

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

École doctorale Physique en Ile de France

pour obtenir le titre de
Docteur en Sciences de l'UPMC
Mention : PHYSIQUE

Présentée par
Marie CHUPEAU

Différentes propriétés de marches
aléatoires avec contraintes
géométriques et dynamiques

Thèse dirigée par Olivier BÉNICHOU et Raphaël VOITURIEZ

préparée au Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée
soutenue le 5 juillet 2016

Jury :

David DEAN
Andrea ZOIA
Kirone MALLICK
Marco SAITTA
Clément SIRE
Olivier BÉNICHOU
Raphaël VOITURIEZ

Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur
Directeur de thèse
Invité

Remerciements

Mes premiers remerciements vont naturellement à Olivier Bénichou, qui m'a accompagnée pendant mon stage de M2 puis ma thèse avec une immense gentillesse et une disponibilité sans faille. Ses qualités scientifiques, pédagogiques et humaines ont rendu ces trois années très formatrices et agréables. Ses encouragements bienveillants et son encadrement attentif m'ont permis de m'épanouir scientifiquement pendant cette thèse. C'est grâce à lui que j'aime autant ce métier aujourd'hui. Je remercie également Raphaël Voituriez qui a su être là dans les moments importants, pour le regard complémentaire qu'il a apporté à ces travaux et pour sa bonne humeur.

Je remercie sincèrement David Dean et Andrea Zoia d'avoir accepté de rapporter ce travail, ainsi que Kirone Mallick, Marco Saitta et Clément Sire d'avoir accepté de faire partie de mon jury de soutenance.

Je remercie très chaleureusement Pascal Viot, mon parrain pour l'école doctorale, dont la gentillesse, la disponibilité et l'estime comptent beaucoup pour moi. Un grand merci à tous les membres du laboratoire que j'ai eu la chance de côtoyer pendant trois ans, en particulier à Laura Messio, Bernard Bernu et François Delyon pour les nombreux déjeuners partagés, Karol Penson avec qui j'ai partagé mon premier bureau, ainsi qu'à l'équipe administrative, Liliane Cruzel, Diane Domand et Sylvie Dalla Foglia, pour leur gentillesse. Mention spéciale pour mes co-thésards et/ou co-bureaux qui ont rendu mon quotidien au laboratoire très agréable, Thibaut Calandre, Jean-François Rupprecht et Pierre Illien pour m'avoir accueillie dans l'univers merveilleux du Patator et du Trois Gras, et pour l'ambiance sans pareille qu'ils ont su créer dans le bureau 519, ainsi que Nicolas Levernier qui a pris le relais, et le dernier arrivé Olivier Coquand dont j'ai beaucoup apprécié la compagnie et l'amitié, surtout aux extrémités de mes longues journées de rédaction ! Je remercie également les postdocs de l'équipe Alessandro Sarracino et Simon Moulieras avec qui j'ai eu plaisir à discuter.

Je tiens ensuite à remercier spécialement mes collaborateurs Satya Majumdar, pour l'enthousiasme dont il a toujours fait preuve pendant les discussions enrichissantes au tableau que nous avons eues au LPTMS, ainsi que Sid Redner, pour sa bienveillance, sa réactivité et sa disponibilité pour les nombreuses discussions Skype. J'ai eu grand plaisir à travailler avec chacun et j'espère poursuivre ces collaborations fructueuses.

Je termine par un grand merci à mes amis et à ma famille, en particulier à Mathilde, Eline, Geoffroy et à mes parents pour leur soutien inconditionnel et qui ont, pour certains d'entre eux, osé s'enfoncer quelque peu dans le terrain hostile de ce manuscrit !

Table des matières

1	Introduction générale	1
2	Enveloppe convexe d'un mouvement brownien confiné	7
2.1	Introduction	7
2.2	Cas unidimensionnel	10
2.3	Cas bidimensionnel	14
2.3.1	Détermination du périmètre moyen de l'enveloppe convexe	15
2.3.2	Allure du périmètre moyen et discussion	18
2.3.3	Analyse quantitative du périmètre moyen	23
2.3.3.1	Point de départ sur le plan réfléchissant	24
2.3.3.2	Point de départ près du plan	25
2.3.4	Longueur moyenne de la portion du plan réfléchissant visitée	29
2.3.4.1	Cas particulier d'un mouvement brownien partant du plan	29
2.3.4.2	Cas général	30
2.4	Probabilité de survie dans un secteur angulaire absorbant	32
2.4.1	Expression alternative de la probabilité de survie	34
2.4.1.1	Détermination analytique de cette expression	34
2.4.1.2	Comparaison avec les résultats de la littérature	39
2.4.1.3	Interprétation géométrique de nos expressions	40
2.4.2	Application : développement asymptotique à temps court	40
2.5	Conclusion	44
3	Temps de couverture de stratégies de recherche aléatoire	47
3.1	Introduction	47
3.2	Temps moyen de couverture à une dimension pour une marche aléatoire persistante	51
3.2.1	En conditions aux limites périodiques	52
3.2.2	En conditions aux limites réfléchissantes	54
3.2.2.1	Temps moyen pour atteindre le premier bord	54
3.2.2.2	Temps moyen pour traverser le domaine	57
3.2.2.3	Temps moyen de couverture	58
3.3	Universalité de la distribution des observables de couverture	59
3.3.1	Détermination de la distribution asymptotique du temps de couverture partielle	61
3.3.2	Comparaison avec les résultats exacts de la littérature	65
3.3.3	Comparaison avec les simulations numériques	66
3.3.3.1	Définition des processus de recherche étudiés	66
3.3.3.2	Comparaison avec les résultats de simulation numérique	69
3.3.4	Extension à d'autres observables de couverture	72
3.3.4.1	Temps de couverture aléatoire	72
3.3.4.2	Généralisation au cas de n marcheurs indépendants	75

3.3.5	Domaines de validité de nos résultats pour les temps de couverture partielle, aléatoire et complète	76
3.3.6	A propos des stratégies optimales de recherche	79
3.4	Conclusion	80
4	Sortie conditionnelle d'un intervalle fluctuant	83
4.1	Introduction	83
4.2	Cas d'une cage en expansion	85
4.2.1	Détermination exacte de la probabilité conditionnelle de sortie	86
4.2.2	Vérification du résultat asymptotique à l'aide d'arguments simples	89
4.2.3	Echec de notre approche dans le cas d'une cage en contraction	90
4.3	Cas général : cage en contraction ou en expansion	91
4.3.1	Densité de premier passage par l'un des bords à tout temps	91
4.3.2	Probabilité conditionnelle de sortie	93
4.4	Critère de capture optimale	95
4.4.1	Développement de la probabilité conditionnelle de sortie à petite vitesse	96
4.4.2	Diagramme de phase pour une cage en contraction ou en expansion	97
4.5	Conclusion	99
5	Survie et exploration d'un marcheur aléatoire affamé	101
5.1	Introduction, définition du modèle et résultats connus	102
5.2	Cas bidimensionnel : approximation circulaire	105
5.2.1	Estimation du temps de vie moyen et du nombre moyen de sites distincts visités	107
5.2.2	Distribution du nombre de sites distincts visités	110
5.3	Avec régénération des ressources	114
5.3.1	Régénération déterministe à une dimension	114
5.3.1.1	Régime d'immortalité	115
5.3.1.2	Temps de vie moyen dans le régime de mortalité	117
5.3.1.3	Régime d'inefficacité de la régénération	119
5.3.2	Extension : régénération probabiliste en dimension quelconque	122
5.3.2.1	Avec une régénération probabiliste	122
5.3.2.2	En dimension plus élevée	124
5.3.3	Conclusion	125
5.4	Modèle d'exploitation de parcelles de nourriture	125
5.4.1	Introduction	125
5.4.1.1	Contexte théorique	125
5.4.1.2	Définition du modèle	127
5.4.2	Statistique de la quantité totale de nourriture collectée dans le cas général	128
5.4.2.1	Approche naïve sans corrélations	129
5.4.2.2	Distribution de la quantité totale de nourriture collectée dans le cas général	130
5.4.2.3	Expression des moments de la quantité totale de nourriture collectée à grand temps	132

5.4.3	Cas particulier du temps d'abandon pour des parcelles unidimensionnelles	134
5.4.3.1	Probabilité jointe du temps passé dans une parcelle et de la quantité de nourriture collectée	135
5.4.3.2	Expression asymptotique des moments de la quantité totale de nourriture collectée	136
5.4.4	Robustesse de la maximisation de la quantité de nourriture collectée	138
5.5	Conclusion	142
6	Conclusion générale	145
	Publications	151
	Annexes	153
A	Probabilités de survie à une dimension avec un point absorbant et un point réfléchissant	153
B	Expression standard de la probabilité de survie dans un secteur angulaire absorbant infini	156
C	Relations géométriques entre les coordonnées polaires et les paramètres de la formule de Cauchy	159
D	Détails du cas où le marcheur part sur le plan réfléchissant	161
E	Développement du maximum moyen à petite distance initiale	163
F	Détails du calcul de l'expression alternative de la probabilité de survie dans un secteur angulaire absorbant	172
G	Transformée de Laplace inverse de la distribution du temps de couverture partielle	175
H	Distribution du temps de premier passage pour les processus non-compacts étudiés	176
I	Analyse à petit vitesse de la probabilité conditionnelle de sortie d'une cage en expansion	177
J	Densité de première sortie d'un disque	178
K	Calcul du temps de vie moyen dans l'approximation circulaire	180
L	Estimation qualitative de la moyenne du temps de vie et du nombre de sites distincts visités à une dimension	182
M	Statistique de la quantité totale de nourriture collectée dans le cas naïf sans corrélations	185
N	Probabilité jointe du temps passé dans une parcelle et de la quantité de nourriture collectée en transformée de Laplace	188
O	Expression asymptotique des moments du temps passé dans une parcelle et de la quantité de nourriture collectée	190
	Bibliographie	193

Introduction générale

Si les marches aléatoires rencontrent un engouement qui ne se dément pas depuis un siècle, c'est parce qu'elles constituent un modèle à la fois très simple et hautement adaptable, ce qui permet de l'appliquer à de très nombreux champs disciplinaires, la physique, la chimie, la biologie, l'écologie ou encore l'économie. Elles sont définies de manière très générale comme une succession de pas aléatoires, et il en existe donc autant de variantes que de façons de réaliser des pas aléatoires. La version la plus basique de ce modèle correspond à la marche aléatoire simple sur réseau, introduite pour la première fois dans [Pólya 1919], également qualifiée de marche brownienne puisqu'elle est l'équivalent en temps et en espace discrets d'un mouvement brownien. Le marcheur y est astreint à évoluer sur un réseau, souvent euclidien, et effectue à intervalles réguliers des sauts sur un de ses plus proches voisins, de manière équiprobable, indépendamment de la direction des pas précédents.

Ce type de marches est très largement utilisé pour décrire des phénomènes aussi divers que le déplacement d'une particule dans un gaz, d'une particule colloïdale dans un liquide, d'un neutron dans un réacteur nucléaire, d'une protéine dans le noyau cellulaire, d'un réactif chimique en solution, ou que le cours d'une action en bourse, la dynamique d'une population, le mouvement d'un animal à la recherche de nourriture, le parcours du point de focalisation visuel d'un homme à la recherche d'un objet perdu, ou encore l'exploration d'une zone par un robot.

Au-delà de cette première modélisation, il peut être pertinent d'introduire des règles plus complexes que les simples sauts réguliers vers les plus proches voisins pour régir les pas du marcheur. Par exemple, les excursions d'une particule d'un gaz entre deux collisions ne sont pas de longueur fixée ; un réactif chimique massif ne se déplace pas de manière équiprobable dans toutes les directions à cause de la pesanteur qui va biaiser son mouvement ; les investisseurs ont tendance à garder en mémoire l'évolution récente de la bourse, de sorte que le cours de celle-ci dépend du passé ; une abeille butine de proche en proche dans un périmètre restreint pendant un certain temps avant de s'envoler vers des zones plus éloignées.

Ainsi, le choix de paramètres tels que la longueur des pas, qui peut être déterministe ou aléatoire, l'intervalle de temps les séparant, fixé ou probabiliste, l'existence ou non d'un réseau sur lequel ont lieu ces pas, ou encore les éventuelles corrélations entre pas successifs, dépend des processus que l'on cherche à modéliser, et du niveau de raffinement que l'on veut adopter pour cette description. Un compromis entre réalisme de la modélisation et simplicité technique est souvent nécessaire. Dans cette optique, de grandes classes de marches aléatoires légèrement plus complexes et riches que les marches aléatoires simples ont émergé. Parmi elles, on peut citer les marches persistantes [Feller 1968], les marches de Lévy [Shlesinger 1987] et les marches

intermittentes [Bénichou 2005], qui jouent un rôle important dans les contextes de recherche aléatoire, comme nous le verrons dans le chapitre deux.

Les marches persistantes et les marches de Lévy représentent deux façons alternatives de rendre compte de la persistance du marcheur dans une direction et donc d'un effet de mémoire. Les premières biaisent les probabilités de transition vers les plus proches voisins dans la direction du pas précédent, tandis que les secondes sont constituées de séries de pas, dont le nombre suit une loi large, effectués par le marcheur dans une même direction avant d'en changer (voir figure 1.1(a) et (b)). Cet effet de mémoire peut être le fruit de l'inertie de la particule, de la volonté du marcheur ou d'une mémorisation active des pas précédents. En particulier, les marches de Lévy ont été invoquées de manière récurrente dans le contexte de la recherche de nourriture, d'un abri ou d'un partenaire sexuel chez les animaux [Viswanathan 2011].

Quant aux marches intermittentes, elles permettent de décrire des processus qui combinent deux modes de déplacement [Bénichou 2011]. Par exemple, elles peuvent être constituées d'une alternance entre des phases de déplacement diffusif et des phases de déplacement balistique rapide (voir figure 1.1(c)). Un tel processus modélise par exemple la recherche d'une séquence d'ADN bien précise par une protéine spécifique, qui alterne des phases de déplacement unidimensionnel où elle est adsorbée sur le brin d'ADN et des phases de déplacement tridimensionnel dans le noyau cellulaire après s'être désorbée. Les marches intermittentes peuvent également décrire des phénomènes macroscopiques, comme le mouvement d'animaux lors de leur recherche de nourriture, pendant laquelle les phases d'inspection lente et minutieuse de l'environnement sont entrecoupées de périodes de déplacement rapide destinées à changer efficacement de zone, mais qui ne permettent pas d'explorer attentivement l'espace traversé et donc d'y trouver de la nourriture.

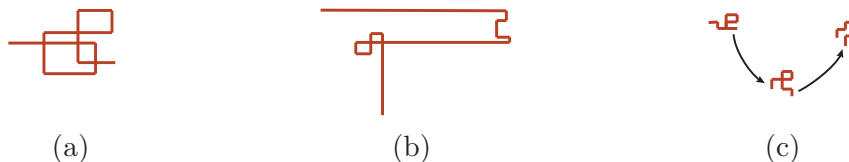


FIGURE 1.1 – Illustration schématique des marches persistantes (a), des marches de Lévy (b) et des marches intermittentes (c).

Les problèmes mettant en jeu des marches aléatoires, qu'ils fassent appel à des marches aléatoires simples ou aux modèles plus raffinés que nous venons de définir, présentent en outre l'avantage notoire de faire émerger des questions qui se formulent très souvent en des termes simples. A quelle distance de son point de départ le marcheur se trouve-t-il après avoir évolué un certain temps ? Quelle est la probabilité qu'un événement, typiquement la rencontre avec un élément géométrique de l'espace dans lequel se déplace le marcheur, ou avec un autre marcheur, ne se soit pas encore produit à un certain instant ? Combien de temps le marcheur met-il à trouver une cible ? Quelle est la probabilité qu'il atteigne une zone de l'espace avant une autre ? Quelle est l'étendue du domaine qu'il a visité au bout d'un certain temps ? Quelle en est la forme ?

Ces questions trouvent leurs réponses dans l'étude d'observables telles que le déplacement quadratique moyen du marcheur, sa probabilité de survie, le temps de premier passage par une cible, la probabilité conditionnelle de rencontre, l'enveloppe convexe, le moment d'inertie de la trajectoire, qui sont autant d'objets classiques de la théorie du mouvement brownien et des marches aléatoires [Hughes 1996, Redner 2001]. Ainsi, les questions concrètes qui apparaissent dans le contexte des processus de déplacement ou de recherche aléatoires sont bien souvent sous-tendues par des problèmes dignes d'intérêt d'un point de vue purement théorique. Et réciproquement, les questions fondamentales dont certaines sont traitées dans ce manuscrit, bien que possédant un intérêt théorique intrinsèque, se reformulent souvent avantageusement de manière imagée à l'aide d'exemples concrets, sans pour autant y être réduites. Dans ce travail, nous nous référerons en particulier à plusieurs reprises aux problématiques liées au déplacement des animaux, qui ne sont néanmoins qu'un exemple parmi d'autres des applications potentielles des résultats présentés.

Les marches aléatoires ont fait l'objet de très nombreux travaux. Dans ce travail, nous allons étudier ces marches aléatoires sous un angle particulier, l'impact d'une contrainte géométrique ou dynamique sur leurs propriétés. Ce manuscrit est découpé en quatre chapitres très largement indépendants les uns des autres. La contrainte à l'étude dans les trois premiers chapitres est de type géométrique, et apparaît sous la forme d'un confinement, qui est partiel dans le premier chapitre, total dans le deuxième et fluctue au cours du temps dans le troisième. Dans le quatrième chapitre, l'espace dans lequel se meut le marcheur aléatoire n'est cette fois plus limité par un quelconque confinement, mais le marcheur est contraint par la nécessité de trouver régulièrement des ressources pour rester en vie. Cette contrainte dynamique, inédite dans la littérature des marches aléatoires, est au centre du modèle très récent du marcheur aléatoire affamé [Bénichou 2014a], où le marcheur consomme les ressources de son milieu sur son passage et meurt s'il vient à jeûner pendant trop longtemps. Nous étudierons donc la modification de certaines propriétés d'une marche aléatoire en présence de ces deux types de contraintes.

Il est clair que la prise en compte de la présence d'un confinement est souvent importante, voire cruciale, pour décrire correctement nombre de situations modélisées par des marches aléatoires. En effet, celles-ci ont rarement lieu en l'absence totale d'obstacles, qu'il s'agisse par exemple des parois cellulaires ou des nombreuses organelles de la cellule qui entravent le mouvement d'une protéine, des meubles ou des murs d'une pièce dans laquelle passe un robot aspirateur, ou encore des éléments naturels ou liés à l'activité de l'homme qui contraignent le déplacement d'un animal dans son habitat naturel. Par ailleurs, lorsque le marcheur aléatoire modélise un organisme vivant, il est difficile de faire abstraction de sa mort possible s'il échoue trop longtemps à trouver des ressources.

Dans le premier chapitre, nous poserons la question de l'impact d'un confinement partiel sur l'espace occupé par une marche brownienne bidimensionnelle. Pour y répondre, nous étudierons l'enveloppe convexe de la trajectoire à un temps d'observation fixé, définie comme le plus petit polygone convexe contenant toute la trajectoire (voir figure 1.2). Jusqu'à présent, les travaux portant sur cet objet se sont toujours limités à des trajectoires aléatoires ayant lieu dans un espace non confiné. Comme premier pas vers une meilleure compréhension de l'interaction entre un confinement et l'espace occupé par une marche aléatoire, nous adopterons

un modèle minimal dans lequel la marche a lieu dans un demi-espace délimité par un plan infini réfléchissant. Nous déterminerons la valeur moyenne de plusieurs caractéristiques géométriques de l'enveloppe convexe, dont son périmètre, et en étudierons la variation avec la distance initiale au plan réfléchissant. Nous donnerons par ailleurs quelques clefs pour comprendre comment le confinement agit sur l'enveloppe convexe. Nous étudierons également la probabilité de survie d'un marcheur aléatoire évoluant dans un secteur angulaire absorbant, confinant partiellement son mouvement. Cet objet, qui apparaît comme intermédiaire de calcul du périmètre de l'enveloppe convexe, présente un deuxième aspect de l'interaction entre un confinement partiel et une marche aléatoire.

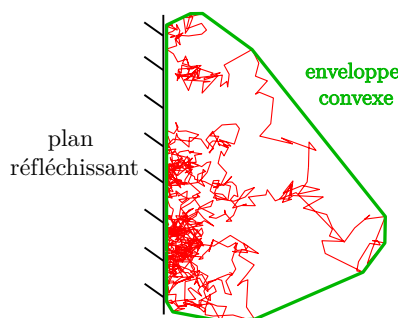


FIGURE 1.2 – Enveloppe convexe (en vert) d'une marche brownienne (en rouge) en présence d'un plan infini réfléchissant.

Dans le deuxième chapitre, nous étudierons une marche aléatoire sur réseau ayant lieu dans un volume fermé et nous nous intéresserons aux processus de recherche aléatoire dont l'objectif est de visiter tous les sites contenus à l'intérieur de ce confinement total, ou une partie d'entre eux (voir figure 1.3). Le temps caractéristique d'un tel processus est le temps de couverture complète ou partielle du domaine. Les exemples de recherches aléatoires où un domaine doit être visité de manière entièrement ou quasiment exhaustive sont nombreux comme nous le verrons. L'intérêt pour cet objet remonte à une trentaine d'années, mais les travaux sur cette thématique, principalement réalisés par des mathématiciens, se limitent exclusivement aux marches aléatoires simples. Pour les raisons exposées précédemment, il est donc important de se pencher sur des modèles plus variés de marches aléatoires. C'est pourquoi nous dépasserons ici le cadre des études réalisées sur le temps de couverture en considérant divers types de marches aléatoires, dont ceux détaillés plus haut, pour lesquels nous déterminerons la distribution de plusieurs observables de la famille du temps de couverture.

Dans le troisième chapitre, nous considérerons à nouveau une marche brownienne en présence d'un confinement total, mais cette fois sous la forme d'une cage unidimensionnelle dont les parois se déplacent au cours du temps, représentant donc une contrainte à la fois géométrique et dynamique. Nous étudierons la probabilité que le marcheur atteigne un des deux bords de la cage sans avoir touché l'autre, dans les deux cas opposés où la cage se contracte à vitesse constante, et se dilate à vitesse constante.

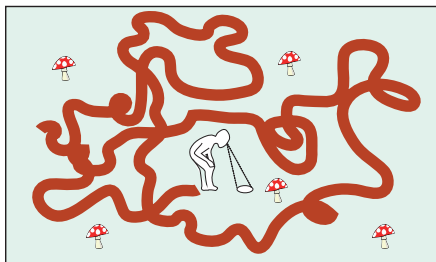


FIGURE 1.3 – Illustration des problématiques de couverture d’un domaine : combien de temps faut-il au promeneur pour trouver tous les champignons contenus dans une zone donnée ?

Enfin, dans le dernier chapitre, nous nous placerons dans le cadre du modèle sur réseau du marcheur aléatoire affamé, qui consomme la nourriture présente sur les nœuds du réseau lorsqu’il les visite, épuisant au fur et à mesure les ressources de son environnement, et qui meurt s’il reste trop longtemps sans trouver de nouvelles ressources (voir figure 1.4). Ce modèle n’a pour l’instant été étudié qu’en dimension un, à cause de la complexité technique introduite par le couplage entre la trajectoire du marcheur et son temps de vie. Néanmoins, les applications naturelles de ce modèle en écologie incitent fortement à s’intéresser au cas de la dimension deux. Nous étudierons donc cette situation de manière approchée en simplifiant ce couplage. Ensuite, nous ajouterons un ingrédient au modèle d’origine, la possibilité pour les ressources de se régénérer au lieu de disparaître définitivement, et nous déterminerons l’impact de cette régénération sur les propriétés de survie du marcheur. Nous aborderons enfin le problème classique en écologie de l’optimisation de l’exploitation d’un environnement où les ressources sont regroupées en parcelles. Nous en présenterons un traitement nouveau en nous appuyant sur le modèle du marcheur aléatoire affamé.

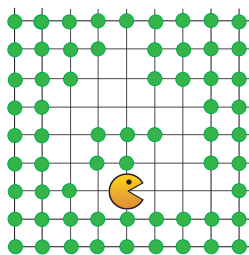


FIGURE 1.4 – Illustration du modèle sur réseau du marcheur aléatoire affamé. Chaque site du réseau contient initialement une unité de nourriture que le marcheur consomme lors de sa première visite d’un site. Le marcheur meurt de faim s’il reste trop longtemps sans trouver de nourriture.

Enveloppe convexe d'un mouvement brownien confiné

Sommaire

2.1	Introduction	7
2.2	Cas unidimensionnel	10
2.3	Cas bidimensionnel	14
2.3.1	Détermination du périmètre moyen de l'enveloppe convexe	15
2.3.2	Allure du périmètre moyen et discussion	18
2.3.3	Analyse quantitative du périmètre moyen	23
2.3.3.1	Point de départ sur le plan réfléchissant	24
2.3.3.2	Point de départ près du plan	25
2.3.4	Longueur moyenne de la portion du plan réfléchissant visitée	29
2.3.4.1	Cas particulier d'un mouvement brownien partant du plan	29
2.3.4.2	Cas général	30
2.4	Probabilité de survie dans un secteur angulaire absorbant	32
2.4.1	Expression alternative de la probabilité de survie	34
2.4.1.1	Détermination analytique de cette expression	34
2.4.1.2	Comparaison avec les résultats de la littérature	39
2.4.1.3	Interprétation géométrique de nos expressions	40
2.4.2	Application : développement asymptotique à temps court	40
2.5	Conclusion	44

2.1 Introduction

Comment la présence d'un obstacle affecte-t-elle l'extension spatiale d'un mouvement brownien ? Dans ce premier chapitre, nous allons donner des éléments de réponse à cette question à une et deux dimensions. S'il est aisé de mesurer l'extension spatiale d'un mouvement brownien unidimensionnel à l'aide de la distance entre les points extrêmes visités par le marcheur, le choix de l'outil adapté à cette quantification l'est en revanche moins à deux dimensions. Comment peut-on en effet caractériser l'espace occupé par un mouvement brownien bidimensionnel ? Un des objets qui permettent de répondre à cette question est ce que l'on appelle l'enveloppe convexe de la trajectoire brownienne, définie comme le plus petit polygone convexe contenant

toute la trajectoire (voir figure 2.1(a)). Pour bien se représenter ce dont il s'agit, imaginons que l'on matérialise chacune des positions par lesquelles le marcheur brownien est passé au cours du temps (en discrétisant le temps) par un clou et que l'on tende un caoutchouc autour de ces clous, que l'on lâche ensuite. La forme polygonale convexe prise par le caoutchouc est exactement l'enveloppe convexe de la trajectoire (voir figure 2.1(b)).

Outre l'étude théorique du mouvement brownien, la problématique de la quantification de l'espace occupé par un mouvement brownien bidimensionnel apparaît également naturellement en écologie lorsque l'on cherche à estimer l'étendue de l'habitat d'animaux sauvages [Murphy 1992]. En effet, comme nous l'avons vu précédemment, le mouvement des animaux est modélisé de manière courante et satisfaisante par un mouvement brownien, principalement lors des phases de recherche de nourriture, d'un abri ou d'un partenaire sexuel [Berg 1993, Bartumeus 2005]. La méthode la plus populaire parmi les écologistes pour caractériser l'habitat d'un animal consiste à étudier l'enveloppe convexe de la trajectoire de l'animal [Worton 1995, Giuggioli 2011]. Une mesure de la taille de l'habitat de l'animal est alors donnée par le périmètre ou l'aire de cette enveloppe convexe.

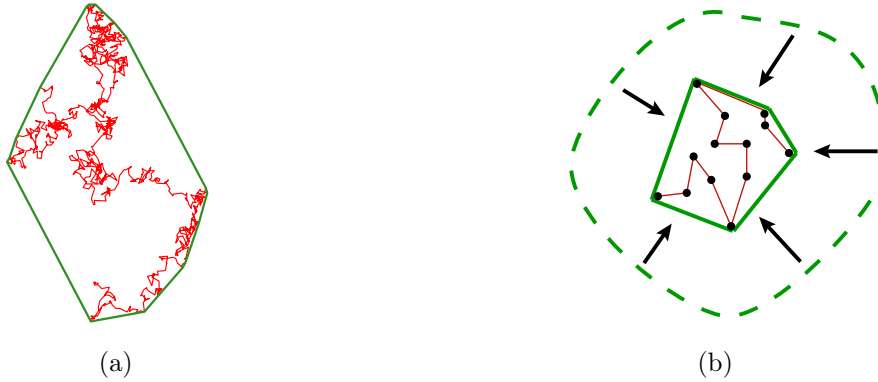


FIGURE 2.1 – (a) Enveloppe convexe d'une trajectoire brownienne bidimensionnelle (en rouge). Il s'agit du plus petit polygone convexe contenant la trajectoire (en vert). (b) Illustration de la construction de l'enveloppe convexe d'une trajectoire. Si l'on plante un clou (point noir) à chacune des positions occupées successivement par le marcheur brownien au cours du temps et que l'on tend un caoutchouc autour de ces clous, que l'on lâche ensuite, la forme polygonale convexe (en vert) prise par le caoutchouc est exactement l'enveloppe convexe de la trajectoire brownienne (en rouge).

Pour un mouvement brownien plan non confiné de constante de diffusion D , le périmètre moyen [Takács 1980] et l'aire moyenne [Bachir 1983] de son enveloppe convexe au temps d'observation t ont été déterminés de manière exacte dans la littérature mathématique

$$\langle L(t) \rangle = \sqrt{16 \pi D t} \quad (2.1)$$

$$\langle A(t) \rangle = \pi D t. \quad (2.2)$$

La seule longueur caractéristique d'un mouvement brownien plan au temps t étant sa longueur de diffusion $\sqrt{Dt}$, on constate sans surprise que le périmètre moyen de l'enveloppe convexe est proportionnel à cette longueur, et l'aire moyenne à son carré.

Bien plus récemment, l'étude théorique de l'enveloppe convexe a connu un regain d'intérêt, à la fois dans la littérature mathématique et physique, en généralisant ces premiers résultats fondateurs dans différentes directions. En particulier, une méthode générale a été proposée [Randon-Furling 2009b, Majumdar 2010] pour calculer le périmètre moyen et l'aire moyenne de l'enveloppe convexe d'un processus stochastique arbitraire à deux dimensions. Dans les cas où le processus bidimensionnel est isotrope, le calcul se ramène à un calcul de statistique d'extrême du processus radial, donc unidimensionnel, correspondant. Le périmètre moyen et l'aire moyenne ont ainsi été déterminés dans un certain nombre de situations physiques : en présence de N marcheurs browniens indépendants [Randon-Furling 2009b, Majumdar 2010], pour un processus d'accélération aléatoire [Reymbaut 2011], pour un mouvement brownien branchant avec absorption¹ [Dumonteil 2013] ou encore en présence de diffusion anormale² [Luković 2013].

Tous ces résultats se limitent au cas de processus stochastiques en espace infini, c'est-à-dire en l'absence de confinement. Néanmoins, les processus stochastiques décrits par un mouvement brownien ont en pratique souvent lieu en espace confiné. Par exemple, l'étendue de l'habitat d'un animal peut être limitée par la présence d'éléments naturels ou liés à l'activité humaine qui l'empêchent de se déplacer librement dans tout l'espace. Comment le confinement du milieu naturel dans lequel évolue un animal affecte-t-il l'étendue de son territoire ? Au-delà de cette motivation écologique, la détermination du périmètre moyen de l'enveloppe convexe en confinement est une question intrinsèquement importante dans le contexte de l'étude théorique du mouvement brownien.

On s'intéressera ici au cas d'un confinement minimal, qui admet une solution exacte. Considérons un mouvement brownien bidimensionnel partiellement confiné par un plan infini réfléchissant³ partant à une distance initiale d de celui-ci (voir figure 2.2(a)). Bien que simpliste en apparence, ce confinement modélise de manière adéquate une route, une rivière, un littoral ou encore une chaîne montagneuse, au-delà desquels un animal ne peut pas s'aventurer. La présence de ce confinement a pour conséquences fondamentales de briser l'isotropie de la géométrie par rapport au cas sans confinement, et d'introduire une deuxième longueur caractéristique au problème, la distance initiale au plan d , en plus de la longueur de diffusion $\sqrt{Dt}$. L'existence de deux longueurs caractéristiques rend la prédiction du comportement du périmètre moyen de l'enveloppe convexe plus difficile qu'en l'absence de confinement, avec une seule longueur caractéristique. En revanche, on peut d'ores et déjà prévoir que toute longueur du problème $f(d, t)$, et en particulier le périmètre moyen de l'enveloppe convexe, prend une forme d'échelle du type

$$f(d, t) = \sqrt{Dt} \hat{f}\left(\frac{d}{\sqrt{Dt}}\right) = \sqrt{Dt} \hat{f}(x), \quad (2.3)$$

$\hat{f}$ étant la fonction d'échelle⁴ associée à la fonction dimensionnée f , et $x \equiv d/\sqrt{Dt}$ le paramètre

1. Le marcheur brownien peut donner naissance à un double qui évolue ensuite indépendamment de lui et mourir au cours de son mouvement.

2. Une diffusion est qualifiée d'anormale lorsque son déplacement quadratique moyen n'est pas linéaire en temps. Il s'écrit de manière générale

$$\langle r^2 \rangle \sim Dt^\beta.$$

Si $\beta > 1$, on est en présence de super-diffusion, et si $\beta < 1$, on parle de sous-diffusion.

3. Dans tout ce qui suit, on parlera de plan, même s'il serait plus juste de parler d'une droite réfléchissante.

4. C'est-à-dire une fonction sans dimension physique, qui ne dépend que de paramètres d'échelle, eux-mêmes adimensionnés.

d'échelle. Avant de nous pencher sur la question centrale de ce chapitre, à savoir l'étude du périmètre moyen de l'enveloppe convexe d'un mouvement brownien bidimensionnel en présence d'un plan infini réfléchissant, nous allons commencer par étudier l'équivalent unidimensionnel de ce problème, afin de mettre en valeur par la suite la spécificité du cas bidimensionnel.

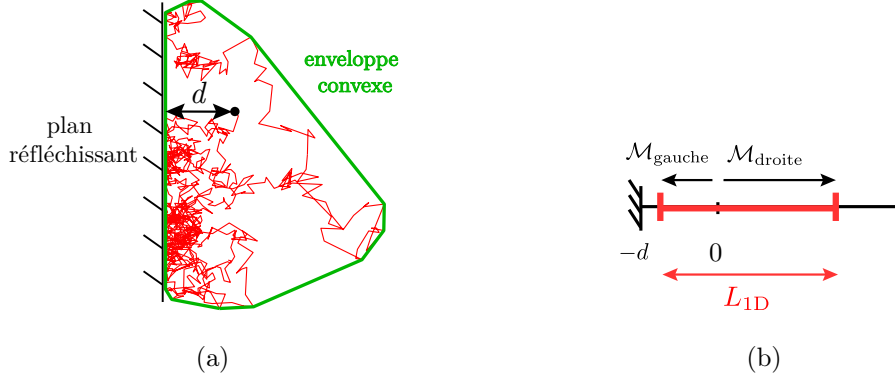


FIGURE 2.2 – (a) Enveloppe convexe d'un mouvement brownien bidimensionnel partant d'une distance initiale d d'un plan infini réfléchissant. (b) Problème unidimensionnel équivalent : extension d'un mouvement brownien à une dimension partant à une distance initiale d d'un point réfléchissant.

2.2 Cas unidimensionnel

Nous commençons donc par étudier un mouvement brownien unidimensionnel partant de l'abscisse 0 à l'instant initial et partiellement confiné par un point réfléchissant situé à l'abscisse $-d$ (voir figure 2.2(b)). L'équivalent du périmètre de l'enveloppe convexe dans ce cas est simplement l'extension du mouvement brownien, définie comme la distance entre les positions extrêmes visitées par le marcheur brownien. Le temps d'observation t est fixé et on étudie la dépendance de l'extension moyenne $\langle L_{1D}^{(d)}(t) \rangle$ en la distance initiale au point réfléchissant. Avant tout calcul, on sent intuitivement que le point réfléchissant empêche le mouvement brownien de s'étendre autant qu'il le ferait en l'absence de confinement, et ce d'autant plus qu'il en part près. Nous allons vérifier cette conjecture en déterminant l'expression exacte de l'extension moyenne $\langle L_{1D}^{(d)}(t) \rangle$.

L'extension peut s'écrire comme la somme du maximum de la marche brownienne jusqu'au temps t vers la droite $\mathcal{M}_{\text{droite}}^{(d)}(t)$ et du maximum vers la gauche $\mathcal{M}_{\text{gauche}}^{(d)}(t)$, ce qui donne l'égalité suivante pour les valeurs moyennes

$$\langle L_{1D}^{(d)}(t) \rangle = \langle \mathcal{M}_{\text{droite}}^{(d)}(t) \rangle + \langle \mathcal{M}_{\text{gauche}}^{(d)}(t) \rangle. \quad (2.4)$$

Le maximum vers la droite représente la distance entre le point le plus à droite de la trajectoire au temps t et le point de départ, respectivement pour le maximum vers la gauche (voir figure 2.2(b)). On peut écrire par définition

$$\langle \mathcal{M}_{\text{droite}}^{(d)}(t) \rangle = \int_0^{+\infty} dy y P \left(\mathcal{M}_{\text{droite}}^{(d)}(t) = y \right) \quad (2.5)$$

où $P\left(\mathcal{M}_{\text{droite}}^{(d)}(t) = y\right)$ est la distribution du maximum vers la droite. En intégrant par parties l'équation (2.5) et en notant $F_t^{(d)}(y)$ la distribution cumulative associée

$$F_t^{(d)}(y) = \text{Prob}\left(\mathcal{M}_{\text{droite}}^{(d)}(t) \leq y\right) \equiv \int_0^y dx P\left(\mathcal{M}_{\text{droite}}^{(d)}(t) = x\right), \quad (2.6)$$

on obtient

$$\langle \mathcal{M}_{\text{droite}}^{(d)}(t) \rangle = \left[y \left(F_t^{(d)}(y) - 1 \right) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} dy \left(F_t^{(d)}(y) - 1 \right) = \int_0^{+\infty} dy \left(1 - F_t^{(d)}(y) \right). \quad (2.7)$$

Par ailleurs, il est équivalent de dire que le maximum vers la droite au temps t est inférieur à y ou que la trajectoire n'a pas encore touché le point d'abscisse y au temps t . La distribution cumulative $F_t^{(d)}(y)$ n'est donc autre que la probabilité de survie $S_{\text{droite}}^{(d)}(t|y)$ de la trajectoire au temps t en présence d'un point absorbant situé à l'abscisse y et du point réfléchissant situé en $-d$, c'est-à-dire, d'après (2.7)

$$\langle \mathcal{M}_{\text{droite}}^{(d)}(t) \rangle = \int_0^{+\infty} dy \left(1 - S_{\text{droite}}^{(d)}(t|y) \right). \quad (2.8)$$

De manière similaire, le maximum moyen vers la gauche s'écrit

$$\langle \mathcal{M}_{\text{gauche}}^{(d)}(t) \rangle = \int_{-d}^0 dy \left(1 - S_{\text{gauche}}(t|y) \right). \quad (2.9)$$

Remarquons que dans cette intégrale, y est cette fois limité à $-d$ en raison de la présence du point réfléchissant, et que la quantité $S_{\text{gauche}}(t|y)$ est la probabilité de survie en présence d'un point absorbant en y (négatif), qui écrante par conséquent le point réfléchissant. Si on note $\hat{f}(p) = \int_0^{+\infty} dt f(t) e^{-pt}$ la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, on trouve

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{M}}_{\text{droite}}^{(d)}(p) \rangle &= \int_0^{+\infty} dy \left(\frac{1}{p} - \hat{S}_{\text{droite}}^{(d)}(p|y) \right) \\ \langle \hat{\mathcal{M}}_{\text{gauche}}^{(d)}(p) \rangle &= \int_{-d}^0 dy \left(\frac{1}{p} - \hat{S}_{\text{gauche}}(p|y) \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

où les transformées de Laplace des deux probabilités de survie peuvent être calculées par des méthodes classiques (voir annexe A)

$$\hat{S}_{\text{droite}}^{(d)}(p|y) = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\text{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{D}}d\right)}{\text{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{D}}(y+d)\right)} \right) \quad (2.11)$$

$$\hat{S}_{\text{gauche}}(p|y) = \frac{1}{p} \left(1 - e^{\sqrt{\frac{p}{D}}y} \right). \quad (2.12)$$

En inversant les transformées de Laplace, on obtient finalement les maximums moyens renormalisés $\tilde{\mathcal{M}}_{\text{droite}}$ et $\tilde{\mathcal{M}}_{\text{gauche}}$

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\text{droite}}(x) \equiv \left\langle \frac{\mathcal{M}_{\text{droite}}^{(d)}(t)}{\sqrt{Dt}} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \left(\frac{e^{-n^2 x^2}}{\sqrt{\pi}} - nx \text{erfc}(nx) \right) \quad (2.13)$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\text{gauche}}(x) \equiv \left\langle \frac{\mathcal{M}_{\text{gauche}}^{(d)}(t)}{\sqrt{Dt}} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 - e^{-\frac{x^2}{4}} \right) + x \text{erfc}\left(\frac{x}{2}\right) \quad (2.14)$$

où $x \equiv d/\sqrt{Dt}$ est la distance initiale renormalisée par la longueur de diffusion $\sqrt{Dt}$ et erfc la fonction erreur complémentaire définie par

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} dt e^{-t^2}. \quad (2.15)$$

Comme discuté en introduction, le maximum possède une forme d'échelle, c'est-à-dire qu'une fois renormalisé par la longueur de diffusion, il est donné par une fonction sans dimension du paramètre d'échelle x , également sans dimension, qui est le rapport des deux longueurs caractéristiques du problème. La valeur en $x = 0$ de ces deux maximums, c'est-à-dire dans le cas où le point de départ est sur le point réfléchissant, est donnée par

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\text{droite}}(0) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \sqrt{\pi} \quad (2.16)$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\text{gauche}}(0) = 0. \quad (2.17)$$

Par ailleurs, la dérivée des équations (2.13) et (2.14) en $x = 0$

$$\left. \frac{d\tilde{\mathcal{M}}_{\text{droite}}}{dx} \right|_{x=0} = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} n \operatorname{erfc}(nx) \Big|_{x=0} = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{4n^2 - 1} = -1 \quad (2.18)$$

$$\left. \frac{d\tilde{\mathcal{M}}_{\text{gauche}}}{dx} \right|_{x=0} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_{x=0} = 1, \quad (2.19)$$

permet d'obtenir le comportement des deux maximums à faible distance initiale, c'est-à-dire $x \ll 1$

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\text{droite}}(x) = \sqrt{\pi} - x + o(x) \quad (2.20)$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\text{gauche}}(x) = x + o(x). \quad (2.21)$$

Il est aisé de comprendre le second développement en remarquant que le marcheur a une probabilité proche de un de toucher le point réfléchissant, très proche de son point de départ, et qu'il est par conséquent très susceptible d'explorer toute la zone qui sépare son point de départ du plan réfléchissant.

On obtient finalement de manière directe l'extension moyenne de la trajectoire au temps t

$$\langle L_{1D}^{(d)}(t) \rangle = \sqrt{Dt} \tilde{L}_{1D} \left(\frac{d}{\sqrt{Dt}} \right) \quad (2.22)$$

où $\tilde{L}_{1D}$ est la fonction d'échelle du périmètre à une dimension définie par

$$\tilde{L}_{1D}(x) = \tilde{\mathcal{M}}_{\text{droite}}(x) + \tilde{\mathcal{M}}_{\text{gauche}}(x). \quad (2.23)$$

D'après les équations (2.13) et (2.14), l'expression explicite de cette fonction d'échelle est la suivante

$$\tilde{L}_{1D}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \left(\frac{e^{-n^2 x^2}}{\sqrt{\pi}} - nx \operatorname{erfc}(nx) \right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 - e^{-\frac{x^2}{4}} \right) + x \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\right) \quad (2.24)$$

et est tracée sur la figure 2.3(a). Elle croît de manière monotone avec la distance initiale depuis sa valeur en $x = 0$ (lorsque le marcheur part du point réfléchissant)

$$\tilde{L}_{1D}(x = 0) = \sqrt{\pi}, \quad (2.25)$$

où elle a une tangente horizontale d'après les équations (2.20), (2.21) et (2.23), jusqu'à sa valeur asymptotique (lorsque le marcheur part infiniment loin du point réfléchissant et n'en sent donc plus les effets)

$$\tilde{L}_{1D}(x \rightarrow +\infty) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}. \quad (2.26)$$

On retrouve sans surprise la valeur de l'extension d'un mouvement brownien unidimensionnel en l'absence de confinement [Feller 1968].

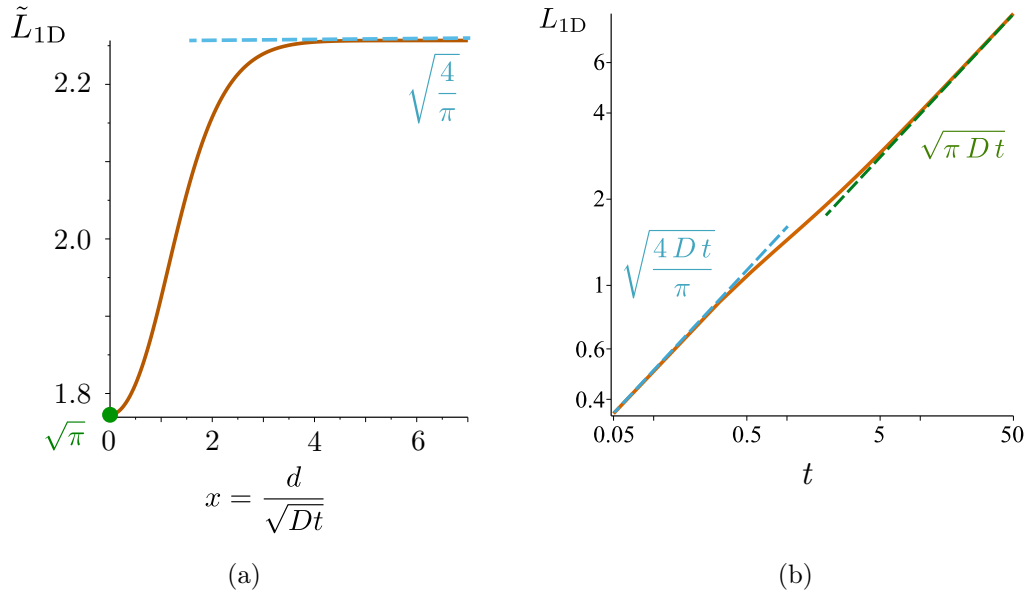


FIGURE 2.3 – (a) Fonction d'échelle $\tilde{L}_{1D}$ (trait plein orange) de l'extension au temps t en fonction de la distance initiale renormalisée x , dont l'expression analytique exacte est donnée par l'équation (2.24). (b) Extension (trait plein orange) pour une distance initiale $d = 1$ en fonction du temps, donnée par l'équation (2.22) et (2.24). Les droites en pointillés représentent les deux régimes diffusifs observés aux temps courts et longs, correspondant aux deux valeurs limites de la fonction d'échelle données en (2.25) (vert) et (2.26) (bleu).

On peut faire les remarques suivantes sur cette fonction d'échelle :

- (i) La présence du point réfléchissant préserve le comportement diffusif⁵ de l'extension du mouvement brownien aux temps courts et aux temps longs (voir figure 2.3(b)). Si le marcheur part à une distance non nulle du point réfléchissant, aux temps courts ($t \ll d^2/D$), il diffuse sans voir le point réfléchissant, puis perd son caractère diffusif⁶ lorsqu'il rencontre le point réfléchissant pour des temps intermédiaires, et redevient diffusif aux temps longs ($t \gg d^2/D$).
- (ii) L'extension moyenne $\langle L_{1D}^{(d)}(t) \rangle$ à un temps d'observation fixé t est une fonction strictement croissante de la distance initiale d au point réfléchissant, dont la valeur asymptotique lorsque la distance initiale tend vers l'infini correspond à celle de l'extension moyenne en l'absence de confinement. Cela confirme l'intuition que nous avons formulée, selon laquelle le point réfléchissant empêche le mouvement brownien de s'étendre, d'autant plus que le point de départ est situé près du point réfléchissant. En particulier, à temps d'observation fixé, l'extension moyenne est minimisée dans le cas où le marcheur part du point réfléchissant, n'ayant accès pour s'étendre qu'à une demi-droite.
- (iii) Sur un plan purement théorique, l'expression (2.24) met en évidence que la fonction d'échelle unidimensionnelle est analytique en $x = 0$.

Notre étude de l'équivalent unidimensionnel du périmètre de l'enveloppe convexe, l'extension de la trajectoire, constitue un préliminaire à la situation bidimensionnelle d'intérêt. La monotonie de la fonction d'échelle associée à l'extension moyenne de la trajectoire par rapport à la distance initiale s'accorde avec l'intuition qui suggère que l'élément réfléchissant a pour effet d'empêcher la trajectoire de s'étendre librement, d'autant plus qu'elle en part près. Penchons-nous maintenant sur le cas bidimensionnel.

2.3 Cas bidimensionnel

Comme nous allons le voir dans un instant, le périmètre moyen de l'enveloppe convexe d'un mouvement brownien à deux dimensions en présence d'un plan réfléchissant est un objet bien plus complexe que son équivalent unidimensionnel étudié précédemment. Comme mentionné en introduction, le périmètre moyen de l'enveloppe convexe peut s'écrire à l'aide d'une fonction d'échelle $\tilde{L}$

$$\langle L^{(d)}(t) \rangle = \sqrt{Dt} \tilde{L} \left(\frac{d}{\sqrt{Dt}} \right) \quad (2.27)$$

ne dépendant à nouveau que du paramètre d'échelle $x \equiv d/\sqrt{Dt}$. Nous déterminerons ici cette fonction d'échelle puis nous l'analyserons. Une partie des démonstrations sera donnée en annexe, par souci de clarté. Dans ce qui suit, nous nous placerons toujours à un temps d'observation fixé. Dans les discussions qualitatives, nous parlerons donc indifféremment des grandeurs (périmètre moyen, maximum moyen, extension moyenne) et de leurs fonctions d'échelle associées, puisqu'elles sont proportionnelles, de même pour la distance initiale d et la distance initiale renormalisée $x = d/\sqrt{Dt}$.

5. C'est-à-dire pour lequel le déplacement quadratique moyen est proportionnel à t .

6. Dans le sens où l'extension moyenne du mouvement brownien n'est plus, de manière transitoire, proportionnelle à $\sqrt{t}$, comme on le voit à la figure 2.3(b).

2.3.1 Détermination du périmètre moyen de l'enveloppe convexe

Pour calculer le périmètre moyen de l'enveloppe convexe à deux dimensions en présence d'un plan réfléchissant, nous suivons la méthode développée dans [Randon-Furling 2009b, Majumdar 2010] pour le calcul de ce périmètre moyen en l'absence de confinement. Le cœur de cette méthode consiste à utiliser la formule de Cauchy [Cauchy 1832]

$$\langle L^{(d)}(t) \rangle = \int_0^{2\pi} d\theta \langle \mathcal{M}^{(d)}(\theta, t) \rangle \quad (2.28)$$

où $\langle \mathcal{M}^{(d)}(\theta, t) \rangle$ est la projection maximale de la trajectoire du marcheur brownien jusqu'au temps t dans la direction θ , que nous appellerons simplement maximum dans la direction θ . A partir d'une trajectoire donnée, ce maximum s'obtient de la manière suivante (voir figure 2.4) : si l'on introduit par la pensée un plan infini perpendiculaire à la direction θ placé très loin de la trajectoire, qu'on l'approche dans la direction θ jusqu'à toucher en un point la trajectoire, le maximum est la distance entre ce plan et un point de référence, choisi ici par commodité au niveau du point de départ de la trajectoire. Dans le cas sans confinement, l'espace est isotrope. Par symétrie, le maximum moyen ne dépend donc pas de la direction θ [Randon-Furling 2009b]

$$\langle \mathcal{M}^\infty(\theta, t) \rangle = 2\sqrt{\frac{Dt}{\pi}}. \quad (2.29)$$

Le problème bidimensionnel de base se ramène par conséquent à un problème purement radial, donc unidimensionnel, permettant ainsi de simplifier la formule de Cauchy

$$\langle L^\infty(t) \rangle = 2\pi \langle \mathcal{M}^\infty(\theta, t) \rangle = 4\sqrt{\pi Dt}. \quad (2.30)$$

En revanche, l'introduction d'un plan réfléchissant rompt l'isotropie et requiert donc de déterminer le maximum moyen *pour toute direction* θ .

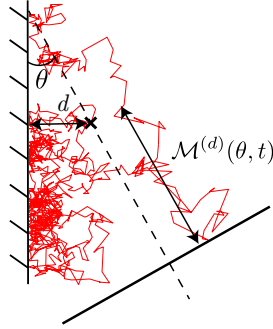


FIGURE 2.4 – Définition du maximum de la trajectoire (en rouge) dans la direction θ .

Comme explicité précédemment dans le cas unidimensionnel, en notant $P(\mathcal{M}^{(d)}(\theta, t) = M)$ la distribution du maximum et $F_t^{(d)}(M, \theta)$ sa cumulative, le maximum moyen dans la direction θ est donné par définition par

$$\langle \mathcal{M}^{(d)}(\theta, t) \rangle = \int_0^{+\infty} dM M P(\mathcal{M}^{(d)}(\theta, t) = M) \quad (2.31)$$

et après une intégration par parties similaire à celle réalisée dans le cas unidimensionnel à l'équation (2.7)

$$\langle \mathcal{M}^{(d)}(\theta, t) \rangle = \int_0^{+\infty} dM \left(1 - F_t^{(d)}(M, \theta) \right). \quad (2.32)$$

A nouveau, il est équivalent de dire que la trajectoire a un maximum au temps t dans la direction θ plus petit que M et qu'elle n'a pas été absorbée au temps t par un plan absorbant perpendiculaire à cette direction et situé à une distance M du point de départ. On peut donc écrire que

$$F_t^{(d)}(M, \theta) = S^{(d)}(t|M, \theta) \quad (2.33)$$

où $S^{(d)}(t|M, \theta)$ est la probabilité de survie au temps t d'un mouvement brownien en présence du plan absorbant perpendiculaire à la direction θ situé à une distance M du point de départ, mentionné ci-dessus, et du plan réfléchissant d'origine. On a donc finalement

$$\langle \mathcal{M}^{(d)}(\theta, t) \rangle = \int_0^{+\infty} dM \left(1 - S^{(d)}(t|M, \theta) \right). \quad (2.34)$$

La détermination du périmètre moyen de l'enveloppe convexe se réduit donc au calcul d'une probabilité de survie dans un secteur angulaire⁷ d'angle au sommet $\alpha/2 = \pi/2 - \theta$ avec un bord réfléchissant et un bord absorbant (voir figure 2.5(a)). Par symétrie autour du plan réfléchissant, cette probabilité de survie est égale celle d'un mouvement brownien plan évoluant dans un secteur angulaire d'angle au sommet double et dont les deux bords sont absorbants (voir figure 2.5(b)). Les coordonnées naturelles pour exprimer la probabilité de survie dans le secteur angulaire sont

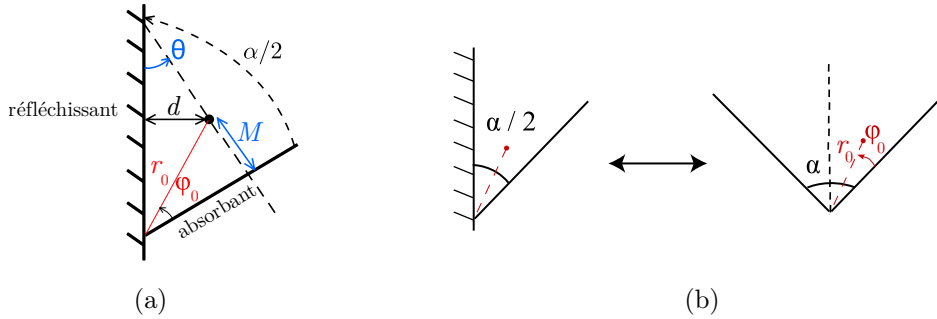


FIGURE 2.5 – (a) Définition des paramètres géométriques dans le secteur angulaire initial (avec un bord réfléchissant, le plan réfléchissant d'origine, et un bord absorbant, introduit dans la définition de la densité de probabilité du maximum). (b) Equivalence entre le secteur angulaire de la sous-figure (a) d'angle au sommet $\alpha/2$ et le secteur angulaire d'angle au sommet double et dont les deux bords sont réfléchissants.

les coordonnées polaires (r, φ) , et par des méthodes classiques, on obtient (voir l'annexe B pour le détail)

$$S(t|r_0, \varphi_0) = \frac{r_0}{\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{r_0^2}{8Dt}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2m+1)\pi\varphi_0}{\alpha}\right)}{2m+1} \left[I_{\frac{(2m+1)\pi}{2\alpha} - \frac{1}{2}}\left(\frac{r_0^2}{8Dt}\right) + I_{\frac{(2m+1)\pi}{2\alpha} + \frac{1}{2}}\left(\frac{r_0^2}{8Dt}\right) \right] \quad (2.35)$$

7. "Wedge" en anglais.

où (r_0, φ_0) est le point de départ de la trajectoire et $I_\nu(x)$ désigne la fonction de Bessel modifiée d'indice ν . Il ne reste maintenant plus qu'à faire le lien entre les paramètres (M, θ) mis en jeu dans la formule de Cauchy et les coordonnées polaires (r, φ) à l'aide desquelles est exprimée la probabilité de survie (voir figure 2.5(a)). Un peu de géométrie élémentaire permet d'obtenir les relations suivantes (voir l'annexe C),

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{d^2 + 2dM \sin \theta + M^2} \\ \varphi_0 &= \arccos \left(\frac{d + M \sin \theta}{\sqrt{M^2 + 2dM \sin \theta + d^2}} \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

En introduisant le paramètre sans dimension suivant

$$u \equiv \frac{M}{\sqrt{Dt}}, \quad (2.37)$$

en plus du paramètre d'échelle $x = d/\sqrt{Dt}$, on a d'après les équations (2.34) et (2.28)

$$\tilde{\mathcal{M}}(x) \equiv \left\langle \frac{\mathcal{M}^{(d)}(t)}{\sqrt{Dt}} \right\rangle = \int_0^{+\infty} du \left(1 - S^{(x)}(t|u, \theta) \right), \quad (2.38)$$

$$\tilde{L}(x) = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} du \left(1 - S^{(x)}(t|u, \theta) \right). \quad (2.39)$$

où $S^{(x)}(t|u, \theta)$ désigne la probabilité de survie déterminée précédemment mais pour les variables réduites u et x . En utilisant également les équations (2.35) et (2.36), on obtient finalement une expression exacte de la fonction d'échelle associée au maximum moyen dans la direction θ

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}(\theta, x) &= \int_0^{+\infty} du \left\{ 1 - \frac{\sqrt{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}}{\sqrt{\pi} \cos \theta} e^{-\frac{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}{8 \cos^2 \theta}} \right. \\ &\quad \times \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\sin \left((2m+1) \frac{\pi}{\alpha} \arccos \left(\frac{x+u \sin \theta}{\sqrt{u^2 + 2xu \sin \theta + x^2}} \right) \right)}{2m+1} \\ &\quad \left. \times \left[I_\nu \left(\frac{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) + I_{\nu+1} \left(\frac{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.40)$$

et de la fonction d'échelle associée au périmètre moyen

$$\begin{aligned} \tilde{L}(x) &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} du \left\{ 1 - \frac{\sqrt{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}}{\sqrt{\pi} \cos \theta} e^{-\frac{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}{8 \cos^2 \theta}} \right. \\ &\quad \times \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\sin \left((2m+1) \frac{\pi}{\alpha} \arccos \left(\frac{x+u \sin \theta}{\sqrt{u^2 + 2xu \sin \theta + x^2}} \right) \right)}{2m+1} \\ &\quad \left. \times \left[I_\nu \left(\frac{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) + I_{\nu+1} \left(\frac{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.41)$$

avec

$$\nu = (2m + 1) \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{1}{2}. \quad (2.42)$$

On omet par souci de légèreté la dépendance de ν en l'indice de la somme m (tout en la gardant en mémoire pour la suite). Comme attendu, le maximum et le périmètre moyens possèdent des formes d'échelle. En particulier, cela signifie que les limites “petite distance” et “grand temps” sont équivalentes. Dans la suite, nous nous placerons toujours à un temps d'observation fixé et nous étudierons comme à une dimension l'impact de la distance initiale au plan réfléchissant sur les quantités considérées.

2.3.2 Allure du périmètre moyen et discussion

Avant d'aborder l'analyse de la fonction d'échelle (2.41) du périmètre de l'enveloppe convexe, il est utile de la tracer. Cependant, cette fonction n'est simple ni à analyser, ni même à tracer. Les difficultés d'évaluation numérique proviennent de l'expression de la probabilité de survie dans le secteur angulaire absorbant et en particulier de la somme infinie de fonctions de Bessel⁸ mise en jeu dans l'équation (2.41). Il est possible de contourner ce problème en réécrivant cette probabilité de survie sous une forme plus légère, selon une méthode présentée dans la section 2.4, ce qui permet finalement de tracer la fonction d'échelle du périmètre moyen (voir figure 2.6).

En parallèle, nous avons réalisé des simulations numériques de ce problème. Pour cela, nous avons généré plus de 10^5 trajectoires de marcheur brownien discrétisées de durée totale $T = 100$ (en unité arbitraire). Pour tenir compte de la présence du plan infini réfléchissant, nous avons adapté le pas de temps utilisé pour discrétiser la trajectoire en fonction de la distance du marcheur au plan réfléchissant. Loin de celui-ci, c'est-à-dire en pratique quand le marcheur en est à une distance supérieure à $z = 0.2$ (unité arbitraire), nous avons pris un pas de temps $\Delta\tau = 10^{-3}$, et en-dessous de cette distance, nous l'avons fait varier quadratiquement avec la distance courante z au plan $\Delta\tau = (0.1z + \lambda)^2$, avec $\lambda = 0.01$ une distance de coupure⁹. Lorsqu'un pas est censé faire atterrir le marcheur de l'autre côté du plan réfléchissant, il est en fait réfléchi par le plan selon la loi de Descartes de la réflexion. Une fois que la trajectoire¹⁰ est générée, on isole les points de la trajectoire appartenant à son enveloppe convexe à l'aide de l'algorithme de Graham [Graham 1972], expliqué très clairement dans [Randon-Furling 2009a]. Son périmètre est ensuite calculé pour chaque trajectoire et moyenné sur l'ensemble des trajectoires, puis renormalisé, ainsi que la distance initiale, par $\sqrt{DT}$ avec $D = 1/2$ pour un mouvement brownien bidimensionnel, et ce pour plusieurs distances initiales au plan réfléchissant (voir figure 2.6).

Sur la figure 2.6, on constate, à la fois avec le tracé de l'expression exacte et avec les simulations numériques, que le périmètre de l'enveloppe convexe est une fonction *non monotone* de la distance initiale au plan réfléchissant. En effet, de manière tout à fait surprenante, elle possède un minimum par rapport à la distance initiale. En d'autres termes, il existe une distance initiale non nulle qui permet de minimiser le périmètre de l'enveloppe convexe.

8. Même tronquée, cette somme est peu maniable et s'intègre en particulier difficilement par rapport à u et θ .

9. Prendre une distance de coupure nulle occasionnerait une divergence du temps de calcul de la trajectoire, celle-ci s'approchant de plus en plus lentement du plan réfléchissant. En pratique, il faut ajuster avec soin cette distance, afin qu'elle ne soit ni trop grande pour bien décrire la réflexion, ni trop petite pour garder un temps de calcul raisonnable.

10. Dont le nombre de pas n'est pas connu à l'avance à cause du pas adaptatif

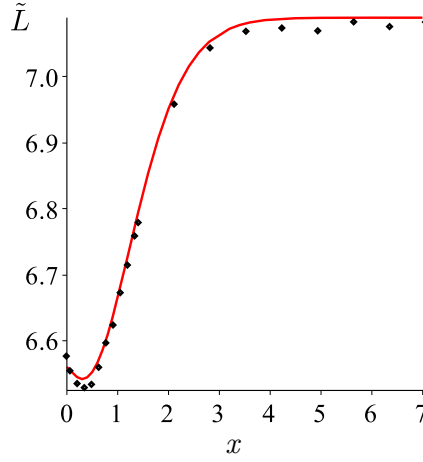


FIGURE 2.6 – Fonction d’échelle du périmètre moyen à deux dimensions en fonction de la distance initiale au plan réfléchissant renormalisée. Le tracé de l’expression exacte de cette fonction apparaît en trait plein rouge et les points noirs correspondent aux simulations numériques.

Après l’étude préliminaire du cas unidimensionnel, il était naturel d’attendre une fonction croissante, supposition renforcée par l’intuition que l’élément réfléchissant (point ou plan) empêche le mouvement brownien de s’étendre, d’autant plus qu’il en part près. Il semble donc que l’intuition ne fournisse qu’une partie du mécanisme à l’œuvre dans ce processus.

Avant de démontrer l’existence de ce minimum, essayons de comprendre quels mécanismes physiques engendrent ce comportement non monotone pour le moins surprenant. Pour cela, il est utile de découper l’enveloppe convexe en deux parties séparées par la droite parallèle au plan passant par le point de départ. Cela définit une portion dite “vers le plan” et une portion dite “vers l’extérieur” (voir figure 2.7(a)). Pour simplifier, nous considérerons dans ce qui suit qu’en l’absence de confinement, l’enveloppe convexe peut être représentée schématiquement comme un cercle de rayon d’ordre $\sqrt{Dt}$ au temps t . Les longueurs renormalisées $\tilde{L}_{\text{plan}}$ et $\tilde{L}_{\text{ext}}$ de chacune des deux portions sont définies de la manière suivante

$$\tilde{L}_{\text{plan}}(x) = 2 \int_{-\pi/2}^0 d\theta \tilde{\mathcal{M}}(\theta, x) \quad (2.43)$$

$$\tilde{L}_{\text{ext}}(x) = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \tilde{\mathcal{M}}(\theta, x). \quad (2.44)$$

Le minimum de la fonction d’échelle du périmètre moyen peut être interprété comme le résultat d’une compétition entre deux effets antagonistes du plan réfléchissant qui agissent chacun sur une des deux portions d’enveloppe convexe définies ci-dessus :

- (i) un effet de réduction de l’espace accessible aux trajectoires, qui a un impact sur la portion vers le plan,
- (ii) un effet de répulsion effective des trajectoires, qui affecte au contraire la portion vers l’extérieur.

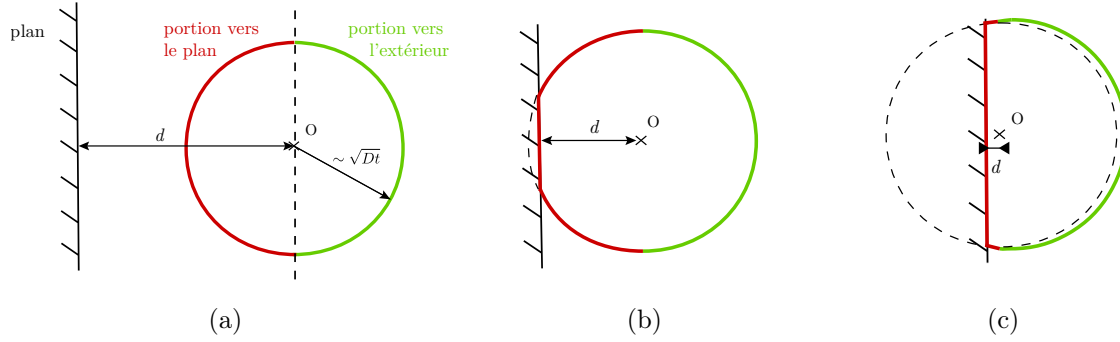


FIGURE 2.7 – Illustration de l'impact des deux effets antagonistes du plan, réduction de l'espace accessible et répulsion effective, sur les deux portions d'enveloppe convexe définie en (a), pour trois domaines disjoints de distances initiales : (a) $d \gg \sqrt{Dt}$, (b) $d \sim \sqrt{Dt}$ et (c) $d \ll \sqrt{Dt}$.

Pour bien comprendre à quoi correspondent ces effets, considérons trois situations distinctes. Tout d'abord, si le point de départ est situé loin du plan (voir figure 2.7(a)), c'est-à-dire si $d \gg \sqrt{Dt}$, au temps d'observation t , les trajectoires n'ont pas encore eu le temps de sentir la présence du plan réfléchissant. Les deux portions d'enveloppe convexe ont en moyenne la même longueur $2\sqrt{\pi Dt}$, comme dans le cas sans confinement (cf. équation (2.1)).

Ensuite, si le point de départ est situé de sorte que $d \sim \sqrt{Dt}$, au temps t , les trajectoires commencent à sentir la présence du plan, qui les bloque. Apparaît alors le premier effet du plan réfléchissant, la réduction de l'espace accessible aux trajectoires, qui ampute la portion de l'enveloppe convexe vers le plan (voir figure 2.7(b)). Par conséquent, cet effet abaisse sa longueur par rapport au cas sans confinement¹¹, et ce d'autant plus que la distance initiale est faible.

Enfin, si le point de départ est très proche du plan, c'est-à-dire si $d \ll \sqrt{Dt}$, outre l'effet de réduction de l'espace accessible, qui est encore plus marqué que précédemment, apparaît un nouvel effet plus subtil du plan, la répulsion effective des trajectoires. En effet, en bloquant les trajectoires dans une direction, le plan réfléchissant permet à l'ensemble des trajectoires d'aller explorer des régions plus éloignées dans la direction opposée, comme s'il les poussait vers l'extérieur. De manière schématisée, il y a deux fois plus de trajectoires qui partent vers la partie droite de l'espace qu'en l'absence de confinement, où la moitié des trajectoires partent vers la partie gauche de l'espace. En conséquence, la portion d'enveloppe convexe vers l'extérieur est plus renflée qu'en l'absence de confinement (voir figure 2.7(c)), voyant ainsi sa longueur augmenter d'autant plus que la distance initiale est petite. C'est l'apparition de ce deuxième effet, qui domine le premier effet à faible distance initiale, qui provoque la remontée ultime du périmètre moyen lorsque la distance initiale tend vers zéro.

Remarquons que si cette discussion qualitative aide à interpréter *a posteriori* la non monotonie du périmètre moyen, elle ne permet cependant pas de la prévoir *a priori*. En effet, rien n'indique l'importance relative des deux effets, le deuxième effet ayant tout à fait pu ne pas compenser le premier. Quantitativement, on constate en réalité que la portion vers l'extérieur croît plus vite lorsque l'on diminue la distance initiale que la portion vers le plan ne décroît

11. Schématiquement, la partie en arc de cercle représentée en pointillés sur la figure 2.7(b) par la partie rectiligne en trait plein, qui est plus courte.

(voir figure 2.8). L'effet de répulsion effective finit donc bien par dominer l'effet de réduction de l'espace accessible à petite distance initiale. Par ailleurs, on voit sur la figure 2.8 que comme anticipé qualitativement, la répulsion effective est un effet à plus courte distance que la réduction de l'espace accessible.

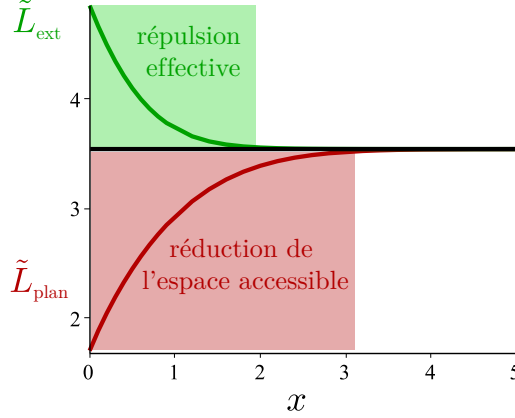


FIGURE 2.8 – Tracé de la longueur moyenne des deux portions d'enveloppe convexe à partir de leur expression analytique. Les zones colorées représentent la zone d'influence des deux effets antagonistes du plan réfléchissant sur ces deux portions d'enveloppe convexe. La répulsion effective a un effet sur la portion vers l'extérieur dans la zone $x \lesssim 2$ alors que la réduction de l'espace accessible agit sur la portion vers le plan dans une zone plus grande $x \lesssim 3$.

Il est d'ailleurs instructif de réexaminer le cas unidimensionnel à la lumière de cette discussion qualitative. Les deux effets précédemment mentionnés existent également à une dimension¹², mais leurs variations d'amplitude par rapport à la distance initiale se compensent exactement à distance initiale nulle. Cela explique la présence du minimum de l'extension moyenne en $x = 0$ avec une tangente horizontale, les deux portions de l'extension (à savoir les maximums vers la gauche et la droite) étant respectivement linéairement décroissante et linéairement croissante lorsque la distance initiale tend vers zéro (voir les équations (2.20) et (2.21)).

Enfin, il est intéressant de constater que la combinaison de ces deux effets a une répercussion sur une autre observable du système, l'extension moyenne de la trajectoire dans la direction θ (voir figure 2.9), définie comme

$$\langle \Delta^{(d)}(\theta, t) \rangle \equiv \langle \mathcal{M}^{(d)}(\theta, t) \rangle + \langle \mathcal{M}^{(d)}(-\theta, t) \rangle. \quad (2.45)$$

Cette extension moyenne possède également un minimum par rapport à la distance initiale dans toutes les directions θ sauf dans les deux directions particulières $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$ (voir figure 2.10). La direction $\theta = 0$ correspond à la direction parallèle au plan réfléchissant, dans laquelle le mouvement brownien n'est pas contraint, conduisant donc à une extension moyenne indépendante de la distance initiale et égale à la valeur sans confinement $4/\sqrt{\pi}$, que l'on a entre autres obtenue à une dimension comme valeur asymptotique de l'extension moyenne d'un

12. La réduction de l'espace accessible aux trajectoires étant l'effet intuitif.

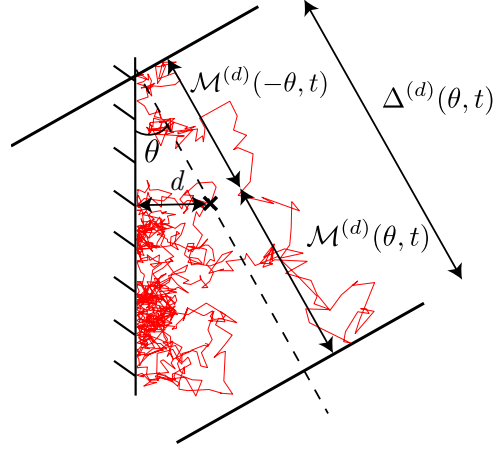


FIGURE 2.9 – Définition de l'extension $\Delta^{(d)}(\theta, t)$ de la trajectoire (en rouge), qui est la somme des maximums dans les directions θ et $-\theta$.

mouvement brownien partant infiniment loin du point réfléchissant (voir équation (2.26)). La direction $\theta = \pi/2$ correspond quant à elle à la direction orthogonale au plan réfléchissant et est en fait équivalente à la géométrie unidimensionnelle étudiée précédemment. La position et la profondeur du minimum varient continûment avec la direction θ . Dans le premier quadrant $\theta \in [0, \pi/2]$, qui par symétrie décrit toutes les directions¹³, l'extension est très “plate” pour les directions proches de $\theta = 0$ puis se creuse progressivement plus on s'approche de la direction orthogonale au plan, où l'influence du plan est la plus marquée. Le minimum se rapproche quant à lui de $x = 0$ (distance initiale nulle) à mesure que θ augmente pour atteindre sa position $x = 0$ en $\theta = \pi/2$ comme dans le cas unidimensionnel.

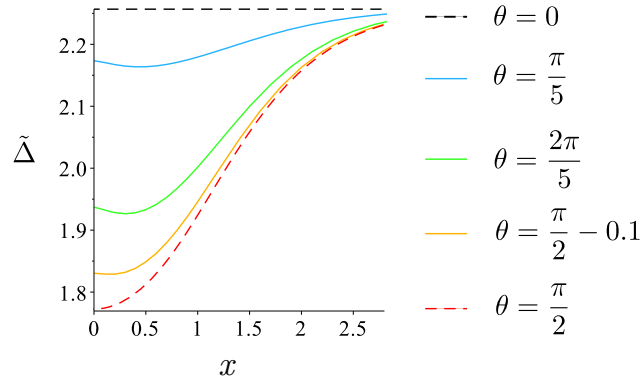


FIGURE 2.10 – Extension renormalisée $\tilde{\Delta}$ de la trajectoire en fonction de la distance initiale renormalisée x pour différentes directions θ . Les deux directions singulières (parallèle et perpendiculaire au plan réfléchissant), pour lesquelles l'extension est une fonction monotone, sont représentées en pointillés. Pour les autres directions, l'extension possède un minimum.

13. Par symétrie axiale, les directions $[0, \pi/2]$ sont équivalentes aux directions $[\pi/2, \pi]$, et d'après la définition de l'extension dans la direction θ donnée par l'équation (2.45), l'intervalle $[0, \pi]$ décrit toutes les directions possibles.

L'existence de ce minimum dans toutes les directions (hormis parallèlement et perpendiculairement au plan) montre donc, ainsi que l'on pouvait s'y attendre, que les deux effets antagonistes du plan ont une répercussion également sur le maximum moyen de la trajectoire dans chaque direction θ . En effet, comme on peut le constater sur la figure 2.11 qui donne une représentation polaire de $\tilde{\mathcal{M}}(\theta, x)$, le maximum moyen est plus grand que celui obtenu en l'absence de confinement dans les directions "vers l'extérieur" ($0 < \theta < \pi/2$), alors qu'il est moins grand que cette valeur dans les directions "vers le plan" ($-\pi/2 < \theta < 0$). La représentation de la figure 2.11 permet de voir que la répulsion effective a un effet conséquent dans les directions vers l'extérieur lorsque la distance initiale au plan est petite, et qu'il est d'amplitude comparable à l'effet de réduction de l'espace accessible. En revanche, les effets de la répulsion effective s'effacent plus vite que ceux de la réduction de l'espace accessible lorsque la distance initiale augmente, comme on le voit sur la figure pour $x = 1$ (*i.e.* $d = \sqrt{Dt}$).

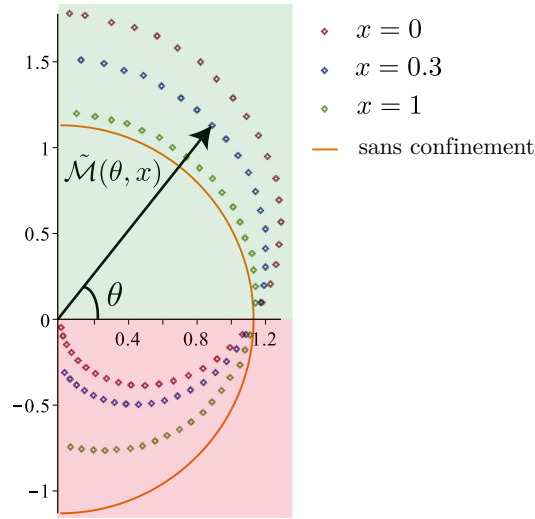


FIGURE 2.11 – Tracé du maximum moyen renormalisé dans la direction θ paramétré par l'angle θ . La zone colorée en vert correspond à la portion vers l'extérieur ($\theta > 0$) et la zone colorée en rouge à la portion vers le plan réfléchissant ($\theta < 0$). Les points représentent le maximum moyen pour trois valeurs différentes de la distance initiale, et le cercle en trait plein orange donne la valeur du maximum moyen en l'absence de confinement ($2/\sqrt{\pi} \simeq 1.13$) qui ne dépend pas par symétrie de la direction.

2.3.3 Analyse quantitative du périmètre moyen

Le tracé de la fonction d'échelle du périmètre de l'enveloppe convexe en fonction de la distance initiale, bien que permettant de constater visuellement la non monotonie de cette fonction, ne constitue pas une preuve mathématique de l'existence de ce minimum surprenant. Nous allons donc nous employer dans cette partie à fournir une démonstration de cette propriété. Pour cela, nous allons montrer que

- (i) la valeur en $x = 0$ du périmètre moyen renormalisé (lorsque le mouvement brownien part sur le plan réfléchissant) est inférieure à sa valeur asymptotique lorsque x tend vers l'infini,

(ii) le périmètre moyen est une fonction localement décroissante en $x = 0$.

Ces deux propriétés combinées imposent l'existence d'un minimum par rapport à la distance initiale x pour cette fonction.

2.3.3.1 Point de départ sur le plan réfléchissant

Commençons par démontrer le point (i) précédent. Pour cela, nous allons déterminer la valeur du périmètre moyen de l'enveloppe convexe quand le marcheur brownien part sur le plan réfléchissant, c'est-à-dire en $x = 0$. Nous allons montrer que la fonction d'échelle du périmètre se simplifie considérablement dans ce cas. Ceci se manifeste tout d'abord au travers des relations géométriques (2.36), qui deviennent

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{M}{\cos \theta} \\ \varphi_0 &= \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

La probabilité de survie $S^{(0)}(u, \theta)$ qui intervient dans l'expression établie précédemment de la fonction d'échelle du maximum

$$\tilde{\mathcal{M}}(\theta, 0) = \int_0^{+\infty} du \left(1 - S^{(0)}(u, \theta)\right) \quad (2.47)$$

est la probabilité de survie d'un marcheur brownien partant de la bissectrice d'un secteur angulaire absorbant d'angle $\alpha = \pi - 2\theta$ (voir figure 2.5), à une distance $r_0 = u\sqrt{Dt}/\cos \theta$ de son sommet. D'après l'équation (2.35), elle vaut

$$S^{(0)}(u, \theta) = \frac{u}{\sqrt{\pi} \cos \theta} e^{-\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \left[I_\nu \left(\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) + I_{\nu+1} \left(\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) \right]. \quad (2.48)$$

En réécrivant le 1 de l'intégrande de l'équation (2.47) de la manière suivante

$$1 = \frac{u}{\sqrt{\pi} \cos \theta} e^{-\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} 2 \frac{e^{\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta}}}{\sqrt{2\pi \frac{u^2}{8 \cos^2 \theta}}}, \quad (2.49)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}(\theta, 0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \cos \theta} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \int_0^{+\infty} du u e^{-\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta}} \\ &\quad \times \left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta}}}{\sqrt{\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta}}} - I_\nu \left(\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) - I_{\nu+1} \left(\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

puis en changeant de variable $v = u^2/(8 \cos^2 \theta)$,

$$\tilde{\mathcal{M}}(\theta, 0) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cos \theta \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \int_0^{+\infty} dv e^{-v} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^v}{\sqrt{v}} - I_\nu(v) - I_{\nu+1}(v) \right). \quad (2.51)$$

Un des moyens permettant de calculer cette intégrale consiste alors à la régulariser en introduisant un facteur $\beta \geq 1$, c'est-à-dire à calculer l'intégrale suivante

$$A(\beta, m) \equiv \int_0^{+\infty} dv e^{-\beta v} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^v}{\sqrt{v}} - I_\nu(v) - I_{\nu+1}(v) \right) \quad (2.52)$$

qui n'est autre qu'une transformée de Laplace. Une fois cette fonction $A(\beta, m)$ déterminée (voir l'annexe D pour les détails), on obtient l'expression très simple suivante pour la fonction d'échelle du maximum en faisant tendre β vers 1

$$\tilde{\mathcal{M}}(\theta, 0) = 2\sqrt{\pi} \frac{\cos \theta}{\pi - 2\theta}. \quad (2.53)$$

Cette fonction a bien les caractéristiques attendues. En effet, elle est égale au maximum renormalisé sans confinement $2/\sqrt{\pi}$ dans la direction parallèle au plan $\theta = 0$, est inférieure à cette valeur pour les directions vers le mur $\theta \in [-\pi/2, 0]$ et supérieure à cette valeur pour les directions vers l'extérieur $\theta \in [0, \pi/2]$ (voir figure 2.11 pour $x = 0$).

En utilisant la formule de Cauchy

$$\tilde{L}(0) = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \tilde{\mathcal{M}}(\theta, 0), \quad (2.54)$$

on obtient finalement la valeur de la fonction d'échelle du périmètre pour une distance initiale nulle

$$\tilde{L}(0) = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta 2\sqrt{\pi} \frac{\cos \theta}{\pi - 2\theta} = 2\sqrt{\pi} \text{Si}(\pi) \simeq 6.565 \quad (2.55)$$

où $\text{Si}(x)$ est la fonction sinus intégral définie par $\text{Si}(x) \equiv \int_0^x dt \sin t/t$. Cette valeur de la fonction d'échelle du périmètre en $x = 0$ est inférieure à celle obtenue en l'absence de confinement, qui correspond également à la valeur asymptotique de la fonction d'échelle du périmètre en présence du plan réfléchissant lorsque le marcheur en part très loin et qu'il ne ressent plus le confinement¹⁴

$$\tilde{L}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 4\sqrt{\pi} \simeq 7.090. \quad (2.56)$$

Nous avons donc entre autres établi le point (i) des deux points mentionnés dans l'introduction de la partie 2.3.3, nécessaires à la démonstration de l'existence du minimum du périmètre moyen.

2.3.3.2 Point de départ près du plan

Il faut maintenant démontrer le point (ii) mentionné au début de la partie 2.3.3, c'est-à-dire que le périmètre moyen est une fonction localement décroissante en $x = 0$. Pour cela, nous allons déterminer le développement de la fonction d'échelle du périmètre $\tilde{L}$ à petite distance initiale, c'est-à-dire $x \ll 1$, à partir de celui de la fonction d'échelle du maximum $\tilde{\mathcal{M}}(\theta, x)$

14. Le temps d'observation t est fixé donc lorsque la distance initiale au plan réfléchissant tend vers l'infini, les trajectoires n'ont pas encore senti la présence du plan au temps t , puisque leur probabilité de présence au niveau du plan, qui est proportionnelle à $e^{-d^2/(Dt)}$, est extrêmement faible.

qui dépend *a priori* de la direction θ . Par symétrie, le quadrant $\theta \in [0, \pi/2]$ est équivalent au quadrant $[\pi/2, \pi]$, de même que les quadrants $[-\pi/2, 0]$ et $[-\pi, -\pi/2]$. Nous restreindrons notre étude donc aux directions $[-\pi/2, \pi/2]$.

Comme exposé en détail dans l'annexe E, le développement de $\tilde{\mathcal{M}}(\theta, x)$ et la technique pour l'obtenir dépendent du signe de θ . En effet, un calcul fastidieux mais sans subtilité permet, en développant l'intégrande de l'équation (2.40) à petit x et en se ramenant à des calculs de transformées de Laplace comme dans la section précédente, d'obtenir le développement du maximum moyen pour des angles θ positifs, donné ici à l'ordre 2 en x . En revanche, cette technique échoue pour les directions θ négatives si l'on tente d'obtenir un développement au-delà de l'ordre 1. Celui-ci possède en fait une non analyticité, de manière plutôt surprenante, à savoir ici un ordre intermédiaire entre les ordres 1 et 2 dont l'exposant dépend lui-même de θ . Pour tenir compte de cette non analyticité, il s'agit donc d'isoler le terme qui en est à l'origine et provoque une divergence dans le calcul direct de l'ordre 2, et de le traiter à part (voir l'annexe E pour les détails).

  l'issue de cette analyse, on trouve donc que la fonction d'échelle du maximum possède deux formes de développement à petit x différentes pour des directions θ vers le plan ($\theta < 0$) ou vers l'extérieur ($\theta > 0$)

$$\tilde{\mathcal{M}}(\theta, x) - 2\sqrt{\pi} \frac{\cos \theta}{\pi - 2\theta} + \sin \theta x = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\cos \theta}{\pi - 2\theta} x^2 + O(x^3) & \text{pour } \theta > 0 \\ C(\theta) x^{2+2\theta/\alpha} + O(x^2) & \text{pour } \theta < 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

avec $\alpha = \pi - 2\theta$ et $C(\theta)$ un coefficient déterminé explicitement

$$C(\theta) \equiv \frac{\cos \theta}{2^{4\nu(0)+1} \sqrt{\pi} \Gamma(1 + \nu(0))} \left\{ \frac{1}{1 + \nu(0)} - \int_1^{\frac{1}{\cos^2 \theta}} dz \sqrt{\frac{z}{z-1}} \cos \left(\frac{\pi}{\alpha} \arccos \left(-\frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}} \right) \right) z^{\nu(0)} \right. \\ \left. - \int_1^{+\infty} dz \left[\sqrt{\frac{z}{z-1}} \cos \left(\frac{\pi}{\alpha} \arccos \left(\sqrt{\frac{z-1}{z}} \right) \right) - 1 \right] z^{\nu(0)} \right\} \quad (2.58)$$

avec $\nu(0) = \theta/\alpha$ l'indice (2.42)  valu  en $m = 0$.

Le domaine de validité du développement pour θ négatif donné par l'équation (2.57) est fortement dépendant de la valeur de θ . En effet, il est grand lorsque θ est proche de zéro et diminue significativement lorsque θ s'approche de $-\pi/2$, comme illustré sur la figure 2.12 pour deux valeurs de l'angle θ .

La fonction d'échelle du périmètre, dont on rappelle qu'elle s'obtient à partir de celle du maximum par intégration sur la direction θ d'après la formule de Cauchy

$$\tilde{L}(x) = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \tilde{\mathcal{M}}(\theta, x), \quad (2.59)$$

ne possède donc pas non plus un développement analytique en la distance initiale renormalisée x . Le terme d'ordre 0 de ce développement correspond à la valeur $\tilde{L}(x = 0)$ donnée en

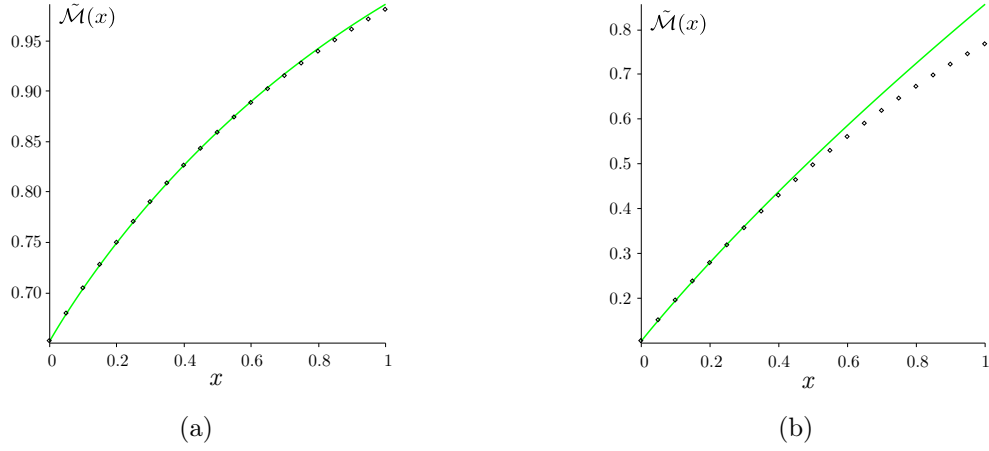


FIGURE 2.12 – Tracé de l’expression exacte de la fonction d’échelle du maximum (points) et du développement à petit x donné à l’équation (2.57) (trait plein), pour $\theta = -\pi/5$ (a) et $\theta = -4\pi/9$ (b). Le domaine de validité du développement, qui est remarquablement grand lorsque θ est proche de 0 par valeurs négatives, diminue fortement lorsque θ s’approche de $-\pi/2$.

équation (2.55) et le terme d’ordre 1 vaut 0, par intégration sur θ du terme linéaire en x du maximum (voir équation (2.57)), ce qui explique pourquoi nous sommes allés au-delà de l’ordre 1 dans le développement du maximum. Le développement à deux termes de la fonction d’échelle du périmètre découle donc de l’expression suivante

$$\tilde{L}(x) = 2\sqrt{\pi}\text{Si}(\pi) + 2 \int_{-\pi/2}^0 d\theta C(\theta) x^{2+2\frac{\theta}{\pi-2\theta}} + O(x^2). \quad (2.60)$$

En effet, la puissance de x est plus petite que 2 pour $\theta < 0$ et donc dominante par rapport aux contributions d’ordre 2 des directions $\theta > 0$ mises en jeu dans l’équation (2.59). A petit x , l’intégrale (2.60) est dominée par le voisinage de $\theta = -\pi/2$, l’exposant $2 + 2\theta/(\pi - 2\theta)$ étant une fonction croissante de θ . Cependant, dans l’expression de $C(\theta)$ donnée en (2.58), seul un des trois termes a une limite non nulle lorsque θ tend vers $-\pi/2$. En effet, le $\cos \theta$ en facteur élimine le premier et le troisième termes à l’intérieur de l’accolade, qui ont tout deux une limite finie. Au voisinage de $-\pi/2$, $C(\theta)$ se comporte donc comme

$$C(\theta) \underset{\theta \rightarrow -\pi/2}{\sim} -\frac{\cos \theta}{2^{4\nu(0)+1}\sqrt{\pi} \Gamma(1+\nu(0))} \int_1^{\frac{1}{\cos^2 \theta}} dz \sqrt{\frac{z}{z-1}} z^{\nu(0)} \cos \left[\frac{\pi}{\pi-2\theta} \arccos \left(-\frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}} \right) \right]. \quad (2.61)$$

En introduisant le petit paramètre $\varepsilon = \theta + \pi/2$ et la nouvelle variable $v = z\varepsilon^2$, ceci est équivalent à

$$C(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\varepsilon^{-1-2\nu(0)}}{2^{4\nu(0)+1}\sqrt{\pi} \Gamma(1+\nu(0))} \int_{\varepsilon^2}^1 dv \sqrt{\frac{v}{v-\varepsilon^2}} v^{\nu(0)} \cos \left[\frac{\pi}{2\pi-2\varepsilon} \arccos \left(-\frac{\sqrt{v-\varepsilon^2}}{\sqrt{v}} \right) \right]. \quad (2.62)$$

Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, le cosinus est équivalent à

$$\cos \left[\frac{\pi}{2\pi-2\varepsilon} \arccos \left(-\frac{\sqrt{v-\varepsilon^2}}{\sqrt{v}} \right) \right] \sim \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{v}} - 1 \right) \quad (2.63)$$

et l'équation (2.62) devient

$$C(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{\pi} \Gamma(3/4)} \int_{\varepsilon^2}^1 dv \left(\frac{1}{\sqrt{v}} - 1 \right) v^{-1/4}, \quad (2.64)$$

soit

$$C(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} -\frac{4\sqrt{\varepsilon}}{3\sqrt{\pi} \Gamma(3/4)}. \quad (2.65)$$

Par ailleurs, la puissance de x apparaissant dans (2.60) est équivalente au voisinage de $\theta = -\pi/2$ (ou encore $\varepsilon = 0$) à

$$x^{2+2\frac{\theta}{\pi-2\theta}} = \exp \left[\left(2 + \frac{2\theta}{\pi-2\theta} \right) \ln x \right] \sim x^{3/2} \exp \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \ln x \right). \quad (2.66)$$

On peut donc réécrire

$$\int_{-\pi/2}^0 d\theta C(\theta) x^{2+2\frac{\theta}{\pi-2\theta}} \sim -\frac{4x^{3/2}}{3\sqrt{\pi} \Gamma(3/4)} \int_0^{\pi/2} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \exp \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \ln x \right). \quad (2.67)$$

Lorsque x est petit, $\ln x < 0$ et $|\ln x|$ est grand. Nous sommes donc dans le cadre d'application de la méthode du col en $\varepsilon = 0$, ce qui permet d'écrire [Bender 1999]

$$\int_{-\pi/2}^0 d\theta C(\theta) x^{2+2\frac{\theta}{\pi-2\theta}} \sim \int_0^{+\infty} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \exp \left(-\frac{\varepsilon}{2\pi} \ln \frac{1}{x} \right) \sim \frac{\sqrt{2\pi^2}}{(\ln \frac{1}{x})^{3/2}}. \quad (2.68)$$

Le développement à petit x de la fonction d'échelle du périmètre de l'enveloppe convexe est donc

$$\tilde{L}(x) - 2\sqrt{\pi} \text{Si}(\pi) \underset{x \ll 1}{\sim} -\frac{8\sqrt{2\pi^3}}{3\Gamma(3/4)} \frac{x^{3/2}}{(\ln \frac{1}{x})^{3/2}}. \quad (2.69)$$

Cette non analyticité, qui découle directement de celle de la fonction d'échelle du maximum, est à nouveau une propriété qui contraste avec le cas unidimensionnel, où la fonction d'échelle de l'extension est analytique (voir équation (2.24)).

Remarquons que le domaine de validité de ce développement est extrêmement petit. Ceci n'est pas surprenant dans la mesure où l'intégrale (2.60) est dominée par le voisinage de $\theta = -\pi/2$, où l'intégrande est lui-même un développement du maximum qui a un domaine de validité tendant vers 0 lorsque θ tend vers $-\pi/2$, comme nous l'avons déjà fait remarquer (voir figure 2.12). Néanmoins, le but de cette analyse consiste moins à établir une expression approximant bien le périmètre à petite distance initiale qu'à prouver l'existence du minimum du périmètre moyen de l'enveloppe convexe par rapport à la distance initiale, comme annoncé au début de la section 2.3.3. En effet, le signe de la correction à la valeur de la fonction d'échelle en $x = 0$, donnée par l'équation (2.69), montre donc qu'elle est localement décroissante en $x = 0$. Cette information, combinée au fait que la valeur de cette fonction en $x = 0$ est inférieure à sa valeur asymptotique, nous permet donc bien de conclure à l'existence du minimum de la fonction d'échelle du périmètre de l'enveloppe convexe.

Après l'étude du périmètre moyen de l'enveloppe convexe menée dans ce paragraphe, nous allons maintenant nous tourner vers une autre caractéristique géométrique de l'enveloppe convexe.

2.3.4 Longueur moyenne de la portion du plan réfléchissant visitée

Nous avons discuté longuement la pertinence du découpage de l'enveloppe convexe en deux portions, séparées par la droite parallèle au plan réfléchissant passant par le point de départ (portions vers le plan et vers l'extérieur, voir figure 2.7). De manière complémentaire, il est possible d'obtenir une quantification supplémentaire intéressante de l'enveloppe convexe en étudiant la longueur de la portion du plan réfléchissant visitée par le mouvement brownien au temps d'observation t ¹⁵. Elle est définie comme la distance maximale entre deux points où la trajectoire a touché le plan réfléchissant (voir figure 2.13). Dans ce qui suit, nous allons déterminer la fonction d'échelle de la longueur moyenne de cette portion $\tilde{\mathcal{E}}(x) \equiv \langle \mathcal{E}(d, t) \rangle / \sqrt{Dt}$ en fonction de la distance initiale au plan $x = d/\sqrt{Dt}$. Nous examinerons tout d'abord le cas où le marcheur brownien part sur le plan réfléchissant, puis nous en déduirons le résultat dans le cas où le point de départ n'est plus situé sur le plan.

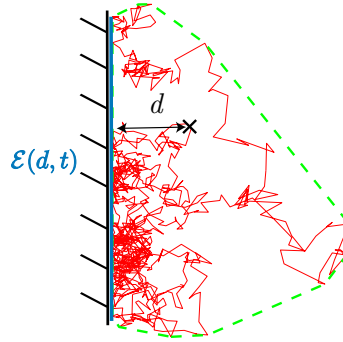


FIGURE 2.13 – Définition de la longueur de la portion du plan réfléchissant visitée $\mathcal{E}(d, t)$ au temps t pour un mouvement brownien partant d'une distance d du plan réfléchissant. Il s'agit en pratique de la portion d'enveloppe convexe située le long du plan réfléchissant, représentée par le segment bleu, l'enveloppe convexe étant symbolisée par les pointillés verts.

2.3.4.1 Cas particulier d'un mouvement brownien partant du plan

Déterminons tout d'abord la longueur moyenne de la portion du plan visitée dans le cas simple où la distance initiale vaut zéro, c'est-à-dire $\tilde{\mathcal{E}}(0)$. La démonstration s'appuie sur des raisonnements déjà employés pour les calculs de maximum moyen de mouvement brownien effectués dans les paragraphes précédents.

La probabilité pour que la longueur de la demi-portion du plan visitée $\mathcal{E}_{\text{demi}}$, définie comme la longueur de la portion visitée d'un seul côté du point de départ, soit plus petite que m est exactement la probabilité de survie de la trajectoire en présence d'une demi-droite absorbante le long du plan réfléchissant s'arrêtant à une distance m du point de départ (voir figure 2.14(a))

$$\text{Prob}(\mathcal{E}_{\text{demi}} < m) = S(m, \pi), \quad (2.70)$$

correspondant également à la probabilité de survie dans un secteur angulaire absorbant d'angle au sommet 2π avec un point de départ situé à une distance m du sommet du secteur et paramétré

15. Qui coïncide avec la partie rectiligne de l'enveloppe convexe située le long du plan réfléchissant.

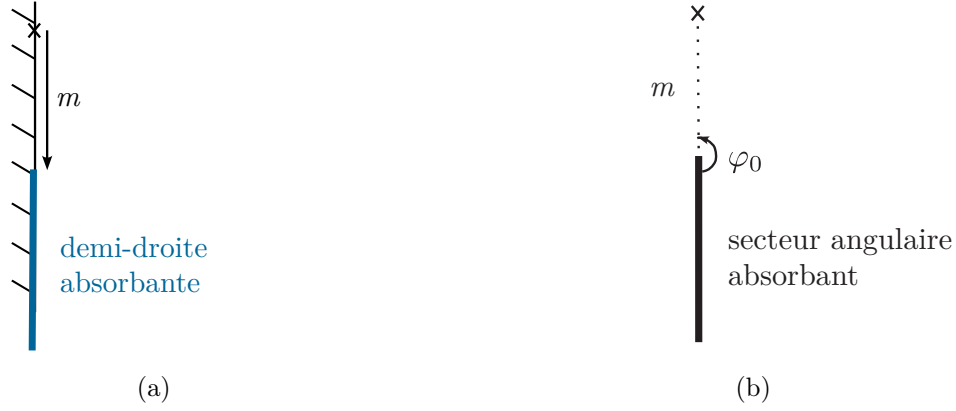


FIGURE 2.14 – La probabilité de survie en présence du plan réfléchissant et de la demi-droite absorbante représentée en bleu (a) est égale à celle dans un secteur angulaire absorbant d'angle 2π avec un point de départ situé à une distance m du sommet du secteur angulaire et paramétré par l'angle $\varphi_0 = \pi$ (b).

par l'angle $\varphi_0 = \pi$ (voir figure 2.14(b)). En introduisant la distance renormalisée $u = m/\sqrt{Dt}$, cette probabilité de survie est donnée par

$$S(u, \pi) = \operatorname{erf}\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{u}{\pi^{3/2}} \exp\left(-\frac{u^2}{8}\right) \int_0^{+\infty} dv \exp\left(-\frac{u^2}{8} \operatorname{ch} v\right) \operatorname{sh} \frac{v}{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2} \operatorname{sh} \frac{v}{4}}\right) \quad (2.71)$$

d'après l'expression de la probabilité de survie dans un secteur angulaire que l'on établira dans la section 2.4. En suivant les mêmes étapes que lors du calcul du maximum moyen dans la direction θ (équations (2.5) à (2.8)), on obtient l'expression de la longueur moyenne renormalisée de la portion du plan réfléchissant visitée (le double de la demi-portion $\mathcal{E}_{\text{demi}}$)

$$\tilde{\mathcal{E}}(0) = 2 \tilde{\mathcal{E}}_{\text{demi}}(0) = 2 \int_0^{+\infty} du [1 - S(u, \pi)]. \quad (2.72)$$

Cette intégrale possède une expression analytique exacte

$$\tilde{\mathcal{E}}(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \simeq 1.128. \quad (2.73)$$

On remarque que la longueur moyenne de la portion du plan visitée vaut exactement la moitié de l'extension moyenne de la trajectoire parallèlement au plan réfléchissant, ou encore la moitié de l'extension moyenne de la trajectoire en l'absence de confinement.

2.3.4.2 Cas général

Déterminons maintenant la longueur moyenne de la portion du plan réfléchissant visitée au temps t par un mouvement brownien partant d'une distance d quelconque du plan réfléchissant. Si la trajectoire ne touche pas le plan avant le temps t , la longueur de la portion visitée est nulle. En revanche, si le marcheur brownien touche le plan à un temps $t' < t$, le calcul de la longueur

moyenne de la portion visitée se ramène à celui de $\langle \mathcal{E}(0, t-t') \rangle$. Par conséquent, $\langle \mathcal{E}(d, t) \rangle$ s'obtient en moyennant sur tous les temps de premier passage par le plan réfléchissant possibles

$$\langle \mathcal{E}(d, t) \rangle = \int_0^t dt' P(d, t_{abs} = t') \langle \mathcal{E}(0, t - t') \rangle \quad (2.74)$$

avec $P(d, t_{abs} = t')$ la densité de probabilité de premier passage sur le plan au temps t' partant d'une distance d de celui-ci, donnée par [Redner 2001]

$$P(d, t_{abs} = t') = \frac{d}{\sqrt{4\pi D t'^{3/2}}} \exp\left(-\frac{d^2}{4Dt'}\right). \quad (2.75)$$

L'équation (2.74) prend la forme d'une convolution, c'est pourquoi il est pratique d'en prendre la transformée de Laplace¹⁶

$$\langle \hat{\mathcal{E}}(d, s) \rangle = \hat{P}(d, s) \langle \hat{\mathcal{E}}(0, s) \rangle. \quad (2.76)$$

Les deux transformées de Laplace mises en jeu valent respectivement

$$\langle \hat{\mathcal{E}}(0, s) \rangle = \sqrt{\frac{D}{s^3}} \quad (2.77)$$

et

$$\hat{P}(d, s) = \exp\left(-d\sqrt{\frac{s}{D}}\right). \quad (2.78)$$

Après transformation inverse de Laplace, on obtient finalement l'expression analytique de la longueur moyenne de la portion du plan réfléchissant visitée au temps t en fonction de la distance initiale renormalisée $x = d/\sqrt{Dt}$

$$\tilde{\mathcal{E}}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) - x \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\right) \quad (2.79)$$

qui est tracée sur la figure 2.15.

Il s'agit sans grande surprise d'une fonction décroissante de la distance initiale au plan, le marcheur ayant d'autant moins l'occasion de revenir plusieurs fois sur le plan qu'il en part loin. Cette portion du plan réfléchissant visitée par le mouvement brownien correspond, comme mentionné dans la figure 2.13, à la portion rectiligne de l'enveloppe convexe qui est située le long du plan. Si l'on se ramène à la vision schématisée de l'enveloppe convexe sous la forme d'un cercle en l'absence de confinement, cette portion rectiligne est le résultat de l'amputation de l'enveloppe convexe par le plan réfléchissant (voir figure 2.7(b) et (c)). En effet, son existence est due à l'effet de réduction de l'espace accessible aux trajectoires, et sa longueur n'est donc significative que dans le domaine de distances initiales tel que l'effet de réduction de l'espace accessible est actif, en pratique $x \leq 3, 5$ (voir les figures 2.8 et 2.15). L'effet de répulsion effective des trajectoires n'influe en revanche pas sur cette partie de l'enveloppe convexe, puisque celle-ci est incluse dans la partie de l'enveloppe convexe vers le plan. L'absence de compétition entre les

16. La transformée de Laplace d'une convolution n'est autre que le produit des transformées de Laplace des fonctions convoluées.

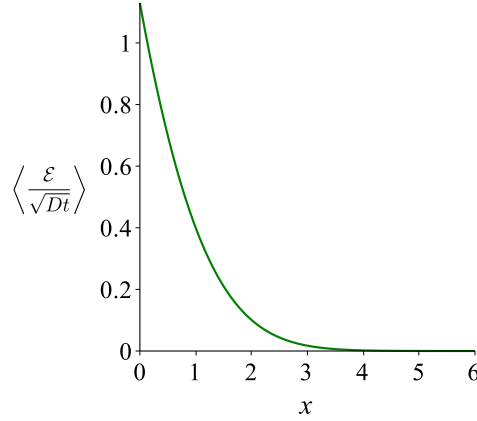


FIGURE 2.15 – Tracé de l'expression (2.79) de la longueur moyenne renormalisée de la portion du plan réfléchissant visitée au temps t en fonction de la distance initiale au plan $x = d/\sqrt{Dt}$.

deux effets antagonistes du plan réfléchissant explique donc la décroissance monotone de cette observable.

Avant de refermer ce chapitre sur l'enveloppe convexe d'un mouvement brownien, penchons-nous enfin sur un point technique qui est d'une utilité toute particulière dans l'étude du périmètre moyen de l'enveloppe convexe à deux dimensions : l'étude de la probabilité de survie dans un secteur angulaire d'angle quelconque.

2.4 Probabilité de survie dans un secteur angulaire absorbant

Dans ce paragraphe, nous allons établir une expression légère de la probabilité de survie d'un mouvement brownien dans un secteur angulaire absorbant d'angle au sommet quelconque. Cette partie peut être lue indépendamment du reste du chapitre et présente un intérêt propre, en plus de son intérêt pratique pour l'évaluation numérique du périmètre moyen de l'enveloppe convexe que nous avons discuté précédemment. Cet intérêt réside à la fois dans le fait que la probabilité de survie est une observable importante pour quantifier un processus de recherche¹⁷, et dans la géométrie du secteur angulaire qui a donné lieu à un certain nombre d'études (temps de dernier passage par les parois [Comtet 2003], extensions à la diffusion anormale [Lenzi 2009] et en particulier au mouvement brownien fractionnaire¹⁸ [Jeon 2011], applications au trafic de virus dans la cellule [Lagache 2008]). Par ailleurs, il est possible de réduire certains problèmes de réaction-diffusion unidimensionnels à une diffusion dans un secteur angulaire [Fisher 1988, Redner 1999, Redner 2001]. C'est le cas du problème de Fisher-Gelfand [Fisher 1988] dans lequel trois particules, initialement situées en $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, diffusent avec des coefficients de diffusion quelconques D_1 , D_2 et D_3 . La probabilité que la particule du milieu n'ait pas touché ses voisins au temps t se ramène au calcul de la probabilité de survie d'un seul mouvement brownien confiné dans un secteur angulaire d'angle au sommet $\alpha = 2 \arctan[\sqrt{(1-\gamma)/(1+\gamma)}]$ où $\gamma = D_2/\sqrt{(D_1+D_2)(D_2+D_3)}$.

17. Elle est en particulier reliée à la probabilité d'absorption par les parois.

18. Qui est une généralisation du mouvement brownien classique où les déplacements successifs sont corrélés.

L'expression naturelle de la probabilité de survie dans un secteur angulaire absorbant d'angle quelconque (voir l'équation (2.35) et l'annexe B pour son obtention), qui intervient dans le calcul du périmètre moyen de l'enveloppe convexe, n'est pas adaptée à l'évaluation numérique de cette grandeur, comme discuté dans la partie 2.3.2. Nous rappelons son expression au temps t pour un mouvement brownien partant du point (r_0, φ_0) à l'instant $t = 0$, en fonction de la variable renormalisée $y = r_0^2/(8Dt)$,

$$S(y, \varphi_0) = 2 \sqrt{\frac{2y}{\pi}} e^{-y} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((2m+1)\frac{\varphi_0\pi}{\alpha}\right)}{2m+1} [I_\nu(y) + I_{\nu+1}(y)] \quad (2.80)$$

avec

$$\nu = \frac{(2m+1)\pi}{2\alpha} - \frac{1}{2}. \quad (2.81)$$

Elle est issue de la détermination du propagateur (probabilité d'être en un certain point au temps t connaissant le point de départ) par une résolution directe d'une équation de diffusion puis de l'intégration spatiale de ce propagateur¹⁹.

Cette expression est tout à fait adaptée à un développement à petite distance r_0 du sommet du secteur angulaire ou à grand temps ($y \ll 1$).

$$S(y, \varphi_0) \underset{y \rightarrow 0}{\propto} y^{\frac{\pi}{2\alpha}}. \quad (2.82)$$

En revanche, l'intervention d'une somme infinie de fonctions de Bessel rend cette forme mathématique non adaptée à un développement à grande distance r_0 ou à petit temps. En effet, en utilisant le développement de la fonction de Bessel modifiée à grand argument de manière brute

$$I_\nu(y) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}} \left(1 - \frac{4\nu^2 - 1}{8y}\right), \quad (2.83)$$

on obtient le comportement dominant $S(y, \varphi_0) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 1$ mais pas les corrections d'ordres supérieurs car elles mettent en jeu des sommes divergentes.

Nous allons donc dans ce paragraphe déterminer une expression alternative de la probabilité de survie dans un secteur angulaire absorbant qui se développe facilement à grand y et dont l'expression plus légère permet une évaluation numérique plus aisée. Un pas dans cette direction a déjà été réalisé dans [Dy 2008] où des expressions analytiques compactes ont été obtenues pour la probabilité de survie et la densité de premier passage²⁰ dans des secteurs angulaires d'angles spécifiques, uniquement sous-multiples de π , puis étendues au cas d'une diffusion biaisée [Dy 2013]. Reposant sur une méthode d'images, cette approche ne s'étend pas au cas d'un secteur angulaire d'angle quelconque, et en particulier pas au cas d'un secteur angulaire obtus. Cette expression est donc inutilisable pour notre calcul de périmètre d'enveloppe convexe, où l'angle du secteur angulaire varie entre 0 et 2π . Elle ne fournit par ailleurs qu'une réponse

19. Dire que l'on a survécu jusqu'au temps t revient à dire que l'on est quelque part au temps t dans le secteur angulaire sans restriction sur la position, d'où l'intégration spatiale du propagateur.

20. Qui se déduit trivialement de la probabilité de survie comme l'opposé de sa dérivée temporelle, la probabilité d'être absorbé au temps t étant la probabilité d'avoir survécu jusqu'au temps t mais plus au temps $t + dt$.

partielle au problème de Fisher-Gelfand. Dans ce qui suit, nous établissons donc une expression alternative de cette probabilité de survie pour un secteur angulaire d'angle quelconque qui est compatible avec les évaluations numériques nécessaires à notre étude de l'enveloppe convexe, et nous en ferons ensuite l'analyse asymptotique à petit temps t (grand y), en guise d'application.

2.4.1 Expression alternative de la probabilité de survie

2.4.1.1 Détermination analytique de cette expression

Le point clef pour établir l'expression alternative de la probabilité de survie consiste à utiliser la représentation intégrale de la fonction de Bessel modifiée I_ν

$$I_\nu(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi e^{y \cos \varphi} \cos(\nu \varphi) - \frac{\sin(\nu \pi)}{\pi} \int_0^{+\infty} du e^{-y \cosh u - \nu u}. \quad (2.84)$$

En injectant cette forme dans l'expression (2.80) de la probabilité de survie, on peut l'écrire comme une somme de deux termes

$$S(y, \varphi_0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \sqrt{y} e^{-y} (A_1 + A_2) \quad (2.85)$$

avec

$$\begin{aligned} A_1(y, \varphi_0) &\equiv \int_0^\pi d\varphi e^{y \cos \varphi} \sum_{m=0}^{+\infty} (\cos(\nu \varphi) + \cos((\nu + 1)\varphi)) \frac{\sin\left((2m+1)\frac{\varphi_0 \pi}{\alpha}\right)}{2m+1} \\ &= 2 \int_0^\pi d\varphi e^{y \cos \varphi} \cos \frac{\varphi}{2} B_1(\varphi) \end{aligned} \quad (2.86)$$

définissant

$$B_1(\varphi) \equiv \sum_{m=0}^{+\infty} \cos\left((2m+1)\frac{\pi \varphi}{2\alpha}\right) \frac{\sin\left((2m+1)\frac{\varphi_0 \pi}{\alpha}\right)}{2m+1} \quad (2.87)$$

en remplaçant ν par son expression (2.81), et

$$\begin{aligned} A_2(y, \varphi_0) &\equiv \int_0^{+\infty} du e^{-y \cosh u} (e^{-u} - 1) \sum_{m=0}^{+\infty} \sin(\nu \pi) \frac{\sin\left((2m+1)\frac{\varphi_0 \pi}{\alpha}\right)}{2m+1} e^{-\nu u} \\ &= 2 \int_0^{+\infty} du e^{-y \cosh u} \operatorname{sh} \frac{u}{2} B_2(u) \end{aligned} \quad (2.88)$$

où

$$B_2(u) = \sum_{m=0}^{+\infty} \cos\left((2m+1)\frac{\pi^2}{2\alpha}\right) \frac{\sin\left((2m+1)\frac{\varphi_0 \pi}{\alpha}\right)}{2m+1} e^{-(2m+1)\frac{\pi u}{2\alpha}}. \quad (2.89)$$

Commençons par déterminer le terme A_1 . On remarque tout d'abord que la somme B_1 peut se réécrire

$$B_1(\varphi) = \int_0^{\frac{\pi \varphi_0}{\alpha}} dx' \sum_{m=0}^{+\infty} \cos((2m+1)x') \cos\left((2m+1)\frac{\pi \varphi}{2\alpha}\right) \quad (2.90)$$

avec φ variant de 0 à π . Pour évaluer cette somme, nous utilisons ensuite la formule suivante

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \cos\left((2m+1)\frac{\pi y}{L}\right) \cos\left((2m+1)\frac{\pi z}{L}\right) = \frac{L}{4} \delta(y-z), \quad (2.91)$$

valable *uniquement* si $0 \leq y \leq L/2$ et $0 \leq z \leq L/2$, ici pour $L = \pi$. L'utilisation de cette identité requiert une attention particulière aux intervalles de variation de x' et $\pi\varphi/(2\alpha)$ dans (2.90). La première condition $0 \leq x' \leq \pi/2$ est respectée si $\varphi_0 \leq \alpha/2$. En pratique, cette contrainte n'en est pas une, par symétrie du secteur angulaire²¹.

En revanche, le respect de la condition $0 \leq \pi\varphi/(2\alpha) \leq \pi/2$ pour φ dans $[0, \pi]$ dépend de la valeur de l'angle au sommet α . Si $\alpha \geq \pi$ (pour un secteur angulaire obtus), cette condition est également toujours vérifiée. La formule (2.91) peut donc être utilisée sans précaution particulière. En revanche, si $\alpha \leq \pi$, il faut découper l'intervalle de variation de φ de manière bien choisie afin de pouvoir appliquer la formule (2.91). Pour cela, on définit l'entier k tel que

$$(2k+1)\alpha \leq \pi < (2k+3)\alpha, \quad (2.92)$$

ou encore $k = E(\pi/(2\alpha) - 1/2)$ où E désigne la partie entière. On découpe l'intervalle $[0, \pi]$ en trois parties :

- (i) la partie $[0, \alpha]$,
- (ii) la partie $[\alpha, (2k+1)\alpha]$,
- (iii) la partie $[(2k+1)\alpha, \pi]$.

Notons qu'il existe deux sous-cas, représentés sur la figure 2.16, suivant si la valeur $(2k+2)\alpha$ est plus petite ou plus grande que π . Si $(2k+2)\alpha < \pi$, on découpe à nouveau l'intervalle (iii) en deux parties $[(2k+1)\alpha, (2k+2)\alpha]$ et $[(2k+2)\alpha, \pi]$.

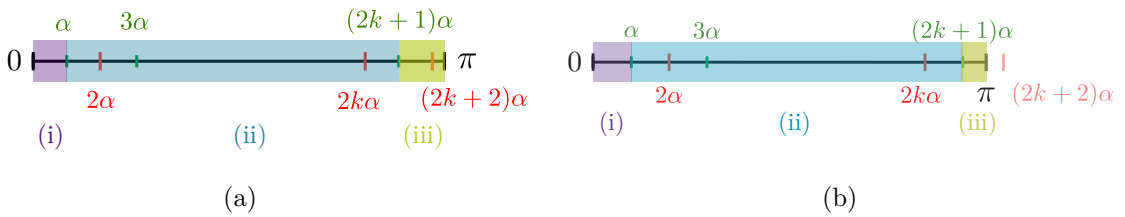


FIGURE 2.16 – Découpage de l'intervalle $[0, \pi]$ pour un secteur angulaire aigu ($\alpha \leq \pi$). L'entier k est défini à l'équation (2.92). Le nombre $(2k+2)\alpha$ est soit plus petit que π (premier cas), soit plus grand (second cas). Dans le premier cas, l'intervalle (iii) doit à nouveau être découpé en deux intervalles $[(2k+1)\alpha, (2k+2)\alpha]$ et $[(2k+2)\alpha, \pi]$.

21. Si $\alpha/2 \leq \varphi_0 \leq \alpha$, il suffira de paramétrer le repère polaire à partir de l'autre côté du secteur angulaire, c'est-à-dire de prendre $\varphi'_0 \equiv \alpha/2 - \varphi_0$, pour respecter cette condition.

Une fois ce découpage effectué, nous pouvons écrire de manière générale

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi d\varphi f(\varphi) &= \underbrace{\int_0^\alpha d\psi f(\psi)}_{C_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^k \int_0^\alpha d\psi (f(2j\alpha - \psi) + f(2j\alpha + \psi))}_{C_2 \equiv C_2^- + C_2^+} \\
&\quad + \underbrace{\int_{\max(0, (2k+2)\alpha - \pi)}^\alpha d\psi f((2k+2)\alpha - \psi)}_{C_3^-} + \underbrace{\int_0^{\max(0, \pi - (2k+2)\alpha)} d\psi f((2k+2)\alpha + \psi)}_{C_3^+}.
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Le terme C_1 correspond à la zone (i) de la figure 2.16, C_2 à (ii), et C_3^- et C_3^+ à (iii), avec C_3^+ nul dans le cas où $(2k+2)\alpha \geq \pi$ (celui de la figure 2.16(b)). La fonction f vaut ici

$$f(\varphi) = 2e^{y \cos \varphi} \cos \frac{\varphi}{2} B_1(\varphi). \tag{2.94}$$

Le découpage illustré à la figure 2.16 a été fait de telle sorte que l'on puisse utiliser la formule (2.91) sur la totalité de chaque intervalle issu du découpage, à condition d'appliquer les bonnes transformations de parité et de périodicité aux fonctions trigonométriques.

L'intégrale C_1 se calcule de la manière suivante

$$\begin{aligned}
C_1 &= 2 \int_0^\alpha d\psi e^{y \cos \psi} \cos \frac{\psi}{2} \int_0^{\frac{\pi\psi_0}{\alpha}} dx' \sum_{m=0}^{+\infty} \cos((2m+1)x') \cos\left((2m+1)\frac{\pi\psi}{2\alpha}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^\alpha d\psi e^{y \cos \psi} \cos \frac{\psi}{2} \int_0^{\frac{\pi\psi_0}{\alpha}} dx' \delta\left(x' - \frac{\pi\psi}{2\alpha}\right).
\end{aligned} \tag{2.95}$$

La fonction delta vaut 1 si $\pi\psi/(2\alpha)$ est dans $[0, \pi\varphi_0/\alpha]$, c'est-à-dire si $\psi \leq 2\varphi_0$, et zéro sinon. Comme on a $\varphi_0 \leq \alpha/2$, la partie $\psi \in [2\varphi_0, \alpha]$ de l'intégrale donne 0. On en déduit

$$C_1 = \frac{\pi}{2} \int_0^{2\varphi_0} d\psi e^{y \cos \psi} \cos \frac{\psi}{2} = \frac{\pi}{2} e^y \int_0^{2\varphi_0} d\psi e^{-2y \sin^2 \frac{\psi}{2}} \cos \frac{\psi}{2} \tag{2.96}$$

et en appliquant le changement de variable $u = \sqrt{2y} \sin(\psi/2)$, on obtient finalement

$$C_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{e^y}{\sqrt{y}} \int_0^{\sqrt{2y} \sin \varphi_0} du e^{-u^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{e^y}{\sqrt{y}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{2y} \sin \varphi_0\right). \tag{2.97}$$

Le calcul de C_2 , C_3^- et C_3^+ , similaire à quelques subtilités près à celui de C_1 , est donné en

annexe F. Cela permet d'obtenir l'expression finale de A_1 pour $\alpha \leq \pi$

$$\begin{aligned}
 A_1(y, \varphi_0) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{e^y}{\sqrt{y}} & \left\{ \operatorname{erf} \left(\sqrt{2y} \sin \varphi_0 \right) \right. \\
 & + \sum_{j=1}^k (-1)^j \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{2y} \sin(j\alpha + \varphi_0) \right) - \operatorname{erf} \left(\sqrt{2y} \sin(j\alpha - \varphi_0) \right) \right] \\
 & + (-1)^{k+1} \left[\operatorname{erf} \left[\sqrt{2y} \sin \left(\min \left((k+1)\alpha + \varphi_0, \frac{\pi}{2} \right) \right) \right] \right. \\
 & \quad \left. \left. - \operatorname{erf} \left[\sqrt{2y} \sin \left(\min \left((k+1)\alpha - \varphi_0, \frac{\pi}{2} \right) \right) \right] \right] \right\}. \tag{2.98}
 \end{aligned}$$

où erf est la fonction d'erreur. Le calcul du cas $\alpha \geq \pi$, plus simple car il n'implique plus un découpage du type précédent pour utiliser la formule (2.91), se réalise dans le même esprit et permet d'obtenir

$$A_1(y, \varphi_0) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{e^y}{\sqrt{y}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{2y} \sin \left(\min \left(\varphi_0, \frac{\pi}{2} \right) \right) \right). \tag{2.99}$$

Déterminons maintenant le terme A_2 . La somme B_2 définie en (2.89) peut se séparer en deux

$$B_2(u) = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{\varphi_0 \pi}{\alpha}} dx' D_2^+(x', u) + \int_0^{\frac{\varphi_0 \pi}{\alpha}} dx' D_2^-(x', u) \right] \tag{2.100}$$

avec

$$D_2^\pm(x', u) = \sum_{m=0}^{+\infty} \cos \left[(2m+1) \left(x' \pm \frac{\pi^2}{2\alpha} \right) \right] e^{-(2m+1) \frac{\pi u}{2\alpha}}. \tag{2.101}$$

Si l'on réécrit

$$D_2^\pm(x', u) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=0}^{+\infty} e^{(2m+1) \left[i \left(x' \pm \frac{\pi^2}{2\alpha} \right) - \frac{\pi u}{2\alpha} \right]} \right\}, \tag{2.102}$$

la somme sur m se calcule explicitement, donnant

$$\begin{aligned}
 D_2^\pm(x', u) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\exp \left[\frac{\pi u}{2\alpha} - i \left(x' + \frac{\pi^2}{2\alpha} \right) \right] - \exp \left[-\frac{\pi u}{2\alpha} + i \left(x' + \frac{\pi^2}{2\alpha} \right) \right]} \right\} \\
 &= \frac{1}{2 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi u}{2\alpha} \right)} \frac{\cos \left(x' \pm \frac{\pi^2}{2\alpha} \right)}{1 + \frac{\sin^2 \left(x' \pm \frac{\pi^2}{2\alpha} \right)}{\operatorname{sh}^2 \left(\frac{\pi u}{2\alpha} \right)}}. \tag{2.103}
 \end{aligned}$$

On reconnaît une dérivée composée de la fonction arctan, donc après intégration sur x' , la somme B_2 s'écrit simplement

$$B_2(u) = \frac{1}{4} \left[\arctan \left(\frac{\sin \left[\frac{\pi}{\alpha} \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi u}{2\alpha} \right)} \right) + \arctan \left(\frac{\sin \left[\frac{\pi}{\alpha} \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi u}{2\alpha} \right)} \right) \right] \tag{2.104}$$

et finalement

$$A_2(y, \varphi_0) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} du e^{-y chu} \operatorname{sh} \frac{u}{2} \left[\arctan \left(\frac{\sin \left[\frac{\pi}{\alpha} \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi u}{2\alpha} \right)} \right) + \arctan \left(\frac{\sin \left[\frac{\pi}{\alpha} \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi u}{2\alpha} \right)} \right) \right]. \quad (2.105)$$

Rassemblons enfin les résultats (2.98), (2.99) et (2.105). On obtient ainsi une expression alternative de la probabilité de survie dans un secteur angulaire d'angle α pour un point de départ (r_0, φ_0) et en fonction de la variable renormalisée $y = r_0^2/(8Dt)$, lorsque $\alpha \leq \pi$ (secteur angulaire aigu)

$$\begin{aligned} S(y, \varphi_0) = & \operatorname{erf} \left(\sqrt{2y} \sin \varphi_0 \right) \\ & + \sum_{j=1}^k (-1)^j \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{2y} \sin (j\alpha + \varphi_0) \right) - \operatorname{erf} \left(\sqrt{2y} \sin (j\alpha - \varphi_0) \right) \right] \\ & + (-1)^{k+1} \left\{ \operatorname{erf} \left[\sqrt{2y} \sin \left(\min \left((k+1)\alpha + \varphi_0, \frac{\pi}{2} \right) \right) \right] \right. \\ & \quad \left. - \operatorname{erf} \left[\sqrt{2y} \sin \left(\min \left((k+1)\alpha - \varphi_0, \frac{\pi}{2} \right) \right) \right] \right\} \\ & + \sqrt{\frac{2y}{\pi^3}} e^{-y} \int_0^{+\infty} du e^{-y chu} \operatorname{sh} \frac{u}{2} \left[\arctan \left(\frac{\sin \left[\frac{\pi}{\alpha} \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi u}{2\alpha} \right)} \right) \right. \\ & \quad \left. + \arctan \left(\frac{\sin \left[\frac{\pi}{\alpha} \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi u}{2\alpha} \right)} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.106)$$

et lorsque $\alpha \geq \pi$ (secteur angulaire obtus)

$$\begin{aligned} S(y, \varphi_0) = & \operatorname{erf} \left[\sqrt{2y} \sin \left(\min \left(\varphi_0, \frac{\pi}{2} \right) \right) \right] \\ & + \sqrt{\frac{2y}{\pi^3}} e^{-y} \int_0^{+\infty} du e^{-y chu} \operatorname{sh} \frac{u}{2} \left[\arctan \left(\frac{\sin \left[\frac{\pi}{\alpha} \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi u}{2\alpha} \right)} \right) \right. \\ & \quad \left. + \arctan \left(\frac{\sin \left[\frac{\pi}{\alpha} \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi u}{2\alpha} \right)} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.107)$$

où on rappelle que $k = E[\pi/(2\alpha) - 1/2]$.

Ces expressions mettent en jeu une somme finie de fonctions erreur et une intégrale de fonctions usuelles. Elles sont donc plus maniables et légères que l'expression de la probabilité de survie dans un secteur angulaire absorbant obtenue à l'aide d'une résolution directe de l'équation de Fokker-Planck présentée dans l'annexe B. Ces expressions permettent en particulier d'effectuer la double intégration de cette probabilité de survie par rapport à la position du maximum dans une direction θ et par rapport à θ , qui intervient dans le calcul du périmètre moyen de l'enveloppe convexe (voir équation (2.39) avec les relations géométriques (2.36)).

2.4.1.2 Comparaison avec les résultats de la littérature

La formule (2.106), valable pour un angle α arbitraire, généralise la formule déterminée dans [Dy 2008] pour les cas particuliers où $\alpha = \pi/n$ avec n un entier. Dans le cas impair $n = 2p + 1$, les auteurs fournissent une forme explicite de la probabilité de survie, réécrite ici avec nos notations

$$S(y, \varphi_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{4} \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{2y} \sin(k\alpha + \varphi_0) \right) + \operatorname{erf} \left(\sqrt{2y} \sin(-k\alpha + \varphi_0) \right) \right. \\ \left. + \operatorname{erf} \left(\sqrt{2y} \sin((k+1)\alpha - \varphi_0) \right) + \operatorname{erf} \left(\sqrt{2y} \sin((1-k)\alpha - \varphi_0) \right) \right] \quad (2.108)$$

que l'on retrouve aisément à l'aide de notre formule (2.106), qui devient dans ce cas

$$S(y, \varphi_0) = \operatorname{erf} \left(\sqrt{2y} \sin \varphi_0 \right) + \sum_{j=1}^p (-1)^j \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{2y} \sin(j\alpha + \varphi_0) \right) - \operatorname{erf} \left(\sqrt{2y} \sin(j\alpha - \varphi_0) \right) \right], \quad (2.109)$$

le terme intégral étant nul et $k = p$. En manipulant cette somme, on trouve que les équations (2.108) et (2.109) coïncident bien.

Dans le cas pair $n = 2p$, nous obtenons

$$S(y, \varphi_0) = \operatorname{erf} \left(\sqrt{2y} \sin \varphi_0 \right) + \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^j \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{2y} \sin(j\alpha + \varphi_0) \right) - \operatorname{erf} \left(\sqrt{2y} \sin(j\alpha - \varphi_0) \right) \right] \\ + (-1)^p \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{2y} \right) - \operatorname{erf} \left(\sqrt{2y} \cos \varphi_0 \right) \right] \\ + (-1)^p \left(\frac{2}{\pi} \right)^{3/2} \sqrt{y} e^{-y} \int_0^{+\infty} du e^{-y \operatorname{ch} u} \operatorname{sh} \frac{u}{2} \arctan \left(\frac{\sin(2p\varphi_0)}{\operatorname{sh}(pu)} \right) \quad (2.110)$$

puisque $k = p - 1$ et que

$$\min \left((k+1)\alpha + \varphi_0, \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \\ \min \left((k+1)\alpha - \varphi_0, \frac{\pi}{2} \right) = (k+1)\alpha - \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi_0.$$

Les auteurs de [Dy 2008] n'ont pas obtenu de formule explicite pour la probabilité de survie dans le cas $\alpha = \pi/(2p)$, sauf dans le cas $p = 1$, mais en ont obtenu une pour la densité de premier passage²² pour tous les p . Nous avons vérifié numériquement que notre formule (2.110) correspond à leur expression pour $p = 1$ et que sa dérivée correspond à leur densité de premier passage. Nous ne donnerons pas ici la formule pour la densité de premier passage pour un angle quelconque, celle-ci s'obtenant simplement par dérivation des formules (2.106) et (2.107).

22. Qui est la dérivée temporelle de la probabilité de survie, au signe près.

2.4.1.3 Interprétation géométrique de nos expressions

Il est possible de donner une interprétation géométrique de nos résultats (2.106) et (2.107). Comme mentionné précédemment, on peut supposer sans souci que le point de départ est dans la moitié inférieure du secteur angulaire, c'est-à-dire que $\varphi_0 \leq \alpha/2$. Le premier terme des équations (2.106) et (2.107) est égal à la probabilité de survie dans un demi-espace délimité par un plan infini absorbant, pour un marcheur brownien qui en part d'une distance respectivement $r_0 \sin \varphi_0$ si le secteur angulaire de départ est aigu et $r_0 \sin[\min(\varphi_0, \pi/2)]$ s'il est obtus. Ceci correspond en pratique à la distance entre le point de départ et le bord du secteur angulaire le plus proche du point de départ. Pour un secteur angulaire aigu, il s'agit juste de la distance au bord de référence, celui qui sert d'origine aux coordonnées polaires, quel que soit l'angle de départ φ_0 . En revanche, pour un secteur angulaire obtus, la distance au bord le plus proche dépend de la valeur de φ_0 . En effet, le point du bord situé le plus près du point de départ est soit son projeté orthogonal sur le bord de référence si $\varphi_0 \leq \pi/2$, soit le sommet du secteur angulaire (voir figure 2.17).



FIGURE 2.17 – Dans le cas où le secteur angulaire est obtus, le point du bord qui est le plus proche du point de départ de la trajectoire est (a) soit son projeté orthogonal lorsque $\varphi_0 \leq \pi/2$, (b) soit le sommet du secteur angulaire lorsque $\varphi_0 \geq \pi/2$. La distance à la paroi absorbante du secteur angulaire est donc (a) $r_0 \sin \varphi_0$ ou (b) r_0 , synthétisée en $r_0 \sin(\min(\varphi_0, \pi/2))$.

Ensuite, en s'inspirant de la méthode employée dans [Dy 2008] dans le cas où l'angle du secteur angulaire est un sous-multiple de π , la somme mise en jeu dans l'expression (2.106) peut être vue comme une somme sur des images généralisées²³ (sources et puits), qui n'existe effectivement par conséquent que pour un angle aigu.

Enfin, le dernier terme de la somme de fonctions erreur et le terme intégral qui apparaissent dans les deux formes (2.106) et (2.107) sont la signature d'un angle au sommet différent des valeurs particulières $\pi/(2p+1)$ avec p un entier.

2.4.2 Application : développement asymptotique à temps court

Nous avons mentionné au début de ce paragraphe que la forme standard de la probabilité de survie dans un secteur angulaire, obtenue dans l'annexe B, n'est pas adaptée à un développement à temps court. Nous allons maintenant voir que la forme alternative de cette probabilité de

23. La méthode des images est une technique classique en électrostatique qui consiste à supprimer les parois de domaines en les "remplaçant" par des particules images qui sont les symétriques de la particule brownienne par rapport aux parois (voir [Barton 1989]).

survie que nous avons déterminée dans ce paragraphe est au contraire particulièrement adaptée à un développement à temps court ²⁴, c'est-à-dire $y \gg 1$.

Le terme dominant à petit temps de la probabilité de survie est 1, sans surprise puisqu'à temps très court, le marcheur est presque sûr de n'avoir pas encore touché les parois du secteur angulaire, donc d'avoir survécu. Nous déterminons ici les corrections à ce terme dominant induites par la présence des bords absorbants, tout d'abord dans le cas d'un secteur angulaire aigu. La fonction d'erreur a le développement asymptotique suivant à grand argument

$$\operatorname{erf}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - e^{-x^2} P\left(\frac{1}{x}\right), \quad (2.111)$$

avec P un polynôme. Par ailleurs, les arguments des fonctions d'erreur mises en jeu dans la somme de l'équation (2.106) sont ordonnés puisque la fonction $\sin$ est croissante dans $[0, \pi/2]$

$$\sin \varphi_0 \leq \sin(\alpha - \varphi_0) \leq \sin(\alpha + \varphi_0) \leq \sin(2\alpha - \varphi_0) \leq \dots \leq 1. \quad (2.112)$$

Le premier terme $\operatorname{erf}(\sqrt{2y} \sin \varphi_0)$ de l'équation (2.106) contient donc le terme dominant, égal à 1, de la probabilité de survie ainsi que la première correction, exponentiellement petite, à cette valeur. Les termes de la somme apportent successivement les corrections d'ordres supérieurs, d'après (2.111) et (2.112).

Il ne reste plus qu'à déterminer l'importance asymptotique du terme intégral

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\equiv \sqrt{\frac{2y}{\pi^3}} e^{-y} \int_0^{+\infty} du e^{-y \operatorname{ch} u} \operatorname{sh} \frac{u}{2} \left[\arctan \left(\frac{\sin \left[\frac{\pi}{\alpha} \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi u}{2\alpha} \right)} \right) + \arctan \left(\frac{\sin \left[\frac{\pi}{\alpha} \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi u}{2\alpha} \right)} \right) \right] \\ &= \sqrt{\frac{2y}{\pi^3}} e^{-2y} \int_0^{+\infty} du e^{-2y \operatorname{sh}^2 u} \operatorname{sh} \frac{u}{2} \left[\arctan \left(\frac{\sin \left[\frac{\pi}{\alpha} \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi u}{2\alpha} \right)} \right) + \arctan \left(\frac{\sin \left[\frac{\pi}{\alpha} \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi u}{2\alpha} \right)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Pour évaluer le comportement asymptotique de cette intégrale lorsque y est grand, on utilise la méthode du col (voir par exemple [Bender 1999]). L'intégrale est dominée par le voisinage de $u = 0$, et peut donc être approximée en développant l'argument de l'exponentielle à l'ordre 2 en u et l'autre partie de l'intégrande à l'ordre le plus bas en u . Suivant les valeurs de α et φ_0 , la somme des deux fonctions $\arctan$ tend soit vers une constante, soit vers une fonction linéaire en u . Si elles sont de même signe, on obtient

$$\arctan \left(\frac{\sin \left[\frac{\pi}{\alpha} \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi u}{2\alpha} \right)} \right) + \arctan \left(\frac{\sin \left[\frac{\pi}{\alpha} \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi u}{2\alpha} \right)} \right) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \pm \pi \quad (2.114)$$

et si elles sont de signes opposés

$$\begin{aligned} &\arctan \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{\alpha} \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right) \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi u}{2\alpha} \right)} \right) + \arctan \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{\alpha} \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi u}{2\alpha} \right)} \right) \\ &\underset{u \rightarrow 0}{\sim} \pm \frac{\pi u}{2\alpha} \left(\frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{\alpha} \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right) \right)} + \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{\alpha} \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right)} \right). \end{aligned} \quad (2.115)$$

24. Elle l'est en revanche beaucoup moins aux temps longs. Les deux formes de la probabilité de survie sont donc complémentaires.

Dans le premier cas, l'intégrale $\mathcal{I}$ s'approche de la manière suivante

$$\mathcal{I} \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \pm \sqrt{\frac{y}{2\pi}} e^{-2y} \int_0^{+\infty} du e^{-yu^2/2} u \quad (2.116)$$

qui donne, en changeant de variable $v = y u^2/2$

$$\mathcal{I} \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \pm \frac{e^{-2y}}{\sqrt{2\pi y}} \int_0^{+\infty} dv e^{-v} \simeq \pm \frac{e^{-2y}}{\sqrt{2\pi y}}. \quad (2.117)$$

Un calcul très similaire donne dans le deuxième cas (où les arctan sont de signes opposés)

$$\mathcal{I} \sim \frac{e^{-2y}}{4\alpha y} \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)\right)} \right). \quad (2.118)$$

Dans les deux cas, la valeur de l'argument de l'exponentielle implique que le terme intégral est dominé à grand y par tous les autres termes de la somme des fonctions erreur. Finalement, le développement de la probabilité de survie à petit temps (grand y) peut s'exprimer de manière judicieuse à l'aide d'une base de fonctions erreur complémentaire ($\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$)

$$S(t|y, \varphi_0) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} 1 + \psi_1(y, \varphi_0) + \sum_{j=1}^k [\psi_{2j}(y, \varphi_0) + \psi_{2j+1}(y, \varphi_0)] + R_{2k+2}(y, \varphi_0) \quad (2.119)$$

avec pour $j \leq k$

$$\begin{aligned} \psi_1(y, \varphi_0) &= - \operatorname{erfc}\left(\sqrt{2y} \sin \varphi_0\right) \\ \psi_{2j}(y, \varphi_0) &= (-1)^j \operatorname{erfc}\left(\sqrt{2y} \sin(j\alpha - \varphi_0)\right) \\ \psi_{2j+1}(y, \varphi_0) &= (-1)^{j+1} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{2y} \sin(j\alpha + \varphi_0)\right) \end{aligned} \quad (2.120)$$

et le reste R_{2k+2} défini par

$$\begin{aligned} R_{2k+2}(y, \varphi_0) &= (-1)^{k+1} \left\{ \operatorname{erfc}\left[\sqrt{2y} \sin\left(\min\left((k+1)\alpha - \varphi_0, \frac{\pi}{2}\right)\right)\right] \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{erfc}\left[\sqrt{2y} \sin\left(\min\left((k+1)\alpha + \varphi_0, \frac{\pi}{2}\right)\right)\right] \right\} \\ &+ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} \int_0^{+\infty} du e^{-y \operatorname{ch} u} \operatorname{sh} \frac{u}{2} \left[\arctan\left(\frac{\sin\left[\frac{\pi}{\alpha}\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)\right]}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi u}{2\alpha}\right)}\right) + \arctan\left(\frac{\sin\left[\frac{\pi}{\alpha}\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)\right]}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi u}{2\alpha}\right)}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.121)$$

qui sont des corrections d'ordres de plus en plus élevés, puisqu'elles respectent chacune asymptotiquement à grand y $\psi_i(y, \varphi_0) = o(\psi_{i-1}(y, \varphi_0))$, et $R_{2k+2}(y, \varphi_0) = o(\psi_{2k+1}(y, \varphi_0))$.

Le cas d'un secteur angulaire obtus est plus simple. Si l'angle de départ φ_0 est plus petit que $\pi/2$, la fonction d'erreur de l'équation (2.107) donne la correction dominante et le terme intégral est sous-dominant, alors que si $\varphi_0 \geq \pi/2$, ces deux termes ont la même décroissance

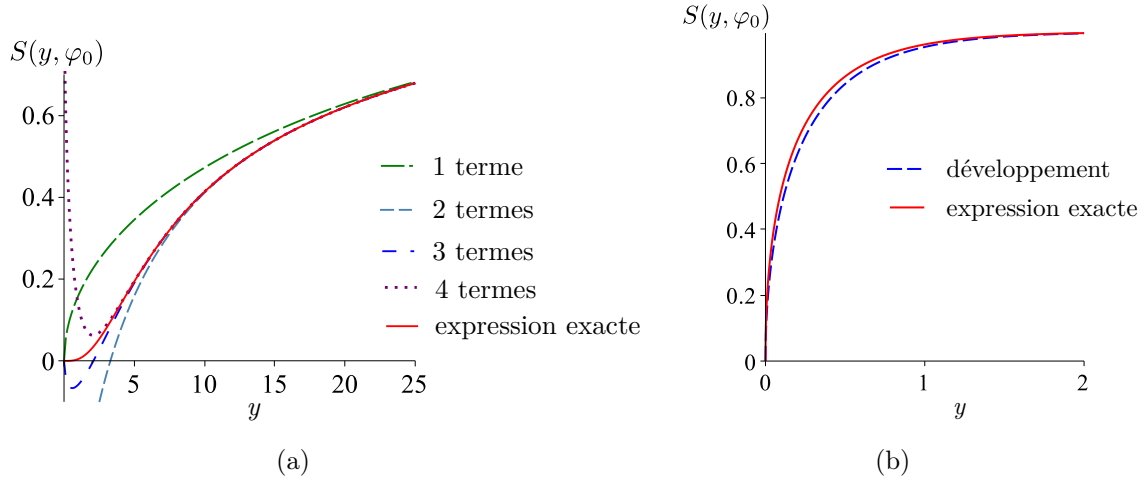


FIGURE 2.18 – (a) Probabilité de survie dans un secteur angulaire aigu d'angle $\alpha = 0.4$ rad, avec $\varphi_0 = 0.1$ rad (trait plein), donnée par l'équation (2.106), et son développement à temps court tronqué à différents ordres (lignes en pointillés), donné par les équations (2.119) et (2.120). L'expression exacte contient 8 termes, dont le reste $R_8(y, \varphi_0)$. (b) Probabilité de survie dans un secteur angulaire obtus dans le cas $\varphi_0 \leq \pi/2$ (trait plein), donnée par l'équation (2.107) et son développement à temps court $1 - \operatorname{erfc}(\sqrt{2y} \sin \varphi_0)$ (ligne en pointillés), donné par l'équation (2.122). L'angle au sommet est $\alpha = 3.5$ rad et l'angle initial $\varphi_0 = 1.5$ rad.

exponentielle (toujours donnée par l'analyse faite ci-dessus).

Finalement, l'analyse précédente montre qu'à temps court (grand y), pour des secteurs angulaires aigus et obtus où $\varphi_0 \leq \pi/2$, la probabilité de survie est principalement influencée par la présence du bord absorbant le plus proche, produisant le comportement suivant

$$S(y, \varphi_0) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - \operatorname{erfc}(\sqrt{2y} \sin \varphi_0) . \quad (2.122)$$

De plus, pour les angles aigus, notre approche donne les corrections successives, la dernière étant donnée par le reste $R_{2k+2}(y, \varphi_0)$. On vérifie bien que ce développement à temps court décrit de manière satisfaisante la probabilité de survie et que le domaine de validité augmente, pour les angles aigus, avec le nombre de corrections prises en compte (voir figure 2.18). En pratique, on voit qu'à moins de vouloir décrire les temps vraiment longs (petits y), le terme intégral, qui est le plus délicat à traiter, peut être oublié, ce qui donne accès à une forme approchée très simple de la probabilité de survie dans un secteur angulaire quelconque.

Dans cette section, nous avons déterminé une forme simple de la probabilité de survie dans un secteur angulaire d'angle quelconque (voir équations (2.106) et (2.107)) écrite comme une somme finie de fonctions erreur et d'une intégrale de fonctions usuelles. Elle constitue une alternative intéressante à la forme initiale de cette probabilité de survie (voir équation (2.35)) qui met en jeu une somme infinie de fonction de Bessel. Dans le cadre de ce chapitre sur l'enveloppe convexe du mouvement brownien, l'attrait principal de cette forme alternative est de faciliter grandement l'évaluation numérique du périmètre moyen de l'enveloppe convexe, permettant notamment de tracer cette fonction (voir figure 2.6). L'étude du développement asymptotique à petit temps

de la probabilité de survie menée ici permettrait également d'obtenir celui du périmètre moyen. Cependant, nous ne nous pencherons pas sur ce point ²⁵.

2.5 Conclusion

Pour conclure ce chapitre sur l'étude du périmètre moyen de l'enveloppe convexe en présence d'un confinement partiel (point réfléchissant à une dimension et plan infini réfléchissant à deux dimensions), nous avons tout d'abord montré que l'extension moyenne du mouvement brownien à une dimension ²⁶ est une fonction croissante de la distance initiale au point réfléchissant et analytique à faible distance initiale.

Cette étude préliminaire nous a permis de mettre en évidence la spécificité du cas bidimensionnel, où le périmètre de l'enveloppe convexe est cette fois une fonction *non monotone* de la distance initiale au plan, et non analytique à faible distance initiale. L'existence de ce minimum, que nous avons démontrée en fournissant la valeur exacte du périmètre moyen à distance initiale nulle et son développement à petite distance initiale, résulte d'une compétition entre deux effets antagonistes du plan réfléchissant, d'une part une réduction de l'espace accessible et d'autre part une répulsion effective des trajectoires. Cette compétition se répercute en outre sur l'extension moyenne de la trajectoire dans une direction quelconque (autre que parallèlement et perpendiculairement au plan réfléchissant) qui possède de même un minimum par rapport à la distance initiale au plan et une non analyticité à faible distance initiale.

Pour compléter cette analyse de l'enveloppe convexe en présence d'un plan réfléchissant, nous avons également déterminé la longueur moyenne de la portion du plan visitée par le mouvement brownien en fonction de la distance initiale au plan dont nous avons montré qu'elle décroît de manière monotone vers zéro. Par ailleurs, partant d'un besoin pratique pour l'évaluation numérique du périmètre moyen de l'enveloppe convexe, nous avons déterminé une expression légère de la probabilité de survie dans un secteur angulaire absorbant quelconque, dont l'étude possède un intérêt propre. La connaissance de cette expression permet en particulier d'obtenir de manière naturelle un développement à petit temps de la probabilité de survie dans un secteur angulaire, qui paraît inaccessible à partir de la formule de cette probabilité obtenue à l'aide des méthodes classiques.

L'étude réalisée dans ce chapitre met en évidence que le passage de la dimension un    la dimension deux modifie profondément le comportement du périmètre moyen de l'enveloppe convexe par rapport à la distance initiale. En effet, les propriétés d'analyticité de cette fonction à faible distance initiale et de monotonie par rapport à la distance initiale au plan en dimension deux diff  rent radicalement de celles obtenues en dimension un. La modification de ces deux propriétés découle en fait de l'importance que prend l'effet de répulsion effective des trajectoires à deux dimensions, qui est plus grande qu'à une dimension. Cette différence d'efficacité de la répulsion effective provient probablement de ce qu'à une dimension, il a un impact sur la

25. Le développement à petit temps (ou grande distance initiale) de la probabilité de survie suggère fortement une approche exponentielle de la valeur asymptotique $4/\sqrt{\pi}$ de l'extension moyenne de l'enveloppe convexe obtenue en partant infiniment loin du plan réfléchissant.

26. Qui est l'équivalent unidimensionnel du périmètre de l'enveloppe convexe d'un mouvement brownien bidimensionnel.

position d'un point (l'extrémité droite de l'intervalle visité par le mouvement brownien) alors qu'à deux dimensions, il agit sur la position d'une courbe entière (la portion vers l'extérieur de l'enveloppe convexe), amplifiant ainsi son effet sur l'enveloppe convexe. Il est donc assez naturel de conjecturer que cet effet devrait être exacerbé à trois dimensions²⁷, et probablement produire un minimum de la surface de l'enveloppe convexe plus prononcé que celui du périmètre moyen de l'enveloppe convexe à deux dimensions. Cette conjecture n'a pas été vérifiée pour l'instant, ni numériquement où il faudrait adapter l'algorithme de détermination de l'enveloppe convexe d'un nuage de points tridimensionnel, ni analytiquement où le calcul du périmètre de l'enveloppe convexe risque de se révéler encore plus ardu qu'à deux dimensions, notamment car il n'existe pas de généralisation de la formule de Cauchy à trois dimensions²⁸.

On remarque sans surprise que l'effet principal du confinement, qui est ici un élément réfléchissant, est de réduire l'espace occupé par le mouvement brownien par rapport à la situation sans confinement, et en particulier le périmètre moyen de son enveloppe convexe. Cet effet est néanmoins d'amplitude assez faible, réduisant le périmètre moyen à une dimension de $4/\sqrt{\pi} \simeq 2,26$ à $\sqrt{\pi} \simeq 1,77$, c'est-à-dire de 20% environ, et le périmètre moyen à deux dimensions de $4\sqrt{\pi} \simeq 7,09$ à $2\sqrt{\pi}\text{Si}(\pi) \simeq 6,57$, c'est-à-dire de 7% environ. En effet, l'élément réfléchissant ne représente qu'un confinement partiel, c'est pourquoi la contrainte qu'il impose sur le mouvement brownien est relativement faible, et ce d'autant plus que la dimension spatiale est élevée. On s'attend donc à ce que dans une situation équivalente à trois dimensions, c'est-à-dire pour un mouvement brownien tridimensionnel en présence d'un plan réfléchissant, la réduction du périmètre de l'enveloppe convexe soit proportionnellement encore plus faible qu'à deux dimensions.

À l'issue de ce travail, plusieurs questions qui semblent intéressantes restent ouvertes. L'aire moyenne de l'enveloppe convexe d'un mouvement brownien bidimensionnel possède-t-elle les mêmes propriétés surprenantes que son périmètre moyen ? Que se passe-t-il en dimension supérieure ? Quel serait l'impact d'un autre type de confinement, absorbant ou de forme différente ? La question de l'aire moyenne de l'enveloppe convexe est plus complexe car elle fait intervenir la probabilité jointe du maximum de la trajectoire dans une direction et de l'instant auquel ce maximum a été atteint. Les simulations numériques²⁹ semblent indiquer que cette observable est monotone par rapport à la distance initiale au plan, contrairement au périmètre moyen, en gardant néanmoins à l'esprit qu'elle peut posséder un minimum de faible amplitude noyé dans le bruit numérique. Une étude plus approfondie serait nécessaire pour donner un résultat fiable.

27. Où l'enveloppe convexe est un polytope dont la surface est l'équivalent du périmètre à deux dimensions.

28. À ma connaissance.

29. Qui sont longues à cause entre autres de l'utilisation d'un pas adaptatif comme expliqué dans la section 2.3.2.

Temps de couverture de stratégies de recherche aléatoire

Sommaire

3.1	Introduction	47
3.2	Temps moyen de couverture à une dimension pour une marche aléatoire persistante	51
3.2.1	En conditions aux limites périodiques	52
3.2.2	En conditions aux limites réfléchissantes	54
3.2.2.1	Temps moyen pour atteindre le premier bord	54
3.2.2.2	Temps moyen pour traverser le domaine	57
3.2.2.3	Temps moyen de couverture	58
3.3	Universalité de la distribution des observables de couverture	59
3.3.1	Détermination de la distribution asymptotique du temps de couverture partielle	61
3.3.2	Comparaison avec les résultats exacts de la littérature	65
3.3.3	Comparaison avec les simulations numériques	66
3.3.3.1	Définition des processus de recherche étudiés	66
3.3.3.2	Comparaison avec les résultats de simulation numérique	69
3.3.4	Extension à d'autres observables de couverture	72
3.3.4.1	Temps de couverture aléatoire	72
3.3.4.2	Généralisation au cas de n marcheurs indépendants	75
3.3.5	Domaines de validité de nos résultats pour les temps de couverture partielle, aléatoire et complète	76
3.3.6	A propos des stratégies optimales de recherche	79
3.4	Conclusion	80

3.1 Introduction

Après avoir étudié l'effet d'un confinement partiel sur les propriétés d'une marche aléatoire, en étudiant l'impact de la présence d'un plan infini réfléchissant sur l'espace occupé par un marcheur brownien bidimensionnel, nous allons considérer dans ce deuxième chapitre un confinement total, qui impose une contrainte plus forte sur la trajectoire que le confinement partiel précédemment introduit. En particulier, nous allons nous concentrer sur des marches aléatoires modélisant des

recherches aléatoires ayant lieu dans un volume confiné. Il a été montré à de nombreuses reprises ces dernières années que des processus de recherche aléatoire émergent dans des contextes très variés, à des échelles différentes. On peut citer des phénomènes aussi variés que la recherche de séquences spécifiques sur un brin d'ADN par des facteurs de transcription [Elf 2007], le transport de protéines dans le noyau cellulaire [Loverdo 2008, Mirny 2008], la rencontre entre deux réactifs chimiques [Rice 1985, Schuss 2007], la recherche de nourriture par des animaux [Berg 1993, Viswanathan 2011] et la planification des mouvements d'un robot [Latombe 2012].

Les principaux outils utilisés jusqu'à présent pour quantifier l'efficacité de ces processus de recherche se ramènent au temps nécessaire pour atteindre une cible unique, appelé temps de premier passage [Redner 2001, Condamin 2007, Bénichou 2010, Bénichou 2014b, Bray 2013]. Cependant, malgré sa grande popularité dans divers contextes, le temps de premier passage n'est pas adapté à la quantification de tous les types de recherche. En effet, lorsque le marcheur doit découvrir un certain nombre de cibles présentes dans le volume, comme souvent en chimie, en écologie ou en robotique, l'observable adaptée à la quantification de l'efficacité du processus de recherche n'est plus le temps de premier passage en un site unique, mais le temps nécessaire pour visiter une certaine fraction voire tous les sites du domaine dans lequel a lieu la recherche (voir figure 3.1). Le cas extrême des recherches exhaustives, qui requièrent une exploration complète d'un domaine, définit le temps de couverture du domaine. Cette observable possède un intérêt particulier puisqu'elle donne le temps nécessaire pour trouver toutes les cibles avec probabilité un. Sa détermination constitue un problème de longue date dans la théorie des marches aléatoires, introduit par Aldous dans [Aldous 1983]. Les exemples de telles recherches sont très nombreux et apparaissent dans des domaines variés. On peut citer entre autres la traque d'agents pathogènes par les cellules du système immunitaire [Heuzé 2013], la propagation d'épidémies dans une ville, le nettoyage d'un appartement ou le déminage d'une zone par des robots, ainsi que la recherche de nourriture par des animaux [Viswanathan 2008, Bénichou 2011] dans une zone confinée, par exemple une île.

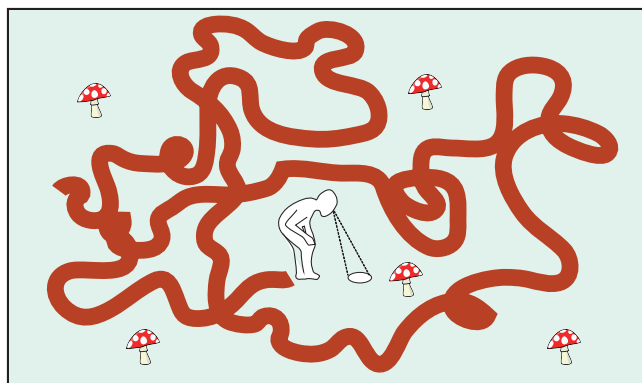


FIGURE 3.1 – Illustration d'un cas de recherche exhaustive. Le promeneur, qui réalise en première approximation une recherche aléatoire, cherche à cueillir tous les champignons présents dans son coin à champignons.

Malgré sa pertinence, ce problème n’a été que très partiellement étudié. Aldous est le premier à poser clairement la question du temps de couverture [Aldous 1983] et à la relier au problème du collectionneur de vignettes¹, classique en théorie des probabilités [Feller 1968], qui correspond au problème de la couverture d’un graphe complet (où chaque site est relié à tous les autres). Il détermine entre autres l’expression exacte du terme dominant à grand volume du temps moyen de couverture $\langle \tau \rangle$ d’un tore discret à d dimensions² par une marche brownienne pour $d \geq 3$ [Aldous 1983, Aldous 1989]

$$\langle \tau \rangle \sim RN \ln N \quad d \geq 3 \quad (3.1)$$

avec N le nombre de sites du tore et R le nombre moyen de retours à l’origine d’une marche brownienne sur un réseau infini en dimension d . Cette expression a été retrouvée par une méthode approchée [Brummelhuis 1991] qui fournit également le terme dominant du temps moyen de couverture d’un réseau périodique à deux dimensions comportant N sites

$$\langle \tau \rangle \sim \frac{1}{\pi} N \ln^2 N \quad d = 2. \quad (3.2)$$

Ces résultats asymptotiques coïncident avec les résultats numériques obtenus dans [Nemirovsky 1990] où les temps moyens de couverture de marches browniennes sur des réseaux euclidiens en dimensions un à quatre, en conditions aux limites périodiques et réfléchissantes, ont été étudiés et leurs termes dominants et sous-dominants déterminés par ajustement.

Les résultats asymptotiques analytiques (3.1) et (3.2) ont été raffinés par la suite dans la littérature mathématique. Ont entre autres été déterminés de manière exacte le terme dominant du temps moyen de couverture en dimension deux dans [Dembo 2004], qui avait été obtenu de manière approchée dans [Brummelhuis 1991], et le comportement de son terme sous-dominant dans [Ding 2012]. Au-delà de la moyenne du temps de couverture d’un réseau euclidien par une marche brownienne, il a été montré dans [Belius 2013] pour des marches en dimension $d \geq 3$ que son deuxième moment vaut $g(0)N$ où $g(0)$ est la fonction de Green du réseau d dimensionnel évaluée en 0³ (voir par exemple [Hughes 1996]), et que le temps de couverture translaté de sa moyenne et renormalisé par son écart-type est distribué selon une loi de Gumbel à grand volume

$$P\left(\frac{\tau - g(0)N \ln N}{g(0)N}\right) \sim \exp(-x - \exp(-x)). \quad (3.3)$$

Tous les résultats précédemment mentionnés sont asymptotiques par rapport à la taille du système. Le seul résultat obtenu dans la littérature pour un nombre arbitraire N de sites est l’expression exacte du temps moyen de couverture d’une marche brownienne à une dimension [Yokoi 1990] en conditions aux limites périodiques

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{2} N(N - 1) \quad (3.4)$$

1. “Coupon collector problem” en anglais. On peut formuler ce problème de la manière suivante. Un enfant collectionne les vignettes offertes dans des paquets de céréales. Combien de paquets doit-il acheter en moyenne pour avoir toutes les sortes de vignettes existantes ?

2. C’est-à-dire sur un réseau euclidien en dimension d avec conditions aux limites périodiques.

3. Ou “lattice Green function” en anglais, qui coïncide en zéro avec le nombre moyen R de retours à l’origine d’une marche brownienne à d dimensions en espace infini qui apparaît dans le résultat d’Aldous (3.1).

et en conditions aux limites réfléchissantes partant du point $s \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\langle \tau \rangle = N(N-1) + (s-1)(N-s). \quad (3.5)$$

L'absence de résultats exacts non asymptotiques en dimension supérieure ou égale à deux provient de la complexité du problème de couverture. En effet, pour savoir quand le domaine a été intégralement couvert, il faut avoir gardé en mémoire toute la trajectoire, ce qui est extrêmement ambitieux au-delà du cas plus simple de la dimension un où l'ensemble des sites visités reste connexe à tout instant pour une marche sur plus proches voisins, difficulté explicitement soulevée dans [Nemirovsky 1991] et [Nascimento 2001].

Outre le temps de couverture d'un domaine, il est par ailleurs naturel de définir des observables relatives aux recherches quasi-exhaustives, où seule une partie des sites du domaine doit être trouvée. Avec le temps de couverture, cela définit la classe des observables de couverture :

- (i) le **temps de couverture complète**⁴ $\tau(N)$, défini comme le temps nécessaire pour visiter les N sites du domaine,
- (ii) le **temps de couverture partielle** $\tau_p(M, N)$, défini comme le temps nécessaire pour visiter M sites distincts parmi les N sites du domaine, quels qu'ils soient, qui correspondent donc aux M premiers sites distincts visités,
- (iii) le **temps de couverture aléatoire** $\tau_r(M, N)$, défini comme le temps nécessaire pour visiter M sites distincts choisis à l'avance parmi les N sites du domaine.

Ces deux dernières observables ont été définies et leur valeur moyenne étudiée numériquement dans [Coutinho 1994]. Les temps moyens de couverture partielle et aléatoire ont depuis été déterminés de manière exacte à une dimension dans [Nascimento 2001].

Les résultats de la littérature sur les observables de couverture ont deux limitations importantes. D'une part, les temps de couverture partielle et aléatoire n'ont été que peu étudiés en regard du temps de couverture, bien que possédant une importance voisine en pratique. En effet, quasiment tous les exemples de recherches exhaustives peuvent être formulés de manière également intéressante comme des recherches quasi-exhaustives, où le chercheur a une tolérance sur le nombre de cibles à trouver⁵. D'autre part, tous les résultats obtenus sur les observables de couverture concernent des marches browniennes. Or lorsque l'on s'intéresse aux processus de recherche, il est naturel de ne pas se limiter aux seules marches browniennes et de considérer les divers types de marches aléatoires introduits dans les décennies passées pour décrire de manière plus fine le comportement de chercheurs aléatoires dans différents contextes, comme nous l'avons mentionné en introduction générale.

Nous allons dans ce chapitre apporter des éléments nouveaux pour combler partiellement ces manques. Nous allons tout d'abord réaliser le pendant pour une marche aléatoire unidimensionnelle persistante⁶ des calculs exacts exposés dans [Yokoi 1990] pour une marche aléatoire

4. Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on l'appellera simplement temps de couverture du domaine.

5. On peut par exemple accepter qu'un robot aspirateur laisse un caillou au sol dans une pièce, de même qu'un organisme infecté sera vraisemblablement guéri sans que les cellules du système immunitaire aient besoin d'éliminer absolument tous les agents pathogènes du corps.

6. Où le marcheur a une chance plus élevée de continuer dans la direction de son pas précédent, que nous définirons dans le paragraphe suivant.

unidimensionnelle simple. Nous déterminerons ensuite la distribution des observables de couverture définies plus haut pour un grand nombre de processus de recherche, dont les marches persistantes, les marches de Lévy et les marches intermittentes définies dans l'introduction générale. Nous montrerons enfin que pour ces trois classes de processus, le moyen temps de couverture peut être minimisé, c'est-à-dire qu'il existe une stratégie de recherche d'efficacité optimale pour couvrir un domaine.

3.2 Temps moyen de couverture à une dimension pour une marche aléatoire persistante

Comme formulé par le passé dans [Nemirovsky 1991, Nascimento 2001], il est extrêmement compliqué, voire impossible, de traiter de manière exacte les problèmes de couverture en dimension deux ou plus. Le cas de la dimension un est très particulier car l'ensemble des sites visités au cours d'une marche sur plus proches voisins est toujours connexe. C'est cette particularité qui rend le problème abordable en dimension un [Yokoi 1990, Nascimento 2001].

Nous allons ici étendre l'étude du temps moyen de couverture pour une marche brownienne menée dans [Yokoi 1990] à un premier exemple basique de processus de recherche alternatif, la marche aléatoire persistante. Nous considérerons cette marche persistante en temps discret sur un réseau unidimensionnel (périodique dans un premier temps, puis avec des bords réfléchissants dans un second temps) comportant N sites. A chaque pas de temps, le marcheur a par définition une probabilité $(1 + \varepsilon)/2$ de continuer dans la direction du pas précédent, et une probabilité $(1 - \varepsilon)/2$ d'aller dans la direction opposée, avec $-1 < \varepsilon < 1$ ⁷ (voir figure 3.2).

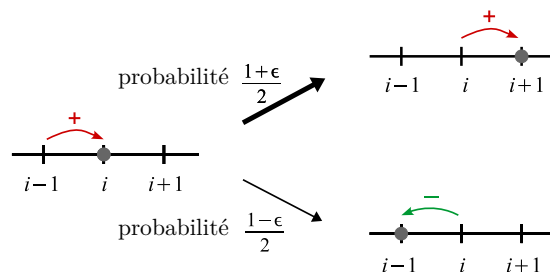


FIGURE 3.2 – Illustration d'un pas de marche persistante. Si le pas précédent a été fait vers la droite, la probabilité d'aller à nouveau vers la droite est $(1 + \varepsilon)/2$.

Dans cette section, nous noterons $\tau_{P,R}(N)$ le temps moyen de couverture, l'indice désignant les conditions aux limites adoptées, périodiques ou réfléchissantes. Nous ne considérerons que la moyenne du temps de couverture et pas la variable aléatoire elle-même, c'est pourquoi nous oublierons la valeur moyenne $\langle . \rangle$ pour alléger les notations dans toute la section 3.2.

7. On remarquera que les cas $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = -1$ sont tous les deux des cas particuliers car déterministes. Le premier correspond à un mouvement balistique, et le second à un va-et-vient perpétuel entre deux sites adjacents. En pratique, on s'intéresse souvent au cas $0 \leq \varepsilon < 1$ où le marcheur a une probabilité plus élevée de continuer dans la direction de son pas précédent que dans les autres directions.

3.2.1 En conditions aux limites périodiques

Calculons tout d'abord le temps moyen de couverture $\tau_P(N)$ d'un anneau contenant N sites. La périodicité du réseau implique que le temps de couverture ne dépend que de la taille du système et pas du point de départ. Comme suggéré dans [Yokoi 1990], on écrit le temps moyen de couverture $\tau_P(N)$ comme la somme du temps moyen nécessaire pour visiter $N - 1$ sites adjacents du réseau, qui coïncide avec le temps moyen de couverture $\tau_P(N - 1)$, et du temps moyen nécessaire $t(N)$ pour visiter le dernier site (voir figure 3.3)

$$\tau_P(N) = \tau_P(N - 1) + t(N). \quad (3.6)$$

Cette équation donne une relation de récurrence. Pour en déduire le temps moyen de couverture $\tau_P(N)$, il faut tout d'abord déterminer le temps $t(N)$. Pour cela, introduisons $T_+(d)$ le temps moyen nécessaire pour atteindre le site $x_0 + d$, sachant que le marcheur est arrivé au temps $t = 0$ en x_0 depuis le site $x_0 - 1$, la valeur de x_0 étant quelconque à cause de la périodicité du réseau. On introduit également son pendant $T_-(d)$ qui est le temps moyen nécessaire pour atteindre le site $x_0 + d$, sachant que le marcheur est arrivé au temps $t = 0$ en x_0 depuis le site $x_0 + 1$ ⁸. Ces grandeurs dépendent de la taille N , mais on oublie cette dépendance dans la notation pour en alléger l'écriture. On remarque que $t(N) = T_+(1)$, que nous allons calculer.



FIGURE 3.3 – Au moment où le marcheur (représenté par une croix) couvre un anneau à $N - 1$ sites (a), il se retrouve entre le site qu'il vient de visiter et un site qu'il a visité dans le passé (en orange). Dans le cas de figure représenté ici, le marcheur a exploré l'anneau dans le sens trigonométrique jusqu'à ce site orange, puis ne l'a jamais dépassé et a rebroussé chemin pour couvrir le reste de l'anneau. Tout se passe donc comme si le lien entre le dernier site (croix) et le site orange avait été coupé. Si on coupe ce lien et qu'on ajoute un site (vert), de manière à faire un anneau de N sites (b), on comprend que le temps nécessaire pour visiter $N - 1$ sites de l'anneau à N sites, qui sont nécessairement adjacents, correspond au temps de couverture de l'anneau à $N - 1$ sites.

Commençons par déterminer les fonctions $T_+(d)$ et $T_-(d)$. Les équations vérifiées par ces deux fonctions s'obtiennent en partitionnant sur le premier pas de la marche, qui fait arriver le marcheur en $x_0 + 1$ avec probabilité $(1 + \varepsilon)/2$ (respectivement $(1 - \varepsilon)/2$) dans le sens $+$ des abscisses croissantes ou en $x_0 - 1$ avec probabilité $(1 - \varepsilon)/2$ (respectivement $(1 + \varepsilon)/2$) dans le sens $-$. Ce premier pas ayant coûté une unité de temps, les fonctions $T_+(d)$ et $T_-(d)$ sont

8. Dans toute cette section, les indices ou exposants $+$ désigneront les quantités pour lesquelles le pas précédent a été fait dans le sens des abscisses positives, et le signe $-$ celles pour lesquelles le pas précédent a été fait dans le sens des abscisses négatives.

solutions pour tout $d \geq 1$ des équations couplées suivantes

$$T_+(d) = \frac{1+\varepsilon}{2} T_+(d-1) + \frac{1-\varepsilon}{2} T_-(d+1) + 1 \quad (3.7)$$

$$T_-(d) = \frac{1-\varepsilon}{2} T_+(d-1) + \frac{1+\varepsilon}{2} T_-(d+1) + 1 \quad (3.8)$$

où on utilise la double condition $T_{\pm}(0) = 0$. Si l'on combine ces deux équations, on obtient

$$T_+(d) - 2T_+(d-1) + T_+(d-2) + 2\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = 0 \quad (3.9)$$

qui admet une solution de la forme

$$T_+(d) = \lambda + \mu d - \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} d^2. \quad (3.10)$$

La condition aux limites $T_+(0) = 0$ donne $\lambda = 0$, et on détermine μ grâce à une égalité liée à la périodicité du réseau

$$T_+(d) = T_-(N-d). \quad (3.11)$$

On obtient finalement

$$T_+(d) = d \left[\frac{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \left(1 - \frac{(1-\varepsilon)(N-2)^2}{2} \right) + 1}{1 - \frac{(1-\varepsilon)(N-2)}{2}} - \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} d \right], \quad (3.12)$$

et en particulier

$$t(N) = T_+(1) = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} N + \frac{3\varepsilon-1}{1+\varepsilon}. \quad (3.13)$$

En utilisant la relation de récurrence (3.6)

$$\tau_P(N) = \sum_{i=3}^N t(i) + \tau(2) \quad (3.14)$$

et en remarquant que le temps de couverture $\tau(2)$ d'un anneau à 2 sites vaut 1, on en déduit finalement l'expression exacte du temps moyen de couverture d'un réseau périodique de N sites

$$\tau_P(N) = \frac{1-\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} N^2 + \frac{5\varepsilon-1}{2(1+\varepsilon)} N - \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad (3.15)$$

On retrouve en particulier le résultat de [Yokoi 1990] en l'absence de persistance ($\varepsilon = 0$)

$$\tau_P(N) = \frac{N(N-1)}{2}. \quad (3.16)$$

De plus, dans le cas d'une marche très persistante avec une longueur de persistance $l_p \equiv 1/(1-\varepsilon)$ de l'ordre de N , on trouve que le temps moyen de couverture tend vers $N-1$ et n'est plus d'ordre N^2 , comme attendu puisque le mouvement est quasi balistique.

3.2.2 En conditions aux limites réfléchissantes

On s'intéresse maintenant à un segment comportant N sites numérotés de 0 à $N - 1$ avec des conditions aux limites réfléchissantes. Après réflexion sur le bord, le marcheur arrive sur un site, venant de ce même site. Il faut donc choisir une convention d'orientation de ce pas, définie sur la figure 3.4.

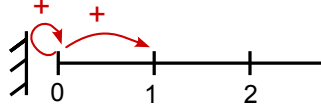


FIGURE 3.4 – Après réflexion sur le bord gauche, on suppose par convention que le marcheur arrive en 0 par la gauche, de même qu'après réflexion sur le bord droit, on suppose que le marcheur arrive en $N - 1$ par la droite.

Pour calculer le temps moyen de couverture partant d'un point x de ce segment, on décompose le processus en deux étapes : le marcheur doit déjà atteindre l'un des deux bords, puis traverser le domaine pour rejoindre le bord opposé. Le temps de couverture est l'instant où il visite le deuxième bord du domaine

$$\tau_R(x, N) = T_{\text{bord}} + T_{\text{traversée}}. \quad (3.17)$$

Nous allons donc calculer successivement les durées moyennes T_{bord} et $T_{\text{traversée}}$ de ces deux étapes et en déduire le temps moyen de couverture.

3.2.2.1 Temps moyen pour atteindre le premier bord

Commençons par déterminer le temps nécessaire pour atteindre le premier bord. On introduit la probabilité conditionnelle⁹ $\Pi_z(y|x)$, définie comme la probabilité d'atteindre le point y avant le point z partant du point x , ainsi que le temps moyen conditionnel $T_z(y|x)$, défini comme le temps moyen nécessaire pour atteindre le point y en partant du point x , sachant que le point z n'a pas été visité. On définit également le produit de la probabilité conditionnelle par le temps moyen conditionnel associé

$$R_z(y|x) \equiv \Pi_z(y|x) T_z(y|x). \quad (3.18)$$

Ces trois grandeurs sont par ailleurs données par la demi-somme des grandeurs orientées associées qui dépendent de la direction du pas qui a fait arriver le marcheur en x

$$\Pi_z(y|x) = \frac{1}{2}\Pi_z^+(y|x) + \frac{1}{2}\Pi_z^-(y|x) \quad (3.19)$$

$$T_z(y|x) = \frac{1}{2}T_z^+(y|x) + \frac{1}{2}T_z^-(y|x) \quad (3.20)$$

$$R_z(y|x) = \frac{1}{2}R_z^+(y|x) + \frac{1}{2}R_z^-(y|x). \quad (3.21)$$

9. Appelée "splitting probability" en anglais.

Le temps moyen T_{bord} pour atteindre le premier bord est la moyenne des temps moyens $T_{N-1}(0|x)$ et $T_0(N-1|x)$ pour atteindre respectivement le bord gauche ou droit en premier, pondérés par les probabilités conditionnelles d'atteindre le bord concerné avant l'autre

$$\begin{aligned} T_{\text{bord}} &= \Pi_{N-1}(0|x)T_{N-1}(0|x) + \Pi_0(N-1|x)T_0(N-1|x) \\ &= R_{N-1}(0|x) + R_0(N-1|x). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Nous devons donc déterminer la quantité $R_z(y|x)$ où y et z sont les deux bords du domaine, par l'intermédiaire des quantités orientées $R_z^\pm(y|x)$. Elles sont solutions d'une équation de récurrence dont le terme source est la probabilité conditionnelle orientée (voir par exemple [Redner 2001])

$$\frac{1+\varepsilon}{2} R_{N-1}^+(0|x+1) + \frac{1-\varepsilon}{2} R_{N-1}^-(0|x-1) - R_{N-1}^+(0|x) = -\Pi_{N-1}^+(0|x) \quad (3.23)$$

pour $x \in \{1, \dots, N-1\}$, et

$$\frac{1+\varepsilon}{2} R_{N-1}^-(0|x-1) + \frac{1-\varepsilon}{2} R_{N-1}^+(0|x+1) - R_{N-1}^-(0|x) = -\Pi_{N-1}^-(0|x) \quad (3.24)$$

pour $x \in \{0, \dots, N-2\}$.

Avant de résoudre ces équations, il faut donc déterminer les probabilités conditionnelles orientées $\Pi_{N-1}^+(0|x)$ et $\Pi_{N-1}^-(0|x)$. Elles sont solutions des deux équations de Fokker-Planck vers le passé couplées pour $x \in \{1, \dots, N-2\}$ qui s'obtiennent comme précédemment en partitionnant sur le premier pas

$$\Pi_{N-1}^+(0|x) = \frac{1+\varepsilon}{2} \Pi_{N-1}^+(0|x+1) + \frac{1-\varepsilon}{2} \Pi_{N-1}^-(0|x-1) \quad (3.25)$$

$$\Pi_{N-1}^-(0|x) = \frac{1+\varepsilon}{2} \Pi_{N-1}^-(0|x-1) + \frac{1-\varepsilon}{2} \Pi_{N-1}^+(0|x+1). \quad (3.26)$$

En combinant ces deux équations, on trouve que les deux probabilités conditionnelles orientées sont solutions de la même équation de récurrence du deuxième ordre

$$\Pi_{N-1}^\pm(0|x+1) - 2\Pi_{N-1}^\pm(0|x) + \Pi_{N-1}^\pm(0|x-1) = 0 \quad (3.27)$$

valable pour $x \in \{2, \dots, N-2\}$ pour $\Pi_{N-1}^+(0|x)$ et pour $x \in \{1, \dots, N-3\}$ pour $\Pi_{N-1}^-(0|x)$. Les probabilités conditionnelles ont donc la forme suivante

$$\Pi_{N-1}^+(0|x) = \lambda + \mu x \quad \text{pour } x \in \{1, \dots, N-1\} \quad (3.28)$$

$$\Pi_{N-1}^-(0|x) = \lambda' + \mu' x \quad \text{pour } x \in \{0, \dots, N-2\}. \quad (3.29)$$

En utilisant l'équation (3.25) et les conditions aux bords

$$\Pi_{N-1}^+(0|N-1) = 0 \quad (3.30)$$

$$\Pi_{N-1}^-(0|0) = 1, \quad (3.31)$$

on obtient finalement l'expression des probabilités conditionnelles orientées de toucher le bord droit avant le gauche

$$\Pi_{N-1}^+(0|x) = \frac{1-\varepsilon}{N(\varepsilon-1)+1-3\varepsilon} (x-N+1) \quad (3.32)$$

$$\Pi_{N-1}^-(0|x) = 1 + \frac{1-\varepsilon}{N(\varepsilon-1)+1-3\varepsilon} x. \quad (3.33)$$

Résolvons maintenant les deux équations couplées (3.23) et (3.24). En combinant ces équations, on obtient pour $R_{N-1}^+(0|x)$ avec $x \in \{1, \dots, N-3\}$

$$\begin{aligned} R_{N-1}^+(0|x+2) - 2R_{N-1}^+(0|x+1) + R_{N-1}^+(0|x) \\ = -\frac{2}{1+\varepsilon} \Pi_{N-1}^+(0|x+1) - \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \Pi_{N-1}^-(0|x) + \Pi_{N-1}^+(0|x), \end{aligned} \quad (3.34)$$

dont la solution est de la forme, pour $x \in \{1, \dots, N-1\}$,

$$R_{N-1}^+(0|x) = \lambda + \mu x + \alpha x^2 + \beta x^3 \quad (3.35)$$

avec

$$\alpha = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{(1-\varepsilon)(N-1)}{N(\varepsilon-1)+1-3\varepsilon} \quad (3.36)$$

$$\beta = \frac{1-\varepsilon}{3(1+\varepsilon)} \frac{1-\varepsilon}{N(1-\varepsilon)+3\varepsilon-1}. \quad (3.37)$$

Les constantes λ et μ sont déterminées à l'aide de la condition au bord

$$R_{N-1}^+(0|N-1) = 0 \quad (3.38)$$

et de l'équation (3.23) écrite en $x = 1$

$$R_{N-1}^+(0|1) = \frac{1+\varepsilon}{2} R_{N-1}^+(0|2) + \Pi_{N-1}^+(0|1). \quad (3.39)$$

On obtient finalement

$$R_{N-1}^+(0|x) = (x-N+1) \left[\mu + \alpha(x+N-1) + \beta(x^2 + (N-1)x + (N-1)^2) \right] \quad (3.40)$$

où

$$\begin{aligned} \mu = -\frac{2}{3} \frac{(1-\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)(N(\varepsilon-1)+1-3\varepsilon)^2} \\ \times \left[(1+\varepsilon)(3-N)(-N^2+3) - 3 \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} (2-N) + (N-2)(-2N^2+2N+1) \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

L'expression de $R_{N-1}^-(0|x)$ se déduit de l'équation (3.24) avec β et μ donnés par les équations (3.37) et (3.41)

$$R_{N-1}^-(0|x) = \left[\mu + \frac{12\varepsilon}{1-\varepsilon} \beta \left(\frac{1}{1-\varepsilon} + N-2 \right) \right] x - \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} x^2 + \beta x^3. \quad (3.42)$$

En remarquant en outre par symétrie que

$$R_0(N-1|x) = R_{N-1}(0|N-1-x), \quad (3.43)$$

ce qui permet d'obtenir $R_0(N-1|x)$ à partir des équations (3.40) et (3.42). On aboutit finalement à

$$T_{\text{bord}} = R_{N-1}(0|x) + R_0(N-1|x) = -\frac{1}{1+\varepsilon} [(N-1)(\varepsilon x - \varepsilon - x) + x^2(1-\varepsilon)]. \quad (3.44)$$

3.2.2.2 Temps moyen pour traverser le domaine

Une fois que le marcheur est arrivé au premier bord de l'intervalle, il lui faut traverser cet intervalle pour avoir visité tous les sites. Déterminons donc maintenant le temps moyen $T_{\text{traversée}}$ nécessaire au marcheur pour rejoindre l'autre bord. Introduisons $T_{\pm}(x)$ les temps moyens pour aller de x à $x+1$, en connaissant la direction $\pm$ du pas qui fait arriver en x . On peut écrire le temps de traversée en fonction de ces temps¹⁰

$$T_{\text{traversée}} = T_-(0) + T_+(1) + \dots + T_+(N-2). \quad (3.45)$$

Les temps $T_{\pm}(x)$ satisfont les équations couplées suivantes, obtenues encore une fois en partitionnant sur le premier pas

$$T_+(x) = \frac{1+\varepsilon}{2} + \frac{1-\varepsilon}{2} [1 + T_-(x-1) + T_+(x)], \quad (3.46)$$

$$T_-(x) = \frac{1-\varepsilon}{2} + \frac{1+\varepsilon}{2} [1 + T_-(x-1) + T_+(x)]. \quad (3.47)$$

On en déduit la relation de récurrence suivante

$$T_+(x+1) = T_+(x) + 2 \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad (3.48)$$

qui donne pour $x \in \{1, \dots, N-1\}$

$$T_+(x) = 2 \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} x + T_+(0). \quad (3.49)$$

Le temps $T_+(0)$ se déduit de la condition au bord

$$T_+(0) = \frac{1+\varepsilon}{2} + \frac{1-\varepsilon}{2} [1 + T_+(0)] \quad (3.50)$$

de sorte que

$$T_+(x) = 2 \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} x + \frac{2}{1+\varepsilon} \quad (3.51)$$

et

$$T_-(x) = 2(x+1), \quad (3.52)$$

obtenu de manière directe à partir de l'équation (3.46). Par conséquent, en utilisant l'équation (3.45), le temps moyen nécessaire pour traverser tout le domaine vaut finalement

$$T_{\text{traversée}} = 2 + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} (N-1)(N-2) + \frac{2}{1+\varepsilon} (N-2). \quad (3.53)$$

10. Ici, on écrit le temps nécessaire pour aller du bord gauche, en y arrivant par la droite puisque la première fois que le marcheur arrive en 0, il vient forcément du site 1, au bord droit. Le temps pour aller du bord droit au bord gauche donne évidemment le même résultat.

3.2.2.3 Temps moyen de couverture

En rassemblant les résultats des deux paragraphes précédents, on obtient finalement l'expression exacte du temps moyen de couverture partant d'un point de l'intérieur du domaine $x \in \llbracket 1, N-2 \rrbracket$

$$\tau_R(x, N) = -\frac{(N-1)(\varepsilon x - \varepsilon - x) + x^2(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon} + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}(N-1)(N-2) + \frac{2(N-2)}{1+\varepsilon} + 2 \quad (3.54)$$

Le temps moyen de couverture en partant d'un des bords se déduit aisément des quantités calculées précédemment. On notera que le premier pas du marcheur n'est jamais biaisé¹¹. Le temps moyen de couverture dans ce cas ne se réduit donc pas simplement au temps de traversée $T_{\text{traversée}}$, celui-ci étant défini pour un marcheur arrivant à l'une des extrémités du domaine par le site voisin (et pas par réflexion sur le miroir). Le temps moyen de couverture partant des sites 0 ou $N-1$ est donc donné par

$$\begin{aligned} \tau_R(0) = \tau_R(N-1) &= \frac{1}{2} [T_-(0) + T_+(0)] + T_+(1) + \dots + T_+(N-2) \\ &= \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}(N-1)(N-2) + \frac{2}{1+\varepsilon}(N-2) + \frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

On retrouve à nouveau le résultat exact obtenu dans [Yokoi 1990] dans le cas brownien $\varepsilon = 0$

$$\tau_R(x, N) = N(N-1) + x(N-1-x). \quad (3.56)$$

Pour conclure ce paragraphe, remarquons que si l'on s'intéresse au comportement dominant du temps moyen de couverture lorsque le nombre de sites N devient grand, on trouve qu'il faut deux fois plus de temps en moyenne pour couvrir un domaine réfléchissant qu'un domaine périodique, et ce quel que soit le point de départ x fixé et le paramètre de persistance ε . La dépendance en ces paramètres n'apparaît qu'à l'ordre sous-dominant en N

$$\frac{\tau_R(x, N)}{\tau_P(N)} = 2 + 2 \left(x - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right). \quad (3.57)$$

En revanche, si l'abscisse du point de départ est proportionnelle au nombre de sites $x = aN$, par exemple si le marcheur part du centre de l'intervalle, dont on fait tendre la longueur vers l'infini, alors la dépendance dans le point de départ du rapport τ_R/τ_P apparaît bien à l'ordre dominant en N

$$\frac{\tau_R(x, N)}{\tau_P(N)} = 2 + 2a - \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right), \quad (3.58)$$

la dépendance dans le paramètre de persistance étant toujours cantonnée à l'ordre sous-dominant.

11. La persistance n'ayant pas de sens à cette étape, puisque le marcheur n'a pas encore fait de pas.

Nous avons obtenu un résultat exact à une dimension, valable à toute taille de système, qui étend les résultats unidimensionnels de [Yokoi 1990] au cas d’une marche aléatoire persistante. Cela représente un premier pas vers la description de processus de recherche plus généraux que ceux décrits par une simple marche brownienne. Dans la suite, nous allons ainsi étudier la couverture d’un domaine par divers types de modèles de marches aléatoires en dimension plus élevée. En écho à la remarque faite au début de cette section, les résultats que nous obtiendrons seront asymptotiques, et non plus valables à toute taille de système. Néanmoins, cette limitation est mineure puisque notre nouveau cadre, plus large que celui de cette section, nous permettra d’obtenir des résultats très généraux.

3.3 Universalité de la distribution des observables de couverture

Après ce préliminaire¹², nous allons élargir notre cadre de travail sur trois points. En effet, nous étudierons dans cette section la *distribution*, et non plus uniquement le premier moment, de *toutes* les observables de couverture définies en préambule de ce chapitre, pour des processus de recherche *autres* que la marche brownienne simple et la marche aléatoire persistante. Nous nous intéresserons à divers types de marches aléatoires et de processus de recherche, détaillés ci-dessous. Parmi les exemples considérés dans ce travail, les marches persistantes, les marches de Lévy et les marches intermittentes (pour une illustration schématique de ces processus, voir figure 3.5) sont trois représentants majeurs des processus de recherche, très largement utilisés dans la littérature pour modéliser notamment le mouvement des animaux à la recherche de nourriture [Viswanathan 2011, Benhamou 2007, Bénichou 2011, Wu 2000]. Les marches persistantes fournissent un modèle minimal pour décrire un mouvement aléatoire avec une mémoire à court terme (mémoire du pas précédent), les marches de Lévy constituent une modélisation courante du mouvement des animaux rendant compte d’un effet de mémoire à plus long terme [Viswanathan 2011], et les marches intermittentes, qui représentent une alternative de plus en plus populaire aux marches de Lévy, permettent de décrire le déplacement “saltatoire” d’un animal qui alterne entre des phases de recherche et des phases de déplacement aveugle [Bénichou 2005].

Ces processus possèdent une importance particulière dans le champ des recherches aléatoires car ils fournissent chacun une stratégie optimale pour la recherche d’une cible unique. En effet, il existe une valeur particulière du paramètre ajustable de ces processus (la longueur de persistance pour les marches persistantes et les marches de Lévy, et le temps moyen passé dans la phase de recherche diffusive pour les marches intermittentes) qui minimise le temps moyen global de premier passage, c’est-à-dire le temps moyen pour trouver une cible moyenné sur le point de départ de la recherche, grandeur caractéristique de la recherche à une cible. La question d’une minimisation possible se pose également pour les recherches exhaustives, caractérisées par les observables de couverture. L’étude de ces observables est donc particulièrement pertinente et importante pour des processus de recherche divers, et en particulier ceux mentionnés précédemment.

12. Qui constitue néanmoins l’un des seuls résultats exacts valables pour un nombre de sites N arbitraire, avec les résultats de [Yokoi 1990, Nascimento 2001].

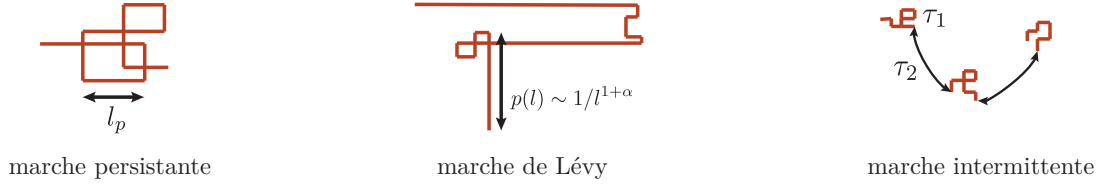


FIGURE 3.5 – Illustration des trois processus de recherche optimisables que nous étudions ici, les marches persistantes, les marches de Lévy et les marches intermittentes. Dans une marche persistante, la probabilité de faire un pas dans la direction du pas précédent est plus élevée que dans les autres directions, induisant une persistance de longueur caractéristique l_p . Dans une marche de Lévy, le marcheur effectue des séries de pas, dont le nombre est tiré avec une loi large, dans une même direction avant d’en changer. Dans une marche intermittente, le marcheur alterne entre des phases de recherche diffusive, de temps caractéristique τ_1 , et des phases de relocalisation, de temps caractéristique τ_2 .

Dans ce qui suit, nous nous restreindrons aux processus non compacts¹³. Un processus de recherche est dit non compact si, lorsqu’il a lieu en espace infini, c’est-à-dire en l’absence de confinement, la probabilité de trouver un site particulier est strictement inférieure à 1. Par exemple, une marche aléatoire sur réseau symétrique avec sauts sur les plus proches voisins à trois dimensions (ou plus) est non compacte, alors qu’elle est compacte à une dimension, et marginalement compacte à deux dimensions. Bien que cette définition se réfère à une situation sans confinement, ces processus de recherche sont bien définis en espace confiné.

Qualitativement, une marche non compacte est peu redondante, c’est-à-dire qu’elle repasse peu par des sites qu’elle a visités par le passé. Lorsqu’elle a lieu dans un volume confiné, les sites qui n’ont pas encore été visités, quand il n’en reste qu’un petit nombre, ont tendance à être disséminés dans le volume, alors que pour une marche compacte, l’exploration se fait plutôt “en bloc” et les derniers sites tendent à être regroupés en amas. Suivant les types de marches considérés, ce critère de répartition des derniers sites à visiter du domaine est plus ou moins bien respecté pour une taille de système donnée. On peut donc définir, de manière informelle mais imagée, un degré de non compacité d’une marche en volume confiné lié à la tendance des derniers sites à visiter à s’agglutiner ou non. Ainsi, dans la suite, nous parlerons de marches “très non compactes” lorsque les derniers sites à visiter du domaine seront éloignés les uns des autres, y compris pour des volumes assez petits, et de marches “peu non compactes” lorsque les derniers sites à visiter auront une tendance résiduelle à être regroupés, tendance qui disparaît lorsque la taille du système tend vers l’infini. Nous discuterons ce point par la suite.

Dans cette section, nous déterminons la distribution asymptotique des observables de couverture d’un réseau euclidien en conditions aux limites périodiques comportant N sites avec N grand pour des processus de recherche aléatoire non compacts.

13. C’est-à-dire non récurrents.

3.3.1 Détermination de la distribution asymptotique du temps de couverture partielle

Commençons par étudier le temps de couverture partielle $\tau_p(M, N)$ nécessaire pour visiter M sites distincts parmi les N sites du réseau, quels qu'ils soient, c'est-à-dire les M premiers visités par le marcheur. On remarque que si $M = N$, on obtient le temps de couverture complète $\tau(N)$. Nous allons déterminer la distribution asymptotique du temps de couverture partielle dans la limite de grand volume où N et M sont grands, avec le nombre $p \equiv N - M$ de sites restants à la fin de la recherche fixé. Notons que contrairement aux notations adoptées au paragraphe précédent, $\tau_p(M, N)$ et $\tau(N)$ désignent maintenant les variables aléatoires.

On peut écrire ce temps $\tau_p(M, N)$ sous la forme d'une somme

$$\tau_p(M, N) = \sum_{k=1}^{M-1} \theta(k, N) \quad (3.59)$$

où $\theta(k, N)$ est le temps qui s'écoule entre la découverte du $k^{\text{ème}}$ nouveau site visité et du $k+1^{\text{ème}}$. Il s'agit donc du temps nécessaire pour visiter un nouveau site parmi les $N - k$ sites non visités, k sites ayant déjà été visités. La détermination exacte de ces quantités peut sembler hors de portée car elles dépendent *a priori* de toute la trajectoire passée du marcheur. Cependant, en pratique, dans la limite N grand et $N - k \ll N$ (peu de sites restants à visiter), on peut faire une première hypothèse : les quelques $N - k$ derniers sites à visiter sont essentiellement répartis uniformément dans le domaine à cause de la nature non compacte des marches que l'on étudie ici et non pas regroupés en amas comme dans le cas d'une marche compacte. Cette hypothèse est vérifiée dans le cas d'une marche aléatoire brownienne en dimension trois ou plus (voir [Brummelhuis 1992]). Nous l'étendons à tous les types de marches non compactes considérés dans ce chapitre, et nous en vérifierons la validité par la suite.

Ces derniers $N - k$ sites sont donc particulièrement difficiles à trouver, car peu nombreux et disséminés dans le volume¹⁴, ce qui veut dire que la somme (3.59) est dominée par ses derniers termes, c'est-à-dire par les temps $\theta(k, N)$ avec k proche de M (et M voisin de N). D'autre part, on peut déduire de notre hypothèse sur la répartition uniforme des derniers sites que les temps $\theta(k, N)$ qui s'écoulent entre les découvertes successives de ces sites sont des variables aléatoires asymptotiquement indépendantes les unes des autres dans la limite de grand volume.

La distribution asymptotique des temps $\theta(k, N)$ s'obtient comme suit. Les temps de premier passage par chacun des $N - k$ sites restants sont, comme les temps $\theta(k, N)$, asymptotiquement indépendants, dans la mesure où les cibles sont éloignées les unes des autres. Ils sont par ailleurs identiquement distribués¹⁵. On fait l'hypothèse supplémentaire que tous les processus étudiés

14. S'il en reste un nombre $k = O(1)$ à visiter, ils sont séparés en moyenne d'une distance $(N/k)^{1/d}$ où d est la dimension de l'espace, qui devient donc grande lorsque N tend vers l'infini.

15. Pour une marche non compacte, le processus perd très rapidement la mémoire du point de départ, donc à moins que la cible ne soit sur un site situé très proche de la position initiale du marcheur, les temps de premier passage par chacune des cibles suivent la même distribution. Si les quelques derniers sites sont répartis de manière homogène en volume et que le volume est grand, les temps de premier passage par chacun des $N - k$ sites restants pour aller d'un site à l'autre sont bien identiquement distribués.

ici suivent la loi exponentielle suivante

$$F(t) = \frac{1}{\langle T \rangle} \exp \left(-\frac{t}{\langle T \rangle} \right) \quad (3.60)$$

où $\langle T \rangle$ est le temps moyen global de premier passage par le site cible, défini comme le temps moyen de premier passage par la cible moyenné sur le point de départ. L'existence de cette loi exponentielle n'a été démontrée que pour certains processus non compacts, les processus invariants d'échelle [Bénichou 2014b]. On vérifie que cette hypothèse est bien vérifiée dans l'annexe H. En conditions aux limites périodiques, ce temps moyen global est indépendant du point.

La probabilité d'atteindre le site i parmi ces $N - k$ sites restants pour la première fois au temps t sans avoir encore visité les $N - k - 1$ autres sites est donc donnée par

$$F_i(t) \prod_{j \neq i} \int_t^{+\infty} du F_j(u) = F(t) \left(\int_t^{+\infty} du F(u) \right)^{N-k-1} \quad (3.61)$$

d'où la distribution du temps $\theta(k, N)$ nécessaire pour trouver n'importe lequel de ces $N - k$ sites pour la première fois au temps t

$$\begin{aligned} f_{k,N}(\theta(k, N) = t) &= (N - k) F(t) \left(\int_t^{+\infty} du F(u) \right)^{N-k-1} \\ &= \frac{N - k}{\langle T \rangle} \exp \left(-\frac{(N - k)t}{\langle T \rangle} \right) \end{aligned} \quad (3.62)$$

en utilisant l'expression (3.60).

Nous faisons ensuite une troisième hypothèse qui consiste à étendre ces propriétés d'indépendance et de distribution exponentielle des derniers temps $\theta(k, N)$ à tous les temps $\theta(k, N)$ de la somme (3.59). On suppose donc que tous les temps $\theta(k, N)$ sont *indépendants* et *distribués selon la loi* (3.62). Les première et troisième hypothèses que nous avons faites seront vérifiées par la suite, en comparant aux résultats exacts de la littérature et aux simulations numériques, la deuxième ayant été vérifiée séparément dans l'annexe H.

Il est adapté dans ce cas de calculer la transformée de Laplace de la distribution du temps de couverture partielle¹⁶ qui, grâce à l'indépendance des $\theta(k, N)$, s'écrit sous la forme d'un produit

$$\hat{P}(s) \equiv \int_0^{+\infty} dt e^{-st} P(\tau(M, N) = t) = \prod_{k=1}^{M-1} \hat{f}_{k,N}(s) \quad (3.63)$$

où $\hat{f}_{k,N}(s)$ est la transformée de Laplace de la distribution de $\theta(k, N)$ qui vaut, d'après l'expression (3.62),

$$\hat{f}_{k,N}(s) = \frac{1}{1 + \frac{s\langle T \rangle}{N-k}}. \quad (3.64)$$

16. La transformée de Laplace de la distribution d'une somme de variables aléatoires indépendantes est le produit des transformées de Laplace des distributions de chacun des termes.

En combinant les équations (3.63) et (3.64), on obtient un produit dont l'expression se calcule analytiquement

$$\hat{P}(s) \sim \prod_{k=1}^{M-1} \frac{1}{1 + \frac{s\langle T \rangle}{N-k}} = \frac{(N-1)!}{(N-M)!} \frac{\Gamma(N-M+1+s\langle T \rangle)}{\Gamma(N+s\langle T \rangle)} = \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(N+s\langle T \rangle)} \frac{\Gamma(p+1+s\langle T \rangle)}{p!}. \quad (3.65)$$

Dans le régime $N \gg 1$, toujours avec le nombre de sites non visités à la fin de la marche $p = N - M$ fixé, on a en utilisant la formule de Stirling pour $s \ll 1$ ¹⁷

$$\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(N+s\langle T \rangle)} \sim \frac{N^N}{N^{N+s\langle T \rangle}} = \frac{1}{N^{s\langle T \rangle}} \quad (3.66)$$

et on obtient donc

$$\hat{P}(s) \sim \frac{\Gamma(p+1+s\langle T \rangle)}{p! N^{s\langle T \rangle}}. \quad (3.67)$$

On peut calculer la transformée inverse de Laplace de cette expression (voir Annexe G).

En introduisant le temps de couverture partielle renormalisé

$$x \equiv \frac{\tau_p(M, N)}{\langle T \rangle} - \ln N \quad (3.68)$$

on obtient la distribution limite de ce temps de couverture partielle renormalisé

$$P_p(x) \sim \frac{1}{p!} \exp(-(p+1)x - e^{-x}) \quad (3.69)$$

valable asymptotiquement quand N et M sont grands avec le nombre de sites non visités à la fin de la recherche $p = N - M$ fixé. Nous discuterons le domaine de validité en p de ces résultats dans le paragraphe 3.3.5.

En particulier, si $p = 0$, on obtient la distribution du temps de couverture complète

$$P_0(x) \sim \exp(-x - e^{-x}) \quad (3.70)$$

qui s'avère être une distribution de Gumbel.

La connaissance de la distribution entière du temps de couverture partielle permet en particulier d'obtenir ses moments. On peut en effet utiliser l'expression (3.67) de la transformée de Laplace de la distribution du temps de couverture partielle à grand N pour générer par exemple la moyenne et l'écart-type du temps de couverture partielle

$$\langle \tau_p(M, N) \rangle \sim \langle T \rangle [\ln(N) - \Psi(p+1)] \quad (3.71)$$

$$\sigma_{\tau_p} \equiv \sqrt{\langle \tau(M, N)^2 \rangle - \langle \tau(M, N) \rangle^2} \sim \langle T \rangle \sqrt{\Psi^{(1)}(p+1)} \quad (3.72)$$

17. Etant donné que s est la variable de Laplace associée au temps de couverture partielle, qui diverge asymptotiquement, la zone d'intérêt de la transformée de Laplace de τ_p correspond bien à $s \ll 1$.

où $\Psi^{(n)}$ est la fonction polygamma d'ordre n définie par $\Psi^{(n)}(z) = d^{n+1} \ln \Gamma(z) / dz^{n+1}$.

En effet, par définition de la transformée de Laplace, on obtient en développant à petite variable de Laplace

$$\begin{aligned} \hat{P}(s) &= \int_0^{+\infty} dt e^{-st} P(t) = \int_0^{+\infty} dt \left(1 - st + \frac{s^2 t^2}{2} + o(s^2) \right) P(t) \\ &= 1 - s \langle \tau(M, N) \rangle + \frac{s^2}{2} \langle \tau^2(M, N) \rangle + o(s^2). \end{aligned} \quad (3.73)$$

En développant à petit s l'équation (3.67), on peut par conséquent identifier les moments de $\tau(M, N)$. On a d'une part

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(p+1+s\langle T \rangle)}{p!} &= 1 + s\langle T \rangle \frac{\Gamma'(p+1)}{\Gamma(p+1)} + \frac{s^2 \langle T \rangle^2}{2} \frac{\Gamma''(p+1)}{\Gamma(p+1)} + o(s^2) \\ &= 1 + s\langle T \rangle \Psi^{(0)}(p+1) + \frac{s^2 \langle T \rangle^2}{2} \left(\Psi^{(1)}(p+1) - \Psi^{(0)}(p+1)^2 \right) + o(s^2) \end{aligned} \quad (3.74)$$

et d'autre part

$$N^{s\langle T \rangle} = 1 + s\langle T \rangle \ln N + \frac{s^2 \langle T \rangle^2}{2} \ln^2 N + o(s^2). \quad (3.75)$$

En regroupant ces deux développements, on obtient les expressions (3.71) et (3.72) de la moyenne de $\tau(M, N)$ et de sa variance à grand N . En particulier si $p = 0$, on obtient pour le temps de couverture complète

$$\langle \tau(N) \rangle \sim \langle T \rangle (\ln(N) + \gamma) \quad (3.76)$$

$$\sigma_\tau \sim \langle T \rangle \frac{\pi}{\sqrt{6}}. \quad (3.77)$$

L'équation (3.69), dont l'équation (3.70) est un cas particulier (nombre de sites non visités à la fin de la marche $p = 0$), constitue le résultat principal de cette partie et appelle certains commentaires.

Tout d'abord, la forme (3.69) pour la renormalisation (3.68) de la distribution du temps de couverture partielle présente une dépendance *universelle* dans le processus de recherche et dans la géométrie du domaine. En effet, la distribution pour la variable renormalisée x ne dépend que du nombre p de sites restants à la fin de la recherche. Le processus de recherche n'apparaît de manière explicite que dans la renormalisation du temps de couverture partielle donnée par l'équation (3.68), *via* le temps moyen global de premier passage. La géométrie du domaine n'intervient également que dans la renormalisation du temps de couverture partielle, de manière explicite *via* le nombre de sites N du domaine, et de manière implicite dans le temps moyen global de premier passage. Une fois renormalisé selon l'équation (3.68), le temps de couverture partielle suit donc une distribution qui ne dépend ni du processus de recherche, ni de la taille du système, ni d'aucune autre caractéristique du réseau, comme la connectivité des sites ou la forme du domaine.

Par ailleurs, la forme de la distribution de la variable renormalisée, donnée par l'équation (3.69), révèle une connexion profonde avec la statistique d'ordre, remarquée pour les marches browniennes en dimensions trois et supérieures dans la littérature mathématique [Belius 2013]. En effet, la distribution limite P_p correspond à la distribution de la $p + 1^{\text{ème}}$ plus grande valeur parmi N variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle dans le régime où N est grand. Les distributions P_p sont des distributions généralisées de Gumbel, la fonction P_0 présentée à l'équation (3.70) étant la loi de Gumbel [Gumbel 1958]. Le lien avec la statistique d'extrêmes se comprend en considérant l'ensemble $\{t_i\}$ des temps de premier passage par chacun des sites $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. En effet, le temps de couverture complète correspond à la valeur maximale des $\{t_i\}$, puisque l'instant où le domaine est couvert correspond à la découverte du dernier site du volume, celui qui aura été le plus long à être trouvé. Selon la même idée, le temps de couverture partielle $\tau(N - p, N)$ nécessaire pour trouver tous les sites sauf p correspond à la $p + 1^{\text{ème}}$ plus grande valeur parmi les $\{t_i\}$, puisqu'il reste p sites qui seront trouvés ultérieurement. En dépit du fait que, strictement, les temps de premier passage par chacun des sites ne sont ni indépendants ni identiquement distribués¹⁸, on obtient néanmoins asymptotiquement une distribution de type Gumbel lorsque N tend vers l'infini. Cette conclusion se légitime grâce à l'argumentaire développé précédemment. En effet, on peut à nouveau supposer que les derniers sites, dont la répartition est asymptotiquement homogène en volume, ont des temps de premiers passage qui sont indépendants à grand volume, ainsi qu'identiquement et exponentiellement distribués selon (3.62). Dans ces conditions, leurs maximums obéissent donc à une statistique de Gumbel.

Nous allons maintenant vérifier la validité des hypothèses faites au cours de ce calcul, d'une part en comparant nos résultats à ceux obtenus de manière exacte dans la littérature rappelés en introduction de ce chapitre, et d'autre part en les comparant à des simulations numériques.

3.3.2 Comparaison avec les résultats exacts de la littérature

Comme détaillé dans l'introduction de ce chapitre, il existe des résultats exacts concernant le temps de couverture de marches browniennes à trois dimensions et plus sur un réseau euclidien, ainsi que sur des graphes complets, qui sont des exemples de processus non compacts, par conséquent englobés par notre approche.

Intéressons-nous tout d'abord à la moyenne du temps de couverture donnée par l'équation (3.76). Il a été montré que pour une marche brownienne en dimension 3 et plus, le temps moyen global de premier passage croît comme la taille du système N , ce qui donne dans ce cas un temps moyen de couverture

$$\langle \tau(N) \rangle \sim AN \ln N \quad (3.78)$$

avec $A \simeq 1.5164$ en dimension 3 par exemple [Montroll 1969]. Cette expression coïncide avec le résultat exact connu pour le terme dominant à grand N du temps moyen de couverture pour une marche brownienne en dimension 3 et plus [Aldous 1983, Brummelhuis 1991] rappelé en équation (3.1). Dans le cas d'un graphe complet, où le temps moyen global de premier passage

18. Les sites qui sont près du point de départ de la trajectoire seront statistiquement trouvés plus vite que ceux qui en sont loin.

varie également comme le nombre N de sites du système¹⁹, on obtient ce même comportement asymptotique comme établi de manière exacte dans [Feller 1968].

Par ailleurs, au-delà de la valeur moyenne, nous retrouvons bien la distribution de Gumbel qui a été obtenue comme distribution asymptotique du temps de couverture pour une marche brownienne à trois dimensions [Belius 2013] et pour une marche brownienne sur un graphe complet [Turban 2015]. L'accord de nos résultats avec ces résultats exacts dans la limite $N \rightarrow +\infty$ donne une première confirmation forte de la validité des hypothèses que nous avons faites pour déterminer la distribution du temps de couverture partielle.

3.3.3 Comparaison avec les simulations numériques

Nous avons également comparé nos résultats théoriques asymptotiques à des simulations numériques. Pour cela, nous avons généré un certain nombre de processus non compacts numériquement. Commençons par les définir et expliquer comment nous les avons générés.

3.3.3.1 Définition des processus de recherche étudiés

Nous avons étudié par simulation Monte Carlo divers types de marches aléatoires non compactes, dont les marches persistantes, les marches de Lévy et les marches intermittentes qui sont illustrées sur la figure 3.6 et qui jouent un rôle particulier parmi les processus de recherche aléatoire puisqu'elles donnent lieu à une optimisation possible du temps moyen global de premier passage par une cible unique. Nous avons généré les processus suivants :

- (i) marches browniennes sur réseau euclidien,
- (ii) marches browniennes sur réseau d'Erdős-Rényi,
- (iii) marches persistantes,
- (iv) marches de Lévy,
- (v) vols de Lévy,
- (vi) marches intermittentes.

Ces processus ne sont pas non compacts par nature, cette propriété dépend de la valeur de leurs paramètres caractéristiques, qui sont définis ci-dessous, et de la dimension de l'espace dans lequel a lieu la marche. Tous les paramètres étant fixés, plus la dimension de l'espace est élevée, plus la marche est non compacte.

Certaines caractéristiques des marches permettent de les “décompactifier” par rapport à une marche brownienne : la possibilité de faire des sauts vers des sites qui ne sont pas les plus proches voisins, et les déplacements sur plus proches voisins mais effectués de manière rectiligne (qui, comme les sauts, permettent au marcheur d'aller explorer d'autres zones relativement rapidement). Apparaît à nouveau ici le critère informel de degré de non compacité déjà évoqué précédemment qui quantifie la propension de la marche à plus ou moins explorer le volume en bloc, une marche non compacte ne laissant sur son passage que des sites non visités isolés et pas des zones entières. En fonction de la valeur de ses paramètres propres que nous définissons ci-dessous, un même processus peut présenter différents degrés de non-compacité.

19. On a à chaque pas une probabilité $1/N$ de trouver la cible, donc il faut typiquement N pas pour la trouver.

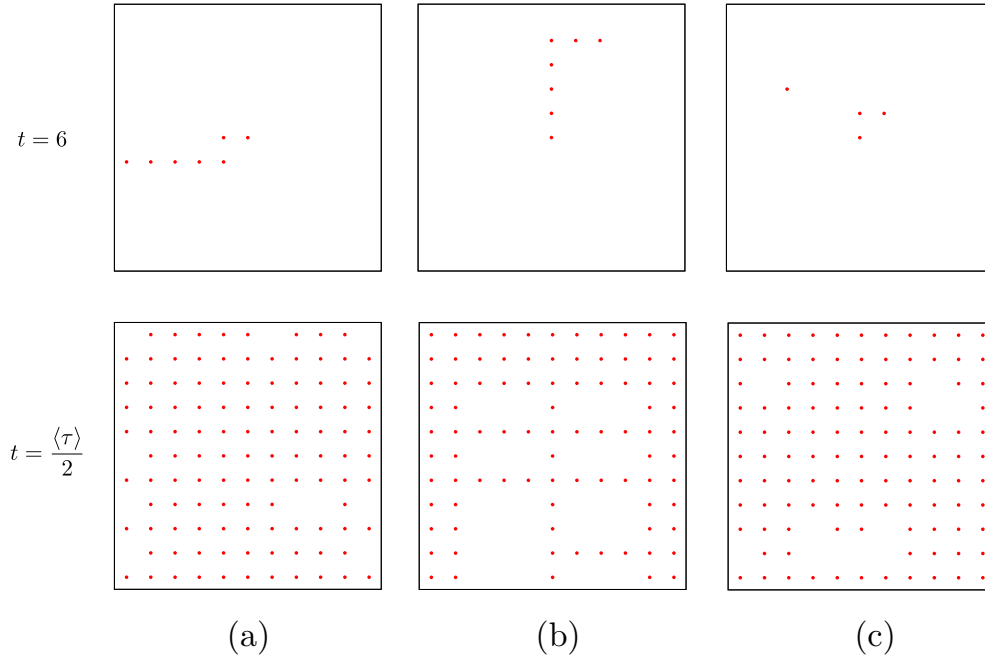


FIGURE 3.6 – Exemples d’agencement des sites visités par les trois principales classes de processus de recherche, les sites rouges étant les sites visités par le marcheur : (a) les marches persistantes avec une longueur de persistance $l_p = 3.5$, (b) les marches de Lévy avec $l_p = 3.5$ et (c) les marches intermittentes pour un taux de pas diffusifs $\rho = 1$ et les taux de durée des phases diffusives et de relocalisation $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$. Les deux images représentent chaque processus au bout de 6 pas et à la moitié du temps moyen de couverture.

Ces processus sont définis et simulés numériquement comme suit :

- (i) Les **marches aléatoires browniennes sur réseau euclidien** (par la suite, lorsque le type de réseau n’est pas précisé, il s’agira d’un réseau euclidien) sont des marches aléatoires sur plus proches voisins où le marcheur effectue à chaque pas de temps un pas vers un de ses $2d$ voisins de manière équiprobable, où d est la dimension de l’espace. Elles sont non compactes à partir de la dimension 3.
- (ii) Les **marches aléatoires browniennes sur réseau complexe** sont des marches sur plus proches voisins, réalisées ici sur un réseau d’Erdős-Rényi, que l’on construit en reliant chaque couple de points avec une probabilité fixée. La connectivité c_i dépend donc du site i considéré. A chaque pas de temps, le marcheur effectue un pas vers un des c_i sites connectés à son site actuel i avec une probabilité $1/c_i$. Ce processus est non compact si l’on prend une probabilité de liaison supérieure à $\ln N/N$ où N est le nombre total de sites²⁰.

20. Ce critère permet de ne pas voir apparaître des zones non connectées dans le réseau [Sood 2005] et d’assurer une connectivité suffisante pour que le marcheur puisse passer rapidement d’une zone à une autre du réseau.

- (iii) Les **marches persistantes** sont également des marches sur plus proches voisins, mais où la probabilité de faire un pas dans la direction du pas précédent est plus élevée que la probabilité de faire un pas dans une autre direction, celles-ci étant en revanche équiprobables

$$p_{=} = \frac{1 + \varepsilon(2d - 1)}{2d} \quad \text{pour la direction du pas précédent,} \quad (3.79)$$

$$p_{\neq} = \frac{1 - \varepsilon}{2d} \quad \text{pour une des autres directions.} \quad (3.80)$$

Un marcheur persistant va donc en moyenne effectuer des excursions rectilignes plus longues qu'un marcheur brownien. On définit sa longueur de persistance comme le nombre moyen de pas consécutifs effectués dans une même direction, qui est donnée par

$$l_p = \frac{2d}{(2d - 1)(1 - \varepsilon)}. \quad (3.81)$$

La persistance du marcheur introduit des excursions balistiques dans la trajectoire, lui permettant ainsi d'aller explorer efficacement d'autres zones du domaine. Cela décompactifie un peu la marche par rapport à une marche brownienne, de sorte qu'en dimension deux²¹, il a été montré que pour chaque taille de domaine, il existe une valeur du paramètre ε pour laquelle la marche s'approche d'une marche non compacte²² [Tejedor 2012].

- (iv) Les **marches de Lévy**, qui sont encore des marches sur plus proches voisins, sont constituées de séries de pas effectués dans une direction donnée avant d'en changer. Le nombre de pas d'une excursion rectiligne est tiré selon une loi de Lévy d'exposant $\alpha \in]0, 2]$ définie par

$$p(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikn - n_0^\alpha |k|^\alpha} \quad (3.82)$$

pour $n > 0$, avec n_0 un paramètre d'échelle²³. Le nombre n obtenu étant un réel, on prend l'entier qui en est le plus proche. Lorsque $\alpha \leq 1$, la distribution du nombre de pas dans une direction n'a pas de premier moment, on ne peut donc pas définir de nombre moyen de pas dans une direction. En revanche, lorsque $1 < \alpha \leq 2$, ce nombre moyen peut être identifié au paramètre d'échelle n_0 . De même que pour les marches persistantes, les excursions balistiques décompactifient la marche et permettent d'obtenir à nouveau des marches quasiment non compactes à deux dimensions.

- (v) Les **vols de Lévy** ressemblent dans leur construction aux marches de Lévy, mais ne sont plus des marches sur plus proches voisins. Ils consistent en une succession de sauts de longueur l distribuée selon une loi de Lévy dans une des $2d$ directions correspondant

21. Où une marche brownienne est marginalement compacte.

22. Ce constat provient du comportement asymptotique du temps moyen global de premier passage avec le nombre de sites N , qui est linéaire en N comme pour une marche non compacte.

23. Il s'agit de la loi de Lévy symétrique fournie par la GSL pour laquelle on élimine tous les résultats inférieurs à 0.

aux axes du réseau. Chaque vol apporte une pénalité de temps constante, quelle que soit la distance parcourue par le marcheur, alors qu'elle est égale au nombre de pas de l'excursion pour une marche de Lévy. L'autre différence par rapport aux marches de Lévy est qu'ici, le marcheur "décolle" du réseau pour effectuer son vol, et ne visite donc pas les sites au-dessus desquels il passe. La distance l obtenue à l'aide de la loi de Lévy est un réel et pas un entier. On fait donc atterrir le marcheur sur le site du réseau le plus proche du point d'atterrissage prévu. A nouveau, on ne peut définir de longueur moyenne de saut que lorsque $1 < \alpha \leq 2$, auquel cas on l'identifie au paramètre d'échelle l_0 . La présence de sauts permet au marcheur aller explorer rapidement des régions très éloignées du domaine. Les vols de Lévy pour lesquels l'exposant α est inférieur à la dimension spatiale sont très non compacts, sauf pour des valeurs de l_0 trop petites.

- (vi) Les **marches intermittentes** consistent en une alternance entre des phases browniennes et des phases de relocalisation, où le marcheur se désorbe du réseau et se relocalise de manière équiprobable sur n'importe quel site du réseau, sans visiter les sites au-dessus desquels il passe. Contrairement à tous les exemples précédemment présentés où le marcheur évolue en temps discret, il est commode d'effectuer les marches intermittentes en temps continu. Le marcheur peut soit faire un pas vers un de ses plus proches voisins avec un taux ρ , soit décoller du réseau avec un taux de désorption λ_1 . Le taux d'occurrence d'un événement est donc $\lambda_{\text{tot}} = \lambda_1 + \rho$. Pour implémenter ce processus, on utilise l'algorithme de Gillespie [Gillespie 1976] : le temps d'attente jusqu'au prochain événement, qui sera un pas diffusif avec une probabilité $\rho/\lambda_{\text{tot}}$ ou une relocalisation avec une probabilité $\lambda_1/\lambda_{\text{tot}}$, est tiré avec une loi exponentielle de taux λ_{tot} . Chaque relocalisation prend en outre un temps aléatoire distribué selon une loi exponentielle de taux λ_2 . De même que pour les vols de Lévy, les phases de relocalisation décompactifient la marche, à condition qu'elles interviennent régulièrement. Il faut pour cela se placer dans un régime où l'on se désorbe souvent. On obtient en pratique une marche très non compacte lorsque $\rho < \lambda_1$.

3.3.3.2 Comparaison avec les résultats de simulation numérique

Comparons maintenant les résultats obtenus dans la partie 3.3.1 avec les simulations numériques pour des processus de recherche non compacts parmi ceux qui ont été définis à l'instant. Nous allons tout d'abord comparer la distribution des temps de couverture partielle et complète renormalisés obtenus par simulation numérique à nos expressions théoriques, puis étudier la dépendance de la moyenne et l'écart-type du temps de couverture complète dans le nombre de sites N du domaine, et enfin la dépendance de la moyenne et l'écart-type du temps de couverture partielle dans le nombre p de sites non visités à la fin de la recherche.

La figure 3.7 représente les distributions du temps de couverture en (a) et du temps de couverture partielle en (b) renormalisés selon l'équation (3.68) obtenus par simulations numériques. On obtient un très bon accord entre les simulations numériques et les distributions de type Gumbel prédites théoriquement en (3.69) pour le temps de couverture partielle et en (3.70) pour le temps de couverture (qui correspond au cas particulier $p = 0$) pour toutes les classes de processus de recherche non compacts cités précédemment. Comme prévu analytiquement, à

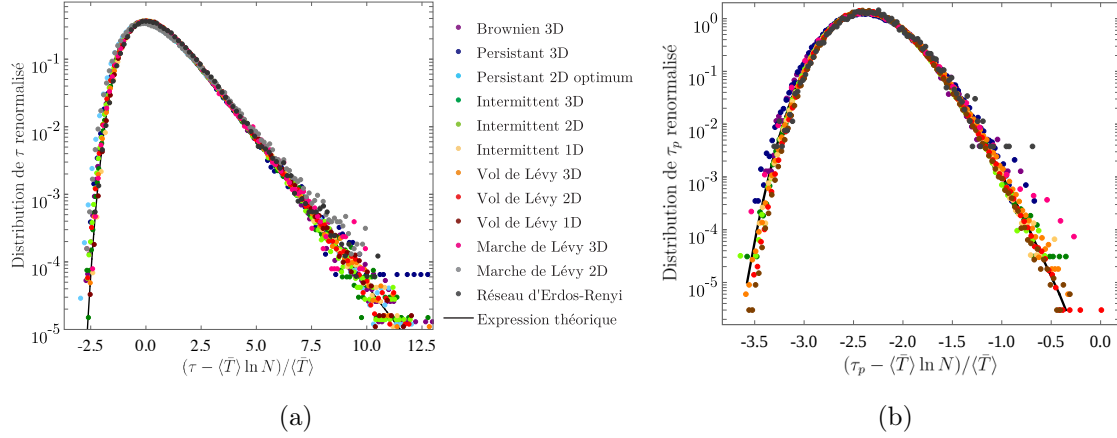


FIGURE 3.7 – Distributions du temps de couverture (a) et du temps de couverture partielle (b), avec $p = 10$ sites restants à la fin de la recherche, renormalisés obtenus par simulation numérique pour divers processus de recherche non compacts (points), que l’on compare aux expressions théoriques (3.70) et (3.69). Ces simulations ont été réalisées avec diverses valeurs du nombre N de sites dans le domaine. Ces deux graphiques illustrent bien l’universalité de ces distributions prédites analytiquement.

condition de renormaliser correctement les temps de couverture partielle ou complète obtenus par simulation, on obtient une unique distribution qui ne dépend que du nombre p de sites restants à la fin de la recherche, et plus du type de processus, ni de la taille N du domaine, ni du type de réseau (euclidien en dimensions un, deux et trois, ou Erdős-Rényi). Ces résultats confirment donc la double universalité de ces distributions par rapport au processus de recherche et par rapport à la géométrie du domaine²⁴. On notera que le temps de couverture partielle est plus sensible que le temps de couverture complète au caractère “peu non compact” ou “très non compact” de la marche, puisqu’en particulier, le temps de couverture partielle pour les marches de Lévy en deux dimensions et les marches persistantes en deux dimensions, qui n’est pas représenté sur la figure 3.7(b), ne suit pas la distribution théorique des processus non compacts, ces deux processus étant trop peu non compacts²⁵. Nous reviendrons sur la raison de cette plus grande sensibilité du temps de couverture partielle à la non compacité au paragraphe 3.3.5.

Nos résultats analytiques sont des résultats asymptotiques de grande taille N du système. Celle-ci a donc une influence sur la distribution obtenue numériquement. En particulier, chaque processus ne converge pas vers cette description asymptotique aussi rapidement en N . Sur la figure 3.7, nous avons testé la validité de nos résultats en nous plaçant à une taille suffisamment

24. Ce dernier point a également été testé pour le temps de couverture d’un domaine légèrement allongé, un pavé de section carrée de longueur triple par rapport au côté de sa section, ainsi que sur un réseau cubique centré. On obtient à nouveau un très bon accord avec la loi de Gumbel.

25. Pour faire écho à la discussion du paragraphe précédent, les marches qui possèdent des phases de sauts régulières seront plus non compactes que les marches qui se font uniquement sur plus proches voisins. Ainsi, les marches de Lévy à deux dimensions et les marches persistantes à deux dimensions, malgré la présence de phases de déplacement balistique sur plus proches voisins, restent proches de la marche brownienne à deux dimensions, qui est marginalement compacte. Par ailleurs, plus la dimension spatiale est élevée, plus la marche est non compacte.

grande de façon à chaque processus pour observer la distribution universelle asymptotique. Nous illustrons maintenant l'influence de la taille du système sur le processus de couverture complète, avec la figure 3.8 qui présente la moyenne et l'écart-type du temps de couverture en fonction du nombre de sites N . On constate que la prédiction (3.76) pour la moyenne décrit

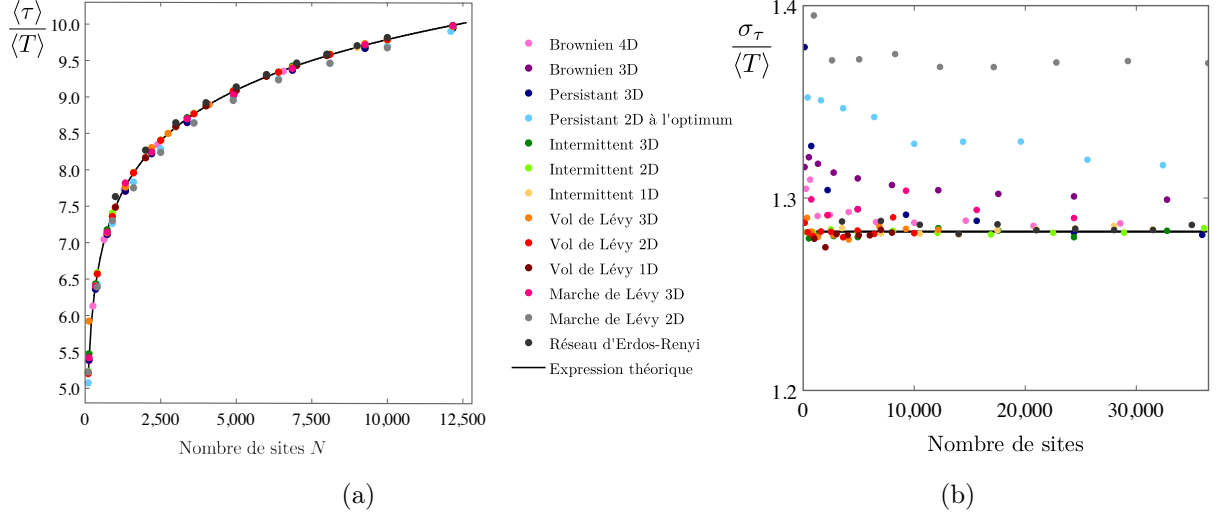


FIGURE 3.8 – Moyenne et écart-type renormalisés du temps de couverture obtenus par simulations numériques comparés aux expressions théoriques (3.76) et (3.77), en fonction du nombre de sites N du système.

de manière satisfaisante tous les processus considérés dès des tailles de système très petites (une centaine de sites). En revanche, certains processus, en particulier les marches browniennes à trois dimensions, les marches persistantes à deux dimensions et les marches de Lévy à deux dimensions, donnent lieu à des écarts-types sur le temps de couverture qui convergent lentement vers la prédiction théorique (3.77) en fonction du nombre de sites N . Comme expliqué précédemment, ces marches, et particulièrement les marches de Lévy et persistantes à deux dimensions, ne sont pas très fortement non compactes. Il faut donc aller à des tailles de système grandes pour obtenir un bon accord avec la théorie asymptotique. Par ailleurs, on constate bien qu'en augmentant la dimension spatiale, l'accord avec la théorie devient bien meilleur (pour les marches de Lévy et persistantes à trois dimensions et les marches browniennes à quatre dimensions).

Enfin, pour le processus de couverture partielle, la dépendance en la valeur du nombre p de sites restants à la fin de la recherche n'a pas été décrite sur la figure 3.7(b). Nous présentons donc sur la figure 3.9 la validité de nos résultats en fonction de ce paramètre p , en traçant la valeur moyenne et l'écart-type du temps de couverture partielle pour les trois processus de recherche optimisables (marches de Lévy, intermittentes et persistantes). A nouveau, la valeur moyenne est très bien décrite par la prédiction théorique (3.71) pour un certain nombre de valeurs de p (on a toujours néanmoins ici $p \ll N$). L'écart-type est bien décrit par l'équation (3.72) pour les processus très non compacts et nettement moins bien pour les marches de Lévy et

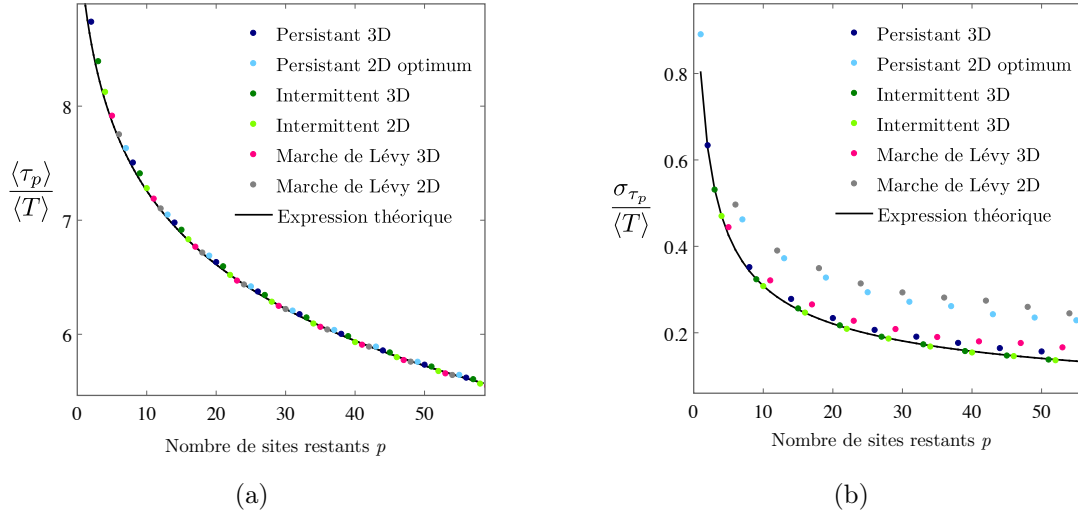


FIGURE 3.9 – Moyenne et écart-type renormalisés obtenus par simulations numériques du temps de couverture partielle, comparés aux expressions théoriques (3.71) et (3.72), en fonction du nombre p de sites restants à la fin de la recherche. Tous les processus sont réalisés sur un réseau de même taille $N = 25^3 = 125^2 = 15625$.

persistantes en dimension deux, confirmant le mauvais accord discuté précédemment entre la distribution du temps de couverture partielle pour ces deux processus (qui n'apparaissent pas sur la figure 3.7(b)) et l'expression théorique (3.69).

Ces résultats de simulations numériques, qui sont en très bon accord asymptotique avec nos prédictions théoriques pour des processus non compacts²⁶, fournissent donc une seconde confirmation de la validité de notre approche et des hypothèses que nous avons été amenés à faire.

3.3.4 Extension à d'autres observables de couverture

L'approche développée au paragraphe 3.3.1 peut s'étendre à d'autres observables de couverture, entre autres le temps de couverture aléatoire et le temps de couverture partielle en présence de n marcheurs aléatoires indépendants.

3.3.4.1 Temps de couverture aléatoire

Voyons tout d'abord comment adapter notre formalisme pour déterminer la distribution du temps de couverture aléatoire $\tau_r(M, N)$, défini comme le temps nécessaire pour trouver M sites choisis à l'avance aléatoirement parmi les N sites du domaine.

²⁶. Accord dont nous avons discuté les limites.

On peut à nouveau écrire le temps de couverture aléatoire comme une somme

$$\tau_r(M, N) = \sum_{k=1}^{M-1} \theta_r(k), \quad (3.83)$$

où $\theta_r(k)$ est le temps nécessaire, une fois le $k^{\text{ème}}$ nouveau site *du sous-ensemble* trouvé, pour trouver le $k+1^{\text{ème}}$ nouveau site *de ce sous-ensemble*. Pour k proche de M , lorsqu'il ne reste plus qu'un petit nombre de cibles à trouver, celles-ci sont à nouveau à peu près réparties aléatoirement en volume, toujours grâce à la nature non compacte des processus étudiés, et dans la limite de grand volume, éloignées les unes des autres. La distribution de ces derniers temps $\theta_r(k)$, qui sont donc comme pour le temps de couverture partielle quasiment indépendants et identiquement distribués, est donnée par la distribution de premier passage par une des $M - k$ cibles du sous-ensemble restantes (et non plus $N - k$ comme pour la couverture partielle, puisque pour la couverture aléatoire, il n'y a que $M - k$ sites parmi les $N - k$ sites restants qui sont des cibles²⁷) qui prend la forme asymptotique suivante

$$f_k^{(r)}(\theta_r(k) = t) \sim \frac{M - k}{\langle T \rangle} \exp \left(-\frac{(M - k)t}{\langle T \rangle} \right), \quad (3.84)$$

où $\langle T \rangle$ est toujours le temps moyen global pour trouver une cible parmi les N sites²⁸. En suivant les mêmes étapes que précédemment, la transformée de Laplace de la distribution de $\tau_r(M, N)$ s'écrit sous la forme d'un produit qui se calcule de manière exacte

$$\hat{P}_r(s) \sim \prod_{k=1}^{M-1} \frac{1}{1 + \frac{s\langle T \rangle}{M-k}} = \frac{(M-1)! \Gamma(1 + s\langle T \rangle)}{\Gamma(M + s\langle T \rangle)} \quad (3.85)$$

qui donne, en développant les fonctions Gamma dans la limite N et M grands,

$$\hat{P}_r(s) \sim \frac{\Gamma(1 + s\langle T \rangle)}{M^{s\langle T \rangle}}. \quad (3.86)$$

Après transformation inverse de Laplace, on obtient comme pour le temps de couverture une distribution de Gumbel

$$P_0(x) = \exp(-x - e^{-x}) \quad (3.87)$$

pour la variable renormalisée

$$x \equiv \frac{\tau_r(M, N)}{\langle T \rangle} - \ln M \quad (3.88)$$

Ce résultat diffère en deux points de celui obtenu pour le temps de couverture partielle $\tau(M, N)$: la renormalisation translate de $\ln M$ et non de $\ln N$, et la distribution obtenue pour la variable renormalisée est une loi de Gumbel pour tout M alors que l'on n'aboutissait à cette loi que pour $N = M$ dans le cas du temps de couverture partielle. La dissymétrie entre ces deux résultats vient du fait que pour la couverture partielle, une fois k sites visités, on cherche un

27. Ce point sera discuté au paragraphe 3.3.5.

28. Le temps moyen global impliqué est bien celui nécessaire pour trouver une cible parmi les N sites du volume, puisque le marcheur se déplace toujours sur les N sites du volume.

nouveau site parmi les $N - k$ sites restants du domaine, alors que pour la couverture aléatoire, on cherche un nouveau site parmi les $M - k$ sites restants du sous-ensemble de sites préalablement sélectionnés.

On vérifie ces résultats à l'aide de simulations Monte Carlo similaires à celles détaillées dans le paragraphe 3.3.3. On trouve à nouveau un bon accord des résultats numériques avec l'expression théorique asymptotique de la distribution du temps de couverture aléatoire (voir figure 3.10 pour les processus de recherche optimisables).

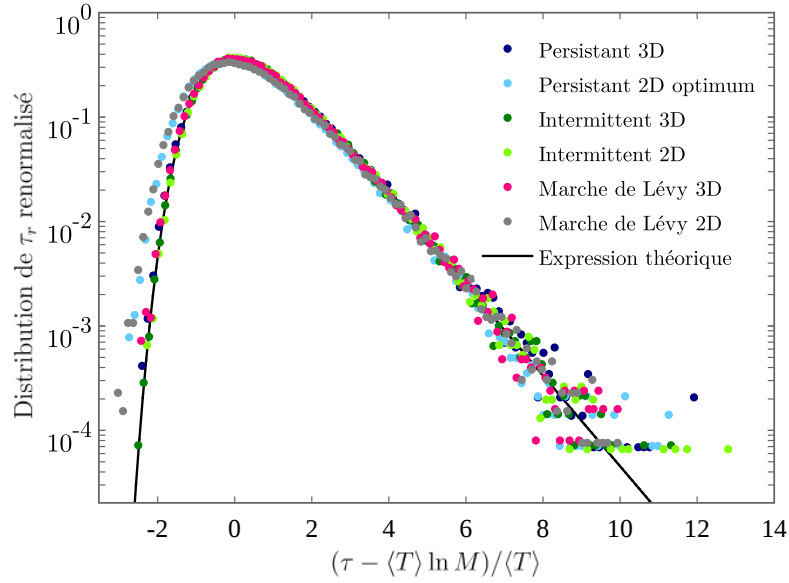


FIGURE 3.10 – Distribution du temps de couverture aléatoire renormalisé, pour $p = 10$ sites à laisser à la fin de la recherche répartis aléatoirement dans le domaine, comparée à la loi de Gumbel (3.87).

On peut par ailleurs encore une fois déduire les moments du temps de couverture aléatoire du développement à petite variable de Laplace s de l'expression (3.86). On a

$$\Gamma(1 + s\langle T \rangle) = 1 - \gamma s\langle T \rangle + s^2\langle T \rangle^2 \left(\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\pi^2}{6} \right) + o(s^2) \quad (3.89)$$

et

$$M^{s\langle T \rangle} = e^{s\langle T \rangle \ln M} = 1 + s\langle T \rangle \ln M + \frac{s^2}{2} \langle T \rangle^2 \ln^2 M + o(s^2), \quad (3.90)$$

d'où

$$\hat{P}_r(s) = 1 - s\langle \tau_r \rangle + \frac{s^2}{2} \langle \tau_r^2 \rangle + o(s^2) \quad (3.91)$$

$$= 1 - s\langle T \rangle (\ln M + \gamma) + \frac{s^2}{2} \langle T \rangle^2 \left(\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} + \ln^2 M + 2\gamma \ln M \right) + o(s^2). \quad (3.92)$$

Par identification, on obtient les deux premiers moments

$$\langle \tau_r \rangle \sim \langle T \rangle (\ln M + \gamma) \quad (3.93)$$

$$\langle \tau_r^2 \rangle \sim \langle T \rangle^2 \left[(\ln M + \gamma)^2 + \frac{\pi^2}{6} \right], \quad (3.94)$$

dont on déduit finalement l'écart-type du temps de couverture aléatoire

$$\sigma_{\tau_r} \sim \sqrt{\langle \tau_r^2 \rangle - \langle \tau_r \rangle^2} = \langle T \rangle \frac{\pi}{\sqrt{6}}. \quad (3.95)$$

On constate en particulier que la valeur moyenne et l'écart-type du temps de couverture aléatoire sont différents de ceux du temps de couverture partielle pour visiter le même nombre M de sites, mais qu'en revanche, l'écart-type est le même que pour le temps de couverture.

3.3.4.2 Généralisation au cas de n marcheurs indépendants

Voyons maintenant comment étendre simplement notre approche au cas où n marcheurs indépendants coexistent, cas important en pratique pour les processus de recherche où plusieurs chercheurs, indépendants en première approximation, évoluent simultanément dans le même domaine. On remarquera que pour les processus non compacts étudiés ici, le choix des points de départ des marcheurs importe peu. En effet, au bout de quelques pas, la mémoire du point de départ est perdue et comme le temps de couverture est dominé par la dynamique de la fin de la recherche, qui correspond à des temps longs tant que le nombre de marcheurs reste petit, on peut oublier les tout premiers pas. Si on note toujours $F(t)$ la distribution du temps de premier passage d'un marcheur avec

$$F(t) = \frac{1}{\langle T \rangle} \exp \left(-\frac{t}{\langle T \rangle} \right), \quad (3.96)$$

et $F^{(n)}(t)$ la distribution du temps de premier passage en présence de n marcheurs indépendants partant du même point de départ, on a

$$F^{(n)}(t) = nF(t) \left(\int_t^{+\infty} du F(u) \right)^{n-1} = \frac{n}{\langle T \rangle} \exp \left(-\frac{nt}{\langle T \rangle} \right). \quad (3.97)$$

Le reste de la démonstration est identique à l'approche présentée au paragraphe 3.3.1. On en généralise les résultats en remplaçant simplement le temps moyen global par le temps moyen global à n marcheurs indépendants qui vaut d'après l'équation précédente $\langle T \rangle / n$. On trouve par conséquent que le temps de couverture partielle à n marcheurs indépendants a la même distribution que dans le cas à un marcheur (équation (3.69)) à condition de le renormaliser de la manière suivante

$$x \equiv \frac{n\tau_p^{(n)}(M, N)}{\langle T \rangle} - \ln N. \quad (3.98)$$

De même, le temps de couverture aléatoire à n marcheurs suit encore une loi de Gumbel mais pour la variable renormalisée

$$x \equiv \frac{n\tau_r^{(n)}(M, N)}{\langle T \rangle} - \ln M. \quad (3.99)$$

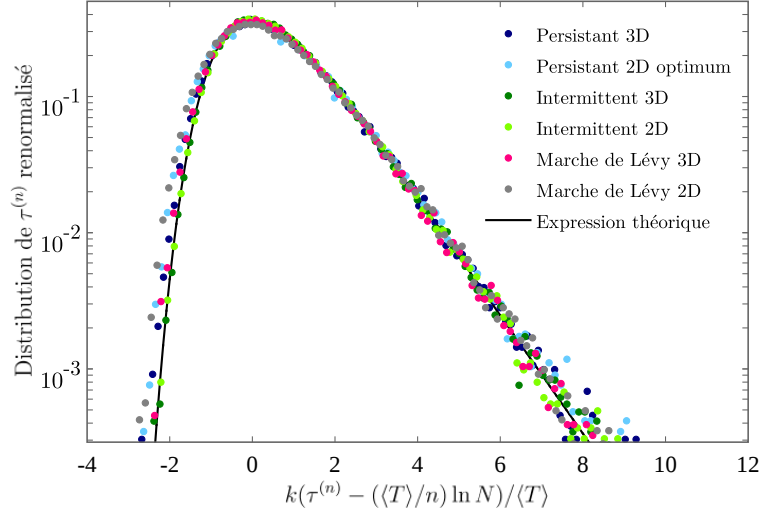


FIGURE 3.11 – Distribution du temps de couverture à $n = 10$ marcheurs indépendants partant du même point, renormalisé selon (3.98), comparé à la loi de Gumbel théorique.

Nous avons testé ce résultat sur la distribution du temps de couverture complète à n marcheurs (voir figure 3.11) et nous obtenons encore une fois un très bon accord entre les simulations numériques et notre prédiction théorique.

Penchons-nous maintenant sur un aspect du problème que nous n’avons pas encore abordé, le domaine de validité de nos résultats. Dans le paragraphe suivant, nous allons esquisser une réponse à ce problème en étudiant l’impact du nombre de sites restants à la fin de la recherche sur la validité de nos résultats pour les temps de couverture partielle et aléatoire.

3.3.5 Domaines de validité de nos résultats pour les temps de couverture partielle, aléatoire et complète

Lorsque l’on se penche sur la nature même des processus de couverture partielle et aléatoire, il apparaît qu’ils sont en fait assez dissemblables, ce qui se traduit en pratique par une différence notable au niveau du domaine de validité de nos résultats théoriques en fonction de la valeur du nombre $p = N - M$ de sites restants à la fin de la recherche. Cette dissemblance est illustrée sur un exemple concret sur la figure 3.12.

Supposons que le nombre M de sites à trouver est quelconque, pouvant être égal à N à une constante fixée près, à une fraction fixée de N , ou même à un nombre fini fixé. Par définition, pour le processus de couverture partielle, ces M sites sont les M derniers sites *du domaine* visités par la marche avant la couverture complète, dont la position dépend donc de la trajectoire du marcheur, alors que pour le processus de couverture aléatoire, ce sont les M derniers sites *du sous-ensemble* de sites à visiter choisis aléatoirement avant le début du processus. Dans le calcul de ces deux temps, nous avons utilisé le fait que ce sont les découvertes des quelques k derniers sites sur les M à trouver qui limitent la cinétique de cette recherche et qui contribuent donc

majoritairement aux temps de couverture partielle et aléatoire.

Comme nous l'avons fait remarquer dans le paragraphe 3.3.1, pour la couverture partielle, une fois $M - k$ sites visités (avec k petit), les k derniers sites ne sont pas fixés mais feront partie des $N - M + k$ sites restants dans le volume (voir figure 3.12(a)). Faisons toujours l'hypothèse que ces $N - M - k$ sites sont répartis de manière homogène en volume²⁹, quelle que soit la valeur du nombre M de sites à trouver. La distance typique entre ces $N - M - k$ derniers sites cibles est de l'ordre de $(N/(N - M))^{1/d}$ qui tend vers une constante quand N croît sauf si $N - M$, c'est-à-dire p , varie comme N^β avec $\beta < 1$. En particulier, si M est une fraction de N , à moins que cette fraction ne soit très petite, la distance entre les derniers sites cibles est trop faible pour que les découvertes des k derniers sites soient des processus indépendants les uns des autres. Sans cette hypothèse d'indépendance, notre approche devient caduque.

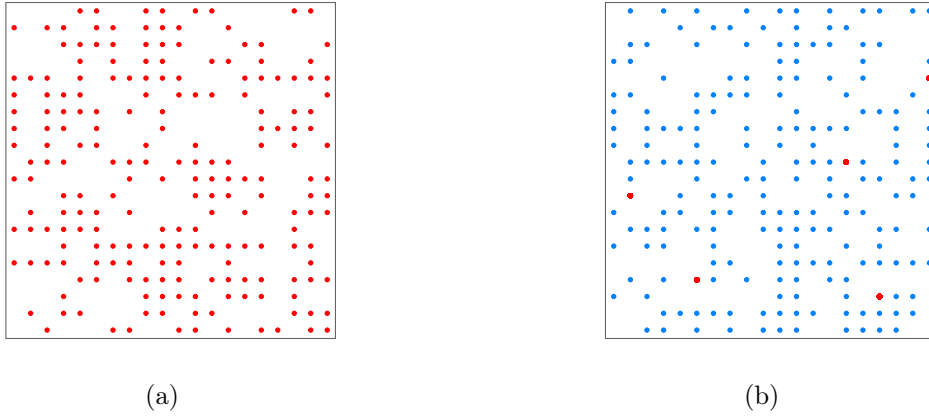


FIGURE 3.12 – Illustration de la raison de l'échec de notre approche pour la couverture partielle (a) et pas pour la couverture aléatoire (b). Pour une marche intermittente à deux dimensions (bien non compacte, avec $\rho = 0, 1$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) qui doit trouver 200 cibles sur 400 sites (qui sont par définition les premières à être découvertes en (a) et choisies aléatoirement à l'avance en (b)), les cibles restantes potentielles lorsque 195 cibles ont déjà été découvertes sont représentées en rouge. Pour la couverture partielle (a), les 5 dernières cibles qui seront trouvées ultérieurement par la marche font partie des 205 sites qui n'ont pas encore été visités, alors que pour la couverture aléatoire (b), les 5 dernières cibles sont les 5 seules cibles pas encore découvertes (en rouge) parmi l'ensemble des sites choisis à l'avance pour être des cibles (en bleu). A cause de la nature non compacte de la marche, ces 5 cibles sont réparties de manière à peu près homogène en volume et sont donc éloignées, alors qu'en (a), les 205 cibles potentielles, quelle que soit leur répartition, ne peuvent pas être éloignées les unes des autres.

En revanche, dans le cas de la couverture aléatoire, lorsque $M - k$ sites (avec k petit) ont été visités, les k sites restants à visiter sont fixés car ils sont nécessairement dans l'ensemble des M sites choisis *a priori* avant le début de la marche (voir figure 3.12(b)). Grâce à la nature non compacte des processus étudiés, ces k sites cibles sont répartis de manière à peu près uniforme en volume et sont donc distants en moyenne de $(N/k)^{1/d}$ avec d la dimension de l'espace, qui croît asymptotiquement en même temps que N . Dans ce cas, les découvertes de ces k derniers sites deviennent par conséquent bien à nouveau des événements asymptotiquement indépendants, ce qui assure à notre approche de rester justifiée quelle que soit la valeur de M .

29. Ce qui correspond au cas le plus favorable pour que ces sites soient éloignés les uns des autres.

Notre approche reste donc valable pour la couverture aléatoire pour n'importe quelle valeur de M , qu'elle soit égale à $N - p$ avec p fixé, à une fraction de N ou à un nombre fini, alors qu'elle échoue pour la couverture partielle dès que le nombre de sites p restants à la fin de la recherche varie plus vite que N^β avec $\beta < 1$, c'est-à-dire dès que p est une fraction fixée de N . Cette observation est confirmée par les simulations numériques pour un exemple de processus non compact, une marche intermittente à deux dimensions, comme on peut le voir sur la figure 3.13(a). En effet, la distribution du temps de couverture aléatoire pour la moitié des sites à visiter obtenue par simulations numériques est encore très bien décrite par la distribution de Gumbel, alors que la distribution du temps de couverture partielle pour visiter également la moitié des sites obtenue par simulations numériques n'est plus décrite correctement par la distribution de type Gumbel (voir figure 3.13(b)).

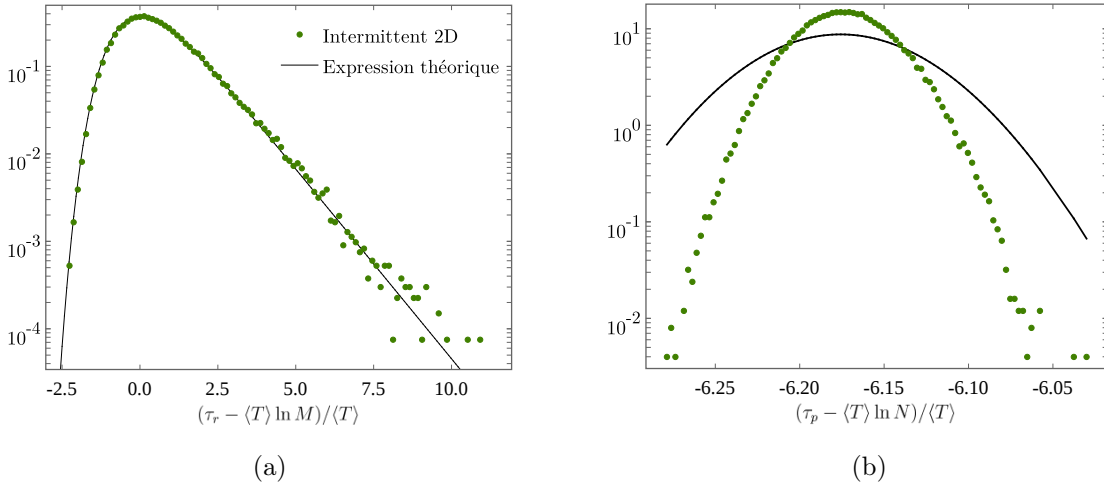


FIGURE 3.13 – Distribution des temps de couverture aléatoire (a) et partielle (b) correctement renormalisés selon les équations (3.88) et (3.68) pour un nombre de cibles à découvrir égal à la moitié du nombre total de sites ($N = 31^2 = 961$). On constate que notre approche reste valable pour la couverture aléatoire (a) lorsque le nombre p de sites non visités à l'issue de la recherche est une fraction fixée (ici la moitié) du nombre total de sites du volume, alors que ce n'est pas le cas pour la couverture partielle (b). Cette propriété est illustrée ici sur l'exemple d'une marche intermittente à deux dimensions pour des valeurs des paramètres où la marche est bien non compacte ($\rho = 0.1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$).

On remarque enfin que cette discussion permet de comprendre la plus grande sensibilité du temps de couverture partielle par rapport au temps de couverture complète au “degré” de non compacité du processus. Un processus faiblement non compact, typiquement les marches de Lévy et persistantes à deux dimensions, a tendance, comme les marches marginalement compactes, à laisser les derniers sites non visités du volume en amas. Au contraire, un processus fortement non compact a très peu de chances de laisser plusieurs sites non visités côte à côte en fin de marche. Nous avons rappelé à l'instant que lors du processus de couverture partielle, lorsqu'il reste quelques k derniers sites à découvrir, ils font partie des $p + k$ sites qui n'ont pas encore été visités. Plus p est grand et plus il reste donc de cibles parmi lesquelles trouver ces k derniers sites, donc plus le risque que ces sites soient regroupés en amas pour des marches faiblement non

compactes devient grand, menaçant la validité de notre approche. L'accord avec nos prédictions théoriques pour ces marches faiblement non compactes est donc d'autant meilleur que le nombre p de sites restants à la fin de la recherche est petit, le cas le plus favorable étant la couverture complète du domaine.

3.3.6 A propos des stratégies optimales de recherche

Revenons maintenant sur une question qui a été soulevée au début de la section 3.3, la possibilité d'optimiser les recherches exhaustives. Nous avons rappelé que le temps moyen nécessaire pour atteindre une cible moyenné sur le point de départ, le temps moyen global de premier passage $\langle T \rangle$, peut être optimisé pour les marches de Lévy, les marches persistantes et les marches intermittentes [Bénichou 2005, Tejedor 2012]. Cela signifie que pour chacun des processus cités, il existe une valeur du paramètre de la marche (la longueur de persistance l_p pour les marches de Lévy et les marches persistantes, et le taux de désorption λ_1 pour les marches intermittentes) qui minimise le temps moyen global de premier passage. Le processus de recherche pour cette valeur particulière du paramètre est appelé stratégie optimale de recherche d'une cible unique. Il est naturel de se demander s'il existe également une stratégie optimale d'exploration aléatoire exhaustive d'un domaine, c'est-à-dire si le temps moyen de couverture peut, à l'instar du temps moyen global de premier passage, être minimisé par rapport au paramètre du processus, et quelle est le cas échéant la stratégie optimale.

Pour les processus de recherche non compacts, nous avons établi que le temps moyen de couverture est proportionnel au temps moyen global de premier passage

$$\langle \tau(N) \rangle \sim \langle T \rangle (\ln(N) + \gamma). \quad (3.100)$$

Le temps moyen global possédant un minimum par rapport à la valeur du paramètre caractéristique du processus de recherche, on en déduit que le temps moyen de couverture peut également être minimisé, et pour une valeur du paramètre l_p (pour les marches persistantes et les marches de Lévy) ou λ_1 (pour les marches intermittentes) identique à celle qui minimise le temps moyen global, comme on peut le voir sur la figure 3.14. Un chercheur aléatoire dont l'objectif est de découvrir toutes les cibles contenues dans un volume clos devra donc adopter exactement la même stratégie qu'un chercheur à la recherche d'une cible unique dans ce même volume.

Il existe donc une unique stratégie pour chaque processus de recherche qui optimise à la fois les recherches d'une cible unique et les explorations exhaustives d'un domaine. Cela démontre la robustesse de ces stratégies optimales de recherche.

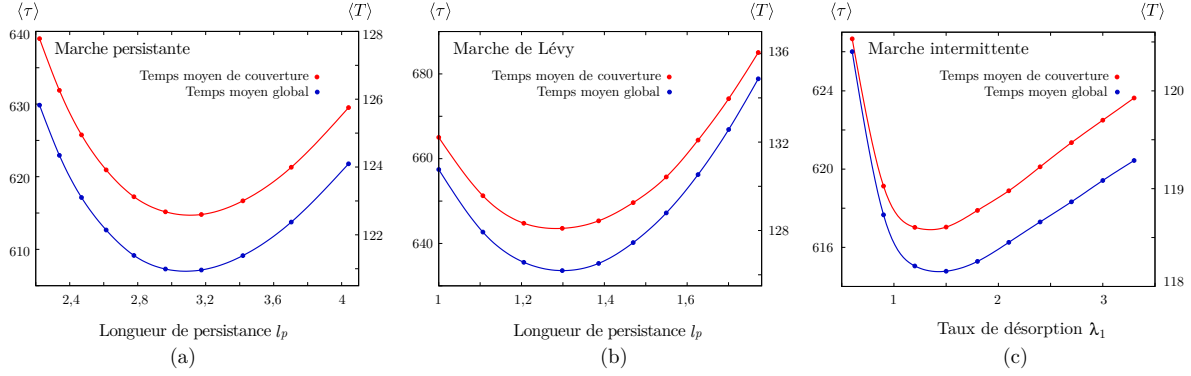


FIGURE 3.14 – Temps moyen de couverture $\langle \tau \rangle$ en rouge et temps moyen global de premier passage $\langle T \rangle$ en bleu en fonction de la longueur de persistance pour (a) les marches persistantes, dans un domaine à $N = 100$ sites, et (b) les marches de Lévy, pour $\alpha = 1.8$ et $N = 100$ sites, et en fonction du taux de désorption λ_1 pour (c) les marches intermittentes, pour un taux de pas diffusifs $\rho = 1$, un taux de réabsorption $\lambda_2 = 0.8$ et $N = 100$ sites, à deux dimensions dans les trois cas. Les points sont obtenues par simulations numériques, et les courbes en trait plein ne sont que des interpolations de ces points.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes penchés sur une famille d’observables, les observables de couverture, qui quantifient le temps nécessaire pour qu’un marcheur aléatoire visite tous les sites contenus dans un domaine, ou une fraction d’entre eux, choisis à l’avance ou non. Elles permettent de caractériser les recherches exhaustives, dont les exemples sont nombreux dans divers champs disciplinaires. Malgré l’abondance des applications de ces observables, elles n’ont été que peu étudiées, et les résultats en particulier limités aux marches aléatoires browniennes.

Nous avons commencé par établir le temps moyen de couverture d’un réseau unidimensionnel par une marche persistante en conditions aux limites périodiques ou réfléchissantes. Cela constitue l’un des seuls résultats sur le temps de couverture valables à toute taille de système et représente un premier pas vers la généralisation des résultats exacts unidimensionnels aux processus de recherche plus généraux que les simples marches browniennes.

Dans un deuxième temps, nous avons étendu les études du temps de couverture, jusqu’à présent exclusivement consacrées aux marches browniennes, à toute une classe de processus de recherche, les marches non compactes. Cela nous a notamment permis d’englober les marches de Lévy, les marches intermittentes et les marches persistantes, qui sont particulièrement populaires parmi les processus de recherche puisqu’elles font chacune émerger une stratégie optimale de recherche d’une cible unique minimisant le temps caractéristique pour trouver une cible unique, le temps moyen global de premier passage.

Nous avons étudié les temps de couverture complète, partielle et aléatoire, pour un ou plusieurs marcheurs indépendants, dont nous avons déterminé la distribution asymptotique à grand volume. Les distributions de ces observables, renormalisées de manière adéquate, possèdent des propriétés fortes d’universalité. En effet, elles ne dépendent pas des caractéristiques

géométriques du domaine d'exploration que par l'intermédiaire de son volume, et du processus de recherche que par l'intermédiaire du temps moyen global de premier passage. Par ailleurs, leur forme révèle un lien fort avec la statistique d'ordre. Nous avons discuté la validité de nos résultats théoriques en fonction du nombre de sites restants à la fin de la recherche et mis en évidence la différence fondamentale entre la couverture partielle et la couverture aléatoire. Là où notre approche échoue pour la couverture partielle lorsque l'objectif du chercheur n'est de trouver qu'une fraction des sites du domaine, elle reste valide pour la couverture aléatoire quel que soit l'objectif du chercheur. Nous avons enfin examiné la possibilité d'optimiser les recherches exhaustives, à l'instar des recherches à une cible, et nous avons démontré qu'il n'existe qu'une unique stratégie optimale pour les recherches à une cible et les recherches exhaustives, qui minimise à la fois le temps moyen global de premier passage et le temps moyen de couverture.

Parmi les prolongations envisageables de ce travail, deux représentent des enjeux importants. Tout d'abord, l'approche du paragraphe 3.3 n'a été présentée que pour des conditions aux limites périodiques, qui ne sont pas adaptées à la description de situations réelles. Il serait donc naturel et intéressant d'étudier la possibilité de généraliser nos résultats au cas d'un domaine avec des conditions aux limites réfléchissantes, qui sont beaucoup plus réalistes.

Par ailleurs, notre approche est centrée sur le caractère non compact des marches aléatoires étudiées. Dans le cas d'une marche compacte ou marginalement compacte, les derniers sites du domaine à trouver ne sont plus répartis uniformément dans le volume, mais sont regroupés en amas (voir par exemple [Brummelhuis 1991, Brummelhuis 1992]), faisant échouer notre approche. Il serait donc très pertinent d'essayer de l'adapter pour l'étendre au cas des marches compactes, comme celui des marches browniennes bidimensionnelles, qui sont une modélisation courante du mouvement des animaux à la recherche de nourriture ou de certains robots, pour lesquels apparaissent naturellement ces problématiques de recherche exhaustive.

Sortie conditionnelle d'un intervalle fluctuant

Sommaire

4.1	Introduction	83
4.2	Cas d'une cage en expansion	85
4.2.1	Détermination exacte de la probabilité conditionnelle de sortie	86
4.2.2	Vérification du résultat asymptotique à l'aide d'arguments simples	89
4.2.3	Echec de notre approche dans le cas d'une cage en contraction	90
4.3	Cas général : cage en contraction ou en expansion	91
4.3.1	Densité de premier passage par l'un des bords à tout temps	91
4.3.2	Probabilité conditionnelle de sortie	93
4.4	Critère de capture optimale	95
4.4.1	Développement de la probabilité conditionnelle de sortie à petite vitesse	96
4.4.2	Diagramme de phase pour une cage en contraction ou en expansion	97
4.5	Conclusion	99

4.1 Introduction

Après avoir considéré dans les deux chapitres précédents des confinements statiques, nous examinons maintenant l'impact d'un confinement sur un marcheur brownien sous un autre angle : comment la variation au cours du temps de la position du confinement affecte-t-elle les propriétés du marcheur ? En particulier, quelle est la probabilité qu'un marcheur brownien unidimensionnel sorte de l'intervalle (la “cage”) dans lequel il est confiné par le bord gauche plutôt que par le bord droit ? Lorsque les bords de l'intervalle restent à des positions fixes au cours du temps, il s'agit simplement d'une fonction affine de sa distance au bord gauche [Redner 2001]. Que devient cette probabilité lorsque l'intervalle s'étend, c'est-à-dire lorsque les bords s'éloignent du marcheur ? Que vaut-elle au contraire quand l'intervalle se contracte ? Comment cette probabilité dépend-elle de la vitesse d'expansion ou de contraction de la cage ? Nous répondrons dans ce chapitre à ces questions dans le cas de cages dont la taille varie linéairement avec le temps.

Commençons par présenter le problème de manière imagée. Un agneau s'échappe d'une bergerie et a la mauvaise idée de s'aventurer près d'un précipice. Son propriétaire s'interroge sur

la stratégie optimale à adopter pour le récupérer vivant. En effet, l'agneau perdu, qui est craintif, vagabonde de manière aléatoire lorsque le berger reste immobile, mais s'en éloigne lorsque celui-ci s'avance vers lui pour tenter de l'attraper, se rapprochant ainsi dangereusement du précipice. Le berger a-t-il intérêt à rester immobile en espérant que l'agneau va revenir spontanément vers lui au gré de son errance, ou doit-il plutôt marcher vers l'agneau, se rapprochant de lui tout en l'entraînant vers le précipice ?

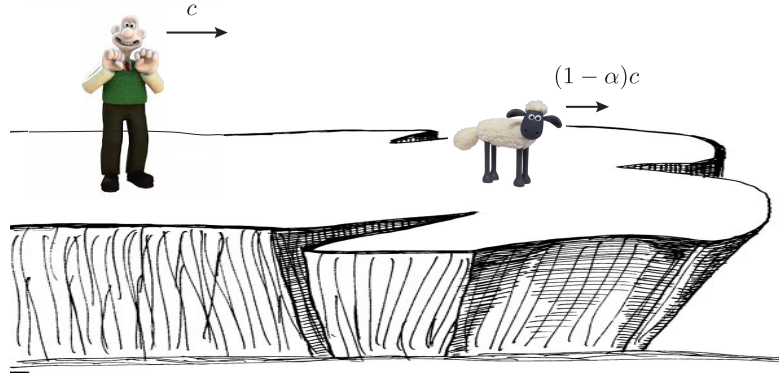


FIGURE 4.1 – L'agneau échappé vient errer de manière diffusive près d'un précipice. Son propriétaire s'avance vers lui à vitesse c , ce qui l'effraie et biaise sa diffusion d'une vitesse plus faible $(1 - \alpha)c$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$ vers le précipice.

Dans ce modèle, les mouvements du berger et de l'agneau sont uniquement unidimensionnels, le paramètre important étant la distance de l'agneau au précipice. Si le berger marche vers l'agneau à une vitesse c , on suppose que celui-ci fuit à une vitesse plus faible $(1 - \alpha)c$, avec $0 \leq \alpha \leq 1$, qui s'ajoute à son mouvement diffusif de vagabondage (voir figure 4.1). Dans le référentiel du berger (voir figure 4.2(a)), l'agneau diffuse avec un mouvement de dérive vers le berger à une vitesse αc , tandis que le précipice s'approche de l'agneau à une vitesse relative $(1 - \alpha)c$. A l'instant initial, l'agneau est en x_0 , le précipice en L_0 , et l'origine est fixée au niveau du berger, qui reste immobile dans ce référentiel. La probabilité pour que l'agneau et le berger se rencontrent avant quand l'agneau ne tombe dans le précipice correspond à la probabilité conditionnelle de sortie¹ de l'intervalle délimité par le berger et le précipice, par l'extrémité à laquelle se situe le berger.

Ce problème se ramène par changement de référentiel à celui du calcul de la probabilité conditionnelle de sortie d'un mouvement brownien symétrique par le bord gauche d'un intervalle qui se contracte de manière asymétrique, le bord gauche étant situé au temps t à l'abscisse $-L_0/2 + c_1 t$ et le bord droit à $L_0/2 - c_2 t$, avec respectivement $c_1 = \alpha c$ et $c_2 = (1 - \alpha)c$ (voir figure 4.2(b)). Dans la suite, nous nous placerons successivement dans ces deux référentiels.

Au-delà du cas d'une cage en contraction, qui est la situation d'intérêt pour le problème de capture de l'agneau, nous nous intéresserons également au cas où la cage est en expansion. Bien qu'il n'y ait pas de restriction sur la valeur de α , nous commenterons principalement le cas où $\alpha \in [0, 1]$, où la probabilité conditionnelle de sortie a le comportement le plus riche.

1. Ou "splitting probability" en anglais.



FIGURE 4.2 – Formulations équivalentes du problème de capture de l’agneau (ou d’une cage en contraction). (a) Dans le référentiel du berger : l’agneau et le précipice se rapprochent du berger à des vitesses respectives αc et c . (b) Dans le référentiel où l’agneau ne fait que diffuser : le berger et le précipice s’approchent de l’agneau à des vitesses $c_1 = \alpha c$ et $c_2 = (1 - \alpha)c$.

La sortie conditionnelle d’un intervalle de taille fixée est un problème classique de la théorie des marches aléatoires [Gardiner 1985, Van Kampen 1992, Weiss 1983, Redner 2001]. L’influence du déplacement des bords au cours du temps a été considérée récemment, par exemple dans le cas d’un bord diffusif [Holcman 2009, Tejedor 2011] ou oscillant [Tzou 2014]. Dans le cas de bords animés d’un mouvement balistique, qui nous intéresse ici, seule la cage en expansion a été étudiée² (voir [Bray 2007b, Bray 2007a]). Dans ces deux travaux, la probabilité de survie finale³ dans une cage en expansion asymétrique, et la probabilité de survie en fonction du temps dans une cage en expansion symétrique ont été déterminées analytiquement.

Dans ce chapitre, nous irons plus loin que cette étude en considérant non seulement une mesure plus fine de l’issue de la diffusion dans une cage en expansion, donnée par la probabilité conditionnelle de sortie par l’un des bords⁴, mais également en étudiant le cas d’une cage en contraction, qui est le cas d’intérêt dans le problème de la capture de l’agneau. Nous allons tout d’abord obtenir une forme compacte de la probabilité conditionnelle de sortie pour une cage en expansion uniquement, puis utiliser une méthode plus lourde mais qui permet d’obtenir cette probabilité conditionnelle de sortie pour une cage en expansion ou en contraction. Dans ce deuxième cas, nous aurons par ailleurs accès à la probabilité de premier passage par un des bords à un temps quelconque. Enfin, nous résoudrons le dilemme du berger.

4.2 Cas d’une cage en expansion

Considérons tout d’abord le cas d’une particule biaisée diffusant dans une cage en expansion. Dans cette section, nous allons étudier le problème dans le référentiel du bord gauche de l’intervalle (voir figure 4.3(a)), dans lequel la particule brownienne a une vitesse de dérive αc vers la droite et le bord droit se déplace de manière balistique à vitesse c vers la droite. Il est donc

2. On pourrait imaginer un second “problème de l’agneau”, où le berger essaie d’attirer l’agneau loin du précipice en s’éloignant à vitesse constante, définissant ainsi une cage en expansion, l’agneau biaisant avec une vitesse moindre sa diffusion dans la direction du berger.

3. La probabilité de survie finale est la probabilité que la particule n’atteigne jamais aucun des deux bords de la cage. Dans le second problème de l’agneau défini dans la note précédente, il s’agit de la probabilité que l’agneau erre à tout jamais, sans tomber dans le précipice ni rejoindre le berger.

4. La probabilité de survie donne accès à la probabilité d’avoir touché un bord, ici nous déterminons la probabilité d’avoir touché l’un avant l’autre.



FIGURE 4.3 – Formulations équivalentes du problème de sortie conditionnelle dans une cage en expansion. (a) Dans le référentiel du bord gauche : la particule diffusive et le bord droit s'éloignent du bord gauche à des vitesses respectives αc et c . (b) Dans le référentiel où la particule ne fait que diffuser : les bords gauche et droit s'éloignent de la particule à des vitesses $c_1 = \alpha c$ et $c_2 = (1 - \alpha)c$.

situé au temps t à la position $L(t) = L_0 + ct > L_0$, puisque nous nous intéressons pour l'instant exclusivement à une cage en expansion. On note $\mathcal{L}^e(x_0, L_0)$ et $\mathcal{R}^e(x_0, L_0)$ les probabilités conditionnelles de sortie par le bord gauche et par le bord droit de la cage⁵, que l'on déterminera en fonction de la position initiale x_0 de la particule et la taille initiale L_0 de l'intervalle. Les calculs de ces deux probabilités étant quasiment similaires, nous ne nous pencherons que sur la sortie conditionnelle par le bord gauche.

4.2.1 Détermination exacte de la probabilité conditionnelle de sortie

En s'inspirant de l'approche de [Bray 2007b], on peut établir facilement l'équation de Fokker-Planck vers le passé vérifiée par la probabilité conditionnelle de sortie $\mathcal{L}^e(x_0, L_0)$ que la particule brownienne biaisée sorte finalement de la cage par le bord gauche, partant du point x_0 dans l'intervalle $[0, L_0]$. Après un temps infinitésimal Δt , la particule se situe en $x_0 + \Delta x_0$ dans une cage de longueur $L_0 + c\Delta t$, où $\langle \Delta x_0 \rangle = \alpha c \Delta t$ (la partie diffusive du mouvement donne une contribution nulle, seule la dérive fait bouger en moyenne la particule) et $\langle (\Delta x_0)^2 \rangle = 2D\Delta t$. En moyennant sur le déplacement Δx_0 , on obtient

$$\mathcal{L}^e(x_0, L_0) = \langle \mathcal{L}^e(x_0 + \Delta x_0, L_0 + c\Delta t) \rangle \quad (4.1)$$

ce qui donne, en développant au premier ordre en Δt ,

$$\mathcal{L}^e(x_0, L_0) = \mathcal{L}^e(x_0, L_0) + \frac{\partial \mathcal{L}^e}{\partial x_0} \langle \Delta x_0 \rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^e}{\partial x_0^2} \langle (\Delta x_0)^2 \rangle + \frac{\partial \mathcal{L}^e}{\partial L_0} c\Delta t \quad (4.2)$$

$$= \mathcal{L}^e(x_0, L_0) + \alpha c \Delta t \frac{\partial \mathcal{L}^e}{\partial x_0} + D \Delta t \frac{\partial^2 \mathcal{L}^e}{\partial x_0^2} + c \Delta t \frac{\partial \mathcal{L}^e}{\partial L_0} \quad (4.3)$$

d'où l'équation de Fokker-Planck vers le passé

$$D \frac{\partial^2 \mathcal{L}^e}{\partial x_0^2} + \alpha c \frac{\partial \mathcal{L}^e}{\partial x_0} + c \frac{\partial \mathcal{L}^e}{\partial L_0} = 0. \quad (4.4)$$

En introduisant les variables adimensionnées

$$y \equiv \frac{cx_0}{D} \quad (4.5)$$

$$\lambda \equiv \frac{cL_0}{D}, \quad (4.6)$$

5. L'exposant e indiquant que l'on étudie une cage en expansion.

cette équation se réécrit

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}^e}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial \mathcal{L}^e}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{L}^e}{\partial \lambda} = 0, \quad (4.7)$$

avec $0 \leq y \leq \lambda$ et les conditions aux limites $\mathcal{L}^e(0, \lambda) = 1$ (le marcheur part sur le bord gauche, donc est en particulier sûr de toucher le bord gauche avant le droit) et $\mathcal{L}^e(\lambda, \lambda) = 0$ (le marcheur part sur le bord droit donc n'atteindra jamais le bord gauche).

Supposons que cette équation admette une solution à variables séparées

$$\mathcal{L}^e(y, \lambda) = f(y) g(\lambda). \quad (4.8)$$

En injectant cette forme de solution dans (4.7) et en séparant les variables, on obtient

$$\frac{f''}{f} + \alpha \frac{f'}{f} = -\frac{g'}{g} = K \quad (4.9)$$

avec K une constante positive. En effet, la probabilité conditionnelle de sortie reste toujours finie, quels que soient x_0 et λ , et en particulier à point de départ fixé lorsque la taille de l'intervalle tend vers l'infini, c'est-à-dire y fixé et $\lambda \rightarrow +\infty$. Cela exclut donc une fonction g exponentiellement croissante à grand λ . Dans l'esprit de [Bray 2007b], où un traitement similaire est utilisé pour déterminer la probabilité de survie, nous nous restreindrons à

$$K = n(n + \alpha) \quad (4.10)$$

avec n un entier. Nous verrons en particulier dans la suite qu'imposer ces valeurs discrètes de K permet de vérifier les conditions aux limites. On trouve donc que la fonction g est une exponentielle simple, qui dépend maintenant de l'entier n

$$g_n(\lambda) = C_n e^{-n(n+\alpha)\lambda}, \quad (4.11)$$

et que la fonction f , qui dépend elle aussi de n , vérifie l'équation

$$f_n'' + \alpha f_n' - n(n + \alpha) f_n = 0 \quad (4.12)$$

dont la solution est

$$f_n(y) = A_n e^{ny} + B_n e^{-(\alpha+n)y}. \quad (4.13)$$

La probabilité conditionnelle de sortie s'écrit donc comme une combinaison linéaire de ces fonctions

$$\mathcal{L}^e(y, \lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [a_n e^{ny} + b_n e^{-(n+\alpha)y}] e^{-(n+\alpha)n\lambda}. \quad (4.14)$$

La condition sur le bord gauche $\mathcal{L}^e(0, \lambda) = 1$ se traduit par

$$\mathcal{L}^e(0, \lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_n + b_n) e^{-n(n+\alpha)\lambda} = 1, \quad (4.15)$$

et celle sur le bord droit $\mathcal{L}^e(\lambda, \lambda) = 0$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^e(\lambda, \lambda) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} [a_n e^{n\lambda} + b_n e^{-(n+\alpha)\lambda}] e^{-(n+\alpha)n\lambda} = 0 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} [a_n e^{-n(n+1+\alpha)\lambda} + b_n e^{-(n+\alpha)(n+1)\lambda}] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Pour utiliser cette condition, il serait pratique de factoriser les deux exponentielles. Or en ré-écrivant l'argument de la deuxième exponentielle en remplaçant n par $n - 1$, on obtient

$$-(n - 1 + \alpha)\lambda - (n - 1 + \alpha)(n - 1)\lambda = -(n - 1 + \alpha)\lambda = n\lambda - n(n + \alpha)\lambda. \quad (4.17)$$

où l'on reconnaît l'argument de la première exponentielle de (4.16). En changeant l'indice de la deuxième somme $n \rightarrow n - 1$, la condition sur le bord droit se réécrit donc

$$\mathcal{L}^e(\lambda, \lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_n + b_{n-1}) e^{n(1-n-\alpha)\lambda} = 0. \quad (4.18)$$

Puisque les équations (4.15) et (4.18) sont valables pour tout λ , on en déduit les relations suivantes entre les coefficients de (4.14)

$$a_0 + b_0 = 1, \quad (4.19)$$

$$a_n + b_n = 0 \quad \forall n \neq 0, \quad (4.20)$$

$$a_n + b_{n-1} = 0 \quad \forall n. \quad (4.21)$$

De plus, si la longueur initiale L_0 de la cage tend vers l'infini et que la particule est initialement loin de chacun des bords⁶, alors la probabilité conditionnelle de sortie tend vers 0, ce qui implique d'après l'équation (4.14)

$$a_0 = 0. \quad (4.22)$$

En ajoutant cette condition au système (4.19), on en déduit que $b_1 = 1$, et l'utilisation conjointe de (4.20) et (4.21) permettent de déduire que

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 0 \\ -1 & \text{si } n > 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

d'où l'expression de la probabilité conditionnelle de sortie par le bord gauche de la cage

$$\mathcal{L}^e(y, \lambda) = e^{-\alpha y} + \sum_{n=1}^{+\infty} [e^{-(n+\alpha)y} - e^{ny}] e^{-n(n+\alpha)\lambda} \quad (4.25)$$

La probabilité conditionnelle de sortie par le bord droit de la cage se déduit de l'équation (4.25) en remarquant que $\mathcal{R}^e(y, \lambda)|_{\alpha} = \mathcal{L}^e(\lambda - y, \lambda)|_{1-\alpha}$ ⁷. Précisons que si l'on additionne les deux probabilités conditionnelles de sortie par le bord droit et le bord gauche que l'on vient d'obtenir, on retrouve la probabilité finale d'absorption par les bords de la cage⁸.

6. Ce qui implique en particulier $y \rightarrow +\infty$ avec néanmoins $y \ll \lambda$.

7. C'est-à-dire en retournant la cage. La position initiale est alors $L_0 - x_0$ et la particule a cette fois une vitesse de dérive $(1 - \alpha)c$ par rapport au bord gauche, anciennement bord droit.

8. Qui est la probabilité complémentaire de la probabilité finale de survie calculée dans [Bray 2007b], ce qui constitue un test de notre résultat (4.25)

Comme nous l'avons mentionné en introduction, le problème formulé dans le référentiel où la particule brownienne ne fait que diffuser, sans mouvement de dérive, est lui-même intéressant. Pour obtenir l'expression explicite de la solution de ce problème équivalent, où la particule part en x'_0 dans une cage dont les bords sont placés respectivement en $-L_0/2 - c_1 t$ et $L_0/2 + c_2 t$ au temps t (voir figure 4.3(b)), on remplace α , c et x_0 par les expressions correspondantes en termes de c_1 , c_2 et x'_0

$$c = c_1 + c_2 \quad (4.26)$$

$$\alpha = \frac{c_1}{c_1 + c_2} \quad (4.27)$$

$$x'_0 = x_0 - \frac{L_0}{2}, \quad (4.28)$$

débouchant sur

$$\mathcal{L}^e(x'_0, L_0) = e^{-\frac{c_1}{2D}(2x'_0 + L_0)} + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n(c_1+c_2)+c_1}{D}L_0} \left\{ e^{-\frac{n(c_1+c_2)+c_1}{2D}(2x'_0 + L_0)} - e^{\frac{n(c_1+c_2)}{2D}(2x'_0 + L_0)} \right\} \quad (4.29)$$

Quand la longueur initiale de l'intervalle L_0 est grande devant $D/(c_1 + c_2)$, la probabilité conditionnelle de sortie est bien approchée par son premier terme

$$\mathcal{L}^e(x'_0, L_0) \sim e^{-\frac{c_1}{2D}(2x'_0 + L_0)}, \quad (4.30)$$

qui est exponentiellement grand devant les autres termes de la série de l'équation (4.29).

4.2.2 Vérification du résultat asymptotique à l'aide d'arguments simples

Le résultat asymptotique (4.30) peut se retrouver en se plaçant dans une approximation de diffusion libre⁹ [Krapivsky 1996, Redner 2001], où l'on suppose que le propagateur dans la cage prend la même forme gaussienne qu'une particule diffusant à une dimension sans conditions aux limites. Cette approximation est justifiée lorsque les bords de la cage se trouvent hors de l'intervalle typique où le propagateur est appréciable. Le propagateur prend donc la forme gaussienne suivante

$$P(x, t) = \frac{A(t)}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x'_0)^2}{4Dt}}. \quad (4.31)$$

Par normalisation du propagateur, l'amplitude $A(t)$ ne vaut pas 1 comme pour une diffusion totalement libre, mais est un peu plus faible, pour tenir compte de l'étendue finie de la cage.

Nous allons déterminer cette amplitude de manière auto-cohérente. Pour cela, on écrit un bilan qui relie la perte d'amplitude $A(t)$ dans la cage au flux de probabilité sur ses deux bords. Le flux de probabilité en un point quelconque de la cage s'écrit

$$j(x) = -D \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{A(t)(x - x'_0)}{\sqrt{16\pi Dt^3}} e^{-\frac{(x-x'_0)^2}{4Dt}}, \quad (4.32)$$

9. Free approximation en anglais.

donc le flux total de probabilité qui quitte à l'instant t l'intervalle correspondant à la cage vaut

$$\phi(t) = \left| j \left(-\frac{L_0}{2} - c_1 t \right) \right| + j \left(\frac{L_0}{2} + c_2 t \right) = D \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{L_0}{2}-c_1 t} - D \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=\frac{L_0}{2}+c_2 t}. \quad (4.33)$$

La constante de normalisation $A(t)$ vérifie donc

$$\frac{dA}{dt} = -\phi(t) = -A \left[\frac{\frac{L_0}{2} + x'_0 + c_1 t}{\sqrt{16\pi Dt^3}} e^{-\left(\frac{L_0}{2} + x'_0 + c_1 t\right)^2 / 4Dt} + \frac{\frac{L_0}{2} - x'_0 + c_2 t}{\sqrt{16\pi Dt^3}} e^{-\left(\frac{L_0}{2} - x'_0 + c_2 t\right)^2 / 4Dt} \right]. \quad (4.34)$$

En intégrant cette équation, on obtient

$$\ln A(t) = -\frac{e^{-\frac{c_2^2}{2D}(L_0-2x'_0)}}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\frac{L_0}{2} - x'_0 - c_2 t}{\sqrt{4Dt}} \right) - \frac{e^{-\frac{c_1^2}{2D}(L_0+2x'_0)}}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\frac{L_0}{2} + x'_0 - c_1 t}{\sqrt{4Dt}} \right) \quad (4.35)$$

où erfc est la fonction d'erreur complémentaire. La valeur asymptotique de $A(t \rightarrow +\infty)$ donne la probabilité de survie de la particule dans la cage. Dans cette limite, l'amplitude vaut

$$A(t \rightarrow +\infty) = \exp \left[-e^{-c_2(L_0-2x'_0)/2D} - e^{-c_1(L_0+2x'_0)/2D} \right] \quad (4.36)$$

qui donne dans la limite où $L_0 \rightarrow +\infty$

$$A(t \rightarrow +\infty) \sim 1 - e^{-c_2(L_0-2x'_0)/2D} - e^{-c_1(L_0+2x'_0)/2D}. \quad (4.37)$$

Comme mentionné plus haut, cette probabilité de survie peut s'exprimer à l'aide des probabilités conditionnelles de sortie

$$A(t \rightarrow +\infty) = 1 - \mathcal{L}^e(x'_0, L_0) - \mathcal{R}^e(x'_0, L_0) \quad (4.38)$$

d'où par identification

$$\mathcal{L}^e(x'_0, L_0) \sim e^{-c_1(L_0+2x'_0)/2D}, \quad (4.39)$$

$$\mathcal{R}^e(x'_0, L_0) \sim e^{-c_2(L_0-2x'_0)/2D}, \quad (4.40)$$

en accord avec l'équation (4.30).

4.2.3 Echec de notre approche dans le cas d'une cage en contraction

Dans cette section, nous nous sommes limités au cas d'une cage en expansion car il n'y a pas de manière simple d'étendre l'approche développée ici au cas d'une cage en contraction. En effet, dans ce cas, la probabilité conditionnelle de sortie vérifie toujours la même équation de Fokker-Planck mais où l'on a posé $y \equiv -cx_0/D$ et $\lambda \equiv -cL_0/D$. Le fait que la probabilité conditionnelle ait une limite finie lorsque $L_0 \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire $\lambda \rightarrow -\infty$, impose maintenant une constante K négative. Or l'écriture de K sous la forme (4.10), nécessaire à la factorisation des deux exponentielles de la condition sur le bord droit (4.16), ne permet pas d'obtenir des valeurs de K négatives, même en relâchant la contrainte de n entier à n réel. La possibilité de prendre n complexe, qui permettrait d'avoir une constante K à partie réelle négative, est

néanmoins exclue puisqu'elle empêche cette fois d'effectuer la factorisation de la condition sur le bord droit comme en équation (4.18).

Pour contourner ce problème, nous allons étudier dans la section suivante le problème dans un cadre plus large, en adaptant les approches qui ont été utilisées dans [Bray 2007b] et [Krapivsky 1996] pour déterminer la probabilité de survie dans une cage en expansion à tout temps. Nous calculerons ainsi la densité de premier passage par un bord de la cage à tout temps, dont nous déduirons la probabilité conditionnelle de sortie dans une cage dont les bords se déplacent à des vitesses constantes de signes et valeurs quelconques.

4.3 Cas général : cage en contraction ou en expansion

Considérons maintenant le cas général d'une cage qui est soit en expansion, soit en contraction, encore une fois linéairement avec le temps.

Nous nous plaçons à nouveau dans le référentiel où le bord gauche est fixe en $x = 0$. Pour une cage en contraction, la particule brownienne et le bord droit ont tous les deux une vitesse de dérive vers la gauche (voir figure 4.2), et pour une cage en expansion, ils ont une vitesse de dérive vers la droite (voir figure 4.3). On change leur orientation entre les deux cas pour n'avoir à considérer que des vitesses à valeurs positives, par commodité. Elles valent dans les deux cas respectivement αc et c . On note x la position de la particule au temps t .

4.3.1 Densité de premier passage par l'un des bords à tout temps

La probabilité conditionnelle de sortie s'obtient *via* la densité de premier passage par le bord de la cage, se déduisant elle-même du propagateur $P(x, t)$ de la particule dans cette cage, qui est solution de l'équation de Fokker-Planck vers le futur suivante (voir par exemple [Redner 2001])

$$\frac{\partial P}{\partial t} \pm \alpha c \frac{\partial P}{\partial x} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad (4.41)$$

avec la condition initiale et les conditions aux limites suivantes

$$P(x, 0) = \delta(x - x_0) \quad (4.42)$$

$$P(0, t) = P(L(t), t) = 0. \quad (4.43)$$

La longueur de l'intervalle à l'instant t vaut $L(t) = L_0 \pm ct$. Le signe du haut dans nos expressions concernera toujours la cage en expansion, et le signe du bas celle en contraction. Notons que pour la cage en contraction, le processus s'arrête lorsque les deux bords de la cage se rejoignent, au temps $t = L_0/c$.

Quand les bords de la cage sont fixes, c'est-à-dire pour une cage de longueur $L(t) = L_0$ constante, la base des solutions de l'équation de Fokker-Planck (4.41) avec conditions aux limites absorbantes est bien connue

$$f_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L_0}\right) \exp\left(\pm \frac{\alpha c x}{2D} - \frac{\alpha^2 c^2 t}{4D} - \frac{n^2 \pi^2 D t}{L_0^2}\right) \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}. \quad (4.44)$$

Afin de tenir compte de la variation de la taille de l'intervalle avec le temps, nous suivons la méthode introduite dans [Krapivsky 1996] et adaptée dans [Bray 2007a]. Nous supposons ainsi qu'il existe une solution de (4.41) avec les conditions (4.42) et (4.43), calquée sur la solution du problème stationnaire, de la forme

$$P_n(x, t) = g(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L(t)}\right) \exp\left(\pm \frac{\alpha cx}{2D} - \frac{\alpha^2 c^2 t}{4D}\right) \exp\left(-n^2 \pi^2 D \int_0^t \frac{dt'}{L^2(t')}\right) \quad (4.45)$$

où la fonction $g(x, t)$ est à déterminer. En remplaçant cette fonction test dans l'équation de Fokker-Planck (4.41), on obtient

$$\left(D \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial g}{\partial t}\right) \tan\left(\frac{n\pi x}{L(t)}\right) = -\frac{n\pi}{L(t)} \left(2D \frac{\partial g}{\partial x} \pm \frac{cx}{L(t)} g\right). \quad (4.46)$$

On remarque, dans l'esprit de [Bray 2007a], que l'on peut chercher une forme pour $g(x, t)$ qui annule simultanément les deux membres de l'équation (4.46), de sorte que $g(x, t)$ doit être solution du système

$$D \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial g}{\partial t}, \quad (4.47)$$

$$2D \frac{\partial g}{\partial x} = \mp \frac{cx}{L(t)} g. \quad (4.48)$$

La deuxième équation donne une solution de la forme

$$g(x, t) = B(t) \exp\left(\mp \frac{x^2 c}{4DL(t)}\right) \quad (4.49)$$

et en réinjectant cette expression dans la première équation, on obtient la fonction $B(t)$

$$B(t) = \frac{K}{\sqrt{L(t)}}, \quad (4.50)$$

avec K une constante, d'où

$$g(x, t) = \frac{K}{\sqrt{L(t)}} \exp\left(\mp \frac{x^2 c}{4DL(t)}\right). \quad (4.51)$$

La solution générale de l'équation de Fokker-Planck peut s'écrire comme une superposition des fonctions de base $P_n(x, t)$

$$P(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{L(t)}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L(t)}\right) \exp\left(\mp \frac{x^2 c}{4DL(t)} \pm \frac{\alpha cx}{2D}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 c^2 t}{4D} - \frac{n^2 \pi^2 D t}{L_0 L(t)}\right). \quad (4.52)$$

Les coefficients a_n peuvent être déterminés à l'aide de la condition initiale

$$P(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{L_0}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_0}\right) \exp\left(\mp \frac{x^2 c}{4DL_0} \pm \frac{\alpha cx}{2D}\right) = \delta(x - x_0), \quad (4.53)$$

qui se réécrit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L_0}\right) = \sqrt{L_0} \exp\left(\pm \frac{x_0^2 c}{4DL_0} \mp \frac{\alpha c x_0}{2D}\right) \delta(x - x_0) \quad (4.54)$$

où la fonction de Dirac permet de remplacer x par x_0 . Pour faciliter l'identification des coefficients a_n , on décompose la fonction dirac sur la même base de fonctions sinus

$$\delta(x - x_0) = \frac{2}{L_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_0}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L_0}\right), \quad (4.55)$$

pour $0 \leq x, x_0 \leq L_0$, d'où

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{L_0}} \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L_0}\right) \exp\left(\pm \frac{x_0^2 c}{4DL_0} \mp \frac{\alpha c x_0}{2D}\right). \quad (4.56)$$

Le propagateur dans la cage de taille variable est donc finalement

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{L_0 L(t)}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L(t)}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L_0}\right) \\ &\times \exp\left(\mp \frac{c(x^2 - x_0^2)}{4DL(t)} \pm \frac{\alpha c(x - x_0)}{2D} - \frac{\alpha^2 c^2 t}{4D} - \frac{n^2 \pi^2 D t}{L_0 L(t)}\right). \end{aligned} \quad (4.57)$$

La densité de premier passage F par le bord gauche de la cage au temps t , qui représente la probabilité de toucher pour la première fois ce bord entre les temps t et $t + dt$, c'est-à-dire le flux sur ce bord, vaut par conséquent

$$F(0, t) = D \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n\pi D}{\sqrt{L_0 L^3(t)}} \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L_0}\right) \exp\left(\pm \frac{c x_0^2}{4DL_0} \mp \frac{\alpha c x_0}{2D} - \frac{\alpha^2 c^2 t}{4D} - \frac{n^2 \pi^2 D t}{L_0 L(t)}\right). \quad (4.58)$$

Cette grandeur et *a fortiori* le propagateur (4.57) donnent une connaissance complète de la dynamique du système et en particulier de la sortie conditionnelle par le bord gauche¹⁰.

4.3.2 Probabilité conditionnelle de sortie

La probabilité conditionnelle de sortie par le bord gauche se déduit aisément de la densité de premier passage par ce bord¹¹ par intégrale temporelle. Comme mentionné précédemment, le domaine d'intégration temporelle n'est pas le même suivant si la cage est en expansion ou en contraction, puisque le processus s'interrompt au temps $t = L_0/c$ dans le cas d'une cage en contraction. En tenant compte de cette remarque, les probabilités conditionnelles de sortie pour une cage en contraction et en expansion, respectivement $\mathcal{L}^c$ et $\mathcal{L}^e$, sont données par

$$\mathcal{L}^c(x_0, L_0) = \int_0^{L_0/c} dt F(0, t) \quad (4.59)$$

$$\mathcal{L}^e(x_0, L_0) = \int_0^{+\infty} dt F(0, t). \quad (4.60)$$

10. On obtient trivialement celle par le bord droit en évaluant $F(L(t), t)$.

11. Le bord droit ayant été pris absorbant dans le paragraphe précédent, la densité de première arrivée sur le bord gauche calculée correspond bien à une arrivée conditionnelle sur le bord gauche, c'est-à-dire sans avoir touché le bord droit.

En utilisant finalement l'expression de la densité de premier passage (4.58), les probabilités conditionnelles de sortie sont

$$\mathcal{L}^c(x_0, L_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n\pi D}{c\sqrt{L_0}} \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L_0}\right) e^{-\frac{c(x_0-\alpha L_0)^2}{4DL_0} + \frac{n^2\pi^2 D}{cL_0}} \int_0^{L_0} \frac{dL}{L^{3/2}} e^{\frac{\alpha^2 cL}{4D} - \frac{n^2\pi^2 D}{cL}} \quad (4.61)$$

$$\mathcal{L}^e(x_0, L_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n\pi D}{c\sqrt{L_0}} \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L_0}\right) e^{\frac{c(x_0-\alpha L_0)^2}{4DL_0} - \frac{n^2\pi^2 D}{cL_0}} \int_{L_0}^{+\infty} \frac{dL}{L^{3/2}} e^{-\frac{\alpha^2 cL}{4D} + \frac{n^2\pi^2 D}{cL}} \quad (4.62)$$

Une évaluation numérique des deux formules (4.62) et (4.25) permet de vérifier que ces deux expressions de la probabilité conditionnelle de sortie sont en parfaite concordance.

Cependant, les séries intervenant dans les équations (4.61) et (4.62) convergent lentement avec n , ce qui empêche de tronquer les sommes et complique donc considérablement l'évaluation numérique. Pour résoudre ce problème, on utilise la formule de sommation de Poisson (voir par exemple [Olver 2014]), qui permet d'obtenir une série qui converge beaucoup plus vite et s'évalue plus facilement

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{h}(2\pi m), \quad (4.63)$$

où $\hat{h}$ désigne la transformée de Fourier de h , définie par

$$\hat{h}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-ixt} h(t). \quad (4.64)$$

Il en découle une formule alternative pour les probabilités conditionnelles de sortie

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^c(x_0, L_0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sqrt{\frac{c}{4\pi D}} e^{-c(x_0-\alpha L_0)^2/4DL_0} \int_0^{L_0} \frac{dL}{(L_0-L)^{3/2}} e^{\alpha^2 cL/4D} \\ \times \exp\left[-\frac{cL(4L_0^2 m^2 + x_0^2)}{4DL_0(L_0-L)}\right] \left\{ x_0 \operatorname{ch}\left[\frac{cLx_0 m}{D(L_0-L)}\right] - 2mL_0 \operatorname{sh}\left[\frac{cLx_0 m}{D(L_0-L)}\right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^e(x_0, L_0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sqrt{\frac{c}{4\pi D}} e^{c(x_0-\alpha L_0)^2/4DL_0} \int_{L_0}^{+\infty} \frac{dL}{(L-L_0)^{3/2}} e^{-\alpha^2 cL/4D} \\ \times \exp\left[-\frac{cL(4L_0^2 m^2 + x_0^2)}{4DL_0(L-L_0)}\right] \left\{ x_0 \operatorname{ch}\left[\frac{cLx_0 m}{D(L-L_0)}\right] - 2mL_0 \operatorname{sh}\left[\frac{cLx_0 m}{D(L-L_0)}\right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Nous avons établi ici des expressions explicites pour la probabilité conditionnelle de sortie d'un cage en expansion ou en contraction linéaire en temps par l'intermédiaire du calcul du propagateur dans ces cages et de la densité conditionnelle de première sortie au cours du temps. Cela fournit donc une caractérisation précise de l'issue de la diffusion d'une particule dans une telle cage.

4.4 Critère de capture optimale

Nous sommes maintenant en mesure de répondre à l'interrogation du berger : quelle est la stratégie optimale pour attraper l'agneau imprudent sans le faire chuter accidentellement dans le précipice ? Dans le référentiel attaché au berger, l'agneau s'approche de celui-ci avec une vitesse de dérive αc , ajoutée à son mouvement diffusif, et le précipice s'approche quant à lui du berger à une vitesse plus élevée c . La probabilité pour que l'agneau rencontre le berger avant le précipice est donc exactement la probabilité conditionnelle de sortie par le bord gauche $\mathcal{L}^c(x_0, L_0)$ donnée en (4.61). Quelle vitesse de déplacement c le berger doit-il adopter pour maximiser ses chances de récupérer son agneau vivant ¹² ?

Une première étape pour analyser cette fonction consiste à déterminer, à l'aide d'arguments simples, les deux limites $c \rightarrow 0$ (le berger reste immobile) et $c \rightarrow +\infty$ (le berger se déplace infiniment vite vers l'agneau). Dans le cas où $c = 0$, c'est-à-dire dans une cage de longueur fixe, la probabilité conditionnelle de sortie $\mathcal{L}^c(x_0, L_0)$ est une fonction linéaire de sa position initiale (voir par exemple [Redner 2001])

$$\mathcal{L}^c(x_0, L_0) = \frac{L_0 - x_0}{L_0}. \quad (4.67)$$

Dans le cas contraire où le berger se déplacerait infiniment rapidement, le comportement qualitatif de $\mathcal{L}^c(x_0, L_0)$ se comprend aisément. Dans cette limite, si le temps t_b nécessaire pour que l'agneau atteigne le berger, qui vaut

$$t_b = \frac{x_0}{\alpha c}, \quad (4.68)$$

est plus petit que le temps t_p nécessaire pour que le précipice rattrape l'agneau, qui vaut

$$t_p = \frac{L_0 - x_0}{(1 - \alpha)c}, \quad (4.69)$$

c'est-à-dire si $x_0/L < \alpha$, alors la probabilité que le berger attrape l'agneau avant que celui-ci ne tombe dans le précipice tend vers 1. Au contraire, si l'agneau est trop près du précipice ($x_0/L > \alpha$), de sorte que $t_b > t_p$, la probabilité de capture tend vers 0. On constate donc que le berger doit adapter sa stratégie suivant le degré de crainte du mouton (contrôlé par le paramètre α ¹³) et sa distance au précipice x_0 .

4.4.1 Développement de la probabilité conditionnelle de sortie à petite vitesse

Etudions maintenant plus en détail les caractéristiques de la probabilité conditionnelle de sortie $\mathcal{L}^c(x_0, L_0)$ en fonction de la vitesse c , pour déterminer quel comportement le berger doit adopter. Nous venons de discuter les valeurs limites de cette probabilité en $c = 0$ et $c \rightarrow +\infty$, et nous allons maintenant déterminer le comportement de $\mathcal{L}^c(x_0, L_0)$ à petite vitesse c .

12. Sachant que sa vitesse de déplacement fixe celle de l'agneau, le facteur α étant un paramètre fixé.

13. Plus α est grand, plus l'agneau est craintif.

Pour cela, on étudie en particulier l'intégrale de l'équation (4.61) à petit c

$$\mathcal{I} \equiv \int_0^{L_0} \frac{dL}{L^{3/2}} \exp\left(\frac{\alpha^2 c L}{4D} - \frac{n^2 \pi^2 D}{cL}\right). \quad (4.70)$$

En changeant de variable $u = 1/L$ et en développant l'exponentielle au premier ordre en c , on obtient

$$\mathcal{I} \sim \int_{\frac{1}{L_0}}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u}} \exp\left(-n^2 \pi^2 \frac{Du}{c}\right) + \frac{\alpha^2 c}{4D} \int_{\frac{1}{L_0}}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u}} \exp\left(-n^2 \pi^2 \frac{Du}{c}\right). \quad (4.71)$$

La première intégrale se calcule directement et la deuxième s'obtient par intégration par parties, produisant

$$\mathcal{I} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{c}{\pi D}} \left(1 - \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{2}\right) \operatorname{erfc}\left(n\pi \sqrt{\frac{D}{cL_0}}\right) + \frac{\alpha^2 c \sqrt{L_0}}{2D} \exp\left(-n^2 \pi^2 \frac{D}{cL_0}\right). \quad (4.72)$$

Le développement à petit c de la fonction d'erreur complémentaire étant

$$\operatorname{erfc}\left(n\pi \sqrt{\frac{D}{cL_0}}\right) \underset{c \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{cL_0}{D\pi^3}} \exp\left(-n^2 \pi^2 \frac{D}{cL_0}\right), \quad (4.73)$$

on obtient au premier ordre en c

$$\mathcal{I} \sim \left[\frac{c\sqrt{L_0}}{n^2 \pi^2 D} - \left(1 - \frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{2}\right) \frac{c^2 L_0^{3/2}}{2D^2 n^4 \pi^4} \right] \exp\left(-n^2 \pi^2 \frac{D}{cL_0}\right). \quad (4.74)$$

Le facteur exponentiel se recombine avec celui contenu dans l'expression (4.61), conduisant à

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^c(x_0, L_0) &\sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n\pi D}{c\sqrt{L_0}} \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L_0}\right) \left(1 - \frac{c(x_0 - \alpha L_0)^2}{4DL_0}\right) \left[\frac{c\sqrt{L_0}}{n^2 \pi^2 D} - \left(1 - \frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{2}\right) \frac{c^2 L_0^{3/2}}{2D^2 n^4 \pi^4} \right] \\ &\sim \frac{2}{\pi} \mathcal{A} + \frac{cx_0}{2\pi DL_0} (2\alpha L_0 - x_0) \mathcal{A} - \frac{cL_0}{\pi^3 D} \mathcal{B}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

où les sommes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont définies ci-dessous et valent [Prudnikov 1986]

$$\mathcal{A} \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n\pi \frac{x_0}{L_0}\right) = \frac{\pi}{2} \frac{L_0 - x_0}{L_0}, \quad (4.76)$$

$$\mathcal{B} \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \sin\left(n\pi \frac{x_0}{L_0}\right) = \frac{\pi^3}{12} \frac{x_0^3 - 3x_0^2 L_0 + 2x_0 L_0^2}{L_0^3} \quad (4.77)$$

valables pour $-L_0 < x_0 < L_0$, condition respectée ici puisque $0 \leq x_0 < L_0$. Le développement de la probabilité conditionnelle de sortie à l'ordre 1 en c est par conséquent finalement donné par

$$\mathcal{L}^c(x_0, L_0) = \frac{L_0 - x_0}{L_0} - \frac{cx_0}{6D} \frac{(L_0 - x_0)[(3\alpha - 1)L_0 - x_0]}{L_0^2} + o(c). \quad (4.78)$$

Notons qu'un développement similaire de l'expression (4.62), détaillé dans l'annexe I, permet d'obtenir le développement de la probabilité conditionnelle de sortie dans le cas d'une cage en expansion

$$\mathcal{L}^e(x_0, L_0) = \frac{L_0 - x_0}{L_0} + \frac{cx_0}{6D} \frac{(L_0 - x_0)[(3\alpha - 1)L_0 - x_0]}{L_0^2} + o(c). \quad (4.79)$$

4.4.2 Diagramme de phase pour une cage en contraction ou en expansion

En raison de la dépendance du terme d'ordre 1 en les paramètres α et x_0 , $\mathcal{L}^c(x_0, L_0)$ est une fonction localement croissante par rapport à la vitesse c en $c = 0$ lorsque $\alpha > 1/3(x_0/L_0 + 1)$, et localement décroissante dans le cas contraire. Ajoutée à la connaissance des valeurs de la probabilité $\mathcal{L}^c(x_0, L_0)$ en $c = 0$ et en $c \rightarrow +\infty$ données au début du paragraphe 4.4, sa pente à l'origine permet de déduire des informations sur sa monotonie avec la vitesse c . Comme on peut le voir sur le diagramme de phase dans le plan $(x_0/L_0, \alpha)$ (voir figure 4.4), la probabilité conditionnelle de sortie possède des caractéristiques variées, sa monotonie changeant avec ces deux paramètres.

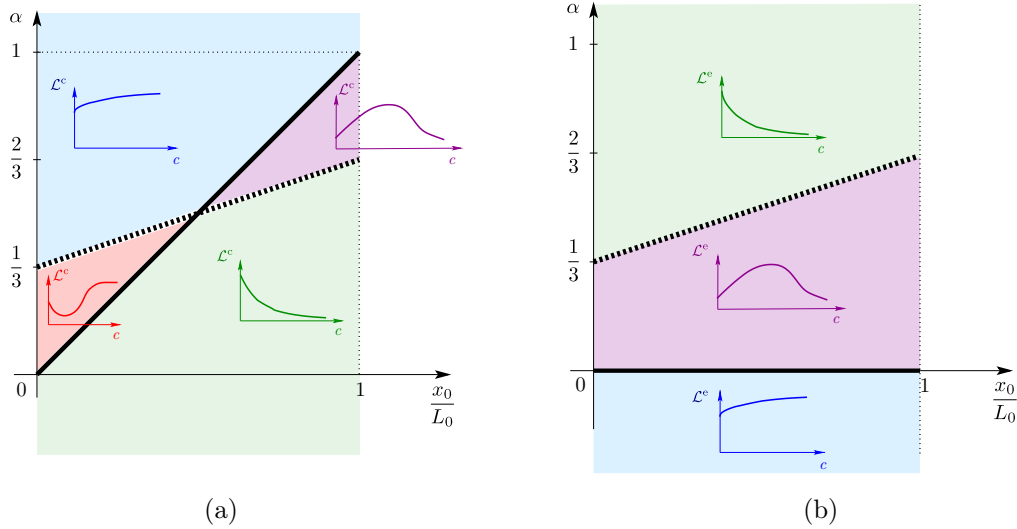


FIGURE 4.4 – Diagramme de phase du comportement de la probabilité conditionnelle de sortie $\mathcal{L}^c$ par le bord gauche d'une cage (a) en contraction et (b) en expansion, dans le plan $(x_0/L_0, \alpha)$, dont l'abscisse quantifie la proximité initiale entre l'agneau et le précipice, et l'ordonnée le "degré de crainte" de l'agneau. La ligne noire épaisse sépare la zone où la valeur asymptotique de $\mathcal{L}^c$ en $c \rightarrow +\infty$ est 0 de celle où elle vaut 1. La ligne noire en pointillés sépare la zone où $\mathcal{L}^c$ a une pente positive en $c = 0$ de celle où elle a une pente négative. Dans le cas en contraction (a), il existe quatre profils pour $\mathcal{L}^c$: croissant, décroissant, avec un minimum ou avec un maximum, comme discuté dans le texte principal. Dans le cas en expansion (b), il n'y a que trois profils : croissant, décroissant ou avec un maximum.

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre le dilemme du berger : doit-il rester immobile, courir le plus vite possible vers l'agneau, avancer plus prudemment ? Il existe quatre stratégies différentes, correspondant aux quatre zones du diagramme de phase 4.4(a) :

- (i) "Zone dangereuse" (en bas à droite). L'agneau est soit craintif (α petit), soit trop près du précipice (à la fois $\alpha < \frac{1}{3}(x_0/L_0 + 1)$ et $\alpha < x_0/L_0$). La probabilité de capture décroît de manière monotone avec la vitesse du berger c . Celui-ci a donc intérêt à rester immobile en espérant que l'agneau va spontanément se rapprocher de lui.
- (ii) "Zone sûre" (en haut à gauche). L'agneau est soit peu craintif (α grand), soit suffisamment près du berger ($\alpha > \frac{1}{3}(x_0/L_0 + 1)$ et $\alpha > x_0/L_0$). La probabilité de capture croît dans ce cas de manière monotone avec c . Celui-ci doit donc courir le plus vite possible pour maximiser ses chances d'attraper l'agneau.

- (iii) “Zone tactique” (en haut à droite). L’agneau est près du précipice mais n’est pas craintif, de sorte que la probabilité de capture possède un maximum par rapport à la vitesse du berger (voir figure 4.5(a)). Pour avoir un maximum de chances de sauver son agneau, il doit donc se déplacer à une vitesse intermédiaire.
- (iv) “Zone dilemme” (en bas à gauche). L’agneau est près du berger, mais très craintif, de sorte que la probabilité de capture possède cette fois un minimum par rapport à c (voir figure 4.5(b)). Si le berger n’est pas très sportif et ne peut pas courir très vite, il vaut mieux qu’il reste immobile, car bouger lentement abaisse ses chances de capture. En revanche, s’il est en bonne condition physique, il a intérêt à courir le plus vite possible.

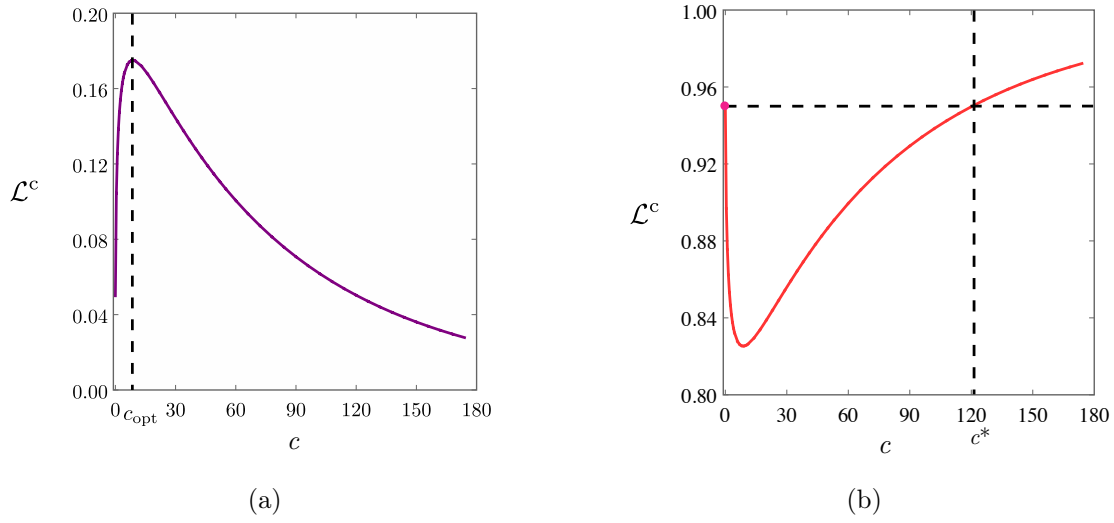


FIGURE 4.5 – Probabilité de capture de l’agneau dans la “zone tactique” (a) et dans la “zone dilemme” (b). Dans la zone tactique (a), le berger peut significativement augmenter ses chances d’attraper l’agneau en se déplaçant à la vitesse optimale c_{opt} plutôt qu’en restant immobile (d’un facteur plus que 3 dans cet exemple où $\alpha = 0,92$, $x_0 = 19$ et $L_0 = 20$, c’est-à-dire un agneau près du précipice mais très peu craintif). Dans la zone dilemme (b), le berger peut au contraire voir diminuer ses chances d’attraper l’agneau si au lieu de rester immobile, il se déplace à une vitesse inférieure à c^* (dans cet exemple où $\alpha = 0,08$, $x_0 = 1$ et $L_0 = 20$, c’est-à-dire où l’agneau est très près du berger mais très craintif, il peut faire monter son risque de perdre l’agneau de 5% s’il reste immobile jusqu’à 17%).

Pour une cage en expansion (voir figure 4.3), on peut également trouver intuitivement la valeur asymptotique de la probabilité conditionnelle de sortie par le bord gauche pour $c \rightarrow +\infty$. Quand $\alpha > 0$, la particule brownienne a une vitesse de dérive qui l’éloigne infiniment vite du bord gauche, donc la probabilité conditionnelle de sortie tend vers 0. En revanche, quand $\alpha < 0$, la particule a une vitesse de dérive qui l’approche infiniment vite du bord gauche, donc la probabilité conditionnelle tend vers 1. Par ailleurs, d’après l’expression (4.79), $\mathcal{L}^c$ est une fonction localement croissante en $c = 0$ si $\alpha < \frac{1}{3}(x_0/L_0 + 1)$, et décroissante dans le cas contraire. On déduit de ces deux propriétés le diagramme de phase donné en figure 4.4(b).

Il existe comme dans le cas d’une cage en contraction une zone où la probabilité conditionnelle de sortie peut être maximisée par rapport à la vitesse c . Ici, ce maximum est le résultat de deux effets qui entrent en compétition lors de l’expansion de la cage. L’expansion de la cage provoque

à la fois l'éloignement du bord droit de la particule, diminuant les risques qu'elle sorte de la cage par ce bord, mais également l'éloignement du bord gauche de la particule, réduisant ses chances d'atteindre un jour ce bord. Il existe donc une vitesse non nulle pour laquelle la probabilité conditionnelle de sortie est maximale.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons déterminé pour une particule brownienne les probabilités conditionnelles de sortie d'une cage unidimensionnelle dont les bords se déplacent à des vitesses constantes c_1 et c_2 quelconques. Nous avons examiné à la fois des cages en contraction et en expansion. Nous avons démontré que la dynamique de ce confinement fait apparaître des comportements variés. En effet, pour les cas de cages en expansion et en contraction, nous avons montré que les probabilités conditionnelles de sortie peuvent dépendre de manière non monotone de la vitesse de contraction ou d'expansion dans certains domaines de valeurs de la position initiale de la particule dans la cage et du rapport des vitesses des deux bords.

Nous avons par ailleurs déterminé la stratégie optimale à adopter pour le berger qui cherche à récupérer son agneau parti vagabonder près d'un précipice. En fonction de la distance de l'agneau au précipice, de son degré de crainte du berger, et éventuellement de la condition physique de celui-ci (la vitesse maximale à laquelle il peut courir étant limitée), il peut avoir intérêt à rester immobile, à courir le plus vite possible, ou encore à adopter une vitesse intermédiaire.

Survie et exploration d'un marcheur aléatoire affamé

Sommaire

5.1	Introduction, définition du modèle et résultats connus	102
5.2	Cas bidimensionnel : approximation circulaire	105
5.2.1	Estimation du temps de vie moyen et du nombre moyen de sites distincts visités	107
5.2.2	Distribution du nombre de sites distincts visités	110
5.3	Avec régénération des ressources	114
5.3.1	Régénération déterministe à une dimension	114
5.3.1.1	Régime d'immortalité	115
5.3.1.2	Temps de vie moyen dans le régime de mortalité	117
5.3.1.3	Régime d'inefficacité de la régénération	119
5.3.2	Extension : régénération probabiliste en dimension quelconque	122
5.3.2.1	Avec une régénération probabiliste	122
5.3.2.2	En dimension plus élevée	124
5.3.3	Conclusion	125
5.4	Modèle d'exploitation de parcelles de nourriture	125
5.4.1	Introduction	125
5.4.1.1	Contexte théorique	125
5.4.1.2	Définition du modèle	127
5.4.2	Statistique de la quantité totale de nourriture collectée dans le cas général .	128
5.4.2.1	Approche naïve sans corrélations	129
5.4.2.2	Distribution de la quantité totale de nourriture collectée dans le cas général	130
5.4.2.3	Expression des moments de la quantité totale de nourriture collec- tée à grand temps	132
5.4.3	Cas particulier du temps d'abandon pour des parcelles unidimensionnelles .	134
5.4.3.1	Probabilité jointe du temps passé dans une parcelle et de la quan- tité de nourriture collectée	135
5.4.3.2	Expression asymptotique des moments de la quantité totale de nourriture collectée	136
5.4.4	Robustesse de la maximisation de la quantité de nourriture collectée	138
5.5	Conclusion	142

5.1 Introduction, définition du modèle et résultats connus

Après avoir étudié dans les trois chapitres précédents l'impact d'un confinement sous différentes formes sur les propriétés d'une marche aléatoire, nous allons maintenant nous intéresser à l'influence sur un marcheur aléatoire d'un autre type de contrainte. Comme nous l'avons vu dans l'introduction générale, les marches aléatoires sont aussi bien utilisées pour décrire le mouvement de particules inanimées que d'organismes vivants à différentes échelles, l'exemple récurrent dans ce manuscrit étant la description de la trajectoire d'animaux. Or les organismes vivants, et en particulier les animaux, finissent toujours par mourir, de vieillesse, de faim, à cause de maladies ou de prédateurs. Dans ce contexte, le marcheur aléatoire considéré a donc un temps de vie *fini*.

Bien que naturelles, les marches aléatoires à temps de vie fini ont été assez peu étudiées. Une première manière de prendre en compte la mortalité du marcheur aléatoire consiste à supposer qu'elle intervient au bout d'un temps aléatoire fixé *a priori* selon une distribution indépendante de l'histoire du marcheur. Cela décrit par exemple les particules radioactives [Zoia 2008], les photons qui diffusent dans la matière et peuvent être absorbés [Bonner 1987], les moteurs moléculaires qui se détachent irréversiblement d'un microtubule [Kolomeisky 2000], les spermatozoïdes dans un processus de fertilisation [Meerson 2015] ou encore les animaux qui meurent de vieillesse. Certaines propriétés de tels marcheurs, définis comme des marcheurs aléatoires évanescents dans [Yuste 2006], ont fait l'objet d'études récentes, comme le nombre moyen de sites distincts visités et la probabilité de survie d'une particule en présence d'un piège évanescent [Yuste 2006, Yuste 2013, Abad 2013], le nombre de sauts avant la mort [Zoia 2008] ainsi que l'existence de stratégies optimales de recherche de cible [Campos 2015].

Cependant, certains processus conduisant à la mort d'un organisme dépendent de l'histoire de celui-ci. Par exemple, l'incapacité d'un organisme vivant à trouver des ressources pendant trop longtemps peut occasionner sa mort, celle-ci étant dans ce cas corrélée à son histoire et en particulier à sa trajectoire, et non programmée de manière indépendante comme dans le cas du marcheur aléatoire évanescent. De manière générale, un organisme consomme des ressources le long de sa trajectoire, épuisant ainsi progressivement son environnement, ce qui finit par menacer sa survie.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons ainsi à la problématique suivante, qui couple trajectoire et temps de vie d'un marcheur aléatoire : comment la consommation de ressources naturelles par un organisme affecte-t-elle sa survie ? Pour répondre à cette question, un modèle minimal dit du "marcheur aléatoire affamé"¹ a été introduit dans [Bénichou 2014a]. Dans ce modèle, un marcheur réalise une marche aléatoire simple sur un réseau dont chaque noeud contient une unité de nourriture (voir figure 5.1). Le marcheur possède un temps de survie intrinsèque $\mathcal{S}$, ou capacité de jeûne, qui correspond au nombre maximal de pas consécutifs pendant lequel il peut jeûner avant de mourir de faim. Lorsque le marcheur arrive sur un site contenant de la nourriture, il la mange instantanément et intégralement, et peut à nouveau jeûner pendant au maximum $\mathcal{S}$ pas. Au cours de son périple, le marcheur creuse un "désert", constitué des sites dépourvus de nourriture, qui s'agrandit progressivement.

1. "Starving random walker" en anglais.

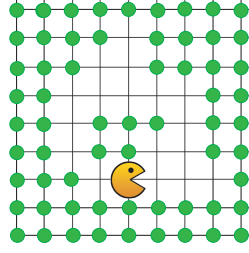


FIGURE 5.1 – Illustration du modèle du marcheur aléatoire affamé à deux dimensions. Ce marcheur est astreint à se déplacer sur un réseau dont chaque site possède initialement une unité de nourriture (représentée par un point vert), que le marcheur consomme intégralement lorsqu’il arrive sur un nouveau site. Il peut rester au maximum $\mathcal{S}$ pas consécutifs sans trouver de nourriture. Au-delà, il meurt de faim.

Deux observables ont été étudiées dans [Bénichou 2014a] : le temps de vie du marcheur et le nombre d’unités de nourriture consommées au moment de la mort, cette dernière étant équivalente au nombre de sites distincts visités, c’est-à-dire à la taille du désert, au moment de la mort.

Le nombre moyen de sites distincts visités au bout de n pas par une marche aléatoire simple sans contrainte en dimension d est bien connu (voir par exemple [Hughes 1996])

$$\langle S_n \rangle \propto \begin{cases} n^{1/2} & \text{si } d = 1 \\ \frac{n}{\ln n} & \text{si } d = 2 \\ n & \text{si } d \geq 3. \end{cases} \quad (5.1)$$

Ce nombre moyen de sites distincts visités a également été déterminé pour un marcheur évanescant de temps de vie exponentiel de moyenne τ

$$\langle S_\infty \rangle \propto \begin{cases} \tau^{1/2} & \text{si } d = 1 \\ \frac{\tau}{\ln \tau} & \text{si } d = 2 \\ \tau & \text{si } d \geq 3. \end{cases} \quad (5.2)$$

Dans le cas d’un marcheur aléatoire affamé, la difficulté pour obtenir le nombre de sites distincts visités provient du couplage existant entre la trajectoire du marcheur et son temps de vie. Avant d’entrer dans une discussion quantitative, l’influence de la dimension sur le temps de vie du marcheur peut être discutée qualitativement. A une dimension, la marche est fortement redondante, c’est-à-dire que le marcheur revient souvent sur des sites précédemment visités sur lesquels il ne trouve pas de nourriture et risque donc de jeûner. La contrainte due à la capacité de jeûne est forte et le temps de vie du marcheur est donc “court”. En dimension supérieure ou égale à trois, la marche est peu redondante, la contrainte due à la capacité de jeûne devient donc faible et le temps de vie “long”, et ce d’autant plus que la dimension est élevée. La dimension deux est marginale entre ces deux cas. Le temps de vie du marcheur est donc une fonction croissante de la dimension à capacité de jeûne $\mathcal{S}$ fixée.

Dans le cas de la dimension un, la forme du désert est triviale. Il s'agit en effet d'un intervalle compris entre les deux positions extrêmes visitées par le marcheur. La mémoire complète de la trajectoire n'est donc pas nécessaire dans ce cas, la donnée de la position des extrémités du désert étant suffisante pour résoudre le problème, ce qui simplifie grandement le couplage entre la trajectoire et le temps de vie du marcheur. Cette forme simple du désert à une dimension a permis un traitement exact, et en particulier la détermination de l'expression asymptotique du temps de vie moyen $\langle \tau \rangle$ et du nombre moyen $\langle \mathcal{N} \rangle$ de sites distincts visités à grande capacité de jeûne $\mathcal{S}$ [Bénichou 2014a]

$$\begin{cases} \langle \mathcal{N} \rangle \sim A\sqrt{\mathcal{S}} \\ \langle \tau \rangle \sim B\mathcal{S} \end{cases} \quad \mathcal{S} \gg 1 \quad (5.3)$$

avec $A \simeq 2,902$ et $B \simeq 3.268$. La distribution limite (à grand $\mathcal{S}$) du nombre de sites distincts visités a également été déterminée

$$Q(\theta) = \frac{4}{\theta} \sum_{j \geq 0} e^{-(2j+1)^2/\theta^2} \exp \left[-2 \sum_{k \geq 0} E_1 \left(\frac{(2k+1)^2}{\theta^2} \right) \right] \quad (5.4)$$

où la fonction $E_1(x) = \int_1^{+\infty} dt e^{-xt}/t$ désigne l'exponentielle intégrale. Cette distribution est exprimée pour la variable renormalisée

$$\theta \equiv \frac{a\mathcal{N}}{\pi\sqrt{D\mathcal{S}}} \quad (5.5)$$

avec a le pas du réseau sur lequel évolue le marcheur, et D le coefficient de diffusion. Cette distribution ne dépend de $\mathcal{S}$ que par l'intermédiaire de la variable renormalisée θ . Ces calculs analytiques s'appuient sur une décomposition de la trajectoire du marcheur aléatoire affamé en excursions successives dans le désert qui sont toutes de durées inférieures à la capacité de jeûne $\mathcal{S}$, jusqu'à l'étape fatale où le marcheur reste $\mathcal{S}$ pas consécutifs dans le désert.

A deux dimensions et en dimension supérieure, la forme du désert et donc le couplage entre trajectoire et temps de vie sont beaucoup plus complexes, ce qui rend le problème ardu. Pour cette raison, les résultats analytiques sur le temps de vie et le territoire au moment de la mort sont pour l'instant extrêmement limités. Les résultats numériques présentés dans [Bénichou 2014a] suggèrent en dimension deux un comportement asymptotique quadratique en $\mathcal{S}$ de la moyenne de ces deux observables, à un éventuel préfacteur logarithmique près. En dimension plus élevée, ces deux grandeurs semblent avoir un comportement asymptotique en exponentielle étirée

$$\langle \tau \rangle \sim \exp(\mathcal{S}^\omega) \quad (5.6)$$

avec $\omega \simeq 0,54, 0,73$ et $0,81$ en dimensions 3, 4 et 5.

Par ailleurs, toujours dans ce même article, un traitement de type champ moyen de ce problème, qui correspondrait à une dimension spatiale tendant vers l'infini, permet d'obtenir dans ce cas un temps de vie moyen exponentiel en $\mathcal{S}$, indiquant vraisemblablement que l'exposant ω de l'équation (5.6) tend vers 1 lorsque la dimension tend vers l'infini. Ce problème reste largement ouvert, notamment dans le cas important de la dimension deux qui fournirait une première description de l'interaction d'un animal terrestre avec les ressources de son environnement.

Dans ce qui suit, nous allons tout d'abord nous pencher sur une description champ moyen de l'évolution d'un marcheur aléatoire affamé à deux dimensions, dans laquelle le désert reste circulaire à tout instant. Cette simplification dans la forme du désert nous permettra d'obtenir des résultats asymptotiques dans la limite de grande capacité de jeûne $\mathcal{S}$ qui fournissent une borne au problème originel où le désert est de forme quelconque.

Nous ajouterons ensuite un ingrédient au modèle initial, la régénération des ressources, et nous déterminerons son impact sur le destin du marcheur aléatoire affamé. Nous verrons que ses propriétés de survie se regroupent en trois grandes classes, indépendantes de la dynamique précise de la régénération, et que leur existence est liée à différents degrés d'efficacité de la régénération.

Enfin, nous étudierons le problème classique en écologie de la détermination du comportement optimal d'un organisme pour l'exploitation de parcelles de ressources². Nous établirons la distribution de la quantité totale de nourriture collectée à l'issue de l'exploitation des parcelles en fonction de la statistique du temps passé dans une parcelle et de la quantité de nourriture qui y est collectée. Nous discuterons ensuite l'influence du critère qu'adopte le marcheur pour quitter une parcelle, dont l'un des plus naturels, qui consiste à abandonner une parcelle après avoir échoué à trouver de la nourriture pendant un certain temps, se ramène à l'étude d'un marcheur aléatoire affamé. Nous esquisserons également une discussion sur l'impact de la répartition des ressources dans les parcelles et de la dimension spatiale des parcelles.

5.2 Cas bidimensionnel : approximation circulaire

Comme nous l'avons explicité ci-dessus, c'est la géométrie très simple du désert qui rend le cas unidimensionnel abordable analytiquement. En revanche, le désert créé par un marcheur aléatoire affamé qui se déplace à deux dimensions a une forme beaucoup plus complexe, qui est fortement corrélée au temps de vie du marcheur, comme on peut le voir sur la figure 5.2. On constate de manière qualitative que les trajectoires le long desquelles le marcheur ne vit pas longtemps sont assez "compactes", alors que celles le long desquelles le marcheur vit longtemps sont plutôt "filamenteuses". En effet, dans un désert compact, le marcheur peut facilement se retrouver dans des régions assez éloignées des ressources, alors que sur une trajectoire filamenteuse, le marcheur reste à proximité des ressources et meurt donc moins vite.

Cette forte corrélation entre la forme du désert et le temps de vie du marcheur rend le cas bidimensionnel bien plus ardu que le cas unidimensionnel. Cependant, malgré sa complexité, le traitement analytique de la dimension deux représente un véritable enjeu, notamment pour la description du mouvement d'un animal terrestre cherchant à survivre dans un environnement où les ressources disparaissent définitivement lorsqu'il les consomme.

Comme premier pas dans cette direction, nous avons étudié un problème plus simple, qui correspond en quelque sorte à une description champ moyen du cas bidimensionnel (voir figure 5.3), dans lequel

2. Il s'agit de l'"optimal foraging theory" en anglais, qui vise entre autres à prédire quel comportement doit adopter un animal à la recherche de nourriture en présence de parcelles (patches) de nourriture.

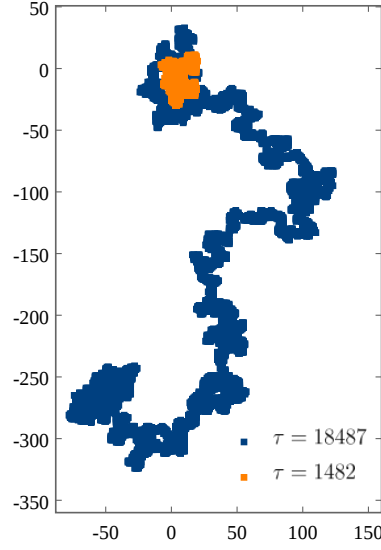


FIGURE 5.2 – Illustration de la corrélation forte entre la forme du désert et le temps de vie τ d'un marcheur aléatoire affamé de capacité de jeûne $\mathcal{S} = 100$. Deux trajectoires avec des temps de vie extrêmes ($\tau = 1482$ en orange et $\tau = 18487$ en bleu pour un temps de vie moyen $\langle \tau \rangle \simeq 6700$) sont représentées. Le désert associé à un temps de vie court est compact, avec peu de trous et relativement circulaire, alors que celui associé à un temps de vie long, en plus d'être évidemment beaucoup plus vaste, a une structure plus filamenteuse.

- (i) le désert conserve une forme de disque tout au long de la marche, son rayon augmentant à chaque fois que le marcheur touche son bord,
- (ii) la trajectoire du marcheur est décrite de manière continue, par un mouvement brownien.

Pour conserver une similitude avec le modèle sur réseau, on suppose que lorsque le marcheur touche le bord du désert, l'aire de celui-ci est incrémentée de a^2 où a est le pas du réseau³. Après avoir visité n sites distincts, l'aire du désert, dont le rayon est noté R_n , est donc na^2 . On en déduit la valeur du rayon du désert circulaire en fonction du nombre de sites distincts déjà visités

$$R_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} a. \quad (5.7)$$

On suppose de plus qu'après avoir touché le bord du désert, le marcheur est éjecté à une distance a du bord du désert⁴, reproduisant le fait que sur réseau, le marcheur serait à un pas de réseau des sites contenant de la nourriture les plus proches⁵. Le coefficient de diffusion de ce mouvement brownien est par ailleurs pris égal à celui de la marche aléatoire sur réseau

$$D = \frac{a^2}{4}. \quad (5.8)$$

3. Dans le modèle sur réseau, quand le marcheur mange la nourriture présente sur un site, cela ajoute au désert un petit carré de côté a centré sur ce site.

4. L'expression (5.7) conduit à $R_k < a$ pour $k \leq 3$, empêchant dans ce cas de prendre une distance d'éjection a . Cette petite incohérence n'est pas importante puisque les trois premiers sites sont toujours visités extrêmement rapidement, donc ne comptent pas dans le processus dans la limite de grand $\mathcal{S}$.

5. Sauf dans le cas où le marcheur visiterait un site plein immergé seul au milieu du désert.

La forme circulaire que conserve le désert tout au long de la marche fait de cette description champ moyen une situation plus défavorable au marcheur que n'importe quelle trajectoire sur réseau, d'après la discussion qualitative précédente, puisque le marcheur est en réalité toujours plus près des ressources que dans ce désert circulaire. Cela confère à cette approximation circulaire un statut de borne inférieure pour le temps de vie du marcheur et le nombre de sites distincts visités au moment de la mort.



FIGURE 5.3 – Illustration de l'approximation circulaire du problème du marcheur aléatoire affamé à deux dimensions. Après avoir touché n fois le bord, le marcheur se déplace dans un désert circulaire de rayon R_n donné par l'équation (5.7). S'il touche à nouveau le bord en un temps inférieur à sa capacité de jeûne $\mathcal{S}$, le rayon du désert est incrémenté de R_n à R_{n+1} et le marcheur éjecté à une distance a du nouveau bord du désert.

5.2.1 Estimation du temps de vie moyen et du nombre moyen de sites distincts visités

Commençons par donner une estimation du comportement asymptotique du temps de vie moyen $\langle \tau \rangle$ et du nombre moyen $\langle \mathcal{N} \rangle$ de sites distincts visités en fonction de la capacité de jeûne $\mathcal{S}$ dans le cadre de l'approximation circulaire, à partir d'arguments qualitatifs se basant sur l'étude d'une trajectoire typique du marcheur aléatoire affamé. Celle-ci se décompose en trois étapes successives :

- (i) Le marcheur creuse un désert circulaire qui s'agrandit progressivement, jusqu'à devenir "dangereux" lorsqu'il atteint un certain rayon critique R_c que nous déterminerons.
- (ii) Le marcheur revient n_2 fois au bord du désert sans mourir de faim.
- (iii) Le marcheur finit par s'aventurer au cœur du désert et meurt de faim.

On ne cherche ici qu'à déterminer la dépendance de $\langle \mathcal{N} \rangle$ et $\langle \tau \rangle$ en $\mathcal{S}$ et pas à établir précisément les préfacteurs de ces lois. Pour cela, nous allons évaluer la durée typique de ces trois phases et le nombre de retours au bord du désert dans chaque phase, qui donne le nombre de sites distincts visités.

Dans la phase (i), le désert est suffisamment petit pour que le marcheur aléatoire affamé ne soit pas en danger, puisqu'il a de très grandes chances de pouvoir atteindre n'importe quel point du bord sans mourir de faim, c'est-à-dire en un temps plus petit que sa capacité de jeûne $\mathcal{S}$.

On peut voir le rayon critique R_c , à partir duquel le désert commence à atteindre une taille dangereuse pour le marcheur, comme le rayon pour lequel le temps typique nécessaire pour atteindre le cœur du désert vaut environ la moitié de la capacité de jeûne⁶. On peut estimer ce temps à l'aide du temps conditionnel moyen nécessaire pour atteindre un disque de rayon a situé au centre du désert sans avoir touché le bord du désert de rayon R_c , partant de $R_c - a$ ⁷ (se déduit par exemple des grandeurs données dans [Redner 2001])

$$t_+(R_c - a) = \frac{1}{4D} \left[R_c^2 - (R_c - a)^2 + \frac{(R_c - a)^2 - a^2}{\ln \frac{R_c - a}{a}} + \frac{a^2 - R_c^2}{\ln \frac{R_c}{a}} \right] \quad (5.9)$$

d'où le critère suivant, dans le régime de grand $\mathcal{S}$ où $R_c \gg a$,

$$\frac{R_c^2}{4D} \simeq \frac{\mathcal{S}}{2}. \quad (5.10)$$

Le rayon critique varie donc comme

$$R_c \propto \sqrt{\mathcal{S}}. \quad (5.11)$$

La correspondance entre le rayon du désert et le nombre de fois que le marcheur a touché le bord du désert, donnée par l'équation (5.7), permet d'estimer le nombre n_1 de sites distincts visités dans cette phase. On obtient donc le comportement asymptotique suivant

$$n_1 \propto R_c^2 \propto \mathcal{S}. \quad (5.12)$$

La durée T_1 de cette première phase est la somme des temps nécessaires pour toucher n_1 fois le désert

$$T_1 = \sum_{j=1}^{n_1} t_j. \quad (5.13)$$

Le temps moyen t_j nécessaire pour toucher pour la j^e fois le bord du désert, dont le rayon est R_j , partant d'une distance a de celui-ci, est donné par [Redner 2001]

$$t_j = \frac{R_j^2 - (R_j - a)^2}{4D} \simeq \frac{R_j a}{2D} \quad (5.14)$$

dans la limite $R_j \gg a$. Le rayon R_j du désert est proportionnel à $\sqrt{j}$, d'après l'équation (5.7), par conséquent

$$T_1 \propto \sum_{j=1}^{n_1} \sqrt{j} \simeq \int_0^{n_1} dj \sqrt{j} \propto n_1^{3/2} \quad (5.15)$$

c'est-à-dire d'après (5.12)

$$T_1 \propto \mathcal{S}^{3/2}. \quad (5.16)$$

6. A partir de ce moment, il existe des zones du désert où le marcheur ne peut pas s'aventurer sans avoir une chance non négligeable de mourir.

7. Toujours à cause de la condition d'éjection choisie

Nous allons maintenant montrer que les durées des phases (ii) et (iii) sont négligeables par rapport à la durée T_1 de la phase (i), et de même pour le nombre de retours au bord du désert. En ce qui concerne la phase (iii), cette conclusion est immédiate, puisqu'elle dure exactement un temps $\mathcal{S}^8$, que l'on peut négliger devant $T_1 \propto \mathcal{S}^{3/2}$, et que le marcheur ne touche pas le bord du désert dans cette phase.

Pour montrer ce résultat pour la phase (ii), nous allons commencer par majorer le nombre moyen n_2 de retours au bord du désert, de rayon initial R_c , lors de la phase (ii). A cette fin, considérons la situation suivante où le marcheur évolue avec les mêmes règles que précédemment, à cela près qu'au lieu de s'agrandir à chaque fois que le marcheur atteint son bord, le désert garde son rayon initial R_c . Le nombre moyen de retours au bord du désert avant de mourir est plus petit lorsque celui-ci s'agrandit au fur et à mesure que lorsqu'il garde un rayon fixé. En effet, dans le premier cas, le marcheur a de moins en moins de chances d'atteindre le bord sans mourir de faim, alors que dans le second, il a après chaque retour une probabilité fixée $\mathcal{E}$ de toucher le bord du désert sans mourir. La situation à rayon constant fournit donc bien une borne supérieure $\tilde{n}_2$ pour le nombre moyen de retours au bord avant de mourir.

La probabilité $\mathcal{E}$ que le marcheur ne meure pas de faim dans le désert de taille critique R_c avant de toucher le bord est typiquement la probabilité que le marcheur ne s'aventure pas tout au centre du désert, mettons dans un disque de rayon a . Il s'agit donc de la probabilité conditionnelle qu'un marcheur partant d'un rayon $R_c - a$ atteigne le bord du désert de rayon R_c avant le rayon a , qui est donnée pour une marche non contrainte⁹ par [Redner 2001]

$$\mathcal{E} = \frac{\ln\left(\frac{R_c - a}{a}\right)}{\ln\left(\frac{R_c}{a}\right)} \sim 1 - \frac{C}{\sqrt{\mathcal{S}} \ln \mathcal{S}} \quad (5.17)$$

dans le régime $\mathcal{S} \gg 1$ avec C une constante. La probabilité Π_k que le marcheur revienne exactement k fois à ce bord fixe du désert, avant de mourir de faim lors de la $k + 1^e$ excursion, vaut

$$\Pi_k = \mathcal{E}^k (1 - \mathcal{E}). \quad (5.18)$$

On en déduit le nombre moyen $\tilde{n}_2$ de retours au bord fixe du désert

$$\tilde{n}_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} k \Pi_k = \frac{\mathcal{E}}{1 - \mathcal{E}} \propto \sqrt{\mathcal{S}} \ln \mathcal{S}. \quad (5.19)$$

Dans la limite de grand $\mathcal{S}$, on a donc

$$\tilde{n}_2 \ll n_1 \propto \mathcal{S} \quad (5.20)$$

d'où le nombre moyen réel n_2 de retours au bord du désert

$$n_2 < \tilde{n}_2 \ll n_1. \quad (5.21)$$

Le nombre n_2 de sites distincts visités lors de la phase (ii) est donc négligeable asymptotiquement devant celui de la phase (i).

8. Le temps après lequel le marcheur meurt de faim.

9. Lorsque $\mathcal{S}$ est grand, la contrainte sur le marcheur aléatoire affamé est faible.

La durée T_2 de la phase (ii) s'obtient directement à partir de n_2

$$T_2 = \sum_{j=n_1}^{n_1+n_2} t_j \quad (5.22)$$

d'où d'après l'expression (5.14) de t_j

$$T_2 \propto \sum_{j=n_1}^{n_1+n_2} R_j \propto \int_{n_1}^{n_1+n_2} dj \sqrt{j} \propto (n_1 + n_2)^{3/2} - n_1^{3/2} \propto n_2 \sqrt{n_1} \quad (5.23)$$

et finalement, en regroupant les équations (5.12), (5.15), (5.20), (5.21) et (5.23),

$$T_2 \leq \mathcal{S} \ln \mathcal{S} \ll T_1. \quad (5.24)$$

La durée de la phase (ii) est donc bien négligeable devant celle de la phase (i).

On peut déduire de l'étude de cette trajectoire typique que le temps de vie moyen du marcheur aléatoire affamé dans l'approximation circulaire a le comportement asymptotique à grand $\mathcal{S}$ suivant

$$\langle \tau \rangle \propto \mathcal{S}^{3/2} \quad (5.25)$$

et le nombre moyen de sites distincts visités

$$\langle \mathcal{N} \rangle \propto \mathcal{S}. \quad (5.26)$$

La partie prépondérante de la vie du marcheur aléatoire affamé dans le désert circulaire consiste donc à creuser un désert de taille dangereuse.

On peut faire une estimation similaire dans le cas unidimensionnel (voir Annexe L) qui permet de constater que contrairement au cas bidimensionnel traité dans l'approximation circulaire, les trois phases de la trajectoire typique ont des durées de même ordre, proportionnelles à $\mathcal{S}$.

Voyons maintenant si ces estimations grossières donnent le bon comportement dominant de $\langle \tau \rangle$ et $\langle \mathcal{N} \rangle$ à grand $\mathcal{S}$ dans le cadre du modèle approché où le désert reste circulaire pendant toute la marche. Pour cela, nous allons effectuer un traitement exact asymptotique de notre problème avec l'approximation circulaire.

5.2.2 Distribution du nombre de sites distincts visités

Nous déterminons dans ce paragraphe la distribution du nombre de sites distinct visités au moment de la mort dans le cadre de l'approximation circulaire présentée ci-dessus, dans la limite où la capacité de jeûne $\mathcal{S}$ est grande. Ce calcul s'inspire de la méthode présentée dans [Bénichou 2014a] pour le calcul de ce même objet à une dimension.

La probabilité d'avoir visité $\mathcal{N}$ sites distincts au moment de la mort, c'est-à-dire d'avoir touché $\mathcal{N}$ fois le bord du désert, s'écrit comme le produit des probabilités de revenir toucher le

bord du désert $\mathcal{N}$ fois sans mourir, donc en un temps plus petit que la capacité de jeûne $\mathcal{S}$, et de mourir avant d'avoir touché le bord du désert une fois supplémentaire

$$P(\mathcal{N}) = \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_3 \mathcal{F}_4 \dots \mathcal{F}_{\mathcal{N}}(1 - \mathcal{F}_{\mathcal{N}+1}). \quad (5.27)$$

Le facteur $\mathcal{F}_k$ désigne la probabilité de toucher le bord du désert de rayon R_k à l'étape k en un temps inférieur à $\mathcal{S}$. Elle est donnée par

$$\mathcal{F}_k = \int_0^{\mathcal{S}} dt F_k(t),$$

avec $F_k(t)$ la densité de premier passage au temps t par le bord du désert de rayon $R_k = a\sqrt{k/\pi}$, pour un marcheur partant d'une distance a ¹⁰ de celui-ci. La transformée de Laplace de la densité de premier passage d'un marcheur par le rayon R partant d'un rayon $r < R$ est connue [Redner 2001]

$$\hat{F}(r, s) = \frac{I_0(\sqrt{\frac{s}{D}}r)}{I_0(\sqrt{\frac{s}{D}}R)} \quad (5.28)$$

avec I_0 la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0. On obtient la densité de premier passage $F_k(t)$ par le rayon $R = R_k$ partant du rayon $r = R_k - a$ au temps t par transformée inverse de Laplace (voir Annexe J)

$$F_k(t) = \frac{2D}{R_k^2} \sum_{m=1}^{+\infty} j_m e^{-\frac{Dtj_m^2}{R_k^2}} \frac{J_0\left(j_m\left(1 - \frac{a}{R_k}\right)\right)}{J_1(j_m)} \quad (5.29)$$

où J_ν désigne une fonction de Bessel d'ordre ν et j_m le $m^{\text{ème}}$ zéro de la fonction J_0 . En intégrant cette expression par rapport à t entre 0 et $\mathcal{S}$, on obtient la probabilité $\mathcal{F}_k$ de toucher le bord du désert de rayon R_k avant un temps $\mathcal{S}$

$$\mathcal{F}_k = 1 - 2 \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-\frac{D\mathcal{S}j_m^2}{R_k^2}} \frac{J_0\left(j_m\left(1 - \sqrt{\frac{\pi}{k}}\right)\right)}{j_m J_1(j_m)} \quad (5.30)$$

qui est proche de 1 à grand $\mathcal{S}$.

Pour calculer le produit des $\mathcal{F}_k$ apparaissant dans (5.27), défini par

$$u_{\mathcal{N}} \equiv \prod_{k=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{F}_k, \quad (5.31)$$

qui fait intervenir à grand $\mathcal{S}$ un grand nombre de termes¹¹ proches de 1, on commence par exprimer son logarithme, transformant ainsi le produit en somme

$$\ln u_{\mathcal{N}} = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \ln \left[1 - 2 \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-\frac{D\mathcal{S}j_m^2}{R_k^2}} \frac{J_0\left(j_m\left(1 - \sqrt{\frac{\pi}{k}}\right)\right)}{j_m J_1(j_m)} \right]. \quad (5.32)$$

10. La distance d'éjection définie précédemment.

11. Pour des valeurs de $\mathcal{S}$ grandes, le nombre de sites distincts visités est grand et la zone où la probabilité $P(\mathcal{N})$ est appréciable correspond donc à des valeurs de $\mathcal{N}$ grandes.

Lorsque $\mathcal{N}$ est grand, on passe à la limite continue de cette expression

$$\ln u_{\mathcal{N}} \sim \int_0^{\mathcal{N}} dk \ln \left[1 - 2 \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-\frac{D\mathcal{S}}{R_k^2} j_m^2} \frac{J_0(j_m(1 - \sqrt{\frac{\pi}{k}}))}{j_m J_1(j_m)} \right]. \quad (5.33)$$

On peut développer l'intégrande de l'équation (5.33) à grand k ¹²

$$\frac{J_0(j_m(1 - \sqrt{\frac{\pi}{k}}))}{J_1(j_m)} \sim j_m \sqrt{\frac{\pi}{k}} \quad (5.34)$$

en remarquant que $J'_0(x) = -J_1(x)$. Par ailleurs, puisque la probabilité $\mathcal{F}_k$ est proche de 1 lorsque $\mathcal{S}$ est grand, on peut développer le logarithme de l'intégrande près de 1

$$\ln u_{\mathcal{N}} \sim -2 \sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^{\mathcal{N}} dk e^{-\frac{D\mathcal{S}}{R_k^2} j_m^2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \quad (5.35)$$

d'où

$$\ln u_{\mathcal{N}} \sim -4\sqrt{\pi\mathcal{N}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left[e^{\frac{D\pi\mathcal{S}}{\mathcal{N}a^2} j_m^2} - \sqrt{\frac{D\mathcal{S}}{\mathcal{N}}} \frac{\pi j_m}{a} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{D\pi\mathcal{S}}{\mathcal{N}}} \frac{j_m}{a} \right) \right]. \quad (5.36)$$

De même, le dernier facteur de l'équation (5.27) peut s'écrire

$$1 - \mathcal{F}_{\mathcal{N}+1} \sim 2\sqrt{\frac{\pi}{\mathcal{N}}} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\frac{D\pi\mathcal{S}}{\mathcal{N}a^2} j_k^2}. \quad (5.37)$$

En regroupant ces deux expressions, on obtient finalement la distribution du nombre de sites distincts visités dans l'approximation circulaire

$$P(\mathcal{N}) \sim 2\sqrt{\frac{\pi}{\mathcal{N}}} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\frac{D\pi\mathcal{S}}{\mathcal{N}a^2} j_k^2} \exp \left\{ -4\sqrt{\pi\mathcal{N}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left[e^{\frac{D\pi\mathcal{S}}{\mathcal{N}a^2} j_m^2} - \sqrt{\frac{D\mathcal{S}}{\mathcal{N}}} \frac{\pi j_m}{a} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{D\pi\mathcal{S}}{\mathcal{N}}} \frac{j_m}{a} \right) \right] \right\}. \quad (5.38)$$

En renormalisant le nombre de sites distincts visités $\theta \equiv \mathcal{N}a^2/(\pi D\mathcal{S})$, la distribution de cette variable θ s'écrit

$$P(\theta, \mathcal{S}) \sim \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{D\mathcal{S}}{\theta}} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\frac{j_k^2}{\theta}} \exp \left\{ -\frac{4\pi}{a} \sqrt{D\mathcal{S}\theta} \sum_{m=1}^{+\infty} \left[e^{-\frac{j_m^2}{\theta}} - \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} j_m \operatorname{erfc} \left(\frac{j_m}{\sqrt{\theta}} \right) \right] \right\}. \quad (5.39)$$

On constate qu'il s'agit d'une distribution à deux paramètres $\mathcal{N}$ et $\mathcal{S}$ (ou θ et $\mathcal{S}$), et pas à un seul paramètre comme à une dimension. Cela reproduit les observations faites à partir des simulations numériques dans [Bénichou 2014a].

Le nombre moyen de sites distincts visités vaut par définition

$$\langle \mathcal{N} \rangle = \frac{\pi D\mathcal{S}}{a^2} \int_0^{+\infty} d\theta \theta P(\theta, \mathcal{S}). \quad (5.40)$$

12. On peut oublier les valeurs de k petites puisque les probabilités de retour au bord du désert associées sont très proches de 1, et leur logarithme proche de zéro.

L'extraction de son comportement à grande capacité de jeûne $\mathcal{S}$ à partir de l'équation (5.39) s'avère compliquée, nous nous contenterons donc ici de l'évaluer numériquement. L'évaluation numérique met en évidence un comportement asymptotique en loi de puissance

$$\langle \mathcal{N} \rangle \sim \mathcal{S}^\beta \quad (5.41)$$

avec $\beta \simeq 0.94$, les barres d'erreur étant difficiles à déterminer car l'exposant β converge lentement vers la valeur asymptotique.

Le temps de vie moyen du marcheur peut également être exprimé en fonction de la distribution du nombre de sites distincts visités suivant une adaptation de la méthode exposée dans [Bénichou 2014a] (voir Annexe K)

$$\tau \simeq \mathcal{S} + \frac{2\pi\sqrt{D}\mathcal{S}^{3/2}}{a} \int_0^{+\infty} d\theta P(\theta, \mathcal{S}) \int_0^\theta \frac{du}{\sqrt{u}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{u}{j_m^2} - \left(1 + \frac{u}{j_m^2} \right) e^{-\frac{j_m^2}{u}} \right]. \quad (5.42)$$

De même que pour le nombre moyen de sites distincts visités, on évalue numériquement le temps de vie moyen et on constate qu'il possède un comportement asymptotique en loi de puissance

$$\langle \tau \rangle \sim \mathcal{S}^\gamma \quad (5.43)$$

avec $\gamma \simeq 1.4$, la remarque sur les barres d'erreur faite précédemment étant toujours valable.

Bien que n'étant que des indications, ces estimations numériques du comportement asymptotique du nombre moyen de sites distincts visités et du temps de vie moyen suggèrent des exposants $\beta = 1$ et $\gamma = 3/2$, qui correspondent aux comportements dominants estimés au paragraphe précédent. On constate notamment bien que l'approximation circulaire fournit une borne inférieure de ces deux grandeurs pour le problème initial sur réseau, puisque comme rappelé ci-dessus, les simulations numériques indiquent plutôt un comportement asymptotique quadratique pour ces deux grandeurs, à une correction logarithmique près comme mentionné au paragraphe 5.1. Cette borne n'est pas très précise, en particulier pour le temps de vie du marcheur. Cela se comprend aisément en raison de la ressemblance seulement lointaine qui existe entre la forme réelle du désert et un disque.

Néanmoins, l'approximation circulaire présente trois intérêts. Tout d'abord, elle donne une première description du modèle du marcheur aléatoire affamé en dimension deux, qui n'a pour l'instant pas été étudié dans sa version originelle. Ensuite, elle fournit une borne au modèle réel, qui permet de corroborer l'intuition que nous avons exprimée en introduction selon laquelle le temps de vie du marcheur est une fonction croissante de la dimension, à cause de la diminution de la redondance de la trajectoire lorsque la dimension spatiale augmente. En effet, les résultats présentés ci-dessus indiquent que le temps de vie moyen du marcheur croît plus vite que $\mathcal{S}^{3/2}$, c'est-à-dire en particulier plus vite qu'à une dimension où il est linéaire par rapport à $\mathcal{S}$. Enfin, cette approximation permet de rendre compte de l'absence de dépendance dans un unique paramètre d'échelle de la distribution du nombre de sites distincts visités au moment de la mort qui a été observée dans [Bénichou 2014a] par simulations numériques. Cette caractéristique est d'autant plus surprenante qu'elle n'est pas observée en dimension un, et il est intéressant de parvenir à la reproduire.

5.3 Avec régénération des ressources

Nous abordons maintenant une deuxième question relative au modèle du marcheur aléatoire affamé. Quel est l'impact de la régénération des ressources naturelles sur le sort d'un organisme qui consomme ces ressources sur son passage ?

Si l'environnement naturel est hostile et que les ressources se régénèrent lentement, les organismes risquent d'être confrontés à un manque récurrent de nourriture, conduisant finalement à leur mort¹³. Au contraire, dans un environnement luxuriant où les ressources se régénèrent rapidement, un organisme peut ne jamais subir un vrai manque de nourriture. La régénération potentielle des ressources, qui existe pour tous les types de ressources, proies, plantes, nutriments, peut par conséquent affecter fortement la dynamique d'un organisme qui les consomme.

Dans cette section, nous allons donc enrichir le modèle du marcheur aléatoire en supposant que les ressources se régénèrent un certain temps après avoir été consommées au lieu de disparaître définitivement. En utilisant des arguments basés sur l'étude de trajectoires extrêmes, nous montrerons que les corrélations induites par le couplage entre la trajectoire du marcheur, sa capacité de jeûne $\mathcal{S}$ et la dynamique de la régénération font émerger trois régimes universels de comportement qui sont déterminés uniquement par $\mathcal{S}$ et par les bornes du support de la distribution du temps de régénération, mais insensibles à la forme de cette distribution.

Nous démontrerons l'existence d'une transition entre un régime où le marcheur affamé est immortel, c'est-à-dire qu'il ne meurt jamais de faim, et un régime où il est mortel, transition qui existe en toute dimension, ainsi que d'une deuxième transition, qui n'existe cette fois qu'à une dimension, vers un régime où la régénération est trop lente pour avoir un quelconque impact sur le marcheur. Nous développerons par ailleurs une méthode d'énumération qui donne accès au temps de vie moyen du marcheur et à son territoire moyen au moment de la mort.

5.3.1 Régénération déterministe à une dimension

Considérons tout d'abord le cas d'un marcheur aléatoire affamé à une dimension en présence de régénération déterministe des ressources. Un tel mécanisme déterministe décrit approximativement une plante qui pousse à vitesse constante et qui atteint donc une taille consommable un temps fixé après avoir été précédemment défoliée [Erickson 1976]. Nous supposons donc qu'une unité de nourriture qui a été consommée au temps t réapparaîtra au temps $t + \mathcal{R}$ avec $\mathcal{R}$ un entier. A chaque pas de temps, le temps qui s'est écoulé depuis qu'un site a été vidé augmente d'une unité et de la nourriture réapparaît sur ce site lorsque ce temps atteint $\mathcal{R}$.

La régénération éventuelle d'un site et le pas que fait le marcheur vers l'un de ses plus proches voisins ont lieu au début de chaque pas de temps. Par convention, on décide que la régénération intervient juste avant le pas du marcheur, c'est-à-dire que si le site sur lequel le marcheur arrive vient de se régénérer, alors il consomme l'unité de nourriture qui vient de réapparaître. La régénération peut faire apparaître de la nourriture au milieu de sites vides. On désignera toujours par le terme "désert" l'ensemble des sites vides au temps t , celui-ci n'étant maintenant plus nécessairement connexe en présence de régénération.

13. Le cas sans régénération correspond au modèle initial défini dans [Bénichou 2014a].

5.3.1.1 Régime d'immortalité

Nous allons commencer par montrer qu'il existe un régime de valeurs du temps de régénération pour lesquelles le marcheur aléatoire affamé est immortel, c'est-à-dire qu'il a une probabilité nulle de mourir de faim. Cette propriété est spécifique à la présence de régénération. Pour un marcheur possédant une capacité de jeûne $\mathcal{S} \in \mathbb{N}$, nous déterminons cet intervalle de temps de régénération $\mathcal{R}$ conduisant à l'immortalité du marcheur affamé.

L'immortalité est observée si le marcheur survit sur toutes les trajectoires, y compris les plus défavorables, c'est-à-dire celles où il reste le plus longtemps sans manger. L'ensemble de ces trajectoires les plus défavorables est infini, mais elles possèdent toutes le motif commun suivant (voir figure 5.4). Le marcheur s'arrête de manger après avoir trouvé successivement deux sites voisins B puis A, et reste ensuite le plus longtemps possible sans manger à nouveau. Pour cela, il évolue donc strictement à l'intérieur du désert, dont la taille est quelconque¹⁴. Le désert se rétracte au fur et à mesure que la régénération a lieu, jusqu'à être réduit aux deux sites voisins A et B qui sont les derniers à avoir été vidés et seront les derniers à être régénérés. Le marcheur oscille entre ces deux sites jusqu'à être certain de tomber sur un site contenant de la nourriture au pas suivant, ce qui arrive lorsque la régénération a lieu sur l'un de ces deux sites¹⁵.

Un exemple d'une telle trajectoire est représenté sur la figure 5.4. Ce motif s'achève toujours environ $\mathcal{R}$ pas de temps après avoir commencé, le temps que les sites B et/ou A se régénèrent. Si le marcheur est capable de survivre plus longtemps que la durée de ce motif sans manger, c'est-à-dire si le temps de régénération n'est pas trop grand, alors il est immortel, sinon il meurt sur ce motif.

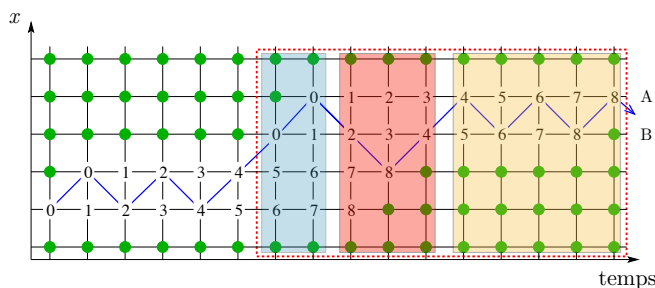


FIGURE 5.4 – Illustration du motif commun (à l'intérieur du rectangle en pointillés) à toutes les trajectoires les plus défavorables au marcheur aléatoire affamé pour un temps de régénération $\mathcal{R} = 9$. Le marcheur commence par vider consécutivement deux sites contenant de la nourriture notés dans l'ordre de visite B et A (phase en bleu), puis reste à l'intérieur du désert le plus longtemps possible. La taille du désert diminue (phase en rouge) jusqu'à ce que le marcheur se trouve limité aux deux premiers sites vidés (phase en jaune). Le motif s'achève lorsque le marcheur finit par être certain d'atterrir sur un site contenant de la nourriture. Les points verts représentent une unité de nourriture, et les nombres indiquent le temps depuis lequel un site a été vidé.

14. Dans cet ensemble de trajectoires les plus défavorables, le motif décrit peut aussi bien s'observer dans un désert limité aux deux sites voisins vidés au début du motif que dans un désert plus grand, sa taille étant néanmoins limitée à $\mathcal{R}$ sites en présence de régénération.

15. Sur le premier ou sur le second de ces deux sites à avoir été vidé, en fonction de la parité de la capacité de jeûne $\mathcal{S}$.

La valeur exacte $\mathcal{R}^*$ du temps de régénération maximal pour lequel le marcheur est encore immortel dépend de la parité de la capacité de jeûne $\mathcal{S}$ du marcheur. Pour déterminer la valeur de $\mathcal{R}^*$, plaçons-nous juste au-dessus de la transition en prenant la plus petite valeur du temps de régénération qui conduit à la mort du marcheur, c'est-à-dire $\mathcal{R} = \mathcal{R}^* + 1$. Sur les trajectoires les plus défavorables, le marcheur meurt dans ce cas sur un site qui se serait régénéré un pas de temps plus tard, c'est-à-dire qui a été vidé $\mathcal{R} - 1$ pas de temps plus tôt¹⁶. Pour la suite, il est utile de remarquer qu'une marche aléatoire sur plus proches voisins met toujours un nombre de pas *pair* pour revenir sur un site donné.

Au début du motif, le marcheur vient de vider successivement les sites B puis A, qui ont des âges respectifs 1 et 0 (voir figure 5.5). Le marcheur meurt exactement $\mathcal{S}$ pas de temps après ce dernier repas. Il se trouve alors soit sur le site A, si $\mathcal{S}$ est pair d'après la remarque précédente, soit sur le site B dans le cas contraire. Dans le premier cas, en $\mathcal{S}$ pas de temps, le site A a vu son âge passer de 0 à $\mathcal{R} - 1$, et dans le deuxième cas de 0 à $\mathcal{R} - 2$ (voir figure 5.5). En se rappelant que $\mathcal{R} = \mathcal{R}^* + 1$, la valeur maximale $\mathcal{R}^*$ du temps de régénération pour laquelle le marcheur aléatoire affamé est immortel vaut donc finalement

$$\mathcal{R}^* = \begin{cases} \mathcal{S} & \text{si } \mathcal{S} \text{ est pair} \\ \mathcal{S} + 1 & \text{si } \mathcal{S} \text{ est impair} \end{cases} \quad (5.44)$$

On vérifie aisément à l'aide de la figure 5.5 que si le temps de régénération valait une unité de moins, le marcheur serait sûr de manger juste avant de mourir, et par conséquent immortel.

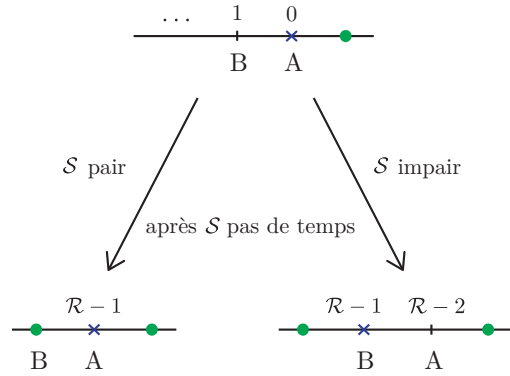


FIGURE 5.5 – Illustration de la mort du marcheur dans le cas limite $\mathcal{R} = \mathcal{R}^* + 1$ en fonction de la parité de la capacité de jeûne $\mathcal{S}$. Les points de suspension sur le dessin du haut traduisent le fait que les caractéristiques du désert autres que celles qui concernent les sites A et B n'importent pas. La croix repère la position du marcheur, chaque point vert représente une unité de nourriture et les chiffres indiquent le temps écoulé depuis qu'un site a été vidé.

Il existe donc bien un régime de valeurs du temps de régénération $\mathcal{R}$ non réduit à zéro dans lequel le marcheur vit éternellement avec probabilité 1, observé lorsque $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}^*$ avec $\mathcal{R}^*$ donné par l'équation (5.44).

16. En effet, si le temps de régénération valait une unité de moins $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$, le marcheur serait immortel car le site sur lequel il aurait dû mourir viendrait d'être régénéré et lui permettrait de manger *in extremis*.

5.3.1.2 Temps de vie moyen dans le régime de mortalité

Au contraire, lorsque $\mathcal{R} > \mathcal{R}^*$, le marcheur est mortel et finit par mourir de faim avec une probabilité un. En effet, il existe maintenant des trajectoires qui conduisent à la mort du marcheur, notamment les trajectoires les plus défavorables détaillées précédemment, sur lesquelles le marcheur meurt avant d'avoir atteint la fin du motif représenté en figure 5.4. Leur seule existence implique que ces trajectoires ont un poids non nul, et donc que le marcheur finit toujours par mourir.

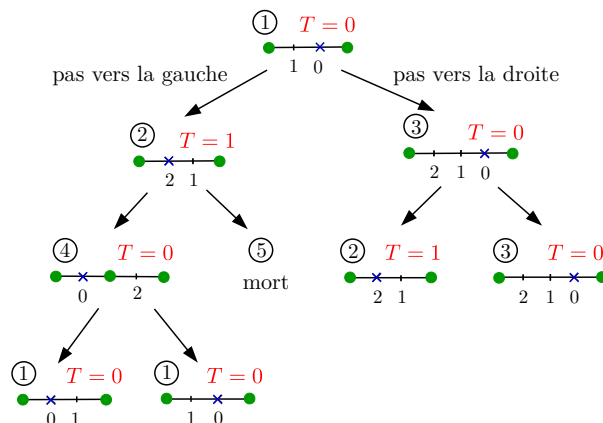
Dans ce régime de mortalité, l'évolution du système peut être décrite à l'aide d'une chaîne de Markov finie. En effet, le système a accès à un certain nombre de configurations, où l'on appelle configuration la donnée conjointe du désert et de la position du marcheur à l'intérieur de celui-ci, indépendamment de leur position absolue, ainsi que le temps depuis lequel chacun des sites du désert a été vidé et le temps depuis lequel le marcheur n'a pas mangé (voir figure 5.6). L'âge des sites vides étant compris entre 0 et $\mathcal{R} - 1$, les deux extrémités du désert au maximum distantes de $\mathcal{R}$ sites¹⁷, et le temps depuis lequel le marcheur n'a pas mangé compris entre 0 et $\mathcal{S} - 1$, le nombre de configurations accessibles au système est fini, mais peut être grand si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$ sont grands. A ces configurations associées à un marcheur encore en vie s'ajoute la configuration où le marcheur est mort. Une fois cette configuration atteinte, le marcheur ne la quitte plus. On dit qu'elle est absorbante. Chaque configuration mène, après un pas du marcheur, à deux configurations différentes (ou parfois identiques). Le fait que la chaîne de Markov finie qui décrit ce système possède un état absorbant implique qu'elle a une probabilité un de finir dans cet état (voir par exemple [Grinstead 2012]). Le marcheur aléatoire affamé a ainsi bien une probabilité un de mourir de faim dans ce régime.

Par ailleurs, la théorie des chaînes de Markov permet de déterminer le temps moyen de vie du système avant de tomber dans l'état absorbant. Pour cela, il s'agit tout d'abord d'énumérer toutes les configurations possibles du système, qui dépendent de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$, et de construire la matrice de transition entre ces configurations. Nous détaillons ce procédé sur l'exemple simple où $\mathcal{S} = 2$ et $\mathcal{R} = 3$, où le système possède cinq configurations différentes (voir figure 5.6). Après le tout premier pas, le système est nécessairement dans la configuration 1 (éventuellement son symétrique, mais qui lui est équivalent). L'évolution de ce système est indiquée sur le schéma 5.6 et peut être représentée par la matrice de transition suivante¹⁸, où les configurations sont listées dans l'ordre 1-5

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} Q & 0 \\ V & I \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

17. Puisque deux sites ne peuvent pas avoir le même âge et qu'il n'existe que $\mathcal{R}$ différents.

18. Le coefficient $T_{i,j}$ donne la probabilité que le système passe de la configuration i à la configuration j .



avec

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad (5.46)$$

le vecteur $V = (0, 1/2, 0, 0)$ et I la matrice identité 1×1 . On définit la matrice fondamentale [Grinstead 2012]

$$N \equiv (I - {}^tQ)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (5.47)$$

où tQ est la transposée¹⁹ de la matrice Q . Le coefficient $N_{i,j}$ de la matrice fondamentale représente exactement le temps moyen qu’aura passé le système au moment de la mort dans la configuration j sachant que la configuration initiale est la configuration i . On peut extraire de cette matrice le temps moyen d’absorption t_i partant de la configuration i . Ces temps sont donnés par [Grinstead 2012]

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}. \quad (5.48)$$

Le temps de vie moyen du marcheur aléatoire affamé est donc $t_1 + 1 = 8$ puisqu'après le tout premier pas, le système est nécessairement dans l'état 1.

Remarquons que l'on peut déterminer d'autres observables à partir de ce formalisme, par exemple le nombre moyen de sites distincts visités au moment de la mort. En effet, le marcheur

19. Dans [Grinstead 2012], le formalisme est introduit avec une “matrice de transition” qui est la transposée de la matrice de transition habituelle que nous avons introduite ici, d’où la présence de cette transposée.

visite un nouveau site dès qu'il est dans les configurations 1, 3 et 4 (voir figure 5.6), d'où un nombre moyen de sites distincts visités qui vaut $1 + N_{1,1} + N_{1,3} + N_{1,4} = 7$. On pourrait de même avoir accès au temps moyen passé dans l'une des configurations, le nombre moyen de sites du désert, la fraction du temps où le désert n'est pas connexe, etc...

Cette méthode d'énumération donne accès à des résultats exacts, qui sont confirmés par simulations numériques. En pratique, cette approche est malheureusement limitée puisque l'énumération des configurations accessibles devient très vite fastidieuse voire impossible dès que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ ne sont pas petits. On pourrait imaginer que l'aide de l'informatique serait précieuse dans ce cas. Cependant, même si l'on automatise la génération des configurations en identifiant autant que possible les configurations équivalentes²⁰, et la construction de l'arbre d'évolution du système, on obtient très vite des matrices de transition de taille prohibitive, ce qui rend leur inversion donnée à l'équation (5.47) impossible à réaliser numériquement²¹. Malgré la difficulté à manier cette méthode d'énumération, elle donne néanmoins un algorithme bien défini pour déterminer un certain nombre d'observables du marcheur aléatoire affamé.

5.3.1.3 Régime d'inefficacité de la régénération

Dans le régime de mortalité que nous venons d'étudier, lorsque le temps de régénération augmente, le marcheur aléatoire affamé a de moins en moins de chances de bénéficier de la régénération pour vivre plus longtemps qu'il ne l'aurait fait en l'absence de régénération. On s'attend donc à ce que son temps de vie moyen soit une fonction décroissante du temps de régénération $\mathcal{R}$ et qu'il tende asymptotiquement vers la valeur

$$T(\mathcal{S}, \mathcal{R} = +\infty) \sim 3.27.. \mathcal{S} \quad (5.49)$$

obtenue en l'absence de régénération [Bénichou 2014a]. Cette décroissance se fait-elle de manière progressive ou atteint-on la valeur asymptotique pour une valeur critique finie $\mathcal{R}^\dagger$ du temps de régénération ? En d'autres termes, la régénération joue-t-elle un rôle dans la dynamique du marcheur aléatoire affamé quel que soit le temps de régénération ? Pour répondre à cette question, il nous faut établir s'il existe au moins une trajectoire sur laquelle le marcheur peut revenir sur un site qui a été régénéré sans mourir de faim. S'il existe au moins une telle trajectoire, alors la régénération est efficace, dans le sens où elle augmente le temps de vie moyen du marcheur, même de manière infinitésimale, alors que dans le cas contraire, elle est inefficace.

Pour que le marcheur puisse retourner à un site où la nourriture a été régénérée, il faut à la fois qu'il vive suffisamment longtemps pour que la régénération ait lieu et qu'il reste suffisamment proche de ce site pour pouvoir l'atteindre en traversant le désert sans mourir de faim. Le site pour lequel ces deux impératifs sont les plus simples à respecter est l'origine de la marche, puisque le marcheur y est à l'instant initial entouré exclusivement de sites contenant de la nourriture. Ce site étant le premier à se régénérer, le désert reste nécessairement connexe

20. Par exemple en régénérant par anticipation des sites vides que le marcheur ne pourrait pas atteindre avant qu'ils ne se régénèrent, ou en identifiant toutes les configurations qui conduisent de manière certaine à la mort au pas suivant.

21. A titre indicatif, pour $\mathcal{S} = 3$, après simplification de l'arbre comme expliqué dans la note précédente, on obtient 158 configurations pour $\mathcal{R} = 9$, ou encore 346 configurations pour $\mathcal{R} = 11$, etc.

jusqu'à sa régénération. Cela veut en particulier dire que pour être en mesure d'atteindre l'origine une fois qu'elle se sera régénérée, il faut que le marcheur s'en soit écarté au maximum d'une distance $\mathcal{S}$, au-delà de laquelle il mourra de faim en tentant de traverser le désert. Nous allons dans ce qui suit construire une trajectoire optimale qui permet de revenir le plus tard possible à l'origine, et en déduire la valeur maximale $\mathcal{R}^\dagger$ du temps de régénération pour laquelle le marcheur a une chance d'atteindre l'origine une fois qu'elle est régénérée. Si le marcheur adopte cette trajectoire optimale et que le temps de régénération vaut $\mathcal{R}^\dagger$, il atteindra l'origine exactement au moment où elle se régénérera.

Pour maximiser le temps pendant lequel le marcheur reste à une distance de l'origine inférieure à $\mathcal{S}$, il faut que le marcheur affamé mange de manière la plus espacée possible, c'est-à-dire tous les $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{S} - 1$ pas (en fonction de la parité de $\mathcal{S}$). Par ailleurs, pour maximiser ce temps, il faut également qu'il mange le plus de fois possible avant d'amorcer son dernier retour à l'origine. Pour cela, il faut qu'à la fin de cette trajectoire optimale, il soit à une distance $\mathcal{S}$ de l'origine pour pouvoir aller chercher la nourriture régénérée à l'origine sans mourir (mettons à gauche), mais qu'il ait également vidé le plus de sites possible à droite de l'origine, c'est-à-dire $\mathcal{S} - 1$ (voir figure 5.7). La seule manière de vider $\mathcal{S} - 1$ sites à droite de l'origine tout en pouvant traverser ce désert de $\mathcal{S}$ sites²² est de vider tous ces sites sans en vider un seul à gauche de l'origine. Le marcheur peut donc manger au maximum $2\mathcal{S}$ fois avant de pouvoir retourner une dernière fois à l'origine, ce qui donne une estimation grossière du temps de régénération maximal $\mathcal{R}^\dagger$

$$\mathcal{R}^\dagger \sim 2\mathcal{S}^2. \quad (5.50)$$

Affinons un peu ce résultat en examinant le détail de cette trajectoire optimale qui permet de revenir le plus tard possible à l'origine. Elle est composée des quatre étapes suivantes (voir figure 5.7) :

- (i) Le marcheur creuse un désert de longueur $\mathcal{S}$ d'un côté de l'origine, mettons vers la droite. Il s'agit de la taille maximale de désert qu'il peut traverser sans mourir. Il ne mange que tous les $\mathcal{S}$ pas pour $\mathcal{S}$ impair²³, et tous les $\mathcal{S} - 1$ pas pour $\mathcal{S}$ pair, donc cette phase dure un temps $1 + \mathcal{S}(\mathcal{S} - 2)$ si $\mathcal{S}$ est impair, et $1 + (\mathcal{S} - 1)(\mathcal{S} - 2)$ si $\mathcal{S}$ est pair.
- (ii) Le marcheur traverse le désert creusé à l'issue de la phase (i) en exactement $\mathcal{S}$ pas de temps.
- (iii) Le marcheur creuse un désert qui est le symétrique de celui de l'étape (i) à gauche de l'origine, ce qui l'amène à une distance $\mathcal{S}$ de l'origine. Cette phase dure donc un temps $\mathcal{S}(\mathcal{S} - 1)$ si $\mathcal{S}$ est impair, et $(\mathcal{S} - 1)^2$ si $\mathcal{S}$ est pair.
- (iv) Enfin, le marcheur traverse la partie gauche du désert, ce qui lui prend un temps exactement égal à $\mathcal{S}$.

La valeur maximale $\mathcal{R}^\dagger$ du temps de régénération pour laquelle la régénération a encore un impact sur le marcheur est donc égale au temps mis par le marcheur sur cette classe de

22. En comptant l'origine.

23. Un marcheur sur plus proches voisins met un nombre de pas pair à revenir sur un site donné, et donc un nombre de pas impair à atteindre le site voisin.

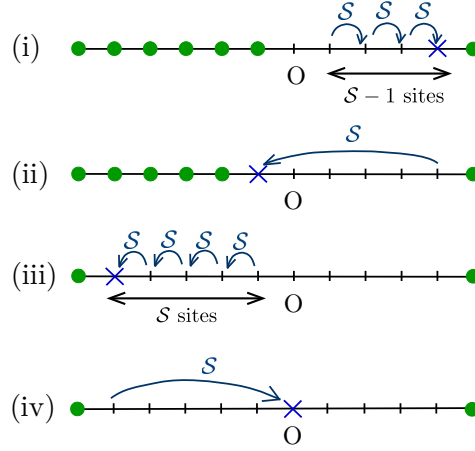


FIGURE 5.7 – Classe des trajectoires optimales sur lesquelles le marcheur aléatoire affamé reste le plus longtemps en vie tout en restant à portée de l’origine O de la marche, pour $\mathcal{S} = 5$. (i) Le marcheur vide un site d’un côté (ici à droite) de l’origine tous les $\mathcal{S}$ pas jusqu’à avoir creusé le désert le plus large qu’il puisse traverser, donc de taille $\mathcal{S}$. (ii) Le marcheur traverse ce désert. (iii) Phase symétrique de la phase (i), où le marcheur continue de creuser le désert vers la gauche jusqu’à être à une distance $\mathcal{S}$ de l’origine. (iv) Il traverse la partie gauche du désert pour rejoindre l’origine. Une telle excursion dure $\mathcal{R}^\dagger$ pas (voir Eq. (5.51)).

trajectoires optimales²⁴ pour revenir à l’origine à l’issue de la phase (iv), qui vaut

$$\mathcal{R}^\dagger = \begin{cases} 2\mathcal{S}^2 - 3\mathcal{S} + 4 & \text{si } \mathcal{S} \text{ est pair} \\ 2\mathcal{S}^2 - \mathcal{S} + 1 & \text{si } \mathcal{S} \text{ est impair} \end{cases} \quad (5.51)$$

On retrouve bien l’ordre de grandeur $\mathcal{R}^\dagger \sim 2\mathcal{S}^2$ estimé précédemment.

Finalement, pour un temps de régénération plus court que $\mathcal{R}^\dagger$, le marcheur aléatoire affamé a une probabilité non nulle de manger sur un site où la nourriture s’est régénérée, puisqu’il peut en particulier atteindre l’origine une fois que la nourriture s’y est régénérée. En revanche, pour un temps de régénération plus long que $\mathcal{R}^\dagger$, il n’existe aucune trajectoire permettant au marcheur de revenir sur un site où la régénération a eu lieu, le marcheur étant soit mort avant la régénération, soit trop éloigné du site régénéré pour pouvoir y revenir sans mourir. Dans ce cas, les propriétés de la marche sont exactement les mêmes qu’en l’absence de régénération. On en déduit que le temps de vie ne converge pas progressivement vers sa valeur asymptotique, obtenue en l’absence de régénération, mais l’atteint dès $\mathcal{R} = \mathcal{R}^\dagger + 1$.

La régénération des ressources a donc différents degrés d’efficacité en fonction de la capacité de jeûne $\mathcal{S}$ du marcheur, qui correspondent aux trois régimes de comportement du marcheur mis en évidence (voir figure 5.8). Lorsque sa capacité de jeûne est trop petite, le marcheur est mortel

24. Il n’existe pas une unique trajectoire optimale, puisque les phases (i) et (iii) n’imposent à la trajectoire que la contrainte de manger tous les $\mathcal{S}$ pas (ou $\mathcal{S} - 1$ si $\mathcal{S}$ est pair) et ne donnent aucune prescription supplémentaire entre les visites successives de nouveaux sites.

et la régénération est inefficace dans le sens où elle ne permet pas d'augmenter le temps de vie du marcheur par rapport à une situation sans régénération. Dans un régime intermédiaire, le marcheur est mortel mais son espérance de vie augmente par rapport au cas sans régénération, la régénération est donc efficace. Enfin, lorsque la capacité de jeûne du marcheur est suffisamment grande, il devient immortel grâce à la régénération qui est alors super efficace.

5.3.2 Extension : régénération probabiliste en dimension quelconque

Le cas unidimensionnel avec régénération déterministe ayant une portée limitée pour décrire une situation écologique, nous étendons maintenant l'approche développée dans la sous-section précédente dans deux directions :

- (i) on suppose tout d'abord que la régénération n'est plus déterministe mais probabiliste,
- (ii) on étend ces considérations au cas où le marcheur se déplace en dimension plus élevée.

5.3.2.1 Avec une régénération probabiliste

Supposons maintenant que la nourriture se régénère sur un site vide un temps τ après avoir été consommée, τ étant tiré à partir d'une distribution continue de probabilité, dont on note $[\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2] \subset \mathbb{R}^+$ le support. Cela signifie que pour un site vide donné, aucune régénération n'intervient avant un temps $\mathcal{R}_1$ et qu'après un temps $\mathcal{R}_2$, le site contient nécessairement à nouveau une unité de nourriture. Aucune hypothèse n'est faite sur la forme de la distribution. En particulier, $\mathcal{R}_1$ peut valoir 0 et $\mathcal{R}_2$ peut être infini.

Dans le cas d'une régénération déterministe, nous avons montré en 5.3.1.1 que le marcheur aléatoire affamé est immortel lorsqu'il est toujours certain d'atterrir sur un site contenant de la nourriture avant de mourir de faim, même sur les trajectoires les plus défavorables où il reste le plus longtemps possible sans manger avant de n'être plus entouré que par des sites contenant de la nourriture. Ce critère se traduit comme nous l'avons vu par $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}^*$ où $\mathcal{R}^*$ est donné par l'équation (5.44). Pour la valeur limite $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$, la régénération est telle que sur n'importe laquelle des trajectoires les plus défavorables (voir figure 5.4), le marcheur est certain d'arriver sur un site plein exactement au moment où il aurait dû mourir de faim. Si la régénération est plus rapide que cette valeur, le marcheur ne peut jamais mourir de faim. Ce raisonnement s'étend aisément au cas d'une régénération probabiliste. Dans ce cas, un site est nécessairement régénéré après un temps $\mathcal{R}_2$, donc le critère pour être dans le régime d'immortalité devient

$$\mathcal{R}_2 \leq \mathcal{R}^*. \quad (5.52)$$

On remarque que si la borne supérieure $\mathcal{R}_2$ du support de la distribution du temps de régénération est infinie, c'est-à-dire si la régénération peut mettre un temps arbitrairement long à se produire, alors le régime d'immortalité n'apparaît pas, le critère (5.52) n'étant jamais respecté²⁵.

En revanche, si $\mathcal{R}_2 > \mathcal{R}^*$, il existe des trajectoires qui conduisent à la mort, donc le marcheur est mortel comme explicité en 5.3.1.2 dans le cas d'une régénération déterministe. La méthode d'énumération présentée dans ce paragraphe peut encore être implémentée dans

25. Imaginons par exemple que deux sites voisins mettent très longtemps à se régénérer. Si le marcheur oscille entre ces deux sites, il mourra de faim avant que la nourriture n'ait réapparu sur ces deux sites, donc il est mortel.

le cas d'une régénération probabiliste. Dans ce cas néanmoins, la nourriture ne réapparaît pas après un temps fixé mais après un temps aléatoire, ce qui peut en pratique augmenter encore considérablement le nombre de configurations²⁶ et rendre cette méthode encore plus limitée. De plus, si le support de la distribution du temps de régénération n'est pas borné²⁷, la méthode d'énumération devient caduque car le nombre de configurations est infini.

En 5.3.1.3, nous avons par ailleurs montré qu'il existe une deuxième transition au sein du régime de mortalité entre un régime où le marcheur est mortel mais a une espérance de vie meilleure qu'en l'absence de régénération, observé pour $\mathcal{R}^* < \mathcal{R} \leq \mathcal{R}^\dagger$, et un régime où l'espérance de vie du marcheur est exactement la même qu'en l'absence de régénération, observé quand $\mathcal{R} > \mathcal{R}^\dagger$. Pour cela, nous avons établi que si à l'issue de la trajectoire optimale présentée sur la figure 5.7, la nourriture ne s'est pas régénérée sur le site où le marcheur se trouvait initialement, alors le marcheur est dans l'impossibilité complète d'atteindre un site où la nourriture s'est régénérée. Pour se trouver dans ce régime où la régénération est trop lente pour être efficace, il faut donc que la régénération mette au moins un temps $\mathcal{R}^\dagger$ à se produire, ce qui se traduit par le critère suivant lorsque la régénération est probabiliste

$$\mathcal{R}_1 > \mathcal{R}^\dagger. \quad (5.53)$$

Ces résultats peuvent être représentés à l'aide d'un diagramme de phase en fonction de la capacité de jeûne $\mathcal{S}$ du marcheur (voir figure 5.8). On constate que les transitions entre les trois

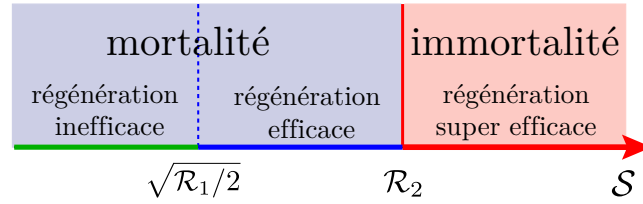


FIGURE 5.8 – Diagramme de phase du marcheur aléatoire affamé se déplaçant sur un réseau unidimensionnel en présence de régénération probabiliste. Si l'on prend $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}$, on obtient le diagramme de phase du système en présence de régénération déterministe. Il existe trois régimes correspondant à trois degrés différents d'efficacité de la régénération. Les deux valeurs des transitions entre ces régimes sont déduites des équations (5.52), (5.53), (5.44) et (5.51).

régimes données par les équations (5.52) et (5.53) sont complètement universelles par rapport à la forme de la distribution du temps de régénération, puisque seules les bornes de son support interviennent. Les détails de la dynamique de régénération n'ont d'impact que sur la valeur du temps de vie moyen dans le régime intermédiaire où le marcheur est mortel avec une espérance de vie augmentée, que nous n'étudierons pas ici.

26. Si la distribution du temps de régénération a un support large par rapport à un pas de temps.

27. C'est-à-dire si $\mathcal{R}_2$ est infini.

5.3.2.2 En dimension plus élevée

Toujours dans le cas d'une régénération probabiliste, nous considérons enfin un marcheur aléatoire affamé se déplaçant sur un réseau à deux dimensions ou plus. On remarque que l'ensemble des trajectoires les plus défavorables déterminées à une dimension²⁸ est inclus dans ce même ensemble pour un marcheur qui se déplace en dimension plus élevée. Le critère d'immortalité du marcheur

$$\mathcal{R}_2 \leq \mathcal{R}^* \quad (5.54)$$

est donc toujours valable, quelle que soit la dimension de l'espace. De plus, dans le régime de mortalité, qui émerge au contraire lorsque $\mathcal{R}_2 > \mathcal{R}^*$, la méthode d'énumération reste toujours valide en principe, son implémentation étant bien sûr d'autant plus compliquée que la dimension est élevée²⁹.

En revanche, en dimensions 2 et plus, il n'existe pas de régime où la régénération devient inefficace. La caractéristique spécifique de la dimension un est l'obligation pour le marcheur de traverser le désert pour aller chercher la nourriture régénérée. En dimension plus élevée, quelle que soit la valeur du temps de régénération d'un site, on peut au contraire toujours construire des trajectoires qui permettent au marcheur de vivre suffisamment longtemps sans mourir tout en étant capable de retourner sur un site où la nourriture s'est régénérée. En effet, le marcheur peut contourner le désert au lieu de le traverser comme à une dimension, il lui suffit pour cela de suivre une boucle suffisamment grande qui le ramène à un site précédemment visité après sa régénération. Ainsi, la régénération, même si elle est infiniment lente, a toujours un impact sur le temps de vie moyen du marcheur.

En dimension plus élevée, il existe finalement toujours les deux régimes d'immortalité et de mortalité du marcheur, séparés par une transition qui est indépendante de la dimension, en plus d'être indépendante de la forme de la distribution du temps de régénération (voir figure 5.9). Dans le régime de mortalité, l'espérance de vie du marcheur est toujours plus grande qu'en l'absence de régénération. En fonction de la valeur de la capacité de jeûne, la régénération est donc soit efficace dans le régime de mortalité, soit super efficace dans le régime d'immortalité.

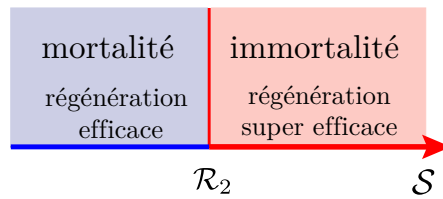


FIGURE 5.9 – Diagramme de phase du marcheur aléatoire affamé se déplaçant sur un réseau en dimension deux ou plus, en présence de régénération probabiliste. Il n'existe dans ce cas plus que les deux régimes de mortalité et d'immortalité. La transition est donnée par les équations (5.54) et (5.44).

28. Qui sont donc nécessairement rectilignes.

29. A chaque pas, le marcheur choisit entre $2d$ directions, d étant la dimension de l'espace, ce qui augmente le nombre de formes possibles de désert à taille de désert fixée.

5.3.3 Conclusion

La régénération des ressources a des effets variés sur les propriétés de survie d'un marcheur aléatoire affamé. En effet, nous avons montré que trois régimes peuvent apparaître

- (i) un régime où la régénération est super efficace, qui se traduit par un temps de vie infini du marcheur (le marcheur est immortel),
- (ii) un régime où la régénération est efficace puisqu'elle augmente le temps de vie moyen du marcheur par rapport à la situation sans régénération, sans pour autant qu'il soit infini,
- (iii) un régime où la régénération est inefficace puisqu'elle est trop lente, et où le temps de vie moyen du marcheur est égal à celui en l'absence de régénération.

Ces deux premiers régimes existent pour toute dimension spatiale, alors que le troisième n'apparaît qu'à une dimension. Les transitions entre ces régimes sont universelles par rapport aux détails de la régénération, puisqu'elles ne dépendent que des bornes du support de la distribution du temps de régénération.

La transition qui sépare le régime d'immortalité du régime de mortalité est abrupte, faisant passer la probabilité de mourir de zéro à un de manière discontinue. Quelle que soit la dynamique de la régénération et la dimension de déplacement du marcheur, celui-ci est soit certain de mourir, soit certain de ne jamais mourir. Il n'existe donc pas de marcheur aléatoire affamé qui possède une probabilité de mourir intermédiaire entre zéro et un.

5.4 Modèle d'exploitation de parcelles de nourriture

5.4.1 Introduction

5.4.1.1 Contexte théorique

Nous abordons maintenant une question en apparence disjointe du problème du marcheur aléatoire affamé, mais qui s'y ramène en fait naturellement comme nous allons le voir. Les résultats de cette section sont préliminaires et n'ont pas encore fait l'objet d'un travail publié. Nous considérons une question de longue date dans la théorie des stratégies optimales de recherche de nourriture³⁰ [Pyke 1977] pour un animal qui vit dans un environnement où la nourriture est distribuée en parcelles³¹. Lorsqu'il se trouve dans une parcelle, il épuise progressivement la nourriture s'y trouvant. Il peut changer de parcelle, mais cette opération lui prend un certain temps, pendant lequel il ne mange pas. Doit-il changer de parcelle pour maximiser la quantité de nourriture qu'il aura collectée au bout d'un certain temps, et le cas échéant, quand ? Quel critère doit-il choisir pour décider de quitter une parcelle ?

Ce problème a été traité pour la première fois d'un point de vue théorique par Charnov dans [Charnov 1976]. Il considère le cas d'un animal qui épuise de manière continue et uniforme, à un taux déterministe qui diminue avec le temps, la parcelle dans laquelle il se trouve (voir figure 5.10(a)). Il suppose également que l'animal possède une connaissance complète de

30. "Optimal foraging theory" en anglais.

31. "Patches" en anglais.

son environnement, c'est-à-dire qu'il sait exactement quelle quantité de nourriture il extraira de chacune des parcelles, et la variation de cette quantité au cours du temps. Arrivant dans une nouvelle parcelle, son taux d'extraction de nourriture est supérieur au taux moyen qu'il obtiendrait en se déplaçant d'une parcelle à une autre, puisqu'il ne récolte pas de nourriture pendant les phases de déplacement. Mais au fur et à mesure qu'il séjourne dans une parcelle, le taux d'extraction de nourriture diminue progressivement³² jusqu'à retomber au niveau du taux moyen d'extraction de nourriture comprenant les phases de déplacement. Le critère d'optimalité de la récolte de nourriture dans ce modèle, connu sous le nom de théorème de la valeur marginale, consiste à quitter la parcelle à ce moment précis. Ce modèle a l'avantage notoire d'être très simple et de produire un critère lui aussi formulé de manière simple. Cependant, il correspond à une description très idéalisée d'un animal, qui ne possède vraisemblablement ni connaissance exhaustive de son environnement, ni faculté intellectuelle suffisante pour calculer des taux moyens d'extraction de nourriture, ainsi que du processus d'épuisement d'une parcelle, qui n'est ni continu, ni uniforme, ni déterministe.

Cette étude a été étendue par de nombreux auteurs pour pallier partiellement ces restrictions (entre autres [Oaten 1977, Iwasa 1981, McNair 1983, Green 1984, Nishimura 1992]). D'autres critères pour quitter une parcelle ont par exemple été considérés et observés. Les plus populaires semblent être celui du "temps d'abandon"³³ [Charnov 1973, Krebs 1974], où l'organisme quitte la parcelle dès qu'il reste un certain temps sans trouver de nourriture, et celui du temps constant passé dans une parcelle, mais les cas où l'organisme quitte la parcelle après avoir trouvé un nombre fixé de cibles, ou lorsqu'il estime que la qualité de la parcelle n'est plus suffisamment bonne ont été considérés. Quel que soit le niveau de complexité des modèles étudiés, le principal élément manquant de ces travaux semble être l'absence de prise en compte du déplacement de l'animal dans la parcelle et de son impact sur les ressources.

Il se trouve qu'un autre aspect très exploré de la théorie de la recherche optimale de nourriture, complètement décorrélé des modèles d'exploitation de parcelles de nourriture, concerne les stratégies de recherche d'une cible unique (voir figure 5.10(b)), majoritairement étudiées par l'intermédiaire du temps de premier passage par une cible. Cette observable a été étudiée dans le cadre de nombreux modèles de recherche aléatoire, introduits pour décrire diverses sortes de recherches dans la nature à différentes échelles (marches de Lévy [Viswanathan 2011], marches intermittentes [Bénichou 2011], recherches composites [Plank 2008],...), comme nous l'avons vu en introduction et dans le chapitre 2. Ces modèles donnent une description explicite du mouvement du chercheur, et pourraient être utilisés de manière avantageuse pour décrire la recherche de nourriture, qui ferait office de cibles multiples, par un animal dans une parcelle. Pour cela, il serait essentiel de tenir compte de l'épuisement des ressources au cours du temps et donc de la disparition des cibles à mesure que le chercheur les trouve. Cependant, le cas où il existe plusieurs cibles qui disparaissent une fois trouvées par le marcheur n'a reçu que très peu d'attention jusqu'à présent³⁴.

32. Selon une fonction déterministe qui dépend de chaque parcelle.

33. "Give-up time" en anglais.

34. Le temps de couverture étudié dans le chapitre 2 constitue cependant une exception notable à ce constat.

Nous allons ici rassembler ces deux grandes problématiques en considérant un nouveau modèle d'exploitation de parcelles de ressources dans lequel le déplacement de l'animal est pris en compte explicitement et modélisé par une marche aléatoire³⁵. Le couplage entre ce déplacement et l'épuisement des ressources dans une parcelle, qui apparaît de manière naturelle, est au centre de ce modèle (voir figure 5.10). Nous verrons que la description explicite du mouvement du marcheur permet de quantifier de manière fine sa consommation de ressources et d'élaborer des stratégies claires et simples pour savoir quand quitter une parcelle, uniquement liées à l'exploitation de la parcelle actuelle et ne reposant donc pas sur une connaissance supposée de la qualité de toutes les parcelles de l'environnement.

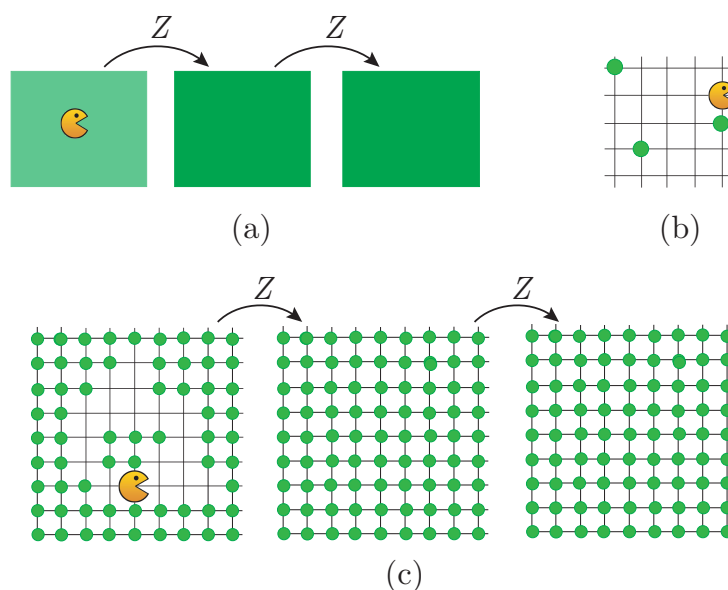


FIGURE 5.10 – (a) Modèle traditionnel d'exploration d'un environnement où les ressources sont regroupées en parcelles. Un organisme épuise une parcelle uniformément à un rythme déterminé *a priori*, et la quitte pour en rejoindre une autre quand son exploitation n'est plus suffisamment profitable. Le déplacement de l'organisme dans la parcelle et l'impact sur l'épuisement des ressources qui en découle sont négligés. (b) Modèle usuel de recherche aléatoire de cibles. Un chercheur, dont le but est de trouver les cibles vertes, réalise une marche aléatoire sur réseau. Les cibles sont généralement en nombre limité et elles ne disparaissent pas lorsqu'elles ont été découvertes. (c) Modèle d'exploration aléatoire de parcelles présenté ici. Ce modèle combine les deux aspects précédents, de sorte que l'épuisement des ressources des parcelles est corrélé explicitement au déplacement de l'organisme, modélisé par une marche aléatoire.

5.4.1.2 Définition du modèle

Pour cela, nous considérons qu'un organisme exploite séquentiellement des parcelles, modélisées chacune par un réseau infini³⁶ sur lequel il réalise une marche aléatoire simple et dont chaque site contient une unité de nourriture que l'organisme consomme lorsqu'il visite ce site

35. Nous avons déjà mentionné dans les chapitres précédents que ce type de modélisation du mouvement des animaux est courant.

36. Ou de très grande taille, c'est-à-dire pour lequel le nombre typique de sites distincts visités par le marcheur au moment de quitter la parcelle est petit devant le nombre total de sites du réseau.

pour la première fois. Le déplacement aléatoire du marcheur dans la parcelle entraîne une baisse progressive de la disponibilité de la nourriture dans cette parcelle et donc un épuisement des ressources qui n'est ni donné *a priori*, ni continu, ni uniforme spatialement à l'intérieur de la parcelle. Lorsque le marcheur considère que l'exploitation de sa parcelle actuelle n'est plus suffisamment profitable, selon un critère que nous préciserons plus tard, il la quitte pour en rejoindre une nouvelle en un temps fixé³⁷ Z (voir figure 5.10(c)). Au temps t , le marcheur aura exploré un nombre aléatoire de parcelles M_t , passé un temps T_i aléatoire dans chaque parcelle i et consommé une quantité aléatoire N_i de nourriture, corrélée au temps T_i .

Pour quantifier l'efficacité de l'exploitation de ces parcelles, nous étudions la quantité de nourriture C_t collectée par le marcheur au bout d'un temps d'observation t fixé, qui dépend explicitement de son déplacement à l'intérieur des parcelles. Au-delà d'un intérêt intrinsèque pour l'écologie, cette question relève également des problèmes d'exploration-exploitation, qui sont mis en jeu dès qu'un compromis apparaît entre rester dans son état actuel, qui peut ne plus être profitable au bout d'un certain temps, et changer d'état, qui consomme du temps ou de l'énergie mais peut s'avérer profitable [Gueudré 2014]. Ces problématiques émergent dans des contextes variés comme l'économie, la dynamique de l'évolution ou l'innovation technologique [Cohen 2007].

Nous déterminerons tout d'abord analytiquement des expressions générales de la moyenne et la variance ainsi que de la distribution complète en transformée de Laplace de la quantité totale C_t de nourriture collectée en fonction de la statistique de la quantité de nourriture trouvée dans une parcelle et du temps que le marcheur y reste. Ces expressions sont valables quel que soit le critère que l'organisme choisit pour décider de quitter une parcelle.

Ensuite, pour particulariser ces résultats généraux, nous déterminerons explicitement la quantité totale de nourriture collectée au temps t dans le cas où le critère pour quitter une parcelle est celui du temps d'abandon, défini précédemment, c'est-à-dire le cas où le marcheur quitte une parcelle lorsque le temps qui s'est écoulé depuis la dernière découverte de nourriture atteint un temps fixé $\mathcal{S}$. On reconnaît le modèle du marcheur aléatoire affamé, où la "mort" du marcheur correspond ici à l'instant où il quitte la parcelle de nourriture. Nous traiterons de manière exacte le cas de parcelles unidimensionnelles et numériquement celui de parcelles bidimensionnelles, et nous examinerons l'impact de la valeur du temps d'abandon $\mathcal{S}$ sur l'efficacité de l'exploitation de cet environnement parcellaire par l'organisme. Nous étudierons également deux autres critères pour quitter une parcelle, où le marcheur part après un temps fixé passé dans la parcelle ou après un temps aléatoire distribué exponentiellement. Nous verrons enfin que notre approche englobe de plus le cas où la nourriture est répartie de manière aléatoire dans chaque parcelle et non plus uniformément sur chaque site du réseau.

5.4.2 Statistique de la quantité totale de nourriture collectée dans le cas général

Supposons tout d'abord que le temps T_i passé dans une parcelle i et la quantité de nourriture N_i qui en est retirée obéissent à des statistiques quelconques (qui sont néanmoins nécessairement

37. Nous le prenons déterministe par simplicité, mais notre formalisme peut facilement s'étendre au cas d'un temps de transit entre parcelles aléatoire.

corrélées). Au bout d'un temps d'observation t , la quantité totale C_t de nourriture collectée est la somme de ce qui a été collecté dans chacune des M_t parcelles explorées

$$C_t = N_1 + \dots + N_{M_t}. \quad (5.55)$$

Quant au temps d'observation fixé, il impose une contrainte sur les temps T_i

$$T_1 + \dots + T_{M_t} + (M_t - 1)Z = t, \quad (5.56)$$

impliquant que les temps passés dans les différentes parcelles ne sont pas indépendants les uns des autres. La quantité totale de nourriture C_t est donc une somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires corrélées.

Nous allons montrer que la distribution de C_t peut s'exprimer en fonction de la loi jointe des variables (N_i, T_i) . Remarquons que les couples (N_i, T_i) sont identiquement distribués, exception faite du dernier couple (N_{M_t}, T_{M_t}) ³⁸. Cependant, dans la limite des grands temps d'observation t , le nombre M_t de parcelles visitées est grand et on peut donc oublier la dernière parcelle puisque la quantité de nourriture N_{M_t} consommée dans cette parcelle est négligeable par rapport à la quantité totale de nourriture C_t .

Nous commencerons par déterminer la statistique de la quantité totale C_t de nourriture collectée au temps t en fonction de celles du temps T passé dans une parcelle et de la quantité N d'unités de nourriture qui y sont collectées. Dans un deuxième temps, nous spécifierons les statistiques de T et N en choisissant le critère qu'adopte le marcheur pour quitter une parcelle, ce qui nous permettra de déterminer la statistique de C_t explicitement.

5.4.2.1 Approche naïve sans corrélations

La première approche que l'on est tenté d'adopter pour résoudre ce problème est de supposer que les statistiques des N_i et celle de M_t sont indépendantes³⁹. On montre dans l'annexe M qu'une telle hypothèse permet d'obtenir la moyenne et la variance suivantes pour la quantité totale C_t de nourriture collectée au temps d'observation t dans la limite de grand temps

$$\langle C_t \rangle \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \langle N \rangle \frac{t}{\langle T \rangle + Z} \quad (5.57)$$

et

$$\text{Var}(C_t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{\text{Var}(T) \langle N \rangle^2}{(\langle T \rangle + Z)^3} + \frac{\text{Var}(N)}{\langle T \rangle + Z} \right) t. \quad (5.58)$$

La valeur moyenne de la quantité de nourriture totale collectée obtenue ici correspond à l'estimation grossière que l'on aurait pu faire de cette quantité en disant qu'elle vaut la quantité moyenne $\langle N \rangle$ de nourriture collectée par parcelle multipliée par le nombre moyen $\langle M_t \rangle$ de parcelles visitées, ce nombre étant donné comme le rapport entre le temps t et le temps moyen qui s'écoule entre deux visites consécutives de parcelles

$$\langle M_t \rangle \sim \frac{t}{\langle T \rangle + Z}. \quad (5.59)$$

38. Connaissant les temps $T_1, \dots, T_{M_t-1}$, le temps T_{M_t} passé dans la dernière parcelle est fixé.

39. Ce qui revient à oublier la contrainte (5.56), qui a un impact indirect sur les N_i .

Pour évaluer la qualité de cette approche naïve, nous réalisons des simulations numériques présentées dans l'annexe M en spécifiant, de manière anticipée, le critère qu'adopte le marcheur pour quitter une parcelle, qui fixe en particulier les statistiques de N et T . En pratique, cette approche naïve donne un bon accord avec les simulations numériques pour $\langle C_t \rangle$ mais surestime notablement $\text{Var}(C_t)$. Pour obtenir une description correcte de la statistique de C_t , il faut donc prendre en compte les corrélations entre les N_i et M_t .

5.4.2.2 Distribution de la quantité totale de nourriture collectée dans le cas général

Revenons maintenant au cadre général où le critère adopté par le marcheur pour quitter une parcelle n'est pas encore spécifié, et où les statistiques du temps passé dans une parcelle et de la quantité de nourriture collectée dans cette parcelle ne sont donc pas encore fixées. Pour prendre en compte les corrélations entre les N_i et M_t , qui ne peuvent pas être négligées comme nous venons de le voir, nous adaptons une approche exposée dans [Godrèche 2001] qui se focalise sur une somme du même type que la somme (5.56) et étudie en particulier la statistique de la dernière variable T_i de la somme, définie par $T_i < t < T_{i+1}$. Dans notre langage d'exploration de parcelles, il s'agit de l'instant auquel le marcheur arrive dans sa dernière parcelle. Ici, au lieu d'étudier l'impact de la contrainte (5.56) sur les propriétés des variables T_i elles-mêmes, nous nous intéressons aux variables N_i qui sont corrélées aux variables T_i .

On définit t_i l'instant auquel le marcheur arrive dans la parcelle $i + 1$ avec $i \in \llbracket 1, M_t \rrbracket$, et $\tau_i \equiv t_{i+1} - t_i$ l'intervalle de temps entre les arrivées dans deux parcelles successives (voir figure 5.11). Le temps τ_i représente la durée de la phase i de l'exploration de l'environnement, constituée de l'exploitation de la parcelle i et du transit vers la parcelle suivante, qui vaut ainsi $\tau_i = T_i + Z$. Comme illustré à la figure 5.11, la dernière phase est interrompue avant son terme, et ainsi que mentionné plus haut, on négligera la quantité de nourriture collectée dans cette dernière phase⁴⁰, c'est-à-dire qu'en posant $M_t = m + 1$, on supposera que

$$C_t \simeq N_1 + \dots + N_m. \quad (5.60)$$

On calcule la fonction caractéristique de C_t , définie par

$$\begin{aligned} \langle e^{-pC_t} \rangle &= \sum_{m=0}^{+\infty} \int_{(\mathbb{R}^+)^m} dy_1 \dots dy_m \sum_{n_1, \dots, n_m} e^{-p(n_1 + \dots + n_m)} \\ &\quad \times \Pr(\tau_1 = y_1, \dots, \tau_m = y_m, N_1 = n_1, \dots, N_m = n_m, M_t = m + 1), \end{aligned} \quad (5.61)$$

où $\langle . \rangle$ désigne une moyenne sur les réalisations de la marche aléatoire⁴¹.

L'intérêt de cette fonction caractéristique est de permettre en particulier de générer tous les moments de C_t en la développant à petit p . Elle fait intervenir la probabilité jointe de toutes les valeurs des N_i , des T_i et de M_t . En s'inspirant de [Godrèche 2001], on peut écrire cette probabilité jointe de la manière suivante

$$\Pr(\{\tau_i = y_i\}, \{N_i = n_i\}, M_t = m + 1) = \left\langle I(t_m < t < t_{m+1}) \prod_{i=1}^m \delta(\tau_i - y_i) \delta_{N_i, n_i} \right\rangle, \quad (5.62)$$

40. Qui est effectivement négligeable par rapport à la quantité de nourriture totale collectée à grand temps t , le nombre de parcelles M_t devenant très grand.

41. Donc ici sur toutes les valeurs possibles de M_t et des T_i et N_i .

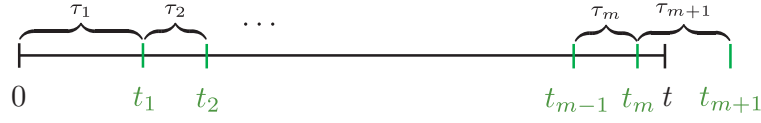


FIGURE 5.11 – Le marcheur a visité $m + 1$ parcelles au temps d'observation t , la dernière visite étant interrompue au temps t . On note t_i l'instant où le marcheur achève la i^{e} phase, une phase étant constituée d'une visite de parcelle et d'un trajet jusqu'à une nouvelle parcelle. Il s'agit donc également de l'instant auquel il arrive à la parcelle $i + 1$. On note τ_i la durée de la phase i .

où la fonction indicatrice $I(t_m < t < t_{m+1})$ vaut 1 quand la condition en argument est réalisée, c'est-à-dire lorsque la phase $m + 1$ commence avant le temps t mais s'achève après, et 0 sinon.

Prenons la transformée de Laplace de cette probabilité jointe par rapport au temps et aux variables $y_1, \dots, y_m$, donnée par définition par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{t,y_1,\dots,y_m} \Pr(\{\tau_i = y_i\}, \{N_i = n_i\}, M_t = m + 1) \\ \equiv \int_{(\mathbb{R}^+)^{m+1}} dt dy_1 \dots dy_m e^{-(st + u_1 y_1 + \dots + u_m y_m)} \Pr(\{\tau_i = y_i\}, \{N_i = n_i\}, M_t = m) \end{aligned} \quad (5.63)$$

où s est la variable conjuguée de t , et u_i celle de y_i . En utilisant l'expression (5.62) de la probabilité jointe, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{t,y_1,\dots,y_m} \Pr(\{\tau_i = y_i\}, \{N_i = n_i\}, M_t = m) &= \left\langle \int_0^{+\infty} dt e^{-st} I(t_m < t < t_{m+1}) \prod_{i=1}^m e^{-u_i \tau_i} \delta_{N_i, n_i} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{e^{-st_m} - e^{-st_{m+1}}}{s} \prod_{i=1}^m e^{-u_i \tau_i} \delta_{N_i, n_i} \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.64)$$

En écrivant t_m et t_{m+1} en fonction des τ_i

$$t_m = t_m + \tau_m = \tau_1 + \dots + \tau_m, \quad (5.65)$$

il vient

$$\mathcal{L}_{t,y_1,\dots,y_m} \Pr(\{\tau_i = y_i\}, \{N_i = n_i\}, M_t = m) = \left\langle \frac{1 - e^{-s\tau_{m+1}}}{s} \prod_{i=1}^m e^{-(u_i + s)\tau_i} \delta_{N_i, n_i} \right\rangle. \quad (5.66)$$

Les durées τ_i des différentes phases sont indépendantes, d'où

$$\mathcal{L}_{t,y_1,\dots,y_m} \Pr(\{\tau_i = y_i\}, \{N_i = n_i\}, M_t = m) = \frac{1 - \langle e^{-s\tau} \rangle}{s} \prod_{i=1}^m \left\langle e^{-(u_i + s)\tau_i} \delta_{N_i, n_i} \right\rangle. \quad (5.67)$$

Si on note $g(y, n)$ la probabilité jointe relative à une parcelle, définie comme la probabilité que le marcheur ait passé un temps $\tau = y$ dans la parcelle et y ait collecté $N = n$ unités de nourriture, et $\hat{g}(s, n)$ sa transformée de Laplace par rapport à la variable y , on peut réécrire

$$\left\langle e^{-(u_i + s)\tau_i} \delta_{N_i, n_i} \right\rangle = \int_0^{+\infty} dy'_i \sum_{n'_i=0}^{+\infty} g(y'_i, n'_i) e^{-(u_i + s)y'_i} \delta_{n'_i, n_i} = \hat{g}(s + u_i, n_i), \quad (5.68)$$

d'où

$$\mathcal{L}_{t,y_1,\dots,y_m} \Pr(\{\tau_i = y_i\}, \{N_i = n_i\}, M_t = m) = \frac{1 - \langle e^{-s\tau} \rangle}{s} \prod_{i=1}^m \hat{g}(s + u_i, n_i). \quad (5.69)$$

En remarquant que

$$\mathcal{L}_t(e^{-at} f(t)) \equiv \int_0^{+\infty} dt e^{-st} e^{-at} f(t) = \hat{f}(s + a), \quad (5.70)$$

on obtient l'expression de la transformée de Laplace temporelle de la probabilité jointe de toutes les valeurs des N_i , des T_i et de M_t , après transformations de Laplace inverses par rapport aux variables u_i ⁴²

$$\mathcal{L}_t \Pr(\{\tau_i = y_i\}, \{N_i = n_i\}, M_t = m) = \frac{1 - \langle e^{-s\tau} \rangle}{s} \prod_{i=1}^m e^{-sy_i} g(y_i, n_i). \quad (5.71)$$

Finalement, en prenant la transformée de Laplace temporelle de l'équation (5.61), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t \langle e^{-pC_t} \rangle &= \frac{1 - \langle e^{-s\tau} \rangle}{s} \sum_{m=0}^{+\infty} \prod_{i=1}^m \int_0^{+\infty} dy_i \sum_{n_i=0}^{+\infty} e^{-sy_i - pn_i} g(y_i, n_i) \\ &= \frac{1 - \langle e^{-s\tau} \rangle}{s} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} dy \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-sy - pn} g(y, n) \right)^m \end{aligned} \quad (5.72)$$

et on aboutit à l'expression de la transformée de Laplace temporelle de la fonction caractéristique de la quantité totale de nourriture C_t collectée au temps t

$$\boxed{\mathcal{L}_t \langle e^{-pC_t} \rangle = \frac{1 - \langle e^{-s\tau} \rangle}{s(1 - \langle e^{-s\tau - pN} \rangle)}} \quad (5.73)$$

Cette expression est très générale. En effet, elle est valable quel que soit le critère que le marcheur adopte pour choisir de quitter une parcelle, les statistiques de τ et N n'étant donc pas fixées, et quelle que soit la dimension spatiale des parcelles.

5.4.2.3 Expression des moments de la quantité totale de nourriture collectée à grand temps

En développant la fonction caractéristique de C_t à petit p , on peut déduire ses moments

$$\langle e^{-pC_t} \rangle \underset{p \rightarrow 0}{\sim} 1 - p \langle C_t \rangle + \frac{p^2}{2} \langle C_t^2 \rangle + o(p^2) \quad (5.74)$$

ainsi que leur transformée de Laplace

$$\mathcal{L}_t \langle e^{-pC_t} \rangle \underset{p \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{s} - p \mathcal{L}_t \langle C_t \rangle + \frac{p^2}{2} \mathcal{L}_t \langle C_t^2 \rangle + o(p^2). \quad (5.75)$$

42. Dont on rappelle qu'elles sont les variables conjuguées des variables y_i .

En développant par ailleurs l'équation (5.73) à petit p , on obtient

$$\mathcal{L}_t \langle e^{-pC_t} \rangle \underset{p \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{s} \left[1 - p \frac{\langle Ne^{-s\tau} \rangle}{1 - \langle e^{-s\tau} \rangle} + \frac{p^2}{2} \left(\frac{\langle N^2 e^{-s\tau} \rangle}{1 - \langle e^{-s\tau} \rangle} + \frac{2\langle Ne^{-s\tau} \rangle^2}{(1 - \langle e^{-s\tau} \rangle)^2} \right) \right] + o(p^2) \quad (5.76)$$

d'où la transformée de Laplace des deux premiers moments de C_t ⁴³

$$\mathcal{L}_t \langle C_t \rangle = \frac{1}{s} \frac{\langle Ne^{-s\tau} \rangle}{1 - \langle e^{-s\tau} \rangle} \quad (5.77)$$

$$\mathcal{L}_t \langle C_t^2 \rangle = \frac{1}{s} \left(\frac{\langle N^2 e^{-s\tau} \rangle}{1 - \langle e^{-s\tau} \rangle} + \frac{2\langle Ne^{-s\tau} \rangle^2}{(1 - \langle e^{-s\tau} \rangle)^2} \right). \quad (5.78)$$

Par ailleurs, en développant ces expressions à petite variable de Laplace s , on obtient le comportement dominant des deux premiers moments de C_t à grand temps t . On a ainsi

$$\mathcal{L}_t \langle C_t \rangle \underset{s \rightarrow 0}{\sim} \frac{\langle N \rangle}{s^2 \langle \tau \rangle} + \frac{1}{s} \left(\frac{\langle \tau^2 \rangle \langle N \rangle}{2\langle \tau \rangle^2} - \frac{\langle N\tau \rangle}{\langle \tau \rangle} \right) + o\left(\frac{1}{s}\right) \quad (5.79)$$

et

$$\mathcal{L}_t \langle C_t^2 \rangle \underset{s \rightarrow 0}{\sim} \frac{2\langle N \rangle^2}{s^3 \langle \tau \rangle^2} + \frac{1}{s^2} \left[\frac{2\langle N \rangle}{\langle \tau \rangle} \left(\frac{\langle \tau^2 \rangle \langle N \rangle}{\langle \tau \rangle^2} - 2\frac{\langle N\tau \rangle}{\langle \tau \rangle} \right) + \frac{\langle N^2 \rangle}{\langle \tau \rangle} \right] + o\left(\frac{1}{s^2}\right). \quad (5.80)$$

En prenant la transformée de Laplace inverse de ces deux développements, on aboutit donc finalement au développement à grand temps t des deux premiers moments de la quantité totale de nourriture C_t collectée, en fonction des statistiques du temps τ entre arrivées dans deux parcelles successives et de la quantité de nourriture N collectée dans une parcelle

$$\langle C_t \rangle \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\langle N \rangle}{\langle \tau \rangle} t + \left(\frac{\langle \tau^2 \rangle \langle N \rangle}{2\langle \tau \rangle^2} - \frac{\langle N\tau \rangle}{\langle \tau \rangle} \right) + o(1) \quad (5.81)$$

et

$$\langle C_t^2 \rangle \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2\langle N \rangle^2}{\langle \tau \rangle^2} t^2 + \left[\frac{2\langle N \rangle}{\langle \tau \rangle} \left(\frac{\langle \tau^2 \rangle \langle N \rangle}{\langle \tau \rangle^2} - 2\frac{\langle N\tau \rangle}{\langle \tau \rangle} \right) + \frac{\langle N^2 \rangle}{\langle \tau \rangle} \right] t + o(t). \quad (5.82)$$

En rassemblant les deux équations (5.81) et (5.82), et en remplaçant τ par $T + Z$, on obtient finalement le comportement dominant à grand temps de la moyenne et la variance de la quantité totale de nourriture collectée au temps t

$$\langle C_t \rangle \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\langle N \rangle}{\langle T \rangle + Z} t \quad (5.83)$$

$$\text{Var}(C_t) \equiv \langle C_t^2 \rangle - \langle C_t \rangle^2 \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \left[\frac{\langle N \rangle^2 \text{Var}(T)}{(\langle T \rangle + Z)^3} + \frac{\text{Var}(N)}{\langle T \rangle + Z} - \frac{2\langle N \rangle \text{Cov}(N, T)}{(\langle T \rangle + Z)^2} \right] t \quad (5.84)$$

La covariance $\text{Cov}(N, T)$ des variables N et T est définie par

$$\text{Cov}(N, T) = \langle NT \rangle - \langle N \rangle \langle T \rangle. \quad (5.85)$$

43. En poursuivant le développement aux ordres supérieurs en p , on peut obtenir autant de moments de C_t que l'on souhaite.

On constate d'après l'équation (5.83) que le comportement dominant de la quantité moyenne de nourriture collectée à grand temps est identique à celui trouvé au paragraphe 5.4.2.1 en supposant que la quantité de nourriture collectée dans chaque parcelle est indépendante du temps passé dans cette parcelle et donc du nombre total de parcelles visitées au temps t . En revanche, dès l'ordre sous-dominant en t donné à l'équation (5.81), les corrélations interviennent sous la forme du produit $\langle NT \rangle$.

En ce qui concerne la variance, on voit que l'expression (5.84) obtenue diffère de la variance obtenue avec l'hypothèse naïve d'absence de corrélations entre T_i et N_i d'un terme proportionnel à leur covariance. Celle-ci est nulle dans le cas où N et T sont indépendantes, permettant donc de retrouver dans ce cas l'expression du paragraphe 5.4.2.1. Ces corrélations interviennent pour la variance de C_t dès l'ordre dominant en t . Il est par conséquent primordial de les prendre en compte pour décrire correctement la statistique de la quantité totale de nourriture collectée.

Les résultats présentés ici sont généraux et s'appliquent à tout type de statistiques de N et T . Nous allons maintenant spécifier ces statistiques en choisissant un critère particulier pour quitter une parcelle, qui conditionne les statistiques du temps passé dans la parcelle et de la quantité de nourriture qui y est collectée. Nous obtiendrons ainsi des expressions explicites des moments de la quantité totale de nourriture C_t collectée au temps t pour ce critère particulier.

5.4.3 Cas particulier du temps d'abandon pour des parcelles unidimensionnelles

Pour déterminer la statistique explicite de la quantité totale de nourriture C_t collectée, nous devons spécifier les statistiques de T et N , ce que nous faisons en choisissant le critère selon lequel le marcheur décide de quitter une parcelle. Nous utilisons un critère abondamment discuté dans la littérature [Krebs 1974, Iwasa 1981, McNair 1983, Green 1984], le critère du temps d'abandon, selon lequel le marcheur quitte sa parcelle après $\mathcal{S}$ étapes consécutives infructueuses pour trouver de la nourriture. Il s'agit d'un critère naturel puisque tous les animaux, y compris ceux dont les capacités de raisonnement et de mémoire sont très limitées, ont une connaissance instinctive du temps depuis lequel ils n'ont pas mangé. Nous considérons ici le cas de parcelles unidimensionnelles⁴⁴.

Pour un temps d'abandon $\mathcal{S}$, l'exploitation d'une parcelle se fait exactement selon la trajectoire d'un marcheur aléatoire affamé possédant une capacité de jeûne $\mathcal{S}$ se déplaçant sur un réseau unidimensionnel, qui est le cas traité dans [Bénichou 2014a]. Néanmoins, pour exploiter la formule (5.73), nous avons besoin de la double transformée de Laplace $\langle e^{-s\tau - pN} \rangle$ de la distribution de (τ, N) , où l'on rappelle que $\tau = T + Z$ avec T la durée de l'exploitation de la parcelle (ou le temps de vie du marcheur aléatoire affamé correspondant), Z le temps de transit entre parcelles, et N la quantité de nourriture collectée par le marcheur dans la parcelle. La probabilité jointe de (T, N) n'ayant pas été obtenue dans [Bénichou 2014a], nous allons maintenant la déterminer explicitement⁴⁵.

44. Nous aborderons le cas plus réaliste de parcelles bidimensionnelles plus tard.

45. Et en déduire très simplement celle de (τ, N) .

5.4.3.1 Probabilité jointe du temps passé dans une parcelle et de la quantité de nourriture collectée

Par définition, la double transformée de Laplace de la distribution jointe de (T, N) est

$$\langle e^{-sT-pN} \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n) e^{-pn} \int_0^{+\infty} dt e^{-st} P(T=t|N=n), \quad (5.86)$$

où $P(T=t|N=n)$ est la probabilité que l'exploitation de la parcelle dure un temps t sachant qu'au moment de quitter la parcelle, le marcheur aura consommé n unités de nourriture. On note

$$\langle e^{-sT}|N=n \rangle \equiv \int_0^{+\infty} dt e^{-st} P(T=t|N=n) \quad (5.87)$$

la valeur moyenne de e^{-sT} sachant qu'au moment de quitter la parcelle, le marcheur aura consommé n unités de nourriture.

Pour calculer cette quantité, nous adaptons l'approche présentée dans [Bénichou 2014a]. A une dimension, le marcheur aléatoire affamé se trouve à tout instant dans un désert⁴⁶ de longueur k avec k le nombre de sites distincts qu'il a visités depuis le début de sa marche. Lorsqu'il atteint l'une des deux extrémités du désert, il trouve un nouveau site, consomme la nourriture qui s'y trouve, et peut de nouveau se déplacer au maximum $\mathcal{S}$ pas de temps sans visiter un nouveau site, c'est-à-dire sans atteindre les bords du désert. Un marcheur aléatoire affamé qui a visité n sites distincts au moment de sa mort a donc un temps de vie T que l'on peut écrire

$$T = R_1 + \dots + R_n + \mathcal{S} \quad (5.88)$$

où $R_k < \mathcal{S}$ est la durée de son excursion non mortelle à l'intérieur d'un désert comprenant k sites contigus, c'est-à-dire le temps qui s'écoule entre la découverte du $k^{\text{ème}}$ et du $k+1^{\text{ème}}$ sites. La dernière excursion dans le désert, qui dure un temps $\mathcal{S}$, est fatale au marcheur. Le temps R_k correspond au temps de sortie d'un intervalle de longueur $(k+1)a$, avec a le pas du réseau sur lequel se déplace le marcheur, partant d'une distance a d'une des extrémités de l'intervalle⁴⁷, conditionné par la survie du marcheur. D'après l'équation (5.88) et puisque les temps R_k sont indépendants, on a

$$\langle e^{-sT}|N=n \rangle = \left(\prod_{k=1}^n \langle e^{-sR_k} \rangle \right) e^{-s\mathcal{S}} \quad (5.89)$$

où $\langle e^{-sR_k} \rangle$ est donné dans [Bénichou 2014a] par

$$\langle e^{-sR_k} \rangle = \frac{\int_0^{\mathcal{S}} dt e^{-st} F_k(t)}{\int_0^{\mathcal{S}} dt F_k(t)}. \quad (5.90)$$

La grandeur $F_k(t)$ est la densité de première sortie de l'intervalle de longueur $(k+1)a$ partant d'une distance a de l'un des bords pour un marcheur aléatoire sans contrainte⁴⁸, dont l'expression

⁴⁶. Zone dépourvue de nourriture.

⁴⁷. Le marcheur vient de découvrir un nouveau site, repoussant le bord du désert d'un site et s'en trouvant donc à une distance a .

⁴⁸. Le dénominateur de l'expression (5.90) permet d'obtenir ce temps de sortie pour un marcheur aléatoire affamé, en conditionnant par sa survie.

vaut dans la limite d'espace continu (voir [Redner 2001])

$$F_k(t) = \frac{4\pi D}{(ka)^2} \sum_{j=0}^{+\infty} (2j+1) \sin \frac{(2j+1)\pi}{k} \exp \left[- \left(\frac{(2j+1)\pi}{ka} \right)^2 Dt \right]. \quad (5.91)$$

On en déduit

$$\langle e^{-sT} | N = n \rangle = e^{-sS} \prod_{k=1}^n \frac{\int_0^S dt e^{-st} F_k(t)}{\int_0^S dt F_k(t)}. \quad (5.92)$$

Un calcul inspiré des méthodes développées dans [Bénichou 2014a], détaillé dans l'annexe N, permet de déterminer $\langle e^{-sT-pN} \rangle$ à partir des équations (5.86), (5.87), (5.91) et (5.92). En se rappelant que $\tau = T+Z$, on obtient finalement la double transformée de Laplace de la probabilité jointe de (τ, N)

$$\begin{aligned} \langle e^{-s\tau-pN} \rangle = e^{-s(Z+S)} \int_0^{+\infty} d\theta Q(\theta) e^{-p\pi\theta\sqrt{\frac{S}{2}}} \\ \times \exp \left[4 \int_0^\theta \frac{du}{u} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1 - e^{-\frac{(2j+1)^2}{u^2} - sS}}{1 + \frac{u^2 s S}{(2j+1)^2}} - \left(1 - e^{-\frac{(2j+1)^2}{u^2}} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (5.93)$$

où la distribution du nombre de sites distincts visités au moment de la mort est donnée pour la variable renormalisée $\theta \equiv na/(\pi\sqrt{DS})$ par

$$Q(\theta) = \frac{4}{\theta} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\frac{(2j+1)^2}{\theta^2}} \exp \left[-2 \sum_{k=0}^{+\infty} E_1 \left(\frac{(2k+1)^2}{\theta^2} \right) \right], \quad (5.94)$$

E_1 désignant la fonction exponentielle intégrale, définie par $E_1(x) = \int_1^{+\infty} dt e^{-xt}/t$. La connaissance de cette double transformée de Laplace $\langle e^{-s\tau-pN} \rangle$ permet en particulier de générer tous les moments de T , N et des produits de ces deux grandeurs (voir annexe O pour ceux qui seront utiles par la suite).

5.4.3.2 Expression asymptotique des moments de la quantité totale de nourriture collectée

L'expression de la transformée de Laplace de la probabilité jointe de N et τ donnée à l'équation (5.93) permet de déduire de l'équation (5.73) une expression explicite de la transformée de Laplace temporelle de la fonction caractéristique de la quantité totale de nourriture C_t collectée au temps t par un marcheur explorant des parcelles à une dimension et ayant adopté le critère du temps d'abandon. On peut en particulier en extraire le développement à grand temps d'abandon $\mathcal{S}$ ⁴⁹ du terme dominant en t de la moyenne et la variance de C_t (voir Annexe O pour la définition

49. En restant dans un domaine où $t \gg \mathcal{S}$ afin que le marcheur visite un grand nombre de parcelles.

des constantes K_1 à K_5)

$$\frac{\langle C_t \rangle}{t} \underset{S \gg 1}{\sim} \frac{K_1 \sqrt{S}}{K_2 S + Z} \quad (5.95)$$

$$\frac{\text{Var}(C_t)}{t} \underset{S \gg 1}{\sim} \left[\frac{K_3 S^3}{(K_2 S + Z)^3} + \frac{K_4 S}{K_2 S + Z} - \frac{K_5 S^2}{(K_2 S + Z)^2} \right] \quad (5.96)$$

Comparons ces expressions (5.95) et (5.96) aux résultats de simulations numériques (voir figure 5.12). On constate que la prise en compte des corrélations entre le temps passé dans une

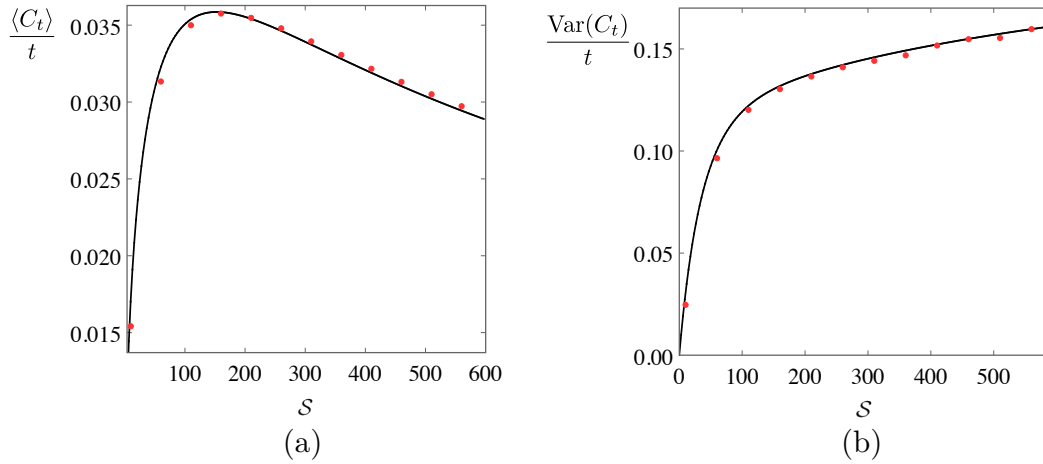


FIGURE 5.12 – Moyenne (a) et variance (b) de la quantité totale C_t de nourriture collectée au temps t , renormalisées par t . Les points rouges sont les simulations numériques et les lignes noires correspondent aux expressions (5.95) et (5.96) qui donnent le comportement dominant de la moyenne et la variance de C_t/t à grands t et S . On a pris un temps d'observation grand $t = 500\,000$ pas, et un temps de transit entre parcelles $Z = 500$ pas.

parcelle et la quantité de nourriture qui y est collectée permet une bonne description de ces résultats de simulations numériques, contrairement à l'approche naïve où ces corrélations sont négligées, présentée dans l'annexe M, qui ne rend absolument pas compte de la variance réelle de la quantité totale de nourriture collectée (voir figure M.1(b)).

Il apparaît par ailleurs que la moyenne de la quantité totale C_t de nourriture collectée au temps t possède un maximum en fonction du temps d'abandon choisi par le marcheur. Ce maximum correspond à un compromis entre l'exploration d'un grand nombre de parcelles, qui est profitable car à chaque nouvelle parcelle, le marcheur commence par trouver beaucoup de nourriture, mais fait perdre du temps à cause du transit entre parcelles, et l'exploitation plus longue des parcelles, qui finit par devenir moins profitable lorsque le marcheur a consommé beaucoup de nourriture et repasse donc fréquemment par des sites dépourvus de nourriture, mais qui lui évite de perdre du temps à transiter vers une nouvelle parcelle. Ce genre de compromis est typique des situations d'exploration-exploitation évoquées précédemment : faut-il explorer beaucoup de parcelles ou en exploiter un petit nombre ?

Il est possible de comprendre la présence de ce maximum à l'aide d'arguments qualitatifs. On peut tout d'abord déterminer les comportements limites de la quantité totale moyenne de nourriture collectée. En effet, si le temps d'abandon choisi par le marcheur est très grand ($\mathcal{S} > t$), celui-ci ne visite qu'une parcelle et y réalise une marche aléatoire simple sur plus proches voisins. Au temps t , il aura donc en moyenne collecté une quantité de nourriture proportionnelle à $\sqrt{t}$. En revanche, si le marcheur a un temps d'abandon très faible ($\mathcal{S} = 1$), il collecte quelques unités de nourriture par parcelle en un temps très court et passe le plus clair de son temps à transiter vers une nouvelle parcelle. Il aura dans ce cas consommé au temps t une quantité de nourriture proportionnelle à t , de l'ordre de quelques t/Z . On comprend donc qu'à grand temps, l'exploration de nouvelles parcelles permet au marcheur d'améliorer sensiblement la quantité de nourriture qu'il collecte par rapport à l'exploitation d'une unique parcelle.

Toutefois, on se doute qu'un marcheur très impatient qui quitte sa parcelle dès une tentative manquée pour trouver de la nourriture ($\mathcal{S} = 1$) perd beaucoup trop de temps à transiter vers une nouvelle parcelle et qu'il lui serait plus profitable de rester un peu plus longtemps dans sa parcelle avant de la quitter, ce qui explique la présence d'une maximisation de $\langle C_t \rangle$ par rapport à $\mathcal{S}$.

Il est aisé de trouver la valeur du temps d'abandon $\mathcal{S}$ produisant le maximum de $\langle C_t \rangle$. En dérivant l'expression (5.95) par rapport à $\mathcal{S}$, on obtient

$$\mathcal{S}_{\text{opt}} = \frac{Z}{K_2}. \quad (5.97)$$

Etant donné que pour un temps d'abandon $\mathcal{S}$, il a été montré dans [Bénichou 2014a] que la durée moyenne de l'exploitation de la parcelle est $\langle T \rangle \sim K_2 \mathcal{S}$, ce critère d'optimalité peut se reformuler de la manière suivante

$$\boxed{\langle T \rangle_{\text{opt}} = Z} \quad (5.98)$$

Ainsi, le meilleur choix que peut faire le marcheur pour maximiser la quantité de nourriture qu'il aura collectée au temps t est de passer en moyenne autant de temps à exploiter une parcelle qu'à se déplacer vers la parcelle suivante. En pratique, l'expression théorique que nous avons obtenue pour la moyenne de C_t reproduit bien les simulations numériques et en particulier la position du maximum.

5.4.4 Robustesse de la maximisation de la quantité de nourriture collectée

Nous avons obtenu des expressions générales pour la distribution de la quantité totale C_t de nourriture collectée au temps t (voir équation (5.73)) ainsi que pour sa moyenne et sa variance (équations (5.83) et (5.84)), qui font intervenir les statistiques du temps T passé dans une parcelle et de la quantité N de nourriture qui y est collectée. Nous avons ensuite explicité ces grandeurs pour une statistique spécifique de T et de N , correspondant au cas où le marcheur utilise un critère de type temps d'abandon pour quitter sa parcelle⁵⁰, pour des parcelles unidimensionnelles où chaque site contient initialement une unité de nourriture. Nous allons maintenant envisager des cas différents, où nous changerons successivement la répartition de la nourriture dans les parcelles, puis le critère adopté par le marcheur pour

50. Il la quitte lorsqu'il reste $\mathcal{S}$ étapes consécutives sans trouver de nourriture.

quitter une parcelle et enfin la dimension spatiale des parcelles, afin de tester la robustesse de notre résultat sur l'optimisation de la quantité de nourriture collectée, qui dicte au marcheur de passer autant de temps à exploiter les parcelles qu'à partir en explorer de nouvelles.

Penchons-nous tout d'abord sur le cas où la nourriture n'est pas présente sur chaque site du réseau unidimensionnel qui constitue une parcelle, mais où elle y est distribuée de manière aléatoire. Supposons que la distribution de la nourriture soit poissonnienne, c'est-à-dire qu'il y ait de la nourriture sur un site avec une probabilité ρ et pas de nourriture sinon. L'exploration d'une parcelle est toujours équivalente au parcours d'un marcheur aléatoire affamé, mais qui ne trouve plus nécessairement de la nourriture lorsqu'il arrive sur un nouveau site. On peut montrer⁵¹ que dans la limite de grand temps d'abandon $\mathcal{S}$, le temps moyen $\langle T \rangle_\rho$ passé dans la parcelle n'est pas modifié par rapport au cas où il y a de la nourriture sur chaque site, alors que la quantité moyenne $\langle N \rangle_\rho$ de nourriture collectée au moment de quitter la parcelle est proportionnelle à la densité de nourriture

$$\langle T \rangle_\rho \underset{\mathcal{S} \rightarrow +\infty}{\sim} \langle T \rangle \quad (5.99)$$

$$\langle N \rangle_\rho \underset{\mathcal{S} \rightarrow +\infty}{\sim} \rho \langle N \rangle. \quad (5.100)$$

On peut comprendre intuitivement ces deux résultats. En présence de cette distribution poissonnienne de la nourriture, deux unités de nourriture sont typiquement espacées d'une distance $1/\rho$. En se déplaçant, le marcheur creuse donc toujours un désert connexe, mais dont la taille s'incrémente d'environ $1/\rho$ à chaque rencontre avec un site portant de la nourriture. Lorsque $\mathcal{S}$ est grand⁵², le marcheur échoue à trouver de la nourriture pendant un temps $\mathcal{S}$ (et quitte donc la parcelle) non pas car l'unité de nourriture la plus proche est trop éloignée de lui, mais car il s'aventure trop profondément dans le (grand) désert qu'il a creusé. La valeur de ρ n'a donc dans ce régime pas d'impact sur le temps moyen passé dans la parcelle à grand $\mathcal{S}$. Le désert au moment de quitter la parcelle a donc en moyenne la même taille que lorsqu'il y a de la nourriture sur tous les sites. En revanche, chaque site de ce désert n'ayant porté de la nourriture qu'avec une probabilité ρ , le nombre moyen d'unités de nourriture consommées au moment de quitter la parcelle est lui-même multiplié par ρ .

La moyenne de la quantité totale de nourriture collectée au temps t est donc donnée par l'expression suivante, dans la limite $1 \ll \mathcal{S} \ll t$

$$\boxed{\frac{\langle C_t \rangle_\rho}{t} \sim \frac{\rho K_1 \sqrt{\mathcal{S}}}{K_2 \mathcal{S} + Z} = \rho \frac{\langle C_t \rangle}{t}} \quad (5.101)$$

Dans ce cas, le choix optimal du temps d'abandon permettant de maximiser la quantité de nourriture que le marcheur aura collectée au temps t consiste par conséquent encore à passer autant de temps à exploiter les parcelles qu'à partir en explorer de nouvelles (voir figure 5.13(a)).

Considérons maintenant deux choix différents pour le critère qu'adopte le marcheur pour quitter sa parcelle. Supposons tout d'abord que le marcheur décide de passer toujours le même

51. Ceci est l'objet d'un travail en cours.

52. Typiquement $\mathcal{S} \gg 1/(D\rho^2)$.

temps déterministe $\mathcal{T}$ dans les parcelles, où il réalise donc une marche aléatoire sans contrainte. Il collecte en moyenne dans chaque parcelle un nombre $\langle N \rangle_{\text{determ}}$ d'unités de nourritures donné par (voir par exemple [Hughes 1996])

$$\langle N \rangle_{\text{determ}} \sim \sqrt{\frac{8\mathcal{T}}{\pi}}. \quad (5.102)$$

Dans ce cas, la quantité moyenne totale $\langle C_t \rangle$ de nourriture collectée au temps t vaut

$$\frac{\langle C_t \rangle_{\text{determ}}}{t} \sim \frac{\sqrt{\frac{8\mathcal{T}}{\pi}}}{T + Z} t \quad (5.103)$$

qui se minimise à nouveau pour $T_{\text{opt}} = Z$.

Si l'on considère un troisième critère pour quitter une parcelle, qui consiste au contraire à partir de manière complètement arbitraire, au bout d'un temps distribué exponentiellement avec une fréquence λ , indépendamment du parcours du marcheur dans la parcelle. Dans ce cas, le temps moyen passé dans la parcelle est simplement

$$\langle T \rangle_{\text{exp}} = \frac{1}{\lambda} \quad (5.104)$$

et il a été montré dans [Yuste 2013] que la quantité moyenne de nourriture collectée dans une parcelle au moment de la quitter⁵³ vaut

$$\langle N \rangle_{\text{exp}} \sim \sqrt{\coth \frac{\lambda}{2}} \frac{\lambda}{2}. \quad (5.105)$$

On en déduit que dans ce cas, la quantité moyenne totale de nourriture collectée au temps t est donnée par (voir figure 5.13(a))

$$\frac{\langle C_t \rangle_{\text{exp}}}{t} \sim \sqrt{\coth \frac{\lambda}{2}} \frac{1}{Z + \lambda^{-1}}. \quad (5.106)$$

Cette fonction est maximisée pour une valeur de λ qui est solution de l'équation implicite suivante

$$\lambda + \lambda^2 Z - 2 \operatorname{sh} \lambda = 0. \quad (5.107)$$

Lorsque Z est grand, λ est petit⁵⁴ et on trouve dans ce régime

$$\lambda_{\text{opt}} \simeq \frac{1}{Z}, \quad (5.108)$$

c'est-à-dire $\langle T \rangle_{\text{opt}} = Z$. A nouveau, le marcheur a intérêt à rester dans chaque parcelle en moyenne un temps égal au temps de transit entre parcelles.

53. C'est-à-dire le nombre moyen de sites distincts visités par un marcheur aléatoire évanescent, qui meurt au bout d'un temps exponentiel.

54. Si le temps de transit entre parcelles est très long, le marcheur a intérêt à rester longtemps dans chaque parcelle.

Au-delà de cette similarité dans la stratégie optimale maximisant la collecte de nourriture au temps t , on remarque que la moyenne de la quantité totale de nourriture collectée prend exactement la même forme pour ces trois critères de départ

$$\frac{\langle C_t \rangle}{t} \sim K \frac{\sqrt{\langle T \rangle}}{\langle T \rangle + Z}. \quad (5.109)$$

La constante K vaut respectivement pour ces trois critères

$$K = \begin{cases} \frac{K_1}{\sqrt{K_2}} \simeq 1.61 & \text{pour le critère du temps d'abandon} \\ \sqrt{\frac{8}{\pi}} \simeq 1.60 & \text{pour le critère du temps déterministe} \\ \sqrt{2} \simeq 1.41 & \text{pour le critère du temps exponentiel} \end{cases} \quad (5.110)$$

où les constantes K_1 et K_2 sont données en annexe O. Les préfacteurs de cette loi (5.109) sont eux-mêmes très proches, voire quasiment identiques pour les deux premiers critères, comme on peut le voir sur la figure 5.13(a).

Enfin, il est intéressant de considérer le cas de parcelles en dimension deux, qui est plus réaliste d'un point de vue écologique que celui des parcelles unidimensionnelles. Comme expliqué en introduction, le modèle du marcheur aléatoire affamé se déplaçant en dimension deux est complexe à étudier et n'a pour l'instant donné lieu à aucun résultat exact autre que la borne déterminée au paragraphe 5.2. Nous nous limiterons donc ici à des simulations numériques.

On peut cependant, comme pour les parcelles unidimensionnelles, anticiper qualitativement la présence d'un maximum dans la moyenne de la quantité totale de nourriture collectée en prévoyant son comportement dominant dans les cas limites. Si le marcheur est très impatient ($\mathcal{S} = 1$), il aura collecté au temps t une quantité de nourriture qui est toujours linéaire en t . En revanche, si le marcheur ne quitte jamais sa parcelle ($\mathcal{S}$ grand), il aura collecté au temps t une quantité de nourriture proportionnelle à $t/\ln t$. Comme pour la dimension un, la possibilité d'explorer d'autres parcelles permet au marcheur d'augmenter la quantité de nourriture qu'il collecte par rapport à l'exploitation d'une unique parcelle dans la limite de grand temps. A nouveau toutefois, le marcheur n'a pas intérêt à quitter sa parcelle immédiatement après y être arrivé, afin de ne pas perdre trop de temps en transit entre parcelles quand l'exploitation de sa parcelle actuelle est encore très profitable. Ce constat traduit toujours le même compromis entre exploitation et exploration des parcelles.

On observe par conséquent encore une fois un maximum pour la quantité totale moyenne de nourriture collectée au temps t (voir figure 5.13(b)). Toutefois, en présence de parcelles bidimensionnelles, la stratégie optimale ne consiste plus à passer autant de temps dans les parcelles qu'entre les parcelles, mais favorise les phases d'exploitation des parcelles. En effet, à deux dimensions, la marche aléatoire est moins redondante qu'à une dimension et l'exploitation aléatoire de la parcelle est donc rentable plus longtemps qu'à une dimension.

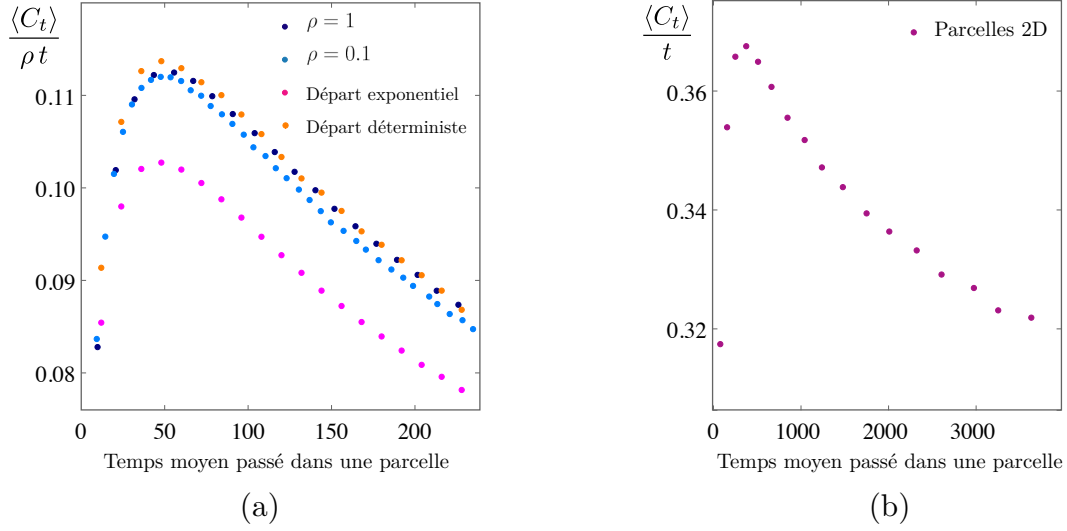


FIGURE 5.13 – Robustesse de la maximisation de la quantité totale de nourriture collectée au temps t face à la variation de plusieurs facteurs, pour un temps de transit entre parcelles $Z = 50$ et un temps d’observation $t = 10000$. Le résultat pour un marcheur exploitant des parcelles unidimensionnelles contenant de la nourriture sur chaque site et quittant sa parcelle selon un critère de temps d’abandon fixé est représenté en (a) en bleu foncé. Le cas où la nourriture est répartie de manière inhomogène, selon une distribution de Poisson de densité ρ , est représenté en bleu clair en (a) (la quantité de nourriture collectée est renormalisée par le temps et la densité ρ de nourriture). Les cas où le marcheur quitte sa parcelle après un temps déterministe ou exponentiel, indépendamment de sa trajectoire dans la parcelle, sont représentés en (a) respectivement en orange et en rose. Enfin, le cas de parcelles bidimensionnelles est représenté en (b).

5.5 Conclusion

Nous avons dans ce chapitre étendu les premiers travaux réalisés dans le cadre du modèle du marcheur aléatoire affamé défini dans [Bénichou 2014a] dans plusieurs directions qui relèvent toutes de questions naturelles en écologie. Combien de temps un organisme se déplaçant aléatoirement dans un environnement bidimensionnel en épuisant les ressources survit-il ? Comment la dynamique de la régénération des ressources modifie-t-elle les propriétés de survie de cet organisme ? Comment un organisme peut-il exploiter au mieux un environnement où les ressources sont regroupées en parcelles ?

En ce qui concerne la première question, l’extension du modèle du marcheur aléatoire affamé à deux dimensions est ardue à cause des fortes corrélations entre la trajectoire du marcheur et son temps de survie. Aucune méthode de résolution exacte de ce problème, même asymptotique comme à une dimension, ne semble envisageable. Ici, nous avons proposé une description très simplifiée de ce problème, de type champ moyen, où le désert creusé par le marcheur est supposé garder constamment une forme circulaire, s’agrandissant à chaque fois que le marcheur en rencontre le bord. Cette approximation circulaire fournit une borne inférieure du temps de vie du marcheur et du nombre de sites distincts visités puisqu’elle correspond au cas défavorable où

le marcheur est toujours loin de la nourriture, car dans un désert le plus compact possible (en réalité, les simulations numériques montrent que les déserts bidimensionnels ont typiquement des formes ramifiées, où le marcheur est plus près des ressources donc vit beaucoup plus longtemps).

Nous avons ensuite considéré le cas où les ressources ne disparaissent pas définitivement une fois consommées, mais peuvent se régénérer après un temps aléatoire de distribution arbitraire, et ce en toute dimension spatiale. Nous avons déterminé des classes de comportement du marcheur qui ne dépendent ni des détails de la dynamique de la régénération, ni de la dimension spatiale, mais seulement des valeurs de la capacité de jeûne du marcheur et des bornes du support de la distribution des temps de régénération⁵⁵. En particulier, nous avons montré qu'il existe deux régimes très contrastés où le marcheur survit avec probabilité 0 (régime de mortalité) ou avec probabilité 1 (régime d'immortalité). Il n'existe pas de régime intermédiaire où le marcheur survit avec une probabilité comprise strictement entre 0 et 1. Nous avons par ailleurs mis en évidence un troisième régime qui émerge à une dimension dans le régime de mortalité, où la trajectoire du marcheur n'est absolument plus influencée par la régénération, celle-ci devenant inefficace car trop lente.

Enfin, nous avons revisité le problème ancien de l'exploitation optimale d'un environnement où les ressources sont regroupées en parcelles, en tenant compte explicitement des corrélations qui existent entre la trajectoire du marcheur dans une parcelle, l'épuisement des ressources et donc l'évolution de la rentabilité de l'exploitation de cette parcelle. Nous avons déterminé la distribution de la quantité totale de nourriture collectée au temps t en transformée de Laplace pour tout type d'exploitation des parcelles en fonction de la statistique du temps passé dans une parcelle et de la quantité de nourriture collectée dans cette parcelle. Nous avons explicité cette quantité ainsi qu'en particulier sa moyenne et sa variance dans le cas où le marcheur décide d'abandonner sa parcelle (unidimensionnelle) après avoir passé un temps fixé sans trouver de nourriture, qui correspond au cas où la trajectoire dans une parcelle est exactement celle d'un marcheur aléatoire affamé.

Nous avons montré que la moyenne de la quantité totale de nourriture qu'il collecte est maximisée lorsqu'il passe en moyenne autant de temps à exploiter une parcelle qu'à transiter vers la parcelle suivante. Cette maximisation de l'efficacité du marcheur est robuste car elle reste identique lorsque la nourriture n'est pas distribuée de manière uniforme dans les parcelles et lorsque le marcheur adopte d'autres critères pour décider de quitter sa parcelle (au bout d'un temps fixé ou un temps aléatoire exponentiel). Par ailleurs, elle existe également lorsque les parcelles sont bidimensionnelles mais la stratégie correspondante consiste cette fois à passer plus de temps à exploiter les parcelles qu'à partir en explorer de nouvelles.

L'apparition d'une stratégie optimale pour exploiter un environnement en parcelles traduit un lien avec les problématiques d'exploration-exploitation dans lesquelles le marcheur est confronté à un dilemme entre exploiter une ressource connue ou explorer de nouvelles ressources. Dans notre cas, le marcheur a intérêt à rester dans sa parcelle assez longtemps pour éviter de perdre

55. C'est-à-dire du temps avant lequel aucune régénération n'intervient, et du temps après lequel la régénération a forcément eu lieu.

trop de temps à trouver d'autres parcelles, mais pas trop longtemps, afin que l'exploitation de sa parcelle actuelle reste profitable. Cette connexion avec les problèmes d'exploration-exploitation ouvre des perspectives d'applications de nos résultats au-delà du contexte de l'écologie.

Par ailleurs, sur un plan théorique, le processus d'exploration des parcelles que nous avons étudié ici peut être vu comme un processus de remise à zéro⁵⁶ où le marcheur revient aléatoirement dans son état initial, c'est-à-dire dans une parcelle vierge. Contrairement aux travaux de la littérature traitant de cette thématique, notre approche met en jeu des remises à zéro qui n'interviennent pas à des temps fixés *a priori*, mais qui sont engendrées par la trajectoire elle-même. Notre travail constitue donc un pas vers l'introduction d'une nouvelle classe de problèmes de remise à zéro où les temps entre ces événements sont corrélés à l'histoire du marcheur.

56. "Resetting process" en anglais.

Conclusion générale

Dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés à l'impact d'une contrainte géométrique, dynamique ou mixte sur quelques propriétés classiques des marches aléatoires. Dans les deux premiers chapitres, la contrainte géométrique prend la forme d'un confinement, partiel dans le premier et total dans le deuxième, puis la contrainte mixte étudiée dans le chapitre trois se manifeste par l'intermédiaire d'un confinement dont la position dépend du temps, et enfin, dans le chapitre quatre, nous avons considéré une contrainte exclusivement dynamique sous forme d'une obligation de visiter régulièrement des nouveaux sites.

Dans le premier chapitre, nous avons étudié l'influence d'un plan infini réfléchissant sur l'espace occupé par une marche brownienne bidimensionnelle, que nous avons quantifié grâce aux caractéristiques géométriques de son enveloppe convexe, définie comme le plus petit polygone convexe contenant toute la trajectoire.

En l'absence de confinement, le processus est isotrope, et devient anisotrope en présence du plan réfléchissant. Cette anisotropie introduit une dissymétrie entre les directions de propagation vers le plan et les directions de propagation qui s'éloignent du plan. En effet, dans les directions où le marcheur s'approche du plan réfléchissant, il est entravé par ce confinement et ressent donc un effet de réduction de son espace accessible qui l'empêche d'aller aussi loin dans cette direction qu'il ne l'aurait été sans confinement. En revanche, dans les directions où le marcheur s'éloigne du plan réfléchissant, il ressent une poussée effective exercée par ce confinement, qui manifeste un effet de répulsion effective de la trajectoire, lui permettant au contraire d'aller plus loin qu'en l'absence de confinement. Ces deux effets antagonistes du plan réfléchissant se combinent de telle sorte que le périmètre moyen de l'enveloppe convexe, qui est directement lié à la progression du marcheur dans chaque direction par la formule de Cauchy, possède la propriété singulière d'être une fonction non monotone de la distance initiale au confinement. En effet, nous avons démontré que cette observable admet un minimum par rapport à la distance initiale au plan réfléchissant. Cela signifie en particulier qu'à un instant d'observation fixé, il existe une distance initiale au plan optimale qui minimise le périmètre de l'enveloppe convexe. Par ailleurs, cette observable présente un comportement non analytique à faible distance initiale.

Nous avons montré que les deux effets antagonistes du confinement se répercutent également sur l'extension spatiale moyenne de la trajectoire dans une direction donnée, cette observable possédant les deux mêmes propriétés que le périmètre moyen de l'enveloppe convexe. Cette non monotonie et cette non analyticité sont d'autant plus surprenantes qu'elles n'apparaissent pas au niveau de l'extension moyenne d'une marche brownienne unidimensionnelle.

Outre ces résultats intrigants, nous avons étudié la longueur moyenne de la portion du confinement visitée par le marcheur en fonction de la distance initiale au plan réfléchissant, qui

décroît sans surprise vers zéro lorsque le marcheur part de plus en plus loin du confinement. Nous avons enfin considéré le problème annexe, utile pour l'évaluation numérique du périmètre moyen de l'enveloppe convexe, de la détermination de la probabilité de survie d'un marcheur brownien dans un secteur angulaire absorbant. Nous en avons obtenu une expression légère, adaptée à une étude asymptotique à petit temps.

Dans le deuxième chapitre, nous avons considéré une contrainte géométrique plus forte qu'un confinement partiel, en étudiant divers types de marches aléatoires en présence d'un confinement total. La famille d'observables discutée dans ce chapitre, celle des observables de couverture, est intrinsèquement liée à cette contrainte géométrique totale, puisqu'elle n'est définie qu'en volume fini. Nous avons posé la question du temps nécessaire à un marcheur aléatoire pour visiter tous les sites d'un domaine fermé, ou une partie d'entre eux. Cette problématique émerge dans le contexte des recherches exhaustives, que l'on rencontre en chimie, en biologie ou encore en robotique, où un certain nombre de cibles doivent être découvertes. Bien que pertinente dans des situations variées où le recours à des modèles plus élaborés que la marche aléatoire simple est souvent nécessaire, cette question n'a été que peu abordée, et exclusivement pour les marches browniennes. Nous nous sommes intéressés dans ce travail à des modèles classiques de marches aléatoires, comme les marches persistantes, les marches de Lévy et les marches intermittentes définies en introduction générale.

Nous avons tout d'abord déterminé le temps moyen de couverture d'un réseau unidimensionnel en conditions aux limites périodiques et réfléchissantes par une marche aléatoire persistante. Ceci constitue l'un des seuls résultats exacts valables à toute taille de système connus pour l'instant, et représente un premier pas vers l'étude de processus de recherche plus raffinés.

Nous avons par ailleurs mené une étude générale des temps de couverture complète, partielle et aléatoire pour des processus non compacts, c'est-à-dire non récurrents. Nous en avons déterminé la distribution asymptotique à grand volume, qui prend la forme d'une distribution de type Gumbel après renormalisation des variables, traduisant une connexion avec la statistique d'ordre. Nous avons montré que cette distribution est universelle par rapport au type de processus considéré et à la géométrie du volume confinant, ne dépendant que du nombre de sites restants à la fin de la recherche. La dépendance des temps de couverture complète, partielle et aléatoire dans le processus et la géométrie du domaine, qui existe bel et bien, est entièrement contenue dans leur renormalisation.

Enfin, nous avons déduit de leur distribution complète les premiers moments de ces observables. Nous avons mis en évidence la proportionnalité entre le temps moyen de couverture et le temps moyen global de premier passage par une cible, révélant un lien fort entre les recherches exhaustives et les recherches à une cible. Cela implique en particulier que pour les processus donnant lieu à une minimisation du temps moyen global de premier passage, le temps moyen de couverture peut également être minimisé. Les stratégies optimales de recherche à une cible et exhaustives sont donc identiques, ce qui prouve leur robustesse.

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes penchés sur une situation où la contrainte sur la marche aléatoire est à la fois géométrique et dynamique. Nous avons étudié un marcheur brownien évoluant dans une cage unidimensionnelle dont les bords se déplacent de manière balistique à des vitesses quelconques. En particulier, nous avons reformulé de manière imagée

comme suit le cas où la cage se contracte. Un berger veut récupérer son agneau parti vagabonder — de manière diffusive — à proximité d'un précipice. Celui-ci est apeuré par le berger et biaise donc légèrement son mouvement vers le précipice lorsque le berger tente de s'approcher de lui. Le berger se demande quelle vitesse de déplacement adopter pour maximiser ses chances d'attraper son agneau avant qu'il ne tombe dans le précipice. Il est en effet soumis à un dilemme : marcher vers l'agneau lui permet de s'en approcher mais risque également de le précipiter plus sûrement dans le ravin.

Nous avons résolu ce dilemme dans le cadre de notre problème de base, en calculant la probabilité conditionnelle de sortie du marcheur brownien par l'une des extrémités de la cage. Nous avons entre autres déterminé que suivant la distance initiale entre le berger et l'agneau et le degré de crainte de l'agneau, la stratégie optimale pour le berger peut consister à rester immobile, à courir le plus vite possible vers l'agneau, ou encore à marcher à une vitesse non triviale. Nous avons en effet démontré que dans certains cas, la probabilité conditionnelle de sortie présente un maximum ou un minimum, qui résulte de la compétition entre les deux aspects du dilemme du berger.

Enfin, dans le quatrième chapitre, nous nous sommes tournés vers une contrainte exclusivement dynamique, inédite dans la littérature des marches aléatoires. Nous avons considéré un marcheur aléatoire “affamé”, issu d'un modèle défini très récemment, qui meurt lorsqu'il ne découvre pas de nouveaux sites suffisamment régulièrement. Celui-ci se déplace sur un réseau contenant initialement une unité de nourriture par site, qu'il consomme entièrement et définitivement lorsqu'il visite pour la première fois un site, et meurt de faim lorsqu'il a échoué à trouver de la nourriture pendant un temps égal à sa capacité maximale de jeûne. Ce problème introduit un couplage non trivial entre la trajectoire du marcheur et son temps de vie, prenant une forme particulièrement complexe en dimension deux et plus.

Dépassant l'étude exacte menée dans le cas d'un réseau unidimensionnel, nous avons abordé le cas ardu de la dimension deux en proposant un modèle simplifié, où la zone dépourvue de nourriture creusée progressivement par le marcheur est supposée garder tout au long du processus une forme circulaire. Nous avons déterminé dans ce cadre la distribution asymptotique du nombre de sites distincts visités au moment de la mort du marcheur. Nous en avons en particulier extrait sa moyenne, ainsi que le temps de vie moyen du marcheur. Cette description champ moyen du modèle en dimension deux en donne une borne inférieure, et constitue le premier résultat analytique en dimension deux.

En nous inspirant de situations écologiques, naturellement décrites par ce modèle, nous avons ensuite introduit un processus de régénération des ressources et étudié son impact sur les propriétés de survie du marcheur aléatoire affamé. Nous avons mis en évidence l'existence de trois degrés différents d'efficacité de la régénération. En dimension supérieure ou égale à deux, deux régimes contrastés apparaissent. Si la régénération est suffisamment rapide, celle-ci, “super efficace”, rend le marcheur immortel, c'est-à-dire qu'il ne meurt sur aucune trajectoire. En revanche, si la régénération n'est pas suffisamment rapide, le marcheur est mortel, c'est-à-dire qu'il meurt avec probabilité un, comme dans le modèle de base. Dans ce régime, la régénération est néanmoins efficace, même si le marcheur reste mortel, car elle augmente son espérance de vie moyenne par rapport à la situation où les ressources disparaissent définitivement. A une dimension, il émerge un troisième régime, pour une cinétique de régénération très lente, où celle-

ci devient inefficace, n'ayant plus aucun impact sur le marcheur. Les transitions entre ces régimes sont universelles par rapport au détail de la statistique de régénération car elles ne dépendent que de la capacité de jeûne du marcheur et des bornes du support de la distribution des temps de régénération. La transition entre ces deux premiers régimes est par ailleurs indépendante de la dimension spatiale.

Enfin, nous avons discuté, à titre préliminaire, une problématique de longue date en écologie qui concerne l'optimisation de l'exploitation de parcelles de nourriture par un animal, modélisé par un marcheur aléatoire. Nous avons déterminé la statistique de la quantité totale de nourriture collectée par le marcheur à un temps d'observation fixé en fonction des statistiques du temps passé dans une parcelle et de la quantité de nourriture qui en est extraite. Pour particulariser ce résultat, nous avons fixé le critère selon lequel le marcheur décide de quitter sa parcelle, déterminant ainsi les statistiques du temps passé dans la parcelle et de la quantité de nourriture collectée. Nous avons adopté un critère naturel en écologie, selon lequel le marcheur quitte une parcelle après une phase de recherche infructueuse de nourriture dont la durée excède son temps d'abandon. Ce critère permet de décrire la marche dans une parcelle par celle d'un marcheur aléatoire affamé. Nous avons dans ce cas donné des expressions explicites de la quantité totale de nourriture collectée et en particulier de sa moyenne et sa variance. Sa moyenne, qui admet un maximum, traduit le compromis à trouver entre l'exploitation d'une parcelle et l'exploration de différentes parcelles. Cette optimisation, qui consiste à passer autant de temps à exploiter une parcelle qu'à voyager vers une nouvelle, est robuste par rapport à la distribution de nourriture dans une parcelle et au critère adopté par le marcheur pour quitter une parcelle. Elle existe également pour des parcelles en dimension deux, comme nous l'avons constaté numériquement, mais favorise les phases d'exploitation, plus rentables qu'en dimension un.

Parmi les extensions envisageables pour tous ces travaux, les plus intéressantes semblent être les suivantes. A l'issue du chapitre deux, les deux questions laissées en suspens, qui concernent d'une part l'impact des conditions aux limites, notamment réfléchissantes, sur la distribution du temps de couverture et d'autre part le devenir de notre approche pour les marches compactes, par exemple browniennes en dimension deux, apparaissent comme des interrogations légitimes et pertinentes. Par ailleurs, le modèle du marcheur affamé traité au chapitre quatre est un terrain très prometteur et quasiment vierge. Il génère de nombreuses questions, comme le traitement du problème réel¹ à deux dimensions ou en dimension supérieure, l'étude de l'impact de la répartition de la nourriture ou la détermination des observables à un temps quelconque, pas uniquement au moment de la mort. En outre, les liens entre notre modèle d'exploration de parcelles et les problèmes d'exploration-exploitation et de "resetting" ouvrent des perspectives d'applications de cette approche au-delà du champ de l'écologie.

Pour clore ce manuscrit, il est intéressant d'en donner une lecture transversale en soulevant quelques connexions possibles entre les différents problèmes considérés. La première émerge de la question suivante, dans la lignée du chapitre deux : comment quantifier la couverture d'un domaine fini par un marcheur aléatoire qui ne se déplace plus sur réseau mais continûment en

1. Par opposition à l'approche champ moyen que nous avons présentée ici.

volume ? En attribuant une taille finie au marcheur, on imagine le domaine se coloriant au fur et à mesure jusqu'à ne plus comporter qu'une petite fraction de volume non visitée. Cette première manière de quantifier la couverture continue d'un domaine peut être complétée d'une étude de la convergence de l'enveloppe convexe de la trajectoire du marcheur vers la forme du confinement, qui donne un critère alternatif pour évaluer l'instant auquel on considère que la couverture est atteinte.

La seconde connexion concerne le modèle d'exploration de parcelles. Imaginons un marcheur explorant des parcelles de taille finie, qui adopterait un critère pour décider de quitter une parcelle selon lequel une exploitation doit être interrompue après la collecte d'un nombre fixé de cibles, également utilisé par les écologistes. La statistique du temps passé dans une parcelle est alors exactement donnée par celle du temps de couverture partielle d'un domaine, qui serait néanmoins vraisemblablement unidimensionnel ou bidimensionnel, décrit par des conditions aux limites réfléchissantes et parcouru par un marcheur brownien. Cela légitime donc à nouveau les extensions possibles du chapitre deux mentionnées plus haut.

Publications

1. O. Bénichou, M. Chupeau, S. Redner, Role of depletion on the dynamics of a diffusing forager, ArXiv 1605.00892, soumis à J. Phys. A
2. M. Chupeau, O. Bénichou, S. Redner, *Universality classes of foraging with resource renewal*, **Phys. Rev. E**, 93, 032403 (2016)
3. M. Chupeau, O. Bénichou, R. Voituriez, *Cover times of random searches*, **Nature Physics**, 11, 844-847 (2015)
4. M. Chupeau, O. Bénichou, S. N. Majumdar, *Mean perimeter of the convex hull of a random walk in a semi-infinite medium*, **Phys. Rev. E**, 92, 022145 (2015)
5. M. Chupeau, O. Bénichou, S. N. Majumdar, *Convex hull of a Brownian motion in confinement*, **Phys. Rev. E**, 91, 050104 (2015)
6. M. Chupeau, O. Bénichou, S. Redner, *Optimal strategy to capture a skittish lamb wandering near a precipice*, **J. Stat. Mech.**, P06026 (2015)
7. M. Chupeau, O. Bénichou, S. N. Majumdar, *Survival probability of a Brownian motion in a planar wedge of arbitrary angle*, **Phys. Rev. E**, **91**, 032106 (2015)
8. M. Chupeau, O. Bénichou, R. Voituriez, *Mean cover time of one-dimensional persistent random walks*, **Phys. Rev. E**, 89 (2014)

Annexes

A Probabilités de survie à une dimension avec un point absorbant et un point réfléchissant

Nous déterminons ici la probabilité de survie d'un mouvement brownien unidimensionnel dans les deux situations suivantes (voir figure A.1) :

- (i) confiné entre un point réfléchissant et un point absorbant
- (ii) avec uniquement un point absorbant.



FIGURE A.1 – (a) Mouvement brownien partant d'une abscisse x avec un point absorbant en y et un point réfléchissant en $-d$. (b) Mouvement brownien partant de x en présence d'un point absorbant en y ($-d < y < x$), qui écrante les abscisses inférieures à y et en particulier le point réfléchissant placé en $-d$.

Commençons par calculer la probabilité de survie $S_d(t|x)$ au temps t pour un marcheur partant en x entre un point réfléchissant en $-d$ et un point absorbant en y (voir figure A.1(a)). Elle vérifie une équation de Fokker-Planck vers le passé

$$\frac{\partial S_d}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S_d}{\partial x^2} \quad (\text{A.1})$$

avec les conditions initiale et aux limites suivantes

$$S_d(0|x) = 1 \quad (\text{A.2})$$

$$S_d(t|y) = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\left. \frac{\partial S_d}{\partial x} \right|_{x=-d} = 0. \quad (\text{A.4})$$

On note $\hat{f}$ la transformée de Laplace de la fonction f , définie par

$$\hat{f}(p) = \int_0^{+\infty} dt e^{-pt} f(t). \quad (\text{A.5})$$

La transformée de Laplace du membre de gauche de l'équation (A.1) donne, en intégrant par parties,

$$\int_0^{+\infty} dt e^{-pt} \frac{\partial S_d}{\partial t} = \left[e^{-pt} S_d(t|x) \right]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} dt e^{-pt} S_d(t|x) = -1 + p \hat{S}_d \quad (\text{A.6})$$

et du membre de droite

$$D \int_0^{+\infty} dt e^{-pt} \frac{\partial^2 S_d}{\partial x^2} = D \frac{\partial^2 \hat{S}_d}{\partial x^2}, \quad (\text{A.7})$$

d'où

$$D \frac{\partial^2 \hat{S}_d}{\partial x^2} = p \hat{S}_d - 1. \quad (\text{A.8})$$

Cette équation admet une solution de la forme

$$\hat{S}_d(p|x) = \frac{1}{p} + A(p)e^{\sqrt{\frac{p}{D}}x} + B(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{D}}x}. \quad (\text{A.9})$$

En utilisant les conditions aux limites

$$\hat{S}_d(p|y) = 0 = \frac{1}{p} + A(p)e^{\sqrt{\frac{p}{D}}y} + B(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{D}}y} \quad (\text{A.10})$$

$$\left. \frac{\partial \hat{S}_d}{\partial x} \right|_{x=-d} = 0 = A(p)\sqrt{\frac{p}{D}}e^{-\sqrt{\frac{p}{D}}d} - B(p)\sqrt{\frac{p}{D}}e^{\sqrt{\frac{p}{D}}d}, \quad (\text{A.11})$$

on obtient

$$A(p) = -\frac{1}{p} \frac{1}{e^{\sqrt{\frac{p}{D}}y} + e^{-2\sqrt{\frac{p}{D}}d}e^{-\sqrt{\frac{p}{D}}y}} \quad (\text{A.12})$$

$$B(p) = -\frac{1}{p} \frac{e^{-2\sqrt{\frac{p}{D}}d}}{e^{\sqrt{\frac{p}{D}}y} + e^{-2\sqrt{\frac{p}{D}}d}e^{-\sqrt{\frac{p}{D}}y}}. \quad (\text{A.13})$$

Dans le texte principal, le mouvement brownien part de l'abscisse 0, donc l'expression attendue (2.11) de la probabilité de survie en transformée de Laplace est

$$\boxed{\hat{S}_d(p|0) = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1 + e^{-2\sqrt{\frac{p}{D}}d}}{e^{\sqrt{\frac{p}{D}}y} + e^{-2\sqrt{\frac{p}{D}}d}e^{-\sqrt{\frac{p}{D}}y}} \right) = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\text{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{D}}d\right)}{\text{ch}\left(\sqrt{\frac{p}{D}}(y+d)\right)} \right)} \quad (\text{A.14})$$

Déterminons maintenant la probabilité de survie $S_g(t|x)$ au temps t pour un marcheur partant du point x avec un point absorbant en $y < x$. Elle vérifie toujours une équation vers le passé

$$\frac{\partial S_g}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S_g}{\partial x^2} \quad (\text{A.15})$$

avec la condition initiale et la condition aux limites suivantes

$$S_g(0|x) = 1 \quad (\text{A.16})$$

$$S_g(t|y) = 0. \quad (\text{A.17})$$

L'équation en transformée de Laplace est la même que précédemment

$$D \frac{\partial^2 \hat{S}_g}{\partial x^2} = p \hat{S}_g - 1. \quad (\text{A.18})$$

L'abscisse du point de départ x n'est pas bornée, et comme la probabilité de survie est finie, la solution de l'équation précédente s'écrit sous la forme

$$\hat{S}_g(p|x) = \frac{1}{p} + B(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{D}}x} \quad (\text{A.19})$$

avec la condition

$$\hat{S}_g(p|y) = 0 = \frac{1}{p} + B(p)e^{-\sqrt{\frac{p}{D}}y} \quad (\text{A.20})$$

d'où

$$\hat{S}_g(p|x) = \frac{1}{p} \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{p}{D}}(x-y)} \right) \quad (\text{A.21})$$

qui donne finalement pour un point de départ situé en $x = 0$ l'équation (2.12) du texte principal

$$\boxed{\hat{S}_g(p|0) = \frac{1}{p} \left(1 - e^{\sqrt{\frac{p}{D}}y} \right)} \quad (\text{A.22})$$

B Expression standard de la probabilité de survie dans un secteur angulaire absorbant infini

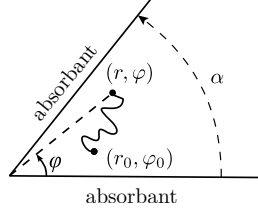


FIGURE B.1 – Illustration d'un mouvement brownien dans un secteur angulaire absorbant d'angle α , décrit en coordonnées polaires et partant du point (r_0, φ_0) .

Nous déterminons ici l'expression “naturelle” de la probabilité de survie dans un secteur angulaire absorbant infini (par opposition à la formule plus compacte mais moins évidente dont nous avons donné la démonstration dans la section 2.4). La première étape consiste à calculer le propagateur¹ $P(r, \varphi, t|r_0, \varphi_0)$ en coordonnées polaires (voir figure B.1), où l'origine du repère est située au sommet du secteur angulaire. Dans les cas où il n'y a pas d'ambiguïté, on désignera le propagateur par $P(r, \varphi, t)$ par souci de clarté. Le propagateur est solution d'une équation de Fokker-Planck vers le futur²

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D\Delta P = D \left[\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} \right] \quad (\text{B.1})$$

avec la condition initiale et les conditions aux limites suivantes

$$P(r, \varphi, 0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r_0} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \quad (\text{B.2})$$

$$P(r, 0, t) = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$P(r, \alpha, t) = 0. \quad (\text{B.4})$$

On définit la transformée de Laplace du propagateur $\hat{P}$ comme

$$\hat{P}(r, \varphi, s) = \int_0^{+\infty} dt P(r, \varphi, t) e^{-st}. \quad (\text{B.5})$$

On prend la transformée de Laplace de l'équation (B.1) et on intègre par parties

$$D\Delta \hat{P} = \int_0^{+\infty} dt \frac{\partial P}{\partial t} e^{-st} = [P(r, \varphi, t) e^{-st}]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} dt P(r, \varphi, t) e^{-st}, \quad (\text{B.6})$$

d'où

$$s\hat{P} - \frac{1}{r_0} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) = D\Delta \hat{P} \quad (\text{B.7})$$

1. Le propagateur $P(r, \varphi, t|r_0, \varphi_0)$ est simplement la probabilité de trouver le marcheur au point (r, φ) au temps t sachant qu'il est parti initialement du point (r_0, φ_0) .

2. Qui correspond tout simplement à une équation de diffusion.

avec les deux conditions aux limites issues des équations (B.3) et (B.4)

$$\hat{P}(r, 0, s) = \hat{P}(r, \alpha, s) = 0. \quad (\text{B.8})$$

L'équation (B.1) est à variables séparables, donc sa transformée de Laplace admet une solution de la forme $R(r, s)\Phi(\varphi, s)$. En réinjectant cette forme dans l'équation (B.7) et en séparant les termes en r des termes en φ , on obtient

$$r^2 \left(\frac{s}{D} - \frac{R''}{R} \right) - r \frac{R'}{R} = \frac{\Phi''}{\Phi}. \quad (\text{B.9})$$

Les conditions aux limites angulaires (B.8) indiquent que $\Phi(\varphi, s)$ est une combinaison linéaire de $\sin(n\pi\varphi/\alpha)$. Etant donné que la fonction delta de Dirac peut s'écrire

$$\delta(\varphi - \varphi_0) = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(n \frac{\pi\varphi}{\alpha}\right) \sin\left(n \frac{\pi\varphi_0}{\alpha}\right), \quad (\text{B.10})$$

on décompose $\hat{P}$ sur la même base

$$\hat{P}(r, \varphi, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} R_n(r, s) \sin\left(n \frac{\pi\varphi}{\alpha}\right) \sin\left(n \frac{\pi\varphi_0}{\alpha}\right). \quad (\text{B.11})$$

Réinjectons cette expression dans (B.7). Chaque composante $R_n(r, s)$ vérifie

$$sR_n - \frac{2}{r_0\alpha} \delta(r - r_0) = D \left(R_n'' + \frac{1}{r} R_n' - \frac{k_n^2}{r^2} R_n \right) \quad (\text{B.12})$$

avec $k_n = n\pi/\alpha$. En introduisant la variable $y = r\sqrt{s/D}$, on obtient une équation de Bessel modifiée

$$R_n''(y) + \frac{1}{y} R_n'(y) - \left(1 + \frac{k_n^2}{y^2} \right) R_n(y) = -\frac{2}{y_0 D \alpha} \delta(y - y_0). \quad (\text{B.13})$$

La fonction $R_n(y, s)$ reste nécessairement finie car le propagateur est inférieur à 1 en tout point, donc on écrit

$$\begin{cases} R_n(y, s) = A_n I_{k_n}(y) & \text{pour } y < y_0 \\ R_n(y, s) = B_n K_{k_n}(y) & \text{pour } y > y_0 \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

avec $I_k(y)$ et $K_k(y)$ les fonctions de Bessel modifiées du premier et second ordres, qui sont respectivement divergentes en l'infini et en 0. On détermine ensuite les deux constantes A_n et B_n en traduisant d'une part la continuité de $R_n(y, s)$ en y_0 et en intégrant d'autre part l'équation (B.13) entre y_0^- et y_0^+

$$\begin{cases} A_n I_{k_n}(y_0) = B_n K_{k_n}(y_0) \\ B_n K_{k_n}'(y_0) - A_n I_{k_n}'(y_0) = -\frac{2}{\alpha D y_0}. \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

Le wronskien de $I_k(y)$ et $K_k(y)$ est connu et vaut

$$W(K_k, I_k) = K_k(y) I_k'(y) - K_k'(y) I_k(y) = \frac{1}{y}, \quad (\text{B.16})$$

d'où

$$\begin{cases} A_n = \frac{2}{\alpha D} K_{k_n}(y_0) \\ B_n = \frac{2}{\alpha D} I_{k_n}(y_0). \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Cela donne

$$\hat{P}(r, \varphi, s) = \frac{2}{\alpha D} \sum_{n=1}^{+\infty} I_{\frac{n\pi}{\alpha}} \left(\sqrt{\frac{s}{D}} \min(r_0, r) \right) K_{\frac{n\pi}{\alpha}} \left(\sqrt{\frac{s}{D}} \max(r_0, r) \right) \sin \left(\frac{n\pi\varphi}{\alpha} \right) \sin \left(\frac{n\pi\varphi_0}{\alpha} \right) \quad (\text{B.18})$$

et en prenant la transformée de Laplace inverse, on obtient finalement l'expression du propagateur dans un secteur angulaire

$$P(r, \varphi, t | r_0, \varphi_0) = \frac{1}{\alpha D t} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \left(\frac{n\pi\varphi}{\alpha} \right) \sin \left(\frac{n\pi\varphi_0}{\alpha} \right) I_{\frac{n\pi}{\alpha}} \left(\frac{r_0 r}{2Dt} \right) \exp \left(-\frac{r^2 + r_0^2}{4Dt} \right). \quad (\text{B.19})$$

La probabilité de survie au temps t se déduit du propagateur en l'intégrant sur tout l'espace, ce qui revient à dire qu'avoir survécu au temps t , c'est être quelque part dans le secteur angulaire au temps t , sans contrainte sur la position

$$\begin{aligned} S(t | r_0, \varphi_0) &\equiv \int_0^{+\infty} dr \, r \int_0^\alpha d\varphi \, P(t, r, \varphi | r_0, \varphi_0) \\ &= \frac{1}{\alpha D t} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2\alpha}{(2m+1)\pi} \sin \left(\frac{(2m+1)\pi\varphi_0}{\alpha} \right) \int_0^{+\infty} dr \, r \, I_{\frac{(2m+1)\pi}{\alpha}} \left(\frac{r_0 r}{2Dt} \right) e^{-\frac{r_0^2 + r^2}{4Dt}}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

On intègre ensuite par parties

$$S(t | r_0, \varphi_0) = \frac{2r_0}{\alpha D t} \sum_{m=0}^{+\infty} \sin \left(\frac{(2m+1)\pi\varphi_0}{\alpha} \right) \int_0^{+\infty} dr \, I'_{\frac{(2m+1)\pi}{\alpha}} \left(\frac{r_0 r}{2Dt} \right) e^{-\frac{r_0^2 + r^2}{4Dt}}. \quad (\text{B.21})$$

La dérivée de la fonction de Bessel vaut [Abramowitz 2012]

$$I'_k(x) = \frac{I_{k-1}(x) + I_{k+1}(x)}{2} \quad (\text{B.22})$$

et l'intégrale [Prudnikov 1983]

$$\int_0^{+\infty} dr \, I_{k-1} \left(\frac{r_0 r}{2Dt} \right) e^{-\frac{r^2}{4Dt}} = \sqrt{\pi D t} \, e^{\frac{r_0^2}{8Dt}} \, I_{\frac{k-1}{2}} \left(\frac{r_0^2}{8Dt} \right). \quad (\text{B.23})$$

On obtient finalement une expression de la probabilité de survie dans un secteur angulaire absorbant d'angle au sommet α au temps t , le mouvement brownien étant parti au temps $t = 0$ du point (r_0, φ_0)

$$S(t | r_0, \varphi_0) = \frac{r_0}{\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{r_0^2}{8Dt}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\sin \left(\frac{(2m+1)\pi\varphi_0}{\alpha} \right)}{2m+1} \left[I_{\frac{(2m+1)\pi}{2\alpha} - \frac{1}{2}} \left(\frac{r_0^2}{8Dt} \right) + I_{\frac{(2m+1)\pi}{2\alpha} + \frac{1}{2}} \left(\frac{r_0^2}{8Dt} \right) \right]$$

(B.24)

C Relations géométriques entre les coordonnées polaires et les paramètres de la formule de Cauchy

La correspondance entre les paramètres de la formule de Cauchy (M, θ) et les coordonnées polaires (r_0, φ_0) utilisés pour le calcul de la probabilité de survie dans le secteur angulaire s'établit à l'aide de géométrie élémentaire que nous détaillons ici. Comme indiqué dans le texte principal, la symétrie du problème permet de se restreindre aux directions $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. On définit un certain nombre de points utiles pour la démonstration (voir figure C.1).

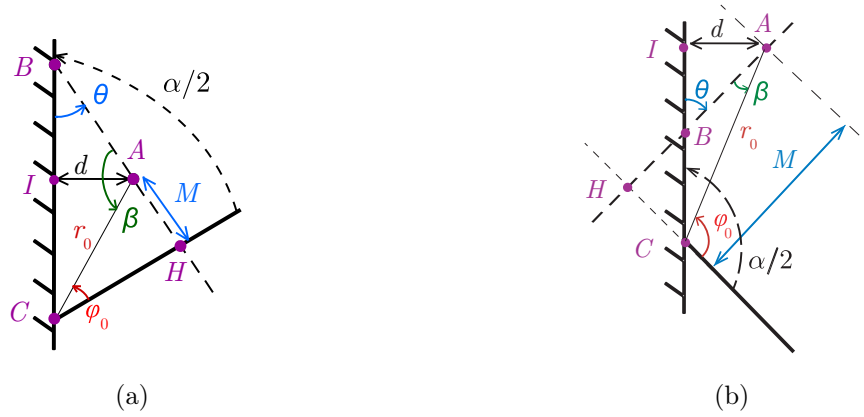


FIGURE C.1 – Définition des points, distances et angles utilisés pour la détermination des relations géométriques entre (r_0, φ_0) et (M, θ) , dans le cas $\theta > 0$ (a) et $\theta < 0$ (b). A est le point de départ de la trajectoire.

Tout d'abord, en écrivant la somme des angles dans les triangles BAC et AHC et en les combinant, on obtient l'angle au sommet du secteur angulaire en fonction de θ

$$\alpha = \pi - 2\theta. \quad (\text{C.1})$$

Ensuite, l'objectif est d'écrire r_0 et φ_0 en fonction de M et θ . Dans le triangle AHC , on a

$$M = r_0 \sin \varphi_0, \quad (\text{C.2})$$

et dans le triangle ACI ,

$$d = r_0 \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \varphi_0 \right) = r_0 \cos(\theta + \varphi_0). \quad (\text{C.3})$$

Cela donne l'égalité suivante

$$\frac{M}{\sin \varphi_0} = \frac{d}{\cos(\theta + \varphi_0)}, \quad (\text{C.4})$$

de laquelle on extrait

$$\tan \varphi_0 = \frac{M \cos \theta}{d + M \sin \theta}. \quad (\text{C.5})$$

Ensuite, en utilisant (C.2),

$$r_0 = \frac{M}{\sin \varphi_0} = \frac{M}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0}} = \frac{M \sqrt{1 + \tan^2 \varphi_0}}{\tan \varphi_0} \quad (\text{C.6})$$

d'où il découle

$$r_0 = \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{d^2 + 2dM \sin \theta + M^2} \quad (\text{C.7})$$

L'objectif n'est pas encore complètement atteint, car l'expression (C.5) ne permet pas d'obtenir φ_0 correctement. En effet, $\arctan$ est à valeurs dans $[-\pi/2, \pi/2]$ alors que $\varphi_0 \in [0, \pi]$. L'angle φ_0 doit donc être déterminé via un $\arccos$, qui est à valeurs dans le bon intervalle. En utilisant les équations (C.3) et (C.2), on peut écrire

$$\frac{d}{r_0} = \cos(\theta + \varphi_0) = \cos \theta \cos \varphi_0 - \sin \theta \frac{M}{r_0} \quad (\text{C.8})$$

et en éliminant r_0 grâce à l'équation (C.6), on obtient finalement

$$\varphi_0 = \arccos \left(\frac{d + M \sin \theta}{\sqrt{M^2 + 2dM \sin \theta + d^2}} \right) \quad (\text{C.9})$$

D Détails du cas où le marcheur part sur le plan réfléchissant

On cherche à calculer la fonction d'échelle du maximum partant d'une distance initiale nulle

$$\tilde{\mathcal{M}}(\theta, 0) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cos \theta \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \int_0^{+\infty} dv e^{-v} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^v}{\sqrt{v}} - I_\nu(v) - I_{\nu+1}(v) \right). \quad (\text{D.1})$$

Pour cela, on régularise l'intégrale, en introduisant l'intégrale $A(\beta, m)$ définie en (2.52)

$$A(\beta, m) \equiv \int_0^{+\infty} dv e^{-\beta v} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^v}{\sqrt{v}} - I_\nu(v) - I_{\nu+1}(v) \right) \quad (\text{D.2})$$

avec

$$\nu = (2m+1) \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{1}{2}, \quad (\text{D.3})$$

ainsi que $B(\beta)$ tel que $\tilde{\mathcal{M}}(\theta, 0) = B(1)$

$$B(\beta) \equiv \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cos \theta \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} A(\beta, m) \quad (\text{D.4})$$

dont on déterminera la limite quand le facteur de régularisation β tend vers 1. Dans l'intégrale $A(\beta, m)$, on reconnaît à la fois une fonction gamma et la transformée de Laplace des fonctions de Bessel $\mathcal{L}[I_\nu]$, de sorte que

$$A(\beta, m) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\beta-1}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \mathcal{L}[I_\nu](\beta) - \mathcal{L}[I_{\nu+1}](\beta), \quad (\text{D.5})$$

d'où (voir par exemple [Brychkov 1986])

$$A(\beta, m) = \sqrt{\frac{2}{\beta-1}} - \frac{(\beta + \sqrt{\beta^2-1})^{-\nu}}{\sqrt{\beta^2-1}} - \frac{(\beta + \sqrt{\beta^2-1})^{-\nu-1}}{\sqrt{\beta^2-1}}. \quad (\text{D.6})$$

Il faut maintenant de calculer $B(\beta)$. Pour cela, on pose

$$a = \beta + \sqrt{\beta^2-1}, \quad (\text{D.7})$$

donc

$$A(\beta, m) = \sqrt{\frac{2}{\beta-1}} - \frac{a^{-\nu}}{\sqrt{\beta^2-1}} - \frac{a^{-\nu-1}}{\sqrt{\beta^2-1}}. \quad (\text{D.8})$$

La quantité $B(\beta)$ met en jeu la somme suivante

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m a^{-\frac{(2m+1)\pi}{2\alpha} + \frac{1}{2}}}{2m+1} &= \frac{\pi}{2\alpha} \sqrt{a} \int_0^a dy \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m y^{-\frac{(2m+1)\pi}{2\alpha} - 1} \\ &= \frac{\pi}{2\alpha} \sqrt{a} \int_0^a dy \frac{y^{-\frac{\pi}{2\alpha} - 1}}{1 + y^{-\frac{\pi}{\alpha}}} = \sqrt{a} \arctan \left(a^{-\frac{\pi}{2\alpha}} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

d'où

$$B(\beta) = \frac{4 \cos \theta}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2}{\beta-1}} - \frac{\arctan \left(a^{-\frac{\pi}{2\alpha}} \right)}{\sqrt{\beta^2-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \right] \quad (\text{D.10})$$

en utilisant

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}. \quad (\text{D.11})$$

Il faut enfin évaluer $B(\beta)$ en $\beta = 1$ donc pour cela, on développe $B(\beta)$ en $\beta = 1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$. On a en particulier

$$\begin{aligned} a &= \beta + \sqrt{\beta^2 - 1} = 1 + \varepsilon + \sqrt{2\varepsilon} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} 1 + \sqrt{2\varepsilon}, \\ \sqrt{a} &\sim 1 + \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \\ \arctan \left(a^{-\frac{\pi}{2\alpha}} \right) &\sim \arctan \left(1 - \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \right) \sim \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

d'où finalement, en prenant $\varepsilon = 0$,

$$\boxed{\tilde{\mathcal{M}}(\theta, 0) = 2\sqrt{\pi} \frac{\cos \theta}{\pi - 2\theta}} \quad (\text{D.12})$$

E Développement du maximum moyen à petite distance initiale

On détermine ici le développement de la fonction d'échelle $\tilde{\mathcal{M}}(\theta, x)$ du maximum à petite distance initiale, c'est-à-dire $x \ll 1$, qui va dépendre *a priori* de la direction θ . Son obtention nous permettra d'obtenir le développement de la fonction d'échelle du périmètre de l'enveloppe convexe, par intégration sur toutes les directions θ . Comme expliqué dans le texte principal, nous pouvons nous restreindre donc aux directions $[-\pi/2, \pi/2]$.

Comme nous allons le voir dans un instant, le développement de $\tilde{\mathcal{M}}(\theta, x)$ et la technique pour l'obtenir dépendent du signe de θ . Nous allons tout d'abord le déterminer pour les angles positifs à l'aide du développement à petit x de la probabilité de survie et du calcul de transformées de Laplace. Nous verrons ensuite que le calcul du développement pour les angles négatifs, même s'il s'appuie sur des bases similaires, nécessite une adaptation. On remarquera par ailleurs que l'ordre 0 de ce développement est donné par le cas $x = 0$ présenté dans l'annexe précédente, donc sera laissé de côté.

Le point de départ de ces démonstrations consiste à écrire la probabilité de survie intervenant dans l'équation (2.38), en fonction de la distance initiale renormalisée $x = d/\sqrt{Dt}$ et de $u = M/\sqrt{Dt}$,

$$S^{(x)}(t|u, \theta) = \frac{\sqrt{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}}{\sqrt{\pi} \cos \theta} e^{-\frac{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}{8 \cos^2 \theta}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\sin \left((2m+1) \frac{\pi}{\alpha} \arccos \left(\frac{x+u \sin \theta}{\sqrt{u^2 + 2xu \sin \theta + x^2}} \right) \right)}{2m+1} \\ \times \left[I_{\nu} \left(\frac{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) + I_{\nu+1} \left(\frac{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) \right] \quad (\text{E.1})$$

avec $\alpha = \pi - 2\theta$ et $\nu = (2m+1)\pi/(2\alpha) - 1/2$.

E.1 Développement de $\tilde{\mathcal{M}}(\theta, x)$ pour $\theta > 0$

On se concentre tout d'abord sur le développement de $\tilde{\mathcal{M}}(\theta, x)$ pour $\theta \in [0, \pi/2]$, que l'on déterminera jusqu'à l'ordre 2

$$\tilde{\mathcal{M}}(\theta, x) = \tilde{\mathcal{M}}(\theta, 0) + \Delta_1(\theta)x + \Delta_2(\theta)x^2 + o(x^2). \quad (\text{E.2})$$

Le protocole présenté dans cette partie n'est pas applicable au cas $\theta \in [-\pi/2, 0]$ car il apparaît une divergence. Nous traiterons ce cas par la suite.

Commençons par développer la probabilité de survie (E.1) à petit x . Les différents facteurs

se développent de la manière suivante

$$\sqrt{u^2 + 2xu \sin \theta + x^2} \sim u + x \sin \theta + \frac{x^2}{2u} \cos^2 \theta, \quad (\text{E.3})$$

$$e^{-\frac{x^2 + 2xu \sin \theta}{8 \cos^2 \theta}} \sim 1 - \frac{xu \sin \theta}{4 \cos^2 \theta} - \frac{x^2}{8 \cos^2 \theta} + \frac{x^2 u^2 \sin^2 \theta}{32 \cos^4 \theta}, \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{aligned} I_\nu \left(\frac{u^2 + 2xu \sin \theta + x^2}{8 \cos^2 \theta} \right) &\sim I_\nu \left(\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) + \left(\frac{xu \sin \theta}{4 \cos^2 \theta} + \frac{x^2}{8 \cos^2 \theta} \right) I'_\nu \left(\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) \\ &\quad + \frac{x^2 u^2 \sin^2 \theta}{32 \cos^4 \theta} I''_\nu \left(\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

et

$$\arccos \left(\frac{x + u \sin \theta}{\sqrt{u^2 + 2xu \sin \theta + x^2}} \right) \sim \arccos \left(\sin \theta + \frac{x}{u} \cos^2 \theta \right) \sim \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{x}{u} \cos \theta, \quad (\text{E.6})$$

d'où

$$\begin{aligned} \sin \left((2m+1) \frac{\pi}{\alpha} \arccos \left(\frac{x + u \sin \theta}{\sqrt{u^2 + 2xu \sin \theta + x^2}} \right) \right) &\sim (-1)^m \cos \left((2m+1) \pi \frac{x}{u} \frac{\cos \theta}{\pi - 2\theta} \right) \\ &\sim (-1)^m \left(1 - \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{2(\pi - 2\theta)^2} \frac{x^2}{u^2} \cos^2 \theta \right). \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Par ailleurs, la dérivée des fonctions de Bessel prend trois formes différentes, que nous utiliserons alternativement [Abramowitz 2012]

$$I'_\nu(x) = \frac{I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x)}{2} \quad (\text{E.8})$$

$$= I_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} I_\nu(x) \quad (\text{E.9})$$

$$= I_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} I_\nu(x). \quad (\text{E.10})$$

E.1.1 Premier ordre

A l'aide des précédents développements, on obtient le premier ordre en x de (E.2)

$$\begin{aligned} \Delta_1(\theta) = - \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \int_0^{+\infty} du \frac{e^{-\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta}}}{\sqrt{\pi} \cos \theta} &\left\{ \left(\sin \theta - \frac{u^2 \sin \theta}{4 \cos^2 \theta} \right) \left[I_\nu \left(\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) + I_{\nu+1} \left(\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{u^2 \sin \theta}{4 \cos^2 \theta} \left(I'_\nu \left(\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) + I'_{\nu+1} \left(\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

En utilisant (E.10) pour exprimer $I'_\nu(u^2/8 \cos^2 \theta)$ et (E.9) pour $I'_{\nu+1}(u^2/8 \cos^2 \theta)$, on obtient

$$\begin{aligned} I'_\nu \left(\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) + I'_{\nu+1} \left(\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) \\ = \left(\frac{8 \cos^2 \theta}{u^2} \nu + 1 \right) I_\nu \left(\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) + \left(1 - \frac{(\nu+1) 8 \cos^2 \theta}{u^2} \right) I_{\nu+1} \left(\frac{u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

ce qui simplifie l'expression de $\Delta_1(\theta)$

$$\Delta_1(\theta) = - \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \int_0^{+\infty} du \frac{e^{-\frac{u^2}{8\cos^2\theta}}}{\sqrt{\pi}\cos\theta} \sin\theta (1+2\nu) \left[I_\nu\left(\frac{u^2}{8\cos^2\theta}\right) - I_{\nu+1}\left(\frac{u^2}{8\cos^2\theta}\right) \right], \quad (\text{E.13})$$

et en posant $y = u^2/8\cos^2\theta$,

$$\Delta_1(\theta) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} (1+2\nu) \sin\theta \int_0^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y}} e^{-y} (I_\nu(y) - I_{\nu+1}(y)). \quad (\text{E.14})$$

Séparer les deux fonctions de Bessel de l'intégrande conduirait à une divergence, mais tel qu'écrit en (E.14), l'intégrale sur y est finie puisqu'elle met en jeu une différence de fonctions de Bessel. Comme précédemment (voir annexe précédente), nous introduisons un facteur de régularisation $\beta \geq 1$ que nous ferons tendre vers 1 par la suite. On pose

$$D(\beta, m) \equiv \int_0^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y}} e^{-\beta y} (I_\nu(y) - I_{\nu+1}(y)) \quad (\text{E.15})$$

de sorte que

$$\Delta_1(\theta) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} (1+2\nu) \sin\theta D(1, m), \quad (\text{E.16})$$

et en utilisant [Prudnikov 1983],

$$D(\beta, m) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(Q_{\nu-\frac{1}{2}}(\beta) - Q_{\nu+\frac{1}{2}}(\beta) \right) \quad (\text{E.17})$$

où $Q_{\nu-\frac{1}{2}}(\beta)$ est une fonction de Legendre de seconde espèce, définie par

$$Q_{\nu-\frac{1}{2}}(\beta) = \frac{1}{2^{\nu+\frac{1}{2}}} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)} \frac{1}{\beta^{\nu+\frac{1}{2}}} {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}; \nu+1; \frac{1}{\beta^2}\right) \quad (\text{E.18})$$

avec ${}_2F_1$ une fonction hypergéométrique. En écrivant $Q_{\nu+\frac{1}{2}}(\beta)$ à l'aide de la même formule et en utilisant la formule

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x), \quad (\text{E.19})$$

on obtient

$$\begin{aligned} D(\beta, m) &= \frac{1}{2^\nu} \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)} \frac{1}{\beta^{\nu+\frac{1}{2}}} \\ &\times \left[{}_2F_1\left(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}; \nu+1; \frac{1}{\beta^2}\right) - \frac{1}{2\beta} \frac{\nu+\frac{1}{2}}{\nu+1} {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2} + \frac{5}{4}, \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}; \nu+2; \frac{1}{\beta^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

Les fonctions hypergéométriques du type ${}_2F_1(a, b; a+b; z)$ peuvent être exprimées de la manière suivante

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}; \nu+1; \frac{1}{\beta^2}\right) &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4})\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4})} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4})_n (\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4})_n}{(n!)^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)^n \\ &\times \left[2\psi(n+1) - \psi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4} + n\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4} + n\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

avec $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ le symbole de Pochhammer, et $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ la fonction digamma. Etant donné que l'on s'intéresse à la limite $\beta \rightarrow 1$, le seul terme non nul de la somme est le terme $n = 0$. On a donc

$$D(\beta, m) \underset{\beta \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{2^\nu} \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu + 1)} \frac{1}{\beta^{\nu + \frac{1}{2}}} \times \left\{ \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4})\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4})} \left[2\psi(1) - \psi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \right] - \frac{1}{2\beta} \frac{\nu + \frac{1}{2}}{\nu + 1} \frac{\Gamma(\nu + 2)}{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{5}{4})\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4})} \left[2\psi(1) - \psi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{5}{4}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \right] \right\}. \quad (\text{E.22})$$

En utilisant la relation (E.19) et

$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}, \quad (\text{E.23})$$

on obtient

$$D(\beta, m) \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \frac{1}{2^\nu} \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4})\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4})} \frac{1}{\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}}. \quad (\text{E.24})$$

L'égalité suivante

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{2z-\frac{1}{2}} \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2}) \quad (\text{E.25})$$

permet enfin d'aboutir à une expression très simple de $D(1, m)$

$$D(1, m) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{1 + 2\nu}. \quad (\text{E.26})$$

En réinjectant cette expression dans l'équation (E.16), le terme du premier ordre en x de $\tilde{\mathcal{M}}(\theta, x)$ pour θ positif est finalement

$$\Delta_1(\theta) = -\sin \theta. \quad (\text{E.27})$$

E.1.2 Second ordre

En appliquant à nouveau le changement de variable $y = u^2/(8 \cos^2 \theta)$, le terme d'ordre 2 en x de $\tilde{\mathcal{M}}(\theta, x)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \Delta_2(\theta) = & -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \int_0^{+\infty} \sqrt{2} \, dy \, e^{-y} \\ & \times \left[\frac{\cos \theta}{4\sqrt{2}y} (I_\nu(y) + I_{\nu+1}(y)) \left(1 - \frac{\pi^2(2m+1)^2}{(\pi - 2\theta)^2} \right) + \frac{1 + 2 \sin^2 \theta}{4\sqrt{2} \cos \theta} (I_{\nu-1} - I_\nu - I_{\nu+1} + I_{\nu+2})(y) \right. \\ & \left. + \frac{\sin^2 \theta}{4\sqrt{2} \cos \theta} y (I_{\nu-2} - 3I_{\nu-1} + 2I_\nu + 2I_{\nu+1} - 3I_{\nu+2} + I_{\nu+3})(y) \right]. \quad (\text{E.28}) \end{aligned}$$

Remarquons que cette équation n'est valable que si $\nu > 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, ce qui est vrai pour $\theta > 0$ mais faux si $\theta < 0$ (puisque $\nu(m=0) = \theta/\alpha$). Dans ce cas, le coefficient $\Delta_2(\theta)$ sous cette forme est infini puisque le terme $I_{\nu(0)}(y)/y$ n'est pas intégrable en 0. Nous verrons comment traiter cette divergence par la suite.

On introduit à nouveau un paramètre de régularisation $\beta \geq 1$ pour calculer cette intégrale, que l'on fera tendre vers 1 ensuite. On définit

$$E(\beta, m) \equiv \int_0^{+\infty} dy e^{-\beta y} \left[\frac{\cos \theta}{4\sqrt{2}y} (I_\nu + I_{\nu+1})(y) \left(1 - \frac{\pi^2(2m+1)^2}{(\pi-2\theta)^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{1+2\sin^2 \theta}{4\sqrt{2}\cos \theta} (I_{\nu-1} - I_\nu - I_{\nu+1} + I_{\nu+2})(y) \right. \\ \left. + y \frac{\sin^2 \theta}{4\sqrt{2}\cos \theta} (I_{\nu-2} - 3I_{\nu-1} + 2I_\nu + 2I_{\nu+1} - 3I_{\nu+2} + I_{\nu+3})(y) \right] \quad (\text{E.29})$$

tel que

$$\Delta_2(\theta) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} E(1, m). \quad (\text{E.30})$$

Cette quantité se réécrit à l'aide de transformées de Laplace

$$E(\beta, m) = \frac{\cos \theta}{4\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi^2(2m+1)^2}{(\pi-2\theta)^2} \right) \mathcal{L} \left[\frac{I_\nu(y) + I_{\nu+1}(y)}{y} \right] (\beta) \\ + \frac{(1+2\sin^2 \theta)}{4\sqrt{2}\cos \theta} \mathcal{L} [I_{\nu-1} - I_\nu - I_{\nu+1} + I_{\nu+2}] (\beta) \\ + \frac{\sin^2 \theta}{4\sqrt{2}\cos \theta} \mathcal{L} [y(I_{\nu-2} - 3I_{\nu-1} + 2I_\nu + 2I_{\nu+1} - 3I_{\nu+2} + I_{\nu+3})(y)] (\beta). \quad (\text{E.31})$$

Ces transformées de Laplace ont des expressions connues (voir [Brychkov 1986])

$$\mathcal{L} \left[\frac{I_\nu(y)}{y} \right] (\beta) = \frac{1}{\nu} (\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})^{-\nu} \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \frac{1}{\nu} \quad (\text{E.32})$$

$$\mathcal{L} [I_\nu(y)] (\beta) = \frac{(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})^{-\nu}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \stackrel{\beta \rightarrow 1}{=} \frac{1}{\sqrt{2}(\beta - 1)} - \nu + o(1) \quad (\text{E.33})$$

$$\mathcal{L} [y I_\nu(y)] (\beta) = \frac{\beta + \nu\sqrt{\beta^2 - 1}}{(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})^\nu (\beta^2 - 1)^{3/2}} \\ \stackrel{\beta \rightarrow 1}{=} \frac{1}{2(\beta - 1)^{3/2}} \left[1 + (\beta - 1) \left(\frac{1}{4} - \nu^2 \right) + \sqrt{2}(\beta - 1)^{3/2}(\nu^2 + \nu^3) \right] + o(1). \quad (\text{E.34})$$

Un calcul simple permet d'obtenir

$$\mathcal{L} \left[\frac{I_\nu(y) + I_{\nu+1}(y)}{y} \right] (\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} = \frac{(2m+1)\pi}{\pi-2\theta} \frac{4}{\left(\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{(\pi-2\theta)^2} - 1 \right)} \quad (\text{E.35})$$

$$\mathcal{L} [I_{\nu-1} - I_\nu - I_{\nu+1} + I_{\nu+2}] (\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} 0 \quad (\text{E.36})$$

$$\mathcal{L} [y(I_{\nu-2} - 3I_{\nu-1} + 2I_\nu + 2I_{\nu+1} - 3I_{\nu+2} + I_{\nu+3})(y)] (\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} 0. \quad (\text{E.37})$$

Le terme du second ordre en x prend finalement une forme très simple

$$\Delta_2(\theta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\cos \theta}{\pi - 2\theta}. \quad (\text{E.38})$$

Le développement de la fonction d'échelle du maximum $\tilde{\mathcal{M}}(\theta, x)$ dans la direction $\theta > 0$ à l'ordre 2 est par conséquent

$$\tilde{\mathcal{M}}(\theta, x) = \frac{2\sqrt{\pi} \cos \theta}{\pi - 2\theta} - \sin \theta x + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\cos \theta}{\pi - 2\theta} x^2 + o(x^2) \quad (\text{E.39})$$

E.2 Développement de $\tilde{\mathcal{M}}(\theta, x)$ pour $\theta < 0$

Passons au cas plus complexe du développement de $\tilde{\mathcal{M}}(\theta, x)$ pour $\theta \in [-\pi/2, 0]$. Comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe précédent, l'approche qui y est développée échoue en raison d'une divergence qui apparaît pour le terme $m = 0$ de la somme mise en jeu dans l'équation (2.40). Pour contourner ce problème, nous traitons à part la source de cette divergence, à savoir la partie I_ν du terme $m = 0$ de cette somme. Les autres termes (la partie $I_{\nu+1}$ du terme $m = 0$ ainsi que tous les termes $m > 0$ de la somme) se développent sans souci jusqu'à l'ordre 2 en utilisant la méthode détaillée ci-dessus. Pour cela, nous séparons donc $\tilde{\mathcal{M}}(\theta, x)$ en trois parties correspondant au découpage de la somme du m évoqué à l'instant

$$\tilde{\mathcal{M}}(\theta, x) = T_0(\theta, x) + T'_0(\theta, x) + T_1(\theta, x) \quad (\text{E.40})$$

avec

$$T_0(\theta, x) = \int_0^{+\infty} du \left\{ \frac{2}{\pi} - \frac{\sqrt{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}}{\sqrt{\pi} \cos \theta} \cos \left[\frac{\pi}{\alpha} \arccos \left(\frac{u + x \sin \theta}{\sqrt{u^2 + 2xu \sin \theta + x^2}} \right) \right] \right. \\ \left. \times e^{-\frac{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}{8 \cos^2 \theta}} I_{\nu(0)} \left(\frac{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) \right\}, \quad (\text{E.41})$$

$$T'_0(\theta, x) = \int_0^{+\infty} du \left\{ \frac{2}{\pi} - \frac{\sqrt{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}}{\sqrt{\pi} \cos \theta} \cos \left[\frac{\pi}{\alpha} \arccos \left(\frac{u + x \sin \theta}{\sqrt{u^2 + 2xu \sin \theta + x^2}} \right) \right] \right. \\ \left. \times e^{-\frac{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}{8 \cos^2 \theta}} I_{\nu(0)+1} \left(\frac{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) \right\} \quad (\text{E.42})$$

et

$$T_1(\theta, x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \int_0^{+\infty} du \left\{ \frac{4}{\pi} - \frac{\sqrt{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}}{\sqrt{\pi} \cos \theta} e^{-\frac{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}{8 \cos^2 \theta}} \right. \\ \left. \times \cos \left[(2m+1) \frac{\pi}{\alpha} \arccos \left(\frac{u + x \sin \theta}{\sqrt{u^2 + 2xu \sin \theta + x^2}} \right) \right] (I_\nu + I_{\nu+1}) \left(\frac{x^2 + 2xu \sin \theta + u^2}{8 \cos^2 \theta} \right) \right\}. \quad (\text{E.43})$$

Le terme T_0 fait apparaître une divergence au moment du calcul de l'ordre 2 si l'on suit la méthode exposée précédemment. On s'attend donc à ce qu'il existe entre les ordres 1 et 2 du développement un terme d'ordre intermédiaire non analytique³, que nous allons déterminer. Pour cela, il est utile de transférer la dépendance en x vers la fonction de Bessel, dont on devine qu'elle va être à l'origine de la non analyticité⁴, à l'aide du changement de variable suivant

$$z = \frac{u^2 + 2xu \sin \theta + x^2}{x^2 \cos^2 \theta} \\ du = \begin{cases} -\frac{x \cos \theta}{2\sqrt{z-1}} dz & \text{si } u \leq -x \sin \theta \\ \frac{x \cos \theta}{2\sqrt{z-1}} dz & \text{si } u > -x \sin \theta. \end{cases}$$

On obtient donc une expression où la fonction de Bessel devra être développée à petit argument

$$T_0(\theta, x) = \int_1^{\frac{1}{\cos^2 \theta}} dz \frac{x \cos \theta}{2\sqrt{z-1}} \left\{ \frac{2}{\pi} - \frac{x}{\sqrt{\pi}} \sqrt{z} \cos \left[\frac{\pi}{\alpha} \arccos \left(-\frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}} \right) \right] e^{-\frac{x^2 z}{8}} I_{\nu(0)} \left(\frac{x^2 z}{8} \right) \right\} \\ + \int_1^{+\infty} dz \frac{x \cos \theta}{2\sqrt{z-1}} \left\{ \frac{2}{\pi} - \frac{x}{\sqrt{\pi}} \sqrt{z} \cos \left[\frac{\pi}{\alpha} \arccos \left(\frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}} \right) \right] e^{-\frac{x^2 z}{8}} I_{\nu(0)} \left(\frac{x^2 z}{8} \right) \right\} \\ \equiv \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2. \quad (\text{E.44})$$

La première intégrale $\mathcal{I}_1$ peut s'écrire simplement

$$\mathcal{I}_1 = -\frac{2x}{\pi} \sin \theta - \frac{x^2 \cos \theta}{2\sqrt{\pi}} \int_1^{\frac{1}{\cos^2 \theta}} dz \sqrt{\frac{z}{z-1}} \cos \left[\frac{\pi}{\alpha} \arccos \left(-\frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}} \right) \right] e^{-\frac{x^2 z}{8}} I_{\nu(0)} \left(\frac{x^2 z}{8} \right). \quad (\text{E.45})$$

En revanche, on ne peut pas séparer les deux termes de l'intégrande de $\mathcal{I}_2$ comme nous l'avons fait pour $\mathcal{I}_1$ puisque sa borne supérieure est infinie. Nous faisons donc apparaître le terme d'ordre 0 en x de ce terme, donné par

$$\int_0^{+\infty} dz \frac{x \cos \theta}{2\sqrt{z}} \left[\frac{2}{\pi} - \frac{x}{\sqrt{\pi}} \sqrt{z} e^{-\frac{x^2 z}{8}} I_{\nu(0)} \left(\frac{x^2 z}{8} \right) \right] = 4\nu(0) \frac{\cos \theta}{\sqrt{\pi}}. \quad (\text{E.46})$$

3. C'est-à-dire qui n'est pas une puissance entière de x .

4. Son développement à petit argument étant le suivant

$$I_\nu(x) \underset{x \ll 1}{\sim} \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}.$$

En séparant cette intégrale en deux parties (de 0 à 1 et de 1 à l'infini), nous pouvons maintenant couper l'intégrale $\mathcal{I}_2$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 = & 4\nu(0) \frac{\cos \theta}{\sqrt{\pi}} + \int_1^{+\infty} dz \frac{x \cos \theta}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{z-1}} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right) \\ & - \frac{x^2 \cos \theta}{2\sqrt{\pi}} \int_1^{+\infty} dz \left\{ \sqrt{\frac{z}{z-1}} \cos \left[\frac{\pi}{\alpha} \arccos \left(\sqrt{\frac{z-1}{z}} \right) \right] - 1 \right\} e^{-\frac{x^2 z}{8}} I_{\nu(0)} \left(\frac{x^2 z}{8} \right) \\ & - \int_0^1 dz \frac{x \cos \theta}{\pi \sqrt{z}} + \frac{x^2 \cos \theta}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 dz e^{-\frac{x^2 z}{8}} I_{\nu(0)} \left(\frac{x^2 z}{8} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.47})$$

En regroupant $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$, on obtient finalement

$$T_0(\theta, x) = \frac{4\theta \cos \theta}{\sqrt{\pi}(\pi - 2\theta)} - \frac{2x}{\pi} \sin \theta + C(x, \theta) \quad (\text{E.48})$$

avec

$$\begin{aligned} C(x, \theta) \equiv & \frac{x^2 \cos \theta}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^1 dz e^{-\frac{x^2 z}{8}} I_{\nu(0)} \left(\frac{x^2 z}{8} \right) \right. \\ & - \int_1^{\frac{1}{\cos^2 \theta}} dz \sqrt{\frac{z}{z-1}} \cos \left[\frac{\pi}{\alpha} \arccos \left(-\frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}} \right) \right] e^{-\frac{x^2 z}{8}} I_{\nu(0)} \left(\frac{x^2 z}{8} \right) \\ & \left. - \int_1^{+\infty} dz \left[\sqrt{\frac{z}{z-1}} \cos \left[\frac{\pi}{\alpha} \arccos \left(\sqrt{\frac{z-1}{z}} \right) \right] - 1 \right] e^{-\frac{x^2 z}{8}} I_{\nu(0)} \left(\frac{x^2 z}{8} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.49})$$

Le développement à petit x de l'intégrande permet effectivement de faire apparaître un terme non analytique en x

$$e^{-\frac{x^2 z}{8}} I_{\nu(0)} \left(\frac{x^2 z}{8} \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^{2\nu(0)} z^{\nu(0)}}{16^{\nu(0)} \Gamma(1 + \nu(0))} + O(x^{2+2\nu(0)}). \quad (\text{E.50})$$

Le terme non analytique $C(x, \theta)$ s'écrit donc comme la somme d'un terme d'ordre intermédiaire entre les ordres 1 et 2, $\nu(0) = \theta/\alpha$ étant dans l'intervalle $[-1/2, 0]$, et un terme d'ordre supérieur

$$C(x, \theta) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} C(\theta) x^{2+2\nu(0)} + C_2(x, \theta) + o(x^2) \quad (\text{E.51})$$

où

$$\begin{aligned} C(\theta) \equiv & \frac{\cos \theta}{2^{4\nu(0)+1} \sqrt{\pi} \Gamma(1 + \nu(0))} \left\{ \frac{1}{1 + \nu(0)} - \int_1^{1/\cos^2 \theta} dz \sqrt{\frac{z}{z-1}} \cos \left[\frac{\pi}{\alpha} \arccos \left(-\frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}} \right) \right] z^{\nu(0)} \right. \\ & \left. - \int_1^{+\infty} dz \left[\sqrt{\frac{z}{z-1}} \cos \left[\frac{\pi}{\alpha} \arccos \left(\sqrt{\frac{z-1}{z}} \right) \right] - 1 \right] z^{\nu(0)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.52})$$

et

$$C_2(x, \theta) \equiv -\frac{\cos \theta x^2}{2\sqrt{\pi}} \int_1^{+\infty} dz \left\{ \sqrt{\frac{z}{z-1}} \cos \left[\frac{\pi}{\alpha} \arccos \left(\sqrt{\frac{z-1}{z}} \right) \right] - 1 \right\} \\ \times \left[e^{-\frac{x^2 z}{8}} I_\nu \left(\frac{x^2 z}{8} \right) - \frac{x^{2\nu(0)} z^{\nu(0)}}{16^{\nu(0)} \Gamma(1 + \nu(0))} \right]. \quad (\text{E.53})$$

On peut déterminer que le terme $C_2(x, \theta)$ est d'ordre 2 en x en introduisant la variable $u = x^2 z/8$ et en utilisant le développement suivant

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{8u}}} \cos \left[\frac{\pi}{\alpha} \arccos \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{8u}} \right) \right] \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + \left(1 - \frac{\pi^2}{\alpha^2} \right) \frac{x^2}{16u}. \quad (\text{E.54})$$

On obtient ainsi

$$C_2(x, \theta) = C_2(\theta) x^2 + o(x^2) \quad (\text{E.55})$$

avec

$$C_2(\theta) \equiv -\frac{\cos \theta}{4\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\pi^2}{\alpha^2} \right) \int_0^{+\infty} \frac{du}{u} \left(e^{-u} I_{\nu(0)}(u) - \frac{u^{\nu(0)}}{2^{\nu(0)} \Gamma(1 + \nu(0))} \right). \quad (\text{E.56})$$

Nous avons donc obtenu le développement du terme T_0 jusqu'à l'ordre 2

$$T_0 = \frac{4\theta \cos \theta}{\sqrt{\pi}(\pi - 2\theta)} - \frac{2}{\pi} \sin \theta x + C(\theta) x^{2+2\nu(0)} + C_2(\theta) x^2 + o(x^2). \quad (\text{E.57})$$

Le calcul explicite du développement à l'ordre 2 des termes T'_0 et T_1 de l'équation (E.40) est au contraire sans surprise. L'approche directe présentée au paragraphe E.1 est valable pour ces termes puisque les indices des fonctions de Bessel impliquées ($\nu(0) + 1$ for T'_0 et $\nu(m)$ avec $m \geq 1$ pour T_1) sont *positifs*. On obtient donc

$$T'_0(\theta, x) = \frac{4(1 + \nu(0)) \cos \theta}{\sqrt{\pi}} - \frac{2 \sin \theta}{\pi} x + \frac{\theta \cos \theta}{\sqrt{\pi}(\pi - 2\theta)} x^2 + o(x^2) \quad (\text{E.58})$$

$$T_1(\theta, x) = -\frac{2\sqrt{\pi} \cos \theta}{\pi - 2\theta} - \left(1 - \frac{4}{\pi} \right) \sin \theta x - \frac{\sqrt{\pi} \cos \theta}{2(\pi - 2\theta)} x^2 + o(x^2). \quad (\text{E.59})$$

Le développement à petit x de $\tilde{M}(\theta, x)$ jusqu'à l'ordre 2 est par conséquent

$$\boxed{\tilde{\mathcal{M}}(\theta, x) = \frac{2\sqrt{\pi} \cos \theta}{\pi - 2\theta} - \sin \theta x + C(\theta) x^{2+\frac{2\theta}{\pi-2\theta}} + \left(C_2(\theta) - \frac{\cos \theta}{2\sqrt{\pi}} \right) x^2 + o(x^2)} \quad (\text{E.60})$$

où l'on a remplacé $\nu(0)$ et α par leurs valeurs respectives θ/α et $\pi - 2\theta$. Les coefficients $C(\theta)$ et $C_2(\theta)$ sont définis par les équations (2.58) et (E.56).

F Détails du calcul de l'expression alternative de la probabilité de survie dans un secteur angulaire absorbant

Nous calculons ici les termes $C_2 = C_2^+ + C_2^-$, C_3^+ et C_3^- de l'expression (2.93) sur le modèle de la méthode présentée dans le texte principal pour le calcul de C_1 . Les deux termes $C_2^\pm$ sont définis par

$$C_2^\pm = 2 \sum_{j=1}^k \int_0^\alpha d\psi e^{y \cos(2j\alpha \pm \psi)} \cos\left(j\alpha \pm \frac{\psi}{2}\right) \times \int_0^{\frac{\pi\varphi_0}{\alpha}} dx' \sum_{m=0}^{+\infty} \cos((2m+1)x') \cos\left((2m+1)j\pi \pm (2m+1)\frac{\pi\psi}{2\alpha}\right). \quad (\text{F.1})$$

En utilisant que, pour j et m entiers, on a

$$\cos((2m+1)j\pi \pm X) = (-1)^j \cos(X), \quad (\text{F.2})$$

on peut réécrire

$$C_2^\pm = 2 \sum_{j=1}^k (-1)^j \int_0^\alpha d\psi e^{y \cos(2j\alpha \pm \psi)} \cos\left(j\alpha \pm \frac{\psi}{2}\right) \times \int_0^{\frac{\pi\varphi_0}{\alpha}} dx' \sum_{m=0}^{+\infty} \cos((2m+1)x') \cos\left((2m+1)\frac{\pi\psi}{2\alpha}\right). \quad (\text{F.3})$$

Cette manipulation de parité et de périodicité permet à nouveau d'appliquer la formule (2.91)

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \cos\left((2m+1)\frac{\pi y}{L}\right) \cos\left((2m+1)\frac{\pi z}{L}\right) = \frac{L}{4} \delta(y - z), \quad (\text{F.4})$$

pour $0 \leq y \leq L/2$ et $0 \leq z \leq L/2$, ici avec $L = \pi$, d'où

$$C_2^\pm = \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^k (-1)^j \int_0^\alpha d\psi e^{y \cos(2j\alpha \pm \psi)} \cos\left(j\alpha \pm \frac{\psi}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi\varphi_0}{\alpha}} dx' \sum_{m=0}^{+\infty} \delta\left(x' - \frac{\pi\psi}{2\alpha}\right) \quad (\text{F.5})$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^k (-1)^j \int_0^{2\varphi_0} d\psi e^{y \cos(2j\alpha \pm \psi)} \cos\left(j\alpha \pm \frac{\psi}{2}\right) \quad (\text{F.6})$$

$$= \frac{\pi}{2} e^y \sum_{j=1}^k (-1)^j \int_0^{2\varphi_0} d\psi e^{-2y \sin^2(j\alpha \pm \psi/2)} \cos\left(j\alpha \pm \frac{\psi}{2}\right). \quad (\text{F.7})$$

Le changement de variable $u = \sqrt{2y} \sin(j\alpha \pm \psi/2)$ donne

$$C_2^\pm = \pm \sum_{j=1}^k (-1)^j \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{e^y}{\sqrt{y}} \int_{\sqrt{2y} \sin(j\alpha)}^{\sqrt{2y} \sin(j\alpha + \varphi_0)} du e^{-u^2} \quad (\text{F.8})$$

$$= \pm \sum_{j=1}^k (-1)^j \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{e^y}{\sqrt{y}} \left[\operatorname{erf}(\sqrt{2y} \sin(j\alpha + \varphi_0)) - \operatorname{erf}(\sqrt{2y} \sin(j\alpha)) \right]. \quad (\text{F.9})$$

En sommant les deux contributions C_2^+ et C_2^- , on en déduit finalement

$$C_2 = C_2^- + C_2^+ = \sum_{j=1}^k (-1)^j \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{e^y}{\sqrt{y}} \left[\operatorname{erf}(\sqrt{2y} \sin(j\alpha + \varphi_0)) - \operatorname{erf}(\sqrt{2y} \sin(j\alpha - \varphi_0)) \right]. \quad (\text{F.10})$$

Les termes C_3^- et C_3^+ nécessitent un traitement plus précautionneux à cause des bornes d'intégration en ψ données par l'équation (2.93). En revanche, les manipulations de parité et de périodicité sont les mêmes que celles données à l'équation (F.2). On a tout d'abord pour C_3^-

$$C_3^- = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} \int_{\max(0, (2k+2)\alpha - \pi)}^{\alpha} d\psi e^{y \cos((2k+2)\alpha - \psi)} \cos\left((k+1)\alpha - \frac{\psi}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi\varphi_0}{\alpha}} dx' \delta\left(x' - \frac{\pi\psi}{2\alpha}\right). \quad (\text{F.11})$$

Comme précédemment, l'intégrale sur x' vaut 1 si $\psi \in [0, 2\varphi_0]$ et 0 sinon. Si la borne inférieure de l'intégrale sur ψ de (F.11) est plus grande que $2\varphi_0$, il n'y a pas d'intersection entre $[0, 2\varphi_0]$ et $[\max(0, (2k+2)\alpha - \pi), \alpha]$, aboutissant à un terme C_3^- nul. On peut donc réécrire cette intégrale sous la forme

$$C_3^- = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} \int_{\max(0, (2k+2)\alpha - \pi)}^{\max(2\varphi_0, \max(0, (2k+2)\alpha - \pi))} d\psi e^{y \cos((2k+2)\alpha - \psi)} \cos\left((k+1)\alpha - \frac{\psi}{2}\right). \quad (\text{F.12})$$

Comme on a $\varphi_0 \geq 0$, on remarque que

$$\max(2\varphi_0, \max(0, (2k+2)\alpha - \pi)) = \max(2\varphi_0, (2k+2)\alpha - \pi), \quad (\text{F.13})$$

et donc que

$$C_3^- = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} \int_{\max(0, (2k+2)\alpha - \pi)}^{\max(2\varphi_0, (2k+2)\alpha - \pi)} d\psi e^{y \cos((2k+2)\alpha - \psi)} \cos\left((k+1)\alpha - \frac{\psi}{2}\right) \quad (\text{F.14})$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} e^y \int_{\max(0, (2k+2)\alpha - \pi)}^{\max(2\varphi_0, (2k+2)\alpha - \pi)} d\psi e^{-2y \sin^2((k+1)\alpha - \psi/2)} \cos\left((k+1)\alpha - \frac{\psi}{2}\right). \quad (\text{F.15})$$

En appliquant le changement de variable $u = \sqrt{2y} \sin((k+1)\alpha - \psi/2)$, on obtient

$$C_3^- = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} \frac{e^y}{\sqrt{y}} \int_{\sqrt{2y} \sin[(k+1)\alpha - \max(\varphi_0, (k+1)\alpha - \pi/2)]}^{\sqrt{2y} \sin[(k+1)\alpha - \max(\varphi_0, (k+1)\alpha - \pi/2)]} du e^{-u^2}. \quad (\text{F.16})$$

En remarquant finalement que

$$z - \max(a, b) = z + \min(-a, -b) = \min(z - a, z - b), \quad (\text{F.17})$$

on en déduit

$$\begin{aligned} C_3^- &= (-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} \frac{e^y}{\sqrt{y}} \int_{\sqrt{2y} \sin[\min((k+1)\alpha - \varphi_0, \pi/2)]}^{\sqrt{2y} \sin[\min((k+1)\alpha - \varphi_0, \pi/2)]} du e^{-u^2} \\ &= (-1)^{k+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{e^y}{\sqrt{y}} \\ &\quad \times \left\{ \operatorname{erf}\left[\sqrt{2y} \sin\left(\min\left((k+1)\alpha, \frac{\pi}{2}\right)\right)\right] - \operatorname{erf}\left[\sqrt{2y} \sin\left(\min\left((k+1)\alpha - \varphi_0, \frac{\pi}{2}\right)\right)\right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

(F.19)

Pour finir, le calcul de l'intégrale C_3^+ s'appuie sur le même genre de manipulations que précédemment. On a

$$C_3^+ = (-1)^{k+1} 2 \int_0^{\max(0, \pi - (2k+2)\alpha)} d\psi e^{y \cos((2k+2)\alpha + \psi)} \cos\left((k+1)\alpha + \frac{\psi}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi\varphi_0}{\alpha}} dx' \delta\left(x' - \frac{\pi\psi}{2\alpha}\right) \quad (\text{F.20})$$

qui vaut 0 si $\max(0, \pi - (2k+2)\alpha) = 0$ (dans le cas où l'intervalle (iii) n'a pas besoin d'être sous-divisé, comme sur la figure 2.16(b)), c'est-à-dire si les deux bornes de l'intégrale sont égales. En se servant de cette idée, on peut réécrire de même

$$C_3^+ = (-1)^{k+1} 2 \int_{\min(0, \pi - (2k+2)\alpha)}^{\pi - (2k+2)\alpha} d\psi e^{y \cos((2k+2)\alpha + \psi)} \cos\left((k+1)\alpha + \frac{\psi}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi\varphi_0}{\alpha}} dx' \delta\left(x' - \frac{\pi\psi}{2\alpha}\right) \quad (\text{F.21})$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} \int_{\min(0, \pi - (2k+2)\alpha)}^{\min(2\varphi_0, \pi - (2k+2)\alpha)} d\psi e^{y \cos((2k+2)\alpha + \psi)} \cos\left((k+1)\alpha + \frac{\psi}{2}\right) \quad (\text{F.22})$$

$$= (-1)^{k+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{e^y}{\sqrt{y}} \times \left\{ \operatorname{erf}\left[\sqrt{2y} \sin\left(\min\left(\varphi_0 + (k+1)\alpha, \frac{\pi}{2}\right)\right)\right] - \operatorname{erf}\left[\sqrt{2y} \sin\left(\min\left((k+1)\alpha, \frac{\pi}{2}\right)\right)\right] \right\}. \quad (\text{F.23})$$

Notons que ce terme est bien nul si $(2k+2)\alpha \geq \pi$ car les deux minimums valent $\pi/2$.

G Transformée de Laplace inverse de la distribution du temps de couverture partielle

On calcule ici la transformée de Laplace inverse de l'équation (3.67) du texte principal

$$\hat{P}(s) \sim \frac{\Gamma(p+1+s\langle T \rangle)}{p! N^{s\langle T \rangle}}. \quad (\text{G.1})$$

Les pôles de $\hat{P}(s)$ sont ceux de la fonction Gamma, situés en des valeurs de s telles que $p+1+\langle T \rangle$ prend des valeurs entières négatives, c'est-à-dire en $s = (-n - p - 1)/\langle T \rangle$ avec $n \in \mathbb{N}$. La transformée de Laplace inverse de $\hat{P}(s)$ vaut donc

$$P_p(t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} ds e^{st} \hat{P}(s) \quad (\text{G.2})$$

où l'intégrale est effectuée le long de l'axe des ordonnées dans le plan complexe. Par ailleurs, la fonction $\hat{P}(s)$ tend vers zéro en module lorsque $|s| \rightarrow +\infty$ avec une partie réelle négative. En particulier,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}(R)} ds e^{st} \hat{P}(s) = 0 \quad (\text{G.3})$$

où $\mathcal{C}(R)$ désigne le demi-cercle de rayon R centré à l'origine du plan complexe à gauche de l'axe des ordonnées (voir figure G.1). En appliquant le théorème des résidus, on obtient donc

$$\begin{aligned} P_p(t) &= \int_{-i\infty}^{+i\infty} ds e^{st} \hat{P}(s) = \frac{1}{p!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \exp\left(-\frac{n+p+1}{\langle T \rangle} (t - \langle T \rangle \ln N)\right) \\ &= \frac{1}{p!} \exp\left(-(p+1) \frac{t - \langle T \rangle \ln N}{\langle T \rangle}\right) \exp\left[-\exp\left(-\frac{t - \langle T \rangle \ln N}{\langle T \rangle}\right)\right]. \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

On en déduit l'expression de la distribution du temps de couverture partielle renormalisé $x \equiv (t - \langle T \rangle \ln N)/\langle T \rangle$ annoncée dans le texte principal

$$\boxed{P_p(x) \sim \frac{1}{p!} \exp(-(p+1)x - e^{-x})}. \quad (\text{G.5})$$

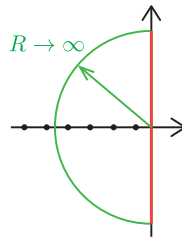


FIGURE G.1 – Contour utilisé pour le théorème des résidus. La partie en rouge donne la transformée de Laplace inverse de $\hat{P}(s)$, la partie en vert tend vers 0 lorsque son rayon R tend vers l'infini et les points représentent les pôles de $\hat{P}(s)$.

H Distribution du temps de premier passage pour les processus non-compacts étudiés

Dans cette annexe, nous vérifions que l'hypothèse d'une distribution des temps de premier passage exponentielle est correcte pour les processus non compacts étudiés. Nous avons supposé qu'une fois l'intégralité des sites couverts à l'exception d'un petit nombre k de sites, le temps de premier passage par chacun des k derniers sites partant du $N - k - 1^{\text{ème}}$ site visité suit une même loi exponentielle

$$F(t) = \frac{1}{\langle T \rangle} \exp \left(-\frac{t}{\langle T \rangle} \right) \quad (\text{H.1})$$

où $\langle T \rangle$ est le temps moyen global, c'est-à-dire le temps moyen de premier passage par la cible, moyenné sur le point de départ. Pour vérifier cette hypothèse, nous avons tracé sur la figure H.1 la distribution du temps de premier passage pour les processus étudiés dans le corps du texte⁵, pour un point de départ et une cible éloignés (a) et proches (b). Dans le premier cas, tous les processus suivent la distribution exponentielle (H.1), de même que dans le second cas, à l'exception des marches de Lévy et persistantes à 2D, pour lesquelles à la distribution exponentielle s'ajoute la contribution des trajectoires pour lesquelles la cible est trouvée quasiment immédiatement⁶ [Bénichou 2014b].

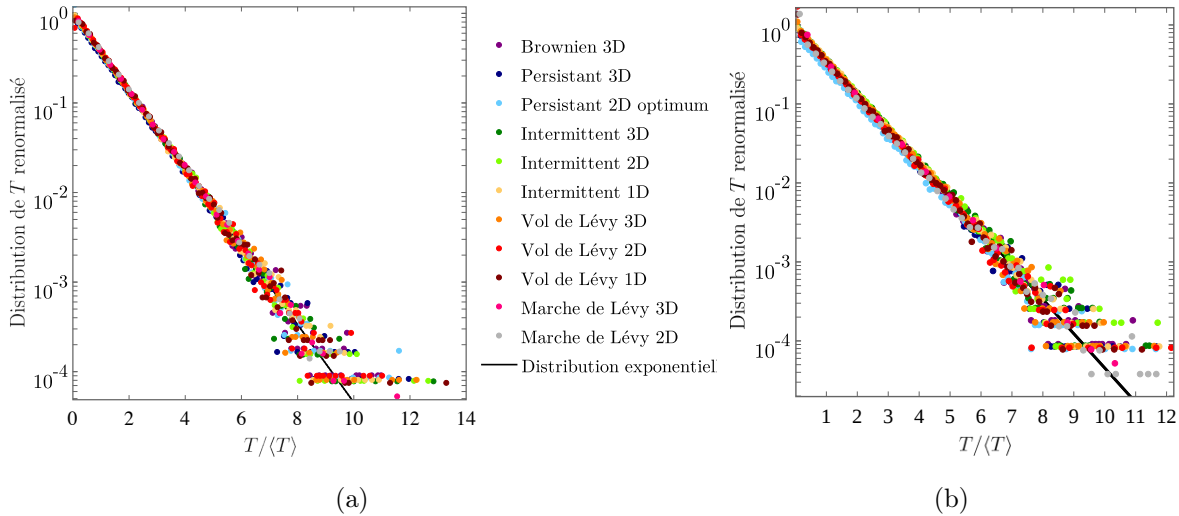


FIGURE H.1 – Distribution du temps de premier passage renormalisé par le temps moyen global, pour les processus étudiés dans le corps du texte. En (a), le point de départ et la cible sont très éloignés (respectivement au coin et au centre du réseau) et en (b), ils sont écartés d'une distance de 5 pas de réseau.

5. Avec les mêmes valeurs des paramètres que ceux pour lesquels a été tracée la distribution du temps de couverture complète

6. Ce qui arrive souvent avec ces deux processus : le marcheur a tendance à faire des excursions balistiques, donc a une chance non négligeable de trouver la cible directement.

I Analyse à petit vitesse de la probabilité conditionnelle de sortie d'une cage en expansion

Nous déterminons ici le développement de la probabilité conditionnelle de sortie $\mathcal{L}^e$ d'une cage en expansion à petite vitesse c . Pour cela, nous étudions tout d'abord le développement de l'intégrale intervenant dans l'équation (4.62) du texte principal

$$\mathcal{J} \equiv \int_{L_0}^{+\infty} \frac{dL}{L^{3/2}} \exp\left(-\frac{\alpha^2 c L}{4D} + \frac{n^2 \pi^2 D}{cL}\right). \quad (\text{I.1})$$

En effectuant le changement de variable $u = 1/L$, cette intégrale devient

$$\mathcal{J} = \int_0^{\frac{1}{L_0}} \frac{du}{\sqrt{u}} \exp\left(-\frac{\alpha^2 c}{4Du} + \frac{n^2 \pi^2 Du}{c}\right). \quad (\text{I.2})$$

L'intégrande est intégrable en $u \rightarrow 0$, mais en développant la fonction exponentielle à petit c à l'ordre 1, il ne l'est plus. On introduit donc une coupure pour régulariser l'intégrale

$$\mathcal{J} \simeq \int_0^{\frac{1}{L_0}} \frac{du}{\sqrt{u}} \exp\left(\frac{n^2 \pi^2 Du}{c}\right) - \frac{\alpha^2 c}{4D} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{L_0}} \frac{du}{u^{3/2}} \exp\left(\frac{n^2 \pi^2 Du}{c}\right). \quad (\text{I.3})$$

La première intégrale donne une fonction d'erreur imaginaire erfi, définie par

$$\text{erfi}(x) \equiv -i \operatorname{erf}(ix). \quad (\text{I.4})$$

La deuxième intégrale se calcule aisément par intégration par parties

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{L_0}} \frac{du}{u^{3/2}} \exp\left(\frac{n^2 \pi^2 Du}{c}\right) = \left[-\frac{2}{\sqrt{u}} \exp\left(\frac{n^2 \pi^2 Du}{c}\right)\right]_{\varepsilon}^{\frac{1}{L_0}} + \frac{2n^2 \pi^2 D}{c} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{L_0}} \frac{du}{\sqrt{u}} \exp\left(\frac{n^2 \pi^2 Du}{c}\right) \quad (\text{I.5})$$

et en remarquant que pour $c \rightarrow 0$ et $\varepsilon \rightarrow 0$, on a

$$\exp\left(\frac{n^2 \pi^2 D}{cL_0}\right) \gg \exp\left(\frac{n^2 \pi^2 D\varepsilon}{c}\right), \quad (\text{I.6})$$

on obtient finalement

$$\mathcal{J} \simeq \frac{1}{n} \sqrt{\frac{c}{\pi D}} \left(1 - \frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{2}\right) \operatorname{erfi}\left(n\pi \sqrt{\frac{D}{cL_0}}\right) + \frac{\alpha^2 c \sqrt{L_0}}{2D} \exp\left(\frac{n^2 \pi^2 D}{cL_0}\right) \quad (\text{I.7})$$

$$\simeq \exp\left(\frac{n^2 \pi^2 D}{cL_0}\right) \left[\frac{c\sqrt{L_0}}{\pi^2 n^2 D} + \left(1 - \frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{2}\right) \frac{L_0^{3/2} c^2}{2D^2 n^4 \pi^4}\right], \quad (\text{I.8})$$

où l'on a utilisé

$$\operatorname{erfi}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{\sqrt{\pi} x}. \quad (\text{I.9})$$

La suite du calcul est extrêmement proche de celui présenté dans le corps du texte, les sommes impliquées étant exactement identiques. On obtient donc finalement le même développement de la probabilité conditionnelle de sortie que dans le cas d'une cage en contraction, au signe près

$$\boxed{\mathcal{L}^e(x_0, L_0) = \frac{L_0 - x_0}{L_0} + \frac{cx_0}{6D} \frac{(L_0 - x_0)[(3\alpha - 1)L_0 - x_0]}{L_0^2} + o(c)} \quad (\text{I.10})$$

J Densité de première sortie d'un disque

Nous calculons dans cette annexe la transformée de Laplace inverse de l'expression suivante

$$\hat{F}(r, s) = \frac{I_0\left(\sqrt{\frac{s}{D}}r\right)}{I_0\left(\sqrt{\frac{s}{D}}R\right)} \quad (\text{J.1})$$

qui est la transformée de Laplace de la densité de premier passage par le bord d'un disque de rayon R pour un marcheur partant d'un rayon $r < R$ ⁷. La transformée de Laplace inverse de cette fonction est donnée par

$$F(r, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} ds e^{st} \frac{I_0\left(\sqrt{\frac{s}{D}}r\right)}{I_0\left(\sqrt{\frac{s}{D}}R\right)} \quad (\text{J.2})$$

qui est une intégrale le long de la ligne verticale $\text{Re}(s) = \gamma$ située à droite des pôles de l'intégrande dans le plan complexe. Ces pôles sont les zéros de $I_0\left(\sqrt{\frac{s}{D}}R\right)$, donnés par

$$s_k = -\frac{D}{R^2} j_k^2 \quad (\text{J.3})$$

avec j_k le $k^{\text{ème}}$ zéro de la fonction J_0 . Ces pôles s_k sont tous négatifs, on prend donc $\gamma = 0$. Pour calculer cette intégrale à l'aide du théorème des résidus, on complète cette droite par le demi-cercle de rayon $C \rightarrow +\infty$ centré en 0 situé à gauche de l'axe des ordonnées pour en faire un contour fermé (voir figure J.1). Sur la partie circulaire du contour, s a une partie réelle négative,

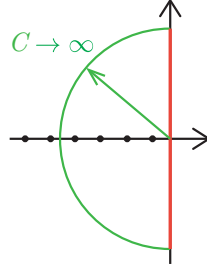


FIGURE J.1 – Contour utilisé pour le théorème des résidus. La partie en rouge donne la transformée de Laplace inverse de $\hat{F}(r, s)$, la partie en vert tend vers 0 lorsque son rayon C tend vers l'infini et les points représentent les pôles de $\hat{F}(r, s)$.

donc pour $|s| \rightarrow +\infty$, l'intégrande se comporte comme

$$e^{st} \frac{I_0\left(\sqrt{\frac{s}{D}}r\right)}{I_0\left(\sqrt{\frac{s}{D}}R\right)} \propto \exp\left(st + \sqrt{\frac{s}{D}}(r - R)\right) \quad (\text{J.4})$$

et tend donc vers 0 lorsque le rayon du contour tend vers l'infini. La densité de premier passage au temps t s'écrit donc

$$F(r, t) = 2i\pi \sum_{k=0}^{+\infty} \text{Res} \left(e^{st} \frac{I_0\left(\sqrt{\frac{s}{D}}r\right)}{I_0\left(\sqrt{\frac{s}{D}}R\right)}, s_k \right) \quad (\text{J.5})$$

7. Cette densité de premier passage n'est donnée dans [Redner 2001] qu'en transformée de Laplace.

où s_k est donné à l'équation (J.3) et $\text{Res}(f, z)$ désigne le résidu de la fonction f au point z . Pour f de la forme

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \quad (\text{J.6})$$

le résidu en z est donné par

$$\text{Res}(f, z) = \frac{f(z)}{g'(z)}. \quad (\text{J.7})$$

On a

$$I'_0(z) = I_1(z) \quad (\text{J.8})$$

et

$$I_0(iz) = J_0(z) \quad (\text{J.9})$$

$$I_1(iz) = iJ_1(z) \quad (\text{J.10})$$

d'où

$$\text{Res} \left(e^{st} \frac{I_0(\sqrt{\frac{s}{D}}r)}{I_0(\sqrt{\frac{s}{D}}R)}, -\frac{D}{R^2}j_k^2 \right) = \frac{2D}{R^2}j_k \exp \left(-\frac{Dtj_k^2}{R^2} \right) \frac{J_0(j_k \frac{r}{R})}{J_1(j_k)}. \quad (\text{J.11})$$

Finalement, on obtient l'expression de la densité de première sortie d'un disque de rayon R partant d'un rayon r

$$F(r, t) = \frac{2D}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} j_k e^{-Dtj_k^2/R^2} \frac{J_0(j_k \frac{r}{R})}{J_1(j_k)} \quad (\text{J.12})$$

qui permet d'obtenir la formule (5.29) du texte principal en prenant $r = R_k - a$ et $R = R_k$.

K Calcul du temps de vie moyen dans l'approximation circulaire

Ce calcul s'appuie sur la méthode de calcul du temps de vie moyen du marcheur aléatoire affamé présentée dans [Bénichou 2014a] pour le cas unidimensionnel. Le temps de vie moyen du marcheur s'obtient en partitionnant sur le nombre n de fois qu'il est revenu toucher le bord avant de mourir dans le désert

$$\langle \tau \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} (\langle \tau_1 \rangle + \langle \tau_2 \rangle + \cdots + \langle \tau_n \rangle + \mathcal{S}) P(n), \quad (\text{K.1})$$

où $\langle \tau_k \rangle$ est le temps moyen de retour au bord du désert de rayon $R_k = a\sqrt{k/\pi}$ lors de la $k^{\text{ème}}$ excursion dans le désert, conditionné par le retour du marcheur en un temps inférieur à sa capacité métabolique $\mathcal{S}$, et où le terme $\mathcal{S}$ correspond à l'excursion fatale au marcheur. $P(n)$ est la probabilité d'avoir touché n fois le bord avant de mourir, donnée par l'équation (5.38) du texte principal. Par définition, le temps moyen conditionnel $\langle \tau_k \rangle$ est le temps moyen de retour non conditionné, divisé par la probabilité d'être revenu au bord avant le temps $\mathcal{S}$

$$\langle \tau_k \rangle = \frac{\int_0^{\mathcal{S}} dt t F_k(t)}{\int_0^{\mathcal{S}} dt F_k(t)} = \frac{\int_0^{\mathcal{S}} dt t F_k(t)}{\mathcal{F}_k}, \quad (\text{K.2})$$

où F_k et $\mathcal{F}_k$ sont donnés par les équations (5.29) et (5.30). On définit $\mathcal{G}_k$ par

$$\mathcal{G}_k \equiv \int_0^{\mathcal{S}} dt t F_k(t) = \frac{2D\pi}{ka^2} \int_0^{\mathcal{S}} dt t \sum_{m=1}^{+\infty} j_m \frac{J_0(j_m(1 - \sqrt{\frac{\pi}{k}}))}{J_1(j_m)} e^{-\frac{\pi D}{ka^2} j_m^2 t}, \quad (\text{K.3})$$

avec j_m le $m^{\text{ème}}$ zéro de la fonction de Bessel J_0 . A grand k , on peut développer la fonction de Bessel

$$J_0\left(j_m\left(1 - \sqrt{\frac{\pi}{k}}\right)\right) \simeq j_m \sqrt{\frac{\pi}{k}} J_1(j_m) \quad (\text{K.4})$$

donc en réaliser l'intégration temporelle

$$\mathcal{G}_k \simeq \frac{2a^2}{D} \sqrt{\frac{k}{\pi}} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{j_m^2} \left[1 - \left(1 + \frac{\pi D j_m^2 \mathcal{S}}{ka^2} \right) e^{-\frac{\pi D \mathcal{S}}{ka^2} j_m^2} \right]. \quad (\text{K.5})$$

Comme vu dans le texte principal, le dénominateur de (K.2) vaut 1 à une correction exponentiellement petite en $\mathcal{S}$ près, donc

$$\tau_k \simeq \mathcal{G}_k. \quad (\text{K.6})$$

On définit ensuite $\mathcal{X}_n$ comme la somme des temps moyens des n premières excursions

$$\mathcal{X}_n \equiv \sum_{k=1}^n \tau_k. \quad (\text{K.7})$$

On convertit cette somme en intégrale, et en utilisant l'expression de $\mathcal{G}_k$ obtenue à l'équation (K.5)⁸, on obtient

$$\mathcal{X}_n \simeq \frac{2a^2}{D} \int_0^n dk \sqrt{\frac{k}{\pi}} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{j_m^2} \left[1 - \left(1 + \frac{\pi D j_m^2 \mathcal{S}}{ka^2} \right) e^{-\frac{\pi D \mathcal{S}}{ka^2} j_m^2} \right]. \quad (\text{K.8})$$

8. Qui est bien valable pour k réel.

En changeant de variable $u = ka^2/(\pi D\mathcal{S})$, on trouve que $\mathcal{X}(\theta)$, qui dépend maintenant d'une variable continue $\theta \equiv na^2/(\pi D\mathcal{S})$, vaut

$$\mathcal{X}(\theta) \simeq \frac{2\pi\sqrt{D}\mathcal{S}^{3/2}}{a} \int_0^\theta \frac{du}{\sqrt{u}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{u}{j_m^2} - \left(1 + \frac{u}{j_m^2} \right) e^{-\frac{j_m^2}{u}} \right]. \quad (\text{K.9})$$

En utilisant l'équation (K.1) et en transformant une nouvelle fois la somme en intégrale, il vient

$$\langle \tau \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{X}_n P(n) + \mathcal{S} \simeq \int_0^{+\infty} d\theta \mathcal{X}(\theta) P(\theta, \mathcal{S}) + \mathcal{S}. \quad (\text{K.10})$$

avec $P(\theta, \mathcal{S})$ donnée dans le texte principal à l'équation (5.39). On obtient enfin l'expression asymptotique du temps de vie moyen du marcheur aléatoire affamé dans l'approximation circulaire

$$\boxed{\langle \tau \rangle \simeq \mathcal{S} + \frac{2\pi\sqrt{D}\mathcal{S}^{3/2}}{a} \int_0^{+\infty} d\theta P(\theta, \mathcal{S}) \int_0^\theta \frac{du}{\sqrt{u}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{u}{j_m^2} - \left(1 + \frac{u}{j_m^2} \right) e^{-\frac{j_m^2}{u}} \right]} \quad (\text{K.11})$$

L Estimation qualitative de la moyenne du temps de vie et du nombre de sites distincts visités à une dimension

Cette estimation repose sur un principe similaire à celui présenté à deux dimensions dans le cadre de l'approximation circulaire en 5.2.1. A une dimension, le marcheur creuse un désert dont la longueur croît d'un pas de réseau a à chaque fois qu'il touche le bord du désert. On découpe à nouveau la trajectoire typique du marcheur entre trois étapes successives :

- (i) le marcheur creuse un désert de longueur L_c dangereuse,
- (ii) il revient n_2 fois au même bord du désert, qu'il ne peut plus traverser car il risque très fortement d'y mourir,
- (iii) il s'aventure finalement trop loin dans le désert et meurt.

Dans la phase (i), le marcheur touche indifféremment l'une ou l'autre des extrémités du désert, puisque la taille de celui-ci lui permet encore de le traverser sans mourir. Ce temps de traversée d'un désert de longueur L partant de l'une distance a d'une des extrémités vaut [Redner 2001]

$$t_{\text{trav}} = \frac{L^2 - a^2}{6D}. \quad (\text{L.1})$$

La longueur critique $L_c \equiv n_1 a$ du désert, avec n_1 le nombre moyen de sites distincts visités durant la phase (i), est donc atteinte lorsque ce temps de traversée devient de l'ordre de la capacité métabolique du marcheur

$$\frac{L_c^2 - a^2}{6D} = \mathcal{S}, \quad (\text{L.2})$$

ce qui donne, dans la limite de grand $\mathcal{S}$

$$L_c \simeq \sqrt{6D\mathcal{S}} \quad (\text{L.3})$$

et par conséquent le nombre moyen de sites distincts visités durant cette phase

$$n_1 \simeq \frac{\sqrt{6D\mathcal{S}}}{a}. \quad (\text{L.4})$$

Le temps moyen T_1 passé dans cette phase est donné par la somme des temps moyens des n_1 premières excursions dans le désert

$$T_1 = \sum_{k=1}^{n_1} t_k \quad (\text{L.5})$$

avec t_k le temps moyen pour atteindre l'une des deux extrémités d'un intervalle de taille ka en partant d'une distance a de l'un de ses bords

$$t_k = \frac{ka^2}{2D}. \quad (\text{L.6})$$

On en déduit

$$T_1 = \sum_{k=1}^{n_1} \frac{a^2 k}{2D} \simeq \frac{L_c^2}{4D} \simeq \frac{3\mathcal{S}}{2}. \quad (\text{L.7})$$

A partir de la fin de la phase (i), le marcheur meurt avec une forte probabilité s'il essaie de traverser le désert. Supposons, sans nuire à la généralité, que le marcheur se trouve au niveau de l'extrémité gauche du désert à l'issue de la phase (i). Nous allons estimer le nombre de fois n_2 qu'il va revenir à cette extrémité du désert avant de mourir lors de la phase (iii). Schématiquement, la phase (iii) correspond à la première excursion à partir du début de la phase (ii) où le marcheur "tente" de traverser le désert, c'est-à-dire à l'issue de laquelle il aurait touché le bord droit s'il n'avait pas eu la contrainte de sa capacité métabolique finie. Pour un marcheur sans contrainte, les probabilités pour qu'il touche finalement le bord gauche ou le bord droit d'un désert de taille L à l'issue de son excursion partant à une distance a du bord gauche valent

$$p_- = \frac{L - a}{L} \quad (\text{L.8})$$

$$p_+ = \frac{a}{L} \quad (\text{L.9})$$

et le temps conditionnel de premier passage pour atteindre le bord gauche du désert est

$$t_- = \frac{aL}{6D} \left(2 - \frac{a}{L} \right). \quad (\text{L.10})$$

La probabilité Π_k qu'un marcheur aléatoire sans contrainte revienne k fois sur le bord gauche avant de toucher le bord droit, étant initialement placé dans un désert de taille L_c à l'issue de la phase (i), est

$$\begin{aligned} \Pi_k &= \frac{L_c - a}{L_c} \times \frac{L_c}{L_c + a} \times \frac{L_c + a}{L_c + 2a} \times \dots \times \frac{L_c + (k-2)a}{L_c + (k-1)a} \times \frac{a}{L_c + ka} \\ &= \frac{a(L_c - a)}{(L_c + (k-1)a)(L_c + ka)}. \end{aligned} \quad (\text{L.11})$$

Les $k-1$ premiers facteurs de ce produit représentent les probabilités que le marcheur touche le bord gauche, ajoutant à chaque fois une longueur a au désert, et le dernier facteur est la probabilité de toucher le bord droit⁹. A grand k , on a $\Pi_k \propto k^{-2}$, donc le nombre moyen de retour au bord gauche, donné par $\sum_{k \geq 0} k \Pi_k$, est infini. Bien que ce temps moyen soit fini, le temps typique pour que cet événement se produise est fini. Le nombre n_2 de retours au bord gauche dans la phase (ii) peut par exemple être évalué grâce au nombre médian de retours, à défaut du nombre moyen,

$$\sum_{k=0}^{n_2} \Pi_k = \frac{1}{2}. \quad (\text{L.12})$$

On en déduit dans ce cas

$$\sum_{k=0}^{n_2} \frac{a(L_c - a)}{(L_c + (k-1)a)(L_c + ka)} = 1 - \frac{L_c - a}{L_c + n_2 a} = \frac{1}{2}. \quad (\text{L.13})$$

9. L'intervalle ayant alors atteint une longueur $L_c + ka$.

Le nombre typique de sites distincts visités lors de la phase (ii) vaut donc finalement

$$n_2 \sim \frac{L_c}{a} = n_1. \quad (\text{L.14})$$

La durée T_2 de cette phase est par conséquent la somme des durées des n_2 retours successifs au bord gauche

$$T_2 \simeq \sum_{k=n_1}^{n_1+n_2} t_k \simeq \sum_{k=n_1}^{n_1+n_2} \frac{ka^2}{3D} \simeq \frac{L_c^2}{2D} \simeq 3\mathcal{S}. \quad (\text{L.15})$$

Quant à la phase (iii), elle ne comporte aucune visite à un nouveau site, et dure exactement un temps $\mathcal{S}$.

La durée de vie typique d'une telle trajectoire est finalement

$$\tau \simeq T_1 + T_2 + T_3 \simeq 5.5\mathcal{S} \quad (\text{L.16})$$

qui donne bien le bon ordre de grandeur du temps de vie moyen du marcheur aléatoire affamé $\langle\tau\rangle \simeq 3,27.. \mathcal{S}$. Le nombre de sites distincts visités vaut à peu près

$$\langle\mathcal{N}\rangle \simeq n_1 + n_2 \simeq 2\frac{\sqrt{6D\mathcal{S}}}{a} \simeq 3.4641\mathcal{S} \quad (\text{L.17})$$

qui redonne également l'ordre de grandeur $\langle\mathcal{N}\rangle \simeq 2,90.. \sqrt{\mathcal{S}}$. On constate qu'à une dimension, les phases (i) et (ii) ont des durées de même ordre en $\mathcal{S}$ et que les nombres de sites distincts visités dans ces deux phases sont quasiment égaux, contrairement au cas bidimensionnel traité dans l'approximation circulaire, où la phase (i) domine les phases (ii) et (iii) pour leurs durées et le nombre de retours au bord du désert.

M Statistique de la quantité totale de nourriture collectée dans le cas naïf sans corrélations

Nous déterminons ici la moyenne et la variance de la quantité totale C_t de nourriture collectée par un marcheur au temps t dans un environnement où les ressources sont regroupées en parcelles. Il s'agit d'une somme aléatoire de variables aléatoires indépendantes N_i identiquement distribuées, dont le nombre de termes M_t est supposé en première approximation indépendant de la statistique des N_i

$$C_t = N_1 + \dots + N_{M_t}. \quad (\text{M.1})$$

Le nombre M_t correspond au nombre de parcelles visitées au temps t , la durée $\tau_i \equiv T_i + Z$ entre l'arrivée dans la parcelle i et l'arrivée dans la parcelle $i + 1$ étant donnée par la somme du temps T_i passé dans la parcelle i et le temps de transit entre parcelles Z qui est constant. Les variables τ_i sont indépendantes et identiquement distribuées. Si on note $\hat{\psi}(u)$ la transformée de Laplace de la distribution de τ_i et $\hat{\psi}_T(u)$ la transformée de Laplace de la distribution de T_i , on a simplement

$$\hat{\psi}(u) = \int_0^{+\infty} dt \Pr(T = t) e^{-u(t+Z)} = \hat{\psi}_T(u) e^{-uZ}. \quad (\text{M.2})$$

Connaissant la statistique de τ_i , la statistique du nombre aléatoire M_t de changements de parcelle intervenant en un temps t est connu [Hughes 1996]

$$\mathcal{L}_t \Pr(M_t = n) = \frac{(\hat{\psi}(u))^n (1 - \hat{\psi}(u))}{u} \quad (\text{M.3})$$

en notant $\mathcal{L}_t f$ la transformée de Laplace temporelle de la fonction f . En écrivant

$$\langle M_t \rangle \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr(M_t = n) n \quad (\text{M.4})$$

$$\langle M_t^2 \rangle \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr(M_t = n) n^2, \quad (\text{M.5})$$

et en prenant la transformée de Laplace de ces deux expressions, on obtient

$$\mathcal{L}_t \langle M_t \rangle = \frac{1 - \hat{\psi}(u)}{u} \sum_{n=0}^{+\infty} n (\hat{\psi}(u))^n = \frac{\hat{\psi}(u)}{u (1 - \hat{\psi}(u))} \quad (\text{M.6})$$

et

$$\mathcal{L}_t \langle M_t^2 \rangle = \frac{1 - \hat{\psi}(u)}{u} \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 (\hat{\psi}(u))^n = \frac{2\hat{\psi}(u)^2}{u (1 - \hat{\psi}(u))^2} + \frac{\hat{\psi}(u)}{u (1 - \hat{\psi}(u))}. \quad (\text{M.7})$$

On peut déduire du développement de ces transformées de Laplace à petit u le comportement à grand temps t de $\langle M_t \rangle$ et $\langle M_t^2 \rangle$. On a en développant (M.2) à petit u

$$\hat{\psi}(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} 1 - u(\langle T \rangle + Z) + \frac{u^2}{2} (\langle T^2 \rangle + 2\langle T \rangle Z + Z^2) \quad (\text{M.8})$$

d'où en développant (M.6) à l'ordre sous-dominant en u

$$\mathcal{L}_t \langle M_t \rangle \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{u^2(\langle T \rangle + Z)} + \frac{\text{Var}(T) - (\langle T \rangle + Z)^2}{2u(\langle T \rangle + Z)^2} \quad (\text{M.9})$$

et (M.7) également à l'ordre sous-dominant en u

$$\mathcal{L}_t \langle M_t^2 \rangle \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{u^3(\langle T \rangle + Z)^2} + \frac{2\text{Var}(T) - (\langle T \rangle + Z)^2}{u^2(\langle T \rangle + Z)^3}. \quad (\text{M.10})$$

En prenant la transformée de Laplace inverse de ces expressions, on trouve finalement

$$\langle M_t \rangle \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t}{\langle T \rangle + Z} + \frac{2\text{Var}(T) - (\langle T \rangle + Z)^2}{2(\langle T \rangle + Z)^3} \quad (\text{M.11})$$

$$\langle M_t^2 \rangle \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^2}{(\langle T \rangle + Z)^2} + \frac{2\text{Var}(T) - (\langle T \rangle + Z)^2}{(\langle T \rangle + Z)^3} t. \quad (\text{M.12})$$

En combinant ces deux expressions, on obtient également le comportement dominant en temps de la variance de M_t ¹⁰

$$\text{Var}(M_t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\text{Var}(T)}{(\langle T \rangle + Z)^3} t. \quad (\text{M.13})$$

Maintenant que nous connaissons la statistique de M_t en fonction de celle de T , nous obtenons les expressions de la moyenne et la variance du nombre total C_t d'unités de nourriture consommées au temps t en fonction des statistiques de M_t et N ¹¹ (voir par exemple [Robbins 1948])

$$\langle C_t \rangle = \langle N \rangle \langle M_t \rangle \quad (\text{M.14})$$

$$\text{Var}(C_t) = \text{Var}(M_t) \langle N \rangle^2 + \text{Var}(N) \langle M_t \rangle. \quad (\text{M.15})$$

Ces identités se démontrent à partir de la relation plus générale qui relie les fonctions génératrices de ces variables aléatoires, où la fonction génératrice G_X d'une variable aléatoire X à valeurs entières positives est définie de la manière suivante

$$G_X(\xi) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \text{Pr}(X = n) \xi^n. \quad (\text{M.16})$$

On peut en effet montrer que

$$G_{C_t}(\xi) = G_{M_t} \circ G_N(\xi) \quad (\text{M.17})$$

et en utilisant les propriétés aisément démontrables

$$G'_X(1) = \langle X \rangle \quad (\text{M.18})$$

$$G''_X(1) = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle, \quad (\text{M.19})$$

10. Les contributions en temps apportées par l'ordre dominant en u des transformées de Laplace de $\langle M_t \rangle$ et $\langle M_t^2 \rangle$ s'annulent, c'est pourquoi nous avons été jusqu'à l'ordre sous-dominant dans (M.9) et (M.10).

11. La statistique de N désigne la statistique des variables N_i , qui est la même pour chacune.

on obtient les relations (M.14) et (M.15). En utilisant ces relations, on obtient finalement

$$\langle C_t \rangle \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \langle N \rangle \frac{t}{\langle T \rangle + Z} \quad (\text{M.20})$$

et

$$\text{Var}(C_t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{\text{Var}(T) \langle N \rangle^2}{(\langle T \rangle + Z)^3} + \frac{\text{Var}(N)}{\langle T \rangle + Z} \right) t. \quad (\text{M.21})$$

Comme attendu puisque l'on a supposé que les statistiques de N et de M_t (et donc de T) sont indépendantes, ces expressions ne font pas intervenir de corrélations entre N et T . On peut tester ces résultats, et donc la validité de l'hypothèse de l'indépendance des statistiques de N et M_t , à l'aide de simulations numériques pour un exemple de processus fixant les statistiques de T et N . Pour cela, on suppose que le choix adopté par le marcheur pour changer de parcelles est de type temps d'abandon, c'est-à-dire qu'il change de parcelle lorsqu'il est resté $\mathcal{S}$ pas consécutifs sans trouver de nourriture. On constate avec ces résultats numériques que l'expression pour la moyenne de la quantité totale C_t de nourriture consommée au temps t semble bonne, mais pas celle pour la variance, qui surestime beaucoup la variance réelle (voir figure M.1).

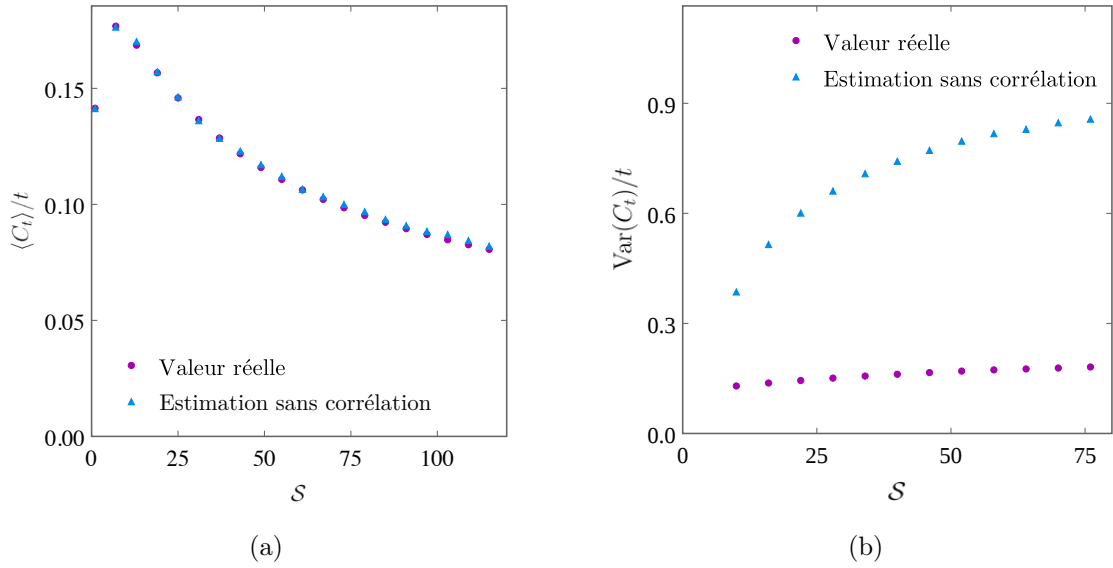


FIGURE M.1 – Comparaison entre la moyenne (a) et la variance (b) de C_t obtenues par simulations numériques (ronds) et l'estimation numérique des expressions (M.20) et (M.21) (triangles). L'approximation de décorrélation marche donc bien pour la moyenne mais pas pour la variance, qu'elle surestime notablement.

Il faut donc explicitement tenir compte des corrélations entre M_t et les N_i pour décrire correctement la statistique de C_t (voir paragraphe 5.4.2.2).

N Probabilité jointe du temps passé dans une parcelle et de la quantité de nourriture collectée en transformée de Laplace

On détermine ici la double transformée de Laplace de la probabilité jointe du temps passé dans une parcelle et de la quantité de nourriture qui y est récoltée dans la limite d'un temps d'abandon $\mathcal{S}$ grand, définie par

$$\langle e^{-sT-pN} \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n) e^{-pn-s\mathcal{S}} \prod_{k=1}^n \langle e^{-sR_k} \rangle, \quad (\text{N.1})$$

où

$$\langle e^{-sR_k} \rangle = \frac{\int_0^{\mathcal{S}} dt e^{-st} F_k(t)}{\int_0^{\mathcal{S}} dt F_k(t)} \quad (\text{N.2})$$

avec la densité de première sortie $F_k(t)$ au temps t d'un intervalle de taille $(k+1)a$ partant d'une distance a du bord de l'intervalle, qui vaut

$$F_k(t) = \frac{4\pi D}{(ka)^2} \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \sin \frac{(2j+1)\pi}{k} \exp \left[- \left(\frac{(2j+1)\pi}{ka} \right)^2 Dt \right]. \quad (\text{N.3})$$

Le dénominateur de (N.2) correspond à la probabilité de trouver l'un des bords de cet intervalle en moins de $\mathcal{S}$ pas, qui tend vers 1 à une correction exponentiellement petite près lorsque $\mathcal{S}$ devient grand. Dans cette limite, on a donc

$$\langle e^{-sR_k} \rangle \sim \int_0^{\mathcal{S}} dt e^{-st} F_k(t). \quad (\text{N.4})$$

Par ailleurs, lorsque le temps d'abandon $\mathcal{S}$ est grand, le nombre moyen d'unités de nourriture récoltées dans la parcelle est grand¹². Le temps R_k entre deux découvertes successives de nourriture est donc négligeable devant le temps total T passé dans la parcelle. Le domaine de la variable de Laplace s où $\langle e^{-sT} \rangle$ n'est pas négligeable est tel que $s\mathcal{S} \ll 1$. On a donc $\langle e^{-sR_k} \rangle \simeq 1$ dans la limite grand $\mathcal{S}$.

Déterminons

$$U_n = \prod_{k=1}^n \langle e^{-sR_k} \rangle \quad (\text{N.5})$$

qui est un produit d'un grand nombre de termes proches de 1. Pour cette raison, on calcule son logarithme. On a

$$\begin{aligned} \ln U_n &= \sum_{k=1}^n \ln \langle e^{-sR_k} \rangle = \sum_{k=1}^n \ln (1 + \langle e^{-sR_k} - 1 \rangle) = \sum_{k=1}^n \ln \left[1 + \int_0^{\mathcal{S}} dt (e^{-st} - 1) F_k(t) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \ln \left[1 + \frac{4\pi^2 D}{k^3 a^2} \sum_{j=0}^{+\infty} (2j+1)^2 \left(\frac{1 - e^{-s\mathcal{S} - \frac{(2j+1)^2 \pi^2 D \mathcal{S}}{k^2 a^2}}}{s + \frac{(2j+1)^2 \pi^2 D}{k^2 a^2}} - \frac{1 - e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2 D \mathcal{S}}{k^2 a^2}}}{\frac{(2j+1)^2 \pi^2 D}{k^2 a^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{N.6})$$

12. Pour rappel, il vaut environ $2.90 \cdot \sqrt{\mathcal{S}}$, et le temps moyen passé dans la parcelle environ $3.27 \cdot \mathcal{S}$.

Comme expliqué ci-dessus, l'argument du logarithme est proche de 1, donc en le développant, on obtient

$$\ln U_n = \sum_{k=1}^n \frac{4\pi^2 D}{k^3 a^2} \sum_{j=0}^{+\infty} (2j+1)^2 \left(\frac{1 - e^{-sS - \frac{(2j+1)^2 \pi^2 D S}{k^2 a^2}}}{s + \frac{(2j+1)^2 \pi^2 D}{k^2 a^2}} - \frac{1 - e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2 D S}{k^2 a^2}}}{\frac{(2j+1)^2 \pi^2 D}{k^2 a^2}} \right). \quad (\text{N.7})$$

En passant à la limite continue¹³ et en introduisant

$$u = ak/(\pi\sqrt{DS}) \quad (\text{N.8})$$

$$\theta = an/(\pi\sqrt{DS}), \quad (\text{N.9})$$

on obtient

$$\ln U(\theta) \simeq 4 \int_0^\theta \frac{du}{u} \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\frac{1 - e^{-\frac{(2j+1)^2}{u^2} - sS}}{1 + \frac{u^2 s S}{(2j+1)^2}} - \left(1 - e^{-\frac{(2j+1)^2}{u^2}} \right) \right]. \quad (\text{N.10})$$

Par ailleurs, la distribution $P(N = n)$ intervenant dans l'équation (N.1) a été déterminée dans [Bénichou 2014a] pour la même variable renormalisée θ

$$Q(\theta) = \frac{4}{\theta} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-(2j+1)^2/\theta^2} \exp \left[-2 \sum_{k=0}^{+\infty} E_1 \left(\frac{(2k+1)^2}{\theta^2} \right) \right], \quad (\text{N.11})$$

E_1 désignant la fonction exponentielle intégrale. La double transformée de Laplace de la probabilité jointe de (T, N) est donc finalement

$$\langle e^{-sT - pN} \rangle = \int_0^{+\infty} d\theta Q(\theta) e^{-p\pi\theta\sqrt{\frac{S}{2}} - sS} \times \exp \left\{ 4 \int_0^\theta \frac{du}{u} \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\frac{1 - e^{-\frac{(2j+1)^2}{u^2} - sS}}{1 + \frac{u^2 s S}{(2j+1)^2}} - \left(1 - e^{-\frac{(2j+1)^2}{u^2}} \right) \right] \right\} \quad (\text{N.12})$$

On remarque que la transformée de Laplace $\langle e^{-sT} \rangle$ de la loi marginale du temps T s'obtient aisément à partir de l'expression précédente en prenant $p = 0$.

13. Donc en approximant la somme sur k par une intégrale.

O Expression asymptotique des moments du temps passé dans une parcelle et de la quantité de nourriture collectée

Nous avons obtenu dans l'annexe précédente l'expression exacte de la double transformée de Laplace $\langle e^{-sT-pN} \rangle$ de la probabilité jointe du temps T passé dans une parcelle et de la quantité N de nourriture qui y est collectée

$$\begin{aligned} \langle e^{-sT-pN} \rangle &= \int_0^{+\infty} d\theta Q(\theta) e^{-p\pi\theta\sqrt{\frac{S}{2}}-sS} \\ &\times \exp \left\{ 4 \int_0^\theta \frac{du}{u} \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\frac{1 - e^{-\frac{(2j+1)^2}{u^2}-sS}}{1 + \frac{u^2 s S}{(2j+1)^2}} - \left(1 - e^{-\frac{(2j+1)^2}{u^2}} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{O.1})$$

où la probabilité marginale de N est donnée pour la variable renormalisée $\theta = an/(\pi\sqrt{DS})$ par

$$Q(\theta) = \frac{4}{\theta} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-(2j+1)^2/\theta^2} \exp \left[-2 \sum_{k=0}^{+\infty} E_1 \left(\frac{(2k+1)^2}{\theta^2} \right) \right]. \quad (\text{O.2})$$

On peut extraire de ces expressions le comportement asymptotique de tous les moments de T , de N et de leurs produits. L'objectif étant de déterminer le comportement asymptotique de la moyenne et de la variance de la quantité totale C_t de nourriture collectée dans les parcelles au temps t , dont nous avons obtenu les expressions suivantes à grand temps t

$$\langle C_t \rangle \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\langle N \rangle}{\langle T \rangle + Z} t, \quad (\text{O.3})$$

$$\text{Var}(C_t) \equiv \langle C_t^2 \rangle - \langle C_t \rangle^2 \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \left[\frac{\langle N \rangle^2 \text{Var}(T)}{(\langle T \rangle + Z)^3} + \frac{\text{Var}(N)}{\langle T \rangle + Z} - \frac{2\langle N \rangle \text{Cov}(N, T)}{(\langle T \rangle + Z)^2} \right] t, \quad (\text{O.4})$$

nous devons maintenant déterminer le comportement asymptotique de $\langle N \rangle$, $\langle T \rangle$, $\text{Var}(N)$, $\text{Var}(T)$ et $\langle NT \rangle$.

Pour les moments de N , on obtient trivialement leur comportement asymptotique à partir de la distribution $Q(\theta)$

$$\langle N \rangle = \frac{\pi}{a} \sqrt{DS} \int_0^{+\infty} d\theta \theta Q(\theta) \equiv K_1 \sqrt{S} \quad (\text{O.5})$$

$$\langle N^2 \rangle = \frac{\pi^2 DS}{a^2} \int_0^{+\infty} d\theta \theta^2 Q(\theta) \quad (\text{O.6})$$

d'où

$$\text{Var}(N) = \frac{\pi^2 DS}{a^2} \left[\int_0^{+\infty} d\theta \theta^2 Q(\theta) - \left(\int_0^{+\infty} d\theta \theta Q(\theta) \right)^2 \right] \equiv K_4 S. \quad (\text{O.7})$$

Les valeurs de $\langle T \rangle$, $\text{Var}(T)$ et $\langle NT \rangle$ s'obtiennent en développant l'expression (O.1) à petit s

(et petit p pour $\langle NT \rangle$). On a

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-\frac{(2j+1)^2}{u^2} - s\mathcal{S}}}{1 + \frac{u^2 s\mathcal{S}}{(2j+1)^2}} - \left(1 - e^{-\frac{(2j+1)^2}{u^2}}\right) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} s\mathcal{S} \left[\left(1 + \frac{u^2}{(2j+1)^2}\right) e^{-\frac{(2j+1)^2}{u^2}} - \frac{u^2}{(2j+1)^2} \right] \\ + s^2 \mathcal{S}^2 \left[\frac{u^4}{(2j+1)^4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{u^2}{(2j+1)^2} + \frac{u^4}{(2j+1)^4}\right) e^{-\frac{(2j+1)^2}{u^2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{O.8})$$

donc

$$\begin{aligned} \langle e^{-sT-pN} \rangle \underset{s,p \rightarrow 0}{\sim} \left(1 - s\mathcal{S} + \frac{s^2}{2}\mathcal{S}^2\right) \int_0^{+\infty} d\theta Q(\theta) \left(1 - p \frac{\pi\sqrt{D\mathcal{S}\theta}}{a}\right) \\ \times \left(1 + s\mathcal{S}\mathcal{A}(\theta) + s^2\mathcal{S}^2 \frac{2\mathcal{B}(\theta) + \mathcal{A}^2(\theta)}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{O.9})$$

avec

$$\mathcal{A}(\theta) \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} \int_0^\theta du \frac{4}{u} \left[\left(1 + \frac{u^2}{(2j+1)^2}\right) e^{-\frac{(2j+1)^2}{u^2}} - \frac{u^2}{(2j+1)^2} \right] \quad (\text{O.10})$$

et

$$\mathcal{B}(\theta) \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} \int_0^\theta du \frac{4}{u} \left[\frac{u^4}{(2j+1)^4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{u^2}{(2j+1)^2} + \frac{u^4}{(2j+1)^4}\right) e^{-\frac{(2j+1)^2}{u^2}} \right]. \quad (\text{O.11})$$

Puisque l'on a d'autre part

$$\langle e^{-sT-pN} \rangle \underset{s,p \rightarrow 0}{\sim} 1 - s\langle T \rangle - p\langle N \rangle + sp\langle TN \rangle + \frac{s^2}{2}\langle T^2 \rangle, \quad (\text{O.12})$$

on obtient par identification pour les moments de T

$$\langle T \rangle = \left[1 - \int_0^{+\infty} d\theta Q(\theta) \mathcal{A}(\theta) \right] \mathcal{S} \equiv K_2 \mathcal{S} \quad (\text{O.13})$$

$$\langle T^2 \rangle = \left[1 + 2 \int_0^{+\infty} d\theta Q(\theta) \left(\mathcal{B}(\theta) + \frac{1}{2} \mathcal{A}^2(\theta) - \mathcal{A}(\theta) \right) \right] \mathcal{S}^2 \quad (\text{O.14})$$

d'où

$$\text{Var}(T) = \langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2 = \left[\int_0^{+\infty} d\theta Q(\theta) (2\mathcal{B}(\theta) + \mathcal{A}^2(\theta)) - \left(\int_0^{+\infty} d\theta Q(\theta) \mathcal{A}(\theta) \right)^2 \right] \mathcal{S}^2. \quad (\text{O.15})$$

On obtient de même

$$\langle NT \rangle = \frac{\pi}{a} \sqrt{D\mathcal{S}^3} \int_0^{+\infty} d\theta Q(\theta) \theta (1 - \mathcal{A}(\theta)) \quad (\text{O.16})$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{Cov}(N, T) &= \langle NT \rangle - \langle N \rangle \langle T \rangle \\ &= \frac{\pi}{a} \sqrt{D\mathcal{S}^3} \int_0^{+\infty} d\theta Q(\theta) \theta \left[\int_0^{+\infty} d\varphi Q(\varphi) \mathcal{A}(\varphi) - \mathcal{A}(\theta) \right]. \end{aligned} \quad (\text{O.17})$$

192 Annexe O. Expression asymptotique des moments du temps passé dans une...

En rassemblant d'une part les équations (O.3) et (O.4) et d'autre part les expressions asymptotiques des moments de N et T (O.13), (O.15), (O.5), (O.7) et (O.17), on obtient

$$\frac{\langle C_t \rangle}{t} \underset{s \gg 1}{\sim} \frac{K_1 \sqrt{\mathcal{S}}}{K_2 \mathcal{S} + Z} \quad (\text{O.18})$$

$$\frac{\text{Var}(C_t)}{t} \underset{s \gg 1}{\sim} \left[\frac{K_3 \mathcal{S}^3}{(K_2 \mathcal{S} + Z)^3} + \frac{K_4 \mathcal{S}}{K_2 \mathcal{S} + Z} - \frac{K_5 \mathcal{S}^2}{(K_2 \mathcal{S} + Z)^2} \right] \quad (\text{O.19})$$

avec

$$K_1 \equiv \frac{\pi}{a} \sqrt{D} \int_0^{+\infty} d\theta \theta Q(\theta) \simeq 2.90.. \quad (\text{O.20})$$

$$K_2 \equiv 1 - \int_0^{+\infty} d\theta Q(\theta) \mathcal{A}(\theta) \simeq 3.27.. \quad (\text{O.21})$$

$$K_3 \equiv \frac{\pi^2 D}{a^2} \left[\int_0^{+\infty} d\psi \psi Q(\psi) \right]^2 \quad (\text{O.22})$$

$$\times \left[\int_0^{+\infty} d\theta Q(\theta) (2\mathcal{B}(\theta) + \mathcal{A}^2(\theta)) - \left(\int_0^{+\infty} d\theta Q(\theta) \mathcal{A}(\theta) \right)^2 \right] \simeq 16.1.. \quad (\text{O.23})$$

$$K_4 \equiv \frac{\pi^2 D}{a^2} \left[\int_0^{+\infty} d\theta \theta^2 Q(\theta) - \left(\int_0^{+\infty} d\theta \theta Q(\theta) \right)^2 \right] \simeq 1.78.. \quad (\text{O.24})$$

$$K_5 \equiv 2 \frac{\pi^2 D}{a^2} \int_0^{+\infty} d\psi \psi Q(\psi) \int_0^{+\infty} d\theta Q(\theta) \theta \left[\int_0^{+\infty} d\varphi Q(\varphi) \mathcal{A}(\varphi) - \mathcal{A}(\theta) \right] \simeq 8.51.. \quad (\text{O.25})$$

où l'on a pris pour l'évaluation numérique $D = a^2/2$ puisqu'il s'agit d'une marche aléatoire sur un réseau unidimensionnel de pas a .

Bibliographie

- [Abad 2013] E Abad, SB Yuste et Katja Lindenberg. *Evanescent continuous-time random walks*. Phys. Rev. E, vol. 88, no. 6, page 062110, 2013. (Cité en page [102](#).)
- [Abramowitz 2012] Milton Abramowitz et Irene A Stegun. Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables. Courier Dover Publications, 2012. (Cité en pages [158](#) et [164](#).)
- [Aldous 1983] David J Aldous. *On the time taken by random walks on finite groups to visit every state*. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, vol. 62, no. 3, pages 361–374, 1983. (Cité en pages [48](#), [49](#) et [65](#).)
- [Aldous 1989] D.J. Aldous. *An Introduction to Covering Problems for Random Walks on Graphs*. J. Theoretical Probab., vol. 2, pages 87–89, 1989. (Cité en page [49](#).)
- [Bachir 1983] M. El Bachir. *L’enveloppe convexe du mouvement brownien*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1983. (Cité en page [8](#).)
- [Barton 1989] Gabriel Barton. Elements of green’s functions and propagation. Clarendon Press, 1989. (Cité en page [40](#).)
- [Bartumeus 2005] Frederic Bartumeus, M G E da Luz, GM Viswanathan et Jordi Catalan. *Animal search strategies: a quantitative random-walk analysis*. Ecology, vol. 86, no. 11, pages 3078–3087, 2005. (Cité en page [8](#).)
- [Belius 2013] David Belius. *Gumbel fluctuations for cover times in the discrete torus*. Probability Theory and Related Fields, vol. 157, no. 3-4, pages 635–689, 2013. (Cité en pages [49](#), [65](#) et [66](#).)
- [Bender 1999] Carl M Bender et Steven A Orszag. Advanced mathematical methods for scientists and engineers i. Springer Science & Business Media, 1999. (Cité en pages [28](#) et [41](#).)
- [Benhamou 2007] Simon Benhamou. *How many animals really do the Levy walk?* Ecology, vol. 88, pages 1962–1969, 2007. (Cité en page [59](#).)
- [Bénichou 2005] O. Bénichou, M. Coppey, M. Moreau, P-H. Suet et R. Voituriez. *Optimal Search Strategies for Hidden Targets*. Phys. Rev. Lett., vol. 94, page 198101, May 2005. (Cité en pages [2](#), [59](#) et [79](#).)
- [Bénichou 2010] O Bénichou, C Chevalier, J Klafter, B Meyer et R Voituriez. *Geometry-controlled kinetics*. Nat Chem, vol. 2, no. 6, pages 472–7, Juin 2010. (Cité en page [48](#).)
- [Bénichou 2011] O Bénichou, C Loverdo, M Moreau et R Voituriez. *Intermittent search strategies*. Reviews of Modern Physics, vol. 83, no. 1, page 81, 2011. (Cité en pages [2](#), [48](#), [59](#) et [126](#).)
- [Bénichou 2014a] Olivier Bénichou et S Redner. *Depletion-Controlled Starvation of a Diffusing Forager*. Phys. Rev. Lett., vol. 113, no. 23, page 238101, 2014. (Cité en pages [3](#), [102](#), [103](#), [104](#), [110](#), [112](#), [113](#), [114](#), [119](#), [134](#), [135](#), [136](#), [138](#), [142](#), [180](#) et [189](#).)
- [Bénichou 2014b] Olivier Bénichou et R Voituriez. *From first-passage times of random walks in confinement to geometry-controlled kinetics*. Physics Reports, vol. 539, no. 4, pages 225–284, 2014. (Cité en pages [48](#), [62](#) et [176](#).)

- [Berg 1993] Howard C Berg. Random walks in biology. Princeton University Press, 1993. (Cité en pages 8 et 48.)
- [Bonner 1987] RF Bonner, R Nossal, S Havlin et GH Weiss. *Model for photon migration in turbid biological media*. J. Opt. Soc. Am. A, vol. 4, no. 3, pages 423–432, 1987. (Cité en page 102.)
- [Bray 2007a] Alan J Bray et Richard Smith. *Survival of a diffusing particle in an expanding cage*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, vol. 40, no. 36, page 10965, 2007. (Cité en pages 85 et 92.)
- [Bray 2007b] Alan J Bray et Richard Smith. *The survival probability of a diffusing particle constrained by two moving, absorbing boundaries*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, vol. 40, no. 10, page F235, 2007. (Cité en pages 85, 86, 87, 89 et 91.)
- [Bray 2013] Alan J. Bray, Satya N. Majumdar et Grégory Schehr. *Persistence and first-passage properties in nonequilibrium systems*. Advances in Physics, vol. 62, no. 3, pages 225–361, 2013. (Cité en page 48.)
- [Brummelhuis 1991] M. J. A. M. Brummelhuis et H. J. Hilhorst. *Covering of a finite lattice by a random walk*. Physica A: Statistical and Theoretical Physics, vol. 176, no. 3, pages 387–408, Septembre 1991. (Cité en pages 49, 65 et 81.)
- [Brummelhuis 1992] MJAM Brummelhuis et HJ Hilhorst. *How a random walk covers a finite lattice*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 185, no. 1, pages 35–44, 1992. (Cité en pages 61 et 81.)
- [Brychkov 1986] Yu. A. Brychkov et A. P. Prudnikov. Integral transforms of generalized functions. Taylor and Francis, 1986. (Cité en pages 161 et 167.)
- [Campos 2015] D Campos, E Abad, V Méndez, SB Yuste et K Lindenberg. *Optimal search strategies of space-time coupled random walkers with finite lifetimes*. Physical Review E, vol. 91, no. 5, page 052115, 2015. (Cité en page 102.)
- [Cauchy 1832] A Cauchy. *La rectification des courbes*. Memoire de l’Académie des Sciences, vol. 96, pages 158–177, 1832. (Cité en page 15.)
- [Charnov 1973] Eric L. Charnov. *Optimal foraging: some theoretical explorations*. PhD thesis, University of Washington, 1973. (Cité en page 126.)
- [Charnov 1976] Eric L Charnov. *Optimal foraging, the marginal value theorem*. Theoretical population biology, vol. 9, no. 2, pages 129–136, 1976. (Cité en page 125.)
- [Cohen 2007] Jonathan D Cohen, Samuel M McClure et Angela J Yu. *Should I stay or should I go ? How the human brain manages the trade-off between exploitation and exploration*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London B: Biological Sciences, vol. 362, no. 1481, pages 933–942, 05 2007. (Cité en page 128.)
- [Comtet 2003] Alain Comtet et Jean Desbois. *Brownian motion in wedges, last passage time and the second arc-sine law*. Journal of Physics A: Mathematical and General, vol. 36, no. 17, page L255, 2003. (Cité en page 32.)
- [Condamin 2007] S Condamin, O Bénichou, V Tejedor, R Voituriez et J Klafter. *First-passage times in complex scale-invariant media*. Nature, vol. 450, no. 7166, pages 77–80, Novembre 2007. (Cité en page 48.)

- [Coutinho 1994] K. R. Coutinho, M. D. Coutinho-Filho, M. A. F. Gomes et A. M. Nemirovsky. *Partial and random lattice covering times in two dimensions*. Phys. Rev. Lett., vol. 72, pages 3745–3749, Jun 1994. (Cité en page 50.)
- [Dembo 2004] Amir Dembo, Yuval Peres, Jay Rosen et Ofer Zeitouni. *Cover Times for Brownian Motion and Random Walks in Two Dimensions*. Annals of Mathematics, vol. 160, no. 2, pages 433–464, Septembre 2004. (Cité en page 49.)
- [Ding 2012] Jian Ding. *On cover times for 2D lattices*. Electron. J. Probab., vol. 17, no. 45, pages 1–18, Juin 2012. (Cité en page 49.)
- [Dumonteil 2013] Eric Dumonteil, Satya N Majumdar, Alberto Rosso et Andrea Zoia. *Spatial extent of an outbreak in animal epidemics*. Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 110, no. 11, pages 4239–4244, 2013. (Cité en page 9.)
- [Dy 2008] Diandrew Dy et Jose Esguerra. *First-passage-time distribution for diffusion through a planar wedge*. Physical Review E, vol. 78, no. 6, 2008. (Cité en pages 33, 39 et 40.)
- [Dy 2013] Diandrew Dy et Jose Esguerra. *First-passage characteristics of biased diffusion in a planar wedge*. Physical Review E, vol. 88, no. 1, 2013. (Cité en page 33.)
- [Elf 2007] Johan Elf, Gene-Wei Li et X Sunney Xie. *Probing transcription factor dynamics at the single-molecule level in a living cell*. Science, vol. 316, no. 5828, pages 1191–1194, 2007. (Cité en page 48.)
- [Erickson 1976] Ralph O Erickson. *Modeling of plant growth*. Annual Review of Plant Physiology, vol. 27, no. 1, pages 407–434, 1976. (Cité en page 114.)
- [Feller 1968] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. volume i. John Wiley & Sons London-New York-Sydney-Toronto, 1968. (Cité en pages 1, 13, 49 et 66.)
- [Fisher 1988] Michael E Fisher et Martin P Gelfand. *The reunions of three dissimilar vicious walkers*. Journal of statistical physics, vol. 53, no. 1-2, pages 175–189, 1988. (Cité en page 32.)
- [Gardiner 1985] CW Gardiner. *Handbook of stochastic processes*, 1985. (Cité en page 85.)
- [Gillespie 1976] Daniel T Gillespie. *A general method for numerically simulating the stochastic time evolution of coupled chemical reactions*. Journal of computational physics, vol. 22, no. 4, pages 403–434, 1976. (Cité en page 69.)
- [Giuggioli 2011] Luca Giuggioli, Jonathan R Potts et Stephen Harris. *Animal interactions and the emergence of territoriality*. PLoS computational biology, vol. 7, no. 3, page e1002008, 2011. (Cité en page 8.)
- [Godrèche 2001] C Godrèche et JM Luck. *Statistics of the occupation time of renewal processes*. Journal of Statistical Physics, vol. 104, no. 3-4, pages 489–524, 2001. (Cité en page 130.)
- [Graham 1972] Ronald L. Graham. *An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set*. Information processing letters, vol. 1, no. 4, pages 132–133, 1972. (Cité en page 18.)
- [Green 1984] Richard F Green. *Stopping rules for optimal foragers*. American Naturalist, pages 30–43, 1984. (Cité en pages 126 et 134.)

- [Grinstead 2012] Charles Miller Grinstead et James Laurie Snell. *Introduction to probability*. American Mathematical Soc., 2012. (Cité en pages 117 et 118.)
- [Gueudré 2014] Thomas Gueudré, Alexander Dobrinevski et Jean-Philippe Bouchaud. *Explore or exploit ? a generic model and an exactly solvable case*. *Physical review letters*, vol. 112, no. 5, page 050602, 2014. (Cité en page 128.)
- [Gumbel 1958] Emil Julius Gumbel. *Statistics of extremes*. Columbia University Press, New York, 1958. (Cité en page 65.)
- [Heuzé 2013] Mélina L Heuzé, Pablo Vargas, Mélanie Chabaud, Maël Berre, Yan-Jun Liu, Olivier Collin, Paola Solanes, Raphaël Voituriez, Matthieu Piel et Ana-Maria Lennon-Duménil. *Migration of dendritic cells: physical principles, molecular mechanisms, and functional implications*. *Immunological reviews*, vol. 256, no. 1, pages 240–254, 2013. (Cité en page 48.)
- [Holcman 2009] D Holcman et I Kupka. *The probability of an encounter of two Brownian particles before escape*. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 42, no. 31, page 315210, 2009. (Cité en page 85.)
- [Hughes 1996] Barry D Hughes. *Random walks and random environments*. Clarendon Press Oxford, 1996. (Cité en pages 3, 49, 103, 140 et 185.)
- [Iwasa 1981] Yoh Iwasa, Masahiko Higashi et Norio Yamamura. *Prey distribution as a factor determining the choice of optimal foraging strategy*. *American Naturalist*, pages 710–723, 1981. (Cité en pages 126 et 134.)
- [Jeon 2011] J-H Jeon, AV Chechkin et R Metzler. *First passage behaviour of fractional Brownian motion in two-dimensional wedge domains*. *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 94, no. 2, page 20008, 2011. (Cité en page 32.)
- [Kolomeisky 2000] Anatoly B Kolomeisky et Michael E Fisher. *Periodic sequential kinetic models with jumping, branching and deaths*. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 279, no. 1, pages 1–20, 2000. (Cité en page 102.)
- [Krapivsky 1996] Paul L Krapivsky et Sidney Redner. *Life and death in an expanding cage and at the edge of a receding cliff*. *American Journal of Physics*, vol. 64, no. 5, pages 546–551, 1996. (Cité en pages 89, 91 et 92.)
- [Krebs 1974] John R Krebs, John C Ryan et Eric L Charnov. *Hunting by expectation or optimal foraging ? A study of patch use by chickadees*. *Animal Behaviour*, vol. 22, pages 953IN3–964, 1974. (Cité en pages 126 et 134.)
- [Lagache 2008] Thibault Lagache et David Holcman. *Effective motion of a virus trafficking inside a biological cell*. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 68, no. 4, pages 1146–1167, 2008. (Cité en page 32.)
- [Latombe 2012] Jean-Claude Latombe. *Robot motion planning*, volume 124. Springer Science & Business Media, 2012. (Cité en page 48.)
- [Lenzi 2009] E. Lenzi. *Fokker-Planck equation in a wedge domain: Anomalous diffusion and survival probability*. *Physical Review E*, vol. 80, no. 2, 2009. (Cité en page 32.)
- [Loverdo 2008] C Loverdo, O Bénichou, M Moreau et R Voituriez. *Enhanced reaction kinetics in biological cells*. *Nature physics*, vol. 4, no. 2, pages 134–137, 2008. (Cité en page 48.)

- [Luković 2013] Mirko Luković, Theo Geisel et Stephan Eule. *Area and perimeter covered by anomalous diffusion processes*. New Journal of Physics, vol. 15, no. 6, page 063034, 2013. (Cité en page 9.)
- [Majumdar 2010] Satya N Majumdar, Alain Comtet et Julien Randon-Furling. *Random convex hulls and extreme value statistics*. Journal of Statistical Physics, vol. 138, no. 6, pages 955–1009, 2010. (Cité en pages 9 et 15.)
- [McNair 1983] James N McNair. *A class of patch-use strategies*. American Zoologist, vol. 23, no. 2, pages 303–313, 1983. (Cité en pages 126 et 134.)
- [Meerson 2015] Baruch Meerson et S Redner. *Mortality, Redundancy, and Diversity in Stochastic Search*. Phys. Rev. Lett., vol. 114, no. 19, page 198101, 2015. (Cité en page 102.)
- [Mirny 2008] Leonid Mirny. *Biophysics: Cell commuters avoid delays*. Nature Physics, vol. 4, no. 2, pages 93–95, 2008. (Cité en page 48.)
- [Montroll 1969] Elliott W Montroll. *Random Walks on Lattices. III. Calculation of First-Passage Times with Application to Exciton Trapping on Photosynthetic Units*. Journal of Mathematical Physics, vol. 10, no. 4, pages 753–765, 1969. (Cité en page 65.)
- [Murphy 1992] Dennis D Murphy et Barry R Noon. *Integrating scientific methods with habitat conservation planning: reserve design for northern spotted owls*. Ecological Applications, vol. 2, no. 1, pages 4–17, 1992. (Cité en page 8.)
- [Nascimento 2001] Marcelo S Nascimento, Maurício D Coutinho-Filho et Carlos SO Yokoi. *Partial and random covering times in one dimension*. Phys. Rev. E, vol. 63, no. 6, page 066125, 2001. (Cité en pages 50, 51 et 59.)
- [Nemirovsky 1990] Nemirovsky, Martín et Coutinho-Filho. *Universality in the lattice-covering time problem*. Phys. Rev., A, vol. 41, no. 2, pages 761–767, Janvier 1990. (Cité en page 49.)
- [Nemirovsky 1991] Adolfo M Nemirovsky et Mauricio D Coutinho-Filho. *Lattice covering time in D dimensions: theory and mean field approximation*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 177, no. 1, pages 233–240, 1991. (Cité en pages 50 et 51.)
- [Nishimura 1992] Kinya Nishimura. *Foraging in an uncertain environment: patch exploitation*. Journal of theoretical biology, vol. 156, no. 1, pages 91–111, 1992. (Cité en page 126.)
- [Oaten 1977] Allan Oaten. *Optimal foraging in patches: a case for stochasticity*. Theoretical population biology, vol. 12, no. 3, pages 263–285, 1977. (Cité en page 126.)
- [Olver 2014] Frank WJ Olver. *Asymptotics and special functions*. Academic press, 2014. (Cité en page 94.)
- [Plank 2008] MJ Plank et A James. *Optimal foraging: Levy pattern or process ?* Journal of The Royal Society Interface, vol. 5, no. 26, pages 1077–1086, 2008. (Cité en page 126.)
- [Pólya 1919] G Pólya. *Quelques problèmes de probabilité se rapportant à la promenade au hasard (Some problems of probability associated with the random walk)*. L'Enseignement Mathématique, vol. 20, no. 444, page 8, 1919. (Cité en page 1.)
- [Prudnikov 1983] A. Po. Prudnikov, Yu. A. Brychkov et O. I. Marichev. *Integrals and series, volume 2 Special Functions*. Taylor and Francis, 1983. (Cité en pages 158 et 165.)

- [Prudnikov 1986] A P Prudnikov, Yu A Brychkov et O I Marichev. *Integrals and series*, volume 1: Elementary Functions. Taylor and Francis, 1986. (Cité en page 96.)
- [Pyke 1977] Graham H Pyke, H Ronald Pulliam et Eric L Charnov. *Optimal foraging: a selective review of theory and tests*. Quarterly review of Biology, pages 137–154, 1977. (Cité en page 125.)
- [Randon-Furling 2009a] Julien Randon-Furling. *Statistiques d’extrêmes du mouvement brownien et applications*. PhD thesis, Université Paris Sud-Paris XI, 2009. (Cité en page 18.)
- [Randon-Furling 2009b] Julien Randon-Furling, Satya N. Majumdar et Alain Comtet. *Convex Hull of N Planar Brownian Motions: Exact Results and an Application to Ecology*. Phys. Rev. Lett., vol. 103, page 140602, Sep 2009. (Cité en pages 9 et 15.)
- [Redner 1999] S Redner et PL Krapivsky. *Capture of the lamb: Diffusing predators seeking a diffusing prey*. American Journal of Physics, vol. 67, no. 12, pages 1277–1283, 1999. (Cité en page 32.)
- [Redner 2001] Sidney Redner. *A guide to first-passage processes*. Cambridge University Press, 2001. (Cité en pages 3, 31, 32, 48, 55, 83, 85, 89, 91, 95, 108, 109, 111, 136, 178 et 182.)
- [Reymbaut 2011] Alexis Reymbaut, Satya N Majumdar et Alberto Rosso. *The convex hull for a random acceleration process in two dimensions*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, vol. 44, no. 41, page 415001, 2011. (Cité en page 9.)
- [Rice 1985] Stephen A Rice. *Diffusion-limited reactions*, volume 25. Elsevier, 1985. (Cité en page 48.)
- [Robbins 1948] Herbert Robbins. *The asymptotic distribution of the sum of a random number of random variables*. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 54, no. 12, pages 1151–1161, 1948. (Cité en page 186.)
- [Schuss 2007] Z Schuss, A Singer et David Holcman. *The narrow escape problem for diffusion in cellular microdomains*. Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 104, no. 41, pages 16098–16103, 2007. (Cité en page 48.)
- [Shlesinger 1987] MF Shlesinger, BJ West et Joseph Klafter. *Lévy dynamics of enhanced diffusion: Application to turbulence*. Physical Review Letters, vol. 58, no. 11, page 1100, 1987. (Cité en page 1.)
- [Sood 2005] Vishal Sood, Sidney Redner et Dani Ben-Avraham. *First-passage properties of the Erdős–Rényi random graph*. Journal of Physics A: Mathematical and General, vol. 38, no. 1, page 109, 2005. (Cité en page 67.)
- [Takács 1980] L Takács. *Expected perimeter length*. Amer. Math. Monthly, vol. 87, no. 2, pages 142–142, 1980. (Cité en page 8.)
- [Tejedor 2011] Vincent Tejedor, Michaela Schad, Olivier Bénichou, Raphael Voituriez et Ralf Metzler. *Encounter distribution of two random walkers on a finite one-dimensional interval*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, vol. 44, no. 39, page 395005, 2011. (Cité en page 85.)
- [Tejedor 2012] V. Tejedor, R. Voituriez et O. Bénichou. *Optimizing persistent random searches*. Phys. Rev. Lett., vol. 108, page 088103, 2012. (Cité en pages 68 et 79.)

- [Turban 2015] Loïc Turban. *Records for the number of distinct sites visited by a random walk on the fully connected lattice*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, vol. 48, no. 44, page 445001, 2015. (Cité en page 66.)
- [Tzou 2014] Justin C Tzou, Shuangquan Xie et Theodore Kolokolnikov. *First-passage times, mobile traps, and Hopf bifurcations*. Physical Review E, vol. 90, no. 6, page 062138, 2014. (Cité en page 85.)
- [Van Kampen 1992] Nicolaas Godfried Van Kampen. Stochastic processes in physics and chemistry, volume 1. Elsevier, 1992. (Cité en page 85.)
- [Viswanathan 2008] GM Viswanathan, EP Raposo et MGE Da Luz. *Lévy flights and superdiffusion in the context of biological encounters and random searches*. Physics of Life Reviews, vol. 5, no. 3, pages 133–150, 2008. (Cité en page 48.)
- [Viswanathan 2011] Gandhimohan M Viswanathan, Marcos GE Da Luz, Ernesto P Raposo et H Eugene Stanley. The physics of foraging: an introduction to random searches and biological encounters. Cambridge University Press, 2011. (Cité en pages 2, 48, 59 et 126.)
- [Weiss 1983] George H Weiss et Robert J Rubin. *Random walks: theory and selected applications*. Adv. Chem. Phys., vol. 52, pages 363–505, 1983. (Cité en page 85.)
- [Worton 1995] Bruce J Worton. *A convex hull-based estimator of home-range size*. Biometrics, vol. 51, pages 1206–1215, 1995. (Cité en page 8.)
- [Wu 2000] Hsin-i Wu, Bai-Lian Li, Timothy A Springer et William H Neill. *Modelling animal movement as a persistent random walk in two dimensions: expected magnitude of net displacement*. Ecological Modelling, vol. 132, no. 1, pages 115–124, 2000. (Cité en page 59.)
- [Yokoi 1990] Carlos S.O. Yokoi, A. Hernández-Machado et L. Ramírez-Piscina. *Some exact results for the lattice covering time problem*. Physics Letters A, vol. 145, no. 2–3, pages 82–86, 1990. (Cité en pages 49, 50, 51, 52, 53, 58 et 59.)
- [Yuste 2006] SB Yuste, JJ Ruiz-Lorenzo et Katja Lindenberg. *Target problem with evanescent subdiffusive traps*. Phys. Rev. E, vol. 74, no. 4, page 046119, 2006. (Cité en page 102.)
- [Yuste 2013] S. B. Yuste, E. Abad et Katja Lindenberg. *Exploration and Trapping of Mortal Random Walkers*. Phys. Rev. Lett., vol. 110, page 220603, May 2013. (Cité en pages 102 et 140.)
- [Zoia 2008] A Zoia. *Continuous-time random-walk approach to normal and anomalous reaction-diffusion processes*. Physical Review E, vol. 77, no. 4, page 041115, 2008. (Cité en page 102.)

Différentes propriétés de marches aléatoires avec contraintes géométriques et dynamiques

Résumé : Dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés à l'impact d'une contrainte géométrique, dynamique ou mixte sur quelques propriétés classiques des marches aléatoires.

Nous déterminons tout d'abord l'impact d'un plan infini réfléchissant sur l'espace occupé par une marche brownienne bidimensionnelle à un temps d'observation fixé, que nous caractérisons par le périmètre moyen de son enveloppe convexe (plus petit polygone convexe contenant toute la trajectoire). Nous déterminons également la longueur moyenne de la portion du plan visitée par le marcheur, et la probabilité de survie d'un marcheur brownien dans un secteur angulaire absorbant.

Nous étudions ensuite le temps mis par un marcheur sur réseau pour visiter tous les sites d'un volume confiné, ou une partie d'entre eux. Nous calculons la moyenne de ce temps, dit de couverture, à une dimension pour une marche aléatoire persistante. Nous déterminons également la distribution du temps de couverture et d'autres observables assimilées pour la classe des processus non compacts, qui décrivent un large spectre de recherches aléatoires.

Dans un troisième temps, nous calculons et analysons la probabilité de sortie conditionnelle d'un marcheur brownien unidimensionnel évoluant dans un intervalle se dilatant ou se contractant à vitesse constante.

Enfin, nous étudions plusieurs aspects du modèle du marcheur aléatoire "affamé", qui meurt si les visites de nouveaux sites, grâce auxquelles il engrange des ressources, ne sont pas suffisamment régulières. Nous proposons un traitement de type champ moyen de ce modèle à deux dimensions, puis nous déterminons l'impact de la régénération des ressources sur les propriétés de survie du marcheur. Nous considérons finalement un modèle d'exploitation de parcelles de nourriture prenant explicitement en compte le mouvement du marcheur dans une parcelle, qui se ramène de manière naturelle au modèle du marcheur aléatoire affamé.

Mots clés : Enveloppe convexe, temps de couverture, marcheur aléatoire affamé, processus stochastiques, marches aléatoires.

Different properties of random walks under geometric and dynamic constraints

Abstract: In this manuscript, we focused on the impact of a geometric or dynamic constraint on several classic properties of random walks.

We first determine the impact of an infinite reflecting wall on the space occupied by a planar Brownian motion at a fixed observation time. We characterize it by the mean perimeter of its convex hull, defined as the minimal convex polygon enclosing the whole trajectory. We also determine the mean length of the visited portion of the wall, and the survival probability of a Brownian walker in an absorbing wedge.

We then study the time needed for a lattice random walker to visit every site of a confined volume, or a fraction of them. We calculate the mean value of this so-called cover time in one dimension for a persistent random walk. We also determine the distribution of the cover time and related observables for the class of non compact processes, which describes a wide range of random searches.

After that, we calculate and analyze the splitting probability of a one-dimensional Brownian walker evolving in an expanding or contracting interval.

Last, we study several aspects of the model of starving random walk, where the walker starves if its visits to new sites, from which it collects resources, are not regular enough. We develop a mean-field treatment of this model in two dimensions, then determine the impact of regeneration of resources on the survival properties of the walker. We finally consider a model of exploitation of food patches taking explicitly into account the displacement of the walker in the patches, which can be mapped onto the starving random walk model.

Key words: Convex hull, cover time, starving random walk, stochastic processes, random walks.
