\vartheta F(X_{\text{vrai}})}}. \quad (\text{I.48})$$

La meilleure précision atteignable pour un processus de mesure donné et pour une seule répétition est donc atteinte lorsque l'écart-type sur la mesure du paramètre vaut l'inverse de la racine carrée de l'information de Fisher. Cette dernière mesure donc en quelque sorte le maximum d'information que l'on peut extraire sur la valeur réelle recherchée du paramètre X . De plus, on peut évidemment augmenter la précision en répétant la mesure (comme l'expression de la limite de Cramér-Rao le reflète avec le facteur $1/\sqrt{\vartheta}$) à condition de s'assurer de l'indépendance des répétitions. Comme nous l'avons vu, cette borne est atteignable asymptotiquement en choisissant l'estimateur par maximum de vraisemblance. Si l'estimateur est la valeur moyenne, toute loi de probabilité $p(\xi|X)$ gaussienne sature l'inégalité [66]. Pour l'expérience de métrologie de ce manuscrit, il est aisé de saturer l'inégalité en répétant la mesure typiquement un millier de fois, la loi de probabilité devenant gaussienne d'après le théorème central limite.

Remarque Si le paramètre ne peut prendre que des valeurs discrètes, l'expression de l'information Fisher devient :

$$F(X) = \sum_k P_k(X) \left(\frac{d \ln P_k(X)}{dX} \right)^2, \quad (\text{I.49})$$

où l'on a appelé $P_k(X)$ la probabilité d'obtenir le résultat expérimental k .

I.3 Information de Fisher quantique

Nous avons vu que l'information de Fisher dépend non seulement des propriétés du système sonde mais également du processus à l'origine de son évolution et de la mesure choisie à cause de la loi de probabilité $p(\xi|X)$ présente dans son expression (I.34). Un des buts de la métrologie étant de la maximiser, il faut donc déterminer quel est le meilleur protocole de mesure du système. Pour cette raison, il serait bon de savoir *a priori* quelle est la meilleure précision atteignable si l'on utilise le protocole de mesure *optimal*, et ce, même si on ne sait pas en quoi il consiste. Nous allons pour ce faire étendre la discussion classique que nous avons menée jusque là à la métrologie quantique en introduisant la notion d'*Information de Fisher quantique*.

I.3.1 Formulation usuelle de l'information de Fisher quantique

L'état initial de la sonde de la procédure d'estimation de X est de manière générale parfaitement défini par la matrice densité $\hat{\rho}$. Nous nous limiterons toutefois dans ce manuscrit à l'étude d'un état initial pur $|\psi_0\rangle$. Le processus physique dépendant de X va provoquer l'évolution du système sonde vers l'état $|\psi(X)\rangle$. Si la transformation est unitaire, comme ce sera le cas pour l'expérience qui nous intéresse, l'état final s'écrit :

$$|\psi(X)\rangle = \hat{U}(X) |\psi_0\rangle, \quad (\text{I.50})$$

où l'on a noté $\hat{U}(X)$ l'opérateur que l'on appellera opérateur évolution correspondant au processus par analogie avec le cas où $X = t$. On peut simplement mentionner que si l'évolution est non unitaire, la matrice densité de l'état final peut être obtenue à partir des opérateurs de Kraus [67]. Le choix de mesure de l'expérimentateur est par ailleurs modélisé par un ensemble complet d'opérateurs hermitiques semi-définis positifs $\{\hat{E}(\xi)\}$ appelé *Positive-Operator Valued Measure* (POVM), où ξ représente comme avant le continuum de résultats possibles d'une seule mesure [68]. Ce type d'opérateur permet de traiter également les mesures non projectives sur l'ensemble du système. Un POVM ne doit évidemment pas dépendre explicitement de X . Une propriété importante est que la somme de tous les opérateurs de l'ensemble de mesure doit être égale à l'unité. La probabilité d'obtenir le résultat ξ sachant que le paramètre prend la valeur X est donnée par :

$$p(\xi|X) = \langle \psi(X) | \hat{E}(\xi) | \psi(X) \rangle. \quad (\text{I.51})$$

A chaque résultat de mesure, nous estimons la valeur réelle du paramètre par l'estimateur X_{est} . Comme dans le cas classique de la section I.2.2, nous quantifions l'erreur faite sur la valeur du paramètre par l'écart-type de X_{est} autour de X_{vrai} :

$$\Delta X_{\text{est}} = \sqrt{\langle [X_{\text{est}} - X_{\text{vrai}}]^2 \rangle}, \quad (\text{I.52})$$

sauf que cette fois la moyenne est une moyenne quantique prise pour l'état $|\psi(X_{\text{vrai}})\rangle$. Pour ϑ répétitions de la mesure, une démonstration quasiment identique à la celle de la

section I.2.2 montre que l'écart-type “quantique” de X_{est} est aussi borné par la limite de Cramér-Rao :

$$\Delta X_{\text{est}} \geq \frac{1}{\sqrt{\vartheta F(X_{\text{vrai}}; \{\hat{E}(\xi)\})}}, \quad (\text{I.53})$$

où F représente toujours l'information de Fisher (I.34) pour laquelle on précise l'ensemble des opérateurs du POVM choisi. En effet, là encore, la borne inférieure de l'écart-type est liée au processus de mesure choisi puisque le choix des éléments du POVM intervient dans l'expression (I.51) de $p(\xi|X)$. Toutefois, comme nous n'avons pas précisé de forme spécifique pour ces éléments, nous n'avons pas fait d'hypothèse sur le processus de mesure et il est encore possible de l'optimiser pour avoir la limite inférieure ultime de l'écart-type. Nous définissons donc de manière générale l'*information de Fisher quantique* qui est l'information de Fisher du processus de mesure *optimal* (à état initial fixé) recherché parmi toutes les mesures quantiques possibles :

$$F_Q(X) = \max_{\{\hat{E}(\xi)\}} F(X; \{\hat{E}(\xi)\}). \quad (\text{I.54})$$

La limite de Cramér-Rao *quantique* s'écrit dans ce cas :

$$\Delta X_{\text{est}} \geq \frac{1}{\sqrt{\vartheta F_Q(X_{\text{vrai}})}}. \quad (\text{I.55})$$

On peut donc connaître *a priori* la meilleure précision atteignable maximisée sur tous les processus de mesure possibles à partir d'un état donné. Le problème est que l'expression (I.54) est très peu précise. Elle nous dit juste qu'il faut trouver le meilleur estimateur et optimiser la mesure, ce qui est – somme toute – instinctif, sans nous donner la direction à prendre pour arriver à la calculer. Toutefois, dans le cas d'un état pur initial, il est possible de formuler une expression exacte *explicite* de F_Q , à condition que l'évolution de l'état avant la mesure soit unitaire. Nous allons la dériver dans ce qui suit.

L'idée est de procéder en deux temps [62]. Tout d'abord, nous allons chercher la borne supérieure de l'information de Fisher puis nous allons montrer que cette borne peut être atteinte par une mesure réelle, nous pourrions ainsi l'identifier à l'information de Fisher quantique. Comme opérateur intermédiaire, nous aurons besoin de l'expression du générateur de la transformation faisant passer le système sonde de l'état initial $|\psi_0\rangle$ à l'état final $|\psi(X)\rangle$. Pour l'obtenir, il faut considérer l'expression de la dérivée de l'opérateur évolution $\hat{U}(X)$ par rapport à la valeur du paramètre X que l'on calcule facilement à l'aide de (I.50) :

$$i \frac{d|\psi(X)\rangle}{dX} = -\hat{h}(X)|\psi(X)\rangle. \quad (\text{I.56})$$

où l'on a posé :

$$\hat{h}(X) = -i \frac{d\hat{U}(X)}{dX} \hat{U}^\dagger(X). \quad (\text{I.57})$$

L'équation (I.56) prend une forme analogue à une équation de Schrödinger de Hamiltonien $-\hat{h}(X)$. On en déduit que l'opérateur $\hat{h}(X)$ est le générateur de l'évolution de l'état. Il dépend *a priori* du paramètre X .

L'expression de l'information de Fisher $F(X)$ fait intervenir la dérivée de la probabilité $p(\xi|X)$ par rapport à X . Nous allons lui chercher une borne supérieure. D'après l'expression (I.51), cette dérivée s'écrit en fonction de l'ensemble des opérateurs $\{\hat{E}(\xi)\}$ d'une mesure faite sur la sonde :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\xi|X)}{\partial X} &= \langle \psi(X) | \hat{E}(\xi) \left[\frac{d|\psi(X)\rangle}{dX} \right] + \left[\frac{d\langle \psi(X) |}{dX} \right] \hat{E}(\xi) | \psi(X) \rangle \\ &= i [z - z^*] \\ &= -2 \operatorname{Im} z, \end{aligned} \quad (\text{I.58})$$

où l'on a posé $z = \langle \psi(X) | \hat{E}(\xi) \hat{h}(X) | \psi(X) \rangle$ en reconnaissant le générateur $\hat{h}(X)$. L'expression (I.58) est toujours valable si on soustrait à chaque élément du POVM une fonction quelconque *réelle* $g(X)$, aussi modifie-t-on l'expression de z :

$$z \leftarrow \langle \psi(X) | \hat{E}(\xi) (\hat{h}(X) - g(X)) | \psi(X) \rangle. \quad (\text{I.59})$$

Ne perdons pas de vue que nous sommes intéressé par F et donc nous préférons regarder le carré de cette dérivée :

$$\left(\frac{\partial p(\xi|X)}{\partial X} \right)^2 = 4 \operatorname{Im}^2 z \leq 4 |z|^2. \quad (\text{I.60})$$

On pose $A = \hat{E}^{1/2}(\xi)$ et $B = \hat{E}^{1/2}(\xi) (\hat{h}(X) - g(X))$ et, en identifiant dans (I.60) $|z|^2 = |\langle AB \rangle|^2$, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz "quantique" :

$$|\langle AB \rangle|^2 \leq \langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle, \quad (\text{I.61})$$

ainsi que,

$$\langle A^2 \rangle = \langle \psi(X) | \hat{E}(\xi) | \psi(X) \rangle = p(\xi|X), \quad (\text{I.62})$$

pour obtenir l'inégalité :

$$\left(\frac{\partial p(\xi|X)}{\partial X} \right)^2 \leq 4 p(\xi|X) \langle \psi(X) | \hat{E}(\xi) (\hat{h}(X) - g(X))^2 | \psi(X) \rangle. \quad (\text{I.63})$$

En divisant par $p(\xi|X)$ et en intégrant par rapport à ξ , on montre que l'information de Fisher est soumise à l'inégalité suivante :

$$F(X) \leq 4 \int d\xi \langle \psi(X) | \hat{E}(\xi) (\hat{h}(X) - g(X))^2 | \psi(X) \rangle. \quad (\text{I.64})$$

Il n'y a que les éléments du POVM qui dépendent de ξ . Or $\int d\xi \hat{E}(\xi) = \mathbb{1}$, donc finalement :

$$F(X) \leq 4 \langle \psi(X) | \left(\hat{h}(X) - g(X) \right)^2 | \psi(X) \rangle. \quad (\text{I.65})$$

Cette expression n'est pas pleinement satisfaisante car elle dépend de l'état final $|\psi(X)\rangle$. Or l'expérimentateur connaît plutôt l'état initial qu'il prépare $|\psi_0\rangle$. On définit alors l'opérateur $\hat{H}(X)$:

$$\hat{H}(X) = \hat{U}^\dagger(X) \hat{h}(X) \hat{U}(X) = i \frac{d\hat{U}^\dagger(X)}{dX} \hat{U}(X), \quad (\text{I.66})$$

qui nous permet de ré-écrire l'inégalité (I.65) en fonction de l'état initial :

$$F(X) \leq 4 \langle \psi_0 | \left(\hat{H}(X) - g(X) \right)^2 | \psi_0 \rangle. \quad (\text{I.67})$$

Très souvent, le générateur $\hat{h}$ ne dépend pas explicitement de X ce qui entraîne que l'opérateur $\hat{H}$ lui est égal. C'est le cas par exemple d'un processus de déphasage φ dans un interféromètre, généré par l'opérateur nombre $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ou bien encore du déplacement spatial d'un système, généré par l'opérateur $\hat{P}/\hbar$ où $\hat{P}$ est l'opérateur moment du système. Ce sera également le cas pour l'expérience qui nous intéresse dans ce manuscrit (voir section II.8).

A ce stade, il nous reste la possibilité de diminuer la borne en choisissant bien la fonction $g(X)$. On notera la moyenne $\langle \psi_0 | \cdot | \psi_0 \rangle$ sous la forme compacte $\langle \cdot \rangle_0$. L'expression à minimiser s'écrit :

$$f = \left\langle \left(\hat{H}(X) - g(X) \right)^2 \right\rangle_0 = \left\langle \hat{H}^2(X) \right\rangle_0 - 2g(X) \left\langle \hat{H} \right\rangle_0 + g^2(X). \quad (\text{I.68})$$

La dérivée fonctionnelle de f par rapport à la fonction g se formule de la manière suivante :

$$\frac{\delta f}{\delta g} = 2 \left(g(x) - \left\langle \hat{H}(X) \right\rangle_0 \right). \quad (\text{I.69})$$

La valeur minimale de la borne est ainsi atteinte pour $g(X) = \left\langle \hat{H}(X) \right\rangle_0$. La borne supérieure de l'information de Fisher est donc donnée par l'inégalité :

$$F(X) \leq 4 \left\langle \left(\Delta \hat{H}(X) \right)^2 \right\rangle_0, \quad (\text{I.70})$$

avec

$$\left\langle \left(\Delta \hat{H}(X) \right)^2 \right\rangle_0 = \langle \psi_0 | \left(\hat{H}(X) - \left\langle \hat{H}(X) \right\rangle_0 \right)^2 | \psi_0 \rangle. \quad (\text{I.71})$$

Pour pouvoir identifier la borne trouvée avec l'information de Fisher quantique, il faut s'assurer qu'il existe une mesure permettant de l'atteindre. A la sortie du processus faisant

intervenir X , juste avant la mesure, le système est dans l'état $|\psi(X_{\text{vrai}})\rangle$. On propose par exemple une mesure dont le résultat ne peut prendre que 2 valeurs : 1 si l'état final du processus est $|\psi(X)\rangle$ et 0 sinon. Les opérateurs de cette mesure peuvent être :

$$\begin{aligned}\hat{E}(1) &= |\psi(X)\rangle\langle\psi(X)|, \\ \hat{E}(0) &= 1 - |\psi(X)\rangle\langle\psi(X)|.\end{aligned}\tag{I.72}$$

L'information de Fisher associée à cette mesure avec $|\psi_0\rangle$ comme état initial s'écrit :

$$F(X) = \frac{1}{p_0(X)} \left(\frac{dp_0(X)}{dX} \right)^2 + \frac{1}{p_1(X)} \left(\frac{dp_1(X)}{dX} \right)^2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_1(X) = |\langle\psi(X)|\psi(X_{\text{vrai}})\rangle|^2, \\ p_0(X) = 1 - p_1(X), \end{cases}\tag{I.73}$$

soit

$$F(X) = \frac{1}{p_1(X)(1 - p_1(X))} \left(\frac{dp_1(X)}{dX} \right)^2.\tag{I.74}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée pour $X = X_{\text{vrai}}$ mais on peut toutefois utiliser la règle de l'Hôpital basée sur la formule de Taylor pour conclure. On pose $f(X) = (dp_1(X))/dX$ et $y(X) = p_1(X)(1 - p_1(X))$. Les dérivées premières de ces deux fonctions s'écrivent :

$$\begin{aligned}f'(X) &= \frac{dp_1(X)}{dX} (1 - 2p_1(X)), \\ y'(X) &= 2 \frac{dp_1(X)}{dX} \frac{d^2p_1(X)}{dX^2}.\end{aligned}\tag{I.75}$$

Donc d'après la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{X \rightarrow X_{\text{vrai}}} \frac{f(X)}{y(X)} = \lim_{X \rightarrow X_{\text{vrai}}} \frac{f'(X)}{y'(X)} = -2 \left. \frac{d^2p_1(X)}{dX^2} \right|_{X \rightarrow X_{\text{vrai}}}.\tag{I.76}$$

Finalement cette mesure permet bien d'atteindre la borne supérieure de l'information de Fisher puisque :

$$\lim_{X \rightarrow X_{\text{vrai}}} F(X) = 4 \left\langle \left(\Delta \hat{H}(X_{\text{vrai}}) \right)^2 \right\rangle_0.\tag{I.77}$$

On peut comprendre simplement pourquoi les éléments du POVM choisis marchent concrètement : pour $X = X_{\text{vrai}}$, $\hat{E}(1)$ donnera toujours le résultat 1 et $\hat{E}(0)$ donnera toujours 0, sans fluctuations puisque l'état de sortie du processus sera toujours $|\psi(X_{\text{vrai}})\rangle$. Plus on répète la mesure, plus on est sûr que la valeur du paramètre est bien X_{vrai} . En faisant un grand nombre de mesures, on obtient donc le maximum d'information possible sur la valeur réelle du paramètre.

On en déduit que l'information de Fisher quantique dans le cas d'un état pur et d'un processus unitaire dépendant du paramètre de valeur X prend la forme :

$$F_Q(X) = 4 \left\langle \left(\Delta \hat{H}(X) \right)^2 \right\rangle_0.\tag{I.78}$$

Remarquons au passage que si $\hat{h}$ et donc $\hat{H}$ ne dépendent pas de X , la valeur moyenne de la variance de $\hat{H}$ ne dépend pas de X non plus.

A titre d'exemple, nous pouvons calculer l'information de Fisher d'un état cohérent $|\psi_0\rangle \equiv |\alpha\rangle$ dont le déplacement est généré par $\hat{H} = -i(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$. Le choix de ce générateur peut sembler incongru mais il s'agit en fait de celui qui intervient dans notre expérience comme nous le verrons plus tard. On commence par calculer la valeur moyenne de $\hat{H}$ dans l'état initial :

$$\begin{aligned}\langle \hat{H} \rangle_0 &= \langle \alpha | -i(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) | \alpha \rangle \\ &= -i(\alpha^* - \alpha) \\ &= -2 \operatorname{Im} \alpha.\end{aligned}\tag{I.79}$$

On en déduit la variance de $\hat{H}$ et donc F_Q :

$$\begin{aligned}F_Q &= 4 \langle \alpha | (-i(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) + 2 \operatorname{Im} \alpha)^2 | \alpha \rangle \\ &= 4 \langle \alpha | -\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2 + \mathbb{1} + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle - 4 \operatorname{Im}^2 \alpha \\ &= 4 (-(\alpha - \alpha^*)^2 + 1 - 4 \operatorname{Im}^2 \alpha) \\ &= 4.\end{aligned}\tag{I.80}$$

L'information de Fisher de l'état cohérent subissant un déplacement est donc constante et vaut 4.

I.3.2 Autre formulation possible

Par ailleurs, l'expression (I.78) peut être transformée en une autre forme que nous utiliserons dans la section suivante :

$$F_Q(X) = 4 \left\langle \hat{H}^2(X) \right\rangle_0 - 4 \left\langle \hat{H}(X) \right\rangle_0^2.\tag{I.81}$$

En utilisant les équations (I.66) et (I.56), on trouve que :

$$\left\langle \hat{H}^2(X) \right\rangle_0 = \left\langle \hat{h}^2(X) \right\rangle_0 = \left(\frac{d\langle \psi |}{dX} \right) \left(\frac{d|\psi\rangle}{dX} \right)\tag{I.82}$$

$$\text{et } \left\langle \hat{H}(X) \right\rangle_0^2 = \left[i \frac{d\langle \psi |}{dX} |\psi\rangle \right]^2 = \left| \frac{d\langle \psi |}{dX} |\psi\rangle \right|^2.\tag{I.83}$$

Pour établir la dernière égalité dans (I.83), on a utilisé la condition de normalisation qui implique que :

$$0 = \frac{d}{dX} \langle \psi | \psi \rangle = 2 \operatorname{Re} \left(\langle \psi | \frac{d|\psi\rangle}{dX} \right).\tag{I.84}$$

Une autre expression de l'information de Fisher quantique est donc :

$$F_Q(X) = 4 \left[\left(\frac{d\langle \psi |}{dX} \right) \left(\frac{d|\psi\rangle}{dX} \right) - \left| \frac{d\langle \psi |}{dX} |\psi\rangle \right|^2 \right].\tag{I.85}$$

I.3.3 Limite de Cramér-Rao et relation d'incertitude

Revenons enfin à la limite de Cramér-Rao quantique. Avec l'expression explicite de l'information de Fisher (I.78), elle devient :

$$\Delta X_{\text{est}} \geq \frac{1}{2\sqrt{\vartheta \left\langle \left(\Delta \hat{H}(X_{\text{vrai}}) \right)^2 \right\rangle_0}}. \quad (\text{I.86})$$

Nous obtenons ainsi une relation qui ressemble fortement à une inégalité de Heisenberg, à ceci près que X correspond ici à un paramètre et non à une observable et que cette inégalité reste valable pour de multiples répétitions de la mesure. Ce type de relation ressemble à celle dérivée par Mandelstam et Tamm reliant l'énergie (par le Hamiltonien) et le paramètre temps [7] dans un cadre non-relativiste. Elle fait en fait partie d'un groupe plus large de relations appelées *relations d'incertitudes généralisées*² [69].

I.4 Distinguer deux états : lien entre considérations géométriques et statistiques

L'association entraperçue à la section I.1.1 entre précision sur la mesure et distinguabilité des états est fondamentale car elle nous permet de passer indifféremment d'une réflexion statistique à des raisonnements géométriques dans l'espace des états avec des concepts de mécanique quantique [70], ou bien, indirectement, dans l'espace des phases. Nous allons développer cet aspect dans cette section.

L'accès de l'expérimentateur à la valeur du paramètre se fait indirectement par la mesure de l'état final du système. Plus la mesure sera sensible à une infime modification de l'état final, meilleure sera sa précision sur la valeur du paramètre. Considérons pour l'instant une mesure donnée [71]. Les états propres de l'observable associée sont supposés non dégénérés pour simplifier. On les note $|\phi_1\rangle, \dots, |\phi_n\rangle$ (n pouvant tendre vers l'infini). Ils donnent donc chacun un résultat de mesure différent. On cherche à distinguer deux états $|\psi^{(1)}\rangle$ et $|\psi^{(2)}\rangle$ en réitérant ϑ fois la mesure. Lorsque l'on mesure l'état $|\psi^{(j)}\rangle$, il est *effectivement* projeté sur le k^{e} état propre possible de l'observable avec une fréquence $f_i^{(j)}$ au cours des ϑ mesures (la probabilité d'obtenir ce résultat de mesure est $p_i^{(j)} = |\langle \phi_k | \psi^{(j)} \rangle|^2$). La mesure des états $|\psi^{(j)}\rangle$ est donc associée à des distributions de probabilités $p^{(j)}(f_1^{(j)}, \dots, f_n^{(j)})$ différentes et donc distinguer ces deux états revient à être capable de distinguer ces deux distributions dans l'espace des probabilités. Lorsque le nombre ϑ de

2. Dans le cas où l'état n'est pas pur mais où la transformation est bien unitaire et lorsque le générateur ne dépend pas de X , on obtient également une relation d'incertitude généralisée. Le lecteur intéressé pourra en trouver les caractéristiques dans la référence [3].

mesures est grand, chaque distribution de probabilités prend la forme d'une gaussienne :

$$p^{(j)}(f_1, \dots, f_n) \propto \exp \left(\frac{\vartheta}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(f_k^{(j)} - p_k^{(j)})^2}{p_k} \right). \quad (\text{I.87})$$

Il existe donc une certaine région d' "incertitude" sur la valeur réelle de la probabilité associée à chaque résultat de mesure qui est due aux fluctuations statistiques. Comme les distributions sont ici gaussiennes, la taille de cette région peut être définie comme l'écart-type de chaque distribution. On aurait envie de dire que deux points proches de l'espace des probabilités sont distinguables si leurs deux régions d' "incertitude" ne se recouvrent pas, *i.e.* si la distance dans l'espace des probabilités qui les sépare est plus grande que la taille de la région d' "incertitude". La question qui se pose alors naturellement est : *quelle métrique choisir pour cette distance ?* Etant donné la forme des distributions, par développement limité et en posant $\delta p_k = p_k^{(2)} - p_k^{(1)}$, on constate que plus la somme des $(\delta p_k)^2 / p_k^{(1)}$ est petite, plus la distribution $p^{(2)}$ est proche de $p^{(1)}$. Nous définissons donc naturellement la métrique de la distance statistique dans l'espace des probabilités (EP) comme étant :

$$ds_{EP}^2 = \sum_k (\delta p_k)^2 / p_k. \quad (\text{I.88})$$

où les p_k sont les probabilités associées à un point de l'espace des probabilités. Pour obtenir la distance entre deux points, il suffit d'intégrer cette métrique sur le chemin le plus court possible et on multiplie le tout par $\sqrt{\vartheta}$ pour compenser le fait que l'écart-type sur les probabilités diminue en $\sqrt{\vartheta}$ avec l'augmentation du nombre de mesures. En posant $x_k = \sqrt{p_k}$, il devient clair que la condition $\sum p_k = 1$ impose $\sum x_k^2 = 1$ *i.e.* le chemin reliant les deux points doit forcément se trouver sur une sphère de rayon unité dans l'espace des x . La distance est donc calculée à partir du chemin suivant la géodésique (*i.e.* le grand cercle) passant par ces deux points : elle est égale à l'angle entre les vecteurs $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ de coordonnées $\{x_k^{(j)} = \sqrt{p_k^{(j)}}\}$:

$$d(p^{(1)}, p^{(2)}) = \arccos \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{p_k^{(1)}} \sqrt{p_k^{(2)}} \right). \quad (\text{I.89})$$

Or rappelons que les $p_k^{(j)} = |\langle \phi_k | \psi^{(j)} \rangle|^2$, on a donc dans l'espace des états :

$$d(|\psi^{(1)}\rangle, |\psi^{(2)}\rangle) = \arccos \left(\sum_{k=1}^n |\langle \phi_k | \psi^{(1)} \rangle| |\langle \phi_k | \psi^{(2)} \rangle| \right). \quad (\text{I.90})$$

La distance statistique *absolue* est définie comme la distance statistique séparant les états $|\psi^{(1)}\rangle$ et $|\psi^{(2)}\rangle$ lorsque la mesure est faite avec l'appareil le plus discriminant possible entre les deux états. Ce sera le cas si l'un des états propres de la mesure $|\phi_i\rangle$ correspond directement à $|\psi^{(1)}\rangle$ ou $|\psi^{(2)}\rangle$. Dans ce cas, seul le i^e terme de la somme de l'équation (I.90) n'est pas nul et la distance absolue s'écrit alors :

$$d(|\psi^{(1)}\rangle, |\psi^{(2)}\rangle) = \arccos (\langle \psi^{(1)} | \psi^{(2)} \rangle). \quad (\text{I.91})$$

Sur la sphère de Bloch, cette distance correspond à la portion du grand cercle reliant les deux têtes des vecteurs des états (supposés normés), c'est donc la distance la plus courte entre les deux états. Elle est en valeur égale à l'angle (puisque la sphère est de rayon unité) entre les deux vecteurs. Or dans l'espace des états, la métrique habituellement utilisée pour mesurer la distance entre deux états est une métrique de Riemann $d\theta^2$ appelée *métrique de Fubini-Study* [72]. Celle-ci est formulée de telle sorte qu'elle ne distingue pas les vecteurs identiques à une phase globale près comme on le souhaite pour les états en mécanique quantique. Pour cette raison, elle ne correspond pas directement au produit scalaire de la variation infinitésimale $|d\psi\rangle$ due au paramètre X entre deux états voisins $|\psi(X)\rangle$ et $|\psi(X + dX)\rangle$. Elle est donnée par l'angle infinitésimal entre les deux états voisins (supposés normés) comme on se le représente aisément sur la sphère de Bloch [73] :

$$d\theta^2 = \arccos^2(\langle\psi(X)|\psi(X + dX)\rangle). \quad (\text{I.92})$$

Il est donc très intéressant de constater que la métrique statistique partant de l'analyse des fluctuations au sein d'une série *finie* de mesures redonne la métrique de Fubini-Study dans l'espace de Hilbert qui n'avait *a priori* rien à voir. Ce résultat majeur permet ainsi de passer de l'espace plat des probabilités à une portion de sphère unité dans l'espace réel des états. On voit alors bien pourquoi la distance statistique nous fournit un excellent outil de distinguabilité des états : plus cette distance statistique absolue est grande, plus les états sont séparés dans l'espace des états.

Il est instructif de développer l'expression de $d\theta^2$ à l'ordre 2 en dX . Pour alléger les notations, nous poserons $|\psi\rangle = |\psi(X)\rangle$. L'angle infinitésimal s'écrit :

$$\begin{aligned} d\theta^2 &= 1 - |\langle\psi(X)|\psi(X + dX)\rangle|^2 \\ &= 1 - \left| 1 + \langle\psi|\frac{d|\psi\rangle}{dX}dX + \frac{1}{2}\langle\psi|\frac{d^2|\psi\rangle}{dX^2}dX^2 \right|^2 \\ &= 1 - \left[1 + AdX + \frac{1}{2}BdX^2 \right]^2 - \left[CdX + \frac{1}{2}DdX^2 \right]^2, \end{aligned} \quad (\text{I.93})$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} A = \text{Re} \left(\langle\psi|\frac{d|\psi\rangle}{dX} \right), & C = \text{Im} \left(\langle\psi|\frac{d|\psi\rangle}{dX} \right), \\ B = \text{Re} \left(\langle\psi|\frac{d^2|\psi\rangle}{dX^2} \right), & D = \text{Im} \left(\langle\psi|\frac{d^2|\psi\rangle}{dX^2} \right). \end{cases} \quad (\text{I.94})$$

La condition de normalisation (I.84) annule le terme A et permet d'écrire que $C = \left| \langle\psi|\frac{d|\psi\rangle}{dX} \right|$. Dans le premier crochet, il ne reste que le 1 et le terme $BdX^2/2$. Elle permet aussi de formuler autrement le nombre B :

$$0 = \frac{d^2}{dX^2} \langle\psi|\psi\rangle = 2 \text{Re} \left(\langle\psi|\frac{d^2|\psi\rangle}{dX^2} \right) + 2 \left(\frac{d\langle\psi|}{dX} \right) \left(\frac{d|\psi\rangle}{dX} \right). \quad (\text{I.95})$$

Avec ces observations, l'expression (I.97) se simplifie en :

$$d\theta^2 = 1 - \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\langle\psi|}{dX} \right) \left(\frac{d|\psi\rangle}{dX} \right) dX^2 \right]^2 - \left[\left| \langle\psi|\frac{d|\psi\rangle}{dX} \right| dX \right]^2, \quad (\text{I.96})$$

où on a supprimé le terme en D car il ne donnait que des termes d'ordre supérieur à 2 dans le calcul (puisque C est non nul). L'expression finale de ce développement est donc :

$$d\theta^2 = dX^2 \left[\left(\frac{d\langle\psi|}{dX} \right) \left(\frac{d|\psi\rangle}{dX} \right) - \left| \langle\psi| \frac{d|\psi\rangle}{dX} \right|^2 \right], \quad (\text{I.97})$$

où l'on reconnaît l'expression (I.85) de l'information de Fisher quantique dérivée dans la section (I.3.2), ce qui nous permet d'écrire que :

$$d\theta^2 = \frac{1}{4} F_Q(X) dX^2. \quad (\text{I.98})$$

La métrique de Fubini-Study est donc directement proportionnelle à l'information de Fisher quantique. On retrouve ici géométriquement que plus l'information de Fisher quantique est grande et plus les états $|\psi(X)\rangle$ et $|\psi(X + dX)\rangle$ sont distinguables. Finalement, l'outil principal de l'estimation de la précision des mesures est intimement lié aux raisonnements que l'on peut faire dans l'espace des états.

I.5 Ressources et limites

I.5.1 Présentation générale

Lorsqu'on aborde l'épineuse question des limitations en métrologie quantique, la plus fondamentale se résume souvent à : *quelle est la meilleure précision atteignable dans l'absolu ?* Il s'agit toutefois d'une question qui mérite d'être reformulée parce que l'“absolu” en sciences expérimentales n'existe en fait que sous contraintes. Il dépend de ce à quoi l'expérimentateur a accès, indépendamment de la manière dont il organisera le processus de mesure. L'ensemble de ces possibilités de l'expérimentateur est regroupé sous le nom générique de *ressources*. Pour pouvoir comparer ce qui est comparable, la précision maximale atteignable sera toujours donnée à nombre et type de ressources fixés. Par exemple, en optique quantique, un type de ressource est le photon individuel et la précision que l'on peut espérer obtenir dépendra bien sûr du nombre de photons dont dispose l'expérimentateur, étant entendu qu'une précision infinie pourra être atteinte si le nombre de ces ressources est infini, ce qui n'est évidemment jamais le cas en pratique. Ces ressources sont en quelque sorte le facteur limitant de la précision. Elles définissent un cadre dans lequel l'expérimentateur pourra piocher les états initiaux utilisables, les autres états lui sont donc hors d'accès.

Nous avons représenté schématiquement la situation sur la figure I.5. La zone R délimite dans l'espace des états les états initiaux accessibles à l'expérimentateur, étant donné ses ressources. Chacun d'entre eux, représenté par un point rouge, est accompagné de son information de Fisher quantique F_Q qui quantifie, comme nous l'avons souligné, la précision maximale atteignable à partir de cet état. Dans cet ensemble d'état initiaux, celui qui a la plus grande information de Fisher quantique peut nous permettre en théorie d'atteindre la

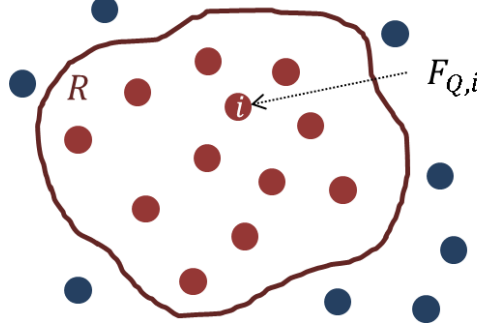


FIGURE I.5 – Espace des états

Les points représentent les états initiaux dans l'espace des états (on les prend discrets pour faciliter la représentation). La zone R délimite la région des états préparables par l'expérimentateur. A chacun de ces états i , on peut associer une valeur de l'information de Fisher quantique $F_{Q,i}$.

meilleure précision dans l'*absolu* pour l'expérimentateur à ressources fixées. Il marque une barrière physique dans la précision qui est donc infranchissable. On appelle cette limite la *limite de Heisenberg* (HL) :

$$\text{HL} = \max(\{F_{Q,i}\}, i \in R). \quad (\text{I.99})$$

Pour l'atteindre, il faut avoir la plus grande variance $\langle \Delta \hat{H} \rangle_0$. En pratique, cela revient à prendre l'état formé de la superposition équilibrée des deux états propres de $\hat{H}$, $|\lambda_M\rangle$ et $|\lambda_m\rangle$ correspondant respectivement aux valeurs propres maximale (λ_M) et minimale (λ_m) [74] :

$$|\Psi\rangle = \frac{|\lambda_M\rangle + |\lambda_m\rangle}{2}. \quad (\text{I.100})$$

Dans ce cas, la variance devient :

$$\langle \Delta \hat{H} \rangle_{|\Psi\rangle} = \frac{\lambda_M - \lambda_m}{2}. \quad (\text{I.101})$$

On peut également raffiner notre appréhension de la Limite Quantique Standard dans cette représentation : lorsqu'on ne dispose pas d'états initiaux aux caractéristiques intrinsèquement quantiques telles que des états comprimés ou intriqués, l'état initial ayant la plus grande information de Fisher quantique permet d'obtenir la meilleure précision "classique". Cette précision marque la Limite Quantique Standard.

I.5.2 Dans notre expérience

Comme présentés dans l'introduction générale, les états initiaux de la mesure sont des superpositions de composantes cohérentes de champ préparées par intrication avec un atome à deux niveaux. Pour le système champ, on peut compter dans les ressources le

nombre de photons (déterminant l'énergie du système). Nous sommes aussi limités par la manière dont nous pouvons agir sur le champ : nous sommes capables de préparer n'importe quel état cohérent mais par contre, pour préparer un autre état à partir de celui-ci, il nous faut utiliser les interactions avec un atome qui sont limitées dans le temps. En pratique, nous pouvons, à partir d'un état cohérent, construire un état de champ dont la structure dans l'espace des phases tient dans un cercle de diamètre $d \approx 2,8$ centré sur l'état cohérent qui est donc en quelque sorte notre “zone de ressources”. En changeant le nombre moyen de photons injectés pour l'état cohérent de départ, nous pouvons *a priori* déplacer le centre de ce cercle dans l'espace des phases.

Dans le cas de notre expérience de métrologie, nous voulons distinguer deux champs différant d'une amplitude β . Nous pouvons prendre β réel sans perte de généralité. L'opérateur unitaire qui permet de passer d'un champ d'amplitude α à un champ d'amplitude $\alpha + \beta$ est l'opérateur déplacement $\hat{D}(\beta)$:

$$\hat{D}(\beta)|\alpha\rangle = e^{(\beta\alpha^* - \beta^*\alpha)/2}|\alpha + \beta\rangle \quad (\text{I.102})$$

Pour reprendre les notations de la section I.5, le paramètre X est donc β et l'opérateur évolution associé est ainsi :

$$\hat{U}(X) \equiv \hat{D}(\beta) = e^{\beta(\hat{a}^\dagger - \hat{a})}, \quad (\text{I.103})$$

car β est réel. Comme $\hat{D}$ et $(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$ commutent, le générateur de cette opération unitaire devient alors :

$$\hat{H} = -i(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (\text{I.104})$$

On retrouve l'idée naturelle que pour avoir une bonne précision dans un déplacement δX , il vaut mieux utiliser un état avec la plus grande variance en “impulsion” ($\hat{H} = -\sqrt{2}\hat{P}$).

Ici, faisons un petit récapitulatif des différentes limites qui nous intéressent. Classiquement, l'état initial ayant la meilleure information de Fisher quantique est l'état cohérent. Il définit la SQL pour la mesure de l'amplitude d'un champ électromagnétique :

$$F_{\text{SQL}} = 4. \quad (\text{I.105})$$

Dans notre “zone de ressources”, il est évident que les états comprimés en amplitude peuvent par exemple faire mieux que l'état cohérent et permettent donc de battre la SQL. Il y a par ailleurs d'autres façons d'introduire des caractéristiques quantiques dans un état. Nous savons cependant que pour avoir la meilleure précision, l'état optimal est l'état initial à la plus grande information de Fisher quantique. Etant donnée la forme de $\hat{H}$ dans notre expérience, l'état maximisant la variance est la superposition de deux états cohérents séparés dans l'espace de phase de la plus grande distance D possible dans la “zone de ressource” *i.e.* de part et d'autre du diamètre du cercle de diamètre d dans l'espace des phases. On peut noter que la position du cercle dans l'espace des phases ne changera rien à la forme de

l'état optimal. Autrement dit, la limite de Heisenberg dépend explicitement uniquement de d et non du nombre de photons moyens (donnant la position du centre du cercle), qui n'est donc pas chez nous la ressource limitante.

Si l'on place ce cercle au centre de l'espace des phases, cette fois le nombre de ressources en énergie disponible détermine le diamètre de la zone de ressource. On retrouve alors que la ressource limitante est le nombre de photons comme dans la plupart des autres expériences. Nous verrons toutefois dans la section II.6.6 que le diamètre d de notre zone dépend légèrement du nombre de photons moyens de l'état cohérent de départ et nous justifierons alors le positionnement du centre de notre "zone de ressources" en $|\alpha| = \sqrt{12,7}$.

Conclusions

À partir d'un exemple, nous avons fait apparaître les principaux tenants et aboutissants des problèmes d'estimation d'un paramètre par la mesure. Une mesure effectuée sans utiliser aucune des caractéristiques intrinsèques à la mécanique quantique permet d'atteindre un certain niveau de précision au mieux égal à celui de la SQL. L'emploi d'états comprimés ou intriqués peut permettre d'améliorer la précision sans toutefois pouvoir dépasser la limite ultime qu'est la limite d'Heisenberg, à type et nombre de ressources fixées. Celle-ci est fixée par une relation d'incertitude généralisée reliant la précision de l'estimation du paramètre et la variance de l'opérateur qui génère l'évolution du système (évolution dépendant bien sûr du paramètre). En ce qui concerne la mesure qui nous intéresse dans ce manuscrit, à savoir la mesure de l'amplitude d'un petit champ électromagnétique, la "zone de ressources" dans laquelle nous pouvons choisir l'état initial de la mesure est un cercle de l'espace des phases de diamètre d contraint par notre dispositif expérimental. L'état cohérent au centre de ce cercle définit la SQL de notre mesure. L'état optimal marquant la limite de Heisenberg est une superposition d'états cohérents diamétralement opposés sur le cercle dans l'espace des phases. Pour montrer comment nous pouvons nous rapprocher de la limite de Heisenberg par notre mesure, nous choisirons donc toujours des états initiaux sous forme de superposition d'états cohérents.

Le cadre étant posé, nous pouvons décrire théoriquement le processus de mesure que nous avons mis en oeuvre pour l'expérience de métrologie. Nous présenterons le système quantique que nous manipulerons et la séquence expérimentale permettant à la fois la préparation de l'état initial, l'interaction de cet état avec le champ à mesurer et la mesure proprement dite. Nous utiliserons ensuite les outils d'information de Fisher et d'information de Fisher quantique pour essayer de quantifier la sensibilité de notre mesure par rapport à la mesure optimale.

Chapitre II

Principe de l'expérience - Théorie

Sommaire

II.1	Système atome - champ piégé dans une cavité	38
II.2	Oscillateur harmonique de champ	38
II.2.1	Hamiltonien de champ	38
II.2.2	Génération d'un champ cohérent	39
II.3	Le pseudo-spin atomique	40
II.4	Interaction entre atome et mode du champ	41
II.4.1	L'atome habillé	42
II.4.2	Interaction dispersive	43
II.4.3	Interaction résonnante	45
II.5	Opération de renversement du temps	59
II.6	Séquence expérimentale	61
II.6.1	Première période d'interaction résonnante	61
II.6.2	Renversement du temps	63
II.6.3	Injection de β	63
II.6.4	Deuxième interaction résonnante	65
II.6.5	Détection de l'état atomique au temps de résurgence exact . . .	68
II.6.6	Détection de l'état atomique autour du temps de résurgence . .	72
II.7	Information de Fisher	76
II.8	Information de Fisher quantique	77
	Conclusion	80

En métrologie quantique, les problèmes d'estimation de paramètre sont représentés par deux grandes familles : ceux qui se ramènent à des rotations dans l'espace des phases, comme les mesures de haute précision de phase et ceux qui reviennent à effectuer des déplacements de translation dans ce même espace, comme les mesures de forces de faible intensité [75]. Dans notre expérience, nous nous inscrivons directement dans la deuxième famille, ce qui en pratique correspond dans notre cas à estimer l'amplitude d'un petit champ cohérent électromagnétique générant ce déplacement. Nous commencerons par situer les objectifs de cette expérience dans ce cadre de métrologie. Nous présenterons ensuite les deux systèmes intriqués qui subiront l'action du petit champ : l'oscillateur harmonique qu'est le mode du champ piégé dans la cavité et l'atome à deux niveaux qui interagit avec lui dans le régime de couplage fort. Nous détaillerons alors la séquence expérimentale d'un point de vue strictement théorique. Ceci nous permettra d'analyser l'efficacité de notre mesure grâce aux outils de la théorie de l'estimation présentée au chapitre I.

II.1 Système atome - champ piégé dans une cavité

Dans notre expérience d'électrodynamique quantique en cavité, nous cherchons à mesurer un petit champ cohérent injecté dans une cavité à partir d'un autre champ cohérent plus grand que l'on met en interaction avec un atome envoyé dans la cavité pour le sonder. Nous nous attachons à piéger les photons dans un seul mode du champ électromagnétique en résonance avec une seule transition atomique, ce qui nous permet d'utiliser un modèle d'atome à deux niveaux. Une telle simplicité de principe se fait bien sûr au détriment de la complexité de sa réalisation expérimentale que nous exposerons dans le chapitre III.

II.2 Oscillateur harmonique de champ

II.2.1 Hamiltonien de champ

La première composante du système quantique qui est au coeur de toutes nos expériences - au sens littéral comme au sens figuré ! - est un mode dans la gamme microonde du champ électromagnétique que nous isolons en jouant sur la géométrie de la cavité qui le contient. Ce mode est strictement équivalent à un oscillateur harmonique à une dimension et peut donc, à ce titre, être traité théoriquement en utilisant le formalisme de ce dernier [76]. On peut écrire le Hamiltonien de champ sous la forme :

$$\hat{H}_{\text{cav}} = \hbar\omega_{\text{cav}} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \equiv \hbar\omega_{\text{cav}} \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{II.1})$$

Le Hamiltonien a donc pour états propres ceux de l'opérateur nombre $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ qui sont les états de Fock $|n\rangle$. Sous l'effet du hamiltonien $\hat{H}_{\text{cav}}$, un état cohérent $|\alpha\rangle$ se met à tourner dans l'espace des phases avec la phase $-\omega_{\text{cav}}t$ et on peut écrire :

$$|\alpha(t)\rangle = |\alpha e^{-i\omega_{\text{cav}}t}\rangle. \quad (\text{II.2})$$

Le champ électrique $\hat{\mathbf{E}}$ pris en un point $\mathbf{r}$ du mode du champ peut s'écrire en représentation de Schrödinger :

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_0 (f(\mathbf{r})\epsilon\hat{a} + f^*(\mathbf{r})\epsilon^*\hat{a}^\dagger), \quad (\text{II.3})$$

où, en ce point de la cavité, ϵ indique la polarisation du champ électrique, $\mathcal{E}_0$, le facteur de normalisation et $f(\mathbf{r})$ (normalisée à 1) décrit la structure spatiale de ce mode qui, dans le cas de notre cavité, est le mode TEM₉₀₀ ayant la forme d'une onde stationnaire de profil gaussien (voir section III.3.1). On prendra donc $f(\mathbf{r})$ réel pour tout ce qui suit. On peut alors noter que, le champ électrique étant une combinaison linéaire des opérateurs de création et d'annihilation, sa valeur moyenne $\langle n|\hat{\mathbf{E}}|n\rangle$ pour les états de Fock est nulle. Ces états ne peuvent donc correspondre à un champ classique. Dans le chapitre I, nous avons dit que les états cohérents étaient les analogues quantiques de ce type de champ. On peut le vérifier ici rapidement : la valeur moyenne de $\hat{\mathbf{E}}$ prise pour les états cohérents est non nulle et redonne l'expression classique.

$$\langle \alpha|\hat{\mathbf{E}}|\alpha\rangle = \mathcal{E}_0 f(\mathbf{r}) (\epsilon\alpha + \epsilon^*\alpha^*). \quad (\text{II.4})$$

II.2.2 Génération d'un champ cohérent

D'après ce que nous avons vu, un état cohérent peut être obtenu à partir du vide par application de l'opérateur déplacement. Nous allons montrer que celui-ci correspond à l'action d'un courant classique couplé au mode [68]. Considérons un courant localisé au centre de la cavité (pris comme origine des positions). La densité de courant s'écrit alors $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_0 \cos(\omega_s t) \delta(\mathbf{r})$ où ω_s représente la pulsation du courant. Le champ électrique $\hat{\mathbf{E}}$ dans la cavité est relié au potentiel vecteur $\hat{\mathbf{A}}$ qui a pour expression $\hat{\mathbf{A}} = \mathcal{E}_0 f(\mathbf{r})/\omega_s (\epsilon\hat{a} - \epsilon^*\hat{a}^\dagger)$. L'interaction entre le mode quantique du champ et la source de courant est alors décrite par le Hamiltonien suivant :

$$\hat{V}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}). \quad (\text{II.5})$$

Si l'on s'assure que la pulsation du courant est la même que celle du mode de la cavité, on peut écrire le Hamiltonien complet en représentation d'interaction vis-à-vis du hamiltonien de champ libre (II.1) à l'approximation séculaire :

$$\hat{V}_\sim = -\frac{\mathcal{E}_0}{\omega_{\text{cav}}} (\mathbf{J}_0^* \epsilon \hat{a} + \mathbf{J}_0 \epsilon^* \hat{a}^\dagger). \quad (\text{II.6})$$

L'évolution de l'état du mode du champ dans la cavité est alors donnée par la formule suivante :

$$|\psi_{\text{cav}}(t)\rangle = e^{-i\frac{\hat{V}_\sim t}{\hbar}}|0\rangle. \quad (\text{II.7})$$

On peut reconnaître dans l'exponentielle l'opérateur déplacement $D(\alpha)$ avec $\alpha = i\mathbf{J}_0\epsilon^*\mathcal{E}_0/\hbar\omega_{\text{cav}}$. Nous voyons donc qu'il est possible de générer un état cohérent quelconque dans le mode de la cavité en injectant dans celui-ci un champ classique dont on adapte l'amplitude J_0 et la durée d'injection t pour obtenir le α voulu.

II.3 Le pseudo-spin atomique

L'autre système que nous manipulons est un atome qui interagit avec le champ piégé dans la cavité. Nous allons introduire ici les concepts liés à l'atome à deux niveaux qui nous seront nécessaires pour traiter l'évolution de notre système intriqué pendant l'expérience. Il est possible de traiter entièrement l'atome à deux niveaux par analogie avec un spin $1/2$ [77, 68]. Notons $|e\rangle$ le niveau excité de l'atome et $|g\rangle$ le niveau fondamental, ces deux niveaux sont couplés entre eux par une transition dipolaire électrique de pulsation ω_{at} . Cette situation est formellement identique à un spin $1/2$ dans un champ magnétique orienté selon l'axe noté Oz , l'état de spin *up* étant noté $|+\rangle_z$ et l'état de spin *down* noté $|-\rangle_z$. On peut donc faire les équivalences suivantes : $|e\rangle \equiv |+\rangle_z$ et $|g\rangle \equiv |-\rangle_z$ et définir un *pseudo-spin* pour l'atome d'expression $\hat{\mathbf{S}} = \hbar \hat{\boldsymbol{\sigma}}/2$, où $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ est le vecteur de composantes $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ et $\hat{\sigma}_z$ qui sont les trois opérateurs de Pauli. Avec l'unité $\mathbb{1}_{\text{at}}$, ceux-ci forment une base de l'espace des opérateurs sur le système à deux niveaux. Ils s'écrivent dans la base $\{|e\rangle, |g\rangle\}$:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.8})$$

On peut à présent écrire par analogie le hamiltonien atomique, en choisissant comme origine des énergies la moyenne des énergies des deux niveaux atomiques :

$$\hat{H}_{\text{at}} = \frac{\hbar \omega_{\text{at}}}{2} \hat{\sigma}_z. \quad (\text{II.9})$$

Un état pur quelconque $|\Psi\rangle$ de l'atome à deux niveaux est décrit par la donnée de deux angles $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \phi \leq 2\pi$ en s'écrivant sous la forme :

$$|\Psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |e\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |g\rangle. \quad (\text{II.10})$$

Il peut donc être représenté par un vecteur unitaire $\mathbf{u}$ de coordonnées sphériques θ et ϕ . L'extrémité de ce vecteur s'inscrit sur une sphère de rayon 1 appelée *sphère de Bloch* [78] représentée sur la figure II.1. Tout état quantique représenté par le vecteur $\mathbf{u}$ correspond à l'état propre $|+\rangle_{\mathbf{u}}$ de l'observable $\mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ associé à la valeur $+1$. Il est orthogonal à l'autre état propre $|-\rangle_{\mathbf{u}} = |+\rangle_{-\mathbf{u}}$ (associé à la valeur propre -1).

L'évolution d'un état atomique sous l'effet du hamiltonien (II.9) prend la forme suivante :

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\omega_{\text{at}}t/2} \cos \frac{\theta}{2} |e\rangle + e^{i(\phi + \omega_{\text{at}}t/2)} \sin \frac{\theta}{2} |g\rangle, \quad (\text{II.11})$$

Comme pour tout spin, nous observons donc la précession de Larmor du pseudospin atomique : le vecteur $\mathbf{u}(t)$ effectue une rotation à la pulsation ω_{at} autour de l'axe Oz .

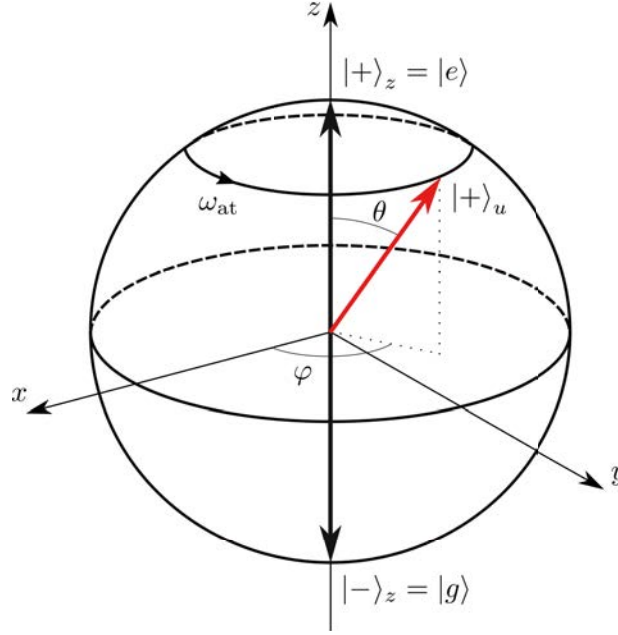


FIGURE II.1 – Représentation d'un état atomique sur la sphère de Bloch.

Deux opérateurs nous seront nécessaires pour l'étude de l'interaction d'un atome à deux niveaux avec le champ. Il s'agit des opérateurs de création et d'annihilation des excitations *atomiques*, $\hat{\sigma}_+$ et $\hat{\sigma}_-$ respectivement, définis comme :

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|, \quad \hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_+^\dagger = |g\rangle\langle e|. \quad (\text{II.12})$$

L'opérateur dipôle électrique $\hat{\mathbf{D}} = q\hat{\mathbf{R}}$, hermitique, est purement non-diagonal dans la base $\{|e\rangle, |g\rangle\}$, et peut être réécrit à partir de ces deux opérateurs :

$$\hat{\mathbf{D}} = d(\epsilon_a \hat{\sigma}_- + \epsilon_a^* \hat{\sigma}_+), \quad (\text{II.13})$$

où l'on introduit le paramètre réel d correspondant à l'élément de transition atomique de la matrice du dipôle relié au vecteur complexe unitaire ϵ_a par :

$$q\langle g|\hat{\mathbf{R}}|e\rangle = d\epsilon_a. \quad (\text{II.14})$$

II.4 Interaction entre atome et mode du champ

Au début de notre expérience, nous formons notre état quantique initial en mettant en présence un atome à deux niveaux et le mode de la cavité. L'interaction du pseudo-spin atomique avec l'oscillateur harmonique de champ modifie fortement l'évolution de chacun de ces deux sous-systèmes par rapport à ce que nous avons vu dans les paragraphes précédents. L'évolution d'un tel système peut être décrite par le modèle de Jaynes et Cummings [79] et nécessite de traiter les deux sous-systèmes comme une seule et même entité appelée *atome habillé*.

II.4.1 L'atome habillé

Le couplage entre l'atome et le champ quantique est décrit par le hamiltonien dipolaire électrique suivant :

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -d\mathcal{E}_0 f(\mathbf{r})(\epsilon_a \hat{\sigma}_- + \epsilon_a^* \hat{\sigma}_+) \cdot (\epsilon \hat{a} + \epsilon^* \hat{a}^\dagger), \quad (\text{II.15})$$

où $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ représente la polarisation du champ électrique à la position de l'atome $\mathbf{r}$. Le Hamiltonien total se référant au système atome-champ s'écrit alors :

$$\hat{H}_{\text{tot}} = \hat{H}_{\text{cav}} + \hat{H}_{\text{at}} + \hat{H}_{\text{int}}. \quad (\text{II.16})$$

Si on développe le produit dans (II.15), on obtient un terme en $\hat{\sigma}_- \hat{a}$ qui correspond à la transition de l'état excité vers l'état fondamental pour l'atome en même temps qu'un photon est annihilé dans le mode de la cavité. Le terme en $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$ décrit le processus inverse. Lorsqu'on est proche de la résonance, c'est-à-dire pour $\omega_{\text{cav}} \approx \omega_{\text{at}}$, ces deux termes se rapportent donc à des processus très peu probables. Nous les négligerons et ne garderons que les termes qui décrivent les processus habituels de création d'un photon accompagné de la désexcitation de l'atome et d'annihilation d'un photon avec excitation de l'atome. L'approximation faite est appelée *approximation de champ tournant* [68]. Dans ce cadre, le Hamiltonien d'interaction est réduit à l'expression suivante :

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{\hbar \Omega_0(\mathbf{r})}{2} (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger), \quad (\text{II.17})$$

avec

$$\Omega_0(\mathbf{r}) = -\frac{2\mathcal{E}_0 d \epsilon_a \cdot \epsilon}{\hbar} f(\mathbf{r}) \equiv \Omega_0 f(\mathbf{r}), \quad (\text{II.18})$$

où la pulsation Ω_0 (prise réelle par convention) est caractéristique de la force du couplage atome-champ. La fréquence caractéristique correspondante est appelée *fréquence de Rabi du vide*.

Avec cette expression simplifiée du couplage atome-champ, on obtient le Hamiltonien dit de Jaynes-Cummings :

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \frac{\hbar \omega_{\text{at}}}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar \omega_{\text{cav}} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar \Omega_0}{2} f(\mathbf{r}) (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger). \quad (\text{II.19})$$

Le hamiltonien libre $\hat{H}_0 = \hat{H}_{\text{cav}} + \hat{H}_{\text{at}}$ a pour vecteurs propres tous les états $|n, e\rangle$ et $|n+1, g\rangle$, c'est-à-dire les états où l'atome est dans l'état $|e\rangle$ en présence de n photons dans le mode de la cavité ou l'atome est dans l'état $|g\rangle$ en présence de $n+1$ photons. En présence de couplage, on voit que le hamiltonien commute avec le nombre total d'excitations atomiques et photoniques du système $\hat{a}^\dagger \hat{a} \otimes \mathbb{1}_{\text{at}} + \mathbb{1}_{\text{chp}} \otimes |e\rangle\langle e|$: les états $|n, e\rangle$ sont cette

fois appariés avec les états $|n+1, g\rangle$. Le couplage permet donc l'échange d'une excitation entre l'atome et le champ. La diagonalisation du Hamiltonien de Jaynes-Cummings revient donc à un problème de diagonalisation dans chaque sous-espace de nombre d'excitations fixé $\mathcal{S}_n = \{|n, e\rangle, |n+1, g\rangle\}$, $n \geq 0$ ¹. Dans le sous-espace $\mathcal{S}_n$, $\hat{H}_{\text{JC}}$ est réduit à l'expression suivante :

$$\hat{H}_n = \hbar \begin{pmatrix} \omega_{\text{cav}}(n+1) + \delta/2 & \Omega_n f(\mathbf{r})/2 \\ \Omega_n f(\mathbf{r})/2 & \omega_{\text{cav}}(n+1) - \delta/2 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.20})$$

où nous avons noté $\delta = \omega_{\text{at}} - \omega_{\text{cav}}$ le désaccord atome–mode du champ, et $\Omega_n = \Omega_0 \sqrt{n+1}$ la pulsation de Rabi “à n photons” caractéristique du couplage dans la multiplicité $\mathcal{S}_n$.

Toujours par analogie avec un spin 1/2 et en considérant que l'atome est au centre $\mathbf{r} = 0$ (*i.e.* $|f(\mathbf{r})| = 1$), on peut écrire les états propres de H_n qui sont appelés *états habillés* du système atome-champ :

$$|n, +\rangle = \cos \frac{\theta_n}{2} |n, e\rangle + \sin \frac{\theta_n}{2} |n+1, g\rangle, \quad (\text{II.21})$$

$$|n, -\rangle = \sin \frac{\theta_n}{2} |n, e\rangle - \cos \frac{\theta_n}{2} |n+1, g\rangle, \quad (\text{II.22})$$

où l'angle θ_n compris entre 0 et π est défini par :

$$\tan \theta_n = \frac{\Omega_n}{\delta}. \quad (\text{II.23})$$

Ces états ne sont pas, en général, factorisables, ce qui dénote une corrélation quantique forte entre atome et champ. Les états habillés correspondent la plupart du temps à des états *intriqués*. Les énergies associées sont données par :

$$E_{\pm, n} = \hbar \omega_{\text{cav}}(n+1) \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Omega_n^2 + \delta^2}. \quad (\text{II.24})$$

La figure II.2 présente les variations des niveaux d'énergie des états habillés en fonction du désaccord δ . Lorsque les fréquences propres des deux systèmes sont très éloignées, *i.e.* $\theta_n \rightarrow 0$, on retrouve quasiment les états propres du Hamiltonien libre $|n+1, g\rangle$ et $|n, e\rangle$. A résonance par contre, les énergies des états propres libres se croisent, l'effet du couplage est donc de générer l'anti-croisement effectivement observé pour le système atome-champ. Dans ce cas, les niveaux d'énergie des états propres de H_{JC} sont séparés de la distance minimale $\hbar \Omega_n$. Nous allons à présent nous concentrer sur ces deux cas limites.

II.4.2 Interaction dispersive

Lorsque le désaccord δ est très grand devant la pulsation de Rabi du vide Ω_0 , les états propres et énergies propres de l'atome habillé sont quasiment égaux aux états non couplés

1. L'état $|0, g\rangle$ est déjà un état stationnaire du système couplé.

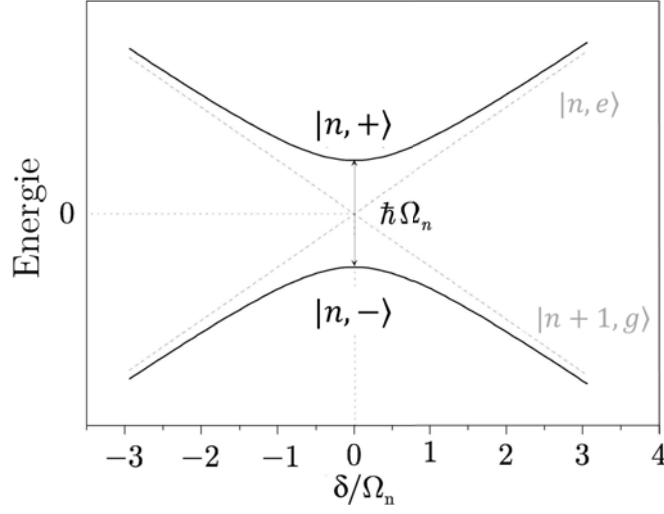


FIGURE II.2 – Énergie des états habillés de $\mathcal{S}_n$ en fonction du désaccord atome/champ δ ramené à la pulsation de Rabi Ω_n .

avec un angle de mélange θ_n très proche de 0. On pose $E_n = \hbar\omega_{\text{cav}}(n+1)$. On a ainsi les énergies propres :

$$E_{\pm,n} = E_n \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Omega_n^2 + \delta^2} \approx E_n \pm \frac{\hbar\delta}{2} \pm \frac{\hbar\Omega_0^2(n+1)}{4\delta}, \quad (\text{II.25})$$

associées aux états propres :

$$|n, +\rangle = |n, e\rangle, \quad (\text{II.26})$$

$$|n, -\rangle = |n+1, g\rangle. \quad (\text{II.27})$$

A cause du couplage dispersif, l'énergie des états $|n, e\rangle$ et $|n+1, g\rangle$ est modifiée du *déplacement lumineux* $\pm \hbar\Omega_0^2(n+1)/4\delta$. On peut tirer en particulier de celui-ci le terme $\hbar\Omega_0^2/4\delta$, appelé déplacement de Lamb, qui correspond au déplacement, dû au couplage, des niveaux d'énergie en l'absence de photons.

Regardons l'action de l'interaction dispersive entre un atome préparé dans $|e\rangle$ et le champ préparé dans un état cohérent d'amplitude α supposée réelle positive. Initialement, l'état du système couplé est donc :

$$|\psi(0)\rangle = e^{-\beta^2/2} \sum \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} |n, e\rangle \quad (\text{II.28})$$

L'évolution de la fonction d'onde après une durée t devient :

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{i\delta t/2} \sum \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\Omega_0^2(n+1)/4\delta} |n, e\rangle, \\ &= e^{i\delta t/2} e^{-i\Phi_{\text{disp}}(t)} |\beta e^{-i\Phi_{\text{disp}}(t)}\rangle \otimes |e\rangle, \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

où $\Phi_{disp}(t) = \Omega_0^2 t / 4\delta$ ne dépend que des caractéristiques du couplage atome-champ. L'interaction produit une rotation du dipôle atomique et de la composante de champ dans l'espace des phases qui ne dépend pas du nombre de photons piégés. Le déplacement en énergie du niveau $|n+1, g\rangle$ étant de signe opposé par rapport à celui du niveau $|n, e\rangle$, le dipôle atomique effectuera une rotation dans l'autre sens lorsque le système total est préparé dans $|n+1, g\rangle$ au lieu de $|n, e\rangle$. On aura alors :

$$|\psi(0)\rangle = e^{-\beta^2/2} \sum \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} |n+1, g\rangle \xrightarrow{t} |\psi(t)\rangle = e^{-i\delta t/2} e^{i\Phi_{disp}(t)} |\beta e^{i\Phi_{disp}(t)}\rangle \otimes |e\rangle. \quad (\text{II.30})$$

Dans ce manuscrit, nous utiliserons le régime dispersif uniquement dans le cas où $\Phi_{disp} \ll 1$. Dans ce cas spécifique, l'évolution de l'atome et du champ sont complètement décorréliées, l'interaction est comme "gelée". La fonction d'onde subit un déphasage de $\pm\delta t/2$ selon l'état initial. Dans le cas important où l'atome est initialement préparé dans la superposition $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$, le vecteur de Bloch atomique subit une rotation d'un angle $\xi = \delta t$ dans le plan équatorial de la sphère de Bloch (φ devient $\varphi + \xi(t)$ dans la formule (II.10)). Il est ainsi possible de modifier le dipôle atomique sans agir sur le champ, voire le retourner si $\xi = \pi$, même si l'atome est en présence de ce champ. La seule condition est d'avoir un désaccord extrêmement grand pour pouvoir négliger la rotation du champ due à l'interaction dispersive.

II.4.3 Interaction résonnante

L'autre cas limite du couplage atome-champ que nous exploiterons largement est le cas où la transition atomique est à résonance avec le mode de la cavité, c'est-à-dire lorsque l'atome et le champ échangent de l'énergie. Pour toute la suite, nous considérerons que $\delta = 0$, ce qui correspond à $\theta_n = \frac{\pi}{2}$. Les états habillés deviennent alors :

$$|n, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|n, e\rangle + |n+1, g\rangle), \quad (\text{II.31})$$

$$|n, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|n, e\rangle - |n+1, g\rangle). \quad (\text{II.32})$$

On leur associe les énergies propres suivantes :

$$E_{\pm, n} = \hbar\omega_{\text{cav}}(n+1) \pm \frac{\hbar\Omega_n}{2}. \quad (\text{II.33})$$

On peut également inverser les relations pour obtenir les états $|n+1, g\rangle$ et $|n, e\rangle$ en fonction de $|n, +\rangle$ et $|n, -\rangle$:

$$|n+1, g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|n, +\rangle - |n, -\rangle), \quad (\text{II.34})$$

$$|n, e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|n, +\rangle + |n, -\rangle). \quad (\text{II.35})$$

II.4.3.a Oscillations de Rabi à plusieurs photons

Considérons pour l'instant une situation simple : nous préparons l'atome dans l'état $|g\rangle$ et nous le faisons interagir avec un champ à $n + 1$ photons, *i.e.* notre état initial se met sous la forme $|\psi(t=0)\rangle = |n+1, g\rangle$ que l'on a pu réécrire dans la base des états habillés avec la formule II.34. On se place en représentation d'interaction vis-à-vis du Hamiltonien libre. Si on laisse l'atome interagir pendant un temps t avec le mode du champ, la fonction d'onde du système devient :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\Omega_n t/2} |n, +\rangle - e^{i\Omega_n t/2} |n, -\rangle), \quad (\text{II.36})$$

$$\text{soit } |\psi(t)\rangle = -i \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |n, e\rangle + \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |n+1, g\rangle. \quad (\text{II.37})$$

Si on se place du point de vue atomique, la probabilité que l'atome soit dans $|g\rangle$ à l'instant t est donnée par :

$$P_g(t) = \frac{1 + \cos(\Omega_n t)}{2}. \quad (\text{II.38})$$

Cette expression illustre le phénomène d'*oscillation de Rabi*, *i.e.* l'échange réversible entre atome et champ d'une excitation avec une fréquence Ω_n . Cette excitation est donc transmise de manière déterministe en un temps $t = \frac{\pi}{\Omega_n}$ et à cet instant les deux sous-systèmes sont séparables. Le reste du temps, atome et champ sont intriqués avec un maximum d'intrication atteint à la moitié de ce temps.

II.4.3.b Calcul de l'évolution du système couplé

Dans l'expérience qui nous intéresse dans ce manuscrit, l'atome est préparé dans l'état $|g\rangle$ et le champ n'est pas préparé dans un état de Fock mais dans un état cohérent noté $|\alpha\rangle$ que l'on prendra pour l'instant réel. Pour obtenir l'évolution de l'état couplé, on peut utiliser le fait qu'un état cohérent est une superposition des états de Fock pour lesquels nous venons de traiter de l'oscillation de Rabi et tirer profit de la linéarité de l'équation de Schrödinger [80, 81]. On appellera C_n les coefficients de la décomposition de l'état cohérent sur la base des états de Fock :

$$|\alpha\rangle = \sum_{n \geq 0} \underbrace{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}}_{C_n} |n\rangle. \quad (\text{II.39})$$

On va décomposer notre état initial $|\alpha, g\rangle$ sur la base des états découplés.

$$|\alpha, g\rangle = \sum_{n \geq 0} C_n |n, g\rangle \quad (\text{II.40})$$

Séparons donc l'état $|\psi(t=0)\rangle$:

$$|\psi(t=0)\rangle = C_0|0, g\rangle + \sum_{n \geq 0} C_{n+1}|n+1, g\rangle \quad (\text{II.41})$$

$$= C_0|0, g\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} C_{n+1} (|n, +\rangle - |n, -\rangle). \quad (\text{II.42})$$

Au bout d'un temps t d'interaction, la fonction d'onde du système couplé devient :

$$|\psi(t)\rangle = C_0|0, g\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} C_{n+1} e^{-i\frac{\Omega_n t}{2}} |n, +\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} C_{n+1} e^{+i\frac{\Omega_n t}{2}} |n, -\rangle. \quad (\text{II.43})$$

En utilisant les expressions II.34 et II.35, nous pouvons réécrire cela en fonction des $|n+1, g\rangle$ et $|n, e\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle = C_0|0, g\rangle + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} C_{n+1} \left(e^{-i\frac{\Omega_n t}{2}} - e^{+i\frac{\Omega_n t}{2}} \right) |n, e\rangle + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} C_{n+1} \left(e^{-i\frac{\Omega_n t}{2}} + e^{+i\frac{\Omega_n t}{2}} \right) |n+1, g\rangle, \quad (\text{II.44})$$

Pour gagner en compacité sur les formules, nous passons momentanément à une formulation en termes de cosinus et sinus :

$$|\psi(t)\rangle = C_0|0, g\rangle - i \sum_{n \geq 0} C_{n+1} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |n, e\rangle + \sum_{n \geq 0} C_{n+1} \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |n+1, g\rangle. \quad (\text{II.45})$$

On peut à présent effectuer le changement d'indice $n+1 \rightarrow n$ dans la deuxième somme en posant $\Omega_{-1} = 0$: cela nous permet de se ramener aux vecteurs $|n, g\rangle$ en simplifiant le terme en C_0 :

$$|\psi(t)\rangle = -i \sum_{n \geq 0} C_{n+1} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |n, e\rangle + \sum_{n \geq 0} C_n \cos\left(\frac{\Omega_{n-1} t}{2}\right) |n, g\rangle. \quad (\text{II.46})$$

Pour essayer de comprendre l'évolution de l'état, nous allons en donner une forme plus facile à analyser. Plaçons nous dans le cas d'un champ mésoscopique, *i.e.* $\bar{n} \gg 1$. Les états de Fock qui ont un poids important dans la superposition formant l'état cohérent sont les états à grand nombre n de photons. On va remplacer C_{n+1} par C_n dans le premier terme de l'expression (II.46) :

$$|\psi(t)\rangle = -i \sum_{n \geq 0} C_n \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |n, e\rangle + \sum_{n \geq 0} C_n \cos\left(\frac{\Omega_{n-1} t}{2}\right) |n, g\rangle. \quad (\text{II.47})$$

En effet, on peut montrer que dans la limite $\bar{n} \rightarrow \infty$, la différence entre (II.46) et (II.47) tend vers 0 [81]. Dans le cas de notre expérience où $\bar{n} = 12.7$, nous avons calculé numériquement le recouvrement entre les états (II.46) et (II.47) aux différents temps d'interaction

étudiés. Il s'avère que nous pouvons identifier ces deux états avec une fidélité de l'ordre de 3%, ce qui justifie la nouvelle expression (II.47).

Pour plus de lisibilité dans la suite du calcul, nous repassons à une formulation en terme d'exponentielles et nous séparons $|\psi(t)\rangle$ en deux termes $|\psi_a(t)\rangle$ et $|\psi_b(t)\rangle$ tels que :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_a(t)\rangle - |\psi_b(t)\rangle), \quad (\text{II.48})$$

avec

$$|\psi_a(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} C_n e^{-i \frac{\Omega_n t}{2}} |n, e\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} C_n e^{-i \frac{\Omega_{n-1} t}{2}} |n, g\rangle, \quad (\text{II.49})$$

$$|\psi_b(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} C_n e^{+i \frac{\Omega_n t}{2}} |n, e\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} C_n e^{+i \frac{\Omega_{n-1} t}{2}} |n, g\rangle. \quad (\text{II.50})$$

Concentrons nous sur $|\psi_a(t)\rangle$. Toujours dans le cadre d'un champ mésoscopique, on peut également remplacer dans les phases $\sqrt{n+1}$ par $\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}}$. On a alors :

$$|\psi_a(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{n \geq 0} C_n e^{-i \frac{\Omega_0 \sqrt{n} t}{2}} |n\rangle \right) \left(e^{-i \frac{\Omega_0 t}{4\sqrt{n}}} |e\rangle + |g\rangle \right). \quad (\text{II.51})$$

On introduit la phase $\Phi(t)$ que nous utiliserons régulièrement :

$$\Phi(t) = \frac{\Omega_0 t}{4\sqrt{n}}, \quad (\text{II.52})$$

ainsi que l'état atomique $|\psi^+(t)\rangle$ pour soulager l'expression :

$$|\Psi^+(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\Phi(t)} |e\rangle + |g\rangle). \quad (\text{II.53})$$

L'expression de $|\psi_a(t)\rangle$ devient alors :

$$|\psi_a(t)\rangle = \left(\sum_{n \geq 0} C_n e^{-i \frac{\Omega_0 \sqrt{n} t}{2}} |n\rangle \right) |\Psi^+(t)\rangle. \quad (\text{II.54})$$

A nouveau, comme le champ est mésoscopique, nous pouvons faire un développement limité de $\sqrt{n}$ en $\sqrt{\bar{n}}$:

$$\sqrt{n} \approx \sqrt{\bar{n}} + \frac{n - \bar{n}}{2\sqrt{\bar{n}}} - \frac{(n - \bar{n})^2}{8\bar{n}^{3/2}} \quad (\text{II.55})$$

Regardons les modifications que cela engendre sur $\psi_a(t)$:

$$|\psi_a(t)\rangle = \left(\sum_{n \geq 0} C_n e^{-i\Omega_0 \frac{\sqrt{n}}{2} t} e^{-i\Omega_0 \frac{n-\bar{n}}{4\sqrt{n}} t} e^{+i\Omega_0 \frac{(n-\bar{n})^2}{8\bar{n}^{3/2}} t} |n\rangle \right) |\Psi^+(t)\rangle, \quad (\text{II.56})$$

$$|\psi_a(t)\rangle = e^{-i\alpha^2 \Phi(t)} \left(\sum_{n \geq 0} C_n e^{-in\Phi(t) + i\Omega_0 \frac{(n-\bar{n})^2}{16\bar{n}^{3/2}} t} |n\rangle \right) |\Psi^+(t)\rangle. \quad (\text{II.57})$$

Avec le même raisonnement, nous obtenons une expression de $|\psi_b(t)\rangle$ donnée par :

$$|\psi_b(t)\rangle = \left(\sum_{n \geq 0} C_n e^{+i\Omega_0 \frac{\sqrt{n}}{2} t} |n\rangle \right) |\Psi^-(t)\rangle, \quad (\text{II.58})$$

En introduisant la notation

$$|\Psi^-(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{+i\Phi(t)} |e\rangle - |g\rangle), \quad (\text{II.59})$$

nous avons

$$|\psi_b(t)\rangle = e^{+i\alpha^2 \Phi(t)} \left(\sum_{n \geq 0} C_n e^{+in\Phi(t) - i\Omega_0 \frac{(n-\bar{n})^2}{16\bar{n}^{3/2}} t} |n\rangle \right) |\Psi^-(t)\rangle. \quad (\text{II.60})$$

Le système couplé devient donc :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\chi(t)} |\psi_{\text{cav}}^+(t)\rangle |\Psi^+(t)\rangle - e^{+i\chi(t)} |\psi_{\text{cav}}^-(t)\rangle |\Psi^-(t)\rangle), \quad (\text{II.61})$$

en posant :

$$|\psi_{\text{cav}}^\pm(t)\rangle = \sum_{n \geq 0} e^{\mp in\Phi(t) \pm i\Omega_0 \frac{(n-\bar{n})^2}{16\bar{n}^{3/2}} t} C_n |n\rangle. \quad (\text{II.62})$$

Pour $(n - \bar{n})/\bar{n}$ au plus de l'ordre de $1/\sqrt{\bar{n}}$, on peut négliger le dernier ordre du développement limité de la phase classique du champ cohérent (II.55) dans les premiers temps de l'interaction. Les états du champ $|\psi_{\text{cav}}^\pm(t)\rangle$ s'écrivent alors sous la forme :

$$|\psi_{\text{cav}}^\pm(t)\rangle = \sum_{n \geq 0} e^{\mp in\Phi(t)} C_n |n\rangle = |\alpha e^{\mp i\Phi(t)}\rangle. \quad (\text{II.63})$$

Avec cette approximation, nous voyons que les états du champ corrélés aux états atomiques restent cohérents tout au long de l'évolution et seront donc toujours représentés par des taches circulaires dans le plan de phase. Nous les noterons dorénavant $|\alpha^\pm(t)\rangle$.

Pour récapituler, en représentation d'interaction, et si nous négligeons le terme $\Omega_0 \frac{(n-\bar{n})^2}{16\bar{n}^{3/2}} t$ dans les phases des composantes de champ, nous obtenons l'expression suivante pour l'évolution du système atome champ-mésoscopique :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\chi(t)} |\alpha^+(t)\rangle |\Psi^+(t)\rangle - e^{+i\chi(t)} |\alpha^-(t)\rangle |\Psi^-(t)\rangle), \quad (\text{II.64})$$

avec

$$\chi(t) = \Omega_0 \sqrt{n} t / 4 = \alpha^2 \Phi(t), \quad (\text{II.65})$$

$$\Phi(t) = \frac{\Omega_0 t}{4\sqrt{n}}, \quad (\text{II.66})$$

$$|\alpha^\pm(t)\rangle = |\alpha e^{\mp i\Phi(t)}\rangle, \quad (\text{II.67})$$

$$|\Psi^\pm(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{\mp i\Phi(t)}|e\rangle \pm |g\rangle). \quad (\text{II.68})$$

On remarque que la phase quantique des états atomiques reste à tout instant la même que la phase classique des états de champ. Par ailleurs, les états atome/champ subissent une rotation à une pulsation de $\Omega_0/4\sqrt{n}$, petite devant celle des oscillations de Rabi.

On peut se faire une idée de l'évolution du système en superposant le plan équatorial vu "du dessous" de la sphère de Bloch dans lequel évoluent les dipôles atomiques et l'espace des phases du champ. En effet, le dipôle atomique tourne ici dans le plan équatorial de la sphère de Bloch. Nous rappelons la position de quelques états atomiques remarquables dans la "vue" choisie pour la représentation atomique sur la figure II.3. Un état pur quelconque de ce plan $|\Psi_p\rangle$ ainsi que l'état qui lui est orthogonal $|\Psi_m\rangle$ pourront s'écrire sous la forme :

$$|\Psi_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\phi}|e\rangle + |g\rangle), \quad (\text{II.69})$$

$$|\Psi_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\phi}|e\rangle - |g\rangle), \quad (\text{II.70})$$

où la phase quantique du dipôle ϕ correspond à l'angle direct entre le vecteur représentant le dipôle et l'axe x dans le plan. L'axe x (respectivement y) de la sphère de Bloch sera confondu avec l'axe réel (respectivement imaginaire) du plan de phase du champ. Rappelons ici que α est réel. On peut voir sur la figure II.4 la rotation des deux états du système couplé. Avec cette représentation, l'état $|\alpha^+(t)\rangle|\psi^+(t)\rangle$ tourne dans le sens indirect, cela correspond au cas où dipôle atomique et champ sont en phase. Au contraire, l'état $|\alpha^-(t)\rangle|\psi^-(t)\rangle$ tourne dans le sens direct, cela correspond au cas où dipôle et champ sont en opposition de phase.

Ces deux derniers états couplés sont des "états propres" de l'interaction. Cela revient à dire que pour obtenir l'évolution de l'état $|\alpha, g\rangle$, il suffit de décomposer l'état atomique sur l'état de dipôle en phase avec le champ initial $|+\rangle_x$ (correspondant à $|\Psi_p\rangle$ pour $\phi = 0$) et sur l'état orthogonal $|-\rangle_x$ (correspondant à $|\Psi_m\rangle$ pour $\phi = 0$). Le champ cohérent initial se sépare en deux composantes cohérentes tournant chacune dans le sens du dipôle atomique auquel elles sont associées. L'objet atomique, système microscopique, laisse son empreinte sur l'objet mésoscopique qu'est le champ. En outre, tout état atome-champ, où initialement l'atome est préparé dans $|\pm\rangle_x$, ne s'intrique jamais au cours de l'interaction résonnante. L'atome et le champ restent dans des états purs, ce qui est remarquable puisque chacun subit une évolution non unitaire (l'évolution du système total est bien sûr unitaire puisque l'on néglige la décohérence).

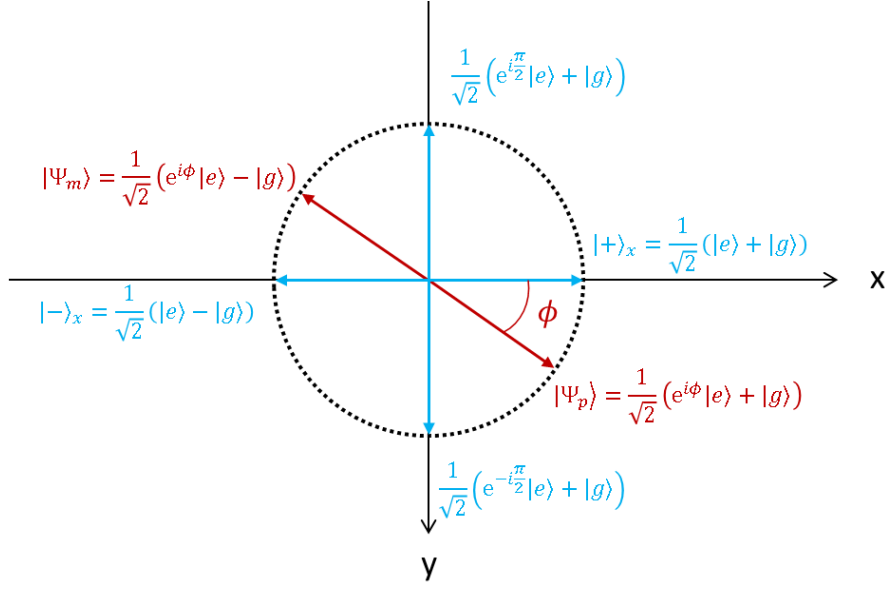


FIGURE II.3 – Quelques états particuliers du plan équatorial de la sphère de Bloch (vue de dessous).

La stratégie que nous avons utilisée jusque là pour déterminer l'évolution d'un champ d'amplitude réelle couplé à un atome est généralisable à tout champ $|\alpha e^{i\phi}\rangle$ (d'amplitude réelle α et de phase classique ϕ non nulle) couplé à un dipôle atomique arbitraire de forme $|\Psi\rangle = (e^{i\mathcal{E}_1}|e\rangle + e^{i\mathcal{E}_2}|g\rangle) / \sqrt{2}$ avec une fréquence de Rabi du vide Ω_0 . Pour connaître son évolution, on décompose sa partie atomique sur les états correspondant à des dipôles en phase ($|\Psi_p\rangle$) et en opposition de phase ($|\Psi_m\rangle$) avec ce champ. Cela revient en quelque sorte à faire un changement de repère pour aligner le champ avec un des axes et se ramener au cas précédent du champ d'amplitude réelle. Au cours de l'évolution, chaque couple dipôle-composante cohérente tourne dans des sens opposés d'un angle $\pm\Phi$ défini par l'expression (II.66) et qui dépend du temps d'interaction. Mathématiquement, on obtient les expressions suivantes pour l'évolution de chaque couple :

$$|\alpha e^{i\phi}\rangle \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\phi}|e\rangle + |g\rangle) \right] \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\chi} |\alpha e^{i(\phi-\Phi)}\rangle \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i(\phi-\Phi)}|e\rangle + |g\rangle) \right], \quad (\text{II.71})$$

$$|\alpha e^{i\phi}\rangle \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\phi}|e\rangle - |g\rangle) \right] \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} e^{+i\chi} |\alpha e^{i(\phi+\Phi)}\rangle \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i(\phi+\Phi)}|e\rangle - |g\rangle) \right]. \quad (\text{II.72})$$

La démonstration de ces expressions est laissée aux soins du lecteur. La décomposition de l'état atomique initial $|\Psi\rangle$ sur $|\Psi_p\rangle$ et $|\Psi_m\rangle$ est de la forme :

$$\Psi = A_I |\Psi_p\rangle + A_{II} |\Psi_m\rangle \quad \text{avec} \quad A_I = \frac{1}{2} (e^{i(\mathcal{E}_1-\phi)} + e^{i\mathcal{E}_2}), \quad (\text{II.73})$$

$$A_{II} = \frac{1}{2} (e^{i(\mathcal{E}_1-\phi)} - e^{i\mathcal{E}_2}). \quad (\text{II.74})$$

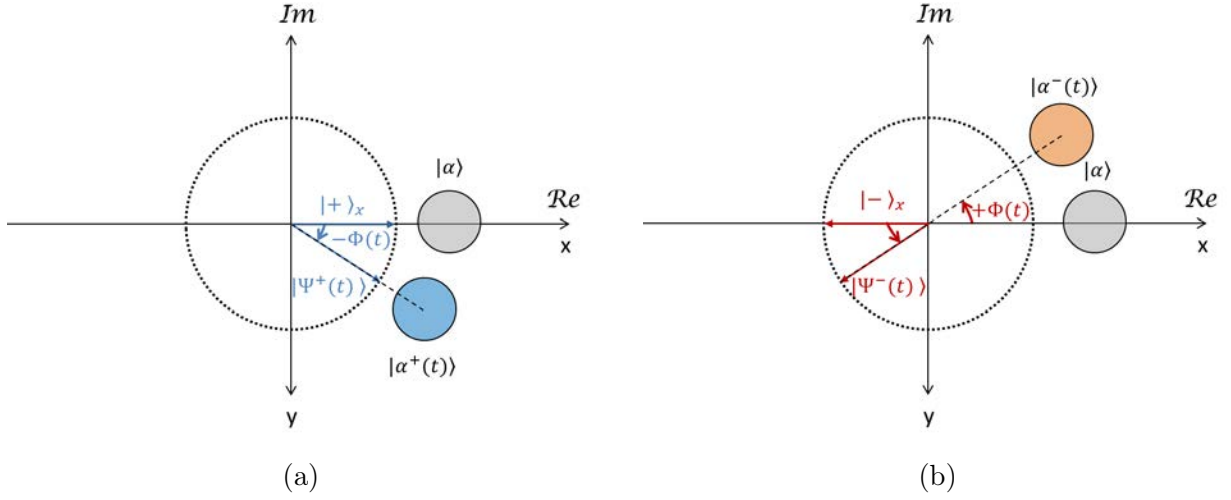


FIGURE II.4 – Co-rotation des dipôles et des composantes de champ des états propres de l'interaction.

Rotation de l'état initial vers l'état à un temps t obtenu dans le cas de l'état propre où dipôle atomique et composante de champ sont : (a) en phase. (b) en opposition de phase.

A l'aide de toutes ces expressions, nous sommes en mesure de déterminer l'état de n'importe quel champ cohérent couplé à n'importe quel état atomique après une interaction résonnante de durée t connue.

Il est important de noter que, dans le cas où l'on ne néglige pas l'ordre 2 dans les phases des composantes du champ (II.62), non seulement les composantes tournent dans l'espace des phases durant l'interaction mais elles cessent d'être cohérentes. On observe une diffusion des phases qui se manifeste par l'étalement de la fonction Husimi- Q visible sur la figure II.5. Rappelons ici que cette fonction mesure le recouvrement entre l'état et un état cohérent $|\gamma\rangle$ suivant l'expression :

$$Q(\gamma) = \text{Re} \left[\text{Tr} \left(\hat{D}^\dagger(\gamma) \hat{P} \hat{D}(\gamma) \hat{\rho} \right) \right], \quad (\text{II.75})$$

où $\hat{P}$ représente l'opérateur parité

Analytiquement, on peut essayer de se donner une idée du temps nécessaire pour voir l'influence de cet étalement des phases sur un champ cohérent. Le terme de diffusion prend la forme $\Omega_0(n - \bar{n})^2 t / (16\bar{n}^{3/2})$. Son effet est notable en première approximation quand les phases des nombres de photons n répartis dans un intervalle $\sqrt{\bar{n}}$ autour de $\bar{n}$ s'évalent sur 2π . Cela correspond à des temps supérieurs à l'instant t_ϕ tel que :

$$t_\phi \approx \frac{16\pi\alpha}{\Omega_0}. \quad (\text{II.76})$$

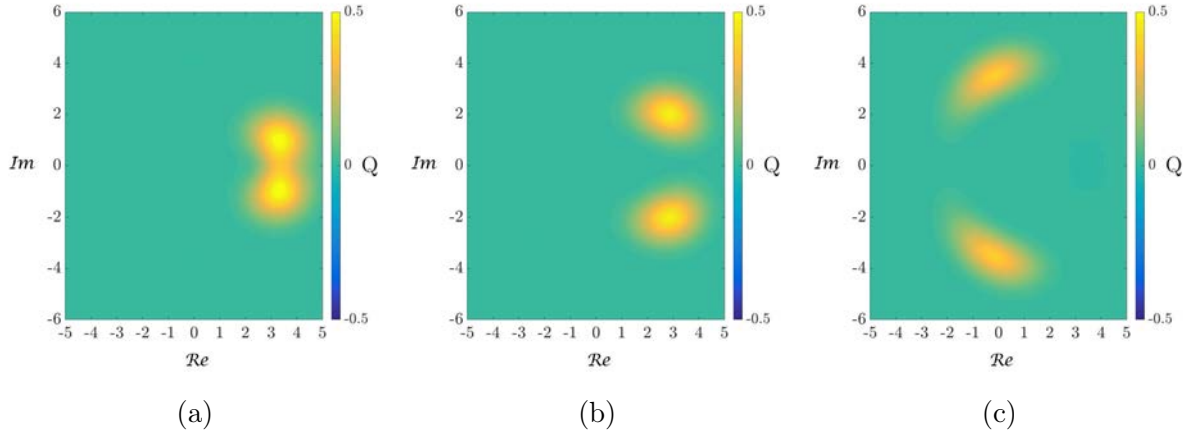


FIGURE II.5 – Diffusion des phases des composantes de champ

Représentation de la fonction Husimi- Q des composantes de champ après un temps d'interaction entre atome et champ de : (a) $14,4 \mu s$ (temps d'interaction maximal utilisé dans l'expérience $T_{1 \max}$), (b) $30 \mu s$ et (c) $80 \mu s$.

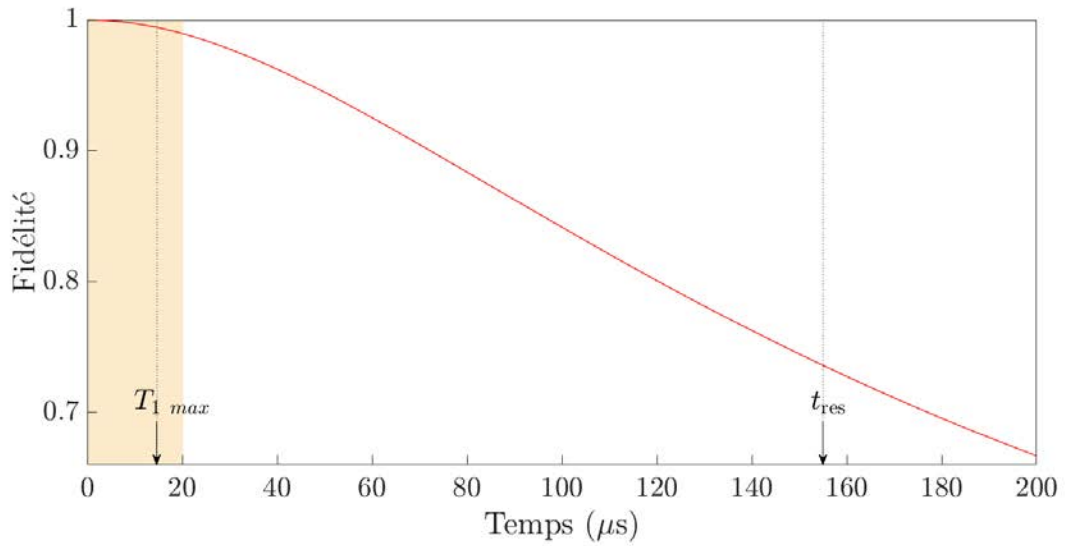


FIGURE II.6 – Recouvrement des composantes de champ diffusées et non diffusées en fonction du temps d'interaction entre l'atome et le champ.

Plus quantitativement, dans le cas de notre expérience, nous avons calculé numériquement le recouvrement des composantes de champ sans diffusion des phases comme définies par l'expression (II.67) avec celles avec diffusion de phases (II.62). Nous rappelons à ce propos que la fréquence de Rabi utilisée est de $\Omega_0 = 2\pi \cdot (46 \text{ kHz})$. La fidélité de ce recouvrement en fonction de la durée d'interaction est représentée sur la figure (II.6). La bande orange délimite la zone temporelle où la fidélité est supérieure à 99%. Nous avons placé sur la figure la durée d'interaction $T_{1 \max} = 14,7 \mu s$ la plus longue que nous avons utilisée pendant

l'expérience². On constate que la fidélité du recouvrement est supérieure à 99%, ce qui nous permettra, pour toute la suite de nos calculs, d'approximer les composantes de champ par des composantes cohérentes pendant la totalité de l'interaction résonnante.

II.4.3.c Effondrements et résurgences

Nous devons à présent faire le lien entre l'expression de l'état du système couplé et l'information que nous pouvons obtenir sur lui. Dans notre expérience, nous pouvons retracer la probabilité de détecter l'atome dans l'état $|g\rangle$ après un temps t d'interaction entre l'atome et le champ. Regardons à ce stade du calcul ce que nous obtiendrions. Pour cela, on peut écrire l'évolution de la fonction d'onde en isolant les états atomiques $|e\rangle$ et $|g\rangle$.

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\Phi(t)(\bar{n}+1)} |\alpha^+(t)\rangle - e^{+i\Phi(t)(\bar{n}+1)} |\alpha^-(t)\rangle \right) |e\rangle \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\Phi(t)\bar{n}} |\alpha^+(t)\rangle + e^{+i\Phi(t)(\bar{n}+1)} |\alpha^-(t)\rangle \right) |g\rangle. \end{aligned} \quad (\text{II.77})$$

D'où on tire l'expression de $P_g(t)$:

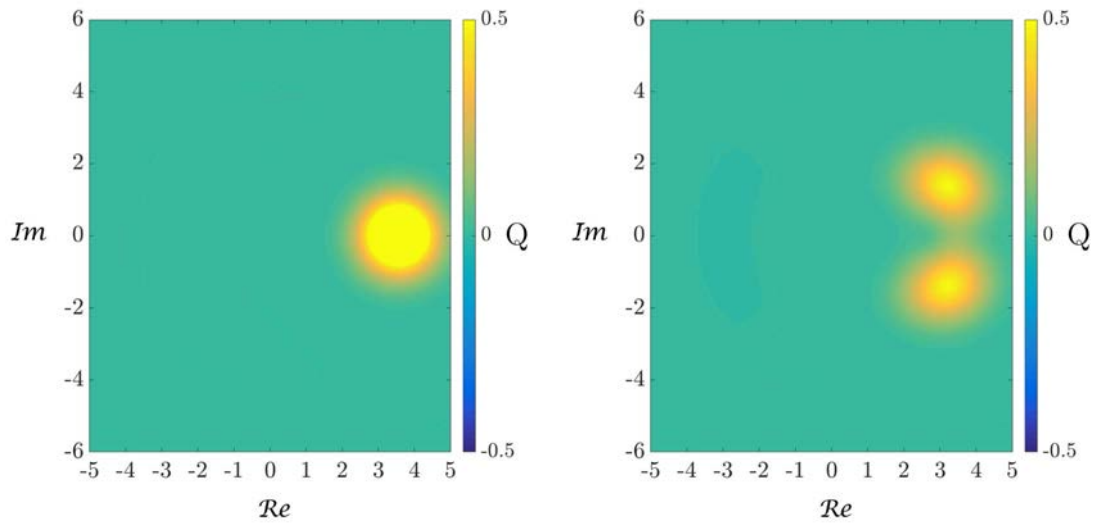
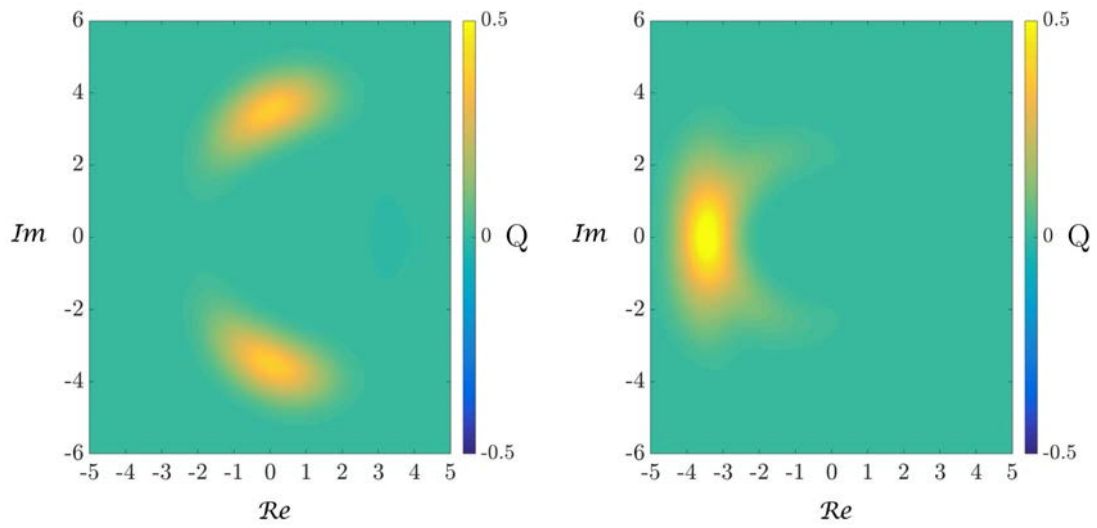
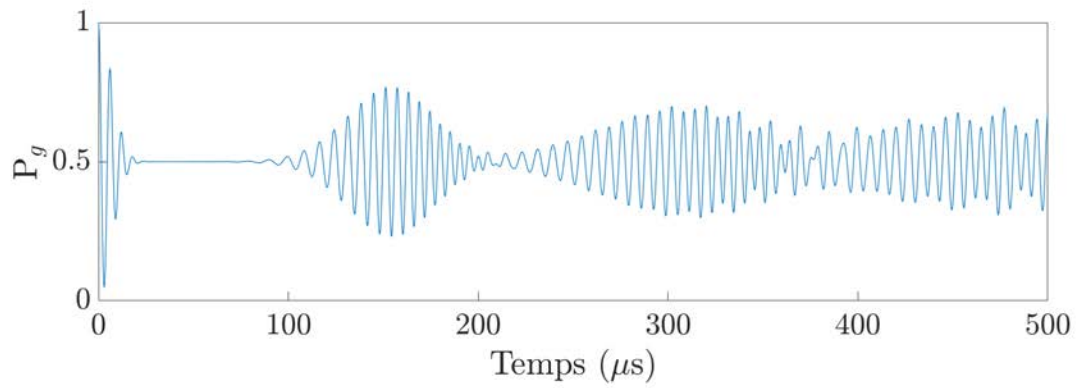
$$P_g(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \text{Re} \left(\langle \alpha^-(t) | \alpha^+(t) \rangle e^{-it\frac{\Omega_0\alpha}{2}} \right) \right]. \quad (\text{II.78})$$

Pour mieux interpréter la physique sous-jacente, il est intéressant de commencer par regarder à quoi ressemble cette fonction. Sur la figure II.7(e) est tracée la probabilité de trouver l'atome dans $|g\rangle$ en fonction du temps t d'interaction résonnante avec le champ. Cette courbe a été obtenue en calculant numériquement directement l'évolution à partir du Hamiltonien. On observe au tout début de l'interaction des oscillations dont l'amplitude s'effondre en un temps caractéristique que l'on appellera t_{col} . Ces oscillations ressurgissent toutefois au bout d'un temps noté t_{res} mais ne réatteignent jamais l'amplitude initiale.

Nous allons donc essayer de faire le lien entre ce comportement, le résultat de notre calcul (II.78) et la représentation des composantes de champ calculées dans l'espace des phases proposée sur les vignettes (a), (b), (c) et (d) de la figure II.7 pour quelques temps remarquables. Nous retrouvons ces oscillations par la présence du terme exponentiel de la formule (II.78). L'analyse de ce produit scalaire nous permettra de fournir une explication intuitive des phénomènes d'effondrement et de résurgence des oscillations. Rappelons pour ce faire l'expression du produit scalaire de deux champs cohérents quelconques $|\alpha e^{i\phi_1}\rangle$ et $|\alpha e^{i\phi_2}\rangle$:

$$\langle \alpha e^{i\phi_1} | \alpha e^{i\phi_2} \rangle = e^{-\alpha^2(1-e^{i(\phi_2-\phi_1)})}. \quad (\text{II.79})$$

2. Laissons de côté momentanément l'instant noté t_{res} . Nous y reviendrons un peu plus tard.

(a) Etat à $t = 0$ (b) Etat à $t = t_{col}$ (c) Etat à $t = \frac{t_{res}}{2}$ (d) Etat à $t = t_{res}$ 

(e)

FIGURE II.7 – Interprétation des effondrements et résurgences du signal en fonction de l'état du champ

Appliquée au produit scalaire entre $|\alpha^-(t)\rangle$ et $|\alpha^+(t)\rangle$, cela donne :

$$\langle \alpha e^{+i\Phi(t)} | \alpha e^{-i\Phi(t)} \rangle = e^{-\alpha^2(1-e^{-2i\Phi(t)})}. \quad (\text{II.80})$$

L'expression du transfert atomique devient alors :

$$P_g(t) = \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\alpha(1-\cos 2\Phi(t))} \cos \left(\frac{\Omega_0 \sqrt{n} t}{2} + \alpha \sin(2\Phi(t)) \right) \right]. \quad (\text{II.81})$$

L'enveloppe modulant les oscillations de Rabi, correspondant au contraste C , est donnée par le préfacteur :

$$C = e^{-\alpha(1-\cos(2\Phi(t)))}. \quad (\text{II.82})$$

Initialement, les deux composantes du champ sont exactement superposées (voir figure II.7(a)) et le contraste vaut 1. Au début de l'interaction, l'atome effectue des oscillations de Rabi. Au fur et à mesure que le temps avance, $\Phi(t)$, directement proportionnel au temps, augmente et le cosinus de l'exponentielle diminue. Le contraste diminue donc en même temps que les composantes du champ commencent à se séparer dans l'espace des phases. Quand cette séparation devient trop "grande", on sent intuitivement que le contraste de ces oscillations va être proche de zéro (cas II.7(b)). Essayons grâce à l'expression (II.153) d'être plus quantitatifs. Pour des temps faibles devant $4\alpha/\Omega_0$, soit $49 \mu\text{s}$ dans notre expérience, le développement à l'ordre deux du cosinus nous permet d'obtenir une expression plus simple du contraste :

$$e^{-\alpha(1-\cos 2\Phi(t))} \sim e^{-\Omega_0^2 t^2 / 8} \quad (\text{II.83})$$

Il nous faut alors choisir un critère pour définir le temps d'effondrement des oscillations. Prenons par exemple le temps nécessaire à la réduction du contraste d'un facteur e . Cela nous donne :

$$t_{\text{col}} = \frac{2\sqrt{2}}{\Omega_0}. \quad (\text{II.84})$$

Cet effondrement est simple à comprendre : l'état cohérent est une superposition d'états de Fock qui résultent chacun en une oscillation de Rabi sinusoïdale du type (II.38). Chacune de ces fonctions oscille avec une fréquence différente et elles vont donc se déphaser les unes par rapport aux autres au cours de l'interaction, causant un effondrement des oscillations de l'état atomique. Il est intéressant de constater que le temps d'effondrement ne dépend pas de l'amplitude α du champ. Cela n'a rien d'étonnant si l'on regarde ce qui se passe dans l'espace des phases. Quelle que soit l'amplitude du champ, le temps d'interaction qu'il faudra pour "séparer" les deux composantes est le même. Pour mieux le voir, revenons au produit scalaire (II.80) entre $|\alpha^-(t)\rangle$ et $|\alpha^+(t)\rangle$ qui s'exprime également sous la forme :

$$\langle \alpha^-(t) | \alpha^+(t) \rangle = e^{-\frac{|\alpha^-(t) - \alpha^+(t)|^2}{2}}. \quad (\text{II.85})$$

L'exposant de l'exponentielle correspond au carré de la distance D entre les deux composantes de champ dans le plan de phase où D vaut (voir figure II.8) :

$$D = 2\alpha \sin \Phi(t), \quad (\text{II.86})$$

et peut être approchée aux temps faibles devant $4\alpha/\Omega_0$:

$$D \sim \frac{\Omega_0 t}{2}. \quad (\text{II.87})$$

On voit ici que, géométriquement, la distance entre les deux composantes de champ ne dépend effectivement plus de l'amplitude du champ initial α et qu'en ordre de grandeur, le temps d'effondrement correspond au temps nécessaire pour que ces deux composantes soient séparées d'une distance de 1.

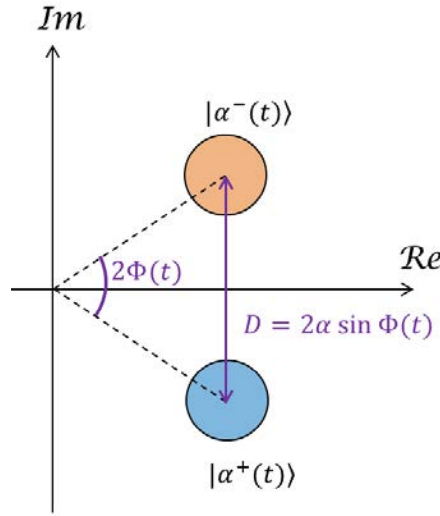


FIGURE II.8 – Distance entre les composantes de champ à l'instant t

En suivant le même raisonnement, on peut s'attendre à ce que le contraste augmente à nouveau lorsque ces fonctions reviennent en phase, c'est-à-dire lorsque les deux composantes de champ se recouvrent à nouveau³. Cette situation se produit lorsque les composantes ont fait une rotation de π dans l'espace des phases (cas (d)). La présence de la résurgence sur la figure II.7(e) est la preuve de la cohérence de la superposition des deux composantes de champ. En effet, la réapparition du signal ne peut avoir lieu que si les deux composantes de champ gardent une relation de phase bien définie. Cette fois, le critère pour définir le temps de résurgence des oscillations est simple. Ce dernier correspond à t_{res} tel que $\cos(2\Phi(t_{\text{res}})) = 1$ soit :

$$t_{\text{res}} = \frac{4\pi\alpha}{\Omega_0}. \quad (\text{II.88})$$

3. Le produit scalaire de deux champs cohérents n'est évidemment jamais nul et de manière stricte il y a toujours un recouvrement des deux composantes de champ. Par abus de langage, nous parlons de recouvrement non nul lorsque leur distance D est inférieure à 1. Le reste du temps, ils peuvent être considérés comme quasi-orthogonaux.

Dans le cas présent, ce temps dépend de l'amplitude du champ. Comme on peut le voir sur la figure (II.6), les composantes de champ cohérentes ne représentent les véritables composantes qu'avec une fidélité de 75% après un temps d'interaction t_{res} suffisant pour voir ressurgir pour la première fois les oscillations de Rabi. Cet élargissement des composantes de champ dans l'espace des phases explique également le fait que le signal de première résurgence voit ses oscillations perdurer pendant plus de temps puisque séparer ces composantes élargies prend plus de temps que les composantes initiales.

Par ailleurs, autour de chaque résurgence, on peut donner une forme approchée de l'argument de la fonction en cosinus dans (II.81) :

$$\alpha \sin(2\Phi(t)) \sim 2\alpha\Phi(t) = \frac{\alpha\Omega_0 t}{2}.$$

On a donc pour $t \sim t_{\text{res}}$:

$$\cos\left(\frac{\Omega_0\sqrt{n}t}{2} + \alpha \sin(2\Phi(t))\right) \sim \cos(\Omega_0\alpha t). \quad (\text{II.89})$$

On trouve ainsi qu'autour des temps de résurgence, les oscillations de Rabi sont de pulsation $\Omega_0\alpha$.

On peut également remarquer qu'au temps $t_0 = t_{\text{res}}/2$, c'est-à-dire à la moitié du temps de résurgence, les deux dipôles des deux états propres de l'interaction sont identiques et les composantes de champ associées se retrouvent en opposition de phase (cas II.7(c)). L'atome et le champ se retrouvent à nouveau dans des états séparables. Ils se sont désintriqués. L'atome se retrouve systématiquement dans l'état $(-i|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$ quelque soit son état initial (et ce, même si l'état initial n'est pas pur [81]). Nous retrouvons ici que l'évolution de l'atome seul n'est pas unitaire : les états $|\pm\rangle_x$ initialement orthogonaux ne le sont plus à cet instant. Le champ, lui, se retrouve dans une superposition cohérente de deux états en opposition de phase, macroscopiquement distincts, qui n'est rien d'autre qu'un état *chat de Schrödinger*.

De plus, l'exposant dans C est sinusoïdal. Selon notre calcul, nous devrions donc avoir périodiquement (et indéfiniment) effondrement et résurgence des oscillations avec un contraste des oscillations de retour à 1 autour des temps de résurgence. Or nous avons vu sur la figure II.7(e) qu'il n'en était rien. La perte du contraste est également imputable à l'élargissement de la distribution en phases des composantes de champ non pris en compte. Il est toutefois possible d'obtenir des résurgences du signal sans perdre le contraste. La technique s'apparente à celle des échos de spin [82]. Nous allons effectuer une opération de renversement du temps pour reconstruire entièrement l'état initial. Les effets de la diffusion des phases seront compensés par les effets "retour" et les résurgences alors induites auront un contraste de un en l'absence de décohérence. Nous nous proposons d'étudier cette opération dans la section suivante.

II.5 Opération de renversement du temps

La première occurrence de résurgence spontanée a lieu autour de $155 \mu\text{s}$ (voir figure II.6) qui est un temps trop long à l'échelle de notre expérience car il nécessiterait des atomes plus lents que ce que nous pouvons obtenir. Nous allons donc forcer le système à “revenir en arrière dans le temps” pour récupérer le signal initial par une opération de “renversement du temps” qui va déconstruire entièrement l'évolution Jaynes-Cummings (unitaire) que nous avons étudiée jusque là, y compris la diffusion des phases. Les effets des processus irréversibles ne sont évidemment pas compensés par cette technique d'écho. Pour cette raison, cette technique est largement utilisée en résonance magnétique nucléaire qui étudie les processus de relaxation de spins. Son adaptation à des expériences de CQED a été proposée par Morigi *et al.* [83] et réalisée dans notre équipe au cours de la thèse de T. Meunier [55]. Elle consiste à faire interagir de manière résonnante atome et champ pendant un temps T_1 . On effectue alors l'opération de renversement du temps en appliquant l'opérateur σ_z sur les états atomiques $|\Psi^\pm(T_1)\rangle$, qui effectue un déphasage relatif de π entre l'état $|g\rangle$ et l'état $|e\rangle$. On laisse ensuite de nouveau interagir atome et champ pendant un temps T_2 . L'opérateur évolution total est formé du produit des opérateurs d'évolution de ces trois stades de l'expérience⁴ :

$$U = e^{-i\frac{H_{\text{JC}}T_2}{\hbar}} \sigma_z e^{-i\frac{H_{\text{JC}}T_1}{\hbar}}. \quad (\text{II.90})$$

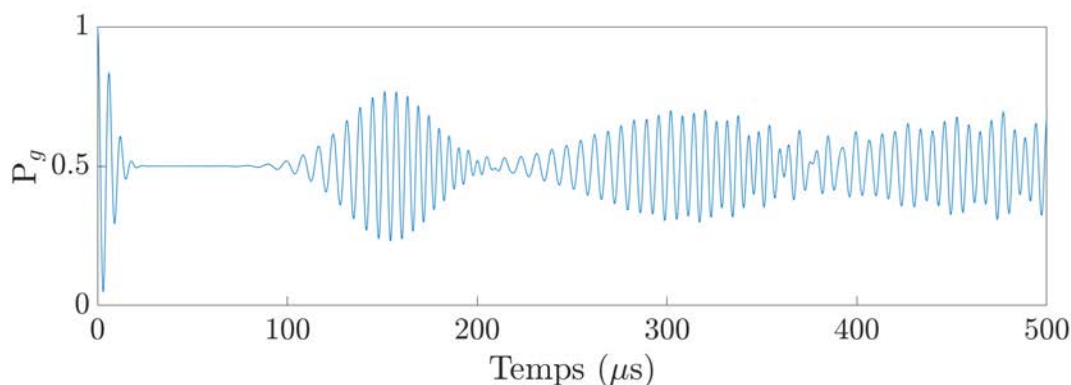
Or $\sigma_z \sigma_\pm \sigma_z = -\sigma_\pm$ donc :

$$\sigma_z H_{\text{JC}} \sigma_z = -H_{\text{JC}}. \quad (\text{II.91})$$

Cette expression montre explicitement que l'évolution du système est inversée après l'opération σ_z . En utilisant l'identité $\sigma_z^2 = \mathbb{1}$ et en introduisant σ_z^2 à gauche de la première exponentielle, l'opérateur évolution devient :

$$U = \sigma_z e^{-i\frac{H_{\text{JC}}(T_1 - T_2)}{\hbar}}. \quad (\text{II.92})$$

Pour $T_2 = T_1$, les composantes de champ sont de nouveau exactement superposées et le champ est revenu dans l'état initial. L'état atomique, lui, contient un déphasage de π entre les amplitudes associées à $|e\rangle$ et $|g\rangle$ dû à σ_z . Pour visualiser cette opération d'écho appliquée à un système où l'atome est initialement dans $|g\rangle$ et le champ dans $|\alpha\rangle$, nous avons intégré numériquement l'évolution hamiltonienne lorsque atome et champ sont à résonance. Le résultat est présenté sur la figure II.9. On peut y voir l'évolution de la probabilité de détecter l'atome dans $|g\rangle$ en fonction du temps d'interaction. Le premier insert rappelle l'évolution sans écho. Le deuxième montre la résurgence induite au bout d'un temps $2T_1$, qui correspond exactement au signal de départ, puis la suite de l'évolution sans opération de renversement du temps avec les résurgences spontanées de contraste plus faible. On constate que toute la dynamique après l'écho est simplement translatée de ce temps, la résurgence induite servant de nouvel "état initial" à l'évolution traitée précédemment. Pour la suite, nous ne nous intéresserons plus qu'à la résurgence induite, les résurgences



(a) Sans renversement du temps

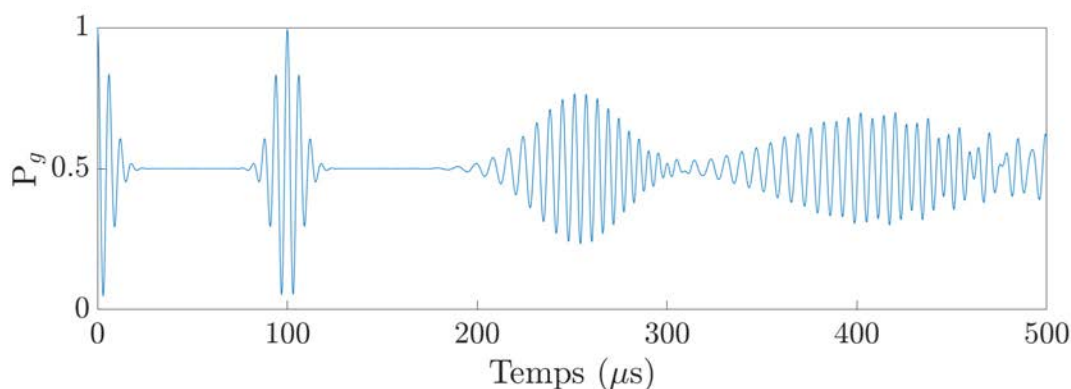
(b) Avec renversement du temps au bout de 50 μs

FIGURE II.9 – Oscillations de Rabi de l'atome avec un champ à résonance

Les oscillations présentées sont celles de l'interaction résonnante entre un atome préparé initialement dans $|g\rangle$ et un champ initialement cohérent et contenant $\bar{n} = 12,7$ photons en moyenne.

spontanées étant hors de portée expérimentalement.

Nous avons vu qu'il était possible de récupérer un très bon contraste en provoquant un résurgence induite par une opération de renversement du temps. Toutefois le signal obtenu est alors le même que le signal initial. Imaginons que le champ noté α soit en fait le petit champ β que nous souhaitons mesurer. Par une résurgence induite et donc identique aux oscillations initiales, nous n'aurions donc strictement pas plus de sensibilité qu'au départ sur le champ β . Autrement dit, nous n'aurions rien gagné par cette mesure et il ne faut donc pas appliquer cela directement au champ à mesurer. Par contre, la fréquence des oscillations de Rabi d'une résurgence induite dépend de l'amplitude du champ piégé. Une

4. Rappelons à ce stade que toute l'évolution est calculée en prenant l'atome au centre de la cavité et le Hamiltonien ne dépend donc pas du temps.

petite altération de ce champ aura donc pour effet de modifier la résurgence induite tout en gardant un très bon contraste. Nous pressentons que nous tenons là un moyen de mesurer un petit champ $|\beta\rangle$ en l'ajoutant au champ $|\alpha\rangle$ précédent et en regardant les changements dans la résurgence induite.

II.6 Séquence expérimentale

La séquence expérimentale de mesure du champ $|\beta\rangle$ se déroule en plusieurs étapes combinant les effets déjà étudiés. Le système initial est dans l'état $|\alpha, g\rangle$. Nous laissons interagir atome et champ à résonance pendant un temps T_1 . Nous effectuons une rotation d'un angle π du dipôle atomique autour de l'axe Oz de la sphère de Bloch pour renverser le temps. Nous injectons alors le champ $|\beta\rangle$ à mesurer puis nous laissons à nouveau le système couplé interagir à résonance pendant un temps T_2 . Le système est ensuite placé complètement hors résonance, ce qui gèle l'état atomique tel qu'il était à T_2 . La détection du dipôle atomique permet de retracer la probabilité de détecter l'atome dans l'état $|g\rangle$ en fonction de l'amplitude β après avoir moyenné sur un grand nombre de séquences expérimentales.

II.6.1 Première période d'interaction résonnante

Initialement, l'état du système couplé est $|\alpha\rangle|g\rangle$ où α peut être pris réel sans perte de généralité comme représenté sur la figure II.10 (en utilisant la représentation que nous avons définie dans la section II.4.3.b). Pour obtenir le nouvel état du système après une évolution selon le Hamiltonien de Jaynes-Cummings en couplage résonnant, nous utiliserons directement les résultats (II.64), (II.66), (II.65), (II.67), (II.68) de la section II.4.3.b. Pour les différentes étapes du calcul qui va suivre, nous indiquerons par un indice 1 toutes les valeurs des différentes grandeurs prises à T_1 lorsqu'il y a ambiguïté. Nous ferons de même pour la deuxième interaction résonnante à laquelle nous nous référerons avec l'indice 2.

Après une durée d'interaction à résonance T_1 , l'état devient :

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\chi_1} |\alpha^+\rangle |\Psi^+\rangle - e^{+i\chi_1} |\alpha^-\rangle |\Psi^-\rangle), \quad (\text{II.93})$$

avec comme composantes de champ et états atomiques :

$$|\alpha^\pm\rangle = |\alpha e^{\mp i\Phi_1}\rangle, \quad (\text{II.94})$$

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{\mp i\Phi_1} |e\rangle \pm |g\rangle), \quad (\text{II.95})$$

et comme phases d'interaction :

$$\Phi_1 = \frac{\Omega_0 T_1}{4\alpha}, \quad (\text{II.96})$$

$$\chi_1 = \alpha^2 \Phi_1 = \frac{\Omega_0 \alpha T_1}{4}. \quad (\text{II.97})$$

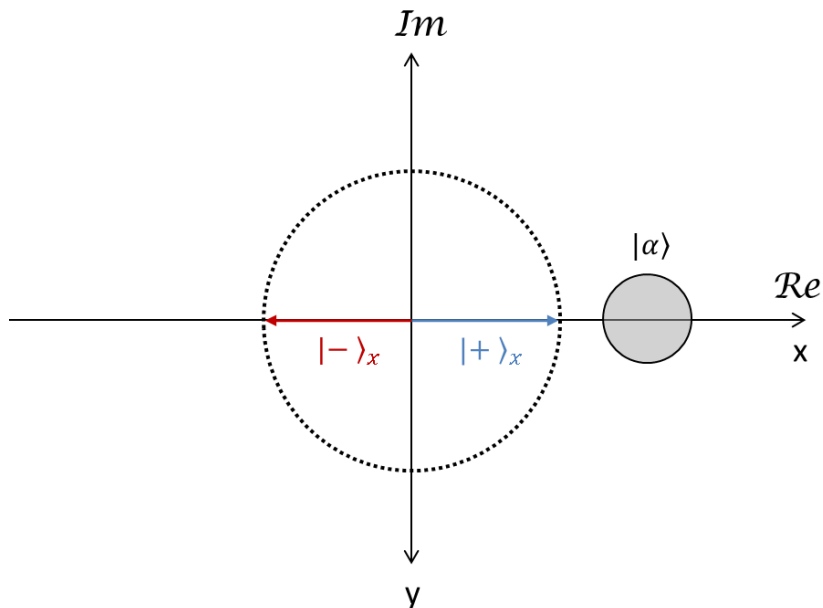


FIGURE II.10 – Etat du système atome-champ au début de la séquence expérimentale
 Le champ $|\alpha\rangle$ est initialement injecté puis on prépare l'atome dans l'état $|g\rangle$. Le dipôle atomique n'étant pas état propre de l'interaction atome-champ, il est commode pour la suite de la séquence de le décomposer sur les deux états propres $|+\rangle_x$ et $|-\rangle_x$.

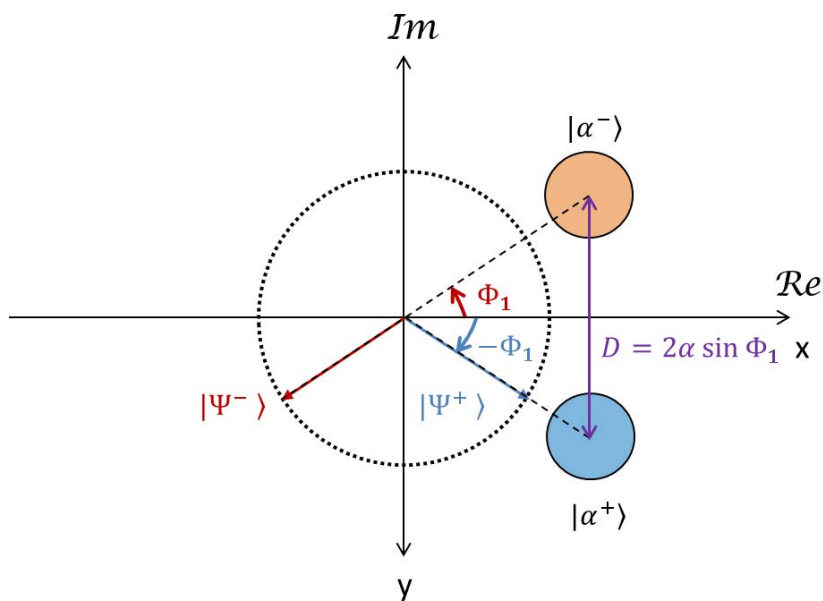


FIGURE II.11 – Etat du système atome-champ à la fin de la 1^{re} période d'interaction résonnante
 A la fin de l'interaction, dipôle et champ en opposition de phase auront tourné d'un angle $\Phi_1 = \Omega_0 T_1 / (4\alpha)$. Dipôle et champ en phase auront tourné d'un angle opposé. La composante de champ cohérent initiale s'est dissociée en deux composantes séparées d'une distance D .

Cet état final de la première période d'interaction résonnante est représenté sur la figure II.11. Le champ est à présent composé de deux composantes cohérentes ayant une phase classique $\pm\Phi_1$ selon l'état propre atomique associé.

II.6.2 Renversement du temps

A l'instant T_1 , nous retournons le dipôle atomique grâce à l'opérateur σ_z . L'amplitude associée à l'état atomique $|g\rangle$ est déphasée de π par rapport à celle associée à l'état $|e\rangle$. Nous obtenons simplement l'état suivant :

$$|\psi_{\text{renv}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\chi_1} |\alpha^+\rangle |\Psi_{\text{renv}}^+\rangle - e^{+i\chi_1} |\alpha^-\rangle |\Psi_{\text{renv}}^-\rangle \right), \quad (\text{II.98})$$

avec :

$$|\Psi_{\text{renv}}^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{\mp i\Phi_1} |e\rangle \mp |g\rangle \right). \quad (\text{II.99})$$

A la fin de cette étape, nous avons préparé complètement l'état qui va interagir avec le petit champ à mesurer. Il est représenté sur la figure II.12. Cet état correspond en quelque sorte à l'état initial de notre mesure du champ β . Il est entièrement déterminé par la donnée de α et T_1 (Ω_0 étant fixé dans notre dispositif expérimental). Il s'agit maintenant d'injecter dans la cavité le champ à mesurer avant de faire la mesure proprement dite.

II.6.3 Injection de β

Nous injectons juste après avoir inversé la dynamique le petit champ $|\beta\rangle$ dont l'amplitude est également réelle. Les composantes de champ subissent alors un déplacement $\hat{D}(\beta)$ dans l'espace des phases mais les états atomiques ne sont pas modifiés. Détaillons d'abord l'effet de $\hat{D}(\beta)$ sur $|\alpha^+\rangle$:

$$\hat{D}(\beta)|\alpha^+\rangle = e^{\frac{1}{2}(\beta\alpha^- - \beta\alpha^+)} |\alpha^+ + \beta\rangle \quad (\text{II.100})$$

$$= e^{\frac{1}{2}\beta\alpha[\exp(i\Phi_1) - \exp(-i\Phi_1)]} |\alpha^+ + \beta\rangle \quad (\text{II.101})$$

$$= e^{i\beta\alpha \sin \Phi_1} |\alpha^+ + \beta\rangle. \quad (\text{II.102})$$

De la même manière, on obtient le résultat de l'action de $\hat{D}(\beta)$ sur $|\alpha^-\rangle$:

$$\hat{D}(\beta)|\alpha^-\rangle = e^{-i\beta\alpha \sin \Phi_1} |\alpha^- + \beta\rangle. \quad (\text{II.103})$$

L'action de l'opérateur déplacement sur un état cohérent redonne bien sûr un état cohérent. On peut donc exprimer les états $|\alpha^\pm + \beta\rangle$ sous la forme $|\tilde{\alpha}e^{i\mp\tilde{\Phi}}\rangle$ dont l'amplitude et la phase classique peuvent être déterminées géométriquement. Tous les angles et les distances d'intérêt sont représentés sur la figure II.13. On se convaincra alors aisément des

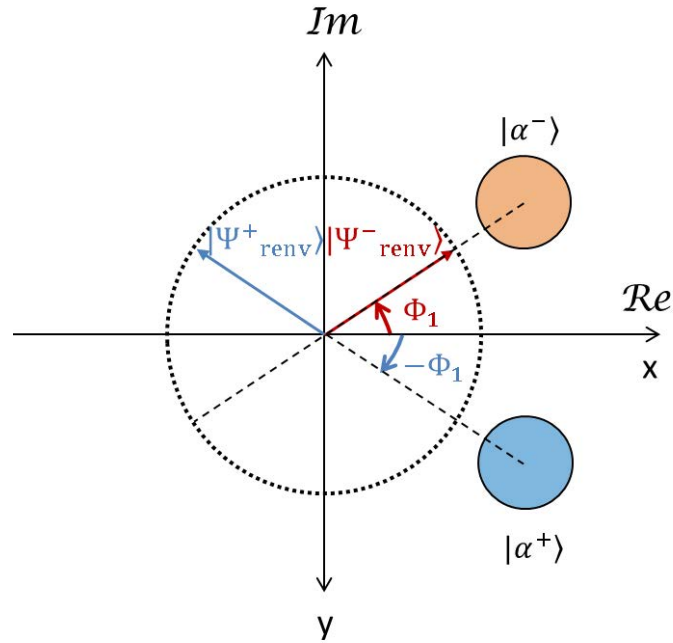


FIGURE II.12 – Etat du système atome-champ après l'opération de renversement du temps

L'opération σ_z provoque une rotation de π des dipôles atomiques mais laisse les composantes de champ inchangées. Ceci permet d'inverser la dynamique dans les étapes suivantes.

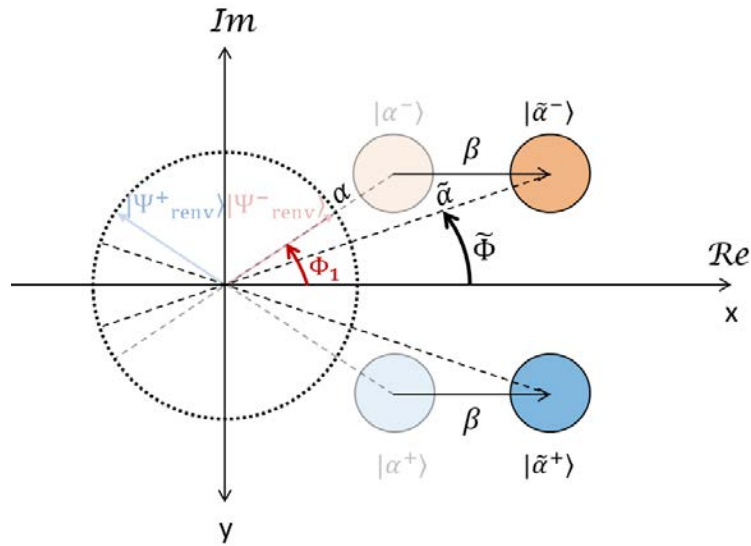


FIGURE II.13 – Déplacement des composantes de champ par l'injection d'un champ β
L'injection déplace les composantes de champ selon l'axe des réels d'une quantité β en laissant l'état atomique inchangé.

expressions donnant l'amplitude des composantes de champs et des phases d'interaction qui suivent. Nous obtenons donc, en regroupant toutes les expressions obtenues à ce stade :

$$|\tilde{\psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\tilde{\chi}}|\tilde{\alpha}^+\rangle|\Psi_{\text{renv}}^+\rangle - e^{+i\tilde{\chi}}|\tilde{\alpha}^-\rangle|\Psi_{\text{renv}}^-\rangle), \quad (\text{II.104})$$

avec :

$$|\tilde{\alpha}^\pm\rangle = |\tilde{\alpha}e^{\mp i\tilde{\Phi}}\rangle, \quad (\text{II.105})$$

$$|\Psi_{\text{renv}}^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{\mp i\Phi_1}|e\rangle \mp |g\rangle), \quad (\text{II.106})$$

$$\tilde{\chi} = \chi_1 - \alpha\beta \sin \Phi_1 = \alpha^2\Phi_1 - \alpha\beta \sin \Phi_1, \quad (\text{II.107})$$

$$\tilde{\alpha} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos \Phi_1}, \quad (\text{II.108})$$

$$\tilde{\Phi} = \arctan\left(\frac{\alpha \sin \Phi_1}{\alpha \cos \Phi_1 + \beta}\right). \quad (\text{II.109})$$

II.6.4 Deuxième interaction résonnante

Le nouvel état “initial” (II.104) de cette étape de la séquence correspond à une superposition de dipôles atomiques associés à une composante de champ. Chacun de ces couples dipôle-champ cohérent va suivre une dynamique identique à celle traitée dans la partie II.6.1 et nous pourrons de la même manière utiliser les résultats (II.64), (II.66), (II.65), (II.67), (II.68) pour chacun de ces couples. Cette étape de deuxième interaction résonnante correspond à un processus dépendant de β qui va nous permettre de mesurer ce dernier. Elle est déterminée par la donnée de T_2 .

Nous nous intéressons pour l'instant au premier couple $|\tilde{\alpha}^+\rangle|\Psi_{\text{renv}}^+\rangle$. L'état cohérent associé va se séparer en deux composantes qui vont tourner avec les deux états propres de l'interaction pour l'état atomique. Le premier état propre correspond au dipôle en phase $|\tilde{\Psi}^{++}\rangle$ avec la composante $|\psi_{\text{renv}}^+\rangle$ de phase $-\tilde{\Phi}$ et le deuxième $|\tilde{\Psi}^{+-}\rangle$ est en opposition de phase (voir figure II.14) :

$$|\tilde{\Psi}^{++}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\tilde{\Phi}}|e\rangle + |g\rangle), \quad (\text{II.110})$$

$$|\tilde{\Psi}^{+-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\tilde{\Phi}}|e\rangle - |g\rangle). \quad (\text{II.111})$$

Pour déterminer l'évolution de ce couple, il faut donc décomposer $|\Psi_{\text{renv}}^+\rangle$ sur ces deux états en utilisant les formules (II.73) et (II.74) :

$$|\Psi_{\text{renv}}^+\rangle = A_I |\tilde{\Psi}^{++}\rangle + A_{II} |\tilde{\Psi}^{+-}\rangle \quad \text{avec} \quad A_I = \frac{1}{2} (e^{i(-\Phi_1+\tilde{\Phi})} - 1), \quad (\text{II.112})$$

$$A_{II} = \frac{1}{2} (e^{i(-\Phi_1+\tilde{\Phi})} + 1). \quad (\text{II.113})$$

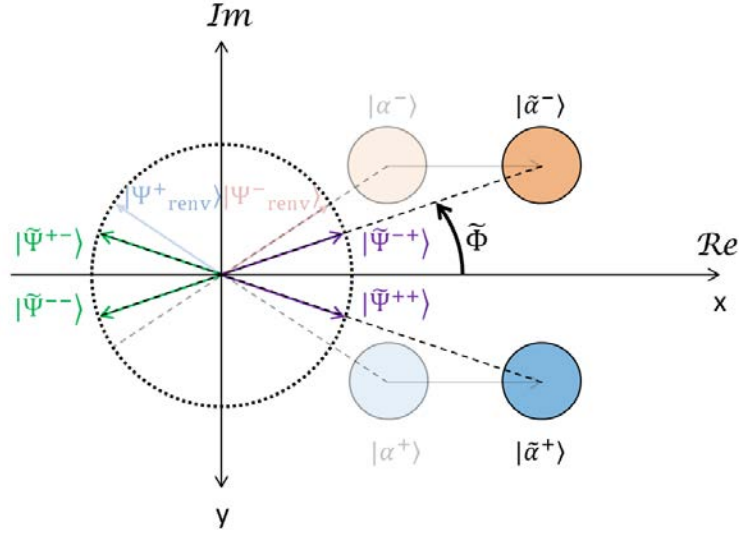


FIGURE II.14 – Décomposition des dipôles atomiques sur les états propres de la deuxième interaction résonnante

Les dipôles atomiques n'étant pas affectés par l'injection, ils ne sont plus états propres de l'interaction avec les composantes de champ déplacés. Nous les décomposons donc en dipôles atomiques propres en phase (flèches violettes) et en opposition de phase (flèches vertes) avec les composantes.

Au bout d'une durée T_2 d'interaction résonnante entre atome et champ, le dipôle $|\tilde{\Psi}^{++}\rangle$ et la nouvelle composante de champ associée auront tourné d'un angle $-\Phi_2$ tandis que le dipôle $|\tilde{\Psi}^{+-}\rangle$ ainsi que la composante associée auront tourné d'un angle $+\Phi_2$ où Φ_2 est défini comme :

$$\Phi_2 = \frac{\Omega_0 T_2}{4\tilde{\alpha}}. \quad (\text{II.114})$$

En ce qui concerne le deuxième couple, on fait le même raisonnement de décomposition de $|\Psi_{\text{renv}}^-\rangle$ sur $|\tilde{\Psi}^{-+}\rangle$ et $|\tilde{\Psi}^{--}\rangle$, aussi représentés sur la figure II.14, tels que :

$$|\tilde{\Psi}^{-+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\tilde{\Phi}}|e\rangle + |g\rangle), \quad (\text{II.115})$$

$$|\tilde{\Psi}^{--}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\tilde{\Phi}}|e\rangle - |g\rangle). \quad (\text{II.116})$$

Les coefficients de cette décomposition sont donnés par :

$$|\Psi_{\text{renv}}^-\rangle = A_{\text{III}}|\tilde{\Psi}^{-+}\rangle + A_{\text{IV}}|\tilde{\Psi}^{--}\rangle \quad \text{avec} \quad A_{\text{III}} = \frac{1}{2} (e^{i(\Phi_1 - \tilde{\Phi})} + 1), \quad (\text{II.117})$$

$$A_{\text{IV}} = \frac{1}{2} (e^{i(\Phi_1 - \tilde{\Phi})} - 1). \quad (\text{II.118})$$

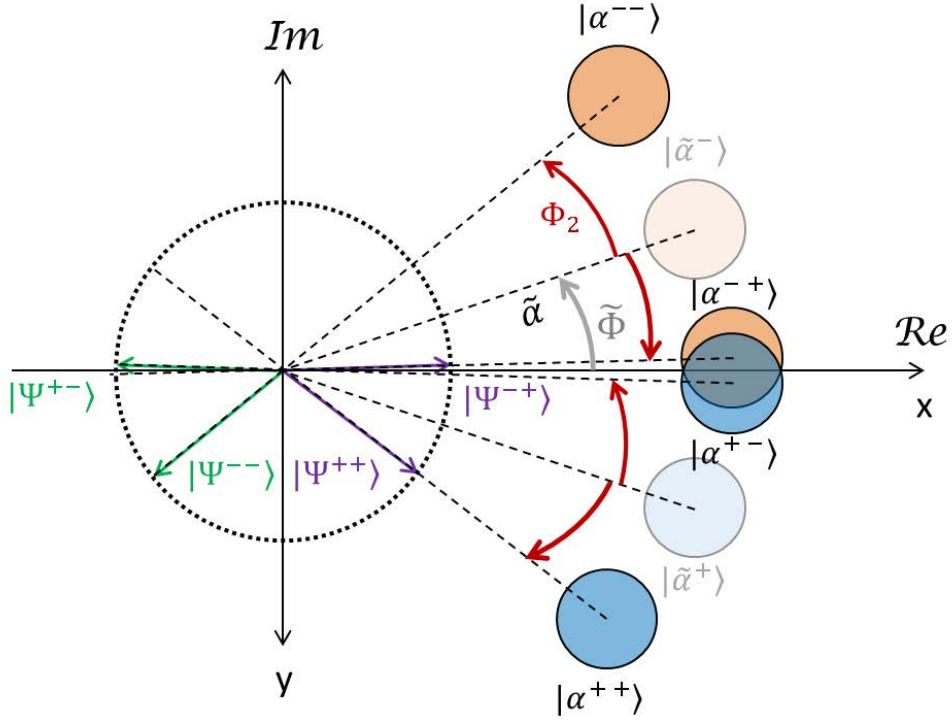


FIGURE II.15 – Etat final de la séquence expérimentale pour le système atome-champ
 Les dipôles atomiques finaux sont représentés en vert et en violet tandis que les 4 composantes de champ associées sont représentées en orange et bleu (foncés).

Le dipôle $|\tilde{\Psi}^{-+}\rangle$ va tourner de l'angle $-\Phi_2$ pendant la durée T_2 d'interaction résonnante et $|\tilde{\Psi}^{--}\rangle$ de l'angle $+\Phi_2$. Au total, après ce deuxième temps d'interaction, l'état du système est ainsi la superposition de quatre couples dipôle-champ cohérent :

$$\begin{aligned}
 |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} & \left[A_I e^{-i(\tilde{\chi}+\chi_2)} |\alpha^{++}\rangle |\Psi^{++}\rangle \right. \\
 & + A_{II} e^{-i(\tilde{\chi}-\chi_2)} |\alpha^{+-}\rangle |\Psi^{+-}\rangle \\
 & - A_{III} e^{+i(\tilde{\chi}-\chi_2)} |\alpha^{-+}\rangle |\Psi^{-+}\rangle \\
 & \left. - A_{IV} e^{+i(\tilde{\chi}+\chi_2)} |\alpha^{--}\rangle |\Psi^{--}\rangle \right]
 \end{aligned} \tag{II.119}$$

où l'on pose :

$$\begin{aligned}
|\alpha^{++}\rangle &= |\tilde{\alpha}e^{-i(\tilde{\Phi}+\Phi_2)}\rangle & |\Psi^{++}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i(\tilde{\Phi}+\Phi_2)}|e\rangle + |g\rangle \right) \\
|\alpha^{+-}\rangle &= |\tilde{\alpha}e^{-i(\tilde{\Phi}-\Phi_2)}\rangle & |\Psi^{+-}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i(\tilde{\Phi}-\Phi_2)}|e\rangle - |g\rangle \right) \\
|\alpha^{-+}\rangle &= |\tilde{\alpha}e^{+i(\tilde{\Phi}-\Phi_2)}\rangle & |\Psi^{-+}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{+i(\tilde{\Phi}-\Phi_2)}|e\rangle + |g\rangle \right) \\
|\alpha^{--}\rangle &= |\tilde{\alpha}e^{+i(\tilde{\Phi}+\Phi_2)}\rangle & |\Psi^{--}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{+i(\tilde{\Phi}+\Phi_2)}|e\rangle - |g\rangle \right)
\end{aligned} \tag{II.120}$$

avec une phase d'interaction :

$$\chi_2 = \tilde{\alpha}^2 \Phi_2. \tag{II.121}$$

Cet état est représenté sur la figure II.15. Il correspond à celui obtenu à la fin de la séquence expérimentale de métrologie.

II.6.5 Détection de l'état atomique au temps de résurgence exact

Connaissant l'état du système couplé à la fin de la séquence expérimentale, il est aisé d'en déduire la probabilité P_g de détecter $|g\rangle$ en fonction de l'amplitude β . Elle correspond en effet à $\langle C_g | C_g \rangle$ avec :

$$\begin{aligned}
|C_g\rangle &= \frac{1}{2} \left[A_{\text{I}} e^{-i(\tilde{\chi}+\chi_2)} |\alpha^{++}\rangle - A_{\text{II}} e^{-i(\tilde{\chi}-\chi_2)} |\alpha^{+-}\rangle \right. \\
&\quad \left. - A_{\text{III}} e^{+i(\tilde{\chi}-\chi_2)} |\alpha^{-+}\rangle + A_{\text{IV}} e^{+i(\tilde{\chi}+\chi_2)} |\alpha^{--}\rangle \right].
\end{aligned} \tag{II.122}$$

Commençons par regarder ce que l'on obtient quand $T_2 = T_1$ c'est-à-dire lorsque l'on se trouve exactement au temps de résurgence des oscillations. A ce moment là, les composantes $|\alpha^{+-}\rangle$ et $|\alpha^{-+}\rangle$ sont rigoureusement superposées. Les autres composantes sont plus nettement séparées les unes des autres et ont comme produit scalaire :

$$\begin{aligned}
|\langle \alpha^{++} | \alpha^{--} \rangle| &= e^{-\tilde{\alpha}^2(1-\cos(2\tilde{\Phi}+2\Phi_2))}, \\
|\langle \alpha^{++} | \alpha^{+-} \rangle| &= |\langle \alpha^{-+} | \alpha^{--} \rangle| = e^{-\tilde{\alpha}^2(1-\cos(2\Phi_2))}, \\
|\langle \alpha^{++} | \alpha^{-+} \rangle| &= |\langle \alpha^{+-} | \alpha^{--} \rangle| = e^{-\tilde{\alpha}^2(1-\cos(2\tilde{\Phi}))}.
\end{aligned} \tag{II.123}$$

En première approximation, nous négligerons naïvement les termes croisés (on voit sur la figure II.15 que seules les composantes $|\alpha^{+-}\rangle$ et $|\alpha^{-+}\rangle$ ont un recouvrement important). Cette approximation sera d'autant plus valable que T_1 est grand. La probabilité P_g devient alors :

$$P_g = \frac{1}{16} [\gamma + 2 \operatorname{Re} \xi], \tag{II.124}$$

en posant :

$$\begin{aligned}\gamma &= 2 \left| e^{-i(\tilde{\Phi}-\Phi_1)} - 1 \right|^2 + 2 \left| e^{+i(\tilde{\Phi}-\Phi_1)} + 1 \right|^2, \\ \xi &= e^{2i(\tilde{\chi}-\chi_2)} \left(e^{-i(\tilde{\Phi}-\Phi_1)} + 1 \right)^2 \langle \alpha^{+-} | \alpha^{-+} \rangle.\end{aligned}\quad (\text{II.125})$$

Au temps exact de résurgence, le produit scalaire $\langle \alpha^{+-} | \alpha^{-+} \rangle$ vaut 1. On introduit les notations $\Delta\Phi_1$ et $\Delta\chi_2$:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_1 &= \tilde{\Phi} - \Phi_1, \\ \Delta\chi &= 2(\tilde{\chi} - \chi_2).\end{aligned}\quad (\text{II.126})$$

Un calcul rapide montre que $\gamma = 4$. La probabilité P_g se simplifie alors en :

$$\begin{aligned}P_g &= \frac{1}{8} \left[4 + \text{Re} \left(e^{+i\Delta\chi} (e^{-2i\Delta\Phi_1} + 1)^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{8} [4 + \cos(\Delta\chi - 2\Delta\Phi_1) + \cos(\Delta\chi) + 2\cos(\Delta\chi - 2\Delta\Phi_1)] \\ &= \frac{1}{8} \left[4 + 2\cos\left(\frac{2\Delta\chi - 3\Delta\Phi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\Delta\Phi_1}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{2\Delta\chi - \Delta\Phi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\Delta\Phi_1}{2}\right) \right]\end{aligned}$$

où l'on a utilisé pour la dernière ligne, la formule $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

En se plaçant à $T_2 = T_1$ et en négligeant les recouvrements des composantes de champ autres que $|\alpha^{+-}\rangle$ et $|\alpha^{-+}\rangle$, la probabilité de détecter $|g\rangle$ après une durée $2T_1$ prend donc une expression très simple :

$$P_g = \frac{1}{2} \left[1 + \cos^2\left(\frac{\Delta\Phi_1}{2}\right) \cos(\Delta\chi - \Delta\Phi_1) \right]. \quad (\text{II.127})$$

On continue le calcul avec $T_1 \ll 4\alpha/\Omega_0$ puisque ce sera le cas de notre expérience (nous avons choisi α expérimentalement en conséquence). Alors $\sin\Phi_1 \sim \Phi_1$ et $\cos\Phi_1 \sim 1$ et on a, à l'ordre 1 en Φ_1 :

$$\tilde{\alpha} \sim \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta} = \alpha + \beta, \quad (\text{II.128})$$

et,

$$\Delta\Phi_1 \sim \arctan\left(\frac{\alpha\Phi_1}{\alpha + \beta}\right) - \Phi_1. \quad (\text{II.129})$$

En remarquant que $\alpha/(\alpha + \beta)$ et $\beta/(\alpha + \beta)$ sont inférieurs à 1, cette dernière expression peut se simplifier encore :

$$\Delta\Phi_1 \sim \frac{\alpha\Phi_1}{\alpha + \beta} - \Phi_1 = \frac{-\beta\Phi_1}{\alpha + \beta}. \quad (\text{II.130})$$

On obtient donc à l'ordre en $1 \Phi_1$:

$$\cos\left(\frac{\Delta\Phi_1}{2}\right) \sim 1 \quad (\text{II.131})$$

Il nous reste à déterminer l'expression de $\Delta\chi$:

$$\Delta\chi = 2(\tilde{\chi} - \chi_2) = 2\Phi_1\alpha^2 - 2\alpha\beta\sin\Phi_1 - 2\tilde{\alpha}^2\Phi_2, \quad (\text{II.132})$$

or, $\Phi_2 = \frac{\Omega_0 T_2}{4\alpha} = \Phi_1 \frac{\alpha}{\tilde{\alpha}}$ car $T_2 = T_1$. Donc,

$$\begin{aligned} \Delta\chi &\sim 2(\phi 1\alpha^2 - \alpha\beta\Phi_1 - \Phi_1\alpha\tilde{\alpha}) \\ &\sim 2\alpha\Phi_1(\alpha - \beta - \tilde{\alpha}), \end{aligned} \quad (\text{II.133})$$

d'où,

$$\Delta\chi \sim -4\alpha\beta\Phi_1 \sim -4\alpha\beta\sin\Phi_1. \quad (\text{II.134})$$

Forts des expressions (II.128), (II.131) et (II.134), nous sommes en mesure d'écrire la probabilité P_g de détecter $|g\rangle$ au temps de résurgence en fonction de l'amplitude β du champ à mesurer (au 1^{er} ordre en Φ_1 et en négligeant les termes de recouvrement moindre entre les composantes éloignées à la fin de la 2^e interaction résonnante) :

$$P_g(\beta) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2\beta D)], \quad (\text{II.135})$$

où l'on a reconnu la distance D séparant les composantes de champ à la fin de la 1^{re} interaction résonnante :

$$D = 2\alpha\sin\Phi_1. \quad (\text{II.136})$$

Sensibilité de la mesure

Le signal que nous obtenons à la suite de la mesure étant donné par $P_g(\beta)$, il est naturel de penser que la sensibilité de la mesure sera d'autant plus grande que P_g varie fortement avec la valeur de β . La sensibilité de la mesure est donnée ainsi par :

$$\eta = \left| \frac{\partial P_g(\beta)}{\partial \beta} \right| = D |\sin(2\beta D)|. \quad (\text{II.137})$$

Nous avons ici présenté un processus de mesure assez complexe et nous nous sommes demandés s'il n'aurait pas été possible d'obtenir la même sensibilité avec un processus plus simple. Notre équipe s'étant toujours particulièrement intéressée aux chats de Schrödinger, une idée aurait donc pu être de mesurer un champ β en utilisant un état chat du type $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha e^{+i\phi}\rangle - |\alpha e^{-i\phi}\rangle)$ dont la fonction de Wigner dans le plan complexe comporte des

petites structures très sensibles à une modification du champ : les “moustaches” du chat. Rappelons ici l’expression de la fonction de Wigner W [68] :

$$W(\gamma) = \frac{2}{\pi} \text{Tr}(\hat{D}(-\gamma)\hat{\rho}\hat{D}(\gamma)\hat{\Pi}), \quad (\text{II.138})$$

où γ est l’amplitude *complexe* d’un point de l’espace des phases, $\hat{\rho}$ est la matrice densité de l’état, $\hat{D}$ est l’opérateur déplacement (à ne pas confondre avec la distance D de la formule (II.86)) et $\hat{\Pi}$ est l’opérateur parité qui effectue une symétrie centrale des états dans l’espace des phases. Son action sur les états de Fock s’écrit : $\hat{\Pi}|n\rangle = (-1)^n|n\rangle$. La fonction de Wigner est donc obtenue en prenant la valeur moyenne de l’opérateur $2\hat{\Pi}/\pi$ dans l’état déplacé de l’amplitude complexe $-\gamma$. Le calcul de la fonction de Wigner pour l’état chat précédent déplacé de $-\beta$ nous donne [57] :

$$W^-(\beta) = \frac{2}{\pi(1 + e^{-2|\alpha|^2})} \left[e^{-2|\beta-\alpha|^2} + e^{-2|\beta+\alpha|^2} - 2e^{-2|\beta|^2} \cos(2D\beta) \right]. \quad (\text{II.139})$$

La fonction W est représentée sur la figure II.16. Les deux premiers termes de W correspondent aux deux pics gaussiens centrés autour des amplitudes complexes α^+ et α^- . Le dernier terme correspond aux franges d’interférences quantiques entre les deux amplitudes : ce sont les “moustaches” du chat. Elles oscillent exactement avec la même pulsation que la probabilité de trouver $|g\rangle$ à la fin de notre séquence expérimentale (voir expression II.135). Donc, si l’on faisait une expérience qui consiste à préparer le chat précédent, à

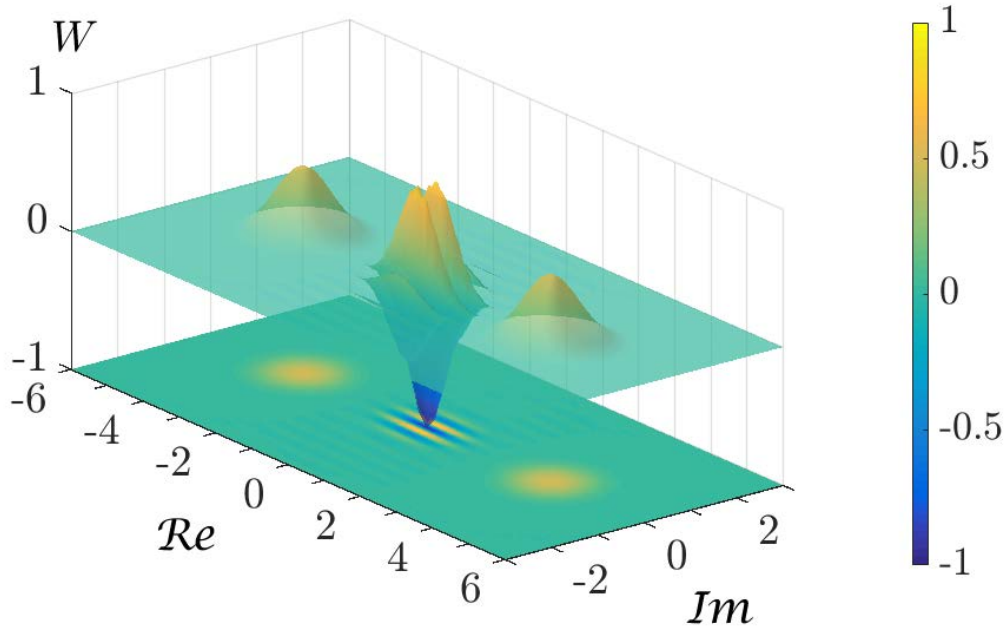


FIGURE II.16 – Fonction de Wigner d’un chat de Schrödinger impair à $\bar{n} = \sqrt{12}, 7$

le déplacer d'une amplitude réelle β et à mesurer le recouvrement entre le chat initial et le chat déplacé, cette expérience aurait la même sensibilité que la nôtre. Toutefois, sa plage d'utilisation serait restreinte à la mesure de petits champs β puisque le recouvrement entre le chat initial et le champ déplacé est sensiblement nul pour un déplacement de plus de 1 dans l'espace des phases. Au contraire, nous n'avons pas fait d'hypothèse sur β lors de notre calcul. Notre expérience permet donc a priori la mesure d'amplitudes β aussi grandes que l'on veut. L'aspect expérimental peut bien sûr introduire des limitations supplémentaires sur la valeur de β .

Si l'on s'intéresse à des champs β d'amplitude plus petite que 1, on souhaite avoir une bonne sensibilité de la mesure autour de $\beta = 0$. Cette sensibilité correspond à la pulsation de $\cos(2\beta D) = \cos(\Omega_0 T_1 \beta)$. Plus T_1 sera grand, meilleure sera la sensibilité. En pratique, la valeur de T_1 que nous utiliserons sera essentiellement limitée par les contraintes expérimentales, comme nous le verrons dans le chapitre suivant. Si on trace la probabilité de détecter $|g\rangle$ (II.135) en fonction de β pour $T_2 = T_1$, nous voyons que nous nous situons à un maximum du cosinus en $\beta = 0$. En effet, $\eta = 0$ pour $\beta = 0$ et pour un tout petit β non nul, la probabilité de détecter $|g\rangle$ sera ainsi pratiquement inchangée. A $T_2 = T_1$, notre mesure n'est donc pas la plus sensible que l'on puisse faire.

II.6.6 Détection de l'état atomique autour du temps de résurgence

À cause de la fonction cosinus dans l'expression de $P_g(\beta)$, la meilleure sensibilité est plutôt obtenue à mi-pente des oscillations. En effet, une légère modification de β induirait alors le plus grand changement possible sur la valeur de la probabilité : $\eta_{\max} = D$ pour $\beta = \pi/(4D)$. Il faut donc se déplacer en temps de telle sorte que $P_g(\beta = 0) = \frac{1}{2}$. Nous allons de ce fait regarder comment évolue la probabilité de détecter $|g\rangle$ si on modifie un peu T_2 autour de T_1 . Bien sûr, on ne peut pas s'éloigner trop de $T_2 = T_1$ sous peine de voir le contraste diminuer drastiquement. Nous concentrons donc pour la suite nos calculs sur les temps T_2 proches de T_1 .

Si nous changeons la durée de la 2^e interaction résonnante entre atome et champ autour du temps de résurgence, la probabilité de détecter $|g\rangle$ s'en retrouvera légèrement modifiée. L'expression (II.124) avec les arguments (II.125) est toujours valide. Toutefois, le recouvrement entre $|\alpha^{+-}\rangle$ et $|\alpha^{-+}\rangle$ n'est plus égal à 1. Le produit scalaire a l'expression suivante :

$$\langle \alpha^{+-} | \alpha^{-+} \rangle = e^{-\tilde{\alpha}^2 [1 - \cos(2(\tilde{\Phi} - \Phi_2))]} e^{-i\tilde{\alpha}^2 \sin(2(\tilde{\Phi} - \Phi_2))}. \quad (\text{II.140})$$

On introduit les différentes notations suivantes :

$$\Delta\Phi_2 = \tilde{\Phi} - \Phi_2, \quad (\text{II.141})$$

$$\Delta\chi' = \Delta\chi + \tilde{\alpha}^2 \sin(2\Delta\Phi_2), \quad (\text{II.142})$$

$$C = e^{-\tilde{\alpha}^2 [1 - \cos(2\Delta\Phi_2)]}. \quad (\text{II.143})$$

La probabilité d'obtenir $|g\rangle$ à la fin de la séquence expérimentale est alors donnée par :

$$P_g = \frac{1}{2} \left[1 + C \cos^2 \left(\frac{\Delta\Phi_1}{2} \right) \cos(\Delta\chi' - \Delta\Phi_1) \right]. \quad (\text{II.144})$$

A l'ordre 1 en Φ_1 , on a toujours $\cos^2(\Delta\Phi_1/2) \sim 1$. La probabilité prend alors la forme :

$$P_g = \frac{1}{2} [1 + C \cos(\Delta\chi' - \Delta\Phi_1)]. \quad (\text{II.145})$$

Sans surprise, le contraste (II.143) est uniquement déterminé par le recouvrement entre les composantes $|\alpha^{+-}\rangle$ et $|\alpha^{-+}\rangle$. A l'ordre 1 en Φ_1 , $\Delta\Phi_2 \sim \Omega_0(T_1 - T_2)/(4(\alpha + \beta))$. On peut donc simplifier le contraste sous la forme d'une gaussienne :

$$C = e^{-\frac{1}{8}\Omega_0^2(T_1-T_2)^2}. \quad (\text{II.146})$$

Regardons ce qui se passe pour les oscillations du signal. L'argument du cosinus sera noté τ . Nous pouvons en donner une écriture détaillée en fonction de $\Phi_1, \Phi_2, \Delta\Phi_1, \Delta\Phi_2$:

$$\tau = 2\alpha^2\Phi_1 - 2\alpha\beta\sin\Phi_1 - 2\tilde{\alpha}^2\Phi_2 + \tilde{\alpha}^2\sin(2\Delta\Phi_2) - \Delta\Phi_1 \quad (\text{II.147})$$

Nous rappelons qu'à l'ordre 1 $\Delta\Phi_1 \sim -\beta\Phi_1/(\alpha + \beta)$. De la même manière, nous pouvons approcher $\Delta\Phi_2$ par :

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_2 &= \frac{\Omega_0 T_1}{4\alpha} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \\ \Delta\Phi_2 &\sim \Phi_1 \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \end{aligned} \quad (\text{II.148})$$

avec $\alpha/(\alpha + \beta) \leq 1$. Donc $\sin(2\Delta\Phi_2) \sim 2\Delta\Phi_2$. On a alors :

$$\begin{aligned} \tau &\sim 2\alpha^2\Phi_1 - 2\alpha\beta\Phi_1 - 2\tilde{\alpha}^2\Phi_2 + 2\tilde{\alpha}^2\tilde{\Phi} - 2\tilde{\alpha}\Phi_2 + \Phi_1 \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \\ \tau &\sim 2\alpha^2\Phi_1 - \alpha\Omega_0 T_2 - \beta\Omega_0 T_2 + 2\alpha^2\Phi_1 + \Phi_1 \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \end{aligned} \quad (\text{II.149})$$

soit :

$$\tau \sim \alpha\Omega_0(T_1 - T_2) - \beta\Omega_0 T_2 + \Omega_0 \alpha \frac{\beta}{4\alpha(\alpha + \beta)}, \quad (\text{II.150})$$

que, lorsque $\beta \ll \alpha$, on peut réduire à :

$$\tau \sim \alpha\Omega_0(T_1 - T_2) - \beta\Omega_0 T_2. \quad (\text{II.151})$$

En résumé, nous obtenons donc la forme suivante autour du 1^{er} temps de résurgence ($T_1 = T_2$), en négligeant toujours les termes de recouvrement secondaires pour les composantes de champ et pour $T_1 \ll 4\alpha/\Omega_0$:

$$P_g = \frac{1}{2} [1 + C \cos(\tau)], \quad (\text{II.152})$$

avec :

$$C = e^{-\frac{1}{8}\Omega_0^2(T_1-T_2)^2}, \quad (\text{II.153})$$

$$\tau = \alpha\Omega_0(T_1 - T_2) - \beta\Omega_0T_2. \quad (\text{II.154})$$

Nous pouvons vérifier que nous retrouvons bien les résultats de la section II.6.5 si l'on pose $T_2 = T_1$. La forme (II.152) nous montre que la sensibilité η est d'autant plus grande que T_2 est grand, puisque les oscillations de P_g sont alors plus rapides, et donc d'autant plus grande que T_1 est grand car $T_2 \approx T_1$. Une bonne sensibilité requiert donc d'avoir une grande distance $D = 2\alpha \sin \Phi_1$ entre les composantes de la superposition obtenue à la fin de l'interaction. Pour α donné, la distance maximale que l'on peut obtenir est 2α soit $\Omega_0 T_1 / \pi$ pour $T_1 = 2\pi\alpha / \Omega_0$. Pour un nombre de ressources en énergie fixé, la meilleure sensibilité est donc obtenue en laissant l'atome et le champ cohérent interagir jusqu'à ce que les deux composantes de champ aient tourné de $\pi/2$. Ceci correspond au cas envisagé dans l'article [41]. Cette proposition de Zurek *et al.* est d'ailleurs celle qui a initialement motivé notre expérience. Toutefois, notre dispositif expérimental est limité par le temps de préparation T_1 plutôt que par l'énergie : notre ressource limitante est donc le temps. A T_1 fixé, la plus grande distance possible est obtenue en augmentant α jusqu'à :

$$D_{\max} = \frac{\Omega_0 T_1}{2}. \quad (\text{II.155})$$

Une étude rapide de la fonction D en fonction de α montre que D converge très rapidement vers $D_{\max}$ et ce, d'autant plus rapidement que T_1 est petit. Pour le plus grand T_1 que nous avons pu utiliser dans l'expérience, soit $14.7 \mu\text{s}$, D atteint 98% de $D_{\max}$ pour $\alpha \cong \sqrt{12}$. Cela nous a permis d'ajuster la valeur de l'amplitude du champ : il n'est en effet pas nécessaire de mettre le plus d'énergie possible puisque la valeur de D sature pour α supérieur à $\sqrt{12}$. Pour atteindre 99% de $D_{\max}$, il aurait en effet fallu mettre beaucoup plus d'énergie puisque le nombre moyen de photons requis était de 20. La valeur $\alpha = \sqrt{12.7}$ était donc acceptable.

Pour vérifier la validité des approximations qui ont conduit à l'expression II.152, nous pouvons simplement comparer cette expression au résultat de l'intégration numérique complète de l'interaction entre l'atome et la cavité (à partir du hamiltonien). La figure II.17 représente la probabilité de trouver l'atome dans l'état $|g\rangle$ P_g en fonction de l'amplitude β du petit champ pour $\alpha = \sqrt{12.7}$, $T_1 = 13,6 \mu\text{s}$ et $T_2 = 15,05 \mu\text{s}$ qui est placé à mi-frange. Les amplitudes β négatives sont celles de champs en opposition de phases par rapport au champ α initial. La courbe noire en trait plein correspond à l'intégration numérique de l'évolution du système. Les oscillations, et donc la sensibilité, survivent pour des amplitudes β largement supérieures à zéro. Aussi, même si nous nous sommes initialement focalisés sur l'étude de champs d'amplitude petite, notre processus de mesure peut être étendu à la mesure de champs d'amplitudes plus importantes. La zone de discontinuité observée dans la zone $\beta = [-4; -3]$ correspond au cas où $\beta \approx -\alpha$. Une analyse plus poussée montre une petite distorsion des composantes cohérentes de champ pendant l'interaction résonnante

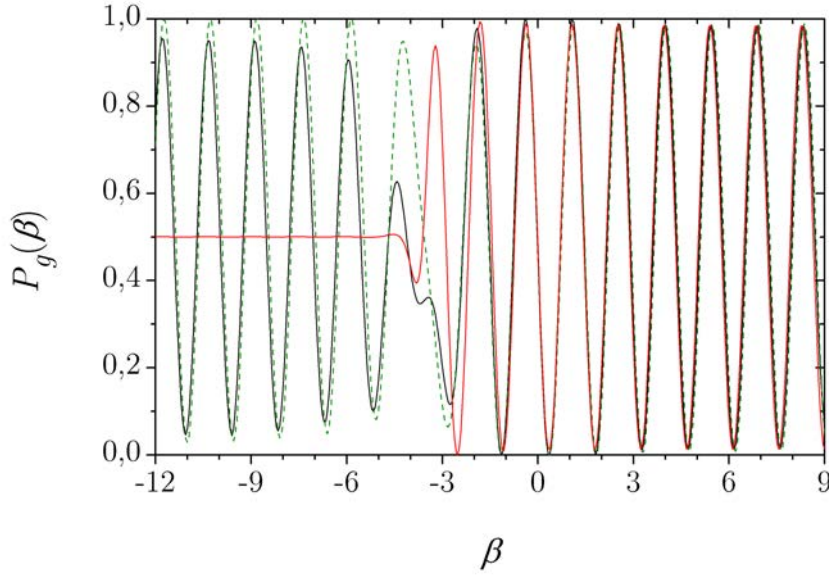


FIGURE II.17 – Signal interférométrique théorique

Courbe noire : intégration numérique de l'interaction atome-cavité. Courbe en pointillés verts : solution analytique totale dans laquelle est uniquement négligée la diffusion des composantes cohérentes de champ. Courbe rouge : solution analytique approximée par l'expression II.152.

atome-champ [58]. Ceci est analogue à “ajouter” des petites composantes de champ parasites aux composantes cohérentes. Celles-ci continuent de s'éloigner de leur image "miroir" après l'opération de renversement du temps contrairement aux composantes cohérentes qui “rebroussement chemin”. Pour de tous petits déplacements, leur présence est négligeable. Par contre, pour les β plus grands, elles peuvent se recouvrir à nouveau en continuant leur déplacement, ce qui est à l'origine du phénomène d'interférence observé sur le signal. La courbe verte en pointillés est le résultat de la solution analytique prenant en compte le recouvrement de toutes les composantes de champs, négligeant uniquement la diffusion de phase des composantes cohérentes pendant l'interaction résonnante. La courbe rouge donne le résultat de la solution analytique II.152 que nous avons dérivée. Elle est en très bon accord avec la solution numérique complète pour les β positifs, ce qui justifie l'utilisation de la solution analytique approximée pour de petits champs dans la suite du manuscrit.

Remarque Les calculs analytiques ont été fait en ne tenant pas compte de la décohérence. La relaxation du champ dans la cavité due au couplage du mode avec l'environnement est décrite par l'équation dite de *Lindblad* [68]. On peut montrer que, pour une superposition macroscopique d'états cohérents, la perte de cohérence se fait en un temps de l'ordre de $t_{decoh} = T_{cav}/\bar{n}$ où T_{cav} est le temps de vie de la cavité soit 65 ms dans notre expérience. Comme $\bar{n} = 12.7$ pour l'expérience présentée dans ce manuscrit, on a $t_{decoh} \sim 5$ ms. Le

temps maximal de première interaction que nous avons utilisé étant de $14.7 \mu\text{s}$ soit un temps total d'interaction de l'ordre de $30 \mu\text{s}$, il est tout à fait légitime de négliger complètement la décohérence de la superposition de champs dans nos calculs. Notons qu'à ces échelles de temps, la décohérence atomique est totalement négligeable.

Nous avons vu comment choisir les paramètres expérimentaux pour augmenter la sensibilité. Il serait bon de savoir quelle est la meilleure sensibilité que l'on puisse obtenir avec notre mesure pour savoir si nous en sommes loin ou non. Pour cela, nous allons utiliser l'outil développé au chapitre I : l'information de Fisher.

II.7 Information de Fisher

Nos données expérimentales conduisent à une certaine incertitude sur l'estimation de la valeur réelle de β que nous souhaiterions réduire au minimum. Pour cela, il faut déterminer la quantité maximale d'information que nous pouvons extraire de nos résultats de mesure. Nous avons déjà vu dans la section I.2.2 que l'erreur d'estimation due à la mesure d'un état initial donné ne peut être réduite en dessous d'une valeur directement liée à l'information de Fisher. Nous allons donc calculer celle-ci dans le cadre de notre expérience.

En pratique, rappelons que, lors d'une séquence expérimentale, nous obtenons un seul résultat qui est la détection de l'atome en sortie de la cavité. Ce résultat peut prendre deux valeurs possibles : soit nous détectons l'atome dans l'état $|g\rangle$, soit nous le détectons dans l'état $|e\rangle$. En répétant un grand nombre de fois la même séquence pour un champ β donné, nous pouvons reconstruire la probabilité d'obtenir l'état $|g\rangle$, P_g . La probabilité d'obtenir $|e\rangle$ est donnée par $P_e = 1 - P_g$. L'information de Fisher correspond à un état initial et à un processus de mesure donné, et dépend de ce fait de T_1 et T_2 . L'information de Fisher est donc donnée par :

$$F(\beta) = P_g \left(\frac{\partial \ln P_g}{\partial \beta} \right)^2 + (1 - P_g) \left(\frac{\partial \ln(1 - P_g)}{\partial \beta} \right)^2. \quad (\text{II.156})$$

On remplace P_g par son expression formule (II.152) dans $F(\beta)$ et on calcule chacun des termes séparément.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \ln P_g}{\partial \beta} \right)^2 &= \frac{C^2 \Omega_0^2 T_2^2 \sin^2(\tau)}{(1 + C \cos(\tau))^2} \\ \left(\frac{\partial \ln(1 - P_g(\beta))}{\partial \beta} \right)^2 &= \frac{C^2 \Omega_0^2 T_2^2 \sin^2(\tau)}{(1 - C \cos(\tau))^2} \end{aligned} \quad (\text{II.157})$$

Nous obtenons donc :

$$F(\beta, T_1, T_2) = \frac{C^2 \Omega_0^2 T_2^2 \sin^2(\tau)}{2(1 + C \cos(\tau))} + \frac{C^2 \Omega_0^2 T_2^2 \sin^2(\tau)}{2(1 - C \cos(\tau))} \quad (\text{II.158})$$

Finalement, l'information de Fisher pour un état initial caractérisé par T_1 (et Ω_0 et α qui restent toujours identiques pour nous) et une mesure du paramètre β , donnée par la

séquence expérimentale explicité précédemment et caractérisée par T_2 , est donnée par :

$$F(\beta, T_1, T_2) = C^2 \Omega_0^2 T_2^2 \frac{\sin^2(\tau)}{1 - C^2 \cos^2(\tau)}, \quad (\text{II.159})$$

où τ est donnée par la formule (II.154). La valeur maximale que peut atteindre F est :

$$F_{\max}(T_1, T_2) = C^2(T_1, T_2) \Omega_0^2 T_2^2. \quad (\text{II.160})$$

En effet, pour $C \neq 1$, on peut toujours trouver des valeurs de T_2 telles que pour T_1 et β fixés, $\tau = \pi/2 + p\pi$ où p est un entier et donc $\sin(\tau) = 1$ et $\cos(\tau) = 0$, ce qui maximise F . Cette valeur ne dépend plus de β et correspond bien aux points où P_g vaut 0.5 comme pressenti dans la section (II.6.5). Expérimentalement, le contraste ne peut être de 1 pour des raisons que nous évoquerons plus tard et fait que $F_{\max}$ dépend en pratique de β . La valeur de $F_{\max}(T_1, T_2)$ augmentant avec T_2 , nous avons intérêt à augmenter ce temps le plus possible en gardant un contraste acceptable⁵.

Les résultats que nous venons de dériver nous permettent de savoir en théorie quelle quantité maximale d'information nous pouvons obtenir sur le paramètre à mesurer, ici β , en partant d'un état initial fixé et avec une mesure spécifique. Pour aller plus loin, et savoir en particulier si notre mesure est la plus efficace, il faut considérer l'information de Fisher *quantique* qui s'obtient en maximisant l'information de Fisher précédente sur toutes les mesures possibles comme indiqué dans le chapitre I. Nous allons nous pencher sur son calcul dans la section suivante.

II.8 Information de Fisher quantique

L'expression générale de l'information de Fisher a été introduite au chapitre I et nous en rappelons l'expression ici, ainsi que celle du générateur du déplacement :

$$F_Q = 4 \langle \psi_0 | [H - \langle H \rangle_0]^2 | \psi_0 \rangle, \quad (\text{II.161})$$

avec,

$$\hat{H} = -i (\hat{a}^\dagger - a). \quad (\text{II.162})$$

L'état initial du processus dépendant de β n'est pas $|\psi(t=0)\rangle$, mais l'état obtenu $|\psi_{\text{renv}}\rangle$ juste après l'opération de renversement du temps donné par (II.98). On pose donc $|\psi_0\rangle = |\psi_{\text{renv}}\rangle$. La valeur moyenne du propagateur prise dans l'état $|\psi_0\rangle$ est donc :

$$\langle \hat{H} \rangle_0 = \langle \psi_0 | -i (\hat{a}^\dagger - a) | \psi_0 \rangle. \quad (\text{II.163})$$

5. Rappelons que celui-ci décroît lorsque T_2 s'éloigne du temps de résurgence.

On posera pour cela : $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\chi_1}$ et on remarquera pour la suite du calcul que $\alpha^{+*} = \alpha^-$ et $\alpha^{-*} = \alpha^+$.

$$\langle \hat{H} \rangle_0 = -i [|\kappa|^2 \alpha^- + |\kappa|^2 \alpha^+ - |\kappa|^2 \alpha^+ - |\kappa|^2 \alpha^-] = 0. \quad (\text{II.164})$$

La valeur moyenne du générateur des déplacements prise dans l'état initial est donc nulle. Cela simplifie l'expression de l'information de Fisher quantique :

$$F_Q = 4 \langle \psi_0 | H^2 | \psi_0 \rangle = -4 \langle \psi_0 | [\hat{a}^{\dagger 2} + a^2 - 2\hat{a}^\dagger \hat{a} - 1] | \psi_0 \rangle. \quad (\text{II.165})$$

Décomposons cette expression :

$$\begin{aligned} \langle \psi_0 | \hat{a}^{\dagger 2} | \psi_0 \rangle &= |\kappa|^2 (\alpha^{-2} + \alpha^{+2}) - 2 \operatorname{Re} [\kappa^2 \alpha^{+2} (\langle \alpha^- | \langle \Psi_{\text{renv}}^- |) (|\alpha^+ \rangle | \Psi_{\text{renv}}^+ \rangle)] \\ &= \alpha^2 \cos(2\Phi_1) + R, \end{aligned} \quad (\text{II.166})$$

où l'on a introduit la notation $R = -2 \operatorname{Re} [\kappa^2 \alpha^{+2} (\langle \alpha^- | \langle \Psi_{\text{renv}}^- |) (|\alpha^+ \rangle | \Psi_{\text{renv}}^+ \rangle)]$. De la même manière, on obtient :

$$\langle \psi_0 | a^2 | \psi_0 \rangle = \alpha^2 \cos(2\Phi_1) + R. \quad (\text{II.167})$$

Le dernier terme à calculer se simplifie en :

$$\begin{aligned} \langle \psi_0 | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi_0 \rangle &= 2|\kappa|^2 \alpha^+ \alpha^- + R \\ &= \alpha^2 + R. \end{aligned} \quad (\text{II.168})$$

En rassemblant tous les termes, R disparaît et on peut écrire l'information de Fisher quantique sous la forme :

$$\begin{aligned} F_Q &= -4 (2\alpha^2 \cos(2\Phi_1) - 2\alpha^2 - 1) \\ &= 4 (1 + 4\alpha^2 \sin^2 \Phi_1) \end{aligned} \quad (\text{II.169})$$

soit finalement :

$$F_Q = 4 (1 + D^2), \quad (\text{II.170})$$

avec $D = 2\alpha \sin \Phi_1$, la distance entre les deux composantes de $|\psi_0\rangle$.

Nous pouvons faire le lien entre les résultats trouvés et la réflexion menée à la section [I.5.2](#). La valeur la plus petite atteint par F_Q est 4. Elle correspond à un état initial ressource cohérent et marque donc la SQL. Avec cet état initial, la sensibilité maximale que l'on peut espérer sur la mesure de β est de 0,5. En faisant interagir le champ cohérent avec l'atome, nous pouvons donc obtenir une plus grande information de Fisher quantique et ainsi dépasser la SQL. La sensibilité [\(II.137\)](#) maximale atteignable avec ce type d'état, si l'on est limité par la ressource énergie, est atteinte pour $\Phi = \pi/2$ puisque la distance entre les deux composantes de champ est maximale et vaut $D = 2\alpha$. F_Q prend alors la

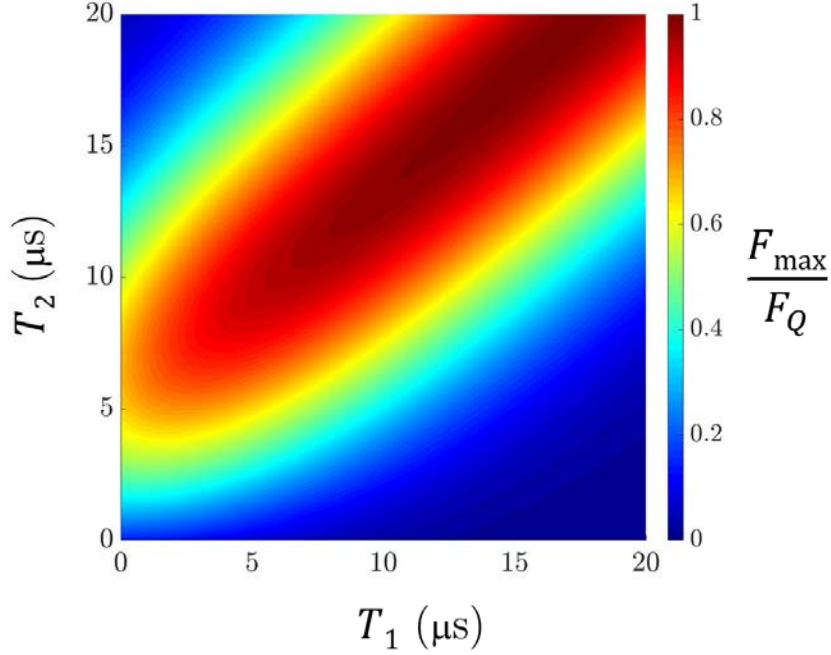


FIGURE II.18 – Comparaison entre l’information de Fisher maximale et l’information de Fisher quantique

L’information de Fisher maximale analytique est donnée par l’expression (II.160) calculée à partir de l’expression de P_g (II.152). Elle est comparée à l’expression analytique approximée (II.171) de l’information de Fisher quantique.

valeur $4(1 + 4\alpha^2)$. Dans le cas qui nous intéresse, notre ressource limitante est le temps T_1 , l’angle $\Phi(t)$ à la fin de la première interaction résonnante est en fait assez faible (plus petit que 20 degrés) et la limite de Heisenberg est alors donnée par :

$$F_Q \approx 4 + \Omega_0^2 T_1^2. \quad (\text{II.171})$$

Il est facile de voir que F_Q est toujours supérieure à $F_{\max}(T_1, T_2)$, ce qui est attendu puisqu’elle définit la valeur maximale d’information que l’on peut obtenir sur β avec un état initial de la mesure donné *quelle que soit* la mesure de l’expérimentateur.

Grâce à cette expression, nous pouvons en arriver au point crucial : *est-ce que la procédure de mesure que nous avons choisie est, au moins en principe, optimale ?* Pour répondre à cette question, nous avons tracé le rapport $F_{\max}/F_Q$ sur la figure II.18. Ce rapport dépend à la fois de T_1 et de T_2 par le contraste C inclus dans $F_{\max}$. On voit clairement que le rapport atteint des valeurs proches de 1 pour un temps d’interaction T_1 supérieur à une dizaine de micro-secondes à condition de bien choisir le T_2 . Il s’agit bien évidemment, pour chaque T_1 , du T_2 supérieur à T_1 qui correspond à $P_g = 1/2$. Pour des temps d’interaction supérieurs à une dizaine de micro-secondes, notre procédure de mesure donne donc bien

l'information maximale accessible, aux imperfections expérimentales près qui n'ont pas été prises en compte dans l'étude précédente.

Conclusions

Les expériences de métrologie nécessitent une sensibilité optimale. Suivant les états quantiques et le type de ressources limitant l'expérimentateur, la Limite Quantique Standard à dépasser et la limite d'Heisenberg à viser varient. Dans notre expérience visant à mesurer un champ de petite amplitude β , nous pouvons facilement préparer le champ dans un état cohérent pour laquelle la sensibilité de notre mesure correspond à la SQL. Il est possible d'améliorer la sensibilité en faisant interagir à résonance ce champ avec un atome à deux niveaux. Cette interaction cause la séparation de l'état cohérent en deux composantes distinctes par rotation de ces deux composantes dans des sens opposés dans l'espace des phases. Lorsque celles-ci sont macroscopiquement séparées, on observe un effondrement des oscillations de Rabi du système qui revivent ensuite lorsque les deux composantes se superposent à nouveau après une rotation de π . En interrompant l'interaction après le temps d'effondrement, nous sommes en mesure de préparer un état dans lequel le champ est dans une superposition d'états quantiques mésoscopiques intriqués avec l'état atomique. La technique d'écho de spin nous permet alors de renverser le temps et donc d'augmenter le temps de mesure tout en gardant un bon contraste. Nous injectons à ce moment-là le champ β et le processus qui va nous permettre de déterminer son amplitude est simplement une deuxième interaction résonnante. La probabilité de détecter l'état atomique dans l'état de basse énergie en sortie de cavité est une fonction oscillante dépendante de β .

L'information de Fisher que nous avons pu calculer nous permet de comparer la sensibilité sur la mesure de β obtenue expérimentalement avec celle qu'on aurait pu espérer, étant donnés notre état initial et la ressource limitante qu'est le temps d'interaction résonnante. L'information de Fisher quantique va plus loin que cela en nous donnant la valeur de l'information maximale accessible sur β à partir de notre état initial quelque soit le type de mesure. Nous avons montré que celle-ci est d'autant plus grande que la distance entre les composantes du champ est grande. À temps T_1 fixé, cette distance sature au-delà d'une certaine valeur de α qui nous a permis de fixer sa valeur expérimentale. La comparaison entre information de Fisher et information de Fisher quantique nous a permis de montrer en théorie que notre procédure de mesure de petit champs était optimale dès que le temps de première interaction était supérieur à une dizaine de micro-secondes.

À présent que tous les outils de compréhension et d'analyse sont en place, nous allons passer à la réalisation expérimentale de la mesure de β .

Chapitre III

Mise en oeuvre expérimentale

Sommaire

III.1 Montage expérimental	82
III.1.1 Cavité et trajet atomique	82
III.1.2 Isolation thermique et magnétique	86
III.2 Le système atomique	88
III.2.1 Propriétés des atomes de Rydberg circulaires	89
III.2.2 Un système à 2 niveaux bien contrôlé	92
III.2.3 Préparation des �tats de Rydberg circulaires	96
III.2.4 Sélection en vitesse des échantillons atomiques	100
III.2.5 Nombre d'atomes préparés par échantillon atomique	104
III.2.6 Détection des atomes	104
III.3 Le système champ	107
III.3.1 Géométrie	107
III.3.2 Temps de vie des photons	111
Conclusion	115

L'expérience centrale de ce mémoire repose sur l'interaction en régime de couplage fort entre un atome à deux niveaux et un mode de la cavité à résonance. L'atome sonde est un atome de rubidium ^{85}Rb préparé dans un état de Rydberg circulaire (c'est-à-dire un état à grand nombre quantique principal n et avec un moment angulaire maximal) qui est, pour ce manuscrit, le niveau circulaire de nombre $n = 50$: $|50C\rangle \equiv |g\rangle$. Comme représenté sur la figure III.1, cet état forme avec l' tat $|51C\rangle \equiv |e\rangle$ le système à deux niveaux pour lequel la fréquence de transition atomique est de 51.099 GHz, soit dans le domaine micro-onde. Nous fabriquons des cavités de très haute finesse dans ce domaine et nous sommes capables d'accorder le mode TEM_{900} sur cette transition atomique. Celui-ci jouera donc le rôle de l'oscillateur harmonique du chapitre précédent. Nous rappelons ici que le couplage entre

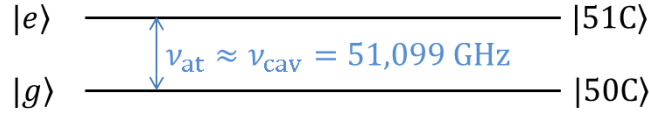


FIGURE III.1 – Schéma des deux niveaux de Rydberg circulaires.

La fréquence de la transition atomique est de manière générale proche de la fréquence du mode de la cavité. La transition peut être placée ou non à résonance avec le mode par l'expérimentateur par effet Stark.

les niveaux $|g\rangle$ et $|e\rangle$ est caractérisé par la pulsation de Rabi valant expérimentalement $\Omega_0 = 2\pi \cdot (46 \text{ kHz})$.

Nous commencerons par essayer de donner une vue globale du dispositif expérimental, étape nécessaire pour donner au lecteur le cadre dans lequel l'expérience s'inscrit. Nous expliciterons également les différentes calibrations faites sur chacun des paramètres expérimentaux. Celles-ci constitueront les “briques” que nous assemblerons dans les sections traitant de l'expérience de métrologie quantique proprement dite.

III.1 Montage expérimental

Présentons tout d'abord le dispositif expérimental. Nous n'esquisserons ici que son architecture globale mais le lecteur intéressé pourra en trouver les détails dans le mémoire de Sébastien Gleyzes [84]. Depuis la thèse de ce dernier, cette structure n'a pas été modifiée en profondeur par mes prédécesseurs (même si les cavités utilisées ont changé au cours des années) et a permis, avec quelques adaptations selon les cas, de passionnantes expériences exploitant sa très importante capacité à faire des mesures quantiques non destructives des photons piégés dans la cavité [85, 86, 57], en y ajoutant des boucles de rétroaction quantiques [87, 88, 89] et une analyse utilisant un post-traitement des données acquises à laquelle j'ai activement participé [90]. Toutefois, après l'expérience décrite ici, nous avons procédé à deux améliorations conséquentes du montage en remplaçant les détecteurs et la boîte à circulariser tels que nous allons les décrire dans ce chapitre par de nouvelles versions aux capacités plus larges qui seront évoquées dans la conclusion générale.

III.1.1 Cavité et trajet atomique

La figure III.2 propose une vue générale des différents constituants du dispositif expérimental que nous reprendrons plus en détails dans les différentes parties de ce chapitre.

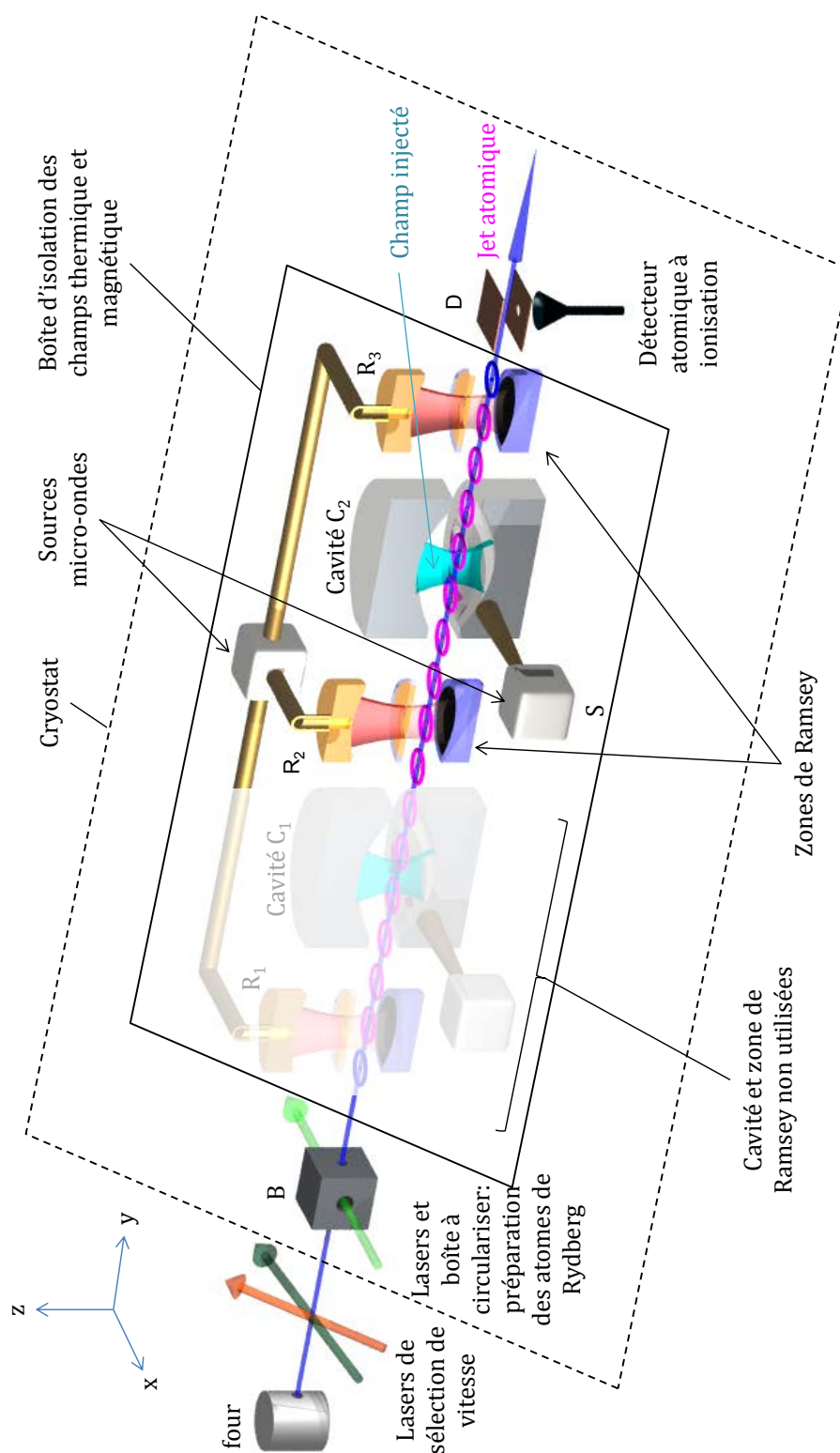


FIGURE III.2 – Schéma du dispositif expérimental

Son élément central est la cavité C_2 à long temps de vie qui contient le mode du champ micro-onde. Elle est formée de deux miroirs en configuration Fabry-Pérot. Dans notre expérience, on y injecte le petit champ à mesurer. Toutes les injections se font grâce à une source externe S de micro-onde couplée à la cavité par diffraction sur les bords de miroirs.

Un atome volant à travers la cavité sert d'antenne pour sonder le champ piégé avec lequel il est couplé fortement en suivant une évolution selon le hamiltonien de Jaynes Cummings. Les deux petites cavités R_2 et R_3 de faible facteur de qualité placées autour de la cavité permettent, de manière générale, de manipuler l'état atomique grâce à des impulsions $\pi/2$ classiques mais ne seront pas utilisées dans cette expérience. Enfin, l'atome est détecté par ionisation pour récupérer l'information sur le champ par deux types de détecteurs rassemblés sous une unique étiquette D .

La partie en amont de la cavité (par rapport au jet atomique) sert uniquement à préparer l'atome dans l'état $|g\rangle$. Un four chauffé à 225°C que l'on charge d'une cellule de rubidium¹ fournit pour cela un jet continu d'atomes. Ce jet est collimaté grâce à des diaphragmes imposant un diamètre traverse du jet atomique de l'ordre du mm. Il passe ensuite dans une enceinte que traversent les lasers de sélection de vitesse. Ne sont alors excités par impulsion que des petits paquets atomiques ayant une vitesse de 250 m/s. Chacun d'entre eux pénètre dans la *boîte à circulariser* où ils sont amenés sur l'état de Rydberg $|g\rangle$ par excitations laser, radiofréquence et micro-onde avant de traverser la cavité.

On peut également voir sur la figure III.2 qu'un emplacement pour une cavité C_1 et une zone de Ramsey R_1 supplémentaires ont été prévus dans le montage. Néanmoins, nous souhaitons d'abord exploiter au maximum notre dispositif avec une seule cavité avant d'en rajouter une deuxième. Nous nous sommes donc contentés d'installer des miroirs de qualité moyenne à l'emplacement vide, jouant le rôle d'électrodes permettant de mettre un champ électrique non nul dans la cavité (voir section III.3.2). L'expérience de ce mémoire marque la fin de l'utilisation d'une seule cavité. Pour les expériences de physique quantique non locale que nous souhaitons mener depuis lors, nous avons fabriqué une nouvelle cavité et réouvert le cryostat pour l'y installer.

L'ensemble des éléments d'importance (boîte à circulariser, cavités, zones de Ramsey, détecteurs) est thermalisé à 0,8 K. Les cavités et les zones de Ramsey sont placées dans une boîte isolante fabriquée pendant la thèse de S. Gleyzes et placée au coeur d'un cryostat. Nous développerons l'importance de cette isolation thermique et magnétique dans la section qui suit mais nous pouvons d'ores et déjà donner un aperçu réel de l'agencement des composants essentiels grâce aux figures III.3 et III.4. Une photo de ce dispositif est associée à un dessin technique permettant de légender les composants et d'évaluer les distances réelles entre chacun d'entre eux. Ils seront ensuite chacun repris en détail dans ce chapitre.

1. Une cellule contient 10 g de rubidium, ce qui représente environ 6 mois d'expérience. Les cellules sont fabriquées par la souffreuse de verre du LKB, Florence Thibout.

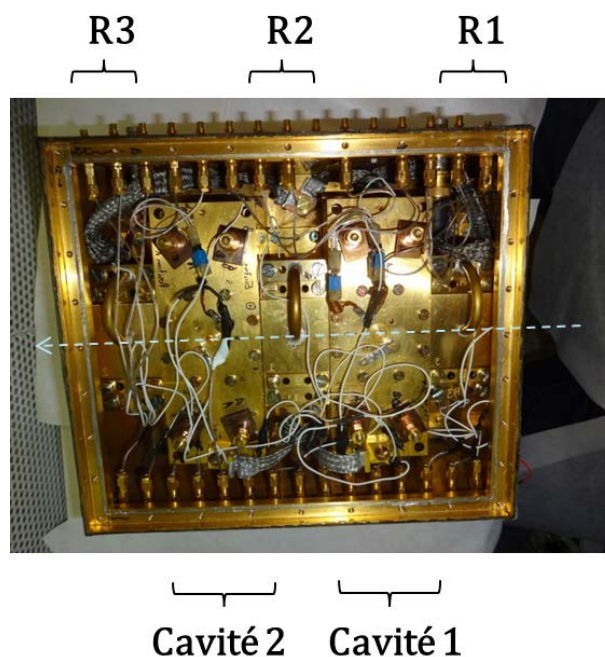


FIGURE III.3 – Vue de dessus de l'intérieur de la boîte d'écrantage

Pour minimiser la distance parcourue par les atomes, les différentes cavités de la boîte sont agencées de la manière la plus compacte possible, séparées par moins d'un millimètre pour éviter le contact électrique entre elles. On peut voir également les guides d'ondes apportant la micro-onde aux cavités Ramsey ainsi que les fils imposant les potentiels aux différentes pièces. Sur le dessus des cavités, les connecteurs bleus des bolomètres de mesure de température des cavités sont reconnaissables. Les atomes traversent les différents blocs de droite à gauche comme indiqué par la flèche.

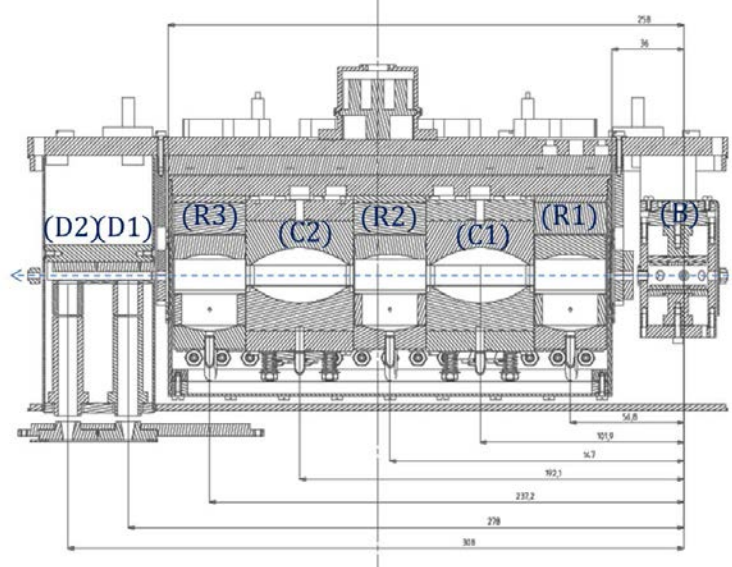


FIGURE III.4 – Schéma du montage traversé par les atomes depuis leur préparation jusqu'à leur détection

Les distances indiquées sont en millimètres. Les atomes traversent les différents blocs de droite à gauche comme indiqué par la flèche. Les étiquettes indiquent la position des éléments suivants :

(B) Boîte à circulariser

(R1), (R2), (R3) Zones de Ramsey

(C1), (C2) Blocs cavités

(D1), (D2) Détecteurs atomiques

III.1.2 Isolation thermique et magnétique

La maîtrise du champ piégé dans la cavité et des niveaux atomiques ne peut se faire qu'en isolant au maximum ces objets de l'environnement. Les expériences sont donc bien sûr menées non seulement dans un vide poussé, de l'ordre de 10^{-9} mbar pour éviter les collisions des atomes avec le gaz résiduel, mais également à basse température. En effet, pour assurer l'excellente réflectivité des miroirs en niobium de la cavité, ceux-ci doivent être rendu supraconducteurs, ce qui ne peut être le cas qu'en dessous d'une température de 9.3 K. La cavité est donc placée au coeur d'un cryostat. Par ailleurs, une température inférieure à 1 K permet de rendre négligeable le nombre de photons thermiques qui, dans le mode de la cavité à 51.099 GHz, seraient susceptibles d'interagir avec les atomes. Le cryostat est donc conçu en étages pour faire descendre la température par paliers jusqu'à 0.8 K, température à laquelle on maintient tous les éléments croisés par les atomes, de la boîte à circulariser aux détecteurs.

Les différents composants de l'isolation thermiques sont représentés sur la figure III.5. Deux écrans thermiques permettent d'isoler le coeur du cryostat des rayonnements plus chauds que 4 K : un premier écran, constitué de la *plaque* N_2 et d'une jupe en cuivre appelée *jupe* N_2 , thermalisé à 77 K par contact avec un réservoir d'azote liquide ; puis un second écran, constitué de la *plaque* 4He et de la *jupe* 4He , thermalisé à 4.2 K par de l'hélium 4 liquide. Les écarts de température entre les différents paliers étant grands, la puissance frigorifique nécessaire au maintien de ces températures est élevée et il est nécessaire de réapprovisionner fréquemment les réservoirs. L'autonomie de notre cryostat entre deux transferts d'azote est ainsi d'un peu plus d'une journée et celle entre deux transferts d' 4He est de quarante huit heures. Elle est principalement limitée par la place allouée aux réservoirs. La plaque 4He est reliée par l'intermédiaire d'interrupteurs thermiques à une autre plaque de cuivre à 0.8 K, appelée *plaque* 3He , sur laquelle sont fixés la boîte à circulariser, les zones de ramsey, les cavités ainsi qu'une partie du bloc de détection. Ces interrupteurs consistent en des tubes d'acier inoxydables, remplis d'un gaz d' 4He qui assure le contact thermique entre les pièces situées de part et d'autre des tubes. La présence additionnelle de charbons actifs en leur sein permet l'adsorption de l'hélium en dessous d'une dizaine de K rompant alors pratiquement le contact thermique entre les plaques 4He et 3He car la conductivité de l'inox est très faible. Le refroidissement du coeur du cryostat est ainsi facilité tant qu'il est encore "chaud" et, en dessous d'une certaine température, il sera naturellement isolé du contact direct des autres pièces.

Pour faire descendre à 0.8 K la plaque 3He , nous disposons d'un cryogénérateur à 3He dont le principe est très simple : nous prélevons en continu une quantité contrôlée d' 4He dans le réservoir qui arrive dans une boîte sur laquelle nous pompons (*boîte 1.2*). Cette boîte atteint alors une température située entre 1.2 et 1.5 K suivant le débit d' 4He entrant. Nous acheminons par ailleurs de l' 3He gazeux depuis l'extérieur du cryostat, hélium d'abord refroidi par sa traversée du réservoir d' 4He , puis liquéfié par son passage dans un capillaire en contact thermique avec la boîte 1.2. Cet hélium 3 entre dans la *boîte* 3He en contact direct avec la plaque 3He . Un équilibre bien choisi entre débit d' 3He entrant et débit de

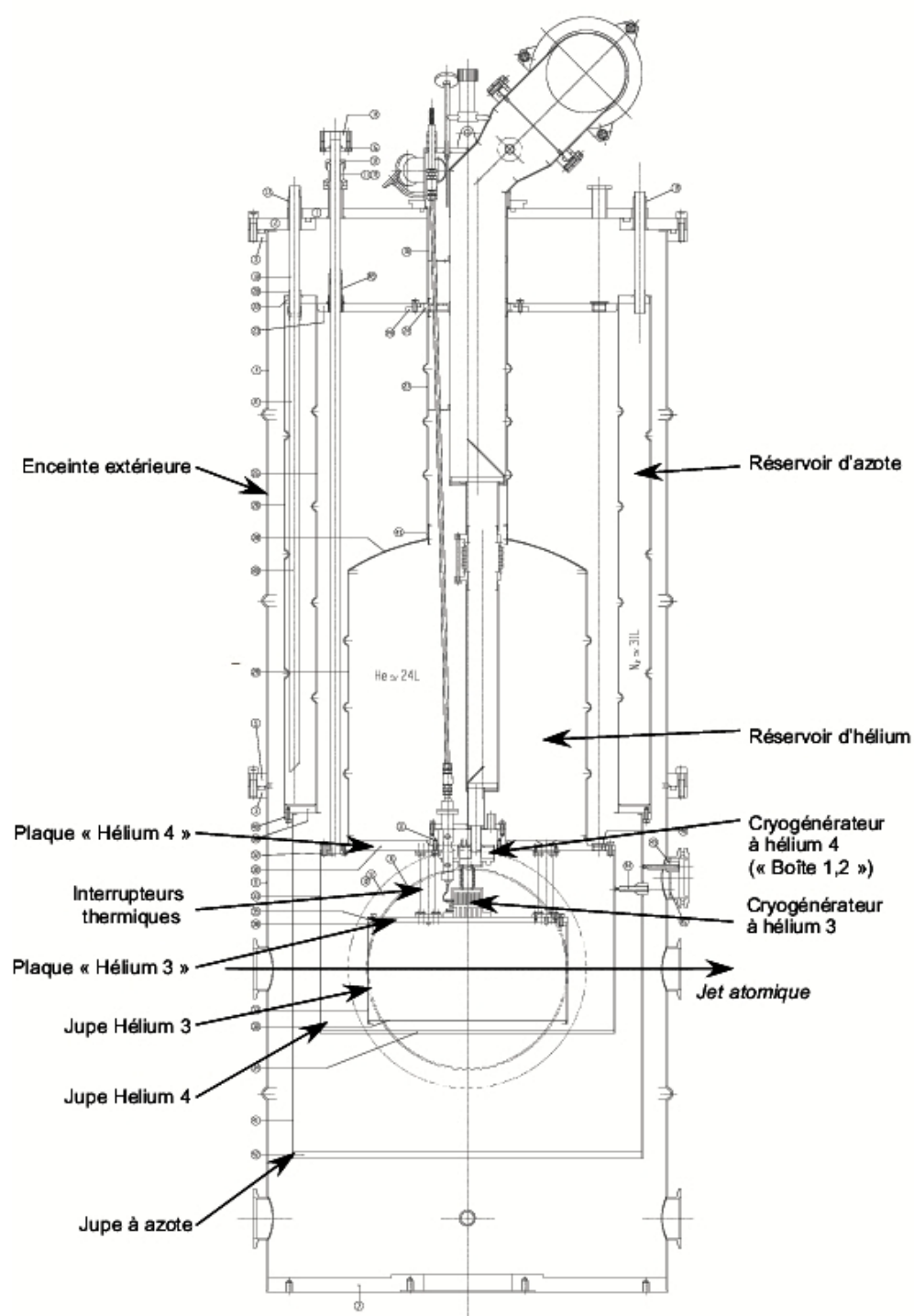


FIGURE III.5 – Plan d'ensemble du cryostat

pompage sur la boîte ^3He permet de refroidir la plaque ^3He et donc l'ensemble du coeur du cryostat à 0.8 K.

Tous les câbles descendant au coeur du cryostat sont entrecoupés de ruptures de ponts thermiques pour isoler le plus possible les parties du cryostat ayant des températures différentes. Des atténuateurs thermiques sont également placés sur les guides micro-ondes pour thermaliser le fond micro-onde. Ces précautions n'étant pas suffisantes, la cavité et les zones de Ramsey sont placées dans une grande boîte métallique d'écrantage dont les seuls trous nécessaires au passage des atomes et aux composants cités précédemment ont un diamètre tels que la fréquence de coupure de la micro-onde est supérieure à 51.099 GHz. Les photons à cette fréquence et provenant des parties plus chaudes du cryostat ne pénètrent ainsi pas les zones de passage des atomes.

Il est à noter que la mise à froid du cryostat prend en tout environ 24 h. L'ensemble des composants fixés à la plaque ^3He pèse en effet une quarantaine de kilogrammes. Pour accélérer le processus, un échangeur en contact avec la plaque ^3He permet de mettre directement en contact de l'azote liquide avec cette plaque et d'accélérer son refroidissement jusqu'à une température de 100 K où nous arrêtons la circulation d'azote.

Les fréquences des transitions atomiques pouvant par ailleurs être fortement modifiées par un gradient de champ magnétique, le cryostat possède également un blindage magnétique détaillé sur le plan III.6. Des bobines placées en configuration Helmholtz à l'extérieur du cryostat annulent le champ terrestre au niveau de la boîte d'écrantage. Des plaques de mumétal situées au dessus de la plaque N_2 et à l'extérieur de la jupe N_2 absorbent les lignes de champ grâce à la forte permittivité magnétique de ce matériau. Un film d'indium (supraconducteur en dessous de 3 K) recouvrant la jupe ^3He permet de "geler" le champ magnétique résiduel à l'intérieur.

Il reste à isoler la cavité du champ résiduel piégé. On ne peut utiliser à cet effet du mumétal comme avant car le mumétal perd de son efficacité en dessous de la température de l'azote liquide. Nous recouvrons donc plutôt la boîte d'écrantage de Vitrovac 6025. On pourra trouver plus de détails sur ce blindage dans la thèse de S. Gleyzes [84]. Il nous suffira de savoir que le champ est annulé au niveau de la boîte d'écrantage à environ 10 μG près.

III.2 Le système atomique

Pour constituer un système à deux niveaux utilisable dans notre expérience, les candidats atomiques doivent posséder une transition au voisinage de la fréquence micro-onde du mode de la cavité considéré. Il faut également qu'ils soient sensibles à un champ électromagnétique très faible (de l'ordre du photon) pour l'expérience qui nous intéresse, autrement dit que le dipôle atomique soit grand. Le temps de vie des deux niveaux atomiques devra être grand pour minimiser les taux de relaxation. Enfin, pour des raisons pratiques, il serait bon que l'on puisse préparer les atomes dans ces états, au moins pour les premières étapes

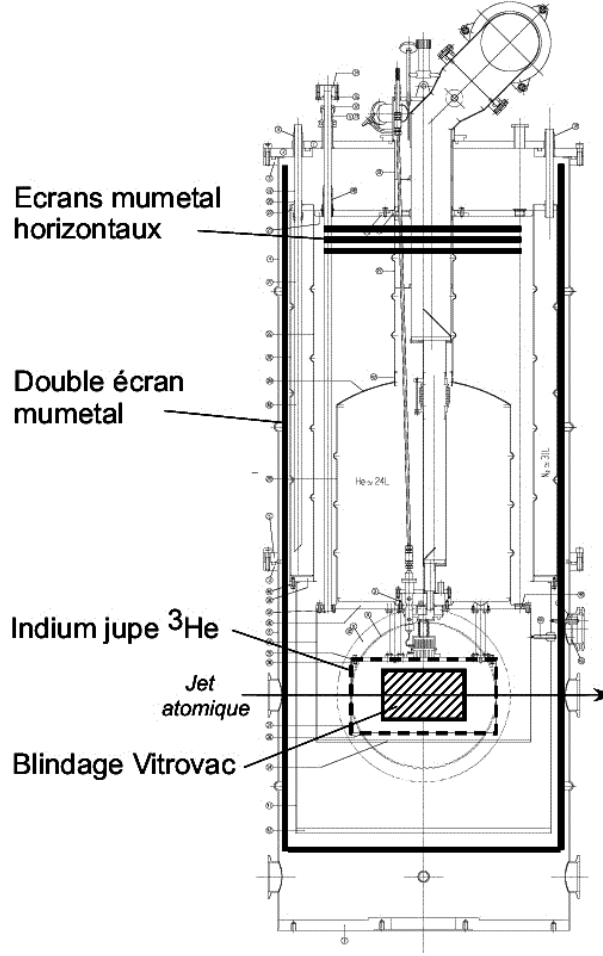


FIGURE III.6 – Blindage magnétique du cryostat

Le champ est annulé au centre du montage par des bobines de compensation non représentées ici.

d'excitation, à l'aide de lasers de longueurs d'ondes "usuelles". Considérant tous ces critères, il s'avère que les atomes de Rubidium 85 préparés dans des *états de Rydberg circulaires* sont des candidats tout désignés.

III.2.1 Propriétés des atomes de Rydberg circulaires

Les états électroniques de grand nombre quantique principal² n sont appelés *états de Rydberg* [91]. Ces états sont dits *circulaires* si, de plus, ils sont de nombres quantiques orbital et magnétique maximaux *i.e.* $l = |m| = n - 1$ [92]. On les notera dorénavant $|nC\rangle$. Les autres états de la même multiplicité (mais de plus petit l sont dits *elliptiques*.

2. Conformément à l'habitude, on notera n le nombre quantique principal dans cette section. Dans tout le reste du document, cette notation est par contre réservée au nombre de photons.

■ ORBITALE

Dans le cas du rubidium excité sur l'un de ces niveaux, la fonction d'onde électronique prend la forme d'un tore, d'autant plus étroit par rapport à la taille caractéristique de l'orbite que n est grand. A titre d'exemple, nous avons représenté sur la figure III.7 la surface de densité équiprobable pour l'état $|50C\rangle$ (*i.e.* $|g\rangle$) fermant la région de l'espace où l'électron externe a une probabilité de présence supérieure à 91%. Du fait de la forme de l'orbitale, ces états atomiques sont ceux qui ont le comportement le plus proche de l'atome de Bohr et en première approche, la plupart des propriétés des atomes de Rydberg circulaires pourront en être dérivées. Dans une vision semi-classique, l'électron de valence a en effet une orbite de la forme d'un cercle (d'où le nom de l'état), très éloignée d'un "cœur" constitué du noyau et des électrons des couches inférieures complètes dont l'électron de valence perçoit la charge (moyennée par écrantage). L'atome a alors un comportement de type *hydrogénoïde* puisqu'il perçoit un potentiel coulombien comme l'hydrogène. La quantification du moment cinétique nous permet d'obtenir le rayon de la trajectoire circulaire : $r_n = n^2 a_0$ où a_0 est le rayon de Bohr, demi-grand axe des orbites semi-classiques de l'état fondamental, et vaut $0.53\text{\AA}$. Une application numérique donne un très bon ordre de grandeur de la distance de l'électron au noyau. Les états circulaires $|50C\rangle$ et $|51C\rangle$ (*i.e.* $|e\rangle$) ont respectivement un rayon de 133 et 138 nm. Les atomes de Rydberg sont donc des atomes "géants".

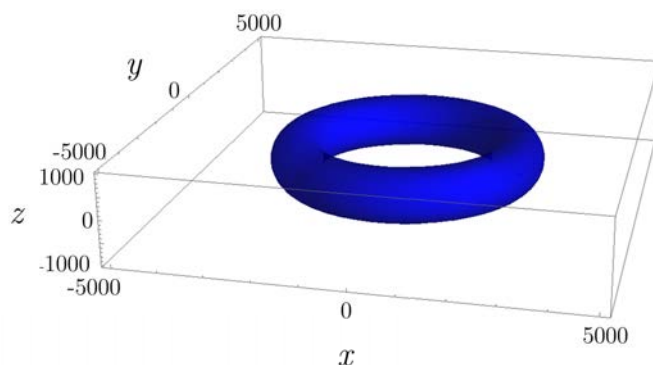


FIGURE III.7 – Orbitale atomique associée à l'électron externe de l'atome de Rydberg dans l'état $|50C\rangle$

La surface bleue délimite la zone autour du noyau où l'électron a plus de 91% de chances de se trouver. L'axe z est l'axe de quantification. Les dimensions sont en unités de rayon de Bohr $a_0 = 0,53\text{\AA}$.

■ ENERGIE

Les niveaux de Rydberg sont nombreux et très rapprochés. Beaucoup de fréquences de transition entre deux niveaux circulaires sont donc dans le domaine des micro-ondes (millimétriques ou centimétriques) et sont, à ce titre, utilisables avec notre cavité. De la même manière que pour l'atome d'hydrogène, on peut déterminer avec une bonne approximation

les énergies des états circulaires du rubidium en considérant que l'électron interagit avec un coeur de charge $+e$ et en modifiant la masse réduite de l'électron pour prendre en compte la taille du noyau. Grâce à ce modèle, les énergies des états $|nC\rangle$ sont données par l'expression :

$$E_n = -\frac{85m_p}{(m_e + 85m_p)} \frac{R_y}{n^2}, \quad (\text{III.1})$$

où R_y est la constante de Rydberg. On en déduit que la pulsation de la transition entre les états $|(n+1)C\rangle$ et $|nC\rangle$ est donnée par :

$$\omega_n = \frac{R_{Rb}}{\hbar} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right). \quad (\text{III.2})$$

où $R_{Rb} = R_y(85m_p)/(m_e + 85m_p)$ prend en compte les éléments du coeur du rubidium par rapport à l'hydrogène. Classiquement, cette pulsation correspond à celle du mouvement de l'électron sur son orbite de Bohr. Notre modèle simple ne prend pas en compte les structures fine et hyperfine des niveaux atomiques. Les corrections relativistes de la structure fine sont heureusement de l'ordre de quelques centaines de hertz pour les n allant de 20 à 60 et le couplage magnétique entre le coeur et l'électron de valence est d'intensité encore mille fois plus faible [93]. Ces effets seront donc négligés pour la suite.

■ DIPÔLE

En utilisant le modèle semi-classique valable pour les états circulaires, l'élément de matrice du dipole d_n entre les deux états circulaires $|nC\rangle$ et $|(n-1)C\rangle$ du système à deux niveaux est donné par :

$$d_n = \frac{a_0 e (n-1)^2}{\sqrt{2}}, \quad (\text{III.3})$$

où l'on rappelle que le rayon de Bohr a_0 constitue l'unité de distance atomique et e est la charge élémentaire. La valeur correspondante pour $n = 51$ vaut $1776 ea_0$, c'est-à-dire 420 fois le dipole de transition D2, ce qui en fait un dipole immense à l'échelle atomique [94]. La condition $\Delta m = +1$ nous indique que cette transition est polarisée σ^+ . Comme on pouvait s'y attendre après un raisonnement semi-classique sur l'orbite bidimensionnelle de l'électron, les atomes dans un état de Rydberg sont donc de véritables antennes extrêmement sensibles à un champ électrique micro-onde dirigé dans le plan de l'orbite. Ils sont en revanche assez insensibles aux champs dirigés selon l'axe de quantification, *i.e.* perpendiculairement à l'axe de l'orbite.

Remarque A l'aide de la valeur du dipôle de la transition, il est *a priori* possible de calculer directement la fréquence de Rabi du vide de l'atome dans la cavité. Comme toutefois, les atomes ne passent pas forcément exactement au milieu de la cavité et qu'ils ne voient pas exactement le champ que l'on pense, nous effectuons en pratique des mesures pour déterminer expérimentalement cette valeur que nous avons évaluée à $\Omega_0 = 2\pi \times 46$ kHz.

■ TEMPS DE VIE

A cause des règles de sélection dipolaire électrique ($\Delta l = \pm 1$), l'état circulaire $|nC\rangle$ n'est significativement couplé qu'à l'autre état circulaire $|(n-1)C\rangle$, qui est son voisin direct [95]. Sa désexcitation ne se fera donc que dans le niveau circulaire directement inférieur. A température nulle, le taux d'émission spontanée de cet état est donné par :

$$\Gamma_{0,n} = \frac{\omega_n^3 |d_n|^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c}. \quad (\text{III.4})$$

Pour $n = 51$ et $n = 50$, la durée de vie (qui est l'inverse du taux d'émission spontanée) des états circulaires est respectivement de 31,5 ms et 28,5 ms. De manière plus générale, le dipole atomique varie en n^2 et la pulsation en n^3 , ce qui fait une dépendance totale du taux d'émission spontanée en n^5 . Les niveaux de Rydberg circulaires sont donc incroyablement stables, et ce, d'autant plus que n est grand. Dans une vision semi-classique, cela s'explique simplement par le fait que l'électron placé sur une orbite circulaire rayonne moins d'énergie que s'il était placé sur une orbite elliptique, ce qui est le cas pour les niveaux de moindre l et confère justement à ces niveaux de la même multiplicité le nom d'états *elliptiques*. Un état de Rydberg circulaire perd en conséquence moins rapidement d'énergie par rayonnement que les états elliptiques où l'électron est plus fortement accéléré lorsqu'il passe près du cœur.

Cette longue durée de vie des niveaux de Rydberg circulaires (notée t_{atome}) est nécessaire pour assurer les conditions de couplage fort entre la cavité et l'atome : il faut en effet pouvoir négliger la relaxation atomique par rapport au temps caractéristique d'échange d'énergie entre cavité et atome donné par $t_{Rabi} = 2\pi/\Omega_0$, ce qui est vérifié ici :

$$t_{atome} \sim 30 \text{ ms} \gg t_{Rabi} \sim 20 \text{ } \mu\text{s}. \quad (\text{III.5})$$

Plus largement, les atomes parcourant une distance d'environ 30 cm entre leur préparation et leur détection avec une vitesse de 250 m/s, leur temps de vol t_{vol} à travers la Magic Box est d'environ 1,2 ms. Pendant cette durée, le taux d'émission spontanée pour l'état $|50C\rangle$, à température nulle, s'élève à :

$$1 - e^{-t_{vol}\Gamma_{0,50}} \approx 4.1\% \quad (\text{III.6})$$

Les atomes traversent en fait un environnement à environ 0.8 K. La présence de photons thermiques n_{th} supplémentaires dans le mode de la cavité augmente l'émission stimulée et le taux d'émission est divisé par $n_{th} + 1$. Dans le cas de notre expérience, le nombre de photons thermiques s'élève à 0,06 ; ce qui porte le taux d'émission spontanée à 4.4% qui reste bien négligeable.

III.2.2 Un système à 2 niveaux bien contrôlé

En l'absence de champs électrique et magnétique extérieurs, les états de Rydberg sont dégénérés avec la plupart des états de même n mais de l et m différents. Cette dégénérescence est exacte au moins pour les l les plus grands où notre modèle hydrogénoïde est

relativement valable et relie l'énergie d'un niveau uniquement à son nombre quantique principal. Pour les états de plus faibles l , la probabilité de présence de l'électron au voisinage du noyau est importante. Il faut donc revoir les calculs des niveaux d'énergie en prenant en compte la pénétration de l'électron dans le coeur et la polarisabilité de ce coeur. En première approximation, il est possible de garder les résultats donnés par un modèle hydrogénoïde en rajoutant une correction appelée défaut quantique sur les énergies des états. Les valeurs expérimentales montrent que les états de $l < 4$ sont nettement séparés en énergie du reste de la multiplicité en champ nul et rejoignent petit à petit la multiplicité avec l'augmentation du champ électrique [96, 97, 98]. Pour un n donné, l'état circulaire est celui qui a le plus petit défaut quantique (que l'on peut négliger).

Expérimentalement, la moindre perturbation électrique ou magnétique transverse à l'axe de quantification sera donc susceptible de coupler un état de Rydberg circulaire avec les états elliptiques voisins de la même multiplicité n et transformera l'état circulaire préparé en une superposition d'états non contrôlés [99]. On peut lever cette dégénérescence néfaste par effet *Stark* en plaçant l'atome dans un champ électrique statique *directeur* qui fixe l'axe de quantification z , que l'on notera F .

Commençons donc par étudier le comportement de tous les niveaux atomiques proches de l'état circulaire en présence de ce champ F . Le Hamiltonien d'interaction entre le dipôle atomique et le champ électrique pourra être considéré comme une perturbation si celle-ci ne mélange pas les niveaux de multiplicités différentes [100]. Pour un état circulaire de Rydberg de $n > 50$, cela correspond à des champs électriques inférieurs à une dizaine de V/cm, ce qui sera toujours le cas pour notre expérience. La présence d'un champ électrique perturbatif brise la symétrie sphérique observée en première approximation. La symétrie qui reste préservée est cylindrique (autour de l'axe z). Pour cette raison, le nombre quantique magnétique m demeure un bon nombre quantique mais le nombre orbital l doit être remplacé par le nombre quantique parabolique n_1 qui varie entre 0 et $n - |m| - 1$ par valeurs entières (voir le chapitre 6 de la référence [91]). On peut alors effectuer un développement à l'ordre 2 des énergies E des niveaux $|n, m, n_1\rangle$ [95], $E = E^{(0)} + E^{(1)} + E^{(2)}$, avec :

$$E^{(0)} = -\frac{1}{2n^2}, \quad (\text{III.7})$$

$$E^{(1)} = \frac{3}{2}knF, \quad (\text{III.8})$$

$$E^{(2)} = -\frac{1}{16}(17n^2 - 3k^2 - 9m^2 + 19)n^4F^2, \quad (\text{III.9})$$

où l'on a posé $k = 2n_1 - n + |m| + 1$ et où on a exprimé les énergies E et le champ F en unités *atomiques* données par $E_{\text{Hartree}} = 2R_y = 27,2 \text{ eV}$ et $F_{\text{Hartree}} = 1/(4\pi\epsilon_0 a_0^2)$ soit $5,14 \cdot 10^9 \text{ V/cm}$ (champ créé par le proton sur la première orbite de Bohr).

Effet Stark linéaire

Au premier ordre, la figure III.8 montre que l'effet Stark *linéaire* ne lève que partiellement la dégénérescence des niveaux d'énergie de même nombre quantique principal pour

les niveaux de $n = 50$ et $n = 51$. On représente les niveaux par m croissant de gauche à droite (ne sont représentés que les m positifs). Dans une même multiplicité, l'éventail des niveaux de même m s'ouvre, les niveaux voient leur énergie augmenter avec n_1 , chaque niveau n_1 se retrouvant espacé des niveaux $n_1 - 1$ et $n_1 + 1$ par un même écart énergétique (cet écart est proportionnel à n). On peut d'ailleurs proposer une interprétation du nouveau nombre quantique n_1 dans ce cadre : il correspond au $(n_1 + 1)$ -ième niveau le moins énergétique pour un m donné. Par contre, les niveaux de même n_1 mais de nombres magnétiques opposés sont encore dégénérés. Les niveaux les plus déplacés sont ceux de moments magnétiques les plus faibles tandis que l'état circulaire (pour lequel $n_1 = 0$) ne subit aucun effet Stark à cet ordre. La levée de dégénérescence entre l'état circulaire $|51C\rangle$ et les deux états de m juste inférieur ($m = 49$) est de $100 \text{ Mhz}/(\text{V/cm})$.

Effet Stark quadratique

Au deuxième ordre, l'effet Stark *quadratique* achève de lever la dégénérescence entre tous les états. Sa contribution abaisse l'énergie de tous les niveaux de manière différente, y compris celles des états circulaires qui étaient insensibles à l'effet Stark linéaire. Elle permet

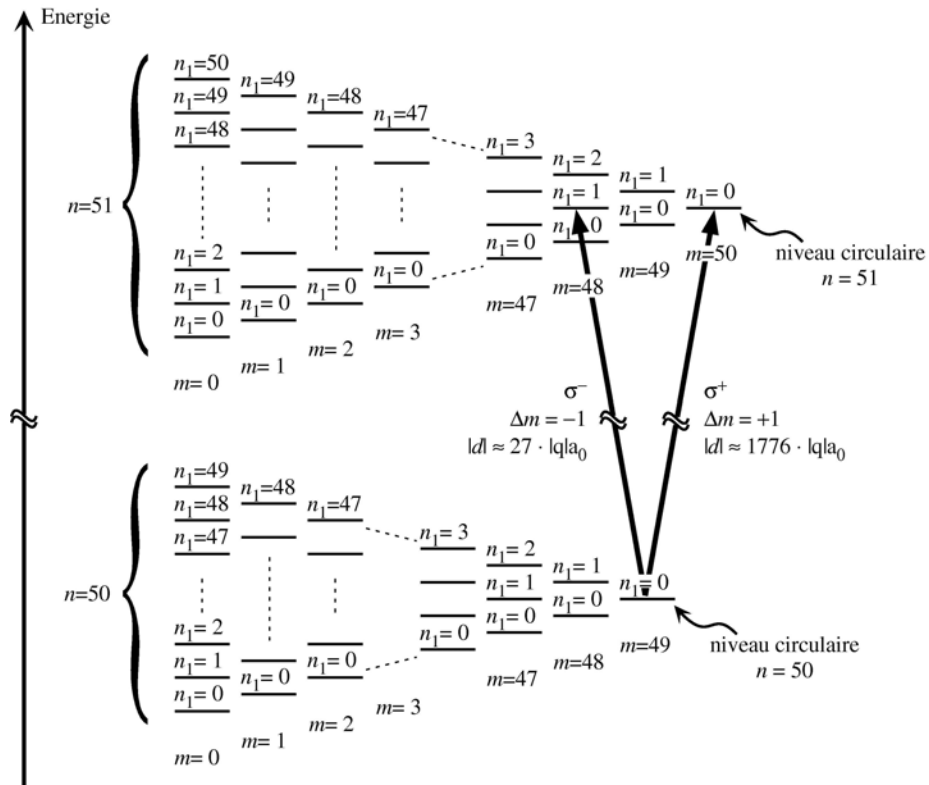


FIGURE III.8 – Diagramme énergétique des niveaux de Rydberg $n = 50$ et $n = 51$ pour un atome hydrogénoïde dans un champ électrique statique pour $m \geq 0$.

en particulier de séparer en énergie l'état circulaire $|51C\rangle$ de l'état $|n = 51, m = 48, n_1 = 1\rangle$. Toutefois, cet effet du second ordre est beaucoup plus faible et la transition $|50C\rangle \leftrightarrow |51C\rangle$ ne se distingue de la transition $|50C\rangle \leftrightarrow |n = 51, m = 48, n_1 = 1\rangle$ que d'une centaine de $\text{kHz}/(\text{V}/\text{cm})^2$. Heureusement, l'élément de matrice du dipole associé à cette dernière transition polarisée σ^- est 66 fois plus faible que celui de la transition circulaire-circulaire. Les états $|50C\rangle$ et $|51C\rangle$ forment donc un système à deux niveaux pratiquement fermé. En champ électrique non nul, l'effet Stark quadratique permet de faire varier la fréquence de la transition entre ces deux états à raison de $-255 \text{ kHz}/(\text{V}/\text{cm})^2$.

Maîtrise du champ électrique directeur

Nous l'avons vu, le champ électrique est nécessaire pour assurer la survie des niveaux circulaires en maintenant un axe de quantification. Dans la cavité, il est créé par les miroirs qui jouent le rôle de deux électrodes différentes, appliquant un champ selon l'axe vertical z .

En modifiant l'intensité du champ sur une plage de l'ordre du V/cm , nous sommes en mesure de déplacer la fréquence de cette transition de plusieurs centaines de kHz grâce à l'effet Stark quadratique. Ceci nous permet à loisir d'amener ou non le système à deux niveaux à résonance avec la cavité puisque le couplage atome-cavité est – rappelons-le – donné par la fréquence de Rabi du vide soit 46 kHz dans notre expérience.

Cette maîtrise du champ ne doit pas se cantonner à la cavité, mais doit être efficace tout au long du trajet atomique. On peut éventuellement faire varier la direction du champ directeur à condition de le faire assez lentement et surtout – c'est là le point critique – sans que le champ s'annule au cours de la manoeuvre. Dans ce cas, l'axe de quantification peut suivre la variation de manière adiabatique [99]. En pratique, le champ électrique est maintenu vertical dans toute la boîte d'écrantage. Le plus souvent, on assure son homogénéité en appliquant des potentiels bien choisis sur toutes les pièces “vues” par les atomes. Ces pièces sont toujours métalliques et dorées pour assurer le potentiel le plus “propre” possible, à l'exception notable des miroirs de la cavité où l'on compense du coup les potentiels de contact métallique entre les pièces dorées et le niobium. Nous avons banni à proximité des atomes toute surface isolante dont les charges électrostatiques ne sont pas maîtrisées.

Choix de n pour le système à deux niveaux

Nous sommes à présent en mesure d'expliquer le choix des états de Rydberg circulaires associés à $n = 50$ et $n = 51$. Ils correspondent à des valeurs de compromis. En prenant des valeurs élevées de n , nous pouvons augmenter le temps de vie et le couplage au champ électromagnétique dans la cavité. Par contre, la fréquence de la transition circulaire-circulaire diminue lorsqu'on monte dans les grandes valeurs de n et, le nombre de photons thermiques augmentant également, il est nécessaire de descendre en température. Plus important encore, plus n augmente, plus les états circulaires sont sensibles à l'effet Stark et notre système à deux niveaux peut être fortement affecté par les inhomogénéités du champ

électrique. Ceci nous amène d'ailleurs au dernier point de cette section : la nécessité de contrôler précisément le champ électrique sur le trajet de l'atome dans la boîte d'écrantage.

Le cadre étant posé, nous allons à présent regarder plus en détail la préparation expérimentale des atomes sur les états de Rydberg circulaires $|50C\rangle$ et $|51C\rangle$. Cette procédure est assez complexe car il faut non seulement transférer de l'énergie aux atomes, mais également un grand nombre de quanta de moment cinétique.

III.2.3 Préparation des états de Rydberg circulaires

Les atomes alcalins ont une structure électronique relativement simple et leur spectre est bien connu (à notre échelle de précision). Ils sont pour cette raison à la base de la plupart des expériences d'atomes froids et d'optique atomique. Le rubidium 85 que nous utilisons fait partie de cette famille. Pour faire absorber à ces atomes une grande quantité d'énergie et les exciter sur un état de Rydberg, la méthode usuelle est l'utilisation de photons optiques car les premiers niveaux d'excitations peuvent être adressés grâce aux lasers de longueur d'onde optique couramment utilisés dans les laboratoires. Toutefois, les règles de sélection empêchent le transfert de plus d'un quantum de moment cinétique par photon absorbé. Pour gagner ensuite les quanta restants et circulariser les atomes, il faut employer une autre stratégie utilisant un *glissement Stark* ainsi qu'un passage adiabatique que nous allons décrire également. La complexité de cette étape est telle qu'on ne peut atteindre un des états circulaires du système à 2 niveaux avec une efficacité de 100%. Nous commençons donc par préparer l'état $|52C\rangle$ que nous *purifions* de tous les niveaux elliptiques excités éventuellement en le ramenant dans l'état $|50C\rangle$ (*i.e.* $|g\rangle$). L'ensemble de la procédure de préparation est représentée sur le schéma [III.9](#).

Excitation sur un état de Rydberg de faible moment cinétique

Initialement, nous nous plaçons en champ nul. Nous excitons alors les atomes sur le niveau $|52F, m = 2\rangle$ par une excitation laser en trois échelons. En effet, ce niveau est séparé du reste de la multiplicité (bien décrite par le modèle hydrogénoïde) à cause de son défaut quantique important : il est donc atteignable par des transitions optiques assurées par des lasers usuels. Le processus d'excitation est donc le suivant :

- une transition σ^+ entre les niveaux $|5S_{1/2}, F = 3, m_F = 3\rangle$ et $|6P_{3/2}, F = 4, m_F = 4\rangle$ à l'aide d'un laser à 780 nm³ de puissance 0,2 mW.
- une transition σ^+ entre les niveaux $|6P_{3/2}, F = 4, m_F = 4\rangle$ et $|5D_{5/2}, F = 5, m_F = 5\rangle$ à l'aide d'un laser à 776 nm à 6 mW.

3. On notera que F désigne ici un nombre quantique et non plus l'amplitude du champ électrique. Celui-ci étiquette les niveaux dans la structure hyperfine de l'atome. Ce sera le cas à chaque fois que cette lettre apparaîtra dans l'écriture d'un état quantique

- une transition π entre les niveaux $|5D_{5/2}, F = 5, m_F = 5\rangle$ et $|52f, m = 2\rangle$ à l'aide d'un laser à 1258 nm à 10 mW.

Ces transitions sont regroupées sous l'appellation *étape 1* sur la figure III.9. Le premier échelon à 780 nm est en pratique réalisé avec un laser pulsé sur une durée de 1,4 μ s. Cette impulsion constitue la référence de temps de notre système de contrôle expérimental et permet de limiter le nombre moyen d'atomes préparés dans le jet atomique. Il faut à présent procéder à l'ajout des quanta de moment cinétique manquants. Ceci constitue la procédure dite de *circularisation*, déclenchée par l'impulsion à 780 nm, sur laquelle nous allons nous pencher dans ce qui suit.

Circularisation des états de Rydberg

L'idée est de transférer l'atome du niveau $|52f, m = 2\rangle$ vers le niveau de Rydberg circulaire de $n = 52$. Sur la figure III.9, la circularisation correspond aux étapes 2 et 3.

Le rôle du champ électrique consiste ici d'abord à ramener l'état $|52f, m = 2\rangle$ au sein de la multiplicité de $n = 52$. Pour ce faire, le champ électrique est amené rapidement de 0 à 2,5 V/cm. Le niveau $|52f, m = 2\rangle$ est alors branché adiabatiquement sur le niveau $|n = 52, m = 2, n_1 = 1\rangle$. C'est l'étape 2 de glissement Stark.

Le champ est ensuite diminué linéairement jusqu'à 2 V/cm, ce qui permet la levée de dégénérescence entre les niveaux de la multiplicité. Au milieu de cette rampe de champ, l'atome absorbe les 49 quanta de moment cinétique restants sous la forme de photons radiofréquences (à 255 MHz) représentés par les flèches en trait plein lors de l'étape 3. Cette méthode a été décrite par Hulet pour des n entre 20 et 30 [92] et adaptée à notre système. Le modèle de l'atome habillé permet de voir ce processus comme un anticroisement géant des niveaux habillés par la radiofréquence lors de l'établissement du champ électrique. On pourra en trouver les détails dans la thèse de P. Nussenzveig [93]. L'effet Stark quadratique n'est pas suffisant pour lever la dégénérescence entre les transitions souhaitées σ^+ et les transitions parasites σ^- au sein de la multiplicité. Nous ajoutons donc un champ magnétique de 18 G parallèle au champ électrique, qui, par effet Zeeman, déplace la fréquence des transitions voulues de 50 MHz par rapport aux transitions parasites. La source radiofréquence permet ainsi de peupler le niveau circulaire $|52C\rangle$ avec une efficacité de 80%. Les 20% restants correspondent aux atomes préparés sur un état elliptique.

Remarque Dans tout notre raisonnement et sur la figure III.9, nous n'avons considéré que les niveaux de m positifs. La présence du champ magnétique empêche tout peuplement des états de m négatifs et en particulier la préparation de l'autre état circulaire de $n = 52$ et $m = -51$.

Il reste à transférer l'atome sur un des deux états circulaires du système à deux niveaux. Ceci constitue la procédure de *purification* que nous allons décrire dans la section suivante.

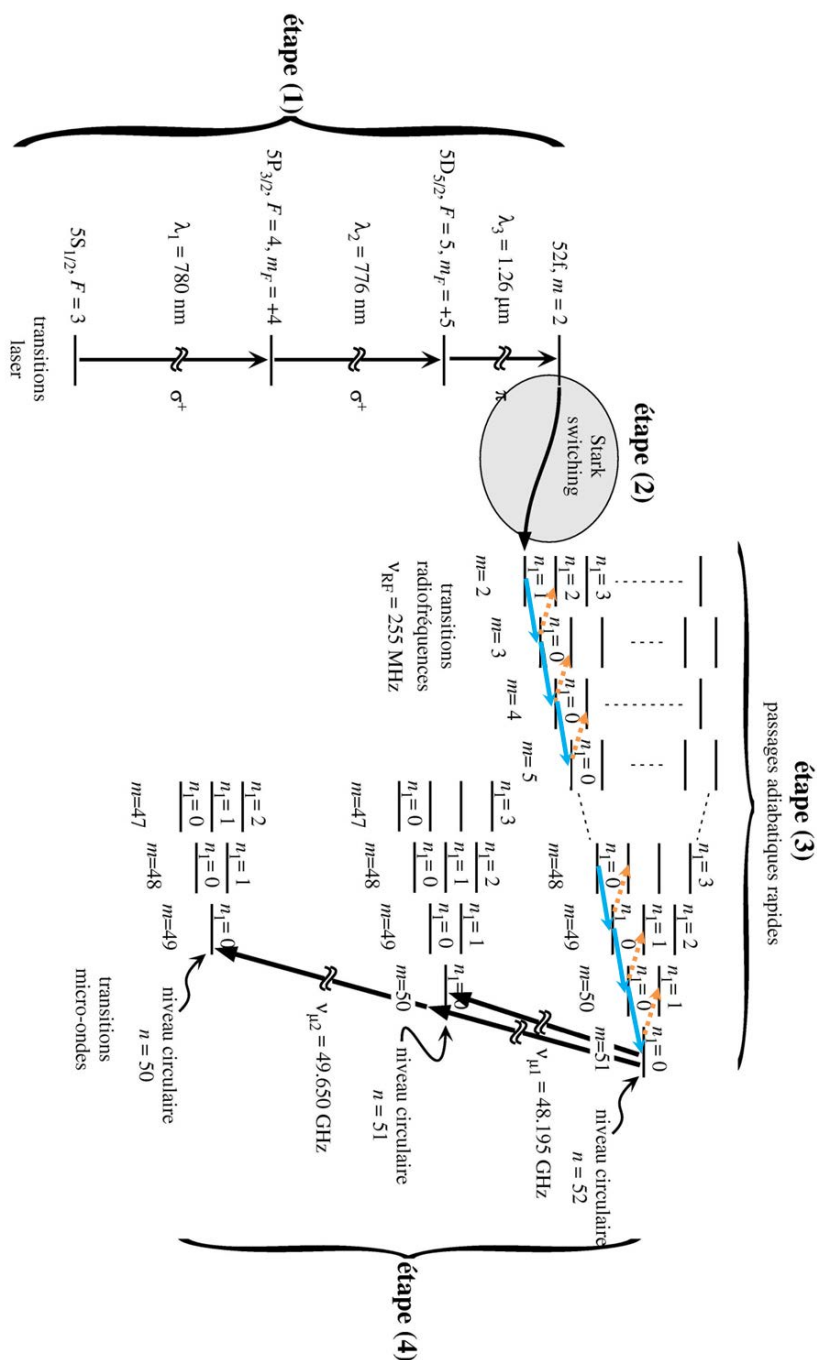


FIGURE III.9 – Étapes de la circularisation des états atomiques

(1) *Excitations optiques vers les états de Rydberg.* (2) *Glissement Stark.* (3) *Excitation radiofréquence σ^+ vers le niveau circulaire (flèches bleues), on lève la dégénérescence des niveaux par un champ magnétique pour éviter les transitions parasites σ^- (flèches oranges).* (4) *Purification micro-onde pour préparer les atomes dans $|50C\rangle \equiv |g\rangle$ (ou $|51C\rangle \equiv |e\rangle$).*

Purification vers le système à deux niveaux

L'objectif de cette étape est d'éliminer les états elliptiques préparés de façon parasite pendant le passage adiabatique, et de ne garder que les états circulaires que l'on va transférer sur $|e\rangle \equiv |51C\rangle$ ou $|g\rangle \equiv |50C\rangle$. Ceci permet d'assurer une grande pureté dans les échantillons atomiques qui vont interagir avec la cavité⁴.

Pour séparer clairement en énergie les transitions circulaire-circulaire et elliptiques-circulaire, la purification se fait en champ électrique fort à 4,5 V/cm, ce qui implique un effet Stark quadratique différentiel sur la transition $|50C\rangle \leftrightarrow |51C\rangle$ de 1,2 MHz. Un champ micro-onde résonant avec $|e\rangle$ (à 48.195 GHz) ou avec $|g\rangle$ (à 49.65 GHz) permet de désexciter les états circulaires $|52C\rangle$ vers un des deux niveaux d'intérêt, qui, dans le cas de notre expérience, sera toujours $|g\rangle$.

Remarque Pour éliminer les atomes se trouvant sur des états elliptiques de $n = 52$, et ayant malgré tout franchi l'étape de purification, nous avons rajouté deux électrodes en sortie de la boîte à circulariser pour ioniser les états restant dans la multiplicité $n = 52$ avant qu'ils ne pénètrent dans la boîte d'écrantage. La pureté des atomes circulaires peut à la fin de cette étape atteindre les 95%.

La boîte à circulariser

Les 4 étapes de préparation des états circulaires que nous venons d'évoquer se déroulent au sein de la *boîte à circulariser* placée avant la boîte d'écrantage sur le chemin des atomes. Cette boîte à circulariser est délimitée par un cylindre creux de 5 cm de diamètre traversé à mi-hauteur par le jet atomique. La figure III.10 représente schématiquement son contenu. Les atomes pénètrent dans la boîte à circulariser par un diaphragme, collimateur pour le jet. Des trous, non visibles sur les schémas en coupe, permettent de faire passer les faisceaux laser rouges et infrarouge de la première étape d'excitation atomique qui sont focalisés au centre du cylindre sur le passage des atomes. Le champ électrique statique vertical fixant l'axe de quantification et permettant la levée de dégénérescence des niveaux de la multiplicité $n = 52$ à l'étape 2 est généré à l'aide de deux plaques parallèles de cuivre situées en haut et en bas du cylindre (à 1 cm l'une de l'autre). Chacune d'entre elles est formée de trois électrodes reliés inductivement sur lesquelles on applique la radiofréquence à 255 MHz provenant d'un oscillateur du type VCO-117 pour l'étape 3. La configuration des électrodes est telle que l'on génère un champ radiofréquence dans la boîte à circulariser perpendiculairement à l'axe de quantification. Celui-ci est donc polarisé σ . Le champ magnétique de 18 G est, quant à lui, produit par des bobines placées en haut et en bas du cylindre pour rendre le champ le plus homogène possible au centre du cylindre. Celles-ci sont en fil supraconducteur : ceci nous permet de faire passer 200 mA dans les bobines tout en annulant l'effet Joule qui réchaufferait la boîte. Pour éviter que le champ ne fuie dans

4. En effet, si on avait circularisé directement les atomes dans les états $|e\rangle$ ou $|g\rangle$, les 20% mal préparés de la procédure précédente auraient eux aussi "vu" le mode de la cavité.

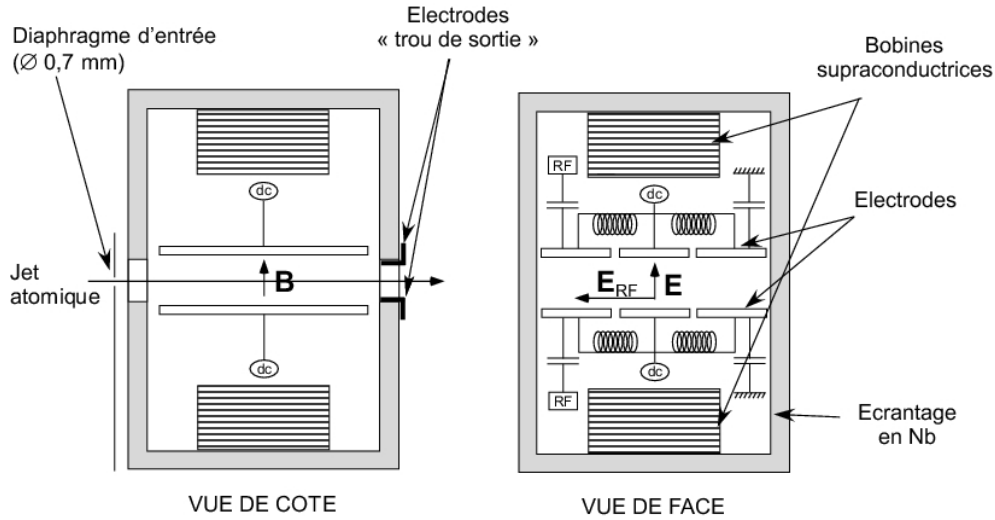


FIGURE III.10 – Schéma de la boîte à circulariser

Le champ magnétique $\mathbf{B}$ est orienté selon l'axe vertical. Le champ électrique $\mathbf{E}$ statique créé est aligné avec ce champ. Le champ radiofréquence $\mathbf{E}_{RF}$ tourne dans le plan perpendiculaire à l'axe de quantification, au centre du cylindre.

tout le reste de la boîte d'écrantage et en particulier dans la cavité, le cylindre lui-même est fait en niobium, supraconducteur à 0,8 K, qui repousse le champ par effet Meissner.

III.2.4 Sélection en vitesse des échantillons atomiques

Dans tout le dispositif expérimental, le trajet des atomes est bien défini. Deux diaphragmes alignent le jet : l'un en sortie du four et l'autre en entrée de la boîte à circulariser. Tous deux sont de diamètre 0,7 mm qui est donc la dimension transverse du jet atomique. Des diaphragmes espacés le long du trajet assurent la collimation régulière du jet pour bloquer les atomes ne passant pas au centre de tous les composants de la boîte d'écrantage. Leur rôle est important : le couplage fort atome-champ n'est assuré qu'au centre de la cavité. Ceci n'est toutefois pas suffisant. Il faut également s'assurer que nous connaissons la position des atomes à *tout instant* puisque les différentes étapes de préparation des atomes et de leur détection doivent se faire selon une séquence temporelle précise. Il faut maîtriser le temps de parcours des atomes entre chaque étape pour déclencher au bon moment les procédures. Ceci n'est pas évident *a priori* étant donné que nous utilisons initialement un jet continu d'atomes qui ont une distribution maxwellienne de vitesses allant de 150 à 600 m/s comme on le voit sur la figure III.11. Nous souhaitons préparer des échantillons atomiques régulièrement espacés dans lesquels est préparé au plus un seul atome à une vitesse précise. La préparation des atomes étant bien repérée temporellement grâce aux impulsions du laser rouge de la première transition atomique d'excitation, il suffit de sélectionner les atomes en vitesse pour connaître leur position dans le temps.

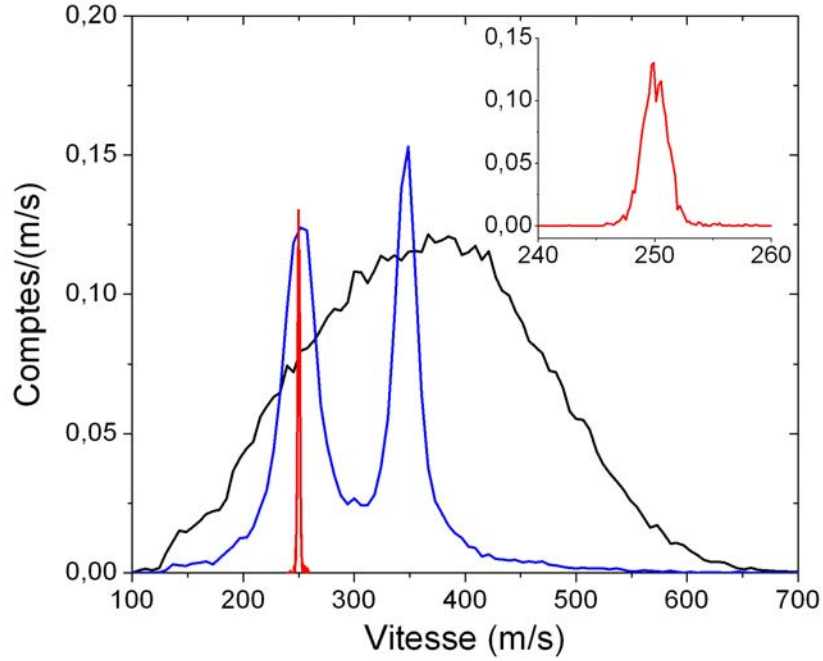


FIGURE III.11 – Distribution en vitesse des atomes

En noir, distribution maxwellienne des vitesses sans sélection de vitesse (aucun des lasers pulsés) ; en bleu, sélection en vitesse avec le laser à 780 nm allumé pendant 1.4 μ s et le repompeur en continu ; en rouge (et dans l'encart), sélection de vitesse raffinée avec le repompeur allumé pendant 4 μ s.

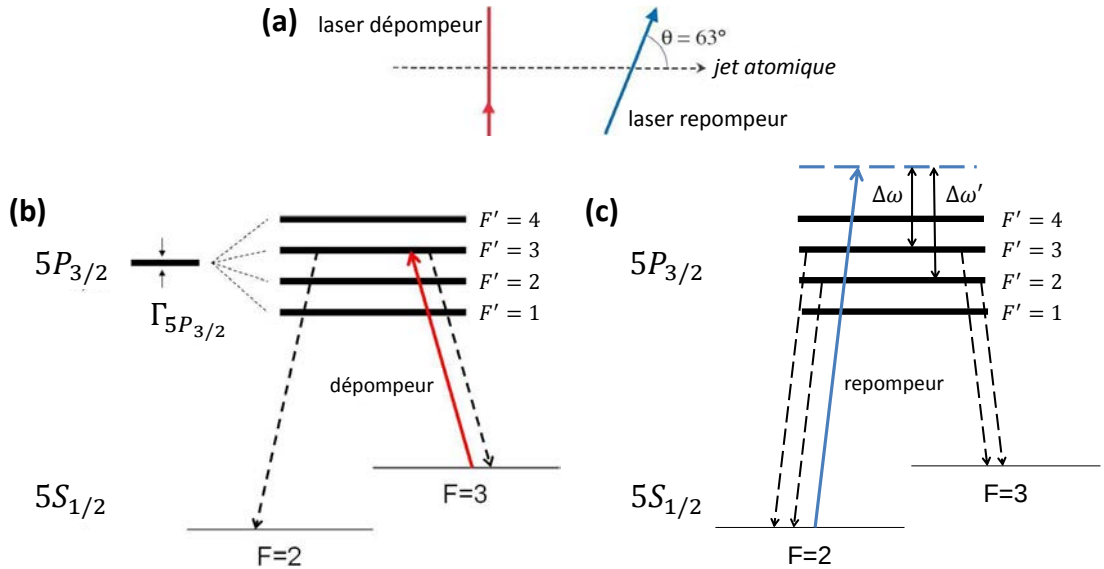


FIGURE III.12 – Sélection des atomes en vitesse

(a) Dispositif utilisé pour la sélection en vitesse des atomes. (b) Un premier laser dépompeur perpendiculaire au jet atomique amène tous les atomes dans le niveau $F = 2$ via $F' = 3$. (c) Un second laser repompeur faisant un angle θ avec le jet ramène dans $F = 3$ via $F' = 3$ les atomes de vitesse $v = \Delta\omega\lambda_{\text{rep}}/2\pi \cos\theta$ souhaitée. Une seconde classe de vitesse est également sélectionnée via $F' = 2$: $v' = \Delta\omega'\lambda_{\text{rep}}/2\pi \cos\theta$. Les notations $\Delta\omega$ et $\Delta\omega'$ désignent les désaccords du repompeur vis-à-vis respectivement des transitions $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \leftrightarrow |5P_{3/2}, F' = 3\rangle$ et $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \leftrightarrow |5P_{3/2}, F' = 2\rangle$.

Nous avons choisi de garder les atomes ayant une vitesse de 250 m/s. Il faut en effet que les atomes ne traversent pas trop rapidement la cavité car on a plutôt intérêt à augmenter le temps d'interaction entre les atomes et le champ pour l'expérience de métrologie. Par ailleurs, en diminuant trop la vitesse des atomes, du fait de la distribution maxwellienne, on diminue fortement le nombre d'atomes détectés et donc on augmente d'autant la durée nécessaire à la prise de données. La valeur de 250 m/s est un compromis raisonnable pour effectuer la mesure de la probabilité de détecter $|g\rangle$ en fonction de β telle que présentée à la section IV.3 en environ 8 heures de travail, en plus du temps dévolu aux nécessaires calibrations. La sélection des atomes allant à la vitesse de 250 m/s s'appuie sur la structure hyperfine du ^{85}Rb et plus particulièrement sur les niveaux $|5S_{1/2}, F=2\rangle$ et $|5S_{1/2}, F=3\rangle$ séparés par environ 3 GHz. On rappelle que l'état $|5S_{1/2}, F=3\rangle$ est l'état de départ de la première transition optique du processus de préparation des atomes. Le principe de cette sélection consiste donc à faire en sorte de ne placer sur cet état que les atomes de la vitesse souhaitée grâce à un pompage optique sélectif en vitesse [101] effectué *en amont* de la boîte à circulariser.

La figure III.12 représente les niveaux électroniques mis en jeu pour cette sélection de vitesse. Un premier laser dit *dépompeur* est accordé sur la transition entre les niveaux hyperfins $|5S_{1/2}, F=3\rangle$ et $|5P_{3/2}, F'=3\rangle$. Il permet ainsi indirectement le transfert des atomes de l'état $|5S_{1/2}, F=3\rangle$ (en sortie du four) vers l'état $|5S_{1/2}, F=2\rangle$. Comme il est perpendiculaire au faisceau atomique, il ne sélectionne aucune classe de vitesse spécifique. Alors intervient le deuxième laser dit *repompeur* qui, lui, est désaccordé de $\Delta\omega \approx 2\pi \cdot 145$ MHz vis-à-vis de la transition $|5S_{1/2}, F=2\rangle \leftrightarrow |5P_{3/2}, F'=3\rangle$. Comme son faisceau forme un angle de 63° avec le jet atomique, il ne va remettre dans l'état $|5S_{1/2}, F=3\rangle$ que les atomes pour lesquels la vitesse compense par effet Doppler le désaccord. A la fin de l'interaction avec les deux lasers, les atomes repompés dans l'état initial de la procédure d'excitation vers les états circulaires ont tous des vitesses de 250 m/s environ. Les autres atomes, ne finissant pas la procédure, ne sont pas en mesure d'interagir avec la cavité et ils traversent le dispositif sans gêner l'expérience.

En pratique, la courbe bleue de la figure III.11 montre que la largeur de la classe de vitesse sélectionnée à 250 m/s est de quelques dizaines de mètres par seconde à cause de la largeur de la première transition optique subie par les atomes. A l'échelle du temps de vol des atomes, cette largeur a pour conséquence une dispersion des atomes de l'ordre du centimètre au niveau des détecteurs. Cela génère une trop importante dispersion de 8 mm des atomes dans la cavité, considérant la taille du waist du mode du champ. Cette dispersion en vitesse des atomes préparés dépend évidemment de la puissance du repompeur : plus celle-ci est importante, plus la sélectivité est mauvaise [84]. Pour cette raison, nous avons choisi de diminuer cette puissance à $9\text{ }\mu\text{W}$. Plus gênant encore, on peut voir sur la même figure qu'une deuxième classe de vitesse autour de 350 m/s a également été sélectionnée par effet Doppler. Elle correspond aux atomes dont la vitesse a compensé le désaccord lumineux avec le niveau $|5P_{3/2}, F'=2\rangle$. Il est donc indispensable de raffiner la sélection par effet Doppler en utilisant une technique dite *de temps de vol* plus discriminante. Celle-ci

est présentée sur la figure III.13.

Elle consiste à pulser deux étapes de la préparation des atomes séparées spatialement de sorte que l'on ne peut préparer dans les états de Rydberg que les atomes qui ont “perçu” ces deux étapes et qui ont donc volé avec la bonne vitesse. Nous avons déjà vu que la première transition optique au sein de la boîte à circulariser était pulsée pour marquer notre référence de temps. Nous laissons donc tous les autres lasers allumés en continu sauf le repompeur qui est allumé pendant une durée de $1,4\ \mu\text{s}$. La valeur moyenne de la vitesse de l'échantillon atomique préparé est fixée par la durée séparant les impulsions du repompeur et du laser de la première transition du schéma d'excitation des atomes. Celle du repompeur est émise $1443\ \mu\text{s}$ avant celle de l'autre laser. La dispersion des vitesses des atomes de l'échantillon autour de cette valeur moyenne est déterminée par la durée des deux impulsions que nous avons ajustée pour ne préparer que des atomes de vitesse très proche $250 \pm 2\ \text{m/s}$: comme on peut le voir sur l'insert de la figure III.11, lorsque le repompeur est allumé $4\ \mu\text{s}$ la dispersion en vitesse est de $5\ \text{m/s}$.

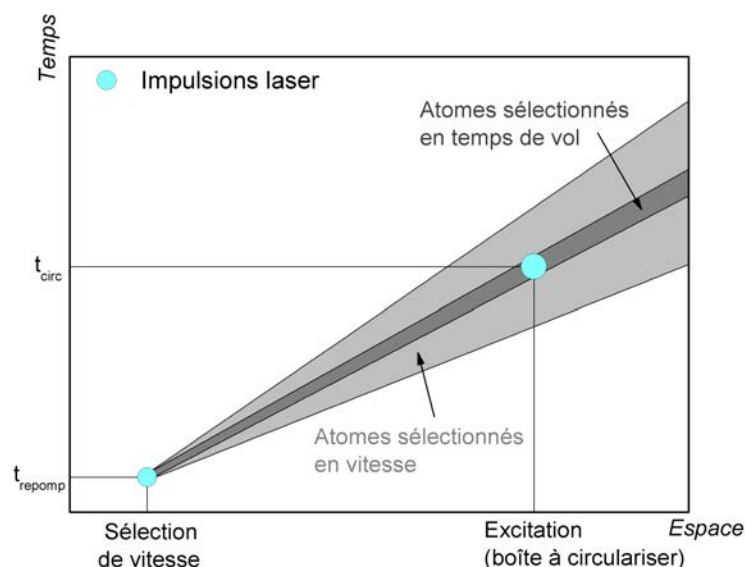


FIGURE III.13 – Principe de la sélection de vitesse en temps de vol

Le laser à $780\ \text{nm}$ et le repompeur sont allumés pendant une durée limitée aux instants t_{repomp} et t_{circ} . Le cône gris clair montre les trajectoires des atomes repompés par le laser de sélection de vitesse dans l'état $F=3$. Ne pourront ensuite être excités sur les états de Rydberg que les atomes croisant le faisceau du laser à $780\ \text{nm}$ à l'instant t_{circ} (les autres lasers étant allumés en continu). Dans ce diagramme espace-temps, la pente des des trajectoires représente la vitesse des atomes. On voit ainsi que la largeur de la distribution en vitesse est nettement réduite par cette sélection en temps de vol.

III.2.5 Nombre d'atomes préparés par échantillon atomique

Pour être en mesure d'analyser correctement les résultats, nous ne cherchons absolument pas à maximiser le nombre d'atomes préparés par échantillon. L'important pour nous est de ne pas avoir plus d'un atome à la fois interagissant avec le mode de la cavité et de réduire au maximum la dispersion au sein de l'échantillon. Les paramètres sur lesquels nous jouons pour cela sont la puissance du repompeur, choisie à $9\text{ }\mu\text{W}$ comme déjà vu, et la durée de son impulsion que nous avons limitée à $1,4\text{ }\mu\text{s}$. En effet, en diminuant la largeur de la distribution en vitesse, nous diminuons de fait le nombre moyen d'atomes préparés (et par là-même la dispersion autour de cette valeur) du fait de la distribution poissonnienne. Toutefois diminuer trop cette largeur fait courir le risque d'avoir un grand nombre d'échantillons avec aucun atome préparé et donc trop de séquences de mesures inutiles. Le choix du nombre moyen d'atomes n_a d'environ 0,03 résulte donc d'un compromis.

III.2.6 Détection des atomes

Les atomes sélectionnés en vitesse puis préparés sur un état de Rydberg circulaire traversent ensuite la cavité. Le résultat de l'interaction atome-champ sur l'état atomique est ensuite mesuré par des détecteurs à ionisation. En effet, les états de Rydberg, étant très excités, sont très facilement ionisables. Il suffit pour cela d'un champ électrique de l'ordre de la centaine de V/cm. Evidemment, la valeur du champ pour laquelle l'atome s'ionise dépend de son état $|g\rangle$ ou $|e\rangle$. En pratique, nous disposons de deux détecteurs présentés sur la figure III.14 qui sont basés sur ce principe mais qui ont des avantages différents expliqués dans le détail dans la thèse d'A. Auffèves-Garnier [56]. Nous allons nous contenter ici d'en donner une vue générale.

■ DÉTECTEUR À ÉLECTRODE PLATE (1^{ER} DÉTECTEUR)

Le premier détecteur est constitué d'une cathode plate disposée face à une anode percée d'un trou de 6 mm (voir figure III.14). En appliquant une différence de potentiel entre ces deux plaques, on génère un champ électrique relativement homogène. Lorsque l'échantillon atomique arrive au niveau du trou, on déclenche une rampe de potentiel de -5 V à -35 V sur la cathode (à potentiel fixé pour l'anode), augmentant ainsi linéairement le champ électrique vu par les atomes. L'électron de valence de l'atome préparé - le cas échéant ! - est arraché lorsque ce champ atteint la valeur d'ionisation. Il est ensuite accéléré à travers le trou puis par des lentilles électrostatiques qui le guident vers un multiplicateur d'électrons. La rampe en tension et le résultat de la détection sont également représentés sur la figure III.15. Le champ électrique variant au cours du temps, il nous est possible de distinguer les états circulaires $|50C\rangle$ et $|51C\rangle$ facilement puisqu'étant séparés en énergie, les pics de détection associés sont clairement séparés temporellement. Ceci nous permet de définir des *fenêtres temporelles* (délimitées par les lignes verticales en pointillé). Dans chaque fenêtre, nous comptons tous les atomes détectés et nous considérons alors que ceux-ci sont dans le même état circulaire. La position temporelle de la rampe a son importance

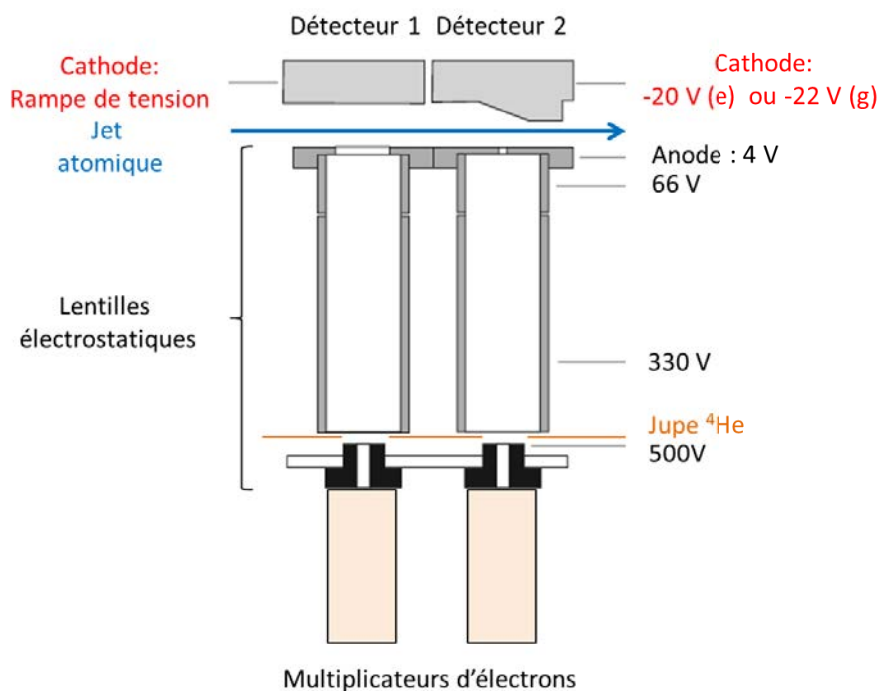


FIGURE III.14 – Schéma des deux détecteurs avec les potentiels appliqués sur les différentes électrodes.

puisque'elle peut "favoriser" la détection d'un état plutôt que l'autre. Nous réglons donc le temps de déclenchement de la rampe ainsi que la taille des fenêtres de détection pour équilibrer la détection entre les deux états.

Nous avons utilisé ce détecteur pour tous les résultats de l'expérience principale. Son efficacité s'est dégradée au cours des thèses précédentes : initialement de $80 \pm 10\%$ [102], elle a chuté à 30% au cours des années. La mesure de cette dernière valeur est bien détaillée dans la référence [103]. Nous n'avons pu détecter que 0,01 atomes sur les 0,03 préparés par échantillon et le détecteur fait environ 5% d'erreurs à la discrimination entre les états $|e\rangle$ et $|g\rangle$. Précisons qu'une erreur de discrimination correspond à la détection d'un atome dans l'état $|e\rangle$ alors que celui-ci est en réalité dans l'état $|g\rangle$ et vice-versa.

■ DÉTECTEUR À GRADIENT DE CHAMP (2^E DÉTECTEUR)

Le deuxième détecteur ne diffère du premier que par sa cathode qui prend la forme d'un plan incliné, le trou de l'anode ne mesurant plus que 2 mm. Tout le reste est structuellement identique à ce que nous venons de voir. Toutefois, cette distinction n'est pas minime. Les potentiels de l'anode et de la cathode sont cette fois fixés et c'est la géométrie de la cathode qui assure l'augmentation du champ électrique perçu par les atomes le long de leur trajet entre les électrodes. Dès que l'atome voit un champ électrique suffisant, il s'ionise. Le long du plan incliné, on ionise donc progressivement les atomes qui sont

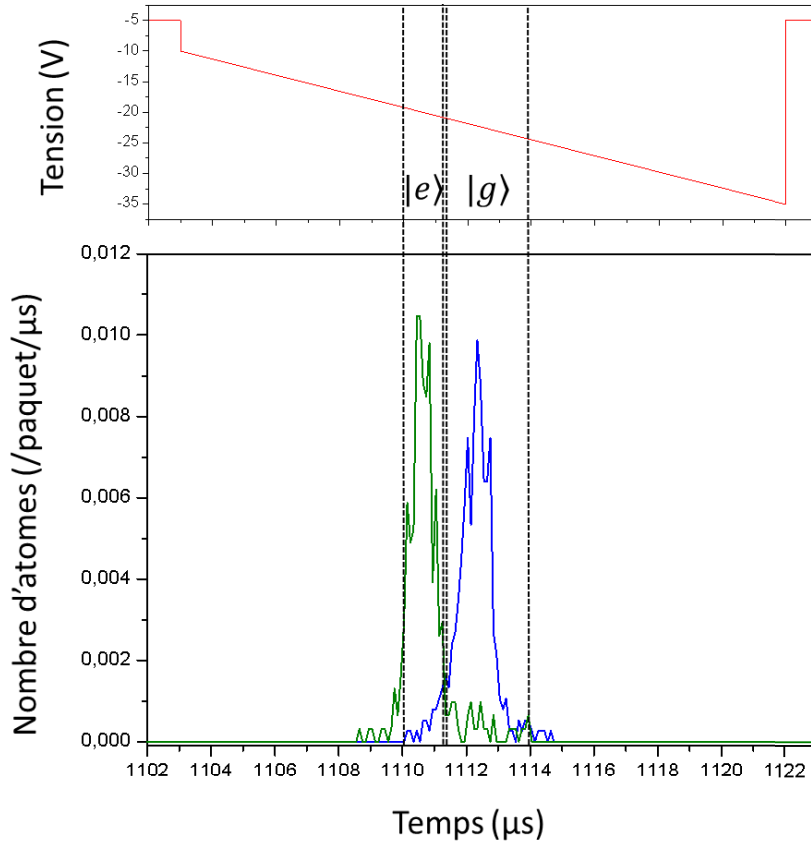


FIGURE III.15 – Détection des atomes avec le détecteur à cathode plate

Une rampe de potentiel appliquée à la cathode (à potentiel d'anode fixé) permet l'ionisation des atomes présents au dessus du trou. Le signal obtenu est moyenné sur 300 000 échantillons atomiques. La courbe verte correspond au signal de détection d'atomes initialement préparés dans $|51C\rangle \equiv |e\rangle$ tandis que la bleue correspond à la détection d'atomes préparés dans $|50C\rangle \equiv |g\rangle$ qui sont ionisés plus tardivement car leur énergie d'ionisation est plus élevée. On peut alors définir deux fenêtres de temps dans lesquelles on peut compter le nombre d'atomes détectés dans chaque état par intégration sous la courbe.

dans des états de plus en plus bas en énergie. Le trou étant petit, et donc très sélectif, le détecteur ne comptabilise que les atomes qui sont ionisés exactement au centre du plan incliné. Contrairement au détecteur précédent, celui-ci ne compte donc que les atomes qui sont dans un niveau d'énergie déterminé. En faisant varier le potentiel de la cathode pour des séquences différentes, on peut sonder d'autres niveaux. La détection des atomes sur les niveaux $|g\rangle$ et $|e\rangle$ se fait donc pour deux valeurs de potentiels de cathode indiqués sur la figure III.14. L'avantage de ce détecteur est qu'il n'est pas nécessaire pour le faire fonctionner de savoir *quand* les atomes arrivent sur le détecteur. En contrepartie, il est nécessaire de répéter chaque séquence expérimentale deux fois en détectant la moitié du temps les atomes dans $|g\rangle$ et l'autre moitié dans $|e\rangle$. Nous ne l'avons donc utilisé que pour les expériences de temps de vol telles que la calibration de la sélection de vitesse.

III.3 Le système champ

Dans cette partie, nous nous concentrerons sur le deuxième système qui compose notre système quantique. Il s'agit de la cavité supraconductrice micro-onde placée au coeur du dispositif expérimental. Elle est une parente lointaine de la fameuse “boîte à photons” qui a opposé Einstein et Bohr en 1930. Pour qu'elle soit efficace, il faut qu'elle piège les photons dans un mode bien isolé, donc occupant un volume assez faible pour bien rester confiné, et le plus longtemps possible. Ce n'est qu'ainsi qu'on peut s'assurer d'être en régime de couplage fort entre le mode de la cavité et les photons le traversant. Nous détaillerons dans un premier temps ses caractéristiques géométriques. Nous évoquerons l'extraordinaire durée de vie des photons en son sein avant d'en venir à la méthode d'accord de la cavité pour s'assurer que le mode TEM_{900} est bien à 51,099 GHz. Nous finirons par présenter la façon dont nous injectons de la micro-onde dans la cavité.

III.3.1 Géométrie

La géométrie de la cavité doit être pensée pour concentrer le champ micro-onde en son centre où passent les atomes. L'utilisation de miroirs de très grande réflectivité est bien sûre primordiale, mais il faut en plus s'assurer de ne pas perdre les photons par diffraction.

Une idée naturelle est d'employer une cavité complètement fermée avec uniquement des trous sous coupure pour empêcher la micro-onde d'en sortir tout en laissant traverser les atomes [104, 105]. Ceci est toutefois incompatible avec l'application du champ électrique directeur : il faut bien deux miroirs à deux potentiels différents. On ne peut, de plus, pas passer trop près des trous pour ne pas perdre les cohérences atomiques à cause de champs parasites. Après plusieurs années de développement [84, 56, 55], l'équipe a finalement opté pour l'utilisation de deux miroirs en cuivre recouverts de niobium, toroïdaux, placés en configuration Fabry-Pérot [106] (voir figure III.16). Nous allons par la suite justifier ces choix. L'agencement des miroirs dans la cavité est présenté sur la figure III.18.

Considérons dans un premier temps que les deux miroirs sont rigoureusement sphériques. Dans l'approximation paraxiale, les modes propres d'une cavité Fabry-Pérot sont les modes transverses électromagnétiques [107], TEM_{qnm} , où q désigne le nombre de ventres de l'onde stationnaire entre les miroirs, et n et m décrivent le profil transverse. Pour avoir un maximum de micro-onde au centre de la cavité, nous avons choisi de travailler avec un mode de profil gaussien ($n = m = 0$). Sa fréquence est donnée par :

$$\nu_q = \frac{c}{2d} \left(q + \frac{1}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{d}{R} \right) \right), \quad (\text{III.10})$$

où c est la vitesse de la lumière, R le rayon de courbure des miroirs, et d la distance les séparant. L'objectif est de sélectionner un mode du champ qui soit maximalelement couplé avec les atomes traversant la cavité à mi-hauteur. Il faut ainsi que le mode sélectionné ait

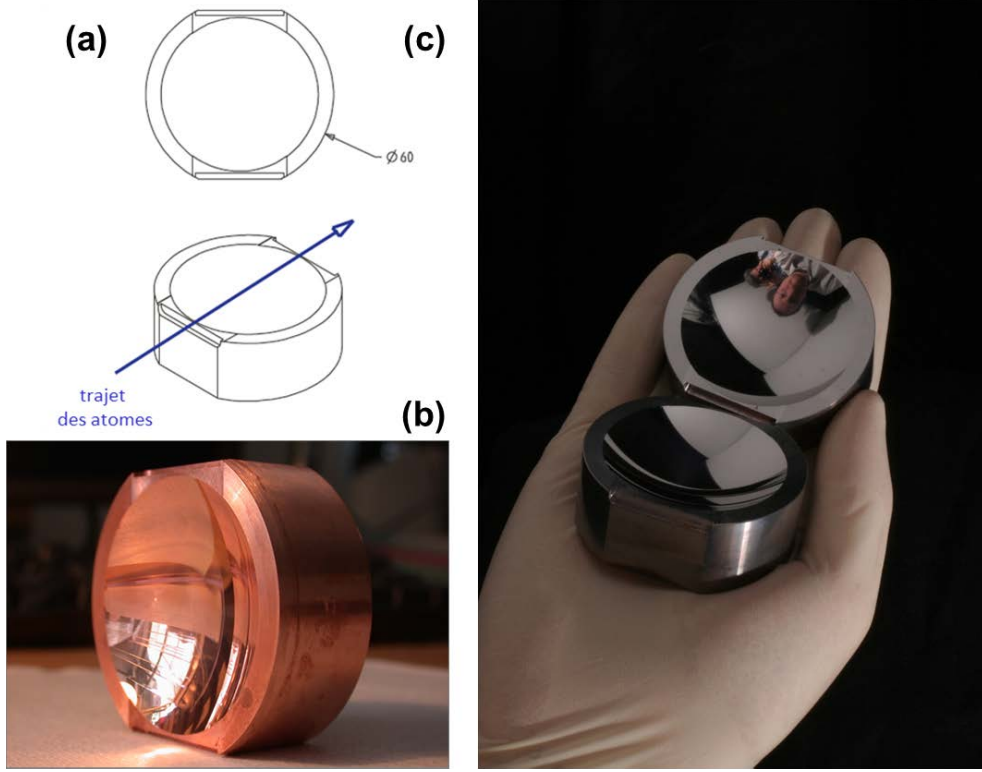


FIGURE III.16 – Substrat et miroirs

(a) Vue de dessus et de trois-quarts des miroirs. Le trajet des atomes est indiqué par la flèche. (b) Substrat initial toroïdal en cuivre. Un soin particulier est apporté au polissage par usinage diamant de la concavité mais la face arrière est également polie au micron près pour éviter des déformations trop importantes de la surface concave lorsque le miroir est fixé par l'arrière au bloc cavité. Pour cette même raison, le substrat est volontairement très épais. (c) Miroirs après dépôt de niobium par pulvérisation.

un ventre à cette position, ce qui impose le choix d'un mode impair. En prenant un rayon de courbure pour nos miroirs d'environ 40 mm et une distance d entre les deux de 28 mm, on trouve que le mode TEM_{900} a une fréquence de 51,1 GHz. Dans ces conditions, ce mode sera bien résonant avec la transition atomique $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$.

Etant donné la symétrie de la cavité, il est simple d'exprimer l'amplitude du champ $\mathcal{E}$ pour le mode considéré en coordonnées cylindriques. On prendra comme axe (Oz) l'axe de la cavité et comme origine son centre. On obtient :

$$\mathcal{E}(r, z) \equiv \mathcal{E}_m f(r, z) = \mathcal{E}_m \frac{w_0}{w(z)} \cos \left(kz - \arctan \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} + \frac{r^2 k}{2R(z)} \right) e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}}, \quad (\text{III.11})$$

où $\mathcal{E}_m$ donne l'amplitude au centre de la cavité ($r = z = 0$), $\lambda = 5,87 \text{ mm}$ est la longueur d'onde, et $k = 2\pi/\lambda$ le vecteur d'onde associé. La fonction f , que nous avons déjà rencontrée, est une fonction sans dimension qui décrit le profil gaussien du mode et qui est normalisée à 1 en son maximum. Elle correspond au produit d'une gaussienne et d'une fonction sinusoïdale. La gaussienne décrit le profil transverse du mode, dont la largeur varie

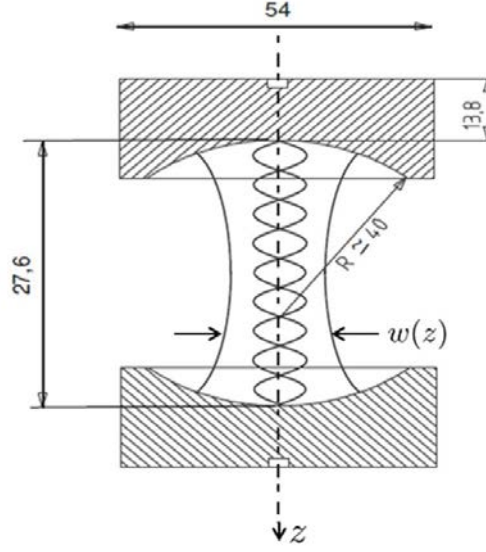


FIGURE III.17 – Schéma de la cavité

Le schéma en coupe du résonateur Fabry-Pérot n'est pas à l'échelle. L'espacement entre les miroirs a été exagéré pour plus de lisibilité. Les cotes sont en millimètres et $w(z)$ donne la largeur du profil à la cote z . On peut également y voir les neuf ventres du mode propre sélectionné.

le long de l'axe (avec un *waist* w_0) :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2}, \quad \text{avec } w_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{d(2R - d)}. \quad (\text{III.12})$$

Le facteur w_0 est le col du mode au centre de la cavité, valant 5,96 mm. Le terme sinusoïdal, lui, décrit les neuf ventres de champ de l'onde stationnaire ainsi que l'évolution du rayon de courbure $R(z)$ du front d'onde lorsque l'on s'éloigne du centre de la cavité :

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right). \quad (\text{III.13})$$

Le mode est représenté schématiquement au sein de la cavité sur la figure III.17.

Grâce à ces considérations, on peut estimer la valeur du volume effectif du mode :

$$\mathcal{V} = \int |f(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} = \frac{\pi w_0^2 d}{4} \simeq 770 \text{ mm}^3, \quad (\text{III.14})$$

Rapporté à l'échelle de longueur naturelle qu'est la longueur d'onde λ , on constate que ce mode est effectivement très bien confiné puisque son volume n'est à peine que de quelques λ^3 . Ce confinement permet d'atteindre une grande valeur de champ du vide : l'amplitude des fluctuations de point zéro au centre du mode est donnée par [68] :

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\text{cav}}}{2\epsilon_0 \mathcal{V}}} \simeq 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ V/m}, \quad (\text{III.15})$$

où $\omega_{\text{cav}} = 2\pi\nu_{\text{cav}}$ est la pulsation du mode considéré. Cette valeur, importante, est nécessaire pour assurer un très bon couplage atome-champ même en l'absence de photons dans la cavité.

Revenons sur la forme des miroirs. Si les miroirs étaient réellement sphériques, les deux modes associés aux deux polarisations linéaires orthogonales dans le plan perpendiculaire à l'axe de la cavité auraient la même fréquence. En pratique, l'usinage des substrats de cuivre n'est jamais parfait et nous craignons que les imperfections de surface ne soient suffisantes pour lever la dégénérescence de quelques dizaines de kHz entre ces deux modes. Cette situation est particulièrement inconfortable puisque l'atome se retrouve couplé aux deux modes à la fois (couplage atome-champ de 46 kHz) sans pouvoir toutefois négliger la rotation de la polarisation du champ à l'échelle d'une période de Rabi. Puisque nous ne pouvons garantir une parfaite sphéricité du polissage, les miroirs sont fabriqués à partir de substrats volontairement toroïdaux pour lever beaucoup plus franchement cette dégénérescence et faire interagir les atomes avec un seul de ces deux modes. Les deux rayons de courbure de chacun des miroirs valent 39,4 et 40,6 mm, ce qui permet de séparer les deux modes de 1,2 MHz, valeur qui est cette fois nettement supérieure à la fréquence de Rabi du vide. Le mode de plus basse fréquence (BF) constitue l'oscillateur de cette expérience. Or nous avons vu que les états de Rydberg circulaires ont un dipôle sensible uniquement aux champs perpendiculaires à l'axe de quantification. On pourra donc coupler de manière efficace l'atome et le mode de la cavité.

Temps d'interaction effectif Lorsque un atome traverse la cavité, il ressent en réalité un champ variable au cours du temps à cause de la structure gaussienne du mode. La variation temporelle du couplage est ainsi :

$$\Omega(t) = \Omega_0 e^{-\frac{v^2 t^2}{w_0^2}}, \quad (\text{III.16})$$

en appelant v la vitesse de l'atome. Ceci complique fortement l'analyse du couplage atome-champ. Toutefois, il est possible de se ramener au couplage maximum de constante Ω_n comme développé dans le chapitre théorique à condition de remplacer le temps d'interaction *réel* par un temps d'interaction *effectif*, différent selon que l'atome et cavité sont à résonance ($\delta = 0$) ou bien loin de la résonance ($\delta \gg \Omega_0$) [68]. On notera le temps effectif dans ces deux cas respectivement T_{res} et T_{disp} . Il s'exprime en fonction du profil du mode gaussien et de la vitesse atomique, en prenant comme $t = 0$ le passage de l'atome au centre de la cavité :

$$T_{\text{res}} = \int \exp(-v^2 t^2 / w_0^2) dt, \quad T_{\text{disp}} = \int \exp(-2v^2 t^2 / w_0^2) dt. \quad (\text{III.17})$$

soit lorsqu'on intègre sur la totalité de la traversée de la cavité par l'atome,

$$T_{\text{res,cav}} = \sqrt{\pi} \frac{w_0}{v}, \quad T_{\text{disp,cav}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{w_0}{v}. \quad (\text{III.18})$$

On constate alors que le temps effectif d'interaction résonante est plus grand que celui d'une interaction dispersive d'un facteur $\sqrt{2}$. En prenant les valeurs expérimentales de waist et de vitesse atomique, on peut estimer le temps maximal d'interaction possible entre l'atome et la cavité à $42\text{ }\mu\text{s}$. Pour toute la suite, les temps effectifs seront toujours représentés par la lettre T . Les temps réels, eux, que l'on entrera dans les séquences expérimentales, prendront la lettre t minuscule.

III.3.2 Temps de vie des photons

Pour accéder au régime de couplage fort entre atome et champ, il faut allier au confinement du mode un taux de relaxation des photons le plus faible possible. Il faut donc limiter autant que faire se peut l'absorption des photons par les miroirs et leur fuite hors du mode d'intérêt. Nous l'avons déjà vu, la géométrie de la cavité a été pensée pour contenir le plus proprement possible le mode dans la cavité. Par ailleurs, le niobium, supraconducteur à 0.8 K, est un matériau de choix pour assurer une excellente réflectivité des miroirs. L'équipe a donc développé un type de fabrication de miroir, testé par S. Osnaghi durant sa thèse [108], et qui est basé sur des développements originellement effectués dans les accélérateurs à particules [109]. Les miroirs sont issus de substrats de cuivre massifs qui ont été recouverts de niobium. Un usinage au diamant du cuivre permet d'obtenir des miroirs de très faible rugosité (6 nm rms), avec une précision sur la forme à grande échelle de l'ordre de 300 nm crête à crête. Le cuivre permet en outre d'assurer une très bonne conductivité thermique entre le support des miroirs à 0.8 K et le niobium déposé en surface, condition indispensable à la thermalisation rapide de ce dernier que l'on souhaite rendre supraconducteur. Le procédé de dépôt de niobium par pulvérisation cathodique magnétron [110] a été développé par l'équipe de P. Bosland, E. Jacques et B. Visentin au CEA et nous assurons depuis quelques années nous-même le dépôt de deux couches de 6 μm chacune de niobium sur les substrats grâce à un banc de pulvérisation qui nous a été aimablement donné par cette même équipe du CEA.

Cette technique de fabrication de miroir a permis d'augmenter de manière impressionnante les temps caractéristiques de relaxation des photons dans la cavité, ou de manière équivalente, le temps d'amortissement de l'énergie moyenne contenue dans la cavité appelé *temps de vie de la cavité*. Le meilleur temps de vie ainsi atteint par une cavité de notre fabrication s'est élevé à 130 ms. Pour l'expérience de mesure du petit champ β , nous avons utilisé une cavité fabriquée lors de la thèse de C. Sayrin dont la largeur spectrale du mode BF est de 2,5 Hz correspondant à un temps de vie de 65 ms.

Remarque On peut indifféremment utiliser les notions de temps de vie T_{cav} ou bien de facteur de qualité Q ou de finesse $\mathcal{F}$ pour quantifier la qualité du résonateur. Toutes ces grandeurs sont reliées à la largeur spectrale du mode $\Delta\nu_{\text{cav}}$, éventuellement par le biais de l'intervalle spectral libre $ISL = c/2d = \nu/q$, où nous rappelons que q dénombre les ventres

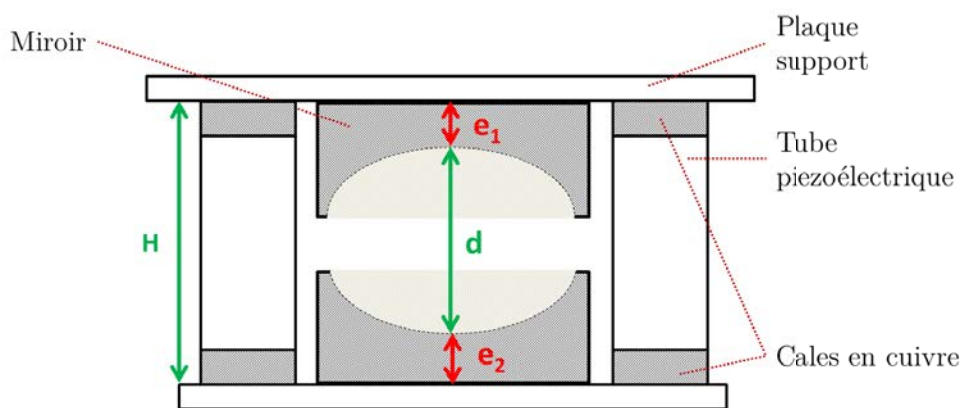
de l'onde stationnaire établie entre les miroirs et vaut 9 pour le mode que nous utilisons :

$$\mathcal{F} = \frac{ISL}{\Delta\nu_{\text{cav}}} = 2,3 \cdot 10^9, \quad Q = \frac{\nu_{\text{cav}}}{\Delta\nu_{\text{cav}}} = 2,1 \cdot 10^{10}. \quad (\text{III.19})$$

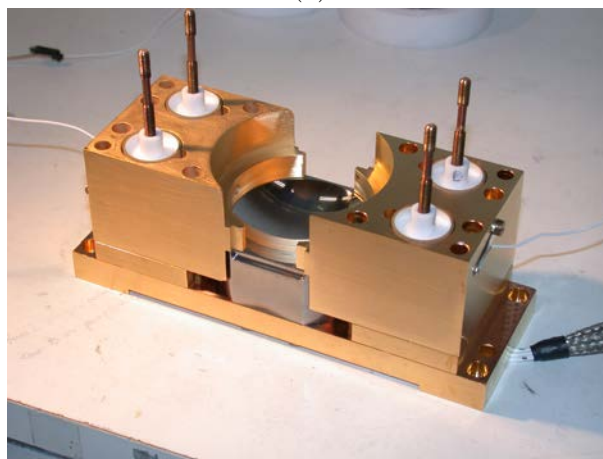
III.3.2.a Ajustement de la fréquence du mode TEM₉₀₀

La séquence expérimentale dont nous avons présenté la théorie fait apparaître des régimes où atome et mode du champ doivent être à résonance. A l'inverse, lors de l'opération de renversement du temps, il s'agit de placer atome et cavité totalement hors résonance pour pouvoir retourner le dipôle atomique sans “toucher” au champ. Il est donc nécessaire de pouvoir ajuster la fréquence de la transition atomique relativement à celle de la cavité très précisément : la fréquence de couplage entre atome et cavité étant de 46 kHz, il faut s'assurer de la maîtrise du *désaccord* entre les deux sous-systèmes avec une précision de l'ordre du kHz. En pratique pour modifier la valeur de ce désaccord, il est plus facile d'utiliser l'effet Stark comme proposé dans la partie III.2.4 pour décaler en fréquence la transition atomique $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ que de modifier la longueur de la cavité et donc la fréquence du mode comme nous allons le voir. La longueur de la cavité sera fixée une bonne fois pour toute en début d'expérience.

La longueur de la cavité correspond à la distance séparant les deux miroirs lorsqu'ils sont placés l'un en face de l'autre dans le *bloc cavité*, représenté schématiquement sur la figure III.18. Pour des miroirs donnés (d'épaisseurs e_1 et e_2 fixées), la seule façon de changer la distance entre les miroirs est de changer la hauteur H entre les plaques sur lesquelles sont fixées les miroirs. Les contractions des différents matériaux lors de la mise à froid des blocs cavités sont non négligeables vis-à-vis de la précision en fréquence souhaitée et, si elles peuvent être *grosso modo* évaluées, la reproductibilité du montage est telle que la fréquence de résonance peut varier sur une plage totale de 10 MHz. Il faut donc avoir un moyen de modifier la fréquence de résonance, une fois le bloc cavité en place dans le cryostat et à froid. Les séparateurs que nous utilisons sont donc chacun constitués de deux pièces. Des cales de cuivre ajustée au micron près par attaque à l'acide permettent de régler la fréquence de la cavité au MHz près. Le réglage fin, à froid, est ensuite assuré par des tubes piezoélectriques sur lesquels on peut appliquer jusqu'à quelques centaines de volt pour rectifier la fréquence sur une plage de 5 MHz. Le facteur de conversion de ces éléments piezoélectriques est de 2,5 kHz/V environ. Dans la pratique, les différentes pièces des séparateurs étant à des potentiels différents, des feuilles d'isolant, non représentées sur le schéma, ont été intercalées entre elles. La photo adjacente au schéma propose une vue du bloc cavité ouvert, partiellement assemblé pour qu'on puisse voir les différents composants. On reconnaîtra un miroir, les demi-anneaux et les 4 tubes en téflon, centrants les piezoélectriques, dont la tête blanche est visible. Les cales de cuivre sont manquantes. Elles viennent normalement s'enfiler sur les tiges filetées qui dépassent et qui permettent également la fixation de la deuxième plaque de support de l'autre miroir.



(a)



(b)

FIGURE III.18 – Bloc cavité

(a) Schéma en coupe du bloc cavité. Les épaisseurs e_1 et e_2 des miroirs sont fixées par celles des substrats de cuivre et des dépôts de niobium. La distance d entre les miroirs ne peut donc être modifiée que par l'adaptation des hauteurs des cales de cuivre et des tubes piezoélectriques regroupées sous la notation H .
 (b) Photo du bloc cavité. Le miroir et la plaque support du dessus ont été ôtés pour plus de visibilité. Un des miroirs est fixé sur la plaque du bas. Les deux blocs dorés entourant le miroir sont des demi-anneaux réfléchissants qui permettent le recyclage des photons diffractés hors du mode. On peut voir les tubes blancs d'isolant qui centrent les piezoélectriques par rapport aux tiges filetées de fixation du second miroir.

La méthode que nous employons pour contrôler la fréquence de la cavité à froid utilise une mesure réalisée à l'aide des atomes. Nous reviendrons aussi en détail sur cette procédure dans la section IV.2.1. Elle nous a permis de mettre en évidence la présence de *dérives* de fréquence du TEM₉₀₀ [86]. Celles-ci sont dues aux variations de la température de la cavité qui modifient la fréquence de 1 Hz par mK. Toute contrainte mécanique sur le bloc peut aussi faire bouger la fréquence du mode. Les sources de vibrations telles que les câbles de tension ou de micro-onde ou bien les tuyaux pompés ont dû être isolées. L'hélium a dû être stabilisé en pression à 0.2 mbar. Tout ceci pris en compte limite les

dérives de fréquence dans une plage d'une dizaine de Hertz sur 5 heures environ. De plus, la cavité, très sensible, met plusieurs heures voire une journée à se stabiliser après chaque changement de tension appliquée sur les tubes piezoélectriques. Il est donc évidemment hors de question de modifier le désaccord atome-champ par ce biais sur les quelques dizaines de microsecondes que dure une séquence ! C'est pour cette raison que nous agissons donc plutôt sur la fréquence de la transition atomique par effet Stark.

III.3.2.b Injection de micro-onde dans la cavité

L'injection de micro-onde dans un mode de la cavité se fait par couplage entre ce mode et une source de micro-onde classique de même fréquence [68]. Il faut en retenir que l'effet du couplage entre la source et le mode est de déplacer l'état $|\eta\rangle$ du mode initialement présent dans la cavité (supposé cohérent ici) vers un état cohérent $|\eta + \gamma t_{inj}\rangle$ où t_{inj} est le temps de couplage et γ est le *taux d'injection* dépendant de la puissance de la source. En toute rigueur, cette expression de l'état cohérent produit n'est valable que si t_{inj} est très inférieur au temps de vie de la cavité T_{cav} , ce qui sera toujours le cas pour notre expérience.

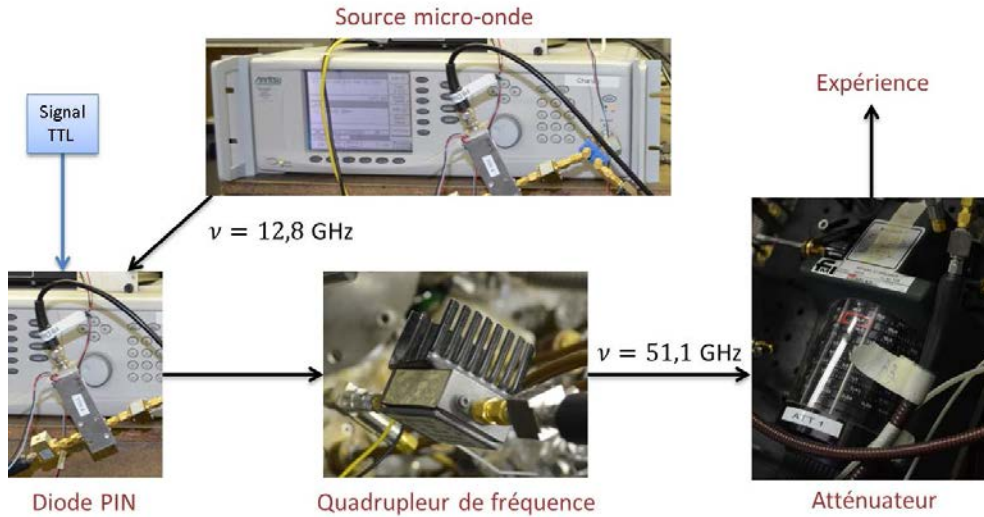


FIGURE III.19 – Ligne d'injection du champ

Une source externe émet un signal micro-onde ayant exactement la fréquence du mode de la cavité divisée par 4 (soit environ 12,8 GHz). Celui-ci, après avoir été ramené à la bonne fréquence via le quadrupleur de fréquence, est envoyé à l'intérieur du cryostat jusqu'à la cavité grâce à des guides d'ondes. La durée de l'injection est fixée par la fermeture du circuit grâce à une diode PIN contrôlée à l'aide d'un signal TTL et son amplitude est ajustée manuellement grâce à un atténuateur variable dans la gamme 0 – 80 dB.

Les cavités étant ouvertes, nous pouvons y injecter un signal à l'aide d'un guide d'onde placé latéralement à l'extérieur de la cavité et couplé au mode par diffraction sur les bords des miroirs. A l'extérieur du cryostat, nous disposons d'une ligne expérimentale représentée sur la figure III.19. Son premier élément, un synthétiseur de type Anritsu 3692, fournit de la micro-onde à une fréquence de 12,8 GHz environ, qui est le quart de la fréquence du

mode de la cavité. A sa suite est installée une diode PIN qui permet d'imposer la durée de l'impulsion de micro-onde délivrée à la cavité grâce à un signal digital TTL reçu de l'ordinateur de contrôle de la séquence expérimentale [87]. La précision sur cette durée est justement limitée par le système de contrôle dont la résolution temporelle n'est que d'une centaine de nanosecondes. La fréquence du signal est ensuite multipliée par quatre au sein d'un quadrupleur. Le contrôle de l'amplitude du signal injecté est assuré par des atténuateurs variables de précision, réglables sur une plage 0 – 80 dB. Le taux d'injection γ de la micro-onde dans la cavité est ainsi parfaitement maîtrisé. Le prochain paragraphe est entièrement consacré à sa calibration. Finalement, le signal de la ligne est envoyé dans le cryostat par un guide micro-onde descendant jusqu'à la cavité.

Pour chaque séquence de l'expérience principale de ce manuscrit, nous allons injecter un champ d'amplitude α toujours fixée à $\sqrt{12,7}$ et un champ dont l'amplitude β est toujours beaucoup plus faible et varie typiquement entre 0 et 2 selon les séquences. Pour s'assurer que le champ d'amplitude α est bien identique d'une séquence à l'autre, le plus simple est d'avoir deux lignes d'injection indépendantes. Ceci est rendu possible par l'existence d'un deuxième guide d'onde installé dans le cryostat et relié à l'emplacement prévu pour une cavité supplémentaire (la cavité C_1). Le signal est donc séparé dès la sortie de l'Anritsu grâce à un splitter (composant bleu visible sur la photo de l'Anritsu), et envoyé sur les deux lignes dont la composition est identique. L'injection des petits champs d'amplitude β se fait, comme on le verra, dans un temps très court et a donc en contre-partie un spectre large. Pour cette raison, le mode souhaité est d'autant plus difficile à peupler et nécessite une injection de grande puissance. Nous utiliserons donc la ligne arrivant directement dans la cavité, mieux couplé au mode, que nous appellerons *ligne β* . La deuxième ligne couplée à l'autre cavité non utilisée sert à l'injection du champ cohérent d'amplitude α . Même si le guide d'onde n'arrive pas directement dans la cavité, la micro-onde fuit vers la cavité fonctionnelle si la puissance fournie est assez grande. Cette ligne sera donc appelée *ligne α* .

Conclusion

Ce chapitre nous a permis de présenter le dispositif expérimental et le système dont nous disposons pour l'expérience de métrologie. Ce système est en fait double : il s'agit d'un atome à deux niveaux en interaction avec un mode du champ électromagnétique piégé dans une cavité. Les atomes de Rydberg circulaires aux propriétés nombreuses et remarquables offrent des transitions dans le domaine microonde qui est celui de notre cavité. Une transition de l'atome est de fréquence proche de celle du mode. La cavité a de plus une qualité extraordinaire : son temps de vie très long (65 ms!). Le couplage fort assuré entre les atomes et le champ permet d'utiliser les atomes comme sondes efficaces du champ. Nous avons vu qu'on pouvait amener ou non les atomes à résonance avec la cavité par effet Stark grâce à un champ électrique appliqué dans la cavité. Nous exploiterons cette possibilité pour effectuer aussi bien les interactions résonantes que l'opération σ_z en régime

dispersif vus dans le chapitre théorique.

Après cette description technique, nous pouvons maintenant présenter l'expérience de métrologie proprement dite en commençant par les différentes calibrations préalables du dispositif expérimental.

Chapitre IV

Résultats expérimentaux

Sommaire

IV.1 Séquence expérimentale	118
IV.2 Mesures préliminaires	119
IV.2.1 Mesure de la fréquence de résonance de la cavité	119
IV.2.2 Préparation d'une cavité vide	120
IV.2.3 Repérage du centre de la cavité	122
IV.2.4 Calibration de l'injection de la micro-onde	124
IV.2.5 Calibration de l'opération σ_z sur l'atome	130
IV.3 Mesure du champ d'amplitude β	136
IV.3.1 Quantité maximale d'information disponible dans la mesure	138
IV.3.2 Pertinence du choix de la mesure	140
IV.3.3 Proposition de mesure du champ β à partir d'un état cohérent	144
Conclusion	145

Nous allons à présent nous pencher sur la mise en oeuvre expérimentale de l'expérience principale de ce manuscrit présentée sous ses aspects théoriques dans le chapitre II. Nous commencerons par redonner les différentes étapes de la séquence qui constitue le processus de préparation de l'état initial et celui de mesure du champ β , en choisissant cette fois un point de vue centré sur la réalisation expérimentale. Cette séquence nécessite une maîtrise parfaite des injections de champ dans la cavité et du timing des événements. Les calibrations associées seront donc présentées avant d'en venir aux résultats proprement dits. Nous essaierons autant que faire se peut d'apprécier quantitativement l'efficacité du processus de mesure choisi pour les états superpositions de champ qui sont nos ressources grâce à l'information de Fisher extraite de nos résultats. Nous la comparerons à la valeur optimale, donnée par l'information de Fisher quantique.

IV.1 Séquence expérimentale

La figure IV.1 résume ici les étapes qui permettent de déterminer une valeur inconnue du champ β . Concrètement, la séquence se déroule sous la forme suivante :

- 1 La cavité est vidée de tout champ résiduel grâce à l'envoi d'atomes absorbants. Le mode de la cavité est ensuite préparé dans l'état $|\alpha\rangle$ contenant un nombre moyen de photons $\bar{n} = 12,7$ (soit $\alpha = \sqrt{12,7}$) grâce à une injection de durée $50\ \mu\text{s}$ tandis que l'atome est préparé dans l'état $|g\rangle$.
- 2 Atome et cavité sont mis à résonance pendant une durée effective T_1 .
- 3 On désaccorde l'atome par rapport à la cavité par effet Stark pour renverser le dipôle atomique lorsque l'échantillon passe au centre de la cavité ($t = 0$). Cette opération dure $0,5\ \mu\text{s}$ et induit le "renversement du temps". En pratique, l'évolution du champ n'étant plus alors liée à celle de l'atome, on en profite pour injecter en même temps le petit champ $|\beta\rangle$ à mesurer sans perturber l'état atomique.
- 4 On replace l'atome et la cavité à résonance pendant une durée effective T_2 ajustable.
- 5 L'atome est détecté.

Comme préalable à la détermination d'une valeur inconnue du champ, nous souhaitons tracer la probabilité de détecter l'atome dans $|g\rangle$ en fonction du champ β . Il faut donc tout d'abord déterminer la probabilité en fonction du temps de détecter l'atome dans $|g\rangle$ (voir

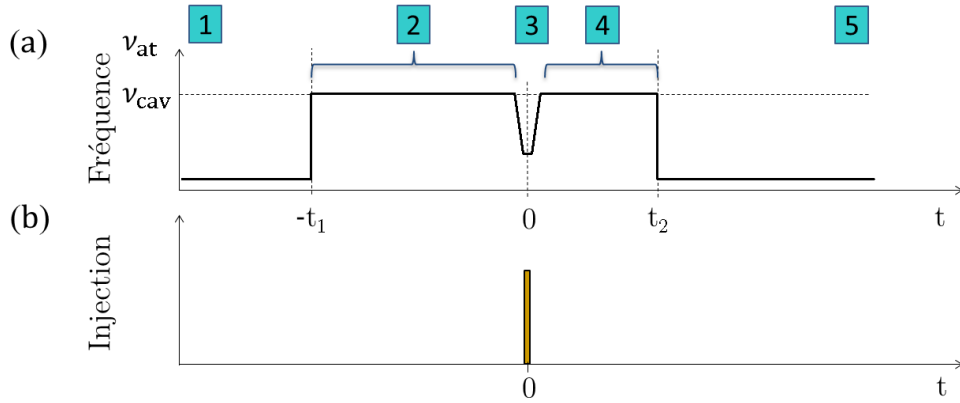


FIGURE IV.1 – Actions effectuées au sein de la cavité au cours du passage de l'atome. On agit sur la fréquence atomique par effet Stark pour mettre ou non l'atome à résonance avec la cavité. (a) La première interaction résonnante est imposée pendant une durée réelle t_1 . Autour du passage de l'atome au centre de la cavité $t = 0$, la transition atomique est brusquement désaccordée pour effectuer l'opération de renversement du temps. L'interaction résonnante reprend ensuite pendant une durée t_2 . (b) L'injection du champ β est réalisée lorsque atome et cavité ne sont pas à résonance.

section II.6.6). Pour ce faire, la séquence précédente est répétée un millier de fois pour chaque valeur de T_2 (à T_1 fixé) et encore mille fois pour chaque T_1 .

Les variations temporelles du désaccord nécessaires à une répétition de la séquence figurent sur le graphe IV.1. Toutes ces étapes nécessitent des calibrations que nous allons présenter dans ce qui suit.

IV.2 Mesures préliminaires

Le récapitulatif expérimental de la section précédente nous permet d'envisager quelles sont les mesures nécessaires à la calibration de la séquence. Il faut tout d'abord vérifier expérimentalement la fréquence du TEM₉₀₀. Ensuite, nous assurons de la bonne préparation de chaque répétition de chaque séquence. Nous cherchons également à déterminer quand l'échantillon atomique passe par le centre géométrique de la cavité pour pouvoir calibrer correctement les temps de déclenchement des différents événements de la séquence. L'amplitude et la phase de l'injection des champs cohérents doivent être ajustées pour les deux lignes d'injection. L'opération σ_z sur l'atome est ensuite calibrée. Tous ces points seront successivement abordés dans cette section.

IV.2.1 Mesure de la fréquence de résonance de la cavité

La préparation d'un état cohérent dans la cavité nécessite de connaître précisément la fréquence du mode ν_{cav} . Nous effectuons à cet effet la séquence suivante :

- 1 On injecte un signal micro-onde de fréquence ν fixée pendant une durée de 10 ms.
- 2 On envoie alors une série de 20 atomes préparés dans l'état $|g\rangle$ qui vont absorber les photons éventuellement injectés dans le mode.

La séquence est répétée à des fréquences ν différentes sur une large plage autour de la fréquence attendue de 51,099 GHz, la séquence étant réalisée une dizaine de fois pour chaque fréquence afin d'obtenir une statistique suffisante. Nous obtenons ainsi typiquement les points expérimentaux de la figure IV.2. Le bruit sur le signal est principalement dû au fait que nous n'avons que quelques centaines d'atomes détectés par point. La probabilité de détecter les atomes dans $|g\rangle$ est d'autant plus faible que les atomes auront croisé un grand nombre de photons dans le mode, *i.e.* d'autant plus faible que la fréquence ν est proche de ν_{cav} . La source fournissant un signal quasi-monochromatique convolué à une fonction *porte* de la largeur de la durée d'injection, le spectre d'une injection est un sinus cardinal dont le pic central est à la fréquence programmée. C'est la largeur de ce pic central qui détermine celle du creux dans le signal de la figure IV.2, la largeur spectrale de la cavité lui étant bien inférieure. Le signal est distordu par rapport au sinus cardinal attendu à cause de la non-linéarité de la réponse du signal atomique au nombre de photons : on n'observe donc pas les "les ailes" du sinus cardinal. Comme nous ne sommes intéressés que par le centre du creux, un ajustement gaussien nous permet tout de même de déterminer la valeur de

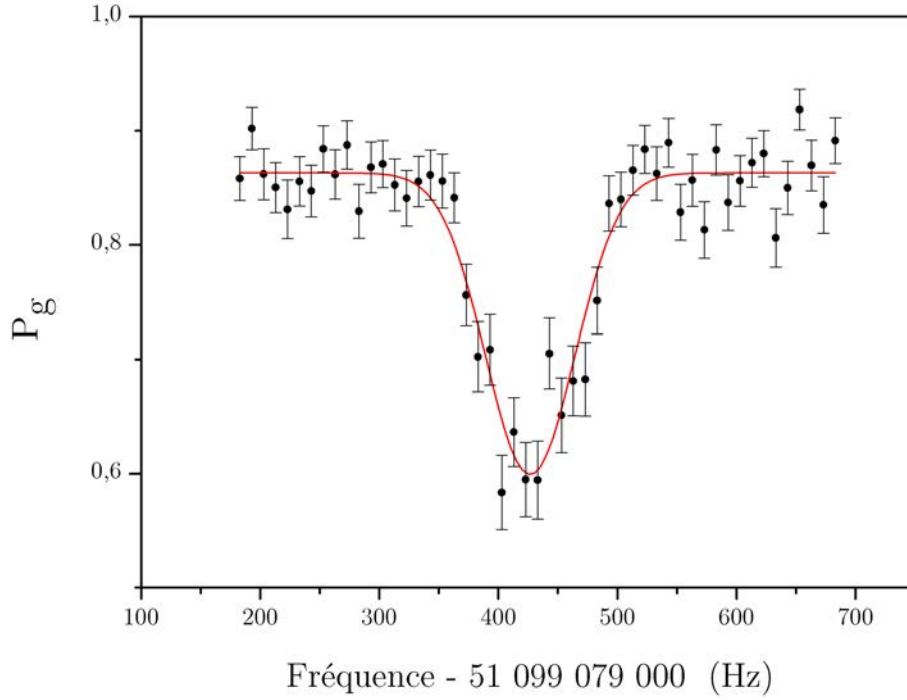


FIGURE IV.2 – Détermination de la fréquence de résonance de la cavité

On envoie une impulsion micro-onde de fréquence ν , ici de durée 10 ms, qui peuple le mode de la cavité si ν_{cav} est contenue dans le spectre de l'impulsion de largeur 100 Hz. Les atomes préparés dans $|g\rangle$, envoyés à la suite de cette impulsion, vont absorber le champ présent dans le mode. Les points expérimentaux sont présentés en noir. La chute de la probabilité de détecter les atomes dans $|g\rangle$ traduit le couplage de la source avec le mode de la cavité. L'ajustement gaussien permet de repérer la résonance à (ici) $51.099079427 \pm 2.10^{-9}$ GHz. On voit que la largeur du creux, d'environ 100 Hz également, est bien déterminée par celle du spectre de la source pulsée.

la fréquence de résonance à 2 Hz près, ce qui est très largement suffisant car la précision dont nous avons besoin sur la fréquence est de l'ordre de 50 Hz. Chaque demi-journée, cette mesure de fréquence de résonance de la cavité est répétée car cette dernière varie légèrement au cours du temps comme nous l'avons souligné précédemment.

IV.2.2 Préparation d'une cavité vide

Le champ d'amplitude α que nous manipulons est relativement grand et met un temps à relaxer qui est largement supérieur au temps de parcours de l'atome de sa préparation à sa détection. Ceci est bien évidemment dû à la grande finesse de la cavité. Pour gagner en rapidité, nous effaçons donc le champ dans la cavité activement. Ceci est d'autant plus important que, pour chaque séquence, il est nécessaire d'accumuler de la statistique de dé-

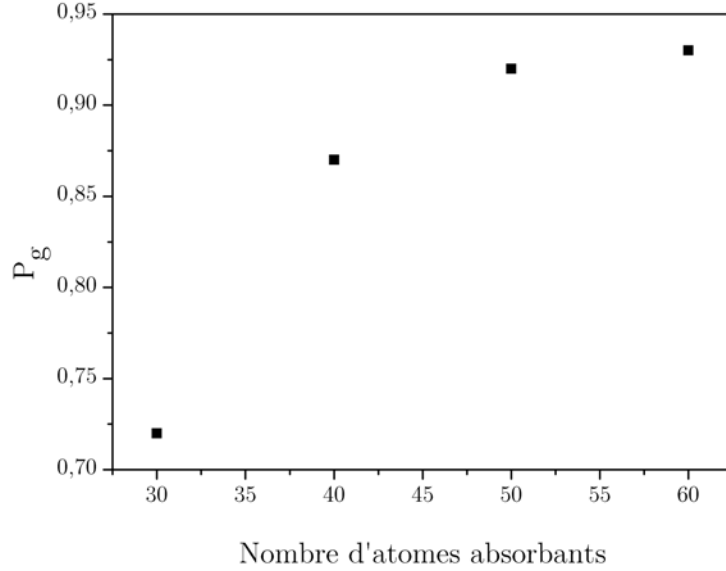


FIGURE IV.3 – Efficacité de la procédure de vidage de la cavité

Nous regardons la probabilité de détecter les 10 derniers atomes absorbants de l'état $|g\rangle$. Lorsque cette probabilité n'augmente plus avec l'ajout d'atomes absorbants, on a trouvé quel est le nombre suffisant d'échantillons d'atomes absorbants pour vider la cavité des photons résiduels. Pour les points de ce graphe, le champ à éliminer a été délivré pendant $100\ \mu\text{s}$ et contient une vingtaine de photons.

tection et donc de répéter un grand nombre de fois *exactement* la même série d'événements. Pour vider la cavité des photons résiduels, nous envoyons des atomes préparés dans $|g\rangle$, que nous appelons *atomes absorbants*, qui nous permettent d'absorber le champ résiduel. Ceux-ci sont introduits à résonance avec la cavité. Le temps d'interaction que l'on doit laisser entre les atomes et le champ dépend malheureusement du nombre de photons présents dans la cavité et sera donc propre à chaque atome absorbant. Toutefois, si l'on envoie un assez grand nombre d'échantillons d'atomes absorbants avec une dispersion en vitesse relativement importante autour de 325 m/s et une grande taille temporelle d'échantillon, il est possible de vider la cavité comme on peut le voir sur la figure IV.3. Le nombre d'échantillons envoyés peut être important car de fait, le nombre d'atomes absorbants préparés par échantillon, s'élève seulement à 0,6. Regarder le taux de transfert de l'état $|g\rangle$ à l'état $|e\rangle$ des 10 derniers échantillons d'atomes absorbants envoyés revient à s'assurer de l'efficacité des précédents. En augmentant progressivement le nombre de ces échantillons, il est alors possible de déterminer le nombre suffisant pour vider la cavité. Ce nombre dépend bien évidemment du champ encore présent et, à champ α fixé, il varie typiquement entre 50 et 80 en fonction de l'amplitude du champ β injecté en plus de α . Il sera adapté et vérifié à chaque injection.

IV.2.3 Repérage du centre de la cavité

Chaque séquence démarrant par l'impulsion du laser à 780 nm permettant la première étape de préparation des atomes, il faut déterminer quelle durée sépare cet instant de celui de référence qui est le passage de l'atome au centre de la cavité pour programmer correctement les différentes périodes d'interactions résonnantes et dispersives de la séquence.

Nous voyons sur la figure IV.4 (a) que la constante de couplage effectivement vue par l'atome, mise en valeur par les couleurs violet et bleu, varie peu lorsqu'on décale la période d'interaction résonnante (en bleu et vert) aux alentours de l'instant de référence recherché. On compare en effet la zone en violet avec celle en vert, la zone commune bleue ne changeant rien sur le couplage vu par l'atome. Le couplage devient plus sensible quand la période est décalée vers des temps où la pente du profil de couplage est assez importante. Ainsi, plus la séquence est décentrée, plus le couplage vu par les atomes varie et plus les oscillations atomiques diffèrent suivant les échantillons. Or l'oscillation moyenne des atomes pendant la période résonnante est la somme des oscillations variables de tous les atomes envoyés. En conséquence, le contraste des oscillations va diminuer si la période d'interaction résonnante est décentrée. Le repérage temporel du passage au centre de la cavité peut donc se faire avec la séquence suivante :

- 1 Sans injecter de champ dans la cavité, on introduit un atome préparé dans $|e\rangle$.
- 2 On place à résonance l'atome et le mode pendant une durée de 16 μs .
- 3 On détecte l'état atomique.
- 4 On répète la séquence 300 fois avant de décaler le déclenchement de la période de résonance.

Le taux de transfert atomique de $|e\rangle$ vers $|g\rangle$ prend ainsi la forme d'une gaussienne – à cause du profil du couplage lui-même gaussien – représentée en noir sur la figure IV.5. Le maximum est atteint quand la période d'interaction résonnante est bien centrée : on en déduit à quel moment changer le potentiel appliqué sur le miroir du bas pour mettre la cavité à résonance autour du passage de l'atome par le centre. Ici la forme de potentiel est centrée en temps autour de 737 μs après l'impulsion laser initiale.

Toutes les calibrations des sections suivantes ont utilisé la valeur trouvée pour le centre de la cavité. Toutefois, on rappelle que, pour la séquence de l'expérience principale, les périodes d'interaction résonnante entre l'atome et le mode ont lieu lorsque l'atome est loin du centre (figure IV.1). Sur la figure IV.4, il est clair cette fois que, pour un atome légèrement décalé en temps, la modification du couplage est très importante : le couplage en violet est remplacé par celui en vert, de valeur sensiblement différente. Le taux de transfert en sera d'autant plus affecté et la sensibilité de notre mesure sera réduite. La séquence de l'expérience a donc une sensibilité au décentrage beaucoup plus grande que

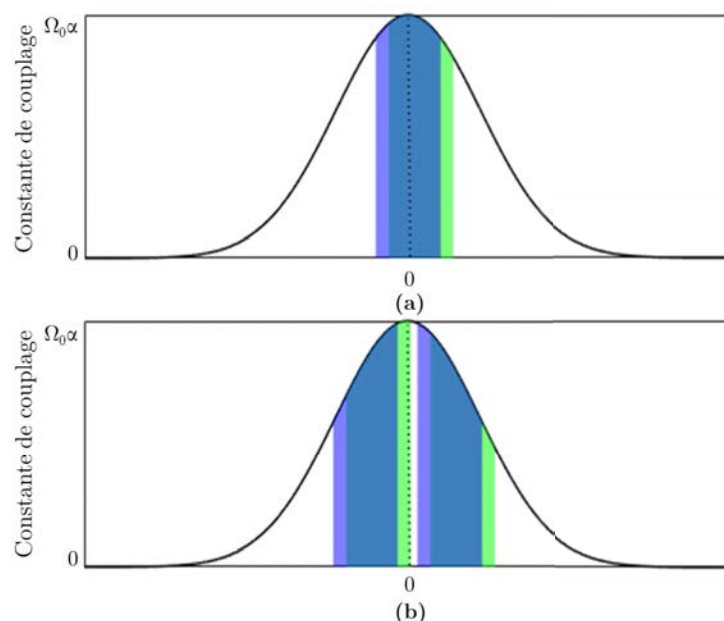


FIGURE IV.4 – Effet du décentrage sur le couplage vu par l'atome

(a) Décalage temporel d'une période d'interaction résonnante centrée. (b) Décalage temporel d'une période d'interaction dispersive centrée encadrée par deux périodes d'interaction résonnante. La période centrée est en violet et bleu et la période mal centrée est en bleu et vert. La courbe noire dessine le profil du couplage atome-champ longitudinal. La zone bleue met donc en valeur le couplage commun aux deux périodes résonnantes. L'interaction dispersive est de durée volontairement exagérée par rapport aux interactions résonnantes pour plus de visibilité.

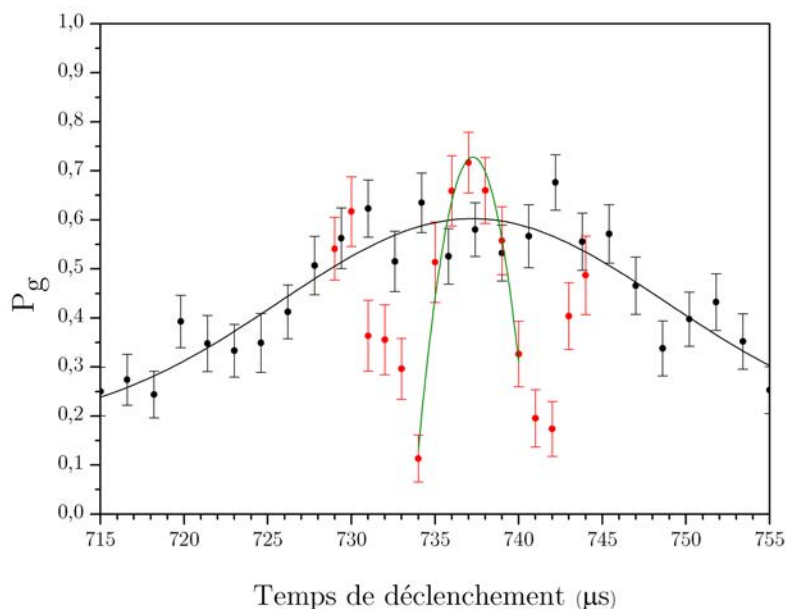


FIGURE IV.5 – Centrage temporel des séquences expérimentales

Les points noirs correspondent à la probabilité de transfert atomique en fonction du temps de déclenchement de la séquence pour une séquence à une interaction résonnante. Les points rouges correspondent, eux, à une séquence de l'expérience réelle (forme du potentiel de la séquence de métrologie représenté sur la figure IV.15).

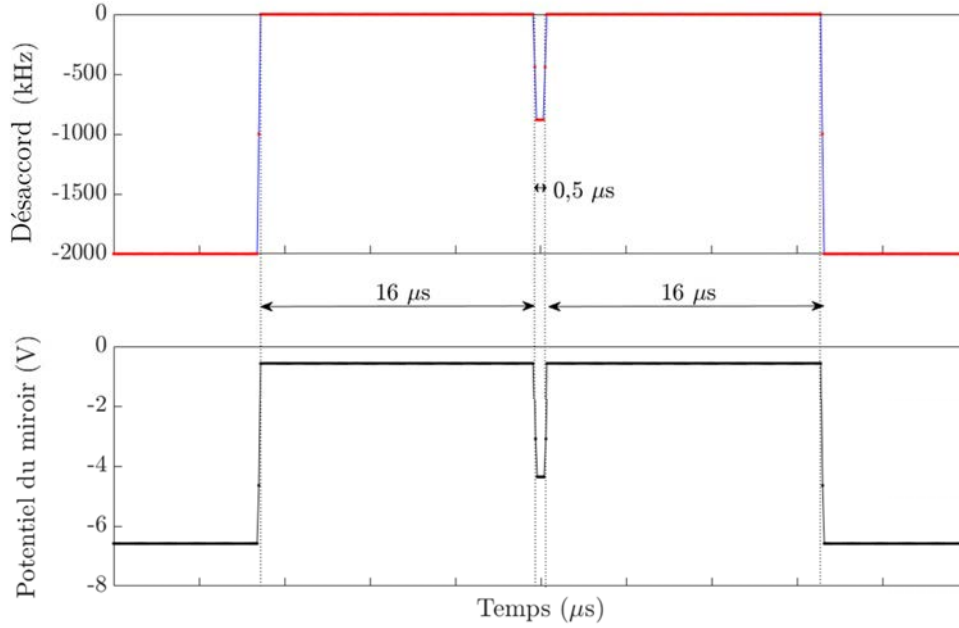


FIGURE IV.6 – Centrage d'une séquence de métrologie

Le potentiel a ici une forme du type de celles employées pour l'expérience de métrologie proprement dite. Il permet de laisser l'atome interagir à résonance avec la cavité pendant deux périodes de $16\ \mu\text{s}$ entrecoupées d'une impulsion dispersive de $0,5\ \mu\text{s}$.

la séquence de calibration. Il était toutefois nécessaire de finir les calibrations pour avoir la forme définitive de la séquence de métrologie. Nous avons donc aussi vérifié, *à la fin de toutes les calibrations*, que la séquence principale définitive était parfaitement bien centrée. Nous avons pour cela remplacé la forme du potentiel appliqué au miroir dans la séquence de calibration par celle proposée sur la figure IV.6 et nous avons injecté avant l'entrée de l'atome un champ à 12,7 photons.

Pour $T_1 = T_2$, le tracé de P_g en fonction du temps de déclenchement sur la figure IV.5 montre qu'effectivement le positionnement temporel de la séquence est plus critique : les variations de probabilité de transfert atomique (en rouge) sont plus rapides et permettent de réduire notre incertitude sur l'instant auquel il faut lancer la forme de potentiel en double créneau d'un facteur 10 par rapport à la séquence précédente. La valeur de centrage de la séquence étant bien la même, toutes nos calibrations sont validées.

IV.2.4 Calibration de l'injection de la micro-onde

Pour l'expérience principale, la maîtrise des injections de champ dans la cavité est indispensable. Nous rappelons que nous disposons de deux lignes micro-ondes arrivant l'une directement dans la cavité, l'autre non. Même si nous connaissons la valeur de la

puissance de la micro-onde délivrée par le synthétiseur et la valeur de l'atténuation que nous mettons manuellement sur chaque ligne, nous n'avons aucune idée du couplage réel de chaque ligne d'injection au mode. Nous cherchons donc en premier lieu à calibrer le nombre de photons déposés dans la cavité en fonction de ces caractéristiques.

IV.2.4.a Amplitude d'injection

L'étalonnage de la puissance délivrée par chaque ligne peut se faire facilement en regardant les oscillations de Rabi d'un atome dans ce champ. Il se déroule en deux étapes. Tout d'abord, nous mesurons la fréquence de Rabi du vide au centre de la cavité puis nous injectons un champ et tirons de l'amortissement des oscillations de Rabi dans ce champ, la valeur du nombre moyen de photons injectés.

La première étape de l'étalonnage se déroule selon la séquence suivante :

- 1 On envoie un atome préparé dans $|e\rangle$ interagir pendant une durée T effective fixée avec le mode de la cavité en le plaçant en résonance pendant cette durée uniquement.
- 2 On détecte cet atome en fin de séquence.
- 3 On reproduit cette interaction 1000 fois avant de changer la durée effective d'interaction.

Cette séquence – comme toutes les séquences expérimentales de ce manuscrit – repose sur notre capacité à pouvoir interrompre quand nous voulons l'interaction résonnante entre l'atome et le champ. Pour réaliser cela, nous désaccordons la transition atomique de -2 MHz vis-à-vis de la fréquence de la cavité en un temps court devant le temps caractéristique de l'interaction Ω_0 ($0,2 \mu\text{s} \ll 22 \mu\text{s}$) en appliquant entre les miroirs un champ de 6,6 V/cm. Ce désaccord est lui même très grand devant la fréquence de Rabi du vide de l'ordre de 48 kHz. Dans ces conditions, atome et champ n'interagissent plus. Le signal typiquement obtenu après une séquence de mesure de la fréquence de Rabi est proposé sur la figure IV.7 et reflète les oscillations de l'état atomique dues à l'échange d'un photon avec le mode de la cavité. Il est ajusté par la fonction g tel que :

$$g(T) = Y - \frac{A}{2} \cos(\Omega_0 T) \exp(-T/\tau), \quad (\text{IV.1})$$

où Y , A , Ω_0 , τ sont des paramètres ajustables. La nécessité d'ajouter l'exponentielle décroissante au modèle normalement attendu est due au fait que tous les atomes ne voient pas exactement le même couplage. En particulier, la dispersion en vitesse de l'échantillon et la dispersion transverse du jet atomique font que la sinusoïde expérimentale est en fait une somme de sinusoïdes de fréquences différentes et est donc amortie. La valeur de Ω_0 est la fréquence de Rabi du vide recherchée. Pour la figure IV.7, les paramètres obtenus sont $Y = 0,48$, $A = 0,88 \pm 0,05$, $\tau = 59 \pm 10 \mu\text{s}$ et la pulsation de Rabi du vide est estimée à $\Omega_0 = 2\pi \cdot (48,0 \pm 0,1 \text{ kHz})$.

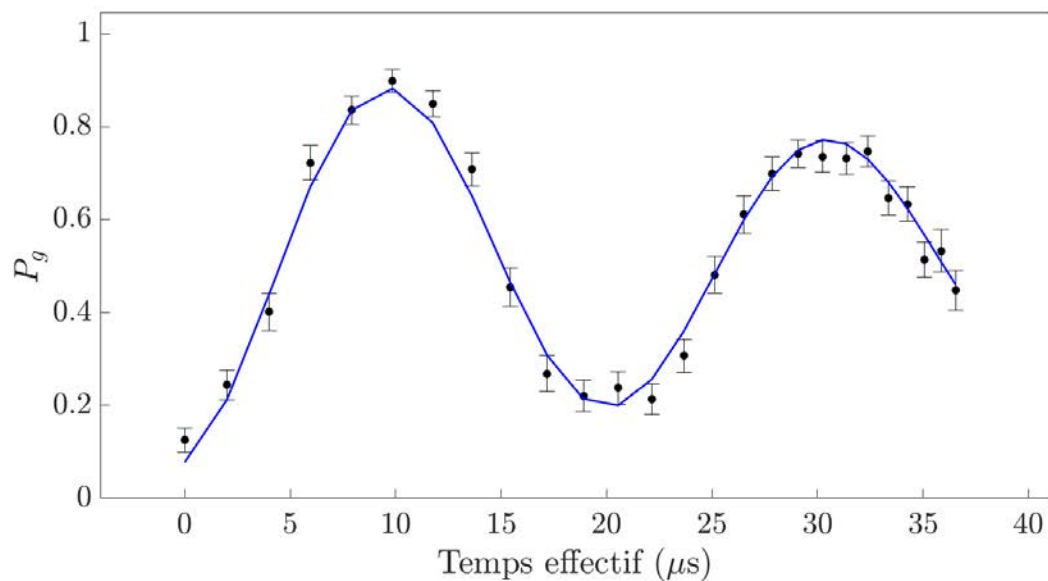


FIGURE IV.7 – Détermination de la fréquence de Rabi du vide

La courbe en bleu correspond à l'ajustement avec la fonction g des points expérimentaux. On détermine ici une pulsation de Rabi du vide au centre de la cavité de $2\pi \cdot (48,0 \pm 0,1 \text{ kHz})$.

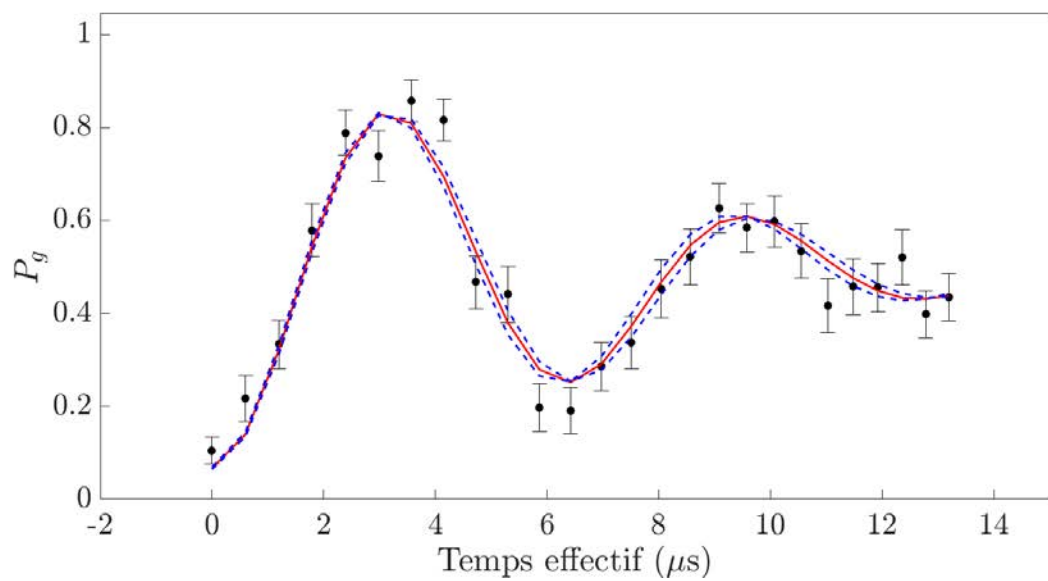


FIGURE IV.8 – Détermination du nombre de photons injectés

La courbe rouge correspond à l'ajustement des données utilisant la valeur de Ω_0 déterminée à l'étape précédente. Les courbes bleues prennent en compte l'erreur déterminée sur Ω_0 . On trouve un nombre moyen de photons de 9.

Nous réalisons ensuite de nouveau la même séquence mais en injectant cette fois le champ à calibrer. L'oscillation de Rabi à plusieurs photons obtenue après injection par la ligne α est représentée sur la figure IV.8. En théorie, cette forme est due à la somme sur n des oscillations de Rabi à $n + 1$ photons pondérées par le poids de chacun des états de Fock dans un état cohérent d'amplitude α . Le signal $P_g(T)$ s'exprime alors comme :

$$P_g(T) = \left(1 - \sum_n p_\alpha(n) \frac{1 + \cos(\Omega_n T)}{2} \right) \exp(-T/\tau), \quad \text{avec} \quad p_\alpha(n) = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (\text{IV.2})$$

On ajuste donc les données expérimentales avec cette fonction en se limitant à une somme jusqu'à $n = 40$ ¹ et en tenant compte de l'amortissement expérimental vu dans le modèle précédent. On en déduit le nombre moyen de photons réellement piégés dans le mode. Les courbes en pointillés bleus représentent les ajustements en prenant en compte les erreurs sur la valeur de la fréquence de Rabi du vide ($\Omega_0 + \text{err}$ et $\Omega_0 - \text{err}$). Toutes ces courbes se superposant pratiquement montrent que notre calibration est fiable. Ceci nous permet alors de savoir, en fixant la puissance du synthétiseur et la durée de l'injection, quelle atténuation il faut que l'expérimentateur impose à l'extérieur du cryostat pour piéger un photon en moyenne grâce à cette ligne. A titre d'exemple, pour la figure IV.8, la source micro-onde a délivré sa puissance maximale. sur une durée de 50 μs . Avec une atténuation de 25 dB, on relève un nombre moyen de photons de 9. Il faut donc imposer une atténuation de 34,6 dB pour injecter en moyenne un photon.

Pour étalonner la ligne β servant à l'injection du signal de petite amplitude, on suit exactement la même procédure. C'est d'ailleurs cette ligne qui impose de prendre la puissance maximale du synthétiseur délivrée dans les deux lignes. En effet, pour la séquence principale, nous cherchons à faire une injection dans le temps qui est alloué à l'opération de renversement du temps, *i.e.* 0,5 μs comme nous le verrons plus tard, où atome et champ n'interagissent plus. Pour piéger un photon en moyenne avec cette durée d'injection, l'atténuateur manuel de la ligne β doit être réglé aux alentours de 5 dB, ce qui ne laisse que très peu de marge pour diminuer encore l'atténuation compte-tenu de sa gamme possible d'utilisation. Cette marge est toutefois suffisante car les champs β les plus grands que nous avons injectés contiennent en moyenne 2 photons.

IV.2.4.b Phases des champs injectés

La calibration précédente, reproduite avant toute prise de données, nous permet de déterminer l'amplitude réelle des injections sur les deux lignes. Ceci n'est pas suffisant : la séquence expérimentale théorique que nous avons décrite met en scène deux champs cohérents α et β dont on suppose qu'ils sont tout deux de phase nulle. Si nous prenons comme référence de phase la phase du champ α , il faut donc s'assurer que le champ piégé

1. Cette valeur est largement suffisante dans la mesure où nous injectons toujours un nombre de photons moyen de l'ordre de 10 photons pour cette calibration. Le poids des états de Fock à plus de 40 photons est alors pratiquement nul.

à la suite de l'injection par l'autre ligne est bien en phase avec celui-ci. Ceci constitue une calibration supplémentaire à réaliser que nous allons à présent décrire.

Les deux lignes n'étant pas identiques, une injection centrée autour de la fréquence de résonance de la cavité envoyée par la ligne β sera *a priori* déphasée par rapport au signal envoyé par la ligne α . On pourrait éventuellement ajouter un déphaseur sur une des deux lignes pour compenser le retard dû à la différence de chemin mais c'est un composant coûteux et surtout, il rajoute une atténuation sur la ligne qui dépend de la valeur du déphasage, ce que nous ne souhaitons en aucun cas car cela poserait problème pour calibrer l'amplitude des injections.

La solution pour laquelle nous avons opté est donc différente : nous utilisons des injections à une fréquence différente ν_{inj} de celle de la cavité ν_{cav} (mais qui contient celle-ci dans son spectre). En choisissant bien cette fréquence, il est possible de compenser le déphasage entre le champ α et le champ β injecté ensuite. Nous avons représenté schématiquement la chronologie des injections dans la cavité de la séquence de métrologie sur la figure IV.9. Le signal β injecté arrive après le signal α au bout d'une durée Δt liée à la différence de chemin entre les lignes et au timing demandé par l'expérimentateur. Comme les deux injections proviennent de la même source, le signal β est déphasé de $\nu_{\text{inj}}\Delta t$ par rapport au signal α lorsqu'il arrive dans la cavité. Dans le même temps, le champ α piégé a pris une phase de $\nu_{\text{cav}}\Delta t$ par rapport à sa phase initiale. Le déphasage entre les champs α et β est donc donné par $\Delta\varphi = \Delta t\Delta\nu$ avec $\Delta\nu = \nu_{\text{cav}} - \nu_{\text{inj}}$.

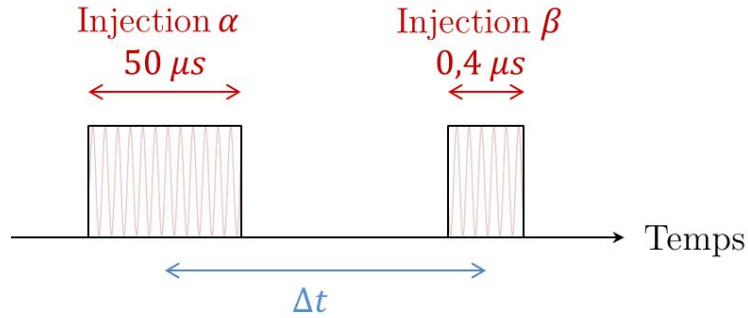


FIGURE IV.9 – Chronologie des injections micro-ondes dans la cavité

L'injection β arrive dans la cavité décalé par une durée Δt après l'injection α . Le champ β est donc déphasé de $\Delta\varphi = \Delta t\Delta\nu$.

Pour une certaine fréquence d'injection, il sera donc possible de piéger des champs en phase, ou bien en opposition de phase si l'on veut explorer les β négatifs. En contrepartie, la taille des injections ne devra être ni trop longue (pour que le spectre de l'injection soit assez large) ni trop courte (pour envoyer assez d'énergie pour peupler le mode).

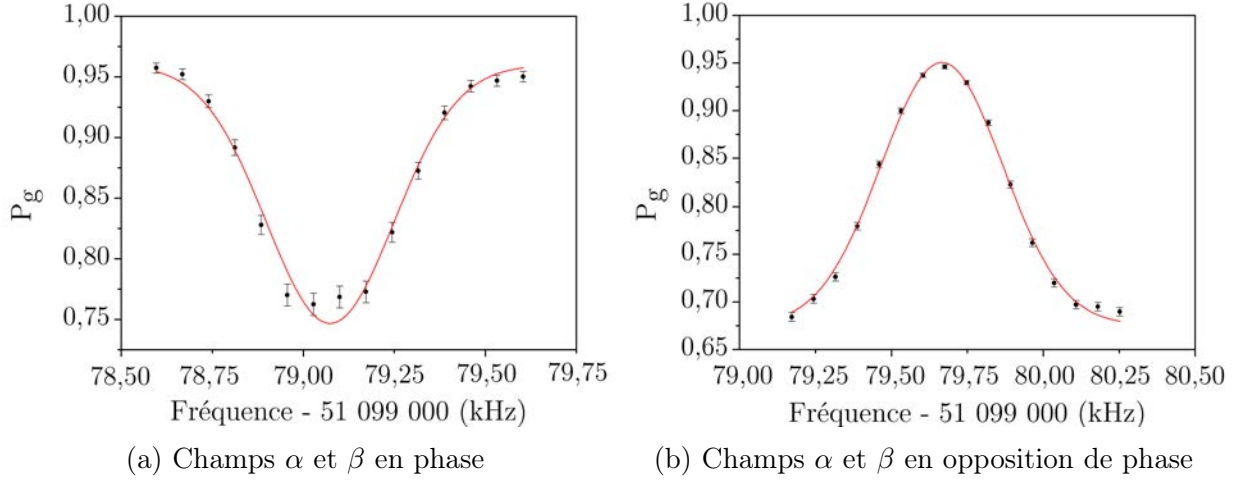
La séquence expérimentale de la calibration des phases des champs consiste donc à faire

varier ν_{inj} pour trouver celle pour lesquelles les champs α et β sont piégés en phase ou en opposition de phase :

- 1 Nous commençons par réaliser l'injection α . Pour cela nous envoyons de la micro-onde dans la cavité à une fréquence légèrement différente de la fréquence du mode pendant le temps nécessaire à l'injection du champ α dans le mode, *i.e.* $50\ \mu\text{s}$. Ce champ se met à tourner à la fréquence du mode (il n'y a pas d'autres modes à peupler autour de cette fréquence).
- 2 Nous excitons ensuite l'échantillon atomique.
- 3 Après avoir attendu $\Delta t = 766,8\ \mu\text{s}$ (soit lorsque l'échantillon atomique est dans la cavité), nous envoyons de la micro-onde à la même fréquence que la première injection pour le champ β pendant $0,5\ \mu\text{s}$. Ce champ piégé dans le mode a donc la même fréquence que le champ α mais *a priori* pas la même phase car le signal injecté a oscillé à une fréquence différente de celle du champ α .
- 4 On envoie une soixantaine d'atomes rapides préparés dans $|g\rangle$ pour sonder le champ total.
- 5 On répète 1000 fois cette séquence avant de changer la fréquence de l'injection.

Le champ total piégé à chaque séquence sera d'autant plus important que les deux champs ont des phases proches. Lorsque les deux champs sont exactement en phase, le champ total est maximum et on enregistre le plus fort taux de transfert des atomes absorbants de l'état $|g\rangle$ vers l'état $|e\rangle$. Au contraire, lorsqu'ils sont en opposition de phase, l'amplitude du champ total diminue fortement. Elle n'est pas nulle car nous avons fait cette calibration dans des conditions proches de celle de l'expérience souhaitée : le champ α contient donc une dizaine de photons alors que le champ β contient environ 1 photon. Le transfert des atomes absorbants quand les champs sont en opposition de phase est alors minimal.

Les résultats sont présentés sur les figures IV.10(a) et IV.10(b). Comme pour la mesure de la fréquence du mode de la cavité, la forme des courbes n'est pas gaussienne : elle résulte de la réponse non triviale des atomes à la sinusoïde du champ. Toutefois comme nous ne souhaitons évaluer que la fréquence centrale du pic et du creux, nous pouvons déterminer à l'aide d'un modèle gaussien quelle est la fréquence du signal à injecter pour que les deux champs soient en phase ou en opposition de phase. Ces deux fréquences sont séparées de 592 Hz. Or la fréquence de résonance de la cavité dérive d'une dizaine de Hertz en une demi-journée. Il est donc nécessaire de calibrer la fréquence d'injection également toutes les demi-journées de prises de données environ. Dans le pire des cas, avec une dérive de 10 Hz, la phase du champ β diffère de celle de α de 0.05π . Ceci affectera bien-sûr la fréquence des oscillations de la probabilité de détecter $|g\rangle$ en fonction de β et diminuera donc la sensibilité réelle de notre mesure.

FIGURE IV.10 – Détermination de la fréquence d'injection ν_{inj}

Les points expérimentaux ont été obtenus à l'aide d'une injection α de $50 \mu\text{s}$ et pour une injection β de $0,5 \mu\text{s}$. Un ajustement gaussien permet d'obtenir les valeurs de fréquences souhaitées. (a) La fréquence pour laquelle les phases sont alignées est $51,099\,079\,074 \pm 1 \cdot 10^{-9} \text{ GHz}$. (b) La fréquence pour laquelle les phases sont opposées est $51,099\,079\,666 \pm 1 \cdot 10^{-9} \text{ GHz}$.

IV.2.5 Calibration de l'opération σ_z sur l'atome

L'opération de renversement du temps sur le système atome-champ se fait par manipulation individuelle de l'atome en appliquant l'opérateur σ_z . Pour retourner le dipôle atomique par rapport au champ, il faut que ce dipôle accumule une phase dans le repère tournant à ν_{cav} avec le champ. On va donc réaliser un désaccord brutal de la cavité δ_π (du type de celui décrit pour la mesure de la fréquence de Rabi du vide) pendant une certaine durée Δt_π pour que le dipôle atomique tourne à une vitesse différente de celle du champ. C'est ce désaccord que nous allons donc calibrer afin que le vecteur de Bloch de l'atome accumule exactement une phase de π . La séquence que nous réalisons à cette fin prend la forme présentée sur la figure IV.11.

Toutes les étapes de cette calibration sont aisément compréhensibles lorsque l'on regarde l'action de l'opérateur σ_z sur le dipôle atomique dans la sphère de Bloch tournant avec le champ comme proposé sur la figure IV.12. Partons avec un atome initialement dans l'état $|g\rangle$ et un champ injecté d'environ 4 photons. La première étape consiste à amener l'état atomique dans le plan équatorial de la sphère de Bloch : il s'agit donc de réaliser une impulsion $\pi/2$. Connaissant la valeur de la constante de couplage et à partir de l'expression mathématique des oscillations de Rabi dans un champ de 4 photons en moyenne, on peut estimer en théorie que le temps d'interaction résonnante effectif nécessaire à cette impulsion est d'environ $2,7 \mu\text{s}$. On place ensuite l'atome et le champ hors résonance par effet Stark pendant un certain temps et l'état atomique va alors opérer une rotation dans le plan équatorial de la sphère de Bloch d'un angle ξ directement proportionnel au désaccord

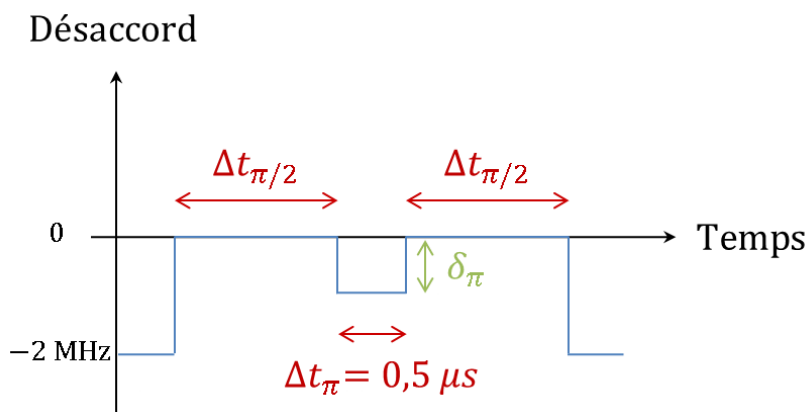


FIGURE IV.11 – Chronologie des injections micro-ondes dans la cavité
La durée $\Delta t_{\pi/2}$ des impulsions $\pi/2$ et la profondeur δ_{π} du désaccord sont déterminées lors de la calibration.

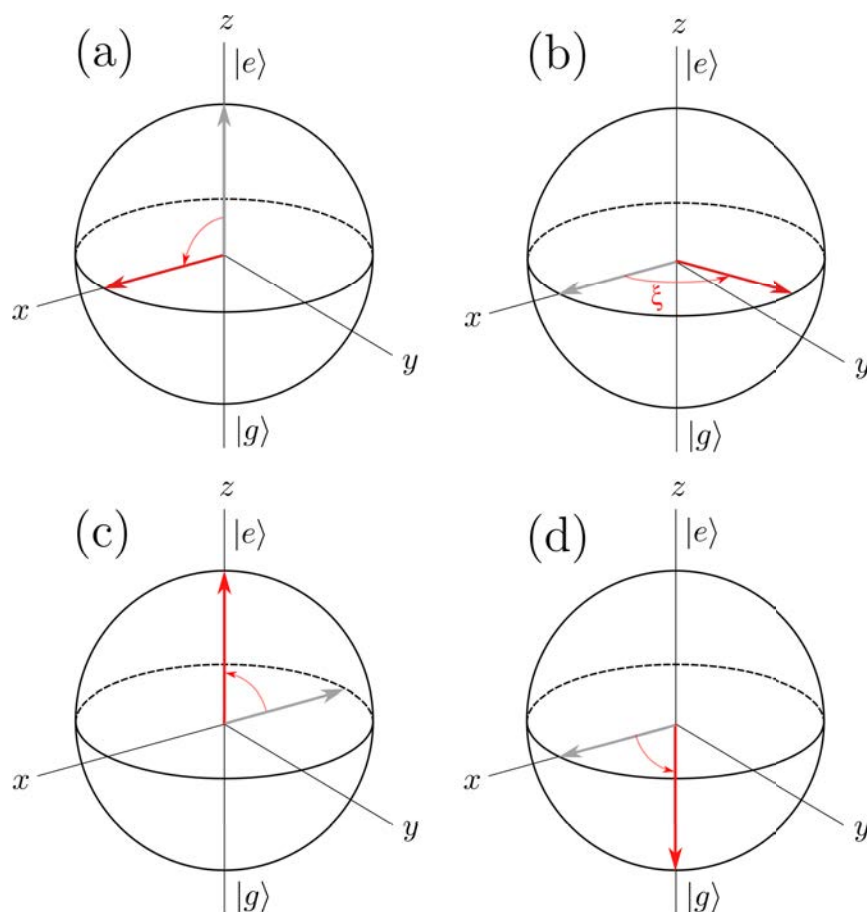


FIGURE IV.12 – Etapes de la calibration de la rotation de l'état atomique
L'atome est initialement préparé dans l'état $|g\rangle$. (a) Impulsion $\pi/2$ dans le champ cohérent. (b) Rotation d'un angle ξ de l'état atomique, l'atome étant placé hors résonance. (c) Lorsque $\xi = \pi$, la deuxième impulsion ramène l'atome dans son état initial $|g\rangle$. (d) Lorsque $\xi = 2\pi$, la deuxième impulsion ramène l'atome dans l'état $|e\rangle$.

imposé (voir section II.4.2). L'évolution du champ et celle de l'atome sont ici décorréliées. Si enfin, on rétablit l'interaction résonnante pendant le même temps effectif que pour la première étape d'interaction, l'état atomique va subir une deuxième impulsion $\pi/2$ amenant l'atome dans un état dépendant de l'angle ξ . On peut ainsi citer quelques cas remarquables. Si $\xi \equiv \pi[2\pi]$, l'atome est ramené dans l'état $|g\rangle$: la rotation selon l'angle ξ a permis l'inversion de la dynamique atomique pendant la deuxième interaction résonnante par rapport à la première ; il s'agit donc du cas qui nous intéresse et qu'il faudra mettre en oeuvre. Si par contre, l'angle ξ est un multiple de 2π , l'opération de rotation ne change rien à l'évolution de l'atome : elle continuera comme si l'opération n'avait pas eu lieu et l'atome finira dans $|e\rangle$ après la deuxième interaction résonnante.

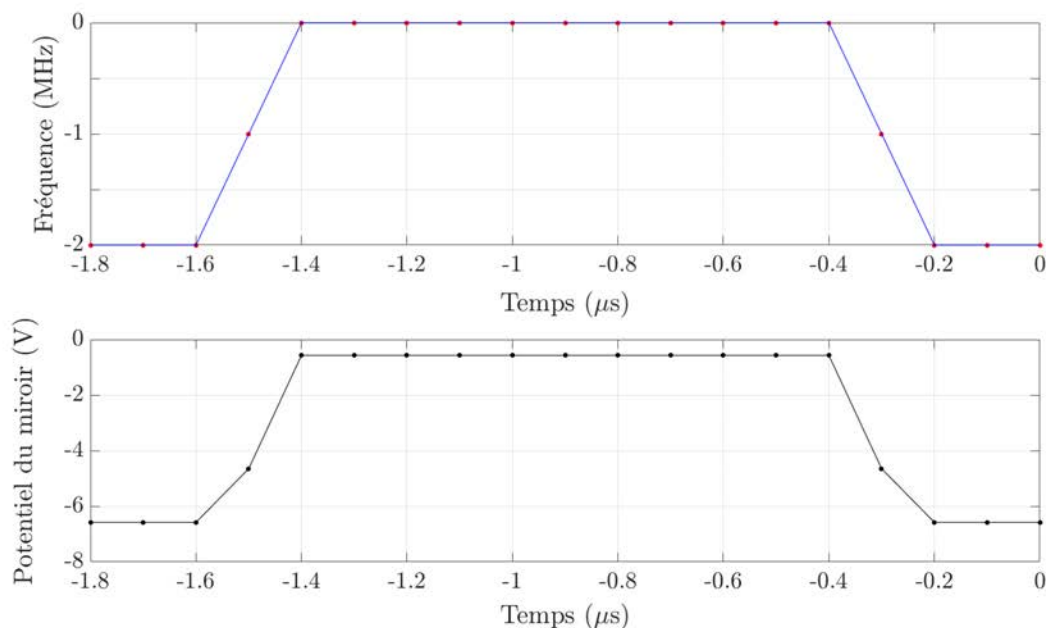
■ CALIBRATION DE L'IMPULSION $\pi/2$ RÉSONNANTE

Pour la calibration de l'opération σ_z , nous avons besoin d'effectuer deux impulsions $\pi/2$ qu'il faut calibrer préalablement. La première impulsion $\pi/2$ de la calibration doit se faire en amont du centre de la cavité. Nous allons d'abord regarder pendant combien de temps nous devons laisser l'atome et la cavité interagir à résonance pour permettre au dipôle atomique de passer dans le plan équatorial de la sphère de Bloch. Par symétrie par rapport au centre de la cavité, nous n'aurons pas besoin de calibrer la deuxième impulsion.

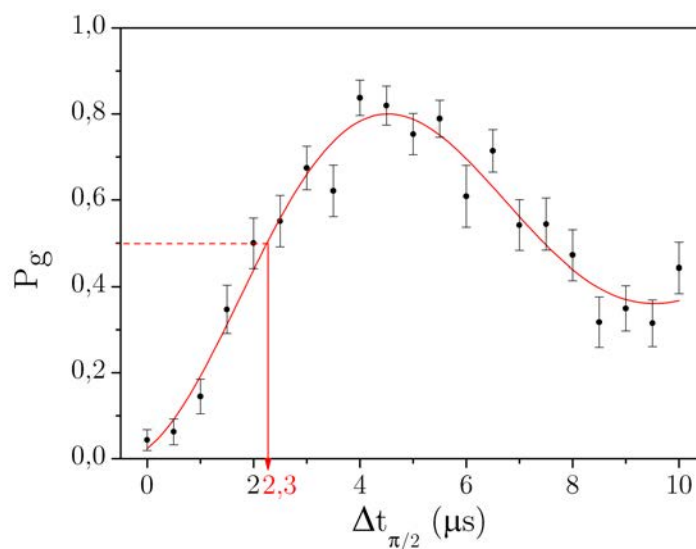
La séquence de calibration de l'impulsion $\pi/2$ s'articule autour des étapes suivantes :

- 1 Avant que l'atome ne pénètre dans la cavité, nous injectons 4 photons dans le mode.
- 2 Un atome préparé dans $|e\rangle$ entre, hors résonance, dans la cavité puis interagit à résonance avec le mode pendant un temps $\Delta t_{\pi/2}$ fixé avant d'être à nouveau désaccordé. Le désaccord imposé au cours du temps à l'atome prend la forme représentée sur la figure IV.13. Ceci est réalisé expérimentalement en déplaçant la transition atomique par effet Stark : un miroir reste à la masse pendant qu'on fait varier le potentiel de l'autre.
- 3 L'état atomique est détecté en sortie de cavité.
- 4 On répète cette séquence 300 fois avant de changer la durée $\Delta t_{\pi/2}$.

Nous nous intéressons au début de l'oscillation de Rabi à 4 photons représentée sur la figure IV.14. Un ajustement permet de déterminer le temps où la probabilité de détecter $|g\rangle$ est égale à $1/2$. A ce moment là les populations des états $|e\rangle$ et $|g\rangle$ sont égales, ce qui signifie que l'on a bien réalisé une impulsion $\pi/2$. Nous pouvons donc à présent nous concentrer sur la calibration de l'opération σ_z proprement dite.

FIGURE IV.13 – Calibration de l'impulsion $\pi/2$

Pour chaque répétition de la séquence, un potentiel “créneau” de durée différente est appliqué à l'un des miroirs de la cavité (l'autre restant à la masse). On fait varier ainsi successivement le temps d'interaction résonnante entre l'atome traversant et le mode en utilisant l'effet Stark vu par l'atome. Pour un désaccord de -2 MHz, l'interaction est interrompue. L'instant $t = 0$ correspond à l'instant où l'atome passe au centre de la cavité.

FIGURE IV.14 – Calibration de l'impulsion $\pi/2$

Les données expérimentales sont ajustées par une fonction sinusoïdale exponentiellement atténuée. Lorsque la probabilité de détecter l'atome dans $|g\rangle$ vaut $\pi/2$ pour la première occurrence, cela signifie que le temps d'interaction résonnante entre atome et cavité a permis de faire basculer le dipôle dans le plan équatorial de la sphère de Bloch. Cette rotation est réalisée ici en 2,3 μs .

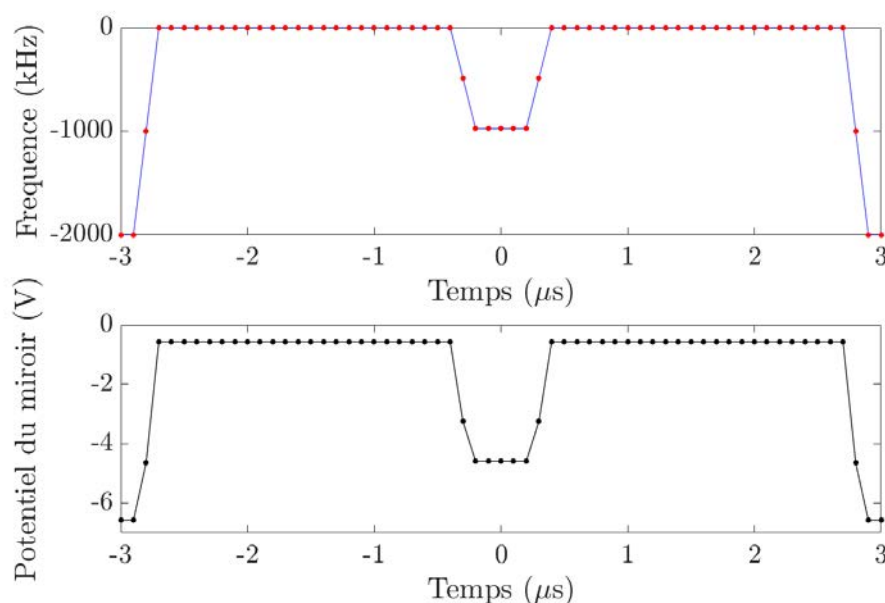
■ CALIBRATION DE L'OPÉRATION σ_z

L'accumulation de la phase de π du dipôle atomique par rapport au champ se fait en imposant un désaccord δ_π donné pendant une durée Δt_π . Le produit $\delta_\pi \Delta t_\pi$ est fixé par l'angle $\xi = \pi$ que nous souhaitons réaliser. Pour la séquence expérimentale de métrologie, nous avons vu au chapitre II qu'il était dans notre intérêt d'augmenter au maximum la durée des deux interactions résonnantes pour obtenir la plus grande sensibilité au champ β possible. Ceci nous incite donc, étant donné que la vitesse des atomes est fixée, à réduire autant que faire se peut la durée de l'impulsion π intermédiaire pour que les périodes d'interaction résonnante et dispersive aient toutes lieu pendant que l'atome est dans la cavité. Cela impose en conséquence d'avoir le plus grand désaccord possible. De plus, étant donné que le champ est décorrélié de l'atome, on peut profiter de la durée Δt_π pour injecter en même temps le champ β . Ceci impose une limitation supplémentaire sur cette durée : en considérant le maximum de puissance que nous pouvons fournir par la ligne β , une durée d'interaction dispersive de l'ordre de $0,5 \mu\text{s}$ est pertinente. Le désaccord associé nécessaire est de l'ordre de 1 MHz.

La séquence de calibration de l'opération σ_z reprend celle de l'impulsion $\pi/2$ sauf que le potentiel appliqué au miroir, vu par l'atome au cours de sa traversée, prend la forme représentée sur la figure IV.15. Le désaccord δ entre les deux impulsions $\pi/2$ est modifié d'une répétition à l'autre de la séquence, tandis que la durée de la période Δt_π où on impose le désaccord, elle, reste fixe à $0,5 \mu\text{s}$. Nous explorons ainsi tous les angles ξ de rotation possibles. Le résultat attendu est une oscillation de la probabilité de détecter l'atome dans $|g\rangle$ en fonction du désaccord de l'impulsion dispersive. Les données expérimentales présentées sur la figure IV.16 ont effectivement ce comportement. On obtient facilement, grâce à un ajustement des données, la valeur du désaccord nécessaire pour inverser la dynamique en $0,5 \mu\text{s}$, soit -881 kHz. Pour obtenir ce désaccord, il faut appliquer sur le miroir du bas -4.363 V, tout en laissant celui du haut à la masse.

Remarques

- Nous avons vu dans le chapitre II, que lorsque l'on désaccorde brutalement la cavité de la transition atomique, l'interaction dispersive qui suit ne laisse pas tout à fait le champ inchangé mais le déphase d'un angle Φ_{disp} . Néanmoins, considérant ici la durée de cette interaction de $0,5 \mu\text{s}$ et le désaccord de -881 kHz, on calcule que cet angle vaut 0.01 rad et est donc négligeable. Cela justifie que, pendant cette phase de désaccord, atome et champ sont bien décorrélés.
- Le calcul de la rotation du spin atomique avec ces valeurs de durée et la forme de la courbe du désaccord donne un angle $\xi = 0,88\pi$. La différence entre cette valeur et la valeur de π réellement observée s'explique par l'impossibilité de connaître le champ réel vu par les atomes : nous ne connaissons que les valeurs que nous appliquons à partir de l'extérieur du cryostat.

FIGURE IV.15 – Réalisation expérimentale de l'opération σ_z

(a) Evolution du désaccord atome-champ au cours de la traversée de la cavité par l'atome. (b) Evolution du potentiel correspondant appliqué sur l'un des miroirs (l'autre est à la masse)

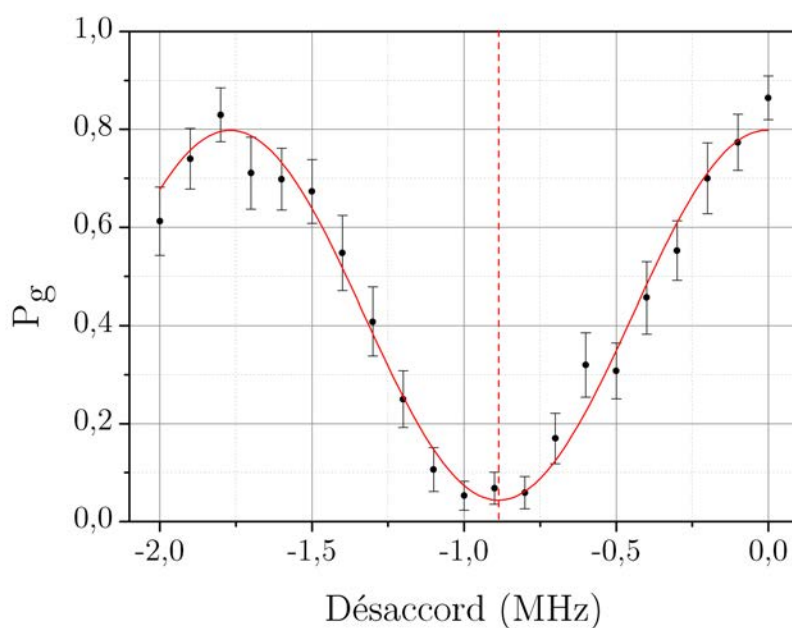


FIGURE IV.16 – Evolution du transfert atomique en fonction du désaccord atome – champ

Les points expérimentaux en noir ont été ajustés avec une fonction sinusoïdale atténuée. On trouve ainsi que pour une durée de $0,5 \mu s$, le désaccord nécessaire à la rotation d'un angle π , repéré par la courbe en pointillés rouges, est de -881 kHz .

IV.3 Mesure du champ d'amplitude β

A présent que toutes les calibrations ont été présentées, nous pouvons nous concentrer sur la réalisation de la séquence expérimentale de mesure du champ β . Celle-ci, rappelons-le encore une fois, nous permet d'obtenir la probabilité de détecter l'atome dans $|g\rangle$ en fin de séquence en fonction du temps effectif. Plus qu'une liste des événements, il est utile dans cette section d'avoir une bonne représentation de l'évolution des composantes de champs dans l'espace des phases au fur et à mesure de la séquence pour l'analyse des données expérimentales. Nous en proposons une sur la figure IV.17. Elle reprend la numérotation utilisée pour la liste des étapes de la séquence, ainsi que pour la figure IV.1 et nous permettra d'éclairer nos observations.

En restreignant la séquence aux étapes 1², 2 et 5, nous explorons tout d'abord l'effondrement des oscillations de Rabi dû à la dispersion du nombre de photons dans l'état cohérent pendant la durée effective T_1 . Le résultat expérimental correspond aux points dans le premier cadre de la figure IV.18. Les barres d'erreur sont statistiques. Nous avons en outre effectué une intégration numérique du Hamiltonien modélisant l'interaction entre l'atome et la cavité pendant la séquence. Cette intégration prend en compte une atténuation du contraste, due aux erreurs de discrimination, et un mauvais équilibrage du détecteur : il est possible que notre détecteur détecte mieux les atomes dans un état plutôt que dans l'autre. Nous équilibrons le mieux possible la détection en jouant sur les potentiels des différents composants des blocs de détection comme les lentilles électrostatiques. Toutefois, les imperfections restantes peuvent introduire un décalage de la valeur moyenne des oscillations de Rabi détectées. Ces défauts sont mesurés à l'aide d'une séquence d'oscillations de Rabi dans le vide. La simulation contient également la dispersion horizontale de l'échantillon atomique préparé que l'on estime à 1 mm soit un étalement temporel de 4 μ s. Cette dispersion doit absolument être prise en compte car elle n'est pas négligeable à l'échelle du waist du mode de la cavité de l'ordre de 6 mm et le couplage vu par un atome préparé dans l'échantillon sera très différent selon sa position au sein de l'échantillon. L'intégration numérique se fait tous paramètres fixés et montre, par son accord avec les données expérimentales, que nous comprenons les facteurs influençant nos mesures.

Après un temps d'interaction $T_1 = 13,4 \mu$ s, le champ s'est séparé en deux composantes distantes de $D = 1.92$ d'après l'équation (II.136). Si on rajoute à présent les étapes 3 et 4 à la séquence expérimentale, la rotation du dipôle atomique au centre de la cavité (grâce au désaccord atome-champ de -881 kHz imposé pendant 0,5 μ s), permet ensuite la recombinaison des deux composantes de champ pendant la deuxième interaction résonnante de durée effective T_2 . Si nous n'injectons pas de champ β , les oscillations de P_g revivent alors et atteignent leur maximum pour $T_2 = T_1$. Nous obtenons les points bleus dans le deuxième cadre de la figure IV.18. De la même manière que pour l'effondrement des oscillations, nous effectuons une intégration numérique prenant en compte les imperfections du dispositif

2. Notez qu'exceptionnellement pour les séquences de la figure IV.18, l'atome a été préparé initialement dans $|e\rangle$.

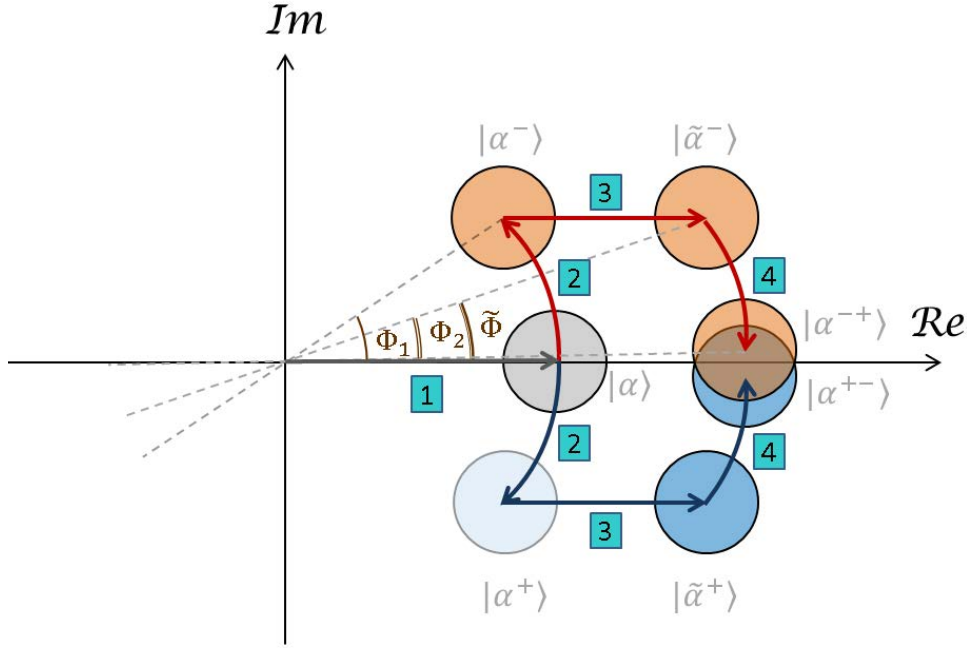


FIGURE IV.17 – Evolution du champ au cours d'une répétition de la séquence expérimentale

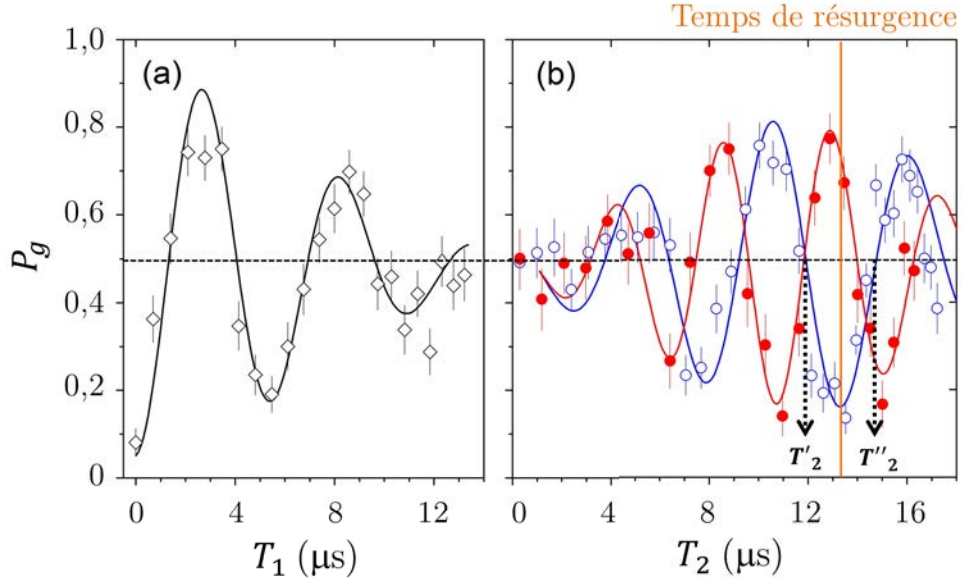


FIGURE IV.18 – Effondrement et résurgences des oscillations de Rabi

(a) Effondrement des oscillations de $P_g(T_1)$, points expérimentaux avec barres d'erreurs statistiques et intégration numérique du Hamiltonien (avec simulation de dispersion). (b) Résurgence des oscillations de $P_g(T_2)$ après une première période résonnante de durée effective $T_1 = 13,4 \mu\text{s}$ et après renversement du temps. Le temps de résurgence exacte des oscillations est marqué par un trait vertical orange. Les points et la courbe d'intégration bleus sont pris en l'absence de champ β . Les temps effectifs T'_2 et T''_2 correspondent donc aux conditions à mi-franges maximisant la sensibilité de la mesure de champs d'amplitude β proches de 0. Les points et la courbe d'intégration en rouge sont enregistrés en présence d'un petit champ cohérent $|\beta = 1\rangle$ piégé dans la cavité à $T_2 = 0$.

expérimental, qui permet de rendre compte de la diminution de contraste. Si, cette fois, on injecte pendant la phase de retournement du dipôle atomique un champ d'amplitude β (à $t = 0$) que l'on veut mesurer, on obtient des points expérimentaux déphasés : par exemple ici les points rouges correspondent à la résurgence des oscillations de Rabi après injection d'un champ $|\beta = 1\rangle$. Le déphasage attendu peut être calculé à l'aide de la formule (II.135) donnant la probabilité de détecter l'atome dans $|g\rangle$ pour $T_2 = T_1$ en fonction de β : il est donné par l'expression $\phi_{\text{déphas}} = 2\beta D$ et vaut ici $1,23\pi$. À l'aide la figure IV.18, on peut estimer que ce déphasage vaut expérimentalement environ $1,3\pi$, ce qui est en bon accord.

IV.3.1 Quantité maximale d'information disponible dans la mesure

Nous avons défini au tout début de ce manuscrit un outil nous permettant d'estimer la quantité d'information maximale sur un paramètre que nous pourrions espérer obtenir à partir d'une mesure pour un état initial donné : il s'agit de l'information de Fisher (notée F). Nous allons donc nous pencher sur l'efficacité du protocole de mesure que nous avons choisi pour mesurer l'amplitude β du petit champ à partir de l'état initial atome-champ. On rappelle à ce propos que l'état initial de la *mesure* est le résultat de la première interaction résonnante de durée T_1 . Dans la section II.7, nous avons établi que, grâce à notre mesure et à partir de notre état initial (donc à Ω_0 et T_1 donnés), la meilleure sensibilité sur le paramètre β que l'on puisse récupérer autour de $\beta = 0$ nécessite de bien choisir la durée T_2 de la deuxième période d'interaction résonnante : il est particulièrement intéressant de se placer à mi-pente des oscillations pour $\beta = 0$. Nous retrouvons également, sur la figure IV.18, le constat que nous avons fait dans le chapitre théorique : lorsqu'on s'éloigne du temps de résurgence exacte, le contraste des oscillations diminue. Celui-ci est en effet lié au recouvrement des deux composantes de champ en fin de deuxième période d'interaction résonnante qui ne reviennent pas exactement se superposer si $T_2 \neq T_1$. Pour ne pas perdre trop en contraste, nous allons donc sélectionner les deux durées T_2 que l'on notera T_2' et T_2'' (avec $T_2' < T_2''$) encadrant directement la valeur $T_2 = T_1$ et telles que $P_g(T_2) = 1/2$.

Pour obtenir les valeurs de l'information de Fisher autour de la valeur $\beta = 0$, il faut reconstituer la probabilité de détecter l'atome dans l'état $|g\rangle$ en fonction de β pour des petites valeurs de l'amplitude (voir équation (II.156)). D'après le paragraphe précédent, l'information de Fisher sera d'autant plus grande pour $\beta = 0$ que l'on mesure l'état atomique à la fin de séquences pour lesquelles $T_2 = T_2'$ ou T_2'' . Il est évident que le choix de la durée T_2 dépend de la valeur du champ β pour laquelle on veut la plus grande sensibilité de mesure. Pour cette expérience, nous sommes intéressés par de très petits champs mais *a priori*, d'après nos résultats théoriques, notre mesure pourrait donner des résultats satisfaisants pour des champs de plus grande amplitude. Dans ce cas, il faudrait adapter la durée de la deuxième interaction résonnante mais le raisonnement resterait le même.

Choisissons par exemple de fixer la durée de la deuxième période d'interaction résonnante, T_2 , à T_2'' . Pour tracer P_g en fonction de β , il faut répéter la séquence expérimentale

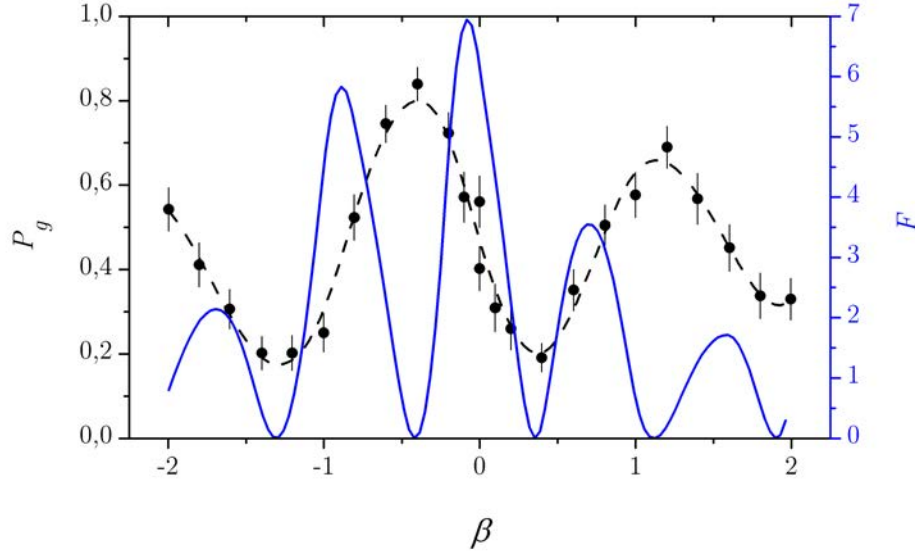


FIGURE IV.19 – Exemple typique d’oscillations de $P_g(\beta)$ et information de Fisher associée

Les points expérimentaux correspondent à des séquences pour lesquelles $T_1 = 12,0 \mu s$ et $T_2 = T_2''(T_1) = 13,5 \mu s$. Ils sont interpolés par la courbe en pointillé (axe des ordonnées à gauche) qui sert de base au calcul de l’information de Fisher représentée en trait plein bleu (axe des ordonnées à droite). Le maximum d’information est bien sûr obtenu autour de $\beta = 0$.

présentée à la section IV.1 pour différentes valeurs d’injection. Celles-ci sont obtenues par variation de l’atténuation mise sur la ligne β . Pour explorer les valeurs de β négatives, nous injectons le champ β en opposition de phase avec le champ α (voir section IV.2.4.b). Chacune de ces séquences donnera un point expérimental du type de ceux de la figure IV.19. L’information de Fisher utilisant la dérivée première de la fonction $P_g(\beta)$, il est avantageux d’interpoler les points grâce à une fonction polynômiale pour obtenir une fonction continue (en traits pointillés). Sans surprise, l’information de Fisher qu’on en extrait, représentée en trait plein bleu, est maximale pour $\beta = 0$ puisque la durée T_2 a été choisie pour cela. Ce qui est particulièrement intéressant, par contre, est la valeur de l’information de Fisher pour ce champ : avec $F = 7$, nous dépassons largement la valeur que l’on peut obtenir à partir d’un état cohérent et qui marque la Limite Quantique Standard, *i.e.* $F_{\text{SQL}} = 4$. En théorie, grâce aux formules (II.160) et (II.153), on peut calculer pour cette durée T_2 quelle information de Fisher maximale on aurait dû obtenir avec notre mesure et notre état initial : on trouve $F_{\text{max}} = 14,9$. Cette différence est, encore une fois, à imputer à la dispersion longitudinale des échantillons atomiques qui diminue le contraste de $P_g(\beta)$ de manière d’autant plus importante que β est grand. Malgré les imperfections expérimentales par rapport à notre mesure idéale, nous battons tout de même largement la Limite Quantique Standard.

Mais aurait-on pu faire mieux en choisissant un autre protocole de mesure pour mesurer l’action du petit champ β sur notre état initial ? Nous nous proposons d’y réfléchir dans la section suivante, à l’aide de l’information de Fisher *quantique*.

IV.3.2 Pertinence du choix de la mesure

La précision que l'on a sur la valeur de l'amplitude β du petit champ peut être quantifiée par l'écart type final obtenu $\Delta\beta$. Celui-ci est proportionnel à $1/\sqrt{F}$ que l'on appellera $\Delta\beta^{(1)}$, le coefficient de proportionnalité étant donné par $1/\sqrt{\zeta}$ où ζ est le nombre de répétitions expérimentales. Cet écart type, à nombre de répétitions fixé, est d'autant plus petit que la valeur de l'information de Fisher est grande. Il ne peut descendre en dessous d'une certaine valeur fixée par la valeur maximale que peut prendre l'information de Fisher : celle-ci est donnée par l'information de Fisher quantique, obtenue dans le cas où la mesure est optimale. Elle dépend bien sûr de l'état initial donc de la valeur de T_1 choisie (*i.e.* de la durée de la première période résonnante), la fréquence de Rabi du vide étant la même dans toutes nos séquences. La précision doit par ailleurs être meilleure que celle donnée par un état cohérent : c'est notre objectif initial. Nous allons donc chercher à situer nos résultats par rapport à ces deux valeurs.

Pour chaque état initial donné, nous avons représenté la racine carrée de l'information de Fisher obtenue expérimentalement, $\sqrt{F}$, en fonction du temps de mesure du petit champ T_2 sur la figure IV.20. Nous avons représenté en bleu la zone où l'information de Fisher prend une valeur comprise entre $F_{\text{SQL}} = 4$ et $F_Q = 4(1 + \Omega_0^2 T_1^2)$ *i.e.* la région où la mesure dépasse la SQL. Cette région voit sa barrière supérieure varier suivant la valeur de T_1 . Elle est donc d'autant plus grande que T_1 est grand. Pour $T_1 = 0$, l'état initial de la mesure est un champ cohérent d'où la coïncidence des deux valeurs F_Q et F_{SQL} . La courbe noire donne l'information de Fisher maximale que l'on aurait pu obtenir en théorie avec la mesure pour tous les sets (T_1, T_2) . Son expression, issue de celle de F_{max} (II.160), est donnée par :

$$F^{1/2} = C(T_1, T_2)\Omega_0 T_2, \quad (\text{IV.3})$$

où le contraste prend l'expression habituelle : $C = \exp(-\Omega_0^2(T_1 - T_2)^2/8)$. Il est important de noter que l'information de Fisher ne prend cette expression limite que lorsqu'elle est maximisée sur β . Chaque point de la courbe donne donc l'information de Fisher maximale qui correspond potentiellement à une valeur différente de β à chaque fois. On voit ainsi qu'il est possible d'atteindre la valeur de l'information de Fisher quantique avec notre mesure dès que T_1 est assez grand puisque le maximum de cette courbe frôle la valeur de F_Q . Il faut toutefois théoriquement adapter le choix de T_1 à la valeur de β . On remarque à ce propos, que ce processus n'est absolument pas optimal avec un état cohérent comme état ressource puisque l'information de Fisher reste loin de l'information de Fisher quantique quelque soit la valeur de T_2 . Par contre, notre processus de mesure converge très rapidement vers la mesure optimale dès que $T_1 \neq 0$. Nous gagnons donc réellement à utiliser un état non classique comme ressource tel que cette superposition d'états quantiques mésoscopiques.

Pour une durée d'interaction T_1 , nous avons obtenu expérimentalement deux valeurs de l'information de Fisher pour les durées T_2' et T_2'' qui sont les durées optimisées pour avoir la meilleur sensibilité en $\beta = 0$. Elles correspondent aux deux points rouges dans chaque

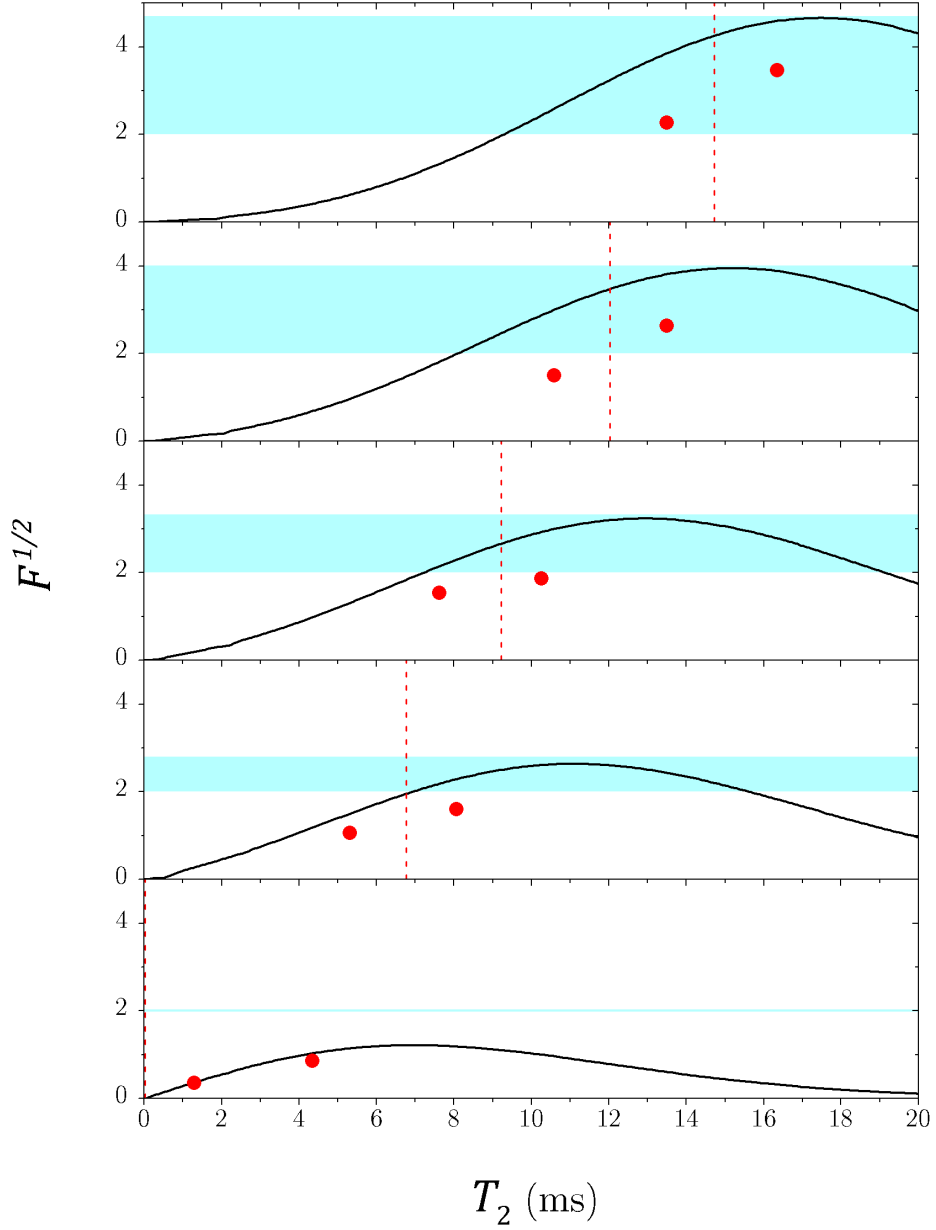


FIGURE IV.20 – Comparaison des résultats expérimentaux avec les résultats d'une mesure classique et d'une mesure optimale

Chaque sous-figure présente les résultats obtenus pour un état initial donné, déterminé par une valeur de T_1 . Nous avons ainsi recensé les états donnés par 5 temps de préparation $T_1 = 0 \mu s$; $6,8 \mu s$; $9,2 \mu s$; $12,0 \mu s$ et $14,7 \mu s$ (du bas vers le haut). Les points sont les valeurs d'information de Fisher extraites des données obtenues. Les lignes pointillées verticales correspondent aux temps de résurgence exacte. Les bandes horizontales bleues délimitent les régions où les valeurs d'information de Fisher sont à la fois supérieures à $F_{\text{SQL}} = 4$ et inférieures à l'information de Fisher quantique. La courbe noire donne l'information de Fisher théorique donnée par (IV.3).

Information de Fisher		$T'_2 = 13.5 \mu\text{s}$	$T''_2 = 216.3 \mu\text{s}$
1.	F_Q approximée par (IV.4)		21.6
2.	F_Q obtenue par intégration numérique		20.5
3.	F approximée par (IV.5)	13.9	21.0
4.	F approximée par (IV.5) avec 5% d'erreurs de détection	11.2	17.0
5.	F obtenue à partir des données expérimentales	5.1	12.0
6.	F_{SQL} (F_Q d'un état cohérent)		4.0

Tableau IV.1 – Information de Fisher pour le plus grand temps d'interaction $T_1 = 14.7 \mu\text{s}$

Les données à comparer sont mises en gras : la limite supérieure ultime fixée par l'information de Fisher quantique pour l'état ressource, l'information de Fisher obtenue à partir des données expérimentales et l'information de Fisher quantique de l'état cohérent qui fixe la Limite Quantique Standard.

cadre de la figure IV.20. Dans le cas spécifique où $T_1 = 0$, les points ont été obtenus pour les deux premières valeurs de T_2 telle que $P_g(T_2) = 1/2$. Comme attendu, l'information de Fisher la plus élevée est à chaque fois obtenue pour la durée de mesure la plus longue. Lorsqu'on augmente T_1 , l'information obtenue pour $T'_2(T_1)$ est de plus en plus proche en valeur relative de l'information maximale disponible avec ce processus de mesure, qui est elle-même de plus en plus proche de la valeur de l'information de Fisher quantique. Expérimentalement, il aurait donc été intéressant d'augmenter encore T_1 . Malheureusement, l'étalement longitudinal des échantillons atomiques dégrade nos résultats. C'est d'ailleurs cela qui explique la différence entre les valeurs trouvées et les valeurs maximales. En effet, nous avons vu dans la section IV.2.3 que les atomes situés à des positions aléatoires dans les échantillons ressentaient tous un couplage à la cavité différent. Or ces variations sont d'autant plus importantes que T_2 est grand puisque les atomes explorent alors la partie la plus "pentue" du profil de couplage. La trop forte diminution du contraste que cela occasionne nous a empêché de ce fait d'exploiter les résultats pour des T_2 plus grands que ceux présentés sur la figure. La vitesse des atomes exclue de toutes manières l'exploration des T_1 plus grands qu'une vingtaine de microsecondes, les atomes restant une quarantaine de microsecondes dans la cavité. N'oublions pas qu'il s'agit ici de temps effectifs.

Nous récapitulons dans le tableau IV.1 l'information obtenue par notre processus de mesure pour l'état dont les composantes de champ sont les plus distantes (*i.e.* l'état obtenu après une interaction résonnante de durée $T_1 = 14,7 \mu\text{s}$).

1. ➤ La première ligne correspond au résultat du modèle théorique que nous avons développé et qui néglige la distorsion des composantes cohérentes du champ lors de T_1 . Nous avons alors obtenu l'expression suivante pour l'information de Fisher quantique :

$$F_q = 4 \left(1 + \Omega_0^2 T_1^2 \right). \quad (\text{IV.4})$$

2. ➤ La deuxième ligne présente le résultat issu d'une simulation numérique complète pour obtenir l'état à la fin de la première période d'interaction résonnante et après retournement du temps, c'est-à-dire l'état initial de la mesure. Elle prend en compte la diffusion des composantes de champ en gardant un ordre de plus dans l'approximation faite sur la forme des composantes de champ après T_1 : ces composantes sont donc de la forme donnée par (II.62). Ceci fait diminuer la valeur de l'information de Fisher de 5% environ.

Les trois lignes suivantes présentent les valeurs obtenues pour l'information de Fisher dans différents cas :

3. ➤ Tout d'abord le cas idéal qui fait référence à la formule suivante :

$$F_{\max}(T_1, T_2) = C^2(T_1, T_2)\Omega_0^2 T_2^2, \quad (\text{IV.5})$$

que l'on a obtenue à partir de l'expression de la probabilité de détecter l'atome dans $|g\rangle$ où l'on néglige la diffusion des composantes de champs pendant T_1 et T_2 et où l'on ne garde que le recouvrement le plus important entre les composantes de champ à la fin de la deuxième période résonnante :

$$P_g = \frac{1}{2} [1 + C \cos(\tau)], \quad (\text{IV.6})$$

avec :

$$C = e^{-\frac{1}{8}\Omega_0^2(T_1-T_2)^2}, \quad (\text{IV.7})$$

$$\tau = \alpha\Omega_0(T_1 - T_2) - \beta\Omega_0 T_2. \quad (\text{IV.8})$$

Il est à noter que l'expression (IV.5) n'est valable que pour $\beta \ll \alpha$. La valeur de cette ligne correspondant au T_2 le plus grand est quasiment égale à celle de la première ligne contenant les mêmes approximations (dont nous avons montré au chapitre théorique qu'elles sont tout à fait valables car elles redonnent les mêmes résultats que l'intégration du Hamiltonien exact). On retrouve bien ici que notre processus de mesure est optimal pour les grandes superpositions de composantes de champ.

4. ➤ La quatrième ligne reprend le calcul précédent mais incorpore les 5% d'erreurs de détection par l'ajout d'un facteur d'atténuation (0,90) au contraste C dans l'expression de P_g (IV.7).
5. ➤ La cinquième ligne donne la valeur trouvée à partir des données mesurées interpolées.
6. ➤ La dernière ligne rappelle la valeur de l'information de Fisher quantique correspondant à la SQL.

On voit ici que la valeur de l'information de Fisher mesurée est sensiblement plus faible que la valeur maximale à cause de la dispersion atomique mais reste largement supérieure à celle donnée par la Limite Quantique Standard. Le tableau nous fournit une estimation *quantitative* de l'amélioration apportée par notre mesure par rapport à une mesure classique : la précision a été augmentée de $10 \log(\sqrt{F/F_{\text{SQL}}}) \approx 2,4$ dB.

IV.3.3 Proposition de mesure du champ β à partir d'un état cohérent

Revenons au cas où notre ressource initiale est un état cohérent. Le processus de mesure que nous avons développé n'est pas bien adapté à cet état. Essayons donc d'en trouver un plus efficace. Nous allons montrer que l'information quantique de Fisher peut être obtenue directement par des mesures non destructives de la parité du nombre de photons dans la cavité dont le mode, initialement vide, est déplacé de β .

Les travaux de mes prédécesseurs ont montré que l'on pouvait mesurer de manière non destructive le nombre de photons présent dans une cavité grâce à des atomes traversant la cavité hors résonance. On peut ainsi faire en sorte que les dipôles atomiques subissent un déphasage proportionnel au nombre de photons. En préparant les atomes dans une superposition $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$, en leur faisant subir une opération de retournement du temps et en les faisant passer dans un interféromètre de Ramsey, nous pouvons mesurer la parité du champ vu par les atomes lors de leur traversée de la cavité. Or, nous avons vu que la fonction de Wigner W d'un état du champ était directement reliée à la parité du champ. Plus précisément, d'après (II.138), il s'agit de valeur moyenne de la parité dans ce champ déplacé de l'amplitude complexe $-\gamma$. Si l'on réalise ainsi une mesure de parité sur l'état du champ vide déplacé d'un champ cohérent β , on obtient à la fin :

$$P_e - P_g = \frac{\pi}{2} W(-\beta) \quad (\text{IV.9})$$

Etant donné que l'on a toujours $P_g + P_e = 1$, on en déduit facilement les probabilités de détection atomique :

$$P_g = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} W(-\beta). \quad (\text{IV.10})$$

Comme par ailleurs, l'expression de la fonction de Wigner prend une expression très simple dans notre cas : $W_{|0\rangle}(\beta) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\beta|^2}$, on obtient les probabilités de détection atomique suivantes :

$$P_g = \frac{1}{2} (1 - e^{-2|\beta|^2}). \quad (\text{IV.11})$$

Ceci nous permet de calculer l'information de Fisher à partir de la formule (II.156) :

$$F(\beta) = \frac{16|\beta|^2}{e^{4|\beta|^2} - 1} \quad (\text{IV.12})$$

Remarquons que pour $|\beta| \ll 1$, ce processus de mesure atteint l'information de Fisher quantique pour un état ressource classique (F_{SQL}). On a tracé cette fonction en trait plein bleu sur la figure IV.21. Elle montre que ce nouveau processus de mesure est plus efficace en théorie un état ressource cohérent que celui que l'on avait développé pour la superposition d'états mésoscopiques. Si on prend toutefois en compte les erreurs de discriminations du détecteur en compte comme sur la courbe magenta, on constate que la perte de contraste (de l'ordre de 10%) suffit à diminuer par un facteur deux l'information de Fisher

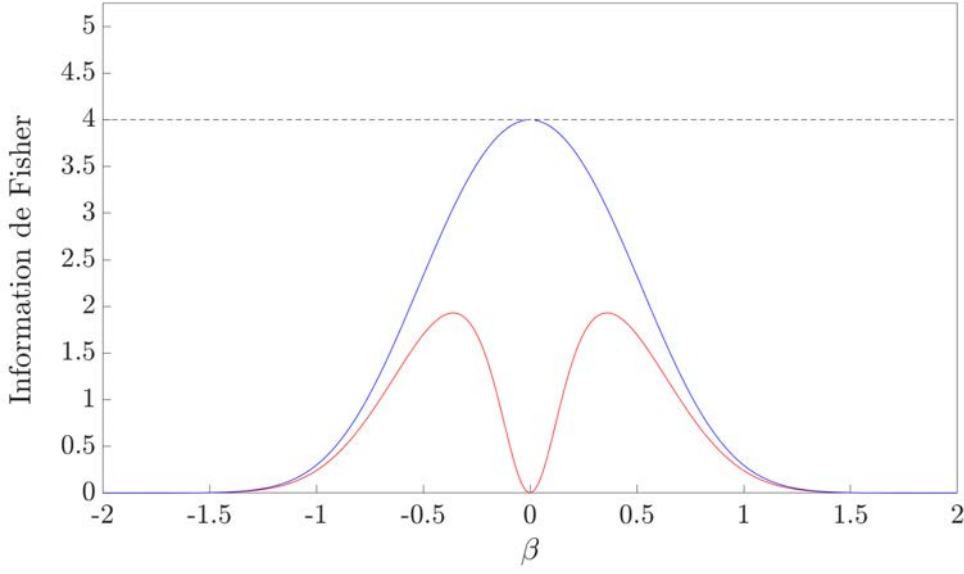


FIGURE IV.21 – Information de Fisher de la mesure de parité

La courbe bleue correspond à l'expression (IV.12). Elle donne le maximum d'information en $\beta = 0$ pour laquelle elle atteint la valeur de l'information de Fisher quantique d'un état cohérent (courbe en pointillés noirs) i.e. 4. La courbe magenta prend en plus en compte la mauvaise résolution du détecteur.

maximale que l'on peut obtenir et revient au niveau des points que l'on a obtenu expérimentalement. Ces erreurs nous font en même temps perdre toute information lorsqu'on n'injecte pas de petit champ. De la même manière si le champ est trop intense, les probabilités de détection atomique s'égalisent à $1/2$ et la mesure ne nous permet pas de retirer de l'information.

Conclusion

Nous avons présenté un processus expérimental permettant mesurer avec précision l'amplitude β de champs de petite amplitude. Il tire pour cela partie de la non-classicalité des superpositions mésoscopiques d'états quantiques atome-champ que nous préparons. Nous quantifions l'amélioration de notre mesure par rapport à une mesure "classique" grâce au formidable outil qu'est l'information de Fisher.

Nous pouvons résumer nos résultats grâce à la figure IV.22. On représente $\Delta\beta^{(1)} = 1/\sqrt{F}$ en fonction de la taille D de l'état initial (de champ) de la mesure, ou bien, de manière équivalente, en fonction de la durée de la première période d'interaction résonnante T_1 qui prépare cet état. Les écarts types sur β extraits de nos résultats expérimentaux pour les paires (T_1, T_2'') sont représentés par des points. La courbe en trait plein noir donne l'information de Fisher théorique maximale calculée à l'aide de (IV.5). La zone bleue rappelle les limites auxquelles nous nous comparons : la limite supérieure que nous

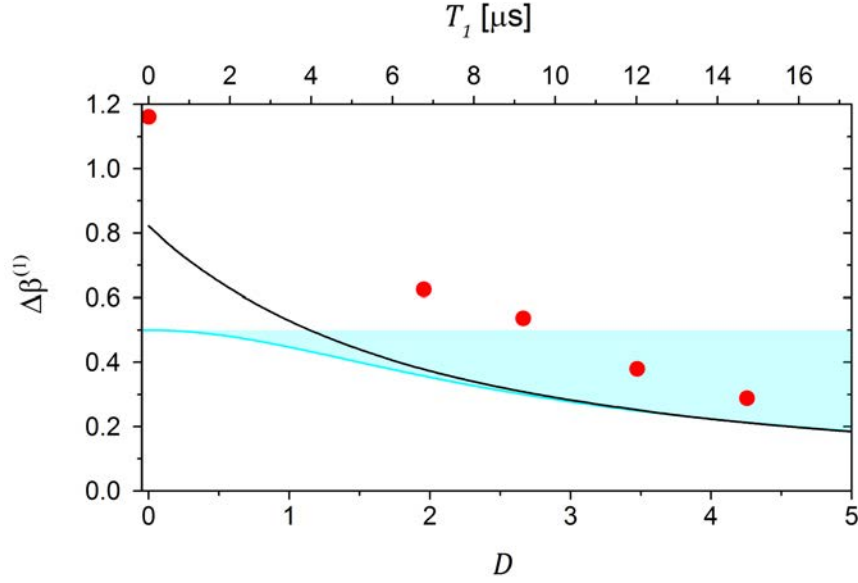


FIGURE IV.22 – Précision de la mesure

Les points correspondent aux précisions issues des données mesurées pour les T_2'' . La courbe noire donne la variation de la précision de la mesure en utilisant l'expression de l'information de Fisher F idéale donnée par la formule (IV.3). La zone bleue représente la zone sub-SQL limitée en bas par la précision liée à l'information de Fisher quantique de l'état de taille D ($\Delta\beta_Q = 1/\sqrt{F_Q}$) et en haut par celle de la SQL ($\Delta\beta_{SQL} = 0,5$).

ne voulons pas franchir est donnée par l'information de Fisher quantique d'un état cohérent et la limite inférieure est donnée par l'information de Fisher quantique pour chaque état mesuré. Si le processus de mesure que nous avons développé n'est pas l'outil pertinent lorsque l'état ressource est de taille trop petite, les résultats expérimentaux montrent que, dès que la taille D dépasse 3, il permet de battre la Limite Quantique Standard. Les simulations numériques que nous avons menées permettent même d'aller plus loin : puisque la courbe noire rejoint rapidement la courbe des valeurs maximales d'information extrayable à partir d'un état ressource donné, nous pouvons affirmer que notre stratégie de mesure du paramètre β est en principe optimale pour des états de taille supérieure à 3. Les valeurs expérimentales rejoignent cette assertion même si des imperfections expérimentales causent la diminution de l'information de Fisher obtenue. Elles dépassent en effet pour $D > 3$ largement la valeur associée à la Limite Quantique Standard et se rapprochent rapidement de la valeur maximale.

Conclusion

La théorie de l'estimation de paramètre, aussi bien dans son aspect classique que quantique, établit une distinction nette entre une variable mesurée et un paramètre estimé. Ce dernier est évalué à l'aide d'un estimateur qui le relie aux observations faites sur les variables mesurées qui jouent le rôle de variables d'entrée de l'estimateur. Dans le cadre d'une expérience de physique, ceci se transpose sous la forme suivante : le processus commence par préparer le système dans un certain état, on laisse celui-ci évoluer et l'état du système change alors en fonction du paramètre que l'on souhaite évaluer ; enfin, on mesure le système et les résultats de mesures fournissent les données nécessaires pour l'estimateur.

Dans ce manuscrit, nous nous sommes concentrés sur l'estimation de l'amplitude d'un petit déplacement dans l'espace des phases opéré sur un champ micro-onde dans une cavité. La précision que nous pouvons obtenir sur l'estimation de cette amplitude dépend essentiellement de deux aspects de l'expérience : le choix de l'état initial et celui du processus de mesure. Nous avons souligné que les caractéristiques classiques de l'état ressource du système restreignaient la précision atteignable à la limite quantique standard (SQL) mais qu'en exploitant pleinement les avantages conférés par la mécanique quantique la SQL pouvait être dépassée. La métrologie quantique a pour principal objectif de se rapprocher le plus possible de la limite ultime de la précision appelée limite de Heisenberg en employant des états non-classiques. L'information de Fisher permet d'estimer la précision accessible pour un processus de mesure donné connaissant l'état initial du système. Le calcul de l'information de Fisher quantique permet de connaître *a priori* la précision maximale accessible à partir du même état initial en utilisant le processus de mesure optimal. La limite de Heisenberg est donc liée à l'information de Fisher quantique maximisée sur les états initiaux possibles. Le choix des états initiaux est restreint par les ressources accessibles pour chaque expérience.

Notre équipe manipule habituellement des états intriqués atome-champ où le champ est un champ micro-onde piégé dans une cavité et où l'atome est un atome de Rydberg fortement couplé au champ. Nous avons montré dans ce travail que ces états sont bien adaptés à la réalisation d'une mesure d'un petit déplacement dans l'espace des phases sous la forme de l'ajout d'un champ cohérent $|\beta\rangle$ à l'état de champ initial piégé dans la cavité. Estimer le déplacement revient donc ici à estimer l'amplitude de ce petit champ cohérent. La séquence expérimentale de mesure a été présentée aussi bien théoriquement qu'expérimentalement dans ce manuscrit. Elle consiste tout d'abord en la préparation d'une

superposition macroscopique de champ par interaction résonante entre un atome à deux niveaux préparé dans son état fondamental et un état cohérent contenant en moyenne 12,7 photons. On réalise alors l'injection du champ cohérent dont l'amplitude β est le paramètre à estimer. On effectue ensuite une opération de renversement du temps en appliquant l'opérateur σ_z sur l'atome : après une deuxième interaction résonante entre atome et champ, ceci permet de faire revivre avec un bon contraste les oscillations de Rabi qui se sont atténuées pendant la première période d'interaction résonante. L'information sur l'amplitude du champ est alors inscrite dans le déphasage des oscillations de Rabi après l'injection du petit champ cohérent.

L'étude de l'information de Fisher quantique montre que la sensibilité de la superposition macroscopique initiale à un petit déplacement dans l'espace des phases est d'autant plus grande que la distance entre les composantes de champ est grande avant l'injection du petit champ. On peut augmenter cette distance soit en augmentant le nombre moyen de photons de la superposition, soit en augmentant le temps d'interaction entre l'atome et le champ. Nous avons exposé dans ce mémoire que la distance sature de toute manière à partir d'un certain nombre de photons que nous pouvons atteindre sans problème. La contrainte la plus forte est donc le temps d'interaction entre l'atome et le champ, principalement limité par le temps que peut passer l'atome dans la cavité. Aussi, contrairement à beaucoup d'expériences d'optique quantique, notre ressource limitante n'est pas le nombre de photons et nous avons montré que les états les plus sensibles au petit déplacement de champ sont des superpositions macroscopiques de composantes de champ cohérents. L'information de Fisher quantique d'un état cohérent initial détermine la SQL de notre expérience : nous avons calculé qu'elle valait $F_Q = 4$ et cette valeur est indépendante du nombre de photons de cet état cohérent.

Nous avons alors étudié l'augmentation de la précision sur l'estimation du déplacement avec cette distance entre les composantes de champ, jusqu'à la plus grande distance que nous pouvions préparer. Sans grande surprise, le processus de mesure que nous avons mis en place n'atteint pas la SQL si la superposition est de trop petite taille, *i.e.* lorsque la distance entre les composantes de champ de l'état initial est inférieure à 3 dans l'espace des phases. En revanche, nous avons montré que ce processus tendait vers l'optimalité pour de très grandes tailles de superpositions. Ceci s'est avéré d'autant plus intéressant que cette observation ne se limitait pas à la mesure de toutes petites amplitudes de champ : la précision ne diminue pas lorsqu'on utilise ces superpositions pour l'estimation d'un paramètre plus grand qu'une amplitude de moins d'un photon. En pratique, les imperfections expérimentales limitent l'information de Fisher et l'empêche d'atteindre la limite donnée par l'information de Fisher quantique. Nous avons pu tout de même dépasser la SQL de 2,4 dB. De plus, nos calculs montrent que nous comprenons bien l'origine de ces limitations notamment dues à notre efficacité de détection insuffisante.

Perspectives

Cette expérience clôt la série d'expériences à une seule cavité que nous souhaitons mener avec ce dispositif expérimental et nous avons décidé de transformer ce dernier de manière à pouvoir être opérationnel avec deux cavités au lieu d'une seule comme représenté sur la figure IV.23. Ce nouveau dispositif expérimental devrait nous permettre d'explorer une des caractéristiques les plus étranges de la mécanique quantique, à savoir la *non-localité*.

Dans un premier temps, nous pourrions préparer des états NOON de champ micro-onde avec $N = 1$ photon par interaction *résonante* de l'atome avec les deux cavités. Nous avons réalisé une telle expérience pour laquelle l'état NOON avait été préparé dans deux modes d'une même cavité [111]. En adaptant la procédure, il est possible de préparer un état NOON à partir d'un atome préparé dans l'état excité $|e\rangle$ et deux cavités initialement vides. On notera pour la suite les états de champ $|a, b\rangle$ où a correspond au champ dans la première cavité C_1 et b celui dans la deuxième cavité C_2 . Une première impulsion $\pi/2$ dans C_1 , correspondant à une impulsion d'oscillation de Rabi spontanée à partir de l'atome dans $|e\rangle$, suivie d'une impulsion π dans C_2 permet de préparer l'état $(|0, 1\rangle + |1, 0\rangle) / \sqrt{2} \otimes |g\rangle$. Une détection de l'atome dans l'état $|g\rangle$ projette les champs dans l'état voulu. L'envoi d'atomes à la suite de cette opération peut permettre de vérifier la cohérence de l'état ainsi préparé.

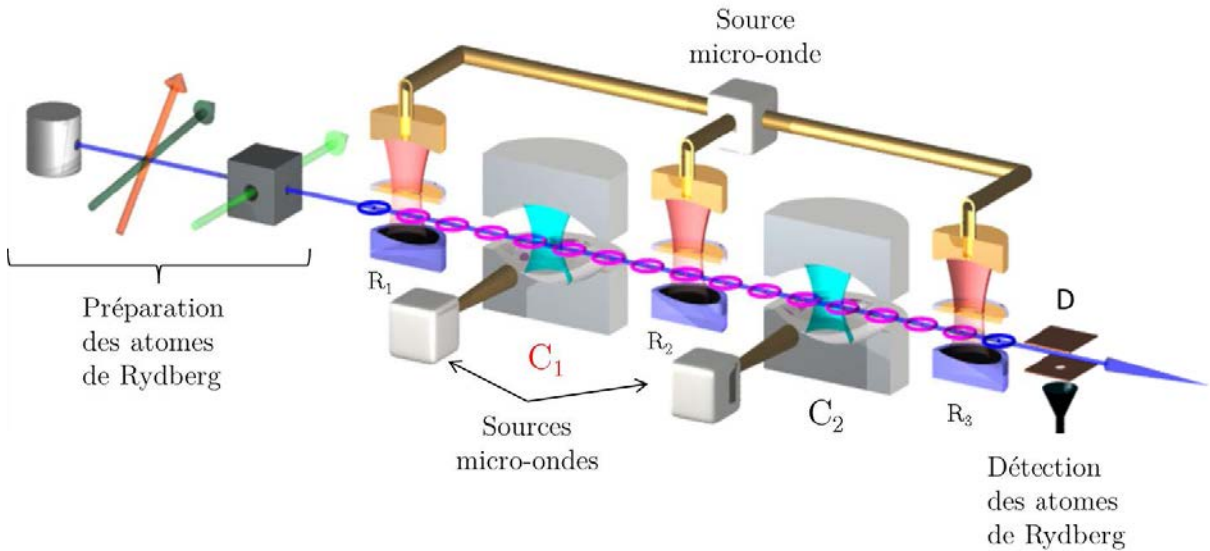
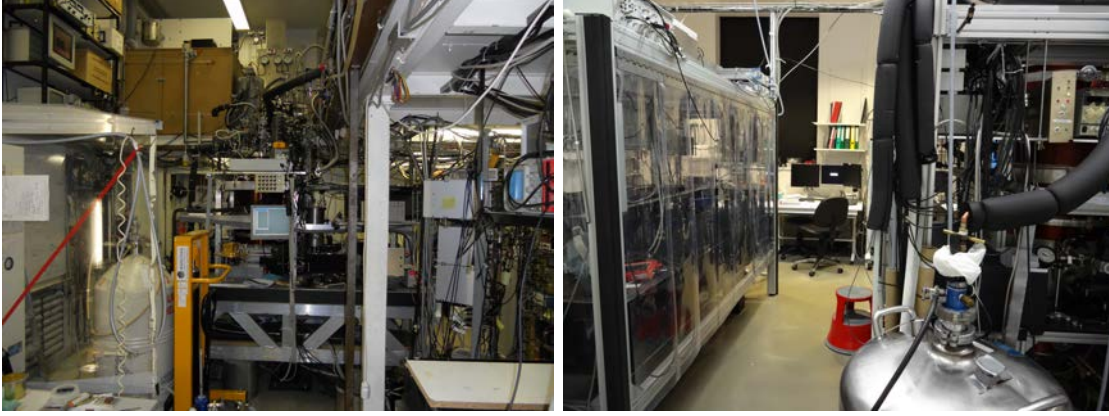


FIGURE IV.23 – Dispositif expérimental à deux cavités

C_1 et C_2 représentent les deux cavités à très grand facteur de qualité. R_1 , R_2 et R_3 symbolisent les cavités Ramsey à faible facteur de qualité permettant de manipuler l'état atomique. Les champs peuvent être injectés dans les différentes cavités par des sources micro-ondes externes. En amont des cavités se trouvent les éléments usuels de préparation des atomes de Rydberg : four à rubidium, lasers de sélection de vitesse et boîte à circulariser. En aval des cavités se trouvent les détecteurs atomiques.



(a) Ancienne salle à l'ENS

(b) Nouvelle salle au Collège de France

FIGURE IV.24 – Expérience avant et après déménagement

A plus long terme, nous aimerions préparer des états chats de Schrödinger en adaptant la technique utilisée dans [57] à un montage à deux cavités, cette fois grâce à des interactions dispersives entre atome et champs piégés dans les cavités. La totalité de la procédure de préparation est détaillée dans [112]. Dans chaque cavité est initialement injecté un champ $|\alpha\rangle$ puis un atome de Rydberg circulaire est placé dans une superposition $(|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2}$ grâce à une impulsion $\pi/2$ réalisée dans R_1 (voir figure IV.23). Il interagit successivement avec les cavités C_1 et C_2 de manière dispersive avant de subir à nouveau une impulsion $\pi/2$ dans R_3 et d'être détecté. Avec cette procédure, nous pouvons *a priori* préparer le champ dans un état chat de Schrödinger de type $(|\beta, 0\rangle + |0, \beta\rangle)/\sqrt{N}$ où $\beta = 2\alpha$ et $1/\sqrt{N}$ correspond au facteur de normalisation. Grâce à ces superpositions mésoscopiques non-locales, nous pourrions par exemple violer les inégalités de Bell de la forme CHSH [113, 112]. En utilisant les techniques de mesure quantiques non destructives du nombre de photons (présents dans les cavités) que nous avons éprouvées pendant plusieurs années, nous pouvons envisager de préparer un état NOON à partir d'un état chat [114] et étudier comment le processus de décohérence est affecté par la taille de la superposition mésoscopique.

En vue de ces expériences, nous avons procédé à plusieurs améliorations indispensables que nous avons entreprises après avoir déménagé entièrement le dispositif de l'ENS Paris vers nos nouveaux locaux du Collège de France. Nous ne disposions que de peu de place à l'ENS et les tables optiques ainsi que les différents appareils étaient ramassés autour du cryostat (voir figure IV.24(a)). Nous avons donc souhaité mettre à profit le gain de surface au sol dans nos nouveaux locaux en rassemblant l'ensemble des systèmes lasers sur une table optique séparée du cryostat mais reliée par fibres à l'expérience (voir figure IV.24(b)). Nous avons donc redessiné entièrement les différents chemins optiques des lasers pour mettre les systèmes à l'état de l'art et considérablement améliorer la qualité des asservissements de fréquence. Nous avons en outre remplacé le laser à $1,2\,\mu\text{m}$ pour qu'il soit plus puissant, permettant ainsi de rendre la préparation des atomes plus efficace. Il

est important de noter que, vis-à-vis de l'expérience décrite dans le manuscrit, il ne s'agit pas juste d'un point de confort puisque la dispersion spatiale atomique a affecté la valeur de l'information de Fisher : avoir une plus grande puissance permet de focaliser mieux le faisceau laser et de réduire la durée des impulsions laser sans perdre en nombre d'atomes préparés et donc de diminuer la dispersion atomique.

Par ailleurs, comme exposé dans ce mémoire, l'efficacité des détecteurs avait considérablement diminué pour atteindre à peine 30 % pour cette dernière expérience. Nous avons donc changé notre dispositif de détection tel qu'il a été décrit à la section III.2.6 pour remplacer les multiplicateurs d'électrons par des channeltrons visibles sur la photo IV.25. En effet, les channeltrons sont potentiellement d'une plus grande efficacité que les multiplicateurs. De plus, le pont de résistances reliées aux dynodes des multiplicateurs dissipent beaucoup plus de chaleur que les channeltrons. Cette raison était à l'origine du placement des multiplieurs au sein de la jupe azote : les photons thermiques dégagés ne devaient pas affecter les cavités. Les nouveaux détecteurs peuvent être placés plus près des cavités et de ce fait être mieux alignés avec le reste du bloc détection. Par contre, il a fallu pour cela modifier la manière dont nous insérions ce nouveau bloc dans l'ancien dispositif et nous avons dû installer dans le cryostat tout le câblage haute tension nécessaire, entre la température ambiante et la partie du cryostat à 0,8 K.

Une autre amélioration majeure de notre dispositif concerne la procédure de circularisation des atomes. Celle-ci nécessite, entre autres étapes exposées à la section III.2.3, de transférer les atomes du niveau $|n = 52, m = 2, n_1 = 1\rangle$ vers le niveau circulaire $|n = 52, m = 51\rangle \equiv |52C\rangle$ (où n est le nombre quantique principal et m le nombre quantique magnétique) par un passage adiabatique. Jusque là ce processus était réalisé à l'aide de radiofréquence polarisée linéairement, en présence d'un champ électrique statique directeur et d'un champ magnétique qui permettait de mettre les composantes polarisées σ^- parasites hors résonance. Une nouvelle procédure a été expérimentée dans notre équipe pour une expérience où la présence de champ magnétique ne peut être envisagée et a grandement amélioré l'efficacité de la circularisation. Nous avons réalisé une nouvelle boîte à circulariser sur le même principe (voir figure IV.26) : cette fois la radiofréquence est directement polarisée σ^+ grâce à un jeu de 4 électrodes agencées en anneau perpendiculairement à l'axe de quantification dans le cylindre de niobium, ce qui permet de s'affranchir du champ magnétique. Le champ électrique directeur est maintenu grâce à deux électrodes placées en haut et en bas de la boîte à circulariser.

La dernière étape pour avoir un dispositif à deux cavités prêt à être utilisé est aussi la plus complexe : nous avons besoin de deux cavités de très grand temps de vie et accordées. En sus de la cavité que nous possédions déjà et qui s'est avérée encore exploitable après le déménagement (avec un temps de vie de 40 ms), nous avons donc passé plusieurs mois à la fabrication d'une cavité supraconductrice supplémentaire. Celle-ci a d'ores et déjà été installée dans le cryostat et testée : son temps de vie a été mesuré à 20 ms. Nous sommes ainsi en possession de deux cavités de finesse suffisante pour les expériences que nous souhaitons mener. Les opérations d'accord de fréquence des deux cavités sont actuellement

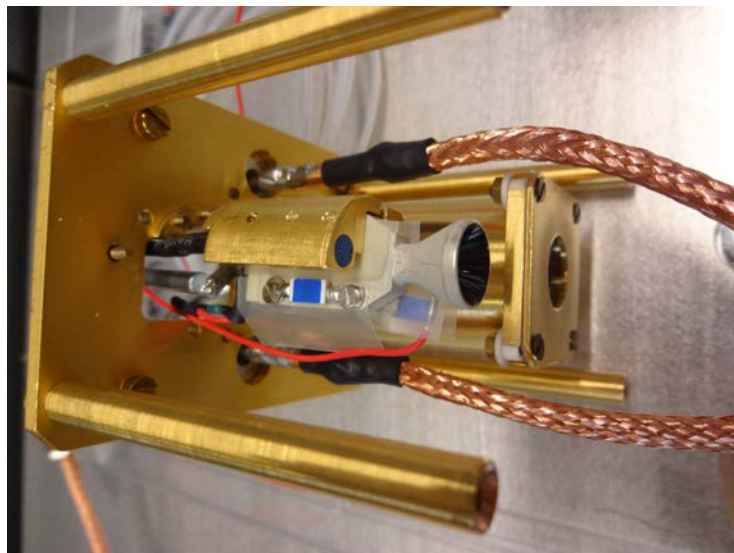


FIGURE IV.25 – Nouveaux détecteurs avec un channeltron visible et l'autre déjà protégé

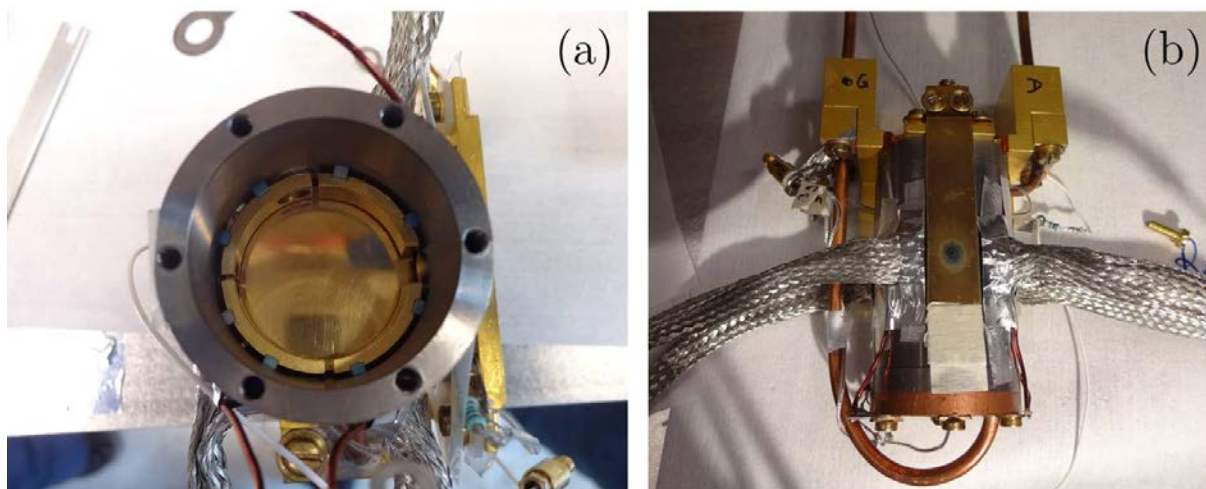


FIGURE IV.26 – Nouvelle boîte à circulariser

(a) Vue de dessus de la boîte à circulariser ouverte : une des électrodes plates servant à établir le champ électrique statique est visible au fond de la boîte. Les 4 électrodes formant un anneau discontinu sont celles qui génèrent le champ radiofréquence polarisé σ^+ . (b) Vue de face : les fils protégés par de la tresse de masse amènent le potentiel aux 4 électrodes. La plaque avant laisse deviner le trou d'entrée des atomes dans la boîte. Les blocs dorés servent à la fixation de la boîte sur la jupe ^3He .

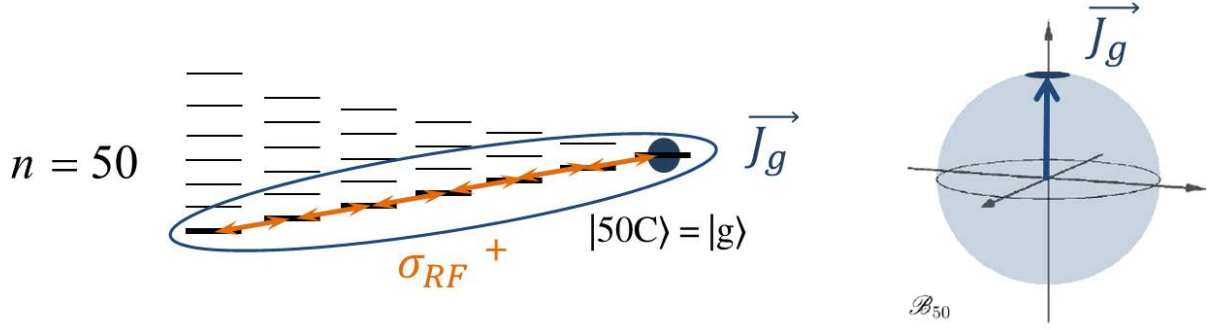


FIGURE IV.27 – Préparation de la superposition quantique d'état cohérent de spin

en cours et nous devrions pouvoir commencer prochainement les expériences de physique quantique non-locale.

Si le destin de ce dispositif n'est, pour l'instant, pas de faire de la métrologie, un autre dispositif de notre équipe continue dans cette direction. Il a permis dernièrement de mesurer un champ électrique avec une grande précision à l'aide d'une superposition de spins "cohérents" atomiques [115]. Cette expérience a atteint une précision deux fois plus grande que la SQL. Le dispositif utilisé présente des analogies avec celui décrit dans ce mémoire à la notable différence qu'il ne possède pas de cavités supraconductrices et les atomes de Rydberg interagissent uniquement avec le champ électrique dans une boîte.

En champ électrique statique, la multiplicité des états du niveau $n = 50$ des atomes se séparent en niveaux quasiment équidistants analogues aux niveaux d'un oscillateur harmonique. Les niveaux de grand moment angulaire définissent un grand spin J . L'application d'un champ radiofréquence en résonance avec les transitions entre les sous-niveaux de la multiplicité $n = 50$ crée une superposition des états de spin de la multiplicité $n = 50$ (voir figure IV.27). Cette superposition est assimilable à un seul spin "cohérent" de très grand moment angulaire avec peu de fluctuations autour de sa moyenne en rotation sur la sphère de Bloch généralisée. Le cas de la préparation d'un état de spin pointant vers le sommet de la sphère de Bloch $|\mathbf{J}_g\rangle$ est représenté sur la figure IV.27. En modifiant la valeur de la radiofréquence, on peut ainsi préparer un grand spin atomique de n'importe quelles coordonnées (θ, φ) sur la sphère de Bloch. Grâce à un interféromètre de Ramsey, on peut préparer un état de chat de Schrödinger qui est la superposition de deux grands spins pointant vers des endroits différents de la sphère de Bloch. Une superposition de l'état circulaire (faiblement sensible à l'effet Stark) et d'un état proche de $|J, M_J = -J\rangle$ est extrêmement sensible au champ électrique "vu" par les atomes et permet de faire une estimation très précise du champ électrique de manière similaire à ce que nous avons déjà vu dans ce mémoire. Cette expérience constitue donc une nouvelle application des concepts développés dans le manuscrit et il serait intéressant de l'analyser en termes d'information de Fisher classique et quantique, ce qui n'a pas encore été fait. Ce dispositif s'oriente à présent vers des mesures métrologiques de champ magnétique et un traitement poussé de

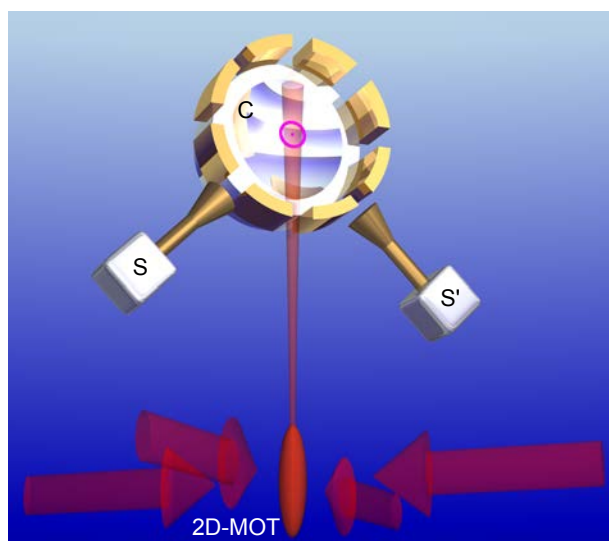


FIGURE IV.28 – Schéma de l'expérience à fontaine atomique

Le jet atomique a cette fois une direction verticale. Un 2D-MOT est préparé en bas du dispositif. Les atomes sont ensuite envoyés vers le haut dans la cavité C à l'intérieur de laquelle ils sont préparés sur les niveaux de Rydberg circulaires grâce à des lasers (dont les trous de passage sont visibles). Deux sources micro-ondes S et S' permettent d'injecter le champ dans la cavité.

l'expérience par la théorie de l'information pourrait apporter un éclairage nouveau à ce futur projet.

Une autre direction mérite d'être explorée pour repousser les limites métrologiques de notre mesure. Nous avons souligné que sa limitation fondamentale est liée à la taille de la "zone" de ressources que nous pouvons exploiter. Comme nous l'avons vu, cela tient principalement au fait que nous ne pouvons augmenter plus le temps d'interaction des atomes avec le champ dans la cavité. De fait, il est impossible de diminuer la vitesse des atomes en dessous de 100 m/s. Le tout dernier dispositif expérimental en cours de construction dans notre équipe est développé justement pour pouvoir approfondir encore la physique quantique étudiée en permettant des temps d'interaction atome-champ beaucoup plus grands. Pour ce faire, ce dispositif reprend les grandes lignes de celui décrit dans ce manuscrit mais en modifiant le jet atomique par l'utilisation d'une fontaine atomique présentée sur la figure IV.28. Les atomes sont lancés verticalement vers le haut, l'objectif étant que le sommet de leur trajectoire parabolique coïncide avec le centre de la cavité. Ceci devrait permettre d'obtenir des temps d'interaction atome-champ de l'ordre de la dizaine de millisecondes, au prix toutefois de contraintes expérimentales extrêmement fortes sur la préparation et la détection atomique. Ce dispositif prometteur n'est pas encore assez avancé pour développer pour l'instant plus en avant les résultats sur les temps d'interactions effectivement obtenus.

Bibliographie

- [1] W. HEISENBERG. “Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik”. *Zeitschrift für Physik*, **43**, n° 3, 172 (1927). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/BF01397280>.
- [2] H. P. ROBERTSON. “The uncertainty principle”. *Phys. Rev.*, **34**, 163 (Jul 1929). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.34.163>.
- [3] S. L. BRAUNSTEIN, C. M. CAVES, et G. MILBURN. “Generalized uncertainty relations : Theory, examples, and lorentz invariance”. *Annals of Physics*, **247**, n° 1, 135 (1996). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491696900408>.
- [4] P. A. M. DIRAC. “The quantum theory of the emission and absorption of radiation”. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **114**, n° 767, 243 (1927). URL : <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/114/767/243>.
- [5] L. SUSSKIND et J. GLOGOWER. “Quantum mechanical phase and time operator”. *Physics*, **1**, 49 (1964).
- [6] P. CARRUTHERS et M. M. NIETO. “Phase and angle variables in quantum mechanics”. *Rev. Mod. Phys.*, **40**, 411 (Apr 1968). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.40.411>.
- [7] L. MANDELSTAM et I. TAMM. “The uncertainty relation between energy and time in non-relativistic quantum mechanics”. *Journal of Physics (URSS)*, **9**, n° 4, 249 (1945). URL : <http://daarb.narod.ru/mandtamm/mt-eng.pdf>.
- [8] C. W. HELSTROM. “Quantum detection and estimation theory”. *Journal of Statistical Physics*, **1**, n° 2, 231 (1969). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/BF01007479>.
- [9] A. S. HOLEVO. *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*. North-Holland, Amsterdam (1982).
- [10] H. CRAMÉR. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton landmarks in mathematics and physics. Princeton University Press (1946).

- [11] C. R. RAO. *Linear Statistical Inference and its Applications*. John Wiley & Sons, Inc. (1973).
- [12] R. A. FISHER. “On the mathematical foundations of theoretical statistics”. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **222**, n° 594-604, 309 (1922). URL : <http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/222/594-604/309>.
- [13] Z. Y. OU. “Fundamental quantum limit in precision phase measurement”. *Phys. Rev. A*, **55**, 2598 (Avr 1997). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.55.2598>.
- [14] V. GIOVANNETTI, S. LLOYD, et L. MACCONE. “Quantum-enhanced measurements : Beating the standard quantum limit”. *Science*, **306**, n° 5700, 1330 (2004). URL : <http://science.sciencemag.org/content/306/5700/1330>.
- [15] W. H. ZUREK. “Sub-planck structure in phase space and its relevance for quantum decoherence”. *Nature*, **412**, n° 6848, 712 (Aug 2001).
- [16] J. MA, X. WANG, C. SUN, et F. NORI. “Quantum spin squeezing”. *Physics Reports*, **509**, n° 2-3, 89 (2011). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157311002201>.
- [17] D. J. WINELAND, J. J. BOLLINGER, W. M. ITANO, F. L. MOORE, et D. J. HEINZEN. “Spin squeezing and reduced quantum noise in spectroscopy”. *Phys. Rev. A*, **46**, R6797 (Dec 1992). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.46.R6797>.
- [18] D. J. WINELAND, J. J. BOLLINGER, W. M. ITANO, et D. J. HEINZEN. “Squeezed atomic states and projection noise in spectroscopy”. *Phys. Rev. A*, **50**, 67 (Jul 1994). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.50.67>.
- [19] I. D. LEROUX, M. H. SCHLEIER-SMITH, et V. VULETIĆ. “Implementation of cavity squeezing of a collective atomic spin”. *Phys. Rev. Lett.*, **104**, 073602 (Fev 2010). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.073602>.
- [20] R. J. SEWELL, M. KOSCHORRECK, M. NAPOLITANO, B. DUBOST, N. BEHBOOD, et M. W. MITCHELL. “Magnetic sensitivity beyond the projection noise limit by spin squeezing”. *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 253605 (Dec 2012). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.253605>.
- [21] W. MUESSEL, H. STROBEL, D. LINNEMANN, D. B. HUME, et M. K. OBERTHALER. “Scalable spin squeezing for quantum-enhanced magnetometry with bose-einstein condensates”. *Phys. Rev. Lett.*, **113**, 103004 (Sep 2014). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.103004>.

- [22] M. T. JAEKEL et S. REYNAUD. “Quantum limits in interferometric measurements”. *EPL (Europhysics Letters)*, **13**, n° 4, 301 (1990). URL : <http://stacks.iop.org/0295-5075/13/i=4/a=003>.
- [23] A. DANTAN, V. JOSSE, J. CVIKLINSKI, A. BRAMATI, M. PINARD, et E. GIACOBINO. “Generation and storage of quantum states using cold atoms”. *Journal of Modern Optics*, **53**, n° 16-17, 2235 (2006). URL : <http://dx.doi.org/10.1080/09500340600894048>.
- [24] J. G. BOHNET, K. C. COX, M. A. NORCIA, J. M. WEINER, Z. CHEN, et J. K. THOMPSON. “Reduced spin measurement back-action for a phase sensitivity ten times beyond the standard quantum limit”. *Nat Photon*, **8**, n° 9, 731 (Sep 2014). URL : <http://dx.doi.org/10.1038/nphoton.2014.151>.
- [25] L.-M. DUAN, A. SØRENSEN, J. I. CIRAC, et P. ZOLLER. “Squeezing and entanglement of atomic beams”. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 3991 (Nov 2000). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.85.3991>.
- [26] M. JÄÄSKELÄINEN et P. MEYSTRE. “Coherence dynamics of two-mode condensates in asymmetric potentials”. *Phys. Rev. A*, **73**, 013602 (Jan 2006). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.73.013602>.
- [27] J. A. DUNNINGHAM et K. BURNETT. “Sub-shot-noise-limited measurements with bose-einstein condensates”. *Phys. Rev. A*, **70**, 033601 (Sep 2004). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.70.033601>.
- [28] U. L. ANDERSEN, T. GEHRING, C. MARQUARDT, et G. LEUCHS. “30 years of squeezed light generation”. *Physica Scripta*, **91**, n° 5, 053001 (2016). URL : <http://stacks.iop.org/1402-4896/91/i=5/a=053001>.
- [29] H. VAHLBRUCH, M. MEHMET, K. DANZMANN, et R. SCHNABEL. “Detection of 15 db squeezed states of light and their application for the absolute calibration of photoelectric quantum efficiency”. *Phys. Rev. Lett.*, **117**, 110801 (Sep 2016). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.110801>.
- [30] “A gravitational wave observatory operating beyond the quantum shot-noise limit”. *Nat Phys*, **7**, n° 12, 962 (Dec 2011). URL : <http://dx.doi.org/10.1038/nphys2083>.
- [31] J. J. . BOLLINGER, W. M. ITANO, D. J. WINELAND, et D. J. HEINZEN. “Optimal frequency measurements with maximally correlated states”. *Phys. Rev. A*, **54**, R4649 (Dec 1996). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.54.R4649>.

- [32] V. MEYER, M. A. ROWE, D. KIELPINSKI, C. A. SACKETT, W. M. ITANO, C. MONROE, et D. J. WINELAND. “Experimental demonstration of entanglement-enhanced rotation angle estimation using trapped ions”. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 5870 (Jun 2001). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.5870>.
- [33] D. LEIBFRIED, M. D. BARRETT, T. SCHAEZT, J. BRITTON, J. CHIAVERINI, W. M. ITANO, J. D. JOST, C. LANGER, et D. J. WINELAND. “Toward heisenberg-limited spectroscopy with multiparticle entangled states”. **304**, n° 5676, 1476 (2004). URL : <http://science.sciencemag.org/content/304/5676/1476>.
- [34] J. APPEL, P. J. WINDPASSINGER, D. OBLAK, U. B. HOFF, N. KJÆRGAARD, et E. S. POLZIK. “Mesoscopic atomic entanglement for precision measurements beyond the standard quantum limit”. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **106**, n° 27, 10960 (2009). URL : <http://www.pnas.org/content/106/27/10960.abstract>.
- [35] J. A. JONES, S. D. KARLEN, J. FITZSIMONS, A. ARDAVAN, S. C. BENJAMIN, G. A. D. BRIGGS, et J. J. L. MORTON. “Magnetic field sensing beyond the standard quantum limit using 10-spin noon states”. *Science*, **324**, n° 5931, 1166 (2009). <http://science.sciencemag.org/content/324/5931/1166.full.pdf>, URL : <http://science.sciencemag.org/content/324/5931/1166>.
- [36] T. NAGATA, R. OKAMOTO, J. L. O’BRIEN, K. SASAKI, et S. TAKEUCHI. “Beating the standard quantum limit with four-entangled photons”. *Science*, **316**, n° 5825, 726 (2007). <http://science.sciencemag.org/content/316/5825/726.full.pdf>, URL : <http://science.sciencemag.org/content/316/5825/726>.
- [37] B. LÜCKE, M. SCHERER, J. KRUSE, L. PEZZÉ, F. DEURETZBACHER, P. HYLUS, O. TOPIC, J. PEISE, W. ERTMER, J. ARLT, L. SANTOS, A. SMERZI, et C. KLEMPT. “Twin matter waves for interferometry beyond the classical limit”. *Science*, **334**, n° 6057, 773 (2011). URL : <http://science.sciencemag.org/content/334/6057/773>.
- [38] H. STROBEL, W. MUESSEL, D. LINNEMANN, T. ZIBOLD, D. B. HUME, L. PEZZÈ, A. SMERZI, et M. K. OBERTHALER. “Fisher information and entanglement of non-gaussian spin states”. *Science*, **345**, n° 6195, 424 (2014). URL : <http://science.sciencemag.org/content/345/6195/424>.
- [39] J. JOO, K. PARK, H. JEONG, W. J. MUNRO, K. NEMOTO, et T. P. SPILLER. “Quantum metrology for nonlinear phase shifts with entangled coherent states”. *Phys. Rev. A*, **86**, 043828 (Oct 2012). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.86.043828>.
- [40] L. PEZZÉ et A. SMERZI. “Ultrasensitive two-mode interferometry with single-mode number squeezing”. *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 163604 (Avr 2013). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.163604>.

- [41] F. TOSCANO, D. A. R. DALVIT, L. DAVIDOVICH, et W. H. ZUREK. “Sub-planck phase-space structures and heisenberg-limited measurements”. *Phys. Rev. A*, **73**, 023803 (Fev 2006). URL : <http://journal.aps.org/prabstract/10.1103/PhysRevA.73.023803>.
- [42] C. M. CAVES, K. S. THORNE, R. W. P. DREVER, V. D. SANDBERG, et M. ZIMMERMANN. “On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum-mechanical oscillator. i. issues of principle”. *Rev. Mod. Phys.*, **52**, 341 (Apr 1980). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.52.341>.
- [43] C. L. LATUNE, B. M. ESCHER, R. L. DE MATOS FILHO, et L. DAVIDOVICH. “Quantum limit for the measurement of a classical force coupled to a noisy quantum-mechanical oscillator”. *Phys. Rev. A*, **88**, 042112 (Oct 2013). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.88.042112>.
- [44] M. ASPELMEYER, T. J. KIPPENBERG, et F. MARQUARDT. “Cavity optomechanics”. *Rev. Mod. Phys.*, **86**, 1391 (Dec 2014). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.86.1391>.
- [45] C. HEMPEL, B. P. LANYON, P. JURCEVIC, R. GERRITSMA, R. BLATT, et C. F. ROOS. “Entanglement-enhanced detection of single-photon scattering events”. *Nat Photon*, **7**, n° 8, 630 (Aug 2013). Letter, URL : <http://dx.doi.org/10.1038/nphoton.2013.172>.
- [46] J. M. RAIMOND, M. BRUNE, et S. HAROCHE. “Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity”. *Rev. Mod. Phys.*, **73**, 565 (Aug 2001). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.73.565>.
- [47] B. VLASTAKIS, G. KIRCHMAIR, Z. LEGHTAS, S. E. NIGG, L. FRUNZIO, S. M. GIRVIN, M. MIRRAHIMI, M. H. DEVORET, et R. J. SCHOELKOPF. “Deterministically encoding quantum information using 100-photon schrödinger cat states”. *Science*, **342**, n° 6158, 607 (2013). URL : <http://science.sciencemag.org/content/342/6158/607>.
- [48] H. HAFFNER, W. HANSEL, C. F. ROOS, J. BENHELM, D. CHEK-AL KAR, M. CHWALLA, T. KORBER, U. D. RAPOL, M. RIEBE, P. O. SCHMIDT, C. BECHER, O. GUHNE, W. DUR, et R. BLATT. “Scalable multiparticle entanglement of trapped ions”. *Nature*, **438**, n° 7068, 643 (Dec 2005). URL : <http://dx.doi.org/10.1038/nature04279>.
- [49] D. LEIBFRIED, E. KNILL, S. SEIDELIN, J. BRITTON, R. B. BLAKESTAD, J. CHIAVERINI, D. B. HUME, W. M. ITANO, J. D. JOST, C. LANGER, R. OZERI, R. REICHLE, et D. J. WINELAND. “Creation of a six-atom /‘schrodinger cat/’ state”. *Nature*, **438**, n° 7068, 639 (Dec 2005). URL : <http://dx.doi.org/10.1038/nature04251>.

- [50] T. C. V. OPATRNY et K. MØLMER. “Spin squeezing and schrödinger-cat-state generation in atomic samples with rydberg blockade”. *Phys. Rev. A*, **86**, 023845 (Aug 2012). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.86.023845>.
- [51] A. SIGNOLES, A. FACON, D. GROSSO, I. DOTSENKO, S. HAROCHE, J.-M. RAIMOND, M. BRUNE, et S. GLEYZES. “Confined quantum zeno dynamics of a watched atomic arrow”. *Nat Phys*, **10**, n° 10, 715 (Oct 2014). Letter, URL : <http://dx.doi.org/10.1038/nphys3076>.
- [52] S. SIMMONS, J. A. JONES, S. D. KARLEN, A. ARDAVAN, et J. J. L. MORTON. “Magnetic field sensors using 13-spin cat states”. *Phys. Rev. A*, **82**, 022330 (Aug 2010). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.82.022330>.
- [53] M. BRUNE, E. HAGLEY, J. DREYER, X. MAÎTRE, A. MAALI, C. WUNDERLICH, J. M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Observing the progressive decoherence of the “meter” in a quantum measurement”. *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 4887 (Dec 1996). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.4887>.
- [54] S. DELEGLISE, I. DOTSENKO, C. SAYRIN, J. BERNU, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Reconstruction of non-classical cavity field states with snapshots of their decoherence”. *Nature*, **455**, n° 7212, 510 (Sep 2008). URL : <http://dx.doi.org/10.1038/nature07288>.
- [55] T. MEUNIER. *Oscillations de Rabi induites par un renversement du temps : un test de la cohérence d’une superposition quantique mésoscopique*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2004). URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011329/document>.
- [56] A. AUFFÈVES-GARNIER. *Oscillations de Rabi à la frontière classique-quantique Génération de chats de Schrödinger*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2004). URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00006406/document>.
- [57] S. DELÉGLISE. *Reconstruction complète d’états non-classiques du champ en électrodynamique quantique en cavité*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2009). URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00477136v2/document>.
- [58] A. AUFFEVES, P. MAIOLI, T. MEUNIER, S. GLEYZES, G. NOGUES, M. BRUNE, J. M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Entanglement of a mesoscopic field with an atom induced by photon graininess in a cavity”. *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 230405 (Dec 2003). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.230405>.
- [59] T. MEUNIER, S. GLEYZES, P. MAIOLI, A. AUFFEVES, G. NOGUES, M. BRUNE, J. M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Rabi oscillations revival induced by time reversal : A test of mesoscopic quantum coherence”. *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 010401 (Jan 2005). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.010401>.

- [60] M. PENASA, S. GERLICH, T. RYBARCZYK, V. MÉTILLON, M. BRUNE, J. M. RAIMOND, S. HAROCHE, L. DAVIDOVICH, et I. DOTSENKO. “Measurement of a microwave field amplitude beyond the standard quantum limit”. *Phys. Rev. A*, **94**, 022313 (août 2016). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.94.022313>.
- [61] R. J. GLAUBER. “Coherent and incoherent states of the radiation field”. *Phys. Rev.*, **131**, n° 6, 2766 (Sep 1963). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.131.2766>.
- [62] B. M. ESCHER, R. L. DE MATOS FILHO, et L. DAVIDOVICH. “Quantum metrology for noisy systems”. *Brazilian Journal of Physics*, **41**, n° 4, 229 (2011). URL : <http://www.if.ufrj.br/~ldavid/arquivos/BJP-Quantum%20metrology.pdf>.
- [63] J. G. RARITY, P. R. TAPSTER, E. JAKEMAN, T. LARCHUK, R. A. CAMPOS, M. C. TEICH, et B. E. A. SALEH. “Two-photon interference in a mach-zehnder interferometer”. *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 1348 (Sep 1990). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.65.1348>.
- [64] M. W. MITCHELL, J. S. LUNDEEN, et A. M. STEINBERG. “Super-resolving phase measurements with a multiphoton entangled state”. *Nature*, **429**, n° 6988, 161 (May 2004). URL : <http://dx.doi.org/10.1038/nature02493>.
- [65] B. M. ESCHER, R. L. DE MATOS FILHO, et L. DAVIDOVICH. “General framework for estimating the ultimate precision limit in noisy quantum-enhanced metrology”. *Nat Phys*, **7**, n° 5, 406 (May 2011). URL : <http://dx.doi.org/10.1038/nphys1958>.
- [66] L. DAVIDOVICH. “Towards the ultimate precision limits : an introduction to quantum metrology, first lecture.” Dans *le cycle de conférences de Jean Dalibard*. Conférencier invité, Collège de France (2016). URL : http://www.college-de-france.fr/media/jean-dalibard/UPL1265047385116828398_Lecture_1_Davidovich_2016.pdf.
- [67] K. KRAUS, A. BÖHM, J. DOLLARD, et W. WOOTTERS. *States, effects, and operations : fundamental notions of quantum theory : lectures in mathematical physics at the University of Texas at Austin*. Lecture notes in physics. Springer-Verlag (1983). URL : <http://link.springer.com/book/10.1007%2F3-540-12732-1>.
- [68] J. M. RAIMOND et S. HAROCHE. *Exploring the quantum*. Oxford Graduate Texts (2006).
- [69] R. W. FINKEL. “Generalized uncertainty relations”. *Phys. Rev. A*, **35**, 1486 (Fev 1987). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.35.1486>.

- [70] S. L. BRAUNSTEIN et C. M. CAVES. “Statistical distance and the geometry of quantum states”. *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 3439 (May 1994). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.72.3439>.
- [71] W. K. WOOTTERS. “Statistical distance and hilbert space”. *Phys. Rev. D*, **23**, 357 (Jan 1981). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.357>.
- [72] G. GIBBONS. “Typical states and density matrices”. *Journal of Geometry and Physics*, **8**, n° 1, 147 (1992). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0393044092900464>.
- [73] L. DAVIDOVICH. “Towards the ultimate precision limits : an introduction to quantum metrology, fourth lecture.” Dans *le cycle de conférences de Jean Dalibard*. Conférencier invité, Collège de France (2016). URL : http://www.college-de-france.fr/media/jean-dalibard/UPL4154964849109569910_Lecture_4_2016.pdf.
- [74] M. ZWIERZ, C. A. PÉREZ-DELGADO, et P. KOK. “Ultimate limits to quantum metrology and the meaning of the heisenberg limit”. *Phys. Rev. A*, **85**, 042112 (Avr 2012). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.85.042112>.
- [75] A. GILCHRIST, K. NEMOTO, W. J. MUNRO, T. C. RALPH, S. GLANCY, S. L. BRAUNSTEIN, et G. J. MILBURN. “Schrödinger cats and their power for quantum information processing”. *Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics*, **6**, n° 8, S828 (2004). URL : <http://stacks.iop.org/1464-4266/6/i=8/a=032>.
- [76] C. COHEN-TANNOUDJ, J. DUPONT-ROC, et G. GRYNBERG. *An Introduction to Quantum Electrodynamics*. Wiley (1992).
- [77] C. COHEN-TANNOUDJI, B. DIU, et F. LALOË. *Mécanique quantique*. Hermann (1997).
- [78] M. A. NIELSEN et I. L. CHUANG. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press (2000).
- [79] E. JAYNES et F. CUMMINGS. “Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser”. *Proceedings of the IEEE*, **51**, n° 1, 89 (1963). URL : <http://dx.doi.org/10.1109/PROC.1963.1664>.
- [80] J. GEA-BANACLOCHE. “Collapse and revival of the state vector in the jaynes-cummings model : An example of state preparation by a quantum apparatus”. *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 3385 (Dec 1990). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.65.3385>.
- [81] J. GEA-BANACLOCHE. “Atom- and field-state evolution in the jaynes-cummings model for large initial fields”. *Phys. Rev. A*, **44**, 5913 (Nov 1991). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.44.5913>.

- [82] M. LEVITT. *Spin dynamics : basics of the Nuclear Magnetic Resonance*. John Wiley & Sons, Inc. (2001).
- [83] G. MORIGI, E. SOLANO, B.-G. ENGLERT, et H. WALTHER. “Measuring irreversible dynamics of a quantum harmonic oscillator”. *Phys. Rev. A*, **65**, 040102 (Apr 2002). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.040102>.
- [84] S. GLEYZES. *Vers la préparation de cohérences quantiques mésoscopiques : réalisation d'un montage à deux cavités supraconductrices*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2006).
- [85] C. GUERLIN. *Mesure quantique non destructive répétée de la lumière : états de Fock et trajectoires quantiques*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2007). URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00284379/document>.
- [86] J. BERNU. *Mesures QND en électrodynamique quantique en cavité : production et décohérence d'états de Fock - effet Zénon*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2008). URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00351299/document>.
- [87] C. SAYRIN. *Préparation et stabilisation d'un champ non classique en cavité par rétroaction quantique*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2011). URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00654082/file/PHD_sayrin.pdf.
- [88] X. ZHOU. *Champ asservi sur un état de Fock par rétroaction quantique utilisant des corrections à photon unique*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2012). URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00737657/document>.
- [89] B. PEAUDECERF. *Mesure adaptative non destructive du nombre de photons dans une cavité*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2013). URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00908255/document>.
- [90] T. RYBARCZYK. *Application de la méthode de l'« état passé » à la mesure quantique non-destructive du nombre de photons dans une cavité*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure (2014). URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01078348/document>.
- [91] T. GALLAGHER. *Rydberg Atoms*. Cambridge Monographs on Atomic, Molecular and Chemical Physics. Cambridge University Press (1994).
- [92] R. G. HULET et D. KLEPPNER. “Rydberg atoms in "circular" states”. *Phys. Rev. Lett.*, **51**, n° 16, 1430 (Oct 1983). URL : <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.51.1430>.
- [93] P. NUSSENZVEIG. *Mesures de champs au niveau du photon par interférométrie atomique*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (1994). URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011897/document>.

- [94] D. A. STECK. “Rubidium 85 d line data” (2008, revision 2013). URL : <http://steck.us/alkalidata/rubidium85numbers.pdf>.
- [95] J. LIANG. *Effet Stark des états de Rydberg des alcalins : application à la préparation et à l’étude des atomes de Rydberg circulaires*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (1986). URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011857/document>.
- [96] D. MESCHEDE. “Centimeter-wave spectroscopy of highly excited rubidium atoms”. *J. Opt. Soc. Am. B*, **4**, 413 (1987). URL : <https://www.osapublishing.org/josab/abstract.cfm?uri=josab-4-3-413>.
- [97] J. HAN, Y. JAMIL, D. NORUM, P. TANNER, et T. GALLAGHER. “Rb nf quantum defects from millimeter-wave spectroscopy of cold ^{85}Rb rydberg atoms”. *Phys. Rev. A*, **74**, 054502 (2006). URL : <http://journals.aps.org/prabstract/10.1103/PhysRevA.74.054502>.
- [98] A. SIGNOLES. *Manipulations cohérentes d’états de Rydberg elliptiques par dynamique Zénon quantique*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2014). URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01146049/document>.
- [99] M. GROSS et J. LIANG. “Is a circular rydberg atom stable in a vanishing electric field?” *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 3160 (Dec 1986). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.57.3160>.
- [100] L. LANDAU et E. LIFSCHITZ. *Physique Théorique, tome 3 : Mécanique Quantique, 3e éd.* Mir Moscou (1975).
- [101] M. PINARD, C. G. AMINOFF, et F. LALOË. “Velocity-selective optical pumping and doppler-free spectroscopy”. *Phys. Rev. A*, **19**, 2366 (Jun 1979). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.19.2366>.
- [102] P. MAIOLI, T. MEUNIER, S. GLEYZES, A. AUFFÈVES, G. NOGUES, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Nondestructive rydberg atom counting with mesoscopic fields in a cavity”. *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 113601 (2005). URL : <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.94.113601>.
- [103] B. PEAUDE CERF, C. SAYRIN, X. ZHOU, T. RYBARCZYK, S. GLEYZES, I. DOTSENKO, J. M. RAIMOND, M. BRUNE, et S. HAROCHE. “Quantum feedback experiments stabilizing fock states of light in a cavity”. *Phys. Rev. A*, **87**, 042320 (Apr 2013). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.87.042320>.
- [104] D. MESCHEDE, H. WALTHER, et G. MÜLLER. “One-atom maser”. *Physical Review Letters*, **54**, n° 6, 551 (1985). URL : <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.54.551>.

- [105] S. BRATTKE, B. T. VARCOE, et H. WALTHER. “Generation of photon number states on demand via cavity quantum electrodynamics”. *Physical Review Letters*, **86**, n° 16, 3534 (2001). URL : <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.86.3534>.
- [106] S. KUHR, S. GLEYZES, C. GUERLIN, J. BERNU, U. B. HOFF, S. DELÉGLISE, S. OSNAGHI, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, S. HAROCHE, E. JACQUES, P. BOSLAND, et B. VISENTIN. “Ultrahigh finesse fabry-pérot superconducting resonator”. *Applied Physics Letters*, **90**, 164101 (2007). URL : <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0612138v2.pdf>.
- [107] H. KOGELNIK et T. LI. “Laser beams and resonators”. *Applied Optics*, **5**, n° 10, 1550 (1966). URL : <https://www.osapublishing.org/ao/abstract.cfm?uri=ao-5-10-1550>.
- [108] S. OSNAGHI. *Réalisation d'états intriqués dans une collision atomique assistée par une cavité*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2002). URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00002072/document>.
- [109] P. BOSLAND, A. ASPART, E. JACQUES, et M. RIBEAUDEAU. “Preparation and rf tests of l-band superconducting niobium-coated copper cavities”. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, **9**, n° 2, 896 (1999). URL : <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=783441>.
- [110] J. A. THORNTON. “Magnetron sputtering : basic physics and application to cylindrical magnetrons”. *Journal of Vacuum Science & Technology*, **15**, n° 2, 171 (1978). URL : <http://scitation.aip.org/content/avs/journal/jvst/15/2/10.1116/1.569448>.
- [111] A. RAUSCHENBEUTEL, P. BERTET, S. OSNAGHI, G. NOGUES, M. BRUNE, J. M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Controlled entanglement of two field modes in a cavity quantum electrodynamics experiment”. *Phys. Rev. A*, **64**, 050301 (Oct 2001). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.64.050301>.
- [112] P. MILMAN, A. AUFFEVES, F. YAMAGUCHI, M. BRUNE, J. M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “A proposal to test bell’s inequalities with mesoscopic non-local states in cavity qed”. *The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, **32**, n° 2, 233 (2005). URL : <http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2004-00171-6>.
- [113] K. BANASZEK et K. WÓDKIEWICZ. “Testing quantum nonlocality in phase space”. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 2009 (Mar 1999). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.2009>.
- [114] C. GUERLIN, J. BERNU, S. DELEGLISE, C. SAYRIN, S. GLEYZES, S. KUHR, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Progressive field-state collapse

and quantum non-demolition photon counting”. *Nature*, **448**, n° 7156, 889 (Aug 2007). URL : <http://dx.doi.org/10.1038/nature06057>.

- [115] A. FACON, E.-K. DIETSCHÉ, D. GROSSO, S. HAROCHE, J.-M. RAIMOND, M. BRUNE, et S. GLEYZES. “A sensitive electrometer based on a rydberg atom in a schrödinger-cat state”. *Nature*, **535**, n° 7611, 262 (Jul 2016). Letter, URL : <http://dx.doi.org/10.1038/nature18327>.

Mesure au-delà de la limite quantique standard de l'amplitude d'un champ électromagnétique dans le domaine micro-onde

Résumé : Intermédiaire essentiel au dialogue entre théorie et vérification expérimentale, la mesure n'a de sens que si la précision des résultats est élevée. La métrologie en laboratoire s'attache donc à augmenter autant que possible la précision avec laquelle l'expérimentateur a accès à la valeur d'un paramètre. Le bruit quantique affectant la mesure impose une limite sur la précision maximale que l'on peut obtenir à partir d'états quasi-classiques : la limite quantique standard (SQL). La métrologie quantique cherche à utiliser les caractéristiques propres à la mécanique quantique pour la dépasser et se rapprocher le plus possible de la limite ultime, physiquement non franchissable, appelée limite de Heisenberg.

Dans ce mémoire, nous avons développé une stratégie de mesure d'un champ électromagnétique contenant moins d'un photon basée sur l'utilisation de corrélations entre atome et champ dans une expérience d'électrodynamique quantique en cavité. L'idée est de mesurer l'amplitude de ce petit champ en sondant la perturbation qu'il introduit sur un état intriqué atome-champ mésoscopique déjà présent dans une cavité supraconductrice. Nous avons pu démontrer que le choix de notre mesure est, en principe, optimal grâce aux outils que sont l'information de Fisher (dépendant du processus de mesure) et l'information de Fisher dite quantique (qui elle n'en dépend pas), liées à la précision sur la mesure par des inégalités de type Cramér-Rao. Expérimentalement, nous avons très largement dépassé la précision obtenue sur l'amplitude du champ électromagnétique par une mesure classique et nous nous sommes rapprochés de la limite de Heisenberg autant que les imperfections expérimentales nous le permettaient.

Mots clés : CQED, métrologie quantique, atomes de Rydberg, superpositions mésoscopiques d'états, SQL, ressources, information de Fisher, information de Fisher quantique

Measurement of a microwave electromagnetic field amplitude beyond the standard quantum limit

Abstract : As an essential intermediary between theories and their experimental proofs, measurement is meaningful if the precision of its results is high. The main emphasis of metrology in laboratories is therefore on increasing as much as possible the precision of the experimental evaluation of a parameter. Quantum noise that affects the measurement establishes a quantitative limit on the maximal precision that can be achieved with classical states: the standard quantum limit (SQL). Quantum metrology aims at using quantum features to beat this limit and to approach the physically ultimate limit called Heisenberg limit.

This thesis presents a measurement strategy for an electromagnetic field containing less than one photon, which is based on the use of atom-field correlations in a cavity quantum electrodynamics experiment. The idea is to measure the amplitude of the small field by probing the disturbance caused on an entangled mesoscopic state that is already stored in the superconducting cavity. We demonstrated that our measurement strategy is in principle optimal thanks to two tools: the Fisher information (that depends on the measurement process) and the quantum Fisher information (that does not), which define the precision thanks to Cramér-Rao like equations. The measurement signal subsequently largely exceeded the level of accuracy obtained with classical states and we got as closed to the Heisenberg limit as the experimental imperfections allowed us.

Keywords : CQED, quantum metrology, Rydberg atoms, mesoscopic quantum state superposition (MQSS), SQL, resources, Fisher information, quantum Fisher information