



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace

---

**Présentée et soutenue par :**

**Nicolas DEYMIER**

le jeudi 8 décembre 2016

**Titre :**

Étude d'une méthode d'éléments finis d'ordre élevé et de son hybridation avec d'autres méthodes numériques pour la simulation électromagnétique instationnaire dans un contexte industriel

---

**École doctorale et discipline ou spécialité :**

ED MITT : Mathématiques appliquées

**Unité de recherche :**

Équipe d'accueil ISAE-ONERA MOIS

**Directeur(s) de Thèse :**

M. Xavier FERRIERES (directeur de thèse)  
M. Vincent MOUYSSET (co-directeur de thèse)

**Jury :**

Hélène BARUCQ Directrice de recherche INRIA, Pau - Présidente  
Christophe GEUZAIN Professeur d'Université ULg, Liège  
Philippe HELLUY Professeur d'Université IRMA, Strasbourg - Rapporteur  
Séraphin MEFIRE Professeur d'Université IECL, Nancy - Rapporteur  
Xavier FERRIERES Maître de recherche ONERA/DEMR, Toulouse - Directeur de thèse  
Vincent MOUYSSET Ingénieur de recherche ONERA/DTIM, Toulouse - Co-directeur de thèse  
Nicole ROUVRAIS Ingénieur GERAC Électromagnétisme



# Remerciements

Je veux remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Je tiens à remercier en premier lieu Xavier Ferrieres, Vincent Mouysset et Nicole Rouvrais qui m'ont encadré durant toute cette thèse. Je les remercie pour leur implication dans mon travail et pour leurs nombreuses connaissances scientifiques qu'ils m'ont fait partager. Sans oublier de les remercier de leur disponibilité et de leurs précieux conseils qui m'ont permis de progresser un peu plus chaque jour.

Je remercie également Philippe Helluy et Séraphin Mefire d'avoir accepté d'être mes rapporteurs. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail ainsi que pour toutes leurs remarques très constructives qui ont sans aucun doute contribué à améliorer la qualité de ce manuscrit. Je suis très reconnaissant envers Hélène Barucq de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Et, je remercie également Christophe Geuzaine d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je voudrais également remercier les membres de la société GERAC Électromagnétisme pour leur soutien et leur confiance apportés tout au long de la thèse. Et je remercie le département de l'ONERA pour son accueil chaleureux. Je tiens aussi à remercier Bernard Pecqueux pour avoir suivi l'avancée des travaux de thèse et pour l'aide qu'il a apporté à leurs promotions.

Enfin, je souhaite remercier toute ma famille pour son soutien sans faille tout au long de mes études.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels et État de l'art sur les schémas aux différences finies</b>	<b>8</b>
1.1 Présentation du système de Maxwell étudié	8
1.1.1 Introduction	8
1.1.2 Les équations de Maxwell	8
1.1.2.1 Milieux diélectriques anisotropes et isotropes	9
1.1.2.2 Milieux conducteurs	9
1.1.3 Aspects mathématiques des équations de Maxwell	10
1.1.3.1 Formulation du problème d'évolution	10
1.1.3.2 Existence de solution : rappel	11
1.2 État de l'art sur l'amélioration du schéma de Yee par des méthodes aux différences finies d'ordre élevé	13
1.2.1 Introduction	13
1.2.2 Schéma de Yee (S22) pour les équations de Maxwell	13
1.3 Analyse des méthodes proposées dans la littérature pour améliorer le schéma de Yee	18
1.3.1 Le schéma de Yee amélioré : intérêt et pertinence	19
1.3.2 Méthodes d'éléments finis réinterprétant les méthodes de différences finies d'ordre élevé	23
1.3.2.1 La Cellule Lobatto	23
1.3.2.2 La Cellule Lobatto-Gauss	26
1.4 Conclusion	29
<b>2 Étude d'une méthode d'éléments finis en ordre d'approximation spatiale élevé sur maillage cartésien</b>	<b>31</b>
2.1 Introduction	31
2.2 Formulation variationnelle	32
2.3 Approximation en espace	33
2.3.1 Notations et définitions	33
2.3.2 Espaces d'approximation, fonctions de base et degrés de liberté	34
2.3.2.1 Espaces d'approximation	34
2.3.2.2 Formules d'intégration numérique de Gauss et Gauss-Lobatto sur $\hat{\mathcal{K}}$	35
2.3.2.3 Fonctions de base sur l'élément $\mathcal{K}$	39
2.3.2.4 Fonctions de base sur $\Omega$	40
2.3.3 Discrétisation en temps	42
2.3.4 Décomposition des champs électriques et magnétiques	43
2.4 Écriture du schéma	44
2.4.1 Formulation du problème discret	44
2.4.2 Discrétisation de l'équation de Maxwell-Ampère	44

2.4.3	Discrétisation de l'équation de Maxwell-Faraday . . . . .	51
2.4.4	Schéma en espace et en temps sous forme matricielle . . . . .	57
2.4.5	Schéma de Yee inclus dans le schéma FEM . . . . .	57
2.5	Étude de la stabilité . . . . .	59
2.5.1	Conservation de l'énergie discrète . . . . .	59
2.5.2	Condition suffisante de stabilité . . . . .	60
2.5.3	Observation sur la valeur de la condition CFL en fonction de l'ordre d'approximation spatiale . . . . .	74
2.6	Étude de la convergence en $h$ et en $r$ du schéma . . . . .	75
2.7	Analyse de la dispersion . . . . .	82
2.8	Étude du coût de la méthode FEM par rapport au schéma de Yee . . . . .	89
2.8.1	Étude du stockage . . . . .	89
2.8.2	Étude du nombre d'opérations pour effectuer une itération temporelle . . . . .	91
2.9	Stratégie d'affectation d'ordre d'approximation spatiale en fonction du pas d'espace pour une précision donnée . . . . .	93
2.9.1	Introduction . . . . .	93
2.9.2	Étude du comportement de l'erreur de dispersion de la méthode FEM en fonction de l'ordre et $N_\lambda$ . . . . .	94
2.9.3	Stratégie d'affectation d'ordre en fonction d'un maillage donné . . . . .	96
2.9.4	Stratégie de définition de maillage et d'affectation d'ordre d'approximation spatiale pour optimiser les coûts de la méthode FEM . . . . .	96
2.9.5	Impact du pas d'espace sur la dispersion numérique . . . . .	99
2.9.6	Pas d'espace variable et ordres d'approximation spatiale en 3 dimensions . . . . .	104
2.9.7	Processus et mise en œuvre . . . . .	104
2.9.8	Bilan . . . . .	108
2.10	Conclusion . . . . .	108

### 3 Portage de la méthode FEM sur machine de production et étude des performances

<b>HPC de la méthode sur des simulations industrielles</b>	<b>109</b>
3.1 Portage de la méthode FEM sur machine de production . . . . .	109
3.1.1 Mise en œuvre d'une programmation parallèle sur domaine structuré . . . . .	110
3.1.2 Implémentation openMP-MPI . . . . .	112
3.1.3 Performance sur ordinateur massivement parallèle . . . . .	115
3.2 Études des performances HPC de la méthode FEM sur des simulations industrielles . . . . .	117
3.2.1 Modélisation d'antennes . . . . .	117
3.2.1.1 Structure filaire : Antenne basses fréquences . . . . .	117
3.2.1.2 Réseau de dipôle : Antenne haute fréquence . . . . .	119
3.2.1.3 Antenne Cornet . . . . .	122
3.2.1.4 Antenne : Guide avec obstacles bloquants . . . . .	126
3.2.2 CEM et calcul de champs à l'intérieur de véhicules . . . . .	129
3.2.2.1 Cavité cartésienne en présence d'une fente complexe . . . . .	129
3.2.2.2 GENECA . . . . .	131
3.2.2.3 Projet GEMCAR . . . . .	134
3.2.2.4 Conclusion . . . . .	139
3.2.3 IEM sur bâtiment . . . . .	140
3.3 Conclusion . . . . .	144

<b>4</b>	<b>Hybridation de la méthode FEM avec d'autres méthodes</b>	<b>145</b>
4.1	Hybridation de schémas numériques 3D avec l'approche FEM . . . . .	145
4.1.1	État de l'art non exhaustif sur l'hybridation de schémas et méthodes . . . . .	146
4.1.2	Étude d'une méthode d'hybridation de méthodes temporelles résolvant les équations différentielles de Maxwell . . . . .	148
4.1.2.1	Principe et Formulation : conservation d'une énergie continue . . . . .	148
4.1.2.2	Conservation d'une pseudo-énergie sur le problème semi-discret . . . . .	152
4.1.2.3	Proposition d'une condition de stabilité pour une hybridation FEM/GD .	155
4.1.3	Mise en œuvre de l'approche hybride . . . . .	160
4.1.3.1	Guide droit . . . . .	160
4.1.3.2	Guide coudé . . . . .	161
4.1.4	Conclusion . . . . .	164
4.2	Modèle de fil mince et hybridation de méthodes . . . . .	165
4.2.1	Modèle de fils minces d'approximation spatiale d'ordre élevé dans l'approche FEM	165
4.2.1.1	Amélioration du schéma du modèle de fil mince oblique . . . . .	166
4.2.1.2	Validations numériques . . . . .	171
4.2.2	Hybridation 1D-3D . . . . .	175
4.2.2.1	Principe de l'hybridation . . . . .	175
4.2.2.2	Méthode de ligne de transmission . . . . .	177
4.2.2.3	Adaptation du modèle hybride à l'approche FEM . . . . .	180
4.2.2.4	Validations numériques . . . . .	183
4.2.3	Conclusion . . . . .	187
	<b>Conclusion générale</b>	<b>188</b>
	<b>Références/Bibliographie</b>	<b>194</b>



# Introduction générale

Aujourd'hui dans le monde industriel, il existe de plus en plus de systèmes électroniques émettant ou recevant des ondes électromagnétiques. Le fonctionnement de ceux-ci peut alors être altéré par le milieu électromagnétique, mais aussi, par eux-mêmes ou par des éléments du milieu électromagnétique ambiant. Il est donc important de nos jours, d'un point de vue industriel de qualifier électromagnétiquement tout système afin de limiter sa pollution électromagnétique ou bien de le protéger de celle-ci. En particulier, on doit pouvoir certifier ceux-ci vis à vis de normes électromagnétiques fixées par la loi.

Pour effectuer cela, les industriels disposent de moyens expérimentaux généralement coûteux et dont la mise en œuvre peut s'avérer difficile dans certaines configurations, mais aussi d'outils de simulations, beaucoup plus simples à mettre en œuvre. Ces deux types de moyens sont utilisés soit séparément suivant la nature du problème à traiter, soit, plus généralement de manière couplés, pour établir un diagnostic plus fiable au problème de qualification.

Parmi les enjeux industriels, auxquels doivent répondre ces moyens de qualifications, on peut citer :

- l'étude de l'impact de certains phénomènes naturels telle que la foudre sur des avions de ligne comme son impact sur le train d'atterrissage de l'A350 (voir la figure 1) ou bien sur des sites de lancement comme celui d'Ariane à Kourou (voir la figure 2). Dans ce dernier cas, un point particulier consiste à protéger la charge du lanceur impacté par la foudre des forts courants induits par celle-ci et circulant sur le lanceur ;

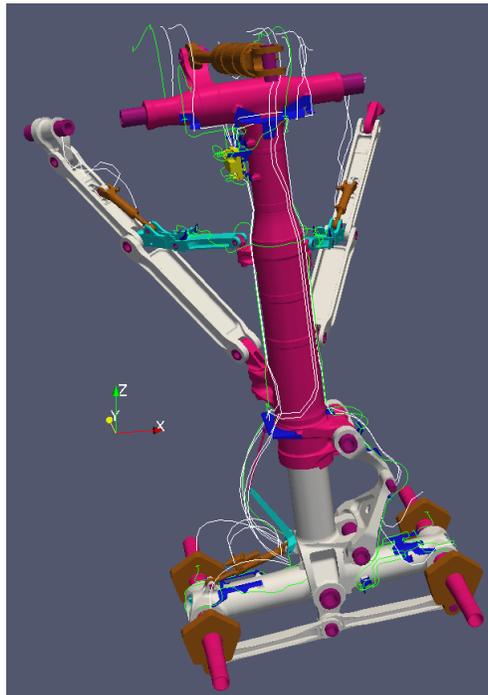


FIGURE 1 – Train d'atterrissage de l'A350.

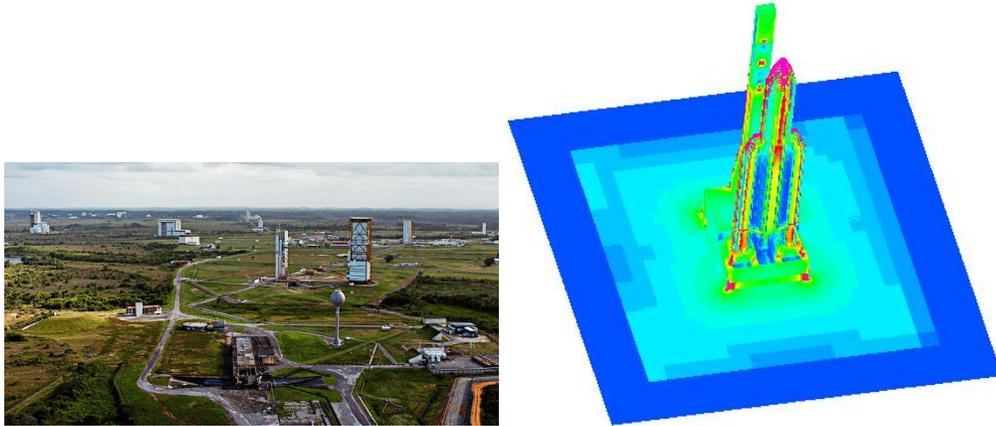


FIGURE 2 – Site de lancement.

- la certification CEM (Compatibilité ÉlectroMagnétique) de véhicules. Dans ce cas, on vérifie le fonctionnement des systèmes électroniques lorsque le véhicule est soumis à des perturbations induites par une agression externe. Par exemple, la figure 3 montre un véhicule militaire présentant des antennes de communication fixées à l'arrière du châssis. D'une part, ces antennes sont susceptibles de générer des interférences à l'intérieur du véhicule et, d'autre part, on cherche aussi à dimensionner les protections des systèmes électroniques des antennes pour les prémunir d'une agression externe.

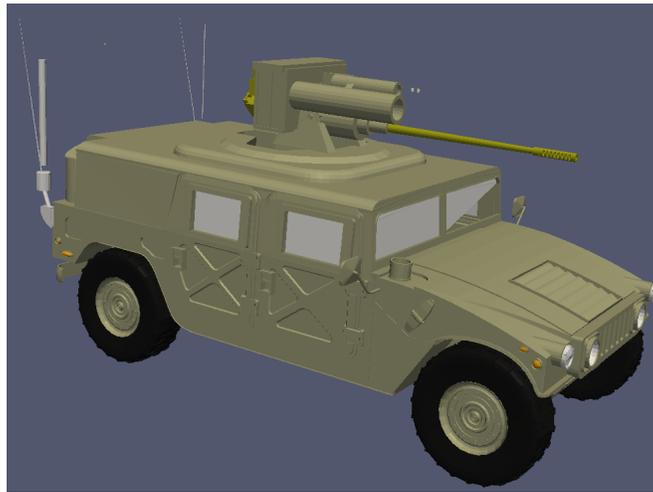


FIGURE 3 – Véhicule militaire avec des antennes de communication.

Pour illustrer encore cela, la figure 4 montre un exemple de véhicule positionné dans une chambre semi-anéchoïque et illuminé par une antenne BiconiLog à large bande. Le véhicule possède un réseau de câbles, tel que présenté sur la figure 4, qui est localisé à proximité des parois de la voiture.

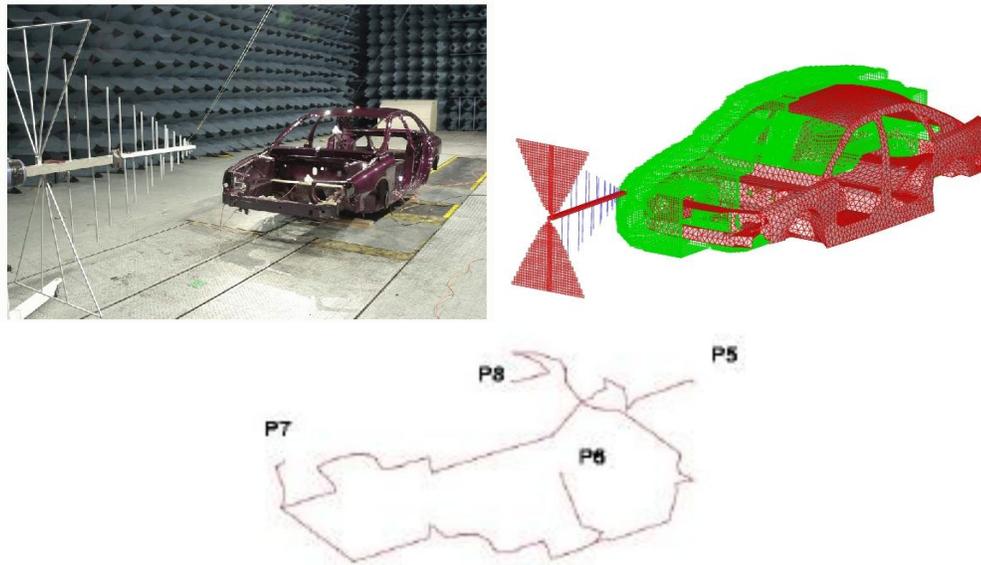


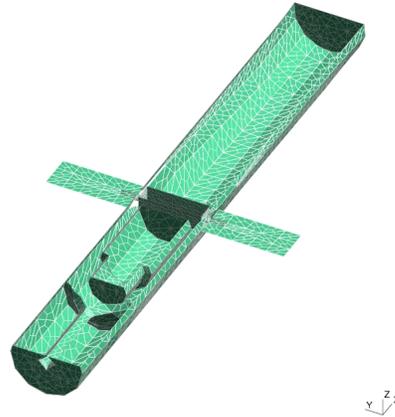
FIGURE 4 – Certification d'un véhicule (GEMCAR).

Dans les structures à certifier en CEM, généralement les câbles ne se limitent pas uniquement à un simple fil mais sont plutôt définis par des torons de fils. D'un point de vue de la qualification, on s'intéresse souvent uniquement à quelques fils et non à l'ensemble dans ces torons. Ces quelques fils sont généralement ceux qui sont critiques pour le bon fonctionnement du système. Par exemple, on peut considérer que dans un avion, les fils qui commandent l'allumage des lampes des cabines sont moins importants que ceux qui transportent une information liée au contrôle du pilotage de l'appareil. A titre d'exemple, nous montrons dans la figure 5 ce que peut être la complexité d'un toron dans le câblage d'un avion de transport.

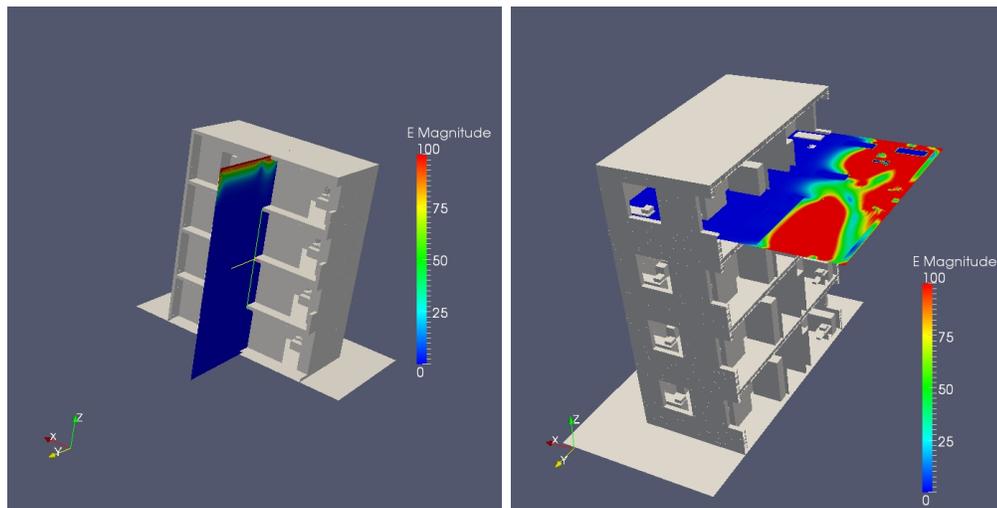


FIGURE 5 – Exemple de toron.

Dans certaines configurations à certifier (voir figure 6), la présence d'un champ interne à la structure est liée à l'existence de petits éléments sur la géométrie de celle-ci, comme des trous ou des fentes minces. Il est donc nécessaire de tenir compte de ces éléments dans nos modèles et schémas numériques ;

FIGURE 6 – *Genec.*

- L'évaluation de champs ambiants dans un bâtiment illuminé par une source électromagnétique de type antenne téléphonique ou impulsion électromagnétique d'origine nucléaire (IEMN). Dans ce cas, on cherche avant tout à protéger les personnes présentes dans les bâtiments et dans un second temps, le fonctionnement des électroniques localisées à l'intérieur de ceux-ci. A titre d'exemple, la figure 7 montre la répartition du champ électromagnétique dans un bâtiment suite à l'agression de celui-ci par une source de type IEMN.

FIGURE 7 – *Bâtiment.*

Comme, nous l'avons montré dans cette liste non exhaustive, il y a de nombreuses finalités aux études électromagnétiques. Une grande partie de celles-ci sont associées à des problèmes de CEM et dans cette thèse, on va principalement focaliser notre travail sur cet aspect CEM. Pour cela, on travaille sur des signaux qui sont généralement large bande et on doit particulièrement tenir compte des champs relevés à proximité du câblage.

Historiquement, la simulation électromagnétique en CEM est largement réalisée dans le domaine temporel, en résolvant le système d'équations aux dérivées partielles de Maxwell dans un domaine de calcul volumique. En termes de méthodes numériques, une approche basée sur un schéma de type différences finies, LeapFrog en temps et en espace, proposée par K.S. Yee [88] en 1966, reste la référence pour les simulations instationnaires. Dans cette méthode, les conditions aux limites sont prises en compte à l'aide d'un formalisme de type PML [7] [8] [70]. Il en résulte une méthode très facile d'implémentation, robuste

et très efficace grâce à la multitude de modèles physiques ajoutés par de nombreux développeurs. Cela est dû principalement à la simplicité du schéma. Toutefois, celle-ci présente deux inconvénients majeurs pour traiter les problèmes actuels :

- le maillage en marches d’escalier ;
- la dispersion numérique du schéma associé.

En effet, lorsqu’on a besoin d’évaluer les champs à proximité d’une structure de géométrie courbe, ceci est très difficile en raison du maillage en marches d’escalier (voir par exemple les figures 8 et 9 où on voit la difficulté à situer les points de champs près de la structure). Par ailleurs, on peut montrer que le schéma de Yee est dispersif (ordre 2) et que dans les simulations de semi-cavités ou de propagation, sur des temps d’observation longs (voir sur la figure 10 la propagation d’un mode à l’intérieur d’une cavité parfaitement métallique), il y a un important déphasage entre la solution exacte et approchée.

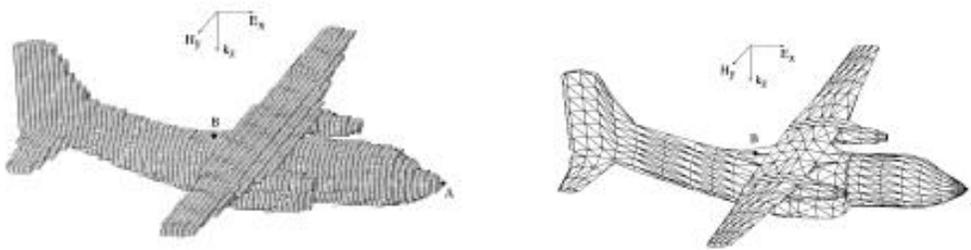


FIGURE 8 – *Point proche de la structure.*

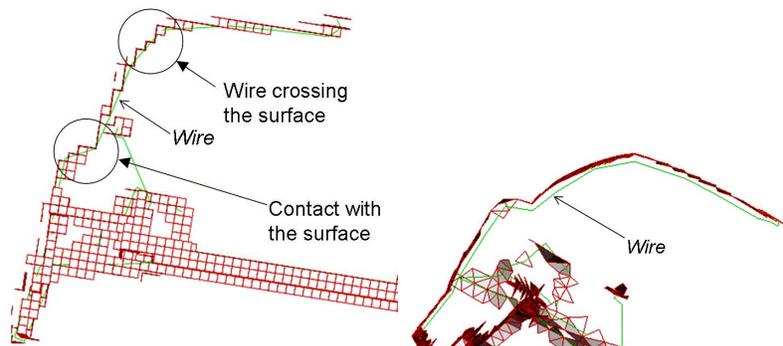


FIGURE 9 – *Point de champs sur le chemin d’un fil.*

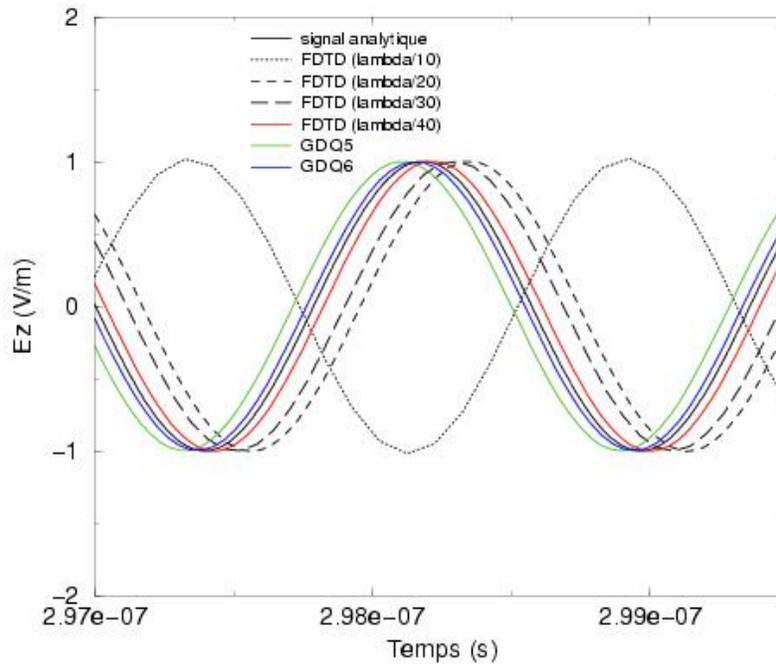


FIGURE 10 – Évaluation d'un point champs dans un mode de cavité cubique de côté 1m (le schéma de Yee est libellé FDTD).

Beaucoup de travaux ont été menés pour corriger ces problèmes inhérents au schéma de Yee à la fois sur la conformité du maillage par rapport à la géométrie et sur la réduction de l'erreur de dispersion. Dans ce travail de thèse, dans un premier temps, on va s'intéresser plus particulièrement à l'amélioration d'un schéma éléments finis développé à l'ONERA qui est une extension du schéma de Yee et qui permet de limiter les erreurs de dispersion. Plus précisément, on va effectuer l'étude mathématique de ce schéma éléments finis et on va proposer une stratégie optimisée de choix de pas de temps et d'ordres spatiaux pour celui-ci. Ensuite, on va s'intéresser à l'introduction de certains modèles physiques dans la méthode numérique basée sur le schéma précédent, puis au portage de celle-ci sur des machines de production (calculateur massivement parallèle) pour traiter des problèmes industriels.

Dans un deuxième temps, on va étudier une méthode d'hybridation de schémas 3D/3D pour améliorer nos capacités de simulations sur des problématiques à géométries courbes et multi-échelles en évitant la nécessité de disposer de grosses ressources de calcul. Ensuite, afin de prendre en compte des réseaux de torons plus réalistes par rapport à l'industrie, on va s'intéresser à une stratégie d'hybridation 3D/1D avec la mise en œuvre d'un solveur de ligne de transmission dans le domaine temporel.

Pour mener ce travail à bien, on a décidé de décomposer celui-ci en 4 phases et donc de découper aussi le document en 4 chapitres :

- Dans le premier chapitre, on effectue tout d'abord, un rappel du problème physique et mathématique à traiter et du schéma de Yee. On effectue ensuite une bibliographie sur les travaux effectués autour du schéma de Yee pour améliorer la précision de celui-ci et limiter notamment l'erreur de dispersion intrinsèque à celui-ci. Parmi les travaux existants, on a choisi de se focaliser sur une approche FEM (Finites Elements Method), étudiée par P. Monk et G. Cohen dans les années 90 et plus récemment par T. Volpert [83] dont on rappellera le principe ;
- Dans le deuxième chapitre, on introduit le schéma FEM dans le cadre d'un ordre spatial variable par direction et par cellule, puis, on complète l'analyse mathématique du schéma, en explicitant un critère de stabilité, une étude de convergence et une analyse de dispersion pour celui-ci. On propose et on étudie ensuite une stratégie optimisée pour le choix du pas de temps et des ordres

- spatiaux afin de limiter les coûts calcul de la méthode ;
- Dans le troisième chapitre, on adapte la méthode à la simulation de cas industriels. Pour cela, on introduit une stratégie de parallélisation dont on évalue les performances, puis, on présente plusieurs configurations permettant de montrer les capacités de cette méthode à traiter des cas industriels ;
  - Dans le quatrième chapitre, on étudie l'hybridation de notre méthode FEM avec d'autres schémas 3D, pour pouvoir tenir compte de raffinements locaux indispensables dans nos simulations, comme par exemple les petites ouvertures ou fentes minces. Pour cela, on reprend les travaux initiés par T. Volpert sur le couplage GD/FEM pour l'adapter au contexte h-p et le généraliser à d'autres approches comme la FVTD (schéma volumes finis). Puis, on complète ces travaux par une étude de stabilité de l'approche hybride. Ensuite, on s'intéresse à une hybridation 1D/3D entre notre méthode FEM et une équation de lignes de transmission pour prendre en compte des réseaux de câbles multi-filaires dans nos configurations. Finalement, dans ce même chapitre, on améliore le modèle de fils obliques proposé par T. Volpert, en introduisant dans le schéma lié aux fils une approximation spatiale d'ordre élevé afin d'être consistant avec le calcul des champs.

## Article, conférences et marché d'étude

- Article :
  - N. Deymier, T. Volpert, X. Ferrières, V. Mouysset et B. Pecqueux, *New high order FDTD method to solve EMC problem*, ADVANCED ELECTROMAGNETICS, VOL.4, NO.2, october 2015, p.18.
- Congrès
  - N. Deymier, T. Volpert, V. Mouysset et X. Ferrières, *Méthode FDTD d'ordre élevé pour la simulation électromagnétique dans le domaine temporel*, CEM2014, Clermont-ferrand.
  - T. Volpert, N. Deymier et X. Ferrières, *Discontinuous Galerkin - FDTD High order Hybrid to Scattering Problems Applied Computational Electromagnetics*, ACES 2015, Honolulu.
  - N. Deymier, T. Volpert et X. Ferrières *Hybridation DFDT d'ordre élevé - Galerkin Discontinu*, CEM2016, Rennes.
- Marché d'étude :
  - *Mise en évidence des capacités de la méthode des différences finies d'ordre élevé au travers de quelques problèmes de couplage électromagnétique*, Marché n°4600273564 - Juin 2014, commandé par le CEA/Gramat à la société GERAC Électromagnétisme.

# Chapitre 1

## Rappels et État de l'art sur les schémas aux différences finies

Dans ce chapitre, nous rappelons le problème physique qui nous intéresse, c'est-à-dire le système de Maxwell, afin de préciser nos hypothèses concernant le milieu ainsi que certaines notations que l'on retrouvera dans tout le rapport. On donne ensuite une brève présentation du schéma de Yee et une bibliographie non exhaustive sur les principales améliorations apportées à ce schéma pour diminuer son erreur de dispersion. Pour chacune des techniques d'amélioration, on précise son principe et ses inconvénients par rapport aux avantages qu'elle apporte.

### 1.1 Présentation du système de Maxwell étudié

#### 1.1.1 Introduction

Ce paragraphe présente tout d'abord et succinctement les équations de Maxwell liées au problème physique qui nous intéresse, puis un rappel sur l'existence et l'unicité de solution au problème mathématique qui en résulte.

#### 1.1.2 Les équations de Maxwell

Soit un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ . Dans ce domaine, les phénomènes électromagnétiques sont décrits par quatre champs vectoriels donnés par :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) & : \text{champ électrique } (V \cdot m^{-1}) \\ \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) & : \text{induction électrique } (C \cdot m^{-2}) \\ \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) & : \text{champ magnétique } (A \cdot m^{-1}) \\ \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) & : \text{induction magnétique } (T) \end{cases} \quad (1.1.1)$$

où  $\mathbf{x} \in \Omega$  et  $t$  est la variable temporelle sur  $[0, T]$ .

Ces quatre grandeurs sont reliées par le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{E} = 0 \quad (\text{loi de Faraday}) \quad (1.1.2a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \nabla \wedge \mathbf{H} + \mathbf{J} = 0 \quad (\text{loi de Ampère}) \quad (1.1.2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{loi de Gauss électrique}) \quad (1.1.2c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{loi de Gauss magnétique}) \quad (1.1.2d)$$

où  $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$  et  $\rho(t, \mathbf{x})$  représentent respectivement les densités de courant électrique et de charges dans le milieu  $\Omega$ .

Ces deux dernières quantités vérifient l'équation de conservation des charges :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 . \quad (1.1.3)$$

### 1.1.2.1 Milieux diélectriques anisotropes et isotropes

Dans notre étude, nous faisons l'hypothèse que le milieu  $\Omega$  est constitué de matériaux diélectriques ne dépendant pas de la fréquence. Ceci implique l'existence de deux tenseurs symétriques définis positifs,  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ , le tenseur de permittivité électrique et  $\underline{\underline{\mu}}$ , le tenseur de perméabilité magnétique, tels que :

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{x})\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) , \quad (1.1.4a)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \underline{\underline{\mu}}(\mathbf{x})\mathbf{H}(t, \mathbf{x}) . \quad (1.1.4b)$$

**Remarque 1.1.** *Pour un milieu isotrope, les tenseurs dans (1.1.4a) et (1.1.4b) sont des scalaires, nommés  $\varepsilon(\mathbf{x})$  et  $\mu(\mathbf{x})$ . Alors que dans un milieu anisotrope, ces tenseurs sont des vecteurs.*

Dans le vide, on définit :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{x}) &= \varepsilon_0 \simeq \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \quad (F \cdot m^{-1}) , \\ \mu(\mathbf{x}) &= \mu_0 \simeq 4\pi 10^{-7} \quad (H \cdot m^{-1}) . \end{aligned}$$

Ces deux quantités vérifient la relation :

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \simeq 3 \cdot 10^8 \quad (m \cdot s^{-1}) ,$$

où  $c_0$  est la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide.

On définit alors les milieux diélectriques par un tenseur de permittivité électrique relative  $\underline{\underline{\varepsilon_r}}$  et un tenseur de perméabilité magnétique relative  $\underline{\underline{\mu_r}}$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{x}) &= \varepsilon_0 \underline{\underline{\varepsilon_r}}(\mathbf{x}) , \\ \underline{\underline{\mu}}(\mathbf{x}) &= \mu_0 \underline{\underline{\mu_r}}(\mathbf{x}) . \end{aligned}$$

### 1.1.2.2 Milieux conducteurs

Dans le cadre de notre étude, la densité de courant électrique  $\mathbf{J}$  se décompose en deux parties :  $\mathbf{J}'$  qui définit la densité de courant de la matière et  $\mathbf{J}_s$  qui définit la densité d'une source de courant. On a :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}' + \mathbf{J}_s . \quad (1.1.5)$$

**Remarque 1.2.** *Dans un milieu conducteur, la densité de courant dans la matière  $\mathbf{J}'$  correspond au courant de conduction dû au mouvement des électrons libres dans le matériau.*

Cette quantité vérifie la loi d'Ohm :

$$\mathbf{J}' = \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x})\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) , \quad (1.1.6)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}$  est un tenseur défini positif, nommé tenseur de conductivité dont l'unité est le Siemens par mètre ( $S \cdot m^{-1}$ ).

### 1.1.3 Aspects mathématiques des équations de Maxwell

#### 1.1.3.1 Formulation du problème d'évolution

Pour la suite, nous supposons que le domaine  $\Omega$  est un milieu borné, diélectrique linéaire, anisotrope non chargé pouvant être conducteur.

Dans ce type de domaine le système d'équations (1.1.2) se réécrit :

$$\underline{\underline{\mu}} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{E} = 0, \quad (1.1.7a)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \wedge \mathbf{H} + \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{E} + \mathbf{J}_s = 0, \quad (1.1.7b)$$

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\varepsilon}} \mathbf{E}) = \rho, \quad (1.1.7c)$$

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\mu}} \mathbf{H}) = 0. \quad (1.1.7d)$$

#### Remarque 1.3.

1. Si nous appliquons la divergence à (1.1.7a), nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (\underline{\underline{\mu}} \mathbf{H}) = 0. \quad (1.1.8)$$

En supposant qu'à l'instant initial  $t = 0$  on a  $\nabla \cdot (\underline{\underline{\mu}} \mathbf{H}_0) = 0$ , alors la propriété (1.1.8) reste vraie  $\forall t > 0$  avec  $\nabla \cdot (\underline{\underline{\mu}} \mathbf{H}) = 0$ .

2. De même, en appliquant la divergence à (1.1.7b), si on suppose que  $\nabla \cdot (\underline{\underline{\varepsilon}} \mathbf{E}_0) = 0$  à l'instant  $t = 0$ , et en utilisant la loi de conservation de la charge  $\nabla \cdot \mathbf{J}_s = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ , alors nous obtenons :

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\varepsilon}} \mathbf{E}) = \rho \quad \forall t > 0.$$

Les hypothèses faites dans la remarque 1.3, sur les conditions initiales  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{H}_0$  à l'instant  $t = 0$  montrent que les contraintes (1.1.7c) et (1.1.7d) sont redondantes. Par la suite, nous n'utiliserons plus ces deux contraintes dans notre modèle mathématique. Cependant il faudra vérifier que la solution discrète vérifie ces deux conditions. En effet, si les conditions de divergence ne sont pas respectées, il peut apparaître des ondes parasites qui détériorent la solution.

Ainsi, en ajoutant les conditions initiales, définies en 1.3, et les conditions limites au système, l'écriture finale du problème d'évolution (1.1.7) est donnée par :

$$\underline{\underline{\mu}} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{E} = 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega, \quad (1.1.9a)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \wedge \mathbf{H} + \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{E} + \mathbf{J}_s = 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega, \quad (1.1.9b)$$

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (1.1.9c)$$

$$\mathbf{E}(t = 0, \mathbf{x}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) \text{ et } \mathbf{H}(t = 0, \mathbf{x}) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Omega, \quad (1.1.9d)$$

où  $T$  définit le temps d'observation,  $n$  désigne la normale extérieure au domaine  $\Omega$  et  $\partial\Omega$  est la frontière du domaine  $\Omega$ .

### 1.1.3.2 Existence de solution : rappel

Pour toute la suite du document, nous noterons  $\mathbf{L}^2(\Omega) = (\mathbb{L}^2(\Omega))^3$  et  $\mathbf{H}^1(\Omega) = (H^1(\Omega))^3$ .

Pour établir l'existence d'une solution, nous devons travailler dans un espace fonctionnel où la norme  $\mathbb{L}^2$  du rotationnel a un sens. Pour cela, nous choisissons les espaces  $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$  et  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$  sur le domaine  $\Omega$  définit respectivement par :

$$\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) = \left\{ v \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \nabla \wedge v \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\}, \quad (1.1.10)$$

et,

$$\mathbf{H}(\text{div}, \Omega) = \left\{ v \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \nabla \cdot v \in \mathbb{L}^2(\Omega) \right\}. \quad (1.1.11)$$

Nous définissons ensuite des sous espaces de ceux-ci par :

$$\mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) = \left\{ v \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \nabla \wedge v \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ et } v \wedge n_{|\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad (1.1.12)$$

et,

$$\mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega) = \left\{ v \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \nabla \cdot v \in \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ et } v \cdot n_{|\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad (1.1.13)$$

où  $n_{|\partial\Omega}$  désigne la normale extérieure sur frontière du domaine  $\Omega$ .

De plus, on a alors que  $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$  est un espace de Hilbert pour la norme :

$$\|v\|_{\text{rot}, \Omega} = (\|v\|_{0, \Omega}^2 + \|\nabla \wedge v\|_{0, \Omega}^2)^{\frac{1}{2}}$$

où  $\|\cdot\|_{0, \Omega}$  est la norme associée à l'espace de Hilbert  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  muni du produit scalaire usuel  $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u \cdot v \, dx$  pour  $u, v \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ .

Si  $\Omega$  est un domaine borné lipschitzien, on peut alors définir (dans un espace de distributions) la trace tangentielle de toute fonction  $v$  de  $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$  par :

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau} : \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) &\rightarrow \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ v &\mapsto \gamma_{\tau}(v) = v \wedge n \end{aligned}$$

où  $\gamma_{\tau}$  est une application linéaire continue de  $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$  dans  $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . On a alors le théorème ci-dessous,

**Théorème 1.1.1. Théorème de Green pour l'espace  $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$  :**

Soient  $v \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$  et  $\phi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , alors :

$$\int_{\Omega} \nabla \wedge v \cdot \phi \, dx - \int_{\Omega} v \cdot \nabla \wedge \phi \, dx = \int_{\partial\Omega} v \wedge n \cdot \phi \, ds \quad (1.1.14)$$

Afin de prouver l'existence et l'unicité de solution au problème de Maxwell, nous faisons les hypothèses suivantes :

1. Nous prenons les tenseurs dans les égalités (1.1.9a) et (1.1.9b) du système (1.1.9), tels que :

$$\begin{cases} \underline{\varepsilon}, \underline{\mu}, \underline{\sigma} \in (\mathbb{L}^{\infty}(\Omega))^{3 \times 3} \\ \varepsilon_{\min} I_3 \leq \underline{\varepsilon} \leq \varepsilon_{\max} I_3 & \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Omega \\ \mu_{\min} I_3 \leq \underline{\mu} \leq \mu_{\max} I_3 & \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 \leq \underline{\sigma} \leq \sigma_{\max} I_3 & \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Omega \end{cases} \quad (1.1.15)$$

avec  $\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}, \mu_{\min}, \mu_{\max} \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\sigma_{\max} \in \mathbb{R}_+$ , et la relation d'ordre " $\leq$ " est définie comme ci-dessous,

$$\forall v \in \mathbb{R}^3 \quad \varepsilon_{\min} \|v\|^3 \leq v^* \underline{\varepsilon} v \leq \varepsilon_{\max} \|v\|^3 ;$$

2.  $\mathbf{J}_s \in C^0(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ .

On obtient alors le résultat suivant :

**Théorème 1.1.2.** *Sous les hypothèses précédentes, il existe une solution unique  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  du problème d'évolution (1.1.9) vérifiant :*

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in C^1(0, T; (\mathbb{L}^2(\Omega))^3) \cap C^0(0, T; \mathbf{H}(\nabla \wedge, \Omega)).$$

## 1.2 État de l'art sur l'amélioration du schéma de Yee par des méthodes aux différences finies d'ordre élevé

### 1.2.1 Introduction

Dans le cadre de cette thèse, nous cherchons une approche efficace pour effectuer des simulations industrielles. Par le terme efficace, on cherche à avoir des solutions précises avec des coûts de calculs et maillages qui soient les plus petits possibles. De plus, on veut que cette approche puisse permettre la prise en compte de nombreux modèles physiques nécessaires à la résolution de problèmes en électromagnétisme tel que la CEM, les antennes ou la foudre ... Pour cela, nous rappelons tout d'abord la méthode faisant référence et qui est basée sur un schéma aux différences finies proposé par K.S. Yee en 1966. Ce schéma simple, robuste et facile d'implémentation est très largement utilisé pour l'ensemble des simulations actuelles. Cependant, son caractère dispersif connu [28], [76], [69], [38] s'avère gênant lorsque les temps d'observation sont longs (par rapport au nombre de longueurs d'onde parcourues). En effet, le déphasage dans le temps des signaux devient alors très important et la solution obtenue est peu fiable.

Dans cette partie, nous présentons certaines solutions proposées dans la littérature pour réduire les erreurs de dispersion de la méthode de Yee. Concernant l'aspect géométrique, nous nous intéresserons à celui-ci par le biais de l'hybridation de méthodes que nous aborderons au chapitre 4.

Pour chaque technique, nous mettons en évidence les avantages et les inconvénients de celle-ci.

### 1.2.2 Schéma de Yee (S22) pour les équations de Maxwell

Dans l'ensemble des méthodes numériques résolvant les équations de Maxwell dans le domaine temporel, nous pouvons constater que la méthode de calcul la plus répandue est le schéma de Yee [88]. Cette méthode, proposée il y a plus de 50 ans, a bénéficié d'un nombre important de développements et de validations au sein de la communauté scientifique et industrielle. De plus, la simplicité de son schéma lui permet d'être actuellement opérationnelle sur la plupart des nouvelles architectures informatiques.

Le principe du schéma proposé par Yee est basé sur un schéma LeapFrog en espace et en temps, et le domaine de calcul est représenté par une grille de maillage cartésienne.

#### Formulation du schéma de Yee

Le schéma de Yee utilise une approximation d'ordre 2 en temps et en espace, et on notera aussi celui-ci S22 dans ce paragraphe.

Les dérivées partielles en temps et en espace sont approchées par des opérateurs aux différences finies centrées d'ordre 2, définies pour une fonction  $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  par :

$$U'(x) = \frac{U(x+h) - U(x-h)}{2h} + O(h) , \quad (1.2.1)$$

où  $h$  est le pas de discrétisation. Si  $U \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ , nous pouvons facilement montrer à l'aide d'un développement de Taylor que l'ordre de précision de cette approximation est égal à 2.

Plus précisément, le domaine de calcul  $\Omega$  est décrit par un produit cartésien de 3 intervalles dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Chaque intervalle est décomposé suivant  $N_I$ ,  $N_J$  et  $N_K$  segments respectivement suivant la direction  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Dans le maillage cartésien 3D, chaque cellule, ou maille, est alors définie par le triplet  $(i, j, k)$  tel que  $i \in [1, N_I]$ ,  $j \in [1, N_J]$  et  $k \in [1, N_K]$ . Ainsi, pour une maille  $(i, j, k)$ , les inconnues ou DDL (Degrés De Liberté) du schéma sont positionnés de manière alternée en espace comme indiqué par la figure 1.1. Cette alternance entre les inconnues des champs forme un motif en quinconce.

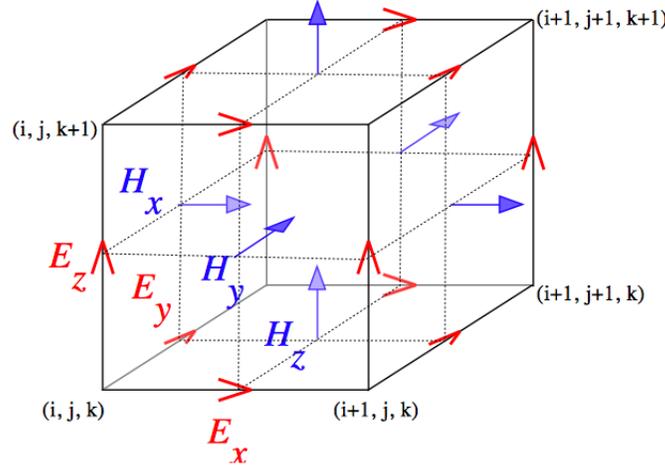


figure 1.1 – Cellule élémentaire du schéma de Yee.

L'approximation temporelle utilise aussi un schéma numérique de type "LeapFrog". En particulier, des champs électriques  $\mathbf{E}$  sont déterminés aux instants  $n\Delta t$ ,  $(n+1)\Delta t$ ,  $(n+2)\Delta t$ , ..., et les champs magnétiques  $\mathbf{H}$  sont évalués aux instants  $(n-\frac{1}{2})\Delta t$ ,  $(n+\frac{1}{2})\Delta t$ ,  $(n+\frac{3}{2})\Delta t$ , ..., avec  $\Delta t$  définissant le pas de temps du schéma.

Lors de la résolution d'une itération temporelle  $n$ , les champs  $\mathbf{E}$  sont calculés à l'aide des valeurs des champs  $\mathbf{H}$  de l'itération précédente  $n-\frac{1}{2}$ , puis les champs  $\mathbf{H}$  sont évalués au demi-pas temporel supérieur  $n+\frac{1}{2}$  à partir des valeurs de champs  $\mathbf{E}$  au temps  $n$ .

L'utilisation du demi-indice d'espace permet de positionner les composantes électriques au milieu des arêtes et les composantes magnétiques au milieu des faces. Ainsi les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont décomposés dans le domaine discret par  $E = (E^x, E^y, E^z)$  et  $H = (H^x, H^y, H^z)$ . Les inconnues discrètes sont données pour l'instant  $t^n$  de l'itération  $n$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E^x(n\Delta t, \quad (i+\frac{1}{2})\Delta x, \quad j\Delta y, \quad k\Delta z) &= E_{i+\frac{1}{2},j,k}^{x,n} \\ E^y(n\Delta t, \quad i\Delta x, \quad (j+\frac{1}{2})\Delta y, \quad k\Delta z) &= E_{i,j+\frac{1}{2},k}^{y,n} \\ E^z(n\Delta t, \quad i\Delta x, \quad j\Delta y, \quad (k+\frac{1}{2})\Delta z) &= E_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{z,n} \\ \\ H^x((n+\frac{1}{2})\Delta t, \quad i\Delta x, \quad (j+\frac{1}{2})\Delta y, \quad (k+\frac{1}{2})\Delta z) &= H_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{x,n+\frac{1}{2}} \\ H^y((n+\frac{1}{2})\Delta t, \quad (i+\frac{1}{2})\Delta x, \quad j\Delta y, \quad (k+\frac{1}{2})\Delta z) &= H_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{y,n+\frac{1}{2}} \\ H^z((n+\frac{1}{2})\Delta t, \quad (i+\frac{1}{2})\Delta x, \quad (j+\frac{1}{2})\Delta y, \quad k\Delta z) &= H_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{z,n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Dans ces expressions  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  sont les pas spatiaux respectivement dans les direction  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ . A titre d'exemple, dans le schéma de Yee, l'équation de la relation (1.1.9a) pour évaluer la composante  $H^z$  est donnée par :

$$\mu \frac{H_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{z,n+\frac{1}{2}} - H_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{z,n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{E_{i+1,j+\frac{1}{2},k}^{y,n} - E_{i,j+\frac{1}{2},k}^{y,n}}{\Delta x} + \frac{E_{i+\frac{1}{2},j+1,k}^{x,n} - E_{i+\frac{1}{2},j,k}^{x,n}}{\Delta y}. \quad (1.2.2a)$$

La figure (1.2) représente les inconnues nécessaires à l'évaluation du champ  $H_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{z,n+\frac{1}{2}}$  et illustre la discrétisation du rotationnel.

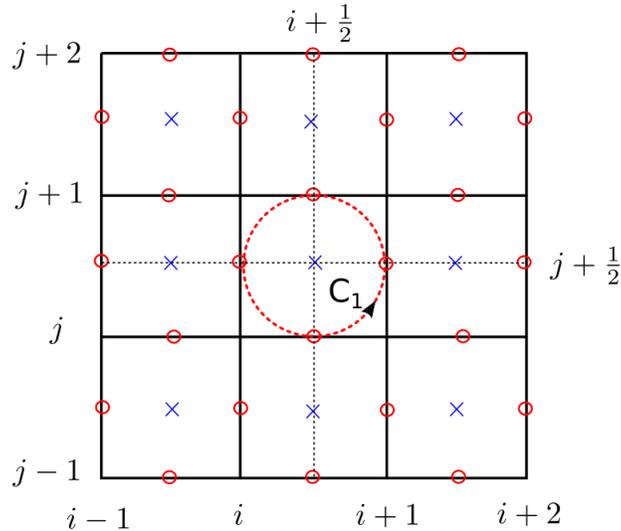


figure 1.2 – Cellules Yee dans un plan 2D de côte  $k$ , avec  $\circ$  pour les DDL  $\mathbf{E}$  et  $\times$  pour les DDL  $\mathbf{H}$ . La boucle  $C_1$  représente l'approximation spatiale pour le champ  $H_z^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}$  et délimite le stencil pour l'évaluation de  $H_z$ .

### Condition sur le critère de stabilité

L'évaluation de la condition de stabilité du schéma de Yee est effectuée dans [76] et se présente sous la forme (1.2.3) :

$$\Delta t < \frac{1}{c_0 \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}, \quad (1.2.3)$$

où  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  est la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide.

Ainsi, avec un pas d'espace unique pour les 3 directions, la condition de stabilité se réduit à :

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{c_0 \sqrt{3}}.$$

### Analyse de l'erreur de dispersion

Pour aborder les études sur la dispersion numérique, nous donnons quelques notions et notations utilisées dans la conception d'une simulation numérique industrielle. En particulier, le pas d'espace  $\Delta x$  est choisi en fonction de la longueur d'onde minimale  $\lambda$  du spectre fréquentiel de la forme d'onde injectée dans la simulation. Le facteur de résolution  $N_\lambda$  est alors évalué selon le ratio  $N_\lambda = \frac{\lambda}{\Delta x}$ . Usuellement, les ingénieurs estiment qu'une valeur  $N_\lambda = 10$  est suffisante pour la plupart des simulations. Toutefois, dès que le caractère dispersif du schéma de Yee induit au cours du temps un déphasage impactant les résultats, pour obtenir plus de précision, on cherche à augmenter ce facteur  $N_\lambda$  en réduisant le pas d'espace. En particulier, ceci est effectué lorsqu'on travaille sur des objets présentant des volumes supérieurs à  $50\lambda$ , ou présentant des parois réfléchissantes (par exemple des semi-cavités aux parois métalliques) qui allongent la durée du parcours des ondes dans le domaine.

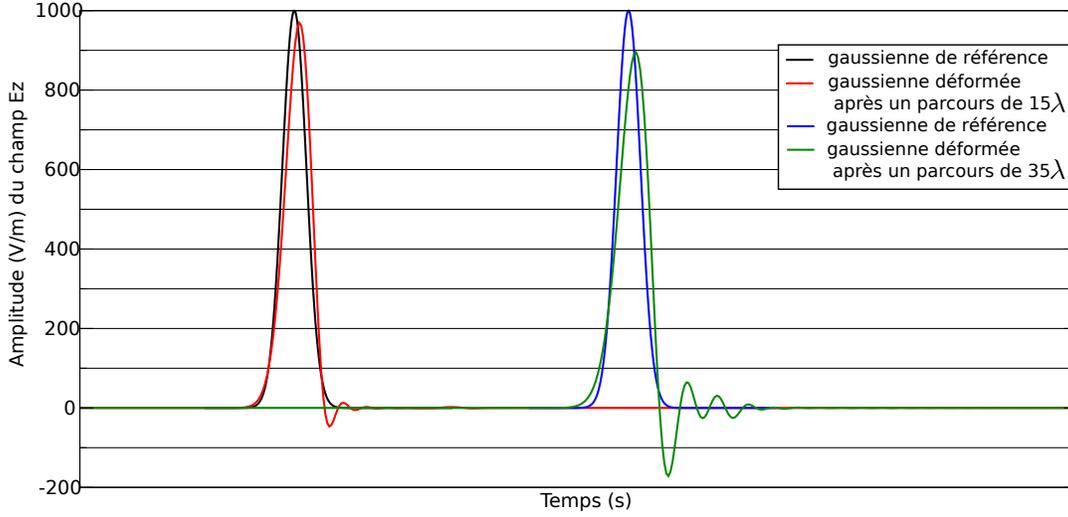


figure 1.3 – Dégradation d'une forme d'onde de type gaussienne au cours du temps due à l'erreur de dispersion pour un facteur de résolution  $N_\lambda = 10$ .

Pour donner une illustration de ce phénomène de dispersion, la figure 1.3 montre la simulation, par le schéma de Yee, de la propagation d'une onde plane de type gaussienne sur une grande distance. On voit que le signal se déforme dans le temps à cause de l'erreur de dispersion numérique du schéma. Si on étudie plus en détail le signal, on remarque que l'erreur intervient en premier sur les fréquences les plus élevées du spectre du signal. Ainsi, les formes d'ondes sont dégradées au cours du temps et les observables utilisés pour l'analyse d'une simulation en électromagnétisme, tels que l'amplitude maximale ou le temps de montée, sont fortement impactés. L'intérêt de réduire l'erreur de déphasage a une influence sur tout type de simulations où l'onde incidente parcourt au moins plusieurs dizaines de longueur d'onde.

L'erreur de dispersion peut être évaluée analytiquement. La démarche et l'expression de cette erreur pour le schéma de Yee (S22) est proposée dans [76] et les résultats (1.2.6) et (1.2.7) sont rappelés ci-après. La relation de dispersion du problème continu est :

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = (k_x)^2 + (k_y)^2 + (k_z)^2. \quad (1.2.4)$$

où  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  définit le vecteur d'onde et  $\omega$ ,  $c$  respectivement la pulsation et la vitesse des ondes électromagnétiques dans le milieu.

En introduisant une solution de type onde plane dans le schéma de Yee, nous obtenons la relation (1.2.5) suivante sur la dispersion numérique de cette méthode :

$$\left[\frac{1}{c\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{\Delta x} \sin\left(\frac{\tilde{k}_x\Delta x}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta y} \sin\left(\frac{\tilde{k}_y\Delta y}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta z} \sin\left(\frac{\tilde{k}_z\Delta z}{2}\right)\right]^2, \quad (1.2.5)$$

où  $\vec{\tilde{k}} = (\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z)$  définit le vecteur d'onde approché. A partir de cette formule, nous pouvons exprimer le nombre d'onde approché  $\|\vec{\tilde{k}}\|$  et la vitesse de phase  $\tilde{v}_p$ .

Alors, par exemple pour un choix de pas d'espace tel que  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ , l'erreur de dispersion dans le cas d'un mode  $TM_z$  ( $\tilde{k}_z = 0$ ) se propageant selon un axe diagonal ( $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y \neq 0$ ), s'écrit sous la forme analytique suivante :

$$\tilde{k} = \frac{2\sqrt{2}}{\Delta x} \sin^{-1} \left[ \frac{1}{S\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi S}{N_\lambda}\right) \right], \quad (1.2.6)$$

où  $S = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \text{coef}$ , (le *coef* est la valeur appliquée dans certaines simulations pour réduire artificiellement le pas de temps du calcul et ainsi assurer la stabilité du schéma utilisé) et  $N_\lambda = \frac{2\pi S}{k\Delta x}$ .

$$\tilde{v}_p = \frac{\omega}{\tilde{k}} = c\pi \left( N_\lambda \sqrt{2} \sin^{-1} \left[ \frac{1}{S\sqrt{2}} \sin \left( \frac{\pi S}{N_\lambda} \right) \right] \right)^{-1}. \quad (1.2.7)$$

L'étude bibliographique montre qu'il existe de nombreuses façons de caractériser l'erreur de dispersion  $\Phi_k$ . La figure 1.4 illustre cette erreur de dispersion en fonction du facteur de résolution (donc du pas d'espace) en utilisant une estimation donnée dans la publication [37]. Dans celle-ci,  $\Phi_k$  est définie par :

$$\Phi_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{k - \tilde{k}(\phi)}{k} \right)^2 d\phi, \quad (1.2.8)$$

où  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  est le nombre d'onde de référence et  $\tilde{k}$  est le nombre d'onde approché pour un angle  $\phi$  du vecteur d'onde donné [75]. Dans cette figure, on voit que  $\Phi_k$  décroît en  $N_\lambda^{-4}$ . En particulier, nous notons que cette erreur est minimale pour  $\phi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  (ce qui correspond à la propagation selon un axe du maillage) et maximale pour les angles  $\phi = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$  (ce qui correspond à la propagation selon un axe diagonal au maillage).

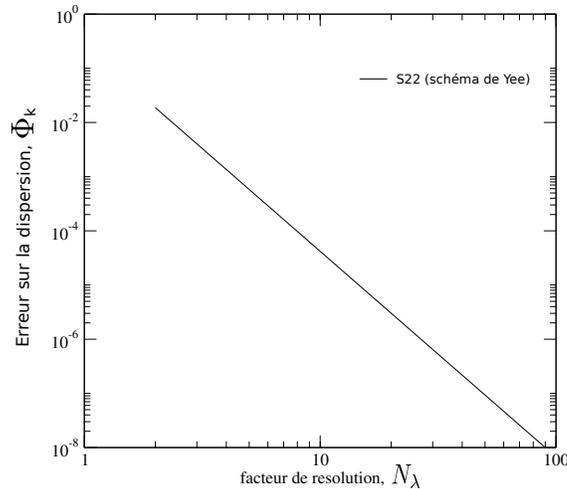


figure 1.4 – Erreur globale  $\Phi_k$  sur la dispersion du schéma de Yee (S22) en fonction du facteur de résolution.

## Conclusion

Le schéma de Yee, bien que très utilisé, souffre d'un problème lié à la dispersion numérique et à la représentation de la géométrie sous forme d'un maillage cartésien.

Le problème d'un schéma dispersif est qu'il induit une erreur de déphasage au cours du temps. De nombreuses études ont été faites pour mettre ce phénomène en évidence sur le schéma de Yee et le quantifier [28], [69], [68], [38]. Ceci est évidemment problématique pour les études purement fréquentielles car la fréquence est décalée. Mais, cette erreur intervient aussi lors de simulations utilisant une forme d'onde large bande. Dans ce cas, les hautes fréquences se déplacent à des vitesses différentes de celles des fréquences plus basses. Ainsi, toute la forme de l'onde injectée est dégradée au cours du temps. Les études de grandes scènes de calcul ou présentant des cavités sont les plus impactées par ce phénomène et remettent en question la pertinence des résultats fournis par cette méthode.

L'augmentation des ressources informatiques permet de réaliser des simulations plus longues et plus importantes en nombre de mailles. Ainsi, la réalisation de maillage plus fin permet de réduire l'erreur de dispersion pour un coût de calcul important. Toutefois, même dans ce cas, l'erreur de dispersion ne disparaît pas complètement car celle-ci est liée au schéma numérique.

L'autre inconvénient du schéma de Yee est lié à l'utilisation d'un maillage cartésien pour représenter des géométries courbes. En effet, ces dernières sont modélisées en « marches d'escalier » et il résulte d'une telle approximation une détérioration de la précision de la solution calculée sur les champs électromagnétiques proches des parois. Cette approximation en marche d'escalier est étudiée et analysée dans la publication [9].

L'amélioration de cette erreur de représentation géométrique a fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Les solutions proposées peuvent être rassemblées en trois groupes [76]. La première approche consiste à modifier localement le schéma de Yee en utilisant des techniques dites de “contour-path” ou Conformal FDTD (CFDTD), cherchant à être le plus proche de la courbure. Le contour-path ou CFDTD [90] [46] [45] [43] permet une représentation plus conforme de la géométrie. Cependant, celui-ci a un coût de calcul important et nécessite un procédé de maillage dont la complexité évolue en fonction de la précision recherchée [47]. De plus, il existe de nombreuses techniques pour modéliser les géométries courbes dans cette approche. Le plus souvent ces techniques sont dédiées à un problème particulier, qui les rend plus difficiles à être utilisées de manière générale. La seconde solution consiste à utiliser un raffinement de maillage [22]. Cependant ce procédé reste toujours une approche de la géométrie courbe en marches d'escalier, qui est difficile à mettre en œuvre de manière automatique [21]. Une technique de raffinement adaptatif de maillage (AMR) propose une solution automatique afin de résoudre ce problème [54]. La dernière solution au problème de géométrie courbe consiste à hybrider le schéma FDTD avec une méthode numérique utilisant un maillage conforme à la géométrie comme par exemple les schémas FVTD [5] ou GD([10], [65]). Cette stratégie a l'avantage de proposer une solution utilisant un schéma adapté à des géométries courbes. Dans cette optique, dans le chapitre 4, nous nous intéresserons à l'hybridation du schéma FEM étudié dans le chapitre 2 avec d'autres méthodes, telle que par exemple une approche GD.

Dans le prochain paragraphe, nous allons nous intéresser à des méthodes de la littérature qui pour réduire l'erreur de dispersion utilisent des développements de Taylor d'ordre plus élevé que le schéma de Yee dans l'approximation des dérivées partielles spatiales des équations de Maxwell.

### 1.3 Analyse des méthodes proposées dans la littérature pour améliorer le schéma de Yee

Le problème de dispersion du schéma de Yee est connu depuis longtemps [75], [28]. La communauté scientifique s'est intéressée à améliorer celui-ci tout en essayant de conserver ses bonnes propriétés. Notamment, les travaux présentés dans la littérature sur la réduction de la dispersion ont conduit à proposer des schémas d'ordre plus élevé en espace. Dans ce paragraphe, nous proposons une présentation non-exhaustive de certains de ces travaux menés sur l'augmentation en ordre d'approximation spatiale du schéma de Yee. Dans la littérature, nous pouvons distinguer deux types d'amélioration qui ont abouti à proposer des schémas aux différences finies d'ordre élevé :

- la première approche consiste à augmenter le nombre de termes dans le développement de Taylor pour évaluer les dérivées en conservant les mêmes inconnues que le schéma de Yee dans le maillage,
- la seconde approche consiste à réinterpréter le schéma de Yee sous forme d'une méthode éléments finis utilisant des fonctions de base spatiales d'ordre supérieur à 1.

Dans les paragraphes suivants, nous allons présenter les avantages et les inconvénients de ces deux approches.

### 1.3.1 Le schéma de Yee amélioré : intérêt et pertinence

A partir du schéma de Yee, certains auteurs ont proposé de modifier celui-ci en augmentant son stencil (par conséquent l'ordre d'approximation spatiale) pour réduire l'erreur de dispersion. Nous rappelons que le stencil correspond au nombre de termes utilisés dans le développement de Taylor pour approximer les dérivées spatiales des équations de Maxwell. Ce procédé, largement étudié dans la littérature [28], [69], [71], permet d'obtenir de nouveaux schémas dont l'ordre d'approximation spatiale est plus élevé que celui du schéma de Yee. Par exemple un travail mené en 2D, dans la littérature [69], met en évidence l'apport sur l'erreur de dispersion entre le schéma de Yee et un schéma d'ordre 2 en temps et 4 en espace (schéma S24). En particulier, dans ce travail, il est proposé de choisir le facteur de résolution  $N_\lambda$ , non plus empiriquement, mais en fonction d'un pourcentage de l'erreur de déphasage  $e_\phi$  obtenue sur un nombre de périodes  $P$  parcourues par l'onde incidente. Pour une simulation, le nombre de périodes est donné par  $P = c_0 \frac{t_c}{\lambda}$  où  $t_c$  correspond au temps d'exploration. En particulier, pour le schéma de Yee (S22), cette stratégie permet de calculer une estimation du facteur de résolution  $N_\lambda$  donnée par la relation (1.3.1) :

$$N_\lambda \approx \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{3}{2}} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{P}{e_\phi}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.3.1)$$

où  $\theta$  définit l'angle de propagation de l'onde incidente.

Par exemple, en utilisant la formule (1.3.1), pour 3 périodes d'exploration et une erreur sur le déphasage de  $\approx 1,6\%$  (ce qui correspond à  $e_\phi = 5.73^\circ$ ), on obtient  $N_\lambda \approx 14$ .

De même, pour le schéma de Yee amélioré d'ordre 4 en approximation spatiale (S24), en utilisant la stratégie énoncée précédemment, pour calculer  $N_\lambda$  on obtient la relation (1.3.2) :

$$N_\lambda \approx \left(\frac{3}{20}\right)^{\frac{1}{4}} \pi^{\frac{5}{4}} (\sin^6 \theta + \cos^6 \theta)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{P}{e_\phi}\right)^{\frac{1}{4}}. \quad (1.3.2)$$

Dans ce cas, pour 3 périodes d'exploration et une erreur sur le déphasage de  $\approx 1,6\%$  (ce qui correspond à  $e_\phi = 5.73^\circ$ ), on obtient  $N_\lambda \approx 4$ .

A erreur de dispersion similaire, ceci montre que la taille des mailles pour le schéma S24 est nettement plus grande que celle du schéma de Yee (S22). Donc, pour un maillage donné avec une taille de maille fixée, nous obtiendrons une erreur de dispersion beaucoup plus faible avec le schéma S24 qu'avec le schéma S22.

On constate donc qu'une augmentation de l'ordre d'approximation spatiale permet de réduire l'erreur de déphasage. Par conséquent, l'utilisation de cette méthode permet d'effectuer des simulations sur un temps d'observation plus long avec peu d'erreur de dispersion tout en évitant de réduire fortement le pas d'espace.

Notre étude bibliographique a montré que l'essentiel des travaux sur des schémas d'ordre élevé présentant des applications numériques sont effectués pour une approximation spatiale d'ordre 4. Ainsi, dans cette thèse, nous nous limitons à la présentation des 2 schémas les plus référencés [38], [79], [89] et [85] et les plus représentatifs de cette classe de solution. Par ailleurs, le lecteur peut se référer à d'autres papiers, dont la publication [91], pour ce qui est de la montée en ordre d'approximation spatiale au-delà de 4.

Dans les 2 schémas que nous allons présenter, l'approximation temporelle reste d'ordre 2 comme le schéma de Yee et nous prenons une approximation en espace à l'ordre 4. Dans la littérature ces deux schémas sont identifiés sous la nomenclature S24 [28] et M24 [38].

Concernant le schéma S24, celui-ci est obtenu en utilisant une formule de Taylor à l'ordre 4 qui requiert 8 valeurs de champs par direction pour approximer les dérivées spatiales. Si l'on considère le calcul de la composante  $E_z$ , le schéma S24 se ramène à la somme de deux circulations de champs magnétiques  $C_1$  et  $C_2$  autour de la composante  $E_z$  comme indiqué sur la figure 1.5. Plus précisément, on peut écrire ce schéma sous la forme suivante :

$$\int_S \varepsilon \partial_t E_z = \frac{9}{8} \int_{C_1} \varepsilon \partial_t E_z - \frac{1}{8} \int_{C_2} \varepsilon \partial_t E_z \tag{1.3.3}$$

Dans cette expression  $S$  représente la surface de la super-cellule constituée des 9 cellules de Yee et  $C_1$  et  $C_2$  les contours comme indiqués sur la figure 1.5.

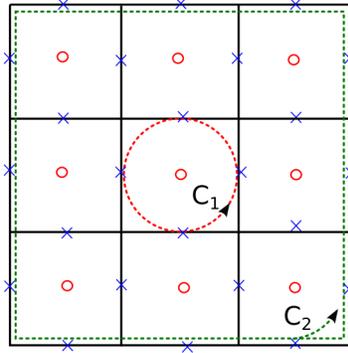


figure 1.5 – Cellules Yee en 2D, avec  $\circ$  pour les DDL  $\mathbf{E}$  et  $\times$  pour les DDL  $\mathbf{H}$ . Les boucles  $C_1$  et  $C_2$  représentent les DDL pris en compte pour augmenter l'ordre d'approximation spatiale pour le schéma S24.

En 2D, pour un maillage à pas fixe, il est montré [28] que ce schéma est stable sous la condition suivante :

$$\Delta t < \frac{6h}{7c_0\sqrt{2}} \tag{1.3.4}$$

où  $h$  définit le pas d'espace.

Dans la littérature, il faut noter que, pour ce type de schéma, il y a peu de papiers qui utilisent celui-ci dans un contexte 3D.

Concernant le schéma M24, celui-ci est obtenu en modifiant le schéma S24 et en associant différents poids  $K_1$  et  $K_2$  aux différents termes du schéma S24. Les valeurs des poids sont calculées afin de réduire au maximum l'erreur de déphasage du schéma numérique. Ainsi, si on considère la composante  $E_z$ , on peut montrer que le schéma M24 se ramène à la somme de trois circulations de champs magnétiques  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  autour de la composante  $E_z$  comme indiqué sur la figure 1.6. Plus précisément, on peut écrire ce schéma sous la forme :

$$\int_S \varepsilon \partial_t E_z = K_1 \int_{C_2} \varepsilon \partial_t E_z + K_2 \int_{C_3} \varepsilon \partial_t E_z + (1 - K_1 - K_2) \int_{C_1} \varepsilon \partial_t E_z \tag{1.3.5}$$

Dans cette expression  $S$  représente la surface de la super-cellule constituée des 9 cellules de Yee et  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  les contours comme indiqués sur la figure 1.6.

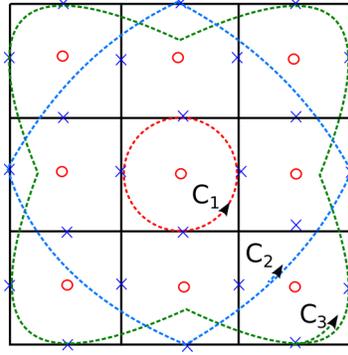


figure 1.6 – Cellules Yee en 2D, avec  $\circ$  pour les DDL  $\mathbf{E}$  et  $\times$  pour les DDL  $\mathbf{H}$ . Les boucles  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  représentent les DDL pris en compte pour augmenter l'ordre d'approximation spatiale pour le schéma M24.

En 2D, pour un maillage à pas fixe, il est montré [38] que ce schéma est stable sous la condition suivante :

$$\Delta t < \frac{3h}{c_0 \sqrt{2(3 - 4K_1)(3 - 4K_1 - 2K_2)}} \quad (1.3.6)$$

avec

$$K_1 < 0 \quad \text{et} \quad K_2 < 3/2 - 2K_1$$

On peut remarquer que si les coefficients prennent les valeurs  $K_1 = 0$  et  $K_2 = 0$ , nous retrouvons le schéma de Yee (S22). De même, pour les valeurs  $K_1 = -\frac{1}{8}$  et  $K_2 = 0$  le schéma M24 est équivalent au schéma S24.

### Analyse comparative de la dispersion

En introduisant une solution de type onde plane dans le schéma M24, nous obtenons la relation (1.3.7) suivante sur la dispersion numérique de cette méthode :

$$\begin{aligned} \left(\frac{3\Delta x}{c\Delta t}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) &= \left[ K_1 \sin\left(\frac{3\tilde{k}_x\Delta x}{2}\right) + 3(1 - K_1) \sin\left(\frac{\tilde{k}_x\Delta x}{2}\right) \right] \\ &\quad \left[ \sin\left(\frac{3\tilde{k}_x\Delta x}{2}\right) \left[ K_1 + K_2 \cos(\tilde{k}_y\Delta x) \right] + 3(1 - K_1 - K_2) \sin\left(\frac{\tilde{k}_x\Delta x}{2}\right) \right] \\ &\quad + \left[ K_1 \sin\left(\frac{3\tilde{k}_y\Delta x}{2}\right) + 3(1 - K_1) \sin\left(\frac{\tilde{k}_y\Delta x}{2}\right) \right] \\ &\quad \left[ \sin\left(\frac{3\tilde{k}_y\Delta x}{2}\right) \left[ K_1 + K_2 \cos(\tilde{k}_x\Delta x) \right] + 3(1 - K_1 - K_2) \sin\left(\frac{\tilde{k}_y\Delta x}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

La relation de dispersion du schéma S24 s'obtient en posant  $K_1 = -\frac{1}{8}$  et  $K_2 = 0$ . Pour le schéma M24, l'étude sur la dispersion en fonction du pas d'espace (ou du facteur de résolution) est effectuée en recherchant pour chaque pas d'espace les valeurs du couple  $(K_1, K_2)$  qui minimisent l'erreur de dispersion  $\Phi_k$ . Il faut noter que dans le calcul de  $\Phi_k$ , on tient compte de toutes les incidences du vecteur de propagation  $k_x, k_y$  et  $k_z$ . On montre alors que l'évolution de l'erreur de dispersion est en  $N_\lambda^{-4}$  pour le schéma S22,  $N_\lambda^{-8}$  pour le schéma S24 et  $N_\lambda^{-12.5}$  pour le schéma M24.

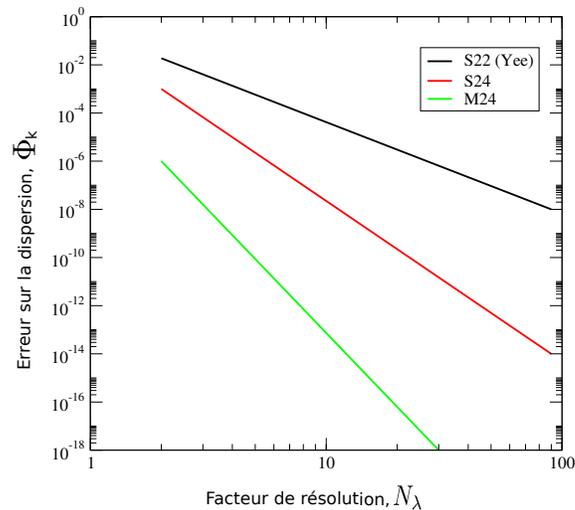


figure 1.7 – Erreur globale  $\Phi_k$  pour la dispersion des schémas de Yee (S22), S24 et M24 en fonction du facteur de résolution.

Les résultats mettent en évidence un meilleur comportement de l'évolution de l'erreur de dispersion pour les schémas d'ordre 4 par rapport au schéma de Yee. La figure 1.7 illustre deux phénomènes sur l'erreur de dispersion. Un schéma d'ordre élevé est naturellement plus précis et la décroissance de l'erreur est d'autant plus rapide que le facteur de résolution est d'autant plus faible. Enfin, il est évident qu'en utilisant un maillage cartésien le schéma d'ordre S24 ou M24 apporte, par rapport au schéma de Yee et pour une erreur de dispersion similaire, une forte réduction de la place mémoire, grâce à la diminution du facteur de résolution et donc du nombre de degrés de liberté.

En plus des solutions proposées, il existe dans la littérature d'autres alternatives de schémas d'approximation spatiale d'ordre 4, comme par exemple le schéma Ty [79] que nous n'explicitons pas ici. Pour plus de détails sur ce type de schémas, le lecteur peut se référer à l'article [71] qui fait une comparaison critique de plusieurs autres schémas d'ordre élevé.

## Conclusion

Les méthodes utilisant un stencil plus large pour évaluer les dérivées, et qui permettent d'augmenter l'ordre d'un schéma, montrent un réel intérêt sur la réduction du phénomène de déphasage. Toutefois, ces méthodes sont limitées pour envisager de les utiliser dans un contexte industriel. En effet, d'une part, la prise en compte des matériaux diélectriques ou conducteurs est très difficile à cause de l'utilisation d'un stencil sur plusieurs cellules qui fait "disparaître" la notion d'interface ou de frontière. D'autre part, l'introduction de conditions limites dans un schéma d'ordre supérieur à 2 en espace est complexe.

Par ailleurs, dans l'ensemble des méthodes améliorant le schéma de Yee par l'augmentation de l'ordre de l'approximation spatiale, certaines n'utilisent pas le fait d'augmenter le stencil propre au schéma de Yee. Pour ces méthodes, le coût de calcul pour réduire l'erreur de dispersion devient très important et la bande de fréquences du signal injecté est réduite. Pour ces raisons, nous ne nous sommes pas intéressés à ce type de méthodes, mais nous avons plutôt préféré considérer des méthodes où le schéma de Yee se réinterprète comme une méthode éléments finis dans laquelle l'ordre d'approximation spatiale peut être augmenté.

### 1.3.2 Méthodes d'éléments finis réinterprétant les méthodes de différences finies d'ordre élevé

La résolution des équations de Maxwell instationnaires par des méthodes numériques ayant des ordres d'approximation spatiale élevés a fait l'objet de nombreuses études dans la littérature [20], [41]. Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à des méthodes FEM d'ordre élevé qui correspondent au schéma de Yee pour un ordre d'approximation spatiale égal à 0 ou 1 selon les conventions. Ces méthodes, pour des ordres d'approximation spatiale élevés, conservent la représentation spatiale des degrés de liberté des champs électromagnétiques en "quinconce" du schéma de Yee. Ainsi, nous avons retenu dans la littérature deux schémas utilisant des éléments finis de frontières dans le domaine temporel. Toutefois, d'autres méthodes existent, comme celles présentées dans les papiers [52], [84], [65] et [44], mais qui, généralement, ne correspondent pas, pour un ordre d'approximation spatiale donné, au schéma de Yee.

#### 1.3.2.1 La Cellule Lobatto

Les études menées dans [14] et [12] décrivent une méthode d'éléments finis d'ordre élevé réinterprétant les différences finies sur maillage cartésien à pas d'espace constant et pour un ordre d'approximation fixe sur la totalité du maillage. Cette méthode utilise des éléments finis basés sur les éléments de Whitney [53]. L'approximation spatiale est effectuée par des fonctions de base définies par des polynômes de Lagrange sur des points de Gauss-Lobatto [1] dans l'élément de référence  $[0, 1]^3$  et l'approximation temporelle est donnée par un schéma LeapFrog identique à celui du schéma de Yee. La construction d'une "cellule Lobatto" en remplacement de la cellule de Yee permet, d'une part, de conserver une condensation de la matrice de masse du schéma, et d'autre part, de conserver la localisation des changements de milieu au niveau des interfaces.

Néanmoins, il faut rappeler que ce type de schéma éléments finis est construit sur une grille cartésienne orthogonale, où les géométries courbes sont décrites par des "marches d'escalier". Pour limiter les conséquences d'une mauvaise représentation des éléments courbes, une méthode de raffinement de maillage a été spécifiquement développée [13].

La "cellule Lobatto" proposée dans [14] permet de limiter le phénomène de dispersion par un choix judicieux de fonctions de base. En outre, ce choix présente des propriétés semblables à celles de la cellule de Yee, c'est à dire, d'une part la continuité des champs tangentiels, et d'autre part le fait que les degrés de liberté associés aux champs électriques et magnétiques forment un motif en "quinconce". Ainsi, la méthode proposée définit un schéma FDTD amélioré, utilisant une approximation spatiale d'ordre élevé grâce à la cellule Lobatto et un schéma de type LeapFrog d'ordre 2 pour l'approximation temporelle.

#### La construction du schéma

Soit  $\tau_h$  un partitionnement de  $\Omega$ , définit par

$$\tau_h = \left\{ \mathcal{K}_i \in \tau_h \mid \bigcup_{i=1}^{N_e} \mathcal{K}_i = \Omega \text{ et } \mathcal{K}_i \cap \mathcal{K}_j = \emptyset \ \forall i, j \text{ tel que } 1 \leq i \neq j \leq N_e \right\},$$

où chaque élément  $\mathcal{K}_i$  est un cube et  $N_e$  désigne le nombre d'éléments. Les champs électriques et ma-

gnétiques sont définis par :

$$\mathbf{E}_h(t, \mathbf{x}) = \left( \begin{aligned} &\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{r+1} E_{i,j,k}^x(t) \phi_{i+\frac{1}{2},j,k}^x(\mathbf{x}) ; \\ &\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{r+1} E_{i,j,k}^y(t) \phi_{i,j+\frac{1}{2},k}^y(\mathbf{x}) ; \\ &\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^{r+1} \sum_{k=1}^r E_{i,j,k}^z(t) \phi_{i,j,k+\frac{1}{2}}^z(\mathbf{x}) \end{aligned} \right), \quad (1.3.8)$$

$$\mathbf{H}_h(t, \mathbf{x}) = \left( \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r H_{i,j,k}^x(t) \psi_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^x(\mathbf{x}) ; \\ &\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r+1} \sum_{k=1}^r H_{i,j,k}^y(t) \psi_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^y(\mathbf{x}) ; \\ &\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{r+1} H_{i,j,k}^z(t) \psi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^z(\mathbf{x}) \end{aligned} \right), \quad (1.3.9)$$

où  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  et les fonctions de base sont données par :

$$\begin{aligned} \phi_{i+\frac{1}{2},j,k}^x(\mathbf{x}) &= g_{i+\frac{1}{2}}(x) \quad f_j(y) \quad f_k(z) \\ \phi_{i,j+\frac{1}{2},k}^y(\mathbf{x}) &= f_i(x) \quad g_{j+\frac{1}{2}}(y) \quad f_k(z) \\ \phi_{i,j,k+\frac{1}{2}}^z(\mathbf{x}) &= f_i(x) \quad f_j(y) \quad g_{k+\frac{1}{2}}(z) \\ \psi_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^x(\mathbf{x}) &= f_i(x) \quad g_{j+\frac{1}{2}}(y) \quad g_{k+\frac{1}{2}}(z) \\ \psi_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^y(\mathbf{x}) &= g_{i+\frac{1}{2}}(x) \quad f_j(y) \quad g_{k+\frac{1}{2}}(z) \\ \psi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^z(\mathbf{x}) &= g_{i+\frac{1}{2}}(x) \quad g_{j+\frac{1}{2}}(y) \quad f_k(z) \end{aligned}$$

où  $f_i$  est le polynôme de Lagrange construit avec les points de Gauss-Lobatto  $q_j$ ,  $j \in [1, r+1]$ , de degré  $r$  associé au  $j$ -ième point de Gauss-Lobatto et défini par la relation (1.3.10). Dans les formules précédentes, le demi-indice et les couleurs associées sont utilisés pour rappeler au lecteur le positionnement en quinconce des inconnues, caractéristique du schéma de Yee.

$$f_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{r+1} \frac{(x - q_j)}{(q_j - q_i)}, \quad (1.3.10)$$

Et  $g_{i+\frac{1}{2}}$  un polynôme défini à partir de la dérivée du polynôme de Lagrange  $f_i$  par :

$$g_{\frac{1}{2}}(x) = -\Delta L \partial_x f_1(x) \quad (1.3.11)$$

$$g_{i+\frac{1}{2}}(x) = g_{i-\frac{1}{2}}(x) - \Delta L \partial_x f_i(x). \quad (1.3.12)$$

Nous notons dans ce schéma, basé sur la cellule Lobatto, que les calculs des inconnues situées sur une surface ou sur une arête de la maille nécessitent 2 ou 4 fois plus d'éléments.

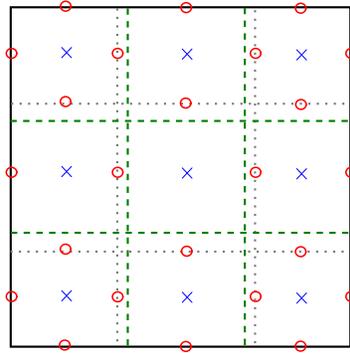


figure 1.8 – Cellule Lobatto pour  $r = 3$ , avec  $\circ$  pour les inconnues  $\mathbf{E}$  et  $\times$  pour les inconnues  $\mathbf{H}$ . L'équivalent en cellules de Yee est représenté en superposition par les pointillés verts.

Ce schéma est identique au schéma de Yee lorsque  $r = 1$ .

### Propriétés de conservation

Les conservations de l'énergie, de la charge magnétique et de la charge électrique au cours du temps sont démontrées en utilisant les propriétés des polynômes de Lagrange et les propriétés d'exactitude de l'intégration quadratique de Gauss-Lobatto. Ainsi, soit  $W$  l'énergie, on a :

$$W(t) = \int (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{H}}) dv \quad \text{et} \quad \partial_t W(t) = 0$$

De même pour  $\rho_m$  la densité de charge magnétique, on a :

$$\rho_m = \nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} \quad \text{et} \quad \partial_t \rho_m = 0$$

De même pour  $\rho_e$  la densité de charge électrique, on a :

$$\rho_e = \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} \quad \text{et} \quad \partial_t \rho_e = 0$$

### Condition sur le critère de stabilité

La condition de stabilité est estimée par la méthode de von Neumann. L'étude menée est restreinte à un pas d'espace fixe et à un ordre d'approximation spatiale fixe dans les trois directions. La condition de stabilité pour les ordres d'approximation spatiale de 2 à 5 est donnée par :

$$\Delta t_{Lobatto(2)} \simeq 0.80 \cdot \Delta t_{Yee} \simeq 0.8 \frac{\Delta x}{c\sqrt{3}} \quad (1.3.13)$$

$$\Delta t_{Lobatto(3)} \simeq 0.69 \cdot \Delta t_{Yee} \quad (1.3.14)$$

$$\Delta t_{Lobatto(4)} \simeq 0.59 \cdot \Delta t_{Yee} \quad (1.3.15)$$

$$\Delta t_{Lobatto(5)} \simeq 0.50 \cdot \Delta t_{Yee} \quad (1.3.16)$$

Où  $\Delta t_{Yee}$  est la condition de stabilité du schéma de Yee sur le même maillage. Dans ces valeurs, seule la condition pour l'ordre 2 a été obtenue analytiquement, les autres ont été obtenues expérimentalement.

### Analyse de la dispersion et de la convergence

Dans [14], l'analyse de la dispersion est effectuée par un calcul analytique et un calcul expérimental pour un mode  $TM_z$ . Dans cette analyse, R. Chilton met en évidence que ce schéma avec un ordre d'approximation spatiale égal à 2 est aussi efficace sur la réduction de l'erreur de dispersion (décroissance en  $N_\lambda^{-8}$ ) que le schéma S24 présenté dans le paragraphe 1.3.1. Toutefois, pour des ordres d'approximation spatiale supérieurs, l'étude n'a pas été réalisée pour ce schéma.

### Conclusion

Cette méthode montre un réel intérêt. En effet, d'une part l'ordre d'approximation élevé permet de réduire l'erreur de déphasage, et d'autre part la cellule Lobatto est construite à partir d'une cellule du maillage cartésien. Cela signifie qu'il n'y a pas d'augmentation du stencil pour obtenir le schéma et ainsi les contraintes de continuité des fonctions de base sont imposées dans les mailles au niveau des faces et des arêtes. En particulier, la continuité tangentielle des champs électriques est réalisée de manière similaire au schéma de Yee. Par conséquent, nous pouvons facilement introduire des matériaux diélectriques et conducteurs en utilisant cette méthode.

De plus, la méthode introduit un concept qui est inexistant dans les schémas aux différences finies améliorés présentés dans la section 1.3.1. Sans changer le schéma, il s'agit de pouvoir choisir un ordre d'approximation en espace que l'on souhaite pour la méthode. Par conséquent, l'erreur de dispersion peut être facilement maîtrisée en jouant sur l'ordre de la méthode.

#### 1.3.2.2 La Cellule Lobatto-Gauss

Une autre méthode d'éléments finis d'ordre élevé de frontières, basée sur une cellule que nous nommerons Lobatto-Gauss, permet aussi de réinterpréter la méthode FDTD. Une première présentation de cette méthode et une première étude théorique sont effectuées dans le papier [19]. Un développement de cette méthode a été réalisé par T. Volpert et présenté dans sa thèse [83] pour résoudre des problèmes électromagnétiques de CEM. Ces travaux montrent la faisabilité et l'intérêt d'une telle approche pour résoudre des problèmes industriels. Toutefois, le développement et l'application ont mis en évidence des points critiques à approfondir et à affiner afin de proposer un code industriel basée sur cette approche qui soit viable.

La cellule Lobatto-Gauss est fortement semblable à la cellule Lobatto. En effet, celle-ci conserve la localisation des changements de milieux au niveau des interfaces, une condensation de la matrice de masse du schéma et, à l'ordre  $r=0$  (ou  $r=1$  selon les conventions) celle-ci correspond au schéma de Yee. Cette méthode est aussi construite sur une grille cartésienne orthogonale. Toutefois, l'étude de cette méthode à des fins industrielles a conduit à s'intéresser à l'utilisation d'ordres d'approximation spatiale variables par direction et à des pas d'espace adaptés à ces ordres. Ainsi, nous présentons dans ce paragraphe le schéma simplifié et le principe de la méthode, tels qu'ils ont été introduits dans la thèse [83]. Nous étudierons ensuite, dans le chapitre 2, un schéma plus général pouvant prendre en compte des ordres d'approximation spatiale variables par direction.

### La construction du schéma

Soit  $\tau_h$  un partitionnement de  $\Omega$ , défini par

$$\tau_h = \left\{ \mathcal{K}_i \in \tau_h \mid \bigcup_{i=1}^{N_e} \mathcal{K}_i = \Omega \text{ et } \mathcal{K}_i \cap \mathcal{K}_j = \emptyset \quad \forall i, j \text{ tel que } 1 \leq i \neq j \leq N_e \right\},$$

où chaque élément  $\mathcal{K}_i$  est un parallélépipède et  $N_e$  désigne le nombre d'éléments. Les champs électriques

et magnétiques sont donnés par :

$$\mathbf{E}_h(t, \mathbf{x}) = \left( \begin{aligned} &\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{r+1} E_{i,j,k}^x(t) \phi_{i,j,k}^x(\mathbf{x}) ; \\ &\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{r+1} E_{i,j,k}^y(t) \phi_{i,j,k}^y(\mathbf{x}) ; \\ &\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^{r+1} \sum_{k=1}^r E_{i,j,k}^z(t) \phi_{i,j,k}^z(\mathbf{x}) \end{aligned} \right) \quad (1.3.17)$$

$$\mathbf{H}_h(t, \mathbf{x}) = \left( \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r H_{i,j,k}^x(t) \psi_{i,j,k}^x(\mathbf{x}) ; \\ &\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r+1} \sum_{k=1}^r H_{i,j,k}^y(t) \psi_{i,j,k}^y(\mathbf{x}) ; \\ &\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{r+1} H_{i,j,k}^z(t) \psi_{i,j,k}^z(\mathbf{x}) \end{aligned} \right) \quad (1.3.18)$$

où les fonctions de base sont définies par :

$$\begin{aligned} \phi_1^x(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^G(\hat{x}_1) \quad L_{l_2}^{GL}(\hat{x}_2) \quad L_{l_3}^{GL}(\hat{x}_3) \\ \phi_1^y(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^{GL}(\hat{x}_1) \quad L_{l_2}^G(\hat{x}_2) \quad L_{l_3}^{GL}(\hat{x}_3) \\ \phi_1^z(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^{GL}(\hat{x}_1) \quad L_{l_2}^{GL}(\hat{x}_2) \quad L_{l_3}^G(\hat{x}_3) \\ \psi_1^x(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^{GL}(\hat{x}_1) \quad L_{l_2}^G(\hat{x}_2) \quad L_{l_3}^G(\hat{x}_3) \\ \psi_1^y(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^G(\hat{x}_1) \quad L_{l_2}^{GL}(\hat{x}_2) \quad L_{l_3}^G(\hat{x}_3) \\ \psi_1^z(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^G(\hat{x}_1) \quad L_{l_2}^G(\hat{x}_2) \quad L_{l_3}^{GL}(\hat{x}_3) \end{aligned}$$

où  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$  décrit le triplet des indices de l'inconnue dans une cellule  $\mathcal{K}$  et  $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) \in [0, 1]^3$  les coordonnées spatiales de l'inconnue prises dans le cube unité.  $L^{GL}$  et  $L^G$  sont des polynômes de Lagrange construits respectivement avec les points de Gauss-Lobatto et avec les points de Gauss définis sur le cube unité  $[0, 1]^3$ .

Comme le schéma précédent basé sur la cellule Lobatto, nous noterons que les calculs des inconnues situées sur une surface ou une arête de la maille nécessitent 2 ou 4 fois plus d'opérations.

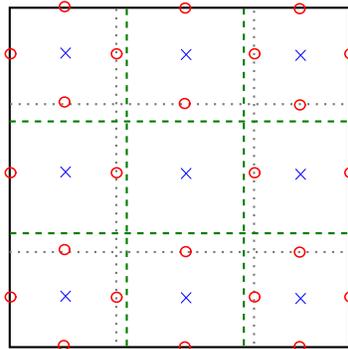


figure 1.9 – Cellule Lobatto-Gauss pour  $r = 3$ , avec  $\circ$  pour les DDL  $\mathbf{E}$  et  $\times$  pour les DDL  $\mathbf{H}$ . L'équivalent en cellules de Yee est représenté en superposition par les lignes vertes.

**Condition sur le critère de stabilité**

Les simulations présentées dans la thèse [83] utilisent un critère de stabilité obtenu expérimentalement. Dans notre travail de thèse, nous proposons une étude mathématique pour déterminer un critère de stabilité théorique plus précis et valable aussi pour des ordres quelconques par direction. Par ailleurs, d'autres auteurs [19] proposent de prendre un pas de temps en utilisant les résultats de l'analyse de dispersion du schéma comme critère de stabilité.

**Analyse de la convergence**

Une étude numérique expérimentale menée par T. Volpert a permis d'établir un taux de convergence en fonction du pas d'espace (figure 1.10).

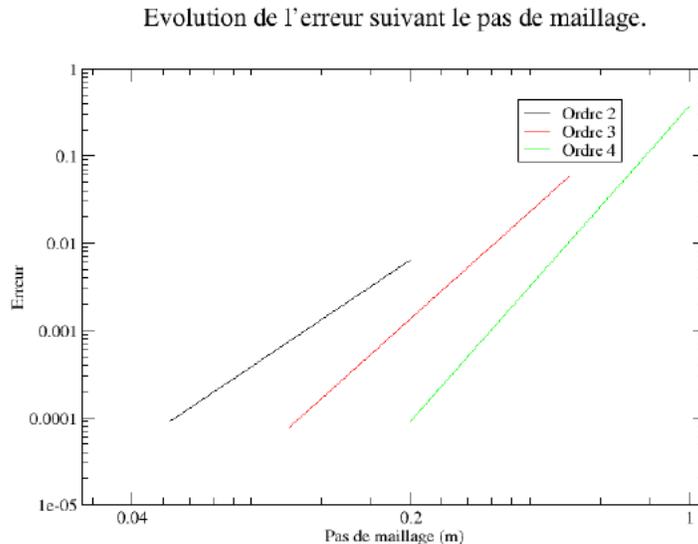


figure 1.10 – Erreur moyenne en fonction du pas de maillage (l'ordre 2 correspond au schéma de Yee).

Dans cette étude expérimentale, la convergence du schéma semble être en  $O(h^{r+1})$ , où  $h$  est le pas d'espace et  $r$  l'ordre d'approximation spatiale de la méthode. Dans notre travail de thèse, nous avons réalisé une étude mathématique afin de justifier et de préciser cet ordre de convergence.

**Analyse de la dispersion**

L'analyse de la dispersion a été établie dans l'article [19] sous la forme du théorème suivant :

**Théorème 1.3.1.** Soient  $0 < k_i h < \pi$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , où  $h$  définit le pas d'espace,  $k_i$  décrit le nombre d'onde pour la direction  $\vec{e}_{x_i}$  et supposons que  $\omega_h \neq 0$ , où  $\omega_h$  est la pulsation approchée du schéma décrit précédemment. Alors la relation de dispersion est :

$$\omega_h^2(\mathbf{k}) = \omega_{1,h}^2(k_1) + \omega_{2,h}^2(k_2) + \omega_{3,h}^2(k_3), \tag{1.3.19}$$

où  $\omega_{1,h}$  est une valeur propre pour :

$$P_x^* D^{(1)} M_G^{-1} D^{(1)T} P_x \mathbf{u}_1 - \omega_{1,h}^2 P_x^* M_L P_x \mathbf{u}_1 = 0, \tag{1.3.20}$$

et similairement pour  $\omega_{2,h}$  et  $\omega_{3,h}$  (en remplaçant  $x$  par  $y$  ou  $z$  respectivement).

Soit  $r$  décrivant l'ordre d'approximation spatiale du schéma, tel que lorsque le schéma correspond au schéma de Yee on ait  $r = 0$ . Les matrices dans la relation (1.3.20) sont définies de la manière suivante :

- $D^{(1)}$  est une matrice  $(r+1) \times (r+1)$  telle que  $D_{i,j}^{(1)} = \int_0^h \partial_x L_i^{GL}(x) L_j^G(x) dx$ ;
- $M_G$  est une matrice diagonale  $(r+1) \times (r+1)$  donnée par les poids de la méthode de quadrature de Gauss-Legendre  $(\omega_1^G, \dots, \omega_{r+1}^G)$  répartis sur la diagonale, et  $M_L$  est une matrice diagonale  $(r+2) \times (r+2)$  donnée par les poids de la méthode de quadrature de Gauss-Lobatto  $(\omega_1^{GL}, \dots, \omega_{r+2}^{GL})$  répartis sur la diagonale.
- $P_x$  est une matrice  $(r+2) \times (r+1)$  tel que  $P_x = \begin{pmatrix} & I_{r+1} & \\ \exp(ik_1 h) & 0 \dots & 0 \end{pmatrix}$ , où  $I_{r+1}$  est la matrice identité de dimension  $(r+1)$ .

### Bilan

Cette méthode montre un intérêt similaire à la méthode précédente donnée dans le paragraphe 1.3.2.1. Les recherches menées dans [83] sur cette méthode ont conclu que, pour répondre aux divers besoins de simulations industrielles, l'implémentation du schéma doit être réalisée en laissant libre le choix des ordres d'approximation spatiale par direction et en associant à ceux-ci des pas d'espace de dimension variable. De plus, les travaux menés par T. Volpert ont permis d'adapter à cette méthode certains modèles physiques associés au schéma de Yee. Les résultats et les performances ont montré un réel potentiel pour envisager une industrialisation de cette méthode FEM que nous nommerons aussi par la suite ElFiC pour "Eléments Finis sur maillage Cartésien".

## 1.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rappelé le problème physique que nous souhaitons étudier, c'est-à-dire le système de Maxwell pour lequel nous avons précisé les hypothèses des milieux et donné les notations que nous utiliserons dans la suite de ce rapport. Ensuite, nous avons présenté un état de l'art sur l'amélioration du schéma de Yee par des méthodes aux différences finies d'ordre élevé. Pour cela, nous avons commencé par présenter la construction du schéma de Yee et nous avons rappelé certains résultats concernant, en particulier, l'erreur de dispersion. Ainsi, une des problématiques de cette thèse a été introduite en illustrant l'importance de l'erreur de déphasage du schéma de Yee. Le problème de la dispersion du schéma de Yee est connu et il existe de nombreux travaux proposant des solutions afin de réduire cette erreur. Ainsi, un état de l'art sur la réduction de l'erreur de dispersion dans le schéma de Yee a été proposé de manière à montrer quels étaient les principaux travaux menés dans la littérature sur ce point. Sur l'ensemble de ces travaux, on note que la réduction de la dispersion passe par une augmentation en ordre d'approximation spatiale du schéma de Yee. Dans l'étude bibliographique, on trouve deux grandes classes de solutions proposées. Toutefois, les premiers schémas de la première classe basés sur l'augmentation du stencil ne permettent pas d'envisager une industrialisation pouvant supplanter le schéma de Yee. En effet, la réduction de l'erreur de dispersion s'effectue à l'aide d'une modification du schéma qui pose certains problèmes pour prendre en compte les conditions limites aux interfaces des matériaux et à la frontière du domaine de calcul. Ces contraintes limitent alors les possibilités d'exploitation industrielle. Par conséquent, nous nous sommes intéressés à la seconde classe de solutions qui réinterprète les différences finies comme un schéma éléments finis utilisant des approximations spatiales d'ordre 0 ou 1. Il est alors aisé de prendre des approximations d'ordre plus élevé pour avoir un schéma d'ordre élevé. Ces méthodes présentent l'avantage d'utiliser le même maillage cartésien que le schéma de Yee, ainsi que les mêmes données d'entrée, ce qui permet de conserver les outils informatiques déjà développés et utilisés. Enfin, notre choix de méthode s'est arrêté sur la méthode FEM, basée sur la cellule Lobatto-Gauss que l'on note ElFiC. On dispose sur cette méthode de quelques études montrant, dans [83], un bon potentiel pour son industrialisation.

---

Après avoir sélectionné dans ce chapitre la méthode qui nous semble la plus intéressante, dans le chapitre suivant, nous allons effectuer une étude mathématique de celle-ci et proposer une stratégie de choix automatique d'ordre d'approximation spatiale.

## Chapitre 2

# Étude d'une méthode d'éléments finis en ordre d'approximation spatiale élevé sur maillage cartésien

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au schéma numérique présenté dans la publication [19] pour résoudre les équations de Maxwell dans le domaine temporel. Ce schéma correspond à une méthode éléments finis (FEM) particulière qui utilise des éléments de la première famille de Nédélec [60]. Les études menées par T. Volpert dans [83] pour résoudre des problèmes électromagnétiques de CEM ont conclu que ce schéma approché FEM peut avantageusement remplacer le schéma de Yee habituellement utilisé. L'un des avantages de ce schéma FEM est qu'il possède une approximation spatiale polynomiale d'ordre élevé qui permet d'améliorer la précision numérique en réduisant l'erreur de dispersion. De plus, dans ce schéma, on a la possibilité de choisir un ordre d'approximation spatiale par direction dans chaque cellule. Cette particularité permet de diminuer les coûts de calcul tout en conservant la précision. Une autre propriété de ce schéma est que si l'on choisit un ordre d'approximation spatiale  $r$  égal à 0 (ou 1 selon la convention) alors le schéma FEM correspond exactement au schéma de Yee. Cette similitude avec ce dernier fait que les modèles physiques développés pour le schéma de Yee sont parfaitement portables dans cette méthode FEM d'ordre élevé. Ainsi, par rapport à notre travail de thèse, une des motivations est de fournir, pour une précision souhaitée, une stratégie de choix automatique d'ordre d'approximation spatiale associé à un pas d'espace, afin d'optimiser les performances en temps calcul et en place mémoire de la méthode. A partir des conclusions des travaux effectués dans [83], notre démarche scientifique pour ce chapitre consiste à :

- reprendre et compléter l'étude mathématique du schéma FEM, initiée dans les travaux cités précédemment. Toutefois pour cela, nous tiendrons compte de la possibilité d'avoir un ordre d'approximation spatiale variable par direction dans chaque cellule. Ce dernier point n'a pas été étudié jusqu'à présent. Dans cette étude, nous donnons un critère de stabilité théorique, un ordre de convergence théorique et, enfin, une analyse de dispersion de la méthode.
- proposer, pour une précision de calcul désirée, une stratégie automatique de génération de maillage et d'affectation des ordres d'approximation spatiale à chaque cellule, afin d'optimiser le coût calcul et la place mémoire.

## 2.2 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème d'évolution énoncé en (1.1.9) s'établit de la manière suivante.

Soient  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) \times \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ , et deux fonctions tests  $\varphi \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$  et  $\psi \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . En intégrant le système de Maxwell sur le domaine  $\Omega$  et en multipliant respectivement ses deux premières équations par les fonctions tests, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mu}} \mathbf{H} \cdot \psi \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E} \cdot \psi \, d\mathbf{x}, \quad (2.2.1a)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}} \mathbf{E} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{E} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{H} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{J}_s \cdot \varphi \, d\mathbf{x}. \quad (2.2.1b)$$

En appliquant le théorème de Green 1.1.1 au terme  $\int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{H} \cdot \varphi \, d\mathbf{x}$  de l'équation (2.2.1b), nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{H} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \nabla \wedge \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{H} \cdot (\varphi \wedge n) \, ds, \quad (2.2.2)$$

où  $\partial\Omega$  désigne la frontière du domaine  $\Omega$ , et  $n$  sa normale extérieure.

Ainsi, par le fait que  $\varphi \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ , le terme frontière s'élimine :  $\int_{\partial\Omega} \mathbf{H} \cdot (\varphi \wedge n) \, ds = 0$ .

La formulation résultante de l'application du théorème de Green dans (2.2.1) n'impose pas autant de régularité sur  $\mathbf{H}$  que sur  $\mathbf{E}$ . Notre problème va donc consister à chercher  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$  vérifiant la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mu}} \mathbf{H} \cdot \psi \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E} \cdot \psi \, d\mathbf{x}, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\underline{\underline{\varepsilon}} \mathbf{E} + \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{E} + \mathbf{J}_s) \cdot \varphi \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \nabla \wedge \varphi \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

La formulation variationnelle du problème d'évolution (1.1.9) s'écrit donc :

Chercher  $(\mathbf{E}(t, \cdot), \mathbf{H}(t, \cdot)) \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$ ,  $\forall t \in (0, T)$  tel que  $\forall (\varphi, \psi) \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}} \mathbf{E} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \nabla \wedge \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{E} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{J}_s \cdot \varphi \, d\mathbf{x} = 0, \quad (2.2.4a)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mu}} \mathbf{H} \cdot \psi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E} \cdot \psi \, d\mathbf{x} = 0, \quad (2.2.4b)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{E}(0, \mathbf{x}) \cdot \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{E}_0(x) \cdot \varphi \, d\mathbf{x}, \quad (2.2.4c)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{H}(0, \mathbf{x}) \cdot \psi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{H}_0(x) \cdot \psi \, d\mathbf{x}, \quad (2.2.4d)$$

où  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{H}_0$  sont les conditions initiales des champs électriques et magnétiques dans le domaine  $\Omega$ .

En établissant la formulation (2.2.3), nous avons montré que si  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  vérifiait les équations de Maxwell, alors ils sont aussi solutions du problème variationnel (2.2.4). La réciproque est aussi valable car, pour  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  vérifiant (2.2.3), et en prenant deux fonctions de base  $\varphi$  et  $\psi$  à support compact dans  $\mathcal{C}_0^\infty$ , qui est inclus dans  $\mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$  et  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  [33], alors nous pouvons montrer au sens des distribution que  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  vérifient les équations du problème de Maxwell. Pour cela, on se sert du fait que l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact est dense dans l'espace vectoriel des distributions  $\mathcal{D}'(\Omega)$  [34] et de la définition de la dérivée au sens des distributions. Les conditions aux limites du problème de Maxwell sont directement déduites des espaces fonctionnels choisis. On peut donc, pour résoudre notre problème de Maxwell, chercher une solution au problème variationnel (2.2.4).

## 2.3 Approximation en espace

Dans le schéma, le choix de l'approximation spatiale est prédéterminé par la recherche d'une simplification des calculs. En effet, avec un choix judicieux de fonctions de base et en utilisant des formules de quadrature adaptées pour évaluer les intégrales on peut obtenir une matrice de masse diagonale ou diagonale par blocs.

Dans ce paragraphe, nous décrivons les différentes fonctions de base pour discrétiser les champs électriques et magnétiques que l'on décrit sous forme de polynômes dont on choisit le degré pour qu'ils correspondent à l'ordre d'approximation spatiale de la méthode. Ensuite, nous montrons comment évaluer les termes intégraux de la formulation variationnelle en utilisant des formules de quadrature appropriées afin d'avoir des matrices de masse diagonales par blocs. Dans les choix des fonctions de base et des formules de quadrature, on note que tous les termes intégraux ne sont pas évalués de manière exacte. En effet, il existe des termes où les polynômes à intégrer sont de degré  $2r$  alors que la formule de quadrature utilisée est exacte jusqu'à  $2r - 1$ . Toutefois, l'ordre de cette erreur de quadrature est très inférieure à l'ordre d'approximation de la méthode, donc, l'ordre d'approximation de la méthode est conservé [16] ou [17].

### 2.3.1 Notations et définitions

Nous donnons les notations et définitions suivantes :

**-Partition du domaine  $\Omega$**  : soit  $\mathcal{T}_h$  une partition de  $\Omega$  sous forme de cellules parallélépipédiques.

Cette partition forme un maillage cartésien structuré. Deux systèmes de coordonnées sont associés aux éléments de  $\mathcal{T}_h$  pour définir un point :

$$— \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

— le triplet  $(i, j, k)$  avec  $i \in [1, I]$ ,  $j \in [1, J]$  et  $k \in [1, K]$ , où  $(I, J, K)$  est le triplet constitué du nombre de mailles dans chaque direction de l'espace.

**-L'élément de référence** ou le cube unité noté  $\hat{\mathcal{K}} = [0, 1]^3$ . Un point associé à cet élément  $\hat{\mathcal{K}}$  sera donné par  $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) \in \hat{\mathcal{K}}$ .

**- $Q^{r_1, r_2, r_3}(\hat{\mathcal{K}})$**  : l'espace des polynômes à coefficients réels sur  $\hat{\mathcal{K}}$  de degré inférieur ou égal à  $r_i + 1$  pour chaque variable  $x_i$ , qui s'écrit :

$$Q^{r_1, r_2, r_3}(\hat{\mathcal{K}}) = \left\{ \sum_{l_1=0}^{r_1+1} \sum_{l_2=0}^{r_2+1} \sum_{l_3=0}^{r_3+1} a_{l_1, l_2, l_3} \hat{x}_1^{l_1} \hat{x}_2^{l_2} \hat{x}_3^{l_3} : \right. \\ \left. a_{l_1, l_2, l_3} \in \mathbb{R} \forall l_1 \in [1, r_1 + 1] \forall l_2 \in [1, r_2 + 1] \forall l_3 \in [1, r_3 + 1] \right\}.$$

**- $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}$**  : l'application, représentée sur la figure 2.1, qui transforme  $\hat{\mathcal{K}}$  en  $\mathcal{K}$ ,  $\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ . Dans notre contexte, les cellules du domaine de maillage sont des parallélépipèdes de tailles variables et  $\hat{\mathcal{K}}$  le cube unité. On peut donc affirmer que cette transformation est une homothétie bijective qui s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\mathcal{K}} : [0, 1]^3 \rightarrow \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3 \\ \hat{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\hat{\mathbf{x}}) = (\Delta x_{1, \mathcal{K}} * \hat{x}_1 + x_{1, \mathcal{K}}^0, \Delta x_{2, \mathcal{K}} * \hat{x}_2 + x_{2, \mathcal{K}}^0, \Delta x_{3, \mathcal{K}} * \hat{x}_3 + x_{3, \mathcal{K}}^0), \quad (2.3.1)$$

où,

- $\Delta x_{1, \mathcal{K}}$ ,  $\Delta x_{2, \mathcal{K}}$  et  $\Delta x_{3, \mathcal{K}}$  sont les dimensions de l'élément  $\mathcal{K}$ ,
- $x_{1, \mathcal{K}}^0$ ,  $x_{2, \mathcal{K}}^0$  et  $x_{3, \mathcal{K}}^0$  sont les coordonnées d'origine de l'élément  $\mathcal{K}$ .

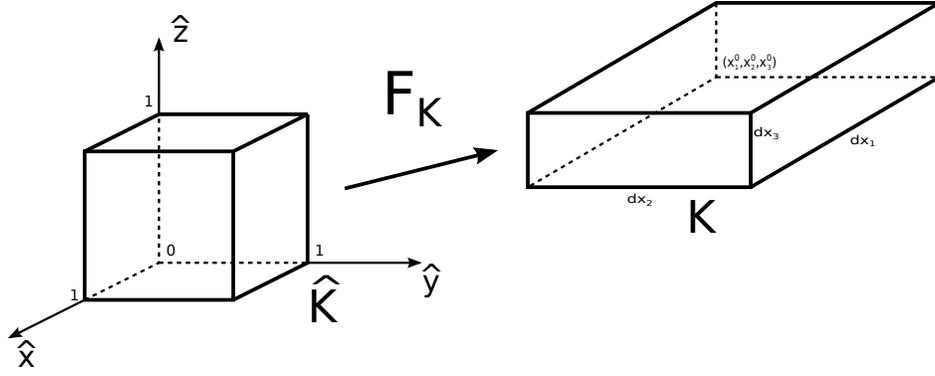


figure 2.1 – Transformation  $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}$  du cube unité en un parallélépipède quelconque.

$-\mathbf{DF}_{\mathcal{K}}$  : la matrice jacobienne associée à la transformation  $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}$ , et donnée par :

$$\mathbf{DF}_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathcal{K},1}}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathcal{K},1}}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathcal{K},1}}{\partial \hat{x}_3} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathcal{K},2}}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathcal{K},2}}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathcal{K},2}}{\partial \hat{x}_3} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathcal{K},3}}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathcal{K},3}}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathcal{K},3}}{\partial \hat{x}_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x_{1,\mathcal{K}} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x_{2,\mathcal{K}} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta x_{3,\mathcal{K}} \end{pmatrix}$$

avec

$$\forall i \in [1, 3] \quad \mathbf{F}_{\mathcal{K},i} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.3.2)$$

$$\hat{x} \quad \mapsto x = \mathbf{F}_{\mathcal{K},i}(\hat{x}) = \Delta x_{\mathcal{K},i} * \hat{x} + x_{\mathcal{K},i}^0.$$

Le jacobien de la transformation  $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}$  de  $\mathcal{K}$  est donné par  $J_{\mathcal{K}} = \det(\mathbf{DF}_{\mathcal{K}}) = \Delta x_{1,\mathcal{K}} \Delta x_{2,\mathcal{K}} \Delta x_{3,\mathcal{K}}$ , ce qui correspond au volume de l'élément  $\mathcal{K}$ .

### 2.3.2 Espaces d'approximation, fonctions de base et degrés de liberté

Dans cette partie, nous allons présenter les espaces d'approximation choisis, les fonctions de base et les degrés de liberté du schéma que l'on considère.

#### 2.3.2.1 Espaces d'approximation

Nous définissons deux espaces d'approximation, notés  $U_{0,h}$  et  $V_h$ , de dimension finie tels que  $U_{0,h} \subset \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$  et  $V_h \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ , par :

$$U_{h,0} = \{ \mathbf{u}_h = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) : \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, \mathbf{u}_h \circ \mathbf{F}_{\mathcal{K}} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3) \mid \hat{u}_1 \in Q^{r_1, r_2+1, r_3+1}, \hat{u}_2 \in Q^{r_1+1, r_2, r_3+1}, \hat{u}_3 \in Q^{r_1+1, r_2+1, r_3} \}, \quad (2.3.3)$$

$$V_h = \{ \mathbf{v}_h = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h \circ \mathbf{F}_{\mathcal{K}} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3) \mid \hat{v}_1 \in Q^{r_1+1, r_2, r_3}, \hat{v}_2 \in Q^{r_1, r_2+1, r_3}, \hat{v}_3 \in Q^{r_1, r_2, r_3+1} \}, \quad (2.3.4)$$

où  $r_1, r_2, r_3$  correspondent aux degrés d'approximation spatiale associés à chacune des trois directions de l'élément  $\mathcal{K}$ .

**Remarque 2.1.** Dans le cadre d'un maillage non-cartésien, en utilisant ce type d'éléments, on n'a pas de condensation de la matrice de masse [20] et cette méthode serait peu performante par rapport à une méthode de type Garlekin Discontinu, par exemple [65].

### 2.3.2.2 Formules d'intégration numérique de Gauss et Gauss-Lobatto sur $\hat{\mathcal{K}}$

L'approximation des termes intégraux dans le problème variationnel (2.2.4) est effectuée à l'aide de deux formules de quadrature qui sont celle de Gauss-Legendre et celle de Gauss-Lobatto.

#### Formule de quadrature de Gauss

Pour une formule à  $n = r^G + 1$  points, et une fonction  $f$ , on a :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq \sum_{j=1}^{r^G+1} \hat{\omega}_j^G f(\hat{\xi}_j^G), \quad (2.3.5)$$

où les  $\hat{\xi}_j^G$  sont les points de Gauss et les  $\hat{\omega}_j^G$  sont les poids d'intégration. Les points de Gauss sont définis comme les racines du polynôme de Legendre  $P_n$  de degré  $r^G + 1$ , tel que  $0 < \hat{\xi}_1^G < \dots < \hat{\xi}_{r^G+1}^G < 1$  et les poids sont obtenus par :

$$\hat{\omega}_j^G = \frac{2}{(1 - \hat{\xi}_j^G)(P_n'(\hat{\xi}_j^G))^2}. \quad (2.3.6)$$

Pour notre approximation liée au schéma FEM, nous n'utiliserons pas des formules entre  $[-1, 1]$  mais entre  $[0, 1]$ . Les points et les poids sont donc recalculés sur ce nouvel intervalle et sont donnés dans la Table 2.1. Les propriétés de la formule de Gauss sont :

- La méthode de quadrature de Gauss est de degré d'exactitude  $2r^G + 1$  pour  $r^G + 1$  points, ce qui implique que pour des polynômes appartenant à  $Q^{2r^G+1}$ , on aura une évaluation exacte de l'intégrale.
- L'erreur  $R_n$  commise sur l'intégrale est donnée par (cf [1]) :

$$R_n = \frac{(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \quad 0 < \xi < 1. \quad (2.3.7)$$

TABLE 2.1 – Points et poids de Gauss sur  $[0, 1]$ , pour les premiers ordres.

	$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$
$\hat{\xi}_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{5-\sqrt{15}}{10}$	$\frac{35-\sqrt{525+70\sqrt{30}}}{70}$
$\hat{\omega}_1$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{72}$
$\hat{\xi}_2$		$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{35-\sqrt{525-70\sqrt{30}}}{70}$
$\hat{\omega}_2$		$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{72}$
$\hat{\xi}_3$			$\frac{5-\sqrt{15}}{10}$	$\frac{35+\sqrt{525-70\sqrt{30}}}{70}$
$\hat{\omega}_3$			$\frac{5}{18}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{72}$
$\hat{\xi}_4$				$\frac{35+\sqrt{525+70\sqrt{30}}}{70}$
$\hat{\omega}_4$				$\frac{18-\sqrt{30}}{72}$

**Formule de quadrature de Gauss-Lobatto**

De façon identique, pour une formule à  $n = r^{GL} + 1$  points sur  $[-1, 1]$ , et une fonction  $f$ , on a :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq \sum_{j=1}^{r^{GL}+1} \hat{\omega}_j^{GL} f(\hat{\xi}_j^{GL}), \quad (2.3.8)$$

où les  $\hat{\xi}_j^{GL}$  sont les points de Gauss-Lobatto et les  $\hat{\omega}_j^{GL}$  les poids d'intégration. Les points de Gauss-Lobatto sont les  $r^{GL} - 1$  racines de la dérivée du polynôme de Legendre  $P_n$  de degré  $r^{GL}$ , avec  $r^{GL} = r^G + 1$ , notés  $0 < \hat{\xi}_2^{GL} < \dots < \hat{\xi}_{r^{GL}}^{GL} < 1$ , auxquels sont ajoutés les points  $\hat{\xi}_1^{GL} = 0$  et  $\hat{\xi}_{r^{GL}+1}^{GL} = 1$  et les poids sont obtenus par :

$$\hat{\omega}_j^{GL} = \frac{2}{n(n-1)(P_{n-1}(\hat{\xi}_j^{GL}))^2} \quad \text{avec } \hat{\xi}_j^{GL} \neq \pm 1. \quad (2.3.9)$$

Comme pour la quadrature de Gauss, nous n'utiliserons pas des formules entre  $[-1, 1]$  mais entre  $[0, 1]$ . Les points et les poids sont donc recalculés sur ce nouvel intervalle et sont donnés dans la table 2.2. Les propriétés de la formule de Gauss-Lobatto sont :

- La méthode de quadrature de Gauss-Lobatto est de degré d'exactitude  $2r^{GL} - 1$  pour  $r^{GL} + 1$  points, donc exacte pour les polynômes appartenant à  $Q^{2r^{GL}-1}$ .
- L'erreur  $R_n$  commise sur l'intégrale est donnée par (cf [1]) :

$$R_n = \frac{-n(n-1)^3 2^{2n-1} [(n-2)!]^4}{(2n-1)[(2n-2)!]^3} f^{(2n-2)}(\xi) \quad -1 < \xi < 1. \quad (2.3.10)$$

TABLE 2.2 – Points et poids de Gauss-Lobatto sur  $[0, 1]$ , pour les premiers ordres.

	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$
$\hat{\xi}_1$	0	0	0	0	0
$\hat{\omega}_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$
$\hat{\xi}_2$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{7-\sqrt{21}}{14}$	$\frac{21-\sqrt{147+42\sqrt{7}}}{42}$
$\hat{\omega}_2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{49}{180}$	$\frac{14-\sqrt{7}}{60}$
$\hat{\xi}_3$		1	$\frac{5+\sqrt{15}}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{21-\sqrt{147-42\sqrt{7}}}{42}$
$\hat{\omega}_3$		$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{14+\sqrt{7}}{60}$
$\hat{\xi}_4$			1	$\frac{7+\sqrt{21}}{14}$	$\frac{21+\sqrt{147-42\sqrt{7}}}{42}$
$\hat{\omega}_4$			$\frac{1}{12}$	$\frac{49}{180}$	$\frac{14+\sqrt{7}}{60}$
$\hat{\xi}_5$				1	$\frac{21+\sqrt{147+42\sqrt{7}}}{42}$
$\hat{\omega}_5$				$\frac{1}{20}$	$\frac{14-\sqrt{7}}{60}$
$\hat{\xi}_5$					1
$\hat{\omega}_5$					$\frac{1}{30}$

### Définition des degrés de liberté du schéma FEM

Dans ce paragraphe, nous définissons les degrés de liberté à partir des points de Gauss et de Gauss-Lobatto. En 1D, les points de Gauss et de Gauss-Lobatto sont positionnés en quinconce comme les inconnues des champs électriques et magnétiques du schéma de Yee. De plus, 2 points de Gauss-Lobatto sont positionnés aux bords de l'intervalle ce qui correspond aussi à la position de la composante électrique du schéma de Yee 1D. Comme l'on souhaite augmenter l'ordre d'approximation spatiale du schéma de Yee par notre méthode FEM, il paraît naturel que ses degrés de liberté soient positionnés de la même manière ; c'est-à-dire les champs électriques sur les points de Gauss-Lobatto et les champs magnétiques sur les points de Gauss, pour une approche 1D. Toutefois, afin de garantir cette disposition en quinconce entre les champs électriques et magnétiques, il faut que le nombre de points de Gauss-Lobatto  $r^{GL} + 1 = r^G + 2$ , avec  $r^G + 1$  le nombre de points de Gauss. Par le théorème de Rolle, on peut montrer que les  $r^{GL} - 2$  points internes de Gauss-Lobatto (racines de la dérivée du polynôme de Legendre de degré  $r^{GL} - 1$ ) sont positionnés entre les points  $r^{GL} - 1$  de Gauss (racines du polynôme de Legendre  $r^{GL} - 1$ ).

Ceci se généralise en 3D par le produit cartésien des degrés de liberté 1D sur l'élément de référence. Ce qui donne :

- $(r_i^G + 1)(r_j^{GL} + 1)(r_k^{GL} + 1)$  degrés de liberté pour le champ électrique selon la direction  $Ox$ ,  $E_x$ , localisés en  $r_i^G + 1$  points de Gauss dans la direction  $Ox$ ,  $r_j^{GL} + 1$  points de Gauss-Lobatto dans la direction  $Oy$ ,  $r_k^{GL} + 1$  points de Gauss-Lobatto dans la direction  $Oz$ ,
- $(r_i^{GL} + 1)(r_j^G + 1)(r_k^{GL} + 1)$  degrés de liberté pour le champ électrique selon la direction  $Oy$ ,  $E_y$ , localisés en  $r_i^{GL} + 1$  points de Gauss-Lobatto dans la direction  $Ox$ ,  $r_j^G + 1$  points de Gauss dans la direction  $Oy$ ,  $r_k^{GL} + 1$  points de Gauss-Lobatto dans la direction  $Oz$ ,
- $(r_i^{GL} + 1)(r_j^{GL} + 1)(r_k^G + 1)$  degrés de liberté pour le champ électrique selon la direction  $Oz$ ,  $E_z$ , localisés en  $r_i^{GL} + 1$  points de Gauss-Lobatto dans la direction  $Ox$ ,  $r_j^{GL} + 1$  points de Gauss-Lobatto dans la direction  $Oy$ ,  $r_k^G + 1$  points de Gauss dans la direction  $Oz$ ,
- $(r_i^{GL} + 1)(r_j^G + 1)(r_k^G + 1)$  degrés de liberté pour le champ magnétique selon la direction  $Ox$ ,  $H_x$ , localisés en  $r_i^{GL} + 1$  points de Gauss-Lobatto dans la direction  $Ox$ ,  $r_j^G + 1$  points de Gauss dans la direction  $Oy$ ,  $r_k^G + 1$  points de Gauss dans la direction  $Oz$ ,
- $(r_i^G + 1)(r_j^{GL} + 1)(r_k^G + 1)$  degrés de liberté pour le champ magnétique selon la direction  $Oy$ ,  $H_y$ , localisés en  $r_i^G + 1$  points de Gauss dans la direction  $Ox$ ,  $r_j^{GL} + 1$  points de Gauss-Lobatto dans la direction  $Oy$ ,  $r_k^G + 1$  points de Gauss dans la direction  $Oz$ ,
- $(r_i^G + 1)(r_j^G + 1)(r_k^{GL} + 1)$  degrés de liberté pour le champ magnétique selon la direction  $Oz$ ,  $H_z$ , localisés en  $r_i^G + 1$  points de Gauss dans la direction  $Ox$ ,  $r_j^G + 1$  points de Gauss dans la direction  $Oy$ ,  $r_k^{GL} + 1$  points de Gauss-Lobatto dans la direction  $Oz$ ,

A titre d'illustration, les figures suivantes présentent en 2D la localisation des degrés de liberté du schéma.

Cellule de Yee ou Ordre 0 en 2D

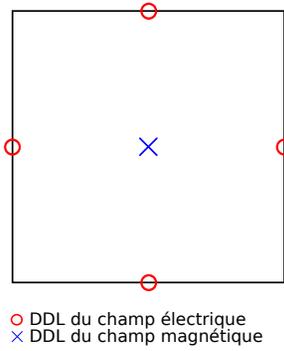


figure 2.2 – La répartition des degrés de liberté est identique entre la cellule de Yee et la cellule Lobatto-Gauss de la méthode FEM en choisissant un ordre d'approximation spatiale  $r^G = 0$  et  $r^{GL} = 1$ .

Cellule Ordre 1 en 2D

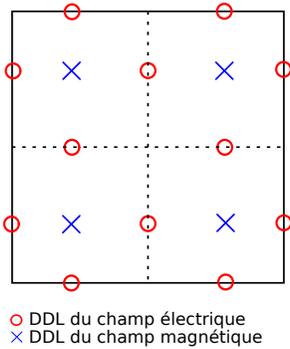


figure 2.3 – Répartition des degrés de liberté de la cellule Lobatto-Gauss à l'ordre 1.

4 Cellules de Yee en 2D

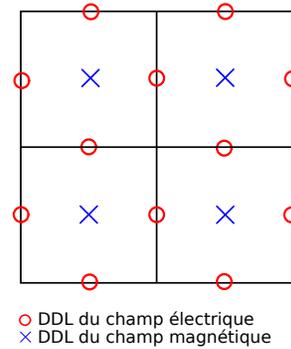


figure 2.4 – Répartition des degrés de liberté dans 4 cellules de Yee

Cellule Ordre 2 en 2D

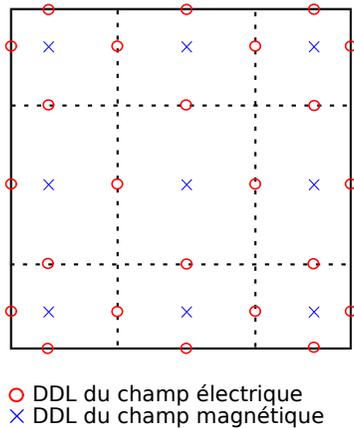


figure 2.5 – Répartition des degrés de liberté de la cellule Lobatto-Gauss à l'ordre 2.

9 Cellules de Yee en 2D

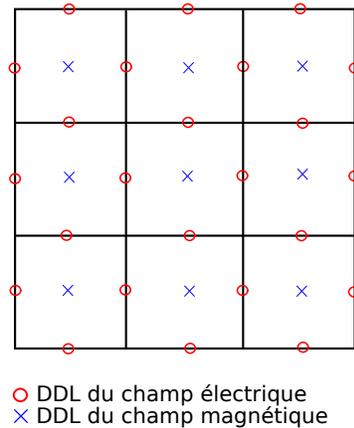


figure 2.6 – Répartition des degrés de liberté dans 9 cellules de Yee.

### 2.3.2.3 Fonctions de base sur l'élément $\mathcal{K}$

Pour définir les fonctions de base sur un élément  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ , on commence par définir celles-ci sur l'élément de référence  $\hat{\mathcal{K}}$ , puis on les projette sur  $\mathcal{K}$  à l'aide de la fonction  $F_{\mathcal{K}}$ . Pour définir les fonctions de base sur l'élément de référence  $\hat{\mathcal{K}}$ , nous considérons l'intervalle  $[0, 1]$ , et pour chaque point de Gauss, nous définissons un polynôme de Lagrange par :

$$\forall j \in [1, 3] : \quad L_{l_j}^G(\hat{x}_j^G) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l_j}}^{r+1} \frac{\hat{x}_j - \hat{\xi}_k^G}{\hat{\xi}_{l_j}^G - \hat{\xi}_k^G} \quad \text{avec } \hat{x}_j \in [0, 1], \quad (2.3.11)$$

avec  $\hat{\xi}_k^G$  les points de Gauss et  $r^G + 1$  le nombre de points de Gauss.

De façon identique, pour chaque point Gauss-Lobatto, nous définissons un polynôme de Lagrange par :

$$\forall j \in [1, 3] : \quad L_{l_j}^{GL}(\hat{x}_j^G) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l_j}}^{r+1} \frac{\hat{x}_j - \hat{\xi}_k^{GL}}{\hat{\xi}_{l_j}^G - \hat{\xi}_k^{GL}} \quad \text{avec } \hat{x}_j \in [0, 1], \quad (2.3.12)$$

avec  $\hat{\xi}_k^{GL}$  les points de Gauss-Lobatto et  $r^{GL} + 1$  le nombre de points de Gauss-Lobatto.

On définit ensuite pour chaque composante de champ, un ensemble de points pour lesquels on associe des fonctions de bases.

Pour la composante  $E_h^{x_1}$ , on choisit  $(r_i^G + 1)(r_j^{GL} + 1)(r_k^{GL} + 1)$  points sur l'élément de référence de coordonnées

$(\xi_{l_1}^G, \xi_{l_2}^{GL}, \xi_{l_3}^{GL})_{l_1 \in [1, r_i^G + 1], l_2 \in [1, r_j^{GL} + 1], l_3 \in [1, r_k^{GL} + 1]}$ , et en chacun de ces points  $\hat{\mathbf{x}}$ , on associe une fonction de base :

$$\hat{\phi}_{\mathbf{l}}^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) = L_{l_1}^G(\hat{x}_1)L_{l_2}^{GL}(\hat{x}_2)L_{l_3}^{GL}(\hat{x}_3). \quad (2.3.13)$$

où  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$ . On définit alors sur l'élément  $\mathcal{K}$ , la fonction de base associée par  $\phi_{\mathcal{K}, \mathbf{l}}^{x_1} \circ F_{\mathcal{K}}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\phi}_{\mathbf{l}}^{x_1}(\hat{\mathbf{x}})$ .

En procédant de la même manière, on construit une approximation pour les composantes  $E_h^{x_2}$  et  $E_h^{x_3}$  en prenant respectivement  $(r_i^{GL} + 1)(r_j^G + 1)(r_k^{GL} + 1)$  points sur l'élément de référence de coordonnées

$(\xi_{l_1}^G, \xi_{l_2}^{GL}, \xi_{l_3}^{GL})_{l_1 \in [1, r_i^{GL} + 1], l_2 \in [1, r_j^G + 1], l_3 \in [1, r_k^{GL} + 1]}$ ,

et  $(r_i^{GL} + 1)(r_j^{GL} + 1)(r_k^G + 1)$  points sur l'élément de référence de coordonnées

$(\xi_{l_1}^G, \xi_{l_2}^{GL}, \xi_{l_3}^{GL})_{l_1 \in [1, r_i^{GL} + 1], l_2 \in [1, r_j^{GL} + 1], l_3 \in [1, r_k^G + 1]}$ .

L'approximation du champ électrique dans la cellule est alors donnée par :

$$\mathbf{E}_h(\mathbf{x}) = \left( E_h^{x_1}(\mathbf{x}) ; E_h^{x_2}(\mathbf{x}) ; E_h^{x_3}(\mathbf{x}) \right), \quad (2.3.14)$$

où

$$\begin{aligned} E_h^{x_1}(\mathbf{x}) &= \sum_{l_1=1}^{r_i^G+1} \sum_{l_2=1}^{r_j^{GL}+1} \sum_{l_3=1}^{r_k^{GL}+1} E_{l_1, l_2, l_3}^{x_1} \hat{\phi}_{l_1, l_2, l_3}^{x_1} \circ F_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathbf{x}) \\ E_h^{x_2}(\mathbf{x}) &= \sum_{l_1=1}^{r_i^{GL}+1} \sum_{l_2=1}^{r_j^G+1} \sum_{l_3=1}^{r_k^{GL}+1} E_{l_1, l_2, l_3}^{x_2} \hat{\phi}_{l_1, l_2, l_3}^{x_2} \circ F_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathbf{x}) \\ E_h^{x_3}(\mathbf{x}) &= \sum_{l_1=1}^{r_i^{GL}+1} \sum_{l_2=1}^{r_j^{GL}+1} \sum_{l_3=1}^{r_k^G+1} E_{l_1, l_2, l_3}^{x_3} \hat{\phi}_{l_1, l_2, l_3}^{x_3} \circ F_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

avec

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^G(\hat{x}_1)L_{l_2}^{GL}(\hat{x}_2)L_{l_3}^{GL}(\hat{x}_3), \\ \hat{\phi}_1^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^{GL}(\hat{x}_1)L_{l_2}^G(\hat{x}_2)L_{l_3}^{GL}(\hat{x}_3), \\ \hat{\phi}_1^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^{GL}(\hat{x}_1)L_{l_2}^{GL}(\hat{x}_2)L_{l_3}^G(\hat{x}_3),\end{aligned}\tag{2.3.16}$$

où  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$  permet d'indexer la position d'un degré de liberté dans la cellule de référence, et  $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  le point dans la cellule de référence.

De la même manière, pour chaque composante du champ magnétique, on construit une approximation pour les composantes  $H_h^{x_1}$ ,  $H_h^{x_2}$  et  $H_h^{x_3}$  en prenant respectivement  $(r_i^{GL} + 1)(r_j^G + 1)(r_k^G + 1)$  points sur l'élément de référence de coordonnées  $(\xi_{l_1}^G, \xi_{l_2}^{GL}, \xi_{l_3}^{GL})_{l_1 \in [1, r_i^G + 1], l_2 \in [1, r_j^G + 1], l_3 \in [1, r_k^G + 1]}$ ,  $(r_i^{GL} + 1)(r_j^G + 1)(r_k^{GL} + 1)$  points sur l'élément de référence de coordonnées  $(\xi_{l_1}^G, \xi_{l_2}^{GL}, \xi_{l_3}^G)_{l_1 \in [1, r_i^G + 1], l_2 \in [1, r_j^{GL} + 1], l_3 \in [1, r_k^G + 1]}$ , et  $(r_i^{GL} + 1)(r_j^{GL} + 1)(r_k^G + 1)$  points sur l'élément de référence de coordonnées  $(\xi_{l_1}^G, \xi_{l_2}^G, \xi_{l_3}^{GL})_{l_1 \in [1, r_i^G + 1], l_2 \in [1, r_j^G + 1], l_3 \in [1, r_k^{GL} + 1]}$ .

De plus, on définit alors sur l'élément  $\mathcal{K}$ , la fonction de base associée par  $\psi_{\mathcal{K}, \mathbf{l}}^{x_i} \circ \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\psi}_1^{x_i}(\hat{\mathbf{x}}) \forall i \in [1, 3]$ . L'approximation du champ magnétique dans la cellule est alors donnée par :

$$\mathbf{H}_h(\mathbf{x}) = \left( H_h^{x_1}(\mathbf{x}) ; H_h^{x_2}(\mathbf{x}) ; H_h^{x_3}(\mathbf{x}) \right),\tag{2.3.17}$$

où

$$\begin{aligned}H_h^{x_1}(\mathbf{x}) &= \sum_{l_1=1}^{r_i^{GL}+1} \sum_{l_2=1}^{r_j^G+1} \sum_{l_3=1}^{r_k^G+1} E_{l_1, l_2, l_3}^{x_1} \hat{\psi}_{l_1, l_2, l_3}^{x_1} \circ \mathbf{F}_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathbf{x}) \\ H_h^{x_2}(\mathbf{x}) &= \sum_{l_1=1}^{r_i^G+1} \sum_{l_2=1}^{r_j^{GL}+1} \sum_{l_3=1}^{r_k^G+1} E_{l_1, l_2, l_3}^{x_2} \hat{\psi}_{l_1, l_2, l_3}^{x_2} \circ \mathbf{F}_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathbf{x}) \\ H_h^{x_3}(\mathbf{x}) &= \sum_{l_1=1}^{r_i^G+1} \sum_{l_2=1}^{r_j^G+1} \sum_{l_3=1}^{r_k^{GL}+1} E_{l_1, l_2, l_3}^{x_3} \hat{\psi}_{l_1, l_2, l_3}^{x_3} \circ \mathbf{F}_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{2.3.18}$$

avec

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_1^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^{GL}(\hat{x}_1)L_{l_2}^G(\hat{x}_2)L_{l_3}^G(\hat{x}_3), \\ \hat{\psi}_1^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^G(\hat{x}_1)L_{l_2}^{GL}(\hat{x}_2)L_{l_3}^G(\hat{x}_3), \\ \hat{\psi}_1^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^G(\hat{x}_1)L_{l_2}^G(\hat{x}_2)L_{l_3}^{GL}(\hat{x}_3),\end{aligned}\tag{2.3.19}$$

où  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$  permet d'indexer la position d'un degré de liberté dans la cellule de référence, et  $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  le point dans la cellule de référence.

### 2.3.2.4 Fonctions de base sur $\Omega$

Soient  $\mathcal{B}_U$  et  $\mathcal{B}_V$  les bases respectives des espaces d'approximation  $U_{0,h}$  et  $V_h$ , décrits dans les formules (2.3.3) et (2.3.4).

L'ensemble des fonctions de base de  $U_{0,h}$ , noté  $\mathcal{B}_U$ , est défini par :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_U &= \left\{ \varphi_h \mid \forall \mathcal{K} \in \text{supp}(\varphi_h) \cap \mathcal{T}_h, \exists \mathbf{l} \in \{1, \dots, r^G + 1 \text{ ou } r^{GL} + 1\}^3 \text{ et } \exists i \in [1, 3] \text{ tels que} \right. \\ &\quad \left. \varphi_h = \phi_{\mathbf{l}}^{x_i} \vec{e}_{x_i} \right\},\end{aligned}\tag{2.3.20}$$

où  $\vec{e}_{x_i}$  est le vecteur de la base cartésienne canonique.

Soit  $\varphi_h \in \mathcal{B}_U$ , le support de  $\varphi_h$  est donné par :

- $\text{supp}(\varphi_h) = \mathcal{K}$  pour les fonctions de base liées aux points intérieurs d'un élément  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ .
- $\text{supp}(\varphi_h) = \mathcal{K} \cup \mathcal{K}'$  avec  $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathcal{T}_h$  pour les fonctions de base liées aux points intérieurs situés à l'interface  $\Gamma_{\mathcal{K}\mathcal{K}'} = \partial\mathcal{K} \cap \partial\mathcal{K}'$  (voir figure 2.7)
- $\text{supp}(\varphi_h) = \mathcal{K} \cup \mathcal{K}' \cup \mathcal{K}^{(2)} \cup \mathcal{K}^{(3)}$  avec  $\mathcal{K}, \mathcal{K}', \mathcal{K}^{(2)}, \mathcal{K}^{(3)} \in \mathcal{T}_h$  pour les fonctions de base liées à l'arête  $\Gamma_{\mathcal{K}\mathcal{K}'\mathcal{K}^{(2)}\mathcal{K}^{(3)}} = \partial\mathcal{K} \cap \partial\mathcal{K}' \cap \partial\mathcal{K}^{(2)} \cap \partial\mathcal{K}^{(3)}$  (voir figure 2.8)

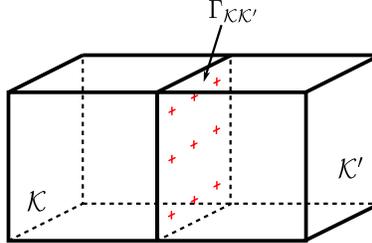


figure 2.7 – Fonctions de base liées à l'interface  $\Gamma_{\mathcal{K}\mathcal{K}'}$ .

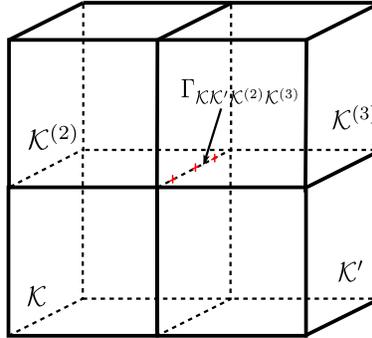


figure 2.8 – Fonctions de base liées à l'arête  $\Gamma_{\mathcal{K}\mathcal{K}'\mathcal{K}^{(2)}\mathcal{K}^{(3)}}$ .

Avant de d'écrire la décomposition d'une solution  $\mathbf{u}_h \in U_{0,h}$  à l'aide des fonctions de base, nous définissons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \Theta_E^{x_1} &= r_i^G + 1 \ r_j^{GL} + 1 \ r_k^{GL} + 1 \\
 \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} (\cdot) &= \sum_{l_1=1} \sum_{l_2=1} \sum_{l_3=1} (\cdot), \\
 \Theta_E^{x_2} &= r_i^{GL} + 1 \ r_j^G + 1 \ r_k^{GL} + 1 \\
 \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} (\cdot) &= \sum_{l_1=1} \sum_{l_2=1} \sum_{l_3=1} (\cdot), \\
 \Theta_E^{x_3} &= r_i^{GL} + 1 \ r_j^{GL} + 1 \ r_k^G + 1 \\
 \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} (\cdot) &= \sum_{l_1=1} \sum_{l_2=1} \sum_{l_3=1} (\cdot),
 \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

où  $r_i^G$ ,  $r_j^G$ ,  $r_k^G$  et  $r_i^{GL}$ ,  $r_j^{GL}$ ,  $r_k^{GL}$  correspondent aux degrés des polynômes d'interpolation de Lagrange (2.3.11) et (2.3.12) pour la maille indexée par le triplet  $(i, j, k)$ , et correspondant respectivement aux polynômes construits avec les points de Gauss et les points de Gauss-Lobatto.

Soit une solution  $\mathbf{u}_h \in U_{0,h}$  et  $\mathbf{u}_{h,\mathcal{K}}$  sa restriction à un élément  $\mathcal{K}$  décomposée dans la base  $\mathcal{B}_U$  par :

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, \quad \mathbf{u}_{h,\mathcal{K}} \circ \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\hat{\mathbf{x}}) = \left( \sum_{\mathbf{l}=1}^{\Theta_E^{x_1}} u_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_1} \hat{\phi}_1^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}); \sum_{\mathbf{l}=1}^{\Theta_E^{x_2}} u_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_2} \hat{\phi}_1^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}); \sum_{\mathbf{l}=1}^{\Theta_E^{x_3}} u_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_3} \hat{\phi}_1^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) \right). \quad (2.3.22)$$

De plus, puisque  $U_{0,h} \subset H_0(\text{rot}, \Omega)$  de par la définition de  $U_{0,h}$  alors on a :

$$\forall \mathbf{u}_h \in U_{0,h} \quad (\nabla \wedge \mathbf{u}_{h,\mathcal{K}}) \circ \mathbf{F}_{\mathcal{K}} = DF_{\mathcal{K}}^{-1} \hat{\nabla} \wedge \hat{\mathbf{u}}_{h,\mathcal{K}}, \quad (2.3.23)$$

où

$$\hat{\mathbf{u}}_{h,\mathcal{K}}(\hat{\mathbf{x}}) = \left( \sum_{\mathbf{l}=1}^{\Theta_E^{x_1}} u_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_1} \hat{\phi}_1^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}); \sum_{\mathbf{l}=1}^{\Theta_E^{x_2}} u_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_2} \hat{\phi}_1^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}); \sum_{\mathbf{l}=1}^{\Theta_E^{x_3}} u_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_3} \hat{\phi}_1^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) \right), \quad (2.3.24)$$

et  $\hat{\nabla} \wedge$  est le rotationnel associé aux variables  $\hat{\mathbf{x}}$  de l'élément de référence.

Avant de décrire la décomposition d'une solution  $\mathbf{v}_h \in V_h$  à l'aide des fonctions de base, nous définissons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{l}=1}^{\Theta_H^{x_1}} (\cdot) &= \sum_{l_1=1}^{r_i^{GL}+1} \sum_{l_2=1}^{r_j^G+1} \sum_{l_3=1}^{r_k^G+1} (\cdot), \\ \sum_{\mathbf{l}=1}^{\Theta_H^{x_2}} (\cdot) &= \sum_{l_1=1}^{r_i^G+1} \sum_{l_2=1}^{r_j^{GL}+1} \sum_{l_3=1}^{r_k^G+1} (\cdot), \\ \sum_{\mathbf{l}=1}^{\Theta_H^{x_3}} (\cdot) &= \sum_{l_1=1}^{r_i^G+1} \sum_{l_2=1}^{r_j^G+1} \sum_{l_3=1}^{r_k^{GL}+1} (\cdot), \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

où  $r_i^G$ ,  $r_j^G$ ,  $r_k^G$  et  $r_i^{GL}$ ,  $r_j^{GL}$ ,  $r_k^{GL}$  correspondent aux degrés des polynômes d'interpolation de Lagrange (2.3.11) et (2.3.12) pour la maille indexée par le triplet  $(i, j, k)$ , et correspondant respectivement aux polynômes construits avec les points de Gauss et les points de Gauss-Lobatto.

Soit  $\mathbf{v}_h \in V_h$  et  $\mathbf{v}_{h,\mathcal{K}}$  sa restriction à un élément  $\mathcal{K}$  décomposée dans la base  $\mathcal{B}_V$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_V &= \left\{ \varphi_h \mid \text{supp}(\varphi_h) = \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, \exists \mathbf{l} \in \{1, \dots, r^G + 1 \text{ ou } r^{GL} + 1\}^3 \text{ et } \exists i \in [1, 3] \text{ tels que} \right. \\ &\quad \left. \varphi_h = \psi_1^{x_i} \vec{e}_{x_i} \right\}. \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

La définition de l'espace d'approximation  $V_h$  impose que le support des fonctions de base soit réduit à un élément  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ . Cet espace ne possède pas de condition de continuité sur les composantes tangentielles. Chaque élément  $\mathbf{v}_h \in V_h$  est décomposé dans la base  $\mathcal{B}_V$  :

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, \quad \mathbf{v}_{h,\mathcal{K}} \circ \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\hat{\mathbf{x}}) = \left( \sum_{\mathbf{l}=1}^{\Theta_H^{x_1}} v_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_1} \hat{\psi}_1^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}); \sum_{\mathbf{l}=1}^{\Theta_H^{x_2}} v_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_2} \hat{\psi}_1^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}); \sum_{\mathbf{l}=1}^{\Theta_H^{x_3}} v_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_3} \hat{\psi}_1^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) \right). \quad (2.3.27)$$

### 2.3.3 Discrétisation en temps

Le schéma en temps est de type Leap Frog d'ordre 2. Cette approximation temporelle est aussi utilisée pour le schéma de Yee. Cette méthode consiste à résoudre le système avec un pas de temps décalé entre les inconnues du champ  $\mathbf{E}$  et celles du champ  $\mathbf{H}$ . Nous notons :

$$\mathbf{E}(n\Delta t, \cdot) = \mathbf{E}^n \quad \text{et} \quad \mathbf{H}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t, \cdot\right) = \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, en appliquant une approximation aux différences finies d'ordre 2 sur la dérivée partielle en  $t$  dans le système (2.2.4), nous obtenons notre schéma semi-discrétisé en temps :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mu}} \frac{\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}^n \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x}, \\ \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}} \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \wedge \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

où nous avons imposé  $\mathbf{J}_s = 0$  et  $\underline{\underline{\sigma}} = 0$  afin de simplifier l'écriture du schéma.

### 2.3.4 Décomposition des champs électriques et magnétiques

Les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  se décomposent respectivement dans les bases  $\mathcal{B}_U$  et  $\mathcal{B}_V$ ,

$$\mathbf{E}_h^n(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N^E} E_j^n \boldsymbol{\varphi}_j(\mathbf{x}), \quad (2.3.29a)$$

$$\mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N^H} H_j^{n-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\psi}_j(\mathbf{x}), \quad (2.3.29b)$$

où  $N^H$  est le nombre de degrés de liberté dans  $\Omega$  du champ magnétique, et  $N^E$  est le nombre de degrés de liberté dans  $\Omega$  du champ électrique.

**Remarque 2.2.** *Dans l'expression (2.3.29), le nombre de degrés de liberté peut varier par construction. En effet, certains degrés de liberté se situent sur une surface ou une arête et ils appartiennent à plusieurs cellules comme il a été précisé dans le paragraphe 2.3.2.4. Dans les expressions (2.3.29a) et (2.3.29b), nous pouvons choisir de les comptabiliser plusieurs fois, si on les considère dissociés par cellule, ou bien les compter une fois avec une indexation par cellule.*

En utilisant les définitions (2.3.22) et (2.3.16), et dans un souci de simplicité, les champs électriques et magnétiques sont écrits dans chaque cellule  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$  sous la forme :

$$\mathbf{E}_{h,\mathcal{K}}^n = \left( \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K},l}^{x_1,n} \hat{\phi}_1^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) ; \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K},l}^{x_2,n} \hat{\phi}_1^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) ; \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K},l}^{x_3,n} \hat{\phi}_1^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) \right), \quad (2.3.30)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^G(\hat{x}_1) L_{l_2}^{GL}(\hat{x}_2) L_{l_3}^{GL}(\hat{x}_3), \\ \hat{\phi}_1^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^{GL}(\hat{x}_1) L_{l_2}^G(\hat{x}_2) L_{l_3}^{GL}(\hat{x}_3), \\ \hat{\phi}_1^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^{GL}(\hat{x}_1) L_{l_2}^{GL}(\hat{x}_2) L_{l_3}^G(\hat{x}_3), \end{aligned}$$

et en utilisant les définitions (2.3.27) et (2.3.19), on a :

$$\mathbf{H}_{h,\mathcal{K}}^{n-\frac{1}{2}} = \left( \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_1}} H_{\mathcal{K},l}^{x_1,n-\frac{1}{2}} \hat{\psi}_1^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) ; \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_2}} H_{\mathcal{K},l}^{x_2,n-\frac{1}{2}} \hat{\psi}_1^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) ; \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_3}} H_{\mathcal{K},l}^{x_3,n-\frac{1}{2}} \hat{\psi}_1^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) \right) \quad (2.3.31)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^{GL}(\hat{x}_1) L_{l_2}^G(\hat{x}_2) L_{l_3}^G(\hat{x}_3), \\ \hat{\psi}_1^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^G(\hat{x}_1) L_{l_2}^{GL}(\hat{x}_2) L_{l_3}^G(\hat{x}_3), \\ \hat{\psi}_1^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^G(\hat{x}_1) L_{l_2}^G(\hat{x}_2) L_{l_3}^{GL}(\hat{x}_3). \end{aligned}$$

## 2.4 Écriture du schéma

### 2.4.1 Formulation du problème discret

La formulation discrète du problème (2.2.4) s'écrit :

Trouver  $(\mathbf{E}_h, \mathbf{H}_h) \in (U_{0,h} \times V_h)$  tels que :  $\forall (\phi_h, \psi_h) \in (\mathcal{B}_U \times \mathcal{B}_V)$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \underline{\underline{\mu}} \frac{\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \cdot \psi_h \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^n \cdot \psi_h \, d\mathbf{x}, \\
 \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}} \frac{\mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^n}{\Delta t} \cdot \phi_h \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \wedge \phi_h \, d\mathbf{x}, \\
 \int_{\Omega} \mathbf{E}_h(x, 0) \cdot \phi_h \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{E}_{h,0}(x) \cdot \phi_h \, d\mathbf{x}, \\
 \int_{\Omega} \mathbf{H}_h(x, 0) \cdot \psi_h \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{H}_{h,0}(x) \cdot \psi_h \, d\mathbf{x},
 \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

où nous imposons  $\mathbf{J}_s = 0$  et  $\underline{\underline{\sigma}} = 0$  afin de simplifier l'écriture du schéma.

### 2.4.2 Discrétisation de l'équation de Maxwell-Ampère

Pour construire le schéma approchant l'équation de Maxwell-Ampère, nous prenons le positionnement des degrés de liberté dans une cellule  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$  tel qu'il est présenté dans le paragraphe 2.3.2.4.

Pour cela, nous construisons le schéma pour trois types de degrés de liberté :

- ceux qui sont internes aux cellules,
- ceux qui sont internes à l'interface entre deux cellules,
- ceux qui sont sur les arêtes.

#### DDL de $\mathbf{E}_h$ à support exclusif dans une cellule

Les degrés de liberté à support exclusif dans une cellule se situent à l'intérieur d'une maille  $\mathcal{K}$ , comme illustré sur la figure 2.9, ou à l'intérieur d'une surface  $\Gamma$  appartenant à la frontière  $\partial\Omega$  du domaine.

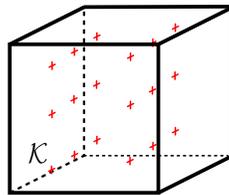


figure 2.9 – Fonctions de base liées à l'intérieur d'une maille  $\mathcal{K}$ .

Ainsi, pour chaque degré de liberté d'indice  $j \in N^E$  situé à l'intérieur d'une cellule  $\mathcal{K}_0$ , il existe une indice  $\mathbf{l}_0$  dans  $\mathcal{K}_0$  et une seule fonction de base  $\phi_{\mathbf{l}_0, \mathcal{K}_0}^{x_0} \in \mathcal{B}_U$  de direction  $\vec{e}_{x_0}$ , liée à ce degré de liberté qui soit non nulle. L'équation du champ électrique (2.2.4a) pour ce degré de liberté, s'écrit de la forme suivante :

$$\int_{\mathcal{K}_0} \underline{\underline{\varepsilon}}_{\mathcal{K}_0} \frac{\mathbf{E}_{\mathcal{K}_0}^{n+1} - \mathbf{E}_{\mathcal{K}_0}^n}{\Delta t} \cdot \phi_{\mathbf{l}_0, \mathcal{K}_0}^{x_0} \, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{K}_0} \mathbf{H}_{\mathcal{K}_0}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \wedge \phi_{\mathbf{l}_0, \mathcal{K}_0}^{x_0} \, d\mathbf{x}, \tag{2.4.2}$$

où  $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\mathcal{K}_0}$  est le tenseur de permittivité sur  $\mathcal{K}_0$ .

En utilisant la décomposition (2.3.30) du champ électrique et la décomposition (2.3.31) du champ magnétique, nous obtenons alors, pour l'équation en E, l'expression discrète suivante :

$$\int_{\mathcal{K}_0} \underline{\varepsilon}_{\mathcal{K}_0} \left( \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} \frac{E_{\mathcal{K}_0,l}^{x_1,n+1} - E_{\mathcal{K}_0,l}^{x_1,n}}{\Delta t} \phi_{\mathcal{K}_0,l}^{x_1} ; \right. \\ \left. \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} \frac{E_{\mathcal{K}_0,l}^{x_2,n+1} - E_{\mathcal{K}_0,l}^{x_2,n}}{\Delta t} \phi_{\mathcal{K}_0,l}^{x_2} ; \right. \\ \left. \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} \frac{E_{\mathcal{K}_0,l}^{x_3,n+1} - E_{\mathcal{K}_0,l}^{x_3,n}}{\Delta t} \phi_{\mathcal{K}_0,l}^{x_3} \right) \cdot \phi_{\mathcal{K}_0,l_0}^{x_0} d\mathbf{x} \\ = \int_{\mathcal{K}_0} \left( \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_1}} H_{\mathcal{K}_0,l}^{x_1,n+\frac{1}{2}} \psi_{\mathcal{K}_0,l}^{x_1} ; \right. \\ \left. \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_2}} H_{\mathcal{K}_0,l}^{x_2,n+\frac{1}{2}} \psi_{\mathcal{K}_0,l}^{x_2} ; \right. \\ \left. \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_3}} H_{\mathcal{K}_0,l}^{x_3,n+\frac{1}{2}} \psi_{\mathcal{K}_0,l}^{x_3} \right) \cdot \nabla \wedge \phi_{\mathcal{K}_0,l_0}^{x_0} d\mathbf{x},$$

En utilisant les relations présentées dans le paragraphe 2.3.2.3 et la transformation  $\mathbf{F}_{\mathcal{K}_0}$  nous pouvons obtenir une intégrale sur l'élément de référence :

$$\int_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\varepsilon}_{\mathcal{K}_0} |J_{\mathcal{K}_0}| \left( \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} \frac{E_{\mathcal{K}_0,l}^{x_1,n+1} - E_{\mathcal{K}_0,l}^{x_1,n}}{\Delta t} \hat{\phi}_1^{x_1} ; \right. \\ \left. \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} \frac{E_{\mathcal{K}_0,l}^{x_2,n+1} - E_{\mathcal{K}_0,l}^{x_2,n}}{\Delta t} \hat{\phi}_1^{x_2} ; \right. \\ \left. \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} \frac{E_{\mathcal{K}_0,l}^{x_3,n+1} - E_{\mathcal{K}_0,l}^{x_3,n}}{\Delta t} \hat{\phi}_1^{x_3} \right) \cdot \hat{\phi}_{l_0}^{x_0} d\hat{\mathbf{x}} \\ = \int_{\hat{\mathcal{K}}} |J_{\mathcal{K}_0}| \left( \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_1}} H_{\mathcal{K}_0,l}^{x_1,n+\frac{1}{2}} \hat{\psi}_1^{x_1} ; \right. \\ \left. \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_2}} H_{\mathcal{K}_0,l}^{x_2,n+\frac{1}{2}} \hat{\psi}_1^{x_2} ; \right. \\ \left. \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_3}} H_{\mathcal{K}_0,l}^{x_3,n+\frac{1}{2}} \hat{\psi}_1^{x_3} \right) \cdot DF_{\mathcal{K}_0}^{T-1} \hat{\nabla} \wedge \hat{\phi}_{l_0}^{x_0} d\hat{\mathbf{x}}.$$

Par construction de la fonction de transfert  $\mathbf{F}_{\mathcal{K}_0}$  (2.3.1), la matrice Jacobienne est diagonale et de déterminant  $J_{\mathcal{K}_0}$  positif et constant, égal à la mesure du parallélépipède  $\mathcal{K}_0$ .

Nous simplifions les formules en supposant que la permittivité diélectrique est toujours isotrope par direction et homogène dans une même cellule. Nous présentons les calculs du schéma selon la direction  $\vec{e}_{x_0}$ . Après simplification, l'équation s'écrit sous les formes :

Si  $\vec{e}_{x_0}$  correspond à  $\vec{e}_{x_1}$  :

$$\varepsilon_{\mathcal{K}_0}^{x_1} \int_{\hat{\mathcal{K}}} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} \frac{E_{\mathcal{K}_0,l}^{x_1,n+1} - E_{\mathcal{K}_0,l}^{x_1,n}}{\Delta t} \hat{\phi}_1^{x_1} \hat{\phi}_{l_0}^{x_1} d\hat{\mathbf{x}} = \int_{\hat{\mathcal{K}}} \frac{1}{\Delta x_{3,\mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_2}} H_{\mathcal{K}_0,l}^{x_2,n+\frac{1}{2}} \hat{\psi}_1^{x_2} \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_{l_0}^{x_1} \\ - \frac{1}{\Delta x_{2,\mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_3}} H_{\mathcal{K}_0,l}^{x_3,n+\frac{1}{2}} \hat{\psi}_1^{x_3} \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_{l_0}^{x_1} d\hat{\mathbf{x}}. \quad (2.4.3)$$

Si  $\vec{e}_{x_0}$  correspond à  $\vec{e}_{x_2}$  :

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{\mathcal{K}_0}^{x_2} \int_{\hat{\mathcal{K}}} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} \frac{E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2,n+1} - E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2,n}}{\Delta t} \hat{\phi}_1^{x_2} \cdot \hat{\phi}_{l_0}^{x_2} d\hat{\mathbf{x}} &= \int_{\hat{\mathcal{K}}} \frac{1}{\Delta x_{1,\mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_1}} H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3,n+\frac{1}{2}} \hat{\psi}_1^{x_3} \cdot \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_{l_0}^{x_2} \\ &- \frac{1}{\Delta x_{3,\mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_3}} H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1,n+\frac{1}{2}} \hat{\psi}_1^{x_1} \cdot \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_{l_0}^{x_2} d\hat{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Si  $\vec{e}_{x_0}$  correspond à  $\vec{e}_{x_3}$  :

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{\mathcal{K}_0}^{x_3} \int_{\hat{\mathcal{K}}} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} \frac{E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3,n+1} - E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3,n}}{\Delta t} \hat{\phi}_1^{x_3} \cdot \hat{\phi}_{l_0}^{x_3} d\hat{\mathbf{x}} &= \int_{\hat{\mathcal{K}}} \frac{1}{\Delta x_{2,\mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_1}} H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1,n+\frac{1}{2}} \hat{\psi}_1^{x_1} \cdot \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_{l_0}^{x_3} \\ &- \frac{1}{\Delta x_{1,\mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_2}} H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2,n+\frac{1}{2}} \hat{\psi}_1^{x_2} \cdot \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_{l_0}^{x_3} d\hat{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Les intégrales sont évaluées en appliquant des formules de quadrature de Gauss ou Gauss-Lobatto par direction. Si  $\vec{e}_{x_0}$  est dans la direction  $\vec{e}_{x_1}$  :

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{\mathcal{K}_0}^{x_1} \sum_{l'=1}^{\Theta_E^{x_1}} \hat{\omega}_{l'}^{Ex_1} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} \frac{E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1,n+1} - E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1,n}}{\Delta t} \hat{\phi}_1^{x_1}(\hat{\xi}_{l'}^{G,GL,GL}) \cdot \hat{\phi}_{l_0}^{x_1}(\hat{\xi}_{l'}^{G,GL,GL}) \\ = \sum_{l'=1}^{\Theta_H^{x_2}} \frac{\hat{\omega}_{l'}^{Hx_2}}{\Delta x_{3,\mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_2}} H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2,n+\frac{1}{2}} \hat{\psi}_1^{x_2}(\hat{\xi}_{l'}^{G,GL,G}) \cdot \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_{l_0}^{x_1}(\hat{\xi}_{l'}^{G,GL,G}) \\ - \sum_{l'=1}^{\Theta_H^{x_3}} \frac{\hat{\omega}_{l'}^{Hx_3}}{\Delta x_{2,\mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_3}} H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3,n+\frac{1}{2}} \hat{\psi}_1^{x_3}(\hat{\xi}_{l'}^{G,G,GL}) \cdot \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_{l_0}^{x_1}(\hat{\xi}_{l'}^{G,G,GL}), \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

avec  $\mathbf{l}' = (i, j, k)$  et  $\hat{\xi}_{\mathbf{l}'}^{G,GL,GL} = (\hat{\xi}_i^G, \hat{\xi}_j^{GL}, \hat{\xi}_k^{GL})$  et  $\hat{\omega}_{\mathbf{l}'}^{Ex_1} = \hat{\omega}_i^G \hat{\omega}_j^{GL} \hat{\omega}_k^{GL}$ ,  $\hat{\omega}_{\mathbf{l}'}^{Hx_1} = \hat{\omega}_i^G \hat{\omega}_j^{GL} \hat{\omega}_k^G$ ,  $\hat{\omega}_{\mathbf{l}'}^{Hx_2} = \hat{\omega}_i^G \hat{\omega}_j^G \hat{\omega}_k^{GL}$ .

Dans l'expression (2.4.6), nous cherchons quelle erreur de quadrature est faite sur l'approximation des intégrales.

(i) dans le terme de gauche : Trois formules de quadrature sont appliquées :

- Pour la composante  $x_1$ , la quadrature de Gauss, de degré d'exactitude  $(2r_i^G + 1)$ , approche exactement un polynôme de degré  $dg(\hat{\phi}_1^{x_1}(\cdot) \cdot \hat{\phi}_{l_0}^{x_1}(\cdot))|_{x_1} = dg(L_{l_1}^G \cdot L_{l_1}^G) = 2r_i^G$ .
- Pour la composante  $x_2$  (et celle de  $x_3$ ), la quadrature de Gauss-Lobatto, de degré d'exactitude  $(2r^{GL} - 1)$ , approche avec une erreur un polynôme de degré  $dg(L^{GL} \cdot L^{GL}) = 2r^{GL}$ .

**Remarque 2.3.** *Pour ce terme, le calcul des intégrales par quadrature n'est pas exact, mais la condensation de la matrice de masse est privilégiée au détriment de l'exactitude du calcul, or, cette erreur est négligeable d'après la remarque 2.3 (cf [16]).*

(ii) dans le premier terme de droite : deux formules de quadrature sont utilisées, mais appliquées sur des composantes différentes :

- Pour la composante en  $x_1$ , la quadrature de Gauss, de degré d'exactitude  $(2r_i^G + 1)$ , approche exactement un polynôme de degré  $dg(\hat{\psi}_1^{x_2}(\cdot) \cdot \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_{l_0}^{x_1}(\cdot))|_{x_1} = dg(L_{l_1}^G \cdot L_{l_1}^G) = 2r_i^G$ .

- (b) Pour la composante en  $x_2$ , la quadrature de Gauss-Lobatto, de degré d'exactitude  $(2r_j^{GL} - 1)$ , approche avec une erreur un polynôme de degré  $dg(\hat{\psi}_1^{x_2}(\cdot) \cdot \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_{10}^{x_1}(\cdot))|_{x_2} = dg(L_{l_2}^{GL} \cdot L_{l_2}^{GL}) = 2r_j^{GL}$ .
- (c) Pour la composante en  $x_3$ , la quadrature de Gauss, de degré d'exactitude  $(2r_k^G + 1)$ , approche un polynôme de degré  $dg(\hat{\psi}_1^{x_3}(\cdot) \cdot \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_{10}^{x_1}(\cdot))|_{x_3} = dg(L_{l_3}^G \cdot \partial L_{l_3}^{GL}) = r_k^G + r_k^{GL} - 1$ , l'exactitude est obtenue si  $2r_k^G + 1 \geq r_k^G + r_k^{GL} - 1 \Leftrightarrow r_k^{GL} \leq r_k^G + 2$ .

**Remarque 2.4.** *Pour ce terme, l'erreur de quadrature est nulle pour la composante en  $x_3$  sous la condition  $r_k^{GL} \leq r_k^G + 2$ . Une erreur de quadrature est faite sur la composante  $x_2$  en contre partie d'une simplification des calculs de la matrice de rigidité, d'après la remarque 2.3, cette erreur est négligeable.*

- (iii) dans le deuxième terme de droite : deux formules de quadrature sont utilisées, mais appliquées sur des composantes différentes :
- (a) Pour la composante en  $x_1$ , la quadrature de Gauss, de degré d'exactitude  $(2r_i^G + 1)$ , approche exactement un polynôme de degré  $dg(\hat{\psi}_1^{x_3}(\cdot) \cdot \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_{10}^{x_1}(\cdot))|_{x_1} = dg(L_{l_1}^G \cdot L_{l_1}^G) = 2r_i^G$ .
- (b) Pour la composante en  $x_2$ , la quadrature de Gauss, de degré d'exactitude  $(2r_j^G + 1)$ , approche un polynôme de degré  $dg(\hat{\psi}_1^{x_3}(\cdot) \cdot \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_{10}^{x_1}(\cdot))|_{x_2} = dg(L_{l_2}^G \cdot \partial L_{l_2}^{GL}) = r_j^G + r_j^{GL} - 1$ , l'exactitude est obtenue si  $2r_j^G + 1 \geq r_j^G + r_j^{GL} - 1 \Leftrightarrow r_j^{GL} \leq r_j^G + 2$ .
- (c) Pour la composante en  $x_3$ , la quadrature de Gauss-Lobatto, de degré d'exactitude  $(2r_k^{GL} - 1)$ , approche avec une erreur un polynôme de degré  $dg(\hat{\psi}_1^{x_3}(\cdot) \cdot \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_{10}^{x_1}(\cdot))|_{x_3} = dg(L_{l_3}^{GL} \cdot L_{l_3}^{GL}) = 2r_k^{GL}$ .

**Remarque 2.5.** *Pour ce dernier terme, l'erreur de quadrature est nulle pour la composante en  $x_2$  sous la condition  $r_j^{GL} \leq r_j^G + 2$ . Une erreur de quadrature pour la composante  $x_3$  est faite en contre partie d'une simplification des calculs de la matrice de rigidité, d'après la remarque 2.3, cette erreur est négligeable.*

**Conclusion 2.1.** *En extrapolant l'étude précédente aux autres directions, nous pouvons conclure que, l'exactitude est obtenue si, pour chaque direction, la relation  $r^{GL} \leq r^G + 2$  est respectée. Ainsi, le choix de prendre  $r^G + 1 = r^{GL}$  est optimal et est cohérent avec la construction d'une méthode FEM conservant une correspondance avec le schéma de Yee (cf le paragraphe 2.3.2.2).*

En utilisant les propriétés des fonctions de base données par  $\hat{\phi}_{l_1, l_2, l_3}^{x_1}(\hat{\xi}_{l_1', l_2', l_3}^{G, GL, GL}) = \delta_{l_1, l_1'} \delta_{l_2, l_2'} \delta_{l_3, l_3'}$ , l'équation (2.4.6) peut se simplifier.

Si  $\vec{e}_{x_0}$  est dans la direction  $\vec{e}_{x_1}$  :

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{\mathcal{K}_0}^{x_1} \hat{\omega}_{10}^{E_{x_1}} \frac{E_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_1, n+1} - E_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_1, n}}{\Delta t} &= \frac{\hat{\omega}_{10,1}^G \hat{\omega}_{10,2}^{GL}}{\Delta x_3, \mathcal{K}_0} \sum_{l_3=1}^{r_k^G+1} \hat{\omega}_{l_3}^G H_{\mathcal{K}_0, (\mathbf{l}_0, 1, \mathbf{l}_0, 2, l_3)}^{x_2, n+\frac{1}{2}} \partial_{\hat{x}_3} L_{l_0, 3}^{GL}(\hat{\xi}_{l_3}^G) \\ &\quad - \frac{\hat{\omega}_{10,1}^G \hat{\omega}_{10,3}^{GL}}{\Delta x_2, \mathcal{K}_0} \sum_{l_2=1}^{r_j^G+1} \hat{\omega}_{l_2}^G H_{\mathcal{K}_0, (\mathbf{l}_0, 1, l_2, \mathbf{l}_0, 3)}^{x_3, n+\frac{1}{2}} \partial_{\hat{x}_2} L_{l_0, 2}^{GL}(\hat{\xi}_{l_2}^G). \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Après simplification, et en appliquant le même procédé pour les 2 autres directions, nous pouvons écrire la discrétisation de l'équation de Maxwell-Ampère associée un degré de liberté  $\mathbf{l}_0$  pour une direction donnée  $x_0$ , et interne à une cellule  $\mathcal{K}_0$ .

Si  $\vec{e}_{x_0}$  correspond à  $\vec{e}_{x_1}$ , alors l'expression du champ  $E^{x_1, n+1}$  est :

$$E_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_1, n+1} = E_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_1, n} + \frac{\Delta t}{\hat{\varepsilon}_{\mathcal{K}_0}^{x_1}} \left[ \frac{1}{\hat{\omega}_{\mathbf{l}_0, 3}^{GL} \Delta x_3, \mathcal{K}_0} \sum_{l_3=1}^{r_k^G+1} \hat{\omega}_{l_3}^G H_{\mathcal{K}_0, (\mathbf{l}_0, 1, \mathbf{l}_0, 2, l_3)}^{x_2, n+\frac{1}{2}} \partial_{\hat{x}_3} L_{\mathbf{l}_0, 3}^{GL}(\hat{\xi}_{l_3}^G) - \frac{1}{\hat{\omega}_{\mathbf{l}_0, 2}^{GL} \Delta x_2, \mathcal{K}_0} \sum_{l_2=1}^{r_j^G+1} \hat{\omega}_{l_2}^G H_{\mathcal{K}_0, (\mathbf{l}_0, 1, l_2, \mathbf{l}_0, 3)}^{x_3, n+\frac{1}{2}} \partial_{\hat{x}_2} L_{\mathbf{l}_0, 2}^{GL}(\hat{\xi}_{l_2}^G) \right]. \quad (2.4.8)$$

Si  $\vec{e}_{x_0}$  correspond à  $\vec{e}_{x_2}$ , alors l'expression du champ  $E^{x_2, n+1}$  est :

$$E_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_2, n+1} = E_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_2, n} + \frac{\Delta t}{\hat{\varepsilon}_{\mathcal{K}_0}^{x_2}} \left[ \frac{1}{\hat{\omega}_{\mathbf{l}_0, 1}^{GL} \Delta x_1, \mathcal{K}_0} \sum_{l_1=1}^{r_i^G+1} \hat{\omega}_{l_1}^G H_{\mathcal{K}_0, (l_1, \mathbf{l}_0, 2, \mathbf{l}_0, 3)}^{x_3, n+\frac{1}{2}} \partial_{\hat{x}_1} L_{\mathbf{l}_0, 1}^{GL}(\hat{\xi}_{l_1}^G) - \frac{1}{\hat{\omega}_{\mathbf{l}_0, 3}^{GL} \Delta x_3, \mathcal{K}_0} \sum_{l_3=1}^{r_k^G+1} \hat{\omega}_{l_3}^G H_{\mathcal{K}_0, (\mathbf{l}_0, 1, \mathbf{l}_0, 2, l_3)}^{x_1, n+\frac{1}{2}} \partial_{\hat{x}_3} L_{\mathbf{l}_0, 3}^{GL}(\hat{\xi}_{l_3}^G) \right]. \quad (2.4.9)$$

Si  $\vec{e}_{x_0}$  correspond à  $\vec{e}_{x_3}$ , alors l'expression du champ  $E^{x_3, n+1}$  est :

$$E_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_3, n+1} = E_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_3, n} + \frac{\Delta t}{\hat{\varepsilon}_{\mathcal{K}_0}^{x_3}} \left[ \frac{1}{\hat{\omega}_{\mathbf{l}_0, 1}^{GL} \Delta x_2, \mathcal{K}_0} \sum_{l_2=1}^{r_j^G+1} \hat{\omega}_{l_2}^G H_{\mathcal{K}_0, (\mathbf{l}_0, 1, l_2, \mathbf{l}_0, 3)}^{x_1, n+\frac{1}{2}} \partial_{\hat{x}_2} L_{\mathbf{l}_0, 2}^{GL}(\hat{\xi}_{l_2}^G) - \frac{1}{\hat{\omega}_{\mathbf{l}_0, 2}^{GL} \Delta x_1, \mathcal{K}_0} \sum_{l_1=1}^{r_i^G+1} \hat{\omega}_{l_1}^G H_{\mathcal{K}_0, (l_1, \mathbf{l}_0, 2, \mathbf{l}_0, 3)}^{x_2, n+\frac{1}{2}} \partial_{\hat{x}_1} L_{\mathbf{l}_0, 1}^{GL}(\hat{\xi}_{l_1}^G) \right]. \quad (2.4.10)$$

**DDL de  $\mathbf{E}_h$  sur une surface  $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$  avec  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  deux éléments de  $\mathcal{T}_h$  tels que  $\mathcal{K}_1 \neq \mathcal{K}_2$**

Soit un degré de liberté d'indice  $j \in N^E$  positionné sur la frontière interne de deux cellules de  $\mathcal{T}_h$ . Alors, il existe une correspondance avec un degré de liberté indexé par  $\mathbf{l}_0$  des deux cellules  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$ , dans une direction  $\vec{e}_{x_0}$ .

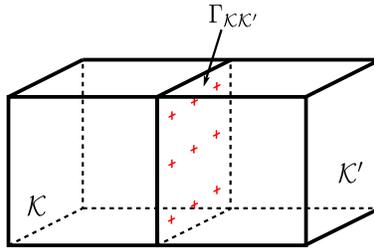


figure 2.10 – Fonctions de base liées à l'interface  $\Gamma_{\mathcal{K}\mathcal{K}'}$ .

Cette correspondance est une conséquence de la continuité du champ électrique tangentiel.

Soit  $\phi_{\mathbf{l}_0, \mathcal{K}_0} \in U_{0, h}$  une fonction de base de direction  $\vec{e}_{x_0}$ , positionnée à l'intérieur d'une interface de deux cellules  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$ , telles que  $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ . On a pour le calcul de  $\mathbf{E}$  :

$$\int_{\mathcal{K}_1} \frac{\mathbf{E}_{\mathcal{K}_1}^{n+1} - \mathbf{E}_{\mathcal{K}_1}^n}{\Delta t} \cdot \phi_{\mathbf{l}_0, \mathcal{K}_1}^{x_0} d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{K}_2} \frac{\mathbf{E}_{\mathcal{K}_2}^{n+1} - \mathbf{E}_{\mathcal{K}_2}^n}{\Delta t} \cdot \phi_{\mathbf{l}_0, \mathcal{K}_2}^{x_0} d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{K}_1} \mathbf{H}_{\mathcal{K}_1}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \wedge \phi_{\mathbf{l}_0, \mathcal{K}_1}^{x_0} d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{K}_2} \mathbf{H}_{\mathcal{K}_2}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \wedge \phi_{\mathbf{l}_0, \mathcal{K}_2}^{x_0} d\mathbf{x}. \quad (2.4.11)$$

En s'inspirant des équations établies pour les degrés de liberté internes à la cellule, nous pouvons écrire l'équation (2.4.12), pour la direction  $\vec{e}_{x_0} = \vec{e}_{x_1}$ .

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{i=1}^2 \Delta x_{2,\mathcal{K}_i} \Delta x_{3,\mathcal{K}_i} \hat{\xi}_{\mathcal{K}_i}^{x_1} \hat{\omega}_{\mathbf{l}_0,\mathcal{K}_i}^{Ex} \right) \frac{E_{\mathcal{K}_0,\mathbf{l}_0}^{x_1,n+1} - E_{\mathcal{K}_0,\mathbf{l}_0}^{x_1,n}}{\Delta t} \\
&= \sum_{i=1}^2 \left( \Delta x_{2,\mathcal{K}_i} \hat{\omega}_{\mathbf{l}_{0,1},\mathcal{K}_i}^G \hat{\omega}_{\mathbf{l}_{0,2},\mathcal{K}_i}^{GL} \sum_{l_3=1}^{r_{k_i,\mathcal{K}_i}^G+1} \hat{\omega}_{l_3,\mathcal{K}_i}^G H_{\mathcal{K}_i,(\mathbf{l}_{0,1},\mathbf{l}_{0,2},l_3)}^{x_2,n+\frac{1}{2}} \partial_{\hat{x}_3} L_{\mathbf{l}_{0,3},\mathcal{K}_i}^{GL}(\hat{\xi}_{l_3}^G) \right. \\
&\quad \left. - \Delta x_{3,\mathcal{K}_i} \hat{\omega}_{\mathbf{l}_{0,1},\mathcal{K}_i}^G \hat{\omega}_{\mathbf{l}_{0,3},\mathcal{K}_i}^{GL} \sum_{l_2=1}^{r_{j_i,\mathcal{K}_i}^G+1} \hat{\omega}_{l_2,\mathcal{K}_i}^G H_{\mathcal{K}_i,(\mathbf{l}_{0,1},l_2,\mathbf{l}_{0,3})}^{x_3,n+\frac{1}{2}} \partial_{\hat{x}_2} L_{\mathbf{l}_{0,2},\mathcal{K}_i}^{GL}(\hat{\xi}_{l_2}^G) \right). \tag{2.4.12}
\end{aligned}$$

Nous noterons que les couples d'indices  $(l_{0,1}, \mathcal{K}_1)$  et  $(l_{0,1}, \mathcal{K}_2)$  correspondent, selon la convention prise sur les cellules  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$ , au premier indice du degré de liberté d'une cellule et, l'autre, au dernier indice du degré de liberté de la seconde cellule, illustré par la figure 2.10. La construction des équations pour les autres directions utilise le même procédé. La figure 2.11 illustre le calcul du rotationnel discrétisé par l'approximation différence finies d'ordre élevé pour un degré de liberté  $E^{x_3}$  positionné entre deux cellules.

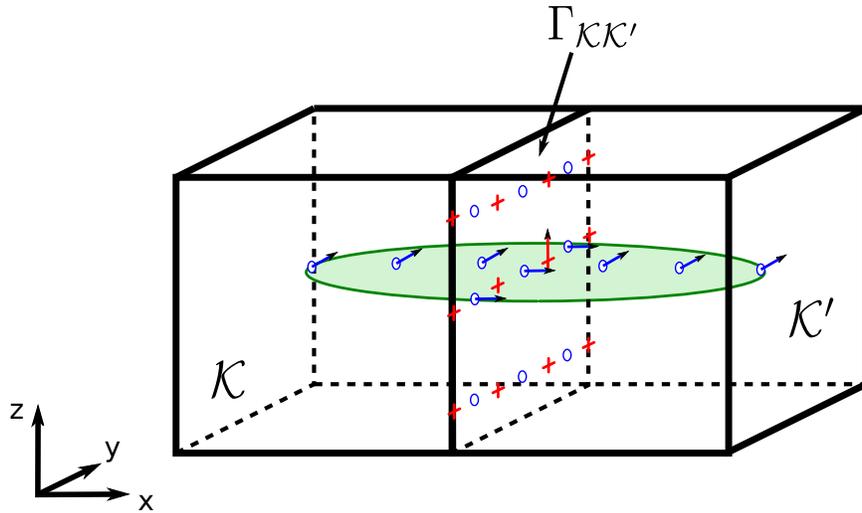


figure 2.11 – Discrétisation du rotationnel pour le DDL  $E_{x_3}$  et positionné sur deux cellules  $\Gamma_{\mathcal{K}\mathcal{K}'}$ . Les champs  $H_{x_1}$  et  $H_{x_2}$  contribuent à l'évaluation du champ  $E_{x_3}$ . Le cas utilise une approximation spatiale fixe d'ordre  $r^G = 2$  et  $r^{GL} = r^G + 1$  pour les trois directions.

#### DDL de $\mathbf{E}_h$ sur une arête $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 \cap \mathcal{K}_3 \cap \mathcal{K}_4$

Enfin, pour les degrés de liberté  $j \in N_E$  localisés sur les arêtes, on a pour la fonction de base associée un support constitué de quatre cellules. Alors, il existe une correspondance dans l'indexation globale des inconnues  $j \in N_E$  avec un degré de liberté  $\mathbf{l}_0$  associé aux quatre cellules locales nommées  $\mathcal{K}_1$ ,  $\mathcal{K}_2$ ,  $\mathcal{K}_3$  et  $\mathcal{K}_4$ , dans une direction supposée  $\vec{e}_{x_0}$ .

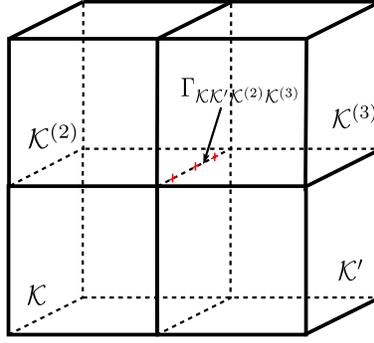


figure 2.12 – Fonctions de base liées à l'arête  $\Gamma_{K K' K^{(2)} K^{(3)}}$ .

Cette correspondance est une conséquence de la continuité du champ électrique tangentiel entre les cellules.

Soit  $\phi_{\mathbf{l}_0, \mathcal{K}_0} \in U_{0,h}$  une fonction de base de direction  $\vec{e}_{x_0}$ , positionnée sur cette arête, où  $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3 \cup \mathcal{K}_4$ , nous pouvons écrire pour la direction  $\vec{e}_{x_0} = \vec{e}_{x_1}$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( \sum_{i=1}^4 \Delta x_{2, \mathcal{K}_i} \Delta x_{3, \mathcal{K}_i} \hat{\xi}_{\mathcal{K}_i}^{x_1} \hat{\omega}_{\mathbf{l}_0, \mathcal{K}_i}^{E x_1} \right) \frac{E_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_1, n+1} - E_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_1, n}}{\Delta t} \\
 &= \sum_{i=1}^4 \left( \Delta x_{2, \mathcal{K}_i} \hat{\omega}_{\mathbf{l}_{0,1}, \mathcal{K}_i}^G \hat{\omega}_{\mathbf{l}_{0,2}, \mathcal{K}_i}^{GL} \sum_{l_3=1}^{r_{k, \mathcal{K}_i}^G + 1} \hat{\omega}_{l_3, \mathcal{K}_i}^G H_{\mathcal{K}_i, (\mathbf{l}_{0,1}, \mathbf{l}_{0,2}, l_3)}^{x_2, n + \frac{1}{2}} \partial_{\hat{x}_3} L_{l_{0,3}, \mathcal{K}_i}^{GL} \left( \hat{\xi}_{l_3}^G \right) \right. \\
 & \quad \left. - \Delta x_{3, \mathcal{K}_i} \hat{\omega}_{\mathbf{l}_{0,1}, \mathcal{K}_i}^G \hat{\omega}_{\mathbf{l}_{0,3}, \mathcal{K}_i}^{GL} \sum_{l_2=1}^{r_{j, \mathcal{K}_i}^G + 1} \hat{\omega}_{l_2, \mathcal{K}_i}^G H_{\mathcal{K}_i, (\mathbf{l}_{0,1}, l_2, \mathbf{l}_{0,3})}^{x_3, n + \frac{1}{2}} \partial_{\hat{x}_2} L_{l_{0,2}, \mathcal{K}_i}^{GL} \left( \hat{\xi}_{l_2}^G \right) \right). \tag{2.4.13}
 \end{aligned}$$

Nous noterons  $\forall i \in [1, 4]$  que les couples  $(l_{0,2}, \mathcal{K}_i)$  et  $(l_{0,2}, \mathcal{K}_i)$  ou  $(l_{0,3}, \mathcal{K}_i)$  et  $(l_{0,3}, \mathcal{K}_i)$  correspondent, selon la convention prise sur les cellules  $\mathcal{K}_i$ , soit au premier indice du degré de liberté d'une cellule, soit au dernier indice du degré de liberté d'une cellule, comme illustré par la figure 2.12.

La construction des équations pour les autres directions s'effectue de la même manière. La figure 2.13 représente le calcul du rotationnel par l'approximation différences finies d'ordre élevé pour un degré de liberté  $E^{x_2}$  positionné entre 4 cellules.

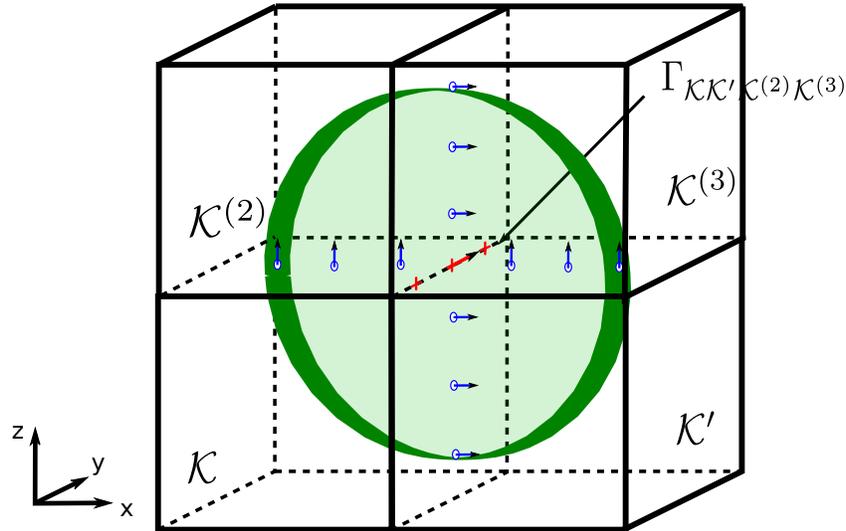


figure 2.13 – Discretisation du rotationnel pour le DDL  $E^{x2}$  et positionné sur l'arrête de 4 cellules  $\Gamma_{\mathcal{K}\mathcal{K}'\mathcal{K}^{(2)}\mathcal{K}^{(3)}}$ . Les champs  $H^{x2}$  et  $H^{x3}$  orientés contribuent à l'évaluation du champ  $E^{x2}$ . Le cas utilise une approximation spatiale fixe  $r^G = 2$  et  $r^{GL} = r^G + 1$  pour les trois directions.

### 2.4.3 Discretisation de l'équation de Maxwell-Faraday

Pour construire le schéma approchant l'équation de Maxwell-Faraday, nous prenons le positionnement des degrés de liberté dans une cellule  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$  tel qu'il est présenté dans le paragraphe 2.3.2.4. Pour cela, nous construisons le schéma pour deux types de degrés de liberté :

- ceux qui sont internes aux cellules,
- ceux qui sont internes à l'interface entre deux cellules.

#### DDL de $\mathbf{H}_h$ à support exclusif dans une cellule

Pour chaque degré de liberté  $j \in N_H$  locale à une cellule, il existe une correspondance avec un degré de liberté  $\mathbf{l}_0$ , dans une direction  $\vec{e}_{x_0}$  d'une cellule  $\mathcal{K}_0$ , où  $\vec{e}_{x_0}$  est défini comme précédemment pour la discretisation de l'équation de Maxwell-Ampère.

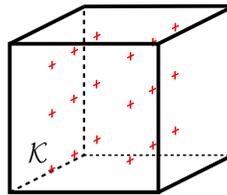


figure 2.14 – Fonctions de base liées à l'intérieur d'une maille  $\mathcal{K}$ .

La formulation variationnelle du champ magnétique (2.2.4b) restreint à tous les degrés de liberté correspondant à la description précédente de  $\mathbf{l}_0$ , s'écrit sous la forme (2.4.14) :

Soit  $\psi_{\mathbf{l}_0, \mathcal{K}_0} \in V_h$  une fonction de base dans la direction  $\vec{e}_{x_0}$ , on a :

$$\int_{\mathcal{K}_0} \mu_{\mathcal{K}_0} \frac{\mathbf{H}_{\mathcal{K}_0}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{\mathcal{K}_0}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \cdot \psi_{\mathbf{l}_0, \mathcal{K}_0}^{x_0} d\mathbf{x} = - \int_{\mathcal{K}_0} \nabla \wedge \mathbf{E}_{\mathcal{K}_0}^n \cdot \psi_{\mathbf{l}_0, \mathcal{K}_0}^{x_0} d\mathbf{x}. \quad (2.4.14)$$

où  $\psi_{\mathbf{l}_0, \mathcal{K}_0}^{x_0}$  vecteur de  $\mathbb{R}^3$  de composante nulle dans les directions autres que  $\vec{e}_{x_0}$ .

En introduisant la décomposition (2.3.31) du champ magnétique et la décomposition (2.3.30) du champ

électrique, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{K}_0} \underline{\underline{\mu}}_{\mathcal{K}_0} \left( \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_1}} \frac{H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1, n+\frac{1}{2}} - H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1, n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \psi_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1} ; \right. \\
& \quad \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_2}} \frac{H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2, n+\frac{1}{2}} - H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2, n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \psi_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2} ; \\
& \quad \left. \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_3}} \frac{H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3, n+\frac{1}{2}} - H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3, n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \psi_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3} \right) \cdot \psi_{\mathcal{K}_0,1_0}^{x_0} d\mathbf{x} \\
& = - \int_{\mathcal{K}_0} \left( \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3, n} \partial_{x_2} \phi_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3} - \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2, n} \partial_{x_3} \phi_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2} ; \right. \\
& \quad \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1, n} \partial_{x_3} \phi_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1} - \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3, n} \partial_{x_1} \phi_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3} ; \\
& \quad \left. \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2, n} \partial_{x_1} \phi_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2} - \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1, n} \partial_{x_2} \phi_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1} \right) \cdot \psi_{\mathcal{K}_0,1_0}^{x_0} d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

avec  $\underline{\underline{\mu}}_{\mathcal{K}_0}$  le tenseur de permittivité dans la cellule  $\mathcal{K}_0$  et  $\forall l \in \mathbb{N}^*$   $\psi_{\mathcal{K}_0,1}^{x_i}(\mathbf{x}) = \hat{\psi}_1^{x_i} \circ \mathbf{F}_{\mathcal{K}_0}^{-1}(\mathbf{x})$  et  $\phi_{\mathcal{K}_0,1}^{x_i}(\mathbf{x}) = \hat{\phi}_1^{x_i} \circ \mathbf{F}_{\mathcal{K}_0}^{-1}(\mathbf{x}) \forall i \in [1, 3]$ .

En utilisant la transformation  $\mathbf{F}_{\mathcal{K}_0}$  nous pouvons intégrer cette équation sur l'élément de référence  $\hat{\mathcal{K}}$  :

$$\begin{aligned}
& \int_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\underline{\underline{\mu}}}_{\mathcal{K}_0} |J_{\mathcal{K}_0}| \left( \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_1}} \frac{H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1, n+\frac{1}{2}} - H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1, n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \hat{\psi}_1^{x_1} ; \right. \\
& \quad \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_2}} \frac{H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2, n+\frac{1}{2}} - H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2, n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \hat{\psi}_1^{x_2} ; \\
& \quad \left. \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_3}} \frac{H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3, n+\frac{1}{2}} - H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3, n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \hat{\psi}_1^{x_3} \right) \cdot \hat{\psi}_{1_0}^{x_0} d\hat{\mathbf{x}} \\
& = - \int_{\hat{\mathcal{K}}} |J_{\mathcal{K}_0}| \left( \frac{1}{\Delta x_{2, \mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3, n} \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_1^{x_3} - \frac{1}{\Delta x_{3, \mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2, n} \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_1^{x_2} ; \right. \\
& \quad \frac{1}{\Delta x_{3, \mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1, n} \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_1^{x_1} - \frac{1}{\Delta x_{1, \mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3, n} \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_1^{x_3} ; \\
& \quad \left. \frac{1}{\Delta x_{1, \mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2, n} \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_1^{x_2} - \frac{1}{\Delta x_{2, \mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1, n} \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_1^{x_1} \right) \cdot \hat{\psi}_{1_0}^{x_0} d\hat{\mathbf{x}},
\end{aligned}$$

où  $\hat{\underline{\underline{\mu}}}_{\mathcal{K}_0}(\hat{\mathbf{x}}) = \underline{\underline{\mu}}_{\mathcal{K}_0} \circ \mathbf{F}_{\mathcal{K}_0}(\hat{\mathbf{x}})$ . Nous simplifions les formules en supposant que la perméabilité est toujours isotrope par direction et homogène dans une même cellule. Nous obtenons après simplification, les équations selon la direction  $\vec{e}_{x_0}$  :

Si  $\vec{e}_{x_0}$  correspond à la direction  $\vec{e}_{x_1}$  :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\mathcal{K}_0}^{x_1} \int_{\hat{\mathcal{K}}} \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_1}} \frac{H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1, n+\frac{1}{2}} - H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1, n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \hat{\psi}_1^{x_1} \cdot \hat{\psi}_{l_0}^{x_1} d\hat{\mathbf{x}} = & - \int_{\hat{\mathcal{K}}} \left( \frac{1}{\Delta x_{2, \mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3, n} \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_1^{x_3} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Delta x_{3, \mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2, n} \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_1^{x_2} \right) \cdot \hat{\psi}_{l_0}^{x_1} d\hat{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Si  $\vec{e}_{x_0}$  correspond à la direction  $\vec{e}_{x_2}$  :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\mathcal{K}_0}^{x_2} \int_{\hat{\mathcal{K}}} \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_2}} \frac{H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2, n+\frac{1}{2}} - H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2, n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \hat{\psi}_1^{x_2} \cdot \hat{\psi}_{l_0}^{x_2} d\hat{\mathbf{x}} = & - \int_{\hat{\mathcal{K}}} \left( \frac{1}{\Delta x_{3, \mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1, n} \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_1^{x_1} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Delta x_{1, \mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3, n} \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_1^{x_3} \right) \cdot \hat{\psi}_{l_0}^{x_2} d\hat{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Si  $\vec{e}_{x_0}$  correspond à la direction  $\vec{e}_{x_3}$  :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\mathcal{K}_0}^{x_3} \int_{\hat{\mathcal{K}}} \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_3}} \frac{H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3, n+\frac{1}{2}} - H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3, n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \hat{\psi}_1^{x_3} \cdot \hat{\psi}_{l_0}^{x_3} d\hat{\mathbf{x}} = & - \int_{\hat{\mathcal{K}}} \left( \frac{1}{\Delta x_{1, \mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2, n} \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_1^{x_2} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Delta x_{2, \mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1, n} \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_1^{x_1} \right) \cdot \hat{\psi}_{l_0}^{x_3} d\hat{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Les intégrales sont évaluées en utilisant des formules de quadrature de Gauss ou Gauss-Lobatto. Le calcul est explicité uniquement pour la direction  $\vec{e}_{x_0} = \vec{e}_{x_1}$  :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\mathcal{K}_0}^{x_1} \sum_{l'=1}^{\Theta_H^{x_1}} \hat{\omega}_{l'}^{Hx} \sum_{l=1}^{\Theta_H^{x_1}} \frac{H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1, n+\frac{1}{2}} - H_{\mathcal{K}_0,1}^{x_1, n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \hat{\psi}_1^{x_1}(\hat{\xi}_{l'}^{GL, G, G}) \cdot \hat{\psi}_{l_0}^{x_1}(\hat{\xi}_{l'}^{GL, G, G}) \\ = - \sum_{l'=1}^{\Theta_H^{x_1}} \hat{\omega}_{l'}^{Hx_1} \left( \frac{1}{\Delta x_{1, \mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_3, n} \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_1^{x_3}(\hat{\xi}_{l'}^{GL, G, G}) \right. \\ \left. - \frac{1}{\Delta x_{2, \mathcal{K}_0}} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K}_0,1}^{x_2, n} \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_1^{x_2}(\hat{\xi}_{l'}^{GL, G, G}) \right) \cdot \hat{\psi}_{l_0}^{x_1}(\hat{\xi}_{l'}^{GL, G, G}), \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

avec  $l' = (i, j, k)$  et  $\hat{\xi}_{l'}^{G, GL, GL} = (\hat{\xi}_i^G, \hat{\xi}_j^{GL}, \hat{\xi}_k^{GL})$  et  $\hat{\omega}_{l'}^{Hx_1} = \hat{\omega}_i^{GL} \hat{\omega}_j^G \hat{\omega}_k^G$ .

Dans l'expression (2.4.18), nous cherchons quelle erreur de quadrature est effectuée sur l'approximation des intégrales.

(i) dans le terme de gauche, trois formules de quadrature sont appliquées :

- (a) Pour la composante  $x_1$ , la quadrature de Gauss-Lobatto, de degré d'exactitude  $(2r_i^{GL} - 1)$ , approche avec une erreur un polynôme de degré  $dg(\hat{\psi}_1^{x_1}(\cdot) \cdot \hat{\psi}_{l_0}^{x_1}(\cdot))|_{x_1} = dg(L_{l_1}^{GL} \cdot L_{l_1}^{GL}) = 2r_i^{GL}$ .
- (b) Pour la composante  $x_2$  (et celle de  $x_3$ ), la quadrature de Gauss, de degré d'exactitude  $(2r^G + 1)$ , approche exactement un polynôme de degré  $dg(L^G \cdot L^G) = 2r^G$ .

**Remarque 2.6.** *Pour ce terme, le calcul des intégrales par quadrature n'est pas exact. Encore une fois, la condensation de la matrice de masse est privilégiée au détriment de l'exactitude du calcul, or, cette erreur est négligeable d'après la remarque 2.3.*

- (ii) dans le premier terme du terme de droite, deux formules de quadrature sont utilisées, mais appliquées sur des composantes différentes :
- (a) Pour la composante  $x_1$ , la quadrature de Gauss-Lobatto, de degré d'exactitude  $(2r_i^{GL} - 1)$ , approche avec une erreur un polynôme de degré  $dg(\partial_{x_2} \hat{\phi}_1^{x_3}(\cdot) \cdot \hat{\psi}_{1_0}^{x_1}(\cdot))|_{x_1} = dg(L_{l_1}^{GL} \cdot L_{l_1}^{GL}) = 2r_i^{GL}$ .
  - (b) Pour la composante  $x_2$ , la quadrature de Gauss, de degré d'exactitude  $(2r_j^G + 1)$ , approche un polynôme de degré  $dg(\partial_{x_2} \hat{\phi}_1^{x_3}(\cdot) \cdot \hat{\psi}_{1_0}^{x_1}(\cdot))|_{x_2} = dg(\partial L_{l_2}^{GL} \cdot L_{l_2}^G) = r_j^G + r_j^{GL} - 1$ , l'exactitude est obtenue si  $2r_j^G + 1 \geq r_j^G + r_j^{GL} - 1 \Leftrightarrow r_j^{GL} \leq r_j^G + 2$ .
  - (c) Pour la composante  $x_3$ , la quadrature de Gauss, de degré d'exactitude  $(2r_k^G + 1)$ , approche exactement un polynôme de degré  $dg(L_{l_3}^G \cdot L_{l_3}^G) = 2r_k^G$ .

**Remarque 2.7.** *L'erreur de quadrature est nulle pour la composante  $x_2$  sous la condition  $r_j^{GL} \leq r_j^G + 2$ . Une erreur de quadrature pour la composante  $x_1$  est faite en contre partie d'une simplification des calculs de la matrice de rigidité, comme dans l'équation d'Ampère et cette erreur est négligeable d'après la remarque 2.3.*

- (iii) dans le deuxième terme du terme de droite, deux formules de quadrature sont utilisées, mais appliquées sur des composantes différentes :
- (a) Pour la composante  $x_1$ , la quadrature de Gauss-Lobatto, de degré d'exactitude  $(2r_i^{GL} - 1)$ , approche avec une erreur un polynôme de degré  $dg(\partial_{x_3} \hat{\phi}_1^{x_2}(\cdot) \cdot \hat{\psi}_{1_0}^{x_1}(\cdot))|_{x_1} = dg(L_{l_1}^{GL} \cdot L_{l_1}^{GL}) = 2r_i^{GL}$ .
  - (b) Pour la composante  $x_2$ , la quadrature de Gauss, de degré d'exactitude  $(2r_j^G + 1)$ , approche exactement un polynôme de degré  $dg(\partial_{x_3} \hat{\phi}_1^{x_2}(\cdot) \cdot \hat{\psi}_{1_0}^{x_1}(\cdot))|_{x_2} = dg(L_{l_2}^G \cdot L_{l_2}^G) = 2r_j^G$ .
  - (c) Pour la composante  $x_3$ , la quadrature de Gauss, de degré d'exactitude  $(2r_k^G + 1)$ , approche un polynôme de degré  $dg(\partial_{x_3} \hat{\phi}_1^{x_2}(\cdot) \cdot \hat{\psi}_{1_0}^{x_1}(\cdot))|_{x_3} = dg(\partial L_{l_3}^{GL} \cdot L_{l_3}^G) = r_k^G + r_k^{GL} - 1$ , l'exactitude est obtenue si  $2r_k^G + 1 \geq r_k^G + r_k^{GL} - 1 \Leftrightarrow r_k^{GL} \leq r_k^G + 2$ .

**Remarque 2.8.** *L'erreur de quadrature est nulle sur ce dernier terme pour la composante en  $x_3$  sous la condition  $r_k^{GL} \leq r_k^G + 2$ . Une erreur de quadrature pour la composante  $x_3$  est faite en contre partie d'une simplification des calculs de la matrice de rigidité, cette erreur est négligeable d'après la remarque 2.3.*

**Conclusion 2.2.** *En extrapolant l'étude précédente aux autres directions, nous pouvons conclure que l'exactitude est obtenue si, pour chaque direction, la relation  $r^{GL} \leq r^G + 2$  est respectée. Ainsi, le choix de prendre  $r^G + 1 = r^{GL}$  est optimal et est cohérent avec la construction d'une méthode FEM conservant une correspondance avec le schéma de Yee (cf la paragraphe 2.3.2.2).*

En utilisant les propriétés des fonctions de base données par  $\hat{\psi}_{l_1, l_2, l_3}^{x_1}(\hat{\xi}_{l_1', l_2', l_3'}^{GL, G, G}) = \delta_{l_1, l_1'} \delta_{l_2, l_2'} \delta_{l_3, l_3'}$ , l'équation (2.4.18) peut se simplifier.

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\mathcal{K}_0} \hat{\omega}_{1_0}^{Hx_1} \frac{H_{\mathcal{K}_0, 1_0}^{x_1, n + \frac{1}{2}} - H_{\mathcal{K}_0, 1_0}^{x_1, n - \frac{1}{2}}}{\Delta t} &= -\hat{\omega}_{1_0}^{Hx_1} \left[ \frac{1}{\Delta x_2, \mathcal{K}_0} \sum_{l_2=1}^{r_j^{GL} + 1} E_{\mathcal{K}_0, (1_0, 1, l_2, 1_0, 3)}^{x_3, n} \partial_{\hat{x}_2} L_{l_2}^{GL}(\hat{\xi}_{1_0, 2}^G) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Delta x_3, \mathcal{K}_0} \sum_{l_3=1}^{r_k^{GL} + 1} E_{\mathcal{K}_0, (1_0, 1, 1_0, 2, l_3)}^{x_2, n} \partial_{\hat{x}_3} L_{l_3}^{GL}(\hat{\xi}_{1_0, 3}^G) \right], \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

avec  $1_0 = (l_{0,1}, l_{0,2}, l_{0,3})$ .

Après simplification, et en appliquant le même raisonnement pour les 2 autres directions, nous pouvons écrire la discrétisation de l'équation de Maxwell-Faraday associée au degré de liberté  $1_0$  pour une direction

donnée  $\vec{e}_{x_0}$ , et interne à une cellule  $\mathcal{K}_0$ .

Si  $\vec{e}_{x_0}$  correspond à la direction  $\vec{e}_{x_1}$  :

$$H_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_1, n + \frac{1}{2}} = H_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_1, n - \frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\hat{\mu}_{\mathcal{K}_0}^{x_1}} \left[ \frac{1}{\Delta x_{2, \mathcal{K}_0}} \sum_{l_2=1}^{r_j^{GL+1}} E_{\mathcal{K}_0, (\mathbf{l}_0, 1, l_2, \mathbf{l}_0, 3)}^{x_3, n} \partial_{\hat{x}_2} L_{l_2}^{GL}(\hat{\xi}_{\mathbf{l}_0, 2}^G) \right. \\ \left. - \frac{1}{\Delta x_{3, \mathcal{K}_0}} \sum_{l_3=1}^{r_k^{GL+1}} E_{\mathcal{K}_0, (\mathbf{l}_0, 1, \mathbf{l}_0, 2, l_3)}^{x_2, n} \partial_{\hat{x}_3} L_{l_3}^{GL}(\hat{\xi}_{\mathbf{l}_0, 3}^G) \right]. \quad (2.4.20)$$

Si  $\vec{e}_{x_0}$  correspond à la direction  $\vec{e}_{x_2}$  :

$$H_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_2, n + \frac{1}{2}} = H_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_2, n - \frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\hat{\mu}_{\mathcal{K}_0}^{x_2}} \left[ \frac{1}{\Delta x_{3, \mathcal{K}_0}} \sum_{l_3=1}^{r_k^{GL+1}} E_{\mathcal{K}_0, (\mathbf{l}_0, 1, \mathbf{l}_0, 2, l_3)}^{x_1, n} \partial_{\hat{x}_3} L_{l_3}^{GL}(\hat{\xi}_{\mathbf{l}_0, 3}^G) \right. \\ \left. - \frac{1}{\Delta x_{1, \mathcal{K}_0}} \sum_{l_1=1}^{r_i^{GL+1}} E_{\mathcal{K}_0, (l_1, \mathbf{l}_0, 2, \mathbf{l}_0, 3)}^{x_3, n} \partial_{\hat{x}_1} L_{l_1}^{GL}(\hat{\xi}_{\mathbf{l}_0, 1}^G) \right]. \quad (2.4.21)$$

Si  $\vec{e}_{x_0}$  correspond à la direction  $\vec{e}_{x_3}$  :

$$H_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_3, n + \frac{1}{2}} = H_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_3, n - \frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\hat{\mu}_{\mathcal{K}_0}^{x_3}} \left[ \frac{1}{\Delta x_{1, \mathcal{K}_0}} \sum_{l_1=1}^{r_i^{GL+1}} E_{\mathcal{K}_0, (l_1, \mathbf{l}_0, 2, \mathbf{l}_0, 3)}^{x_2, n} \partial_{\hat{x}_1} L_{l_1}^{GL}(\hat{\xi}_{\mathbf{l}_0, 1}^G) \right. \\ \left. - \frac{1}{\Delta x_{2, \mathcal{K}_0}} \sum_{l_2=1}^{r_j^{GL+1}} E_{\mathcal{K}_0, (\mathbf{l}_0, 1, l_2, \mathbf{l}_0, 3)}^{x_1, n} \partial_{\hat{x}_2} L_{l_2}^{GL}(\hat{\xi}_{\mathbf{l}_0, 2}^G) \right]. \quad (2.4.22)$$

**DDL de  $\mathbf{H}_h$  sur une surface  $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$  avec  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  deux éléments de  $\mathcal{T}_h$  tels que  $\mathcal{K}_1 \neq \mathcal{K}_2$**

Pour chaque degré de liberté d'indice  $j \in N_H$  dont la fonction de base associée possède exactement deux cellules de  $\mathcal{T}_h$  comme support (voir la figure 2.15), il existe une correspondance avec un degré de liberté  $\mathbf{l}_0$  appartenant aux deux cellules  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$ , dans une direction  $\vec{e}_{x_0}$ .

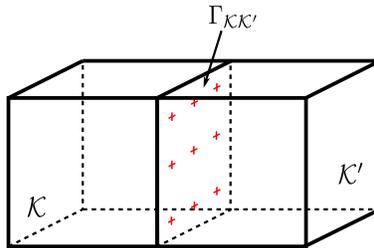


figure 2.15 – Fonctions de base liées à l'interface  $\Gamma_{\mathcal{K}\mathcal{K}'}$ .

Cette correspondance est une conséquence de la continuité du champ magnétique normal.

Pour tout degré de liberté  $\psi_{\mathbf{l}_0, \mathcal{K}_0} \in V_h$  positionné à l'intérieur d'une interface de deux cellules  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$ , où  $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ . Pour la direction  $\vec{e}_{x_0}$ , on a pour le calcul du champ magnétique :

$$\int_{\mathcal{K}_1} \frac{\mu_{\mathcal{K}_1}}{\Delta t} \frac{\mathbf{H}_{\mathcal{K}_1}^{n + \frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{\mathcal{K}_1}^{n - \frac{1}{2}}}{\Delta t} \cdot \psi_{\mathbf{l}_0, \mathcal{K}_1}^{x_0} d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{K}_2} \frac{\mu_{\mathcal{K}_2}}{\Delta t} \frac{\mathbf{H}_{\mathcal{K}_2}^{n + \frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{\mathcal{K}_2}^{n - \frac{1}{2}}}{\Delta t} \cdot \psi_{\mathbf{l}_0, \mathcal{K}_2}^{x_0} d\mathbf{x} = \\ \int_{\mathcal{K}_1} \nabla \wedge \mathbf{E}_{\mathcal{K}_1}^n \cdot \psi_{\mathbf{l}_0, \mathcal{K}_1}^{x_0} d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{K}_2} \nabla \wedge \mathbf{E}_{\mathcal{K}_2}^n \cdot \psi_{\mathbf{l}_0, \mathcal{K}_2}^{x_0} d\mathbf{x}. \quad (2.4.23)$$

En s'inspirant des équations établies pour les degrés de liberté interne à la cellule, nous pouvons écrire l'équation intermédiaire (2.4.24), pour la direction  $\vec{e}_{x_0} = \vec{e}_{x_1}$ .

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^2 \Delta x_{1,\mathcal{K}_i} \Delta x_{2,\mathcal{K}_i} \Delta x_{3,\mathcal{K}_i} \hat{\xi}_{\mathcal{K}_i}^{x_1} \hat{\omega}_{\mathcal{K}_i}^{H^{x_1}} \right) \frac{H_{\mathcal{K}_0,\mathcal{I}_0}^{x_1,n+\frac{1}{2}} - H_{\mathcal{K}_0,\mathcal{I}_0}^{x_1,n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \\ &= \sum_{i=1}^2 \left( - \Delta x_{1,\mathcal{K}_i} \Delta x_{2,\mathcal{K}_i} \Delta x_{3,\mathcal{K}_i} \hat{\omega}_{\mathcal{K}_i}^{H^{x_1}} \left[ \frac{1}{\Delta x_{2,\mathcal{K}_i}} \sum_{l_2=1}^{r_{j,\mathcal{K}_i}^{GL}+1} E_{\mathcal{K}_i,(\mathcal{I}_0,1,l_2,\mathcal{I}_0,3)}^{x_3,n} \partial_{\hat{x}_2} L_{l_2,\mathcal{K}_i}^{GL}(\hat{\xi}_{\mathcal{I}_0,2}^G) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{\Delta x_{3,\mathcal{K}_i}} \sum_{l_3=1}^{r_{k,\mathcal{K}_i}^{GL}+1} E_{\mathcal{K}_i,(\mathcal{I}_0,1,\mathcal{I}_0,2,l_3)}^{x_2,n} \partial_{\hat{x}_3} L_{l_3,\mathcal{K}_i}^{GL}(\hat{\xi}_{\mathcal{I}_0,3}^G) \right] \right). \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

Nous notons que les champs  $E$  utilisés dans l'approximation sont tous positionnés sur la face appartenant aux deux cellules. Par conséquent, les fonctions de base et les formules de quadrature pour calculer chaque champ  $E$  contributeur sont identiques. Une illustration des champs  $E^{x_2}$  et  $E^{x_3}$  contribuant aux calculs d'une inconnue  $H^{x_1}$  est présentée à la figure 2.16. Ainsi, nous pouvons simplifier l'équation (2.4.24) en utilisant les paramètres identiques entre la cellule 1 et 2. Pour cela, nous posons l'indice 0 pour "fusionner" les mêmes paramètres. Les seuls paramètres qui sont différents d'une cellule à l'autre sont les pas d'espace  $\Delta x_{i,\mathcal{K}_i}$  selon  $x_i$ , mais, étant présents des deux côtés de l'équation ils se simplifient. L'équation (2.4.25) ainsi obtenue est identique à celle présentée pour un degré de liberté interne à la cellule.

$$\begin{aligned} \frac{H_{\mathcal{K}_0,\mathcal{I}_0}^{x_1,n+\frac{1}{2}} - H_{\mathcal{K}_0,\mathcal{I}_0}^{x_1,n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= - \frac{1}{\Delta x_{2,\mathcal{K}_0}} \sum_{l_2=1}^{r_{j,\mathcal{K}_0}^{GL}+1} E_{\mathcal{K}_0,(\mathcal{I}_0,1,l_2,\mathcal{I}_0,3)}^{x_3,n} \partial_{\hat{x}_2} L_{l_2,\mathcal{K}_0}^{GL}(\hat{\xi}_{\mathcal{I}_0,2}^G) \\ &+ \frac{1}{\Delta x_{3,\mathcal{K}_0}} \sum_{l_3=1}^{r_{k,\mathcal{K}_0}^{GL}+1} E_{\mathcal{K}_0,(\mathcal{I}_0,1,\mathcal{I}_0,2,l_3)}^{x_2,n} \partial_{\hat{x}_3} L_{l_3,\mathcal{K}_0}^{GL}(\hat{\xi}_{\mathcal{I}_0,3}^G). \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

La construction des équations pour les autres directions est identique à celle présentée.

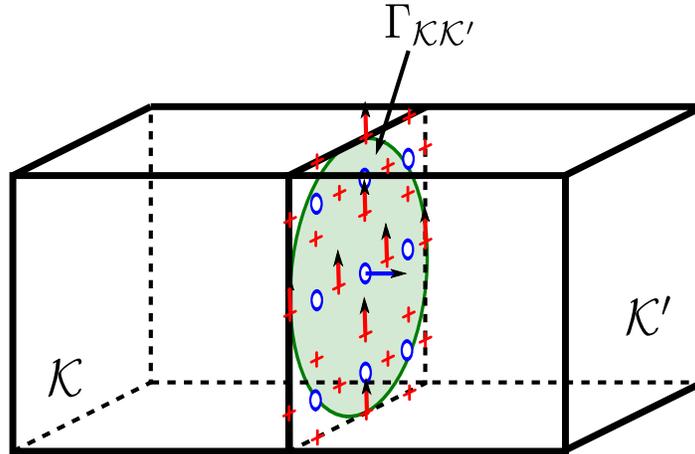


figure 2.16 – Discrétisation du rotationnel pour un degré de liberté  $H^{x_1}$  et positionné sur deux cellules  $\Gamma_{\mathcal{K}\mathcal{K}'}$ . Les champs  $E^{x_2}$  et  $E^{x_3}$  contribuent à l'évaluation du champ  $H^{x_1}$ . Le cas utilise une approximation spatiale fixe  $r^G = 2$  et  $r^{GL} = r^G + 1$  pour les trois directions.

**Conclusion 2.3.** Pour effectuer les calculs des champs magnétiques, il n'y a pas de distinction à faire sur la position des degrés de liberté dans une cellule.

### 2.4.4 Schéma en espace et en temps sous forme matricielle

En utilisant un schéma de type LeapFrog en temps, nous pouvons écrire le problème 2.2.4 sous la forme du système matriciel suivant :

$$\begin{aligned} M_\varepsilon \frac{\mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^n}{\Delta t} &= R_E \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \\ M_\mu \frac{\mathbf{H}_h^{n+\frac{3}{2}} - \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= -R_H \mathbf{E}_h^{n+1} \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

avec les matrices de rigidité  $R_E$  et  $R_H$ , et les matrices de masse  $M_\varepsilon$  et  $M_\mu$ .

Les choix des fonctions de base et des méthodes de quadrature utilisées permettent de réaliser une condensation des matrices de masse, et ainsi d'avoir les matrices  $M_\varepsilon$  et  $M_\mu$  diagonales. D'un point de vue informatique, cette caractéristique sur les matrices de masse permet d'envisager une résolution en évaluant indépendamment chaque degré de liberté et favorisera une parallélisation par découpe de domaine.

L'algorithme de résolution s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_h^{n+1} &= \mathbf{E}_h^n + \Delta t M_\varepsilon^{-1} R_E \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}, \\ \mathbf{H}_h^{n+\frac{3}{2}} &= \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t M_\mu^{-1} R_H \mathbf{E}_h^{n+1}. \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

Et donc, sous forme matricielle, on a :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^{n+1} \\ \mathbf{H}_h^{n+\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{NE} & \Delta t M_\varepsilon^{-1} R_E \\ -\Delta t M_\mu^{-1} R_H & I_{NH} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^n \\ \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.4.28)$$

### 2.4.5 Schéma de Yee inclus dans le schéma FEM

A plusieurs reprises, il a été évoqué que le schéma FEM proposé était identique au schéma de Yee pour un ordre d'approximation spatiale égal à 0. Dans ce paragraphe, nous justifions cette particularité. Pour cela, d'une part, nous considérons la condition évoquée dans les conclusions 2.1 et 2.2, c'est-à-dire  $r^{GL} = r^G + 1$ , et d'autre part, nous prenons comme approximation spatiale  $r^G = 0$  et un pas d'espace fixe par direction. En posant  $r^G = 0$ , les champs électriques sont toujours positionnés sur une arête de la cellule et n'ont pas de degrés de liberté interne à la maille ou interne à une surface. De même pour le champ magnétique, les seuls degrés de liberté restant sont ceux localisés au centre et de direction normale à la face.

Concernant les champs électriques, nous réécrivons l'équation (2.4.13) pour la direction  $\vec{e}_{x_1}$  en appliquant les valeurs des poids et des points de quadrature données dans les tableaux 2.1 et 2.2 pour  $r^G = 0$ . Pour  $\mathbf{l}_0 = (l_{0,1}, l_{0,2}, l_{0,3})$  et  $\forall \mathcal{K}_0 \in \mathcal{T}_h$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\left( \sum_{i=1}^4 \Delta x_2 \Delta x_3 \varepsilon_{\mathcal{K}_i}^{x_1} \left(1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \right) \frac{E_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_1, n+1} - E_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_1, n}}{\Delta t} \\ &= \sum_{i=1}^4 \left( \Delta x_2 \left(1 \times \frac{1}{2}\right) \sum_{l_3=1}^1 1 \times H_{\mathcal{K}_i, (l_{0,1}, l_{0,2}, l_3)}^{x_2, n+\frac{1}{2}} \partial_{\hat{x}_3} L_{l_3, \mathcal{K}_i}^{GL}(\hat{\xi}_3^G) \right. \\ &\quad \left. - \Delta x_3 \left(1 \times \frac{1}{2}\right) \sum_{l_2=1}^1 1 \times H_{\mathcal{K}_i, (l_{0,1}, l_2, l_{0,3})}^{x_3, n+\frac{1}{2}} \partial_{\hat{x}_2} L_{l_2, \mathcal{K}_i}^{GL}(\hat{\xi}_2^G) \right) \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

Les polynômes de Lagrange  $L_{j, \mathcal{K}_i}^{GL}(\cdot)$  et  $L_{k, \mathcal{K}_i}^{GL}(\cdot)$  sont construits avec les 2 points de Gauss-Lobatto  $\{0; 1\}$  et ces polynômes sont de degré 1. Donc la dérivée de ces polynômes de Lagrange est une constante,

suivant l'élément  $\mathcal{K}_i$  sur lequel on se trouve,  $\partial_x L(\cdot) = 1$  ou  $-1$  ou  $0$ .

Après simplification et en prenant  $\forall i \quad \hat{\varepsilon}_{\mathcal{K}_i}^{x_1} = \varepsilon_0^{x_1}$ , l'équation 2.4.29 se réduit à :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^{x_1} \frac{E_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_1, n+1} - E_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_1, n}}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta x_3} \left( H_{\mathcal{K}_1, (l_{0,1}, l_{0,2}, 1)}^{x_2, n+\frac{1}{2}} - H_{\mathcal{K}_3, (l_{0,1}, l_{0,2}, 1)}^{x_2, n+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\Delta x_2} \left( H_{\mathcal{K}_2, (l_{0,1}, 1, l_{0,3})}^{x_3, n+\frac{1}{2}} - H_{\mathcal{K}_4, (l_{0,1}, 1, l_{0,3})}^{x_3, n+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

Si on raisonne par une indexation par maille, l'inconnue  $E_{\mathcal{K}_0, \mathbf{l}_0}^{x_1, n+1}$ , d'indice  $(\mathcal{K}_0 ; \mathbf{l}_0)$ , correspond à l'inconnue positionnée à l'indice  $(i + \frac{1}{2}, j, k)$ , et nous associons  $\mathcal{K}_0$  à la maille  $\mathcal{K}_1$ , donc c'est l'inconnue de cette maille qui est évaluée. Et, les 4 autres inconnues associées aux quatre autres indices  $(\mathcal{K}_1 ; (l_{0,1}, 1, l_{0,3}))$ ,  $(\mathcal{K}_3 ; (l_{0,1}, l_{0,2}, 1))$ ,  $(\mathcal{K}_2 ; (l_{0,1}, 1, l_{0,3}))$  et  $(\mathcal{K}_4 ; (l_{0,1}, l_{0,2}, 1))$  correspondent respectivement aux inconnues positionnées en  $(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})$ ,  $(i + \frac{1}{2}, j - 1, k + \frac{1}{2})$ ,  $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)$  et  $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k - 1)$ . Enfin, nous retrouvons le schéma de Yee connu pour le champ électrique dans la direction  $\vec{x}$  :

$$\varepsilon_0^{x_1} \frac{E_{i+\frac{1}{2}, j, k}^{x_1, n+1} - E_{i+\frac{1}{2}, j, k}^{x_1, n}}{\Delta t} = \frac{H_{i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}}^{x_2, n+\frac{1}{2}} - H_{i+\frac{1}{2}, j-1, k+\frac{1}{2}}^{x_2, n+\frac{1}{2}}}{\Delta x_3} - \frac{H_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}^{x_3, n+\frac{1}{2}} - H_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-1}^{x_3, n+\frac{1}{2}}}{\Delta x_2} \quad (2.4.31)$$

De la manière similaire, nous retrouvons le schéma de Yee pour les autres directions et celle du champ magnétique.

## 2.5 Étude de la stabilité

Dans ce paragraphe, nous allons étudier la stabilité du schéma FEM d'ordre élevé (2.4.26) établi dans le paragraphe 2.4, par une technique de conservation de l'énergie. Nous avons choisi cette technique car elle permet de considérer des maillages avec des pas d'espace et des ordres d'approximation spatiale variables.

L'étude de stabilité se réalise en deux étapes. D'abord, nous définissons une quantité, nommée pseudo-énergie, et nous montrons que cette quantité est conservée au cours du temps. Dans un second temps, nous montrons que la quantité définit une énergie discrète, c'est-à-dire qu'elle est positive, et équivalente à une norme. Dans cette dernière étape, c'est la positivité de la quantité étudiée qui donne la condition de stabilité ou CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) du schéma.

### 2.5.1 Conservation de l'énergie discrète

L'étude est effectuée à partir de la formulation (2.2.4) pour laquelle nous avons imposé  $\mathbf{J}_s = 0$ ,  $\underline{\sigma} = 0$ ,  $\underline{\mu} = \mu$  et  $\underline{\varepsilon} = \varepsilon$ . Afin de simplifier les calculs, nous travaillons sur la formulation (2.4.1) réécrite ci-après, à laquelle nous ajoutons des conditions initiales :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu \frac{\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^n \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x}, \\ \int_{\Omega} \varepsilon \frac{\mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^n}{\Delta t} \cdot \boldsymbol{\phi}_h \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \wedge \boldsymbol{\phi}_h \, d\mathbf{x}, \\ \int_{\Omega} \mathbf{H}_h(\mathbf{x}, 0) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} H_{0,h} \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x}, \\ \int_{\Omega} \mathbf{E}_h(\mathbf{x}, 0) \cdot \boldsymbol{\phi}_h \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} E_{0,h} \cdot \boldsymbol{\phi}_h \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

#### **Théorème 2.5.1.** *Conservation d'une quantité notée pseudo-énergie*

Soit  $(\mathbf{E}_h^n, \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}})$  solution du problème (2.2.4). Soit la quantité  $\mathcal{E}_h^n$ , notée pseudo-énergie, prise au temps  $n\Delta t$ , définie par :

$$\mathcal{E}_h^n = \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E}_h^n \cdot \mathbf{E}_h^n \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mu \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \, d\mathbf{x}, \quad (2.5.2)$$

que l'on peut aussi écrire

$$\mathcal{E}_h^n = \|\mathbf{E}_h^n\|_{0,\varepsilon,\Omega}^2 + \int_{\Omega} \mu \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \, d\mathbf{x}. \quad (2.5.3)$$

Alors la quantité  $\mathcal{E}_h^n$  vérifie,  $\forall n \geq 0$  :

$$\mathcal{E}_h^{n+1} - \mathcal{E}_h^n = 0. \quad (2.5.4)$$

Avec  $\|\cdot\|_{0,p,\Omega}^2$  défini par la relation :

$$\|\mathbf{u}_h\|_{0,p,\Omega}^2 = \int_{\Omega} p \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{u}_h \, d\mathbf{x}. \quad (2.5.5)$$

#### **Preuve du théorème 2.5.1.**

Dans (2.2.4a), nous choisissons  $\varphi_h = \mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n \in U_{0,h}$ , au temps  $t^n$ , avec l'hypothèse  $r^{GL} = r^G + 1$ , et nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \varepsilon \frac{\mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^n}{\Delta t} \cdot (\mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \wedge (\mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n) \, d\mathbf{x}. \quad (2.5.6)$$

D'où :

$$\frac{1}{\Delta t} (\|\mathbf{E}_h^{n+1}\|_{0,\varepsilon,\Omega}^2 - \|\mathbf{E}_h^n\|_{0,\varepsilon,\Omega}^2) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^{n+1} \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^n \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \, d\mathbf{x}.$$

De même, dans l'expression (2.2.4b), écrite aux temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$ , nous choisissons  $\psi_h = \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \in V_h$ , avec l'hypothèse  $r^{GL} = r^G + 1$ , et nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \mu \frac{\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^n \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x}, \quad (2.5.7)$$

et

$$\int_{\Omega} \mu \frac{\mathbf{H}_h^{n+\frac{3}{2}} - \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^{n+1} \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x}. \quad (2.5.8)$$

En développant l'équation (2.5.7), on a :

$$\frac{1}{\Delta t} \left( \|\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega}^2 - \int_{\Omega} \mu \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} d\mathbf{x} \right) = - \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^n \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x}. \quad (2.5.9)$$

Puis, en développant l'équation (2.5.8), on a :

$$\frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega} \mu \mathbf{H}_h^{n+\frac{3}{2}} \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x} - \|\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega}^2 \right) = - \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^{n+1} \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x}. \quad (2.5.10)$$

En sommant les équations (2.5.9) et (2.5.10), il vient :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \mu \left( \mathbf{H}_h^{n+\frac{3}{2}} \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \right) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^{n+1} \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^n \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x}. \quad (2.5.11)$$

Enfin, en sommant les équations intermédiaires (2.5.7) et (2.5.11), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left( \|\mathbf{E}_h^{n+1}\|_{0,\varepsilon,\Omega}^2 - \|\mathbf{E}_h^n\|_{0,\varepsilon,\Omega}^2 \right) + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \mu \left( \mathbf{H}_h^{n+\frac{3}{2}} \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \right) d\mathbf{x} = \\ & - \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^{n+1} \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^n \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^{n+1} \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^n \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

Après simplification, on a,  $\forall n \geq 0$  :

$$\mathcal{E}_h^{n+1} - \mathcal{E}_h^n = 0.$$

□

## 2.5.2 Condition suffisante de stabilité

Dans cette partie, nous allons démontrer que la quantité  $\mathcal{E}_h^n$  est positive. Ainsi, cette quantité pourra être considérée comme une norme, donc équivalente à une énergie discrète.

Nous montrons que ce résultat est conditionné à un critère que nous définissons comme critère de stabilité. Pour cela, nous allons exprimer  $\mathcal{E}_h^n$  sous une forme quadratique de  $\mathbf{E}_h^n$  et  $\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}$ .

**Proposition 2.5.1.** *La quantité  $\mathcal{E}_h^n$  définie, dans le paragraphe 2.5.1, peut s'écrire sous la forme :*

$$\mathcal{E}_h^n = \|\mathbf{E}_h^n\|_{0,\varepsilon,\Omega}^2 + \|\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega}^2 + \Delta t \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^n \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x}. \quad (2.5.12)$$

### Preuve de la proposition 2.5.1.

En reprenant la relation (2.5.9), nous avons montré que :

$$\frac{1}{\Delta t} \left( \|\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega}^2 - \int_{\Omega} \mu \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} d\mathbf{x} \right) = - \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^n \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x}.$$

D'où

$$\int_{\Omega} \mu \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} d\mathbf{x} = \|\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega}^2 + \Delta t \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^n \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x}.$$

Ainsi, sur  $\Omega$ , on a :

$$\mathcal{E}_h^n = \|\mathbf{E}_h^n\|_{0,\varepsilon,\Omega}^2 + \|\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega}^2 + \Delta t \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^n \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x}. \quad (2.5.13)$$

□

La démonstration de la positivité de la pseudo-énergie va se faire en plusieurs étapes.

- Dans la première étape, on cherche à écrire notre pseudo-énergie sous forme d'une combinaison de  $\|\mathbf{E}_h^n\|_{0,\varepsilon,\Omega}^2$ ,  $\|\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega}^2$  et  $\|\nabla \wedge \mathbf{E}_h^n\|_{0,\mu^{-1},\Omega}$ .
- Dans la deuxième étape, on va chercher à majorer  $\|\nabla \wedge \mathbf{E}_h^n\|_{0,\mu^{-1},\Omega}$  par  $\|\mathbf{E}_h^n\|_{0,\varepsilon,\Omega}^2$  en utilisant le schéma. On obtient alors un minorant pour la pseudo-énergie sous la forme  $\mathcal{E}_h^n \geq \|\mathbf{E}_h^n\|_{0,\varepsilon,\Omega}^2 + \|\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega}^2 - C\|\mathbf{E}_h^n\|_{0,\varepsilon,\Omega}\|\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega}$ , où  $C$  est une constante dépendant du pas de temps, de la vitesse des ondes dans le milieu, des pas d'espace et des ordres d'approximation spatiale. On recherche une condition sur  $C$  pour que  $\mathcal{E}_h^n \geq 0$ .

### Première étape

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^n \cdot \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x} \right| &= \left| \int_{\Omega} \mu^{-\frac{1}{2}} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^n \cdot \mu^{\frac{1}{2}} \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \|\nabla \wedge \mathbf{E}_h^n\|_{0,\mu^{-1},\Omega} \|\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega}. \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\mathcal{E}_h^n \geq \|\mathbf{E}_h^n\|_{0,\varepsilon,\Omega}^2 + \|\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega}^2 - \Delta t \|\nabla \wedge \mathbf{E}_h^n\|_{0,\mu^{-1},\Omega} \|\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega} \quad (2.5.14)$$

Dans la deuxième étape, nous allons chercher à estimer  $\|\nabla \wedge \mathbf{E}_h^n\|_{0,\mu^{-1},\Omega}$  en fonction de  $\|\mathbf{E}_h^n\|_{0,\varepsilon,\Omega}$ .

### Deuxième étape

Dans le schéma FEM, nous définissons les degrés de liberté correspondant aux champs électriques  $\mathbf{E}_h^n$  sous forme :

$$\mathbf{E}_h^n = \left( \sum_{j=1}^{N^{Ex_1}} E_{h,j}^{x_1,n} \varphi_j^{x_1}(\mathbf{x}) ; \sum_{j=1}^{N^{Ex_2}} E_{h,j}^{x_2,n} \varphi_j^{x_2}(\mathbf{x}) ; \sum_{j=1}^{N^{Ex_3}} E_{h,j}^{x_3,n} \varphi_j^{x_3}(\mathbf{x}) \right),$$

où  $N^{Ex_i}$  est le nombre de degrés de liberté de  $\mathbf{E}_h^n$  dans la direction  $x_i$ , et  $\varphi_j^{x_i}$  sont des fonctions de base associées chaque composante  $x_i$ .

La restriction du vecteur  $\mathbf{E}_h^n$  sur un élément  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$  s'écrit alors, sous la forme :

$$\mathbf{E}_{\mathcal{K}}^n = \left( \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K},l}^{x_1,n} \hat{\phi}_{\mathcal{K},l}^{x_1} \circ F_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) ; \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K},l}^{x_2,n} \hat{\phi}_{\mathcal{K},l}^{x_2} \circ F_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) ; \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K},l}^{x_3,n} \hat{\phi}_{\mathcal{K},l}^{x_3} \circ F_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) \right), \quad (2.5.15)$$

où pour chaque degré de liberté d'indice  $j$  dans  $\Omega$ , il existe au plus un degré de liberté dans un élément  $\mathcal{K}$  défini par le triplet  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$ , où le champ de vecteurs des inconnues locales dans un élément  $\mathcal{K}$  est donné par :

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{K}}^n &= \left( (E_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_1,n} , \mathbf{l} \in ([1, r_i^G + 1], [1, r_j^{GL} + 1], [1, r_k^{GL} + 1]) ; \right. \\ &\quad (E_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_2,n} , \mathbf{l} \in ([1, r_i^{GL} + 1], [1, r_j^G + 1], [1, r_k^{GL} + 1]) ; \\ &\quad \left. (E_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_3,n} , \mathbf{l} \in ([1, r_i^{GL} + 1], [1, r_j^{GL} + 1], [1, r_k^G + 1]))^T \right). \end{aligned}$$

Nous notons :

$$E_{\mathcal{T}_h}^n = (E_{\mathcal{K}}^n)_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h}.$$

**Remarque :** Le rangement des valeurs des inconnues sous cette forme a pour conséquence de différencier les valeurs des inconnues associées aux degrés de liberté appartenant à au moins deux cellules en les dédoublant.

En utilisant la définition des inconnues données, nous avons :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}_h^n\|_{0,\varepsilon,\Omega}^2 &= \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E}_h^n \cdot \mathbf{E}_h^n \, d\mathbf{x} = \sum_{\mathcal{K}} \int_{\mathcal{K}} \varepsilon_{\mathcal{K}} \mathbf{E}_{\mathcal{K}}^n \cdot \mathbf{E}_{\mathcal{K}}^n \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{\mathcal{K}} \int_{\mathcal{K}} \left( \varepsilon_{\mathcal{K}} \left( \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K},l}^{x_1,n} \hat{\phi}_{\mathcal{K},l}^{x_1} \circ F_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}), \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K},l}^{x_2,n} \hat{\phi}_{\mathcal{K},l}^{x_2} \circ F_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}), \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K},l}^{x_3,n} \hat{\phi}_{\mathcal{K},l}^{x_3} \circ F_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \left( \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K},l}^{x_1,n} \hat{\phi}_{\mathcal{K},l}^{x_1} \circ F_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}), \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K},l}^{x_2,n} \hat{\phi}_{\mathcal{K},l}^{x_2} \circ F_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}), \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K},l}^{x_3,n} \hat{\phi}_{\mathcal{K},l}^{x_3} \circ F_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) \right) \right) \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{\mathcal{K}} \int_{\hat{\mathcal{K}}} |J_{\mathcal{K}}| \left( \hat{\varepsilon}_{\mathcal{K}} \left( \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K},l}^{x_1,n} \hat{\phi}_1^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}), \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K},l}^{x_2,n} \hat{\phi}_1^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}), \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K},l}^{x_3,n} \hat{\phi}_1^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \left( \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K},l}^{x_1,n} \hat{\phi}_1^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}), \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K},l}^{x_2,n} \hat{\phi}_1^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}), \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K},l}^{x_3,n} \hat{\phi}_1^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) \right) \right) \, d\hat{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

En considérant,  $|J_{\mathcal{K}}| = \Delta x_{1,\mathcal{K}} \Delta x_{2,\mathcal{K}} \Delta x_{3,\mathcal{K}}$  et  $\Lambda_{h,\mathcal{K}}$  la matrice diagonale tels que  $\Lambda_{h,\mathcal{K}} = |J_{\mathcal{K}}| I$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}_h^n\|_{0,\varepsilon,\Omega}^2 &= \sum_{\mathcal{K}} \Delta x_{1,\mathcal{K}} \Delta x_{2,\mathcal{K}} \Delta x_{3,\mathcal{K}} \hat{E}_{\mathcal{K}}^{n,T} \hat{\varepsilon}_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}} \hat{E}_{\mathcal{K}}^n \\ &= \sum_{\mathcal{K}} \hat{E}_{\mathcal{K}}^{n,T} \Lambda_{h,\mathcal{K}} \hat{\varepsilon}_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}} \hat{E}_{\mathcal{K}}^n, \end{aligned}$$

où  $\hat{E}_{\mathcal{K}}^{n,T}$  est le transposé de  $\hat{E}_{\mathcal{K}}^n$ ,  $\hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}$  est la matrice de masse sur l'élément, diagonale par bloc et de dimension :

$$\left[ ((r_i^G + 1)(r_j^{GL} + 1)(r_k^{GL} + 1)) + ((r_i^{GL} + 1)(r_j^G + 1)(r_k^{GL} + 1)) + ((r_i^{GL} + 1)(r_j^{GL} + 1)(r_k^G + 1)) \right]^2.$$

$$\hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{x_1} & & 0 \\ & \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{x_2} & \\ 0 & & \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{x_3} \end{pmatrix},$$

où chaque bloc est donné par :  $\forall i, j$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K},i,j}^{x_1} &= \int_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\phi}_{\mathbf{l}_i}^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\phi}_{\mathbf{l}_j}^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) \, d\hat{\mathbf{x}} \\ &= \begin{cases} \hat{\omega}_{l_1}^G \hat{\omega}_{l_2}^{GL} \hat{\omega}_{l_3}^{GL} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Avec pour la direction  $x$  :  $\mathbf{l}_i = (l_1, l_2, l_3)$  et  $\mathbf{l}_j = (l'_1, l'_2, l'_3)$  avec  $\mathbf{l}_i$  et  $\mathbf{l}_j \in ([1, r_i^G + 1], [1, r_j^{GL} + 1], [1, r_k^{GL} + 1])$ .

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K},i,j}^{x_2} &= \int_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\phi}_{\mathbf{l}_i}^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\phi}_{\mathbf{l}_j}^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) \, d\hat{\mathbf{x}} \\ &= \begin{cases} \hat{\omega}_{l_1}^{GL} \hat{\omega}_{l_2}^G \hat{\omega}_{l_3}^{GL} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Avec pour la direction  $y$  :  $\mathbf{l}_i = (l_1, l_2, l_3)$  et  $\mathbf{l}_j = (l'_1, l'_2, l'_3)$  avec  $\mathbf{l}_i$  et  $\mathbf{l}_j \in ([1, r_i^{GL} + 1], [1, r_j^G + 1], [1, r_k^{GL} + 1])$ .

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}_{i,j}}^{x_3} &= \int_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\phi}_{\mathbf{l}_i}^{x_3} \hat{\phi}_{\mathbf{l}_j}^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \\ &= \begin{cases} \hat{\omega}_{l_1}^{GL} \hat{\omega}_{l_2}^{GL} \hat{\omega}_{l_3}^G & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}\end{aligned}$$

Avec pour la direction  $z : \mathbf{l}_i = (l_1, l_2, l_3)$  et  $\mathbf{l}_j = (l'_1, l'_2, l'_3)$  avec  $\mathbf{l}_i$  et  $\mathbf{l}_j \in ([1, r_i^{GL} + 1], [1, r_j^{GL} + 1], [1, r_k^G + 1])$ .

Enfin, nous pouvons écrire :

$$\|\mathbf{E}_h^n\|_{0,\varepsilon,\Omega}^2 = E_{\mathcal{T}_h}^{n,T} \Lambda_h \mathcal{M}_\varepsilon E_{\mathcal{T}_h}^n.$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$\|\mathbf{E}_h^n\|_{0,\varepsilon,\Omega}^2 = \|\Lambda_h^{\frac{1}{2}} \mathcal{M}_\varepsilon^{\frac{1}{2}} E_{\mathcal{T}_h}^n\|_2^2 \quad (2.5.16)$$

où les matrices  $\mathcal{M}_\varepsilon$  et  $\Lambda_h$  sont des matrices diagonales par blocs, chaque bloc est lié à un élément  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{T}_h$  :

$$\mathcal{M}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\mathcal{K}_1} & & & 0 \\ & \mathcal{M}_{\mathcal{K}_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathcal{M}_{\mathcal{K}_n} \end{pmatrix} \quad \Lambda_h = \begin{pmatrix} \Lambda_{h,\mathcal{K}_1} & & & 0 \\ & \Lambda_{h,\mathcal{K}_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Lambda_{h,\mathcal{K}_n} \end{pmatrix},$$

avec :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{K}_i} = \hat{\varepsilon}_{\mathcal{K}_i} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}_i} \quad \text{pour } i \in [1, n]. \quad (2.5.17)$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\|\nabla \wedge \mathbf{E}_h^n\|_{0,\mu^{-1},\Omega}^2 &= \int_{\Omega} \varepsilon(\varepsilon\mu)^{-1} \nabla \wedge \mathbf{E}_h^n \cdot \nabla \wedge \mathbf{E}_h^n dx \\ &= \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{K}} \varepsilon_{\mathcal{K}} (\varepsilon_{\mathcal{K}} \mu_{\mathcal{K}})^{-1} \nabla \wedge \mathbf{E}_{\mathcal{K}}^n \cdot \nabla \wedge \mathbf{E}_{\mathcal{K}}^n dx \\ &= \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{K}} c_{\mathcal{K}}^2 \varepsilon_{\mathcal{K}} \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K},l}^{x_3,n} \partial_{x_2} \phi_{\mathcal{K},l}^{x_3} - \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K},l}^{x_2,n} \partial_{x_3} \phi_{\mathcal{K},l}^{x_2} \\ \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K},l}^{x_1,n} \partial_{x_3} \phi_{\mathcal{K},l}^{x_1} - \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K},l}^{x_3,n} \partial_{x_1} \phi_{\mathcal{K},l}^{x_3} \\ \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K},l}^{x_2,n} \partial_{x_1} \phi_{\mathcal{K},l}^{x_2} - \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K},l}^{x_1,n} \partial_{x_2} \phi_{\mathcal{K},l}^{x_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K},l}^{x_3,n} \partial_{x_2} \phi_{\mathcal{K},l}^{x_3} - \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K},l}^{x_2,n} \partial_{x_3} \phi_{\mathcal{K},l}^{x_2} \\ \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K},l}^{x_1,n} \partial_{x_3} \phi_{\mathcal{K},l}^{x_1} - \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K},l}^{x_3,n} \partial_{x_1} \phi_{\mathcal{K},l}^{x_3} \\ \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K},l}^{x_2,n} \partial_{x_1} \phi_{\mathcal{K},l}^{x_2} - \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K},l}^{x_1,n} \partial_{x_2} \phi_{\mathcal{K},l}^{x_1} \end{pmatrix} dx \\ &= \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \int_{\hat{\mathcal{K}}} (\Delta x_{1,\mathcal{K}} \Delta x_{2,\mathcal{K}} \Delta x_{3,\mathcal{K}}) c_{\mathcal{K}}^2 \hat{\varepsilon}_{\mathcal{K}} \\ &\quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta x_2} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K},l}^{x_3,n} \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_1^{x_3} - \frac{1}{\Delta x_3} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K},l}^{x_2,n} \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_1^{x_2} \\ \frac{1}{\Delta x_3} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K},l}^{x_1,n} \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_1^{x_1} - \frac{1}{\Delta x_1} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K},l}^{x_3,n} \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_1^{x_3} \\ \frac{1}{\Delta x_1} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K},l}^{x_2,n} \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_1^{x_2} - \frac{1}{\Delta x_2} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K},l}^{x_1,n} \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_1^{x_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta x_2} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K},l}^{x_3,n} \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_1^{x_3} - \frac{1}{\Delta x_3} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K},l}^{x_2,n} \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_1^{x_2} \\ \frac{1}{\Delta x_3} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K},l}^{x_1,n} \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_1^{x_1} - \frac{1}{\Delta x_1} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K},l}^{x_3,n} \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_1^{x_3} \\ \frac{1}{\Delta x_1} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K},l}^{x_2,n} \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_1^{x_2} - \frac{1}{\Delta x_2} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K},l}^{x_1,n} \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_1^{x_1} \end{pmatrix} d\hat{\mathbf{x}} \\ &= \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} (\Delta x_{1,\mathcal{K}} \Delta x_{2,\mathcal{K}} \Delta x_{3,\mathcal{K}}) \hat{E}_{\mathcal{K}}^{n,T} c_{\mathcal{K}}^2 \hat{\varepsilon}_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}} \hat{E}_{\mathcal{K}}^n \\ &= \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \hat{E}_{\mathcal{K}}^{n,T} \Lambda_{h,\mathcal{K}} c_{\mathcal{K}}^2 \hat{\varepsilon}_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}} \hat{E}_{\mathcal{K}}^n,\end{aligned}$$

où  $\hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}}$  est la matrice de rigidité sur l'élément  $\mathcal{K}$  et a pour dimension :

$$\left[ ((r_i^G + 1)(r_j^{GL} + 1)(r_k^{GL} + 1)) + ((r_i^{GL} + 1)(r_j^G + 1) * (r_k^{GL} + 1)) + ((r_i^{GL} + 1)(r_j^{GL} + 1)(r_k^G + 1)) \right]^2,$$

Avec :

$$\hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{R}}_{1,1} & \hat{\mathcal{R}}_{1,2} & \hat{\mathcal{R}}_{1,3} \\ \hat{\mathcal{R}}_{2,1} & \hat{\mathcal{R}}_{2,2} & \hat{\mathcal{R}}_{2,3} \\ \hat{\mathcal{R}}_{3,1} & \hat{\mathcal{R}}_{3,2} & \hat{\mathcal{R}}_{3,3} \end{pmatrix}. \quad (2.5.18)$$

La matrice  $\hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}}$  est composée de :

$$\hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K},i,j} = \int_{\hat{\mathcal{K}}} DF_{\mathcal{K}}^{T-1} \hat{\nabla} \wedge \hat{\phi}_{\mathbf{1}_i} \cdot DF_{\mathcal{K}}^{T-1} \hat{\nabla} \wedge \hat{\phi}_{\mathbf{1}_j} d\hat{\mathbf{x}}. \quad (2.5.19)$$

Sous forme matricielle :

$$\hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K},i,j} = \int_{\hat{\mathcal{K}}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta x_3} \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_i}^{x_1} & -\frac{1}{\Delta x_2} \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_i}^{x_1} \\ -\frac{1}{\Delta x_3} \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_i}^{x_2} & 0 & \frac{1}{\Delta x_1} \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_i}^{x_2} \\ \frac{1}{\Delta x_2} \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_i}^{x_3} & -\frac{1}{\Delta x_1} \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_i}^{x_3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\Delta x_3} \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_j}^{x_2} & \frac{1}{\Delta x_2} \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_j}^{x_3} \\ \frac{1}{\Delta x_3} \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_j}^{x_1} & 0 & -\frac{1}{\Delta x_1} \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_j}^{x_3} \\ -\frac{1}{\Delta x_2} \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_j}^{x_1} & \frac{1}{\Delta x_1} \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_j}^{x_2} & 0 \end{pmatrix} d\hat{\mathbf{x}}.$$

Tous les blocs diagonaux de  $\hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}}$  se présentent sous cette forme :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_{1,1,i,j} &= \int_0^1 \frac{1}{\Delta x_2^2} \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_i}^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_j}^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{1}{\Delta x_3^2} \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_i}^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_j}^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \\ &= \begin{cases} \frac{\hat{\omega}_{l_{i,1}}^G \hat{\omega}_{l_{i,3}}^{GL}}{\Delta x_2^2} \sum_{l_2=1}^{r_j^G+1} \hat{\omega}_{l_2}^G \partial_{\hat{x}_2} L_{l_{i,2}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_2}^G) \partial_{\hat{x}_2} L_{l_{i,2}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_2}^G) \\ + \frac{\hat{\omega}_{l_{i,1}}^G \hat{\omega}_{l_{i,2}}^{GL}}{\Delta x_3^2} \sum_{l_3=1}^{r_j^G+1} \hat{\omega}_{l_3}^G \partial_{\hat{x}_3} L_{l_{i,3}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_3}^G) \partial_{\hat{x}_3} L_{l_{i,3}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_3}^G) & \text{si } l_{i,(1,2,3)} = l_{j,(1,2,3)} \\ \frac{\hat{\omega}_{l_1}^G \hat{\omega}_{l_3}^{GL}}{\Delta x_2^2} \sum_{l_2=1}^{r_j^G+1} \hat{\omega}_{l_2}^G \partial_{\hat{x}_2} L_{l_{i,2}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_2}^G) \partial_{\hat{x}_2} L_{l_{j,2}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_2}^G) & \text{si } l_{i,(1,\cdot,3)} = l_{j,(1,\cdot,3)} \text{ et } l_{i,(1,2,3)} \neq l_{j,(1,2,3)} \\ \frac{\hat{\omega}_{l_1}^G \hat{\omega}_{l_2}^{GL}}{\Delta x_3^2} \sum_{l_3=1}^{r_j^G+1} \hat{\omega}_{l_3}^G \partial_{\hat{x}_3} L_{l_{i,3}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_3}^G) \partial_{\hat{x}_3} L_{l_{j,3}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_3}^G) & \text{si } l_{i,(1,2,\cdot)} = l_{j,(1,2,\cdot)} \text{ et } l_{i,(1,2,3)} \neq l_{j,(1,2,3)} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_{2,2,i,j} &= \int_{\hat{\mathcal{K}}} \frac{1}{\Delta x_3^2} \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_i}^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_j}^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{1}{\Delta x_1^2} \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_i}^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_j}^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \\ &= \begin{cases} \frac{\hat{\omega}_{l_{i,1}}^{GL} \hat{\omega}_{l_{i,2}}^G}{\Delta x_1^2} \sum_{l_3=1}^{r_k^G+1} \hat{\omega}_{l_3}^G \partial_{\hat{x}_3} L_{l_{i,3}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_3}^G) \partial_{\hat{x}_3} L_{l_{i,3}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_3}^G) \\ + \frac{\hat{\omega}_{l_{i,2}}^{GL} \hat{\omega}_{l_{i,3}}^G}{\Delta x_3^2} \sum_{l_1=1}^{r_i^G+1} \hat{\omega}_{l_1}^G \partial_{\hat{x}_1} L_{l_{i,1}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_1}^G) \partial_{\hat{x}_1} L_{l_{i,1}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_1}^G) & \text{si } l_{i,(1,2,3)} = l_{j,(1,2,3)} \\ \frac{\hat{\omega}_{l_2}^G \hat{\omega}_{l_3}^{GL}}{\Delta x_1^2} \sum_{l_1=1}^{r_i^G+1} \hat{\omega}_{l_1}^G \partial_{\hat{x}_1} L_{l_{i,1}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_1}^G) \partial_{\hat{x}_1} L_{l_{j,1}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_1}^G) & \text{si } l_{i,( \cdot, 2, 3)} = l_{j,( \cdot, 2, 3)} \text{ et } l_{i,(1,2,3)} \neq l_{j,(1,2,3)} \\ \frac{\hat{\omega}_{l_1}^{GL} \hat{\omega}_{l_2}^G}{\Delta x_3^2} \sum_{l_3=1}^{r_k^G+1} \hat{\omega}_{l_3}^G \partial_{\hat{x}_3} L_{l_{i,3}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_3}^G) \partial_{\hat{x}_3} L_{l_{j,3}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_3}^G) & \text{si } l_{i,(1,2,\cdot)} = l_{j,(1,2,\cdot)} \text{ et } l_{i,(1,2,3)} \neq l_{j,(1,2,3)} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_{3,3,i,j} &= \int_{\hat{\mathcal{K}}} \frac{1}{\Delta x_1^2} \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_i}^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_j}^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{1}{\Delta x_2^2} \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_i}^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_j}^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \\ &= \begin{cases} \frac{\hat{\omega}_{l_{i,2}}^{GL} \hat{\omega}_{l_{i,3}}^G}{\Delta x_2^2} \sum_{l_1=1}^{r_i^G+1} \hat{\omega}_{l_1}^G \partial_{\hat{x}_1} L_{l_{i,1}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_1}^G) \partial_{\hat{x}_1} L_{l_{i,1}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_1}^G) \\ + \frac{\hat{\omega}_{l_{i,1}}^{GL} \hat{\omega}_{l_{i,3}}^G}{\Delta x_2^2} \sum_{l_2=1}^{r_j^G+1} \hat{\omega}_{l_2}^G \partial_{\hat{x}_2} L_{l_{i,2}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_2}^G) \partial_{\hat{x}_2} L_{l_{i,2}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_2}^G) & \text{si } l_{i,(1,2,3)} = l_{j,(1,2,3)} \\ \frac{\hat{\omega}_{l_{i,2}}^{GL} \hat{\omega}_{l_{i,3}}^G}{\Delta x_1^2} \sum_{l_1=1}^{r_i^G+1} \hat{\omega}_{l_1}^G \partial_{\hat{x}_1} L_{l_{i,1}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_1}^G) \partial_{\hat{x}_1} L_{l_{i,1}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_1}^G) & \text{si } l_{i,( \cdot, 2, 3)} = l_{j,( \cdot, 2, 3)} \text{ et } l_{i,(1,2,3)} \neq l_{j,(1,2,3)} \\ \frac{\hat{\omega}_{l_{i,1}}^{GL} \hat{\omega}_{l_{i,3}}^G}{\Delta x_2^2} \sum_{l_2=1}^{r_j^G+1} \hat{\omega}_{l_2}^G \partial_{\hat{x}_2} L_{l_{i,2}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_2}^G) \partial_{\hat{x}_2} L_{l_{i,2}}^{GL}(\hat{\xi}_{l_2}^G) & \text{si } l_{i,(1,\cdot,3)} = l_{j,(1,\cdot,3)} \text{ et } l_{i,(1,2,3)} \neq l_{j,(1,2,3)} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \end{aligned}$$

Tous les éléments extra-diagonaux de  $\hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}}$  se présentent sous cette forme :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_{1,2,i,j} &= -\frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2} \int_{\hat{\mathcal{K}}} \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_i}^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_j}^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \\ &= \begin{cases} -\frac{\hat{\omega}_{i,1}^G \hat{\omega}_{j,2}^G \hat{\omega}_{i,3}^{GL}}{\Delta x_1 \Delta x_2} \partial_{\hat{x}_2} L_{\mathbf{1}_i,2}^{GL}(\hat{\xi}_{l_{j,2}}^G) \partial_{\hat{x}_1} L_{\mathbf{1}_j,1}^{GL}(\hat{\xi}_{l_{i,1}}^G) & \text{si } l_{i,(.,3)} = l_{j,(.,3)} \\ 0 & \text{si non .} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_{1,3,i,j} &= -\frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_3} \int_{\hat{\mathcal{K}}} \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_i}^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_j}^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \\ &= \begin{cases} -\frac{\hat{\omega}_{i,1}^G \hat{\omega}_{j,2}^{GL} \hat{\omega}_{i,3}^G}{\Delta x_1 \Delta x_3} \partial_{\hat{x}_3} L_{\mathbf{1}_i,3}^{GL}(\hat{\xi}_{l_{j,3}}^G) \partial_{\hat{x}_1} L_{\mathbf{1}_j,1}^{GL}(\hat{\xi}_{l_{i,1}}^G) & \text{si } l_{i,(.,2)} = l_{j,(.,2)} \\ 0 & \text{si non .} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_{2,1,i,j} &= -\frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2} \int_{\hat{\mathcal{K}}} \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_i}^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_j}^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \\ &= \begin{cases} -\frac{\hat{\omega}_{j,1}^G \hat{\omega}_{i,2}^G \hat{\omega}_{i,3}^{GL}}{\Delta x_1 \Delta x_2} \partial_{\hat{x}_1} L_{\mathbf{1}_i,1}^{GL}(\hat{\xi}_{l_{j,1}}^G) \partial_{\hat{x}_2} L_{\mathbf{1}_j,2}^{GL}(\hat{\xi}_{l_{i,2}}^G) & \text{si } l_{i,(.,3)} = l_{j,(.,3)} \\ 0 & \text{si non .} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_{2,3,i,j} &= -\frac{1}{\Delta x_2 \Delta x_3} \int_{\hat{\mathcal{K}}} \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_i}^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_j}^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \\ &= \begin{cases} -\frac{\hat{\omega}_{i,1}^{GL} \hat{\omega}_{i,2}^G \hat{\omega}_{j,3}^G}{\Delta x_2 \Delta x_3} \partial_{\hat{x}_3} L_{\mathbf{1}_i,3}^{GL}(\hat{\xi}_{l_{j,3}}^G) \partial_{\hat{x}_2} L_{\mathbf{1}_j,2}^{GL}(\hat{\xi}_{l_{i,2}}^G) & \text{si } l_{i,(1,.,)} = l_{j,(1,.,)} \\ 0 & \text{si non .} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_{3,1,i,j} &= -\frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_3} \int_{\hat{\mathcal{K}}} \partial_{\hat{x}_1} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_i}^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_j}^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \\ &= \begin{cases} -\frac{\hat{\omega}_{j,1}^G \hat{\omega}_{i,2}^{GL} \hat{\omega}_{i,3}^G}{\Delta x_1 \Delta x_3} \partial_{\hat{x}_1} L_{\mathbf{1}_i,1}^{GL}(\hat{\xi}_{l_{j,1}}^G) \partial_{\hat{x}_3} L_{\mathbf{1}_j,3}^{GL}(\hat{\xi}_{l_{i,3}}^G) & \text{si } l_{i,(.,2)} = l_{j,(.,2)} \\ 0 & \text{si non .} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_{3,2,i,j} &= -\frac{1}{\Delta x_2 \Delta x_3} \int_{\hat{\mathcal{K}}} \partial_{\hat{x}_2} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_i}^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{x}_3} \hat{\phi}_{\mathbf{1}_j}^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \\ &= \begin{cases} -\frac{\hat{\omega}_{i,1}^{GL} \hat{\omega}_{j,2}^G \hat{\omega}_{i,3}^G}{\Delta x_2 \Delta x_3} \partial_{\hat{x}_2} L_{\mathbf{1}_i,2}^{GL}(\hat{\xi}_{l_{j,2}}^G) \partial_{\hat{x}_3} L_{\mathbf{1}_j,3}^{GL}(\hat{\xi}_{l_{i,3}}^G) & \text{si } l_{i,(1,.,)} = l_{j,(1,.,)} \\ 0 & \text{si non .} \end{cases} \end{aligned}$$

Et nous définissons la matrice  $\mathcal{R}$  diagonale par bloc, où chaque bloc est associé à un élément  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{T}_h$  :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} c_{\mathcal{K}_1}^2 \hat{\varepsilon}_{\mathcal{K}_1} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}_1} & & & 0 \\ & c_{\mathcal{K}_2}^2 \hat{\varepsilon}_{\mathcal{K}_2} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_{\mathcal{K}_n}^2 \hat{\varepsilon}_{\mathcal{K}_n} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}_n} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $\mathcal{M}_\varepsilon$  est inversible, définie positive et ces termes sont diagonaux, non nuls et positifs, donc  $\mathcal{M}_\varepsilon = \mathcal{M}_\varepsilon^T$ . Finalement, nous pouvons exprimer la norme  $\|\nabla \wedge \mathbf{E}_h^n\|_{0,\mu^{-1},\Omega}^2$  sous une forme matricielle :

$$\begin{aligned} \|\nabla \wedge \mathbf{E}_h^n\|_{0,\mu^{-1},\Omega}^2 &= \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} E_{\mathcal{K}}^{n,T} \Lambda_{h,\mathcal{K}} c_{\mathcal{K}}^2 \varepsilon_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}} E_{\mathcal{K}}^n \\ &= E_{\mathcal{T}_h}^{n,T} \Lambda_h \mathcal{R} E_{\mathcal{T}_h}^n \\ &= \left( \Lambda_h^{\frac{1}{2}} \mathcal{M}_\varepsilon^{\frac{1}{2}} E_{\mathcal{T}_h}^n \right)^T \mathcal{M}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \mathcal{R} \mathcal{M}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \Lambda_h^{\frac{1}{2}} \mathcal{M}_\varepsilon^{\frac{1}{2}} E_{\mathcal{T}_h}^n. \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir la majoration :

$$\|\nabla \wedge \mathbf{E}_h^n\|_{0,\mu^{-1},\Omega}^2 \leq \| \mathcal{M}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \mathcal{R} \mathcal{M}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \| \| \Lambda_h^{\frac{1}{2}} \mathcal{M}_\varepsilon^{\frac{1}{2}} E_{\mathcal{T}_h}^n \|_{0,\varepsilon,\Omega}^2. \quad (2.5.20)$$

En utilisant la relation (2.5.16), nous obtenons :

$$\|\nabla \wedge \mathbf{E}_h^n\|_{0,\mu^{-1},\Omega}^2 \leq \| \mathcal{M}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \mathcal{R} \mathcal{M}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \| \| \mathbf{E}_h^n \|_{0,\varepsilon,\Omega}^2, \quad (2.5.21)$$

où la matrice  $\mathcal{M}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \mathcal{R} \mathcal{M}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$  est le produit de deux matrices diagonales par blocs, et s'écrit :

$$\mathcal{M}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \mathcal{R} \mathcal{M}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} c_{\mathcal{K}_1}^2 \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}_1}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}_1} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}_1}^{-\frac{1}{2}} & & & & 0 \\ & c_{\mathcal{K}_2}^2 \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}_2}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}_2} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}_2}^{-\frac{1}{2}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & c_{\mathcal{K}_n}^2 \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}_n}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}_n} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}_n}^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

De plus, nous pouvons utiliser les propriétés des matrices de masse et de rigidité pour majorer la norme matricielle à l'aide d'une matrice locale à une cellule :

$$\begin{aligned} \| \mathcal{M}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \mathcal{R} \mathcal{M}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \| &\leq \lambda_{\max}(\mathcal{M}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \mathcal{R} \mathcal{M}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) \\ &\leq \max_{\mathcal{K}} \left( \lambda_{\max}(c_{\mathcal{K}}^2 \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}}) \right), \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

où  $\lambda_{\max}(A)$  définit le rayon spectral d'une matrice  $A$ .

Si on reprend, l'expression de la pseudo-énergie, l'inéquation (2.5.13) peut s'écrire sous la forme d'une minoration :

$$\mathcal{E}_h^n \geq \| \mathbf{E}_h^n \|_{0,\varepsilon,\Omega}^2 + \| \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \|_{0,\mu,\Omega}^2 - \Delta t \sqrt{\max_{\mathcal{K}} \left( \lambda_{\max}(c_{\mathcal{K}}^2 \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}}) \right)} \| \mathbf{E}_h^n \|_{0,\varepsilon,\Omega} \| \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \|_{0,\mu,\Omega}. \quad (2.5.23)$$

En utilisant la relation  $a^2 + b^2 - \alpha ab = (a - \frac{\alpha}{2}b)^2 + (1 - \frac{\alpha^2}{4})b^2$ , et la condition de positivité liée au paramètre  $\alpha$  de l'équation précédente, il en résulte la condition pour que  $\mathcal{E}_h^n$  soit positif, donnée par :

$$\Delta t \sqrt{\max_{\mathcal{K}} \left( \lambda_{\max}(c_{\mathcal{K}}^2 \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}}) \right)} < 2. \quad (2.5.24)$$

Nous remarquons que  $\max_{\mathcal{K}} c_{\mathcal{K}}^2 = \max_{\mathcal{K}} (\varepsilon_{r,\mathcal{K}} \varepsilon_0 \mu_0)^{-1} = \left( \min_{\mathcal{K}} \varepsilon_{r,\mathcal{K}} \varepsilon_0 \mu_0 \right)^{-1} = c_0^2 \left( \min_{\mathcal{K}} \varepsilon_{r,\mathcal{K}} \right)^{-1}$ . Ainsi, la condition CFL dépend, entre autre, de la permittivité relative  $\varepsilon_{r,\mathcal{K}}$  sur une cellule.

Et, la condition de stabilité recherchée s'écrit sous la forme :

$$\Delta t < \frac{2}{c_0 \sqrt{\max_{\mathcal{K}} \left( \lambda_{\max}(\varepsilon_{r,\mathcal{K}}^{-1} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}}) \right)}}. \quad (2.5.25)$$

On peut donc énoncé le théorème sur la stabilité suivant :

**Théorème 2.5.2. Condition suffisante de stabilité du schéma FEM proposé** (2.5.1)

*Sous l'hypothèse :*

$$\Delta t < \frac{2}{c_0 \sqrt{\max_{\mathcal{K}} \left( \lambda_{\max}(\varepsilon_{r,\mathcal{K}}^{-1} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}}) \right)}}, \quad (2.5.26)$$

où  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$  cellule du maillage,  $\lambda_{\max}(A)$  le rayon spectral d'une matrice  $A$  et  $c_0$  la vitesse de la lumière dans le vide, le schéma FEM (2.5.1) est stable.

La condition CFL présentée (2.5.25) ne peut pas être implémentée directement dans un code numérique. En effet, nous avons laissé les pas d'espace par direction dans la matrice  $\hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}}$ , et d'un point de vue de l'implémentation informatique, "trouver la CFL la plus contraignante" reviendrait à calculer la valeur propre pour chaque maille; ce qui est très coûteux. Une solution approchée consiste alors à utiliser les matrices de masses et les matrices de rigidités non pas sur un élément mais sur l'élément de référence pour évaluer le pas temporel, puis par multiplier celui-ci par le pas d'espace le plus petit sur le domaine et sur la direction.

Cette solution est efficace en temps calcul de la CFL, mais peu réaliste pour l'industrialisation de ce schéma. En particulier, dans le cas d'une maille à pas variable et à ordre d'approximation variable, la CFL, ainsi obtenue, est trop petite et conduit à une simulation numérique peu efficace.

**Remarque 2.9. Applications Numériques :**

Par ailleurs, nous avons cherché à évaluer la CFL dans un cas tests où le pas de d'espace était de 1m pour des ordres  $r^G$  variables et variant de 0 à 8 dans les trois directions. Les résultats ont montré que la CFL est identique par permutation des ordres associés à chaque direction, comme par exemple pour les configurations suivantes :

- $r_i = 2 \ r_j = 8 \ r_k = 3$ ,
- $r_i = 8 \ r_j = 2 \ r_k = 3$ ,
- $r_i = 3 \ r_j = 2 \ r_k = 8$ ,
- $r_i = 2 \ r_j = 3 \ r_k = 8$ ,
- $r_i = 8 \ r_j = 3 \ r_k = 2$ ,
- $r_i = 3 \ r_j = 8 \ r_k = 2$ .

Nous en concluons qu'il existe peut-être une possibilité de réorganiser la matrice en la décomposant par direction. Par exemple, nous pourrions alors évaluer facilement le problème des valeurs propres et déterminer des conditions de stabilité beaucoup plus précises.

Dans la suite, nous allons montrer que les valeurs propres de la matrice  $\varepsilon_{r,\mathcal{K}}^{-1} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}}$  peuvent se déduire des valeurs propres des matrices  $\varepsilon_{r,\mathcal{K}}^{-1, x_i} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{x_i, -\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}}^{x_i} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{x_i, -\frac{1}{2}}$  pour  $i \in [1, 3]$ , où  $\hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{x_i}$  et  $\hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}}^{x_i}$  sont respectivement la matrice de masse et la matrice de rigidité du schéma FEM en 1D dans la direction  $x_i$ . Pour cela, nous allons utiliser le produit de Kronecker.

**Définition 2.5.1. Produit de Kronecker**

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de dimensions respectives  $m \times n$  et  $p \times q$ . Alors, le produit de Kronecker  $\otimes$  est défini par  $C = A \otimes B$ , avec  $C$  une matrice  $mp \times nq$  tels que :

$$C_{(i-1)p+l, (j-1)q+r} = A_{i,j} B_{l,r}. \quad (2.5.27)$$

Plus précisément, nous cherchons à réécrire la matrice  $\hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}}$  sous la forme d'un produit de Kronecker de trois matrices provenant d'un problème 1D selon chacune des directions.

Pour réaliser ceci, il faut que les trois matrices des problèmes 1D aient une dimension analogue. Ceci, n'est malheureusement pas le cas, à cause des de la discrétisation alternée qui mixe des points de Gauss et des points de Gauss-Lobatto avec  $r^{GL} = r^G + 1$ . Pour palier à cela, nous proposons d'augmenter la dimension de la matrice  $\hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}}$  jusqu'à obtenir  $[(r_i^{GL} + 1)(r_j^{GL} + 1)(r_k^{GL} + 1)] \times [(r_i^{GL} + 1)(r_j^{GL} + 1)(r_k^{GL} + 1)]$ .

Ainsi, pour la suite nous utilisons un rangement d'inconnues par cellule et une matrice  $P_{\mathcal{K}}$  qui permet de rajouter un terme nul pour les directions possédant  $r^{GL}$  termes.

$$P_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} P^{x_1} & & 0 \\ & P^{x_2} & \\ 0 & & P^{x_3} \end{pmatrix}. \quad (2.5.28)$$

Par exemple la matrice  $P^{x_1}$  est construite telle que :

$$P^{x_1} = \begin{pmatrix} P_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & P_{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & P_{x_3} \end{pmatrix} \quad \text{avec } P_{x_1} = \begin{pmatrix} & 0 \\ I_{r_i^{GL}+1} & \vdots \\ & 0 \end{pmatrix} \quad P_{x_2} = I_{r_j^{GL}+1} \quad P_{x_3} = I_{r_k^{GL}+1}. \quad (2.5.29)$$

où  $I_n$  est la matrice identité de dimension  $n$ . Nous noterons que  $P_{x_1} P_{x_1}^* = I_{r_i^{GL}+1}$ . Par périodicité des approximations utilisées dans les fonctions de bases, nous construisons de la même façon  $P^{x_2}$  et  $P^{x_3}$ . D'après les constructions de  $\hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}}$  et  $P_{\mathcal{K}}^* \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} P_{\mathcal{K}}$ , énoncées précédemment, ces matrices possèdent les mêmes valeurs propres non-nulles. On a :

$$P_{\mathcal{K}}^* \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} P_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} P^{x_1,*} \mathcal{M}^{x_1} \hat{\mathcal{R}}_{1,1} \mathcal{M}^{x_1} P^{x_1} & P^{x_1,*} \mathcal{M}^{x_1} \hat{\mathcal{R}}_{1,2} \mathcal{M}^{x_2} P^{x_2} & P^{x_1,*} \mathcal{M}^{x_1} \hat{\mathcal{R}}_{1,3} \mathcal{M}^{x_3} P^{x_3} \\ P^{x_2,*} \mathcal{M}^{x_2} \hat{\mathcal{R}}_{2,1} \mathcal{M}^{x_1} P^{x_1} & P^{x_2,*} \mathcal{M}^{x_2} \hat{\mathcal{R}}_{2,2} \mathcal{M}^{x_2} P^{x_2} & P^{x_2,*} \mathcal{M}^{x_2} \hat{\mathcal{R}}_{2,3} \mathcal{M}^{x_3} P^{x_3} \\ P^{x_3,*} \mathcal{M}^{x_3} \hat{\mathcal{R}}_{3,1} \mathcal{M}^{x_1} P^{x_1} & P^{x_3,*} \mathcal{M}^{x_3} \hat{\mathcal{R}}_{3,2} \mathcal{M}^{x_2} P^{x_2} & P^{x_3,*} \mathcal{M}^{x_3} \hat{\mathcal{R}}_{3,3} \mathcal{M}^{x_3} P^{x_3} \end{pmatrix}, \quad (2.5.30)$$

où nous utilisons la notation simplifiée de la transposé  $(P^{x_1})^* = P^{x_1,*}$ .

Nous avons montrer en (2.5.19) que la matrice  $\hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}}$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K},i,j} = \int_{\hat{\mathcal{K}}} DF_{\mathcal{K}}^{T-1} \hat{\nabla} \wedge \hat{\phi}_{\mathbf{l}_i} \cdot DF_{\mathcal{K}}^{T-1} \hat{\nabla} \wedge \hat{\phi}_{\mathbf{l}_j} d\hat{\mathbf{x}}. \quad (2.5.31)$$

Soient  $\lambda \neq 0$  une valeur propre de  $\hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}}$  et  $(\hat{V}) = (\hat{V}_{\mathbf{l}_{x_1}}, \hat{V}_{\mathbf{l}_{x_2}}, \hat{V}_{\mathbf{l}_{x_3}})_{(\mathbf{l}_{x_1}, \mathbf{l}_{x_2}, \mathbf{l}_{x_3}) \in (\Theta^{x_2} \times \Theta^{x_3} \times \Theta^{x_3})}$  le vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ . Alors, en utilisant les notations proposées en (2.5.18), et en posant  $\mathbf{l}_0 = (l_{0,1}, l_{0,2}, l_{0,3})$  correspondant à l'indice du degré de liberté, la première équation du problème aux valeurs propres s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_{l_2=1}^{r_j^{GL}+1} \frac{1}{\Delta x_2^2 \sqrt{\omega_{l_{0,2}}^{GL} \omega_{l_2}^{GL}}} \left( \int_0^1 \partial_{\hat{x}_2} L_{l_{0,2}}^{GL}(y) \partial_{\hat{x}_2} L_{l_2}^{GL}(y) dy \right) \hat{V}_{l_{0,1}, l_2, l_{0,3}}^{x_1} \\ & + \sum_{l_3=1}^{r_k^{GL}+1} \frac{1}{\Delta x_3^2 \sqrt{\omega_{l_{0,3}}^{GL} \omega_{l_3}^{GL}}} \left( \int_0^1 \partial_{\hat{x}_3} L_{l_{0,3}}^{GL}(z) \partial_{\hat{x}_3} L_{l_3}^{GL}(z) dz \right) \hat{V}_{l_{0,1}, l_{0,2}, l_3}^{x_1} \\ & - \sum_{l_2=1}^{r_j^G+1} \sum_{l_1=1}^{r_i^{GL}+1} \left( \frac{1}{\Delta x_2 \sqrt{\omega_{l_2}^G \omega_{l_{0,2}}^{GL}}} \int_0^1 \partial_{\hat{x}_2} L_{l_{0,2}}^{GL}(y) L_{l_2}^G(y) dy \right) \left( \frac{1}{\Delta x_1 \sqrt{\omega_{l_{0,1}}^G \omega_{l_1}^{GL}}} \int_0^1 \partial_{\hat{x}_1} L_{l_1}^{GL}(x) L_{l_{0,1}}^G(x) dx \right) \hat{V}_{l_1, l_2, l_{0,3}}^{x_2} \\ & - \sum_{l_3=1}^{r_k^G+1} \sum_{l_1=1}^{r_i^{GL}+1} \left( \frac{1}{\Delta x_3 \sqrt{\omega_{l_3}^G \omega_{l_{0,3}}^{GL}}} \int_0^1 \partial_{\hat{x}_3} L_{l_{0,3}}^{GL}(z) L_{l_3}^G(z) dz \right) \left( \frac{1}{\Delta x_1 \sqrt{\omega_{l_{0,1}}^G \omega_{l_1}^{GL}}} \int_0^1 \partial_{\hat{x}_1} L_{l_1}^{GL}(x) L_{l_{0,1}}^G(x) dx \right) \hat{V}_{l_1, l_{0,2}, l_3}^{x_3} \\ & = \lambda \hat{V}_{l_{0,1}, l_{0,2}, l_{0,3}}^{x_1}. \end{aligned} \quad (2.5.32)$$

Soit le vecteur  $V = (V_{\mathbf{l}_{x_1}}^{x_1}, V_{\mathbf{l}_{x_2}}^{x_2}, V_{\mathbf{l}_{x_3}}^{x_3})_{(\mathbf{l}_{x_1}, \mathbf{l}_{x_2}, \mathbf{l}_{x_3}) \in (r_i^{GL}+1, r_j^{GL}+1, r_k^{GL}+1)^3}$  issue de la transformation par  $P$  de  $\hat{V}$ . Notons  $S$  et  $B$  les matrices de dimension respectives  $(r^{GL}+1) \times (r^{GL}+1)$  et  $(r^G+1) \times (r^{GL}+1)$

définies par :

$$\begin{aligned} S_{i,j} &= \frac{1}{\sqrt{\omega_i^{GL}\omega_j^{GL}}} \int_0^1 \partial_{\hat{x}} L_i^{GL}(x) \partial_{\hat{x}} L_j^{GL}(x) dx, \\ B_{i,j} &= \frac{1}{\sqrt{\omega_i^G\omega_j^{GL}}} \int_0^1 \partial_{\hat{x}} L_j^{GL}(x) L_i^G(x) dx. \end{aligned} \tag{2.5.33}$$

Nous avons alors la proposition suivante :

**Proposition 2.5.2.** *Les matrices  $B$  et  $S$  décrites ci-dessus vérifient la relation :*

$$B^* P P^* B = B^* B = S \tag{2.5.34}$$

où  $B^*$  est la transposée de la matrice  $B$ .

**Preuve de la proposition 2.5.2.** la preuve est l'application des propriétés des formules de quadrature de Gauss et de Gauss-Lobatto. De plus, on utilise le fait que les matrices de transformations  $P$  sont construites pour avoir  $P P^* = I_{r_{G+1}}$ .

□

Nous utilisons la notation  $B_{x_1}^{x_2}$  pour les matrices de type  $B$  correspondant à la composante  $x_1$  et issue de la fonction de base  $\varphi^{x_2}$ . Et la notation  $S_{x_1}$  correspondant à la composante  $x_1$  et issue de la fonction de base  $\varphi^{x_1}$ . Et,  $B_{x_1}^{x_2}$  a pour transposée  $B_{x_1}^{x_2,*}$ .

En utilisant le produit de Kronecker, l'équation (2.5.32) peut se réécrire sous la forme matricielle :

$$\begin{aligned} & (I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2^2} S_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}}) V^{x_1} + (I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3^2} S_{x_3}) V^{x_1} \\ & - \left( \frac{1}{\Delta x_1} B_{x_1}^{x_2,*} P_{x_1} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} P_{x_2}^* B_{x_2}^{x_1} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_2} - \left( \frac{1}{\Delta x_1} B_{x_1}^{x_3,*} P_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} P_{x_3}^* B_{x_3}^{x_1} \right) V^{x_3} \\ & = \lambda V^{x_1} \end{aligned}$$

De même, dans les deux autres directions, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & (I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3^2} S_{x_3}) V^{x_2} + \left( \frac{1}{\Delta x_1^2} S_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_2} \\ & - \left( \frac{1}{\Delta x_1} P_{x_1}^* B_{x_1}^{x_2} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} B_{x_2}^{x_1,*} P_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_1} - \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} B_{x_2}^{x_3,*} P_{x_2} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} P_{x_3}^* B_{x_3}^{x_2} \right) V^{x_3} \\ & = \lambda V^{x_2} \\ & \left( \frac{1}{\Delta x_1^2} S_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_3} + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2^2} S_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_3} \\ & - \left( \frac{1}{\Delta x_1} P_{x_1}^* B_{x_1}^{x_3} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} B_{x_3}^{x_1,*} P_{x_3} \right) V^{x_1} - \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} P_{x_2}^* B_{x_2}^{x_3} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} B_{x_3}^{x_2,*} P_{x_3} \right) V^{x_2} \\ & = \lambda V^{x_3} \end{aligned}$$

Le système peut aussi se réécrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& (I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2^2} S_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}}) V^{x_1} + (I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3^2} S_{x_3}) V^{x_1} \\
& - \left( \frac{1}{\Delta x_1} B_{x_1}^* P_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \left( (I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} P_{x_2}^* B_{x_2}^{x_1} \otimes I_{r_k^{GL+1}}) V^{x_2} + \right. \\
& \left. (I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} P_{x_3}^* B_{x_3}^{x_1}) V^{x_3} \right) = \lambda V^{x_1} \\
& (I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2^2} S_{x_3}) V^{x_2} + \left( \frac{1}{\Delta x_1^2} S_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_2} \\
& - \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} B_{x_2}^* P_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \left( \left( \frac{1}{\Delta x_1} P_{x_1}^* B_{x_1}^{x_2} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_1} + \right. \\
& \left. (I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} P_{x_3}^* B_{x_3}^{x_2}) V^{x_3} \right) = \lambda V^{x_2} \\
& \left( \frac{1}{\Delta x_1^2} S_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_3} + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2^2} S_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_3} \\
& - \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} B_{x_3}^* P_{x_3} \right) \left( (P_{x_1}^* B_{x_1}^{x_3} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}}) V^{x_1} + \right. \\
& \left. (I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} P_{x_2}^* B_{x_2}^{x_3} \otimes I_{r_k^{GL+1}}) V^{x_2} \right) = \lambda V^{x_3}
\end{aligned}$$

Cette factorisation est possible à cause des égalités suivantes  $B_{x_1}^{x_2,*} = B_{x_1}^{x_3,*}$ ,  $B_{x_2}^{x_1,*} = B_{x_2}^{x_3,*}$  et  $B_{x_3}^{x_1,*} = B_{x_3}^{x_2,*}$ . En effet, nous pouvons montrer que  $B_{x_1}^{x_2,*} = B_{x_1}^{x_3,*}$  du fait que pour la composante  $x_1$ , les fonctions de base  $\varphi^{x_2}$  et  $\varphi^{x_3}$  utilisent les mêmes polynômes de Lagrange construits avec  $r_i^{GL} + 1$  points de Gauss-Lobatto. Concernant les deux autres égalités  $B_{x_2}^{x_1,*} = B_{x_2}^{x_3,*}$  et  $B_{x_3}^{x_1,*} = B_{x_3}^{x_2,*}$ , par périodicité des ordres d'approximation spatiale sur les composantes, nous pouvons montrer qu'elles sont vérifiées. On note que  $B_{x_1}^{x_2,*} = B_{x_1}^{x_3,*} = B_{x_1}^*$ ,  $B_{x_2}^{x_1,*} = B_{x_2}^{x_3,*} = B_{x_2}^*$  et  $B_{x_3}^{x_1,*} = B_{x_3}^{x_2,*} = B_{x_3}^*$ .

Nous ajoutons à chaque ligne du système, respectivement, les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{\Delta x_1^2} S_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_1} \\
& - \left( \frac{1}{\Delta x_1} B_{x_1}^* P_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \left( \frac{1}{\Delta x_1} B_{x_1} P_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_1} = 0 \\
& \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2^2} S_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_2} \\
& - \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} B_{x_2}^* P_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} P_{x_2}^* B_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_2} = 0 \\
& \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3^2} S_{x_3} \right) V^{x_3} \\
& - \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} B_{x_3}^* P_{x_3} \right) \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} P_{x_3}^* B_{x_3} \right) V^{x_3} = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons le système :

$$\begin{aligned}
& \left( \left( \frac{1}{\Delta x_1^2} S_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2^2} S_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3^2} S_{x_3} \right) \right) V^{x_1} \\
& - \left( \frac{1}{\Delta x_1} B_{x_1}^* P_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \left( \left( \frac{1}{\Delta x_1} P_{x_1}^* B_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_1} + \right. \\
& \left. \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} P_{x_2}^* B_{x_2}^{x_1} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_2} + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} P_{x_3}^* B_{x_3}^{x_1} \right) V^{x_3} \right) = \lambda V^{x_1} \\
& \left( \left( \frac{1}{\Delta x_1^2} S_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2^2} S_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3^2} S_{x_3} \right) \right) V^{x_2} \\
& - \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} B_{x_2}^* P_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \left( \left( \frac{1}{\Delta x_1} P_{x_1}^* B_{x_1}^{x_2} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_1} \right. \\
& \left. + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} P_{x_2}^* B_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_2} + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} P_{x_3}^* B_{x_3}^{x_2} \right) V^{x_3} \right) = \lambda V^{x_2} \\
& \left( \left( \frac{1}{\Delta x_1^2} S_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2^2} S_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3^2} S_{x_3} \right) \right) V^{x_3} \\
& - \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} B_{x_3}^* P_{x_3} \right) \left( \left( \frac{1}{\Delta x_1} P_{x_1}^* B_{x_1}^{x_3} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_1} \right. \\
& \left. + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} P_{x_2}^* B_{x_2}^{x_3} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_2} + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} P_{x_3}^* B_{x_3} \right) V^{x_3} \right) = \lambda V^{x_3}
\end{aligned} \tag{2.5.35}$$

**Proposition 2.5.3.** *On a :*

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{\Delta x_1} P_{x_1}^* B_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_1} + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} P_{x_2}^* B_{x_2}^{x_1} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_2} \\
& + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} P_{x_3}^* B_{x_3}^{x_1} \right) V^{x_3} = 0 \\
& \left( \frac{1}{\Delta x_1} P_{x_1}^* B_{x_1}^{x_2} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_1} + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} P_{x_2}^* B_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_2} + \\
& \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} P_{x_3}^* B_{x_3}^{x_2} \right) V^{x_3} = 0 \\
& \left( \frac{1}{\Delta x_1} P_{x_1}^* B_{x_1}^{x_3} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_1} + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} P_{x_2}^* B_{x_2}^{x_3} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_2} + \\
& \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} P_{x_3}^* B_{x_3} \right) V^{x_3} = 0
\end{aligned} \tag{2.5.36}$$

**Preuve de la proposition 2.5.3.**

Par construction des matrices  $B$ , on a  $P_{x_1}^* B_{x_1} = P_{x_1}^* B_{x_1}^{x_2} = P_{x_1}^* B_{x_1}^{x_3}$ . En effet, nous pouvons déjà montrer que  $B_{x_1}^{x_2} = B_{x_1}^{x_3}$  du fait que pour la composante  $x_1$ , les fonctions de base  $\varphi^{x_2}$  et  $\varphi^{x_3}$  utilisent les mêmes polynômes de Lagrange construits avec  $r_i^{GL} + 1$  points de Gauss-Lobatto. Par périodicité des ordres d'approximation spatiale sur les composantes, il en est de même pour  $P_{x_2}^* B_{x_2} = P_{x_2}^* B_{x_2}^{x_1} = P_{x_2}^* B_{x_2}^{x_3}$  et  $P_{x_3}^* B_{x_3} = P_{x_3}^* B_{x_3}^{x_1} = P_{x_3}^* B_{x_3}^{x_2}$ . Donc le système de la proposition 2.5.3, se simplifie en une seule équation, donnée par :

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{\Delta x_1} P_{x_1}^* B_{x_1} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_1} + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} P_{x_2}^* B_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) V^{x_2} + \\
& \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} P_{x_3}^* B_{x_3} \right) V^{x_3} = 0
\end{aligned} \tag{2.5.37}$$

Ensuite, en multipliant la première équation de (2.5.35) par  $\frac{1}{\Delta x_1} P_{x_1}^* B_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}}$ , la seconde par  $I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} P_{x_2}^* B_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}}$  et la dernière par  $I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} P_{x_3}^* B_{x_3}$ .

Puis en additionnant les 3 équations ainsi obtenues, nous en déduisons une équation qui, à partir des propriétés suivantes, se ramène à l'équation (2.5.37). Cela démontre la propriété.

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{\Delta x_1} P_{x_1}^* B_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \left( \frac{1}{\Delta x_1} B_{x_1}^* P_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) = \left( \frac{1}{\Delta x_1^2} S_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \\
& \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} P_{x_2}^* B_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} B_{x_2}^* P_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) = \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2^2} S_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \\
& \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} P_{x_3}^* B_{x_3} \right) \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} B_{x_3}^* P_{x_3} \right) = \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3^2} S_{x_3} \right) \\
& \left( \frac{1}{\Delta x_1} P_{x_1}^* B_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \left( \frac{1}{\Delta x_1^2} S_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) = \\
& \left( \frac{1}{\Delta x_1^2} S_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \left( \frac{1}{\Delta x_1} P_{x_1}^* B_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \\
& \left( \frac{1}{\Delta x_1} P_{x_1}^* B_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \left( \frac{1}{\Delta x_1^2} S_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) = \\
& \left( \frac{1}{\Delta x_1} P_{x_1}^* B_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \left( \frac{1}{\Delta x_1^2} S_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \\
& \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} P_{x_2}^* B_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2^2} S_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) = \\
& \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2^2} S_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} P_{x_2}^* B_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \\
& \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} P_{x_2}^* B_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2^2} S_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) = \\
& \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2} P_{x_2}^* B_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2^2} S_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) \\
& \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} P_{x_3}^* B_{x_3} \right) \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3^2} S_{x_3} \right) = \\
& \left( I_{r_k^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3^2} S_{x_3} \right) \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} P_{x_3}^* B_{x_3} \right) \\
& \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} P_{x_3}^* B_{x_3} \right) \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3^2} S_{x_3} \right) = \\
& \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3} P_{x_3}^* B_{x_3} \right) \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3^2} S_{x_3} \right)
\end{aligned}$$

□

En appliquant les relations de la proposition (2.5.3) sur le système (2.5.35), alors celui-ci devient :

$$\begin{aligned}
& \left( \left( \frac{1}{\Delta x_1^2} S_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2^2} S_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3^2} S_{x_3} \right) \right) V^{x_1} \\
& \quad = \lambda V^{x_1} \\
& \left( \left( \frac{1}{\Delta x_1^2} S_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2^2} S_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3^2} S_{x_3} \right) \right) V^{x_2} \\
& \quad = \lambda V^{x_2} \\
& \left( \left( \frac{1}{\Delta x_1^2} S_{x_1} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_2^2} S_{x_2} \otimes I_{r_k^{GL+1}} \right) + \left( I_{r_i^{GL+1}} \otimes I_{r_j^{GL+1}} \otimes \frac{1}{\Delta x_3^2} S_{x_3} \right) \right) V^{x_3} \\
& \quad = \lambda V^{x_3}
\end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons établir le théorème suivant :

**Théorème 2.5.3.** *Soit  $\lambda \neq 0$  une valeur propre de  $\hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}}$  pour  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$  et sous la condition  $r^G + 1 = r^{GL}$ . Alors il existe trois valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  des matrices, respectivement,  $S_{x_1}, S_{x_2}$  et  $S_{x_3}$ , dont une au moins est non nulle et telles que :*

$$\lambda = \frac{1}{\Delta x_1^2} \lambda_1 + \frac{1}{\Delta x_2^2} \lambda_2 + \frac{1}{\Delta x_3^2} \lambda_3, \quad (2.5.38)$$

avec  $S_{x_1, i, j} = \frac{1}{\sqrt{\omega_i^{GL} \omega_j^{GL}}} \int_0^1 \partial_{\hat{x}_1} L_i^{GL}(x_1) \partial_{\hat{x}_1} L_j^{GL}(x_1) dx_1$  pour  $i, j \in [1, r_i^{GL} + 1]$ . Les matrices  $S_{x_2}$  et  $S_{x_3}$  sont construites de manière identique, respectivement de dimension  $(r_j^{GL} + 1) \times (r_j^{GL} + 1)$  et  $(r_k^{GL} + 1) \times (r_k^{GL} + 1)$ .

A partir de ce résultat 2.5.3, on en déduit de manière évidente un résultat de stabilité plus précis, qui est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 2.5.4. Condition suffisante de stabilité du schéma FEM proposé (2.5.1)**

Sous l'hypothèse :

$$\begin{aligned} \Delta t < \frac{2}{c_0} \left[ \max_{\mathcal{K}} \left( \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{x_1, -\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}}^{x_1} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{x_1, -\frac{1}{2}}) \Delta x_{1, \mathcal{K}}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{x_2, -\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}}^{x_2} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{x_2, -\frac{1}{2}}) \Delta x_{2, \mathcal{K}}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{x_3, -\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}}^{x_3} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{x_3, -\frac{1}{2}}) \Delta x_{3, \mathcal{K}}^2 \right) \right]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (2.5.39)$$

avec  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$  cellule du maillage,  $\lambda_{\max}(A)$  le rayon spectral d'une matrice  $A$  et  $c_0$  la vitesse de la lumière dans le vide, le schéma numérique décrit par (2.5.1) est stable.

Nous notons que dans le cas où les ordres d'approximation spatiale sont identiques et les pas d'espace sont égaux à une constante  $h$  pour les 3 directions, alors la condition CFL se résume à :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{h} &< \frac{2}{c_0 \sqrt{3 \lambda_{\max}(S)}} \\ \iff \frac{\Delta t}{h} &< \frac{1}{c_0 \sqrt{3}} CFL_{1D} \end{aligned} \quad (2.5.40)$$

avec la matrice  $S = \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{x_0, -\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{K}}^{x_0} \hat{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}}^{x_0, -\frac{1}{2}}$ .  $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{x_0}$  et  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^{x_0}$  correspondent respectivement aux matrices de masse et de rigidité du schéma 1D, suivant la direction  $x_0$ .

### 2.5.3 Observation sur la valeur de la condition CFL en fonction de l'ordre d'approximation spatiale

Dans une configuration, où les ordres d'approximation spatiale sont identiques et un pas d'espace fixe  $h$  dans les trois directions, nous obtenons la condition de stabilité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{h} &< \frac{2}{c_0 \sqrt{3 \lambda_{\max}(S)}} \\ \text{i.e., } \frac{\Delta t}{h} &< \frac{1}{c_0 \sqrt{3}} \text{CFL}_{1D} \\ \text{i.e., } \frac{\Delta t}{h} &< \frac{1}{c_0} \text{CFL}_{3D} \end{aligned} \quad (2.5.41)$$

où la matrice  $S = \hat{\mathcal{M}}^{x_0, -\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}^{x_0} \hat{\mathcal{M}}^{x_0, -\frac{1}{2}}$ , et  $x_0$  est une des directions  $0x$ ,  $0y$  ou  $0z$ .

En utilisant le logiciel Matlab et la bibliothèque LaPack (pour les ordres les plus élevés), nous évaluons, pour différents ordres, le rayon spectral de la matrice  $S$  qui nous permet d'obtenir la valeur  $\text{CFL}_{1D}$ . Les résultats sont présentés dans le tableau 2.3. Une comparaison est effectuée avec la condition de stabilité du schéma de Yee.

$r^G$	$\lambda_{\max}(S)$	$\text{CFL}_{1D}$	$\text{CFL}_{3D}$	$\frac{\Delta t_{FDTD}}{\Delta t_{FEM}}$	$\frac{\Delta t_{FDTD}}{\Delta t_{FEM}}$ à $N_\lambda$ identique
0	4	1.	5.7735E-01	1.0	1.0
1	24	4.0825E-01	2.3570E-01	2.4	1.2
2	74.3110	2.3250E-01	1.3423E-01	4.3	1.4
3	183.348	1.4770E-01	8.5277E-02	6.8	1.7
4	391.95	1.0102E-01	5.8324E-02	9.9	2.0
5	749.505	7.3051E-02	4.2176E-02	13.7	2.3
6	1314.2	5.5162E-02	3.1848E-02	18.1	2.6
7	2154.5	4.3088E-02	2.4874E-02	23.2	2.9
8	3348.6	3.4565E-02	1.9954E-02	28.9	3.2
9	4982.5	2.8333E-02	1.6358E-02	35.3	3.5

TABLE 2.3 – La condition CFL du schéma FEM pour les ordres  $r^G \in [0, 9]$  et une comparaison avec la condition CFL du schéma de Yee.  $\Delta t_{FDTD}$  correspond au pas de temps du schéma de Yee,  $\Delta t_{FEM}$  correspond au pas de temps du schéma FEM et en rappel,  $N_\lambda$  est le facteur de résolution,  $N_\lambda$  points par longueur d'onde.

Les valeurs données dans le tableau 2.3 ont permis d'évaluer le pas temporel, par la relation suivante :

$$\Delta t = C \frac{h}{c_0} \text{CFL}_{3D} \quad (2.5.42)$$

Pour les ordres supérieurs à 2, le schéma est stable pour  $C \leq 1$ , au delà de cette valeur, le schéma diverge. En effet, les tests numériques montrent une divergence dès que  $C \approx 1. + 1.E - 4$ . Ainsi, nous pouvons conclure que notre évaluation de la condition de stabilité est optimale.

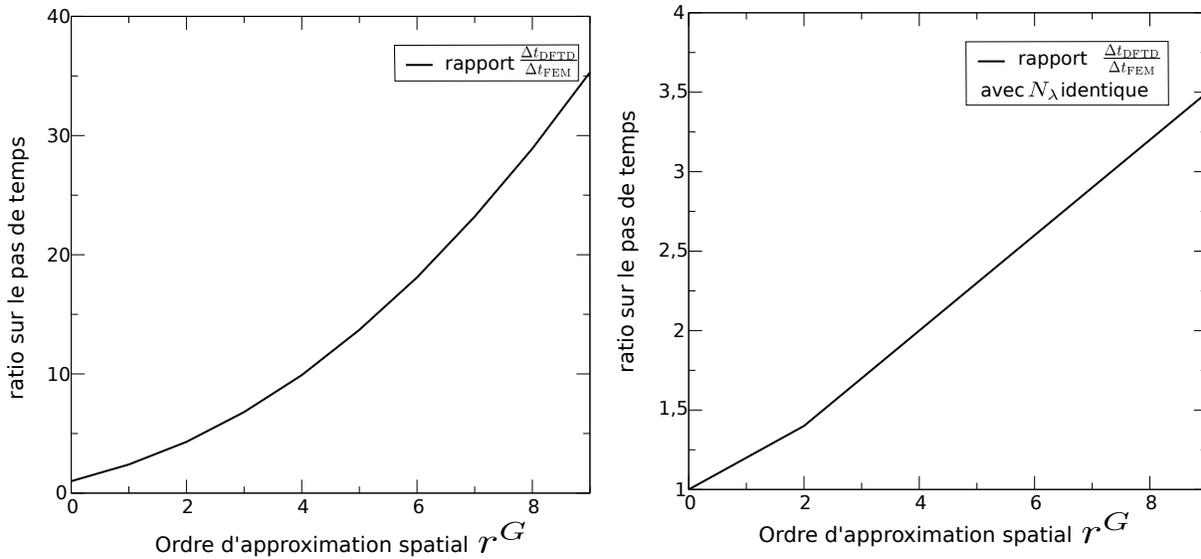


figure 2.17 – Comparaisons sur la condition de CFL entre le schéma FEM et le schéma Yee par rapport à l'ordre d'approximation spatiale.

### Observation sur la condition de stabilité

Nous notons que nous retrouvons exactement la condition de stabilité du schéma de Yee, pour  $r^G = 0$ ; valeur pour laquelle les deux schémas sont identiques.

De plus, le ratio entre le pas de temps optimal du schéma de Yee et du schéma FEM montre un pas de temps plus contraignant sur notre méthode FEM. En effet,

- l'augmentation de l'ordre s'accompagne d'une réduction importante de la condition CFL, et par conséquent, de la diminution du pas temporel.
- pour un facteur de résolution  $N_\lambda$  identique, c'est-à-dire que le nombre d'inconnues par longueur d'onde est identique pour les deux schémas, alors, la réduction de la condition CFL est toujours importante.
- A précision identique, les expériences numériques montrent que les pas temporels du schéma FEM et du schéma de Yee sont du même ordre, voire en faveur de la méthode FEM.

**Conclusion 2.4.** *L'augmentation de l'ordre d'approximation spatiale s'accompagne d'une diminution du pas d'espace par rapport au schéma de Yee. Ainsi, l'ordre d'approximation spatiale sera choisi en fonction de la réduction de l'erreur numérique. Pour cela, nous réalisons dans le paragraphe 2.7 l'étude de l'erreur de dispersion en fonction de l'ordre d'approximation spatiale.*

## 2.6 Étude de la convergence en $h$ et en $r$ du schéma

Dans cette partie, nous évaluons l'ordre de convergence en  $h$  et en  $p$ , où  $h$  est le pas d'espace et  $p$  l'ordre d'approximation spatiale, du schéma semi-discret en temps. Pour cela, nous employons une méthode consistant à déterminer une estimation de l'erreur d'interpolation. Les notations, définitions et autres outils mathématiques nécessaires à cette élaboration sont présentés au fur et à mesure.

Pour cette étude, nous considérons que le domaine  $\Omega$  est décomposé en cellules cubiques  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$  de pas d'espace  $h$  et auxquelles est associée un ordre d'approximation spatiale  $r = r^G + 1$  identique sur tout le domaine.

Nous rappelons le problème d'évolution (2.6.1) :  
 Trouver  $\mathbf{E}(t, \cdot), \mathbf{H}(t, \cdot) : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  tel que :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \wedge \mathbf{H} + \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{E} + \mathbf{J} &= 0 && \text{dans } \Omega, \\ \underline{\underline{\mu}} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{E} &= 0 && \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{E} \wedge \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= 0 && \text{sur } \partial\Omega, \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) \text{ et } \mathbf{H}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) &&& \text{dans } \Omega. \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Nous cherchons à exprimer l'erreur de convergence liée à la formulation du problème d'évolution (2.6.2) se présentant sous la forme :

Chercher  $(\mathbf{E}_h(t, \cdot), \mathbf{H}_h(t, \cdot)) \in U_{0,h} \times V_h \forall t \in (0, T)$  tels que  $\forall (\varphi_h, \psi_h) \in \mathcal{B}_U \times \mathcal{B}_V$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}} \mathbf{E}_h \cdot \varphi_h d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{H}_h \cdot \nabla \wedge \varphi_h d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{E}_h \cdot \varphi_h d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{J}_h \cdot \varphi_h d\mathbf{x} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mu}} \mathbf{H}_h \cdot \psi_h d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E}_h \cdot \psi_h d\mathbf{x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

La formulation (2.5.5) de la norme associée à l'espace de Hilbert  $\mathbb{L}^2$ , muni du produit scalaire usuel, est rappelée par :

$$\|\mathbf{u}_h\|_{0,p,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \underline{\underline{p}} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{u}_h d\mathbf{x}, \quad (2.6.3)$$

avec  $\underline{\underline{p}} = \underline{\underline{\varepsilon}}$  ou  $\underline{\underline{\mu}}$ .

Et, nous définissons une expression pour la norme "énergie" par :

**Définition 2.6.1.** Soit  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  la solution du problème continue (2.6.1), alors la relation (2.6.4) définit la norme énergie :

$$\|(\mathbf{E}, \mathbf{H})\|_*^2 = \|\mathbf{E}\|_{0,\underline{\underline{\varepsilon}},\Omega}^2 + \|\mathbf{H}\|_{0,\underline{\underline{\mu}},\Omega}^2. \quad (2.6.4)$$

L'étude de la convergence de l'erreur de l'approximation spatiale du problème (2.6.2) va consister à décomposer l'erreur de  $\mathbf{E} - \mathbf{E}_h$  et  $\mathbf{H} - \mathbf{H}_h$  à l'aide de deux opérateurs de projection  $P_h^E$  sur  $U_{0,h}$  et  $P_h^H$  sur  $V_h$  (à déterminer) tels que : en posant  $u_h = P_h^E \mathbf{E} \in U_{0,h}$  et  $v_h = P_h^H \mathbf{H} \in V_h$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E} - \mathbf{E}_h &= \underbrace{\mathbf{E} - u_h}_{\text{erreur de projection}} + \underbrace{u_h - \mathbf{E}_h}_{\text{erreur d'interpolation}}, \\ \mathbf{H} - \mathbf{H}_h &= \mathbf{H} - v_h + v_h - \mathbf{H}_h. \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

Puis, nous allons chercher à estimer  $\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_h\|_{0,\underline{\underline{\varepsilon}},\Omega}$  et  $\|\mathbf{H} - \mathbf{H}_h\|_{0,\underline{\underline{\mu}},\Omega}$ . Pour cela, nous posons les notations suivantes :

- $\Delta_{\mathbf{E}}^I = \mathbf{E}_h - u_h$  représentera l'erreur d'interpolation sur le champ électrique..
- $\Delta_{\mathbf{E}}^P = \mathbf{E} - u_h$  représentera l'erreur de projection sur le champ électrique.

**Remarque 2.10.** L'appellation "erreur de projection" est utilisée car nous considérons que  $u_h$  est une projection de la solution  $\mathbf{E}$  sur l'espace d'approximation.

La définition des erreurs de projection et d'interpolation sur le champ magnétique sont obtenues en remplaçant  $\mathbf{E}$  par  $\mathbf{H}$  et  $u_h$  par  $v_h$ .

**Proposition 2.6.1.** *L'estimation de l'erreur introduite par l'approximation spatiale, entre  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  et  $(\mathbf{E}_h, \mathbf{H}_h)$ , respectivement les solutions des problèmes (2.6.1) et (2.6.2), est majorée par les erreurs d'interpolation et de projection selon la relation (2.6.6) :*

$$\|(\mathbf{E} - \mathbf{E}_h, \mathbf{H} - \mathbf{H}_h)\|_*^2 \leq 2 (\|\Delta_{\mathbf{E}}^P, \Delta_{\mathbf{H}}^P\|_*^2 + \|\Delta_{\mathbf{E}}^I, \Delta_{\mathbf{H}}^I\|_*^2), \quad (2.6.6)$$

avec  $\Delta_{\mathbf{E}}^I = \mathbf{E}_h - u_h$ ,  $\Delta_{\mathbf{E}}^P = \mathbf{E} - u_h$  pour  $u_h \in U_{0,h}$ , et  $\Delta_{\mathbf{H}}^I = \mathbf{H}_h - v_h$ ,  $\Delta_{\mathbf{H}}^P = \mathbf{H} - v_h$  pour  $v_h \in V_h$ .

La démonstration de la proposition 2.6.1 est réalisée dans la publication [66], en n'utilisant pas tout à fait les mêmes espaces d'approximation et fonctionnels, cela ne change pas la démonstration.

Soit  $\mathcal{T}_h$  une partition de  $\Omega$ , alors nous définissons l'espace  $\mathbf{H}^s(\mathcal{T}_h)$  par

$$\mathbf{H}^s(\mathcal{T}_h) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, u|_{\mathcal{K}} \in \mathbf{H}^s(\mathcal{K})\} \quad (2.6.7)$$

Cet espace est muni de la norme :

$$\forall v \in \mathcal{T}_h \quad \|v\|_{s, \mathcal{T}_h}^2 = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{s, \mathcal{K}}^2 \quad (2.6.8)$$

**Remarque 2.11.** *Dans cet espace  $\mathbf{H}^s(\mathcal{T}_h)$ , nous n'assurons aucune continuité entre les cellules de  $\mathcal{T}_h$  pour les éléments de  $\mathbf{H}^s(\mathcal{T}_h)$ , et on a  $\mathbf{H}^s(\Omega) \subset \mathbf{H}^s(\mathcal{T}_h)$ .*

**Théorème 2.6.1.** *Soit  $r > \frac{1}{2}$  un entier positif. Supposons que la solution exacte du problème (2.6.1) vérifie  $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbf{H}^{s+1}(\mathcal{T}_h) \cap \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega))$ ,  $\partial_t \mathbf{E}, \partial_t \mathbf{H} \in \mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbf{H}^{s'+1}(\mathcal{T}_h))$  et  $\mathbf{J} \in \mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbf{H}^{s''+1}(\mathcal{T}_h))$  pour  $1 \leq s \leq r$ ,  $0 \leq s', s'' \leq r$  et  $0 < h \leq 1$ . Alors, l'estimation globale de l'erreur d'interpolation se présente sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned} \|(\Delta_{\mathbf{E}}^I, \Delta_{\mathbf{H}}^I)\|_*(T) &\lesssim \|(\Delta_{\mathbf{E}}^I, \Delta_{\mathbf{H}}^I)\|_*(0) + CT \frac{h^{\min(r, s, s'+1, s''+1)}}{r^{\min(s'+\frac{1}{2}, s-\frac{3}{2})}} \\ &\sup_{t \in [0, T]} \left( \|\partial_t \mathbf{E}\|_{s'+1, \mathcal{T}_h} + \|\partial_t \mathbf{H}\|_{s'+1, \mathcal{T}_h}, \|\mathbf{J}\|_{s''+1, \mathcal{T}_h}, \|\mathbf{H}\|_{s+1, \mathcal{T}_h}, \|\mathbf{E}\|_{s, \mathcal{T}_h} \right)(t) \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

où  $C > 0$  est une constante indépendante de  $h$  et  $r$ . De plus, l'erreur du schéma est donnée par l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{E} - \mathbf{E}_h, \mathbf{H} - \mathbf{H}_h)\|_*(T) &\leq \sqrt{2} \|(\Delta_{\mathbf{E}}^I, \Delta_{\mathbf{H}}^I)\|_*(0) + \sqrt{2} C \left[ \frac{h^{\min(r, s+1)}}{r^{s+\frac{1}{2}}} \sup (\|\mathbf{E}\|_{s+1, \mathcal{T}_h}, \|\mathbf{H}\|_{s+1, \mathcal{T}_h})(T) \right. \\ &\left. + T \frac{h^{\min(r, s, s'+1, s''+1)}}{r^{\min(s'+\frac{1}{2}, s-\frac{3}{2})}} \sup_{t \in [0, T]} \left( \|\partial_t \mathbf{E}\|_{s'+1, \mathcal{T}_h} + \|\partial_t \mathbf{H}\|_{s'+1, \mathcal{T}_h}, \|\mathbf{J}\|_{s''+1, \mathcal{T}_h}, \|\mathbf{H}\|_{s+1, \mathcal{T}_h}, \|\mathbf{E}\|_{s, \mathcal{T}_h} \right)(t) \right] \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

La convergence de l'erreur en espace  $h$  et en ordre  $r$  est donnée par l'étude des puissances de  $h$  et  $r$ . Selon les conventions du schéma définies en début de chapitre,  $r$  est supérieur ou égal à 1, ainsi, l'estimation prouve la consistance du schéma.

Toutefois, cette majoration de la convergence ne permet pas de retrouver la convergence en  $h^2$  du schéma de Yee. Pour retrouver, ce ordre de convergence, l'étude doit être réalisée en étudiant les phénomènes de super-convergence (c.f. [55]).

**Preuve du Théorème 2.6.1.**

Pour simplifier la démonstration, sans modifier le résultat, nous avons choisi d'évaluer l'erreur pour un domaine sans matériau conducteur, en posant  $\sigma = 0$  dans le système (2.6.2).

Dans un premier temps, nous cherchons à déterminer l'erreur d'interpolation en fonction de l'erreur de projection. Pour cela, nous cherchons à faire apparaître une relation liant les deux types d'erreurs.

D'abord, nous faisons apparaître l'erreur d'interpolation en utilisant le système (2.6.2). Pour cela, nous utilisons la formulation du problème (2.6.2), dans laquelle nous remplaçons  $(\mathbf{E}_h, \mathbf{H}_h)$  par  $(\mathbf{E}_h - u_h + u_h, \mathbf{H}_h - v_h + v_h) \in (U_{0,h} \times V_h)$  et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}} \partial_t \Delta_{\mathbf{E}}^I \cdot \varphi_h dx - \int_{\Omega} \Delta_{\mathbf{H}}^I \cdot \nabla \wedge \varphi_h dx + \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \varphi_h &= - \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}} \partial_t u_h \cdot \varphi_h dx + \int_{\Omega} v_h \cdot \nabla \wedge \varphi_h dx \\ \int_{\Omega} \underline{\underline{\mu}} \partial_t \Delta_{\mathbf{H}}^I \cdot \psi_h dx + \int_{\Omega} \nabla \wedge \Delta_{\mathbf{E}}^I \cdot \psi_h dx &= - \int_{\Omega} \underline{\underline{\mu}} \partial_t v_h \cdot \psi_h dx - \int_{\Omega} \nabla \wedge u_h \cdot \psi_h dx \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Dans un second temps, nous faisons apparaître l'erreur de projection dans le problème (2.6.1). Pour cela, nous utilisons la formulation continue du problème (2.6.1) restreinte aux fonctions de bases  $(\varphi_h, \psi_h) \in (U_{0,h} \times V_h)$  en posant  $\varphi = \varphi_h$  et  $\psi = \psi_h$ , et dans laquelle nous remplaçons  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  par  $(\mathbf{E} - u_h + u_h, \mathbf{H} - v_h + v_h)$ , et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}} \partial_t \Delta_{\mathbf{E}}^P \cdot \varphi_h dx - \int_{\Omega} \Delta_{\mathbf{H}}^P \cdot \nabla \wedge \varphi_h dx + \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \varphi_h dx &= - \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}} \partial_t u_h \cdot \varphi_h dx + \int_{\Omega} v_h \cdot \nabla \wedge \varphi_h dx \\ \int_{\Omega} \underline{\underline{\mu}} \partial_t \Delta_{\mathbf{H}}^P \cdot \psi_h dx + \int_{\Omega} \nabla \wedge \Delta_{\mathbf{E}}^P \cdot \psi_h dx &= - \int_{\Omega} \underline{\underline{\mu}} \partial_t v_h \cdot \psi_h dx - \int_{\Omega} \nabla \wedge u_h \cdot \psi_h dx \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

Enfin, en posant  $\varphi_h = \Delta_{\mathbf{E}}^I \in U_{0,h}$ ,  $\psi_h = \Delta_{\mathbf{H}}^I \in V_h$  puis en combinant les équations (2.6.11) et (2.6.12), nous obtenons la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{2 dt} (\|\Delta_{\mathbf{E}}^I\|_{0,\underline{\underline{\varepsilon}},\mathcal{T}_h}^2 + \|\Delta_{\mathbf{H}}^I\|_{0,\underline{\underline{\mu}},\mathcal{T}_h}^2) &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}} \partial_t \Delta_{\mathbf{E}}^P \cdot \Delta_{\mathbf{E}}^I dx - \int_{\Omega} \frac{r}{h} \Delta_{\mathbf{H}}^P \cdot \frac{h}{r} \nabla \wedge \Delta_{\mathbf{E}}^I dx \\ &+ \int_{\Omega} \underline{\underline{\mu}} \partial_t \Delta_{\mathbf{H}}^P \cdot \Delta_{\mathbf{H}}^I dx + \int_{\Omega} \nabla \wedge \Delta_{\mathbf{E}}^P \cdot \Delta_{\mathbf{H}}^I dx \\ &- \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \Delta_{\mathbf{E}}^I dx \end{aligned} \quad (2.6.13)$$

où  $h$  définit le pas d'espace et  $r$  l'ordre d'approximation spatiale.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons un début de majoration de la norme de l'erreur d'interpolation par la relation (2.6.14) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{2 dt} (\|\Delta_{\mathbf{E}}^I\|_{0,\underline{\underline{\varepsilon}},\mathcal{T}_h}^2 + \|\Delta_{\mathbf{H}}^I\|_{0,\underline{\underline{\mu}},\mathcal{T}_h}^2) &\lesssim C (\|\partial_t \Delta_{\mathbf{E}}^P\|_{0,\mathcal{T}_h} \|\Delta_{\mathbf{E}}^I\|_{0,\underline{\underline{\varepsilon}},\mathcal{T}_h} + \|\frac{r}{h} \Delta_{\mathbf{H}}^P\|_{0,\mathcal{T}_h} \|\frac{h}{r} \nabla \wedge \Delta_{\mathbf{E}}^I\|_{0,\mathcal{T}_h} \\ &+ \|\partial_t \Delta_{\mathbf{H}}^P\|_{0,\mathcal{T}_h} \|\Delta_{\mathbf{H}}^I\|_{0,\underline{\underline{\mu}},\mathcal{T}_h} + \|\nabla \wedge \Delta_{\mathbf{E}}^P\|_{0,\mathcal{T}_h} \|\Delta_{\mathbf{H}}^I\|_{0,\underline{\underline{\mu}},\mathcal{T}_h} \\ &+ \|\mathbf{J}\|_{0,\mathcal{T}_h} \|\Delta_{\mathbf{E}}^I\|_{0,\underline{\underline{\varepsilon}},\mathcal{T}_h}) \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

où  $\|\cdot\|_{0,\mathcal{T}_h} = \|\cdot\|_{0,1,\Omega}$  et en utilisant la propriété de régularité en temps de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ , caractérisée par la formulation suivante (2.6.15) et issue de la publication [66] :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_{\mathbf{E}}^P = \Delta_{\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}}^P = \Delta_{\partial_t \mathbf{E}}^P \quad (2.6.15)$$

De même pour  $\mathbf{H}$ , et à partir de la majoration (2.6.14), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{2 dt} \|(\Delta_{\mathbf{E}}^I, \Delta_{\mathbf{H}}^I)\|_*^2 &\lesssim C (\|\Delta_{\partial_t \mathbf{E}}^P\|_{0,\mathcal{T}_h} \|\Delta_{\mathbf{E}}^I\|_{0,\underline{\underline{\varepsilon}},\mathcal{T}_h} + \|\frac{r}{h} \Delta_{\mathbf{H}}^P\|_{0,\mathcal{T}_h} \|\frac{h}{r} \nabla \wedge \Delta_{\mathbf{E}}^I\|_{0,\mathcal{T}_h} \\ &+ \|\Delta_{\partial_t \mathbf{H}}^P\|_{0,\mathcal{T}_h} \|\Delta_{\mathbf{H}}^I\|_{0,\underline{\underline{\mu}},\mathcal{T}_h} + \|\nabla \wedge \Delta_{\mathbf{E}}^P\|_{0,\mathcal{T}_h} \|\Delta_{\mathbf{H}}^I\|_{0,\underline{\underline{\mu}},\mathcal{T}_h} \\ &+ \|\mathbf{J}\|_{0,\mathcal{T}_h} \|\Delta_{\mathbf{E}}^I\|_{0,\underline{\underline{\varepsilon}},\mathcal{T}_h}) \end{aligned} \quad (2.6.16)$$

où  $C$  est une constante générique strictement positive indépendante de  $h$  ou  $r$ . Nous allons généraliser le pas d'espace  $h$  sous forme d'une fonction.

**Remarque 2.12.** Soit  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ , alors la fonction  $h$  est définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} h : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ \mathbf{x} &\mapsto h(\mathbf{x}) = h_{\mathcal{K}} \quad \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{K} \end{aligned} \quad (2.6.17)$$

L'étape suivante consiste à estimer les intégrales liées aux matrices de rigidité  $\|\nabla \wedge \Delta_{\mathbf{E}}^P\|_{0, \mathcal{T}_h}$  en fonction de  $\|\Delta_{\mathbf{E}}^P\|_{0, \mathcal{T}_h}$ .

**Lemme 2.6.1.** Soit  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ , alors il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h_{\mathcal{K}}$  et  $r$  telle que pour toute fonction  $u_{h|\mathcal{K}}$ , défini par  $u_h \in U_{0,h}$  restreint à une cellule  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$ , on a :

$$\|\nabla \wedge u_{h|\mathcal{K}}\|_{0, \mathcal{K}} \leq C \frac{r}{h_{\mathcal{K}}} \|u_{h|\mathcal{K}}\|_{0, \mathcal{K}} \quad (2.6.18)$$

En particulier, nous avons  $\forall u_{h|\mathcal{K}} \in U_{0,h}$  :

$$\left\| \frac{h_{\mathcal{K}}}{r} \nabla \wedge u_{h|\mathcal{K}} \right\|_{0, \mathcal{K}} \leq C \|u_{h|\mathcal{K}}\|_{0, \mathcal{K}} \quad (2.6.19)$$

### Preuve du Lemme 2.6.1.

Ce résultat est partiellement démontré dans la section 2.5, nous utilisons la relation (2.5.21) rappelée ci-après :

$$\|\nabla \wedge \mathbf{E}_h^n\|_{0, \underline{\mu}^{-1}, \Omega}^2 \leq \| \mathcal{M}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \mathcal{R} \mathcal{M}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \| \| \mathbf{E}_h^n \|_{0, \underline{\varepsilon}, \mathcal{T}_h}^2$$

En utilisant les éléments de démonstration de cette majoration, il est facile de montrer que ce résultat peut se présenter sous la forme (2.6.20).  $\forall u_{h|\mathcal{K}} \in U_{0,h}$  :

$$\begin{aligned} \|\nabla \wedge u_{h|\mathcal{K}}\|_{0, \mathcal{K}} &\leq C'' \| \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{R}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{-\frac{1}{2}} \| \frac{1}{2} \|u_{h|\mathcal{K}}\|_{0, \mathcal{K}} \\ &\leq \frac{C'(r)}{h_{\mathcal{K}}} \|u_{h|\mathcal{K}}\|_{0, \mathcal{K}} \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

Nous rappelons que  $C'' > 0$  est une constante générique et  $C'$  dépend de  $r$ . De plus, comme le polynôme  $u_{h|\mathcal{K}} \in U_{0,h} \subset [Q^r]^3$ , nous pouvons utiliser les résultats établis dans [56], pour montrer que  $C'$  peut s'écrire sous la forme  $C r$ , dont  $C > 0$  est constante ne dépendant pas de  $r$ . Ainsi, nous obtenons :

$$\|\nabla \wedge u_{h|\mathcal{K}}\|_{0, \mathcal{K}} \leq C \frac{r}{h_{\mathcal{K}}} \|u_{h|\mathcal{K}}\|_{0, \mathcal{K}}$$

La relation (2.6.19) est immédiate en rappelant que  $r$  et  $h_{\mathcal{K}}$  sont fixes pour un élément  $\mathcal{K}$ .  
□

En utilisant la définition (2.6.17) de la fonction  $h$ , nous avons le résultat immédiat suivant :

$$\left\| \frac{r}{h} \Delta_{\mathbf{H}}^P \right\|_{0, \mathcal{T}_h} = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \frac{r}{h_{\mathcal{K}}} \|\Delta_{\mathbf{H}}^P\|_{0, \mathcal{K}} \quad (2.6.21)$$

Par ailleurs, en admettant que  $\|(\Delta_{\mathbf{E}}^I, \Delta_{\mathbf{H}}^I)\|_* \neq 0$ , nous avons  $\frac{\|\Delta_{\mathbf{E}}^I\|_{0, \underline{\varepsilon}, \mathcal{T}_h}}{\|(\Delta_{\mathbf{E}}^I, \Delta_{\mathbf{H}}^I)\|_*} \leq 1$  et  $\frac{\|\Delta_{\mathbf{H}}^I\|_{0, \underline{\mu}, \mathcal{T}_h}}{\|(\Delta_{\mathbf{E}}^I, \Delta_{\mathbf{H}}^I)\|_*} \leq 1$ . Ainsi, nous appliquons les résultats intermédiaires 2.6.1 et (2.6.21) à la majoration (2.6.14), puis le tout

est divisé par  $\|(\Delta_{\mathbf{E}}^I, \Delta_{\mathbf{H}}^I)\|_*$  pour obtenir la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|(\Delta_{\mathbf{E}}^I, \Delta_{\mathbf{H}}^I)\|_* &\lesssim C(\|\Delta_{\partial_t \mathbf{E}}^P\|_{0, \mathcal{T}_h} + \|\Delta_{\partial_t \mathbf{H}}^P\|_{0, \mathcal{T}_h} + \|\mathbf{J}\|_{0, \mathcal{T}_h} \\ &\quad + \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \frac{r}{h_{\mathcal{K}}} \|\Delta_{\mathbf{H}}^P\|_{0, \mathcal{K}} + \|\nabla \wedge \Delta_{\mathbf{E}}^P\|_{0, \mathcal{T}_h} ) \end{aligned} \quad (2.6.22)$$

En utilisant le lemme de Grönwall sur  $[0, T]$  à l'inégalité (2.6.22), nous obtenons l'estimation intermédiaire suivante :

$$\begin{aligned} \|(\Delta_{\mathbf{E}}^I, \Delta_{\mathbf{H}}^I)\|_*(T) &\lesssim \|(\Delta_{\mathbf{E}}^I, \Delta_{\mathbf{H}}^I)\|_*(0) + C \int_0^T (\|\Delta_{\partial_t \mathbf{E}}^P\|_{0, \mathcal{T}_h} + \|\Delta_{\partial_t \mathbf{H}}^P\|_{0, \mathcal{T}_h} + \|\mathbf{J}\|_{0, \mathcal{T}_h} \\ &\quad + \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \frac{r}{h_{\mathcal{K}}} \|\Delta_{\mathbf{H}}^P\|_{0, \mathcal{K}} + \|\nabla \wedge \Delta_{\mathbf{E}}^P\|_{0, \mathcal{T}_h} ) dt \end{aligned} \quad (2.6.23)$$

### Choix des projecteurs

L'étude de la convergence du schéma semi-discret en espace nécessite l'utilisation d'un opérateur de projection sur les espaces d'approximation  $U_{0,h}$  et  $V_h$ . Ce paragraphe se décompose en deux parties. Nous commençons par introduire les projecteurs et des outils mathématiques associés, puis, nous étudions l'estimation de l'erreur de projection introduite par le projecteur choisi.

Les projecteurs sont choisis afin d'avoir l'optimalité de l'erreur de projection pour les deux espaces d'approximation  $U_{0,h}$  et  $V_h$ .

#### Projecteurs sur $V_h$

La construction de l'espace  $V_h$  suggère qu'il est suffisant de choisir un projecteur défini par la condition suivante :

$$\text{Soit } v_h = \pi_r^0 \mathbf{H} \in V_h \quad \text{tel que} \quad \|\mathbf{H} - v_h\|_{0, \mathcal{T}_h} = \inf_{t_h \in V_h} \|\mathbf{H} - t_h\|_{0, \mathcal{T}_h} \quad (2.6.24)$$

**Remarque 2.13.** *Selon les conventions prises précédemment, l'entier  $r$  utilisé dans cette section correspond à l'ordre de l'approximation polynomiale de  $r^G + 1$  (qui est égal aussi à  $r^{GL}$ ). Ce choix permet de conserver une homogénéité avec les publications citées.*

L'étude d'un tel projecteur sur l'espace  $V_h$  a déjà été réalisée dans [56]. Toutefois, nous proposons de définir ce projecteur par une démarche détaillée en utilisant les travaux présentés dans [65] et [66], jusqu'à l'énoncé du théorème introduisant la majoration de l'erreur de projection.

#### Définition 2.6.2. Projecteur $\mathbb{L}^2$

Soient  $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbf{L}^2(\hat{\mathcal{K}})$  et  $r \geq 0$ . Alors le projecteur  $\mathbf{L}^2$ , notée  $\hat{\pi}_r^0 \hat{\mathbf{v}}$ , de  $\hat{\mathbf{v}}$  sur  $[Q^r(\hat{\mathcal{K}})]^3$  est défini par :  $\forall \hat{\psi} \in [Q^r(\hat{\mathcal{K}})]^3$ , on a :

$$\int_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\pi}_r^0 \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\psi} \, d\hat{\mathbf{x}} = \int_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\psi} \, d\hat{\mathbf{x}} \quad (2.6.25)$$

Notons que : l'existence et l'unicité du projecteur  $\hat{\pi}_r^0$  est une conséquence immédiate du théorème de Lax-Milgram.

L'étude de l'erreur de projection commise par  $\hat{\pi}_r^0$  nécessite la définition de la semi-norme crochet :

$$[u]_{m,p,\hat{\mathcal{K}}}^2 = \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial^m u}{\partial \hat{x}_i^m} \right\|_{p,\hat{\mathcal{K}}}^2 \quad \text{pour } u \in W^{m,p}(\hat{\mathcal{K}}) \quad (2.6.26)$$

et le lemme de Bramble-Hilbert adapté à  $Q^r$ , [16].

**Lemme 2.6.2. Bramble-Hilbert**

Soient  $p, q$  deux nombres tels que  $1 \leq p, q \leq \infty$  et soient  $r, m$  deux entiers tels que  $r \geq 0$  et  $m \leq r + 1$ ,

$$W^{r+1,p}(\hat{\mathcal{K}}) \hookrightarrow W^{m,p}(\hat{\mathcal{K}}) \quad (2.6.27)$$

Soit  $\Pi \in \mathcal{L}(W^{r+1,p}(\hat{\mathcal{K}}); W^{m,p}(\hat{\mathcal{K}}))$  un opérateur qui satisfait :

$$\forall p \in Q^r, \quad \Pi p = p \quad (2.6.28)$$

alors, il existe  $C$  dépendante de  $\hat{\mathcal{K}}$  et de  $r$  telle que :

$$\forall v \in W^{r+1,p}(\hat{\mathcal{K}}), \quad |v - \Pi v|_{m,q,\hat{\mathcal{K}}} \leq C[v]_{r+1,p,\hat{\mathcal{K}}} \quad (2.6.29)$$

avec  $|\cdot|_{m,q,\hat{\mathcal{K}}}$  la semi-norme définie par :

$$|v|_{m,q,\hat{\mathcal{K}}} = \left( \sum_{|\alpha|=m} \int_{\hat{\mathcal{K}}} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \hat{\mathbf{x}}^\alpha} v \right|^q d\hat{\mathbf{x}} \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{pour } v \in W^{m,p}(\hat{\mathcal{K}}) \quad (2.6.30)$$

Nous allons maintenant proposer un opérateur de projection sur  $V_h$  défini à partir du projecteur  $\hat{\pi}_r^0$ . Pour cela, nous allons utiliser l'opérateur de projection sur  $V_{\mathcal{K}}$ , où  $V_{\mathcal{K}} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{K}) \mid D\mathbf{F}_{\mathcal{K}}^* \mathbf{v} \circ \mathbf{F}_{\mathcal{K}} \in [Q^r(\hat{\mathcal{K}})]^3\}$ , tel que  $V_h$  est décomposé de la manière suivante :

$$V_h = \otimes_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} V_{\mathcal{K}}. \quad (2.6.31)$$

**Définition 2.6.3. Projecteur sur  $V_{\mathcal{K}}$** 

Soient  $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{K})$ , alors on définit l'opérateur de projection  $\pi_{\mathcal{K}}^0 \mathbf{v}$  de  $\mathbf{v}$  sur  $V_{\mathcal{K}}$  défini par :

$$\left( \pi_{\mathcal{K}}^0 \mathbf{v} \right) \circ \mathbf{F}_{\mathcal{K}} = D\mathbf{F}_{\mathcal{K}}^{*-1} \hat{\pi}_r^0 \hat{\mathbf{v}} \quad (2.6.32)$$

Nous définissons enfin l'opérateur de projection sur  $V_h$ .

**Définition 2.6.4. Projecteur sur  $V_h$** 

Soient  $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , alors on définit l'opérateur de projection  $\pi_h^0 \mathbf{v}$  de  $\mathbf{v}$  sur  $V_h$  défini par : pour tout  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$

$$\left( \pi_h^0 \mathbf{v} \right)_{|\mathcal{K}} = \pi_{\mathcal{K}}^0 \mathbf{v}|_{\mathcal{K}} \quad (2.6.33)$$

A partir de ces éléments, nous pouvons écrire la proposition 2.6.2, qui est démontrée dans [56].

**Proposition 2.6.2.** Soit  $\mathbf{v} \in (H^{s+1}(\mathcal{T}_h))^3$  pour  $s \geq 0$ , alors il existe une constante  $C > 0$  indépendante de l'élément  $\mathcal{K}$  telle que :

$$\|\mathbf{v} - \pi_h^0 \mathbf{v}\|_{0,\mathcal{T}_h} \leq C \frac{h^{\min(r+1,s+1)}}{r^{s+\frac{1}{2}}} \|\mathbf{v}\|_{s+1,\mathcal{T}_h} \quad (2.6.34)$$

**Projecteurs sur  $U_{0,h}$** 

La construction de l'espace  $U_{0,h}$  suggère qu'il est préférable de choisir un projecteur défini par la condition suivante :

$$\text{Soit } u_h = \pi_h^1 \mathbf{E} \in U_{0,h} \quad \text{tel que} \quad \|\mathbf{E} - u_h\|_{rot,\mathcal{T}_h} = \inf_{t_h \in U_{0,h}} \|\mathbf{E} - t_h\|_{rot,\mathcal{T}_h} \quad (2.6.35)$$

avec  $\|\mathbf{E} - u_h\|_{rot,\mathcal{T}_h}^2 = \|\mathbf{E} - u_h\|_{0,\mathcal{T}_h}^2 + \|\nabla \wedge (\mathbf{E} - u_h)\|_{0,\mathcal{T}_h}^2$ . Cet opérateur d'interpolation est référencé dans [60] et il est nommé dans d'autres publications comme l'interpolation de Nédélec. Ainsi, nous rappelons et adaptions à nos notations des résultats déjà établis. En particulier, nous utilisons les théorèmes 3.3, 3.4 et le lemme 3.8 démontrés dans [56] pour lesquels nous considérons le résultat sur un maillage cartésien [66], et qui conduisent à la proposition 2.6.3.

**Proposition 2.6.3.** *Soient  $\mathbf{u} \in (H^{s+1}(\mathcal{T}_h))^3$ ,  $\nabla \wedge \mathbf{u} \in (H^s(\mathcal{T}_h))^3$  pour  $s > \frac{1}{2}$ ; alors il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $\mathbf{u}$  (de  $h$  et  $r$ ) tel que :*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \pi_h^1 \mathbf{u}\|_{rot, \mathcal{T}_h}^2 &= \|\mathbf{u} - \pi_h^1 \mathbf{u}\|_{0, \mathcal{T}_h}^2 + \|\nabla \wedge (\mathbf{u} - \pi_h^1 \mathbf{u})\|_{0, \mathcal{T}_h}^2 \\ &= \|\mathbf{u} - \pi_h^1 \mathbf{u}\|_{0, \mathcal{T}_h}^2 + \|(I - \pi_h^0) \nabla \wedge \mathbf{u}\|_{0, \mathcal{T}_h}^2 \\ &\leq C \left( \frac{h^{\min(r+1, s+1)}}{r^s} \|\mathbf{u}\|_{s+1, \mathcal{T}_h}^2 + \frac{h^{\min(r, s)}}{r^{s-\frac{1}{2}}} \|\nabla \wedge \mathbf{u}\|_{s, \mathcal{T}_h}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.6.36)$$

À l'issue du paragraphe sur le choix des projecteurs, nous avons donc une estimation immédiate pour  $\|\Delta_{\mathbf{H}}^P\|_{0, \mathcal{K}}$  et  $\|\nabla \wedge \Delta_{\mathbf{E}}^P\|_{0, \mathcal{T}_h}$ . Les estimations de  $\|\Delta_{\partial_t \mathbf{E}}^P\|_{0, \mathcal{T}_h}$  et  $\|\Delta_{\partial_t \mathbf{H}}^P\|_{0, \mathcal{T}_h}$  sont obtenues en utilisant la régularité en temps de ces termes et les propositions 2.6.2 et 2.6.3. Maintenant, pour démontrer le théorème 2.6.1, il nous reste à injecter ces estimations dans l'équation (2.6.23).

Soit  $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$  une famille suffisamment régulière de maillage du domaine  $\Omega$ , alors, en prenant  $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbf{H}^{s+1}(\mathcal{T}_h) \cap \mathbf{H}(rot, \Omega))$ ,  $\partial_t \mathbf{E}, \partial_t \mathbf{H} \in \mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbf{H}^{s'+1}(\mathcal{T}_h))$  et  $\mathbf{J} \in \mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbf{H}^{s''+1}(\mathcal{T}_h))$  avec  $1 \leq s \leq r$ ,  $0 \leq s', s'' \leq r$  et  $0 < h \leq 1$ , nous pouvons ré-écrire l'inégalité (2.6.23) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \|(\Delta_{\mathbf{E}}^I, \Delta_{\mathbf{H}}^I)\|_*(T) &\lesssim \|(\Delta_{\mathbf{E}}^I, \Delta_{\mathbf{H}}^I)\|_*(0) \\ &+ C \int_0^T \left( \frac{h^{\min(r+1, s'+1)}}{r^{s'+\frac{1}{2}}} \left( \|\partial_t \mathbf{E}\|_{s'+1, \mathcal{T}_h} + \|\partial_t \mathbf{H}\|_{s'+1, \mathcal{T}_h} \right) + \frac{h^{\min(r+1, s''+1)}}{r^{s'+\frac{1}{2}}} \|\mathbf{J}\|_{s''+1, \mathcal{T}_h} \right. \\ &\left. + \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \frac{r h^{\min(r+1, s+1)}}{h r^{s+\frac{1}{2}}} \|\mathbf{H}\|_{s+1, \mathcal{K}} + \frac{h^{\min(r, s)}}{r^{s-\frac{1}{2}}} \|\nabla \wedge \mathbf{E}\|_{s, \mathcal{T}_h} \right) dt \end{aligned} \quad (2.6.37)$$

Finalement, en utilisant les majorations énoncées dans le paragraphe du choix des projecteurs, on obtient :

$$\begin{aligned} \|(\Delta_{\mathbf{E}}^I, \Delta_{\mathbf{H}}^I)\|_*(T) &\lesssim \|(\Delta_{\mathbf{E}}^I, \Delta_{\mathbf{H}}^I)\|_*(0) + CT \frac{h^{\min(r, s, s'+1, s''+1)}}{r^{\min(s'+\frac{1}{2}, s-\frac{3}{2})}} \\ &\sup_{t \in [0, T]} \left( \|\partial_t \mathbf{E}\|_{s'+1, \mathcal{T}_h} + \|\partial_t \mathbf{H}\|_{s'+1, \mathcal{T}_h}, \|\mathbf{J}\|_{s''+1, \mathcal{T}_h}, \|\mathbf{H}\|_{s+1, \mathcal{T}_h}, \|\mathbf{E}\|_{s, \mathcal{T}_h} \right) (t). \end{aligned} \quad (2.6.38)$$

L'erreur du schéma se déduit en injectant (2.6.38) dans l'inégalité de la proposition 2.6.1, ainsi :

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{E} - \mathbf{E}_h, \mathbf{H} - \mathbf{H}_h)\|_*(T) &\leq \sqrt{2} \|(\Delta_{\mathbf{E}}^I, \Delta_{\mathbf{H}}^I)\|_*(0) \\ &+ \sqrt{2} C \left[ \frac{h^{\min(r, s+1)}}{r^{s+\frac{1}{2}}} \sup \left( \|\mathbf{E}\|_{s+1, \mathcal{T}_h}, \|\mathbf{H}\|_{s+1, \mathcal{T}_h} \right) (T) \right. \\ &\left. + T \frac{h^{\min(r, s, s'+1, s''+1)}}{r^{\min(s'+\frac{1}{2}, s-\frac{3}{2})}} \sup_{t \in [0, T]} \left( \|\partial_t \mathbf{E}\|_{s'+1, \mathcal{T}_h} + \|\partial_t \mathbf{H}\|_{s'+1, \mathcal{T}_h}, \|\mathbf{J}\|_{s''+1, \mathcal{T}_h}, \|\mathbf{H}\|_{s+1, \mathcal{T}_h}, \|\mathbf{E}\|_{s, \mathcal{T}_h} \right) (t) \right]. \end{aligned} \quad (2.6.39)$$

□

## 2.7 Analyse de la dispersion

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'étude de la dispersion de notre schéma FEM. Pour cela, on se sert de nombreux résultats déjà établis dans la littérature.

L'analyse de la dispersion est effectuée par une technique de type ondes planes. Pour cela, nous considérons un domaine infini, de permittivité et perméabilité homogènes, avec un maillage constitué de mailles cubiques et d'un pas d'espace constant  $h$ .

Soit une onde plane  $\vec{E}$  définie par :

$$\vec{E}(t, \mathbf{x}) = \vec{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]. \quad (2.7.1)$$

Nous allons introduire une onde plane de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , solution du système de Maxwell telle que  $\omega^2 = |\mathbf{k}|^2$  (cf [20]), dans notre problème (2.5.1). Pour cela, la forme d'onde plane sera explicitée pour chaque degré de liberté par :

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{pr}+1}^{x_1}(t) &= E_1^{x_1} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{ph} + \xi^{x_1} h - \omega_h t)], \\ E_{\mathbf{pr}+1}^{x_2}(t) &= E_1^{x_2} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{ph} + \xi^{x_2} h - \omega_h t)], \\ E_{\mathbf{pr}+1}^{x_3}(t) &= E_1^{x_3} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{ph} + \xi^{x_3} h - \omega_h t)], \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

où  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in (\mathbb{N}^*)^3$  correspond à l'indice de la maille dans le repère cartésien,  $\xi^{x_i}$  correspond à la position du degré de liberté dans la cellule,  $\mathbf{pr} = ((p_1 - 1) * r_i^{GL}, (p_2 - 1) * r_j^{GL}, (p_3 - 1) * r_k^{GL})$ ,  $\mathbf{l}$  appartient selon la direction à  $\Theta_E^{x_1}$  ou  $\Theta_E^{x_2}$  ou  $\Theta_E^{x_3}$  et  $\omega_h$  définit la pulsation approchée. Notons que  $\mathbf{pr} + \mathbf{l} = ((p_1 - 1)r_i^{GL} + l_1, (p_2 - 1)r_j^{GL} + l_2, (p_3 - 1)r_k^{GL} + l_3)$  permet de désigner un degré de liberté dans le domaine de calcul.

En utilisant (2.7.2) dans le problème semi-discret (2.5.1), la relation de dispersion numérique est obtenue par la résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$\omega_h^2 E = A_h E, \quad (2.7.3)$$

où  $E = (E^{x_1}, E^{x_2}, E^{x_3})$  et  $A_h$  une matrice carrée que nous ne détaillerons pas dans ce rapport. La publication [19] présente une analyse de la dispersion de ce schéma. En particulier, une démonstration met en évidence que les valeurs propres  $\omega_h$  non nulles se déduisent de l'équation des ondes 1D, par le théorème 2.7.1 suivant.

**Théorème 2.7.1.** *Soient  $0 < k_i h < \pi$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , où  $h$  définit le pas d'espace,  $k_i$  décrit le nombre d'onde dans la direction  $\vec{e}_{x_i}$ . Supposons que  $\omega_h \neq 0$ , où  $\omega_h$  est la pulsation approchée du schéma décrit précédemment, alors la relation de dispersion est :*

$$\omega_h^2(\mathbf{k}) = \omega_{1,h}^2(k_1) + \omega_{2,h}^2(k_2) + \omega_{3,h}^2(k_3), \quad (2.7.4)$$

où  $\omega_{1,h}(k_1)$ , notée aussi par simplification pour la suite  $\omega_{1,h}$ , est une valeur propre pour :

$$P_{x_1}^* D^{(1)} M_G^{-1} D^{(1)T} P_{x_1} \mathbf{u}_1 - \omega_{1,h}^2 P_{x_1}^* M_L P_{x_1} \mathbf{u}_1 = 0, \quad (2.7.5)$$

et similairement pour  $\omega_{2,h}(k_2)$  et  $\omega_{3,h}(k_3)$  (en remplaçant respectivement  $x_1$  par  $x_2$  et  $x_3$ ).

En considérant  $r = r^G = r^{GL} - 1$ , les matrices de la relation (2.7.5) sont définies de la manière suivante :

- $D^{(1)}$  est une matrice de dimension  $(r+1) \times (r+1)$  telle que  $D_{i,j}^{(1)} = \int_0^h \partial_x L_i^{GL}(x) L_j^G(x) dx$ ;
- $M_G$  est une matrice diagonale de dimension  $(r+1) \times (r+1)$  définie par les poids de la méthode de quadrature de Gauss-Legendre  $(\omega_1^G, \dots, \omega_{r+1}^G)$  répartis sur la diagonale;
- $M_L$  est une matrice diagonale de dimension  $(r+2) \times (r+2)$  avec les poids de la méthode de quadrature de Gauss-Lobatto  $(\omega_1^{GL}, \dots, \omega_{r+2}^{GL})$  répartis sur la diagonale;
- $P_{x_1}$  est une matrice de dimension  $(r+2) \times (r+1)$  telle que  $P_{x_1} = \begin{pmatrix} & I_{r+1} & \\ \exp(ik_1 h) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$  où  $I_{r+1}$  est la matrice identité de dimension  $(r+1)$ .

### Évaluation de la relation de dispersion numérique

Dans ce paragraphe, en utilisant le théorème 2.7.1, nous déterminons les expressions des relations de la dispersion numérique pour les ordres 1 à 3 et nous explicitons l'ordre d'approximation de la pulsation physique. L'obtention de ces résultats a été réalisée à l'aide du logiciel de calcul formel Maple.

#### La relation de dispersion numérique pour l'ordre $r^G = 0$ :

Avec cet ordre d'approximation spatiale, le schéma étudié est identique au schéma de Yee. En appliquant le théorème (2.7.1), nous avons :

$$P_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & \\ \exp(ik_1h) & \end{pmatrix}, \quad D^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad M_G = 1.$$

Après multiplication des matrices, le résultat simplifié est :

$$\omega_{1,h}^2 h^2 = 2 - 2 \cos(k_1h) = 4 \sin^2 \left( \frac{k_1h}{2} \right). \quad (2.7.6)$$

Nous retrouvons la relation de dispersion numérique (2.7.6) du schéma de Yee [88] en 1D :

$\omega_h^2 = \frac{4c^2}{h^2} \sin^2 \left( \frac{k_1h}{2} \right)$ . En utilisant un développement limité pour le sinus sur la relation de dispersion numérique, nous estimons l'ordre d'approximation de l'erreur sur la pulsation physique :

$$\omega_h^2 = c^2 \omega_{1,h}^2 = c^2 k_1^2 \left( 1 - \frac{k_1^2 h^2}{12} + O(h^4) \right). \quad (2.7.7)$$

Ainsi, on retrouve comme pour le schéma de Yee que  $\omega_h$  approche la pulsation physique avec une approximation d'ordre 2.

Soient la vitesse de phase de l'onde physique  $v_p = \frac{\omega}{k_1}$  et la vitesse de phase de l'onde numérique physique  $\tilde{v}_p = \frac{\omega}{\omega_{1,h}}$  alors le rapport de la vitesse de phase est définie par :

$$q_h = \frac{v_p^2}{\tilde{v}_p^2} = \frac{\omega_{1,h}^2}{k_1^2} = 1 - \frac{k_1^2 h^2}{12} + O(h^4). \quad (2.7.8)$$

De plus en rappelant la formule du facteur de résolution  $N_\lambda = \frac{2\pi S}{kh}$ , et où  $S = 1$  pour une solution en une dimension, nous pouvons exprimer le rapport de la vitesse de phase  $q_h$  en fonction du ratio  $N_\lambda$  par :

$$q_h = 1 - \frac{\pi^2}{3N_\lambda^2} + O\left(\left(\frac{1}{N_\lambda}\right)^4\right). \quad (2.7.9)$$

Donc, l'erreur sur la vitesse de phase de l'onde physique a une décroissance en  $N_\lambda^{-2}$ .

#### La relation de dispersion numérique pour l'ordre $r^G = 1$ :

Pour  $r^G = 1$ , les matrices ont les valeurs suivantes :

$$P_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \exp(ik_1h) & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \quad M_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Après simplification du problème au valeur propre (2.7.10), on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 \cos(hk_1) + 14 & -8 \exp(-ihk_1) - 8 \\ -4 \exp(ihk_1) - 4 & 8 \end{pmatrix} \mathbf{u}_1 = \omega_{1,h}^2 h^2 \mathbf{u}_1. \quad (2.7.10)$$

L'équation caractéristique (déterminant=0) du problème (2.7.10) se présente sous la forme :

$$h^4 \omega_{1,h}^4 - (2 \cos(hk_1) + 22) h^2 \omega_{1,h}^2 - 48(\cos(hk_1) - 1) = 0 \quad (2.7.11)$$

Ce que l'on peut écrire aussi :

$$h^4 \omega_{1,h}^4 + 4h^2 \left( \sin^2 \left( \frac{hk_1}{2} \right) - 6 \right) \omega_{1,h}^2 + 96 \sin^2 \left( \frac{hk_1}{2} \right) = 0 \quad (2.7.12)$$

Ainsi, les solutions pour les valeurs propres sont :

$$\begin{aligned} \omega_{h,1}^2 &= c^2 \omega_{1,h}^2 = 12 - 2 \sin^2 \left( \frac{hk_1}{2} \right) - 2 \sqrt{36 - 36 \sin^2 \left( \frac{hk_1}{2} \right) + \sin^4 \left( \frac{hk_1}{2} \right)} \\ \omega_{h,2}^2 &= c^2 \omega_{1,h}^2 = 12 - 2 \sin^2 \left( \frac{hk_1}{2} \right) + 2 \sqrt{36 - 36 \sin^2 \left( \frac{hk_1}{2} \right) + \sin^4 \left( \frac{hk_1}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (2.7.13)$$

En utilisant les premiers termes du développement limité pour le sinus, nous estimons l'ordre d'approximation de l'erreur de la pulsation physique pour les deux valeurs propres :

$$\begin{aligned} \omega_{h,1}^2 &= c^2 \omega_{1,h}^2 = c^2 k_1^2 \left( 1 - \frac{k_1^4 h^4}{1440} + O(h^6) \right) \\ \omega_{h,2}^2 &= c^2 \omega_{1,h}^2 = c^2 k_1^2 \left( \frac{24}{h^2 k_1^2} - 2 + \frac{h^2 k_1^2}{12} - \frac{h^4 k_1^4}{480} + O(h^6) \right). \end{aligned} \quad (2.7.14)$$

Ainsi, à l'ordre d'approximation  $r^G = 1$ ,  $\omega_{h,1}$  approche la pulsation physique avec une approximation d'ordre 4. Cependant, la présence d'une autre valeur propre  $\omega_{h,2}$  révèle la présence d'ondes parasites, dont l'amplitude est aussi en  $O(h^4)$  (voir la référence [78], cet aspect est explicité plus tard).

Le rapport de la vitesse de phase est définie par :

$$q_h = \frac{v_p^2}{\tilde{v}^2} = \frac{\omega_{1,h}^2}{k_1^2} = 1 - \frac{k_1^4 h^4}{1440} + O(h^6). \quad (2.7.15)$$

Nous pouvons exprimer le rapport de la vitesse de phase  $q_h$  en fonction du facteur de résolution  $N_\lambda$  par :

$$q_h = 1 - \frac{\pi^4}{90 N_\lambda^4} + O\left(\left(\frac{1}{N_\lambda}\right)^6\right). \quad (2.7.16)$$

Dans ce cas, le facteur de résolution n'est plus corrélé au nombre d'inconnues par longueur d'onde mais au nombre de cellules Lobatto-Gauss à l'ordre d'approximation  $r^G = 1$ . Donc, l'erreur sur la vitesse de phase de l'onde physique a une décroissance en  $N_\lambda^{-4}$ .

#### La relation de dispersion numérique pour l'ordre $r^G = 2$ :

Pour  $r^G = 2$ , les matrices de la formule (2.7.1) ont les valeurs suivantes :

$$P_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \exp(ik_1 h) & 0 & 0 \end{pmatrix}, D^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} - \frac{5\sqrt{15}}{36} & \frac{1}{9} & -\frac{5}{9} + \frac{5\sqrt{15}}{36} \\ \frac{5}{36} \sqrt{5}(\sqrt{3} + 2) & -\frac{5\sqrt{5}}{9} & -\frac{5}{36} \sqrt{5}(\sqrt{3} - 2) \\ \frac{5}{36} \sqrt{5}(\sqrt{3} - 2) & \frac{5\sqrt{5}}{9} & -\frac{5}{36} \sqrt{5}(\sqrt{3} + 2) \\ \frac{5}{9} - \frac{5\sqrt{15}}{36} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} + \frac{5\sqrt{15}}{36} \end{pmatrix}, M_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } M_G = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{18} \end{pmatrix}.$$

Après simplification, l'équation (2.7.1) devient :

$$\begin{pmatrix} -2 \cos(k_1 h) + 52 - x & -\frac{5}{2}(a + b \exp(-ik_1 h)) & -\frac{5}{2}(b + a \exp(-ik_1 h)) \\ -(a + b \exp(ik_1 h)) & 20 - x & -10 \\ -(b + a \exp(ik_1 h)) & -10 & 20 - x \end{pmatrix} \mathbf{u}_1 = \omega_{1,h}^2 h^2 \mathbf{u}_1. \quad (2.7.17)$$

avec  $a = 5 + 3\sqrt{5}$  et  $b = 5 - 3\sqrt{5}$ .

L'équation caractéristique du problème (2.7.17) se présente sous la forme :

$$h^6 \omega_{1,h}^6 + 2(\cos(hk_1) - 46)h^4 \omega_{1,h}^4 + 120(\cos(hk_1) + 14)h^2 \omega_{1,h}^2 + 3600(\cos(hk_1) - 1) = 0. \quad (2.7.18)$$

Ce que l'on peut écrire aussi :

$$h^6 \omega_{1,h}^6 - 2h^4 (2 \sin^2 \left( \frac{hk_1}{2} \right) + 45) \omega_{1,h}^4 - 120h^2 (2 \sin^2 \left( \frac{hk_1}{2} \right) - 15) \omega_{1,h}^2 - 7200 \sin^2 \left( \frac{hk_1}{2} \right) = 0. \quad (2.7.19)$$

Malheureusement, la recherche des racines de cette dernière équation par Maple conduit à une formule analytique trop complexe. On va donc proposer une autre solution pour obtenir cet ordre d'approximation.

Reprenons l'équation caractéristique (2.7.18) dans laquelle on réécrit  $h^2 \omega_{1,h}^2$  sous forme d'un développement limité, tel que :

$$h^2 \omega_{1,h}^2 = \sum_{i=0}^n \lambda_i h^i + O(h^{n+1}) \quad (2.7.20)$$

Du fait que dans l'équation caractéristique le développement limité de  $\cos(x)$  ne s'exprime qu'avec des termes pairs de  $h$ , notre solution  $h^2 \omega_{1,h}^2$  ne contiendra pas de termes impairs [29]. Nous pourrions donc

la représenter sous la forme de  $\sum_{i=0}^n \lambda_{2i} h^{2i}$ . La stratégie consiste ainsi, à déterminer les coefficients  $\lambda_{2i}$  en utilisant l'équation (2.7.18) avec un développement limité à l'ordre  $2i$  pour le cosinus.

Pour évaluer  $\lambda_0$ , nous effectuons un développement limité en 0 d'ordre 0 du cosinus dans l'équation (2.7.18), ainsi nous obtenons :

$$\lambda_0^3 + 2(1 - 46)\lambda_0^2 + 120(1 + 14)\lambda_0 + 3600(1 - 1) = 0. \quad (2.7.21)$$

Les solutions de (2.7.21) sont

$$\lambda_{0,1} = 0 \quad \lambda_{0,2} = 30 \quad \lambda_{0,3} = 60. \quad (2.7.22)$$

Nous retrouvons une solution approchant la pulsation physique qui sont obtenue avec la solution  $\lambda_{0,1}$ , les autres solutions correspondent à des ondes parasites. Pour évaluer  $\lambda_2$ , nous effectuons un développement limité en 0 d'ordre 2 de  $\cos(x)$  sur l'équation (2.7.18), ainsi nous obtenons :

$$(\lambda_0 + \lambda_2 h^2)^3 + 2\left(1 - \frac{h^2 k_1^2}{2} - 46\right)(\lambda_0 + \lambda_2 h^2)^2 + 120\left(1 - \frac{h^2 k_1^2}{2} + 14\right)(\lambda_0 + \lambda_2 h^2) + 3600\left(1 - \frac{h^2 k_1^2}{2} - 1\right) = 0. \quad (2.7.23)$$

En ne conservant que les termes associés à  $h^2$ , nous avons :

$$3\lambda_0^2 \lambda_2 h^2 - h^2 k_1^2 \lambda_0^2 - 180\lambda_0 \lambda_2 h^2 - 60h^2 k_1^2 \lambda_0 + 1800\lambda_2 h^2 - 1800k_1^2 h^2 = 0, \quad (2.7.24)$$

$$\lambda_2(3\lambda_0^2 - 180\lambda_0 + 1800) = (\lambda_0^2 + 60\lambda_0 + 1800)k_1^2.$$

En utilisant les solutions (2.7.22), nous obtenons :

$$\lambda_{2,1} = k_1^2 \quad \lambda_{2,2} = -5k_1^2 \quad \lambda_{2,3} = 5k_1^2. \quad (2.7.25)$$

En procédant de la même manière nous pouvons établir les coefficients jusqu'à l'ordre 8, où nous avons la seconde valeur non nulle pour la première valeur propre qui correspond à la pulsation physique.

$$\begin{aligned} \lambda_{4,1} &= 0 & \lambda_{4,2} &= \frac{13}{12}k_1^4 & \lambda_{4,3} &= -\frac{7}{6}k_1^4, \\ \lambda_{6,1} &= 0 & \lambda_{6,2} &= -\frac{137}{360}k_1^6 & \lambda_{6,3} &= \frac{23}{60}k_1^6, \\ \lambda_{8,1} &= -\frac{1}{302400}k_1^8 & \lambda_{8,2} &= \frac{51259}{302400}k_1^8 & \lambda_{8,3} &= \frac{1899}{11200}k_1^8. \end{aligned} \quad (2.7.26)$$

Enfin, nous pouvons exprimer les valeurs propres  $h^2\omega_{1,h}^2$  du problème (2.7.18) à l'aide de (2.7.20), sous la forme :

$$\begin{aligned} \omega_{h,1}^2 &= c^2\omega_{1,h}^2 = c^2k_1^2\left(1 - \frac{k_1^6h^6}{302400} + O(k_1^8h^8)\right), \\ \omega_{h,2}^2 &= c^2\omega_{1,h}^2 = c^2k_1^2\left(\frac{30}{h^2k_1^2} - 5 + \frac{13}{12}h^2k_1^2 - \frac{137}{360}h^4k_1^4 + \frac{51259}{302400}h^6k_1^6 + O(h^8)\right), \\ \omega_{h,3}^2 &= c^2\omega_{1,h}^2 = c^2k_1^2\left(\frac{60}{h^2k_1^2} + 5 - \frac{7}{6}h^2k_1^2 - \frac{23}{60}h^4k_1^4 + \frac{1899}{11200}h^6k_1^6 + O(h^8)\right), \end{aligned} \quad (2.7.27)$$

Ainsi, à l'ordre d'approximation  $r^G = 2$ ,  $\omega_{h,1}$  approche la pulsation physique avec une approximation d'ordre 6. Cependant, la présence de deux autres valeurs propres  $\omega_{h,2}$  et  $\omega_{h,3}$  révèle aussi la présence d'ondes parasites, dont l'amplitude est respectivement en  $O(h^6)$  et  $O(h^5)$  (voir [78]).

Le rapport de la vitesse de phase est définie par :

$$q_h = \frac{v_p^2}{\tilde{v}_p^2} = \frac{\omega_{1,h}^2}{k_1^2} = 1 - \frac{k_1^6h^6}{302400} + O(h^8). \quad (2.7.28)$$

Nous pouvons exprimer le rapport de la vitesse de phase  $q_h$  en fonction du facteur de résolution  $N_\lambda$  par :

$$q_h = 1 - \frac{\pi^6}{4725N_\lambda^6} + O\left(\left(\frac{1}{N_\lambda}\right)^8\right). \quad (2.7.29)$$

Dans ce cas, comme pour  $r^G = 1$ , le facteur de résolution est corrélé au nombre de cellule Lobatto-Gauss à l'ordre d'approximation  $r^G = 2$ . L'erreur sur la vitesse de phase de l'onde physique a une décroissance en  $N_\lambda^{-6}$ .

### **La relation de dispersion numérique pour l'ordre $r^G$ quelconque :**

La recherche des valeurs propres ne peut plus être effectuée à l'aide d'un logiciel formel comme Maple, la complexité grandissante ne permet plus de faciliter le calcul. Toutefois, en utilisant la technique de résolution employée pour l'ordre d'approximation  $r^G = 2$ , nous pouvons estimer que l'approche de la pulsation physique vérifie l'ordre d'approximation suivant :

$$\omega_h = \omega + O(h^{2r^G+2}). \quad (2.7.30)$$

Pour valider cette estimation, nous proposons d'utiliser le corollaire suivant (2.7.1) qui permet de reprendre les travaux et les conclusions associés à l'analyse de la dispersion pour la seconde famille d'élément de Nédélec, dans la thèse [29]. De plus, un calcul de l'amplitude des modes parasites pour l'équation des ondes est réalisé dans la thèse [78] qui montre que c'est la multiplicité des degrés de liberté qui provoque l'apparition de modes parasites et que ceux-ci ne détériorent pas l'approximation sur maillage cartésien.

**Corollaire 2.7.1.** *Soit un schéma numérique défini à partir de la seconde famille des type des éléments de Nédélec [61], qui utilise la même discrétisation polynomiale pour chaque direction. Les fonctions de base et la discrétisation des champs électriques et magnétiques utilisent des polynômes de Lagrange construits avec les points de Gauss-Lobatto. L'étude du schéma construit avec la seconde famille des type des éléments de Nédélec est réalisée dans la première partie de la thèse [65].*

*Alors, la relation (2.7.31) suivante (issu du théorème 2.7.1) est équivalente au problème des valeurs propres pour l'étude de dispersion du schéma ainsi défini, c'est à dire*

$$\begin{aligned} P_{x_1}^* D^{(1)} M_G^{-1} D^{(1)T} P_{x_1} \mathbf{u}_1 - \omega_{1,h}^2 P_{x_1}^* M_L P_{x_1} \mathbf{u}_1 &= 0 \\ \iff \\ (P_{x_1}^* M_L P_{x_1})^{-1} P_{x_1}^* x D^{(2)} M_L^{-1} D^{(2)T} P_{x_1} \mathbf{u}_1 - \omega_{1,h}^2 \mathbf{u}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (2.7.31)$$

où les matrices  $P_{x_1}$  et  $M_L$  sont construites comme dans le théorème 2.7.1. La matrice  $D^{(2)}$  est une matrice de dimension  $(r+2) \times (r+2)$  telle que  $D_{i,j}^{(2)} = \int_0^h \partial_x L_i^{GL}(x) L_j^{GL}(x) dx$ . Nous avons des relations identiques pour  $\omega_{2,h}$  et  $\omega_{3,h}$  en remplaçant respectivement  $x_1$  par  $x_2$  et  $x_3$  dans (2.7.31).

**Preuve du corollaire 2.7.1.**

La démonstration est immédiate, en utilisant le résultat de la proposition 2.5.2, nous montrons que  $D^{(1)} M_G^{-1} D^{(1)T} = D^{(2)} M_L^{-1} D^{(2)T}$ . Par construction, la matrice  $P_{x_1}^* M_L P_{x_1}$  est inversible.

□

Les taux de convergence de l'erreur de dispersion obtenus expérimentalement dans la thèse de T. Volpert sont en  $O(h^{r^G+2})$ , cette différence avec notre estimation est explicable par la vitesse de convergence des ordres élevés. En effet, nous avons réalisé cette même étude numérique et nous avons conclu que les résultats des ordres les plus élevés associés à des petites mailles ont une erreur si faible qu'elle est "parasitée" par l'erreur de troncature. Il faut faire des calculs très précis pour obtenir numériquement le taux de convergence théorique  $h^{2r^G+2}$  que l'on a.

### L'analyse de la stabilité à partir de l'analyse par ondes planes

Enfin, le critère de stabilité, proposé dans (2.5.41), est retrouvé lorsque nous ajoutons la discrétisation en temps à la relation de dispersion (2.7.4). On obtient :

$$\frac{\Delta t}{h} \leq \frac{2}{c_0 \max_h(|\omega_h|)} = \frac{1}{c_0 \sqrt{3}} \text{CFL}_{1D}, \quad (2.7.32)$$

où la  $\text{CFL}_{1D}$  correspond à la condition de stabilité du schéma pour une direction (identique à celle du schéma 1D) établie dans 2.5.4. Ceci conforte que le fait que la condition de stabilité donnée dans 2.5.4 semble optimale.

## 2.8 Étude du coût de la méthode FEM par rapport au schéma de Yee

Dans ce paragraphe, nous allons évaluer les coûts de l'algorithme FEM en temps de calcul et en place mémoire et puis comparer ceux-ci avec ceux du schéma de Yee [88]. Pour chaque schéma, notre estimation du temps de calcul est réalisée en comptabilisant les opérations élémentaires (addition, soustraction et multiplication) nécessaires à chaque avancée d'un pas de temps. La place mémoire est, quant à elle, évaluée en estimant le stockage des variables liées aux schémas. Pour cela, nous considérons uniquement les inconnues  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ . Ces inconnues sont liées au nombre de cellules du domaine. Par ailleurs, celui-ci est constitué d'un maillage structuré cartésien. On fait l'hypothèse que ce maillage possède  $n_{cell}$  mailles par directions que nous supposons identiques ; ainsi le nombre total de mailles est  $n_{cell}^3$ . De plus, pour le schéma FEM, nous supposons des ordres d'approximation spatiale identiques dans les 3 directions. Ces ordres sont donnés par  $r^G$  et  $r^{GL}$  où  $r^G + 1 = r^{GL}$ .

### 2.8.1 Étude du stockage

L'étude du stockage est effectuée pour les deux schémas sur le nombre d'inconnues en fonction du nombre de mailles. Les matrices de masse et de rigidité ne sont pas considérées pour effectuer le coût mémoire car celles-ci ne sont jamais stockées.

#### Stockage du schéma de Yee

Les inconnues correspondent aux degrés de liberté des champs électriques et magnétiques et sont localisées sur les arêtes et aux centres des cellules, tel que présenté sur la figure 2.18. Ainsi, il est facile de montrer que le nombre total d'inconnues  $S_{\text{FDTD}}$  est donné par :

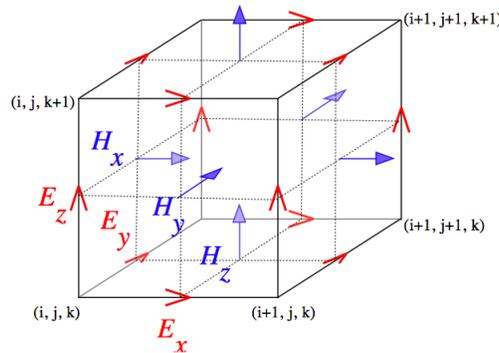


figure 2.18 – Cellule élémentaire du schéma de Yee.

$$S_{\text{FDTD}}(n_{\text{cell}}) = \underbrace{3(n_{\text{cell}} + 1)^2 n_{\text{cell}}}_{\text{Champs électriques}} + \underbrace{3(n_{\text{cell}} + 1)n_{\text{cell}}^2}_{\text{Champs magnétiques}}, \quad (2.8.1)$$

où  $n_{\text{cell}}$  est le nombre de cellules par direction.

### Stockage du schéma FEM

Le décompte des inconnues est effectué selon leur positionnement dans la maille. Les inconnues positionnées sur les surfaces ou sur les arêtes ne doivent être comptées qu'une seule fois. En effet, nous avons choisi de ne pas dédoubler ces degrés de liberté dans l'implémentation informatique. Ainsi, pour les champs électriques nous avons :

- Les degrés de liberté internes dépendent uniquement des ordres d'approximation utilisés et donc chaque cellule a  $E_1(r^G) = 3(r^G + 1)(r^G)^2$  inconnues positionnées à l'intérieur ;
- Les degrés de liberté positionnés à l'intérieur des surfaces sur chaque cellule sont au nombre de  $E_2(r^G) = 3(r^G + 1)r^G$  ;
- Les degrés de liberté positionnés sur les arêtes sur chaque cellule sont au nombre de  $E_3(r^G) = 3(r^G + 1)$ .

Pour les champs magnétiques, nous avons :

- Les degrés de liberté internes pour chaque cellule sont donnés par  $H_1(r^G) = 3(r^G + 1)^2 r^G$  ;
- Les degrés de liberté positionnés à l'intérieur des surfaces sont donnés par  $H_2(r^G) = 3(r^G + 1)^2$ .

Le calcul du stockage total pour la méthode FEM est donné par :

$$S_{\text{FEM}}(n_{\text{cell}}, r^G) = n_{\text{cell}}^3 E_1(r^G) + (n_{\text{cell}} + 1)n_{\text{cell}}^2 E_2(r^G) + (n_{\text{cell}} + 1)^2 n_{\text{cell}} E_3(r^G) \\ + n_{\text{cell}}^3 H_1(r^G) + (n_{\text{cell}} + 1)n_{\text{cell}}^2 H_2(r^G) + (n_{\text{cell}} + 1)^2 n_{\text{cell}} H_3(r^G). \quad (2.8.2)$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$S_{\text{FEM}}(n_{\text{cell}}, r^G) = 3n_{\text{cell}}^3 (r^G + 1)(r^G)^2 + 3(n_{\text{cell}} + 1)n_{\text{cell}}^2 (r^G + 1)r^G + 3(n_{\text{cell}} + 1)^2 n_{\text{cell}} (r^G + 1) \\ + 3n_{\text{cell}}^3 (r^G + 1)^2 r^G + 3(n_{\text{cell}} + 1)n_{\text{cell}}^2 (r^G + 1)^2. \quad (2.8.3)$$

**Remarque 2.14.** En posant  $r^G = 0$ , nous retrouvons  $S_{\text{FEM}}(n_{\text{cell}}, 0) = S_{\text{FDTD}}(n_{\text{cell}})$ .

### Comparaison des stockages

Dans le cas d'un maillage donné, on note que le nombre d'inconnues dans la méthode FEM pour  $r^G > 0$  est beaucoup plus important que pour le schéma de Yee. Toutefois, si l'on considère dans cette augmentation d'ordre, un nombre d'inconnues par longueur d'onde identique dans les deux schémas, alors, la remarque précédente n'est plus tout à fait vraie. En effet, prenons par exemple, un ordre  $r^G = 3$  pour la méthode FEM et faisons varier le nombre  $n$  de cellules du maillage. Alors, à partir, d'un certain nombre de mailles, le nombre d'inconnues dans la méthode FEM ( $n/(3+1)$ ) est plus petit que le nombre d'inconnues  $n$  du schéma de Yee.

Donc, il apparaît dans nos simulation, que le schéma FEM devient vraiment intéressant lorsque, pour une précision identique à celle du schéma de Yee, on augmente l'ordre d'approximation spatiale tout en diminuant le nombre de cellules dans le maillage. Par exemple, pour montrer le gain en termes de stockage, on a augmenté l'ordre d'approximation spatiale tout en diminuant le nombre de cellule, nous avons pour un maillage donné constitué de 100 mailles :

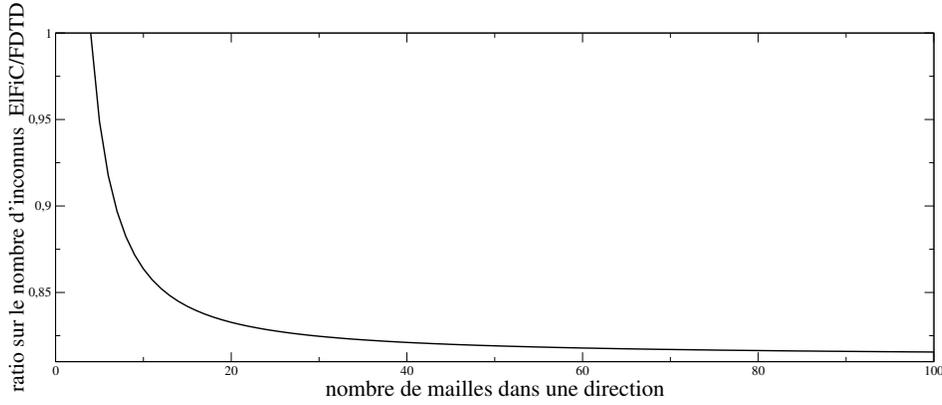


figure 2.19 – Ratio  $\frac{S_{FEM}(n_{cell}/(r^G+1),r^G)}{S_{FDTD}(n_{cell})}$  pour  $r^G = 3$  et  $n_{cell}$  variant de 4 à 100 mailles.

### 2.8.2 Étude du nombre d'opérations pour effectuer une itération temporelle

L'estimation du nombre d'opérations pour chaque schéma est réalisée en décomposant une itération de la boucle temporelle en opérations élémentaires. Le coût des opérations élémentaires est estimé en cycles d'horloge. Le nombre de cycles d'horloge est similaire pour l'addition et la soustraction, alors que la multiplication est un peu plus coûteuse. Les valeurs de temps associées à chaque cycle dépendent de la technologie du type de processeur utilisé. En conséquence, nous effectuons l'évaluation des coûts en termes de cycles d'horloge et tel que :

- $c_a$  : nombre de cycles d'horloge de l'addition ou la soustraction ;
- $c_m$  : nombre de cycles d'horloge de la multiplication.

Le nombre de cycles d'horloge d'une division est très important par rapport à la multiplication, aussi, nous considérons que toutes les valeurs à diviser dans le calcul sont stockées sous leurs formes inverses, par conséquent, les divisions sont considérées comme une opération de multiplication en termes de cycles d'horloge.

#### Nombre d'opérations pour le schéma de Yee

L'algorithme du schéma de Yee requiert un nombre d'opérations facilement estimable. En effet, pour chaque composante de champ, selon une direction, l'évaluation du rotationnel nécessite 3 soustractions et 2 multiplications correspondant aux calculs des deux dérivées partielles en espace par la méthode des différences finies. A ces opérations s'ajoute la mise à jour du champ qui nécessite une soustraction et une multiplication par  $\frac{\Delta t}{\epsilon}$ . Le nombre d'opération total pour un domaine de calcul est alors :

$$C_{FDTD}(n_{cell}) = \underbrace{3(4 * c_a + 3 * c_m)(n_{cell} + 1)^2 n_{cell}}_{\text{Champs électriques}} + \underbrace{3(4 * c_a + 3 * c_m)(n_{cell} + 1) n_{cell}^2}_{\text{Champs magnétiques}} \quad (2.8.4)$$

#### Nombre d'opérations pour le schéma FEM

La continuité tangentielle des champs électriques et la continuité normale des champs magnétiques entre les mailles nécessitent des calculs supplémentaires pour prendre en compte les composantes des champs contributeurs présentes dans les mailles voisines. L'écriture du schéma dans les sections 2.4.2 et 2.4.3 a été réalisée en distinguant la position des degrés de liberté dans la cellule. Les calculs sont différents si l'inconnue évaluée se situe à l'intérieur, sur une face ou sur une arête de la cellule. Par conséquent, nous utilisons la même distinction pour évaluer le nombre d'opérations pour le schéma FEM.

Ainsi, l'évaluation du coût calcul pour une inconnue d'un champ électrique se détermine de la manière suivante :

- Les degrés de liberté internes aux mailles requièrent un minimum de contributeurs et dépendent des ordres d'approximation spatiale selon chaque direction :

$$\begin{aligned} E_1(r^G) &= (2r^G + 2)c_a + 2(2(r^G + 1) + 1)c_m, \\ &= (2r^G + 2)c_a + (2r^G + 3)c_m; \end{aligned}$$

- Les degrés de liberté qui interagissent avec deux mailles, tels que les inconnues présentes sur les faces ou sur les arêtes à la frontière du domaine :

$$\begin{aligned} E_2(r^G) &= (4r^G + 3)c_a + 3(2(r^G + 1) + 1)c_m, \\ &= (4r^G + 3)c_a + (3r^G + 4)c_m; \end{aligned}$$

- Les degrés de liberté qui interagissent avec quatre mailles, tels que les inconnues sur une arête :

$$\begin{aligned} E_3(r^G) &= 4(2r^G + 1)c_a + 4(2(r^G + 1) + 1)c_m, \\ &= (8r^G + 4)c_a + (4r^G + 5)c_m. \end{aligned}$$

Pour les champs magnétiques, nous avons :

- Les degrés de liberté associés aux champs magnétiques nécessitent le nombre d'opérations suivant :

$$\begin{aligned} H_1(r^G) &= (2(r^G + 1) + 2)c_a + (2(r^G + 2) + 1)c_m, \\ &= (2r^G + 4)c_a + (2r^G + 5)c_m, \end{aligned}$$

La présentation de la discrétisation des équations de Maxwell-Faraday pour le schéma FEM a montré que tous les contributeurs du calcul des champs magnétiques sont présents dans la même maille. Ainsi, il n'y a pas de distinction de positionnement à faire.

L'évaluation du coût calcul est obtenue en additionnant le nombre d'opérations nécessaire à l'évaluation des champs comme décrit précédemment, on obtient alors :

$$\begin{aligned} C_{\text{FEM}}(n_{\text{cell}}, r^G) &= 3(n_{\text{cell}}^3(r^G + 1)(r^G)^2 + 2(n_{\text{cell}} + 1)n_{\text{cell}}(r^G + 1)r^G + 2(n_{\text{cell}} + 1)(r^G + 1))E_1(r^G) \\ &\quad + 3((n_{\text{cell}} - 1)^3 r^G + 2(n_{\text{cell}} - 1)n_{\text{cell}})(r^G + 1)E_2(r^G) + 3(n_{\text{cell}} - 1)^3(r^G + 1)E_3(r^G) \\ &\quad + 3(n_{\text{cell}}^3(r^G + 1)^3 + n_{\text{cell}}^2(r^G + 1)^2)H_1(r^G). \end{aligned} \tag{2.8.5}$$

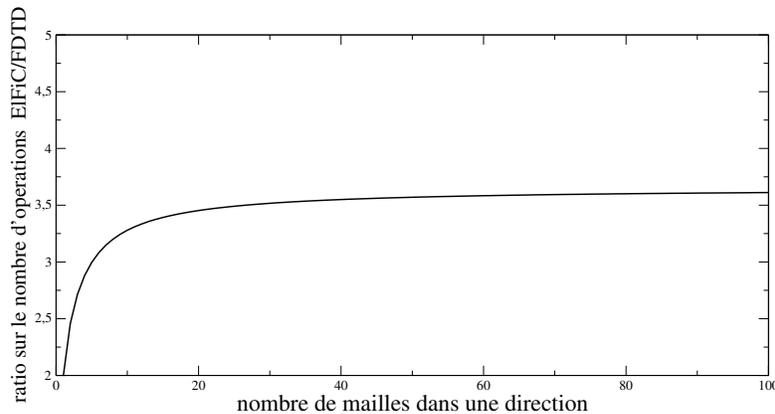


figure 2.20 – Rapport  $\frac{C_{\text{FEM}}(n_{\text{cell}}, r^G)}{C_{\text{FDTD}}(n_{\text{cell}})}$  pour  $r^G = 0$  et  $n_{\text{cell}}$  variant de 1 à 100 mailles.

### Comparaison sur les nombres d'opérations

**Remarque 2.15.** En posant  $r^G = 0$ , nous avons  $C_{FEM}(n_{cell}, 0) \approx 3.6C_{FDTD}(n_{cell})$ . A titre d’illustration, la courbe comparative du coût calcul des deux schémas de la figure 2.20 montre un comportement asymptotique qui, effectivement, tend rapidement vers un peu plus de 4 fois plus d’opérations pour la méthode FEM par rapport à la méthode FDTD. Ce coût calcul, plus important pour le schéma FEM à  $r^G = 0$  par rapport au schéma de Yee, peut s’expliquer par une écriture et une implémentation informatique non optimale pour celui-ci. En fait, dans tous les cas, on fait comme si le schéma FEM avait des ordres variables dans tout le domaine, donc, on fait apparaître des opérations inutiles dans le cas  $r^G = 0$ .

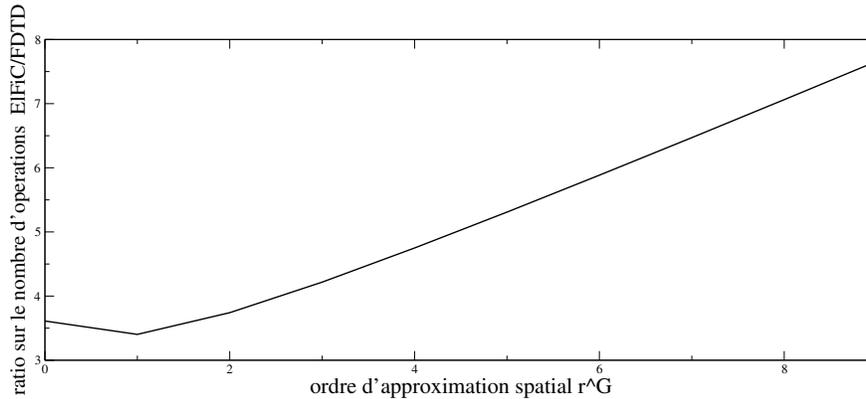


figure 2.21 – Rapport  $\frac{C_{FEM}(n_{cell}/(r^G+1), r^G)}{C_{FDTD}(n_{cell})}$  pour  $n_{cell} = 100$  mailles et  $r^G$  variant de 0 à 10.

La courbe de la figure 2.21 montre l’évolution du coût calculs lorsque l’on augmente l’ordre d’approximation spatiale dans le schéma FEM tout en conservant un nombre d’inconnues global identique. On note sur cette courbe que le nombre d’opérations n’est pas constant pour un nombre d’inconnues global identique en fonction des différents ordres d’approximation spatiales.

**Remarque 2.16.** Dans les résultats présentés, il faut noter que le nombre d’opérations élémentaires d’un algorithme n’est pas une représentation exacte du temps calcul. En effet, les capacités des fonctions d’optimisation proposées par les compilateurs et les capacités des processeurs permettent un gain de temps CPU non quantifiable en amont.

Dans ce comparatif entre schémas, la méthode FEM a été utilisée pour différents ordres d’approximation spatiale. Dans ces choix, nous n’avons jamais cherché à optimiser les ordres et les pas d’espace de façon à avoir une solution optimale. Dans le paragraphe suivant, nous allons nous intéresser plus particulièrement à ce point.

## 2.9 Stratégie d’affectation d’ordre d’approximation spatiale en fonction du pas d’espace pour une précision donnée

### 2.9.1 Introduction

Dans ce paragraphe, nous proposons une stratégie d’affectation des ordres d’approximation spatiale en fonction du pas d’espace pour une précision donnée. L’objectif est de fournir à un utilisateur de la méthode FEM une solution automatique pour affecter les ordres d’approximation spatiale à une cellule.

Le schéma de Yee reste actuellement la référence en matière de simulation numérique dans le domaine temporel. L’étude du schéma FEM a été motivée par l’amélioration de ce dernier. Pour cela, dans les

paragraphes précédents, nous avons présenté un schéma FEM prenant en compte des pas d’espace variables par direction et des ordres d’approximation spatiale variables, qui apporte les améliorations suivantes par rapport au schéma de Yee :

- des meilleurs performances informatiques (temps de calcul et place mémoire) avec une meilleure précision numérique en augmentant le pas d’espace et l’ordre d’approximation spatiale simultanément,
- une réduction du temps calcul à une précision numérique, au moins identique au maillage initial, en fusionnant des mailles par direction,
- une réponse partielle au problème lié aux contraintes des géométries par l’utilisation d’un maillage à pas d’espace variable.

Toutefois, une simulation efficace de ce schéma sur maillage structuré à pas variable nécessite d’affecter un ordre d’approximation spatiale directionnelle à chaque cellule, selon un critère à définir. Pour déterminer ce critère, on s’inspire de ce qui est fait sur le schéma de Yee. Les publications traitant de ce problème, liées au schéma de Yee, montrent que l’on prend un pas d’espace en  $\lambda/N_\lambda$  où  $N_\lambda$  est le facteur de résolution, choisi de façon à garantir une erreur de dispersion souhaitée. Dans le cas du schéma de Yee, cette estimation est donnée d’une manière analytique (voir paragraphe 1.2). Grâce à cette estimation, on choisit généralement  $N_\lambda$  de la manière suivante :

- $N_\lambda = 5$  permet d’obtenir une solution grossière rapidement ;
- $N_\lambda = 10$  est généralement utilisé, car cette solution offre un bon compromis entre rapidité de calcul et qualité de la solution pour les simulations inférieures à  $50 \sim 150\lambda$  en dimension spatiale ou temps d’observation  $T$  ( $T = \lambda/c_0$  en seconde) ;
- $N_\lambda = 20$  est utilisé comme  $N_\lambda = 10$  pour atteindre des simulations inférieures à  $300\lambda$ , ou pour réduire la dispersion numérique sur  $50 \sim 150\lambda$  et augmenter la qualité de la solution ;
- $N_\lambda = 40$  ou plus sont utilisés pour les simulations où une erreur importante sur la phase n’est pas acceptable (par exemple des études dans des cavités métalliques ou des antennes possédant une géométrie complexe).

En ce qui concerne le schéma FEM, cette erreur de dispersion dépend de l’ordre et de la taille affectés à la cellule. Donc, si l’on fixe une certaine erreur de dispersion, on devrait obtenir un ordre d’approximation spatiale et une taille pour la cellule. Cependant, pour le schéma FEM, nous n’avons pas dans tous les cas une erreur de dispersion donnée sous forme analytique, il faudra donc la déterminer sous forme numérique pour appliquer le même type de stratégie développé dans le schéma de Yee.

Dans le détail de cette démarche, nous allons d’abord regarder comment se comporte cette erreur de dispersion en fonction de la taille (ou de  $N_\lambda$ ) et de l’ordre de la cellule pour le schéma FEM, puis nous allons présenter une première stratégie dans le cas où le maillage est fixé. Ensuite, nous allons améliorer cette stratégie en supposant que l’on peut modifier le maillage.

### 2.9.2 Étude du comportement de l’erreur de dispersion de la méthode FEM en fonction de l’ordre et $N_\lambda$

Tout d’abord, nous allons étudier l’évolution de l’erreur de dispersion dans le cas où l’on prend un ordre d’approximation spatiale  $r^G = 0$  et  $N_\lambda = 10, 20$  et  $40$ . Pour réaliser cette étude, nous allons simuler un mode  $(4, 4, 0)$ , dans une cavité de dimension  $1m \times 1m \times 1m$ , pour un temps d’observation  $T = 400\lambda/c_0$  s où, la longueur d’onde  $\lambda = 0.5 m$  et  $c_0$  définit la vitesse des ondes dans le milieu. La figure 2.22 illustre le déphasage du mode par rapport à une solution analytique, et en fonction des facteurs de résolution  $N_\lambda = 10, 20$  et  $40$ .

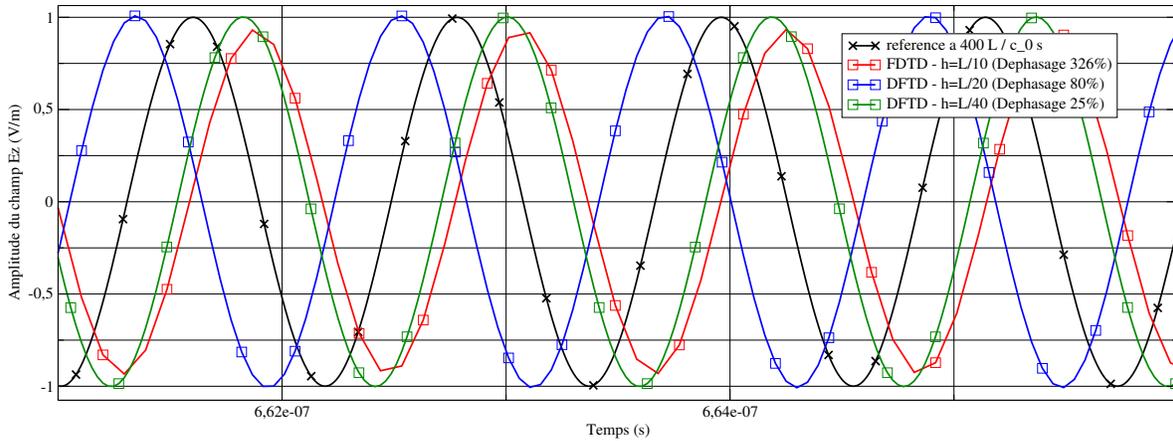


figure 2.22 – Mode de cavité évaluée par le schéma FEM pour  $r^G = 0$  en fonction des facteurs de résolution  $N_\lambda = 10, 20$  et  $40$ .

On note sur cette figure, d’une part que, l’erreur de dispersion est dans ce cas similaire à celle du schéma de Yee, et d’autre part, que celle-ci est d’autant plus élevée que  $N_\lambda$  est petit, ce qui est conforme à ce que l’on obtient dans la littérature.

Dans une deuxième configuration, nous allons nous intéresser à réaliser un cas test plus proche de ce que l’on peut faire avec la méthode FEM. Pour cela, on va calculer l’erreur de dispersion sur le même exemple (mode de cavité) en faisant varier l’ordre d’approximation spatiale  $r^G = 1$  à  $4$  et en prenant un pas d’espace  $h = \lambda/10(r^G + 1)$  qui soit fonction de cet ordre d’approximation. En faisant cela, quelque soit l’ordre d’approximation, on a un nombre d’inconnues similaire. Ce choix est effectué de manière à garantir un facteur de résolution analogue quelque soit l’ordre d’approximation choisi.

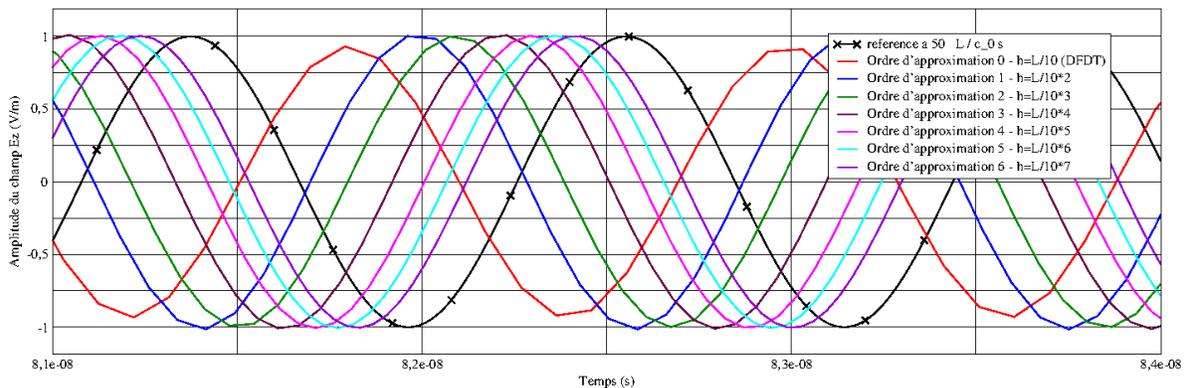


figure 2.23 – Déphasage du mode de cavité, évoluant pendant  $50\lambda/c_0$  s en fonction des ordres d’approximation  $r^G = 0$  à  $6$  et du pas d’espace  $h = \lambda/10(r^G + 1)$ , effectué par le schéma FEM.

La figure 2.23 montre le déphasage d’un mode de cavité en fonction des ordres d’approximation spatiale allant de  $r^G = 0$  à  $6$ . On voit alors que le déphasage le moins important est donné pour l’ordre le plus élevé, avec un coût calcul et place mémoire qui croît nettement moins que pour la première configuration.

Dans une simulation, généralement les maillages sont constitués d’un ensemble de cellules non homogènes en taille. Pour la méthode FEM, la stratégie d’affectation d’ordre consistera donc plutôt à affecter localement un ordre d’approximation spatiale suivant la taille de la cellule, plutôt qu’affecter un ordre

global (à toutes les cellules), correspondant à la cellule la plus grande.

Dans le paragraphe suivant, on va maintenant s’intéresser à la façon de choisir cet ordre d’approximation spatiale.

### 2.9.3 Stratégie d’affectation d’ordre en fonction d’un maillage donné

Comme on l’a déjà vu pour le schéma de Yee, le choix du pas d’espace dépend de l’erreur de dispersion que l’on souhaite. Pour le schéma FEM, l’erreur de dispersion souhaitée dépend de l’ordre d’approximation spatiale et de  $N_\lambda$ . Donc, lorsqu’on a un maillage donné on connaît  $N_\lambda$  et on peut facilement remonter à  $r^G$  si l’on connaît l’erreur de dispersion souhaitée. Malheureusement, comme on l’a vu dans le paragraphe 2.7 où on analyse l’erreur de dispersion, il est très difficile d’avoir une formule analytique de celle-ci en fonction de  $r^G$  et  $N_\lambda$ . Donc, pour pouvoir appliquer notre stratégie, il faudrait que l’on tabule pour plusieurs valeurs de  $N_\lambda$  et  $r^G$ , l’erreur de dispersion du schéma FEM, que l’on obtiendrait en effectuant des simulations numériques. Le coût d’une telle simulation est énorme et impossible, c’est pourquoi nous proposons une stratégie alternative.

Si l’on considère une approche à partir de l’erreur de dispersion, on note qu’il est assez facile d’obtenir une majoration analytique dépendante de  $r^G$  et  $N_\lambda$  de cette erreur, tout en restant représentative de celle-ci. On peut donc, à partir de cette nouvelle valeur, déterminer assez simplement pour un  $h$  donné, le  $r^G$  optimal. Du fait que  $r^G$  est un entier, on n’a pas pour celui-ci une valeur suffisamment précise pour obtenir exactement l’erreur de dispersion souhaitée, mais une valeur qui est au plus égale à celle-ci. Il s’avère que si l’on procède comme cela, les valeurs de  $r^G$  déterminées sont relativement surestimées. Ce qui induit, de par la CFL du schéma, un pas de temps pouvant être petit. Ceci entraîne un coût calcul assez important dans la simulation FEM.

Pour palier à cela, on choisit le fait que toutes les cellules doivent avoir le même pas de temps, le pas qui sert de référence est lié à la cellule la plus contraignante sur le critère de stabilité. Et on détermine alors, pour chaque cellule l’ordre d’approximation pour avoir le même pas de temps. Cette stratégie se fait au détriment de l’erreur de dispersion, mais permet un gain important en coût calcul et place mémoire. D’un point de vue numérique, on peut montrer, qu’en fait, l’erreur de dispersion souhaitée n’est pas trop altérée. Ceci n’est pas tout à fait vrai dans le cadre d’un maillage homogène, comme on peut le montrer numériquement.

Dans ce paragraphe, nous avons supposé que le maillage était fixe, et nous n’avons pas cherché à optimiser les pas d’espace, pour améliorer les performances de la méthode FEM. Dans le paragraphe suivant, nous allons proposer, à partir de la stratégie précédente, une stratégie basée sur la conservation d’un pas temporel identique sur tout le domaine, qui prend en compte un choix de pas d’espace et un ordre  $r^G$  optimal pour améliorer les coûts calculs de la méthode FEM.

### 2.9.4 Stratégie de définition de maillage et d’affectation d’ordre d’approximation spatiale pour optimiser les coûts de la méthode FEM

Dans ce paragraphe, nous allons proposer une stratégie afin d’améliorer la solution proposée précédemment sur maillage fixe. En effet, pour un problème donné, il est naturel de chercher à la fois un maillage et des ordres d’approximation spatiale, liés à celui-ci, optimaux pour la méthode FEM, plutôt que de partir d’un maillage indépendant de celle-ci.

L’idée que l’on propose, est toujours basée sur les simulations que l’on effectue avec le schéma de Yee. Dans ce cas là, on considère généralement un maillage uniforme, et on choisit une taille de maille donnée par  $\lambda/N_\lambda$ , suivant la précision que l’on veut, cette dernière est essentiellement déterminée par l’erreur de dispersion, comme il a été précisé dans les paragraphes précédents.

A partir de ce maillage, on définit des zones d’espace libre, en réalisant une description minimale de la géométrie, et pour lesquelles on va essayer d’augmenter le pas d’espace tout en conservant au moins la même précision que le schéma de Yee. Ceci va nécessairement impliquer d’augmenter l’ordre d’approximation spatiale dans ces zones. Il est à noter que dans cette stratégie, on ne va pas chercher à améliorer la précision (ce qui peut être fait en modifiant le facteur de résolution  $N_\lambda$  du schéma de Yee), mais à optimiser le coût de calcul et la place mémoire pour une précision au moins identique à la méthode de Yee.

L’affectation des tailles des cellules et de l’ordre d’approximation spatiale dans les zones libres va être soumise à la recherche d’un pas de temps  $\Delta t$  identique à celui du schéma de Yee sur le maillage initial. Le processus de construction des cellules dans chaque zone libre sera défini de la manière suivante.

Avant de préciser l’algorithme, nous donnons quelques hypothèses : on suppose que la taille de la zone libre est égale à  $L$ , on pourra donc choisir un pas spatial  $h$  compris entre  $h_{Yee}$  et  $L$ . A l’aide du pas d’espace  $h_{Yee}$  du schéma de Yee, on peut évaluer le pas de temps optimal  $\Delta t_{Yee} = \frac{h_{Yee}}{c_0\sqrt{3}}$ . Et à l’aide du pas spatial  $h$  et d’un ordre  $r$  on peut évaluer le pas de temps optimal  $\Delta t_{FEM}$ . Ensuite, en ce qui concerne les ordres, on va se fixer un  $r_{max}$  et donc les ordres d’approximation spatiale  $r$  seront compris entre 0 et  $r_{max}$ , et on a un  $\epsilon$  que l’on précisera plus tard.

L’algorithme sera alors :

- Nous commençons par prendre  $r = r_{max}$ ,  $h = L$ ,  $i = 1$  et nous évaluons  $\Delta t_{Yee}$  à partir de  $\lambda/N_\lambda$  ;
- A chaque étape du processus :
  - A partir de  $r$  et  $h$  nous évaluons un  $\Delta t_{FEM}$  ;
  - Si  $\Delta t_{Yee} > \Delta t_{FEM}$  alors  
le couple  $(r, h)$  est trop contraignant, donc, on diminue l’ordre  $r = r - 1$  ;
  - sinon, si  $\Delta t_{Yee} + \epsilon \leq \Delta t_{FEM}$  alors  
il n’y a pas de couple  $(r, h)$  optimal, donc, on recommence pour une nouvelle valeur  $h$  avec  $i = i + 1$ ,  $h = h/i$  et  $r = r_{max}$  ;
  - sinon, si  $\Delta t_{Yee} \leq \Delta t_{FEM}$  alors  
le couple  $(r, h)$  est le meilleur candidat, on termine le processus ;
- fin du processus.

**Remarque 2.17.** *Dans l’algorithme précédent, nous quittons le processus dès qu’on trouve une valeur qui satisfait nos critères. On sait que cette valeur est optimale au sens des performances de calculs et place mémoire, car celle-ci, par construction de l’algorithme, aura l’ordre d’approximation spatiale le plus élevé par rapport à d’autres solutions possibles.*

En utilisant cette méthode, nous avons alors traité la configuration de la propagation du mode de cavité donnée dans les exemples précédents. Dans cette configuration, on a une seule zone libre qui représente la totalité du domaine. Nous allons donc chercher quel est le meilleur choix de pas d’espace et d’ordre à affecter aux cellules pour avoir les meilleures performances de calculs. Dans ce cas, nous allons trouver dans chaque direction un nombre identique de cellules avec un même pas d’espace et un même ordre. Ce cas test n’est pas représentatif d’un cas industriel, mais permet de voir l’apport de cette nouvelle stratégie en termes de performances. La figure 2.24 présente la propagation du mode de cavité en utilisant le schéma FEM pour différentes solutions de notre stratégie en fixant l’ordre  $r_{max}$  allant de

1 à 6. Dans ce cas, le couple  $(h, r^G)$  optimal de notre stratégie est donnée par  $r_{max}$ , pour un facteur de résolution  $N_\lambda = 20$ . Le tableau (2.4) donne le rapport  $\frac{h_{FEM}}{h_{FDTD}}$  pour  $h_{FEM}$  le pas d’espace de la cellule du schéma FEM et  $h_{FDTD}$  le pas d’espace du schéma de Yee. On note, le gain important sur le nombre de cellules lorsqu’on augmente l’ordre, ce qui va nous permettre de réduire le coût calcul par rapport au schéma de Yee, en maîtrisant la précision.

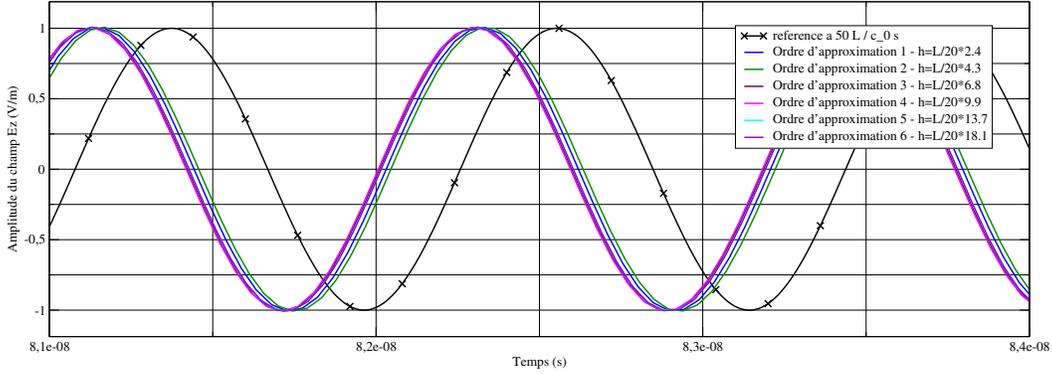


figure 2.24 – Mode de cavité, évoluant pendant  $50\lambda/c_0$  s en fonction des ordres d’approximation  $r^G = 0$  à 6 et du pas d’espace fixé pour maintenir un pas temporel identique sur tout le domaine et pour toutes les simulations pour le schéma FEM.

$r^G$	$\frac{h_{FEM}}{h_{FDTD}}$
0	1.0
1	2.4
2	4.3
3	6.8
4	9.9
5	13.7
6	18.1
7	23.2
8	28.9
9	35.3

TABLE 2.4 – Rapport  $\frac{h_{FEM}}{h_{FDTD}}$  pour différents ordres d’approximation spatiale.

De plus, on remarque, dans la figure 2.24, que les déphasages entre les signaux simulés sont très faibles. Cela peut s’expliquer du fait que d’avoir choisi un pas de temps identique entre les simulations, on peut montrer que l’erreur de dispersion maximale pour chaque simulation multipliée par le pas spatial est identique. En effet, on sait que d’après notre étude de dispersion précédemment décrite dans le paragraphe 2.7, on peut prendre  $\Delta t$  comme cela est fait dans notre stratégie d’optimisation du maillage :

$$\Delta t = \frac{2h}{c_0 \max_{\theta} (|\omega_h(\theta, r^G)|)}, \tag{2.9.1}$$

où  $\theta$  est l’angle d’incidence de l’onde.

De plus, le déphasage, que l’on voit sur les courbes, correspond à une certaine valeur de la dispersion multipliée par le pas spatial, donc grâce à la formule (2.9.1) et du fait que le pas de temps reste identique pour toutes les simulations, il est normal que l’on ait une erreur de déphasage similaire. Cette erreur de

déphasage doit d’ailleurs être similaire avec celle du schéma de Yee.

Il reste à quantifier le dernier paramètre de notre stratégie qui est  $\epsilon$ . Pour cela, on cherche une valeur de  $\epsilon$  telle que les couples  $(h, r^G)$  et  $(h + \epsilon', r^G)$  soient solutions de notre stratégie d’optimisation de maillage, respectivement, en considérant  $\Delta t_{Yee}$  et  $\Delta t_{Yee} + \epsilon$ . Si l’on reprend la relation (2.9.1), on a :

$$\Delta t_{Yee} = \frac{h_{Yee}}{c_0 \sqrt{3}},$$

$$\Delta t_{FEM} = \frac{2h}{c_0 \max_{\theta} (|\omega_h(\theta, r^G)|)}.$$

En utilisant notre stratégie et par le processus d’optimisation, on cherche  $h$  et  $r^G$  tel que :

$$\Delta t_{Yee} = \frac{2h}{c_0 \max_{\theta} (|\omega_h(\theta, r^G)|)},$$

$$\Delta t_{Yee} + \epsilon = \frac{2h + \epsilon'}{c_0 \max_{\theta} (|\omega_h(\theta, r^G)|)}.$$

Après simplification, on peut montrer que l’on a :

$$\epsilon' = \epsilon c_0 \max_{\theta} (|\omega_h(\theta, r^G)|). \tag{2.9.2}$$

Dans ce processus d’optimisation, on veut prendre un couple  $(h + \epsilon', r^G)$  tel que ce couple conduit à une méthode FEM qui soit de précision similaire à celle donnée par le couple  $(h, r^G)$ . Pour cela, on va étudier l’erreur de dispersion que l’on a lorsqu’on fait une petite variation du pas d’espace pour un  $r^G$  donné. Dans cette étude, on cherche à évaluer jusqu’où on peut aller en termes de variations sans détériorer la précision de la méthode. A partir de là, on va déterminer la valeur de  $\epsilon$ .

### 2.9.5 Impact du pas d’espace sur la dispersion numérique

Les figures suivantes présentent l’étude de la dispersion numérique en fonction de l’ordre d’approximation et de divers pas d’espace.

Toutes les études suivantes ont été réalisées dans une cavité avec un mode TE (4, 4, 0) dans une boîte métallique de  $1m \times 1m \times 1m$ , sur une plage d’observation jusqu’à  $T = 50\lambda/c_0$  s, et dont la longueur d’onde correspond à  $\lambda = 0.5m$ . Pour utiliser des pas d’espaces adaptés aux ordres d’approximation les plus élevés, la cavité a été agrandie et le mode TE adapté afin de conserver une fréquence de longueur d’onde  $\lambda = 0.5m$ . Afin d’étudier exclusivement la dispersion numérique, un pas de temps très petit a été imposé, qui est plus de 1000 fois inférieur au pas de temps CFL.

• **Ordre d’approximation  $r^G = 1$  pour un facteur de résolution  $N_{\lambda} = 10$  :**

Pour cette première étude, dont les résultats sont illustrés à la figure 2.25, nous avons pris deux pas d’espace, pour une même simulation avec un pas temporel fixe, afin d’observer la variabilité de la dispersion numérique correspondante à un facteur de résolution  $N_{\lambda} = 10$  pour le schéma de Yee.

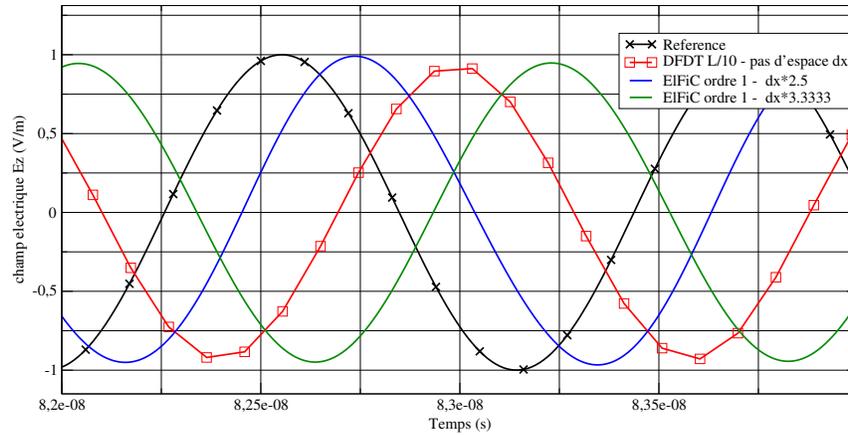


figure 2.25 – Évolution du mode pour un temps  $T = 50\lambda/c_0$  s obtenue avec le schéma FEM pour l'ordre d'approximation  $r^G = 1$  et des pas d'espace proches de la dispersion numérique du schéma de Yee avec  $N_\lambda = 10$ .

On peut remarquer sur ces courbes, une différence notable de l'erreur de dispersion pour une variation du pas d'espace de  $\epsilon' = h * 0.3333$ , allant de  $h$  à  $h * 1.3333$ . Pour se rapprocher de notre stratégie, nous avons recherché un pas d'espace optimal induisant un déphasage analogue à celui du schéma de Yee, puis nous avons rajouté à ce pas d'espace  $h$  une variation de  $\epsilon' = h * 0.19$ . La figure 2.26 montre la propagation des modes simulés.

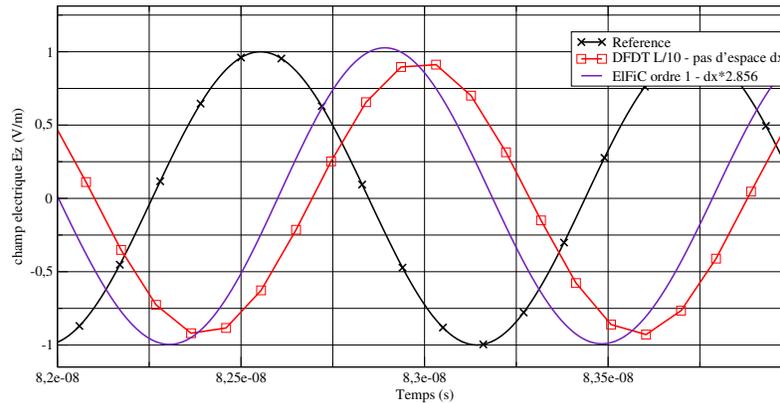


figure 2.26 – Propagation d'un mode sur un temps  $T = 50\lambda/c_0$  s simulé par le schéma FEM à l'ordre d'approximation  $r^G = 1$  pour un pas d'espace proche de la dispersion numérique du schéma de Yee avec  $N_\lambda = 10$ .

Sur cette figure, on remarque qu'entre le schéma de Yee et la méthode FEM, pour le pas spatial modifié, la valeur de tolérance est proche de 20%. Cette tolérance sur le déphasage est tout à fait admissible pour des calculs industriels.

• **Ordres d'approximation  $r^G = 2$  à 5 pour un facteur de résolution  $N_\lambda = 10$  :**

Les figures suivantes, 2.27 à 2.30, présentent l'étude de l'évolution du déphasage de la solution obtenue par le schéma FEM autour du pas d'espace optimal dans notre stratégie, pour plusieurs ordres d'approximation spatiale.

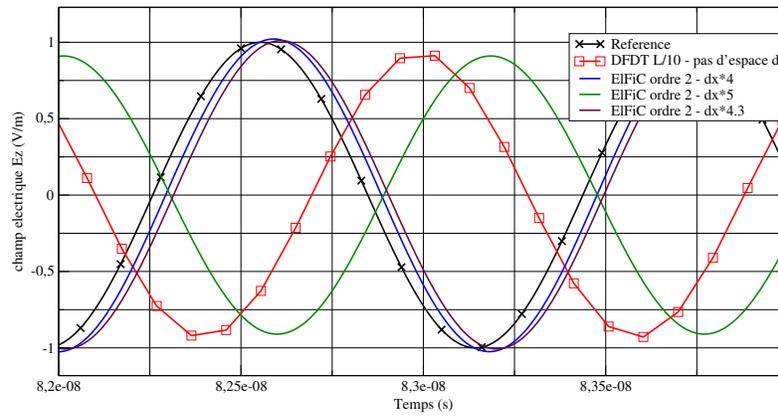


figure 2.27 – Évolution du mode pour un temps  $T = 50\lambda/c_0$  s obtenue avec le schéma FEM pour l'ordre d'approximation  $r^G = 2$  et des pas d'espace proches de la dispersion numérique du schéma de Yee avec  $N_\lambda = 10$ .

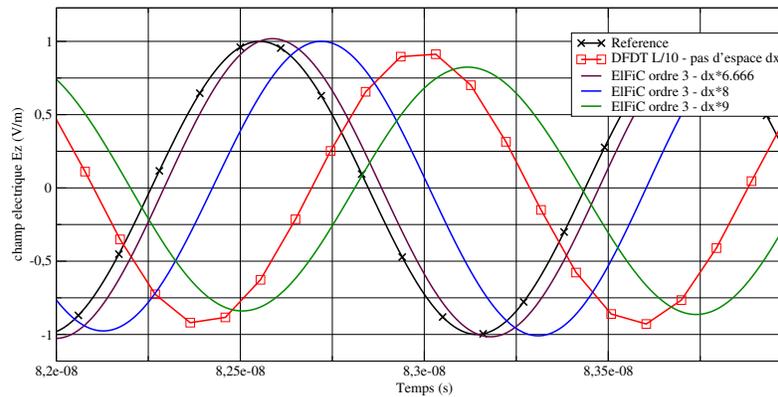


figure 2.28 – Évolution du mode pour un temps  $T = 50\lambda/c_0$  s obtenue avec le schéma FEM pour l'ordre d'approximation  $r^G = 3$  et des pas d'espace proches de la dispersion numérique du schéma de Yee avec  $N_\lambda = 10$ .

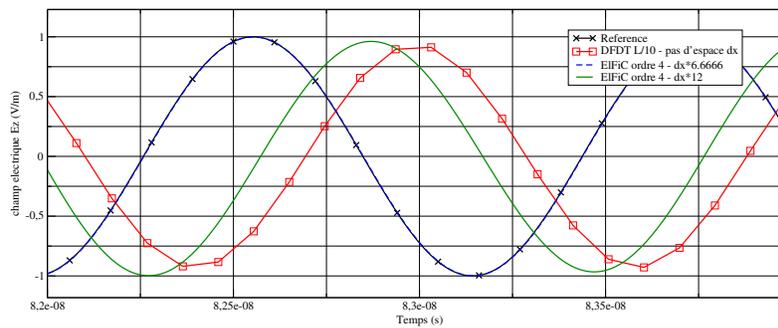


figure 2.29 – Évolution du mode pour un temps  $T = 50\lambda/c_0$  s obtenue avec le schéma FEM pour l'ordre d'approximation  $r^G = 4$  et des pas d'espace proches de la dispersion numérique du schéma de Yee avec  $N_\lambda = 10$ .

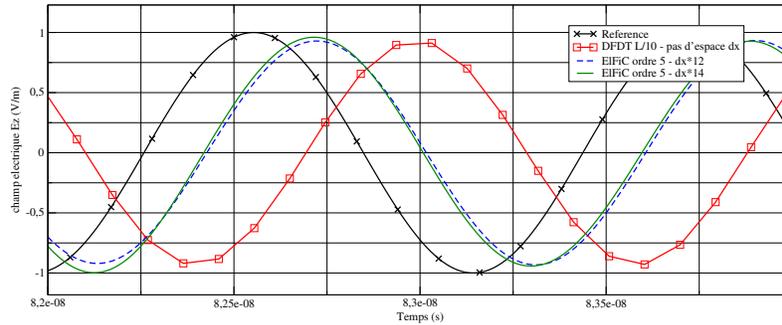


figure 2.30 – Évolution du mode pour un temps  $T = 50\lambda/c_0$  s obtenue avec le schéma FEM pour l'ordre d'approximation  $r^G = 5$  et des pas d'espace proches de la dispersion numérique du schéma de Yee avec  $N_\lambda = 10$ .

L'ensemble de ces résultats est conforme aux premières observations pour  $r^G = 0$ . En effet, en considérant, le pas d'espace optimal  $h$  dans notre stratégie et en y ajoutant  $h * 0.15$ , on a un déphasage qui est dans la tolérance demandée.

Le travail suivant consiste à étudier le comportement du déphasage lorsque l'on fait varier les facteurs de résolution  $N_\lambda = 20$  et  $N_\lambda = 40$ .

• **Ordres d'approximation pour des facteurs de résolution  $N_\lambda = 20$  et  $N_\lambda = 40$  :**

Les figures suivantes présentent l'étude du déphasage de la solution en fonction de l'ordre d'approximation, de divers pas d'espace pour des facteurs de résolution  $N_\lambda = 20$  et  $N_\lambda = 40$ .

Dans ce cas, à cause de la réduction du pas d'espace et donc de la dispersion numérique dans le schéma de Yee, nous nous attendons à avoir, avec notre stratégie, une évolution du déphasage sur les résultats FEM moins importante que celle observée pour les cas  $N_\lambda = 10$ .

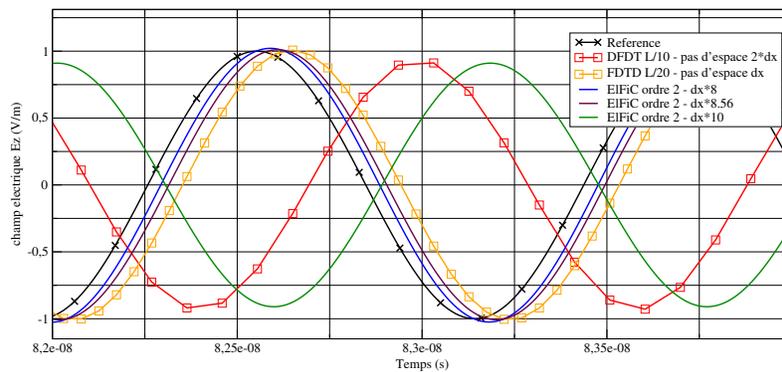


figure 2.31 – Évolution du mode pour un temps  $T = 50\lambda/c_0$  s obtenue avec le schéma FEM pour l'ordre d'approximation  $r^G = 2$  et des pas d'espace proches de la dispersion numérique du schéma de Yee avec  $N_\lambda = 20$ .

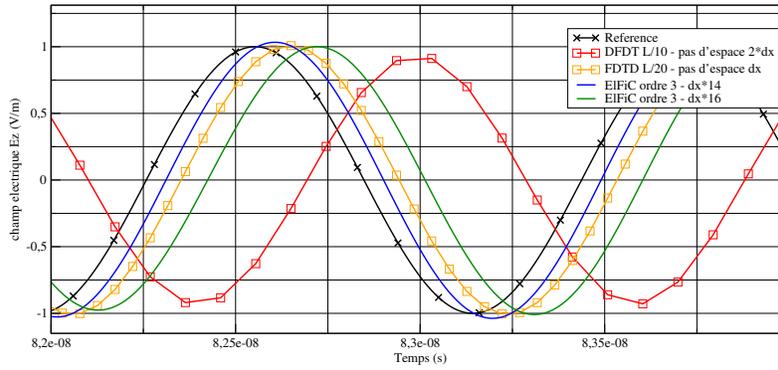


figure 2.32 – Évolution du mode pour un temps  $T = 50\lambda/c_0$  s obtenue avec le schéma FEM pour l’ordre d’approximation  $r^G = 3$  et des pas d’espace proches de la dispersion numérique du schéma de Yee avec  $N_\lambda = 20$ .

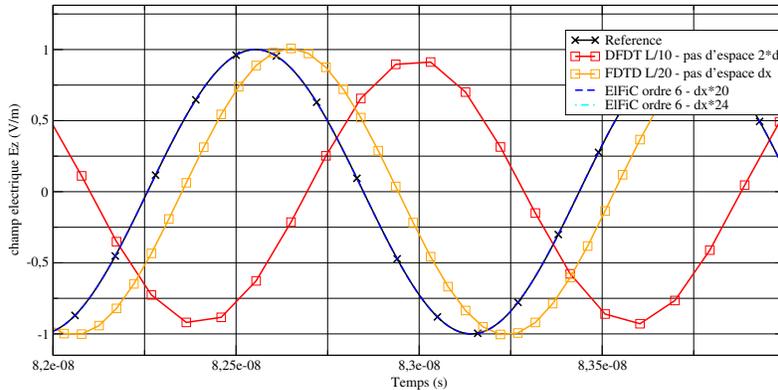


figure 2.33 – Évolution du mode pour un temps  $T = 50\lambda/c_0$  s obtenue avec le schéma FEM pour l’ordre d’approximation  $r^G = 4$  et des pas d’espace proches de la dispersion numérique du schéma de Yee avec  $N_\lambda = 20$ .

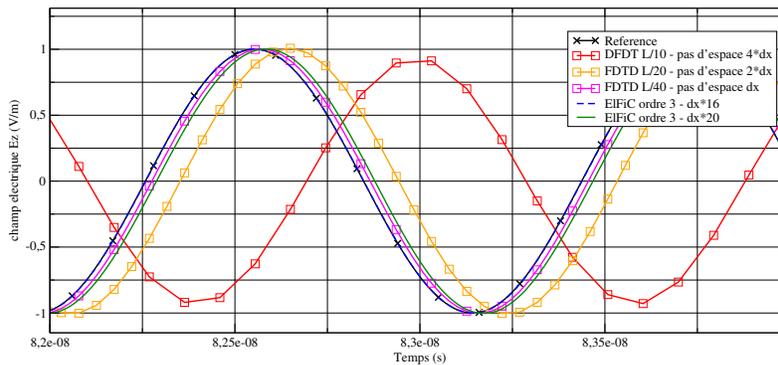


figure 2.34 – Évolution du mode pour un temps  $T = 50\lambda/c_0$  s obtenue avec le schéma FEM pour l’ordre d’approximation  $r^G = 3$  et des pas d’espace proches de la dispersion numérique du schéma de Yee avec  $N_\lambda = 40$ .

Les résultats sont conformes aux attentes lorsqu’on modifie le pas d’espace de 15% à partir du pas d’espace optimal  $h$ .  
On note aussi que l’erreur de déphasage diminue plus fortement entre des facteurs de résolution  $N_\lambda = 10$

et  $N_\lambda = 20$  avec le schéma FEM qu’avec le schéma de Yee. Ceci est aussi vraie entre  $N_\lambda = 10$  et  $N_\lambda = 40$ . Cette particularité permet d’avoir un temps calcul pour la méthode FEM inférieur à celui du schéma de Yee pour un même résultat, ce qui montre l’intérêt de la méthode FEM lorsqu’on choisit optimalement le maillage et les ordres d’approximation spatiale.

En conclusion des résultats numérique que l’on a effectué, on a choisi un  $\epsilon'$  égal à 15% du pas d’espace, et on conserve alors des solutions que l’on peut considérer comme similaires en termes de précision. Si l’on revient à notre processus d’optimisation de maillage et de choix d’ordre d’approximation spatiale, en remarquant sur les résultats numériques que la variable  $\epsilon'$  ne dépend pas de l’ordre d’approximation, la valeur  $\epsilon$  peut être prise à 15% du pas de temps. En fait, après l’expérimentation sur nombreuses applications, nous préconisons plutôt 10% que 15% car cette tolérance est suffisante pour générer un maillage optimisé.

### 2.9.6 Pas d’espace variable et ordres d’approximation spatiale en 3 dimensions

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que la stratégie proposée s’applique facilement à des pas spatiaux variables par direction, et ce, quelque soit l’angle de propagation du vecteur d’onde (en particulier pour une propagation suivant la diagonale du maillage structuré).

L’analyse de la dispersion du schéma FEM, effectuée dans le paragraphe 2.7, a montré que la propagation du vecteur d’onde  $\mathbf{k}$  se décompose selon les trois dimensions d’espace. En effet, le théorème 2.7.1 établit la relation (2.9.3) où les valeurs maximales  $\omega_{i,h}^2(k_i) \forall i \in [1, 3]$  correspondent aux valeurs propres maximales calculées pour la condition CFL.

$$\omega_h^2(\mathbf{k}) = \omega_{1,h}^2(k_1) + \omega_{2,h}^2(k_2) + \omega_{3,h}^2(k_3). \quad (2.9.3)$$

Cette décomposition par direction est aussi valable pour le schéma de Yee. Par conséquent, quelque soit l’angle de propagation, la stratégie, d’évaluation d’un pas d’espace pour un ordre d’approximation spatiale selon un critère basé sur le facteur de résolution, garantit d’avoir une erreur de dispersion numérique inférieure ou égale à celle du schéma de Yee.

La construction du schéma FEM, effectuée dans le paragraphe 2.4, est réalisée pour des ordres d’approximation et des pas d’espace variables par direction. Ainsi, l’erreur de dispersion, générée lors de la propagation d’une onde à travers une maille de dimension  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  et d’ordre d’approximation spatiale  $(r_i, r_j, r_k)$ , peut être décomposée selon chacune des directions. Ceci se montre en utilisant le théorème 2.9.3. Donc l’erreur de dispersion est essentiellement déterminée par le contributeur le plus important, c’est-à-dire, la direction où le couple (pas d’espace  $h'$ , ordre d’approximation  $r^G$ ) est le plus défavorable selon la stratégie présentée dans les paragraphes précédents.

### 2.9.7 Processus et mise en œuvre

Rappel du processus de mise en œuvre de la stratégie automatique d’optimisation de maillage et d’affectation d’ordre d’approximation spatiale. Dans les paragraphes précédents, nous avons étudié une méthode d’optimisation de maillage et d’affectation d’ordre d’approximation spatiale permettant des gains calculs intéressant pour le schéma FEM.

Ainsi, nous avons créé un outil permettant d’adapter un maillage FDTD à un maillage FEM pour les simulations. Cet outil réalise un pré-traitement sur le maillage selon le processus schématisé à la figure 2.35. Ce code effectue lui-même le travail de fusion de mailles et d’affectation des ordres d’approximation spatiale selon deux critères fournis par l’utilisateur. Ces deux critères sont la longueur d’onde minimale à étudier et un facteur de résolution définissant la précision numérique demandée pour

l’étude électromagnétique. La figure 2.36 présente le processus à travers un exemple de maillage en 2D comportant une géométrie d’objet simple.

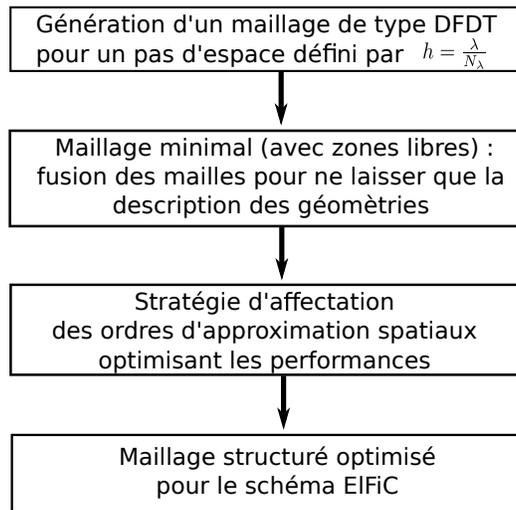


figure 2.35 – Processus d’adaptation d’un maillage cartésien pour un maillage optimisé pour le schéma FEM.

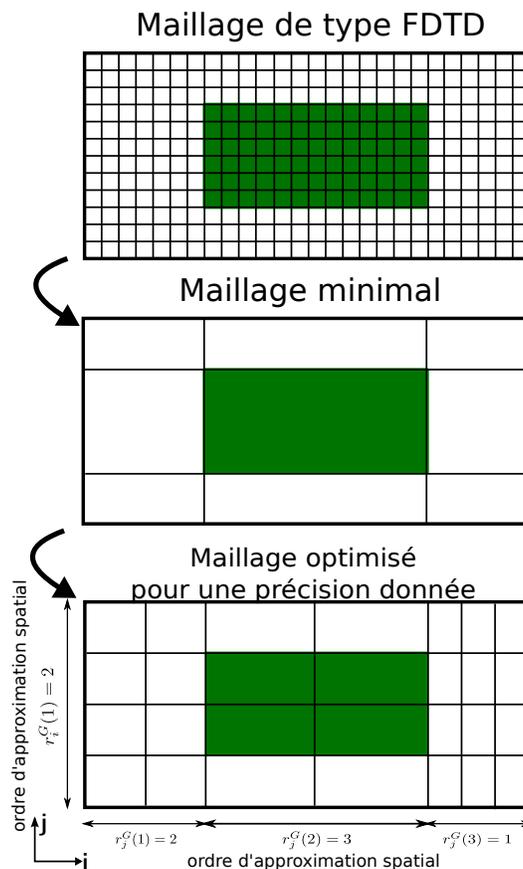


figure 2.36 – Exemple d’application sur un maillage 2D d’une géométrie simple.

La réalisation du maillage structuré optimal pour le schéma FEM s'effectue selon l'algorithme suivant :

```

!*****!
!**** Algorithmme automatisant le choix des ordres d'approximation ****!
!**** et du pas d'espace pour optimiser les performances de calcul ****!
!*****!
!**** données globales
r_max !<- ordre d'approximation spatiale maximal
r_min !<- ordre d'approximation spatiale minimal
CFL1D(.) !<- tableau 1D des valeurs de la CFL du schema de FEM
! en fonction de l'ordre d'approximation
marge(.) !<- le pas d'espace peut être pris avec une marge
! selon l'ordre d'approximation sans pénaliser
! l'erreur de dispersion numérique
!**** données d'entrée
lambda_min !<- longueur d'onde minimale étudiée
N_L !<- facteur de résolution
h !<- longueur d'une zone libre dans une direction du maillage minimal

!**** données attendues en sortie
dx !<- pas d'espace de la zone libre de longueur h
r_x !<- ordre associée au pas d'espace dx

!**** variables locales
N !<- nombre de mailles dans la zone libre de longueur h
r !<- ordre d'approximation courant
R !<- ratio de la stratégie d'affectation
R_ref= lambda_min/N_L !<- ratio de référence (pas d'espace FDTD)

!**** Boucle évaluant le pas d'espace et l'ordre d'approximation spatiale optimal
sortie_boucle=.false.
r=r_max
N=1
do while(sortie_boucle)
  R=h/N*CFL1D(r)
  !*** test du couple candidat (dx=h/N; r)
  if( R_ref<=R .and. R<=R_ref*(1+marge(r)) ) then
    sortie_boucle=.true.
  else if(r/=r_min) then
    !*** le prochain test sera le couple (h/N; r-1)
    r=r-1
  else if(r==r_min) then
    !*** aucun ordre r satisfait le critère d'équivalence
    ! en termes d'erreur pour la longueur h/N
    !*** le prochain test sera le couple (h/(N+1); r_max)
    N=N+1
    r=r_max
  end if
end do

!***** Affectation des données de sorties
dx=h/N
r_x=r
!-> Dans la zone libre de longueur h du maillage minimal, il y aura N mailles de
! longueur dx et chacune des mailles aura un ordre d'approximation spatiale
! r_x dans la direction de la zone libre, ces données servent à générer le
! maillage structuré optimisé pour le schéma de FEM à la précision souhaitée.
!*****!

```

Nous notons que la sortie de boucle est garantie par le fait que le maillage initial est constitué de mailles identiques de dimension caractéristique  $\frac{\lambda_{min}}{N_\lambda}$  pour un ordre  $r^G = 0$ . La boucle teste d'abord les ordres d'approximation les plus élevés car ils offrent les meilleures performances pour le schéma FEM. De plus, la prise en compte d'un intervalle pour le choix de la taille  $h$  de la maille FEM, que nous prenons à 10%, est nécessaire car il est rare que  $h$  soit un multiple d'un pas d'espace idéal imposé par

un ordre. Le seul pas idéal qui sera toujours présent est celui associé à l’ordre  $r^G = 0$ , mais il ne permet pas d’améliorer les performances. Enfin, le pas de temps global du maillage structuré sera défini par le minimum entre  $\Delta t_{FDTD} = \frac{\lambda_{min}}{c_0 N_\lambda \sqrt{3}}$  et  $\Delta t_{FEM}$  défini par :

$$\Delta t_{FEM} = 2 \left( c_0 \max_{\mathcal{K}} \sqrt{\frac{\lambda_{max}(S_{x_1})}{\Delta x_1^2} + \frac{\lambda_{max}(S_{x_2})}{\Delta x_2^2} + \frac{\lambda_{max}(S_{x_3})}{\Delta x_3^2}} \right)^{-1}, \quad (2.9.4)$$

où les  $\lambda_{max}(S_{x_i})$  sont les plus grandes valeurs des matrices  $S_{x_i}$  établies dans la section 2.5.

**Exemple de gain sur le coût calcul avec notre stratégie**

Dans ce paragraphe, nous allons présenter le coût calcul et la place mémoire à l’aide des formules établies dans le paragraphe 2.8 de la méthode FEM pour les tailles de mailles et ordre d’approximation spatiale optimaux établis par le processus précédent. Nous comparons ces coûts avec ceux du schéma de Yee correspondants.

Les résultats présentés dans les figures 2.37 et 2.38 montrent respectivement le ratio du coût calcul FEM (nombre d’opérations) par rapport à celui de la FDTD et son inverse obtenus sur l’exemple de la cavité. Nous notons sur ces courbes que la méthode FEM devient plus efficace que le schéma de Yee à partir de l’ordre d’approximation  $r^G = 3$ . Toutefois, nous constaterons dans le chapitre 3 que l’optimisation de compilation permet d’avoir un gain de temps CPU dès l’ordre  $r^G = 2$ .

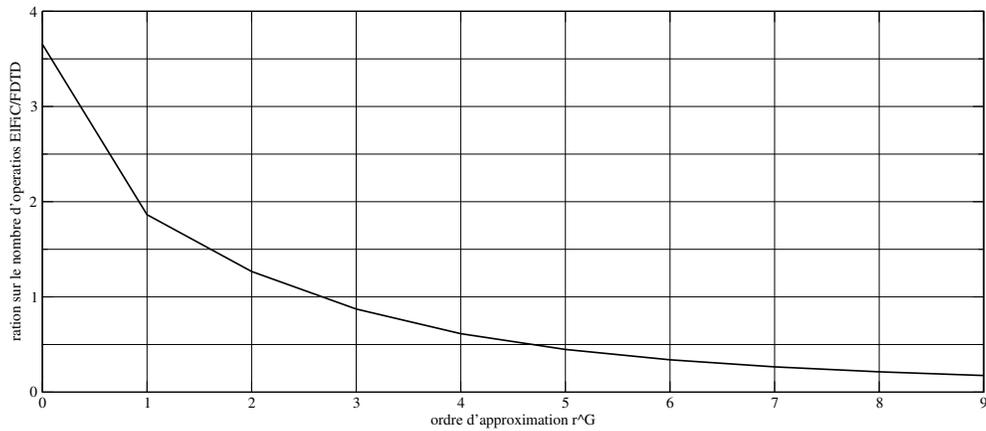


figure 2.37 – Évolution du coût de calcul  $\frac{FEM}{FDTD}$  en fonction d’ordre d’approximation.

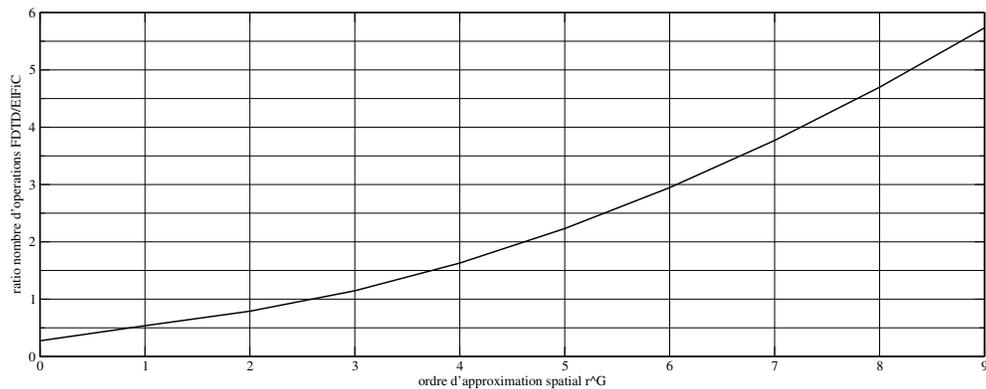


figure 2.38 – Évolution du coût de calcul  $\frac{FDTD}{FEM}$  en fonction d’ordre d’approximation.

La figure 2.39 illustre aussi qu'il existe encore une difficulté à être optimal pour un nombre relativement faible de mailles. En effet, la variabilité du nombre d'inconnues impacte directement les performances sur le temps de calcul.

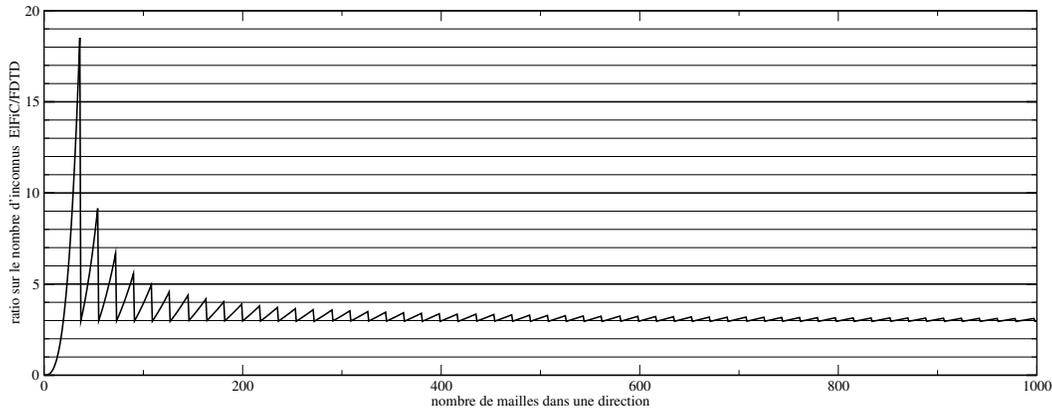


figure 2.39 – Évolution de la place mémoire  $\frac{FDTD}{FEM}$  en fonction du nombre de mailles dans une direction.

### 2.9.8 Bilan

Dans ce paragraphe, nous avons proposé une stratégie permettant de générer, à une précision donnée, un maillage et une affectation d'ordres d'approximation spatiale optimaux pour une simulation FEM. Pour cela, nous sommes partis des critères à respecter dans le cas d'une simulation avec le schéma de Yee. Notre stratégie est basée sur le fait d'avoir un pas de temps identique pour chaque cellule. Ce pas temporel correspond à celui du schéma de Yee, à une précision définie par un facteur de résolution  $N_\lambda$ , donné sur un maillage cartésien uniforme. Dans cette stratégie, on cherche à réduire les coûts calcul et mémoire, par le fait d'agrandir les mailles et augmenter les ordres dans des zones d'espace libres, tout en gardant une erreur de précision équivalente au schéma de Yee considéré au départ.

Les cas tests utilisés avec cette stratégie montrent que l'on obtient un gain en coût calcul par rapport au schéma de Yee.

## 2.10 Conclusion

L'étude de la méthode d'éléments finis en ordre d'approximation spatiale élevé sur maillage cartésien présentée dans ce chapitre montre un réel potentiel industriel pour la simulation de la propagation des ondes électromagnétiques. En particulier, l'utilisation d'ordres d'approximation spatiale élevés permet de fournir une solution à précision équivalente plus performante en termes de temps calcul, et de stockage mémoire que la méthode FDTD usuelle. Ces gains de performances sont rendus possibles grâce à une stratégie d'utilisation du schéma permettant à un utilisateur d'avoir une maîtrise sur la précision de la solution. Des applications numériques complexes et représentatives de problèmes industriels sont nécessaires afin de confirmer le potentiel du schéma FEM. Cette étude est présentée dans le chapitre suivant.

## Chapitre 3

# Portage de la méthode FEM sur machine de production et étude des performances HPC de la méthode sur des simulations industrielles

### Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons le portage du schéma FEM sur une machine de production (ou calculateur massivement parallèle) et un certain nombre de simulations en électromagnétisme issues de cas industriels, effectuées avec cette méthode FEM.

### 3.1 Portage de la méthode FEM sur machine de production

Dans ce paragraphe, nous proposons une stratégie de parallélisation basée sur la découpe du domaine de calcul structuré en sous-domaines que l'on répartit sur plusieurs processeurs afin de les traiter en parallèle. Ainsi, le temps d'exécution du programme est réduit, et idéalement, il est divisé par le nombre de processeurs utilisés.

Dans notre cas, la machine de production visée pour le portage de notre méthode est un supercalculateur dont l'architecture est composée d'un ensemble de nœuds de calculs interconnectés. Ce type d'architecture est un cluster. Chaque nœud dispose, dans notre configuration, de plusieurs processeurs multi-cœurs, d'une mémoire partagée et d'un stockage local "scratch". La figure 3.1 présente un schéma de l'architecture de ce type de machine qui est relativement commun dans le calcul scientifique. Pour exploiter au mieux la puissance de calcul de la machine, le code numérique doit être implémenté en tenant compte de l'architecture. L'ensemble de la mise en œuvre du portage d'un schéma sur un supercalculateur réalise ce que l'on nomme communément un Calcul Haute Performance (HPC).

Les codes de calculs sur supercalculateurs massivement parallèles à mémoire distribuée nécessitent généralement l'échange de données entre processeurs. Pour cela, on utilise souvent la bibliothèque MPI [51] "Message Passing Interface". Toutefois, les calculateurs à mémoire partagée peuvent être exploités avec une API (interface de programmation applicative) tel que OpenMP [11] (Open Multi-Processing). Ces deux outils HPC sont supportés sur de nombreux systèmes d'exploitation et peuvent être utilisés ensemble pour fournir une programmation hybride plus performante [39], [50]. Les bibliothèques liées à ces outils sont utilisables avec les langages de programmation scientifiques usuels : C, C++ et Fortran.

Le supercalculateur mis à notre disposition pour réaliser des simulations numériques est le calculateur “Airain”, fournit par BULL, et installé au CCRT (<http://www-ccrt.cea.fr>) en 2012 avec une puissance actuelle de 420 Tflops. Ce cluster possède un système d’exploitation “bullx supercomputer suite (base Linux 64 bits)” et est composé, à ce jour, des nœuds suivants :

- ▶ 9 504 cœurs de calculs Intel Xeon®E5-2680 à 2.7 Ghz :
  - 16 cœurs/nœud
  - 64 Go de mémoire /nœud
- ▶ 7 200 cœurs de calcul Intel Ivy Bridge à 2.8 Ghz : :
  - 20 cœurs/nœud
  - 64 Go de mémoire /nœud
- ▶ 3200 cœurs de traitements (France Génomique) Intel Xeon®E5-2680 à 2.7 Ghz
  - 16 cœurs/nœud
  - 128 Go de mémoire /nœud
  - 2 nœuds à 160 cœurs et 2 To de mémoire
- ▶ 18 Nœuds hybrides à base de Nvidia K20 (GPU)

Les nœuds sont interconnectés par un réseau haute performance InfiniBand QDR. L’environnement de développement que nous utilisons est “Intel®Composer XE compilers and librairies” (version 14) avec les librairies MPI : BullxMPI, distribution Bull MPI optimisée et compatible OpenMPI.

La composition de cette machine montre la diversité des architectures qui peuvent être exploitées en HPC. Nous notons que les nœuds hybrides ont une architecture différente qui nécessite l’utilisation d’une API générale comme OpenCL, ou l’API propriétaire comme CUDA pour leurs exploitations. Dans ce chapitre, nous nous sommes restreints à utiliser le premier ensemble de nœuds.

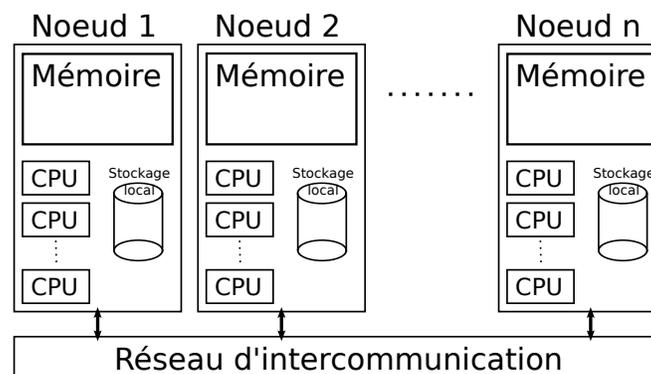


figure 3.1 – Architecture schématique d’un supercalculateur.

### 3.1.1 Mise en œuvre d’une programmation parallèle sur domaine structuré

Les stratégies de parallélisation des méthodes numériques résolvant les équations de Maxwell, utilisant des schémas aux différences finies en espace et en temps, sont bien référencées dans plusieurs publications et livres. Il existe déjà des travaux proposant des implémentations du schéma de Yee pour différentes architectures de cluster, tel que les machines massivement parallèles utilisant des processeurs multi-cœurs à mémoire distribuée [31], [87], [2], mais aussi à mémoire hybride (partagée localement et distribuée sur l’ensemble de la machine) [86], [74]. Il existe aussi des machines massivement parallèles utilisant des cartes

graphiques [3] et des machines hybrides qui permettent d'utiliser des implémentations complexes [72]. Dans notre cas, nous proposons une stratégie de parallélisation, pour machines massivement parallèles utilisant des processeurs multi-cœurs à mémoire distribuée et partagée. Cette stratégie est l'adaptation des techniques déjà étudiées pour le schéma de Yee, à la méthode FEM qui nous intéresse.

Ces stratégies exploitent généralement le fait que le maillage est structuré. En effet, un domaine de calcul structuré en 3 dimensions peut être facilement scindé en sous-domaines de taille homogène, que l'on assigne à un processeur, comme illustré sur la figure 3.2. Une machine à mémoire distribuée ne permet pas aux processeurs d'accéder à la totalité de la mémoire et les données sont réparties sur chaque nœud. Par conséquent, l'utilisation de communications entre les processeurs pour l'échange de données est nécessaire afin que, sur chaque sous-domaines, les calculs des inconnues puissent être effectués. Les données échangées entre processeurs sont stockées sur ceux-ci par l'ajout de cellules à la frontière des domaines, et pour lesquelles on n'effectue pas de calcul. Sur une machine à mémoire partagée, il n'est pas nécessaire d'utiliser des communications car les données, stockées en mémoire centrale, sont accessibles à tous les processeurs.

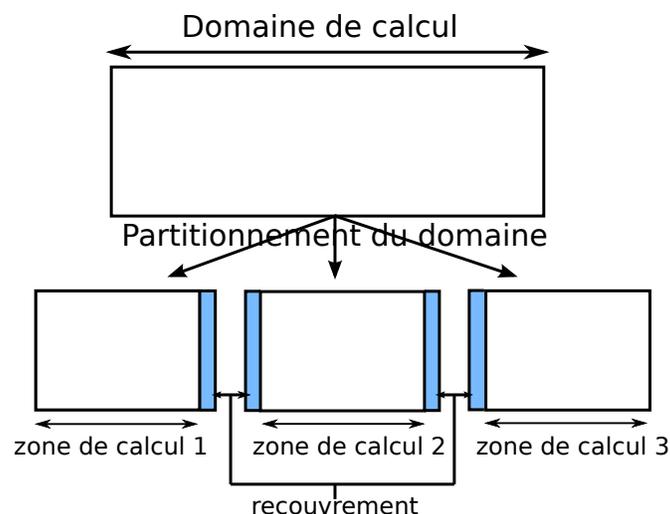


figure 3.2 – Découpe de domaine cartésien 2D pour une architecture à mémoire distribuée.

Les techniques de parallélisation utilisées pour le schéma de Yee peuvent être reprises sans problème pour l'approche FEM, car celle-ci possède le même type de maillage structuré cartésien. En effet, le découpage en sous-domaines va être traité de la même manière. Toutefois, notre approche FEM utilise des pas d'espaces et des ordres d'approximation spatiale variables par cellule. Donc, dans le découpage, pour avoir un bon équilibrage de la charge de calcul, on doit tenir compte de l'hétérogénéité du maillage ; ceci entraîne que certains domaines auront plus de mailles que d'autres, ce qui n'était pas le cas avec le schéma de Yee.

La stratégie utilisée se décompose de la manière suivante :

1. Le domaine est découpé de façon structurée en  $n$  zones de calcul avec  $n = n_{x_1} \times n_{x_2} \times n_{x_3}$ , selon le procédé suivant :
  - i) le coût de calcul de chaque maille est évalué et stocké dans un tableau à 3 dimensions ;
  - ii) une valeur cible des coûts de calcul est obtenue en faisant la somme de tous les coûts de calcul et en la divisant par le nombre de processeurs disponibles ;
  - iii) on va alors rechercher le découpage du domaine de calcul qui fournit le plus faible écart entre la plus petite et la plus grande valeur des coûts calcul des domaines et qui se rapproche donc

- pour chaque domaine de la valeur cible ;
- iv) Les domaines (ou zones de calcul) ainsi obtenus sont associés à des processeurs selon la cartographie du calculateur.
2. Dans le cas d'une parallélisation avec mémoire distribuée (utilisation de la bibliothèque MPI), des zones de recouvrement sont créées autour des domaines de calcul. Et une "matrice de communication" est constituée pour gérer optimalement les échanges des données entre les domaines de calcul voisins.
  3. L'évaluation de la propagation est effectuée au cours d'une boucle de calcul itérant sur le nombre de pas temporels :
    - i) sur un processeur, afin de pouvoir évaluer les champs magnétiques, on échange les champs électriques entre processeurs. Pour cela, sur le processeur considéré, on envoie les champs électriques nécessaires aux processeurs voisins, puis, on récupère les champs électriques, envoyés par ces derniers ;
    - ii) chaque processeur calcule les valeurs des champs magnétiques à l'instant suivant dans sa zone de calcul à l'aide du schéma FEM ;
    - iii) de même, sur chaque processeur, afin de pouvoir évaluer les champs électriques, on échange les champs magnétiques entre celui-ci et ses voisins. Pour un processeur donné, on envoie les champs magnétiques nécessaires aux processeurs voisins, puis, on récupère sur celui-ci les champs magnétiques envoyés par ces derniers ;
    - iv) chaque processeur calcule les valeurs des champs électriques à l'instant suivant dans sa zone de calcul à l'aide du schéma FEM ;
    - v) le processus ainsi défini est réitéré à chaque pas temporel.

Cette stratégie nécessite des précisions de mise en œuvre sur les échanges réalisés avec la librairie MPI et sur la granularité réalisée avec l'API OpenMP. Les paragraphes suivants présentent les solutions développées et les performances associées.

### 3.1.2 Implémentation openMP-MPI

#### Mémoire distribuée - Zone de recouvrement pour un schéma FEM

L'écriture du schéma FEM, effectuée dans la section 2.4, présente une distinction de calcul selon la position des degrés de liberté dans une cellule. Les degrés de liberté intérieurs utilisent les données d'une seule cellule. Les degrés de liberté positionnés sur les faces et les arêtes utilisent des inconnues appartenant à la cellule et aux cellules voisines. Si nous considérons que chaque degré de liberté est exclusivement évalué par un seul processeur alors il n'est pas nécessaire d'échanger toutes les inconnues des cellules voisines à cette cellule. La figure 3.3 illustre la découpe en 2 zones de deux cellules pour 2 dimensions et des échanges des champs entre les deux zones. En 3 dimensions, les champs électriques et magnétiques ont tous deux des degrés de liberté sur les faces et donc, les échanges de données pour calculer les deux champs sont nécessaires.

**Remarque 3.1.** *Les calculateurs actuels ont des réseaux d'intercommunication très performants. En effet, il y a quelques années, les communications entre nœuds et entre processeurs pouvaient provoquer "un goulot d'étranglement" au niveau des échanges, si trop de données étaient envoyées simultanément. Les lectures des rapports [39], [50] et une discussion avec un ingénieur système d'un supercalculateur autour du problème de saturation des communications montrent qu'à l'heure actuelle ce phénomène n'est plus présent. Toutefois, une réduction du temps de communication intervient lorsque le nombre de communications simultanées devient très important. Ainsi, nous préférons une stratégie avec une*

*implémentation hybride exploitant à fois la mémoire distribuée et la mémoire partagée, afin de permettre l'utilisation d'un grand nombre de processeurs sans être pénalisé.*

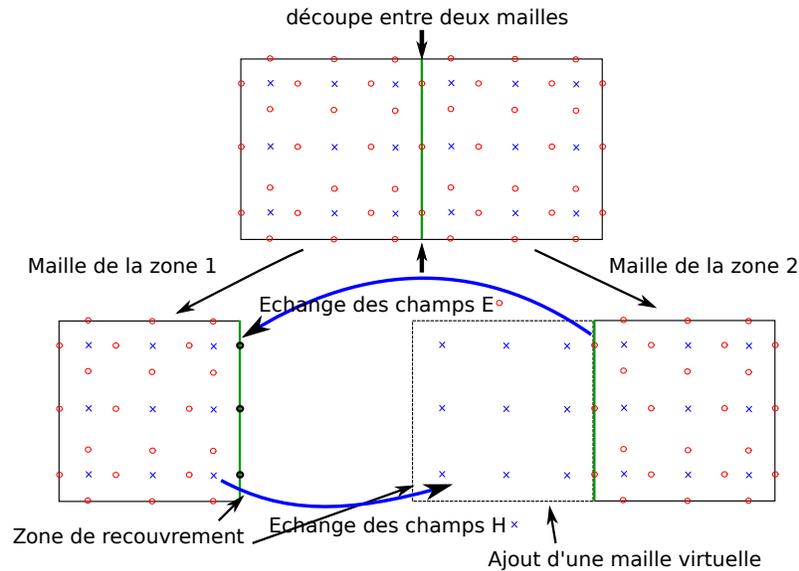


figure 3.3 – Zones de recouvrement pour le schéma FEM pour un domaine en 2D.

### Mémoire partagée - Granularité du traitement des degrés de liberté

La mémoire partagée peut être exploitée par une implémentation spécifique au niveau des boucles de calculs itérant sur les bornes de chaque sous-domaine. Il existe plusieurs manières de répartir le calcul des degrés de liberté sur les processeurs (ou “threads”). La méthode la plus simple est d'utiliser une **granularité fine**, où les cellules sont réparties par processeurs, suivant la disponibilité de ceux-ci. Le processeur affecté à une cellule calcule l'ensemble des degrés de liberté de celle-ci. Dans ce cas l'équilibrage des charges entre les processeurs est assuré par un gestionnaire de tâches qui affecte les cellules aux processeurs non occupés. Cependant, le coût calcul de la gestion de la mémoire partagée associé au coût calcul du gestionnaire de tâches sont plus importants que les coûts de communication d'une programmation par mémoire distribuée [50].

Ainsi, nous utilisons une méthode à **granularité grossière** qui est plus efficace et, dans ce cas, facile à mettre en œuvre. Nous préférons utiliser l'algorithme d'équilibrage des charges de calcul développé pour le schéma FEM dans le cas d'une programmation MPI. La découpe cartésienne du domaine ne permet pas un équilibrage des charges aussi optimal que le gestionnaire de tâches OpenMP, mais son coût de gestion est moins important [50].

Les entêtes des boucles de calcul des deux méthodes d'implémentation sous OpenMP sont présentées ci-après.

```

!*****
!*** Granularité fine pour évaluer les champs électriques ou magnétiques ***
!*****
ni,nj,nk !<- dimension du domaine de calcul

!$omp parallel default(private) shared(ni,nj,nk,...)
!$omp do schedule(dynamic)
do ijk=0,ni*nj*nk-1
  num=ijk/nk; num0=num/nj;
  i=num0+1
  j=num-num0*nj+1
  k=ijk-num*nk+1

  Evaluation des champs électriques ou magnétiques

```

```

end do
!$omp end do
!$omp end parallel
!*****!
!*****!
!*** Granularité grossière pour évaluer les champs électriques ou magnétiques ***!
!*****!
ni,nj,nk !<- dimension du domaine de calcul
grille_openmp(.,.) !<- tableau stockant les bornes des zones de calcul de chaque thread

!$omp parallel default(private) shared(ni,nj,nk,grille_openmp, ...)
  numthread=OMP_GET_THREAD_NUM()
  iDeb = grille_openmp(numthread,1)
  iFin = grille_openmp(numthread,2)
  jDeb = grille_openmp(numthread,3)
  jFin = grille_openmp(numthread,4)
  kDeb = grille_openmp(numthread,5)
  kFin = grille_openmp(numthread,6)
  do i=iDeb, iFin
    do j=jDeb, jFin
      do k=kDeb, kFin

          Evaluation des champs électriques ou magnétiques

      end do
    end do
  end do
!$omp end parallel
!*****!

```

### Performance des diverses implémentations

Dans ce paragraphe, nous présentons les performances des programmations détaillées dans les paragraphes précédents, c'est-à-dire, MPI, openMP-MPI fin grain et openMP-MPI gros grain.

La figure 3.4 présente le speed-up obtenu par la méthode FEM pour la simulation de la propagation d'une onde plane dans un domaine de calcul constitué de 64000 mailles, pour un ordre d'approximation spatiale  $r^G = 3$  qui conduit à 1152000 degrés de liberté au total. Les implémentations OpenM-MPI utilisent la mémoire partagée sur des nœuds de 16 processeurs. Les speed-up montrent que l'implémentation MPI est plus performante sur 1 nœud de calcul que l'implémentation OpenMP. Par ailleurs, on constate que les speed-up montrent que la programmation gros grain est plus efficace que la programmation fine grain.

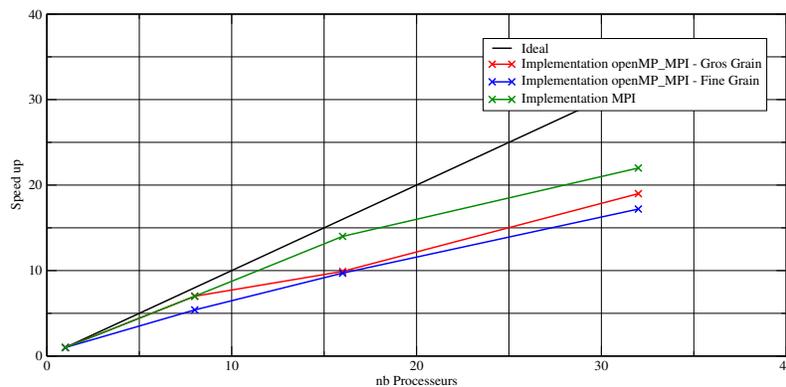


figure 3.4 – Speed-up de la méthode FEM des implémentations MPI, OpenMP-MPI Gros grain et grain fin.

La figure 3.5 présente la tenue en charge (ou scalabilité) des implémentations MPI et OpenMP gros grain lors de l'augmentation du nombre de nœuds avec un ratio  $R=(\text{nombre de degrés de liberté} / \text{nombre de processeurs})$  constant. La référence sur le temps calcul est celle obtenue sur un nœud de calcul par chacune des deux méthodes. Sur un nœud de calcul (16 processeurs), il faut noter que la méthode OpenMP-MPI est moins performante de près de 30% que la méthode MPI (voir figure 3.4). Dans cette configuration, lorsqu'on utilise plus 12 nœuds (soit 192 processeurs), on constate l'inverse, c'est-à-dire un effondrement des performances de l'implémentation MPI rendant l'implémentation openMP-MPI plus efficace. Ainsi, recourir à une méthode de parallélisation hybride est parfaitement justifiée pour maintenir un calcul haute performance sur des simulations ayant un nombre important d'inconnues.

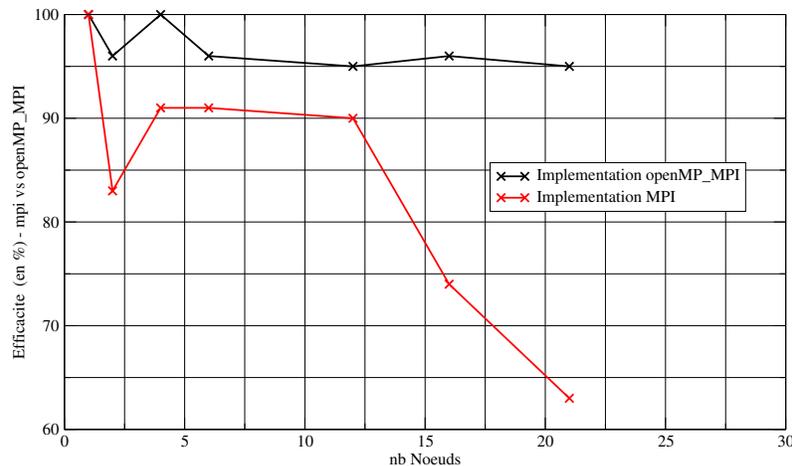


figure 3.5 – Scalabilité des différentes implémentations.

### 3.1.3 Performance sur calculateur massivement parallèle

Dans ce paragraphe, nous présentons les performances de la programmation hybride OpenMP-MPI. La figure 3.6 illustre la tenue du speed-up du schéma FEM à l'augmentation de l'ordre d'approximation spatiale. On constate que l'efficacité augmente légèrement avec l'ordre. La figure 3.7 présente le speed-up pour une simulation de la propagation d'une onde plane sur un domaine de 216000 mailles avec  $r^G = 3$  et en utilisant un nombre croissant de nœuds (16 processeurs par nœud). Nous observons que le speed-up est linéaire jusqu'à atteindre le nombre de processeurs limite où le gain de temps ne compense pas les coûts de parallélisation (communication et gestion mémoire partagée).

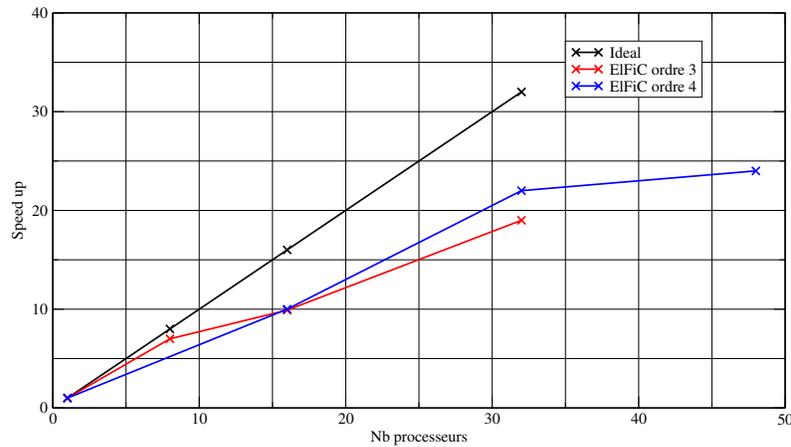


figure 3.6 – Speed-up de la méthode FEM suivant l'ordre d'approximation spatiale pris pour celle-ci.

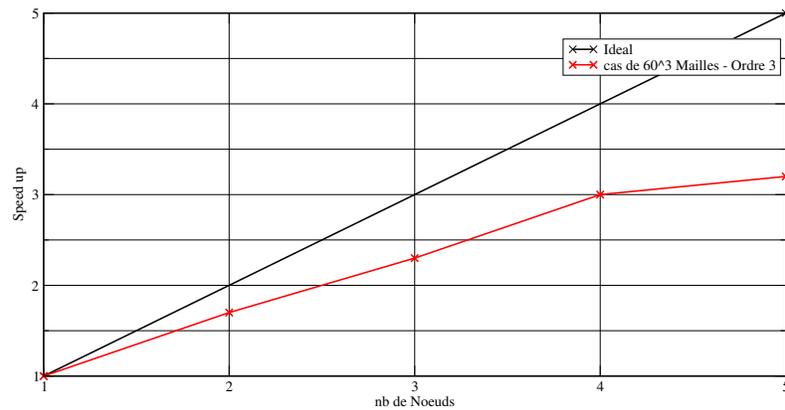


figure 3.7 – Speed-up de la méthode FEM (simulation de la propagation d'une onde plane sur un domaine de 216000 mailles et  $r^G = 3$ ).

L'utilisation d'une parallélisation hybride est renforcée par l'avantage d'avoir accès à une mémoire partagée pour certaines fonctionnalités du code, comme par exemple les sorties de données. En effet, réaliser un équilibrage des charges sur ce type de fonctionnalité est impossible car les opérations ne peuvent être effectuées que par le processeur ayant accès aux données concernées. Cependant, en disposant d'une mémoire partagée par tous les nœud, les accès aux données sont accessibles par plusieurs processeurs sans coûts de communication supplémentaires, ainsi, le traitement des fonctionnalités citées ci-dessus peut être mieux réparti dans une parallélisation hybride. Toutefois, la quantification de ce gain n'est pas facilement mesurable.

## 3.2 Études des performances HPC de la méthode FEM sur des simulations industrielles

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux gains que la méthode FEM apporte dans la résolution de problèmes industriels et donc à sa mise en production. Pour cela, nous classifions nos problèmes en trois grandes familles que sont la modélisation d'antennes, l'étude CEM de systèmes et enfin les perturbations liées par la foudre ou l'IEM sur les engins. Pour chaque classe de problèmes, on donne un ensemble de configurations que l'on s'efforce de traiter à la fois avec une méthode FDTD de production et notre approche FEM. On peut alors comparer les performances de chaque méthode.

### 3.2.1 Modélisation d'antennes

#### 3.2.1.1 Structure filaire : Antenne basses fréquences

Cette simulation a été choisie dans le but de traiter un exemple d'antenne filaire complexe présentant un grand nombre de brins obliques et de jonctions entre ces brins. Cette simulation présente plusieurs difficultés qui sont, d'une part, la dimension relativement importante de l'antenne  $24m$ , et d'autre part la position non cartésienne des fils.

La taille de  $24m$  de l'antenne contraint l'utilisation d'un modèle équivalent de fil, préférable à une modélisation de la structure maillée par des cellules métalliques, qui nécessiterait des ressources informatiques bien plus importantes. La géométrie de l'antenne comporte des brins qui ne sont pas conformes à un maillage cartésien [42]. Pour traiter celle-ci, on utilisera donc un modèle de fils minces obliques [36]. De plus, l'antenne utilise des jonctions multifilaires qui sont délicates à utiliser [4] et [36]. Ces difficultés sont souvent rencontrées dans la modélisation des antennes. L'antenne étudiée émet sur une plage fréquentielle allant de  $1\text{ MHz}$  à  $40\text{ MHz}$ .

La résolution de cette configuration par l'utilisation d'une méthode fréquentielle est possible comme cela se fait pour les modèles d'antennes, mais l'utilisation d'une méthode temporelle de type FDTD ou FEM montre un plus grand intérêt. En effet, d'une part, cette méthode est nettement plus rapide grâce au traitement simultané de toutes les fréquences par rapport à une méthode fréquentielle. Et d'autre part, celle-ci offre un bon ratio précision numérique / coût de calcul et une plus grande possibilité de simulation grâce au nombre de ses modèles physiques disponibles.

Afin de valider notre approche FEM, nous allons nous intéresser au calcul du courant au pied de l'antenne et comparer les résultats obtenus avec le schéma de Yee et notre approche FEM. Pour la simulation, l'antenne a été simplifiée en modélisant le réseau filaire sur un plan de masse parfaitement conducteur et en alimentant celui-ci par une connexion multifilaire à la base de la structure, sur laquelle on place un générateur de tension. Cette configuration est illustrée sur la figure 3.8.

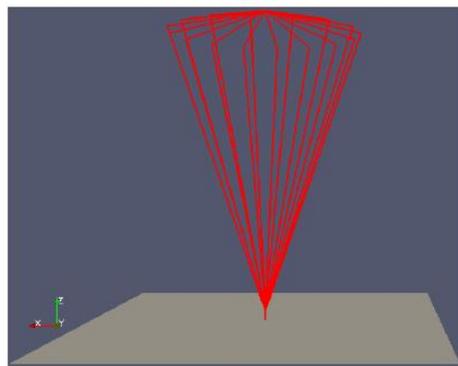


figure 3.8 – Antenne cage sur sol parfait.

Le générateur délivre une tension de la forme gaussienne (3.2.1)  $g(t)$  d'amplitude  $A = 1 V$ , d'écart type  $\sigma = 8.535E - 9$  et centré sur  $t_m = 4.E - 8 s$ .

$$g(t) = A \cdot e^{-\left(\frac{t-t_m}{2\sigma}\right)^2} \quad (3.2.1)$$

### Description de la modélisation approchée de l'antenne cage sur un plan de masse

Le pied de l'antenne est constitué d'un fil de longueur  $0.75 m$  dans la direction  $\vec{e}_z$  et de rayon  $0.0025 m$  sur lequel est positionné, au plus près du sol parfaitement métallique (première maille), un générateur de tension associé à une résistance de  $100 \Omega$ . A l'autre extrémité du fil d'alimentation, le réseau filaire se divise en 16 brins. Ces brins sont répartis uniformément en azimut (i.e. un brin tous les  $22.5$  degrés) comme illustré dans la figure 3.10. La longueur des brins est de  $22.75m$  et la hauteur de l'antenne de  $22.26m$ . Pour cela, les brins forment une inclinaison de  $20.1$  degrés avec l'axe central de l'antenne. Tous les brins sont connectés par des fils se réunissant au sommet de l'antenne à une hauteur de  $24m$ . La figure 3.9 représente une vue latérale de l'antenne avec ses dimensions.

La longueur d'onde minimale  $\lambda$  de la source d'agression est de  $7.5m$  et le pas de maillage utilisé dans la simulation est de  $0.375m$ . Ainsi, le facteur de résolution  $N_\lambda = 20$  est donc de 20 degrés de liberté par longueur d'onde.

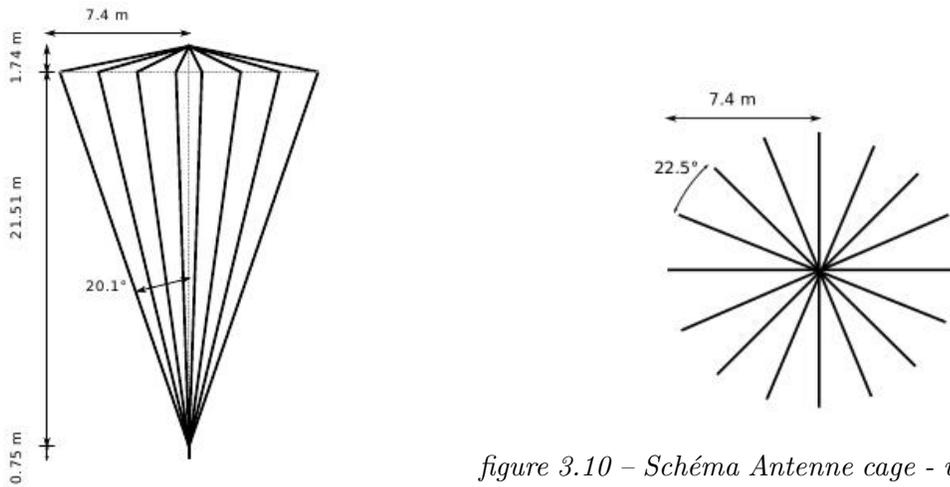


figure 3.10 – Schéma Antenne cage - vue de dessus.

figure 3.9 – Schéma Antenne cage - vue latéral.

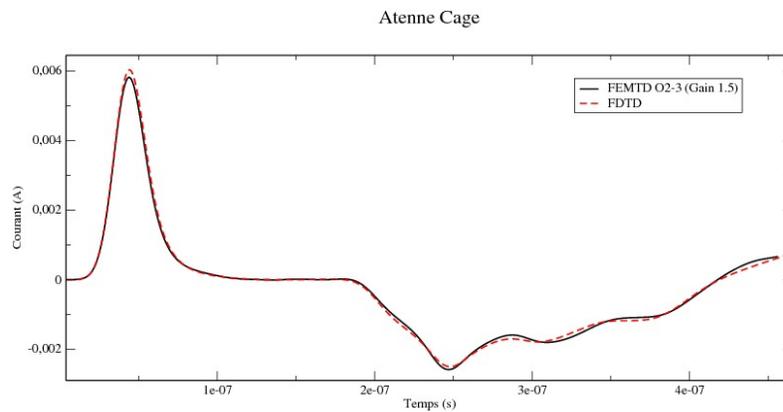


figure 3.11 – Courant évalué sur le fil situé à la base de l'antenne.

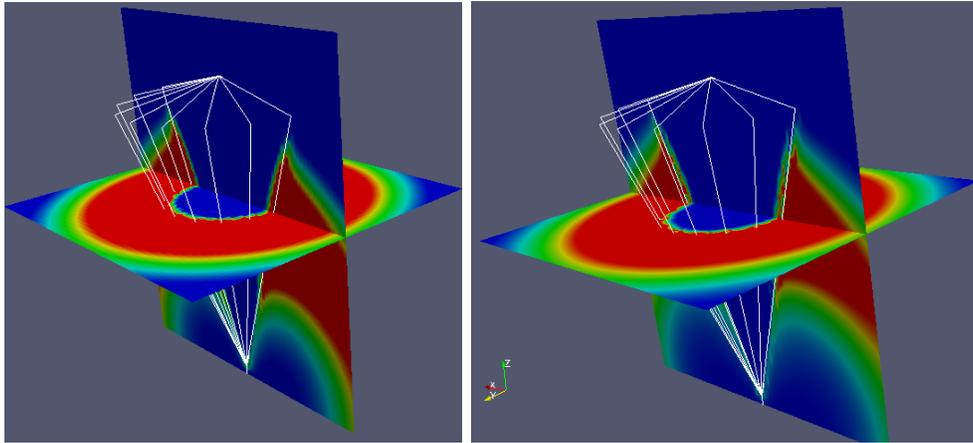


figure 3.12 – Répartition du champ électrique dans l'espace : FDTD (à droite) - FEM (à gauche).

Dans la figure (3.11), on compare le courant sur le segment positionné à la base de l'antenne, évalué par le schéma de Yee et notre approche FEM. Nous notons une bonne similitude entre les deux résultats. La figure (3.12) montre la répartition du module du champ électrique pour l'approche FEM et le schéma de Yee. Là encore, on note une quasi-similitude des résultats. Nous pouvons donc dire que la méthode FEM donne des résultats analogues, avec toutefois un gain en termes de temps calcul de 1.5 pour l'approche FEM, en utilisant des ordres spatiaux variables entre  $r^G = 1$  et 2. De plus, concernant les structures filaires, cet exemple montre que celles-ci sont correctement prises en compte dans l'approche FEM.

### 3.2.1.2 Réseau de dipôle : Antenne haute fréquence

Cette simulation représente la modélisation d'une antenne constituée d'un réseau de 135 dipôles, où l'on dispose sur chacun d'eux un générateur de tension. Ces dipôles sont localisés à une distance de  $0.1m$  d'une plaque métallique de dimension  $0.21m \times 0.26m$ , comme présenté dans la figure 3.13. La longueur de chaque dipôle est égale à  $0.015m$  et ceux-ci sont espacés de  $0.02m$  suivant l'axe  $x$  et de  $0.0125m$  suivant l'axe  $z$ . Le rayon de chaque dipôle est de  $1E - 4m$ , et le générateur de tension délivre un signal sinusoïdal à  $9GHz$ , d'amplitude  $2.6V$ .

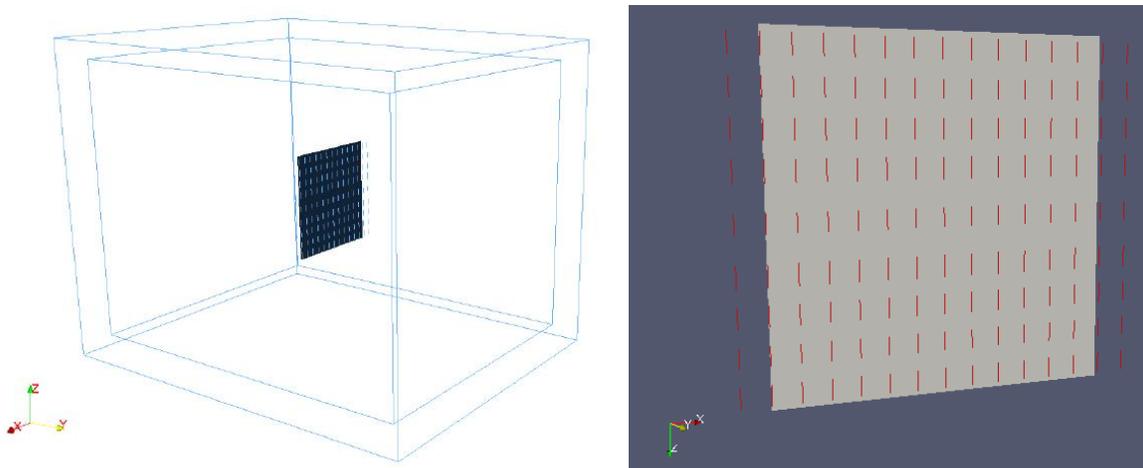


figure 3.13 – Réseau de dipôle en espace libre.

Les figures 3.14 et (3.15) présentent une comparaison des résultats obtenus avec le schéma de Yee et la méthode FEM dans le cas d'une simulation où le réseau de dipôles est positionné au centre d'un domaine de calcul de dimensions  $0.6m \times 0.7m \times 0.6m$ . Les résultats FEM sont comparables au schéma de Yee à partir de l'ordre  $r^G = 4$ , en considérant un pas d'espace égal à une longueur d'onde.

Schéma numérique	$r^G$	Pas d'espace	Gain Temps CPU	Gain Stockage Mémoire
FEM	3	0.02m	1.45	37
FEM	4	0.02m	1.1	15
FEM	5	0.02m	0.7	8
FDTD	0	0.002m	1.	1.

TABLE 3.1 – Comparaison des coûts informatiques entre le schéma FEM et un code FDTD optimisé.

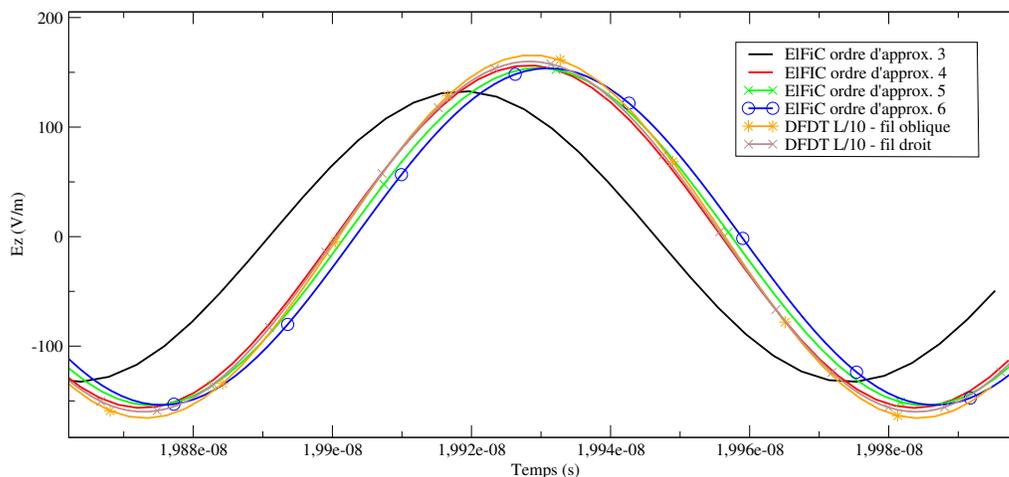


figure 3.14 – Champ électrique proche de l'antenne (ELFIC représente FEM).

La méthode FDTD est présentée avec deux modèles de fils minces : la modélisation de fils obliques [36] et la modélisation de fils droits [42]. Le modèle de fils obliques utilisé avec le schéma FEM est une adaptation du modèle de fils minces obliques [83] avec un ordre d'approximation spatiale élevé, présenté dans le paragraphe 4.2. Les résultats obtenus confirment que notre modèle de fils minces adapté aux ordres élevés est opérationnel.

Par ailleurs, le tableau (3.1) des temps calcul montre qu'il y a de meilleures performances avec la méthode FEM, malgré l'utilisation d'un code FDTD de production et donc parfaitement optimisé. Le gain de place mémoire obtenu par l'approche FEM est aussi très important, et ce, avec une précision meilleure qu'avec le schéma de Yee.

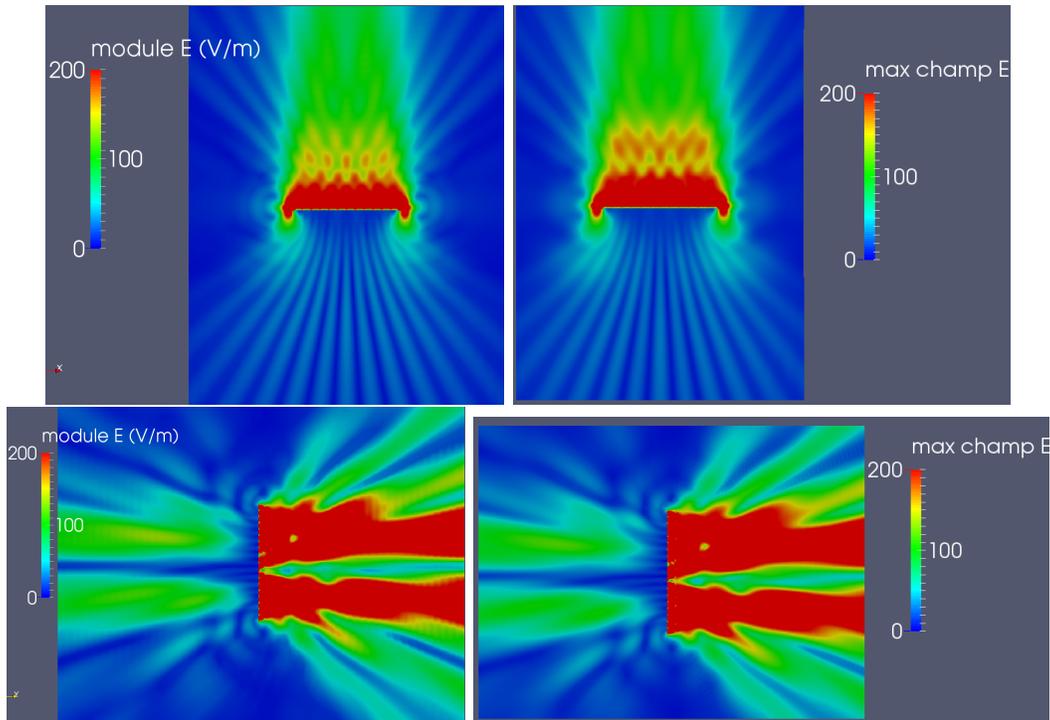


figure 3.15 – Comparaison FDTD (à droite) et FEM (à gauche) du champ rayonné suivant un plan XY et YZ.

Grâce au gain de place mémoire, on a pu effectuer avec l'approche FEM une simulation plus réaliste où l'antenne est positionnée à 10m d'un mur métallique et à 1m au-dessus d'un plan de masse, comme illustré sur la figure 3.16. Ce type de simulation, avec nos limitations informatiques actuelles (1024 processeurs avec 4 TeraOctets de RAM), ne peut pas être réalisé avec la méthode FDTD. La figure 3.17 présente la cartographie du module du champ électrique, illustrant ainsi le rayonnement du réseau de dipôles dans une simulation prenant en compte les structures métalliques perturbant l'émission de l'antenne.

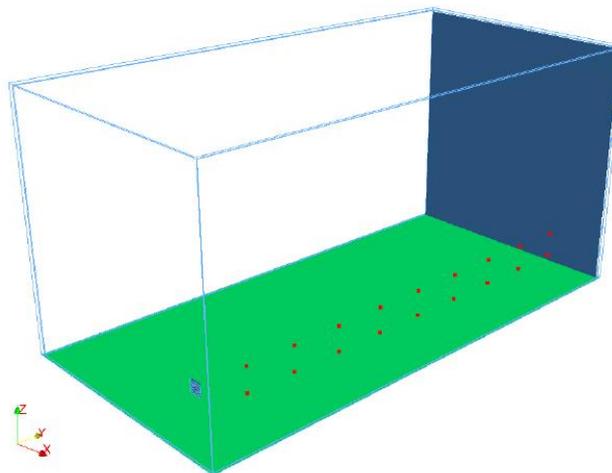


figure 3.16 – Réseau de dipôles à 10m d'une surface réfléchissante.

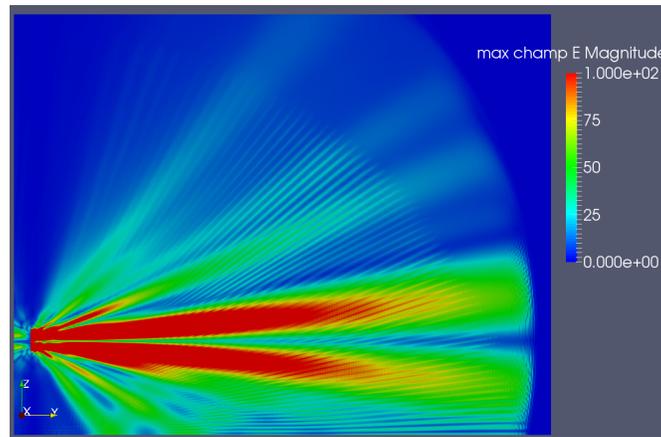


figure 3.17 – Cartographie du module du champ électrique du réseau de dipôles à 10m d'une surface réfléchissante.

En conclusion de cet exemple, notre approche FEM donne des résultats tout à fait analogues au schéma de Yee, mais grâce à l'utilisation d'un ordre d'approximation spatiale variable, elle permet, à précision équivalente, d'obtenir des gains respectivement de 1.1 et 15, en temps CPU et en coût mémoire par rapport au schéma de Yee. Le gain mémoire permet de traiter des configurations qui ne pourraient pas l'être sur nos moyens de calculs actuels par le schéma de Yee, ce qui dénote un intérêt de l'approche FEM.

### 3.2.1.3 Antenne Cornet

Avec cet exemple, nous nous sommes intéressés à l'apport de notre nouvelle approche FEM au calcul du ROS (Rapport d'Onde Stationnaire) ou du TOS (Taux d'Onde Stationnaire), sur une plage allant de 8 GHz à 16 GHz, d'une antenne cornet dont la géométrie est représentée par la figure 3.18.

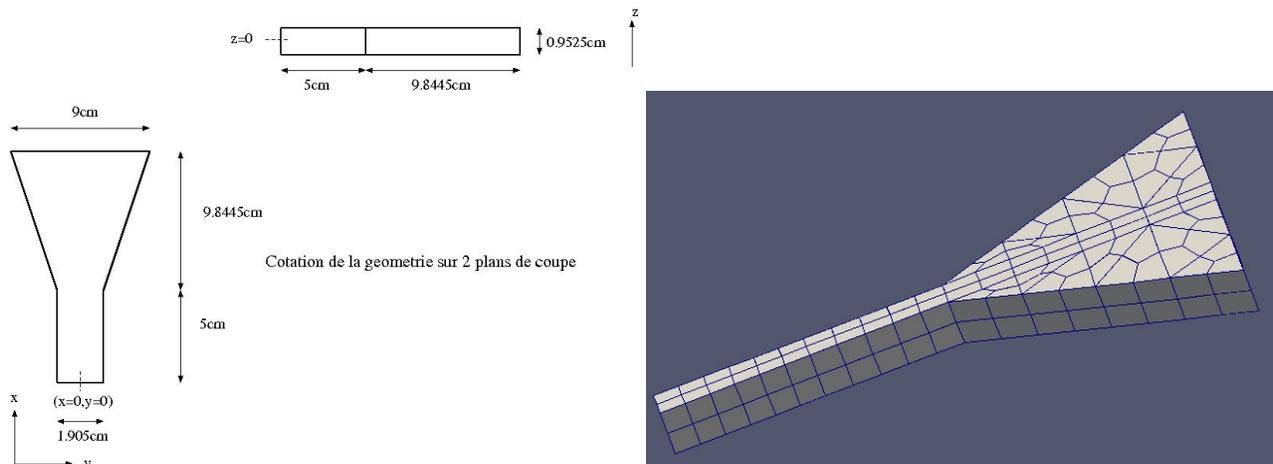


figure 3.18 – Géométrie et maillage Galerkin Discontinu du cornet.

Dans cette configuration, une partie de l'antenne est un guide droit de géométrie cartésienne et une autre partie est un guide évasé dont la géométrie n'est plus cartésienne. Dans notre approche FEM ou pour une approche FDTD, cette dernière partie sera donc discrétisée par un maillage en marches d'escalier qui va certainement entacher la solution et donc l'exactitude du ROS de notre antenne. Pour montrer cela, nous avons effectué une simulation avec une approche Galerkin Discontinu [65] (GD)

prenant en compte la géométrie courbe de l'antenne par l'utilisation d'un maillage non structuré. Le résultat de cette simulation a été comparé avec celui obtenu par notre méthode FEM sur un maillage en  $\lambda/10$  (voir figure 3.19,  $\lambda$  correspondant à la longueur d'onde minimale; c'est-à-dire pour une fréquence de 16 GHz).

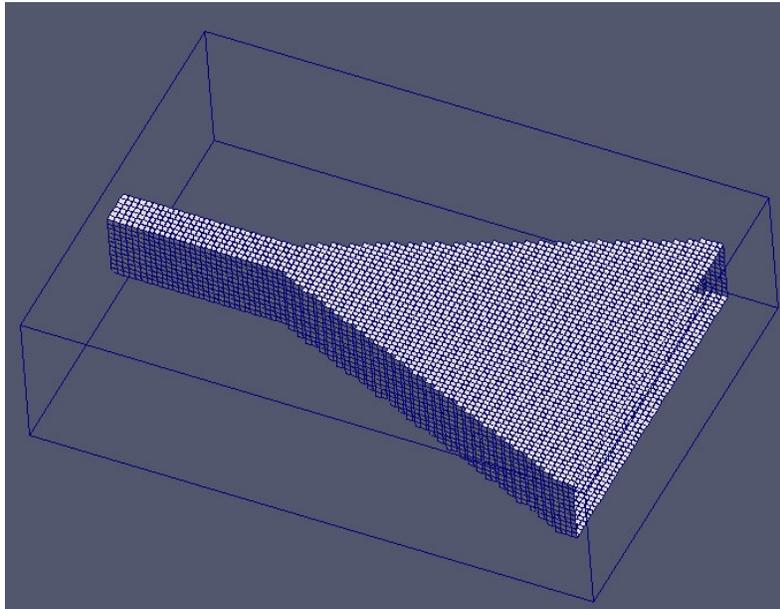


figure 3.19 – Maillage FEM du cornet en  $\lambda/10$ .

Sur les calculs effectués avec notre approche FEM et avec la méthode Galerkin Discontinue, on note que, pour la méthode FEM, le maillage en marche d'escalier de la partie conique de l'antenne, comme on s'y attendait, donne un résultat moins précis avec un maillage conforme à la géométrie pour la méthode GD. La figure 3.21 montre clairement cela au niveau du ROS, mais aussi sur la coupe représentant les champs à un instant donné. On note effectivement qu'à l'interface entre le guide droit et la partie conique, il y a une amplitude plus élevée des champs depuis notre approche FEM, visible sur la figure 3.20. Cela traduit une désadaptation du ROS plus importante, dans le cas de la simulation FEM, liée certainement au maillage cartésien. Il faut aussi noter dans cette figure que dans les deux coupes, les bords de la partie conique sont en marche d'escalier. Cela est dû au choix de la représentation demandée qui est définie par la sortie de points sur une grille cartésienne virtuelle.

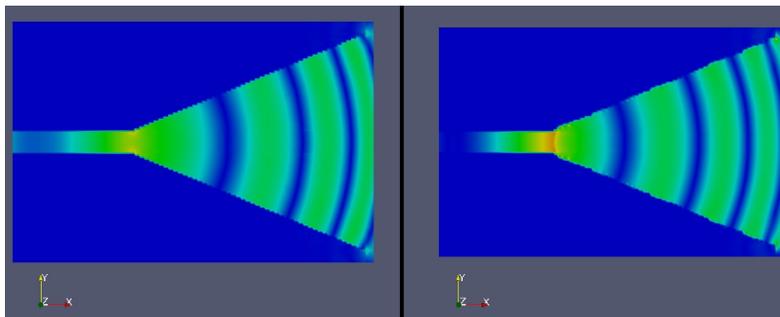


figure 3.20 – Cartographie des champs entre la méthode FEM (à droite) et la méthode GD (à gauche).

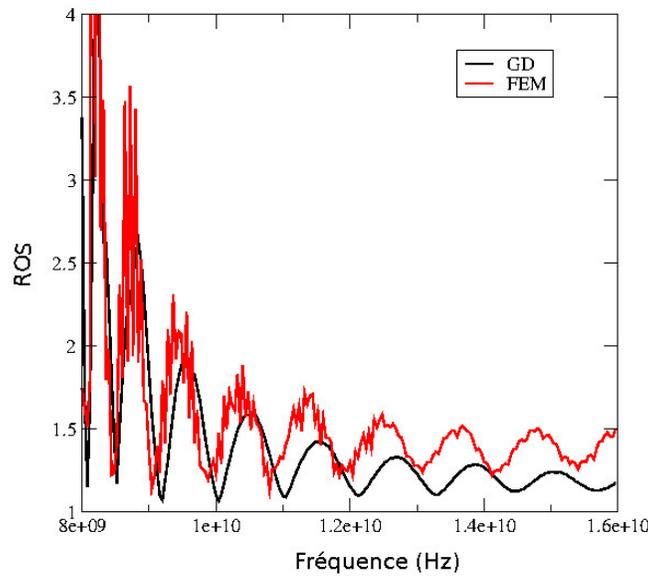


figure 3.21 – Comparaison du ROS entre la méthode FEM et la méthode GD.

Concernant notre méthode FEM, nous allons maintenant chercher à savoir si le fait de prendre des mailles plus grandes dans le guide droit ou sur l'ensemble de la géométrie, avec un ordre plus élevé, permet d'augmenter les performances en temps calcul par rapport à une simulation FDTD, c'est-à-dire avec une approximation spatiale d'ordre  $r^G = 0$  sur un maillage aussi fin dans la zone du guide droit que sur les parties coniques. Pour cela, nous nous intéressons aux trois types de maillages représentés sur les figures 3.22 et 3.23, dans lesquels nous avons un maillage en  $\lambda/10$ , un maillage similaire mais avec une zone centrale maillée en  $\lambda/3$  et finalement un maillage complet en  $\lambda/3$ . Pour chaque configuration, nous avons calculé les valeurs de ROS pour une fréquence allant de 8 GHz à 16 GHz et noté les temps de simulation.

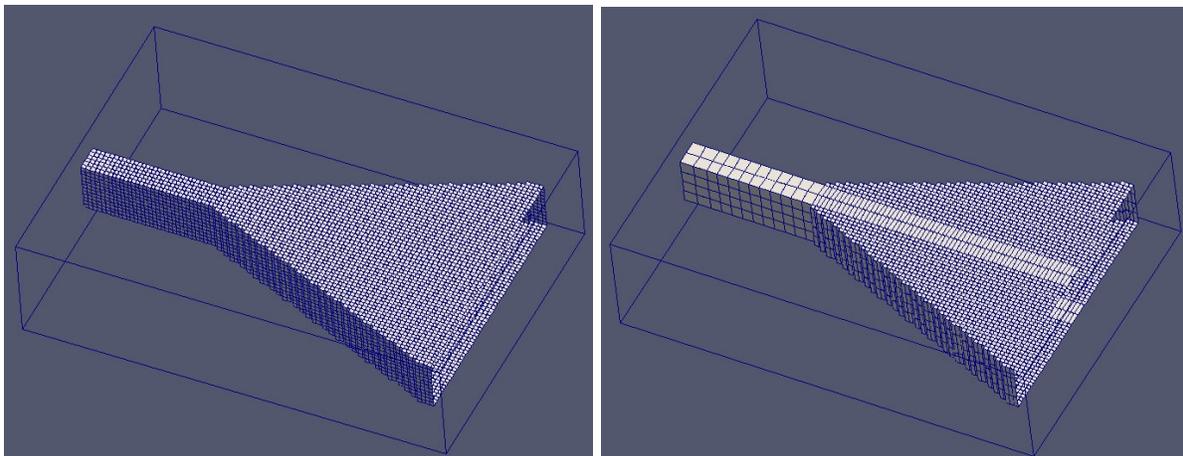


figure 3.22 – Maillages FDTD en  $\lambda/10$  (MeshDF1) et FEM en  $\lambda/10$  et  $\lambda/3$  (MeshDF2).

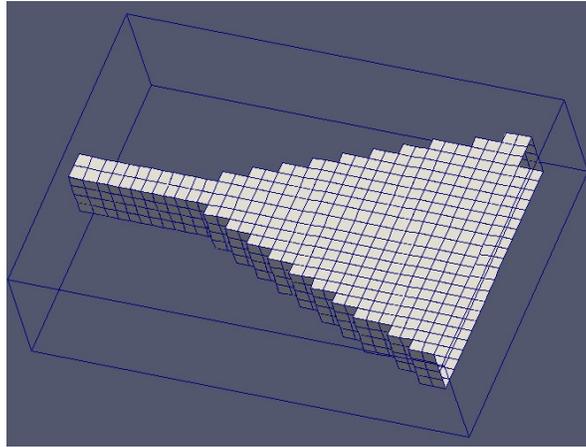


figure 3.23 – Maillage FDTD en  $\lambda/3$  (MeshDF3).

La figure 3.24 montre que, par rapport au ROS obtenu par la méthode GD sur le maillage de la figure 3.18, le fait d’avoir une bonne approximation géométrique des côtés évasés du cornet est important. Faire une approximation de la géométrie trop grossière en augmentant l’ordre de cette approximation n’est pas une bonne solution. Par contre, le fait d’avoir une taille de maille plus grande avec un ordre d’approximation plus élevé dans des zones cartésiennes de la configuration améliore le coût calcul sans pour autant dégrader la solution. Le tableau 3.2 donne les coûts calculs pour chaque configuration étudiée.

Maillages	$r^G$	Pas d’espace	Gain Temps CPU
MeshDF1	0	$\lambda/10$	1
MeshDF2	0 - 2	$\lambda/10 - \lambda/3$	1.4
MeshDF3	2	$\lambda/3$	5.2

table 3.2 – Temps de calcul pour différentes configurations de maillages

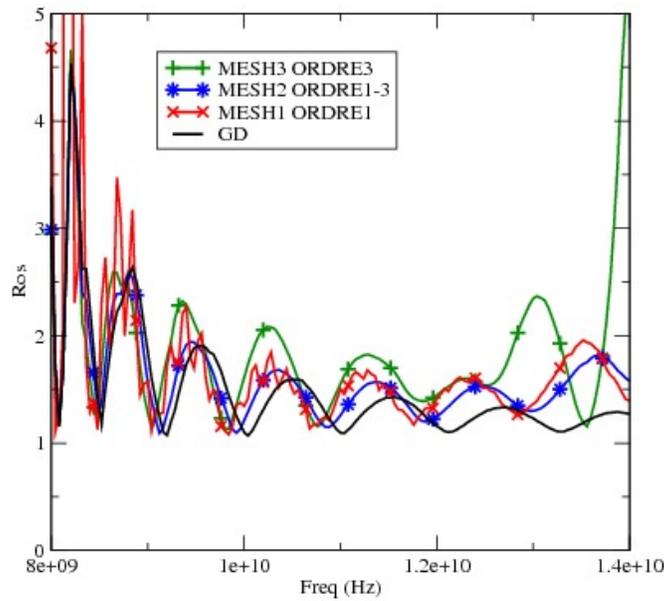


figure 3.24 – ROS obtenus avec plusieurs maillages FEM.

En conclusion des simulations effectuées sur cet exemple, on note que notre approche FEM apporte des gains sur les zones cartésiennes en augmentant la taille des mailles et l'ordre de l'approximation spatiale, mais ce gain reste toutefois limité sur les géométries courbes en raison du maillage en marches d'escalier.

### 3.2.1.4 Antenne : Guide avec obstacles bloquants

Dans cet exemple, on s'intéresse à une antenne constituée d'un guide rectangulaire, à l'intérieur duquel deux plaques métalliques sont positionnées. La géométrie de cette antenne est décrite dans les figures 3.25 et 3.26 qui représente respectivement une coupe longitudinale et transverse du guide. Les points de mesures sont placés à intervalles réguliers jusqu'à 3m de la surface d'émission.

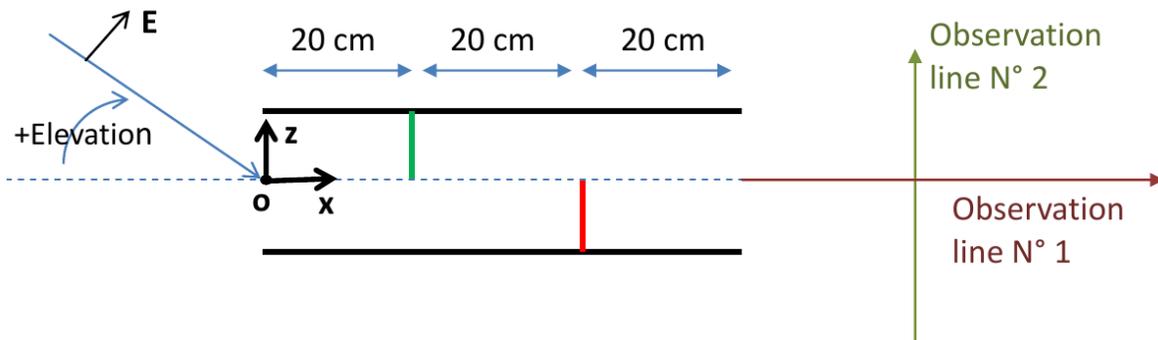


figure 3.25 – Vue longitudinale du guide avec obstacles bloquants

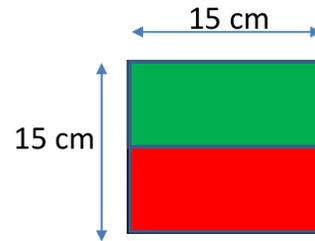


figure 3.26 – Vue transverse du guide avec obstacles bloquants

Dans la figure 3.27, on montre le positionnement d'une surface de Huygens dans la géométrie du guide et celui des couches PML afin de simuler la propagation d'une onde plane sinusoïdale dans la cavité. La longueur d'onde liée à la source est donnée par  $\lambda = 0.3 \text{ m}$  et le vecteur de propagation d'onde de celle-ci est dans la longueur du guide (direction  $Ox$ ). La polarisation du champ électrique est suivant l'axe  $Oz$  (voir figure 3.25).

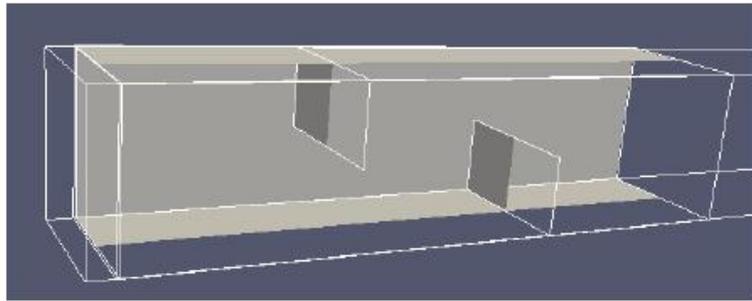


figure 3.27 – Guide avec obstacles bloquants.

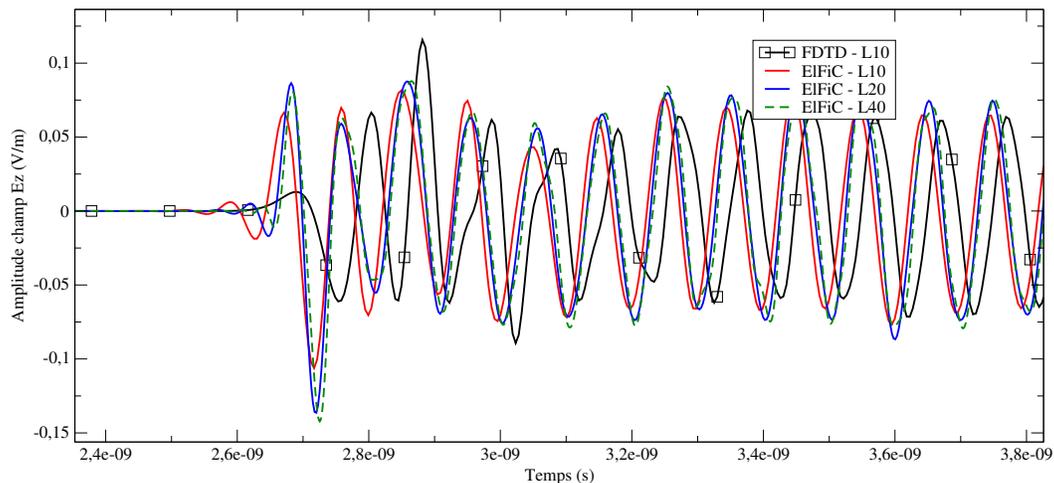


figure 3.28 – Mesure à 3m de la sortie du guide avec obstacles bloquants.

Cette configuration a été traitée à l'aide de notre approche FEM en utilisant la stratégie d'optimisation de maillage et d'affectation d'ordre, ainsi qu'avec la méthode FDTD. La figure 3.28 montre différents résultats obtenus par les deux approches, sur lesquels on peut voir que la solution FDTD est relativement différente des autres, pour un facteur de résolution identique. Ceci peut venir du manque de précision de la solution sur les bords des plaques métalliques situées dans le guide qui sont mieux représentées par

la méthode FEM grâce à l'attribution d'un ordre d'approximation spatiale plus élevé à cet endroit là. Il s'avère que l'on a déjà remarqué dans d'autres exemples qu'avec un ordre d'approximation spatial élevé on représente mieux la solution près des parois qu'avec un maillage FDTD de résolution plus fine. Dans le cas FEM, quelque soit la résolution choisie, on note que la solution est stable et donc certainement proche de la réalité.

Schéma numérique	Facteur de résolution $N_\lambda$	Pas d'espace	$r^G$	Temps CPU	Stockage Mémoire
FEM	10	0.003m-0.025m	0-4	37	2 392 603
FEM	20	0.003m-0.075m	1-9	344	5 401 319
FEM	40	0.003m-0.075m	2-9	1000	13 281 702
FDTD	10	0.0025m	0	253	12 577 833

table 3.3 – Comparaison des coûts informatiques entre le schéma FEM et un code FDTD

Dans le tableau (3.3), on a donné les coûts calculs et mémoire pour les deux types de solutions FEM et FDTD. Sur ces résultats, on note que sur géométrie cartésienne, l'approche FEM est la plus efficace en temps calcul et en place mémoire. En effet, dans le cas FEM, toutes les solutions sont quasi-similaires en fonction de  $N_\lambda$ , donc en terme de comparaison de performances avec la méthode FDTD, on prendra la solution en  $N_\lambda = 10$ .

En conclusion, cet exemple confirme l'avantage de l'approche FEM sur l'approche FDTD pour traiter des configurations à géométrie cartésienne.

### 3.2.2 CEM et calcul de champs à l'intérieur de véhicules

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à l'utilisation d'une approche FEM d'ordre élevé pour traiter des problèmes de compatibilité électromagnétique (CEM) et plus précisément aux calculs du champ à l'intérieur de véhicules. Dans cette optique, nous présentons trois configurations qui correspondent à :

- l'évaluation du champ à l'intérieur d'une boîte, typique de certains boîtiers dans les véhicules, comportant un joint et illuminé par un champ extérieur. Nous cherchons, dans cet exemple, à montrer l'intérêt d'une approximation spatiale d'ordre élevé pour l'obtention d'une solution correcte ;
- l'évaluation du champ à l'intérieur d'une structure à géométrie non cartésienne comme le GENECE ; Le but de cet exemple est de montrer si dans ce cas l'ordre élevé apporte aussi un plus comme dans l'exemple précédent, malgré une représentation de la géométrie en marches d'escaliers ;
- l'évaluation de champs dans le cas d'une géométrie automobile illuminée par une antenne Biconi-Log. Dans ce cas, nous pouvons comparer les résultats obtenus avec des mesures.

#### 3.2.2.1 Cavité cartésienne en présence d'une fente complexe

Cette simulation présente l'agression par une forme d'onde incidente d'une cavité possédant des fentes fines sur un temps d'observation de l'ordre de  $1500\lambda/c_0$  s, où  $\lambda$  et  $c_0$  définissent, respectivement, la longueur d'onde minimale et la vitesse des ondes dans le milieu. Ceci représente un temps d'observation considérable par rapport à une simulation moyenne. La largeur des fentes est de  $\lambda/20$  m et ces dernières forment une ouverture en carré, comme illustré sur la figure 3.29. Les dimensions de la cavité sont de  $1m \times 1m \times 0.5m$ , les 4 fentes ont une longueur de  $0.22$  m et sont positionnées sur une face de plan XY de la cavité. L'onde incidente est un signal de forme gaussienne (3.2.1) d'amplitude  $A = 1$  V, d'écart type  $\sigma = 5.E - 10$  et centré en  $t_m = 1.6E - 9$  s. Le vecteur d'onde est colinéaire à l'axe  $z$  (voir figure 3.29) et le point de mesure est positionné au centre de la cavité ( $0.5m; 0.5m; 0.3m$ )

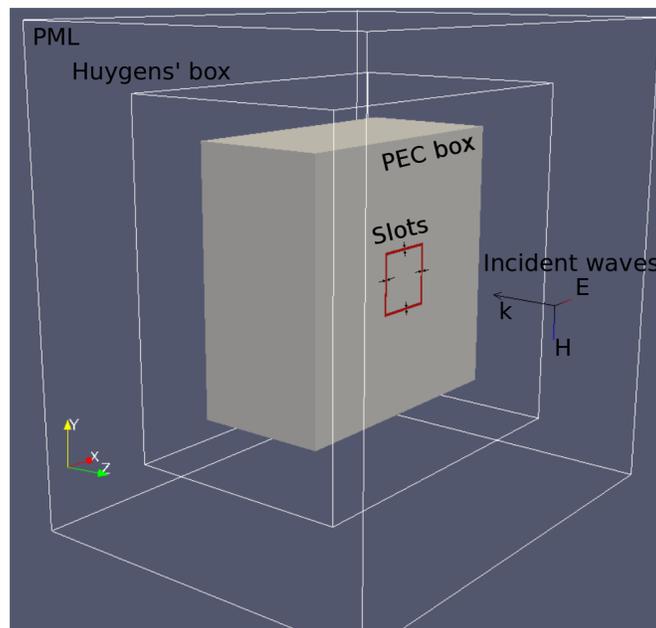


figure 3.29 – cavité avec fentes (en rouge)

Cette configuration de fentes a été choisie car elle met en défaut le modèle de fentes minces du code FDTD de référence. En effet, le modèle équivalent de fentes minces actuel manque de précision pour prendre en compte la géométrie des coins du carré formé par l'ensemble des fentes. De ce fait, la

simulation doit être réalisée en maillant les fentes afin d’obtenir un résultat proche de la solution de référence, donnée par une simulation FDTD avec un maillage en  $\lambda/80$ .

L’approche FEM permet d’utiliser des pas d’espace et des approximations variables, et ainsi, les fentes peuvent être maillées finement tout en gardant un maillage en  $\lambda/10$  sur le reste du domaine de calcul.

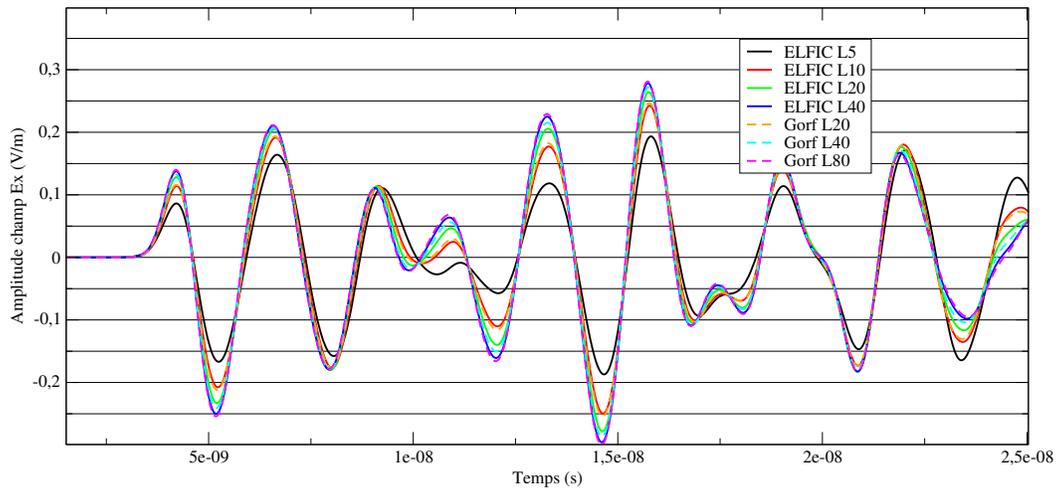


figure 3.30 – Composante  $x$  du champ électrique  $E_x$  évaluée entre  $5$  et  $37\lambda/c_0$  s au centre de la cavité (le label ELFIC représente la FEM).

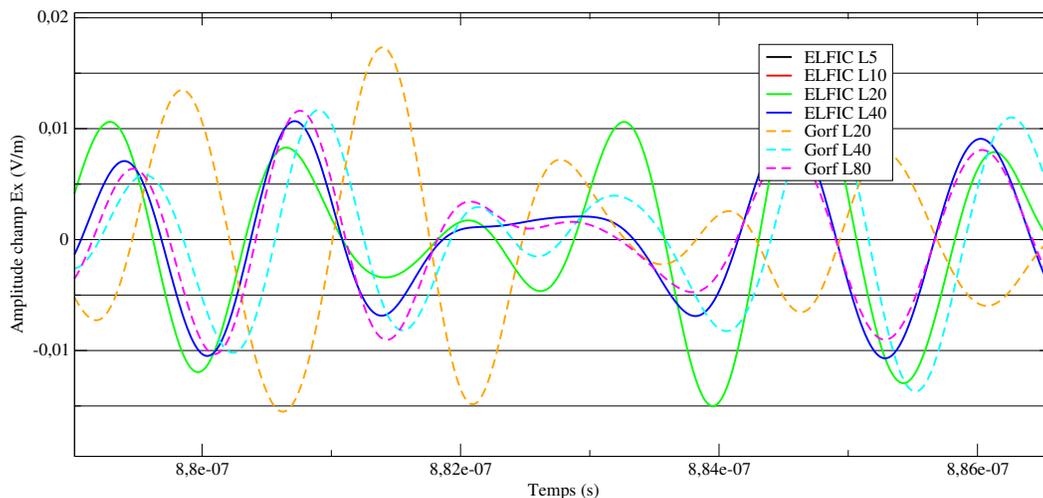


figure 3.31 – Composante  $x$  du champ électrique  $E_x$  entre  $1320$  et  $1330\lambda/c_0$  s au centre de la cavité (le label ELFIC représente la FEM).

Dans les résultats présentés dans le tableau (3.4) pour l’approche FEM, les calculs ont été réalisés en utilisant la stratégie de génération de maillage et d’affectation d’ordre d’approximation spatiale proposée dans le chapitre précédent. Concernant les calculs FDTD, différents pas d’espace ont été choisis afin de montrer l’évolution du coût calcul et mémoire de la méthode FDTD par rapport au facteur de résolution  $N_\lambda$ . Si on compare les résultats de l’approche FEM et l’approche FDTD, pour un facteur de résolution  $N_\lambda$  correct et à résultat équivalent pour des temps longs, il faut s’intéresser uniquement aux simulations FEM à  $\lambda/40$  et FDTD à  $\lambda/80$ . On note alors le gain important obtenu par l’approche FEM, tant en temps de calcul que de place mémoire par rapport aux simulations FDTD.

Schéma numérique	Facteur de Résolution $N_\lambda$	Pas d'espace	$r^G$	Temps CPU	Stockage Mémoire
FEM	5	0.01m-0.39m	0-5	660	100 000
FEM	10	0.01m-0.2m	0-4	4260	226 548
FEM	20	0.01m-0.1667m	0-6	17 000	530 707
FEM	40	0.005m-0.0833m	0-6	230 000	1 812 785
FDTD	20	0.01m	0	17 000	4 536 000
FDTD	40	0.005m	0	280 000	36 288 000
FDTD	80	0.0025m	0	760 000	49 093 312

table 3.4 – Comparaison des coûts informatiques entre le schéma FEM et le schéma FDTD

En conclusion de cet exemple, nous pouvons dire que sur des géométries purement cartésiennes, l'utilisation de notre approche FEM est optimale et apporte un réel avantage par rapport à la méthode FDTD.

Par ailleurs, les deux derniers exemples traités montrent l'apport de notre stratégie de génération de maillage et de choix d'ordres d'approximation spatiale pour l'approche FEM.

### 3.2.2.2 GENE C

Le GENE C est une structure proposée par le CEA/Gramat pour permettre de valider et tester des méthodes numériques et des modèles physiques développés pour la simulation de champs et de courants dans le domaine de la CEM. Pour cela, un ensemble de mesures a été réalisé sur cette maquette par le CEA. La géométrie de la maquette du GENE C est représentative d'un petit missile générique dans lequel sont positionnés quelques éléments constitutifs d'un vrai missile. Les figures 3.32 et 3.33 montrent des coupes de cette géométrie où on peut voir le réservoir, les ailes et des éléments de contrôle de pilotage.

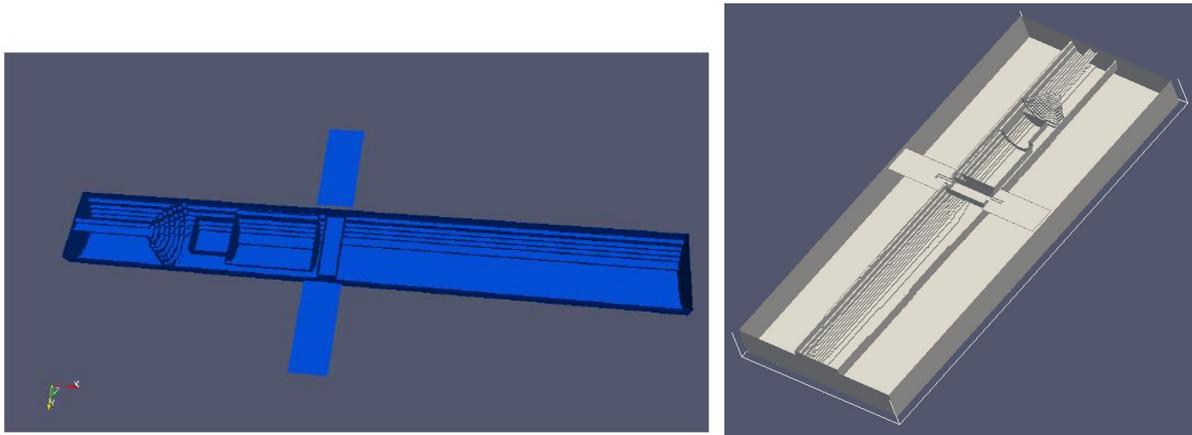


figure 3.32 – Géométrie du GENE C.

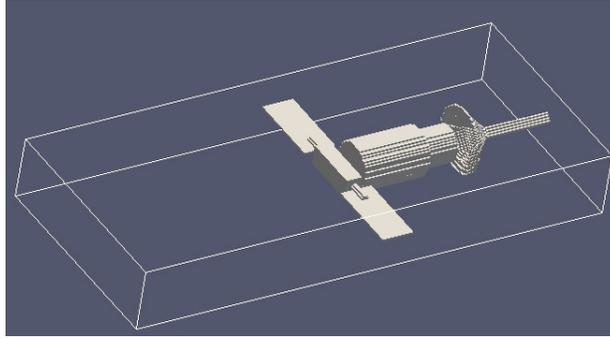


figure 3.33 – Géométrie du GENECE.

On illumine le missile par une onde plane définie par  $k = (k_x; k_y; k_z)$ ,  $E = (E^x; E^y; E^z)f(t)$  et  $H = k \times E$  avec  $f(t) = \exp(-\gamma^2)$  où  $\gamma = (t - (k_x(x - x_0) + k_y(y - y_0) + k_z(z - z_0)))/c_0 - \mu)/\sigma$  et  $\mu = 2.E - 9$ ,  $\sigma = 3.9E - 11$ ,  $(x_0 = 0.85m; y_0 = 0; z_0 = -0.0755m)$ . Dans ces expressions,  $t$  et  $c_0$  représentent respectivement le temps et la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide. On relève ensuite, trois points de champs internes au missile notés  $P_1 = (0.7755m; 0; 0)$ ,  $P_2 = (0.5755m; 0; 0)$  et  $P_3 = (0.4555m; 0; 0)$ . Nous nous intéressons à deux sources dont les fréquences maximales sont respectivement égales à  $10\text{ GHz}$  et  $5\text{ GHz}$ . La première est définie comme précédemment et la seconde en prenant  $\mu = 4.E - 10$  et  $\sigma = 1.E - 10$ . Pour traiter ce problème, nous utilisons 2 types de maillages donnés par une grille de  $282 \times 127 \times 45$  mailles pour  $10\text{ GHz}$  et  $146 \times 69 \times 28$  mailles pour  $5\text{ GHz}$ , qui correspondent à une approximation Q1 ( $r^G = 0$ ) de la solution, respectivement à  $10\text{ GHz}$  et à  $5\text{ GHz}$ . Par ces configurations, en considérant une source à  $10\text{ GHz}$ , nous cherchons à savoir si pour le maillage à  $5\text{ GHz}$ , en utilisant un ordre  $r^G = 1$  (approximation Q2) en espace dans notre simulation, nous obtenons des résultats similaires au maillage à  $10\text{ GHz}$ , malgré une description de la géométrie plus grossière.

La figure 3.34 montre une comparaison des résultats obtenus, pour une source à  $10\text{ GHz}$ , avec le schéma de Yee et notre approche FEM sur le maillage à  $10\text{ GHz}$ .

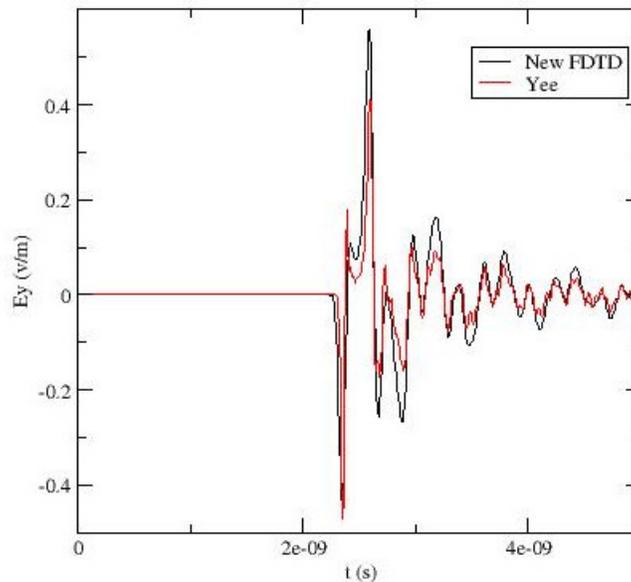


figure 3.34 – Comparaison du schéma de Yee et du schéma FEM sur un maillage adapté à un ordre d'approximation  $r^G = 0$  (Q1), pour un signal avec une fréquence maximale de 10 GHz (le Label New FDTD représente la FEM).

La figure 3.35 montre un même type de comparaison, mais pour un signal ayant une fréquence maximale de 5 GHz, en considérant le maillage 5 GHz.

Ces deux résultats montrent une grande similitude avec un coût calcul plus élevé pour notre approche FEM qui à cause du choix automatique de l'ordre d'approximation spatiale qui détermine une approximation Q2 ( $r^G = 1$ ) pour toutes les cellules dans la direction  $Ox$ .

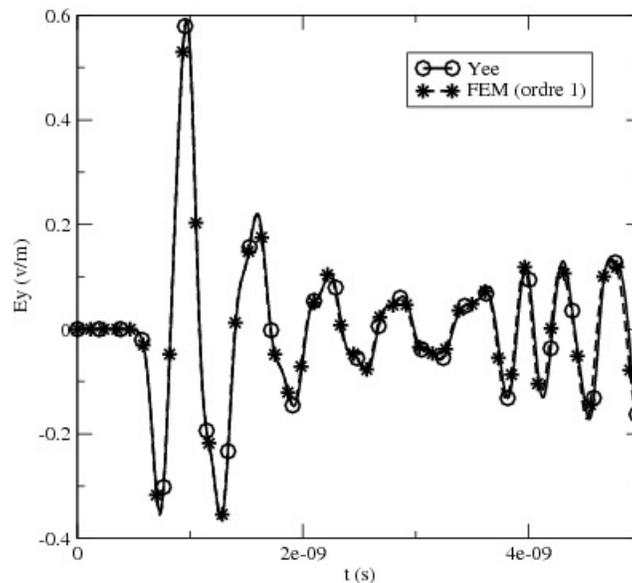


figure 3.35 – Comparaison schéma de Yee et FEM à un ordre d'approximation  $r^G = 0$  (Q1) sur un même maillage pour un signal avec une fréquence maximale de 5 GHz.

La figure 3.36 montre une comparaison entre les résultats obtenus pour un signal à  $10\text{ GHz}$  en utilisant le maillage adéquat à la fréquence et sur un maillage 2 fois plus grossier, mais en prenant un ordre d'approximation spatiale égal à  $r^G = 1$  (Q2). On note sur cette figure que les résultats ne sont pas analogues, comme cela était le cas pour l'exemple du boîtier. En effet, on note ici l'importance de la géométrie qui influe sur le résultat. Il est quand même intéressant de voir que dans une première durée (là où la géométrie n'influe pas encore), notre approche avec l'approximation spatiale d'ordre  $r^G = 1$  (Q2) donne un résultat analogue au calcul sur maillage fin, alors que le schéma de Yee fournit un résultat faux.

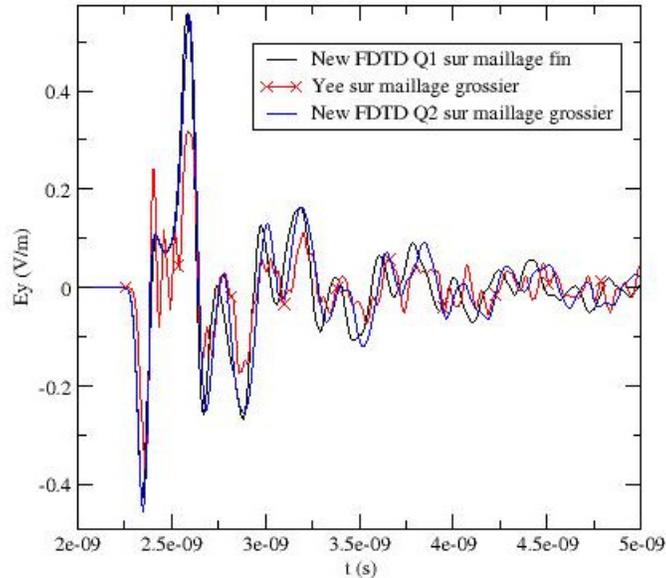


figure 3.36 – Utilisation d'un ordre d'approximation spatiale égal à  $r^G = 1$  (Q2) pour éviter le remaillage (le label New FDTD représente la FEM).

Ce dernier résultat montre qu'utiliser l'ordre d'approximation spatiale pour éviter de remailler la structure lorsqu'on augmente le spectre de la source n'est pas une approche qui marche à tous les coups. En effet, lorsque la structure est courbe et que le point de champ à observer est proche de cette structure, la définition du maillage de celle-ci joue un rôle important sur la qualité de la solution. En fait, le maillage en escalier n'est pas approprié et un maillage conforme à la structure serait nécessaire. D'où, l'importance de solutions hybrides dans ce type de configurations habituelles des problèmes de CEM.

### 3.2.2.3 Projet GEMCAR

La configuration que nous présentons dans ce paragraphe provient du projet européen GEMCAR, pour lequel il a été proposé des outils de simulation pour qualifier, d'un point de vue CEM, une automobile. Ce projet sous l'égide de la MIRA (Motor Industry Research Association) proposait plusieurs configurations avec différentes mesures pour chacune d'elles. Parmi ces configurations, il y en avait une qui consistait à illuminer la voiture positionnée dans une chambre semi-anéchoïque, par une antenne BiconiLog. Ici, on va présenter une simulation de cette configuration avec notre approche FEM et comparer celle-ci avec d'autres simulations effectuées par le schéma de Yee et des mesures.

Avant de réaliser la simulation complète, l'antenne a été qualifiée en effectuant des calculs de champs rayonnés en plusieurs points. Dans un premier temps, nous allons donc effectuer cette qualification avec notre nouvelle approche FEM afin de voir si celle-ci apporte un plus par rapport aux calculs avec le

schéma de Yee.

L'antenne étudiée est une BiconiLog dont la plage de fréquences s'étend de 0 à 10 GHz et dont la géométrie est représentée sur la figure 3.37.

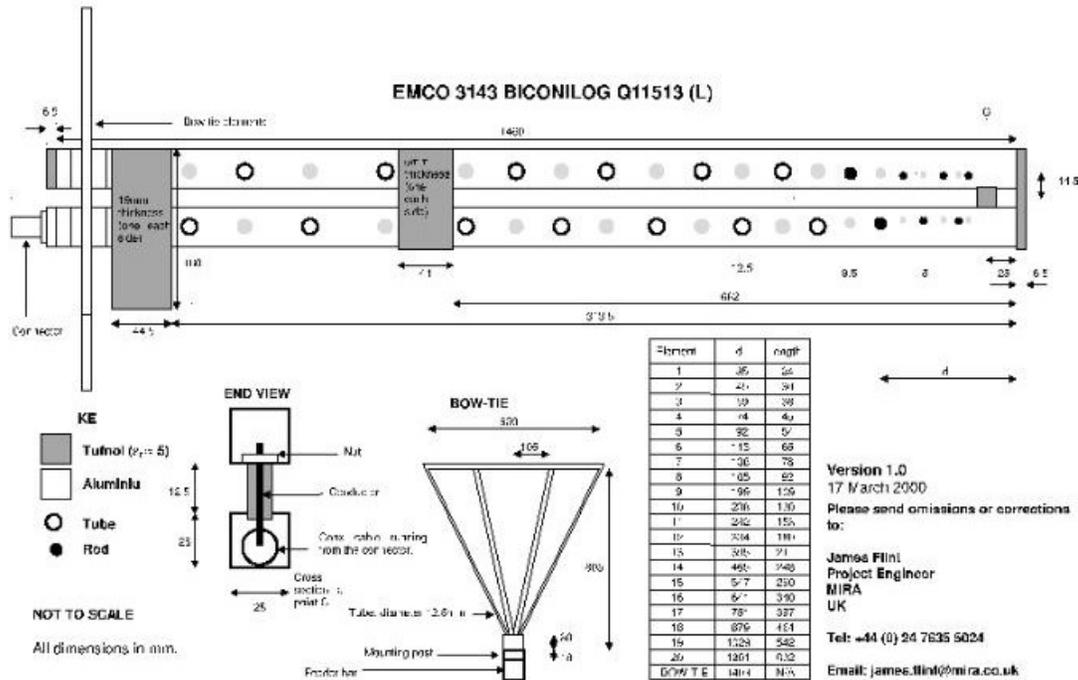


figure 3.37 – Géométrie de l'antenne BiconiLog.

Pour simuler cette antenne, nous avons réalisé un maillage à pas variable tel que les distances inter-brins et longueurs de ceux-ci soient respectées (voir figure 3.38). Pour la source, on impose un générateur de tension, avec une résistance de 50Ω, sur un fil positionné entre les deux barres centrales de l'antenne, et avec un signal injecté de forme gaussienne.

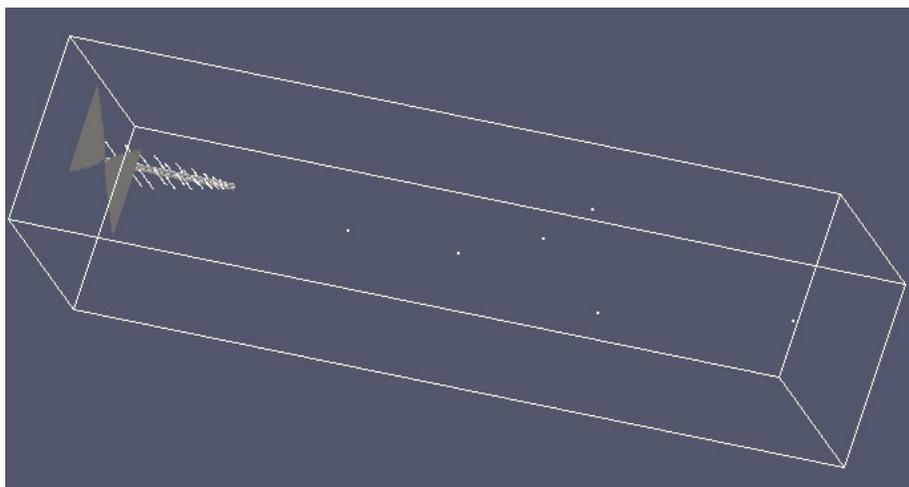


figure 3.38 – Maillage de l'antenne BiconiLog avec les points de calculs.

La figure 3.39 représente une comparaison mesures/calculs avec une simulation par le schéma de

Yee et notre approche FEM. Pour les deux calculs, nous avons conservé le même maillage de l'antenne et laissé l'ordre variable dans notre approche. Toutefois, en utilisant notre stratégie d'optimisation de maillage, sur cet exemple, on trouve que la quasi-totalité des mailles est à l'ordre d'approximation spatiale  $r^G = 0$  (sinon  $r^G = 1$ ). Les valeurs calculées montrent une assez bonne similitude avec les mesures, sans vraiment montrer un apport important de notre approche FEM par rapport au schéma de Yee.

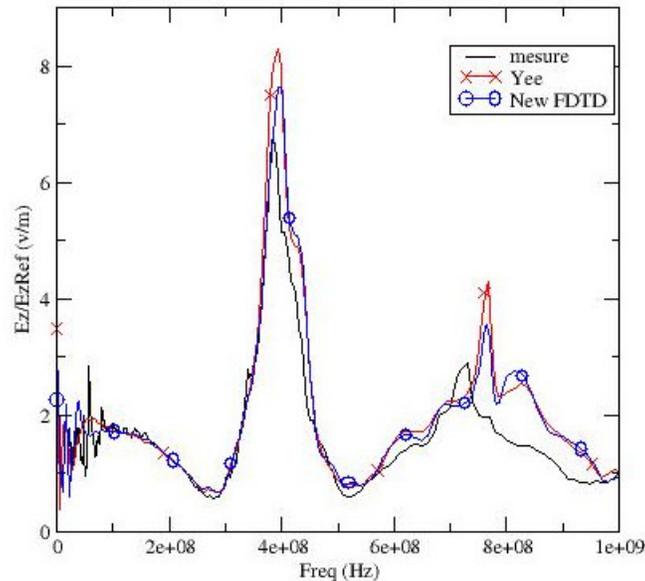


figure 3.39 – Comparaisons mesures/calculs effectuées avec le schéma de Yee et le schéma FEM (le label New FDTD représente la FEM).

Concernant cette simulation, le calcul avec notre nouvelle approche FEM ne met pas en avant l'intérêt de l'ordre élevé. Puisque notre formalisme de fil mince oblique permet de positionner les fils n'importe où dans le maillage, nous avons alors décidé de doubler la taille des cellules dans la direction  $Ox$ . En utilisant notre stratégie d'optimisation de maillage, nous avons obtenu un ordre d'approximation spatiale  $r^G = 0$  dans la direction  $Ox$  du maillage sauf sur quelques cellules où  $r^G = 1$ . Le calcul effectué montre des différences sur les premiers temps (hautes fréquences). En effet, bien que le choix de l'ordre d'approximation spatiale tienne compte de la longueur d'onde minimale de la source et de la taille des cellules, le résultat n'est pas bon. Nous expliquons cela par la position des brins de l'antenne dans les cellules. En effet, dans le nouveau maillage, nous pouvons obtenir deux brins dans un même cellule (voir figure 3.40). Dans notre modèle pour un ordre d'approximation spatiale égale à  $r^G = 0$ , on perd alors la mutuelle entre ces deux brins à cause du manque de précision spatiale sur le champ.

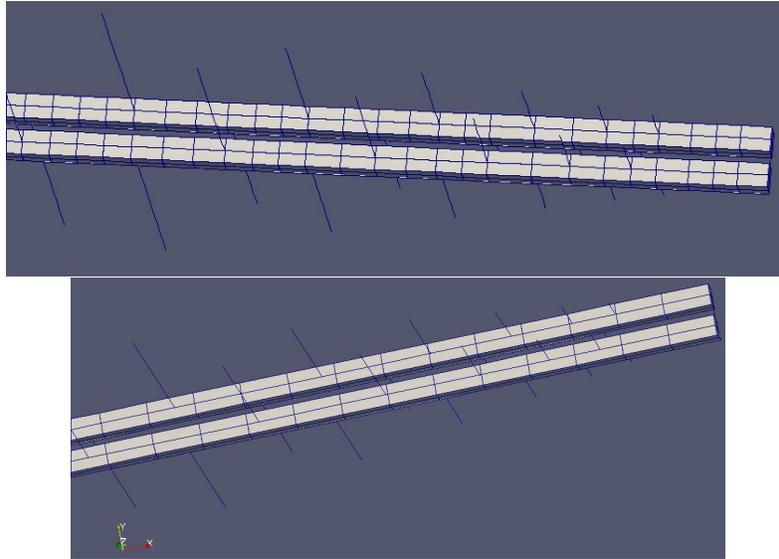


figure 3.40 – Disposition des brins dans 2 maillages.

Si on augmente l'ordre d'approximation spatiale (à  $r^G = 1$  dans ce cas), on retrouve une précision suffisante et le résultat obtenu redevient précis comme illustré sur les figures 3.41 et 3.42. On voit ici l'intérêt d'avoir un ordre élevé pour la simulation dans le cas de formalisme de fils obliques.

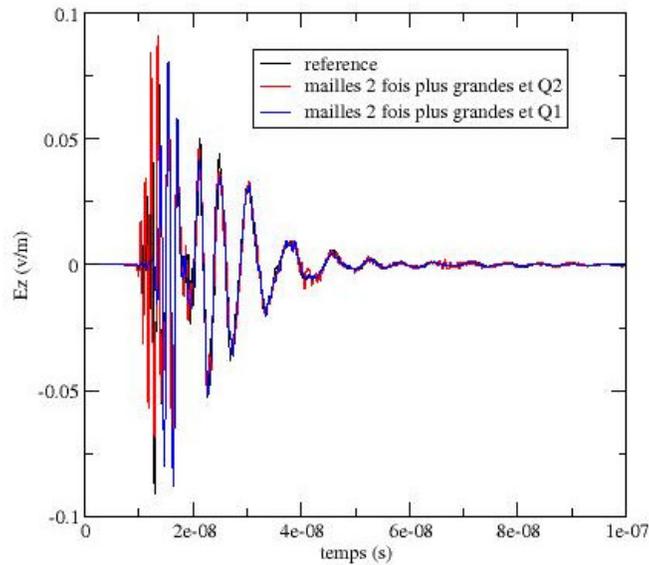


figure 3.41 – Comparaison des solutions temporelles du schéma FEM pour des ordres d'approximation spatiale égale à  $r^G = 0$  (Q1) et à  $r^G = 1$  (Q2).

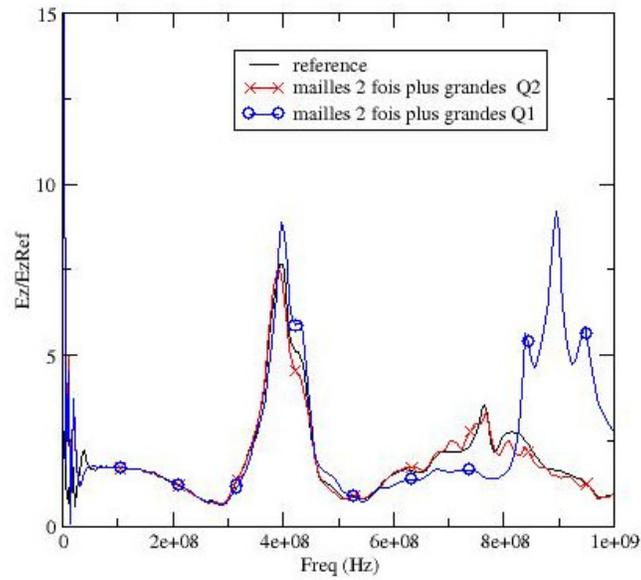


figure 3.42 – Comparaison des résultats fréquentiels du schéma FEM pour des ordres d’approximation spatiale égale à  $r^G = 0$  (Q1) et à  $r^G = 1$  (Q2).

Nous nous sommes ensuite intéressés aux calculs de champs à l’intérieur du véhicule pour une configuration donnée par la figure 3.43.

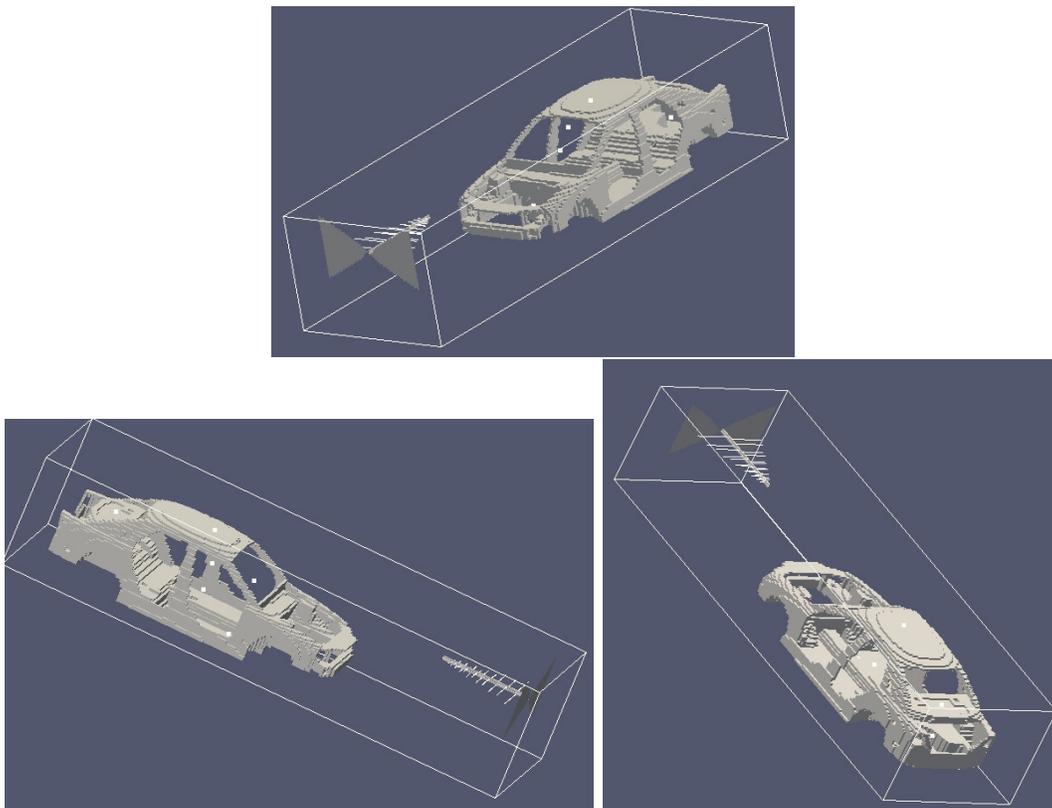


figure 3.43 – configuration de calcul avec la voiture.

La figure 3.44 présente une comparaison avec la mesure des simulations obtenues par le schéma de Yee et notre approche FEM. Le maillage utilisé dans les simulations avec les deux approches est celui généré pour le schéma de Yee. Dans le calcul effectué par l'approche FEM, nous avons laissé une stratégie de choix d'ordre spatial automatique. Ceci donne un ordre d'approximation égal à  $r^G = 0$  pratiquement sur toutes les cellules excepté sur quelques unes dans la direction  $Ox$ , où on a  $r^G = 1$ .

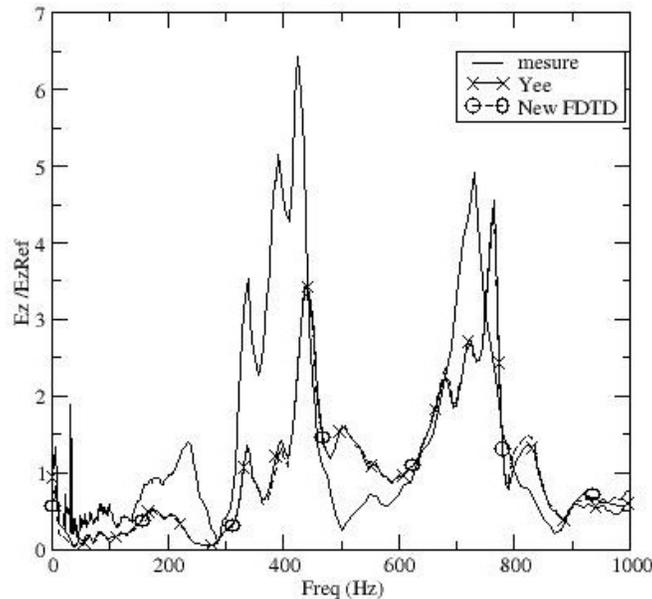


figure 3.44 – Comparaison des résultats entre la référence, le schéma de Yee et l'approche FEM (label New FDTD représente la FEM).

Dans cette figure, on note que la méthode FEM n'apporte pas plus que le schéma FDTD. En effet, les ordres d'approximation spatiale obtenus automatiquement sont pratiquement tous égaux à  $r^G = 0$ . Pour pouvoir espérer un gain, il faudrait comme dans le cas de l'étude effectuée sur l'antenne précédente, augmenter la taille des mailles, mais alors comme pour le cas du GENEC, on va détériorer l'approximation de la structure et donc risquer de perdre tout l'intérêt du maillage plus grossier et donc de l'ordre élevé. Comme pour le GENEC, on a un problème lié avec le maillage de la structure en marches d'escalier que l'on ne peut résoudre efficacement que par une hybridation de maillages et de méthodes. Toutefois, cet exemple nous permet aussi de montrer que notre approche FEM permet de traiter des configurations industrielles relativement complexes.

#### 3.2.2.4 Conclusion

Dans ce paragraphe dédié à l'utilisation de notre approche FEM pour résoudre des problèmes de CEM industriels, on note que la montée en ordre n'est pas forcément un avantage. En effet, à part dans les cas présentant des structures cartésiennes où cet avantage est évident, dans les cas présentant des structures à géométrie courbe, il est nécessaire d'avoir un maillage précis de la géométrie pour obtenir une solution de qualité. Il apparaît donc clairement dans ces cas, que la potentialité de montée en ordre qu'offre notre approche FEM n'est pas suffisante pour améliorer la solution. On peut alors au mieux mailler finement les structures courbes et utiliser un ordre variable en espace qui donne des solutions similaires au schéma de Yee. Le problème du traitement des géométries courbes vient du fait que le maillage en marche d'escalier n'est pas adapté à la résolution de ce type de structures et qu'il faut utiliser un maillage conforme à la géométrie pour avoir de bonnes solutions à faible coût.

### 3.2.3 IEM sur bâtiment

Concernant les applications IEMN (Impulse ElectroMagnetic Nuclear), on s'est uniquement intéressé à l'étude de perturbations engendrées par une IEM (Impulse ElectroMagnetic signal), sur un bâtiment. La géométrie du bâtiment considéré est particulièrement complexe. En effet, on a dans celle-ci un pylône de télécommunication défini par un réseau de fils, une antenne et son transformateur ainsi qu'un paratonnerre qui sont localisés sur le toit du bâtiment, (voir figure 3.45). Par ailleurs, on tient compte aussi dans le maillage de l'ensemble des étages du bâtiment, avec les cloisons, les fenêtres et les portes. De plus, l'alimentation du transformateur utilise un câble qui traverse les étages du bâtiment. Le degré de détail de la géométrie va jusqu'à considérer les montants des fenêtres et des portes. En termes de matériaux, on a différents bétons, un sol, des plaques de plâtres, des fenêtres que l'on prend en compte sous forme de matériaux volumiques ou minces dans la simulation.

L'ensemble de la géométrie est représenté par un maillage structuré cartésien. Dans nos simulations FEM, on va chercher à tirer partie des zones d'espace libre de la géométrie où l'on pourra augmenter le pas d'espace et l'ordre d'approximation afin de réduire les coûts calcul. Un autre intérêt de l'approche FEM est de tenir compte des diélectriques (comme le béton) sans diminuer le pas de maillage mais en augmentant l'ordre d'approximation dans les cellules. Tout cela devrait nous permettre de réduire le nombre global de cellules pour approximer notre géométrie.

Cependant, en appliquant notre stratégie de génération de maillage, on n'obtient pas les résultats escomptés en termes de coût calcul pour la simulation FEM. En effet, si on regarde le maillage généré, le bâtiment sans le pylône conduirait à une amélioration des performances, alors qu'en considérant le pylône, la taille des cellules ne peut être augmentée autour de celui-ci. Ceci entraîne un surcoût sur le maillage optimal généré par notre stratégie qui ne peut pas être complètement compensé par le reste du domaine. Par rapport à une simulation FDTD, pour une solution identique en terme de précision, on perd avec l'approche FEM 25% en terme de coût calcul alors que l'on gagne 25% en terme de coût mémoire. Les contraintes de la géométrie imposent que plus de 70% du maillage FDTD initial n'a pas pu être modifié pour optimiser la simulation FEM.

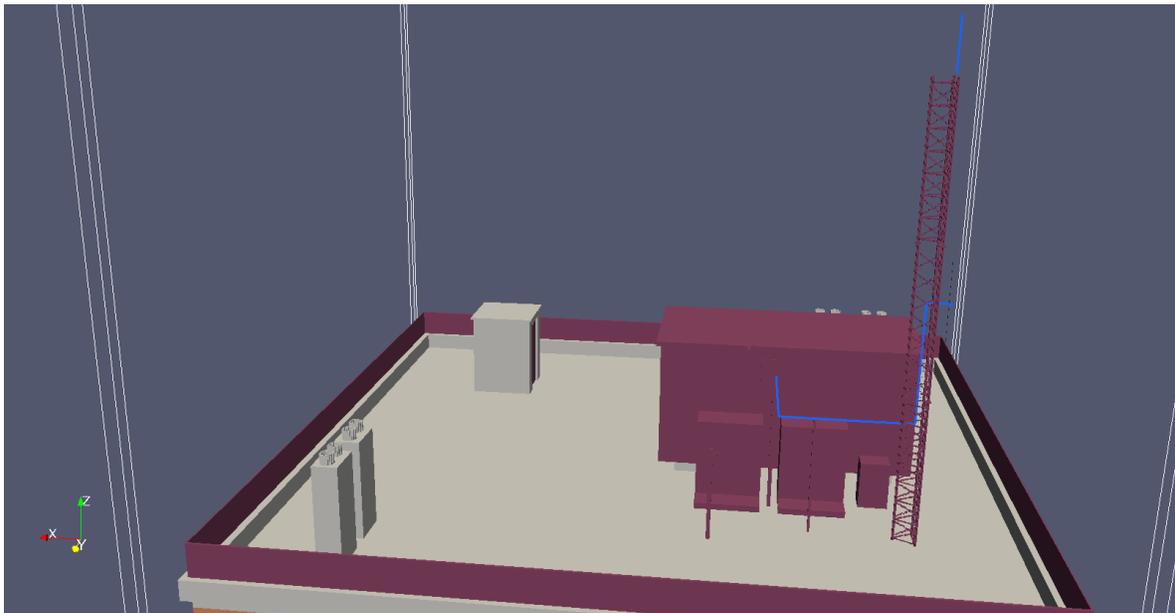


figure 3.45 – Géométrie du pylône de télécommunication sur la terrasse du bâtiment.

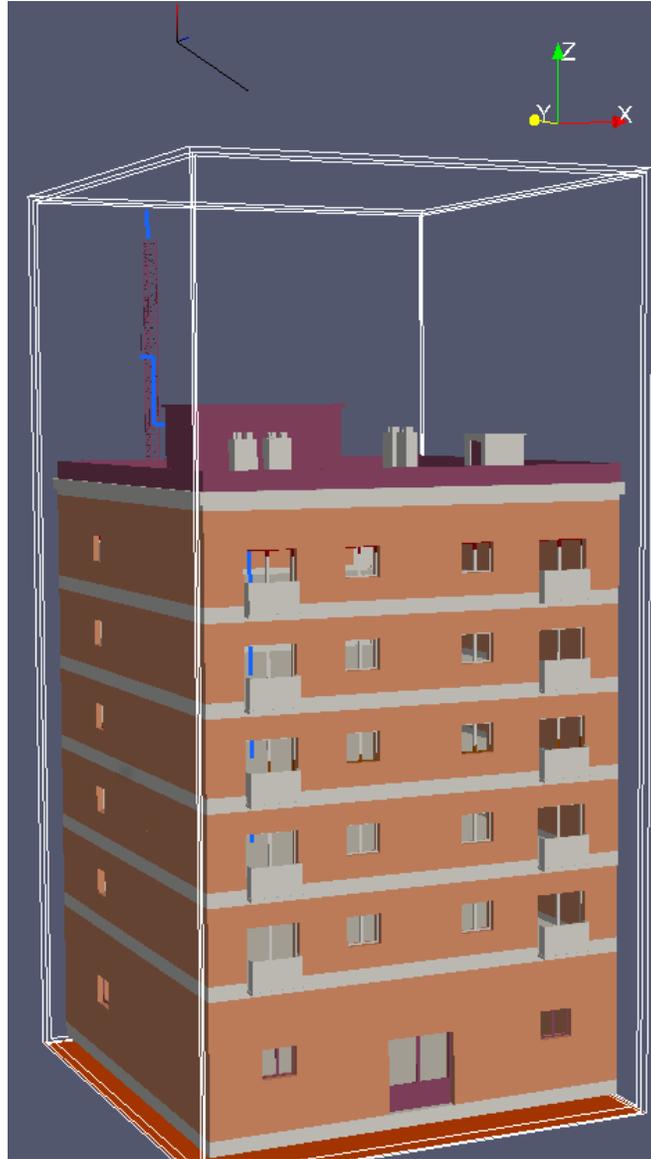


figure 3.46 – Géométrie du bâtiment

A titre de comparaison entre notre méthode FEM et le schéma de Yee, la figure 3.47 présente la cartographie du module du champ électrique d'une coupe du bâtiment perpendiculaire à  $Oy$  et passant par l'antenne. On note, des deux résultats obtenus avec les méthodes FDTD et FEM, qu'il y a une très bonne concordance ; ce qui valide notre approche FEM sur ce type de configuration. Les figures 3.48 et 3.49 représentent des magnitudes de champs électriques évalués en différents points du bâtiment par les deux approches FDTD et FEM. Dans la figure 3.48, on considère un point situé à l'intérieur du bâtiment, et dans la figure 3.49, on prend un point à l'extérieur du bâtiment et proche du pylône. Dans ces figures, les résultats FDTD sont parfaitement confondus avec les résultats FEM. Ceci dénote encore une fois la pertinence de notre méthode pour traiter ce type de configuration.

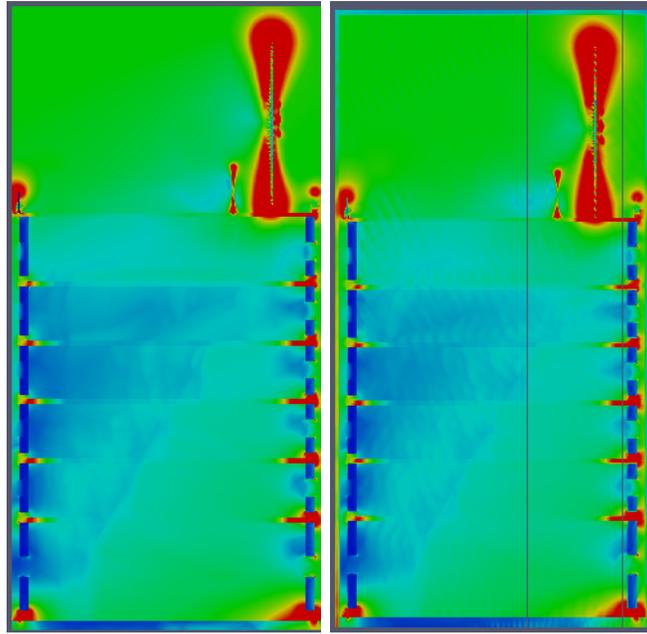


figure 3.47 – Cartographie du champ électrique dans une coupe du bâtiment perpendiculaire à  $Oy$  et passant par l'antenne.

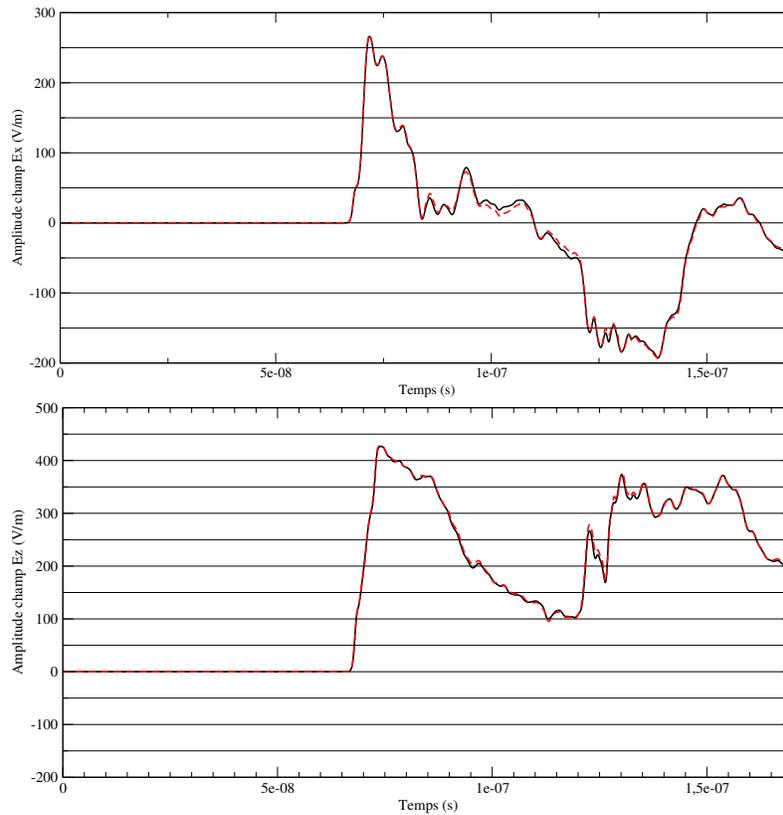


figure 3.48 – Mesures des composantes du champ électrique  $E_x$  et  $E_z$  prises en un point interne au bâtiment.

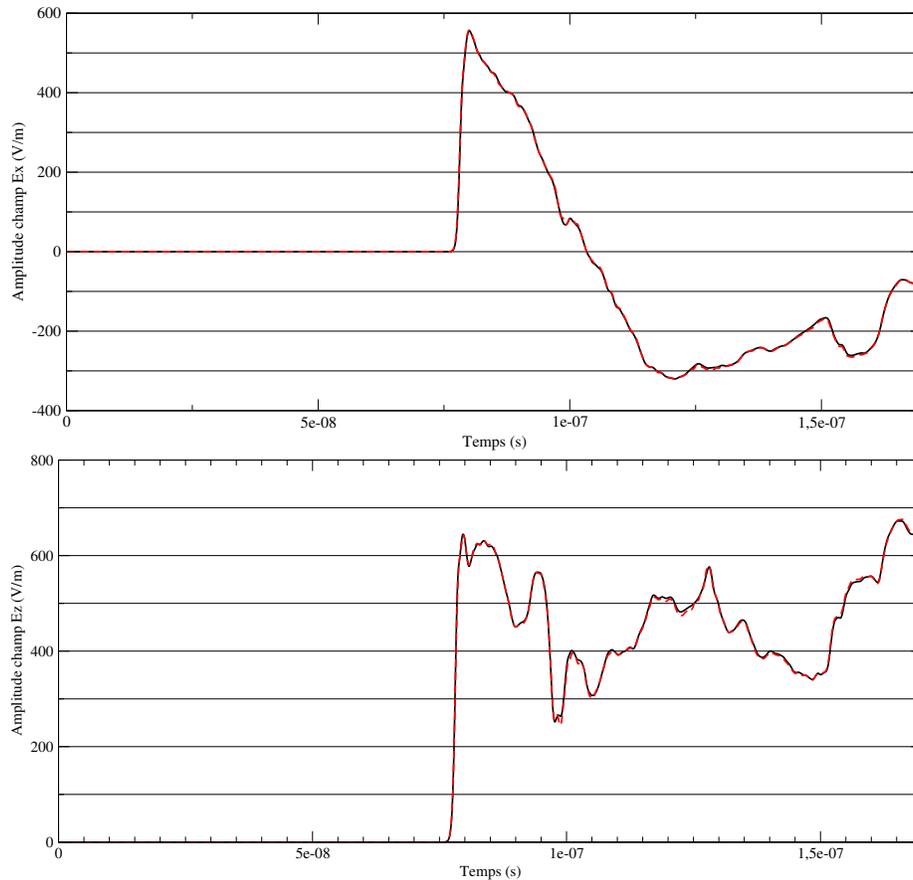


figure 3.49 – Mesures des composantes du champ électrique  $E_x$  et  $E_z$  prises en un point proche du pylône situé au-dessus du bâtiment.

En conclusion de cet exemple, la méthode FEM peut être utilisée pour effectuer des simulations IEM sur des configurations de bâtiments réalistes. Toutefois, cette solution n'est pas optimale en termes de coûts calcul, mais présente des avantages en coûts mémoire par rapport au schéma de Yee. Par ailleurs, l'obtention du maillage d'un bâtiment réaliste est particulièrement complexe à réaliser. Dans le cas d'une approche FDTD, si on change la fréquence d'étude, pour passer par exemple de  $1\text{ GHz}$  à  $4\text{ GHz}$ , on va devoir régénérer un maillage quatre fois plus fin, alors qu'avec notre approche FEM, il suffit d'augmenter l'ordre d'un facteur certainement inférieur à 4. Ceci devrait entraîner des gains en coûts calcul et mémoire supplémentaires, mais aussi sur le temps de remaillage nécessaire à une solution FDTD. Dans cet exemple, on voit aussi l'intérêt de pouvoir tenir compte d'éléments locaux de petite dimension par rapport au reste du problème, que l'on pourrait traiter par des affectations d'ordres localisées au niveau de la cellule ou par un raffinement de maillage local. Le chapitre suivant sera dédié à ce point particulier.

### 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons, tout d'abord, présenté le portage de la méthode FEM, sur la machine de production du CCRT, puis, nous avons étudié l'apport de cette approche FEM sur la résolution de plusieurs types de problèmes industriels liés aux antennes, à la CEM et à l'IEM. En particulier, nous avons cherché à mettre en évidence les avantages à utiliser notre approche plutôt que le schéma Yee.

Globalement, on trouve que notre approche FEM proposée est nettement plus intéressante que la méthode FDTD lorsque la géométrie est cartésienne et ne présente pas trop de détails multi-échelles. On peut alors utiliser pleinement notre stratégie de génération de maillage et d'affectation d'ordre d'approximation spatiale qui permet de réaliser un important gain en temps CPU et en place mémoire.

En ce qui concerne les structures présentant des géométries courbes, le gain par rapport au schéma de Yee est nettement moins évident. Dans ce cas, la géométrie courbe est définie par un maillage ayant un pas d'espace relativement petit, et donc augmenter l'ordre d'approximation spatiale au delà de  $r^G = 0$  n'apporte pas grand chose. On obtient une solution FDTD aussi efficace que la solution FEM et l'utilisation des ordres élevés de l'approche FEM ne se justifie pas, même si dans ce type de configuration, il existe des parties purement cartésiennes sur lesquelles on peut espérer pourvoir obtenir des gains par augmentation de l'ordre dans celles-ci. En effet, ces gains restent faibles par rapport au coût de la simulation globale. Toutefois, quelque soit la méthode utilisée, FEM ou FDTD, la solution obtenue sur les géométries courbes n'est pas très précise à cause du maillage en marche d'escalier. En effet, pour obtenir une solution précise, il faut correctement prendre en compte la géométrie. Pour cela, il existe d'autres approches utilisant des maillages non structurés plus adaptées, mais dont le coût calcul est aussi plus élevé. Pour réduire ce coût, l'hybridation entre ce type de méthodes sur maillage non-structuré et notre approche FEM paraît une solution très intéressante. C'est pour cela que dans le chapitre suivant, nous nous intéressons à l'hybridation de méthodes et de maillages.

## Chapitre 4

# Hybridation de la méthode FEM avec d'autres méthodes

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'hybridation de notre approche avec d'autres méthodes. En particulier, dans le chapitre précédent, on a remarqué que la prise en compte des géométries courbes était un point négatif pour notre approche. Aussi, nous allons étudier des possibilités d'hybridations de l'approche FEM avec d'autres méthodes permettant de tenir compte localement de ce type de géométrie. Par ailleurs, dans les problèmes de CEM et d'antennes, les câbles jouent un rôle important, comme les exemples précédents l'ont montré. Pour des simulations industrielles, les structures filaires que nous utilisons dans nos modèles de fil mince sont trop simples pour rendre compte de la vraie complexité d'un toron de fils. Nous devons donc tenir compte dans les modélisations de véritables réseaux de câbles comportant en interne de nombreux fils. Dans ce chapitre, nous montrons aussi comment hybrider notre approche FEM avec un modèle de ligne de transmission pour prendre en considération ce besoin.

Le chapitre est donc décomposé en deux paragraphes qui traitent de :

- l'hybridation de notre approche FEM avec une approche GD et plus généralement des approches FEM ou FDTD avec des approches FVTD ou GD pour tenir compte des géométries courbes ;
- l'hybridation de notre approche FEM avec une équation des télégraphistes (TLM) pour modéliser le câblage.

Pour chacune des hybridations, nous donnons le principe, le schéma numérique pour lequel on étudie la stabilité, puis nous validons l'approche hybride sur quelques exemples.

### 4.1 Hybridation de schémas numériques 3D avec l'approche FEM

Dans le chapitre précédent, nous avons montré l'intérêt d'avoir un schéma FEM sur maillage cartésien, possédant une approximation d'ordre élevé pour traiter efficacement certaines simulations industrielles. Nous avons aussi remarqué qu'une telle approximation, n'apporte pas de gains lorsque la géométrie étudiée est courbe. En effet, dans ce cas, ce n'est plus l'ordre d'approximation spatiale qui améliore la solution, mais une représentation précise de la géométrie ; ce qui ne peut pas être obtenu, selon notre avis avec un maillage cartésien de la structure [9]. Toutefois, la solution souvent utilisée, consiste à mailler très finement la géométrie pour avoir une représentation précise de celle-ci. Dans ce cas, pour éviter d'augmenter considérablement et inutilement le coût calcul, une approximation spatiale d'ordre égale à  $r^G = 0$  est choisie. Ce type de solution suffit généralement pour évaluer des champs diffractés par une structure, mais pose de sérieux problèmes lorsqu'on veut évaluer les champs à proximité des géométries et/ou à l'intérieur de cavités, comme cela est souvent le cas sur des problèmes de CEM ou d'antennes. En effet, il est alors difficile, d'une part, de positionner correctement le point de champ à relever par rapport

à la géométrie, et, d'autre part, les erreurs numériques donnent une solution peu précise. Pour éviter cela, il existe plusieurs travaux dans la littérature afin de tenir compte des géométries courbes dans le schéma de Yee ( cf. [35] et [76]). Généralement, ces solutions accroissent considérablement la complexité du schéma de Yee et la difficulté à traiter facilement n'importe quelle structure. Par ailleurs, il existe plusieurs types de schémas utilisés pour la résolution des équations de Maxwell, et en particulier, des méthodes de type volumes finis et Galerkin Discontinu utilisant des maillages non structurés pour tenir compte des géométries courbes dans les structures. L'utilisation de ces approches résolvant ce problème de conformité des géométries, nous a montré aussi que les temps de simulation étaient importants et donc, qu'actuellement celles-ci étaient peu intéressantes dans une approche industrielle par rapport aux schémas FDTD ou FEM. Toutefois, grâce au GPU, ces méthodes sont promises à devenir très prochainement de plus en plus efficaces et auront alors toute leur place dans la simulation industrielle [48] et [73].

Au vu de l'ensemble de ces remarques, pour tenter de réduire les coûts calculs tout en ayant des solutions précises, dans cette thèse, nous nous sommes orientés vers des techniques d'hybridations de maillages cartésiens avec des maillages non structurés localement, et donc, naturellement vers des hybridations de schémas adaptés à chaque maillage. Plus précisément, nous avons considéré des approches FDTD ou FEM pour les maillages cartésiens et des approches volumes finis (FVTD) ou Galerkin Discontinu (GD) pour les maillages non structurés.

Dans ce paragraphe, après avoir fait un état de l'art non exhaustif de différentes méthodes d'hybridation de schéma, nous étendons et étudions une approche d'hybridation par flux proposée par T. Volpert [83], à des schémas FDTD, FVTD, GD et FEM dont les approximations temporelles sont toutes de type LeapFrog. En effet, l'ensemble de ces quatre schémas peut se décrire sous deux formulations générales à partir desquelles, on peut construire une formulation hybride qui conserve l'énergie sous certaines conditions. Nous étendons ensuite cette propriété à la conservation d'une quantité, notée pseudo-énergie, sur le problème hybride semi-discret en temps. En précisant ensuite les différentes méthodes numériques utilisées dans l'hybridation, à partir de cette pseudo-énergie, on peut donner des conditions de stabilité pour chaque schéma hybride considéré. Pour cela, on montre que la quantité conservée dans le problème semi-discret définit une énergie ; c'est-à-dire que celle-ci est positive, sous certaines conditions.

Enfin, pour clore le paragraphe, nous donnons quelques exemples montrant la validité de notre approche hybride.

#### 4.1.1 État de l'art non exhaustif sur l'hybridation de schémas et méthodes

L'hybridation de schémas est un domaine de recherche très étudiée et très vaste dans la littérature. Dans ce travail de thèse, on va se limiter au domaine de l'électromagnétisme où on trouve encore de nombreuses publications qui traitent de différentes formes d'hybridations. Parmi celles-ci, on s'intéresse uniquement à des hybridations de domaines non disjoints. Pour cela, on décide de classer ce type d'hybridation dans trois catégories :

- l'hybridation de maillage pour un schéma numérique donné. Dans cette catégorie d'hybridation, on pense à des hybridations de domaines volumiques non coïncidant dont l'intersection n'est pas vide. On peut donc avoir un recouvrement partiel des domaines où un raccord sur une interface 2D de ceux-ci. Le problème, qui représente bien ce cas et auquel il est fait souvent référence, est la résolution de l'équation de Laplace sur 2 domaines pour laquelle la méthode de référence est la méthode de Schwarz. Cette approche a donné lieu par la suite à de nombreuses études et améliorations pour traiter d'autres types d'équations que celles de Laplace. En particulier, dans le domaine de l'électromagnétisme, tout en étant non exhaustif, on peut citer différents travaux sur l'approche Schwarz [27], [67], [6], [81], [15], [26]. On note que dans la plupart des études effectuées dans les différentes publications, le problème investigué se situe dans le domaine harmonique et qu'à notre connaissance, il n'existe pas de papiers sur l'utilisation de cette approche pour traiter le

problème de Maxwell en instationnaire qui reste notre préoccupation principale. De plus, dans nos hypothèses, chaque domaine doit posséder une méthode propre qui peut être différente des autres domaines. Ce point n'est pas non plus, à notre connaissance, abordé dans les approches Schwarz. Pour l'ensemble de ces raisons, nous n'avons pas investigué sur ce type de méthode pour traiter notre problème hybride.

- L'hybridation non conforme de maillage lors d'un raffinement d'une même méthode (figure 4.1).

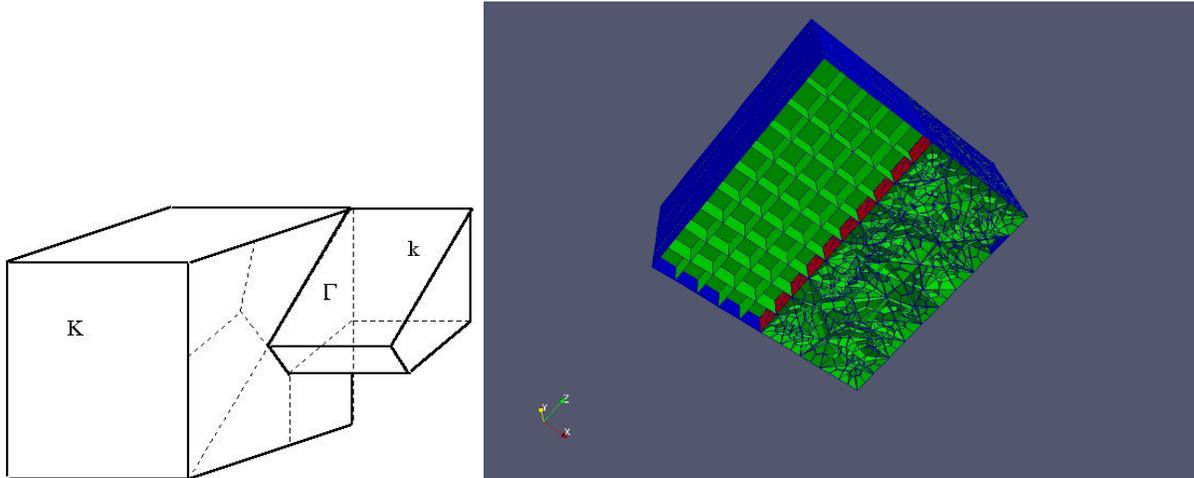


figure 4.1 – Exemple d'hybridation non conforme.

Cette catégorie est assez similaire à la première, mais mérite d'être classée à part à cause des solutions proposées dans la littérature qui sont différentes de celles utilisées dans l'approche de Schwarz. En effet dans ce cas, on trouve beaucoup de références pour le problème instationnaire, qui est dans notre travail de thèse le centre d'intérêt. Dans ce type d'hybridation, on peut dire que l'on rencontre aussi plus ou moins de difficultés suivant le schéma étudié. En effet dans le cas du schéma de Yee ou FEM, une partie des inconnues est généralement positionnée aux interfaces des cellules pour tenir compte dans les espaces fonctionnels de la continuité des composantes tangentielles des champs électromagnétiques aux interfaces des matériaux. Cela entraîne généralement, dans le cas d'un raffinement de maillage, un dédoublement des inconnues entre la zone raffinée et non raffinée et souvent une interpolation du champ à cet endroit. Ce point est délicat, car l'interpolation amène des erreurs qui au cours du temps peuvent s'amplifier et ne garantissent plus la conservation d'une énergie discrète. Le schéma devient alors instable. Divers travaux ont été menés pour éviter cela. Parmi ces travaux, il est important de citer la thèse de Fouquet [32] qui pose bien le problème et qui propose une solution théorique à celui-ci dans le cas du schéma de Yee. Toutefois, le coût d'une telle approche reste assez prohibitif et cette solution n'est pas utilisée industriellement à notre connaissance. Le raffinement de maillage, posant un vrai problème aux méthodes FEM ou FDTD, ne présente en revanche aucune difficulté dans le cas des méthodes GD ou FVTD. En effet, pour ces schémas, la propriété de discontinuité aux interfaces des cellules permet d'éviter ces problèmes. La continuité des champs est imposée de manière faible par un saut au niveau de celles-ci. Lorsqu'on effectue un raffinement local, à l'interface des deux zones, on aura une face dans une zone qui correspondra à plusieurs faces dans l'autre zone et les sauts à cette interface correspondront à une sommation d'intégrales sur les faces. Si le calcul de ces sauts est suffisamment précis, on aura alors une quasi-similitude entre le flux entrant et sortant sur cette interface ; ce qui garantira une conservation de l'énergie. Pour améliorer cette stabilité, on peut aussi utiliser des termes de saut décentré qui auront pour effet de dissiper un peu d'énergie. Concernant la méthode GD, plusieurs

études sur le raffinement de maillage ont montré la capacité d'avoir une solution d'hybridation de maillage stable. On peut citer à ce titre, par exemple, les travaux de C. Durochat [23] et ceux de M. Mounier [57]. Toutefois, sur les zones de maillage cartésien, le schéma GD reste relativement coûteux et il est donc intéressant de passer à un schéma FEM ou FDTD ; ce qui nous amène à la dernière classe d'hybridation dans notre classification.

- Enfin, notre dernier principe d'hybridation concerne l'utilisation de différents schémas résolvant les équations de Maxwell sur différents domaines.

Dans ce cas, on est dans une configuration similaire à la classe précédente, mais dans chaque domaine, on a un schéma instationnaire différent. Pour résoudre ce type d'hybridation, plusieurs études ont été abordées dans la littérature, tout d'abord, sur des hybridations FDTD/FVTD [5], [30], [40], [49], puis sur des hybridations FDTD/GD [82] et plus récemment sur des hybridations FEM/GD [83]. Dans la plupart de ces travaux, on note souvent la difficulté d'avoir un schéma hybride dont la stabilité est assurée par une condition CFL. Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser tout particulièrement à ce type d'hybridation et étudier une approche proposée par T. Volpert dans sa thèse [83], qui vérifie une conservation de l'énergie du problème continu global. En particulier, nous allons montrer, dans cette thèse, que cette approche hybride est stable et proposer un critère mathématique pour assurer cette stabilité. A partir de cette étude, l'extension de cette approche aux cas FDTD/FVTD, mais aussi à tout type de schéma hybride combinant la FDTD, le GD, les FVTD et notre schéma FEM peut être aussi facilement effectuée.

#### 4.1.2 Étude d'une méthode d'hybridation de méthodes temporelles résolvant les équations différentielles de Maxwell

Dans ce paragraphe, nous allons étudier une méthode d'hybridation initiée dans la thèse de T. Volpert [83], et étendre cette approche à d'autres schémas tels que les différences finies et les volumes finis. Le but de ce type d'hybridation est de pouvoir utiliser sur un domaine de calcul, des zones de maillages cartésiens et des zones de maillages non structurés pour tenir compte avec précision de la forme des objets. On utilise ensuite pour chaque zone, soit des méthodes de type Galerkin Discontinu (GD) ou volumes finis (FVTD), soit des méthodes de type différences finies (FDTD) ou éléments finis (FEM). Les méthodes, qui sont concernées par cette hybridation, utilisent toutes un schéma LeapFrog pour la discrétisation temporelle. La particularité de cette hybridation est l'ajout d'un terme de saut au niveau des interfaces de couplage  $\gamma$  compris sur les schémas FEM et FDTD. Comme nous le verrons dans la suite, ce saut va permettre de garantir une conservation de l'énergie et donc la stabilité de la méthode hybride.

Pour l'étude de l'approche hybride, tout d'abord, on donne le principe de celle-ci qui repose sur une conservation d'énergie pour le problème hybride continu. Pour cela, nous prenons en compte deux types de schémas qui généralisent les méthodes GD et FVTD ainsi que les méthodes FDTD et FEM. Nous donnons pour chaque hybridation, les conditions de sauts d'interface pour obtenir la conservation d'énergie. Ensuite, en prenant une approximation de type LeapFrog pour la discrétisation temporelle dans le problème continu, nous montrons que notre approche hybride garantit la conservation d'une quantité, notée pseudo-énergie. En reprenant dans cette formulation chaque schéma, nous donnons un critère de stabilité pour différentes approches hybrides, en garantissant que la pseudo-énergie soit positive.

##### 4.1.2.1 Principe et Formulation : conservation d'une énergie continue

Avant d'écrire le problème hybride, nous allons formaliser les différents schémas considérés sous deux écritures.

En ce qui concerne les schémas FVTD ou GD, le domaine de calcul  $\Omega$  est décomposé en une partition  $\tau_h$  de cellules  $\mathcal{K}$  et on cherche une solution  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in \mathbf{H}^1(\tau_h) \times \mathbf{H}^1(\tau_h)$ , avec  $\mathbf{H}^1(\tau_h) = \{v \in \mathbf{L}^2(\Omega) ; \forall \mathcal{K} \in \tau_h, v|_{\mathcal{K}} \in \mathbf{H}^1(\mathcal{K})\}$ , telle que  $\forall(\varphi, \psi) \in \mathbf{H}^1(\tau_h) \times \mathbf{H}^1(\tau_h)$  :

$$\begin{cases} \forall \mathcal{K} \in \tau_h, & \int_{\mathcal{K}} \varepsilon \partial_t \mathbf{E} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{K}} \nabla \wedge \mathbf{H} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} + \gamma_{\mathcal{K}} \int_{\partial \mathcal{K}} [[\mathbf{H} \times n]] \cdot \varphi \, d\mathbf{x} \\ \forall \mathcal{K} \in \tau_h, & \int_{\mathcal{K}} \mu \partial_t \mathbf{H} \cdot \psi \, d\mathbf{x} = - \int_{\mathcal{K}} \nabla \wedge \mathbf{E} \cdot \psi \, d\mathbf{x} + \delta_{\mathcal{K}} \int_{\partial \mathcal{K}} [[\mathbf{E} \times n]] \cdot \psi \, d\mathbf{x} \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Dans ce formalisme, la continuité des composantes tangentielles de champs à l'interface  $\partial \mathcal{K}$  est imposée faiblement par l'ajout de termes de sauts sur celle-ci. Ces termes sont définis par :

- $[[\mathbf{E} \times n]] = (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) \times n$  et  $[[\mathbf{H} \times n]] = (\mathbf{H}' - \mathbf{H}) \times n$ , dans le cas où il existe  $\mathcal{K}'$  tel que  $\partial \mathcal{K} = \mathcal{K}' \cap \mathcal{K}$ , avec  $\mathbf{E}'$  et  $\mathbf{H}'$  les champs définis dans  $\mathcal{K}'$  ;
- $[[\mathbf{E} \times n]] = -\mathbf{E} \times n$  et  $[[\mathbf{H} \times n]] = -\mathbf{H} \times n$ , dans le cas où  $\partial \mathcal{K} \subset \partial \Omega$ .

En ce qui concerne le schéma de Yee ou l'approche FEM que nous avons étudié, le choix des fonctions de base et des inconnues pour le champ électrique garantissent la continuité des composantes tangentielles de celui-ci aux interfaces des cellules. En ce qui concerne le champ magnétique dont les composantes tangentielles ne sont pas évaluées aux interfaces, seule la continuité des composantes normales à l'interface des cellules est assurée par les fonctions de bases choisies pour représenter celui-ci. Soit  $\Omega$  le domaine de calcul, on peut écrire de manière générale le schéma de Yee ou notre approche FEM, sous la forme : Chercher  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$  tels que  $\forall(\varphi, \psi) \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$  :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \varepsilon \partial_t \mathbf{E} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \nabla \wedge \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\delta \Omega} \mathbf{H} \cdot \varphi \times n \, d\mathbf{x} \\ \int_{\Omega} \mu \partial_t \mathbf{H} \cdot \psi \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E} \cdot \psi \, d\mathbf{x} \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Soit maintenant  $\Omega$  un domaine partitionné en deux zones  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , avec  $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ ,  $\partial \Omega_1 \cap \partial \Omega_2 = \Gamma$  et  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Gamma$ . La zone  $\Omega_1$  est approximée par un maillage cartésien  $\mathcal{T}_h$  et la zone  $\Omega_2$  par un maillage non-structuré  $\tau_h$ .

Nous supposons ensuite que la résolution des équations de Maxwell sur chaque domaine est effectuée par un schéma différent. Pour clarifier, nous utilisons une méthode FDTD ou FEM dans le domaine  $\Omega_1$  et une approche FVTD ou GD dans le domaine  $\Omega_2$ . Pour faciliter la mise en place de l'hybridation des deux schémas, nous considérons qu'au niveau de l'interface  $\Gamma = \Omega_1 \cap \Omega_2$ , les composantes tangentielles des champs électriques et magnétiques sont continues. Pour la solution du domaine  $\Omega_1$ , le fait d'avoir une composante tangentielle sur le champ magnétique définie sur  $\Gamma$  nous oblige à reconsidérer les espaces fonctionnels de l'approche FEM. En effet, l'existence de la trace du champ magnétique à la fois normale et tangentielle sur l'interface  $\Gamma$  ne sont plus compatibles avec l'espace  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . On introduit alors pour les champs électriques et magnétiques un nouvel espace qui n'enlève rien à la régularité de la solution physique (pas de milieu magnétique) et qui sont données par :

$$\mathbf{H}_E(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) \mid \mathbf{v} \wedge n|_{\partial \Omega \setminus \Gamma} = 0\}. \quad (4.1.3)$$

Nous allons donc écrire notre problème hybride sous la forme suivante :

Chercher  $(\mathbf{E}_1(t, \cdot), \mathbf{H}_1(t, \cdot)) \in \mathbf{H}_E(\Omega_1) \times \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_1)$  et  $(\mathbf{E}_2(t, \cdot), \mathbf{H}_2(t, \cdot)) \in \mathbf{H}^1(\tau_h) \times \mathbf{H}^1(\tau_h)$ , tels que  $\forall (\varphi_1, \psi_1) \in \mathbf{H}_E(\Omega_1) \times \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_1)$  et  $\forall (\varphi_2, \psi_2) \in \mathbf{H}^1(\tau_h) \times \mathbf{H}^1(\tau_h)$ , nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} \varepsilon \partial_t \mathbf{E}_1 \cdot \varphi_1 \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_1} \mathbf{H}_1 \cdot \nabla \wedge \varphi_1 \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \mathbf{H}_1 \cdot \varphi_1 \times n_1 \, ds \\
&\quad + \alpha \int_{\Gamma} (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times n_1 \cdot \varphi_1 \, ds \\
\int_{\Omega_1} \mu \partial_t \mathbf{H}_1 \cdot \psi_1 \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega_1} \nabla \wedge \mathbf{E}_1 \cdot \psi_1 \, d\mathbf{x} + \beta \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times n_1 \cdot \psi_1 \, ds \\
\forall \mathcal{K} \in \tau_h, \int_{\mathcal{K}} \varepsilon \partial_t \mathbf{E}_2 \cdot \varphi_2 \, d\mathbf{x} &= \int_{\mathcal{K}} \nabla \wedge \mathbf{H}_2 \cdot \varphi_2 \, d\mathbf{x} + \gamma_{\mathcal{K}} \int_{\partial \mathcal{K} \setminus \Gamma} \llbracket \mathbf{H}_2 \times n_{\mathcal{K}} \rrbracket \cdot \varphi_2 \, ds \\
&\quad + \gamma \int_{\Gamma} (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times n_2 \cdot \varphi_2 \, ds \\
\forall \mathcal{K} \in \tau_h, \int_{\mathcal{K}} \mu \partial_t \mathbf{H}_2 \cdot \psi_2 \, d\mathbf{x} &= - \int_{\mathcal{K}} \nabla \wedge \mathbf{E}_2 \cdot \psi_2 \, d\mathbf{x} + \delta_{\mathcal{K}} \int_{\partial \mathcal{K} \setminus \Gamma} \llbracket \mathbf{E}_2 \times n_{\mathcal{K}} \rrbracket \cdot \psi_2 \, ds \\
&\quad + \delta \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times n_2 \cdot \psi_2 \, ds
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

avec  $\llbracket \mathbf{v}_h \times n_{\mathcal{K}} \rrbracket = (\mathbf{v}_{\mathcal{K}'} - \mathbf{v}_{\mathcal{K}}) \times n_{\mathcal{K}}$  où  $\mathbf{v}_h$  est en  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{K}'$  sont les deux cellules de chaque côté de l'interface  $\partial \mathcal{K}$  et  $n_{\mathcal{K}}$  la normale à la surface  $\partial \mathcal{K}$  orientée de  $\mathcal{K}$  vers  $\mathcal{K}'$ , donc on a  $n_{\mathcal{K}} = -n_{\mathcal{K}'}$ .

Dans cette formulation, nous avons imposé la continuité des composantes tangentielles des champs  $\mathbf{E}_h$  et  $\mathbf{H}_h$  à la frontière  $\Gamma$  des deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , de manière faible en ajoutant celle-ci aux équations de Maxwell sous la forme de termes de saut.

A partir de cette formulation hybride du problème, il reste maintenant à s'assurer que celle-ci soit bien posée. Pour cela, on définit l'énergie du problème physique par :

$$\mathcal{E}_{\Omega} = \|\mathbf{E}\|_{0,\varepsilon,\Omega_1}^2 + \|\mathbf{H}\|_{0,\mu,\Omega_1}^2 + \|\mathbf{E}\|_{0,\varepsilon,\Omega_2}^2 + \|\mathbf{H}\|_{0,\mu,\Omega_2}^2 \tag{4.1.5}$$

où

$$\|U\|_{0,\varepsilon,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \underline{\varepsilon} U(t, x) \cdot U(t, x) \, d\mathbf{x} \text{ et } \|U\|_{0,\mu,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \underline{\mu} U(t, x) \cdot U(t, x) \, d\mathbf{x} \tag{4.1.6}$$

puis, on vérifie que cette énergie décroît ou est conservée dans notre formulation mathématique. Pour cela, on choisit de prendre  $\varphi_1 = \mathbf{E}_1$ ,  $\psi_1 = \mathbf{H}_1$  et  $\varphi_2 = \mathbf{E}_2$ ,  $\psi_2 = \mathbf{H}_2$  dans (4.1.4), et on obtient pour la partie FEM :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} \varepsilon \partial_t \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_1} \mathbf{H}_1 \cdot \nabla \wedge \mathbf{E}_1 \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{E}_1 \times n_1 \, ds \\
&\quad + \alpha \int_{\Gamma} (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times n_1 \cdot \mathbf{E}_1 \, ds \\
\int_{\Omega_1} \mu \partial_t \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_1 \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega_1} \nabla \wedge \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{H}_1 \, d\mathbf{x} \\
&\quad + \beta \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times n_1 \cdot \mathbf{H}_1 \, ds
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Et, pour la partie GD :

$$\begin{aligned}
\forall \mathcal{K} \in \tau_h, \int_{\mathcal{K}} \varepsilon \partial_t \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_2 \, d\mathbf{x} &= \int_{\mathcal{K}} \nabla \wedge \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{E}_2 \, d\mathbf{x} + \gamma_{\mathcal{K}} \int_{\partial \mathcal{K} \setminus \Gamma} \llbracket \mathbf{H}_2 \times n_{\mathcal{K}} \rrbracket \cdot \mathbf{E}_2 \, ds \\
&\quad + \gamma \int_{\Gamma} (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times n_2 \cdot \mathbf{E}_2 \, ds \\
\forall \mathcal{K} \in \tau_h, \int_{\mathcal{K}} \mu \partial_t \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{H}_2 \, d\mathbf{x} &= - \int_{\mathcal{K}} \nabla \wedge \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{H}_2 \, d\mathbf{x} + \delta_{\mathcal{K}} \int_{\partial \mathcal{K} \setminus \Gamma} \llbracket \mathbf{E}_2 \times n_{\mathcal{K}} \rrbracket \cdot \mathbf{H}_2 \, ds \\
&\quad + \delta \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times n_2 \cdot \mathbf{H}_2 \, ds
\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

En sommant les deux premières équations (4.1.7) du système, on obtient :

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_{\Omega_1} (\varepsilon \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 + \mu \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_1) \, d\mathbf{x} &= (1 - \beta + \alpha) \int_{\Gamma} \mathbf{H}_1 \cdot (\mathbf{E}_1 \times n_1) \, ds \\
&\quad + \alpha \int_{\Gamma} (\mathbf{H}_2 \times n_1) \cdot \mathbf{E}_1 \, ds + \beta \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_2 \times n_1) \cdot \mathbf{H}_1 \, ds
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

A partir des deux dernières équations (4.1.8) du système, en utilisant le fait que :

$$\int_{\mathcal{K}} \nabla \wedge \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{E}_2 \, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{K}} \mathbf{H}_2 \cdot \nabla \wedge \mathbf{E}_2 \, d\mathbf{x} + \int_{\partial \mathcal{K}} \mathbf{H}_2 \times n_2 \cdot \mathbf{E}_2 \, ds \tag{4.1.10}$$

et en sommant celles-ci, on obtient :

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_{\Omega_2} (\varepsilon \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_2 + \mu \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{H}_2) \, d\mathbf{x} &= \\
&\quad \sum_{\mathcal{K} \in \tau_h} \int_{\partial \mathcal{K} \setminus \Gamma} (\mathbf{H}_{2,\mathcal{K}} \times n_{2,\mathcal{K}}) \cdot \mathbf{E}_{2,\mathcal{K}} \, ds + \int_{\Gamma} (\mathbf{H}_2 \times n_2) \cdot \mathbf{E}_2 \, ds \\
&\quad - \sum_{\mathcal{K} \in \tau_h} \delta_{\mathcal{K}} \int_{\partial \mathcal{K} \setminus \Gamma} (\mathbf{H}_{2,\mathcal{K}} \times n_{2,\mathcal{K}}) \cdot \mathbf{E}_{2,\mathcal{K}} \, ds - \sum_{\mathcal{K} \in \tau_h} \gamma_{\mathcal{K}} \int_{\partial \mathcal{K} \setminus \Gamma} (\mathbf{E}_{2,\mathcal{K}} \times n_{2,\mathcal{K}}) \cdot \mathbf{H}_{2,\mathcal{K}} \, ds \\
&\quad + \gamma \int_{\Gamma} (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times n_2 \cdot \mathbf{E}_2 \, ds + \delta \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times n_2 \cdot \mathbf{H}_2 \, ds
\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

où  $\mathbf{E}_{2,\mathcal{K}}$  et  $\mathbf{H}_{2,\mathcal{K}}$  sont les champs pris dans la cellule  $\mathcal{K}$ .

Dans cette sommation, une partie des termes des sauts s'est éliminée naturellement par la sommation sur l'ensemble des cellules  $\mathcal{K}$  du domaine  $\Omega_2$ . Ceci vient du fait que l'on a fait le choix de prendre  $\forall K \in \tau_h$ ,  $\gamma_{\mathcal{K}} = \gamma_2$  et  $\delta_{\mathcal{K}} = \delta_2$ , où  $\gamma_2$  et  $\delta_2$  sont des constantes qui ne dépendent pas de  $\mathcal{K}$ . Il reste alors pour les sauts, les termes internes à chaque élément  $\mathcal{K}$ . En particulier, ces termes s'annulent si on choisit de prendre  $\delta_2$  et  $\gamma_2$  tels que :

$$1 + \gamma_2 - \delta_2 = 0 \tag{4.1.12}$$

On peut maintenant évaluer l'évolution de l'énergie  $\mathcal{E}_{\Omega}$  au cours du temps sur tout le domaine en sommant les énergies des deux sous-domaines :

$$\partial_t \mathcal{E}_{\Omega} = \partial_t \left( \int_{\Omega_1} \varepsilon \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 + \mu \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_1 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} \varepsilon \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_2 + \mu \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{H}_2 \, d\mathbf{x} \right) \tag{4.1.13}$$

En appliquant (4.1.12), il restera alors pour la somme des deux équations (4.1.9) et ((4.1.11), les termes suivant :

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathcal{E}_{\Omega} &= (1 + \beta - \alpha) \int_{\Gamma} \mathbf{H}_1 \cdot (\mathbf{E}_1 \times n_1) \, ds \\
&\quad + \alpha \int_{\Gamma} \mathbf{H}_2 \times n_1 \cdot \mathbf{E}_1 \, ds + \beta \int_{\Gamma} \mathbf{E}_2 \times n_1 \cdot \mathbf{H}_1 \, ds \\
&\quad + (1 - \gamma + \delta) \int_{\Gamma} \mathbf{H}_2 \times n_2 \cdot \mathbf{E}_2 \, ds \\
&\quad + \gamma \int_{\Gamma} \mathbf{H}_1 \times n_2 \cdot \mathbf{E}_2 \, ds + \delta \int_{\Gamma} \mathbf{E}_1 \times n_2 \cdot \mathbf{H}_2 \, ds
\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Sachant que  $n_1 = -n_2$ , afin que l'énergie du problème continu sur  $\Omega$  soit conservée, on doit avoir :

$$\begin{aligned} 1 - \alpha + \beta &= 0 \\ 1 - \gamma + \delta &= 0 \\ \alpha + \delta &= 0 \\ \beta + \gamma &= 0 \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

Plusieurs solutions permettent de garantir la conservation de l'énergie :

1.  $\beta = \delta = \frac{1}{2}$  et  $\alpha = \gamma = -\frac{1}{2}$
2.  $\gamma = 0$ ,  $\delta = 1$  et sur  $\Gamma$   $\beta = -1$  et  $\alpha = 0$ , ailleurs  $\alpha = \gamma = -\frac{1}{2}$

Pour notre hybridation, nous avons choisi le premier choix. Le problème continu hybride s'écrit alors :

Chercher  $(\mathbf{E}_1(t, \cdot), \mathbf{H}_1(t, \cdot)) \in \mathbf{H}_E(\Omega_1) \times \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_1)$  et  $(\mathbf{E}_2(t, \cdot), \mathbf{H}_2(t, \cdot)) \in \mathbf{H}^1(\tau_h) \times \mathbf{H}^1(\tau_h)$ , tels que  $\forall (\varphi_1, \psi_1) \in \mathbf{H}_E(\Omega_1) \times \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_1)$  et  $\forall (\varphi_2, \psi_2) \in \mathbf{H}^1(\tau_h) \times \mathbf{H}^1(\tau_h)$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \varepsilon \partial_t \mathbf{E}_1 \cdot \varphi_1 \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_1} \mathbf{H}_1 \cdot \nabla \wedge \varphi_1 \, d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_1) \times n_1 \cdot \varphi_1 \, ds \\ \int_{\Omega_1} \mu \partial_t \mathbf{H}_1 \cdot \psi_1 \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega_1} \nabla \wedge \mathbf{E}_1 \cdot \psi_1 \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times n_1 \cdot \psi_1 \, ds \\ \forall \mathcal{K} \in \tau_h, \int_{\mathcal{K}} \varepsilon \partial_t \mathbf{E}_2 \cdot \varphi_2 \, d\mathbf{x} &= \int_{\partial \mathcal{K}} \nabla \wedge \mathbf{H}_2 \cdot \varphi_2 \, d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{K} \setminus \Gamma} [\mathbf{H}_2 \times n_{\mathcal{K}}] \cdot \varphi_2 \, ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times n_2 \cdot \varphi_2 \, ds \\ \forall \mathcal{K} \in \tau_h, \int_{\mathcal{K}} \mu \partial_t \mathbf{H}_2 \cdot \psi_2 \, d\mathbf{x} &= - \int_{\mathcal{K}} \nabla \wedge \mathbf{E}_2 \cdot \psi_2 \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{K} \setminus \Gamma} [\mathbf{E}_2 \times n_{\mathcal{K}}] \cdot \psi_2 \, ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times n_2 \cdot \psi_2 \, ds \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

#### 4.1.2.2 Conservation d'une pseudo-énergie sur le problème semi-discret

Reprenons maintenant le problème hybride dans lequel nous approximons les dérivées en temps par un schéma LeapFrog d'ordre 2 donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t}(t_{n-\frac{1}{2}}) &= \frac{U^n + U^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t^2) = C(t_{n-\frac{1}{2}})V^{n-\frac{1}{2}} + F(t_{n-\frac{1}{2}}) \\ \frac{\partial V}{\partial t}(t_n) &= \frac{V^{n+\frac{1}{2}} + V^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + O(\Delta t^2) = D(t_n)U^{n+1} + G(t_n) \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

avec  $U^n$  la valeur de  $U$  prise au temps  $t_n = n\Delta t$ .

Nous pouvons alors montrer que la quantité :

$$\mathcal{E}_{h\Omega}^n = \|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1}^2 + \int_{\Omega_1} \mu \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n-\frac{1}{2}} \, d\mathbf{x} + \|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_2}^2 + \int_{\Omega_2} \mu \mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_{h,2}^{n-\frac{1}{2}} \, d\mathbf{x} \tag{4.1.18}$$

que nous appelons pseudo-énergie est conservée au cours du temps si nous ne considérons pas de termes dissipatifs dans le problème physique et dans les schémas numériques utilisés. Pour cela on écrit le schéma

hybride semi-discrétisé en temps :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} \varepsilon \frac{\mathbf{E}_{h,1}^{n+1} - \mathbf{E}_{h,1}^n}{\Delta t} \cdot \varphi_{h,1} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_1} \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \wedge \varphi_{h,1} \, d\mathbf{x} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}}) \cdot (\varphi_{h,1} \times \mathbf{n}_1) \, ds \\
\int_{\Omega_1} \mu \frac{\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{h,1}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \cdot \psi_{h,1} \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega_1} \nabla \wedge \mathbf{E}_{h,1}^n \cdot \psi_{h,1} \, d\mathbf{x} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{h,2}^n - \mathbf{E}_{h,1}^n) \times \mathbf{n}_1 \cdot \psi_{h,1} \, ds \\
\forall \mathcal{K} \in \tau_h, \int_{\mathcal{K}} \varepsilon \frac{\mathbf{E}_{h,2}^{n+1} - \mathbf{E}_{h,2}^n}{\Delta t} \cdot \varphi_{h,2} \, d\mathbf{x} &= \int_{\mathcal{K}} \nabla \wedge \mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \varphi_{h,2} \, d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{K} \setminus \Gamma} [\mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n}_2] \cdot \varphi_{h,2} \, ds \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}}) \times \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{E}_{h,2}^n \, ds \\
\forall \mathcal{K} \in \tau_h, \int_{\mathcal{K}} \mu \frac{\mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{h,2}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \cdot \psi_{h,2} \, d\mathbf{x} &= - \int_{\mathcal{K}} \nabla \wedge \mathbf{E}_{h,2}^n \cdot \psi_{h,2} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{K} \setminus \Gamma} [\mathbf{E}_{h,2}^n \times \mathbf{n}_2] \cdot \psi_{h,2} \, ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{h,1}^n - \mathbf{E}_{h,2}^n) \times \mathbf{n}_2 \cdot \psi_{h,2} \, ds
\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

En prenant  $\varphi_{h,1} = \mathbf{E}_{h,1}^{n+1} + \mathbf{E}_{h,1}^n$  dans la première équation du système précédent, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} \varepsilon \frac{\mathbf{E}_{h,1}^{n+1} - \mathbf{E}_{h,1}^n}{\Delta t} \cdot (\mathbf{E}_{h,1}^{n+1} + \mathbf{E}_{h,1}^n) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_1} \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \wedge (\mathbf{E}_{h,1}^{n+1} + \mathbf{E}_{h,1}^n) \, d\mathbf{x} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}}) \cdot (\mathbf{E}_{h,1}^{n+1} + \mathbf{E}_{h,1}^n) \times \mathbf{n}_1 \, d\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

En utilisant ensuite la deuxième équation du système sur la dérivée du champ magnétique, que l'on écrit au temps  $n$  et au temps  $n+1$  puis en prenant  $\psi_{h,1} = \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}$  dans les deux expressions sur  $\mathbf{H}$ , on a par sommation de celles-ci :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} \mu \frac{\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{3}{2}} - \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} \, d\mathbf{x} &+ \int_{\Omega_1} \mu \frac{\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{h,1}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} \, d\mathbf{x} = \\
&- \int_{\Omega_1} \nabla \wedge \mathbf{E}_{h,1}^{n+1} \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_1} \nabla \wedge \mathbf{E}_{h,1}^n \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} \, d\mathbf{x} \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{h,2}^{n+1} - \mathbf{E}_{h,1}^{n+1}) \times \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} \, ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{h,2}^n - \mathbf{E}_{h,1}^n) \times \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} \, ds
\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

En sommant les équations (4.1.20) et (4.1.21), on obtient sur  $\Omega_1$  :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega_1} (\varepsilon \mathbf{E}_{h,1}^{n+1} \cdot \mathbf{E}_{h,1}^{n+1} + \mu \mathbf{H}_{h,1}^{n+3/2} \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_1} (\varepsilon \mathbf{E}_{h,1}^n \cdot \mathbf{E}_{h,1}^n + \mu \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n-\frac{1}{2}}) \, d\mathbf{x} \right) &= \\
\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}} \cdot (\mathbf{E}_{h,1}^{n+1} + \mathbf{E}_{h,1}^n) \times \mathbf{n}_1 \, ds &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} \cdot (\mathbf{E}_{h,2}^{n+1} + \mathbf{E}_{h,2}^n) \times \mathbf{n}_1 \, ds
\end{aligned} \tag{4.1.22}$$

En faisant de manière analogue sur les équations liées au domaine  $\Omega_2$  et en faisant le même raisonnement que sur le problème continu, on obtient de manière similaire une équation sur  $\Omega_2$  donnée par :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega_2} (\varepsilon \mathbf{E}_{h,2}^{n+1} \cdot \mathbf{E}_{h,2}^{n+1} + \mu \mathbf{H}_{h,2}^{n+3/2} \cdot \mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_2} (\varepsilon \mathbf{E}_{h,2}^n \cdot \mathbf{E}_{h,2}^n + \mu \mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_{h,2}^{n-\frac{1}{2}}) \, d\mathbf{x} \right) &= \\
\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}} \cdot (\mathbf{E}_{h,1}^{n+1} + \mathbf{E}_{h,1}^n) \times \mathbf{n}_2 \, ds &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} \cdot (\mathbf{E}_{h,2}^{n+1} + \mathbf{E}_{h,2}^n) \times \mathbf{n}_2 \, ds
\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

Afin d'obtenir la pseudo-énergie sur l'ensemble  $\Omega$ , on somme les équations (4.1.22) et 4.1.23. En tenant alors compte du fait que  $n_2 = -n_1$ , on obtient la conservation au cours du temps de cette pseudo-énergie sur le domaine  $\Omega$ ; c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega_2} (\varepsilon \mathbf{E}_{h,2}^{n+1} \cdot \mathbf{E}_{h,2}^{n+1} + \mu \mathbf{H}_{h,2}^{n+3/2} \cdot \mathbf{H}_{h,2}^{n+1/2}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_2} (\varepsilon \mathbf{E}_{h,2}^n \cdot \mathbf{E}_{h,2}^n + \mu \mathbf{H}_{h,2}^{n+1/2} \cdot \mathbf{H}_{h,2}^{n-1/2}) \, d\mathbf{x} \right) + \\ & \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega_1} (\varepsilon \mathbf{E}_{h,1}^{n+1} \cdot \mathbf{E}_{h,1}^{n+1} + \mu \mathbf{H}_{h,1}^{n+3/2} \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+1/2}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_1} (\varepsilon \mathbf{E}_{h,1}^n \cdot \mathbf{E}_{h,1}^n + \mu \mathbf{H}_{h,1}^{n+1/2} \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n-1/2}) \, d\mathbf{x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

Pour démontrer la stabilité d'un schéma à partir de l'énergie, on montre que la pseudo-énergie définit une énergie; c'est-à-dire qu'elle est positive. On peut alors montrer que celle-ci définit une norme dans un espace de dimension finie et donc comme toutes les normes sont équivalentes dans ce cas, notre pseudo-énergie est équivalente à une énergie. Donc en conservant cette quantité, on obtient un schéma stable.

Soit la pseudo-énergie  $\mathcal{E}_{h,\Omega}^n$  au temps  $n$  que l'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\mathcal{E}_{h,\Omega}^n = \|\mathbf{E}_h^n\|_{0,\varepsilon,\Omega}^2 + \int_{\Omega} \mu \mathbf{H}_h^{n+1/2} \cdot \mathbf{H}_h^{n-1/2} \, d\mathbf{x} \quad (4.1.25)$$

De plus, remarquons que :

$$\mathbf{H}_h^{n+1/2} \cdot \mathbf{H}_h^{n-1/2} = \mathbf{H}_h^{n+1/2} \cdot (\mathbf{H}_h^{n+1/2} - (\mathbf{H}_h^{n+1/2} - \mathbf{H}_h^{n-1/2})) \quad (4.1.26)$$

En utilisant la relation (4.1.26) dans (4.1.25), nous obtenons :

$$\mathcal{E}_{h,\Omega}^n = \|\mathbf{E}_h^n\|_{0,\varepsilon,\Omega}^2 + \|\mathbf{H}_h^{n+1/2}\|_{0,\mu,\Omega}^2 - \int_{\Omega} \mu (\mathbf{H}_h^{n+1/2} \cdot (\mathbf{H}_h^{n+1/2} - \mathbf{H}_h^{n-1/2})) \, d\mathbf{x} \quad (4.1.27)$$

Nous pouvons exprimer la relation pseudo-énergie (4.1.27) avec la formulation de l'énergie (4.1.5) sur  $\Omega$  de la manière suivante.

$$\mathcal{E}_{h,\Omega}^n = \mathcal{E}_{\Omega}^n - \int_{\Omega} \mu (\mathbf{H}_h^{n+1/2} \cdot (\mathbf{H}_h^{n+1/2} - \mathbf{H}_h^{n-1/2})) \, d\mathbf{x} \quad (4.1.28)$$

De plus, on peut décomposer la pseudo-énergie  $\mathcal{E}_{h,\Omega}^n$ , évaluée sur tout le domaine  $\Omega$ , en deux pseudo-énergies  $\mathcal{E}_{h,\Omega_1}^n$  et  $\mathcal{E}_{h,\Omega_2}^n$  sur les domaines respectifs  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . On voit facilement la correspondance de ces deux pseudo-énergies avec chacun des deux schémas utilisés.

$$\mathcal{E}_{h,\Omega}^n = \mathcal{E}_{h,\Omega_1}^n + \mathcal{E}_{h,\Omega_2}^n \quad (4.1.29)$$

Ensuite, nous cherchons une estimation de la différence entre la pseudo-énergie et l'énergie sur chacun des deux domaines. Concernant la pseudo-énergie du domaine  $\Omega_1$ , nous prenons  $\psi_{h,1} = \mathbf{H}_{h,1}$  dans l'équation sur le champ magnétique dans l'approche FEM du système (4.1.16) et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \mu (\mathbf{H}_{h,1}^{n+1/2} - \mathbf{H}_{h,1}^{n-1/2}) \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+1/2} \, d\mathbf{x} &= -\Delta t \int_{\Omega_1} \nabla \wedge \mathbf{E}_{h,1}^n \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+1/2} \, d\mathbf{x} \\ &+ \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{h,2}^n - \mathbf{E}_{h,1}^n) \times n_1 \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+1/2} \, ds \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

Concernant la pseudo-énergie du domaine  $\Omega_2$ , nous prenons  $\psi_{h,2} = \mathbf{H}_{h,2}$  dans l'équation sur le champ magnétique dans l'approche GD du système (4.1.16) et on obtient :

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{K} \in \tau_h, \int_{\mathcal{K}} \mu (\mathbf{H}_{h,2}^{n+1/2} - \mathbf{H}_{h,2}^{n-1/2}) \cdot \mathbf{H}_{h,2}^{n+1/2} \, d\mathbf{x} &= -\Delta t \int_{\mathcal{K}} \nabla \wedge \mathbf{E}_{h,2}^n \cdot \mathbf{H}_{h,2}^{n+1/2} \, d\mathbf{x} \\ &+ \frac{\Delta t}{2} \int_{\partial \mathcal{K} \cap \Gamma} \llbracket \mathbf{E}_{h,2}^n \times n_2 \rrbracket \cdot \mathbf{H}_{h,2}^{n+1/2} \, ds + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{h,1}^n - \mathbf{E}_{h,2}^n) \times n_2 \cdot \mathbf{H}_{h,2}^{n+1/2} \, ds \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

### 4.1.2.3 Proposition d'une condition de stabilité pour une hybridation FEM/GD

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer la positivité de la pseudo-énergie  $\mathcal{E}_{h,\Omega}^n = \mathcal{E}_{h,\Omega_1}^n + \mathcal{E}_{h,\Omega_2}^n$  en plusieurs étapes :

- Dans la première étape, on minore la pseudo-énergie  $\mathcal{E}_{h,\Omega_1}^n$ ,
- Dans la deuxième étape, on minore la pseudo-énergie  $\mathcal{E}_{h,\Omega_2}^n$ ,
- Dans une dernière étape, en additionnant les minorants des deux pseudo-énergies, on trouve une minoration pour l'énergie globale et notre condition de stabilité est obtenue en appliquant une condition de positivité sur le minorant.

Dans ce paragraphe, pour simplifier les calculs, nous supposons que l'interface  $\Gamma$  et les cellules voisines à ces interfaces sont dans un milieu vide.

Dans un premier temps, nous allons chercher une minoration de  $\mathcal{E}_{h,\Omega_1}^n$ , pour cela, on va commencer à majorer le premier terme de l'équation (4.1.30), en utilisant les relations établies lors de l'évaluation de la condition CFL de l'approche FEM dans le paragraphe 2.5.2. On a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_1} \nabla \wedge \mathbf{E}_{h,1}^n \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x} \right| &\leq \|\nabla \wedge \mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\mu^{-1},\Omega_1} \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_1}, \\ &\leq \sqrt{\|\mathcal{M}_1^{-\frac{1}{2}} \mathcal{R}_1 \mathcal{M}_1^{-\frac{1}{2}}\|} \|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1} \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_1}, \\ &\leq c_0 \sqrt{\lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_1 \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}})} \|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1} \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_1}, \end{aligned} \quad (4.1.32)$$

où  $c_0$  la vitesse des ondes électromagnétiques dans le milieu,  $\lambda_{\max}(D)$  définit le rayon spectral de la matrice  $D$ ,  $\hat{\mathcal{M}}_1$  et  $\hat{\mathcal{R}}_1$  sont respectivement les matrices de masse et de rigidité sur l'élément de référence lié au schéma FEM, et sont détaillées dans le paragraphe 2.5.2.

Le second terme de l'équation (4.1.30) correspond au terme de couplage entre les deux schémas et est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{h,2}^n - \mathbf{E}_{h,1}^n) \times \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} ds &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{h,2}^n \times \mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{h,1}^n \times \mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} ds \end{aligned} \quad (4.1.33)$$

Le premier terme du second membre de l'équation (4.1.33) peut se majorer de la manière suivante :

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{h,2}^n \times \mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} ds \leq \frac{1}{2} \left( \|\mathbf{E}_{h,2}^n \times \mathbf{n}_1\|_{0,\Gamma}^2 + \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n}_1\|_{0,\Gamma}^2 \right) \quad (4.1.34)$$

Soit  $\Lambda_h$  tel que :

$$\Lambda_h = \min_{\mathbf{l} \in \{1, \dots, r+1\}^3} \frac{|J_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\xi}_1^G)|}{\lambda_{\max}(DF_{\mathcal{K}}^* DF_{\mathcal{K}})(\boldsymbol{\xi}_1^G)}. \quad (4.1.35)$$

avec,  $DF_{\mathcal{K}}$  la matrice de transformation de  $\mathcal{K}$  vers l'élément de référence  $\hat{\mathcal{K}}$  et  $J_{\mathcal{K}}$  son jacobien.

La première norme de l'équation (4.1.34) peut se majorer de la manière suivante :

$$\|\mathbf{E}_{h,2}^n \times \mathbf{n}_1\|_{0,\Gamma}^2 \leq \frac{1}{\Lambda_h} \frac{\|\mathcal{M}_2^{-\frac{1}{2}} \mathcal{B}_2 \mathcal{M}_2^{-\frac{1}{2}}\|}{\varepsilon} \|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_2}^2 \quad (4.1.36)$$

avec  $\mathcal{M}_2$  la matrice de masse du schéma GD et  $\mathcal{B}_2$  une matrice diagonale par blocs, où chaque bloc correspond à une cellule  $\mathcal{K}$  adjacente à la frontière  $\Gamma$ . Ces cellules sont définies par l'ensemble :

$$\tau_{h,\Gamma} = \{\mathcal{K} \in \tau_h \mid \mathcal{K} \subset \Omega_2 \cap \Gamma\} \quad (4.1.37)$$

Si nous posons que toute cellule  $\mathcal{K} \in \tau_{h,\Gamma}$  est aussi notée  $\Gamma_{\mathcal{K}}^2$ , la matrice  $\mathcal{B}_2$  est constituée des blocs suivant :

$$\mathcal{B}_{2,\Gamma_{\mathcal{K}}^2}((i, \mathbf{1}), (i', \mathbf{1}')) = \int_{\Gamma_{\mathcal{K}}} \left( (\varphi_{2,\Gamma_{\mathcal{K}}^2}^G)_1^i \times n_1 \right) \cdot \left( (\varphi_{2,\Gamma_{\mathcal{K}}^2}^G)_{1'}^{i'} \times n_1 \right) ds \quad (4.1.38)$$

où  $\varphi_{2,\Gamma_{\mathcal{K}}^2}^G$  sont les fonctions de base du schéma GD dans  $\Gamma_{\mathcal{K}}^2$ .

Les propriétés de la matrice  $\mathcal{M}_2^{-\frac{1}{2}} \mathcal{B}_2 \mathcal{M}_2^{-\frac{1}{2}}$  permettent d'exprimer la majoration à l'aide des blocs la constituant. En effet, la norme matricielle  $\| \mathcal{M}_2^{-\frac{1}{2}} \mathcal{B}_2 \mathcal{M}_2^{-\frac{1}{2}} \|$  peut s'exprimer à l'aide des matrices locales à la cellule de référence et on obtient :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}_{h,2}^n \times n_1\|_{0,\Gamma}^2 &\leq c_0 \frac{1}{\Lambda_h} \lambda_{max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}}) \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{\Gamma_{\mathcal{K}}^2} \|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\hat{\mathcal{K}}}^2 \\ &\leq c_0 \frac{1}{\Lambda_h} \lambda_{max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}}) \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_2}^2 \end{aligned} \quad (4.1.39)$$

où  $\hat{\mathcal{M}}_2$  et  $\hat{\mathcal{B}}_2$  sont respectivement la matrice de masse et de rigidité sur l'élément de référence du schéma GD, et  $c_0$  la vitesse des ondes électromagnétiques dans le milieu.

La seconde norme de l'équation (4.1.34) peut se majorer de la manière suivante :

$$\|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} \times n_1\|_{0,\Gamma}^2 \leq \frac{\| \mathcal{M}_1^{-\frac{1}{2}} \mathcal{B}_1^H \mathcal{M}_1^{-\frac{1}{2}} \|}{\mu} \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_1}^2 \quad (4.1.40)$$

avec  $\mathcal{M}_1$  la matrice de masse du schéma FEM et  $\mathcal{B}_1^H$  une matrice diagonale par blocs associée aux champs magnétiques. Chaque bloc de cette matrice correspond à une cellule  $\mathcal{K}$  adjacente à la frontière  $\Gamma$  et est défini par :

$$\mathcal{B}_{1,\Gamma_{\mathcal{K}}^1}^H((i, \mathbf{1}), (i', \mathbf{1}')) = \int_{\Gamma_{\mathcal{K}}^1} \left( (\psi_{1,\Gamma_{\mathcal{K}}^1})_1^i \times n_1 \right) \cdot \left( (\psi_{1,\Gamma_{\mathcal{K}}^1})_{1'}^{i'} \times n_1 \right) ds \quad (4.1.41)$$

où  $(\psi_{1,\Gamma_{\mathcal{K}}^1})_1^i$  est la fonction de base du schéma FEM associée à la direction  $i$  et à la cellule  $\Gamma_{\mathcal{K}}^1$ .

Les propriétés de la matrice  $\mathcal{M}_1^{-\frac{1}{2}} \mathcal{B}_1^H \mathcal{M}_1^{-\frac{1}{2}}$  permettent d'exprimer la majoration à l'aide des blocs la constituant. En effet, la norme matricielle  $\| \mathcal{M}_1^{-\frac{1}{2}} \mathcal{B}_1^H \mathcal{M}_1^{-\frac{1}{2}} \|$  peut s'exprimer à l'aide des matrices locales à la cellule de référence et on obtient :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} \times n_1\|_{0,\Gamma}^2 &\leq c_0 \lambda_{max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_1^H \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}}) \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{\Gamma_{\mathcal{K}}^1} \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\varepsilon,\hat{\mathcal{K}}}^2 \\ &\leq c_0 \lambda_{max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_1^H \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}}) \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\varepsilon,\Omega_1}^2 \end{aligned} \quad (4.1.42)$$

où  $\hat{\mathcal{M}}_1$  et  $\hat{\mathcal{B}}_1^H$  sont respectivement la matrice de masse et de rigidité sur l'élément de référence du schéma FEM.

Le second terme du second membre de l'équation (4.1.33) peut se majorer de la manière suivante :

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{h,1}^n \times n_1) \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} ds \leq \frac{1}{2} \left( \|\mathbf{E}_{h,1}^n \times n_1\|_{0,\Gamma}^2 + \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} \times n_1\|_{0,\Gamma}^2 \right) \quad (4.1.43)$$

Dans cette expression, la norme  $\|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} \times n_1\|_{0,\Gamma}^2$  a déjà été majoré par (4.1.42), et on peut montrer que l'on a :

$$\|\mathbf{E}_{h,1}^n \times n_1\|_{0,\Gamma}^2 \leq \frac{\| \mathcal{M}_1^{-\frac{1}{2}} \mathcal{B}_1^E \mathcal{M}_1^{-\frac{1}{2}} \|}{\varepsilon} \|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1}^2 \quad (4.1.44)$$

avec  $\mathcal{M}_1$  la matrice de masse du schéma FEM,  $\mathcal{B}_1^E$  une matrice diagonale par blocs associée au champ électrique, où chaque bloc correspond à une cellule  $\mathcal{K}$  adjacente de la frontière  $\Gamma$ . Les blocs de cette matrice sont définis par :

$$\mathcal{B}_{1,\Gamma\mathcal{K}}^E((i, \mathbf{l}), (i', \mathbf{l}')) = \int_{\Gamma_{\mathcal{K}}^1} \left( (\varphi_{1,\Gamma_{\mathcal{K}}^1})^i \times n_1 \right) \cdot \left( (\varphi_{1,\Gamma_{\mathcal{K}}^1})^{i'} \times n_1 \right) ds \quad (4.1.45)$$

où  $(\varphi_{1,\Gamma_{\mathcal{K}}^1})^i$  est la fonction de base du schéma FEM associée à la direction  $i$  pour la cellule  $\Gamma_{\mathcal{K}}^1$ . On peut exprimer cette majoration à l'aide des matrices locales à la cellule de référence par :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}_{h,1}^n \times n_1\|_{0,\Gamma}^2 &\leq c_0 \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_1^E \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}}) \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{\Gamma_{\mathcal{K}}^1} \|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\mathcal{K}}^2 \\ &\leq c_0 \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_1^E \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}}) \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1}^2 \end{aligned} \quad (4.1.46)$$

où  $\hat{\mathcal{M}}_1$  et  $\hat{\mathcal{B}}_1^E$  sont respectivement la matrice de masse et de rigidité sur l'élément de référence du schéma FEM.

A l'aide des précédentes majorations, le terme de saut présent dans l'équation (4.1.33) peut être majoré par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{h,2}^n - \mathbf{E}_{h,1}^n) \times n_1 \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} ds &\leq \frac{c_0 \sqrt{\mu}}{4 \sqrt{\varepsilon}} \left[ \frac{1}{\Lambda_h} \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}}) \|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_2}^2 \right. \\ &\quad + \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_1^E \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}}) \|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1}^2 \\ &\quad \left. + \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_1^H \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}}) \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\varepsilon,\Omega_1}^2 \right] \end{aligned} \quad (4.1.47)$$

En utilisant les résultats (4.1.32) et (4.1.47), nous pouvons alors donner une minoration de la pseudo-énergie sur le domaine  $\Omega_1$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{h,\Omega_1}^n &\geq \|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1}^2 + \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_1}^2 - \Delta t \left| \int_{\Omega_1} \nabla \wedge \mathbf{E}_{h,1}^n \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x} \right| \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2} \left| \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{h,2}^n - \mathbf{E}_{h,1}^n) \times n_1 \cdot \mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}} ds \right| \end{aligned} \quad (4.1.48)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{h,\Omega_1}^n &\geq \|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1}^2 + \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_1}^2 - c_0 \Delta t \sqrt{\lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_1 \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}})} \|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1} \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_1} \\ &\quad - \frac{c_0 \Delta t \sqrt{\mu}}{4 \sqrt{\varepsilon}} \left[ \frac{1}{\Lambda_h} \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}}) \|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_2}^2 \right. \\ &\quad + \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_1^E \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}}) \|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1}^2 \\ &\quad \left. + \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_1^H \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}}) \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\varepsilon,\Omega_1}^2 \right] \end{aligned} \quad (4.1.49)$$

Que l'on peut encore écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{h,\Omega_1}^n &\geq \left( 1 - \frac{c_0 \Delta t \sqrt{\mu}}{4 \sqrt{\varepsilon}} \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_1^E \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}}) \right) \|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1}^2 \\ &\quad + \left( 1 - \frac{c_0 \Delta t \sqrt{\mu}}{4 \sqrt{\varepsilon}} \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_1^H \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}}) \right) \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_1}^2 \\ &\quad - c_0 \Delta t \sqrt{\lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_1 \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}})} \|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1} \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_1} \\ &\quad - \frac{c_0 \Delta t \sqrt{\mu}}{4 \Lambda_h \sqrt{\varepsilon}} \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}}) \|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_2}^2 \end{aligned} \quad (4.1.50)$$

Dans l'étape suivante, nous allons chercher une minoration de  $\mathcal{E}_{h,\Omega_2}^n$ . Pour cela, on va commencer à majorer le premier terme de l'équation (4.1.31), en utilisant certaines relations établies dans le paragraphe précédent et les travaux de la thèse [65]. On a :

$$\sum_{\mathcal{K} \in \tau_h} \left| \int_{\mathcal{K}} \nabla \wedge \mathbf{E}_{h,2}^n \cdot \mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}} \, d\mathbf{x} \right| \leq \frac{c_0}{\Lambda_h} \sqrt{\lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}})} \|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_2} \|\mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_2}, \quad (4.1.51)$$

où  $\hat{\mathcal{M}}_2$  et  $\hat{\mathcal{B}}_2$  sont respectivement les matrices de masse et de rigidité du schéma GD sur l'élément de référence. Les termes de saut sont majorés en utilisant le même procédé que pour la majoration des termes de sauts de la pseudo-énergie  $\mathcal{E}_{h,\Omega_1}^n$ . En utilisant le premier terme de saut correspondant aux sauts entre cellules du domaine  $\Omega_2$  et le second terme de saut entre les deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , nous pouvons nous servir de la même majoration effectuée dans la thèse [65], il en résulte :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{K} \in \tau_h} \int_{\partial\mathcal{K} \setminus \Gamma} \llbracket \mathbf{E}_{h,2}^n \times n_2 \rrbracket \cdot \mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}} \, ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{h,1}^n - \mathbf{E}_{h,2}^n) \times n_2 \cdot \mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}} \, ds \leq \\ & \frac{c_0 \sqrt{\mu}}{4 \sqrt{\varepsilon}} \left[ \frac{1}{\Lambda_h} \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}}) (\|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_2}^2 + \|\mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_2}^2) \right. \\ & \quad \left. + \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_1^E \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}}) \|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1}^2 \right] \end{aligned} \quad (4.1.52)$$

En utilisant les résultats (4.1.51), (4.1.52), nous pouvons donner une minoration de la pseudo-énergie sur le domaine  $\Omega_2$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{h,\Omega_2}^n & \geq \|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_2}^2 + \|\mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_2}^2 - \Delta t \sum_{\mathcal{K} \in \tau_h} \left| \int_{\mathcal{K}} \nabla \wedge \mathbf{E}_{h,2}^n \cdot \mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}} \, d\mathbf{x} \right| \\ & \quad - \frac{\Delta t}{2} \left( \sum_{\mathcal{K} \in \tau_h} \left| \int_{\partial\mathcal{K} \setminus \Gamma} \llbracket \mathbf{E}_{h,2}^n \times n_2 \rrbracket \cdot \mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}} \, ds \right| + \left| \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{h,1}^n - \mathbf{E}_{h,2}^n) \times n_2 \cdot \mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}} \, ds \right| \right) \end{aligned} \quad (4.1.53)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{h,\Omega_2}^n & \geq \|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_2}^2 + \|\mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_2}^2 - \frac{c_0}{\Lambda_h} \sqrt{\lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}})} \|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_2} \|\mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_2} \\ & \quad - \frac{c_0 \sqrt{\mu}}{4 \sqrt{\varepsilon}} \left[ \frac{1}{\Lambda_h} \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}}) (\|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_2}^2 + \|\mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_2}^2) \right. \\ & \quad \left. + \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_1^E \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}}) \|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1}^2 \right] \end{aligned} \quad (4.1.54)$$

que l'on peut encore écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{h,\Omega_2}^n & \geq \left( 1 - \frac{c_0 \Delta t \sqrt{\mu}}{4 \Lambda_h \sqrt{\varepsilon}} \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}}) \right) \|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_2}^2 \\ & \quad + \left( 1 - \frac{c_0 \Delta t \sqrt{\mu}}{4 \Lambda_h \sqrt{\varepsilon}} \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}}) \right) \|\mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_2}^2 \\ & \quad - \Delta t \frac{c_0}{\Lambda_h} \sqrt{\lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}})} \|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_2} \|\mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_2} \\ & \quad - \frac{c_0 \Delta t \sqrt{\mu}}{4 \sqrt{\varepsilon}} \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{B}}_1^E \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}}) \|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1}^2 \end{aligned} \quad (4.1.55)$$

Au final de ces deux étapes, on peut minorer la pseudo-énergie  $\mathcal{E}_{h,\Omega}^n$  sur le domaine global à l'aide

des pseudo-énergies locales 4.1.50 et 4.1.55 que l'on peut exprimer par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{h,\Omega}^n &\geq \left(1 - \frac{c_0 \Delta t}{4} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{P}}_1^E \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}})\right) \|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1}^2 \\
&\quad + \left(1 - \frac{c_0 \Delta t}{4} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{P}}_1^H \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}})\right) \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_1}^2 \\
&\quad - \Delta t \sqrt{\lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_1 \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}})} \|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1} \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_1} \\
&\quad - \frac{c_0 \Delta t}{4} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{P}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}}) \|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_2}^2 \\
&\quad + \left(1 - \frac{c_0 \Delta t}{4 \Lambda_h} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{P}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}})\right) \|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_2}^2 \\
&\quad + \left(1 - \frac{c_0 \Delta t}{4 \Lambda_h} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{P}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}})\right) \|\mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_2}^2 \\
&\quad - \frac{\Delta t}{\Lambda_h} \sqrt{\lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}})} \|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_2} \|\mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_2} \\
&\quad - \frac{c_0 \Delta t}{4} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{P}}_1^E \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}}) \|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1}^2
\end{aligned} \tag{4.1.56}$$

que l'on peut simplifier par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{h,\Omega}^n &\geq \left(1 - \frac{c_0 \Delta t}{2} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{P}}_1^E \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}})\right) \left(\|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1}^2 + \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_1}^2\right) \\
&\quad - c_0 \Delta t \sqrt{\lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_1 \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}})} \|\mathbf{E}_{h,1}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_1} \|\mathbf{H}_{h,1}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_1} \\
&\quad + \left(1 - \frac{c_0 \Delta t}{2 \Lambda_h} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{P}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}})\right) \left(\|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_2}^2 + \|\mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_2}^2\right) \\
&\quad - \Delta t \frac{c_0}{\Lambda_h} \sqrt{\lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}})} \|\mathbf{E}_{h,2}^n\|_{0,\varepsilon,\Omega_2} \|\mathbf{H}_{h,2}^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\mu,\Omega_2}
\end{aligned} \tag{4.1.57}$$

En appliquant une condition de positivité sur le minorant de (4.1.57), nous obtenons la condition de stabilité suivante pour le schéma hybride :

**Théorème 4.1.1.** *Une Condition suffisante de stabilité du schéma hybride FEM/GD proposé (4.1.16) est :*

$$\begin{aligned}
\Delta t &\leq \frac{2}{c_0 \left[ \max \left( \sqrt{\lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_1 \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}})} + \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \max \left( \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{P}}_1^E \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}}) ; \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{P}}_1^H \hat{\mathcal{M}}_1^{-\frac{1}{2}}) \right) \right) ; \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\Lambda_h} \left( \sqrt{\lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{R}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}})} + \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \lambda_{\max}(\hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{P}}_2 \hat{\mathcal{M}}_2^{-\frac{1}{2}}) \right) \right]}
\end{aligned} \tag{4.1.58}$$

Avec  $\lambda_{\max}(A)$  le rayon spectral d'une matrice  $A$  et  $c_0$  la vitesse de la lumière dans le vide.

### Extension à l'hybridation entre le schéma Yee et un schéma volumes finis

En appliquant l'ordre d'approximation spatiale  $r^G = 0$ , les schémas FEM et GD correspondent respectivement au schéma de Yee (FDTD) [88] et à un schéma volumes finis (FVTD) [5]. Ainsi, en ce

qui concerne la stabilité d'une méthode d'hybridation entre la FDTD et les FVTD, on utilise le critère précédemment défini dans lequel, on évalue les matrices de masse, de rigidité et de sauts, en utilisant les fonctions de base précédemment décrites pour  $r^G = 0$ .

### 4.1.3 Mise en œuvre de l'approche hybride

Dans ce paragraphe, nous allons valider notre approche GD/FEM hybride sur différentes configurations de guide présentant ou pas une courbure.

#### 4.1.3.1 Guide droit

Dans cette configuration, nous étudions la propagation d'un mode à l'intérieur d'un guide droit à section rectangulaire. Afin de valider notre approche hybride, le guide est découpé en deux parties de longueur égale où on applique un schéma GD et FEM respectivement dans chacune d'elles. Concernant la géométrie du guide, nous choisissons une section de  $1.905\text{cm} \times 0.9525\text{cm}$  et une longueur de  $10\text{cm}$ . Nous étudions alors, un mode propagatif sinusoïdal à une fréquence de  $12\text{GHz}$ . Le mode est imposé sur une surface à l'intérieur du guide et chaque extrémité de celui-ci est bornée par un ensemble de couches PML comme indiqué sur les figures 4.2 et 4.3 pour simuler un guide infini.

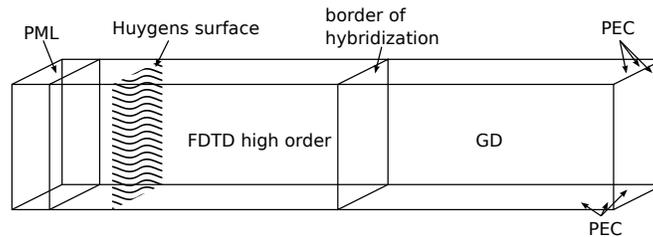


figure 4.2 – Schéma du guide étudié.

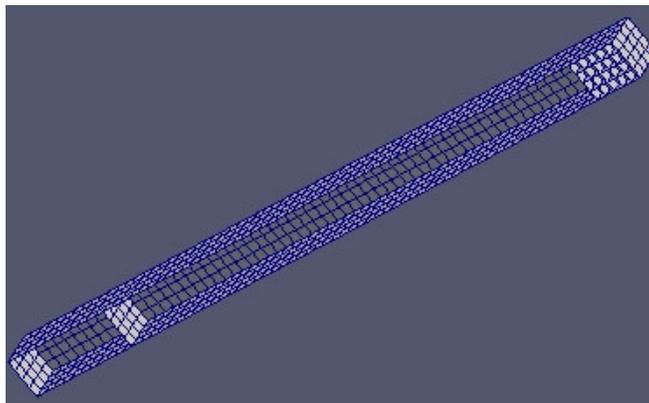


figure 4.3 – Géométrie du guide étudié.

La figure (4.4) présente une comparaison entre un calcul GD seul et un calcul hybride FEM/GD en deux points  $P_1 = (0.025\text{m}, 0.0047625\text{m}, 0.009525\text{m})$  et  $P_2 = (0.08\text{m}, 0.0047625\text{m}, 0.009525\text{m})$  localisés respectivement dans la zone GD et dans la zone FEM. On note sur cette figure, la bonne concordance des résultats et le fait qu'après avoir parcouru un nombre important de périodes du signal d'entrée, la solution hybride reste stable.

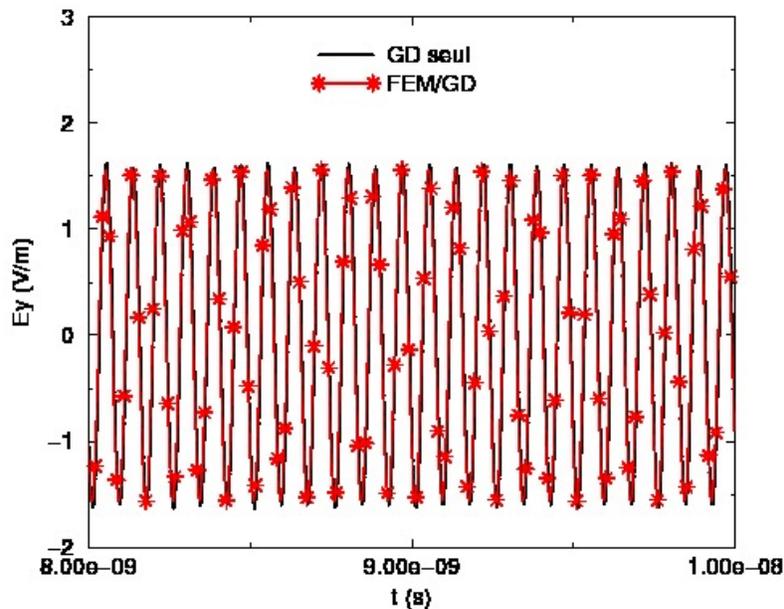


figure 4.4 – Comparaison GD et FEM/GD.

Afin de voir plus en détail l'évolution du mode dans le guide et, en particulier, ce qui se passe à l'interface des domaines FEM et GD, la figure 4.5 présente la cartographie du champ électrique dans le guide, à différents instants. La partie quadrillée correspond à la zone FEM et l'autre à la zone GD. On note sur cette figure que l'échange entre les deux zones est bien continu et ne présente pas de signaux parasites.

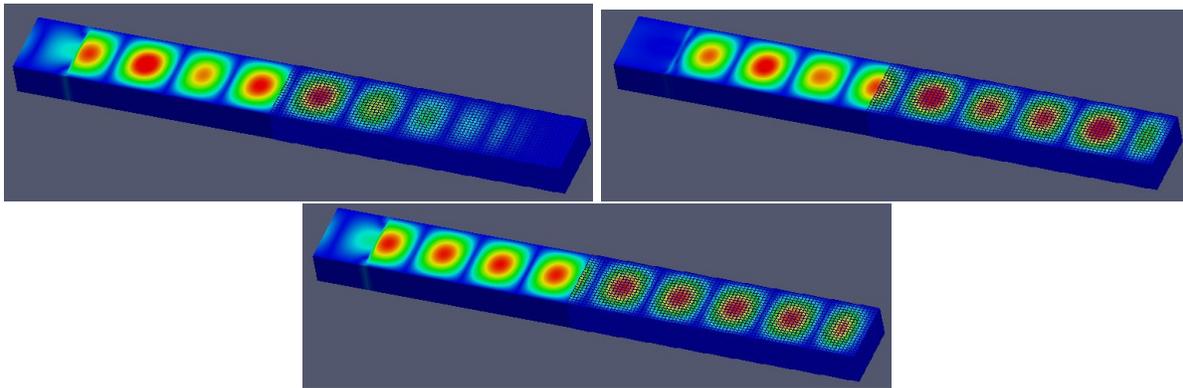


figure 4.5 – Propagation du mode dans le guide prise aux temps  $t = 5e - 10s$ ,  $t = 1.e - 9s$  et  $t = 1.e - 8s$ .

De l'ensemble des résultats obtenus, en faisant varier l'ordre d'approximation spatiale des deux schémas de  $r^G = 0$  à  $r^G = 2$  pour limiter les coûts de calculs, avec notre approche hybride sur cet exemple simple, on peut conclure qu'on obtient de bons résultats et que la solution ne présente pas d'instabilité.

#### 4.1.3.2 Guide courbé

Afin de montrer l'intérêt de notre approche hybride, nous allons maintenant traiter une configuration présentant localement une géométrie courbe. Pour cela, nous reprenons l'exemple du guide, en modifiant

la géométrie de celui-ci, tel que décrit par la figure 4.6. En ce qui concerne la source d'excitation, on fixe un plan d'onde sur une des extrémités du guide et on génère un mode prorogatif sinusoïdal à une fréquence de  $12GHz$ , comme cela est indiqué dans la figure 4.6. A chaque extrémité du guide on place un ensemble de couches PML pour simuler un guide infini comme dans le premier cas test.

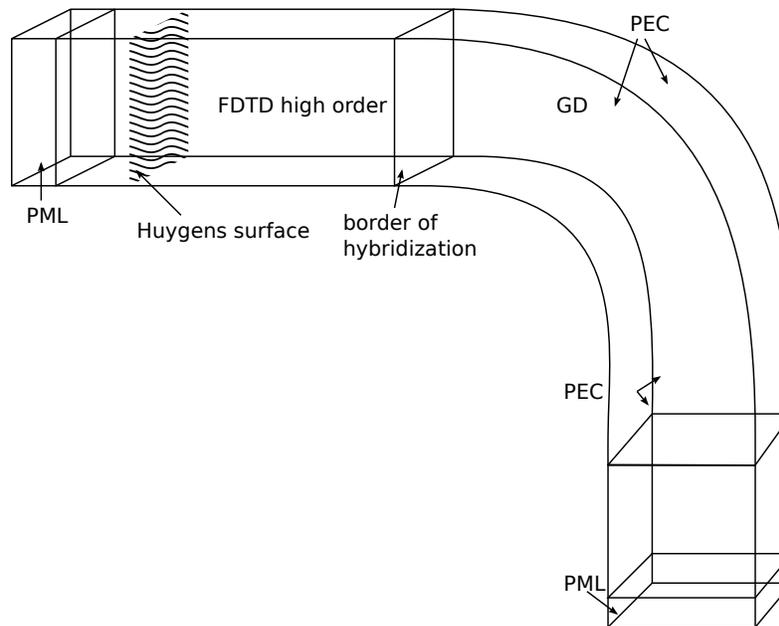


figure 4.6 – Géométrie du guide coudé.

Pour résoudre précisément ce problème, il faut tenir compte correctement de la courbure. Pour cela, on peut utiliser un code de type GD sur l'ensemble du problème ou bien une hybridation de type FEM/GD, pour limiter les calculs GD au niveau de la courbure. Nous allons donc comparer ces deux approches sur ce cas test. Le guide dans l'approche FEM/GD est divisé en deux parties : une première partie où on applique le schéma FEM qui inclue le début du guide et ensuite une deuxième partie où on applique le schéma GD, qui inclue la courbure jusqu'à la fin du guide. Pour servir de référence, on a réalisé la même simulation en utilisant la méthode GD sur tout le domaine. La figure 4.7 présente une comparaison GD et FEM/GD en un point situé après la courbure. On note sur cette figure la bonne adéquation des deux résultats.

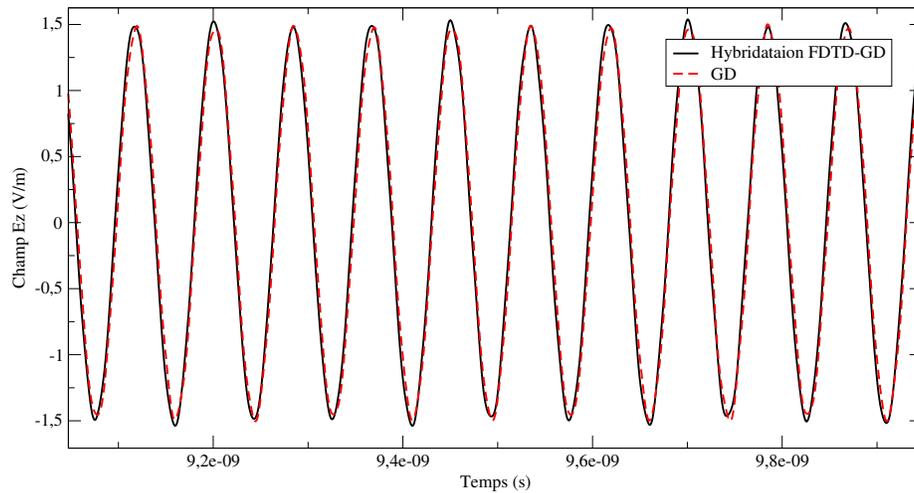


figure 4.7 – Point de champ situé après la courbure du guide.

Comme pour l'exemple précédent, nous nous sommes intéressés plus finement à la propagation du mode dans le guide et la figure 4.8 montre la cartographie des champs électriques dans le guide, obtenue par notre approche hybride, après un temps de simulation relativement long ( $t = 1.e - 8s$ ). Comme pour l'exemple précédent, la partie quadrillée correspond à la zone FEM. On note encore sur cette figure, comme dans le cas du guide droit, une parfaite continuité entre les deux zones sur les valeurs des champs.

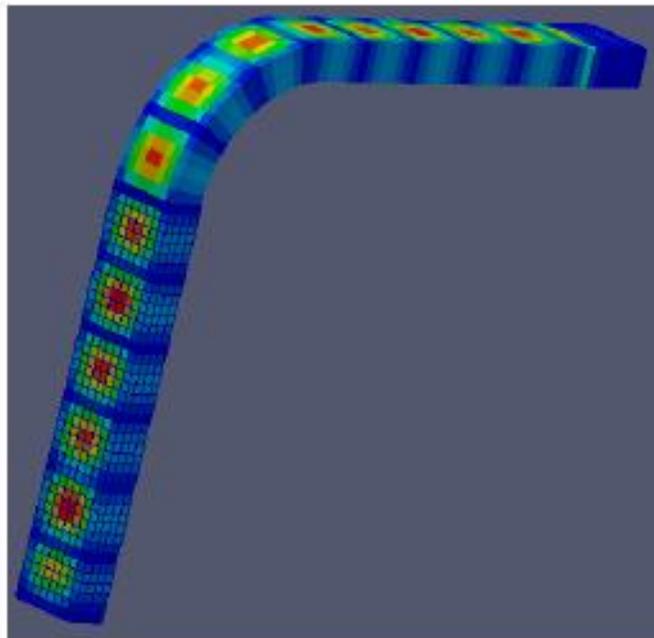


figure 4.8 – Propagation du mode dans le guide coudé.

#### 4.1.4 Conclusion

Dans ce paragraphe, nous nous sommes intéressés à l'hybridation de schémas temporels dont la discrétisation temporelle est basée sur une approximation LeapFrog. Le but de cette hybridation est de pouvoir tenir compte de géométries courbes tout en évitant un surcoût de calcul important. Pour cela, nous suggérons une hybridation entre maillages cartésiens et non structurés sur lesquels, on utilise respectivement une méthode FDTD ou FEM et une méthode FVTD ou GD. La difficulté de ce type de solution est d'avoir un schéma hybride stable. Pour cela, nous avons démontré sous quelles conditions notre approche hybride conserve une énergie et donc est stable. Finalement, pour une approche FEM/GD, avec essentiellement des ordres d'approximation spatiale variant de  $r^G = 0$  à 2, nous avons proposé deux configurations de propagation de mode dans un guide montrant la validité de notre solution hybride. Toutefois, il reste à mener d'autres tests sur cette stratégie d'hybridation, en prenant des ordres plus élevés, notamment dans des configurations plus complexes, comme par exemple le cas du cornet, pour valider complètement celle-ci. En particulier, il faut quantifier le coût du maillage dans de telles configurations.

Par ailleurs, nous n'avons réalisé pour le moment que le couplage de deux domaines, ce qui est limitatif pour le dernier exemple que nous aurions pu traiter en 3 domaines : FEM/GD/FEM. Cet aspect est plus informatique que mathématique et reste à être implémenté.

## 4.2 Prise en compte de structures filaires dans l'approche FEM et hybridation de celles-ci avec une méthode de ligne de transmission 1D pour le calcul des courants sur un câblage complexe

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à deux points qui sont, tout d'abord, l'amélioration du modèle de fil mince oblique, proposé par T. Volpert [83], pour la prise en compte dans la méthode FEM d'une structure monofilaire, puis, la prise en compte dans l'approche FEM de torons de câbles afin de pouvoir effectuer des simulations sur des configurations de câbles industriels.

Pour le premier point, T. Volpert avait proposé dans sa thèse un modèle de fil mince pour l'approche FEM. Toutefois, celui-ci ne fournissait de bons résultats qu'à condition d'avoir des approximations spatiales d'ordre pas trop élevé dans le schéma FEM. En effet, à partir d'un certain degré d'approximation spatiale, il apparaissait sur les champs autour des fils des erreurs importantes, dues certainement au fait que notre discrétisation sur les fils était d'ordre  $r^G = 0$ . Dans cette thèse, nous avons considéré une approximation spatiale d'ordre élevé sur les structures filaires pour palier ces erreurs et montrer que ceci résolvait le problème.

Pour le deuxième point, un toron industriel n'est pas un câble monofilaire et il est nécessaire de tenir compte des fils internes qui peuvent être blindés ou pas, mais aussi de sous-ensembles de câbles contenant eux-mêmes des fils. L'ensemble de ces câbles est mis sous forme d'un réseau où chacun d'eux aboutit sur un nœud de distribution ou de terminaison. Le nœud de distribution est une transition d'un câble vers d'autres, alors que le nœud de terminaison est une connexion du câble à un équipement. Les connexions entre câbles peuvent être complexes et comporter des éléments passifs ou actifs localisés. De plus, dans une connexion entre câbles, chaque fil d'un câble peut être connecté ou pas avec un fil d'un autre câble. Pour tenir compte de tous ces aspects, les modèles de fils minces proposés et intégrés dans les solveurs temporels, ne sont pas suffisamment exhaustifs et il est nécessaire d'avoir un outil dédié au câblage. Cette approche a été commencée dans la thèse de N. Muot [58] et une stratégie hybride a été développée entre l'approche FDTD et une méthode de ligne de transmission permettant de traiter des câbles circulant le long des arêtes du maillage.

Dans ce travail de thèse, nous allons améliorer cette hybridation pour prendre en compte des fils obliques dont la direction est indépendante du maillage et des ordres d'approximation spatiale élevés pour les schémas numériques, en utilisant notre approche FEM. Pour cela, dans un premier paragraphe, nous rappelons le principe de l'hybridation et nous indiquons les améliorations effectuées pour tenir compte des fils obliques et des ordres d'approximation spatiale élevés. Dans un deuxième paragraphe, on décrit rapidement notre solveur TLM, puis dans le troisième paragraphe, on propose des validations sur des configurations FEM/TLM.

### 4.2.1 Modèle de fils minces d'approximation spatiale d'ordre élevé dans l'approche FEM

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'amélioration du schéma numérique proposé pour résoudre le modèle de fils minces obliques de T. Volpert afin de garantir pour celui-ci une approximation spatiale du même ordre que celle utilisée pour l'évaluation des champs. Ainsi, nous espérons pouvoir garantir une certaine consistance entre les courants et les champs que nous n'avions pas avec l'ancien schéma. A titre d'exemple, avec l'ancien schéma, nous avons étudié deux configurations, qui sont, l'agression d'un monopôle par une onde plane, et l'émission d'un monopôle (antenne fouet). Les figures 4.9 et 4.10 présentent une cartographie du champ électrique dans un plan de coupe pour chacune des deux configurations. On note sur ces figures qu'il existe des points chauds non physiques pour le champ le long du fil. Nous pensons que ceci est dû au fait que les approximations spatiales prises pour les courants

et les tensions du fil ( $r^G = 0$ ) et celles prises pour les champs ( $r^G > 0$ ) ne sont pas les mêmes. Ce qui nous permet de penser que l'origine de cette erreur vient de cette différence d'approximation est que lorsqu'on choisi un même ordre d'approximation spatiale pour les courants et les champs, ce problème disparaît.

Nous proposons, dans le paragraphe suivant, une amélioration du schéma du modèle de fil mince, pour lequel, on va utiliser une discrétisation d'ordre d'approximation spatiale plus élevé pour décrire les courants et les tensions. Pour cela, on s'inspire de la même approche utilisée dans la méthode FEM pour réaliser une discrétisation en espace d'ordre élevé sur les courants.

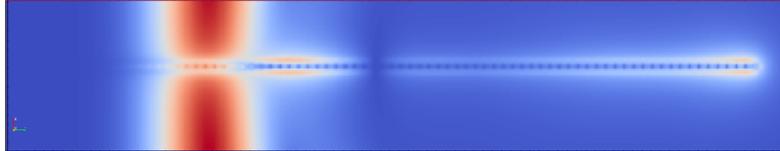


figure 4.9 – Cartographie du champs autour d'un monopôle avec un modèle de fil mince à l'ordre d'approximation spatiale  $r^G = 0$  et des champs à l'ordre  $r^G = 2$ .

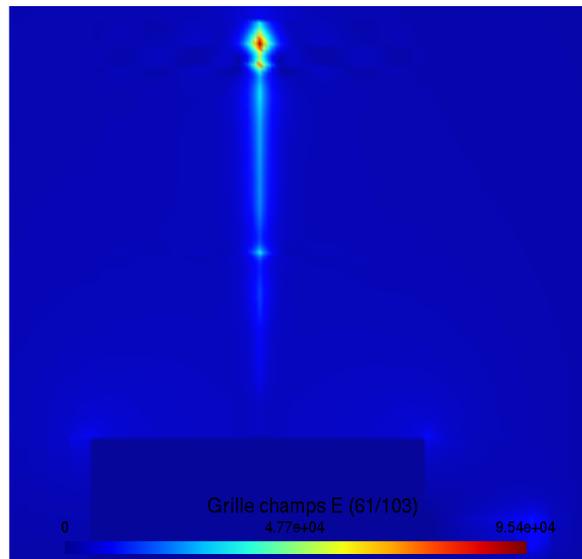


figure 4.10 – Cartographie du champs autour monopôle avec un modèle de fil mince à l'ordre d'approximation spatiale  $r^G = 0$  et des champs avec des ordres compris entre  $r^G = 2$  et 7.

#### 4.2.1.1 Amélioration du schéma du modèle de fil mince oblique

Nous conservons le principe de l'approche de T. Volpert. Le système TLM s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \partial_t I + \frac{R}{L} I &= -\nu^2 \partial_l q + \frac{1}{L} \int_S E \cdot \vec{u} \, ds \\ \partial_t q + \frac{\sigma}{\varepsilon} q &= -\partial_l I \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

où  $L$ ,  $R$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ , et  $\nu$  définissent respectivement l'inductance, la résistance, la conductivité moyenne et la permittivité moyenne autour de la ligne, et  $\vec{u}$  est le vecteur directeur du fil, et  $S$  définit le segment dans l'espace.

**Formulation variationnelle** En couplant le système de Maxwell et le système TLM (4.2.1), on peut écrire la formulation variationnelle du problème d'évolution global comme suit. Soit  $\Upsilon$  une ligne se situant dans un milieu de caractéristiques  $\sigma$  et  $\varepsilon$  constantes; et  $\mathcal{L}_h$  une partition de la ligne en segment  $\mathcal{L}$ , alors on a :

Chercher  $(\mathbf{E}(t, \cdot), \mathbf{H}(t, \cdot), q(t, \cdot), I(t, \cdot)) \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times H^1(\Upsilon) \times H^1(\Upsilon)$ ,  $\forall t \in (0, T)$  tels que  $\forall (\varphi, \psi, \varphi', \psi') \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times H^1(\mathcal{L}_h) \times H^1(\mathcal{L}_h)$  :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon} \mathbf{E} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \nabla \wedge \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \underline{\sigma} \mathbf{E} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} &= 0, \\
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \underline{\mu} \mathbf{H} \cdot \psi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{E} \cdot \psi \, d\mathbf{x} &= 0, \\
\frac{d}{dt} \int_{\Upsilon} I \psi' \, dl + \frac{R}{L} \int_{\Upsilon} I \psi' \, dl = -\nu^2 \int_{\Upsilon} \partial_l q \psi' \, dl + \frac{1}{L} \int_{\Upsilon} \left( \int_S \mathbf{E} \cdot \vec{u} \, ds \right) \psi' \, dl, \\
\frac{d}{dt} \int_{\Upsilon} q \varphi' \, dl + \int_{\Upsilon} \frac{\sigma}{\varepsilon} q \varphi' \, dl + \int_{\Upsilon} I \partial_l \varphi' \, dl &= 0, \\
\int_{\Omega} \mathbf{E}(x, 0) \cdot \varphi \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{E}_0(x) \cdot \varphi \, d\mathbf{x}, \\
\int_{\Omega} \mathbf{H}(x, 0) \cdot \psi \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{H}_0(x) \cdot \psi \, d\mathbf{x}, \\
\int_{\Upsilon} q(l, 0) \varphi' \, dl &= \int_{\Upsilon} q_0(l) \varphi' \, dl, \\
\int_{\Upsilon} I(l, 0) \psi' \, dl &= \int_{\Upsilon} I_0(l) \psi' \, dl, \\
\mathbf{E} \wedge n_{\partial\Omega} &= 0, \\
\mathbf{H} \cdot n_{\partial\Omega} &= 0, \\
q|_{\partial\Upsilon} &= q_0, \\
I|_{\partial\Upsilon} &= I_0.
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

où  $\sigma$  et  $\varepsilon$  sont respectivement la conductivité moyenne et la permittivité moyenne autour du fil  $\Upsilon$ .

Le choix de  $H^1(\Omega)$  pour le courant et la charge est aussi déterminé par la condition limite aux extrémités de la ligne qui ne sont pas forcément  $I = 0$  et  $V = 0$  suivant la connexion de celle-ci à une structure.

### Approximation en espace

Soient  $\mathcal{L}$  et  $\hat{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}_h$  le segment de référence  $[0, 1]$ . Nous posons  $F_{\mathcal{L}}$  la fonction qui transforme un point  $\hat{l}$  de l'élément de référence  $\hat{\mathcal{L}}$  vers un point  $l$  d'un segment  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_h$ .

Nous pouvons alors définir deux espaces d'approximations pour les courants et tensions, notés  $U'_h$  et  $V'_h$ , tels que  $U'_h \subset H^1(\Upsilon)$  et  $V'_h \subset H^1(\Upsilon)$ , par :

$$\begin{aligned}
U_{h,0} &= \{u_h \in H^1(\Upsilon) : \forall \mathcal{L} \in \mathcal{L}_h, u_h \circ F_{\mathcal{L}} = \hat{u}_h \mid \hat{u}_h \in Q^{r+1}\}, \\
V_h &= \{v_h \in H^1(\Upsilon) : \forall \mathcal{L} \in \mathcal{L}_h, v_h \circ F_{\mathcal{L}} = \hat{v}_h \mid \hat{v}_h \in Q^r\}.
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

où  $r$  correspond au degré d'approximation spatiale associé à l'élément  $\mathcal{L}$ .

### Fonctions de base sur l'élément $\mathcal{L}$

Sur un élément de référence  $\hat{\mathcal{L}}$ , on associe à chaque degré de liberté de la charge  $q$  et du courant  $I$  les fonctions de base définies par :

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}'_l(\hat{x}) &= L_l^{GL}(\hat{x}) \\
\hat{\psi}'_l(\hat{x}) &= L_l^G(\hat{x})
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

où  $L_l^G$  et  $L_l^{GL}$  sont des polynômes de Lagrange construits respectivement avec les points de Gauss et les points de Gauss-Lobatto au point d'indice  $l$ .

Enfin, à partir des fonctions de base définies sur l'élément de référence  $\hat{\mathcal{L}}$ , on définit les fonctions de base sur  $\mathcal{L}$  par :

$$\begin{aligned}\varphi_{l,\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{L}}(\hat{x}) &= \hat{\varphi}'_l(\hat{x}), \\ \psi_{l,\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{L}}(\hat{x}) &= \hat{\psi}'_l(\hat{x}).\end{aligned}\tag{4.2.5}$$

### Fonctions de base sur $\Upsilon$

L'ensemble des fonctions de base de  $U'_{0,h}$ , noté  $\mathcal{B}'_U$  est défini par :

$$\mathcal{B}'_U = \left\{ \phi_h \mid \forall \mathcal{L} \in \text{supp}(\phi_h) \cap \mathcal{L}_h, \exists l \in \{1, \dots, r^{GL} + 1\} \text{ tel que } \phi_h = \varphi'_l \right\}.\tag{4.2.6}$$

De même, l'ensemble des fonctions de base  $V'_h$ , noté  $\mathcal{B}'_V$  est défini par :

$$\mathcal{B}'_V = \left\{ \phi_h \mid \text{supp}(\phi_h) = \mathcal{L} \in \mathcal{L}_h, \exists l \in \{1, \dots, r^G + 1\} \text{ tel que } \phi_h = \psi'_l \right\}.\tag{4.2.7}$$

Les charges  $q$  et les courants  $I$  se décomposent respectivement dans les bases  $\mathcal{B}'_U$  et  $\mathcal{B}'_V$  sous la forme :

$$q_h^n(l) = \sum_{j=1}^{N_q} q_{h,j}^n \varphi'_j(l)\tag{4.2.8a}$$

$$I_h^{n-\frac{1}{2}}(l) = \sum_{j=1}^{N_I} I_{h,j}^{n-\frac{1}{2}} \psi'_j(l)\tag{4.2.8b}$$

où  $l$  définit la variable linéique,  $N_q$  et  $N_I$  sont respectivement le nombre de degrés de liberté correspondant à la charge  $q$  et au courant  $I$  du fil  $\Upsilon$ . En utilisant les définitions, relations (2.3.22) et (2.3.16), les courants et les charges sont écrits sur chaque segment  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_h$  sous la forme :

$$q_{h,\mathcal{L}}^n(l) = \sum_{j=1}^{r^{GL}+1} q_{j,\mathcal{L}}^n \varphi'_{j,\mathcal{L}}(l);\tag{4.2.9a}$$

$$I_{h,\mathcal{L}}^{n-\frac{1}{2}}(l) = \sum_{j=1}^{r^G+1} I_{j,\mathcal{L}}^{n-\frac{1}{2}} \psi'_{j,\mathcal{L}}(l).\tag{4.2.9b}$$

### Discrétisation en temps

La discrétisation en temps utilise un schéma LeapFrog identique à celui du schéma de Yee.

### Discrétisation en Espace

Tout comme avec les champs électriques et magnétiques, certains degrés de liberté sont positionnés à l'interface de deux cellules. Cela concerne uniquement les charges.

Nous commençons alors à écrire l'équation du schéma numérique, correspondant à l'équation du courant, sur un degré de liberté quelconque  $j \in N_I$ , pour lequel, il existe une correspondance avec un degré de liberté  $j_0$  d'un segment  $\mathcal{L}_0$ . La formulation variationnelle de l'équation du courant (4.2.2) s'écrit sous la forme :

Pour tout  $\psi'_{j_0,\mathcal{L}_0} \in \mathcal{B}'_V$

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{L}_0} \frac{I_{h,\mathcal{L}_0}^{n+\frac{1}{2}} - I_{h,\mathcal{L}_0}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \psi'_{j_0,\mathcal{L}_0}(l) dl + \int_{\mathcal{L}_0} \frac{R_{\mathcal{L}_0}}{L} \frac{I_{h,\mathcal{L}_0}^{n+\frac{1}{2}} + I_{h,\mathcal{L}_0}^{n-\frac{1}{2}}}{2} \psi'_{j_0,\mathcal{L}_0}(l) dl \\ = -\nu^2 \int_{\mathcal{L}_0} \partial_l q_{h,\mathcal{L}_0}^n \psi'_{j_0,\mathcal{L}_0}(l) dl + \frac{1}{L} \int_{\mathcal{L}_0} \left( \int_S \mathbf{E} \cdot \vec{u} ds \right) \psi'_{j_0,\mathcal{L}_0}(l) dl.\end{aligned}\tag{4.2.10}$$

En introduisant la décomposition (4.2.9b) du courant et la décomposition (4.2.9a) de la charge, nous obtenons alors, l'expression discrète suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{L}_0} \sum_{j=1}^{r^{G+1}} \frac{I_{j,\mathcal{L}_0}^{n+\frac{1}{2}} - I_{j,\mathcal{L}_0}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \psi'_{j,\mathcal{L}}(l) \psi'_{j_0,\mathcal{L}_0}(l) dl + \int_{\mathcal{L}_0} \frac{R_{\mathcal{L}_0}}{L} \sum_{j=1}^{r^{G+1}} \frac{I_{j,\mathcal{L}_0}^{n+\frac{1}{2}} + I_{j,\mathcal{L}_0}^{n-\frac{1}{2}}}{2} \psi'_{j,\mathcal{L}}(l) \psi'_{j_0,\mathcal{L}_0}(l) dl \\ & = -\nu^2 \int_{\mathcal{L}_0} \sum_{j=1}^{r^{GL+1}} q_{j,\mathcal{L}_0}^n \partial_l \varphi'_{j,\mathcal{L}}(l) \psi'_{j_0,\mathcal{L}_0}(l) dl + \frac{1}{L} \int_{\mathcal{L}_0} \left( \int_S \mathbf{E} \cdot \vec{u} ds \right) \psi'_{j_0,\mathcal{L}_0}(l) dl. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

En utilisant les relations décrivant les fonctions de base et la transformation  $F_{\mathcal{L}_0}$  nous pouvons intégrer cette équation sur l'élément de référence :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \Delta_L \sum_{j=1}^{r^{G+1}} \frac{I_{j,\mathcal{L}_0}^{n+\frac{1}{2}} - I_{j,\mathcal{L}_0}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \hat{\psi}'_{j,\mathcal{L}}(l) \hat{\psi}'_{j_0,\mathcal{L}_0}(l) d\hat{l} + \int_{\hat{\mathcal{L}}_0} \frac{R_{\mathcal{L}_0}}{L} \Delta_L \sum_{j=1}^{r^{G+1}} \frac{I_{j,\mathcal{L}_0}^{n+\frac{1}{2}} + I_{j,\mathcal{L}_0}^{n-\frac{1}{2}}}{2} \hat{\psi}'_{j,\mathcal{L}}(l) \hat{\psi}'_{j_0,\mathcal{L}_0}(l) d\hat{l} \\ & = -\nu^2 \int_{\hat{\mathcal{L}}_0} \Delta_L \sum_{j=1}^{r^{GL+1}} q_{j,\mathcal{L}_0}^n \frac{1}{\Delta_L} \partial_l \hat{\varphi}'_{j,\mathcal{L}}(l) \hat{\psi}'_{j_0,\mathcal{L}_0}(l) d\hat{l} + \frac{1}{L} \int_{\hat{\mathcal{L}}_0} \Delta_L \left( \int_S \mathbf{E} \cdot \vec{u} ds \right) \hat{\psi}'_{j_0,\mathcal{L}_0}(l) d\hat{l}, \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

où  $\Delta_L$  définit la longueur du segment  $\mathcal{L}$ .

Toutes les intégrales sont évaluées en appliquant des formules de quadrature de Gauss et on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{r^{G+1}} \omega_i^G \Delta_L \sum_{j=1}^{r^{G+1}} \frac{I_{j,\mathcal{L}_0}^{n+\frac{1}{2}} - I_{j,\mathcal{L}_0}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \hat{\psi}'_{j,\mathcal{L}}(\xi_i^G) \hat{\psi}'_{j_0,\mathcal{L}_0}(\xi_i^G) \\ & + \sum_{i=1}^{r^{G+1}} \omega_i^G \frac{R_{\mathcal{L}_0}}{L} \Delta_L \sum_{j=1}^{r^{G+1}} \frac{I_{j,\mathcal{L}_0}^{n+\frac{1}{2}} + I_{j,\mathcal{L}_0}^{n-\frac{1}{2}}}{2} \hat{\psi}'_{j,\mathcal{L}}(\xi_i^G) \hat{\psi}'_{j_0,\mathcal{L}_0}(\xi_i^G) \\ & = -\nu^2 \sum_{i=1}^{r^{G+1}} \omega_i^G \sum_{j=1}^{r^{GL+1}} q_{j,\mathcal{L}_0}^n \partial_l \hat{\varphi}'_{j,\mathcal{L}}(\xi_i^G) \hat{\psi}'_{j_0,\mathcal{L}_0}(\xi_i^G) + \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{r^{G+1}} \omega_i^G \Delta_L \left( \int_S \mathbf{E} \cdot \vec{u} ds \right) \hat{\psi}'_{j_0,\mathcal{L}_0}(\xi_i^G). \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

En utilisant les propriétés des fonctions de bases données par  $\hat{\psi}'_j(\xi_j^G) = L_j^G(\xi_j^G) = \delta_j$ , l'équation peut se simplifier :

$$\begin{aligned} & \omega_{j_0}^G \frac{I_{j_0,\mathcal{L}_0}^{n+\frac{1}{2}} - I_{j_0,\mathcal{L}_0}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \omega_{j_0}^G \frac{R_{\mathcal{L}_0}}{L} \frac{I_{j_0,\mathcal{L}_0}^{n+\frac{1}{2}} + I_{j_0,\mathcal{L}_0}^{n-\frac{1}{2}}}{2} \\ & = -\nu^2 \frac{1}{\Delta_L} \omega_{j_0}^G \sum_{j=1}^{r^{GL+1}} q_{j,\mathcal{L}_0}^n \partial_l \hat{\varphi}'_{j,\mathcal{L}}(\xi_{j_0}^G) + \frac{1}{L} \omega_{j_0}^G \left( \int_S \mathbf{E} \cdot \vec{u} ds \right) \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Au final, nous pouvons écrire la discrétisation de l'équation du courant associée à un degré de liberté  $\mathbf{l}_0$  pour un segment  $\mathcal{L}_0$  d'un fil :

$$I_{j_0,\mathcal{L}_0}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{\Delta t R_{\mathcal{L}_0}}{2L}}{1 + \frac{\Delta t R_{\mathcal{L}_0}}{2L}} I_{j_0,\mathcal{L}_0}^{n-\frac{1}{2}} - \nu^2 \frac{\Delta t}{(1 + \frac{\Delta t R_{\mathcal{L}_0}}{2L}) \Delta_L} \sum_{j=1}^{r^{GL+1}} q_{j,\mathcal{L}_0}^n \partial_l L_j^{GL}(\xi_{j_0}^G) \quad (4.2.15)$$

$$+ \frac{\Delta t}{(1 + \frac{\Delta t R_{\mathcal{L}_0}}{2L}) L} \left( \int_S \mathbf{E} \cdot \vec{u} ds \right) \quad (4.2.16)$$

Maintenant, nous allons nous intéresser au calcul de la charge. Tout d'abord, étudions le calcul de la charge pour un degré de liberté  $j \in N_q$  interne à un segment, pour lequel, il existe une correspondance avec un degré de liberté  $j_0$  d'un segment  $\mathcal{L}_0$ . La formulation variationnelle de l'équation liée à la

charge (4.2.2) s'écrit sous la forme :

Pour tout  $\varphi'_{j_0, \mathcal{L}_0} \in \mathcal{B}'_V$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{L}_0} q_{h, \mathcal{L}_0} \varphi'_{j_0, \mathcal{L}_0} dl + \int_{\mathcal{L}_0} \frac{\sigma}{\varepsilon} q_{h, \mathcal{L}_0} \varphi'_{j_0, \mathcal{L}_0} dl = - \int_{\mathcal{L}_0} I_{h, \mathcal{L}_0} \partial_l \varphi'_{j_0, \mathcal{L}_0} dl \quad (4.2.17)$$

En introduisant la décomposition (4.2.9b) du courant et la décomposition (4.2.9a) de la charge, puis, en passant sur l'élément de référence  $\hat{\mathcal{L}}_0$  et en évaluant les termes intégraux par une méthode de quadrature de Gauss-Lobatto ou de Gauss, nous obtenons alors, l'expression discrète suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{r^{GL}+1} \omega_i^{GL} \Delta_L \sum_{j=1}^{r^{GL}+1} \frac{q_{j, \mathcal{L}_0}^{n+1} - q_{j, \mathcal{L}_0}^n}{\Delta t} L_j^{GL}(\xi_i^{GL}) L_{j_0}^{GL}(\xi_i^{GL}) \\ & + \frac{\sigma}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{r^{GL}+1} \omega_i^{GL} \Delta_L \sum_{j=1}^{r^{GL}+1} \frac{q_{j, \mathcal{L}_0}^{n+1} + q_{j, \mathcal{L}_0}^n}{2} L_j^{GL}(\xi_i^{GL}) L_{j_0}^{GL}(\xi_i^{GL}) \\ & = - \sum_{i=1}^{r^G+1} \omega_i^G \Delta_L \sum_{j=1}^{r^G+1} I_{j, \mathcal{L}_0}^{n-\frac{1}{2}} L_j^G(\xi_i^G) \frac{1}{\Delta_L} \partial_l L_{j_0}^{GL}(\xi_i^G) \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Après simplification, nous pouvons écrire que la charge associée à un degré de liberté  $j_0$  pour un segment  $\mathcal{L}_0$  d'un fil est donnée par :

$$q_{j_0, \mathcal{L}_0}^{n+1} = \frac{1 - \frac{\Delta t \sigma}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\Delta t \sigma}{2\varepsilon}} q_{j_0, \mathcal{L}_0}^n - \frac{\Delta t}{\omega_{j_0}^{GL} \Delta_L (1 + \frac{\Delta t \sigma}{2\varepsilon})} \sum_{i=1}^{r^G+1} \omega_i^G I_{i, \mathcal{L}_0}^{n-\frac{1}{2}} \partial_l L_{j_0}^{GL}(\xi_i^G) \quad (4.2.19)$$

Enfin, intéressons nous au calcul de la charge pour un degré de liberté  $j \in N_q$  localisé exactement à la frontière de deux segments de  $\mathcal{L}_h$ . Supposons qu'il existe pour celui-ci une correspondance avec un degré de liberté  $j_0$  d'un segment  $\mathcal{L}_0$ . Si l'on considère une ligne de rayon constant, et que celle-ci se situe dans un milieu dont les paramètres physiques ( $\sigma$  et  $\varepsilon$ ) sont constants, alors on peut considérer que la charge est continue entre les deux segments, et on a :

Pour tout  $\varphi'_{j_0, \mathcal{L}_0} \in \mathcal{B}'_V$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{L}_1} q_{h, \mathcal{L}_0} \varphi'_{j_0, \mathcal{L}_1} dl + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{L}_2} q_{h, \mathcal{L}_0} \varphi'_{j_0, \mathcal{L}_2} dl + \int_{\mathcal{L}_1} \frac{\sigma}{\varepsilon} q_{h, \mathcal{L}_0} \varphi'_{j_0, \mathcal{L}_1} dl + \int_{\mathcal{L}_2} \frac{\sigma}{\varepsilon} q_{h, \mathcal{L}_0} \varphi'_{j_0, \mathcal{L}_2} dl \\ & = - \int_{\mathcal{L}_1} I_{h, \mathcal{L}_1} \partial_l \varphi'_{j_0, \mathcal{L}_1} dl - \int_{\mathcal{L}_2} I_{h, \mathcal{L}_2} \partial_l \varphi'_{j_0, \mathcal{L}_2} dl \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

En utilisant le même procédé de discrétisation que pour les degrés de liberté des charges internes à un segment on peut écrire :

$$q_{j_0, \mathcal{L}_0}^{n+1} = \frac{1 - \frac{\Delta t \sigma}{\varepsilon}}{1 + \frac{\Delta t \sigma}{\varepsilon}} q_{j_0, \mathcal{L}_0}^n - \frac{\Delta t}{(1 + \frac{\Delta t \sigma}{\varepsilon}) \sum_{i=1}^2 \omega_{j_0, \mathcal{L}_i}^{GL} \Delta_{L_i}} \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{r_j^G+1} \omega_{i, \mathcal{L}_j}^G I_{i, \mathcal{L}_j}^{n-\frac{1}{2}} \partial_l L_{j_0}^{GL}(\xi_{i, \mathcal{L}_j}^G) \quad (4.2.21)$$

### Termes de couplage entre les deux systèmes

Les champs électromagnétiques et les courants interagissent au cours du temps, ce phénomène physique est exprimé par les termes intégraux  $\int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \varphi \, d\mathbf{x}$  dans l'équation du champ électrique du système (4.2.2)

et  $\frac{1}{L} \int_{\Gamma} \left( \int_S \mathbf{E} \cdot \vec{u} \, ds \right) \psi' \, dl$  dans l'équation du courant du système (4.2.2).

Les termes  $\int_S \mathbf{E} \cdot \vec{u} \, ds$  et  $\int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \varphi \, d\mathbf{x}$  sont évalués dans la thèse de T. Volpert et le développement de

$\frac{1}{L} \int_{\Gamma} \left( \int_S \mathbf{E} \cdot \vec{u} ds \right) \psi' dl$  s'effectue facilement en appliquant le même procédé que celui de la discrétisation des courants. Les résultats sont rappelés dans les équations suivantes :

Pour tout  $\mathcal{K}_0 \in \mathcal{T}_h$ ,

$$\int_{\mathcal{K}_0} \mathbf{J} \cdot \varphi_{10} d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{r_0^G+1} \Delta_{jS} I_{j,\mathcal{L}_0}^{n+\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{r_0^G+1} \omega_i^G L_j^G(\xi_i^G) \phi_{10,\mathcal{K}_0}^{x_0}(\mathbf{x}_i) (\vec{u} \cdot \vec{e}_{x_0}), \quad (4.2.22)$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur directeur du fil,  $\vec{e}_{x_0}$  la composante vectorielle du degré de liberté du champ électrique,  $\Delta_{jS}$  la longueur du segment du fil dans la cellule  $\mathcal{K}_0$ ,  $r_0^G$  l'ordre de la méthode de quadrature appliquée sur les termes intégraux de couplage (avec  $r^G \ll r_0^G$ ), et  $\phi_{10,\mathcal{K}_0}^{x_0}$  la fonction de base du champ électrique évaluée au point  $\mathbf{x}_i$  du fil dans le domaine  $\Omega$ .

Par ailleurs, pour tout  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_h$

$$\frac{1}{L} \int_{\mathcal{L}_0} \left( \int_S \mathbf{E} \cdot \vec{u} ds \right) \psi'_{j_0} dl = \frac{\Delta_{j_0 S}}{L} \sum_{l=1}^{\Theta_E^{x_0}} \sum_{i=1}^{r_0^G+1} \omega_i^G L_{j_0}^G(\xi_i^G) E_{1,\mathcal{K}}^n \phi_{1,\mathcal{K}}^{x_0}(\mathbf{x}_i) (\vec{u} \cdot \vec{e}_{x_0}). \quad (4.2.23)$$

### Étude de stabilité

Il est facile de voir que les termes de couplage de  $\mathbf{E}$  sur  $I$  et de  $I$  sur  $\mathbf{E}$  sont opposés et transposés. Ce qui permet de conclure que pour avoir un schéma stable, il suffit de vérifier un critère de stabilité sur les champs et sur les courants. Pour cela, on peut voir les travaux effectués dans [25].

#### 4.2.1.2 Validations numériques

Dans ce paragraphe, nous présentons la validation numérique du nouveau schéma proposé pour résoudre le modèle de fil mince oblique de T. Volpert par une approche FEM d'ordre élevé. Pour cela, on utilise la simulation d'une boucle de réception (ou une spire en réception 4.11), déjà présentée dans [83] et une antenne fouet soumise à l'agression d'une onde plane.

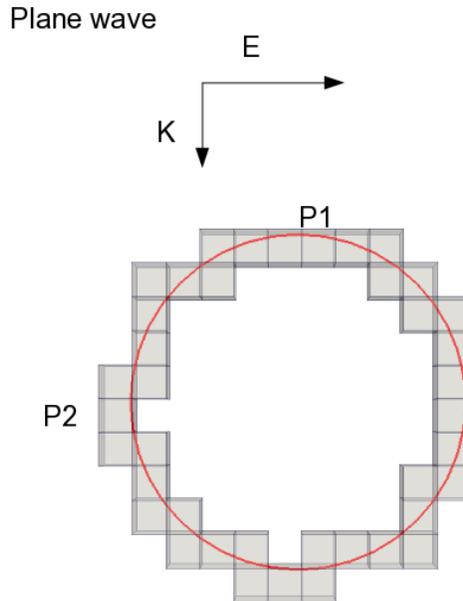


figure 4.11 – Spire dans un maillage cartésien.

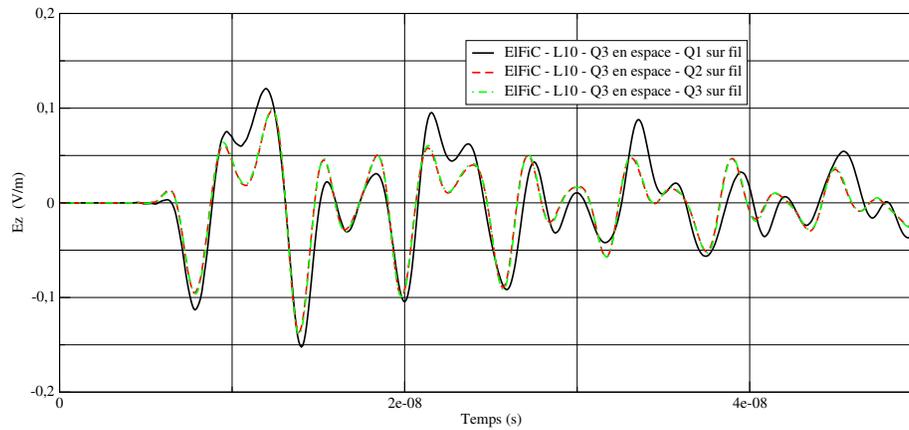


figure 4.12 – Composante  $z$  du champ électrique  $E_z$  à proximité de la spire.

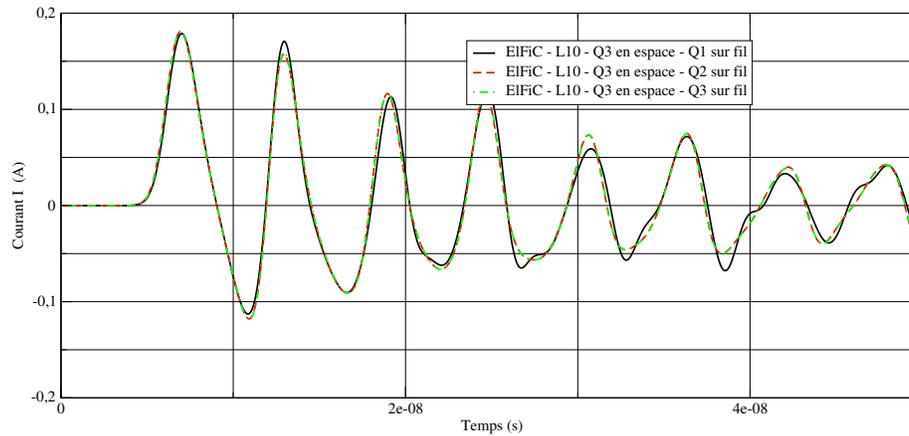


figure 4.13 – Courant sur la spire.

Les figures 4.13 et 4.12 montrent qu'une différence d'approximation spatiale entre les champs à l'ordre  $r^G = 2$  et les courants à l'ordre  $r^G = 0$  fournit un résultat différent que ceux obtenus en utilisant une approximation  $r^G = 2$  ou  $r^G = 3$  pour les fils. On constate donc que pour une différence importante d'ordre entre le schéma sur les fils et sur les champs on a une erreur sur l'évaluation des champs et des courants.

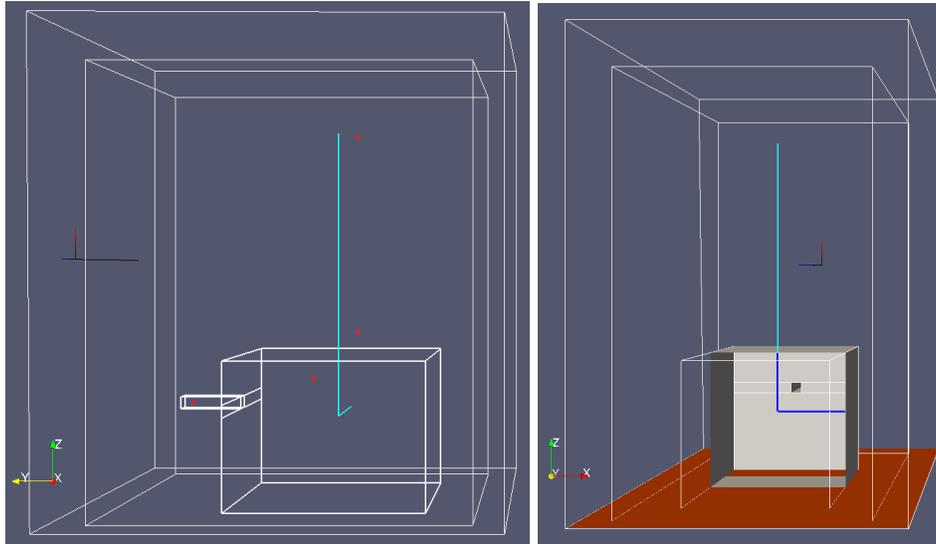


figure 4.14 – Géométrie de l'antenne fouet.

Les figures 4.14 illustrent la géométrie de l'antenne fouet, pour les quelles on a précédemment mis en évidence un problème de consistance (voir figure 4.10). Cette configuration est composée d'une antenne sur une boite métallique et de son alimentation modélisée par un câble blindé interne à la cavité. L'onde plane incidente est une impulsion EM sur une plage de fréquence allant jusqu'à  $1GHz$  et dont on a choisi un vecteur d'onde de polarisation orthogonale à l'antenne dans la direction  $\vec{e}_y$ , le champ électrique est colinéaire à l'antenne, pour obtenir une perturbation maximale de l'objet. La figure 4.15 représente la composition du maillage optimisé et réalisé par la stratégie de génération de maillage dans le plan YZ avec les ordres d'approximation affectés à chaque cellule pour la direction  $\vec{e}_z$ . Ces ordres varient de  $r^G = 0$  à 7. L'antenne orientée dans la direction  $\vec{e}_z$  est modélisée avec des pas d'espace adaptés à un ordre d'approximation  $r^G = 7$ .

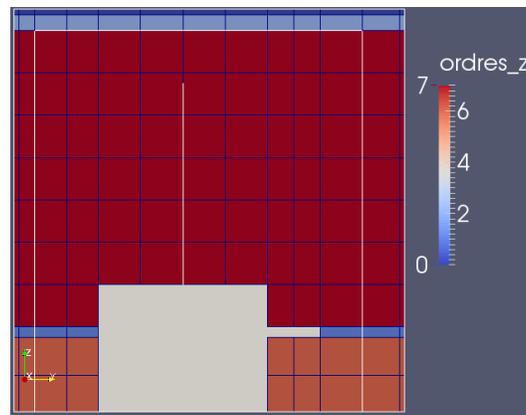


figure 4.15 – Grille de maillage dans le plan YZ de la simulation de l'antenne fouet avec les ordres d'approximation utilisés dans la direction  $\vec{e}_z$ .

La figure 4.16 montrent que les champs magnétiques et électriques évalués par l'approche FEM ne présentent plus de points chauds le long de l'antenne. De plus, ces résultats sont identiques, à précision équivalente, à ceux obtenus avec un code FDTD sur un maillage plus fin.

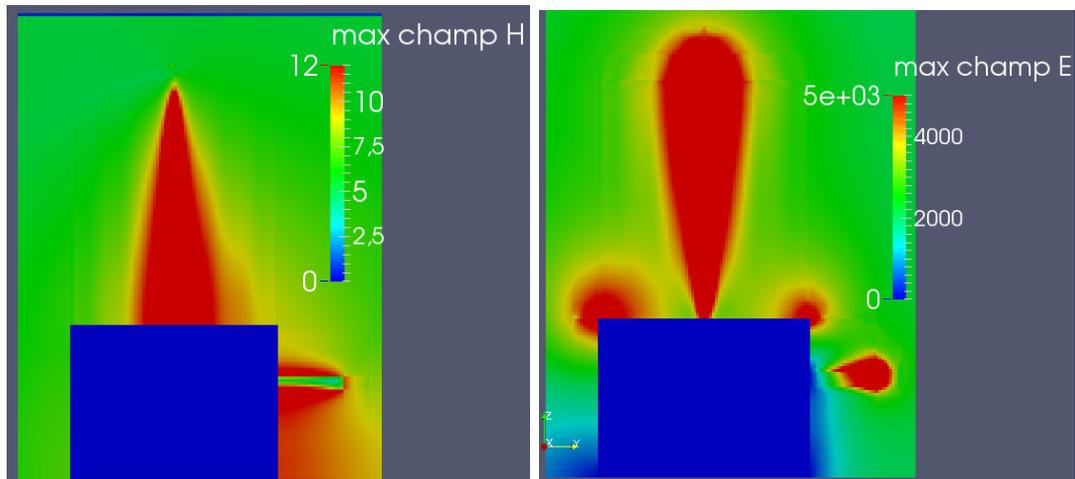


figure 4.16 – Cartographie des modules des champs magnétiques et électriques maximaux de l'antenne fouet générés pendant l'agression EM.

En conclusion, l'augmentation de l'ordre d'approximation spatiale du modèle de fils minces permet de résoudre le problème de consistance avec le schéma FEM appliqué aux champs.

## 4.2.2 Hybridation 1D-3D

### 4.2.2.1 Principe de l'hybridation

L'approche hybride entre un outil de calcul 3D pour résoudre les équations de Maxwell dans le domaine temporel et un outil de calcul des courants sur un réseau de lignes fait depuis de nombreuses années l'objet de recherches dans le domaine de la CEM. En particulier, dans les premières études de couplage champs/câbles, on peut remarquer l'étude d'une hybridation entre une équation BLT (Baum–Liu–Teschke) [62] pour modéliser les équations de ligne dans le domaine fréquentiel et le schéma FDTD pour évaluer les champs de transmission [77]. Dans ce premier couplage, les champs sont calculés le long de la position des câbles, puis, injectés dans l'équation de lignes en tant que termes sources. On évalue ensuite sur une plage de fréquence associée aux signaux temporels les courants et les tensions sur l'ensemble des structures filaires du réseau de câbles complet. Ce couplage a permis de résoudre un bon nombre de cas industriels où le mode commun était beaucoup plus important que l'aspect rayonnement des câbles. Dans ce couplage, on peut notamment constater que l'on arrive à être bien représentatif de la partie basse fréquence des signaux mais beaucoup moins sur la partie haute. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'on n'est pas sûr que les caractéristiques de la ligne ne dépendent pas de la fréquence, mais aussi par le fait que le rayonnement des courants sur le fil n'est pas pris en compte pour remettre à jour les champs électriques. Dans la publication [59], cet aspect a été mis en avant en prenant un segment de fil non connecté aux extrémités et sur lequel il a été placé un générateur de tension.

En utilisant le schéma de Yee combiné avec le formalisme de fil de Holland, dans lequel on supprime ou pas la rétroaction du fil sur le champ, on montre que le courant calculé en un point du fil n'est pas le même dans les deux cas (illustré dans la figure 4.17). On a aussi réalisé une comparaison en prenant un fil de  $4m$  au dessus ( $2cm$ ) d'une plaque métallique, soumis à une onde plane (voir figure 4.18). En particulier, on remarque sur les tests effectués pour ces deux configurations un amortissement du signal lorsqu'on remet à jour le champ électrique et des différences sur les hautes fréquences.

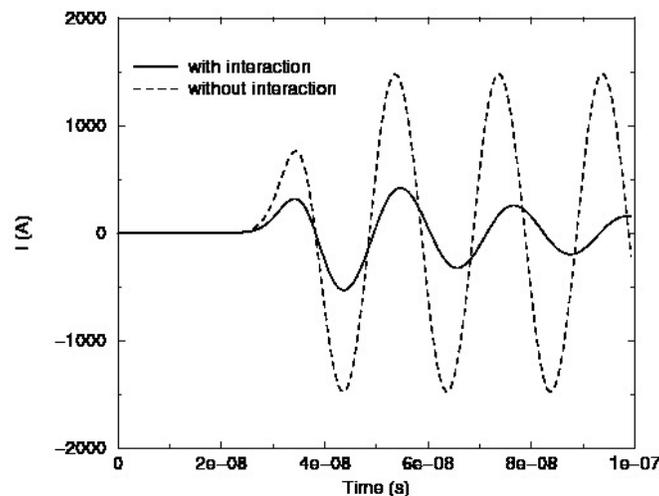


figure 4.17 – Comparaison du courant évalué avec et sans l'interaction du fil sur le champ sur une configuration de fil en l'air.

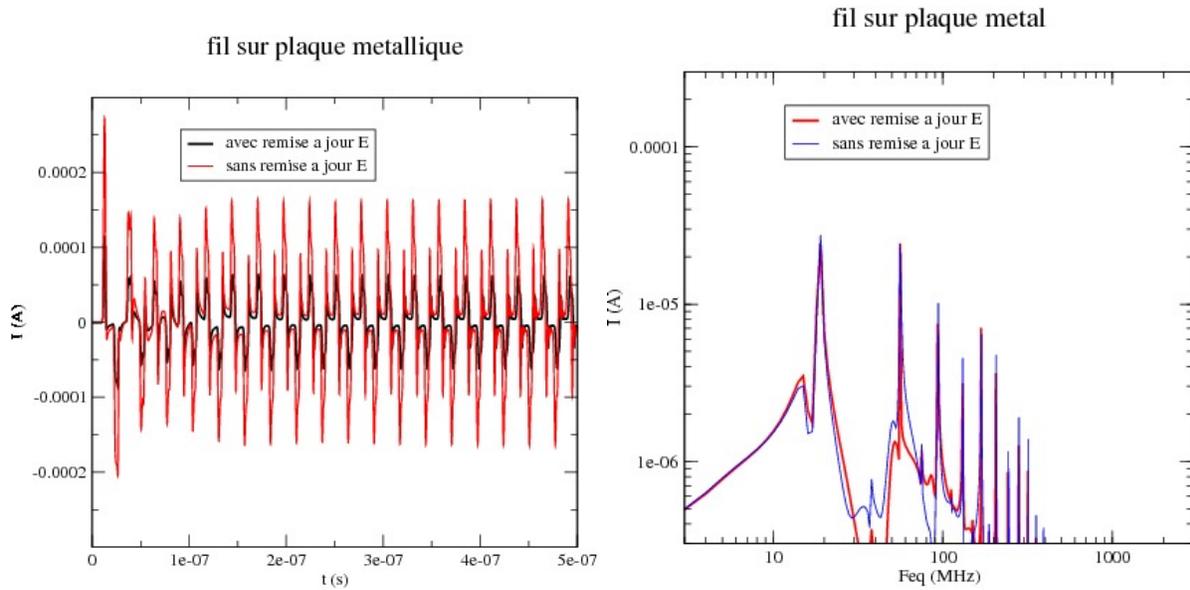


figure 4.18 – Comparaison du courant évalué avec et sans l’interaction du fil sur le champ électrique dans une configuration de fil sur plaque.

Ceci montre, qu’il est primordial pour tenir compte correctement du phénomène physique, d’avoir une hybridation complète entre les équations de Maxwell et les équations de lignes de transmission.

Nous verrons alors que sous cette hypothèse, le point crucial est le calcul des termes de couplages qui doivent assurer la consistance du modèle numérique, mais aussi la stabilité de celui-ci. Pour cela, avoir un modèle pour évaluer les champs dans le domaine temporel et un modèle pour calculer les courants sur les lignes dans le domaine fréquentiel n’est pas chose facile. C’est pourquoi, nous avons développé un modèle de ligne de transmission dans le domaine temporel et nous nous sommes essentiellement intéressés à une hybridation champs/câbles en instationnaire. Dans le modèle hybride 3D/1D proposé, le système couplé s’écrit :

$$\begin{aligned}
 \mu_0 \partial_t \mathbf{H} &= -\nabla \times \mathbf{E}, \\
 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} &= \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}, \\
 \partial_t I + \frac{R}{L} I &= -\nu^2 \partial_l q + \frac{\langle \mathbf{E} \rangle}{L}, \\
 \partial_t q + \frac{G}{C} q &= -\partial_l I,
 \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

où  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  définissent les champs électromagnétiques dans l’espace 3D,  $I$  et  $q$  définissent les courants et les charges sur les structures filaire considérées comme un ensemble de segments. De plus,  $C$  et  $G$  définissent respectivement la capacité et la conductance de la ligne.

Dans ce modèle, les deux systèmes d’équations sont couplés par le terme  $\mathbf{J}$  pour le calcul des champs et le terme  $\langle \mathbf{E} \rangle$  pour le calcul des courants. Dans le choix que l’on fait, le terme de couplage  $\mathbf{E}$  est donné par le champ électrique  $\mathbf{E}(p_c)$  relevé le long d’un chemin  $p_c$  localisé au centre de la section du câble. Cette donnée est introduite comme un champ incident dans les équations de transmission par l’approche d’Agrawal [77]. Concernant l’autre terme de couplage, c’est-à-dire  $\mathbf{J}$ , afin d’assurer un contrôle de l’énergie sur le système couplé [24], celui-ci est donné par la somme des courants calculés sur chaque conducteur du câble et appliqué sur le chemin  $p_c$  pour le calcul des champs. La figure 4.19

résume les deux couplages.

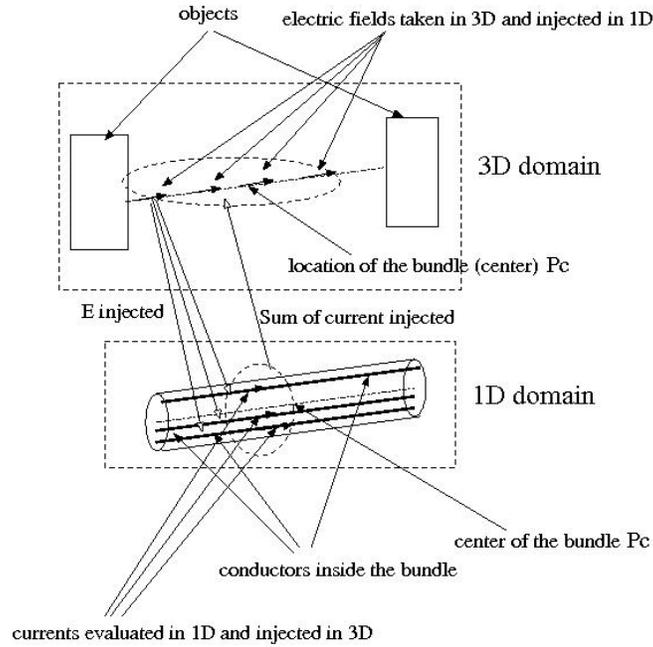


figure 4.19 – Définition de la position des termes de couplage dans notre stratégie d'hybridation 1D/3D.

Le détail de ce couplage sera donné dans l'un des paragraphes suivants car il dépend de la méthode 3D utilisée pour le calcul des champs.

#### 4.2.2.2 Méthode de ligne de transmission

Dans ce paragraphe, nous allons rappeler le modèle de lignes de transmission utilisé et proposer la méthode numérique choisie pour résoudre les équations de ce modèle.

Les équations de lignes de transmission modélisent la propagation de deux ondes de directions opposées sur un ensemble de conducteurs filaires. Chacune de ces ondes peut s'exprimer à l'aide d'un courant  $I$  et d'une tension  $V$  sur le conducteur considéré, qui vérifient [63] :

$$\begin{aligned} L\partial_t I + RI &= -\partial_l V + E_{inc}, \\ C\partial_t V + GV &= -\partial_l I, \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

où  $R$ ,  $L$ ,  $C$  et  $G$  définissent les caractéristiques de la ligne (résistance, inductance, capacité et conductance) et  $E_{inc}$ , une source électromagnétique externe à celle-ci. Dans notre cas, cette source va provenir des champs électriques ambiants autour de la ligne, c'est-à-dire, résultant d'un calcul 3D du champ. Dans les paramètres caractéristiques de la ligne, l'inductance  $L$  et la capacité  $C$  dépendent de la géométrie et de la position de la ligne par rapport à son environnement extérieur. Ces termes sont évalués généralement par rapport à une référence de masse. Plus précisément, cette référence peut être, par exemple, un fil de la ligne, la frontière coaxiale de celle-ci ou bien un plan de masse extérieur sur lequel celle-ci "repose".

Si on s'intéresse maintenant à la discrétisation du modèle, une ligne est représentée par un ensemble de segments définis comme dans la figure 4.20 sur lesquels, on introduit un courant  $I$  et une tension  $V$  en termes d'inconnues.

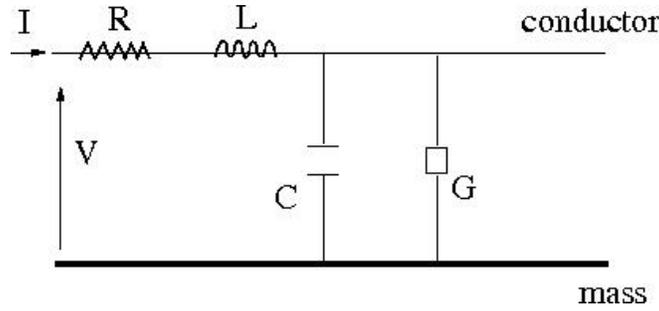


figure 4.20 – Position des inconnues et des paramètres sur un segment.

Soit  $\nu$  la vitesse des ondes électromagnétiques dans le milieu, nous pouvons écrire que  $LC = 1/\nu^2$ . Posons la charge  $q = CV$ , les équations (4.2.25) se mettent alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \partial_t I + \frac{R}{L} I &= -\nu^2 \partial_l q + \frac{E_{inc}}{L}, \\ \partial_t q + \frac{G}{C} q &= -\partial_l I, \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

où  $R$ ,  $L$ ,  $C$  et  $G$  sont respectivement la résistance, l'inductance, la capacité et la conductance de la ligne par unité de longueur.

Nous notons que ces équations sont similaires au formalisme de Holland [42] (utilisé avec la méthode FEM présenté dans la première partie de ce paragraphe (4.2.1)) que l'on utilise pour prendre en compte les structures filaires dans les méthodes de résolution des équations de Maxwell dans le domaine temporel et que nous avons explicité dans le modèle 3D/1D hybride (4.2.24).

Afin de borner mathématiquement le système (4.2.26), des conditions aux limites sont appliquées à chaque extrémité des segments. Ces conditions physiques sont principalement données par :

- $q = 0$  lorsque le segment est connecté à un matériau parfaitement conducteur (PEC) ;
- $I = 0$  lorsque le segment est non connecté ;
- $\sum_{i=1}^N I_i = 0$  et  $\forall (i, j) \in ([1, N])^2 V_i = V_j$  pour une connexion entre  $N$  fils.

En termes de méthode numérique, pour résoudre les équations (4.2.26), nous avons pris un schéma différences finies dans lequel on propose une discrétisation LeapFrog en espace et en temps. Comme nous l'avons déjà annoncé, tous les câbles sont découpés en segments pour lesquels on définit 3 inconnues par fil  $i$  :

- deux charges  $(q_{1i}, q_{2i})$  positionnées aux extrémités du segment ;
- un courant  $I_i$  localisé au milieu de celui-ci.

Il faut noter que, de par ce choix de discrétisation des inconnues, nous obtenons un schéma différences finies dont l'ordre de l'approximation spatiale correspond à  $r^G = 0$  par rapport à l'approche proposée dans le paragraphe (4.2.1).

En ce qui concerne la variable temporelle, dans notre schéma, les charges sont évaluées au temps  $t_n = n\Delta t$  et les courants aux temps  $t_{n+1/2} = (n + 1/2)\Delta t$  pour  $n \in [1, N_{\Delta t}]$ , où  $N_{\Delta t}$  est le nombre d'itérations en temps et  $\Delta t$  le pas de discrétisation temporelle.

Soit un segment, numéroté  $i$ , connecté en ses deux extrémités par les segments  $i - 1$  et  $i + 1$ . L'expression discrétisée des équations 4.2.26 sur ce segment  $i$  se présente sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} I_i^{n+1/2} &= (I_i^{n-1/2}(1 - R_i \frac{\Delta t}{2L_i}) - \nu^2 \Delta t \frac{q_{2i}^n - q_{1i}^n}{\Delta l_i} + \Delta t \frac{E_{inc}}{L_i}) / (1 + R_i \frac{\Delta t}{2L_i}), \\ q_{1i}^{n+1} &= \alpha_{1i} q_{1i}^n - \beta_{1i} (I_i^{n-1/2} - I_{i-1}^{n-1/2}), \\ q_{2i}^{n+1} &= \alpha_{2i} q_{2i}^n - \beta_{2i} (I_{i+1}^{n-1/2} - I_i^{n-1/2}), \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

où

$$\begin{aligned} A &= \frac{\Delta l_i}{2} (1 - \Delta t \frac{G_i}{2C_i}) + \frac{\Delta l_{i-1}}{2} \frac{C_{i-1}}{C_i} (1 - \Delta t \frac{G_{i-1}}{2C_{i-1}}), \\ \alpha_{1i} &= \frac{1}{A} (\frac{\Delta l_i}{2} (1 + \Delta t \frac{G_i}{2C_i}) + \frac{\Delta l_{i-1}}{2} \frac{C_{i-1}}{C_i} (1 + \Delta t \frac{G_{i-1}}{2C_{i-1}})), \\ \beta_{1i} &= \frac{\Delta t}{A}. \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

Les termes  $\alpha_{2i}$  et  $\beta_{2i}$  sont définis par le même système d'équations (4.2.28) dans lesquelles  $(i - 1)$  est remplacé par  $(i + 1)$ . Dans les expressions précédentes,  $\Delta t$ ,  $\Delta l_i$ ,  $\Delta l_{i-1}$  et  $\Delta l_{i+1}$  sont respectivement le pas de temps et la longueur des segments  $i$ ,  $i - 1$  et  $i + 1$  dans le maillage des structures filaires.

Pour assurer la stabilité du schéma (4.2.27), il est facile de montrer que le pas de temps doit vérifier :

$$\Delta t \leq \min_i \frac{\Delta l_i}{\nu} \quad (4.2.29)$$

où  $\nu$  définit la vitesse des ondes électromagnétiques dans le milieu.

Afin de finaliser l'écriture du schéma, il reste à évaluer les caractéristiques de la ligne  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $G$  qui sont des données physiques. Pour cela, les valeurs de résistances  $R$  ou de conductances  $G$  sont généralement mesurées, quant aux inductances  $L$  et capacités  $C$ , elles sont calculées en fonction de la géométrie de la ligne de transmission. Dans certaines configurations particulières, comme par exemple une ligne coaxiale, on utilise directement des formules analytiques. Pour plus de détails sur ce type de configurations et les formules associées, on pourra se référer aux ouvrages de [80] et de [63]. Toutefois, en général, le calcul de l'inductance et de la capacité n'est pas aussi simple et un problème de Laplace 2D doit être résolu pour trouver ces valeurs [64][18]. Pour notre schéma, on va considérer un câble blindé avec des conducteurs internes, ainsi, le problème de Laplace consiste à considérer la section du blindage du câble comme le domaine de calcul. On affecte ensuite une valeur de potentiel à chaque conducteur du toron de câbles interne au câble blindé et un potentiel nul au conducteur de référence (le blindage du câble entourant le toron) qui est souvent la frontière du domaine de calcul. On évalue ensuite la distribution de potentiel dans le domaine, puis, on calcule la charge  $Q_i$  de chaque conducteur  $i$  en intégrant sur leur surface la quantité  $\varepsilon(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})$  où  $\mathbf{n}$  définit la normale extérieure à la surface du conducteur,  $\varepsilon$  la permittivité du milieu, et le champ électrique  $\mathbf{E} = \nabla V$  où  $V$  est le potentiel solution de l'équation de Laplace. La capacité entre deux conducteurs  $i$  et  $j$  est alors donnée par  $C_{ij} = \frac{Q_i - Q_j}{V_i - V_j}$ , et l'inductance  $L_{ij}$  par  $L_{ij}C_{ij} = \nu^{-2}$ , où  $\nu$  est la vitesse des ondes électromagnétiques dans le milieu. La capacité de chaque conducteur  $i$  par rapport à la référence est établie par les mêmes expressions en considérant  $V_j = 0$ . On peut aussi utiliser cette méthode pour calculer les caractéristiques d'une ligne au dessus d'un plan de masse, dans laquelle le plan est le conducteur de référence. Dans cette configuration, le domaine de calcul  $\Omega$  est infini et on limite celui-ci en posant sur sa frontière  $\partial\Omega$ , la condition  $V = 0$ .

### 4.2.2.3 Adaptation du modèle hybride à l'approche FEM

La méthode d'hybridation que l'on vient de décrire a déjà été étudiée et appliquée dans la thèse de N. Muot [58], pour hybrider le schéma de Yee avec une équation de ligne de transmission, dans le cas de câbles circulant le long des arêtes du maillage. La particularité de nos travaux va consister à étendre cette hybridation à notre approche FEM et à la prise en compte de câbles n'étant pas forcément localisés sur les arêtes du maillage. Cette différence porte essentiellement sur les termes de couplages qui vont être mis en jeu et que l'on va expliciter dans ce paragraphe. Pour déterminer les termes de couplage dans notre stratégie, on peut assimiler le câble à un gros fil sur lequel, on impose des champs  $\mathbf{E}$  et pour lequel, on relève un courant que l'on "rétro-propage" sur les champs électriques. En supposant le fait que ce fil se situe au centre du câble, l'hybridation champs/câbles se fait de la même façon que celle effectuée dans le couplage du modèle filaire avec les champs dans l'approche FEM. Ce couplage garantit en particulier la stabilité de la méthode comme cela est démontré dans [25], et utilisé dans la première partie de ce paragraphe (4.2.1) pour l'amélioration du modèle de fil mince. Du fait d'avoir pris une approche aux différences finies avec une approximation spatiale polynomiale d'ordre 1 (ou  $r^G = 0$  par similitude avec l'approche en ordre élevé), pour résoudre les équations de lignes de transmission, les coefficients de couplage vont avoir quasiment les mêmes expressions que pour le couplage champs/fil proposé par T. Volpert dans [83].

En ce qui concerne le calcul sur les lignes de transmission, on calcule pour chaque câble  $\Upsilon$  un terme donné par :

$$\mathbf{E} \cdot u_s \quad (4.2.30)$$

où  $u_s$  est le vecteur directeur du câble et  $\mathbf{E}$  le champ électrique autour de celui-ci. Pour évaluer cette expression, il est nécessaire de considérer les éléments  $\mathcal{L}$  du maillage qui sont traversés par le câble  $\Upsilon$ . En effet, on approche le terme (4.2.30) par :

$$\frac{\int_{\Upsilon} \mathbf{E} \cdot u_s dl}{L_s}, \quad (4.2.31)$$

où  $L_s$  est la longueur de  $\Upsilon$ .

En ne considérant que les éléments  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$  qui intersectent  $\Upsilon$ , (4.2.31) se réduit à :

$$\frac{1}{L_s} \sum_{\mathcal{K} \in \text{Supp}(\Upsilon)} \int_{l_{\mathcal{K}}} \mathbf{E}_{h,\mathcal{K}} \cdot u_s dl, \quad (4.2.32)$$

avec

$$\text{Supp}(\Upsilon) = \{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h; \mathcal{K} \cap \Upsilon \neq \emptyset\}, \quad (4.2.33)$$

où  $\mathcal{T}_h$  est une partition de  $\Omega$  et  $\mathcal{L} = [\mathbf{x}_{1,\mathcal{K}}, \mathbf{x}_{2,\mathcal{K}}]$  définit la partie du câble  $\Upsilon$  interne à l'élément  $\mathcal{K}$ . En introduisant une formule de quadrature de Gauss pour évaluer l'intégrale sur  $\mathcal{L}$ , on peut alors écrire :

$$\int_{\mathcal{L}} \mathbf{E}_{h,\mathcal{K}} \cdot u_s dl = \Delta_L \sum_{i=1}^{r_0^G+1} \omega_i^G \mathbf{E}_{h,\mathcal{K}}(\mathbf{x}_i) \cdot u_s, \quad (4.2.34)$$

où  $\Delta_L = \|\mathbf{x}_{2,\mathcal{K}} - \mathbf{x}_{1,\mathcal{K}}\|$  et  $\mathbf{x}_i \in [\mathbf{x}_{1,\mathcal{K}}, \mathbf{x}_{2,\mathcal{K}}]$  définit le point d'espace dans le domaine  $\Omega$  correspondant à la transformation du point de gauss  $\xi_i^G$  de l'élément de référence  $\hat{\mathcal{L}}$  en un point du segment  $\mathcal{L}$ . Afin d'avoir un calcul précis de l'intégrale (4.2.34), on choisit un nombre suffisant de points de quadrature  $r_0^G + 1$ . Ce choix est effectué de manière empirique et l'expérience montre qu'il faut prendre au moins 20 points pour avoir une bonne précision [83].

Par ailleurs, si nous exprimons  $\mathbf{E}_{h,\mathcal{K}}(\cdot)$  sur ses fonctions de base (2.3.22) et (2.3.16) de l'approche FEM, nous avons :

$$\mathbf{E}_{h,\mathcal{K}}(\mathbf{x}) = \left( E_{h,\mathcal{K}}^{x_1}(\mathbf{x}) ; E_{h,\mathcal{K}}^{x_2}(\mathbf{x}) ; E_{h,\mathcal{K}}^{x_3}(\mathbf{x}) \right), \quad (4.2.35)$$

où

$$\begin{aligned}
E_{h,\mathcal{K}}^{x_1}(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{l}=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_1} \hat{\phi}_1^{x_1} \circ \mathbf{F}_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathbf{x}) \\
E_{h,\mathcal{K}}^{x_2}(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{l}=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_2} \hat{\phi}_1^{x_2} \circ \mathbf{F}_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathbf{x}) \\
E_{h,\mathcal{K}}^{x_3}(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{l}=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_3} \hat{\phi}_1^{x_3} \circ \mathbf{F}_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathbf{x}),
\end{aligned} \tag{4.2.36}$$

avec

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_1^{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^G(\hat{x}_1) L_{l_2}^{GL}(\hat{x}_2) L_{l_3}^{GL}(\hat{x}_3), \\
\hat{\phi}_1^{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^{GL}(\hat{x}_1) L_{l_2}^G(\hat{x}_2) L_{l_3}^{GL}(\hat{x}_3), \\
\hat{\phi}_1^{x_3}(\hat{\mathbf{x}}) &= L_{l_1}^{GL}(\hat{x}_1) L_{l_2}^{GL}(\hat{x}_2) L_{l_3}^G(\hat{x}_3),
\end{aligned} \tag{4.2.37}$$

où  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$  permet d'indexer la position d'un degré de liberté dans la cellule de référence, et  $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  le point dans la cellule de référence, avec la fonction de base  $\phi_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_i} \circ \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\phi}_1^{x_i}(\hat{\mathbf{x}}) \forall i \in [1, 3]$ .

En tenant compte de cette expression dans (4.2.34), pour l'inconnue  $\mathbf{E}_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_i}$ , la contribution sur le champ tangent au segment  $\mathcal{L}$  est alors donnée par :

$$\Delta_L \sum_{i=1}^{r_0^G+1} \omega_i^G \mathbf{E}_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_1} \phi_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_1}(\mathbf{x}_i) \vec{e}_{x_1} \cdot u_s, \tag{4.2.38}$$

où  $(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{x_3})$  la base canonique cartésienne et que l'on peut aussi réduire sous la forme :

$$C_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_1} \mathbf{E}_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_1}, \tag{4.2.39}$$

avec

$$C_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_1} = \Delta_L \sum_{i=1}^{r_0^G+1} \omega_i^G \phi_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_1}(\mathbf{x}_i) \vec{e}_{x_1} \cdot u_s. \tag{4.2.40}$$

De même, pour les autres composantes, on a une contribution donnée par  $C_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_2}$  et  $C_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_3}$  avec :

$$\begin{aligned}
C_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_2} &= \Delta_L \sum_{i=1}^{r_0^G+1} \omega_i^G \phi_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_2}(\mathbf{x}_i) \vec{e}_{x_2} \cdot u_s, \\
C_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_3} &= \Delta_L \sum_{i=1}^{r_0^G+1} \omega_i^G \phi_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_3}(\mathbf{x}_i) \vec{e}_{x_3} \cdot u_s.
\end{aligned} \tag{4.2.41}$$

Finalement, on peut écrire le terme de couplage  $\mathbf{E}_{\mathcal{K}} \cdot u_s$  du champ électrique le long de la ligne pour évaluer le courant sous la forme suivante :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E}_{h,\mathcal{K}} \cdot u_s dl = \sum_{\mathbf{l}=1}^{\Theta_E^{x_1}} E_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_1} C_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_1} + \sum_{\mathbf{l}=1}^{\Theta_E^{x_2}} E_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_2} C_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_2} + \sum_{\mathbf{l}=1}^{\Theta_E^{x_3}} E_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_3} C_{\mathcal{K},\mathbf{l}}^{x_3}. \tag{4.2.42}$$

Pour finaliser le couplage, il faut maintenant considérer le couplage de la ligne sur le champ par l'ajout d'un terme  $\mathbf{J}$ , provenant des courants sur les fils. Pour cela, nous nous intéressons alors à l'évaluation

du terme :

$$\int_{\Omega} \mathbf{J}_{\mathcal{K}} \cdot \varphi_h \, d\mathbf{x} \quad (4.2.43)$$

où  $\varphi_h$  est une fonction de base utilisée dans l'équation du champ électrique de l'approche FEM.

Le terme  $\mathbf{J}$  n'apparaît que sur les éléments  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$  tels qu'il existe un câble  $\Upsilon$  traversant ceux-ci. Considérons  $R$  un rayon donné par la demie-longueur du segment  $\mathcal{L}$ , on suppose que la densité volumique de courant  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_s$  autour d'un segment  $\mathcal{L}$ , est considérée comme uniforme dans cette zone. On peut alors écrire que :

$$\mathbf{J}_s = \frac{I_s u_s}{\pi R^2} \quad (4.2.44)$$

où  $I_s$  et  $u_s$  définissent respectivement le courant et le vecteur directeur du segment  $\mathcal{L}$ .

Le terme (4.2.43) peut aussi s'exprimer par :

$$\int_{\Omega} \mathbf{J}_s \cdot \varphi_h \, d\mathbf{x} = \sum_{\mathcal{K} \in \text{Supp}(\varphi_h) \cap \text{Supp}(\Upsilon)} \int_{\mathcal{K}} \mathbf{J}_s \cdot \varphi_h \, d\mathbf{x}, \quad (4.2.45)$$

où nous rappelons que  $\text{Supp}(\Upsilon)$  est l'ensemble des cellules  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$  telles que l'intersection de celles-ci avec le segment  $\Upsilon$  soit non nulle et  $\text{Supp}(\varphi_h)$  est le support de la fonction  $\varphi_h$ .

En limitant l'intégration à l'intersection du cylindre de rayon  $R$  autour du fil où le terme  $\mathbf{J}_s$  n'est pas nul et en effectuant un changement de coordonnées, on obtient en faisant l'hypothèse que  $\varphi_h$  est quasiment constante en  $r \in [0, R]$  et  $\theta \in [0, 2\pi]$  :

$$\int_{\Omega} \mathbf{J}_s \cdot \varphi_h \, d\mathbf{x} = \sum_{\mathcal{K} \in \text{Supp}(\varphi_h) \cap \text{Supp}(\Upsilon)} \int_{\mathbf{x}_{1,\mathcal{K}}}^{\mathbf{x}_{2,\mathcal{K}}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \mathbf{J}_s \cdot \varphi_h \, d\mathbf{x}, \quad (4.2.46)$$

avec  $\mathbf{x}_{1,\mathcal{K}}$  et  $\mathbf{x}_{2,\mathcal{K}}$  définis comme précédemment. En utilisant une formule de quadrature de Gauss à  $r_0^G + 1$  points pour approximer les intégrales, comme pour le précédent couplage, ce terme peut aussi s'exprimer :

$$\sum_{\mathcal{K} \in \text{Supp}(\varphi_h) \cap \text{Supp}(\Upsilon)} \mathbf{J}_s \pi R^2 \int_{\mathbf{x}_{1,\mathcal{K}}}^{\mathbf{x}_{2,\mathcal{K}}} \varphi_h \, d\mathbf{x} = \sum_{\mathcal{K} \in \text{Supp}(\varphi_h) \cap \text{Supp}(\Upsilon)} \mathbf{J}_s \pi R^2 \Delta_L \sum_{i=1}^{r_0^G+1} \omega_i^G \varphi_h(x_i), \quad (4.2.47)$$

où  $\Delta_L = \|\mathbf{x}_{2,\mathcal{K}} - \mathbf{x}_{1,\mathcal{K}}\|$ .

Nous obtenons finalement :

$$\int_{\Omega} \mathbf{J}_s \cdot \varphi_h \, d\mathbf{x} = \sum_{\mathcal{K} \in \text{Supp}(\varphi_h) \cap \text{Supp}(\Upsilon)} I_s u_s \Delta_L \sum_{i=1}^{r_0^G+1} \omega_i^G \varphi_h(\mathbf{x}_i). \quad (4.2.48)$$

Si nous considérons une cellule  $\mathcal{K}$  appartenant à  $\text{Supp}(\Upsilon)$  et  $\varphi_h = \phi_{\mathcal{K},1}^{x_1} \vec{e}_{x_1}$ , nous obtenons alors :

$$\int_{\mathcal{K}} \mathbf{J}_s \cdot \phi_{\mathcal{K},1}^{x_1} \vec{e}_{x_1} \, d\mathbf{x} = I_s \Delta_L \sum_{i=1}^{r_0^G+1} \omega_i^G \phi_{\mathcal{K},1}^{x_1}(\mathbf{x}_i) (u_s \cdot \vec{e}_{x_1}) \quad (4.2.49)$$

On note alors que pour le champ  $\mathbf{E}_{\mathcal{K},1}^{x_1}$ , la contribution du courant est  $I_s C_{\mathcal{K},1}^{x_1}$ , où le terme  $C_{\mathcal{K},1}^{x_1}$  est défini comme précédemment pour le terme de couplage du champ  $E$  sur les équations de lignes de transmission.

On peut écrire le système couplé sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}^{n+1/2} \\ \mathbf{E}^{n+1} \\ I^{n+1/2} \\ q^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{HH} & M_{HE} & 0 & 0 \\ M_{EH} & M_{EE} & M_{EI} & 0 \\ 0 & M_{IE} & M_{II} & M_{Iq} \\ 0 & 0 & M_{qI} & M_{qq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}^{n-1/2} \\ \mathbf{E}^n \\ I^{n-1/2} \\ q^n \end{pmatrix}, \quad (4.2.50)$$

avec  $M_{EI} = -M_{IE}^t$ . Cette particularité assure la conservation d'une énergie pour le problème semi-discret en temps qui est nécessaire pour avoir un schéma stable [24].

#### 4.2.2.4 Validations numériques

Afin de valider l'approche hybride proposée, nous avons étudié quelques configurations. La première configuration est définie par un câble constitué d'un fil dans l'espace. Cette configuration, similaire à un fil que l'on pourrait traiter directement par la méthode FEM seule, va nous permettre de valider informatiquement notre approche hybride. Pour la deuxième configuration, nous avons connecté trois fil entre-eux afin de former un réseau simple. Nous cherchons à vérifier avec cet exemple le bon fonctionnement des jonctions dans notre solution hybride. Dans ce cas là, il est encore possible de faire des comparaisons par rapport à un calcul FEM seul. Concernant la troisième configuration, nous allons valider la possibilité de traiter un réseau de câbles ayant plusieurs fils internes grâce à l'utilisation d'une équation de ligne dans l'hybridation. Pour cela, on a choisi de traiter une antenne définie par trois brins comme indiqué dans les données géométriques de l'antenne. Cette géométrie avait été utilisée pour valider une approche similaire dans le cadre de la thèse de N. Muot, où, dans ce cas, les brins de l'antenne étaient coïncidant avec les arêtes du maillage 3D. Dans notre étude, comme l'indique la figure 4.24, ce n'est plus le cas ; l'antenne est indépendante du maillage. Cette dernière configurations est très intéressante car elle met en évidence la notion de réseau de câbles, où dans un nœud du réseau, on peut partiellement connecté un câble à un autre ; ce qui n'est pas facilement faisable dans un modèle de fil mince classique.

##### Fil droit.

Dans ce premier cas test, on définit un fil de longueur  $1.061m$  dont les extrémités sont données par  $P_1 = (0.5m, 0.5m, 1m)$  et  $P_2 = (1.5m, 1m, 1.5m)$  dans un domaine de calcul  $[-1.5m, 2.5m] \times [-1.5m, 2.5m] \times [1.5m, 2.5m]$ . On soumet, ce fil à une agression de type onde plane donnée par une gaussienne centrée en  $t_0 = 2.e - 8s$  et d'écart type  $\sigma = 3.e - 9s$ , avec une fréquence maximale de  $300MHz$ . Le courant est relevé au milieu du fil. On positionne à l'extrémité du fil des conditions de circuit ouvert (fil en l'air). La figure 4.21 montre une comparaison de notre approche hybride 3D/1D avec un calcul utilisant le schéma FEM seul où le fil est directement pris en compte grâce au modèle de fil mince.

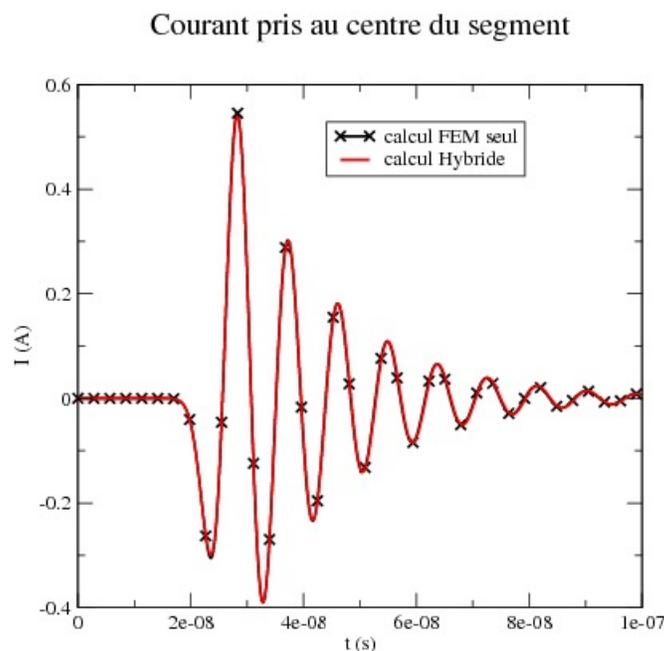
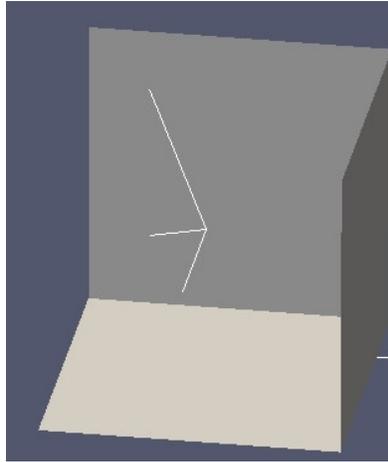


figure 4.21 – Courants évalués au centre du fil par la méthode FEM seul et notre stratégie hybride.

La figure 4.21 montre les résultats obtenus par les deux approches, et il apparaît que l'on a une

coïncidence parfaite entre les deux résultats. Ce test permet de valider notre approche hybride.

**Réseau triFilaire** Dans ce deuxième exemple, la géométrie est définie par trois câbles monofilaires connectés entre-eux comme le montre la figure 4.22.



*figure 4.22 – Géométrie de la deuxième configuration.*

Dans cette configuration chaque fil est défini par 2 points comme suit :

- premier fil :  $P_1 = (0.1m, 1m, 1m)$  et  $P_2 = (1m, 1m, 1m)$  ;
- deuxième fil :  $P_2 = (1m, 1m, 1m)$  et  $P_3 = (1.9m, 1.5m, 1.5m)$  ;
- troisième fil :  $P_3 = (1m, 1m, 1m)$  et  $P_4 = (1.9m, 1.5m, 0.5m)$ .

Comme, on peut le remarquer sur ces données, nous avons des fils qui ne suivent pas les arêtes du maillage. Dans les simulations, la source d'agression est la même que pour la configuration précédente et sur les extrémités des fils non connectées nous avons une condition de circuit ouvert  $I = 0$ . La figure 4.23 montre les résultats de comparaison sur les courants relevés au centre des différents fils obtenus par un calcul FEM et un calcul hybride.

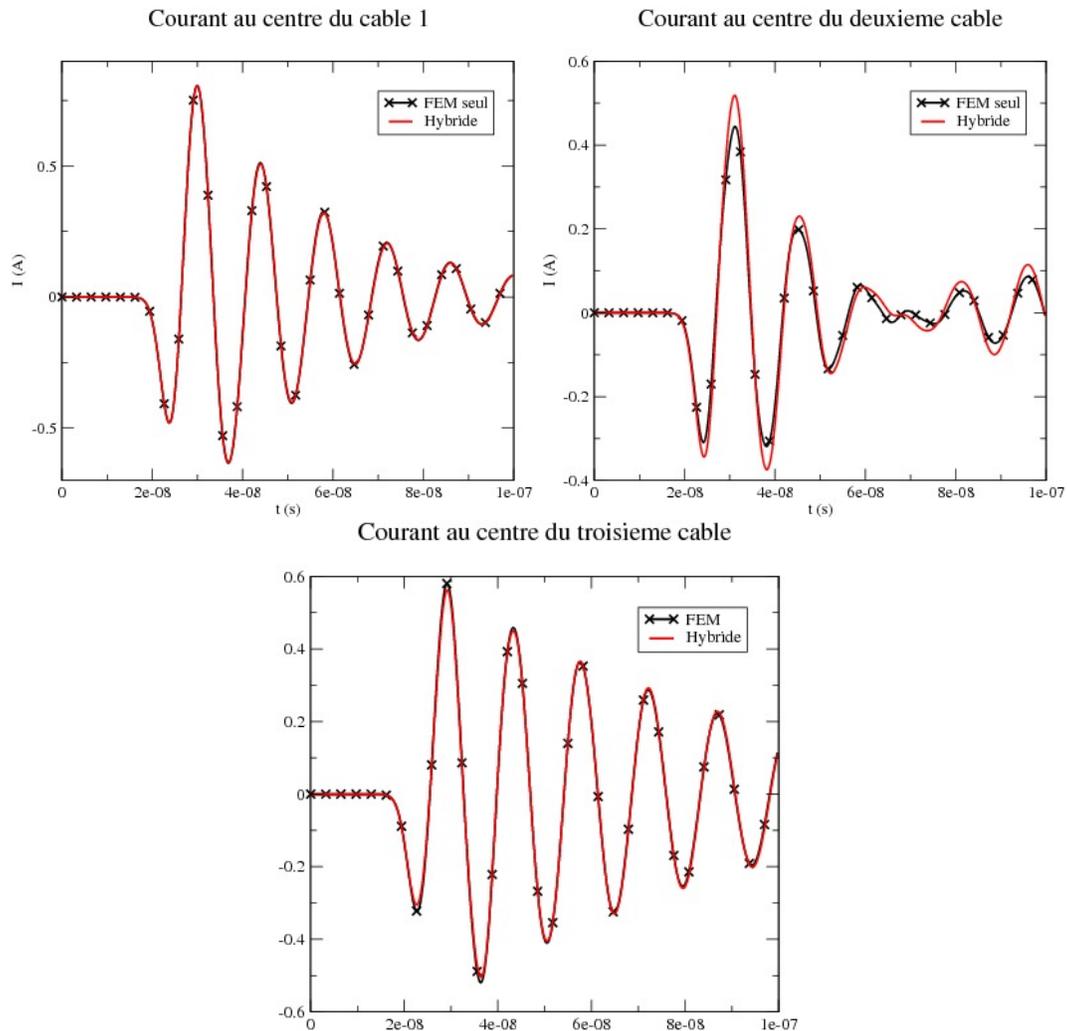


figure 4.23 – Comparaison sur les courants évalués sur chacun des fils par les méthodes FEM et Hybride.

Comme pour le premier cas test, nous obtenons une similitude presque parfaite entre les deux calculs (position des points relevés pas tout à fait identique) qui montre que notre approche hybride fonctionne bien.

**Antenne** Dans ce dernier exemple, nous allons utiliser notre approche hybride pour traiter le cas d’une antenne où une branche est constituée de 2 fils. La distance entre ces deux fils est trop petite ( $1mm$ ) pour pouvoir modéliser correctement et efficacement cette configuration dans un code 3D en utilisant un formalisme de fil mince. Pour vérifier le résultat obtenu par notre approche hybride, on va donc comparer celui-ci avec un calcul réalisé par une méthode d’équation intégrale temporelle.

Plus précisément, la géométrie de l’antenne est définie par 3 brins, dont un est composé de 2 fils et les deux autres d’un seul fil. Chaque fil du brin comportant plus d’un fil est connecté à un brin monofilaire différent comme illustré sur la figure 4.24.

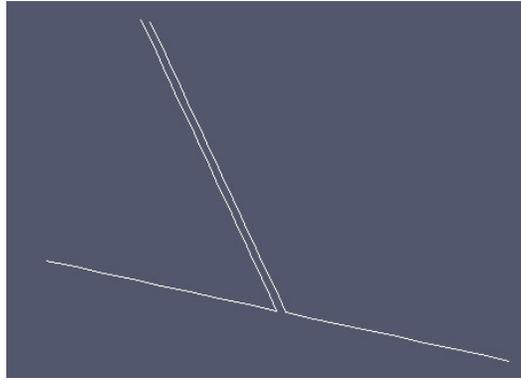


figure 4.24 – Géométrie de l'antenne.

La position de l'antenne est indépendante du maillage et celle-ci est agressée par une onde plane similaire à celle des précédentes configurations. Le premier brin est défini par  $(P_1, P_2)$ , le deuxième par  $(P_2, P_3)$  et enfin le troisième par  $(P_3, P_4)$ , avec :

- $P_1 = (0.1m, 1m, 1m)$
- $P_2 = (1.7m, 1m, 1m)$
- $P_3 = (1.7m, 1.7m, 1m)$
- $P_4 = (1.7m, 0.3m, 1m)$

On relève au milieu de chaque brin monofilaire la valeur du courant et on compare ces valeurs avec un calcul effectué par une méthode intégrale temporelle. En effet, avec une telle géométrie le calcul FEM seul, ne peut pas être efficacement envisagé car il nécessite un domaine de maillage important. Le seul calcul disponible est alors la méthode hybride. Pour cela, il faut déterminer des valeurs d'inductance et de capacité des différents conducteurs dans le modèle des équations de lignes de transmission. Pour obtenir celles-ci, on utilise des formules analytiques données dans [63] qui font intervenir un rayon externe de la ligne. La figure 4.25 montre une comparaison sur les résultats obtenus par notre approche hybride et l'équation intégrale temporelle pour un point de courant localisé sur le premier fil du câble à deux fils et pour plusieurs valeurs de rayon externe, donc pour plusieurs valeurs d'inductance et de capacité. En effet le choix du rayon externe, n'est pas très clair dans notre configuration car il fait appel à une référence que l'on peut prendre à l'infini ou sur la longueur moyenne d'une maille.

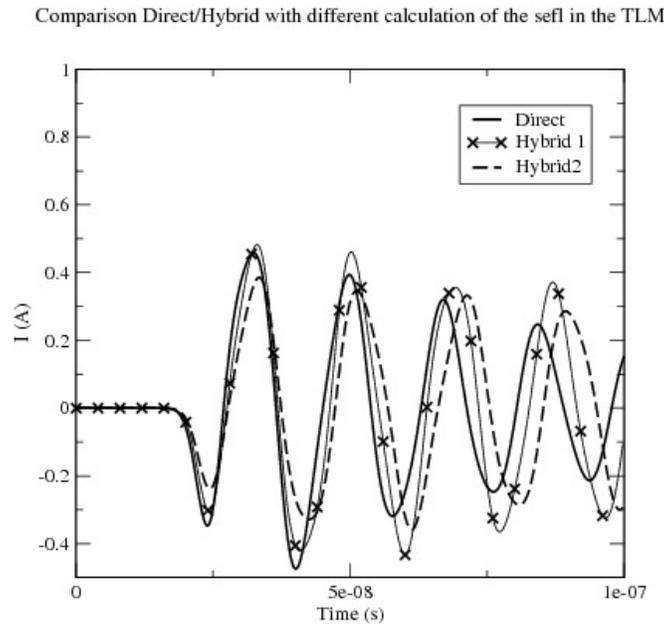


figure 4.25 – Comparaison des valeurs de courant entre plusieurs calculs.

On note sur ces résultats que les solutions entre notre approche hybride et la méthode intégrale sont globalement similaires. Toutefois, la solution hybride dépend du calcul des paramètres physiques et en particulier de la position du conducteur de référence qui doivent être bien évalués. Ce point reste encore à être étudié pour améliorer notre approche hybride.

### 4.2.3 Conclusion

Dans ce paragraphe, nous avons tout d'abord, proposé une amélioration du modèle de fil mince donné par T. Volpert, afin de prendre en compte une approximation spatiale d'ordre élevé pour ce dernier et de réduire ainsi les erreurs de consistance entre le schéma 3D pour le calcul des champs et le schéma 1D utilisé sur le modèle de fil. Ensuite, on s'est intéressé à une approche hybride entre notre méthode FEM et une équation de ligne de transmission pour prendre en compte des réseaux de câbles industriels. Pour réaliser ceci, on a tout d'abord utilisé un solveur de ligne de transmission dans le domaine temporel prenant en compte des réseaux de câbles, puis, on a étudié le couplage champs/câbles entre celui-ci et notre approche FEM. L'apport de ce travail par rapport à la littérature est de tenir compte de câbles obliques et d'une approximation spatiale d'ordre élevé pour le solveur 3D dans le couplage. L'approche hybride a ensuite été validée sur trois exemples, dont le dernier montre l'avantage de celle-ci par rapport au modèle de fil mince, mais aussi un inconvénient lié à la définition des caractéristiques de la ligne. Il reste à tester cette hybridation pour des ordres plus élevés que  $r^G = 0$  ou  $r^G = 1$  pour les champs comme cela a été fait dans nos exemples. Pour cela, il faudra modifier, dans notre schéma TLM, l'approximation utilisée et introduire comme il a été réalisé pour le modèle de fil mince, la possibilité d'avoir une approximation spatiale d'ordre élevé.

# Conclusion générale

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la recherche d'une solution permettant d'améliorer les performances du schéma de Yee pour le traitement de problèmes industriels provenant principalement de la CEM, mais aussi des antennes et de l'IEM. Dans la solution recherchée, nous souhaitons conserver les outils de pré-traitement et de post-traitement développés dans un environnement lié aux maillages cartésiens.

Après avoir effectué une étude bibliographique sur diverses solutions possibles, il nous est apparu très clairement que pour augmenter les performances calcul et mémoire, il fallait augmenter l'ordre de l'approximation spatiale du schéma de Yee. Cela nous a conduit à nous intéresser à une approche éléments finis (FEM) d'ordre élevé, étudiée par P. Monk et G. Cohen dans les années 90 et plus récemment par T. Volpert, qui présente l'avantage de coïncider parfaitement avec le schéma de Yee pour un ordre d'approximation spatiale égal à  $r^G = 0$ .

Dans notre thèse, nous nous sommes focalisés sur cette méthode et nous l'avons reprise et adaptée au contexte industriel. Pour cela, notre premier travail a été de fournir une étude mathématique assez complète du schéma numérique de la méthode FEM, dans laquelle nous avons considéré la possibilité d'avoir pour chaque cellule un ordre d'approximation spatiale différent par direction. Dans cette étude nous avons défini un critère de stabilité, une erreur théorique de convergence de la méthode et une étude numérique de l'erreur de dispersion de celle-ci. Suite à cela, nous avons proposé, à partir d'un maillage cartésien homogène, une stratégie automatique de génération de maillage et d'affectation d'ordre d'approximation spatiale par cellule, afin de garantir des simulations FEM avec des performances optimales en coût calcul. Pour cela, notre stratégie repose sur le fait d'avoir un pas de temps constant sur la globalité du domaine de calcul, en fixant une précision désirée sur la solution. On peut alors obtenir des simulations FEM meilleures en terme de coût calcul que les simulations FDTD avec une précision analogue.

A partir du schéma FEM, ainsi défini, nous avons porté celui-ci sur une machine de production en utilisant les bibliothèques MPI et OpenMP, puis, effectué avec celui-ci des comparaisons sur différents exemples, avec le schéma de Yee, afin de faire ressortir les avantages d'un tel schéma. En conclusion de l'ensemble de ces simulations, on note que l'approche FEM est particulièrement efficace sur des structures cartésiennes, mais trouve ses limites lorsque la géométrie des structures étudiées présente des courbures. Dans ce cas, les performances de l'approche FEM sont à peine meilleures que celles du schéma de Yee à cause de la nécessité de mailler finement les zones courbes. Le deuxième point délicat pour l'approche FEM concerne le modèle de fil mince proposé par T. Volpert. Celui-ci utilise un schéma numérique où les courants et tensions sont approximés spatialement à l'ordre 1. Ceci limite la possibilité d'utiliser des ordres d'approximation spatiale élevés pour les champs, sous peine d'avoir des erreurs de consistance importantes au niveau du couplage entre les champs et les courants.

L'amélioration de ces deux points a fait l'objet du dernier chapitre de la thèse, dans lequel on propose, dans un premier temps, une approche hybride entre un schéma GD sur maillage non structuré et notre approche FEM sur maillage cartésien, pour palier au problème de la prise en compte des géométries courbes dans la structure. Puis, dans un deuxième temps, on propose une amélioration du schéma numérique lié au modèle de fil oblique, en introduisant dans celui-ci une approximation spatiale d'ordre

élevé pour le courant et la tension. Cependant, dans les problèmes industriels, les câbles ne se limitent pas à un simple fil, mais plutôt à un réseau de torons de fils. Pour simuler correctement le câblage, on a donc introduit une deuxième hybridation entre notre approche FEM et un formalisme d'équations de lignes de transmission (TLM) dans le domaine temporel pour faciliter le couplage des deux outils. Dans l'étude des ces deux types d'hybridations 3D/3D et 3D/1D, on a présenté le principe du couplage et montré la stabilité des approches hybrides. Afin de valider ces méthodes, des exemples ont été proposés et ont permis de montrer les avantages de celles-ci. Il reste toutefois à accroître le nombre de validations et à améliorer les performances de calcul en ce qui concerne ces techniques d'hybridation.

De manière globale, nous avons répondu en partie à la question de l'amélioration des performances du schéma de Yee pour le traitement de problèmes industriels par l'approche FEM et plus globalement par les stratégies d'hybridation FEM/GD pour traiter les géométries courbes et FEM/TLM pour la prise en compte de câblages. Cependant, malgré les bons résultats obtenus par ces dernières approches, il reste encore à optimiser celles-ci d'un point de vue informatique, pour en tirer pleinement profit sur machine parallèle.

En ce qui concerne l'apport du travail effectué dans cette thèse, par rapport aux travaux antérieurs des thèses de T. Volpert et de N. Muot, nous avons :

- fourni un étude mathématique complète de la méthode FEM, dont la proposition d'une condition de stabilité et d'une erreur de convergence théoriques, ainsi que d'une analyse de l'erreur de dispersion du schéma ;
- proposé une stratégie automatique de génération de maillage et d'affectation d'ordre d'approximation spatiale aux cellules qui permet d'effectuer des simulations FEM performantes ;
- introduit une programmation parallèle de la méthode FEM pour tirer profit de celle-ci sur les machines de production actuelles ;
- introduit une approximation spatiale d'ordre élevé dans le schéma numérique de calcul des courants et tensions sur les structures filaires ;
- proposé une condition de stabilité pour une stratégie d'hybridation entre les schémas FEM et GD (FVTD), initiée dans la thèse de T. Volpert ;
- proposer une hybridation FEM/TLM comme dans la thèse de N. Muot, mais avec un couplage champs/câbles tenant compte de fils obliques et non cartésiens (direction suivant arêtes du maillage) et en utilisant l'approche FEM et non le schéma de Yee. Sur ce point, il reste encore de nombreux points délicats à résoudre, comme par exemple la détermination des paramètres caractéristiques de la ligne, où la montée en ordre de l'approximation spatiale pour le solveur TLM.

# Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. New York : Dover, 1965.
- [2] Butrylo B. *The Parallel FDTD Algorithm and Its Application to the Analysis of Complex Structures*. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [3] A. Bavelic, L. Rockstroh, A. Tausendfreund, S. Patzelt, G. Goch, and S. Simon. Accelerating Simulations of Light Scattering based on Finite-Difference Time-Domain Method with General Purpose GPUs. *11th IEEE International Conference on Computational Science and Engineering*, July 2008.
- [4] J.-P. Berenger. A Multiwire Formalism for the FDTD Method. *IEEE Transactions on Electromagnetic compatibility.*, 42(3), August 2000.
- [5] P. Bonnet. *Résolution des équations de Maxwell instationnaire et harmoniques par une technique de volumes finis. Application à des problèmes de compatibilité électromagnétique*. PhD thesis, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrant, 1998.
- [6] J. Bourguignon-Mirebeau. *Préconditionnement de méthodes de décomposition de domaine pour les problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques impliquant une cavité profonde*. PhD thesis, Université Paris-Sud XI, 2011.
- [7] J.-P. Bérenger. Perfectly matched layer for the FDTD solution of wave-structure interaction problems. *IEEE Transactions Antennas and Propagation.*, 44(1), January 1996.
- [8] J.-P. Bérenger. Numerical reflection from FDTD-PMLs : a comparison of the split PML with the unsplit and CFS PMLs. *IEEE Transactions Antennas and Propagation.*, 50(3), March 2002.
- [9] A. C. Cangellaris and D. B. Wright. Analysis of the Numerical Error Caused by the Stair-Stepped Approximation of a Conducting Boundary in FDTD Simulations of Electromagnetic Phenomena. *IEEE Transactions Antennas and Propagation*, 39(10), October 1997.
- [10] N.C. Canouet. *Méthodes de Galerkin discontinu pour la résolution du système de Maxwell sur des maillages localement raffinés non-conformes*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2003.
- [11] J. Chergui and P.-F. Lavallée. OpenMP - Parallélisation multitâches pour machines à mémoire partagée. Technical Report v2.9, CNRS/IDRIS - Institut du développement et des ressources en informatique scientifique, Février 2015.
- [12] R.A. Chilton. *H-,P- and T-refinement strategies for the finite-difference-time-domain (FDTD) method developed via finite-element (FE) principles*. PhD thesis, The Ohio State University, 2008.
- [13] Ryan A. Chilton and Robert Lee. Conservative and provably stable FDTD Subgridding. *IEEE Transactions Antennas and Propagation*, 55(9), September 2007.
- [14] Ryan A. Chilton and Robert Lee. The Lobatto Cell : Robust, Explicit, Higher Order FDTD That Handles Inhomogeneous Media. *IEEE Transactions Antennas and Propagation*, 56(8), August 2008.
- [15] A. Christophe. *Méthode des éléments finis avec joints en recouvrement non-conforme de maillages : Application au contrôle non destructif par courants de Foucault*. PhD thesis, Université de Paris-Sud, 2014.

- [16] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North Holland, 1978.
- [17] P.G. Ciarlet and J.L. Lions. *Handbook of numerical analysis. Finite Element Methods (Part 1)*, volume 2. Elsevier, 1991.
- [18] J.C. Clements, C.R. Paul, and A.T. Adams. Computation of the capacitance matrix for systems of dielectric-coated cylindrical conductors. *IEEE Trans. On EMC*, 17, 1975.
- [19] G.C. Cohen and P. Monk. Gauss point mass lumping schemes for Maxwell's equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 14(1), January 1998.
- [20] G.C. Cohen and P. Monk. *Higher-order numerical methods for transient wave equations*. Springer, 2001.
- [21] F. Collino, T. Fouquet, and P. Joly. Construction d'une méthode de raffinement de maillage spatio-temporelle stable pour les équations de Maxwell. *Rapport de recherche - INRIA*, 40(3888), Février 2000.
- [22] F. Denanot. *Technique de sous-maillage dans la méthode FDTD, apport de l'approche variationnelle*. PhD thesis, Université de Limoges, 2006.
- [23] C. Durochat. *Méthode de type Galerkin Discontinu en maillage multi-éléments pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2013.
- [24] F. Edelvik. A new technique for accurate and stable modeling of arbitrary oriented thin wires in the FDTD method. *IEEE Trans. On EMC*, 45, 2003.
- [25] F. Edelvik, G. Ledfelt, P. Lötstedt, and D. J. Riley. An Unconditionally Stable Subcell Model for Arbitrarily Oriented Thin Wires in the FETD Method. *IEEE Transactions Antennas and Propagation.*, 51, No 8, 2003.
- [26] M. El Bouajaji, B. Thierry, X. Antoine, and C. Geuzaine. A quasi-optimal domain decomposition algorithm for the time-harmonic Maxwell's equations. *Journal of Computational Physics*, 294 (1), 2015.
- [27] M. El Boujaji. *Algorithmes de Schwarz optimisés pour les équations de Maxwell en régime harmonique discrétisées par des méthodes de type Galerkin Discontinu*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2011.
- [28] J. Fang. *Time Domain finite difference computation for Maxwell's equations*. PhD thesis, Univ. Calif. Berkeley, CA, 1989.
- [29] S. Fauqueux. *Éléments finis mixtes spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation d'ondes élastiques en régime transitoire*. PhD thesis, Université Paris IX-Dauphine, 2003.
- [30] X. Ferrieres, J.P. Parmantier, S. Bertuol, and A.R. Ruddle. Application of a Hybrid Finite Difference/Finite Volume Method to solve an Automotive EMC Problem. *IEEE Trans. On EMC*, 46, No 4, 2004.
- [31] X. Ferrières, A. Cosnau, J.-C. Alliot, and P Leca. Code Solving the Maxwell Equations in the Time Domain, Implanted on Distributed-Memory Type Machine. *Aerospace Science and Technology*, 1(6), July 1997.
- [32] T. Fouquet. *Raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de Maxwell*. PhD thesis, Université de Paris IX-Dauphine, 2000.
- [33] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for the Navier–Stokes Equations, Theory and Algorithms*. Number 5 in Springer series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [34] F. Golse. *Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles*. Centre de mathématiques Laurent Schwartz - École polytechnique, Octobre 2012.

- [35] G. Granet and J. Chandezon. The method of curvilinear coordinates applied to the problem of scattering from surface-relief gratings defined by parametric equations : application to scattering from a cycloidal grating. *Pure and Applied Optics Journal of the European Optical Society Part A*, 6, November 1997.
- [36] C. Guiffaut, A. Reinex, and B. Pecqueux. New Oblique Thin Wire Formlism in ths FDTD Method With Multiwire Junctions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation.*, 60(3), March 2012.
- [37] M. F. Hadi. *A modified FDTD(2,4) scheme for modeling electrically large structures with high-place accuracy*. PhD thesis, ECEN Dept, Univ. Colorado. Berkeley, Boulder, 1996.
- [38] M. F. Hadi and M. Piket-May. A modified FDTD(2,4) scheme for modeling electrically large structures with high-place accuracy. *IEEE Transactions Antennas and Propagation*, 45, February 1997.
- [39] K. Hamidouche, F. Cappello, and D. Etiemble. Comparaison de MPI, OpenMP et MPI+OpenMP sur un nœud multiprocesseur multicœurs AMD à mémoire partagée. *Conf. RenPar'19 / SympA'13 / CFSE'7*, Septembre 2009.
- [40] Z.-L. He, K. Huang, and C.-H. Liang. Hybrid Finite difference/Finite volume method for 3-D conducting media problems. *PIERS M*, 24, 2012.
- [41] J.S. Hestaven. High-Order Accurate Methods in Time-Domain Computational Electromagnetics. A Review. *Adv. Imag. Electron Phys.*, 127(59), 2003.
- [42] R. Holland and L. Simpson. Finite-Difference Analysis of EMP Coupling to Thin Structs and wires arbitrary oriented thin wires in the FDTD method. *IEEE Transactions on Electromagnetic compatibility*, 23, 1981.
- [43] X.-J. Hu and D.-B. Ge. Study on Conformal FDTD for Electromagnetic by targets with thin coating. *Progress In Electromagnetics Research*, 76, 2008.
- [44] S. Jund. *Méthodes éléments finies d'ordre élevé pour la Simulation numérique de la Propagation d'ondes*. PhD thesis, Université Louis Pasteur et CNRS, 2007.
- [45] T. G. Jurgens and F.A. Harfoush. Conformal FDTD Modeling of 3-D Wake Fields. *Accelerator Science and Technology., Conference Record of the 1991 IEEE*, 1991.
- [46] T. G. Jurgens, A. Taflove, K. Umashankar, and T.G. Moore. Finite-Diffrence Time-Domain Modeling of Curved Surfaces. *IEEE Transactions Antennas and Propagation*, 40(4), April 1992.
- [47] G. Kim, E Arvas, and A.Z. Elsherbeni. A Novel nonuniform subgridding scheme for FDTD using an optimal interpolation technique. *Progress In Electromagnetics Research B*, 44, 2012.
- [48] A. Klöckner, T. Warburton, J. Bridge, and J.-S. Hestaven. Nodal discontinus Galerkin methods on graphics processors. *Journal of Computational Physics*, 228, April 2009.
- [49] S. Lallechere. *Modélisations numériques temporelles des CRBM en compatibilité électromagnétique. Contribution aux schémas volumes finis*. PhD thesis, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, 2006.
- [50] P.-F. Lavallée and P. Wautelet. Programmation hybride MPI-OpenMP. Technical Report v2.0, CNRS/IDRIS - Institut du développement et des ressources en informatique scientifique, Juin 2014.
- [51] D. Lecas, I. Dupays, and M. Flé. Message Passing Interface (MPI). Technical Report v4.7.3, CNRS/IDRIS - Institut du développement et des ressources en informatique scientifique, Décembre 2015.
- [52] J.F. Lee, R. Lee, and A. C. Cangellaris. Time domain finite element methods. *IEEE Transactions Antennas and Propagation*, 45(3), March 1997.
- [53] J.F. Lee and Z. Sacks. Whitney elements time domain method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(3), May 1995.

- [54] Y. Liu and C.D. Sarris. Numerical Error Analysis and Control in a Dynamically Adaptive Mesh refinement (AMR) - FDTD Technique. *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*, June 2006.
- [55] P. Monk. An analysis of Nédélec's method for the spatial discretization of Maxwell's equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 47, 1992.
- [56] P. Monk. On the p- and hp-extension of Nédélec's curl-conforming elements. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1992.
- [57] M. Mounier. *Résolution des équations de Maxwell-Vlasov sur maillage cartésien non conforme 2D par un solveur Galerkin Discontinu*. PhD thesis, Université de Strasbourg, 2014.
- [58] N. Muot. *Stratégies d'hybridation de méthodes de simulation électromagnétique FDTD/TLM - Application à l'étude de grands systèmes complexes*. PhD thesis, Université de Toulouse ISAE, 2013.
- [59] N. Muot, C. Girard, X. Ferrieres, and E. Bachelier. A combined FDTD/TLM Time Domain Method to solve Efficiently Electromagnetic Problems. *PIER B*, 56, 2013.
- [60] J-C Nédélec. Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . *Numerische Mathematik*, 35 :315–341, 1980.
- [61] J-C Nédélec. A new family of mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . *Numerische Mathematik*, 50 :57–81, 1986.
- [62] J.P. Parmantier. *Approche topologique pour l'étude des couplages électromagnétiques*. PhD thesis, Université des sciences et techniques de Lille Flandres Artois, 1991.
- [63] C.R. Paul. *Analysis of multiconductor transmission lines*. Wiley-Blackwell, 2007.
- [64] C.R. Paul and A.E. Feather. Computation of the transmission line inductance and capacitance matrices from the generalized capacitance matrix. *IEEE Trans. On EMC*, 18, 1976.
- [65] S. Pernet. *Étude de méthodes d'ordre élevé pour résoudre les équations de Maxwell dans le domaine temporel. Application à la réduction et à la compatibilité électromagnétique*. PhD thesis, Université Paris Dauphine-Paris IX - U.F.R. Mathématiques de la décision, 2004.
- [66] S. Pernet and X. Ferrières. HP A-priori error estimates for a non-dissipative spectral Discontinuous Galerkin Method to solve the maxwell equations in the time domain. *Mathematics of computation*, 2007.
- [67] R. Perussel. *Méthodes multiniveau algébriques pour les éléments d'arête. Application à l'électromagnétisme*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2005.
- [68] P.G. Petropoulos. Phase Error Control For FD-TD Methods of second and Fourth Order Accuracy. *IEEE Transactions Antennas and Propagation*, 42(6), June 1994.
- [69] P.G. Petropoulos. Stability and phase error analysis of FD-TD in dispersive dielectrics. *IEEE Transactions Antennas and Propagation*, 42(1), January 1994.
- [70] J. A. Roden and S. D. Gedney. Convolutional PML (CPML) : An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media. *Microwave Opt. Tech. Lett.*, 27(5), June 2000.
- [71] K.L. Shlager. Comparaison of the dispersion properties of Higher Order FDTD schemes and equivalent-Sized MRTD schemes. *IEEE Transactions Antennas and Propagation*, 52(4), April 2004.
- [72] T.P. Stefański, N. Chavannes, and N. Kuster. Parallelization of the FDTD method based on the open computing language and the message passing interface. *Microwave and Optical Technology Letters*, 54(3), March 2012.
- [73] T. Strub. *Résolution des équations de Maxwell tridimensionnelles instationnaires sur architecture massivement multi-cœur*. PhD thesis, Université de Strasbourg, 2015.
- [74] M. Su and D. Bader. A novel FDTD application featuring OpenMP-MPI hybrid parallelization. *In Proc. Int'l Conf. on Parallel Processing (ICPP)*, July 2004.

- [75] A. Taflove and M.E. Brodwin. Numerical solution of the steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations. *IEEE Transactions Microwave theory Tech.*, MTT-23, August 1975.
- [76] A. Taflove and S. Hagness. *Computational electrodynamics, the finite-difference time-domain method*. Artech House, third edition, 2005.
- [77] F.M. Tesche, M.V. Iano, and T. Karlsson. *Analysis Methods and Computational Models*. John Wiley & Sons, 1997.
- [78] N. Tordjman. *Éléments finis d'ordre élevé avec condensation de masse pour l'équation des ondes*. PhD thesis, Université Paris IX-Dauphine, 1995.
- [79] E. Turkel and A. Yefet. Fourth Order Method for Maxwell's Equations on a Staggered Mesh. *IEEE Transactions Antennas and Propagation Soc. int. Symp.*, 4, July 1997.
- [80] E.F. Vance. *Coupling to shielded cables*. Wiley New-York, 1978.
- [81] E. Veneros. *Méthodes de décomposition de domaines pour des problèmes de propagation d'ondes hétérogènes*. PhD thesis, Université de Genève, 2015.
- [82] Y. Ventribout and P. Breuilh. Méthode hybride DGTD/FDTD pour la résolution des équations de Maxwell en domaine temporel.
- [83] T. Volpert. *Étude d'un schéma différences finies haute précision et d'un modèle de fil mince oblique pour simuler les perturbations électromagnétiques sur véhicule aérospatial*. PhD thesis, Université de Toulouse et Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'espace (ISAE), 2014.
- [84] M.-F. Wong, O. Picon, and V. F. Hanna. A finite element method based on Whitney forms to solve Maxwell equations in the time domain. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(3), May 1995.
- [85] Z.Q. Xie, C.-H. Chan, and B. Zhang. An explicit fourth order staggered finite-difference time-domain method for Maxwell's equations. *J. Computat. Appl Math.*, 147, 2002.
- [86] Xiaoyang Yan and Weiwen Zhang Yan Huifang Deng Yan Shehui Bu. The Parallelization of Three-Dimensional Electro-Magnetic Particle Model Using Both MPI and OPENMP. *Computational and Information Sciences (ICCIS), 2010 International Conference on*, December 2010.
- [87] Dan Yang, Cheng Liao, Lang Jen, and Jie Xiong. A Parallel FDTD Algorithm Based on Domain Decomposition Method Using the MPI Library. *Parallel and Distributed Computing, Applications and Technologies. PDCAT'2003. Proceedings of the Fourth International Conference on*, August 2003.
- [88] K.S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *I.E.E.E. Transactions on Antennas Propagation*, 14 :302–307, 1966.
- [89] A. Yefet and M. Picket-May. A staggered fourth-order accurate explicit finite difference scheme for time-domain Maxwell's equations. *J. Computat. Phys.*, 168, April 2001.
- [90] X. Yu and R. Mitra. A Conformal Finite Difference Time Domain technique modeling curved surface dielectric surfaces. *IEEE Microwave Wireless Components Lett.*, 11, 2001.
- [91] J. Zhang and Z. Chen. Low-dispersive super high-order FDTD schemes. *IEEE Transactions Antennas and Propagation Society International Symposium*, 3, 2000.

**Titre** Étude d'une méthode d'éléments finis d'ordre élevé et de son hybridation avec d'autres méthodes numériques pour la simulation électromagnétique instationnaire dans un contexte industriel.

**Résumé** Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'amélioration du schéma de Yee pour traiter de manière plus efficace et pertinente les problèmes industriels auxquels nous sommes confrontés à l'heure actuelle. Pour cela, nous cherchons avant tout à diminuer les erreurs numériques de dispersion et à améliorer les modélisations des géométries courbes ainsi que des réseaux de câbles. Pour répondre à ces besoins, une solution basée sur un schéma Galerkin discontinu pourrait être envisagée. Toutefois, l'utilisation d'une telle technique sur la totalité du volume de calcul est relativement coûteuse. De plus, la prise en compte de structures filaires sur un tel schéma n'est pas encore opérationnelle. C'est pourquoi, dans l'optique d'avoir un outil industriel, et après une étude bibliographique, nous nous sommes plutôt orientés sur l'étude d'un schéma éléments finis (FEM) sur maillage cartésien qui possède toutes les bonnes propriétés du schéma de Yee. Notamment, à l'ordre d'approximation spatiale égal à 0 ce schéma FEM est exactement le schéma de Yee, et, pour des ordres supérieurs, il permet de réduire fortement l'erreur de dispersion numérique de ce dernier.

Dans le travail de cette thèse, pour ce schéma, nous avons notamment donné un critère de stabilité théorique, étudié sa convergence théorique et fait une analyse de l'erreur de dispersion. Pour tenir compte des possibilités d'ordre d'approximation spatiale variable par direction, nous avons mis en place une stratégie d'affectation des ordres suivant le maillage donné. Ceci nous a permis d'obtenir un pas de temps optimal pour une précision souhaitée tout en réduisant les coûts de calcul. Après avoir porté ce schéma sur des machines de production, différents problèmes de CEM, antennes, IEM ou foudre ont été traités afin de montrer les avantages et le potentiel de celui-ci. En conclusion de ces expérimentations numériques, il s'avère que la méthode est limitée par le manque de précision pour prendre en compte des géométries courbes. Afin d'améliorer cela, nous avons proposé une hybridation entre ce schéma et le schéma GD que l'on peut étendre aux autres schémas comme les méthodes différences finies (FDTD) et volumes finis (FVTD). Nous avons montré que la technique d'hybridation proposée conserve l'énergie et est stable sous une condition que nous avons évaluée de manière théorique. Des exemples de validation ont ensuite été montrés. Enfin, pour tenir compte des réseaux de câbles, un modèle de fils minces d'ordre d'approximation spatiale élevé a été proposé. Malheureusement, celui-ci ne peut pas couvrir l'ensemble des cas industriels et pour remédier à cela, nous avons proposé une hybridation de notre approche avec une équation de ligne de transmission. L'intérêt de cette hybridation a été montré sur un certain nombre d'exemples, que nous n'aurions pas pu traiter par un modèle de structure filaire simple.

**Mots clés** Équations de Maxwell en instationnaire, éléments finis, ordre d'approximation spatiale élevé, schéma de Yee, hybridation de schémas et de méthodes, modèle de fils minces

**Abstract** In this thesis, we study the improvement of the Yee's scheme to treat efficiently and in a relevant way the industrial issues we are facing nowadays. For that, we first of all try to reduce the numerical errors of dispersion and then to improve the modeling of the curved surfaces and of the harness networks. To answer these needs, a solution based on a Galerkin Discontinuous (GD) method has been first considered. However, the use of such method on the entire modeling volume is quite costly ; moreover the wires are not taken into account in this method. That is the reason why, with the objective of an industrial tool and after a large bibliographic research, we headed for the study of finite elements scheme (FEM) on a Cartesian mesh which has all the good properties of the Yee's scheme. Especially, this scheme is exactly the Yee's scheme when the spatial order of approximation is set to zero. For the higher orders, this new scheme allows to greatly reduce the numerical error of dispersion. In the frame of this thesis and for this scheme, we give a theoretical criterion of stability, study its theoretical convergence and we perform an analysis of the error of dispersion. To take into account the possibility of the variable spatial orders of approximation in each direction, we put in place a strategy of order affectation according to the given mesh. This strategy allows to obtain an optimal time step for a given selected precision while reducing the cost of the calculations. Once this new scheme has been adapted to large industrial computing means, different EMC, antennas, NEMP or lightning problems are treated to demonstrate the advantages and the potential of this scheme. As a conclusion of these numerical simulations we demonstrate that this method is limited by a lack of precision when taking into account curved geometries.

To improve the treatment of the curved surfaces, we propose an hybridization between this scheme and the GD scheme. This hybridization can also be applied to other methods such as Finite Differences (FDTD) or Finite Volumes (FVTD). We demonstrate that the technique of hybridization proposed, allows to conserve the energy and is stable under a condition that we study theoretically. Some examples are presented for validation. Finally and to take into account the cables, a thin wire model with a high order of spatial approximation is proposed. Unfortunately, this model does not allow to cover all the industrial cases. To solve this issue we propose an hybridization with a transmission line method. The advantage of this hybridization is demonstrated thanks to different cases which would not have been feasible with a more simple thin wire method.

**Keywords** unsteady state Maxwell's equations, finite elements, high order spatial approximation, Yee's scheme, scheme and method hybridization, thin wire model.