

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'ingénieur

**Doctorat ParisTech**

**T H È S E**

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers**

**Spécialité " Automatique "**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Laurent GAJNY**

le 15 mai 2015

**Approximation de fonctions et de données discrètes  
au sens de la norme  $L_1$  par splines polynomiales**

Directeur de thèse : **Olivier GIBARU**  
Co-encadrement de la thèse : **Eric NYIRI**

**Jury**

**M. Bernhard BECKERMANN**, Professeur, laboratoire Paul Painlevé, Université Lille 1  
**Mme Marie-Laurence MAZURE**, Professeur, LJK, Université Joseph Fourier  
**M. Gabriel PEYRE**, Directeur de recherche CNRS, CEREMADE, Université Paris Dauphine  
**M. Tom LYCHE**, Professeur émérite, CMA, Université d'Oslo  
**M. Olivier GIBARU**, Professeur, LSIS, Arts et Métiers ParisTech  
**M. Eric NYIRI**, Maître de conférence, LSIS, Arts et Métiers ParisTech

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur



*À mes parents et ma compagne.*



# Remerciements

Je souhaite, tout d'abord, remercier chaleureusement Marie-Laurence Mazure et Gabriel Peyré d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail. Leurs remarques et suggestions pertinentes ont permis d'améliorer très significativement le présent mémoire. J'ai par ailleurs beaucoup apprécié les longues discussions avec Marie-Laurence Mazure au sujet de mes travaux. Je remercie également Tom Lyche d'avoir pris part à ce jury et Bernhard Beckermann d'avoir accepté de le présider.

Je tiens également à remercier Olivier Gibaru et Eric Nyiri de m'avoir permis d'effectuer cette thèse au sein de l'équipe Ingénierie Numérique des Systèmes Mécaniques du Laboratoire des Sciences de l'Information et des systèmes.

Un grand merci au personnel des Arts et Métiers de Lille et de l'école doctorale Sciences et Métiers de l'Ingénieur pour leur assistance tout au long de ma thèse.

Je souhaite exprimer ma très sincère gratitude à l'égard de la commission franco-américaine (Fulbright France) pour son aide précieuse pour mon projet de séjour de recherche à l'Université d'État de Caroline du Nord.

I would like to thank warmly Pr. Fang and Dr. Lavery for having invited me in the United States. I have passed six exciting and prolific month by your side. I also thank the members of the FANG group : Ziteng, Liam, Jian, Yuantao, Sha, Tiantian, Kang-Tin, Jiahua. I will not forget the crab fishing !

Comment oublier tous mes collègues du bâtiment EEA toutes générations confondues : Adel, Karim, Bassel, Ivan, Rindra, Paul, Fabien, Marouene, Franck, Steve, Nadim, Ky, Karama, Mac, Pierre R., Alain, Laure, Pierre B., Marta, Juliette, Tiago, Hussein, Julian, Tian. J'ai passé d'excellents moments avec vous et j'espère retrouver un jour un environnement de travail aussi agréable !

Je remercie également mes amis de l'université, Pierre-Louis et Hubert. Nous pouvons être fiers de notre promotion ! Merci aussi à Amandine qui a toujours cru en moi et à sa famille, Gary et Capucine.

Enfin, je ne sais comment remercier mes parents, Sabine et Jean-luc, ainsi que ma compagne Hasina. Merci de croire en moi à chaque seconde et de m'avoir soutenu dans les moments difficiles qui peuvent survenir au cours d'une thèse de doctorat. Merci à mes parents de m'avoir toujours poussé à voir plus haut. Merci Hasina pour tes conseils, je te dois tellement ! Je te passe le relai maintenant, c'est à toi de jouer !



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des notations</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Meilleure approximation au sens de la norme <math>L_1</math></b>	<b>1</b>
1 Approximation de fonctions dans un espace vectoriel normé . . . . .	3
1.1 Existence . . . . .	3
1.2 Caractérisation . . . . .	4
1.3 Unicité . . . . .	5
2 Meilleure approximation de fonctions en norme $L_1$ . . . . .	6
2.1 Généralités sur les espaces $L_p$ . . . . .	6
2.2 Caractérisation . . . . .	7
2.3 Le théorème d'Hobby-Rice, corollaire et extension . . . . .	8
2.4 Unicité . . . . .	14
3 Meilleure approximation de fonctions en norme $L_1$ dans un espace de Chebyshev . . . . .	15
3.1 Cas des fonctions continues . . . . .	15
3.2 Cas des fonctions saut . . . . .	19
4 Meilleure approximation de fonctions en norme $L_1$ dans un espace faiblement de Chebyshev . . . . .	26
4.1 Cas des fonctions continues . . . . .	27
4.2 Cas des fonctions saut . . . . .	29
5 Application aux splines polynomiales d'Hermite à nœuds fixés . . . . .	30
6 Meilleure approximation $\ell_1$ de données discrètes . . . . .	37
6.1 Généralités sur les espaces $\ell_p$ . . . . .	37
6.2 Résultats généraux . . . . .	37
6.3 Droite de régression $\ell_1$ . . . . .	38
6.3.1 Robustesse aux points aberrants . . . . .	38
6.3.2 Robustesse aux séquences organisées de points aberrants . . . . .	41
6.4 Meilleure approximation spline en norme $\ell_1$ . . . . .	42
7 Conclusion du chapitre . . . . .	44

<b>2</b>	<b>Interpolation et ajustement par spline polynomiale <math>L_1</math></b>	<b>45</b>
1	Rappel sur l'interpolation $L_1$ par spline polynomiale . . . . .	46
1.1	Cas de l'interpolation par spline cubique $C^2$ . . . . .	46
1.2	Interpolation par spline $L_1$ . . . . .	48
1.2.1	Interpolation $L_1$ par spline cubique d'Hermite . . . . .	48
1.2.2	Interpolation $L_1$ par spline quintique d'Hermite . . . . .	52
1.3	Interpolation par spline cubique paramétrique $L_1$ . . . . .	54
1.4	Algorithme par fenêtre glissante pour l'interpolation spline $L_1$ . . . . .	56
1.4.1	Méthode globale de résolution . . . . .	56
1.4.2	Méthode locale de résolution par fenêtre glissante . . . . .	57
1.5	Application à la robotique collaborative . . . . .	60
2	Spline de lissage $L_1$ . . . . .	63
2.1	Approximation de fonctions . . . . .	63
2.2	Approximation de données discrètes . . . . .	64
3	Splines d'ajustement $L_1$ . . . . .	66
3.1	Approximation de fonctions . . . . .	66
3.2	Approximation de données discrètes . . . . .	68
4	Méthodes numériques pour le calcul des splines d'ajustement $L_1$ . . . . .	70
4.1	Méthode globale . . . . .	70
4.2	Méthodes par fenêtre glissante . . . . .	71
4.2.1	Méthodes à noeud central . . . . .	72
4.2.2	Méthodes à trois points centraux . . . . .	76
5	Conclusion du chapitre . . . . .	77
<b>3</b>	<b>Interpolation à <math>\delta</math> près par spline polynomiale <math>L_1</math></b>	<b>83</b>
1	Présentation du problème . . . . .	84
2	Résolution formelle dans des cas particuliers . . . . .	87
2.1	Cas des solutions affines . . . . .	87
2.2	Résolution exacte sur trois points . . . . .	88
3	Méthodes globale de résolution . . . . .	91
3.1	Un problème régularisé associé . . . . .	92
3.1.1	Algorithme d'interpolation $L_1$ à $\delta$ près . . . . .	94
3.1.2	Application sur de petites configurations . . . . .	96
4	Méthode numérique à cinq points . . . . .	97
4.1	Méthode itérative pour les données bruitées . . . . .	99
5	Méthodes à trois points . . . . .	100
5.1	Méthode de régression $\ell_1$ à $\delta$ près . . . . .	101
5.2	Méthode quasi-algébrique à trois points . . . . .	102
5.3	Méthode algébrique à trois points . . . . .	106
6	Conclusion du chapitre . . . . .	110

<b>4</b>	<b>Interpolation à <math>\delta</math> près par une surface spline <math>L_1</math></b>	<b>111</b>
1	Interpolation $L_1$ à $\delta$ près sur une croix de données . . . . .	112
2	Méthode à croix glissante sur neuf points . . . . .	113
3	Méthode à croix glissante sur cinq points . . . . .	118
4	Conclusion du chapitre . . . . .	127
	<b>Conclusion</b>	<b>129</b>
<b>A</b>	<b>Détails sur le Chapitre 2</b>	<b>131</b>
1	Démonstration du Lemme 2.5 . . . . .	131
2	Démonstration du Lemme 2.6 . . . . .	133
3	Résolution exacte du problème sur cinq points . . . . .	135
4	Matrices du problème discrétisé pour l'approximation par spline d'ajuste- ment sans paramètre $L_1$ . . . . .	137
<b>B</b>	<b>Détails sur le Chapitre 3</b>	<b>139</b>
1	Démonstration du Lemme 3.5 . . . . .	139
2	Résolution du problème d'approximation avec erreur prescrite dans des cas particuliers . . . . .	140
2.1	Résolution exacte pour deux points . . . . .	141
2.1.1	Avec dérivée fixée au premier point et passage dans une porte principale . . . . .	141
2.1.2	Avec passage dans deux portes principales . . . . .	142
2.2	Résolution exacte pour trois points . . . . .	143
2.2.1	Avec deux points fixés, la dérivée fixée au premier point et passage dans une porte secondaire . . . . .	143
2.2.2	Avec deux points fixés, la dérivée libre en tout point et passage dans une porte secondaire . . . . .	145
2.2.3	Avec le premier point fixé et passage dans deux portes en utilisant une seule cubique . . . . .	145
3	Démonstration du Lemme 3.10 . . . . .	147
	<b>Bibliographie</b>	<b>149</b>



# Introduction

Dans de nombreux domaines d'application tels que la modélisation de terrain, l'analyse de données, le traitement du signal et de l'image ou la planification de trajectoire de systèmes mécaniques, il est nécessaire d'interpoler ou d'approcher des données, continues ou discrètes, par une courbe ou une surface. Parmi les outils les plus classiquement utilisés, citons les splines polynomiales [DB01, Far02, HLS93, Far08, Nü89], les splines rationnelles [FJ, PT97], les splines de Chebyshev [KS66, Sch81] et les schémas de subdivision [CDM91]. Dans les problèmes de modélisation sous-jacents aux applications citées plus tôt, il est essentiel d'obtenir des propriétés de conservation de la forme des données telles que la conservation de la monotonie et de la convexité. Ces préoccupations ont généré une abondante littérature (voir par exemple [Gre86, Man01, MS03, Sab04, Maz06, LM06, PS08, MM10]).

Il est bien connu que les splines d'interpolation ne conservent pas toujours la forme des données lorsque celles-ci présentent de fortes variations d'amplitude [DB01]. En particulier, Schweikert avait déjà noté dans [Sch65] ce phénomène, appelé phénomène de Gibbs, pour les splines cubiques d'interpolation  $L_2$ . Zhang et Martin ont donné un encadrement de celui-ci pour l'interpolation de la fonction de Heaviside [ZM97]. De nombreuses solutions ont été envisagées afin d'atténuer ce phénomène telles que les célèbres splines sous tension de Schweikert [Sch65]. Mazure considère plus généralement des splines dont chaque morceau est dans un espace de Chebyshev étendu, potentiellement différent d'un morceau à l'autre et d'éventuelles matrices de connexion entre morceaux consécutifs [Maz06]. Les effets de forme fournis par les coefficients des matrices peuvent alors être cumulés de façon très efficace avec les effets de tension/souplesse permis par un choix adéquat d'espaces de Chebyshev. Ce phénomène peut également être atténué par l'interpolation ENO (Essentiellement Non-Oscillante) qui consiste à sélectionner l'interpolant le moins oscillant - obtenu par minimisation d'une fonction coût - au voisinage d'une discontinuité [CDM03].

Lavery et ses collaborateurs ont proposé une autre alternative dès le début des années 2000 avec les splines d'interpolation minimisant la norme  $L_1$  de leur dérivée seconde [Lav00b, Lav01, Lav02, Lav05, Lav06, CFL02, CFL04, CFL05, CFL<sup>+</sup>08]. Dans le cadre très général d'espaces de Sobolev, un tel problème de minimisation n'admet pas toujours de solution [FJ75, dB76, Pin88]. Lavery et ses coauteurs ont donc introduit des méthodes d'interpolation  $L_1$  par spline polynomiale qui admettent une solution non tou-

jours unique mais qui ne présente pas d’oscillations en cas de changements brusques de forme. Dans [AGN07b, AGN07a, Auq07], Auquier, Gibaru et Nyiri montrent notamment dans [AGN07b] qu’une spline cubique d’interpolation  $L_1$  à plus de six nœuds de la fonction de Heaviside ne présente pas de phénomène de Gibbs.

Dans le domaine du traitement du signal, la minimisation  $L_1$  est également avantageuse car contrairement à la minimisation  $L_2$ , elle permet de reconstruire exactement des signaux parcimonieux à partir d’ensembles de mesures fortement incomplets [DS89]. En vision par ordinateur, la méthode  $L_2$  d’Hörn-Schunk pour le calcul du flux optique d’une vidéo (le mouvement apparent des éléments de celle-ci représenté par un champ de vecteur) a été améliorée par diverses versions  $L_1$  plus robustes [MPSC09, PUZ<sup>+</sup>07, WPZ<sup>+</sup>09]. De même, Hotelling introduit un équivalent  $L_1$  à la méthode statistique d’analyse en composantes principales qui consiste à transformer des observations potentiellement corrélées en des variables décorréelées les unes des autres [Hot33]. Cette méthode et ses développements sont plus robustes aux points aberrants [BDB13, TJLF13, DLFL14].

Il faut cependant reconnaître que les algorithmes de résolution pour l’interpolation spline  $L_1$  [BR73, BR74, Van89, CFL02, CFL04] peuvent présenter des problèmes de convergence pour un grand nombre de données. Nyiri, Gibaru et Auquier ont donc proposé une méthode de résolution par fenêtre glissante sur cinq points pour compenser ce phénomène [NGA11]. Cette méthode permet d’obtenir un algorithme parallélisable et de complexité linéaire en le nombre de données. À partir d’une minimisation sur cinq points, il est alors possible d’effectuer une résolution formelle du problème d’interpolation [NGA11, JLF10, YJLF10, JYLF11] et donc d’obtenir des algorithmes très performants. Enfin, les propriétés de conservation de forme sont semblables à celles obtenues par la méthode globale.

Dans la continuité des travaux de Lavery, Gibaru, Nyiri et Auquier, ce travail de thèse concerne le problème d’approximation au sens de la norme  $L_1$  de fonctions et de données discrètes dans certains ensembles de fonctions. Nous en développons des aspects à la fois théorique (existence et caractérisation de meilleures approximations, explicitation de solutions), méthodologique (proposition d’algorithmes) et pratique (application à la planification de trajectoire, à l’image). Nous débutons ce mémoire par l’étude de problème de meilleure approximation au sens de la norme  $L_1$  pour lequel Jackson a montré l’existence d’une solution (non-unique en général) dans des sous-espaces de dimension finie [Jac21]. Dans [Kri65], Kripke et Rivlin donnent une caractérisation très utile et utilisée de ces solutions de meilleure approximation au sens de la norme  $L_1$ . Ils remarquent de plus qu’une meilleure approximation  $L_1$  d’une fonction continue interpole celle-ci en un nombre de points supérieur ou égal à la dimension de l’espace quand celui-ci est de dimension finie. Beaucoup d’articles traitent du problème de meilleure approximation  $L_1$  de fonctions continues. Citons de manière non-exhaustive [Ric64a, Uso67, Mic77, Kam79, Peh79, Str84].

Les démonstrations données dans ces articles s'articulent autour du théorème de caractérisation de Kripke-Rivlin déjà évoqué et du théorème d'Hobby-Rice [HR65]. Nous rappelons ces résultats majeurs dans le premier chapitre. Pour ce qui est des fonctions discontinues telles que la fonction de Heaviside, nous trouvons très peu de références. De plus, dans celles-ci, les auteurs se placent dans des espaces très particuliers. Ainsi, Moskona, Petrucci et Saff se sont intéressés à la meilleure approximation  $L_1$  d'une fonction de type Heaviside par un polynôme trigonométrique [MPS95]. Ils ont notamment mis en évidence l'existence d'un phénomène de Gibbs qui est cependant de moindre amplitude que celui obtenu pour la norme  $L_2$ . Saff et Tashev ont, quant à eux, considéré ce même problème de meilleure approximation mais par des lignes polygonales [ST99]. Leur travail a mis en évidence un phénomène de Gibbs, déjà observé par Foster pour la norme  $L_2$  [FR91]. Il se révèle une nouvelle fois être moindre en norme  $L_1$ . De plus, Saff et Tashev ont démontré que ce phénomène de Gibbs décroît et tend vers zéro lorsque le nombre de nœuds, uniformément répartis sur un intervalle centré en zéro, tend vers l'infini. Ceci montre une nouvelle fois l'intérêt de la norme  $L_1$ .

Dans notre premier chapitre, nous proposons un cadre plus général de meilleure approximation  $L_1$  de fonctions de type Heaviside (ou fonctions saut) dans des espaces de Chebyshev et faiblement de Chebyshev - dont les exemples les plus célèbres sont respectivement les fonctions polynomiales et les splines polynomiales à nœuds fixés. Nous montrons qu'il est possible de déterminer des solutions à ce problème de meilleure approximation via un problème d'interpolation. Pour obtenir ce résultat, nous devons au préalable établir une extension adéquate du théorème d'Hobby-Rice. Cette extension nous permet en particulier de montrer l'unicité de la meilleure approximation  $L_1$  de fonctions saut dans des espaces de Chebyshev de dimension paire. Cette unicité n'est pas garantie en général. Ce chapitre inclut également une étude des meilleures approximations  $\ell_1$  de données discrètes, notamment par régression linéaire. Nous mettons en évidence la robustesse de cette méthode aux points aberrants. L'ensemble des résultats de ce chapitre est illustré dans le cadre polynomial et splines polynomiales. Que ce soit pour les fonctions ou pour les données discrètes, nous constatons la présence d'un phénomène de Gibbs même si celui-ci est atténué par rapport aux analogues  $L_2$ .

Après un rappel sur les résultats connus concernant l'interpolation  $L_1$  par spline polynomiale, le second chapitre propose des stratégies pour remédier à ce problème de non-conservation de la forme des données. Ces méthodes sont dans la lignée des travaux de Lavery [Lav00a, Lav04] et ceux d'Auquier, Gibaru et Nyiri [NGA11]. Les outils utilisés sont des splines de lissage et d'ajustement  $L_1$  proposés dans [Lav00a, Lav04] et dont nous montrons ici l'existence. La première méthode consiste à déterminer une spline minimisant une combinaison linéaire de la fonctionnelle d'approximation et de la fonctionnelle utilisée pour l'interpolation  $L_1$ . Les splines d'ajustement sont, quant à elles, des meilleures approximations au sens de la norme  $L_1$  sur un ensemble de splines admissibles issu de

la réunion de splines d'interpolation  $L_1$ . Nous constatons que ces deux types splines permettent une très nette atténuation des oscillations en cas de changement brusque de la forme des données. Les secondes ont l'avantage de ne pas nécessiter un paramètre de régularisation difficile à fixer en général mais l'algorithme pour les obtenir est de complexité polynomiale. C'est pourquoi, reprenant l'idée de fenêtre glissante développée dans [NGA11] pour l'interpolation  $L_1$ , nous introduisons des méthodes locales d'approximation par spline d'ajustement afin d'obtenir un algorithme de complexité linéaire en le nombre des données.

Les problèmes de planification de trajectoire nécessitent de pouvoir contrôler la distance entre les données initiales et la solution proposée. Les splines étudiées au chapitre 2 ne permettent pas facilement un tel contrôle. C'est pourquoi, au chapitre 3, nous introduisons une nouvelle stratégie d'approximation précisément dans le but d'imposer une distance maximale entre la solution calculée et les données. Nous définissons donc les splines cubiques d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près et nous montrons leur existence. Nous explicitons des solutions à ce problème dans certains cas. Nous étudions le cas où les solutions sont affines, puis le cas de configurations de trois points quelconques. Grâce à ces résultats, nous proposons des constructions algorithmiques d'une spline d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près basées sur le principe de fenêtre glissante. Ces algorithmes se révèlent également efficaces pour traiter des données bruitées. De plus, l'un de ces algorithmes est purement algébrique. Il peut donc être utilisé pour des applications temps réel.

Les résultats et méthodes du chapitre 3 peuvent être adaptés pour obtenir des splines bicubiques d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près de données réparties dans une grille. En effet, nous proposons au chapitre 4 des algorithmes utilisant un principe de croix glissante à neuf puis à cinq points. Nous mettons en évidence que ces méthodes ne font pas apparaître d'oscillations lorsqu'elles sont appliquées à des données comportant de fortes variations d'amplitude. Nous appliquons alors les algorithmes présentés pour la restauration d'images.

# Liste des notations

- $\mathbf{R}$  : le corps des réels.
- $\mathbf{R}^*$  : le corps des réels privé de zéro.
- $\mathbf{N}$  : l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbf{N}^*$  : l'ensemble des entiers naturels privé de zéro.
- $C^k(X, Y)$  : l'ensemble des fonctions définies sur  $X$  à valeurs dans  $Y$ ,  $k$  fois dérivable et dont la dérivée  $k^{\text{ème}}$  est continue.
- $C^k(X)$  : l'ensemble des fonctions définies sur  $X$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$ ,  $k$  fois dérivable et dont la dérivée  $k^{\text{ème}}$  est continue.
- $\mathcal{S}_{r, \mathbf{x}} = \{s \in C^{r-1}[x_1, x_n], s|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \mathbf{P}_r[x_k, x_{k+1}], k = 1, 2, \dots, n\}$  l'espace des splines polynomiales de degré  $r \in \mathbf{N}^*$  et de nœuds  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .
- $\tilde{\mathcal{S}}_{r, \mathbf{x}} = \{s \in C^r[x_1, x_n], s|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \mathbf{P}_{2r+1}[x_k, x_{k+1}], k = 1, 2, \dots, n\}$  l'espace des splines polynomiales d'Hermite de degré  $2r+1$ ,  $r \in \mathbf{N}$ , de régularité  $C^r$  et de nœuds  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .
- $\overline{X}$  : l'adhérence de  $X$ .
- $\partial X$  : la frontière de  $X$ .
- $X \setminus Y$  :  $X$  privé de  $Y$ .
- $Y_1 \oplus Y_2$  : la somme directe de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $X$ .
- $\mathbf{1}_X$  : la fonction indicatrice de  $X$  définie de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , valant 1 sur  $X$ , 0 ailleurs.
- $\|h\|_X$  : la norme d'une application linéaire  $h$  de  $X$  dans  $\mathbf{R}$ .

- $[a, b], ]a, b[, ]a, b], [a, b[$  : les intervalles avec borne inférieure  $a$  et supérieure  $b$ .
- $\sup_{x \in X} \text{ess} f(x)$  : le supremum essentiel d'une fonction  $f$  sur un ensemble  $X$ .
- $\inf_{x \in X} f(x), \min_{x \in X} f(x)$  : respectivement l'infimum et le minimum d'une fonction  $f$  sur un ensemble  $X$ .
- $\text{sgn} : x \in \mathbf{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$  : la fonction signe.
- $[\cdot]$  : la fonction partie entière.
- $\lceil \cdot \rceil$  : la fonction partie entière par excès.
- $\text{vect}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  : l'espace vectoriel engendré par  $n$  fonctions  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ .
- $\text{vect}(Y, \phi)$  : l'espace vectoriel engendré par  $Y = \text{vect}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  et  $\phi$ .
- $\overrightarrow{AB}$  : le vecteur défini par les deux points  $A$  et  $B$ .
- $A^T$  : la transposée d'un vecteur ou d'une matrice  $A$ .
- $I_n$  : la matrice identité de taille  $n \times n$ .
- $\mathbf{1}_n$  : le vecteur colonne de taille  $n$  ne contenant que des 1.
- $\mathbf{0}_n$  : le vecteur colonne de taille  $n$  ne contenant que des 0.
- $\delta_n$  : le vecteur colonne de taille  $n$  ne contenant que des  $\delta \in \mathbf{R}$ .

# Chapitre 1

## Meilleure approximation au sens de la norme $L_1$

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Approximation de fonctions dans un espace vectoriel normé</b>	<b>3</b>
1.1	Existence	3
1.2	Caractérisation	4
1.3	Unicité	5
<b>2</b>	<b>Meilleure approximation de fonctions en norme <math>L_1</math></b>	<b>6</b>
2.1	Généralités sur les espaces $L_p$	6
2.2	Caractérisation	7
2.3	Le théorème d'Hobby-Rice, corollaire et extension	8
2.4	Unicité	14
<b>3</b>	<b>Meilleure approximation de fonctions en norme <math>L_1</math> dans un espace de Chebyshev</b>	<b>15</b>
3.1	Cas des fonctions continues	15
3.2	Cas des fonctions saut	19
<b>4</b>	<b>Meilleure approximation de fonctions en norme <math>L_1</math> dans un espace faiblement de Chebyshev</b>	<b>26</b>
4.1	Cas des fonctions continues	27
4.2	Cas des fonctions saut	29
<b>5</b>	<b>Application aux splines polynomiales d'Hermite à nœuds fixés</b>	<b>30</b>
<b>6</b>	<b>Meilleure approximation <math>\ell_1</math> de données discrètes</b>	<b>37</b>
6.1	Généralités sur les espaces $\ell_p$	37
6.2	Résultats généraux	37
6.3	Droite de régression $\ell_1$	38
6.3.1	Robustesse aux points aberrants	38
6.3.2	Robustesse aux séquences organisées de points aberrants	41
6.4	Meilleure approximation spline en norme $\ell_1$	42
<b>7</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>44</b>

---

Dans ce chapitre, nous dressons un état de l'art et apportons des contributions (paragraphes 2.3, 3.2, 4.2, 5 et 6.3) au problème de meilleure approximation de fonctions et de données discrètes au sens de la norme  $L_1$ . Après avoir rappelé quelques généralités sur l'approximation dans un espace vectoriel normé, nous étudions des références classiques concernant le cadre général de ce problème [Ric64a, Kri65, HR65, Pin76, Mic77, Pin89, DL93]. Nous étudions ensuite ce problème de meilleure approximation dans un espace de Chebyshev et faiblement de Chebyshev dont les exemples-type respectifs sont les fonctions polynomiales et les fonctions splines polynomiales à nœuds fixés. Pour ces espaces, nous considérons l'approximation de fonctions continues et de fonctions saut. Ces dernières sont définies comme suit.

**Définition 1.1.** Une fonction  $f$  est appelée fonction saut sur  $[a, b]$  en  $\xi_0 \in ]a, b[$  si :

$$f \in C^0([a, b] \setminus \{\xi_0\}), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \xi_0 \\ x < \xi_0}} |f(x)| \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow \xi_0 \\ x > \xi_0}} |f(x)| \text{ existent et sont finies.}$$

Nous notons  $\mathcal{J}_{\xi_0}[a, b]$  l'espace vectoriel de telles fonctions.

Tandis que le problème de meilleure approximation  $L_1$  de fonctions continues a été largement étudié dans la littérature [Uso67, Mic77, Kam79, Peh79, Som83, Str84], peu d'articles font référence à la meilleure approximation  $L_1$  de fonctions discontinues. Dans [MPS95], Moskona, Petrucci et Saff s'intéressent à la meilleure approximation  $L_1$  par un polynôme trigonométrique d'une fonction de type Heaviside. Dans [ST99], Saff et Tashev effectuent un travail similaire en utilisant une ligne polygonale. Les auteurs notent dans les deux cas l'existence d'un phénomène de Gibbs pour une meilleure approximation  $L_1$  de la fonction de Heaviside qui est cependant de moindre amplitude que celui observé en norme  $L_2$  (voir la Figure 1.1).

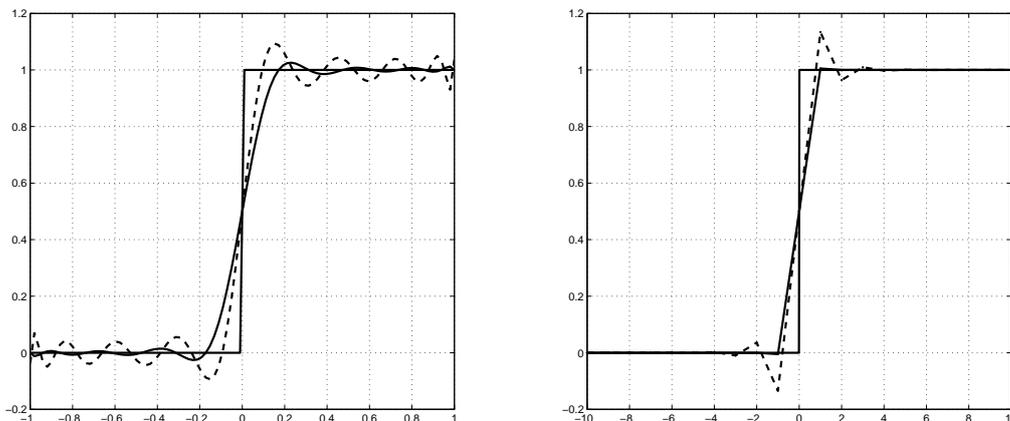


FIGURE 1.1 – Meilleure approximation  $L_1$  (ligne pleine) et  $L_2$  (pointillés) de la fonction de Heaviside par un polynôme trigonométrique de degré 10 (à gauche) et par une ligne polygonale à vingt-et-un nœuds équirépartis (à droite).

Cette conclusion intéressante justifie notre intérêt pour le problème de meilleure approximation  $L_1$  de fonctions saut. Nous proposons donc dans ce chapitre l'étude d'un cadre plus général englobant les deux cas particuliers cités précédemment. Nous obtenons des résultats, présentés par ailleurs dans [GGNF14], concernant le problème de meilleure approximation  $L_1$  de fonctions saut dans des espaces de Chebyshev et faiblement de Chebyshev.

Nous étudions enfin le cas discret, notamment la régression linéaire  $\ell_1$ . Nous donnons des éléments de réponse concernant la robustesse de cette méthode aux points aberrants. Enfin, nous mettons en évidence les limites d'une méthode de meilleure approximation  $\ell_1$  de données discrètes par des splines polynomiales d'Hermite.

## 1 Approximation de fonctions dans un espace vectoriel normé

Soient  $(X, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé réel et  $Y$  une partie non-vide de  $X$ . Nous notons également pour tout  $f \in X \setminus \overline{Y}$ , l'erreur d'approximation par :

$$E(f, Y) = \inf_{g \in Y} \|f - g\|. \quad (1.1)$$

Une solution de ce problème est appelée meilleure approximation de  $f$  dans  $Y$ . Nous nous intéressons dans la suite à l'existence, la caractérisation et l'unicité de telles solutions. Sauf mention contraire, les démonstrations sont inspirées de l'ouvrage de Pinkus [Pin89].

### 1.1 Existence

Sans condition sur le sous-ensemble  $Y$ , nous ne pouvons pas garantir l'existence d'une meilleure approximation d'une fonction  $f \in X$ . Nous rappelons alors le résultat suivant issu de [Pin89].

**Théorème 1.2.** *Soit  $Y$  un sous-ensemble de  $X$ . Si l'une des affirmations suivantes est vraie :*

- i.  $Y$  est compact,*
- ii.  $Y$  est fermé dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $X$ ,*

*alors pour tout  $f \in X \setminus \overline{Y}$ , il existe un élément  $g^* \in Y$  pour lequel :*

$$\forall g \in Y, \quad \|f - g^*\| \leq \|f - g\|.$$

*Démonstration.* *i.* Soit  $f \in X \setminus \overline{Y}$ . Par définition de  $E(f, Y)$ , il existe une suite  $\{g_n, n \in \mathbf{N}\}$  de fonctions dans  $Y$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - g_n\| = E(f, Y)$ . Or,  $Y$  est compact, donc il existe une sous-suite convergente  $\{g_{n_k}, k \in \mathbf{N}\}$ . Nous notons la limite de cette sous-suite  $g^*$ . Aussi, pour tout  $k$ , par l'inégalité triangulaire :

$$\|f - g^*\| \leq \|f - g_{n_k}\| + \|g_{n_k} - g^*\|.$$

Par passage à la limite, il vient  $\|f - g^*\| \leq E(f, Y)$ .

De plus, par définition,  $E(f, Y) \leq \|f - g^*\|$ . Donc  $\|f - g^*\| = E(f, Y)$  et  $g^*$  est une meilleure approximation de  $f$  dans  $Y$ .

*ii.* Supposons  $Y$  fermé dans  $U$ , un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $X$ . Soient  $f \in X$  et  $h \in Y$ . Pour approcher au mieux  $f$  dans  $Y$ , il suffit de considérer seulement les éléments  $g \in Y$  tels que :

$$\|f - g\| \leq \|f - h\| = M.$$

Définissons alors  $A = \{g \in Y, \|f - g\| \leq M\}$ . Posons aussi  $\|f\| = N$ . Ainsi, par l'inégalité triangulaire, pour tout  $g \in A$ ,  $\|g\| \leq N + M$ .

L'ensemble  $A$  est alors fermé et borné dans un espace de dimension finie. Il est donc compact. Nous concluons par *i*. □

Une conséquence directe et intéressante de la proposition *ii* est rappelée dans le corollaire suivant.

**Corollaire 1.3.** *Si  $Y$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $X$ , alors pour tout  $f \in X \setminus \overline{Y}$ , il existe un élément  $g^* \in Y$  pour lequel :*

$$\forall g \in Y, \quad \|f - g^*\| \leq \|f - g\|.$$

## 1.2 Caractérisation

Dans ce paragraphe, nous rappelons comment le théorème de Hahn-Banach permet de caractériser la meilleure approximation dans un espace vectoriel normé. Il s'agit de la version analytique de Hahn-Banach que nous énonçons ci-dessous.

**Théorème 1.4** (Hahn-Banach). *Si  $Y$  est un sous-espace vectoriel de  $X$ , alors toute forme linéaire continue sur  $Y$  se prolonge en une forme linéaire continue sur  $X$  de même norme.*

Nous énonçons donc maintenant le résultat principal de ce paragraphe issu de [Pin89] concernant la caractérisation d'une meilleure approximation dans un espace vectoriel normé.

**Théorème 1.5.** *Soient  $Y$  un sous-espace vectoriel de  $X$  et  $f \in X \setminus \overline{Y}$ . Pour tout élément  $g^* \in Y$ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i.*  $g^*$  est une meilleure approximation de  $f$  dans  $Y$ .
- ii.* il existe une forme linéaire continue sur  $X$ , de norme 1, dont le noyau contient  $Y$  et qui vaut  $\|f - g^*\|$  en  $f$ .

*Démonstration.* Supposons que  $g^*$  soit une meilleure approximation de  $f$  dans  $Y$ . Dans ce cas,  $E(f, Y) = \|f - g^*\|$ . Soit  $L$  le sous-espace engendré par  $Y$  et  $f$ . Définissons  $h$  une forme linéaire de  $L$  comme suit. Pour  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $g \in Y$ ,

$$h(\alpha f + g) = \alpha \|f - g^*\|.$$

Cette forme linéaire est continue. De plus, par définition, pour tout  $g \in Y$ ,  $h(g) = 0$  et  $h(f) = \|f - g^*\|$ . Il reste à montrer que  $\|h\|_L = 1$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} |h(\alpha f + g)| &= |\alpha| \|f - g^*\|, \\ &\leq |\alpha| \|f - z\|, \quad \text{où } \alpha \neq 0 \text{ et } z = -\frac{1}{\alpha}g \in Y, \\ &\leq \|g + \alpha f\|. \end{aligned}$$

Si  $\alpha = 0$  alors  $|h(g)| = 0 \leq \|g\|$ . Donc  $\|h\|_L \leq 1$ . De plus,

$$|h(\alpha f - \alpha g^*)| = \|\alpha f - \alpha g^*\|.$$

Donc  $\|h\|_L = 1$ . La proposition *ii* découle alors du théorème d'Hahn-Banach.

Réciproquement, supposons *ii* vraie. Soit  $g \in Y$ , alors :

$$\|f - g^*\| = H(f - g^*) = H(f - g) \leq \|H\| \times \|f - g\| = \|f - g\|.$$

Donc  $g^*$  est une meilleure approximation de  $f$  dans  $Y$ . □

*Remarque.* Il existe un autre théorème de caractérisation basé sur les dérivées de Gâteaux. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [Pin89], chapitre 1, page 3-4.

### 1.3 Unicité

Soit  $Y$  une partie non-vide de  $X$ . Pour tout  $f \in X$ , définissons le sous-ensemble de  $Y$  contenant toutes les meilleures approximations de  $f$  dans  $Y$  comme suit :

$$P_Y(f) = \{g^* \in Y, \|f - g^*\| = E(f, Y)\}.$$

**Proposition 1.6.** *Si  $Y$  est convexe alors  $P_Y(f)$  est convexe pour tout  $f \in X$ .*

*Démonstration.* Soient  $g_1, g_2 \in P_Y(f)$ . Pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $(\lambda g_1 + (1 - \lambda)g_2) \in Y$  car  $Y$  est convexe. D'où,  $\|f - (\lambda g_1 + (1 - \lambda)g_2)\| \geq E(f, Y)$ . De plus,

$$\|f - (\lambda g_1 + (1 - \lambda)g_2)\| \leq \lambda \|f - g_1\| + (1 - \lambda) \|f - g_2\| = E(f, Y).$$

Donc  $(\lambda g_1 + (1 - \lambda)g_2) \in P_Y(f)$ . □

Dans la suite,  $Y$  est encore supposé convexe et nous énonçons le théorème d'unicité suivant issu de [Pin89].

**Théorème 1.7.** *Soit  $Y$  un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel normé strictement convexe. Alors, pour tout  $f \in X \setminus \bar{Y}$ ,  $P_Y(f)$  contient au plus un élément.*

*Remarque.* Nous rappelons qu'un espace est dit strictement convexe si sa boule unité fermée est strictement convexe. Autrement dit, pour tous  $x, y$  dans la boule unité fermée

et tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\|tx + (1-t)y\| < 1$ . Par exemple, l'espace  $\ell_2$  est strictement convexe. Au contraire, l'espace  $\ell_1$  ne l'est pas.

*Démonstration.* Supposons par l'absurde qu'il existe  $g_1, g_2 \in P_Y(f)$ ,  $g_1 \neq g_2$ . Notons que  $E(f, Y) > 0$  car  $f \in X \setminus \bar{Y}$ . De plus,  $\frac{f-g_1}{E(f, Y)}$  et  $\frac{f-g_2}{E(f, Y)}$  appartiennent à la boule unité fermée de  $X$ . L'espace  $X$  est strictement convexe donc pour tout  $\lambda \in ]0, 1[$  :

$$\left\| \lambda \frac{f-g_1}{E(f, Y)} + (1-\lambda) \frac{f-g_2}{E(f, Y)} \right\| < 1.$$

Par conséquent :

$$\|\lambda(f-g_1) + (1-\lambda)(f-g_2)\| < E(f, Y).$$

Or,  $P_Y(f)$  est convexe. D'où la contradiction, ainsi  $g_1 = g_2$ .  $\square$

## 2 Meilleure approximation de fonctions en norme $L_1$

### 2.1 Généralités sur les espaces $L_p$

Soit l'espace mesuré  $(B, \Sigma, \nu)$  où  $B$  est un ensemble réel,  $\Sigma$  la tribu engendrée par les parties de  $B$  et  $\nu$  une mesure positive définie sur  $\Sigma$ .

**Définition 1.8.** L'espace  $L_p(B, \Sigma, \nu)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , est l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur  $B$ ,  $\nu$ -mesurables et telles que  $|f|^p$  est  $\nu$ -intégrable.

L'espace  $L_\infty(B, \Sigma, \nu)$ , est l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur  $B$   $\nu$ -mesurables et telles que  $\sup_{x \in B} \text{ess } |f(x)| < \infty$ .

Nous rappelons que le supremum essentiel (sup ess) de  $f$  sur  $B$  est le plus petit  $a$  dans  $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$  tel que  $f$  soit supérieur à  $a$  seulement sur un ensemble de mesure nulle.

*Remarque.* Dans la suite, nous notons l'espace  $L_p(B, \Sigma, \nu)$  plus simplement  $L_p(B, \nu)$ .

Avec la convention que deux fonctions de  $L_p(B, \nu)$  sont équivalentes si elles sont égales  $\nu$ -presque-partout, l'espace  $L_p(B, \nu)$  muni de la norme :

$$\|f\|_p = \left( \int_B |f(x)|^p d\nu(x) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in B} \text{ess } |f(x)|, \quad p = +\infty,$$

est un espace de Banach. Il est également bien connu que le dual de  $L_p(B, \nu)$ ,  $1 < p < +\infty$  est  $L_q(B, \nu)$  où  $1/p + 1/q = 1$ . En supposant que  $\nu$  est  $\sigma$ -finie, le dual de  $L_1(B, \nu)$  est  $L_\infty(B, \nu)$ . Le problème d'approximation dans  $L_1(B, \nu)$  est étudié dans ce paragraphe. La théorie d'existence a déjà été énoncée dans le paragraphe 1.1. Les questions de caractérisation et d'unicité de solutions sont donc discutées dans la suite.

## 2.2 Caractérisation

Soit  $f \in L_1(B, \nu)$ . Définissons l'ensemble des zéros de  $f$ ,  $Z(f) = \{x \in B, f(x) = 0\}$  et son complémentaire dans  $B$ ,  $N(f) = B \setminus Z(f)$ . Définissons également la fonction signe comme suit :

$$\operatorname{sgn}(f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) > 0, \\ 0 & \text{si } f(x) = 0, \\ -1 & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

Nous rappelons le théorème de caractérisation de Kripke-Rivlin [Kri65], dont une démonstration issue de [Pin89] et basée sur le Théorème 1.4 d'Hahn-Banach, est donnée.

**Théorème 1.9** (Kripke-Rivlin). *Soit  $Y$  un sous-espace de dimension finie de  $L_1(B, \nu)$  et  $f \in L_1(B, \nu) \setminus \bar{Y}$ . Alors  $g^*$  est une meilleure approximation  $L_1(B, \nu)$  de  $f$  dans  $Y$  si et seulement si :*

$$\forall g \in Y, \quad \left| \int_B \operatorname{sgn}(f(x) - g^*(x))g(x) \, d\nu(x) \right| \leq \int_{Z(f-g^*)} |g(x)| \, d\nu(x). \quad (1.2)$$

*Démonstration.* Supposons que (1.2) soit vraie. Soit  $g \in Y$ .

$$\begin{aligned} \|f - g^*\|_1 &= \int_B \operatorname{sgn}(f(x) - g^*(x))(f(x) - g^*(x)) \, d\nu(x), \\ &= \int_B \operatorname{sgn}(f(x) - g^*(x))(f(x) - g(x)) \, d\nu(x) + \int_B \operatorname{sgn}(f(x) - g^*(x))(g(x) - g^*(x)) \, d\nu(x), \\ &\leq \int_{N(f-g^*)} |f(x) - g(x)| \, d\nu(x) + \int_{Z(f-g^*)} |g(x) - g^*(x)| \, d\nu(x), \\ &= \int_{N(f-g^*)} |f(x) - g(x)| \, d\nu(x) + \int_{Z(f-g^*)} |g(x) - f(x)| \, d\nu(x), \\ &= \|f - g\|_1. \end{aligned}$$

Ainsi,  $g^*$  est une meilleure approximation de  $f$  dans  $Y$ .

Réciproquement, supposons que  $g^*$  soit une meilleure approximation de  $f$  dans  $Y$ . Par le Théorème 1.5, il existe une forme linéaire continue  $H$  sur  $L_1(B, \nu)$  telle que :

- i.  $\int_B H(x)g(x) \, d\nu(x) = 0$  pour tout  $g \in Y$ .
- ii.  $\|H\| = 1$ .
- iii.  $\int_B H(x)(f(x) - g^*(x)) \, d\nu(x) = \int_B |f(x) - g^*(x)| \, d\nu(x)$ .

En utilisant ii et iii, il vient que  $H = \operatorname{sgn}(f - g^*)$   $\nu$ -presque-partout sur  $N(f - g^*)$ . En utilisant i et ii, pour tout  $g \in Y$  :

$$\left| \int_B \operatorname{sgn}(f(x) - g^*(x))g(x) \, d\nu(x) \right| = \left| - \int_{Z(f-g^*)} H(x)g(x) \, d\nu(x) \right| \leq \int_{Z(f-g^*)} |g(x)| \, d\nu(x).$$

□

Nous déduisons immédiatement du Théorème 1.9 le corollaire suivant.

**Corollaire 1.10.** Soit  $g^* \in Y$  telle que pour tout  $g \in Y$  :

$$\int_B \operatorname{sgn}(f(x) - g^*(x))g(x) \, d\nu(x) = 0, \quad (1.3)$$

alors  $g^*$  est une meilleure approximation  $L_1(B, \nu)$  de  $f$  dans  $Y$ .

Ce corollaire est lié au théorème d'Hobby-Rice. Nous rappelons ce résultat essentiel en meilleure approximation au sens de la norme  $L_1$  et en donnons une extension très utile dans le paragraphe suivant.

### 2.3 Le théorème d'Hobby-Rice, corollaire et extension

Supposons dans ce paragraphe que  $B$  soit un intervalle réel borné  $[a, b]$ . Le Corollaire 1.10 affirme que pour déterminer une meilleure approximation  $L_1$  d'une fonction  $f \in L_1([a, b], \nu)$ , il suffit de déterminer une fonction changement de signe  $s$  telle que pour tout  $g \in Y$  :

$$\int_a^b s(x)g(x) \, d\nu(x) = 0. \quad (1.4)$$

où  $s$  est définie à partir de  $r$  (à déterminer en fonction de  $f$ ) réels dans l'intervalle  $]a, b[$ ,

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_r < \alpha_{r+1} = b, \quad r \in \mathbf{N}^*,$$

par l'expression :

$$s(x) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^i \mathbf{1}_{[\alpha_{i-1}, \alpha_i[}(x). \quad (1.5)$$

Pour que  $s$  soit égal à  $\operatorname{sgn}(f - g^*)$ , il est nécessaire et suffisant que  $g^* \in Y$  interpole en changeant de signe la fonction  $f$  uniquement en ces abscisses. Sinon, la fonction  $s$  est différente de  $\operatorname{sgn}(f - g^*)$  et alors le Corollaire 1.10 ne s'applique pas. C'est en cela que  $r$  dépend de  $f$ . Sans informations supplémentaires sur la fonction  $f$  et le sous-espace  $Y$ , nous ne savons pas qualifier davantage cette dépendance mais ceci sera abordé dans les paragraphes 3 et 4. Nous nous intéressons pour le moment au problème d'existence d'une fonction changement de signe satisfaisant (1.4). Le théorème d'Hobby-Rice [HR65] permet de montrer l'existence d'une telle fonction avec  $r \leq n$  quand  $Y$  est un sous-espace de dimension finie de  $L_1([a, b], \nu)$ . Dans ce théorème, la mesure  $\nu$  est supposée non-atomique. Nous rappelons la définition de cette notion ci-dessous.

**Définition 1.11.** Une mesure  $\nu$  sur  $(B, \Sigma)$  est dite non-atomique si pour tout  $A_1 \in \Sigma$  de mesure non nulle, il existe  $A_2 \subset A_1$  tel que  $0 < \nu(A_2) < \nu(A_1)$ .

Par exemple, la mesure de Lebesgue est non-atomique. Le théorème d'Hobby-Rice s'énonce comme suit.

**Théorème 1.12** (Hobby-Rice). *Soit  $Y$  un sous-espace vectoriel de dimension  $n < +\infty$  de  $L_1([a, b], \nu)$  où  $\nu$  est une mesure finie, non-atomique. Alors il existe une fonction changement de signe  $s$  associée à  $r$  réels :*

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r < \alpha_{r+1} = b,$$

avec  $r \leq n$  telle que pour tout  $g \in Y$  :

$$\int_a^b s(x)g(x) \, d\nu(x) = 0. \quad (1.6)$$

Nous rappelons la démonstration astucieuse de ce résultat donnée par Pinkus dans [Pin76] qui est basée sur le théorème d'antipodalité de Borsuk énoncé ci-dessous et pour lequel nous pouvons trouver une démonstration dans [SFN<sup>+</sup>69], chapitre 1, page 14.

**Théorème 1.13** (Antipodalité de Borsuk). *Soit  $\Omega$  un voisinage de 0, ouvert, borné et symétrique dans  $\mathbf{R}^m$  et  $T \in C^0(\partial\Omega, \mathbf{R}^n)$ ,  $n < m$  une fonction continue et impaire. Alors il existe  $x^* \in \partial\Omega$  tel que  $T(x^*) = 0$ .*

*Démonstration (Théorème d'Hobby-Rice).* Sans perte de généralité, nous pouvons nous ramener à l'espace  $L_1([0, 1], \nu)$ . Soit  $\{\phi_j, j = 1, 2, \dots, n\}$  une base de  $Y$ . Il suffit de montrer l'existence d'une fonction changement de signe  $s$  qui vérifie :

$$\int_0^1 s(x)\phi_j(x) \, dx, \quad j = 1, \dots, n.$$

En utilisant (1.5), ce problème revient à montrer l'existence de réels  $\alpha_i$  comme donnés dans le théorème qui vérifient :

$$\sum_{i=1}^{r+1} (-1)^i \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \phi_j(x) \, d\nu(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Soit  $S^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \sum_{i=1}^{n+1} |x_i| = 1\}$  la sphère unité en norme  $\ell_1$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$ .

Définissons  $\alpha_0(\mathbf{x}) = 0$  et  $\alpha_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k |x_i|$ .

Soit  $T(\mathbf{x}) = (T_1(\mathbf{x}), T_2(\mathbf{x}), \dots, T_n(\mathbf{x}))$  la fonction définie par :

$$T_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n+1} \operatorname{sgn}(x_i) \int_{\alpha_{i-1}(\mathbf{x})}^{\alpha_i(\mathbf{x})} \phi_j(x) \, d\nu(x), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

La fonction  $T$  est continue et impaire. Nous appliquons alors le théorème d'antipodalité

de Borsuk. Il existe  $x^* \in S^n$  tel que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \operatorname{sgn}(x_i^*) \int_{\alpha_{i-1}(x^*)}^{\alpha_i(x^*)} \phi_j(x) \, d\nu(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Les éléments de la suite  $\{\operatorname{sgn}(x_i^*), i = 1, \dots, n\}$  changent de signe un nombre fini de fois, disons  $r \in \mathbf{N}$ . Nous sélectionnons alors les  $r$  réels  $\alpha_i(x^*)$  correspondants. Nous notons à nouveau ces valeurs  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ . On définit également  $\alpha_0 = 0$  et  $\alpha_{r+1} = 1$ . Il vient :

$$\sum_{i=1}^{r+1} (-1)^i \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \phi_j(x) \, d\nu(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Nous avons donc montré l'existence d'une fonction changement de signe  $s$  satisfaisant (1.6).  $\square$

Le théorème d'Hobby-Rice découle donc du théorème d'antipodalité de Borsuk pour  $m = n + 1$ . Cependant, ce théorème est, sous cette forme, insuffisant pour caractériser une meilleure approximation  $L_1$  dans un sous-espace de dimension finie. En effet, sur la Figure 1.2, nous mettons en évidence une meilleure approximation  $L_1$  d'une fonction continue,  $f : x \mapsto \sin(3x)$ , dans l'espace  $\mathbf{P}_3 = \operatorname{vect}(1, x, x^2, x^3)$  des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à trois, qui est de dimension quatre, sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . Le graphe de cette solution présente cinq intersections avec celui de la fonction  $f$ . Or, le théorème d'Hobby-Rice ne permet pas de caractériser les solutions pour lesquelles le nombre d'abscisses est supérieur à la dimension de l'espace.

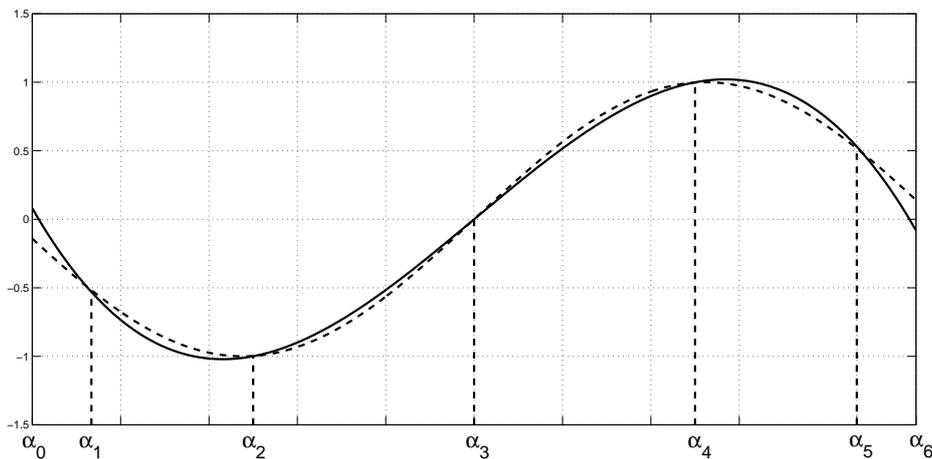


FIGURE 1.2 – Meilleure approximation  $L_1$  (trait plein) de  $x \mapsto \sin(3x)$  (pointillés) par une fonction de  $\mathbf{P}_3$  sur  $[-1, 1]$ .

Si nous essayons de construire une solution de meilleure approximation  $L_1$  de cette fonction en utilisant le théorème de Hobby-Rice, nous obtenons une fonction changement

de signe  $s$  définie par quatre abscisses  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$  telle que :

$$\int_0^1 s(x)x^j dx = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Nous pouvons démontrer par calcul que les abscisses  $\alpha_i = \cos(i\pi/5)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , sont solutions de ce système d'équations<sup>1</sup>. La fonction  $p_1 \in \mathbf{P}_3$  interpolant  $f$  aux abscisses  $\alpha_i$  interpole de plus  $f$  en zéro (voir la Figure 1.3). Nous avons donc :

$$\text{sgn}(f - p_1) \neq s.$$

Alors le Corollaire 1.10 ne s'applique pas. De plus :

$$\int_{-1}^1 \text{sgn}(f(x) - p_1(x))x dx = -1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \neq 0.$$

Nous pouvons donc conclure que  $p_1$  n'est pas une meilleure approximation  $L_1$  de la fonction  $x \mapsto \sin(3x)$ .

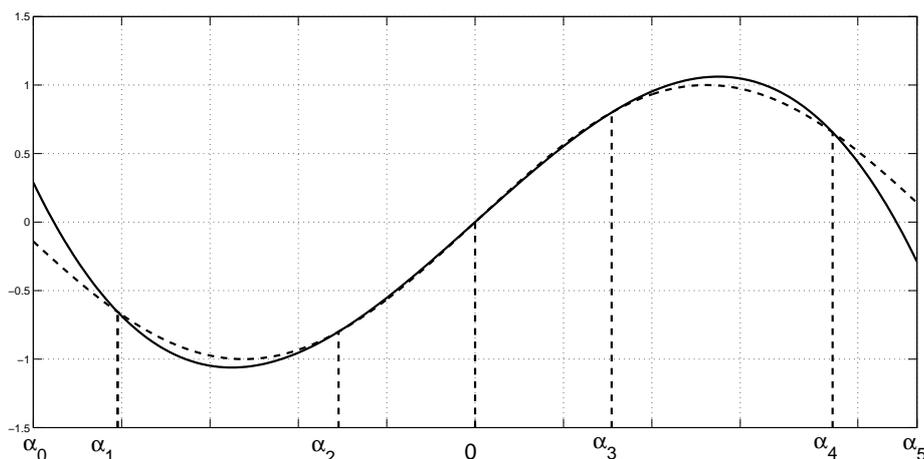


FIGURE 1.3 – La fonction  $p_1 \in \mathbf{P}_3$  obtenue par interpolation aux abscisses calculées par le théorème d'Hobby-Rice mais qui n'est pas une meilleure approximation  $L_1$ .

Nous cherchons donc maintenant à déterminer une fonction  $p_2 \in \mathbf{P}_3$  telle que  $x \mapsto \text{sgn}(p_2(x) - \sin(3x))$  soit définie par (1.5) par cinq autres réels  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$  vérifiant :

$$\int_1^1 \text{sgn}(p_2(x) - \sin(3x))x^j d\nu(x) = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Nous pouvons vérifier que les abscisses  $\alpha_i = \cos(i\pi/6)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , sont solutions de ce système d'équations. Par application du Corollaire 1.10, nous montrons que la fonction  $p_2$  est une meilleure approximation  $L_1$  de  $x \mapsto \sin(3x)$ . Elle est représentée sur la Figure

1. Nous verrons par la suite que, par la Proposition 1.19, page 16, cette solution est unique.

1.2. Nous constatons donc dans ce cas que le théorème d'Hobby-Rice n'est pas suffisant pour caractériser une solution de meilleure approximation  $L_1$ . Suite à ce constat, nous proposons donc un corollaire du théorème d'Hobby-Rice, issu de [GGNF14] qui à notre connaissance n'avait jamais été noté.

**Corollaire 1.14.** *Soient  $Y$  un sous espace de dimension  $n < +\infty$  de  $L_1([a, b], \nu)$  où  $\nu$  est une mesure finie non-atomique et  $m$  un entier non nul donné tel que  $m \geq n$ . Alors il existe une fonction changement de signe  $s$  associée à  $r_m$  réels*

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{r_m} < \alpha_{r_m+1} = b,$$

avec  $r_m \leq m$  telle que pour tout  $g \in Y$  :

$$\int_a^b s(x)g(x) \, d\nu(x) = 0. \quad (1.7)$$

*Démonstration.* Soit  $E$  un sous-espace de dimension  $m$  de  $L_1([a, b], \nu)$  tel que  $Y \subset E$ . Nous appliquons alors le théorème d'Hobby-Rice sur le sous-espace  $E$ .  $\square$

Le théorème d'Hobby-Rice et son corollaire sont utiles pour caractériser une meilleure approximation  $L_1$  d'une fonction continue (voir les paragraphes 3.1 et 4.1). Nous considérons de plus dans notre étude le cas de la meilleure approximation  $L_1$  de fonctions saut en  $\xi_0$  dont la définition a été donnée dans l'introduction du chapitre.

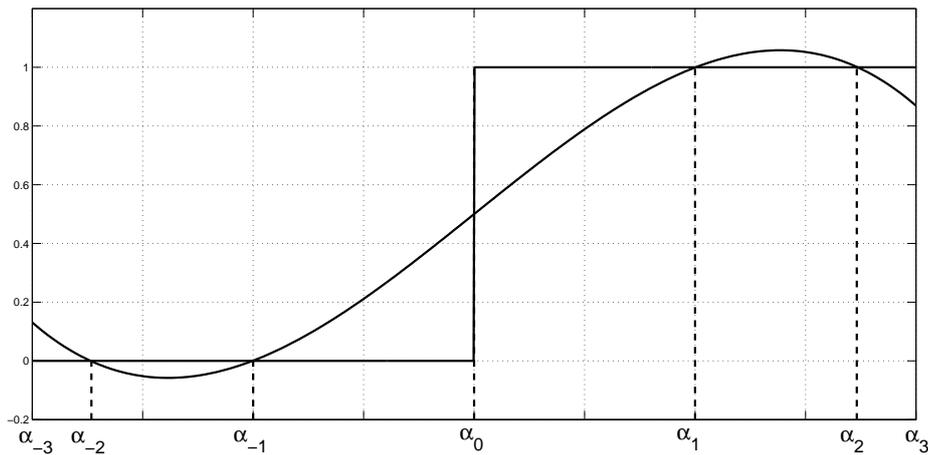


FIGURE 1.4 – Une meilleure approximation  $L_1$  de la fonction de Heaviside par une fonction de  $\mathbf{P}_3$ .

Ce cas nécessite un traitement différent car un changement de signe dans la différence entre la fonction à approcher  $f$  et sa meilleure approximation  $g^*$  peut se présenter également à la discontinuité  $\xi_0$  (voir la Figure 1.4). Or, le théorème d'Hobby-Rice ne garantit pas

que l'un des  $\alpha_i$  soit égal à  $\xi_0$ . Nous décidons donc de chercher une solution de (1.6) avec une des valeurs  $\alpha_i$  fixée à  $\xi_0$ . Sans perte de généralité, nous énonçons ce théorème original, présenté par ailleurs dans [GGNF14], sur  $L_1([-1, 1], \nu)$  et avec  $\xi_0 = 0$ . En effet, nous pouvons montrer que  $\mathcal{J}_{\xi_0}[a, b]$  et  $\mathcal{J}_0[-1, 1]$  sont homéomorphes via une homographie. Ceci nous permet d'établir une version symétrique du théorème d'Hobby-Rice en éliminant les fonctions paires. Cette nouvelle version se révélera essentielle pour caractériser les solutions de meilleure approximation  $L_1$  de fonctions saut dans un espace de Chebyshev et faiblement de Chebyshev.

**Théorème 1.15.** *Soit  $Y$  un sous-espace de dimension  $n < \infty$  de  $L_1([-1, 1], \nu)$  où  $\nu$  est une mesure finie non atomique. Soit  $Z$  le sous-espace de  $Y$  formé par les fonctions paires avec  $q = n - \dim Z$ . Alors pour tout  $m \geq q$  fixé, il existe une fonction changement de signe associée à  $2r_m + 1$  réels,  $r_m \leq m$  :*

$$-1 = \alpha_{-r_m-1} < \alpha_{-r_m} < \cdots < \alpha_{-1} < \alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{r_m} < \alpha_{r_m+1} = 1,$$

avec  $\alpha_{-i} = -\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, r_m$  telle que pour tout  $g \in Y$  :

$$\int_{-1}^1 s(x)g(x) d\nu(x) = 0. \quad (1.8)$$

*Démonstration.* L'idée de la démonstration consiste à déterminer la partie positive de la suite de réels  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, r_m$  par application du corollaire du théorème d'Hobby-Rice (Corollaire 1.14) à un espace  $\hat{Y} \subset L_1([0, 1], \nu)$  bien choisi de dimension  $\hat{q} \leq q$ , de façon à déduire (1.8) par symétrie.

Quelle que soit la fonction changement de signe  $s$  avec un changement de signe en 0 et  $g \in Y$ , nous avons :

$$\int_{-1}^1 s(x)g(x)d\nu(x) = \int_0^1 s(x)(g(x) - g(-x))d\nu(x).$$

Ceci montre que l'égalité (1.8) est automatiquement satisfaite par tous les éléments  $g \in Z$ . Définissons l'espace  $W$  de dimension  $q$  tel que  $Z \oplus W = Y$ . Le problème consiste alors à déterminer une fonction changement de signe  $s$  telle que :

$$\int_0^1 s(x)(g(x) - g(-x))d\nu(x) = 0 \text{ pour tout } g \in W.$$

Cette propriété est obtenue en appliquant le Corollaire 1.14 à l'espace  $\hat{Y}$  défini comme suit :

$$\hat{Y} = \{\hat{g} : x \in [0, 1] \mapsto g(x) - g(-x), g \in W\},$$

qui est effectivement de dimension au plus  $q$ . □

Ce théorème caractérise le cas où les abscisses  $\alpha_i$  sont symétriques par rapport à zéro. Cependant, nous ne sommes pas encore parvenus à déterminer dans le cas général

l'existence de cas où cette symétrie n'existe pas. Il est également difficile de préciser  $r_m$  en fonction de  $m$ . Nous verrons cependant dans les paragraphes 3 et 4 des résultats précis à ce propos lorsque le sous-espace considéré est de Chebyshev ou faiblement de Chebyshev.

## 2.4 Unicité

Nous ne pouvons pas appliquer le Théorème 1.7 pour garantir l'unicité de solution au problème de meilleure approximation  $L_1$ . En effet, l'espace  $L_1(B, \nu)$  n'est pas strictement convexe. Nous pouvons rapidement trouver un contre-exemple en considérant l'espace  $L_1([0, 1], \mu)$  où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue. Nous considérons les fonctions  $x \mapsto 1$  et  $x \mapsto 2x$ . Elles appartiennent toutes deux à la boule unité fermée de  $L_1([0, 1], \mu)$  mais il existe une combinaison linéaire de ces deux fonctions de norme 1. En effet :

$$\left\| \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2x \right\|_1 = \left\| x + \frac{1}{2} \right\|_1 = 1.$$

Comme le Théorème 1.7 ne s'applique pas, il est donc légitime de se demander s'il existe des conditions permettant d'obtenir l'unicité. Nous rappelons le résultat suivant (voir par exemple [Pin89]).

**Proposition 1.16.** *Soit  $Y$  un sous-ensemble de  $L_1(B, \nu)$  tel que toute fonction de  $L_1(B, \nu)$  possède au moins une meilleure approximation  $L_1$  dans  $Y$ . Soient  $f \in L_1(B, \nu)$  et  $g^*$  une meilleure approximation  $L_1$  de  $f$  dans  $Y$ , alors  $\tilde{g} \in Y$ ,  $\tilde{g} \neq g^*$  est aussi une meilleure approximation de  $f$  dans  $Y$  si et seulement si :*

- i.  $(f - g^*)(f - \tilde{g}) \geq 0$   $\nu$ -presque-partout sur  $B$ ,
- ii.  $\int_B \operatorname{sgn}(f(x) - g^*(x))(\tilde{g}(x) - g^*(x)) d\nu(x) = \int_{Z(f-g^*)} |\tilde{g}(x) - g^*(x)| d\nu(x)$ .

*Démonstration.* Soit  $\tilde{g}$  une autre meilleure approximation de  $f$  dans  $Y$ . En utilisant la démonstration du Théorème 1.9, nous avons :

$$\begin{aligned} \|f - g^*\|_1 &= \int_B \operatorname{sgn}(f(x) - g^*(x))(f(x) - g^*(x)) d\nu(x), \\ &= \int_B \operatorname{sgn}(f(x) - g^*(x))(f(x) - \tilde{g}(x)) d\nu(x) + \int_B \operatorname{sgn}(f(x) - g^*(x))(\tilde{g}(x) - g^*(x)) d\nu(x), \\ &= \int_{N(f-g^*)} |f(x) - \tilde{g}(x)| d\nu(x) + \int_{Z(f-g^*)} |\tilde{g}(x) - g^*(x)| d\nu(x), \\ &= \|f(x) - \tilde{g}(x)\|_1. \end{aligned}$$

Il vient :

- $\operatorname{sgn}(f - g^*)(f - \tilde{g}) = |f - \tilde{g}|$   $\nu$ -presque-partout sur  $N(f - g^*)$ ,
- $\int_B \operatorname{sgn}(f - g^*)(\tilde{g} - g^*) d\nu = \int_{Z(f-g^*)} |\tilde{g} - g^*| d\nu$ .

Nous en déduisons  $i$  et  $ii$ .

Réciproquement, supposons que  $\tilde{g} \neq g^*$  satisfasse  $i$  et  $ii$ . Par la précédente suite d'égalité, nous déduisons que  $\tilde{g}$  est aussi une meilleure approximation.  $\square$

Le corollaire suivant issu de [Kri65] donne une condition suffisante afin d'obtenir l'unicité.

**Corollaire 1.17.** *Soit  $g^*$  une meilleure approximation  $L_1$  de  $f$  dans  $Y$ . Si l'inégalité stricte :*

$$\left| \int_B \operatorname{sgn}(f(x) - g^*(x))g(x) \, d\nu(x) \right| < \int_{Z(f-g^*)} |g(x)| \, d\nu(x), \quad (1.9)$$

*est vérifiée pour tout  $g \in Y$ ,  $g \neq 0$ , alors  $g^*$  est unique.*

Il faut remarquer que cette condition suffisante ne peut être satisfaite que lorsque  $\nu(Z(f - g^*)) \neq 0$ . Autrement dit, elle s'applique dans les cas où le théorème d'Hobby-Rice ou son extension ne sont pas applicables pour déterminer une meilleure approximation  $L_1$ . Ainsi, il est difficile de conclure sur les conditions à respecter pour obtenir l'unicité des solutions. Cependant, pour les espaces de Chebyshev, nous pouvons donner quelques résultats.

### 3 Meilleure approximation de fonctions en norme $L_1$ dans un espace de Chebyshev

Le nombre des abscisses  $\alpha_i$  reste incertain dans le théorème d'Hobby-Rice. Une façon classique de résoudre ce problème, utilisée par exemple par Kripke et Rivlin [Kri65] et Michelli [Mic77], est d'utiliser des espaces de Chebyshev dont la définition est rappelée ci-dessous.

**Définition 1.18.** Un sous-espace de  $C^0[a, b]$  est appelé espace de Chebyshev de dimension  $n$  sur  $[a, b]$  si tout élément non-trivial de  $Y$  possède au plus  $n - 1$  zéros distincts.

Les espaces de Chebyshev et leurs extensions jouent un rôle important en théorie de l'approximation, en statistiques [KS66] mais aussi en modélisation géométrique [Maz06, KM07]. Les fonctions polynomiales sur un intervalle réel et les polynômes trigonométriques sur  $[0, 2\pi[$  sont des exemples classiques de espaces de Chebyshev. Nous accordons un intérêt particulier pour l'exemple des fonctions polynomiales dans le cas du problème de meilleure approximation de fonctions saut. Avant cela, nous rappelons deux résultats classiques concernant la meilleure approximation  $L_1$  de fonctions continues.

#### 3.1 Cas des fonctions continues

Nous rappelons tout d'abord un corollaire du Théorème 1.12 dans le cadre des espaces de Chebyshev (voir par exemple [Nü89]).

**Proposition 1.19.** *Soit  $Y$  un espace de Chebyshev de dimension  $n$  sur  $[a, b]$ . Alors pour tout  $m \geq n$  fixé, il existe une fonction changement de signe  $s$  associée à des réels :*

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m < \alpha_{m+1} = b,$$

satisfaisant pour tout  $g \in Y$  :

$$\int_a^b s(x)g(x) \, d\nu(x) = 0. \quad (1.10)$$

De plus, si  $m = n$ ,  $s$  est unique.

La proposition précédente fait appel au lemme suivant dont la démonstration se trouve par exemple dans [Nü89], page 13.

**Lemme 1.20.** Soient  $Y$  un espace de Chebyshev de dimension  $n$  sur  $[a, b]$  et  $\{x_i, i = 1, \dots, r\}$ ,  $r < n$ , un ensemble  $r$  abscisses distinctes dans l'intervalle  $]a, b[$ . Alors il existe un élément de  $Y$  qui s'annule et change de signe uniquement aux abscisses  $x_i$ .

*Démonstration (Proposition 1.3).* Soit  $m$  fixé supérieur ou égal à  $n$ . D'après [Zal75], il existe un espace de Chebyshev  $E$  de dimension  $m$  sur  $[a, b]$  tel que  $Y \subset E$ .

Nous appliquons alors le Théorème 1.12 sur l'espace de Chebyshev  $E$ . Il existe une fonction changement de signe  $s$  définie par des réels  $\{\alpha_i, i = 1, \dots, r\}$ ,  $r \leq m$  telle que (1.10) soit satisfaite. Supposons par l'absurde  $r < m$ .

Par application du Lemme 1.20, il existe une fonction  $g \in Y$  qui s'annule et change de signe uniquement aux  $\alpha_i$  sur  $[-1, 1]$ .

La fonction  $x \mapsto s(x)g(x)$  est de signe constant sur  $[a, b]$  et donc :

$$\int_{-1}^1 s(x)g(x) \, d\nu(x) \neq 0.$$

Ceci contredit (1.10) et l'existence de  $m$  réels  $\alpha_i$  satisfaisant (1.10) démontrée.

Supposons  $m = n$  et qu'il existe une autre fonction changement de signe définie par d'autres réels  $\{\beta_i, i = 1, \dots, n\}$  satisfaisant (1.10). Posons  $\beta_0 = \alpha_0 = -1$  et  $\beta_{n+1} = \alpha_{n+1} = 1$ . Définissons les deux fonctions changement de signe :

$$s_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \mathbf{1}_{[\alpha_{i-1}, \alpha_i]}(x),$$

$$s_\beta(x) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \mathbf{1}_{[\beta_{i-1}, \beta_i]}(x).$$

Soit  $p \in \mathbf{N}$  tel que :

$$\alpha_p = \min_{i=1, \dots, n} \{\alpha_i \mid \alpha_i \neq \beta_i\}.$$

Supposons  $\alpha_p < \beta_p$ , sinon nous échangeons les rôles de  $\alpha$  et  $\beta$ . Il vient que :

$$s_\alpha(x) - s_\beta(x) = 0, \quad x \in [\alpha_0, \alpha_p], \quad (1.11)$$

$$(-1)^{p+1}(s_\alpha(\alpha_p) - s_\beta(\alpha_p)) > 0, \quad (1.12)$$

$$(-1)^i(s_\alpha(x) - s_\beta(x)) \geq 0, \quad x \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i], \quad i = p, \dots, n. \quad (1.13)$$

En effet, nous avons (1.12) car :

$$\begin{aligned} (-1)^{p+1}(s_\alpha(\alpha_p) - s_\beta(\alpha_p)) &= (-1)^{p+1}((-1)^{p+1} - (-1)^p) \\ &= (-1)^{2p+2}(1 - (-1)) \\ &= 2 > 0. \end{aligned}$$

Nous avons (1.13) car pour  $i = p + 1, \dots, n + 1$  et  $x \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i[$  :

$$\begin{aligned} (-1)^i(s_\alpha(x) - s_\beta(x)) &= (-1)^i((-1)^i - s_\beta(x)) \\ &= (-1)^{2i}(1 - (-1)^i s_\beta(x)) \geq 0. \end{aligned}$$

Soit  $\{\phi_j, j = 1, 2, \dots, n\}$  une base de  $Y$ . Définissons maintenant :

$$g_p(x) = \det(\phi_k(\gamma_l))_{k=1, \dots, n}^{l=1, \dots, n}, \quad x \in [a, b],$$

où  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, x)$ . Comme  $Y$  est un espace de Chebyshev (voir par exemple [Pin89], Annexe A, page 195), en remplaçant  $g_p$  par  $-g_p$  si nécessaire, nous avons :

$$(-1)^i g_p(x) \geq 0, \quad x \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i], \quad i = p + 1, \dots, n + 1, \quad (1.14)$$

et

$$(-1)^{p+1} g_p(\alpha_p) > 0. \quad (1.15)$$

La fonction  $g_p$  change de signe en chaque  $\alpha_i$  sauf en  $\alpha_p$ .

En utilisant (1.13) et (1.14) :

$$g_p(x)(s_\alpha(x) - s_\beta(x)) \geq 0, \quad x \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i], \quad i = p + 1, \dots, n + 1, \quad (1.16)$$

et en utilisant (1.12) et (1.15) :

$$g(\alpha_p)(s_\alpha(\alpha_p) - s_\beta(\alpha_p)) > 0. \quad (1.17)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_a^b g_p(x)(s_\alpha(x) - s_\beta(x)) \, dx &= \int_{\alpha_p}^b g_p(x)(s_\alpha(x) - s_\beta(x)) \, dx \quad \text{par (1.11),} \\ &> 0 \quad \text{par (1.16) et (1.17).} \end{aligned}$$

Ceci contredit le fait que  $s_\alpha$  et  $s_\beta$  soient solutions de (1.10) pour l'espace de Chebyshev  $Y$ .  $\square$

Cette proposition permet de démontrer le théorème classique suivant concernant la meilleure approximation  $L_1$  d'une fonction continue dont nous rappelons une démonstration issue de [Nü89].

**Théorème 1.21.** *Soit  $Y$  un espace de Chebyshev de dimension  $n$  sur  $[a, b]$ . Toute fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$  possède au plus une meilleure approximation  $L_1$  dans  $Y$ .*

*De plus, si  $\text{vect}(Y, f)$  est un espace de Chebyshev de dimension  $n + 1$  sur  $[a, b]$  alors  $g^*$ , la meilleure approximation  $L_1$  de  $f$  dans  $Y$ , est déterminée par :*

$$g^*(\alpha_i) = f(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

où les  $\alpha_i$  sont les réels définis dans la Proposition 1.19, page 16.

*Démonstration.* L'existence d'une solution a déjà été montrée par ailleurs dans le Théorème 1.2. Supposons qu'une solution  $g_1$  soit telle que  $\nu(Z(f - g_1)) = 0$ . Par la Proposition 1.19,  $Z(f - g_1)$  contient au moins  $n$  points. Supposons désormais qu'il existe une autre solution  $g_2$ . Nous devons alors avoir par la Proposition 1.16 :

$$(f - g_1)(f - g_2) \geq 0, \quad \nu - \text{p.p. sur } [a, b].$$

Il vient alors que  $g_1$  et  $g_2$  doivent être égales en au moins  $n$  points. Or,  $Y$  est un espace de Chebyshev de dimension  $n$ , donc  $g_1 = g_2$ .

Supposons que  $f$  possède deux meilleures approximations  $L_1$  notées  $g_1$  et  $g_2$  telles que  $\nu(Z(f - g_1)) \neq 0$  et  $\nu(Z(f - g_2)) \neq 0$ . Pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , nous pouvons montrer que  $\lambda g_1(x) + (1 - \lambda)g_2(x)$  est aussi une meilleure approximation de  $f$ . Définissons une fonction  $\psi$  sur  $[0, 1] \times [a, b]$  telle que :

$$\psi(\lambda, x) = f(x) + \lambda g_1(x) + (1 - \lambda)g_2(x).$$

S'il existe  $\lambda \in [0, 1]$  tel que  $\nu(Z(g(\lambda, \cdot))) = 0$  alors nous concluons par le résultat précédent. Supposons alors que pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\nu(Z(g(\lambda, \cdot))) > 0$ . Nous utilisons le Lemme 4.7 de [Ric64b] page 120. Il affirme qu'il existe  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tels que  $\nu(Z(g(\lambda_1, \cdot))) \cap \nu(Z(g(\lambda_2, \cdot))) \neq \emptyset$ . En particulier,  $Z(g(\lambda_1, \cdot)) \cap Z(g(\lambda_2, \cdot))$  contient  $n$  points et donc :

$$\lambda_1 g_1 + (1 - \lambda_1)g_2 = \lambda_2 g_1 + (1 - \lambda_2)g_2.$$

Il vient donc  $g_1 = g_2$ .

Supposons maintenant que  $f$  soit telle que  $\text{vect}(Y, f)$  est un espace de Chebyshev de dimension  $n + 1$ . Comme  $Y$  est un espace de Chebyshev, par application du Lemme 1.20, page 16, il existe une unique fonction  $g^* \in Y$  telle que :

$$g^*(\alpha_i) = f(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

De plus, comme  $\text{vect}(Y, f)$  est un espace de Chebyshev, la fonction  $g^* - f \in \text{vect}(Y, f)$  possède au plus  $n$  zéros. La fonction  $g^*$  est donc la meilleure approximation de  $f$  dans  $Y$ . □

Ce théorème explique le fait que nous observions, dans la Figure 1.2, page 10, plus

d'intersections entre le graphe de la fonction  $x \mapsto \sin(3x)$  et celui de sa meilleure approximation  $L_1$ ,  $g^* \in \mathbf{P}_3$  sur  $[-1, 1]$ . En effet, l'espace engendré par  $(1, x, x^2, x^3, \sin(3x))$  n'est pas un espace de Chebyshev. Alors, l'unique suite de quatre réels déterminés dans la Proposition 1.19, page 16, ne permet pas de construire la meilleure approximation  $L_1$  de la fonction  $x \mapsto \sin(3x)$ .

### 3.2 Cas des fonctions saut

Dans cette partie, nous étudions pour la première fois le problème de meilleure approximation  $L_1$  de fonctions saut dans un espace de Chebyshev. Nous allons énoncer un nouveau résultat issu de [GGNF14] qui prolonge le Théorème 1.15, page 13, pour un espace de Chebyshev. Ce résultat sera indispensable pour démontrer un théorème d'unicité sous certaines conditions. Avant cela, nous avons besoin du lemme original suivant.

**Lemme 1.22.** *Soit  $Y$  un espace de Chebyshev de dimension  $n < +\infty$  sur  $[-1, 1]$ . La dimension du sous-espace de  $Y$  formé par les fonctions paires est au plus  $\lfloor n/2 \rfloor$ .*

*Démonstration.* Supposons  $n$  pair. Le cas  $n$  impair est similaire. Supposons par l'absurde que  $Z$ , le sous-espace de  $Y$  formé par les fonctions paires, soit de dimension  $n/2 + 1$ . Nous appliquons alors le Théorème 1.15 avec  $m = n/2 - 1$ . Il existe une fonction changement de signe associée à  $2r_m + 1$  réels,  $r_m \leq m$  :

$$-1 = \alpha_{-r_m-1} < \alpha_{-r_m} < \cdots < \alpha_{-1} < \alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{r_m} < \alpha_{r_m+1} = 1,$$

avec  $\alpha_{-i} = -\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, r_m$  telle que pour tout  $g \in Y$  :

$$\int_{-1}^1 s(x)g(x) \, d\nu(x) = 0. \quad (1.18)$$

Nous notons que  $2r_m + 1 < n$ . Comme  $Y$  est un espace de Chebyshev, par application du Lemme 1.20, page 16, il existe  $g \in Y$  qui change de signe uniquement aux  $\alpha_i$  sur  $[-1, 1]$ . Donc la fonction  $x \mapsto s(x)g(x)$  est de signe constant sur  $[-1, 1]$  et :

$$\int_{-1}^1 s(x)g(x) \, d\nu(x) \neq 0.$$

Ceci contredit (1.18). □

En supposant que la dimension du sous-espace de  $Y$  formé par les fonctions paires est de dimension exactement  $\lfloor n/2 \rfloor$ , nous sommes en mesure de montrer le résultat suivant.

**Proposition 1.23.** *Soient  $Y$  un espace de Chebyshev de dimension  $n < +\infty$  sur  $[-1, 1]$  et  $Z$  le sous-espace de  $Y$  formé par les fonctions paires. Supposons  $\dim Z = \lfloor n/2 \rfloor$ . Alors il existe une unique fonction changement de signe  $s$  associée à une suite croissante de réels  $\alpha_i$  :*

$$-1 = \alpha_{-\lfloor n/2 \rfloor - 1} < \alpha_{-\lfloor n/2 \rfloor} < \cdots < \alpha_{-1} < \alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{\lfloor n/2 \rfloor} < \alpha_{\lfloor n/2 \rfloor + 1} = 1,$$

avec  $\alpha_{-i} = -\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$  telle que pour tout  $g \in Y$

$$\int_{-1}^1 s(x)g(x) \, d\nu(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.19)$$

*Démonstration.* Nous appliquons le Théorème 1.15, page 13 pour  $m = \lfloor n/2 \rfloor$ . Ainsi par la propriété de symétrie des réels définissant la fonction changement de signe dans ce théorème, nous obtenons au plus  $n$  réels  $\{\alpha_i, i = -r, \dots, r\}$  avec  $\alpha_0 = 0$  et  $\alpha_{-k} = -\alpha_k$ ,  $k = 1, \dots, r$  tels que (1.8) soit satisfaite. Supposons que  $r < \lfloor n/2 \rfloor$ .

Comme  $Y$  est un espace de Chebyshev, par application du Lemme 1.20, page 16, il existe  $g \in Y$  qui change de signe uniquement aux  $\alpha_i$  sur  $[-1, 1]$ .

Donc la fonction  $x \mapsto s(x)g(x)$  est de signe constant sur  $[-1, 1]$  et :

$$\int_{-1}^1 s(x)g(x) \, d\nu(x) \neq 0.$$

Ceci contredit (1.19).

Supposons maintenant qu'il existe d'autres réels  $\{\beta_i, i = -\lfloor n/2 \rfloor, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$ , non tous égaux aux  $\alpha_i$  satisfaisant (1.19). Nous avons  $\beta_0 = \alpha_0 = -1$  et  $\beta_{\lfloor n/2 \rfloor + 1} = \alpha_{\lfloor n/2 \rfloor + 1} = 1$ . Définissons les deux fonctions changement de signe suivantes :

$$s_\alpha(x) = \sum_{i=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} (-1)^i \mathbf{1}_{[\alpha_{i-1}, \alpha_i]}(x),$$

$$s_\beta(x) = \sum_{i=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} (-1)^i \mathbf{1}_{[\beta_{i-1}, \beta_i]}(x).$$

Dès lors, nous procédons exactement comme dans la démonstration de la Proposition 1.19, page 16, pour démontrer l'unicité.  $\square$

Grâce à ce résultat, nous sommes en mesure de montrer le théorème original d'unicité suivant issu de [GGNF14].

**Théorème 1.24.** *Soit  $Y$  un espace de Chebyshev sur  $[-1, 1]$  de dimension  $n$  avec  $n$  pair. Supposons que le sous-espace formé par les fonctions paires de  $Y$  soit de dimension  $n/2$ . Alors toute fonction  $f \in \mathcal{J}_0[-1, 1]$  admet une unique meilleure approximation  $L_1$  dans  $Y$ . De plus,*

$$\text{si tout élément de } \text{vect}(Y, f) \text{ a au plus } n \text{ zéros simples,} \quad (1.20)$$

alors la meilleure approximation  $L_1$   $g^*$  de  $f$  dans  $Y$  est déterminée par :

$$g^*(\alpha_i) = f(\alpha_i), \quad i = -n/2, -n/2 + 1, \dots, -1, 1, \dots, n/2,$$

où les  $\alpha_i$  sont ceux donnés par la Proposition 1.23, page 20.

*Démonstration.* Supposons tout d'abord que  $g_1$ , une meilleure approximation de  $f$  dans  $Y$ , soit telle que  $\nu(Z(f - g_1)) = 0$ . Comme  $n$  est pair, par la Proposition 1.23,  $Z(f - g_1)$  contient au moins  $n$  éléments. Supposons aussi qu'il existe une autre solution  $g_2$ . De même que pour  $g_1$ ,  $Z(f - g_2)$  contient au moins  $n$  éléments. Nous devons alors avoir par la Proposition 1.16, page 14 :

$$(f - g_1)(f - g_2) \geq 0, \quad \nu - \text{p.p. sur } [-1, 1].$$

S'il existe  $x \in Z(f - g_1)$  tel que  $g_1(x) \neq g_2(x)$  alors  $f(x) - g_2(x) \neq 0$ . La dernière inégalité ne peut donc pas être satisfaite de part et d'autre de  $x$ . Donc  $g_1$  et  $g_2$  doivent être égales sur  $Z(f - g_1)$  en au moins  $n$  points. Or,  $Y$  est un espace de Chebyshev de dimension  $n$  sur  $[-1, 1]$ . Donc,  $g_1 - g_2 = 0$ .

Supposons maintenant que  $f$  ait deux meilleures approximations  $L_1$ ,  $g_1$  et  $g_2$ , telles que  $\nu(Z(f - g_1)) \neq 0$  et  $\nu(Z(f - g_2)) \neq 0$ . Nous procédons comme dans la démonstration du Théorème 1.21 pour montrer que  $g_1 = g_2$ .

Nous savons par la Proposition 1.23, page 20 qu'il existe une unique suite de  $n$  réels  $\alpha_i$  telle que (1.19) est satisfaite. D'après [Zie79], Chapitre 1, page 1, il existe une fonction  $g^* \in Y$  telle que  $g^* - f$  s'annule aux  $\alpha_i$ . Comme tout élément non trivial de  $\text{vect}(Y, f)$  a au plus  $n$  zéros simples alors  $g^* - f$  s'annule uniquement aux  $\alpha_i$ . La fonction  $g^*$  est donc la meilleure approximation  $L_1$  de  $f$  dans  $Y$ .  $\square$

Nous ne pouvons pas conclure en général sur l'unicité de la meilleure approximation  $L_1$  dans un espace de Chebyshev sur  $[-1, 1]$  de dimension impaire. En effet, si nous considérons une fonction  $g^*$  avec la propriété  $\nu(Z(f - g^*)) = 0$ , alors par la Proposition 1.23,  $Z(f - g^*)$  a au moins  $n - 1$  éléments. Nous ne pouvons donc pas conclure comme dans la première partie de la démonstration du théorème précédent. En pratique, pour certaines fonctions, il reste un paramètre libre pouvant être déterminé en fixant la valeur de la solution en 0 à une valeur entre la partie inférieure et la partie supérieure du saut,  $g^*(0) \in ]f(0^-), f(0^+)[$ . Cette valeur ne doit pas changer la fonction changement de signe de  $f - g^*$ . Si au contraire  $g^*(0) \notin ]f(0^-), f(0^+)[$ , alors la fonction qui interpole les  $\alpha_i$  de la Proposition 1.23 ne présente pas de changement de signe en 0 et ne peut donc pas être une meilleure approximation de  $f$ .

À titre d'exemple, nous considérons l'espace  $\mathbf{P}_{n-1}[-1, 1]$  des fonctions polynomiales de degré au plus  $n - 1$  sur  $[-1, 1]$ . C'est un espace de Chebyshev sur  $[-1, 1]$  de dimension  $n$  sur  $[-1, 1]$ . Sa base canonique  $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$  possède la propriété d'avoir  $\lfloor n/2 \rfloor$  fonctions paires. Nous pouvons donc appliquer la Proposition 1.23. De plus, nous pouvons déterminer explicitement les réels  $\alpha_i$ .

**Proposition 1.25.** Soient  $\mathbf{P}_{n-1}[-1, 1]$  l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus  $n - 1$  sur  $[-1, 1]$  et  $m$  un entier supérieur ou égal à  $\lfloor n/2 \rfloor$  alors il vient :

$$\forall P \in \mathbf{P}_{n-1}[-1, 1], \quad \sum_{i=-m}^{m+1} (-1)^i \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} P(x) \, dx = 0, \quad (1.21)$$

où

$$\alpha_i = \cos\left(\frac{(m+1-i)\pi}{2m+2}\right), \quad i = -m-1, \dots, m+1. \quad (1.22)$$

*Remarque.* Les réels  $\alpha_i$ ,  $i = -m, \dots, m$ , sont les zéros du polynôme de Chebyshev de deuxième espèce de degré  $2m+1$  défini comme suit :

$$T_{m+1}(\cos(\theta)) = \frac{\sin((m+2)\theta)}{\sin(\theta)}, \quad \theta \in [-\pi, \pi]. \quad (1.23)$$

La démonstration suivante est inspirée de celle du Théorème 4.10 de [Nü89].

*Démonstration.* Soient  $\{T_0, T_1, \dots, T_{n-1}\}$  la base des polynômes de Chebyshev de première espèce, la fonction changement de signe associée à une suite croissante de  $2m+1$  réels  $\alpha_i$  :

$$s_\alpha(x) = \sum_{i=-m}^{m+1} (-1)^i \mathbf{1}_{[\alpha_{i-1}, \alpha_i]}(x),$$

et  $\sigma_\alpha(\theta) = s_\alpha(\cos(\theta))$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ . La fonction  $\sigma_\alpha$  est étendue à  $[-\pi, 0]$  en posant :

$$\sigma_\alpha(\theta) = -\sigma_\alpha(-\theta),$$

et sur  $\mathbf{R}$  par  $2\pi$ -périodicité.

Par définition des  $\alpha_i$ ,

$$\sigma_\alpha\left(\theta + \frac{\pi}{2m'+2}\right) = -\sigma_\alpha(\theta). \quad (1.24)$$

Il vient pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$  que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=-m'}^{m'+1} (-1)^i \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} T_k(x) \, dx &= \int_0^\pi \sigma_\alpha(\theta) \cos(k\theta) \sin \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sigma_\alpha(\theta) (\sin((k+1)\theta) - \sin((k-1)\theta)) \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\pi}^\pi \sigma_\alpha(\theta) (\sin((k+1)\theta) - \sin((k-1)\theta)) \, d\theta. \end{aligned}$$

Il faut donc montrer pour  $k = 0, 1, \dots, n$  que :

$$\int_{-\pi}^\pi \sigma_\alpha(\theta) \sin(k\theta) \, d\theta = 0.$$

Ceci est vérifié pour  $k = 0$ . Soit  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  alors, par périodicité et (1.24),

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{\alpha}(\theta) \sin(k\theta) \, d\theta &= - \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{\alpha} \left( \theta + \frac{\pi}{2m'+2} \right) \sin \left( k \left( \theta + \frac{\pi}{2m'+2} \right) \right) \, d\theta, \\ &= - \cos \left( \frac{k\pi}{2m'+2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{\alpha}(\theta) \sin(k\theta) \, d\theta - \sin \left( \frac{k\pi}{2m'+2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{\alpha}(\theta) \cos(k\theta) \, d\theta, \\ &= - \cos \left( \frac{k\pi}{2m'+2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{\alpha}(\theta) \sin(k\theta) \, d\theta, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ceci conclut la démonstration. □

Sous la condition (1.20), les abscisses obtenues en Proposition 1.25 permettent de calculer des meilleures approximations  $L_1$  de certaines fonctions saut par des fonctions polynomiales. Nous pouvons par exemple déterminer la meilleure approximation polynomiale au sens  $L_1$  sur  $[-1, 1]$  de la fonction de Heaviside :

$$H : x \in \mathbf{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

par application du Théorème 1.24.

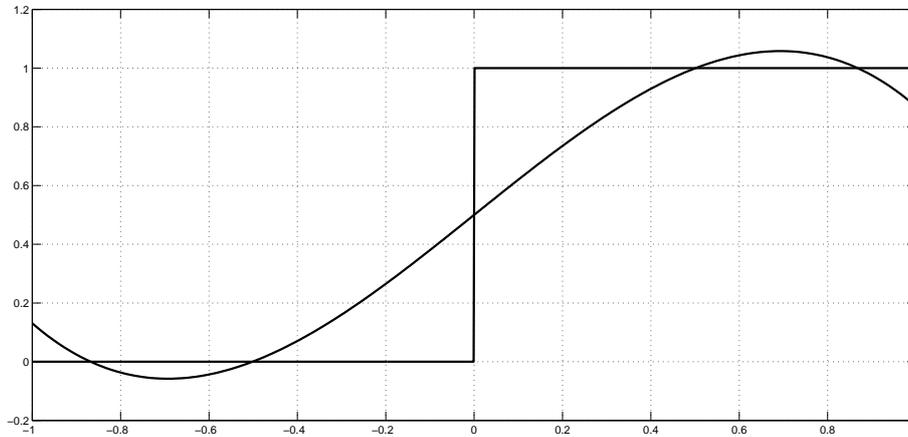


FIGURE 1.5 – Unique meilleure approximation  $L_1$  de la fonction de Heaviside par une fonction de  $\mathbf{P}_3$ .

Nous déterminons ainsi l'unique meilleure approximation  $L_1$  de la fonction de Heaviside par une fonction polynomiale de degré au plus trois par interpolation de Lagrange aux abscisses  $\cos(i\pi/6)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , comme illustré sur la Figure 1.5. En effet, nous pouvons vérifier que  $\text{vect}(\mathbf{P}_3, H)$  vérifie la propriété (1.21). Supposons par l'absurde qu'il existe une fonction dans  $\text{vect}(\mathbf{P}_3, H)$  qui possède cinq zéros simples. Ceci revient à montrer qu'il

existe un élément  $g \in \mathbf{P}_3$  tel que la fonction  $g - H$  possède cinq zéros simples sur  $[-1, 1]$ . Nous raisonnons sur la répartition de ces zéros. Il est impossible d'avoir quatre ou cinq zéros sur  $[-1, 0]$  ou  $[0, 1]$  car  $g$  possède au maximum trois zéros. Si  $g - H$  s'annule trois fois sur  $[-1, 0]$  (respectivement  $[0, 1]$ ) et deux fois sur  $[0, 1]$  (respectivement  $[-1, 0]$ ), alors  $g$  possède deux points d'inflexion, ce qui est impossible.

En considérant toujours l'exemple polynomial et la fonction de Heaviside, nous donnons un contre-exemple de l'unicité de meilleure approximation  $L_1$  d'une fonction saut dans le cas d'un espace de Chebyshev de dimension impaire. Ce contre-exemple est illustré sur la Figure 1.6.

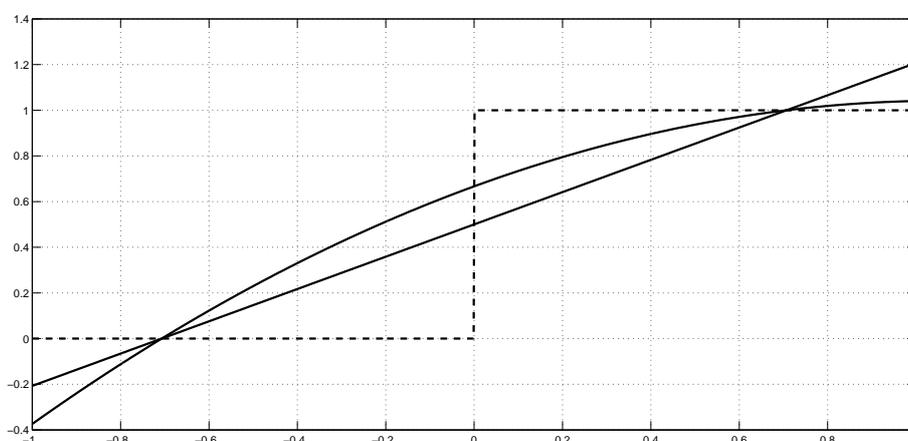


FIGURE 1.6 – Deux meilleures approximations  $L_1$  de la fonction de Heaviside par une fonction polynomiale de degré au plus 2.

Nous considérons deux fonctions dans  $\mathbf{P}_2[-1, 1]$  notées  $g_1$  et  $g_2$ . La fonction  $g_1$  est définie par interpolation linéaire de la fonction de Heaviside aux points définis dans la Proposition 1.25 :

$$\alpha_{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Il vient :

$$g_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Nous pouvons alors vérifier que la fonction  $H - g_1$ , où  $H$  est la fonction de Heaviside, ne change de signe qu'en  $\alpha_{-1}$ , 0 et  $\alpha_1$ . La fonction  $g_1$  est donc une meilleure approximation de  $H$ . Nous avons en particulier :

$$\begin{aligned} \|H - g_1\|_1 &= \int_{-1}^1 |H(x) - g_1(x)| \, dx, \\ &= 2 \int_0^1 |H(x) - g_1(x)| \, dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left( \int_0^{\alpha_1} 1 - g_1(x) \, dx + \int_{\alpha_1}^1 g_1(x) - 1 \, dx \right), \\
&= \sqrt{2} - 1.
\end{aligned}$$

Définissons maintenant  $g_2$  la fonction parabolique telle que  $g_2(0) = 2/3$  et qui interpole  $H$  en  $\alpha_{-1}$  et  $\alpha_1$ . Il vient :

$$g_2(x) = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{3}x^2.$$

Nous pouvons vérifier que la fonction  $H - g_2$  ne change de signe qu'en  $\alpha_{-1}$ , 0 et  $\alpha_1$  et nous avons :

$$\|H - g_2\|_1 = \sqrt{2} - 1.$$

Les fonctions  $g_1$  et  $g_2$  sont donc deux meilleures approximations  $L_1$  de la fonction de Heaviside par une fonction polynomiale de degré au plus deux.

Certains cas restent problématiques. Dans l'exemple présenté sur la Figure 1.7, la condition (1.20) n'est pas satisfaite. Nous notons que le nombre d'intersections n'est pas connu *a priori*. Les abscisses  $\alpha_i$  observées sont néanmoins les abscisses de Chebyshev  $\cos(i\pi/8)$ ,  $i = 1, \dots, 7$ . Dans l'exemple présenté sur la Figure 1.8, nous notons une dissymétrie dans les points d'intersections entre la meilleure approximation  $L_1$  et la fonction saut présentée. Nous ne connaissons pas dans ce cas l'expression des abscisses. Cet exemple ne remet cependant pas en cause les résultats présentés, notamment l'unicité dans le Théorème 1.24, page 20.

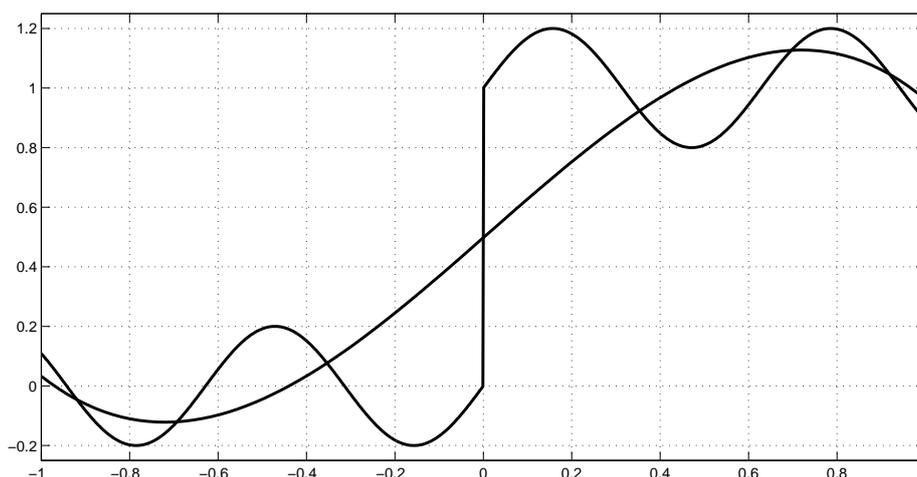


FIGURE 1.7 – Unique meilleure approximation  $L_1$  d'une fonction saut par une fonction cubique.

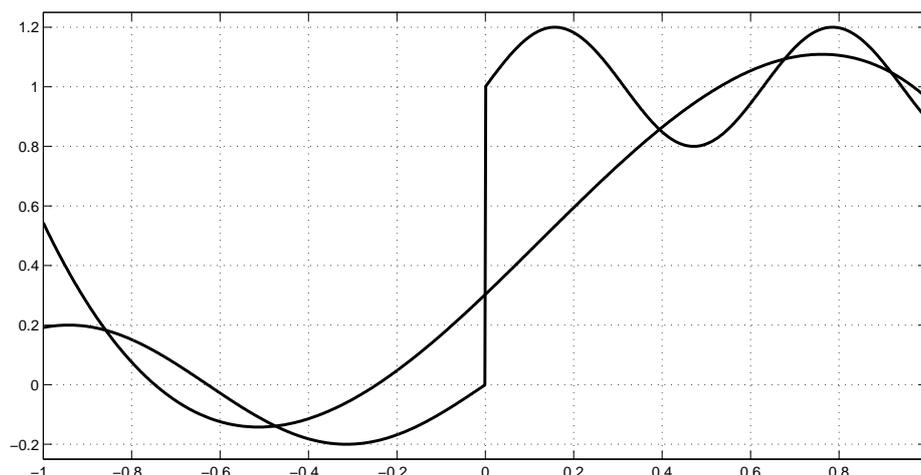


FIGURE 1.8 – Unique meilleure approximation  $L_1$ , présentant une dissymétrie sur les valeurs  $\alpha_i$ , d'une fonction saut par une fonction cubique.

#### 4 Meilleure approximation de fonctions en norme $L_1$ dans un espace faiblement de Chebyshev

Les espaces de splines polynomiales à nœuds fixés ne sont pas des espaces de Chebyshev. En effet, de telles splines peuvent être nulle sur un ensemble de mesure non nulle, donc une infinité de fois, sans être identiquement égale à zéro (voir la Figure 1.9). Cependant, en général, les espaces de splines polynomiales à nœuds fixés sont des espaces faiblement de Chebyshev.

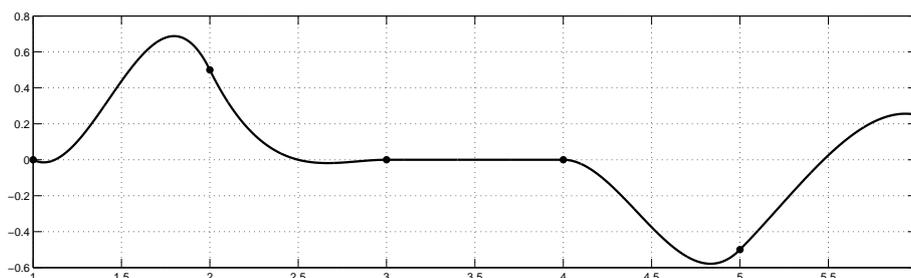


FIGURE 1.9 – Une spline polynomiale, non identiquement nulle, possédant une infinité de zéros.

**Définition 1.26.** Un sous-espace  $Y$  de  $C^0[a, b]$  est appelé espace faiblement de Chebyshev de dimension  $n$  sur  $[a, b]$  si tout élément de  $Y$  possède au plus  $n - 1$  changements de signe forts sur  $[a, b]$ .

Nous rappelons que nous dénombrons les changements de signe forts en ignorant les zéros. Sur la Figure 1.9, nous observons trois changements de signe forts et six changements

de signe faibles. Le lecteur intéressé peut se référer à [Sch81], chapitre 2, page 25, pour une définition précise des notions de changements de signe faibles et forts. Nous rappelons un théorème très important issu de [Nü89] qui établit un lien entre les espaces faiblement de Chebyshev et les espaces de Chebyshev.

**Théorème 1.27.** *Soient  $Y$  un espace faiblement de Chebyshev de dimension  $n$  sur  $[a, b]$  et  $\{\phi_j, j = 1, \dots, n\}$  une base quelconque de  $Y$  alors il existe une suite  $\{Y_p, p \in \mathbf{N}\}$  d'espaces de Chebyshev de dimension  $n$  sur  $[a, b]$  munie d'une suite de bases associée  $\{\phi_{j,p}, j = 1, \dots, n, p \in \mathbf{N}\}$  telle que :*

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|\phi_j - \phi_{j,p}\|_\infty = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.26)$$

L'idée de la démonstration consiste à montrer que pour  $p \in \mathbf{N}$ , l'espace engendré par :

$$\phi_{j,p}(t) = \int_{\mathbf{R}} \phi_j(s) K_p(s, t) \, ds, \quad j = 1, \dots, n$$

où  $K_p$  est le noyau de Gauss défini comme suit :

$$K_p : (s, t) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \frac{p}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{p^2}{2}(s-t)^2},$$

est un espace de Chebyshev de dimension  $n$  sur  $[a, b]$ . Ensuite, nous pouvons montrer la propriété de convergence (1.26). Le lecteur intéressé peut se référer à [Nü89], page 184, pour les détails de la démonstration. Nous rappelons enfin un résultat issu de [Mic77] qui nous sera utile pour établir les résultats de meilleures approximations de fonctions continues et de fonctions saut dans un espace faiblement de Chebyshev.

**Lemme 1.28.** *Soient  $Y$  un espace faiblement de Chebyshev de dimension  $n$  sur  $[a, b]$  et  $s \in L_\infty([a, b], \nu)$ . Supposons que l'ensemble des zéros de  $s$  soit de mesure nulle et que pour tout  $g \in Y$  :*

$$\int_a^b s(x)g(x) \, dx = 0,$$

alors la fonction  $s$  possède au moins  $n$  changements de signe forts sur  $[a, b]$ .

#### 4.1 Cas des fonctions continues

Comme dans le cas Chebyshev, nous rappelons une variante du Théorème 1.12, issue de [Mic77], dans le cadre des espaces faiblement de Chebyshev.

**Proposition 1.29.** *Soit  $Y$  un espace faiblement de Chebyshev de dimension  $n$  sur  $[a, b]$ . Alors il existe une fonction changement de signe  $s$  définies par  $n$  réels :*

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha_{n+1} = b,$$

telle que pour tout  $g \in Y$  :

$$\int_a^b s(x)g(x) \, d\nu(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.27)$$

*Démonstration.* Soit  $\{\phi_j, j = 1, 2, \dots, n\}$  une base de  $Y$ . Comme  $Y$  est un espace faiblement de Chebyshev, par application du Théorème 1.27, il existe une suite  $\{\phi_{j,p}, j = 1, 2, \dots, n\}$  de bases d'espaces de Chebyshev telle que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|\phi_j - \phi_{j,p}\|_\infty = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

En appliquant la Proposition 1.19, page 16, nous pouvons trouver des suites  $\{\alpha_{i,p}\}_{p \in \mathbf{N}}$  définies sur  $[a, b]$  pour  $i = 0, \dots, n + 1$  avec  $\alpha_{0,p} = a$ ,  $\alpha_{n+1,p} = b$  pour  $p \in \mathbf{N}$  telles que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \int_{\alpha_{i,p}}^{\alpha_{i+1,p}} \phi_{j,p}(x) \, d\nu(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Comme  $[a, b]$  est compact, pour  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\{\alpha_{i,p}\}_{p \in \mathbf{N}}$  admet une sous-suite convergente et nous notons cette limite  $\alpha_i$ . Nous obtenons donc une suite croissante de  $n$  réels telle que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \phi_j(x) \, d\nu(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.28)$$

Ces réels définissent une fonction signe. Par application du Lemme 1.28, cette fonction signe doit changer de signe au moins  $n$  fois. La suite des réels  $\{\alpha_i\}$  est donc strictement croissante.  $\square$

La différence fondamentale avec la Proposition 1.19, page 16, est qu'en général, nous ne pouvons pas garantir l'unicité des réels  $\alpha_i$ . Le théorème suivant par Micchelli [Mic77] définit pour tout  $a < x_1 < \dots < x_n < b$  et pour  $Y$  un espace faiblement de Chebyshev, l'ensemble  $Y[x_1, \dots, x_n]$  par :

$$\{(g(x_1), \dots, g(x_n)), g \text{ telle que } \text{vect}(Y, g) \text{ est un espace faiblement de Chebyshev}\}.$$

**Théorème 1.30.** *Soit  $Y$  un espace faiblement de Chebyshev de dimension  $n$  sur  $[-1, 1]$ . Supposons que pour tout  $a < x_1 < \dots < x_n < b$ , le plus petit sous-espace de  $\mathbf{R}^n$  contenant  $Y[x_1, \dots, x_n]$  soit de dimension  $n$ . Alors toute fonction continue  $f$  telle que  $\text{vect}(Y, f)$  est un espace faiblement de Chebyshev de dimension  $n + 1$  admet une unique meilleure approximation  $L_1$  dans  $Y$ .*

## 4.2 Cas des fonctions saut

Dans ce paragraphe, nous proposons un résultat original issu de [GGNF14] qui étend la Proposition 1.23, page 20, au cas des espaces faiblement de Chebyshev.

**Proposition 1.31.** *Soient  $Y$  un espace faiblement de Chebyshev de dimension  $n < +\infty$  sur  $[-1, 1]$  et  $Z$  le sous-espace de  $Y$  formé par les fonctions paires. Supposons  $\dim Z = [n/2]$ . Alors il existe une fonction changement de signe  $s$  associée à une suite croissante de réels :*

$$-1 = \alpha_{-[n/2]-1} < \alpha_{-[n/2]} < \cdots < \alpha_{-1} < \alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{[n/2]} < \alpha_{[n/2]+1} = 1,$$

avec  $\alpha_{-i} = -\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, [n/2]$  telle que pour tout  $g \in Y$

$$\int_{-1}^1 s(x)g(x) \, d\nu(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.29)$$

*Remarque.* Comme dans le cas Chebyshev, nous pouvons montrer que le sous-espace d'un espace faiblement de Chebyshev de dimension  $n$  formé par les fonctions paires est de dimension au plus  $[n/2]$ . C'est une conséquence du Théorème 1.15, page 13 et du Lemme 1.28, page 27.

*Démonstration.* Soit  $\{\phi_j, j = 1, 2, \dots, n\}$  une base de  $Y$  avec  $[n/2]$  fonctions de base paires. Comme  $Y$  est un espace faiblement de Chebyshev, par application du Théorème 1.27, il existe une suite  $\{\phi_{j,p}, j = 1, 2, \dots, n, p \in \mathbf{N}\}$  de bases d'espace de Chebyshev de dimension  $n$  telle que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|\phi_j - \phi_{j,p}\|_\infty = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

De plus, nous avons vu que nous pouvons définir  $\phi_{j,p}$  pour tout  $j = 1, 2, \dots, n$  et  $p \in \mathbf{N}$  comme suit :

$$\phi_{j,p}(t) = \int_{\mathbf{R}} \phi_j(s)K_p(s, t) \, d\nu(s).$$

Alors si  $\phi_j$  est paire,  $\phi_{j,p}$  l'est aussi. En effet :

$$\begin{aligned} \phi_{j,p}(-t) &= \int_{\mathbf{R}} \phi_j(s)K_p(s, -t) \, d\nu(s), \\ &= \int_{\mathbf{R}} \phi_j(-s)K_p(-s, -t) \, d\nu(s), \\ &= \int_{\mathbf{R}} \phi_j(s)K_p(s, t) \, d\nu(s), \\ &= \phi_{j,p}(t). \end{aligned}$$

Grâce à la Proposition 1.23, 20, nous pouvons trouver des suites  $\{\alpha_{i,p}, p \in \mathbf{N}\}$  définies sur  $[-1, 1]$  pour  $i = -[n/2], \dots, [n/2]$  avec  $\alpha_{-i,p} = \alpha_{i,p}$  pour  $i = 1, \dots, [n/2]$ ,  $p \in \mathbf{N}$  telles

que :

$$\sum_{i=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} (-1)^i \int_{\alpha_{i,p}}^{\alpha_{i+1,p}} \phi_{j,p}(x) \, dx = 0, \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, n,$$

avec en particulier,  $\alpha_{0,p} = 0$ ,  $\alpha_{n+1,p} = 1$  pour tout  $p \in \mathbf{N}$ .

Comme  $[-1, 1]$  est compact, pour  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\{\alpha_{i,p}, p \in \mathbf{N}\}$  admet une sous-suite convergente et nous notons cette limite  $\alpha_i$ . Nous obtenons donc une suite croissante de réels telle que :

$$\sum_{i=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} (-1)^i \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \phi_j(x) \, d\nu(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.30)$$

Ces réels définissent une fonction signe avec  $2\lfloor n/2 \rfloor + 1$  changements de signe. Par application du Lemme 1.28, cette fonction signe doit changer de signe au moins  $n$  fois. Si  $n$  est impair, alors  $2\lfloor n/2 \rfloor + 1 = n$  et nous concluons que la suite est strictement croissante. Si  $n$  est pair, alors  $2\lfloor n/2 \rfloor + 1 = n + 1$ . Il est cependant impossible d'obtenir une fonction changement de signe à  $n$  changements de signe car la suite des  $\alpha_i$  est construite de manière symétrique. Donc la fonction changement de signe associée aux  $\alpha_i$  possède  $n + 1$  changements de signe et alors la suite est strictement croissante.  $\square$

Nous venons ici de montrer que le nombre minimal de valeurs d'annulation entre une fonction et une meilleure approximation  $L_1$  est  $2\lfloor n/2 \rfloor$ . Nous pouvons donc en déduire immédiatement le résultat suivant.

**Proposition 1.32.** *Soit  $Y$  un espace faiblement de Chebyshev sur  $[-1, 1]$  de dimension  $n$  muni d'une base avec  $\lfloor n/2 \rfloor$  fonctions paires, alors une meilleure approximation  $L_1$  d'une fonction saut  $f \in \mathcal{J}_0[-1, 1]$  dans  $Y$  interpole  $f$  en au moins  $n$  points si  $n$  est pair et  $n - 1$  points si  $n$  est impair.*

## 5 Application aux splines polynomiales d'Hermite à nœuds fixés

Nous définissons dans ce paragraphe les splines polynomiales d'Hermite à nœuds fixés. Nous montrons que ces splines rentrent dans le cadre des résultats énoncés précédemment pour la meilleure approximation de fonctions saut dans un espace faiblement de Chebyshev. Nous utiliserons également ces splines dans les chapitres suivants.

**Définition 1.33.** Un spline polynomiale d'Hermite d'ordre  $k$  aux nœuds  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , est une fonction de régularité  $C^k$  sur  $[x_1, x_n]$ , polynomiale de degré inférieur ou égal à  $2k + 1$  sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ . Nous notons  $\tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}}$  l'espace vectoriel des telles fonctions.

Une base de  $\tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}}$  est donnée dans la proposition suivante.

**Proposition 1.34.** Soit  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  tel que  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et les  $n(k+1)$  fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} p_j(x) &= (x - x_1)^j, \quad j = 0, 1, \dots, 2k+1, \\ \varphi_{j,q}(x) &= (x - x_j)_+^q, \quad j = 2, 3, \dots, n-1; \quad q = k+1, k+2, \dots, 2k+1. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Alors :

$$\{p_j, j = 0, \dots, 2k+1\} \cup \{\varphi_{j,q}, j = 1, \dots, n-1, q = k+1, \dots, 2k+1\}$$

est une base de  $\tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}}$  et  $\dim \tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}} = n(k+1)$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, les fonctions  $\{p_j, j = 0, \dots, 2k+1\}$  et  $\{\varphi_{j,q}, j = 1, \dots, n-1, q = k+1, \dots, 2k+1\}$  appartiennent à  $\tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}}$ . C'est évident pour  $\{p_j, j = 0, \dots, 2k+1\}$  car ces fonctions sont polynomiales,  $C^\infty$ , de degré inférieur ou égal à  $2k+1$ . De plus,

$$\varphi_{j,q}^{(m)}(x_j) = 0 \text{ pour } m = 0, 1, \dots, q-1 \text{ et } q = k+1, k+2, \dots, 2k+1,$$

et  $\varphi_{j,q}^{(q)}(x_j) = q!$ . Alors les fonctions  $\{\varphi_{j,q}, j = 1, \dots, n-1, q = k+1, \dots, 2k+1\}$  appartiennent à  $\tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}}$ .

Nous raisonnons maintenant par récurrence sur le nombre de nœuds.

Définissons  $\mathbf{x}_k = \{x_1, \dots, x_k\}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Pour  $n = 2$ ,  $\{p_j, j = 0, \dots, 2k+1\}$  est la base de Taylor pour  $\tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}_2}$ . Supposons que la proposition soit vraie pour  $n-1$  nœuds.

Soit  $z \in \tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}_n}$ , alors

$$z|_{[x_1, x_{n-1}]} \in \tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}_{n-1}}.$$

Par l'hypothèse de récurrence, il existe d'uniques réels :

$$\alpha_0, \dots, \alpha_{2k+1}, \beta_{1,q}, \dots, \beta_{n-2,q}, \quad q = k+1, \dots, 2k+1,$$

tels que :

$$\tilde{z}(x) = z|_{[x_1, x_{n-1}]}(x) = \sum_{j=0}^{2k+1} \alpha_j p_j(x) + \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{q=k+1}^{2k+1} \beta_{j,q} \varphi_{j,q}(x).$$

Nous considérons alors la fonction :

$$\psi = z - \tilde{z} - \sum_{q=k+1}^{2k+1} \beta_{n-1,q} \varphi_{n-1,q},$$

pour certains réels  $\beta_{n-1,q}$ . Pour  $q = k+1, \dots, 2k+1$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \psi^{(q)}(x_{n-1}^+) &= z^{(q)}(x_{n-1}^+) - \tilde{z}^{(q)}(x_{n-1}^+) - \beta_{n-1,q} q!, \\ &= z^{(q)}(x_{n-1}^+) - \tilde{z}^{(q)}(x_{n-1}^-) - \beta_{n-1,q} q!, \\ &= z^{(q)}(x_{n-1}^+) - z^{(q)}(x_{n-1}^-) - \beta_{n-1,q} q!. \end{aligned}$$

Posons alors pour  $q = k + 1, \dots, 2k + 1$ ,

$$\beta_{n-1,q} = \frac{z^{(q)}(x_{n-1}^+) - z^{(q)}(x_{n-1}^-)}{q!}.$$

La proposition est donc vérifiée pour  $n$ .  $\square$

Ces espaces de splines sont définis d'une manière assez naturelle. Définir une spline cubique d'Hermite, c'est définir ses valeurs aux nœuds ainsi que ses dérivées premières (voir Figure 1.10). Pour une spline quintique d'Hermite, nous devons en plus définir les valeurs des dérivées secondes.

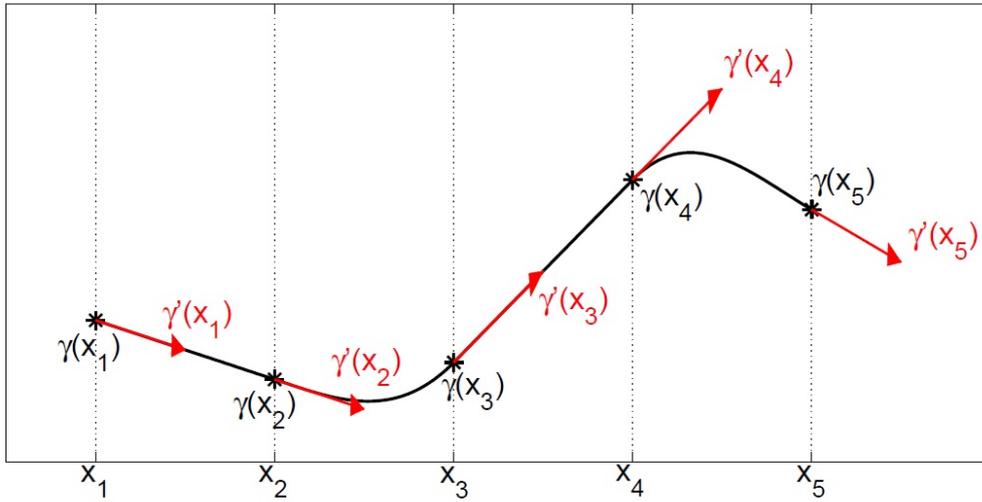


FIGURE 1.10 – Une spline cubique d'Hermite.

Nous donnons maintenant une propriété importante de l'espace  $\tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}}$ .

**Proposition 1.35.** *Pour tout  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbf{R}^n$  tel que  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et  $k \in \mathbf{N}$ ,  $\tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}}$  est un espace faiblement de Chebyshev sur  $[-1, 1]$  de dimension  $n(k + 1)$ .*

*Démonstration.* Pour  $n = 2$ ,  $\tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}_2} = \mathbf{P}_{2k+1}$  est un espace de Chebyshev, et par conséquent un espace faiblement de Chebyshev.

Pour  $k = 0$ ,  $\tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}_n} = \mathcal{S}_{1,\mathbf{x}_n}$  est un espace faiblement de Chebyshev (voir par exemple [Nü89], page 95).

Supposons maintenant que  $k \geq 1$ ,  $n > 2$  et par l'absurde que  $z \in \tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}_n}$  ait  $n(k + 1)$  changements de signe forts. Par le théorème de Rolle,  $z'$  a  $n(k + 1) - 1$  changements de signe fort. Par récurrence,  $z^{(k)}$  a  $n(k + 1) - k = (n - 1)k + n$  changements de signe fort. Or,  $z^{(k)}$  est une spline polynomiale de régularité  $C^0$  et de degré  $k + 1$ . Une telle fonction a au plus  $(n - 1)(k + 1) = (n - 1)k + n - 1$  changements de signe fort. Nous avons alors une contradiction.  $\square$

La base définie en (1.31) ne satisfait pas la propriété d'avoir la moitié de ses fonctions paires. Cependant, nous pouvons montrer la proposition suivante.

**Proposition 1.36.** *Soit  $\mathbf{x} = \{-x_n, \dots, -x_1, 0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathbf{R}^{2n+1}$  tel que  $0 < x_1 < \dots < x_n$ . Alors il existe une base de  $\tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}}$  avec la moitié de ses fonctions paires.*

*Démonstration.* Sans perte de généralité, nous pouvons considérer  $\mathbf{x} = \{-n, -n+1, \dots, n-1, n\}$ . La dimension de  $\tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}}$  est  $(2n+1)(k+1)$ . Nous cherchons  $\lceil (2n+1)(k+1)/2 \rceil$  fonctions paires et indépendantes dans  $\tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}}$ . Nous concluons alors par application du théorème de la base incomplète (voir par exemple [Lan86], page 114).

Nous montrons la proposition pour  $k$  impair. Le cas pair est similaire. Nous considérons tout d'abord les fonctions  $p_j$ . Nous pouvons les remplacer par la base canonique  $1, x, \dots, x^{2k+1}$  et nous sélectionnons les  $k+1$  fonctions paires  $1, x^2, \dots, x^{2k}$ .

Nous considérons ensuite les fonctions  $\varphi_{j,q}(x)$ . Pour  $j = 1, \dots, n-1$ , nous les modifions comme suit :

$$\hat{\varphi}_{j,q}(x) = \begin{cases} (x-j)^q & \text{if } x \geq j, \\ (-x-j)^q & \text{if } x \leq -j. \end{cases} \quad q = k+1, k+2, \dots, 2k+1.$$

Ces  $(k+1)(n-1)$  fonctions  $\hat{\varphi}_{j,q}$  sont paires par construction et appartiennent à  $\tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}}$ . Enfin, nous considérons les fonctions  $\varphi_{0,q}(x)$  et nous les modifions comme suit :

$$\hat{\varphi}_{0,q}(x) = |x|^q, \quad \text{pour } q \text{ impair dans } \{k+1, k+2, \dots, 2k+1\}.$$

Ces  $(k+1)/2$  fonctions  $\hat{\varphi}_{0,q}$  sont paires par construction et appartiennent à  $\tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}}$ . Nous avons donc défini :

$$(k+1) + (k+1)(n-1) + \frac{k+1}{2} = \frac{1}{2}(2n+1)(k+1)$$

fonctions paires de  $\tilde{\mathcal{S}}_{k,\mathbf{x}}$ . Elles sont clairement linéairement indépendantes puisqu'elles n'ont pas le même support. Nous concluons alors par le théorème de la base incomplète.  $\square$

En appliquant les résultats du paragraphe précédent, nous pouvons mettre en évidence des meilleures approximations  $L_1$  de fonctions saut par des splines polynomiales d'Hermite. Une expression algébrique des réels de la Proposition 1.31, page 29, n'a pas pu encore être déterminée. Nous pouvons cependant les déterminer numériquement et définir une meilleure approximation  $L_1$  de la fonction d'Heaviside (voir Figures 1.11 et 1.12). Nous remarquons que le phénomène de Gibbs observé sur celle-ci est de moindre amplitude que celui observé en norme  $L_2$ . Comme indiqué précédemment, nous pouvons avoir un nombre d'intersections supérieur à la dimension de l'espace. Nous mettons ceci en évidence sur la Figure 1.13. Dans ce cas, nous avons quatorze intersections tandis que la dimension de l'espace de spline est seulement de dix.

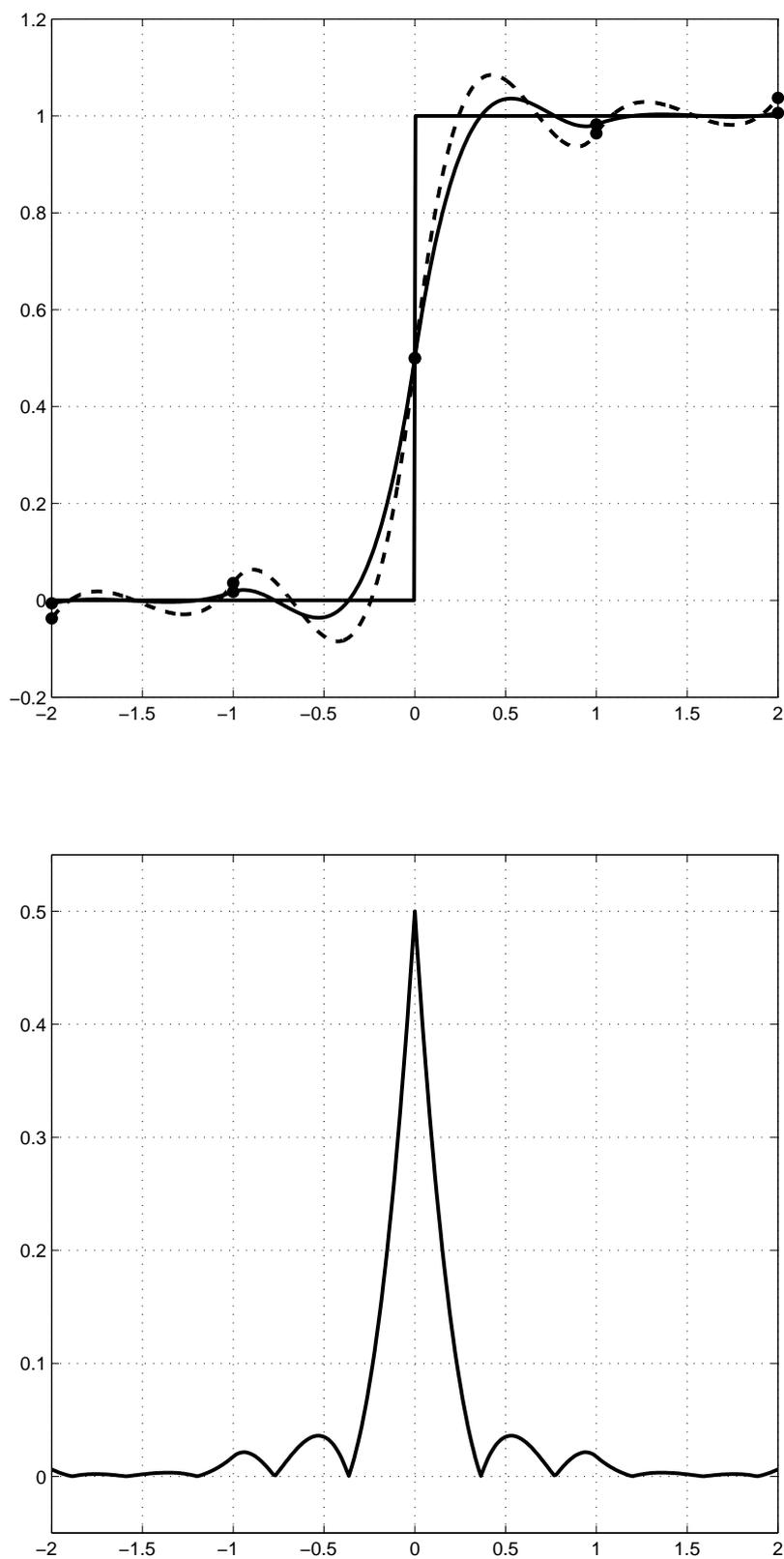


FIGURE 1.11 – Meilleure approximation  $L_1$  (ligne pleine) et  $L_2$  (pointillés) de la fonction de Heaviside par une spline cubique d’Hermite à cinq nœuds équirépartis et graphe d’erreur relative.

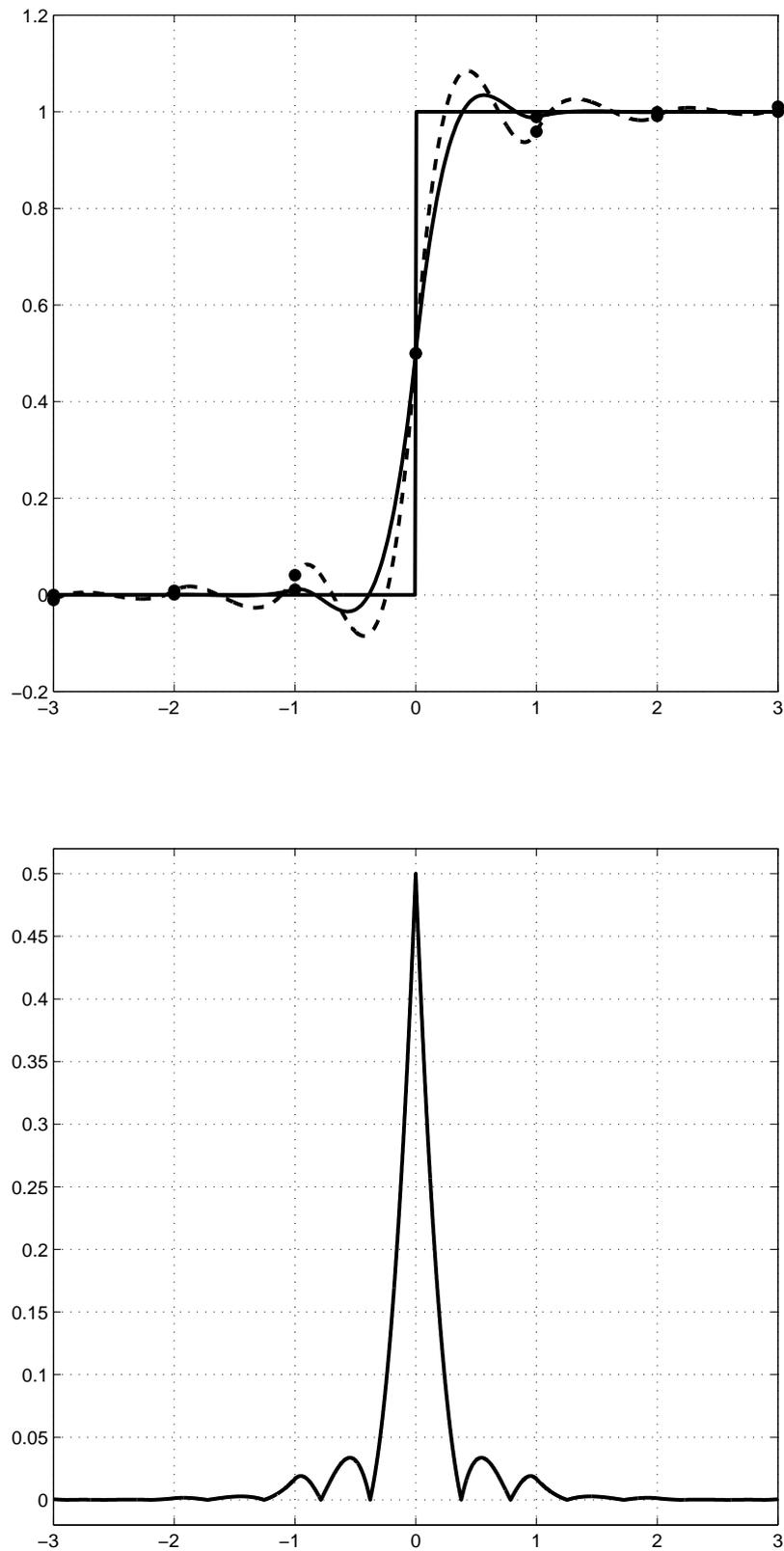


FIGURE 1.12 – Meilleure approximation  $L_1$  (ligne pleine) et  $L_2$  (pointillés) de la fonction de Heaviside par une spline cubique d'Hermite à sept nœuds équirépartis et graphe d'erreur relative.

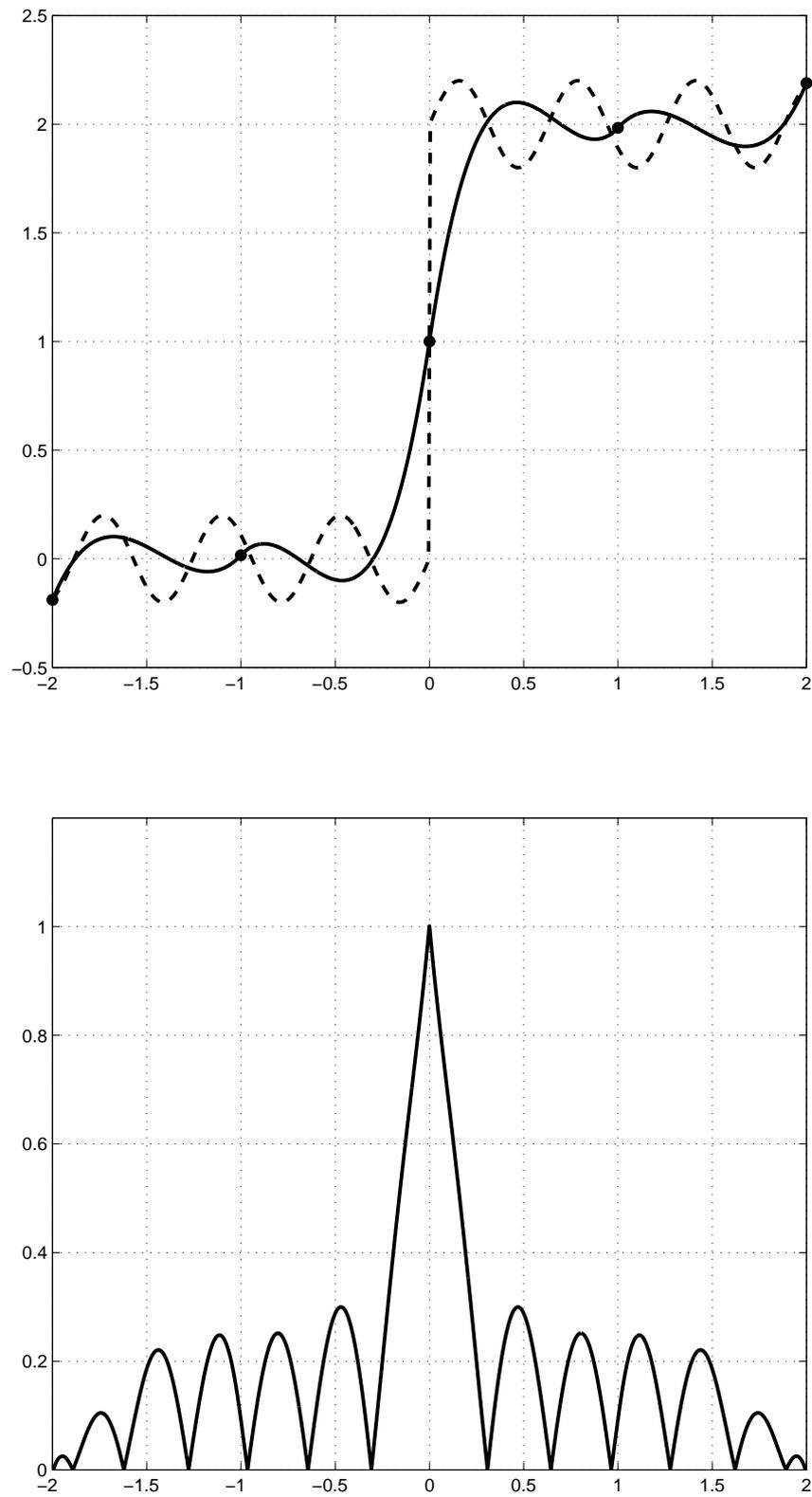


FIGURE 1.13 – Meilleure approximation  $L_1$  (trait plein) d'une fonction oscillante par morceaux (pointillés) par une spline cubique d'Hermite à cinq nœuds équirépartis et graphe d'erreur relative.

## 6 Meilleure approximation $\ell_1$ de données discrètes

### 6.1 Généralités sur les espaces $\ell_p$

**Définition 1.37.** L'espace  $\ell_{p,n}(\mathbf{K})$ ,  $1 \leq p < +\infty$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , est l'ensemble des éléments  $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$  de  $\mathbf{K}^n$  tels que :

$$\sum_{i=1}^n |f_i|^p < +\infty.$$

L'espace  $\ell_{\infty,n}(\mathbf{K})$  est l'ensemble des éléments  $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$  de  $\mathbf{K}^n$  tels que :

$$\sup_{i=1, \dots, n} |f_i| < +\infty.$$

L'espace  $\ell_{p,n}(\mathbf{K})$  muni de la norme

$$\|\mathbf{f}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|\mathbf{f}\|_{\infty} = \sup_{i=1, \dots, n} |f_i|, \quad p = +\infty,$$

est un espace de Banach.

*Remarque.* Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous notons  $\ell_{p,n}(\mathbf{K})$  plus simplement par  $\ell_p$ .

### 6.2 Résultats généraux

Dans ce paragraphe, nous souhaitons approcher une fonction  $f \in L_1[a, b]$  à partir des valeurs de celle-ci en certaines abscisses  $X = \{x_i, i = 1, \dots, m\} \in [a, b]^m$ . Soit  $Y$  un sous-espace de  $L_1[a, b]$  de dimension  $n < m$ . Le problème de meilleure approximation  $\ell_1$  de  $f$  dans  $Y$  sur  $X$  est le suivant :

$$\inf_{g \in Y} \sum_{i=1}^n |f(x_i) - g(x_i)|. \quad (1.32)$$

Nous rappelons l'analogie discret du Théorème 1.9 (voir par exemple [Ric64b]).

**Théorème 1.38.** *Soit  $Y$  un espace de fonctions de dimension  $n$ ,  $X$  un ensemble de  $m$  abscisses,  $m > n$ , dans l'intervalle  $[a, b]$  et  $f$  une fonction de  $L_1[a, b]$ . Alors  $g^*$  est une meilleure approximation  $\ell_1$  de  $f$  dans  $Y$  sur  $X$  si et seulement si pour tout  $g \in Y$  :*

$$\left| \sum_{x \in X} \operatorname{sgn}(f(x) - g^*(x))g(x) \right| \leq \sum_{x \in Z(f-g^*)} |g(x)|. \quad (1.33)$$

Un résultat de caractérisation des meilleures approximations  $L_1$  dans un espace de Chebyshev d'une fonction  $f$  sur un ensemble d'abscisses  $X$  découle de ce théorème. Nous

le rappelons ci-après et renvoyons le lecteur intéressé à [Ric64b] pour les détails de la démonstration.

**Théorème 1.39.** *Soit  $Y$  un espace de Chebyshev de dimension  $n$ . L'ensemble des meilleures approximations  $L_1$  de  $f$  dans  $Y$  sur  $X$  est l'enveloppe convexe des meilleures approximations  $L_1$  de  $f$  interpolant celle-ci en au moins  $n$  points de  $X$ .*

### 6.3 Droite de régression $\ell_1$

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au problème de régression linéaire en norme  $\ell_1$ . Il s'agit d'approcher un ensemble de données discrètes par une droite. Pour plus de simplicité, nous nous intéressons seulement au cas planaire. Cette méthode est particulièrement intéressante lorsqu'elle est comparée à la droite de régression  $\ell_2$ . Alors qu'elles donnent des résultats comparables sur un ensemble de données bruitées, la régression  $\ell_1$  est cependant plus robuste aux points aberrants et même aux séquences organisées de points aberrants. Ce phénomène est illustré sur la Figure 1.14.

Dans ce paragraphe, nous donnons des résultats qui apportent des éléments d'explication à ces phénomènes et qui, à notre connaissance, n'avaient jamais été démontrés. Pour cela, nous énonçons tout d'abord le résultat suivant, conséquence directe du Théorème 1.39.

**Théorème 1.40.** *Soient  $\{f_i = (x_i, y_i), i = 1, \dots, n\}$ ,  $n$  points du plan. Le problème suivant*

$$\min_{a, b \in \mathbf{R}} \sum_{i=1}^n |y_i - ax_i - b|.$$

*admet au moins une solution. L'ensemble des solutions est l'enveloppe convexe des solutions interpolant au moins deux points  $f_i$ .*

#### 6.3.1 Robustesse aux points aberrants

Dans le résultat original suivant, nous considérons un jeu de données parfaitement alignées. Celui-ci est ensuite perturbé par un point aberrant d'amplitude quelconque. Nous montrons que la solution de régression  $\ell_1$  reste la droite initiale.

**Proposition 1.41.** *Soient  $f_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$   $n$  points de la droite  $y = \alpha x + \beta$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ . Considérons un point  $P = (x_0, y_0)$  du plan tel que  $y_0 \neq \alpha x_0 + \beta$  et supposons qu'il existe  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  tel que  $x_k < x_0 < x_{k+1}$  alors :*

$$\min_{a, b \in \mathbf{R}} \sum_{i=0}^n |y_i - ax_i - b| \tag{1.34}$$

*est unique et la solution correspondante est donnée par  $a = \alpha$  et  $b = \beta$ .*

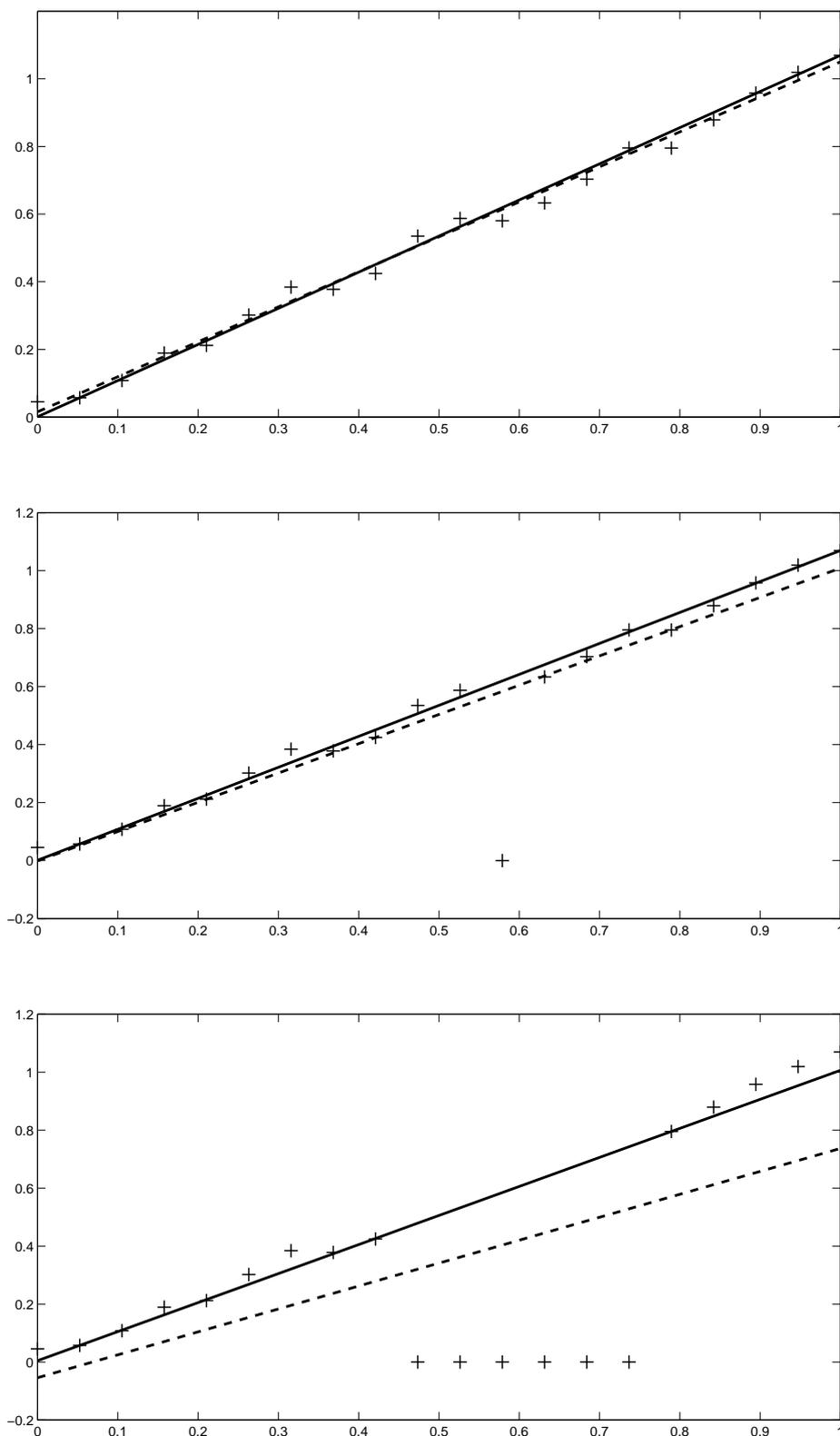


FIGURE 1.14 – Comparaison entre régression  $\ell_1$  (trait plein) et  $\ell_2$  (pointillés) sur un jeu de données bruitées (haut), contenant de plus un point aberrant (milieu) et une séquence organisée de points aberrants (bas).

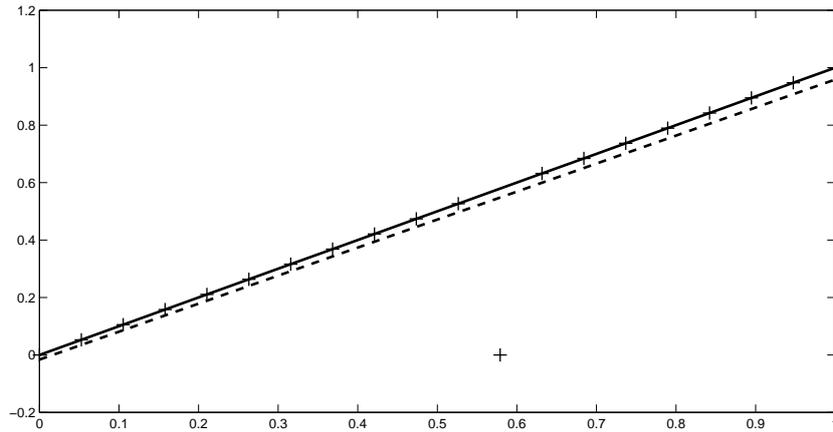


FIGURE 1.15 – Méthodes de régression  $\ell_1$  et  $\ell_2$  appliquées à des données appartenant à une droite et perturbées par un point aberrant.

Cette proposition est illustrée sur la Figure 1.15. Nous remarquons que la propriété énoncée dans ce paragraphe n'est pas valable pour la méthode de régression  $\ell_2$ . En effet, cette méthode est sensible aux points aberrants. Nous démontrons ce résultat ci-après.

*Démonstration.* Notons :

$$\mathcal{F}(a, b) = |y_0 - ax_0 - b| + \sum_{i=1}^n |y_i - ax_i - b|.$$

Nous savons que  $\mathcal{F}(\alpha, \beta) = |y_0 - \alpha x_0 - \beta|$ . Les autres candidats possibles pour minimiser (1.34), par application du Théorème 1.40, page 38, interpolent  $P$  et un des points  $f_i$ . Nous notons  $(a_i, b_i)$  ces candidats. Supposons que le point aberrant  $P$  soit situé en dessous de la droite  $y = ax + b$ . Le cas contraire est symétrique. Si  $i \leq k$ , alors

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta) < |y_{k+1} - a_i x_{k+1} - b_i|. \quad (1.35)$$

Nous illustrons cette inégalité pour  $i = k$  sur la Figure 1.16.

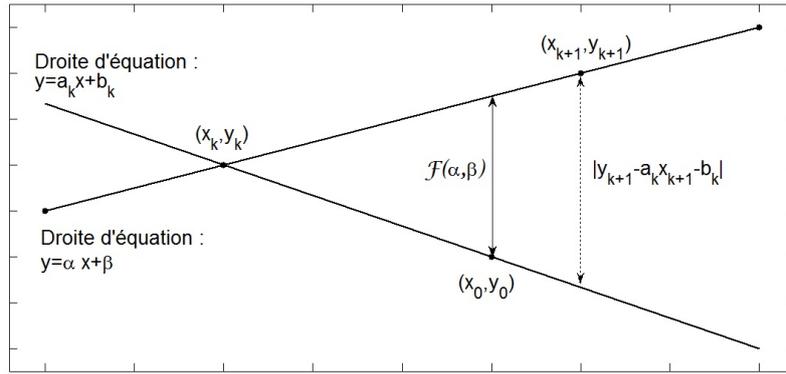
Si  $i \geq k + 1$ ,

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta) < |y_k - a_i x_k - b_i|.$$

Nous avons donc dans tous les cas :

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta) < |y_k - a_i x_k - b_i| + |y_{k+1} - a_i x_{k+1} - b_i| \leq \mathcal{F}(a_i, b_i).$$

Le résultat est donc montré. □

FIGURE 1.16 – Illustration de l'inégalité (1.35) pour  $i = k$ 

### 6.3.2 Robustesse aux séquences organisées de points aberrants

Nous montrons un résultat original similaire concernant la robustesse aux séquences organisées de points aberrants. Une condition suffisante sur le nombre de points aberrants successifs et leur position est donnée afin d'assurer la stabilité de la solution.

**Proposition 1.42.** *Soient  $f_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  points du plan de sorte qu'il existe  $(k, k') \in (\mathbf{N}^*)^2$  tels que les points  $\{f_i, i \in \{1, 2, \dots, k\} \cup \{k' + 1, k' + 2, \dots, n\}\}$  soient alignés et  $\{f_i, i = k + 1, k + 2, \dots, k'\}$  forment une séquence organisée de points aberrants. Si le taille de la séquence organisée de points aberrants,  $k' - k$ , est inférieure ou égale au nombre de points à sa gauche et à sa droite, alors la droite solution du problème :*

$$\min_{a, b \in \mathbf{R}} \sum_{i=1}^n |y_i - ax_i - b| \quad (1.36)$$

est unique et interpole les points  $\{f_i, i \in \{1, 2, \dots, k\} \cup \{k' + 1, k' + 2, \dots, n\}\}$ .

Nous illustrons ce résultat sur la Figure 1.17. La régression  $\ell_1$ , contrairement à la méthode de régression  $\ell_2$ , reste robuste à la séquence organisée de points aberrants sous la condition suffisante énoncée dans la Proposition 1.42. Démontrons ce résultat.

*Démonstration.* L'idée de la démonstration est similaire au cas d'un point aberrant. Notons :

$$\mathcal{F}(a, b) = \sum_{i=1}^n |y_i - ax_i - b|,$$

et  $\alpha, \beta$  respectivement la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite liant les

$$\{f_i, i \in \{1, 2, \dots, k\} \cup \{k' + 1, k' + 2, \dots, n\}\}.$$

Nous avons :

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta) = \sum_{i=k}^{k'} |y_i - \alpha x_i - \beta|.$$

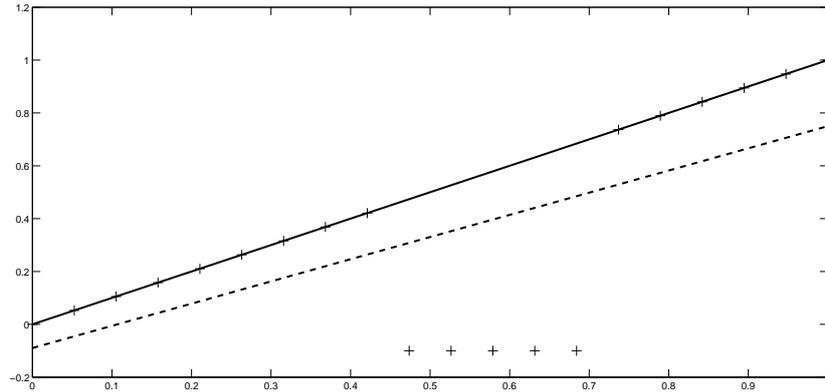


FIGURE 1.17 – Méthodes de régression  $\ell_1$  et de régression  $\ell_2$  appliquées à des données appartenant à une droite et perturbées par une séquence organisée de points aberrants. Illustration de la robustesse de la régression  $\ell_1$  aux séquences organisées de points aberrants sous la condition suffisante énoncée dans la Proposition 1.42.

Nous notons  $l = k' - k$  la taille de la séquence organisée de points aberrants et :

$$\mathcal{I}_1 = \{\text{les indices des } l \text{ points précédant la séquence}\},$$

$$\mathcal{I}_2 = \{\text{les indices des } l \text{ points succédant la séquence}\}.$$

Par application du Théorème 1.40, les candidats possibles interpolent au moins deux points. Notons  $(a^*, b^*)$  un tel candidat. Nous montrons que celui-ci satisfait :

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta) < \sum_{k \in \mathcal{I}_1} |y_k - a^* x_k - b^*| + \sum_{k \in \mathcal{I}_2} |y_k - a^* x_k - b^*| \leq \mathcal{F}(a^*, b^*).$$

D'où le résultat. □

#### 6.4 Meilleure approximation spline en norme $\ell_1$

Dans ce dernier paragraphe, nous nous intéressons au problème de meilleure approximation  $\ell_1$  de données discrètes par des splines cubiques d'Hermite. Les résultats numériques obtenus pour trois jeux de données discrètes sont illustrés sur la Figure 1.18. Ces jeux de données, issus de [Lav00a], sont choisis ici pour les différences de niveaux et de répartition des données. Ils sont donc de bons tests pour analyser les caractéristiques de la méthode d'approximation. Nous comparons les solutions obtenues aux solutions obtenues en norme  $\ell_2$ . Nous constatons que les solutions  $\ell_1$  sont moins oscillantes que les solutions  $\ell_2$ . Cependant, nous observons un phénomène oscillatoire comme c'était le cas pour l'approximation de fonctions. Afin de déterminer une bonne méthode spline, c'est-à-dire, non-oscillante, il faut contraindre davantage le problème. Nous pourrions utiliser avec intérêt les résultats d'interpolation au sens de la norme  $L_1$  présentés dans le chapitre suivant pour définir une telle approximation spline.

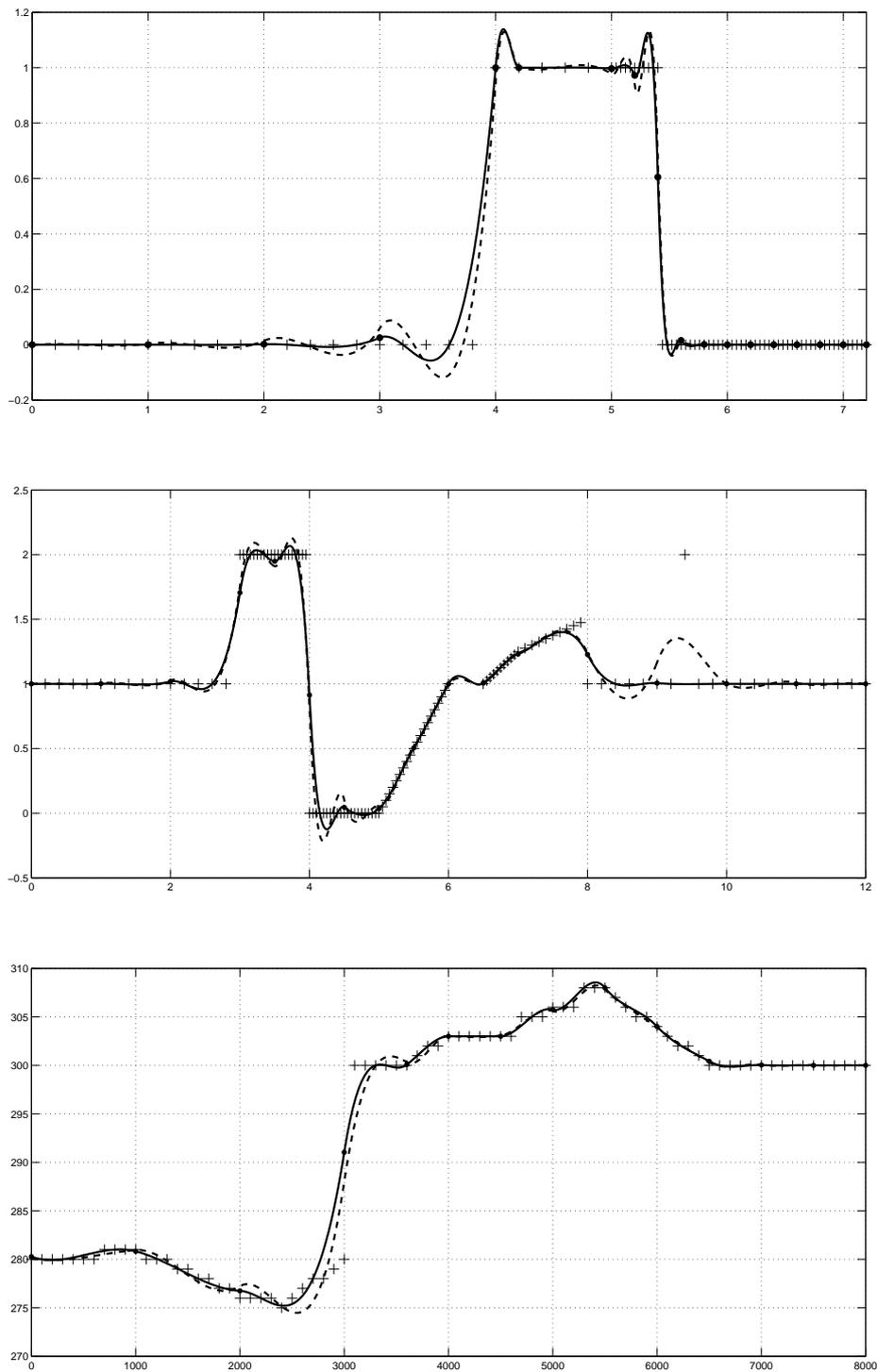


FIGURE 1.18 – Meilleure approximation en norme  $\ell_1$  (trait plein) et  $\ell_2$  (pointillés) de trois jeux de données dans l'ensemble des splines cubiques d'Hermite.

## 7 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons montré que l'approximation  $L_1$  de fonctions et de données discrètes se résume en général à un problème d'interpolation. Les résultats théoriques et numériques obtenus montrent que les solutions d'approximation  $L_1$  de fonctions saut ou de données avec des sauts possèdent des oscillations. Un contrôle supplémentaire des solutions est donc nécessaire afin de minimiser ce phénomène. La méthode d'interpolation au sens de la norme  $L_1$  par splines cubiques d'Hermite sur de telles données permet d'obtenir une solution sans oscillations. Pour cette raison, nous rappelons cette méthode dans le chapitre suivant.

## Chapitre 2

# Interpolation et ajustement par spline polynomiale $L_1$

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Rappel sur l'interpolation <math>L_1</math> par spline polynomiale . . . . .</b>	<b>46</b>
1.1	Cas de l'interpolation par spline cubique $C^2$ . . . . .	46
1.2	Interpolation par spline $L_1$ . . . . .	48
1.2.1	Interpolation $L_1$ par spline cubique d'Hermite . . . . .	48
	Interpolation de la fonction de Heaviside . . . . .	49
	Résolution du problème sur cinq points . . . . .	50
1.2.2	Interpolation $L_1$ par spline quintique d'Hermite . . . . .	52
1.3	Interpolation par spline cubique paramétrique $L_1$ . . . . .	54
1.4	Algorithme par fenêtre glissante pour l'interpolation spline $L_1$ . . . . .	56
1.4.1	Méthode globale de résolution . . . . .	56
1.4.2	Méthode locale de résolution par fenêtre glissante . . . . .	57
	Interpolation $L_1$ par une spline cubique d'Hermite . . . . .	58
	Interpolation $L_1$ par spline d'Hermite de degré $k$ . . . . .	59
1.5	Application à la robotique collaborative . . . . .	60
<b>2</b>	<b>Spline de lissage <math>L_1</math> . . . . .</b>	<b>63</b>
2.1	Approximation de fonctions . . . . .	63
2.2	Approximation de données discrètes . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Splines d'ajustement <math>L_1</math> . . . . .</b>	<b>66</b>
3.1	Approximation de fonctions . . . . .	66
3.2	Approximation de données discrètes . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Méthodes numériques pour le calcul des splines d'ajustement <math>L_1</math> . . . . .</b>	<b>70</b>
4.1	Méthode globale . . . . .	70
4.2	Méthodes par fenêtre glissante . . . . .	71
4.2.1	Méthodes à nœud central . . . . .	72
4.2.2	Méthodes à trois points centraux . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Conclusion du chapitre . . . . .</b>	<b>77</b>

---

Nous rappelons dans ce chapitre que les splines d'interpolation cubiques  $C^2$ , issues d'une minimisation  $L_2$ , peuvent présenter un phénomène de Gibbs lorsque les données admettent une forte variation d'amplitude [ZM97]. Pour pallier cet inconvénient, Lavery a proposé une interpolation par splines cubiques d'Hermite minimisant la norme  $L_1$  de la dérivée seconde (voir [Lav00b]). Ce problème d'interpolation consiste donc à minimiser une fonction convexe non-linéaire. Il a alors proposé une résolution numérique utilisant un algorithme de complexité polynomiale. Nyiri, Gibaru et Auquier proposent de réduire cette complexité par une méthodologie d'interpolation par fenêtre glissante sur cinq points [NGA11]. Cet algorithme admet une complexité linéaire en le nombre des données. De plus, sur chaque fenêtre, le problème d'interpolation est résolu de manière exacte sauf dans un cas. Nous rappelons ici cet algorithme car nous étendons cette méthodologie au cas de l'approximation  $L_1$ . Une application à la robotique est également développée.

Nous étudions ensuite le problème d'approximation de fonctions et de données discrètes par splines de lissage et d'ajustement au sens de la norme  $L_1$ . Nous démontrons ici l'existence de telles splines. La première méthode [Lav00a] consiste à déterminer une spline minimisant une combinaison convexe de la fonctionnelle d'approximation et de la fonctionnelle utilisée pour l'interpolation  $L_1$ . Le paramètre de régularisation est difficile à fixer en général. C'est pourquoi, Lavery a introduit des splines d'ajustement [Lav04]. Celles-ci sont des meilleures approximations au sens de la norme  $L_1$  sur un ensemble de splines admissibles issu de la réunion de splines d'interpolation  $L_1$ . Cette méthode est très performante en terme de conservation de forme mais peut être "lente" et peu robuste lorsqu'elle est appliquée à un grand nombre de données. Une méthode locale a récemment été proposée dans [WLF14] mais elle semble introduire des oscillations de faible amplitude là où la méthode globale conservait les alignements. De plus, le gain en temps de calcul est peu significatif. C'est pourquoi, nous proposons dans ce mémoire une autre approche avec différentes méthodes par fenêtre glissante permettant de linéariser la complexité algorithmique. Nous déterminons celle qui semble conserver le mieux la forme des données.

## 1 Rappel sur l'interpolation $L_1$ par spline polynomiale

### 1.1 Cas de l'interpolation par spline cubique $C^2$

#### Existence, unicité et caractérisation

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction d'une variable réelle et une suite de  $m$  abscisses dans  $\mathbf{R}$  telles que  $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ . Posons  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ . Le problème d'interpolation de la fonction  $f$  aux abscisses  $\mathbf{x}$  par une spline cubique consiste à déterminer une fonction  $s$  de  $\mathcal{S}_{3,\mathbf{x}}$  qui vérifie :

$$s(x_k) = f(x_k), \quad \text{pour tout } k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.1)$$

Posons pour  $k = 1, 2, \dots, m$ ,  $f_k = f(x_k)$ . Nous rappelons que pour  $r \in \mathbf{N}^*$  :

$$\mathcal{S}_{r,\mathbf{x}} = \{s \in C^{r-1}[x_1, x_m], s|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \mathbf{P}_r[x_k, x_{k+1}], k = 1, 2, \dots, m\}.$$

Cet espace est de dimension  $m + 2$ . Les  $m$  équations (2.1) ne sont donc pas suffisantes pour garantir l'unicité de solution. Nous devons donc introduire deux équations supplémentaires et indépendantes des  $m$  premières. Un choix classique, mais bien sûr non-unique, est de fixer les dérivées premières au premier et au dernier point. Nous énonçons alors le résultat classique suivant (voir par exemple [DB01]).

**Théorème 2.1.** *Pour toute fonction  $f$  et tout  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \in \mathbf{R}^m$  tel que  $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ , il existe une spline  $s \in \mathcal{S}_{3,\mathbf{x}}$  vérifiant :*

$$s(x_k) = f_k, \quad \text{pour tout } k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.2)$$

De plus, si nous imposons  $s''(x_1) = s''(x_m) = 0$  alors  $s$  est unique et minimise la fonctionnelle :

$$\int_{x_1}^{x_m} (\gamma''(x))^2 dx,$$

sur l'ensemble des fonctions  $\gamma$  de régularité  $C^2$ , interpolant les  $f_k$  et vérifiant  $\gamma''(x_1) = \gamma''(x_m) = 0$ .

La méthode d'interpolation par spline cubique est donc une méthode de minimisation au sens de la norme  $L_2$ . Lavery appelle spline d'interpolation  $L_2$  la spline cubique d'Hermite qui minimise la norme  $L_2$  de la dérivée seconde [Lav00b]. Nous pouvons montrer que celle-ci coïncide avec la spline décrite dans le Théorème 2.1.

### Phénomène de Gibbs pour la fonction de Heaviside

Nous rappelons dans ce paragraphe le résultat principal obtenu par Zhang et Martin [ZM97] concernant l'existence et la caractérisation d'un phénomène de Gibbs pour l'interpolation par spline cubique de la fonction de Heaviside. Ils établissent de plus que le phénomène de Gibbs persiste quand le nombre de nœuds de la spline tend vers l'infini.

**Théorème 2.2.** *Soient  $H$  la fonction de Heaviside et  $\mathbf{x}_m = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ,  $m \in \mathbf{N}^*$ , une subdivision uniforme de l'intervalle  $[-1, 1]$ . Alors la spline cubique d'interpolation de  $H$  aux nœuds  $\mathbf{x}_m$  converge en norme  $L_p$  ( $1 \leq p < +\infty$ ) vers  $H$  quand  $m$  tend vers l'infini. Cependant, elle ne converge pas vers  $H$  en norme  $L_\infty$  et oscille autour de la discontinuité. De plus, l'amplitude des oscillations est bornée indépendamment de  $m$  et décroît exponentiellement à partir de la discontinuité.*

Nous illustrons ce résultat sur la Figure 2.1 pour différents choix du nombre de nœuds. Le Théorème 2.1 affirme que la méthode d'interpolation par spline cubique est une méthode de minimisation au sens de la norme  $L_2$ . Le Théorème 2.2 montre que des oscillations sont présentes au niveau de la discontinuité lorsque nous utilisons cette norme. C'est la raison

pour laquelle Lavery a remplacé les splines d'interpolation  $L_2$  par les splines d'interpolation  $L_1$ , auxquelles le paragraphe suivant est consacré.

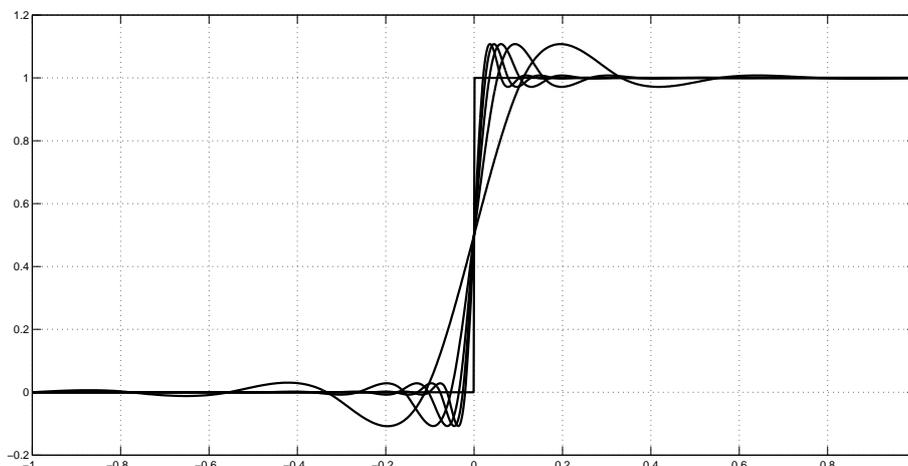


FIGURE 2.1 – Interpolation de la fonction de Heaviside par splines cubiques d'interpolation  $L_2$  avec  $n$  nœuds équirépartis sur  $[-1, 1]$ ,  $n = 10, 20, 30, 40, 50$ .

## 1.2 Interpolation par spline $L_1$

### 1.2.1 Interpolation $L_1$ par spline cubique d'Hermite

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, il existe une unique spline de  $\mathcal{S}_{3,\mathbf{x}}$  interpolant une fonction  $f$  aux nœuds  $\mathbf{x}$  à condition que les valeurs de la dérivée première au premier et au dernier nœuds soient fixées<sup>1</sup>. Nous allons donc relaxer la régularité des splines. Nous utilisons les splines de  $\tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}$  introduites au chapitre 1, page 30. Avec les notations précédentes, nous cherchons donc une spline de  $\tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}$  solution du problème suivant :

$$\inf \left\{ \int_{x_1}^{x_m} |s''(x)| dx, s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}, s(x_k) = f_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \right\} \quad (2.3)$$

Les splines de  $\tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}$  sont  $C^1$  mais bien sûr  $C^\infty$  sur chaque intervalle  $]x_i, x_{i+1}[$ . Ceci justifie l'intégrale ci-dessus. Notons que sans les conditions d'interpolation, la fonctionnelle  $s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}} \mapsto \int_{x_1}^{x_m} |s''(x)| dx$  atteint son minimum pour toute fonction  $s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}$  telle que  $s'' = 0$ . Par double intégration, ceci signifie que  $s$  est affine par morceau et comme  $s$  est  $C^1$ , alors  $s$  est une fonction affine. Nous rappelons le théorème d'existence des splines d'interpolation  $L_1$  issu de [Lav00b].

1. Nous pouvons également par exemple fixer les valeurs de la dérivée première au premier et au dernier nœuds pour obtenir l'unicité.

**Théorème 2.3.** *Pour toute fonction  $f$  d'une variable réelle et tout  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  tel que  $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ , il existe une spline d'interpolation de  $f$  dans  $\tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}$  qui minimise :*

$$\int_{x_1}^{x_m} |s''(x)| dx,$$

sur l'ensemble des splines d'interpolation de  $f$  dans  $\tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}$ .

*Démonstration.* La fonctionnelle (2.3) est continue et convexe. De plus, le problème d'interpolation par spline  $L_1$  dans  $\tilde{\mathcal{S}}_1$  consiste à trouver  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbf{R}^m$  qui minimise :

$$\sum_{k=1}^{m-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_{k+1} - b_k + 6t(b_{k+1} + b_k - 2\Delta f_k)| dt.$$

Par le Lemme 3.2, page 89, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_{k+1} - b_k + 6t(b_{k+1} + b_k - 2t\Delta f_k)| dt &\geq \frac{1}{3} |b_{k+1} - b_k - (b_{k+1} + b_k - 2t\Delta f_k)|, \\ &\geq \frac{2}{3} |b_k + \Delta f_k|. \end{aligned}$$

La fonctionnelle (2.3) tend donc vers l'infini quand la norme du vecteur des dérivées tend vers l'infini. Ceci garantit l'existence des splines d'interpolation  $L_1$ .  $\square$

*Remarque.* La fonctionnelle (2.3) étant convexe, elle n'admet que des minima globaux. De plus, les vecteurs dérivés solution du problème d'interpolation  $L_1$  appartiennent donc à une union d'intervalles réels fermés.

**Interpolation de la fonction de Heaviside** Dans ce paragraphe, nous comparons le résultat suivant issu de [AGN07b] avec le Théorème 2.2, page 47. Il est illustré sur la Figure 2.2.

**Théorème 2.4.** *Soient  $H$  la fonction de Heaviside et  $\mathbf{x}_m = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  une subdivision uniforme de l'intervalle  $[-1, 1]$  où  $m$  est un entier pair supérieur ou égal à six. Alors il existe une unique spline d'interpolation  $L_1$  de la fonction de Heaviside dans  $\tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}_m}$ . Elle coïncide avec  $H$  sauf sur l'intervalle  $[x_k, x_{k+1}]$  pour  $k$  tel que  $x_k < 0 \leq x_{k+1}$ . Elle converge en norme  $L_p$  ( $1 \leq p < +\infty$ ) vers  $H$  quand  $m$  tend vers l'infini. De plus pour tout  $\varepsilon > 0$ , elle converge uniformément vers la fonction de Heaviside sur  $[-1, \varepsilon[\cup]\varepsilon, 1]$ .*

Autrement dit, contrairement à la spline cubique d'interpolation  $L_2$ , nous n'observons pas de phénomène de Gibbs pour la spline cubique d'interpolation  $L_1$  de la fonction de Heaviside. Ceci justifie l'intérêt de l'utilisation de la norme  $L_1$  pour la modélisation géométrique.

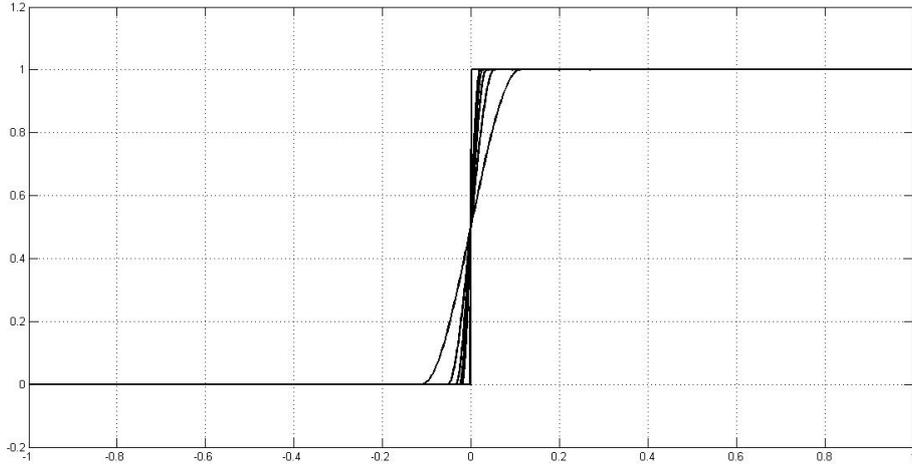


FIGURE 2.2 – Interpolation  $L_1$  de la fonction de Heaviside par splines cubiques d'Hermite avec  $n$  nœuds équirépartis sur  $[-1, 1]$ ,  $n = 10, 20, 30, 40, 50$ .

**Résolution du problème sur cinq points** Dans [Auq07, NGA11, JLF10], les auteurs ont présenté de nombreux résultats concernant la résolution formelle du problème (2.3) pour un nombre de points allant de deux à cinq points. Au-delà, la complexité du problème est telle que nous ne savons pas en général déterminer de manière formelle une solution. Nous résumons donc dans cette partie un résultat qui sera utilisé dans les algorithmes présentés au paragraphe 1.4.2 et au chapitre suivant. Il établit les solutions du problème d'interpolation sur cinq points quelconques. Pour cela, nous récrivons le problème (2.3). Sur chaque intervalle  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , une spline  $s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}$  est définie comme suit :

$$s(x) = q_k + b_k(x - x_k) + \frac{1}{h_k}(3\Delta q_k - 2b_k - b_{k+1})(x - x_k)^2 + \frac{1}{h_k^2}(b_k + b_{k+1} - 2\Delta q_k)(x - x_k)^3, \quad (2.4)$$

où  $q_k = s(x_k)$ ,  $b_k = s'(x_k)$  pour  $k = 1, 2, \dots, 5$ ,  $h_k = x_{k+1} - x_k$ ,  $\Delta q_k = \frac{q_{k+1} - q_k}{h_k}$  pour  $k = 1, 2, \dots, 5$ . La dérivée seconde de  $s$  sur  $]x_k, x_{k+1}[$ ,  $k = 1, \dots, 4$  s'exprime comme suit :

$$s''(x) = \frac{b_{k+1} - b_k}{h_k} + \frac{6}{h_k^2} \left( x - x_k - \frac{h_k}{2} \right) (b_k + b_{k+1} - 2\Delta q_k). \quad (2.5)$$

Par un changement de variable, le problème :

$$\inf \left\{ \int_{x_1}^{x_5} |s''(x)| dx, s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}, s(x_k) = f_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \right\}$$

est alors équivalent sur cinq points à :

$$\min_{\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \mathbf{R}^5} \sum_{i=1}^4 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_{i+1} - b_i + 6t(b_i + b_{i+1} - 2\Delta f_i)| dt. \quad (2.6)$$

En posant  $x = b_i - \Delta f_i$  et  $y = b_{i+1} - \Delta f_i$ , chaque intégrale dans la somme est une fonction du type :

$$S : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |(y - x) + 6t(x + y)| dt.$$

Dans [Auq07, AGN07b], nous trouvons le résultat suivant dont nous rappelons la démonstration en Annexe A, page 131.

**Lemme 2.5.** *La fonction  $S : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |(y - x) + 6t(x + y)| dt$  est continue et convexe. Elle vérifie pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  :*

$$S(x, y) = \begin{cases} |y - x| & \text{si } |y - x| \geq 3|x + y|, \\ \frac{3}{2}|x + y| + \frac{(y-x)^2}{6|x+y|} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.7)$$

De plus,

- $\min_{x \in \mathbf{R}} S(x, y) = \frac{2(\sqrt{10} - 1)}{3}|y|$  est obtenu pour  $x = \left(\frac{2-\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\right)y$ .
- $\min_{y \in \mathbf{R}} S(x, y) = \frac{2(\sqrt{10} - 1)}{3}|x|$  est obtenu pour  $y = \left(\frac{2-\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\right)x$ .
- $\min_{(x,y) \in \mathbf{R}^2} S(x, y) = 0$  est obtenu pour  $x = y = 0$ .

Le problème (2.3) peut alors se récrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \min_{b \in \mathbf{R}^5} \sum_{k=1}^4 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_{k+1} - b_k + 6t(b_k + b_{k+1} - 2\Delta f_k)| dt \\ &= \min_{b_3 \in \mathbf{R}} \left\{ \min_{(b_1, b_2) \in \mathbf{R}^2} \sum_{k=1}^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_{k+1} - b_k + 6t(b_k + b_{k+1} - 2\Delta f_k)| dt \right. \\ & \quad \left. + \min_{(b_1, b_2) \in \mathbf{R}^2} \sum_{k=1}^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_{k+1} - b_k + 6t(b_k + b_{k+1} - 2\Delta f_k)| dt \right\}, \\ &= \min_{b_3 \in \mathbf{R}} \left\{ \min_{b_2 \in \mathbf{R}} \left( \frac{2(\sqrt{10} - 1)}{3} |b_2 - \Delta f_1| + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_3 - b_2 + 6t(b_2 + b_3 - 2\Delta f_2)| dt \right) \right. \\ & \quad \left. + \min_{b_4 \in \mathbf{R}} \left( \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_4 - b_3 + 6t(b_3 + b_4 - 2\Delta f_3)| dt + \frac{2(\sqrt{10} - 1)}{3} |b_4 - \Delta f_4| \right) \right\}. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors deux sous-problèmes sur trois points de part et d'autre du troisième point. Le lemme suivant, issu de [NGA11] et dont une démonstration est rappelée en Annexe A, page 133, permet de résoudre ces deux sous-problèmes.

**Lemme 2.6.** *Soient  $x_1 < x_2 < x_3$  trois réels quelconques et une fonction  $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ . Posons  $f_k = f(x_k)$  pour  $k = 1, 2, 3$  et  $\Delta f_k = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k}$  pour  $k = 1, 2$ . Soit enfin  $b_1 \in \mathbf{R}$ . Le problème de minimisation :*

$$\min_{(b_2, b_3) \in \mathbf{R}^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_2 - b_1 + 6t(b_2 + b_1 - 2\Delta f_1)| dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_3 - b_2 + 6t(b_3 + b_2 - 2\Delta f_2)| dt \quad (2.8)$$

admet pour unique solution le couple  $(b_2^*, b_3^*)$  défini comme suit :

1. Si  $b_1$  est compris entre  $\Delta f_1 + \frac{\sqrt{10}+1}{3}(\Delta f_2 - \Delta f_1)$  et  $\Delta f_1$  alors :

$$b_2^* = \Delta f_1 + \frac{\sqrt{10}-1}{3}(b_1 - \Delta f_1), \quad b_3^* = \Delta f_2 + \frac{\sqrt{10}-5}{5}(\Delta f_1 - \Delta f_2) + \frac{5-2\sqrt{10}}{5}(b_1 - \Delta f_1).$$

2. Si  $b_1$  est compris entre  $\Delta f_1$  et  $\Delta f_1 + \frac{\sqrt{10}-5}{5}(\Delta f_2 - \Delta f_1)$  alors :

$$b_2^* = \Delta f_1 - \frac{5+\sqrt{10}}{3}(b_1 - \Delta f_1), \quad b_3^* = \Delta f_2 + \frac{\sqrt{10}-5}{5}(\Delta f_1 - \Delta f_2) + (b_1 - \Delta f_1)$$

3. Sinon  $b_2^* = b_3^* = \Delta f_2$ .

La résolution de ce problème sur trois permet la résolution sur cinq points en déterminant la dérivée de la spline au troisième nœud<sup>2</sup> par une étude de cas sur le signe des  $\Delta f_{i+1} - \Delta f_i$ . Il y a en tout vingt-sept cas possibles dont certains sont symétriques. Énoncer ces cas et les solutions est relativement lourd. Le théorème en Annexe A, page 136 rappelle ces résultats. Sa démonstration est donnée dans [JLF10]. Une interprétation de ce résultat est cependant présentée dans la Table 2.1 issue de [JLF10]. Nous précisons si les solutions obtenues possèdent certaines propriétés de forme : conservation des alignements, de la convexité/concavité et la présence ou non d'oscillations. Les résultats de la case alignement n'ont d'intérêt que lorsqu'il existe un alignement dans les données. Dans chaque cas ayant au moins un  $\Delta f_{k+1} - \Delta f_k$  nul, nous constatons que nous conservons l'alignement. Nous observons que quinze cas sur vingt-sept conservent la convexité. Bien que ce soit la majorité des cas, nous ne saurions conclure quant à la qualité de la méthode à ce sujet. Enfin, nous observons que vingt-cinq cas sur vingt-sept ne présentent pas d'oscillations. Les deux cas concernés par les oscillations sont les configurations en forme de "M" et de "W". Il est alors naturel, pour ces cas, d'observer un tel phénomène.

Un résultat similaire existe pour la résolution du problème suivant sur cinq points :

$$\inf \left\{ \int_{x_1}^{x_m} |s'(x)| dx, \quad s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,x}, \quad s(x_k) = f_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \right\}. \quad (2.9)$$

Nous ne détaillons pas cette méthode ni ce résultat et nous renvoyons le lecteur intéressé à [JYLF11].

### 1.2.2 Interpolation $L_1$ par spline quintique d'Hermite

Pour les applications à la planification de trajectoire de systèmes mécaniques, la régularité  $C^1$  des splines cubiques d'Hermite n'est pas suffisante. La continuité de la courbure est le minimum requis pour ces applications. Nous allons donc nous intéresser au problème d'interpolation  $L_1$  par des splines quintiques  $C^2$ , autrement dit des splines de

2. Les autres dérivées sont données dans le Lemme 2.6.

Cas	$\Delta f_2 - \Delta f_1$	$\Delta f_3 - \Delta f_2$	$\Delta f_4 - \Delta f_3$	=	Alignement	Convexité	Oscillation
1	0	0	0		Oui	Oui	Non
2	0	0	+		Oui	Oui	Non
3	0	0	-	2	Oui	Oui	Non
4	0	+	0		Oui	Oui	Non
5	0	+	+		Oui	Oui	Non
6	0	+	-		Oui	Non	Non
7	0	-	0	4	Oui	Oui	Non
8	0	-	+	6	Oui	Non	Non
9	0	-	-	5	Oui	Oui	Non
10	+	0	0	2	Oui	Oui	Non
11	+	0	+		Oui	Oui	Non
12	+	0	-		Oui	Non	Non
13	+	+	0	5	Oui	Oui	Non
14	+	+	+		Non	Oui	Non
15	+	+	-		Non	Non	Non
16	+	-	0	6	Oui	Non	Non
17	+	-	+		Non	Non	Oui
18	+	-	-	15	Non	Non	Non
19	-	0	0	2	Oui	Oui	Non
20	-	0	+	12	Oui	Non	Non
21	-	0	-	11	Oui	Oui	Non
22	-	+	0	6	Oui	Non	Non
23	-	+	+	15	Non	Non	Non
24	-	+	-	17	Non	Non	Oui
25	-	-	0	5	Oui	Oui	Non
26	-	-	+	15	Non	Non	Non
27	-	-	-	14	Non	Oui	Non

TABLE 2.1 – Vingt-sept cas pour le problème sur cinq points quelconques.

$\tilde{\mathcal{S}}_{2,\mathbf{x}}$ . Étant donnée  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \in \mathbf{R}^m$ , nous cherchons à résoudre le problème suivant :

$$\inf \left\{ \int_{x_1}^{x_m} |s''(x)| dx, s \in \tilde{\mathcal{S}}_{2,\mathbf{x}}, s(x_k) = f_k, k = 1, 2, \dots, m \right\}. \quad (2.10)$$

Dans [Auc07], Auquier démontre qu'une solution de ce problème existe. Une spline  $s \in \tilde{\mathcal{S}}_{2,\mathbf{x}}$  s'exprime sur chaque intervalle  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = 1, \dots, m - 1$  comme suit :

$$\begin{aligned} s(x) = & q_k + (x - x_k)b_k + \frac{(x - x_k)^2}{2}m_i + \frac{(x - x_k)^3}{h_k^2} \left( 10\Delta q_k - 6b_k - 4b_{k+1} + \frac{h_k}{2}(c_{k+1} - 3c_k) \right) \\ & + \frac{(x - x_k)^4}{h_k^3} \left( -15\Delta q_k + 8b_k + 7b_{k+1} + \frac{h_k}{2}(3c_k - 2c_{k+1}) \right) \\ & + \frac{(x - x_k)^5}{h_k^4} \left( 6\Delta q_k - 3b_k - 3b_{k+1} + \frac{h_k}{2}(c_{k+1} - c_k) \right), \end{aligned} \quad (2.11)$$

où  $q_k = s(x_k)$ ,  $b_k = s'(x_k)$ ,  $c_k = s''(x_k)$  pour  $k = 1, 2, \dots, m$ ,  $h_k = x_{k+1} - x_k$ ,  $\Delta q_k = \frac{q_{k+1} - q_k}{h_k}$  pour  $k = 1, 2, \dots, m - 1$ . Nous exprimons alors la dérivée seconde d'une spline  $s \in \tilde{\mathcal{S}}_{2,x}$  sur chaque intervalle  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m - 1$  :

$$\begin{aligned} s''(x) = & c_k + \frac{(x - x_k)}{h_k^2} (60\Delta f_k - 36b_k - 24b_{k+1} + 3h_k(c_{k+1} - 3c_k)) \\ & + \frac{(x - x_k)^2}{h_k^3} (-180\Delta f_k + 96b_k + 84b_{k+1} + 6h_k(3c_k - 2c_{k+1})) \\ & + \frac{(x - x_k)^3}{h_k^4} (120\Delta f_k - 60b_k - 60b_{k+1} + 10h_k(c_{k+1} - c_k)). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le problème (2.10) revient donc au problème suivant :

$$\min_{(\mathbf{b}, \mathbf{m}) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m} \sum_{k=1}^{m-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| \begin{array}{l} \left(\frac{3}{2} + 15t - 6t^2 - 60t^3\right) b_{k+1} + \left(-\frac{3}{2} + 15t + 6t^2 - 60t^3\right) b_k \\ + \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{2}t + 3t^2 + 10t^3\right) h_k c_{k+1} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}t + 3t^2 - 10t^3\right) c_k h_k \\ + (-30t + 120t^3) \Delta q_k \end{array} \right| dt. \quad (2.13)$$

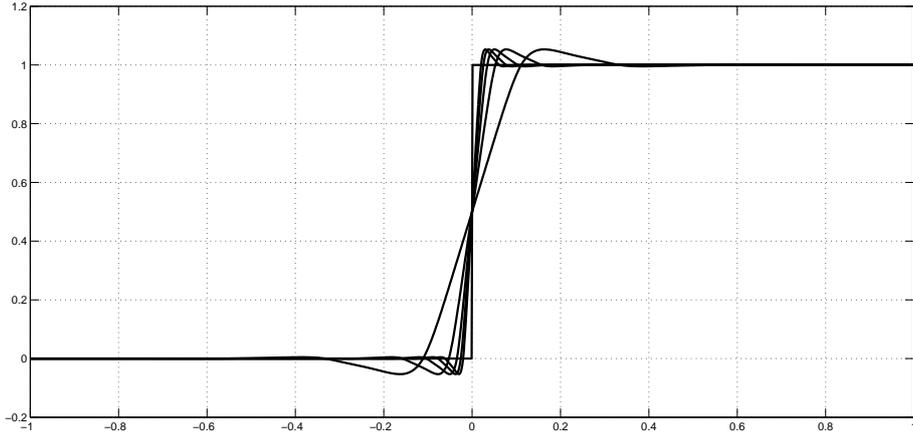


FIGURE 2.3 – Interpolation  $L_1$  de la fonction de Heaviside par splines quintiques d'Hermite avec  $n$  nœuds équirépartis sur  $[-1, 1]$ ,  $n = 10, 20, 30, 40, 50$ .

En pratique, ce problème est discrétisé par la méthode d'intégration numérique basée sur la formule du point milieu. Il est ensuite résolu numériquement par un algorithme de type point intérieur comme celui présenté plus loin dans l'Algorithme 1, page 57. Cette méthode est appliquée sur la Figure 2.3 à la fonction de Heaviside avec divers choix du nombre de nœuds. Nous nous apercevons, que quel que soit le nombre de nœuds, il existe un phénomène de Gibbs pour chaque solution d'interpolation.

### 1.3 Interpolation par spline cubique paramétrique $L_1$

Nous considérons maintenant le problème d'interpolation d'une fonction paramétrique  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ . Nous nous donnons donc des points de  $\mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{f} = \{f_k = (f_{k,1}, f_{k,2}), k =$

$1, \dots, m\}$ . Nous cherchons une spline paramétrique  $s = (s_1, s_2)$  qui interpole les points  $f_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ . La première étape de la méthode consiste à attribuer à chaque point  $f_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  un paramètre  $u_k \in [0, 1]$ . Alors les conditions d'interpolation s'écrivent :

$$s(u_k) = f_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.14)$$

Pour cela, nous utilisons une subdivision cordale des abscisses (voir Hoschek, Lasser et Schumaker [HLS93], page 201). Contrairement à la subdivision uniforme, elle tient compte de la distance entre les différents points et donc de la forme des données. Les nœuds  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$  sont définis comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ u_{k+1} = u_k + \frac{\|\overrightarrow{f_k f_{k+1}}\|_2}{L}, \quad k = 1, \dots, m-1, \end{cases} \quad (2.15)$$

où  $L = \sum_{k=1}^{m-1} \|\overrightarrow{f_k f_{k+1}}\|_2$  est la longueur de la ligne polygonale de sommets  $f_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

Le problème d'interpolation  $L_1$  par une spline cubique paramétrique de nœuds  $\mathbf{u}$  est donc défini par :

$$\inf \left\{ \int_0^1 \|s''(u)\|_1 \, du, \quad s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{u}} \times \tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{u}}, \quad s(u_k) = f_k, \quad k = 1, \dots, m \right\} \quad (2.16)$$

Le terme dans (2.16) peut se décomposer comme suit :

$$\int_0^1 |s_1(u)| \, du + \int_0^1 |s_2(u)| \, du.$$

En intégrant les contraintes d'interpolation dans la fonctionnelle (2.16), le problème d'interpolation (2.16) revient à minimiser sur les  $b_k = (b_{k,1}, b_{k,2}) \in \mathbf{R}^2$ , vecteurs dérivées aux points  $f_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{m-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_{k+1,1} - b_{k,1} + 6t(b_{k+1,1} + b_{k,1} - 2\Delta f_{k,1})| \, dt \\ & + \sum_{k=1}^{m-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_{k+1,2} - b_{k,2} + 6t(b_{k+1,2} + b_{k,2} - 2\Delta f_{k,2})| \, dt. \end{aligned}$$

Les deux termes sont indépendants. Nous pouvons donc les minimiser indépendamment. Nous nous ramenons donc au problème d'interpolation non-paramétrique décrit au paragraphe 1.2.1.

## 1.4 Algorithme par fenêtre glissante pour l'interpolation spline $L_1$

Dans ce paragraphe, après avoir évoqué les méthodes globales de résolution du problème d'interpolation spline  $L_1$ , nous présentons des algorithmes par fenêtre glissante. Ces algorithmes ont été pour la première fois utilisés pour le problème d'interpolation par une spline  $L_1$  (voir [NGA11]) dans le but d'obtenir un algorithme de complexité linéaire en le nombre de données. Nous utiliserons également ce principe pour les méthodes d'approximation proposées dans ce mémoire.

### 1.4.1 Méthode globale de résolution

La fonctionnelle dans (2.3) n'est pas strictement convexe, nous ne garantissons donc pas en général l'unicité du minimum. Lavery propose donc d'ajouter un terme de régularisation permettant de favoriser une solution<sup>3</sup>. Le problème de minimisation dans le cas non-paramétrique devient alors :

$$\min_{\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m} \sum_{k=1}^{m-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_{k+1} - b_k + 6t(b_{k+1} + b_k - 2\Delta f_k)| dt + \varepsilon \sum_{k=1}^m |b_k|, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.17)$$

Ce problème est non linéaire. Une solution formelle n'a pu être déterminée. Nous le traitons donc numériquement. Posons :

$$G : \mathbf{b} \in \mathbf{R}^m \mapsto \sum_{k=1}^{m-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_{k+1} - b_k + 6t(b_{k+1} + b_k - 2\Delta f_k)| dt + \varepsilon \sum_{k=1}^m |b_k|.$$

Nous divisons chaque intervalle d'intégration en  $l$  intervalles de même longueur et appliquons la formule du point milieu. Nous obtenons alors une formulation discrétisée de la fonctionnelle  $G(\mathbf{b})$  :

$$\tilde{G}(\mathbf{b}) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{l-1} |\alpha_j b_k + \beta_j b_{k+1} - \eta_j \Delta f_k| + \varepsilon \sum_{k=1}^m |b_k|, \quad (2.18)$$

où pour  $j \in \{0, \dots, l-1\}$  :

$$\alpha_j = \frac{-4l + 6j + 3}{l^2}, \quad \beta_j = \frac{-2l + 6j + 3}{l^2}, \quad \eta_j = \frac{-6l + 12j + 6}{l^2}.$$

Sous forme matricielle, nous avons :

$$\tilde{G}(\mathbf{b}) = \|A \cdot \mathbf{b}^T - C\|_1$$

---

3. Pour autant, nous ne pouvons toujours pas garantir l'unicité.

où :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \alpha & \beta \\ \varepsilon & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varepsilon \end{pmatrix}}_{(m-1)l+m \text{ lignes, } m \text{ colonnes}} \quad \text{et} \quad C_k = \underbrace{\begin{pmatrix} \eta\Delta f_1 \\ \eta\Delta f_2 \\ \cdot \\ \eta\Delta f_m \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}}_{(m-1)l+m \text{ lignes, } 1 \text{ colonne}}, \quad (2.19)$$

et :

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{l-1} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{l-1} \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{l-1} \end{pmatrix}.$$

Pour résoudre ce problème, nous pouvons utiliser l'algorithme *Primal Affine* ([Van89] et rappelé dans l'Algorithme 1) ou *Primal Dual* (voir par exemple [BV04], paragraphe 11.7). Avec une méthode de type *active set* [CFL04], nous pouvons obtenir une complexité  $\mathcal{O}(m)$ . Cependant, ces méthodes globales peuvent introduire des problèmes numériques sur de grands jeux de données. C'est pourquoi, nous rappelons dans le paragraphe suivant une alternative issue de [NGA11].

**Étape 0.**  $k = 0$ ,  $\mathbf{b} = 0$ ,  $\bar{w} = 0$ ,  $k_{\max} = ?$ ,  $\rho = ?$ .

**Étape 1.**  $k = k + 1$ .

**Étape 2.** Pour  $i = 1, \dots$ , nombre de lignes de  $A$ ,  $d_i = 1 - |w_i|$ .

**Étape 3.** Calculer la solution  $\mathbf{b}_1$  de  $A^\top D^2 A \beta = A^\top D^2 C$

**Étape 4.** Si  $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}_1\| < \rho$  alors  $flag = 1$ , sinon  $flag = 0$ .

**Étape 5.**  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1$ .

**Étape 6.** Si  $k < k_{\max}$  et  $flag = 0$  alors (8), sinon *STOP*.

**Étape 7.**  $r = C - A\mathbf{b}$  (résidu).

**Étape 8.**  $p = D^2 r$ .

**Étape 9.**  $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \max \left( \frac{p_i}{1 - \bar{w}_i}, \frac{-p_i}{1 + \bar{w}_i} \right) \right)$ .

**Étape 10.**  $\bar{w} = \bar{w} + \left(\frac{2}{3}\alpha\right) p$ .

**Étape 11.** aller en **Étape 2**..

**Algorithme 1 :** Algorithme *Primal Affine*.

#### 1.4.2 Méthode locale de résolution par fenêtre glissante

Nyiri, Gibaru et Auquier ont introduit en 2011 une méthode locale d'interpolation par fenêtre glissante sur cinq points (voir Figure 2.4 et [NGA11]). Sur chaque fenêtre,

ils résolvent le problème d'interpolation et ne conservent qu'une valeur de la dérivée au point central de la fenêtre. En faisant glisser la fenêtre le long des données, ils récupèrent ainsi toutes les informations nécessaires pour déterminer une spline globale d'interpolation.

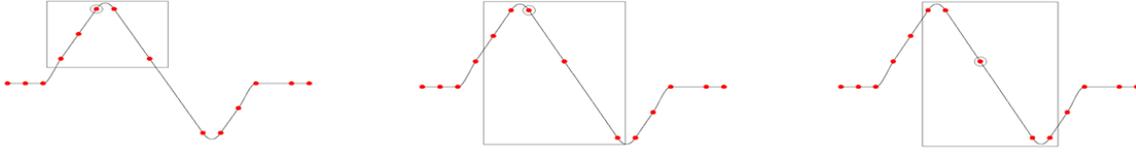


FIGURE 2.4 – Illustration de la méthode de la fenêtre glissante sur cinq points.

**Interpolation  $L_1$  par une spline cubique d'Hermite** Dans la méthode d'interpolation  $L_1$  par une spline cubique d'Hermite, nous résolvons une suite de problèmes (2.6) dont nous connaissons les solutions formellement grâce au Théorème A.2, page 136. Sur chaque fenêtre, nous ne conservons que la dérivée  $b_3^*$  calculée (ou choisie de manière adéquate dans l'ensemble de solutions en cas de non-unicité) au troisième point de la fenêtre sauf sur la première et la dernière fenêtre. Dans ces cas, nous conservons respectivement les dérivées aux trois premiers points et trois derniers points. Ainsi, pour  $m$  points fixés à interpoler, nous obtenons  $m$  informations supplémentaires. Nous avons donc fixé  $2m$  paramètres. Or, c'est la dimension de  $\tilde{\mathcal{S}}_{1,x}$ . Nous définissons donc bien par cette méthode une spline cubique d'Hermite qui interpole les données.

La méthode par fenêtre glissante sur cinq points, comme la méthode globale, conserve les alignements. Nous n'observons pas de phénomène de suroscillation lors de changements brusques de la forme des données. Ceci est illustré sur la Figure 2.5 où nous avons appliqué les méthodes globales et locales dans le cas paramétrique. Nous rappelons que, grâce aux arguments évoqués au paragraphe 1.3, nous obtenons une spline paramétrique en appliquant la méthode d'interpolation dans les directions  $x$  et  $y$ . Pour la méthode globale, la gestion de la non-unicité se fait par l'introduction d'un terme de régularisation de type  $\sum_{i=1}^n |b_i|$  qui complexifie le problème d'optimisation. Dans le cas de la méthode locale, nous sélectionnons sur chaque fenêtre une solution adéquate. Sur chaque fenêtre, parmi l'ensemble des solutions, nous pouvons choisir la dérivée au point central la plus proche de zéro (voir la Figure 2.5.c). Un autre choix classique est de sélectionner sur chaque fenêtre la dérivée au point central la plus proche de la moyenne des deux pentes adjacentes (voir la Figure 2.5.d). Ceci est possible grâce à la résolution formelle du problème (2.6). Certains choix peuvent être inadéquats. Par exemple, sélectionner la dérivée au point central la plus grande possible ne donne pas des résultats visuellement satisfaisants. Enfin, cette méthode a l'avantage d'avoir une complexité algorithmique linéaire en le nombre des données. De plus, la résolution du problème (2.6) sur chaque fenêtre est indépendante. La méthode peut donc être parallélisée.

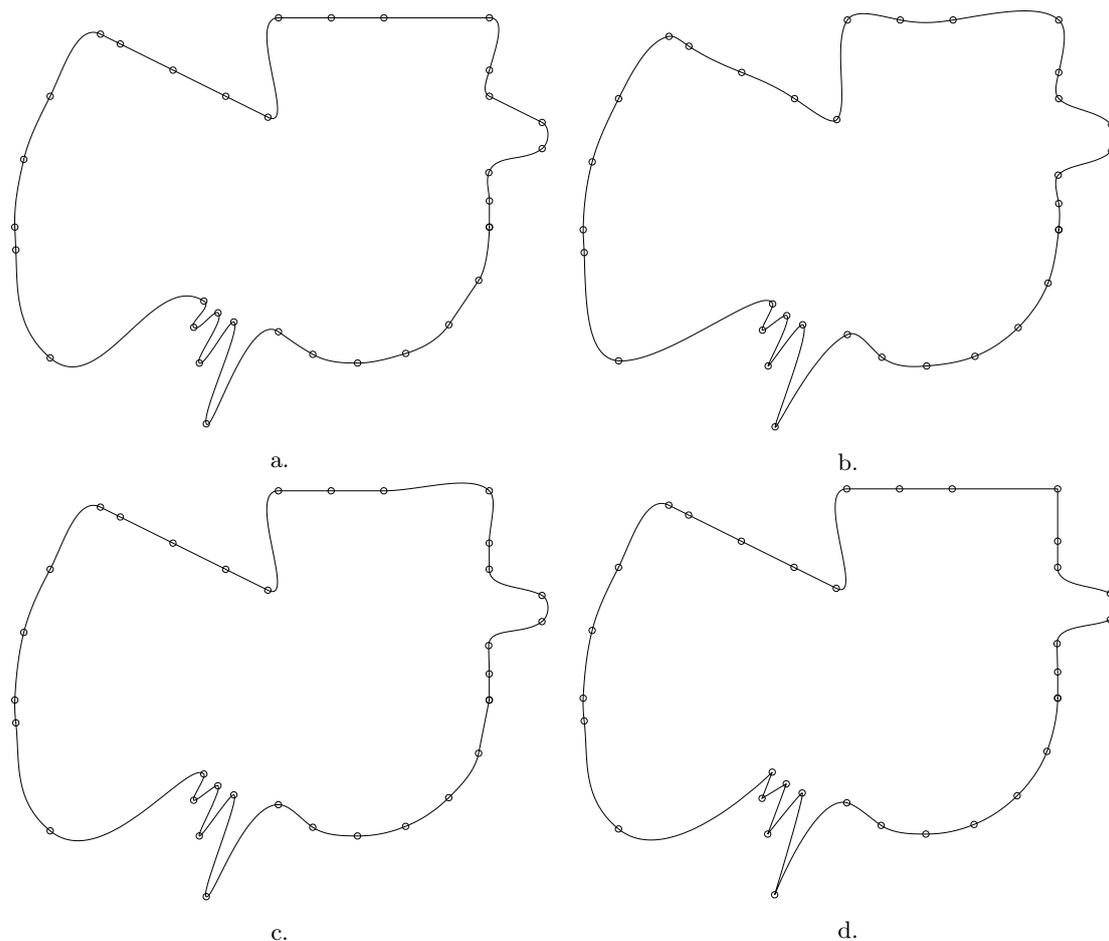


FIGURE 2.5 – Méthode globale d'interpolation spline cubique  $L_1$  (a.),  $L_2$  (b.) et deux solutions obtenues par la méthode locale (c. et d.).

**Interpolation  $L_1$  par spline d'Hermite de degré  $k$**  Nous pouvons envisager une méthode similaire à celle du paragraphe précédent pour des splines d'Hermite de plus haut degré. Cependant, nous ne possédons pas de résultats sur la résolution formelle du problème d'interpolation pour de telles splines. Sur chaque fenêtre, nous devons donc effectuer une résolution numérique. Une autre méthode utilisant la résolution du problème (2.6), donc formelle, a été privilégiée et proposée dans [NGA11]. Elle consiste à appliquer itérativement la méthode présentée dans le paragraphe précédent. Par exemple, pour une spline quintique, nous appliquons une première fois la méthode d'interpolation par spline cubique  $L_1$ . Nous obtenons une suite de dérivées premières. Nous considérons maintenant ces dérivées premières comme des points de données. Nous les interpolons par la méthode d'interpolation par spline cubique  $L_1$ . Nous utilisons les résultats de cette deuxième itération comme dérivées secondes pour la spline quintique. La méthode générale pour une spline d'Hermite de degré  $k$  est présentée dans l'Algorithme 2.

Sur la Figure 2.6, nous illustrons une application des méthodes globale et locale. Nous observons que les alignements sont conservés pour les deux méthodes. Contrairement à la

```

Data :  $(x_k, f_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ ,  $r$  l'ordre de la spline d'Hermite.
for  $i \Rightarrow 2r + 1$  do
  for  $j = 1 \rightarrow m$  do
    Fixer  $b_j^{(i)}$ , la dérivée  $i^{\text{ème}}$  de la spline d'Hermite en  $x_j$ , par la méthode
    d'interpolation  $L_1$  par spline d'Hermite cubique avec fenêtre glissante sur
    cinq points.
  end
end

```

**Algorithme 2** : Méthode itérative par fenêtre glissante pour l'interpolation par spline dans  $\tilde{\mathcal{S}}_r$ .

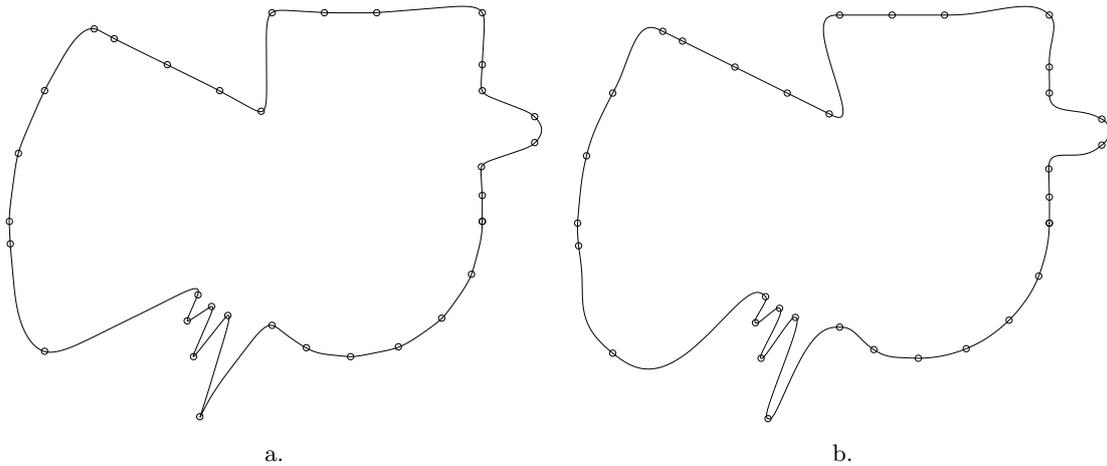


FIGURE 2.6 – Méthode globale d'interpolation spline quintique  $L_1$  (a.), et par la méthode locale (b.).

méthode globale, nous pouvons utiliser la méthode locale pour des applications temps réel comme celle présentée dans le paragraphe suivant.

## 1.5 Application à la robotique collaborative

Dans ce paragraphe, nous présentons une application des splines d'interpolation  $L_1$  à la robotique collaborative. Afin d'accroître leur compétitivité, les entreprises ont de plus en plus recours à des systèmes robotisés pour réaliser des tâches complexes. Un enjeu majeur concerne la co-activité des robots utilisés avec l'homme. Nous proposons dans [HBG<sup>+</sup>13] un premier travail d'apprentissage, par un système robotisé, de la gestuelle d'un opérateur. L'objectif est de reproduire des tâches complexes en 3D sans contraintes pour l'opérateur. Cette interaction, via un système de vision low-cost appelé *Leap Motion*, permet d'engendrer un nuage de points et de directions très précises. Les caractéristiques de ce petit périphérique de huit centimètres par trois centimètres en font un appareil très intéressant pour la capture précise des mouvements des doigts. À ce stade des développements, ce périphérique est capable de mesurer à la fois la position et l'orientation dans l'espace de doigts, bâtons ou stylos.

FIGURE 2.7 – Le système de vision *Leap Motion*.

La Figure 2.10 illustre un mouvement d'écriture simple mesuré en 3D par le *Leap Motion*. Le protocole d'acquisition actuel ne permet pas d'assurer un échantillonnage temporel constant. Ainsi, même à vitesse quasi-constante, certaines zones sont dépourvues de points de mesure suite à un geste un peu rapide du doigt par exemple. Afin de permettre la reproduction du mouvement par un système industriel (voir Figure 2.8), il est indispensable d'interpoler les données mesurées en garantissant la meilleure conservation possible de la trajectoire initialement décrite. Nous proposons donc d'exploiter les splines d'interpolation  $L_1$  quintiques  $C^2$  pour effectuer ceci. La Figure 2.9 montre que la spline d'interpolation  $L_1$  présente moins d'oscillations que la spline d'interpolation  $L_2$  dans le cas où les données varient avec de fortes amplitudes au centre. Les splines d'interpolation  $L_1$  sont donc un bon outil pour reproduire les mouvements d'un opérateur captés par le système *Leap Motion* par un robot industriel. Dans le cas du traitement de données capteur comme c'est le cas ici, nous pouvons observer un bruit résiduel. L'interpolation n'est donc pas une bonne option pour éliminer ce bruit. C'est pourquoi, dans la suite, nous étudions les méthodes d'approximation par splines de lissage et d'ajustement au sens de la norme  $L_1$ .



FIGURE 2.8 – Acquisition de données pour un mouvement d'écriture à vitesse normale

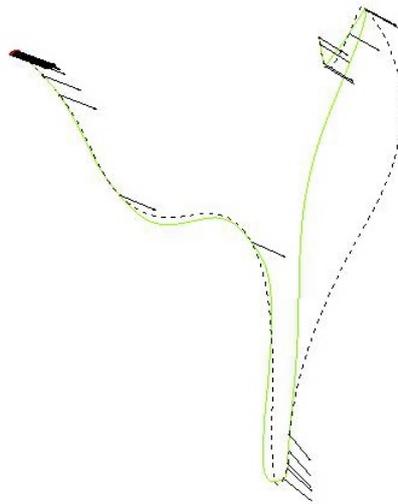


FIGURE 2.9 – Données mesurées pour un mouvement d'écriture à vitesse normale et interpolation spline  $L_1$  (trait plein) et  $L_2$  (pointillés).

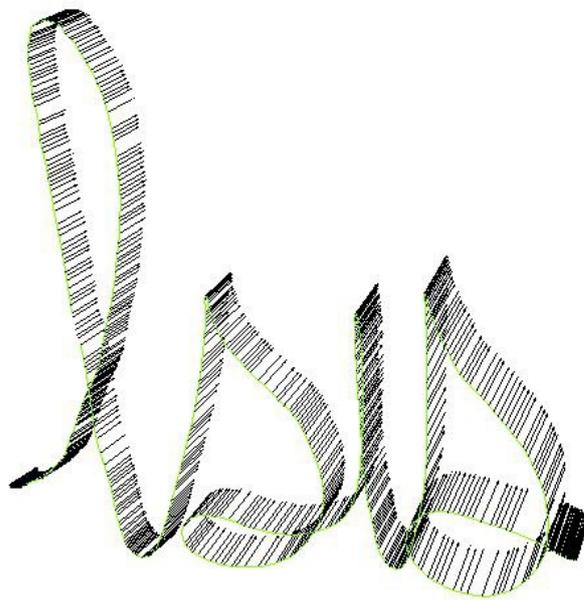


FIGURE 2.10 – Données mesurées pour un mouvement d'écriture à vitesse normale.

## 2 Spline de lissage $L_1$

### 2.1 Approximation de fonctions

Soient  $f$  une fonction de  $L_1[a, b]$ ,  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ,  $m \in \mathbf{N}^*$ , une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$  et  $\alpha \in [0, 1]$  un paramètre de lissage. Une spline de lissage  $L_1$  de la fonction  $f$  est une spline solution de :

$$\inf_{s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}} (1 - \alpha) \int_a^b |s''(x)| \, dx + \alpha \int_a^b |s(x) - f(x)| \, dx. \quad (2.20)$$

Ces splines minimisent donc une combinaison convexe de la fonctionnelle utilisée dans la méthode d'interpolation et de la fonctionnelle de meilleure approximation. Nous démontrons le résultat d'existence suivant qui n'était pas inclus dans [Lav00a].

**Théorème 2.7.** *Les splines de lissage  $L_1$  existent pour toute fonction  $f \in L_1[a, b]$ .*

*Démonstration.* La fonctionnelle de minimisation est continue et coercive. Ces propriétés ont déjà été montrées pour la fonctionnelle de forme  $\int_a^b |s''(x)| \, dx$  dans la démonstration du Théorème 2.3. La fonctionnelle d'approximation est continue. En effet, pour toutes fonctions  $s_1$  et  $s_2$  dans  $\tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}$  :

$$\begin{aligned} \left| \|s_1 - f\|_1 - \|s_2 - f\|_1 \right| &\leq \|(s_1 - f) - (s_2 - f)\|_1, \\ &= \|s_1 - s_2\|_1. \end{aligned}$$

La fonctionnelle est donc lipschitzienne de constante 1 et alors, elle est continue.

Enfin, soit  $s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}$ . Par l'inégalité triangulaire inverse,  $\|s - f\|_1 \geq \|s\|_1 - \|f\|_1$ . De plus  $f \in L_1[a, b]$ , alors  $\|s - f\|_1$  tend vers  $+\infty$  quand  $\|s\|_1$  tend vers  $+\infty$ . La fonctionnelle est donc coercive. Ceci conclut la démonstration.  $\square$

*Remarque.* Nous pouvons également remarquer que la fonctionnelle (2.20) est convexe mais pas strictement convexe. L'unicité de solution n'est donc pas garantie. Comme dans le cas de l'interpolation, un terme de régularisation peut être ajouté à la fonctionnelle (2.20) pour favoriser une solution.

Nous comparons ces splines aux splines de lissage  $L_2$  définies comme solutions de :

$$\inf_{s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}} (1 - \alpha) \int_a^b |s''(x)|^2 \, dx + \alpha \int_a^b |s(x) - f(x)|^2 \, dx. \quad (2.21)$$

En pratique, nous discrétisons les problèmes (2.20) et (2.21) par la formule du point milieu. Le problème d'approximation par splines de lissage  $L_1$  peut alors être résolu par un algorithme de type point intérieur comme celui rappelé dans l'Algorithme 1, page 57. Pour son analogue  $L_2$ , nous résolvons le système linéaire des équations normales associées. Nous illustrons l'application de ces méthodes à la fonction de Heaviside, respectivement sur les Figures 2.11 et 2.12, pour différents choix du paramètre de lissage. Nous constatons

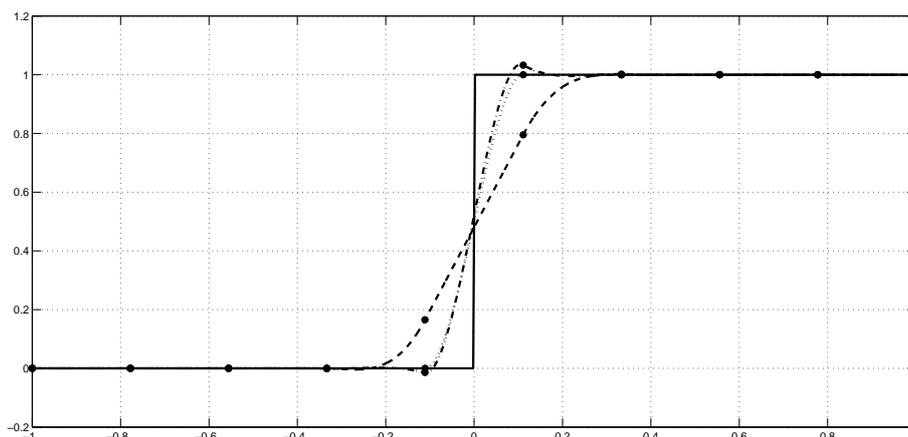


FIGURE 2.11 – Splines de lissage  $L_1$  de la fonction de Heaviside (trait plein) avec dix nœuds équirépartis et  $\alpha = 0.5$  (- - -),  $\alpha = 0.75$  (···) et  $\alpha = 1$  (- · - · -).

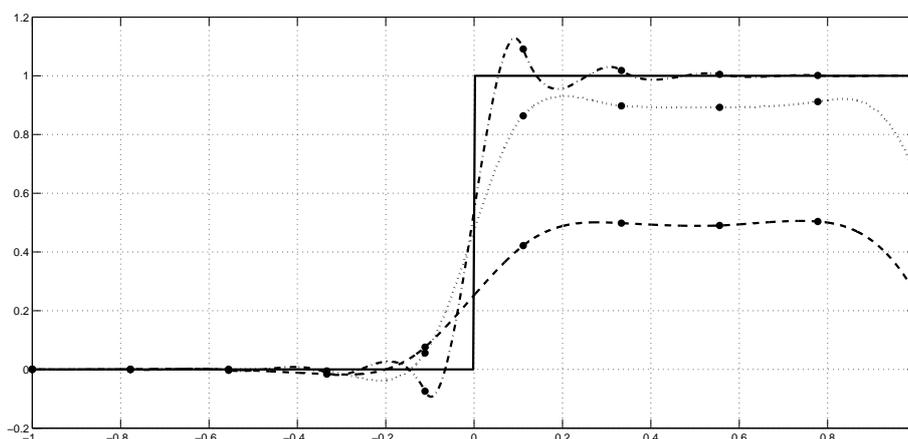


FIGURE 2.12 – Splines de lissage  $L_2$  de la fonction de Heaviside (trait plein) avec dix nœuds équirépartis et  $\alpha = 0.5$  (- - -),  $\alpha = 0.75$  (···) et  $\alpha = 1$  (- · - · -).

que les splines de lissage  $L_1$  sont moins sensibles et sont plus proches de la fonction de Heaviside que leurs analogues  $L_2$ . De plus, l'amplitude des oscillations est plus faible dans le cas  $L_1$ . Cependant, le choix du paramètre  $\alpha$  est difficile à déterminer pour la méthode par splines de lissage  $L_1$ . Nous retrouvons d'ailleurs ce même problème pour le cas discret décrit ci-après.

## 2.2 Approximation de données discrètes

Soient maintenant  $(\hat{x}_i, f_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , une suite d'observations dans  $\mathbf{R}^2$  avec  $\hat{x}_1 = a$  et  $\hat{x}_n = b$  et  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$ . Comme dans le cas continu, une spline de lissage  $L_1$  des données discrètes  $(\hat{x}_i, f_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  est une spline

solution<sup>4</sup> de :

$$\inf_{s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,x}} (1 - \alpha) \int_a^b |s''(x)| dx + \alpha \sum_{i=1}^n |s(\hat{x}_i) - f_i|. \quad (2.22)$$

Nous comparons ce type de splines aux splines de lissage  $L_2$  définies comme étant solution de :

$$\inf_{s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,x}} (1 - \alpha) \int_a^b |s''(x)|^2 dx + \alpha \sum_{i=1}^n |s(\hat{x}_i) - f_i|^2. \quad (2.23)$$

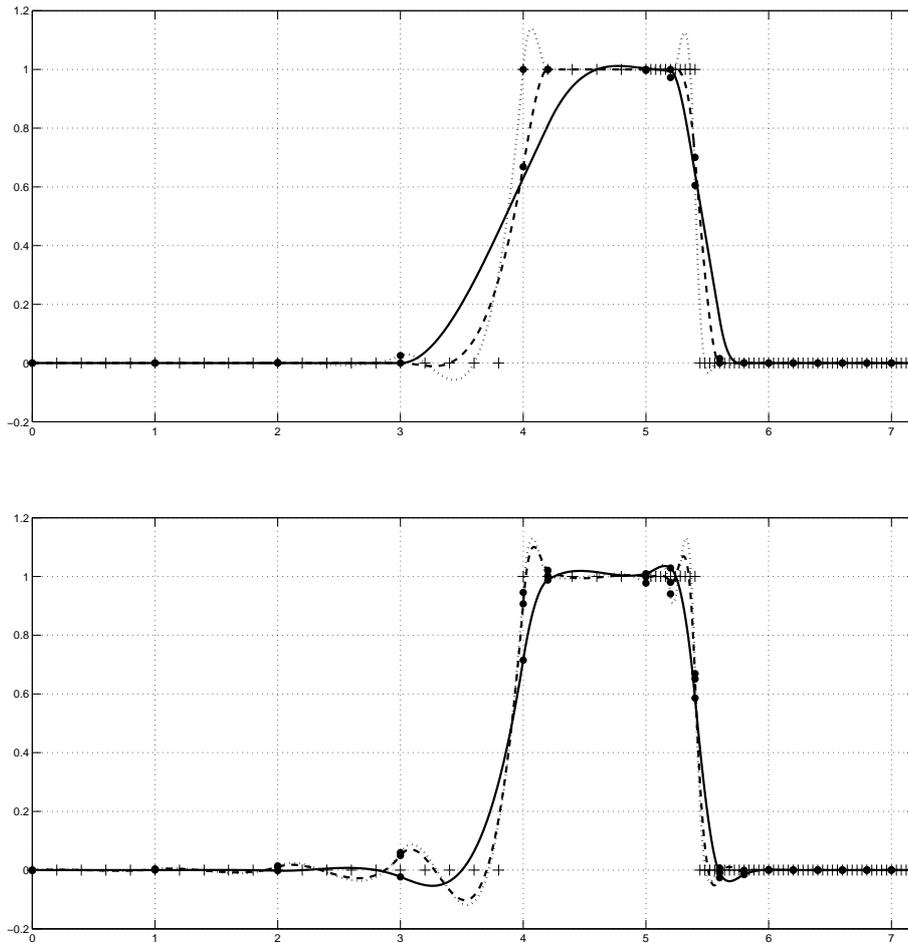


FIGURE 2.13 – Splines de lissage  $L_1$  (haut) et  $L_2$  (bas) de données discrètes avec  $\alpha = 0.5$  (trait plein),  $\alpha = 0.75$  (- - -) et  $\alpha = 1$  (· · ·).

Les méthodes de résolution pour ces deux problèmes sont similaires au cas continu. Nous comparons donc à nouveau les splines de lissage  $L_1$  et  $L_2$ , cette fois, sur des données discrètes. Nous observons à la Figure 2.13 que pour  $\alpha = 1$ , nous obtenons des oscillations pour les deux méthodes car ce sont des meilleures approximations au sens des normes  $L_1$  et  $L_2$ . Pour  $\alpha = 0.75$ , nous obtenons une solution  $L_1$  proche des données avec des oscillations de plus faible amplitude que la solution  $L_2$ . Enfin, pour  $\alpha = 0.5$ , nous constatons que la

4. L'existence de ces splines est démontrée au chapitre 3. C'est un cas particulier du Théorème 3.8, page 92.

solution  $L_1$  est relativement éloignée des données initiales. Le choix du paramètre  $\alpha$  est donc une question difficile. Nous n'avons aucune maîtrise sur celui-ci et nous quantifions assez mal son impact sur la solution obtenue. Il n'existe pas en effet à notre connaissance de méthode de validation croisée comme c'est le cas pour les splines de lissage  $L_2$  [CW78] ou les splines de lissage combinant la norme  $L_1$  et la norme  $L_2$  [BL93]. C'est pourquoi Lavery a proposé un nouvel outil, les splines d'ajustement au sens de la norme  $L_1$ .

### 3 Splines d'ajustement $L_1$

#### 3.1 Approximation de fonctions

Étant données les notations du paragraphe 1.1 et  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_m) \in \mathbf{R}^m$ , définissons l'ensemble des splines :

$$\tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x},\mathbf{q}} = \operatorname{argmin} \left\{ \int_a^b |s''(x)| dx, s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}, s(x_k) = q_k, k = 1, \dots, m \right\},$$

et

$$\mathcal{F}_{1,\mathbf{x}} = \bigcup_{\mathbf{q} \in \mathbf{R}^m} \tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x},\mathbf{q}}.$$

*Remarque.* L'ensemble  $\mathcal{F}_{1,\mathbf{x}}$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}$ . En général, la somme de deux éléments de  $\mathcal{F}_{1,\mathbf{x}}$  n'appartient pas à  $\mathcal{F}_{1,\mathbf{x}}$ . En outre, l'ensemble  $\mathcal{F}_{1,\mathbf{x}}$  n'est pas convexe. Nous verrons cependant que celui-ci est fermé.

Nous appelons alors spline d'ajustement  $L_1$  de la fonction  $f$  une solution du problème :

$$\inf_{s \in \mathcal{F}_{1,\mathbf{x}}} \int_a^b |s(x) - f(x)| dx. \quad (2.24)$$

Nous démontrons ici l'existence de ces splines.

**Théorème 2.8.** *Pour toute fonction  $f \in L_1[a, b]$ , les splines d'ajustement  $L_1$  existent.*

*Démonstration.* Nous allons montrer que l'ensemble  $\mathcal{F}_{1,\mathbf{x}}$  est fermé dans  $\tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}$ . Nous munissons l'espace  $\tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}$  d'une norme quelconque car il est de dimension finie.

Soit  $s \in \overline{\mathcal{F}_{1,\mathbf{x}}}$  alors, par définition, il existe une suite  $(s_n \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x},\mathbf{q}^{(n)}})_{n \in \mathbf{N}}$  qui converge vers  $s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $s_n$  est une spline de  $\tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}$  et donc elle est définie par  $2m$  coefficients  $q_k^{(n)}$ ,  $b_k^{(n)}$ ,  $k = 1, \dots, m$ , respectivement les valeurs et les dérivées premières de  $s_n$  aux abscisses  $x_k$ . Par hypothèse de convergence dans  $\tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}$ , il existe des réels finis  $q_k^*$ ,  $b_k^*$ ,  $k = 1, \dots, m$  tels que :

$$\begin{aligned} q_k^{(n)} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} q_k^*, \\ b_k^{(n)} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b_k^*. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Par unicité de la limite,  $s$  est définie par ces  $2m$  coefficients. Montrons alors que la propriété de minimisation des  $s_n$  est conservée par passage à la limite.

Nous déduisons de (2.25) que  $(s_n'')_{n \in \mathbf{N}}$  converge simplement presque partout vers  $s''$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $s_n''$  est affine par morceaux. Donc nous pouvons facilement la borner sur l'intervalle  $[a, b]$  par une fonction intégrable. Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée. Il vient que :

$$\int_a^b |s_n''(x)| \, dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b |s''(x)| \, dx. \quad (2.26)$$

Soit maintenant  $\gamma \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,x}$  telle que  $\gamma(x_k) = q_k^*$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Par la première proposition de (2.25), il existe une suite  $(\gamma_n \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,x})_{n \in \mathbf{N}}$  telle que pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et  $k = 1, \dots, m$ ,  $\gamma_n(x_k) = q_k^{(n)}$  qui converge vers  $\gamma$ . Par des arguments identiques à précédemment, nous montrons que :

$$\int_a^b |\gamma_n''(x)| \, dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b |\gamma''(x)| \, dx. \quad (2.27)$$

Or pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , comme  $s_n \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,x,q^{(n)}}$ , il vient que :

$$\int_a^b |s_n''(x)| \, dx \leq \int_a^b |\gamma_n''(x)| \, dx. \quad (2.28)$$

Par passage à la limite, nous avons donc que pour tout  $\gamma \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,x}$  telle que  $\gamma(x_k) = q_k^*$  :

$$\int_a^b |s''(x)| \, dx \leq \int_a^b |\gamma''(x)| \, dx. \quad (2.29)$$

Donc  $s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,x,q^*} \subset \mathcal{F}_{1,x}$ . Donc  $\mathcal{F}_{1,x}$  est fermé dans  $\tilde{\mathcal{S}}_{1,x}$ . Par application du Théorème 1.2, page 3, les splines d'ajustement  $L_1$  existent.  $\square$

Ce problème d'optimisation est en fait sous contrainte d'un autre problème d'optimisation. Nous appelons un tel problème, problème d'optimisation à deux niveaux. Le problème (2.24) rentre en effet dans ce cadre car l'espace  $\mathcal{F}_{1,x}$  est défini par un problème d'optimisation. Sa résolution numérique sera expliquée dans le paragraphe 4.1. Nous comparons ces splines à leur analogue en norme  $L_2$ . Autrement dit, nous définissons les splines d'ajustement  $L_2$  qui minimisent :

$$\int_a^b |s(x) - f(x)|^2 \, dx, \quad (2.30)$$

sur l'ensemble des splines :

$$\bigcup_{\mathbf{q} \in \mathbf{R}^m} \left\{ \operatorname{argmin} \left\{ \int_a^b |s''(x)|^2 \, dx, s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,x}, s(x_k) = q_k, k = 1, \dots, m \right\} \right\}.$$

Nous pouvons montrer que ce dernier est un espace vectoriel de dimension finie. Ceci garantit donc l'existence de ces splines. Nous constatons sur la Figure 2.14 l'efficacité de la méthode d'approximation par splines d'ajustement  $L_1$ . Alors que nous observons un net

phénomène de Gibbs avec les splines d'ajustement  $L_2$ , celui-ci est très faible en norme  $L_1$ . En outre, nous mettons en évidence que cette méthode permet d'atténuer le phénomène de Gibbs mis en évidence dans la solution de meilleure approximation au sens de la norme  $L_1$ .

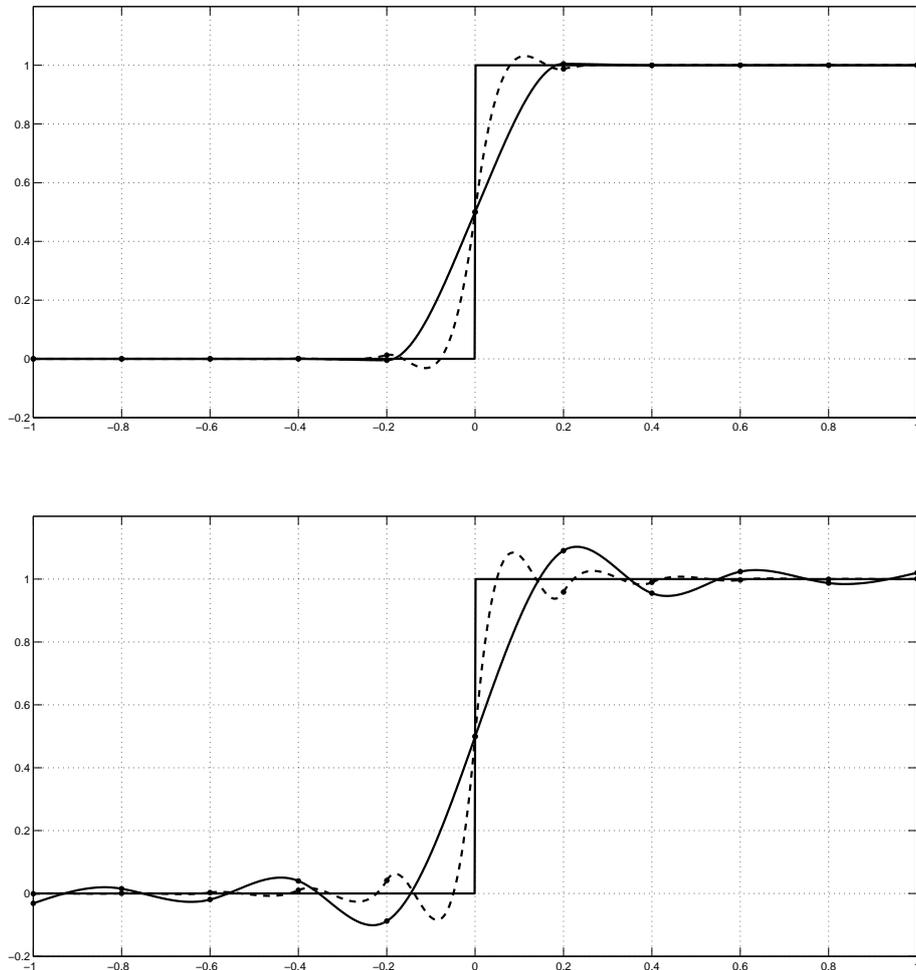


FIGURE 2.14 – Spline d'ajustement (trait plein) et meilleure approximation (pointillés) de la fonction de Heaviside au sens de la norme  $L_1$  (haut) et  $L_2$  (bas).

### 3.2 Approximation de données discrètes

Étant données les notations des paragraphes 1.2 et 3.1, nous appelons spline d'ajustement  $L_1$  des données  $(\hat{x}_i, f_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  aux nœuds  $\mathbf{x}$  une solution du problème :

$$\inf_{s \in \mathcal{F}_{1,\mathbf{x}}} \sum_{i=1}^n |s(\hat{x}_i) - f_i|. \quad (2.31)$$

Nous les comparons aux splines d'ajustement  $L_2$  qui minimisent :

$$\sum_{i=1}^n |s(\hat{x}_i) - f_i|^2, \quad (2.32)$$

sur l'ensemble des splines :

$$\bigcup_{\mathbf{q} \in \mathbf{R}^m} \left\{ \operatorname{argmin} \left\{ \int_a^b |s''(x)|^2 dx, s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}, s(x_k) = q_k, k = 1, \dots, m \right\} \right\}.$$

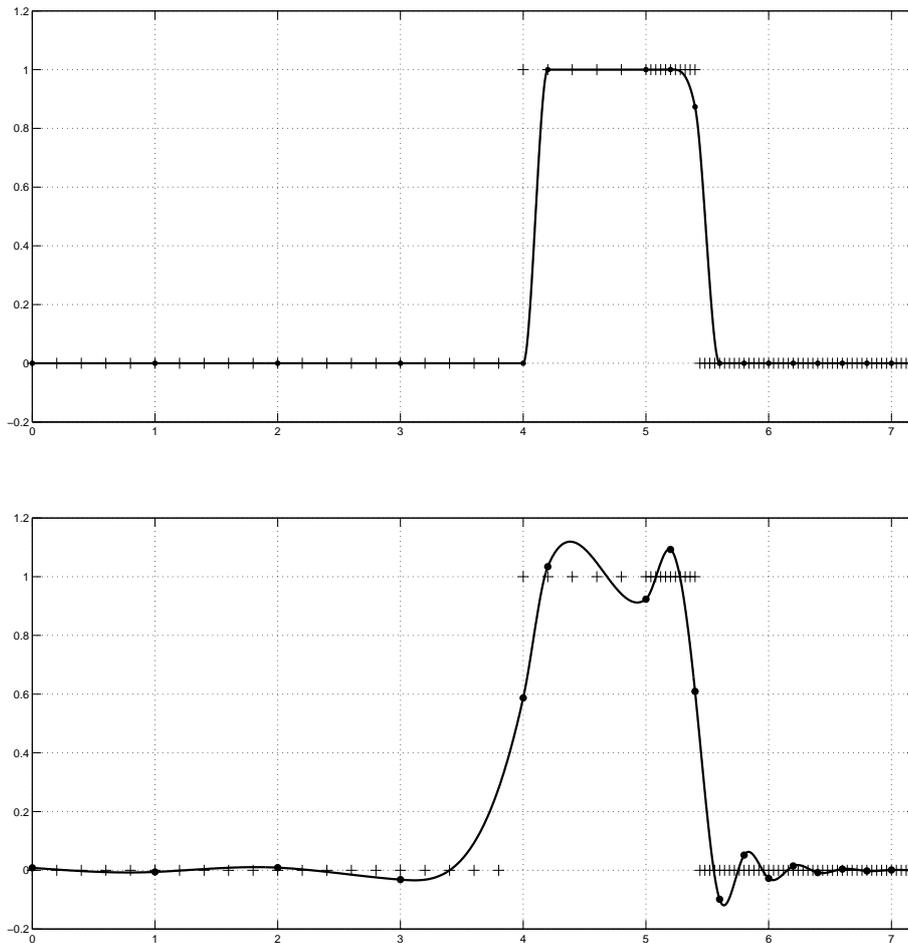


FIGURE 2.15 – Spline d'ajustement  $L_1$  (haut) et  $L_2$  (bas) de données discrètes.

En Figure 2.15, nous observons à nouveau les avantages de la méthode par spline d'ajustement  $L_1$  par rapport à celle  $L_2$  pour l'approximation de données discrètes. Contrairement à la méthode par spline d'ajustement  $L_2$  qui introduit des oscillations importantes, la méthode par spline d'ajustement  $L_1$  semble conserver les alignements des données à approcher.

Au regard des exemples donnés pour les méthodes d'approximation par spline de lissage et d'ajustement au sens des normes  $L_1$  et  $L_2$ , nous concluons qu'en général la méthode par spline d'ajustement  $L_1$  est une méthode appropriée pour l'approximation de fonctions ou de données discrètes. Elle permet d'obtenir des propriétés de conservation de forme telle que la conservation des alignements dans le cas discret. Le phénomène de Gibbs est négligeable dans le cas de l'approximation de la fonction de Heaviside. De plus, par définition, elle ne nécessite aucun paramètre additionnel difficile à maîtriser en général comme c'est le cas pour la méthode de lissage. Cependant, nous ne savons pas quantifier la proximité de la solution aux données initiales<sup>5</sup>. De plus, l'obtention numérique d'une solution de ce problème d'approximation est en général plus coûteuse en temps de calcul que par splines de lissage. En effet, le premier est un problème d'optimisation non-linéaire à deux niveaux alors que le second est d'une complexité similaire au problème d'interpolation présenté dans le paragraphe 1.4.1. Dans le paragraphe suivant, nous rappelons l'algorithme permettant d'obtenir une telle solution. Nous proposons une méthodologie par fenêtre glissante afin de réduire la complexité algorithmique.

## 4 Méthodes numériques pour le calcul des splines d'ajustement $L_1$

### 4.1 Méthode globale

Le problème de la détermination des splines d'ajustement  $L_1$  est un problème d'optimisation non-linéaire à deux niveaux. En pratique, nous discrétisons les intégrales par la formule du point milieu afin d'écrire le problème sous forme matricielle. Nous notons  $\mathbf{q}$  (respectivement  $\mathbf{b}$ ) le vecteur de taille  $(m + 1)$  des valeurs  $q_i$  (respectivement les dérivées premières  $b_i$ ). Le problème discrétisé consiste à déterminer un vecteur  $\mathbf{q}$  solution d'un système surdéterminé :

$$(A_0 \ A_1) \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = c \quad (2.33)$$

tel que pour  $\mathbf{q}$  donné, le vecteur  $\mathbf{b}$  soit solution d'un système surdéterminé :

$$(B_0 \ B_1) \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.34)$$

L'équation (2.33) correspond au premier niveau d'optimisation, c'est-à-dire l'approximation, et (2.34) correspond au second niveau d'optimisation, c'est-à-dire la minimisation de la norme  $L_1$  de la dérivée seconde. Les expressions des matrices  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_0$ ,  $B_1$  et du vecteur  $c$  sont relativement compliquées mais simple à obtenir en utilisant la formule du point milieu. Leurs expressions détaillées sont données en Annexe A, 137. Nous pouvons utiliser, pour obtenir une solution à ce problème, l'algorithme *Primal Affine* via multiplicateurs de

5. Une stratégie permettant ceci sera introduite au chapitre 3.

Lagrange présenté dans [Lav04] et rappelé dans l'Algorithme 3. Cet algorithme de complexité polynomiale est une méthode itérative de moindres carrés avec une pondération ajustée à chaque itération. Nous ne pouvons pas garantir l'obtention d'une solution dans un temps raisonnable lorsqu'il est appliqué à un jeu de données de taille importante. Nous cherchons donc un algorithme local reprenant l'idée de la fenêtre glissante. Un tel algorithme a été récemment proposé dans [WLF14]. Les auteurs cherchent une solution globale dont les dérivées sont guidées par la règle d'interpolation sur cinq points énoncée en page 50. Les résultats graphiques sont satisfaisants bien que la méthode semble introduire des oscillations de faible amplitude là où la méthode globale conservait les alignements. De plus, le gain en temps de calcul est peu significatif. Nous proposons donc une autre approche dans la suite.

**Étape 0.** Initialiser l'incrément à  $k = 0$ . Initialiser  $\mathbf{q} = 0$ ,  $\mathbf{b} = 0$ ,  $w = 0$  et  $v = 0$ .

**Étape 1.0.**  $k = k + 1$ .

**Étape 1.1.** Soit  $D$  la matrice diagonale avec le  $i^{\text{ème}}$  terme de sa diagonale égale à  $1 - |w_i|$ , où  $w_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  élément de  $w$ . Soit  $E$  la matrice diagonale avec le  $i^{\text{ème}}$  terme de sa diagonale égale à  $1 - |v_i|$ , où  $v_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  élément de  $v$ .

**Étape 1.2.** Calculer la solution au sens des moindres carrés ( $\mathbf{q}_{\text{new}}^T, \mathbf{b}_{\text{new}}^T$ ) du système :

$$\begin{pmatrix} A_0^T D^2 A_0 & A_0^T D^2 A_1 & B_0^T E^2 B_1 \\ A_1^T D^2 A_0 & A_1^T D^2 A_1 & B_1^T E^2 B_1 \\ B_1^T E^2 B_0 & B_1^T E^2 B_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{\text{new}} \\ \mathbf{b}_{\text{new}} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0^T D^2 c \\ A_1^T D^2 c \\ 0 \end{pmatrix}$$

où,  $\lambda$  est le vecteur de taille  $(m + 1)$  des multiplicateurs de Lagrange.

**Étape 1.3.** Si  $\|(\mathbf{q}_{\text{new}} - \mathbf{q}, \mathbf{b}_{\text{new}} - \mathbf{b})\|_1 \leq \varepsilon_{\text{conv}}$  alors  $flag = 1$  sinon  $flag = 0$ .

**Étape 1.4.** Poser  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_{\text{new}}$  et  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\text{new}}$ .

**Étape 1.5.** Si  $flag = 1$  ou si  $k > k_{\text{max}}$ , stop. Sinon aller en **Étape 2.1**.

**Étape 2.1.** Calculer le résidu  $r = c - A_0 \mathbf{q} - A_1 \mathbf{b}$  et  $t = -B_0 \mathbf{q} - B_1 \mathbf{b}$ . Calculer  $p = D^2 r$  et  $q = E^2 t$ .

**Étape 2.2.** Calculer  $\alpha = \max_i (\max(\frac{\pi}{1-\phi_i}, -\frac{\pi}{1+\phi_i}))$ , où  $\pi_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  élément de  $(p, q)$  et  $\phi_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  élément de  $(w, v)$ .

**Étape 2.3.** Calculer  $w_{\text{new}} = w_{\text{old}} + (0.666666/\alpha)p$  et  $v_{\text{new}} = v_{\text{old}} + (0.666666/\alpha)q$ .

**Étape 2.4.** Aller en **Étape 1.0**.

**Algorithme 3 :** *Primal Affine* via multiplicateurs de Lagrange.

## 4.2 Méthodes par fenêtre glissante

En s'inspirant de l'idée de la fenêtre glissante développée pour le problème d'interpolation, nous définissons et comparons des méthodes originales par fenêtre glissante avec des tailles de fenêtre et une conservation d'information différentes.

### 4.2.1 Méthodes à nœud central

Dans ce paragraphe, nous définissons des méthodes numériques par fenêtre glissante de taille  $l = 3, 5, \text{ et } 7$ . Pour tout choix de  $l$  nœuds consécutifs, nous résolvons le problème (2.24) (ou (2.31) dans le cas discret) discrétisé au préalable, grâce à l’Algorithme 3. Nous ne conservons que les informations au nœud central des fenêtres,  $q_i, b_i$  respectivement le point d’approximation et la dérivée associée. Nous appelons ces méthodes à trois, cinq et sept nœuds respectivement  $L_1\text{SFL}3, L_1\text{SFL}5$  et  $L_1\text{SFL}7$ . Les initiales SF signifient *spline fits* qui est le nom des splines d’ajustement dans l’article de Lavery [Lav04] et le "L" signifie tout simplement local. Nous testons les différentes méthodes sur la fonction de Heaviside avec dix nœuds répartis uniformément et illustrons les résultats obtenus sur la Figure 2.16. Dans la Table 2.2, nous donnons les valeurs des erreurs en norme  $L_1$  et  $L_\infty$  entre les solutions déterminées par les méthodes locales et la méthode globale. Nous remarquons alors que la méthode à sept nœud est nettement plus proche de la solution obtenue par la méthode globale.

	$L_1\text{SFL}3$	$L_1\text{SFL}5$	$L_1\text{SFL}7$
erreur $L_1$	0,0167	0,0180	$1,36 \times 10^{-9}$
erreur $L_\infty$	0,2356	0,2491	$1,62 \times 10^{-8}$

TABLE 2.2 – Erreurs  $L_1$  et  $L_\infty$  entre les solutions déterminées par méthodes locales et la solution obtenue par méthode globale pour la fonction de Heaviside.

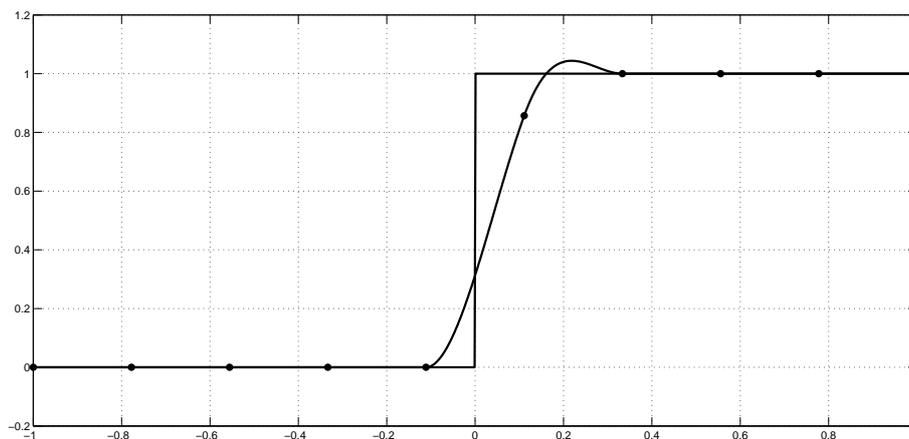
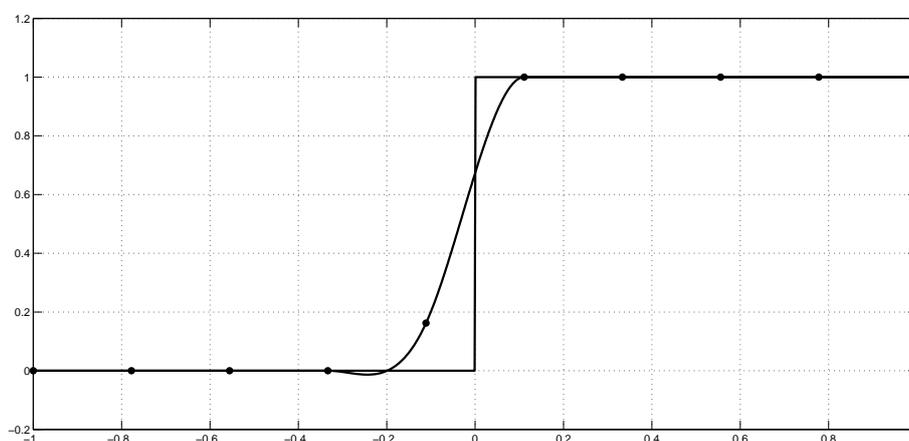
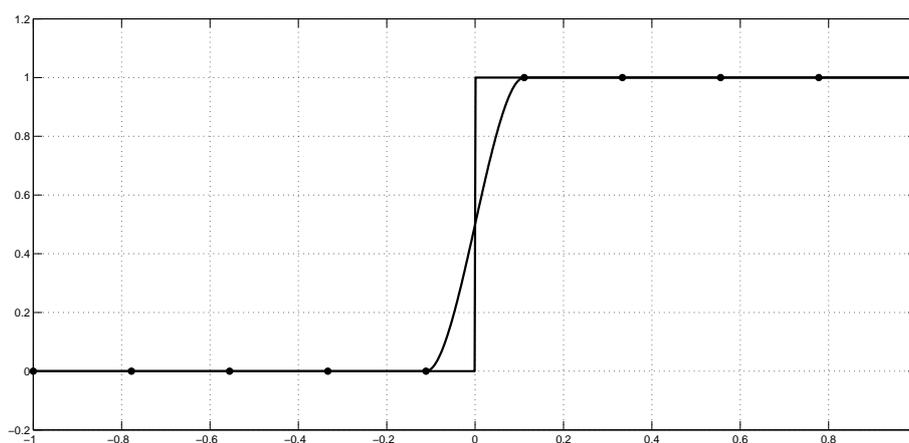
Ces méthodes sont également testées sur deux ensembles de données. Nous illustrons les résultats sur les Figures 2.17 et 2.18. Dans les Tables 2.3 et 2.4, nous donnons les valeurs des erreurs en norme  $L_1$  et  $L_\infty$  entre les solutions déterminées par méthodes locales et la solution obtenue par méthode globale pour les données illustrées respectivement sur les Figures 2.17 et 2.18. Nous observons encore une fois que la méthode à sept nœuds est la plus proche de la méthode globale et semble donc être la plus appropriée parmi les trois méthodes présentées.

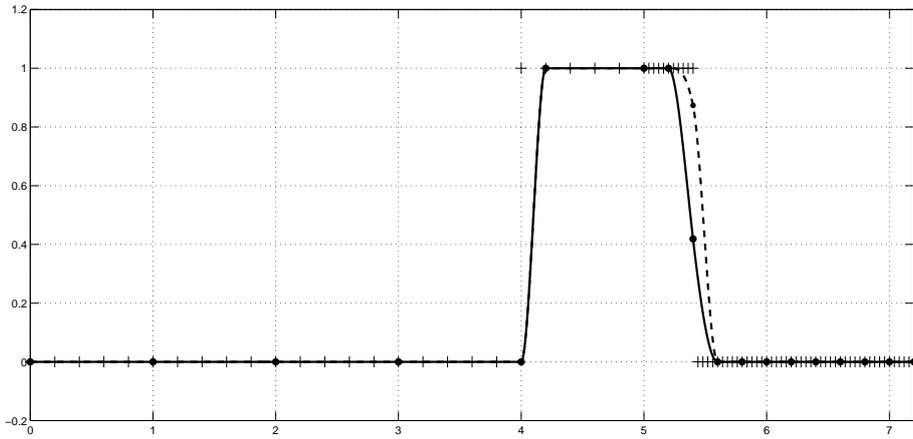
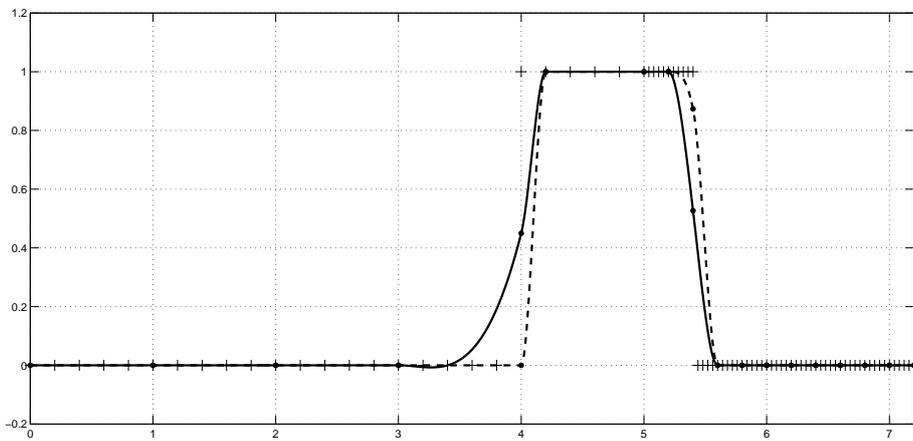
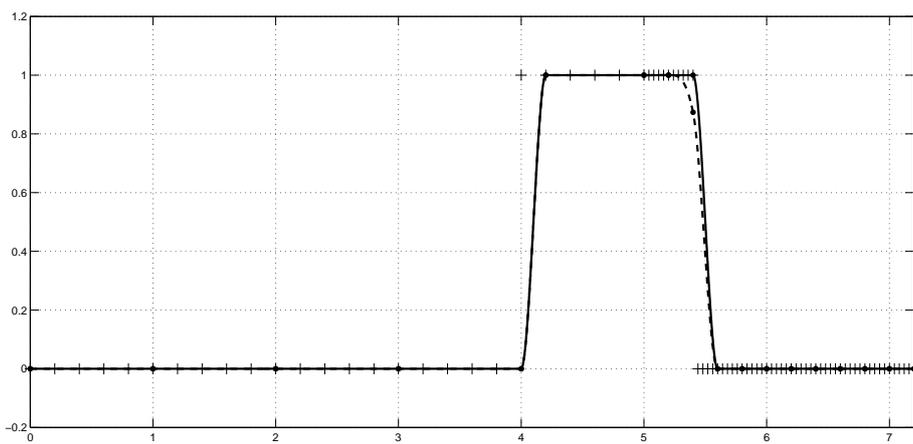
	$L_1\text{SFL}3$	$L_1\text{SFL}5$	$L_1\text{SFL}7$
erreur $L_1$	0,0408	0,0462	0,0111
erreur $L_\infty$	0,4829	0,4602	0,1521

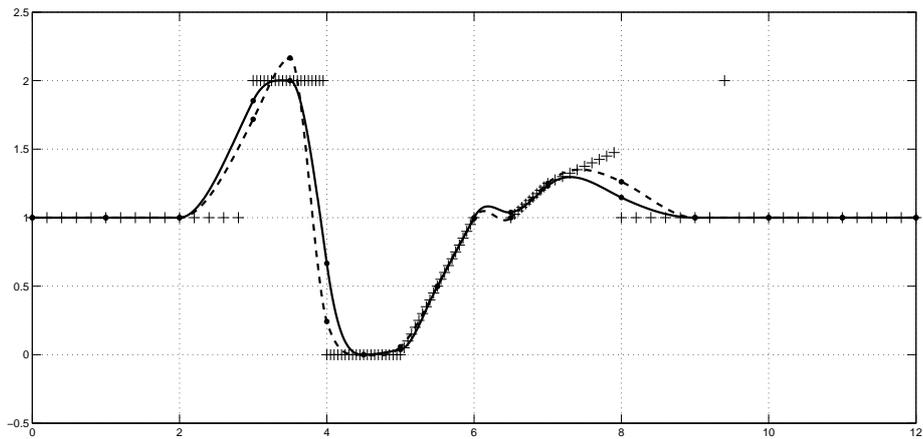
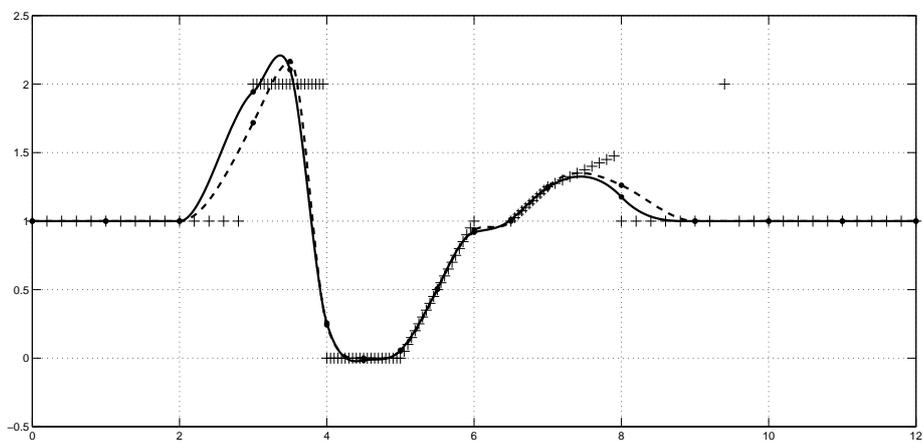
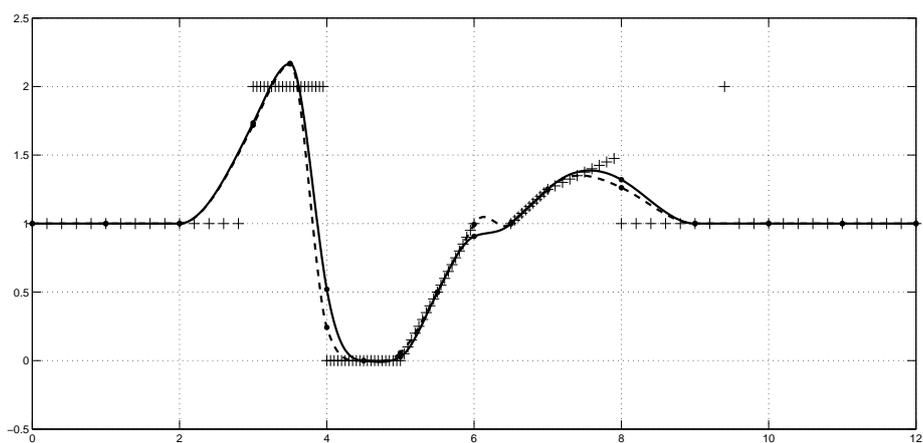
TABLE 2.3 – Erreurs  $L_1$  et  $L_\infty$  entre les solutions déterminées par méthodes locales et celle obtenue par méthode globale pour les données illustrées sur la Figure 2.17.

	$L_1\text{SFL}3$	$L_1\text{SFL}5$	$L_1\text{SFL}7$
erreur $L_1$	0,0396	0,0304	0,0172
erreur $L_\infty$	0,4725	0,2800	0,2203

TABLE 2.4 – Erreurs  $L_1$  et  $L_\infty$  entre les solutions déterminées par méthodes locales et celle obtenue par méthode globale pour les données illustrées sur la Figure 2.18.

Méthode  $L_1$ SFL3Méthode  $L_1$ SFL5Méthode  $L_1$ SFL7FIGURE 2.16 – Splines d'ajustement  $L_1$  déterminées par les trois méthodes locales proposées sur la fonction de Heaviside avec dix nœuds équirépartis.

Méthode  $L_1$ SFL3Méthode  $L_1$ SFL5Méthode  $L_1$ SFL7FIGURE 2.17 – Splines d'ajustement  $L_1$  déterminées par méthode globale (pointillés) et par les méthodes locales proposées (trait plein).

Méthode  $L_1SFL3$ Méthode  $L_1SFL5$ Méthode  $L_1SFL7$ FIGURE 2.18 – Splines d'ajustement  $L_1$  déterminées par méthode globale (pointillés) et par les méthodes locales proposées (trait plein).

Nous présentons également, sur la Figure 2.19, une comparaison des temps de calcul obtenus pour les différentes méthodes pour l'approximation de la fonction de Heaviside suivant le nombre de nœuds. Pour toutes les méthodes à l'exception de la méthode à trois points, nous observons un graphe de type dents de scie qui s'explique par la présence ou non d'un nœud à la discontinuité de la fonction de Heaviside. La convergence est plus lente lorsqu'un nœud est situé à la discontinuité. Nous observons également un comportement attendu concernant la réduction significative du temps de calcul pour les méthodes locales.

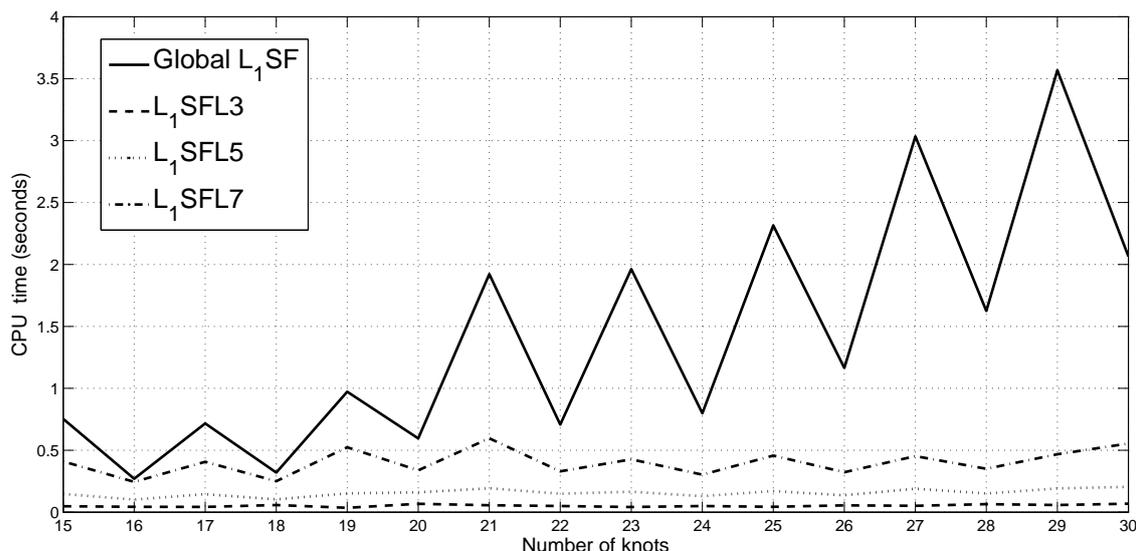


FIGURE 2.19 – Comparaison des temps de calcul de la méthode locale avec les méthodes globales.

#### 4.2.2 Méthodes à trois points centraux

Les méthodes originales présentées et particulièrement la méthode à cinq nœuds peuvent mettre en évidence des caractéristiques peu souhaitables quand elles sont appliquées à des données comportant des sauts (voir Figures 2.17, 2.18). Ce phénomène est dû au manque de cohérence entre les différentes informations calculées. En effet, chaque point d'approximation déterminé sur une fenêtre l'est indépendamment des points d'approximation des fenêtres voisines. Il en résulte des inversions de courbure non-souhaitables (voir la méthode à cinq nœuds sur les Figures 2.17, 2.18). Pour atténuer ce phénomène, nous proposons deux nouvelles méthodes,  $L_1$ SFL5-3 et  $L_1$ SFL7-3, respectivement des méthodes à cinq et sept nœuds. La différence avec les méthodes  $L_1$ SFL5 et  $L_1$ SFL7 est que nous conservons désormais les informations, points d'approximation et dérivées, aux trois nœuds centraux et non plus seulement au nœud central. Ces méthodes ont aussi l'avantage de nécessiter moins de calculs que les méthodes  $L_1$ SFL5 et  $L_1$ SFL7. En effet avec  $L_1$ SFL5-3 et  $L_1$ SFL7-3, il y a moins d'inconnues à calculer. Nous avons testé ces méthodes sur les données déjà utilisées auparavant. Les résultats sont illustrés dans les Figures 2.20 et 2.21.

	$L_1$ SFL5	$L_1$ SFL5-3	$L_1$ SFL7	$L_1$ SFL7-3
erreur $L_1$	0,0462	0,0408	0,0111	$2,1020 \times 10^{-4}$
erreur $L_\infty$	0,4602	0,4829	0,1521	0,0024

TABLE 2.5 – Erreurs  $L_1$  et  $L_\infty$  entre les solutions déterminées par les méthodes locales  $L_1$ SFL5,  $L_1$ SFL5-3,  $L_1$ SFL7,  $L_1$ SFL7-3 et la méthode globale pour les données illustrées sur la Figure 2.20.

	$L_1$ SFL5	$L_1$ SFL5-3	$L_1$ SFL7	$L_1$ SFL7-3
erreur $L_1$	0,0304	0,0259	0,0172	0,0056
erreur $L_\infty$	0,2800	0,2851	0,2203	0,0600

TABLE 2.6 – Erreurs  $L_1$  et  $L_\infty$  entre les solutions déterminées par les méthodes locales  $L_1$ SFL5,  $L_1$ SFL5-3,  $L_1$ SFL7,  $L_1$ SFL7-3 et la méthode globale pour les données illustrées sur la Figure 2.21.

La solution obtenue par la méthode  $L_1$ SFL7-3 est la plus proche de celle obtenue par la méthode globale (voir les Tables 2.5 et 2.6). La méthode globale étant notre référence, c'est celle-ci que nous choisissons comme étant la plus appropriée. Elle est un bon compromis entre temps de calcul et qualité intrinsèque de la solution pour ce qui est de la conservation de la forme des données. Cette méthode a été également testée sur des données bruitées par un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart-type 0.05 (voir les Figures 2.22 et 2.23).

## 5 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les méthodes d'interpolation par splines polynomiales et plus particulièrement la méthode d'interpolation par fenêtre glissante. Nous avons également rappelé les méthodes d'approximation par spline de lissage et d'ajustement au sens de la norme  $L_1$ . Cette dernière permet de ne pas introduire un paramètre de régularisation dont la valeur est difficile à fixer. Nous privilégions donc dans les applications, notamment pour la modélisation de terrain, la seconde méthode. C'est pourquoi, nous avons proposé des méthodes locales afin d'améliorer les performances en temps de calcul tout en conservant les propriétés géométriques de la méthode initiale. Une méthode à fenêtre glissante sur sept nœuds avec conservation d'informations aux trois nœuds centraux a été retenue.

Pour les applications à la planification de trajectoire, il est souhaitable de pouvoir contrôler la distance entre la solution d'approximation et les points de données. Nous proposons alors dans le chapitre suivant une approche originale en ce sens.

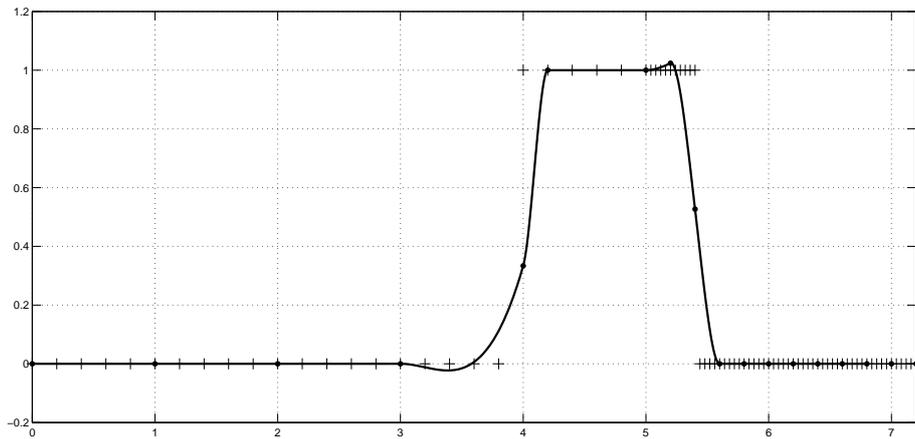
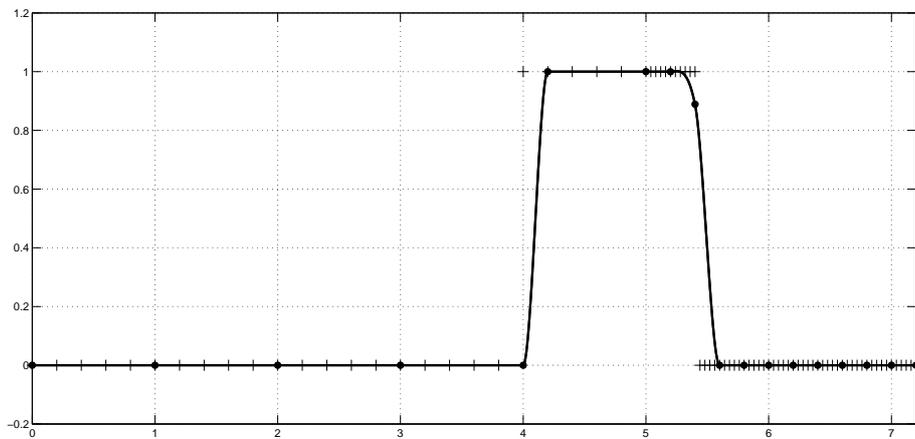
Méthode  $L_1$ SFL5-3Méthode  $L_1$ SFL7-3

FIGURE 2.20 – Application des méthodes  $L_1$ SFL5-3 et  $L_1$ SFL7-3 (trait plein) et comparaison avec la solution globale (pointillés) et les méthodes  $L_1$ SFL5 et  $L_1$ SFL7 (points) sur des données discrètes.

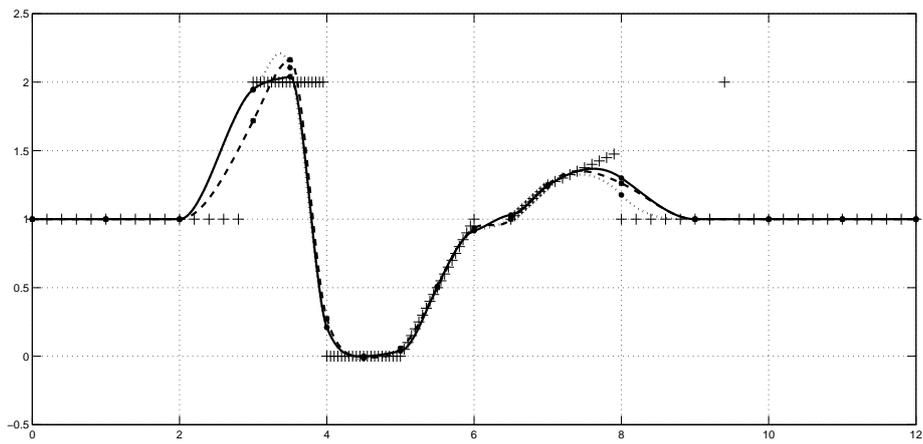
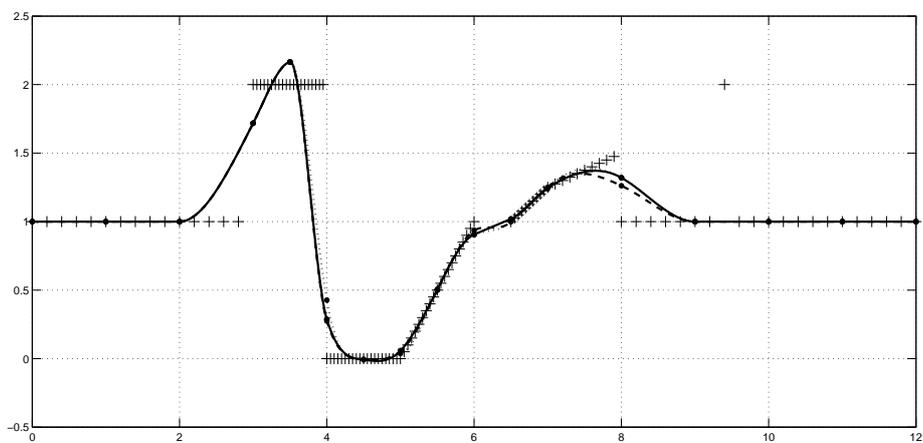
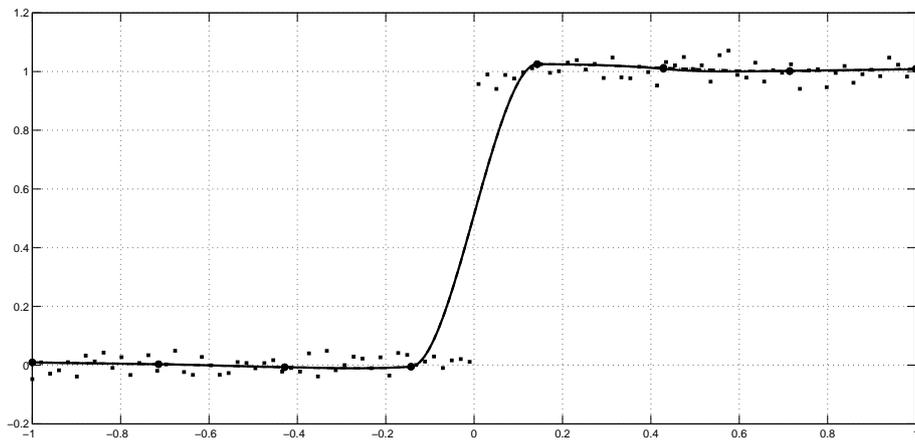
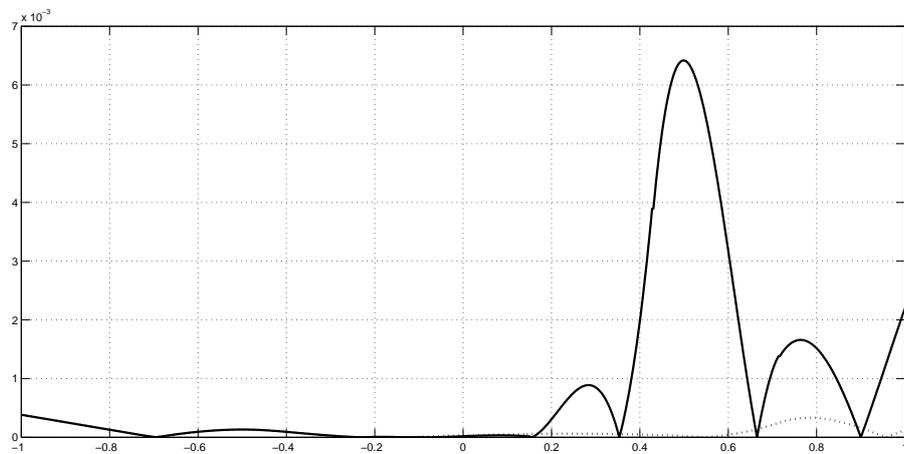
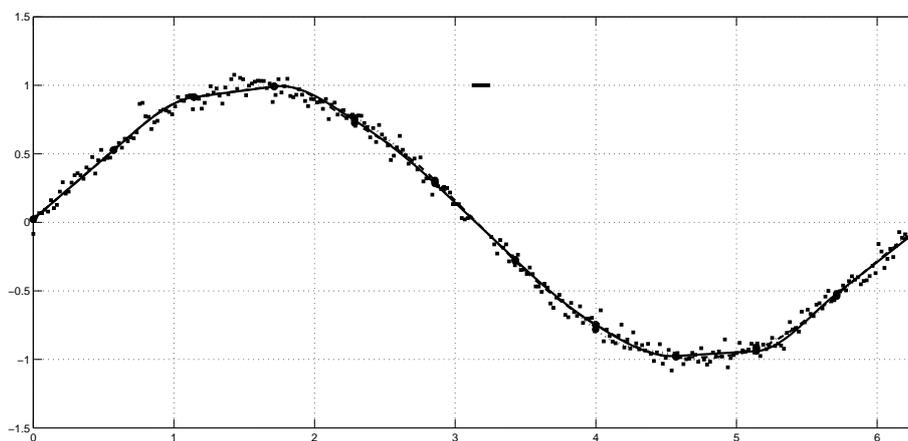
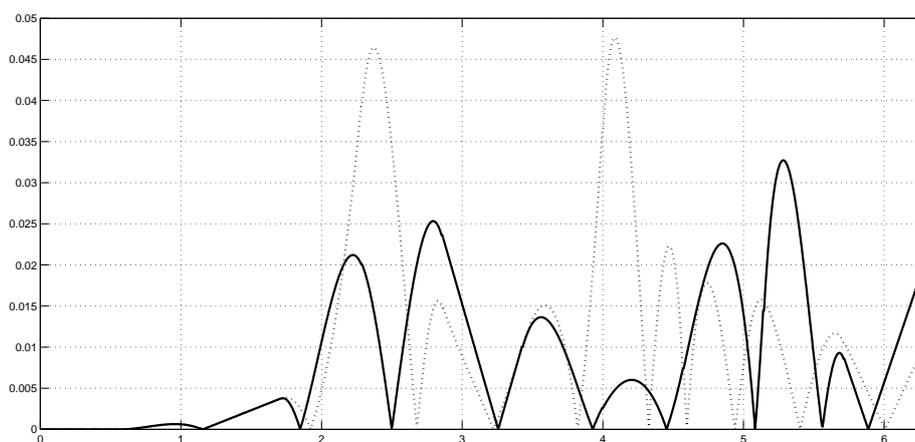
Méthode  $L_1$ SFL5-3Méthode  $L_1$ SFL7-3

FIGURE 2.21 – Application des méthodes  $L_1$ SFL5-3 et  $L_1$ SFL7-3 (trait plein) et comparaison avec la solution globale (pointillés) et les méthodes  $L_1$ SFL5 et  $L_1$ SFL7 (points) sur un jeu de données discrètes.

Méthode  $L_1$ SFL7-3

Erreur relative absolue

FIGURE 2.22 – Application de la méthode  $L_1$ SFL7-3 (haut) sur une configuration de points de type Heaviside corrompue par un bruit gaussien et graphe d'erreur absolue relative (bas) entre la fonction de Heaviside et la solution globale (trait plein), et la méthode  $L_1$ SFL7 (points).

Méthode  $L_1$ SFL7-3

Erreur relative absolue

FIGURE 2.23 – Application de la méthode  $L_1$ SFL7-3 (haut) sur une configuration de points de type sinus corrompue par un bruit gaussien et graphe des erreurs absolues relatives (bas) entre la fonction sinus et la solution globale (trait plein), et la méthode  $L_1$ SFL7 (points).



## Chapitre 3

# Interpolation à $\delta$ près par spline polynomiale $L_1$

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Présentation du problème</b>	<b>84</b>
<b>2</b>	<b>Résolution formelle dans des cas particuliers</b>	<b>87</b>
2.1	Cas des solutions affines	87
2.2	Résolution exacte sur trois points	88
<b>3</b>	<b>Méthodes globale de résolution</b>	<b>91</b>
3.1	Un problème régularisé associé	92
3.1.1	Algorithme d'interpolation $L_1$ à $\delta$ près	94
3.1.2	Application sur de petites configurations	96
<b>4</b>	<b>Méthode numérique à cinq points</b>	<b>97</b>
4.1	Méthode itérative pour les données bruitées	99
<b>5</b>	<b>Méthodes à trois points</b>	<b>100</b>
5.1	Méthode de régression $\ell_1$ à $\delta$ près	101
5.2	Méthode quasi-algébrique à trois points	102
5.3	Méthode algébrique à trois points	106
<b>6</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>110</b>

---

Dans ce chapitre, nous présentons une approche originale d'approximation, proposée par ailleurs dans [GNG13, GGN14], consistant à interpoler à  $\delta$  près des données où  $\delta > 0$ . Comme évoqué dans le chapitre 2, paragraphe 5, il est important pour les applications à la planification de trajectoire d'avoir des courbes suffisamment lisses n'excitant pas les modes de vibration des systèmes mécaniques permettant la génération du mouvement. Nous pouvons utiliser pour cela notre méthode d'interpolation spline  $L_1$  sur certains points de passage. L'idée est ici de relaxer les conditions d'interpolation pour assouplir la trajectoire et la rendre ainsi plus aisée à parcourir. Nous imposons cependant au système mécanique de passer à une distance maximale  $\delta > 0$  fixée des points de passage initialement mesurés. Ce problème est posé dans le premier paragraphe et nous vérifions qu'une solution existe. Dans un second paragraphe, nous étudions théoriquement le problème par la résolution formelle de celui-ci dans certains cas afin de comprendre les caractéristiques de la méthode. Nous étudions le cas où les solutions sont affines, puis le cas de configurations de trois points quelconques. Afin d'obtenir un algorithme de résolution de complexité minimale, nous développons des méthodes par fenêtre glissante au paragraphe 3. Nous verrons qu'une méthode à cinq points nous amène à effectuer une résolution numérique sur chaque fenêtre en utilisant un algorithme de complexité polynomiale. Nous proposerons donc deux méthodes à trois points basées essentiellement sur une résolution exacte du problème effectuée au second paragraphe. Nous montrons que les méthodes développées peuvent également efficacement lisser des données bruitées.

## 1 Présentation du problème

Soient  $f_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  points dans  $\mathbf{R}^2$  tels que  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Posons  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Nous cherchons à approcher ces données par une spline cubique d'Hermite de nœuds  $\mathbf{t} = \{t_1, \dots, t_m\} \subseteq \mathbf{x}$ . Dans la stratégie proposée, nous considérons la norme  $L_1$  de la dérivée seconde, souvent utilisé comme terme de régularisation, comme la base de la formulation de notre problème. Nous ajoutons ensuite des contraintes sur la distance relative des données initiales à la courbe. Soit donc le problème d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près ( $\delta > 0$ ) des points  $f_i$  par une spline de  $\tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{t}}$  :

$$\inf_s \int_{x_1}^{x_n} |s''(x)| dx \quad (3.1)$$

sous les contraintes :

$$s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{t}} \quad \text{et} \quad |s(x_i) - y_i| \leq \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

Pour que les contraintes (3.2) puissent être satisfaites dans tous les cas, nous imposons que les nœuds  $\mathbf{t}$  soient choisis de telle sorte qu'il y ait au plus un  $x_k$  compris strictement entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$  pour chaque  $i \in \{1, \dots, m-1\}$ . Au-delà, nous pouvons trouver des cas problématiques car une fonction cubique ne peut avoir qu'un seul point d'inflexion.

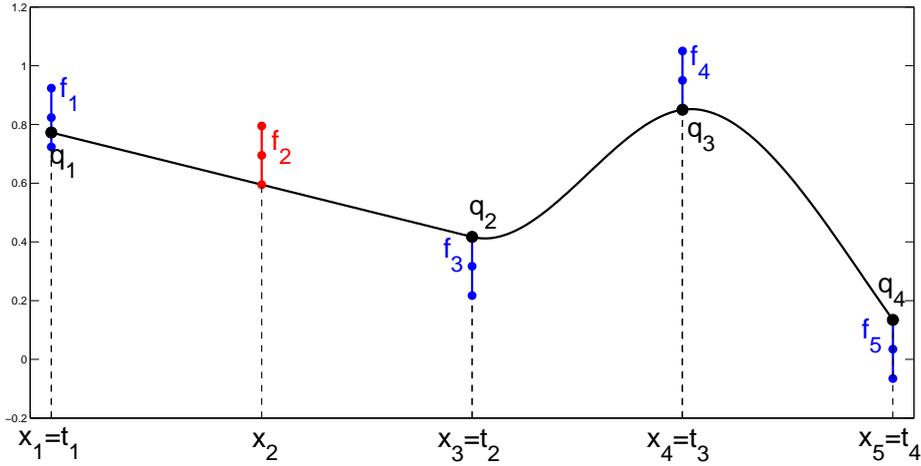


FIGURE 3.1 – Une spline cubique d’Hermite qui satisfait les contraintes (3.2).

**Théorème 3.1.** Soient  $f_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  points dans  $\mathbf{R}^2$  tels que  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Soient  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  et une subdivision  $\mathbf{t} = \{t_1, \dots, t_m\}$  telle que  $\mathbf{t} \subseteq \mathbf{x}$ . De plus, supposons que pour tout  $i \in \{1, \dots, m-1\}$ , il existe au plus un  $k \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $t_i < x_k < t_{i+1}$ . Soit  $\delta > 0$  alors :

$$\min_s \int_{x_1}^{x_n} |s''(x)| dx \quad (3.3)$$

sous les contraintes :

$$s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{t}} \quad \text{et} \quad |s(x_i) - y_i| \leq \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4)$$

existe.

Pour la démonstration et pour la suite, nous notons  $\mathbf{q} = \{q_i, i = 1, \dots, m\}$  les points tels que  $s(t_i) = q_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  et  $\mathbf{b} = \{b_i, i = 1, \dots, m\}$  les dérivées premières associées. Alors, le problème (3.3)-(3.4) peut être réécrit comme suit :

$$\min_{\mathbf{q}, \mathbf{b}} \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \quad (3.5)$$

sous les contraintes :

$$\mathbf{q}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^m, \quad |s(x_i) - y_i| \leq \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.6)$$

où

$$\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{m-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_{i+1} - b_i + 6t(b_i + b_{i+1} - 2\Delta q_i)| dt, \quad (3.7)$$

avec  $\Delta q_i = \frac{q_{i+1} - q_i}{x_{i+1} - x_i}$ . Les notations introduites sont illustrées sur la Figure 3.2.

Nous avons aussi besoin du lemme suivant issu de la thèse de Philippe Auquier [Auq07].

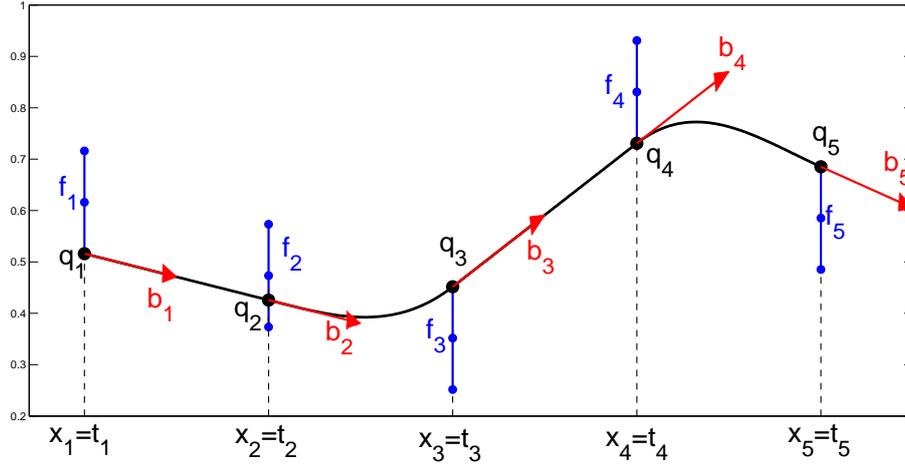


FIGURE 3.2 – Illustration des notations introduites dans (3.5)-(3.6).

**Lemme 3.2.** Soit  $g : t \in \mathbf{R} \mapsto at + b$  où  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  une fonction affine. Alors,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |g(t)| dt \geq \frac{1}{3} \left| g\left(-\frac{1}{6}\right) \right|. \quad (3.8)$$

*Démonstration (Théorème 3.1).* L'ensemble des fonctions de  $\tilde{\mathcal{S}}_{1,t}$  vérifiant les contraintes (3.4) est convexe. En effet, soient deux telles fonctions  $s_1, s_2$  et  $\lambda \in [0, 1]$  alors  $\lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2 \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,t}$  et pour  $i = 1, \dots, n$  :

$$\begin{aligned} |\lambda s_1(x_i) + (1 - \lambda)s_2(x_i) - y_i| &= |\lambda s_1(x_i) + (1 - \lambda)s_2(x_i) - (\lambda + (1 - \lambda))y_i|, \\ &\leq \lambda |s_1(x_i) - y_i| + (1 - \lambda) |s_2(x_i) - y_i|, \\ &\leq \delta. \end{aligned}$$

De plus, cet ensemble est fermé par continuité de la valeur absolue.

Il n'est pas difficile de montrer que  $\Phi$  est une fonction continue. Il reste donc à montrer sa coercivité. En utilisant le Lemme 3.2, nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{b}) &\geq \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n-1} \left| b_{i+1} - b_i + 6 \left(-\frac{1}{6}\right) (b_i + b_{i+1} - 2\Delta q_i) \right|, \\ \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{b}) &\geq \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n-1} \left| b_{i+1} - b_i + 6 \left(\frac{1}{6}\right) (b_i + b_{i+1} - 2\Delta q_i) \right|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ainsi, nous montrons que :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{b}) &\geq \max \left( \frac{2}{3} \left( \|\mathbf{b}\|_{1,m-1} - \frac{2}{h} \|\mathbf{q}\|_{1,m} \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{3} \left( \|S(\mathbf{b})\|_{1,m-1} - \frac{2}{h} \|\mathbf{q}\|_{1,m} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

où  $\|\cdot\|_{1,p}$  est la norme  $\ell_1$  dans  $\mathbf{R}^p$ ,  $h = \min_{i \in \{1, \dots, m-1\}} x_{i+1} - x_i$  et

$$S : (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbf{R}^m \mapsto (a_2, a_3, \dots, a_m) \in \mathbf{R}^{m-1}.$$

Si  $\|(\mathbf{q}, \mathbf{b})\| \rightarrow +\infty$  alors  $\|\mathbf{b}\| \rightarrow +\infty$ . En effet,  $\|\mathbf{q}\|$  est borné à cause des contraintes (3.4) et de l'hypothèse  $\mathbf{t} \subset \mathbf{x}$ . Il vient donc, en utilisant l'inégalité (3.10), que  $\Phi$  est coercive. Donc il existe un minimum au problème (3.3)-(3.4).  $\square$

Avant de donner des stratégies de résolution, nous proposons de mettre en évidence des caractéristiques de la méthode sur des cas particuliers. Cette analyse nous permettra à la fois de mieux comprendre comment peuvent se comporter les solutions de ce problème de minimisation mais aussi d'élaborer par la suite nos stratégies de résolution.

## 2 Résolution formelle dans des cas particuliers

Dans ce paragraphe, nous étudions le problème d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près. par la résolution de cas particuliers. Nous nous intéressons aux solutions affines du problème (3.1)-(3.2) quand elles existent. Puis, nous résolvons le problème sur trois points quelconques. Nous proposerons d'ailleurs deux méthodes par fenêtre glissante au paragraphe 3.3 utilisant ce résultat. D'autres résultats de résolution formelle sont données en Annexe B. Nous avons choisi de les présenter en annexe car ils n'ont pas aboutis à des algorithmes. Ils restent cependant intéressants dans l'analyse des propriétés de cette méthode.

### 2.1 Cas des solutions affines

Nous commençons par énoncer un résultat concernant les éventuelles solutions affines du problème (3.3)-(3.4) (voir la Figure 3.3). Comme noté au chapitre 2, les droites minimisent la fonctionnelle (3.3). Il est donc légitime de se demander quand une droite est solution de ce problème. La proposition suivante détermine le  $\delta$  minimal pour qu'une droite satisfasse les contraintes (3.4) et soit donc solution du problème (3.3)-(3.4).

**Proposition 3.3.** *Soient  $f_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n$  points de  $\mathbf{R}^2$  où  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  et  $\delta > 0$ . Soit aussi*

$$\delta_\infty = \min_{(a,b) \in \mathbf{R}^2} \max_{i=1,2,\dots,n} |y_i - ax_i - b|.$$

*Si  $\delta \geq \delta_\infty$  alors les solutions de (3.3)-(3.4) sont affines.*

*Démonstration.* Une droite de régression  $l_\infty$ , définie par le problème :

$$\min_{(a,b) \in \mathbf{R}^2} \max_{i=1,2,\dots,n} |y_i - ax_i - b|$$

est une droite minimisant la déviation maximale des points à celle-ci. Nous notons cette déviation  $\delta_\infty$ .

Si  $\delta = \delta_\infty$ , alors les droites de régression  $l_\infty$  coupe toutes les portes d'amplitude  $\delta$  associées

aux points  $f_i$ . En effet, ces droites sont par définition à une distance au plus  $\delta$  des points de données par définition. Elles sont donc solutions de (3.3)-(3.4). □

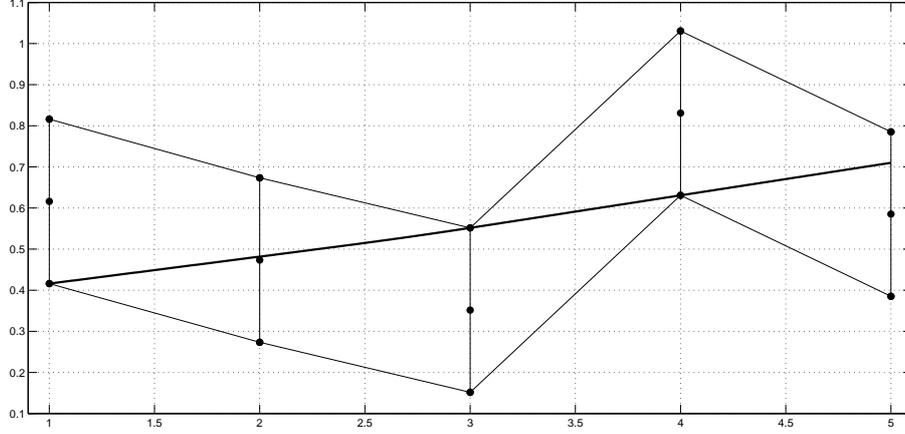


FIGURE 3.3 – Spline d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près avec  $\delta = 0.2$ .

## 2.2 Résolution exacte sur trois points

Étant donnés trois points quelconques, nous recherchons ici une spline à deux morceaux solution du problème d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près. Ce résultat sera utilisé au paragraphe 3.3 pour définir des algorithmes par fenêtre glissante sur trois points.

**Proposition 3.4.** Soient  $f_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  trois points de  $\mathbf{R}^2$ , les deux pentes associées :

$$h_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad h_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2},$$

et  $\delta$  un réel strictement positif. Alors les solutions de (3.3)-(3.4) pour  $n = 3$  sont des droites si et seulement si :

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + y_1 - 2\delta \leq y_2 \leq \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + y_1 + 2\delta. \quad (3.11)$$

Sinon les points d'approximation sont déterminés de manière unique par :

$$q_1^* = y_1 + \text{sign}(h_1 - h_2)\delta,$$

$$q_2^* = y_2 - \text{sign}(h_1 - h_2)\delta,$$

$$q_3^* = y_3 + \text{sign}(h_1 - h_2)\delta,$$

et les dérivées premières possibles en ces points sont :

$$b_1^* = \left( \frac{2 - \sqrt{10}}{\sqrt{10}} \right) b_2^* + 2 \left( \frac{y_2 - y_1 - 2\text{sign}(h_1 - h_2)\delta}{x_2 - x_1} \right) \left( \frac{\sqrt{10} - 1}{\sqrt{10}} \right),$$

$$\begin{aligned}
b_3^* &= \left( \frac{2 - \sqrt{10}}{\sqrt{10}} \right) b_2^* + 2 \left( \frac{y_3 - y_2 + 2\text{sign}(h_1 - h_2)\delta}{x_3 - x_2} \right) \left( \frac{\sqrt{10} - 1}{\sqrt{10}} \right), \\
b_2^* &\in \left[ \min \left( \frac{y_2 - y_1 - 2\text{sign}(h_1 - h_2)\delta}{x_2 - x_1}; \frac{y_3 - y_2 + 2\text{sign}(h_1 - h_2)\delta}{x_3 - x_2} \right), \right. \\
&\quad \left. \max \left( \frac{y_2 - y_1 - 2\text{sign}(h_1 - h_2)\delta}{x_2 - x_1}; \frac{y_3 - y_2 + 2\text{sign}(h_1 - h_2)\delta}{x_3 - x_2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Avant de démontrer cette proposition, nous énonçons le lemme suivant issu de [Auq07], page 28, et dont la preuve est rappelée en annexe B. Il permet de résoudre le problème d'interpolation  $L_1$  par spline cubique d'Hermite sur trois points quelconques.

**Lemme 3.5.** *Soient  $x_1, x_2, x_3$  trois réels tels que  $x_1 < x_2 < x_3$ . Pour trois réels fixés  $q_1, q_2, q_3$  :*

$$\begin{aligned}
\min_{b_1, b_2, b_3 \in \mathbf{R}} \sum_{i=1}^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_{i+1} - b_i + 6t(b_i + b_{i+1} - 2\Delta q_i)| dt \\
= 2 \left( \frac{\sqrt{10} - 1}{3} \right) \left| \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} - \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} \right|,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

et le minimum est obtenu pour :

$$\begin{aligned}
b_1^* &= \left( \frac{2 - \sqrt{10}}{\sqrt{10}} \right) b_2^* + 2 \left( \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} \right) \left( \frac{\sqrt{10} - 1}{\sqrt{10}} \right), \\
b_3^* &= \left( \frac{2 - \sqrt{10}}{\sqrt{10}} \right) b_2^* + 2 \left( \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} \right) \left( \frac{\sqrt{10} - 1}{\sqrt{10}} \right), \\
b_2^* &\in \left[ \min \left( \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1}; \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} \right), \max \left( \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1}; \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc passer à la démonstration de la Proposition 3.4.

*Démonstration (Proposition 3.4).* Nous considérons ici la position de  $f_3$  relativement à  $f_1, f_2$ . Un cas limite pour obtenir une solution droite est que le point  $(x_3, y_3 - \delta)$  (respectivement  $(x_3, y_3 + \delta)$ ) appartient à la droite qui interpole  $(x_1, y_1 - \delta)$  et  $(x_2, y_2 + \delta)$  (respectivement  $(x_1, y_1 + \delta)$  et  $(x_2, y_2 - \delta)$ ). Ainsi, nous avons les deux conditions :

$$\begin{aligned}
y_3 - \delta &\leq \frac{y_2 - y_1 + 2\delta}{x_2 - x_1} (x_3 - x_1) + y_1 - \delta, \\
y_3 + \delta &\leq \frac{y_2 - y_1 - 2\delta}{x_2 - x_1} (x_3 - x_1) + y_1 + \delta,
\end{aligned}$$

qui sont équivalentes à (3.11).

Supposons maintenant que (3.11) ne soit pas satisfaite. En vertu du Lemme 3.5, posons

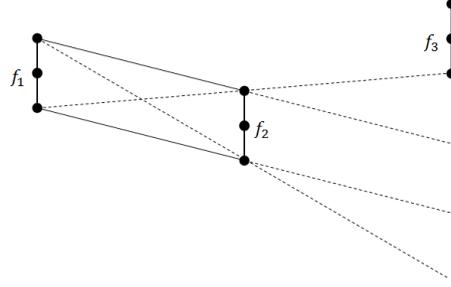


FIGURE 3.4 – Cas limite pour l'obtention d'une solution droite.

la fonction :

$$f : [y_1 - \delta, y_1 + \delta] \times [y_2 - \delta, y_2 + \delta] \times [y_3 - \delta, y_3 + \delta] \longrightarrow \mathbf{R},$$

$$(q_1, q_2, q_3) \longmapsto \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} - \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2}, \quad (3.13)$$

La fonction  $f$  change de signe si et seulement si (3.11) est satisfaite. Sinon, nous avons :

$$\text{sign}(h_1 - h_2) = \text{sign}(f).$$

Nous utilisons alors (3.12). Il reste donc à résoudre le problème suivant :

$$\min_{q_i, i=1,2,3} \left| \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} - \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} \right| \text{ sous les contraintes } \forall i = 1, 2, 3, q_i \in [y_i - \delta, y_i + \delta]. \quad (3.14)$$

Si  $h_1 < h_2$ , alors  $\left| \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} - \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} \right| = \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} - \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1}$ . Donc le minimum de (3.14) est obtenu pour  $q_1 = y_1 - \delta$ ,  $q_2 = y_2 + \delta$  et  $q_3 = y_3 - \delta$ . Le cas  $h_1 > h_2$  est symétrique.  $\square$

De la Proposition 3.4, nous pouvons déduire le corollaire suivant. Il établit le  $\delta$  minimal pour obtenir une solution droite.

**Corollaire 3.6.** Soient  $f_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  trois points de  $\mathbf{R}^2$  et les deux pentes associées :

$$h_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad h_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}.$$

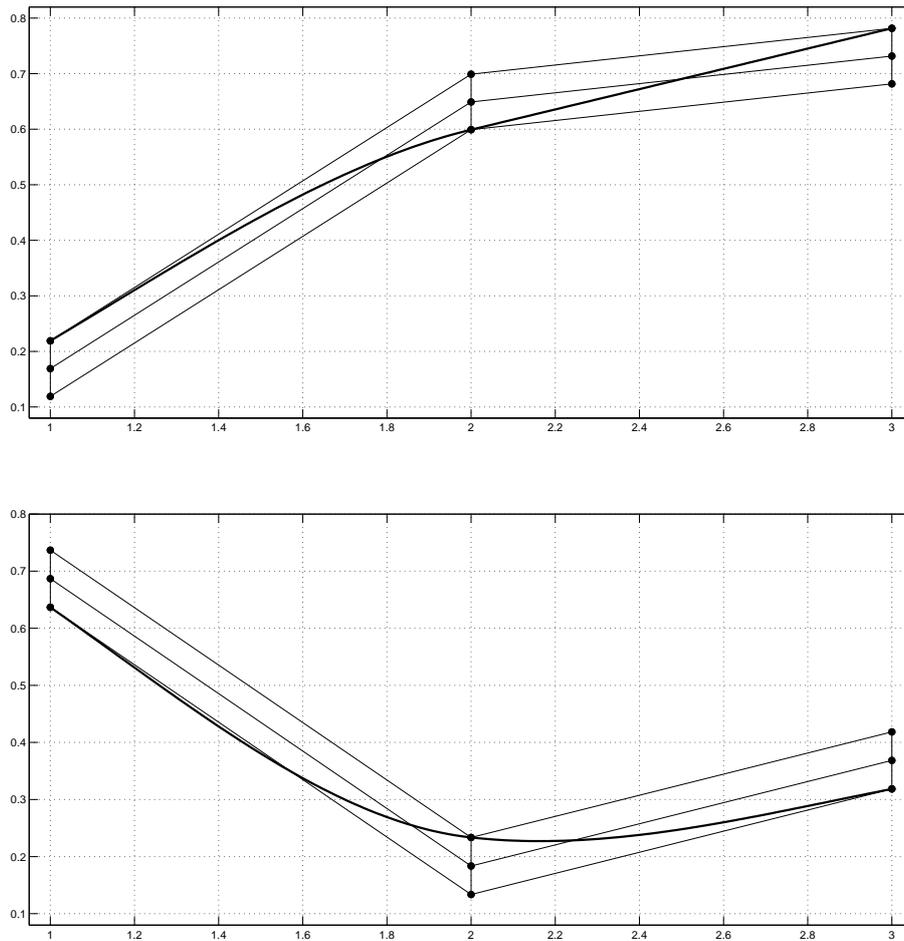
Posons :

$$\delta_\infty = \frac{x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1)}{2(x_3 - x_1)} \times \text{sign}(h_1 - h_2). \quad (3.15)$$

Alors pour tout  $\delta \geq \delta_\infty$ , les solutions de (3.3)-(3.4) sont affines.

*Démonstration.* Tant que  $\delta$  ne vérifie pas (3.11), les solutions interpolent les extrémités des portes comme définies dans la Proposition 3.4. La plus petite valeur de  $\delta$  qui satisfait (3.11) donne une solution affine qui interpole les points :

$$(x_1, y_1 + \text{sign}(h_1 - h_2)\delta), (x_2, y_2 - \text{sign}(h_1 - h_2)\delta), (x_3, y_3 + \text{sign}(h_1 - h_2)\delta).$$

FIGURE 3.5 – Interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près de trois points quelconques.

Ainsi, nous résolvons l'équation :

$$y_1 + \text{sign}(h_1 - h_2)\delta + \frac{y_2 - y_1 - 2\text{sign}(h_1 - h_2)\delta}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1) = y_3 + \text{sign}(h_1 - h_2)\delta.$$

Il en résulte la valeur  $\delta_\infty$  présentée dans le corollaire. □

Au vu des résultats obtenus dans ce paragraphe, nous remarquons que les solutions ont tendance à passer aux extrémités des portes et à posséder des morceaux affines. Ce constat sera utile dans les méthodes que nous introduisons dans la suite.

### 3 Méthodes globale de résolution

Dans un premier temps, nous présentons dans ce paragraphe la méthode globale numérique afin d'observer à nouveau les caractéristiques des solutions du problème (3.1)-(3.2). Dans le cas de grands flots de données, nous proposerons notamment d'utiliser cette méthode par fenêtre glissante.

### 3.1 Un problème régularisé associé

Le lagrangien du problème (3.1)-(3.2) n'étant pas différentiable partout, nous n'utilisons pas une méthode de multiplicateurs de Lagrange. Nous allons considérer un problème régularisé associé. Pour cela, nous énonçons dans un premier temps le résultat suivant.

**Proposition 3.7.** *Le problème (3.1)-(3.2) est équivalent au problème :*

$$\min_s \int_{x_1}^{x_n} |s''(x)| \, dx \quad (3.16)$$

sous les contraintes :

$$s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,t} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n (|s(x_i) - y_i - \delta| + |s(x_i) - y_i + \delta|) = 2n\delta. \quad (3.17)$$

*Démonstration.* Pour montrer l'équivalence des contraintes (3.2) et (3.17), nous considérons le problème de minimisation pour  $p \in \mathbf{R}$  et  $\delta > 0$  donnés :

$$\min_{r \in \mathbf{R}} |r - p - \delta| + |r - p + \delta|.$$

Le minimum est égal à  $2\delta$  et est atteint pour tout  $r \in [p - \delta, p + \delta]$ . En effet, la fonction  $r \mapsto |r - p - \delta| + |r - p + \delta|$  est affine par morceaux :

$$r \mapsto \begin{cases} 2p - 2r & \text{si } r \leq p - \delta, \\ 2\delta & \text{si } p - \delta < r \leq p + \delta, \\ 2r - 2p & \text{si } r > p + \delta. \end{cases}$$

Ainsi, les contraintes (3.17) sont équivalentes à chercher  $s(t_i) \in [y_i - \delta, y_i + \delta]$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ceci est équivalent aux contraintes (3.2).  $\square$

Le problème  $L_1/\ell_\infty$  initial (3.1)-(3.2) est donc équivalent à un problème  $L_1/\ell_1$ . De plus, écrit sous la forme (3.16)-(3.17), la version régularisée de ce problème est facile à déterminer. Elle est présentée dans le théorème suivant.

**Théorème 3.8.** *Soient  $f_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n$  points de données dans  $\mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{t} = \{t_1 < \dots < t_m\} \subset \mathbf{x} = \{x_1 < \dots < x_n\}$ . Soient  $\lambda, \delta$  deux réels positifs. Alors :*

$$\min_{s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,t}} \int_{x_1}^{x_n} |s''(x)| \, dx + \lambda \sum_{i=1}^n (|s(t_i) - y_i - \delta| + |s(t_i) - y_i + \delta|) \quad (3.18)$$

*existe.*

*Remarque.* Le paramètre  $\lambda$  est un paramètre de régularisation. Nous conjecturons que pour tout ensemble de points  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , il existe un  $\lambda_0 > 0$  tel que, pour tout  $\lambda > \lambda_0$ , les contraintes (3.17) soient satisfaites.

La fonctionnelle dans (3.18) peut être écrite :

$$E(\mathbf{q}, \mathbf{b}) = \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{b}) + \lambda\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{b})$$

avec dans ce contexte :

$$\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n (|s(t_i) - y_i - \delta| + |s(t_i) - y_i + \delta|).$$

*Démonstration.* Il n'est pas difficile de montrer que  $E$  est une fonction continue et convexe. Il reste donc à montrer sa coercivité. Nous considérons dans un premier temps le cas  $n = m$ . Ainsi  $x_i = t_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Nous devons montrer la coercivité de  $E$ .

Nous remarquons que :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{q}, \mathbf{b}) &\geq \lambda\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \\ \implies E(\mathbf{q}, \mathbf{b}) &\geq 2\lambda\|\mathbf{q}\|_1 - \lambda \left( \sum_{i=1}^n \|y_i - \delta\|_1 + \sum_{i=1}^n \|y_i + \delta\|_1 \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Nous avons également :

$$E_k(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \geq \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_{i+1} - b_i + 6t(b_i + b_{i+1} - 2\Delta q_i)| dt.$$

En utilisant le Lemme 3.2, page 86, nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{b}) &\geq \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n-1} \left| b_{i+1} - b_i + 6 \left( -\frac{1}{6} \right) (b_i + b_{i+1} - 2\Delta q_i) \right|, \\ \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{b}) &\geq \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n-1} \left| b_{i+1} - b_i + 6 \left( \frac{1}{6} \right) (b_i + b_{i+1} - 2\Delta q_i) \right|. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ainsi, nous montrons que :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{q}, \mathbf{b}) &\geq \max \left( \frac{2}{3} \left( \|\mathbf{b}\|_{1,m-1} - \frac{2}{h} \|\mathbf{q}\|_{1,m} \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{3} \left( \|S(\mathbf{b})\|_{1,m-1} - \frac{2}{h} \|\mathbf{q}\|_{1,m} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

où  $\|\cdot\|_{1,p}$  est la norme  $L_1$  dans  $\mathbf{R}^p$ ,  $h = \min_{i \in \{1, \dots, m-1\}} x_{i+1} - x_i$  et

$$S : (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbf{R}^m \mapsto (a_2, a_3, \dots, a_m) \in \mathbf{R}^{m-1}.$$

Quand  $\|(\mathbf{q}, \mathbf{b})\| \rightarrow +\infty$ , si  $\|\mathbf{q}\| \rightarrow +\infty$ , nous utilisons (3.19) pour montrer que  $E(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \rightarrow +\infty$ , sinon nous utilisons (3.21). Ceci mène à la même conclusion. Donc, dans le cas  $n = m$ ,  $E(\mathbf{q}, \mathbf{b})$  est coercive.

On suppose maintenant  $m < n$ . La fonctionnelle peut être écrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{q}, \mathbf{b}) &= \sum_{i=1}^{m-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_{i+1} - b_i + 6t(b_i + b_{i+1} - 2\Delta q_i)| dt \\ &\quad + \lambda \sum_{i=1}^m \left( \underbrace{|s(x_i) - y_{g_1(i)} - \delta|}_{q_i} + \underbrace{|s(x_i) - y_{g_1(i)} + \delta|}_{q_i} \right) \\ &\quad + \lambda \sum_{i=1}^{n-m} (|s(t_{g_2(i)}) - y_{g_2(i)} - \delta| + |s(t_{g_2(i)}) - y_{g_2(i)} + \delta|), \end{aligned}$$

où  $g_1 : i \in \{1, \dots, m\} \longrightarrow g_1(i)$  est telle que  $t_i = u_{g_1(i)}$  et  $g_2 : i \in \{1, \dots, n - m\} \longrightarrow g_2(i)$  identifie les indices  $j$  pour lesquelles  $t_j$  n'est égal à aucun élément de  $\mathbf{u}$ . Ces fonctions permettent donc d'identifier les abscisses qui sont également des nœuds.

On remarque que :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{q}, \mathbf{b}) &\geq \sum_{i=1}^{m-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_{i+1} - b_i + 6t(b_i + b_{i+1} - 2\Delta q_i)| dt \\ &\quad + \lambda \sum_{i=1}^m (|q_i - f_{g_1(i)} - \delta| + |q_i - f_{g_2(i)} + \delta|) = \widehat{E}(\mathbf{q}, \mathbf{b}). \end{aligned}$$

$\widehat{E}(\mathbf{q}, \mathbf{b})$  est coercive par le travail précédent sur le cas  $n = m$ .  $E(\mathbf{q}, \mathbf{b})$  l'est donc aussi.  $\square$

### 3.1.1 Algorithme d'interpolation $L_1$ à $\delta$ près

Jusqu'à-là, nous avons autorisé le cas de la compression  $m < n$ , c'est-à-dire choisir moins de nœuds pour la spline que de données. Cependant le problème du choix des nœuds d'approximation n'est pas un problème simple en général et peut nécessiter des calculs très importants. Dans [CFL<sup>+</sup>08] et [Lav00a], les méthodes présentées nécessitent un choix préalable pour le placement des nœuds. Pour éviter ce problème, nous imposons  $m = n$ . Ainsi,  $u_i = t_i$ ,  $s(t_i) = q_i$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ . Le terme de fidélité  $\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{b})$  ne dépend maintenant plus que de  $\mathbf{q}$  et s'exprime comme suit :

$$\sum_{i=0}^n (|q_i - y_i - \delta| + |q_i - y_i + \delta|).$$

Le problème (3.3)-(3.4) est non-linéaire. On discrétise la fonctionnelle, premièrement en la divisant en  $l$  intégrales de même longueur puis en utilisant la formule du point milieu. Ceci conduit à la fonctionnelle suivante :

$$\tilde{E}(\mathbf{q}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{l-1} |\alpha_j b_i + \beta_j b_{i+1} - \gamma_j \Delta q_i| + \lambda \sum_{i=0}^n (|q_i - y_i - \delta| + |q_i - y_i + \delta|), \quad (3.22)$$

où pour  $j \in \{0, \dots, l-1\}$  :

$$\alpha_j = \frac{-4d + 6j + 3}{l^2}, \quad \beta_j = \frac{-2d + 6j + 3}{l^2}, \quad \gamma_j = \frac{-6d + 12j + 6}{l^2}$$

**Proposition 3.9.** *L'erreur de discrétisation*

$$\mathcal{E}(\mathbf{q}, \mathbf{b}) = \left| E(\mathbf{q}, \mathbf{b}) - \tilde{E}(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \right|, \quad k = 1, 2, \dots, d$$

est bornée comme suit :

$$\mathcal{E}(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{l^2} \begin{cases} 3|b_{i+1} + b_i - 2\Delta q_i| & \text{si } |b_{i+1} - b_i| \leq 3|b_{i+1} + b_i - 2\Delta q_i| \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi  $\left| E(\mathbf{q}, \mathbf{b}) - \tilde{E}(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \right| = O\left(\frac{1}{l^2}\right)$  pour tout  $(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$ .

Pour la démonstration de cette proposition, nous devons tout d'abord rappeler le lemme suivant issu de [Auq07] dont une démonstration est rappelée en Annexe B.

**Lemme 3.10.** *Soit  $f : [c, d] \mapsto \mathbf{R}$  une fonction affine définie par  $f(t) = at + b$ .*

1. Si  $|f(t)| > 0$  sur  $]c, d[$  alors  $\int_c^d |f(t)| dt = (d-c) \left| f\left(\frac{d+c}{2}\right) \right|$ .
2. Si il existe  $\xi \in ]c, d[$  tel que  $f(\xi) = 0$  alors  $\left| \int_c^d |f(t)| dt - (d-c) \left| f\left(\frac{d+c}{2}\right) \right| \right| \leq (d-c)^2 \left| \frac{a}{2} \right|$ .
3. De plus si  $c = -\frac{1}{2}$  et  $d = \frac{1}{2}$ ,  $|f(t)| > 0$  sur  $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  si et seulement si  $2|b| > |a|$ .

On peut donc maintenant démontrer la Proposition 3.9.

*Démonstration (Proposition 3.9).* Si  $|b_{i+1} - b_i| \geq 3|b_{i+1} + b_i - 2\Delta q_i|$ , d'après le lemme précédent, il n'y a pas d'erreur entre  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_{i+1} - b_i + 6t(b_{i+1} + b_i - 2\Delta q_i)| dt$  et sa discrétisée. Sinon il existe un indice  $p$  ( $0 \leq p \leq l-1$ ) tel que  $b_{i+1} - b_i + 6t(b_{i+1} + b_i - 2\Delta q_i) = 0$  sur l'intervalle  $]-\frac{1}{2} + \frac{p}{l}, -\frac{1}{2} + \frac{p+1}{l}[$ . On a alors :

$$\left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_{i+1} - b_i + 6t(b_{i+1} + b_i - 2\Delta q_i)| dt - \sum_{j=0}^{l-1} \left| (-2l + 6j + 3)b_{i+1} + (-4l + 6j + 3)b_i - (-6l + 12j + 6)\Delta q_i \right| \right| \leq \frac{3|b_{i+1} + b_i - 2\Delta q_i|}{l^2}.$$

□

Dans la pratique, comme pour l'interpolation  $L_1$  décrite dans [Lav00b] et pour remédier à la non-unicité de solution, nous pouvons favoriser un certain type de solutions par l'ajout d'un terme de régularisation. Nous pouvons par exemple chercher une solution aux dérivées les plus faibles possibles. Il en résulte alors la fonctionnelle suivante :

$$\tilde{G}(\mathbf{q}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{l-1} |\alpha_j b_i + \beta_j b_{i+1} - \gamma_j \Delta q_i| + \lambda \sum_{i=0}^n (|q_i - y_i - \delta| + |q_i - y_i + \delta|) + \varepsilon \sum_{i=1}^n |b_i| \quad (3.23)$$



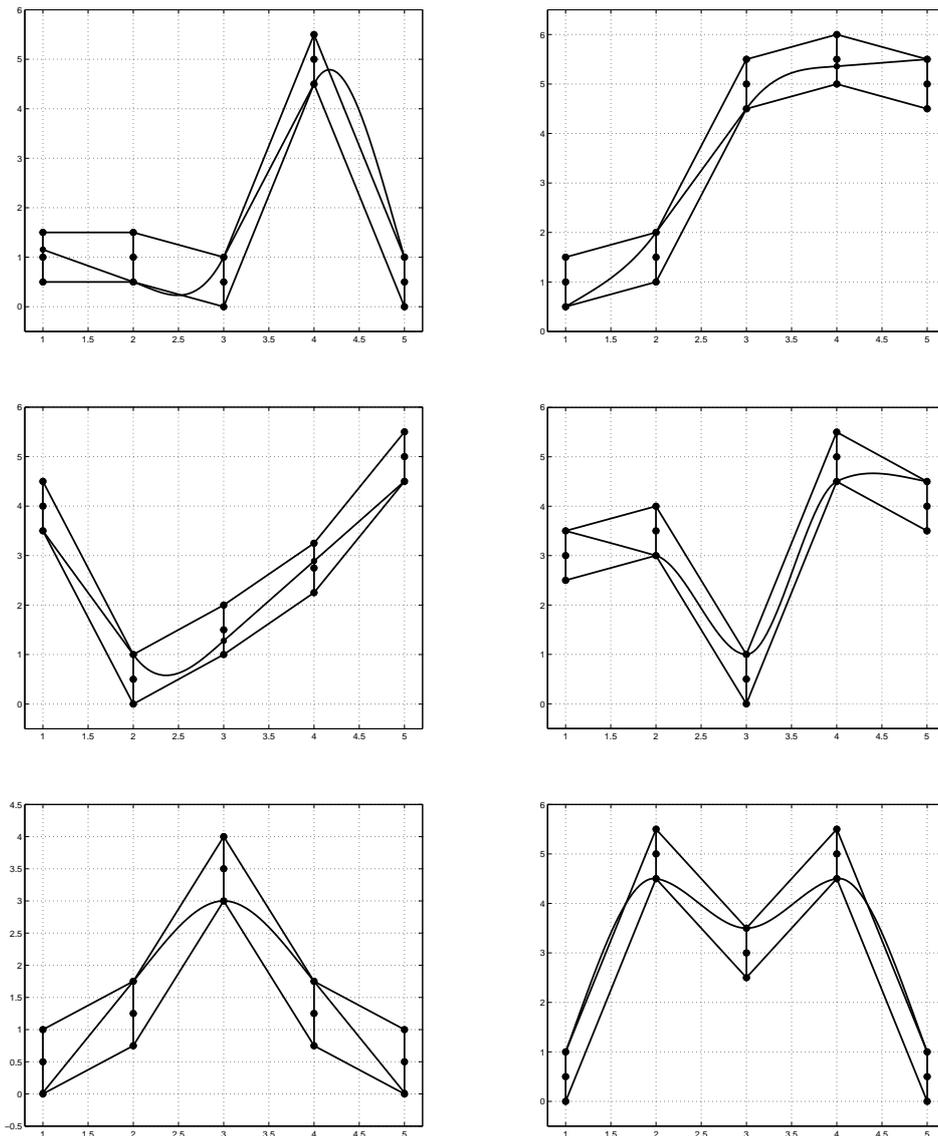


FIGURE 3.6 – Interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près par une spline cubique d’Hermite sur de petites configurations.

## 4 Méthode numérique à cinq points

L’algorithme d’interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près par fenêtre glissante sur cinq points présenté dans [GNG13] est directement inspiré de [NGA11] sur le problème de l’interpolation  $L_1$ . Sur chaque fenêtre, nous résolvons notre problème d’interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près et nous ne conservons qu’un point de passage et une dérivée première au point central de la fenêtre. Dans le cas de l’interpolation, le problème d’optimisation sur cinq points est résolu algébriquement. Cette tâche s’avère beaucoup plus complexe pour notre problème puisque les points de passage aux nœuds sont maintenant des inconnues. Notre problème comporte donc deux fois plus d’inconnues que le problème d’interpolation. Une résolution numérique est donc à ce jour inévitable.

Nous comparons notre méthode à la méthode des splines de lissage  $L_1$  rappelée au chapitre précédent. Nous faisons ce choix car dans les deux méthodes, nous devons fixer un paramètre,  $\alpha$  ou  $\delta$ , qui traduit une exigence de proximité de la solution aux données initiales. Contrairement aux splines de lissage  $L_1$ , notre approche permet de contrôler la distance maximale entre les points de données et la solution déterminée. Dans des configurations de points avec un coin (voir Figure 3.7 et 3.8), il est raisonnable de savoir *a priori* comment le lisser. Avec les splines de lissage  $L_1$  sur la Figure 3.7, nous observons que les solutions sont identiques pour les paramètres de lissage 0, 1 et 0, 5. De plus, nous ne savons pas dans quelle mesure le lissage du coin est lié au paramètre de lissage  $\alpha$ . En effet, nous savons simplement que plus  $\alpha$  est petit, plus la solution est proche des données. Cependant, nous ne sommes pas capables de quantifier cette proximité. Grâce à la stratégie d'interpolation à  $\delta$  près, nous sommes capables de fixer le lissage du coin (voir Figure 3.8). L'écart entre le coin et la spline est borné par  $\delta$ .

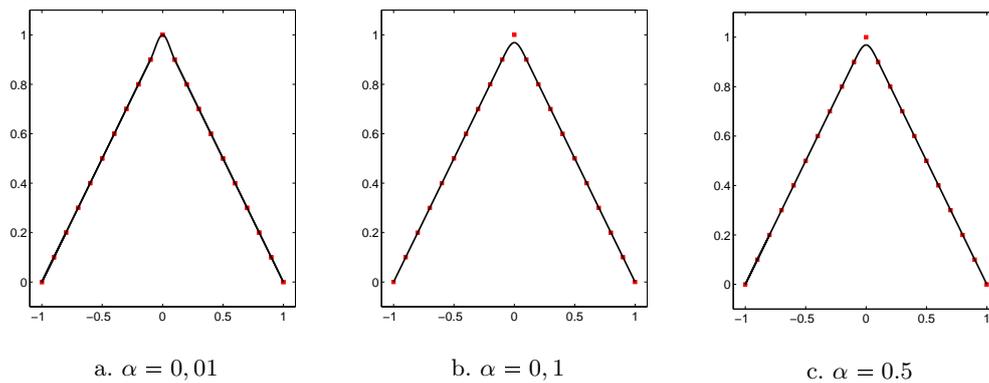


FIGURE 3.7 – Splines de lissage  $L_1$  sur une configuration de points avec un coin pour trois valeurs du paramètre de lissage  $\alpha$ .

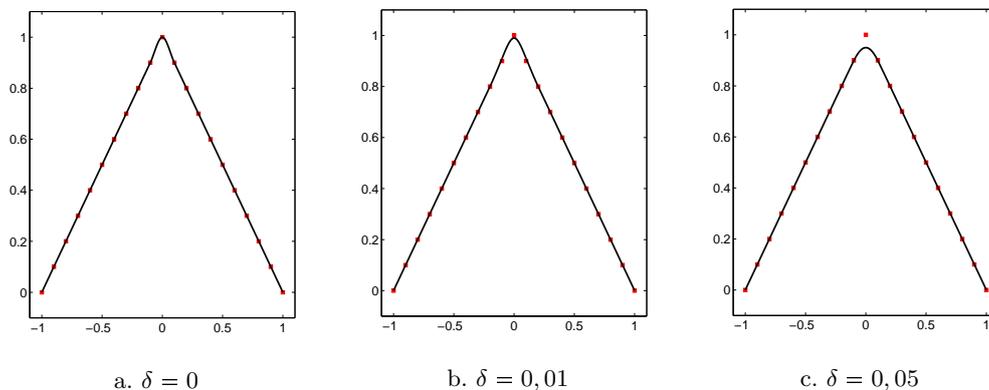


FIGURE 3.8 – Spline d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près sur une configuration de points avec un coin pour trois valeurs de  $\delta$ ,  $\lambda = 100$ .

Sur des configurations plus régulières, nous montrons sur la Figure 3.10 que nous pou-

vons obtenir des résultats aussi satisfaisants avec les splines d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près qu'avec les splines de lissage  $L_1$  (voir Figure 3.9). Une nouvelle fois, nous remarquons que nous sommes capables de contrôler plus précisément l'écart entre les solutions et les points de données.

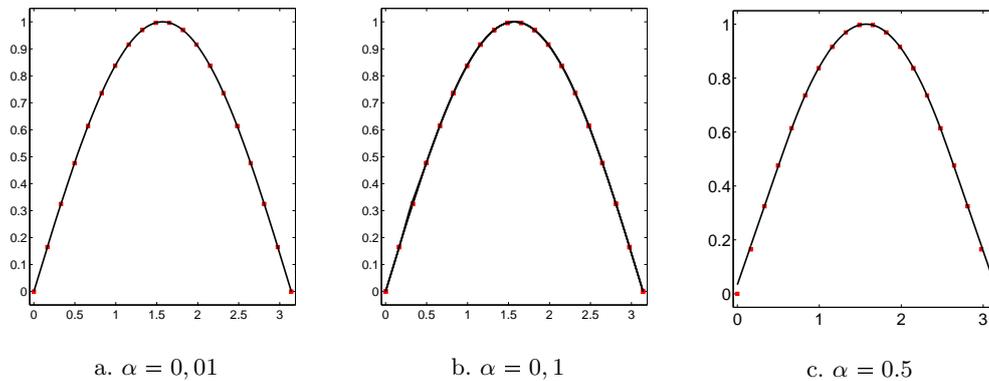


FIGURE 3.9 – Splines de lissage  $L_1$  sur une configuration de points de type sinus pour trois valeurs du paramètre de lissage  $\alpha$ .

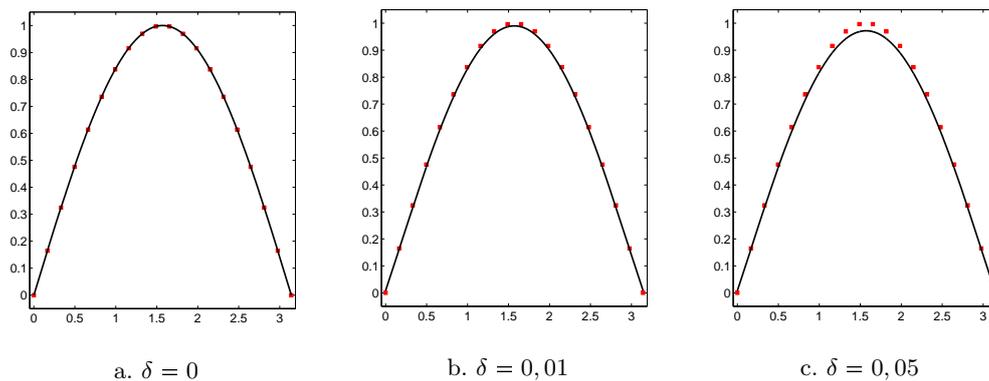


FIGURE 3.10 – Spline d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près sur une configuration de points de type sinus pour trois valeurs de  $\delta$ ,  $\lambda = 100$ .

#### 4.1 Méthode itérative pour les données bruitées

Comme nous utilisons un algorithme de fenêtre glissante sur cinq points, les courbes obtenues conservent localement la forme des données. Ceci donne de bons résultats dans le cas de données lisses (voir le paragraphe précédent) mais dans de nombreux domaines d'application, les données peuvent être bruitées. Sur ce type de données, une itération de l'algorithme n'est pas suffisante (voir Figure 3.11.a) même en modifiant les valeurs de  $\lambda$  ou  $\delta$ . Une façon d'améliorer le lissage global des données est d'itérer l'algorithme sur l'ensemble des points d'approximation  $q_i$ . L'ensemble  $\mathbf{q}^{(k-1)}$  des points d'approximation déterminés à l'étape  $k - 1$  est utilisé comme données à l'étape  $k$ . Dans les Figures 3.11

et 3.12, cette stratégie est appliquée à des données perturbées par un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart-type 0,05. Dans le cas de saut dans les données, la méthode itérative atténue le saut d'au plus  $\delta$  par itération (voir Figure 3.12).

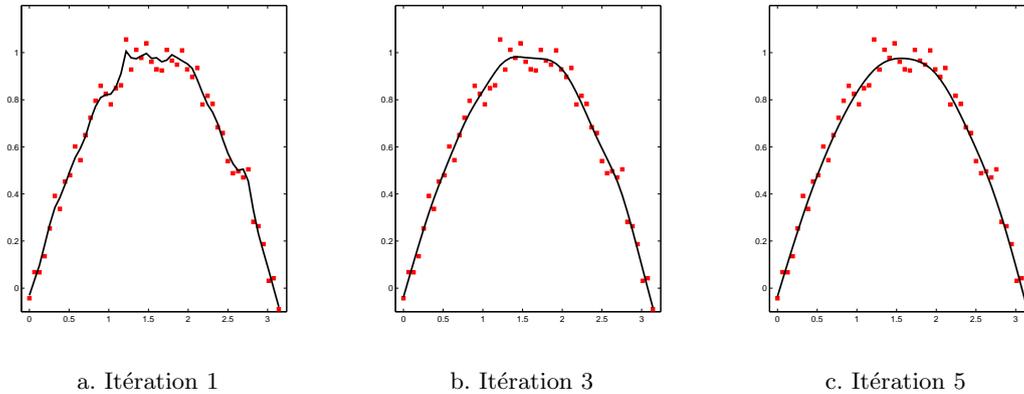


FIGURE 3.11 – Itération de la méthode sur des données bruitées avec  $\lambda = 100$  et  $\delta = 0,05$ .

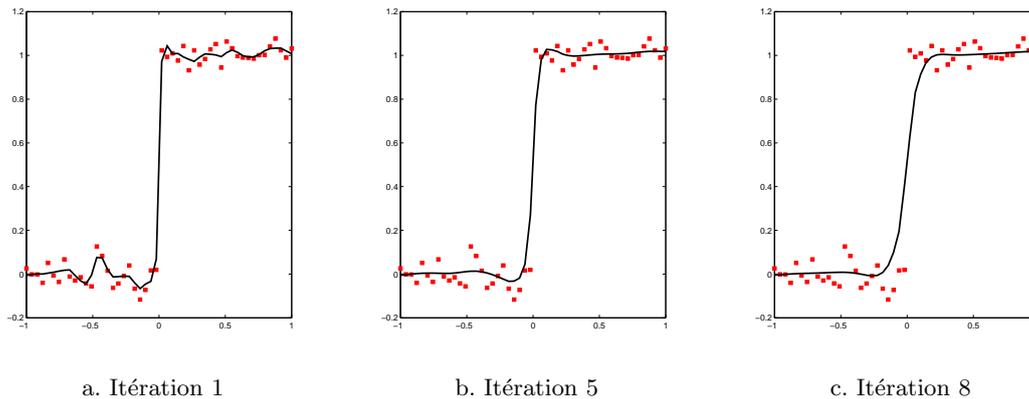
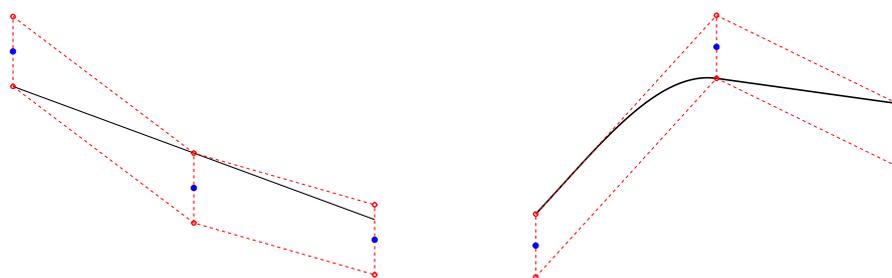


FIGURE 3.12 – Itération de la méthode sur des données type Heaviside bruité avec  $\lambda = 100$  et  $\delta = 0,05$ .

## 5 Méthodes à trois points

La méthode à cinq points présentée au paragraphe précédent effectue une résolution numérique sur chaque fenêtre. Afin de réduire le nombre d'opérations arithmétiques et donc le temps de calcul, nous présentons, dans ce paragraphe, deux méthodes par fenêtre glissante sur trois points. Nous utilisons pour ces méthodes la Proposition 3.4, page 88, qui résout de manière exacte le problème lorsque (3.11) n'est pas satisfaite. Quand (3.11) est satisfaite, les solutions du problème (3.3)-(3.4) sont affines. Il faut alors en sélectionner une cohérente vis-à-vis des données. Pour cela, nous introduisons la méthode suivante qui sera utilisée dans les deux méthodes à trois points présentées.



(3.11) est satisfaite

(3.11) n'est pas satisfaite

FIGURE 3.13 – Les deux cas possibles dans l'algorithme à trois points.

### 5.1 Méthode de régression $\ell_1$ à $\delta$ près

Nous introduisons dans ce paragraphe le problème de régression  $\ell_1$  à  $\delta$  près. La résolution de ce problème sera utile dans l'algorithme à trois points proposé au paragraphe suivant. Soient  $f_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  points du plan et  $\omega_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , leurs poids associés et  $\delta \geq 0$ . Le problème de régression linéaire  $\ell_1$  à  $\delta$  près est formulé comme suit :

$$\min_{(a,b) \in \mathbf{R}^2} \sum_{i=1}^n \omega_i (|y_i - \delta - ax_i - b| + |y_i + \delta - ax_i - b|). \quad (3.25)$$

Ce problème est conçu afin de trouver une droite de régression au plus proche des portes associées aux points de données. De plus, la présence de poids permet de donner plus d'importance à certains points.

Dans la Figure 3.14, nous utilisons la méthode de régression linéaire  $\ell_1$  à  $\delta$  près pour  $\delta = 1$  et différents choix de poids. La résolution est ici numérique. Nous utilisons un algorithme de type point intérieur comme celui rappelé dans l'Algorithme 1, page 57. Dans le cas non-pondéré,  $\omega = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ , nous remarquons que la propriété d'interpolation des meilleures approximations  $\ell_1$  est conservée. En effet, nous avons le résultat suivant.

**Proposition 3.11.** *Soient  $f_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  des points du plan et  $\delta \geq 0$ . Il existe au moins une solution du problème :*

$$\min_{a,b \in \mathbf{R}} \sum_{i=1}^n (|y_i - \delta - ax_i - b| + |y_i + \delta - ax_i - b|), \quad (3.26)$$

qui interpole au moins deux points parmi les  $(x_i, y_i \pm \delta)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser le Théorème 1.40, page 38, pour les points  $(x_i, y_i - \delta)$  et  $(x_i, y_i + \delta)$ .  $\square$

Nous nous intéressons aussi sur la Figure 3.14 à d'autres choix de pondération  $\omega$ . Nous constatons un alignement remarquable des points 2 à 5. Les poids  $\omega = (1, 10, 10, 10, 10, 1, 1)$  donnent plus d'importance à ces points et permettent ainsi d'obtenir une solution qui tient

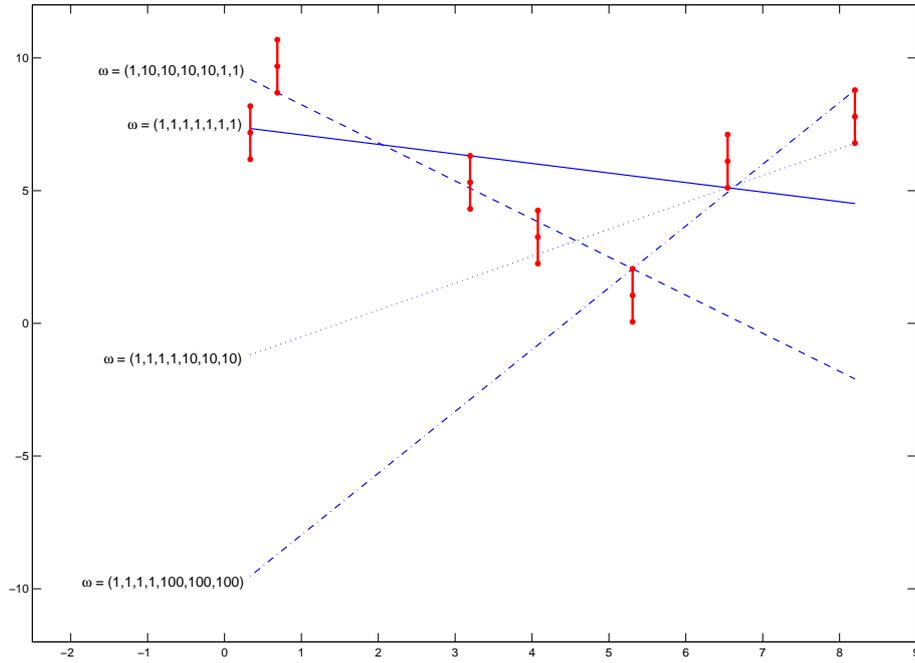


FIGURE 3.14 – La méthode de régression linéaire  $\ell_1$  à  $\delta$  près sur un jeu de données pour différents choix de poids  $\omega = \{\omega_i\}_{i=1,\dots,n}$ .

compte de l'observation faite en coupant les portes 2 à 5. L'algorithme présenté ci-après se basera en partie sur ce principe.

## 5.2 Méthode quasi-algébrique à trois points

L'algorithme 4 est composé de deux étapes majeures. La première étape consiste à déterminer les points d'approximation  $q_i^*$ . Considérons la  $i^{\text{ème}}$  fenêtre. Si (3.11) n'est pas satisfaite, par la Proposition 3.4, page 88, nous déterminons directement le point d'approximation au centre de la fenêtre. Sinon, la ou les solutions du problème d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près sont affines. Par la démonstration de la Proposition 3.7, page 92, elles sont solutions du problème de régression  $\ell_1$  à  $\delta$  près :

$$\min_{(a,b) \in \mathbf{R}^2} \sum_{j=i-1}^{i+1} (|y_j - \delta - ax_j - b| + |y_j + \delta - ax_j - b|).$$

L'ensemble des solutions de ce problème est en général infini. Afin de choisir une solution cohérente localement avec la forme des données, nous étendons la fenêtre à deux voisins supplémentaires. De plus, afin que la solution déterminée satisfasse l'exigence que son graphe coupe les trois portes de la fenêtre initiale, nous affectons des poids  $\omega_j > 0$ . Ces poids sont plus importants pour les termes associés aux trois points de la fenêtre initiale

dans le problème de régression  $\ell_1$  à  $\delta$  près :

$$\min_{(a,b) \in \mathbf{R}^2} \sum_{j=i-2}^{i+2} \omega_j (|y_j - \delta - ax_j - b| + |y_j + \delta - ax_j - b|).$$

Nous résolvons ce problème par un algorithme de type point intérieur et obtenons une solution  $(a^*, b^*)$ . Le point d'approximation  $q_i^*$  recherché est donc  $a^*x_i + b^*$ .

La deuxième étape consiste à déterminer les dérivées premières aux points d'approximation par la méthode d'interpolation spline cubique d'Hermite  $L_1$  par fenêtre glissante sur cinq points présentée dans le chapitre 2, paragraphe 1.4.2, page 57. Nous choisissons cette approche car le faisceau de dérivées possibles pour une résolution sur trois points est large en général. Il est difficile de choisir une valeur cohérente quand nous ne considérons que deux voisins directs. La méthode d'interpolation utilisée étant algébrique, le nombre d'opérations arithmétiques dans l'algorithme augmente très peu.

**Data** :  $\{f_i = (x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, n}$ ,  $\delta > 0$ .

**for**  $i = 2 \rightarrow n - 1$  **do**

$$\alpha = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) + y_{i-1};$$

**if**  $\alpha - 2\delta \leq y_i \leq \alpha + 2\delta$  **then**

    Étendre la fenêtre à  $f_{i-2}$  et/ou  $f_{i+2}$ ;

    Déterminer numériquement une droite de régression  $L_1$  contrôlée

$$y = a^*x + b^*;$$

**else**

$$q_i^* = (x_i, a^*x_i + b^*);$$

$$h_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}};$$

$$h_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i};$$

$$q_i^* = (x_i, y_i - \text{sign}(h_{i-1} - h_i)\delta);$$

**end**

**end**

Interpoler les  $q_i^*$  par la méthode d'interpolation  $L_1$ , Chapitre 2, paragraphe 4.2.1.

**Algorithme 4** : Algorithme par fenêtre glissante sur trois points pour l'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près par une spline cubique d'Hermite.

Nous avons appliqué l'Algorithme 4 à une configuration de type Heaviside. Ceci est illustré sur la Figure 3.15. Nous remarquons que la méthode conserve les alignements sauf au niveau du saut où celui-ci est lissé de  $\delta$  de chaque côté. Nous ne constatons ni de phénomène d'oscillation ni de sursaut autour du saut et celui-ci est lissé avec contrôle.

Nous appliquons également cette méthode aux configurations de points étudiées pour la méthode à cinq points Ceci est illustré sur les Figures 3.16 et 3.17. Nous constatons que nous obtenons des solutions similaires. On justifie donc ici l'intérêt géométrique d'une méthode à trois points.

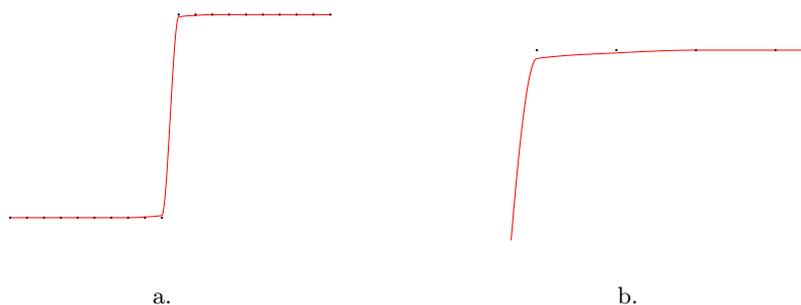


FIGURE 3.15 – Application de la méthode à trois points quasi-algébrique sur une configuration de points de type Heaviside et avec  $\delta = 0.$ , (a.), zoom sur la partie supérieure du saut (b.).

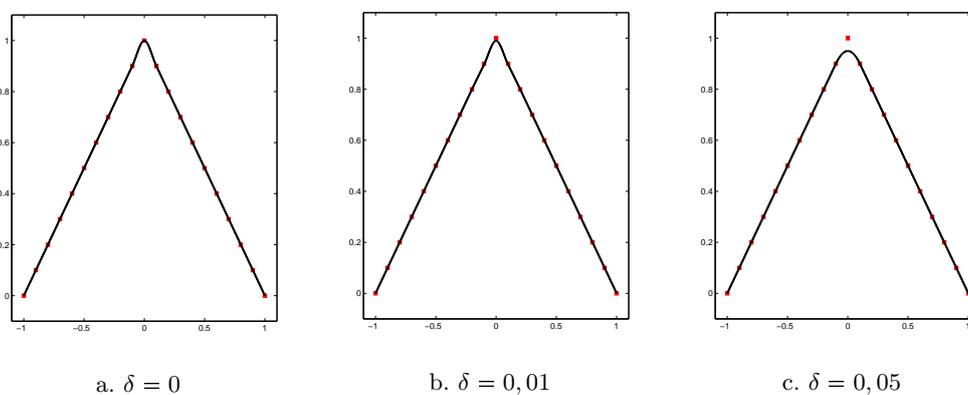


FIGURE 3.16 – Spline d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près par la méthode quasi-algébrique à trois points sur une configuration de points avec un coin pour trois valeurs de  $\delta$ .

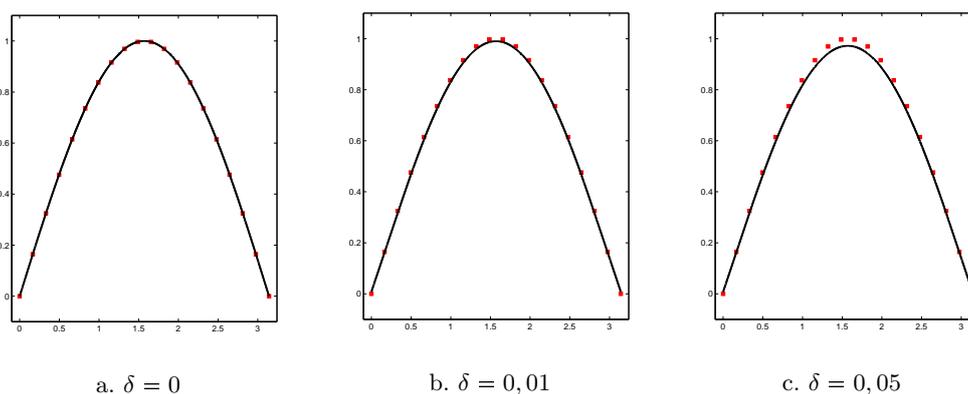


FIGURE 3.17 – Spline d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près par la méthode quasi-algébrique à trois points sur une configuration de points de type sinus pour trois valeurs de  $\delta$ .

L'autre atout de cette méthode est qu'elle est plus rapide que la méthode à cinq points grâce notamment à l'utilisation de la Proposition 3.4, page 88. De plus, la taille du système numérique de la régression  $\ell_1$  à  $\delta$  près à résoudre est de loin plus petit que

celui de la méthode à cinq points. Dans cette dernière méthode, nous rappelons qu'il faut résoudre sur chaque fenêtre un système de  $4l + 8$  équations avec dix inconnues où  $l$  est le nombre de divisions de l'intervalle d'intégration opérées lors de la discrétisation du problème d'interpolation à  $\delta$  près. En comparaison, la régression linéaire  $\ell_1$  à  $\delta$  près est un problème linéaire de dix équations à deux inconnues. Lorsque nous appliquons la méthode à des données bruitées<sup>1</sup>, la solution obtenue n'est pas lisse et possède encore des oscillations comme montré sur la Figure 3.18. Nous proposons donc, comme précédemment, d'itérer l'Algorithme 4. Nous obtenons des résultats graphiques similaires (voir aussi la Figure 3.19) à la méthode à cinq points mais avec un temps de calcul en moyenne quinze fois plus petit.

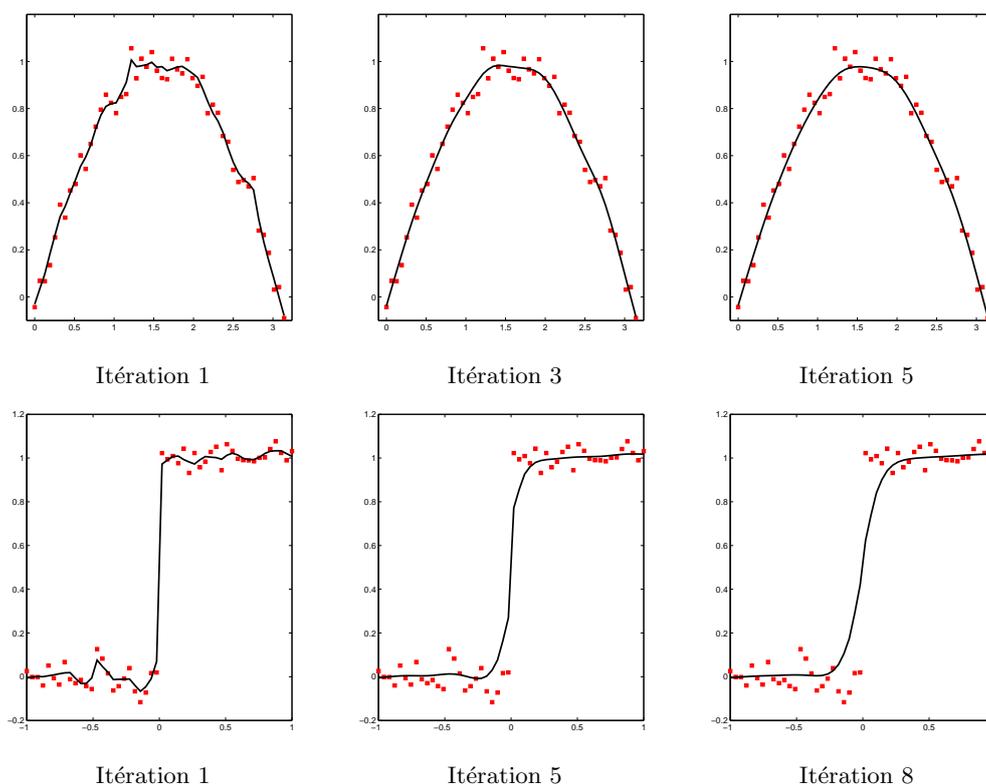


FIGURE 3.18 – Lissage d'un sinus bruité et d'une configuration de Heaviside bruitée par la méthode trois points avec  $\delta = 0,05$ .

Afin d'aller plus loin dans la comparaison des méthodes à trois et cinq points, nous avons engendré un échantillon de cent jeux de données. Ces jeux de données ont été obtenus en dégradant la fonction  $x \in [0, \pi] \mapsto \sin(x)$  par un bruit gaussien d'espérance nulle et d'écart type 0,05. Nous avons appliqué dix fois les méthodes à trois et cinq points sur chaque élément de l'échantillon. Nous avons calculé l'écart relatif maximal entre les deux solutions déterminées à chaque itération. Nous avons calculé une moyenne de ces écarts et nous avons déterminé le plus petit et le plus grand. Ces résultats sont illustrés dans les histogrammes sur la Figure 3.20. Nous remarquons une décroissance de ces écarts itération après itération. Ceci confirme notre intérêt pour une méthode à trois points qui donnent

1. Nous réutilisons les données des Figures 3.11 et 3.12.

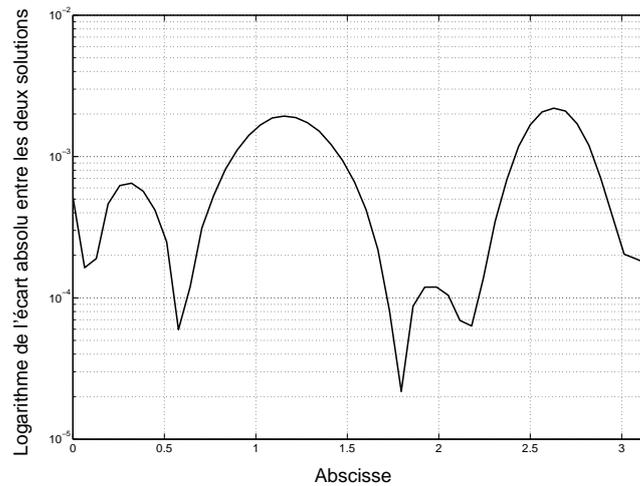


FIGURE 3.19 – Écart absolu dans un repère semi-logarithmique entre les solutions à trois et cinq points après cinq itérations des méthodes sur le signal sinus bruité illustré aux Figures 3.11 et 3.18 avec  $\delta = 0,05$ .

des résultats similaire à la méthode à cinq point mais en nécessitant moins de calculs. Nous proposons dans la section suivante une approche pour diminuer encore davantage le nombre de calculs.

### 5.3 Méthode algébrique à trois points

Lorsque (3.11) est satisfaite, le problème (3.3)-(3.4) est équivalent au problème (3.26). Dans la méthode précédente, nous avons proposé une résolution numérique de ce problème tout en agrandissant la fenêtre pour plus de cohérence quant à la forme des données. Nous proposons dans ce paragraphe de déterminer algébriquement une telle solution. Étant donné les points  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ , la Proposition 3.11, page 101, affirme qu'il existe une solution de ce problème parmi les fonctions affines qui interpolent deux des points suivants :

$$f_1 + \varepsilon\delta_2, f_2 + \varepsilon\delta_2, f_3 + \varepsilon\delta_2 \quad \text{où } \varepsilon = -1 \text{ ou } 1.$$

Dans notre algorithme algébrique, toutes ces fonctions affines sont testées et nous déterminons ainsi lesquelles sont solutions du problème (3.3)-(3.4) sur trois points. Afin de conserver les alignements et d'en introduire lorsque c'est possible, nous testons également les fonctions affines qui interpolent deux des trois points  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ . Nous disposons à la fin de ce test d'un ensemble de solutions. Nous sélectionnons l'une d'entre elles en élargissant la fenêtre à deux voisins supplémentaires comme dans la méthode quasi-algébrique. En effet, nous en choisissons une qui minimise sur l'ensemble des solutions considérées la fonction coût :

$$\min_{(a,b) \in \mathbf{R}^2} \sum_{i=j-2}^{j+2} \omega_i (|y_i - \delta - ax_i - b| + |y_i + \delta - ax_i - b|),$$

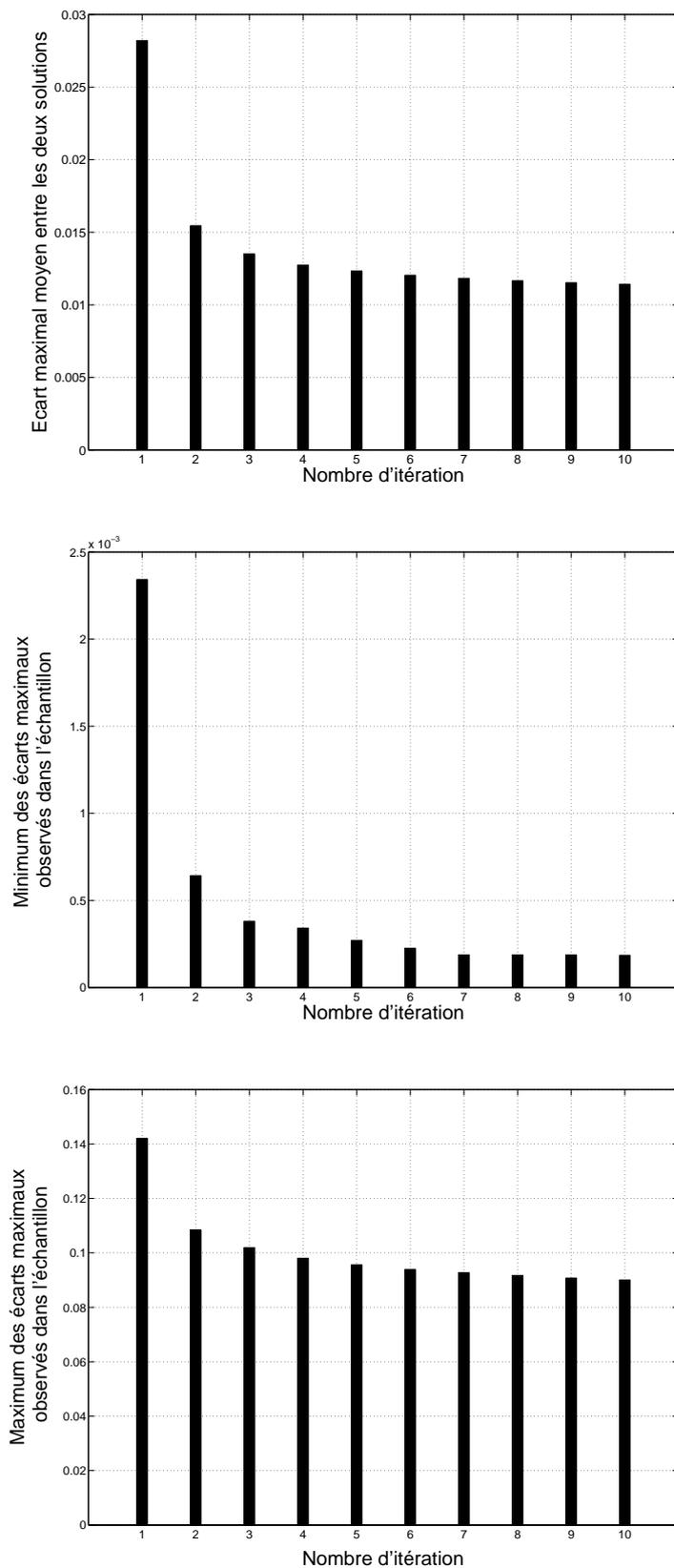


FIGURE 3.20 – Histogrammes de l'évolution de l'écart maximal moyen (haut), du minimum (milieu) et du maximum des écarts maximaux observés, itération après itération, entre une solution obtenue par la méthode numérique à cinq points et la méthode quasi-algébrique à trois points.

avec  $\omega_{j-2} = \omega_{j+2} \ll \omega_{j-1} = \omega_j = \omega_{j+1}$ . Nous appliquons cette méthode aux configurations de points avec un coin et de type sinus déjà utilisées pour les méthodes à cinq points et à quasi-algébrique trois points. Nous obtenons des résultats similaires aux méthodes précédentes pour les configurations de type coin et sinus (voir les Figures 3.21 et 3.22).

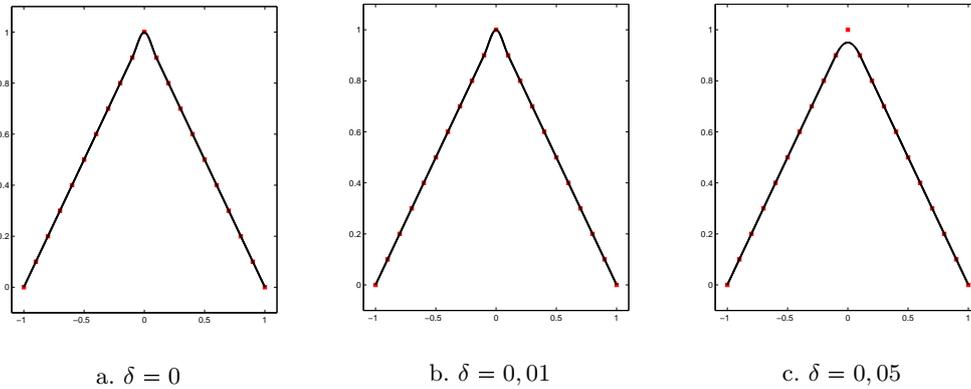


FIGURE 3.21 – Spline d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près par la méthode algébrique à trois points sur une configuration de points avec un coin pour trois valeurs de  $\delta$ .

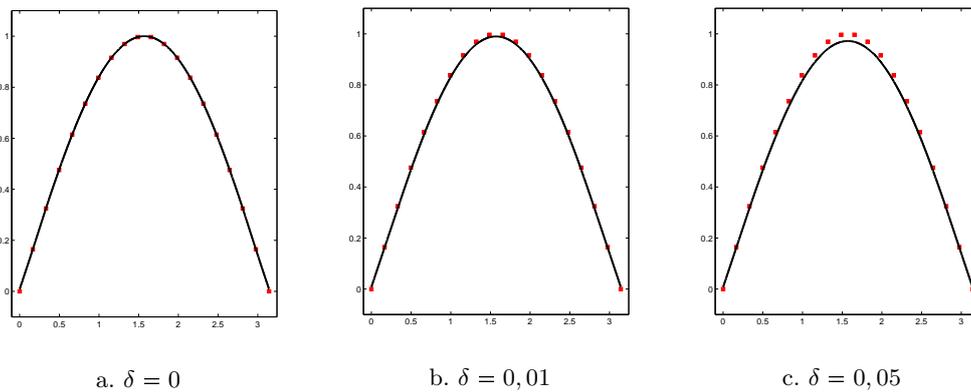


FIGURE 3.22 – Spline d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près par la méthode algébrique à trois points sur une configuration de points de type sinus pour trois valeurs de  $\delta$ .

Nous avons testé également cette méthode sur les données bruitées illustrées sur les Figures 3.11 et 3.12 avec le même nombre d'itérations et la même tolérance  $\delta = 0,05$ . Les résultats sont illustrés sur les Figures 3.23 et 3.24. Cette méthode n'ayant pas l'aspect optimal de la méthode quasi-algébrique précédente (résolution de (3.26)), elle donne de moins bons résultats au bout de six itérations. Cependant, avec un  $\delta$  plus petit ( $\delta = 0,01$ ) et un nombre d'itérations plus important, nous observons sur les Figures 3.23 et 3.25 que nous obtenons de bons résultats graphiques. Les itérations étant purement algébrique, un nombre plus important d'itération n'affecte que très peu la complexité algorithmique.

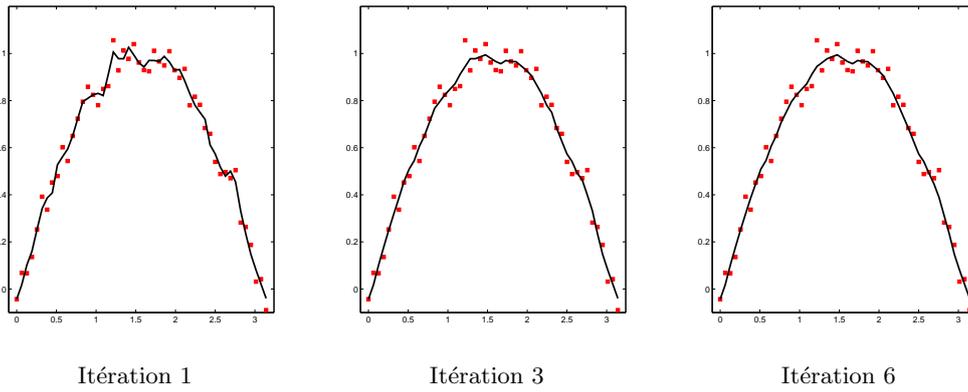


FIGURE 3.23 – Lissage d'un sinus bruité par la méthode algébrique à trois points avec  $\delta = 0,05$ .

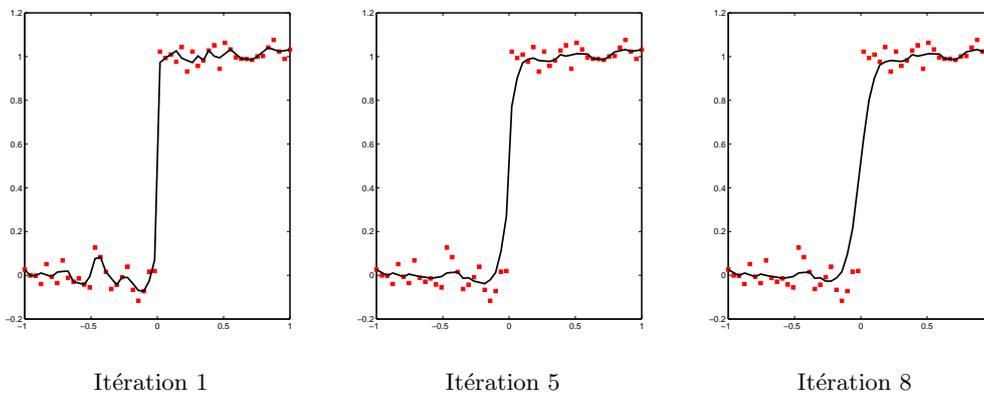


FIGURE 3.24 – Lissage d'une configuration de Heaviside bruitée par la méthode algébrique à trois points avec  $\delta = 0,05$ .

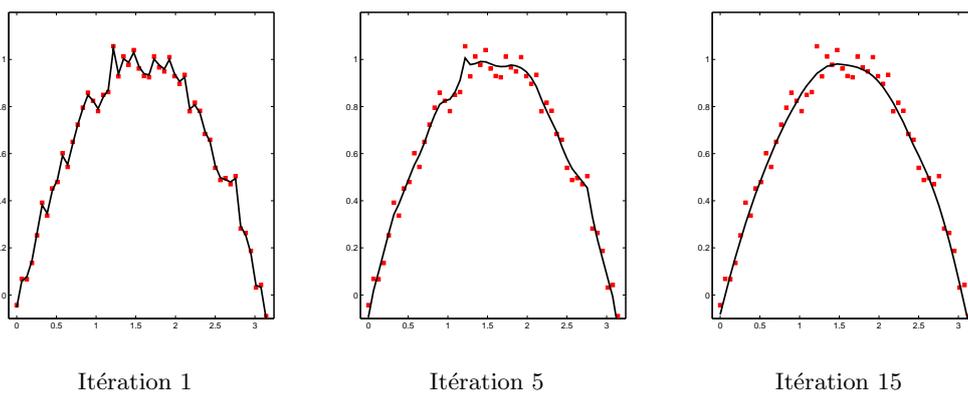


FIGURE 3.25 – Lissage d'un sinus bruité par la méthode algébrique à trois points avec  $\delta = 0,01$ .

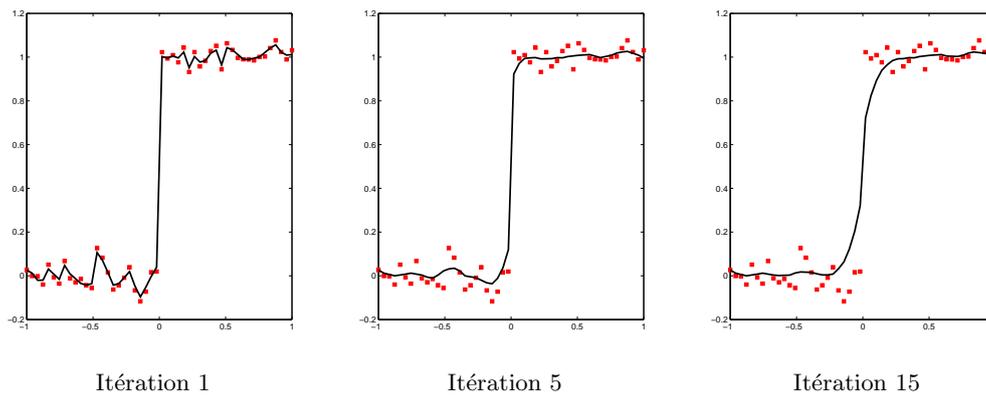


FIGURE 3.26 – Lissage d’une configuration de type Heaviside bruitée par la méthode algébrique à trois points avec  $\delta = 0,01$ .

## 6 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons introduit une nouvelle stratégie consistant à interpoler à  $\delta$  près des données discrètes. Nous avons développé des algorithmes par fenêtres glissantes, dont l’un à trois points est totalement algébrique et applicable en temps réel pour les applications à la planification de trajectoire de systèmes mécaniques. La méthode présentée est  $C^1$ . Par la technique présentée au chapitre 2, paragraphe 4.2.2, nous pouvons rendre facilement la méthode  $C^k$ ,  $k \geq 1$ .

Nous étendons dans le chapitre suivant cette stratégie au cas des surfaces pour des données réparties dans une grille régulière.

## Chapitre 4

# Interpolation à $\delta$ près par une surface spline $L_1$

### Sommaire

---

1	Interpolation $L_1$ à $\delta$ près sur une croix de données . . . . .	112
2	Méthode à croix glissante sur neuf points . . . . .	113
3	Méthode à croix glissante sur cinq points . . . . .	118
4	Conclusion du chapitre . . . . .	127

---

Dans ce chapitre, nous cherchons à approcher des données réparties dans une grille régulière par une surface spline bicubique d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près,  $\delta > 0$ . Lavery a introduit plusieurs méthodes d'approximation de données discrètes par une surface spline bicubique  $C^1$  par minimisation de la combinaison convexe de la norme  $L_1$  des différentes dérivées secondes et d'un terme d'approximation [Lav01]. Ce sont donc des méthodes de lissage. Dobrev, Guermond et Popov ont introduit une méthode similaire en utilisant des splines dans un espace de Sobolev [DGP10]. Ces deux approches permettent d'obtenir de bons résultats, notamment dans le cas de l'approximation de données possédant de brusques changements de forme. En effet, nous n'observons pas de phénomène de Gibbs autour des sauts comme c'est le cas pour les méthodes de lissage au sens de la norme  $L_2$ . Cependant, ces méthodes ne permettent pas de contrôler la distance de la solution calculée aux données initiales. Nous proposons donc d'étendre ici au cas des surfaces la stratégie d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près décrite au chapitre précédent.

Étant donnée la complexité du problème, les méthodes présentées dans la littérature ne permettent pas d'obtenir une solution dans un temps "raisonnable" lorsqu'elles sont appliquées à un grand flot de données. Notre méthodologie présente aussi le même problème. C'est pourquoi, nous avons choisi de développer un algorithme par fenêtre glissante pour y remédier. Nous verrons que l'utilisation d'une croix glissante donne de bons résultats concernant la conservation de la forme des données. Sur chaque croix, nous déterminons un couple de splines d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près s'intersectant au point situé au centre de la croix. Nous récupérons alors les informations en ce point. Celles-ci nous permettent, après avoir fait glisser la croix sur l'ensemble de la grille de données, de construire la surface spline d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près.

Dans un premier paragraphe, nous présentons le problème d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près sur une croix de données issues de données réparties dans une grille régulière. Nous proposons alors au second paragraphe un algorithme à croix glissante sur neuf points. Cette méthode permet d'obtenir un algorithme de complexité linéaire donnant des résultats similaires à ceux obtenus par Lavery et Dobrev *et al.* sur des données comportant des sauts. Cependant, nous sommes amenés à faire une résolution numérique sur chaque croix. Afin de réduire encore la complexité algorithmique, nous réduisons le nombre de points dans la croix glissante. Nous présentons donc un algorithme par croix glissante sur cinq points basé sur un résultat de résolution formelle dans certains cas. Enfin, nous appliquons ces méthodes à différents problèmes de restauration d'images.

## 1 Interpolation $L_1$ à $\delta$ près sur une croix de données

Considérons une croix à  $4n + 1$  points de centre  $\mathcal{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , de composante horizontale :

$$\mathcal{H} = \{\mathcal{P}_i = (x_i, y_0, z_i), i = 1, \dots, 2n\} \cup \mathcal{P}_0,$$

et verticale :

$$\mathcal{V} = \{\mathcal{P}_i = (x_0, y_i, z_i), i = 2n + 1, \dots, 4n\} \cup \mathcal{P}_0.$$

Posons  $\mathbf{x} = \{x_0, x_1, \dots, x_{2n}\}$  et  $\mathbf{y} = \{y_0, y_{2n+1}, y_{2n+2}, \dots, y_{4n}\}$ . Une illustration pour  $n = 2$  est donnée sur la Figure 4.1. Le problème d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près,  $\delta > 0$ , par un couple de splines cubiques d'Hermite sur une telle croix est défini dans la proposition suivante.

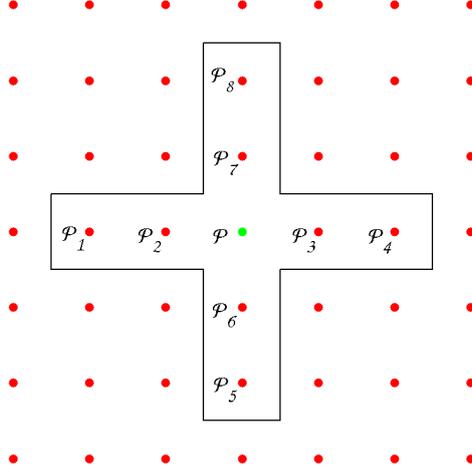


FIGURE 4.1 – Croix glissante sur neuf points.

**Proposition 4.1.**

$$\min_{\gamma, \xi} \int_{x_1}^{x_{2n}} \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}(x, y_0) \right| dx + \int_{y_{2n+1}}^{y_{4n}} \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}(x_0, y) \right| dy \quad (4.1)$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} \gamma(\cdot, y_0) &\in \tilde{\mathcal{S}}_{1, \mathbf{x}}, \\ \xi(x_0, \cdot) &\in \tilde{\mathcal{S}}_{1, \mathbf{y}}, \\ |\gamma(x_i, y_0) - z_i| &\leq \delta, \quad \text{si } \mathcal{P}_i \in \mathcal{H}, \quad i = 0, 1, \dots, 4n, \\ |\xi(x_0, y_i) - z_i| &\leq \delta, \quad \text{si } \mathcal{P}_i \in \mathcal{V}, \quad i = 0, 1, \dots, 4n, \\ \gamma(x_0, y_0) &= \xi(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (4.2)$$

existe.

Nous pouvons montrer cette proposition par une démonstration très similaire à celle du Théorème 3.1, page 84.

## 2 Méthode à croix glissante sur neuf points

Nous proposons dans ce paragraphe une méthode par croix glissante sur neuf points illustrée sur la Figure 4.1. Avec les notations du paragraphe précédent et  $n = 2$ , nous

avons :

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_4} \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}(x, y_0) \right| dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_2 - b_1 + 6t(b_1 + b_2 - 2\frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1})| dt \\
&+ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_0 - b_2 + 6t(b_0 + b_2 - 2\frac{q_0 - q_2}{x_0 - x_2})| dt \\
&+ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_3 - b_0 + 6t(b_3 + b_0 - 2\frac{q_3 - q_0}{x_3 - x_0})| dt \\
&+ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_4 - b_3 + 6t(b_4 + b_3 - 2\frac{q_4 - q_3}{x_4 - x_3})| dt,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

et :

$$\begin{aligned}
\int_{y_5}^{y_8} \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}(x_0, y) \right| dy &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |c_6 - c_5 + 6t(c_5 + c_6 - 2\frac{q_6 - q_5}{y_6 - y_5})| dt \\
&+ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |c_0 - c_6 + 6t(c_6 + c_0 - 2\frac{q_0 - q_6}{y_0 - y_6})| dt \\
&+ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |c_7 - c_0 + 6t(c_0 + c_7 - 2\frac{q_7 - q_0}{y_7 - y_0})| dt \\
&+ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |c_8 - c_7 + 6t(c_7 + c_8 - 2\frac{q_8 - q_7}{y_8 - y_7})| dt,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

où de manière similaire au cas courbe, les  $q_i$  sont les points d'approximation et les  $b_i$ ,  $c_i$  sont les dérivées premières associées dans les deux directions de la grille. Étant donnée la complexité du problème, nous optons pour une résolution numérique. Afin de tenir compte des contraintes (4.2), nous ajoutons aux termes (4.3) et (4.4) le terme :

$$\lambda \sum_{i=0}^8 (|q_i - z_i + \delta| + |q_i - z_i - \delta|), \tag{4.5}$$

où  $\lambda > 0$  est choisi grand. Ce problème est ensuite discrétisé et nous le résolvons par une méthode de type point intérieur comme celui rappelé dans l'Algorithme 1, page 57. Afin d'obtenir une solution d'approximation globale, nous faisons parcourir à cette croix l'ensemble de la grille. Nous ne conservons que les informations au point central de la grille, point d'approximation et dérivées premières dans les deux directions. Nous avons testé cette méthode sur un jeu de données de type pyramide (voir Figure 4.2.b). Nous la comparons à la méthode d'interpolation  $L_1$  qui consiste à appliquer la méthode courbe décrite au chapitre 2, paragraphe 1.4.2 dans toutes les directions de la grille (voir Figure 4.2.a). Nous constatons que la méthode que nous avons introduite permet d'atténuer l'effet de marche sur les arêtes de la pyramide. Contrairement à ce qu'affirmaient les auteurs dans [DGP10], il n'est pas nécessaire de relaxer la continuité  $C^1$  de la solution pour obtenir des résultats satisfaisants sur les coins présents dans cette configuration. Nous comparons

également cette méthode aux méthodes de lissage  $L_1$  et  $L_2$  par splines bicubiques qui consistent à minimiser une combinaison convexe d'un terme basé sur la norme  $L_1$  de la dérivée seconde et d'un terme d'approximation. Tout comme la méthode de lissage  $L_1$  et contrairement à son analogue  $L_2$ , notre méthode n'introduit pas d'oscillations autour des parties abruptes de la pyramide. Cependant, nous ne savons pas *a priori* quantifier la proximité de la spline de lissage  $L_1$  par rapport aux données. Avec la solution d'interpolation à  $\delta$  près, par construction, la distance entre celle-ci et les données initiales est alors bornée.

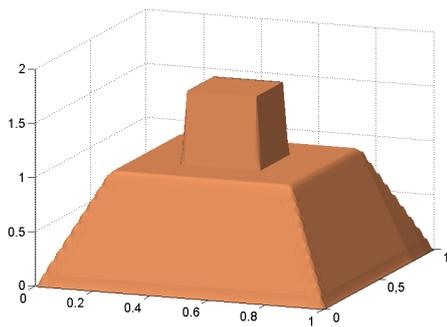
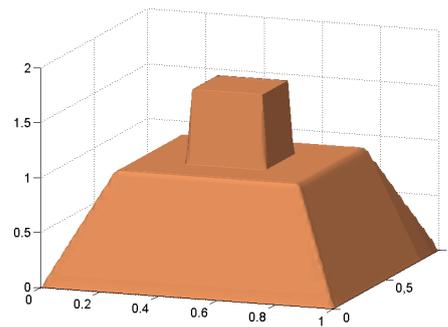
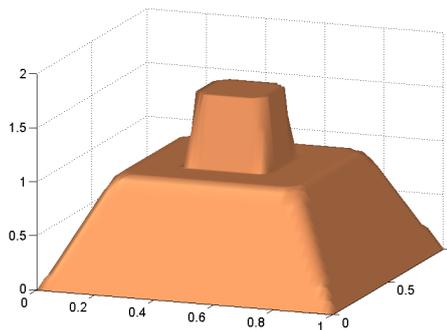
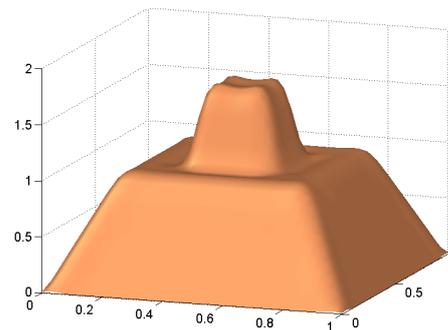
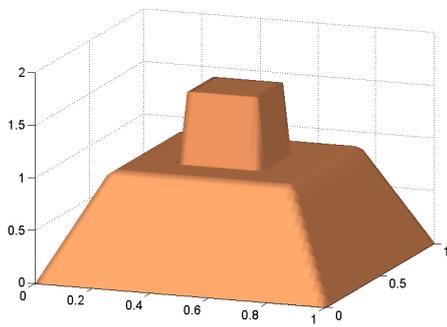
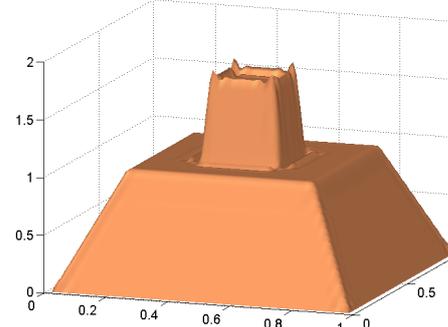
a. Interpolation  $L_1$ b.  $\delta = 0.01$ ,  $\lambda = 100$ c.  $\alpha = 0.5$ d.  $\alpha = 0.5$ e.  $\alpha = 0.01$ f.  $\alpha = 0.01$ 

FIGURE 4.2 – Surface spline bicubique d'interpolation  $L_1$  (a.) et d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près ( $\lambda = 100$ ,  $\delta = 0.01$ ) (b.) sur une configuration pyramidale. Spline bicubique de lissage  $L_1$  (c., e.) et  $L_2$  (d., f.) avec paramètre de régularisation  $\alpha = 0.5$  et  $\alpha = 0.01$ .

Nous pouvons appliquer la méthode itérativement à des données bruitées. Nous appliquons la méthode à une image corrompue par un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance égale à quinze.



FIGURE 4.3 – Application itérative de la méthode à neuf points d’interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près avec  $\lambda = 100$ ,  $\delta = 5$ .

Nous pouvons constater sur la Figure 4.3 qu’après une itération de la méthode, le bruit semble être atténué. Nous obtenons une solution proche de l’image originale après quatre itérations. Nous observons de plus sur la Figure 4.4 que notre méthode possède des performances similaires en terme de PSNR à la méthode de débruitage par transformation en ondelettes de type Coiflet [Dau92]. Il faut cependant reconnaître un meilleur rendu visuel à la solution obtenue par cette dernière méthode.

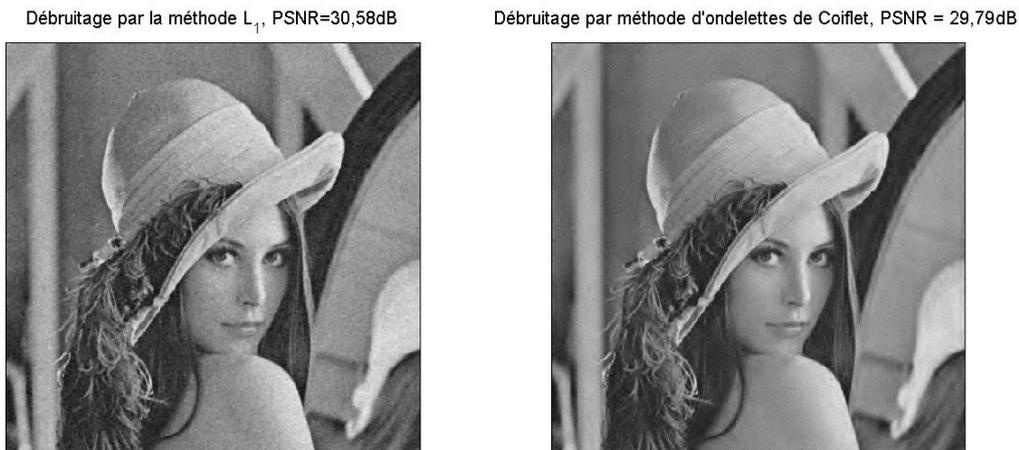


FIGURE 4.4 – Débruitage de l'image de Lena bruitée par utilisation d'ondelettes de type Coiflet.

Nous avons aussi réalisé des expériences de débruitage sur un fragment de  $70 \times 70$  pixels de l'image de Lena bruitée pour plusieurs valeurs de  $\delta$ . Les résultats des valeurs de PSNR (*Peak Signal to Noise Ratio*) sont résumés dans la Table 4.1 et sur la Figure 4.5. Nous constatons une certaine symétrie dans ces résultats. Cependant, nous ne pouvons pas conclure qu'une simple itération avec un  $\delta$  grand remplace les effets de l'itération. Itérer l'algorithme permet d'obtenir un lissage global. Cette itération est donc nécessaire sur les données bruitées. En effet, pour un  $\delta$  grand, l'algorithme lisse les données sur neuf points uniquement et la propriété de lissage est alors locale.

$\delta$ \ Itération	1	2	3	4
1	25.12	25.49	25.86	26.24
2	25.49	26.24	27.00	27.77
3	25.86	26.99	28.13	29.26
4	26.23	27.75	29.25	30.70
5	26.60	28.48	30.21	32.09
6	26.96	29.19	31.39	33.5
7	27.31	29.90	32.47	34.73
8	27.66	30.59	33.48	35.59
9	27.99	31.27	34.38	36.20
10	28.31	31.95	35.07	36.58

TABLE 4.1 – Valeurs du PSNR en dB pour plusieurs valeurs de  $\delta$  sur un fragment de  $70 \times 70$  pixels de l'image de Lena bruitée.

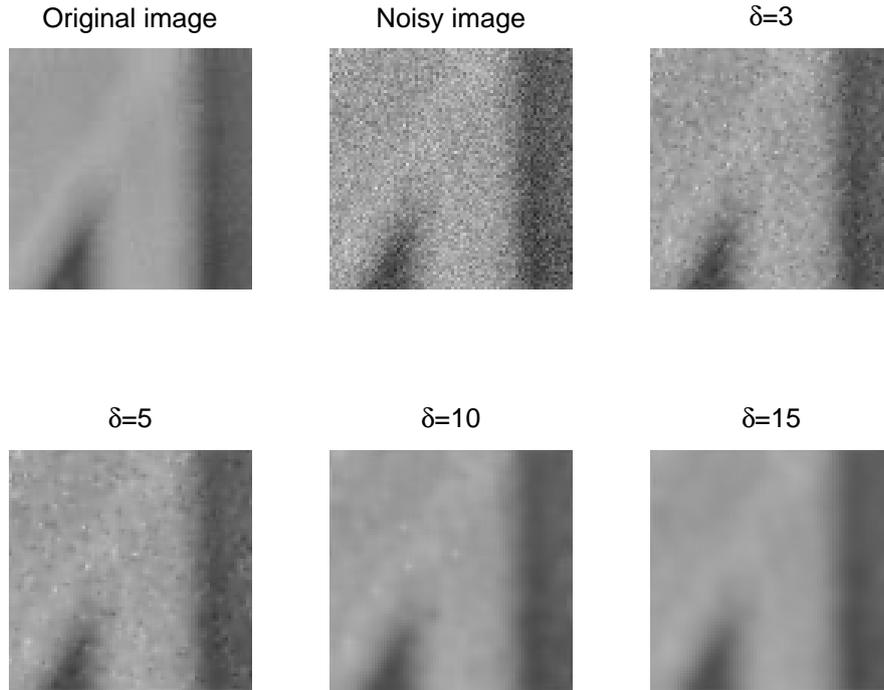


FIGURE 4.5 – Débruitage d'un fragment de  $70 \times 70$  pixels de l'image de Lena bruitée après quatre itérations de la méthode à croix glissante sur neuf points et pour plusieurs valeurs de  $\delta$ .

Nous obtenons globalement de bons résultats graphiques pour cette méthode. De plus, la complexité de la méthode est linéaire. Cependant, la résolution sur chaque croix est purement numérique. Afin de réduire encore davantage la complexité algorithmique, nous étudions dans le paragraphe suivant le cas d'une croix glissante sur cinq points et nous comparons les résultats pour les deux méthodes.

### 3 Méthode à croix glissante sur cinq points

Nous définissons dans ce paragraphe une méthode d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près utilisant une croix glissante sur cinq points. En utilisant le Lemme 3.5, le problème (4.1) s'écrit dans le cas d'une croix sur cinq points sous la forme suivante :

$$\min_{q_i, i=0,\dots,4} \left| \frac{q_0 - q_1}{x_0 - x_1} - \frac{q_3 - q_0}{x_3 - x_0} \right| + \left| \frac{q_0 - q_2}{y_0 - y_2} - \frac{q_4 - q_0}{y_4 - y_0} \right| \quad (4.6)$$

sous les contraintes :

$$|q_i - z_i| \leq \delta, \quad i = 0, \dots, 4, \quad (4.7)$$

où les  $q_i$  sont les altitudes des points d'approximation recherchés. Avec cette approche, nous ne rencontrons en fait que deux types de configurations de points que nous illustrons

sur la Figure 4.6. Nous les appelons configuration cône et selle. Selon le positionnement des points et le choix de  $\delta$ , nous pouvons tirer bénéfice de la résolution exacte sur trois points dans le cas courbe en appliquant la Proposition 3.4, page 88 dans les deux directions de la croix. La proposition suivante précise ceci.

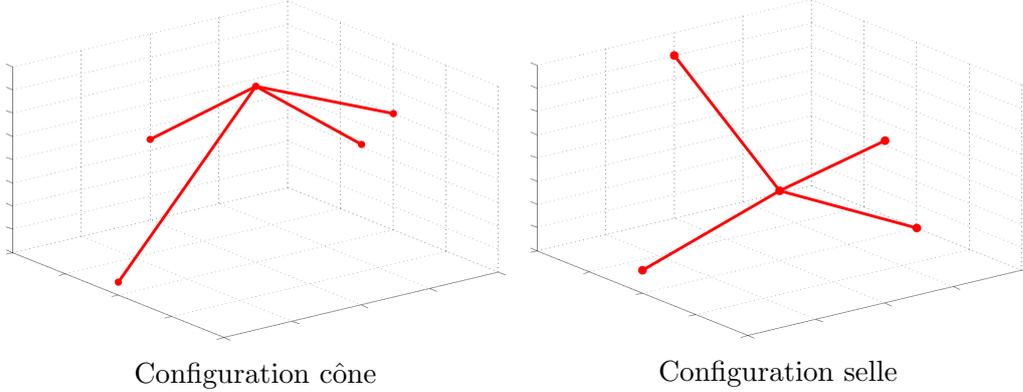


FIGURE 4.6 – Les deux types de configurations de points rencontrés dans la méthode à croix glissante sur cinq points.

**Proposition 4.2.** *Soit une croix à cinq points dans  $\mathbf{R}^3$  de centre  $\mathcal{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  et de composantes :*

$$\mathcal{H} = \{\mathcal{P}_i = (x_i, y_0, z_i), i = 1, 2\} \cup \mathcal{P}_0, \quad \mathcal{V} = \{\mathcal{P}_i = (x_0, y_i, z_i), i = 3, 4\} \cup \mathcal{P}_0.$$

Soient les pentes  $h_1 = \frac{z_0 - z_1}{x_0 - x_1}$ ,  $h_2 = \frac{z_2 - z_0}{x_2 - x_0}$ ,  $h_3 = \frac{z_0 - z_3}{y_0 - y_3}$ ,  $h_4 = \frac{z_4 - z_0}{y_4 - y_0}$  et :

$$\delta > 0, \quad \alpha = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1) + z_1, \quad \beta = \frac{z_4 - z_3}{y_4 - y_3}(y_0 - y_4) + z_4,$$

$$\kappa = \frac{1}{y_4 - y_0} + \frac{1}{y_0 - y_3} - \frac{1}{x_2 - x_0} - \frac{1}{x_0 - x_1}.$$

Si  $z_0 \notin [\alpha - 2\delta, \alpha + 2\delta]$  et  $z_0 \notin [\beta - 2\delta, \beta + 2\delta]$ , alors les solutions du problème (4.6) satisfont la règle suivante :

- Si  $\text{sgn}(h_1 - h_2) = \text{sgn}(h_3 - h_4)$ , alors  $q_0 = z_0 - \text{sgn}(h_1 - h_2)\delta$ ,  $q_i = z_i + \text{sgn}(h_1 - h_2)\delta$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .
- Si  $\text{sgn}(h_1 - h_2) = \text{sgn}(h_3 - h_4)$  et  $\text{sgn}(\kappa) \neq 0$ , alors  $q_0 = z_0 - \text{sgn}(\kappa)\delta$ ,  $q_i = z_i + \text{sgn}(h_1 - h_2)\delta$  pour  $i = 1, 2$  et  $q_i = z_i + \text{sgn}(h_3 - h_4)\delta$  pour  $i = 3, 4$ .
- Sinon,  $q_0$  peut prendre toute valeur dans l'intervalle  $[z_0 - \delta, z_0 + \delta]$ .  
De plus,  $q_i = z_i + \text{sgn}(h_1 - h_2)\delta$  pour  $i = 1, 2$  et  $q_i = z_i + \text{sgn}(h_3 - h_4)\delta$  pour  $i = 3, 4$

*Démonstration.* Considérons le problème dans la direction  $x$  :

$$\min \left| \frac{q_0 - q_1}{x_0 - x_1} - \frac{q_2 - q_0}{x_2 - x_0} \right|$$

sous les contraintes :

$$|q_i - z_i| \leq \delta, \quad i = 0, 1, 2.$$

Par la Proposition 3.4, page 88, si  $z_0 \notin [\alpha - 2\delta, \alpha + 2\delta]$  alors la solution de ce problème est :

$$q_1^* = z_1 + \text{sgn}(h_1 - h_2)\delta, \quad q_0^* = z_0 - \text{sgn}(h_1 - h_2)\delta, \quad q_2^* = z_2 + \text{sgn}(h_1 - h_2)\delta.$$

De même, considérons le problème dans la direction  $y$  :

$$\min \left| \frac{q_0 - q_3}{x_0 - x_3} - \frac{q_4 - q_0}{y_4 - y_0} \right|$$

sous les contraintes :

$$|q_i - z_i| \leq \delta, \quad i = 0, 3, 4.$$

Par la Proposition 3.4, page 88, si  $z_0 \notin [\beta - 2\delta, \beta + 2\delta]$  alors la solution de ce problème est :

$$q_3^* = z_3 + \text{sgn}(h_3 - h_4)\delta, \quad \hat{q}_0 = z_0 - \text{sgn}(h_3 - h_4)\delta, \quad q_4^* = z_4 + \text{sgn}(h_3 - h_4)\delta.$$

Si  $\text{sgn}(h_1 - h_2) = \text{sgn}(h_3 - h_4)$  alors  $q_0^* = \hat{q}_0$ . Il vient donc que si  $z_0 \notin [\alpha - 2\delta, \alpha + 2\delta] \cup [\beta - 2\delta, \beta + 2\delta]$  et si  $\text{sign}(h_1 - h_2) = \text{sgn}(h_3 - h_4)$ , les  $q_i^*$  sont la solution du problème (4.6). Si  $z_0 \notin [\alpha - 2\delta, \alpha + 2\delta] \cup [\beta - 2\delta, \beta + 2\delta]$  mais  $h_1 < h_2$  et  $h_3 > h_4$ , alors la fonctionnelle à minimiser est d'après la preuve de la Proposition 3.4, page 88 :

$$\frac{q_0 - q_1}{x_0 - x_1} - \frac{q_3 - q_0}{x_3 - x_0} - \frac{q_0 - q_3}{x_0 - x_3} + \frac{q_4 - q_0}{y_4 - y_0}. \quad (4.8)$$

Nous procédons comme dans la preuve de la Proposition 3.4 pour montrer que :

$$\begin{aligned} q_1^* &= z_1 + \text{sgn}(h_1 - h_2)\delta, & q_2^* &= z_2 + \text{sgn}(h_1 - h_2)\delta, \\ q_3^* &= z_3 + \text{sgn}(h_3 - h_4)\delta, & q_4^* &= z_4 + \text{sgn}(h_3 - h_4)\delta. \end{aligned}$$

La fonctionnelle (4.8) peut se récrire alors  $q_0\kappa + C$  où  $C$  est une constante. Si  $\kappa > 0$ ,  $q_0^* = z_0 - \delta$ . Si  $\kappa < 0$ ,  $q_0^* = z_0 + \delta$ . Enfin, si  $\kappa = 0$ ,  $q_0$  peut prendre toute valeur dans l'intervalle  $[z_0 - \delta, z_0 + \delta]$ . Le cas  $h_1 > h_2$  et  $h_3 < h_4$  est symétrique.  $\square$

Si  $z_0 \in [\alpha - 2\delta, \alpha + 2\delta]$  ou  $z_0 \in [\beta - 2\delta, \beta + 2\delta]$  alors nous résolvons le problème numériquement. Le problème matriciel est de taille bien inférieure au problème sur neuf points. En effet, nous proposons de le résoudre par un problème approché en minimisant

sur les  $q_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$  la fonction suivante :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{q_0 - q_1}{x_0 - x_1} - \frac{q_2 - q_0}{x_2 - x_0} \right| + \left| \frac{q_0 - q_3}{y_0 - y_3} - \frac{q_4 - q_0}{y_4 - y_0} \right| \\ & + \lambda (|q_0 - z_0 + \delta| + |q_0 - z_0 - \delta|) \\ & + \lambda \left( \sum_{i=1}^4 |q_i - z_i + \delta| + |q_i - z_i - \delta| \right), \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Ce problème, écrit sous forme matricielle, est de taille  $12 \times 5$  sur chaque fenêtre alors que la matrice de la méthode à neuf points est de taille  $(8l + 19) \times 10$  où  $1/l$  est le pas de discrétisation des intégrales. Nous testons cette méthode sur la configuration pyramidale déjà utilisée sur la Figure 4.2. Le résultat est illustré sur la Figure 4.7. Nous observons un résultat semblable à la méthode obtenue par la méthode à neuf points. Nous avons cependant divisé par quinze le temps de calcul<sup>1</sup>.

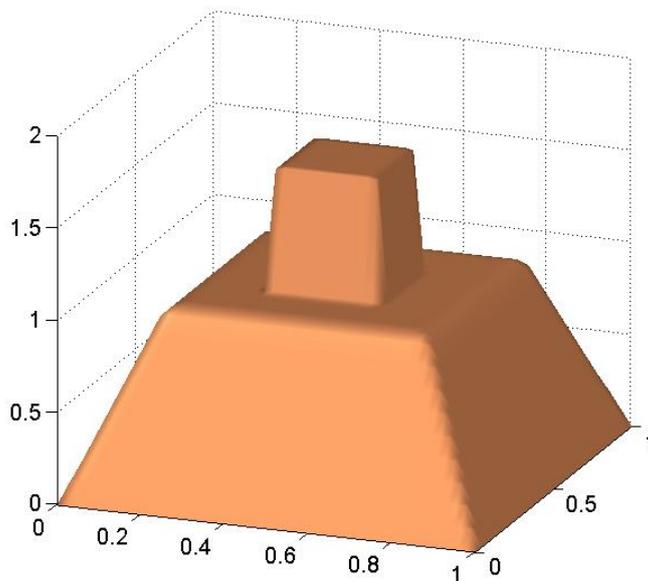


FIGURE 4.7 – Application de la méthode par croix glissante sur cinq points sur la configuration pyramidale avec  $\delta = 0.001$ .

Nous avons également testé cette méthode sur des données bruitées. Nous utilisons à nouveau l'image de Lena bruitée. Les résultats obtenus, illustrés sur la Figure 4.8 sont similaires à ceux obtenus sur la Figure 4.3. Ceci motive une nouvelle fois la réduction de la taille de la fenêtre pour l'approche d'interpolation à  $\delta$  près.

1. Les expérimentations ont été réalisées sur un ordinateur Dell Latitude E5430 avec un processeur Intel Core i5-3210M CPU 2.5GHz et 4.00Go de RAM. Le système d'exploitation est Windows 7 Professionnel. Le logiciel utilisé est Matlab R2012b.



FIGURE 4.8 – Application itérative de la méthode à cinq points d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près avec  $\lambda = 100$ ,  $\delta = 5$ .

Enfin, nous avons adapté cette méthode pour l'appliquer au problème de restauration d'images lorsque celles-ci sont corrompues par un bruit de type "poivre et sel" (voir la Figure 4.10) ou lorsqu'elles possèdent de larges zones de pixels inconnus (représentés en blanc) comme dans les exemples présentés sur les Figures 4.13, 4.14 et 4.15. Ces exemples demandent un traitement particulier car avec notre stratégie, les pixels blancs et noirs seraient interpolés à  $\delta$  près. Ceci n'est évidemment pas souhaitable. Nous considérons donc les pixels blancs et noirs comme des pixels inconnus. Lorsque nous rencontrons sur une croix un ou des pixels inconnus, la croix s'étend aux pixels voisins jusqu'à rencontrer une donnée réelle. Ce procédé est illustré sur la Figure 4.9. Si le pixel inconnu se situe au centre de la croix, nous passons à la croix suivante. Nous résolvons alors le problème d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près sur cette croix étendue. Ceci nous permet de calculer des valeurs aux

pixels manquants. En faisant glisser la croix le long des données, nous obtenons ainsi une solution globale d'interpolation à  $\delta$  près.

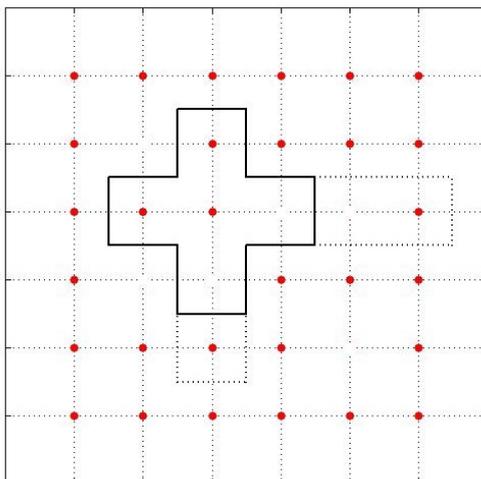


FIGURE 4.9 – Extension de la croix glissante sur cinq points en cas d'informations manquantes.

Dans les exemples traités, nous considérons  $\delta = 0$  car les images utilisées ne sont pas corrompues par un autre bruit. Nous avons tout d'abord testé cette méthode sur l'image de Lena corrompue par un bruit "poivre et sel" sur 20% des pixels de l'image. Nous illustrons le résultat obtenu sur la Figure 4.10. La reconstruction obtenue est visuellement de très bonne qualité. De plus, nous obtenons une valeur du PSNR égale à 38,03dB. Pour un très haut niveau de bruit, ici 80%, nous obtenons également une reconstruction visuellement acceptable même pour un tel niveau de bruit (voir la Figure 4.11).

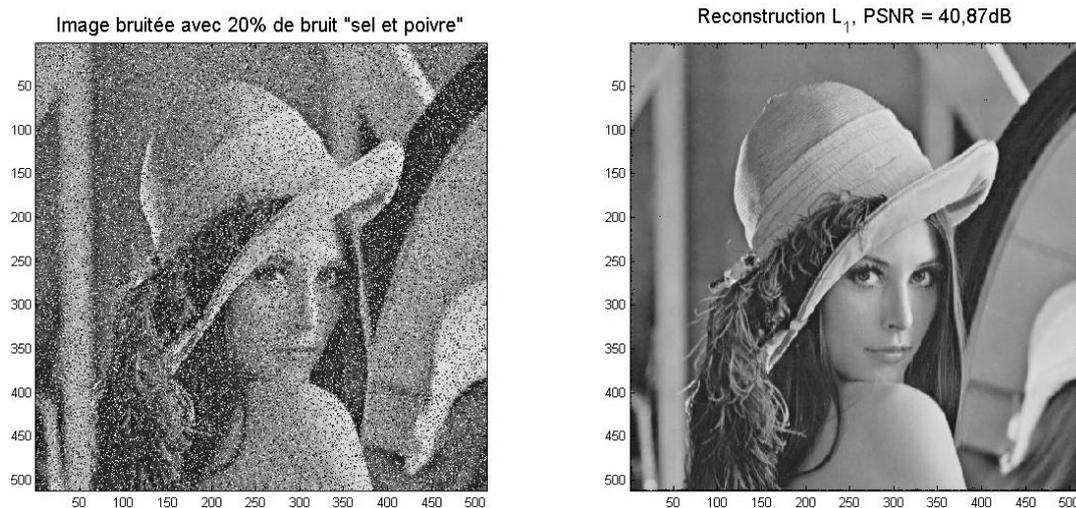


FIGURE 4.10 – Restauration de l'image de Lena corrompue par un bruit de type "poivre et sel" sur 20% des pixels grâce à la méthode d'interpolation  $L_1$  par croix glissante sur cinq points.

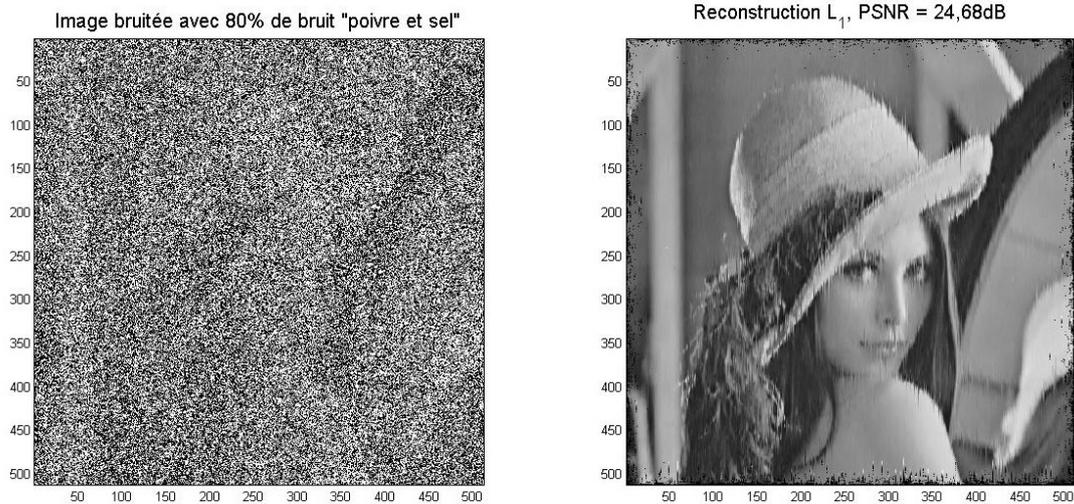


FIGURE 4.11 – Restauration de l’image de Lena corrompue par un bruit de type ”poivre et sel” sur 80% des pixels grâce à la méthode d’interpolation  $L_1$  par croix glissante sur cinq points.

Les filtres médians sont bien adaptés au problème de restauration d’images corrompues par un bruit de type ”poivre et sel”. Nous comparons notre méthode à deux filtres performants de ce type appelés MDBUTMF (*Modified Decision Based Unsymmetric Trimmed Median Filter* [EVSP11]) et SUMF (*Super Mean Filter* [LKC]). Dans la Table 4.2, nous indiquons les valeurs du PSNR obtenues par ces méthodes et la nôtre pour l’image de Lena avec un bruit ”poivre et sel” de 10% à 90%. Nous constatons que grâce à notre méthode, nous obtenons de meilleures valeurs de PSNR que par la méthode SMUF pour un niveau de bruit jusqu’à 90%. Nous obtenons également des valeurs de PSNR meilleures ou similaires à celles obtenues par la méthode MDBUTMF pour un niveau de bruit faible à modéré. Sur la Figure 4.12, nous illustrons les reconstructions obtenues par les méthodes SUMF et MDBUTMF pour l’image de Lena dégradée par 80% de bruit ”poivre et sel”.

Niveau de bruit	SUMF	MDBUTMF	Reconstruction $L_1$
10%	38,10	42,79	44,90
20%	34,49	39,41	40,87
30%	32,05	37,16	37,58
40%	30,13	35,42	35,01
50%	28,42	33,67	32,68
60%	26,70	31,85	29,94
70%	25,05	29,96	27,59
80%	22,73	27,20	24,68
90%	20,07	23,90	20,83

TABLE 4.2 – Comparaison des valeurs du PSNR en dB obtenus par les méthodes SUMF, MDBUTMF et la méthode d’interpolation  $L_1$  par croix glissante sur cinq points sur l’image de Lena corrompue par un bruit ”poivre et sel”.



FIGURE 4.12 – Restauration de l’image de Lena corrompue par un bruit de type ”poivre et sel” sur 80% des pixels grâce aux méthodes SUMF et MDBUTMF.

Nous étudions ensuite le cas d’images possédant de larges zones d’informations manquantes. Ce problème a déjà été étudié avec succès (voir par exemple [BBC<sup>+</sup>01, VMFE12, CGMP11]). Notre méthode n’améliore pas les résultats obtenus dans les articles cités mais nous mettons cependant en évidence qu’elle est adaptée à cette problématique. Considérons le cas d’une image présentant une bande horizontale de pixels manquants. La reconstruction calculée est parfaite (voir la Figure 4.13). Nous avons ensuite introduit une bande diagonale de pixels manquants (voir la Figure 4.14). Seuls les deux pixels aux coins n’ont pas été reconstruits parfaitement. Ce sont les pixels de transition du noir au gris.

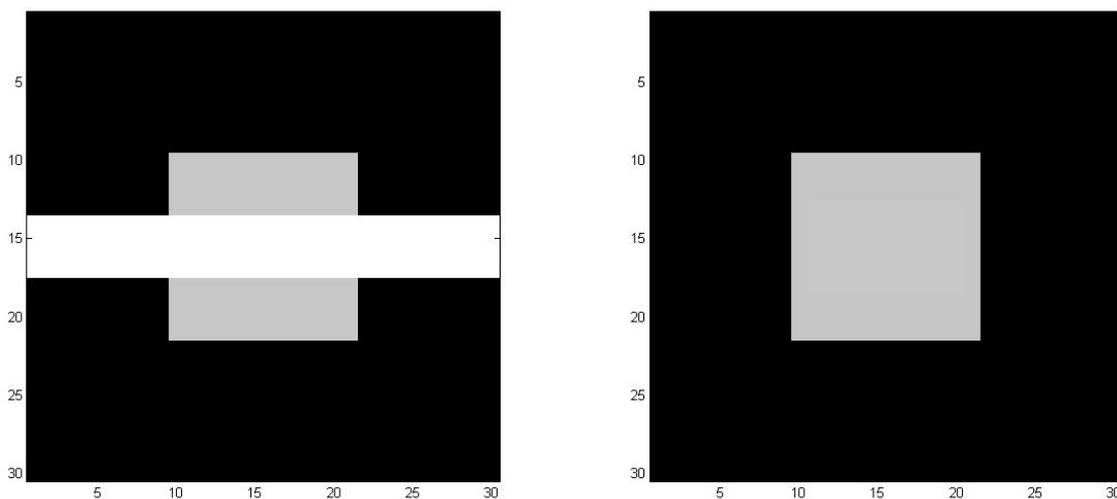


FIGURE 4.13 – Restauration d’une image avec une bande horizontale d’informations manquantes grâce à la méthode d’interpolation  $L_1$  par croix glissante sur cinq points.

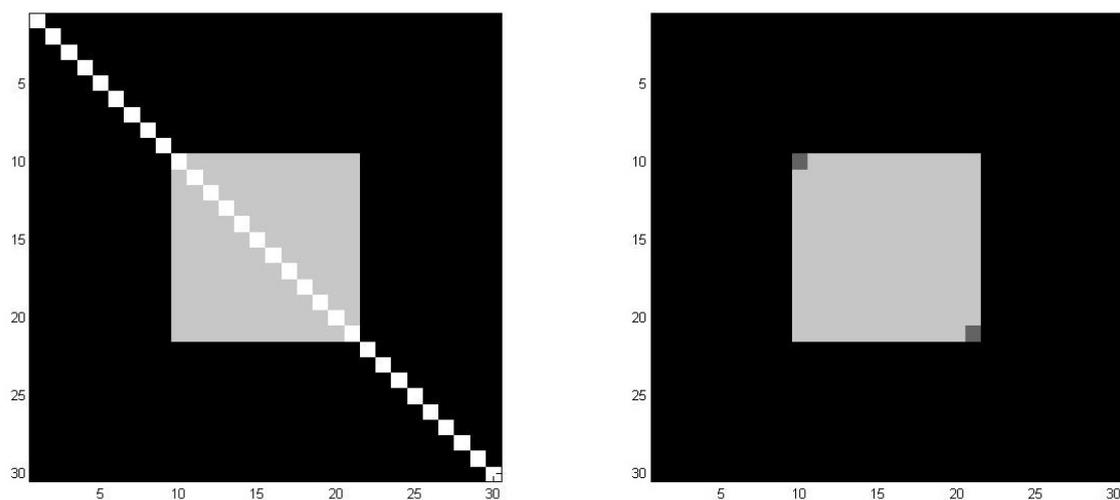


FIGURE 4.14 – Restauration d’une image avec une bande diagonale d’informations manquantes grâce à la méthode d’interpolation  $L_1$  par croix glissante sur cinq points.

Nous avons enfin testé cette méthode sur une image réelle. Nous avons introduit quatre bandes horizontales dans l’image de Lena. Nous observons des défauts de reconstruction dans la solution à deux endroits sur le chapeau et un sur l’épaule de Lena. Ceux-ci s’expliquent par un nombre conséquent de pixels manquant à proximité d’un contour. Cependant, la plupart des éléments de l’image sont reconstruits très fidèlement à l’image originale.

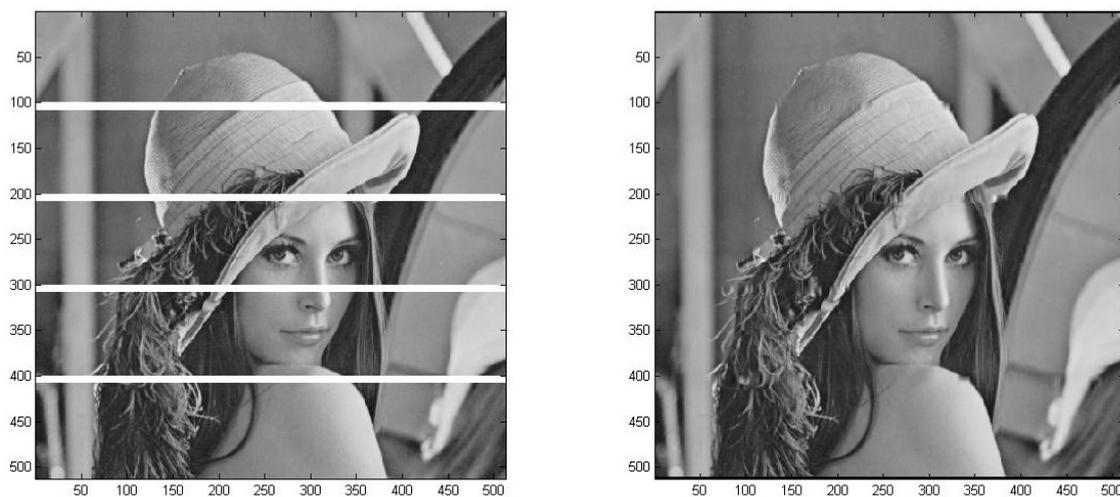


FIGURE 4.15 – Restauration de l’image de Lena corrompue par quatre bandes horizontales d’informations manquantes grâce à la méthode d’interpolation  $L_1$  par croix glissante sur cinq points.

## 4 Conclusion du chapitre

Dans ce dernier chapitre, nous avons défini des méthodes d'interpolation  $L_1$  à  $\delta$  près de données réparties dans une grille par une surface spline bicubique. Ces méthodes utilisent le principe de croix glissante à neuf et cinq points. Nous avons vu que ces deux méthodes donnaient des résultats similaires. Elles permettent notamment d'approcher des données comportant de fortes variations d'amplitude sans introduire d'oscillations. Elles donnent également des résultats intéressants lorsqu'elles sont appliquées itérativement sur des données corrompues par un bruit gaussien. La méthode à cinq points nécessite cependant beaucoup moins de calculs que celle à neuf points.

Nous avons adaptés la méthode à cinq points afin qu'elle puisse traiter des images corrompues par un bruit de type "poivre et sel" ou présentant des zones d'informations manquantes. Cette adaptation s'avère compétitive pour débruiter des images corrompues par un haut niveau de bruit "poivre et sel".

Une perspective intéressante est d'étendre ce travail au cas de données organisées dans une triangulation. En effet, les méthodes  $L_1$  actuelles [Zha07, DGP10] donnent de bons résultats mais il n'est pas garanti d'obtenir une solution dans un temps raisonnable lorsque nous traitons un grand flot de données.



# Conclusion

Dans cette thèse, nous contribuons à la théorie de la meilleure approximation  $L_1$  de fonctions. Nous montrons qu'une meilleure approximation au sens  $L_1$  d'une fonction saut telle que la fonction de Heaviside est une fonction interpolant certains points déterminés. Ce résultat est obtenu grâce à une extension originale du théorème d'Hobby-Rice. Dans le cas des problèmes de meilleure approximation  $L_1$  de fonctions saut dans un sous-espace de Chebyshev et faiblement de Chebyshev, des résultats de caractérisation sont énoncés. En particulier, nous donnons des conditions pour l'unicité de solution dans un sous-espace Chebyshev. Ces cas théoriques ont permis la compréhension de cas pratiques tels que l'approximation polynomiale et par spline polynomiale au sens de la norme  $L_1$ . Nous déduisons en effet l'existence d'un phénomène de Gibbs pour une solution de meilleure approximation  $L_1$  de la fonction de Heaviside par une fonction polynomiale et par une spline polynomiale. Certains cas problématiques restent à élucider. Nous ne savons pas encore caractériser le nombre d'intersections entre une meilleure approximation  $L_1$  et la fonction saut associée. De plus, nous ne savons pas non plus aujourd'hui caractériser les solutions présentant un nombre d'intersection asymétrique par rapport à la discontinuité. Ce travail a été en partie sponsorisé par le programme Fulbright et soutenu par l'Université d'État de Caroline du Nord. Il a fait l'objet d'un article de revue [GGNF14] soumis récemment et d'une présentation orale à la 8<sup>ème</sup> conférence internationale *Curves and Surfaces* en juin 2014.

Des éléments de compréhension ont été donnés concernant la robustesse de la méthode de meilleure approximation  $L_1$  de données discrètes par une droite lorsque les données possèdent des points aberrants ou des séquences organisées de points aberrants. Nous avons en effet montré que la méthode de régression  $\ell_1$  n'est pas sensible à un point aberrant perturbant des données parfaitement alignées. Une condition suffisante sur la taille et la position d'une séquence organisée de points aberrants pour que la régression  $\ell_1$  ne soit pas sensible à celle-ci a été introduite. Malgré les apparentes qualités des méthodes de meilleure approximation  $\ell_1$  de données discrètes, celles-ci possèdent des limites. Nous avons constaté que la méthode de meilleure approximation  $\ell_1$  par spline polynomiale introduit des oscillations quand elle est appliquée sur des données présentant des changements brusques de forme. Le besoin de contraintes additionnelles nous a donc amené à étudier les méthodes existantes d'interpolation et d'approximation au sens de la norme  $L_1$ . Nous

avons rappelé les méthodes d'approximation par splines de lissage et d'ajustement  $L_1$ . Nous avons mis en évidence que le paramètre de régularisation dans la méthode à paramètre est en général difficile à fixer. C'est pourquoi, nous recommandons l'utilisation de la méthode d'approximation par spline d'ajustement  $L_1$ . Cependant, elle est relativement coûteuse en temps de calcul. Nous avons donc proposé des méthodes locales pour diminuer sa complexité. Une méthode à sept points a été choisie comme étant la plus appropriée pour une application pratique.

La méthode précédente ne permet pas de contrôler la distance entre la courbe solution et les données ce qui peut être important pour certaines applications. Une nouvelle stratégie d'approximation dans ce sens a donc été proposée. Celle-ci consiste interpoler au sens  $L_1$  à  $\delta$  près. Ce problème a été étudié théoriquement et nous avons démontré un résultat d'existence. Une résolution formelle est proposée dans des cas particuliers. Ces résultats nous ont permis de constater deux tendances de la méthode : l'introduction de parties affines dans les solutions et la tendance pour les solutions à se positionner à la distance maximale autorisée des points de données. Nous avons ensuite défini des méthodes locales pour le traitement de grands flots de données. Une première méthode par fenêtre glissante sur cinq points a été présentée. Elle a été publiée dans une revue internationale [GGN14]. Une amélioration de celle-ci par réduction de la taille de la fenêtre sur trois points a fait l'objet d'un article pour la conférence internationale Geometric Science of Information 2013 [GNG13]. Cette méthode s'appuie sur une résolution exacte pour certains cas. Une résolution numérique reste nécessaire dans les autres cas. Nous avons finalement proposé une méthode purement algébrique performante. Celle-ci est appropriée pour les applications temps-réel. Nous avons aussi montré que nos méthodes étaient, par un procédé d'itération, adaptées pour lisser des données bruitées. Des extensions surfaciques pour traiter des données grilles ont été introduites. Nous avons enfin développé une application à la restauration d'images.

À l'avenir, nous souhaitons étendre ces méthodes aux données désorganisées dans l'espace. Ces données peuvent être dans un premier temps organisées par un maillage triangulaire. Nous souhaitons ensuite construire une surface spline  $L_1$  sur cette triangulation. Des premières méthodes ont été introduites dans la littérature [Zha07, DGP10]. Ces méthodes sont globales et étant donnée la complexité du problème, il n'est pas garanti d'obtenir une solution dans un temps raisonnable lorsque nous traitons un grand flot de données. L'enjeu à venir est donc de trouver un formalisme sur fenêtre glissante cohérent permettant de réduire la complexité du problème.

# Annexe A

## Détails sur le Chapitre 2

### 1 Démonstration du Lemme 2.5

Ce résultat énoncé en page 51 est rappelé ci-dessous.

**Lemme.** La fonction  $S : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |(y-x) + 6t(x+y)| dt$  est continue et convexe. Elle vérifie pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  :

$$S(x, y) = \begin{cases} |y-x| & \text{si } |y-x| \geq 3|x+y|, \\ \frac{3}{2}|x+y| + \frac{(y-x)^2}{6|x+y|} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

De plus,

- $\min_{x \in \mathbf{R}} S(x, y) = \frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}|y|$  est obtenu pour  $x = \left(\frac{2-\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\right)y$ .
- $\min_{y \in \mathbf{R}} S(x, y) = \frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}|x|$  est obtenu pour  $y = \left(\frac{2-\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\right)x$ .
- $\min_{(x,y) \in \mathbf{R}^2} S(x, y) = 0$  est obtenu pour  $x = y = 0$ .

Nous allons dans cette preuve utiliser le lemme suivant.

**Lemme A.1.** Considérons la fonction affine  $f(t) = at + b$ .

Si  $f(-\frac{1}{2}) \times f(\frac{1}{2}) \geq 0$  alors  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(t)| dt = |b|$ , sinon  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(t)| dt = \frac{1}{4}|a| + \frac{b^2}{|a|}$ .

*Démonstration.* (Lemme A.1). La fonction  $f$  étant affine, l'hypothèse  $f(-\frac{1}{2}) \times f(\frac{1}{2}) \geq 0$  signifie que  $f$  est de signe constant sur l'intervalle  $[-1/2, 1/2]$ . Il vient alors le résultat attendu.

Si  $f(-\frac{1}{2}) \times f(\frac{1}{2}) < 0$ ,  $f$  change de signe en  $-b/a$  et nous concluons en utilisant la relation de Chasles.  $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le Lemme 2.5.

*Démonstration.* Nous utilisons ce lemme pour la fonction affine  $f(t) = (y-x) + 6t(x+y)$ .

Nous avons :

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = (y-x) - 3(x+y) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = (y-x) + 3(x+y).$$

Nous notons que :

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) \times f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow (y-x)^2 - 9(x+y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow |y-x| \geq 3|x+y|.$$

Ainsi, par le Lemme A.1 :

$$S(x, y) = \begin{cases} |y-x| & \text{si } |y-x| \geq 3|x+y| \\ \frac{3}{2}|x+y| + \frac{(y-x)^2}{6|x+y|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La condition  $|y-x| \geq 3|x+y|$  peut être développée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} - \text{ Si } y \geq x, |y-x| \geq 3|x+y| &\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -2xy \geq -2x \\ y \geq -\frac{1}{2}x \end{cases} \\ - \text{ Si } y \leq x, |y-x| \geq 3|x+y| &\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\frac{1}{2}x \\ y \geq -2xy \geq -2x \end{cases} \end{aligned}$$

Nous effectuons maintenant une étude de cas.

### Minimisation de $S(x, y)$ pour $y$ donné

**Cas 1 :**  $|y-x| \geq 3|x+y|$

- Si  $y \geq 0$  alors  $S(x, y) = y - x$  et c'est une fonction décroissante de  $x$ .
- Si  $y \leq 0$  alors  $S(x, y) = x - y$  et c'est une fonction croissante de  $x$ .

**Cas 2 :**  $|y-x| < 3|x+y|$

*Cas 2.1*  $x+y > 0$

Nous avons alors  $S(x, y) = \frac{3}{2}(x+y) + \frac{(y-x)^2}{6(x+y)}$  et en dérivant par rapport à  $x$ , nous avons :

$$\partial_x S(x, y) = \frac{5(x+y)^2 - 2y^2}{3(x+y)^2}.$$

Les racines du numérateur sont :

$$x_1 = -\left(\frac{\sqrt{10}-2}{\sqrt{10}}\right)y \quad \text{et} \quad x_2 = -\left(\frac{\sqrt{10}+2}{\sqrt{10}}\right)y.$$

De manière équivalente, nous avons :

$$y = -\left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}-2}\right)x_1 \quad \text{et} \quad y = -\left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}+2}\right)x_2.$$

Pour  $y \geq 0$ , nous avons  $x_2 < -y < -\frac{1}{2}y < x_1$ . Donc sur  $]-\frac{1}{2}y, x_1]$ ,  $\partial_x S(x, y)$  est négative et alors  $S(\cdot, y)$  est une fonction décroissante. Sur  $[x_1, +\infty[$ ,  $\partial_x S(x, y)$  est positive et alors  $S(\cdot, y)$  est une fonction croissante.

Pour  $y \leq 0$ ,  $x_1 < x_2 < -2y$ , d'où sur  $[-2y, +\infty[$ ,  $\partial_x S(x, y)$  est positive et alors  $S(\cdot, y)$  est une fonction croissante.

*Cas 2.1*  $x + y < 0$

Nous avons alors  $S(x, y) = -\frac{3}{2}(x + y) - \frac{(y-x)^2}{6(x+y)}$  et en dérivant par rapport à  $x$ , nous avons :

$$\partial_x S(x, y) = -\frac{5(x + y)^2 - 2y^2}{3(x + y)^2}.$$

Ses racines sont bien sûr  $x_1$  et  $x_2$  définies précédemment.

Pour  $y \geq 0$ , nous avons  $-2y < x_2 < x_1$ . Sur  $]-\infty, -2y]$ ,  $\partial_x S(x, y)$  est négative et alors  $S(\cdot, y)$  est une fonction décroissante.

Pour  $y \leq 0$ , nous avons  $x_1 < -\frac{1}{2}y < x_2$ . Donc sur  $]-\infty, x_1]$ ,  $\partial_x S(x, y)$  est négative et alors  $S(\cdot, y)$  est une fonction décroissante. Sur  $[x_1, -\frac{1}{2}y]$ ,  $\partial_x S(x, y)$  est positive et alors  $S(\cdot, y)$  est une fonction croissante.

En conclusion, pour  $y$  fixé, sur  $]-\infty, x_1]$ ,  $S(\cdot, y)$  est décroissante tandis que sur  $[x_1, +\infty[$ , elle est croissante. Le minimum de  $S(\cdot, y)$  est donc obtenu pour  $x = -\left(\frac{\sqrt{10}-2}{\sqrt{10}}\right)y$  et vaut  $\frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}|y|$ .

La minimisation pour  $x$  donné suit la même démonstration puisque les rôles de  $x$  et  $y$  sont symétriques dans la fonction  $S$ .

### Minimisation de $S$ sur $\mathbf{R}^2$

Nous notons que si  $|x + y| \neq 0$ ,  $S(x, y) > 0$ . Si  $|x + y| = 0$ , la valeur minimale de  $S(x, y) = |y - x|$  vaut 0 et est obtenue si et seulement si  $y - x = 0$ ,  $y + x = 0$ . Donc  $S(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y = 0$ .  $\square$

## 2 Démonstration du Lemme 2.6

Rappelons ce lemme énoncé à la page 52.

**Lemme.** Soient  $x_1 < x_2 < x_3$  trois réels quelconques et une fonction  $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ . Posons  $f_k = f(x_k)$  pour  $k = 1, 2, 3$  et  $\Delta f_k = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k}$  pour  $k = 1, 2$ . Soit enfin  $b_1 \in \mathbf{R}$ . Le problème de minimisation :

$$\min_{(b_2, b_3) \in \mathbf{R}^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_2 - b_1 + 6t(b_2 + b_1 - 2\Delta f_1)| dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_3 - b_2 + 6t(b_3 + b_2 - 2\Delta f_2)| dt \quad (\text{A.2})$$

admet pour solutions :

1. Si  $b_1$  est compris entre  $\Delta f_1 + \frac{\sqrt{10}+1}{3}(\Delta f_2 - \Delta f_1)$  et  $\Delta f_1$  alors :

$$b_2^* = \Delta f_1 + \frac{\sqrt{10}-1}{3}(b_1 - \Delta f_1), \quad b_3^* = \Delta f_2 + \frac{\sqrt{10}-5}{5}(\Delta f_1 - \Delta f_2) + \frac{5-2\sqrt{10}}{5}(b_1 - \Delta f_1).$$

2. Si  $b_1$  est compris entre  $\Delta f_1$  et  $\Delta f_1 + \frac{\sqrt{10}-5}{5}(\Delta f_2 - \Delta f_1)$  alors :

$$b_2^* = \Delta f_1 - \frac{5+\sqrt{10}}{3}(b_1 - \Delta f_1), \quad b_3^* = \Delta f_2 + \frac{\sqrt{10}-5}{5}(\Delta f_1 - \Delta f_2) + (b_1 - \Delta f_1)$$

3. Sinon  $b_2^* = b_3^* = \Delta f_2$ .

*Démonstration.* Nous posons  $x = b_1 - \Delta f_1$  et  $y = b_2 - \Delta f_1$ , par application du Lemme 2.5, la fonction à minimiser est :

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}|y - \Delta f_1 - \Delta f_2| + |y - x| & \text{si } |y - x| \geq 3|x + y|, \\ \frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}|y - \Delta f_1 - \Delta f_2| + \frac{3}{2}|x + y| + \frac{(y-x)^2}{6|x+y|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous posons  $\phi(x) = \min_{y \in \mathbf{R}} H(x, y)$ .

**Cas 1.**  $h_2 = h_1$ , le minimum de  $H$  est atteint pour  $(x, y) = (0, 0)$  et vaut 0. Les données alignées sont interpolées par une droite.

**Cas 2.**  $h_2 - h_1 < 0$ ,

**Sous-cas 2.1.** Si  $x \in ]-\infty, \frac{\sqrt{10}-1}{3}(h_2 - h_1)]$ , alors  $\phi(x) = -\frac{3}{2}(x + \Delta f_2 - \Delta f_1) - \frac{(\Delta f_2 - \Delta f_1 - x)^2}{6(x + \Delta f_2 - \Delta f_1)}$  est une fonction décroissante.

**Sous-cas 2.2.** Si  $x \in [\frac{\sqrt{10}-1}{3}(h_2 - h_1), 0]$ , alors  $\phi(x) = \frac{8-4\sqrt{10}}{3}x + \frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}(\Delta f_1 - \Delta f_2)$  est décroissante.

**Sous-cas 2.3.** Si  $x \in [0, \frac{\sqrt{10}-5}{5}(h_2 - h_1)]$ , alors  $\phi(x) = \frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}(\Delta f_1 - \Delta f_2)$  est constante.

**Sous-cas 2.4.** Si  $x \in [\frac{\sqrt{10}-5}{5}(h_2 - h_1), -\frac{1}{2}(h_2 - h_1)]$ , alors  $\phi(x) = \frac{3}{2}(x + \Delta f_2 - \Delta f_1) - \frac{(\Delta f_2 - \Delta f_1 - x)^2}{6(x + \Delta f_2 - \Delta f_1)}$  est une fonction croissante.

Par convexité, nous pouvons conclure à ce stade. Tout  $x \in [0, \frac{\sqrt{10}-5}{5}(h_2 - h_1)]$  réalise le minimum de  $\phi$ .

**Cas 3.**  $h_2 - h_1 > 0$ ,

**Sous-cas 3.1.** Si  $x \in ]-\infty, -2(h_2 - h_1)]$ , alors  $\phi(x) = -\frac{3}{2}(x + \Delta f_2 - \Delta f_1) - \frac{(\Delta f_2 - \Delta f_1 - x)^2}{6(x + \Delta f_2 - \Delta f_1)}$  est une fonction décroissante.

**Sous-cas 3.2.** Si  $x \in [-2(h_2 - h_1), ]$ , alors  $\phi(x) = -x + h_2 - h_1$  est décroissante.

**Sous-cas 3.3.** Si  $x \in [-\frac{1}{2}(h_2 - h_1), \frac{\sqrt{10}-5}{5}(h_2 - h_1)]$ , alors  $\phi(x) = \frac{3}{2}(x + \Delta f_2 - \Delta f_1) - \frac{(\Delta f_2 - \Delta f_1 - x)^2}{6(x + \Delta f_2 - \Delta f_1)}$  est décroissante.

**Sous-cas 3.4.** Si  $x \in \left[ \frac{\sqrt{10}-5}{5}(h_2 - h_1), 0 \right]$ , alors  $\phi(x) = \frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}(\Delta f_1 - \Delta f_2)$  est une fonction constante.

**Sous-cas 3.5.** Si  $x \in \left[ 0, \frac{\sqrt{10}+1}{3}(h_2 - h_1) \right]$ , alors  $\phi(x) = \frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}(\Delta f_1 - \Delta f_2)$  est une fonction croissante.

Nous concluons donc comme dans le **Cas 2**.

□

### 3 Résolution exacte du problème sur cinq points

**Théorème A.2.** *La (ou les) solution(s) de :*

$$\inf \left\{ \int_{x_1}^{x_5} |s''(x)| dx, s \in \tilde{\mathcal{S}}_{1,\mathbf{x}}, s(x_k) = f_k, k = 1, 2, \dots, m \right\}$$

*vérifie(nt) la règle suivante :*

**Cas 1.** *Si  $\Delta f_1 = \Delta f_2 = \Delta f_3 = \Delta f_4$  alors  $b_3^* = \Delta f_2$ .*

**Cas 2.** *Si  $\Delta f_1 = \Delta f_2 = \Delta f_3 < \Delta f_4$  alors  $b_3^* = \Delta f_2$ .*

**Cas 4.** *Si  $\Delta f_1 = \Delta f_2 < \Delta f_3 = \Delta f_4$  alors  $b_3^*$  peut prendre toute valeur dans  $[\Delta f_2, \Delta f_3]$ .*

**Cas 5.** *Si  $\Delta f_1 = \Delta f_2 < \Delta f_3 < \Delta f_4$  alors  $b_3^* = \Delta f_2$ .*

**Cas 6.** *Si  $\Delta f_1 = \Delta f_2 < \Delta f_3 > \Delta f_4$  alors  $b_3^* = \Delta f_2$ .*

**Cas 11.** *Si  $\Delta f_1 < \Delta f_2 = \Delta f_3 < \Delta f_4$  alors  $b_3^* = \Delta f_2$ .*

**Cas 12.** *Si  $\Delta f_1 < \Delta f_2 = \Delta f_3 > \Delta f_4$  alors  $b_3^*$  peut prendre toute valeur dans l'intervalle :*

$$[\Delta f_2, \Delta f_2 + \min \left\{ \frac{2 - \sqrt{10}}{\sqrt{10}}(\Delta f_1 - \Delta f_2), \frac{2 - \sqrt{10}}{\sqrt{10}}(\Delta f_4 - \Delta f_3) \right\}].$$

**Cas 14.** *Si  $\Delta f_1 < \Delta f_2 < \Delta f_3 < \Delta f_4$ ,*

**Sous-cas 14.1.** *si  $\Delta f_3 - \Delta f_2 \leq \frac{\sqrt{10}-2}{\sqrt{10}}(|\Delta z_1 - \Delta z_2| + |\Delta f_4 - \Delta f_3|)$  alors  $b_3^*$  peut prendre toute valeur dans l'intervalle :*

$$\left[ \max \left\{ \Delta f_2, \Delta f_3 + \frac{2 - \sqrt{10}}{\sqrt{10}}(\Delta f_4 - \Delta f_3) \right\}, \min \left\{ \Delta f_2 + \frac{2 - \sqrt{10}}{\sqrt{10}}(\Delta f_1 - \Delta f_2), \Delta f_3 \right\} \right].$$

**Sous-cas 14.2.** *si  $\frac{\sqrt{10}-2}{\sqrt{10}}(|\Delta z_1 - \Delta z_2| + |\Delta f_4 - \Delta f_3|) \leq \Delta f_3 - \Delta f_2 \leq \frac{1}{2}(|\Delta z_1 - \Delta z_2| + |\Delta f_4 - \Delta f_3|)$  alors il existe un unique  $b_3^*$  optimal dans l'intervalle :*

$$\left[ \max \left\{ \Delta f_2 + \frac{2 - \sqrt{10}}{\sqrt{10}}(\Delta f_1 - \Delta f_2), \Delta f_3 - \frac{1}{2}(\Delta f_4 - \Delta f_3) \right\}, \min \left\{ \Delta f_2 - \frac{1}{2}(\Delta f_1 - \Delta f_2), \Delta f_3 + \frac{2 - \sqrt{10}}{\sqrt{10}}(\Delta f_4 - \Delta f_3) \right\} \right].$$

**Sous-cas 14.3.** *si  $\frac{1}{2}(|\Delta z_1 - \Delta z_2| + |\Delta f_4 - \Delta f_3|) \leq \Delta f_3 - \Delta f_2 \leq 2(|\Delta z_1 - \Delta z_2| + |\Delta f_4 - \Delta f_3|)$  alors  $b_3^*$  peut prendre toute valeur dans l'intervalle :*

$$\left[ \max \left\{ \Delta f_2 + \frac{1}{2} (\Delta f_1 - \Delta f_2), \Delta f_3 - 2(\Delta f_4 - \Delta f_3) \right\}, \right. \\ \left. \min \left\{ \Delta f_2 - 2(\Delta f_1 - \Delta f_2), \Delta f_3 + \frac{1}{2}(\Delta f_4 - \Delta f_3) \right\} \right].$$

**Sous-cas 14.4.** *si  $2(|\Delta z_1 - \Delta z_2| + |\Delta f_4 - \Delta f_3|) < \Delta f_3 - \Delta f_1$ , alors il existe un unique  $b_3^*$  dans l'intervalle  $[\Delta f_2 - 2(\Delta f_1 - \Delta f_2), \Delta f_3 - 2(\Delta f_4 - \Delta f_3)]$ .*

**Cas 15.** *Si  $\Delta f_1 < \Delta f_2 < \Delta f_3 > \Delta f_4$ ,*

**Sous-cas 15.1.** *si  $\Delta f_3 - \Delta f_1 < \frac{2-\sqrt{10}}{\sqrt{10}}(\Delta f_1 - \Delta f_2)$ ,  $b_2^*$  peut prendre toute valeur dans l'intervalle :*

$$\left[ \Delta f_3, \min \left\{ \Delta f_2 + \frac{2-\sqrt{10}}{\sqrt{10}}(\Delta f_1 - \Delta f_2), \Delta f_3 + \frac{2-\sqrt{10}}{\sqrt{10}}(\Delta f_4 - \Delta f_3) \right\} \right].$$

**Sous-cas 15.2.** *si  $\frac{2-\sqrt{10}}{\sqrt{10}}(\Delta f_1 - \Delta f_2) < \Delta f_3 - \Delta f_2 < \frac{7+\sqrt{10}}{3}(\Delta f_2 - \Delta f_1)$  alors  $b_2^* = \Delta f_3$ .*

**Sous-cas 15.3.** *si  $\frac{7+\sqrt{10}}{3}(\Delta f_2 - \Delta f_1) < \Delta f_3 - \Delta f_2$ , il existe un unique  $b_3^*$  optimal dans l'intervalle  $[\Delta f_2 - \frac{7+\sqrt{10}}{3}(\Delta f_1 - \Delta f_2), \Delta f_3]$ .*

**Cas 17.** *Si  $\Delta f_1 < \Delta f_2 > \Delta f_3 < \Delta f_4$ ,*

**Sous-cas 17.1.** *si  $\Delta f_2 - \Delta f_3 > \frac{\sqrt{10}+1}{3}(|\Delta f_1 - \Delta f_2| + |\Delta f_4 - \Delta f_3|)$ , il existe un unique  $b_3^*$  optimal dans l'intervalle :*

$$\left[ \Delta f_3 + \frac{\sqrt{10}+1}{3}(\Delta f_4 - \Delta f_3), \Delta f_2 + \frac{\sqrt{10}+1}{3}(\Delta f_1 - \Delta f_2) \right].$$

**Sous-cas 17.2.** *si  $\Delta f_2 - \Delta f_3 \frac{\sqrt{10}+1}{3}(|\Delta f_1 - \Delta f_2| + |\Delta f_4 - \Delta f_3|)$  alors  $b_2^*$  peut prendre toute valeur dans l'intervalle :*

$$\left[ \max \left\{ \Delta f_3, \Delta f_2 + \frac{\sqrt{10}+1}{3}(\Delta f_1 - \Delta f_2) \right\}, \min \left\{ \Delta f_2, \Delta f_3 + \frac{\sqrt{10}+1}{3}(\Delta f_4 - \Delta f_3) \right\} \right]$$

## 4 Matrices du problème discrétisé pour l'approximation par spline d'ajustement sans paramètre $L_1$

Nous définissons les matrices du premier niveau du problème d'approximation par :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1_{l+1} - \xi^{(1)} & \xi^{(1)} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1_{l+1} - \xi^{(2)} & \xi^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1_{l+1} - \xi^{(n-1)} & \xi^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \theta^{(1)} & \kappa^{(1)} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \theta^{(2)} & \kappa^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \theta^{(n-1)} & \kappa^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

où  $1_{l+1}$  est un vecteur de taille  $l + 1$  composé uniquement de 1. Les matrices du second niveau du problème d'approximation (2.34) par :

$$B_0 = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{h_1} & \frac{\gamma}{h_1} & & & & \\ & -\frac{\gamma}{h_2} & \frac{\gamma}{h_2} & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & -\frac{\gamma}{h_{n-1}} & \frac{\gamma}{h_{n-1}} & \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

et le vecteur  $c = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ fois}}, f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ , avec  $\alpha, \beta, \gamma$  définis en page 57 et :

$$\xi^{(k)} = \begin{pmatrix} \xi_0^{(k)} \\ \xi_1^{(k)} \\ \vdots \\ \xi_l^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \theta^{(k)} = \begin{pmatrix} \theta_0^{(k)} \\ \theta_1^{(k)} \\ \vdots \\ \theta_l^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \kappa^{(k)} = \begin{pmatrix} \kappa_0^{(k)} \\ \kappa_1^{(k)} \\ \vdots \\ \kappa_l^{(k)} \end{pmatrix},$$

où pour  $j \in \{0, \dots, l\}$  et  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  :

$$\xi_j^{(k)} = \left( a + (b-a)\frac{j}{l} - x_k \right)^2 \left( \frac{3}{h_k} + 2 \frac{(a + (b-a)\frac{j}{l} - x_k)}{h_k^2} \right),$$

$$\theta_j^{(k)} = \left( a + (b-a)\frac{j}{l} - x_k \right) - 2 \left( \frac{(a + (b-a)\frac{j}{l} - x_k)^2}{h_k} + \frac{(a + (b-a)\frac{j}{l} - x_k)^3}{h_k^2} \right),$$

$$\kappa_j^{(k)} = - \left( \frac{(a + (b-a)\frac{j}{l} - x_k)^2}{h_k} + \frac{(a + (b-a)\frac{j}{l} - x_k)^3}{h_k^2} \right).$$



## Annexe B

# Détails sur le Chapitre 3

### 1 Démonstration du Lemme 3.5

Rappelons ce lemme énoncé à la page 89.

**Lemme.** Soient  $x_1, x_2, x_3$  trois réels tels que  $x_1 < x_2 < x_3$ . Pour trois réels fixés  $q_1, q_2, q_3$  :

$$\begin{aligned} \min_{b_1, b_2, b_3 \in \mathbf{R}} \sum_{i=1}^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |b_{i+1} - b_i + 6t(b_i + b_{i+1} - 2\Delta q_i)| dt \\ = 2 \left( \frac{\sqrt{10} - 1}{3} \right) \left| \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} - \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} \right|, \end{aligned}$$

pour :

$$\begin{aligned} b_1^* &= \left( \frac{2 - \sqrt{10}}{\sqrt{10}} \right) b_2 + 2 \left( \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} \right) \left( \frac{\sqrt{10} - 1}{\sqrt{10}} \right), \\ b_3^* &= \left( \frac{2 - \sqrt{10}}{\sqrt{10}} \right) b_2 + 2 \left( \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} \right) \left( \frac{\sqrt{10} - 1}{\sqrt{10}} \right), \\ b_2^* &\in \left[ \min \left( \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1}, \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} \right), \max \left( \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1}, \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Nous cherchons à minimiser :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| b_2 - b_1 + 6t \left( b_1 + b_2 - 2 \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} \right) \right| dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| b_3 - b_2 + 6t \left( b_2 + b_3 - 2 \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} \right) \right| dt. \quad (\text{B.1})$$

Nous utilisons le lemme du paragraphe précédent sur

$$(b_1, b_2) \mapsto \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| b_2 - b_1 + 6t \left( b_1 + b_2 - 2 \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} \right) \right| dt.$$

En posant  $x = b_1 - \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1}$  et  $y = b_2 - \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1}$ , il vient en effet que la valeur minimale de

$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| b_2 - b_1 + 6t \left( b_1 + b_2 - 2 \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} \right) \right| dt$  par rapport à  $b_1$  est obtenue pour :

$$b_1^* = \frac{2 - \sqrt{10}}{\sqrt{10}} b_2 + 2 \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} \frac{\sqrt{10} - 1}{\sqrt{10}},$$

et vaut  $2 \frac{\sqrt{10} - 1}{3} \left| b_2 - \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} \right|$ .

En minimisant le second terme de (B.1) par rapport à  $b_3$  par le même procédé, la fonctionnelle à minimiser est la fonction de  $b_2$  :

$$E(b_2) = 2 \frac{\sqrt{10} - 1}{3} \left( \left| b_2 - \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} \right| + \left| b_2 - \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} \right| \right).$$

Nous discutons maintenant des cas possibles :

- Si  $b_2 \leq \min \left( \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1}, \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} \right)$ , alors  $E(b_2) = 2 \frac{\sqrt{10} - 1}{3} \left( \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} + \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} - 2b_2 \right)$  est une fonction décroissante de  $b_2$ .
- Si  $\min \left( \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1}, \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} \right) \leq b_2 \leq \max \left( \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1}, \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} \right)$ , alors  $E(b_2) = 2 \frac{\sqrt{10} - 1}{3} \left( \max \left( \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1}, \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} \right) - \min \left( \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1}, \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} \right) \right)$  est une fonction constante de  $b_2$ .
- Si  $b_2 \geq \max \left( \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1}, \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} \right)$ , alors  $E(b_2) = 2 \frac{\sqrt{10} - 1}{3} \left( 2b_2 - \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} - \frac{q_3 - q_2}{x_3 - x_2} \right)$  est une fonction croissante de  $b_2$ .

Le résultat est ainsi montré.

## 2 Résolution du problème d'approximation avec erreur prescrite dans des cas particuliers

Nous donnons tout d'abord deux définitions supplémentaires utiles dans le deuxième paragraphe.

**Définition B.1.** Soient  $(x, y)$  un point du plan et  $\delta$  un réel strictement positif. Nous appelons **porte** d'amplitude  $\delta$  le segment  $x \times [y - \delta, y + \delta]$ .

**Définition B.2.** Soient donc  $f_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n$  points du plan avec  $\mathbf{x} = \{x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$ ,  $\mathbf{t} \subseteq \mathbf{x}$  et  $\delta > 0$ .

- Si  $i$  est tel que  $x_i \in \mathbf{t}$ , alors la porte associée au point  $f_i$  d'amplitude  $\delta$  est appelée porte principale.
- Sinon, la porte associée au point  $f_i$  d'amplitude  $\delta$  est appelée porte secondaire.

Sur la Figure 3.2, page 86, le graphe de la spline coupe cinq portes principales alors que sur la Figure 3.1, page 85, le graphe de la spline coupe quatre portes principales en  $x = 1, 3, 4, 5$  et une porte secondaire en  $x = 2$ .

## 2.1 Résolution exacte pour deux points

### 2.1.1 Avec dérivée fixée au premier point et passage dans une porte principale

Dans la proposition suivante, nous nous intéressons à l'approximation de deux points, l'un étant fixé avec sa dérivée associée (voir Figure B.1). Ce problème nous donne une indication sur le comportement de la fonctionnelle vis-à-vis des contraintes de passage dans les portes.



FIGURE B.1 – Illustration du problème (B.2).

**Proposition B.3.** Soient  $f_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2$ , deux points du plan,  $b_1 \in \mathbf{R}$  la dérivée première en  $f_1$  et le problème de minimisation :

$$\min_{q_2, b_2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| b_2 - b_1 + 6t \left( b_2 + b_1 - 2 \frac{q_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \right| dt \quad (\text{B.2})$$

sous les contraintes :  $(q_2, b_2) \in \mathbf{R}^2$ ,  $q_2 \in [y_2 - \delta, y_2 + \delta]$ .

Alors, le minimum est atteint pour :

1.  $q_2^* = (x_2 - x_1)b_1 + y_1$  si  $y_2 - \delta \leq (x_2 - x_1)b_1 + y_1 \leq y_2 + \delta$ ,
2.  $q_2^* = y_2 + \delta$  si  $y_2 + \delta < (x_2 - x_1)b_1 + y_1$ ,
3.  $q_2^* = y_2 - \delta$  si  $(x_2 - x_1)b_1 + y_1 \leq y_2 - \delta$ ,

et

$$b_2^* = \frac{2 - \sqrt{10}}{10} b_1 - \frac{8 + \sqrt{10}}{10} \frac{q_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

*Démonstration.* Ici, nous considérons  $q_1 = y_1$  l'ordonnée du premier point d'approximation. Nous utilisons le Lemme 2.5, page 51 et nous montrons ainsi que le minimum de l'intégrale dans (B.2) par rapport à  $b_2$  vaut :

$$\frac{2(\sqrt{10} - 1)}{3(x_2 - x_1)} |b_1(x_2 - x_1) + y_1 - q_2| \quad \text{pour} \quad b_2^* = \frac{2 - \sqrt{10}}{10} b_1 - \frac{8 + \sqrt{10}}{10} \frac{q_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

On cherche maintenant à minimiser cette expression par rapport à  $q_2$ . Il y a alors trois cas possibles illustrés sur la Figure B.2 :

1. Si  $y_2 - \delta \leq (x_2 - x_1)b_1 + y_1 \leq y_2 + \delta$  alors  $q_2 = (x_2 - x_1)b_1 - y_1$  et le minimum de (B.2) vaut donc zéro.

2. Si  $y_2 + \delta < (x_2 - x_1)b_1 + y_1$  alors  $q_2 = y_2 + \delta$  et le minimum de (B.2) vaut donc :

$$\frac{2(\sqrt{10} - 1)}{3(x_2 - x_1)}(b_1(x_2 - x_1) + y_1 - y_2 - \delta).$$

3. Si  $(x_2 - x_1)b_1 + y_1 \leq y_2 - \delta$  alors  $q_2 = y_2 - \delta$  et le minimum de (B.2) vaut donc :

$$\frac{2(\sqrt{10} - 1)}{3(x_2 - x_1)}(y_2 - y_1 - \delta - b_1(x_2 - x_1)).$$

□

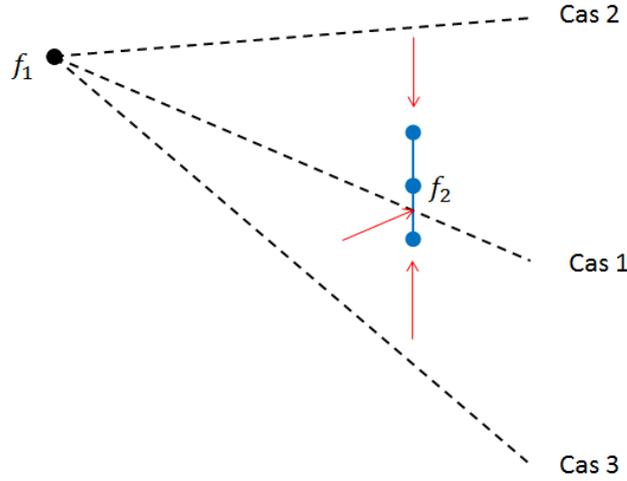


FIGURE B.2 – Résolution du problème (B.2).

La Figure B.2 illustre la résolution du problème (B.2). Le point d'approximation cherché est le point de la porte le plus proche de la tangente.

### 2.1.2 Avec passage dans deux portes principales

Nous résolvons ici le problème (3.3)-(3.4) pour deux points quelconques (voir la Figure B.3). Nous montrons que l'ensemble solution est un faisceau de droite.

**Proposition B.4.** *Soit  $f_1, f_2$  deux points du plan alors le problème de minimisation :*

$$\min_{q_1, q_2, b_1, b_2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| b_2 - b_1 + 6t \left( b_2 + b_1 - 2 \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} \right) \right| dt \quad (\text{B.3})$$

sous les contraintes :  $(q_1, q_2, b_1, b_2) \in \mathbf{R}^4$ ,  $q_i \in [y_i - \delta, y_i + \delta]$ ,  $i = 1, 2$ .

admet pour solutions tout  $(q_1, q_2) \in [y_1 - \delta, y_1 + \delta] \times [y_2 - \delta, y_2 + \delta]$  et  $b_1 = b_2 = \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1}$ .

*Démonstration.* Nous pouvons trouver une infinité de droites qui coupent les deux portes principales  $x_1 \times [y_1 - \delta, y_1 + \delta]$  et  $x_2 \times [y_2 - \delta, y_2 + \delta]$ . Autrement dit, pour deux points quelconques,  $\delta_\infty = 0$ . On applique alors la Proposition 3.3, page 87. □

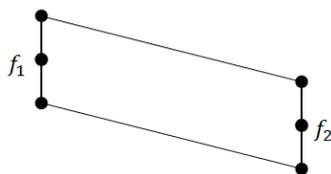


FIGURE B.3 – Le problème (3.3)-(3.4) pour deux points quelconques

## 2.2 Résolution exacte pour trois points

### 2.2.1 Avec deux points fixés, la dérivée fixée au premier point et passage dans une porte secondaire

Dans ce problème, nous fixons le premier et le dernier point ainsi que la dérivée au premier point. Nous considérons une porte secondaire au deuxième point (voir Figure B.4). Ce résultat analyse l'influence de la dérivée au premier point sur le passage de la solution dans une porte (voir aussi la Figure B.5).

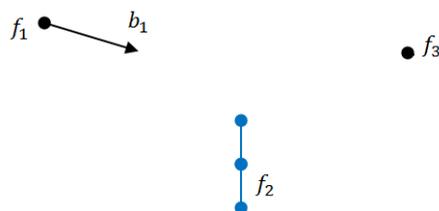


FIGURE B.4 – Illustration du problème (B.4)

**Proposition B.5.** Soient  $f_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  trois points du plan tels que  $x_1 < x_2 < x_3$ ,  $b_1 \in \mathbf{R}$  la dérivée première imposée en  $f_1$  et  $h$  la pente entre  $f_1$  et  $f_3$ . Soient  $\delta > 0$  et le problème de minimisation :

$$\min_{b_3} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| b_3 - b_1 + 6t \left( b_3 + b_1 - 2 \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \right) \right| dt \quad (\text{B.4})$$

sous les contraintes :  $b_3 \in \mathbf{R}$ ,  $q_2 \in [y_2 - \delta, y_2 + \delta]$ .

Posons :

$$\alpha = \left( \frac{1}{h^2} (x_2 - x_1)^3 - \frac{1}{h} (x_2 - x_1)^2 \right),$$

$$\beta = y_1 \left( 1 - \frac{3}{h^2} (x_2 - x_1)^2 + \frac{2}{h^3} (x_2 - x_1)^3 \right) + y_3 \left( \frac{3}{h^2} (x_2 - x_1)^2 - \frac{2}{h^3} (x_2 - x_1)^3 \right)$$

$$+ b_1 \left( (x_2 - x_1) - \frac{2}{h} (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{h^2} (x_2 - x_1)^3 \right),$$

et

$$\mathcal{I} = \left[ \frac{y_2 + \delta - \beta}{\alpha}, \frac{y_2 - \delta - \beta}{\alpha} \right].$$

Enfin, posons :

$$b_3^* = \frac{2 - \sqrt{10}}{10} b_1 - \frac{8 + \sqrt{10}}{10} \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}.$$

Alors le problème (B.4) admet pour solution :

1.  $b_3^*$  si  $b_3^* \in \mathcal{I}$ .
2.  $\frac{y_2 + \delta - \beta}{\alpha}$  si  $b_3^* \leq \frac{y_2 + \delta - \beta}{\alpha}$ .
3.  $\frac{y_2 - \delta - \beta}{\alpha}$  si  $b_3^* \geq \frac{y_2 - \delta - \beta}{\alpha}$ .

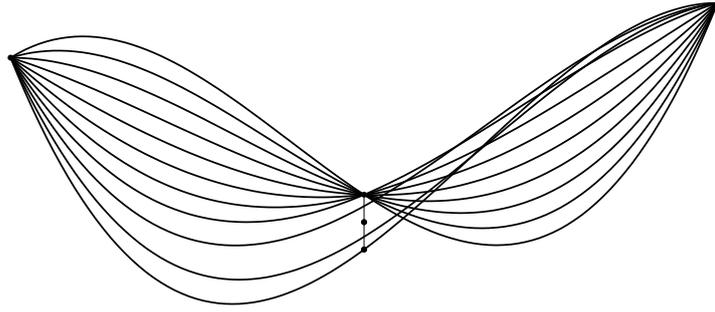


FIGURE B.5 – Résolution du problème (B.4) pour différents choix de  $b_1$ .

*Démonstration.* Par explicitation d'une fonction  $s$  dans  $\mathbf{P}_3$ ,  $q_2 = s(x_2)$  peut se récrire sous la forme suivant :

$$q_2 = \beta(y_1, y_3, b_1) + \alpha b_3.$$

Le problème de minimisation devient alors :

$$\min_{b_3 \in \mathbf{R}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| b_3 - b_1 + 6t \left( b_3 + b_1 - 2 \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \right) \right| dt$$

tel que  $b_3 \in \mathcal{I} = \left[ \min \left( \frac{y_2 - \delta - \beta}{\alpha}, \frac{y_2 + \delta - \beta}{\alpha} \right), \max \left( \frac{y_2 - \delta - \beta}{\alpha}, \frac{y_2 + \delta - \beta}{\alpha} \right) \right]$ .

(B.5)

Nous montrons aisément que  $\alpha$  est strictement négatif, d'où :

$$\mathcal{I} = \left[ \frac{y_2 + \delta - \beta}{\alpha}, \frac{y_2 - \delta - \beta}{\alpha} \right].$$

Sans contrainte, le minimum de la fonction dans (B.5) par rapport à  $b_3$  vaut :

$$\frac{2(\sqrt{10} - 1)}{3(x_3 - x_1)} |b_1(x_3 - x_1) + y_1 - y_3| \quad \text{pour} \quad b_3^* = \frac{2 - \sqrt{10}}{10} b_1 - \frac{8 + \sqrt{10}}{10} \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}.$$

Trois cas pour la résolution du problème (B.4) :

1. Si  $b_3^* \in \mathcal{I}$  alors la solution est  $b_3^*$ .
2. Si  $b_3^* \leq \min \mathcal{I}$  alors par convexité de la fonctionnelle, la solution est  $\min \mathcal{I}$ .
3. Si  $b_3^* \geq \max \mathcal{I}$  alors par convexité de la fonctionnelle, la solution est  $\max \mathcal{I}$ .

□

### 2.2.2 Avec deux points fixés, la dérivée libre en tout point et passage dans une porte secondaire

Ce problème diffère du précédent par la relaxation de la dérivée au premier point. C'est maintenant un paramètre d'optimisation. Nous ne sommes pas en mesure de déterminer de manière exacte une solution dans tous les cas mais nous montrons une caractérisation intéressante de celle-ci.

**Proposition B.6.** *Soient  $f_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  trois points du plan tels que  $x_1 < x_2 < x_3$  et  $h$  la pente entre  $f_1$  et  $f_3$ . Soit le problème d'approximation :*

$$\min_{b_1, b_3} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| b_3 - b_1 + 6t \left( b_3 + b_1 - 2 \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \right) \right| dt \tag{B.6}$$

sous les contraintes :  $(b_1, b_3) \in \mathbf{R}^2$ ,  $q_2 \in [y_2 - \delta, y_2 + \delta]$ .

La solution du problème (B.6) suit la règle suivante :

- Si  $y_1 + h(x_2 - x_1) \in [y_2 - \delta, y_2 + \delta]$  alors  $b_1^* = b_3^* = h$ .
- Si  $y_1 + h(x_2 - x_1) > y_2 + \delta$  alors  $q_2 = y_2 + \delta$ .
- Si  $y_1 + h(x_2 - x_1) < y_2 - \delta$  alors  $q_2 = y_2 - \delta$ .

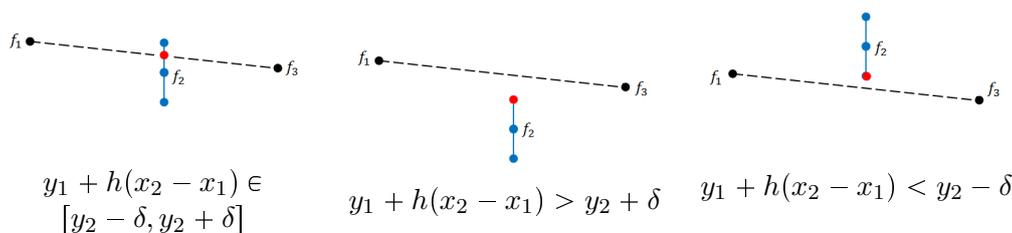


FIGURE B.6 – Illustration de la Proposition B.6.

*Démonstration.* Sans la contrainte  $q_2 \in [y_2 - \delta, y_2 + \delta]$ , le minimum de l'intégrale dans (B.6) vaut zéro et est atteint pour  $b_1^* = b_3^* = h$ . Si la droite liant  $f_1$  et  $f_3$  coupe la porte secondaire en  $f_2$ , alors c'est la solution du problème (B.7) et donc  $b_1^* = b_3^* = h$ . Sinon, nous utilisons alors la convexité de la fonctionnelle pour obtenir ce résultat. □

### 2.2.3 Avec le premier point fixé et passage dans deux portes en utilisant une seule cubique

Désormais, la contrainte du troisième point est relaxée. Nous cherchons une courbe dont le graphe coupe une porte secondaire au deuxième point et une porte principale au

troisième point. Nous montrons que la solution dépend fortement de la position de la porte secondaire au deuxième point par rapport au triangle formé par le premier point et la porte principale au troisième point (voir Figure B.7).

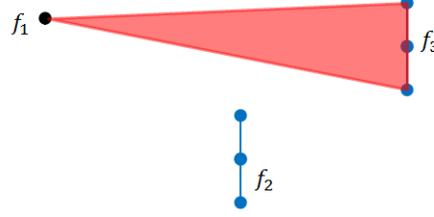


FIGURE B.7 – Illustration du problème (B.7).

**Proposition B.7.** Soient  $f_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  trois points du plan tels que  $x_1 < x_2 < x_3$ . Soient  $\delta > 0$  et le problème d'approximation :

$$\min_{b_1, b_3, q_3} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| b_3 - b_1 + 6t \left( b_3 + b_1 - 2 \frac{q_3 - y_1}{x_3 - x_1} \right) \right| dt$$

$$(b_1, b_3, q_3) \in \mathbf{R}^3 \quad (\text{B.7})$$

sous les contraintes :  $q_2 \in [y_2 - \delta, y_2 + \delta]$ ,  
 $q_3 \in [y_3 - \delta, y_3 + \delta]$ .

Nous notons :

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in [x_1, x_3] \times \mathbf{R} \mid y_1 + \frac{y_3 - y_1 - \delta}{x_3 - x_1}(x - x_1) \leq y \leq y_1 + \frac{y_3 - y_1 + \delta}{x_3 - x_1}(x - x_1)\}.$$

Alors les solutions de (B.7) suivent la règle suivante :

- Si  $x_2 \times [y_2 - \delta, y_2 + \delta] \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$  alors  $q_2^* \in [y_2 - \delta, y_2 + \delta] \cap \mathcal{C}$  et  $b_1^* = b_3^* = \frac{q_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .
- Si  $y_2 + \delta < y_1 + \frac{y_3 - y_1 - \delta}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)$  alors  $q_2^* = y_2 + \delta$  et  $q_3^* = y_3 - \delta$ .
- Si  $y_2 - \delta > y_1 + \frac{y_3 - y_1 + \delta}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)$  alors  $q_2^* = y_2 - \delta$  et  $q_3^* = y_3 + \delta$ .

*Démonstration.* Le domaine  $\mathcal{C}$  est représenté sur la Figure B.7. Si la porte secondaire  $x_2 \times [y_2 - \delta, y_2 + \delta]$  coupe  $\mathcal{C}$  alors les solutions du problème (B.7) sont des droites et alors  $q_2^*$  peut prendre toute valeur dans  $[y_2 - \delta, y_2 + \delta] \cap \mathcal{C}$ . Sinon, nous concluons par convexité de la fonctionnelle.  $\square$

### 3 Démonstration du Lemme 3.10

Rappelons ce lemme énoncé à la page 95.

**Lemme.** Soit  $f : [c, d] \mapsto \mathbf{R}$  une fonction affine définie par  $f(t) = at + b$ .

1. Si  $|f(t)| > 0$  sur  $]c, d[$  alors  $\int_c^d |f(t)| dt = (d - c) \left| f\left(\frac{d+c}{2}\right) \right|$ .
2. Si il existe  $\xi \in ]c, d[$  tel que  $f(\xi) = 0$  alors  $\left| \int_c^d |f(t)| dt - (d - c) \left| f\left(\frac{d+c}{2}\right) \right| \right| \leq (d-c)^2 \left| \frac{a}{2} \right|$ .
3. De plus si  $c = -\frac{1}{2}$  et  $d = \frac{1}{2}$ ,  $|f(t)| > 0$  sur  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  si et seulement si  $2|b| > |a|$ .

1. Supposons  $f$  strictement positive sur  $]c, d[$ , alors :

$$\begin{aligned} \int_c^d |f(t)| dt &= a \frac{d^2 - c^2}{2} + b(d - c), \\ &= (d - c) \left( a \frac{d + c}{2} + b \right). \end{aligned}$$

Le cas  $f$  strictement négative sur  $]c, d[$  est symétrique.

2. Nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d |f(t)| dt - (d - c) \left| f\left(\frac{d+c}{2}\right) \right| \right| &= \left| \int_c^d |f(t)| - \left| f\left(\frac{d+c}{2}\right) \right| dt \right|, \\ &\leq \int_c^d \left| |f(t)| - \left| f\left(\frac{d+c}{2}\right) \right| \right| dt, \\ &\leq (d - c) \max_{t \in [c, d]} \left| |f(t)| - \left| f\left(\frac{d+c}{2}\right) \right| \right|, \\ &\leq (d - c) |a| \max_{t \in [c, d]} \left| t - \frac{d+c}{2} \right|, \\ &\leq \frac{(d - c)^2}{2} |a|. \end{aligned}$$

3. Supposons  $f$  strictement positive sur  $]c, d[$ , alors soit :

- $a > 0$ . On doit avoir  $f(c) \geq 0$  et alors il vient  $2b \geq a$ .
- $a < 0$ . On doit avoir  $f(d) \geq 0$  et alors il vient  $2b \geq -a$ .
- $a = 0$ . On doit avoir  $f(d) > 0$ .

Réciproquement, si  $a > 0$ , c'est évident. Supposons  $a < 0$ . Il vient  $-b < a/2 < b$ . Nous avons alors  $b - a/2$  et  $b + a/2$  strictement positifs. Or, ce sont respectivement les valeurs de  $f(-1/2)$  et  $f(1/2)$ . Comme  $f$  est affine, il vient  $|f|$  est strictement positive sur  $] -1/2, 1/2[$ .



# Bibliographie

- [AGN07a] P. Auquier, O. Gibaru, and E. Nyiri.  $C^1$  and  $C^2$ -continuous polynomial parametric  $L_p$  splines ( $p \geq 1$ ). *Computer Aided Geometric Design*, 24(7) :373–394, 2007.
- [AGN07b] P. Auquier, O. Gibaru, and E. Nyiri. On the cubic  $L_1$  spline interpolant to the Heaviside function. *Numerical Algorithms*, 46(4) :321–332, 2007.
- [Aug07] P. Auquier. *Interpolation de points par des splines  $L^1$  régulières*. PhD thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2007.
- [BBC<sup>+</sup>01] C. Ballester, M. Bertalmio, V. Caselles, G. Sapiro, and J. Verdera. Filling-in by joint interpolation of vector fields and gray levels. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 10(8) :1200–1211, Aug 2001.
- [BDB13] J.P. Brooks, J.H. Dulá, and E.L. Boone. A pure  $L_1$ -norm principal component analysis. *Computational Statistics and Data Analysis*, 61(0) :83 – 98, 2013.
- [BL93] K. W. Bosworth and U. Lall. An  $L_1$  smoothing spline algorithm with cross validation. *Numerical Algorithms*, 5(8) :407–417, 1993.
- [BR73] I. Barrodale and F. D. K. Roberts. An Improved Algorithm for Discrete  $\ell_1$  Linear Approximation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 10(5) :839–848, 1973.
- [BR74] I. Barrodale and F. D. K. Roberts. Solution of an overdetermined system of equations in the  $\ell_1$  norm. *Communications of the ACM*, 17(6) :319–320, 1974.
- [BV04] S.P. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [CDM91] A. S. Cavaretta, W. Dahmen, and C. A. Micchelli. *Stationary subdivision*. Memoirs of the American Mathematical Society. Providence, R.I. American Mathematical Society, 1991.
- [CDM03] A. Cohen, N. Dyn, and B. Matei. Quasilinear subdivision schemes with applications to ENO interpolation. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 15(2) :89 – 116, 2003.
- [CFL02] H. Cheng, S.-C. Fang, and J.E. Lavery. Univariate cubic  $L_1$  splines - A geometric programming approach. *Mathematical Methods of Operations Research (ZOR)*, 56(2) :197–229, 2002.

- [CFL04] H. Cheng, S.-C. Fang, and J.E. Lavery. An Efficient Algorithm for Generating Univariate Cubic  $L_1$  Splines. *Computational Optimization and Applications*, 29(2) :219–253, 2004.
- [CFL05] H. Cheng, S.-C. Fang, and J.E. Lavery. Shape-preserving properties of univariate cubic  $L_1$  splines. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 174(2) :361–382, 2005.
- [CFL<sup>+</sup>08] N.-C. Chiu, S.-C. Fang, J.E. Lavery, J.-Y. Lin, and Y. Wang. Approximating term structure of interest rates using cubic  $L_1$  splines. *European Journal of Operational Research*, 184(3) :990–1004, 2008.
- [CGMP11] F. Cao, Y. Gousseau, S. Masnou, and P. Pérez. Geometrically guided exemplar-based inpainting. *SIAM J. Img. Sci.*, 4(4) :1143–1179, December 2011.
- [CW78] Peter Craven and Grace Wahba. Smoothing noisy data with spline functions. *Numerische Mathematik*, 31(4) :377–403, 1978.
- [Dau92] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. CBMS-NSF Regional conference series in applied mathematics. Philadelphia, Pa. Society for industrial and applied mathematics, 1992.
- [dB76] C. de Boor. On "best" interpolation. *Journal of Approximation Theory*, 16(1) :28–42, 1976.
- [DB01] C. De Boor. *A practical guide to splines*. Applied mathematical sciences. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [DGP10] V. Dobrev, J.-L. Guermond, and B. Popov. Surface Reconstruction and Image Enhancement via  $L^1$ -Minimization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(3) :1591–1616, 2010.
- [DL93] R. A. DeVore and G. G. Lorentz. *Constructive approximation*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin, New York, 1993.
- [DLFL14] Z. Deng, J.E. Lavery, S.-C. Fang, and J. Luo.  $\ell_1$  major component detection and analysis ( $\ell_1$  MCDA) in three and higher dimensional spaces. *Algorithms*, 7(3) :429–443, 2014.
- [DS89] D. Donoho and P. Stark. Uncertainty principles and signal recovery. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 49(3) :906–931, 1989.
- [EVSP11] S. Esakkirajan, T. Veerakumar, A.N. Subramanyam, and C.H. PremChand. Removal of high density salt and pepper noise through modified decision based unsymmetric trimmed median filter. *Signal Processing Letters, IEEE*, 18(5) :287–290, May 2011.
- [Far02] G.E. Farin. *Curves and surfaces for CAGD : a practical guide*. The Morgan Kaufmann series in computer graphics and geometric modeling. M. Kaufmann, San Francisco, San Diego, New York, 2002.

- [Far08] R.T. Farouki. *Pythagorean-Hodograph curves : algebra and geometry inseparable*. Geometry and computing. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2008.
- [FJ] J.-C. Fiorot and P. Jeannin. *Courbes et surfaces rationnelles : applications à la CAO*. Recherches en mathématiques appliquées. Masson, 1989 (14-Condésur-Noireau, Paris, Milan, Barcelone, Mexico).
- [FJ75] S.D. Fisher and J.W. Jerome. Spline solutions to  $L^1$  extremal problems in one and several variables. *Journal of Approximation Theory*, 13(1) :73–83, 1975.
- [FR91] J. Foster and F. B. Richards. The Gibbs Phenomenon for Piecewise-Linear Approximation. *The American Mathematical Monthly*, 98(1) :pp. 47–49, 1991.
- [GGN14] L. Gajny, O. Gibaru, and E. Nyiri.  $L_1C^1$  polynomial spline approximation algorithms for large data sets. *Numerical Algorithms*, 67(4) :807–826, 2014.
- [GGNF14] L. Gajny, Olivier Gibaru, E. Nyiri, and S.-C. Fang. Best  $L_1$  approximation of jump functions in Chebyshev and weak-Chebyshev subspaces of  $C^0[a, b]$ . 2014. Soumis.
- [GNG13] L. Gajny, E. Nyiri, and O. Gibaru. Fast Polynomial Spline Approximation for Large Scattered Data Sets via  $L_1$  Minimization. In F. Nielsen and F. Barbaresco, editors, *Geometric Science of Information*, volume 8085 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 813–820. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [Gre86] J. A. Gregory. Shape preserving spline interpolation. *Computer-Aided Design*, 18(1) :53 – 57, 1986.
- [HBG<sup>+</sup>13] F. Hernoux, R. Béarée, L. Gajny, J. Bancalin, E. Nyiri, and O. Gibaru. Leap Motion pour la capture de mouvement 3D par spline  $L_1$ . 2013.
- [HLS93] J. Hoschek, D. Lasser, and L.L. Schumaker. *Fundamentals of computer-aided geometric design*. Wellesley, Mass. A.K. Peters, 1993.
- [Hot33] H. Hotelling. Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *Journal of Educational Psychology*, 24(7) :498–520, 1933.
- [HR65] C.R. Hobby and J.R. Rice. A Moment Problem in  $L_1$  Approximation. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 16(4) :pp. 665–670, 1965.
- [Jac21] D. Jackson. Note on a class of polynomials of approximation. *Transactions of the American Mathematical Society*, 22(3) :pp. 320–326, 1921.
- [JLF10] Q. Jin, J.E. Lavery, and S.-C. Fang. Univariate Cubic  $L_1$  Interpolating Splines : Analytical Results for Linearity, Convexity and Oscillation on 5-PointWindows. *Algorithms*, 3(3) :276–293, 2010.
- [JYLF11] Q. Jin, L. Yu, J.E. Lavery, and S.-C. Fang. Univariate cubic  $L_1$  interpolating splines based on the first derivative and on 5-point windows : analysis, algorithm and shape-preserving properties. *Computational Optimization and Applications*, 51(2) :575–600, 2011.

- [Kam79] D.W. Kammler.  $L_1$ -Approximation of Completely Monotonic Functions by Sums of Exponentials. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 16(1) :30–45, 1979.
- [KM07] A. Kayumov and M.-L. Mazure. Chebyshevian splines : interpolation and blossoms. *Comptes Rendus Mathematique*, 344(1) :65 – 70, 2007.
- [Kri65] T.J. Kripke, B.R.; Rivlin. Approximation in the metric of  $L^1(X, \mu)$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 119(1) :101–122, 1965.
- [KS66] S. Karlin and W.J. Studden. *Tchebycheff systems : with applications in analysis and statistics*. Pure and applied mathematics. John Wiley & Sons, New York, 1966.
- [Lan86] S. Lang. *Introduction to linear algebra*. Undergraduate texts in mathematics. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [Lav00a] J.E. Lavery. Shape-preserving, multiscale fitting of univariate data by cubic  $L_1$  smoothing splines. *Computer Aided Geometric Design*, 17(7) :715–727, 2000.
- [Lav00b] J.E. Lavery. Univariate cubic  $L_p$  splines and shape-preserving, multiscale interpolation by univariate cubic  $L_1$  splines. *Computer Aided Geometric Design*, 17(4) :319–336, 2000.
- [Lav01] J.E. Lavery. Shape-preserving, multiscale interpolation by bi- and multivariate cubic  $L_1$  splines. *Computer Aided Geometric Design*, 18(4) :321–343, 2001.
- [Lav02] J.E. Lavery. Shape-preserving, multiscale interpolation by univariate curvature-based cubic  $L_1$  splines in Cartesian and polar coordinates. *Computer Aided Geometric Design*, 19(4) :257–273, 2002.
- [Lav04] J.E. Lavery. Shape-preserving approximation of multiscale univariate data by cubic  $L_1$  spline fits. *Computer Aided Geometric Design*, 21(1) :43–64, 2004.
- [Lav05] J.E. Lavery. Shape-preserving interpolation of irregular data by bivariate curvature-based cubic  $L_1$  splines in spherical coordinates. *Computer Aided Geometric Design*, 22(9) :818–837, 2005.
- [Lav06] J.E. Lavery. Shape-preserving, first-derivative-based parametric and nonparametric cubic  $L_1$  spline curves. *Computer Aided Geometric Design*, 23(3) :276–296, 2006.
- [LKC] Shyam Lal, Sanjeev Kumar, and Mahesh Chandra. Removal of high density salt & pepper noise through super mean filter for natural images super mean filter for natural images. *International Journal of Computer Science Issues*, 9(3).
- [LM06] T. Lyche and J.-L. Merrien.  $C^1$  Interpolatory Subdivision with Shape Constraints for Curves. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(3) :1095–1121, March 2006.
- [Man01] Carla Manni. On shape preserving  $c_2$  hermite interpolation. *BIT Numerical Mathematics*, 41(1) :127–148, 2001.

- [Maz06] M.-L. Mazure. Choosing spline spaces for interpolation. In J.-G. Dumas, editor, *Transgressive Computing 2006, April, 2006*, pages 311–326, Grenade, Espagne, 2006.
- [Mic77] C.A. Micchelli. Best  $L^1$  approximation by weak Chebyshev systems and the uniqueness of interpolating perfect splines. *Journal of Approximation Theory*, 19(1) :1–14, 1977.
- [MM10] C. Manni and M.-L. Mazure. Shape constraints and optimal bases for  $C^1$  Hermite interpolatory subdivision schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 48(4) :1254–1280, 2010.
- [MPS95] E. Moskona, P. Petrushev, and E.B. Saff. The Gibbs phenomenon for best  $L_1$ -trigonometric polynomial approximation. *Constructive Approximation*, 11(3) :391–416, 1995.
- [MPSC09] D. Mitzel, T. Pock, T. Schoenemann, and D. Cremers. Video Super Resolution Using Duality Based TV- $L_1$  Optical Flow. In Jo. Denzler, G. Notni, and H. Süß e, editors, *Proceedings of the 31st DAGM Symposium on Pattern Recognition*, volume 5748 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 432–441, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer Berlin Heidelberg.
- [MS03] J.-L. Merrien and P. Sablonnière. Monotone and Convex  $C^1$  Hermite Interpolants Generated by a Subdivision Scheme. *Constructive Approximation*, 19(2) :279–298, 2003.
- [Nü89] G. Nürnberger. *Approximation by Spline Functions*. Springer, 1989.
- [NGA11] E. Nyiri, O. Gibaru, and P. Auquiart. Fast  $L_1^k C^k$  polynomial spline interpolation algorithm with shape-preserving properties. *Computer Aided Geometric Design*, 28(1) :65–74, 2011.
- [Peh79] F. Peherstorfer. Trigonometric polynomial approximation in the  $L_1$ -norm. *Mathematische Zeitschrift*, 169(3) :261–269, 1979.
- [Pin76] A. Pinkus. A Simple Proof of the Hobby-Rice Theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 60(1) :pp. 82–84, 1976.
- [Pin88] A. Pinkus. On smoothest interpolants. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 19(6) :1431–1441, 1988.
- [Pin89] A. Pinkus. *On  $L^1$ -approximation*. Cambridge tracts in mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, England, New York, 1989.
- [PS08] F. Pelosi and P. Sablonnière. Shape-preserving  $C^1$  Hermite Interpolants Generated by a Gori-Pitolli Subdivision Scheme. *J. Comput. Appl. Math.*, 220(1-2) :686–711, October 2008.
- [PT97] L.A. Piegl and W. Tiller. *The NURBS book*. Monographs in visual communications. Springer, Berlin, New York, 1997. NURBS : Non-Uniform Rational B-Splines.

- [PUZ<sup>+</sup>07] T. Pock, M. Urschler, C. Zach, R. Beichel, and H. Bischof. A duality based algorithm for TV- $L^1$ -optical-flow image registration. In *MICCAI'07 Proceedings of the 10th international conference on Medical image computing and computer-assisted intervention*, pages 511–518, 2007.
- [Ric64a] J.R. Rice. On the Computation of  $L_1$  Approximations by Exponentials, Rationals, and Other Functions. *Mathematics of Computation*, 18(87) :pp. 390–396, 1964.
- [Ric64b] J.R. Rice. *The Approximation of functions. Volume 1. , Linear theory.* Addison-Wesley series in computer science and information processing. Addison-Wesley, Reading (Mass), Palo Alto, London, 1964.
- [Sab04] P. Sablonnière. Bernstein-Type Bases and Corner Cutting Algorithms for  $C^1$  Merrien's Curves. *Advances in Computational Mathematics*, 20(1-3) :229–246, 2004.
- [Sch65] D.G. Schweikert. An Interpolation Curve Using a Spline in Tension. *Journal of Mathematical Physics*, 45 :33, 1965.
- [Sch81] L.L. Schumaker. *Spline functions : basic theory.* Pure and applied mathematics. J. Wiley, New York, Chichester, Brisbane, 1981.
- [SFN<sup>+</sup>69] J.T. Schwartz, H.O. Fattorini, R. Nirenberg, H. Porta, and H. Karcher. *Non-linear functional analysis.* Notes on mathematics and its applications. Gordon and Breach, New York, Paris, 1969.
- [Som83] Manfred Sommer. Weak Chebyshev spaces and best  $L_1$ -approximation. *Journal of Approximation Theory*, 39(1) :54 – 71, 1983.
- [ST99] E. B. Saff and S. Tashev. Gibbs phenomenon for best  $L_p$  approximation by polygonal lines. *East Journal on Approximations*, 5(2) :235 – 251, 1999.
- [Str84] H. Strauss. Best  $L_1$ -approximation. *Journal of Approximation Theory*, 41(4) :297–308, 1984.
- [TJLF13] Y. Tian, Q. Jin, J.E. Lavery, and S.-C. Fang.  $\ell_1$  major component detection and analysis ( $\ell_1$  MCDA) : Foundations in two dimensions. *Algorithms*, 6(1) :12–28, 2013.
- [Uso67] K.H. Usow. On  $L_1$  Approximation I : Computation for Continuous Functions and Continuous Dependence. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 4(1) :70–88, 1967.
- [Van89] R.J. Vanderbei. Affine-scaling for linear programs with free variables. *Mathematical Programming*, 43(1-3) :31–44, 1989.
- [VMFE12] V.V. Voronin, V.I. Marchuk, V.A. Frantc, and K.O. Egiazarian. Image inpainting algorithm based on edge reconstruction. In *Signal Processing (ICSP), 2012 IEEE 11th International Conference on*, volume 1, pages 659–662, Oct 2012.

- [WLF14] Z. Wang, J. Lavery, and S.-C. Fang. Approximation of Irregular Geometric Data by Locally Calculated Univariate Cubic  $L^1$  Spline Fits. *Annals of Data Science*, 1(1) :5–14, 2014.
- [WPZ<sup>+</sup>09] A. Wedel, T. Pock, C. Zach, H. Bischof, and D. Cremers. An Improved Algorithm for TV- $L^1$  Optical Flow. In D. Cremers, B. Rosenhahn, A.L. Yuille, and F.R. Schmidt, editors, *Statistical and Geometrical Approaches to Visual Motion Analysis*, volume 5604 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 23–45. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [YJLF10] L. Yu, Q. Jin, J.E. Lavery, and S.-C. Fang. Univariate Cubic  $L_1$  Interpolating Splines : Spline Functional, Window Size and Analysis-based Algorithm. *Algorithms*, 3(3) :311–328, 2010.
- [Zal75] R.A. Zalik. Existence of Tchebycheff extensions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 51(1) :68 – 75, 1975.
- [Zha07] W. Zhang. *Bivariate cubic  $L^1$  splines and applications*. PhD thesis, North Carolina State University, 2007.
- [Zie79] R. Zielke. *Discontinuous Chebyshev systems*. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1979.
- [ZM97] Z. Zhang and C.F. Martin. Convergence and Gibbs’ phenomenon in cubic spline interpolation of discontinuous functions . *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 87(2) :359 – 371, 1997.



## Approximation de fonctions et de données discrètes au sens de la norme $L_1$ par splines polynomiales

**RESUME :** L'approximation de données discrètes est fondamentale dans des domaines tels que la planification de trajectoire ou le traitement du signal (données issues de capteurs). Dans ces domaines, il est important d'obtenir des courbes conservant la forme initiale des données. L'utilisation des splines  $L_1$  semble être une bonne solution au regard des résultats obtenus pour le problème d'interpolation de données discrètes par de telles splines. Ces splines permettent notamment de préserver les linéarités des données et de ne pas introduire d'oscillations résiduelles comme c'est le cas pour les splines d'interpolation  $L_2$ . Nous proposons dans cette thèse une étude du problème de meilleure approximation au sens de la norme  $L_1$ . Cette étude comprend des développements théoriques sur la meilleure approximation  $L_1$  de fonctions présentant une discontinuité de type saut dans des espaces fonctionnels généraux appelés espace de Chebyshev et faiblement Chebyshev. Les splines polynomiales entrent dans ce cadre. Des algorithmes d'approximation de données discrètes au sens de la norme  $L_1$  par procédé de fenêtre glissante sont développés en se basant sur les travaux existants sur les splines de lissage et d'ajustement. Les méthodes présentées dans la littérature pour ces types de splines peuvent être relativement coûteuses en temps de calcul. Les algorithmes par fenêtre glissante permettent d'obtenir une complexité linéaire en le nombre de données. De plus, une parallélisation est possible. Enfin, une approche originale d'approximation avec erreur prescrite est développée. Un algorithme algébrique avec une complexité linéaire et qui peut être utilisé pour des applications temps réel.

**Mots clés :** Approximation, splines  $L_1$ , conservation de forme, données bruitées, planification de trajectoire, algorithme par fenêtre glissante.

## Function and data approximation in $L_1$ norm by polynomial splines

**ABSTRACT :** Data approximation is fundamental in application domains like path planning or signal processing (sensor data). In such domains, it is important to obtain curves that preserve the shape of initial data.  $L_1$  splines appear to be a good solution considering the results obtained for the problem of data interpolation. Contrary to classical  $L_2$  splines, these spline enable to preserve linearities in the data and to not introduce extraneous oscillations when applied on data sets with abrupt changes. We propose in this dissertation a study of the problem of best  $L_1$  approximation. This study includes developments on best  $L_1$  approximation of functions with a jump discontinuity in general spaces, Chebyshev and weak-Chebyshev spaces. Polynomial splines fit in this framework. Approximation algorithms by smoothing splines and spline fits based on a sliding window process are introduced. The methods previously proposed in the literature can be relatively time consuming when applied on large datasets. Sliding window algorithm enables to linearize the complexity of the algorithm. Moreover, these algorithms can be parallelized. Finally, a new approximation approach with prescribed error is introduced. A pure algebraic algorithm with linear complexity is introduced. This algorithm is then applicable to real-time application.

**Keywords :** Approximation,  $L_1$  splines, shape preservation, noisy data, path planning, sliding-window algorithm.