UNIVERSITE DE CERGY-PONTOISE
E.D. ECONOMIE, MANAGEMENT, MATHEMATIQUES CERGY
LABORATOIRE DE RECHERCHE THEMA

Imperfections des processus de choix sociaux : études des conflits électoraux

THESE
pour l'obention du titre de
Docteur en sciences économiques
de l'Université de Cergy-Pontoise

Présentée et soutenue publiquement le jeudi 6 octobre 2016
par
M. Louis CHAUVEAU

JURY

Directeur de thèse :	Monsieur Jean-Luc PRIGENT *Professeur à l'Université de Cergy-Pontoise*
Codirectrice de thèse :	Madame Nathalie PICARD *Maître de conférences à l'Université de Cergy-Pontoise*
Rapporteurs :	Monsieur Fabrice BARTHELEMY *Professeur à l'Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines* Monsieur Vincent MERLIN *Professeur à l'Université de Caen Normandie*
Examinateurs :	Monsieur André DE PALMA *Professeur à l'École Normale Supérieure de Cachan* Monsieur Rémy ODDOU *Maître de conférences à l'Université Paris-Ouest-Nanterre-La-Défense*

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer tous mes remerciements aux Professeurs Jean-Luc Prigent, mon directeur de thèse, et Nathalie Picard, ma codirectrice de thèse. Pendant ces années de thèse, ils ont toujours été présents, disponibles et de bons conseils. Leurs expériences et leurs sagesses, m'ont été fort utile dans les moments de doute, qui ont quelques fois émaillés ces années de travail, afin de prendre le recul nécessaire face aux problèmes rencontrés et ainsi de parvenir à leur résolution. Je leur dois également un regard beaucoup plus bienveillant et nettement moins dur que le mien sur mon propre travail qui m'a permis de ne pas succomber au perfectionnisme excessif, vers lequel je peux facilement tendre.
Je remercie très chaleureusement les professeurs Fabrice Barthelemy et Vincent Merlin, pour avoir consenti à être les deux rapporteurs de ma thèse et avoir accepté de prendre le temps d'examiner mes travaux malgré leurs nombreuses occupations.
Je tiens à également remercier les professeurs André de Palma et Rémy Oddou qui ont accepté dêtre examinateurs de ma thèse.
Ma thèse s'est déroulée au sein du laboratoire de rechercher THEMA dans d'excellentes conditions de travail pour lesquelles je tiens à remercier ses trois directeurs successifs Arnaud Lefranc, Olivier Donny et Mathieu Martin, ainsi que Christina Terra et Gabriel Desgranges les directeurs successifs de l'école doctorale.
Je tiens à remercier mes collègues doctorants pour leur complicité et leur soutien durant toutes ces années. Leurs conseils m'ont été très précieux pour améliorer les présentations de mes travaux. L'expérience de ceux qui m'ont précédé m'a été très utile, que ce soit pour l'écriture de ce document final que pour la préparation de la soutenance.
Je tiens enfin à remercier ma famille et mes amis. Je remercie Véronique qui m'a supporté et soutenu toutes ces années. Je remercie ma mère, mon frère et ma sœur pour leur soutien. J'ai une pensée pour mon père, mon oncle et mon grand-père qui ne sont plus là pour assister à ce moment.
Je dédie cette thèse à ma fille Gabrielle, mon petit rayon de bonheur, qui illumine ma vie depuis maintenant trois années.

Table des matières

1. Ce chapitre est issue d'un article non publié co-écrit en 2013 avec Rémy Oddou.

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

Etats des lieux

Nos démocraties contemporaines ont pour ancêtre communément admis la démocratie Athénienne, régime politique ayant progressivement émergé entre le VII$^{\text{ème}}$ et le V$^{\text{ème}}$ sciècle avant J.C., par le biais des réformes successives ayant transformé une oligarchie, régime le plus répandu dans les cités grecques de l'Antiquité (Sparte, Thèbes, Corinthe), en une démocratie directe, restreinte au corps des citoyens mâles nés de père, puis de mère avec le décret passé en -451 par Périclès, athénien, caractérisée par l'*Isonomie*, instituée entre -508 et -507 par les réformes de Clisthène et ayant à abouti l'égalité politique des citoyens au regard de la loi, et l'existence d'un processus électoral relativement libre pour désigner les titulaires des fonctions de l'État. La plupart des cités grecques de l'époque fonctionnaient sur des modèles oligarchiques (Mégare, Rhodes, Sparte, Thèbes) ou tyranniques (Corinthe, Halicarnasse, Milet, Mitylène, Naxos, Samos, Syracuse), l'évolution du régime d'Athènes fut rendu possible par l'importance considérable des rameurs, issues dans leur immense majorité de la classe des *thètes*, pour manœuvrer l'immense flotte au service des intérêts de la Cité (*Thalassocratie*), au détriment de l'armée de terre, socle traditionnel de l'aristocratie dont l'influence devint de moins en moins déterminante dans les affaires publiques. Marqué par des mandats électifs courts d'une année et une séparation rigide des organes étatiques (*Ecclésia*, *Boulè*, *Héliée*, *Aréopage*, *Magistrature civile* et *Magistrature militaire*), ce régime disparut en -411 avec l'instauration de la tyrannie des Quatre-Cents et demeura sans équivalent pendant presque deux millénaires : la République romaine (de -509 à - 27), bien qu'intégrant le principe de l'égalité politique des citoyens mettra en place un système électoral complexe aboutissant à l'exclusion mécanique des moins riches du processus (*Comices centuriates*) tandis qu'au Moyen-Âge les républicaines italiennes d'Ancône (de 1198 à 1532), de Florence (de 1115 à 1532), de Gênes (de 1005 à 1797), de Pise (de 1005 à 1432) et de Venise (de 617 à 1797), l'Althing (*Alþingi*) de l'État libre d'Islande (*þjóðveldisöld*) de 930 à 1262, la République des Deux Nations entre la Pologne et la Lituanie (de 1569 à 1795), les villes libres (*Freie Städte*) et les villes d'empire (*Reichsstädte*) du Saint-Empire romain Germanique jusqu'en 1806, la République des sept Provinces-Unies des Pays-Bas (de 1581 à 1795) ou la Confédération des III cantons (de 1291 à 1332), puis des VIII cantons (de 1332 à 1481) et enfin des XIII cantons (de 1481 à 1790) bien que dotées d'institutions élues, étaient avant tout des régimes oligarchiques, concentrant toute la réalité du pouvoir politique entre quelques centaines de personnes au plus, très souvent des familles (les Médicis à Florence, les Adorno et les Fregoso à Gênes). A certains égards les Celtes, en particulier les peuples Gaulois grâce aux descriptions données par

Jules César dans ses *Commentaires de la Guerre des Gaules*[92], présentaient dans l'organisation politique de leurs sociétés des caractéristiques oligarchiques proches de celles des républiques primitives avec l'absence de roi, l'existence d'assemblées de sages (désignées sous le terme de sénat par les romains) ainsi que le recours à l'élection pour certaines fonctions politiques majeurs, comme celle de *vergobret* (à l'instar de Liscos chez les Eduens en -58) ou de général de l'armée en campagne (Castamantaliédis exerça cette fonction pour les Sequanes à l'occasion de la bataille d'Aquae Sextiae en -102 tandis que Vercingétorix exerça pour sa part la fonction officieuse de chef militaire de la coalition des peuples gaulois). Il en allait de même pour les Germains avant leur sédentarisation (à l'instar d'Arioviste en -58 ou de d'Arminius à la bataille de Teutobourg en 9). En dehors d'Europe, on peut citer les différents régimes du Shogunat (Kamakura, Kenmu, Muromachi, Tokugawa) de la période féodale du Japon (de 1185 à 1868) qui, tout en maintenant l'institution impériale, fut un régime oligarchique ayant concentré la réalité du pouvoir politique entre les mains de clans rivaux. On peut relever que dans l'Amérique précolombienne l'organisation des Cités-États mayas (-2600 à 1520) pouvaient se rapprocher de celle observée dans l'Antiquité grecque. En Asie du sud, la Civilisation de la vallée de l'Indus (-5000 à -1900) semble également avoir présenté les traits d'un système oligarchique. Enfin en Afrique du nord, la Civilisation punique (-814 à -146) avait une organisation très similaire à celle de la République romaine, même si à l'inverse de sa grande rivale, elle fut très précocément une thalassocratie, de par ses racines phéniciennes.

Historiquement le mouvement ayant abouti à nos démocraties contemporaines a peu à peu émergé en Angleterre, depuis l'octroi de la *Magna Carta*[88] par le Roi Jean Sans Terre le 15 juin 1215, comportant notamment l'*Habeas Corpus*, qui a marqué la première transition d'une monarchie absolue vers un état de droit, en passant par les trois guerres civiles de ce pays, qui aboutirent le 30 janvier 1649 à l'exécution du Roi Charles 1er sur ordre d'un Tribunal issu du Parlement, instaurant le règne d'Oliver Cromwell, en tant que Lord Protecteur (*Lord Protector*) du Commonwealth d'Angleterre (*Commonwealth of England*), unique expérience anglaise d'un régime républicain, jusqu'au reversement de Jacques II par le Parlement et son remplacement par Guillaume III d'Orange-Nassau instaurant de manière irréversible et progressive le plus ancien, et toujours en vigueur, régime Démocratique au Monde. D'autres expériences ultérieures, toute aussi fortes, ont suivi en parallèle. La première fut celle de la naissance des Etats-Unis d'Amérique, avec le 4 juillet 1776 l'adoption de la Déclaration d'indépendance (*United States Declaration of Independence*), marquant le début d'une guerre avec le Royaume-Uni entre 1775 et 1783, ayant abouti à la création d'un nouvel Etat qui adoptera la première, et plus ancienne, Constitution écrite[11], toujours en vigueur, au Monde, source à l'époque de la Convention constitutionnelle de Philadelphie, entre le 25 mai et 17 septembre 1787, de débats passionnés entre les tenants du droit des Etats (appelés anti-fédéraliste, dont le 5ème Président James Monroe) et les partisans d'un Etat central fort (appelés fédéralistes, dont le 1er Secrétaire d'Etat Alexander Hamilton et le 4ème Président James Madison) dont les idées furent développées dans *Le Fédéraliste* (*Federalist Papers*[80]). La seconde fut la Révolution française, qui aboutit sur une suppression totale d'un ordre préexistant en réorganisant complètement l'Etat central (le passage d'un régime de monarchie absolue à un régime de monarchie constitutionnelle avec l'adoption [2] de la Constitution française[6] du 3 septembre 1791, l'abolition de la Monarchie et l'instauration de la République le 21 septembre 1792, l'instauration officielle de la République avec la promulgation le 24 juin 1793 de la Constitution de l'an I[86]), son administration territoriale (la création des communes avec la loi du 14 décembre 1789, la suppression des anciennes provinces et la création des départements avec la loi du 22 décembre 1790 et la fixation de leur nombre avec la loi du 15 janvier 1790) et l'organisation de la société (l'abolition du régime féodal dans la nuit du 4 août 1789, l'adoption de la Déclaration des droits de l'homme et du citoyen le 26 août 1789, l'adoption du Code civil le 21 mars 1804). L'histoire de la Démocratie révèle que son évolution relève de l'apprentissage, avec des phases d'extension, de contraction, d'adaptation et de correction, ses formes étant très diverses même si divers classements peuvent être opérés : monarchie (Australie) ou république (Autriche), parlement monocaméral (Bénin) ou bicaméral (Belgique), scrutin uninominal majoritaire (Canada) ou proportionnel plurinominal (Croatie), président de la république élu par le parlement (Estonie) ou par le peuple directement (Egypte) ou indirectement (Etats-Unis), organisation de l'Etat centralisée (Irlande) ou décentralisée (Italie), état unitaire (Mongolie) ou fédéral (Mexique), constitution écrite (Russie) ou coutumière (Royaume-Uni), régime à séparation souple (Suède) ou stricte (Suisse) des pouvoirs, etc. Aujourd'hui en 2016, sur les 197 Etats reconnus par l'Organisation des Nations unies, la plupart se réclament, à divers degrés, comme étant des régimes démocratiques, une faible minorité ne s'en réclamant ouvertement pas.

Au-delà des évidents critères indispensables (scrutin secret, élections libres, absence de propagande ou de contrainte sur les électeurs, offre politique multiple), il existe des critères importants pour qu'un régime puisse être considéré comme une Démocratie moderne : traduction efficiente du choix de l'électeur (élection du candidat majoritaire en voix) et organisation de l'Etat réellement sensible au résultat des élections (action de l'état traduisant les politiques des élus) en font partie. De long débats ont eu lieu, impliquant Jean-Charles de Borda et Nicolas de Condorcet, afin de déterminer le meilleur type de scrutin à même de remplir ces critères, une fois constaté les défaut du scrutin uninominal majoritaire. On peut également citer le travail[89] d'inventaire réalisé par Olivier Hudry des différents types de paradoxes pouvant être rencontrés à l'occasion d'un scrutin : le *«paradoxe du vote»* ou *«Effet Condorcet»*(G. T. Guilbaud[77]), le *«paradoxe de l'abstention»* (*no show paradox*) proposé par S. Brams et P. Fisburn[28]) et sa variante du *«paradoxe du pêcheur à la ligne»* développé par D. Bouyssou et P. Perny[27]), le *«paradoxe des jumeaux»* illustré H. Moulin[122], le *«paradoxe de l'ordre inverse»* décrit par Davidson et Odeh[48] et le *«paradoxe de la méthode des points tronquée»* (*truncated point-total paradox*) détaillée par P. Fishburn[65] dans le cas des scrutins majoritaires ou de votes transférables, le *«paradoxe d'Alabama»*, le *«paradoxe de la population»*, le *«paradoxe du nouvel état»* ou le *«paradoxe du transfert de population»* dans le cadre des scrutins de liste proportionnels. Les travaux théoriques de Sébastien Bervoets, Vincent Merlin et Dominique Rouet[22] ont mis également en lumière la possibilité de manipuler le résultat d'une élection dans le cadre d'un scrutin indirect en l'ab-

2. Depuis 1791, la France a été successivement organisée par 16 textes constitutionnels.

sence de règle de priorité.

Toutefois la Démocratie reste un concept dont la mise en application est nécessairement imparfaite, comme l'a démontré Kenneth Arrow en 1951[8] dans son théorème d'impossibilité. Son application concrète a déjà rencontré des limites à sa réalisation, avec des paradoxes du référendum à l'occasion de quatre élections présidentielles américaines (1824, 1876, 1888 et 2000) lorsque furent élus des candidats ayant reçus moins de voix que leurs adversaires, phénomène accentué par des dispositions constitutionnelles et légales relatives à la taille du collège des grands électeurs[119][14]. Il en fut également de même lors des élections à la Chambre des représentants (1942, 1952, 1996, 2012) des Etats-Unis et lors de quatre élections générales britanniques au XX^{e} siècle (1974, 1929, 1951 et celle du 28 février 1974 [3]) bien que ces exemples pratiques de paradoxe du référendum soient plus le fait d'un découpage électoral partisan[111] (*Gerrymandering*[76]) que de la répartition du nombre de sièges alloués à chacun des Etats fédérés en fonction de sa population dans la limite d'un siège au moins. Toutefois en 2001 Hannu Nurmi[124] démontra que le paradoxe du référendum peut-être observé dans n'importe quelle démocratie représentative reposant sur un système avec division en circonscriptions du corps électoral.

Par ailleurs les électeurs eux-mêmes n'ont pas nécessairement un choix évident lorsqu'ils sont convoqués à l'occasion des élections générales : les Démocrates du Sud des Etats-Unis sont caractérisés par un positionnement conservateur sur les questions de société ainsi que sur la problématique du droit des Etats, ce qui peut les amener lors des élections nationales à voter contre le candidat de leur propre parti, si celui-ci adopte un positionnement trop libéral sur ces mêmes questions (Harry Truman en 1948, Lindon Johnson en 1964, Hubert Humphrey en 1968, Jimmy Carter en 1980 et Walter Mondale en 1984), en apportant leur voix au candidat républicain (Barry Godwater en 1964, Ronald Reagan en 1980 et1984) ou à un candidat démocrate dissident (Strom Thurmond en 1948, George Wallace 1968). Inversement certains électeurs républicains très conservateurs peuvent se détourner du candidat de leur parti lorsque celui-ci présente un profil trop modéré : ainsi George H. Bush perdit l'élection présidentielle de 1992 principalement du fait qu'une partie de ses électeurs aient été voter pour le candidat indépendant Ross Perot. Il s'agit typiquement d'un paradoxe de la représentativité induit par la mécanique du scrutin uninominal majoritaire à un tour en vigueur pour la plupart des élections aux États-Unis (en dehors de la Louisianne) : dans le cas de l'élection présidentielle de 1992, si un second tour avait été organisé entre Bill Clinton et Georges H. Bush, le président sortant aurait pu bénéficier d'un report de voix suffisant des électeurs de Ross Perot pour lui permettre de conserver son siège. Les électeurs peuvent même adopter un comportement insincère dans leur vote : on parle alors de «vote utile» : en 2007, une partie importante des électeurs des *Verts* s'est détournée au premier tour de la candidate de ce parti, Dominique Voynet, en apportant ses suffrages à la candidate socialiste Ségolène Royal, afin d'augmenter les chances de cette dernière d'accéder au second tour de l'élection. Le même mécanisme eut lieu

3. L'année 1974 fut marquée par deux élections générales au Royaume-Uni : le 28 février 1974 et le 10 octobre 1974

au cours de cette élection lorsqu'une partie significative mais non suffisante des électeurs socialistes préférèrent apporter leurs suffrages au candidat centriste François Bayrou, jugé plus à même que Ségolène Royal de battre Nicolas Sarkozy à l'occasion du second tour de l'élection présidentielle.

Les différences structurelles observées entre les régimes démocratiques ont également des effets concrets différents. Entre 1976 et 2014, le gouvernement fédéral des Etats-Unis a arrêté 18 fois ses activités non essentielles dont 13 fois du fait de l'existence de majorités politiques différentes contrôlant la Présidence, la Chambre des représentants et le Sénat, et 5 fois alors que les trois composantes étaient contrôlées par le même parti [4]. Aucun phénomène similaire, ayant entraîné une paralysie des services de l'Etat, n'a jamais été observé en France depuis 1958, du fait de la Convention constitutionnelle installée par l'adoption le 5 octobre 1962 de l'unique motion de censure de la 5ème république : en cas de vote négatif de l'Assemblée nationale sur un texte majeur (motion de censure, motion de confiance et loi de finance), la Présidence de la république recourerait à l'article 12 de la Constitution et prononcerait très vraisemblablement sa dissolution en vue d'élections générales. Il en va de même au Royaume-Uni, où les Conventions constitutionnelles imposent que le Premier ministre disposent d'une majorité à la Chambre des communes : si aucune majorité ne peut se mettre en place afin d'adopter les textes majeurs, des élections générales doivent alors être convoquées par le Souverain britannique [5] afin de donner une majorité politique à la direction des affaires du Royaume. Le caractère parlementaire du régime politique ne peut toutefois suffire à le préserver d'un blocage. Ainsi en 1975, John Keer, le Gouverneur général d'Australie, devant l'incapacité du Premier ministre travailliste Gough Whitlam a obtenir du Sénat, contrôlé par l'opposition libérale-nationale, le vote du budget, utilisa ses prérogatives constitutionnelles, normalement utilisées toujours sur conseil du Premier ministre d'après la Convention constitutionnelle du système de Westminster, pour destituer ce dernier, alors que celui-ci disposait d'une majorité à la Chambre des Représentants, et le remplacer par le chef de l'opposition Malcom Fraser. La crise constitutionnelle de 1975 prend ses racines dans la nature même du fédéralisme australien dont la particularité réside, en dehors du contrôle du Gouvernement par la Chambre des représentants (*House of Representatives*), sur un bicamérisme presque parfait [6], compromis trouvé pour faire adhérer les états les plus réticents à la fédération

4. Le Parti démocrate était, et est encore aujourd'hui, composé de différentes tendances. Entre 1977 et 1979, la majorité démocrate au Congrès réunissait des conservateurs du Sud, Southern Democrats et Dixiecrats, des modérés et des libéraux de Nouvelle-Angleterre et de Californie, constituant une majorité théorique pouvant néanmoins se scinder sur des sujets de société. Le financement des avortements fut le sujet de rupture de la majorité démocrate au Congrés en ces cinq occasions.

5. Ces dispositions ont été codifiées par le Fixed-term Parliaments Act de 2011. Avant cette date la Chambre des communes ne pouvait être dissoute que par une proclamation royale en vertu de la Prérogative royale dont dispose le Monarque britannique, sur les conseils du Premier ministre. La durée maximale de la mandature étant fixée à cinq ans depuis le Parliament Act de 1911 (auparavant sept ans depuis le Septennal Act de 1715), le Premier ministre ayant pu choisir de dissoudre la Chambre des communes à n'importe quel moment à l'intérieur de cet intervalle de temps.

6. Sans atteindre la situation de l'Italie, où l'article 94 de la Constitution du 1er janvier 1948, impose au gouvernement d'avoir la confiance des deux chambres.

lors de la naissance du Commonwealth d'Australie, alors que le système de Westminster, apparu postérieurement, accorde une prééminence absolue à la Chambre basse sur la Chambre haute.

La transformation imparfaite des préférences individuelles en choix électoraux

La capacité de chaque électeur à traduire ses préférences à travers son vote est l'une des principales raisons d'être de la Démocratie. Le caractère multidimensionnel des programmes électoraux des partis politiques et de leurs candidats, intervenant sur des sujets économiques, internationaux, institutionnelles et sociétaux peuvent rendre ce choix compliqué, voir même impossible à réaliser. Chaque électeur choisissant le candidat présentant le programme convenant le plus à ses préférences, il est tout à fait possible qu'un candidat présentant un programme dont chaque point soit minoritaire dans l'électorat puisse obtenir plus de voix qu'un candidat dont chaque point est majoritaire dans l'électorat. Dans le cas d'une élection où deux candidats sont en lice, avec chacun une position différente sur cinq sujets de société, un candidat peut recueillir une majorité absolue des suffrages, alors même que chacune de ses propositions obtient à peine entre 30% et 32% des suffrages (et entre 68% et 70% pour chacune de celles de son concurrent). La solution à ce type de paradoxe est l'imposition d'une majorité qualifiée en lieu et place de la majorité absolue[49]. Les partis politiques de ce fait jouent un rôle majeur dans la détermination du choix de l'électeur confronté à la complexité induite par le caractère multidimensionnel des programmes des différents candidats en apportant une simplification à ce choix en le résumant à un positionnement par rapport à un axe unidimensionnel (Gauche contre Droite, Fédéralisme contre Droit des Etats, Souverainisme contre Europhilisme, etc.) auquel l'électeur moyen peut s'identifier[81]. De même le rôle des partis politiques peut énormément varier et dépend de la forme adoptée[127] : club, machine électorale, parti de militants, parti *"attrape tout"* ou structure d'organisation des élections primaires ouvertes. Toutefois, quellen que soit la forme de ces strutctures, elles conservent toutes certaines fonctions justisfiant leur existence, dont celle de jouer le rôle de pouponnière à candidats, en les recrutant et en les formant (accentuant également la perception qu'a une partie de la population d'un certain corporatisme de la classe des élus politiques, se traduisant par un rejet de ces mêmes partis politiques) et en les soutenant financièrement et humainement lors des campagnes électorales. Par ailleurs, certaines règles du système électoral comme un seuil minimal de suffrages à récolter pour être élu, dans le cadre d'un scrutin proportionnel de liste, ou la capacité à collecter le plus de suffrages pour être élu, dans le cadre d'un scrutin uninominal majoritaire à un ou deux tours, peuvent conduire l'électeur à adopter un comportement insincère lors de l'expression de son vote : celui-ci peut décider de porter son suffrage non pas sur le candidat, ou la liste, dont le programme correspond le plus à ses préférences, mais sur un candidat, ou une liste, dont le programme ne correspond pas à ses préférences, mais qui se trouve avoir une plus forte probabilité d'être élu c'est-à-dire un phénomène de vote utile.

La traduction nécessairement biaisée du système électoral

L'impossibilité pour tout système électoral d'agréger les préférences individuelles en préférences sociales a été démontrée par Kenneth Arrow en 1951 dans son ouvrage Social Choice and Individual Values. Si les exemples les plus médiatiques mettent en avant le scrutin majoritaire, avec l'imbroglio de l'élection présidentielle américaine de 2000, qui a vu la victoire d'un candidat battu en voix par son adversaire, tous les systèmes électoraux sont affectés : le scrutin proportionnel plurinominal de liste ne peut traduire intégralement le résultat d'une élection, du fait de sa fonction de répartition qui prend une valeur appartenant à l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ (le nombre de voix obtenues par une liste sur le nombre total de suffrages exprimés) pour donner un résultat appartenant à l'ensemble des nombre relatifs $\mathbb{N}$ (le nombre de sièges attribués à la liste dans l'assemblée). Un exemple théorique très simple peut mettre en évidence ce paradoxe structurel du scrutin proportionnel. Prenons le cas d'une élection pour pourvoir les 15 sièges d'une assemblée délibérative avec cinq listes en lice, ayant obtenu respectivement 11992 voix, 10492 voix, 1499 voix, 1498 voix et 1497 voix pour un total de 26978 suffrages exprimés. Selon les méthodes de répartition à la plus forte moyenne employées, les résultats diffèrent nettement : la méthode d'Hondt [7] donne 8 sièges (53%) à la liste arrivée en tête, 6 sièges (40%) à la seconde liste, 1 siège (7%) la troisième et aucun aux deux dernières listes, la méthode [8] d'Huntington-Hill[36] accorde 8 sièges (53%) à la liste arrivé en tête, 7 sièges (47%) à la seconde et aucun aux trois autres listes, et les méthodes de Sainte-Laguë accordent 6 sièges (40%) aux deux premières liste et 1 siège (7%) aux trois suivantes. Ce paradoxe ne se limite par ailleurs pas aux résultats des élections, il s'observe dans toute répartition proportionnelle comme par exemple lors de l'affectation à chaque état fédéré américain de son nombre de sièges à la Chambre des représentants après chaque recensement décennal, où le scrutin employé est le scrutin uninominal majoritaire à un tour. Dans le cadre de ce type de scrutin, la littérature parle de paradoxe du référendum : ce paradoxe repose sur une distinction entre la majorité globale (où l'information est transmise par l'ensemble du corps électoral) et la majorité des circonscriptions (où la décision est prise par la majorité des regroupements du corps électoral divisé), où une option peut obtenir une majorité des voix globalement et être minoritaire au niveau des circonscriptions. Ce paradoxe existe dès le moment où le corps électoral est découpé en plusieurs circonscriptions et plusieurs articles ce sont intéressés à la probabilité de rencontrer cette situation, selon que l'on est en présence d'un corps électoral sans préférence ou avec préférence, et selon le nombre de circonscriptions. Toutefois la littérature se focalise principalement sur des découpages en circonscriptions de tailles identiques, n'abordant que relativement très peu

7. Les coefficients de la méthode d'Hondt sont calculés avec la formule $n + 1$ et sont notamment utilisés pour les élections régionales françaises.

8. Les coefficients de la méthode d'Huntington-Hill sont calculés avec la formule $\sqrt{n \times (n+1)}$ et sont utilisés depuis 1941 pour calculer la répartition des sièges à la Chambre des représentants entre les différents états fédérés américains.

l'impact des inégalités de population entre les circonscriptions sur la probabilité d'occurence du paradoxe. D'autre part, la littérature ne s'est pas non plus intéressée au cas de la symétrie des découpages : en posant $P_{cf}(N, Q)$ la probabilité de conflit avec N la population totale et Q le nombre circonscriptions, l'identité $P_{cf}(N, Q) = P_{cf}(N, \frac{N}{Q})$ se vérifie-t-elle ?

Les faiblesses structurelles de l'Etat démocratique

La question de la forme des institutions qu'adopte un Etat démocratique fait partie des débats animant la classe politique. Elle fait aussi par des débats ayant opposé Robet Alan Dahl à William Harrison Riker, le premier estimant dans un article[45] publié en 1956 qu'un système démocratique entraîne nécessaierement la mise en place d'une *«constitution»* [9] tandis que le second estime pour sa part qu'un système reposant sur un contrôle direct des institutions par le peuple (ce qu'il appelle *populist institutions*) représente un danger pour la démocratie et lui préfère un système favorisant un contrôle indirect dans *Liberalism against Populism* publié en 1982[135]. Au-delà de l'aspect idéologique et symbolique, se pose la question de l'effectivité réelle de l'action de l'Etat. En effet, l'action d'un Etat démocratique étant déterminée par le résultat des élections, la capacité des institutions à mettre en application la politique choisie par les électeurs est par conséquent la raison d'exister de la Démocratie. Il y a typiquement dans l'organisation des institutions quatre modèles reposant sur deux oppositions le long des axes horizontaux et verticaux : la séparation souple ou stricte des pouvoirs horizontaux (c'est-à-dire entre le Gouvernement et le Parlement, les organes judiciaires devant nécessairement être indépendant des deux précédents pour que la séparation des pouvoirs soit effective [10]) et des pouvoirs verticaux (c'est-à-dire entre l'État central et les collectivités territoriales). Les quatre modèles sont caractérisés soient par des liens hiérarchiques forts, avec une subordination des collectivités locales à l'État central dans le cadre d'un État unitaire, ou faibles, allant jusqu'à des entités constitutives produisant des normes de rang égal à celle des organes centraux dans le cadre d'un État fédéral, et des mécanismes de résolution de conflit entre les pouvoirs structurellement prévus, la possibilité pour le parlement de renverser le gouvernement ou pour le chef de l'éxécutif de convoquer des élections parlementaires anticipées dan le cas d'un régime présidentiel, ou pas, en dehors de toute volonté commune de coopérer ni le Gouvernement ni le Parlement n'ont les moyens d'imposer leur volonté dans le cas d'un régime présidentiel. On peut se demander, en dehors des hypothèses pouvant être émises sur le niveau de coopération entre les acteurs politiques, quels sont les degrès sensibilité de ces quatre type de système à des conflits politiques. Autrement dit, quelle part des blocages politiques pouvant affecter un État est endogène au fonctionnement de ses institutions ?

9. Le terme s'entend ici en tant qu'état d'organisation atteint par un système politique naturellement, qu'il ait ensuite été codifié par écrit ou pas.

10. Un débat existe quand à l'indépendance du Parquet vis-à-vis du pouvoir politique, certain pays, dont la France, ayant maintenu une tutelle du gouvernement sur les procureurs, ce qui peut poser problème lorsque des actions judiciaires sont à entreprendre vis-à-vis de personnes proches de la majorité politique au pouvoir.

Objectifs et résultats

L'objectif de cette thèse est d'explorer l'impact des différents mécanismes intervenant à chaque étape dans la construction d'un choix collectif et leurs capacités à fausser la traduction effective d'un choix majoritaire. Après une revue de littérature (Chapitre 1), l'analyse des préférences des agents économiques permet de mesurer le premier biais se concrétisant dans la construction de leurs choix individuels (Chapitre 2). La distorsion induit par la mécanique d'un système électoral est ensuite mesurée sous des hypothèses de préférences marquées des électeurs pour l'indifférence ainsi que successivement de symétrie (Chapitre 3) puis de dissymétrie des circonscriptions électorales (Chapitre 4). Enfin la capacité des institutions à traduire de manière efficiente les choix issues des élections est testée selon qu'elles soient unitaires ou fédérales, et à séparations souples ou strictes des différents pouvoirs (Chapitre 5).

La revue de la littérature se voit consacrée le premier chapitre de la thèse et s'articule autour de quatre axes principaux. Le premier axe traite de la traduction de préférences individuelles par rapport à l'offre programmatique des candidats. Le processus de décision amenant un électeur à choisir un candidat plutôt qu'un autre peut se faire sans qu'il soit unanimement en accord avec la base programmatique de ce dernier. En effet une majorité des électeurs peut voter pour un candidat pour lequel il existe des majorités des électeurs en désaccord avec la majorité des points de son programme, ce que la littérature traite sous le nom de paradoxe d'Ostrogorski qui se voit consacrer la section 1.1.

Le second axe aborde la question du comportement des électeurs face à l'offre politique lors d'un scrutin et tout particulièrement les tendances à l'insincérité de leurs choix électoraux par rapport à leurs préférences réelles selon les règles du système électoral utilisé, ce que la littérature de microéconomie politique désigne comme le vote stratégique. Ce comportement est induit principalement par la forme du système électoral, en particulier si ce dernier favorise les grandes formations politiques, par l'instauration de barrières à l'entrée comme un seuil minimal de suffrages à recueillir pour être représenter, ou l'utilisation d'un système électoral majoritaire défavorable aux petites formations politiques ce que traite la sous-section 1.2.1. La question de la compréhension par l'électeur de la procédure de vote, est un argument fort en faveur de l'utilisation de systèmes électoraux réputés plus simple mais pouvant empêcher l'élection d'un vainqueur de Condorcet lorsque celui-ci existe. La revue de littérature présentera des expériences tendant à démontrer que des systèmes électoraux autres que le scrutin uninomial majoritaire peuvent être compris des électeurs ce que présente la sous-section 1.2.2.

Le troisième axe s'intéresse aux limites du système électoral, et plus particièrement à ce que la littérature de microéconomie politique appelle le paradoxe du référendum (*«referendum paradox»*) à la sous-section 1.3.1 et sa variante américaine le *paradoxe de la chambre* à la sous-section 1.3.2. La possibilité qu'une élection puisse aboutir à un résultat en opposition totale avec le souhait de la majorité des électeurs soulève à la fois le problème de la légitimité réelle des élus et le problème de la défiance des citoyens envers la politique. En l'absence d'une probabilité nulle de rencontrer cette situation, la confiance des citoyens envers le systéme électoral diminue de même que la marge de manœuvre réelle des acteurs politiques ayant été élus à cette occasion. La solution corrective pour palier à ces effets secondaires peut reposer sur l'adoption d'un découpage électoral convergent vers la probabilité de conflit la plus faible et libéré du soupçon de charcutage électoral. Pour cela, l'institution en charge du découpage doit être strictement neutre vis-à-vis des intérêts partisans, les critères géographiques des circonscriptions doivent être précis et acceptés de tous et le nombre de circonscriptions adopté en fonction de la population totale doit appartenir à l'ensemble des découpages minimisant la probabilité de paradoxe du référendum.

Le quatrième axe s'intéresse à la logique économique régissant l'organisation d'un système démocratique à la sous-section 1.4.1 ainsi qu'à la capacité à la sous-section 1.4.2 de différentes classes d'organisation des pouvoirs publics à traduire le résultat issue du processus électoral, selon qu'il s'agisse d'une séparation souple ou stricte des pouvoirs ou d'une organisation unitaire ou fédérale de l'Etat. L'incapacité du pouvoir politique issue des élections à mettre en œuvre sa politique du fait de désaccords entre les différentes composantes de l'état peut conduire à une paralysie des pouvoirs publics. C'est particulièrement le cas lorsque l'Etat central est divisé entre un pôle exécutif et un pôle législatif issus d'élections différentes et répondant à des impératifs différents. Le problème de la capacité de l'Etat à implémenter les politiques majoritairement choisies par les électeurs peut se résoudre par l'identification et la correction des facteurs favorisant la paralysie institutionnelle. Les conflits verticaux peuvent être prévenus par une hiérarchie claire des instances et de leurs rôles.

Le second chapitre de la thèse s'intitule « Modèle de choix des électeurs et problématique du Paradoxe d'Ostrogorski sur deux axes programmatiques ». Il analyse le processus amenant l'électeur à transformer ses préférences en un choix électoral traduit par son vote. Dans ce chapitre, sont traitées la probabilité d'occurrence du paradoxe d'Ostrogorski sous des hypothèse de fonction de choix différentes sur les axes préférentiels et la mesure de la probabilité exacte lors d'un scrutin d'aboutir à une situation de paradoxe d'Ostrogorski en présence de deux axes programmatiques et sous l'hypothèse de l'existence d'une fonction de discrimination entre les axes.

Le troisième chapitre de la thèse est intitulé « Modèle de conflits de légitimité avec division homogène du corps électoral» et traite le problème du paradoxe du référendum. Dans ce chapitre est abordée la question de la symétrie de la probabilité d'occurrence du paradoxe de référendum qui a été traitée sous l'hypothèse de la Culture neutre (*Impartial Culture*) totale et sous la condition que les circonscriptions soient de de taille identique [11]. Cette partie développe le

11. Ce premier axe est rédigé sous la forme d'un article intitulé « Elections indirectes et probabilités de conflit », écrit en collaboration avec Rémy ODDOU, maître de conférences à l'Université Paris Ouest.

modèle probabiliste utilisé ainsi que la formule de calcul exacte obtenue à partir de dénombrements générés par ordinateur.

Dans le quatrième chapitre de la thèse, intitulé « Modèle de conflits de légitimité avec division hétérogène du corps électoral », est abordée la valeur exacte de la probabilité de conflit sous l'hypothèse d'une division hétérogène des circonscriptions et sous l'hypothèse de la Culture neutre (*Impartial Culture*) totale. Il utilise pleinement la formule développée dans le chapitre 3 et est subdivisé par conséquent en deux sections, chacune traitant le cas du découpage en 3 circonscriptions, sous l'hypothèse de symétrie et puis d'asymétrie des écarts.

Le cinquième chapitre est intitulé « Modèle de conflit structurels ». Il s'intéresse au fonctionnement de l'Etat et à la capacité de celui-ci à mettre en œuvre la politique déterminée par le résultat des élections. Dans ce chapitre la forme de l'Etat est centrale, dans la mesure où l'efficacité est mesurée par sa capacité à éliminer les conflits internes pouvant conduire à une paralysie de l'action de ce dernier. Ce chapitre liste dans un premier axe les quatre principales catégories existantes d'organisation des institutions suivant les clivages entre séparation souple ou ferme des pouvoirs actifs sur les plans horizontaux et verticaux. Dans un second axe il aborde la question des conflits structurels entre des niveaux différents par le recours à un petit modèle utilisant les valeurs de conflit de légitimité mesuré dans le chapitre 3. Dans un troisième axe, le rôle de l'offre politique est discuté en particulier concernant sa contribution au niveau de conflits structurels pouvant affecter le fonctionnement des institutions.

Chapitre 1

Revue de littérature

1.1 Choix individuel et Paradoxe d'Ostrogorski

Dans *La Démocratie et l'Organisation des Partis Politiques*[128], Moisey Ostrogorsky a identifié la possibilité que le vainqueur d'une élection puisse voir la majorité de ses axes programmatiques, c'est-à-dire les différentes propositions de son programme en cas d'élection, battus par ceux du perdant de l'élection. C'est ce que la littérature désigne sous l'appelation de *Paradoxe d'Ostrogorsky*, et qui fut également étudié[47] en 1976 par Hans Daudt et Douglas W. Rae. L'une des particularités importantes du paradoxe d'Ostrogorski est son caractère absolument inobservable, à la différence du paradoxe du référendum, dans la mesure où si le résultat final de l'élection est connu, le score de chaque candidat étant donné à la fin des opérations électorales, celui de chacun des axes programmatiques demeurent parfaitement inconnu : les électeurs n'indiquent sur leur bulletin de vote que le nom du candidat, de la liste de candidat ou de l'option qu'ils ont choisi au terme de leur processus de choix interne et propre à chacun d'entre eux, et nullement leurs préférences vis-à-vis de chacun des axes programmatiques qui leur sont soumis. En effet, les candidats proposant des plates-formes électorales dans lesquelles ils développent un programme par pôle de sujet (par exemple un programme économique, un programme sur les questions de société, un programme sur la sécurité publique, etc.), les électeurs sont en conséquent amenés à comparer chaque axe programmatique et à choisir en définitive le candidat dont la plate-forme électorale maximise leur utilité espérée. En 1987 Rajat Deb et David Kelsey ont mis en lumière[49], en plus de prouver la différence technique et conceptuelle le distinguant du *Paradoxe de Condorcet*, la possibilité d'éliminer ce paradoxe par l'emploi de majorité qualifiée établie à un seuil minimum en lieu et place de la majorité absolue. On peut aussi indiquer que Donald Saari a désigné[141] en 2008 ce paradoxe parmi les *all possible three-pair voting difficulties*, résultat trouvé en 2001 avec Sieberg[139].

Par ailleurs la forme du processus de sélection interne permettant à chaque électeur de choisir un candidat est également inobservable et donc inconnue : la thérorie économique se base sur l'hypothèse communément admis qu'il s'agit d'une fonction majoritaire, le candidat choisi étant celui présentant le plus d'axes programatiques préférés par l'électeur. Gabriella Pigozzi en 2006[131], en procédant à une comparaison avec le dilemme discursif, a estimé possible de surmonter le paradoxe,dans le cas de choix individuels à partir des axes de préférences basés sur la règle majoritaire par le recourt à un *majority merging operator*. Gilbert Laffond et Jean Lainé, la même année, en étudiánt[99] une autre procédure d'aggrégation individuelles des axes des préférences, la règle majoritaire composée (*compound majority rule*), ont constaté dans les résultats de la fonction de choix social une différence structurelle avec ceux issue d'une fonction reposant sur la règle majoritaire (*majority rule*), et ont démontré que l'ensemble des idéaux (*set of ideals*), ou domaine des préférences (*preference domain*), contient tous les profiles de préférences et permet d'éviter le paradoxe pour tout nombre d'électeurs et tout nombre de décisions.

Ainsi le modèle de construction d'un choix social à partir d'une aggrégation des axes de péférences individuelles, sur la base de la règle majoritaire, présente la faiblesse structurelle de mener à des situations de choix impossible dans le cas d'un nombre pair d'axes programmatiques, alors qu'en réalité les électeurs arrivent la plupart du temps à choisir (en dehors de consigne en ce sens des leaders politiques [1] le nombre de bulletins blancs aux différentes éléctions étant relativement faible [2]). Cette situation d'indécision repose sur l'impossibilité du modèle reposant sur la règle majoritaire d'affecter une réponse en cas d'égalité de scores sur les axes, que ce soit au niveau individuelle ou aggrégé, en l'absence de préordre de préférence, ou critère discriminant, existant entre les axes. En 2008, William Gehrlein et Vincent Merlin ont calculé[73], pour trois axes programmatiques, sous les hypothèses de règle majorité, de sincérité du vote des électeurs et d'indépendance des préférences, les probabilités de ce paradoxe [3]. Ils ont pour cela fait tendre le corps électoral vers l'infini, et on obtenu que sous

1. Suite aux consignes appelant au vote blanc données à ses électeurs par Mme. Le Pen, candidate ayant receuilli 6421426 suffrages sur son nom, il a été constaté un triplement du nombre de bulletins blancs ou nuls entre les deux tours de l'élection présidentielle franąise de 2012 : le pourcentage de bulletins blancs au 1[er] tour a été de $1,52\%$, soit 701190 bulletins blancs ou nuls sur 36584399 de bulletins de vote, contre $4,68\%$ au 2[ème] tour, soit 2154956 bulletins blancs sur 37016309 de bulletins de vote.

2. Sur le site du Ministère de l'intérieur, les résultats des votes blancs et nuls aux élections nationales de 1958 sont les suivants :

- élections présidentielles
  - 1[er] tour : $1,52\%$ (2012), $1,44\%$ (2007), $3,38\%$ (2002), $2,82\%$ (1995), $2,00\%$ (1988), $1,62\%$ (1981), $0,92\%$ (1974), $1,29\%$ (1969) et $1,01\%$ (1965)
  - 2[ème] tour : 2007 : $4,68\%$ (2012), $4,20\%$ (2007), $5,39\%$ (2002), $5,97\%$ (1995), $3,62\%$ (1988), $2,88\%$ (1981), $1,34\%$ (1974), $6,42\%$ (1969) et $2,74\%$ (1965)
- élections législatives
  - 1[er] tour : $1,58\%$ (2012), $1,89\%$ (2007), $2,79\%$ (2002), $4,88\%$ (1997), $3,65\%$ (1993), $2,13\%$ (1988), $4,35\%$ (1986 un seul tour du fait de l'usage du scrutin proportionnel de liste à base départementale), $1,41\%$ (1981), $1,95\%$ (1978), $2,25\%$ (1973), $1,70\%$ (1968), $2,28\%$ (1967), $3,09\%$ (1962) et $2,54\%$ (1958)
  - 2[ème] tour : $3,85\%$ (2012), $3,42\%$ (2007), $2,62\%$ (2002), $6,32\%$ (1997), $6,40\%$ (1993), $3,31\%$ (1988), $2,62\%$ (1981), $2,78\%$ (1978), $3,34\%$ (1973), $2,74\%$ (1968), $3,41\%$ (1967), $3,83\%$ (1962) et $2,35\%$ (1958),

3. Les auteurs ont obtenu que $PA_3^3(a) = 2\Phi_4(R_1)$, où $PA_3^3(a)$ est la probabilité que les 3 différentes axes programmatique produisent 3 sorties en accord avec celles du Parti majoritaire, $a = q_1 + q_8$ la mesure de la probabilité d'être en accord complet avec les axes programmatiques de l'un ou l'autre des deux parties (ici q_1 pour le premier parti et q_8 pour le second), Φ_4 la probabilité orthant positive normal à 4 variables, Y_i^j l'alignement partisan de l'électeur j sur l'axe programmatique i du Parti majoritaire (sachant que $i \in \{1,2,3\}$), renvoit aux trois axes

l'hypothése d'*Impartial Culture* la valeur de la probabilté du paradoxe, pour le rejet de chacun des trois axes programmatiques du vainqueur de l'élection (ce qu'ils désignent comme un strict paradoxe d'Ostrogorsky, concept développé par Rajat Deb et David Kelsey[49]), ne dépasse pas les 2% [4] en utilisant les résultats obtenus[68] par David Slepian en 1962[148], William Gehrlein [5] en 1979[68], ainsi que les travaux [6] de Vincent Merlin et Maria M. Tataru en 1997[116], de Donald G. Saari et Maria M. Tataru en 1999[140], et Vincent Merlin, Maria M. Tataru et Fabrice Valognes en 2000[117] et 2002[118]. Les auteurs ont également calculé que, dans le cas de quatre axes programmatiques, la probabilité d'un strict paradoxe d'Ostrogorsky est proche de 0 sous les mêmes hypothèses de départ, et que dans le cas de deux axes programmatiques le paradoxe n'existe pas, la fonction de sélection du candidat par l'électeur étant majoritaire, le choix est donc impossible en cas d'égalité de des axes programmatiques de chaque candidat préféré par l'électeur.

Il est a noté que ce paradoxe est fréquement rapproché du *Paradoxe d'Anscombe*, décrit par Gertrude Elisabeth Margaret Anscombe en 1976 1976[7] et stipulant dans le cas d'une consultation directe sur plusieurs projets, bien qu'une majorité peut approuver séparément chaque projet, il est structurellement possible qu'au final une majorité rejette les décisions issues de ces scrutins. Pourtant Eerick Lagerspetz a démontré en 1996[100], que le *Paradoxe d'Ostrogorski* ne peut affecter que les démocraties représentatives, tandis que les democraties directes sont particulièremebt vulnérable au *Paradoxe d'Anscombe*. Boniface Mbih et AristideValeu ont également travaillé[113] sur les différences entre ces deux paradoxes.

---

programmatiques et $i = 4$ renvoi au vote de l'électeur) et la matrice de corrélation

$$R_1 = \begin{pmatrix} E(Y_1^jY_1^j) & E(Y_1^jY_2^j) & E(Y_1^jY_3^j) & E(Y_1^jY_4^j) \\ E(Y_2^jY_1^j) & E(Y_2^jY_2^j) & E(Y_2^jY_3^j) & E(Y_2^jY_4^j) \\ E(Y_3^jY_1^j) & E(Y_3^jY_2^j) & E(Y_3^jY_3^j) & E(Y_3^jY_4^j) \\ E(Y_4^jY_1^j) & E(Y_4^jY_2^j) & E(Y_4^jY_3^j) & E(4_1^jY_4^j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4a-1}{3} & \frac{4a-1}{3} & \frac{2a+1}{3} \\ - & 1 & \frac{4a-1}{3} & \frac{2a+1}{3} \\ - & - & 1 & \frac{2a+1}{3} \\ - & - & - & 1 \end{pmatrix}$$

4. En faisant varier a de $0,00$ à $1,00$, avec un pas de $0,10$, les auteurs on obtenu un maximum pour $a = 0,70$ avec $PA_3^0(0,70) = 0,0170$

5. En utilisant les résultats de Gehrlein, les auteurs ont obtenu que

$$PA_3^3(a) = \frac{1}{8}+\frac{3}{4\pi}\{\sin^{-1}(\frac{2a+1}{3})+\sin^{-1}(\frac{4a-1}{3})\}+\frac{3}{2\pi^2}\int_0^{\frac{2a+1}{3}}\sqrt{\frac{1}{1-z^2}}\{\sin^{-1}(\frac{4a-1-3z^2}{4a+2-6z^2})dz$$

et

$$PA_3^0(a) = \frac{1}{8}+\frac{3}{4\pi}\{\sin^{-1}(\frac{2a+1}{3})-\sin^{-1}(\frac{4a-1}{3})\}-\frac{3}{2\pi^2}\int_0^{\frac{2a+1}{3}}\sqrt{\frac{1}{1-z^2}}\{\sin^{-1}(\frac{4a-1-3z^2}{4a+2-6z^2})dz$$

6. Ces auteurs offrent une représentation alternative avec

$$PA_3^0(a) = \frac{3}{2\pi^2}\{\frac{2\cos^{-1}(\sqrt{\frac{2t+1}{8t+1}})}{\sqrt{2+2t-4t^2}} - \frac{\cos^{-1}(\sqrt{\frac{t+1}{2t+1}})}{\sqrt{2-t-t^2}}\}dt$$

1.2 Choix par rapport à l'offre électorale

1.2.1 Offre programatique et partis politiques

Bien que le principe d'égalité des candidats à une élection[133] soit un des principes fondamentaux des démocraties représentatives, l'égalité réelle entre les candidats n'existe pas : en dehors des dissidences d'un de leurs membres, depuis 1853 seuls les candidats Démocrates et Républicains sont en mesure de remporter l'élection présidentielle américaine, les candidats tiers n'ayant obtenus plus de 10% qu'en cinq occasions (John Cabell Breckinridge et John Bell tous deux en 1860 et tous deux en dissidence du Parti démocrate avec respectivement 18,1% et 12,6%, Théodroe Roossevelt en 1912 avec 27,4% en dissidence du Parti républicain, Robert M. La Follette en 1924 avec 16,6%, George Wallace en 1968 avec 13,5% en dissidence du Parti démocrate et Ross Perot[7] en 1992 avec 18,9%). Le scrutin majoritaire impose une bipolorisation de la vie politique des pays y ayant recours, à l'exception de particularisme locaux (dans le cas dans le cas du Canada, où le Bloc Quebecois a été le second parti à la Chambre des communes après les élections générales de 1993 ou dans le cas du Royaume-Uni où les Libéraux-Démocrates, qui étaient notament bien implantés en Écosse, ont été en mesure de former une coalition avec les conservateurs après les l'élections générales de 2010). Les recompositions du paysage politique sont relativement rares, les partis tiers jouant surtout le rôle de réceptacle temporaire d'une partie de l'électorat ne se retrouvant plus dans l'offre bipartisane classique. Ces phases sont souvent éphémère (Ross Perot passa perdit 11 658 527 voix entre 1992 et 1996, tombant à 8,4% des suffrages exprimés), du fait de la réactivité des partis qui modifient en conséquence leur discours afin de récupérer cette fraction de l'électorat leur échappant. Toutefois, il existe des situations où un troisième parti ou cartel électoral parvient à s'implanter durablement dans le paysage politique : c'est le cas en France du *Front National* qui depuis son irruption sur la scène politique en 1984, a capté durablement les voix de l'électorat d'extrême-droite (à l'exception de l'année électorale de 2007 où le candidat Nicolas Sarkozy parvint à capter une partie conséquente de l'électorat de Jean-Marie Le Pen au 1er tour puis au 2ème tour[112] de l'élection présidentielle) entrant en concurrence frontale avec les blocs électoraux successifs du RPR-UDF (*Union Pour la France*), puis de l'UMP-NC et enfin de LR-UDI pour l'électorat de droite comme l'a relevé Collette Ysmal en 1990[155].

D'après Joseph A. Schlesinger[144] les partis se définissent par la conquête du pouvoir, c'est-à-dire un système de coopération dans l'optique de conquérir des postes. À cette fin, chaque parti a recours à diverses procédés de propagande électorale afin de parvenir à fin, à savoir convaincre une majorité d'électeurs d'apporter leurs votes aux candidats du Parti. La concurence entre les partis politiques, est valable qu'ils soient rivaux ou alliés. Dans ce dernier cas de figure, les stratégies utilisés sont très particulières dans la mesure ou les partis alliés sont sensés s'entendre après la bataille électorale qui les aura départagé pour déterminer lequel assurera la direction de la coalition, amenant les partis à se

7. Ross Perot est le seul candidat indépendant majeur à l'élection présidentielle américaine à ne pas avoir été un dissident du Parti démocrate ou du Parti républicain.

lancer des coups en veillant à ce qu'ils ne soient pas fatales pour reprendre une expression d'un ancien ministre. Ce fut ainsi le cas de la rivalité/entente entre les deux grands partis de la droite française qu'étaient le RPR et l'UDF entre 1978 et 2002, dont l'une des illustrations fut *la bataille des comités* [8] lors de l'élection présidentielle de 1988[104]. De même les partis politiques eux-mêmes sont traversés par des luttes internes entre les différents courants ou *factions* les composants, que ceux-ci soient institutionnalisés [9] ou pas. La question de la place et du rôle de ces mouvements a été étudiée par Frank P. Belloni et Dennis C. Beller dans un article[20] de 1976 faisant principalement une synthèse des travaux de Valdimer Orlando Key Jr.[97], Joseph L. Nyomarkay[125], Richard Rose[137] et Raphael Zarisky[156][157][158], ainsi que d'Hugues Portelli [132] dans le cas des partis politiques français. Scott Morgenstern [10] dans un article 2001[120], s'intéressant au cas concrêt des partis politiques en Uruguay, et partant de l'hypothèse que les factions ne sont pas des regroupements éphémères d'intérêts partisans et électoraux au sein d'une formation politique, à l'inverse des auteurs précédement cités ainsi que Giovanni Sartori[143], souligne le rôle central du calendrier électoral dans les stratégies des différentes d'un parti politique, accentué par l'impossibilité pour le Président de se représenter [11], provoquant une forte incitation à la solidarité gouvernementale en début de mandat qui s'affaiblit progressivement en fin de mandat. Cette question du calendrier a également un poid considérable dans la vie politique des partis politiques britaniques, dans la mesure où l'absence de durée fixe aux mandats politiques internes des dirigeants, rend la vie de ceux-ci très aux résultats des élections générales : dans un article paru en 2015 Aurélie Duffy-Meunier[56] a ainsi souligné qu'une alternance politique à l'occasion des élections générales entraînent systématiquement des changements de leaderships, les chefs de parti battu démissionnant immédiatement après l'annonce de leur échec. Elle a également relevé l'inscription du processus de désignation des dirigeants conservateurs, libéraux et travaillistes (*Leadership election*) au Royaume-Uni dans le cadre d'un « régime de partis » maintenant le processus sous le contrôle de ces derniers et de leurs adhérents, par opposition aux élections primaires organisées aux États-Unis qui donnebt ce pouvoir directement aux électeurs ainsi qu'indi-

8. Lors de l'élection présidentielle de 1988, l'équipe de campagne de Jacques Chirac annonça le ralliement et soutiens de nombreux de la Droite et du Centre, sous-entendant ceux d'élus de l'UDF, à laquelle l'équipe de campagne de Raymond Barre ne put répondre, étant "prisonnière" du fameux code de bonne conduite que le candidat lui-même s'était imposé, interdisant d'accepter officiellement les débauchages, comme ceux des *Gaullistes pour Barre*.

9. En 2012, lors de leurs Congrès respctetifs, l'UMP et le PS ont chacun donner une représentation à leurs courants internes, par le biais du vote sur les motions d'orientation générale. Ainsi cinq des six motions en lice ont receuilli plus de 10% des suffrages des adhérents et obtenu une représentation au Conseil national de l'UMP : *La Droite forte - Génération France forte 2017* (27,77%), *La Droite sociale* (21,69%), *France moderne et humaniste* (18,17%), *Le Gaullisme, une voie d'avenir pour la France* (12,31%), *La Droite populaire* (10.87%) et *La Boîte à idées, la motion anti divisions !* (9.19%). De même quatre des cinq motions en lice ont dépassé le seuil des 5% des suffrages nécessaire pour être représenté au Conseil national du PS : motion n°1 : *Mobiliser les FranÃ§ais pour réussir le changement* (67,87%), motion n°3 : *Maintenant la gauche* (13,28%), motion n°4 : *Oser. Plus loin. Plus vite* (11,78%), motion n°2 : *Question de principes* (5,13%) et motion n°5 : *Toulouse, mon congrès* (1,36%).

10. Associate Professor at the University of Pittsburgh.

11. L'Uruguay est une république présidentielle avec séparation stricte des pouvoirs, où le mandat présidentiel n'autorise pas la réelection de son titulaire à l'inverse des mantates de députés et de Sénateurs.

rectement aux groupes de pression et confient leurs organsations prioritairement aux autorités des États fédérés (*Primary election*) et très résiduellement aux partis politiques (*Caucus*) : cette distinction trouve son explication dans le poids des parlementaires dans le système de Westminster, conditionnant l'existence du Gouvernement, par opposition au système américain où le pouvoir éxécutif du Président existe presque indépendamment [12] par rapport aux membres du Congrès. Cette question du maintien ou de la perte d'influence du parti dans le processus de désignation de ses dirigeants et de ses candidats existe également pour les régimes à mi chemin entre le système de Westminter et le régime présidentiel américain. Ainsi, en France, pays caractérisé par un régime parlementaire dualiste, une distinction commence à s'opérer entre le choix des premiers, relevant des logiques propres au fonctionnement interne des partis politiques (désignation du Premier secrétaire national du Parti socialiste ou du Président du Parti les Républicains), et celui des seconds, relevant de logique plus externe (élections primaires présidentielles ouvertes conditionnellement à l'ensemble des électeurs français organisées par les coalitions PS-PRG et LR-UDI). Dans un article publié en 2015[64] Matthias Fekl avait pointé l'évolution des structures partisannes classiques qui pourraient passer d'un rôle de moteur décisif de l'action politique à un rôle d'organisateur des processus de désignation des candidats politiques. Florence Haegel avait relevé[79] que le processus de mises en place des élections primaires, en particulière concernant la Droite et le Centre, s'inscrivait d'un paysage politique moins marqué par le bipartisme qu'outre-Atlantique (existence de deux coalitions électorales fortes en plus des deux partis traditionnels : le Front national concurrençant fortement Les Républicains et le cartel des partis du Front de Gauche concurrençant de manière non négligeable le Parti socialiste) donnant au processus pour objectif réel de qualifier les candidats des deux partis traditionnel pour le second tour de l'élection présidentielle, en s'appuyant sur la mobilisation anticipée massive des électeurs.

La question de la compréhension de l'offre politique par l'électeur donne un rôle central à la notion de parti politique. Pierre Avril indiquait en 2015[9] à leur adresse que ceux-ci ont pour vocation de réaliser la liaison entre la société et l'État, en étant des associations privées assurant une mission d'intérêt public par leur contribution tant au déroulement du processus électoral qu'à l'élaboration de programmes politiques. Une analyse rejointe en partie par Yves Mény la même année[114] qui pointe les différences structurelles entre les systèmes politiques français et américains et de la différenciation des effets induits par l'importation de la procédure des primaires présidentielles ouvertes. Concernant leur rôle naturel de machine électorale, il faut noter une certaine évolution dans leur organisation interne et leurs dispositifs externes pour gagner les élections. En effet, originellement les partis politiques étaient avant tout d'abord des *«clubs»* réunissant des notables avant d'être des partis, au sens actuel du terme, et étaient (et d'une certaine manière sont encore aujourd'hui [13]) dirigés par les

12. Une des particularités du système de «check and balances», est le *Presidential Appointment with Senate confirmation* (PAS), obligeant notamment le Président pour nommer chaque secrétaire de son cabinet à obtenir l'approbation de la Comission sénatoriale (*Committe*) concernée par les affaires du département concerné.

13. En mai 2014, à l'exception notable de l'Italie, les dirigeants des principaux partis politiques européens sont tous soit parlementaires nationaux (Sigmar Gabriel, Président du

élus. Du fait de la rapide évolution de la vie politique et des mécanismes électoraux, les partis politiques se sont adaptés en se transformant, tout d'abord en formations militantes, puis en formations d'adhérents, accordant progressivement à leur base le droit de vote sur la direction des affaires du Parti [14]. Concernant la désignation des instances, jusqu'au milieu des années 1990, la plupart des Partis politiques français, faisaient désigner leur chefs soit par leur *«parlement»* (Comité Central au R.P.R. de 1975 à 1990, Comité directeur au P.S. de 1971 à 1992, Conseil national au P.S. depuis 1992) soit par les délégués désignés lors du renouvellement général (l'appelation *«Assise»* était utilisée pour l'UDR puis le RPR, l'appelation *«Congrès»* étant désormais par tous les partis politiques actuels importants), avant qu'un processus de désignation directe ne s'impose. C'est ainsi que les structures partisanes sont passées du processus de désignation du Chef de Parti valant pour désignation du candidat à la direction de la coalition parlementaire majoritaire ou à l'élection présidentielle, à l'instar du chef du Parti conservateur du Royaume-Uni (*Conservative Party*)[91] jusqu'en 1998 [15] ou du Premier secrétaire du Parti socialiste français jusqu'en 1995[37], au système dissociant ces deux processus avec une désignation par les seuls adhérents d'un parti (décrite sous l'appelation de *primaires fermées*), à l'instar de l'élection primaire présidentielle française du Parti socialiste de 1995 et 2006[55], ou l'ensemble du corps électoral se déclarant en phase avec un parti (appelées aussi *primaires ouvertes*), à l'instar des élections primaires organisées en Italie par la colation de l'Olivier (*L'Ulivo*) puis par celle du Parti Démocrate (*Partito Democratico*) et ses alliés en 2005, 2007, 2009, 2012 et 2013. Dans un article de

Sozialdemokratische Partei Deutschlands, et Angela Merkel, Présidente de la *Christlich Demokratische Union Deutschlands*, pour l'Allemagne ; Mariano Rajoy, Président du *Partido Popular*, pour l'Espagne ; Jean-Christophe Cambadélis, Premier secrétaire du Parti socialiste, et Jean-François Copé, Président de l'Union pour un Mouvement Populaire, pour la France ; Nick Clegg, Leader des *Liberal Democrats*, David Cameron, Leader du *Conservative Party*, et Ed Milliband, Leader du *Labour Party*, pour le Royaume-Uni) soit eurodéputés (Juan Fernando López Aguilar, Secrétaire général du *Partido Socialista Obrero Español*, pour l'Espagne ; Marine Le Pen, Présidente du Front National, pour la France ; Nigel Farage, Leader du *United Kingdom Independence Party*, pour le Royaum-Uni)

14. À titre d'exemple, voici la composition des organes centraux de l'U.D.R. entre 1975 et 1977[126] :

Membres	Conseil national		Comité central		
	1973	1975	1973	1975	1977
De droit	50	25	18	10	2
Nommé par le Secrétaire Général ou le Président	15	0	0	0	31
Élus par le Comité Central	15 max	0	0	0	0
Élus par les parlementaires	0	0	34	35	18
Élus par les Assises	20	75	48	55	49

15. Jusqu'à l'election de 1997, le chef du Parti conservateur était désigné par les seuls députés conservateurs : pour être élu au 1er tour un candidat devait receuillir suffisament de suffrages pour que l'écart avec son principal concurrent représente au moins 15% de l'ensemble du groupe des députés conservateurs (abstentionnistes compris) : c'est ainsi qu'il manqua 4 voix à Margaret Thatcher pour remporter le 1er tour de l'élection de 1990, en ne reccueillant que 204 suffrages contre 152 pour son seul adversaire Michael Heseltine et 16 abstention, sur un groupe de 372 députés. Après la réforme de 1998, les députés votent lors de plusieurs tours de scrutin, au cours desquels est à chaque fois éliminé le candidat recevant le moins de suffrages, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus que 2. Ceux-ci sont ensuite départagés par lors d'un scrutin auquel prennent part l'ensemble des militants du Parti Conservateur.

2008, Ofer Kenig[95] relève que l'élargissement du corps électoral entraîne une réduction de la compétitivité dans une élection pour la désignation du Chef de Parti ou du candidat au poste de Chef du Gouvernement (ou de Président de la république dans le cas des élections primaires nationales organisées par les partis politiques français), l'inégalité de moyens entre les candidats déterminant le résultat de l'élection avec un coprs électorale immense, c'est-à-dire que l'égalité des chances des candidats disparaît au fur à mesure que le corps électoral augmente, rendant décisifs le contrôle des moyens financiers et médiatiques pour remporter la compétition. Dans une présentation[96] devant la *Canadian Political Science Association Annual Conference*, Koenig a également montré que le processus d'élargissement du corps électoral désignant directement le chef d'un Parti tendait, dans le cas du Canada entre 1967 et 2009, à ne pas s'inverser, à l'exception du Parti progressiste-conservateur du Canada [16] (*Progressive Conservative Party of Canada*), depuis une vingtaine d'années, de moins en moins de partis laissant le processus à une Convention, à un Congrès, à leur instance dirigeante centrale ou à leur groupe de parlementaires. Toutefois, le recours aux élections primaires, qu'elles soient fermées [17], partiellement ouvertes [18], ou complètement ouvertes [19], a des effets différents sur les partis politiques, selon que le régime politique soit un système présidentiel (comme au Chili) ou un système parlementaire (comme en Italie). Pierre Avril pointait[9] le fait que celles-ci, par la place qu'elles occupent dans l'agenda politique, affectent l'exercice des fonctions, nécessairement liées, électorales et programmatiques à partir de l'instant où la compétition pour la désignation des candiats l'emport sur l'élaboration du programme de gouvernement que ceux-ci aspirent à assumer. Une distinction est relevée par Julie Benetti, dans un article publiée la même année[21], sur le calendrier adopté selon que l'élection primaire intervienne dans un régime parlementaire (en début de mandat juste après l'election générale, à l'image des partis politiques britaniques) ou présidentiel (en fin de mandat, quelques mois avant l'élection générale comme cela se pratique depuis longtemps aux États-Unis et depuis quelques années en France). Dans un article de 2013[90], Indriõi H. Indriõason [20] et Gunnar Helgi Kristinsson [21] ont étudié le cas des élections primaires en Islande et leurs travaux tendent à indiquer un faible effet de *«de-institutionalization»* des partis politiques avec le maintient d'une cohésion forte au sein des groupes parlementaires des différents formations politiques repésentées à l'Althing. Leur analyse se base sur l'évolution de l'engagement partisan : du fait des changements de financement des partis politiques, ceux ne repose plus sur les cotisations de leurs adhérents, rendant moins intéressant les adhérents que les sympathisants participant à une élection primaire. De fait la participation aux primaires y constitue désormais le critère d'appartenance partisane, qui ne comporte cependant pas

16. Après avoir institué une élection primaire interne en 1998 afin de désigner son chef, le Parti progressiste-conservateur du Canada a de nouveau utilisé une convention en 2003, comme ce fut le cas en 1998.

17. L'élection primaire présidentielle française de l'Union pour un Mouvement Populaire du 2 au 14 janvier 2007.

18. L'élection primaire présidentielle française organisée par le Parti socialiste et du Parti Radical de Gauchee le 9 et le 16 octobre 2011.

19. Les élections primaires ouvertes repésentaient 5% des procédures de sélection employées par les partis politiques islandais en 2009.

20. University of California, Riverside

21. University of Iceland

une implication dans la vie interne des mouvements politiques, dont notamment la participation à l'organisation politique interne. Toutefois la faible taille de la population du Pays (321857 habitants au 1er janvier 2013 [22], soit moins que le nombre d'adhérents revendiqués par l'U.M.P. à la même époque [23]) incite à relativiser ses résultats.

Lors du XXII^{ème} Congrès mondial de l'*International Political Science Association*, Enrico Calossi et Eugenio Pizzimenti ont abordés la question du degré de centralization des procédures de sélection des candidats en s'appuyant sur le cas de l'Italie[32]. Marco Lisi [24], dans un article publié en 2010[106], s'appuyant sur les expériences des trois grands potilitiques portugais, le Parti Socialiste (*Partido Socialista*), le Parti Social-Démocrate (*Partido Social Democrata*) et le Centre Démocrate Social-Parti Populaire (*Partido do Centro Democrático e Social - Partido Popular*), a souligné que l'introduction de réformes visant à aggrandir la base du corps électoral chargé de désigner le chef d'un parti, était principalement motivé par une stratégie de conquête du pouvoir interne, par le reversement de la coalition dominant la direction de l'appareil partisan : de ce fait la réussite de telles réformes fut la conséquence presque exclusive de la volonté de l'élite des partis, indépendement des souhaits de la base militante. Marco Lisi en a conclu par ailleurs, qu'une ouverture du corps électoral chargé de la sélection du chef du parti n'augmente ni sa responsabilité ni la reddition de comptes. Il est intéressant de relever que ce mouvement d'élargissement du corps électoral ne concerne que les instances exécutives (présidence du parti), processus de désignation marqué par une forte personnification de la campagne interne, et en aucun cas les parlements internes, dont les processus de renouvellement sont beaucoup moins médiatisés : à titre d'exemple, l'élection très médiatisée de Jeremy Corbyn à poste de Chef (*Leader*) du Parti travailliste du Royaume-Uni le 12 septembre 2015, a complètement occulté la désignation des délégués au parlement interne du parti, appelé *Labour Party Conference*, qui s'est réuni du 27 au 30 septembre 2015.

Certains cas particuliers sont à noter : ainsi dans certains partis, alors qu'il n'y a pas de distinction entre les deux mécanismes de désignation, il est possible que le processus ne serve qu'à désigner le Chef du Parti, comme dans le cas de l'élection pour la Présidence du R.P.R. en 1999[54]. Il est à remarquer que l'*Union pour un Mouvement Populaire*, parti successeur du *Rassemblement pour la République*, laissera la fonction vacante entre 2007 et 2012 lorsque son second président, Nicolas Sarkozy (2004-2007), siégea à l'Elysée. Cette pratique fut par ailleurs pérénisée par son inscription ultérieure dans l'article 48 des statuts [25] de

22. Voir le site de *Statistics Iceland* : www.statice.is

23. Le 18 novembre 2012, l'Union pour un Mouvement Population renvendiquait 324945 adhérents.

24. Institut of Social Sciences - University of Lisbon.

25. Article 48 des statuts de l'**Union Pour un Mouvement Populaire** adopté lors du Congrès des 28, 29 et 30 juin 2013 :

- Pendant la durée du quinquennat, la direction de l'UMP est assurée par :
  - Un Secrétariat général composé d'un Secrétaire Général et de deux Secrétaires Généraux Adjoints, élus pas le Bureau Politique sur un même bulletin de vote et révocables par celui-ci. Le Secrétaire Général assure la Présidence des travaux du

l'ancien parti, reprennant en cela la pratique héritée des formations Gaullistes à l'instar de l'*Union des démocrates pour la République* (U.D.R.) de considérer le Président de la République comme le véritable Chef du Parti, le Premier ministre étant le chef de la majorité parlementaire, et de confier l'administration de celui-ci à un Secrétaire général[126]. Par ailleurs au-delà de la conquête du pouvoir, il y a la problématique du «vivre ensemble» au sein d'une même formation pour des personnes ayant des parcours, des formations et des philosophies différentes : en cela l'exemple des forces centrifuges ayant conduit à la marginalisation de l'*Union pour la Démocratie Française* (U.D.F.) avec la scission de *Démocratie libérale* (D.L.), ou les difficultés rencontrés par la coalition du *Front de Gauche* (F.G.) rappelle que la conquête du pouvoir n'est pas un objectif assez fort pour maintenir une coalition électorale. L'étude[78] par Florence Haegel de la création en 2002 de l'U.M.P., réunissant le R.P.R., la D.L., la majeure partie des cadre de l'U.D.F., et plusieurs petites formations de la Droite française (*Parti radical valoisien*, *Debout la république*, *Mouvement pour la France*, *Rassemblement pour la France*, *Forum des républicains sociaux*, *Ecologie Bleue*, etc.), soulève les enjeux et les réponses pour rendre cette entreprise péreine.

Partis politiques aux États-Unis Lawrence Kay s'est intéressé, dans un article[103] publié en 1992, aux transformations ayant affecté les partis politiques aux États-Unis durant le XX^{ème} sciècle et ayant amené l'idée d'un certain déclin de ceux-ci. Son analyse a identifié trois phénomènes ayant altéré la place occupée par les partis politiques au sein de la société américaine. Tout d'abord il a relevé la fin du rôle d'intermédiaire (*linkage*) qu'assuraient ceux-ci entre les citoyens et les institutions, avec notament l'augmentation de l'intervention de l'Etat dans la société (mise en place de programmes sociaux) et la fin du recrutement partisan aux emplois gouvernementaux (système des dépouilles ou *spoils system*) : les formations politiques entretenaient une sorte de clientèle leur assurant en retour leur votes [26]. Il a également pointé les évolutions sociologiques et géographiques des électeurs, notamment lors de la Grande Dépression (*Great Depression*) qui provoqua d'importantes migrations internes aux États-Unis, notamment celle au départ des États du Sud et des États non industriels pour les États du Nord ou la Californie, qui provoquèrent également des pertes de part de lélectorat, les composantes d'un même parti politique étant très différentes d'un région à une autre : ainsi des électeurs démocrates d'Alabama ayant migré en Californie, ne retrouvàient plus les mêmes valeurs dans le Parti démocrate

  Bureau Politique et l'exécution de ses décisions. Il représente l'Union dans tous les actes de la vie civile.
  - Un Bureau du Conseil National, composé d'un premier vice-président et de deux vice-présidents, élus par le Conseil National sur un même bulletin de vote et révocables par celui-ci. Le premier vice-président assure la présidence des travaux du Conseil national.
- Ces deux instances réunies forment la direction de l'Union.

26. Ce type de système existe encore dans certaines démocraties récentes comme l'Afrique du Sud, où le Parti dominant, l'*African National Congres*, s'assurent de ce que ses électeurs se déplacent réellement aux urnes en installant à l'entrée des bureaux de vote des points de comptage, le fait d'être noté comme compté assurant aux électeurs de l'ANC le maintien de certains de leurs avantages sociaux.

local tout refusant de voter pour le parti républicain. Enfin Lawrence Kay a signalé l'impact des différentes lois anti-partis, adoptées dans la plupart des États américains depuis le premier quart du XX^{ème} sciècle, qui ont fortement affaiblit les partis politiques (interdiction pour un candidat à une élection local d'être soutenu par un parti, forte restriction à la création d'un parti politique, régulation de leur organisation interne) sans pour autant mettre fin à corruption : l'une des plus importantes a été l'obligation d'organiser des élections primaires ouverte à tout le corps électoral afin de désigner le candidat d'un parti à une élection, qui a transféré le pouvoir de la direction politique aux groupes d'intérêt disposant seuls des ressources financières suffisantes pour influencer le résulat de la consultation. Thomas Hochmann, dans un article de 2015[87], détaille l'évolution des processus de désignation des candidats aux différentes élections, marqués par une double volonté de rendre plus ouvert un processus essentiellement perçu comme presque aristocratique et de lutter contre la corruption des élus, pas l'élimination du pouvoir discrétionnaire de sélection des chefs locaux des partis (les *bosses*), avec l'instauration au début du XIX^{e} siècle des assemblées de militants *caucuses*, puis la mise en place au début du XX^{e} siècle des élections primaires qui connurent une très rapide extensiosn au point que 44 des 48 États de l'Union y avaient recours en 1917. L'extension du processus à la désignation des candidats à la présidence des États-Unis fut différente du fait du caractère indirecte de l'élection présidentielle, avec les passages de la désignation par le club politique fermé de l'élite du parti (désignés *Congressional Caucus*) dans les proverbiales pièces emplies de fumée de cigare de Washington (les *smoke-filled rooms*), aux conventions nationales à partir de la seconde moitié du XIX^{e} siècle avant la mise en place éphémère des premières élections primaires dans dix États (dont seulement deux les organiseront deux décennies après) sous l'impulsion du mouvement progressiste de Robert La Follette, gouverneur du Wisconsin, pour les élections 1912. Les élections primaires pour la désignation du candidat à l'élection présidentielle finirent par s'imposer progressivement entre 1952 et 1980. Toutefois le système demeure très hétérogène : comme l'ont relevé François Durpaire et Hélène Harter, dans un article[57] publié au moment de la période de désignation des candidats démocrates et républicains à l'élection présidentielle de 2008, aux côtés des *caucuses*, encore utilisés cette année par 19 États, se déroulent des élections primaires différents selon l'électorat concerné, c'est-à-dire des « primaires fermées » - strictement réservées aux membres du parti, c'est-à-dire les électeurs inscrits en tant que tels -, des « semi-fermées et semi-ouvertes » - réservées aux électeurs inscrits auprès du parti concerné ainsi que les électeurs indépendants - et des « primaires ouvertes » (*cross over primary*) - ouvertes à l'ensemble des électeurs sans disctinction -, et selon la nature même de la consultation : « primaire pour la sélection des délégués » [27] (*delegate selection primary*), « primaire consultative » [28] (*advisory primary*), « primaire échappatoire » [29] (*loophole primary*), « primaire majoritaire » [30] (*winner-take-all*

27. Système dans lequel les électeurs choisissent uniquement les délégués, individuelement, et non le candidat final.

28. Système dans lequel la composition de la délégation d'un état ne tient pas compte du résultat du vote.

29. Système permettant au délégués désignés de ne pas tenir compte du résultat du vote au moment de la Convention nationale.

30. Système allouant la totalité des délégués d'un état au candidat arrivé en tête du vote.

primary), « primaire majoritaire par district »[31] (*winner-take-most primary*), « primaire proportionnelle » (*proportional primary*)[32] ou « primaire bonus »[33] (*bonus primary*). Les auteurs ont également noté le poids des médias nationaux américains, qualifié de « vrais faiseurs de roi » (*the real kingmakers*), par leur capacité à influencer la perception des candidats par les électeurs, jouant un rôle déterminant dans l'élan poussant un candidat vers la victoire (*« momentum »*), les médias ayant dans le processus des primaires un intérêt marqué en faveur d'une compétition indécisive la plus longue possible.

Toutefois, le système employé à la fois par le Parti démocrate et le Parti républicain lors de leurs élections rimaires présidentielles respectives permet le maintien d'une certaine influence de l'état major de ces partis avec la présence d'un certain nombre de superdélégués (*«unpledged delegates»*) : il s'agit des grands élus de chaque partis. Ainsi en 2008, il y avait 463 (19.45%) superdélégués sur le total des 2380 délegués des Primaires présidentielles républicaines et 823.5 (18.82%) superdélégués sur le total des 4376 délégués des Primaires présidentielles démocrates. Dans le cadre des Primaires démocrates de 2008, les superdélégués incluaient les Gouverneurs (26.5), les Sénateurs (49.5), les Représentants (231.5), les membres du Comité national (414), les *Distinguished Party Leaders* (19.5 dont les anciens présidents et vice-présidents des États-Unis, les anciens présidents de la Chambre des repésentants, les anciens président *pro tempore* du Sénat et les anciens présidents du Parti). Dans un article[138] publié en 2011 Josh M. Ryan a suggéré que, contrairement aux commentaires de nombreux médias qui les accusaient d'être un système anti-démocratique ne tenant pas compte de la vote issue des Primaires, les électeurs ont joué un rôle central dans le choix des superdélégués.

Dans un autre article[81] publié en 2012, Richard Hardy, professeur en Sciences politiques à la Western Illinois University, a identifié les dix paradoxes affectant les partis politiques américains, mettant en avant leur importance dans le processus de choix politique de l'électeur. Bien que son analyse soit focalisée sur l'exemple particulier du système politique américain, certains éléments ont une porté plus générale et sont transposables à d'autre systèmes partisans que la Démocratie américaine. Ces paradoxes sont résumés ainsi :

1. *Bien que les partis politiques jouent un rôle essentiel au sein du gouvernement américain, il n'y a aucune mention d'eux dans la Constitution des Etats-Unis.*[34]
2. *Les auteurs de la Constitution n'aimaient pas les partis politiques, mais dépendait d'eux pour forger votre jeune gouvernement.*[35]
3. *Alors que les partis politiques ne sont ni planifiées ni vénérés par nos*

31. Système découpant l'état en autant de circonscriptions qu'il y a de délégués alloué à ce niveau au scrutin majoritaire

32. Système allouant les délégués proportionnellement aux scores réalisés par les candidats.

33. Système réservant une partie des délégués au candidat arrivé en tête du scrutin, lorsque ceux-ci sont attribués à la proportionnelle des résultats obtenus par les candidats.

34. *Although political parties play a vital role in American government, there is no mention of them in the Constitution on the United States.*

35. *The Framers of the Constitution disliked political parties but depended upon them to forge your fledgling government.*

Fondateurs, il est douteux que notre Constitution pourrait durer sans eux.[36]

4. *Les partis mineurs ou arrivant en troisième position obtiennent rarement des victoires électorales, mais ils ont un rôle vital dans la vie politique américaine.*[37]
5. *Bien qu'il existe des dizaines de partis politiques américains mineurs, il est difficile de d'établir une typologie partisane efficace.*[38].
6. *Malgré la prolifération des petits partis politiques, les États-Unis ont toujours maintenu un fort système à deux partis.*[39]
7. *Les Démocrates et les Républicains sont à la fois similaires et différents.*[40]
8. *L'Amérique est connu comme étant un système bipartisan, mais il y a 50 partis démocrates et 50 partis républicains.*[41]
9. *Les partis politiques sont des organisations privées, semi-publiques.*[42]
10. *Les partis politique ont joué un rôle critique dans l'histoire constitutionnelle américaine bien qu'ils soient souvent décriés.*[43]

1.2.2 La compréhension du système électoral par l'électeur

Dans une interview[33], donnée à *The Telegraph* le 30 avril 2011, le Premier ministre britannique David Cameron insistait sur l'importance de conserver le scrutin uninominal majoritaire à un tour utilisé pour élire les députés à la Chambre des communes en appelant à rejeter le projet d'instauration du vote alternatif soumis par référendum aux électeurs britaniques le 3 mai 2011. L'une de ses quatre raisons, avec l'efficacité, l'efficience et l'histoire, était la simplicité[44] : en effet, selon David Cameron, un scrutin utilisant le vote alternatif serait incompréhensible pour l'électeur, en plus d'être injuste. Néanmoins dans un article[60] publié deux ans avant cette assertion du Premier ministre britannique, Etienne

36. *While political parties were neither planned nor revered by our Founders, it is doubtful our Constitution could last without them.*

37. *Minor or third political parties rarely score electoral victories, but they play a vital role in American politics.*

38. *While there are scores of minor American political parties, it is difficult to establish an ironclad party typology.*

39. *Despite the proliferation of minor political parties, the United States has consistently maintained a strong two-party system.*

40. *Democrates and Republicans are both similar and different.*

41. *America is known as a two-party system, but there are at least 50 Democratic parties and 50 Republicans parties today.*

42. *Political parties are private, semi-public organizations.*

43. *Political partis have played a critical role in American constitutional history, yet they are often vilified*

44. *The first is its simplicity. It's so simple it can be summed up in one sentence : the candidate who gets the most votes wins. Just compare that to AV : a confusing mess of preferences, probabilities and permutations. Leaving aside the clear danger that this complexity could encourage negative campaigning - as in Australia, where voters are greeted at polling stations by party apparatchiks with "How to Vote" cards, telling people the exact order in which to rank each candidate - it would also throw up some patently unfair results. Under AV, the person who comes third in people's first preferences can end up coming first in the race. It makes winners of losers and losers of winners. The result could be a Parliament full of second-choices who no one really wanted but didn't really object to either.*

Farvaque, Hubert Jayet et Lionel Ragot on montré que le critère de simplicité, ainsi que celui de sélection, du vainqueur de Condorcet peut être vérifié avec le vote préférentiel transférable : ils ont comparé, lors d'une expérience naturelle réalisée au moment de l'élection présidentielle française, qui s'est déroulée les dimanche 22 avril et 6 mai 2007, les votes des électeurs dans deux bureaux de vote selon qu'ils utilisent le scrutin uninominal majoritaire à deux tours (en vigueur pour l'élection présidentielle) ou le vote préférentiel transférable, avec deux méthodes de dépouillement différentes (Hare[45] et Coombs[46]). L'expérience a montré que les électeurs sont en mesure de comprendre un scrutin réputé plus complexe que le scrutin uninominal majoritaire. Une expérience similaire[102], portant cette fois sur le vote par assentiment, réalisée par Jean-François Laslier et Kraine Van der Straeten lors de l'élection présidentielle française de 2002 avait également montré la capacité des électeurs à comprendre et utiliser un mode de scrutin différent du scrutin uninominal majoritaire à deux tours, mais également une certaine demande d'un scrutin leur permettant d'exprimer un peu plus leurs préférences et de ressentir un peu moins la pression du *«vote utile»* lié au mécanisme d'élimination de tous les candidats en dehors des deux plus importants qu'induit le scrutin uninominal majoritaire à deux tours. Dans un article[17] publié en 2009, une expérience a été menée lors de l'élection présidentielle française de 2007 par Antoinette Baujard et Herrade Igersheim cette fois ci sur le vote par note et le vote par approbation : les résultats ont dégagé une expression supérieure des électeurs avec ces deux modes de scrutin expérimentaux qu'avec le scruntin uninominal majoritaire à deux tours employé pour l'élection présidentielle en France. L'expérience a également indiqué une tendance des scrutins testés à favoriser les candidats les plus consensuels, là où le scrutin en vigueur favorise les *candidats plus marqués politiquement.* L'expérience fut renouvellée lors de l'élection présidentielle de 2012 et détaillée dans un article[15] publié en 2013, démontrant la capacité des électeurs y participant à s'approprier les deux modes de scrutins, et révélant également un désir du coprs électoral testé d'une plus grande liberté d'expression que celle permise par le scrutin officiel. Par ailleurs comme lors de l'expérience de 2007, des candidats considérés comme «petits» au regard du scrutin uninominal à deux tours, peuvent en fait susciter une réelle adhésion avec les deux autres modes de scrutins. Toutefois François Allisson et Nicolas Brisset ont souligné, dans un article[4] publié en mars 2014, le problème de l'*isolation informationnelle* des électeurs lors de l'expérience mené en 2012, ce qui peut tendre à ne pas restituer le véritable comportement qu'ils auraient eu si les modes de scrutins testés avaient ceux effectivement en vigueur lors de l'élection : autrement l'absence de vote utile (ou d'insincérité) de la part des électeurs observé avec l'emploi de ces deux modes de scrutin peut relever de cet environnement et non de la structure même de ces scrutins. Une réponse[16] au commentaire d'Allisson et Brisset fut apportée, tempérant l'isolation informationnelle pointée, par le fait que l'éxpérimentation a été précédée par une phase de communication afin de préparer les électeurs.

45. La méthode de Hare élimine au fur et à mesure les candidats ayant reçu le moins de vote les classant en premier

46. La méthode de Coombs élimine au fur et à mesure les candidats ayant reçu le plus de vote les classant en dernier

Les partis politiques étant rarement en capacité de conquérir seul le pouvoir, sauf à être des partis *attrappe-tout*, mouvement amorcé les partis politiques confronté à un scrutin ayant recours totalement (scrutin uninominal majoritaire [47]) ou partiellement (scrutin proportionnel avec prime majoritaire [48]) à une logique majoritaire, couvrant un large spectre politique et très hérérogènes [49] car parcouru par des forces antagonistes, ceux-ci doivent avoir recours à des coalitions pour espérer l'emporter. On peut ainsi signaler en France les coalitions électorales, principalement pour les élections législatives, du P.S. et du P.C.F. au sein de l'*Union de la gauche* (1972-1977) et du R.P.R. et l'U.D.F. au sein de l'*Union pour la France* (1992-1995), qui pour exister ont formellement mis au point des programmes communs de gouvernement et des candidatures communes (où des accords de désistement en faveur du candidat de la coalition le mieux placé à l'issue du premier tour). Ils peuvent d'ailleurs être conclus après l'élection et ne porter que sur la répartition des mandats, comme dans le cas extrême de la « Formule magique », expression employée pour désigner en Suisse la répartition entre 1959 et 2003 des sept sièges au sein du Conseil fédéral entre l'ensemble des forces politiques représentées à l'Assemblée fédérale (parlement de la Confédéation helvétique regroupant le Conseil national, dont les membres sont élus au scrutin proportionnel dans des circonscriptions correspondant aux cantons, et le Conseil des états, dont les membres sont élus principalement avec des scrutins majoritaire [50]. Dans ce cas très particulier, étudié par Elie Burgos, Oscar Mazzoleni et Hervé Rayner dans un article[30] publié en 2009, les citoyens helvétiques savaient que le Gouvernement fédéral, bien que son fonctionnement repose sur une architecture inspirée du Directoire français (1795-1799) où ses membres sont élus par les parlementaires au scrutin uninominal majoritaire, reflèterait dans une certaine mesure les rapports de forces politiques existant au Parlement fédéral.

Ces accords se déclinent également au niveau local sous la forme de contrats de coalition [51], comme les six contrats de coalition, passés entre communistes, socialistes et leurs alliés minoritaires (radicaux de gauche et écologistes) entre 1977 et 2008 pour diriger la commune de Calais, étudiés la même année par Nicolas Bué dans un article[25] où l'auteur à relevé le besoin de garanties renforcées et écrites pour les différents acteurs de la coalition [52]. Ces accords, désormais en

47. Cas des États-Unis où les Démocrates et les Républicains regroupent, depuis 1856 où participait pour la première le GOP, à l'élection présidentielle au minimum 65% des suffrages exprimés (1912).

48. Ainsi en Italie, en réaction à l'introduction d'une prime majoritaire lors de l'élection aux deux chambres du parlement italien (la *Camera dei deputati* et le *Senato della Repubblica*) ont été fondés le *Partito Democratico* en 2007 et le *Il Popolo della Libertà* (2009-2013) afin de regrouper les différents composantes respectivement du centre-gauche et du centre-droit.

49. Ainsi en allait-il sur la question européene de l'U.M.P. (2002-2015), parti politique composés de plusieurs courants politiques, reprenant les contours des partis politiques fondateurs de l'union, allant du centre-droit europhile (*Parti radical valoisien*, *Démocratie libérale*, *Convention démocrate*, *Écologie bleue*) à la droite souverainiste eurosceptique (*Forum des républicains sociaux*, *Rassemblement pour la France*, *Mouvement pour la France*, *Debout la république*).

50. Le système électoral utilisé pour l'élection des conseillers aux Etats est déterminé par chaque canton.

51. Ces accords ont trois types de fonction : communication, éloboration de l'agenda et résolution des conflits.

52. Bué Nicolas, « Les accords de coalition dans une municipalité d'union de la gauche.

grande partie écrit et public[53], permettent aux électeurs de connaître les objectifs programmatiques de la coalition à laquelle s'est joint le parti (ou la liste dans le cas d'alliance d'intérêts locaux) auquel ils apportent habituellement (cas des électeurs socialistes depuis 1977 ou des écologistes à partir de 1995) leurs voix. Dans un autre registre, ils servent de moyen de pression aussi aux différents partenaires de coalition afin d'obtenir la réalisation d'un élément phare de leur positionnement politique (la journée sans voiture obtenu en 1998 par les écologistes) ou afin de préserver leur intérêt (le retrait de délégation en 2000 d'une élue ayant démissionné du P.R.G.).

1.3 Fonction d'agrégation

1.3.1 Paradoxe du référendum

Un paradoxe du référendum est la situation particulière où le vainqueur du vote populaire, dans le cas d'un scrutin faisant intervenir un découpage du coprs électoral en plusieurs circonscriptions désignant chacune un représentant participant à l'élection finale. Cette situation paradoxale s'est produie récement France à l'occasion des élections départementales des 22 et 29 mars 2015 dans le Val-de-Marne, même si d'autres exemples historiques peuvent citer comme les élections à la Chambre des représentants des États-Unis de 2012 (ainsi que cellesde 1942, 1952 et 1996). ou l'élection présidentielle américaine de 2000 (ainsi que celles de 1824, 1876 et 1888). On peut également citer les cas des éléctions générales britanniques des 29 juillet et 26 août 1847, des 7 et 31 juillet 1852, du 31 janvier au 17 février 1874, des 1ᵉ et 27 juillet 1886, des 15 janvier et 10 février 1910, des 3 et 19 décembre 1910, du 30 mai 1929, du 25 octobre 1951 et du 28 février 1974 qui ont pour particularité de ne pas être aussi contrainte par les délimitations administratives internes du pays (celui-ci comprenant 4 entités constitutives à l'inverse des États-Unis qui en comptaient déjà 24 en 1824, 38 en 1876 et 1888, 48 en 1942 et 1952 et 50 en 1996, 2000 et 2012). A ce propos, il est à noter que l'admission éventuelle de Porto-Rico dans l'Union est apprécié diversement par la classe politique américaine du fait des impacts éventuels sur le corps électoral, les républicains craignant un déséquilibre en leur défaveur du fait de l'importance des électeurs démocrates portoricains. Si Hannu Nurmi a décrit une première fois le phénomène en 1997 dans « *Compound majority paradoxes and proportional representation* »[123], en le décrivant tout d'abord comme d'un paradoxe de la représention, c'est en 2001 que dans « *Voting Paradoxes and How to Deal with Them* »[124] qui le désigna en tant que paradoxe du référendum. En 2011, Dominique Lepelley, Vincent Merlin et Jean-Louis Rouet ont publié un article[105], intitulé « *Three ways to compute accurately the probability of the referendum paradox* », qui comme celui-ci l'indique présente trois méthode pour

Contribution à l'étude de la régulation des rapports coalitionnels », Politix 4/2009 (nº 88), page 121 : « *L'engagement contractuel relève en partie d'un sentiment de besoin de droit, pour réduire l'incertitude inhérente à l'association coalitionnelle et stabiliser une relation toujours menacée de fluidification.* »

53. A l'exception des accords tacites, non écrits et connus des seuls dirigeants ayant négocié.

calculer la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum sous les hypothèse d'Impartial Culture (IC), d'Impartial Anonymous Culture (IAC) et Biased Rescaled Impartial Anonymous Culture (BRIAC) dans différents scénarios sur le nombre des circonscriptions envisagé.

1.3.2 Paradoxe de la Chambre

Une variante du Paradoxe du référendum est celui du paradoxe de la Chambre. Il s'agit d'un cas très particulier du même paradoxe propre à l'élection présidentielle américaine, du fait que la répartition du collège des grands électeurs se fait à partir de la répartition opérée pour la Chambre des représentants. On peut citer les travaux théoriques de Nicolas Miller a sujet[119]. En effet, la Constitution des États-Unis[11] stipule au second alinéa de la première section, intitulée *The President*, du second article, intitulé *The Executive Branch*, que *« Each State shall appoint, in such Manner as the Legislature thereof may direct, a Number of Electors, equal to the whole Number of Senators and Representatives to which the State may be entitled in the Congress... »*. Si le nombre de sénateurs par état est fixé à 2 par la Constitution, au premier alinéa de la troisième section du premier article, le nombre de représentants peut évoluer relativement entre le minimum constitutionnel, soit 1 représentant au minimum pour chaque état c'est-à-dire 50, et le maximum légal, arrêté à 435 par le Congrès en 1913. En pratique le nombre de représentants a été fixé à sa valeur maximale légale mais rien n'interdirait de prendre un effectif plus petit, du moment qu'il soit au moins égal au nombre d'états fédérés. On peut ainsi citer les travaux de Vincent Merlin et Thomas Senné à partir des données historiques portant sur les résultats des recensements de 1950 à 2000 et les quatre sytème de répartition possible des grands électeurs entre les états : le système de répartition actuel (*United States Rule* noté USR), la répartition proportionnelle (*Proportionnal Rule* noté PR) en fonction uniquement de la population des états fédérés, la réparition fédéral (*Federal Rule* noté FR) où chaque état reçoit exactement le même nombre de représentants et le système de répartition proportionnelle à la racine carrée de la population des états (*Square Root Systeme* noté SRR). Les auteurs ont notamment calculé à partir de ces quatre méthodes d'allocation des grands électeurs entre les états fédérés les différentes probabilités d'occurence du paradoxe du référendum calculé avec les difféntes déclinaisons des modèles sous l'hypothèse de Culture Neutre (*Impartial Culture* notée IC, *Rescaled Impartial Culture* notée RIC et *Biased Rescaled Impartial Culture* de type 1 et 2 notée BRIC 1 et 2) et Culture Neutre et Anonyme (*Impartial Anonymous Culture* notée IAC, *Rescaled Impartial Anonymous Culture* notée RIAC et *Biased Rescaled Impartial Anonymous Culture* de type 1 et 2 notée BRIAC 1 et 2). En retenant pour critère d'optimisation de réduire la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum, les auteurs ont abouti à trois classements du meilleur au pire système, c'est-à-dire le classement $SSR \succ USR \succ PR \succ FR$ d'après le modèle IC, le classement $PR \succeq USR \succ SSR \succ FR$ d'après les modèles RIC, BRIC de type 1, BRIC de type 2, IAC, RIAC et BRIAC de type 1, et le classement $USR \succeq PR \succ SSR \succ FR$ d'après le modèle BRIAC de type 2. Leurs travaux ont ainsi mis en évidence que l'allocation du corps électoral selon la règle fédéral

(FR) est unaniment désignée comme étant le pire scénario par tous les modèles, tandis qu'une majorité des modèles désigne la répartition proportionnelle (PR) comme le scénario le plus efficace pour réduire le risque de se produire un paradoxe du référendum. Fabrice Barthelemy, Mathieu Martin et Ashley Piggins ont également étudié ce cas dans un article 2014[14], intitulé *« The Architecture of the Electoral College, House Size Effects, and the Referendum Paradox »* en réalisant des scénarios d'allocation de sièges.

1.4 Conflictualité des systèmes multipolaires

1.4.1 Logique organisationnelle

Viktor Vanberg publia en 1992 un article[150] intitulé *Organization as Consitutional Systems* dans lequel il présenta quatre approches (*Goal Paradigm*, *Exchange Paradigm*, *Nexus of Contracts Paradigm* et *Constitutional Paradigm*) dans l'étude des organisations dans l'optique de mettre en lumière le fait que seule la quatrième approche combine de manière satisfaisante la méthodologie individualiste et une prise en compte des organisations en tant qu'acteurs d'entreprise, autrement considérées comme des unités d'action collective. Le *goal paradigm* a été notamment traité par Charles Perrow[129][130] en 1972, Petro Georgiou en 1973[74] et dont la problématique réside dans la défintion d'intentions organisationnelles, dans la mesure où chaque agent économique étant doué d'intention, comment une organisation, qui structurellement est une coalition d'agents économiques, peut avoir des objectifs communs à l'ensemble des ses membres. Son alternative, résumé par le *Exchange Paradigm*, repose sur la participation sous condition des individus à l'organisation en fonction de la plue-value qu'ils en retirent : si celle-ci est supérieure à leurs coûts de participation (en cas de plus-value nulle, les individus restent pour éviter d'avoir à assumer d'éventuels coûts de sortie qu'ils n'auraient pas anticipé), ils restent, sinon ils partent. Cela correspond à la définition donnée par James Gardner March and Herbert Alexander Simon dans un article[109] publié en 1958 dans lequel une organisation peut se réduir au réseau des relations d'échange entre l'ensemble de personnes y apportant une contribution en contrepartie des incitations qu'ils en reçu. Robert Salisbury a décliné le concept dans un article[142] publié en 1969 en insistant sur le fait qu'il peut être analysé en terme de relations d'échanges entre *entrepreneurs/organisateurs* et *clients/adhérents*, alors qu'Armen Albert Alchian et Harold Demsetz ont décrit en 1972[3] pour leur part une organisation comme une structure d'echanges se différenciant des échanges de marché décentralisés ordinnaires uniquement par qu'ils se sont arrangés autour d'un agent centralisé contractuel (*centralized contractual agent*), tandis que Robert Emerson considèrent[58][59] les organisations (ou groupes) comme étant décomposables en des ensembles de relations d'échanges entre chaque individu et le groupe (en tant que coalition de tous les autres individus du groupe vis-à-vis de l'individu restant). Viktor Vanberg a indiqué qu'aucune des déclinaisons de ce paradigme ne parvient à donner une explication pertinente de l'action collective organisée. Le *Nexus of Contracts Paradigm* pose le problème de sa définition qui tend à le classer en *Exchange Paradigm*, si le type de contrat définissant l'organisation se rapproche de ceux régissant les échanges de marché ordinnaire, ou en *Constitu-*

tional Paradigm, si il en diffère sensiblement. Victor Goldberg[75] représente le réseau contractuel sur lequel est basé une entreprise comme une *«constitution»* en tant que contract définissant les termes d'une relation continue, les règles et les contraintes pour une entreprise commune continue, faisant une nette distinction avec le double niveau de décisions (*two choice level*), caractéristique des systèmes constitutionnels. Par ailleurs Oliver Eaton Williamson expliqua[153] en 1986 de manière similaire lorsqu'il définit les entreprises, en tant qu'équipes relationnelles (*relational teams*), que la nature contractuelle de ce qui peut être compris comme une réponse aux problemes de la spécificité des actifs (*«asset specificity»*) et des trasactions idiosyncratiques (*«idiosyncratic transactions»*) pouvant se poser dans ces équipes, les deux problèmes étant une fonction de la substituabilité d'une ressource à l'intérieur du processus de production d'une équipe, la spécificité des actifs augmentant plus un actif est spécialisé pour une transation particulière ou pour une équipe particulière augmentant la difficulté ou le coût de le réallouer pour une autre transaction ou une autre équipe, tandis que les transaction sont idiosyncratiques dans la mesure où elles impliquent des investissements spécialisés, de sorte que l'identité spécifique des parties a des conséquences en terme de coûts de prise en charge (*«the specific identity of the parties has important cost-bearing consequences »*), ces problèmes et conflits pouvant en découler donnant son caractère distinctif au réseau contractuel de l'entreprise. Enfin le *Constitutional Paradigm* inverse la logique de l'objectif du *Goal Paradigm* en se concentrant sur les base procédurales sur lequelles repose l'action organisationnelle. James Samuel Coleman définit[39][40][41] l'organisation comme un processus décisionnel et des unités agissant dans un cadre et selon des critères précis, la constitution ne se limitant au domaine des décision organisationnelles mais également au mode opératoire de celle-ci.

Parmi les travaux cherchant à expliquer les intéractions entre les agents économiques, on peut citer un article[2] proposé en 2004 par Philippe Aghion, Alberto Alesina et Francesco Trebbi dans *The Quaterly Journal of Economics*, où ceux-ci se sont intéressés à la problématique du type de majorité permettant de faire adopter des réformes sans tomber dans la tyrannie de la majorité tout en évitant le blocage des réformes par une minorité. À partir d'un modèle de choix constitutionnel prenant en compte le revenu de chaque agent économique, avec et sans réforme, dans lequel les auteurs considèrent la population comme un ensemble d'individus supposés neutres au risque par rapport au revenu. La majorité déterminée dans le processus constitutionnel impact directement la capacité du chef de la majorité politique ayant le pouvoir à faire adopter des réformes. L'une des particularité du modèle est qu'il ne distingue pas la population de l'organe législatif, qui sont un même ensemble, supposant une représentation parfaite de la population. La question de la meilleure organisation possible, c'est-à-dire permettant aux institutions d'assurer les mission d'intérêt public, au sens où l'entend le contrat social liant les membres d'une société, et les garanties fondamentales permettant les préservations des droits fondamentaux de chaque membre du corps social d'un excès de pouvoir des agents de l'État, a été également abordée par Victor Vanberg dans un article[151] publié en 2011. S'appuyant sur les travaux de Hayek[84][85] notamment concernant la dérive intistutionnelle de *« unlimited democracy »* impliquée par la possibilité d'une dictature de la majorité (*unres-*

tricted majority rule), l'auteur estime qu'une Constitution, qu'il qualifie de *liberal constitution*, réunit ces conditions.

1.4.2 Organisation territoriale et architecture institutionnelle

Dans un article[5] de 2013, Pierre Allorant a dressé un inventaire des différentes idées proposées et mises en oeuvre pour réformer l'organisation de l'administration territoriale de la France, à partir de la chute l'Empire français jusqu'au au début des *Années folles*, pointant ainsi les puissants effets accélerateurs des conflits (défaite lors de la guerre franco-allemande de 1870, mobilisation générale des recherches et besoin d'optimisation lors de la Première Guerre mondiale) et, dans une moindre mesure, des changements de régime (la Restauration bourbonienne, la Révolution de juillet 1830, la Révolution de 1848, le Coup d'État du 2 décembre 1851 et proclamation de la République française du 4 septembre 1870), les propositions de réforme venant à la fois d'idéologues *libéraux* (la gestion des affaires locales par des organes élus) et *ultras* (le démantellement de l'héritage révolutionnaire et napoléonien en faveur d'une restauration des franchises locales et des états provinciaux, ainsi que la délégation de compétences de l'État central vers la périphérie) ou de membres du corps préfectoral. Les arrondissements, dont l'évolution historique à été étudiée par Nicolas Verdier dans un article[152] paru la même année, sont un indicateur intéressant des effets des différentes propositions de réfome territoirales, mises en place ou non, du fait qu'en dépit des critiques vives régulièrement adressées à leur encontre, ceux-ci, grâce à la grande souplesse de réorganisation qu'ils offrent (décret simple) par rapport aux autres échelons (la commune, le département ou la région nécessitant souvent l'adoption d'une loi pour évoluer) existent toujours en 2016 et pourraient même trouver une utilité nouvelle dans le cadre de l'achèvement de la carte intercommunale [54].

L'étude réalisée en 1748 par Montesquieu[147] des différents pouvoirs a donné lieu à trois analyses (distinction, balance et séparation), comme l'a fait remarquer Mauro Barberis dans un article[13] publié en 2012. Au niveau de l'organisation des pouvoirs, deux modèles théoriques classiques s'opposent : la séparation souple des pouvoirs, incarné par le système de Westminster, et la séparation stricte des pouvoirs, illustré par le système présidentiel américain[11] tempérré en pratique, comme l'a fait remarquer Julien Boudon[24] dans un article de 2012, par les interprétations en faveur d'un équilibre des pouvoirs données par certains des *Pères fondateurs*, même si l'expression est relativisée par Christine Cadot, Elsa Dorlin et Bertrand Guillarme dans un article[31] publié en 2006, de la Constitution américaine[80]. Plusieurs exemples réels et appliqués se sont construits entre ces deux modèles, dont le régime parlementaire dualiste en état unitaire, incarné par la V^{e} République française[50], ou fédéral, illustré par la fédération de Russie. Ces régimes hybrides sont dotés d'une forte capacité d'adaptation et de souplesse comme l'a fait remarquer Guy Carcassonne dans un article[34] de 2008 à propos de la première, qui su expérimenter des pé-

54. Le périmètre des structures intercommunales ayant été élargie de par le passage à un seuil minimum de population pour tout E.P.C.I. de 15000 habitants.

riodes de régime primo-ministériel classique (1986-1988, 1993-1995, 1997-2002) avec des périodes de toute puissance présidentielle (1962-1967, 1981-1986, 1995-1997, 2007-2012). Aux côtés, ou bien au-dessus selon les lectures adoptées, des trois pouvoirs classiques (*exécutif*, *législatif* et *judiciaire*) a été développée la possibilité de l'existence d'un *pouvoir neutre* (ou *préservateur*) chargé de les réguler et autours duquel une contreverse eut lieu au XXe siècle entre Hans Kelsen, confiant ce rôle à une Cour constitutionnelle[94], et Carl Schmitt, attribuant cette fonction à la présidence[145]. Dans un article publié en 2012, Olivier Beaud[19] rappelle les limites inhérente du processus de classification, issues en grande partie des difficulté à définir clairement les pouvoirs, rappellant la «théorie de la séparation matérielle» élaborée par Maurice Hauriou[82], distinguant plusieurs axes de séparation (économique et politique, administratif et gouvernemental, civil et militaire, civil et religieux), auquel l'auteur ajoute un potentiel pouvoir financier, ainsi que des pouvoirs territoriaux supra-nationaux (Union européenne) et locaux (collectivités territoriales).

Patrice Rolland a toutefois en 2008 posé dans un article [136] la question de la préservation des institutions politiques dans un système fondé sur une séparation entre les pouvoirs et s'est intéressé au concept de pouvoir neutre dévelloppé[44] par Benjamin Constant au début du XIXe siècle : celui-ci pensait faire revenir la fonction au roi dans un régime monarchique [55] ou à un organe collectif spécialisé et composé de membres désignés à vie parmi les anciens membres des pouvoirs exécutifs ou législatifs [56]. L'auteur a dévelloppé l'idée de Benjamin d'un pouvoir préservateur, afin de réaliser l'unité du pouvoir en lui confiant la fonction de concorde, dont la caractéristique principale serait d'être réactif et doté de pouvoirs de cette nature (dissolution de l'assemblée, destitution des membres du gouvernement) [57] et a exploré les intérrogations liées à la conservation de la neutralité de celui-ci [58]. Patrice Rolland a par ailleurs a questionné l'hypothèse de la neutralisation du pouvoir neutre [59], sort connu par les présidents sous la IIIe république [60], avant de finir sur les institutions de la Ve république qui ont per-

55. Benjamin Constant, en 1815 lors de la Restauration, bien que répubicain, considère que seules les gouvernements monarchiques sont aptes à établir le pouvoir neutre.

56. Ressemble au Jury constitutionnaire proposé par l'abbé Sieyès lors des discours du 2 et du 18 thermidor de l'an III (29 juillet et 5 août 1795), dans le cadre des d'ebat entourant la Constitution de l'an III (Directoire).

57. Comme l'abée Sieyès, Benjamin Constant, ne considère par le droit de veto, proposé par Stanislas de Clermont-Tonnerre, dans le cadre des débats constitutionnelles ayant abouti à la Monarchie constitutionnelle française (1791-1972), comme une prérogative du pouvoir neutre.

58. Benjamin Constant pensait que seul le Roi, du fait de son statut social supérieur à vie, de sa non appartenance originelle à l'un ou l'autre des deux pouvoirs actifs (ni ministre, ni député), serait en mesure de préserver l'équilibre du système : son argument, pour justifier que le monarque n'abuse pas en retour de ces pouvoirs, réside dans le désir de son titulaire de ne pas perdre son statut, que des excès pourraient remettre en cause. C'est aussi la raison pour laquelle, l'auteur doute de la possibilité d'existence d'un organe similaire dans un régime républicain.

59. Adople thiers : *« Le roi règne mais ne gouverne pas. »*

60. Neutralité conventionnée du pouvoir présidentielle suite à la décision de Jules Grévy de renoncer au pouvoir de dissolution, le jour de son accesion à l'Élysée le 30 janvier 1879.

mis l'existence de ce pouvoir prérservateur [61] via l'institution d'une présidence [62] dotée de prérogatives renforcées, tout en relevant son impossible neutralité car ayant une influence déterminante, si ce n'est même en pratique leur initiative, sur les grands choix politiques engageant l'État et la Nation. Sandrine Baume[18] reprendra dans un article publié en 2012 ces analyses pour analyser les trois organes pouvant correspondent à la définition du pouvoir neutre : les deux organes identifiés par Karl Doehring[53] en 1964, la présidence et la cour constitutionnelle [63], ainsi que les autorités administratives indépendantes depuis la fin des années 1970. L'auteure a examiné la définition particulière de la neutralité attribué à chacune de ces instances, l'identification des dangers dont celles-ci sont sensés prévenir les institutions et leur lien entrenu avec le principe de séparation des pouvoirs. Carl Schmitt en 1931 dans *Der Hüter der Verfassung*[145], dans le cadre particulier la république de Weimar, attribue cette fonction à la présidence, pour répondre à la division du Reichtag en factions politiques à laquelle il oppose le contrepoid du chef de l'État, rejoignant la doctrine wébérienne du pouvoir « neutre-rassembleur ». Le juriste autrichien Hans Kelsen s'est opposé à l'attribution du pouvoir préservateur à la présidence, justement parce qu'il peut prendre lui-mème l'initiative de violer la Constitution. Pour lui, il faut une autorité une extérieur (la Cour constitutionnelle) et une référence (la Constitution) qui devient pourtant partie prenante au pouvoir législatif, car s'assurant que les lois adoptées par le Parlement respectent bien les normes fixées par la loi fondamentale. L'attribution par Hans Kelsen du «pouvoir neutre» à une Cour constitutionnelle est problématique pour deux raisons : la place par rapport au pouvoir judiciaire (surtout dans le système américain où la Cour suprême juge sur le fond en dernier ressort) et l'arbitrage des questions consitutionnelle (le rôle de juge de la conformité des lois par rapport à la constitution), tandis que la vision de Carl Schmitt ne trouve une application concrète que dans les cas du monarque britannique, dont le rôle est régulé par la coutûme ainsi que par la place préeminente du Parlement (suprématie parlementaire du système britannique fondée sur la doctrine du légicentrisme) [64], et, dans une moindre mesure, du président de la république du Portugal.

Concernant le pouvoir judiciaire, il faut noter l'existence de la justice administrative, exercée par des organes distincts dans le système français, avec au

61. L'idée est présente dès le discours de Bayeux en 1946 lorsque le général parle d'un ched de l'État se situant au-dessus des partis, ici pensé comme étant les factions politiques à l'Assemblée nationale, n'arrivant pas à dégager de majorité stable et durable, provoquant la chute rapide des gouvernements. Celui-ci rejoint la pensée de Constant c'est-à-dire que dans l'affrontement de deux pouvoirs, seul un tiers pouvoir extérieur peut rétablir l'équilibre.

62. L'article 5 de la Constitution dote la présidence d'un pouvoir préservateur : *« Il assure, par son arbitrage, le fonctionnement régulier des pouvoirs publics ainsi que la continuité de l'Etat. »*.

63. On retrouve d'ailleurs la conterverse ayant opposé les juristes Carl Schmitt, partisan d'un pouvoir neutre incarné par la présidence, et Hans Kelsen, soutenant l'attribution du pouvoir neutre à la cour constitutionnelle.

64. On peut ajouter les gouverneurs-généraux des pays du Commonwealth ayant recours au système de Westminster dont Antigua-et-Barbuda, l'Australie, les Bahamas, la Barbade, le Belize, le Canada, la Grenade, la Jamaïque, la Nouvelle-Zélande, la Papouasie-Nouvelle-Guinée, Saint-Christophe-et-Niévès, Sainte-Lucie, Saint-Vincent-et-les Grenadines, les Salomon et le Tuvalu

sommet le Conseil d'État, qui en dépit de son nom exerce effectivement le rôle de juge, renforcé en cela par sa composition comme l'a relevé Olivia Bui-Xuan dans un article[29] de 2007, a fortiori depuis les lois du 8 février 1995 sur les pouvoirs d'injonction et d'astreinte du juge administratif et du 30 juin 2000 sur les référés administratifs ainsi que de l'ordonnance du 4 mai 2000 relative à la partie législative du code de justice administrative, comme l'ont relevé Philippe Terneyre et Denys de Béchillon dans un article[149] publié la même année. À la différence de la Cour de cassation, qui se trouve au sommet de l'ordre judiciaire, le Conseil d'État peut juger sur le fond en dernier ressort, faisant de cette instance la Cour suprême de l'ordre administratif pour reprendre le titre de l'article de Pierre Delvolvé[51] de 2007 également dans lequel celui-ci nuance cette vision en soulignant plus son double rôle de juridiction administrative centrale (caractérisé par sa place au sommet de la justice administrative) et d'institution administrative suprême (marqué par son rôle extra-contentieux de conseil du gouvernement). La séparation théorique avec la Cour de Cassation et le Conseil constitutionnel ne s'observe pas nécessairement dans les faits, a fortiori lorsque la norme de référence est la Constitution (dont le Conseil constitutionnel vérifie la conformité uniquement pour les lois et les traités qui lui sont présentés même si l'introduction de la Q.P.C. a assoupli la rigidité de ce système) comme l'a observé Arnaud Derrien dans un article[52] de 2003. En fait, le Conseil d'État est l'un des trois modèles existants, comme l'a remarqueé Gérard Marcou dans un article[110] de 2007 avec la Cour administratrive suprême (système utilisé notamment par l'Autriche, la Bulgarie, la Finlande, la Lituanie, le Luxembourg, la Pologne, le Portugal, la République tchèque, la Suède, la Suisse et la Thaïlande) et la Cour suprême unique (modèle employé par l'Australie, le Canada, les États-Unis, le Japon et le Royaume-Uni).

On peut citer le travail d'étude réalisé par Peter C. Ordeshook en 1992 autours des publications de William H. Riker, en particulier « Liberalism against populism » publié en 1982[135], où il résume la pensé de l'auteur, caractérisé par une méfiance vis-à-vis de la démocratie directe. William Riker s'est basé sur le fait que les programme politique des candidats aux élections ne répondent aux préférences des électeurs, pointant le mécanisme du paradoxe défini par Ostrogorski, que différents système de vote peuvent aboutir avec les mêmes préfèrences à des résultats différents, et que la détermination réelle des vainqueurs et des perdants de l'élection dépend essentiellement de détails procéduraux, dont les modalités de mises en œuvre des programmes ainsi que le calendrier des réformes : selon lui, tout processus démocratique est sujet à une instablité structurelle (*« ... inherent instability of democratic process ... »*) L'auteur estime ainsi qu'une organisation démocratique reposant sur des élections directes des dirigeants politiques est trop sensible à ces défauts structurels avec ainsi le risque d'abus. C'est pourquoi l'auteur estime qu'une bonne constitution doit au contraire limiter cette sensibilité en promouvant un contrôle indirecte des électeurs sur les agents du gouvernement et permettre de contenir les éventuels excès de pouvoir de ces derniers. Son analyse fut en partie appuyé par Hannu Nurmi en 1997 dans la dernière section, traitant des paradoxes du vote et de la théorie de la démocratie, de son article *« Compound majority paradoxes and proportional representation »*[123]. Robert A. Dahl ne partageait pas le septicisime de Riker, car pour lui tout système démocratique atteint une forme d'équilibre permettant de s'autoréguler ce qu'il expliqua dans un article publié en 1956[45]. Il était rejoint en partie dans son analyse par Michael Foley, dans *The silence of Constitutions* publié en 1990[67], celui-ci relevant le fait que l'absence de corrélation évidente entre l'existence de règles constitutionnelles écrites et le bon fonctionnement des institions. Il estimait par ailleurs dans un autre article publié en 1982[46] que d'autres moyens que les élections permettent aux citoyens de prendre part aux affaires politiques, citant les associations, les clubs ou les syndicats, exprimant ainsi la complexité des modes d'action politique. Roger Congleton dans un article[43] publié en 2013, s'est intéressé à la viabilité de la séparation effective des pouvoirs par rapport. Il a pour cela réalisé une étude empirique à partir d'une base de données constituée par *Institutions and Elections Project*, une unité de l'Université de Binghamton, réunissant des variables institutionnelles essentiellement sous forme binaire de 150 pays (ceux dont la population est supérieure à 500 0000 habitants) sur une période de 34 ans (1972-2005). Roger Congleton a ainsi mis en évidence la séparation du pouvoir politique entre le gouvernement et le parlement, c'est-à-dire la structure *king-and-council*, dans 93,7% des cas, le recours à une Constitution écriture dans 97,6% des cas et l'existence d'une cour constitutionnelle dans 67,1%, l'éxistence d'une organisation fédérale de l'État dans un tiers des cas contre une organisation unitaire dans deux tiers des cas, ainsi qu'une variation significative de la distribution du pouvoir entre législatif et exécutif. Il également utilisé une régression des moindres carrés ordinaire pour mettre en évidence les négociations constitutionnelles entre les deux pouvoirs, relevant la symétrie de l'échange d'autorité entre l'exécutif et le législatif $(-0,102)$, le poids significatifs d'une Constitution écrite $(-2,06)$ ainsi que d'un droit de veto la l'egislature sur les amendements $(-0,358)$ dans la limitation de l'autorité de l'exécutif, qui pour sa part est renforcé par la possibilité d'user droit de veto sur les amendements $(+0,607)$ même en présence d'un droit de veto de la législature sur les amendement $(+0,706)$.

Chapitre 2

Modèle de choix des électeurs et problématique du Paradoxe d'Ostrogorski sur deux axes programmatiques

2.1 Introduction

Les élections dans un système démocratique sont un processus de décision collectif devant permettre de créer un choix social à partir de l'ensemble des préférences individuelles des électeurs. Le vote étant un choix politique complexe multi-dimensionnel (au niveau de l'État central, les seules missions régaliennes couvrent au minimum quatre domaines distincts que sont la Défense, la Diplomatie, la Justice et la Sécurité intérieure) pouvant des implications à court-terme (une baisse d'impôt promise par le parti ayant remporté le scrutin), à moyen terme (le choix des gouvernants pour la durée de la mandature) et à long-terme (la réalisation de projet ayant une durée de vie parfois supérieure à celle de l'électeur, comme la création d'une école au niveau local ou la construction d'un nouveau porte-avions au niveau national). La complexité du vote de l'électeur ne ne peut se résumer à l'appartenance partisanne (sinon les alternances politiques pourraient essentiellement s'expliquer par les renouvellement de population). C'est ainsi qu'une même circonscription électorale peut opter pour des choix politiques différents selon la nature et les enjeux de scrutin : bien qu'ayant voté pour les candidats démocrates aux élections nationales depuis 1928, l'État du Massachussets a élu des candidats républicains au poste de gouverneur entre 1991 et 2007. Cette réalité électorale se heurte à l'hypothèse de cohérence des électeurs dans le comportement qui implique la capacité de chacun d'entre eux à pouvoir classer parfaitement les candidats à l'occasion d'un scrutin du préféré au plus rejeté et ainsi de fournir un vote individuel reflètant clairement ses préférences. Cette hypothèse est affaiblie par la réalité du vote stratégique ou vote utile, dans le lequel l'électeur ne vote pas sincérèment dans le but de manipuler le résultat du scrutin. Indépendement de cet aspect, la sincérité parfaite de l'électeur ne peut suffire à garantir un vote cohérent : à l'occasion d'un scrutin où concourent deux candidats, un électeur peut sincèrement refuser de voter pour un candidat ayant fait une proposition lui convenant parfaitement si dans le même temps celui-ci propose un élément rebutant l'électeur, qui apporterait son suffrage à l'autre candidat qui auraient formulé des propositions plus acceptables même si moins bonnes que celles de son concurent. A cette fin nous aller étudier un cas particuliers du paradoxe d'Ostrogorki afin de d'identifier les hypotèses permettant de tenir compte de cette réalité, avant d'essayer de dégager des conditions autorisant un contournement de celle-ci.

2.2 Discussion générale

Le Paradoxe d'Ostrogorski repose sur l'idée qu'il est possible, lorsqu'un candidat remporte la majorité des suffrages, que la majeure partie, si ce n'est la totalité, de ses promesses de campagne soit en revanche rejetée par une majorité des électeurs : si un référendum avait lieu sur chacune des promesse de campagne du candidat élu, celui-ci verait son programme en grande partie, si ce n'est en totalité, rejetté par l'électorat. Il est même tout à fait possible qu'un candidat puisse présenter un programme donc chaque point est approuver par les électeurs et soit pourtant défait lors du vote par un candidat dont chaque promesse de campagne est systématiquement minoritaire dans l'électorat. William Gerlhein et Vincent Merlin ont calculé les probabilités d'apparition du paradoxe d'Ostrogorsky dans un article[73] publié en 2008. L'une de leurs conclusions était l'impossibilité de déterminer cette probabilité dans le cas d'un choix individuel obtenu à partir de la méthode majoritaire basée sur deux axes programmatiques : en effet, lorsqu'un électeur avait des préférences différentes pour chacun des deux axes programmatiques, le modèle ne pouvait conclure sur son choix final. Un exemple très simple et concrêt pour l'illustrer serait lors d'un scrutin municipal, un électeur préférant le programme économique d'un candidat visant à réaliser une diminution maximale les taxes locales, en réduisant les financements au seul fonctionnement et reportant tous les investissements, et le programme d'aménagement de son concurrent promettant une remise en état complète de la voirie, financée par la hausse des taxes locales : celui-ci approuvant une des deux parties du programme de chacun des deux candidats, il lui serait mécaniquement impossible avec la seule règle de décision majoritaire, de trancher entre les deux porteurs de projet, et en conséquent ne pourrait voter pour aucun des deux. Un tel comportement impliquerait un nombre significativement élevé de bulletins blancs ou nuls lors des élections, ce qui ne correspond pas à la réalité (on peut toutefois relever des taux d'abstention élevés à certaines élections sans que soit établi un lien de causalité) : entre 1965 et 2012, les moyennes des taux de bulletins blancs et nuls aux premiers et second tours des élections présidentielles françaises furent respectivement de 1.7778% [1] et 4.1378% [2]. On peut difficilement en conclure à l'inexistence du paradoxe d'Ostrogorski dans le cas où un électeur baserait son choix final sur ses préférences axiomatiques dans le cadre de deux

1. Au premier tour, le taux de bulletins blancs et nuls minimal fut observé lors de l'élection de 1974 avec 0.92%, tandis que le taux de bulletins blancs et nuls maximal fut observé lors de l'élection présidentielle de 2002 avec 3.38%.

2. Au second tour, le taux de bulletins blancs et nuls minimal fut observé lors de l'élection de 1974 avec 1.34%, tandis que le taux de bulletins blancs et nuls maximal fut observé lors de l'élection présidentielle de 1969 avec 6.52%.

options programmatiques.

Il s'agit là d'un problème structurel posé par les modèles de décision individuelle reposant sur une fonction majoritaire (*majority rule* : lorsque le nombre d'axes programmatiques est pair, les égalités de score sont possibles. Il est même facile de déterminer, sous l'hypothèse de préférence de pour l'indifférence (désignée comme de la *Culture Neutre* ou *Impartial Culture*), la probabilité de chaque électeur de rencontrer cette situation : lorsque le nombre de candidats se réduit à deux (A et B) et que le nombre d'axes programmatiques (a_p) est pair, $a_p = 2.m$, la probabilité individuelle dégalité de scores entre les axes de préférences est de $\frac{C_{2.m}^m}{2^{2.m}}$, avec $C_{2.m}^m$ le coefficient binomial de m parmi $2.m$. Cette probabilité vaut 50% pour $m = 1$ et semble converger vers 5% lorsque m tend vers ∞. Une première remarque est que même si les candidats présentent des programmes politiques vastes et détaillés, comme en 2012 avec les 32 propositions de Nicolas Sarkozy et les 60 engagements de François Hollande, les électeurs semblent se déterminer en réalité sur un nombre plus limité d'axes. Une seconde remarque est que ce nombre d'axes est très probablement supérieur à 1, sinon les taux d'absention et de votes blancs ou nuls ne représenteraient au mieux que des cas d'impossibilité pour les électeurs inscrits de prendre part au scrutin, déplacement de l'électeur loin de sa circonscription le jour du scrutin, ou des erreurs de manipulation au moment de voter, insérer plus de deux bulletins différents ou un bulletin non conforme dans l'enveloppe, ce qui ne correspond pas à la réalité observée. Une troisième remarque, découlant directement de la précédente, est qu'un comportement électoral où le clivage partisan détermine complètement les préférences programmatiques rend nul la probabilité d'occurence du paradoxe d'Ostrogorski.

En conséquent, même lorsque qu'une option est exclusive de l'autre, un agent économique est capable en toutes circonstances de réaliser un choix, fut-il non optimal pour l'agent. Ainsi, en reprenant notre exemple, un électeur partagé entre payé moins de taxes et disposer d'une voirie mis en à neuf ne peut se résoudre à voter blanc ou s'abstenir, car cela reviendrait uniquement à renoncer au deux, ce qui serait la pire option pour celui-ci. Autement dit, en l'absence d'un choix optimum global clair, l'électeur fera un choix entre les meilleurs possibilités restantes, et refusera d'opter pour l'absence de l'un ou l'autre de ses optimums locaux. Cela suppose l'existence d'une fonction de discrimination entre les axes de préférences. En reprenant l'exemple cité précédement, si l'état actuel de la voirie entraîne pour l'électeur des coûts de retards dans ses trajets ainsi qu'une usure accélérée de son véhicule supérieurs à l'écart entre la hausse anticipée des taxes pour financer le programme de réfection des routes et la baisse des taxes promises par l'autre programme, celui-ci choisira le candidat proposant la réfection de la voirie au détriment du candidat proposant la baisse des taxes. Autrement dit, l'électeur est capable de hiérarchiser ses priorités et par là les axes programmatiques.

Afin d'essayer d'apporter un élément de réponse à cette question, nous allons dans une discussion générale, sous l'hypothèse de *culture neutre* (IC), étudier trois modèles de choix sur deux axes programmatiques en tentant de dégager leur avantages et leurs inconvénients potentiels. Dans la mesure où les préférences programmatiques ne sont normalement pas observables (ou alors non contraignantes car secondaires par rapport au vote final de l'électeur), il est possible de travailler sur des modèles abolissant l'égalité de chaque choix, afin de dégagger notamment des décisions en cas de préférences programmatiques de candidats différents. Nous allons donc explorer les conséquences d'une discrimination entre les axes programmatiques et d'une pondération des préférences programmatiques de l'électeur se répercutant sur son vote final. C'est aini que nous allons dans un premier temps analyser le modèle de décision suivant la règle majoritaire simple, en prenant en cas les cas de conflits de réponses sur les axes programmatiques. Nous étudierons ensuite dans un second temps modèle de décision suivant la règle majoritaire avec discrimination sur les axes, en suposant que chaque électeur dispose d'une fonction préférence entre ses axes programmatiques lui permettant de donner une réponse majoritaire à son choix global. Enfin nous présenterons le modèle de décision suivant la règle majoritaire composée, où les électeurs affectent des réponses partiellement pondédérées sur les axes pragrammatiques.

2.3 Modèle de choix majoritaire simple

On suppose que le corps électoral N est d'effectif n impair, c'est-à-dire $n = 2p+1$. Lorsqu'un électeur choisit une proposition de A il lui affecte $+1$, lorsqu'il choisit une proposition de B il lui affecte -1. Ayant deux axes programmatiques X et Y, il existe donc les quatre profils de vote suivants :

$$(V_\alpha, V_\beta, V_\gamma, V_\delta) = (\begin{pmatrix}+1\\+1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\+1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix})$$

et auxquels sont associés les quatre effectifs suivant

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

de sorte que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = n$.

Ainsi le choix sur les axes programmatiques s'écrit :

$$\begin{pmatrix}A_x\\A_y\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}+1\\+1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}+1\\-1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-1\\+1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+\beta-\gamma-\delta\\\alpha-\beta+\gamma-\delta\end{pmatrix}$$

L'existence d'un paradoxe requiert une décision sur les axes programmatiques pouvant être comparé au vote aggrégé des électeurs. Etant avec deux axes, il faut donc la même réponse sur les deux. Si l'on suppose que sur les deux axes la réponse est en faveur A, on a donc :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} A_x > 0 \\ A_y > 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \alpha+\beta-\gamma-\delta > 0 \\ \alpha-\beta+\gamma-\delta > 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists\mu^x > 0 | \alpha+\beta-\gamma-\delta = \mu^x \\ \exists\mu^y > 0 | \alpha-\beta+\gamma-\delta = \mu^y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2(\alpha-\delta) = \mu^x + \mu^y \\ 2(\beta-\gamma) = \mu^x - \mu^y \end{cases}
\end{aligned}$$

Concernant le vote de l'électeur, son signe dépend de $V_\alpha + V_\beta + V_\gamma + V_\delta$. Les signes pour les vecteurs de V_α $(+1)$, V_δ (-1), V_β (0) et V_γ (0) sont simples. Le signe du vote global (V_G) dépend donc de :

$$\alpha - \delta$$

Pour qu'un paradoxe d'Ostrogorski soit possible, il faut que le signe de A_x et A_y soit différent du signe de V_G.

Supposons que $V_G < 0$. On a donc, pour le vote aggrégé

$$\begin{aligned}
\alpha - \delta < 0 &\iff \exists\rho > 0 | \alpha - \delta = -\rho \\
&\iff \exists\rho > 0 | \mu^x + \mu^y = -\rho
\end{aligned}$$

μ^x et μ^y étant strictement positifs par définition, V_G ne peut être négatif. Le raisonnement étant parfaitement symétrique en sens inverse, le Paradoxe d'Ostrogorski est par conséquent impossible.

2.4 Modèle de choix majoritaire avec discrimination sur les axes programmatiques

On suppose églament que le corps électoral N est d'effectif n impair, c'est-à-dire $n = 2p + 1$. Lorsqu'un électeur choisit une proposition de A il lui affecte $+1$, lorsqu'il choisit une proposition de B il lui affecte -1. Ayant deux axes programmatiques X et Y, il retrouve donc les quatre profils de vote suivants :

$$(V_\alpha, V_\beta, V_\gamma, V_\delta) = (\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix})$$

et auxquels sont associés les quatre effectifs suivant

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

de sorte que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = n$.

Ainsi le choix sur les axes programmatiques s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta - \gamma - \delta \\ \alpha - \beta + \gamma - \delta \end{pmatrix}$$

L'existence d'un paradoxe requiert une décision sur les axes programmatiques pouvant être comparé au vote aggrégé des électeurs. Etant avec deux axes, il faut donc la même réponse sur les deux. Si l'on suppose que sur les deux axes la réponse est en faveur A, on a donc :

$$\begin{aligned} \begin{cases} A_x > 0 \\ A_y > 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma - \delta > 0 \\ \alpha - \beta + \gamma - \delta > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \beta - \gamma > \delta - \alpha \\ -\beta + \gamma > \delta - \alpha \end{cases} \\ &\iff \alpha - \delta > 0 \end{aligned}$$

Ainsi lorsque A_x et A_y ont le même signe, celui-ci dépend de $\alpha - \delta$.

Concernant le vote de l'électeur, son signe dépend de $V_\alpha + V_\beta + V_\gamma + V_\delta$. Si les signes pour les vecteurs de V_α $(+1)$ et V_δ (-1) sont simples, pour V_β et V_γ le vote de l'électeur dépend de l'axe programmatique ayant la préférence de celui-ci. On pose ainsi $V_\beta^x = +1$, $V_\beta^y = -1$, $V_\gamma^x = -1$ et $V_\gamma^y = +1$ et leurs effectifs associés $\beta = \beta^x + \beta^y$ et $\gamma = \gamma^x + \gamma^y$. Le signe du vote global (V_G) dépend donc de :

$$\alpha + \beta^x + \gamma^y - \delta - \beta^y - \gamma^x$$

Pour qu'un paradoxe d'Ostrogorski soit possible, il faut que le signe de A_x et A_y soit différent du signe de V_G.

Supposons que $A_x > 0$, $A_y > 0$ et $V_G < 0$. On a donc, concernant les axes programmatiques

$$\left\{\begin{array}{lcl} A_x & > & 0 \\ A_y & > & 0 \end{array}\right. \begin{array}{ll} \Longleftrightarrow & \alpha - \delta > 0 \\ \Longleftrightarrow & \exists \mu > 0 | \alpha = \mu + \delta \end{array}$$

tandis que l'on a pour le vote aggrégé

$$\begin{array}{rcl} \alpha + \beta^x + \gamma^y - \delta - \beta^y - \gamma^x < 0 & \Longleftrightarrow & \exists \rho > 0 | \alpha + \beta^x + \gamma^y - \delta - \beta^y - \gamma^x = -\rho \\ & \Longleftrightarrow & \alpha + \beta^x + \gamma^y + \rho = \delta + \beta^y + \gamma^x \\ & \Longleftrightarrow & \mu + \beta^x + \gamma^y + \rho = \beta^y + \gamma^x \end{array}$$

En conséquent, nous avons ainsi, en posant $\rho = 2\tau + 1$:

$$\begin{array}{rcl} n & = & 2p + 1 \\ & = & \alpha + \beta^x + \gamma^y + \beta^y + \gamma^x + \delta \\ & = & (\mu + \delta) + \beta^x + \gamma^y + (\mu + \beta^x + \gamma^y + \rho) + \delta \\ & = & 2(\mu + \delta + \beta^x + \gamma^y) + \rho \\ & = & 2(\mu + \delta + \beta^x + \gamma^y + \tau) + 1 \\ \Longleftrightarrow p & = & \mu + \delta + \beta^x + \gamma^y + \tau \end{array}$$

Nous avons ainsi d'une part

$$\begin{array}{rcl} n & = & \alpha + \beta^x + \gamma^y + \beta^y + \gamma^x + \delta \\ & = & \alpha + (p - \delta - \mu - \tau) + \beta^y + \gamma^x + \delta \\ & = & \alpha + p + \beta^y + \gamma^x - \tau \\ \Longleftrightarrow p + 1 & = & \alpha + \beta^y + \gamma^x - \tau \end{array}$$

et d'autre part

$$\begin{array}{rcl} \alpha + \beta^x - \beta^y + \gamma^y - \gamma^x - \delta & = & \alpha + \beta^x + \gamma^y - \beta^y - \gamma^x - \delta \\ & = & \alpha + \beta^x + \gamma^y - (p + 1 - \delta + \tau) - \delta \\ & = & \alpha + \beta^x + \gamma^y - (p + 1) - \tau \\ \Longleftrightarrow p + 1 & = & \beta^x + \gamma^y + \delta - \tau \\ & = & \alpha + \beta^x + \gamma^y - \mu - \tau \end{array}$$

Le même résonnement étant parfaitement valide en sens inverse, le Paradoxe d'Ostrorsky est donc possible.

2.5 Modèle de choix majoritaire composée

Un choix pondéré suppose qu'au lieu d'affecter uniquement des valeurs binaire $+1$ et -1, l'électeur peut employer des valeurs ζ^x et ζ^y non nulle et de valeur absolue strictement inférieure à 1 pour pondéré ses préférences secondaires (tandis que ses préférence principales restent -1 ou $+1$). Nous conservons à l'hypothèse que nous sommes en présence d'un corps électoral N d'effectif impair $n = 2p+1$. Ayant deux axes programmatiques X et Y, il existe donc les six profils de vote suivants :

$$(V_\alpha, V_{\beta^x}, V_{\beta^y}, V_{\gamma^x}, V_{\gamma^y}, V_\delta) = (\begin{pmatrix}+1\\+1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+1\\-\zeta^y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+\zeta^x\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\+\zeta^y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\zeta^x\\+1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix})$$

et auxquels sont associés les six effectifs suivant

$$(\alpha, \beta^x, \beta^y, \gamma^x, \gamma^y, \delta)$$

de sorte que $\alpha + \beta^x + \beta^y + \gamma^x + \gamma^y + \delta = n$.

Ainsi le choix sur les axes programmatiques s'écrit :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}A_x\\A_y\end{pmatrix} &= \alpha\begin{pmatrix}+1\\+1\end{pmatrix} + \beta^x\begin{pmatrix}+1\\-\zeta^y\end{pmatrix} + \beta^y\begin{pmatrix}+\zeta^x\\-1\end{pmatrix} + \gamma^x\begin{pmatrix}-1\\+\zeta^y\end{pmatrix} + \gamma^y\begin{pmatrix}-\zeta^x\\+1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\alpha + \beta^x + \zeta^x\beta^y - \gamma^x - \zeta^x\gamma^y - \delta\\ \alpha - \zeta^y\beta^x - \beta^y + \zeta^y\gamma^x + \gamma^y - \delta\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conformément à ce qui a été présenté à la section précédente, l'existence d'un paradoxe requiert une décision de même signe sur les axes programmatiques pour être comparée au signe du vote aggrégé des électeurs. On suppose que sur les deux axes la réponse est en faveur de A, on a donc :

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{lcl} A_x &>& 0\\ A_y &>& 0\end{array}\right.
&\iff \left\{\begin{array}{lcl} \alpha + \beta^x + \zeta^x\beta^y - \gamma^x - \zeta^x\gamma^y - \delta &>& 0\\ \alpha - \zeta^y\beta^x - \beta^y + \zeta^y\gamma^x + \gamma^y - \delta &>& 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{lcl} +\beta^x + \zeta^x\beta^y - \gamma^x - \zeta^x\gamma^y &>& \delta - \alpha\\ -\zeta^y\beta^x - \beta^y + \zeta^y\gamma^x + \gamma^y &>& \delta - \alpha\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{lcl} \exists\mu^x| + \beta^x + \zeta^x\beta^y - \gamma^x - \zeta^x\gamma^y &=& \delta - \alpha + \mu^x\\ \exists\mu^y| - \zeta^y\beta^x - \beta^y + \zeta^y\gamma^x + \gamma^y &=& \delta - \alpha + \mu^y\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{lcl} +(1-\zeta^y)(\beta^x - \gamma^x) + (1-\zeta^x)(\gamma^y - \beta^y) &=& 2(\delta - \alpha) + \mu^x + \mu^y\\ +(1+\zeta^y)(\beta^x - \gamma^x) + (1+\zeta^x)(\beta^y - \gamma^y) &=& \mu^x - \mu^y\end{array}\right.
\end{aligned}$$

À ce niveau deux cas de figure sont possible : $\zeta^x = \zeta^y$ et $\zeta^x \neq \zeta^y$

Dans le premier cas, le système se résoud simplement :

$$\zeta^x = \zeta^y = \zeta \iff \begin{cases} +(1-\zeta)(\beta^x - \gamma^x + \gamma^y - \beta^y) &= 2(\delta - \alpha) + \mu^x + \mu^y \\ +(1+\zeta)(\beta^x - \gamma^x + \beta^y - \gamma^y) &= \mu^x - \mu^y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \beta^x - \gamma^x + \gamma^y - \beta^y &= \frac{2(\delta-\alpha)+\mu^x+\mu^y}{1-\zeta} \\ \beta^x - \gamma^x + \beta^y - \gamma^y &= \frac{\mu^x-\mu^y}{1+\zeta} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2(\beta^x - \gamma^x) &= \frac{2(\delta-\alpha)+\mu^x+\mu^y}{1-\zeta} + \frac{\mu^x-\mu^y}{1+\zeta} \\ 2(\gamma^y - \beta^y) &= \frac{2(\delta-\alpha)+\mu^x+\mu^y}{1-\zeta} - \frac{\mu^x-\mu^y}{1+\zeta} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \beta^x - \gamma^x &= \frac{\delta-\alpha}{1-\zeta} + \frac{(1+\zeta)(\mu^x+\mu^y)+(1-\zeta)(\mu^x-\mu^y)}{2(1+\zeta^2)} \\ \gamma^y - \beta^y &= \frac{\delta-\alpha}{1-\zeta} + \frac{(1+\zeta)(\mu^x+\mu^y)-(1-\zeta)(\mu^x-\mu^y)}{2(1+\zeta^2)} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \beta^x - \gamma^x &= \frac{\delta-\alpha}{1-\zeta} + \frac{\mu^x+\zeta\mu^y}{1+\zeta^2} \\ \gamma^y - \beta^y &= \frac{\delta-\alpha}{1-\zeta} + \frac{\zeta\mu^x+\mu^y}{1+\zeta^2} \end{cases}$$

Ainsi lorsque A_x et A_y ont le même signe, celui-ci dépend de $\delta - \alpha$ dans la mesure où μ^x et μ^y sont strictement positifs.

Concernant le vote de l'électeur, son signe dépend de $V_\alpha + V_{\beta^x} + V_{\beta^y} + V_{\gamma^x} + V_{\gamma^y} + V_\delta$.

Les signes pour les vecteurs de V_α et V_δ sont respectivement $+2$ et -2, tandis que les signes sont V_{β^x}, V_{β^y}, V_{γ^x} et V_{γ^y} sont respectivement $+1-\zeta$, $+\zeta-1$, $-1+\zeta$ et $-\zeta+1$. On remarque que $+\zeta-1$ et $-1+\zeta$ sont strictement négatifs dans la mesure ou $\zeta < 1$. Le signe du vote global (V_G) dépend donc de :

$$2\alpha + (1-\zeta)(\beta^x + \gamma^y) - 2\delta - (+1-\zeta)(\beta^y + \gamma^x)$$

Pour qu'un paradoxe d'Ostrogorski soit possible, il faut que le signe de A_x et A_y soit différent du signe de V_G. Supposons ainsi que $V_G < 0$. On a donc, concernant le vote aggrégé

$$\begin{aligned} V_G < 0 &\iff 2\alpha + (1-\zeta)(\beta^x + \gamma^y) - 2\delta - (+1-\zeta)(\beta^y + \gamma^x) < 0 \\ &\iff \exists\rho > 0 | 2\alpha + (1-\zeta)(\beta^x + \gamma^y) - 2\delta - (+1-\zeta)(\beta^y + \gamma^x) + \rho = 0 \\ &\iff 2(\alpha - \delta) + (1-\zeta)[(\beta^x - \gamma^x) + (-\beta^y + \gamma^y)] + \rho = 0 \\ &\iff 2(\alpha - \delta) + (1-\zeta)[(\tfrac{\delta-\alpha}{1-\zeta} + \tfrac{\mu^x+\zeta\mu^y}{1+\zeta^2}) + (\tfrac{\delta-\alpha}{1-\zeta} + \tfrac{\zeta\mu^x+\mu^y}{1+\zeta^2})] + \rho = 0 \\ &\iff \tfrac{\mu^x+\zeta\mu^y}{1+\zeta} + \tfrac{\zeta\mu^x+\mu^y}{1+\zeta} + \rho = 0 \\ &\iff (1+\zeta)(\mu^x + \mu^y) = -(1+\zeta)\rho \\ &\iff \mu^x + \mu^y = -\rho \end{aligned}$$

μ^x et μ^y étant strictement positifs par définition, V_G ne peut être négatif. Le même résonnement étant parfaitement valide en sens inverse, le Paradoxe d'Ostrorsky est donc impossible lorsque $\zeta^x = \zeta^y$.

Dans le second cas, $\zeta^x \neq \zeta^y$, il faut poser le système de sorte qu'il existe $\omega > 0$ de sorte que $\zeta^x = \omega\zeta^y$. On suppose que $\omega > 1$ de sorte que $\zeta^x > \zeta^y$. Le système se résoud ainsi :

$$\zeta^x = \omega\zeta^y \iff \begin{cases} +(1-\zeta^y)(\beta^x-\gamma^x)+(1-\omega\zeta^y)(\gamma^y-\beta^y) &= 2(\delta-\alpha)+\mu^x+\mu^y \\ +(1+\zeta^y)(\beta^x-\gamma^x)+(1+\omega\zeta^y)(\beta^y-\gamma^y) &= \mu^x-\mu^y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2(\beta^x-\gamma^x)(1-\omega\zeta^y\zeta^y) &= 2[(\delta-\alpha)(1+\omega\zeta^y)+\mu^x+\omega\zeta^y\mu^y] \\ 2(\gamma^y-\beta^y)(1-\omega\zeta^y\zeta^y) &= 2[(\delta-\alpha)(1+\zeta^y)+\zeta^y\mu^x+\mu^y] \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \beta^x-\gamma^x &= \frac{(\delta-\alpha)(1+\omega\zeta^y)}{1-\omega\zeta^y\zeta^y}+\frac{\mu^x+\omega\zeta^y\mu^y}{1-\omega\zeta^y\zeta^y} \\ \gamma^y-\beta^y &= \frac{(\delta-\alpha)(1+\zeta^y)}{1-\omega\zeta^y\zeta^y}+\frac{\zeta^y\mu^x+\mu^y}{1-\omega\zeta^y\zeta^y} \end{cases}$$

Ainsi lorsque A_x et A_y ont le même signe, celui-ci dépend de $\delta-\alpha$, dans la mesure où μ^x et μ^y sont strictement positifs, $1-\omega\zeta^y\zeta^y>0$ vu que $\zeta^x=\omega\zeta^y<1$ et $\zeta^y<1$.

Concernant le vote de l'électeur, son signe dépend de $V_\alpha+V_{\beta^x}+V_{\beta^y}+V_{\gamma^x}+V_{\gamma^y}+V_\delta$. Les signes pour les vecteurs de V_α et V_δ sont respectivement $+2$ et -2, tandis que les signes sont V_{β^x}, V_{β^y}, V_{γ^x} et V_{γ^y} sont respectivement $+1-\zeta^y$, $+\omega\zeta^y-1$, $-1+\zeta^y$ et $-\omega\zeta^y+1$. On remarque que $+\omega\zeta^y-1$ et $-1+\zeta^y$ sont strictement négatifs dans la mesure ou $\zeta^x=\omega\zeta^y<1$ et $\zeta^y<1$. Le signe du vote global (V_G) dépend donc de :

$$2\alpha+(1-\zeta^y)\beta^x+(\omega\zeta^y-1)\beta^y+(-1+\zeta^y)\gamma^x+(-\omega\zeta^y+1)\gamma^y-2\delta$$

soit

$$2(\alpha-\delta)+(1-\zeta^y)(\beta^x-\gamma^x)+(1-\omega\zeta^y)(\gamma^y-\beta^y)$$

Pour qu'un paradoxe d'Ostrogorski soit possible, il faut que le signe de A_x et A_y soit différent du signe de V_G. Supposons ainsi que $V_G<0$. On a donc, concernant le vote aggrégé

$$\begin{aligned} V_G<0 &\iff 2(\alpha-\delta)+(1-\zeta^y)(\beta^x-\gamma^x)+(1-\omega\zeta^y)(\gamma^y-\beta^y)<0 \\ &\iff \exists\rho>0|2(\alpha-\delta)+(1-\zeta^y)(\beta^x-\gamma^x)+(1-\omega\zeta^y)(\gamma^y-\beta^y)+\rho=0 \\ &\iff 2(\alpha-\delta)+(1-\zeta^y)(\tfrac{(\delta-\alpha)(1+\omega\zeta^y)}{1-\omega\zeta^y\zeta^y}+\tfrac{\mu^x+\omega\zeta^y\mu^y}{1-\omega\zeta^y\zeta^y}) \\ &\quad +(1-\omega\zeta^y)(\tfrac{(\delta-\alpha)(1+\zeta^y)}{1-\omega\zeta^y\zeta^y}+\tfrac{\zeta^y\mu^x+\mu^y}{1-\omega\zeta^y\zeta^y})+\rho=0 \\ &\iff (1-\zeta^y)\tfrac{\mu^x+\omega\zeta^y\mu^y}{1-\omega\zeta^y\zeta^y}+(1-\omega\zeta^y)\tfrac{\zeta^y\mu^x+\mu^y}{1-\omega\zeta^y\zeta^y}+\rho=0 \\ &\iff \tfrac{(1-\zeta^y)(\mu^x+\omega\zeta^y\mu^y)+(1-\omega\zeta^y)(\zeta^y\mu^x+\mu^y)}{1-\omega\zeta^y\zeta^y}+\rho=0 \\ &\iff \tfrac{\mu^x+\omega\zeta^y\mu^y-\zeta^y\mu^x-\omega\zeta^y\zeta^y\mu^y\zeta^y\mu^x+\mu^y-\omega\zeta^y\zeta^y\mu^x-\omega\mu^y}{1-\omega\zeta^y\zeta^y}+\rho=0 \\ &\iff \tfrac{(\mu^x+\mu^y)(1-\omega\zeta^y\zeta^y)}{1-\omega\zeta^y\zeta^y}+\rho=0 \\ &\iff \mu^x+\mu^y=-\rho \end{aligned}$$

μ^x et μ^y étant strictement positifs par définition, V_G ne peut être négatif. Le même résonnement étant parfaitement valide en sens inverse, le Paradoxe d'Ostrorsky est donc impossible lorsque $\zeta^x=\omega\zeta^y$. De manière symétrique, il va de même lorsque $\zeta^y=\omega\zeta^x$.

2.6 Simulation du paradoxe dans le cas de la discrimination sur les axes programmatiques

2.6.1 Enjeux et discussion

Nous avons déterminé que le modèle de choix majoritaire avec discrimination sur les axes programmatiques autorise l'existence du paradoxe d'Ostrogorski. Nous souhaitons donc connaître son importance et son comportement. Est-il si peu probable au point d'être négligeable ou suffisament récurrent pour que soit nécessaire d'anticiper des procédures afin de diminuer son risque ? Sa probabilité d'occurence est-il croissante ou décroissante suivant l'augmentation de la taille du corps électoral ? Converge-t-elle vers une borne ? Si oui, converge-t-elle rapidement vers cette borne ?

Afin d'apporter un élément de réponse nous allons réaliser plusieurs simulations de décisions sur les deux axes programmatiques et sur le critère de discrimination entre ceux-ci, afin de disposer d'une résolution des cas décisions programmatiques contraires, dans le but d'essayer de mesure l'occurence du paradoxe d'Ostrogorski. Pour cela nous supposerons que chaque décision sur les axes programmatiques et sur le critère discriminant se fait sous l'hypohtèse de la *Culture neutre* (IC). Ainsi chaque individu réalise trois choix implicites produisant le choix explicite, sous la forme du vote de celui-ci entre les deux candidats en lice. Pour chaque électeur i, on a un profil de choix $C_i = (a_1, a_2, p_a)$ où a_1 désigne la préférence de l'électeur sur le premier axe, a_2 désigne celle sur le second axe et p_a désigne l'axe le plus important pour l'electeur. En associant ce profil de choix avec une fonction de vote $V(C_i)$, on obtient le vote de l'électeur au final. De fait, chaque individu dispose en fait de 8 profils de choix possibles :

$$C_{i_1} = (A, A, a_1) \text{ de sorte que } V(C_{i_1}) = A$$
$$C_{i_2} = (A, A, a_2) \text{ de sorte que } V(C_{i_2}) = A$$
$$C_{i_3} = (A, B, a_1) \text{ de sorte que } V(C_{i_3}) = A$$
$$C_{i_4} = (A, B, a_2) \text{ de sorte que } V(C_{i_4}) = B$$
$$C_{i_5} = (B, A, a_1) \text{ de sorte que } V(C_{i_5}) = B$$
$$C_{i_6} = (B, A, a_2) \text{ de sorte que } V(C_{i_6}) = A$$
$$C_{i_7} = (B, B, a_1) \text{ de sorte que } V(C_{i_7}) = B$$
$$C_{i_8} = (B, B, a_2) \text{ de sorte que } V(C_{i_8}) = B$$

Les profils de choix C_{i_1}, C_{i_2}, C_{i_7} et C_{i_8} produisent des votes parfaitement cohérent avec les préférences programmatiques de l'électeur, tandis que les profils de choix C_{i_3}, C_{i_4}, C_{i_5} et C_{i_6} amènent à des votes ne privilégiant qu'un seul des deux axes programmatiques. Ainsi avec ces profils de choix peuvent être entre le choix sûr pour A (C_{i_1} et C_{i_2}), que nous notons $C^A_{a_1=a_2}$, le choix sûr pour B (C_{i_7} et C_{i_8}), que nous notons $C^B_{a_1=a_2}$, et le choix avec conflit sur les axes programmatiques (C_{i_3}, C_{i_4}, C_{i_5} et C_{i_6}), que nous notons $C_{a_1 \neq a_2}$. Nous pouvons

Table 2.1 – Les 10 situations de vote et leurs effectifs, ainsi que les effectifs des profils induisant un paradoxe d'Ostrogorski

$\begin{pmatrix}S_{C^A_{a_1=a_2}}\\S_{C^A_{a_1=a_2}}\\S_{C_{a_1\neq a_2}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$
Effectifs	8	8	24	24	48	48	96	96	96	64
Effectifs du Paradoxe d'Ostrogorski	0	0	0	0	0	0	0	12	12	0

à partir des scores respectifs, notés $S_{C^A_{a_1=a_2}}$, $S_{C^B_{a_1=a_2}}$ et $S_{C_{a_1\neq a_2}}$, de ces trois choix dresser les situations de vote possible notées $\begin{pmatrix}S_{C^A_{a_1=a_2}}\\S_{C^B_{a_1=a_2}}\\S_{C_{a_1\neq a_2}}\end{pmatrix}$.

A titre d'exemple, dans le cas le plus simple avec $n = 3$, il existe 10 situations de vote résumées dans le tableau 2.1, page 55, dont seules 2, $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ induisent les 24 cas de Paradoxe d'Ostrogorki possibles.

Ce cas simple, met en évidence le fait que le Paradoxe d'Ostrogorski, ne peut exister que si la situation de vote autorise des résultats identiques sur les axes programmatiques complètement opposés au résultat du vote final. Ici, les deux seules situations de vote l'autorisant sont en réalité symétriques et peuvent se résumer au fait qu'il faille un électeur présententant indifféremment le profil de vote C_{i_1} ou C_{i_2} (respectivement C_{i_7} ou C_{i_8}) et deux électeurs présentant les profils de vote C_{i_4} et C_{i_5} (respectivement C_{i_3} et C_{i_6}). Ces caractéristiques structurelles du Paradoxe reposant sur des profils précis autorisant une mesure des effectifs, nous ont poussé à envisager le dévelloppement en juillet 2016 d'une formule analytique déterminant le pourcentage de conflit dans le cas d'un choix final à deux options avec un nombre donné supposé impair d'électeurs (n) disposant chacun d'une seule voix allouée à l'option victorieuse à l'issue de son processus individuel de choix.

2.6.2 Formule de calcul de la probabilité du paradoxe

La structure de la formule repose sur la détermination des situations de vote amenant à un conflit. Nous n'avons pas besoin de générer toutes les situations de vote pour calculer la probabilité de conflit. L'univers des possibilités étant symétrique, du fait du choix binaire, nous pouvons fixer que Aest l'option gagnant sur les deux axes de préférences, tandis que B est l'option remportant le vote global. La population étant impaire s'exprime donc $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, ce qui implique la majoritaire minimale, noté M_n, vaut $p + 1$. On commence par déterminer les scores possibles de $C^A_{a_1=a_2}$, qui doivent être supérieurs à 0 et inférieurs à M_n afin de permettre l'existence du paradoxe. On fait ainsi varier $S_{C^A_{a_1=a_2}}$ de 1 à $M_n - 1$. On construit ensuite les effectifs de $C^B_{a_1=a_2}$ qui peuvent être nuls, sont nécessairement inférieurs à ceux de $C^A_{a_1=a_2}$ et doivent permettre l'existence d'un effectif de $C_{a_1 \neq a_2}$ permettant d'avoir avoir au moins deux profils. On fait ainsi varier $S_{C^B_{a_1=a_2}}$ de 0 au minimum entre $S_{C^A_{a_1=a_2}} - 1$ et $n - S_{C^A_{a_1=a_2}} - 2$. Il faut désormais déterminer les effectifs possibles de $C_{a_1 \neq a_2}$ sachant qu'ils sont au minimum de 2 et repésentent l'effectif restant une fois n retranché de $S_{C^A_{a_1=a_2}}$ et de $S_{C^B_{a_1=a_2}}$: $C_{a_1 \neq a_2}$ s'exprime donc comme le maximum entre 2 et $n - S_{C^A_{a_1=a_2}} - S_{C^B_{a_1=a_2}}$.

On créer une variable y l'écart possible entre les scores de profils C_{i_4} et C_{i_5}, permettant d'avoir toujours un vote global en faveur de B et des majorités sur les axes programmatiques en faveur de A, dans le but de connaître les effectifs des combinaisons possibles à l'intérieur de $C_{a_1 \neq a_2}$: pour cela, on calcule la partie entière de $S_{C_{a_1 \neq a_2}}$ divisé par 2 à laquelle on retranche M_n amputée de $S_{C^A_{a_1=a_2}}$. On créé une variable $S_{C_{a_1=a_2}}$ faisant la somme de $S_{C^A_{a_1=a_2}}$ et de $S_{C^B_{a_1=a_2}}$. On génère ensuite une variable $S_{C^{a_1}_{a_1 \neq a_2}}$ comme étant la partie entière de $C_{a_1 \neq a_2}$ divisé par 2 retranchée par y, avec y variant jusqu'à 0. On mesure la symétrie des combinaisons possibles dans $C^{a_1}_{a_1 \neq a_2}$ avec la variable w. Celle-ci s'écrit comme étant la somme de deux indicatrices mesurant si $S_{C_{a_1 \neq a_2}}$ est pair ou pas : ainsi si $S_{C_{a_1 \neq a_2}}$ est pair, l'indicatrice renvoit 1, sinon l'autre indicatrice renvoie 2. On créé une variable u mesurant possibilités qu'il y des profils de vote dans $C_{a_1 \neq a_2}$ votant au final pour A, c'est-à-dire C_{i_3} et C_{i_6}. On fait donc varier u de 0 jusqu'à n retranché par $S_{C^A_{a_1=a_2}}$ et M_n.

Une fois ces scores générés dans une base de données, on applique dessus la formule suivante :

$$\frac{\binom{S_{C_{a_1=a_2}}}{S_{C^A_{a_1=a_2}}} \times \binom{n}{S_{C_{a_1=a_2}}} \times \binom{S_{C_{a_1 \neq a_2}}}{S_{C^{a_1}_{a_1 \neq a_2}}} \times \binom{S_{C_{a_1 \neq a_2}}}{u} \times w \times 2^{S_{C_{a_1=a_2}}}}{2^{3n-1}} \tag{2.1}$$

que nous passons en logarithme pour alléger les calculs

$$\begin{gathered} log(\binom{S_{C_{a_1=a_2}}}{S_{C^A_{a_1=a_2}}}) + log(\binom{n}{S_{C_{a_1=a_2}}}) + log(\binom{S_{C_{a_1 \neq a_2}}}{S_{C^{a_1}_{a_1 \neq a_2}}}) + log(\binom{S_{C_{a_1 \neq a_2}}}{u}) \\ + log(w) - (3n - 1 - S_{C_{a_1=a_2}}) \times log(2) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Nous obtenons ainsi la probabilité exacte de d'occurance du paradoxe d'Ostrogorski sur axes programmatques avec un discriminant (noté $P_2^{PO}(n)$) en faisant la somme de l'exponentielle de chaque observation de la base finale.

La formule au final se présente ainsi :

$$
\begin{aligned}
P_2^{PO}(n) &= \sum_{S_{C^A_{a_1=a_2}}=1}^{M_n-1} \sum_{S_{C^B_{a_1=a_2}}=0}^{Min(S_{C^A_{a_1=a_2}}-1,n-S_{C^A_{a_1=a_2}}-2)} \sum_{u=0}^{n-S_{C^A_{a_1=a_2}}-M_n} e^{log(\binom{S_{C_{a_1=a_2}}}{S_{C^A_{a_1=a_2}}}\times\binom{n}{S_{C_{a_1=a_2}}}\times\binom{S_{C_{a_1\neq a_2}}}{S_{C^{a_1}_{a_1\neq a_2}}}\times\binom{S_{C_{a_1\neq a_2}}}{u})+log(w)-(3n-1-S_{C_{a_1=a_2}})\times log(2)} \\
&= \sum_{S_{C^A_{a_1=a_2}}=1}^{M_n-1} \sum_{S_{C^B_{a_1=a_2}}=0}^{Min(S_{C^A_{a_1=a_2}}-1,n-S_{C^A_{a_1=a_2}}-2)} \sum_{u=0}^{n-S_{C^A_{a_1=a_2}}-M_n} \frac{\binom{S_{C_{a_1=a_2}}}{S_{C^A_{a_1=a_2}}}\times\binom{n}{S_{C_{a_1=a_2}}}\times\binom{S_{C_{a_1\neq a_2}}}{S_{C^{a_1}_{a_1\neq a_2}}}\times\binom{S_{C_{a_1\neq a_2}}}{u}\times w\times 2^{S_{C_{a_1=a_2}}}}{2^{3n-1}}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Le graphique 2.1, page 58, représente les probabilités d'occurence du paradoxe d'ostrogorski pour une population d'effectif dont l'effectif varie de 1 à 499 électeurs ayant une préférence pour l'indifférence entre les deux options proposées. Les valeurs de conflits sont reportées dans le tableau C.1 à la page 229 en annexe C. On observe clairement l'émergence d'une borne maximale aux alentours de $0,0835$.

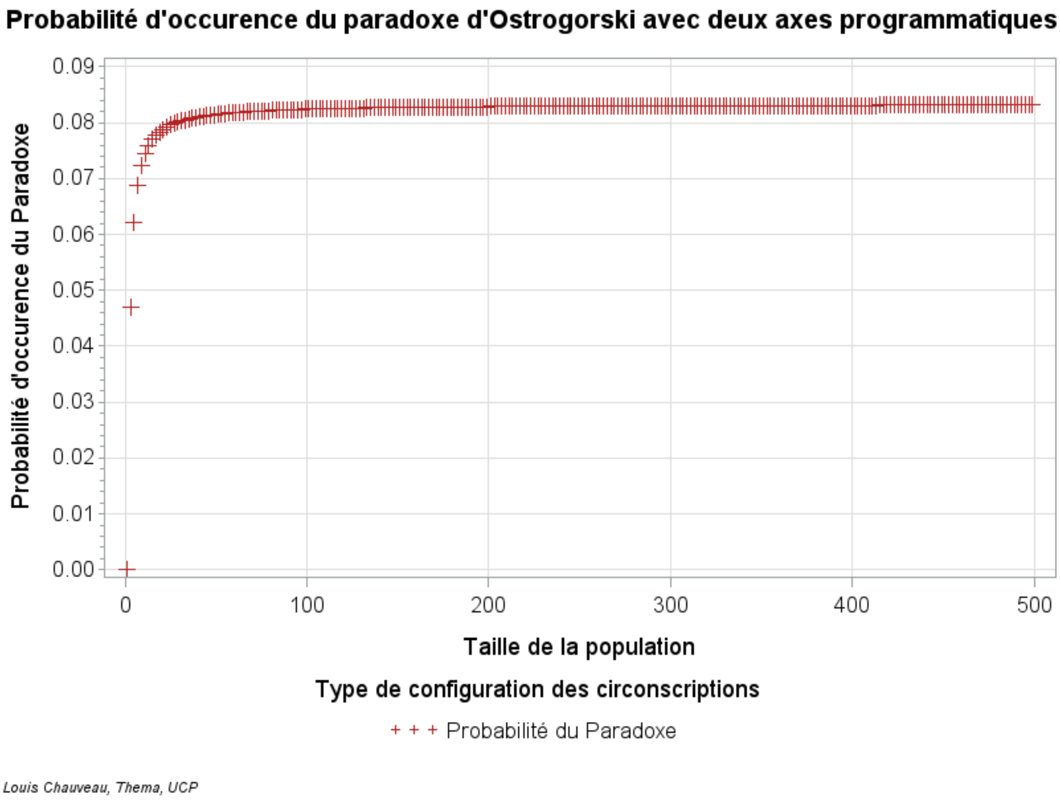

FIGURE 2.1 – Représentation des probabilités d'occurence d'un paradoxe d'ostrogorski lors d'une élection avec deux axes programmatiques et un critère de discrimination sur les axes pour une population s'étendant de 1 à 499 habitants.

2.7 Conclusion

Nous avons étudié le Paradoxe d'Ostrogorski dans le cas de deux axes programmatiques avec trois différents processus de création d'un choix invididuel agrégeants les préférences individuelles sur les axes programmatiques. Si le recours à la règle majoritaire interdit l'existence du paradoxe par l'impossibilité des profils de vote présentant une incohérence partisanne, nous avons démontré que le recours une règle majoritaire composée aboutit au même résultat en les incluants. Nous avons démontré la possibilité d'existence du Paradoxe d'Ostrogorski dans le cas où le choix final repose sur mécanique de sélection à partir d'une décision majoritaire sur chacun des deux axes programmatiques à partir du moment où est admis la possibilité de chaque électeur d'opérer une discrimination, ou une hiérachisation, entre ses axes de préférences. Nous avons examiné l'extension du modèle majoritaire composé dans l'annexe B, page 221. Nous avons ainsi démontré l'existence du Paradoxe dans ce chapitre et déterminé la fréquence de son occurence. Celle-ci est significative, croissante avec la taille du corps électoral et semblant converger asymptotiquement vers une borne de $0,085$. Le fait que le paradoxe puisse exister et avoir une probabilité d'occurence non négligeable sous ces condition, peut conduire à admettre la pertinence de la pris en compte des profils de vote présentant une incohérence partisanne. En effet, certains paradoxes, dont celui du Paradoxe de Condorcet, sont fréquement étudié en ne considérant pas ce comportement de l'electeur. Or même dans le cas minimal, avec trois options et trois axes programmatiques, certaines combinaisons de hiérarchies des préférence individuelles peuvent amener un électeur à fournir un vote de type de Cycle de Condorcet. Toutefois, comme nous l'avons montré, les préférences individuelles étant parfaitement innobservables, à moins de forcer l'électeur à les donner afin de pouvoir voter, le recours à une règle majoritaire composée permet, sous les conditions présentés, d'interdire l'occurence du paradoxe. Nous pouvons ainsi raisonnablement poser l'hypothèse, dans le cadre de l'étude d'autres paradoxes électoraux comme celui du référendum, de ce que l'électeur produit un vote cohérent avec ses préférences individuelles.

Chapitre 3

Modèle de conflits de légitimité avec division homogène du corps électoral [1]

3.1 Introduction

Plusieurs pays mettent en œuvre des règles de vote indirect afin de désigner certains de leurs élus. Au lieu de voter directement pour un candidat (ou une liste de candidats), les électeurs sont répartis entre un certain nombre de circonscriptions électorales. Dans chaque circonscription, les électeurs votent pour des représentants (ou grands électeurs) qui voteront au final pour une option (un candidat, un gouvernement, une politique, etc.). Parmi les exemples d'utilisation des règles de vote indirect, on peut citer l'élection présidentielle américaine, les élections pour le contrôle de la chambre basse du Parlement aux Etats-Unis, les élections législatives au Royaume-Uni et en France (chaque citoyen vote pour son représentant dans sa circonscription électorale, et ensuite les représentants votent pour mettre en œuvre leur programme), l'élection de la chambre haute du Parlement en France et en Allemagne, les élection départementales françaises, les élections municipales à Paris, Lyon et Marseille ...

Selon les spécificités de chaque pays, plusieurs arguments en faveur des scrutins indirects peuvent être avancées. Concernant l'élection présidentielle américaine, le système des Grands électeurs concilie une désignation à l'échelle de chacun des états fédérés et un vote populaire, faisant ainsi que la volonté des citoyens américains de choisir leur président et la Constitution fédérale sont chacune respectée. D'autres défenseurs du système des Grands électeurs suggèrent qu'une élection serrée au niveau de l'un des états fédérés est gérable (même s'ils admettent que l'élection présidentielle de 2000 en Floride a été un désastre) mais qu'un scrutin serré au niveau national serait un cauchemar à gérer : chaque vote, même dans les états fédérés à domination Démocrate ou Républicaine, aurait la même importance, de sorte qu'un recomptage potentiel devrait avoir lieu dans l'ensemble des bureaux de votes du pays.

A propos des élections législatives en France et au Royaume-Uni, les parti-

1. Ce chapitre est issue d'un article non publié co-écrit en 2013 avec Rémy Oddou.

sans de l'élection par circonscription estiment que ce système crée un lien entre les électeurs et leurs députés : tant que les électeurs votent pour un candidat, plutôt qu'une liste, ils sont au moins capables d'identifier le député de leur circonscription.

Inversement, la principale raison de s'opposer aux méthodes de vote indirect est la probabilité strictement positive que le candidat élu reçoive moins de voix que son adversaire. Cette situation a été défini par Nurmi[?] comme étant un «paradoxe du référendum». Cela s'est produit à quatre reprises au cours des élections présidentielles américaines (1824, 1876, 1888 et 2000) et trois fois au cours des élections à la Chambre des Représentants des États-Unis (1942, 1996 et 2012). L'exemple le plus évident d'une telle situation fut l'élection présidentielle américaine de 2000, où Al Gore reçut 543895 voix de plus que George W. Bush alors qu'au final George W. Bush fut élu avec 271 voix des Grands électeurs contre 266 pour Al Gore. Beaucoup d'autres exemples pourraient être cités ici : les élections générales au Royaume-Uni en 1910 et en 1951, en France en 1978, les élections municipales à Marseille en 1983 et à Paris en 2001, etc.

Non seulement l'existence du paradoxe du référendum remet en cause la légitimité du vainqueur, mais en plus il soulève également le problème de la manipulation des élections indirectes : en décidant de la taille des circonscriptions, le parti au pouvoir peut augmenter ses chances de gagner l'élection, même si une majorité d'électeurs vote en faveur du parti adverse. Ce résultat a été étudié par Bervoets et Merlin [22] qui ont démontré de l'infaisabilité d'interdire les manipulations par mouvement d'électeurs, équivalente à un redécoupage partisan.

Certains économistes ont fait des tentatives sujettes à débat afin de calculer la probabilité qu'à de se produire un paradoxe du référendum (voir pour cela Feix et al. [61], Wilson et Pritchard [154] and Lepelley et al. [105]). Il en ressort, en respectant l'hypothèse qu'il existe une infinité d'électeurs dont les suffrages sont également répartis entre les deux candidats, que la probabilité du paradoxe du référendum augmentent avec les nombres de circonscriptions et est bornée, bien que la borne supérieur ne soit pas unanimement déterminée (sa valeur serait comprise entre $0,165$ et $0,205$).

Dans cet article, les circonscriptions sont supposées être homogènes, c'est-à-dire avoir chacune le même nombre d'électeurs, mais ce nombre n'est pas supposé être infini. Agir ainsi permet de contrôler la symétrie de la probabilité de conflit entre le nombre de circonscriptions et le nombre d'électeurs dans chacune. Si l'on traite le cas extrême où il n'y a qu'un seule circonscription, ou alors un seul électeur par circonscription, alors la probabilité est nulle dans les deux cas. Peut-on en déduire, pour tout entier naturel p et q, que la probabilité de conflit est la même selon que l'on ait p circonscriptions de q électeurs et q circonscriptions de p électeurs ? Et la probabilité de conflit est-elle unimodale par rapport au nombre de circonscriptions ?

Le reste de l'article est organisé comme suit. Dans la section 2, nous introduisons le modèle théorique. Dans la section 3 nous présentons les résultats des simulations par ordinateur. Dans la section 4 nous présentons une formule analytique donnant la probabilité exacte de conflit. Finalement, nous concluons l'article à la section 5.

3.2 Modèle

Soit $N \subset \mathbb{N}$ un ensemble discret d'électeurs, le nombre d'électeurs étant $n \in \mathbb{N}$. Nous supposons que la population est impaire, c'est-à-dire $n = 2q+1$ avec $q \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des électeurs est également réparti entre $c \in \mathbb{N}$ circonscriptions de sorte que l'on ait la partition

$$\bigcap_{j=1}^{c} C_j = \emptyset \text{ et } \bigcup_{j=1}^{c} C_j = N,$$

où C_j est l'ensemble des électeurs appartenant à la circonscription j.

Afin d'avoir toujours une décision, le nombre des circonscriptions est supposé impair, de sorte que $c = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$: le risque d'égalité de voix les candidats est ainsi écarté.

Afin, qu'il y ait également toujours une décision de prise dans chaque circonscription, nous supposons également que l'effectif de chacune d'elles est impair, c'est-à-dire $c_j = 2r + 1$ avec $r \in \mathbb{N}$, de sorte de disposer d'une partition de N en c circonscriptions $(C_1, ..., C_c)$ de taille absolument identique : $\forall j \in [1 : c]$, $c_j = 2r + 1$, avec $r \in \mathbb{N}^*$, de telle sorte que $n = c \times c_j = 2(2kr + k + r) + 1$. On a donc $q = 2kr + k + r$.

Chaque circonscription dispose d'un représentant pour participer à l'élection du Gouvernement central. Nous supposons qu'il y a seulement deux candidats pour le Gouvernement central, A et B. Il n'y a pas d'indécision : chaque électeur réalise un choix entre les deux candidats. Il n'y a aucune préférence particulière : chaque électeur a une probabilité identique de choisir A ou B. On a donc indépendance des votes :

$$\forall i \in N, P_i(A) = P_i(B) = \frac{1}{2}$$

Il n'y a aucune préférence au niveau global :

$$P_N(A) = P_N(B) = \frac{1}{2}$$

Nous désignons par n_A le nombre d'électeurs en faveur de A. Ainsi le nombre d'électeurs en faveur de B est donné par

$$n_B = n - n_A$$

De la même manière, c_A est à la fois le nombre de circonscriptions dans lesquelles une majorité des électeurs est en faveur de A et par conséquent le nombre de représentants partisans de A. De manière symétrique le nombre de circonscriptions dans lesquelles une majorité des électeurs est en faveur de B et le nombre de représentants partisans de B est donné par

$$c_B = c - c_A$$

Pour gagner le vote global, il faut que l'un des candidats remporte plus de voix que l'autre : il faut donc au minimum que l'un des candidats obtienne une voix de plus que l'autre.

Nous pouvons dorénavant définir la *majorité minimale globale*, c'est-à-dire le seuil de suffrages en sa faveur que doit atteindre l'un des candidats pour emporter le vote populaire sur son concurrent.

Définition 3.1. *La majorité minimale globale s'écrit :*

$$M_N^{min} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{2(2kr + k + r) + 1}{2} \rfloor + 1 = 2kr + k + r + 1$$

A partir de cette définition, il est possible de déterminer le plus haut score possible du perdant au vote global en retranchant la majorité minimale globale d'une voix.

On définit maintenant la *minorité maximale globale*, c'est-à-dire le plus haut nombre de suffrages en sa faveur que peut recceuillir un candidat en restant défait par son concurrent au vote populaire.

Définition 3.2. *La minorité maximale globale s'écrit :*

$$m_N^{max} = M_N^{min} - 1 = 2kr + k + r$$

Ce score constitue la plus haute valeur que peut atteindre un candidat en pouvant perdre le vote populaire tout en remportant suffisament de circonscriptions pour gagner la majorité des représentants et donc au final l'élection. Cela constitue la borne supérieure du score d'un candidat pouvant bénéficier d'un paradoxe du référendum.

Nous nous intéressons désormai au niveau des circonscriptions, où définissons la *majorité minimale d'une circonscription*, c'est-à-dire le seuil de suffrages à atteindre pour qu'un des candidats remporte le vote dans la circonscription sur son concurrent, et gagne ainsi le représentant de cette circonscription.

Définition 3.3. *La majorité minimale d'une circonscription s'écrit :*

$$M_{C_j}^{min} = \lfloor \frac{c_j}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{2r + 1}{2} \rfloor + 1 = r + 1$$

Le paradoxe du référendum reposant sur les différences de scores pour qu'un candidat gagne le vote populaire et le vote des représentants, nous définissons maintenant la *majorité des circonscriptions*, c'est-à-dire le nombre minimale de circonscription que doit remporter un candidat pour gagner le vote des représentants.

Définition 3.4. *La majorité des circonscriptions s'écrit :*

$$M_C = \lfloor \frac{c}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{2 \times k + 1}{2} \rfloor + 1 = k + 1$$

A partir des définitions de la majorité minimale d'une circonscription et de celle de la majorité des circonscriptions, on définit la *majorité minimale de la majorité des circonscriptions*, c'est-à-dire le plus petit score à partir duquel il est possible pour un candidat de remporter le vote des représentants.

Définition 3.5. *La majorité minimale de la majorité des circonscriptions s'écrit :*

$$M_{M_C}^{min} = M_C \times M_{C_j}^{min} = (k+1) \times (r+1) = kr + k + r + 1$$

Les notations étant introduites, nous pouvons formellement définir la notion de paradoxe du référendum, ou conflit.

Définition 3.6. *Un conflit se produit lorsque,*

$$\exists i = \{A, B\}, c_i < \frac{c}{2} \text{ et } n_i > \frac{n}{2}$$

En d'autres termes, un conflit est une situation dans laquelle le candidat ayant reçu plus de suffrages directs que son opposant, est perdant dans une majorité de circonscriptions.

La probabilité théorique qu'un paradoxe du référendum se produise dépend du nombre de circonscriptions et du nombre total des électeurs (ou du nombre d'électeurs par circonscription).

Nous définissons la probabilité d'occurence d'un conflit.

Définition 3.7. *La probabilité d'occurence d'un conflit s'écrit*

$$P : \left| \begin{array}{ccc} N^2 & \longrightarrow & [0;1] \\ (c,n) & \longmapsto & P(c,n) \end{array} \right.$$

Une propriété immédiate est que la probabilité d'occurence d'un conflit est nulle lorsqu'il n'y a qu'une seule circonscription ou lorsqu'il n'y a qu'un seul électeur par circonscription.

Théorème 3.1. *Lors d'une élection avec deux options, la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum est nulle si le nombre de circonscriptions $c = 1$ ou $c = n$:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(1, n) = P(n, n) = 0 \tag{3.1}$$

Démonstration. Nous commençons par le cas $c = 1$ avant de faire le cas $c = n$.

Cas $c = 1$
On appelle C l'unique circonscription de cette situation.
En ce cas la majorité minimale de la circonscription se confond avec la majorité minimale globale : $M_C^{min} = M_N^{min}$.
En conséquent la majorité minimale de la circonscription est strictement supérieure à la minorité maximale globale

$$M_C^{min} = M_N^{min} > M_N^{min} - 1 = m_N^{max}$$

Le paradoxe du référendum est impossible, sa probabilité d'occurence est donc nulle.

Cas $c = n$
On désigne par $C_1, ..., C_n$ les n circonscriptions de ce cas.
Chaque circonscription ayant un effectif de 1 électeurs, la majorité minimale de chaque circonscription vaut 1.
Par conséquent la majorité minimale de la majorité des circonscriptions se confond avec la majorité minimale globale : $M_{M_C}^{min} = M_N^{min}$.
Par conséquent la majorité minimale de la majorité des circonscriptions est strictement supérieure à la minorité maximale globale

$$M_{M_C}^{min} = M_N^{min} > M_N^{min} - 1 = m_N^{max}$$

Le paradoxe du référendum est par conséquent impossible, sa probabilité d'occurence est donc nulle.

$\square$

Cette propriété soulève une importante question : pour une population $n = c_l \times c_{j_m}$, avec la population n s'écrivant $n = 4kr + 2k + 2r + 1 = 2(2kr + k + r) + 1 = (2k + 1)(2r + 1)$, c_l un nombre parmi les différents nombres possibles de circonscriptions ($c_l \in [1, 2k + 1]$) et c_{j_m} un nombre parmi les différents effectifs possibles de population des circonscriptions ($c_{j_m} \in [1, 2r + 1]$), les probabilités de conflit des différentes combinaisons possibles de $c_l \times c_{j_m} = n$ sont-elles distribuées de manière unimodale ?

Formellement, pour $n = c \times c_j$, est-ce que l'égalité

$$P(c, n) = P(\frac{n}{c}, n)$$

est vraie pour tout $c = 2k + 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, et pour tout $n = 2q + 1$, $\forall q \in \mathbb{N}^*$?

Nous posons le thèorème suivant :

Théorème 3.2. *Lors d'un paradoxe du référendum avec c circonscriptions, aucun candidat ne peut remporter toutes les circonscriptions, quels que soient leurs effectifs.*

Démonstration. Soit une population N d'effectif $n = 2q+1 = 2(2kr+k+r)+1$, avec $q = 2kr + k + r$ et $(k, r) \in \mathbb{N}^2$.

Soit c le nombre de circonscriptions, avec $c = 2k + 1$ et $k \in \mathbb{N}$.

Soit c_j l'effectif de chaque circonscription C_j, avec $c_j = 2r + 1$ et $r \in \mathbb{N}$.

Nous rappelons la *majorité minimale de chaque circonscription* C_j donnée par :

$$M_{C_j}^{min} = r + 1$$

Nous rappelons la *somme des majorités minimales des c circonscriptions* donnée par :

$$\sum_{i=1}^{c} M_{C_i}^{min} = c \times (r+1) = (k+1) \times (r+1) = 2kr + 2k + r + 1$$

Nous rappelons la *majorité minimale globale*, c'est-à-dire le score minimal que peut atteindre le candidat ayant gagné le vote global, donnée par :

$$M_N^{min} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{2(2kr+k+r)+1}{2} \rfloor + 1 = 2kr + k + r + 1$$

Nous rappelons la *minorité maximale globale*, c'est-à-dire le score maximal que peut atteindre le candidat ayant perdu le vote global, donnée par :

$$m_N^{max} = M_N^{min} - 1 = 2kr + k + r$$

Or la somme des majorités minimales des c circonscriptions est supérieure à la minorité maximale globale :

$$\sum_{i=1}^{c} M_{C_i}^{min} = 2kr + 2k + r + 1 > 2kr + k + r = m_N^{max}$$

Ceci rend impossible le paradoxe du référendum.

□

Remarque 3.1. *Il est possible d'observer un paradoxe du référendum en faveur d'un candidat ayant perdu le vote global d'une voix (c'est-à-dire dont le score vaut* $q = 2k + k + r$*) mais ayant gagné toutes les circonscriptions sauf une (c'est-dire que le candidat contrôle* $2k$ *circonscriptions) si et seulement si* $k \leq r$.

Nous définissons ainsi l'intervalle d'existence du paradoxe du référendum, qui est une condition nécessaire mais non suffisante à l'existence du paradoxe du référendum, en faveur du candidat ayant perdu le vote global.

Définition 3.8. *L'intervalle d'existence du paradoxe du référendum s'écrit :*

$$I^e_{PR} = [M^{min}_{MC}, m^{max}_N] = [kr + k + r + 1, 2kr + k + r]$$

Le graphique 3.1, page 67, est consacré à la représentation de l'intervalle d'existence du paradoxe du référendum.

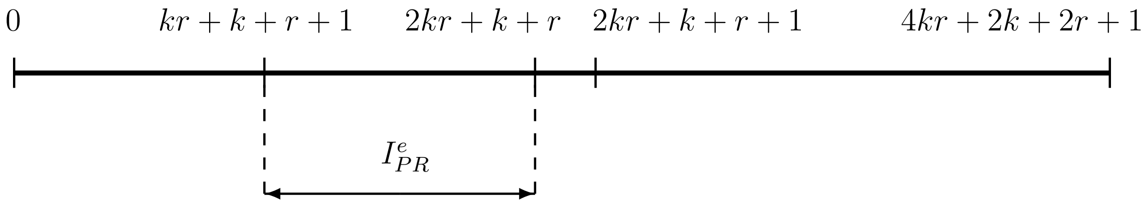

FIGURE 3.1 – Représentation de l'intervalle d'existence du paradoxe du référendum

Remarque 3.2. *Lorsque $k = r = 1$, la population est $n = 4+2+2+1 = 9$, la majorité minimale de la majorité des circonscriptions vaut $M^{min}_{MC} = 1+1+1+1 = 4$, la minorité minimale globale vaut $m^{max}_N = 2+1+1 = 4$ et l'intervalle d'existence du paradoxe du référendum se réduit au singleton $I^e_{PR} = \{4\}$.*

Remarque 3.3. *La valeur de la borne supérieure de l'intervalle d'existence du paradoxe du référendum, la minorité minimale globale (m^{max}_N), pour une population n donnée est unique quelques soient les décompositions possibles de n.*

Avant de poursuivre nous allons démontrer l'unicité de la borne inférieure de l'intervalle d'existence du paradoxe du référendum, c'est-à-dire la majorité minimale de la majorité des circonscriptions (M^{min}_{MC}), quelques soient les décompositions possibles d'une population en circonscriptions de taille homogène.

Théorème 3.3. *Lors d'une élection avec deux candidats dans une population n, la majorité minimale de la majorité des circonscriptions est identique quelles que soient les décompositions possibles de n en c circonscriptions.*

Démonstration. Soit une population N d'effectif $n = 2q+1 = 2(2kr+k+r)+1$, avec $q = 2kr+k+r$ et $(k,r) \in \mathbb{N}^2$.

Soit deux décompositions possibles de la population :

$$\begin{cases} n = c^1 \times c^1_j = c^2 \times c^2_j \\ c^1 \text{ le nombre de circonscriptions} \\ c^1_j \text{ l'effectif de chaque circonscription } C^1_j \\ c^2 \text{ le nombre de circonscriptions} \\ c^2_j \text{ l'effectif de chaque circonscription } C^2_j \end{cases}$$

Nous posons par ailleurs :

$$\begin{cases} c^1 = 2\alpha+1, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{N} \\ c^1_j = 2\beta+1, \text{ avec } \beta \in \mathbb{N} \\ c^2 = 2\gamma+1, \text{ avec } \gamma \in \mathbb{N} \\ c^2_j = 2\delta+1, \text{ avec } \delta \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} n = c^1 \times c^1_j = (2\alpha+1)(2\beta+1) = 2(2\alpha\beta+\alpha+\beta)+1 \\ n = c^2 \times c^2_j = (2\gamma+1)(2\delta+1) = 2(2\gamma\delta+\gamma+\delta)+1 \end{cases}$$

D'où :

$$2\alpha\beta+\alpha+\beta = 2\gamma\delta+\gamma+\delta$$
$$\iff \alpha\beta + \frac{\alpha+\beta}{2} = \gamma\delta + \frac{\gamma+\delta}{2}$$
$$\iff \alpha\beta - \gamma\delta = \frac{\gamma+\delta-\alpha-\beta}{2}$$

On calcule la majorité des circonscriptions pour c^1 et c^2 et et la majorité minimale des circonscriptions pour c^1_j et c^2_j :

$$\begin{cases} M_{C^1} = \lfloor \frac{c^1}{2} \rfloor + 1 = \alpha+1 \\ M^{min}_{C^1} = \lfloor \frac{c^1_j}{2} \rfloor + 1 = \beta+1 \\ M_{C^2} = \lfloor \frac{c^2}{2} \rfloor + 1 = \gamma+1 \\ M^{min}_{C^2} = \lfloor \frac{c^2_j}{2} \rfloor + 1 = \delta+1 \end{cases}$$

puis les majorités minimales de la majorité des circonscriptions :

$$\begin{cases} M^{min}_{M_{C^1}} = (\alpha+1)(\beta+1) = \alpha\beta+\alpha+\beta+1 \\ M^{min}_{M_{C^2}} = (\gamma+1)(\delta+1) = \gamma\delta+\gamma+\delta+1 \end{cases}$$

On suppose qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}^+$ de sorte que $M^{min}_{M_{C^1}} - 1 = \mu(M^{min}_{M_{C^2}} - 1)$, c'est-à-dire :

$$\alpha\beta+\alpha+\beta = \mu(\gamma\delta+\gamma+\delta) = (\mu-1)\gamma\delta + \mu(\gamma+\delta) + \gamma\delta$$
$$\iff \alpha\beta - \gamma\delta = (\mu-1)\gamma\delta + \mu(\gamma+\delta) - \alpha - \beta$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\gamma+\delta-\alpha-\beta}{2} = (\mu-1)\gamma\delta + \mu(\gamma+\delta) - \alpha - \beta \\
&\Longleftrightarrow \gamma+\delta-\alpha-\beta = 2(\mu-1)\gamma\delta + 2\mu(\gamma+\delta) - 2\alpha - 2\beta \\
&\Longleftrightarrow 3(\alpha+\beta) = 2(\mu-1)\gamma\delta + 2\mu(\gamma+\delta) + \gamma + \delta \\
&\Longleftrightarrow \alpha+\beta = \tfrac{2(\mu-1)\gamma\delta}{3} + \tfrac{2(\mu+1)(\gamma+\delta)}{3}
\end{aligned}$$

D'autre part nous avons :

$$\begin{aligned}
&2\alpha\beta + \alpha + \beta - \alpha\beta - \alpha - \beta = 2\gamma\delta + \gamma + \delta - \mu(\gamma\delta + \gamma + \delta) \\
&\Longleftrightarrow \alpha\beta = (2-\mu)\gamma\delta + (1-\mu)(\gamma+\delta)
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi :

$$2\alpha\beta + \alpha + \beta = 2(2-\mu)\gamma\delta + (1-\mu)(\gamma+\delta) + \frac{2(\mu-1)\gamma\delta}{3} + \frac{2(\mu+1)(\gamma+\delta)}{3}$$

D'où :

$$2\alpha\beta + \alpha + \beta = 2\gamma\delta + \gamma + \delta \Longleftrightarrow \mu = 1$$

Ce qui implique l'unicité de la valeur de la borne inférieure de l'intervalle d'existence du paradoxe du référendum. $\square$

La borne inférieur et la borne supérieure de l'intervalle d'existence du paradoxe du référendum pour une population n donnée étant uniques, ce sont les répartitions des situations de conflits à l'intérieur de chacune des classes de score possible qui varient selon la décomposition de n induisant les différences dans la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum.

En effet, chaque électeur ayant une probabilité égale de choisir l'un ou l'autre des deux candidats, la probabilité d'occurence du score global n_j de l'un des deux concurrents est donnée par la fonction de masse d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{2}$:

$$\mathbb{P}(X = n_j) = \binom{n}{n_j}\frac{1}{2^n}$$

On en déduit que la probabilité pour l'un des deux concurrents de réaliser un score global appartenant à l'intervale d'existence du paradoxe du référendum est donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in I^e_{PR}) &= \mathbb{P}(M^{min}_{M_C} \leq X \leq m^{max}_N) \\
&= \textstyle\sum_{l=M^{min}_{M_C}}^{m^{max}_N} \mathbb{P}(X = l) \\
&= \textstyle\sum_{l=M^{min}_{M_C}}^{m^{max}_N} \binom{n}{l}\frac{1}{2^n} \\
&= \textstyle\sum_{l=kr+k+r+1}^{2kr+k+r} \binom{4kr+2k+r+1}{l}\frac{1}{2^{4kr+2k+r+1}}
\end{aligned}$$

n	c	c_j	$P(n_j \in I^e_{PR})$	$P(c,n)$
9	3	3	$0,24609375$	$0,1054688$
15	$\{3,5\}$	$\{5,3\}$	$0,34912109$	$\{0,1281738,\ 0,1318359\}$
21	$\{3,7\}$	$\{7,3\}$	$0,40537643$	$\{0,1379471,\ 0,1427536\}$
25	5	5	$0,44612393$	0.1531690
27	$\{3,9\}$	$\{9,3\}$	$0,43896094$	$\{0,1433732,\ 0.1484989\}$
33	$\{3,11\}$	$\{11,3\}$	$0,45992834$	$\{0,1468219$ [a]
35	$\{5,7\}$	$\{7,5\}$	$0,47952020$	$\{0,1617039,\ 0,1626630\}$
39	$\{3,13\}$	$\{13,3\}$	$0,47337404$	$0,1492067$ [b]
45	$\{3,5,9,15\}$	$\{15,9,5,3\}$	$0,49195282$	$\{0,1509537,\ 0,1662824,\ 0,167586\}$ [c]
49	7	7	$0,49530038$	$0,17055562$
51	$\{3,17\}$	$\{17,3\}$	$0,48795355$	$0,1522886$ [d]
55	$\{5,11\}$	$\{11,5\}$	$0,49677210$	$0,1691345$ [e]
57	$\{3,19\}$	$\{19,3\}$	$0,49182595$	$0,1533417$ [f]
63	$\{3,7,9,21\}$	$\{21,9,7,3\}$	$0,49442930$	$\{0,1541936,\ 0,1747874,\ 0,1751702\}$ [g]
65	$\{5,13\}$	$\{13,5\}$	$0,49868681$	0.1710808 [h]

a. La valeur de la probabilité de conflit $P(11,33)$ n'est pas caclulée.
b. La valeur de la probabilité de conflit $P(13,39)$ n'est pas caclulée..
c. La valeur de la probabilité de conflit $P(15,45)$ n'est pas caclulée.
d. La valeur de la probabilité de conflit $P(17,51)$ n'est pas caclulée.
e. La valeur de la probabilité de conflit $P(11,55)$ n'est pas caclulée.
f. La valeur de la probabilité de conflit $P(19,57)$ n'est pas caclulée.
g. La valeur de la probabilité de conflit $P(21,63)$ n'est pas caclulée.
h. La valeur de la probabilité de conflit $P(13,65)$ n'est pas caclulée.

TABLE 3.1 – Les probabilités de réalisation d'un score global appartenant à l'intervale d'existence du paradoxe du référendum pour 15 premières valeurs décomposables de n

Par construction cette probabilité a une valeur très élevée.
En effet, $\binom{4kr+2k+r+1}{m_N^{max}} = \binom{2q+1}{q} = \binom{2q+1}{q+1}$ est la valeur la plus élevée possible du coefficient binomial, puisque le dénominateur est strictement croissant en s'éloignant de q [2]. Le tableau 3.1, à la page 70, montre les valeurs de cette probabilité pour les quinze premières valeurs décomposables de n (les nombres premiers étant exclus puisque ne permettant pas d'obtenir de décomposition autre que $n = 1.n$). Nous avons également inclu dans ce même tableau les valeurs disponibles de la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum pour les différentes décompositions possibles de n.

Afin de visualiser les différences pouvant exister entre deux décompositions d'un même effectif, nous allons travailler sur le cas simple où l'effectif de la popu-

2. En effet :

$$\begin{aligned}
q!(n-q)! &= q!^2(q+1) < (q-1)!^2 q(q+1)(q+2) && (= (q-1)!(n-q+1)!)\\
&< ... < (q-k+1)!^2(q-k+2)...q...(q+k) && (= (q-k+1)!(n-q+k-1)!)\\
&< ... < 0!^2 1.2....q...(n-0) && (= (0)!(n-0)!)
\end{aligned}$$

lation vaut $n = 27$. Nous savons que cet effectif a deux décompositions possibles :

$$n = 27 = \begin{cases} 3 \times 9 \\ 9 \times 3 \end{cases}$$

Par ailleurs nous savons, d'après les résultats du tableau 3.1, à la page 70, que deux valeurs de probabilités distinctes sont liées à cet effectif :

$$P(c,n) = \begin{cases} P(3,27) = 0,1433732 \\ P(9,27) = 0,1484989 \end{cases}$$

D'après le théorème 3.3, de la page 67, ces deux décompositions ont le même intervalle d'existence du paradoxe du référendum, c'est-à-dire pour les valeurs de scores comprise entre la majorité minimale de la majorité des circonscriptions (10) et la minorité maximale globale (13) : 10, 11, 12 et 13.

Il est également possible dans cet exemple d'observer le paradoxe du référendum avec deux niveaux de grands électeurs au lieu d'un seul. En effet, l'effectif $n = 27$ peut également se décomposer en un produit de trois nombres, puisque $27 = 3 \times 9 = 3 \times 3 \times 3$. D'où il est possible à partir des 9 circonscriptions de 3 électeurs, de les regrouper en 3 «supercirconscriptions» chacune réunissant 3 circonscriptions de 3 électeurs. On se retrouve alors avec une probabilité d'occurence du paradoxe du référendum sur deux niveaux que l'on écrit $P(3,9,27) = 0.1950181$, où le 3 est le nombre de supercirconscriptions et 9 est le nombre de circonscriptions.

Par ailleurs, l'intervalle d'existence observé pour ce cas-ci du paradoxe du référendum est beaucoup plus important. En effet puisqu'il faut avoir une majorité des supercirconscriptions, en plus d'une majorité des circonscription et d'une majorité de l'effectif moyen d'une circonscription, on retrouve avec une majorité minimale de la majorité des circonscriptions à l'intérieur d'une supercirconscription (4) multipliée par la majorité minimale des supercirconscription (2), c'est-à-dire un score minimal de 8. D'où un intervalle d'existence plus large, puisque s'étendant du score 8 au score 13 : $I^e_{PR} = [8, 13]$.

En fait la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum pour $27 = 3 \times 9 = 9 \times 3$ suppose que le nombre de supercirconscriptions est 1, ce qui réécrit ainsi les probabilités, en posant que s est le nombre de supercirconscriptions :

$$P(s,c,n) = \begin{cases} P(1,3,27) = 0,1433732 \\ P(1,9,27) = 0,1484989 \\ P(3,9,27) = 0,1950181 \end{cases}$$

Afin de visualiser le «poids» du paradoxe du référendum à l'interieur de chacune des classes de scores possible conternu dans l'intervalle d'existence du paradoxe du référendum, nous avons réaliser le tableau 3.2, à la page 72,

Nous avons représenté dans la figure 3.2, à la page 73, la répartition des probabilités d'occurence globale du paradoxe du référendum [3], selon que l'on soit

3. C'est à dire la probabilité d'observer un paradoxe du référendum selon le lorsque réalisé par un candidat, selon qu'il soit en sa faveur, c'est-à-dire minoritaire en voix et gagnant en nombre de circonscriptions remportées, ou sa défaveur, c'est-à-dire majoritaire en voix et perdant en nombre de circonscriptions remportées.

Découpage	n_i	Effectifs		Poids		
		Situations	Conflits	Total	Par classe de score	Dans le paradoxe
	10	8436285	47628	$0,0354856$	$0,5645613$	$0,2475053$
	11	13037895	492156	$0,3666848$	$3,7748118$	$2,5575548$
	12	17383860	2334528	$1,7393589$	$13,4292844$	$12,1316885$
$s=1$	13	20058300	6747300	$5,0271303$	$33,6384439$	$35,0632514$
$c=3$	14	20058300	6747300	$5,0271303$	$33,6384439$	$35,0632514$
	15	17383860	2334528	$1,7393589$	$13,4292844$	$12,1316885$
	16	13037895	492156	$0,3666848$	$3,7748118$	$2,5575548$
	17	8436285	47628	$0,0354856$	$0,5645613$	$0,2475053$
	Sous-total		19243224	$14,337319$		
	10	8436285	30618	$0,0228122$	$0,3629323$	$0,1536186$
	11	13037895	418446	$0,3117666$	$3,2094598$	$2,0994538$
	12	17383860	2360988	$1,7590731$	$13,5814946$	$11,8456987$
$s=1$	13	20058300	7155540	$5,3312928$	$35,6737111$	$35,9012289$
$c=9$	14	20058300	7155540	$5,3312928$	$35,6737111$	$35,9012289$
	15	17383860	2360988	$1,7590731$	$13,5814946$	$11,8456987$
	16	13037895	418446	$0,3117666$	$3,2094598$	$2,0994538$
	17	8436285	30618	$0,0228122$	$0,3629323$	$0,1536186$
	Sous-total		19931184	$14,84989$		
	8	2220075	2187	$0,0016294$	$0,0985102$	$0,0083796$
	9	4686825	35721	$0,0266142$	$0,7621578$	$0,1368670$
	10	8436285	266085	$0,1982488$	$3,1540542$	$1,0195193$
	11	13037895	1203903	$0,8969776$	$9,2338756$	$4,6128206$
	12	17383860	3677346	$2,7398363$	$21,1537944$	$14,0899536$
$s=3$	13	20058300	7902198	$5,8875963$	$39,3961502$	$30,2777065$
$c=3$	14	20058300	7902198	$5,8875963$	$39,3961502$	$30,2777065$
	15	17383860	3677346	$2,7398363$	$21,1537944$	$14,0899536$
	16	13037895	1203903	$0,8969776$	$9,2338756$	$4,6128206$
	17	8436285	266085	$0,1982488$	$3,1540542$	$1,0195193$
	18	4686825	35721	$0,0266142$	$0,7621578$	$0,1368670$
	19	2220075	2187	$0,0016294$	$0,0985102$	$0,0083796$
	Sous-total		26099064	$19,44532$		

TABLE 3.2 – Les poids du paradoxe du référendum à l'intérieur de chacune des classes de score possible selon les découpages d'une population de 27 électeurs

en trois circonscriptions, neuf circonscriptions ou trois supercirconscriptions de trois circonscriptions, pour une population $n = 27$ ainsi que la part des profils politiques en faveur du candidat A, autrement les 28 situations possibles allant d'aucun vote à l'unanimité pour le candidat A.

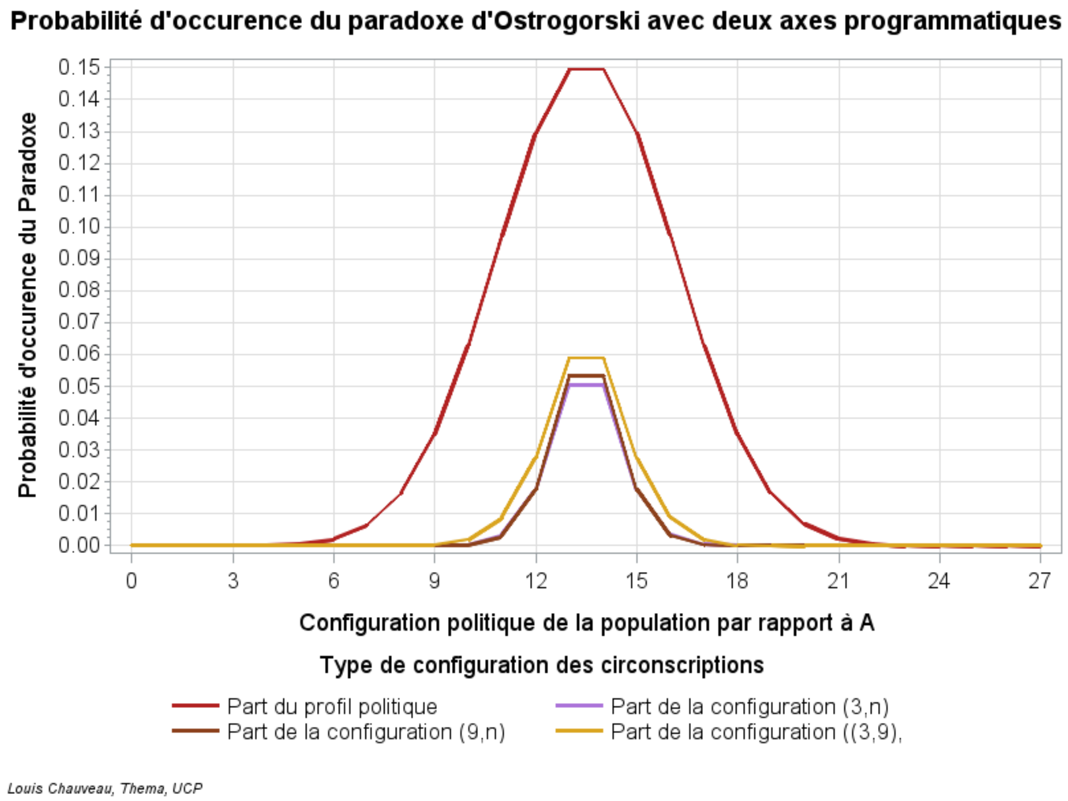

FIGURE 3.2 – Représentation des probabilités d'occurence d'un paradoxe du référendum lors d'une élection avec trois circonscriptions, neuf circonscriptions et trois supercirconscriptions de trois circonscriptions et des parts de profils politique pour le candidat A pour une population de 27 électeurs.

Retenons l'ensemble des définitions que nous avons développé :

- La population totale N d'effectif $|N| = 2q + 1$;
- Le nombre de circonscriptions $|c| = 2k + 1$;
- L'effectif de chaque circonscription $|c_j| = 2r + 1$.

Nous en déduisons la relation suivante :

$$|N| = 2q + 1 = (2k + 1)(2r + 1),$$

ce qui permet d'en déduire la valeur de q en fonction de k et de r :

$$q = 2kr + k + r.$$

Dans ce qui suit, nous exprimons la probabilité de l'existence du paradoxe du référendum à l'aide des variables aléatoires N_{A_j} comptant le nombre d'électeurs ayant voté pour A pour chaque coalition j. Par hypothèse sur les votes individuels (indépendance et équiprobabilité), les N_{A_j} sont indépendantes et de même loi binomiale $B(2r+1, \frac{1}{2})$.

Proposition 3.1. *La probabilité P_{ref} de l'existence du paradoxe du référendum est donnée par :*

$$P_{ref} = 2P\left[\mathcal{N}_A \leq q \cap \lfloor c_A \rfloor \geq k+1\right] =$$

$$2P\left(\sum_{j=1}^{2k+1} N_{A_j} \leq q+1 \cap \cup_{(j_1,\ldots,j_{k+1})}\left\{N_{A_{j_l}} \geq r+1\right\}\right),$$

où $\cup_{(j_1,\ldots,j_{k+1})}$désigne la réunion indexée sur tous les choix possibles des $(k+1)$-uplets (choix des au moins $(k+1)$ circonscriptions ayant voté pour A).

Démonstration. Rappelons que $\mathcal{N}_A$ désigne le nombre total d'électeurs votant pour le candidat A. Nous avons donc :

$$\mathcal{N}_A = \sum_{j=1}^{2k+1} N_{A_j}.$$

L'évènement "A est élu" correspond à la réunion $\cup_{(j_1,\ldots,j_{k+1})}\left\{N_{A_{j_l}} \geq r+1\right\}$, ce qui traduit le fait qu'il faut au moins $(k+1)$ coalitions ayant voté pour A. La condition pour que la circonscription j_l vote pour A correspond à l'évènement $N_{A_{j_l}} \geq r+1$. □

Lemme 3.1. *(Formule de Poincaré)*

Pour tout entier m, et pour toute suite finie d'évènements $C_1, \ldots, C_m$, la probabilité de la réunion des C_i est donnée par :

$$P\left(\cup_{i=1}^m C_i\right) = \sum_{i=1}^m P\left(C_i\right) + \sum_{s=2}^m (-1)^{s+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq m} P\left(C_{i_1} \cap \ldots \cap C_{i_s}\right).$$

Nous en déduisons l'expression suivant de la probabilité du référendum. Considérons les i choix possibles des $(k+1)$-uplets $(j_1, \ldots, j_{k+1})$ parmi $2k+1$. Il y en a donc $m = \binom{2k+1}{k+1}$. Notons C_i l'évènement défini par :

$$C_i = \cup_{(j_1,\ldots,j_{k+1})_i}\left\{\sum_{j=1}^{2k+1} N_{A_j} \leq q+1\right\} \cap \left\{N_{A_{j_l}} \geq r+1\right\},$$

où $(j_1, \ldots, j_{k+1})_i$ désigne le i-ème choix des $(k+1)$-uplets et $\cup_{(j_1,\ldots,j_{k+1})_i}$désigne la réunion indexée sur ce i-ème $(k+1)$-uplet. Nous en déduisons une formule du paradoxe du référendum :

$$P_{ref} = 2\sum_{i=1}^{\binom{2k+1}{k+1}} P\left(C_i\right) + 2\sum_{s=2}^{\binom{2k+1}{k+1}} (-1)^{s+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq \binom{2k+1}{k+1}} P\left(C_{i_1} \cap \ldots \cap C_{i_s}\right),$$

dans laquelle les $P\left(C_i\right)$ peuvent elles même être calculées par la formule de Poincaré :

$$P\left(C_i\right) = \sum_{l=1}^{k+1} P\left(C_{i,l}\right) + \sum_{s=2}^{k+1} (-1)^{s+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq k+1} P\left(C_{i,i_1} \cap \ldots \cap C_{i,i_s}\right),$$

où $C_{i,l}$ désigne l'ensemble :

$$C_{i,l} = \left\{ \sum_{j=1}^{2k+1} N_{A_j} \leq q+1 \right\} \cap \left\{ N_{A_{j_l}} \geq r+1 \right\}.$$

Notons que :

$$\begin{aligned} P\left(C_{i,l}\right) &= P\left[\left\{ \sum_{j=1}^{2k+1} N_{A_j} \leq q+1 \right\} \cap \left\{ N_{A_{j_l}} \geq r+1 \right\} \right] \\ &= P\left[\left\{ \sum_{j=1,\neq l}^{2k+1} N_{A_j} + N_{A_{j_l}} \leq q+1 \right\} \cap \left\{ N_{A_{j_l}} \geq r+1 \right\} \right]. \end{aligned}$$

Puisque $\sum_{j=1,\neq l}^{2k+1} N_{A_j}$ est indépendante de $N_{A_{j_l}}$, de loi $B(2k, \frac{1}{2})$, nous obtenons :

$$P\left[\left\{ \sum_{j=1,\neq l}^{2k+1} N_{A_j} + N_{A_{j_l}} \leq q+1 \right\} \cap \left\{ N_{A_{j_l}} \geq r+1 \right\} \right] =$$

$$\sum_{h=r+1}^{q+1} \sum_{a=r+1}^{h-a} P\left[\sum_{j=1,\neq l}^{2k+1} N_{A_j} = h-a \cap N_{A_{j_l}} = a \right] =$$

$$\sum_{h=r+1}^{q+1} \left(\frac{1}{2}\right)^h \sum_{a=r+1}^{h-a} \binom{2k}{h-a} \binom{a}{2r+1}.$$

Cette expression est cependant difficile à calculer plus explicitement. De plus il reste à évaluer des termes du type :

$$P\left(C_{i,i_1} \cap ... \cap C_{i,i_s}\right).$$

En conséquence, pour l'évaluation de la probabilité P_{ref} d'existence du référendum, nous pouvons alors chercher à la simplifier au moyen de bornes supérieures.

Si nous négligeons les termes correspondant aux probabilités d'intersection, nous obtenons :

Corollaire 3.1. *(borne supérieure)*

$$P_{ref} \leq 2 \sum_{j_1,\dots,j_{k+1}} P\left(\sum_{j=1}^{2k+1} N_{A_j} \leq q+1 \cap N_{A_{j_1}} \geq r+1 \cap ... \cap N_{A_{j_{k+1}}} \geq r+1 \right)$$

$$\leq B_1 = 2\binom{2k+1}{k+1} P \left(\begin{array}{c} N_{A_1} + ... + N_{A_{k+1}} + (N_{A_{k+2}} + ... + N_{A_{2k+1}}) \leq q+1 \\ \cap \\ N_{A_1} \geq r+1 \\ \cap \\ ... \\ \cap \\ N_{A_{k+1}} \geq r+1 \end{array} \right).$$

Démonstration. La somme $\sum_{j_1,...,j_{k+1}}$contient $\binom{2k+1}{k+1}$ termes égaux par les hypothèses faites sur les N_{A_j}. En appliquant alors l'inégalité standard (i.e. $P(A\cup B) \leq P(A)+P(B)$), nous en déduisons le résultat. □

Proposition 3.2. *La borne B_1 s'écrit encore :*

$$B_1 = 2\binom{2k+1}{k+1}\sum_{s}(\sum_{\substack{(n_1,...,n_{k+1})\\ n_1+...+n_{k+1}\leq q+1-s\\ n_1\geq r+1,...,n_{k+1}\geq r+1}} P\Bigg(N_{A_1}=n_1,...,N_{A_{k+1}}=n_{k+1}\Bigg)P(S=s).$$

Démonstration. Posons $S = N_{A_{k+2}}+...+N_{A_{2k+1}}$. En discutant suivant les valeurs possibles s de S et les valeurs possibles n_i des N_{A_i}, nous déduisons le résultat. □

Remarque 3.4. *On note que, quel que soit i, $N_{A_i} \sim B(2r+1, \frac{1}{2})$ et que $S \sim B(k(2r+1), \frac{1}{2})$. Autrement dit :*

$$P(N_{A_1}=n_1,...,N_{A_{k+1}}=n_{k+1})$$

$$= \prod_{i=1}^{k+1} P(N_{A_i}=n_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\sum_{i=1}^{k+1} n_i\right)} \prod_{i=1}^{k+1}\binom{2r+1}{n_i}$$

et

$$P(S=s) = \binom{k(2r+1)}{s}(\frac{1}{2})^{k(2r+1)}.$$

A titre d'exemple, pour $n=475$ et $k=2$, nous obtenons $B_1 = 0.832771$. Quoique désignant une valeur de probabilité possible, cette valeur est néanmoins élevée (à comparer aux valeurs obtenues par simulation dans le cadre de cette thèse).

Remarque 3.5. *Une approximation possible de la borne B_1 serait ici de remplacer les conditions $N_{A_1} \geq r+1$,..., $N_{A_{k+1}} \geq r+1$ par le fait que leur somme soit supérieure ou égale à $(k+1)(r+1)$. Si l'on développe, on obtient la borne B_2 qui est égale à :*

$$2\binom{2k+1}{k+1}\frac{1}{2}^{2q+1}\sum_{s=0}^{(q+1)-(k+1)(r+1)}\sum_{l=(k+1)(r+1)}^{(q+1)-s}\binom{(2r+1)(k+1)}{l}\binom{k(2r+1)}{s}.$$

Cependant, les valeurs obtenues sont beaucoup trop fortes, conduisant même à des valeurs supérieures à 1. Par exemple, pour $n=271$, $k=2$ on obtient $6,14229$.

Remarque 3.6. *On note que $S_1 = N_{A_1}+...+N_{A_{k+1}}$ et $S_2 = N_{A_{k+2}}+...+N_{A_{2k+1}}$. On a que :*

$$P(S_1+S_2 \leq 2q+1 \cap N_1 \geq r+1 \cap ... \cap N_{k+} \geq r+1)$$

$$\leq P((k+1)(r+1) \geq S_1 \geq (2r+1)-s)$$

c \ $\frac{n}{c}$	3	5	7	9
3	$0,1055$	$0,1111$	$0,1172$	$0,1200$
5	$0,1172$	$0,1325$	$0,1373$	$0,1395$
7	$0,1265$	$0,1404$	$0,1449$	$0,1468$
9	$0,1313$	$0,1446$	$0,1489$	$0,1508$

TABLE 3.3 – Valeurs de conflit pour 16 configurations

Les préférences des électeurs sont introduites par le modèle de la Culture Impartiale (Impartial Culture, IC), développé par Guilbaud [77], qui part du principe que la préférence d'un électeur entre deux candidats est définie en suivant une distribution uniforme, ce qui se résume ainsi :

chaque électeur a une probabilité $\frac{1}{2}$ de voter pour le candidat A
et une probabilité $\frac{1}{2}$ de voter pour le candidat B.

En donnant les probabilités corrigées [4] de conflit pour 3, 5, 7 et 9 circonscriptions selon le nombre d'électeurs par circonscription calculé par [61] et par [105], nous pouvons obtenir le tableau le tableau 3.3, à la page 77.

On peut observer, avec ces valeurs, que pour n'importe quel nombre total d'électeurs $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(c) \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \equiv 0 \pmod c$, $P(\frac{n}{c}, n) < P(c, n)$, donc clairement l'égalité $P(c, n) = P(\frac{n}{c}, n)$ est retenue pour $c = 1$ (ou $c = n$), mais est fausse dans le cas le cas général.

Comme le calcul de la probabilité théorique de conflit devient de plus en plus difficile lorsque le nombre de circonscriptions augmente, nous utilisons des simulations par ordinateur pour approximer la probabilité de conflit avec un plus grand nombre de circonscriptions.

Le tableau 3.4, page 78, indique les 16 premières valeurs exactes de la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum pour c allant de 3 à 9 circonscriptions et c_j allant 3 à 9 électeurs, afin de comparer aux valeurs obtenues par le modèle probabiliste IC. On constate immédiatement que, si les rapports entre $P(c, n)$ et $P(\frac{n}{c}, n)$ sont préservés, le modèle probabiliste semble sous-évaluer la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum, lorsque l'on compare les résultats aux valeurs exactes.

En effet, même si les valeurs entre le modèle probabiliste et la formule exacte pour $P(3, 9)$ sont proches (0.1055 pour le premier contre 0.1054687500

4. La probabilité de conflit pour 9 circonscriptions déterminé par [105] est incorrecte, probablement en raison de la typo de $P(9, n) = \frac{(n-1)\mathbf{(n+3)}(1589879n^6+9539274n^5+26892941n^4+43976604n^3+48525617n^2+34536090n+22876875}{10321920(n+1)^8}$ au lieu de $P(9, n) = \frac{(n-1)\mathbf{(n\text{-}3)}(1589879n^6+9539274n^5+26892941n^4+43976604n^3+48525617n^2+34536090n+22876875}{10321920(n+1)^8}$

c \ c_j	3	5	7	9
3	$0,1054687500$	$0,1281738281$	$0,1379470825$	$0,1433731914$
5	$0,1318359375$	$0,1531690359$	$0,1617039123$	$0,1662824391$
7	$0,1427536011$	$0,1626630255$	$0,1705556180$	$0,1747874256$
9	$0,1484988928$	$0,1675861760$	$0,1751701911$	$0,1792440247$

Table 3.4 – Valeurs exactes de conflit pour 16 configurations

pour le second), on observe presque immédiatement des différences importantes dès que l'on passe à $P(3,5)$ $(0,1111$ pour le premier contre $0,1281738281$ pour le second) et $P(5,3)$ $(0,1172$ pour le premier contre $0,1318359375$ pour le second).

3.3 Simulations informatiques

Nous pensons que pour une population $n = c \times c_j$, avec c le nombre de circonscriptions et c_j la population de chaque circonscription, les probabilités de conflit des différentes combinaisons possibles de $c_l \times c_{j_m} = n$ ne sont pas distribuées de manière unimodale. En d'autres termes, pour $n = c \times c_j$, la proposition $P(c, n) = P(\frac{n}{c}, n)$ est fausse.

Pour démontrer cela, il suffit de trouver un cas où cette proposition est fausse. Étant limité par les capacités de nos ordinateurs, nous ne dépasserons pas une population de 20000 électeurs.

Nous avons choisi de faire tourner nos simulations avec une population de 11025 électeurs et une population de 18225 électeurs, qui sont deux nombres ayant une grande décomposition, c'est-à-dire beaucoup de combinaisons possibles pour c et c_j.

11025 est le carré du produit de 3, 5 et 7, tandis que $18225 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$ ce qui nous permet de comparer les probabilités de conflit avec un nombre significatifs de circonscriptions tout en faisant en sorte que chacune ait exactement le même nombre d'électeurs. Nous avons généré 100 000 simulations pour chaque situation, donnant ainsi les probabilités de conflit (avec un intervalle de confiance pour $p = 0, 05$) que nous avons retranscris dans le tableau 3.5, page 80 :

Nombre de situations	n=18225		n=11025	
	c	$P(c, 18225)$	c	$P(c, 11025)$
1	1	$0,00000$	1	$0,00000$
2	3	$0,16236$	3	$0,16212$
3	5	$0,18267$	5	$0,17973$
4	9	$0,19200$	7	$0,18847$
5	15	$0,19942$	9	$0,19310$
6	25	$0,19922$	15	$0,19780$
7	27	$0,20255$	21	$0,19865$
8	45	$0,20311$	25	$0,20171$
9	75	$0,20439$	35	$0,20222$
10	81	$0,20464$	45	$0,20230$
11	135	$0,20380$	49	$0,20430$
12	225	$0,20482$	63	$0,20256$
13	243	$0,20283$	75	$0,20506$
14	405	$0,20227$	105	$0,20452$
15	675	$0,20309$	147	$0,20373$
16	729	$0,20167$	175	$0,20174$
17	1215	$0,19677$	225	$0,20072$
18	2025	$0,19218$	245	$0,20144$
19	3645	$0,18591$	315	$0,20315$
20	6075	$0,16803$	441	$0,20038$
21	18225	$0,00000$	525	$0,20026$
22			735	$0,19849$
23			1225	$0,19289$
24			1575	$0,19086$
25			2205	$0,18359$
26			3675	$0,16561$
27			11025	$0,00000$

Table 3.5 – Valeurs de conflit pour 18225 et 11025 électeurs

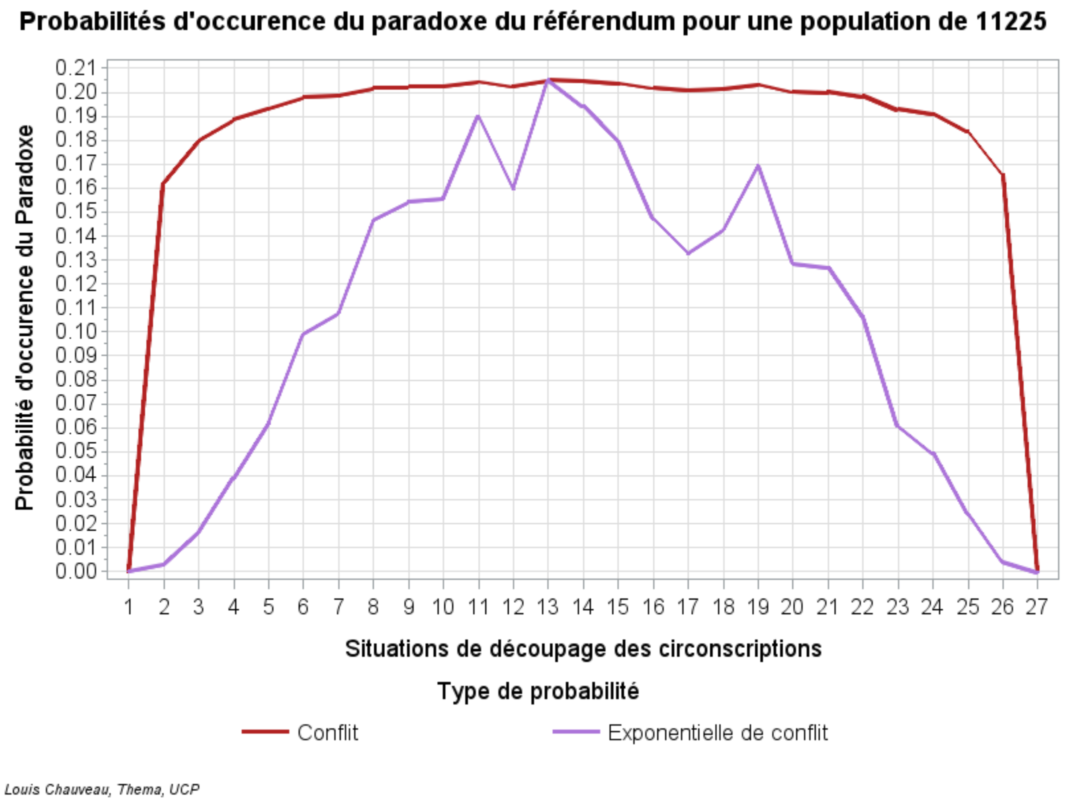

FIGURE 3.3 – Représentation des 27 situations de conflit pour une population de 11 025 électeurs simulant un choix binaire 100 000 fois.

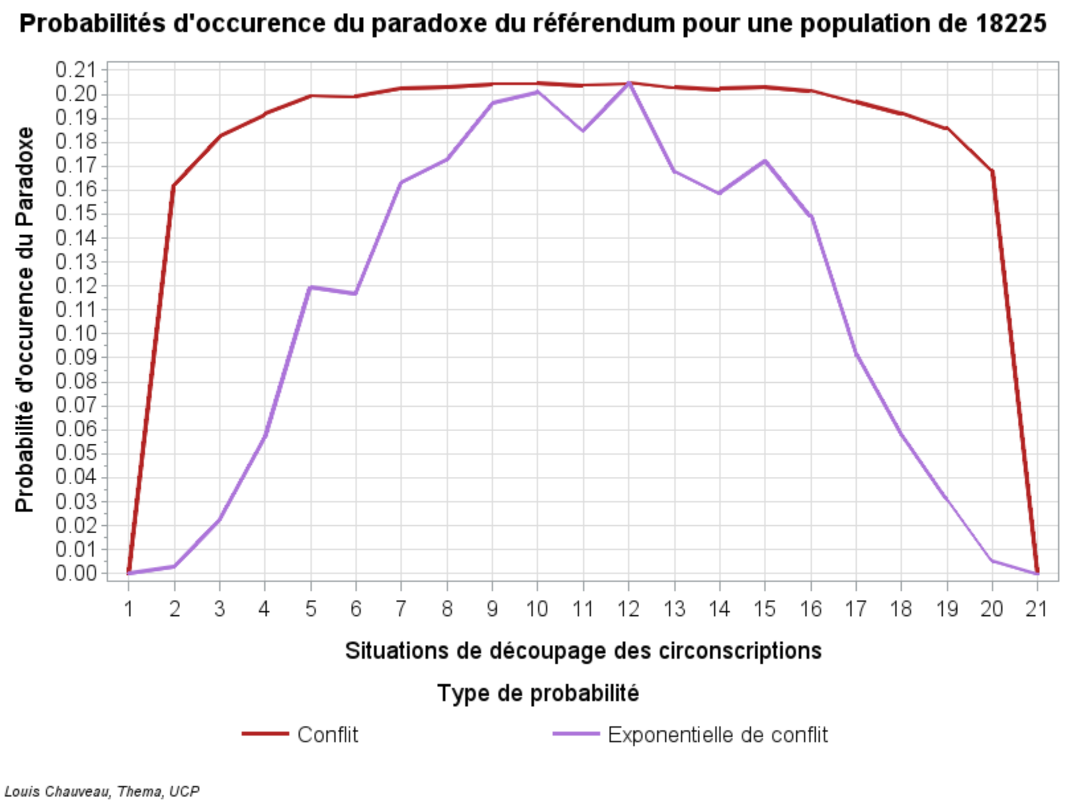

FIGURE 3.4 – Représentation des 21 situations de conflit pour une population de 18 225 électeurs simulant un choix binaire 100 000 fois.

Le graphique 3.3, page 81, représente les 27 valeurs de probabilités des situations d'occurence du paradoxe du référendum pour une population d'effectif 11025 électeurs, répartis en dans des circonscriptions de taille identique quelque soit le découpage et n'ayant aucune préférence entre les deux options proposées, lorsque leur vote est simulé 100000 fois.

De même le graphique 3.4, page 81, représente les 21 valeurs de probabilités des situations d'occurence du paradoxe du référendum pour une population d'effectif 18225 électeurs, répartis en dans des circonscriptions de taille identique quelque soit le découpage et n'ayant aucune préférence entre les deux options proposées, lorsque leur vote est simulé 100000 fois.

Ces résultats très significatifs montrent que la probabilité de conflit n'est pas unimodale par rapport au nombre des circonscriptions. L'autre résultat important est que la probabilité $P(c, n)$ n'est pas égale à la probabilité $P(\frac{n}{c}, n)$.

La section suivante fournit une formule permettant pour calculer la probabilité de conflit de manière plus facile.

3.4 Formule pour calculer la probabilité de conflit sous l'hypothèse IC

3.4.1 Intérêt

Nous avons développé en janvier 2013 une formule analytique pour déterminer le pourcentage de conflit dans le cas d'un choix à deux options avec un nombre donné d'électeurs (n) distribués dans un nombre donné de circonscriptions (c), chacune disposant d'une seule voix allouée à l'option victorieuse à l'intérieur de son périmètre. Un conflit existe lorsque l'option choisie par les électeurs n'est pas l'option choisie par les délégués des circonscriptions.

Ce phénomène a été observé plusieurs fois dans l'histoire électorale récente des États-Unis, à l'occasion des élections à la Chambre des Représentants (1942, 1952, 1996 et 2012), qui sur 113 élections depuis 1789, donne une faible probabilité de 3,5382%, mais lorsqu'on la réduit seulement à la période de validité des circonscriptions américaines, soit chaque recensement décennal c'est-à-dire 10 ans ou 5 elections, on peut atteindre selon la décennie une probablité de conflit de 20% [5].

Les méthodes actuelles, *Impartial Anymous Culture* (IAC) et *Impartial Culture* (IC), basées sur des modèles probabilistes, n'indiquent pas exactement quelle est la probabilité de distribution de chaque conflit, ou pour être plus précis quelle est la relation hiérarchique en terme de valeurs de distribution entre elles. Par exemple 15 électeurs peuvent être divisés en trois ou cinq circonscriptions de taille égale, impaires et supérieures à un : la probabilité d'un conflit, $P(c, n)$, n'est cependant pas la même puisque $P(3, 15) = 12,8173828\%$ tandis que $P(5, 15) = 14,183594\%$, donc $P(3, 15) < P(5, 15)$.

Les méthodes de calcul IAC et AC donnent des résultats similaires mais avec un bruit ne permettant pas de conclure avec certitude à l'inégalité stricte $P(3, 15) < P(5, 15)$.

Cependant ces probabilités furent calculées très facilement en ramenant toutes les situations de conflit (4200 dans trois circonscriptions contre 4320 dans cinq circonscriptions) au total des situations (2^n).

3.4.2 Formule numérique

Formule pour trois circonscriptions La structure de la formule est basée sur le développement de chaque situation de vote ou, pour être plus précis, sur l'énumération des situations de vote. La principale difficulté est qu'il est impossible de générer une base des choix de chaque individu avec N électeurs en colonne et les 2^n choix qu'ils peuvent faire en ligne : pour 27 individus nous nous retrouvons avec une base de données de 100 gigaoctets, par conséquent, il est

5. Une probabilité de 20% d'occurence du paradoxe du référendum a été observée pour les décennies 1940-1950, 1950-1960 et 1990-2000.

pratiquement impossible de faire une base de données, par exemple, avec les 45 millions d'électeurs français et leurs $2^{45000000}$ choix (nombre hors de portée des ordinateurs actuels).

Mais nous n'avons pas besoin de générer tous les profils pour calculer la probabilité de conflit. Il suffit juste de connaître leur nombre, et chaque situation est elle-même inclue dans un profil : c'est au niveau des circonscriptions, des poids sont affectés à chaque option. Par exemple si nous prenons une population de 153 électeurs divisée en trois circonscriptions (C_1, C_2, C_3) de 51 électeurs, et l'on décide que l'option de référence reçoit 26 votes dans deux circonscriptions et 5 votes dans la dernière, par conséquent $(26, 26, 5)$ est un profil. En outre, ce profil ayant comme combinaison équivalente $(26, 5, 26)$ et $(5, 26, 26)$, nous pouvons attribuer un coefficient multiplicateur 3, tandis qu'avec trois différentes valeurs ont affecte un coefficient multiplicateur 6. Ceci donne une hiérarchie des profils, ce qui permet de mettre en œuvre un algorithme pour générer les profils.

Pour simplifier les calculs, nous supposons que nous testons toujours l'existence du paradoxe du référendum en faveur du candidat A (le nombre total de situations étant obtenu par doublement).

Dans le cas particulier de trois circonscriptions de taille identique, certaines propritétés de la hiérachie des profils sont immédiates. Tout d'abord, le théorème 3.2, page 66, stipule l'impossibilité pour un candidat de remporter toutes les circonscriptions lorsqu'un paradoxe du référendum existe. Couplé avec la remarque 3.1, page 66, on en conclut que configuration à trois circonscriptions oblige toujours, en présence d'un paradoxe du référendum, à ce que la troisième circonsciption présente un score inférieur à la majorité minimale de la circonscription ($M_{C_3}^{min}$), dont le score est donc compris entre 0 (c'est-à-dire que les circonscriptions C_1 et C_2 se répartissent les valeurs comprises entre la majorité minimale globale $2kr+k+r = 3r+1$ et la minorité minimale globale $kr+k+r+1 = 2(r+1)$) et r.

Ensuite comme nous dénombrons les combinaisons de chaque profil, nous pouvons imposer une hiérarchie des scores entres les circonscriptions C_1 et C_2, de sorte que la première soit toujours supérieure ou égale à la seconde. Donc le score de la première circonscription est compris entre sa valeur de majorité minimale ($M_{C_1}^{min} = r + 1$) et la différence entre la minorité maximale globale retranché du score de la majorité minimale de la seconde circonscription ($m_N^{max} - M_{C_2}^{min} = 3r + 1 - r + 1 = 2r$). Et le score de la seconde circonscription se trouve compris entre le score réalisé par le candidat A dans la première circonscirption (c_{1_A}) et le minimum entre le score de la première circonscription et la différence entre la minorité maximale globale retranché du score de la majorité minimale de la première circonscription ($Min(c_{1_A}, m_N^{max} - c_{1_A})$).

La formule repose sur la production de profils et le dénombrement de leurs conflits. Ainsi par exemple, dans le cas de 3 circonscriptions (C_1, C_2, C_3) avec un effectif de 51 électeurs, si une option obtient 26 votes dans C_1, 26 votes dans C_2, et 5 votes dans C_3, il s'agit d'un cas de conflit et ce profil contient

$\binom{51}{26} \times \binom{51}{26} \times \binom{51}{5} \times \binom{3}{1} \times 2 = 8.6657478078817 \times 10^{35}$ situations possibles. Cependant, les coefficients binomiaux fonctionnent à partir d'une fonction factorielle, qui peut très rapidement atteindre d'immenses valeurs. C'est pourquoi la formule a été réécrite afin d'avoir

$$\binom{c_j}{c_{j_k}} = \prod_{i=0}^{c_{j_k}-1} \frac{c_j - i}{c_{j_k} - i}, \forall j \in \{1,2,3\}, \forall k \in \{A,B\} \tag{3.2}$$

au lieu de

$$\binom{c_j}{c_{j_k}} = \frac{c_j!}{c_{j_k}!(c_j - c_{j_k})!}, \forall j \in \{1,2,3\}, \forall k \in \{A,B\} \tag{3.3}$$

De plus, au lieu de faire la somme de toutes les situations et ensuite la diviser par 2^n, chaque situation est divisée par 2^n avant d'être sommée.

Au final, ayant constaté que les nombres utilisés dans les opérations intermédiaires sont toujours très grands, nous avons décidé de passer tous nos calculs en logarithme. Ainsi pour la situation ($3c_j$, c_{1k}, c_{2k}, c_{3k}), la formule

$$\frac{\binom{c_1}{c_{1k}} \times \binom{c_2}{c_{2k}} \times \binom{c_3}{c_{3k}} \times 2 \times \begin{pmatrix} 3 \text{ si } c_{1k} = c_{2k} \\ 6 \text{ si } c_{1k} > c_{2k} \end{pmatrix}}{2^n} \tag{3.4}$$

devient

$$log(\binom{c_1}{c_{1k}}) + log(\binom{c_2}{c_{2k}}) + log(\binom{c_3}{c_{3k}}) + \begin{pmatrix} log(3) \text{ si } c_{1k} = c_{2k} \\ log(6) \text{ si } c_{1k} > c_{2k} \end{pmatrix} + (1-n) \times log(2) \tag{3.5}$$

Nous obtenons ainsi la probabilité exacte de conflit en faisant la somme de l'exponentielle de chaque observation de la base finale (Voir annexe D.1).

La formule au final se présente ainsi :

$$\begin{aligned} P(3,n) &= \sum_{c_{1_k}=r+1}^{2r} \sum_{c_{2_k}=r+1}^{Min(c_{1_k}, m_N^{max}-c_{1_k})} \sum_{c_{3_k}=0}^{m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k}} e^{log(\binom{c_1}{c_{1k}})+log(\binom{c_2}{c_{2k}})+log(\binom{c_3}{c_{3k}})+\binom{log(3) \text{ si } c_{1k}=c_{2k}}{log(6) \text{ si } c_{1k}>c_{2k}}+(1-n)\times log(2)} \\ &= \sum_{c_{1_k}=r+1}^{2r} \sum_{c_{2_k}=r+1}^{Min(c_{1_k}, m_N^{max}-c_{1_k})} \sum_{c_{3_k}=0}^{m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k}} \frac{\binom{c_1}{c_{1k}}\times\binom{c_2}{c_{2k}}\times\binom{c_3}{c_{3k}}\times\begin{pmatrix} 3 \text{ si } c_{1k} = c_{2k} \\ 6 \text{ si } c_{1k} > c_{2k} \end{pmatrix}}{2^{n-1}} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Le graphique 3.5, page 87, représente les probabilités d'occurence du paradoxe du référendum pour une population d'effectif dont l'effectif varie de 3 à 4227 électeurs, répartis dans trois circonscriptions de taille identique et n'ayant aucune préférence entre les deux options proposées.

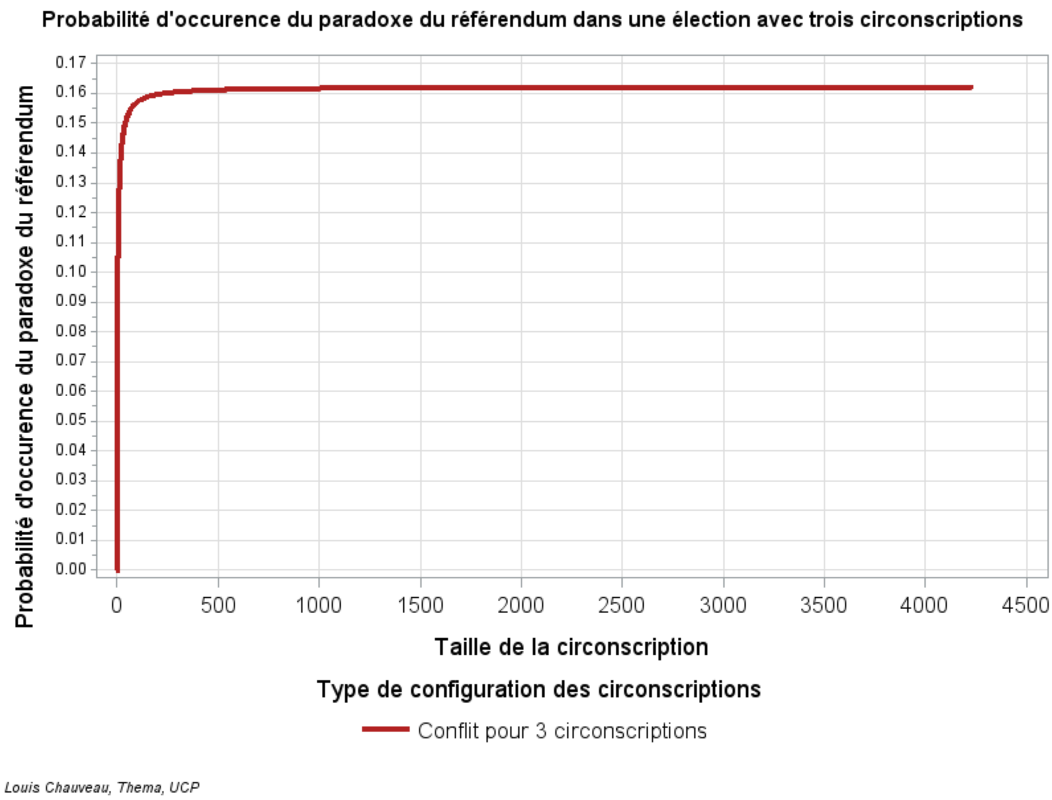

FIGURE 3.5 – Représentation des probabilités d'occurence d'un paradoxe du référendum lors d'une élection avec trois circonscriptions dont la taille de population s'étend de 1 à 1409 pour une population globale de 4227 habitants.

Formule pour cinq circonscriptions La formule de calcul de la probabilité exacte de conflits pour cinq circonscriptions de taille identique reprend la même logique que celle pour trois circonscriptions de taille identique, la différence étant dans les coefficients multiplicateurs attribués. Il existe 6 valeurs possibles $(120, 60, 30, 20, 10, 5)$:

- 120 est appliqué lorsque les cinq circonscriptions présentent des scores différents [6]
- 60 est appliqué lorsque deux circonscriptions présentent le même score et les trois restantes des scores différents [7]
- 30 est appliqué lorsque deux égalités existent entre trois circonscriptions sans qu'elles présentent le même score [8]
- 20 est appliqué lorsque trois circonscriptions présentent le même score [9]
- 10 est appliqué lorsqu'une seule inégalité existe entre deux circonscriptions et que trois circonscriptions et deux circonscriptions présentent les mêmes scores [10]
- 5 est appliqué lorsqu'une seule inégalité existe entre deux circonscriptions et que quatre circonscriptions présentent le même score [11]

On pose la définition de la la fonction d'identité des scores du candidat k dans les cinq circonscriptions :

6. En effet, le cas $(c_{1k} > c_{2k} > c_{3k} > c_{4k} > c_{5k})$ implique

$$\binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 120$$

7. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} > c_{3k} > c_{4k} > c_{5k})$ implique

$$\binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} = 60$$

8. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} > c_{3k} = c_{4k} > c_{5k})$ implique

$$\binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 30$$

9. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{3k} = c_{2k} > c_{4k} > c_{5k})$ implique

$$\binom{5}{3} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 20$$

10. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} > c_{3k} = c_{4k} = c_{5k})$ implique

$$\binom{5}{3} \times \binom{2}{2} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 20$$

11. En effet, le cas $(c_{1k} > c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} = c_{5k})$ implique

$$\binom{5}{4} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 20$$

Définition 3.9. *La fonction d'identité des scores du candidat k dans les circonscription s'écrit :*

$$I^k_{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)} = \begin{cases} 120 \; si \; (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) = (1,1,1,1,1) \\ 60 \; si \; (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) = (2,1,1,1,0) \\ 30 \; si \; (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) = (2,2,1,0,0) \\ 20 \; si \; (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) = (3,1,1,1,0) \\ 10 \; si \; (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) = (3,2,0,0,0) \\ 5 \; si \; (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) = (4,1,0,0,0) \end{cases} \tag{3.7}$$

où a_1*,* a_2 *,*a_3*,* a_4 *,* a_5 *sont les effectifs des classes de scores du candidat k dans les circonscriptions.*

Au final, de manière similaire à la démarche employée avec la formule pour trois circonscriptions, nous passons tous nos calculs en logarithme. Ainsi pour la situation $(n,\, c_{1k},\, c_{2k},\, c_{3k},\, c_{4k}, c_{5k})$, la formule

$$\frac{\binom{c_1}{c_{1k}} \times \binom{c_2}{c_{2k}} \times \binom{c_3}{c_{3k}} \times \binom{c_4}{c_{4k}} \times \binom{c_5}{c_{5k}} \times 2 \times \begin{pmatrix} I^k_{(1,1,1,1,1)} \\ I^k_{(2,1,1,1,0)} \\ I^k_{(2,2,1,0,0)} \\ I^k_{(3,1,1,1,0)} \\ I^k_{(3,2,0,0,0)} \\ I^k_{(4,1,0,0,0)} \end{pmatrix}}{2^n} \tag{3.8}$$

devient

$$\begin{aligned} log(\binom{c_1}{c_{1k}}) + log(\binom{c_2}{c_{2k}}) + log(\binom{c_3}{c_{3k}}) + log(\binom{c_4}{c_{4k}}) + log(\binom{c_5}{c_{5k}}) \\ + \begin{pmatrix} log(I^k_{(1,1,1,1,1)}) \\ log(I^k_{(2,1,1,1,0)}) \\ log(I^k_{(2,2,1,0,0)}) \\ log(I^k_{(3,1,1,1,0)}) \\ log(I^k_{(3,2,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(4,1,0,0,0)}) \end{pmatrix} + (1-n) \times log(2) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Nous obtenons ainsi la probabilité exacte de conflit en faisant la somme de l'exponentielle de chaque observation de la base finale (Voir annexe D.2).

Concernant la génération des profils, nous reprenons également les mêmes hypothèses que pour le cas avec trois circonscriptions : nous supposons donc que nous testons toujours l'existence du paradoxe du référendum en faveur du candidat A (obtenant ainsi le nombre total de situations par doublement).

Dans le cas particulier de cinq circonscriptions de taille identique, nous avons également des propritétés de la hiérarchie des profils similaires au cas avec trois circonscriptions. En nous référant au théorème 3.2, de la page 66, stipulant l'impossibilité pour un candidat de remporter toutes les circonscriptions lorsqu'un paradoxe du référendum existe, couplé avec la remarque 3.1, de la page 66, on en conclut que configuration à cinq circonscriptions oblige toujours, en présence d'un paradoxe du référendum, à ce que la cinqième circonsciption présente un score inférieur à la majorité minimale de la circonscription ($M_{C_5}^{min}$), dont le score est donc compris entre 0 (c'est-à-dire que les circonscriptions C_1, C_2, C_3 et C_4 se répartissent les valeurs comprises entre la majorité minimale globale $2kr+k+r=5r+2$ et la minorité minimale globale $kr+k+r+1=3(r+1)$) et le minimum entre le score de la circonscription C_4 et la différence entre la minorité maximale globale retranchée des scores de la première, de la seconde, de la troisième et de la quatrième circonscription ($m_N^{max}-(c_{1_A}+c_{2_A}+c_{3_A}+c_{4_A})$).

Concernant le score réalisé dans la quatrième circonscription, il peut être supérieur à la majorité minimale de la circonscription ($M_{C_4}^{min}$). De fait, ce score dépend des scores réalisés dans la première, la seconde et la troisième circonscription et il peut être compris entre 0 (en effet, $3(2r+1)=6r+3>5r+2$) et le minimum entre le score de la circonscription C_3 et la différence entre la minorité maximale globale retranchée des scores de la première, de la seconde et de la troisième circonscription ($m_N^{max}-(c_{1_A}+c_{2_A}+c_{3_A})$).

Ensuite, par construction et par définition du paradoxe du référendum qui implique qu'une majorité de circonscriptions présente une victoire du candidat minoritaire globalement, la troisième circonscription présente un score minimal nécessairement supérieur ou égal à la majorité minimale de la circonscription ($M_{C_3}^{min}$). Ce score dépendant de ceux réalisés par la première et la seconde circonscription, il est compris entre sa valeur de majorité minimale ($M_{C_3}^{min}=r+1$) et le minimum entre le score de la seconde circonscription et la différence entre la minorité maximale globale retranché du score de la première et de la seconde circonscription ($m_N^{max}-(c_{1_A}+c_{2_A})$.

De la même manière le score de la seconde circonscription est nécessairement compris entre la majorité minimale de la circonscription ($M_{C_2}^{min}$=r+1) et le minimum entre le score de la première circonscription et la différence entre la minorité maximale globale retranché du score de la première circonscription et son score de majorité minimale ($m_N^{max}-(c_{1_A}+M_{C_2}^{min})$.

Enfin le score de la première circonscription est compris entre sa valeur de majorité minimale ($M_{C_1}^{min}=r+1$) et le score maximum autorisé par la circonscription, c'est-à-dire $c_1=2r+1$.

La formule au final se présente ainsi :

$$
\begin{aligned}
P(5,n) &= \sum_{c_{1_k}=r+1}^{2r+1} \sum_{c_{2_k}=r+1}^{Min(c_{1_k}, m_N^{max}-c_{1_k}-M_{C_2}^{min})} \sum_{c_{3_k}=r+1}^{Min(c_{2_k}, m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k})} \sum_{c_{4_k}=0}^{Min(c_{3_k}, m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k}-c_{3_k})} \sum_{c_{5_k}=0}^{Min(c_{4_k}, m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k}-c_{3_k}-c_{4_k})} \\
&\times e^{\left(log(\binom{c_1}{c_{1k}})+log(\binom{c_2}{c_{2k}})+log(\binom{c_3}{c_{3k}})+log(\binom{c_4}{c_{4k}})+log(\binom{c_5}{c_{5k}})+ \begin{pmatrix} log(I^k_{(1,1,1,1,1)}) \\ log(I^k_{(2,1,1,1,0)}) \\ log(I^k_{(2,2,1,0,0)}) \\ log(I^k_{(3,1,1,1,0)}) \\ log(I^k_{(3,2,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(4,1,0,0,0)}) \end{pmatrix} +(1-n)\times log(2) \right)} \\
&= \sum_{c_{1_k}=r+1}^{2r+1} \sum_{c_{2_k}=r+1}^{Min(c_{1_k}, m_N^{max}-c_{1_k})} \sum_{c_{3_k}=r+1}^{Min(c_{2_k}, m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k})} \sum_{c_{4_k}=0}^{Min(c_{3_k}, m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k}-c_{3_k})} \sum_{c_{5_k}=0}^{Min(c_{4_k}, m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k}-c_{3_k}-c_{4_k})} \\
&\times \frac{\binom{c_1}{c_{1k}}\times\binom{c_2}{c_{2k}}\times\binom{c_3}{c_{3k}}\times\binom{c_4}{c_{4k}}\times\binom{c_5}{c_{5k}}\times \begin{pmatrix} I^k_{(1,1,1,1,1)} \\ I^k_{(2,1,1,1,0)} \\ I^k_{(2,2,1,0,0)} \\ I^k_{(3,1,1,1,0)} \\ I^k_{(3,2,0,0,0)} \\ I^k_{(4,1,0,0,0)} \end{pmatrix}}{2^{n-1}}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

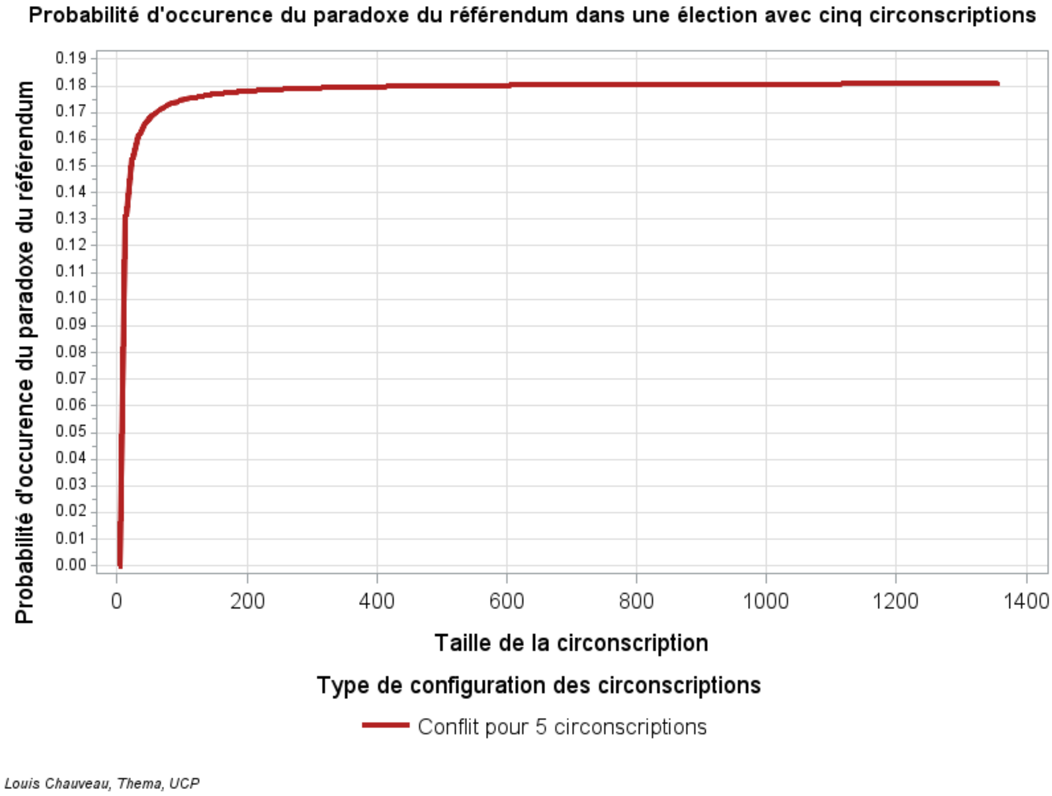

FIGURE 3.6 – Representation des probabilités d'occurence d'un paradoxe du référendum lors d'une élection avec cinq circonscriptions dont la taille de population s'étend de de 1 à 271 pour une population globale de 1355 habitants.

Formule pour sept circonscriptions La formule de calcul de la probabilité exacte de conflits pour sept circonscriptions de taille identique reprend exactement la même logique que celle pour cinq circonscriptions de taille identique, c'est-à-dire la même logique que pour la formule avec trois circonscriptions de taille identique, la différence étant dans les coefficients multiplicateurs attribués. Il existe 13 valeurs possibles $(5040, 2520, 1260, 840, 630, 420, 210, 140, 105, 42, 35, 21, 7)$:

- 5040 est appliqué lorsque les sept circonscriptions présentent des scores différents [12]
- 2520 est appliqué lorsque deux circonscriptions présentent le même score et les cinq restantes des scores différents [13]
- 1260 est appliqué lorsqu'il existe deux égalités entre quatre circonscriptions sans que trois circonscriptions présentent le même score [14]
- 840 est appliqué lorsqu'il existe deux égalités entre quatre circonscriptions et que trois circonscriptions présentent le même score [15]
- 630 est appliqué lorsqu'il existe trois égalités entre six circonscriptions sans que plus de deux circonscriptions présentent le même score [16]
- 420 est appliqué lorsque quatre circonscriptions présentent le même score [17]
- 210 est appliqué lorsqu'il existe deux fois une égalité de score entre trois circonscriptions ou qu'il existe une égalité de score entre trois circonscriptions et deux autres égalité de score entre deux circonscriptions [18]
- 140 est appliqué lorsqu'il existe deux fois une égalité de score entre trois

12. En effet, le cas $(c_{1k} > c_{2k} > c_{3k} > c_{4k} > c_{5k} > c_{6k} > c_{7k})$ implique

$$\binom{7}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 5040$$

13. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} > c_{3k} > c_{4k} > c_{5k} > c_{6k} > c_{7k})$ implique

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} = 2520$$

14. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} > c_{3k} = c_{4k} > c_{5k} > c_{6k} > c_{7k})$ implique

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 1260$$

15. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} > c_{4k} > c_{5k} > c_{6k} > c_{7k})$ implique

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 840$$

16. En effet, le cas $(c_{1k} > c_{2k} = c_{3k} > c_{4k} = c_{5k} > c_{6k} = c_{7k})$ implique

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 630$$

17. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} > c_{3k} > c_{4k} > c_{5k} = c_{6k} = c_{7k})$ implique

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 420$$

18. En effet, le cas $(c_{1k} > c_{2k} > c_{3k} > c_{4k} = c_{5k} = c_{6k} = c_{7k})$ implique

circonscriptions, sans que plus de trois circonsriptions présentent le même score et qu'il n'y que trois valeurs de score possibles [19]

- 105 est appliqué lorsqu'il existe une égalité de score entre quatre circonscriptions, une égalité de score entre deux autres circonscriptions et qu'il n'y que trois valeurs de score possibles [20]
- 42 est appliqué lorsqu'il existe une égalité de score entre cinq circonscriptions et deux inégalités de score entre trois circonscriptions [21]
- 35 est appliqué lorsqu'il existe une inégalité entre les circonscriptions C_4 et C_5, que les scores des trois premières circonscriptions soient identiques à celui de la circonscription C_4 et que celui des circonscription C_6 et C_7 soient identiques à celui de C_5 [22]
- 21 est appliqué lorsqu'il existe une inégalité entre les circonscriptions C_5 et C_6,que les scores des quatre premières circonscriptions soient identiques à celui de la circonscription C_5 et que celui de la circonscription C_7 est identique à celui de C_6 [23]
- 7 est appliqué lorsqu'il existe une inégalité entre les circonscriptions C_6 et C_7 et que les scores des cinq autres circonscriptions soient identiques à celui de la circonscription C_6 [24]

$$\binom{7}{4} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 210$$

19. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} > c_{4k} = c_{5k} = c_{6k} > c_{7k})$ implique

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{3} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 140$$

20. En effet, le cas $(c_{1k} > c_{2k} = c_{3k} > c_{4k} = c_{5k} = c_{6k} = c_{7k})$ implique

$$\binom{7}{4} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 105$$

21. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} = c_{5k} > c_{6k} > c_{7k})$ implique

$$\binom{7}{5} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 42$$

22. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} > c_{5k} = c_{6k} = c_{7k})$ implique

$$\binom{7}{4} \times \binom{3}{3} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 35$$

23. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} = c_{5k} > c_{6k} = c_{7k})$ implique

$$\binom{7}{5} \times \binom{2}{2} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 21$$

24. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} = c_{5k} = c_{6k} > c_{7k})$ implique

$$\binom{7}{6} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 7$$

On pose la définition de la fonction d'identité des scores du candidat k dans les sept circonscriptions :

Définition 3.10. *La fonction d'identité des scores du candidat k dans les 7 circonscription s'écrit :*

$$I^k_{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)} = \begin{cases} 5040 \text{ si } (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) = (1,1,1,1,1,1,1) \\ 2520 \text{ si } (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) = (2,1,1,1,1,1,0) \\ 1260 \text{ si } (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) = (2,2,1,1,1,0,0) \\ 840 \text{ si } (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) = (3,1,1,1,1,0,0) \\ 630 \text{ si } (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) = (2,2,2,1,0,0,0) \\ 420 \text{ si } (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) = (3,2,1,1,0,0,0) \\ 210 \text{ si } (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) = (4,1,1,1,0,0,0) \\ 140 \text{ si } (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) = (3,3,1,0,0,0,0) \\ 105 \text{ si } (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) = (4,2,1,0,0,0,0) \\ 42 \text{ si } (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) = (5,1,1,0,0,0,0) \\ 35 \text{ si } (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) = (4,3,0,0,0,0,0) \\ 21 \text{ si } (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) = (5,2,0,0,0,0,0) \\ 7 \text{ si } (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) = (6,1,0,0,0,0,0) \end{cases} \tag{3.11}$$

où a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , a_6 et a_7 sont les effectifs des classes de scores du candidat k dans les 7 circonscriptions.

Au final, de manière identique à la formule pour 3 et 5 circonscriptions, ayant constaté que les nombres utilisés dans les opérations intermédiaires sont toujours très grands, nous passons tous nos calculs en logarithme. Ainsi pour la situation Ainsi pour la situation (n, c_{1k}, c_{2k}, c_{3k}, c_{4k},c_{5k},c_{6k},c_{7k}), la formule

$$\frac{\binom{c_1}{c_{1k}} \times \binom{c_2}{c_{2k}} \times \binom{c_3}{c_{3k}} \times \binom{c_4}{c_{4k}} \times \binom{c_5}{c_{5k}} \times \binom{c_6}{c_{6k}} \times \binom{c_7}{c_{7k}} \times 2 \times \begin{pmatrix} I^k_{(1,1,1,1,1,1,1)} \\ I^k_{(2,1,1,1,1,1,0)} \\ I^k_{(2,2,1,1,1,0,0)} \\ I^k_{(3,1,1,1,1,0,0)} \\ I^k_{(2,2,2,1,0,0,0)} \\ I^k_{(3,2,1,1,0,0,0)} \\ I^k_{(4,1,1,1,0,0,0)} \\ I^k_{(3,3,1,0,0,0,0)} \\ I^k_{(4,2,1,0,0,0,0)} \\ I^k_{(5,1,1,0,0,0,0)} \\ I^k_{(4,3,0,0,0,0,0)} \\ I^k_{(5,2,0,0,0,0,0)} \\ I^k_{(6,1,0,0,0,0,0)} \end{pmatrix}}{2^n} \tag{3.12}$$

devient

$$log(\binom{c_1}{c_{1k}})+log(\binom{c_2}{c_{2k}})+log(\binom{c_3}{c_{3k}})+log(\binom{c_4}{c_{4k}})+log(\binom{c_5}{c_{5k}})+log(\binom{c_6}{c_{6k}})+log(\binom{c_7}{c_{7k}})$$

$$+\begin{pmatrix} log(I^k_{(1,1,1,1,1,1,1)}) \\ log(I^k_{(2,1,1,1,1,1,0)}) \\ log(I^k_{(2,2,1,1,1,0,0)}) \\ log(I^k_{(3,1,1,1,1,0,0)}) \\ log(I^k_{(2,2,2,1,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(3,2,1,1,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(4,1,1,1,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(3,3,1,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(4,2,1,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(5,1,1,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(4,3,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(5,2,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(6,1,0,0,0,0,0)}) \end{pmatrix} + (1-n)\times log(2) \quad (3.13)$$

Nous obtenons ainsi la probabilité exacte de conflit en faisant la somme de l'exponentielle de chaque observation de la base finale (Voir annexe D.3).

Concernant la génération des profils, nous reprenons également les mêmes hypothèses que pour les cas avec trois et cinq circonscriptions : c'est-à-dire que nous supposons que nous testons toujours l'existence du paradoxe du référendum en faveur du candidat A (obtenant ainsi le nombre total de situations par doublement).

Dans le cas particulier de sept circonscriptions de taille identique, nous avons également des propritétés de la hiérarchie des profils similaires au cas avec trois circonscriptions et au cas avec cinq circonscriptions. En nous référant au théorème 3.2, de la page 66, stipulant l'impossibilité pour un candidat de remporter toutes les circonscriptions lorsqu'un paradoxe du référendum existe, couplé avec la remarque 3.1, de la page 66, on en conclut que configuration à sept circonscriptions oblige toujours, en présence d'un paradoxe du référendum, à ce que la septième circonsciption présente un score inférieur à la majorité minimale de la circonscription ($M_{C_7}^{min}$), dont le score est donc compris entre 0 (c'est-à-dire que les circonscriptions C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 et C_6 se répartissent les valeurs comprises entre la majorité minimale globale $2kr + k + r = 7r + 3$ et la minorité minimale globale $kr + k + r + 1 = 4(r + 1)$) et le minimum entre le score de la circonscription C_6 et la différence entre la minorité maximale globale retranchée des scores de la première, de la seconde, de la troisième, de la quatrième, de la cinquième et de la sixième circonscription ($m_N^{max} - (c_{1_A} + c_{2_A} + c_{3_A} + c_{4_A} + c_{5_A} + c_{6_A})$).

Concernant le score réalisé dans la sixième circonscription, il peut être supérieur à la majorité minimale de la circonscription ($M_{C_6}^{min}$). De fait, ce score dépend des scores réalisés dans la première, de la seconde, de la troisième, de la quatrième, de la cinquième circonscription et il peut être compris entre 0 (en effet, $5(2r + 1) = 10r + 5 > 7r + 3$) le minimum entre le score de la circonscription C_5 et la différence entre la minorité maximale globale retranchée des scores de la première, de la seconde, de la troisième, de la quatrième, de la cinquième circonscription $(m_N^{max} - (c_{1_A} + c_{2_A} + c_{3_A} + c_{4_A} + c_{5_A}))$.

De même pour le score réalisé dans la cinquième circonscription, celui-ci peut être supérieur à la majorité minimale de la circonscription $(M_{C_5}^{min})$. De fait, ce score dépend des scores réalisés dans la première, la seconde, la troisième, la quatrième et la cinquième circonscription et il peut être compris entre 0 (en effet, $4(2r+1) = 8r+4 > 7r+3$) le minimum entre le score de la circonscription C_4 et la différence entre la minorité maximale globale retranchée des scores de la première, de la seconde, de la troisième et de la quatrième circonscription $(m_N^{max} - (c_{1_A} + c_{2_A} + c_{3_A} + c_{4_A}))$.

Ensuite, par construction et par définition du paradoxe du référendum qui implique qu'une majorité de circonscriptions présente une victoire du candidat minoritaire globalement, la quatrième circonscription présente un score minimal nécessairement supérieur ou égal à la majorité minimale de la circonscription $(M_{C_4}^{min})$. De fait, ce score dépend des scores réalisés dans la première, la seconde et la troisième circonscription et il est compris entre $M_{C_4}^{min} = r+1$ et le minimum entre le score de la circonscription C_3 et la différence entre la minorité maximale globale retranchée des scores de la première, de la seconde et de la troisième circonscription $(m_N^{max} - (c_{1_A} + c_{2_A} + c_{3_A}))$.

Concernant le score réalisé par la troisième circonscription, celui-ci est nécessairement supérieur ou égal à la majorité minimale de la circonscription $(M_{C_3}^{min})$. Ce score dépendant de ceux réalisés par la première et la seconde circonscription, il est compris entre sa valeur de majorité minimale $(M_{C_3}^{min} = r+1)$ et le minimum entre le score de la seconde circonscription et la différence entre la minorité maximale globale retranché du score de la première et de la seconde circonscription $(m_N^{max} - (c_{1_A} + c_{2_A})$.

De la même manière le score de la seconde circonscription est nécessairement compris entre la majorité minimale de la circonscription $(M_{C_2}^{min}$=r+1) et le minimum entre le score de la première circonscription et la différence entre la minorité maximale globale retranché du score de la première circonscription et son score de majorité minimale $(m_N^{max} - (c_{1_A} + M_{C_2}^{min})$.

Enfin le score de la première circonscription est compris entre sa valeur de majorité minimale $(M_{C_1}^{min} = r+1)$ et le score maximum autorisé par la circonscription, c'est-à-dire $c_1 = 2r+1$.

La formule au final se présente ainsi :

$$P(7,n) = \sum_{c_{1_k}=r+1}^{2r+1} \sum_{c_{2_k}=r+1}^{Min(c_{1_k}, m_N^{max}-c_{1_k}-M_{C_2}^{min})} \sum_{c_{3_k}=r+1}^{Min(c_{2_k}, m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k})} \sum_{c_{4_k}=r+1}^{Min(c_{3_k}, m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k}-c_{3_k})} \sum_{c_{5_k}=0}^{Min(c_{4_k}, m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k}-c_{3_k}-c_{4_k})}$$
$$\sum_{c_{6_k}=0}^{Min(c_{5_k}, m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k}-c_{3_k}-c_{4_k}-c_{5_k})} \sum_{c_{7_k}=0}^{Min(c_{6_k}, m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k}-c_{3_k}-c_{4_k}-c_{5_k}-c_{6_k})}$$
$$\times e^{\left(log(\binom{c_1}{c_{1k}})+log(\binom{c_2}{c_{2k}})+log(\binom{c_3}{c_{3k}})+log(\binom{c_4}{c_{4k}})+log(\binom{c_5}{c_{5k}})+log(\binom{c_6}{c_{6k}})+log(\binom{c_7}{c_{7k}})+ \begin{pmatrix} log(I^k_{(1,1,1,1,1,1,1)}) \\ log(I^k_{(2,1,1,1,1,1,0)}) \\ log(I^k_{(2,2,1,1,1,0,0)}) \\ log(I^k_{(3,1,1,1,1,0,0)}) \\ log(I^k_{(2,2,2,1,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(3,2,1,1,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(4,1,1,1,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(3,3,1,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(4,2,1,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(5,1,1,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(4,3,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(5,2,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(6,1,0,0,0,0,0)}) \end{pmatrix} +(1-n)\times log(2) \right)} \qquad (3.14)$$

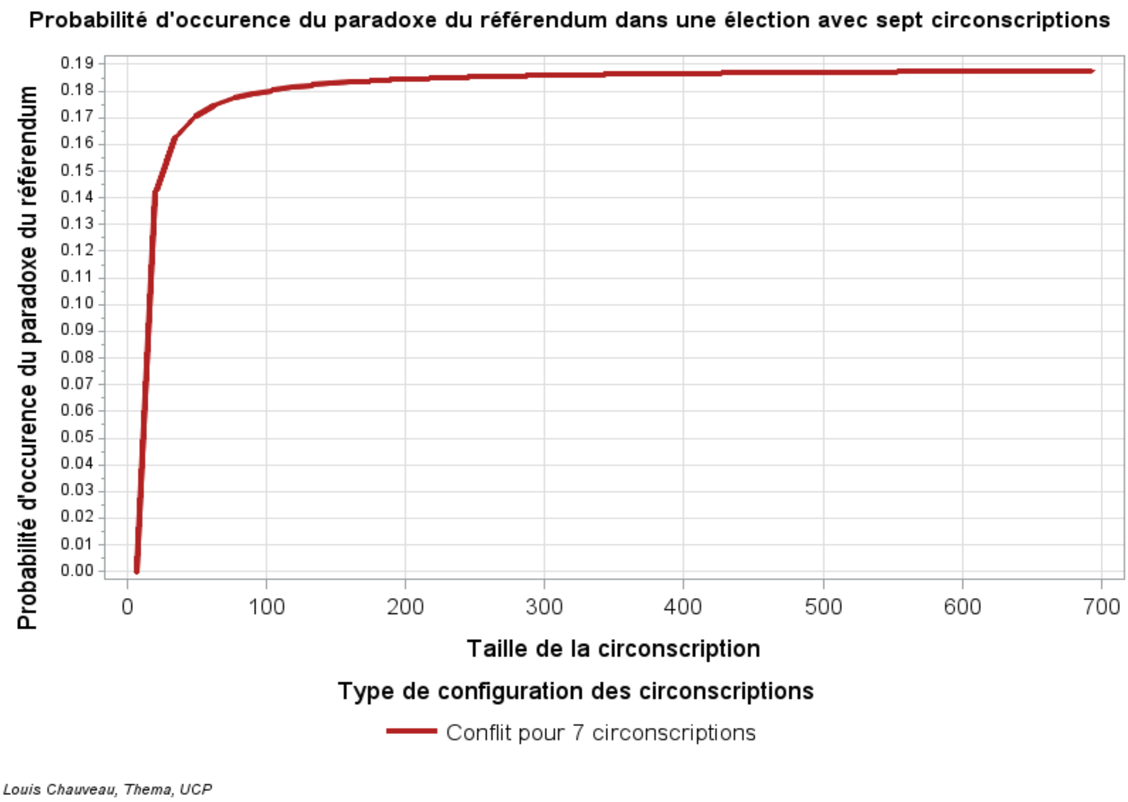

FIGURE 3.7 – Représentation des probabilités d'occurence d'un paradoxe du référendum lors d'une élection avec sept circonscriptions dont la taille de population s'étend de de 1 à 99 pour une population globale de 693 habitants.

Formule pour neuf circonscriptions La formule de calcul de la probabilité exacte de conflits pour neuf circonscriptions de taille identique reprend exactement la même logique que celle pour cinq ou sept circonscriptions de taille identique, c'est-à-dire la même logique que pour la formule avec trois circonscriptions de taille identique, la différence étant dans les coefficients multiplicateurs attribués. Il existe 26 valeurs possibles $(362880, 181440, 90720, 60480, 45360, 30240, 22680, 15120, 10080, 7560, 5040, 3780, 3024, 2520, 1680, 1512, 1260, 756, 630, 504, 252, 126, 84, 72, 36, 9)$:

- 362880 est appliqué lorsque les neuf circonscriptions présentent des scores différents [25]
- 181440 est appliqué lorsqu'il y a sept inégalités avec huit scores, dont l'un est affiché par deux circonscriptions, l'autre par une circonscription, le troisième par une circonscription, le quatrième par une circonscription, le cinquième par une circonscription, le sixième par une circonscription,

25. En effet, le cas $(c_{1k} > c_{2k} > c_{3k} > c_{4k} > c_{5k} > c_{6k} > c_{7k} > c_{8k} > c_{9k})$ implique

$$\binom{8}{1} \times \binom{8}{1} \times \binom{7}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 5040$$

l'avant dernier par une circonscription et le dernier par la circonscription restante [26]

- 90720 est appliqué lorsqu'il y a six inégalités avec sept scores, dont l'un est affiché par deux circonscriptions, l'autre par deux circonscriptions, le troisième par une circonscription, le quatrième par une circonscription, le cinquième par une circonscription, l'avant dernier par une circonscription et le dernier par la circonscription restante [27]
- 60480 est appliqué lorsqu'il y a six inégalités avec sept scores, dont l'un est affiché par trois circonscriptions, l'autre par une circonscription, le troisième par une circonscription, le quatrième par une circonscription, le cinquième par une circonscription, l'avant dernier par une circonscription et le dernier par la circonscription restante [28]
- 45360 est appliqué lorsqu'il y a cinq inégalités avec six scores, dont l'un est affiché par deux circonscriptions, l'autre par deux circonscriptions, le troisième par deux circonscriptions, le quatrième par une circonscription, l'avant dernier par une circonscription et le dernier par la circonscription restante [29]
- 30240 est appliqué lorsqu'il y a cinq inégalités avec six scores, dont l'un est affiché par trois circonscriptions, l'autre par deux circonscriptions, le troisième par une circonscription, le quatrième par une circonscription, l'avant dernier par une circonscription et le dernier par la circonscription restante [30]
- 22680 est appliqué lorsqu'il y a quatre inégalités avec cinq scores, dont l'un est affiché par deux circonscriptions, l'autre par deux autres circonscriptions, le troisième par deux circonscriptions, l'avant dernier par deux circonscriptions et le dernier par la circonscription restante [31]

---

26. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} > c_{3k} > c_{4k} > c_{5k} > c_{6k} > c_{7k} > c_{8k} > c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{2} \times \binom{7}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} = 181440$$

27. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} > c_{3k} = c_{4k} > c_{5k} > c_{6k} > c_{7k} > c_{8k} > c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{2} \times \binom{7}{2} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 90720$$

28. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} > c_{4k} > c_{5k} > c_{6k} > c_{7k} > c_{8k} > c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{3} \times \binom{6}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 60480$$

29. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} > c_{3k} = c_{4k} > c_{5k} = c_{6k} > c_{7k} > c_{8k} > c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{2} \times \binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 45360$$

30. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} > c_{4k} = c_{5k} > c_{6k} > c_{7k} > c_{8k} > c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{3} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 30240$$

31. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} > c_{3k} = c_{4k} > c_{5k} = c_{6k} > c_{7k} = c_{8k} > c_{9k})$ implique

- 15120 est appliqué lorsqu'il y a cinq inégalités avec six scores, dont l'un est affiché par quatre circonscriptions, l'autre par une circonscription, le troisième par une circonscription, le quatrième par une circonscription, l'avant dernier par une circonscription et le dernier par la circonscription restante[32] ou lorsqu'il y a quatre inégalités avec cinq scores, dont l'un est affiché par trois circonscriptions, l'autre par deux autres circonscriptions, le troisième par deux circonscriptions, l'avant dernier par une circonscription et le dernier par la circonscription restante[33]
- 10080 est appliqué lorsqu'il y a quatre inégalités avec cinq scores, dont l'un est affiché par trois circonscriptions, l'autre par trois autres circonscriptions, le troisième par une circonscription, l'avant dernier par une circonscription et le dernier par la circonscription restante[34]
- 7560 est appliqué lorsqu'il y a quatre inégalités avec cinq scores, dont l'un est affiché par quatre circonscriptions, l'autre par trois autres circonscriptions, le troisième par une circonscription, l'avant dernier par une circonscription et le dernier par la circonscription restante[35] ou lorsqu'il y a trois inégalités avec quatre scores, dont l'un est affiché par trois circonscriptions, l'autre par deux autres circonscriptions, l'avant dernier par deux circonscriptions et le dernier par les deux circonscriptions restantes[36]
- 5040 est appliqué lorsqu'il y a trois inégalités avec quatre scores, dont l'un est affiché par trois circonscriptions, l'autre par trois autres circonscriptions, l'avant dernier par deux circonscriptions et le dernier par la

---

$$\binom{9}{2} \times \binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 22680$$

32. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} > c_{5k} > c_{6k} > c_{7k} > c_{8k} > c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{4} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 15120$$

33. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} > c_{4k} = c_{5k} > c_{6k} = c_{7k} > c_{8k} > c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{3} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 15120$$

34. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} > c_{4k} = c_{5k} = c_{6k} > c_{7k} > c_{8k} > c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{3} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 10080$$

35. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} > c_{5k} = c_{6k} > c_{7k} > c_{8k} > c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{4} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 7560$$

36. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} > c_{4k} = c_{5k} > c_{6k} = c_{7k} > c_{8k} = c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{3} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 7560$$

circonscription restante [37]

- 3780 est appliqué lorsqu'il y a trois inégalités avec quatre scores, dont l'un est affiché par quatre circonscriptions, l'autre par deux autres circonscriptions, l'avant dernier par deux circonscriptions et le dernier par la circonscription restante [38]
- 3024 est appliqué lorsqu'il y a quatre inégalités avec cinq scores, dont l'un est affiché par cinq circonscriptions, l'autre par une autre circonscriptions, le troisième par une autre circonscription, l'avant dernier par une circonscription et le dernier par la circonscription restante [39]
- 2520 est appliqué lorsqu'il y a trois inégalités avec quatre scores, dont l'un est affiché par quatre circonscriptions, l'autre par trois autres circonscriptions, l'avant dernier par une circonscription et le dernier par la circonscription restante [40]
- 1680 est appliqué lorsqu'il y deux inégalités avec trois scores, les trois premières circonscriptions C_1, C_2 et C_3 présentant le premier score, les trois circonscriptions suivantes C_4, C_5 et C_6 présentent le second score, et les trois dernières circonscriptions C_7, C_8 et C_9 présentant le dernier score [41]
- 1512 est appliqué lorsqu'il y a trois inégalités avec quatre scores, dont l'un est affiché par cinq circonscriptions, l'autre par deux autres circonscriptions, l'avant dernier par une circonscription et le dernier par la circonscription restante [42]

37. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} > c_{4k} = c_{5k} = c_{6k} > c_{7k} = c_{8k} > c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{3} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 5040$$

38. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} > c_{5k} = c_{6k} > c_{7k} = c_{8k} > c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{4} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 3780$$

39. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} = c_{5k} > c_{6k} > c_{7k} > c_{8k} > c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{5} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 3024$$

40. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} > c_{5k} = c_{6k} = c_{7k} > c_{8k} > c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{4} \times \binom{5}{3} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 2520$$

41. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} > c_{4k} = c_{5k} = c_{6k} > c_{7k} = c_{8k} = c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{3} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{3} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 1680$$

42. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} = c_{5k} > c_{6k} = c_{7k} > c_{8k} > c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{5} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 1512$$

- 1260 est appliqué lorsqu'il y a deux inégalités avec trois scores, dont l'un est affiché par quatre circonscriptions, l'autre par trois autres circonscriptions et le dernier par les deux circonscriptions restantes [43]
- 756 est appliqué lorsqu'il y a deux inégalités avec trois scores, dont l'un est affiché par cinq circonscriptions, l'autre par deux autres circonscriptions et le dernier par les deux circonscriptions restantes [44]
- 630 est appliqué lorsqu'il y a deux inégalités avec trois scores, dont l'un est affiché par quatre circonscriptions, l'autre par quatre autres circonscriptions et le dernier par la circonscription restante [45]
- 504 est appliqué lorsque six circonscriptions présentent le même score et qu'il reste trois inégalités de score [46], ou bien lorsque cinq circonscriptions présentent le même score, qu'il reste deux inégalités et que trois autres circonscriptions présentent un score identique [47]
- 252 est appliqué lorsque six circonscriptions présentent le même score, qu'il reste deux inégalité et que les scores deux autres circonscriptions soient strictement identiques [48]
- 126 est appliqué lorsque cinq premières circonscriptions présentent le même score, qu'il reste une inégalité et que les scores des circonscriptions C_6, C_7, C_8 et C_9 soient strictement identiques [49]

---

43. En effet, le cas ($c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} > c_{5k} = c_{6k} = c_{7k} > c_{8k} = c_{9k}$) implique

$$\binom{9}{4} \times \binom{5}{3} \times \binom{2}{2} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 1260$$

44. En effet, le cas ($c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} = c_{5k} > c_{6k} = c_{7k} > c_{8k} = c_{9k}$) implique

$$\binom{9}{5} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 756$$

45. En effet, le cas ($c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} > c_{5k} = c_{6k} = c_{7k} = c_{8k} > c_{9k}$) implique

$$\binom{9}{4} \times \binom{5}{4} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 630$$

46. En effet, le cas ($c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} = c_{5k} = c_{6k} > c_{7k} > c_{8k} > c_{9k}$) implique

$$\binom{9}{6} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 504$$

47. En effet, le cas ($c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} = c_{5k} > c_{6k} = c_{7k} = c_{8k} > c_{9k}$) implique

$$\binom{9}{5} \times \binom{4}{3} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 504$$

48. En effet, le cas ($c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} = c_{5k} = c_{6k} > c_{7k} = c_{8k} > c_{9k}$) implique

$$\binom{9}{6} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 252$$

49. En effet, le cas ($c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} = c_{5k} > c_{6k} = c_{7k} = c_{8k} = c_{9k}$) implique

$$\binom{9}{5} \times \binom{4}{4} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 126$$

- 84 est appliqué lorsque six premières circonscriptions présentent le même score, qu'il reste une inégalité et que les scores des circonscriptions C_7, C_8 et C_9 soient strictement identiques [50]
- 72 est appliqué lorsque sept circonscriptions présentent le même score, qu'il reste deux inégalités et que le score de la circonsciption C_8 est strictement supérieur au score de la circonscription C_9 [51]
- 36 est appliqué lorsqu'il existe une inégalité entre les circonscriptions C_7 et C_8, que les scores des six premières circonscriptions soient identiques à celui de la circonscription C_7 et que celui de la circonscription C_9 est identique à celui de C_8 [52]
- 9 est appliqué lorsqu'il existe une inégalité entre les circonscriptions C_8 et C_9 et que les scores des sept autres circonscriptions soient identiques à celui de la circonscription C_8 [53]

On pose la définition de la fonction d'identité des scores du candidat k dans les neuf circonscriptions :

Définition 3.11. *La fonction d'identité des scores du candidat k dans les* 9 *circonscription s'écrit :*

---

50. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} = c_{5k} = c_{6k} > c_{7k} = c_{8k} = c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{6} \times \binom{3}{3} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 84$$

51. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} = c_{5k} = c_{6k} = c_{7k} > c_{8k} > c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{7} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 72$$

52. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} = c_{5k} = c_{6k} = c_{7k} > c_{8k} = c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{7} \times \binom{2}{2} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 36$$

53. En effet, le cas $(c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = c_{4k} = c_{5k} = c_{6k} = c_{7k} = c_{8k} > c_{9k})$ implique

$$\binom{9}{8} \times \binom{1}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} \times \binom{0}{1} = 9$$

$$I^k_{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9)} = \left\{ \begin{array}{r} 362880 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (1,1,1,1,1,1,1,1,1) \\ 181440 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (2,1,1,1,1,1,1,1,0) \\ 90720 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (2,2,1,1,1,1,1,0,0) \\ 60480 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (3,1,1,1,1,1,1,0,0) \\ 45360 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (2,2,2,1,1,1,0,0,0) \\ 30240 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (3,2,1,1,1,1,0,0,0) \\ 22680 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (2,2,2,2,1,0,0,0,0) \\ 15120 \ si \left\{ \begin{array}{l} (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (4,1,1,1,1,1,0,0,0) \\ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (3,2,2,1,1,0,0,0,0) \end{array} \right. \\ 10080 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (3,3,1,1,1,0,0,0,0) \\ 7560 \ si \left\{ \begin{array}{l} (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (4,2,1,1,1,0,0,0,0) \\ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (3,2,2,2,0,0,0,0,0) \end{array} \right. \\ 5040 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (3,3,2,1,0,0,0,0,0) \\ 3780 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (4,2,2,1,0,0,0,0,0) \\ 3024 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (5,1,1,1,1,0,0,0,0) \\ 2520 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (4,3,1,1,0,0,0,0,0) \\ 1680 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (3,3,3,0,0,0,0,0,0) \\ 1512 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (5,2,1,1,0,0,0,0,0) \\ 1260 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (4,3,2,0,0,0,0,0,0) \\ 756 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (5,2,2,0,0,0,0,0,0) \\ 630 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (4,4,1,0,0,0,0,0,0) \\ 504 \ si \left\{ \begin{array}{l} (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (6,1,1,1,0,0,0,0,0) \\ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (5,3,1,0,0,0,0,0,0) \end{array} \right. \\ 252 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (6,2,1,0,0,0,0,0,0) \\ 126 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (5,4,0,0,0,0,0,0,0) \\ 84 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (6,3,0,0,0,0,0,0,0) \\ 72 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (7,1,1,0,0,0,0,0,0) \\ 36 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (7,2,0,0,0,0,0,0,0) \\ 9 \ si \ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9) = (8,1,0,0,0,0,0,0,0) \end{array} \right. \tag{3.15}$$

où a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , a_6, a_7, a_8 et a_9 sont les effectifs des classes de scores du candidat k dans les 9 circonscriptions.

Au final, de manière identique à la formule pour 3, 5 et 7 circonscriptions, ayant constaté que les nombres utilisés dans les opérations intermédiaires sont toujours très grands, nous passons tous nos calculs en logarithme. Ainsi pour la situation Ainsi pour la situation (n, c_{1k}, c_{2k}, c_{3k}, c_{4k},c_{5k},c_{6k},c_{7k},c_{8k},c_{9k}), la formule

$$\frac{\binom{c_1}{c_{1k}} \times \binom{c_2}{c_{2k}} \times \binom{c_3}{c_{3k}} \times \binom{c_4}{c_{4k}} \times \binom{c_5}{c_{5k}} \times \binom{c_6}{c_{6k}} \times \binom{c_7}{c_{7k}} \times \binom{c_8}{c_{8k}} \times \binom{c_9}{c_{9k}} \times 2 \times \begin{pmatrix} I^k_{(1,1,1,1,1,1,1,1,1)} \\ I^k_{(2,1,1,1,1,1,1,1,0)} \\ I^k_{(2,2,1,1,1,1,1,0,0)} \\ I^k_{(3,1,1,1,1,1,1,0,0)} \\ I^k_{(2,2,2,1,1,1,0,0,0)} \\ I^k_{(3,2,1,1,1,1,0,0,0)} \\ I^k_{(2,2,2,2,1,0,0,0,0)} \\ I^k_{(4,1,1,1,1,1,0,0,0)} \\ I^k_{(3,2,2,1,1,0,0,0,0)} \\ I^k_{(3,3,1,1,1,0,0,0,0)} \\ I^k_{(4,2,1,1,1,0,0,0,0)} \\ I^k_{(3,2,2,2,0,0,0,0,0)} \\ I^k_{(3,3,2,1,0,0,0,0,0)} \\ I^k_{(4,2,2,1,0,0,0,0,0)} \\ I^k_{(5,1,1,1,1,0,0,0,0)} \\ I^k_{(4,3,1,1,0,0,0,0,0)} \\ I^k_{(3,3,3,0,0,0,0,0,0)} \\ I^k_{(5,2,1,1,0,0,0,0,0)} \\ I^k_{(4,3,2,0,0,0,0,0,0)} \\ I^k_{(5,2,2,0,0,0,0,0,0)} \\ I^k_{(4,4,1,0,0,0,0,0,0)} \\ I^k_{(6,1,1,1,0,0,0,0,0)} \\ I^k_{(5,3,1,0,0,0,0,0,0)} \\ I^k_{(6,2,1,0,0,0,0,0,0)} \\ I^k_{(5,4,0,0,0,0,0,0,0)} \\ I^k_{(6,3,0,0,0,0,0,0,0)} \\ I^k_{(7,1,1,0,0,0,0,0,0)} \\ I^k_{(7,2,0,0,0,0,0,0,0)} \\ I^k_{(8,1,0,0,0,0,0,0,0)} \end{pmatrix}}{2^n} \tag{3.16}$$

devient

$$log(\binom{c_1}{c_{1k}}) + log(\binom{c_2}{c_{2k}}) + log(\binom{c_3}{c_{3k}}) + log(\binom{c_4}{c_{4k}}) + log(\binom{c_5}{c_{5k}})$$
$$+ log(\binom{c_6}{c_{6k}}) + log(\binom{c_7}{c_{7k}}) + log(\binom{c_8}{c_{8k}}) + log(\binom{c_9}{c_{9k}})$$
$$+ \begin{pmatrix} log(I^k_{(1,1,1,1,1,1,1,1,1)}) \\ log(I^k_{(2,1,1,1,1,1,1,1,0)}) \\ log(I^k_{(2,2,1,1,1,1,1,0,0)}) \\ log(I^k_{(3,1,1,1,1,1,1,0,0)}) \\ log(I^k_{(2,2,2,1,1,1,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(3,2,1,1,1,1,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(2,2,2,2,1,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(4,1,1,1,1,1,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(3,2,2,1,1,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(3,3,1,1,1,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(4,2,1,1,1,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(3,2,2,2,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(3,3,2,1,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(4,2,2,1,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(5,1,1,1,1,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(4,3,1,1,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(3,3,3,0,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(5,2,1,1,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(4,3,2,0,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(5,2,2,0,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(4,4,1,0,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(6,1,1,1,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(5,3,1,0,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(6,2,1,0,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(5,4,0,0,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(6,3,0,0,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(7,1,1,0,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(7,2,0,0,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(8,1,0,0,0,0,0,0,0)}) \end{pmatrix} + (1-n) \times log(2) \quad (3.17)$$

Nous obtenons ainsi la probabilité exacte de conflit en faisant la somme de l'exponentielle de chaque observation de la base finale.

Concernant la génération des profils, nous reprenons également les mêmes hypothèses que pour les cas avec trois, cinq et sept circonscriptions : c'est-à-dire que nous supposons que nous testons toujours l'existence du paradoxe du référendum en faveur du candidat A (obtenant ainsi le nombre total de situations par doublement).

Dans le cas particulier de neuf circonscriptions de taille identique, nous avons également des propritétés de la hiérarchie des profils similaires au cas avec trois circonscriptions, au cas avec cinq circonscriptions et au cas avec sept circonscriptions. En nous référant au théorème 3.2, de la page 66, stipulant l'impossibilité pour un candidat de remporter toutes les circonscriptions lorsqu'un paradoxe du référendum existe, couplé avec la remarque 3.1, de la page 66, on en conclut que configuration à neuf circonscriptions oblige toujours, en présence d'un paradoxe du référendum, à ce que la neuvième circonsciption présente un score inférieur à la majorité minimale de la circonscription ($M_{C_9}^{min}$), dont le score est donc compris entre 0 (c'est-à-dire que les circonscriptions C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7 et C_8 se répartissent les valeurs comprises entre la majorité minimale globale $2kr+k+r = 9r+4$ et la minorité minimale globale $kr+k+r+1 = 5(r+1)$) et le minimum entre le score de la circonscription C_8 et la différence entre la minorité maximale globale retranchée des scores de la première, de la seconde, de la troisième, de la quatrième, de la cinquième, de la sixième, de la septième et de la huitième circonscription ($m_N^{max} - (c_{1_A} + c_{2_A} + c_{3_A} + c_{4_A} + c_{5_A} + c_{6_A} + c_{7_A} + c_{8_A})$).

Concernant les scores réalisés dans les huitième, septième et sixième circonscriptions, il peut être supérieur à la majorité minimale de la circonscription ($M_{C_8}^{min}$, $M_{C_7}^{min}$ et $M_{C_6}^{min}$). De fait, ces score dépend à chaque fois des scores réalisés circonscriptions précédentes (les scores de la première, de la seconde, de la troisième, de la quatrième, de la cinquième, de la sixième et de la septième circonscription pour le score de la huitième circonscription, les scores de la première, de la seconde, de la troisième, de la quatrième, de la cinquième et de la sixième circonscription pour le score de la septième circonscription et les scores de la première, de la seconde, de la troisième, de la quatrième et de la cinquième circonscription pour le score de la sixième circonscription). Ils ont toujours pour score mimimum 0 (en effet, $7(2r + 1) = 14r + 7 > 6(2r + 1) = 12r + 6 > 5(2r + 1) = 10r + 5 > 9r + 4$) et pour score maximum : pour la septième circonscription le minimum entre le score de la circonscription C_7 et la différence entre la minorité maximale globale retranchée des scores de la première, de la seconde, de la troisième, de la quatrième, de la cinquième, de la sixième et de la septiième circonscription ($m_N^{max} - (c_{1_A} + c_{2_A} + c_{3_A} + c_{4_A} + c_{5_A} + c_{6_A} + c_{7_A})$), pour la septième circonscription le minimum entre le score de la circonscription C_6 et la différence entre la minorité maximale globale retranchée des scores de la première, de la seconde, de la troisième, de la quatrième, de la cinquième et de la sixième circonscription ($m_N^{max} - (c_{1_A} + c_{2_A} + c_{3_A} + c_{4_A} + c_{5_A} + c_{6_A})$), et pour la sixième circonscription le minimum entre le score de la circonscription C_5 et la différence entre la minorité maximale globale retranchée des scores de la première, de la seconde, de la troisième, de la quatrième, de la cinquième circonscription ($m_N^{max} - (c_{1_A} + c_{2_A} + c_{3_A} + c_{4_A} + c_{5_A})$).

Ensuite, par construction et par définition du paradoxe du référendum qui implique qu'une majorité de circonscriptions présente une victoire du candidat minoritaire globalement, les scores réalisés par la cinquième, la quatrième, la troisième, la seconde et la première circonscription sont l nécessairement supérieur ou égal à la majorité minimale de la circonscription ($M_{C_5}^{min}$, ($M_{C_4}^{min}$, ($M_{C_3}^{min}$, ($M_{C_2}^{min}$ et ($M_{C_1}^{min}$). Donc elles ont pour score minimum $r + 1$ (en effet $5(r+1) = 5r+5 < 9r+4$) et pour score maximum : pour la cinquième circonscription le minimum entre le score de la circonscription C_4 et la différence entre la minorité maximale globale retranchée des scores de la première, de la seconde, de la troisième et de la quatrième circonscription $(m_N^{max} - (c_{1_A} + c_{2_A} + c_{3_A} + c_{4_A}))$, pour la quatrième circonscription le minimum entre le score de la circonscription C_3 et la différence entre la minorité maximale globale retranchée des scores de la première, de la seconde et de la troisième circonscription $(m_N^{max} - (c_{1_A} + c_{2_A} + c_{3_A}))$, pour la troisième circonscription le minimum entre le score de la seconde circonscription et la différence entre la minorité maximale globale retranché du score de la première et de la seconde circonscription $(m_N^{max} - (c_{1_A} + c_{2_A})$, pour la seconde circonscription le minimum entre le score de la première circonscription et la différence entre la minorité maximale globale retranché du score de la première circonscription et son score de majorité minimale $(m_N^{max} - (c_{1_A} + M_{C_2}^{min})$, et pour la première circonscription le score maximum autorisé par la circonscription, c'est-à-dire $c_1 = 2r + 1$ (en effet $2r + 1 + 4(r + 1) = 6r + 2 < 9r + 4$).

La formule au final se présente ainsi :

$$P(9,n) = \sum_{c_{1_k}=r+1}^{2r+1} \sum_{c_{2_k}=r+1}^{Min(c_{1_k},m_N^{max}-c_{1_k}-M_{C_2}^{min})} \sum_{c_{3_k}=r+1}^{Min(c_{2_k},m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k})} \sum_{c_{4_k}=r+1}^{Min(c_{3_k},m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k}-c_{3_k})} \sum_{c_{5_k}=r+1}^{Min(c_{4_k},m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k}-c_{3_k}-c_{4_k})} \sum_{c_{6_k}=0}^{Min(c_{5_k},m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k}-c_{3_k}-c_{4_k}-c_{5_k})} \sum_{c_{7_k}=0}^{Min(c_{6_k},m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k}-c_{3_k}-c_{4_k}-c_{5_k}-c_{6_k})} \sum_{c_{8_k}=0}^{Min(c_{7_k},m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k}-c_{3_k}-c_{4_k}-c_{5_k}-c_{6_k}-c_{7_k})} \sum_{c_{9_k}=0}^{Min(c_{8_k},m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k}-c_{3_k}-c_{4_k}-c_{5_k}-c_{6_k}-c_{7_k}-c_{8_k})} e^{\left(\begin{pmatrix} log(\binom{c_1}{c_{1_k}}) + log(\binom{c_2}{c_{2_k}}) + log(\binom{c_3}{c_{3_k}}) \\ +log(\binom{c_4}{c_{4_k}}) + log(\binom{c_5}{c_{5_k}}) + log(\binom{c_6}{c_{6_k}}) \\ +log(\binom{c_7}{c_{7_k}}) + log(\binom{c_8}{c_{8_k}}) + log(\binom{c_9}{c_{9_k}}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} log(I^k_{(1,1,1,1,1,1,1,1,1)}) & log(I^k_{(2,1,1,1,1,1,1,1,0)}) \\ log(I^k_{(2,2,1,1,1,1,1,0,0)}) & log(I^k_{(3,1,1,1,1,1,1,0,0)}) \\ log(I^k_{(2,2,2,1,1,1,0,0,0)}) & log(I^k_{(3,2,1,1,1,1,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(2,2,2,2,1,0,0,0,0)}) & log(I^k_{(4,1,1,1,1,1,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(3,2,2,1,1,0,0,0,0)}) & log(I^k_{(3,3,1,1,1,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(4,2,1,1,1,0,0,0,0)}) & log(I^k_{(3,2,2,2,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(3,3,2,1,0,0,0,0,0)}) & log(I^k_{(4,2,2,1,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(5,1,1,1,1,0,0,0,0)}) & log(I^k_{(4,3,1,1,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(3,3,3,0,0,0,0,0,0)}) & log(I^k_{(5,2,1,1,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(4,3,2,0,0,0,0,0,0)}) & log(I^k_{(5,2,2,0,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(4,4,1,0,0,0,0,0,0)}) & log(I^k_{(6,1,1,1,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(5,3,1,0,0,0,0,0,0)}) & log(I^k_{(6,2,1,0,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(5,4,0,0,0,0,0,0,0)}) & log(I^k_{(6,3,0,0,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(7,1,1,0,0,0,0,0,0)}) & log(I^k_{(7,2,0,0,0,0,0,0,0)}) \\ log(I^k_{(8,1,0,0,0,0,0,0,0)}) & \end{pmatrix} + (1-n) \times log(2) \right)} \tag{3.18}$$

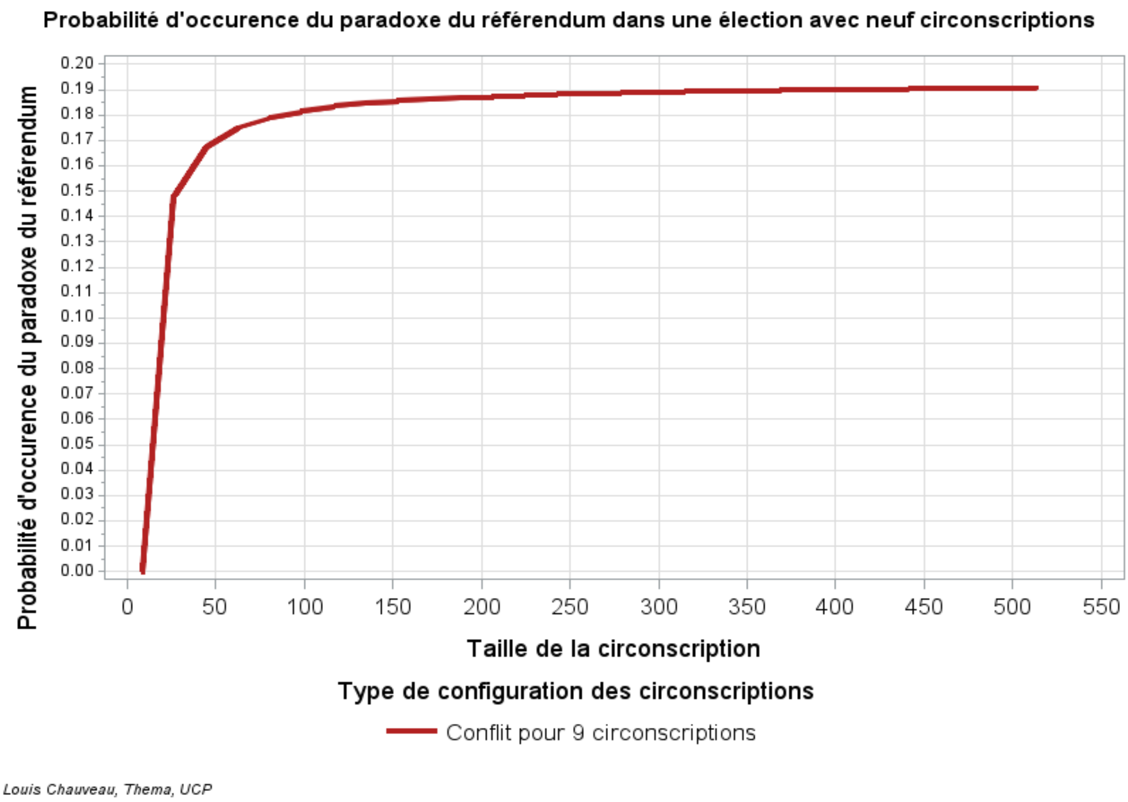

FIGURE 3.8 – Représentation des probabilités d'occurence d'un paradoxe du référendum lors d'une élection avec neuf circonscriptions dont la taille de population s'étend de de 1 à 57 pour une population globale de 513 habitants.

3.5 Résultats

Nous avons effectué les calculs sur des scénarios comprenant successivement 3, puis 5, puis 7 et enfin 9 circonscriptions et nous les avons représentés dans la figure 3.9, à la page 113. Du fait de l'importance des calculs requis, notamment concernant l'identification des coefficients à attribuer à chaque situation, nous avons assez rapidement atteint les limites physique de notre ordinateur à partir d'effectif d'électeurs de moins en moins important au fur et à mesure qu'augmente le nombre de circonscriptions. Cela est principalement la conséquence de l'utilisation de coefficients binomiaux qui augmente en suivant le nombre de circonscriptions :

- trois coefficients binomiaux sont nécessaires dans le cas d'une division en trois circonscriptions : $\binom{c_1}{c_{1k}}$, $\binom{c_2}{c_{2k}}$ et $\binom{c_3}{c_{3k}}$
- cinq coefficients binomiaux sont nécessaires dans le cas d'une division en cinq circonscriptions : $\binom{c_1}{c_{1k}}$, $\binom{c_2}{c_{2k}}$, $\binom{c_3}{c_{3k}}$, $\binom{c_4}{c_{4k}}$ et $\binom{c_5}{c_{5k}}$
- sept coefficients binomiaux sont nécessaires dans le cas d'une division en sept circonscriptions : $\binom{c_1}{c_{1k}}$, $\binom{c_2}{c_{2k}}$, $\binom{c_3}{c_{3k}}$, $\binom{c_4}{c_{4k}}$, $\binom{c_5}{c_{5k}}$, $\binom{c_6}{c_{6k}}$ et $\binom{c_7}{c_{7k}}$
- neuf coefficients binomiaux sont nécessaires dans le cas d'une division en neuf circonscriptions : $\binom{c_1}{c_{1k}}$, $\binom{c_2}{c_{2k}}$, $\binom{c_3}{c_{3k}}$, $\binom{c_4}{c_{4k}}$, $\binom{c_5}{c_{5k}}$, $\binom{c_6}{c_{6k}}$, $\binom{c_7}{c_{7k}}$, $\binom{c_8}{c_{8k}}$ et $\binom{c_9}{c_{9k}}$

A cela s'ajoute les fonctions d'identités de score du candidat k qui augmente également avec le nombre de circonscription, faisant augmenter les calculs nécessaires au calcul de la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum. En effet, il n'y en a que deux dans le cas de trois circonscriptions [54], alors qu'il en faut six dans le cas de cinq circonscriptions [55], treize dans le cas de sept circonscriptions [56] et trente dans le cas de neuf circonscriptions [57]. L'augmentation des calculs résultent du fait que chaque situation doit être testée pour déterminé à quelle combinaison et donc à quel score il faut la faire correspondre, l'opération étant systématiquement répétée. Si l'on prend l'exemple du cas de neuf circonscriptions de taille 21 chacune, soit un effectif total de 189 électeurs, la situation où l'électeur k réalise un score de 89, donc perdant, mais réparti dans les neuf circonscriptions selon le profil $(15, 14, 13, 12, 11, 10, 7, 5, 3)$, la formule le testera pour chacune des trente fonctions d'identité avant de lui affecter le score correspondant, en l'occurence ici 362880.

54. Dans le cas de trois circonscription de taille homogène, les fonctions d'identité renvoient à deux scores possibles : 6 et 3.

55. Dans le cas de cinq circonscription de taille homogène, les fonctions d'identité renvoient aux six scores possibles suivants : 120, 60, 30, 20, 10 et 5.

56. Dans le cas de sept circonscription de taille homogène, les fonctions d'identité renvoient aux treize scores possibles suivants : 5040, 2520, 1260, 840, 630, 420, 210, 140, 105, 42, 35, 21 et 7.

57. Dans le cas de neuf circonscription de taille homogène, les fonctions d'identité renvoient aux trente scores possibles suivants : 362880, 181440, 90720, 60480, 45360, 30240, 22680, 15120, 10080, 7560, 5040, 3780, 3024, 2520, 1680, 1512, 1260, 756, 630, 504, 252, 126, 84, 72, 36, et 9.

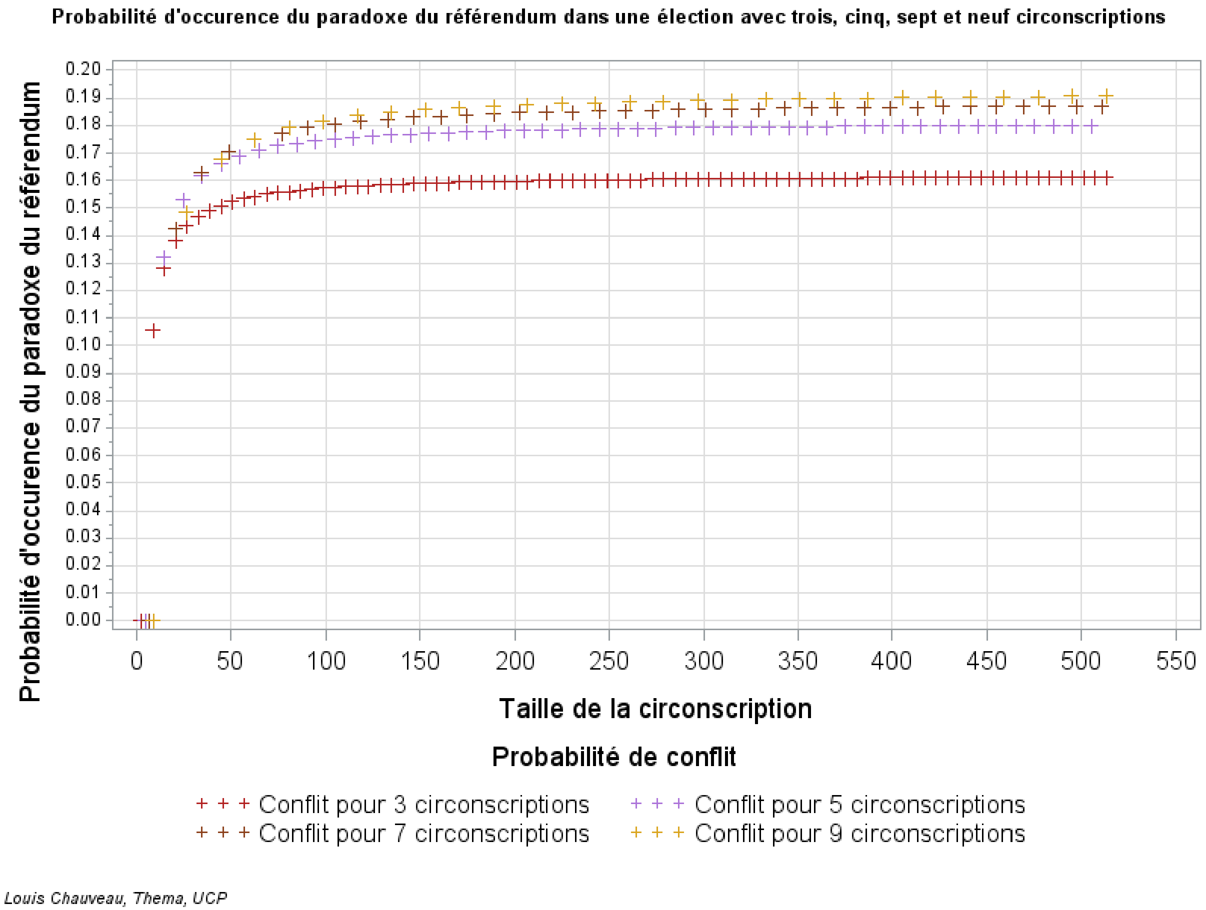

Figure 3.9 – Representation des probabilités d'occurence d'un paradoxe du rérérendum lors d'une élection avec 3, 5, 7 et 9 circonscriptions

$(x_n;x_{n+1})$	$\alpha^3_{(n;n+1)}$	$(x_n;x_{n+1})$	$\alpha^5_{(n;n+1)}$	$(x_n;x_{n+1})$	$\alpha^7_{(n;n+1)}$	$(x_n;x_{n+1})$	$\alpha^9_{(n;n+1)}$
$(3;9)$	$1,7578.10^{-2}$	$(5;15)$	$1,3184.10^{-2}$	$(7;21)$	$1,0197.10^{-2}$	$(9;27)$	$0,008249938$
$(9;15)$	$3,7842.10^{-3}$	$(15;25)$	$2,1333.10^{-3}$	$(21;35)$	$1,4221.10^{-3}$	$(27;45)$	$0,001060405$
$(15;21)$	$1,6289.10^{-3}$	$(25;35)$	$8,5349.10^{-4}$	$(35;49)$	$5,6376.10^{-4}$	$(45;63)$	$0,000421334$
$(21;27)$	$9,0435.10^{-4}$	$(35;45)$	$4,5785.10^{-4}$	$(49;63)$	$3,0227.10^{-4}$	$(63;81)$	$0,000226324$
$(27;33)$	$5,7478.10^{-4}$	$(45;55)$	$2,8521.10^{-4}$	$(63;77)$	$1,8844.10^{-4}$	$(81;99)$	$0,000141253$
$(33;39)$	$3,9746.10^{-4}$	$(55;65)$	$1,9463.10^{-4}$	$(77;91)$	$1,2871.10^{-4}$	$(99;117)$	$9,65527.10^{-5}$
$(39;45)$	$2,9118.10^{-4}$	$(65;75)$	$1,4125.10^{-4}$	$(91;105)$	$9,3495.10^{-5}$	$(117;135)$	$7,01697.10^{-5}$
$(45;51)$	$2,2248.10^{-4}$	$(75;85)$	$1,0717.10^{-4}$	$(105;119)$	$7,0991.10^{-5}$	$(135;153)$	$5,32993.10^{-5}$
$(51;57)$	$1,7551.10^{-4}$	$(85;95)$	$8,4092.10^{-5}$	$(119;133)$	$5,5738.10^{-5}$	$(153;171)$	$4,18593.10^{-5}$
$(57;63)$	$1,4200.10^{-4}$	$(95;105)$	$6,7739.10^{-5}$	$(133;147)$	$4,4924.10^{-5}$	$(171;189)$	$3,37452.10^{-5}$
$(63;69)$	$1,1724.10^{-4}$	$(105;115)$	$5,5732.10^{-5}$	$(147;161)$	$3,6979.10^{-5}$	$(189;207)$	$2,77817.10^{-5}$
$(69;75)$	$9,8438.10^{-5}$	$(115;125)$	$4,6656.10^{-5}$	$(161;175)$	$3,0970.10^{-5}$	$(207;225)$	$2,32706.10^{-5}$
$(75;81)$	$8,3821.10^{-5}$	$(125;135)$	$3,9630.10^{-5}$	$(175;189)$	$2,6315.10^{-5}$	$(225;243)$	$1,97756.10^{-5}$
$(81;87)$	$7,2235.10^{-5}$	$(135;145)$	$3,4079.10^{-5}$	$(189;203)$	$2,2637.10^{-5}$	$(243;261)$	$1,7013.10^{-5}$
$(87;93)$	$6,2895.10^{-5}$	$(145;155)$	$2,9618.10^{-5}$	$(203;217)$	$1,9679.10^{-5}$	$(261;279)$	$1,47914.10^{-5}$
$(93;99)$	$5,5257.10^{-5}$	$(155;165)$	$2,5979.10^{-5}$	$(217;231)$	$1,7266.10^{-5}$	$(279;297)$	$1,29783.10^{-5}$
$(99;105)$	$4,8930.10^{-5}$	$(165;175)$	$2,2972.10^{-5}$	$(231;245)$	$1,5271.10^{-5}$	$(297;315)$	$1,14793.10^{-5}$
$(105;111)$	$4,3631.10^{-5}$	$(175;185)$	$2,0458.10^{-5}$	$(245;259)$	$1,3602.10^{-5}$	$(315;333)$	$1,02258.10^{-5}$
$(111;117)$	$3,9148.10^{-5}$	$(185;195)$	$1,8335.10^{-5}$	$(259;273)$	$1,2193.10^{-5}$	$(333;351)$	$9,16695.10^{-6}$
$(117;123)$	$3,5322.10^{-5}$	$(195;205)$	$1,6527.10^{-5}$	$(273;287)$	$1,0992.10^{-5}$	$(351;369)$	$8,26448.10^{-6}$
$(123;129)$	$3,2031.10^{-5}$	$(205;215)$	$1,4973.10^{-5}$	$(287;301)$	$9,9605.10^{-6}$	$(369;387)$	$7,48903.10^{-6}$
$(129;135)$	$2,9180.10^{-5}$	$(215;225)$	$1,3629.10^{-5}$	$(301;315)$	$9,0675.10^{-6}$	$(387;405)$	$6,81782.10^{-6}$
$(135;141)$	$2,6693.10^{-5}$	$(225;235)$	$1,2458.10^{-5}$	$(315;329)$	$8,2894.10^{-6}$	$(405;423)$	$6,23298.10^{-6}$
Cas maximum calculés							
$(3351;3357)$	$4,5033.10^{-8}$	$(1345;1355)$	$3,5548.10^{-7}$	$(595;609)$	$2,3522.10^{-6}$	$(423;441)$	$5,72029.10^{-6}$

TABLE 3.6 – Coefficients directeurs des pentes de la courbe de la série des probabilités de conflits pour 3, 5, 7 et 9 circonscriptions

Au final, nous avons atteint des limites pour les effectifs suivants :

- pour le cas d'une division en trois circonscriptions, la limite a été atteinte une fois passé le seuil de 4227 électeurs, soit un effectif de 1409 électeurs par circonscription
- pour le cas d'une division en cinq circonscriptions, la limite a été atteinte une fois passé le seuil de 1355 électeurs, soit un effectif de 271 électeurs par circonscription
- pour le cas d'une division en sept circonscriptions, la limite a été atteinte une fois passé le seuil de 693 électeurs, soit un effectif de 99 électeurs par circonscription
- pour le cas d'une division en neuf circonscriptions, la limite a été atteinte une fois passé le seuil de 513 électeurs, soit un effectif de 57 électeurs par circonscription

Bien que limités, nos résultats peuvent être interprétés. En effet, des tendances sont clairement observables, en particulier dans le cas de trois circonscriptions, avec une apparente convergence de chaque série de probabilité vers une valeur limite, comme nous pouvons le constater en étudiant le coefficient directeur de la droite passant entre deux points n et $n+1$ se suivant de la série, avec x_n et x_{n+1} leurs effectifs respectifs et y_n et y_{n+1} leurs probilités respectives d'occurence d'un paradoxe du référendum. Nous avons calculé, dans le tableau 3.6, à la page 114, ses coefficients directeurs $\alpha^3_{(n;n+1)}$ pour n allant de 3 à 135. Nous constatons que le coefficient directeur entre les points les plus élevés du tableau, correspondant aux effectifs 135 et 149, à une valeur de $2,6693.10^{-5}$, autrement dit très proche de 0, ce qui est vérifié aisément en comparant les deux valeurs de probabilités d'occurence du paradoxe du référendum liées à ces deux effectifs, $0,1616181153$ et $0,1616229624$ qui présentent une différence de $4,8471.10^{-6}$. Si l'on prend les deux plus grands effectifs utilisés 3351 et 3357, dont les valeurs de probabilités d'occurence du paradoxe du référendum sont $0,1621090336$ et $0,1621093038$, on constate que la différence présentée est de $2,702.10^{-7}$ et le coefficient directeur $\alpha^3_{(3351;3357)} = 4,5033333.10^{-8}$, c'est-à-dire que la tangente à la courbe est pratiquement horizontale.

A la simple lecture des graphiques 3.5, de la page 87, et 3.9, de la page 113, on peut en déduire que la série de probabilités d'occurence d'un paradoxe du référendum pour le cas de trois circonscriptions semble converger vers une valeur de $0,1623$ [58], qui se trouve être la valeur limite calculée [59] pour la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum dans le cas de trois circonscriptions avec la méthode d'Impartial Culture en faisant tendre la population vers l'infini[62]. Il en va de même pour la série de probabilités d'occurence d'un paradoxe du référendum pour le cas de cinq circonscriptions qui tend à être borné par $0,181$ [60],

58. Dans le cas de trois circonscriptions de taille homogène, nous avons calculé pour le plus grand effectif de population, 4227 électeurs, soit 1409 électeurs par circonscription, une probabilité d'occurence du paradoxe du référendum de $0,1621403572$.

59. En effet, pour une distribution de la population $m_1 = m_2 = m_3 = \frac{1}{3}$, la formule donnée par Feix, Leppelley, Merlin et Rouet retourne $P^3_{IC}(m,\infty) = \frac{\sum_{i=1}^{3} \arccos(\sqrt{m_i})}{\pi} - 0,75 = 0,162260171954089$.

60. Dans le cas de cinq circonscription de taille homogène, l'effectif traité le plus important

qui se trouve également être la valeur limite calculée [61] pour la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum dans le cas de cinq circonscriptions avec la méthode d'Impartial Culture en faisant tendre la population vers l'infini[105]. Concernant les deux autres cas, c'est-à-dire avec sept et neuf circonscriptions, on observe également une convergence, mais les coefficients directeurs de ces deux suites de points, pour les plus grandes valeurs calculées, ne sont pas aussi proche de 0 que ceux calculés pour les cas avec trois et cinq circonscriptions, laissant suggérer que les valeurs limites de ces deux suites de points ne sont pas aussi proches des deux valeurs maximales calculées [62] [63]. Toutefois, on constate effectivement que les probabilités d'occurence du paradoxe du référendum calculées avec les formule exactes semblent bien converger vers les valeurs prédites par le modèle sous l'hypothèse d'Impartial Culture. On peut également constater sur ces valeurs finies que les quatre suites de valeurs de probabilités exactes d'occurence du paradoxe du référendum sont strictement croissantes. De par leur construction, on peut en induire que ces quatre séries le sont également lorsque l'on fait tendre des valeurs de n beaucoup plus grandes.

Par ailleurs, nous pouvons également étudier le comportement qu'ont ces suites de valeurs probabilités exactes d'occurence du paradoxe du référendum entre elles. En effet, le graphique 3.9, de la page 113, semble indiquer une domination de $P(3,n)$ par $P(5,n)$, elle-même apparement dominée par $P(7,n)$ que paraît dominer $P(9,n)$. Nous avons représenté dans le tableau 3.7, de la page 117, les différents écarts mesurés entre les probabilités d'occurence du paradoxe du référendum pour respectivement trois et cinq circonscriptions, cinq et sept circonscriptions et sept et neuf circonscriptions. Les quarante-cinq écarts entre les probabilités d'occurence du paradoxe du référendum pour les cas avec trois et cinq circonscriptions, pour une population commune (c'est-à-dire qu'il existe $l < n$ de sorte que $n = 3.5.l$) sont srictement croissants jusqu'à la valeur maximale calculé ($n = 1335 = 3.5.89$). Il en va de même pour les écarts entre les probabilités d'occurence du paradoxe du référendum pour les cas avec cinq et sept circonscriptions, pour une population commune (c'est-à-dire qu'il existe $m < n$ de sorte que $n = 5.7.m$) : cela représentent neuf valeurs de populations possibles jusqu'à la valeur maximale calculée ($595 = 5.7.17$). Et la croissance stricte s'observe également entre les quatre écarts des probabilités exactes d'occurence du paradoxe du référendum pour sept et neuf circonscritions (avec $o < n$ de sorte que $n = 7.9.o$) jusqu'à la valeur maximale calculée ($n = 441 = 7.9.7$). Autrement dit en utilisant la notation de Landau O, nous avons $P(3,n) = O_{n\to 1335}(P(5,n))$, $P(5,n) = O_{n\to 595}(P(7,n))$ et $P(7,n) = O_{n\to 441}(P(9,n))$.

est de 1355 électeurs, soit 271 électeurs par circonscription, et la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum associé à cet effectif est de $0,1808910769$.

61. En effet, pour une distribution de la population $m_i = \frac{1}{5}$, $\forall i \in [1,5]$, la formule donnée par Feix, Leppelley, Merlin et Rouet retourne $P^5_{IC}(m,\infty) \approx 0,181368$.

62. En effet, pour une distribution de la population $m_i = \frac{1}{7}$, $\forall i \in [1,7]$ la formule donnée par Feix, Leppelley, Merlin et Rouet retourne $P^7_{IC}(m,\infty) \approx 0,1912441506$, tandis que nous nous avons calculé pour le plus grand effectif de population, 693 électeurs, soit 99 électeurs par circonscription, une probabilité d'occurence du paradoxe du référendum de $0,1875698279$.

63. Dans le cas de neuf circonscriptions de taille homogène, nous avons calculé pour le plus grand effectif de population, 513 électeurs, soit 57 électeurs par circonscription, une probabilité d'occurence du paradoxe du référendum de $0,1907051039$.

n	$e_{P(3,n)}^{P(5,n)}$	$e_{P(5,n)}^{P(7,n)}$	$e_{P(7,n)}^{P(9,n)}$	n	$e_{P(3,n)}^{P(5,n)}$	$e_{P(5,n)}^{P(7,n)}$	$e_{P(7,n)}^{P(9,n)}$	n	$e_{P(3,n)}^{P(5,n)}$
15	$3,6621.10^{-3}$			279				609	
21				285	$1,8603.10^{-2}$			615	$1,8878.10^{-2}$
27				297				645	$1,8889.10^{-2}$
35		$9,5911.10^{-4}$		315	$1,8652.10^{-2}$	$6,7851.10^{-3}$	$3,3068.10^{-3}$	675	$1,8899.10^{-2}$
45	$1,5329.10^{-2}$			333				705	$1,8908.10^{-2}$
63			$3,8277.10^{-4}$	345	$1,8693.10^{-2}$			735	$1,8916.10^{-2}$
75	$1,7006.10^{-2}$			351				765	$1,8924.10^{-2}$
81				357				795	$1,8931.10^{-2}$
99				369				825	$1,8937.10^{-2}$
105	$1,7657.10^{-2}$	$5,4531.10^{-3}$		375	$1,8727.10^{-2}$			855	$1,8944.10^{-2}$
117				385		$6,9027.10^{-3}$		885	$1,8949.10^{-2}$
135	$1,8001.10^{-2}$			387				915	$1,8954.10^{-2}$
147				399				945	$1,8959.10^{-2}$
153				405	$1,8756.10^{-2}$			975	$1,8964.10^{-2}$
165	$1,8214.10^{-2}$			423				1005	$1,8968.10^{-2}$
171				441				1035	$1,8972.10^{-2}$
175		$6,2609.10^{-3}$		441			$3,4997.10^{-3}$	1065	$1,8976.10^{-2}$
189			$2,8485.10^{-3}$	435	$1,8781.10^{-2}$			1095	$1,8980.10^{-2}$
195	$1,8358.10^{-2}$			455		$6,9838.10^{-3}$		1125	$1,8983.10^{-2}$
207				465	$1,8802.10^{-2}$			1155	$1,8987.10^{-2}$
225	$1,8462.10^{-2}$			483				1185	$1,8990.10^{-2}$
231				495	$1,8821.10^{-2}$			1215	$1,8993.10^{-2}$
243				525	$1,8838.10^{-2}$	$7,0431.10^{-3}$		1245	$1,8996.10^{-2}$
245		$6,5991.10^{-3}$		555	$1,8853.10^{-2}$			1275	$1,8998.10^{-2}$
255	$1,8541.10^{-2}$			567				1305	$1,9001.10^{-2}$
261				585	$1,8866.10^{-2}$			1335	$1,9003.10^{-2}$
273				595		$7,0883.10^{-3}$			

TABLE 3.7 – Ecarts joints série des probabilités de conflits pour 3, 5, 7 et 9 circonscriptions

n	$e_{P(3,n)}^{P(7,n)}$	$e_{P(3,n)}^{P(9,n)}$	$e_{P(5,n)}^{P(9,n)}$	n	$e_{P(3,n)}^{P(7,n)}$	$e_{P(3,n)}^{P(9,n)}$	$e_{P(5,n)}^{P(9,n)}$
21	$4,80652.10^{-3}$			273	$2,52649.10^{-2}$		
27		$5,12570.10^{-3}$		279		$2,85118.10^{-2}$	
45		$1,66325.10^{-2}$	$1,30374.10^{-3}$	297		$2,86352.10^{-2}$	
63	$2,05938.10^{-2}$	$2,09766.10^{-2}$		315	$2,54375.10^{-2}$	$2,87442.10^{-2}$	$1,00918.10^{-2}$
81		$2,32534.10^{-2}$		333		$2,88412.10^{-2}$	
99		$2,46536.10^{-2}$		351		$2,89282.10^{-2}$	
105	$2,31100.10^{-2}$			357	$2,55687.10^{-2}$		
117		$2,56013.10^{-2}$		369		$2,90064.10^{-2}$	
135		$2,62852.10^{-2}$	$8,28401.10^{-3}$	387		$2,90773.10^{-2}$	
147	$2,41300.10^{-2}$			399	$2,56719.10^{-2}$		
153		$2,68018.10^{-2}$		405		$2,91418.10^{-2}$	$1,03857.10^{-2}$
171		$2,72059.10^{-2}$		423		$2,92007.10^{-2}$	
189	$2,46820.10^{-2}$	$2,75305.10^{-2}$		441	$2,57551.10^{-2}$	$2,92548.10^{-2}$	
207		$2,77970.10^{-2}$		483	$2,58237.10^{-2}$		
225		$2,80198.10^{-2}$	$9,55752.10^{-3}$	525	$2,58811.10^{-2}$		
231	$2,50279.10^{-2}$			567	$2,59300.10^{-2}$		
243		$2,82087.10^{-2}$		609	$2,59720.10^{-2}$		
261		$2,83709.10^{-2}$					

TABLE 3.8 – Ecarts disjoints des série des probabilités de conflits pour 3, 5, 7 et 9 circonscriptions

De par leur construction, on peut en induire que ces quatre séries présentent le même comportement lorsque l'on les fait tendre vers des valeurs de n beaucoup plus grandes. Les différences entre les probabilités montrent que les trois séries de probabilité ne se croisent pas. Prenons le seul cas où est le nombre d'électeurs est divisible à la fois en trois, cinq, sept et neuf circonscriptions, c'est-à-dire $n = 315$. Les valeurs de probabilité d'occurence du paradoxe du référendum sont les suivantes pour cette valeur : $P(3, 315) = 0,1606512477$, $P(5, 315) = 0,1793036363$, $P(7, 315) = 0,1860887070$ et $P(9, 315) = 0,1893954605$, reflétant ainsi la domination lorsque n tend vers 315 avec $P(3, n) = O_{n\rightarrow 315}(P(5, n))$, $P(5, n) = O_{n\rightarrow 315}(P(7, n))$ et $P(7, n) = O_{n\rightarrow 315}(P(9, n))$.

3.6 Conclusion

Nous avons démontré les limites des modèles actuels en ayant recours à des simulations par ordinateur nous ayant permis d'établir l'absence d'unimodalité des conflits. Cette propriété asymétrique indique que pour pour un intervalle fixé et raisonnable en pratique, il existe un minimum local parmi les différentes probabilités de conflit. La formule est en mesure d'identifier quelle combinaison est associée à cette probablité minimale de conflit. De par nos hypothèses de départ nous avons principalement travaillé sur des cas idéaux qui ont cependant une très faible probabilité de se rencontrer dans la nature. En effet, le découpage des circonscriptions électorales a toujours laissé subsister des écarts d'effectifs significatifs, que ce soit dû à la nature du pays (système fédéral garantissant la représentation de toutes ses composantes fédérées quelles soient leur taille de population) ou à des manoeuvres délibérées en vue d'altérer le résultat de l'élection (phénomène de *«charchutage électoral»*). Afin de mieux nous rapprocher des mécanismes ayant lieu dans la réalité, il serait judicieux par conséquent de retirer dans un premier temps l'hypothèse d'homogénéité des circonscriptions. L'hypothèse d'indifférence au choix final des électeurs, est plus complexe à retirer : les études réalisées sur les différnents scrutins, indique en fait une bipolarisation des choix de l'electorat, le résultat final dépendant fortement du niveau de participation de chaque chaque pôle ainsi que du segment des électeurs idéologiquement médians entre les deux candidats. Une approche pourraient consister à *«stériliser»* dans la formule les choix des électeurs acquis à un pôle (c'est-à-dire l'ensemble des électeurs autres que ceux idéologiquement encadrés par les deux candidats) : puisqu'ils choisissent le candidat dont ils sont le plus proche, ils ne contribuent pas à l'augmentation des profils de vote.

Chapitre 4

Modèle de conflits de légitimité avec division hétérogène du corps électoral

4.1 Introduction

Les règles de vote indirect sont utilisées par plusieurs pays, ainsi que plusieurs organisations, pour désigner certains de leurs élus. Le principe de ces procédures repose sur une désignation en deux étapes : les membres composant le corps électoral votent dans un premier temps pour désigner les *«grands électeurs»*, ceux-ci choisissant dans un second temps les titulaires des mandats électifs à pourvoir. Ce système de désignation indirect est préféré aux scrutins directs lorsque lorsque le pays ou l'institution n'est pas unitaire, souvent le fruit d'une alliance entre des acteurs politiques dont la contre-partie est l'instauration d'un mécanisme leur permettant d'influer sur la conduite des affaires, et devant permettre l'intervention, dans le processus de décision, des entités fédérés : le Sénat fédéral des États-Unis d'Amérique a ainsi été institué à la Convention féférale de Philadelphie en 1787 afin d'obtenir la ratification de la Constitution américaine par les petits États (à l'époque ces six États, que sont la Caroline du Sud, le Delaware, la Georgie, le New Hampshire, le New Jersey et le Rhode Island, représentaient, avec 561800 habitants à peine plus de 20% de la population de la Confédération, sans le Maine étant encore à l'époque une république indépendante, qui s'élevait à 2732600 habitants lors du recensement de 1780), dans la mesure où chacun d'eux y dispose de la même représentation (c'est-àdire 2 sénateurs) désignée jusqu'en 1913 par leurs législatures respectives. Ainsi le niveau intermédiaire conserve une influence dans le processus de désignation, puisque s'intercalant entre les électeurs et l'institution à pourvoir. Ce type de procédure est notamment utilisé pour pourvoir des institutions majeurs, comme comme dans le cas des États-Unis pour l'élection présidentielle, où l'occupant du 1600 Pennsylvania Avenue est élu par 438 *grands électeurs* répartis entre les cinquante États fédérés ainsi que le district fédéral de Columbia, ou dans le cas de la Belgique pour les élections sénatoriales, où les sénateurs sont désignés par les parlements des entités fédérées. En France, ces procédures de vote indirect sont utilisés dans le cadre des élections départementales, où le scrutin majoritaire se déroule dans le cadre du canton pour désigner un binôme d'homme et de femme au Conseil du département, et des élections régionales, où le scrutin proportionnel est basé sur des circonscriptions départementales pour désigner les conseillers siégeant au Conseil de la région. Elle est également utilisée pour désigner les membres de certaines fédération de plusieurs institutions, par exemple dans le cas des membres sièegeant aux conseils des *Établissements Publics de Coopération Intercommunale* (E.P.C.I.), désignés par leurs conseils municipaux respectifs avant que ceux des communes de plus de 1000 habitants participant à un E.P.C.I. à fiscalité propre ne soient désignés directement par leurs électeurs, grâce un système de fléchage, à partir du scrutin pour les élections municipales de mars 2014, ou encore dans le cas des membres des assemblées parlementaires du Conseil de l'Europe, où chaque parlement national est représenté par une délégation de ses membres spécialement mandatés à cet effet.

Elle est également employée par certains partis politiques afin de désigner les membres de leurs instances de direction. Lors d'un Congrès [1] du Parti socialiste français, les adhérents votent à la proportionnelle intégrale à la plus forte moyenne au niveau des sections [2] sur les motions qui désignent, à l'échelle de la section, leurs représentants [3] au *«Congrès»* de la fédération départementale qui désigne à son tour ses représentants au *«Congrès national»* [4]. Dans le cadre de cette formation politique spécifique, des différences très importantes peuvent apparaître entre les effectifs des délégués des motions au Congrès de chaque fédération départementale et le résultat du vote sur les motions à l'échelle de chaque fédération départementale, du fait de la surprésentation des petites sections : rien n'interdit aux délégués fédéraux de pourvoir la composition des instances de direction et de contrôle de chaque fédération départementale, ainsi que celle de la délégation au Congrès national, en fonction de la composition du Congrès fédéral et non du résultat du vote sur les motions [5].

Pour donner un exemple concret, lors du Congrès de la fédération départementale des Yvelines de ce parti, le jeudi 21 mai 2015, les résultats de 54 des 57

1. Désignation du renouvellement général des instances du Parti ainsi que des instances provisoires chargés de renouveller les instances dirigeantes du Parti en fonction des résultats du vote des adhérents

2. Unité de base du Parti socialiste, qui en compte entre 4000 et 5000

3. Chaque section dispose d'un nombre de représentants en fonction de son effectif militant au 31 décembre de l'année passée : chaque section dispose de deux représentants dès lors qu'elle a entre 1 et 10 votants, et d'un représentant de plus par dizaine de votes supplémentaires

4. Le nombre des délégués de la fédération départementale est détaillpar l'article 3.2.11 des statuts nationaux du Parti socialiste intitulé Représentation des fédérations au congrès national :

Le calcul du nombre de délégués de chaque fédération est fixé en proportion du nombre d'adhérents ayant pris part au vote sur les motions nationales d'orientation.
Le nombre de délégués est établi de la manière suivante :

- *un délégué pour un nombre de votants au moins égal à 50 et inférieur à 100.*
- *deux délégués pour un nombre de votants au moins égal à 100 et inférieur à 250 votants.*
- *un délégué pour 250 votants supplémentaires et, éventuellement, un délégué pour la dernière fraction inférieure à 250, mais égale ou supérieure à 125.*

5. En pratique, les délégués au Congrès de chaque fédération départementale respectent le résultat du vote bien que rien ne les y oblige en dehors de leur conscience.

sections furent validés par la Commission de recollement, donnant 974 exprimés répartis entre les motions en lice de la manière suivante : 374 suffrages pour la motion A (soit 38,40% des suffrages exprimées), 449 suffrages pour la motion B (soit 46,10% des suffrages exprimées), 13 suffrages pour la motion C (soit 1,33% des suffrages exprimées) et 126 suffrages pour la motion D (soit 12,94% des suffrages exprimées). En suivant scrupuleusement les statuts, ainsi qu'en observant la pratique consistant en cas d'égalité de score au niveau d'une section pour l'obtention d'un délégué au Congrès à procéder à un tirage au sort, il n'aurait dù avoir que 139 délégués lors de la réunion au Congrès avec la répartition suivante : 58 délégués pour la motion A (soit 41,73% des déléguées), 63 délégué pour la motion B (soit 45,32% des déléguées), 1 délégué pour la motion C (soit 0,72% des déléguées), 11 délégués pour la motion D (soit 7,91% des déléguées) et 6 délégués (soit 4,32% des déléguées) à attribuer par tirage au sort (cinq fois entre les motions A et B et une fois entre les motions A et D). En réalité, au lendemain du vote, la direction de la fédération ne respecta pas les statuts et imposa unilatéralement de nouvelles règles : la représentation minimale d'une section passant à un délégué et les situations d'égalité entre motions pour un délégué étant tranchées en faveur de la motion ayant réalisé le plus haut score au niveau départemental. Le nombre de délégués passa à 126 et leur répartition fut la suivante : 53 délégués au titre de la motion A (soit 42,06% des déléguées), 63 délégués au titre de la motion B (soit 50,00% des déléguées), 1 délégués au titre de la motion C (soit 0,79% des déléguées) et 10 délégués au titre de la motion D (soit 7,94% des déléguées). C'est ainsi que la motion B, bien que n'ayant pas obtenu la majorité absolue des suffrages exprimés lors du vote des adhérents, est parvenue néanmoins, par le truchement d'une violation des statuts en vigueur, à se doter de la moitié des délégués, lui permettant lors de la réunion des délégués du Congrès, le samedi 30 mai 2015, de faire adopter de nouveaux statuts étendant les pouvoirs de la direction fédérale et régularisant a posteriori la procédure employée.

La division de la population en circonscriptions de taille égale ne correspond pas à la réalité observée, ce pour au moins trois raisons :

- la première raison est d'ordre matériel : la fréquence des redécoupages est souvent faible (tous les dix ans aux Etats-Unis pour les représentants fédéraux) voir très faible (les circonscriptions législatives françaises sont restées inchangée de 1988 à 2012, et 60% des cantons français sont restés inchangés pendant 215 ans, depuis le découpage de 1800), laissant les mouvements de populations créer des écarts très important
- la seconde raison est d'ordre pratique : le découpage des circonscriptions repose très fréquement sur une unité administrative plus petite de taille non homogène (par exemple en France le découpage des cantons est constitué essentiellement par regroupement des communes, sauf lorsque l'une d'entre elles est de taille trop importante[6])
- la troisième est d'ordre juridique : les règles de découpage autorisent

6. L'article L3113-2 du Code général des collectivités territoriales stipule, en plus du rôle prépondérant du critère démographique et du respect de la continuité territoriale des cantons, que toute commune de moins de 3500 habitants est entièrement compris dans le même canton.

des écarts non négligeables (jusqu'à 20% d'écart par rapport à la taille moyenne des circonscriptions d'un même département français[10])

De plus le jour de l'élection, l'abstention impacte grandement la répartition réelle des votants [7]. La proportion des votes blancs et nuls peut également être très significative [8]. La répartition du corps électoral n'étant pas homogène, il y a nécessairement un impact sur le résultat final. Sachant que nous savons mesurer la probabilité d'occurence d'un paradoxe du référendum pour des population réparties de manière parfaitement homogène entre un nombre de circonscriptions impair et supérieur strictement à un, qu'en est-il avec un découpage présentant des circonscriptions de tailles différentes ?

L'histoire de la Démocratie, depuis notament l'exemple des fameux *bourgs pourries* anglais (rotten boroughs), montre que les législateurs ont cherché essentiellement à réduire ses écarts, sentant intuitivement que ceux-ci pouvaient remettre en cause le principe même de la démocratie en ne faisant pas correspondre le résultat de l'élection à la volonté de la majorité du corps électoral. Dans un colloque donné en 2007 et intitulé *Probability Models for the Analysis of voting Rules in a Federal Union*[62], Marc Feix, Dominique Lepelley, Vincent Merlin et Jean-Louis Rouet ont caculé sous l'hypothèse d'Impartial Culture la probabilité d'occurence d'un paradoxe du référendum pour trois circonscriptions aux effectifs non strictement identique pour une population globale tendant vers l'infini. En fixant l'effectif d'une des circonscriptions à un tiers de l'effectif global et en faisant varier les effectifs des deux circonscriptions restantes, de sorte que chaque réduction dans l'une est compensée par une agmentation dans l'autre, ils ont déterminé que la valeur de la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum est, dans ce cas précis, compris entre une valeur minimale de $0,162$ et une valeur maximale de $0,25$. Néanmoins des variations parfaitement symétriques ne se rencontrent que très rarement dans la réalité, les auteurs ayant fait varier les effectifs par tranche de $0,05$. En reprenant le principe d'un découpage en trois circonscriptions avec une population finie, nous allons étudier toutes les situations possibles d'écarts.

Dans cet article, les circonscriptions sont supposées être hétérogènes, c'est-à-dire avoir des effectifs différents d'électeurs, mais ce nombre n'est pas supposé être infini afin d'autoriser un contrôle de la symétrie de la probabilité de conflit entre le nombre de circonscriptions et le nombre d'électeurs dans chacune. Le reste de l'article est organisé comme suit. Dans la seconde section, nous présentons les mesures réalisés sur un cas simple. Nous introduisons dans la troisième section le modèle théorique avec symétrie des écarts d'effectifs des circonscriptions et la formule analytique donnant la probabilité exacte de d'occurence du paradoxe du référendum. Dans la quatrième section nous présentons le modèle

7. Lors du second tour des élections législatives françaises qui ont eu lieu le dimanche le 17 juin 2012 dans le département des Hauts-de-Seine, 55019 des 86550 électeurs de la treizième circonscription sont allés voter (soit 63,57%) alors que seulement 20173 des 59481 électeurs de la première circonscription se sont déplacés pour voter (soit 33,92%).

8. Lors du second tour de l'élection présidentielle qui a eut lieu le dimanche 6 mai 2012, 2154956 de bulletins ont été recensés en vote blanc ou nul sur les 37016309 déposés dans les urnes (soit l'expression de 5,82% des électeurs venus voter).

théorique avec dissymétrie des écarts d'effectifs des circonscriptions et la formule analytique donnant la probabilité exacte de d'occurence du paradoxe du référendum. Finalement, nous concluons l'article à la cinquième section.

4.2 Premières mesures

Nous reprenons les résultats obtenus pour le découpage en trois circonscriptions avec une population N de taille $n = 9$ et deux options possibles A et B. Nous savons déjà que pour une population de cet effectif, le découpage en trois circonscriptions de taille identique donne une probabilité d'occurence d'un paradoxe du référendum de $\frac{54}{512} \approx 0,1055$. On suppose que des transferts d'électeurs se produisent entre les circonscriptions, dans la limite qu'aucune circonscription ne retrouve sans électeur. Nous obtenons, en comptant la situation d'homogénéité des effectifs des circonscription, sept cas cas possibles d'affectation : $(3, 3, 3)$, $(4, 3, 2)$, $(5, 3, 1)$, $(4, 4, 1)$, $(5, 2, 2)$, $(6, 2, 1)$ et $(7, 1, 1)$. Connaissant déjà la valeur de la probabilité exacte de conflit du premier cas, nous allons délevopper les six autres cas afin de déterminer, par comptage, leurs nombres respectifs de conflits et de pouvoir les comparer. Avant toute chose, il faut souligner qu'il y a deux types de situations : celles où les circonscriptions présentent toutes des effectifs impairs et celles où des circonscriptions présentent des effectifs pairs. Le second type peut aboutir à des conflits sans pour autant qu'un choix clair soit réalisé dans une circonscription : en effet, si dans une circonscription à affectif pair, les deux options sont à égalité, et que les deux autres circonscriptions donnent des résultats opposés (l'une pour l'option A, l'autre pour l'option B) il y a conflit car le résultat global (A ou B) sera nécessairement différent du résultat des circonscriptions (l'indécision). Ainsi se classent dans le premier type les cas $(3, 3, 3)$, $(5, 3, 1)$ et $(7, 1, 1)$, tandis que les cas restants, $(4, 3, 2)$, $(4, 4, 1)$, $(5, 2, 2)$ et $(6, 2, 1)$, se classent dans le second type. L'existence de la possibilité d'indécision augmente la valeur requise du score à réaliser pour être majoritaire dans une circonscription : ainsi, dans le cadre du cas $(4, 3, 2)$, la majorité dans la première circonscription est dorénavant atteinte à partir de $\lfloor 4/2 \rfloor + 1 = 2 + 1 = 3$ voix sur 4 tandis qu'elle l'est dans la troisième à partir de $\lfloor 2/2 \rfloor + 1 = 1 + 1 = 2$ voix sur 2, et que le seuil de la majorité globale est atteint à partir de 5. De fait, alors qu'il faut obtenir une majorité dans 2 circonscriptions sur 3 lorsque celles-ci sont de taille égale fixant le seuil uniquement à $2 \times 2 = 4$, dans le cas où les circonscriptions sont de tailles différentes, il existe dans ce cas particulier trois seuils, $(3, 2, 0)$,$(3, 0, 2)$ et$(0, 2, 2)$, dont un seul est possible : $(0, 2, 2)$. Nous avons représenté tous les cas dans le tableau 4.1, page 125.

Cas $(4, 3, 2)$ En conservant les même règles majoritaires, on obtient 118 situations de conflit soit une probabilité de $\frac{118}{512} \approx 0,2305$ mais en examinant les situations on réalise que ces 118 situations peuvent en réalité se classer en deux catégories : les circonscriptions avec majorité et celles sans majorité. Celles-ci se répartissent de la manière suivante :

- 6 cas de circonscriptions avec majorité, avec le score $(0, 2, 2)$

Table 4.1 – Cas d'effectifs et probabilité des situations de conflits pour $n = 9$

M_e	(Q_1, Q_2, Q_3)	P_{Cf}	Seuil impossible	Seuil avec majorité	P^1_{Cf}	Seuil sans majorité	P^0_{Cf}
0	$(3,3,3)$	$\frac{54}{512}$	$\emptyset$	$(2,2,0)$	$\frac{18}{512}$		
				$(2,0,2)$	$\frac{18}{512}$		
				$(0,2,2)$	$\frac{18}{512}$		
1	$(4,3,2)$	$\frac{198}{512}$	$(3,0,2)$	$(0,2,2)$	$\frac{6}{512}$	$(0,2,1)$	$\frac{12}{512}$
			$(3,2,0)$			$(0,3,1)$	$\frac{4}{512}$
						$(1,2,1)$	$\frac{24}{512}$
						$(2,2,0)$	$\frac{4}{512}$
						$(2,1,1)$	$\frac{72}{512}$
						$(2,0,1)$	$\frac{24}{512}$
						$(2,0,2)$	$\frac{12}{512}$
2	$(5,3,1)$	$\frac{58}{512}$	$(3,2,0)$	$(0,2,1)$	$\frac{6}{512}$		
				$(0,3,1)$	$\frac{2}{512}$		
				$(1,2,1)$	$\frac{30}{512}$		
				$(3,0,1)$	$\frac{20}{512}$		
	$(4,4,1)$	$\frac{208}{512}$	$(3,3,0)$	$(3,0,1)$	$\frac{8}{512}$	$(0,2,1)$	$\frac{12}{512}$
				$(0,3,1)$	$\frac{8}{512}$	$(2,0,1)$	$\frac{12}{512}$
						$(1,2,1)$	$\frac{48}{512}$
						$(2,1,1)$	$\frac{48}{512}$
						$(2,2,0)$	$\frac{72}{512}$
	$(5,2,2)$	$\frac{258}{512}$	$(3,0,2)$	$(0,2,2)$	$\frac{2}{512}$	$(0,2,1)$	$\frac{4}{512}$
			$(3,0,2)$			$(0,1,2)$	$\frac{4}{512}$
						$(0,1,1)$	$\frac{8}{512}$
						$(1,2,1)$	$\frac{20}{512}$
						$(1,1,2)$	$\frac{20}{512}$
						$(1,1,1)$	$\frac{40}{512}$
						$(2,1,1)$	$\frac{80}{512}$
						$(3,0,1)$	$\frac{40}{512}$
						$(3,1,0)$	$\frac{40}{512}$
3	$(6,2,1)$	$\frac{222}{512}$	$(4,2,0)$	$(0,2,1)$	$\frac{2}{512}$	$(1,1,1)$	$\frac{4}{512}$
			$(4,0,1)$	$(1,2,1)$	$\frac{12}{512}$	$(0,1,1)$	$\frac{24}{512}$
						$(2,1,1)$	$\frac{60}{512}$
						$(3,0,1)$	$\frac{40}{512}$
						$(3,1,0)$	$\frac{80}{512}$
4	$(7,1,1)$	$\frac{58}{512}$	$(4,1,0)$	$(0,1,1)$	$\frac{2}{512}$		
				$(1,1,1)$	$\frac{14}{512}$		
				$(2,1,1)$	$\frac{42}{512}$		

- 112 cas de circonscriptions sans majorité, avec les scores suivants :
  - $(0,2,1)$: 12 cas
  - $(0,3,1)$: 4 cas
  - $(1,2,1)$: 24 cas
  - $(2,2,0)$: 4 cas
  - $(2,1,1)$: 72 cas
  - $(2,0,1)$: 24 cas
  - $(2,0,2)$: 12 cas

De fait si on éliminait toutes les situations avec égalité des scores dans la première ou la troisième circonscription, on ferait passer l'univers des possibilités de 512 à 160, ce qui permetterait de ramener la probabilité d'occurence d'un paradoxe du référendum à $\frac{6}{160} = 0,0375$. Cette solution n'est toutefois pas satisfaisante car elle excluerait 352 situations réelles, soit $68,75\%$ de l'univers des possibilités. Comme en pratique, les cas d'indécision sont prévus et tranchés, lorsqu'ils se produisent, par les règles du système électoral (le plus souvent par primauté de l'âge, sinon par tirage au sort), chacune d'entre elles à en fait une probabilité de 50% de désigner le candidat battu globalement, ce qui fait que ces configurations ont en réalité une probabilité de $\frac{112}{1024} = 0,109375$ de produire un conflit. En ajoutant les cas amenant à un conflit avec certitude ($1,171875\%$ des cas), on est donc en présence d'une configuration où le paradoxe du référendum existe avec une probabilité de $12,109375\%$.

Cas $(5,3,1)$ Ce cas est moins délicat que le précédent, dans la mesure chacune des trois circonscriptions intervenant dans le vote est dotée d'un effectif impair, garantissant dans chacune un vote clair en faveur d'un des candidats en lice. Avec les mêmes règles majoritaires, on obtient ainsi 58 situations de conflit soit une probabilité de $\frac{58}{512} \approx 0,1133$. Il y a 20 situations pour le scénario où il n'existe une majorité que dans la première et la troisième circonscription, c'est-à-dire pour celle correspondant au score $(3,0,1)$, et 38 situations pour le scénario où il n'existe une majorité que dans la seconde et la troisième circonscription : soit 6 cas pour le score $(0,2,1)$, 2 cas pour le score $(0,3,1)$ et 30 cas pour le score $(1,2,1)$.

Cas $(4,4,1)$ Ce cas comporte deux circonscriptions dont les effectifs sont pairs et identiques pour une circonscription à effectif impair, impliquant par conséquent des situations d'indécision. Si on obtient avec les même règles majoritaires 208 situations de conflit, soit une probabilité de $\frac{208}{512} \approx 0,4063$, on opère une disctinction entre celles sans indécision et celles avec. Les scrores se répartissent de la manière suivante :

- 16 cas de circonscriptions avec majorité, avec les score $(3,0,1)$ et $(0,3,1)$
- 192 cas de circonscriptions sans majorité, avec les scores suivants :
  - $(0,2,1)$: 12 cas
  - $(1,2,1)$: 48 cas
  - $(2,0,1)$: 12 cas

- $(2,1,1)$: 48 cas
- $(2,2,0)$: 72 cas

Un examen attentif, révèle qu'il n'y a que 200 situations pour lesquelles les deux premières circonscriptions donnent une décision claire, c'est-à-dire que leurs scores respectifs sont différent du score d'indécision, ici 2, tandis que qu'il y 240 situtations pour lesquelles l'une ou l'autre d'entre elles retourne une indécision et 72 situations pour lesquelles les deux présentent une indécision. On peut remarquer que le cas où les deux circonscriptions sont chacune indécise entraîne mécaniquement une décision différente du vote global, tandis que seule la moitié des cas où seule circonscription est indécise aboutit à une décision contraire de celle du vote global. L'idée d'éliminer toutes les situations avec égalité des scores dans la première ou la troisième circonscription ferait passer l'univers des possibilités de 512 à 320, ce qui permetterait de ramener la probabilité d'occurence d'un paradoxe du référendum à $\frac{16}{320} = 0,05$. Cette solution n'est toutefois pas satisfaisante car elle excluerait 192 situations réelles, soit $37,5\%$ de l'univers des possibilités. Comme nous l'avons indiqué pour le cas $(4,3,2)$, les situations d'indécisions, pour être plus précis d'égalité de score entre plusieurs candidats en lice au cours d'un scrutin, sont normalement anticipé par les règles du système électoral, donnant ainsi une probabilité de 50%, lorsque seuls deux candidats sont à départager, de désigner le candidat battu globalement, impliquant donc que ces configurations particulières ont en réalité une probabilité de $\frac{192}{1024} = 0,1875$ d'aboutir à un conflit. En ajoutant les cas amenant à un conflit avec certitude ($3,125\%$ des cas), on est donc en présence d'une configuration où le paradoxe du référendum existe avec une probabilité de $21,875\%$.

Cas $(5,2,2)$ Comme dans le cas précédent, nous sommes en présence de deux circonscriptions aux effectifs respectifs identiques et pairs, induisant donc la possibilité d'une indécision par égalité des scores (ici lorsque ceux-ci sont de 1). On obtient avec les même règles majoritaires 258 situations de conflit soit une probabilité de $\frac{258}{512} \approx 0,5039$. Du fait que la seconde et la troisième circonscription ont des effectifs pairs, ces 258 situations peuvent ainsi être classer entre les circonscriptions avec majorité et celles sans majorité. Celles-ci se répartissent de la manière suivante :

- 2 cas de circonscriptions avec majorité pour le score $(0,2,2)$
- 256 cas de circonscriptions sans majorité, avec les scores suivants :
  - $(0,2,1)$: 4 cas
  - $(0,1,2)$: 4 cas
  - $(0,1,1)$: 8 cas
  - $(1,2,1)$: 20 cas
  - $(1,1,2)$: 20 cas
  - $(1,1,1)$: 40 cas
  - $(2,1,1)$: 80 cas
  - $(3,0,1)$: 40 cas
  - $(3,1,0)$: 40 cas

Un examen scrupuleux, indique qu'il n'y a que 128 situations pour lesquelles les deux dernières circonscriptions donnent une décision claire, c'est-à-dire que leurs scores respectifs sont différents du score d'indécision, ici 1, tandis que qu'il y 256 situations pour lesquelles l'une ou l'autre d'entre elles retourne une indécision et 128 situations pour lesquelles les deux présentent une indécision. Si on élimine toutes les situations avec égalité des scores dans la seconde ou la troisième circonscription, on fait passer l'univers des possibles de 512 à 128, ramenant la probabilité d'occurence d'un paradoxe du référendum à $\frac{2}{128} = 0,0156$. Cette solution n'est pas satisfaisante non plus car elle exclut 384 situations, soit 75% de l'univers des possibilités. Comme en pratique, les cas d'indécision sont prévus et tranchés, lorsqu'ils se produisent, par les règles du système électoral (la règle la plus fréquent est la primauté de l'âge, la suivante étant celle du tirage au sort), chacune d'entre elles à en fait une probabilité de 50% de désigner le candidat battu globalement, ce qui fait que ces configurations ont en réalité une probabilité de $\frac{384}{1024} = 0,375$ de produire un conflit. En ajoutant les cas amenant à un conflit avec certitude ($0,390625\%$ des cas), on est donc en présence d'une configuration où le paradoxe du référendum existe avec une probabilité de $37,890625\%$.

Cas $(6,2,1)$ Ce cas comporte deux circonscriptions dont les effectifs sont pairs (6 et 2) pour une circonscription à effectif impair (1), amenant structurellement à des situations d'indécision. Si on obtient avec les même règles majoritaires 222 situations de conflit, soit une probabilité de $\frac{222}{512} \approx 0,4336$, on opère une disctinction entre celles sans indécision et celles avec. Les scores se répartissent de la manière suivante :

- 14 cas de circonscriptions avec majorité, avec les scores suivants :
  - $(0,2,1)$: 2 cas
  - $(1,2,1)$: 12 cas
- 208 cas de circonscriptions sans majorité, avec les scores suivants :
  - $(0,1,1)$: 24 cas
  - $(1,1,1)$: 4 cas
  - $(2,1,1)$: 60 cas
  - $(3,0,1)$: 40 cas
  - $(3,1,0)$: 80 cas

Une étude détailleé de ce cas révèle ainsi que seules 176 situations produisent une décision claire, autrement dit avec des scores de circonscriptions autre que ceux des scores d'égalité (c'est-à-dire 3 pour la première circonscription et 1 pour la seconde circonscription), tandis qu(il y a 128 situations pour lesquelles l'une ou l'autre d'entre elles retourne une indécision et 80 situations pour lesquelles les deux présentent une indécision. L'élimination de toutes les situations avec égalité des scores dans la premiè ou la seconde circonscription ferait passer l'univers des possibles de 512 à 176, ramenant la probabilité d'occurence d'un paradoxe du référendum à $\frac{14}{176} = 0,0795$. Cette solution n'est pas satisfaisante non plus car elle exclut 336 situations, soit plus de 65% de l'univers des possibilités. La pratique du traitement des d'indécision attribue à chacune d'entre elles une probabilité de 50% de désigner le candidat battu globalement, ce qui fait que ces configurations ont en réalité une probabilité de $\frac{208}{1024} = 0,203$ de produire un conflit. En ajoutant les cas amenant à un conflit avec certitude ($0,2734375\%$ des cas), on est donc en présence d'une configuration où le paradoxe du référendum existe avec une probabilité de $23,046875\%$.

Cas $(7,1,1)$ Ce cas, à l'instar du cas $(5,3,1)$, est plus simple à traiter dans la mesure où les circonscriptions présentent toutes un effectif impair, interdisant mécaniquement toute indécision. Ainsi donc, avec les mêmes règles de décision majoritaire, on obtient 58 situations de conflit soit une probabilité de $\frac{58}{512} \approx 0,1133$. Il y a 2 situations pour le scénario $(0,1,1)$ (soit $\frac{2}{512} \approx 0,0039$ de l'univers des possibilités), 14 situations pour le scénario $(1,1,1)$ (soit $\frac{14}{512} \approx 0,0273$ de l'univers des possibilités) et 42 situations pour le scénario $(2,1,1)$ (soit $\frac{42}{512} \approx 0,0820$ de l'univers des possibilités).

Conclusion Cet exemple sur $n = 9$ électeurs fait tout d'abord ressortir une distinction nette entre les cas où toutes les circonscriptions ont des effectifs impairs (c'est-à-dire pour les cas $(3,3,3)$, $(5,3,1)$, $(7,1,1)$) et les cas où certaines circonscriptions présentent des effectifs pairs (dans les cas $(4,3,2)$, $(4,4,1)$, $(5,2,2)$, $(6,2,1)$) : les premières ont, au pire, une probabilité quatre septième moins importante de conflit ($P_{Cf}(7,1,1) = 0,1133$) que la plus faible des secondes ($P_{Cf}(4,3,2) = 0,1992$). C'est la conséquence logique de l'apparition des situations d'égalité de scores à l'intérieur d'une circonscription à effectif pair, augmentant ainsi les différences entre le résultat global et le résultat des circonscriptions.

Ensuite concernant les cas des circonscriptions à effectifs impairs, on constate l'égalité de la probabilité de conflits pour deux cas, $(5,3,1)$ et $(7,1,1)$ (dont la probabilité vaut $0,1133$), ayant en commun d'avoir une circonscription avec un seul électeur.

Concernant les cas des circonscriptions comprenant des effectifs pairs, on peut opérer une distinction entre les cas où une seule circonscription présente un effectif pair et ceux où deux circonscriptions ont un effectif pair. En effet, dans ce dernier cas la probabilité s'accroît avec la somme des écarts absolus des carrés de leurs effectifs.

Le tableau 4.2, page 130, est consacré à la représentation des valeurs mesurées de la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum pour ces sept cas.

Table 4.2 – Valeurs exactes de conflit mesurées pour pour 9 électeurs avec différents écarts entre les circonscriptions

M_e	(Q_1, Q_2, Q_3)	P^1_{Cf}	P^0_{Cf}	P_{Cf}
0	$(3, 3, 3)$	$0,1055$	$0,0000$	**0,1055**
1	$(4, 3, 2)$	$0,0117$	$0,1875$	$0,1992$
2	$(5, 3, 1)$	$0,1133$	$0,0000$	**0,1133**
	$(4, 4, 1)$	$0,0313$	$0,1875$	$0,2188$
	$(5, 2, 2)$	$0,0039$	$0,2500$	$0,2539$
3	$(6, 2, 1)$	$0,0273$	$0,2031$	$0,2305$
4	$(7, 1, 1)$	$0,1133$	$0,0000$	**0,1133**

4.3 Modèle avec symétrie des écarts

4.3.1 Modélisation des bornes

Nous commençons en reprenant le modèle conflits de légétimité avec division homogène du corps électoral en fixant le nombre de circonscriptions à trois.

Soit $N \subset \mathbb{N}$ un ensemble discret d'électeurs, le nombre d'électeurs étant $n \in \mathbb{N}$. Nous supposons que la population est impaire, c'est-à-dire $n = 2 \times k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des électeurs est également réparti entre $c \in \mathbb{N}$ circonscriptions de sorte que l'on ait la partition

$$\bigcap_{j=1}^{c} C_j = \emptyset \text{ et } \bigcup_{j=1}^{c} C_j = N,$$

où C_j est l'ensemble des électeurs appartenant à la circonscription j. Nous supposons que $c = 3$, de sorte de disposer d'une partition de N en trois circonscriptions (C_1, C_2, C_3) de taille initialement identique $c_j = 2q+1$, avec $q \in \mathbb{N}^*$, de telle sorte que $n = 3 \times c_j = 6 \times q + 3$.

Chaque circonscription dispose d'un représentant pour participer à l'élection du Gouvernement central. Nous supposons qu'il y a seulement deux candidats pour le Gouvernement central, A et B. Il n'y a pas d'indécision : chaque électeur réalise un choix entre les deux candidats. Il n'y a aucune préférence particulière : chaque électeur a une probabilité identique de choisir A ou B. On a donc :

$$\forall i \in N, P_i(A) = P_i(B) = \frac{1}{2}$$

De même il n'y a aucune préférence au niveau global :

$$P_N(A) = P_N(B) = \frac{1}{2}$$

Nous désignons par n_A le nombre d'électeurs en faveur de A. Ainsi le nombre d'électeurs en faveur de B est donné par

$$n_B = n - n_A$$

De la même manière, c_A est à la fois le nombre de circonscriptions dans lesquelles une majorité des électeurs est en faveur de A et par conséquent le nombre de représentants partisans de A. De manière symétrique le nombre de circonscriptions dans lesquelles une majorité des électeurs est en faveur de B et le nombre de représentants partisans de B est donné par

$$c_B = c - c_A$$

Pour gagner le vote global, il faut que l'un des candidats remporte plus de voix que l'autre : il faut donc au minimum que l'un des candidats obtienne une voix de plus que l'autre.

Nous pouvons dorénavant définir la majorité minimale globale.

Définition 4.1. *Dans le cas $c = 3$, la majorité minimale globale s'écrit :*

$$M_N^{min} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{6q+3}{2} \rfloor + 1 = 3q + 2$$

On détermine ainsi le plus haut score possible du perdant au vote global en retranchant la majorité minimale globale d'une voix.

On définit maintenant la minorité maximale globale.

Définition 4.2. *Dans le cas $c = 3$, la minorité maximale globale s'écrit :*

$$m_N^{max} = M_N^{min} - 1 = 3q + 1$$

On peut désormais définir la majorité minimale d'une circonscription.

Définition 4.3. *Dans le cas $c = 3$, la majorité minimale d'une circonscription s'écrit :*

$$M_{C_j}^{min} = \lfloor \frac{n_c^j}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{2q+1}{2} \rfloor + 1 = q + 1$$

La majorité des circonscription étant $\lfloor \frac{c}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{3}{2} \rfloor + 1 = 2$, on définit la majorité minimale de la majorité des circonscriptions.

Définition 4.4. *Dans le cas $c = 3$, la majorité minimale de la majorité des circonscriptions s'écrit :*

$$M_{M_C}^{min} = 2 \times M_{C_j}^{min} = 2q + 2$$

Les notations étant introduites, nous pouvons formellement définir la notion de paradoxe du référendum, ou conflit.

Définition 4.5. *Un conflit se produit lorsque,*

$$\exists i = \{A, B\}, c_i < \frac{c}{2} \text{ et } n_i > \frac{n}{2}$$

Définition 4.6. *Dans la situation où $c = 3$, un conflit se produit lorsque*

$$\exists i = \{A, B\}, c_i < 2 \text{ et } n_i > 3q + 1$$

En d'autres termes, un conflit est une situation dans laquelle le candidat ayant reçu plus de suffrages directs que son opposant, est perdant dans une majorité de circonscriptions.

La probabilité théorique qu'un paradoxe du référendum se produise dépend du nombre de circonscriptions et du nombre total des électeurs (ou du nombre d'électeurs par circonscription).

Nous définissons la probabilité d'occurence d'un conflit.

Définition 4.7. *La probabilité d'occurence d'un conflit s'écrit*

$$P : \left| \begin{array}{ccc} N^2 & \longrightarrow & [0;1] \\ (c,n) & \longmapsto & P(c,n) \end{array} \right.$$

Une propriété immédiate est que la probabilité d'occurence d'un conflit est nulle lorsqu'il n'y a qu'une seule circonscription ou lorsqu'il n'y a qu'un seul électeur par circonscription.

Théorème 4.1. *Lors d'une élection avec deux options, la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum est nulle si le nombre de circonscriptions $c = 1$ ou $c = n$:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(1, n) = P(n, n) = 0 \tag{4.1}$$

Démonstration. Nous commençons par le cas $c = 1$ avant de faire le cas $c = n$.

Cas $c = 1$
On appelle C l'unique circonscription de cette situation.
En ce cas la majorité minimale de la circonscription se confond avec la majorité minimale globale : $M_C^{min} = M_N^{min}$.
En conséquent la majorité minimale de la circonscription est strictement supérieure à la minorité maximale globale

$$M_C^{min} = M_N^{min} > M_N^{min} - 1 = m_N^{max}$$

Le paradoxe du référendum est impossible, sa probabilité d'occurence est donc nulle.

Cas $c = n$
On désigne par $C_1, ..., C_n$ les n circonscriptions de ce cas.

Chaque circonscription ayant un effectif de 1 électeurs, la majorité minimale de chaque circonscription vaut 1.
Par conséquent la majorité minimale de la majorité des circonscriptions se confond avec la majorité minimale globale : $M_{M_C}^{min} = M_N^{min}$.
Par conséquent la majorité minimale de la majorité des circonscriptions est strictement supérieure à la minorité maximale globale

$$M_{M_C}^{min} = M_N^{min} > M_N^{min} - 1 = m_N^{max}$$

Le paradoxe du référendum est par conséquent impossible, sa probabilité d'occurence est donc nulle.

□

Nous posons le thèorème suivant :

Théorème 4.2. *Lors d'un paradoxe du référendum avec trois circonscriptions, aucun candidat ne peut remporter toutes les circonscriptions, quelques soient leurs effectifs.*

Démonstration. Soit une population N d'effectif $n = 2k+1 = 2(q_1+q_2+q_3+1)+1$, avec $k = q_1 + q_2 + q_3 + 1$ et $q_1 \geq q_2 \geq q_3$ et $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{N}^3$.

Soit les effectifs des trois circonscriptions (C_1, C_2, C_3) : $c_1 = 2q_1 + 1$, $c_2 = 2q_2 + 1$ et $c_3 = 2q_3 + 1$. Les majorités minimales de chacune des trois circonscriptions sont données par : $M_{C_1}^{min} = q_1 + 1$, $M_{C_2}^{min} = q_2 + 1$ et $M_{C_3}^{min} = q_3 + 1$. La somme des majorités minimales des trois circonscriptions donne :

$$\sum_{i=1}^{3} M_{C_i}^{min} = q_1 + q_2 + q_3 + 3$$

La majorité minimale globale est le score maximal que peut atteindre le candidat ayant perdu le vote global et gagne la majorité des circonscriptions. Elle est donnée par :

$$M_N^{min} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{2(q_1 + q_2 + q_3 + 1) + 1}{2} \rfloor + 1 = q_1 + q_2 + q_3 + 2$$

La minorité maximale globale est donnée par :

$$m_N^{max} = M_N^{min} - 1 = q_1 + q_2 + q_3 + 1$$

Or la somme des majorités minimales des trois circonscriptions est supérieure à la minorité maximale globale :

$$\sum_{i=1}^{3} M_{C_i}^{min} = q_1 + q_2 + q_3 + 3 > q_1 + q_2 + q_3 + 1 = m_N^{max}$$

□

Nous définissons ainsi l'intervalle d'existence du paradoxe du référendum.

Définition 4.8. *Dans le cas où $c = 3$, l'intervalle d'existence du paradoxe du référendum s'écrit :*

$$I_{PR}^{e} = [M_{MC}^{min}, m_{N}^{max}] = [2q+2, 3q+1]$$

Le graphique 4.1, page 134, est consacré à la représentation de l'intervalle d'existence du paradoxe du référendum pour le cas $(C_1, C_2, C_3) = (2q+1, 2q+1, 2q+1)$.

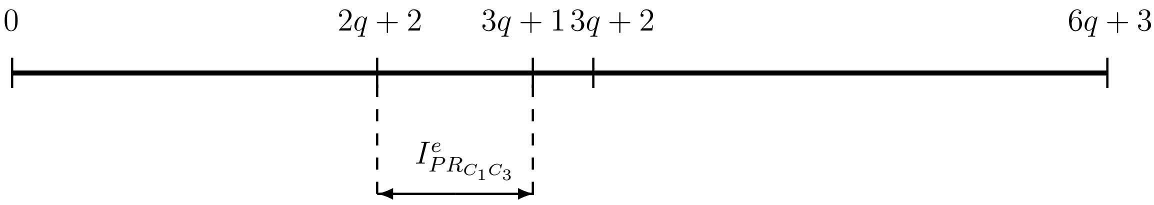

FIGURE 4.1 – Representation des intervalles d'existence du paradoxe du référendum pour le cas $(C_1, C_2, C_3) = (2q+1, 2q+1, 2q+1)$

On suppose désormais que les circonscriptions n'ont pas les mêmes effectifs : des transferts d'électeurs sont opérérés de la troisième vers la première circonscription de sorte que chaque circonscription conserve un effectif impair. L'effectif de la seconde circonscription reste inchangé. Pour cela nous définissons l'écart total pair.

Définition 4.9. *Dans le cas où $c = 3$, l'écart total s'écrit $E = 2 \times e$, avec l'écart local $e \in \mathbb{N}^*$.*

Afin de conserver des effectifs impairs dans les circonscriptions, nous imposons que e est pair.

Définition 4.10. *Dans le cas où $c = 3$, l'écart local s'écrit $e = 2 \times r$, avec $r \in \mathbb{N}^*$.*

Nous pouvons désormais redéfinir les circonscription en intégrant l'écart local.

Définition 4.11. *Soit $C_i^{\pm e}$ la circonscription i d'écart local $\pm e$, et dont l'effectif est $c_i^{\pm e} = 2q + 1 \pm e$.*

Nous avons donc les effectifs de circonscription suivant :

$$c_1^{+e} = 2q + 1 + e = 2q + 1 + 2r$$
$$c_2^{0} = 2q + 1 + 0$$

$$c_3^{-e} = 2q + 1 - e = 2q + 1 - 2r$$

Nous en déduisons les intervalles d'effectifs et les intervalles de seuil majoritaire de chacune des trois circonscriptions pour $r \in [1, q]$:

Définition 4.12. *Dans le cas $c = 3$, avec un écart $e = 2r$ entre C_1 et C_3, les intervalles d'effectifs et les intervalles de seuil majoritaire de chacune des trois circonscriptions s'écrivent :*

$$C_1^{+e} \in [2q + 3, 4q + 1] \text{ et } M_{C_1}^{min} \in [q + 2, 2q + 1]$$

$$C_2^{0} \in \{2q + 1\} \text{ et } M_{C_2}^{min} \in \{q + 1\}$$

$$C_3^{-e} \in [1, 2q - 1] \text{ et } M_{C_3}^{min} \in [1, q]$$

Les circonscriptions ayant des effectifs différents, il existe trois majorités minimales différentes de la majorité des circonscriptions.

Définition 4.13. *Dans le cas $c = 3$, avec un écart $e = 2r$ entre C_1 et C_3, les trois majorités minimales de la majorité des circonscriptions, s'écrivent :*

$$M_{M_{C_1C_2}}^{min} = M_{C_1}^{min} + M_{C_2}^{min} \in [2q + 3, 2q + 2 + r] = [2q + 3, 3q + 2]$$

$$M_{M_{C_1C_3}}^{min} = M_{C_1}^{min} + M_{C_3}^{min} \in \{2q + 2 + r - r\} = \{2q + 2\}$$

$$M_{M_{C_2C_3}}^{min} = M_{C_2}^{min} + M_{C_3}^{min} \in [q + 1 + 1, 2q + 1 - r] = [q + 2, 2q + 1]$$

Remarque 4.1. *La borne supérieure de l'intervalle d'existence de la majorité minimale de la majorité des circonscriptions C_1 et C_2 est supérieure à la minorité maximale globale m_N^{max}.*

Il ne peut exister un intervalle unique d'existence du paradoxe du référendum. Nous définissons les trois intervalles d'existence possibles à partir des trois majorités minimales de la majorité des circonscriptions et de la minorité maximale globale.

Définition 4.14. *Dans le cas $c = 3$, avec un écart $e = 2r$ entre C_1 et C_3, les trois intervalles d'existence possibles s'écrivent :*

$$I_{PR_{C_1C_2}}^{e} = [M_{M_{C_1C_2}}^{min}, m_N^{max}] = [2q + 3, 3q + 1]$$

$$I_{PR_{C_1C_3}}^{e} = [M_{M_{C_1C_3}}^{min}, m_N^{max}] = [2q + 2, 3q + 1]$$

$$I_{PR_{C_2C_3}}^{e} = [M_{M_{C_2C_3}}^{min}, m_N^{max}] = [q + 2, 3q + 1]$$

Nous nous intéressons au cas extrême (C_1, C_2, C_3)=$(4q + 1, 2q + 1, 1)$. Dans ce cas, les seuils majoritaires de chaque circonscription sont :

$$M_{C_1}^{min} = 2q + 1$$

$$M_{C_2}^{min} = q + 1$$

$$M_{C_3}^{min} = 1$$

On en déduit les majorités minimales de la majorité des circonscriptions :

$$M_{M_{C_1C_2}}^{min} = M_{C_1}^{min} + M_{C_2}^{min} = 3q + 2$$

$$M_{M_{C_1C_3}}^{min} = M_{C_1}^{min} + M_{C_3}^{min} = 2q + 2$$

$$M_{M_{C_2C_3}}^{min} = M_{C_2}^{min} + M_{C_3}^{min} = q + 2$$

Remarque 4.2. *La majorité minimale de la majorité des circonscriptions C_1 et C_2, $M_{M_{C_1C_2}}^{min} = 3q+2$, est supérieure à la minorité maximale globale $m_N^{max} = 3q+1$.*

Nous définissons les trois intervalles d'existence possible du paradoxe du rérérendum à partir des trois majorités minimales de la majorité des circonscriptions et de la minorité maximale globale.

Définition 4.15. *Dans le cas $c = 3$, avec la répartition $(C_1, C_2, C_3) = (4q + 1, 2q + 1, 1)$, les trois intervalles d'existence possibles s'écrivent :*

$$I_{PR_{C_1C_2}}^e = [M_{M_{C_1C_2}}^{min}, m_N^{max}] = \emptyset$$

$$I_{PR_{C_1C_3}}^e = [M_{M_{C_1C_3}}^{min}, m_N^{max}] = [2q + 2, 3q + 1]$$

$$I_{PR_{C_2C_3}}^e = [M_{M_{C_2C_3}}^{min}, m_N^{max}] = [q + 2, 3q + 1]$$

Remarque 4.3. *On observe que $I_{PR_{C_1C_3}}^e \subseteq I_{PR_{C_2C_3}}^e$.*

Le graphique 4.2, page 137, est consacré à la représentation des intervalles d'existence du paradoxe du référendum pour le cas $(C_1, C_2, C_3) = (4q + 1, 2q + 1, 1)$.

Remarque 4.4. *La circonscription C_3 participe aux deux intervalles possibles d'existence du paradoxe du référendum.*

Théorème 4.3. *Dans le cadre d'un scrutin majoritaire avec deux candidats, aucune indécision de la part des électeurs, et trois circonscriptions $(C_1, C_2, C_3) = (4q + 1, 2q + 1, 1)$, le paradoxe du référendum ne peut exister si le vote de la circonscription C_3 est conforme au vote global.*

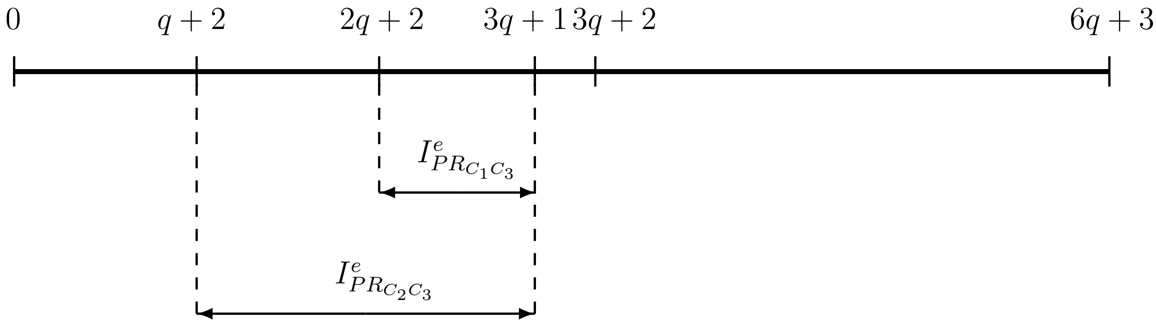

FIGURE 4.2 – Representation des intervalles d'existence du paradoxe du référendum pour le cas $(C_1, C_2, C_3) = (4q + 1, 2q + 1, 1)$

Démonstration. Soit une population N d'effectif $n = 2k + 1 = 6 \times (q + 1) + 1$, avec $k = 3q + 1$ et $q \in \mathbb{N}$.

Soit les effectifs des trois circonscriptions (C_1, C_2, C_3) : $c_1 = 4q + 1$, $c_2 = 2q + 1$ et $c_3 = 1$. Les majorités minimales de chacune des trois circonscriptions sont données par : $M_{C_1}^{min} = 2q + 1$, $M_{C_2}^{min} = q + 1$ et $M_{C_3}^{min} = 1$.

La majorité minimale globale est donnée par :

$$M_N^{min} = \lfloor n/2 \rfloor + 1 = \lfloor (2 \times (6q + 1) + 1)/2 \rfloor + 1 = 3q + 2$$

La minorité maximale globale est donnée par :

$$m_N^{max} = M_N^{min} - 1 = 3q + 1$$

Si est C_3 supposée voter comme le vote global, alors la seule combinaison possible pour obtenir un paradoxe de Condorcet est avec C_1 et C_3. Or la somme des majorités minimales de ses deux circonscriptions est supérieure à la minorité maximale globale :

$$\sum_{i=1}^{2} M_{C_i}^{min} = 3q + 2 > 3q + 1 = m_N^{max}$$

Le paradoxe du référendum est impossible. □

Corollaire 4.1. *Dans le cadre d'un scrutin majoritaire avec deux candidats, aucune indécision de la part des électeurs, et trois circonscriptions* $(C_1, C_2, C_3) = (4q+1, 2q+1, 1)$*, le vote de la circonscription* C_3 *détermine l'existence du paradoxe du référendum.*

4.3.2 Formule numérique

La structure de la formule est basée sur le développement de chaque situation de vote ou, pour être plus précis, sur l'énumération des situations de vote. La principale difficulté est qu'il est impossible de générer une base des choix de chaque individu avec N électeurs en colonne et les 2^n choix qu'ils peuvent faire en ligne : pour 27 individus nous nous retrouvons avec une base de données de 100 gigaoctets, par conséquent, il est pratiquement impossible de faire une base de données, par exemple, avec les 45 millions d'électeurs français et leurs $2^{45000000}$ choix (nombre hors de portée des ordinateurs actuels).

Toutefois le calcul de la probabilité exact d'occurence d'un paradoxe du référendum ne nécessite pas de générer tous les profils. Il suffit juste de connaître leur nombre, et chaque situation est elle-même inclue dans un profil : c'est au niveau des circonscriptions, des poids sont affectés à chaque option. Par exemple si l'on considrère une population de 153 électeurs divisée en trois circonscriptions (C_1, C_2, C_3) d'effectifs $(c_1, c_2, c_3) = (81, 51, 21)$ de 51 électeurs, et l'on décide que l'option de référence reçoit 26 votes dans deux circonscriptions et 11 votes dans la dernière, par conséquent (26, 26, 11) est un profil. En revanche, ce profil ne peut pas avoir de combinaison équivalente (comme $(26, 11, 26)$ et $(11, 26, 26)$), du fait des différences d'effectifs entre les circonscriptions. À l'inverse de la formule développée pour le modèle de conflits de légitimité avec division homogène du corps électoral, il est impossible d'interchanger les circonscriptions, et l'attribution d'un coefficient multiplicateur est donc exclu. Pour résoudre cette difficulté induite par l'hétérogénéité des effectifs des circonscriptions, la formule développe les calculs au niveau des trois intervalles d'existence du paradoxe du référendum $I^e_{PR_{C_1C_2}}$, $I^e_{PR_{C_1C_3}}$ et $I^e_{PR_{C_2C_3}}$, pour déterminer à chaque fois les scores (p_1, p_2, p_3) des profils de vote de situation de paradoxe du référendum des circonscriptions (C_1, C_2, C_3).

Ceci donne une hiérarchie des profils, permettant ainsi la mise en œuvre d'un algorithme pour générer les profils.

Pour simplifier les calculs, nous supposons que nous testons toujours l'existence du paradoxe du référendum en faveur du candidat A (le nombre total de situations étant obtenu par doublement).

En effet, le principe de la formule est calculer tous les cas de figures possibles pour une population donnée n décomposable en trois circonscriptions de taille identique c, de sorte que $n = 3 \times c$, chaque la taille de chaque circonscription étant par construction impair : $c = 2 \times q + 1$. La formule détermine donc la valeur de q, ce qui permet de générer les différentes valeurs de l'écart $e \in [1, q]$ et ainsi générer les différents cas possibles de répartition des électeurs dans les circonscriptions.

Une fois générer les tables des trois intervalles d'existence du paradoxe du référendum $I^e_{PR_{C_1C_2}}$, $I^e_{PR_{C_1C_3}}$ et $I^e_{PR_{C_2C_3}}$, la formule les compile avant de suivre une procédure ensuite sensiblement identique à celle développée par la formule analytique du modèle avec homogénéité des circonscriptions, c'est-à-dire appliquer à chaque situation de chaque cas

$$log(\binom{c_1}{p_1}) + log(\binom{c_2}{p_2}) + log(\binom{c_3}{p_3}) + (1 - n) \times log(2)$$

La procédure regroupe ensuite les cas et calcule la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum de chacun, en faisant la somme de l'exponentielle de la valeur de chaque situation.

La formule au final se présente ainsi :

$$
\begin{aligned}
P(3,n) &= I^{e}_{PR_{C_1C_2}}\left(e^{log(\binom{c_1}{c_{1k}})+log(\binom{c_2}{c_{2k}})+log(\binom{c_3}{c_{3k}})+(1-n)\times log(2)}\right)\\
&+I^{e}_{PR_{C_1C_3}}\left(e^{log(\binom{c_1}{c_{1k}})+log(\binom{c_2}{c_{2k}})+log(\binom{c_3}{c_{3k}})+(1-n)\times log(2)}\right)\\
&+I^{e}_{PR_{C_2C_3}}\left(e^{log(\binom{c_1}{c_{1k}})+log(\binom{c_2}{c_{2k}})+log(\binom{c_3}{c_{3k}})+(1-n)\times log(2)}\right)\\
&= \sum_{y=1}^{r}\sum_{c_{1_k}=0}^{r+y-1}\sum_{c_{2_k}=r+1}^{Min(2r+1,m_N^{max}-c_{1_k})}\sum_{c_{3_k}=r-y+1}^{Min(2r+1-s,m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k})} e^{log(\binom{c_1}{c_{1k}})+log(\binom{c_2}{c_{2k}})+log(\binom{c_3}{c_{3k}})+(1-n)\times log(2)}\\
&+\sum_{y=1}^{r}\sum_{c_{1_k}=r+y+1}^{m_N^{max}-r-y+1}\sum_{c_{2_k}=r+1}^{Min(2r+1,m_N^{max}-c_{1_k})}\sum_{c_{3_k}=0}^{Min(2r+1-s,m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k})} e^{log(\binom{c_1}{c_{1k}})+log(\binom{c_2}{c_{2k}})+log(\binom{c_3}{c_{3k}})+(1-n)\times log(2)}\\
&+\sum_{y=1}^{r}\sum_{c_{1_k}=r+y+1}^{m_N^{max}-r-y+1}\sum_{c_{2_k}=0}^{Min(2r+1,m_N^{max}-c_{1_k})}\sum_{c_{3_k}=r-y+1}^{Min(2r+1-s,m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k})} e^{log(\binom{c_1}{c_{1k}})+log(\binom{c_2}{c_{2k}})+log(\binom{c_3}{c_{3k}})+(1-n)\times log(2)}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

4.3.3 Analyse des résultats

Le graphique 4.3, page 140, est consacré à la représentation de la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum, avec des nuances selon la valeur des écarts à la moyenne des effectifs de circonscriptions, allant par tranche de $0,2$ ce qui nous donne 5 intervalles de résultats : $[0,0;0,2]$, $]0,2;0,4]$, $]0,4;0,6]$, $]0,6;0,8]$ et $]0,8;1,0]$.

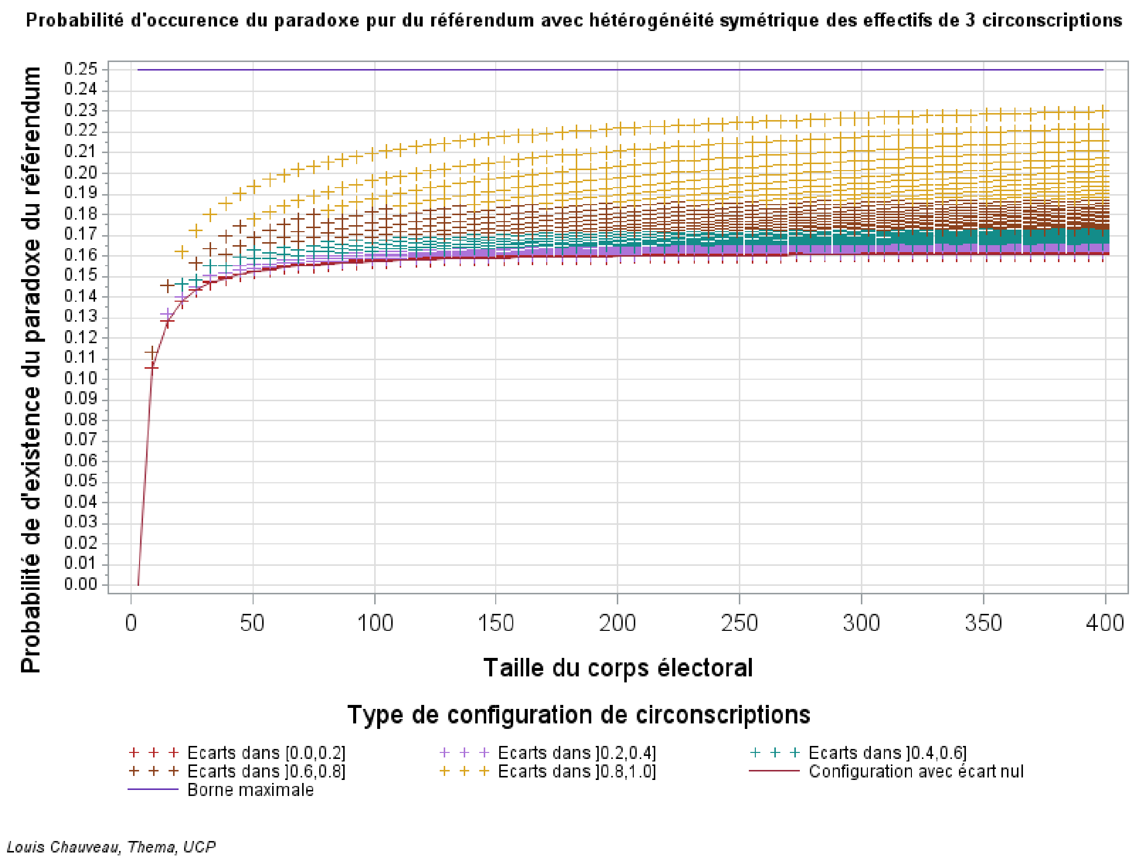

FIGURE 4.3 – Représentation des probabilités d'occurence du paradoxe du référendum lors d'une élection avec trois circonscriptions dont la taille de population s'étend de de 1 à 399, avec répartition hétérogène selon un écart symétrique e des électeurs entre les trois circonscriptions (C_1, C_2, C_3) suivant la répartition $(c+e, c, c-e)$, avec cinq intervalles d'écarts par tranche de $0,2$.

A la lecture du graphique 4.3, page 140, il semble que ce critère soit efficace dans la mesure où les probabilités y répondant se distingue à peine de la courbe pour la configuration avec écart nul des effectifs des circonscriptions (pour le plus grand effectif calculé, $n = 399$, et la répartition présentation le plus grand écart d'effectifs des circonscription par rapport à la moyenne théorique borné par $0,2$, c'est-à-dire $c_1 = 159$, $c_2 = 133$ et $c_3 = 107$, on obtient une valeur de probabilité d'occurence du paradoxe du référendum de $0,1620729467$ contre $0,1609901676$ pour le cas d'une répartition des effectifs homogène entre les circonscriptions).

Il semblerait même qu'avec un seuil fixé à $0,4$ les valeurs de probabilité reste assez proche de la valeur minimale (toujours avec le plus grand effectif, la répartition maximale $c_1 = 185$, $c_2 = 133$ et $c_3 = 81$, la valeur de probabilité exacte d'occurence du paradoxe du référendum est de $0,1655678214$ $0,1609901676$ pour le cas d'une répartition des effectifs homogène entre les circonscriptions). On constate par ailleurs que même un écart des effectifs à l'effectif moyen compris entre $0,4$ et $0,6$ ne change que très peu la valeur de la probabilité final d'occurence du paradoxe du référendum (en effet, si l'on prend le cas extrême avec le plus grand effectif calculé, c'est-à-dire n=399, avec la répartition $c_1 = 211$, $c_2 = 133$ et $c_3 = 55$, la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum vaut $0,1724256143$ contre $0,1609901676$ pour le cas d'une répartition des effectifs homogène entre les circonscriptions). À titre de comparaison avec la valeur calculée par Marc Feix, Dominique Lepelley, Vincent Merlin et Jean Louis Rouet en 2007 avec une répartition des effectifs respectant cet écart, était pour $c_1 = 0,567$, $c_2 = 0,333$, $c_3 = 0,150$ et rendait une valeur de probabilité d'occurence du paradoxe du référendum, avec une population totale tendant vers l'infini, de $0,172$.

Il faut franchir le seuil de $0,6$ pour réellement commencer à observer des valeurs de probabilités d'occurence du paradoxe du référendum importante. En effet, toujours en prenant la valeur d'effectif globale la plus importante, $n = 399$, la répartition extrême des effectifs des circonscriptions, $c_1 = 235$, $c_2 = 133$ et $c_3 = 27$, retourne une valeur de probabilité d'occurence du paradoxe du référendum de $0,186635224$ (pour comparaison le modèle sous hypothèse d'Impartial Culture avec une population tendant vers l'infini, avec une répartition maximale de $c_1 = 0,57$, $c_2 = 0,33$ et $c_3 = 0,10$, renvoie une valeur de $0,180$).

Quand aux situtations où l'écart des effectifs serait supérieur à $0,8$, elles induisent de manière fort logique les plus haute valeurs de conflits (toujours dans le cas d'un effectif global $n = 399$, la répartition extrême $c_1 = 265$, $c_2 = 133$ et $c_3 = 1$ entraîne une probabilité d'occurence du paradoxe du référendum de $0,2300153875$). Toujours à titre de comparaison, la valeur calculée par Marc Feix, Dominique Lepelley, Vincent Merlin et Jean Louis Rouet en 2007 avec une répartition des effectifs correspondant à cet écart, était pour $c_1 = 0,667$, $c_2 = 0,333$, $c_3 = 0,000$ et rendait une valeur de probabilité d'occurence du paradoxe du référendum, avec une population totale tendant vers l'infini, de $0,250$.

Afin d'affiner quelque peu l'étude des résultats, nous avons cet réduit la taille des intervales à $0,1$, nous donnant 10 intervalles de résultats : $[0,0;0,1]$, $]0,1;0,2]$, $]0,2;0,3]$, $]0,3;0,4]$, $]0,4;0,5]$, $]0,5;0,6]$, $]0,6;0,7]$, $]0,7;0,8]$, $]0,8;0,9]$ et $]0,9;1,0]$. Le graphique 4.4, page 142, est consacré à la représentation de la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum selon ce découpage des intervalles des écarts d'effectifs des circonscription par rapport à l'effectif théorique moyen.

On constate visuellement sur le graphique 4.4, page 142, que les seuils à $0,1$, à $0,3$ et à $0,5$ renvoient des valeurs de probiliblités d'occurence du paradoxe

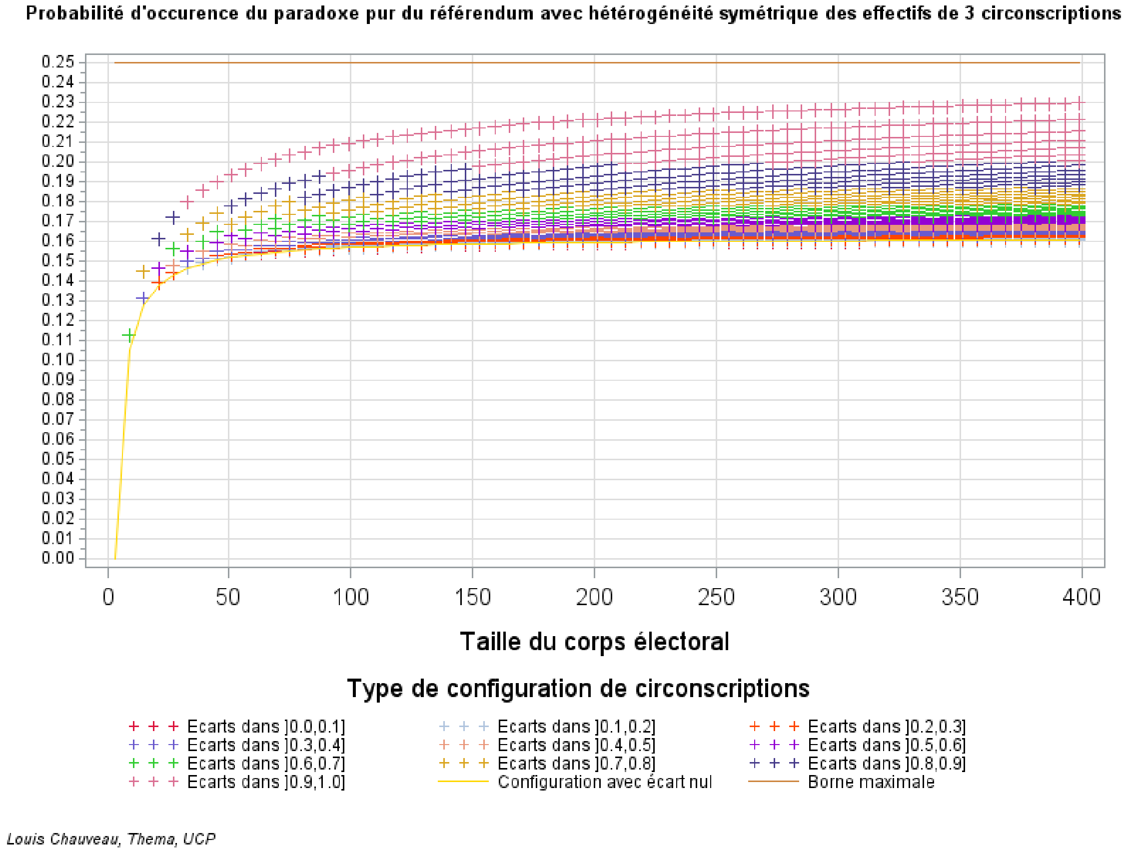

FIGURE 4.4 – Représentation des probabilités d'occurence du paradoxe du référendum lors d'une élection avec trois circonscriptions dont la taille de population s'étend de de 1 à 399, avec répartition hétérogène selon un écart symétrique e des électeurs entre les trois circonscriptions (C_1, C_2, C_3) suivant la répartition $(c + e, c, c - e)$, avec dix intervalles d'écarts par tranche de $0, 1$.

du référendum assez peu éloignées des valeurs de la configuration avec écart nul. En effet, les valeurs maximales observées pour ces trois seuils, dans le cas d'un effectif global $n = 399$ (c'est-à-dire respectivement $(c_1 = 145, c_2 = 133, c_3 = 121)$, $(c_1 = 171, c_2 = 133, c_3 = 95)$ et $(c_1 = 199, c_2 = 133, c_3 = 67)$), sont respectivement de $0, 1612176625$ (la formule sous hypothèse d'*Impartial Culture* retourne une valeur, avec effectif tendant vers l'infini, de $0, 162$ avec une répartition des effectifs $(c_1 = 0, 37,\ c_2 = 0, 33,\ c_3 = 0, 30)$), de $0, 1633507881$ (Marc Feix, Dominique Lepelley, Vincent Merlin et Jean Louis Rouet en 2007 ont donné une valeur de $0, 164$ pour une répartition des effectifs $(c_1 = 0, 42,\ c_2 = 0, 33,\ c_30 = 0, 25)$) et de $0, 1687343091$ (la valeurs calculés par les auteurs avec effectif global tendant vers l'infini est de $0, 167$ $(c_1 = 0, 47, c_2 = 0, 33, c_3 = 0, 20)$). Les valeurs exactes de probabilités d'occurence d'un paradoxe du référendum pour des effectifs de circonscription présentant des écarts effectifs à la moyenne théorique proche de $0, 7$ (c'est-à-dire $(c_1 = 225, c_2 = 133, c_3 = 41)$) et de $0, 9$ (c'est-à-dire $(c_1 = 251, c_2 = 3, c_3 = 15)$, dans le cas maximal de $n = 399$, sont respectivement de $0, 1783334830$ (la formule sous hypothèse d'Impartial Culture avec un effectif global tendant vers l'infini et la répartition $(c_1 = 0, 57,\ c_2 = 0, 33,\ c_3 = 0, 10)$ donne une valeur de probabilité de $0, 180$) et de $0, 1985273925$ (Marc Feix, Dominique Lepelley, Vincent Merlin et Jean Louis Rouet ont calculé en 2007 pour la répartition ($c_1 = 0,67$, $c_2 = 0,33$, $c_3 = 0,05$) une valeur de probabilité de $0,194$). Le tableau 4.3, page 144, donne la représentation matricielle de la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum pour un mouvement d'électeurs M_e allant de 0 à 26 et un effectif moyen par circonscription E_c^m allant de 1 à 27 électeurs.

M_e E_c^m	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
1	0,00000													
3	0,12817	0,13159	0,14526											
7	0,13795	0,13984	0,14638	0,16190										
9	0,14337	0,14457	0,14847	0,15638	0,17251									
11	0,14682	0,14764	0,15025	0,15519	0,16378	0,18003								
13	0,14921	0,14981	0,15168	0,15509	0,16062	0,16957	0,18571							
15	0,15095	0,15141	0,15282	0,15534	0,15925	0,16514	0,17428	0,19020						
17	0,15229	0,15265	0,15375	0,15569	0,15862	0,16287	0,16899	0,17820	0,19386					
19	0,15334	0,15363	0,15452	0,15606	0,15835	0,16158	0,16605	0,17232	0,18154	0,19693				
21	0,15419	0,15443	0,15516	0,15642	0,15827	0,16082	0,16426	0,16889	0,17524	0,18444	0,19954			
23	0,15490	0,15510	0,15571	0,15675	0,15828	0,16035	0,16310	0,16670	0,17143	0,17783	0,18698	0,20180		
25	0,15549	0,15566	0,15618	0,15706	0,15834	0,16007	0,16232	0,16521	0,16892	0,17373	0,18016	0,18923	0,20378	
27	0,15599	0,15614	0,15658	0,15734	0,15843	0,15989	0,16178	0,16416	0,16717	0,17096	0,17583	0,18226	0,19125	0,20554

TABLE 4.3 – Représentation matricielle de la probabilité exacte de conflit pour un mouvement d'électeurs M_e allant de 0 à 26 et un effectif moyen par circonscription E_c^m allant de 1 à 27 électeurs

$P(c_1, c_2, c_3)$ / e	$[0,160; 0,165]$	$]0,165; 0,170]$	$]0,170; 0,175]$	$]0,175; 0,180]$	$]0,180; 0,185]$	$]0,185; 0,190]$	$]0,190; 0,195]$	$]0,195\ 0,200]$	$]0,200\ 0,205]$	$]0,205\ 0,210]$	$]0,210\ 0,215]$	$]0,215\ 0,220]$	$]0,220\ 0,225]$	$]0,225\ 0,230]$	$]0,230\ 0,235]$
$[0,00; 0,05]$															
$]0,05; 0,10]$															
$]0,10; 0,15]$															
$]0,15; 0,10]$	1														
$]0,20; 0,25]$	3														
$]0,25; 0,30]$	3														
$]0,30; 0,35]$	4														
$]0,35; 0,40]$	1	2													
$]0,40; 0,45]$		3													
$]0,45; 0,50]$		4													
$]0,50; 0,55]$		2	1												
$]0,55; 0,60]$			3												
$]0,60; 0,65]$			3	1											
$]0,65; 0,70]$				3											
$]0,70; 0,75]$				1	2										
$]0,75; 0,80]$					2	2									
$]0,80; 0,85]$						1	2								
$]0,85; 0,90]$							1	2							
$]0,90; 0,95]$									2	1	1				
$]0,95; 1,00]$												1	1		1
Total	12	11	7	5	4	3	3	2	2	1	1	1	1	0	1

TABLE 4.4 – Représentation de la répartition des probabilités exactes de conflit pour des écarts d'éffectifs variant par tranche $0,05$ de $0,00$ à $1,00$.

Si l'on ne s'arrête que sur les valeurs de probabilités exactes calculées pour la plus haute valeur d'effectif global ($n = 399$), on constate en observant le tableau 4.4, à la page 145, que plus de la moitié d'entre elles présente une valeur de probabilité d'occurence du paradoxe du référendum inérieure ou égale à $0,175$, pour des écarts à la moyenne théorique des effectifs allant de $0,15$ jusqu'à $0,65$.

4.4 Modèle avec dissymétrie des écarts

4.4.1 Modélisation des bornes

On reprend exactement les mêmes notations que pour le modèle avec symétrie des écarts, en imposant que les transferts d'électeurs se font de la seconde et de la troisième circonscription vers la première circonscription. On suppose par ailleurs, que les transferts d'électeurs s'opèrent de sorte que l'effectif de la seconde circonscription soit toujours supérieur ou égal à l'effectif de la troisième circonscription, ce qui revient à dire que le nombre d'électeur transférés de la seconde vers la première circonscription est toujours inférieur ou égal au nombre d'électeurs transférés de la troisième vers la première circonscription.

Les transferts de n'importe laquelle des deux circonscriptions "émettrices" vers la première circonscription sont toujours supposés être pairs, de sorte que chaque circonscription conserve un effectif impair. Pour cela nous redéfinissons l'écart total pair.

Définition 4.16. *Dans le cas où $c = 3$, l'écart total s'écrit $E = 2 \times (e_2 + e_3)$, avec l'écart local $e_i \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{2, 3\}$.*

Afin de conserver des effectifs impairs dans les circonscriptions, nous imposons que e_i est pair $\forall i \in \{2, 3\}$.

Définition 4.17. *Dans le cas où $c = 3$, l'écart local s'écrit $e_i = 2 \times r_i$, avec $r_i \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{2, 3\}$.*

Nous pouvons désormais redéfinir les circonscription en intégrant l'écart local.

Définition 4.18. *Soit $C_1^{+e_2+e_3}$ la première circonscription d'écart local positif $e_2 + e_3$, et dont l'effectif est $c_1^{+e_2+e_3} = 2q + 1 + e_2 + e_3$.*

Soit $C_i^{-e_i}$ la circonscription i d'écart local négatif $-e_1$, et dont l'effectif est $c_i^{-e_1} = 2q + 1 - e_i$, $\forall i \in \{2, 3\}$.

Nous avons donc les effectifs de circonscription suivant :

$$c_1^{+e_2+e_3} = 2q + 1 + e_2 + e_3 = 2q + 1 + 2r_2 + 2r_3$$
$$c_2^{-e_2} = 2q + 1 - e_2 = 2q + 1 - 2r_2$$
$$c_3^{-e_3} = 2q + 1 - e_3 = 2q + 1 - 2r_3$$

Nous en déduisons par conséquent les intervalles d'effectifs et les intervalles de seuil majoritaire de chacune des trois circonscriptions pour $(r_2, r_3) \in [1, q]^2$:

Définition 4.19. *Dans le cas $c = 3$, avec un écart $e_i = 2r_i$, $\forall i \in \{2, 3\}$, entre C_1 par rapport C_2 et C_3, les intervalles d'effectifs et les intervalles de seuil majoritaire de chacune des trois circonscriptions s'écrivent :*

$$C_1^{+e_2+e_3} \in [2q + 5, 6q + 1] \text{ et } M_{C_1}^{min} \in [q + 3, 3q + 1]$$

$$C_2^{-e_2} \in [1, 2q - 1] \text{ et } M_{C_2}^{min} \in [1, q]$$
$$C_3^{-e_3} \in [1, 2q - 1] \text{ et } M_{C_3}^{min} \in [1, q]$$

Les circonscriptions ayant des effectifs différents, il existe donc trois majorités minimales différentes de la majorité des circonscriptions.

Définition 4.20. *Dans le cas $c = 3$, avec un écart $e_i = 2r_i$, $\forall i \in \{2, 3\}$, entre C_1 par rapport C_2 et C_3, les trois majorités minimales de la majorité des circonscriptions, s'écrivent :*

$$M_{M_{C_1C_2}}^{min} = M_{C_1}^{min} + M_{C_2}^{min} \in [q + 1 + r_3 + 1, 3q + 1 + 1] = [q + 3, 3q + 2]$$

$$M_{M_{C_1C_3}}^{min} = M_{C_1}^{min} + M_{C_3}^{min} \in [q + 1 + r_2 + 1, 3q + 1 + 1] = [q + 3, 3q + 2]$$
$$M_{M_{C_2C_3}}^{min} = M_{C_2}^{min} + M_{C_3}^{min} \in [q - r_2 + 1 + q - r_3 + 1, q - 0 + q - 0] = [2, 2q]$$

Remarque 4.5. *La borne supérieure de l'intervalle d'existence de la majorité minimale de la majorité des circonscriptions C_1 et C_2 et celle des circonscriptions C_1 et C_3 sont supérieures à la minorité maximale globale m_N^{max}.*

Il ne peut exister un intervalle unique d'existence du paradoxe du référendum. Nous définissons les trois intervalles d'existence possibles à partir des trois majorités minimales de la majorité des circonscriptions et de la minorité maximale globale.

Définition 4.21. *Dans le cas $c = 3$, avec un écart $e_i = 2r_i$, $\forall i \in \{2, 3\}$, entre C_1 par rapport C_2 et C_3, les trois intervalles d'existence possibles s'écrivent :*

$$I_{PR_{C_1C_2}}^e = [M_{M_{C_1C_2}}^{min}, m_N^{max}] = [q + 3, 3q + 1]$$

$$I_{PR_{C_1C_3}}^e = [M_{M_{C_1C_3}}^{min}, m_N^{max}] = [q + 3, 3q + 1]$$
$$I_{PR_{C_2C_3}}^e = [M_{M_{C_2C_3}}^{min}, m_N^{max}] = [2, 3q + 1]$$

Nous nous intéressons au cas extrême $(C_1, C_2, C_3){=}(6q + 1, 1, 1)$. Dans ce cas, les seuils majoritaires de chaque circonscription sont :

$$M_{C_1}^{min} = 3q + 1$$

$$M_{C_2}^{min} = 1$$

$$M_{C_3}^{min} = 1$$

On en déduit les majorités minimales de la majorité des circonscriptions :

$$M_{M_{C_1C_2}}^{min} = M_{C_1}^{min} + M_{C_2}^{min} = 3q + 2$$

$$M_{M_{C_1C_3}}^{min} = M_{C_1}^{min} + M_{C_3}^{min} = 3q + 2$$

$$M_{M_{C_2C_3}}^{min} = M_{C_2}^{min} + M_{C_3}^{min} = 2$$

Remarque 4.6. *La majorité minimale de la majorité des circonscriptions C_1 et C_2, $M_{M_{C_1C_2}}^{min} = 3q+2$, est supérieure à la minorité maximale globale $m_N^{max} = 3q+1$. De même, la majorité minimale de la majorité des circonscriptions C_1 et C_3, $M_{M_{C_1C_3}}^{min} = 3q + 2$, est également supérieure à la minorité maximale globale $m_N^{max} = 3q + 1$.*

Nous définissons les trois intervalles d'existence possible du paradoxe du rérérendum à partir des trois majorités minimales de la majorité des circonscriptions et de la minorité maximale globale.

Définition 4.22. *Dans le cas $c = 3$, avec la répartition $(C_1, C_2, C_3) = (6q + 1, 1, 1)$, les trois intervalles d'existence possibles s'écrivent :*

$$I_{PR_{C_1C_2}}^e = [M_{M_{C_1C_2}}^{min}, m_N^{max}] = \emptyset$$

$$I_{PR_{C_1C_3}}^e = [M_{M_{C_1C_3}}^{min}, m_N^{max}] = \emptyset$$

$$I_{PR_{C_2C_3}}^e = [M_{M_{C_2C_3}}^{min}, m_N^{max}] = [2, 3q + 1]$$

Remarque 4.7. *On observe que seul l'intervalle $I_{PR_{C_2C_3}}^e$ est possible.*

Le graphique 4.5, page 148, est consacré à la représentation des intervalles d'existence du paradoxe du référendum pour le cas $(C_1, C_2, C_3) = (6q + 1, 1, 1)$.

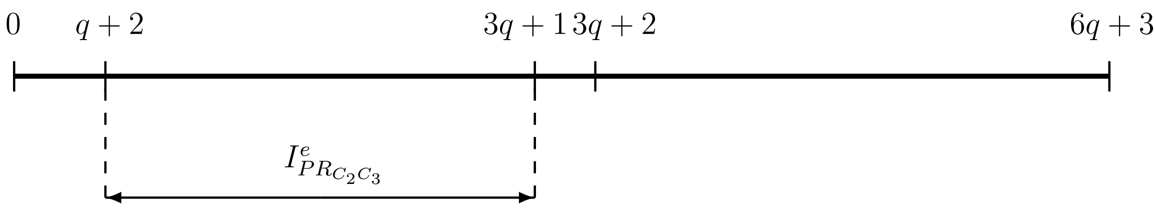

FIGURE 4.5 – Représentation des intervalles d'existence du paradoxe du référendum pour le cas $(C_1, C_2, C_3) = (6q + 1, 1, 1)$

Remarque 4.8. *Les circonscriptions C_2 et C_3 participent au seul intervalle possible d'existence du paradoxe du référendum.*

Théorème 4.4. *Dans le cadre d'un scrutin majoritaire avec deux candidats, aucune indécision de la part des électeurs, et trois circonscriptions* $(C_1, C_2, C_3) = (6q+1, 1, 1)$*, le paradoxe du référendum ne peut exister si le vote de la circonscription* C_2 *ou de la circonscription* C_3 *est conforme au vote global.*

Démonstration. Soit une population N d'effectif $n = 2k + 1 = 6 \times (q + 1) + 1$, avec $k = 3q + 1$ et $q \in \mathbb{N}$.

Soit les effectifs des trois circonscriptions (C_1, C_2, C_3) : $c_1 = 6q + 1$, $c_2 = 1$ et $c_3 = 1$. Les majorités minimales de chacune des trois circonscriptions sont données par : $M_{C_1}^{min} = 3q + 1$, $M_{C_2}^{min} = 1$ et $M_{C_3}^{min} = 1$.

La majorité minimale globale est donnée par :

$$M_N^{min} = \lfloor n/2 \rfloor + 1 = \lfloor (2 \times (6q + 1) + 1)/2 \rfloor + 1 = 3q + 2$$

La minorité maximale globale est donnée par :

$$m_N^{max} = M_N^{min} - 1 = 3q + 1$$

Si C_2 (ou C_3) est supposée voter comme le vote global, alors la seule combinaison possible pour obtenir un paradoxe de Condorcet est avec C_1 et C_3 (ou C_1 et C_2). Or la somme des majorités minimales de ses deux circonscriptions est supérieure à la minorité maximale globale :

$$\sum_{i=1}^{2} M_{C_i}^{min} = 3q + 2 > 3q + 1 = m_N^{max}$$

$$(\text{ou } \sum_{i=1 i \neq 2}^{3} M_{C_i}^{min} = 3q + 2 > 3q + 1 = m_N^{max} \;)$$

Le paradoxe du référendum est impossible. □

Corollaire 4.2. *Dans le cadre d'un scrutin majoritaire avec deux candidats, aucune indécision de la part des électeurs, et trois circonscriptions* $(C_1, C_2, C_3) = (6q+1, 1, 1)$*, les votes des circonscriptions* C_2 *et* C_3 *déterminent l'existence du paradoxe du référendum.*

4.4.2 Formule numérique

La structure de la formule avec dissymétrie des écarts reprend celle de la formule avec symétrie des écarts, en reprenant le développement de chaque situation de vote. La même difficulté liée à la taille gigantesque des tables de calcul est rencontrée et contournée en déterminant l'effectif de tous les profils pour calculer la probabilité de conflit, plutôt que de les générer tous. Le cas extrême $(c_1, c_2, c_3) = (6q + 1, 1, 1)$ est même le plus simple à traiter dans la mesure où il suffit de déterminer uniquement les agencements de la circonscription C_1, les deux autres étant par définition fixés comme étant différents du vote global.

Comme pour la formule développée pour le modèle de conflits de légitimité avec division hétérogène du corps électoral avec symétrie des écarts, il est impossible d'interchanger les circonscriptions, et l'attribution d'un coefficient multiplicateur est donc également exclu. Pour résoudre cette difficulté induite par l'hétérogénéité des effectifs des circonscriptions, la formule développe les calculs au niveau des trois intervalles d'existence du paradoxe du référendum $I^e_{PR_{C_1C_2}}$, $I^e_{PR_{C_1C_3}}$ et $I^e_{PR_{C_2C_3}}$, pour déterminer à chaque fois les scores (p_1, p_2, p_3) des profils de vote de situation de paradoxe du référendum des circonscriptions (C_1, C_2, C_3).

Le principe reste identique à celui de la formule avec symétrie des écarts : le calcul tous les cas de figures possibles pour une population donnée n décomposable en trois circonscriptions de taille identique c, de sorte que $n = 3 \times c$, chaque la taille de chaque circonscription étant par construction impair : $c = 2 \times q + 1$. La formule détermine donc la valeur de q, ce qui permet de générer les différentes valeurs de l'écart $e \in [1, q]$ et ainsi générer les différents cas possibles de répartition des électeurs dans les circonscriptions.

Une fois générer les tables des trois intervalles d'existence du paradoxe du référendum $I^e_{PR_{C_1C_2}}$, $I^e_{PR_{C_1C_3}}$ et $I^e_{PR_{C_2C_3}}$, la formule les compile avant de suivre une procédure ensuite sensiblement identique à celle développée par la formule analytique du modèle avec homogénéité des circonscriptions, c'est-à-dire appliquer à chaque situation de chaque cas

$$log(\binom{c_1}{p_1}) + log(\binom{c_2}{p_2}) + log(\binom{c_3}{p_3}) + (1-n) \times log(2)$$

La procédure regroupe ensuite les cas et calcule la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum de chacun, en faisant la somme de l'exponentielle de la valeur de chaque situation.

La formule au final se présente ainsi :

$$
\begin{aligned}
P(3,n,e) &= P(c+e_1+e_2, c-e_1, c-e_2) \\
&= I^e_{PR_{C_1C_2}}(e^{log(\binom{c_1}{c_{1k}})+log(\binom{c_2}{c_{2k}})+log(\binom{c_3}{c_{3k}})+(1-n)\times log(2)}) \\
&+ I^e_{PR_{C_1C_3}}(e^{log(\binom{c_1}{c_{1k}})+log(\binom{c_2}{c_{2k}})+log(\binom{c_3}{c_{3k}})+(1-n)\times log(2)}) \\
&+ I^e_{PR_{C_2C_3}}(e^{log(\binom{c_1}{c_{1k}})+log(\binom{c_2}{c_{2k}})+log(\binom{c_3}{c_{3k}})+(1-n)\times log(2)}) \\
&= \sum_{y=1}^{r} \sum_{z=y}^{r} \sum_{c_{1_k}=0}^{m_N^{max}-(r-y+1)-(r-z+1)} \sum_{c_{2_k}=r-y+1}^{Min(2(r-y)+1,(m_N^{max}-c_{1_k})} \sum_{c_{3_k}=r-z+1}^{Min(2(r-z)+1,(m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k})} e^{log(\binom{c_1}{c_{1k}})+log(\binom{c_2}{c_{2k}})+log(\binom{c_3}{c_{3k}})+(1-n)\times log(2)} \\
&+ \sum_{y=1}^{r} \sum_{z=y}^{r} \sum_{c_{1_k}=r+y+z+1}^{m_N^{max}-(r-z+1)} \sum_{c_{2_k}=r-y+1}^{Min(2(r-y)+1,(m_N^{max}-c_{1_k})} \sum_{c_{3_k}=0}^{Min(2(r-z)+1,(m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k})} e^{log(\binom{c_1}{c_{1k}})+log(\binom{c_2}{c_{2k}})+log(\binom{c_3}{c_{3k}})+(1-n)\times log(2)} \\
&+ \sum_{y=1}^{r} \sum_{z=y}^{r} \sum_{c_{1_k}=r+y+z+1}^{m_N^{max}-(r-z+1)} \sum_{c_{2_k}=0}^{Min(2(r-y)+1,(m_N^{max}-c_{1_k})} \sum_{c_{3_k}=r-z+1}^{Min(2(r-z)+1,(m_N^{max}-c_{1_k}-c_{2_k})} e^{log(\binom{c_1}{c_{1k}})+log(\binom{c_2}{c_{2k}})+log(\binom{c_3}{c_{3k}})+(1-n)\times log(2)}
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Le graphique 4.6, page 152, est consacré à la représentation de la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum.

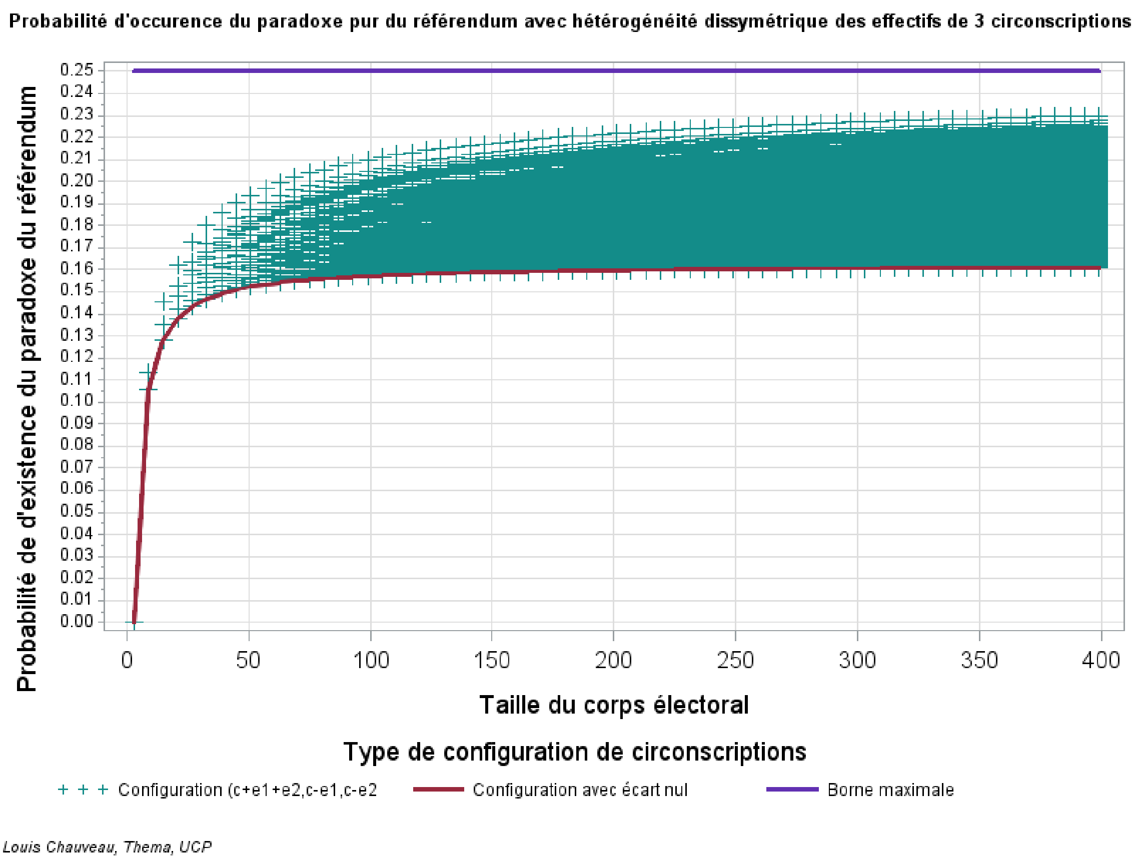

FIGURE 4.6 – Représentation des probabilités d'occurence du paradoxe du référendum lors d'une élection avec trois circonscriptions dont la taille de population s'étend de de 1 à 399, avec répartition hétérogène selon des écart dissymétrique e_2 et e_3 des électeurs entre les trois circonscriptions (C_1, C_2, C_3) suivant la répartition $(c + e_2 + e_3, c - e_2, c - e_3)$, avec $e_2 < e_3$.

Comme pour le cas, avec symétrie des écarts, nos valeurs sont bornés au minimum par la valeur de la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum dans la situation d'un écart nul des effectifs des circonscriptions et au maximum par la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum dans la situation d'un écart maximal $(c + 4r, 1, 1)$. Nous remarquons également dans nos résultats que dès que l'effectif d'une des circonscriptions est ramené à un électeur, sa probabilité de d'occurence du paradoxe du référendum sera la même que celle du cas extrême présentant un écart maximal $(c + 4r, 1, 1)$. Toutefois la densité des valeurs représentées sur ce graphique ne permet pas de distinguer visuellement les situations induites par les différents écarts d'effectif.

Afin d'affiner quelque peu l'étude des résultats, nous avons cet réduit la taille des intervales à $0, 1$, nous donnant 10 intervalles de résultats : $[0, 0; 0, 1]$,

$]0,1;0,2]$, $]0,2;0,3]$, $]0,3;0,4]$, $]0,4;0,5]$, $]0,5;0,6]$, $]0,6;0,7]$, $]0,7;0,8]$, $]0,8;0,9]$ et $]0,9;1,0]$. Le graphique 4.7, page 153, est consacré à la représentation de la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum selon ce découpage des intervalles des écarts d'effectifs des circonscription par rapport à l'effectif théorique moyen.

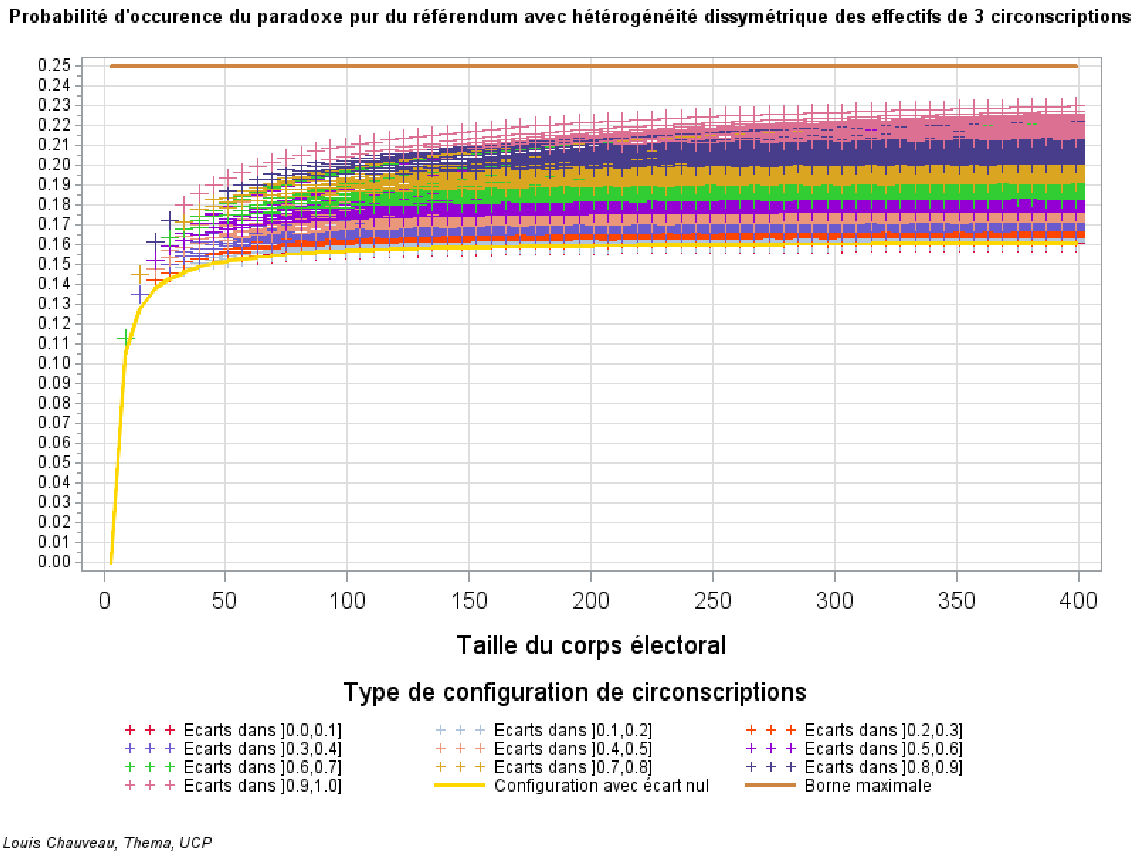

FIGURE 4.7 – Représentation des probabilités d'occurence du paradoxe du référendum lors d'une élection avec trois circonscriptions dont la taille de population s'étend de de 1 à 399, avec répartition hétérogène selon un écart dissymétrique $e = e_1 + e_2$ des électeurs entre les trois circonscriptions (C_1, C_2, C_3) suivant la répartition $(c + e_1 + e_2, c - e_1, c - e_2)$, avec dix intervalles d'écarts à la moyenne théorique par tranche de $0,1$.

On constate visuellement sur le graphique 4.7, page 153, que les seuils à $0,1$, à $0,3$ et à $0,5$ renvoient des valeurs de probiliblités d'occurence du paradoxe du référendum assez peu éloignées des valeurs de la configuration avec écart nul. En effet, les valeurs maximales observées pour ces trois seuils, dans le cas d'un effectif global $n = 399$ (c'est-à-dire respectivement $(c_1 = 145, c_2 = 133, c_3 = 121)$, $(c_1 = 171, c_2 = 133, c_3 = 95)$ et $(c_1 = 199, c_2 = 133, c_3 = 67)$), sont respectivement de $0,1612176625$ (la formule sous l'hypothèse d'*Impartial Culture* retourne une valeur, avec effectif tendant vers l'infini, de $0,162$ avec une répartition des effectifs $(c_1 = 0,37,\ c_2 = 0,33,\ c_3 = 0,30)$), de $0,1633507881$ (Marc Feix, Dominique

Lepelley, Vincent Merlin et Jean Louis Rouet en 2007 ont donné une valeur de $0,164$ pour une répartition des effectifs ($c_1 = 0,42$, $c_2 = 0,33$, $c_30 = 0,25$)) et de $0,1687343091$ (la valeurs calculés par les auteurs avec effectif global tendant vers l'infini est de $0,167$ ($c_1 = 0,47$,$c_2 = 0,33$,$c_3 = 0,20$)).

Les valeurs exactes de probabilités d'occurence d'un paradoxe du référendum pour des effectifs de circonscription présentant des écarts effectifs à la moyenne théorique proche de $0,7$ (c'est-à-dire ($c_1 = 225$,$c_2 = 133$,$c_3 = 41$)) et de $0,9$ (c'est-à-dire ($c_1 = 251$,$c_2 = 3$,$c_3 = 15$), dans le cas maximal de $n = 399$, sont respectivement de $0,1783334830$ (la formule sous hypothèse d'Impartial Culture avec effectif global tendant vers l'infini et la répartition ($c_1 = 0,57$, $c_2 = 0,33$, $c_3 = 0,10$) donne une valeur de probabilité de $0,180$) et de $0,1985273925$ (Marc Feix, Dominique Lepelley, Vincent Merlin et Jean Louis Rouet ont calculé en 2007 pour la répartition ($c_1 = 0,67$, $c_2 = 0,33$, $c_3 = 0,05$) une valeur de probabilité de $0,194$).

Le cas extrême $(c_1, c_2, c_3) = (6q + 1, 1, 1)$ a la particularité d'être à la fois plus simple à calculer, en limitant les contraintes de calcul uniquement aux combinaisons possibles à l'intérieur de la seule circonscription C_1 tout en appartenant à l'ensemble des cas dont la borne supérieure constitue la valeur maximale atteignable. Nous avons donc calculé la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum de ce cas extrême pour des valeurs beaucoup plus élevées que lors des calculs précédents. Nous avons porté la taille de l'effectif jusqu'à $n = 19995$ électeurs, valeur de population au-dessous de laquelle étaient regroupées plus de 98% des communes françaises en 2013, c'est-à-dire 35988 des 36528 communes du territoire. Le graphique 4.8, page 155, est consacré à la représentation de la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum pour ce cas extrême.

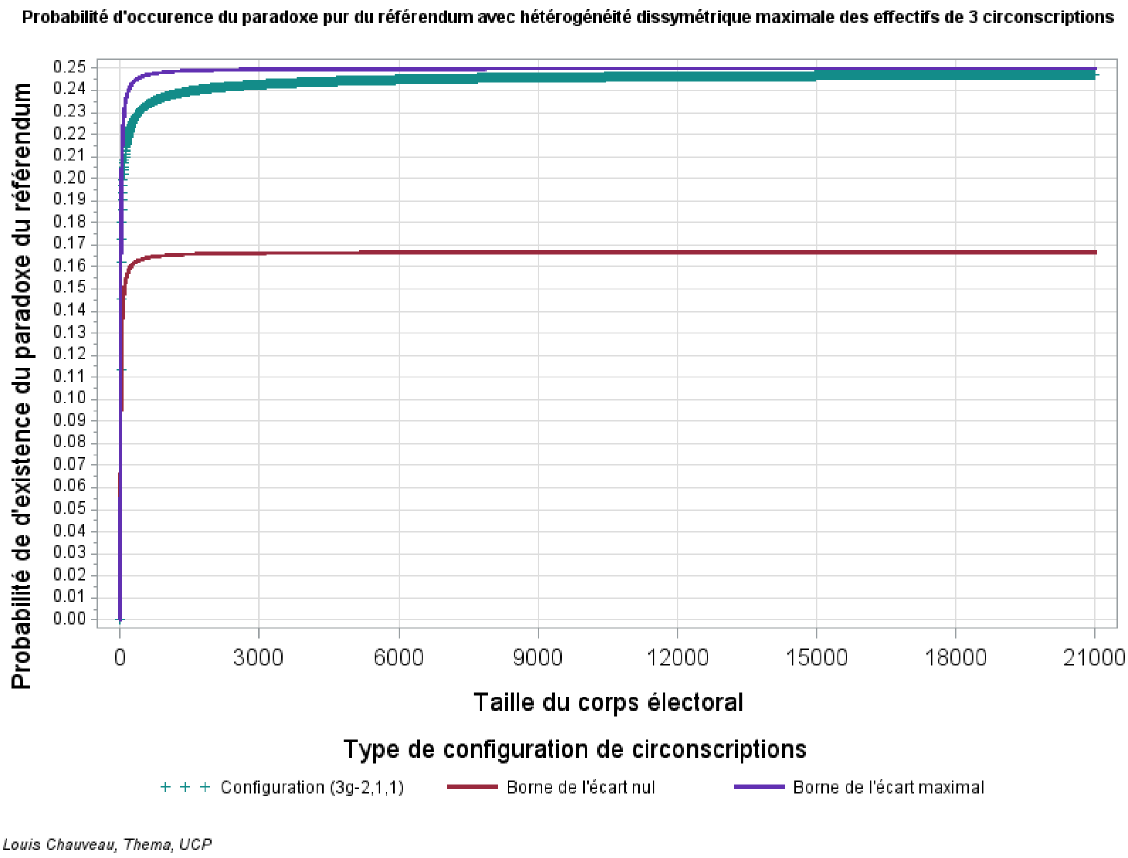

FIGURE 4.8 – Représentation des probabilités d'occurence du paradoxe du référendum lors d'une élection avec une population dont la taille de population s'étend de de 3 à 15995 répartis en trois circonscriptions dont la taille de population correspond à la répartition hétérogène suivante $(c_1, c_2, c_3) = (n-2, 1, 1)$.

4.5 Conclusion

L'hypothèse des circonscriptions de taille de population absolument identique étant impossible à réaliser en pratique, du fait des mouvement permanents de population, il est nécessaire de mesurer la fréquence d'occurence du paradoxe du référendum pour des répartition des électeurs plus adéquate avec la réalité. Nous avons en conséquent exploité les principes de la formule de calcul de la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum dévoppé dans le chapitre 3 dans le cas de trois circonscriptions sous hypothèse de culture neutre en abolissant l'égalité de taille identique de leurs périmètres afin de mesurer l'effet des différentes variations sur la valeur de probabilité de conflit. Nous avons ainsi testé deux scénarios de variation de taille des circonscriptions : l'un avec échance d'électeurs uniquement entre deux circonscriptions, l'autre avec un échange d'électeur des deux dernières circonscriptions vers la premère. Il ressort de nos résultats que la probabilité de conflit du modèle à trois circonscriptions admet une borne inférieure, identifiée au cas particulier de circonscriptions de même effectif, et borne supérieure, identifiée au cas extrême de deux circonscriptions se réduisant chacune à un seul électeur tandis que la totalité restante de la population est concentrée dans la circonscription restante. Ces deux bornes, de valeurs respectives $0,165$ et $0,25$, encadrent une zone regroupant toutes les valeurs de probabilité de conflit pour ce modèle. Deux pistes d'études sont à envisager : augmenter l'effectif des circonscriptions afin d'essayer de déterminer les bornes minimales et maximales des zones de paradoxe du référendum pour ces plus grands effectifs et abolir l'hypothèse de culture neutre afin vérifier l'impact de cette hypothèse sur la fréquence du phénomène.

Chapitre 5

Modèle de conflits structurels

5.1 Introduction

Les paradoxes inhérents à tout système électoral n'expliquent pas l'ensemble des imperfections constatées dans le fonctionnement des institutions : lorsque du 15 décembre 1995 au 6 janvier 1996, le Gouvernement des Etats-Unis d'Amérique s'est retrouvé dans l'obligation de cesser pendant 21 jours l'ensemble de ses activités, à l'exception de celles jugées essentielles, ce fut en raison de l'absence d'un accord entre la Présidence et les deux chambres du Congrès sur le financement de l'État fédéral. Ce dysfonctionnement majeur ne prenait nullement sa source d'un quelconque paradoxe électoral : Bill Clinton avait remporté l'élection présidentielle du 3 novembre 1992 avec une majorité relative des suffrages exprimés et les Républicains avaient gagné les deux chambre du Congrès lors des élections de mi-mandat du 8 novembre 1994 avec des majorités claires d'électeurs en leur faveur [1]. Dans l'introduction de *Voting Paradoxes and How to Deal with Them*[**?**], Hannu Nurmi a indiqué que l'existence d'un système électoral est nécessaire mais non suffisante pour qu'un système soit considéré comme démocratique [2] : il faut que les résultats des élections soient traduits ou, plus exactement, suivis d'effet, sinon l'on ne pourrait parler de démocratie en tant que système organisant le pouvoir du peuple. C'est d'ailleurs l'argumentaire développé par Guy Caracassonne dans l'introduction de «La Constitution»[35] : l'architecture institutionnelle doit permettre une réalisation du choix des urnes. Celui-ci a introduit trois critères définissant ce qu'il désigne comme une «démocratie moderne» : que les administrés choisissent effectivement leurs gouvernants, que les gouvernants aient les moyens effectifs de gouverner et que les gouvernants soient effectivement responsables devant leurs administrés. Les deux derniers critères sont liés par une relation causale : la responsabilité implique d'avoir les moyens d'être responsable, autrement dit, de gouverner. C'est la raison pour laquelle dans de nombreux pays la fonction de Chef de l'Etat est assurée par un monarque non élu, étant entendu que son impuissance politique est la contrepartie de son irresponsabilité politique. Ces critères sont globalement remplis

1. Les Républicains ont obtenu en 1994 une majorité absolue ($51,9\%$ des suffrages exprimés au niveau national) à la Chambre des Représentants et une majorité relative ($49,9\%$ des suffrages exprimés au niveau national) au Sénat.

2. *«L'existence des élections ne suffit pas à faire d'un régime une démocratie mais son absence le rend certainement antidémocratique.»* (The presence of the institution of voting does not make a system democratic, but the absence of if certainly makes it undemocratic.)

par plusieurs pays dont l'Allemagne, l'Espagne, la France et le Royaume-Uni. De manière inverse, certains pays démocratiques ne remplissent pas tous ces critères. Nous pouvons citer en contre-exemple du premier critère le résultat des élections législatives néerlandaises de 1994 qui amenèrent le Parti travailliste (PvdA) de Wim Kok à assurer la direction du Gouvernement en dépit du fait que cette formation fut le second parti le plus sanctionné [3] lors de ce scrutin, passant de 31,9% des suffrages exprimés en 1989 à seulement 24,0%. De même, en contre-exemple du second critère peut être évoqué le cas des Etats-Unis, où le Président est obligé de négocier avec les deux chambres du Congrès, qu'elles soient contrôlées par le même parti (ainsi bien que les Démocrates eurent conservé le contrôle de la Chambre des Représentants et du Sénat lors des élections de novembre 1938, Franklin Delano Roosevelt ne put obtenir l'adoption d'aucun de ses grands projets lors de la mandature de 1939 à 1941) ou non (c'est ainsi que le Président Barack Obama a été contraint de négocier avec les Républicains majoritaires à la Chambre des Représentants, depuis janvier 2011, et au Sénat, depuis janvier 2015, pour faire adopter le Budget de l'Etat fédéral). Enfin un contre-exemple du troisième critère peut également être donné par les États-Unis où, depuis la ratification du XXII^e^ amendement de la Constitution le 27 février 1951, aucun Président ayant déjà exercé deux mandats ne peut se représenter devant le suffrage des électeurs pour en solliciter un troisième. L'examen de ces trois critères et des contre-exemples apportés indiquent que les paradoxes dans les systèmes électoraux contribuent fortement à la non-réalisation du premier et du troisième critère : c'est ainsi qu'un cas particulier du paradoxe du référendum, sujet au «House size effect», a empêché l'élection de Samuel Jones Tilden à la Présidence des États-Unis le 7 novembre 1876 [4] et qu'une autre autre manifestation du paradoxe du référendum a permis la reconduction du communiste Christian Favier à la tête du département du Val-de-Marne malgré le fait que les électeurs aient porté une majorité absolue de leurs suffrages sur les candidats de droite [5]. En revanche leur influence est résiduelle dans la non-réalisation du second critère, même si une manifestation du paradoxe du référendum a privé les Démocrates d'une victoire à Chambre des Représentants lors des élections du 6 novembre 2012.

En effet, la non réalisation du second critère semble relever principalement de l'architecture des institutions plutôt que de la forme du système électoral : à titre d'exemple la manifestation du paradoxe du référendum qui priva de victoire le travailliste Clement Attlee, lors des élections générales britaniques du 25 octobre 1951, permit toutefois à Winston Churchill d'avoir les moyens de diriger effectivement le Royaume-Uni en disposant d'une majorité à la Chambre des Communes. L'analyse de l'histoire électorale récente révèle qu'en toutes circons-

3. La formation la plus sanctionnée lors des élections législatives néerlandaises de 1994 fut l'Appel chrétien-démocrate (CDA) qui receuillit 22,2% des suffrages exprimés contre 35,3% en 1989.

4. Le candidat Républicain Rutherford Birchard Hayes fut élu Président avec seulement 47,9% des suffrages exprimés, contre 50,9% à son adversaire Démocrate, avec une voix d'avance dans le collège des grands électeurs.

5. La coalition des candidats de droite a obtenu 155584 voix, soit $51,93\%$ des suffrages exprimés, et seulement 22 conseillers départementaux, contre 122888 voix, soit $41,02\%$ des suffrages exprimés, et 28 conseillers départementaux pour la coalition des candidats de gauche.

tances, le Premier ministre britannique a toujours eu les moyens de gouverner : ainsi même en l'absence d'une majorité absolue de députés conservateurs au lendemain des élections générales du 6 mai 2010, situation appelée *«hung parliament»*, David Cameron a pu diriger le pays en passant un accord de coalition avec les Libéraux-Démocrates. Si l'un des fondements communément admis pour qu'un régime puisse être qualifié de démocratique est la séparation des pouvoirs, il s'agit là d'une désignation impropre dans la mesure où il s'agit, comme le décrivait Montesquieu[147] de prévenir l'intrusion du politique, caractérisé par les pouvoirs législatifs et éxécutifs, dans la sphère judiciaire et non d'établir une division ferme entre les trois pouvoirs. Pourtant une architecture institutionnelle a été développée à partir de cette seconde interprétation et s'est concrétisée lors de l'adoption de la Constitution des Etats-Unis d'Amérique avec une séparation stricte entre les trois pouvoirs que modère le système de *«check and balances»*[80]. Toutefois dans ce cas, l'étude des débats constitutionnels [6] révèle que l'organisation des pouvoirs a été pensé afin déviter l'émmergence d'un Etat fédéral trop puissant par rapport aux États fédérés et d'éviter une domination des États les plus peuplés dans les affaires de la fédération.

La littérature abondante en droit constitutionnel permet de dégager ainsi deux principales architectures d'organisation de l'Etat central : la séparation stricte et la séparation souple des pouvoirs. La première se caractérise essentiellement par la capacité des pouvoirs à se bloquer en cas de désaccord [7] tandis que la seconde se caractérise par l'existence de mécanismes de résolution des conflits entre les pouvoirs [8]. Par ailleurs, s'ajoute à l'organisation horizontale de l'Etat, la nature de son organisation verticale avec la disctinction entre état fédéral et état unitaire. La distinction entre ses deux régimes est juridique avant d'être politique [9] : en effet, bien que le Royaume-Uni soit un état unitaire impliquant que les compétences ayant été déléguées à ses nations constitutives (Écosse, Irlande du nord et Pays de Galle) relèvent d'une loi votée par le Parlement, donc juridiquement plus facile à révoquer que celles octroyées par une constitution dans le cadre d'un état fédéral, celles-ci bénéficient en pratique d'une garantie sensi-

6. Les discussions ayant entouré les plans dit de Virginie, soutenus par les États les plus peuplées et prônant une représentation des Etats proportionnelle à leurs populations au sein de l'union, et du New Jersey, soutenu par les États les moins peuplés et prônant une représentation égale des États au Congrès. La Convention de Philadelphie opta pour un compromis entre ces deux plans, en instituant un Congrès bicaméral composé d'une Chambre des Représentants, où la délégation de chaque état fédéré est proportionnelle à son poids démographique dans l'Union, et d'un Sénat, où chaque état fédéré dispose dispose de deux sénateurs quelque soit sa population.

7. C'est ainsi que le Président des États-Unis peut opposer son véto à une loi adoptée par le Congrès qui ne peut le surmonter qu'en adoptant la loi à une majorité qualifiée des deux tiers dans chacune des deux chambres, rarement obtenue en pratique (une seule fois le 3 mars 1845).

8. Ainsi la rupture d'alliance le 17 septembre 1982 au sein de la coalition au pouvoir en Allemagne entre le SPD et le FDP, amena ce dernier à constituer une coalition avec la CDU-CSU permettant à Helmut Kohl de devenir chancelier fédéral (Bundeskanzler) le 1er octobre 1982 en remplacement d'Helmut Schmidt à la faveur de l'adoption d'une motion de censure à l'encontre de ce dernier.

9. A titre de comparaison, les communautés autonomes espagnoles, appartenant à un état unitaire, disposent de compétences plus étendues que celles des länder allemands, état pourtant fédéral.

blement identique à celle accordée aux entités constitutives d'un état fédéral, du fait qu'une révision de ces dernières nécessitent en pratique un large consensus politique. Si en pratique, les collectivités territoriales de la plupart des pays bénéficient de la même pérénité concernant l'attribution de leurs compétences, c'est par choix politique dans le cadre d'un état unitaire, ce régime donnant juridiquement la possibilité à l'état central de les modifier, à l'inverse d'un état fédéral où celles-ci sont garantie par la constitution, plus difficile à modifier qu'une loi ordinaire en règle générale [10]. D'un point de vue constitutionnel, la distinction s'observe dans la hiérachie des normes, dans la mesure où les lois adoptées par le parlement central d'un état unitaire ont une supériorité absolue aux règles régissant les collectivités territoriales de ce dernier [11], tandis que cette supériorité est relative, voir inexistante, dans le cadre d'un état fédéral [12].

Enfin il faut également parler de l'organisation du parlement qui se décline en deux systèmes : le monocamérisme et le bicamérisme. Dans le cadre du système de parlement bicaméral, la seconde chambre peut être issue du suffrage universel direct (à l'instar de la Chambre des conseillers du Japon), du suffrage indirect (à l'instart du Bundersrat de l'Allemagne) ou d'une nomination (à l'instar du Sénat du Canada). Si la très grande majorité des états fédéraux ont adopté un parlement bicaméral [13], cette forme d'organisation est également utilisé par un certain nombre d'états unitaires, dont la France. En fait le bicamérisme repose sur deux idées : si l'état est fédéral, ses entités sont alors représentées à la chambre haute, comme dans le cas du Sénat des États-Unis, si l'État est unitaire, l'existence d'une seconde chambre permet de modérer la puissance de la chambre basse en partageant le pouvoir législatif, comme dans le cas du Sénat en France [14].

Ces deux axes de distinction, régime parlementaire ou présidentiel et état unitaire ou fédéral, permettent une classification globale en quatre catégories. La problématique est donc de déterminer si une de ces catégories est plus sensible qu'une autre à des blocages. Autrement dit : quelle catégorie d'état répond le

10. Le cas du Royaume de Belgique fait en la matière contre-exemple, dans la mesure où bien qu'ayant la forme d'un état fédéral depuis le 5 mai 1993, les assemblées élues à chaque renouvellement général sont en pratique systématiquement déclarées constituantes quarante jours avant le scrutin (article 195), et la majoritée qualifiée dans chaque chambre pour adopter une révision est de deux tiers des présents avec un quorum d'au minimum deux tiers des membres, autorisant l'adoption d'une loi constitutionnelle avec moins de la moitié des membres de chaque chambre.

11. Dans le cas de la France, état unitaire, les règles d'organisation et le champ d'action des collectivités territoriales relèvent de la loi ordinaire pour les collectivités métropolitaine (article 72), les départements et régions d'outre-mer (article 73), de la loi organique pour les collectivités d'outre-mer (article 74), tandis que la Nouvelle-Caledonie, en raison de la perspective possible d'indépendance de ce territoire, voit ses prérogatives définies à la fois par la Constitution elle-même et la loi organique pour leurs précisions (article 76).

12. Dans le cadre des États-Unis, les constitutions des états fédérés sont strictement inférieures à la constitution fédérale mais il est admis que la loi fédérale ne leur est pas supérieure.

13. L'Ukraine fait exception à cette tendance, dans la mesure où bien qu'étant un état fédéral, son parlement est monocaméral avec une seule chambre, *La Rada*.

14. L'ancêtre du Sénat français, le *Conseil des Anciens* avait été installé lors de la réaction thermidorienne avec pour objectif d'être un contre-pouvoir au *Conseil des Cinq-Cents* : la chambre basse avait l'initiative de la proposition des lois dont l'adoption était le monopole de la chambre haute.

mieux au second critère de Guy Carcassonne ? Notre objectif est donc d'analyser le traitement par l'état de la réponse de choix collectif qui lui est apportée au moment des élections. Pour se faire nous allons dans la première section définir l'architecture de ses quatre catégories. Nous introduisons ensuite dans la seconde section un petit modèle simple pour simuler le comportement de ces quatre catégories d'état. Puis dans une troisième section, nous discuterons de la forme de l'offre politique. Finalement, nous concluons l'article à la quatrième section.

5.2 Les catégories d'état

Soit un état E comportant deux niveaux verticaux : les institutions centrales ($I.C.$) et les entités territoriales ($E.T.$). Les institutions centrales se composent d'un parlement central (P_c), ayant le pouvoir de décision grâce aux lois centrales votées (l_c) et d'un gouvernement central (G_c), ayant le pouvoir d'éxécution grâce aux décrets centraux (d_c) pris, tandis que les les entités territoriales comprennent un parlement territorial (P_t), ayant le pouvoir de décision sur le périmètre de la collectivité territoriale concernée grâce aux lois territoriales votées (l_t), et d'un gouvernement territorial (G_t), ayant le pouvoir d'éxécution grâce aux décrets territoriaux (d_t) pris. Le gouvernement central (ou territorial) se compose d'un gouverneur central (ou territorial), tandis que le parlement central (ou territorial) se compose de n_c députés centraux (n_t députés territoriaux). Pour faciliter le calcul, on suppose qu'à chaque collectivité territoriale correspond un député central.

Cet état est démocratique, c'est-à-dire que le pouvoir est attribué de manière régulière à l'occasion d'élections libres au cours desquelles concourent au minimum deux formations politiques. Nous supposons que celles-ci sont au nombre de deux et désignées par A et B. Le mode de désignation retenu est le scrutin uninominal majoritaire (à un seul tour puisque qu'il n'y a que deux candidats à chaque élection). On a donc n_c circonscriptions de députés centraux et $n_c \times n_t$ circonscriptions de députés territoriaux.

Pour simplifier le modèle nous émettons l'hypothèse que la même élection détermine la direction politique de l'état central et des collectivités territoriales : c'est-à-dire que le bulletin de vote de chaque électeur indique la formation politique qu'il choisit pour les deux niveaux verticaux de l'état. Nous utiliserons le paradoxe du référendum pour justifier l'existence de majorités politiques différente à un même niveau, dans le cas d'un régime présidentiel en particulier.

Il y a deux types possibles de régime politique : la séparation ferme des pouvoirs (sfp), caractérisant un régime dit «présidentiel», et la séparation souple des pouvoirs (ssp), caractérisant un régime «parlementaire». On définit le régime à séparation ferme des pouvoirs (sfp) par le fait que le Gouvernement est désigné indépendant du parlement, tandis que le la séparation souple des pouvoirs (ssp), fait que le Gouvenement a en toutes circonstances la même couleur politique que celle de la majorité parlementaire. Cela implique qu'un régime ssp n'a qu'une seule source d'élection (celles des députés du parlement), tandis qu'un régime

sfp en comporte deux (celles du gouverneur et des députés). Une seconde hypothèse est que la nature des régimes politiques est verticalement uniforme : par exemple si l'état central est sfp alors les collectivités territoriales sont sfp.

Enfin il y a deux types possibles d'organisation horizontale de l'état : unitaire (U) ou fédérale (F). L'état unitaire se caractérise par une stricte priorité des actes des institutions centrales par rapport aux actes des entitées territoriales : ainsi $l_c > d_c > l_t > l_t$. Inversement l'état fédéral se caractérise par une priorité relative dans la mesure, où les entités fédérés disposent d'une sphère de compétence réservée dans lequel l'état central n'intervient théoriquement pas : ainsi pour simplifier on a $l_c > d_c$, $l_t > l_t$ et $l_c = l_t$. A cette organisation nous imposons l'organisation du parlement central : celui-ci est monocaméral dans le cas d'un état unitaire et bicaméral dans le cas d'un état fédéral. Dans le cadre d'un sytème bicaméral, la Chambre des députés (CdP), la chambre basse, est directement élue par les électeurs tandis que le Sénat (S), la chambre haute, est désigné par les collectivités territoriales. Si le régime est à séparation souple des pouvoirs (ssp), le Sénat est composé des gouverneurs, si le régime est à séparation ferme des pouvoirs (sfp), le sénateurs sont désignés par leur parlement territorial respectif. Ceux-ci sont supposés être monocaméraux (puisque n'existant pas de niveau d'organisation locale inférieur à celui des collectivités territoriales).

Le fonctionnement de l'état peut se résumer dans le modèle à la transformation d'un engagement de campagne (par exemple la fusion de l'impôt sur le revenu et de la contribution sociale généralisée) en une loi avec ses modalités d'application (notamment les décrets d'application pris par le gouvernement en vertu de son rôle d'exécuteur des lois). Étant donné que les gouvernements sont à l'origine de l'immense majorité des lois examinées par les parlements [15], puisque disposant des services nécessaires à leur élaboration, nous considérons que le Gouvernement a le monopole de l'élaboration des projets de loi (PL) tandis que le Parlement a celui de leur adoption.

On peut définir les quatre catégories d'état à partir de ces trois axes de classification, et sous l'hypothèse de réserver le bicamérisme du parlement central à un état fédéral.

Définition 5.1. *Un état unitaire à séparation souple des pouvoirs E^U_{ssp} se définit par une élection pour désigner les n_c députés centraux du parlement central (P_c) et les $n_c \times n_t$ députés territoriaux des parlements territoriaux (P_t). Le gouvernement central (G_c) est issu de la majorité politique des députés du parlement central. Les gouverneurs territoriaux (G_t) sont issus des majorités politiques des députés de leur parlement territorial.*

La République d'Albanie, l'Ancienne République yougoslave de Macédoine, la République Populaire du Bangladesh, la République de Bulgarie, la Répu-

15. Sous la III$^{\text{ème}}$ République, âge d'or supposé du parlementarisme en France, le gouvernement était à l'origine de 70% des lois traitées par le Parlement.

blique de Croatie, le Royaume du Danemark, la République d'Estonie [16], la République des Fidji, la République de Finlande, la Géorgie, la République hellénique (Grèce), la Hongrie, l'Île Maurice, la République d'Islande, l'État d'Israël, la République kirghize (Kirghizistan), la République de Lettonie [17], la République libanaise, la République de Lituanie [18], le Grand-Duché de Luxembourg, la République de Moldavie, le Monténégro, l'État indépendant de Papouasie-Nouvelle-Guinée, la République portugaise [19], le Royaume de Norvège, la Nouvelle-Zélande, la Fédération de Saint-Christophe-et-Niévès, Saint Vincent et les Grenadines, l'État indépendant des Samoa, la République de Serbie, la République de Singapour, la République slovaque, le Royaume de Suède, la République tunisienne, la République de Turquie, l'État des Tuvalu, l'Ukraine et la République de Vanuatu sont des pays correspondant aux critères de la définition 5.1. Dans une certaine mesure, le Canada [20] d'une part, bien qu'étant un état fédéral, et le Royaume d'Espagne [21] d'autre part, bien qu'ayant une organisation fédérale et un régime législatif bicamérale, et la République française [22], l'État du Japon [23] et le Royaume-Uni de Grande-Bretagne et d'Irlande du Nord [24], bien qu'ayant

16. En vertu de l'article 89 de la Constitution, le Gouvernement (*Vabariigi Valitsus)*), composé par le Premier ministre (*Eesti Vabariigi peaminister*) au plus tard quatorze jours après sa nomination par le Président (*Eesti Vabariigi President*), doit être approuvé par l'Assemblée d'État (*Eesti Riigikogu*) au plus tard quatorze jours après sa formation.

17. En vertu de l'article 59 de la Constitution, le Cabinet (*Latvijas Republikas Ministru kabinets)*), composé par le Ministre-président (*Latvijas Ministru prezidents*) après sa nomination par le Président (*Latvijas Valsts prezidents*), doit être approuvé par la *Saeima* après sa formation.

18. Le caractère parlementaire de la Lituanie provient de l'article 92 de sa Constitution stipulant que le Premier ministre (*Lietuvos ministrai pirmininkai*) est nommé et relevé de ses fonctions par le Président de la République, avec l'approbation du *Lietuvos Respublikos Seimas*, que les ministres sont nommés et relevés de leurs fonctions par le Prësident de la République, sur proposition du Premier ministre, et que celui-ci, dans les quinze jours suivant sa nomination, présente au Seimas le Gouvernement qu'il a formé et a été approuvé par le Président de la République, et soumet, pour examen, son programme au Seimas.

19. Le Président du Portugal, élu au suffrage universel direct, dispose des pouvoirs propres lui permettant d'influer partiellement sur la conduite des affaires du Gouvernement.

20. Les sénateurs canadiens sont nommés par le Gouverneur général sur conseil du Premier ministre. Par convention, en dehors des révisions constitutionnelles, la Chambre des communes à le dernier mot en cas de désaccord avec le Sénat.

21. Le Congrès des députés peut surmonter un veto du Sénat par un vote à la majorité absolue de ses membres. La majorité simple suffit si un délais de deux mois s'est écoulé depuis le véto du Sénat (article 90 de la Constitution du 27 décembre 1978).

22. En cas de désaccord avec le Sénat, l'Assemblée nationale, à la demande du Gouvernement, statue définitivement sur les les lois ordinaires, à la majorité simple (quatrième alinéa de l'article 45), et les lois organiques, à la majorité absolue de ses membres (troisième alinéa de l'article 46). Le vote conforme du Sénat est indispensable pour les lois organiques relatives au Sénat (quatrième alinéa de l'article 46), la convocation de la Haute-Cour pour destituer le Président de la République (second alinéa de l'article 68), la loi organique relative au Traité sur l'Union européenne signé le 7 février 1992 (article 88-3), la ratification d'un traité relatif à l'adhésion d'un État à l'Union européenne (second alinéa de l'article 88-5) et les lois de révision constitutionnelle (second alinéa de l'article 89).

23. En cas de désaccord avec la Chambre des conseillers, la Chambre des représentants statue définitivement à la majorité simple pour les les lois budgétaire (deuxième alinéa de l'article 60) et la ratification des traités (article 61). Un vote à la majorité des deux tiers est nécessaire pour toutes les autres lois (second alinéa de l'article 59). Les lois de révision requièrent le vote conforme de deux chambres à la majorité des deux tiers de leurs membres respectifs (article 96).

24. Les Parliament Acts de 1911 et de 1949 ont une accordé une suprématie absolue à la

des Parlements bicaméraux, d'autre part correspondent également à ces critères. Le graphique 5.1, à la page 164, donne une représentation de l'architecture institutionnelle et du fonctionnement d'un état correspondant à la définition d'un état unitaire à séparation souple des pouvoirs. Il y a deux processus de création séparés et n'interférant pas dans leur parcours, au niveau national et au niveau territorial, quelques soients les majorités politiques existantes. En effet, le seul cas possible de conflit réside dans les champs de compétence au moment de la publication des décrets d'application et la nature unitaire de l'état garantie la préminence, en toutes circonstances du droit national sur le droit territorial. Du fait que le Gouvernement, qu'il soit central (G_c) ou territorial (P_t), tienne sa légimité de l'existence d'une majorité parlementaire pour le soutenir, cela garantie en tout état de cause l'adoption par le Parlement, qu'il soit central (P_c) ou territorial (P_t), de ses projets de loi. De fait, le seul risque de conflit réside dans la possibilité d'existence de majorités politiques différentes entre le niveau national et territorial et, de par le droit, celui-ci est relativement surmontable du fait de la priorité accordée au premier sur le second. Ce système comprend au minimum 5 étapes, dédoublées entre les deux niveaux, entre le moment où un programme est choisi par les électeurs, le jour du scrutin, et le moment où la population ressent les premiers effets de la mise en application.

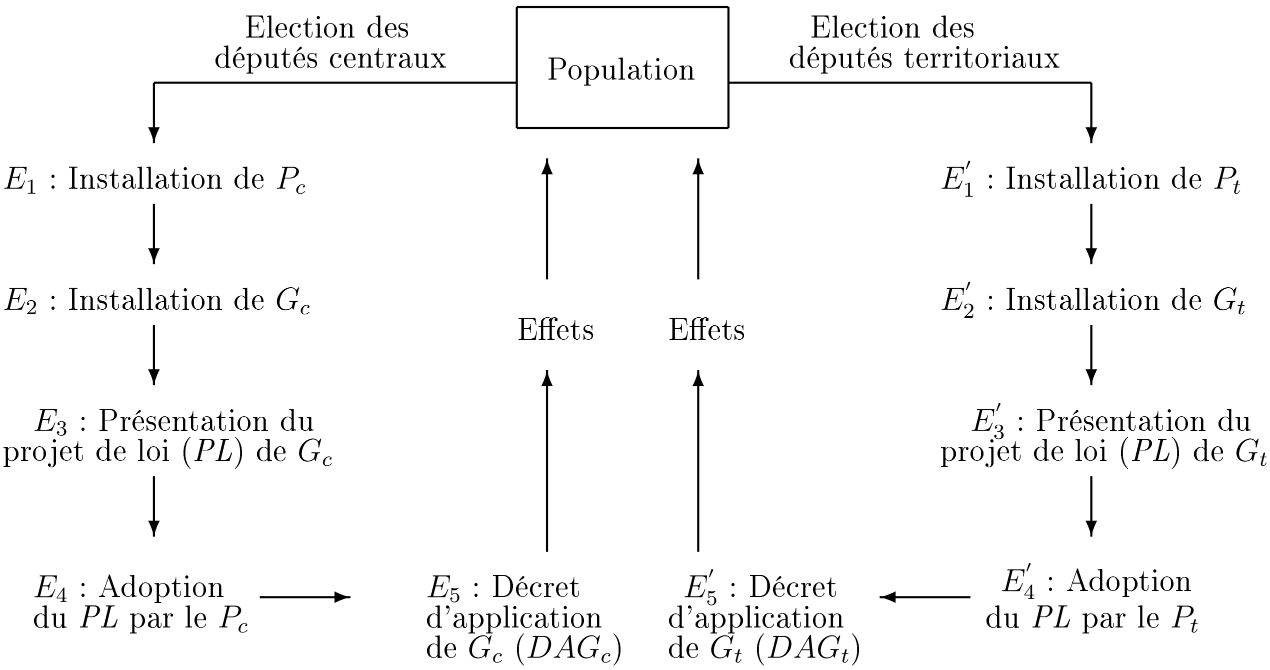

FIGURE 5.1 – État unitaire à séparation souple des pouvoirs

Chambre des Communes sur la Chambre des Lords. En vertu du légicentrisme (suprématie parlementaire) en vigueur au Royaume-Uni, les actes de celle-ci se trouvent au sommet de la hiérarchie de normes.

Définition 5.2. *Un état unitaire à séparation ferme des pouvoirs E^U_{sfp} se définit par une élection pour désigner les n_c députés centraux du parlement central (P_c) et les $n_c \times n_t$ députés territoriaux des parlements territoriaux (P_t). Le gouvernement central (G_c) est élu directement par l'ensemble des électeurs du pays. Les gouverneurs territoriaux (G_t) sont élus directement par l'ensemble des électeurs de leur collectivité territoriale.*

La République d'Angola, la République du Bénin, la République du Cameroun, la République de Côte d'Ivoire, la République de Corée (Corée du Sud), la République du Costa-Rica, la République d'Équateur, la République de Gambie, la République du Ghana, la République du Guatemala, la République de Guinée, la République du Honduras, la République des Kiribati, la République du Malawi, la République des Maldives, la République du Nicaragua [25], la République du Mozambique, la République d'Ouganda, la République du Panama, la République du Pérou, la République centrafricaine, la République du Salvador, la République des Seychelles, la République de Sierra Leone, la République unie de Tanzanie la République du Tchad, la République togolaise, la République du Turkménistan, la République du Yemen et la République de Zambie sont des pays correspondant aux critères de la définition 5.2. Bien qu'ayant une forme fédérale, la République bolivarienne du Venezuela [26] répond également à ces critères. Le graphique 5.2, à la page 166, donne une représentation de l'architecture institutionnelle et du fonctionnement d'un état correspondant à la définition d'un état unitaire à séparation ferme des pouvoirs. L'État ayant un régime unitaire, il n'y a aucune interférence entre les processus centraux et territoriaux de transformation du programme adopté par les électeurs en une application concrète avec les décrets d'application qu'ils soient centraux (DAG_c) ou territoriaux (DAG_t). Entre les deux processus le risque de conflit existe au moment de la mise en application des mesures, selon que le Gouvernement central (G_c) mène une politique différente des gouvernements territoriaux (G_t). Le régime étant à séparation ferme, chaque institution dispose d'une voie d'élection indépendante par rapport aux autres, et en conséquent le Gouvenerment, qu'il soit central ou territorial, ne dispose pas d'un soutien parlementaire assuré au Parlement, qu'il soit central (P_c) ou territorial (P_t) : ainsi en cas de divergence politique entre le Gouvernement central, ou territorial, et le Parlement central, ou territorial, les projets de loi (PL) présentés pourront être rejetés par les députés. Le Gouvernement central, ou territorial, n'ayant aucun moyen de contraindre le Parlement central, ou territorial, à adopter son projet de loi et inversement le Parlement central, ou territorial, n'ayant aucun moyen de contraindre le Gouvernement central, ou territorial, à présenter un projet de loi conforme aux souhaits des députés, il n'existe que cinq issues à cette situation : soit aucune des institutions ne veut

25. Depuis la Révision constitutionnelle de 1995, le Président n'a en pratique plus qu'un droit de veto suspensif sur le lois adoptées par l'Assemblée nationale du fait qu'il est surmontable par un vote à la majorité absolue des députés présents d'après l'article 143 de la Constitution. La loi constitutionnelle n°520, non encore entré en vigueur, a partiellement modifié cet article en exigeant que le vote soit à la majorité absolue des membres composants l'Assemblée nationale.

26. Depuis 1999, le Parlement du Vénézuela ne comprend plus qu'une seule chambre, l'Assemblée nationale (*Asamblea Nacional*). Les 23 États fédérés n'ont pas de pouvoir d'intervention directe dans le processus législatif de l'État fédéral.

négocier et le Gouvernement présente le même projet de loi que rejette le Parlement, soit les hommes politiquent négocient un texte de compromis acceptable par les deux parties qui sera adopté, soit le Gouvernement renonce à son projet de loi et aucune loi n'est votée, soit le Gouvernement cède et présente un projet de loi conforme aux vœux des députés, soit les députés cèdent et adoptent le projet de loi du Gouvernement. L'absence d'un mécanisme de sortie de crise entre les organes législatifs et exécutifs d'un même niveau, à l'instar de la motion de censure pour renverser le Gouvernement ou de la dissolution du Parlement, caractérise le système d'état unitaire à séparation ferme des pouvoirs. En cas de conflit entre le niveau central et le niveau fédéral, lors de la mise en application des lois votées, le premier l'emporte sur le second en vertu de l'organisation unitaire de l'État.

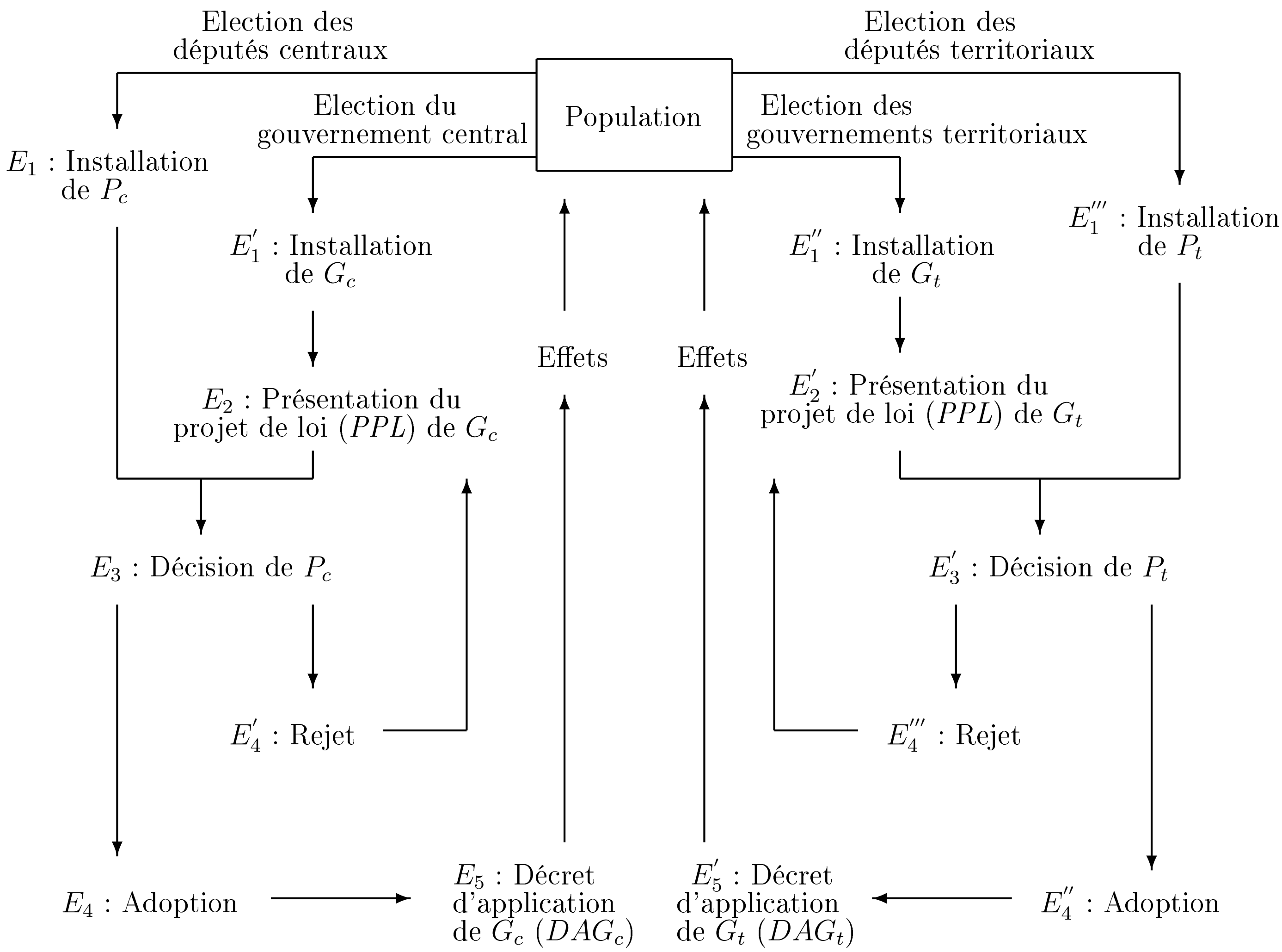

FIGURE 5.2 – État unitaire à séparation ferme des pouvoirs

Définition 5.3. *Un état fédéral à séparation souple des pouvoirs* E^F_{ssp} *se définit par une élection pour désigner les* n_c *députés centraux de la Chambre des Députés (CdD) et les* $n_c \times n_t$ *députés territoriaux des parlements territoriaux (*P_t*). Le gouvernement central (*G_c*) est issu de la majorité politique des députés du parlement central. Les gouverneurs territoriaux (*G_t*) sont issus des majorités politiques des députés de leur parlement territorial, et ils composent le Sénat (S).*

L'Allemagne [27] est un pays correspondant aux critères de la définition 5.3. L'Australie [28], bien que la seconde chambre soit élue au suffrage universel direct, l'Autriche [29], l'Inde [30], le Pakistan [31] et la Russie [32], bien que la seconde chambre soit élue par les parlements territoriaux, et les Pays-Bas [33], bien qu'ayant une organisation unitaire, correspondent également à ces critères. De même bien que n'étant un état fédéral et que l'organisation de l'État central est un régime hybride entre le système parlementaire et le système présidentiel, l'Afrique du Sud [34] remplit également ces critères. Le graphique 5.3, à la page 168, donne une représentation de l'architecture institutionnelle et du fonctionnement d'un état correspondant à la définition d'un état fédéral à séparation souple des pouvoirs. L'État ayant un régime fédéral, les processus territoriaux de transformation du programme adopté par les électeurs de chaque collectivité peuvent interférer avec les processus centraux de transformation du programme adopté par les électeurs en une application concrète avec les décrets d'application centraux (DAG_c). Ce risque s'ajoute à celui existant au moment de la mise en application des mesures, selon que le Gouvernement central (G_c) mène une politique différente des gouvernements territoriaux (G_t). Le régime étant à séparation souple, chaque institution est liée à l'autre, car disposant de la même voie d'élection, et en conséquent le Gouvernement, qu'il soit central ou territorial, dispose d'un soutien parlemen-

27. Les membres du Conseil fédéral (*Bundesrat*) sont les membres des gouvenerments des États fédérés (*Bundesländer*)

28. Les sénateurs australiens sont élus au suffrage universel direct, dans le cadre d'un scrutin proportionnel plurinominal à l'echelle de chaque état fédéré depuis 1948, et non par les léglislatures des états fédérés. Auparavant le scrutin majoritaire plurinominal à un tour a été utilisé de 1901 à 1919, et une variante, le *Preferential block voting* de 1919 à 1948.

29. Les membres du Conseil fédéral (*Bundesrat*) sont élus par les parlements (*Landtag*) des États fédérés (*Bundesländer*).

30. Les 245 membres du Conseil des États (*Rajya Sabha*) sont désignés pour 233 d'entre-eux par les chambres basses des états et territoires (*Vidhan Sabha*), lorsque ceux-ci ne sont pas monocaméraux, tandis que 12 sont nommés par le Président.

31. Les 104 Sénateurs sont élus pour 92 d'entre-eux par les 4 assemblées provinciales (*Pendjab*, *Sind*, *Khyber Pakhtunkhwa* et *Baloutchistan*), à raison de 23 par province, tandis que l'Assemblée nationale désigne ceux des *Régions tribales fédéralement administrées* (8) et du *Territoire fédéral d'Islamabad* (4).

32. Chacun des 85 sujets (république, kraï, oblast, ville fédérale, oblast autonome ou okroug autonome) de la Fédération de Russie est représenté par 2 représentants au *Conseil de la Fédération de l'Assemblée fédérale de la Fédération de Russie*, l'un étant désigné par l'organe législatif du sujet et l'autre nommé par son organe éxécutif.

33. La seconde Chambre des États généraux (*Tweede Kamer der Staten-Generaal*), bien qu'élue au suffrage universelle directe, n'a aucun moyen de surmonter un désaccord avec la première Chambre des États généraux (*Eerste Kamer der Staten-Generaal*), qui est composé de membres désignés par les assemblées législatives (*Provinciale Staten*) des provinces des Pays-Bas.

34. Les provinces ont un fonctionnement parlementaire et sont représentées au Conseil national des Provinces (émphNational Council of Provinces), la chambre haute du parlement, par leur chef de gouvernement et des membres désignés par leur législature.

taire assuré au Parlement, qu'il soit central (CdD) ou territorial (P_t). Ainsi le risque majeur est un désaccord entre la Chambre des Députés et le Sénat, ni l'une ni l'autre n'ayant les moyens d'imposer sa volonté à l'autre. Il n'existe que cinq issues à cette situation : soit aucune des institutions ne veut négocier et la Chambre des Députés adopte le même projet de loi que rejette le Sénat, soit les hommes politiquent négocient un texte de compromis acceptable par les deux parties qui sera adopté, soit la Chambre des Députés renonce à son projet de loi et aucune loi n'est votée, soit le Gouvernement cède et présente un projet de loi conforme aux vœux des sénateurs (adopté par la Chambre des Députés en vertu du soutien parlementaire dont y dispose le Gouvernement central), soit les sénateurs cèdent et adopte le projet de loi de la Chambre des Députés. Ce régime ne prévoit pas de mécanisme de sortie de crise entre la Chambre des Députés et le Sénat, à l'instar de la règle de priorité reconnu à la chambre basse sur la chambre haute dans certain états unitaires bicaméraux.

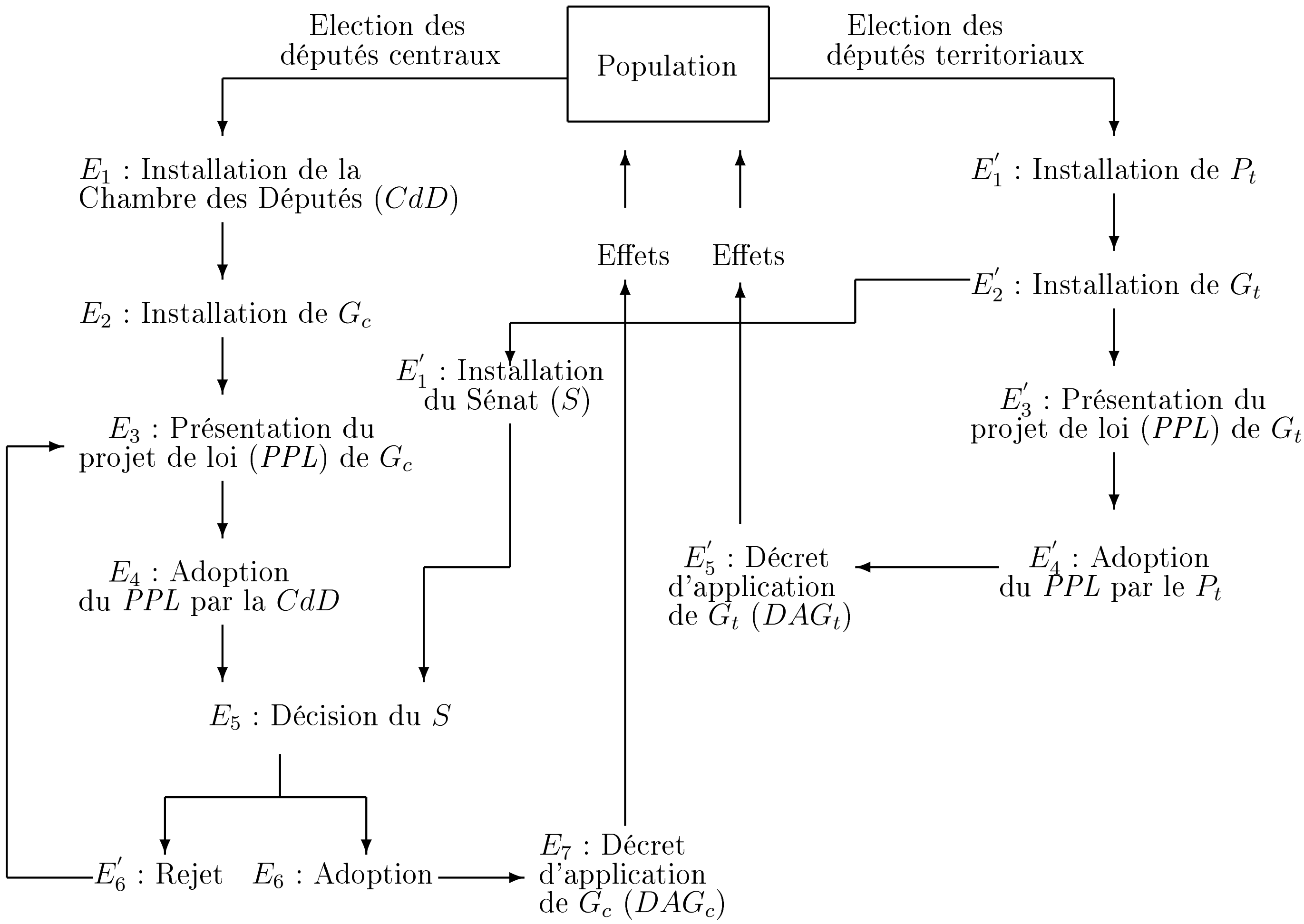

FIGURE 5.3 – État fédéral à séparation souple des pouvoirs

Définition 5.4. *Un état fédéral à séparation ferme des pouvoirs* E^F_{sfp} *se définit par une élection pour désigner les* n_c *députés centraux de la Chambre des Députés (CdD) et les* $n_c \times n_t$ *députés territoriaux des parlements territoriaux* (P_t)*. Le gouvernement central* (G_c) *est élu directement par l'ensemble des électeurs du pays. Les gouverneurs territoriaux* (G_t) *sont élus directement par l'ensemble des électeurs de leur collectivité territoriale. Les représentants des collectivités territoriales au Sénat (S) sont élus par leur parlement territorial respectif.*

La Bosnie-Herzégovine[35] est un pays correspondant aux critères de la définition 5.4. Les États-Unis, avant la ratification du XVII^e^ amendement[36], correspondaient également à ces critères. Néanmoins, bien qu'ayant une chambre haute élue au suffrage universel direct, ils correspondent, avec l'Argentine, le Brésil, la Suisse[37], également à ces critères. Le graphique 5.4, à la page 170, donne une représentation de l'architecture institutionnelle et du fonctionnement d'un état correspondant à la définition d'un état fédéral à séparation ferme des pouvoirs. L'État ayant un régime fédéral, les processus territoriaux de transformation du programme adopté par les électeurs de chaque collectivité peuvent interfèrer avec les processus centraux de transformation du programme adopté par les électeurs en une application concrête avec les décrets d'application centraux (DAG_c). Le régime étant à séparation ferme, chaque institution dispose d'une voie d'élection indépendante par rapport aux autres, et en conséquent le Gouvenement central, ou territorial, ne dispose pas d'un soutien parlementaire assuré à la Chambre des Députés et au Sénat, ou au Parlement territorial (P_t) : ainsi en cas de divergence politique entre le Gouvernement et les chambres du Parlement les projets de loi (PL) présentés pourront être rejetés par les députés ou par les sénateurs. Cette organisation présentent le plus de possibilités de conflit : entre le Gouvernement central et la Chambre des D'eputés, entre le Gouvernement central et le Sénat, entre la Chambre des Députés et le Sénat, entre le Gouvernement central et les gouvernements territoriaux, et entre les gouvernements territoriaux et leurs parlements territoriaux respectifs.

---

35. la Présidence tripartite est le gouvernement central, dont les membres Bosniaques et Croates sont élus directement par le peuple de la Fédération Bosnie-et-Herzégovine (*Federacija Bosne i Hercegovine*) tandis que le membre Serbe est élu par le peuple de la République Serbe de Bosnie (*Republika Srpska*). Le Parlement bicaméral se décomposent en deux chambres : la Chambre des représentants (*Predstavnički dom*), composée de 42 députés élus au suffrage universel direct dans le cadre d'un scrutin proportionnel de liste dans chacune des deux entités (28 pour la Fédération Bosnie-et-Herzégovine et 14 pour la République Serbe de Bosnie), et la Chambre des peuples (*Dom naroda*), composée de 15 membres élus par les parlements des entités à raison de 5 par groupes ethniques, c'est-à-dire 10 (5 Croates et 5 Bosniaques) désignés par le parlement bicaméral de la Fédération Bosnie-et-Herzégovine et 5 Serbes désignés par l'Assemblée nationale de la République Serbe (*Narodna skupština Republike Srpske.*). L'état central et les deux entités fédérées sont à séparation ferme des pouvoirs.

36. Jusqu'à l'intégration à la Constitution du XVII^e^ amendement, après sa ratification pour la législature du Connecticut le 8 avril 1913, les sénateurs étaient élus par les législatures des États fédérés.

37. Bien que le Gouvernement, le Conseil fédéral, soit élu par l'Assemblée fédérale, son renouvellement partiel ne garantit pas la concordance politique entre les deux instances. Par ailleurs, aux niveaux des cantons les organes législatifs et éxécutifs sont élus séparément.

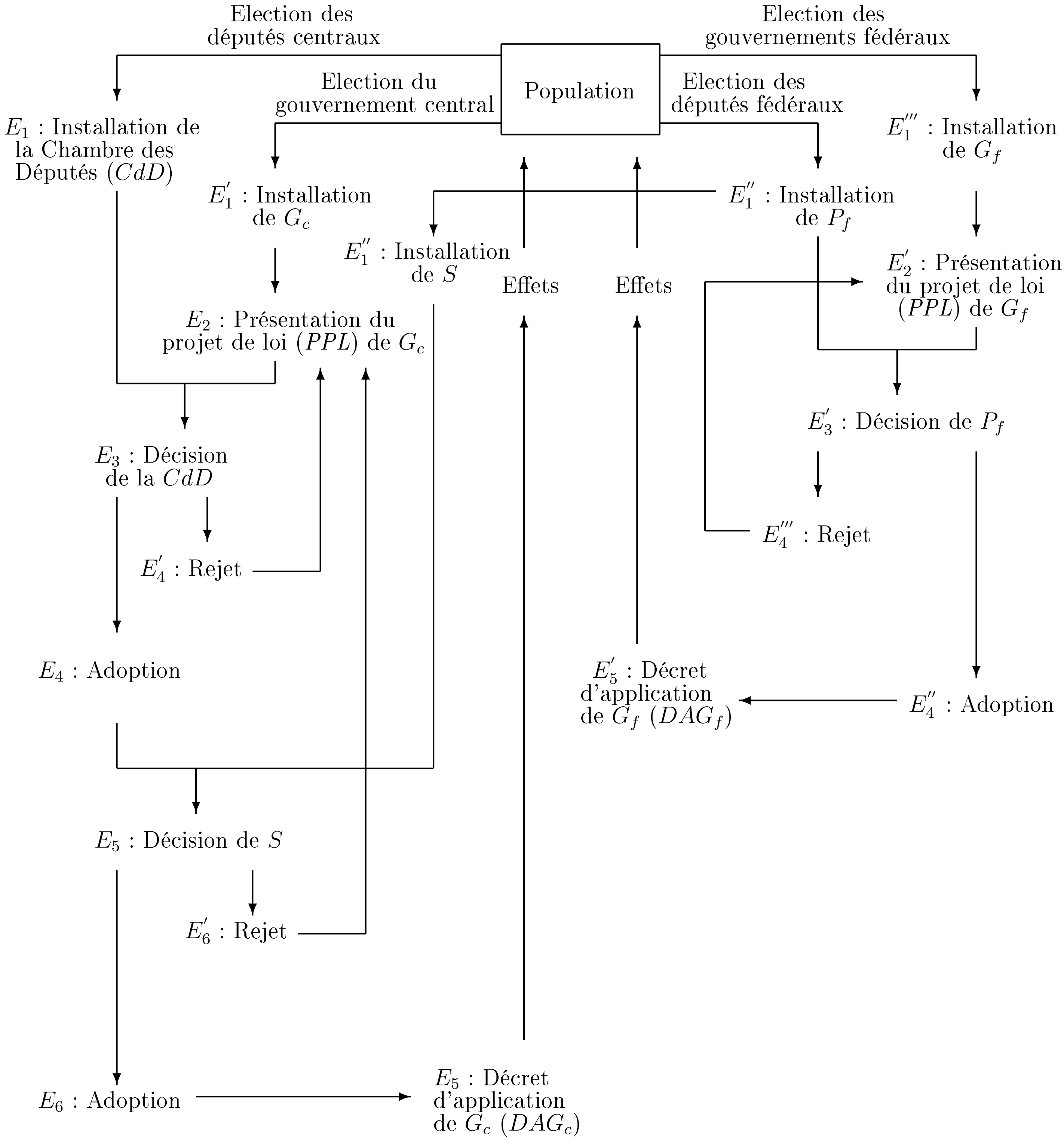

FIGURE 5.4 – État fédéral à séparation ferme des pouvoirs

5.3 Modèles simulés

5.3.1 Structure de base

Nous reprenons la structure développée au chapitre 3. Soit $N \subset \mathbb{N}$ un ensemble discret d'électeurs dont le nombre $n \in \mathbb{N}$ est supposé impair, c'est-à-dire $n = 2q+1$ avec $q \in \mathbb{N}^*$. Les électeurs sont supposés être répartis entre $c \in \mathbb{N}$ circonscriptions respectant ainsi la partition

$$\bigcap_{j=1}^{c} C_j = \emptyset \text{ et } \bigcup_{j=1}^{c} C_j = N,$$

où C_j est l'ensemble des électeurs appartenant à la circonscription j. Le nombre des circonscriptions est supposé impair, de sorte que $c = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$: le risque d'égalité de sièges entre les candidats est ainsi écarté. Il en va de même pour l'effectif de chaque circonscription, c'est-à-dire $c_j = 2r + 1$ avec $r \in \mathbb{N}$, de sorte de disposer d'une partition de N en c circonscriptions $(C_1, ..., C_c)$ de taille absolument identique : $\forall j \in [1 : c]$, $c_j = 2r + 1$, avec $r \in \mathbb{N}^*$, avec $n = c \times c_j = 2(2kr + k + r) + 1$ et $q = 2kr + k + r$.

Chaque circonscription dispose d'un député élu par l'ensemble de ses électeurs et siégeant au Parlement central lorsque l'état est unitaire, à la Chambre des députés lorsque l'état est fédéral. Chaque circonscription est également une collectivité territoriale ayant un parlement territorial composé de $c_k = 2r_k + 1$, avec $r_k \in \mathbb{N}$, députés territoriaux élus dans des circonscriptions territoriales d'effectif impaire $c_{k_t} = 2r_{k_t} + 1$, avec $r_{k_t} \in \mathbb{N}$, de sorte que $c_j = c_k \times c_{k_t} = (2r_k+1).(2r_{k_t}+1) = 4.r_k.r_{k_t}+2r_k+2r_{k_t}+1 = 2r+1$ avec $r = 2.r_k.r_{k_t}+2r_k+2r_{k_t}$.

Nous supposons qu'il y a seulement deux candidats pour le Gouvernement central, A et B, qu'il n'y a pas d'indécision (chaque électeur réalise un choix entre les deux candidats) et aucune préférence particulière (chaque électeur a une probabilité identique de choisir A ou B). On a donc indépendance des votes au niveau de l'électeur

$$\forall i \in N, P_i(A) = P_i(B) = \frac{1}{2},$$

au niveau des circonscriptions territoriales d'une collectivité territoriale

$$\forall c_k \in C_k, P_{c_k}(A) = P_{c_k}(B) = \frac{1}{2},$$

au niveau des circonscriptions nationales

$$\forall c \in C, P_c(A) = P_c(B) = \frac{1}{2}$$

et au niveau national

$$P_N(A) = P_N(B) = \frac{1}{2}.$$

Nous désignons par n_A le nombre d'électeurs en faveur de A au niveau national (par symétrie le nombre d'électeurs en faveur de B est donné par

$n_B = n - n_A$), par c_A le nombre de circonscriptions nationales en faveur de A (par symétrie le nombre d'électeurs en faveur de B est donné par $c_B = c - c_A$) et par $c_{k_A}^{c_j}$ le nombre de circonscriptions territoriales d'une collectivité territoriale j en faveur de A (par symétrie le nombre d'électeurs en faveur de B est donné par $c_{k_B}^{c_j} = c_t - c_{k_A}^{c_j}$).

Etant dans un choix à deux options, pour remporter le vote global, il faut et il suffit que l'un des candidats remporte plus de voix que l'autre. Il en va de même à chaque échelle pour que ce soit pour remporter la victoire dans une circonscription nationale ou dans une circonscription territoriale d'une collectivité territoriale.

Les définitions de *majorité minimale globale* ($M_N^{min} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = 2kr + k + r + 1$) et de *minorité maximale globale* ($m_N^{max} = M_N^{min} - 1 = 2kr + k + 1$) développées au chapitre 3 sont inchangées, tandis que sont adaptées les définitions de la *majorité minimale d'une circonscription* et de la *majorité des circonscriptions*, pour être adaptée aux circonscriptions territoriales et aux circonscriptions territoriales :

- La *majorité minimale d'une circonscription nationale* :

$$M_{C_j}^{min} = \lfloor \frac{c_j}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{2r+1}{2} \rfloor + 1 = r + 1$$

- La *majorité des circonscriptions nationales* :

$$M_C = \lfloor \frac{c}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{2 \times k + 1}{2} \rfloor + 1 = k + 1$$

- La *majorité minimale de la majorité des circonscriptions nationales* :

$$M_{M_C}^{min} = M_C \times M_{C_j}^{min} = (k+1) \times (r+1) = kr + k + r + 1$$

- La *majorité minimale d'une circonscription territoriale* :

$$M_{C_{k_t}}^{min} = \lfloor \frac{c_{k_t}}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{2r_{k_t} + 1}{2} \rfloor + 1 = r_{k_t} + 1$$

- La *majorité des circonscriptions territoriales d'une même collectivité territoriale* :

$$M_{C_k} = \lfloor \frac{c_k}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{2 \times r_k + 1}{2} \rfloor + 1 = r_k + 1$$

- La *majorité minimale de la majorité des circonscriptions territoriales d'une même collectivité territoriale* :

$$M_{M_{C_k}}^{min} = M_{C_k} \times M_{C_{k_t}}^{min} = (r_k + 1) \times (r_{k_t} + 1) = r_k . r_{k_t} + r_k + r_{k_t} + 1$$

Et nous pouvons définir, la *majorité minimale de la majorité des circonscriptions territoriales de la majorité des collectivités territoriales*, en prévision des parlements bicaméraux des états de type fédéraux.

Définition 5.5. *La majorité minimale de la majorité des circonscriptions territoriales de la majorité des collectivités territoriales s'écrit :*

$$\begin{aligned} M^{min}_{M_{M_{C_k}}} &= M_C \times M^{min}_{C_{k_t}} \\ &= (k+1) \times (r_k.r_{k_t} + r_k + r_{k_t} + 1) \\ &= k.r_k.r_{k_t} + k.r_k + k.r_{k_t} + kr_k.r_{k_t} + r_k + r_{k_t} + 1 \end{aligned}$$

Avant de poursuivre plus en avant, nous allons donner la définition d'un *conflit structurel.*

Définition 5.6. *Un conflit structurel se produit lorsqu'il existe des majorités politiques différentes entre plusieurs instances en charge de produire une politique publique.*

Plusieurs remarques préalables peuvent être établies à partir de cette définition.

Remarque 5.1. *Il est impossible d'observer un conflit structurel à un même échelon au sein d'un état unitaire avec un régime à séparation souple des pouvoirs, du fait qu'il n'existe qu'une seule instance élue, le Parlement, et que l'orientation politique du Gouvernement dépend de la majorité parlementaire. A l'inverse, au sein d'un régime à séparation ferme des pouvoirs, la possibilité existe, du fait de l'existence de sources séparées d'élection, de majorités différentes politiques au Gouvernement et au Parlement : par construction sa probabilité d'occurence au sein d'un état unitaire, est celle d'occurence du paradoxe du référendum pour une division en c circonscriptions nationales du corps électoral.*

Remarque 5.2. *Dans le cadre d'un état fédéral avec un régime à séparation souple des pouvoirs, le Gouvernement central et la Chambre des députés ont la même orientation politique et le seul type de conflit structurel possible à l'échellon national réside entre la Chambre des députés et le Sénat, le Gouvernement appliquant la loi votée par le Parlement. Dans le cadre d'un état fédéral avec un régime à séparation ferme des pouvoirs, des conflits sont possibles entre la Chambre des députés, le Sénat et le Gouvernement mais jamais entre les troix à fois, du fait de l'offre politique limitée à deux coalitions possibles. Par contre, il n'y a qu'au sein d'un régime à séparation des pouvoirs que peut s'observer un conlit à l'echelon local.*

Remarque 5.3. *Un conflit structurel vertical peut s'observer entre le Gouvernement central et un gouveneur territorial que le régime soit à séparation souple ou ferme des pouvoirs.*

Nous avons donc besoin de déterminer la probabilité d'occurence d'un paradoxe du référendum pour une division du corps électoral en c circonscriptions (conflit structurel à l'echelon national d'un état unitaire à séparation ferme des

	État unitaire	État fédéral
Séparation souple des pouvoirs	G_c/G_t	G_c/G_t CdP/S
Séparation ferme des pouvoirs	G_c/P_c G_c/G_t G_t/P_t	$G_c/(CdP,S)$ $CdP/(G_c,S)$ $S/(G_c,CdP)$ G_c/G_t G_t/P_t

TABLE 5.1 – Représentation des conflits structurels possibles selon les types de régimes et d'état

pouvoirs) et en $c.c_k$ circonscriptions (conflit structurel à l'echelon national d'un état fédéral à séparation ferme des pouvoirs entre le Gouvernement et le Sénat). Nous avons également besoin de connaître la probabilité de conflit entre une division en c circonscriptions nationales et $c.c_k$ circonscriptions territoriales. Pour cela nous reprenons les définitions du chapitre 3 relatives aux conflits, notamment la définition 3.6 applicable entre le Gouvernement (ou le gouverneur si l'on se place à l'échelon territorial) élu par l'ensemble des électeurs et le Parlement composé de députés élus dans leurs circonscriptions respectives. Le tableau 5.1 résume les types possibles de conflits structurels selon la forme du régime et l'organisation verticale de l'état.

Nous avons donc à définir six conflits structurels possibles, sachant que seul le conflit G_c/G_t est une possibilité commune aux quatre archictures, même si sa stucture diffère selon l'architecture : le Gouvernment central et le Gouverneur territorial sont issus de leurs parlements en séparation souple des pouvoirs, tandis qu'ils sont directement issus des votes nationaux et territoriaux en séparation ferme des pouvoirs. A ce propos il y a deux types de conflit possible en réalité : le conflit entre le Gouvernement central et un Gouverneur territorial, et le conflit entre le Gouvernement central et la majorité des gouverneurs territoriaux. Dans la mesure où le premier type de conflit est très courant, à moins qu'un parti politique ne soit à la fois majoritaire dans les circonscriptions nationales et dans les circonscriptions des collectivités territoriales, nous ne traiterons que le second type.

5.3.2 Simulation théorique

Nous reprenons le cas d'une population à $n = 27$ électeurs traité au chapitre 3, dans le tableau 3.2 de la page 72, sur lequel nous appliquons un premier découpage en $c = 3$ circonscriptions nationales de tailles respectives identiques $c_j = 9 \; \forall j \in [1, 3]$, correspondant également au périmètre des collectivités territoriales. On applique à l'intérieur de chacune des collectivités territoriales un découpage en $c_k = 3$ circonscriptions territoriales, de sorte qu'au niveau global il y ait $c.c_k = 9$ circonscriptions territoriales. Ainsi nous pouvons mesurer les différents conflits possibles sur les quatre architectures en jeu et classer la contribution de chaque type au sein de chaque architecture. Nous avons avons donc généré les 2^{27} situations possibles comportées par cet univers.

Nous savons par construction qu'un État unitaire à séparation souple des pouvoirs ne comprend qu'un seul type de conflit structurel possible, par construction lorsque le Gouvernement central et la majorité des gouverneurs territoriaux sont de tendances politiques différentes. Cela revient donc à compter le nombre de situations où le vote des 3 circonscriptions nationales différent de celui des majorités des 3 parlements territoriaux. Par construction nous savons que cet effectif correspond éxactement au nombre des situations de conflits entre le la Chambre des Députés et le Sénat d'un État fédéral à séparation souple des pouvoirs, puisque faisant intervenir les mêmes mécanismes : le Gouvernement central est de la même couleur politique que le Parlement central, qui est la chambre des Députés dans un état fédéral, tandis que chaque gouverneurt territorial est de la même couleur politique que son Parlement territorial et représentent sa collectivité au Sénat, où la majorité est par conséquent celle des gouverneurs territoriaux. Les principales différences entre l'État unitaire à séparation souple des pouvoirs et l'État fédéral à séparation souple des pouvoirs sont pour le premier l'absence de conflit entre la Chambre des Députés et le Sénat pouvant retarder, voir bloquer la loi si aucune chambre ne se voit accorder le droit de décidé en cas de divergence, et la possibilité pour le Gouvernement central d'imposer ses décisions, juridiquement supérieures, aux gouverneurs territoriaux. Le tableau 5.2, à la page 176, restitue les probabilités mesurées selon la forme du régime et l'organisation verticale de l'état.

Dans le cas d'un état unitaire à séparation ferme des pouvoirs, il y a trois types possibles de conflits dont nous avons mesuré la probabilité d'occurence dans le tableau 5.2 : un conflit entre le Gouvernement central et le Parlement central $(0, 1433731914)$, un conflit entre le Gouvernement central et les Gouverneurs territoriaux $(0, 1433731914)$ et un conflit entre les Gouverneurs territoriaux et leurs Parlements territoriaux $(0, 0310245752)$. Les deux premiers types sont structurellement identiques, les députés et les gouverneurs territoriaux étant élus dans les même circonscription avec le même vote : ces conflits se produisant donc systématiquément ensemble, nous en traitons un pour étudier les deux. Nous avons donc deux types de conflit en réalité : celui entre le Gouvernement central et son Parlement central et celui entre les Gouverneurs territoriaux et leurs Parlements territoriaux. Une sommation de ces deux probabilités donnerait $0, 1743977666$ bien supérieure à la probabilité globale de 0.1701612175 mesurée pour ce cas. Une analyse plus fine révèle que chacune de ces deux cas comportent en fait un

	État unitaire		État fédéral	
	Type de conflit	Probabilité	Type de conflit	Probabilité
Séparation souple des pouvoirs	G_c/G_t	$0,1426908374$	G_c/G_t	$0,1426908374$
			CdP/S	$0,1426908374$
Total		$0,1426908374$		$0,1426908374$
Séparation ferme des pouvoirs	G_c/P_c	$0,1433731914$	$G_c/(CdP,S)$	$0,0978502035$
	G_c/G_t	$0,1433731914$	$CdP/(G_c,S)$	$0,0455229878$
	G_t/P_t	$0,0310245752$	$S/(G_c,CdP)$	$0,0971678495$
			G_c/G_t	$0,1433731914$
			G_t/P_t	$0,0310245752$
Total		$0,1701612175$		$0,2554667294$

TABLE 5.2 – Représentation des probabilités des conflits structurels possibles selon les types de régimes et d'état

	G_c/P_c et G_c/G_t	G_t/P_t	Total
(G_c/P_t) et (G_c, G_t)	$0,1391366422$		$0,1391366422$
(G_c/P_t) et (G_c/G_t)	$0,0042365491$	$0,0042365491$	$0,0042365491$
(G_c, P_t) et (G_c/G_t)		$0,0267880261$	$0,0267880261$
Total	$0,1433731914$	$0,0310245752$	$0,1701612175$

Table 5.3 – Décomposition des probabilités des différents conflits structurels possibles dans un état unitaire à séparation ferme des pouvoirs

situation commune au deux, c'est-à-dire lorsque les deux conflits se produisent simulanément ($0,0042365491$). Nous avons indiqué dans le tableau 5.3, à la page 177, l'ensemble des contributions des situations aux cas possibles de conflit structurels.

Dans le cas d'un état fédéral à séparation ferme des pouvoirs, il y a cinq types de conflits dont nous avons reporté à chaque fois la probabilité d'occurence dans le tableau 5.2. Si l'on sommait ces probabilités, cela donnerait $0,4149388075$ qui est différente de la probabilité globale de $0,2554667294$ mesurée pour ce cas. Cela tient au fait que les conflits struturels ne sont pas exclusifs les uns des autres et peuvent se produire simultanément. Ainsi, le conflit structurel entre le Gouvernement central d'une tendance politique et la Chambre des Députés et le Sénat tous les deux de l'autre tendance politique à une probabilité de $0,0978502035$. Cette situation fait également partie de celle amenant à un conflit structurel entre le Gouvernement central et la majorité des gouverneurs territoriaux, dont la probabilité d'occurence est de $0,1433731914$ et comprend également deux autres situations de conflit structurels : une Chambre des Députés à la majorité politique différente de celle du Gouvernement central et du Sénat avec majorité des gouverneurs territoriaux confrontés à un parlement territorial de tendance politique différente (soit une probabilité d'occurence de 0.0042365491) ou concordante ($0,0412864387$). Ces deux situations sont faciles à illustrer.

Prenons la première et supposons que les scores globaux des partis A et B soient respectivement de 14 et 13 votes : ainsi le parti A domine le parti B lorsque le vote est global et remporte le contrôle du Gouvernement central. Supposons que les scores à l'intérieur des circonscriptions soient les suivants : le parti B remporte les deux premières circonscriptions par un score de 5 voix sur 9, tandis que le parti A remporte la dernière circonscription par un score de 6 voix sur

9. Le résultat est que le parti B a remporté la majorité des circonscriptions, et donc le contrôle de la Chambre des Députés, ainsi que la majorité des Gouverneurs territoriaux. Supposons enfin que les scores dans les circonscriptions des collectivités territoriales soient les suivants :

- le parti A remporte 2 circonscriptions, avec une majorité de 2 voix sur 3 à chaque fois, contre 1 seule pour le parti B, avec une majorité de 3 voix sur 3 dans celle-ci, dans la première collectivité
- le parti A remporte 2 circonscriptions, avec une majorité de 2 voix sur 3 à chaque fois, contre 1 seule pour le parti B, avec une majorité de 3 voix sur 3 dans celle-ci, dans la seconde collectivité
- le parti A remporte 2 circonscriptions, avec une majorité de 2 voix sur 3 à chaque fois, contre 1 seule pour le parti B, avec une majorité de 2 voix sur 3 dans celle-ci, dans la troisième collectivité

Le parti A obtient ainsi le contrôle des trois parlements territoriaux, générant une majorité de collectivités où le Gouverneur et le Parlement sont de tendances politiques contraires, ainsi que du Sénat.

La seconde situation s'obtient en modifiant simplement les scores obtenus dans les trois circonscriptions de la première collectivité territoriale en laissant inchangé les scores au niveau de celle-ci (c'est-à-dire B vainqueur par 5 voix sur 9) : ainsi le parti B obtient 2 circonscriptions, avec une majorité de 2 voix sur 3 à chaque fois, contre 1 seule pour le parti A, avec une majorité de 2 voix sur 3 dans celle-ci. Au final le parti A conserve le contrôle du Sénat (par 2 sièges contre 1) et il y a désormais une majorité de collectivités où le Gouverneur et le Parlement sont de tendances politiques identiques. Nous avons indiqué dans le tableau 5.4, à la page 179, l'ensemble des contributions des probabilités des différents conflits structurels possibles dans ce cas.

	$G_c/(CdP,S)$	$CdP/(G_c,S)$	$S/(G_c,CdP)$	G_c/G_t	G_t/P_t	Total
$G_c/(CdP,S)$	$0,0978502035$			$0,0978502035$		$0,0978502035$
$CdP/(G_c,S)$ et G_c/G_t		$0,0042365491$		$0,0042365491$	$0,0042365491$	$0,0042365491$
$CdP/(G_c,S)$ et (G_c,G_t)		$0,0412864387$		$0,0412864387$		$0,0412864387$
$S/(G_c,CdP)$ et G_c/G_t			$0,0118623376$		$0,0118623376$	$0,0118623376$
$S/(G_c,CdP)$ et (G_c,G_t)			$0,085305512$			$0,085305512$
(G_c,CdP,S) et (G_c,G_t)					$0,0149256885$	$0,0149256885$
Total	$0,0978502035$	$0,0455229878$	$0,0971678495$	$0,1433731914$	$0,0310245752$	$0,2554667294$

TABLE 5.4 – Décomposition des probabilités des différents conflits structurels possibles dans un état fédéral à séparation ferme des pouvoirs

5.3.3 Synthèse des résultats

Malgré la petite taille de la population de notre exemple théorique ($n = 27$ électeurs), les résultats obtenus viennent appuyer l'hypothèse d'un effet déterminant de l'architecture étatique dans l'émmergence de conflits paralysant son fonctionnement, autrement les conflits de blocage sont essentiellement endogènes. On le constate, par exemple, en reprenant les résultats du tableau 5.2, à la page 176, où il ressort que les blocages au sein d'un régime à séparation souple des pouvoirs, bien qu'ayant exactement la même probabilité de se produire, n'ont pas du tout les mêmes conséquences : en effet dans un état unitaire le seul conflit possible réside entre entre le Gouvernement central et les Gouvernements territoriaux au moment de la mis en application des lois de chacun des deux niveaux, et est surmontable de par la prééminence du droit central sur le droit territorial d'après la hiérarchie des normes, tandis que dans un état fédéral il existe un risque de conflit également entre la Chambre des Députés et le Sénat (où d'après la définition 5.3 siègent les gouverneurs territoriaux), qui peut bloquer, en l'absence d'une règle de priorité entre les deux chambres, le processus législatif de l'état central. Ainsi bien que la probabilité soit strictement la même (c'est-à-dire de $0,1426908374$), ses effets sont diamétralement opposés puisque dans le premier cas, le Gouvernement central peut passer outre l'opposition des Gouvernements territoriaux, tandis que dans le second cas, selon la nature de l'état fédéral, ces derniers peuvent avoir les moyens juridiques de bloquer les décrets d'application centraux : ainsi en 1989, le land de Bavière, rejoint dans sa démarche par huit länder, avait intenté une action en justice contre l'État fédéral sur la transposition de la directive du Conseil de la Communauté des États Européens n°552 du 3 octobre 1989 dite *«Télévision transfrontalière»* (directive 89/552/CEE)[38]. Par ailleurs, toujours dans le cas de l'Allemagne, l'accord du Bundesrat est indispensable dès qu'une loi concerne une des compétences des Landër, rendant insumontable un désaccord avec le Bundestag[39]. Ainsi, dans le cadre d'un régime à séparation souple des pouvoirs, on peut en conclure qu'il existe une probabilité réelle que l'action du processus législatif de l'état central, lorsque le pays est fédéral, soit bloqué dans environ $14,27\%$ des cas et que les lois fédérales soient empêchées d'entrer en application dans les mêmes proportions, alors que dans le cadre d'un état unitaire le même désaccord avec les collectivités territoriales, bien qu'ayant la même probabilité de se réaliser, ne peut bloquer le processus de mise en application (du fait de l'absence d'une seconde chambre pour les représenter).

Il semblerait que dans le cas d'un régime à séparation ferme des pouvoirs, pour une organisation identique de l'État (unitaire ou fédéral), on observe une probablité de conflit nettement plus important que dans le cas du régime à séparation souple des pouvoirs : au risque de conflit de $0,1426908374$, que le pays soit unitaire ou fédéral, succède une probablité de conflit de $0,1701612175$ lorsque

38. Ce litige fut tranché par la Cour constitutionnelle fédérale en faveur de l'État fédéral dans son arrêt du 22 mars 1995.

39. Les alinéas 3 et 4 de l'article 77 de la Loi fondamentale, n'autorisent le Bundestag à passé outre l'opposition du Bundesrat que pour les lois ne recquiérant pas l'approbation de ce dernier, à la majorité absolue, en cas de rejet à cette seuil, et à la majorité des deux tiers, en cas de rejet à cette majorité par le Bundesrat.

l'état est unitaire et de $0,2554667294$ lorsqu'il est fédéral.

Ainsi dans le premier cas, s'ajoute au risque surmontable, du fait du caractère unitaire de l'État, de conflit ($14,34\%$) entre le Gouvernement central et les gouvernements territoriaux, un risque identique de conflit entre le Gouvernement central et le Parlement central[40], du fait que députés centraux et gouverneurs territoriaux sont issues des mêmes périmètres d'élection (la circonscription est la collectivité territorial), pouvant aboutir à un blocage complet du processus législatif central. Un conflit de nature similaire apparaît également dans le processus législatif des collectivités territoriales entre un gouvernement territorial et son parlement territorial et son risque est de $3,10\%$. Ces deux types de conflit peuvent se produire simultanément, comme on peut le constater dans le tableau 5.3 de la page 177, avec une probabilité de $0,42\%$, tandis que le premier apparît seul avec un risque de 1391% et le second avec un risque $2,68\%$.

Dans le second cas, tandis que les risques de conflit entre le Gouvernement central et les gouvernements territoriaux ($14,34\%$) et entre ceux-ci et leurs parlements territoriaux ($3,10\%$) restent les mêmes que lorsque l'état est unitaire (à la différence que dans ce cas l'État central peut ne pas avoir les moyens d'imposer sa volonté aux collectivités territoriales[41]), l'existence d'une seconde chambre triple les types de conflits possibles au niveau de l'État central : en effet, dans un état fédéral, au conflit entre le Gouvernement central et le Parlement central se substitue le conflit entre le Gouvernement central d'une part et la Chambre des Députés et le Sénat d'autre part ($9,79\%$)[42], le conflit entre la Chambre des Députés d'une part et le Gouvernement central et le Sénat d'autre part ($4,55\%$)[43] et le conflit entre le Sénat d'une part et le Gouvernement central et la Chambre des Députés d'autre part ($9,72\%$)[44], créant autant de blocages possibles du processus législatif de l'État central. A l'instar de la situation en état unitaire, ces

40. Du 12 mars au 14 mai 2004, le Président de la République de Corée (Corée du Sud) Roh Moo-hyun fut suspendu de ses fonctions par l'Assemblée nationale (*Gukhoe*), dont la majorité des membres était politiquement oppoée au Chef de l'État.

41. Lors de la promulgation, le 23 mars 2010, du *Patient Protection and Affordable Care Act* par le président Barack Obama, treize États fédérés américains (l'Alabama, la Caroline du Sud, le Colorado, le Dakota du Sud, la Floride, l'Idaho, la Louisianne, le Michigan, le Nebraska, la Pennsylvanie, le Texas, l'Utah, la Virginie), par le biais de leurs ministres de la justice (*Attorney general*) ont déposé des recours en annulation auprès de la justice fédéral pour abus de pouvoir de l'État fédérale.

42. L'arrêt des activités gouvernementales aux États-Unis du 15 décembre 1995 au janvier 1996 est issue de l'impossibilité d'obtenir un compromis acceptable sur le budget fédéral entre les élus républicains, majoritaire dans les deux chambres du Congrès, et le président démocrate Bill clinton. Les procédures de destitution à l'encontre des président Andrew Johnson (1868), Richard Nixon (1974) et Bill Clinton (1998), furent engagés à chaque fois par unr Chambre des Représentants et un Sénat de tendance politique oppposée à celle de l'occupant de la Maison Blanche.

43. L'absence d'accord sur le budget fédéral entre la majorité républicaine de la Chambre des Représentants d'une part et le Président démocrate et la majorité démocrate du Sénat d'autre part provoqua l'arrêt des activités gouvernementales aux États-Unis du 30 septembre au 17 octobre 2013.

44. L'histoire américaine comprend deux périodes où le Sénat fut d'une couleur politique différente de la Chambre des Représentants et de la Présidence : du 4 mars 1885 au 4 mars 1889 et du juin 2001 au 3 janvier 2003. Cela mena à des blocages dans la première de ces périodes notamment lorsque lorsque la majorité républicaine du Sénat refusa d'adopter le projet de loi *Mills* de réduction des droits de douane de 47% à 40% soutenu par le Président Groover Cleveland et adopté par la Chambre des Représentants.

types de conflits peuvent se produire simultanément, comme on peut le constater dans le tableau 5.4 de la page 179, où le conflit entre le Gouvernement central et les deux chambres ($9,76\%$) se produit en parallèle du conflit entre le Gouvernement central et les gouvernements territoriaux ($9,76\%$), où la Chambre des Députés d'une part et le Gouvernement central et le Sénat d'autre part ($4,56\%$) se décomposent en deux risques, le premier (0,42%) avec un conflit simultanée entre le Gouvernement central et les gouvernements territoriaux d'une part et ceux-ci avec leurs parlements territoriaux d'autre part et le second ($4,13\%$), uniquement simultanément avec le conflit entre le Gouvernement central et les gouvernements territoriaux, où le Sénat d'une part et le Gouvernement central et la Chambre des Députés d'autre part ($9,72\%$) se décomposent en deux risques, le premier ($1,19\%$) simultanément avec le conflit entre le Gouvernement central et les gouvernements territoriaux le second indépendamment ($8,53\%$), et les Gouvernements territoriaux avec leurs parlements territoriaux indépendamment de tous les autres conflits possibles ($1,49\%$).

5.4 Discussion sur le rôle de l'offre politique

Si démocratie ne ne résume pas qu'à l'élection, il faut toutefois que l'électeur puisse disposer d'un choix effectif cohérent, traduit par l'offre politique. Celle-ci peut se baser sur des clivages idéologiques très diverses, se focalisant sur l'axe idéologique gauche/droite en Europe, sur l'axe droits des états contre pouvoir de l'état fédéral aux États-Unis ou sur le problème du nationalisem Hindou et du dépassement du système des castes en Inde. Par ailleurs les partis politiques, si ils sont universellement présent dans toutes les démocraties, ont des formes et des rôles pouvant très fortement différer d'un pays à l'autre, voir dans le temps à l'intérieur d'un même pays. Nous avons exposé toutes ces différences dans le chapitre 1 portant sur la Revue de littérature, dans la sous-section 1.2.1 traitant de l'offre programmatique des partis politiques. Toutefois nous pouvons faire néanmoins plusieurs remarques sur le fonctionnement et surtout l'organisation des partis politiques selon la forme du système politique. En effet, en reprenant les quatre catégorie d'état développé à la section 5.2, on observe des différences d'organisation et de couverture de spectre politique.

Pour illustrer le cas d'un état unitaire à séparation souple des pouvoirs nous allons prendre les cas de l'Islande, du Portugal et de la Nouvelle Zélande afin de tenir compte de toutes les déclinaisons possibles. Dans le cas de l'Islande les candidats à la députation sont choisie dans le cadre d'un système d'élections primaires ouvertes à l'ensemble des sympathisants des partis politiques, la direction des partis politiques étant exclu de la décision final. Au Portugal, les chefs des principaux partis politiques (PS, PSD et le CDS-PP) sont désignés par l'ensemble des adhérents de leur parti. En Nouvelle-Zélande, les chefs des principaux partis politiques (NZLP et le NZNP) sont choisis par les députés, que soit totalement (cas du NZNP où la fonction est séparé de celle de président du parti) ou partiellement (cas du NZLP où les adhérents sont associés à ce choix depuis 2012). Dans les trois cas toutefois, la structure partisane est solide et la loyauté des membres du parti est forte. En fait, la vie politique est organisé autours du parlement du fait faible poids des pouvoirs locaux.

La Corée du Sud illustrera le fonctionnement des partis politiques dans le cadre d'un état unitaire à séparation ferme des pouvoirs. Les deux principaux partis politiques sud-coréen sont le parti Saenuri, soutenant la présidente Park Geun-hye, et le parti Minju. Il existe également deux autres partis minoritaires : le parti du Peuple (issue d'une scission du parti Minju en 2016) et le parti de la Justice. Ces partis politiques sont très récent (aucun parti politique actuel n'existait formellement avant l'an 2000) et leur organisation est centrée autours de leur chef, la présidente pour le parti au pouvoir et les candidats à la présidence pour les partis d'opposition. Il apparaît ainsi que ce type de régime entraîne dans le fonctionnement de parti politique une prééminence totale à la personne du président (ou du candidat potentiel à la présidence pour les autres partis), donnant à celle-ci une prépondérance totale dans l'ensemble des décisions stratégiques du parti, en particulier les candidatures aux élections législatives où aux élections des grandes villes (Séoul, Busan, Incheon). Par contre une autonomie relativement large semble exister aux niveaux inférieurs.

Pour illustrer la forme des partis politiques dans le cas d'un état fédéral à séparation souple des pouvoirs, prenons le cas de l'Australie. Les deux principaux partis politiques australiens sont le parti travailliste et le parti libéral, en coalition avec le parti national. Du fait de la nature fédéral du pays, les partis politiques au niveau national n'interfèrent normalement pas avec leurs composantes fédés du moment que celles-ci respectent, ou ne s'opposent pas, les grandes lignes de l'institution au niveau national. D'autre part la nature parlementaire du régime confère un poid déterminant aux députés. C'est ainsi que les chefs du parti travailliste (jusqu'en 2013[45]), du parti libéral et du parti national sont désignés par leurs députés : de fait le Premier ministre étant automatiquement le chef de la coalition la plus importante (travailliste ou libéra-national).

Prenons le cas des États-Unis pour illustrer un état fédéral à séparation ferme des pouvoirs. Ainsi les deux principaux partis politiques de ce pays, le parti républicain et le parti démocrate, couvrent un spectre électoral tellement large que la frontière idéologique peut être difficile à établir et les changements d'affiliation partisanne des élus et des électeurs un phénomène très courant : ainsi en 1964 le sénateur Strom Thurmond quitta le parti démocrate pour rejoindre les républicains, tandis qu'en 2001 le sénateur James Jeffords quitta la majorité républicaine pour voter aux côtés des démocrates. Il est même fréquent que le Cabinet des États-Unis comprenne des membres du parti opposé au Président en place : les démocrates Mortimer L. Downey (2001) et Norman Mineta (2001-2006) ont travaillé dans le gouvernement de Georges W. Bush (2001-2009), tandis que les républicains Chuck Hagel (2013-2015), Ray LaHood (2009-2013) et Robert A. McDonald (2014-2016) ont servi sous l'administration de Barack Obama (2009-2017). En fait, l'appartenance se résume uniquement à une déclaration personnelle : c'est ainsi que Donald Trump est devenu le candidat officiel du parti républicain (dont il fut membre de 1987 à 1999) pour l'élection présidentielle de 2016 après avoir été démocrate de 2001 à 2009 (il le fut également avant 1987). Dans leur fonctionnement les deux partis politiques, ont abandonné aux

45. Lors de l'*Australian Labor Party leadership Election* des 10 et 13 octobre 2013, Bill Shorten remporta la victoire sur Anthony Albanese avec 55 voix parmi les députés (contre 31 pour son adversaire) et 12196 voix parmi les adhérents (contre 18230 pour son adversaire), du fait que les députés ont le mm̂e poid que les adhérents dans la décision finale.

systèmes des élections primaires les choix à leurs candidats pour la plupart des élections nationales (président, représentants et sénateur) et certaines élections locales (gouverneur, maire de certaines grandes villes).

5.5 Conclusion

Nous avons réalisé à partir de la double dualité entre état fédéral ou unitaire d'une part et régime à séparation souple ou ferme des pouvoirs d'autre part une classification permettant de décrire le fonctionnement de la majeure partie des pays démocratiques existants. En utilisant le mécanisme du paradoxe du féférendum, sous la double hypothèse d'indifférence des électeurs aux options proposées et d'homogénéité des effectifs de chaque circonscription électorale étudié, nous avons pu mesurer pour un petit effectif la sensibilité des institutions aux conflits politiques. Il ressort de cette simulation que l'architecture institutionnelle ayant la plus faible probabilité d'être paralysée par un conflit politique est celle de l'État unitaire à séparation souple des pouvoirs, où la probabilité de blocage du processus de décision à chaque niveau (central ou territorial) est nulle pour ne laisser substituer qu'une probabilité de $14,27\%$ de conflit entre l'état central et les composantes territoriales au moment de la mise en application des décisions de chaque échelon : ce conflit, sous le régime juridique de l'état unitaire ne peut conduire à un blocage du fait de la suprématie de l'échelon central sur l'échelon territorial, sauf en cas de dispositions constitutionnelles contraires. Le passage à un état fédéral conservant la séparation souple de pouvoirs suit imméditement du fait que sa probabilité réelle de blocage est effectivement de $14,27\%$. Viennent ensuite l'état unitaire à séparation ferme des pouvoirs dont la probabilité rélle de blocage, quelque soit l'échelon, est de $17,02\%$, et enfin son symétrique organisé en état fédéral dont le risque de paralysie s'élève à $25,55\%$.

Si l'existence de sources différentes de légtimité permet l'existence d'un risque «incompréssible» de conflit structurel, on constate que si celle-ci est unique, ce dernier devient alors nul. Cette situation ne peut se rencontrer que dans le cadre de l'état unitaire à séparation souples des pouvoirs en l'absence de collectivités territoriales ou avec un parlement centrale composé uniquement de représentants de ces dernières. Si la première hypotèse est complètement irréaliste du fait de l'hétérogénéité des territoires pouvant composer un état, et par conséquant nécessitant une différenciation de son action, la seconde peut toutefois être moins absurde qu'elle peut apparaître. En effet, une désignation indirecte ne peut poser problème que lorsque son résultat diffère du choix global, c'est-à-dire lorsque se concrétise un paradoxe du référendum à deux échelons : ce risque ici s'élève à $19,5\%$. Si on le compare à celui du paradoxe du référendum à un échelon avec trois circonscriptions ($15,60\%$), bien que plus élevé il reste, à cette échelle, relativement tolérable, d'un point de vue politique, au regard de ses avantages : concordance politique totale entre l'État central et ses collectivités territoriales et absence totale de blocage au sein des processus de décision politique. Aujourd'hui, aucun état démocratique ne fonctionne avec cette structure du fait de l'a priori négatif apposé à la désignation indirecte, considéré comme ayant insuffisament de légitimité démocratique. Toutefois l'excès de légitimité ne peut être considéré comme une garantie d'acceptabilité politique : à titre de comparaison, il faut rappeler que depuis 1995 aucun président de république française, bien qu'ayant tous été élus à la majorité absolue des suffrages exprimés, n'a réussi à conserver plus d'une année la confiance de ses électeurs (Jacques Chirac et François Hollande n'ont conservé une majorité d'opinions favorables que cinq mois contre neuf pour Nicolas Sarkozy) [46]. Si diminuer la légitimité démocratique des décideurs politiques peut conduire à un fonctionnement plus efficace des institutions, qui reste la finalité ainsi que la raison d'être des démocraties modernes, et si l'on ajoute à cela que ces derniers ne pourront se maintenir que si ils parviennent à faire la preuve de leurs efficiences, cela peut au final constituer un coût politique raisonnablement acceptable. Une piste à travailler serait d'étudier le poid de la structuration de l'offre politique dans le degrès de cohérence et donc de stabilité des institutions. Une réflexion en ce sens est proposée en Annexe A.2, page 218.

46. Côte de popularités des *Présidents de la République et Premiers ministres depuis 1978* mesurée par TNS-SOFRES.

Conclusion générale

Problématique de la thèse

La mise en application des principes généraux définissant une démocratie conduit à l'apparitionde multiples paradoxes et conflits, inhérents au système. Ces anomalies sont structurelles et générées par système démocratique, mais si tous les types de paradoxes ne s'observent pas dans les systêmes démocratiques : ainsi le paradoxe d'Anscombes est liéé aux systèmes reposant sur une consultation directe des citoyens, qualifiées de démocraties directes, tandis que le paradoxe d'Ostrogorski est inhérent aux démocraties représentatives. Si ces paradoxes sont inévitables, leurs fr'equence peut différer selon les choix structurelles initiés pour organiser le système. Les modèles développés en théorie du social ont permis une étude fine de ces différents phénomènes amenant ainsi une meilleure comphrésion de leur mécanique et pouvant permettre d'identifier des solutions pour mieux les contrôler. Ainsi les paradoxes liéés à la construction du choix de l'électeur, celui d'Ostrogorski, mettent en lumière la complexité du vote, ainsi que le poid de l'appartenance politique dans sa rationalisation et sa structuration : déterminer leur possibilité d'existence et mesurer leur fréquence sont des enjeux primordiaux. Par ailleurs, il semble apparaître que les paradoxes d'Ostrogorki et du référendum reposent sur des logiques indépendantes, permettant d'envisager leur existence simultanée. Pouvoir déterminer leur amplitude et leur fréquence pour des situations précises, de taille de population, de type de découpage du corps électoral et également de comportement des électeurs, constituen les enjeux de cette thèse : si la probabilité de conflit diffère, pour une population donnée, entre deux possibilités de découpage électoral, pouvoir les mesurer et informer les décideurs politiques afin que soit retenu le scénario minimisant ce risque peut constituer un moyen de renforcer, ou du moins d'éviter l'affaiblissement, de la démocratie.

Principales contributions de la thèse

Cette thèse a eu pour objet principal l'étude du paradoxe du référendum, ainsi que celle d'un cas très particulier du paradoxe d'Ostrogorski et des conflits inhérents à l'organisation des pouvoirs politiques d'un état démocratique. Nous avons démontrer que le paradoxe d'Ostrogorski peut exister sur deux axes programmatiques en suivant des critères cohérents avec la réalité observé, et nous avons pu être en mesure de déterminer sa fréquence exacte pour une taille donnée du corps électoral. Nous avons également exploré une possibilité de l'éviter en modifiant le processus de sélection de l'électeur, impliquant de révéler ses préférences et d'indiquer ses critères de discrimination programmatique. Nous avons développé des formule permettant ainsi de calculer la probabilité exacte du paradoxe du réferendum sous l'hypothèse de la culture neutre avec un découpage plusieurs circonscriptions taille identique, autorisant ainsi pour des valeurs finies du corps électoral la comparaison des valeurs de proabilité d'occurence du paradoxe du référendum, ce que ne permettent pas de manière satisfaisante les modèles classiques. L'abolition de l'égalité de taille des circonscriptions à ouvert la possibilité d'étudier la zone du paradoxe du référendum qui semble exister entre deux bornes précises pour le cas à trois circonscriptions. Les résultats des valeurs de conflit mesurées dans les chapitres 3 et 4 ont par ailleurs pu être utilisé pour étudier la stabilité des institutions selon qu'elles soient en régime souple ou ferme de séparation des pouvoirs et en organisation de l'état unitaire ou fédérale, laissant ressortir dans les résultats préliminaires des écarts suffisament importants pour les différencier. Il en ressort que les conflits sont endogènes et générés en grande partie par l'architecture institutionnelle de l'état. L'histoire politique et institutionnelle tend à montrer que ces situations ne sont pas nécessairement des conséquences innattendues, mais au contraire un effet attendu ou recherché, en particulier dans le cas des États-Unis où d'importants courant de pensée ont théorisé la possibilité de rendre l'État fédéral impuissant. Une conséquence est donc qu'il peut être possible de qualibrer l'architecture institutionnelle afin de réduire au minimum la fréquence de ces conflits. La question de savoir si ils peuvent être complètement éliminés ou pas, et si non, dans quelle mesure, peut faire l'objet de recherches ultérieures.

Prolongement vers un modèle de conflits de légitimité avec division homogène d'un corps électoral partiellement indiférent aux options proposées

Enjeux

L'indifférence des préférences individuelles des électeur est l'hypothèse fondamentale des modèles sous *«Impartial Culture»*. Supposer que les électeurs n'ont aucune préférence entre les options proposées, c'est-à-dire les candidats en lice lors d'un scrutin, constitue une hypothèse très forte ne correspondant en fait pas à la réalité observée. En effet, les résultats des élections reposant sur un découpage du corps électoral ainsi réparti en plusieurs circonscriptions tendent à indiquer que le mécanisme d'alternance politique ne concerne en pratique qu'une minorité des circonscriptions à pourvoir lors d'un scrutin : à titre d'exemple, sur les cinq élections générales à la Chambre des Représentants des États-Unis, ayant eut lieu au cours de la période s'étendant de 2000 à 2010, il n'y eut au total que 121 alternances sur 2175 élections, soit une moyenne de $24,2$ alternances par élection générale pour un total de 435 sièges mis en jeu à chaque fois (soit une probabilité moyenne d'alternance, pour la décennie en question, de $5,56\%$ par circonscription). Ainsi lors des élections à la Chambre des Représentants des États-Unis du mardi 2 novembre 2010, plus de la moitié des 435 sièges soumis au renouvellement ont été remportés avec une marge supérieure à 25% (les districts ayant été remportés avec une marge de voix inférieure à 25% se répartissent entre 39 districts ayant basculé avec un écart de voix inférieur à 5%, 46 avec un écart de voix compris entre 5% et 10%, 49 avec un écart de voix compris entre 10% et 15%, 24 avec un écart de voix compris entre 15% et 20% et 31 avec un écart de voix compris entre 20% et 25%) tandis que sur les 67 districts ayant alterné d'un parti à l'autre, plus de la moitié, c'est-à-dire 37 sièges, l'ont été avec un écart de voix inférieur à 10% (15 districts ayant basculé avec un écart de voix inférieur à 5% contre 22 avec un écart de voix compris entre 5% et 10%). Il est même communément admis que sur l'ensemble des circonscriptions des Représentants, à peine une soixantaine sont réellement compétitives [47]. Dans les faits, à la suite de chaque recensement décennal, les circonscriptions américaines sont redécoupées par les législatures de chacun des états fédérés, celles-ci réalisant fréquement des découpages plus favorables à un parti qu'à l'autre[76], selon qu'elles soient dominées par les Démocrates (Californie) ou les Républicains (Texas). À ce titre le découpage de certaines circonscriptions est assez insolite comme par exemple le premier district de l'État de Caroline du sud, composé de morceaux de territoires côtiers séparés par l'Océan Atlantique, le premier district de l'État de la Louisianne, composé de deux blocs séparés par le second district de ce même état, ou le dixième district de l'État de New York, composés de l'*Upper West Side*, des parties occidentales de *Lower Manhattan* et *Midtown Manhattan* reliées à une partie du compté de Brooklyn uniquement par le tunnel de *Brooklyn-Battery*. Cette pratique, appelée *«gerrymandering»* par les anglo-saxons et s'apparentant en réalité à un *«charcutage électoral»*, est rendue possible par le fait que des proportions très important du corps électoral sont fidèles dans le temps à certaines options (dans ce cas, les partis politiques américains et leurs candidats lors des élections) et qu'il est possible de connaître à l'échelle d'un bureau de vote, la proportion fidèle à chaque parti politique [48]. En pratique, chacun des deux grands partis politique dispose d'une base de données très importante sur l'ensemble des électeurs inscrits sur les listes électorales (*Demzilla* pour les Démocrates et *Voter Vault* pour les Républicains) : ainsi en 2004, les responsables du Parti Républicain disposaient des informations concernant 168 millions d'électeurs, soit 94, 77% des 177265030 électeurs inscrits sur les listes électorales américaines de l'époque (contre des informations sur 166 millions d'électeurs pour les responsables démocrates, soit 93, 65% des électeurs américains inscrits). De ce fait les campagnes électorales dirigées par les deux principaux partis consistent prioritairement à s'assurer de la mobilisation de leurs électorats respectifs avant ensuite de chercher à convaincre les électeurs indépendants. Les partis politiques ne cherchent généralement pas à tenter de capter les électeurs fidélisés de leur concurrent, ce genre de manœuvre nécessitant des conditions trop particulières pour être exploités : ainsi lors de l'élection présidentielle de 1984 Ronald Reagan a réussi à remporter presque 17 millions de voix de plus que son concurrent Walter Mondale, sans toutefois réussir à transposer ce succès au Congrès où ses

47. Ainsi lors de l'élection de 2010, 63 sièges basculèrent des Démocrates aux Républicains contre seulement 4 en sens inverse, soit une probabilité moyenne de 15, 40% d'alternance par circonscription au cours de ce scrutin.

48. Aux Etats-Unis, les électeurs ont la possibilité de se déclarer soit *Démocrate*, soit *Républicain* ou soit *Indépendant* lors de leur inscription sur les listes électorales, qui sont fréquement réalisées par les partis politiques.

adversaires conservèrent une confortable majorité (253 les Démocrates contre 182 Républicains) à la Chambre des Représentants. En effet, si les électeurs démocrates de Ronad Reagan avaient également voté pour les candidats républicains à la Chambre des Représentants, ceux-ci auraient pu s'emparer de 188 sièges tenus par les Démocrates et auraient pu acquérir une majorité de 370 de sièges, n'en laissant que 65 à leurs opposants. Il faut également noter que l'application de cette hypothèse aux élections sénatoriales de cette année aurait pu renforcer de 16 sièges la majorité républicaine au Sénat, permettant aux Républicains, avec 69 élus, de dépasser la majorité qualifiée des deux-tiers nécessaires pour amender la Constitution, terminer une obstruction parlementaire (c'est-à-dire un *filibuster*), ratifier un traité ou destituer un sénateur.

Au moment de procéder au redécoupage des circonscriptions électorales[49], les responsables politiques ont une vision très claire de la répartition géographique des électeurs selon leur affiliation partisanne et créent principalement des circonscriptions politiquement homogènes[50] qui sont en quelque sorte *«sécurisées»*. Ainsi lors des élections à la Chambre des Représentants des États-Unis d'Amérique de 2010, le score moyen réalisé par les candidats vainqueurs dans les circonscriptions n'ayant pas connu d'alternance politique fut de $66,143\%$ (soit un score moyen de $64,144\%$ pour les représentants démocrates et de $68,130\%$ pour les homologues républicains) contre un score moyen réalisé par les candidats dans les circonscriptions ayant connu l'alternance de $53,636\%$ (soit un score moyen de $57,325\%$ pour les Démocrates et de $53,402\%$ pour les Républicains). Cette pratique parfaitement légale a pour conséquence fréquente, selon le découpage opéré, d'amplifier la victoire, ou d'atténuer la défaite, d'un camp par rapport à l'autre. Dans certains cas, le découpage électoral peut même avoir pour conséquence d'inverser le résultat d'une élection : ainsi en fut-il de l'élection à la Chambre des Représentants des États-Unis d'Amérique de 2012 ou, plus récement encore, de l'élection des conseillers départementaux dans le Val de Marne de mars 2015.

Il s'agit d'un phénomène de la théorie du choix social : le paradoxe du référendum. La littérature scientifique l'a initialement traité sous l'hypothèse d'*Impartial Culture*[51], puis ensuite sous celle d'*Anonymous Impartial Culture*[52], en faisant varier les tailles des effectifs, avant de développer des modèles intégrant des données empiriques, les résultats par circonscription de certaines élections affectées par le paradoxe du référendum. Dans les chapitres 3 et 4, nous avons développé une formule de calcul de probabilité exacte d'occurence d'un paradoxe du référendum sous l'hypothèse d'indifférence des électeurs aux

49. Il y en a trois circonscriptions concernées par le redécoupage : les districts des représentants fédéraux, les districts des représentants fédérés (sauf pour le Nebraska qui a une législature monocamérale, appelé *Sénat* depuis 1937) et des sénateurs fédérés.

50. Lors des élections à Chambre des Représentants des États-Unis d'Amérique de 2010, l'écart moyen observé entre les scores des deux candidats arrivés en tête du scrutin était de $10,146\%$ dans les circonscriptions ayant basculé d'un camp à l'autre, contre un écart moyen de $35,041\%$ pour toutes les autres.

51. L'hypothèse IC repose sur l'équiprobabilité de chaque électeur de voter pour une des options proposées.

52. L'hypothèse IAC repose sur l'équiprobabilité des résultats dans chaque circonscription.

options proposées et l'hypothèse d'homogénéité, puis d'hétérogénéité, des effectifs des circonscriptions. Toutefois la question de la mesure de la probabilité de l'occurence du paradoxe sous l'hypothèse que seule une fraction des électeurs sont indifférents aux options proposées, tandis que l'effectif restant se compose d'électeurs fidèles à une option, se pose. Les expériences réelles ponctuellement réalisées à la sortie des bureaux de vote peuvent permettre, sous la condition de la sincérité des réponses données par suffisament d'électeurs, d'estimer cette part, pour chaque candidats en lice à l'occasion de quelques élections, sont très localisées et présentent le risque d'un biais de sélection. Ce constat nous amène à nous poser cette question : quel est l'impact des électeurs fidèles à une option sur l'issue d'un scrutin indirect par circonscription ? Une réponse adéquate consiste à aborder principalement la question de la mesure de la probabilité de conflit dans ce type de configuration et l'impact sur la probabilité d'occurence du paradoxe du référendum selon les scénarios de répartition de ces électeurs fidélisés. En reprenant le principe d'un découpage de la population en trois circonscriptions avec une population supposée finie composée de trois groupes d'individus, un groupe fidèle à chacune des deux options proposées et un groupe d'individus n'ayant aucune préférence entre les options, nous allons étudier les situations possibles de composition de ces trois groupes et leur impact sur la probabilité exacte de probabilité.

Dans cette discussion les circonscriptions sont supposées être de taille parfaitement homogènes, c'est-à-dire d'effectifs identiques d'électeur, dont le nombre n'est pas supposé fini afin d'autoriser des comparaisons de situations, sans toutefois avoir une homogénéité parfaite des individus dans leurs comportements au moment de voter. Le reste de la discussion est composé comme suit. Dans un premier temps, nous présentons des mesures réalisés sur le cas simple d'une population globale de neuf électeurs. Nous introduisons ensuite dans un second le modèle théorique avec les groupes d'électeurs propres à chaque circonscription et nous présentons dans la troisième section les pistes pour déterminer une formule numérique donnant la probabilité exacte d'occurence du paradoxe du référendum selon la configuration choisie des groupes d'électeurs. Finalement, nous concluons l'article à la quatrième section.

Premières mesures

Soit une population N de taille $n = 9$, divisée en trois circonscriptions de taille identique $c = 3$ et soit deux options A et B proposées lors d'une élection. On suppose également que la population se classe en trois catégories d'électeurs : les électeurs fidèles à l'option A, les électeurs fidèles à l'option B et les électeurs n'ayant aucune préférence entre les options A et B. On suppose pour cette dernière catégorie que la probabilié de l'électeur i de choisir l'option A est la même que celle de choisir l'option B (c'est-à-dire $P_i(A) = P_i(B) = \frac{1}{2}$). La question ici est donc celle de la répartition de ces trois catégories. Avant toute chose nous allons faire une hypothèses restrictive sur ces catégories qui est que leurs effectifs ne sont jamais nuls : en effet, si les deux catégories d'électeurs fidèles à une option étaient d'effectifs nuls on serait dans le cas d'une population composée exclusivement d'individus n'ayant aucune préférence entre les options proposées, tandis que si la catégorie des individus sans préférence entre les options était d'effectifs nul, le résultat serait systématiquement le rapport entre les effectifs des deux catégories des électeurs fidélisés. Ainsi nous avons trois catégories, que nous appelons c_e^A, pour la catégorie des électeurs fidèles à l'option A, c_e^B, pour la catégorie des électeurs fidèles à l'option B, et c_e^i, pour la catégorie des électeurs indifférents entre les deux options A et B, dont nous faisons varier les effectifs, $n_{c_e^A}$, $n_{c_e^B}$ et $n_{c_e^i}$, de 1 à 7 individus, de sorte que $n_{c_e^A} = n - n_{c_e^B} - n_{c_e^i}$, $n_{c_e^B} = n - n_{c_e^A} - n_{c_e^i}$ et $n_{c_e^i} = n - n_{c_e^A} - n_{c_e^B}$.

On se retrouve ainsi avec 28 situations que nous représentons dans le tableau 5.5, page 192, où nous avons également indiqué, en plus des effectifs de chacune des trois catégories, le score nécessaire que l'option A (ou B) doit réaliser dans la catégorie c_e^i pour que le paradoxe du référendum soit possible. Nous notons ce score $S_{c_e^i}^A$ (ou $S_{c_e^i}^B$). Nous avons également indiqué le nombre de situations de conflits (ou de paradoxe du référendum), notée n_{cf}, la taille de l'univers des possibilités (ou le nombre total des possibilités), noté n_{U_p}, et la probabilité mesurée de conflit, c'est-à-dire le rapport de n_{cf} sur n_{U_p}. Par construction nous savons que le paradoxe du référendum est impossible dès que $n_{c_e^A} > 5$ ou $n_{c_e^B} > 5$, notée P_{C_f}. En effet, dans ces cas-ci les scores restants sont insuffisants pour que l'option minoritaire puisse être majoritaire au niveau des circonscriptions (il faut gagner deux circonscriptions sur trois, ce qui implique de réaliser un score minimum de 4), ce qui représente 6 situations au total.

Prenons donc la première situation du tableau autorisant l'existence d'un paradoxe du référendum sans qu'aucune des trois catégories $n_{c_e^A}$, $n_{c_e^B}$ et $n_{c_e^i}$ ne soit nulle, c'est-à-dire la situation $(n_{c_e^A}, n_{c_e^B}, n_{c_e^i}) = (5, 1, 3)$. Dans ce cas, représenté par le graphique 5.6, page 193, il n'y a que trois électeurs indifférents aux options proposées, ce qui donne un univers des possibilités de $\binom{n}{n_{c_e^A}} \times \binom{n-n_{c_e^A}}{n_{c_e^B}} \times 2^n_{c_e^i} = \binom{9}{5} \times \binom{4}{1} \times 2^3 = 126.4.8 = 4032$ possibilités, dont une seule permet l'existence du paradoxe, celle où les trois électeurs votent pour B (qui a donc une probabilité de $\frac{1}{8}$). La répartition des électeurs est ici cruciale pour permettre l'occurence du paradoxe : il n'est possible que si trois des cinq électeurs fidèles à l'option A se retrouvent dans la même circonscription tandis que les deux derniers sont chacun affectés dans une des deux circonscriptions restantes.

Afin de mieux visualiser ces résultats, nous les avons représentés dans le graphique 5.5, page 193, sous la forme d'une surface ayant pour base les effectifs d'électeurs ayant une préférence pour l'indifférence en abscisse et le ratio du minimum entre les effectifs des catégories d'électeur fidèle à une option rapporté à la somme des deux catégories d'électeurs n'ayant pas une préférence pour l'indifférence en ordonnée, tandis que la valeur de probabilité de conflit est mesuré sur la hauteur.

$n_{c_e^A}$	$n_{c_e^B}$	$n_{c_e^i}$	Paradoxe	$S_{c_e^i}^A$	$S_{c_e^i}^B$	n_{cf}	n_{U_p}	P_{Cf}
0	0	9	Possible	4	4	54	512	$0,1054687500000000$
1	0	8	Possible	3	4	243	2304	$0,1054687500000000$
2	0	7	Possible	2	4	432	4608	$0,0937500000000000$
3	0	6	Possible	1	4	378	5376	$0,0703125000000000$
4	0	5	Possible	0	4	162	4032	$0,0401785714285714$
5	0	4	Possible	0	4	27	2016	$0,0133928571428571$
6	0	3	Non	0	4	0	672	$0,0000000000000000$
7	0	2	Non	0	4	0	144	$0,0000000000000000$
8	0	1	Non	0	4	0	18	$0,0000000000000000$
9	0	0	Non	0	4	0	1	$0,0000000000000000$
1	1	7	Possible	3	3	1080	9216	$0,1171875000000000$
2	1	6	Possible	2	3	1890	16128	$0,1171875000000000$
3	1	5	Possible	1	3	1620	16128	$0,1004464285714290$
4	1	4	Possible	0	3	675	10080	$0,0669642857142857$
5	1	3	Possible	0	3	108	4032	$0,0267857142857143$
6	1	2	Non	0	3	0	1008	$0,0000000000000000$
7	1	1	Non	0	3	0	144	$0,0000000000000000$
8	1	0	Non	0	3	0	9	$0,0000000000000000$
2	2	5	Possible	2	2	3240	24192	$0,1339285714285710$
3	2	4	Possible	1	2	2700	20160	$0,1339285714285710$
4	2	3	Possible	0	2	1080	10080	$0,1071428571428570$
5	2	2	Possible	0	2	162	3024	$0,0535714285714286$
6	2	1	Non	0	2	0	504	$0,0000000000000000$
7	2	0	Non	0	2	0	36	$0,0000000000000000$
3	3	3	Possible	1	1	2160	13440	$0,1607142857142860$
4	3	2	Possible	0	1	810	5040	$0,1607142857142860$
5	3	1	Possible	0	1	108	1008	$0,1071428571428570$
6	3	0	Non	0	1	0	84	$0,0000000000000000$
4	4	1	Possible	0	0	270	1260	$0,2142857142857140$
5	4	0	Possible	0	0	27	126	$0,2142857142857140$

TABLE 5.5 – Représentation des scores de situations

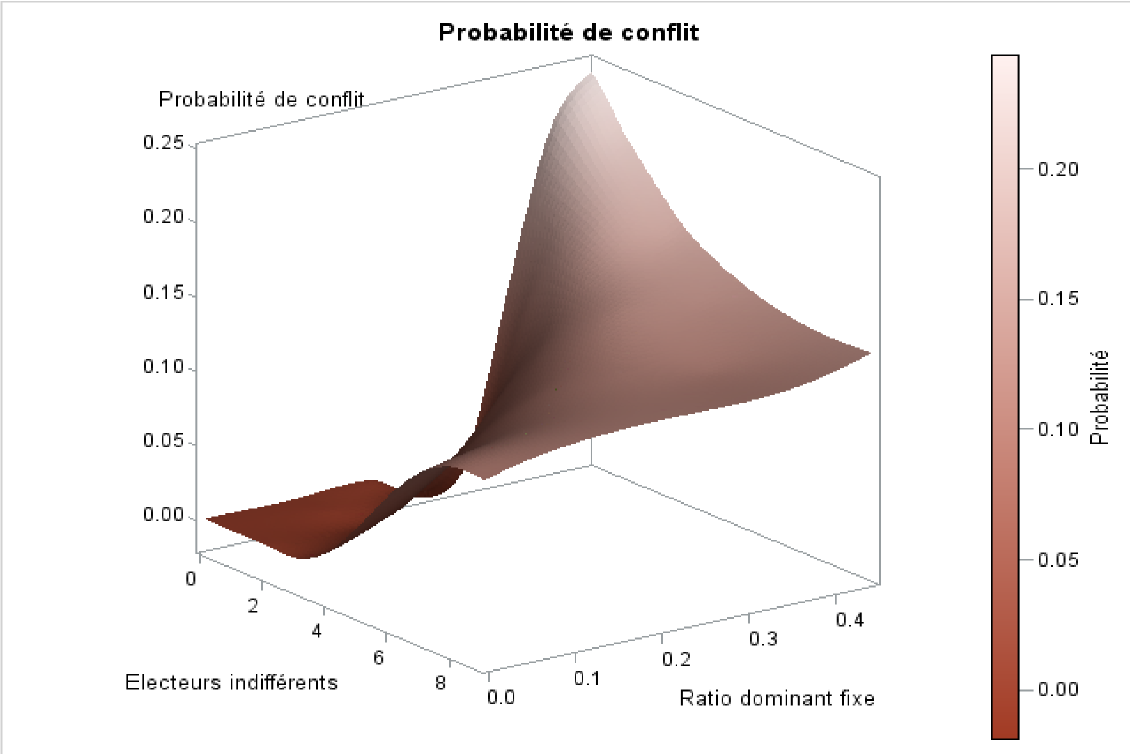

FIGURE 5.5 – Représentation des probabilités d'occurence du paradoxe du référendum lors d'une élection pour une population 9 individus répartis en 3 circonscriptions dont les effectifs d'électeurs fidélisés à l'un des deux candidats sont non nuls (partiellement sous hypothèse IC).

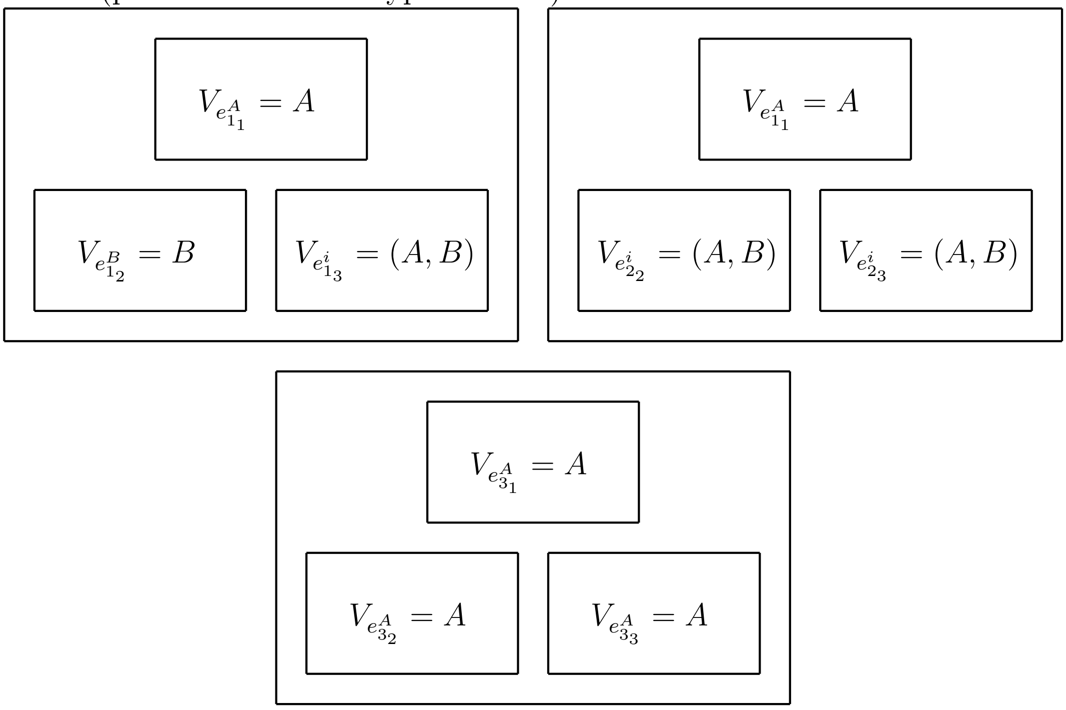

FIGURE 5.6 – Représentation du cas $(5, 1, 3)$

Dans cet exemple, la taille totale de l'univers des possibilités est le nombre de combinaisons possibles des 3 électeurs indécis et de l'électeur fidèle à l'option B parmi les 9 électeurs de la population, mulitiplié par le nombre de combinaison possible de l'électeurs fidèle à l'option B parmis les 4 électeurs en question, et multiplié par le nombre total de situations possibles de choix des trois électeurs indécis : $\binom{4}{9}\binom{1}{4}2^3 = 4032$. Il n'y a que 27 combinaisons sur les 126 des 4 électeurs parmi les 9, où ils se retrouvent répartis dans deux circonscriptions de sorte qu'ils pourraient faire gagner l'option B si les trois électeurs indécis la choisissaient. Si l'on multiplie ce chiffre par 4, soit le nombre de position parmi les 4 adopté par l'électeur fidèle B, on se retrouve avec 108 situations de confllit sur le 4032 arrangements et positions pouvant exister, soit une probabilité d'occurence du paradoxe du référendum de $\frac{108}{4032} \approx 0,02678571$.

Modèle

Nous reprenons les bases développées dans les deux précédents chapitres. Soit $N \subset \mathbb{N}$ un ensemble discret d'électeurs, le nombre d'électeurs étant $n \in \mathbb{N}$, que nous supposons impair, c'est-à-dire $n = 2q + 1$ avec $q \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des électeurs est également réparti entre $c \in \mathbb{N}$ circonscriptions de sorte que l'on ait la partition

$$\bigcap_{j=1}^{c} C_j = \emptyset \text{ et } \bigcup_{j=1}^{c} C_j = N,$$

où C_j est l'ensemble des électeurs appartenant à la circonscription j. Le nombre c des circonscriptions est fixé à 3, effectif impair garantissant une décision puisque le risque d'égalité de voix les candidats est ainsi écarté. Les circonscriptions ont un effectif absolument identique et supposé impair noté $c_j = 2r + 1$ avec $r \in \mathbb{N}$, de sorte que $n = 3 \times c_j = 6r + 3 = 2q + 1$ avec $q = 3r + 1$.

Chaque circonscription dispose d'un représentant pour participer à l'élection du Gouvernement central. Le nombre d'options proposées est fixé à deux avec les candidats A et B.

Au niveau des électeurs, on conserve l'hypothèse d'absence d'indécision : chaque électeur réalise un choix entre les deux candidats. Toutefois, les électeurs ne sont plus tous indifférents aux options proposées. On suppose ainsi que les électeurs sont répartis en trois catégories : soit $N_i \subset N$ le sous-ensemble des électeurs n'ayant aucune préférence particulière, dont le nombre est noté $n_i \in \mathbb{N}$, soit $N_A \subset N$ le sous-ensemble des électeurs ayant une préférence pour l'option A, dont le nombre est noté $n_A \in \mathbb{N}$ et soit $N_B \subset N$ le sous-ensemble des électeurs ayant une préférence pour l'option B, dont le nombre est noté $n_B \in \mathbb{N}$ de sorte que

$$N_i \bigcap N_A \bigcap N_B = \emptyset \text{ et } N_i \bigcup N_A \bigcup N_B = N$$

La répartition des électeurs appartenant aux catégories N_A et N_B entre les différentes circonscriptions est l'enjeu de ce modèle, c'est pourquoi nous notons C_{j_i} l'ensemble des électeurs de la catégorie N_i appartenant à la circonscription j, C_{j_A} est l'ensemble des électeurs de la catégorie N_A appartenant à la circonscription j et C_{j_B} est l'ensemble des électeurs de la catégorie N_B appartenant à la circonscription j, de sorte que $\forall j \in [1:3]$,

$$C_{j_i} \bigcap C_{j_A} \bigcap C_{j_B} = \emptyset \text{ et } C_{j_i} \bigcup C_{j_A} \bigcup C_{j_B} = C_j.$$

La catégorie N_i des électeurs n'a aucune préférence particulière : chaque électeur a une probabilité identique de choisir le candidat A ou le candidat B. On a donc indépendance des votes des individus appartenant à ce sous-ensemble :

$$\forall k \in N_i, P_k(A) = P_k(B) = \frac{1}{2}$$

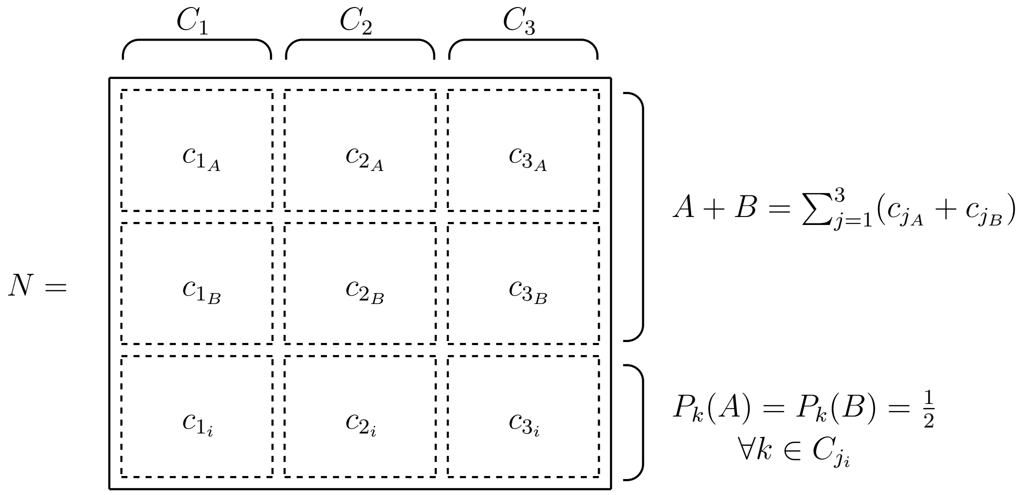

FIGURE 5.7 – Représentation des partitions de N

Il n'y a aucune préférence au niveau de ce sous-ensemble de N

$$P_{N_i}(A) = P_{N_i}(B) = \frac{1}{2},$$

ainsi qu'au niveau de ses sections au niveau des circonscriptions

$$\forall j \in [1,3], P_{C_{j_i}}(A) = P_{C_{j_i}}(B) = \frac{1}{2}$$

Nous désignons par N_A^* l'ensemble des électeurs ayant voté pour A, comprenant donc N_A et le $N_{i=A}$ sous-ensemble de N_i ayant finalement choisi A, dont le nombre s'écrit $n_A^* = n_A + n_{i=A}$. De même, l'ensemble N_B^* des électeurs, composé de N_B et le $N_{i=B}$ sous-ensemble de N_i ayant finalement choisi B, ayant voté pour B a pour nombre $n_B^* = n_B + n_{i=B} = n - n_A^*$.

Au niveau des circonscriptions, on désigne par $C_{j_A}^*$ l'ensemble des électeurs de la circonscription j ayant voté pour A, avec C_{j_A} et le $C_{j_{i=A}}$ sous-ensemble de C_{j_i} ayant finalement choisi A, dont le nombre est $c_{j_A}^* = c_{j_A} + c_{j_{i=A}}$. De manière symétrique $C_{j_B}^*$ l'ensemble des électeurs de la circonscription j ayant voté pour B, avec C_{j_B} et le $C_{j_{i=B}}$ sous-ensemble de C_{j_i} ayant finalement choisi B, a pour nombre $c_{j_B}^* = c_{j_B} + c_{j_{i=B}} = c - c_{j_A}^*$.

Ainsi le nombre des électeurs ayant voté pour l'un ou l'autre des deux candiats s'écrit $\forall l \in \{A, B\}$, $n_l^* = \sum_{j=1}^{3} c_{j_l}^*$.

Le nombre de circonscriptions dans lesquelles une majorité des électeurs est en faveur de A et par conséquent le nombre de représentants partisans de A est c_A. De manière symétrique le nombre de circonscriptions dans lesquelles une majorité des électeurs est en faveur de B et le nombre de représentants partisans de B est donné par :

$$c_B = 3 - c_A$$

Pour gagner le vote global, il faut que l'un des candidats remporte plus de voix que l'autre, c'est-à-dire qu'il faut donc au minimum que l'un des candidats obtienne une voix de plus que l'autre.

Hypothèse 5.1. *Si c_{j_A} et c_{j_B} sont connus, alors $\forall j \in [1,3]$, $C_{j_{i=A}} \sim B(\frac{1}{2}, c - c_{j_A} - c_{j_B})$.*

La probabilité d'occurence d'un conflit sachant c_{j_A} et c_{j_B} connus est donc :

$$\begin{aligned} P_{cf} &= P[(c_{1_{i=A}}, c_{2_{i=A}}, c_{3_{i=A}}) \in E] \\ &= \textstyle\sum_{(k_1,k_2,k_3)\in E} P[c_{1_{i=A}} = k_1, c_{2_{i=A}} = k_2, c_{3_{i=A}} = k_3] \\ &= \textstyle\sum_{(k_1,k_2,k_3)\in E} \mathrm{C}^{k_1}_{c-c_{1_A}-c_{1_B}} \mathrm{C}^{k_2}_{c-c_{2_A}-c_{2_B}} \mathrm{C}^{k_3}_{c-c_{3_A}-c_{3_B}} \\ &= \mathrm{F}(c_{1_A}, c_{1_B}, c_{2_A}, c_{2_B}, c_{3_A}, c_{3_B}) \end{aligned}$$

Un conflit de légitimité en défaveur du vainqueur global A intervient si et seulement : $\begin{cases} n_A = \underbrace{(c_{1_A} + c_{2_A} + c_{3_A})}_{\text{inconnus}} + \underbrace{(c_{1_{i=A}})}_{k_1} + \underbrace{(c_{2_{i=A}})}_{k_2} + \underbrace{(c_{3_{i=A}})}_{k_3} > \frac{n}{2} \\ \text{et au moins deux circonscriptions ont voté pour } B \end{cases}$

Pour une ciconscription C_j donnée, le vote gagnant pour B est :

$$\begin{aligned} & c_{j_B} + c_{j_{i=B}} > \tfrac{c}{2} = \tfrac{2r+1}{2} = r + \tfrac{1}{2} \\ \iff & c_{j_{i=B}} > r + \tfrac{1}{2} - c_{j_B} \end{aligned}$$

E peut ainsi s'écrire :

$$E = \left\{ \begin{array}{c} (k_1, k_2, k_3) | k_1 + k_2 + k_3 > \frac{n}{2} - c_{1_A} - c_{2_A} - c_{3_A} \\ \text{et} \\ \exists (j', j'') \in \{1,2,3\} \mid \begin{cases} k_{j'} > \frac{c}{2} - c_{j'_B} \\ k_{j''} > \frac{c}{2} - c_{j''_B} \end{cases} \end{array} \right\}$$

Des pistes pour élaborer une formule numérique sont explorées dans l'annexe E.

Réflexions sur une forme optimale des institutions

Nous avons, dans le petit modèle développé dans le chapitre 5 utilisé les valeurs de probabilités exactes d'occurence du paradoxe du référendum sous les hypohtèse de préférence générale des électeurs pour l'indifférence et de taille des circonscriptions, mis en lumière qu'un régime unitaire à séparation souple des pouvoirs est le celui pour lequel la probabilité d'un conflit de blocage des institutions est la plus faible. Il ressort de ces travaux qu'une organisation strictement hiérarchisée des institutions entraîne une limitation significative de ce risque de blocage, combinée avec un régime à séparation verticale souple des pouvoirs. Actuellement aucun État ne réunit simultanément et parfaitement ces deux conditions. On peut très bien envisager un aménagement institutionnelle, intégrant les pouvoirs neutres dans le rôle des régulateurs de conflit de blocage, notament la Présidence (ou le Souverain dans une monarchie constitutionnelle) et la Cour constitutionnelle. Il faut pour cela tenir compte des effets de saturation pouvant affecter ces pouvoirs neutres : si le gouvernement et le parlement dispose de suffisaments de ressources financières pour assurer l'ensemble de leurs missions en toutes circonstances, il est nécessaire de tenir compte de la situation des autres institutions. Une solution à cela pourrait être, en combinaison avec la stricte hiérarchie des pouvoirs, de décliner aux échelons inférieurs les pouvoirs neutres en question. Si le clonage de la fonction de chef de l'état au niveau local est facile à réaliser (cas des lieutenants-gouverneurs des les États fédérés d'Australie ou les Provinces du Canada), celui de la cour constitutionnelle peut se révéler complexe du fait qu'en vertu de la hiérachie des normes, aucune raison ne devrait impliquer un jugement au niveau local par rapport à la norme constitutionnelle. Cet obstacle peut être levé le remplaçant par le jugement par la rapport à la norme supérieure (cas du Conseil d'État qui juge la conformité des actes du gouvernement par rapport à la loi) : ainsi plutôt qu'une cour constitutionnelle locale, on peut envisager la mise en place d'un tribunal administratif (sur le modèle de ce qui existe actuellement en France) qui assurerait la mission de vérification de la conformité des actes des pouvoirs locaux par rapport à la norme supérieure immédiate. Par ailleurs, la neutralité des pouvoirs neutres est une condition essentielle à leur bon fonctionnement. Si aucun problème n'a été relever concernant les cours constitutionnelles, il a été autrement pour la fonction de chef de l'État, l'exemple historique le plus marquant fut la présidence du Reich allemand sous la république de Weimar. Si des garanties juridiques peuvent être envisagées (comme dans le cas des préfets en France), il serait souhaitable d'envisager également de collégialiser la présidence : les exemples Suisse, du Conseil fédéral, et bosniaques, de la présidence collégiale, ont montré l'efficacité de ce dispositif dans la réduction du risque d'excès de pouvoir de ces organes (bien qu'ils s'agissent là d'institutions du pouvoir exécutif et non d'un pouvoir neutre). Encadrant ainsi le duopole des pouvoirs exécutifs et législatifs, les pouvoirs neutres seraient ainsi à même d'exercer une mission de régulation des conflits, tout en évitant le risque d'une dérive arbitraire de par leurs constitutions et leurs cadres.

Bibliographie

[1] Abrahamson I. G. (1964), « Orthant Probabilities for the Quadrivariate Normal Distribution », *The Annals of Mahtematical Statistics*, Volume 35, Issue 4 : 1685-1703.

[2] Aghion P., Alesina A. and Francesco Trebbi (2004), « Endogenous Political Institutions », *Quarterly Journal of Economics*, Volume 119, Issue 2 : 565-611.

[3] Alchian A. A. and Demsetz H. (1972), « Production, Information Costs, and Economic Organization. », *American Economic Review*, Issue 62 : 777-795.

[4] Allisson F. et Brisset N. (2014), « Une approche stratégique du vote» À propos de « Vote par note, vote par approbation », *Revue économique*, Volume 65 : 681-686.

[5] Allorant P. (2013), « Les boîtes à idées de la réforme de l'administration territoriale en France, de la Restauration à Poincaré (1822-1926). », *Parlement[s], Revue d'histoire politique*, Semestre 2, Volume 20 : 89-104.
URL : www.cairn.info/revue-parlements1-2013-2-page-89.htm.

[6] d'André A., Anson P. H., Bailly J. S., Bergasse N., Bouche C. F., Brassart C., Brocheton C., Chassebœuf de Volney C., de Clermont-Tonnerre A. A. J., Démeunier J. N., Dupont de Nemours P. S., Emmery J. L., Fréteau de Saint Just E., Glezen J. M., de Lally-Tollendal G., de Lameth A., Lanjuinais J. D., de La Révellière-Lépeaux L. M., Le Chapelier I., Legrand J., Lefranc de Pompignan J. G, Mounier J. J., Périsse-Duluc J. A., Pétion de Villeneuve J., Rabaut de Saint-ÉtienneJ. P., Régnier C., de Séalt G. R., Treilhard J. B., de Turckheim J., Ulry A., Vaillant J., Vernier de Montorient T. et de Virieu F. H. (1791), Constitution française du 3 septembre 1791, *Conseil constitutionnel*.

[7] Anscombe G.E.M. (1976), « On frustration of the majority by fulfillment of the majority's will. », *Analisys*, Volume 34, Issue 4 : 161-168.

[8] Arrow K. J. (1951), « Social Choice and Individual Values », *Yale University Press*.

[9] Avril P. (2015), « Les primaires : un affaiblissement de la démocratie ?. », *Pouvoirs*, Semestre 3, Volume 154 : 133-142.

URL : www.cairn.info/revue-pouvoirs-2015-3-page-133.htm.
DOI : 10.3917/pouv.154.0133.

[10] Badinter R., Fabre R., Joxe L., Jozeau-Marigne L., Lecourt R., Marcilhacy P., Mayer D., Simonnet M.-R., Vedel G. et Genevois B. (1986), « Décision n° 86-208 DC du 02 juillet 1986 », *Conseil constitutionnel*

[11] Baldwin A., Bassett R., Bedford G. Jr., Blair J., Blount W., Brearley D., Broom J., Butler P., Carroll D., Clymer G., Cotesworth Pinckney C., Dayton J., Dickinson J., Dobbs Spaight R., Ellsworth O. Few W., Fitzsimons T., Franklin B., Gerry E., Gilman N., Gorham N., Hamilton A., Houston W., Houstoun W., Ingersoll J., Johnson W. S., King R., Langdon J., Lansing J. Jr., Livingston W., Madison J., Martin A., Martin L., Mason G., McClurg J., McHenry J., Mercer J. F., Mifflin T., Morris G., Morris R., Paterson W., Pierce W., Pinckney C., Randolph E., Read G., Richardson Davie W., Rutledge J., St. Thomas Jenifer D., Sherman R., Strong C., Washington G., Williamson H., Wilson J., Wythe G. and Yates R. (1787), « Constitution of the United States », *The Library of Congress*.

[12] Balinski M. (2004), « Le suffrage universel inachevé », *Belin*.

[13] Barberis B. (2012), « Le futur passé de la séparation des pouvoirs. », *Pouvoirs*, Semestre 4, Volume 143 : 5-15.
URL : www.cairn.info/revue-pouvoirs-2012-4-page-5.htm.
DOI : 10.3917/pouv.143.0005.

[14] Barthelemy F., Martin M. et Piggins A. (2014), « The Architecture of the Electoral College, House Size Effects, and the Referendum Paradox », *Electoral Studies*, Volume 34 : 111-118.

[15] Baujard A., Gavrel F., Igersheim H., Laslier J.-F. et Lebon I. (2013), «Vote par note, vote par approbation» Une expérimentation lors de l'élection présidentielle du 22 avril 2012, *Revue économique*, Volume 64 : 345-356.

[16] Baujard A., Gavrel F., Igersheim H., Laslier J.-F. et Lebon I. (2014), « Vote par note, vote par approbation » Une réponse au commentaire d'Allisson et Brisset, *Revue économique*, Volume 65 : 687-691.

[17] Baujard A. et Igersheim H. (2009), «Expérimentation du vote par note et du vote par approbation le 22 avril 2007» Premiers résultats, *Revue économique*, Volume 60 : 189-201.

[18] Baume S. (2012), « De l'usage des pouvoirs neutres. », *Pouvoirs*, Semestre 4, Volume 143 : 17-27.
ISBN : 9782021086423
URL : www.cairn.info/revue-pouvoirs-2012-4-page-17.htm.

DOI : 10.3917/pouv.143.0017.

[19] Beaud O. (2012), « La multiplication des pouvoirs. », *Pouvoirs*, Semestre 4, Volume 143 : 47-59.
URL : www.cairn.info/revue-pouvoirs-2012-4-page-47.htm.
DOI : 10.3917/pouv.143.0047.

[20] Belloni F. P. and Beller D. C. (1976), « The Study of Party Factions as Competitive Political Organizations », *The Western Political quaterly*, Volume 29, n°4 : 531-549.

[21] Benetti J. (2015), « Les primaires et notre monarchie républicaine. », *Pouvoirs*, Semestre 3, Volume 154 : 5-13.
URL : www.cairn.info/revue-pouvoirs-2015-3-page-5.htm.
DOI : 10.3917/pouv.154.0005.

[22] Bervoets S. and Merlin V. (2007), « De la manipulation des élections indirectes », Presses de Sciences Po, *Revue économique* 58 : 767-777.

[23] Borda J. C. (1781), « Mémoires sur les élections au scrutin », *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* : 657-665.

[24] Boudon J. (2012), « La séparation des pouvoirs aux États-Unis. », *Pouvoirs*, Semestre 4, Volume 143 : 113-122.
URL : www.cairn.info/revue-pouvoirs-2012-4-page-113.htm.
DOI : 10.3917/pouv.143.0113.

[25] Boué N. (2009), « Les accords de coalition dans une municipalité d'union de la gauche. Contribution à l'étude de la régulation des rapports coalitionnels. », *Politix*, Semestre 4, Volume 88 : 105-131.
ISBN : 9782804105235.
URL : www.cairn.info/revue-politix-2009-4-page-105.htm.
DOI : 10.3917/pox.088.0105.

[26] Bouton L., Castanheira M. and Llorente-Saguer A. (2016), « Divided Majority and Information Aggregation : Theory and Experiment », *Journal of Public Economics*, Volume 134 : 114-128.

[27] Bouyssou D. et Perny P. (1997), « Aide multicritère à la décision et théorie du choix social », *Nouvelles de la Science et des Technologies*, Volume 15 : 61-72.

[28] Brams S. et Fisburn P. (1983), « Paradoxes of preferential voting », *Mathematics Magazine*, Volume 56 : 207-214.

[29] Bui-Xuan O. (2007), « Le Conseil d'État : quelle composition réelle ?. », *Pouvoirs*, Semestre 4, Volume 123 : 89-103.
URL : www.cairn.info/revue-pouvoirs-2007-4-page-89.htm.
DOI : 10.3917/pouv.123.0089.

[30] Burgos E. Mazzoleni O. et Rayner H. (2009), « Le gouvernement de tous faute de mieux. Institutionnalisation et transformation de la " formule magique " en Suisse (1959-2003). », *Politix*, semestre 4, Volume 88 : 39-61.
ISBN : 9782804105235.
URL : www.cairn.info/revue-politix-2009-4-page-39.htm.
DOI : 10.3917/pox.088.0039.

[31] Cadot C., Dorlin E. et Guillarme B. (2006), « Les pères fondateurs refoulés de la Nation américaine. », *Raisons politiques*, semestre 4, Volume 24 : 5-7.
ISBN : 9782724630497 .
URL : www.cairn.info/revue-raisons-politiques-2006-4-page-5.htm.
DOI : 10.3917/rai.024.0005.

[32] Calossi E. and Pizzimenti E. (2012), « The Degree of Centralization of Candidate Selection Procedures : the Italian Case », *XXII^{ème} International Political Science Association World Congress*, Madrid.

[33] Cameron D. (2011), « David Cameron : why keeping first past the post is vital for democracy », *The Telegraph*.

[34] Carcassonne G. (2008), « Immuable Ve République. », *Pouvoirs*, Semestre 3, Volume 126 : 27-35.
URL : www.cairn.info/revue-pouvoirs-2008-3-page-27.htm.
DOI : 10.3917/pouv.126.0027.

[35] Carcassonne G. et Guillaume M. (2014), « La Constitution : Introduite et commentée par Guy Carcassonne et Marc Guillaume », *Éditions du Seuil*, Douzième édition.

[36] Caulfield M. J. (2010), « Apportioning Representatives in the United States Congress - Hill's Method of Apportionment », *Loci*.

[37] Cayrol R. (1978), « La direction du Parti socialiste : organisation et fonctionnement », *Revue française de science politique*, 28ème année, n^{o}2, 201-219.

[38] Champagne R. A. Jr. (1992), « The Separation of Powers, Institutional Responsibility, and the Problem of Representation », *Marquette Law Review*, Volume 75, Issue 4.

[39] Coleman J. S. (1974), « Power and the Structure of Society », *W. W. Norton & Company.*, New York.

[40] Coleman J. S. (1986), « Individual Interests and Collective Action. Selected Essays », *Cambridge University Press*, Cambridge.

[41] Coleman J. S. (1990), « Foundations of Social Theory Cambridge », *Harvard University Press*, Massachussets.

[42] Condorcet J.A.N. (1785), « Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions Rendues à la pluralité des voix », *imprimerie Royale*, Paris.

[43] Congleton R. D. (2013), « On the inevitability of divided government and improbability of a complete separation of powers », *Constitutional Political Economy*, Volume 24, Issue 3 : 177-198.

[44] Constant B. (1795-1810), « Fragments d'un ouvrage abandonné sur la possibilité d'une constitution républicaine dans un grand pays. », *Editions Aubier*, publié en 1991.

[45] Dahl R. A. (1956), « A Preface to Democratic Theory », *New Haven : Yale University Press.*

[46] Dahl R. A. (1982), « Dilemmas of Pluralist Democracy », *New Haven : Yale University Press.*

[47] Daudt H. and Rae D. W. (1976), « The Ostrogorski Paradox : A peculiarity of compound majority decision », *European Journal of Political Research*, Volume 4 : 391-398.

[48] Davidson R.R. et Odeh R.E. (1972), « Some Inconsistencies in Judging problems », *Journal of Combinatorial Theory*, Volume 13 : 162-169.

[49] Deb R. and Kelsey D. (1987), « On constructing a generalized Ostrogorski paradox : necessary and sufficient conditions », *Mathematical Social Sciences*, Volume 14, Issue 2 : 161-174.

[50] Debré M., de Gaulle C., Alduy P., de Baillencourt A., Barrachin E. M., Blocq-Mascart M., Bour A., Boubaker H., Bruyneel R., Champeix M., Chardonnet J., Chazelle R., Coste-Floret P., David J. P., Degoutte L., Dejean R. G., Fourcade J., Frey R., Gayrard A., Jules G., Lamine-Gueye A., Lauriol M., Léon N., Lisette G., Malterre A., Marcilhacy P., de Menditte J., Mignot A., Monichon M., de Montalembert G., Nayrou J., Pré R., Raybaud J., Reynaud P., Senghor L. S., Teitgen P. H., Triboulet R., Tsiranana p., Valentin F., Van Graefschepe et Waline M. (1958), « Constitution du 4 octobre 1958 instituant la V^{e} République française », *Conseil constitutionnel.*

[51] Delvolvé P. (2007), « Le Conseil d'État, cour suprême de l'ordre administratif.», *Pouvoirs*, Semestre 4, Volume 123 : 51-60.
URL : www.cairn.info/revue-pouvoirs-2007-4-page-51.htm.
DOI : 10.3917/pouv.123.0051.

[52] Derrien A. (2003), « Dialogue et compétition des cours suprêmes ou la construction d'un système juridictionnel. », *Pouvoirs*, Semestre 2, Volume 105 : 41-52.
URL : www.cairn.info/revue-pouvoirs-2003-2-page-41.htm.
DOI : 10.3917/pouv.105.0041.

[53] Doehring K. (1964), « Der "Pouvoir neutre" und das Grundgesetz », *Der Staat*, Volume 3 : p. 201.

[54] Dolez B. et Laurent A. (2000), « Quand les militants du RPR élisent leur président (20 novembre-4 décembre 1999) », *Revue française de science politique*, 50ème année, nº1, 125-146.

[55] Dolez B. et Laurent A. (2007), « Une primaire à la française » La désignation de Ségolène Royal par le parti socialiste, *Revue française de science politique*, Semestre 2, Volume 57 : 133-161.

[56] Duffy-Meunier A. (2015), « Quand et comment choisir son leader : l'exemple britannique.», *Pouvoirs*, Semestre 3, Volume 154 : 41-53.
URL : www.cairn.info/revue-pouvoirs-2015-3-page-41.htm.
DOI : 10.3917/pouv.154.0041.

[57] Durpaire F. et Harter H. (2008), « La désignation des candidats à la présidence des États-Unis : un processus complexe. », *Pouvoirs*, Semestre 3, Volume 126 : 157-164.
URL : www.cairn.info/revue-pouvoirs-2008-3-page-157.htm.
DOI : 10.3917/pouv.126.0157.

[58] Emerson R. M. (1969), « Operant Psychology and Exchange Theory. », R.L. Burgess and D. Busheil (eds), *Behavioral Sociology*, New York and London : Columbia University Press : 379-405.

[59] Emerson R. M. (1972), « Exchange Theory, Part I1 : Exchange Relations and Network Structures. », J. Berger, M. Zelditch, Jr. and Bo Anderson (eds), *Sociological Theories in Progress*, H. Boston : 58-87.

[60] Farvaque E., Jayet H. et Ragot L. (2009), Quel mode de scrutin pour quel « vainqueur » ? Une expérience sur le vote préférentiel transférable, *Revue d'économie politique*, Volume 119 : 221-246.

[61] Feix M.R., Lepelley D., Merlin V. and Rouet J.L. (2004), « The Probability of Conflicts in a U.S. Presidential Type Election », *Economic Theory* 23 :

227-257.

[62] Feix M.R., Lepelley D., Merlin V. and Rouet J.L. (2007), « Probability Models for the Analysis of Voting Rules in a Federal Union », *Université d'Orléans* : colloque.

[63] Feix M.R., Lepelley D., Merlin V. and Rouet J.L. (2007), « Décision et pouvoir dans les structures fédérales », *Centre d'Économie et de Management de l'Océan Indien (CEMOI)*, Université de la Réunion.

[64] Fekl M. (2015), « Les primaires de 2014 : bilan et leçons pour la démocratie locale. », *Pouvoirs* semestre 3, Volume 154 : 81-88.
URL : www.cairn.info/revue-pouvoirs-2015-3-page-81.htm.
DOI : 10.3917/pouv.154.0081.

[65] Fishburn P. (1974), « Paradoxes of voting », *The American Political Science Review*, Volume 68 : 537-546.

[66] Fisher D. C. and Ryan J. (1995), « Linear Algebra and its Applications », *The American Political Science Review*, Volume 217 : 87-100.

[67] Foley. M. (1990), « The Silence of Constitutions », *NY : Routledge, Chapman, and Hall, Inc.*.

[68] Gehrlein W.V. (1979), « A representation for quadrivariate normal positive orthant probabilities », *Communications in Statistics*, Issue 8 : 349-358.

[69] Gehrlein W.V. (1996), «The Probablity of Electing the Condorcet Loser», *National DSI*, Orlando, Floride.

[70] Gehrlein W.V. (1998), «Approximating the probablity that a Condorcet winner exists», *Discussion paper*, (University of Delaware, Department of Business Administration, Newark, Delaware).

[71] Gehrlein W.V. and Fishburn P.C. (1976), « Condorcet's Paradox and Anonymous Preference Profiles », *Public Choice*, Issue 26 : 1-18.

[72] Gehrlein W.V. and LePepelley P.C. (2010), « Voting Paradoxes and Group Coherence », *Springer Science & Business Media*.

[73] Gehrlein W.V. and Merlin V. (2008), « On the probability of the Ostrogorski Paradox », *Conference papers*.

[74] Georgiou P. (1973), « The Goal Paradigm and Notes Towards a Counter Paradigm. » *Administrative Science Quarterly*, Issue 18 : 291-310.

[75] Goldberg V. P. (1989), « Readings in the Economics of Contract Law », *Cambridge : Cambridge University Press.*

[76] Griffith E. C. (1907), « The Rise and Development of the Gerrymander », *Chicago : Scott, Foresman and Company* : 72-73.

[77] Guilbauld G.T. (1952), « Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'aggrégation », *Economie Appliquée* 5 : 50-584.

[78] Haegel F. (2002), « Faire l'Union : la refondation des partis de droite après les élections de 2002 », *Revue française de science politique*, 52ème année, nº5-6 : 561-576.

[79] Haegel F. (2015), « La primaire à l'ump : genèse et enjeux. », *Pouvoirs* semestre 3, Volume 154 : 89-98.
URL : www.cairn.info/revue-pouvoirs-2015-3-page-89.htm.
DOI : 10.3917/pouv.154.0089.

[80] Hamilton A., Jay J. and Madison J. (1787-1788), « The Federalist papers », *New York American Library.*

[81] Hardy R. J. (2012), « The Paradoxes of Political Parties in American Constitutional Development », *Insights on Law & Society*, Volume 13, Issue 1 : 12-39.

[82] Hauriou M. (1916), « Principes de droit public à l'usage des étudiants en licence (3e année) et en doctorat ès-sciences politiques (2up édition)», Librairie de la société du Recueil Sirey, Paris.
http ://gallica.bnf.fr/ark :/12148/bpt6k553439/f4.item.zoom

[83] Hayek F. A. (1960), « The Constitution of Liberty », *The University of Chicago Press.*

[84] Hayek, F. A. (1979), « The political order of a free people », *Law, legislation and liberty*, London and Henley : Routledge and Kegan Paul, Volume 3.

[85] Hayek, F. A. (2001), « Marktwirtschaft oder Syndikalismus. », F. A. Hayek (Ed.), *Wirtschaft, Wissenschaft und Politik - Aufsätze zur Wirtschaftspolitik*, Volume A6 of F.A. von Hayek, *Gesammelte Schriften in deutscher Sprache*, Tübingen : J.C.B. Mohr (Paul Siebeck) : 83-88.

[86] Hérault de Séchelles M. J., Ramel-Nogaret D. V., de Saint-Just L. A. et Matthieu J. B. C. (24 juin 1793), « Constitution du 6 messidor an I », *Conseil constitutionnel.*

[87] Hochmannl T. (2015), « Primaires américaines : le bon, la brute et le truand. », *Pouvoirs* semestre 3, Volume 154 : 15-26.

URL : www.cairn.info/revue-pouvoirs-2015-3-page-15.htm.
DOI : 10.3917/pouv.154.0015.

[88] Holt J. C. (1974), « A Vernacular-French Text of Magna Carta 1215 », *English Historical Review*, Volume 89 : 346-64.

[89] Hundy O. (2003), « Votes et paradoxes : les élections ne sont pas monotones ! », *Mathematics and Social Science* 41° année, n°163 : 9-39.

[90] Indriõason I.H. and Kristinsson K.H. (2013), « Primary consequences : The effects of candidate selection through party primaries in Iceland », *Party Politics*.
DOI :10.117/1354068813487117.

[91] Jesse G. N. (1996), « Thatcher's Rise and Fall : An Institutional Analysis of the Tory Leadership Selection Process », *Electoral Studies*, Volume 15, n°2 : 183-202.

[92] Jules C. (-57 à -51), « Commentaire de la Guerre des Gaulles (Commentarii de Bello Gallico) », *Les Belles Lettres*, Livre I à VIII, 1924.

[93] Katz S. and Mair P. (1995), « Chapter 1 : Party Organization a Data Handbook in Party Organizations in Western Democracies (1960-1990) », *Sage*, London.

[94] Kelsen H. (1928), « La garantie juridictionnelle de la Constitution », *R.D.P.*.

[95] Kenig O. (2008), « Democratization of party leadership selection : Do wider selectorates produce more competitive contests ? », *Electoral Studies*, Volume 28, Issue 2 : 240-247.

[96] Kenig O. (2009), « The Democratization of Party Leaders' Selection Methods :Canada in Comparative Perspective », Prepared for delivery at the *Canadian Political Science Association Annual Conference*, 27-29 May 2009, University of Carleton, Ottawa.

[97] Key V. O. Jr. (1950), « Southern Politics in State and Nation », *American Political Science Review* , Volume 44, Issue 1 : 192-194.

[98] Krishnamoorthy M. S. (2005), « Condorcet Winner Probabilities - Statistical Perspective », *Rochester Polytechnic Institute*, unpublished manuscript.

[99] Laffond G. et Lainé J. (2006), « Single-switch preferences and the Ostrogorski paradox », *Mathematical Social Sciences*, Volume 52, Issue 1 : 49-66.

[100] Lagerspetz E. (1996), « Paradoxes and Representation », *Electoral Studies*, Volume 15, Issue 1 : 83-92.

[101] Lahrach R. and Merlin V. (2010), « Assessing the probability of the referendum paradox : the French local election case », *Centre for Philosophy of Natural and Social Science.*

[102] Lassier J.F. et Van der Straeten K. (2004), « Une expérience de vote par assentiement lors de l'élection présidentielle française de 2002 », *Revue française de science politique*, Volume 54 : 99-130.

[103] Lawson K. (1992), « L'évolution des partis politiques américains », *Revue française de science politique*, 42ème année, n°5 : 819-834.

[104] Legavre J. B. (1990), La «bataille des comités de soutien» ou la droite en campagne, *Revue française de science politique*, 40ème année, n°6 : 793-809.

[105] Lepelley D., Merlin V. and Rouet J.L. (2011), « Three ways to compute accurately the probability of the referendum paradox », *Mathematical Social Sciences* 62 : 28-33.

[106] Lisi M. (2010), « The democratisation of party leadership selection : The Portuguese experience », *Portuguese Journal of Social Science*, Volume 9, Issue 2 : 127-149.

[107] Maasen H. and Bezembinder T. (2002), « Generating random weak orders and the probability of a Condorcet winner », *Social Choice and Welfare*, Volume 19 : 517-532.

[108] Mair P. (1994), « Chapter 1 : Party Organization : from Civil Society to the State », *How Parties organized. Change and adaptation in Party Organizations in Western Democracies*, Sage, Londres : 1-22.

[109] March J. G. and Simon H. A. (1958), « Organizations », *New York : Wiley.*

[110] Marcou G. (2007), « Une cour administrative suprême : particularité française ou modèle en expansion ?. », *Pouvoirs* semestre 4, Volume 123 : 133-154.
URL : www.cairn.info/revue-pouvoirs-2007-4-page-133.htm.
DOI : 10.3917/pouv.123.0133.

[111] Martis K. C. (2008), « The original gerrymander », *Political Geography*, Volume 27, Issue 8 : 833-839.

[112] Mayer N. (2007), « Les votes Le Pen du 21 avril 2002 au 22 avril 2007 », *Le Panel Électoral Français 2007 : 1ère vague - 29 mars - 21 avril 2007*,

CEVIPOF, Centre de Recherches Politiques de Sciences Po.

[113] Mbih B. and Valeu A. (2014), « On the difference between the Anscombe and Ostrogorski Paradoxes », *Working paper*.

[114] Mény Y. (2015), « Primaires : vertus (apparentes) et vices (cachés) d'une greffe américaine. », *Pouvoirs* semestre 3, Volume 154 : 27-40.
URL : www.cairn.info/revue-pouvoirs-2015-3-page-27.htm.
DOI : 10.3917/pouv.154.0027.

[115] Merlin V. and Senné T. G. (2008), « The Electoral College : A Majority Efficiency Analysis. », *Preliminary Version*, the 29th of January 2008.

[116] Merlin V. and Tataru M. (1997), « On the relation of the Condorcet winner and positional voting rules », *Mathematical Social Sciences*, Volume 34, Issue 1 : 81-90.

[117] Merlin V., Tataru M. et Valognes F. (2000), « On the probability that all decision rules select the same winner », *Journal of Mathematical Economics*, Volume 33, Issue 2 : 183-207.

[118] Merlin V., Tataru M. et Valognes F. (2002), « On the likelihood of Condorcet's profiles », *Social Choice and Welfare* Volume 19, Issue 1 : 193-206.

[119] Miller R. N. (2014), « The house size effect and the referendum paradox in U.S. presidential elections », *Electoral Studies*, Volume 35 : 265-271.

[120] Morgenstern S. (2001), « Organized Factions and Disorganized Parties : Electoral Incentives in Urugay », *Party Politics*, Volume 7, Issue 2 : 235-256.

[121] Moser R. G. and Scheiner E. (2004), « Mixed electoral system and electoral system effects : controlled comparison and cross-national analysis », *Electoral Studies*, Volume 23 : 575-599.

[122] Moulin H. (1988), «Condorcet's principle implies the no show paradox», *Journal of Economic Theory*, Volume 45 : 53-64.

[123] Nurmi H. (1997), « Compound majority paradoxes and proportional representation », *European Journal of Political Economy*, Volume 13, Issue 1-2 : 443-454.

[124] Nurmi H. (2001), « Voting Paradoxes and How to Deal with Them », *Public Choice*, Volume 107, Issue 1-2 : 194-197.

[125] Nyomarkay J. L. (1965), « Factionalism in the National Socialist German Workers' Party, 1925-1926 : The Myth and Reality of the "Northen Faction" », *Political Science Quaterly*, Volume 80 : 22-47.

[126] Offerlé M. (1983), « Transformation d'une entreprise politique : de l'UDR au RPR (1973-1977) », *Pouvoirs, revue françise d'études constitutionnelles et politiques*, n°28, 28 - Le RPR, 5-26.

[127] Offerlé M. (2012), « Les partis politiques », *PUF*, 8ème édition.

[128] Ostrogorskyi M. (1902), « La démocratie et l'organisation des partis politiques », *Calmann-Levy*, Paris.

[129] Perrow C. (1972), « Organizations : Organizational Goals », *International Encyclopedia of the Social Science*, Issue 11, New York, London : 305-311.

[130] Perrow C. (1972), « Organizational Goals », K. Azumi and J. Hage (eds), *Organizational Systems–A Text-Reader in the Sociology of Organizations*, Lexington, Toronto, London : 440-46.

[131] Pigozzi G. (2006), « Two aggregation paradoxes in social decision making : the Ostrogorski paradox and discursive dilemma », *Episteme*, Cambridge University Press, Volume 2, Issue 2 : 119-128.

[132] Portelli H. (2008), « La Ve République et les partis. », *Pouvoirs*, Semestre2, Volume 126 : 17-33.

[133] Robert J. (1997), « Le principe d'égalité dans le droit constitutionnel francophone », *Les cahiers du Conseil constitutionnel*, Volume 3.

[134] Roemer J. E. (1998), « Why the poor do not expropriate the rich : an old argument in new gard », *Journal of Public Economics*, Volume 70 : 399-424.

[135] Riker. W. H. (1982), « Liberalism against Populism », *San Francisco : W.H. Freeman. Riker.*

[136] Rolland P. (2008), « Comment préserver les institutions politiques ? La théorie du pouvoir neutre chez B. Constant », *Revue Française d'Histoire des Idées Politiques* semestre 1, Volume 27 : 43-73.
ISBN : 9782708408258.
URL : www.cairn.info/revue-francaise-d-histoire-des-idees-politiques1-2008-1-page-43.htm.
DOI : 10.3917/rfhip.027.0043.

[137] Rose R. (1964), « Parties, Factions, and Tendencies in Britain », *Political Studies*, Volume 120 : 33-46.

[138] Ryan J. M. (2011), « Is the Democratic Party's superdeleguate system unfair to voters ? », *Electoral Studies*, Issue 30 : 756-770.

[139] Saari D. G. and Sieberg K. K. (2001), « The sum of the parts can violate the whole », *American Political Science Review* : 415-433.

[140] Saari D. G. and Tataru M. (1999), « The likelihood of dubious election outcomes », *Economic Theory*, Volume 13, Issue 2 : 345-363.

[141] Saari D. G. (2008), « Complexity and the geometry of voting », *Mathematical and computer Modelling*, Volume 48 : 1335-1356.

[142] Salisbury R. H. (1969), « An Exchange Theory of Interest Groups. », *Midwest Journal of Political Science*, Volume 13, Issue 1 : 1-32.

[143] Sartori G. (1976), « Parties and Party Systems : A Framework for Analysis ». *Cambridge University Press.*

[144] Schlesinger J. A. (1991), « Political Parties and the Winning of Office », *Ann Arbor, University of Michigan Press*

[145] Schmitt C. (1931) « Der Hüter der Verfassung» [1re édition], Berlin, Duncker & Humblot, 1996, p. 136.

[146] Schmitt C. (1972), « La notion du politique - Théorie du partisan », Paris, *Calmann-Lévy* : 159-164.

[147] De Secondat C. L. (1748), « De l'esprit des lois », Tome 2.

[148] Slepian D. (1962), « The one sided barrier problem for Gaussian noise », *Bell Systems Technical Journal*, Volume 41, Issue 2 : 463-501.

[149] Terneyre P. et de Béchillon D. (2007), « Le Conseil d'État, enfin juge !. », *Pouvoirs*, semestre 4, Volume 123 : 61-72.
URL : www.cairn.info/revue-pouvoirs-2007-4-page-61.htm.
DOI : 10.3917/pouv.123.0061.

[150] Vanberg V. J. (1992), « Organizations as Constitutional Systems », *Constitutional Political Economy*, Volume 3, Issue 2 : 223-253.

[151] Vanberg V. J. (2011), « Liberal constitutionalism, constitutional liberalism and democracy », *Constitutional Political Economy*, Volume 22, Issue 1 : 1-20.

[152] Verdier N. (2013), « La paradoxale circonscription intermédiaire infra-départementale : du district à l'arrondissement. », *Parlement[s], Revue*

d'histoire politique, Volume 20, Issue 2 : 17-33.
URL : www.cairn.info/revue-parlements1-2013-2-page-17.htm

[153] Williamson O., Wacher M. and Harris J. (1986), « Understanding the Employment Rela- tion : The Analysis of Idiosyncratic Exchange. » L. Putterman (ed), *The Economic Nature of the FirmmA Reader*, Cambridge : Cambridge University Press : 135-155.

[154] Wilson M.C. and Pritchard G. (2007), « Probability calculations under the IAC hypothesis », *Mathematical Social Science*.

[155] Ysmal C. (1990), « La crise électorale de l'UDF et du RPR », *Revue française de science politique*, 40ème année, n°6 : 810-829.

[156] Zariskyl R. (1960), « Party Faction and Comparative Politics : Some Preliminary Observations », *Midwest Journal of Political Science*, Volume 4 : 27-51.

[157] Zariskyl R. (1962), « The Italian Socialist Party : A Case Study in Factional Conflict », *American Political Science Review*, Volume 56 : 372-390.

[158] Zariskyl R. (1965), « Intra-Party Conflict in a Dominant Party : The Experience of Christian Democracy », *Journal pf Politics*, Volume 27 : 3-34.

Annexe A

Partis politiques

A.1 Paradoxes des partis politiques américains

Premier paradoxe : *Bien que les partis politiques jouent un rôle essentiel au sein du gouvernement américain, il n'y a aucune mention d'eux dans la Constitution des Etats-Unis.* [1] Cette affirmation est valable pour les constitutions très anciennes, dont la rédaction a précédé l'apparition des premières formtions politiques, comme c'est le cas aux Etats-Unis, alors qu'ils sont intégrés dans les Constitutions plus récentes, principalement celles rédigées postérieurement à la Seconde guerre mondiale, comme dans le cas de la Constitution[50] de la République française qui leur consacre son article 4 [2] ou de la Loi fondamentale de la République fédérale d'Allemagne qui leur consacre son article 21 [3].

1. *Although political parties play a vital role in American government, there is no mention of them in the Constitution on the United States.*

2. Article 4 de la Constitution du 4 octobre 1958 :

- Les partis et groupements politiques concourent à l'expression du suffrage. Ils se forment et exercent leur activité librement. Ils doivent respecter les principes de la souveraineté nationale et de la démocratie.
- Ils contribuent à la mise en œuvre du principe énoncé au second alinéa de l'article 1 er dans les conditions déterminées par la loi.
- La loi garantit les expressions pluralistes des opinions et la participation équitable des partis et groupements politiques à la vie démocratique de la Nation.

3. Article 21, intitulé **Partis politiques**, de la Loi fondamentale pour la République fédérale d'Allemagne :

- Les partis concourent à la formation de la volonté politique du peuple. Leur fondation est libre. Leur organisation interne doit être conforme aux principes démocratiques. Ils doivent rendre compte publiquement de la provenance et de l'emploi de leurs ressources ainsi que de leurs biens *(Die Parteien wirken bei der politischen Willensbildung des Volkes mit. Ihre Gründung ist frei. Ihre innere Ordnung mußdemokratischen Grundsätzen entsprechen. Sie müssen über die Herkunft und Verwendung ihrer Mittel sowie über ihr Vermögen öffentlich Rechenschaft geben.).*
- Les partis qui, d'après leurs buts ou d'après le comportement de leurs adhérents, tendent à porter atteinte à l'ordre constitutionnel libéral et démocratique, ou à le renverser, ou à mettre en péril l'existence de la République fédérale d'Allemagne, sont inconstitutionnels. La Cour constitutionnelle fédérale statue sur la question de l'inconstitutionnalité *(Parteien, die nach ihren Zielen oder nach dem Verhalten ihrer Anhänger darauf ausgehen, die freiheitliche demokratische Grundordnung zu beeinträchtigen oder zu beseitigen oder den Bestand der Bundesrepublik Deutschland zu gefährden, sind verfassungswidrig. Über die Frage der*

Deuxième paradoxe : *Les auteurs de la Constitution n'aimaient pas les partis politiques, mais dépendait d'eux pour forger votre jeune gouvernement.* [4]. L'histoire des Etats-Unis a construit cette affirmation, notamment du fait que l'Etat fédéral a ses débuts était très faible et qu'il s'agissait du souhait d'une partie importante de la population et des hommes politiques de l'époque (les *Antifédéralistes*). La mise sur pied d'un Etat capable de lever et de financer une armée nationale n'a pu se faire que grâce à l'appartenance à la même formation politique (les *Fédéralistes*) d'une majorité des élus au Sénat et à la Chambre des représentants qui votèrent la création en 1791 de la première Banque centrale des États-Unis (*First Bank of the United States*) et du Président, John Adames, qui nomma en 1801 John Marshall au poste de Juge en chef (*Chief Justice*) de la Cour surpême, et celui-ci orienta en 1819, dans l'arrêt *McCulloch contre le Maryland*, la Cour vers une jusrisprudence constitutionnelle favorable à la compétence exclusive du Congrès à créer une banque cenrale pouvant émettre de la monnaie. Il s'agit en fait de la coordance politique au sein de l'appareil de l'Etat afin d'éviter les blocages potentiels du fait d'orientations politiques différents des détenteurs des différents postes de décisions.

Troisième paradoxe : *Alors que les partis politiques ne sont ni planifiées ni vénérés par nos Fondateurs, il est douteux que notre Constitution pourrait durer sans eux.* [5]. L'auteur a identifié sept qualités des partis politiques contribuant à la pérénité du Gournement des États-Unis dans le temps :

Création de coalition stable par l'obtention de entre factions opposées
Recrutement du personnel politique et administratif
Organisation des législatures
Développement des politiques publiques
Favorisation de l'engagement civique
Information des électeurs
Simplification des choix électoraux

Quatrième paradoxe : *Les partis mineurs ou arrivant en troisième position obtiennent rarement des victoires électorales, mais ils ont un rôle vital dans la vie politique américaine.* [6] Le système politique américain est fondé sur un bipartisme très fort, accentué par l'usage due scrutin uninominal majoritaire à un seul tour dans la plupart des élections, où chacun des deux grands partis tente de couvrir le plus large spectre électoral possible. Lorsqu'un des deux partis politique ne répond pas aux attentes d'une partie de son électorat, celui-ci peut se reporter sur une

Verfassungswidrigkeit entscheidet das Bundesverfassungsgericht.).

- Les modalités sont définies par des lois fédérales *(Das Nähere regeln Bundesgesetze.).*

4. *The Framers of the Constitution disliked political parties but depended upon them to forge your fledgling government.*

5. *While political parties were neither planned nor revered by our Founders, it is doubtful our Constitution could last without them.*

6. *Minor or third political parties rarely score electoral victories, but they play a vital role in American politics.*

troisième offre politique, entraînant la défaite de leur parti d'origine : afin de récupérer cette fraction de son électorat qui lui a fait défaut, le parti en question doit prendre en compte cette fraction de l'électorat dans son programme politique.

Cinquième paradoxe : *Bien qu'il existe des dizaines de partis politiques américains mineurs, il est difficile de d'établir une typologie partisane efficace.* [7]. La classification des différents partis américains sur un seul axe, à l'instar de l'axe Gauche-Droite connu en France, du fait de l'existance d'autre axe de clivage comme le droit des États fédérés par rapport au rôle de l'État fédéral n'est pas réalisable. Cette impossibilité est renforcé par la très grande diversité des partis politiques, qui peuvent exister à des niveaux différents (national, local), comme dans les cas des partis locaux, n'agissant qu'au niveau d'un seul Etat fédéré.

Sixième paradoxe : *Malgré la prolifération des petits partis politiques, les États-Unis ont toujours maintenu un fort système à deux partis.* [8]. L'histoire politique des États-Unis, sauf entre 1801 et 1824, a toujours été marqué par le bipartisme. Cela rejoint les causes développées dans le quatrième paradoxe, à savoir le scrutin majoritaire obligeant à la construction de larges et stables coalitions afin de remporter les élections. L'auteur a developpé le cas de la domination ponctuelle ponctuelle d'un parti sur l'autre, comme lors de domination du parti républicain-démocrate (*Democratic-Republican Party*) sous les présidence de Thomas Jefferson, James Madison et James Monroe, formant une coalition regroupant les habitants des Etats du Sud et et de l'Ouest des États-Unis, la domination du Parti républicain de 1861 à 1884, de 1888 à 1892, de 1896 à 1912 et de 1920 à 1932 avec une coalition regroupant les hommes d'affaires, fermiers, les anciens soldats, les électeurs afroc-américains, nouvellement affranchis par l'adoption du 13[e]amendement en 1865, doté de la citoyenneté par le 14[e]amendement en 1868 et doué du droit de vote par 15[e]amendement 1870, et les habitants des petites communes, et la domination Démocrate sous les présidences de Franklin Delanoe Roosevelt et Harry Truman entre 1932 et 1952, grâce à une majorité regroupant les nouveaux immigrants, les travailleurs syndiqués, les électeurs juifs et les catholiques.

Septième paradoxe : *Les Démocrates et les Républicains sont à la fois similaires et différents.* [9]. Les deux grandes formations politiques américaines étant des partis de gouvernement, ceux-ci sont obligés d'atténuer leurs lignes idéologiques et présenter une base programmatique modérée afin d'élargir leur assise électorale. D'autre part, afin de recruter le plus largement possible, les deux partis ne pratiquent aujourd'hui aucune sélection à l'entrée [10], se contentant d'une simple déclaration. Néanmoins, il existe des différences entre les deux deux partis, ne serait-ce qu'au niveau

7. *While there are scores of minor American political parties, it is difficult to establish an ironclad party typology.*

8. *Despite the proliferation of minor political parties, the United States has consistently maintained a strong two-party system.*

9. *Democrates and Republicans are both similar and different.*

10. Jusqu'à la fin de la ségrégation ainsi qu'à la suite de plusieurs décisions de justice, le Parti démocrate, dans les Etats l'ancienne Confédération, interdisait aux afro-américains

des catégories sociaux professionnelles qui les soutiennnent : ouvriers, les membres des syndicats, les personnes à faible revenus, les électeurs de confession juive et catholique, les afor-américains, les descendants d'ímmigrés irlandais, asiatiques, hispaniques et slaves apportent massivement leur voix au Parti démocrate tandis que les électeurs *White Anglo-Saxon Protestant*, les milieux d'affaires, les individus à fort revenu, les descendants d'immigrés d'Europe occidentale, principalement Britaniques et Allemands, ont tendance à voter massivement pour les candidats républicains. De même il existe des différences significatives au niveau de la géographie électorale, les Démocrates dominant les grandes aires métropolitaines (Chicagon New York City, Detroit, Saint-Louis), les majorité des États de Nouvelle-Angleterre (Connecticut, Delaware, Massachusetts, New Jersey, New York et Vermont) et l'Ouest (Californie, Oregon, Washington, and Hawaii), tandis que les votes pour les Républicains prévalent dans les petites villes et les zones rurales, en particulier dans les "Etats-Rouges" ("Red States") du Sud (Alabama, Caroline du Sud, Georgie et Texas), du Midwest (Dakota du Sud, , Kansas, Missouri et Nebraska) et des Rocheuses (Idaho, Utah, Montana et Wyoming). L'électorat Démocrate tend à être très hétérogène là où l'électorat Républicain tend à être un groupe plus homogène. Enfin les différences se font aux niveaux de la hiérarchisation des valeurs : les Démocrates ont tendance à préférer l'égalité à la liberté, et la liberté à la sécurité, tandis que les Républicains tendent à favoriser la sécuritét par rapport à la liberté, et la liberté par rapport à l'égalité.

Huitième paradoxe : *L'Amérique est connu comme étant un système bipartisan, mais il y a 50 partis démocrates et 50 partis républicains.*[11] Les deux grands partis politiques américains ont tendance à être les formations politiques les plus décentralisées au monde, leur seule réelle mission étant la nomination pour l'élection présidentielle américaine, celle-ci faisant l'objet d'une coordination au niveau national. De fait, alors que les candidats à la Présidence et à la Vice-Présidence sont désignés au terme d'une longue consultation nationale, avec des variances dans le type de scrutin employés selon les partis, tous les autres mandats nationaux (Représentants et Sénateurs) et tous les mandats locaux (Gouverneurs, législature d'Etat, les élus des comptés et des municipalités) sont désignés lors d'élections primaires organisées par les seules composantes locales des deux grands partis politiques des États-Unis. Même au niveau des Etats, les deux grands partis n'exercent aucun réel contrôle sur leurs membres, se contentant d'être des machines électorales de masse. L'absence d'autorité des structures partisanes est le résultat de l'adoption d'élections primaires ouvertes afin de désigner les candidats des Parti aux fonctions électorales. Elle explique aussi les grandes différences entre les élus d'un même parti, selon sa circonscription d'élection : ainsi les Républicains de Nouvelle-Angleterre auront tendance à être plus favo-

d'adhérer au Parti et de voter aux élections primaires de désignation des candidats démocrates, à l'époque garantient d'être élus du fait de la domination du Parti dans ces territoires

11. *America is known as a two-party system, but there are at least 50 Democratic parties and 50 Republicans parties today.*

rable à une législation portant sur le contrôle des armes à feu, au droit des femmes à avorter, à la recherche sur les cellules souches et à mise en place d'une assurance santé universelle par l'État fédéral que leurs homogues du Texas. Même à l'intérieur d'un Etat, il existe de fortes différences entre les membres d'un même parti : le Parti démocrate du Missouri est divisé entre ses composantes de Saint-Louis et de Kansas City, qui supporte les politiques libérales du Parti au niveau national, et celles des comptés ruraux, qui votent localement pour les Démocrates conservateurs et votent souvent au niveau national pour candidats Républicains, du fait leur position en faveur du droit à détenir librement une arme à feu et leur oppostition à l'avortement.

Neuvième paradoxe : *Les partis politiques sont des organisations privées, semi-publiques.*[12] La nature des partis politiques est complexe à déterminer, du fait qu'ils soient des organisations privés, donc composés de membres ayant librement choisi de les rejoindre, mais dont l'action est en partie publique, du fait qu'ils présente des candidats et participent au pourvoiement des postes de l'administration publique.

Dixième paradoxe : *Les partis politique ont joué un rôle critique dans l'histoire constitutionnelle américaine bien qu'ils soient souvent décriés.*[13]

12. *Political parties are private, semi-public organizations.*

13. *Political partis have played a critical role in American constitutional history, yet they are often vilified*

A.2 Analyse de la stabilité structurelle et de la cohérence idéologique des partis politiques de gouvernement

L'étude de l'histoire et du fonctionnement des différents partis politiques dit de gouvernement, c'est-à-dire ceux ayant pour vocation de gouverner et se retrouvant en position de l'être, révèlent qu'ils ont la plupart du temps adapté, si ce n'est calqué, leur organisation sur celle de institutions. Ainsi en France, les deux grands partis de gouvernement (Parti socialiste, Les Républicains), la plupart des petits partis de caolition gouvernemental (Europe Ecologie Les Verts, Union des Démocrates et Écologistes, Parti Radical de Gauche, Union des Democrates et Indépendants) et même le parti politique politique constataire (Front national) ont un processus, appelé Congrès, de double désignation en interne pour renouveller leurs instances dirigeantes, les seules exceptions étant les Secrétaires nationaux du Parti communiste et d'EELV : une pour les organes de délibération (Conseil national pour la plupart, Comité Directeur national pour le PRG et Comité central au FN) et une autre pour les instances exécutive (Présidence pour le PRG, l'UDI, LR et le FN, Premier secrétaire national au PS). En dehors du Front national qui a choisit le scrutin plurinominal majoritaire à un tour, de l'UDI et de l'UDE qui sont des fédérations de partis politiques et du Parti Radical de Gauche qui a fait le choix de faire siéger ses élus et ses dirigeants internes locaux, les parti politiques ont recours au scrutin proportionnel plurinominal à la plus forte moyenne pour pourvoir leurs instances délibératives, tandis que tous ont recours au scrutin uninominal majoritaire à un ou plusieurs tours afin de désigner le titulaire de l'instance exécutive. On note en particulier dans le cas des régimes parlementaires monistes, une certaine prédominance des parlementaires dans les instances délibératives, même si le recours à des désignation directe du chef du parti a pu amener à une coupure avec les parlementaires (cas de Jeremy Corbyn au parti travailliste britannique) ou avec les adhérents (cas de Bill Shorten au parti travailliste australien). L'exportation hors des États-Unis du système des élections primaires ouvertes a aggravé ce phénomène en désolidarisant le candidat à la gouvernance du pays de la direction du parti (cas des Primaires citoyennes de 2011 où un différence significative est apparue entre le programme présidentiel de François Hollande et le programme de gouvernement du parti socialiste).

L'étude de l'histoire des partis politiques français en particulier révèle que la scission du processus de désignation des instances dirigeantes est un phénomène relativement récent dans les partis politiques (en 1995 au PS et en 1998 au RPR), issue de logiques différentes : mettre fin à l'instabilité à la tête du parti socialiste avec trois changements de Premier secrétaire national en trois ans (Laurent Fabius en 1992, Michel Rocard en 1993 et Henri Emmanuelli en 1994) et faire correspondre l'architecture des institutions du RPR à celle de la V$^{\text{ème}}$ République avec la logique gauliste d'élection directe du président. Dans le cas du Parti socialiste, l'existence de majorité constitué dans la seule optique de diriger le parti, réunissant des tendances idéologiques peu proches, a entraîné l'élection de candidat de consensus (François Hollande de 1997 à 2008, Harlem

Désir de 2012 à 2014, Jean-Christophe Cambadélis de 2014 à 2016), ayant pour particularité de ne pas être en capacité d'exercer une domination politique sur les grandes personnalités du parti, tandis Martine Aubry fut élu en 2008 dans des conditions contesté et sans majorité solide pour diriger le parti. Dans le cas du Rassemblement Pour la République et des partis lui ayant succédé, la fonction de président du parti était occupé soit par le candidat naturel du parti à l'élection présidentielle (Jacques Chirac de 1976 à 1994, Nicolas Sarkozy de 2004 à 2007), soit par une personnalité politique n'ayant pas d'ambition ouverte pour l'élection présidentielle (Alain Juppé de 1994 à 1997 et de 2002 à 2004, Philippe Seguin de 1997 à 1999, Michèle Aliot-Marie de 1999 à 2002), soit suspendue lorsque le président de la république est issu de celui-ci (2007 à 2012). Les périodes d'absence de candidat naturel du parti de 1993 à 1995 puis à partir de 2012 a entraîné une forte instabilité à l'intérieur du parti, compensé en partie par la culture gauliste de discipline et d'obéissance au chef légitime. A ce propos la mise en place chez Les Républicains d'une élection primaire ouverte, décorréllant la fonction de président du parti de celle du candidat à l'élection présidentielle, peut contribuer à affaiblir le poids de ce parti dans la définition du programme de gouvernement à l'instar de ce qui se produit depuis 2011 au parti socialiste. Le succès politique rencontré par le Front national, tend à contrer l'argument d'efficacité électorale qu'auraient ces type de désignation. D'une part, celles-ci fonctionnent sur une logique majoritaire tendant à exclure les sensibilités minoritaires rendant difficile l'unité du camp politique du candidat. D'autre part, la nature même de l'élection présidentielle, considéré politiquement comme l'élection la plus importante alors que juridiquement elle offre moins de pouvoir que les élections législatives, incite les partis politiques à présenter un candidat et à refuser de concourir à ces primaires ouvertes (sauf à les organiser eux-mêmes) détruisant l'argument de facteur de rassemblement de ces dernières (ainsi seul le PRG avait participé à l'élection primaire présidentielle organisé par le PS en 2011, EELV et le FG ayant chacun présenté un candidat à l'élection présidentielle de 2012). En dehors des cas particuliers de 1965 et 1974, le parti socialise et le parti communiste ont chacun présenté des candidats aux élections présidentielles, tandis qu'il y a toujours eu plus de deux candidats de la droite (gauliste et centriste). En revanche des accords électoraux fréquents ont été constatés à l'occasion des élections législatives (entre le PS, le PRG et EELV d'une part et entre l'UMP et le Nouveau-Centre d'autre part en 2012). Ces accords électoraux sont le fruit de négociation entre les instances exécutives des partis, approuvés ensuite par leurs instances délibératives. Renforcer le lien entre les instances délibératives et exécutives pourraient faciliter l'adoption de tels accord (que peuvent compromettre des situations de cohabitation interne où les conditions pour une entente entre les différentes composantes internes ne seraient pas réunies). Cele peut passer par une scission de la fonction exécutive entre un rôle de symbole de l'unité du parti, qui pourrait être désigné directement par les adhérents, sans pouvoirs actifs (mais pouvant exercer une fonction pouvoir neutre interne avec des pouvoirs de réserve en cas de crise de fonctionnement) et une fonction de chef du bureau politique, issue du Conseil natioanl, qui détiendrait la réalité du pouvoir exécutif interne.

Par ailleurs, il est observé depuis la fin des années 2000, un effacement de la discipline militante avec la multiplication des candidatures dissidentes à différentes élections (municipales, départementales, régionales, sénatoriales et législative) sans qu'une sanction disciplinaire interne n'interviennent ensuite (c'est ainsi qu'Édouard Balladur est resté membre du RPR malgré sa candidature dissidente à l'élection présidentielle de 1995) pour des raisons politiques (afin de pas provoquer de scission, les partis politiques de gouvernement regroupant différente sensibilités pouvant être tenté par la sécession en cas de représailles à l'encontre de leurs meneurs internes). L'engagement d'une procédure displinaire dépendant encore des instances dirigeantes, malgré l'automaticité prévue par les statuts, font du déclenchement de cette action un choix politique. De ce fait la séparation théoriques des pouvoirs judiciaires internes des composantes délibératives et exécutives ne se constate pas en pratique. Il est à noter que le règlement des conflits au sein de composantes internes de ces partis politiques (section locale ou fédération départementale) reste du ressort des instances délibératives supérieurs (Conseil fédéral ou Conseil national), c'est-à-dire d'une décision également politique. On peut considérer, à l'instar de institutions étatiques, qu'il s'agisse d'une forme de justice retenue. Une conséquence de cette situation a été la multiplication de recours devant la justice par des adhérents s'estimant injustement lésés par des décisions d'arbitrage en leur défaveur insuffisament justifiées. Une évolution a été constatée avec la mise en place à compter de 2012 au Parti socialiste et de 2014 à l'UMP de Hautes Autorités en charge de règler les litiges statutaires. Deux évolutions semblent en la matière nécessaires afin de réduire les recours des opposants internes en justice : assurer une réelle indépendance des instances disciplinaires internes et achever la séparation des fonctions d'arbitrage statutaire des instances dirigeantes par la mise en place d'une forme de justice administrative interne indépendante.

Annexe B

Pistes d'étude du paradoxe d'Ostrogorski avec choix majoritaire composé dans le cas de plus de deux axes

B.1 Modèle avec égalité des valeurs des axes

On étend le raisonnement développé en partie pour le modèle de choix majoritaire composé dans le cas de trois axes programmatiques. En conserve les mêmes hypothèses, à savoir que le corps électoral N est d'effectif impair $n = 2p+1$ et sur chaque axe programmatique, chaque électeur affecte une valeur $+1$ lorsqu'il choisit une proposition de A et -1 lorsqu'il préfère celle de B. On se retrouve donc avec les huit profils de vote suivants :

$$(V_\alpha, V_\beta^+, V_\gamma^+, V_\delta^+) = (\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix},)$$

pour les 4 profils aboutissant à un vote pour A,

$$(V_\beta^-, V_\gamma^-, V_\delta^-, V_\xi) = (\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix})$$

pour les 4 profils aboutissant à un vote pour B,
et auxquels sont associés les huit effectifs suivant

$$(\alpha, \beta^+, \gamma^+, \delta^+, \beta^-, \gamma^-, \delta^-, \xi))$$

de sorte que $\alpha + \beta^+ + \gamma^+ + \delta^+ + \beta^- + \gamma^- + \delta^- + \xi = n$.

Ainsi le choix sur les axes programmatiques s'écrit :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix} &= \alpha\begin{pmatrix}+1\\+1\\+1\end{pmatrix}+\beta^+\begin{pmatrix}+1\\+1\\-1\end{pmatrix}+\gamma^+\begin{pmatrix}+1\\-1\\+1\end{pmatrix}+\delta^+\begin{pmatrix}-1\\+1\\+1\end{pmatrix}\\ &\quad +\beta^-\begin{pmatrix}+1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\gamma^-\begin{pmatrix}-1\\+1\\-1\end{pmatrix}+\delta^-\begin{pmatrix}-1\\-1\\+1\end{pmatrix}+\xi\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Contrairement à ce que nous avions vu pour le cas avec deux programmatiques, le cas avec trois axes offre deux constructions possibles de situations de paradoxe d'Ostrogorki : soit les choix sur les trois axes sont unaniment différents du vote final (on parle de *Paradoxe pur*), soit ils sont majoritairement différents du vote final (c'est-à-dire un *Paradoxe simple*).

Dans le premier cas, on a A victorieux sur les trois axes et B emportant le vote global, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{lcl}A_x&>&0\\A_y&>&0\\A_z&>&0\end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{lcl}\alpha+\beta^++\gamma^+-\delta^++\beta^--\gamma^--\delta^--\xi&>&0\\\alpha+\beta^+-\gamma^++\delta^+-\beta^-+\gamma^--\delta^--\xi&>&0\\\alpha-\beta^++\gamma^++\delta^+-\beta^--\gamma^-+\delta^--\xi&>&0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{lcl}\exists\Delta^x>0|\alpha+\beta^++\gamma^+-\delta^++\beta^--\gamma^--\delta^--\xi&=&\Delta^x\\\exists\Delta^y>0|\alpha+\beta^+-\gamma^++\delta^+-\beta^-+\gamma^--\delta^--\xi&=&\Delta^y\\\exists\Delta^z>0|\alpha-\beta^++\gamma^++\delta^+-\beta^--\gamma^-+\delta^--\xi&=&\Delta^z\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}2(\alpha+\beta^+-\delta^--\xi)&=&\Delta^x+\Delta^y\\2(\gamma^+-\delta^++\beta^--\gamma^-)&=&\Delta^x-\Delta^y\\2(\alpha+\gamma^+-\gamma^--\xi)&=&\Delta^x+\Delta^z\\2(\beta^+-\delta^++\beta^--\delta^-)&=&\Delta^x-\Delta^z\\2(\alpha+\delta^+-\beta^--\xi)&=&\Delta^y+\Delta^z\\2(\beta^+-\gamma^++\gamma^--\delta^-)&=&\Delta^y-\Delta^z\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta^+-\delta^--\xi&=&\frac{\Delta^x+\Delta^y}{2}\\\gamma^+-\delta^++\beta^--\gamma^-&=&\frac{\Delta^x-\Delta^y}{2}\\\alpha+\gamma^+-\gamma^--\xi&=&\frac{\Delta^x+\Delta^z}{2}\\\beta^+-\delta^++\beta^--\delta^-&=&\frac{\Delta^x-\Delta^z}{2}\\\alpha+\delta^+-\beta^--\xi&=&\frac{\Delta^y+\Delta^z}{2}\\\beta^+-\gamma^++\gamma^--\delta^-&=&\frac{\Delta^y-\Delta^z}{2}\end{array}\right.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}V_G<0 &\iff 3(\alpha-\xi)+\beta^++\gamma^++\delta^+-\beta^--\gamma^--\delta^-<0\\
&\iff \exists\Delta^G<0|3(\alpha-\xi)+\beta^++\gamma^++\delta^+-\beta^--\gamma^--\delta^-=\Delta^G\\
&\iff (\alpha+\beta^+-\delta^--\xi)+(\alpha+\gamma^+-\gamma^--\xi)+(\alpha+\delta^+-\beta^--\xi)=\Delta^G\\
&\iff (\tfrac{\Delta^x+\Delta^y}{2})+(\tfrac{\Delta^x+\Delta^z}{2})+(\tfrac{\Delta^y+\Delta^z}{2})=\Delta^G\\
&\iff \Delta^x+\Delta^y+\Delta^z=\Delta^G\end{aligned}$$

Δ^x, Δ^y et Δ^z étant strictement positifs alors que Δ^G est strictement positif, le *Paradoxe pur* est impossible.

Dans le second cas, on a une décision favorable A sur deux axes et une décision favorable à B sur l'axe restant qui emporte le vote global. On suppose donc que A l'emporte sur les axes A_x et A_y tandis que B s'impose sur l'axe A_z, les deux autres combinaisons donnant des résultats identiques. On a donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} A_x & > & 0 \\ A_y & > & 0 \\ A_z & < & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \exists\Delta^x > 0|\alpha+\beta^+ +\gamma^+ -\delta^+ +\beta^- -\gamma^- -\delta^- -\xi & = & \Delta^x \\ \exists\Delta^y > 0|\alpha+\beta^+ -\gamma^+ +\delta^+ -\beta^- +\gamma^- -\delta^- -\xi & = & \Delta^y \\ \exists\Delta^z < 0|\alpha-\beta^+ +\gamma^+ +\delta^+ -\beta^- -\gamma^- +\delta^- -\xi & = & \Delta^z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta^+ -\delta^- -\xi & = & \frac{\Delta^x+\Delta^y}{2} \\ \gamma^+ -\delta^+ +\beta^- -\gamma^- & = & \frac{\Delta^x-\Delta^y}{2} \\ \alpha+\gamma^+ -\gamma^- -\xi & = & \frac{\Delta^x+\Delta^z}{2} \\ \beta^+ -\delta^+ +\beta^- -\delta^- & = & \frac{\Delta^x-\Delta^z}{2} \\ \alpha+\delta^+ -\beta^- -\xi & = & \frac{\Delta^y+\Delta^z}{2} \\ \beta^+ -\gamma^+ +\gamma^- -\delta^- & = & \frac{\Delta^y-\Delta^z}{2} \end{array}\right.$$

Si l'on ne connaît pas le signe de $\frac{\Delta^x-\Delta^y}{2}$, $\frac{\Delta^x+\Delta^z}{2}$ et $\frac{\Delta^y+\Delta^z}{2}$, on sait en revanche que $\frac{\Delta^x+\Delta^y}{2}$, $\frac{\Delta^x-\Delta^z}{2}$ et $\frac{\Delta^y-\Delta^z}{2}$ sont strictement positifs. On retrouve donc le même système que dans le cas du *Paradoxe pur* concernant le vote global, c'est-à-dire :

$$V_G < 0 \iff \exists\Delta^G < 0|\Delta^x+\Delta^y+\Delta^z = \Delta^G$$

Δ^G représente l'écart négatif entre $\Delta^x+\Delta^y$ que l'on sait positif et Δ^z qui est négatif. Pour que le *Paradoxe simple* soit possible, il faut que $-\Delta^z > \Delta^x+\Delta^y$ et que leur différence soit égale à Δ^G. Autrement dit $\Delta^x+\Delta^y = \Delta^G-\Delta^z$, ce qui se vérifie facilement. En effet :

$$\begin{array}{rcl} \Delta^G-\Delta^z & = & 3(\alpha-\xi)+\beta^+ +\gamma^+ +\delta^+ -\beta^- -\gamma^- -\delta^- \\ & & -(\alpha-\beta^+ +\gamma^+ +\delta^+ -\beta^- -\gamma^- +\delta^- -\xi) \\ & = & 2(\alpha-\xi+\beta^+ -\delta^-) \\ & = & \Delta^x+\Delta^y \end{array}$$

Les conditions à remplir sont donc que :

$$\begin{array}{rcl} \Delta^x+\Delta^y < -\Delta^z & \iff & 2(\alpha-\xi+\beta^+ -\delta^-) < -(\alpha-\beta^+ +\gamma^+ +\delta^+ -\beta^- -\gamma^- +\delta^- -\xi) \\ & \iff & 3\alpha-3\xi+\beta^+ -\delta^- < -\gamma^+ -\delta^+ +\beta^- +\gamma^- \\ & \iff & 3\alpha+\beta^+ +\delta^+ +\gamma^+ < 3\xi+\beta^- +\delta^- +\gamma^- \end{array}$$

Le Paradoxe simple est donc possible avec des axes de mêmes poids. Nous allons donc étudier l'effet de poids différents sur la possibilité d'occurence du paradoxe.

B.2 Modèle avec inégalité partielle des valeurs des axes

On reprend la même structure qu'à la section précédente, en modifiant la pondération des axes. En effet, l'electeur n'affecte les valeurs $+1$ et -1 sur les axes que si celles-ci correspondent à la préférence globale de l'électeur, à savoir son vote. Les autres se voit affecter une valeur ζ^k, selon l'axe k sur lequel il se trouve. On se retrouve donc avec les huit profils de vote suivants :

$$(V_\alpha, V_\beta^+, V_\gamma^+, V_\delta^+) = (\begin{pmatrix}+1\\+1\\+1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+1\\+1\\-\zeta^z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+1\\-\zeta^y\\+1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\zeta^x\\+1\\+1\end{pmatrix},)$$

pour les 4 profils aboutissant à un vote pour A,

$$(V_\delta^-, V_\gamma^-, V_\beta^-, V_\xi) = (\begin{pmatrix}+\zeta^x\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\+\zeta^y\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\+\zeta^z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix})$$

En reprenant les valeurs de Δ^x, Δ^y et Δ^x sans leur attribuer encore de signe, les choix sur les axes s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}
& \left\{\begin{array}{lcl} A_x & = & \Delta^x \\ A_y & = & \Delta^y \\ A_z & = & \Delta^z \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{lcl} \alpha+\beta^+ +\gamma^+ -\zeta^x\delta^+ +\zeta^x\delta^- -\gamma^- -\beta^- -\xi & = & \Delta^x \\ \alpha+\beta^+ -\zeta^y\gamma^+ +\delta^+ -\delta^- +\zeta^y\gamma^- -\beta^- -\xi & = & \Delta^y \\ \alpha-\zeta^z\beta^+ +\gamma^+ +\delta^+ -\delta^- -\gamma^- +\zeta^z\beta^- -\xi & = & \Delta^z \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{lcl} (1+\zeta^y)(\gamma^+-\gamma^-)+(1+\zeta^x)(\delta^+-\delta^-) & = & \Delta^x-\Delta^y \\ (1+\zeta^z)(\beta^+-\beta^-)+(1+\zeta^x)(\delta^--\delta^+) & = & \Delta^x-\Delta^z \\ (1+\zeta^z)(\beta^+-\beta^-)+(1+\zeta^y)(\gamma^--\gamma^+) & = & \Delta^y-\Delta^z \end{array}\right.
\end{aligned}$$

tandis que le vote global s'écrit :

$$\begin{aligned}
V_G &= 3(\alpha-\xi)+(2-\zeta^z)(\beta^+-\beta^-)+(2-\zeta^y)(\gamma^+-\gamma^-)+(2-\zeta^x)(\delta^+-\delta^-) \\
&= \Delta^x+\Delta^y+\Delta^z
\end{aligned}$$

Si il est immédiat qu'un *paradoxe pur* est impossible, un *paradoxe simple* demeure possible du moment que la valeur absolue de l'axe de signe contraire soit strictement supérieure à la somme des deux axes restants. Supposons que A_z soit l'axe en question, on aurait :

$$\begin{aligned}
& \left\{\begin{array}{lcl} A_x & = & \Delta^x > 0 \\ A_y & = & \Delta^y > 0 \\ A_z & = & \Delta^z < 0 \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcl} \Delta^x-\Delta^z & > & 0 \\ \Delta^y-\Delta^z & > & 0 \\ \Delta^x+\Delta^y-2\Delta^z & > & 0 \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{lcl} \beta^+-\beta^- > 0 & \iff & \exists\Delta^{\beta^-} > 0 | \beta^+ = \beta^- + \Delta^{\beta^-} \\ \delta^--\delta^+ > 0 & \iff & \exists\Delta^{\delta^+} > 0 | \delta^- = \delta^+ + \Delta^{\delta^+} \\ \gamma^--\gamma^+ > 0 & \iff & \exists\Delta^{\gamma^+} > 0 | \gamma^- = \gamma^+ + \Delta^{\gamma^+} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On reconstitue à partir de cette construction les trois écriture possibles de α, à savoir :

$$
\begin{array}{rl}
& \left\{ \begin{array}{rcl} A_x & = & \alpha + \Delta^{\beta^-} - \Delta^{\gamma^+} - \zeta^x \Delta^{\delta^+} - \xi > 0 \\ A_y & = & \alpha + \Delta^{\beta^-} - \zeta^y \Delta^{\gamma^+} - \Delta^{\delta^+} - \xi > 0 \\ A_z & = & \alpha - \zeta^z \Delta^{\beta^-} - \Delta^{\gamma^+} - \Delta^{\delta^+} - \xi < 0 \end{array} \right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \Delta^{\beta^-} & = & \Delta^{\gamma^+} + \zeta^x \Delta^{\delta^+} + \xi + \Delta^x \\ \alpha + \Delta^{\beta^-} & = & \zeta^y \Delta^{\gamma^+} + \Delta^{\delta^+} + \xi + \Delta^y \\ \alpha - \Delta^z & = & \zeta^z \Delta^{\beta^-} + \Delta^{\gamma^+} + \Delta^{\delta^+} + \xi \end{array} \right. \\
\Longleftrightarrow & \alpha = \left\{ \begin{array}{l} \xi - \Delta^{\beta^-} + \zeta^y \Delta^{\gamma^+} + \Delta^{\delta^+} + \Delta^y \\ \xi - \Delta^{\beta^-} + \Delta^{\gamma^+} + \zeta^x \Delta^{\delta^+} + \Delta^x \\ \xi + \zeta^z \Delta^{\beta^-} + \Delta^{\gamma^+} + \Delta^{\delta^+} + \Delta^z \end{array} \right. \\
\Longleftrightarrow & 3(\alpha - \xi) = (\zeta^z - 2)\Delta^{\beta^-} + (2\zeta^y)\Delta^{\gamma^+} + (2\zeta^x)\Delta^{\delta^+} + \Delta^x + \Delta^y + \Delta^z
\end{array}
$$

En intégrant ces valeurs dans la formule du vote global, on obtient :

$$
\begin{array}{rcl}
V_G & = & 3(\alpha - \xi) + (2 - \zeta^z)\Delta^{\beta^-} - (2 - \zeta^y)\Delta^{\gamma^+} - (2 - \zeta^x)\Delta^{\delta^+} \\
& = & 2(\zeta^y \Delta^{\gamma^+} + \zeta^x \Delta^{\delta^+}) + \Delta^x + \Delta^y + \Delta^z
\end{array}
$$

Dans la mesure où tous les termes, en dehors de Δ^z, du vote global sont positifs, celui-ci ne peut être du même signe que l'axe préférentiel A_z que si et seulement si $2(\zeta^y \Delta^{\gamma^+} + \zeta^x \Delta^{\delta^+}) + \Delta^x + \Delta^y < -\Delta^z$, rendant ainsi possible un paradoxe simple d'Ostrogorski.

B.3 Modèle avec inégalité totale des valeurs des axes

Nous reprenons la même structure que précédement, en supprimant la valeur 1 et imposant trois valeurs différentes possibles dans l'ordre hiérarchique $\Omega > \Theta > \Phi > 0$, de sorte que $\exists \Delta^\Omega > 0 | \Omega = \Theta + \Delta^\Omega$ et $\exists \Delta^\Theta > 0 | \Theta = \Phi + \Delta^\Theta$. On a ainsi les 48 profils de vote suivants

$$
\begin{pmatrix}
V_{\alpha^+_{xyz}} & V_{\alpha^+_{xzy}} & V_{\alpha^+_{yxz}} & V_{\alpha^+_{yzx}} & V_{\alpha^+_{zxy}} & V_{\alpha^+_{zyx}} \\
V_{\beta^+_{xyz}} & V_{\beta^+_{xzy}} & V_{\beta^+_{yxz}} & V_{\beta^+_{yzx}} & V_{\beta^+_{zxy}} & V_{\beta^+_{zyx}} \\
V_{\gamma^+_{xyz}} & V_{\gamma^+_{xzy}} & V_{\gamma^+_{yxz}} & V_{\gamma^+_{yzx}} & V_{\gamma^+_{zxy}} & V_{\gamma^+_{zyx}} \\
V_{\delta^+_{xyz}} & V_{\delta^+_{xzy}} & V_{\delta^+_{yxz}} & V_{\delta^+_{yzx}} & V_{\delta^+_{zxy}} & V_{\delta^+_{zyx}} \\
V_{\delta^-_{zyx}} & V_{\delta^-_{zxy}} & V_{\delta^-_{yzx}} & V_{\delta^-_{yxz}} & V_{\delta^-_{xzy}} & V_{\delta^-_{xyz}} \\
V_{\gamma^-_{zyx}} & V_{\gamma^-_{zxy}} & V_{\gamma^-_{yzx}} & V_{\gamma^-_{yxz}} & V_{\gamma^-_{xzy}} & V_{\gamma^-_{xyz}} \\
V_{\beta^-_{zyx}} & V_{\beta^-_{zxy}} & V_{\beta^-_{yzx}} & V_{\beta^-_{yxz}} & V_{\beta^-_{xzy}} & V_{\beta^-_{xyz}} \\
V_{\alpha^-_{zyx}} & V_{\alpha^-_{zxy}} & V_{\alpha^-_{yzx}} & V_{\alpha^-_{yxz}} & V_{\alpha^-_{xzy}} & V_{\alpha^-_{xyz}}
\end{pmatrix}
$$

c'est-à-dire

$$
\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix}+\Omega\\+\Theta\\+\Phi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Omega\\+\Phi\\+\Theta\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Theta\\+\Omega\\+\Phi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Theta\\+\Phi\\+\Omega\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Phi\\+\Omega\\+\Theta\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Phi\\+\Theta\\+\Omega\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}+\Omega\\+\Theta\\-\Phi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Omega\\-\Phi\\+\Theta\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Theta\\+\Omega\\-\Phi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Theta\\-\Phi\\+\Omega\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Phi\\+\Omega\\+\Theta\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Phi\\+\Theta\\+\Omega\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}+\Omega\\-\Theta\\+\Phi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Omega\\+\Phi\\-\Theta\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Theta\\+\Omega\\+\Phi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Theta\\+\Phi\\+\Omega\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Phi\\+\Omega\\-\Theta\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Phi\\-\Theta\\+\Omega\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}-\Omega\\+\Theta\\+\Phi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Omega\\+\Phi\\+\Theta\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Theta\\-\Omega\\+\Phi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Theta\\+\Phi\\-\Omega\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Phi\\-\Omega\\+\Theta\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Phi\\+\Theta\\-\Omega\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}-\Phi\\-\Theta\\+\Omega\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Phi\\+\Omega\\-\Theta\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Theta\\-\Phi\\+\Omega\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Theta\\+\Omega\\-\Phi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Omega\\-\Phi\\-\Theta\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Omega\\-\Theta\\-\Phi\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}-\Phi\\+\Theta\\-\Omega\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Phi\\-\Omega\\+\Theta\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Theta\\-\Phi\\-\Omega\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Theta\\-\Omega\\-\Phi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Omega\\-\Phi\\+\Theta\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Omega\\+\Theta\\-\Phi\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}+\Phi\\-\Theta\\-\Omega\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+\Phi\\-\Omega\\-\Theta\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Theta\\+\Phi\\-\Omega\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Theta\\-\Omega\\+\Phi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Omega\\+\Phi\\-\Theta\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Omega\\-\Theta\\+\Phi\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}-\Phi\\-\Theta\\-\Omega\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Phi\\-\Omega\\-\Theta\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Theta\\-\Phi\\-\Omega\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Theta\\-\Omega\\-\Phi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Omega\\-\Phi\\-\Theta\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\Omega\\-\Theta\\-\Phi\end{pmatrix}
\end{pmatrix}
$$

auxquels sont associés les 48 effectifs suivants

$$
\begin{pmatrix}
\alpha^+_{xyz} & \alpha^+_{xzy} & \alpha^+_{yxz} & \alpha^+_{yzx} & \alpha^+_{zxy} & \alpha^+_{zyx}\\
\beta^+_{xyz} & \beta^+_{xzy} & \beta^+_{yxz} & \beta^+_{yzx} & \beta^+_{zxy} & \beta^+_{zyx}\\
\gamma^+_{xyz} & \gamma^+_{xzy} & \gamma^+_{yxz} & \gamma^+_{yzx} & \gamma^+_{zxy} & \gamma^+_{zyx}\\
\delta^+_{xyz} & \delta^+_{xzy} & \delta^+_{yxz} & \delta^+_{yzx} & \delta^+_{zxy} & \delta^+_{zyx}\\
\delta^-_{zyx} & \delta^-_{zxy} & \delta^-_{yzx} & \delta^-_{yxz} & \delta^-_{xzy} & \delta^-_{xyz}\\
\gamma^-_{zyx} & \gamma^-_{zxy} & \gamma^-_{yzx} & \gamma^-_{yxz} & \gamma^-_{xzy} & \gamma^-_{xyz}\\
\beta^-_{zyx} & \beta^-_{zxy} & \beta^-_{yzx} & \beta^-_{yxz} & \beta^-_{xzy} & \beta^-_{xyz}\\
\alpha^-_{zyx} & \alpha^-_{zxy} & \alpha^-_{yzx} & \alpha^-_{yxz} & \alpha^-_{xzy} & \alpha^-_{xyz}
\end{pmatrix}
$$

de sorte que leur somme $\alpha^+_{xyz}+\alpha^+_{xzy}+\alpha^+_{yxz}+\alpha^+_{yzx}+\alpha^+_{zxy}+\alpha^+_{zyx}+\beta^+_{xyz}+\beta^+_{xzy}+\beta^+_{yxz}+\beta^+_{yzx}+\beta^+_{zxy}+\beta^+_{zyx}+\gamma^+_{xyz}+\gamma^+_{xzy}+\gamma^+_{yxz}+\gamma^+_{yzx}+\gamma^+_{zxy}+\gamma^+_{zyx}+\delta^+_{xyz}+\delta^+_{xzy}+\delta^+_{yxz}+\delta^+_{yzx}+\delta^+_{zxy}+\delta^+_{zyx}+\delta^-_{zyx}+\delta^-_{zxy}+\delta^-_{yzx}+\delta^-_{yxz}+\delta^-_{xzy}+\delta^-_{xyz}+\gamma^-_{zyx}+\gamma^-_{zxy}+\gamma^-_{yzx}+\gamma^-_{yxz}+\gamma^-_{xzy}+\gamma^-_{xyz}+\beta^-_{zyx}+\beta^-_{zxy}+\beta^-_{yzx}+\beta^-_{yxz}+\beta^-_{xzy}+\beta^-_{xyz}+\alpha^-_{zyx}+\alpha^-_{zxy}+\alpha^-_{yzx}+\alpha^-_{yxz}+\alpha^-_{xzy}+\alpha^-_{xyz}=n.$

Ainsi les valeurs Δ^x, Δ^y et Δ^z, sans attribution particulière de signe, s'écrivent :

$$
\Longleftrightarrow \quad
\left\{
\begin{array}{rcl}
A_x & = & \Delta^x > 0 \\
A_y & = & \Delta^y > 0 \\
A_z & = & \Delta^z < 0
\end{array}
\right.
$$

$$
\Longleftrightarrow \quad
\left\{
\begin{array}{rcl}
\Delta^x & = & \Omega(\alpha^+_{xyz} + \alpha^+_{xzy} + \beta^+_{xyz} + \beta^+_{xzy} + \gamma^+_{xyz} + \gamma^+_{xzy} - \delta^+_{xyz} - \delta^+_{xzy} \\
& & +\delta^-_{zyx} + \delta^-_{yzx} - \gamma^-_{zyx} - \gamma^-_{yzx} - \beta^-_{zyx} - \beta^-_{yzx} - \alpha^-_{zyx} - \alpha^-_{yzx}) \\
& & +\Theta(\alpha^+_{yxz} + \alpha^+_{yzx} + \beta^+_{yxz} + \beta^+_{yzx} - \gamma^+_{yxz} - \gamma^+_{yzx} + \delta^+_{yxz} + \delta^+_{yzx} \\
& & -\delta^-_{zxy} - \delta^-_{xzy} + \gamma^-_{zxy} + \gamma^-_{xzy} - \beta^-_{zxy} - \beta^-_{xzy} - \alpha^-_{zxy} - \alpha^-_{xzy}) \\
& & +\Phi(\alpha^+_{zxy} + \alpha^+_{zyx} - \beta^+_{zxy} - \beta^+_{zyx} + \gamma^+_{zxy} + \gamma^+_{zyx} + \delta^+_{zxy} + \delta^+_{zyx} \\
& & -\delta^-_{yxz} - \delta^-_{xyz} - \gamma^-_{yxz} + \gamma^-_{xyz} + \beta^-_{yxz} + \beta^-_{xyz} - \alpha^-_{yxz} - \alpha^-_{xyz}) \\
\Delta^y & = & \Omega(\alpha^+_{yxz} + \alpha^+_{zxy} + \beta^+_{yxz} + \beta^+_{zxy} + \gamma^+_{yxz} + \gamma^+_{zxy} - \delta^+_{yxz} - \delta^+_{zxy} \\
& & +\delta^-_{zxy} + \delta^-_{yxz} - \gamma^-_{zxy} - \gamma^-_{yxz} - \beta^-_{zxy} - \beta^-_{yxz} - \alpha^-_{zxy} - \alpha^-_{yxz}) \\
& & +\Theta(\alpha^+_{xyz} + \alpha^+_{zyx} + \beta^+_{xyz} + \beta^+_{zyx} - \gamma^+_{xyz} - \gamma^+_{zyx} + \delta^+_{xyz} + \delta^+_{zyx} \\
& & -\delta^-_{zyx} - \delta^-_{xyz} + \gamma^-_{zyx} + \gamma^-_{xyz} - \beta^-_{zyx} - \beta^-_{xyz} - \alpha^-_{zyx} - \alpha^-_{xyz}) \\
& & +\Phi(\alpha^+_{xzy} + \alpha^+_{yzx} - \beta^+_{xzy} - \beta^+_{yzx} + \gamma^+_{xzy} + \gamma^+_{yzx} + \delta^+_{xzy} + \delta^+_{yzx} \\
& & -\delta^-_{yzx} - \delta^-_{xzy} - \gamma^-_{yzx} - \gamma^-_{xzy} + \beta^-_{yzx} + \beta^-_{xzy} - \alpha^-_{yzx} - \alpha^-_{xzy}) \\
\Delta^z & = & \Omega(\alpha^+_{yzx} + \alpha^+_{zyx} + \beta^+_{yzx} + \beta^+_{zyx} + \gamma^+_{yzx} + \gamma^+_{zyx} - \delta^+_{yzx} - \delta^+_{zyx} \\
& & +\delta^-_{zyx} + \delta^-_{yzx} - \gamma^-_{zyx} - \gamma^-_{yzx} - \beta^-_{zyx} - \beta^-_{yzx} - \alpha^-_{zyx} - \alpha^-_{yzx}) \\
& & +\Theta(\alpha^+_{xzy} + \alpha^+_{zxy} + \beta^+_{xzy} + \beta^+_{zxy} - \gamma^+_{xzy} - \gamma^+_{zxy} + \delta^+_{xzy} + \delta^+_{zxy} \\
& & -\delta^-_{zxy} - \delta^-_{xzy} + \gamma^-_{zxy} + \gamma^-_{xzy} - \beta^-_{zxy} - \beta^-_{xzy} - \alpha^-_{zxy} - \alpha^-_{xzy}) \\
& & +\Phi(\alpha^+_{xyz} + \alpha^+_{yxz} - \beta^+_{xyz} - \beta^+_{yxz} + \gamma^+_{xyz} + \gamma^+_{yxz} + \delta^+_{xyz} + \delta^+_{yxz} \\
& & -\delta^-_{yxz} - \delta^-_{xyz} - \gamma^-_{yxz} - \gamma^-_{xyz} + \beta^-_{yxz} + \beta^-_{xyz} - \alpha^-_{yxz} - \alpha^-_{xyz})
\end{array}
\right.
$$

tandis que le vote global s'écrit

$$
\begin{array}{rcl}
V_g & = & \Omega \left(\begin{array}{c}
(\alpha^+_{xyz} + \alpha^+_{xzy} + \alpha^+_{yxz} + \alpha^+_{yzx} + \alpha^+_{zxy} + \alpha^+_{zyx}) - (2\alpha^-_{zyx} + \alpha^-_{zxy} + 2\alpha^-_{yzx} + \alpha^-_{yxz}) \\
+(\beta^+_{xyz} + \beta^+_{xzy} + \beta^+_{yxz} + \beta^+_{yzx} + \beta^+_{zxy} + \beta^+_{zyx}) - (\beta^-_{yxz} + 2\beta^-_{yzx} + \beta^-_{zxy} + 2\beta^-_{zyx}) \\
+(\gamma^+_{xyz} + \gamma^+_{xzy} + \gamma^+_{yxz} + \gamma^+_{yzx} + \gamma^+_{zxy} + \gamma^+_{zyx}) - (\gamma^-_{yxz} + 2\gamma^-_{yzx} + \gamma^-_{zxy} + 2\gamma^-_{zyx}) \\
+(\delta^-_{yxz} + 2\delta^-_{yzx} + \delta^-_{zxy} + 2\delta^-_{zyx}) - (\delta^+_{xyz} + \delta^+_{xzy} + \delta^+_{yxz} + \delta^+_{yzx} + \delta^+_{zxy} + \delta^+_{zyx})
\end{array}\right) \\
& & +\Theta \left(\begin{array}{c}
(\alpha^+_{xyz} + \alpha^+_{xzy} + \alpha^+_{yxz} + \alpha^+_{yzx} + \alpha^+_{zxy} + \alpha^+_{zyx}) - (\alpha^-_{xyz} + 2\alpha^-_{xzy} + 2\alpha^-_{zxy} + \alpha^-_{zyx}) \\
+(\beta^+_{xzy} + \beta^+_{xyz} + \beta^+_{yxz} + \beta^+_{yzx} + \beta^+_{zxy} + \beta^+_{zyx}) - (\beta^-_{xyz} + 2\beta^-_{xzy} + 2\beta^-_{zxy} + \beta^-_{zyx}) \\
+(\gamma^-_{xyz} + 2\gamma^-_{xzy} + 2\gamma^-_{zxy} + \gamma^-_{zyx}) - (\gamma^+_{xyz} + \gamma^+_{xzy} + \gamma^+_{yxz} + \gamma^+_{yzx} + \gamma^+_{zxy} + \gamma^+_{zyx}) \\
+(\delta^+_{yxz} + \delta^+_{yzx} + \delta^+_{xyz} + \delta^+_{zyx} + \delta^+_{xzy} + \delta^+_{zxy}) - (\delta^-_{xyz} + 2\delta^-_{xzy} + 2\delta^-_{zxy} + \delta^-_{zyx})
\end{array}\right) \\
& & +\Phi \left(\begin{array}{c}
(\alpha^+_{xyz} + \alpha^+_{xzy} + \alpha^+_{yxz} + \alpha^+_{yzx} + \alpha^+_{zxy} + \alpha^+_{zyx}) - (2\alpha^-_{xyz} + \alpha^-_{xzy} + 2\alpha^-_{yxz} + \alpha^-_{yzx}) \\
+(2\beta^-_{xyz} + \beta^-_{xzy} + 2\beta^-_{yxz} + \beta^-_{yzx}) - (\beta^+_{xyz} + \beta^+_{xzy} + \beta^+_{yxz} + \beta^+_{yzx} + \beta^+_{zxy} + \beta^+_{zyx}) \\
+(\gamma^+_{xyz} + \gamma^+_{xzy} + \gamma^+_{yxz} + \gamma^+_{yzx} + \gamma^+_{zxy} + \gamma^+_{zyx}) - (2\gamma^-_{xyz} + \gamma^-_{xzy} + 2\gamma^-_{yxz} + \gamma^-_{yzx}) \\
+(\delta^+_{xyz} + \delta^+_{xzy} + \delta^+_{yxz} + \delta^+_{yzx} + \delta^+_{zxy} + \delta^+_{zyx}) - (2\delta^-_{xyz} + \delta^-_{xzy} + 2\delta^-_{yxz} + \delta^-_{yzx})
\end{array}\right) \\
& = & \Omega\Upsilon^\Omega + \Theta\Upsilon^\Theta + \Phi\Upsilon^\Phi
\end{array}
$$

Sachant que $\Omega = \Theta + \Delta^\Omega > \Theta = \Phi + \Delta^\Theta > \Phi > 0$, on a donc :

$$
\begin{array}{rcl}
V_g & = & (\Phi + \Delta^\Theta + \Delta^\Omega)\Upsilon^\Omega + (\Phi + \Delta^\Theta)\Upsilon^\Theta + \Phi\Upsilon^\Phi \\
& = & \Phi(\Upsilon^\Omega + \Upsilon^\Theta + \Upsilon^\Phi) + \Delta^\Theta(\Upsilon^\Omega + \Upsilon^\Theta) + \Delta^\Omega\Upsilon^\Omega
\end{array}
$$

La résolution de système permettrait déterminer si il existe une configuration limitant, voir annulant, la possibilité d'occurence d'un paradoxe pur d'Ostrogorski.

Annexe C

Probabilités du paradoxe d'Ostrogorski sur deux axes programmatiques

Table C.1 – Valeurs de probabilité d'apparition du Paradoxe d'Ostrogorski pour différentes valeurs de population n allant de 3 à 359 électeurs pour deux axes programmatiques

n	P_{PPO} [a]	n	P_{PPO}	n	P_{PPO}	n	P_{PPO}
1	0,000000000	91	0,082317940	181	0,082824251	271	0,082993634
3	0,046875000	93	0,082339897	183	0,082829830	273	0,082996127
5	0,062255859	95	0,082360924	185	0,082835288	275	0,082998584
7	0,068893433	97	0,082381080	187	0,082840629	277	0,083001005
9	0,072391927	99	0,082400417	189	0,082845857	279	0,083003392
11	0,074520361	101	0,082418984	191	0,082850975	281	0,083005745
13	0,075949734	103	0,082436826	193	0,082855987	283	0,083008064
15	0,076977193	105	0,082453986	195	0,082860895	285	0,083010350
17	0,077752278	107	0,082470501	197	0,082865704	287	0,083012605
19	0,078358245	109	0,082486407	199	0,082870416	289	0,083014829
21	0,078845201	111	0,082501737	201	0,082875033	291	0,083017021
23	0,079245162	113	0,082516522	203	0,082879560	293	0,083019184
25	0,079579575	115	0,082530790	205	0,082883998	295	0,083021318
27	0,079863356	117	0,082544569	207	0,082888350	297	0,083023422
29	0,080107209	119	0,082557882	209	0,082892618	299	0,083025499
31	0,080319013	121	0,082570753	211	0,082896806	301	0,083027548
33	0,080504703	123	0,082583204	213	0,082900914	303	0,083029569
35	0,080668831	125	0,082595255	215	0,082904946	305	0,083031565
37	0,080814947	127	0,082606925	217	0,082908904	307	0,083033534
39	0,080945865	129	0,082618232	219	0,082912789	309	0,083035477
41	0,081063839	131	0,082629192	221	0,082916603	311	0,083037396
43	0,081170699	133	0,082639821	223	0,082920349	313	0,083039290
45	0,081267946	135	0,082650134	225	0,082924029	315	0,083041160
47	0,081356821	137	0,082660144	227	0,082927643	317	0,083043006
49	0,081438361	139	0,082669866	229	0,082931194	319	0,083044829
51	0,081513439	141	0,082679311	231	0,082934683	321	0,083046630
53	0,081582793	143	0,082688491	233	0,082938112	323	0,083048408
55	0,081647054	145	0,082697416	235	0,082941483	325	0,083050164
57	0,081706763	147	0,082706098	237	0,082944797	327	0,083051898
59	0,081762388	149	0,082714546	239	0,082948055	329	0,083053612
61	0,081814334	151	0,082722769	241	0,082951259	331	0,083055305
63	0,081862954	153	0,082730777	243	0,082954410	333	0,083056977
65	0,081908557	155	0,082738577	245	0,082957510	335	0,083058629
67	0,081951417	157	0,082746178	247	0,082960559	337	0,083060262
69	0,081991773	159	0,082753587	249	0,082963560	339	0,083061875
71	0,082029838	161	0,082760812	251	0,082966512	341	0,083063470
73	0,082065803	163	0,082767859	253	0,082969417	343	0,083065046
75	0,082099837	165	0,082774734	255	0,082972277	345	0,083066603
77	0,082132090	167	0,082781444	257	0,082975093	347	0,083068143
79	0,082162700	169	0,082787995	259	0,082977864	349	0,083069665
81	0,082191788	171	0,082794392	261	0,082980594	351	0,083071169
83	0,082219465	173	0,082800641	263	0,082983281	353	0,083072657
85	0,082245832	175	0,082806746	265	0,082985928	355	0,083074128
87	0,082270980	177	0,082812713	267	0,082988535	357	0,083075582
89	0,082294991	179	0,082818547	269	0,082991104	359	0,083077020

a. PPO=Paradoxe Pur d'Ostrogorsky

Annexe D

Procédures de calcul pour les conflits de légitimité

D.1 Probabilités de conflit pour 3 circonscriptions

La procédure repose sur l'ordonnancement d'un certain nombre d'étapes de constuction de base de données.
La première d'entre elles ordonne ainsi la construction d'une base primaire, dans laquelle sont créées six variables suivant les instructions :

- La variable G donne l'effectif de la circonscription (fixé dans cet exemple à 255).

- La variable N_t renvoie la population globale, selon la formule $N_t = 3 \times G$ (soit 765 dans l'exemple).

- La variable M_g renvoie la valeur de la majorité absolue pour la population globale, selon la formule $M_g = Ent[\frac{3 \times G}{2}] + 1$ (soit 383 dans l'exemple).

- La variable m_{max} renvoie la valeur de la minorité maximale globale, selon la formule $m_{max} = M_g - 1$ (soit 384 dans l'exemple).

- La variable M_{mc} renvoie la valeur de la majorité absolue pour la population d'une circonscription, selon la formule $M_{mc} = Ent[\frac{G}{2}] + 1$ (soit 128 dans l'exemple).

- La variable M_{ma} renvoie la valeur de la majorité absolue minimale pour qu'existe une majorité dans les circonscriptions, selon la formule $M_{ma} = 2 \times M_{mc}$ (soit 256 dans l'exemple).

La seconde étape consiste en la constuction de la variable G_1 de telle sorte que ses valeurs aillent de M_{mc} jusqu'à $m_{max} - M_{mc}$.

La troisième étape consiste ensuite par la construction de la variable G_2 de telle sorte que ses valeurs aillent de M_{mc} jusqu'àu minimum entre G_1 et $m_{max} - G_1$.

La quatrième étape consiste à construire la variable G_3 de telle sorte que ses valeurs aillent de 0 jusqu'au mininum entre G_1 et $m_{max} - G_1 - G_2$.

Suite à ces constructions successives dans la base de données on passe au dénombrement des 5 familles de cas :

- Le Cas 1 ($2 >$ et $0 =$) ne comporte qu'une seule configuration :

$$(2 > 1 > 0) \text{ soit}$$

$$\binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 6$$

- Le Cas 2 comporte 4 configuration ($1 >$ et $1 =$) :

  - La configuration $(1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = 3$$

  - La configuration $(1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = 3$$

- Le Cas 5 ($0 >$ et $4 =$) ne comporte qu'une seule configuation :

$$(0 = 0 = 0) \text{ soit}$$

$$\binom{3}{3} = 1$$

(imposssible)

Les configurations des cas 1 et 2 sont toutes possibles. La configuration du cas 3 est impossible et n'entrera pas dans les calculs.

On supprime ainsi de la base de donnée toutes les variables intermédiaires existantes (G M_g m_{max} M_{mc} M_{ma} N_t G_1 G_2 G_3 i), ainsi que celles qui vont être créés ($L_{cg}(G_1)$ $L_{cg}(G_2)$ $L_{cg}(G_3)$) afin de limiter au maximum la taille de la base à manipuler.

On créer de manière récursive les variables $L_{cg}(G_1)$ $L_{cg}(G_2)$ $L_{cg}(G_3)$ qui sont les logarithmes des coefficients binômiaux respectifs de G_1, G_2 et G_3 parmi G.

On créer la variable P_{cf} qui est le logarithme de la formule exacte, pour la situation ($3G$, G_1, G_2 et G_3),

$$\frac{\binom{G}{G_1} \times \binom{G}{G_2} \times \binom{G}{G_3} \times 2 \times \begin{pmatrix} 6 \text{ si } G_1 = G_2 \\ 3 \text{ si } G_1 \neq G_2 \end{pmatrix}}{2^{3G}}$$

c'est-à-dire,

$$log(\begin{pmatrix} G \\ G_1 \end{pmatrix}) + log(\begin{pmatrix} G \\ G_2 \end{pmatrix}) + log(\begin{pmatrix} G \\ G_3 \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} log(6) \text{ si } G_1 = G_2 \\ log(3) \text{ si } G_1 \neq G_2 \end{pmatrix} + (1-3G) \times log(2)$$

Pour finir, à l'aide d'une procédure en language **sql**, on procède à la récupération de la somme des exponentielles des variable P_{cf} donnant la variable P_{cfa} de probabilité de conflit (pour un effectif de 765 électeurs par circonscription dans l'exemple, soit $0,161597966$.

Les valeurs des probabililités de conflit ont été calculé pour $p = 3$ circonscriptions de $n = 1$ jusqu'à $n = 1409$ électeurs.

D.2 Probabilités de conflit pour 5 circonscriptions

La procédure repose sur le même esprit d'ordonnancement d'un certain nombre d'étapes que le cas avec 3 circonscriptions.
La première d'entre elles ordonne la construction d'une base primaire permettant la création des mêmes 6 variables que dans le cas précédents, en suivant les mêmes instructions :

- La variable G donne l'effectif de la circonscription (fixé dans cet exemple à 153).

- La variable N_t renvoie la population globale, selon la formule $N_t = 5 \times G$ (soit 765 dans l'exemple).

- La variable M_g renvoie la valeur de la majorité absolue pour la population globale, selon la formule $M_g = Ent[\frac{5 \times G}{2}] + 1$ (soit 383 dans l'exemple).

- La variable m_{max} renvoie la valeur de la minorité maximale globale, selon la formule $m_{max} = M_g - 1$ (soit 382 dans l'exemple).

- La variable M_{mc} renvoie la valeur de la majorité absolue pour la population d'une circonscription, selon la formule $M_{mc} = Ent[\frac{G}{2}] + 1$ (soit 77 dans l'exemple).

- La variable M_{ma} renvoie la valeur de la majorité absolue minimale pour qu'existe une majorité dans les circonscriptions, selon la formule $M_{ma} = 3 \times M_{mc}$ (soit 231 dans l'exemple).

La seconde étape consiste en la construction de la variable G_1 de telle sorte que ses valeurs aillent de M_{mc} jusqu'à G.

La troisième étape consiste ensuite par la construction de la variable G_2 de telle sorte que ses valeurs aillent de M_{mc} jusqu'àu minimum entre G_1 et $m_{max} - G_1 - M_{mc}$.

La quatrième étape consiste ensuite par la construction de la variable G_3 de telles sortes que ses valeurs aillent de M_{mc} jusqu'àu minimum entre G_2 et $m_{max} - G_1 - G_2$.

La cinquième étape consiste ensuite à construire la variable G_4 de telle sorte que ses valeurs aillent de 0 jusqu'àu minimum entre G_3 et $m_{max} - G_1 - G_2 - G_3$.

Enfin la sixième étape consiste par la construction de la variable G_5 de telle sorte que ses valeurs aillent de 0 jusqu'àu minimum entre G_4 et $m_{max} - G_1 - G_2 - G_3 - G_4$.

Suite à ces constructions dans la base de donnée, on passe au dénombrement des 5 familles de cas :

- Le Cas 1 ($4 >$ et $0 =$) ne comporte qu'une seule configuration :

$$(4 > 3 > 2 > 1 > 0) \text{ soit}$$

$$\binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 120$$

- Le Cas 2 comporte 4 configuration ($3 >$ et $1 =$) :
  - La configuration $(3 > 2 > 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 60$$

  - La configuration $(3 > 2 > 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 60$$

  - La configuration $(3 > 2 = 2 > 1 > 0)$ implique :

$$\binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 60$$

  - La configuration $(3 = 3 > 2 > 1 > 0)$ implique :

$$\binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 60$$

- Le Cas 3 comporte 15 configuration ($2 >$ et $2 =$) :
  - La configuration $(2 > 1 > 0 = 0 = 0)$ implique :

$$\binom{5}{3} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 20$$

  - La configuration $(2 > 1 = 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = 30$$

  - La configuration $(2 > 1 = 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{5}{3} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 20$$

  - La configuration $(2 = 2 > 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = 30$$

- La configuration $(2 = 2 > 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = 30$$

- La configuration $(2 = 2 = 2 > 1 > 0)$ implique :

$$\binom{5}{3} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 20$$

- Le Cas 4 comporte 20 configuration $(1 >$ et $3 =)$:
  - La configuration $(1 > 0 = 0 = 0 = 0)$ implique :

$$\binom{5}{4} \times \binom{1}{1} = 5$$

  - La configuration $(1 = 1 > 0 = 0 = 0)$ implique :

$$\binom{5}{3} \times \binom{2}{2} = 10$$

  - La configuration $(1 = 1 = 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{5}{3} \times \binom{2}{2} = 10$$

  - La configuration $(1 = 1 = 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{5}{4} \times \binom{1}{1} = 5$$

- Le Cas 5 $(0 >$ et $4 =)$ ne comporte qu'une seule configuation :

$$(0 = 0 = 0 = 0 = 0) \text{ soit}$$

$$\binom{5}{5} = 1$$

(imposssible)

Les configurations des cas 1 et 2 sont toutes possibles. Les configurations des cas 3 et 4 sont partiellement possibles. La configuration du cas 5 est impossible et n'entrera pas dans les calculs.

On supprime ainsi de la base toutes les variables intermédiaires existantes (G M_g m_{max} M_{mc} M_{ma} N_t G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 i), ainsi que celles qui vont être créés ($L_{cg}(G_1)$ $L_{cg}(G_2)$ $L_{cg}(G_3)$ $L_{cg}(G_4)$ $L_{cg}(G_5)$ I_120 I_60 I_30 I_20 I_10 I_5) afin de limiter au maximum la taille de la base à manipuler.

On créer de manière récursive les variables $L_{cg}(G_1)$ $L_{cg}(G_2)$ $L_{cg}(G_3)$ $L_{cg}(G_4)$ $L_{cg}(G_5)$ qui sont les logarithmes des coefficients binômiaux respectifs de G_1, G_2, G_3, G_4 et G_5 parmi G.

On créer la variable I_{120} qui est la fonction indicatrice de la configuration

$$(4 > 3 > 2 > 1 > 0).$$

et sa formule est

$$I_{120} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad G_1 > G_2 > G_3 > G_4 > G_5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On créer la variable *I60* qui est la fonction indicatrice des configurations

$$\begin{gathered} (3 > 2 > 1 > 0 = 0), \\ (3 > 2 > 1 = 1 > 0), \\ (3 > 2 = 2 > 1 > 0) \\ \text{et} \\ (3 = 3 > 2 > 1 > 0) \end{gathered}$$

et sa formule est

$$I_{60} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad G_1 = G_2 \\ 1 & \text{si} \quad G_2 = G_3 \\ 1 & \text{si} \quad G_3 = G_4 \\ 1 & \text{si} \quad G_4 = G_5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On créer la variable *I30* qui est la fonction indicatrice des configurations

$$\begin{gathered} (2 > 1 = 1 > 0 = 0), \\ (2 = 2 > 1 > 0 = 0) \\ \text{et} \\ (2 = 2 > 1 = 1 > 0) \end{gathered}$$

et sa formule est

$$I_{30} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad G_1 > G_2 = G_3 > G_4 = G_5 \\ 1 & \text{si} \quad G_1 = G_2 > G_3 > G_4 = G_5 \\ 1 & \text{si} \quad G_1 = G_2 > G_3 = G_4 > G_5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On créer la variable *I20* qui est la fonction indicatrice des configurations

$$(2 > 1 > 0 = 0 = 0),$$
$$(2 > 1 = 1 = 1 > 0)$$
$$\text{et}$$
$$(2 = 2 = 2 > 1 > 0)$$

et sa formule est

$$I_{20} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad G_1 > G_2 > G_3 = G_4 = G_5 \\ 1 & \text{si} \quad G_1 > G_2 = G_3 = G_4 > G_5 \\ 1 & \text{si} \quad G_1 = G_2 = G_3 > G_4 > G_5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On créer la variable *I10* qui est la fonction indicatrice des configurations

$$(1 = 1 > 0 = 0 = 0)$$
$$\text{et}$$
$$(1 = 1 = 1 > 0 = 0)$$

et sa formule est

$$I_{10} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad G_1 = G_2 > G_3 = G_4 = G_5 \\ 1 & \text{si} \quad G_1 = G_2 = G_3 > G_4 = G_5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On créer la variable *I10* qui est la fonction indicatrice des configurations

$$(1 > 0 = 0 = 0 = 0)$$
$$\text{et}$$
$$(1 = 1 = 1 = 1 > 0)$$

et sa formule est

$$I_5 = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad G_1 > G_2 = G_3 = G_4 = G_5 \\ 1 & \text{si} \quad G_1 = G_2 = G_3 = G_4 > G_5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On créer la variable P_{cf} qui est le logarithme de la formule exacte, pour la situation ($3G$, G_1, G_2, G_3, G_4 et G_5),

$$\frac{\binom{G}{G_1} \times \binom{G}{G_2} \times \binom{G}{G_3} \times \binom{G}{G_4} \times \binom{G}{G_5} \times 2 \times \begin{pmatrix} 120 \text{ si } I_{120} = 1 \\ 60 \text{ si } I_{60} = 1 \\ 30 \text{ si } I_{30} = 1 \\ 20 \text{ si } I_{20} = 1 \\ 10 \text{ si } I_{10} = 1 \\ 5 \text{ si } I_5 = 1 \end{pmatrix}}{2^{3G}}$$

c'est-à-dire

$$log(\binom{G}{G_1}) + log(\binom{G}{G_2}) + log(\binom{G}{G_3}) + log(\binom{G}{G_4}) + log(\binom{G}{G_5})$$

$$+ \begin{pmatrix} log(120) \text{ si } I_{120} = 1 \\ log(60) \text{ si } I_{60} = 1 \\ log(30) \text{ si } I_{30} = 1 \\ log(20) \text{ si } I_{20} = 1 \\ log(10) \text{ si } I_{10} = 1 \\ log(5) \text{ si } I_5 = 1 \end{pmatrix} + log(2) - 3G \times log(2)$$

Pour finir, à l'aide d'une procédure en language **sql**, on procède à la récupération de la somme des exponentielles des variable P_{cf} donnant la variable P_{cfa} de probabilité de conflit (pour un effectif de 153 électeurs par circonscription dans l'exemple, soit $0,180521854$).

Les valeurs des probabililités de conflit pour $p = 5$ circonscriptions ont été calculé de $n = 1$ jusqu'à $n = 271$ électeurs.

D.3 Probabilités de conflit pour 7 circonscriptions

La procédure repose sur le même esprit d'ordonnancement d'un certain nombre d'étapes que les cas avec 3 et 5 circonscriptions.
La première d'entre elles ordonne la construction d'une base primaire permettant la création des 6 variables avec les mêmes instructions :

- La variable G donne l'effectif de la circonscription (fixé dans cet exemple à 89).

- La variable N_t renvoie la population globale, selon la formule $N_t = 7 \times G$ (soit 623 dans l'exemple).

- La variable M_g renvoie la valeur de la majorité absolue pour la population globale, selon la formule $M_g = Ent[\frac{7 \times G}{2}] + 1$ (soit 312 dans l'exemple).

- La variable m_{max} renvoie la valeur de la minorité maximale globale, selon la formule $m_{max} = M_g - 1$ (soit 311 dans l'exemple).

- La variable M_{mc} renvoie la valeur de la majorité absolue pour la population d'une circonscription, selon la formule $M_{mc} = Ent[\frac{G}{2}] + 1$ (soit 45 dans l'exemple).

- La variable M_{ma} renvoie la valeur de la majorité absolue minimale pour qu'existe une majorité dans les circonscriptions, selon la formule $M_{ma} = 4 \times M_{mc}$ (soit 180 dans l'exemple).

La première 'étape consiste à construire la variable G_1 de telle sorte que ses valeurs aillent de M_{mc} jusqu'à G.

La seconde étape consiste par construction de la variable G_2 de telle sorte que ses valeurs aillent de M_{mc} jusqu'àu minimum entre G_1 et $m_{max} - G_1 - M_{mc}$.

La troisième étape consiste à construire la variable G_3 de telle sorte que ses valeurs aillent de M_{mc} jusqu'àu minimum entre G_2 et $m_{max} - G_1 - G_2$.

La quatrième étape consiste à construire la variable G_4 de telle sorte que ses valeurs aillent de M_{mc} jusqu'àu minimum entre G_3 et $m_{max} - G_1 - G_2 - G_3$.

La cinquième étape consiste à construire la variable G_5 de telle sorte que ses valeurs aillent de 0 jusqu'àu minimum entre G_4 et $m_{max} - G_1 - G_2 - G_3 - G_4$.

La sixième étape consiste à construire la variable G_6 de telle sorte que ses valeurs aillent de 0 jusqu'àu minimum entre G_5 et $m_{max} - G_1 - G_2 - G_3 - G_4 - G_5$.

Enfin la septième étape consiste à construire la variable G_7 de telle sorte que ses valeurs aillent de 0 jusqu'àu minimum entre G_6 et $m_{max} - G_1 - G_2 - G_3 - G_4 - G_5 - G_6$.

Suite à ces constructions dans la base de données, on passe au dénombrement des 7 familles de cas :

- Le Cas 1 ($6 >$ et $0 =$) ne comporte qu'une seule configuration :

$$(6 > 5 > 4 > 3 > 2 > 1 > 0) \text{ soit}$$

$$\binom{7}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 5040$$

- Le Cas 2 comporte 6 configuration ($5 >$ et $1 =$) :

  - La configuration $(5 = 5 > 4 > 3 > 2 > 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} = 2520$$

  - La configuration $(5 > 4 = 4 > 3 > 2 > 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} = 2520$$

  - La configuration $(5 > 4 > 3 = 3 > 2 > 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} = 2520$$

  - La configuration $(5 > 4 > 3 > 2 = 2 > 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} = 2520$$

  - La configuration $(5 > 4 > 3 > 2 > 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} = 2520$$

  - La configuration $(5 > 4 > 3 > 2 > 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} = 2520$$

  - La configuration $(5 > 4 > 3 > 2 > 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} = 2520$$

- Le Cas 3 comporte 15 configuration ($4 >$ et $2 =$) :
  - La configuration $(4 = 4 = 4 > 3 > 2 > 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 840$$

  - La configuration $(4 = 4 > 3 = 3 > 2 > 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 1260$$

  - La configuration $(4 = 4 > 3 > 2 = 2 > 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 1260$$

  - La configuration $(4 = 4 > 3 > 2 > 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 1260$$

  - La configuration $(4 = 4 > 3 > 2 > 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 1260$$

  - La configuration $(4 > 3 = 3 = 3 > 2 > 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 840$$

  - La configuration $(4 > 3 = 3 > 2 = 2 > 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 1260$$

  - La configuration $(4 > 3 = 3 > 2 > 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 1260$$

  - La configuration $(4 > 3 = 3 > 2 > 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 1260$$

- La configuration $(4 > 3 > 2 = 2 = 2 > 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 840$$

- La configuration $(4 > 3 > 2 = 2 > 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 1260$$

- La configuration $(4 > 3 > 2 = 2 > 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 1260$$

- La configuration $(4 > 3 > 2 > 1 = 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 840$$

- La configuration $(4 > 3 > 2 > 1 = 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 1260$$

- La configuration $(4 > 3 > 2 > 1 > 0 = 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 840$$

- Le Cas 4 comporte 20 configuration $(3 >$ et $3 =)$:

  - La configuration $(3 > 2 > 1 > 0 = 0 = 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{4} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 210$$

  - La configuration $(3 > 2 > 1 = 1 > 0 = 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 420$$

  - La configuration $(3 > 2 > 1 = 1 = 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 420$$

- La configuration $(3 > 2 > 1 = 1 = 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{4} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 210$$

- La configuration $(3 > 2 = 2 > 1 > 0 = 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 420$$

- La configuration $(3 > 2 = 2 > 1 = 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = 630$$

- La configuration $(3 > 2 = 2 > 1 = 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 420$$

- La configuration $(3 > 2 = 2 = 2 > 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 420$$

- La configuration $(3 > 2 = 2 = 2 > 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 420$$

- La configuration $(3 > 2 = 2 = 2 = 2 > 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{4} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 210$$

- La configuration $(3 = 3 > 2 > 1 > 0 = 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 420$$

- La configuration $(3 = 3 > 2 > 1 = 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = 630$$

- La configuration $(3 = 3 > 2 > 1 = 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 420$$

- La configuration $(3 = 3 > 2 = 2 > 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = 630$$

- La configuration $(3 = 3 > 2 = 2 > 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = 630$$

- La configuration $(3 = 3 > 2 = 2 = 2 > 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 420$$

- La configuration $(3 = 3 = 3 > 2 > 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 420$$

- La configuration $(3 = 3 = 3 > 2 > 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 420$$

- La configuration $(3 = 3 = 3 > 2 = 2 > 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 420$$

- La configuration $(3 = 3 = 3 = 3 > 2 > 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{4} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 210$$

- Le Cas 5 comporte 15 configuration $(2 >$ et $4 =)$:
  - La configuration $(2 > 1 > 0 = 0 = 0 = 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{5} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} = 42$$

- La configuration $(2 > 1 = 1 > 0 = 0 = 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{4} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} = 105$$

- La configuration $(2 > 1 = 1 = 1 > 0 = 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{3} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} = 140$$

- La configuration $(2 > 1 = 1 = 1 = 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{4} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} = 105$$

- La configuration $(2 > 1 = 1 = 1 = 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{5} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} = 42$$

- La configuration $(2 = 2 > 1 > 0 = 0 = 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{4} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} = 105$$

- La configuration $(2 = 2 > 1 = 1 > 0 = 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} \times \binom{1}{1} = 210$$

- La configuration $(2 = 2 > 1 = 1 = 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} \times \binom{1}{1} = 210$$

- La configuration $(2 = 2 > 1 = 1 = 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{4} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} = 105$$

- La configuration $(2 = 2 = 2 > 1 > 0 = 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{3} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} = 140$$

- La configuration $(2 = 2 = 2 > 1 = 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} \times \binom{1}{1} = 210$$

- La configuration $(2 = 2 = 2 > 1 = 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{3} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1}) = 140$$

- La configuration $(2 = 2 = 2 = 2 > 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{4} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} = 105$$

- La configuration $(2 = 2 = 2 = 2 > 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{4} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} = 105$$

- La configuration $(2 = 2 = 2 = 2 = 2 > 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{5} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} = 42$$

- Le Cas 6 comporte 6 configuration $(1 >$ et $5 =)$:
  - La configuration $(1 > 0 = 0 = 0 = 0 = 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{6} \times \binom{1}{1} = 7$$

(imposssible)

  - La configuration $(1 = 1 > 0 = 0 = 0 = 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{5} \times \binom{2}{2} = 21$$

(imposssible)

  - La configuration $(1 = 1 = 1 > 0 = 0 = 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{4} \times \binom{3}{3} = 35$$

(imposssible)

  - La configuration $(1 = 1 = 1 = 1 > 0 = 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{4} \times \binom{3}{3} = 35$$

- La configuration $(1 = 1 = 1 = 1 = 1 > 0 = 0)$ implique :

$$\binom{7}{5} \times \binom{2}{2} = 21$$

- La configuration $(1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 > 0)$ implique :

$$\binom{7}{6} \times \binom{1}{1} = 7$$

- Le Cas 7 (0 $>$ et 6 $=$) ne comporte qu'une seule configuation :

$$(0 = 0 = 0 = 0 = 0 = 0 = 0) \text{ soit}$$

$$\binom{7}{7} = 1$$

(imposssible)

Nous avons au final 4 configurations impossibles qui n'entreront pas dans les calculs.

Dans une nouvelle étape, on supprime de la base de donnée toutes les variables intermédiaires existantes (G M_g m_{max} M_{mc} M_{ma} N_t G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 G_7 i), ainsi que celles qui vont être créés ($L_{cg}(G_1)$ $L_{cg}(G_2)$ $L_{cg}(G_3)$ $L_{cg}(G_4)$ $L_{cg}(G_5)$ $L_{cg}(G_6)$ $L_{cg}(G_7)$ I_{5040} I_{2520} I_{1260} I_{840} I_{630} I_{420} I_{210} I_{140} I_{105} I_{42} I_{35} I_{21} I_7) afin de limiter au maximum la taille de la base à manipuler.

On créer de manière récursive les variables $L_{cg}(G_1)$, $L_{cg}(G_2)$, $L_{cg}(G_3)$, $L_{cg}(G_4)$, $L_{cg}(G_5)$, $L_{cg}(G_6)$ et $L_{cg}(G_7)$ qui sont les logarithmes des coefficients binômiaux respectifs de G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6 et G_7 parmi G.

On créer la variable I_{5040} qui est la fonction indicatrice de la configuration

$$(6 > 5 > 4 > 3 > 2 > 1 > 0).$$

et sa formule est

$$I_{5040} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad G_1 > G_2 > G_3 > G_4 > G_5 > G_6 > G_7 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On créer la variable I_{2520} qui est la fonction indicatrice des configurations :

$$(5 = 5 > 4 > 3 > 2 > 1 > 0),$$
$$(5 > 4 = 4 > 3 > 2 > 1 > 0),$$
$$(5 > 4 > 3 > 2 = 2 > 1 > 0),$$

$$(5>4>3=3>2>1>0),$$
$$(5>4>3>2>1=1>0),$$
$$(5>4>3>2>1>0=0)$$
et
$$(5>4>3>2>1>0=0)$$

et sa formule est

$$I_{2520}=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad G1=G2 \\ 1 & \text{si} \quad G2=G3 \\ 1 & \text{si} \quad G3=G4 \\ 1 & \text{si} \quad G4=G5 \\ 1 & \text{si} \quad G5=G6 \\ 1 & \text{si} \quad G6=G7 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On créer la variable I_{1260} qui est la fonction indicatrice des configurations

$$(4=4>3=3>2>1>0),$$
$$(4=4>3>2=2>1>0),$$
$$(4=4>3>2>1=1>0),$$
$$(4=4>3>2>1>0=0),$$
$$(4>3=3>2=2>1>0),$$
$$(4>3=3>2>1=1>0),$$
$$(4>3=3>2>1>0=0),$$
$$(4>3>2=2>1=1>0),$$
$$(4>3>2=2>1>0=0)$$
et
$$(4>3>2>1=1>0=0)$$

et sa formule est

$$I_{1260}=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad \begin{array}{l} ((G_1=G_2=G_3)+(G_2=G_3=G_4)+(G_3=G_4=G_5) \\ +(G_4=G_5=G_6)+(G_5=G_6=G_7)=0) \\ \times \\ ((G_1=G_2)+(G_2=G_3)+(G_3=G_4)+(G_4=G_5) \\ +(G_5=G_6)+(G_6=G_7)=2) \end{array} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On créer la variable I_{840} qui est la fonction indicatrice des configurations

$$(4=4=4>3>2>1>0),$$
$$(4>3=3=3>2>1>0),$$
$$(4>3>2=2=2>1>0),$$
$$(4>3>2>1=1=1>0)$$
et
$$(4>3>2>1>0=0=0)$$

et sa formule est

$$I_{840}=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad \begin{array}{l} ((G_1=G_2=G_3)+(G_2=G_3=G_4)+(G_3=G_4=G_5) \\ +(G_4=G_5=G_6)+(G_5=G_6=G_7)=1) \\ \times \\ ((G_1=G_2)+(G_2=G_3)+(G_3=G_4)+(G_4=G_5) \\ +(G_5=G_6)+(G_6=G_7)=2) \end{array} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On créer la variable I_{630} qui est la fonction indicatrice des configurations

$$\begin{gathered}(3>2=2>1=1>0=0),\\(3=3>2>1=1>0=0),\\(3=3>2=2>1>0=0)\\\text{et}\\(3=3>2=2>1=1>0)\end{gathered}$$

et sa formule est

$$I_{630}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad \begin{array}{l}((G_3>G_4=G_5>G_6=G_7)\times((G_1>G_2=G_3)\\+(G_1=G_2>G_3)=1)+(G_1=G_2>G_3=G_4>G_5)\\\times\\((G_5>G_6=G_7)+(G_5=G_6>G_7)=1)=1)\end{array}\\0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On créer la variable I_{420} qui est la fonction indicatrice des configurations

$$\begin{gathered}(3>2>1=1>0=0=0),\\(3>2>1=1=1>0=0),\\(3>2=2>1>0=0=0),\\(3>2=2>1=1=1>0),\\(3>2=2=2>1>0=0),\\(3>2=2=2>1=1>0),\\(3=3>2>1>0=0=0),\\(3=3>2>1=1=1>0),\\(3=3>2=2=2>1>0),\\(3=3=3>2>1>0=0),\\(3=3=3>2>1=1>0)\\\text{et}\\(3=3=3>2=2>1>0)\end{gathered}$$

et sa formule est

$$I_{630}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad \begin{array}{l}(((G1=G2)+(G2=G3)+(G3=G4)=1)\\\times(G4>G5=G6=G7)+((G1=G2)+(G6=G7)=1)\\\times(G2>G3=G4=G5>G6)\\+((G1=G2)+(G2=G3)=1)\\\times(G3>G4=G5=G6>G7)\\+((G5=G6)+(G6=G7)=1)\\\times(G1>G2=G3=G4>G5)+((G4=G5)\\+(G5=G6)+(G6=G7)=1)\\\times(G1=G2=G3>G4))\end{array}\\0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On créer la variable I_{210} qui est la fonction indicatrice des configurations

$$\begin{gathered}(3>2>1>0=0=0=0),\\(3>2>1=1=1=1>0),\\(3>2=2=2=2>1>0),\\(3=3=3=3>2>1>0),\\(2=2>1=1>0=0=0),\end{gathered}$$

$$(2 = 2 > 1 = 1 = 1 > 0 = 0)$$
$$\text{et}$$
$$(2 = 2 = 2 > 1 = 1 > 0 = 0)$$

et sa formule est

$$I_{210} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \begin{array}{l} ((G_1 > G_2 > G_3 > G_4 = G_5 = G_6 = G_7) \\ +(G_1 > G_2 > G_3 = G_4 = G_5 = G_6 > G_7) \\ +(G_1 > G_2 = G_3 = G_4 = G_5 > G_6 > G_7) \\ +(G_1 = G_2 = G_3 = G_4 > G_5 > G_6 > G_7) \\ +(G_1 = G_2 > G_3 = G_4 > G_5 = G_6 = G_7) \\ +(G_1 = G_2 > G_3 = G_4 = G_5 > G_6 = G_7) \\ +(G_1 = G_2 = G_3 > G_4 = G_5 > G_6 = G_7) = 1) \end{array} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On créer la variable I_{140} qui est la fonction indicatrice des configurations

$$(2 > 1 = 1 = 1 > 0 = 0 = 0),$$
$$(2 = 2 = 2 > 1 > 0 = 0 = 0)$$
$$\text{et}$$
$$(2 = 2 = 2 > 1 = 1 = 1 > 0)$$

et sa formule est

$$I_{140} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \begin{array}{l} ((G1 > G2 = G3 = G4 > G5 = G6 = G7) \\ +(G1 = G2 = G3 > G4 > G5 = G6 = G7) \\ +(G1 = G2 = G3 > G4 = G5 = G6 > G7) = 1) \end{array} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On créer la variable I_{105} qui est la fonction indicatrice des configurations

$$(2 > 1 = 1 > 0 = 0 = 0 = 0),$$
$$(2 > 1 = 1 = 1 = 1 > 0 = 0),$$
$$(2 = 2 > 1 > 0 = 0 = 0 = 0),$$
$$(2 = 2 > 1 = 1 = 1 = 1 > 0),$$
$$(2 = 2 = 2 = 2 > 1 > 0 = 0)$$
$$\text{et}$$
$$(2 = 2 = 2 = 2 > 1 = 1 > 0)$$

et sa formule est

$$I_{105} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \begin{array}{l} ((G_1 > G_2 = G_3) \times (G_4 = G_5) \times (G_6 = G_7) \times ((G_3 > G_4) \\ +(G_5 > G_6) = 1) \times ((G_3 = G_4) + (G_5 = G_6) = 1) \\ +(G_1 = G_2 > G_3) \times (G_4 = G_5 = G_6) \times ((G_3 > G_4) \\ +(G_6 > G_7) = 1) \times ((G_3 = G_4) + (G_6 = G_7) = 1) \\ +(G_1 = G_2 = G_3 = G_4 > G_5) \times ((G_5 > G_6) \\ +(G_6 > G_7) = 1) \times ((G_5 = G_6) + (G_6 = G_7) = 1)) \end{array} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On créer la variable I_{42} qui est la fonction indicatrice des configurations

$$(2 > 1 > 0 = 0 = 0 = 0 = 0),$$
$$(2 > 1 = 1 = 1 = 1 = 1 > 0)$$
$$\text{et}$$
$$(2 = 2 = 2 = 2 = 2 > 1 > 0)$$

et sa formule est

$$I_{42}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad \begin{array}{l}((G_1>G_2>G_3=G_4=G_5=G_6=G_7)\\ +(G_1>G_2=G_3=G_4=G_5=G_6>G_7)\\ +(G_1=G_2=G_3=G_4=G_5>G_6>G_7)=1)\end{array}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On créer la variable I_{35} qui est la fonction indicatrice de la configuration

$$(1=1=1=1>0=0=0)$$

et sa formule est

$$I_{35}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad \begin{array}{l}((G_4>G_5)\times((G_1=G_2)+(G_2=G_3)\\ +(G_3=G_4)+(G_4=G_5)+(G_5=G_6)\\ +(G_6=G_7)=5)\end{array}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On créer la variable I_{21} qui est la fonction indicatrice de la configuration

$$(1=1=1=1=1>0=0)$$

et sa formule est

$$I_{21}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad \begin{array}{l}(G_5>G_6)\times((G_1=G_2)+(G_2=G_3)\\ +(G3=G4)+(G4=G5)+(G5=G6)\\ +(G6=G7)=5)\end{array}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On créer la variable I_7 qui est la fonction indicatrice de la configuration

$$(1=1=1=1=1=1>0)$$

et sa formule est

$$I_{7}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad \begin{array}{l}(G6>G7)\times((G1=G2)+(G2=G3)\\ +(G3=G4)+(G4=G5)\\ +(G5=G6)+(G6=G7)=5)\end{array}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On créer la variable P_{cf} qui est le logarithme de la formule exacte, pour la situation ($3G$, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6 et G_7),

$$\frac{\binom{G}{G_1}\times\binom{G}{G_2}\times\binom{G}{G_3}\times\binom{G}{G_4}\times\binom{G}{G_5}\times\binom{G}{G_6}\times\binom{G}{G_7}\times 2\times\begin{pmatrix}5040 \text{ si } I_{5040}=1\\ 2520 \text{ si } I_{2520}=1\\ 1260 \text{ si } I_{1260}=1\\ 840 \text{ si } I_{840}=1\\ 630 \text{ si } I_{630}=1\\ 420 \text{ si } I_{420}=1\\ 210 \text{ si } I_{210}=1\\ 140 \text{ si } I_{140}=1\\ 105 \text{ si } I_{105}=1\\ 42 \text{ si } I_{42}=1\\ 35 \text{ si } I_{35}=1\\ 21 \text{ si } I_{21}=1\\ 7 \text{ si } I_{7}=1\end{pmatrix}}{2^{3G}}$$

c'est-à-dire

$$log(\binom{G}{G_1}) + log(\binom{G}{G_2}) + log(\binom{G}{G_3}) + log(\binom{G}{G_4}) + log(\binom{G}{G_5}) + log(\binom{G}{G_6})$$

$$+log(\binom{G}{G_7}) + \begin{pmatrix} log(5040) \text{ si } I_{5040} = 1 \\ log(2520) \text{ si } I_{2520} = 1 \\ log(1260) \text{ si } I_{1260} = 1 \\ log(840) \text{ si } I_{840} = 1 \\ log(630) \text{ si } I_{630} = 1 \\ log(420) \text{ si } I_{420} = 1 \\ log(210) \text{ si } I_{210} = 1 \\ log(140) \text{ si } I_{140} = 1 \\ log(105) \text{ si } I_{105} = 1 \\ log(42) \text{ si } I_{42} = 1 \\ log(35) \text{ si } I_{35} = 1 \\ log(21) \text{ si } I_{21} = 1 \\ log(7) \text{ si } I_{7} = 1 \end{pmatrix} + log(2) - 3G \times log(2)$$

Pour finir, à l'aide d'une procédure en language **sql**, on procède à la récupération de la somme des exponentielles des variable P_{cf} donnant la variable P_{cfa} de probabilité de conflit (pour un effectif de 89 électeurs par circonscription dans l'exemple, soit $0,18743$).

Les valeurs des probabililités de conflit pour $p = 7$ circonscriptions ont é'e calculées de $n = 1$ jusqu'à $n = 99$ électeurs.

Annexe E

Piste pour une formule numérique pour un modèle de conflit de légitimité avec une hypothèse de culture neutre partielle

Nous reprenons dans le Chapitre 4 sans les modifier les définitions : 3.1 portant sur la *majorité minimale globale*, définie page 63, 3.2 portant sur la *minorité maximale globale*, définie page 63, 3.3 portant sur la *majorité minimale d'une circonscription*, définie page 63, 3.4 portant sur la *majorité des circonscriptions*, définie page 64, 3.5 portant sur la *majorité minimale de la majorité des circonscriptions*, définie page 64, 3.6 portant sur le *paradoxe du référendum*, également noté *conflit*, définie page 64, 3.7 portant sur la *probabilité d'occurence du paradoxe du référendum*, définie page 64 et 3.8 portant sur l'*intervalle d'existence du paradoxe du référendum*, définie page 67.

On conserve donc les notations les suivantes :

- La majorité minimale globale :

$$M_N^{min} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{2(2kr + k + r) + 1}{2} \rfloor + 1 = 2kr + k + r + 1$$

- La minorité maximale globale :

$$m_N^{max} = M_N^{min} - 1 = 2kr + k + r$$

- La majorité minimale d'une circonscription :

$$M_{C_j}^{min} = \lfloor \frac{c_j}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{2r + 1}{2} \rfloor + 1 = r + 1$$

- La majorité des circonscriptions :

$$M_C = \lfloor \frac{c}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{2 \times k + 1}{2} \rfloor + 1 = k + 1$$

- La majorité minimale de la majorité des circonscriptions :

$$M_{M_C}^{min} = M_C \times M_{C_j}^{min} = (k+1) \times (r+1) = kr + k + r + 1$$

- Un conflit se produit lorsque,

$$\exists i = \{A, B\}, c_i < \frac{c}{2} \text{ et } n_i > \frac{n}{2}$$

- La probabilité d'occurence d'un conflit :

$$P : \left| \begin{array}{ccc} N^2 & \longrightarrow & [0;1] \\ (c,n) & \longmapsto & P(c,n) \end{array} \right.$$

- L'intervalle d'existence du paradoxe du référendum s'écrit :

$$I_{PR}^e = [M_{M_C}^{min}, m_N^{max}] = [kr + k + r + 1, 2kr + k + r]$$

Par ailleurs, sont également valides les théroèmes 3.1 portant sur la *nullité de la probabilité d'occurence du référendum lorsque* $c = 1$ *ou* $c = n$, présenté page 65, 3.2 portant sur l'*impossibilité pour un candidat d'emporter toutes les circonscriptions lorsqu'existe un paradoxe du référendum*, présenté page 66 et 3.3 portant sur l'*unicité de la valeur de la majorité minimale de la majorité des circonscriptions*, présenté page 67, ainsi que les remarques 3.1, notée page 66, 3.2, notée page 67 et 3.3, notée page 67.

La structure de la formule potentielle peut reposer sur celle de la formule avec symétrie des écarts, l'existence d'un corps électoral partiellement indifférent aux options proposées, étant la conséquence de l'affaiblissement de l'hypothèse d' *«Impartial Culture»*. Pour ce faire, on suppose que le corps électoral se répartit entre un groupe d'électeurs indifférents entre les deux options proposées (noté n_i) et un groupe regroupant les électeurs fidèles à l'une ou l'autre d'entre elles (c'est-à-dire regroupant n_A et n_B). Par construction il faudra nous imposer que n_i, n_A et n_B ne sont jamais nuls et en conséquent ne puissent jamais excéder $n-2$. Par ailleurs, nous imposons que la plus petite valeur entre n_A et n_B (c'est-à-dire $\lambda_{(n_A,n_B)} = min(n_A, n_B)$) est strictement majorée par la majorité minimale de la majorité des circonscriptions ($M_{M_C}^{min}$) retranchée de 1 et n_i, c'est-à-dire que $\lambda_{(n_A,n_B)} < M_{M_C}^{min} - 1 - n_i = 2r + 1 - n_i$.

À l'instar des formules développées dans le chapitre 4, pour les modèles de conflits de légitimité avec division hétérogène du corps électoral prenant en compte la symétrie puis la dissymétrie des écarts d'effectifs inter-circonscription, l'interchangeabilité est délicate, excluant l'affection d'un «poids» unique à chaque scénario et obligeant à traiter la répartition des effectifs au sein de chacune des trois circonscriptions de notre modèle. Par mesure de commodité nous imposons que les effectifs des trois groupes sont traités dans l'ordre suivant : n_A, n_B et n_i. De même nous imposons que les circonscriptions sont traitées dans leur ordre de numérotation.

Ainsi l'effectif de n_A est réparti entre les trois circonscriptions C_1, C_2 et C_3 comme suit : d'abord $0 \leq c_{1_A} \leq min(c, n_A)$, puis $0 \leq c_{2_A} \leq min(c, n_A - c_{1_A})$ et enfin $c_{3_A} = min(c, n_A - c_{1_A} - c_{2_A})$, les trois précédentes vérifiant l'inégalité $0 < n_A = c_{1_A} + c_{2_A} + c_{3_A} \leq n - 2$.

Ensuite la répartition de l'effectif de n_B entre les trois circonscriptions suit un processus similaire tenant compte de la répartition de n_A : tout d'abord $0 \leq c_{1_B} \leq min(c - c_{1_A}, n_B)$, puis $0 \leq c_{2_B} \leq min(c - c_{2_A}, n_B - c_{1_B})$ et enfin $c_{3_B} = min(c - c_{3_A}, n_B - c_{1_B} - c_{2_B})$, les trois précédentes vérifiant également que $0 < n_B = c_{1_B} + c_{2_B} + c_{3_B} \leq n - 2$.

Et pour terminer la répartition de l'effectif de n_i entre les trois circonscriptions suit le processus suivant incorporant les répartitions de n_A et n_B : initialement $0 \leq c_{1_i} \leq min(c - c_{1_A} - c_{1_A}, n_i)$, suivi de $0 \leq c_{2_i} \leq min(c - c_{2_A} - c_{2_B}, n_i - c_{1_i})$ et enfin $c_{3_i} = min(c - c_{3_A} - c_{3_B}, n_i - c_{1_i} - c_{2_i})$, les trois précédentes vérifiant de même que $0 < n_i = c_{1_i} + c_{2_i} + c_{3_i} \leq n - 2$.

Contrairement aux formules des chapitres précédents, la taille de l'univers ne s'obtient pas en calculant le nombre d'options élevé à la puissance de l'effectif du corps électoral. En effet, l'existence d'électeurs fidèles à l'une ou l'autre des deux options proposées entraine une réduction de la taille de l'univers des possibilités. En réalité cette disposition reste uniquement vraie pour le groupe global n_i des électeurs indifférents entre les options proposées et pour chaque circonscription j, il nous faut calculer $\binom{c_j}{c_{j_i}} \times \binom{c_j - c_{j_i}}{c_{j_a}} \times \binom{c_j - c_{j_i} - c_{j_a}}{c_{j_b}}$, ainsi que le poid, c'est-à-dire, quelque soit j^1, j^2 et j^3 les trois circonscriptions, le poid 3 est affecté si $c_{j^1{}_i} = c_{j^2{}_i} \neq c_{j^3{}_i}$ et le poid 6 est affecté si $c_{j^1{}_i} \neq c_{j^2{}_i} \neq c_{j^3{}_i}$, et en faire le produit, que nous notons Υ :

$$\Upsilon = \prod_{j=1}^{3} \binom{c_j}{c_{j_i}} \times \binom{c_j - c_{j_i}}{c_{j_a}} \times \binom{c_j - c_{j_i} - c_{j_a}}{c_{j_b}} \times 2^{n_i} \times \begin{cases} 3 \text{ si } c_{j^1{}_i} = c_{j^2{}_i} \neq c_{j^3{}_i} \\ 6 \text{ si } c_{j^1{}_i} \neq c_{j^2{}_i} \neq c_{j^3{}_i} \end{cases}$$

Pour des raisons d'économie dans les calculs, expliquées aux chapitres précédents, nous passons la formule en logarithme, donnant ainsi pour $log(\Upsilon)$:

$$\begin{aligned} log(\Upsilon) = \; & \textstyle\sum_{j=1}^{3} log(\binom{c_j}{c_{j_i}}) + log(\binom{c_j - c_{j_i}}{c_{j_a}}) + log(\binom{c_j - c_{j_i} - c_{j_a}}{c_{j_b}}) \\ & + n_i log(2) \\ & + \begin{cases} log(3) \text{ si } c_{j^1{}_i} = c_{j^2{}_i} \neq c_{j^3{}_i} \\ log(6) \text{ si } c_{j^1{}_i} \neq c_{j^2{}_i} \neq c_{j^3{}_i} \end{cases} \end{aligned}$$

La suite de la formule implique ensuite de calculer le nombre de configuration de conflits par scénario. Pour cela il faut calculer l'ensemble des scores minoritaire possibles (notés s_m), du plus petit au plus grand, c'est-à-dire de la *majorité minimale de la majorité des circonscriptions* ($M_{M_C}^{min}$) jusqu'au score au minimum entre la minorité maximale globale (m_N^{max}) et le score minimal possible à partir de la somme du score maximale auprès des électeurs fidélisés du moins fort des deux candiats et du score réalisés auprès des électeurs indifférents tout en étant minoritaire globalement, c'est-à-dire $N_k^* = \lambda_{(n_A,n_B)} + n_{k_i}$ avec $k \in \{A, B\}$.

On peut ainsi générer les nombre de schémas de conflit. On désigne par k, le candidat entre A et B se retrouvant minoritaire en voix globalement. En suivant la hiérachie entre les trois circonscriptions, on commence, pour C_1, à partir de sa majorité minimale ($M_{C_1}^{\min}$) jusqu'à $s_m - M_{C_1}^{\min}$. On précède de manière similaire pour C_2 en partant également de $M_{C_2}^{\min}$ jusqu'au minimum entre le score réalisé en C_1 (noté ici c_{k_1}) et la différence $s_m - c_{k_1}$. Enfin pour C_3 on part de 0 jusqu'à la différence entre le score minoritaire et les scores réalisés en C_1 et C_2 : $s_m - c_{k_1} - c_{k_2}$.

On peut désormais calculer le nombre de situations d'un conflit, à partir des scores dans chaque circonscription obtenu par le candidat k, en respectant le même ordre entre les circonscriptions, c'est-à-dire C_1, C_2 etC_3. On cherche donc à calculer les combinaisons de conflits possibles en C_1 pour le score c_{k_1}, en C_2 pour le score c_{k_2} et en C_3 pour le score c_{k_3} que l'on note $\gamma_{C_1,C_2,C_3}^{c_{k_1},c_{k_2},c_{k_3}}$:

$$\gamma_{C_1,C_2,C_3}^{c_{k_1},c_{k_2},c_{k_3}} = \sum_{s_m=M_{M_C}^{min}}^{min(m_N^{max},N_k^*)} \sum_{c_{k_1}=M_{C_1}^{\min}}^{s_m-M_{C_1}^{\min}} \sum_{c_{k_2}=M_{C_2}^{\min}}^{min(c_{k_1},s_m-c_{k_1})} \sum_{c_{k_3}=0}^{s_m-c_{k_1}-c_{k_2}} \binom{c_1}{c_{k_1}} \times \binom{c_2}{c_{k_2}} \times \binom{c_3}{c_{k_3}}$$

devenant ainsi une fois la formule transformée en logarithme

$$log(\gamma_{C_1,C_2,C_3}^{c_{k_1},c_{k_2},c_{k_3}}) = \sum_{s_m=M_{M_C}^{min}}^{min(m_N^{max},N_k^*)} \sum_{c_{k_1}=M_{C_1}^{\min}}^{s_m-M_{C_1}^{\min}} \sum_{c_{k_2}=M_{C_2}^{\min}}^{min(c_{k_1},s_m-c_{k_1})} \sum_{c_{k_3}=0}^{s_m-c_{k_1}-c_{k_2}} log(\binom{c_1}{c_{k_1}}\binom{c_2}{c_{k_2}}\binom{c_3}{c_{k_3}})$$

On peut calculer les combinaisons des scores globaux du candidat minoritaire globalement. On note pour cela $\xi = n_i + \lambda_{(n_A,n_B)}$ et on calcule μ : $\mu = \binom{\xi}{\lambda_{(n_A,n_B)}}$. La transformation en logarithme donne $log(\mu) = log(\binom{\xi}{\lambda_{(n_A,n_B)}})$.

On calcule ainsi le logarithme de la probabilité exacte d'occurence d'un paradoxe du référendum en faisant la somme de $log(\gamma_{C_1,C_2,C_3}^{c_{k_1},c_{k_2},c_{k_3}})$ et $log(\mu)$ retranché de $log(\Upsilon)$, que l'on note $log(P)$:

$$log(P) = log(\gamma_{C_1,C_2,C_3}^{c_{k_1},c_{k_2},c_{k_3}}) + log(\mu) - log(\Upsilon)$$

L'obtention de la valeur de la probabilité exacte d'occurence du paradoxe du référendum P s'obtient ensuite en calculant l'exponentielle de $log(P)$, autrement dit :

$$P = \frac{\gamma_{C_1,C_2,C_3}^{c_{k_1},c_{k_2},c_{k_3}} \mu}{\Upsilon}$$

Résumé

Cette thèse a pour enjeu de traiter des paradoxes étudiés en théorie du choix social. Le paradoxe d'Ostrogorski sur deux axes programmatiques a été traité, notamment sa probabilité de réalisation par l'ajout d'un critère discriminant sur les axes au moment de réaliser le choix de l'électeur : une formule de calcul exacte a été mise au point pour des valeurs de population finies afin de mesurer son occurrence pour différents effectifs, et une borne maximale émerge autours de $0,085$. Parmi, les différentes anomalies étudiées en théorie du choix social affectant le fonctionnement des démocraties, le paradoxe du référendum occupe une place particulière du fait de son observation assez récurrente dans l'histoire électorale récente. L'un des enjeux de cette thèse a été de déterminer une méthode utilisable pour mesurer précisément sa probabilité d'occurrence dans des conditions précises de taille du corps électoral et de découpage. Il a été notamment recherché un moyen de comparer sa fréquence selon le nombre de circonscriptions retenu. Une formule a ainsi été déterminée pour des découpage du corps électoral en 3, 5, 7 et 9 circonscriptions de taille homogène. Un second résultat de la thèse sur le même paradoxe a été d'abolir l'hypothèse d'homogénéité parfaite des effectifs des circonscriptions pour mesurer l'effet de leur variation sur la probabilité de conflit pour un découpage en 3 circonscriptions. Des pistes ultérieures de recherche ont également explorées, en particulier la possibilité d'abolir partiellement l'hypothèse de culture neutre avec un découpage en 3 circonscriptions. Il a également été procédé à un état des lieux des types d'architecture institutionnelle, dont une classification globale en quatre catégories a été établie. Il a été tenté de déterminer leur poids dans les conflits de pouvoirs observés dans certains pays, en ayant notamment recours à des résultats obtenus grâce au paradoxe du référendum.

Abstract

This thesis has aimed issues to deal with paradoxes studied in social choice theory. The Ostrogorski paradox with two programmatic axes was treated, including its achievement by adding a distinguishing criterion on the axes to realize the voter choice : an exact formula has been developed for a finite population to measure its occurrence for different numbers, and a effective maximum bound has emerged around 0.085. Among the various anomalies studied in social choice theory in the functioning of democracy, the referendum paradox holds a special place because of its fairly recurrent observation in recent electoral history. One of the stake of this thesis was to determine a suitable method to accurately measure its probability of occurrence in precise terms of size of the electorate and cutting. It was particularly sought a way to compare its frequency depending on the number of selected districts. A formula has been determined for cutting the electorate in 3, 5, 7 and 9 homogeneous size constituencies. A second result of the thesis on the same paradox was to relax the perfect homogeneity assumption on the constituencies size to measure the effect of their variation on the likelihood of conflict for a division into 3 districts. Subsequent research directions have also explored the possibility to partially abolish the assumption of impartial culture with a division into three districts. An inventory has been also conducted of the institutional architecture types. A comprehensive four-category classification was established, and we have tried to determine their weight in conflicts of powers observed in some countries, in particular using results deduced from the referendum paradox.