



ÉCOLE CENTRALE DES ARTS
ET MANUFACTURES
« ÉCOLE CENTRALE PARIS »

THÈSE

présentée par

Houda ATTIA

pour l'obtention du

GRADE DE DOCTEUR

Spécialité : Mécanique

Laboratoire d'accueil : Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux

SUJET :

MODÉLISATION MULTI-ÉCHELLES DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES CÂBLES TEXTILES

Soutenue le : 12 Février 2015

Devant un jury composé de :

<i>Directeur de thèse :</i>	Hachmi BEN DHIA	- École Centrale Paris
<i>Co-encadrants :</i>	Damien DURVILLE	- École Centrale Paris
	Patrick LE TALLEC	- École Polytechnique
<i>Rapporteurs :</i>	Pierre ALART	- Université Montpellier 2
	Philippe BOISSE	- INSA Lyon
<i>Examineurs :</i>	Basile AUDOLY	- Université Pierre et Marie Curie
	Remi BRUANT	- Michelin

*If you can't fly, then run
If you can't run, then walk
If you can't walk, then crawl
But whatever you do
You have de keep moving forward.*

Martin Luther King JR

À ma mère,

Remerciements :

Je souhaiterais adresser mes premiers remerciements à mon encadrant Damien Durville, qui m'a proposé ce sujet de thèse et qui a partagé avec moi son expertise dans le domaine de la simulation numérique des câblés. Je tiens également à remercier Hachmi Ben Dhia pour son accueil au sein du laboratoire MSSMat de l'Ecole Centrale de Paris, et pour avoir accepté la direction de cette thèse. Enfin, j'exprime toute ma reconnaissance à Patrick Le Tallec qui a co-encadré ce travail malgré ses nombreuses responsabilités. Je le remercie sincèrement pour ses précieux conseils scientifiques, et surtout pour son soutien, sa patience et sa chaleur humaine toute au long de ces trois années.

Je tiens particulièrement à remercier Marc Romero de La Osa, mon encadrant industriel, pour ses grandes qualités d'écoute, pour le temps qu'il a consacré à suivre l'avancement du travail et pour toutes les informations qu'il m'a transmises sur les applications industrielles de mon travail. J'aimerais aussi témoigner ma reconnaissance à Patrice Hauret, qui m'a mise en relation avec Damien Durville et Patrick Le Tallec pour lancer ce sujet, et puis pour son soutien et ses conseils pendant ces trois années. Enfin, je remercie Ramzy Boussetta et Rémi Bruant pour les discussions intéressantes que nous avons pu avoir lors de nos réunions d'avancement.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Pierre Alart et Philippe Boisse pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse, et pour les remarques constructives qu'ils ont émises dans leurs rapports. Je remercie également Rémi Bruant et Basile Audoly pour leur participation au jury de cette thèse en tant qu'examineurs.

La particularité de cette thèse est son caractère multiculturel, puisqu'elle s'est déroulée entre deux laboratoires : le laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux (MSSMat) à l'Ecole Centrale de Paris, et le laboratoire de Mécanique des Solides (LMS) à l'Ecole Polytechnique. Je voudrais alors remercier très chaleureusement tous les chercheurs et l'ensemble des équipes administratives que j'ai pu rencontrer pendant ces trois années, pour leur soutien et leur sympathie. Je remercie surtout tous les thésards et les post-docs (en pensant particulièrement à Nerea, Ana, Sylvi, Diana, Sophi) qui m'ont supportée pendant les moments difficiles et m'ont permis de dépasser les obstacles grâce à leur bonne humeur.

Une pensée particulière aux amis clermontois (Claudia, Amine, Chaimaa, Jeff) qui ont supporté mes ralerics pendant les weekends où je prenais refuge en Auvergne.

Merci aussi à ma belle famille de m'avoir soutenue, et d'avoir supporté une troisième thésarde dans la famille. Votre amour et votre joie de vivre ont rendu (et rendront toujours) ma vie belle... merci ! Les mots ne suffisent pas pour remercier mon mari Eric pour son soutien moral (et parfois plus...) durant ces trois années difficiles. Notre couple a pu résister à deux thèses... c'est du solide ! Enfin, le plus important, je remercie toute ma famille, en particulier mon frère Aymen qui m'a toujours poussée vers l'avant et soutenue dans mes choix, et ma chère maman qui a réalisé de nombreux sacrifices pour me permettre de réussir, a accepté la distance, et a toujours su trouver les mots pour me consoler et m'encourager.

Clermont Ferrand, le 12 Février 2015

Houda Attia

Résumé :

Le travail présenté a été réalisé dans le cadre d'un projet de recherche industriel visant à étudier le comportement mécanique des câblés textiles utilisés comme renforts dans les pneumatiques. Les câblés étudiés sont composés de plusieurs dizaines de milliers de filaments, assemblés en brins, qui sont ensuite torsadés ensemble. Le comportement du câble est gouverné par les mécanismes se produisant à l'échelle des fibres élémentaires, et hérite des phénomènes complexes dus aux interactions de contact-frottement entre les filaments. L'objectif de ce travail est de développer une approche permettant de simuler le comportement global de ces câblés au cours des différentes étapes de leur cycle de vie tout en approchant les sollicitations subies à l'échelle des filaments afin d'étudier les mécanismes responsables de l'endommagement de ces structures.

La thèse introduit une stratégie multi-échelles originale qui repose sur le développement d'un modèle simplifié de macrofibre. Ce modèle de macrofibre est formulé à une échelle intermédiaire (entre l'échelle microscopique -celle des fibres- et l'échelle macroscopique -celle des câbles-) et dont le comportement soit équivalent à celui d'un paquet de quelques dizaines de fibres. Pour compenser la pauvreté cinématique du modèle de macrofibre, nous proposons de prendre en compte les effets de densification locale des macrofibres (écrasements transverses, réduction des vides) en autorisant des pénétrations importantes entre elles, contrôlées par une loi de contact appropriée. L'objectif de cette modélisation macroscopique est d'estimer le comportement global du câble et de définir des informations à transmettre vers l'échelle microscopique. Le processus d'héritage (choix de quantités macroscopiques pertinentes et manière de les imposer au problème local) constitue l'apport principal de ce travail et se base sur un mode de pilotage mixte à l'échelle microscopique. À terme, les résultats du problème microscopique devront permettre de recalibrer les paramètres du modèle de contact macroscopique, de manière à obtenir un accord entre les densités déterminées aux deux échelles.

La méthode multi-échelles développée est d'abord validée par analyse d'erreur dans un cadre bi-dimensionnel, puis appliquée sur un câblé textile réel pour mettre en évidence son apport dans un contexte industriel.

Mots clés : Modélisation multi-échelles ; Câbles textiles ; Densité ; Contact

Abstract :

Textile ropes made of tows of filaments twisted together can be used as reinforcements for composites. The global nonlinear mechanical behavior of these ropes is largely controlled by contact-friction interactions taking place between elementary fibers. A finite element code, called Multifil, has been developed in order to simulate the mechanical behavior of such fibrous material. However, due to computational costs, the use of this approach is limited to structures made of few hundred fibers, whereas ropes in the scope of our study are formed of few thousand fibers.

The purpose of this work is to develop a multi-scale approach for modeling textile ropes with a huge number of fibers, in order to compute the global behavior of these structures while approaching the local stresses at the fibers scale. This strategy is based on the development of a simplified model of macrofibers to solve the problem at the macroscopic scale, and the formulation of a problem at the microscopic scale driven by relevant macroscopic quantities. Phenomena originating at microscopic scale, and particularly the densification of fibers, are accounted for at the macroscopic scale through an adapted contact law. Parameters of this law are adjusted so as to obtain a good agreement between the densities determined at macroscopic and microscopic scales.

Keywords : Multiscale modeling ; Textile ropes ; Density ; Contact.

Table des matières

1	Introduction générale	1
1.1	Présentation générale	1
1.1.1	Contexte industriel	1
1.1.2	Propriétés structurelles des renforts textiles	2
1.2	Enjeux de l'étude	4
1.2.1	Propriétés mécaniques des renforts textiles	4
1.2.2	Endommagement des renforts textiles	5
1.2.3	Difficultés de la modélisation et travaux existants	7
1.3	Objectifs et plan de la thèse	9
2	Modélisation d'une fibre en grands déplacements	11
	Introduction	11
2.1	Notations et description du problème mécanique	13
2.2	Modèles cinématiques de poutre : État de l'art et formulation variationnelle	14
2.2.1	Modèle de Timoshenko	15
2.2.2	Modèle à cinématique enrichie	20
2.2.3	Quelques modèles d'ordre plus élevé	24
2.2.4	Conclusions sur les modèles cinématiques de poutre	25
2.3	Aspect comportement	26
2.3.1	Modèle rhéologique unidimensionnel	26
2.3.2	Modèle rhéologique tridimensionnel	27
2.4	Aspects numériques	30
2.4.1	Résolution numérique par la méthode des Éléments Finis	30
2.4.2	Phénomène de verrouillage numérique	34
3	Modélisation des interactions entre fibres	37
	Introduction	37
3.1	Description continue du problème de contact	38
3.1.1	Cinématique	38
3.1.2	Modèles mécaniques de contact frottant	39
3.1.3	Formulation faible	43
3.2	Traitement numérique du problème de contact	43
3.2.1	Détection des zones potentielles de contact	44
3.2.2	Discrétisation et définition des paires de contact	45
3.2.3	Méthodes de résolution numérique du contact	50
3.2.4	Traitements spéciaux de certaines non-linéarités	52
3.2.5	Méthode de résolution pour le frottement	53
3.2.6	Bilan de l'algorithme de résolution : aspect triple boucle	55
4	Notions d'échelles dans les renforts textiles : état de l'art	57
	Introduction	57
4.1	Comportement mécanique des câbles textiles : du filament au câblé	58
4.2	Approches pour la modélisation des câbles textiles : État de l'art	60
4.2.1	Modélisation à l'échelle macroscopique	61
4.2.2	Modélisation à l'échelle mésoscopique	64

4.2.3	Modélisation à l'échelle microscopique	67
4.3	Méthodes numériques multiéchelles	70
4.3.1	Méthodes d'homogénéisation	70
4.3.2	Méthode de décomposition de domaine	75
4.4	Construction d'une approche multi-échelles appropriée	77
4.4.1	Introduction d'une échelle intermédiaire : Notion de macrofibre	77
4.4.2	Analyse des phénomènes importants	79
4.4.3	Pistes explorées : méthodes basées sur une cinématique enrichie	82
4.4.4	Modèle original contrôlé par la loi de contact	85
5	Problème multi-échelles bidimensionnel	89
	Introduction	89
5.1	Construction d'un problème bidimensionnel représentatif	90
5.1.1	Présentation du problème	90
5.1.2	Chargement extérieur	90
5.1.3	Forme de l'énergie	91
5.1.4	Modélisation des interactions de contact entre disques	91
5.1.5	Formulation du problème et résolution numérique	92
5.2	Formulation du problème multi-échelles "hérité"	94
5.2.1	Rappel du principe de l'approche proposée	94
5.2.2	Formulation du problème à l'échelle macroscopique	95
5.2.3	Formulation du problème à l'échelle microscopique sur une cellule locale	97
5.2.4	Aspects numériques	100
5.2.5	Résultats numériques	101
5.3	Formulation d'un problème multi-échelles couplé	104
5.3.1	Objectif	104
5.3.2	Écriture formelle du problème multi-échelles couplé	105
5.3.3	Équations d'équilibre et interprétations	106
5.3.4	Algorithme de résolution du problème multi-échelles couplé	108
5.3.5	Résultats numériques	111
5.4	Comparaisons entre les modèles	113
5.4.1	Comparaison entre les modèles microscopique et multi-échelles couplé	113
5.4.2	Comparaison entre les modèles multi-échelles couplé et hérité	114
	Conclusion	118
6	Méthode multi-échelles sur un câblé tridimensionnel	119
	Introduction	119
6.1	Modèle macroscopique continu	120
6.1.1	Principe général et notations	120
6.1.2	Cinématique d'une macrofibre	121
6.1.3	Comportement	121
6.1.4	Loi de contact originale	123
6.1.5	Formulation du problème continu	126
6.1.6	Équations d'équilibre	127
6.2	Méthode de "downscaling"	128
6.2.1	Géométrie locale et choix de modélisation	128
6.2.2	Passage Macro-Micro	129
6.2.3	Formulation continue du problème local	134
6.2.4	Équations d'équilibre et interprétations	135
6.2.5	Discrétisation en temps	136

6.3	Discrétisation et résolution	137
6.3.1	Discrétisation en espace	137
6.3.2	Algorithme de résolution	139
6.3.3	Application sur un exemple simple	141
6.4	Application sur un câblé textile réel	143
6.4.1	Présentation de la géométrie et du chargement imposé	143
6.4.2	Simulation de la traction aux deux échelles	144
6.4.3	Application à la prédiction de l'endommagement	145
	Conclusion	148
	Conclusion générale	151
	Annexes	153
A	Modèle de poutres à cinématique enrichie d'ordre N	155
A.1	Modèle cinématique à l'ordre N	155
A.2	Résultats numériques	155
A.3	Adaptation du traitement du contact	156
A.4	Commentaires	158
B	Réflexion sur la prise en compte de la matrice de gomme en 2D	159
B.1	Modélisation de la matrice de gomme à l'échelle macroscopique	159
B.1.1	Réalisation du maillage de la gomme	159
B.1.2	Loi de comportement de la gomme	160
B.1.3	Pilotage de la matrice de gomme	161
B.1.4	Liaison entre la matrice de gomme et les macro-disques : notion d'agrafe	161
B.1.5	Résultat numérique	162
B.2	Héritage des effets de la gomme à l'échelle locale	162
B.2.1	Choix des disques microscopiques à lier à la matrice de gomme	162
B.2.2	Mode d'héritage des effets de la gomme	163
B.2.3	Résultats numériques à l'échelle locale	164
C	Limite asymptotique d'un modèle discret avec liaisons imposées aux incréments de solutions	165
	Bibliographie	167

Introduction générale

Sommaire

1.1	Présentation générale	1
1.1.1	Contexte industriel	1
1.1.2	Propriétés structurelles des renforts textiles	2
1.2	Enjeux de l'étude	4
1.2.1	Propriétés mécaniques des renforts textiles	4
1.2.2	Endommagement des renforts textiles	5
1.2.3	Difficultés de la modélisation et travaux existants	7
1.3	Objectifs et plan de la thèse	9

L'objectif de ce chapitre est d'introduire le cadre général de cette thèse. Nous allons présenter en particulier les principales spécificités du problème mécanique étudié, ainsi que les nombreuses difficultés qui rendent problématique sa modélisation.

1.1 Présentation générale

1.1.1 Contexte industriel

Au cours de ces dernières années, l'utilisation de matériaux composites ne cesse de se développer, créant un domaine de recherche très actif. La liste d'usage de ces structures est quasiment illimité et couvre un grand nombre de secteurs (le transport, le bâtiment, les sports et loisirs ...). Les composites se présentent comme un assemblage de plusieurs constituants généralement non miscibles. Dans la plupart des cas, ces constituants sont au nombre de deux, nommés matrice et renfort. L'essor remarquable de ces matériaux s'explique par leurs capacités d'améliorer les propriétés que possèdent ses constituants séparément.

Cette thèse trouve sa motivation dans l'étude des structures composites présentes dans le pneumatique. En effet, derrière une simplicité apparente, un pneu est une structure complexe, composée d'un empilement de nappes composites interposées entre la gomme intérieure (qui représente la chambre à air) et la bande de roulement gravée par des sculptures (voir figure (1.1)). Parmi ces nappes de renfort, on distingue : les *nappes sommets*, ou dites nappes ceintures, portant leur nom du fait qu'elles servent de ceintures autour du pneu, et la nappe carcasse qui représente le squelette du pneu, posée sur la chambre à air et rabattue sur les tringles. Ces nappes sont obtenues par calandrage en trois étapes :

- Les câbles sont d'abord placés entre deux feuilles minces de gomme ;
- Puis cet ensemble est comprimé entre deux cylindres de grand diamètre ;
- Enfin la gomme polymérise sur la couche de liaison avec les câbles durant la cuisson du pneu.

On s'intéresse en particulier dans notre étude au pneu dit à architecture radiale, une des évolutions importantes dans la conception du pneumatique depuis les années 50. Les câbles introduits au niveau de la nappe carcasse sont disposés parallèles les uns par rapport aux autres sous forme d'arceaux accrochés aux tringles et orientés dans le sens radial du pneu, d'où la nomination de pneu radial. Un des avantages de la nappe carcasse radiale est d'étendre la surface de contact entre le pneu et le sol, permettant ainsi de limiter les glissements transversaux pour assurer une meilleure sécurité et un confort de conduite au conducteur. En terme de comportement, outre leur rôle de renforts de la nappe en gomme dans laquelle ils sont introduits, ces câbles jouent un rôle essentiel pour assurer des hautes performances du pneu en terme de stabilité, de confort et de précision du guidage.

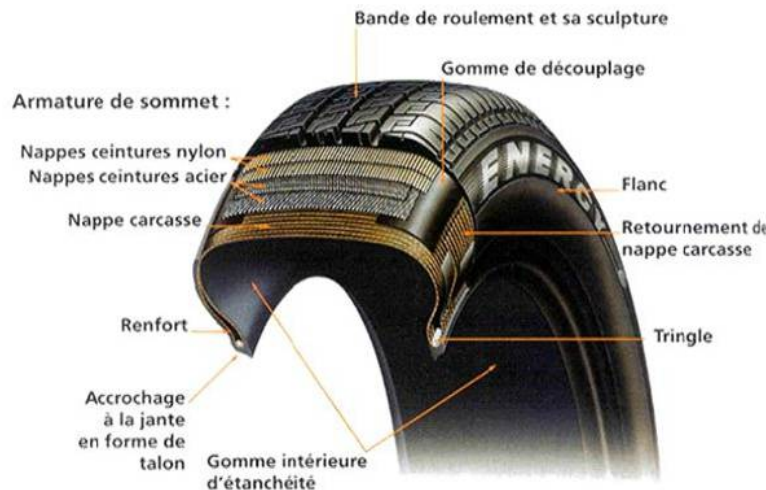


FIGURE 1.1 – Structure d'un pneumatique à architecture radiale.

Les structures câblées utilisées dans les pneumatiques peuvent être en métal ou en textile (figure 1.2). L'usage des câbles en textile, généralement fabriqués en fibres synthétiques, concerne les pneus touristes (au niveau de la nappe carcasse), les pneus avions (où toutes les nappes sont en textile, y compris celles qui sont sur le sommet) ainsi que les pneus moto et agricole. Certes le textile est plus cher, mais les fibres textiles ont l'avantage par rapport à celles métalliques de produire des renforts plus légers et garantissant un meilleur rapport résistance/masse. En revanche, les principales limites de ces câbles textiles sont leur sensibilité à l'humidité et à la température.



FIGURE 1.2 – Bobines de câbles textiles utilisés dans le pneu (www.toutsurpneu.michelin.com).

1.1.2 Propriétés structurelles des renforts textiles

Les câbles textiles utilisés dans le pneumatique sont majoritairement constitués des matériaux d'Aramide (dont le nom commercial est le Kevlar), du PET et du Rayonne. En industrie textile,

l'unité de titrage des fibres et des câbles est 'le tex', qui correspond à sa masse linéique (le poids en gramme par kilomètre de longueur). La figure 1.3 présente une comparaison des propriétés mécaniques de fibres constituées de différents types de matériaux.

Les matériaux constituant les câbles textiles sont des polymères synthétiques, constitués d'un réseau de longues chaînes moléculaires (répétition d'un motif générique dit monomère). Ces chaînes interagissent entre elles par des liaisons intramoléculaires assurant la rigidité de l'ensemble, et créant ainsi un réseau de chaînes réticulées. La mise en forme de ces polymères est réalisée par un procédé de filage, qui produit des filaments continus, et qui conditionne en grande partie les propriétés physiques et mécaniques du fil. En effet, cette technique de mise en forme induit une orientation préférentielle des chaînes macromoléculaires selon la direction axiale (figure 1.4). De ce fait, des liaisons fortes intra-moléculaires (au sein d'une même chaîne) se forment dans cette direction, alors qu'une cohésion transversale de plus faible rigidité est assurée par des liaisons inter-moléculaires (entre deux chaînes). Ceci confère à la fibre ses propriétés mécaniques anisotropes avec une forte rigidité axiale. Une caractérisation micro-structurale plus approfondie des fibres textiles est disponible dans [Herrera 2004], [Marcellan 2003] et [LeClerc 2006].

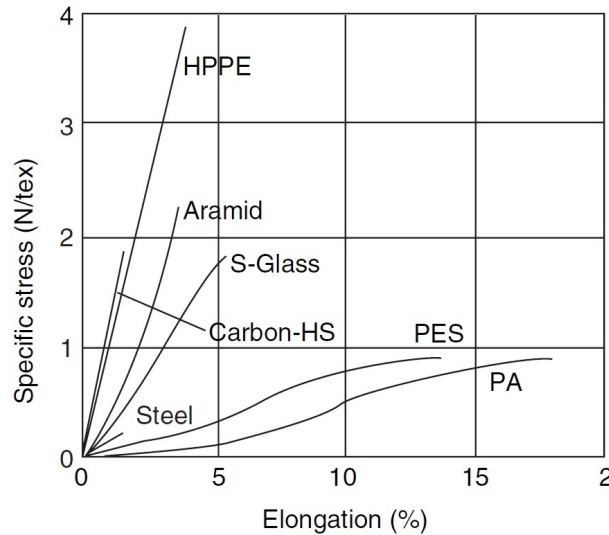


FIGURE 1.3 – Comparaison de courbes force-allongement de filaments constitués de différents matériaux (figure issue de [Hearle 2001].)

Dans ce rapport, l'échelle des filaments élémentaires sera considérée comme étant l'échelle la plus fine, et nous n'étudierons donc pas les phénomènes se produisant à l'échelle du polymère. En effet, les fils étant fabriqués par des fournisseurs externes, leur échelle est considérée comme la plus petite au niveau de laquelle le concepteur pourrait travailler pour optimiser les caractéristiques mécaniques du câble textile.

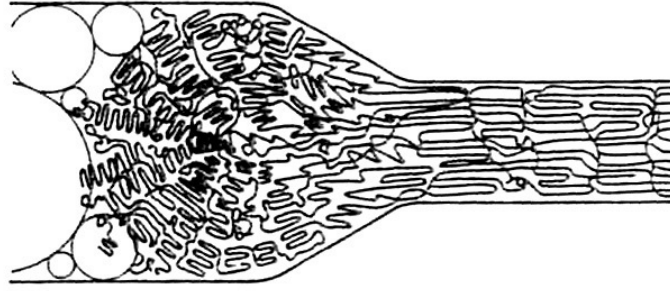


FIGURE 1.4 – Schématisation de l'effet du filage sur la microstructure d'un filament textile (figure issue de [Herrera 2004]).

Par ailleurs, il convient de signaler que dans le domaine d'utilisation de ces fibres textiles, en particulier pour le cas de l'aramide, leur comportement reste élastique. En effet, l'aramide est doté d'un très haut module d'élasticité et peut subir des déformations allant jusqu'à 4 % tout en restant élastique. Enfin, son mécanisme de rupture étant selon un mode fragile, les déformations plastiques de ce matériau sont négligeables. Nous reviendrons sur cet aspect dans le paragraphe suivant.

1.2 Enjeux de l'étude

1.2.1 Propriétés mécaniques des renforts textiles

Les fibres ne sont pas utilisées seules dans le pneu, elles sont assemblées en une structure câblée, selon différents motifs d'arrangements géométriques. Couramment, les *câbles* textiles sont composés d'un certain nombre de *brins* (aussi appelés *torons*), disposés en hélice autour de leurs axes. Chaque brin est constitué d'un assemblage de *filés*, composés à leur tour d'un grand nombre de *fibres* unitaires. Le passage d'un filé de filaments droits à un toron se fait par « torsadage », c'est à dire en imposant une torsion importante au filé (de l'ordre de plusieurs centaines de tours par mètre). Enfin, le câble est obtenu en appliquant une torsion dans le sens inverse de plusieurs brins pour les assembler dans la même structure. Ces différentes étapes du procédé de fabrication des câbles ont une influence directe sur le comportement mécanique de l'assemblage textile. Finalement, la rigidité du câble ainsi fabriqué dépend d'un grand nombre de paramètres : l'angle de retordage, le matériau, la structure des fibres (nombre, degré d'entremêlement, tortuosité), ...

Une fois intégré dans le pneumatique, le renfort textile est soumis à différents types de sollicitations, que ce soit en conditions de roulage normal ou dans des conditions extrêmes (choc sur un obstacle, virage à grande vitesse, ...). Parmi ces sollicitations, on distingue la pression de gonflage du pneu qui est reprise par le renfort sous la forme d'une forte tension. Pendant le roulage du pneu et sous l'effet de la charge qu'il supporte, le renfort est également soumis à différentes sollicitations cycliques complexes : une mise en tension de la partie supérieure du pneu, des sollicitations en flexion des arceaux sur le flan, ou encore des effets de cisaillement plan et de compression du à l'écrasement du pneu sur le sol. Ces sollicitations subies par les câbles sont représentées intuitivement sur la figure 1.5.

Le comportement mécanique global du câble est non linéaire, fortement gouverné par ce qui se passe à l'échelle des filaments élémentaires. En effet, il est particulièrement lié d'une part aux interactions fortement non-linéaires de contact-frottement entre les filaments le constituant, et d'autre part au comportement propre de chacun de ces filaments.

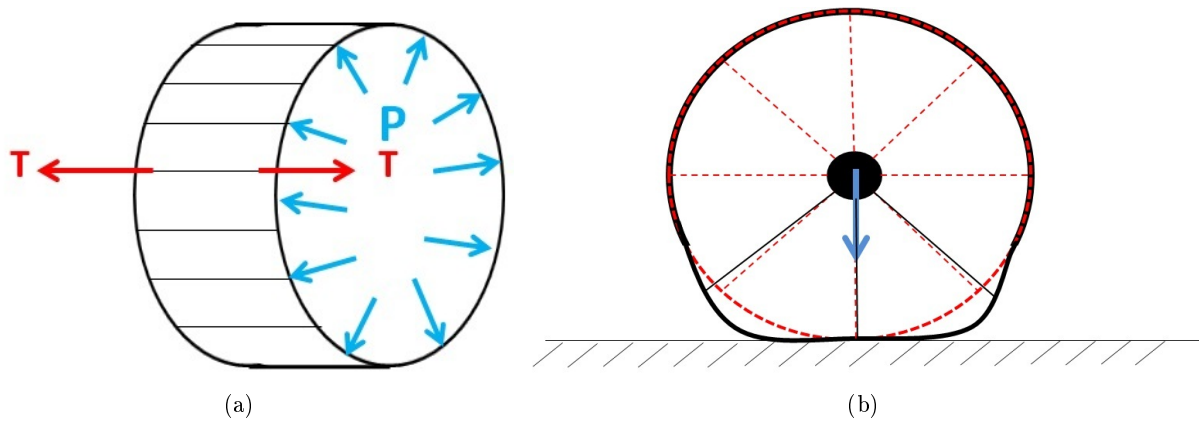


FIGURE 1.5 – Schématisation des sollicitations appliquées aux renforts (a) la mise en tension des câbles de la nappe carcasse du pneu sous la pression du gonflage (b) sollicitations durant le roulage du pneu

Nous nous intéressons dans cette étude à des renforts dit "hybrides", c'est à dire constitués de plusieurs brins constitués de matériaux différents. Ce type de renforts est caractérisé par un comportement en traction dit bi-module (cf courbe 1.6) : pour des faibles déformations, la rigidité est décrite par un module assez faible, due à un changement de conformation géométrique, alors que pour des elongations importantes, le haut module est lié principalement au module du matériau le plus rigide. Cette non-linéarité présente un intérêt dans le fonctionnement du renfort à l'intérieur du pneumatique : le bas module procure une souplesse au pneu, alors que le haut module permet au renfort de résister aux fortes contraintes auxquelles il peut être soumis en conditions sévères.

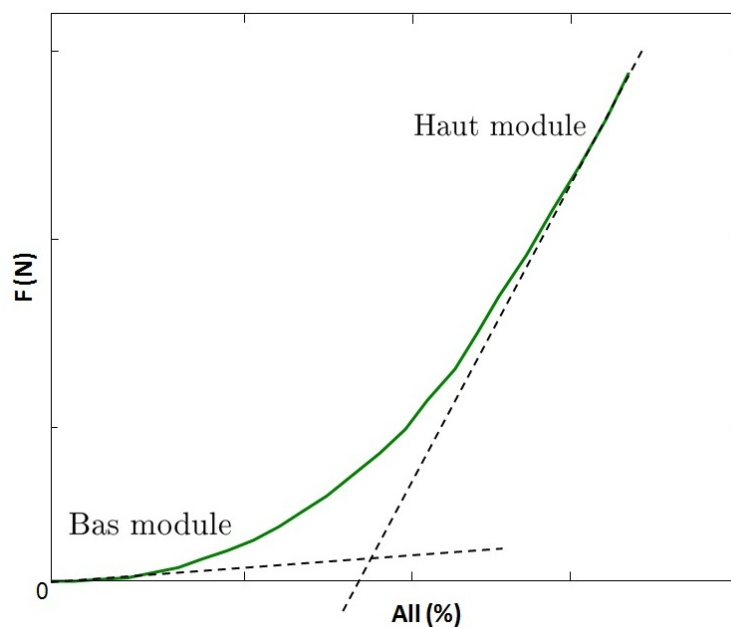


FIGURE 1.6 – Exemple de courbe expérimentale force-allongement d'un renfort textile.

1.2.2 Endommagement des renforts textiles

Face à un cahier de charges exigeant, le pneumatique doit répondre à plusieurs performances : agrément de conduite (bruit, confort), adhérence au sol, usure et l'endurance. Les critères associés à

l'endurance, résultant d'un usage normal ou extrême du pneu, sont perçus comme des performances implicites pour les usagers. Du point de vue de l'ingénieur, ils présentent un défi d'étude qui requiert une compréhension approfondie des mécanismes de dommages, et la mise au point des tests (expérimentaux et numériques) afin de déterminer des critères prédictifs et des solutions pertinentes aux problèmes. Dans ce contexte, depuis la fabrication du pneu jusqu'aux conditions de roulage, les câbles textiles formant une armature pour le pneu subissent des chargements très différents. Les problèmes d'endurance des textiles en pneu se produisent notamment dans un lieu de sollicitation cyclique en extension du renfort, et la compréhension de ces mécanismes est primordiale pour avoir une meilleure performance des pneus. L'étude réalisée dans cette thèse s'intègre dans ce cadre. La compréhension du fonctionnement des câbles textiles, tant pour l'endurance qui constitue l'intérêt principal de cette étude que pour le comportement mécanique, passe par une description de la mécanique de ses structures.

Les processus d'endommagement des fibres ont été largement étudiés dans la littérature. A partir d'observations par microscopie de faciès de rupture des fibres, les chercheurs ont pu analyser les mécanismes impliqués pour divers schémas de sollicitations. Le lecteur intéressé par ce point pourra consulter "l'Atlas de la rupture et d'endommagement des fibres textiles" [Hearle 1998]. Ces modes de rupture varient selon les matériaux : ils peuvent être ductile, fragile ou granulaire. De multiples travaux (voir par exemple [Marcellan 2003] ou [Lechat 2007]) ont porté sur les liens entre le mode de rupture observé et la microstructure des polymères constituant les fils, ce qui permet de comprendre leur comportement mécanique. Les sollicitations cycliques en tension-compression que subissent les renforts dans le pneu peuvent provoquer un endommagement par fatigue de l'aramide, ce qui constitue la cause principale des problèmes d'endurance.

Comme mentionné précédemment, l'aramide est caractérisé par un mode de rupture fragile dénommé "axial splits" ([Hearle 1998]), typique pour les fibres polymères à un taux de cristallinité élevé et fortement orientées. La séquence de l'endommagement par fatigue est illustrée sur la figure 1.7 : Le dommage s'initie à la surface de la fibre, puis la fissure se propage selon une direction quasi-axiale lorsque le chargement augmente jusqu'à atteindre la rupture, caractérisée par la présence d'une longue queue. Un exemple de faciès de rupture en traction de l'aramide est donné par la figure 1.8 .

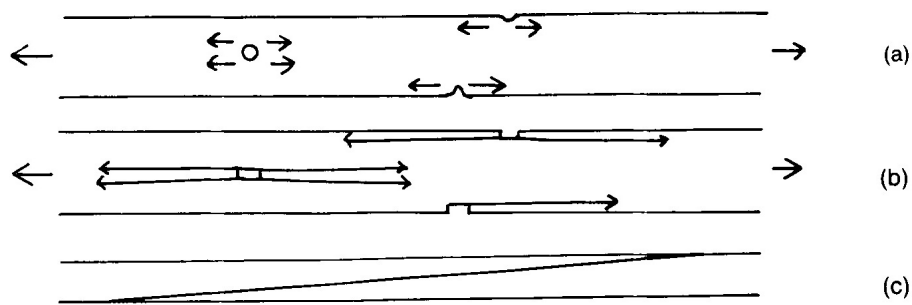


FIGURE 1.7 – Mécanisme d'endommagement par fatigue d'un filament (figure issue de [Hearle 1998]).

A l'intérieur d'un câble, les mécanismes d'endommagement d'un filament sont très complexes et peuvent provoquer la rupture sous une multitude de mode selon le type de sollicitation appliquée. En effet, en plus des modes mentionnés ci-dessus, le caractère cyclique de la sollicitation engendre aussi des phénomènes d'endommagement par abrasion, du au frottement inter-fibrillaire qui entraîne un enlèvement de matière à la surface des fils. La complexité de ces mécanismes est une conséquence de la complexité de la mécanique locale au niveau des fibres, puisque le dommage s'initie aux points de localisations de contraintes locales. Finalement, ceci montre que les pressions de contact et les déplacements relatifs entre fibres voisines influent fortement sur la performance de l'ensemble.

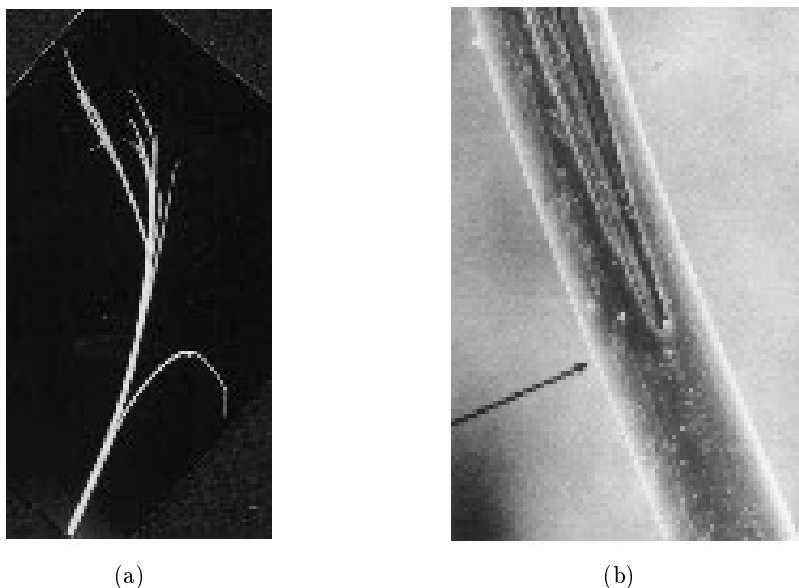


FIGURE 1.8 – Mode d'endommagement en traction cyclique du Kevlar (aramid) : (a) Faciès de rupture (b) Début du "axial splitting" (figures issue de [Hearle 2001])

L'explication et la prédiction de ces phénomènes est très délicate et nécessite une compréhension du comportement mécanique local de la structure. Cependant, la caractérisation expérimentale des chargements subis localement à l'échelle des filaments élémentaires est loin d'être triviale. Les dimensions et le nombre important des fibres rendent peu aisées les mesures expérimentales à l'échelle locale dans les câblés textiles (mode de pilotage, moyens de mesure in-situ...). Les seules expériences facilement réalisables sont des tests de caractérisation mécanique au niveau des câblés textiles, ce qui ne permettent d'avoir accès qu'à des quantités résultantes globales. La prédiction de la durée de vie des câbles est par conséquent principalement basée sur une analyse statistique d'un grand nombre de tests empiriques.

Pour palier à ces difficultés de compréhension par l'expérience, de nombreux chercheurs ont tenté de répondre à ce besoin par la voie de la modélisation depuis quelques décennies. Cependant, nous allons voir dans la partie qui suit qu'un certain nombre de difficultés apparaît lorsqu'on cherche à modéliser le comportement de câbles textiles à grand nombre de filaments.

1.2.3 Difficultés de la modélisation et travaux existants

Dans la littérature, plusieurs modèles ont été proposés pour représenter le comportement mécanique des câbles textiles. Un certain nombre de modèles sont purement analytiques, en s'inspirant principalement de travaux réalisés sur des câbles métalliques, alors que d'autres sont numériques, en se basant majoritairement sur la méthode des éléments finis. Bien que la voie de la modélisation semble prometteuse, les modèles disponibles dans la littérature sont souvent fondés sur un certain nombre d'hypothèses assez fortes, car la complexité des phénomènes présents rend le comportement des câbles particulièrement difficile à appréhender.

La difficulté majeure qui se présente lorsqu'on cherche à développer un modèle pour les câbles qui nous intéressent est le grand nombre de fibres à prendre en compte. Pour avoir un ordre de grandeur, le câblé étudié dans ce travail de thèse est composé d'environ 3000 filaments. Ce nombre très élevé de fibres ne permet pas de toutes les considérer, et il est alors nécessaire de prendre en compte les spécificités géométriques de l'assemblage pour pouvoir réaliser des simplifications. Nous rappelons alors que la fabrication des câbles textiles est réalisée par différentes opérations successives, qui engendrent

une structure à plusieurs niveaux hiérarchiques : Dans un premier temps, les filaments élémentaires sont assemblés par torsadage pour former ce que nous appelons des brins, qui sont dans un second temps torsadés à leur tour pour constituer le câble. La structure résultante présente donc une géométrie multi-échelles, associant d'une part des aspects continus dans la direction longitudinale des fibres et d'autre part des aspects discrets dans la direction transverse.

La deuxième problématique est liée à la description de l'arrangement initial des fibres, qui résulte des transformations subies au cours de la fabrication et ne peut donc pas être déterminée théoriquement a priori. De plus, sous une sollicitation externe, la topologie des fibres constituant le câble est aléatoire avec des trajectoires qui ne peuvent pas être connues a priori et des phénomènes de migration des filaments.

Enfin, du fait de l'aspect multi-échelles de la structure, une autre difficulté se rattache à la complexité du comportement mécanique, qui est étroitement lié aux phénomènes physiques se produisant à l'échelle locale des filaments élémentaires. En effet, le comportement global des câbles textiles dépend dans une large mesure d'une part de l'arrangement des fibres et des interactions de contact-frottant développées entre elles, et d'autre part du comportement éventuellement non-linéaire et anisotrope des fibres élémentaires.

Compte tenu de cette structure complexe et multi-échelles, différents types de modèles ont été développés, chacun se plaçant à une échelle particulière. Dans la littérature, la première catégorie de modèles existants se base sur l'échelle **macroscopique**, c'est à dire l'échelle de la structure. Ces modèles sont obtenus principalement par des approches analytiques en se basant sur les travaux réalisés antérieurement sur les câbles métalliques (voir par exemple [Utting 1984] et [Cardou 1997]), ce qui permet d'estimer selon un moyen simple et rapide le comportement global du câble. Cependant, ces modèles se basent sur plusieurs hypothèses simplificatrices :

- Les câbles ont une structure simple et les constituants sont disposés selon un motif particulier ;
- Le nombre des constituants du câble est réduit ;
- La trajectoire de tous les constituants est idéalisée et supposée parfaitement hélicoïdale.

Pour traiter les câbles composés d'un nombre important de fibres, des travaux ont été réalisés pour construire des modèles dits **mésoscopiques**, introduits à l'échelle des sous-structures du câble. L'idée de ces approches est de proposer des modèles dont le comportement soit équivalent à celui des constituants à une échelle inférieure. Ces modèles servent alors de données d'entrée pour alimenter un modèle à l'échelle supérieure. Par ailleurs, les modèles mésoscopiques de câble proposés dans la littérature ne sont pas suffisamment précis : ceci est du à la complexité du comportement d'un paquet de fibres textiles, dont les mécanismes de déformation sont pilotés par les interactions entre les fibres à l'échelle inférieure. Les approches disponibles dans la littérature se basent généralement sur des simplifications de la géométrie des composants et des hypothèses plus ou moins fortes sur le comportement mécanique. Par exemple dans les travaux de Ghoreishi (voir [Ghoreishi 2005]), les sous-structures des câbles synthétiques dites torons sont assimilées à un milieu continu. En revanche, les déformations sont supposées petites et les effets du contact et du frottement ne sont pas pris en compte. Dans ce même contexte, plusieurs travaux récents portant sur la simulation de la mise en forme de tissés semblent très prometteurs, tels que l'approche proposée dans [Charmetant 2011a] où l'auteur cherche à identifier une loi de comportement hyperélastique équivalente pour une mèche de fibres textiles.

Tous ces modèles ne permettent pas d'analyser les phénomènes locaux à l'échelle microscopique, c'est à dire à l'échelle des fibres élémentaires. Pourtant, comme nous l'avons présenté précédemment, il est cependant nécessaire de caractériser le comportement mécanique local pour étudier l'endommagement des câbles. Ainsi, grâce au développement des moyens informatiques, des approches numériques

très intéressantes ont été développées pendant ces dernières années, basées sur une modélisation à l'échelle **microscopique** de l'assemblage (voir par exemple [Durville 1998] et [Wang 2000]). Cependant, la prise en compte de la structure avec tous ses détails pose des problèmes de capacités et de temps de calculs : un nombre élevé de fibres implique un grand nombre de degrés de liberté et conduit à une forte densité de contact entre les fibres, ce qui engendre un modèle très lourd. Par conséquent, en utilisant une telle approche, les simulations ne peuvent être réalisées que sur des assemblages comprenant un nombre réduit de filaments. L'objectif de ce travail de thèse est alors de développer une méthode multi-échelles permettant de contourner cette limite et de rendre possible la simulation numérique de câbles comptant plusieurs milliers de fibres.

1.3 Objectifs et plan de la thèse

Cette thèse s'intéresse à la modélisation du comportement mécanique d'un câble textile utilisé comme renfort dans les pneumatiques et composé d'un grand nombre de fibres. Nous souhaitons à travers ce travail mettre en œuvre une approche numérique dont l'objectif est double (cf figure 1.9) :

1. A l'échelle globale du câble, il s'agit de déterminer le comportement global du câble en terme de courbe force-allongement, afin d'alimenter les modèles de simulation numérique à l'échelle du pneumatique ;
2. A l'échelle microscopique, on cherche à approcher l'état de contraintes mécaniques local au niveau des fibres individuelles à l'issue d'une sollicitation globale du câble. Cet objectif, particulièrement attendu dans ce travail, permettra à terme d'étudier les phénomènes physiques qui sont à l'origine de l'endurance des renforts textiles et de mettre en place des critères d'endommagement.

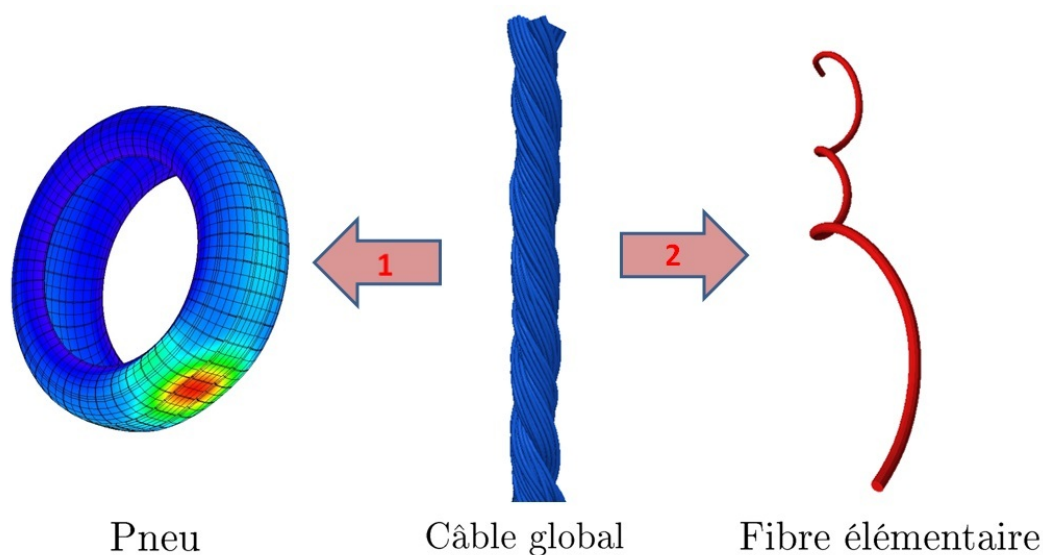


FIGURE 1.9 – Le double objectif de l'étude : 1 Modèle macroscopique pour alimenter les simulations sur les pneus (figure prise de la société Michelin) 2 : Accès aux contraintes locales

Par conséquent, l'objectif est de développer un modèle multi-échelles pour étudier le comportement des câbles textiles à grands nombre de fibres. L'originalité de cette thèse réside dans la construction d'une approche qui parvient à associer ces deux objectifs aux deux échelles, tout en prenant en compte les différentes sources de difficultés de la structure. La méthode proposée doit aussi être exploitable dans un cadre industriel et donc respecter des coûts de calcul raisonnables. Enfin, nous nous attacherons à mettre en place des critères de validation quantifiables et exploitables d'une

manière expérimentale.

En plus de ce premier chapitre introductif servant à positionner le travail réalisé dans le cadre de cette thèse, ce manuscrit s'articule autour de 5 chapitres :

- L'étude présentée dans le **chapitre 2** (pp. 11 à 36) et le **chapitre 3** (pp. 37 à 56) porte sur la modélisation et la simulation d'un assemblage de fibres. Nous décrirons dans le chapitre 2 les principaux modèles de poutre existants dans la littérature pour la modélisation des fibres élémentaires dans un cadre des grands déplacements. Nous y aborderons également la résolution numérique d'un tel problème par la méthode des éléments finis. Dans le chapitre 3, nous nous intéresserons aux aspects numériques et mécaniques liés à la gestion du contact frottant pour ce type de structure. Ces deux chapitres nous permettront de présenter les choix adoptés pour la modélisation des structures câblées dans le logiciel de calcul *Multifil*, qui sera utilisé dans le cadre de cette thèse. Bien que ce chapitre ne constitue pas un apport direct de cette thèse, ceci nous permettra d'introduire les écritures formelles utilisées, qui seront conservées tout au long de ce rapport, notamment lors de la formulation des problèmes aux différentes échelles de notre étude.
- Le **chapitre 4** (pp. 57 à 87) est consacré à un état de l'art des approches analytiques et numériques pour l'étude du comportement mécanique des câbles textiles. Face à la complexité de leurs structures multi-échelles, chacun de ces modèles se place à une échelle précise du câble. Nous montrerons que les modèles existants ne sont pas adaptés aux objectifs de notre étude, ce qui justifie la construction d'une approche spécifique. En se basant sur des observations expérimentales, nous proposerons alors une stratégie multi-échelles originale permettant d'aborder la simulation de câbles textiles à grand nombre de filaments et qui répond à nos attentes.
- Dans le **chapitre 5** (pp. 89 à 118), nous présenterons une application de l'approche multi-échelles proposée sur un problème modèle simplifié. L'enjeu sera de formuler un problème bidimensionnel simplifié permettant de retrouver les problématiques qui nous intéressent sur la structure câblée tridimensionnelle, ce qui nous permettra ensuite de cerner les difficultés numériques de l'approche retenue et de la valider dans un environnement simplifié.
- Enfin, le **chapitre 6** (pp. 119 à 148) portera sur la mise en œuvre numérique de l'approche multi-échelles dans un cadre tridimensionnel. Par rapport au cadre bidimensionnel simplifié, le passage en 3D engendrera des difficultés supplémentaires, et nous détaillerons alors dans ce chapitre les développements correspondants. Nous présenterons dans ce chapitre des résultats numériques relatifs à l'application de la méthode multi-échelles développée sur un renfort textile réel et montrerons son apport d'un point de vue industriel, ce qui prouvera complètement la pertinence de notre approche.

Modélisation d'une fibre en grands déplacements

Sommaire

Introduction	11
2.1 Notations et description du problème mécanique	13
2.2 Modèles cinématiques de poutre : État de l'art et formulation variationnelle	14
2.2.1 Modèle de Timoshenko	15
2.2.2 Modèle à cinématique enrichie	20
2.2.3 Quelques modèles d'ordre plus élevé	24
2.2.4 Conclusions sur les modèles cinématiques de poutre	25
2.3 Aspect comportement	26
2.3.1 Modèle rhéologique unidimensionnel	26
2.3.2 Modèle rhéologique tridimensionnel	27
2.4 Aspects numériques	30
2.4.1 Résolution numérique par la méthode des Éléments Finis	30
2.4.2 Phénomène de verrouillage numérique	34

Introduction

Les structures fibreuses telles que les câbles sont constituées par un ensemble de composants élémentaires appelées "fibres". Chacune de ces fibres est un solide tridimensionnel élancé, tel que ses dimensions transverses soient petites par rapport à sa longueur. Dans la littérature, les terminologies liées à ce type d'objet sont nombreuses : on parle de tige, fil, corde, filament, fibre, etc... Ce type de structure est omniprésent partout autour de nous et on interagit avec elles quotidiennement (cordes, ponts, fils électriques, filaments ADN, nanotubes de carbone, etc...). L'abondance de ces structures s'explique par leur excellent compromis rigidité / poids et leur résistance même pour les sollicitations les plus sévères.

L'étude de ces structures élancées est un domaine de la mécanique très ancien et repose sur un modèle de base appelé "modèle de poutre". Depuis Galilée en 1638, à qui on attribue la paternité de la première étude scientifique des poutres, les travaux se sont multipliés. En parallèle avec la Mécanique des milieux continus tridimensionnelle (problème de Saint-Venant), des modèles unidimensionnels basés sur des hypothèses simplificatrices se sont développés. Ils permettent d'avoir une appréhension simplifiée mais souvent suffisante du comportement de ces structures par rapport à une étude tridimensionnelle plus coûteuse.

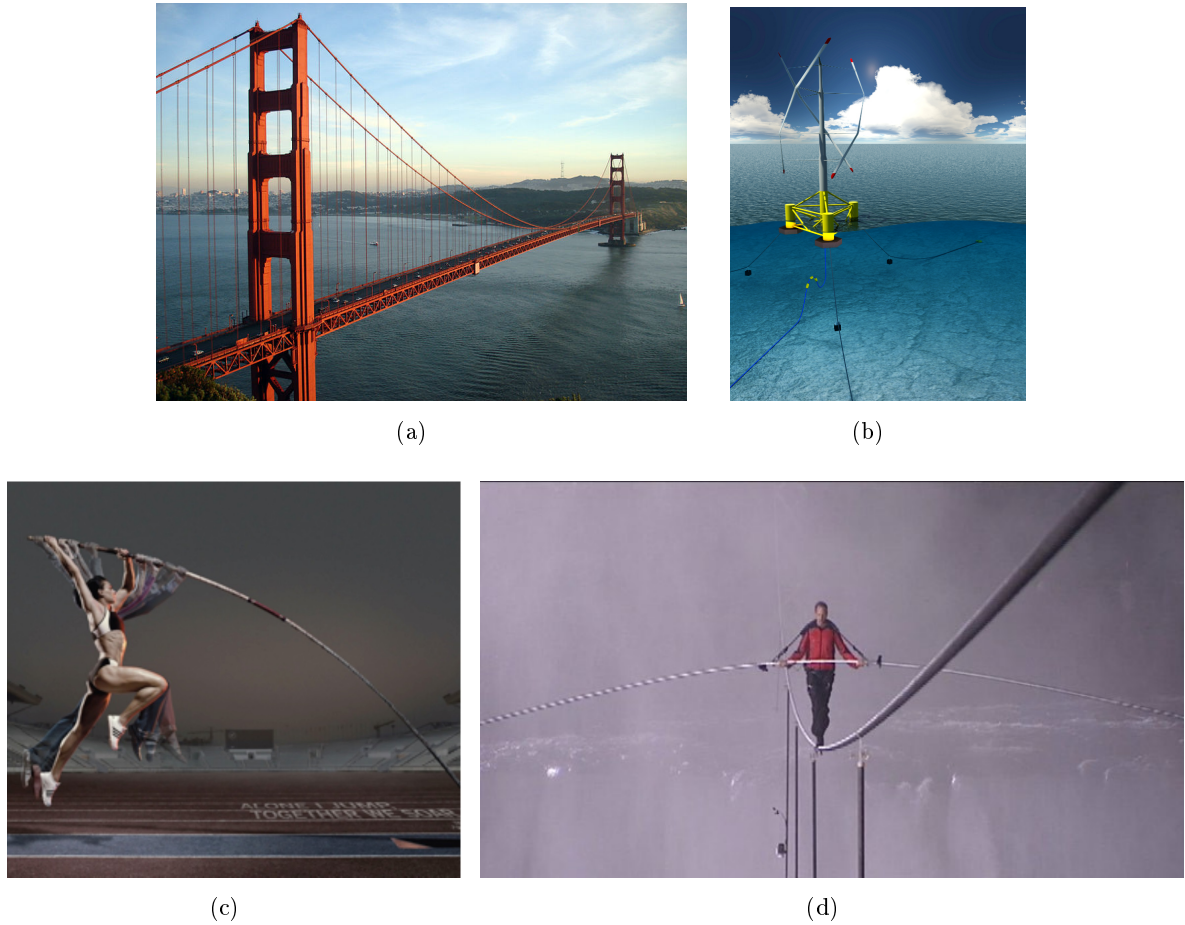


FIGURE 2.1 – Exemples de structures élancées : (a) Pont suspendu du Golden Gate à San Francisco (www.wikipedia.fr) ; (b) Câble de maintien d'éolienne flottante (www.france-energies-marines.org) ; (c) Saut à la perche ([Audoly 2013]) ; (d) Fil de funambule au dessus des chutes du Niagara (www.abcnews.com).

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'étude du composant élémentaire d'une structure fibreuse, que nous appellerons "fibre". Pour cela, les notions relatives à la mécanique des milieux continus sont supposées connues. Pour plus d'informations, le lecteur pourra consulter par exemple le livre de P. Le Tallec [Tallec 2009]. Le chapitre est composé de quatre sections :

- Dans la section 2.1, nous commencerons par introduire les notations utilisées et décrire le problème mécanique qu'on cherche à résoudre.
- Ensuite, nous présenterons dans la section 2.2 un aperçu général sur l'état de l'art des modèles cinématiques et leurs hypothèses sous-jacentes, utilisés pour décrire le mouvement et la déformation des poutres dans un cadre de grands déplacements et grandes rotations. En utilisant une approche variationnelle, nous obtiendrons pour chaque modèle le système d'équations qui régit l'équilibre statique d'une poutre sous sollicitations extérieures.
- Une fois les mesures objectives des déformations identifiées, il est alors nécessaire d'introduire une loi de comportement afin d'établir leur lien avec les efforts internes. Nous présenterons alors succinctement dans la section 2.3 des notions de bases sur ce type de comportement ainsi que des modèles hyperélastiques classiques pour les poutres.
- Il s'agit enfin de résoudre numériquement le problème mécanique non linéaire par la méthode des éléments finis classique. Les aspects liés à l'analyse numérique du problème d'équilibre seront ainsi abordés dans la section 2.4.

2.1 Notations et description du problème mécanique

On se place dans l'espace vectoriel Euclidien de dimension trois noté $\mathbb{R}^3$ dans lequel on définit un repère orthonormé direct fixe $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Dans toute la suite, on note respectivement $\underline{u} \cdot \underline{v}$ et $\underline{u} \wedge \underline{v}$ le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs $\underline{u}$ et $\underline{v}$.

Le problème mécanique étudié est celui de l'équilibre d'une poutre, à partir d'un état de repos non chargé, et qui est soumise à des sollicitations extérieures pouvant entraîner des grands déplacements.

Description de la géométrie

On définit une poutre comme un corps tridimensionnel dont les deux dimensions transverses (celles de sa section) sont petites par rapport à la longueur. On note L la longueur initiale de la poutre et $A(s)$ la section matérielle droite de la poutre identifiée par le point d'abscisse curviligne $s \in [0, L]$ appartenant à la ligne moyenne. La géométrie de référence de la poutre est alors définie par le domaine $\Omega_{\text{réf}}$ de $\mathbb{R}^3$ suivant (voir figure 2.2) :

$$\Omega_{\text{réf}} = \{(\xi_1, \xi_2, s) \in \mathbb{R}^3, \text{ tel que } 0 \leq s \leq L \text{ et } (\xi_1, \xi_2) \in A(s)\}$$

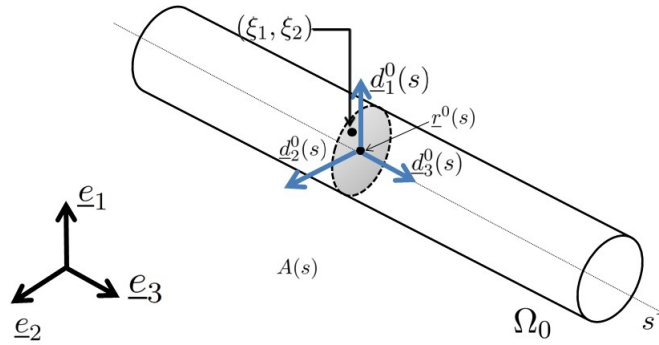


FIGURE 2.2 – Géométrie de la poutre dans la configuration initiale.

La poutre étant considérée comme un corps élancé, sa géométrie peut être décrite par des champs paramétrés par une unique variable de l'espace, l'abscisse curviligne s . Cette modélisation curviligne permet de simplifier la modélisation, tout en représentant les directions transverses du solide tridimensionnel original. La géométrie initiale de la poutre peut ainsi être décrite par les vecteurs positions des points matériels de sa ligne moyenne $\underline{r}^0(s)$, qui correspondent aux centres des sections droites auxquelles on attache deux vecteurs orthonormés $(\underline{d}_1^0(s), \underline{d}_2^0(s))$ générateurs de la section droite en s . La poutre occupe alors initialement le domaine suivant :

$$\Omega_0 = \left\{ P \in \mathbb{R}^3, \text{ tel que } \underline{x}^0(\xi_1, \xi_2, s) = \underline{r}^0(s) + \sum_{i=1}^2 \xi_i \underline{d}_i^0(s) \right\}$$

Dans cette configuration, on définit le vecteur suivant :

$$\underline{d}_3^0(s) = \underline{d}_1^0(s) \wedge \underline{d}_2^0(s)$$

de telle sorte que le trièdre $\underline{d}_1^0(s), \underline{d}_2^0(s), \underline{d}_3^0(s)$ est orthonormé. Nous faisons l'hypothèse que la construction de cette configuration initiale est réalisée de telle sorte que le trièdre $\underline{d}_1^0(s), \underline{d}_2^0(s), \underline{d}_3^0(s)$ est orthonormé. Nous faisons l'hypothèse que la construction de cette configuration initiale est réalisée de telle sorte à ce que les sections soient orthogonales à la ligne moyenne. Le vecteur $\underline{d}_3^0(s)$ est alors parallèle au vecteur $\underline{r}'^0(s)$ pour toute abscisse curviligne $s \in [0; L]$, où la notation $(.)'$ représente la

dérivée par rapport à l'abscisse curviligne : $(\cdot)' = \frac{\partial(\cdot)}{\partial s}$.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons supposer que la poutre est initialement droite pour simplifier les expressions, et que cette configuration initiale de la poutre est une configuration naturelle, c'est à dire sans contraintes. Mais l'approche présentée ici est généralisable pour des lignes curvilignes arbitraires, comme cela est décrit dans [Simo 1985a]. Par ailleurs, toujours dans un objectif de simplification des notations et sans perte de généralité, nous supposons que le repère local formé par les vecteurs directeurs des sections $(\underline{d}_1^0, \underline{d}_2^0, \underline{d}_3^0)$ coïncide avec le repère orthonormé fixe $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.

Chargements appliqués

On suppose que les sollicitations exercées sur la poutre à l'instant t sont de trois types :

- un effort volumique $\underline{f}$ exercé à l'intérieur du volume Ω_{ref} ;
- une densité surfacique d'efforts $\underline{g}$ appliquée sur une partie de la frontière notée Γ_g ;
- des déplacements imposés $\bar{U}$ sur l'autre partie de la frontière, notée $\Gamma_U = \partial\Omega_{ref} \setminus \Gamma_g$.

2.2 Modèles cinématiques de poutre : État de l'art et formulation variationnelle

Après déformation, la poutre occupe un volume Ω_t dans la configuration courante. On suppose que les déformations de section d'ordre supérieur sont négligeables comme c'est le cas classiquement, la position courante d'un point matériel de la poutre d'abscisse curviligne s dans sa configuration de référence peut s'écrire sous la forme d'un développement limité d'ordre 1 :

$$\underline{x}(\xi_1, \xi_2, s) = \underline{r}(s) + \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha \underline{d}_\alpha(s) \quad (2.1)$$

où $\underline{r}(s)$ est le vecteur position du point matériel de la ligne moyenne dans la configuration courante, et où les vecteurs directeurs $(\underline{d}_1, \underline{d}_2)$ sont l'image après déformation des vecteurs $(\underline{d}_1^0, \underline{d}_2^0)$ définis dans la configuration de référence. Par ailleurs, de manière analogue à ce qui a été fait sur la configuration initiale, on définit le vecteur $\underline{d}_3(s)$ comme étant le vecteur normal à la section correspondant à l'abscisse curviligne s .

Dans la littérature, de nombreux auteurs ont choisi cette description pour développer différents modèles de poutres dont la pertinence dépend du domaine d'application. Nous allons présenter dans cette section un état de l'art des travaux sur les modélisations existantes de poutres en grands déplacements. Les différents modèles proposés partagent la même description géométrique de la poutre, mais nous allons voir que certains adoptent des contraintes cinématiques supplémentaires lors de la transformation, ce qui impacte les modes de déformations autorisés.

Mais avant d'aller plus loin, nous devons définir les espaces dans lesquels évoluent les variables utilisées. Étant donné que les variables $\underline{r}$ et $\underline{d}_\alpha$ seront contrôlées énergétiquement par l'intermédiaire de leur dérivée curviligne, cela nous pousse à choisir de manière classique leurs composantes dans l'espace de Sobolev $H^1([0; L])$, c'est-à-dire de carré intégrable et avec une dérivée également de carré intégrable. On définit alors les espaces de transformations et de perturbations admissibles suivants :

$$K = \left\{ (\underline{r}, \underline{d}_\alpha) \in (H^1([0; L]))^3 \times H^1([0; L])^{3 \times 2} \right\} \cap \mathcal{CL} ; \quad (2.2)$$

$$K_0 = \left\{ (\underline{r}, \underline{d}_\alpha) \in (H^1([0; L]))^3 \times H^1([0; L])^{3 \times 2} \right\} \cap \mathcal{CL}_0 ; \quad (2.3)$$

où $\mathcal{C}$ représente l'ensemble des champs positions vérifiant les conditions aux limites cinématiques imposées aux extrémités de la fibre, alors que $\mathcal{C}_0$ représente les conditions aux limites homogènes associées.

2.2.1 Modèle de Timoshenko

Hypothèses cinématiques

Ce premier modèle a été introduit par [Timoshenko 1921], et fait l'hypothèse que la poutre subit de grandes transformations mais que ses sections restent indéformables. Dans un premier temps, l'approche la plus classique a consisté à caractériser la cinématique par deux champs de vecteurs : un champs de déplacements des points géométriques de la ligne moyenne de la poutre et un champ de rotations décrivant l'inclinaison de chaque section (voir par exemple [Salencon 1998]). Cependant, lorsque les rotations deviennent relativement grandes, des algorithmes de résolution numérique complexes devaient être utilisés, comme expliqué dans [Argyris 1982].

Ce modèle a alors été adapté notamment par [Antman 1974] pour utiliser une description par vecteurs directeurs. Depuis, ce modèle à directeurs a été repris par un grand nombre d'auteurs (voir par exemple [Tallec 1991], [Campos 1996], ...) et est largement connu dans la communauté de la mécanique des structures.

Dans ce modèle, on fait donc l'hypothèse que les trois vecteurs directeurs $(\underline{d}_1(s), \underline{d}_2(s), \underline{d}_3(s))$ restent orthonormés après déformation mais que le vecteur $\underline{d}_3$ peut ne pas rester tangent à la ligne moyenne dans la configuration courante (voir figure 2.3). Ceci se traduit par les deux conditions suivantes :

$$\forall s \in [0, L], \quad \underline{d}_i(s) \cdot \underline{d}_j(s) = \delta_{ij} \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq 3, \quad (2.4)$$

$$\underline{d}_3(s) \neq \underline{r}'(s) \quad (2.5)$$

où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker.

Ces deux hypothèses cinématiques traduisent le fait que les sections sont indéformables, mais par contre ne restent pas perpendiculaires à la ligne moyenne après déformation, ce qui autorise un cisaillement transverse de la poutre. La cinématique d'un point matériel de la section de la poutre est alors régie par 6 degrés de libertés indépendants :

- 3 degrés de libertés de translation, exprimant la position de la ligne moyenne ;
- 3 degrés de liberté de rotation, décrivant l'orientation du triplet $(\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3)$.

Mécaniquement, ce modèle permet donc des déformations de flexion, de torsion, d'extension axiale et de cisaillement transverse de la poutre.

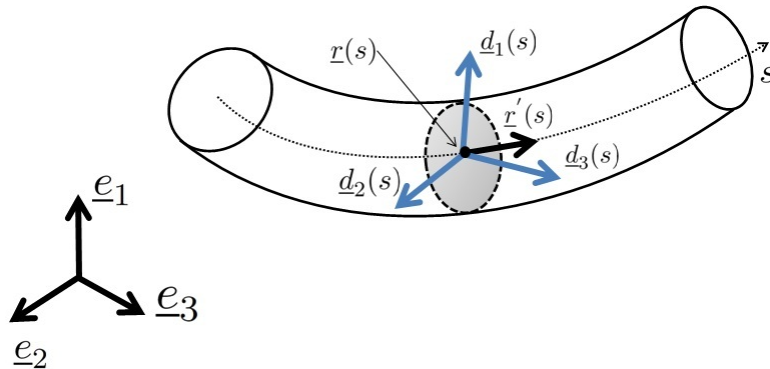


FIGURE 2.3 – Modèle de Timoshenko : Configuration déformée de la poutre

Afin de tenir compte de la condition d'orthonormalité des vecteurs directeurs de la section, on définit l'espace des transformations admissibles suivant :

$$K^{ort} = \left\{ (\underline{r}, \underline{d}_\alpha) \in K \text{ tels que } \forall s \in [0; L], \forall 1 \leq \alpha \leq \beta \leq 2, \right. \\ \left. \underline{d}_\alpha(s) \cdot \underline{d}_\beta(s) = \delta_{\alpha\beta} \right\} \quad (2.6)$$

L'espace des perturbations admissibles correspond quant à lui au sous-espace tangent $dK^{ort}(\underline{r}, \underline{d}_\alpha)$, défini par :

$$dK^{ort}(\underline{r}, \underline{d}_\alpha) = \left\{ (\delta \underline{r}, \delta \underline{d}_\alpha) \in K_0 \text{ tels que } \forall s \in [0; L], \forall 1 \leq \alpha \leq \beta \leq 2, \right. \\ \left. \delta \underline{d}_\alpha(s) \cdot \underline{d}_\beta(s) + \underline{d}_\alpha(s) \cdot \delta \underline{d}_\beta(s) = 0 \right\} \quad (2.7)$$

Mesure des déformations

Comme cela est développé dans [Antman 1981], le triplet $(\underline{d}_1(s), \underline{d}_2(s), \underline{d}_3(s))$ étant orthonormé pour tout $s \in [0, L]$, alors il existe une transformation orthogonale qui l'associe à la base fixe $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$:

$$\underline{d}_i(s) = \underline{R}(s) \underline{e}_i, i = 1, 2, 3 \quad (2.8)$$

où le tenseur de rotation direct $\underline{R}(s) \in SO(3)_+$ est défini par $\underline{R}(s) = \underline{d}_i(s) \otimes \underline{e}_i$.

La dérivée curviligne de cette relation donne alors :

$$\begin{aligned} \underline{d}'_i(s) &= \underline{R}(s)' \underline{e}_i \\ &= \underline{R}(s)' \underline{R}(s)^t \underline{d}_i(s) \\ &= \underline{\Omega}(s) \cdot \underline{d}_i(s) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Étant donné que le tenseur $\underline{R}(s)$ est orthogonal, alors $\underline{\Omega}(s)$ est antisymétrique, et on peut alors montrer qu'il existe un vecteur $\underline{u}(s)$ qui vérifie la relation suivante :

$$\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^3, \quad \underline{u}(s) \wedge \underline{v} = \underline{\Omega}(s) \cdot \underline{v} \quad (2.10)$$

Ce vecteur $\underline{u}(s)$ est appelé "vecteur de Darboux" et est analogue à un vecteur de vitesse angulaire. D'après l'équation (2.9), la dérivée curviligne des vecteurs directeurs peut alors s'écrire sous la forme :

$$\underline{d}'_i(s) = \underline{u}(s) \wedge \underline{d}_i \quad (2.11)$$

Pour étudier les déformations intrinsèques de la poutre, on introduit les triplets :

$$\underline{u} \equiv \{u_1, u_2, u_3\} \text{ et } \underline{v} \equiv \{v_1, v_2, v_3\} \quad (2.12)$$

où les composantes u_i et v_i correspondent respectivement à la décomposition dans la base $\{\underline{d}_i\}$ des vecteurs $\underline{u}$ et $\underline{r}'$, et sont données d'après l'équation (2.11) et la définition du vecteur $\underline{v}$ par :

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \underline{d}'_k(s) \cdot \underline{d}_l(s) \\ v_i &= \underline{r}' \cdot \underline{d}_i(s) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ici ε_{ikl} correspond aux composantes du tenseur de permutation de Levi-Vivita et est défini dans la base orthonormée $\{\underline{e}_i\}$ par $\varepsilon_{ikl} = (\underline{e}_i \wedge \underline{e}_k) \cdot \underline{e}_l$.

On peut montrer que les triplets $\underline{v}$ et $\underline{u}$ représentent une mesure objective des modes de déformations fondamentaux subis par la poutre, puisqu'elles sont invariantes par un mouvement de corps rigide (cf [Tallec 1991]) et qu'elles caractérisent le mouvement à un mouvement de corps rigide près. De plus, comme analysé dans le livre d'Antman [Antman 1995], les triplets $\underline{u}$ et $\underline{v}$ peuvent être interprétés mécaniquement :

- Pour une sollicitation d'extension simple dans la direction $\underline{e}_3$ parallèle à l'axe de la poutre et d'après les définitions des triplets $\{v_i\}$ et $\{u_i\}$ données par l'équation (2.13), seule la valeur de déformation v_3 est non nulle. La quantité $v_3 = \underline{r}' \cdot \underline{d}_3(s)$ mesure le changement de volume au cours de la déformation, connue sous le terme de *dilatation*.
- Un mouvement de cisaillement de la poutre dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ génère de la cission. Les seules composantes non nulles sont $v_1 = \underline{r}' \cdot \underline{d}_1(s)$ et $v_2 = \underline{r}' \cdot \underline{d}_2(s)$, qui mesurent respectivement *le cisaillement* dans les directions $\underline{d}_1(s)$ et $\underline{d}_2(s)$.
- On considère maintenant que dans la configuration déformée, l'une des extrémités de la poutre tourne par rapport à la configuration de référence d'un angle θ . Ce mouvement de torsion est définie par :

$$\underline{r}(s) = s\underline{e}_3, \quad \underline{d}_1(s) = \cos(\theta s)\underline{e}_1 + \sin(\theta s)\underline{e}_2, \quad \underline{d}_2(s) = \underline{e}_3 \wedge \underline{d}_1(s), \quad \underline{d}_3(s) = \underline{e}_3$$

A partir de l'équation (2.13), on obtient $v_3 = 1$, $u_3 = \underline{d}_2' \cdot \underline{d}_1(s) = \theta$ et les autres mesures de déformations sont nulles. La quantité u_3 mesure alors *la torsion*.

- Les composantes $u_1 = \underline{d}_3' \cdot \underline{d}_2(s)$ et $u_2 = \underline{d}_3' \cdot \underline{d}_1(s)$, homogènes à l'inverse d'une longueur, correspondent aux deux modes de flexion de la poutre. Elles s'interprètent comme la mesure de *la flexion* respectivement autour de $\underline{d}_1$ et $\underline{d}_2$.

La cinématique et les mesures de déformations ainsi définies, nous allons établir dans ce qui suit les équations d'équilibres satisfaites par la poutre en commençant par construire la formulation faible du problème.

Formulation faible

Afin d'établir la formulation faible du problème d'équilibre de la poutre, on se base sur le principe des puissances virtuelles, selon lequel la somme des puissances virtuelles des efforts intérieurs et extérieurs est nulle pour toute perturbation admissible. Nous allons donc commencer par définir l'espace des déplacements virtuels admissibles, puis nous détaillerons l'expression des puissances virtuelles.

Définition des mouvements virtuels

D'après l'expression (2.1) de la transformation $\underline{x}$, tout champ de déplacement virtuel admissible s'écrit sous la forme :

$$\hat{\underline{x}}(s) = \hat{\underline{r}}(s) + \xi_1 \hat{\underline{d}}_1(s) + \xi_2 \hat{\underline{d}}_2(s) \quad (2.14)$$

où les vecteurs virtuels $(\hat{\underline{r}}(s), \hat{\underline{d}}_\alpha(s))$ doivent appartenir à l'espace tangent $dK^{ort}(\underline{r}, \underline{d}_\alpha)$ pour tenir compte de la condition (2.4) sur l'orthonormalité des vecteurs directeurs $\underline{d}_i$, c'est-à-dire respecter la contrainte $\hat{\underline{d}}_i(s) \cdot \underline{d}_j(s) + \underline{d}_i(s) \cdot \hat{\underline{d}}_j(s) = 0$.

Cette contrainte est équivalente à paramétrer les perturbations $\hat{\underline{d}}_i$ par un vecteur de rotation infinitésimal $\underline{\hat{\omega}}$ définie dans l'espace de Sobolev $W^{1,q}([0; L])^3$, avec $1 \leq q < 2$, tel que : (cf. [Bourgat 1988]) :

$$\forall s \in [0; L], \quad \hat{\underline{d}}_i(s) = \underline{\hat{\omega}}(s) \wedge \underline{d}_i(s) \quad (2.15)$$

On en déduit alors que l'espace des perturbations admissibles peut s'écrire de manière équivalente sous la forme :

$$\begin{aligned} dK^{ort}(\underline{r}, \underline{d}_\alpha) = & \left\{ (\delta \underline{r}, \delta \underline{d}_\alpha) \in K_0 \text{ tels que } \exists \underline{\omega} \in W^{1,q}([0; L])^3, \right. \\ & \left. \forall s \in [0; L], \quad \forall \alpha = 1, 2, \quad \delta \underline{d}_\alpha(s) = \underline{\omega}(s) \wedge \underline{d}_\alpha(s) \right\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Pour faciliter les notations utilisées dans la suite de cette partie, on introduit également un espace $\mathcal{U}$ défini par :

$$\mathcal{U} = \left\{ (\underline{\delta r}, \underline{\omega}) \in (H^1([0; L]))^3 \times W^{1,q}([0; L])^3 \right\} \cap \mathcal{CL}_0. \quad (2.17)$$

Étant donné que nous nous plaçons dans un cadre de grandes déformations, la configuration déformée n'est pas connue a priori. C'est pourquoi nous allons exprimer dans ce qui suit les puissances virtuelles des efforts intérieurs et extérieurs sur la configuration de référence.

Puissance virtuelle des efforts extérieurs

D'après la définition du chargement donnée dans la section 2.1, la puissance virtuelle des efforts extérieurs exprimée dans la configuration de référence Ω_{ref} est définie par :

$$\forall \underline{\hat{x}} \text{ admissible, } P_{\text{ext}}(\underline{\hat{x}}) = \int_{\Omega_{\text{ref}}} \underline{f} \cdot \underline{\hat{x}} d\Omega + \int_{\Gamma_g} \underline{g} \cdot \underline{\hat{x}} dA \quad (2.18)$$

En tenant compte de l'expression (2.14) des perturbations virtuelles admissibles, la puissance virtuelle des efforts extérieurs peut s'écrire sous la forme :

$$\forall (\underline{\hat{r}}, \underline{\hat{\omega}}) \in \mathcal{U}, \quad P_{\text{ext}}(\underline{\hat{x}}) = \int_0^L (\underline{N}_{\text{ext}} \cdot \underline{\hat{r}} + \underline{M}_{\text{ext}} \cdot \underline{\hat{\omega}}) ds + \underline{N}_0 \cdot \underline{\hat{r}}(0) + \underline{N}_L \cdot \underline{\hat{r}}(L) + \underline{M}_0 \cdot \underline{\hat{\omega}}(0) + \underline{M}_L \cdot \underline{\hat{\omega}}(L) \quad (2.19)$$

où on a défini les vecteurs d'effort et de moment extérieurs suivants :

$$\forall s \in]0; L[, \quad \begin{cases} \underline{N}_{\text{ext}}(s) &= \int_{A(s)} \underline{f} dA + \int_{\partial A(s)} \underline{g} d\Gamma \\ \underline{M}_{\text{ext}}(s) &= \int_{A(s)} \xi_\alpha \underline{d}_\alpha \wedge \underline{f} dA + \int_{\partial A(s) \cap \Gamma_g} \xi_\alpha \underline{d}_\alpha \wedge \underline{g} d\Gamma \end{cases}$$

ainsi que les efforts aux extrémités

$$\underline{N}_0 = \int_{A(0) \cap \Gamma_g} \underline{g} dA \quad \text{et} \quad \underline{N}_L = \int_{A(L) \cap \Gamma_g} \underline{g} dA, \quad ,$$

et les moments aux extrémités :

$$\underline{M}_0 = \int_{A(0) \cap \Gamma_g} \xi_\alpha \underline{d}_\alpha \wedge \underline{g} dA \quad \text{et} \quad \underline{M}_L = \int_{A(L) \cap \Gamma_g} \xi_\alpha \underline{d}_\alpha \wedge \underline{g} dA.$$

Puissance virtuelle des efforts intérieurs

Pour tout déplacement virtuel admissible $\underline{\hat{x}}$, la puissance virtuelle des efforts intérieurs s'écrit par définition :

$$P_{\text{int}}(\underline{\hat{x}}) = - \int_{\Omega_{\text{ref}}} \underline{\underline{P}} : \underline{\underline{\nabla \hat{x}}} d\Omega \quad (2.20)$$

où $\underline{\underline{P}}$ désigne le premier tenseur de Piola-Kirchhoff, défini à partir du second tenseur de Piola-Kirchhoff par la relation $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}}$.

A partir de cette définition, étant donné que le triplet $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ forme une base orthonormée, alors le gradient de tout mouvement virtuel admissible $\underline{\hat{x}}$ de la forme (2.14) est donné par :

$$\underline{\underline{\nabla \hat{x}}} = \underline{\hat{d}}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{\hat{d}}_2 \otimes \underline{e}_2 + \left(\underline{\hat{r}}' + \xi_1 \underline{\hat{d}}_1' + \xi_2 \underline{\hat{d}}_2' \right) \otimes \underline{e}_3$$

En injectant cette expression du gradient virtuel dans l'équation (2.20), la puissance virtuelle des efforts intérieurs s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \forall (\hat{\underline{r}}, \hat{\underline{\omega}}) \in \mathcal{U}, \quad P_{\text{int}}(\hat{\underline{x}}) = & - \int_0^L \left\{ \int_{A(s)} \left[\underline{d}_\alpha \wedge (\underline{P} \cdot \underline{e}_\alpha) + \xi_\alpha \left(\underline{d}'_\alpha \wedge (\underline{P} \cdot \underline{e}_3) \right) \right] dA \right\} \cdot \hat{\underline{\omega}} ds \\ & - \int_0^L \underline{M}_{\text{int}} \cdot \hat{\underline{\omega}}' ds - \int_0^L \underline{N}_{\text{int}} \cdot \hat{\underline{r}}' ds \end{aligned} \quad (2.21)$$

où nous avons défini les vecteurs d'effort et de moment internes suivants :

$$\forall s \in]0; L[, \quad \begin{cases} \underline{N}_{\text{int}}(s) = \int_{A(s)} (\underline{P} \cdot \underline{e}_3) dA \\ \underline{M}_{\text{int}}(s) = \underline{d}_\alpha(s) \wedge \int_{A(s)} \xi_\alpha (\underline{P} \cdot \underline{e}_3) dA \end{cases} \quad (2.22)$$

Par ailleurs, en utilisant la relation suivante¹

$$\underline{d}_\alpha \wedge (\underline{P} \cdot \underline{e}_\alpha) + \xi_\alpha \left(\underline{d}'_\alpha \wedge (\underline{P} \cdot \underline{e}_3) \right) = -\underline{r}' \wedge (\underline{P} \cdot \underline{e}_3) ,$$

L'équation (2.21) se simplifie sous la forme :

$$P_{\text{int}}(\hat{\underline{x}}) = \int_0^L \left(\underline{r}' \wedge \underline{N}_{\text{int}} \right) \cdot \hat{\underline{\omega}} ds - \int_0^L \underline{M}_{\text{int}} \cdot \hat{\underline{\omega}}' ds - \int_0^L \hat{\underline{r}}' \cdot \underline{N}_{\text{int}} ds \quad (2.23)$$

A partir de cette expression de la puissance virtuelle des efforts internes, nous allons établir la formulation faible du problème en se basant sur le principe des puissances virtuelles.

Principe des puissances virtuelles

On rappelle que le principe des travaux virtuels stipule que le travail virtuel total de la structure est nul pour une perturbation apportée à la solution du problème. Ainsi, la relation suivante sur les puissances virtuelles intérieure et extérieure doit être vérifiée pour toute perturbation $\hat{\underline{x}}$ admissible :

$$P_{\text{int}}(\hat{\underline{x}}) + P_{\text{ext}}(\hat{\underline{x}}) = 0 \quad (2.24)$$

En reprenant les expressions (2.23) et (2.19) des puissances virtuelles intérieure et extérieure, le problème d'équilibre de la poutre s'écrit donc finalement :

Trouver $(\underline{r}, \underline{d}_\alpha) \in K^{\text{ort}}$ tel que $\forall (\hat{\underline{r}}, \hat{\underline{\omega}}) \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} \int_0^L \left\{ \underline{N}_{\text{ext}} \cdot \hat{\underline{r}} - \underline{N}_{\text{int}} \cdot \hat{\underline{r}}' + \left[\left(\underline{r}' \wedge \underline{N}_{\text{int}} \right) + \underline{M}_{\text{ext}} \right] \cdot \hat{\underline{\omega}} - \underline{M}_{\text{int}} \cdot \hat{\underline{\omega}}' \right\} ds \\ + \underline{N}_0 \cdot \hat{\underline{r}}(0) + \underline{N}_L \cdot \hat{\underline{r}}(L) + \underline{M}_0 \cdot \hat{\underline{\omega}}(0) + \underline{M}_L \cdot \hat{\underline{\omega}}(L) = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

1. Puisque le second tenseur de Piola-Kirchhoff $\underline{S}$ est symétrique, on a pour tout tenseur $\hat{\underline{\Omega}}$ antisymétrique :

$$\underline{P} : (\hat{\underline{\Omega}} \cdot \underline{F}) = \underline{S} : \underbrace{(\underline{F}^T \cdot \hat{\underline{\Omega}} \cdot \underline{F})}_{\text{antisymétrique}} = 0$$

Or,

$$\underline{P} : (\hat{\underline{\Omega}} \cdot \underline{F}) = (\underline{P} \cdot \underline{e}_\alpha) \cdot (\hat{\underline{\omega}} \wedge \underline{d}_\alpha) + (\underline{P} \cdot \underline{e}_3) \cdot \left(\hat{\underline{\omega}} \wedge (\underline{r}' + \xi_\alpha \underline{d}'_\alpha) \right)$$

Donc, $\forall \hat{\underline{\omega}}$

$$\underline{P} : (\hat{\underline{\Omega}} \cdot \underline{F}) = \hat{\underline{\omega}} \cdot \left[\underline{d}_\alpha \wedge (\underline{P} \cdot \underline{e}_\alpha) + (\underline{r}' + \xi_\alpha \underline{d}'_\alpha) \wedge (\underline{P} \cdot \underline{e}_3) \right] = 0$$

Équations d'équilibre statique

Pour pouvoir établir les équations d'équilibre local à partir de la formulation faible du problème, il est nécessaire d'éliminer toutes les dérivées de quantités virtuelles. Pour cela, on réalise une intégration par parties sur la puissance virtuelle des efforts intérieurs, donnée par l'expression (2.23), qui s'écrit donc :

$$P_{\text{int}}(\hat{\underline{x}}) = \int_0^L \left\{ \underline{N}'_{\text{int}} \cdot \hat{\underline{r}} + \left(\underline{r}' \wedge \underline{N}_{\text{int}} + \underline{M}'_{\text{int}} \right) \cdot \hat{\underline{\omega}} \right\} ds - [\underline{N}_{\text{int}} \cdot \hat{\underline{r}}]_0^L - [\underline{M}_{\text{int}} \cdot \hat{\underline{\omega}}]_0^L \quad (2.26)$$

A partir des expressions (2.26) et (2.19) des puissances virtuelles intérieure et extérieure, le principe des puissances virtuelles (2.24) nous permet alors d'établir les deux équations d'équilibre classiques d'une poutre, qui s'écrivent pour toute abscisse curviligne $s \in]0; L[$:

$$\begin{cases} \underline{N}'_{\text{int}} + \underline{N}_{\text{ext}} = \underline{0} & (\text{Équilibre des forces}) \\ \underline{r}' \wedge \underline{N}_{\text{int}} + \underline{M}'_{\text{int}} + \underline{M}_{\text{ext}} = \underline{0} & (\text{Équilibre des moments}) \end{cases} \quad (2.27)$$

On note qu'il serait possible retrouver ces équations d'équilibres en écrivant le bilan des actions mécaniques appliquées sur un tronçon quelconque de poutre entre s et δs . Le lecteur intéressé peut consulter par exemple [Neukirch 2009].

Remarque :

Pour certaines applications, on souhaite disposer d'un modèle de poutre dont la déformation n'entraîne pas des modes de cisaillement dans la structure considérée. Il s'agit du *modèle de Bernoulli*, qui consiste à ajouter la liaison cinématique supplémentaire suivante aux hypothèses cinématiques données par les équations (2.4) et (2.5) :

$$\underline{d}_3(s) = k \underline{r}'(s) \text{ où } k \text{ est un scalaire réel} \quad (2.28)$$

Dans ce modèle, les sections initialement planes et orthogonales à la ligne moyenne le restent au cours de la transformation. Les vecteurs directeurs $\underline{d}_1$ et $\underline{d}_2$ sont alors images par simple rotation respectivement des vecteurs $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$.

On peut également interdire tout allongement dans la tige, ce qui revient à considérer $k = 1$ dans l'équation (2.28). Ce modèle (discuté dans [Love 1944]) stipule que l'axe de la tige est inextensible, et est souvent appelé *modèle de Kirchhoff*.

2.2.2 Modèle à cinématique enrichie

Les modèles cinématiques présentés dans la sous-section précédente reposent sur plusieurs hypothèses plus ou moins fortes. En particulier les sections sont supposées rigides. Mais dans certains cas, les effets tridimensionnels tels que les phénomènes de déformation transverse des sections de la poutre (notamment l'effet Poisson) sont fondamentaux, et ces modèles classiques peuvent alors s'avérer insuffisants. Porté par ce besoin de modéliser des effets inaccessibles avec des modèles standards, certains auteurs ont proposé des théories plus générales afin de décrire les déformations de la section de la poutre.

Dans ce contexte, l'extension la plus intuitive du modèle de Timoshenko est de supprimer la contrainte d'orthonormalité des directeurs (2.4), comme cela a été introduit dans [Antman 1974]. On se ramène alors à un modèle cinématique plus riche, qui est a été décrit par S.S.Antman dans le chapitre 8 et le chapitre 16 de son livre [Antman 2005]. Ce modèle a été développé par la suite par D. Durville (cf. [Durville 1998]) dans l'objectif de résoudre des problèmes mécaniques sur des échantillons d'assemblages de fibres soumis à de grands déplacements.

Hypothèses cinématiques

Le modèle en question se base toujours sur l'expression (2.1) pour décrire la position matérielle d'une particule dans la configuration courante, mais ne fait aucune hypothèse sur les vecteurs directeurs, qui peuvent varier en norme et en angle. Les contraintes données par les équations (2.4) et (2.5) ne sont donc plus imposées.

Par comparaison aux modèles de poutre traditionnels présentés précédemment, qui comportaient 6 degrés de liberté par section, cette description cinématique rajoute 3 degrés de liberté supplémentaires. Cet enrichissement permet de représenter les modes de déformations planes des sections, qui peuvent devenir circulaires ou elliptiques (voir figure 2.4). Il nécessitera par contre plus d'attention dans la description de la rhéologie (cf section 2.3)

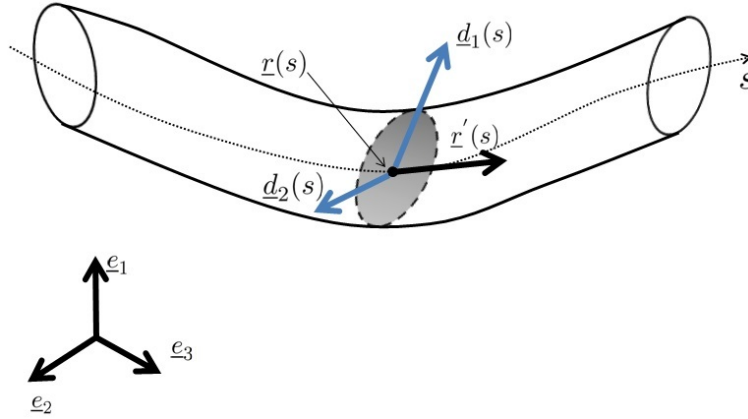


FIGURE 2.4 – Modèle de poutre à cinématique enrichie

Mesure des déformations

Les sections étant maintenant supposées déformables, les déformations au sein de la poutre deviennent tridimensionnelles. Pour les mesurer, on utilise le tenseur de déformation de Green Lagrange, qui est défini à partir du gradient de déformation $\underline{\underline{F}}$ par la relation :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})$$

En utilisant l'expression de la position d'un point matériel (2.1), et en adoptant la convention de sommation suivant les indices répétés, le gradient de déformation s'écrit

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{d}}_\alpha \otimes e_\alpha + (\underline{\underline{r}}' + \xi_\alpha \underline{\underline{d}}'_\alpha) \otimes e_3 \quad , \quad (2.29)$$

Ceci permet d'exprimer le tenseur des déformations de Green-Lagrange comme :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}} = & \frac{1}{2} [(\underline{\underline{d}}_\alpha \cdot \underline{\underline{d}}_\beta - \delta_{\alpha\beta}) e_\alpha \otimes e_\beta + (e_\beta \otimes e_3)_{\text{sym}} (\underline{\underline{d}}_\beta \cdot (\underline{\underline{r}}' + \xi_\alpha \underline{\underline{d}}'_\alpha)) \\ & + ((\underline{\underline{r}}' + \xi_\alpha \underline{\underline{d}}'_\alpha)^2 - 1) e_3 \otimes e_3] \quad . \end{aligned} \quad (2.30)$$

Pour mieux comprendre, nous proposons d'analyser les différentes quantités cinématiques associées au modèle et de les expliciter sous la forme d'un développement polynomial par rapport aux coordonnées transverses ξ_β . Pour cela, on décompose le tenseur de déformation en parties constante, linéaire et quadratique dans la section sous la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_0 + \xi_\alpha \underline{\underline{\varepsilon}}_\alpha + \xi_\alpha \xi_\beta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\alpha\beta} \quad (2.31)$$

avec :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\varepsilon}}_0 &= \frac{1}{2} \left[(\underline{d}_\alpha \cdot \underline{d}_\beta - \delta_{\alpha\beta}) \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta + \underline{d}_\alpha \cdot \underline{r}' (\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_3)_{\text{sym}} + (\underline{r}' \cdot \underline{r}' - 1) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \right] \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_\alpha &= \frac{1}{2} \left[\underline{d}_\beta \cdot \underline{d}'_\alpha (\underline{e}_\beta \otimes \underline{e}_3)_{\text{sym}} + 2 \underline{r}' \cdot \underline{d}'_\alpha \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \right] \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left[\underline{d}'_\alpha \cdot \underline{d}'_\beta \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \right]\end{aligned}\quad (2.32)$$

Dans tout ce qui suit, les dimensions transverses de la poutre seront supposées petites par rapport à sa longueur. Pour cette raison, nous faisons le choix de négliger les termes d'ordre deux $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\alpha\beta}$ dans le tenseur de déformations.

Dans les termes constant et linéaire de l'expression (2.32), on retrouve les modes de déformations du modèle de Timochenko :

- l'allongement de la ligne moyenne : $\frac{1}{2} (\underline{r}' \cdot \underline{r}' - 1)$;
- les modes de cisaillements hors plan de la section : $\frac{1}{2} \underline{d}_\alpha \cdot \underline{r}'$;
- les modes de torsion : $\underline{r}' \cdot \underline{d}'_\alpha$;
- les modes de flexion : $\frac{1}{2} \underline{d}_\beta \cdot \underline{d}'_\alpha$, $\beta \neq \alpha$.

Mais d'autres modes de déformations de section apparaissent dans ce modèle :

- un mode de déformation constant dans la section correspondant à l'effet Poisson : $\frac{1}{2} (\underline{d}_\alpha \cdot \underline{d}_\alpha - 1)$;
- les modes de cisaillements constants dans la section : $\frac{1}{2} \underline{d}_1 \cdot \underline{d}_2$;
- un mode de déformation dépendant des coordonnées de section que l'on peut associé à un effet de Pincement (un effet de dilatation et de contraction de la poutre) : $\frac{1}{2} \underline{d}_\alpha \cdot \underline{d}'_\alpha$.

On peut remarquer que toutes les composantes de la partie constante du tenseur de déformation sont non nulles, ce qui démontre son aspect réellement tridimensionnel. Cela nous permet de nous ramener au cadre de la mécanique des milieux continus tridimensionnels. Cependant, il est important de noter que la partie linéaire du tenseur de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ a ses composantes nulles dans le plan de la section. Nous verrons dans la section 2.3 que cela peut provoquer une rigidification artificielle de la structure si on utilise une loi de comportement tridimensionnelle standard.

Remarque :

Dans notre cas, la poutre représente un fil constitué d'un unique matériau homogène, ce qui nous permet d'utiliser des mesures de déformation et une loi de comportement tridimensionnelles. Pour traiter les cas plus généraux (tels que les brins d'ADN ou les nanotubes de carbone), il est préférable de se ramener un modèle purement unidimensionnel, pouvant facilement être alimenté par des résultats d'essais expérimentaux. Pour cela, une mesure des déformations unidimensionnelle et objective a été introduite par [Kumar 2011] et étendue récemment au cas des poutres non rectilignes par [Genovese 2014]. Pour plus de détails, le lecteur intéressé pourra consulter ces deux références.

Formulation faible

Pour un comportement linéaire du matériau sous-jacent, le développement polynomial du tenseur des déformations se retrouve au niveau du second tenseur des contraintes de Piola $\underline{\underline{S}}$. Dans ce cas, et en négligeant les termes d'ordre 2 ou plus dans $\underline{\underline{S}}$ on trouve :

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}_0 + \xi_\alpha \underline{\underline{S}}_\alpha \quad (2.33)$$

Les tenseurs de contraintes et de déformations étant alors décomposés linéairement par rapport aux coordonnées de section (les équations 2.33 et 2.31), le travail virtuel des efforts internes s'exprime

pour toute perturbation $\hat{\underline{x}}$ admissible sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 P_{\text{int}}(\hat{\underline{x}}) &= - \int_{\Omega_{\text{ref}}} \underline{\underline{S}} : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} d\Omega \\
 &= - \int_{\Omega_{\text{ref}}} \left(\underline{\underline{S}}_0 + \xi_\alpha \underline{\underline{S}}_\alpha \right) : \left(\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}_0 + \xi_\alpha \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}_\alpha \right) d\Omega \\
 &= - \int_0^L \left[\underline{\underline{S}}_0 : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}_0 \left(\underbrace{\int_A dA}_A \right) + \underline{\underline{S}}_0 : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}_\alpha \left(\underbrace{\int_A \xi_\alpha dA}_0 \right) + \underline{\underline{S}}_\alpha : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}_0 \left(\underbrace{\int_A \xi_\alpha dA}_0 \right) + \underline{\underline{S}}_\alpha : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}_\alpha \left(\underbrace{\int_A \xi_\alpha^2 dA}_I \right) \right] ds
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

où A et I sont respectivement l'aire et le moment d'inertie quadratique de la section.

Or la variation virtuelle des déformations est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}_0 &= \frac{1}{2} \left[\left(\hat{\underline{d}}_\alpha \cdot \underline{d}_\beta + \underline{d}_\alpha \cdot \hat{\underline{d}}_\beta \right) \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta + \left(\hat{\underline{d}}_\alpha \cdot \underline{r}' + \underline{d}_\alpha \cdot \hat{\underline{r}}' \right) (\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_3)_{\text{sym}} + \left(2\underline{r}' \cdot \hat{\underline{r}}' \right) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \right] \\
 \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}_\alpha &= \frac{1}{2} \left[\left(\hat{\underline{d}}_\beta \cdot \underline{d}'_\alpha + \underline{d}_\beta \cdot \hat{\underline{d}}'_\alpha \right) (\underline{e}_\beta \otimes \underline{e}_3)_{\text{sym}} + 2 \left(\hat{\underline{r}}' \cdot \underline{d}'_\alpha + \underline{r}' \cdot \hat{\underline{d}}'_\alpha \right) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \right]
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Finalement en injectant les expressions des termes de déformations virtuelles, on se ramène à une expression du travail virtuel interne qui s'écrit sous la forme :

$$P_{\text{int}}(\hat{\underline{x}}) = - \int_0^L \left\{ \underline{N}_{\text{int}} \cdot \hat{\underline{r}}' + \underline{G}_{\alpha, \text{int}} \cdot \hat{\underline{d}}_\alpha + \underline{H}_{\alpha, \text{int}} \cdot \hat{\underline{d}}'_\alpha \right\} ds \tag{2.36}$$

où pour simplifier, nous avons défini les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}
 \underline{N}_{\text{int}} &= \int_{A(s)} (\underline{P} \cdot \underline{e}_3) dA = \frac{1}{2} A (S_{\alpha 3}^0 + S_{3\alpha}^0) \underline{d}_\alpha + A S_{33}^0 \underline{r}' + I S_{33}^\alpha \underline{d}'_\alpha \\
 \underline{G}_{\alpha, \text{int}} &= \int_{A(s)} (\underline{P} \cdot \underline{e}_\alpha) dA = \frac{1}{2} A (S_{\alpha\beta}^0 + S_{\beta\alpha}^0) \underline{d}_\beta + \frac{1}{2} A (S_{\alpha 3}^0 + S_{3\alpha}^0) \underline{r}' + \frac{1}{2} I (S_{\alpha 3}^\beta + S_{3\alpha}^\beta) \underline{d}'_\beta \\
 \underline{H}_{\alpha, \text{int}} &= \int_{A(s)} \xi_\alpha (\underline{P} \cdot \underline{e}_3) dA = \frac{1}{2} I (S_{\beta 3}^\alpha + S_{3\beta}^\alpha) \underline{d}_\beta + I S_{33}^\alpha \underline{r}'
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Par ailleurs, comme cela a été fait pour le modèle de Timoshenko, on peut montrer que la puissance virtuelle des efforts extérieurs s'écrit pour toute perturbation $\hat{\underline{x}}$ admissible sous la forme :

$$\begin{aligned}
 P_{\text{ext}}(\hat{\underline{x}}) &= \int_0^L \left(\underline{N}_{\text{ext}} \cdot \hat{\underline{r}} + \underline{H}_{\alpha, \text{ext}} \cdot \hat{\underline{d}}_\alpha \right) ds \\
 &\quad + \underline{N}_0 \cdot \hat{\underline{r}}(0) + \underline{N}_L \cdot \hat{\underline{r}}(L) + \underline{H}_{\alpha, 0} \cdot \hat{\underline{d}}_\alpha(0) + \underline{H}_{\alpha, L} \cdot \hat{\underline{d}}_\alpha(L)
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

avec

$$\forall s \in]0; L[, \quad \begin{cases} \underline{N}_{\text{ext}}(s) &= \int_{A(s)} \underline{f} dA + \int_{\partial A(s)} \underline{g} d\Gamma \\ \underline{H}_{\alpha, \text{ext}}(s) &= \int_{A(s)} \xi_\alpha \underline{f} dA + \int_{\partial A(s) \cap \Gamma_g} \xi_\alpha \underline{g} d\Gamma \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \underline{N}_0 &= \int_{A(0) \cap \Gamma_g} \underline{g} dA \\ \underline{N}_L &= \int_{A(L) \cap \Gamma_g} \underline{g} dA \\ \underline{H}_{\alpha, 0} &= \int_{A(0) \cap \Gamma_g} \xi_\alpha \underline{g} dA \\ \underline{H}_{\alpha, L} &= \int_{A(L) \cap \Gamma_g} \xi_\alpha \underline{g} dA \end{cases}$$

A partir des expressions (2.36) et (2.38) des puissances virtuelles intérieure et extérieure et en appliquant le principe des puissances virtuelles (2.24), le problème d'équilibre continu de la poutre s'écrit alors :

Trouver $(\underline{r}, \underline{d}_\alpha) \in K$ tel que $\forall (\hat{\underline{r}}, \hat{\underline{d}}_\alpha) \in K_0$:

$$\begin{aligned} \int_0^L \left\{ \underline{N}_{\text{ext}} \cdot \hat{\underline{r}} - \underline{N}_{\text{int}} \cdot \hat{\underline{r}}' - [\underline{G}_{\alpha, \text{int}} - \underline{H}_{\alpha, \text{ext}}] \cdot \hat{\underline{d}}_\alpha - \underline{H}_{\alpha, \text{int}} \cdot \hat{\underline{d}}_\alpha' \right\} ds \\ + \underline{N}_0 \cdot \hat{\underline{r}}(0) + \underline{N}_L \cdot \hat{\underline{r}}(L) + \underline{H}_{\alpha, 0} \cdot \hat{\underline{d}}_\alpha(0) + \underline{H}_{\alpha, L} \cdot \hat{\underline{d}}_\alpha(L) = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Équations d'équilibre statique

Par rapport au modèle de Timochenko étudié dans la partie 2.2.1, qui était régi par six équations d'équilibre (trois équations d'équilibre des efforts et trois équations d'équilibre des moments), trois équations supplémentaires vont apparaître pour établir l'équilibre des efforts dans le plan de chaque section de la poutre. Pour établir ces équations, on se base sur la formulation faible du problème donnée par l'équation (2.39), et on réalise une intégration par parties sur la puissance virtuelle des efforts intérieurs, ce qui donne :

$$P_{\text{int}}(\hat{\underline{x}}) = \int_0^L \left\{ \underline{N}'_{\text{int}} \cdot \hat{\underline{r}} + [\underline{H}'_{\alpha, \text{int}} - \underline{G}_{\alpha, \text{int}}] \cdot \hat{\underline{d}}_\alpha \right\} ds - [\underline{N}_{\text{int}} \cdot \hat{\underline{r}}]_0^L - [\underline{H}_{\alpha, \text{int}} \cdot \hat{\underline{d}}_\alpha]_0^L \quad (2.40)$$

A partir des expressions (2.40) et (2.38) des puissances virtuelles intérieure et extérieure, le principe des puissances virtuelles (2.24) nous permet alors d'établir les trois équations d'équilibre suivantes pour toute abscisse curviligne $s \in]0; L[$:

$$\begin{cases} \underline{N}'_{\text{int}} + \underline{N}_{\text{ext}} = \underline{0} \\ \underline{H}'_{\alpha, \text{int}} - \underline{G}_{\alpha, \text{int}} + \underline{H}_{\alpha, \text{ext}} = \underline{0} \end{cases} \quad \text{pour } \alpha = 1, 2 \quad (2.41)$$

Remarque 1 :

Les équations d'équilibre (2.41) sont difficilement interprétables mécaniquement, puisque les quantités $\underline{H}_{\alpha, \text{int}}$ et $\underline{G}_{\alpha, \text{int}}$ ne correspondent ni à des efforts ni à des moments. Pour obtenir des équations d'équilibre équivalentes sous une forme plus intuitive, il est possible de décomposer le gradient de déformation $\underline{F}$ donné par (2.29) sous la forme d'une multiplication d'un tenseur de rotation et d'un tenseur décrivant les déformations de la section. Le lecteur intéressé pourra consulter [Kumar 2011].

Remarque 2 :

Les équations d'équilibre (2.27) doivent être satisfaites lorsque les équations (2.41) sont respectées. Pour le démontrer, il suffit de considérer les variations virtuelles des directeurs de la forme $\hat{\underline{d}}_\alpha = \hat{\underline{\omega}} \wedge \underline{d}_\alpha$ dans la formulation faible (2.39), puis de définir les moments intérieur et extérieur suivants :

$$\forall s \in]0; L[, \quad \begin{cases} \underline{M}_{\text{int}}(s) = \underline{d}_\alpha(s) \wedge \underline{H}_{\alpha, \text{int}}(s) \\ \underline{M}_{\text{ext}}(s) = \underline{d}_\alpha(s) \wedge \underline{H}_{\alpha, \text{ext}}(s) \end{cases}$$

Ces modèles restent trop pauvres cinématiquement pour reproduire certains modes de déformation, en particulier le gauchissement des sections. Nous allons voir dans ce qui suit que certains auteurs ont proposé des modèles originaux pour enrichir encore la cinématique et ainsi contourner cette limite.

2.2.3 Quelques modèles d'ordre plus élevé

Les modèles cinématiques, présentés dans les deux sous-sections précédentes, font toujours l'hypothèse que les sections de la poutre restent planes et de forme elliptique. Ils ne permettent pas

de modéliser certains modes de déformations, tel que le gauchissement des sections. Pour contourner cette limite, quelques auteurs ont proposé des modèles originaux, dont voici les principaux :

- Le formalisme de l'écriture du modèle cinématique est encore généralisable en poussant l'ordre de développement du champ de position, ce qui augmente le nombre de vecteur directeurs de deux à un nombre fini quelconque. Ainsi, pour un enrichissement au second ordre comme celui proposé par [Antman 1995], trois vecteurs de sections s'ajoutent au modèle pour représenter a priori des modes de déformations supplémentaires de sections tel que le gauchissement :

$$\underline{x}(\xi_1, \xi_2, s) = \underline{r}(s) + \xi_1 \underline{d}_1(s) + \xi_2 \underline{d}_2(s) + \frac{1}{2} (\xi_1)^2 \underline{d}_{11}(s) + \xi_1 \xi_2 \underline{d}_{12}(s) + \frac{1}{2} (\xi_2)^2 \underline{d}_{22}(s) \quad (2.42)$$

On peut même pousser ce développement dans le cas général pour un ordre N quelconque (voir équation (2.43)). Lorsqu'on augmente l'ordre de développement du champ de position, on introduit des degrés de libertés supplémentaires et donc on peut alors reproduire des modes de déformations plus complexes. Signalons que plus on augmente le nombre de degrés de liberté, plus la taille du système à résoudre augmente (et par conséquent le coût de calcul). L'analyse de l'apport d'un enrichissement du modèle à un ordre N quelconque a fait l'objet d'un stage de Master qui a précédé la thèse, le lecteur intéressé pourra consulter [Attia 2011].

$$\underline{x}(\xi_1, \xi_2, s) = \underline{r}(s) + \sum_{p=1}^N \sum_{q=0}^p \frac{1}{q!} \frac{1}{(p-q)!} \xi_1^q \xi_2^{p-q} \underline{d}_{q,p-q}(s) \quad (2.43)$$

- Un modèle spécifique aux tubes a été introduit par [Gould 2006], permettant de gérer les très grandes déformations des sections sous sollicitations. L'approche consiste à écrire la position courante d'un point matériel appartenant à la surface extérieure du tube, caractérisé par son abscisse curviligne s et l'angle θ qu'il forme avec le vecteur $\underline{e}_2$, sous la forme :

$$\underline{x}(s, \theta) = \underline{r}(s) + \sum_{\alpha=1}^2 \xi_{\alpha}(s, \theta) \underline{d}_{\alpha}(s) \quad (2.44)$$

Les fonctions $\xi_{\alpha}(s, \theta)$ permettent de représenter des variation du rayon dans la direction angulaire, et ainsi de prendre en compte des déformations locales pour décrire la microstructure du tube. En revanche, cette approche reste limitée aux structures de type tube et n'est pas adaptée pour prendre en compte des effets de déformations au sein d'une section de poutre pleine, car les déformations sont supposées indépendantes par rapport au rayon.

Cette liste de modèles enrichis n'est pas exhaustive, mais on peut constater que le point commun entre tous les modèles enrichis est qu'ils ont augmenté le nombre d'inconnues cinématiques pour pouvoir reproduire des modes de déformations plus complexes. Étant donné que l'augmentation du nombre d'inconnues implique un surcoût en terme de temps de calcul, on sent alors que le compromis entre la précision du résultat et l'efficacité du calcul dépendra du type d'application considérée. Nous allons donc comparer tous ces modèles dans la sous-section suivante, afin de justifier le choix du modèle le plus approprié à la simulation des câbles.

2.2.4 Conclusions sur les modèles cinématiques de poutre

Nous avons présenté dans cette section une revue non exhaustive des modèles cinématiques de poutre, avec des hypothèses géométriques plus ou moins fortes afin de simplifier le problème mécanique étudié (une analyse plus poussée est disponible dans [Naghdi 1984]).

Le modèle de Timoshenko est celui le plus largement utilisé dans la communauté pour simuler le comportement de poutres en grands déplacements et grandes rotations, en raison de sa simplicité et

son faible coût de calcul. Cependant, son hypothèse de section indéformable semble trop forte pour notre domaine d'application. En effet, comme cela est expliqué par [Feyrer 2006], la contraction de la section des fils, due à l'effet Poisson, peut avoir un impact très important sur les efforts et la rigidité globale de structures fibrées. Ceci est aussi susceptible de modifier l'état de contact entre les fils. Cela montre que la prise en compte de la déformation des sections est capitale pour la modélisation des câbles. Par contre, les modèles enrichis tels que ceux présentés dans la sous-section 2.2.3 augmentent significativement le nombre de degrés de liberté, ce qui peut alourdir considérablement les calculs, alors que la plus value des inconnues supplémentaires semble assez négligeable pour notre type d'application.

En conclusion, il semble logique de s'orienter vers le modèle à cinématique enrichie présenté dans la partie 2.2.2, qui permet de prendre en compte l'effet Poisson souhaité, sans pour autant augmenter significativement le nombre de degrés de liberté par rapport aux modèles de poutre standards. Ce modèle est utilisé par D. Durville pour la simulation des assemblages de fils dans le logiciel *Multifil* (voir [Durville 1998]), qui est déjà largement reconnu pour ses capacités. Nous avons donc logiquement choisi ce cadre pour cette thèse, et ce modèle sera utilisé dans toute la suite de ce rapport.

2.3 Aspect comportement

Pour étudier l'équilibre physique de la poutre, il convient d'introduire des lois de comportement, qui permettront d'exprimer les efforts intérieurs en fonction des mesures de déformations définies dans la section précédente. Nous supposons dans cette étude que le comportement des fibres est hyperélastique à savoir que les efforts intérieurs dérivent d'une énergie élastique.

Remarque :

Dans le cas d'une poutre constituée d'un matériau hyperélastique, la solution du problème d'équilibre peut être obtenue par minimisation de l'énergie totale du système $J(\underline{r}, \underline{d}_i)$ sur l'ensemble des champs des solutions cinématiquement admissibles. Ceci résulte du fait que l'énergie totale est minimisée au point solution du problème d'équilibre statique (voir le cours [Tallec 2009]). La formulation faible du problème d'équilibre coïncide alors avec la formulation variationnelle associée à ce problème de minimisation. Cependant, les problèmes qui seront traités dans ce rapport ne sont pas forcément des problèmes de minimisation d'énergie, car des phénomènes de dissipation dus au frottement entre fils seront pris en compte (voir chapitre 3 de ce rapport). Les méthodes d'optimisation ne pourront donc pas être appliquées directement sur nos problèmes, et l'approche de résolution du problème d'équilibre sera explicitée dans la section 2.4.

2.3.1 Modèle rhéologique unidimensionnel

On se place ici dans le cas le modèle de Timoshenko, pour lequel nous avons montré dans la partie 2.2.1 qu'il est alors très simple de se ramener à un problème défini sur la ligne moyenne de la poutre. L'hypothèse d'hyperélasticité impose qu'il existe un potentiel d'énergie élastique $W(\underline{u}, \underline{v}, s)$ dont dérivent les forces et les moments internes résultants (voir [Antman 1995], chapitre 8) :

$$\begin{aligned}\hat{M}_{\text{int}}(s) &= \frac{\partial W}{\partial \underline{u}}(\underline{u}, \underline{v}, s) \underline{d}_i(s) \\ \hat{N}_{\text{int}}(s) &= \frac{\partial W}{\partial \underline{v}}(\underline{u}, \underline{v}, s) \underline{d}_i(s)\end{aligned}\tag{2.45}$$

Ces deux relations constitutives expriment la manière dont le moment et la force internes dépendent des déformations.

Il existe une grande variété de formes de loi de comportement, qui peuvent parfois être complexes. Une synthèse des approches permettant de construire de telles relations est disponible dans [O'Reilly 1998]. Mais dans la littérature (voir par exemple [Bourgat 1988]), le choix le plus classique pour le modèle de Timoshenko est de prendre le potentiel d'énergie quadratique de la forme :

$$W(\underline{u}, \underline{v}, s) = \frac{GA(s)}{2} (v_1^2 + v_2^2) + \frac{EA(s)}{2} (v_3 - 1)^2 + \frac{EI(s)}{2} (u_1^2 + u_2^2) + \frac{GJ(s)}{2} u_3^2 \quad (2.46)$$

Cette densité linéique d'énergie correspond en particulier à un matériau homogène ayant un comportement linéaire, dont E et G sont respectivement le module d'Young et le module de cisaillement. Les grandeurs $A(s)$, $I(s)$ et $J(s)$ sont respectivement l'aire de la section (indexée par l'abscisse curviligne s), et les moments quadratiques et polaires de la section supposée circulaire, définis par :

$$I(s) = \int_{A(s)} x^2 dA = \int_{A(s)} y^2 dA = \frac{J(s)}{2}$$

Les deux premiers termes de l'énergie (2.46) dépendent des déformations du premier ordre décrites par les composantes du vecteur $\underline{v}$ (défini par l'équation 2.13). Elles prennent en compte le cisaillement (terme en $(v_1^2 + v_2^2)$) et la tension (terme en $(v_3 - 1)^2$). Par analogie avec les modèles de coques, nous appellerons ces termes "énergie de membrane". L'autre partie de l'énergie dépend de la mesure des déformations du second ordre correspondant aux courbures autour des vecteurs $\underline{d}_1$ et $\underline{d}_2$ (terme en $(u_1^2 + u_2^2)$) dite "énergie de flexion" et la torsion autour de $\underline{d}_3$ (terme en u_3^2).

La forme de ce potentiel d'énergie fait l'hypothèse que la poutre est rectiligne dans son état de repos (dénué de contraintes), c'est à dire :

$$\begin{cases} u_i = 0 & \text{pour } i = 1, 2, 3 \\ v_\alpha = 0 & \text{pour } \alpha = 1, 2 \\ v_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Il ne permet donc pas de décrire le cas d'un fil courbé dans l'état de repos. Pour contourner cette hypothèse, certains auteurs (par exemple [Campos 1996]) ont proposé des adaptations de ce modèle qui permettent de prendre en compte le cas où le fil présente de la flexion ou de la torsion dans sa configuration au repos :

$$\begin{aligned} W(\underline{u}, \underline{v}, s) = & \frac{GA(s)}{2} ((v_1 - v_1^0)^2 + (v_2 - v_2^0)^2) + \frac{EA(s)}{2} (v_3 - v_3^0)^2 \\ & + \frac{EI(s)}{2} ((u_1 - u_1^0)^2 + (u_2 - u_2^0)^2) + \frac{GJ(s)}{2} (u_3 - u_3^0)^2 \end{aligned} \quad (2.47)$$

2.3.2 Modèle rhéologique tridimensionnel

Comme nous l'avons présenté dans la sous-section 2.2.2, l'utilisation d'un modèle cinématique basé sur des vecteurs de section non contraints nous a conduit à un tenseur de déformation tridimensionnel, dans lequel aucune des composantes de la partie constante n'est a priori nulle. Ceci permet d'utiliser une loi de comportement tridimensionnelle permettant d'exprimer les différentes contraintes en fonction des déformations dans toutes les directions, et ainsi de prendre en compte les effets tridimensionnels des variations des sections, en particulier l'effet Poisson.

En élasticité, différents types de lois peuvent être utilisées, qu'elles soient isotropes ou anisotropes transverses. Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi d'utiliser une loi de Hooke isotrope classique (cf. [Durville 2012]), reliant le second tenseur de Piola-Kirchhoff noté $\underline{\underline{S}}$ au tenseur de déformation de la manière suivante :

$$\underline{\underline{S}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} \quad (2.48)$$

où (λ, μ) sont les coefficients de Lamé du matériau, caractéristiques du milieu, et qui s'expriment en fonction du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

Cependant, nous allons voir dans le paragraphe qui suit qu'il faut "corriger" cette loi de comportement pour éviter de sur-rigidifier la poutre en flexion.

Correction de la loi de comportement : phénomène de "verrouillage de Poisson"

Bien que le tenseur de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ soit complètement tridimensionnel dès lors que les vecteurs de section ne sont pas contraints, le modèle à cinématique enrichie est encore pauvre par rapport à la réalité physique. En effet, seule la partie constante du tenseur des déformation est réellement tridimensionnelle, ce qui est insuffisant pour reproduire certains modes de déformations importants.

A titre d'illustration, contrairement au cadre du modèle de Bernoulli (la flexion pure sous l'hypothèse de conservation des sections planes), un chargement en flexion simple d'un fil produit un état de traction ou de compression dues à des effets de gonflement ou de contraction respectivement dans les régions supérieures ou inférieures par rapport à la fibre neutre, phénomène qui traduit l'effet Poisson. Étant donné que la cinématique adoptée implique que les termes de déformation dans le plan des sections $\varepsilon_{\alpha\beta}$ sont constants, alors ces effets ne peuvent pas être pris en compte. Le modèle cinématique est contraignant pour ce type de chargement. En conservant une loi de comportement totalement tridimensionnelle, le modèle induit une rigidité artificielle de la structure. Ceci nécessite donc une correction de la loi de comportement. Les premières observations de ce type de phénomène ont été faites par [Green 1967] pour le modèle de Timoshenko.

Afin d'illustrer ce phénomène, on considère le cas d'une flexion Cantilever d'une poutre en petites déformations de longueur $L = 100mm$. Dans les tests présentés ici, nous souhaitons obtenir un déplacement vertical de $\delta = 1mm$ en bout de la poutre, soit 1 % de la longueur. Ce problème est un problème classique en calcul des structures. D'après la solution analytique donnée dans [Lignon 2011], on exerce pour cela une force verticale donnée par :

$$f = \frac{1}{-\frac{L^3}{3EI} + \frac{L}{\mu A}} \delta$$

tels que (E, μ) représentent respectivement le module d'Young et le coefficient de poisson du matériau constituant la poutre et I le moment d'inertie.

Le calcul numérique est réalisée avec le modèle de poutre à cinématique enrichie au premier ordre basé sur des vecteurs de section non contraints et une loi de comportement tridimensionnelle standard. On utilise un maillage assez fin : 50 éléments finis quadratiques. On présente sur la figure 2.5 une comparaison de la solution analytique avec la solution numérique obtenue pour une poutre de rayon $r = 3mm$.

On remarque que la solution numérique ne coïncide pas avec la solution analytique même avec un maillage assez fin. Ce phénomène est donc d'origine physique, et indépendant des aspects numériques (contrairement au verrouillage numérique qui sera étudié dans la sous-section 2.4.2). L'utilisation d'une loi tridimensionnelle standard introduit une rigidification artificielle, due au manque de richesse des déformations des sections explicitées plus haut.

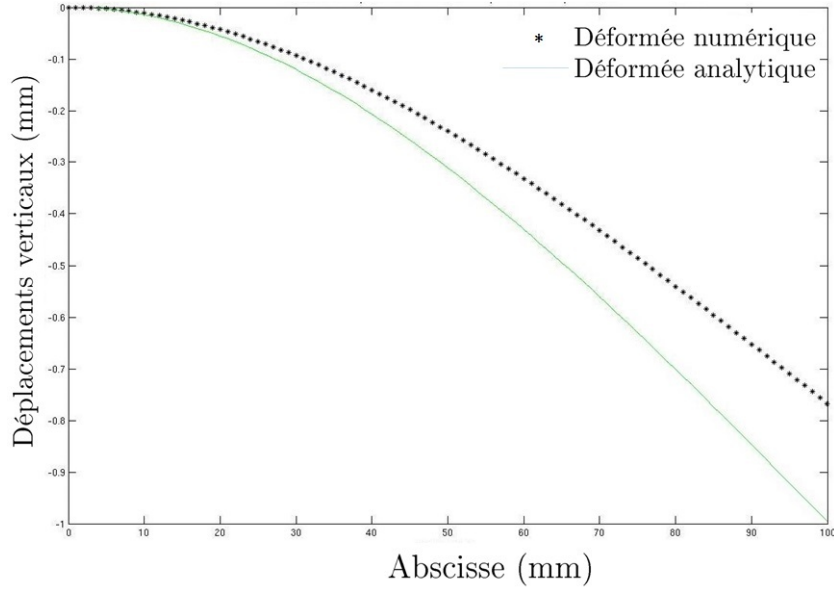


FIGURE 2.5 – Mise en évidence du phénomène de verrouillage de Poisson : Comparaison de la solution analytique d’une flexion Cantilever avec la solution numérique obtenue avec le modèle cinématique enrichie et une loi de comportement standard.

Pour supprimer cette rigidification artificielle de la poutre, la solution qui a été mise en place par D. Durville dans le logiciel *Multifil* consiste à corriger la loi de comportement tridimensionnelle (cf. [Durville 2012]). Pour cela, on se base sur la décomposition du tenseur des contraintes en une partie constante et une partie évoluant linéairement dans la section :

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}_0 + \xi_\alpha \underline{\underline{S}}_\alpha \quad (2.49)$$

Étant donné que la partie constante du tenseur de déformation est complètement tridimensionnelle, alors on peut lui appliquer une loi de Hooke tridimensionnelle normalement, ce qui permet de récupérer l’effet Poisson :

$$\underline{\underline{S}}_0 = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}_0 + \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}_0) \underline{\underline{I}} \quad (2.50)$$

Par contre, si on utilise une loi de Hooke classique sur la partie linéaire, alors la rigidité en flexion de la poutre est $(2\mu + \lambda)I$ au lieu de EI . Cela est dû au fait que la partie linéaire du tenseur de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ a toutes ses composantes nulles dans le plan de la section (comme nous l’avons déjà remarqué dans la partie 2.2.2), ce qui empêche l’effet Poisson sur la partie linéaire qui intervient dans un mode de flexion pure. Pour lever le verrouillage de Poisson, l’idée est alors d’utiliser un coefficient de Poisson nul dans les coefficients de la loi de comportement se rapportant aux termes de déformations non constants dans la section :

$$\underline{\underline{S}}_\alpha = 2\mu^* \underline{\underline{\varepsilon}}_\alpha + \lambda^* \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}_\alpha) \underline{\underline{I}} \quad (2.51)$$

avec

$$\begin{cases} \mu^* = \frac{E}{2} \\ \lambda^* = 0 \end{cases}$$

Avec cette modification des coefficients, on peut vérifier par un calcul très simple que la rigidité en flexion obtenue avec notre modèle est bien égale à la rigidité en flexion physique : $(2\mu^* + \lambda^*)I = EI$. On reprend le même test numérique de la flexion Cantilever de la poutre présenté précédemment mais avec la correction de la loi de comportement. On présente sur la figure 2.6 une comparaison entre le résultat analytique et le résultat numérique.

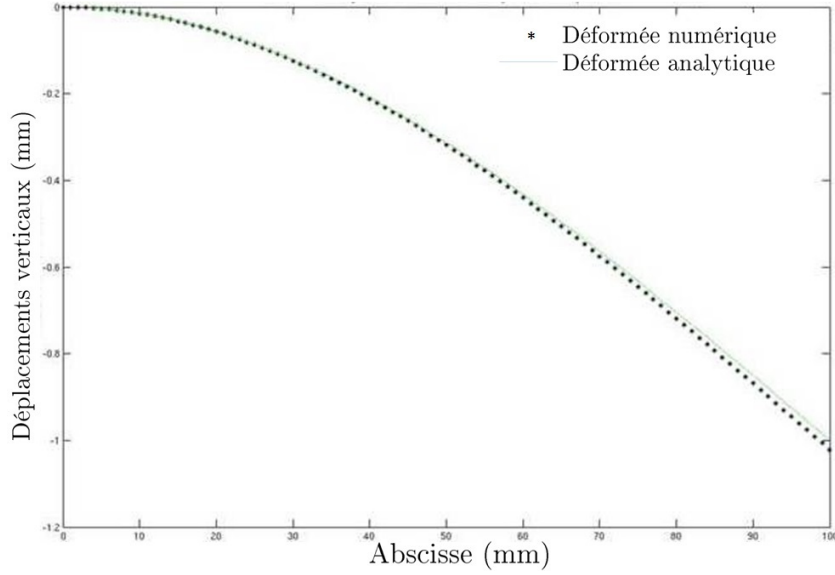


FIGURE 2.6 – Élimination du verrouillage de Poisson par annulation du coefficient de Poisson pour les termes non constants dans la section.

On vérifie que le résultat numérique est parfaitement superposé sur la solution analytique après cette correction de la loi de comportement. L'avantage de cette méthode est de récupérer tout de même l'effet Poisson sur les termes constants, qui joue un rôle très important dans les structures fibrées (cf. [Feyrer 2006]).

2.4 Aspects numériques

2.4.1 Résolution numérique par la méthode des Éléments Finis

Discrétisation

La méthode des éléments finis est un outil permettant de rechercher numériquement des solutions approchées d'un problème mécanique formulé de manière continue. Son concept a été développé à partir des années 60 (voir par exemple [Turner 1956] et [Argyris 1960]) en parallèle avec le développement du calcul numérique des systèmes physiques et l'augmentation des capacités des ordinateurs en termes de puissance et de mémoire.

L'approche du calcul par élément finis consiste à chercher, à partir de la formulation faible du problème, une approximation de la solution non pas sur tout l'espace des solutions admissibles K , qui est de dimension infinie, mais sur un sous-espace approché K_h , de dimension finie N_h . L'idée de la méthode des éléments finis est de partager (ou discrétiser) le domaine continu Ω en un certain nombre de sous domaines Ω_e , appelés *éléments*, de formes géométriques plus simples et qui couvrent tout le volume sans recouvrement entre eux :

$$\Omega = \cup_e \Omega_e \quad , \quad \Omega_e \cap \Omega_f = \emptyset$$

Les sommets de ces éléments sont appelés *nœuds*, et l'ensemble des nœuds et des éléments forme le *maillage* de la structure. L'approximation de la solution est explicitement interpolée sur chaque élément à partir des valeurs nodales, qui sont les valeurs inconnues aux nœuds, par l'intermédiaire des fonctions de base locales, appelées *fonctions de formes*. En général, ces fonctions sont choisies polynomiales sur chaque éléments, de sorte à valoir 1 sur un nœud de l'élément et 0 sur tous les autres

nœuds :

$$N^i(\underline{x}_j) = \delta_{ij}$$

La notation avec la lettre h en indice est couramment employée dans les ouvrages sur les éléments finis. Elle représente la dimension caractéristique d'un élément, ou encore symbolise l'aspect approximatif des quantités. Il est clair que le nombre d'éléments et leurs tailles vont jouer sur la qualité de l'approximation de la solution. Pour une discussion plus approfondie sur la simulation numérique par la méthode des éléments finis et sa mise en œuvre en mécanique des solides déformables, le lecteur intéressé pourra se référer à [Bonnet 2007].

Comme nous l'avons vu dans les deux sections précédentes, le recours aux modèles de poutre nous a permis de passer d'un problème tridimensionnel à un problème unidimensionnel, formulé sur la ligne moyenne de la fibre dans la configuration de référence. Donc naturellement, la ligne moyenne de la fibre est discrétisée en un ensemble de segments qui correspondent chacun à un élément fini. La solution approchée sur chaque élément s'écrit de la manière suivante :

$$\underline{x}_h(s) = \sum_{i=1}^{N_{\text{Elem}}} N^i(s) \underline{x}_i$$

où N_{Elem} est le nombre de nœuds d'un élément et $\underline{x}_i$ est la valeur de la solution au nœud i . Sur ces éléments unidimensionnels, il est possible d'utiliser différents polynômes (linéaire, quadratique, cubique...) en fonction de la richesse souhaitée. Dans notre cas, le logiciel *Multifil* que nous utilisons est orienté entre autre vers l'étude de structures câblées. Pour pouvoir assurer une continuité des dérivées entre les éléments pour bien approcher les effets de flexion, le choix est de considérer des polynômes quadratiques sur chacun des éléments.

Pour rester général, il est préférable d'établir les expressions explicites des fonctions de formes sur un même élément fini dit de référence (qui correspond dans notre cas au segment $[-1, 1]$), puis de réaliser un changement de variable pour se ramener à cet élément de référence. On note alors $\hat{s}(s)$ le point de l'élément de référence correspondant au point d'abscisse s sur l'élément réel. Les fonctions de formes $\hat{\varphi}_i$ sont connues a priori sur cet élément de référence :

$$\forall \hat{s} \in [-1; 1], \quad \begin{cases} \hat{\varphi}_1(\hat{s}) &= \frac{1}{2}\hat{s}(1 - \hat{s}) \\ \hat{\varphi}_2(\hat{s}) &= (1 - \hat{s}^2) \\ \hat{\varphi}_3(\hat{s}) &= \frac{1}{2}\hat{s}(1 + \hat{s}) \end{cases}$$

La solution approchée s'écrit alors en fonction des inconnues $\underline{x}_i$ aux trois nœuds de l'élément :

$$\underline{x}_h(s) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(s) \underline{x}_i = \sum_{i=1}^3 \hat{\varphi}_i(\hat{s}(s)) \underline{x}_i$$

Problème discret

En utilisant la méthode d'interpolation définie précédemment, le problème continu donné par l'équation (2.39) peut être approché par un problème discret, dans lequel les inconnues sont des quantités aux nœuds du maillage. On rappelle que dans le modèle de à cinématique enrichie utilisé, il y a 9 degrés de liberté par section, donc au total le nombre de degrés de liberté du problème discret vaudra $NDDL = 9 * NN$, où NN désigne le nombre total de nœuds le long de la poutre discrétisée.

Nous faisons le choix d'utiliser les mêmes fonctions de forme pour interpoler la position de la ligne

moyenne $\underline{r}$ et les vecteurs directeurs $\underline{d}_\alpha$, qui s'expriment donc sous la forme :

$$\begin{cases} \underline{r}(s) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(s) \underline{r}_i \\ \underline{d}_\alpha(s) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(s) \underline{d}_{\alpha,i} \end{cases} \quad (2.52)$$

de telle sorte que les dérivées curvilignes de ces champs s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \underline{r}'(s) = \sum_{i=1}^3 \varphi'_i(s) \underline{r}_i \\ \underline{d}'_\alpha(s) = \sum_{i=1}^3 \varphi'_i(s) \underline{d}_{\alpha,i} \end{cases} \quad (2.53)$$

Ces champs interpolés seront utilisés pour calculer les fonctions $\underline{N}_{int}, \underline{G}_{\alpha,int}, \underline{H}_{\alpha,int}$ définies par les expressions (2.37) et intervenant dans le problème continu (2.39). Par ailleurs, les termes virtuels apparaissant dans la forme faible du problème continu sont interpolés de manière analogue. Le problème discret à résoudre s'écrit alors :

Trouver $(\underline{r}_i, \underline{d}_{\alpha,i}) \in K_h$ tel que $\forall (\hat{\underline{r}}_i, \hat{\underline{d}}_{\alpha,i}) \in K_{0h}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{NN} \left\{ \int_0^L \left(-\underline{N}_{int}(\underline{r}_i, \underline{d}_{\alpha,i}) \varphi'_i(s) + \underline{N}_{ext}(s) \right) ds \right\} \cdot \hat{\underline{r}}_i \\ & + \sum_{i=1}^{NN} \left\{ \int_0^L \left(-\underline{G}_{\alpha,int}(\underline{r}_i, \underline{d}_{\alpha,i}) + \underline{H}_{\alpha,ext}(s) - \underline{H}_{\alpha,int}(\underline{r}_i, \underline{d}_{\alpha,i}) \varphi'_i(s) \right) ds \right\} \cdot \hat{\underline{d}}_{\alpha,i} = 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Nous allons détailler dans la prochaine partie la manière par laquelle les différentes intégrales intervenant dans le problème ci-dessus sont approchées numériquement.

Intégration numérique

Pour évaluer l'intégrale d'une fonction quelconque ψ sur la ligne moyenne, la première étape est de réaliser une décomposition en une somme d'intégrales élémentaires :

$$\int_0^L \psi(s) ds = \sum_{k=1}^{NE} \left(\int_{E_k} \psi(s) ds \right)$$

où NE est le nombre d'élément finis total de la structure discrétisée.

Par la suite, le calcul de l'intégrale sur chaque élément fini E_k se fait en deux étapes :

a - Comme expliqué précédemment, on se ramène à une intégrale sur l'élément de référence $[-1; 1]$ par changement de variable d'intégration :

$$\int_{E_k} \psi(s) ds = \int_{-1}^1 J(\hat{s}) \hat{\psi}(\hat{s}) d\hat{s}$$

où J est le jacobien de la transformation permettant de passer de l'élément réel à l'élément de référence, défini par $J = \frac{\partial s}{\partial \hat{s}}$.

b - Malgré le fait que l'on possède une expression explicite des fonctions de forme sur l'élément de référence, cette intégrale ne peut en général pas être calculée analytiquement. Habituellement, on doit recourir à une méthode d'intégration approchée appelée *de Gauss*.

Pour notre étude, un choix classique a été fait en utilisant 3 points de Gauss par élément, dont les coordonnées et les poids sont résumés dans la tableau 2.1. Le calcul approché de l'intégrale sur l'élément de référence par une quadrature de Gauss s'écrit alors :

$$\int_{-1}^1 J(\hat{s}) \hat{\psi}(\hat{s}) d\hat{s} = \sum_{g=1}^3 \omega_g \left[J(\hat{s}_g) \hat{\psi}(\hat{s}_g) \right]$$

Point de Gauss	Abscisse $\hat{s}_g$	Poids ω_g
1	$-\sqrt{3/5}$	5/9
2	0	8/9
3	$\sqrt{3/5}$	5/9

TABLE 2.1 – Abscisses et poids des trois points de Gauss utilisés dans l'élément de référence $[-1; 1]$.

Résolution numérique

On note $\underline{Q}$, le vecteur contenant les inconnues nodales du problème, qui est de taille $\text{NDDL} = 9 \times \text{NN}$. Ceci nous amène à exprimer l'équation 2.54 en une résultante (dit résidu) qui doit être nulle en chaque point de la structure étudiée et pour tout champs de déplacements virtuels. Le problème discret peut donc se reformuler sous la forme :

Trouver $\underline{Q} \in \mathbb{R}^{\text{NDDL}}$ tel que $\forall \hat{\underline{Q}} \in \mathbb{R}^{\text{NDDL}}$:

$$\underline{R}(\underline{Q}) \cdot \hat{\underline{Q}} = 0 \quad (2.55)$$

Ce problème est a priori non linéaire. En l'occurrence à ce stade de l'étude, cette non linéarité est d'origine géométrique associée au cadre de grandes déformations dans lequel on se place. La prise en compte de ces non-linéarités dues au contact frottant dans la résolution numérique du problème sera présentée dans le chapitre 3 de ce rapport.

Dans ces conditions de non linéarité, nous devons avoir recours à des méthodes de résolutions itératives de type Newton-Raphson pour résoudre le système (2.55). La solution $\underline{Q}^{n+1}$ à l'itération $n+1$ est déterminée à partir de l'estimation de la solution à l'itération précédente $\underline{Q}^n$ et une correction de la solution par l'itération en cours $\delta\underline{Q}$, sous la forme :

$$\underline{Q}^{n+1} = \underline{Q}^n + \delta\underline{Q}$$

où l'incrément de solution $\delta\underline{Q}$ est calculé par résolution du problème linéarisé suivant :

$$\frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{Q}} \cdot \delta\underline{Q} = -\underline{R}(\underline{Q}^n)$$

On considère que l'algorithme itératif a convergé lorsque la norme du résidu $\|\underline{R}(\underline{Q}^n)\|$ et/ou la norme de l'incrément de déplacements $\|\delta\underline{Q}\|$ sont suffisamment proches de zéro.

2.4.2 Phénomène de verrouillage numérique

La méthode des éléments finis que nous venons de décrire dans cette section est un moyen de calcul numérique particulièrement important et très répandu dans le domaine de la mécanique des solides. Toutefois, il est capital de réaliser une analyse critique du résultat numérique obtenu pour vérifier la compatibilité entre la théorie et la réalité physique. A ce titre, l'une des difficultés majeures de la discrétisation par éléments finis est la simulation des structures minces. Dans ce cas de figure, le calcul risque de faire apparaître une sur-rigidité artificielle de la structure lorsque son épaisseur diminue, c'est à dire une dégradation de l'approximation de la solution. Ce phénomène, appelé *verrouillage numérique*, est purement numérique puisqu'il dépend de la taille et de la richesse des éléments finis, contrairement au phénomène de verrouillage de Poisson présenté dans la section 2.3.2.

Le phénomène de verrouillage numérique apparaît lorsqu'une contrainte cinématique est imposée partout dans la structure, mais que le maillage n'est pas suffisamment riche pour la respecter à chaque point de Gauss.

Dans le cas des poutres, le rapport entre la rigidité en cisaillement GA (ou en élongation EA) et la rigidité en flexion EI tend vers l'infini lorsque le rayon de la poutre diminue. Ainsi, lorsque le rayon tend vers zéro, les termes de cisaillement et d'élongation sont très pénalisés et le problème limite revient à minimiser l'énergie de flexion sous la contrainte de ne pas avoir de cisaillement et d'élongation en tout point dans la longueur. On distingue alors deux types de verrouillage numérique : le *verrouillage de membrane* (blocage des termes d'élongation pour des poutres initialement courbées) et le *verrouillage de cisaillement* (blocage des termes de cisaillement). Dans notre étude, nous supposons que la poutre est rectiligne dans son état de repos, donc nous ne traiterons que le verrouillage de cisaillement.

La raison pour laquelle la contrainte d'absence de cisaillement ne peut pas être satisfaite partout dans le maillage est que le terme de déformation en cisaillement couple des champs non dérivés $\underline{d}_\alpha$ et des champs dérivés $\underline{r}'$. Ces champs sont alors approchés par des polynômes d'ordres différents, ce qui crée une incompatibilité : cela revient à pénaliser la différence entre une fonction linéaire ($\underline{r}'$) et une fonction quadratique ($\underline{d}_\alpha$). Ces deux fonctions deviennent égales uniquement si elles s'annulent sur tout l'élément.

Nous avons étudié ce phénomène sur deux exemples :

- Dans un premier temps, nous considérons le test de flexion Cantilever d'une poutre dans le cadre de petites déformations présenté dans la sous-section 2.3.2. La solution numérique présentée ici est obtenue avec le logiciel *Multifil* : le modèle de poutre à cinématique enrichie au premier ordre basé sur des vecteurs de section non contraints et une loi de comportement standard tel que le coefficient de Poisson est considéré nul dans les coefficients se rapport aux termes de déformations non constants dans la section pour lever le verrouillage de Poisson. On présente sur la figure 2.7 une comparaison entre les résultats analytique et numérique en faisant varier le rayon de la poutre. On remarque bien sur ces résultats que pour une taille de maille donnée (ici 10 éléments finis quadratiques) la solution numérique s'éloigne de la solution analytique quand le rayon diminue. On peut vérifier que ce phénomène est purement numérique en augmentant le nombre d'éléments finis dans la longueur de la poutre : on vérifie alors avec les résultats présentés sur la figure 2.8 la bonne convergence en maillage vers la solution analytique même pour une faible valeur de rayon.
- Dans un second temps, nous étudions dans le cadre de grandes déformations ce test de flexion Cantilever, dont la solution analytique est donnée par [Bisshopp 1945] : nous imposons pour cela un effort à l'extrémité d'une poutre horizontale de longueur de 10mm et de rayon=0.01mm dans le but d'obtenir un déplacement vertical de 8.1mm. Il peut être vérifié avec les résultats présentés sur la figure 2.9(b) qu'on retrouve bien la solution analytique lorsque le maillage est suffisamment fin (50 éléments finis dans la longueur), alors que la sur-rigidification due au verrouillage numérique est observable lorsqu'on diminue le nombre d'éléments dans la longueur

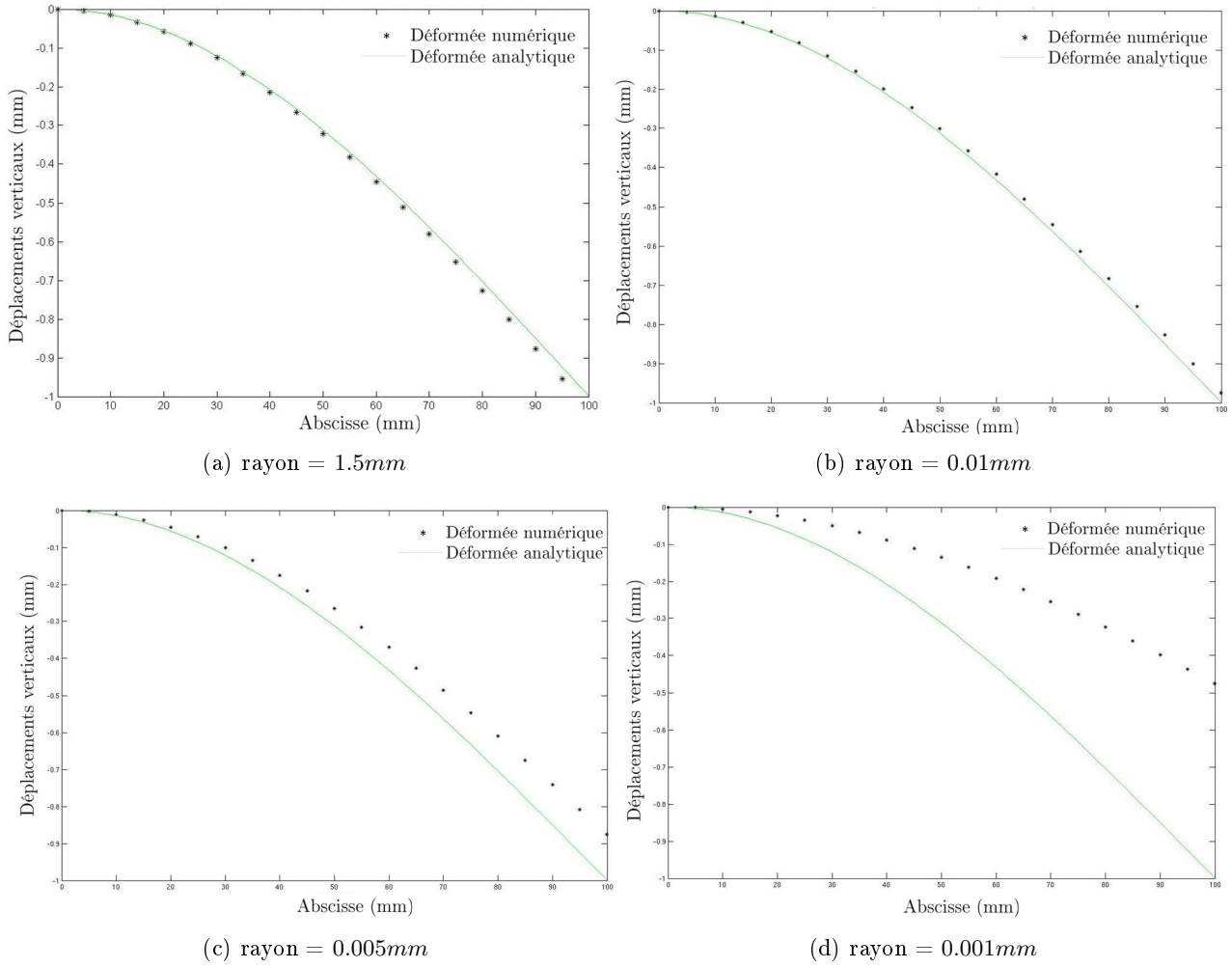


FIGURE 2.7 – Phénomène de verrouillage numérique lorsque le rayon diminue sur le test de flexion Cantilever en petites déformations.

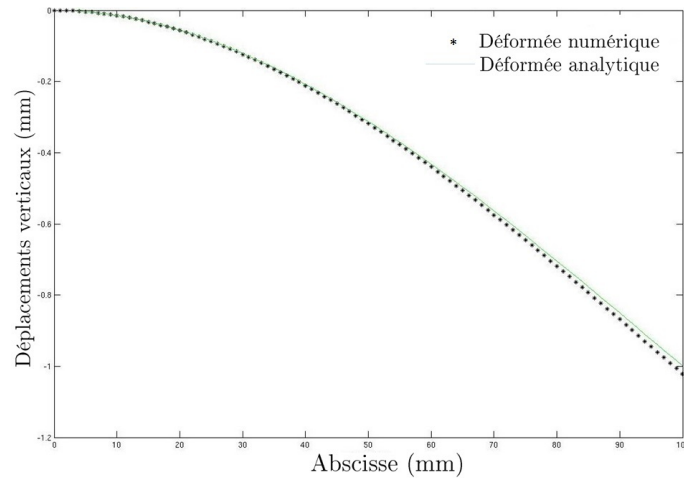


FIGURE 2.8 – Convergence en maillage pour le test de flexion Cantilever en petites déformations(rayon=0.001mm, NE=50).

(figure 2.9(a)).

Ce phénomène de verrouillage numérique a été largement étudié dans la littérature pour le cas

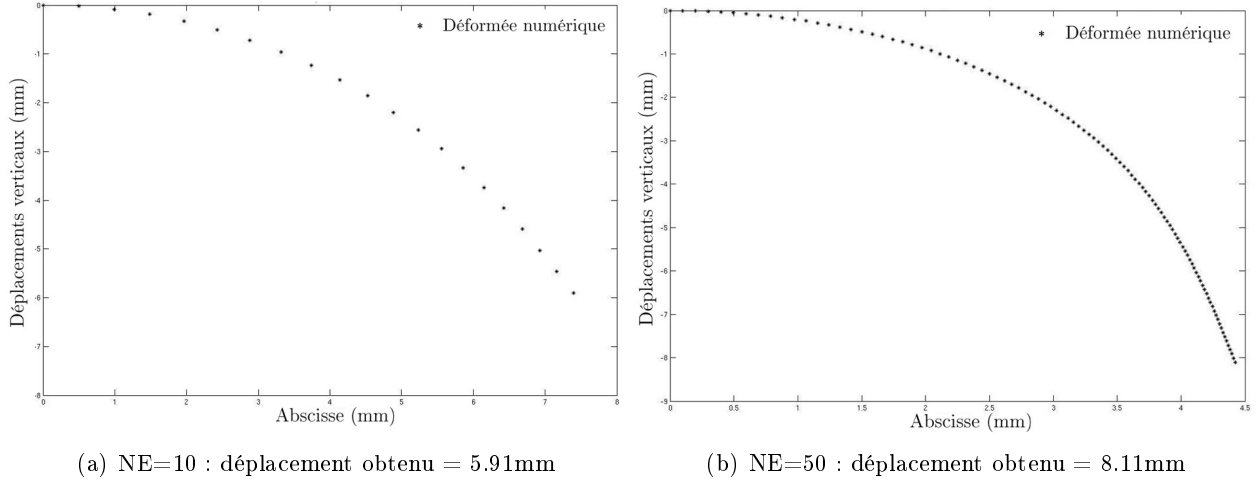


FIGURE 2.9 – Convergence en maillage sur le test de flexion Cantilever en grandes déformations.

des structures fines. Pour une présentation plus approfondie de ce problème, on renvoie le lecteur vers les travaux de D.Chapelle [Chapelle 1997] pour le cas de poutres ou pour des cas plus complexes des coques [Chapelle 2003].

Une solution classique pour éliminer le phénomène de verrouillage numérique est d'utiliser des *formulations mixtes*, ou de manière similaire de réaliser une *sous-intégration* des termes de cisaillement. Cette méthode de sous-intégration donne plus de flexibilité au problème : à la place d'imposer en tout point de la longueur de la poutre la contrainte de chercher une solution sans cisaillement ni compression, cela revient à imposer cette contrainte uniquement en moyenne sur chaque élément fini. En pratique, il s'agit d'intégrer les termes de flexion d'une manière exacte sur chaque élément fini (avec trois points de Gauss) alors que les termes de cisaillement ne sont intégrés qu'en un seul point de Gauss.

Dans notre cas, étant donné les dimensions caractéristiques des fils étudiés et la finesse du maillage utilisé, nous estimons que le verrouillage numérique est négligeable. En effet, le rapport entre la longueur d'un élément fini et le rayon de la poutre sera typiquement de l'ordre de 10 dans nos simulations et on peut vérifier sur les résultats précédents que la sur-rigidité est alors encore très négligeable. On note que si l'on souhaitait mettre en place une telle technique, une des solutions possibles serait de sous-intégrer le terme $\underline{S}_0 : \underline{\hat{\varepsilon}}_0$ apparaissant dans l'expression (2.34) de la puissance virtuelle intérieure, alors que le terme $\underline{S}_\beta : \underline{\hat{\varepsilon}}_\beta$ serait intégré de manière exacte.

Modélisation des interactions entre fibres

Sommaire

Introduction	37
3.1 Description continue du problème de contact	38
3.1.1 Cinématique	38
3.1.2 Modèles mécaniques de contact frottant	39
3.1.3 Formulation faible	43
3.2 Traitement numérique du problème de contact	43
3.2.1 Détection des zones potentielles de contact	44
3.2.2 Discrétisation et définition des paires de contact	45
3.2.3 Méthodes de résolution numérique du contact	50
3.2.4 Traitements spéciaux de certaines non-linéarités	52
3.2.5 Méthode de résolution pour le frottement	53
3.2.6 Bilan de l'algorithme de résolution : aspect triple boucle	55

Introduction

Les câbles textiles que nous cherchons à modéliser sont obtenus à partir d'un assemblage de fibres, au sein duquel les interactions entre les fibres jouent un rôle mécanique fondamental. Nous avons décrit dans le chapitre précédent la modélisation cinématique et le comportement d'une fibre unitaire dans un cadre de grandes déformations. Nous allons maintenant nous intéresser à la prise en compte des interactions de contact frottant qui se produisent entre elles.

Tout au long de ce chapitre, nous allons évoquer des aspects généraux sur la gestion du contact frottant entre deux corps déformables, en nous focalisant en particulier sur les problématiques liées aux contacts entre un grand nombre de poutres en grandes déformations. L'étude de la modélisation du contact laisse entrevoir deux volets : un volet mécanique associé à la modélisation cinématique du phénomène de contact ainsi que la définition des efforts d'interactions qui en résultent, et un volet numérique relatif à la discrétisation par éléments finis et aux méthodes de résolution du problème.

L'objectif de ce chapitre n'est pas de faire un cours exhaustif sur la gestion du contact, mais plutôt d'expliquer la modélisation existant dans le logiciel *Multifil* et de la situer parmi ce qui existe dans la littérature, afin d'introduire les notions utiles à la description des apports de cette thèse dans les chapitres suivants. Pour plus de précisions sur ce sujet, le lecteur peut consulter les traités de Wriggers sur le contact [Wriggers 2006], dont ce chapitre s'est largement inspiré. Nous avons divisé ce chapitre en trois sections :

- Dans un premier temps, nous allons présenter dans la section 3.1 la description cinématique du contact et du frottement, ainsi que les modèles mécaniques associés. Cela va nous permettre de construire les termes intervenant dans la formulation faible du problème.

- Ensuite, nous décrirons dans la section 3.2 les aspects numériques utiles à la résolution d'un problème de contact dans un solveur éléments finis : nous commencerons par expliquer la discrétisation du problème, avec notamment l'introduction d'une ligne intermédiaire, spécifique au solveur *Multifil*. Puis nous présenterons plusieurs méthodes numériques utilisées pour résoudre un problème de contact, qui sont adaptées pour gérer les fortes non linéarités de ce type de problèmes. Nous insisterons alors dans cette partie sur les techniques introduites par D.Durville pour s'adapter aux spécificités du type de structures que nous étudions.

3.1 Description continue du problème de contact

3.1.1 Cinématique

On considère deux solides déformables S_1 et S_2 , occupant respectivement les volumes Ω_1^0 et Ω_2^0 en configuration initiale, et les volumes Ω_1 et Ω_2 en configuration déformée. Comme cela est fait classiquement en mécanique des solides (voir par exemple [Tallec 2009]), un point matériel occupant la position $\underline{X}$ dans la configuration initiale est identifié dans la configuration courante par sa position déformée $\underline{x}$. La transformation $\Phi : \underline{X} \mapsto \underline{x}$ caractérise le mouvement.

Distance normale

La modélisation du contact unilatéral se base sur la définition du couple de particules susceptibles d'être en contact et la formulation d'une condition cinématique de non-interpénétration entre elles. Pour cela, la distance entre les particules candidates au contact et appartenant à chacun des corps, doit être évaluée pour déterminer s'il y a contact ou non. Cette distance, appelée **gap** et notée g_N , est mesurée selon une direction précise $\underline{n}$ à déterminer de manière à être signée. Le vecteur $\underline{n}$ est appelé direction normale du contact, et correspond à la direction normale sortante à la surface au point $\underline{x}^2$.

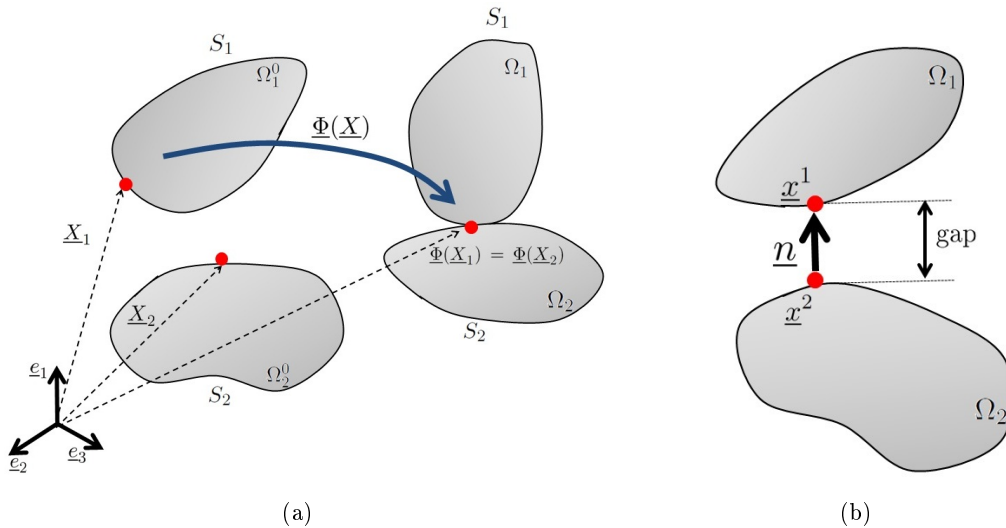


FIGURE 3.1 – (a) Contact entre deux corps déformables en grandes déformations (b) Mesure de la distance entre deux points, notion du gap

Pour garantir la non interpénétration, le gap doit alors être maintenu positif, ce qui s'écrit classiquement comme suit :

$$g_N = (\underline{x}^1 - \underline{x}^2) \cdot \underline{n} > 0 \quad (3.1)$$

où $\underline{x}^1$ et $\underline{x}^2$ sont les positions dans la configuration courante des deux particules candidates à être en contact appartenant respectivement aux deux corps.

La détermination de ce couple de particules et de la normale de contact associée intervenant dans la condition cinématique de non-interpénétration souligne une des difficultés de résolution des problèmes de contact. Ces déterminations constituent le cœur de l'élaboration de modèles de détermination du contact. Les techniques numériques utilisées dans la littérature seront abordées dans la partie 3.2.2 de ce chapitre.

Distance tangentielle

Le glissement relatif des deux points en contact, appelé **gap tangentiel**, correspond à la distance selon les directions perpendiculaires à la direction normale de contact. Il peut être défini par :

$$\underline{g}_T = (\underline{I} - \underline{n} \otimes \underline{n}) \cdot (\underline{x}^1 - \underline{x}^2) \quad (3.2)$$

En pratique, deux états peuvent être distingués en fonction des mouvements tangentiels relatifs postcontact entre corps en contact (voir figure 3.2) :

- un état adhérent (*stick*) : sous un chargement F , il ne se produit aucun mouvement relatif entre les deux corps en contact dans la direction tangentielle. Cette état se traduit par la relation :

$$\dot{\underline{g}}_T = 0 \quad (3.3)$$

- un état de glissement (*slip*) : au delà d'un certain seuil d'effort tangentiel noté $R_{\max}$, les deux corps glissent l'un sur l'autre au niveau de l'interface de contact entre eux.

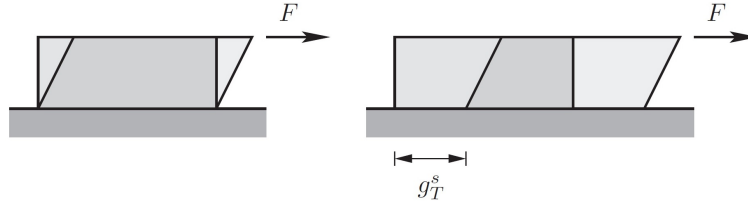


FIGURE 3.2 – Phénomènes d'adhérence et de glissement (figure issue de [Wriggers 2004])

3.1.2 Modèles mécaniques de contact frottant

Notre objectif étant d'écrire le problème mécanique d'équilibre d'un assemblage de fils (dont le comportement interne de chacun est régi par l'équation 2.39) en prenant en compte les interactions du contact frottant entre eux, il est nécessaire alors d'établir les relations entre les variables cinématiques déjà introduites et les efforts qui en résultent.

La force de contact entre les deux particules, notée $\underline{R}$, est non nulle uniquement lorsque la condition cinématique (3.1) n'est pas satisfaite, ce qui traduit un état de contact entre les deux points. Cette force peut être décomposée en une composante normale et des composantes tangentielles de la manière suivante :

$$\underline{R} = R_N \underline{n} + \underline{R}_T \quad (3.4)$$

où $\underline{n}$ est la direction normale introduite précédemment. Nous allons décrire dans cette sous-section les lois constitutives liant le gap à ces composantes d'efforts de contact.

Effort de contact normal

L'effort de contact normal R_N dépend de la distance normale entre eux. Lorsque les deux corps sont en contact, alors la composante normale de cette force $R_N = (\underline{R} \cdot \underline{n}) \underline{n}$ devient strictement négative, ce qui traduit une mise en compression des deux solides.

L'approche la plus fréquemment utilisée se base sur des considérations purement géométriques liées à la condition de non interpénétration des deux corps en contact (3.1)(cf. [Johnson 1985] et [Kikuchi 1988]). La condition de contact est alors décrite par les conditions de Hertz-Signorini-Moreau (cf. [Wriggers 2006]), qui se formulent sous la forme d'un système de trois équations entre le gap et la pression normale de contact comme suit :

$$g_N \geq 0 ; \quad R_N \leq 0 ; \quad R_N g_N = 0 \quad (3.5)$$

La première inégalité correspond à la condition cinématique de non-interpénétration, tandis que la deuxième équation traduit le fait que la réaction normale est une force de compression. La troisième condition représente quant à elle les deux états possibles, à savoir l'état de contact ($g_N = 0$, $R_N < 0$) ou d'absence de contact ($g_N > 0$, $R_N = 0$), et est connu comme la condition de complémentarité (voir [Klarbrin 1997]). Cette condition est représentée graphiquement sur la figure (3.3).

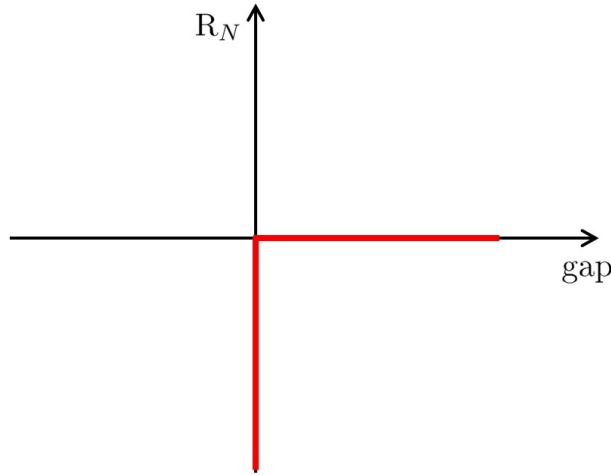


FIGURE 3.3 – Condition de contact unilatéral

Remarque :

Il existe également une deuxième approche qui s'appuie sur des lois constitutives permettant de caractériser le comportement de la structure locale des surfaces en contact. En effet, dans certaines situations de contact, impliquant par exemple des surfaces rugueuses ou nécessitant beaucoup de précision, le traitement du contact requiert une description microscopique de l'état physique local de ces surfaces (distribution et géométrie des aspérités...). Pour cela, la pression du contact normal est déterminée par le biais d'une équation constitutive qui dépend de la valeur de gap et des paramètres décrivant la géométrie de la surface et la physique du matériau qu'il la constitue.

Dans ce contexte, deux techniques peuvent être distinguées (cf. [Wriggers 2006]) : La première méthode se base sur des modèles statistiques pour la description de l'état local de la surface (voir [Willner 1997]) ; La deuxième méthode repose plutôt sur des résultats expérimentaux pour déterminer les paramètres constitutifs donnant l'expression de la pression du contact (voir [Kragelsky 1982]).

A titre d'exemple, ces auteurs avaient proposé une loi simple décrivant la pression de contact de la forme suivante :

$$R_N = C_N (g_N)^n$$

où C_N et n sont deux paramètres déterminés expérimentalement. De nombreuses formulations plus ou moins compliquées, prenant en compte l'influence de différents paramètres tels que la thermique, ont fait l'objet de plusieurs travaux. Le lecteur intéressé pourra consulter [Zavarise 1992].

Lois constitutives de frottement

Les efforts tangentiels de contact, que l'on note $\underline{R}_T$, sont issus du frottement entre les deux corps. Ils tendent à s'opposer aux déplacements relatifs des deux corps jusqu'à un certain seuil noté $R_{\max}$. Au delà les corps se mettent à glisser l'un sur l'autre. Classiquement dans la littérature (voir par exemple [Alart 1991] ou [Pietrzak 1999]), les deux états d'adhérence et de glissement sont décrits mathématiquement à travers la formulation suivante :

$$\dot{\underline{g}}_T = \left\| \dot{\underline{g}}_T \right\| \frac{\underline{R}_T}{\|\underline{R}_T\|} ; \quad \|\underline{R}_T\| \leq R_{\max} ; \quad \left\| \dot{\underline{g}}_T \right\| (\|\underline{R}_T\| - R_{\max}) = 0 \quad (3.6)$$

La première condition est une loi de glissement qui définit la direction de la réaction tangentielle qui est colinéaire avec la vitesse de glissement. La seconde traduit le critère de frottement et la dernière est une condition de complémentarité qui explique qu'il ne peut y avoir glissement que si la force tangentielle est au seuil. La valeur de ce seuil est le plus souvent régi par la loi de frottement de Coulomb (1785).

Loi de Coulomb standard

Physiquement, le phénomène de frottement entre deux corps n'est pas indépendant du contact normal. Dans le modèle de frottement de Coulomb, la valeur seuil de la force tangentielle $R_{\max}$ intervenant dans le système d'équation 3.6 s'exprime en fonction de la réaction normale du contact R_N de la manière suivante :

$$R_{\max} = -\mu R_N \quad (3.7)$$

où μ est le coefficient de frottement. Ce coefficient dépend des matériaux constituant les corps en contact, et d'autres paramètres tels que l'état de surface, la vitesse relative de glissement, la pression normale du contact, ... Pour plus de détails sur la dépendance du coefficient de frottement de ces paramètres constitutifs, le lecteur pourra consulter le livre de Wriggers [Wriggers 2006]. Cette loi est représentée par le graphe de la figure 3.4.

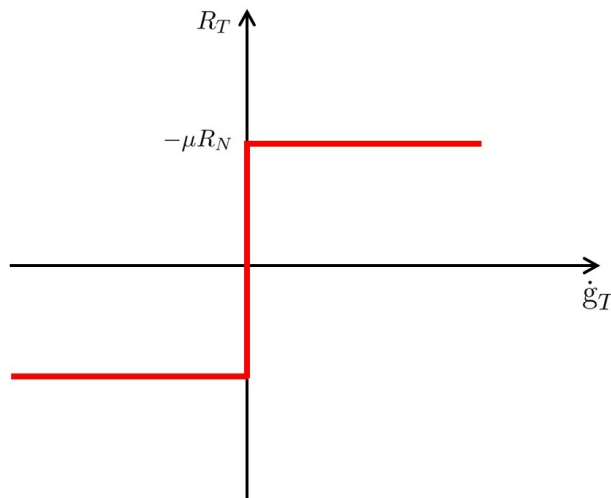


FIGURE 3.4 – Loi standard de frottement de Coulomb

Loi de Coulomb régularisée

Un des inconvénients majeurs de la loi de Coulomb est sa non-différentiabilité au voisinage d'une vitesse de glissement nulle. D'un point de vue algorithmique, cette singularité pose ainsi des problèmes de convergence. Pour palier cette difficulté, il existe dans la littérature des modèles régularisés, initialement développés par [Oden 1983]. Pour plus de précisions, le lecteur pourra consulter par exemple [Raous 1999].

Comme cela est expliqué dans [Wriggers 2006], la régularisation réalisée consiste à définir des fonctions qui procurent une transition progressive plus "douce" entre l'état d'adhérence et de frottement. La forme explicite de ces fonctions est donnée par :

$$\underline{R}_T = -\mu \varphi^i \left(\|\underline{\dot{g}}_T\| \right) |R_N| \frac{\underline{\dot{g}}_T}{\|\underline{\dot{g}}_T\|} \quad (3.8)$$

Dans la littérature, trois formes sont souvent proposées pour définir les fonctions φ^i :

- Une fonction de régularisation quadratique φ^1 ;
- Une fonction tangente hyperbolique φ^2 ;
- Une fonction affine par morceau φ^3 .

Ces trois fonctions sont tracées sur la figure 3.5. Leurs expressions analytiques peuvent être trouvées dans [Wriggers 2006].

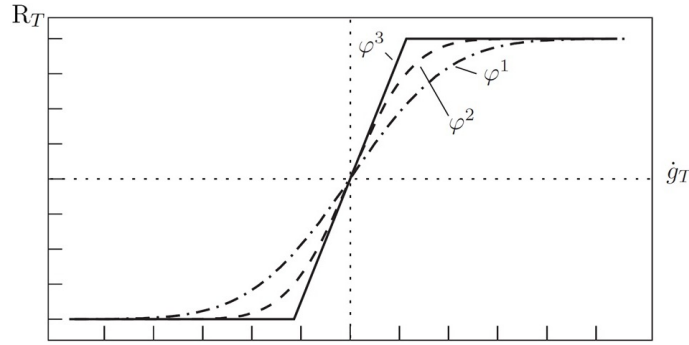


FIGURE 3.5 – Modèles de régularisation de la loi de Coulomb (figure issue de [Wriggers 2006])

Dans le logiciel *Multifil* choisi pour le cadre de cette thèse, le frottement est géré avec une loi de Coulomb régularisée utilisant la fonction affine par morceau φ^3 .

Dans la littérature, le phénomène de frottement a été souvent rapproché du comportement d'un matériau élasto-plastique (voir par exemple [Michalowski 1978], [Curnier 1984] et [Laursen 1993]) :

- Pour des valeurs de déplacements tangentiels inférieurs la valeur limite du déplacement relatif tangential fixée a priori, la réaction tangentielle est proportionnelle au déplacement relatif tangential (à réaction normale fixe). Par analogie avec la théorie de plasticité, cette partie correspond à la phase élastique du comportement.
- La deuxième partie de la courbe traduit le glissement la partie irréversible (glissante) du modèle (comportement plastique).

Avec cette analogie, le gap tangential est alors décomposé en une contribution élastique réversible, notée $\underline{g}_T^e$, et une partie plastique irréversible, notée $\underline{g}_T^s$:

$$\underline{g}_T = \underline{g}_T^e + \underline{g}_T^s \quad (3.9)$$

L'interprétation physique de cette analogie peut être recherchée à une échelle fine en analysant les mécanismes microscopiques à l'interface de contact. La partie réversible peut être attribuée aux

déformations élastiques des aspérités de la surface. Le glissement est relié à la rupture de ces aspérités et la déformation plastique associée. A ce sujet, une analyse physique très intéressante pourra être consultée dans [Oden 1985].

Remarque :

Dans toute cette partie, la loi de frottement a été formulée en vitesse. Pourtant, le problème que nous traitons est quasi-statique, et ne fait donc pas intervenir de notion de temps ou de vitesse. Nous expliquerons dans la section 3.2.5 comment formuler dans ce cas la loi de frottement en utilisant une formulation incrémentale.

3.1.3 Formulation faible

Nous rappelons que la résolution numérique du problème de contact étudié sera réalisée avec la méthode des éléments finis. Comme cela a été expliqué dans le chapitre précédent (voir section 2.4), cette approche se base sur le principe des travaux virtuels (c'est à dire la formulation faible du problème), que nous allons donc devoir écrire en prenant en compte les efforts internes et externes dans les corps, mais aussi les interaction de contact frottant entre eux. Le principe des travaux virtuels s'écrit alors avec une description Lagrangienne sous la forme :

Trouver $\underline{x}^i \in E_{\text{ad}}$ tel que $\forall \hat{\underline{x}}^i \in E_0$

$$\sum_{i=1}^M \left(P_{\text{int}}^i(\hat{\underline{x}}^i) + P_{\text{ext}}^i(\hat{\underline{x}}^i) + \sum_{j=1}^M P_{\text{cnt-frot}}^{ij}(\hat{\underline{x}}^i, \hat{\underline{x}}^j) \right) = 0 \quad (3.10)$$

Dans cette expression, les deux premiers termes représentent la somme des travaux virtuels des efforts internes et externe de chacun des corps, alors que le troisième correspond au travail virtuel des interactions du contact-frottant entre deux fibres voisines i et j .

Le travail virtuel dû aux interactions de contact normal et tangentiel entre deux fibres i et j s'écrit au niveau de l'interface du contact Γ_{cnt}^{ij} , sous la forme :

$$P_{\text{cnt-frot}}^{ij}(\hat{\underline{x}}^i, \hat{\underline{x}}^j) = \int_{\Gamma_{\text{cnt}}^{ij}} \left(R_N \hat{g}_N + \underline{R}_T \cdot \hat{\underline{g}}_T \right) d\Gamma \quad (3.11)$$

où $\hat{g}_N$ et $\hat{\underline{g}}_T$ sont respectivement la variation virtuelle des parties normale et tangentielle du gap, définie par :

$$\begin{cases} \hat{g}_N = (\hat{\underline{x}}^1 - \hat{\underline{x}}^2) \cdot \underline{n} \\ \hat{\underline{g}}_T = (\underline{I} - \underline{n} \otimes \underline{n}) \cdot (\hat{\underline{x}}^1 - \hat{\underline{x}}^2) \end{cases} \quad (3.12)$$

3.2 Traitement numérique du problème de contact

Un problème de contact entre un grand nombre d'objets et dans un cadre de grandes déformations est particulièrement difficile à résoudre numériquement. De nombreuses approches ont été développées dans la littérature depuis plusieurs dizaines d'années pour traiter ce genre de problèmes. Mais le choix d'une méthode robuste et efficace dépend beaucoup du type de géométrie considérée, et donc aucune d'entre elles ne se dégage clairement de manière générale. En particulier, assez peu d'auteurs ont abordé de manière spécifique les problèmes de contact entre poutres. Nous allons alors décrire dans cette section l'approche développée dans *Multifil* pour traiter ce type de problèmes, et la comparer à quelques méthodes classiques de la littérature pour expliquer les avantages qu'elle apporte.

La première étape dans la modélisation numérique du contact est de discrétiser les surfaces de contact. Mais lorsque le problème fait intervenir un grand nombre de corps, comme c'est le cas pour les structures fibreuses, plusieurs milliers de points peuvent potentiellement entrer en contact. Leur identification et leur discrétisation devient critique en temps de calcul, surtout dans un cadre de grandes déformations, puisque les lieux susceptibles du contact sont alors a priori inconnus. La phase de détection du contact nécessite donc des méthodes sophistiquées. Pour optimiser le temps de calcul, les algorithmes de discrétisation du contact fonctionnent généralement en deux phases :

- 1- La recherche de zones de proximité grossières où un contact peut avoir lieu ;
- 2- La détermination des points effectivement en contact dans ces zones.

3.2.1 Détection des zones potentielles de contact

Pour accélérer cette phase de détection, il est nécessaire de définir des *zones de proximité*, dont chacune définit un couple de portions de deux poutres séparées d'une distance inférieure à un *critère de proximité* δ_{prox} donné. Il est important de préciser que ces zones de proximité sont déterminées de manière grossière, de manière à limiter le temps de calcul associé. La gestion du contact est ensuite réalisée de manière plus fine uniquement dans ces zones réduites. Concrètement, pour chaque paire de poutres, la construction de ces zones de proximités se fait en parcourant un ensemble de N points discrets appartenant à l'une des deux poutres, appelés *points tests*, et en cherchant les points associés les plus proches sur la poutre opposée. Les points tests utilisent une discrétisation assez grossière de la ligne moyenne de la poutre concernée, indépendante de la discrétisation Éléments Finis.

Considérons un point test P appartenant à la I^{me} poutre, d'abscisse curviligne s_p^I $0 \leq p \leq N$. Le point qui lui est le plus proche appartenant à la ligne moyenne de la J^{me} poutre est caractérisé par :

$$s_p^J = \arg \min_{s^J \in [0;L]} (\| \underline{r}^I(s_p^I) - \underline{r}^J(s^J) \|) \quad (3.13)$$

En pratique, pour déterminer le point le plus proche sur la poutre opposée, la première étape est d'identifier l'élément fini dans lequel il se situe. Cet élément contient le projeté orthogonal du point P sur la courbe (voir figure 3.6), et est donc caractérisé par la relation suivante :

$$((\underline{r}_{N_1}^J - \underline{r}^J(s_p^I)) \cdot \underline{t}_{N_1}^J) ((\underline{r}_{N_2}^J - \underline{r}^J(s_p^I)) \cdot \underline{t}_{N_2}^J) < 0 \quad (3.14)$$

où N_1 et N_2 sont les deux nœuds extrémités d'un élément fini donné sur la J^{me} poutre, et $\underline{t}_{N_1}^J$ et $\underline{t}_{N_2}^J$ sont les tangentes en ces deux nœuds.

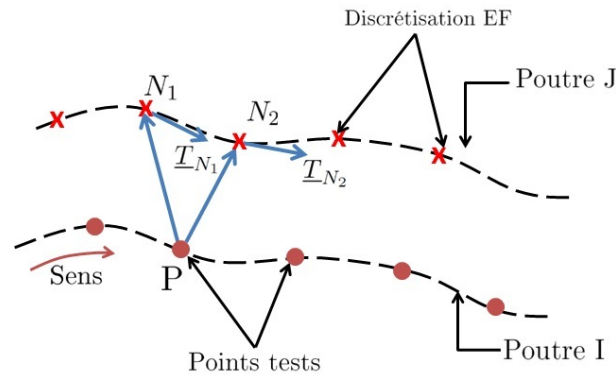


FIGURE 3.6 – Identification de l'élément fini contenant le projeté orthogonal du point P .

Une fois l'élément fini identifié, le point recherché $\underline{r}^J(s_p^J)$ est la projection orthogonale du point test P à l'intérieur de cet élément. Son abscisse curviligne est alors calculée en résolvant l'équation suivante :

$$(\underline{r}^J(s_p^J) - \underline{r}^I(s_p^I)) \cdot \underline{t}^J(s_p^J) = 0 \quad (3.15)$$

où $\underline{t}^J(s_p^J)$ est la tangente au point d'abscisse curviligne s_p^J . Cette équation non linéaire est résolue par une méthode de Newton. Dans le cas où l'algorithme ne converge pas vers une solution à l'intérieur des bornes de l'élément fini préalablement déterminé, une technique de dichotomie est utilisée.

Une portion est par la suite associée à chaque point test et à chaque point proche déterminé sur la poutre opposée. Une zone de proximité est créée pour chaque série de paires de points respectant le critère de proximité. Une illustration de cette construction est disponible sur la figure 3.7.

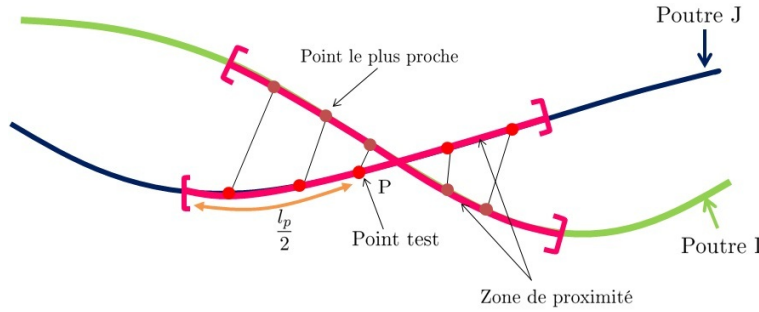


FIGURE 3.7 – Construction des zones de proximité entre poutres.

Au final, la $k^{\text{ième}}$ zone de proximité qui délimite deux portions de ligne moyenne des deux poutres I et J est alors définie par :

$$Z_{\text{prox},k}^{IJ} = \left\{ \left[s_p^I - \frac{l_p}{2}, s_p^I + \frac{l_p}{2} \right], \left[s_p^J - \frac{l_p}{2}, s_p^J + \frac{l_p}{2} \right], \text{ tel que } \|\underline{r}^I(s_p^I) - \underline{r}^J(s_p^J)\| \leq \delta_{\text{prox}} \right\} \quad (3.16)$$

La dernière étape consiste enfin à fusionner toutes les zones de proximités qui sont contigües en une seule zone élargie.

3.2.2 Discrétisation et définition des paires de contact

Une fois les zones de proximité construites de manière grossière, l'étape suivante consiste à détecter de manière plus précise le contact entre les poutres dans ces zones. Pour cela, la méthode choisie devra tenir compte de la non-conformité des maillages, de la forme des zones de contact, et surtout du temps de calcul. Nous présenterons d'abord dans cette partie quelques méthodes disponibles dans la littérature, puis nous expliquerons l'approche originale qui existe dans *Multifil*.

Détermination de la distance minimale entre deux poutres

Dans la littérature, on peut distinguer une approche adaptée spécifiquement au traitement du contact entre poutres dans le cadre de grandes déformations. Il s'agit de l'approche développée par Wriggers, à propos de laquelle le lecteur trouvera plus de détails dans l'article [Wriggers 1997] ou encore le chapitre de son livre [Wriggers 2006] dédié au contact entre poutres.

Dans ces travaux, la méthode utilisée pour localiser le lieu de contact se base sur le calcul de la distance minimale entre les deux poutres candidates au contact, et qui sont décrites par des courbes dans l'espace. La recherche de la distance minimale se fait en parcourant simultanément les points des axes des deux poutres, d'abscisses curvilignes respectives ξ et ζ , dont la distance qui les sépare vaut : (voir figure 3.8)

$$d(\xi, \zeta) = \min_{\xi, \zeta} \|\underline{x}^i(\xi) - \underline{x}^j(\zeta)\| \quad (3.17)$$

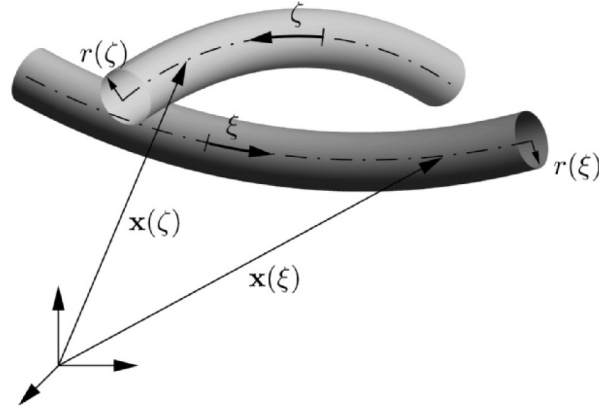


FIGURE 3.8 – Détermination de la distance minimale entre deux poutres (figure issue de [Wriggers 2006])

La position du couple de points minimisant cette distance est alors solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\underline{x}^i(\xi) - \underline{x}^j(\zeta)}{\|\underline{x}^i(\xi) - \underline{x}^j(\zeta)\|} \cdot \underline{x}_{,\xi}^i(\xi) = 0 \\ \frac{\underline{x}^i(\xi) - \underline{x}^j(\zeta)}{\|\underline{x}^i(\xi) - \underline{x}^j(\zeta)\|} \cdot \underline{x}_{,\zeta}^j(\zeta) = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Pour le cas de courbes non convexes, l'existence et l'unicité de la solution de ce système non linéaire n'est pas assurée. De ce fait, pour éviter cette complexité, les auteurs font l'hypothèse de poutres droites et résolvent le système d'équations avec une méthode de Newton.

Une fois que nous avons calculé le couple de points $((\bar{\underline{x}})^i, (\bar{\underline{x}})^j)$ solution du système 3.18, correspondant aux abscisses $\bar{\xi}$ et $\bar{\zeta}$, le vecteur de la normale commune aux deux fibres moyennes est donné par :

$$\underline{n}^{i \rightarrow j}(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) = \frac{(\bar{\underline{x}})^j - (\bar{\underline{x}})^i}{\|(\bar{\underline{x}})^j - (\bar{\underline{x}})^i\|} \quad (3.19)$$

L'application de cette méthode a été faite par exemple dans [Litewka 2002a] et [Litewka 2002b] pour le cas de poutres à sections rectangulaires. Cependant, la limite de cette approche basée sur un critère de distance minimale est qu'elle fait l'hypothèse d'une modélisation ponctuelle du contact entre les deux poutres. Ainsi, l'approche est pertinente pour le cas de contact entre fils croisés, pour lequel le contact est ponctuel. En revanche, l'approche n'est pas adaptée à une situation de contact entre deux fils quasi-parallèles, qui induit une zone de contact plutôt continue pouvant s'étendre sur une certaine longueur. Nous ne pourrions donc pas l'utiliser dans le cas de nos câbles textiles, et nous allons chercher des méthodes alternatives dans la suite de cette section.

Approches basées sur la notion de maître-esclave

Dans le cas où le contact entre corps n'est pas ponctuel, mais s'étend sur une surface continue, il est nécessaire de gérer le contact sur une discrétisation de cette surface. La formulation la plus simple consiste alors à étudier le contact entre les nœuds du maillage de la peau de chacun des corps (pour des maillages volumiques). Cette formulation est appelée "contact nœud-nœud". Cependant, cette approche n'est valable que dans le cas où ces nœuds sont tous situés les uns en face des autres, ce qui est uniquement vrai lorsque les maillages sont conformes et en petits déplacements.

Dans le cas général, il n'y a pas de nœud sur la tige J en vis à vis d'un nœud de la tige I , et donc celui-ci peut entrer en contact avec un segment. Pour gérer cette non-conformité, les techniques de

discrétisation du contact les plus répandues dans la littérature sont basées sur la notion de *maître - esclave* (voir par exemple [Hallquist 1985], [Kikuchi 1988], [Alart 1991]). Ces techniques reposent sur l'idée de privilégier l'un des deux corps en contact et de le considérer comme maître et l'autre comme étant le corps esclave. Cette méthode consiste à associer à tout nœud de la peau du corps esclave, situé à la position $r_2(s_2)$, le point qui lui est le plus proche sur la fibre maître. Mathématiquement, ceci revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{s_1 \in [0; L]} \frac{1}{2} \|r_2(s_2) - r_1(s_1)\|^2$$

On peut facilement montrer que la solution de ce problème est la projection orthogonale du point de l'axe esclave sur l'axe maître. La direction normale servant à la définition du gap est alors prise orthogonale à la surface maître.

Cette description du contact basée sur la notion de maître-esclave est largement utilisée dans de nombreux problèmes de contact, et donne généralement des résultats très satisfaisants. Elle a en particulier été appliquée pour le traitement du contact entre des tiges en grands déplacements dans le cadre de la thèse de Pierre Béal [Béal 1998], puis reprise dans [Chamkch 2009] sur la problématique de l'auto-contact des poutres. Cependant, cette technique présente deux inconvénients :

- L'*existence* et l'*unicité* d'un projeté orthogonal sur la surface maître sont soumises à des conditions, qui ne sont pas toujours satisfaites dans le cas de poutres en grands déplacements. Le lecteur intéressé par cette limite pourra consulter la thèse de Pierre Béal pour de détails ;
- Le traitement du contact est *non symétrique*, car les deux poutres ne sont pas considérées simultanément (voir par exemple [Zavarise 1998]). En effet, pour déterminer la distance de contact entre deux poutres pour un point donné de la ligne moyenne de la poutre esclave, il faut le projeter sur l'axe de la poutre maître. Comme on peut le remarquer sur la figure 3.9, cette approche crée une ambiguïté sur la définition du gap du fait du traitement non symétrique des poutres : la distance entre les deux surfaces Γ^1 et Γ^2 obtenue en projetant le nœud A sur Γ^2 , $\bar{AB}$, est différente de celle obtenue en projetant le nœud B sur Γ^1 , $\bar{BC}$. La symétrie n'est vraie que lorsque les deux surfaces sont parallèles, ce qui n'est jamais le cas au sein d'un assemblage de fibres très courbées.

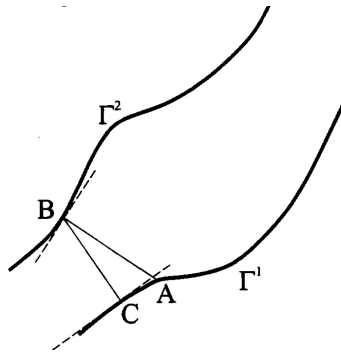


FIGURE 3.9 – Inconvénient de la technique basée sur la notion de maître-esclave (figure issue de [Zavarise 1998])

Pour pallier ces difficultés, une méthode consiste alors à utiliser non pas la normale à une des deux surfaces en contact, mais plutôt une normale commune définie sur une surface intermédiaire située entre les deux corps. Cette approche a été développée par D. Durville dans le logiciel *MultiFil*, et nous allons la décrire dans ce qui suit, en détaillant les étapes de sa mise en œuvre.

Méthode basée sur une géométrie intermédiaire

L'idée de cette approche est de définir une géométrie intermédiaire, dont la fonction est d'approcher l'interface de contact entre les deux corps susceptibles de se rencontrer. Les premières formulations se basant sur ce principe peuvent être trouvées dans [Simo 1985b]. Depuis, les méthodes se basant sur une géométrie intermédiaire ont été développées par [Durville 1998] pour le traitement du contact entre fils. D'autres exemples d'applications sont disponibles dans [McDevitt 2000] et [Rebel 2000].

Dans le cas d'un contact entre poutres, outre le fait que cette technique permet un traitement symétrique du contact, nous allons voir que cette géométrie intermédiaire peut être considérée comme unidimensionnelle. Ainsi, le contact peut être modélisé comme un phénomène continu linéique, et ainsi s'adapter aux différentes configurations du contact pouvant être rencontrées au sein d'un assemblage de filaments.

Définition de la géométrie intermédiaire

Nous avons défini dans la sous-section 3.2.1 des zones de proximité, permettant de réduire le temps de calcul pendant la phase de recherche du contact. L'idée originale utilisée dans *Multifl* est d'utiliser ces zones pour définir les géométries intermédiaires. Chaque géométrie intermédiaire, symétrique vis-à-vis des deux structures, est définie comme la moyenne des deux axes des poutres concernées à l'intérieur d'une zone de proximité donnée.

Cette ligne intermédiaire étant construite, la première étape consiste à la discrétiser en N_c segments. En chaque point discret de la géométrie intermédiaire, on cherche à déterminer le couple de points matériels sur les contours de section des deux poutres susceptibles d'entrer en contact. Cette discrétisation a priori est indépendante de la discrétisation éléments finis des deux fibres.

En pratique, ces deux discrétisations ne sont tout de même pas complètement dissociées pour garantir une bonne approximation des forces de contact. Les poutres étant discrétisées par des éléments finis quadratiques (voir section 2.4), il a alors été choisi de définir deux points discrets de contact par élément fini.

Détermination des éléments de contact

La prochaine étape consiste à déterminer en tout point discret $\underline{x}_{int}$ de la ligne intermédiaire, repéré par son abscisse curviligne relatif s_{int} , le couple de particules matérielles appartenant à la surface des deux poutres et susceptibles d'entrer en contact en ce point dans la configuration d'équilibre [Durville 2012].

La procédure consiste à créer au niveau de chaque point discret de la géométrie intermédiaire des plans orthogonaux, appelés *plans de recherche*. Ces plans sont définis par la position $\underline{x}_{int}$ du point de la ligne moyenne, d'abscisse curviligne relative s_{int} , et la tangente unitaire à la ligne moyenne en ce point $\underline{t}_{int}$, qui correspond à la normale au plan. L'intersection de ces plans orthogonaux avec les lignes moyennes des deux poutres définit les centres des deux sections candidates pour entrer en contact (voir figure 3.10). Ces deux centres de section associés à la $I^{\text{ème}}$ et $J^{\text{ème}}$ poutre sont définis comme étant la solution des équations suivantes :

$$\begin{aligned} (\underline{r}^I(s^I) - \underline{x}_{int}) \cdot \underline{t}_{int} &= 0 \\ (\underline{r}^J(s^J) - \underline{x}_{int}) \cdot \underline{t}_{int} &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Les abscisses curvilignes s^I et s^J sont alors calculées en utilisant une méthode de Newton pour résoudre ce système d'équations non-linéaires.

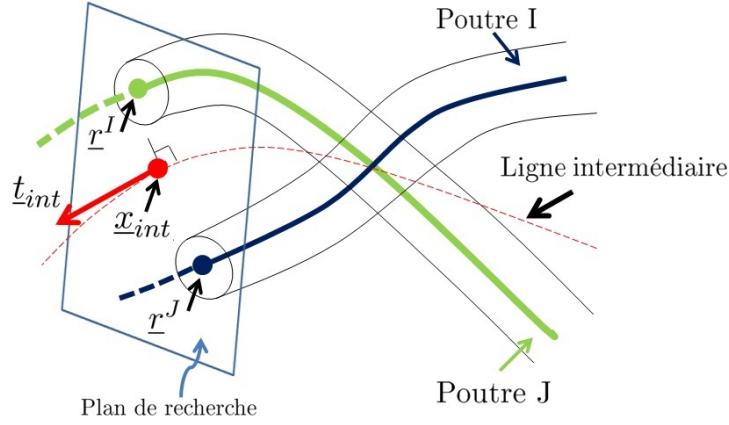


FIGURE 3.10 – Détermination des sections candidates au contact

L'étape suivante de la localisation du contact est de déterminer l'endroit ponctuel où le contact aura lieu. Ceci consiste à rechercher le couple de particules matérielles de l'élément de contact, situées sur le contour des sections repérées précédemment. Le processus proposé pour déterminer les coordonnées matérielles de section de ce couple de points, que l'on note $((\xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha), \alpha = I, J)$, consiste à calculer l'intersection du contour de section avec une direction radiale, comme indiqué sur la figure 3.11.

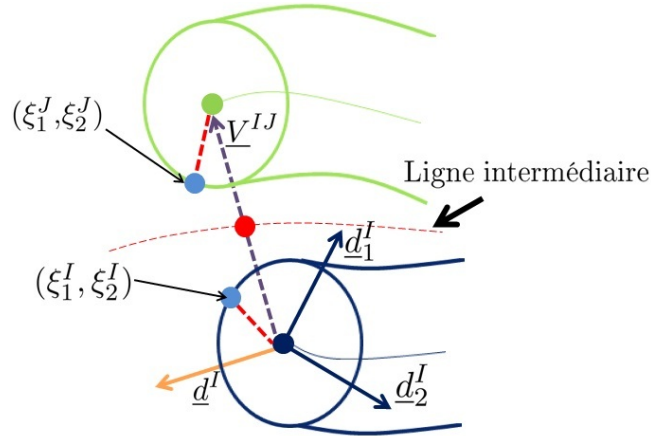


FIGURE 3.11 – Détermination du couple de points constituant l'élément de contact

La direction radiale correspond à la direction entre les centres de sections, définie par le vecteur unitaire $\underline{V}^{IJ}$ suivant :

$$\underline{V}^{IJ} = \frac{\underline{r}^J(s^J) - \underline{r}^I(s^I)}{\|\underline{r}^J(s^J) - \underline{r}^I(s^I)\|} \quad (3.21)$$

Pour rechercher le point sur le contour du fil α , on utilise le vecteur normal à la section $\underline{d}_3^\alpha = \frac{\underline{d}_1^\alpha \wedge \underline{d}_2^\alpha}{\|\underline{d}_1^\alpha \wedge \underline{d}_2^\alpha\|}$, qui permet de calculer la projection de $\underline{V}^{IJ}$ dans le plan de la section :

$$\underline{V}_{/\alpha}^{IJ} = \underline{V}^{IJ} - (\underline{V}^{IJ} \cdot \underline{d}_3^\alpha(s^\alpha)) \cdot \underline{d}_3^\alpha(s^\alpha) \quad (3.22)$$

La détermination de ce couple de points revient alors à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \xi_1^\alpha \underline{d}_1^\alpha(s^\alpha) + \xi_2^\alpha \underline{d}_2^\alpha(s^\alpha) &= \gamma \underline{V}_{/\alpha}^{IJ} \\ (\xi_1^\alpha)^2 + (\xi_2^\alpha)^2 &= (R^\alpha)^2 \end{cases} \quad \text{avec } \gamma > 0 \quad (3.23)$$

où R^α est le rayon de la poutre d'indice α .

Détermination de la direction normale du contact

Pour chaque élément de contact E_c^{IJ} , une normale de contact $\underline{n}^{IJ}$ est associée, qui intervient dans la formulation de la condition cinématique de non interpénétration donnée par l'équation (3.1). Ce vecteur unitaire renseigne sur la direction dans laquelle la pénétration sera mesurée, et sa bonne estimation de cette direction est cruciale pour la cohérence des résultats.

La détermination de la normale de contact dépend de l'orientation relative des deux fils qui sont en contact : sa construction sera différente entre le cas de fils quasiment parallèles et le cas d'un croisement. Comme expliqué dans [Durville 2012] :

- dans le cas de fils croisés, la normale est calculée comme suit :

$$\underline{n}^{IJ} = \frac{T^I(s^I) \wedge T^J(s^J)}{\|T^I(s^I) \wedge T^J(s^J)\|}$$

tels que $T^I(s^I)$ et $T^J(s^J)$ représentent les tangentes unitaires respectivement aux axes des deux poutres I et J.

- dans le cas de fils presque parallèles, la normale est déterminée par l'expression suivante :

$$\underline{n}^{IJ} = \frac{(\underline{t}_{int} \wedge \underline{V}^{IJ}) \wedge \underline{t}_{int}}{\|(\underline{t}_{int} \wedge \underline{V}^{IJ}) \wedge \underline{t}_{int}\|}$$

tels que $\underline{t}_{int}$ est la moyenne des deux tangentes unitaires $T^I(s^I)$ et $T^J(s^J)$ (voir figure 3.10) et le vecteur $\underline{V}^{IJ}$ est défini par l'équation 3.22.

3.2.3 Méthodes de résolution numérique du contact

Les techniques de résolution d'un problème de contact s'inspirent beaucoup des méthodes d'optimisation sous contrainte d'inégalité, même si le problème n'est pas conservatif en raison des dissipations dues aux frottements. Dans la littérature, on trouve de nombreuses approches numériques pour résoudre ce type de problème d'optimisation non linéaire [Bonnans 1997]. Il existe de nombreuses autres approches mathématiques permettant prendre en compte la contribution du contact dans la formulation du problème mécanique. Parmi elles, la méthode du Lagrangien augmenté est aujourd'hui la plus répandue : elle est largement utilisée pour la prise en compte de la contrainte d'incompressibilité (cf. [Glowinski 1984]), mais aussi pour le traitement des problèmes de contact, dans un premier temps pour un contact glissant (cf. [Wriggers 1985]), puis en prenant en compte le frottement (voir par exemple [Curnier 1988] et [Laursen 1993]). Deux autres techniques sont en pleine expansion, à savoir la méthode de barrière et la méthode de Nitsche. Pour plus de détails sur l'application de ces différentes méthodes et une comparaison entre elles, le lecteur pourra consulter le livre de Wriggers [Wriggers 2006].

L'utilisation de multiplicateurs de Lagrange est la méthode la plus classique pour la résolution des problèmes d'optimisation sous contraintes. Dans un problème de contact, on peut facilement montrer en écrivant les équations d'équilibre que le multiplicateur de Lagrange est égal à la pression normale de contact. L'algorithme consiste donc à résoudre le système constitué des équations d'équilibre et des conditions de Signorini (cf équation 3.5) par rapport aux variables position et pression. L'inconvénient de la méthode de multiplicateurs de Lagrange est l'ajout de degrés de liberté supplémentaires, qui augmentent la taille du problème. De plus, le nombre de ces multiplicateurs varie selon le nombre de zones de contact dans le problème, ce qui est assez compliqué à gérer à l'intérieur d'un solveur.

La méthode de pénalisation, plus simple, consiste à ajouter dans l'énergie du système à minimiser un terme de pénalisation, qui prend de grandes valeurs dès que la contrainte 3.1 n'est pas vérifiée. Nous choisissons pour cela d'introduire la fonction définie par :

$$\bar{g} = \min \{0, g_N\} \quad (3.24)$$

La contribution du contact normal à la formulation faible du problème 3.10 est alors exprimée sous la forme de l'ajout dans l'énergie du terme de pénalisation suivant :

$$\frac{\kappa_N}{2} \bar{g}^2 \quad (3.25)$$

où κ_N est le coefficient de pénalisation de la condition de non interpénétration.

Lorsque la contrainte 3.1 n'est pas satisfaite, une réaction normale de contact $R_N = -\kappa_N \bar{g}$ proportionnelle à la pénétration mesurée est appliquée dans l'équation 3.11 aux lieux de contact, comme cela est représenté sur la figure 3.12. Le coefficient de pénalisation peut alors être interprété comme une mesure de rigidité du support.

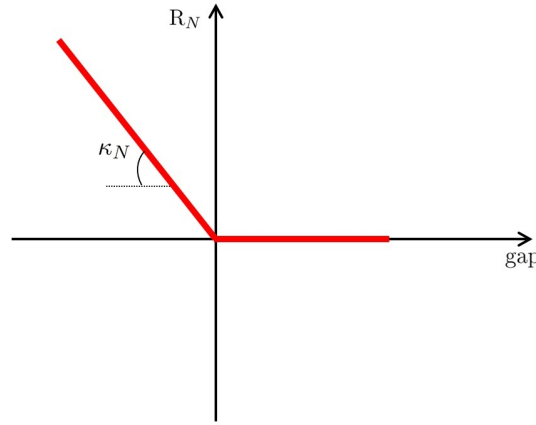


FIGURE 3.12 – Loi de pénalisation standard.

Cette approche est équivalente à la méthode par multiplicateur de Lagrange lorsque $\kappa_N \rightarrow \infty$ (voir par exemple [Luenberger 1984]). En revanche, le choix d'un coefficient de pénalisation très élevée pourrait engendrer des problèmes de convergences numériques, dus à un mauvais conditionnement de la matrice de rigidité. La qualité de la convergence numérique dépend fortement du choix du paramètre de pénalisation.

La méthode de pénalisation standard présentée ci-dessus peut engendrer des problèmes de convergence, en particulier en présence d'un grand nombre de contacts. En effet, du fait de la non-différentiabilité autour de $g_N = 0$, l'algorithme de Newton devient très instable avec un certain nombre d'éléments de contact se trouvant dans un état à la limite entre un statut de contact et de non-contact. Pour remédier à cette limite, l'idée est de régulariser la fonction de la force normale avec une partie quadratique pour les faibles pénétrations (cf. [Durville 2004]), inférieures à un certain seuil nommé *profondeur de régularisation* et noté p_{reg} (voir figure 3.13). Cette régularisation permet une transition "souple" entre l'état de contact et l'état décollé et diminue ainsi les problèmes d'instabilités dues à l'oscillation entre ces deux états. La dérivée de la réaction normale par rapport aux déplacements est désormais continue. Selon ce modèle de pénalisation régularisée, la réaction normale est donnée par :

$$\|R_N\| = \begin{cases} 0 & \text{si } g_N > 0 \\ \frac{\kappa_N}{2 p_{\text{reg}}} g_N^2 & \text{si } -p_{\text{reg}} \leq g_N \leq 0 \\ \kappa_N \left(g_N + \frac{p_{\text{reg}}}{2} \right) & \text{si } g_N < -p_{\text{reg}} \end{cases} \quad (3.26)$$

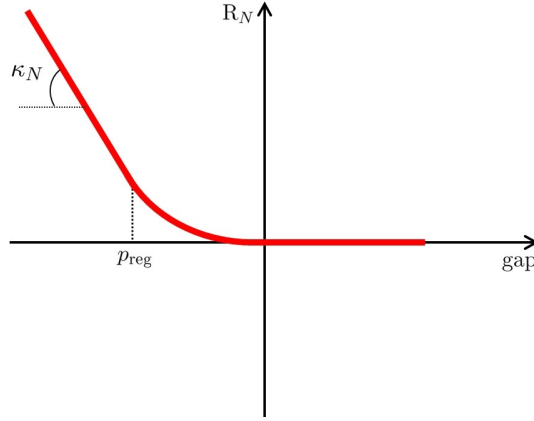


FIGURE 3.13 – Loi de pénalisation régularisée.

Méthode d'ajustement de la pénalisation

L'estimation de la valeur optimale du coefficient de pénalisation κ_N peut être problématique [Nour-Omid 1987] : une pénalisation trop faible peut engendrer des grandes pénétrations et une valeur trop élevée engendre des difficultés de convergence. Cette sensibilité de convergence de l'algorithme de contact par rapport au choix de ce coefficient est d'autant plus problématique dans le cas d'un grand nombre d'éléments de contact, avec une forte disparité de l'amplitude des réactions normales d'un élément à un autre et au cours du chargement. Par conséquent, le choix d'une unique valeur de pénalisation ne paraît pas pertinent.

Pour contourner cette difficulté, plusieurs auteurs ont proposé un ajustement automatique du coefficient de pénalisation en fonction de la pénétration mesurée (voir [Lee 1993], [Chamoret 2004], [Durville 2011]). L'idée est d'ajuster le coefficient de pénalisation à l'incrément $t + \Delta t$ à partir de sa valeur à l'étape précédente t , en fonction de la valeur actuelle du gap.

Dans [Lee 1993], l'ajustement du paramètre de pénalisation dépend d'une valeur maximale et une valeur minimale de la pénétration autorisées par l'utilisateur. Cet ajustement est de caractère local. Il est effectué indépendamment en chaque élément de contact.

$$\kappa_N^{t+\Delta t} = \begin{cases} \frac{g_N^t}{p_{\max}} \kappa_N^t & \text{si } |g_N^t| > p_{\max} \\ \frac{g_N^t}{p_{\min}} \kappa_N^t & \text{si } |g_N^t| < p_{\min} \\ \kappa_N^t & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.27)$$

Par contre, dans [Durville 2011], l'approche développée se base sur l'idée d'ajuster systématiquement le coefficient de pénalisation, de manière à ce que la pénétration maximale mesurée dans chaque zone s'approche de la pénétration maximale $p_{\max}$. L'ajustement est réalisée au niveau des zones de proximité (voir section 3.2.2), qui contiennent chacune plusieurs éléments de contact. Un processus itératif est réalisé pour ajuster de manière progressive le coefficient de pénalisation suivant la formule :

$$\kappa_N^{i+1} = \frac{g_{N,\max}^i}{p_{\max}} \kappa_N^i \quad (3.28)$$

3.2.4 Traitements spéciaux de certaines non-linéarités

Toutes les techniques de résolution décrites dans la partie 3.2.3 sont basées sur une méthode itérative de type Newton-Raphson pour résoudre le problème non linéaire, au dessus de laquelle une boucle d'augmentations est éventuellement ajoutée. Comme cela a été expliqué dans la section 5.2.5, une telle méthode de Newton linéarise le problème à chaque itération, ce qui nécessite de dériver tous

les termes de la formulation faible pour construire la matrice tangente, y compris les contributions du contact. Nous sommes en particulier amenés à linéariser le gap défini par l'expression (3.1), qui s'écrit pour chaque point de la ligne intermédiaire sous la forme :

$$\delta g_N = \left(\underline{\delta x}^1(s_{int}) + \frac{\partial \underline{x}^1}{\partial s_{int}} \delta s_{int} - \underline{\delta x}^2(s_{int}) - \frac{\partial \underline{x}^2}{\partial s_{int}} \delta s_{int} \right) \cdot \underline{n} + (\underline{x}^1 - \underline{x}^2) \cdot \left(\underline{\delta n}(s_{int}) + \frac{\partial \underline{n}}{\partial s_{int}} \delta s_{int} \right) \quad (3.29)$$

Lorsqu'on cherche à calculer la linéarisation du gap définie par (3.29), la première difficulté porte sur les dérivées par rapport à l'abscisse s_{int} sur la ligne intermédiaire. En effet, nous avons vu dans la partie 3.2.2 que les points $\underline{x}^1$ et $\underline{x}^2$ sont calculés par projection sur les surfaces de contact à l'aide d'un algorithme itératif. Leur dépendance par rapport à s_{int} n'est pas connue de manière explicite, ce qui nous empêche de les dériver analytiquement.

Pour traiter ce problème, l'idée développée dans le logiciel *Multifil* est d'utiliser un algorithme de point fixe sur les éléments de contact. Plus précisément, les abscisses s_{int} sur la ligne intermédiaire correspondant aux paires de points susceptibles d'entrer en contact sont calculées a priori, puis celles-ci restent fixes pendant la résolution par une méthode de Newton. La matrice tangente ne comprends alors plus les dérivées par rapport à s_{int} qui posaient initialement problème. Ce processus est répété jusqu'à stabilisation des éléments de contact.

L'autre difficulté lors de la linéarisation concerne la direction normale du contact. La dépendance de la normale par rapport aux déplacements des nœuds de la structure est très non linéaire. Cette forte non linéarité peut rendre difficile la convergence d'un algorithme de Newton, surtout lorsque la configuration de départ est éloignée de la solution.

De même que pour les éléments de contact, la solution choisie dans le logiciel *Multifil* est alors de réaliser un algorithme de point fixe sur la direction normale (voir [Durville 2012]). Concrètement, cela revient à résoudre le problème non linéaire à normale fixée, en dérivant les termes de contact par rapport au déplacement tout en supposant la normale constante. La variation du gap s'écrit alors simplement sous la forme :

$$\delta g_N = (\underline{\delta x}^1(s_{int}) - \underline{\delta x}^2(s_{int})) \cdot \underline{n}$$

Une fois la méthode de Newton convergée, les normales de contact sont ensuite actualisées en fonction de l'estimation de la solution obtenue, ce processus étant répété de manière itérative jusqu'à atteindre la stabilisation de la normale. L'algorithme de résolution complet, qui regroupe les méthodes de points fixes sur les éléments de contact et les normales, sera présenté dans la sous-section 3.2.6.

3.2.5 Méthode de résolution pour le frottement

Les méthodes de résolution qui ont été présentées dans les sous-sections précédentes se focalisaient essentiellement sur la gestion du contact normal, sans s'occuper des termes de frottement. Cependant, le logiciel de calcul *Multifil* traite des problèmes quasi-statiques, ce qui n'est pas cohérent avec la formulation en vitesse de la loi de frottement définie dans la sous-section 3.1.2.

En général, le problème temporel est résolu de manière incrémentale en discrétisant le temps en N intervalles :

$$[0, T] = \bigcup_{n=1}^N [t_n, t_{n+1}]$$

Nous présentons dans ce qui suit deux méthodes permettant de formuler le problème quasi-statique à résoudre à chaque incrément à partir des équations continues en temps.

a) Méthode de return mapping sur les efforts de contact

La méthode la plus classique consiste à intégrer les équations constitutives par un schéma d'Euler implicite, associé à une stratégie de "return mapping" inspirée des approches de la plasticité (voir [Simo 1992]). Plus précisément, si les déplacements $\underline{u}_n$ correspondant à la solution au pas de temps n sont supposés connus ainsi que les efforts de frottement $\underline{R}_T^n$, cette approche consiste à construire le vecteur suivant à l'incrément $n + 1$:

$$\underline{R}_T^{n+1,trial} = \underline{R}_T^n + \kappa_T \underline{\Delta g}_T \quad (3.30)$$

où κ_T est le coefficient de rigidité tangentielle et $\underline{\Delta g}_T$ correspond à l'incrément de déplacement relatif entre les deux points en contact, défini par :

$$\underline{\Delta g}_T = (\underline{I} - \underline{n} \otimes \underline{n}) \cdot ((\underline{u}_2^{n+1} - \underline{u}_1^{n+1}) - (\underline{u}_2^n - \underline{u}_1^n))$$

L'effort de frottement tangential à l'incrément $n + 1$ est alors calculé comme suit : (voir la figure 3.14(a))

$$\underline{R}_T^{n+1} = \begin{cases} \underline{R}_T^{n+1,trial} & \text{si } \|\underline{R}_T^{n+1,trial}\| \leq \mu \|\underline{R}_N^{n+1}\| \\ \mu \|\underline{R}_N^{n+1}\| \frac{\underline{R}_T^{n+1,trial}}{\|\underline{R}_T^{n+1,trial}\|} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.31)$$

b) Incrémentation du déplacement tangential relatif

En pratique, la valeur du coefficient κ_T intervenant dans l'expression (3.30) pose question :

- Physiquement, cette rigidité tangentielle est très difficile à identifier par la mesure ;
- Numériquement, si κ_T est trop grand alors on retrouve l'instabilité présente dans la loi de Coulomb classique (cf. partie 3.1.2), alors qu'on risque d'autoriser des glissements réversibles trop grands si sa valeur est petite.

Pour contourner cette difficulté, D. Durville a proposé un modèle de frottement régularisé qui interdit à la norme des glissements élastiques réversibles $\underline{\Delta g}_T^e$ de dépasser une valeur limite $g_{T,max}$. Ce modèle revient à supposer que la rigidité tangentielle κ_T s'écrit sous la forme :

$$\kappa_T = \frac{\mu \|\underline{R}_N^{n+1}\|}{g_{T,max}}$$

Avec cette formulation, l'incrémentation permettant de transmettre les termes de frottements entre étapes ne se fait plus sur les efforts, mais sur les glissements. On forme alors le nouveau vecteur de glissement suivant :

$$\underline{g}_T^{n+1,trial} = \underline{g}_T^{n,e} + \underline{\Delta g}_T \quad (3.32)$$

La partie élastique (c'est à dire glissante) du glissement actualisé correspond alors à la partie de ce vecteur de norme inférieure à la limite tolérée $\underline{g}_{T,max}$:

$$\underline{g}_T^{n+1,e} = \begin{cases} \underline{g}_T^{n+1,trial} & \text{si } \|\underline{g}_T^{n+1,trial}\| \leq g_{T,max} \\ g_{T,max} \frac{\underline{g}_T^{n+1,trial}}{\|\underline{g}_T^{n+1,trial}\|} & \text{sinon} \end{cases}$$

Et finalement, l'effort de frottement tangential à l'incrément $n + 1$ est alors calculé comme suit : (voir la figure 3.14(b))

$$\underline{R}_T^{n+1} = \frac{\mu \|\underline{R}_N^{n+1}\|}{g_{T,max}} \underline{g}_T^{n+1,e} \quad (3.33)$$

On peut remarquer que cette approche consiste à ajuster la rigidité tangentielle pour interdire aux glissements élastiques réversibles de dépasser la valeur limite $g_{T,max}$, alors que la première approche supposait la rigidité tangentielle fixe et ne bornait pas la taille des glissements élastiques réversibles.

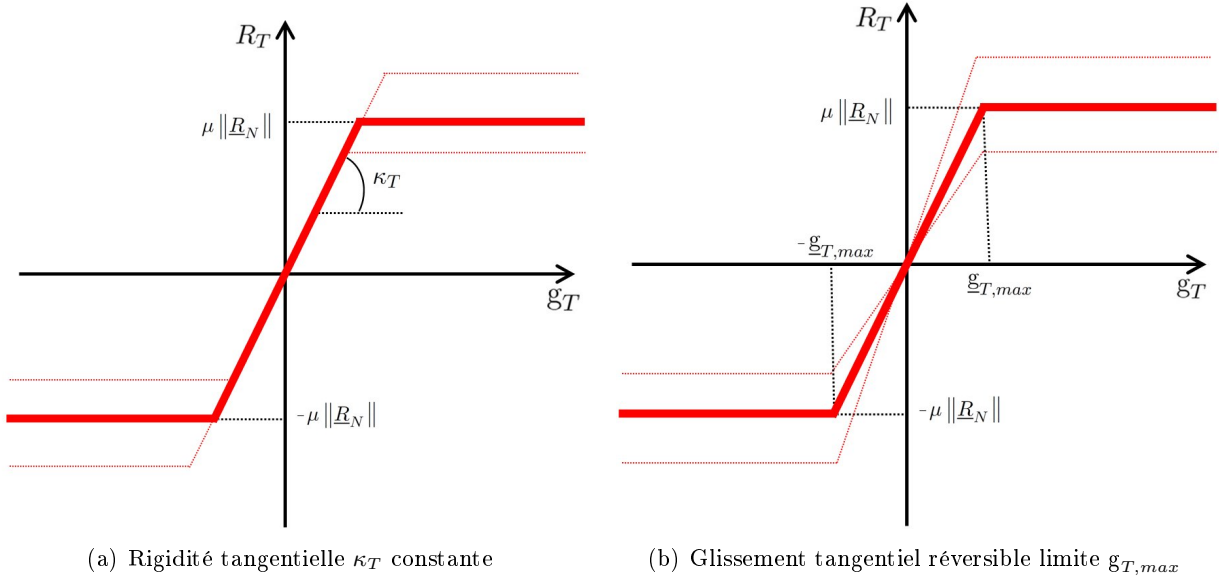


FIGURE 3.14 – Lois de frottement utilisées dans les méthodes incrémentales.

En pratique, la formulation du contact sur les lignes intermédiaires qui est utilisée dans *Multifil* exige un traitement particulier de la transmission de la variable d'histoire $\underline{g}_T^{n,e}$. En effet, les éléments de contact ne sont pas continus en temps. L'approche qui a été mise en œuvre dans *Multifil* consiste alors à estimer la valeur précédente $\underline{g}_T^{n,e}$ en un élément de contact par interpolation de la valeur enregistrée au niveau des points qui lui sont les plus proches.

3.2.6 Bilan de l'algorithme de résolution : aspect triple boucle

Pour résumer ce que nous avons présenté dans les parties précédentes de cette section, l'algorithme de résolution global du contact doit tenir compte des spécificités suivantes :

- Les zones de proximité évoluant dans le temps à cause des grands déplacements relatifs entre fils, il est nécessaire de les actualiser régulièrement ;
- La discrétisation du contact dans ces zones se base sur des "éléments de contact" définis sur une géométrie intermédiaire entre les fils. Un algorithme de point fixe sur ces éléments de contact a été proposé ;
- La normale utilisée dans la définition du gap sera calculée avec une méthode de point fixe ;
- Enfin, la résolution du problème de contact est réalisée avec une méthode pénalisation, dans laquelle le coefficient de pénalisation doit être ajusté de manière itérative

Pour tenir compte de ces aspects, la méthode de résolution utilisée dans le logiciel *Multifil* se présente de la manière suivante. Pour chaque incrément de chargement, l'algorithme présente trois niveaux d'itérations :

1. Le premier niveau porte sur la détermination des zones de proximité et des éléments de contact. Ils sont réactualisés à mesure que l'on s'approche de la solution d'équilibre.
2. Le deuxième niveau concerne la direction normale du contact. Elle calculée et réactualisée pour chaque éléments de contact détectés en fonction de l'estimation de la solution obtenue au troisième niveau d'itération. L'ajustement sur le coefficient de pénalisation est également réalisé à ce niveau.

3. Ce niveau, imbriqué au sein des deux autres précédents, traite la résolution du problème pour un état de contact, un état de glissement et à normale de contact fixe. A ce niveau, un algorithme de Newton Raphson est utilisé (voir la fin du chapitre 2) pour prendre en compte les non linéarité des déformations et des forces de contact.

Finalement, pour un pas de chargement n donné, le schéma de l'algorithme résultant est de la forme suivante :

Données : Déplacements précédents $\underline{U}^{n-1}$

Données : Efforts de frottements précédents $\underline{R}_T^{n-1}$

Données : Chargement extérieur F^n

Boucle sur les points de contacts

Calculer les zones de proximité entre fils ;

Discrétiser les lignes intermédiaires ;

Construire les points de contact ;

Boucle sur les normales de contact

Calculer les normales de contact ;

Méthode de Newton à points de contact et normales fixés :

Tant que $\text{norme}(\underline{R}) > R_{tol}$ **et** $\text{norme}(\delta \underline{U}) > R_{tol}$

Calculer le résidu $\underline{R}$;

Calculer la matrice tangente $\underline{K} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{U}}$;

Résoudre le système $\underline{K} \cdot \delta \underline{U} = -\underline{R}$;

fin

Ajuster les coefficients de pénalisation pour chaque zone de proximité ;

fin

fin

Résultat : Déplacements $\underline{U}^n$

Résultat : Efforts de frottements $\underline{R}_T^n$

Algorithme 1 : Algorithme de résolution dans *Multifil* : aspect triple boucle.

Notions d'échelles dans les renforts textiles : état de l'art

Sommaire

Introduction	57
4.1 Comportement mécanique des câbles textiles : du filament au câblé	58
4.2 Approches pour la modélisation des câbles textiles : État de l'art	60
4.2.1 Modélisation à l'échelle macroscopique	61
4.2.2 Modélisation à l'échelle mésoscopique	64
4.2.3 Modélisation à l'échelle microscopique	67
4.3 Méthodes numériques multiéchelles	70
4.3.1 Méthodes d'homogénéisation	70
4.3.2 Méthode de décomposition de domaine	75
4.4 Construction d'une approche multi-échelles appropriée	77
4.4.1 Introduction d'une échelle intermédiaire : Notion de macrofibre	77
4.4.2 Analyse des phénomènes importants	79
4.4.3 Pistes explorées : méthodes basées sur une cinématique enrichie	82
4.4.4 Modèle original contrôlé par la loi de contact	85

Introduction

Sous une apparence simple, les câbles textiles utilisés comme renforts dans les pneumatiques sont des structures particulièrement complexes. En plus du grand nombre de constituants qui composent le câble, il est caractérisé par une structure hiérarchique impliquant plusieurs échelles, et une géométrie micro-structurale discrète et non connue a priori. Par ailleurs, le comportement du câblé est fortement non linéaire, dominé par des interactions de contact frottant entre les filaments. Tous ces phénomènes ont fait de l'étude de la mécanique des renforts une discipline fortement empirique.

Depuis quelques dizaines d'années, des efforts importants sont consacrés à la détermination de méthodes de modélisation pour ce type de structures. Même si la caractérisation d'une fibre semble maîtrisée, la mécanique des assemblages de fibres textiles pose encore des difficultés. L'objectif de ce chapitre est de construire une approche permettant de modéliser le comportement d'un câblé textile à grand nombre de filaments, soumis à des sollicitations complexes telles que celles observées dans un pneumatique. L'enjeu de notre étude est double :

- Proposer un modèle capable de reproduire les résultats expérimentaux en terme de courbe force-allongement, en vue d'étudier le **comportement global** du câblé ;
- Accéder aux **quantités mécaniques locales** à l'échelle d'un filament, afin d'analyser les phénomènes d'endommagement des renforts. Ce point est considéré comme étant particulièrement prioritaire dans notre étude.

Ce chapitre est organisé comme suit :

- Dans un premier temps, nous décrirons la structure étudiée, de sa géométrie à son comportement mécanique, en précisant les différentes échelles du filament élémentaire jusqu'au câblé.
- Ensuite, nous réaliserons un état de l'art sur les approches qui existent dans la littérature pour modéliser structures fibreuses, et plus spécifiquement des structures câblées. Nous classerons ces modèles en fonction de l'échelle sur laquelle ils se basent (échelle des filaments, du câble global, ou à une échelle intermédiaire). Nous conclurons cette section en montrant que ces modèles existants ne peuvent pas être appliqués dans notre cas, car ils ne respectent pas certaines de nos contraintes.
- Nous allons alors étudier dans la section 4.3 plusieurs méthodes numériques multi-échelles utilisées habituellement en mécanique, pour tenter de lever les limites des modèles précédents. Nous verrons que ces approches présentent certaines limites si on cherche à les appliquer sur notre problème, ce qui justifiera la construction d'une méthode multi-échelles spécifique.
- Enfin, nous présenterons dans la section 4.4 les différentes pistes que nous avons explorées en analysant leurs limites, avant de décrire l'approche originale que nous avons développée dans cette thèse.

4.1 Comportement mécanique des câbles textiles : du filament au câblé

Structure géométrique multi-échelles

Comme nous l'avons décrit dans le premier chapitre de ce manuscrit, un câble textile est une structure fondamentalement multi-échelles, obtenue à partir de différentes opérations d'assemblage réalisées à plusieurs échelles. Les fibres, qui représentent les constituants élémentaires du câble, sont assemblées suivant plusieurs niveaux hiérarchiques, en mèches ou brins. Ces derniers sont ensuite assemblés pour former le câble, qui peut être tressé ou torsadé selon le mode d'assemblage adopté. Les câbles faisant l'objet de notre étude présentent alors la structure hiérarchique suivante :

- Les *fibres* (ou *filaments*) élémentaires constituent l'échelle la plus petite considérée ;
- Les *brins* sont obtenus par torsadage (c'est-à-dire en appliquant une torsion) d'un grand nombre de fibres ;
- Le *câble* est alors composé de plusieurs brins, assemblés par un nouveau torsadage selon un sens de rotation donné.

Pour donner quelques ordres de grandeur pour les câbles que nous allons étudier dans cette thèse, le rayon d'un filament varie entre 10 et $30\mu m$, le rayon du câble est de l'ordre de $0.5mm$, alors que le pas d'hélice du câble mesure environ $4mm$. Un câble est composé de trois brins : deux brins sont composés de chacun environ 2000 filaments en aramide et le troisième comprend de l'ordre de 200 fibres en nylon.

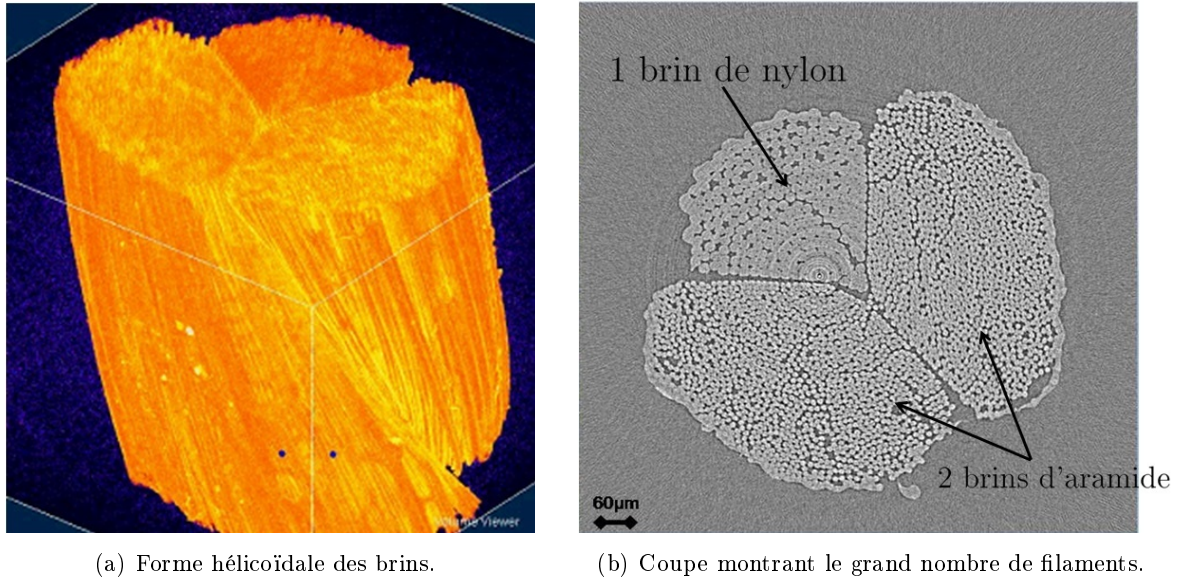


FIGURE 4.1 – Représentation de la structure étudiée dans cette étude : câble formé par trois brins (images obtenues par tomographie).

Comportement aux différentes échelles

Échelle locale :

Dans cette étude, on s'est limité à un comportement élastique des filaments textiles internes dans le domaine de sollicitations étudié. Nous supposons que ces fibres sont constituées d'un matériau homogène isotrope, dont le comportement est représenté par une loi de comportement de Hooke à deux paramètres (module d'Young et coefficient de Poisson).

Échelle globale :

A l'issue du processus d'assemblage du câble, les filaments ont en moyenne une forme hélicoïdale, plus ou moins tortueuse. L'arrangement des filaments est complexe et dépend grandement du mode d'assemblage, et on se confronte alors à des assemblages de fibres dotés d'une topologie géométrique interne aléatoire et non prévisible. La structure complexe et multi-échelles qui résulte de cet assemblage conditionne alors le comportement global du câble. Plus précisément, le comportement des structures à l'échelle du câble ou d'un brin présente deux aspects de natures différentes : des aspects continus liés au comportement des fibres dans la direction longitudinale et des aspects discrets associés aux interactions entre les fibres assemblées par paquets et qui influencent le comportement de ces paquets dans les directions transverses. En effet, dans sa direction longitudinale, un assemblage de fibres se présente comme une structure continue, et son comportement est essentiellement contrôlé par le comportement axial des fibres individuelles. Dans ses directions transverses, l'assemblage apparaît au contraire comme une structure discontinue, constituée d'un assemblage discret de fibres, et ses rigidités résultent principalement des interactions de contact-frottement entre ces fibres. Le comportement global moyen est alors caractérisé par une forte anisotropie et des couplages non linéaires entre les différentes directions. Dans les directions transverses, les sections d'un assemblage de fibres subissent des modes de déformations complexes. Les comportements des assemblages de fibres dans les directions longitudinale et transverses se trouvent par ailleurs couplés par le fait que les efforts de frottement développés entre les fibres, agissant principalement dans les directions transverses, sont conditionnés par les tensions portées longitudinalement par les fibres.

Couplage entre échelles :

Enfin, il est important de noter que le comportement mécanique et ces mécanismes physiques

présents à chaque échelle sont étroitement liés. Les phénomènes se produisant à une échelle donnée influent le comportement des composants aux échelles supérieures. Inversement, les phénomènes physiques globaux influent grandement sur la mécanique locale. A titre d'exemple, une mise en tension du câble génère des pressions transverses entre les différents constituants à différentes échelles (entre brins, entre filaments) et dont l'intensité croît à mesure qu'on se rapproche du centre du câble. En effet, du fait de l'accumulation des efforts appliqués par les couches extérieures, les efforts radiaux "cumulés" augmentent à mesure qu'on se rapproche du centre. Le comportement aux échelles supérieures est donc gouverné par celui à l'échelle des fibres et hérite des phénomènes complexes fortement non-linéaires qui y sont présents.

Besoin de modèles de câbles

Pendant longtemps, l'étude du comportement mécanique de ces structures a été une discipline à caractère expérimental. La prédiction de la durée de vie d'un câblé se basait essentiellement sur des analyses statistiques à partir d'un très grand nombre de tests empiriques. Un grand nombre de tests expérimentaux devaient alors être menés pour déterminer la réponse mécanique globale du câble, ce qui était très coûteux.

Par ailleurs, les phénomènes d'endommagement d'un câble commencent toujours à partir d'une échelle fine. En effet, comme nous l'avons signalé dans le chapitre d'introduction, la microstructure du câblé ne caractérise pas seulement les propriétés mécaniques globales du câblé, mais elle est aussi porteuse de ses modes de rupture. Pour définir des critères d'endommagement, il faut avoir accès aux états de contraintes subis par les fibres élémentaires à une échelle fine en fonction de la sollicitation appliquée au câblé. Cependant, mettre en place des bancs d'essais pour analyser rigoureusement les informations locales (telles que la dissipation textile due au frottement à l'échelle des fibres, les contraintes locales au niveau des filaments) ne semble pas évident.

Afin de réduire le nombre d'essais expérimentaux et d'avoir accès à certaines informations à l'échelle des filaments, de nombreux modèles analytiques et numériques ont alors été développés depuis quelques dizaines d'années. Nous allons décrire dans la section qui suit les principaux modèles existants dans la littérature.

4.2 Approches pour la modélisation des câbles textiles : État de l'art

Dans cette section, nous allons présenter une revue bibliographique des modèles utilisés dans la littérature pour prédire le comportement des câbles textiles. Ces modèles peuvent être classés selon l'échelle à laquelle ils sont formulés et les constituants pris en compte dans l'étude. Des modèles pour l'étude des câbles métalliques seront évoqués, et serviront de point de départ pour le développement des modèles pour les câbles synthétiques.

Dans ce qui suit, nous évoquerons les principaux modèles sans entrer dans les détails de leur formulation. Une revue bibliographique plus poussée peut être consultée dans [Utting 1984] et [Cardou 1997], ou plus spécifiquement pour les câbles textiles dans [Ghoreishi 2007a] et [Ghoreishi 2007b].

4.2.1 Modélisation à l'échelle macroscopique

Modélisation du comportement mécanique du câble

Les modèles à l'échelle macroscopique visent à déterminer la réponse mécanique du câble en termes de courbes force-allongement, afin d'approcher celles mesurées expérimentalement. Ils permettent d'étudier l'influence de quelques paramètres (matériaux, géométrie (angle d'hélice, rayon de courbure,...)) sur les performances mécaniques du câbles. Ces modèles formulés à l'échelle du câblé nécessitent une caractérisation locale (géométrie, rhéologie,...) des sous-structures issue de modèles formulés à une échelle mésoscopique, qui seront présentés dans la partie 4.2.2.

Dans la littérature, les approches macroscopiques de modélisation des câbles sont plutôt de nature analytique. Les modèles qui ont été établis pour le textile s'inspirent principalement de modèles développés pour les câbles métalliques, pour lesquels les composants du câble sont homogènes et la composition structurale est particulière (selon un motif, en couches,...).

Modèles analytiques pour les câbles métalliques

Le modèle analytique le plus connu et sur lequel se basent pratiquement tous les autres modèles récents est celui de Costello (voir [Costello 1976]). Dans ce modèle, les fils du câble sont traités comme des tiges courbées hélicoïdales, avec différentes hypothèses sur la géométrie du câble et les interactions de contact entre ses constituants. Il se base sur des équations non linéaires d'équilibre de poutres courbes de Kirchhoff-Love, et chaque constituant est considéré individuellement comme un milieu continu, assimilé à des tiges hélicoïdales coaxiales. Les déformations du câble global sont exprimées à partir de relations géométriques en fonction de celles de ses constituants directs. Ce modèle a été appliqué sur des câbles métalliques à différentes structures : une âme centrale entourée de 6 fils hélicoïdaux identiques (nommée structure de type 1+6), des structures de type "multi-torons" (voir [Velinsky 1985]), ou encore un câble structuré sous la forme de 1+6, mais tel que chaque "torons" est aussi composé par un fils âme et 6 fils autours en simples ou doubles hélices (voir la figure 4.2). Une synthèse des applications se basant sur le modèle de Costello est disponible dans [Costello 1997].

Depuis, plusieurs auteurs ont tenté des améliorations du modèle de Costello, tel que Labrosse [Labrosse 1998] qui a autorisé une rotation relative des fils par rapport à l'âme, dont le contact était auparavant supposé parfaitement collé.

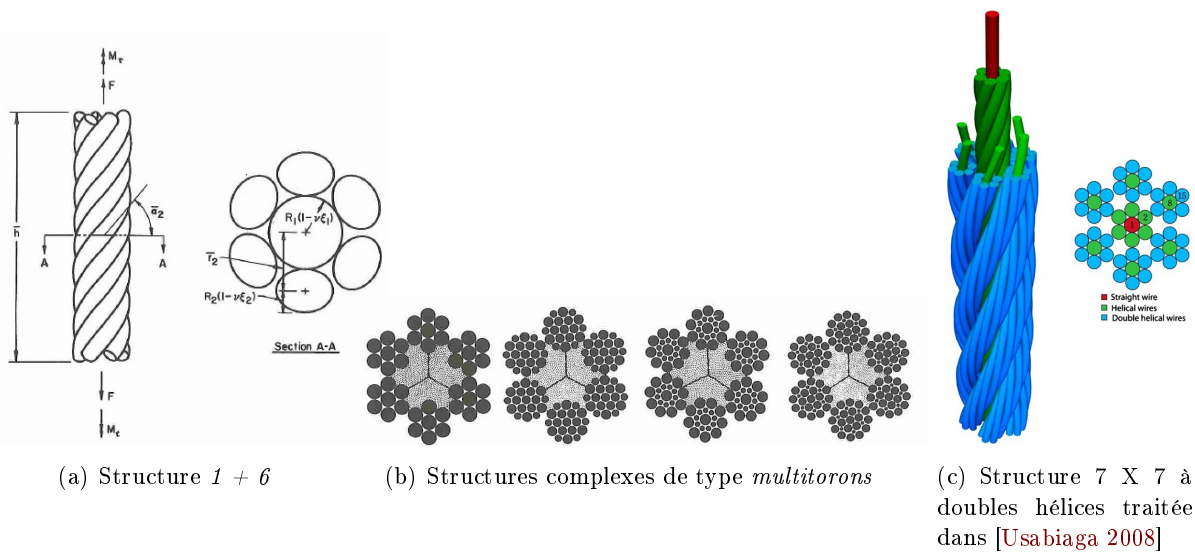


FIGURE 4.2 – Différents motifs de composition de câbles traités dans la littérature avec le modèle de Costello (figures issue de [Costello 1997])

Approches spécifiques aux câbles textiles

Face à la complexité de la géométrie des câbles textiles, les modèles analytiques sont plutôt rares, contrairement aux câbles métalliques. L'étude de leur comportement repose encore principalement sur des approches empiriques.

Quelques auteurs se sont tout de même inspirés des travaux analytiques sur les câbles métalliques pour proposer des modèles de prédiction de la réponse mécanique globale de câbles synthétiques. En particulier, [Ghoreishi 2007b] s'est intéressé au traitement des câbles synthétiques à usage marin. Dans cette approche, le câblé global est assimilé à une structure 1+6, constituée de 6 torons hélicoïdaux enroulés autour d'un noyau droit (voir figure 4.3). Une simple observation de la géométrie réelle du câble montre que cette hypothèse est loin d'être réaliste. Par ailleurs, les brins sont supposés homogènes, car l'objectif de ce modèle est ici de "remonter" du brin au câble. Les échelles intermédiaires (c'est-à-dire celles des brins ou de l'âme) sont quant à elles traitées par d'autres types de modèles à une échelle inférieure, dont nous parlerons par la suite.

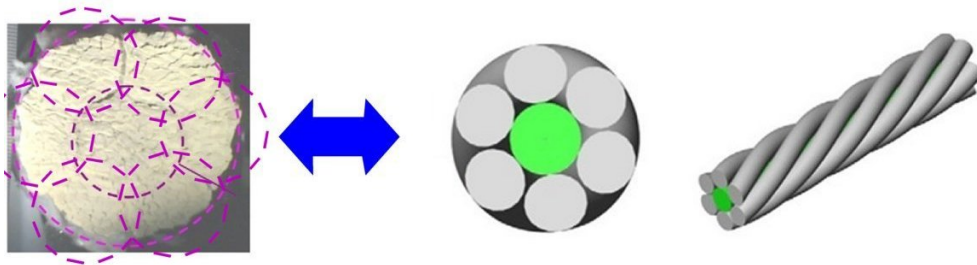


FIGURE 4.3 – Modélisation macroscopique d'un câble synthétique par [Ghoreishi 2007b].

Il existe également quelques modèles pour les câbles synthétiques qui sont intégrés dans des logiciels commerciaux (voir [Leech 1990], [Rungamornrat 2002] ou [Beltran 2003]). Le modèle de Leech [Leech 1990], est implémenté dans le code de calcul FRM (Fiber Rope Modeller). Ce logiciel calcule la force de tension et le moment de torsion d'un câble soumis à une sollicitation en traction, dans lequel la structure est supposée être de type multicouches. La contribution principale de ce modèle par rapport aux modèles précédents est la modélisation des interactions de contact frottant entre les composants du câble. Il distingue 6 modes de mouvements relatifs entre les différents constituants (voir [Leech 2002]). Dans ces travaux, et face à la complexité du comportement des assemblages de fibres textiles, les paramètres du comportement des torons sont déterminés expérimentalement.

Le point commun entre tous les modèles présentés dans cette section est le fait de réaliser des hypothèses fortes sur la géométrie du câble. Sans ces hypothèses, une approche analytique n'est pas envisageable.

Prise en compte de l'endommagement dans les câbles

Le développement de modèles mathématiques qui prennent en compte la dégradation des propriétés mécaniques du câble en fonction de l'histoire de chargement a fait l'objet de nombreux travaux. En se basant sur les modèles déjà proposés pour les câbles métalliques et textiles, la contribution de ces travaux est l'introduction de paramètres qui quantifient l'état d'endommagement des composants individuels du câble et l'influence sur son comportement. L'objectif étant de prédire la contrainte limite d'usage du renfort et d'estimer par conséquent sa durée de vie. De tels outils présentent un intérêt majeur pour les concepteurs et les usagers de ces structures et une aide au dimensionnement.

Dans les travaux [Rungamornrat 2002], [Beltran 2003] et [Beltran 2005], les auteurs se sont intéressés à l'endommagement des câbles marins. Ils se sont basés sur des concepts de mécanique d'endommagement en milieux continus pour proposer une expression des contraintes (normale σ_d ou de cisaillement τ_d) du câble endommagé en fonction de leurs valeurs effectives (σ_e, τ_e) et une fonction scalaire $\mathbf{D}$ dénommée "indice d'endommagement" :

$$\begin{aligned}\sigma_d &= (1 - \mathbf{D}) \sigma_e \\ \tau_d &= (1 - \mathbf{D}) \tau_e\end{aligned}\tag{4.1}$$

Le paramètre scalaire $\mathbf{D}$ est utilisé pour modifier la réponse mécanique du câble, et permet de prendre en compte la dégradation des propriétés mécaniques du câble en fonction du chargement appliqué (cyclique). Ses valeurs varient de 0 (câble vierge) à 1 (câble complètement endommagé). Dans [Rungamornrat 2002], les auteurs ont proposé une forme de loi d'évolution du paramètre $\mathbf{D}$ en fonction de l'état de déformation du câble durant le chargement, les effets d'abrasion dûs aux forces de frottement et le nombre de cycle de chargement pour atteindre la rupture d'un élément du câble. Les coefficients intervenant dans cette loi sont fittés en se basant sur des tests expérimentaux. Les lecteurs qui s'intéressent aux détails des expressions peuvent consulter la thèse de Juan Felipe Beltran [Beltran 2006]. L'approche est intéressante (voir figure 4.4), mais elle reste qualitative (aucun critère d'endommagement n'a été proposé) et a seulement été appliquée pour des câbles ayant une structure particulière simplifiée. Les brins sont alors supposés homogènes, avec un comportement supposé de forme polynomiale, dont les paramètres sont déterminés en fonction de résultats expérimentaux.

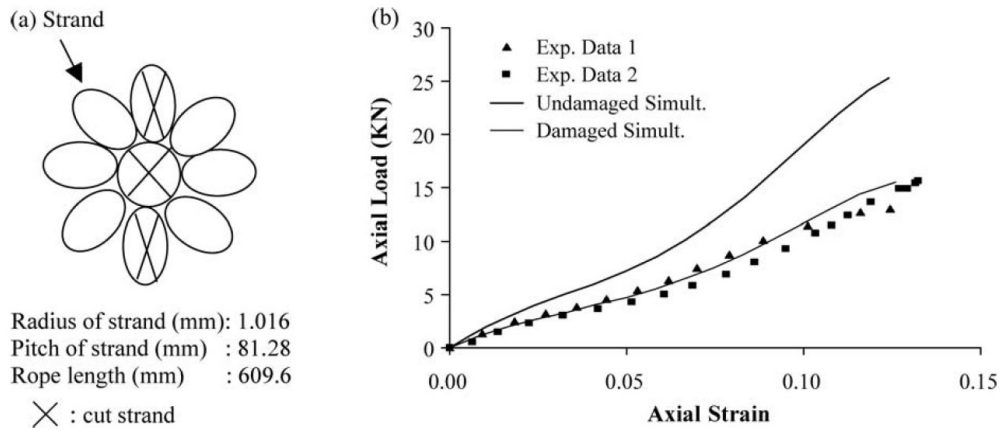


FIGURE 4.4 – Modèle d'endommagement proposé par [Beltran 2005] - A gauche : Paramètres géométriques du câble ; A droite : Courbe Force-allongement montrant la cohérence entre le modèle et la mesure.

Dans la littérature, il existe également des modèles basés sur des méthodes statistiques pour prédire la force de tenue mécanique de l'assemblage de fibres à partir d'une description statistique du comportement de ses constituants. Les résistances des constituants du câble sont décrites selon des fonctions de distribution données, dont les paramètres sont déterminés expérimentalement. Un exemple assez répandu est la distribution de Weibull, qui est utilisée pour décrire la statistique de forces à rupture des filaments dans le modèle de "fibres bundles" (voir [Phoenix 1979], [Pan 1993] et [Porwal 2006]). Les chercheurs distinguent en particulier deux schémas de distribution de la charge appliquée aux constituants rompus de l'assemblage sur les "survivants" : équitablement sur la totalité (TCG : transfert de charge total) ou uniquement sur les voisins (TCL : transfert de charge local).

Le processus d'endommagement des câbles est très compliqué à appréhender, et dépend de plusieurs facteurs (l'effet du frottement entre les constituants, un phénomène de migration, effets de l'environnement,...). Tous les modèles existants restent très simples et phénoménologiques, et ne permettent pas en particulier de prendre en compte les hétérogénéités locales des contraintes au niveau des filaments.

4.2.2 Modélisation à l'échelle mésoscopique

Les modèles macroscopiques décrits précédemment sont surtout adaptés aux câbles constitués d'un nombre de fils relativement petit. Pour les adapter à la modélisation de câbles plus complexes, il est nécessaire d'utiliser des modèles à une échelle inférieure afin de représenter le comportement moyen de sous-structures du câble. Il existe plusieurs types d'approches formulées à une échelle intermédiaire (dite "mésoscopique"), en fonction de la structure géométrique du câble étudié. Nous avons choisi de décrire dans ce qui suit les deux approches nous paraissant les plus intéressantes.

Une première approche a été proposée pour des câbles dont la structure est supposée sous la forme d'un assemblage de couches concentriques, dits "à structure multicouches" (voir figure 4.5). Cette méthode, nommée *Orthotropic Sheet Model (OSM)*, a initialement été développée par [Hobbs 1982] et [Raouf 1988] pour des câbles métalliques, puis étendue aux câbles synthétiques. Le modèle consiste à remplacer chaque couche de fils par une membrane de forme cylindrique, constituée d'un matériau homogène élastique orthotrope. Le comportement homogénéisé de la membrane prend en compte la rigidité en extension des fils, ainsi que le contact et le frottement entre deux composants voisins appartenant à cette couche. Le comportement global du câble est ensuite déterminé par sommation des rigidités de chacune des membranes. Au final, cette approche traite donc la structure de manière continue à l'intérieur de chaque couche et de manière discrète dans la direction radiale, c'est pourquoi ce type de modèle analytique est appelé "semi-continu".

Par rapport aux modèles précédents basés sur la théorie de poutres courbes, l'avantage de cette technique est de pouvoir traiter des câbles avec un grand nombre de constituants. À mesure que le nombre de composants dans la couche augmente, leurs propriétés peuvent être moyennées et homogénéisées, et par conséquent la méthode est alors censée être plus précise.

Cependant, les sections des composants sont supposées rester parfaitement circulaires, ce qui est une hypothèse acceptable pour les câbles métalliques, mais pas pour les câbles textiles. De plus, comme dans les modèles précédents, différents paramètres de construction doivent être connus a priori (nombre de couches, nombre de composants dans chaque couche, angle d'enroulement, ...) et l'hypothèse de structure multi-couches est assez forte. Tous ces éléments font qu'il est loin d'être trivial d'appliquer cette technique sur des câbles synthétiques tels que les nôtres.

Afin de lever la contrainte sur les paramètres de construction, [Ghoreishi 2007a] a proposé une évolution du modèle précédent pour représenter les échelles inférieures de câbles textiles (torons et fibres assemblées). Dans cette approche, les torons sont assimilés à un milieu continu et les sections de ses constituants sont ramenées à un point matériel dans la section du toron (voir figure 4.6). La loi de comportement globale "homogénéisée" de ce milieu continu est obtenue en intégrant la relation contrainte-allongement de chaque hélice élémentaire (supposée en traction pure) sur la section du toron en prenant compte le taux de vide dans la section.

L'avantage de ce modèle par rapport aux précédents est que les paramètres géométriques d'entrée sont réduits au rayon extérieur de la structure, le pas d'hélice et le taux de vide, qui sont trois paramètres généralement connus.

Cependant, ce modèle est très simple et se base sur plusieurs hypothèses fortes, dont voici les plus contraignantes :

- Les structures modélisées sont supposées de type multi-couches, à l'intérieur desquelles les composants appartenant aux différentes couches sont décrits par des hélices coaxiales et caractérisées

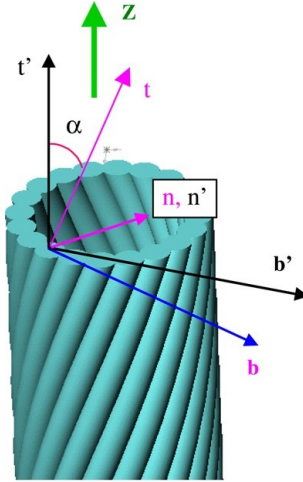


FIGURE 4.5 – Modèle de membrane équivalente (figure issue de [Ghoreishi 2005]).

- par le même pas d'hélice ;
- La déformation des structures se fait à volume constant ;
 - Le contact et les effets de frottement ne sont pas pris en compte ;
 - Les composants à l'échelle inférieure travaillent uniquement en traction.

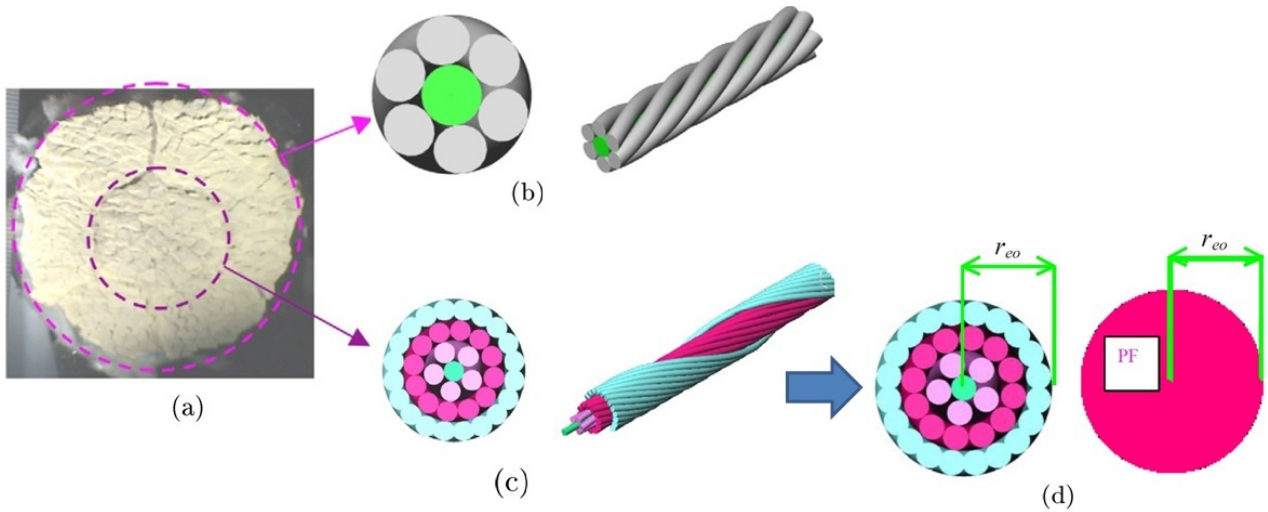


FIGURE 4.6 – Modélisation analytique d'un câble synthétique par [Ghoreishi 2007b] : a) Câble réel ; b) Modèle global du câble assimilé à une structure 1+6 ; c) et d) modèles utilisés aux échelles inférieures.

Dans la suite des travaux de Ghoreishi, s'inscrit la thèse de Thanh Do Vu (voir [Vu 2013]), visant à analyser le comportement des câbles tressés en fibres synthétiques utilisés pour la manutention en haute mer à bord des navires d'Iframer. Dans le cadre de cette étude, les câbles sont modélisés comme un assemblage de brins soumis à de grands déplacements et développant des interactions de contact-frottement. Chaque brin constituant les torons est modélisé par un modèle de poutre à cinématique enrichie (cf section 2.2.2) et doté d'un comportement élastique linéaire avec des rigidités de flexion et de torsion réduite pour tenir compte du fait qu'il est constitué d'un ensemble de filaments. Ce modèle a été utilisé pour déterminer la configuration initiale de tresse et simuler ses passages répétés sur une poulie afin de comprendre son endommagement. Cette étude est remarquable car elle a permis d'aller nettement plus loin par rapport aux travaux précédents. Cependant, les résultats obtenus ne sont pas

suffisants pour prédire les ruptures au niveau des brins, et une analyse locale à l'échelle des filaments semble indispensable.

Modèles mésoscopiques pour d'autres types de renforts fibreux

Dans un périmètre plus large que les câbles, il existe des études qui s'intéressent au comportement à une échelle mésoscopique d'autres types de structures textiles (tissés, tricotés ou tressés). Dans ce contexte, les travaux entamés par P. Boisse et ses collaborateurs sont très intéressants. L'objectif de ces approches est de déterminer le comportement d'une maille élémentaire du tissé, constituée de mèches (une mèche correspond à un paquet de fibres) assimilées à des milieux continus. Les modèles proposés sont des modèles continus pour le comportement d'une mèche, qui doivent hériter des caractéristiques liées à la nature fibreuse et discrète du milieu. Ces modèles de comportement sont utilisés pour la simulation par élément finis 3D de mailles élémentaires à une échelle mésoscopique. Le passage des résultats sur une maille au comportement du renfort global se fait en utilisant des techniques d'homogénéisation numériques, qui seront abordées plus tard dans ce chapitre. Ce qui nous intéresse ici est la détermination du comportement continu équivalent à une mèche constituée d'un assemblage de fibres, qui doit rendre compte des spécificités d'un tel assemblage, afin de déterminer s'il serait possible de l'adapter pour la modélisation des brins d'un câble.

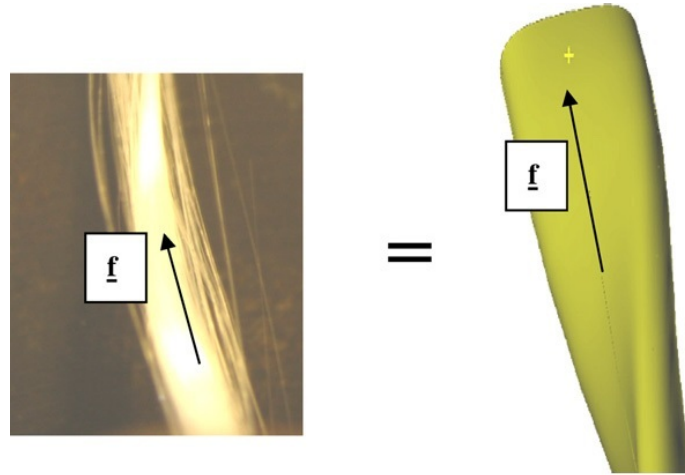


FIGURE 4.7 – Modèle continu de mèche équivalent à un paquet de fibres (figure issue de [Badel 2008])

Les travaux réalisés dans ce contexte par [Gasser 2000], [Hagege 2004] puis [Badel 2008] ont contribué à la formulation d'une loi hypo-élastique de comportement de la mèche qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}^\nabla = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{D}} \quad (4.2)$$

où $\underline{\underline{D}}$ et $\underline{\underline{C}}$ sont respectivement le tenseur de taux de déformation et le tenseur de rigidité, $\underline{\underline{\sigma}}^\nabla$ est une dérivée objective du tenseur de contrainte, prise adaptée à la nature fibreuse du milieu puisqu'elle est basée sur la rotation matérielle des fibres. Les mèches considérées dans ces études sont composées de fibres alignées. La dérivée est calculée en se basant sur une rotation de la direction forte d'anisotropie, à savoir celle des fibres (voire figure 4.7). Le comportement mécanique de la mèche est supposé isotrope transverse, et le module d'Young longitudinal de la mèche est un module apparent qui prend en compte le changement de section de la mèche, sous l'hypothèse que la raideur de la mèche est constante :

$$E = E_0 \frac{S_0}{S} \quad (4.3)$$

où S_0 et S sont les aires initiale et déformée de la section, alors que E_0 est le module d'Young initial de la mèche ($= \frac{k}{S_0}$), dont la valeur est ajustée de sorte à ce que la raideur de la mèche k corresponde à la valeur expérimentale.

En ce qui concerne les paramètres du comportement transverse, en raison de la difficulté pour caractériser expérimentalement une mèche, ces auteurs procèdent par une méthode inverse : à partir d'un essai de traction biaxiale sur le renfort (qui met en jeu un écrasement des mèches sous la tension appliquée), ils cherchent à déterminer les paramètres de la loi avec une méthode d'optimisation au sens des moindres carrés. Les conditions aux limites appliquées à la cellule résultent de la périodicité de la structure du renfort (voir figure 4.8 (a)).

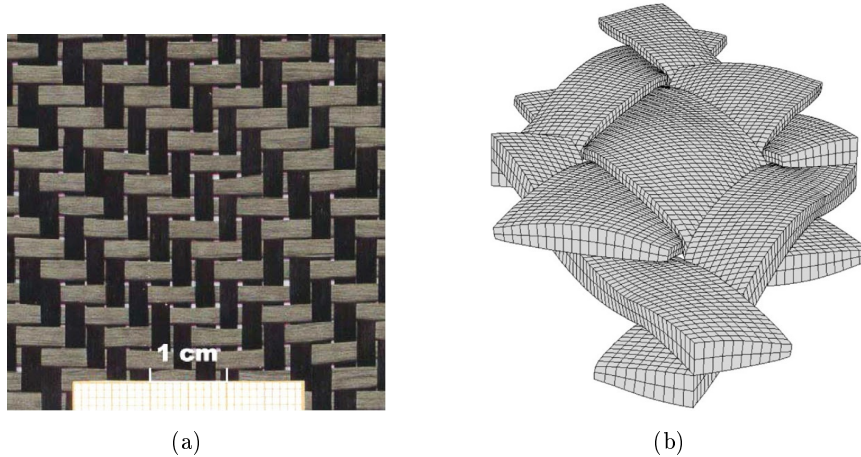


FIGURE 4.8 – (a) Structure périodique du tissu (figure issue de [Badel 2009]) ; (b) Cisaillement d'une maille élémentaire constituée de mèches décrites par un modèle continu (figure issue de [Badel 2008])

Ces travaux ont permis d'obtenir des résultats de simulation très satisfaisants. Cependant, en plus de la difficulté pour identifier les paramètres liée à la complexité des essais expérimentaux, la loi de comportement proposée ne prend pas en compte les phénomènes dissipatifs (dus aux frottements entre fibres).

Une évolution intéressante de ces travaux a été introduite récemment par [Charmetant 2011a] et [Charmetant 2011b]. Les auteurs ont proposé une loi hyperélastique pour modéliser le comportement mécanique d'une mèche constituée d'un paquet de fibres. Encore une fois, la mèche considérée est constituée d'un assemblage de fibres orientées dans la même direction. Pour qu'elle soit considérée comme un matériau continu, le paquet de fibres est supposé suffisamment compact, de manière à éviter tout déplacement indépendant des fibres. La loi de comportement est définie avec une approche phénoménologique en se basant sur des tests expérimentaux en traction uniaxiale et biaxiale pour identifier ses paramètres. L'apport principal de cette approche est de définir le comportement mécanique de la mèche en fonction des modes de déformation du paquet de fibres et qui sont liés à sa microstructure (comportement des fibres et leurs interactions à l'échelle microscopique). A notre connaissance, ce modèle semble être le plus pertinent jusqu'à présent pour représenter le comportement équivalent d'un paquet de fibres. Nous allons revenir plus en détails sur ce modèle dans la section 4.4.3 et expliquer les raisons pour lesquelles il ne peut pas être utilisé dans notre cas.

4.2.3 Modélisation à l'échelle microscopique

Les modèles développés aux échelles macroscopique ou mésoscopique ne peuvent pas prendre en compte certains phénomènes se produisant à l'échelle locale, en raison des hypothèses simplificatrices sur lesquelles ils se basent (trajectoire des fils idéalisée, absence de frottement, ...). Pourtant, ces

mécanismes locaux ont un impact majeur sur le fonctionnement global du câble, et donc leur prise en compte paraît indispensable. Les approches dites microscopiques consistent alors à modéliser individuellement chaque constituant élémentaire de la structure, et de prendre en compte toutes les interactions de contact et de frottement entre eux.

Ce type d'approches microscopiques présente plusieurs avantages :

- *Mettre en évidence le comportement non linéaire global :*

Comme nous l'avons souligné auparavant, au sein du câble on se confronte aux différentes échelles à des assemblages discrets de fibres. Leur comportement dépend de phénomènes complexes liés entre autres aux interactions de contact frottant qui ont lieu entre les fibres. L'identification d'un comportement équivalent paraît une tâche difficile. En modélisant individuellement toutes les fibres élémentaires et les interactions de contact au sein de l'assemblage, la question de formuler un modèle à une échelle intermédiaire ne se pose pas pour déterminer le comportement mécanique global.

- *Accès aux informations locales :*

Les simulations numériques avec ce type d'approches permettent d'avoir accès à des informations à l'échelle des fibres individuelles. La connaissance de ces quantités est très utile pour aider à la compréhension des mécanismes complexes à cette échelle, en particulier les phénomènes d'endommagement.

- *Caractérisation géométrique du câble :*

Pour pouvoir étudier le comportement d'un câble textile sous différentes sollicitations, il est nécessaire de disposer de la géométrie des fibres et de leur arrangement au sein de l'assemblage. Ces informations géométriques sont difficiles à déterminer a priori, puisque elles résultent des interactions complexes entre les composants durant le processus d'assemblage. A l'issue de l'assemblage, l'arrangement des filaments au sein du câble est largement modifié (du aux phénomènes de migration) avec des rayons de courbure et des angles d'hélices non constants, ce qui crée des zones plus fragiles que d'autres. La connaissance de ces éléments est indispensable pour la compréhension des mécanismes d'endommagement du câble.

La simulation des filaments à l'échelle microscopique peut alors permettre de calculer une bonne approximation de cette configuration. Pour cela, deux méthodes sont possibles :

- Simuler complètement le processus de mise en forme, comme cela est fait dans la thèse de H. Bajas (voir [Bajas 2009] et [Bajas 2012]) ;
- Une méthode alternative relativement répandue dans la littérature sur le textile consiste à approcher la configuration initiale à partir d'une première configuration estimée a priori. Par exemple, dans [Durville 2010] et [Wielhorski 2012], cette configuration fictive présente des interpénétration entre les fibres, qui sont alors déplacées progressivement jusqu'à ne plus avoir de pénétration entre elles. Dans [Wang 2010], la configuration initiale d'un volume élémentaire du tissé a été générée en appliquant un processus de relaxation à partir d'une première estimation de configuration. Les travaux de [Wang 2010] ont ainsi montré que la simulation du processus de torsadage de 7 filaments permet de représenter le phénomène de migration des filaments observé expérimentalement (voir la figure 4.9).

Différents codes commerciaux ont été utilisés pour la simulation de structures fibreuses en général, en se basant sur la modélisation de leurs microstructure (voir par exemple [Finckh 2004] et [Pickett 2009]). Par ailleurs, on pourra noter que quelques auteurs ont développé des méthodes alternatives aux Éléments Finis pour simuler la microgéométrie de structures fibreuses. Par exemple, une méthode dite "des éléments digitaux" (Digital Element Method) a été établie par [Wang 2000], [Zhou 2004] et [Miao 2008] pour simuler le processus d'élaboration des renforts tissés (voir figure 4.10). Dans ce modèle, les filaments sont modélisés par des chaînes de barres cylindriques connectées

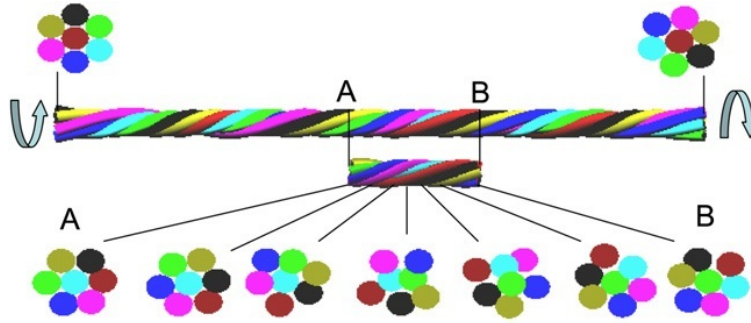


FIGURE 4.9 – Mise en évidence de la migration des filaments par la simulation du retordage d'un câble (figure issue de [Wang 2010]).

par nœuds. Cette méthode permet également de prendre en compte les interactions de contact frottant entre les filaments au niveau des nœuds reliant les chaînes, et de considérer des grands déplacements.

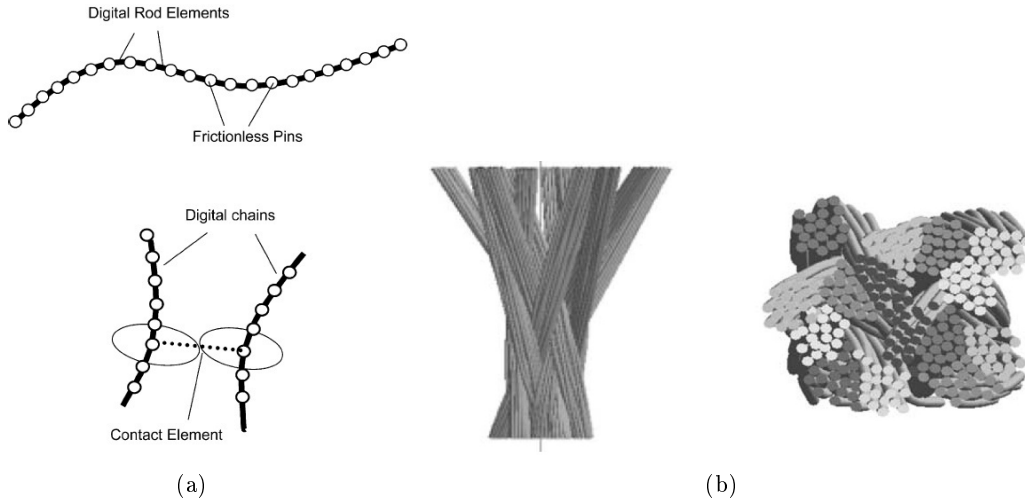


FIGURE 4.10 – Méthode des éléments digitaux développée par [Zhou 2004] : (a) Illustration du concept ; (b) Exemples de simulation d'un renfort tissé.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi de nous baser sur le logiciel Multifil. L'approche repose sur la simulation éléments finis à l'échelle des fibres du câble en prenant en compte chacune des fibres à l'aide d'un modèle de poutre et les interactions de contact entre elles. Pour une présentation détaillée du modèle de poutre et l'approche de gestion du contact, le lecteur intéressé peut consulter les chapitres 2 et 3 de ce rapport. Ce type de simulation est un moyen de compréhension des phénomènes physiques locaux, souvent inaccessibles expérimentalement, afin d'optimiser les paramètres de dimensionnement du câble. En revanche et en raison du coût des calculs, ce type de simulation ne peut cependant être mené que sur des échantillons comprenant un nombre réduit de fibres et non sur des assemblages à plusieurs dizaines de milliers de fibres, tels que ceux utilisés couramment comme renforts pour les pneumatiques.

Au final, ces modèles microscopiques présentent de nombreux avantages grâce au peu d'hypothèses physiques réalisées. Cependant, le point commun à toutes les approches microscopiques est leur coût de calcul important, qui empêche leur application directe sur des câbles à grand nombre de filaments. Pour lever cette limite, nous allons rechercher une stratégie multi-échelles adaptée dans la suite de ce

chapitre. Cette méthode multi-échelles devra en particulier respecter les deux contraintes suivantes :

- Permettre la migration de filaments au sein du câblé ;
- Être relativement peu coûteuse, surtout que les quantités locales ne sont souvent utiles que dans des zones restreintes de la structure.

4.3 Méthodes numériques multiéchelles

D'une manière générale, la plupart des structures dans les applications industrielles mettent en jeu des phénomènes physiques à différentes échelles : structures complexes composées de plusieurs éléments (avions, navires, fusées, ...), matériaux hétérogènes (métaux polycristallins, ...), milieux granulaires (sables, roches, ...), matériaux composites, ...

La simulation de ce type de structures par une modélisation directe à une échelle fine entraîne le traitement d'un nombre important de degrés de liberté et des coûts de calcul prohibitifs, voire irréalisables. Depuis quelques décennies, de nombreux auteurs s'orientent alors vers le développement de techniques de modélisation multi-échelles. Ces méthodes ont pour objectif de remplacer la simulation du problème mécanique complet par la résolution de plusieurs problèmes plus petits, pouvant être résolus séparément.

L'objectif de cette section est de présenter les principales approches numériques multi-échelles existant en mécanique non linéaire. Ces approches se basant sur certaines hypothèses, nous allons analyser si leur application à notre problème de câble textile est envisageable.

4.3.1 Méthodes d'homogénéisation

Présentation de la théorie de l'homogénéisation

Cette partie a uniquement pour objectif d'introduire les idées principales de la théorie de l'homogénéisation et les différentes méthodes qui en résultent, et ne se veut en aucun cas exhaustive. Pour une étude mathématique plus approfondie des méthodes multi-échelles en élasticité non linéaire, on réfère le lecteur la thèse [Gloria 2007].

L'objectif des méthodes d'homogénéisation est de construire un milieu homogène avec des propriétés mécaniques effectives qui soient équivalentes au milieu hétérogène considéré, de manière à pouvoir réaliser des calculs macroscopiques sans prendre en compte le comportement local de la microstructure. Pour cela, l'hypothèse de base est de définir en tout point de la structure un "Volume Élémentaire Représentatif" (**V.E.R**) de la géométrie microscopique du matériau. La géométrie de ce VER peut être exacte dans le cas d'une microstructure périodique, ou statistique lorsque la microstructure est aléatoire.

Conditions de validité

L'existence d'un volume élémentaire représentatif dans un matériau hétérogène est loin d'être automatique. Pour se fixer les idées, on note dans ce qui suit D la dimension caractéristique de la structure globale et d la taille moyenne des hétérogénéités dans la matériau (voir la figure 4.11).

La théorie de l'homogénéisation est applicable uniquement s'il est possible de définir un VER de taille caractéristique l vérifiant les deux conditions suivantes :

- La taille du VER à définir doit être beaucoup plus grande que les dimensions typiques des hétérogénéités, de manière à ce que ce volume soit *représentatif* de l'hétérogénéité de la microstructure du milieu réel :

$$d \ll l$$

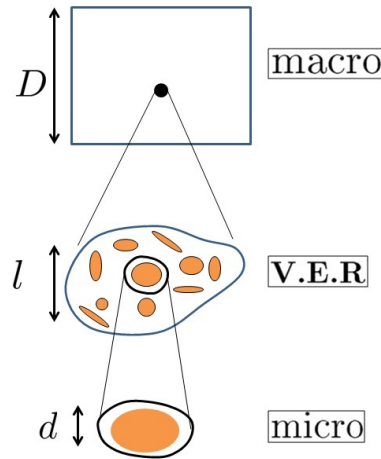


FIGURE 4.11 – Séparation d'échelles pour la théorie de l'homogénéisation.

- La dimension du VER doit être assez petite par rapport à la taille caractéristique de la structure macroscopique, :

$$l \ll D$$

En effet, l'objectif étant d'assimiler globalement la réponse mécanique du VER à la particule macroscopique dont il exprime la microstructure, le volume considéré doit être considéré *élémentaire* à l'échelle de la structure.

Ces deux conditions correspondent à l'hypothèse de séparation d'échelles ou de macrohomogénéité de Hill.

Principe général

Une fois que la géométrie du VER est identifiée, le principe de l'homogénéisation est de définir les variables d'état macroscopiques (tenseurs de contraintes et de déformations) comme étant des moyennes de variables microscopiques sur celui-ci. Cela doit alors permettre d'établir une relation entre les déformations et les contraintes macroscopiques, qui caractérisera le comportement du milieu homogène équivalent. En pratique, cela se fait en trois étapes :

- *Localisation* : Il s'agit de la transition macro-micro, permettant de définir des conditions aux limites appropriées à l'échelle locale, déterminées à partir des données de l'échelle "macroscopique" ;
- *Résolution* : Il s'agit de déterminer les champs de variables "microscopiques" en réalisant un calcul (analytique ou numérique) sur le VER en respectant les conditions aux limites venant de la localisation ;
- *Homogénéisation* : Il s'agit de la transition micro-macro, qui vise à estimer le comportement global homogénéisé. Les champs macroscopiques sont déterminés à partir des champs microscopiques.

Dans la grande majorité des cas, les déformations macroscopiques sont imposées en moyenne sur le VER, et la phase d'homogénéisation consiste alors à moyenner les contraintes microscopiques. La méthodologie correspondante est résumée sur la figure 4.22.

Dans la littérature, il existe des méthodes d'homogénéisation basées sur des approches analytiques telles que la théorie du champ moyen et l'approche mathématique de l'homogénéisation asymptotique. La solution à l'échelle locale est alors approchée par une expression explicite.

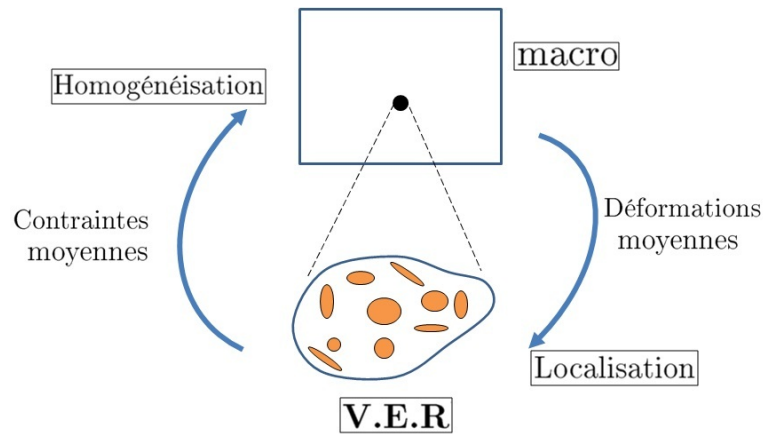


FIGURE 4.12 – Méthodologie générale de l'homogénéisation d'un matériau hétérogène.

Ces modèles ont l'avantage d'être simples et en général très efficaces dans le cas linéaire. Par contre en mécanique non linéaire, ces approches analytiques n'ont pu être étendues que pour un nombre limité de géométries et des sollicitations simples. Pour plus de détails sur ces approches, le lecteur intéressé pourra consulter par exemple [Bornert 2001], [LeBris 2005] et [Lopez-Pamies 2006].

Dans ce qui suit, nous allons nous focaliser sur les approches d'homogénéisation numériques. Ces méthodes se basent sur la construction et la résolution numérique d'un problème aux limites à l'échelle microscopique. Les résultats calculés sur le VER sont ensuite utilisés pour déterminer le comportement homogénéisé à l'échelle macroscopique.

Méthodes d'homogénéisation numérique du premier ordre

Les méthodes du premier ordre sont les approches les plus classiques en homogénéisation. Dans ce type d'approche, le tenseur de gradient de déformation macroscopique F_M est calculé en tout point matériel de la structure globale (au niveau des points d'intégration dans le cadre des éléments finis). Ce gradient de déformation moyen est transmis au VER associé à ce point matériel macro par l'intermédiaire des conditions aux limites imposées à ce VER. Une fois la résolution locale réalisée, le tenseur des contraintes macroscopique P_M est calculé en moyennant les champs de contraintes résultants dans le VER après déformation. Par conséquent, on établit "numériquement" une relation contrainte-déformation en ce point macroscopique. Le principe de l'approche est résumé sur la figure 4.13.

En général, la résolution numérique des problèmes locaux se fait "à la volée" par la méthode des éléments finis (cf méthode EF2 dans [Feyel 2000]), c'est-à-dire en même temps que le calcul macroscopique. Une telle méthode est dite *concurrentielle*, alors qu'une méthode est *séquentielle* si les résolutions aux deux échelles ne sont pas simultanées. Par exemple, il est possible de lancer une série de calculs microscopiques, puis de se servir de ces résultats soit pour approcher les coefficients d'une loi macroscopique que l'on suppose la forme connue (voir par exemple [Sluis 1999]) ou pour construire une base de donnée en fonction de laquelle on cherche à interpoler le comportement macroscopique (cf [Temizer 2007] et [Yvonnet 2009]). Les méthodes séquentielles sont souvent plus complexes à mettre en place, mais présentent l'avantage d'être plus rapides que la résolution à la volée, qui résout un très grand nombre de problème locaux.

Ces méthodes d'homogénéisation numériques sont très répandues dans la littérature et ont été utilisées dans un grand nombre de domaines. Cependant, elles présentent certaines limites : seuls les modes de déformation du premier ordre (tension, compression, cisaillement) sont transmis à l'échelle

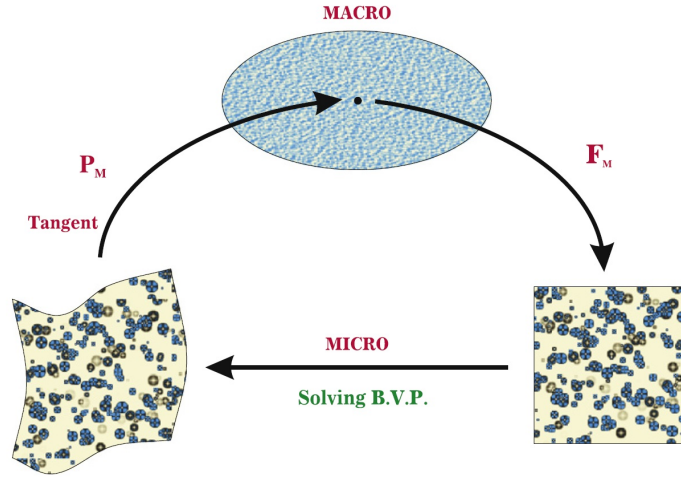


FIGURE 4.13 – Homogénéisation numérique du premier ordre (figure issue de [Geers 2010]).

microscopique, alors que les modes de déformation de second ordre (la flexion, la torsion) ne sont pas représentés au niveau du VER. Cela se justifie dans le cas d'un milieu de Cauchy lorsque les échelles microscopique et macroscopique sont supposées infiniment séparées, car le gradient de déformation macroscopique peut alors être considéré constant à l'échelle du VER. Par contre, cette hypothèse peut devenir problématique dans trois types de situations :

- Taille des hétérogénéités du même ordre de grandeur que la dimension de la structure ;
- Champs de déformations localisés (présence d'une singularité) ;
- Milieux où le comportement global dépend fortement des phénomènes de flexion locaux.

Dans ce cas, la théorie de l'homogénéisation du premier ordre ne peut pas alors être appliquée.

Méthodes d'homogénéisation numérique du second ordre

Pour dépasser les restrictions des méthodes du premier ordre, et notamment pouvoir homogénéiser des milieux dont les échelles ne sont pas séparées, une extension du schéma classique en homogénéisation a été proposée par [Kouznetsova 2002a] et [Kouznetsova 2002b]. L'idée générale consiste à prendre compte en plus du gradient de déformation, le gradient du second ordre des déformations macroscopiques $G_M = \nabla F_M$ dans les conditions aux limites appliquées à la cellule élémentaire. Cette approche est schématisée par la figure 4.14. Le lecteur intéressé pourra consulter [Kouznetsova 2002a] où un développement plus détaillé de l'approche proposée ainsi que la technique de résolution sont disponibles.

Cette approche est particulièrement intéressante pour pouvoir prendre en compte des phénomènes localisés dans le but d'améliorer la précision du modèle homogénéisé, et sa performance a été illustrée sur plusieurs exemples présentés dans [Geers 2010]. Par contre, à notre connaissance, les problèmes locaux sont toujours résolus par la méthode des éléments finis "à la volée" avec cette approche. En effet, les techniques séquentielles dont nous avons parlé pour les méthodes du premier ordre semblent difficilement applicables ici :

- Une loi de comportement dépendant des gradients F_M et $G_M = \nabla F_M$ en grandes déformations semble difficile à construire ;
- Le nombre de paramètres macroscopiques dont dépend le problème local est très élevé, ce qui rend impossible la création d'une base de données suffisante pour ensuite interpoler.

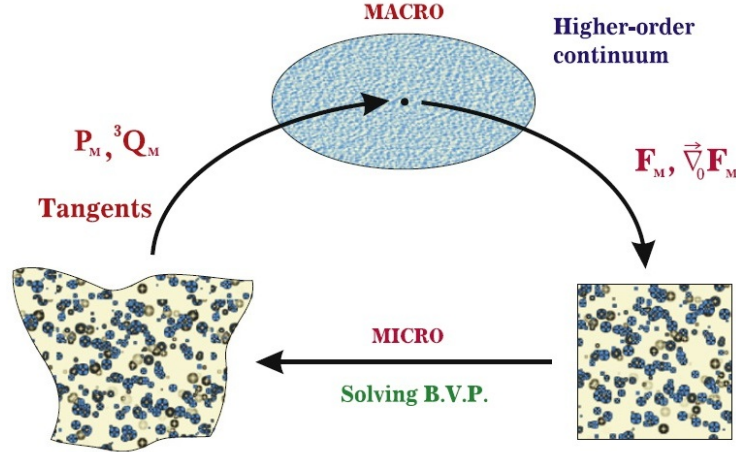


FIGURE 4.14 – Homogénéisation numérique du second ordre (figure issue de [Geers 2010]).

Application sur notre problème : analyse et limites

Les méthodes d'homogénéisation numériques ont déjà été largement appliquées sur les structures fibrées, mais en se plaçant à une échelle supérieure à celle de notre étude : les nappes fibrées constituées d'une matrice et de renforts câblés (voir [Lignon 2011]). Par contre, selon nos connaissances, ces techniques n'ont jamais été appliquées à l'intérieur d'un câble (ou d'un brin).

On peut remarquer que des méthodes d'homogénéisation numériques du premier ordre ont été appliquées sur des milieux discrets qui semblent avoir une similitude avec les milieux fibreux, à savoir les milieux granulaires (voir figure 4.15). Il est alors légitime de penser qu'on peut s'inspirer de ces travaux pour homogénéiser des structures fibrées.

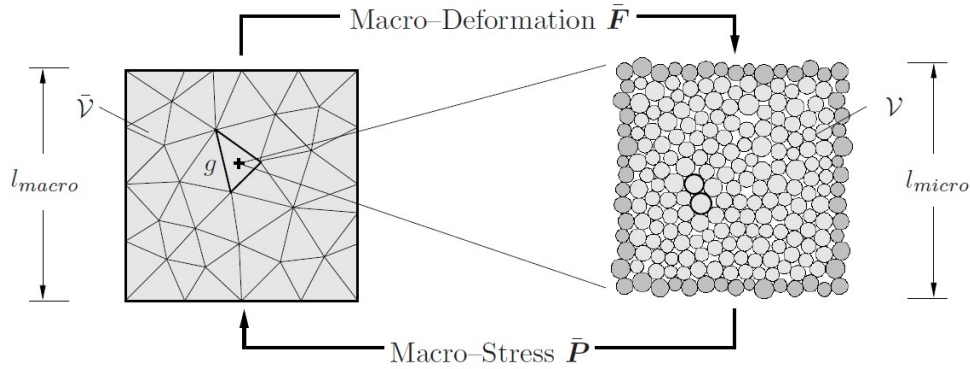


FIGURE 4.15 – Homogénéisation appliquée au milieu granulaire - à gauche : modèle macroscopique EF ; à droite : modèle discret microscopique (figure issue de [Miehe 2009]).

Cependant, même si l'hypothèse de séparation d'échelles était vérifiée, on se heurte à d'autres difficultés lorsqu'on cherche le comportement homogénéisé d'un brin :

- La microstructure est fibreuse et le comportement global dépend fortement des phénomènes de flexion locaux. Pour tenir compte de ces mécanismes, il faudrait s'orienter vers des méthodes d'homogénéisation du second ordre. Mais en pratique, nous avons vu que la résolution des problèmes locaux se fait nécessairement "à la volée" avec ces approches, ce qui rend le calcul trop coûteux ;
- La théorie de l'homogénéisation suppose que le milieu peut être considéré comme continu à

l'échelle macroscopique : deux VER voisins dans la configuration initiale le resteront pendant la transformation. Cette hypothèse est très limitante dans notre cas, car elle empêche les phénomènes de migration globaux et risque de sur-rigidifier la structure.

Finalement, ces deux limites nous ont poussé à nous orienter vers d'autres techniques numériques pour modéliser le comportement de nos câbles textiles.

4.3.2 Méthode de décomposition de domaine

Les méthodes de décomposition de domaine sont des approches numériques visant à permettre la simulation de structures présentant un grand nombre de degrés de liberté. Contrairement aux méthodes d'homogénéisation, ces techniques font très peu d'hypothèses, et en particulier ne nécessitent pas une séparation des échelles.

Cette section a uniquement pour but de résumer le principe général des méthodes de décomposition de domaine et ne se veut en aucun cas exhaustive. On réfère le lecteur intéressé par les détails des méthodes abordées aux travaux [Tallec 1994].

Principe général

Le principe des méthodes de décomposition de domaine consiste à découper la structure complexe Ω en un nombre fini de sous-domaines $\{\Omega^i\}_{i=1}^N$ de taille plus petite et de géométrie plus simple. Chaque paire de sous-domaines voisins partage une interface commune, définie par $\Gamma^{i,j} = \partial\Omega^i \cap \partial\Omega^j$.

Le problème global formulé sur le domaine Ω est alors décomposé en un système de problèmes définis sur chaque sous-domaine Ω^i , avec des conditions de raccord sur les interfaces pour les équilibrer entre eux. En éliminant localement les degrés de liberté internes, le problème mécanique initial peut être condensé en un nouveau problème, de taille considérablement réduite, où les inconnues sont les degrés de libertés des interfaces entre les sous-domaines. Afin de garantir l'efficacité de ces approches, la résolution des problèmes locaux sur les sous-domaines est faite de manière parallèle dans de nombreux codes de calcul, car ils sont tous indépendants les uns des autres.

En pratique, on distingue deux méthodes classiques selon le traitement de la condition de raccord choisie sur les interfaces :

- Une approche *primale* : Les déplacements d'interface sont imposés sur les bords des sous-domaines. On résout un problème avec des conditions aux limites de Dirichlet sur chaque sous-domaine, et on évalue les efforts sur les interfaces une fois l'équilibre local atteint (voir [LeTallec 1993] et [Tallec 1994]). Si l'équilibre des efforts est vérifié entre les sous-domaines, alors la solution est obtenue. Sinon des nouveaux déplacements d'interface sont calculés par résolution du problème condensé sur les interfaces. Le processus est itératif jusqu'à convergence.
- Une approche *duale* (FETI) : A l'inverse de l'approche primale, dans cette approche les inconnues principales sont les efforts d'interface entre les sous-domaines (voir [Farhat 1998] et [Farhat 2001]). La continuité des déplacements aux interfaces est imposée en fonction des efforts d'interface (par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange). On résout un problème avec des conditions aux limites de Neumann sur chaque sous-domaine et on évalue le saut de déplacements sur leurs interfaces. Si le saut est nul, la solution est obtenue. Sinon des nouveaux efforts aux interfaces sont calculés. Le processus est itératif jusqu'à convergence.

Application sur notre problème : analyse et limites

L'application de ces méthodes de décomposition de domaine nous a semblé séduisante pour notre étude. En effet, aucune hypothèse d'échelles découplées n'est requise. En appliquant ce type de méthode sur notre problème, on propose de décomposer la structure globale en un ensemble de sous-domaines contenant chacun un paquet de fils, comme représenté dans la figure 4.16.

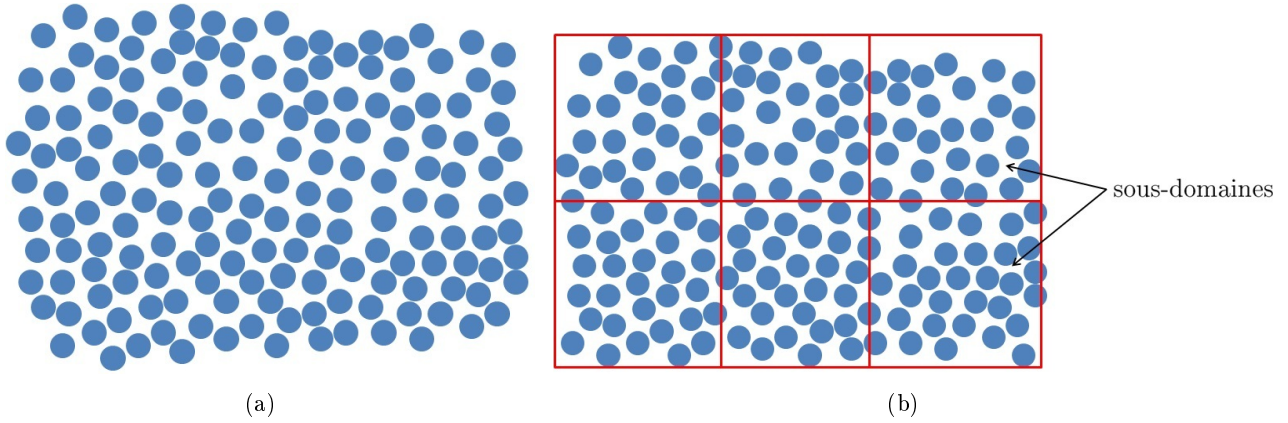


FIGURE 4.16 – Application de la décomposition de domaine sur une section de câble : (a) Géométrie complète ; (b) Décomposition en sous-domaines.

A ce stade de l'analyse, la définition des sous-domaines soulève un certain nombre de questions :

- La première possibilité est de former une partition du volume total avec des fils formant les interfaces qui sont communs à deux sous-domaines voisins. Cette approche ressemble beaucoup aux méthodes de décomposition de domaines classiques, puisqu'on crée une interface matérielle caractérisée par la position géométrique des fils et donc contrôlée par leurs déplacements. A la fois les méthodes primales et duales sont applicables dans ce cas. Dans la littérature, quelques auteurs (voir par exemple [Alart 2012] ou [V. Visseq 2013]) ont d'ailleurs déjà développé ce type d'approches pour la modélisation de milieux granulaires, qui présentent un certain nombre d'analogies avec les milieux fibrés (milieux discrets, phénomènes de migration, ...).

L'inconvénient de cette méthodologie est que l'on suppose une égalité des déplacements aux interfaces, ce qui empêche les phénomènes de migration globale des paquets de fils dans le câble. Dans le cas des milieux granulaires, la solution proposée par [Alart 2012] pour contourner cette limite est d'actualiser la définition des interfaces à chaque pas de temps, de manière à faire évoluer les interfaces et ainsi autoriser les migrations de grains entre sous-domaines. Cependant, cette technique est difficilement applicable dans le cas des milieux fibrés à cause de leur aspect continu dans la direction longitudinale : il pourrait arriver que seule une portion de filament migre d'un sous-domaine à un autre, cela nécessiterait alors de découper certains filaments dans leur longueur, ce qui soulèverait des difficultés pour définir des conditions aux limites adaptées entre sous-domaines.

- La deuxième possibilité consiste alors à considérer des sous-domaines disjoints. Dans ce cas, chaque sous-domaine possède sa propre interface constituée par l'ensemble de ces fils externes (voir figure 4.17). Le recollement entre sous-domaines se fait avec une condition de contact entre les fils de deux interfaces voisines. Cette piste est séduisante dans le sens où elle autorise les sous-domaines à glisser les uns par rapport aux autres, ce qui autorise la migration globale de paquets de fils dans le câble. En revanche, on se heurte ici aux difficultés liées au traitement des problèmes de contact à deux niveaux. La non-linéarité de cette condition de

contact entre sous-domaine peut engendrer un nombre important d'itérations pour équilibrer les sous-domaines entre eux, et donc augmenter grandement le temps de calcul.

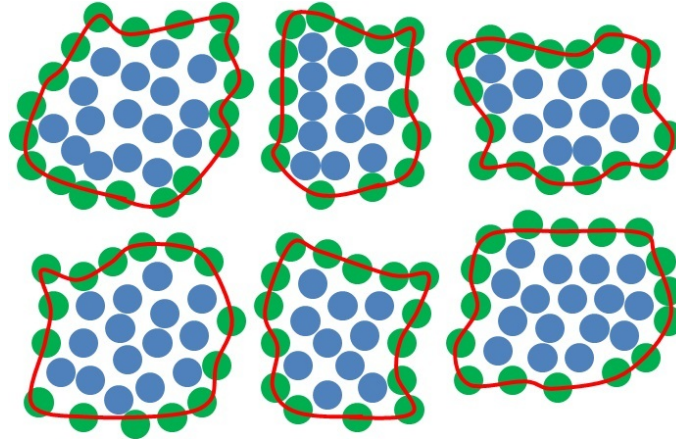


FIGURE 4.17 – Décomposition en sous-domaines disjoints.

En résumé, l'avantage principal des techniques de décomposition de domaines est de réaliser assez peu d'hypothèses mécaniques. Même si ces méthodes ont été développées pour la simulation de milieux continus, nous avons vu que des pistes existent pour les adapter aux milieux discrets tels que les milieux fibreux. Cependant, leur inconvénient est qu'elles nécessitent de réaliser des calculs sur tous les sous-domaines afin de les équilibrer. Ceci est raisonnable uniquement si l'on dispose de stratégies de parallélisation et d'une puissance de calcul importante. Par contre dans notre cas, nous souhaitons avoir la possibilité de réaliser des calculs microscopiques uniquement sur certaines zones d'intérêt afin de limiter au maximum le coût des calculs. Nous allons alors développer dans la section suivante une méthode originale qui permettra de répondre à tous ces critères.

4.4 Construction d'une approche multi-échelles appropriée

Comme nous l'avons relevé précédemment, en utilisant une approche formulée à l'échelle microscopique des fils élémentaires, la simulation du comportement des câbles textiles ne peut être réalisée que sur des assemblages comprenant un nombre réduit de filaments, alors que les câbles qui sont couramment utilisés comme renforts dans les pneumatiques comptent plusieurs dizaines de milliers de fibres. Étant dans un cadre industriel et en vue de pouvoir aborder de telles simulations avec des coûts raisonnables, on souhaite amener les calculs à une échelle supérieure à celle des filaments unitaires.

4.4.1 Introduction d'une échelle intermédiaire : Notion de macrofibre

Pour aborder les câbles à grand nombre de fibres, l'idée que nous proposons est de regrouper un certain nombre de fibres réel en une structure équivalente que nous appellerons **macrofibre**. Il s'agit d'un modèle mécanique continu, formulé à une échelle intermédiaire (entre l'échelle microscopique -celle des fibres- et l'échelle macroscopique -celle du câble-) et dont le comportement soit équivalent à celui d'un ensemble discret et discontinu de fibres.

L'idée qui paraît la plus intuitive serait de représenter chaque brin du câble par une macrofibre. Mais cela est impossible pour deux raisons :

- Une macrofibre étant modélisée comme un milieu continu, alors deux points infiniment proches dans la configuration initiale le resteront tout au long du chargement. On bloque par conséquence

tout phénomène de migration de fibres à l'intérieur des brins. Ce point laisse à penser qu'il faudrait se placer à une échelle plus petite que celle d'un brin pour introduire le modèle de macrofibre, de manière à permettre la migration de paquets de filaments d'une manière satisfaisante ;

- Un des principaux objectifs de la thèse est d'approcher les contraintes locales à l'échelle d'un filament individuel. Mais les brins contiennent quelques milliers de filaments, donc on se heurte une nouvelle fois à des coûts de calcul inabornables si l'on cherche à descendre en échelle. Ce second point nous pousse également à choisir des macrofibres contenant un nombre plus faible de filaments.

En conclusion, le modèle de macrofibre sera introduit pour représenter le comportement équivalent à un paquet de quelques dizaines de fibres (voir figure 4.18). Pour résumer, avec l'ajout de cette échelle intermédiaire, les échelles considérées dans notre modélisation sont donc :

- *Échelle microscopique* : l'échelle des fibres élémentaires ;
- *Échelle mésoscopique* : l'échelle des macrofibres équivalent à un paquet de quelques dizaines de filaments ;
- *Échelle macroscopique* : l'échelle du câble.

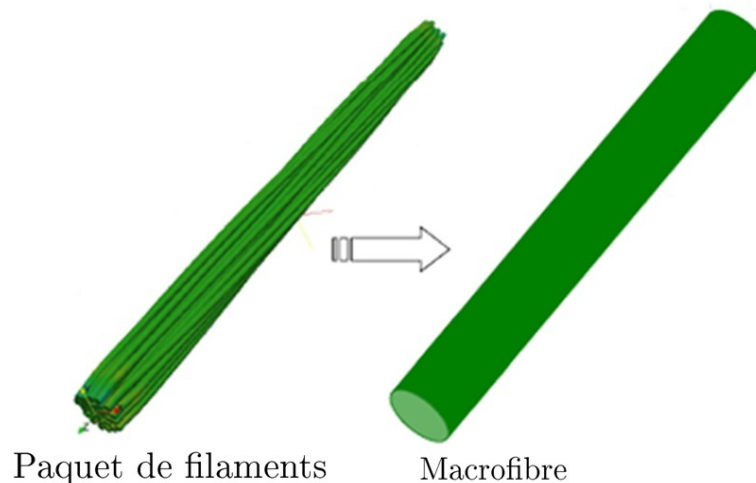


FIGURE 4.18 – Notion de macrofibre pour représenter un paquet de filaments.

Comme nous pouvons le constater à partir de la revue bibliographique présentée précédemment, le développement d'un modèle équivalent d'un paquet de filaments est loin d'être trivial. La détermination des propriétés mécaniques de ces macrofibres est une question importante et qui est encore un sujet de recherche ouvert, compte tenu de la complexité des phénomènes agissant à l'échelle microscopique (non linéarité due aux contacts frottants entre les fibres, couplages entre les chargements dans les différentes directions, impact de la géométrie et de l'orientation des filaments, lien qui existe entre les propriétés mécaniques à l'échelle de la macrofibre et les grandeurs discontinues à l'échelle microscopiques, ...).

Nous allons alors présenter dans la sous section suivante une étude préliminaire et des observations à l'échelle locale, afin de comprendre quels sont les phénomènes locaux qui impactent le plus la réponse mésoscopique, dans le but de déterminer les paramètres à prendre en compte dans notre modèle mécanique de macrofibre.

4.4.2 Analyse des phénomènes importants

Étude préliminaire

Pour analyser la nature des phénomènes à prendre en compte et qui peuvent orienter nos choix dans le modèle, nous commençons par une étude préliminaire sur un câble formé par un ensemble de macrofibres. Les macrofibres sont décrites par le modèle de poutre à cinématique enrichie décrit dans la section 2.2.2. D'un point de vue rhéologique, nous proposons d'utiliser une loi de comportement simplifiée de macrofibres. Il s'agit d'un modèle de comportement élastique de Hooke, dans lequel la rigidité axiale de la macrofibre est égale à la somme des rigidités des fibres qu'elle représente, alors que ses rigidités de flexion et de torsion sont multipliées par un facteur de réduction, dont le calcul sera expliqué dans le chapitre 6. Cette loi correspond à une première approximation du comportement équivalent d'un paquet de filaments en négligeant entre autres le frottement entre les filaments.

Nous avons réalisé un essai de traction sur deux types de câbles hybrides (composés de deux brins d'aramide et un brin de nylon) avec des hélices de $230t/m$ et $270t/m$. Nous présentons sur la figure 4.19 une comparaison en terme de courbes force-allongement entre les résultats numériques obtenus par ce modèle simplifié et les résultats expérimentaux (les valeurs sur les courbes se sont pas affichées pour des questions de confidentialité).

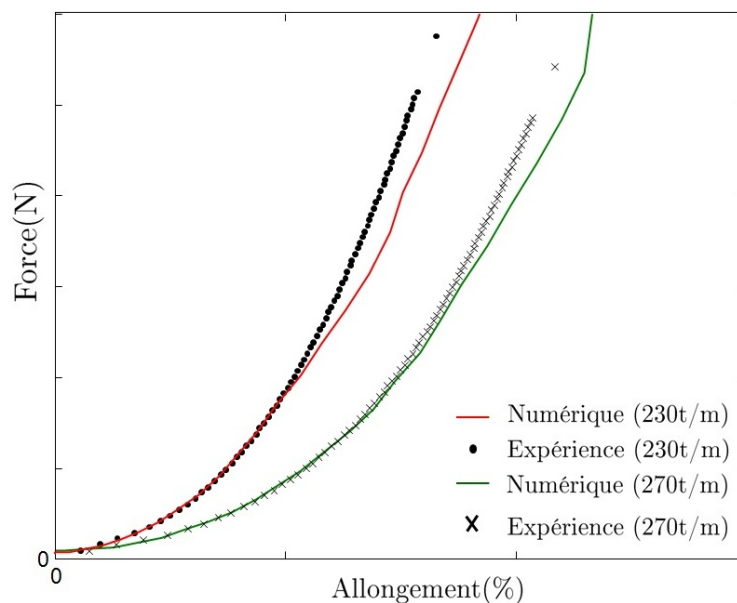


FIGURE 4.19 – Essai de traction : comparaison des résultats numériques obtenus par le modèle simplifié de macrofibre et les résultats expérimentaux pour deux types de câbles (Étude M. Romero de la Osa, Michelin).

Les prédictions numériques obtenues avec le modèle de macrofibre simplifié sont très satisfaisantes en terme de courbe force allongement pour des déformations modérées, et reproduisent en particulier très bien la non-linéarité visible sur les résultats expérimentaux. Ce comportement non-linéaire en début de traction traduit un effet géométrique de changement de configuration, classique pour les câbles textiles : il s'interprète d'une part par la réduction des gaps initiaux, et d'une autre part par une sollicitation progressive des filaments en tension. Il y a combinaison d'une diminution d'angle des brins d'aramide et d'une augmentation d'angle du brin en nylon. C'est essentiellement le brin en nylon qui s'allonge pour les faibles elongations car il est moins rigide, mais la rigidité non linéaire traduit le mécanisme global complexe. Ces phénomènes semblent correctement pris en compte par le

modèle simplifié de macrofibre.

En revanche, au-delà de cette partie non linéarité initiale, des écarts par rapport aux résultats expérimentaux apparaissent, et la rigidité longitudinale du câble estimée numériquement semble alors sous-évaluée. Cette phase du comportement correspond à la configuration dans laquelle la plupart des contacts sont largement établis et que tous les filaments sont tendus, ce qui fait qu'il n'y a plus d'effet de rattrapage des jeux à attendre. Pour comprendre l'origine des erreurs commises sur le modèle de macrofibre simplifié dans cette phase, nous nous sommes basés sur des mesures obtenues par la technique de la micro-tomographie à rayon X.

Observations par tomographie

Le principe de ces mesures est de soumettre le câble (inséré dans une matrice de gomme) à une source de rayons X, et de mesurer le signal reçu en vis-à-vis avec une matrice de capteurs (cf image 4.20). Cette manipulation est réalisée pour différentes positions angulaires, de qui permet ensuite de reconstruire l'ensemble de la micro-structure pour plusieurs centaines de sections du câble. Ces outils de mesure sont couplés à une machine de traction, ce qui permet de suivre l'évolution de la micro-structure au cours d'essais mécaniques.

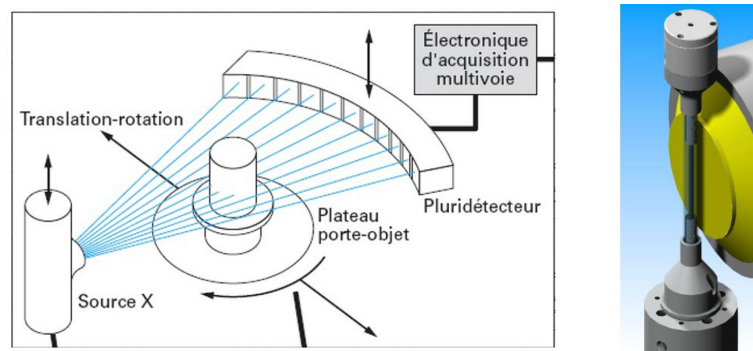


FIGURE 4.20 – Principe de la mesure par micro-tomographie à rayon X (de INSA / MATEIS à LYON).

On montre sur la figure 4.21 l'évolution de la micro-structure d'une section du câble au cours du même test de traction que présenté précédemment (cf courbe 4.19). On peut observer sur ces images deux effets liés à un phénomène de densification (compaction) au sein du câble quand la charge augmente :

- rapprochement des filaments jusqu'à un assemblage compact ;
- écrasement transverse des filaments jusqu'à avoir une forme hexagonale.

Plus précisément, on peut vérifier cette augmentation de la densité au cours du chargement en calculant l'évolution du taux de vide moyen dans le câblé au cours de la traction (voir tableau 4.1). Ces valeurs ont été estimées en utilisant des techniques de traitement d'image.

Par ailleurs, on remarque que la densité des filaments est plus importante au centre du câble que près de son contour. Ce phénomène est dû à l'augmentation de la pression radiale à mesure qu'on se rapproche du centre. En effet, à une certaine distance du centre (pour une certaine couche), l'effort radial résultant comprend la contribution propre de cette couche, à laquelle s'ajoutent les contributions des couches supérieures. C'est l'accumulation à travers les couches qui crée l'augmentation de la pression radiale, ce qui engendre une densité plus élevée au centre.

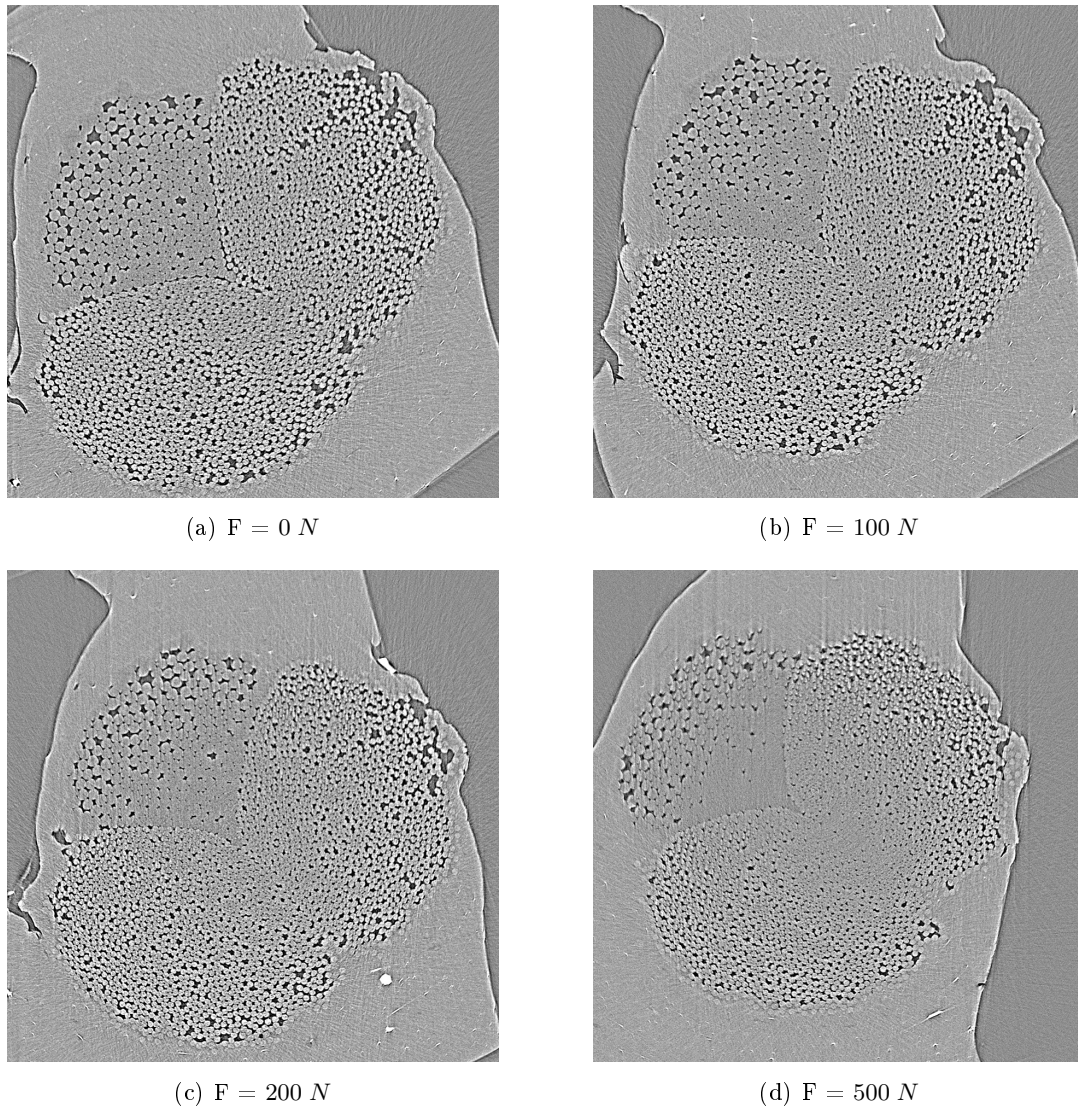


FIGURE 4.21 – Observation par tomographie de la micro-structure d'une section du câble au cours d'un essai de traction axiale.

Effort de traction (N)	Taux de vide moyen
0	0.148
100	0.127
200	0.112
300	0.096
400	0.087
500	0.074

TABLE 4.1 – Évolution du taux de vide moyen dans le câblé au cours de la traction.

Bilan de notre analyse

En se basant sur ces observations, l'erreur commise par le modèle simplifié de macrofibre au-delà d'un certain allongement (cf figure 4.19) semble correspondre à une incapacité à atteindre les niveaux de densité réels observés. En effet, pendant cette phase, les efforts radiaux deviennent suffisamment importants pour déformer les sections des filaments en les polygonalisant, alors que le modèle simplifié de macrofibre suppose que les sections restent elliptiques, ce qui entraîne une sous-estimation de la

densité réelle. Pour que notre modèle de macrofibre reproduise correctement le comportement global du câble, il devra donc être capable de prendre en compte les phénomènes de densification locale des macrofibres dus aux écrasements transverses et à la réduction du vide entre elles.

4.4.3 Pistes explorées : méthodes basées sur une cinématique enrichie

En se basant sur les limites des approches décrites dans les sections 4.2 et 4.3, plusieurs pistes ont été suivies pendant cette thèse pour construire une méthode multi-échelles adaptée à notre problème. Comme nous venons de le voir, cette méthode devra en particulier permettre de reproduire les phénomènes de densification observés dans le câblé.

Nous allons brièvement décrire dans cette sous-section les principales idées qui ont été testées durant cette thèse, de manière à justifier les choix que nous avons réalisés dans l'approche originale retenue. Cette méthode sera ensuite décrite plus en détails dans les chapitres 5 et 6 de ce rapport.

Pourquoi une cinématique riche ?

Les modes de déformations d'un paquet de fibres vu comme une macrofibre sont très complexes dans les directions transverses. Les phénomènes de réarrangements et d'écrasements transverses des filaments élémentaires entraînent des déformations importantes des sections de la macrofibre. Dans le modèle de poutre existant dans Multifil (qui a fait l'objet de la section 2.2.2 du chapitre 2 de ce rapport), la position de chaque particule dans le volume de la poutre s'écrit comme un développement au premier ordre autour de la fibre moyenne. Les modes de déformation d'une section sont alors décrits par seulement neuf degrés de liberté par section, ce qui ne permet d'approcher que des déformations constantes de la section dans les directions transverses, de type ovalisation.

Par conséquent, l'idée à ce stade de l'étude consiste à introduire un modèle de poutre à cinématique plus riche, qui aurait l'avantage de préserver l'aspect directionnel de ce type de structure et qui soit apte à reproduire le type de déformations subies par un paquet de fibres. Ce modèle cinématique de poutre pour la macro-fibre doit pouvoir alors représenter des déformations complexes de ses sections dans les directions transverses.

Modèle de cinématique riche de macrofibre

Ce modèle a été présenté dans la section 2.2.3 du chapitre 2. Pour rappel, l'approche consiste à généraliser le formalisme de l'écriture de la cinématique existant dans Multifil, en poussant l'ordre de développement du champ de position de tout point de la poutre sous la forme d'un développement polynomial à un ordre N quelconque (voir équation 2.43) :

$$\underline{x}(\xi_1, \xi_2, s) = \underline{r}(s) + \sum_{p=1}^N \sum_{q=0}^p \xi_1^q \xi_2^{p-q} \underline{d}_{q,p-q}(s)$$

Cette augmentation de l'ordre d'approximation du modèle cinématique introduit des degrés de libertés supplémentaires. De cette manière, tout en conservant un formalisme de poutre s'accordant avec la structure linéique de la macrofibre, il est possible de reproduire des déformations plus ou moins complexes des sections de la poutre, suivant l'ordre plus ou moins élevé du développement retenu.

Besoin d'une rhéologie adaptée de macrofibre

Ce modèle cinématique riche doit aller de pair avec une loi de comportement adaptée à appliquer à la macrofibre. En effet, la rhéologie doit être adaptée à la nature et à la complexité du comportement du paquet de filaments, caractérisé par une forte anisotropie et des couplages non linéaires entre les

différentes directions. Les comportements dans les directions longitudinale et transverses se trouvent par ailleurs couplés par le fait que les efforts de contact frottant développés entre les fibres, agissant principalement dans les directions transverses, sont conditionnés par les tensions portées longitudinalement par les fibres. De plus, comme nous l'avons noté précédemment, il existe des liens forts entre les phénomènes globaux et les phénomènes internes au sein du paquet de fibres textiles. Ces différents mécanismes internes qui se révèlent dissipatifs et non linéaires (interaction de contact-frottant) développés à l'échelle des filaments élémentaires génèrent un comportement mécanique global très difficile à identifier.

En revanche, en absence d'une loi adaptée, le modèle cinématique riche postulé ne sera pas capable de rendre compte des modes de déformations transverses dans la section de la macro-fibre. Pour pouvoir représenter des déformations complexes dans les sections des macrofibres, traduisant des variations de volume et de forme, il est donc indispensable de modifier la relation contraintes/déformations.

Dans cette optique de raisonnement et face au besoin d'alimenter le modèle de macrofibre par une loi de comportement adaptée, nos réflexions ont porté sur deux voies potentielles :

- La première voie consiste à identifier numériquement un comportement de macrofibre équivalent à un paquet de fibres grâce à une technique d'homogénéisation. L'idée est alors de considérer chaque macrofibre comme un milieu continu, et d'associer à chaque point d'intégration macroscopique (correspondant à un point matériel de la macrofibre) un échantillon local d'un ensemble de fibres (qui constitue un Volume Élémentaire Représentatif). La stratégie de résolution est celle de l'homogénéisation numérique classique qui a été présentée dans la section 4.3.1.

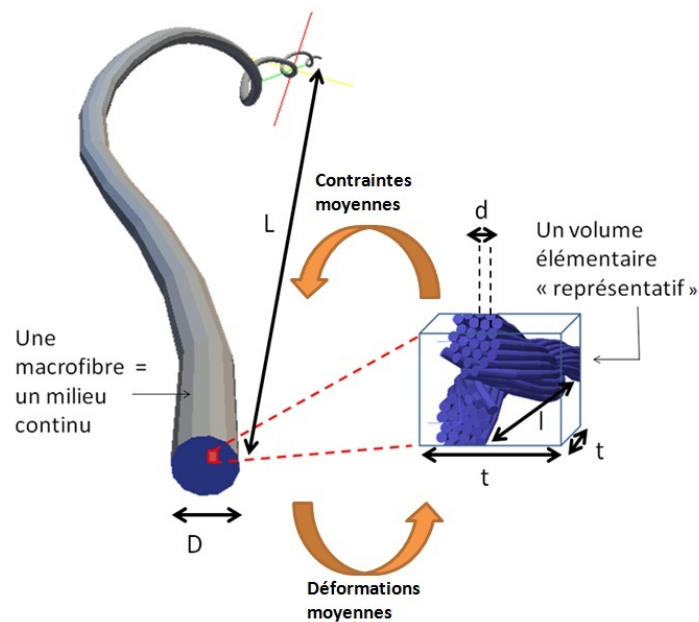


FIGURE 4.22 – Identification du comportement macroscopique d'une macro-fibre : méthode d'homogénéisation

Dans cette approche, chaque macrofibre contient seulement quelques dizaines de filaments, donc les échelles sont fortement couplées. On se heurte alors à un problème de représentativité du VER, à des questions liées à la sensibilité aux conditions aux limites et à un problème de coût en raison du grand nombre de géométries et de chargements mécaniques. De plus, l'objectif de cette approche est clairement d'identifier une loi de comportement de macrofibre. La réponse au besoin d'accès aux états de contraintes locales pourrait être apportée par une solution en

post-traitement du problème de VER local, mais cet accès risque de ne pas être fiable et d'être très biaisé par les conditions aux limites et la géométrie du VER. Pour toutes ces raisons, cette voie n'a pas été poursuivie.

- La deuxième voie consiste à identifier une loi de comportement appropriée de macrofibre. Dans ce contexte, une approche 3D très intéressante a été proposée dans la thèse de Adrien Charmetant (voir [Charmetant 2011a] et [Charmetant 2011b]) pour modéliser le comportement mécanique d'une mèche (équivalente à un paquet de fibres). La loi proposée est hyperélastique, telle que l'énergie de déformation de la mèche est écrite en fonction de 4 invariants porteurs de sens physiques et correspondant aux modes de déformations de la mèche jugés les plus prédominants. Les modes de déformations qui ont été retenus sont l'élongation dans la direction des fibres, la compaction et la distorsion dans le plan transverse et le cisaillement transverse (voir figure 4.23).

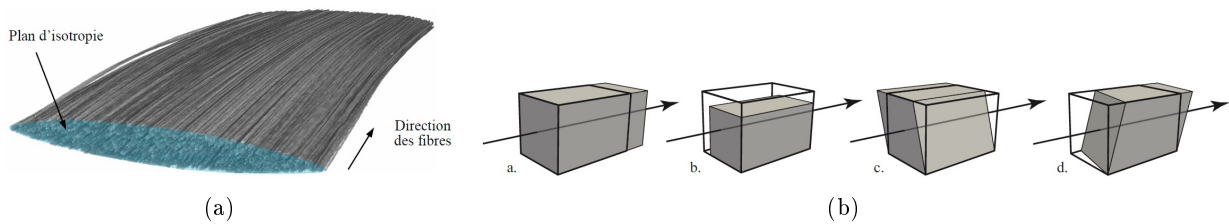


FIGURE 4.23 – Modélisation d'une mèche fibrée dans [Charmetant 2011a] : (a) Géométrie de la mèche ; (b) Modes de déformations retenus : élongation, compaction, distorsion, cisaillement transverse.

Dans ces travaux, les paramètres de la loi de comportement sont identifiés à partir de résultats expérimentaux pour des tests de traction uniaxiale sur une mèche réelle, et de traction uniaxiale et équi-biaxiale sur le renfort. Par ailleurs, la mèche est supposée être composée d'un assemblage de fibres orientées dans la même direction d'une manière suffisamment compacte pour empêcher les fibres de se déplacer d'une manière indépendante (voir figure 4.23(a)). Elle peut alors être considérée comme un milieu continu, et son comportement est supposé isotrope transverse. De plus, le milieu composant la mèche est supposé être un milieu de Cauchy, donc les modes de déformations restent du premier ordre, sans prendre en compte les modes de flexion. La loi de comportement a été validée avec des simulations sur des mailles élémentaires, pour les lesquelles une bonne corrélation a été constaté avec les résultats expérimentaux.

Dans le cas d'un câble textile, la microstructure et le comportement sont beaucoup plus complexes (cf section 4.1). En effet, à l'échelle des filaments, il existe des mécanismes liés à la géométrie hélicoïdale, aux grands déplacements de flexion et de torsion et au frottement entre les fibres. Au final, cette approche basée sur la notion d'invariants nous semble très prometteuse, mais un travail important serait nécessaire pour l'adapter aux câbles que nous étudions (postulat d'une forme d'énergie adaptée à une structure plus complexe, prise en compte des aspects dissipatifs liés aux frottements entre filaments, couplage entre les modes de déformation, mise en place de conditions aux limites appropriées pour identifier les paramètres, ...). Face à ces difficultés, nous avons choisi d'écarter cette piste pour nous orienter vers une approche dans laquelle le comportement des macrofibres est modélisé de manière plus simple, et qui aura l'avantage d'être moins coûteuse.

Outre la prédiction du comportement à l'échelle macroscopique du câble, nous rappelons que l'approche à développer doit aussi permettre de déterminer les contraintes locales des fibres sous sollicitations externes du câble. Nous avons choisi d'orienter notre travail d'avantage vers la descente à

l'échelle microscopique, afin d'accéder à la mécanique locale du câble tout en conservant des coûts de calcul accessibles. Pour cela, le principal verrou se situe dans le choix et la manière de transmettre à l'échelle locale les informations macroscopiques et d'analyser les résultats obtenus à l'échelle microscopique pour les traduire en quantités exploitables à l'échelle globale. Nous allons discuter les choix du modèle proposé dans la sous-section suivante.

4.4.4 Modèle original contrôlé par la loi de contact

Modèle macroscopique

A ce stade des réflexions, on se confronte aux difficultés liées au développement d'un modèle consistant de macrofibre. Comme nous venons de l'expliquer, la difficulté réside dans la formulation d'une loi de comportement adaptée (non linéarités, couplages...), qui permettrait de tirer profit du modèle de poutre à cinématique transverse enrichie dont nous disposons.

Pour contourner cet obstacle, nous faisons l'hypothèse que les phénomènes dans les directions transverses jouent principalement à travers la densification du milieu. Dans ces conditions, nous avons choisi de ne pas chercher à approcher précisément les déformations dans les directions transverses des macrofibres, mais de développer une méthode permettant de contrôler la densité du milieu à travers le contact entre elles. Nous proposons alors de conserver le modèle simplifié de macrofibre qui a été utilisé dans l'étude préliminaire (cf section 4.4.2), qui suppose que les sections restent elliptiques, et de prendre en compte les effets de densification locale des macrofibres (écrasements transverses, réduction des vides) en autorisant des pénétrations importantes entre elles.

Ces interpénétrations seront contrôlées à travers une loi de contact adaptée, contrôlé par deux paramètres de longueur :

- une distance de pénétration correspondant au rapprochement des filaments ;
- une distance de pénétration correspondant à l'écrasement transverse des filaments.

L'objectif de ce modèle macroscopique simplifié est d'estimer le comportement mécanique global du câble et de définir des informations à transmettre vers l'échelle microscopique. Les détails de la loi de comportement et du modèle de contact utilisés seront présentés dans le chapitre 6.

Choix des quantités à hériter de l'échelle macroscopique

Une fois la résolution à l'échelle macroscopique effectuée se pose la question de quelles quantités transmettre à l'échelle microscopique, où l'on cherche à représenter les sollicitations qui s'appliquent à un ensemble de filaments constituant une macrofibre.

A l'échelle macroscopique, nous disposons de la description des déformées des macrofibres (ligne moyenne et sections), des contraintes dans les macrofibres, ainsi que des efforts d'interaction entre macrofibres. Etant donné que nous avons choisi de ne pas mettre l'accent sur la représentation du comportement transverse des macrofibres, les informations relatives aux déformées des sections des macrofibres ne sont donc d'aucune utilité pour l'échelle microscopique. Par contre, nous disposons dans les directions transverses des efforts d'interaction entre macrofibres.

Pour une rigidité de flexion faible (ce qui est le cas pour les macrofibres), l'effort de contact d'une macrofibre sur une autre correspond à la tension portée par la fibre multipliée par sa courbure. A partir du moment où l'on estime que la géométrie des macrofibres est suffisamment bien approchée pour avoir de bonnes courbures et que l'on a une bonne confiance dans le comportement longitudinal de la macrofibre (qui détermine sa tension), on peut donc supposer que les interactions de contact entre macrofibres dans les directions transverses sont des informations de bonne qualité. Ceci nous

oriente alors vers une application de ces interactions de contact entre macrofibres comme sollicitations transverses à l'échelle microscopique.

A ce niveau de réflexion se pose la question sur la manière d'imposer ces efforts d'interaction entre macrofibres à l'échelle locale. La manière qui nous est apparue la plus simple pour imposer ces sollicitations a été de les appliquer à l'aide de plans mobiles pilotés en effort. Ceci permet en particulier de représenter les effets de compression transverse dont on attend des répercussions importantes en terme de densification locale.

Si les modèles aux deux échelles étaient équivalents, en leur appliquant les mêmes efforts transverses, on devrait avoir les mêmes trajectoires. Cependant, du fait que les modèles ne sont pas exactement équivalents, nous devons positionner convenablement le paquet de filaments pour lui faire suivre la position de la macrofibre correspondante, définie par la trajectoire de sa fibre moyenne et l'orientation de sa section (rotation autour de son axe). Nous proposons alors d'imposer la trajectoire de la fibre moyenne de la macrofibre et sa rotation aux filaments locaux. Dans notre modélisation, nous faisons le choix d'imposer ces quantités en moyenne dans la section du paquet de filaments, afin d'avoir moins d'artefact à l'échelle locale en perturbant le moins possible l'équilibre des filaments. L'application de ce positionnement sera fait à l'aide de deux multiplicateurs définie le long de la macrofibre : un champ de multiplicateur de Lagrange vectoriel associé à l'application de la trajectoire moyenne et un champ de multiplicateur de Lagrange scalaire associé à l'imposition de la rotation de la macrofibre autour de son axe aux paquets de filaments.

Finalement, avec ce double héritage, nous sommes en mesure d'appliquer à l'échelle microscopique les effets de chargements transverses, ainsi que les effets de courbure (flexion et torsion) subis par la macrofibre.

Modèle microscopique

En se basant sur les choix que nous venons de décrire, l'échelle locale est quasiment définie. Le problème microscopique est défini par un paquet de filaments, chaque filament étant modélisé par le modèle de poutre à cinématique enrichie existant dans Multifil et un comportement élastique standard. Les interactions de contact-frottement entre les fibres sont prises en compte selon la méthodologie présentée dans le chapitre 3. Le paquet de filaments est piloté par la trajectoire de la ligne moyenne et la rotation de la macrofibre associée, et est sollicité dans les directions transverses avec les efforts relatifs aux interactions de la macrofibre avec ses voisines par l'intermédiaire de plans rigides mobiles.

L'objectif assigné à la modélisation à l'échelle locale est d'approcher le comportement mécanique des filaments à l'intérieur d'une macrofibre, notamment pour aborder les phénomènes d'endommagement. Par ailleurs, pour des considérations de coût de calculs, cette analyse à l'échelle microscopique ne peut pas être effectuée sur l'ensemble de la structure. Nous proposons alors une approche microscopique sélective, telle que les simulations à l'échelle locale seront réalisées uniquement sur certaines zones jugées critiques. Il s'agit en d'autres termes de réaliser des zooms locaux sur les paquets de fibres associés à certaines macrofibres, afin d'y analyser plus précisément le comportement local. Ceci est avantageux pour des questions de coût de calcul, en particulier dans le contexte industriel dans lequel on se place.

Comme nous l'avons discuté précédemment, un couplage explicite entre les deux échelles est non envisageable pour l'instant. Dans un premier temps, cette méthode est purement descendante (approche "*Down-scaling*"), puisqu'on effectue un zoom une fois la résolution macroscopique terminée, sans chercher à équilibrer les deux échelles.

La simulation microscopique fournit la géométrie déformée de l'ensemble des filaments et les efforts qu'ils portent. Nous souhaitons alors mettre en œuvre des critères pertinents permettant de rendre compte des différents phénomènes se produisant dans ces macrofibres et d'en juger la pertinence. Pour cela, nous proposons de nous baser sur un critère de densité, mesurable expérimentalement, et qui peut être calculée à l'issue de la résolution des problèmes microscopique et macroscopique. À terme, un processus de recalage visant à obtenir un accord entre les densités déterminées aux deux échelles pourrait alors être introduit, dans le but de corriger le modèle macroscopique via un ajustement des paramètres du modèle de contact global.

Les détails de cette méthode seront présentés dans les chapitres 5 et 6 de ce rapport d'abord dans un cadre simplifié bidimensionnel puis dans un cadre tridimensionnel plus général.

Problème multi-échelles bidimensionnel

Sommaire

Introduction	89
5.1 Construction d'un problème bidimensionnel représentatif	90
5.1.1 Présentation du problème	90
5.1.2 Chargement extérieur	90
5.1.3 Forme de l'énergie	91
5.1.4 Modélisation des interactions de contact entre disques	91
5.1.5 Formulation du problème et résolution numérique	92
5.2 Formulation du problème multi-échelles "hérité"	94
5.2.1 Rappel du principe de l'approche proposée	94
5.2.2 Formulation du problème à l'échelle macroscopique	95
5.2.3 Formulation du problème à l'échelle microscopique sur une cellule locale	97
5.2.4 Aspects numériques	100
5.2.5 Résultats numériques	101
5.3 Formulation d'un problème multi-échelles couplé	104
5.3.1 Objectif	104
5.3.2 Écriture formelle du problème multi-échelles couplé	105
5.3.3 Équations d'équilibre et interprétations	106
5.3.4 Algorithme de résolution du problème multi-échelles couplé	108
5.3.5 Résultats numériques	111
5.4 Comparaisons entre les modèles	113
5.4.1 Comparaison entre les modèles microscopique et multi-échelles couplé	113
5.4.2 Comparaison entre les modèles multi-échelles couplé et hérité	114
Conclusion	118

Introduction

Le schéma général de l'approche multi-échelles proposée pour aborder la simulation de câbles textiles à grand nombre de filaments a été succinctement présenté dans le chapitre précédent. A travers cette approche, nous cherchons à déterminer le comportement mécanique global de la structure, tout en gardant la possibilité d'accéder aux sollicitations subies localement à l'échelle des fibres élémentaires dans certaines zones critiques, afin de prévoir leur endommagement.

Dans ce chapitre, nous allons présenter plus en détails cette approche en l'appliquant à un problème simplifié. L'idée est de construire un problème bidimensionnel approchant le comportement d'une section transverse de cet assemblage, de manière à retrouver les problématiques qui nous intéressent sur la structure câblée tridimensionnelle. L'avantage d'un tel problème bidimensionnel est de pouvoir réaliser des calculs microscopiques sur la totalité de la structure, ce qui nous sera utile pour valider l'approche multi-échelles, ainsi que de cerner les difficultés liées à cette méthode dans un environnement numérique simplifié. Le chapitre est organisé comme suit :

- Dans un premier temps, nous allons présenter les hypothèses et les choix préliminaires réalisés pour construire un problème 2D représentatif ;
- La section 5.2 décrit la méthode multi-échelles proposée, et explique la formulation des problèmes aux échelles macroscopique et microscopique. Nous présenterons également la méthode numérique utilisée la résolution à chaque échelle ;
- Enfin, dans la section 5.3, nous formulerons un problème couplé dans lequel le problème initial sur la géométrie complète sera simplifié en gérant les interactions entre les paquets de disques par le biais de plans séparateurs. Un algorithme sera proposé pour résoudre ce problème numériquement. Ce problème servira de référence intermédiaire à comparer au problème basé sur une approche descendante, ce qui nous permettra de :
 - analyser l’impact d’introduire un modèle plus fin à l’échelle globale ;
 - construire des estimateurs d’erreurs décrivant les incompatibilités entre le problème macroscopique et le problème microscopique.

5.1 Construction d’un problème bidimensionnel représentatif

5.1.1 Présentation du problème

Tout au long de ce chapitre, on cherche à construire un modèle 2D qui soit représentatif de ce qui se passe dans un câble textile composé de N_{tot} filaments (voir figure 5.1). Les sections des fibres y forment un ensemble de N_{tot} disques, dont la configuration initiale est décrite par :

- Leur rayon R_k , $k = 1 \dots N_{\text{tot}}$;
- Les coordonnées de leur centre $\underline{r}_k^0$, $k = 1 \dots N_{\text{tot}}$.

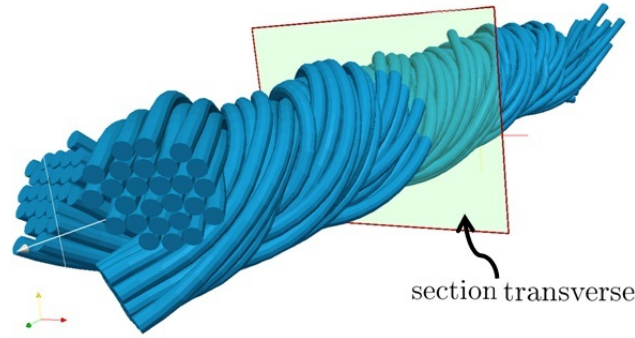


FIGURE 5.1 – Idée du problème simplifié : section transverse du câble.

Nous avons vu dans la section 2.2 que la prise en compte de la déformation des sections est capitale pour la modélisation d’un câble, car la contraction de la section des fils peut avoir un impact très important sur sa rigidité globale. Néanmoins, dans ce chapitre, nous allons uniquement étudier la validité de notre approche multi-échelles en nous basant sur les interactions entre fils et les phénomènes de migration, sans chercher à remonter jusqu’au comportement global du câblé. C’est pourquoi, afin de simplifier la formulation du problème bidimensionnel, nous nous permettons ici de supposer que les disques sont indéformables. Leur mouvement sera alors décrit par la position du centre $\underline{r}_k \in \mathbb{R}^2$.

5.1.2 Chargement extérieur

Nous cherchons à définir un chargement externe à appliquer sur les disques qui permettrait de se rapprocher au maximum du type de phénomènes observés sur les structures câblées tridimensionnelles.

Pour cela, nous nous basons sur les observations expérimentales par tomographie présentées dans la section 4.4.2, qui ont mis en évidence un phénomène particulièrement important : une mise en tension globale engendre un effet de compaction radiale. En effet, les fibres constituant le câble sont disposées en hélice et transmettent ainsi par effet géométrique la tension imposée en un effort radial.

Pour retrouver cet effet dans le modèle bidimensionnel, nous proposons de considérer chaque disque comme étant la section d'une poutre de longueur $\mathbf{L}$ mise en élongation. Nous choisissons alors de prendre le chargement extérieur comme étant une force proportionnelle à :

- la distance du centre du disque considéré par rapport au centre de l'assemblage (supposé pour simplifier correspondre au point de coordonnées $(0;0)$) ;
- l'élongation τ de la poutre correspondante.

Ainsi, la force "radiale" appliquée au k^{ime} disque s'écrit sous la forme :

$$\underline{F}_k^{ext}(\underline{r}_k) = -\frac{E_k A_k \tau}{L_k} \underline{r}_k \quad (5.1)$$

où $A_k = \pi R_k^2$ désigne l'aire de ce disque et donc le terme $E_k A_k$ représente la rigidité en extension de la poutre correspondante.

Une mise en tension de l'ensemble induit alors sur chaque disque un effort proportionnel à la distance au centre, qui est ensuite transmis aux disques en contact. A mesure que l'on se rapproche du centre de l'assemblage, chaque disque reprend ainsi les efforts développés par les disques les plus éloignés, ce qui permet de retrouver l'effet de compaction radiale recherché.

5.1.3 Forme de l'énergie

Afin de contourner le problème de disques flottants, il est nécessaire d'attribuer une énergie interne à chaque disque, qui représente l'effet d'un ressort élastique de rappel vers la configuration initiale. Nous avons choisi de prendre cette énergie interne de la forme :

$$\psi^{int}(\underline{r}_k) = \frac{E_k I_k}{2L_k^3} \|\underline{r}_k - \underline{r}_k^0\|^2 \quad (5.2)$$

Pour chaque disque, cette énergie correspond à l'énergie d'une poutre cantilever de longueur L_k , constituée d'un matériau de module d'Young E_k , encastree à une des extrémité, et dont le disque étudié correspondrait à l'autre extrémité. Dans cette expression, la quantités I_k représente le moment quadratique en flexion de la poutre.

5.1.4 Modélisation des interactions de contact entre disques

Étant donné que les disques sont supposés indéformables, le contact entre deux disques sera considéré comme étant ponctuel. D'un point de vue géométrique, le contact se produira au niveau du point d'intersection entre le segment de droite reliant les deux centres et les contours extérieurs des disques. Pour simplifier cette étude bidimensionnelle, nous faisons l'hypothèse que le contact entre les disques est un contact glissant. Pour plus de détails sur les aspects liés à la modélisation du contact unilatéral, le lecteur pourra consulter le chapitre 3 de ce manuscrit.

Pour chaque paire de disques voisins k et l , le contact se détermine par la distance entre les centres. La condition cinématique de non-interpénétration s'écrit alors :

$$g_N = (\underline{r}_l - \underline{r}_k) \cdot \underline{n}_{kl} - (R_k + R_l) \geq 0 \quad (5.3)$$

Le choix de la direction $\underline{n}_{kl}$ correspond tout simplement à la direction reliant les centres des deux disques, définie par :

$$\underline{n}_{kl} = \frac{\underline{r}_l - \underline{r}_k}{\|\underline{r}_l - \underline{r}_k\|} \quad (5.4)$$

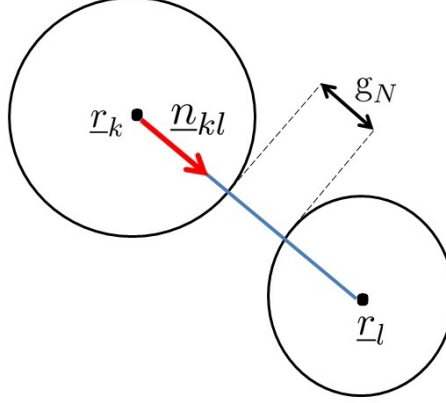


FIGURE 5.2 – Définition du gap entre deux disques.

Une fois ces quantités définies, la condition de non-interpénétration est imposée par une méthode de pénalisation régularisée, de telle sorte que la réaction normale du contact F_{kl}^{cnt} est déterminée par l'expression :

$$F_{kl}^{cnt}(g_N) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_N > 0 \\ -\frac{\kappa_N}{2 p_{reg}} g_N^2 & \text{si } -p_{reg} \leq g_N \leq 0 \\ \kappa_N \left(g_N + \frac{p_{reg}}{2} \right) & \text{si } g_N < -p_{reg} \end{cases} \quad (5.5)$$

où $p_{reg} > 0$ est un paramètre de régularisation dont la valeur dépendra de la précision désirée.

5.1.5 Formulation du problème et résolution numérique

Nous avons décrit dans les sous-sections précédentes les différents termes intervenant dans notre problème bidimensionnel. Pour écrire l'équilibre des efforts dans le paquet de disques sous forme faible, nous nous basons sur le principe des travaux virtuels défini par l'équation 3.10 :

Trouver pour $\{\underline{r}_k\}_{k=1\dots N_{tot}} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall \{\hat{\underline{r}}_k\}_{k=1\dots N_{tot}} \in \mathbb{R}^2$,

$$\sum_{k=1}^{N_{tot}} \left(P_{int}^k(\hat{\underline{r}}_k) + P_{ext}^k(\hat{\underline{r}}_k) + \sum_{l \text{ voisin de } k} P_{cnt-frot}^{kl}(\hat{\underline{r}}_k, \hat{\underline{r}}_l) \right) = 0$$

Dans cette expression, les deux premiers termes représentent la somme des travaux virtuels des efforts internes et externe de chacun des corps, alors que le troisième correspond au travail virtuel des interactions du contact glissant entre deux disques voisins k et l . Si l'on reprend les notations introduites précédemment, le problème mécanique d'équilibre à résoudre s'écrit donc :

Trouver pour $\{\underline{r}_k\}_{k=1\dots N_{tot}} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall \{\hat{\underline{r}}_k\}_{k=1\dots N_{tot}} \in \mathbb{R}^2$,

$$\sum_{k=1}^{N_{tot}} \left(\frac{\partial \psi^{int}(\underline{r}_k)}{\partial \underline{r}_k} \cdot \hat{\underline{r}}_k + \sum_{l \text{ voisin de } k} F_{kl}^{cnt}(\underline{r}_k, \underline{r}_l) \underline{n}_{kl} \cdot (\hat{\underline{r}}_k - \hat{\underline{r}}_l) \right) = \sum_{k=1}^{N_{tot}} F_k^{ext}(\underline{r}_k) \cdot \hat{\underline{r}}_k \quad (5.6)$$

Ce problème est fortement non-linéaire en raison de la non-linéarité de la force de contact définie par 5.5 et de la dépendance de la normale de contact $\underline{n}_{kl}$ par rapport aux déplacements des disques (cf

équation 5.4). Lors de sa résolution, la non-linéarité de la normale risque de poser des problèmes de convergence si on utilise une méthode de Newton-Raphson classique (cf. partie 3.2.4). Pour contourner ce problème, nous avons alors choisi une solution similaire à celle utilisée dans le logiciel Multifil, qui consiste à appliquer un algorithme de point fixe sur la direction normale de contact. L'algorithme de résolution correspondant est alors est de la forme suivante :

Données : Déplacements précédents $\underline{U}^{n-1}$

Données : Élongation imposée τ^n

tant que les normales de contact ne sont pas stabilisées **faire**

 Calculer les normales de contact ;

Méthode de Newton à normales de contact fixées :

tant que $\text{norme}(\underline{R}) > \varepsilon_{res}$ et $\text{norme}(\underline{\delta U}) > \varepsilon_{depl}$ **faire**

 Calculer le résidu $\underline{R}$;

 Calculer la matrice tangente $\underline{K} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{U}}$;

 Résoudre le système $\underline{K} \cdot \underline{\delta U} = -\underline{R}$;

 Incrémenter les déplacements : $\underline{U} = \underline{U} + \underline{\delta U}$;

fin

fin

Résultat : Déplacements $\underline{U}^n$

Algorithme 2 : Algorithme utilisé à chaque incrément de chargement pour la résolution du problème bidimensionnel de base.

Cet algorithme ainsi que les autres qui seront décrits dans la suite de ce chapitre ont été implémentés dans un code Matlab, qui est utilisé pour obtenir tous les résultats numériques présentés.

Application numérique :

Afin de valider notre modèle et de visualiser la pertinence de ce problème bidimensionnel, nous proposons de réaliser un test préliminaire assez simple : On considère un ensemble de 86 disques, disposés de manière régulière selon une configuration rectangulaire (cf figure 5.12(a)). Ces disques de rayon $R = 10\mu m$ sont initialement séparés d'une distance $d = 1\mu m$, et on leur impose une élongation égale à $3 \cdot 10^{-4}$ en 60 incréments. On présente sur la figure 5.3 le résultat numérique de différents incréments de chargement.

On peut remarquer à partir de cet exemple que l'on retrouve l'effet de compaction souhaité. Par ailleurs, on observe au cours du chargement la création de lignes de glissement entre les disques (cf figures 5.12(b) et 5.12(c)), mécanisme qui est également présent au sein d'un câblé textile. Ces résultats numériques du problème modèle simplifié nous semblent donc très satisfaisants pour retrouver les problématiques qui nous intéressent sur les structures câblées. Ainsi, ceci nous offre un cadre simplifié pour tester l'approche multi-échelles proposée dans cette thèse avant de passer à une implémentation tridimensionnelle plus conséquente.

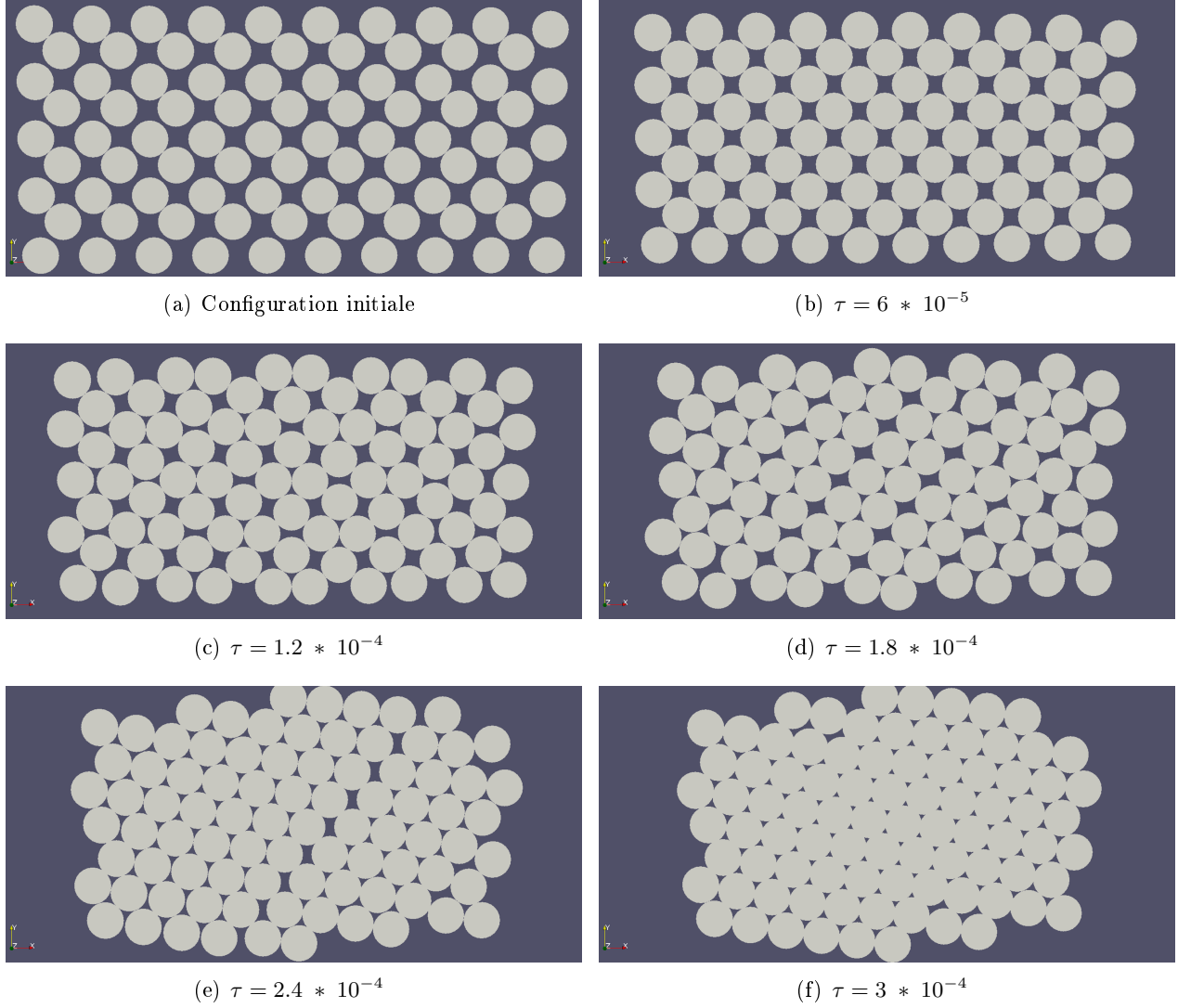


FIGURE 5.3 – Incréments de chargement d'un calcul bidimensionnel correspondant à la section d'un câble mis en traction.

5.2 Formulation du problème multi-échelles "hérité"

5.2.1 Rappel du principe de l'approche proposée

Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 4 de ce rapport, l'idée de base de notre approche pour simuler des câbles à grand nombre de filaments consiste à introduire à une échelle intermédiaire un modèle de macrofibre, dont le comportement doit représenter celui d'un paquet de quelques dizaines de fibres. D'une manière similaire, nous définissons alors dans le cadre bidimensionnel un modèle de "macrodisque", dont le comportement doit représenter celui d'un paquet de quelques dizaines de disques (cf image 5.4).

Les macrodisques permettent d'introduire une échelle intermédiaire, et ainsi de découpler le problème initial en problèmes définis à deux échelles :

- Échelle *macroscopique* : recherche d'un équilibre entre les macrodisques ;
- Échelle *microscopique* : recherche d'un équilibre des disques à l'intérieur de chaque macrodisque.

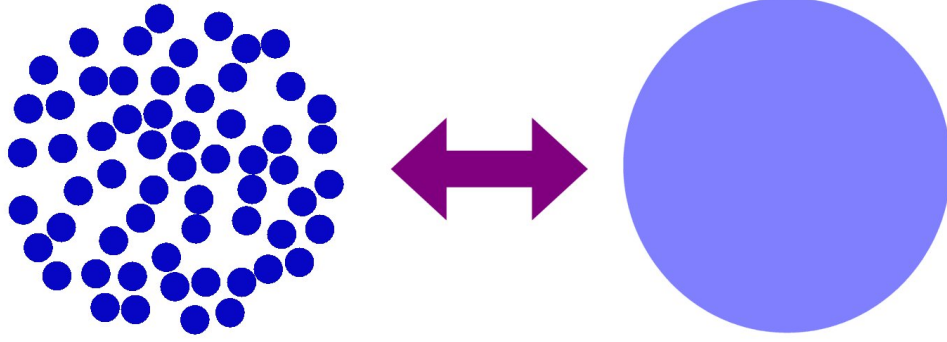


FIGURE 5.4 – Notion de macrodisque représentant un paquet de disques.

L'approche proposée dans cette thèse consiste alors à résoudre dans un premier temps le problème macroscopique, dans lequel nous avons choisi d'utiliser un modèle cinématique assez pauvre pour modéliser les macrodisques. Pour pouvoir prendre en compte les effets de densification, nous avons choisi de compenser le manque de richesse de la cinématique en autorisant des pénétrations entre les macrodisques, contrôlées via un modèle de contact approprié.

Dans un second temps, nous résolvons à l'intérieur de chaque macrodisque un problème microscopique portant sur les disques correspondants, pilotés par des quantités pertinentes issues de l'échelle macroscopique. En se référant à la discussion faite dans la sous-section 4.4, la problématique d'un modèle à l'échelle intermédiaire comporte de nombreuses difficultés. La résolution du problème à l'échelle microscopique permettra de juger la pertinence de l'estimation macroscopique, et d'ajuster ainsi les paramètres du modèle de contact entre macrodisques de manière à obtenir un accord des densités entre les deux échelles.

5.2.2 Formulation du problème à l'échelle macroscopique

La première étape consiste à découper l'ensemble de N_{tot} disques sur lesquels portait le problème initial en N_{Macro} paquets, comportant chacun N_{micro} disques. Selon la stratégie présentée ci-dessus, nous définissons alors un macrodisque pour représenter chacun de ces paquets, dont la position initiale du centre est notée $\{\underline{r}_{0,i}^M\}_{i \in [1; N_{\text{Macro}}]}$.

En dépit du fait qu'un paquet de disques peut se déformer de manière assez complexe, nous avons choisi de supposer que les macrodisques sont indéformables. Avec ce choix, le mouvement de chaque macrodisque est caractérisé par la position de son centre dans la configuration déformée, notée $\{\underline{r}_i^M\}_{i \in [1; N_{\text{Macro}}]}$.

Par ailleurs, nous proposons d'attribuer à chacun de ces macrodisques un effort extérieur $\underline{F}_i^{\text{ext}}(\underline{r}_i^M)$ et une énergie interne $\psi^{\text{int}}(\underline{r}_i^M)$, dont les formes sont similaires aux expressions 5.1 et 5.2. Afin d'avoir une équivalence d'énergie et de chargement aux deux échelles, nous choisissons pour chaque macrodisque de prendre comme raideur du ressort de rappel la somme des raideurs des ressorts de rappel des disques locaux correspondant, et comme effort appliqué la somme des efforts appliqués aux disques. Plus précisément, pour chaque paquet $i \in [1; N_{\text{Macro}}]$ de disques, nous devons respecter l'égalité suivante entre les deux échelles :

$$\begin{cases} (E_i \ I_i) = \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} (E_{i,k} \ I_{i,k}) \\ (E_i \ A_i) = \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} (E_{i,k} \ A_{i,k}) \end{cases} \quad (5.7)$$

On peut remarquer que ces trois conditions ne peuvent pas être satisfaites simultanément si A_i et I_i correspondent à l'aire et au moment quadratique réels du macrodisque. C'est pourquoi nous allons plutôt définir ces grandeurs géométriques à partir de la géométrie locale par les expressions :

$$A_i = \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} A_{i,k} \quad I_i = \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} I_{i,k} \quad (5.8)$$

La rigidité E_i correspondra quant à elle à la moyenne des rigidités locales, définie par :

$$E_i = \frac{1}{N_{\text{micro}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} E_{i,k} \quad (5.9)$$

Finalement, avec ces choix, le problème à résoudre à l'échelle macroscopique s'écrit alors :

Trouver $\{\underline{r}_i^M\}_{i \in [1; N_{\text{Macro}}]} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall \{\hat{r}_i^M\}_{i \in [1; N_{\text{Macro}}]} \in \mathbb{R}^2$

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{Macro}}} \left(\frac{\partial \psi^{\text{int}}(\underline{r}_i^M)}{\partial \underline{r}_i^M} \cdot \hat{r}_i^M + \sum_{j \text{ voisin de } i} F_{ij}^{\text{cnt}}(\underline{r}_i^M, \underline{r}_j^M) \underline{n}_{ij} \cdot (\hat{r}_i^M - \hat{r}_j^M) \right) = \sum_{i=1}^{N_{\text{Macro}}} \underline{F}_i^{\text{ext}}(\underline{r}_i^M) \cdot \hat{r}_i^M \quad (5.10)$$

Dans ce modèle, F_{ij}^{cnt} désigne la force normale de contact entre les macrodisques i et j , dont l'expression va être détaillée dans ce qui suit.

Construction d'une loi de contact macroscopique adéquate

La modélisation des interactions de contact constitue la particularité à l'échelle macroscopique. En effet, pour corriger l'incapacité des macrodisques à se déformer et prendre en compte les effets de densification locale, nous avons choisi de tolérer des interpénétrations entre eux. Pour cela, nous proposons d'utiliser une loi linéaire bi-pente définie par : (cf figure 5.5)

- Un paramètre de seuil de pénétration S_{opt} ;
- Deux coefficients de raideur normale de contact κ_1 et κ_2 .

La première partie de la loi correspond à la phase de réorganisation locale des disques et la réduction du vide entre eux jusqu'à atteindre une configuration optimale. Cette configuration, pour laquelle les disques ont atteint une compaction maximum, sera paramétrée à l'échelle macroscopique par la valeur de la distance seuil. Dans la deuxième partie de la loi, la valeur du coefficient de pénalisation κ_2 doit alors être prise suffisamment élevée pour limiter les pénétrations au-delà du seuil fixé.

Équation d'équilibre

A partir de la formulation faible du problème 5.10, on peut déduire l'équation décrivant l'équilibre en efforts de chaque macrodisque $i \in [1; N_{\text{Macro}}]$:

$$\frac{\partial \psi^{\text{int}}(\underline{r}_i^M)}{\partial \underline{r}_i^M} + \sum_{j \text{ voisin de } i} F_{ij}^{\text{cnt}}(\underline{r}_i^M, \underline{r}_j^M) \underline{n}_{ij} = \underline{F}_i^{\text{ext}}(\underline{r}_i^M) \quad (5.11)$$

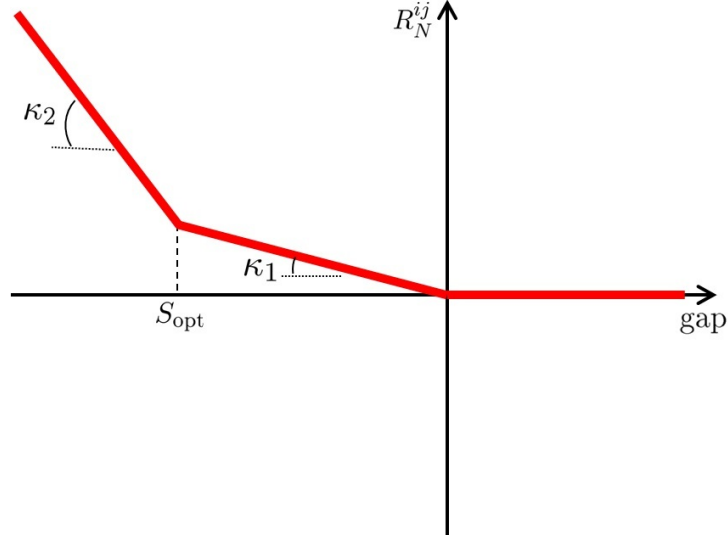


FIGURE 5.5 – Loi de contact bipente à l'échelle macroscopique

5.2.3 Formulation du problème à l'échelle microscopique sur une cellule locale

Une fois que les positions $\{r_i^M\}_{i \in [1; N_{\text{Macro}}]}$ des macrodisques ont été calculées pour chaque incrément de chargement, la résolution à l'échelle microscopique s'effectue au niveau de cellules locales notées ζ_i . Chaque cellule locale ζ_i est associée à un macrodisque $i \in [1; N_{\text{Macro}}]$ et correspond au paquet de disques contenus dans ce macrodisque.

Comme expliqué dans la section 4.4.4, à l'échelle microscopique et au sein d'un macrodisque, nous avons choisi de représenter l'action de chaque macrodisque voisin sur les disques locaux via un plan rigide mobile dans la direction de sa normale, sur lequel est imposé l'effort d'interaction entre macrodisques. S'il n'y a pas de contact avec un macrodisque voisin, il n'y a pas de plan de contact. Dans ce cadre bidimensionnel, les cellules locales sont analogues à un "diagramme de Voronoi" associé aux positions des centres des macrodisques (voir illustration 5.6).

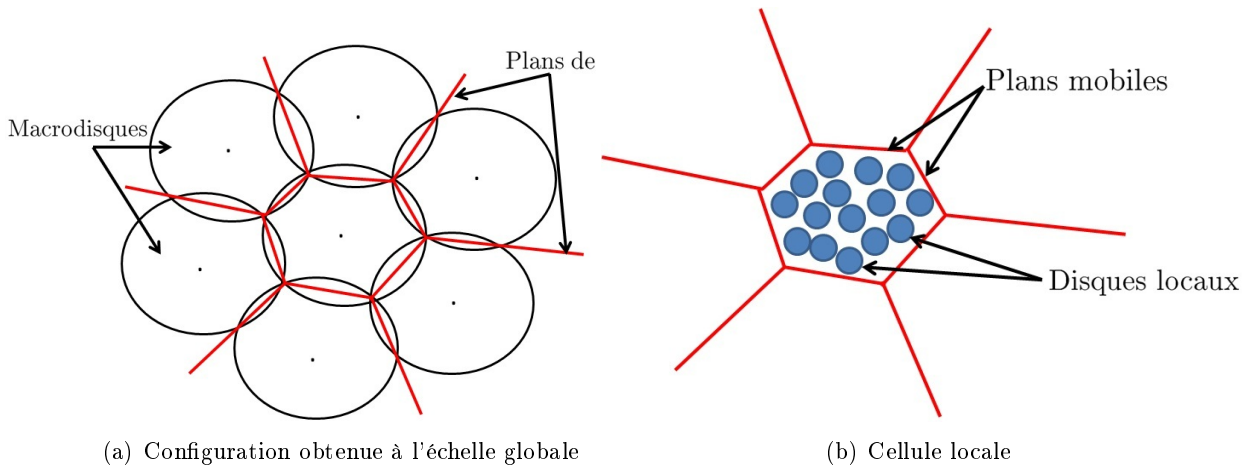


FIGURE 5.6 – Définition des cellules locales.

Chaque plan P_{ij} séparant deux cellules ζ_i et ζ_j est décrit par :

- le point milieu du segment $[r_i^M, r_j^M]$;
- le vecteur normale de contact $\underline{n}_{ij}$ évalué à l'échelle macroscopique.

Une fois que les cellules sont définies, le principe d'un problème local est le suivant : pour chaque incrément de chargement, nous calculons sur une cellule l'équilibre local de l'ensemble de disques, piloté par des quantités héritées de l'échelle macroscopique. La principale difficulté réside alors dans le choix des informations macroscopiques à transmettre à l'échelle microscopique. Dans notre approche, nous avons proposé un mode de pilotage mixte qui consiste à : (voir partie 4.4.4 pour plus de détails)

- Imposer en moyenne la position $\underline{r}_i^M$ du macrodisque aux disques locaux associés ;
- Imposer l'effort normal de contact global F_{ij}^{cnt} sur chaque plan séparateur P_{ij} , en faisant l'hypothèse que ces plans sont mobiles uniquement dans leur direction normale et en supposant que les disques locaux ne peuvent pas traverser ces plans.

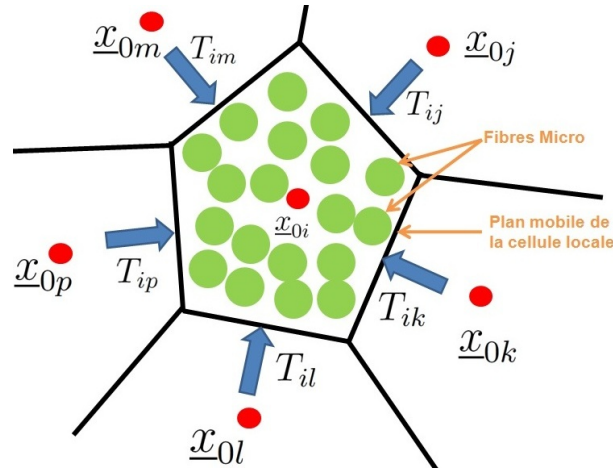


FIGURE 5.7 – Mode de pilotage de la cellule locale

Les inconnues cinématiques du problème local défini sur la cellule ζ_i sont alors :

- Les positions des disques micro appartenant au $i^{\text{ème}}$ macrodisque, notées $\{x_{i,k}\}_{k=1 \dots N_{\text{micro}}}$;
- Le déplacement des plans selon leur normale $\underline{n}_{ij}$, noté β_{ij} , $j \in V(i)$.

Par ailleurs, la recherche de l'équilibre local devra prendre en compte des contraintes suivantes :

- La non pénétration des disques locaux, imposée par pénalisation régularisée, telle que la réaction normale du contact entre deux disques k et l est donnée par l'expression 5.5 ;
- La condition de non pénétration entre les disques et les plans délimitant les cellules. Le contact est déterminé par la distance entre les disques et leurs projetés orthogonaux sur les plans séparateurs des cellules, notée g_N . Nous faisons l'hypothèse que ce contact est sans frottement, et nous l'imposons également par une méthode de pénalisation régularisée, telle que la réaction normale du contact $F_{(ij,k)}^{cnt}$ (entre le plan P_{ij} et le disque k) est définie par l'expression :

$$F_{(ij,k)}^{cnt}(g_N) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_N > 0 \\ -\frac{\kappa_N}{2p_{\text{reg}}} g_N^2 & \text{si } -p_{\text{reg}} \leq g_N \leq 0 \\ \kappa_N (g_N + \frac{p_{\text{reg}}}{2}) & \text{si } g_N < -p_{\text{reg}} \end{cases} \quad (5.12)$$

où κ_N et p_{reg} sont respectivement le coefficient de pénalisation et le paramètre de régularisation.

- Le respect en moyenne du déplacement du macro-disque, géré par multiplicateur de Lagrange. Le multiplicateur associé est noté $\underline{\lambda}_i$.

Finalement, le problème local s'écrit sous forme faible de la manière suivante :

Trouver $\{\underline{r}_{i,k}\}_{k \in [1, N_{\text{micro}}]} \in \mathbb{R}^2$, $\{\beta_{ij}\}_{j \in V(i)} \in \mathbb{R}$, $\underline{\lambda}_i \in \mathbb{R}^2$ tels que
 $\forall \{\hat{\underline{r}}_{i,k}\}_{k \in [1, N_{\text{micro}}]} \in \mathbb{R}^2$, $\{\hat{\beta}_{ij}\}_{j \in V(i)} \in \mathbb{R}$, $\hat{\underline{\lambda}}_i \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \left[\frac{\partial \psi^{\text{int}}(\underline{r}_{i,k})}{\partial \underline{r}_{i,k}} \cdot \hat{\underline{r}}_{i,k} + \sum_{l \text{ voisin de } k} F_{kl}^{\text{cnt}}(\underline{r}_{i,k}, \underline{r}_{i,l}) \underline{n}_{kl} \cdot (\hat{\underline{r}}_{i,k} - \hat{\underline{r}}_{i,l}) \right] \\ & + \sum_{j \text{ voisin de } i} \left[\sum_{k \text{ voisin de } P_{ij}} F_{(ij,k)}^{\text{cnt}}(\underline{r}_{i,k}, \beta_{ij}) \underline{n}_{ij} \cdot (\hat{\underline{r}}_{i,k} - \hat{\beta}_{ij} \underline{n}_{ij}) + F_{ij}^{\text{cnt}} \hat{\beta}_{ij} \right] \\ & + \frac{1}{N_{\text{micro}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \left[(\underline{r}_{i,k} - \underline{r}_i^M) \cdot \hat{\underline{\lambda}}_i + \hat{\underline{r}}_{i,k} \cdot \underline{\lambda}_i \right] = \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \underline{F}_k^{\text{ext}}(\underline{r}_{i,k}) \cdot \hat{\underline{r}}_{i,k} \end{aligned} \quad (5.13)$$

où on rappelle que F_{kl}^{cnt} désigne l'effort normal de contact entre les disques k et l , défini par l'équation 5.5.

Équations d'équilibre

A partir de la formulation faible du problème 5.13, on peut déduire les équations d'équilibre suivantes :

- Le terme en $\hat{\beta}_{ij}$ fournit l'équation d'Euler Lagrange suivante :

$$\forall j \in V(i), \quad F_{ij}^{\text{cnt}} - \sum_{k \text{ voisin de } P_{ij}} F_{ij,k}^{\text{cnt}} = 0 \quad (5.14)$$

Cette relation décrit l'équilibre en efforts du plan P_{ij} entre le macrodisque j et les disques présents dans le sous-domaine i .

- Le terme en $\hat{\underline{r}}_{i,k}$ donne quant à lui l'équilibre en efforts de chaque disque local :

$$\forall k \in [1; N_{\text{micro}}], \quad \frac{\partial \Psi_k}{\partial \underline{y}_{i,k}} - \underline{F}_k^{\text{ext}} + \sum_l F_{kl}^{\text{cnt}} \underline{n}_{kl} + \sum_{j \text{ voisin de } i} F_{ij,k}^{\text{cnt}} \underline{n}_{ij} + \frac{1}{N_{\text{micro}}} \underline{\lambda}_i = \underline{0} \quad (5.15)$$

En sommant sur tous les disques locaux, on en déduit la relation décrivant l'équilibre des efforts sur le paquet de disques :

$$\sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial \underline{r}_{i,k}}(\underline{r}_{i,k}) - \underline{F}_k^{\text{ext}}(\underline{r}_{i,k}) \right) + \sum_{j \text{ voisin de } i} F_{ij}^{\text{cnt}} \underline{n}_{ij} + \underline{\lambda}_i = \underline{0} \quad (5.16)$$

Remarque :

On peut observer que le problème hérité ne fait pas apparaître d'équation d'équilibre des moments sur les plans, car la rotation de ceux-ci est bloquée. Nous étudierons l'impact de cette hypothèse dans la section 5.3.

5.2.4 Aspects numériques

La méthode de résolution numérique des problèmes aux échelles macroscopique et microscopique est identique. L'algorithme utilisé est équivalent à celui décrit dans la section 5.1.5 pour la résolution du problème sur la géométrie complète des disques. Par contre, deux difficultés numériques supplémentaires se présentent à l'échelle locale :

1. La particularité des plans utilisés est qu'ils n'ont pas de rigidité qui leur est associée. Ils permettent de condenser en une condition cinématique unique les interactions entre microdisques de cellules voisines. En cas d'absence d'au moins un disque en contact avec le plan, le problème mécanique est alors mal posé car il existe des modes d'énergie nulle. Cette configuration peut en particulier se présenter au début d'un incrément de chargement. Pour contourner ce problème, on propose d'initialiser la position des plans en contact affleurant avec le disque qui lui est le plus proche.
2. L'autre point pouvant être problématique est le pilotage en effort des plans, qui peut engendrer des difficultés de convergence dans l'algorithme de résolution. En effet, si un effort très important est appliqué sur un plan initialement en contact avec seulement quelques fils, alors ceux-ci risquent de subir un très grand déplacement dès la première itération. Ce grand déplacement peut provoquer de fortes interpénétrations avec les autres disques et ainsi engendrer une configuration trop éloignée d'un équilibre pour permettre à l'algorithme de converger.

Pour éviter ceci, à chaque itération de Newton nous proposons d'utiliser une méthode qui consiste à ajuster l'amplitude de l'incrément de déplacement des disques locaux pour :

- Borner l'incrément de déplacement pour éviter qu'un disque n'en traverse un autre ;
- Interdire une augmentation du résidu au cours de l'itération.

Plus précisément, l'algorithme de recherche linéaire utilisé est le suivant :

Données : Déplacements à l'itération précédente $\underline{U}$

Données : Direction de descente $\delta \underline{U}$

Initialisation du pas d'avancement : $\alpha = \min \left(1; \max_k \frac{\|\delta u_k\|}{R_k} \right) ;$

tant que β ne vérifie pas $\|\underline{R}(\underline{U} + \alpha \delta \underline{U})\| < \|\underline{R}(\underline{U})\|$ **faire**

| $\beta = \frac{1}{2} \beta$

fin

Résultat : Longueur du pas d'avancement α

Algorithme 3 : Algorithme de contrôle de l'amplitude de l'incrément utilisé à chaque itération de la méthode de Newton.

En tenant compte de ces deux points, la méthode de résolution utilisée à l'échelle microscopique est finalement décrite par l'algorithme 4.

Nous montrerons dans les exemples numériques qui suivent que ces deux astuces permettent à l'algorithme de très bien converger aux deux échelles, y compris lorsque le chargement est important

et qu'un grand nombre de disques sont en contact.

Données : Déplacements micro précédents $\underline{U}^{n-1}$

Données : Élongation imposée τ^n

Données : Positions des macrodisques $(\underline{r}_i^{M,n}, \omega_i^{M,n})$

Données : Forces de contact entre macrodisques $\underline{F}_{ij}^{cnt,n}$

Initialisation de la position des plans en contact affleurant ;

tant que les normales de contact ne sont pas stabilisées faire

 Calculer les normales de contact ;

Méthode de Newton à normales de contact fixées :

tant que $\text{norme}(\underline{R}) > \varepsilon_{res}$ et $\text{norme}(\delta \underline{U}) > \varepsilon_{depl}$ faire

 Calculer le résidu $\underline{R}$;

 Calculer la matrice tangente $\underline{K} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{U}}$;

 Résoudre le système $\underline{K} \cdot \delta \underline{U} = -\underline{R}$;

 Calcul du pas d'avancement $\alpha \in]0; 1]$ par l'algorithme de recherche linéaire 3 ;

 Incrémenter les déplacements : $\underline{U} = \underline{U} + \alpha \delta \underline{U}$;

fin

fin

Résultat : Déplacements $\underline{U}^n$

Algorithme 4 : Algorithme utilisé à chaque incrément de chargement pour la résolution du problème microscopique.

5.2.5 Résultats numériques

Nous proposons ici d'appliquer la méthode multi-échelles que nous venons de décrire sur un exemple portant sur un ensemble de 420 disques. Tous ces disques ont un rayon de $1mm$ et sont constitués d'un même matériau caractérisé par $E = 4000MPa$ et $\nu = 0.3$, et sont soumis à une élongation $\tau = 8 \cdot 10^{-5}$ en 60 incréments de chargement.

Afin de décomposer le problème en deux échelles, nous découpons la géométrie en 7 paquets comportant chacun 60 disques, et attribuons un macrodisque de rayon $R_i^M = 12mm$ pour chacun de ces paquets (voir figure 5.9(a)). Par ailleurs, les caractéristiques de ces macrofibres (géométrie, matériau) sont définies à partir des quantités locales par les équations 5.8 et 5.9.

Comme nous l'avons décrit précédemment, la première étape consiste à résoudre numériquement le problème à l'échelle macroscopique. À cette échelle, nous utilisons une loi de contact bi-pente (cf figure 5.5) pour traiter les interactions entre macrodisques, dans laquelle nous choisissons dans un premier temps un seuil de changement de pente S_{opt}^{ij} entre deux macrodisques voisins i et j . En se référant à l'illustration sur la figure, S_{opt}^{ij} est défini par : (cf figure 5.8)

$$S_{opt}^{ij} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) (R_i + R_j) \quad (5.17)$$

La solution obtenue par résolution du problème macroscopique nous sert de première estimation pouvant alimenter l'échelle microscopique. Dans un second temps, nous pouvons alors réaliser pour chaque incrément de chargement des calculs microscopiques au niveau de certaines cellules locales jugées "intéressantes".

Dans ce premier test, nous avons choisi de réaliser les calculs microscopiques sur l'ensemble des cellules locales, dans le but d'analyser a posteriori les résultats et ainsi juger de la pertinence de la méthode. Nous présentons alors sur la figure 5.9 la superposition des résultats obtenus aux deux

échelles : les macrodisques sont visualisés en rouge, la position des plans de cellules sont en couleur noire et les disques à l'échelle microscopique sont représentés en blanc.

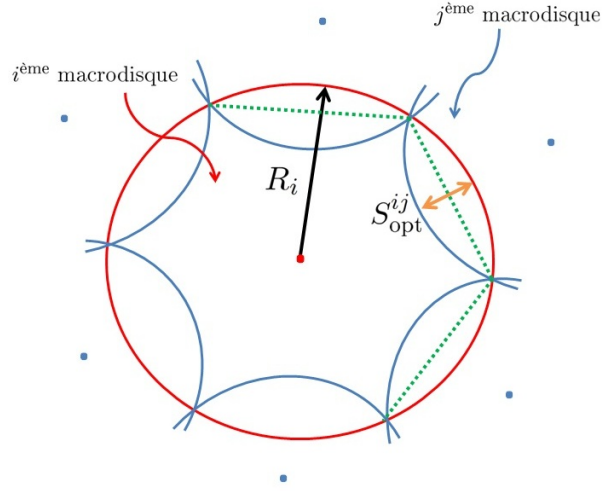


FIGURE 5.8 – Définition du seuil de pénétration donné par 5.17

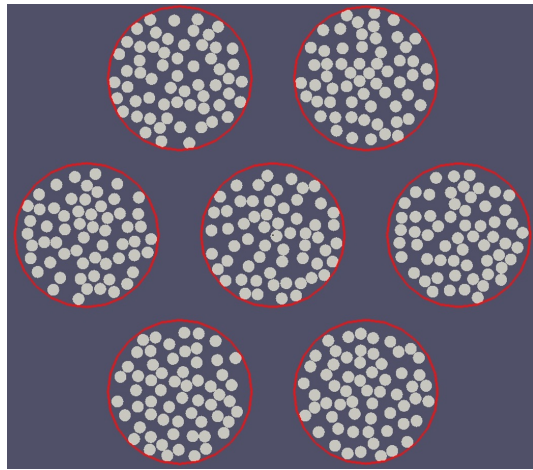
A la vue de ces résultats, un premier estimateur d'erreur visuel semble pertinent : l'écart entre les plans séparateurs de deux cellules voisines (voir figure 5.10). Dans notre cas, nous pouvons voir que cette erreur est relativement grande, ce qui traduit en premier lieu un écart entre les densités macro et micro. La densité macro à compaction maximum est déterminée par le seuil de la loi de contact et le rayon des macrodisques. Par conséquent pour égaliser les densités aux deux échelles, deux choix sont possibles :

- soit on choisit arbitrairement le rayon des macrodisques, et on adapte le seuil de pénétration ;
- soit on se fixe le seuil de pénétration sur des critères géométriques, et on détermine le rayon macro pour avoir la bonne densité.

Dans notre cas, nous proposons de corriger cette erreur par ajustement des paramètres de la loi de contact macroscopique donnée par la courbe 5.5. A terme, l'objectif de cette méthode est de pouvoir réaliser cet ajustement de manière automatique à partir des résultats microscopiques. Mais pour le moment, nous allons nous contenter de rechercher une meilleure estimation du paramètre S_{opt} de la loi de contact bipente de manière purement analytique. Pour cela, nous partons de l'hypothèse que la valeur du seuil maximum d'interpénétration autorisée entre les macrodisques correspond à une configuration d'hexagonale compact des disques locaux. Si l'on suppose ces disques indéformables, alors aucune réduction de vide entre eux n'est plus possible à partir de cette valeur seuil, donc les macrodisques ne doivent pas s'interpénétrer davantage. La densité finale micro est caractérisée par un arrangement hexagonal compact, qui vaut donc $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. Pour que la densité maximale tolérée à l'échelle macroscopique soit cohérente avec cette valeur, nous montrerons dans le chapitre 6 (expression 6.13) de ce rapport que le seuil de pénétration optimal vaut :

$$S_{\text{opt}} = 2 \left[R_i^M - \sqrt{\sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} R_{i,k}^2} \right] \quad (5.18)$$

Les résultats obtenus pour le même cas test après ajustement de la valeur de la distance d'interpénétration autorisée à l'échelle macroscopique est représenté sur la figure 5.11. On peut alors vérifier que les plans séparateurs de deux cellules voisines sont quasiment confondus, ce qui laisse à penser que les plans sont proches d'un équilibre.



(a) Géométrie initiale

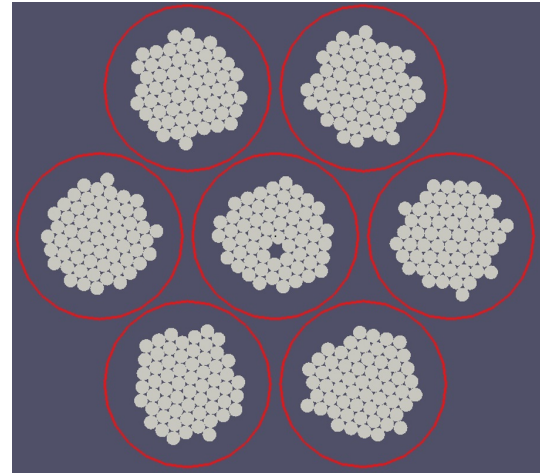
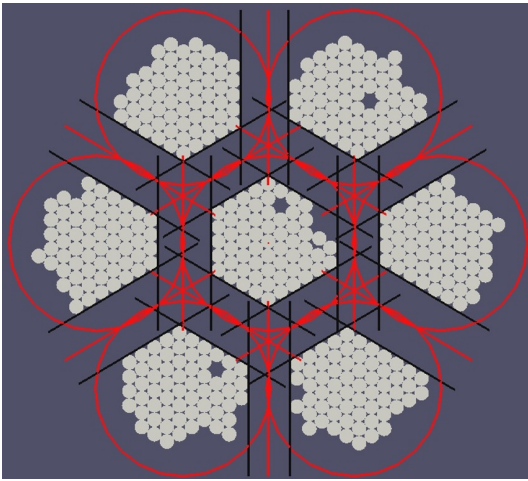
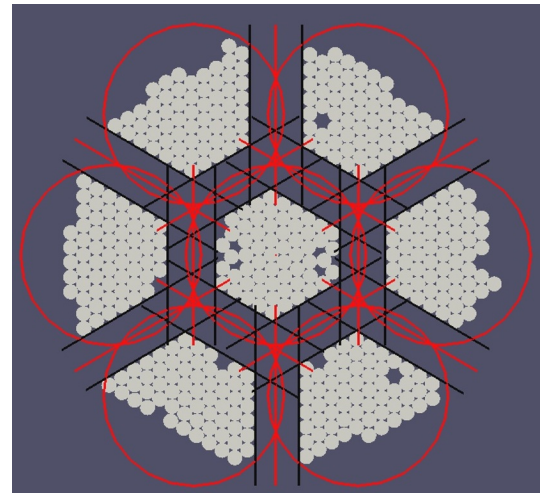
(b) Étape 20 : $\tau = 2.6 \cdot 10^{-5}$ (c) Étape 40 : $\tau = 5.3 \cdot 10^{-5}$ (d) Étape 60 : $\tau = 8 \cdot 10^{-5}$

FIGURE 5.9 – Résultats numériques d'un calcul multi-échelles.

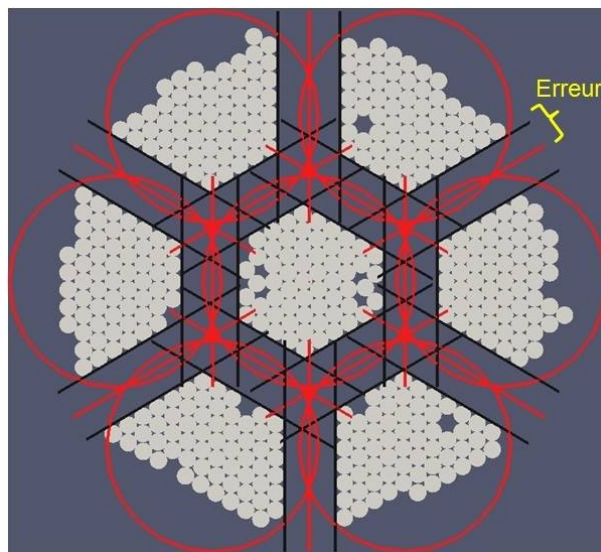


FIGURE 5.10 – Estimateur d'erreur pour l'approche multi-échelles : écart entre les plans séparateurs.

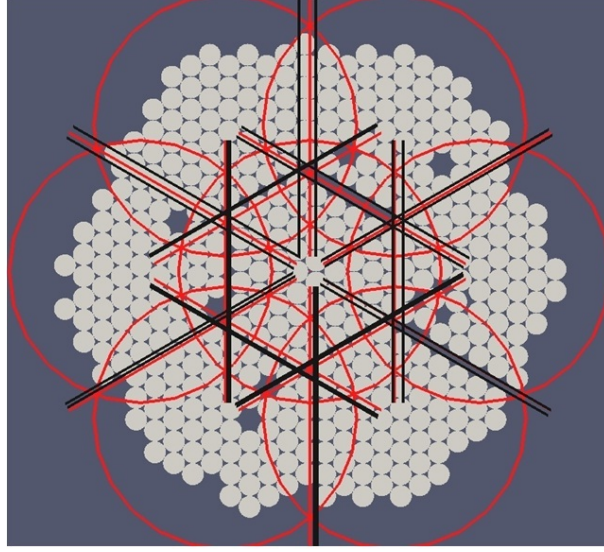


FIGURE 5.11 – Diminution de l’erreur commise entre les deux échelles par ajustement du seuil utilisé dans la loi de contact macroscopique.

5.3 Formulation d’un problème multi-échelles couplé

5.3.1 Objectif

Dans notre modélisation multi-échelles, nous avons :

- construit un modèle mécanique continu de macrofibre (macrodisque en 2D) pour représenter un paquet de fibres (paquet de disques en 2D) donné,
- utilisé ce modèle pour construire un modèle macroscopique constitué de macrofibres en interaction,
- remplacé en post-traitement les macrofibres par le paquet de fibres la constituant, en le localisant en moyenne sur la macrofibre mère et en le soumettant aux efforts d’interaction macroscopiques subis par cette macrofibre, efforts appliqués par des plans séparateurs dont l’orientation est spécifiée depuis l’échelle macroscopique.

Le problème local est alors défini par l’équation 5.13 avec des normales n_{ij} et des efforts par plan et $F_{ij}^{cnt} = -F_{ji}^{cnt}$ hérités du problème macroscopique. Observons que dans ce cas le plan séparateur P_{ij} n’est pas nécessairement en équilibre mécanique : pour le même effort de contact $F_{ij}^{cnt} = -F_{ji}^{cnt}$ les paquets i ou j ne vont pas les positionner au même endroit et les efforts élémentaires $F_{ij,k}^{cnt}$ des microfibres appliqués à ces plans peuvent avoir un moment résultant non nul. Il se pose alors deux questions :

- Quelle est la pertinence du modèle de macrofibre utilisé pour représenter le comportement des paquets de fibres à échelle macroscopique ?
- Les plans séparateurs sont-ils loin de leur équilibre mécanique ?

Pour répondre à ces questions, nous allons introduire un problème couplé dans lequel le remplacement des macrofibres par le paquet de fibres constitutif ne se fait pas en post-traitement, mais directement au niveau du modèle macroscopique. Dans le cas couplé, le modèle macroscopique sera donc directement constitué de paquets de fibres en interaction. A l’intérieur du paquet, les fibres ont leur énergie propre et sont en interaction ponctuelle. Entre paquets, les fibres interagissent comme pour le problème local précédent à travers des plans séparateurs qui sont positionnés de manière à être en équilibre mécanique.

Le problème couplé a donc deux échelles : l'échelle de la fibre élémentaire à l'intérieur de son paquet et l'échelle des plans séparateurs qui séparent deux paquets de fibres entre eux. D'un point de vue mathématique, le problème couplé se présentera comme une collection de problèmes locaux 5.13 interagissant entre eux par des plans séparateurs dont les orientations et efforts appliqués sont tels que chaque plan séparateur soit défini de manière unique et soit en équilibre mécanique. Cette condition d'équilibre de plan couple deux paquets voisins entre eux. Dans le problème couplé, on garde la position des centres comme inconnue indépendante sous contrainte, et on introduit deux positions distinctes (sous contrainte d'égalité) de plan séparateur pour retrouver dans les équations d'optimalité les équations du problème hérité. Ce problème cherche à être moins intrusif par rapport au problème hérité dans la mesure où il n'introduit que la notion de plan séparateur par rapport au problème d'origine. Le problème hérité introduit à la fois les plans séparateurs dans la procédure d'héritage et la notion de macrofibre dans le calcul macroscopique.

En comparant ensuite la solution couplée et la solution héritée, nous pourrions alors qualifier la qualité de l'approche héritée. Le problème couplé faisant intervenir l'ensemble des microfibrilles de la structure étudiée, sa résolution serait trop coûteuse en 3D. Par conséquent, nous avons choisi de le développer et de le résoudre numériquement dans le cadre bidimensionnel de ce chapitre. Les conclusions tirées de cette analyse seront ensuite directement transposables au cas tridimensionnel.

5.3.2 Écriture formelle du problème multi-échelles couplé

Nous conservons dans ce qui suit les notations introduites dans la section précédente. Dans le problème hérité, la topologie et l'orientation des plans délimitant les cellules locales étaient des données du problème. En revanche, dans le problème intermédiaire formulé ici, deux paquets de disques voisins indexés par i et j seront séparés par un plan P_{ij} dont le mouvement est décrit par son vecteur normal $\underline{n}_{ij}$ et la position d'un point donnée par :

$$\underline{x}_{ij} = \frac{1}{2} (\underline{r}_i^M + \underline{r}_j^M) + \beta_{ij} \underline{n}_{ij}$$

Ici la position $\underline{r}_i^M$ du centre du paquet est définie comme étant le centre de gravité des microdisques du paquet $\underline{r}_i^M = \sum_k \underline{r}_{i,k}$. Ce n'est donc ni un paramètre fixé comme c'était le cas dans le problème hérité, ni une inconnue indépendante dans le problème. Sous ces hypothèses, chaque plan est alors doté de deux degrés de liberté : un degré de liberté en déplacement et un degré de liberté en rotation. Pour simplifier les notations, nous noterons dans ce qui suit $V(i)$ l'ensemble des numéros des macrodisques voisins du macrodisque i .

Inconnues du problème multi-échelles couplé

Les inconnues du problème couplé sont :

- Les positions des centres des disques microscopiques, notées $\{\underline{r}_{i,k}\}_{i \in [1; N_{\text{Macro}}], k \in [1; N_{\text{micro}}]} \in \mathbb{R}^2$;
- Le degré de liberté en déplacement selon la normale des plans $\{\beta_{ij}\}_{i \in [1; N_{\text{Macro}}], j \in V(i)} \in \mathbb{R}$;
- Le vecteur normal des plans $\{\underline{n}_{ij}\}_{i \in [1; N_{\text{Macro}}], j \in V(i)}$, supposé rester de norme unité, qui évolue dans l'espace H_{ad} suivant :

$$H_{\text{ad}} = \{\underline{n}_{ij} = -\underline{n}_{ji} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \|\underline{n}_{ij}\| = 1\}$$

Par ailleurs, l'espace des perturbations admissibles des normales s'écrit alors :

$$H_0(\underline{n}_{ij}) = \{\hat{\underline{n}}_{ij} = -\hat{\underline{n}}_{ji} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \hat{\underline{n}}_{ij} \cdot \underline{n}_{ij} = 0\}$$

Contraintes du problème multi-échelles couplé

La solution du problème multi-échelles couplé devra respecter les contraintes suivantes :

- La non-pénétration des disques appartenant à une même cellule, qui est imposée par pénalisation ;
- La condition de contact glissant entre les disques et les plans séparateurs de la cellule à laquelle ils appartiennent. Cette condition cinématique est imposée par pénalisation ;
- L'unicité du plan séparateur de deux cellules voisines, imposée par un multiplicateur de Lagrange noté μ_{ij} . Ce multiplicateur est unique pour chaque paire de macrodisques en contact, donc nous aurons par convention $\mu_{ij} = \mu_{ji}$.

Écriture formelle du problème multi-échelles couplé

Pour minimiser l'énergie du système en tenant compte des contraintes qui viennent d'être détaillées, nous construisons le Lagrangien suivant :

$$\begin{aligned}
 L(\underline{r}_{i,k}, \beta_{ij}, \underline{n}_{ij}, \mu_{ij}) = & \sum_{i=1}^{N_{\text{Macro}}} \left\{ \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \left[\Psi^{\text{int}}(\underline{r}_{i,k}) - \frac{1}{2} \underline{F}_k^{\text{ext}}(\underline{r}_{i,k}) \cdot \underline{r}_{i,k} \right] \right. \\
 & + \sum_{\text{contacts } (k,l)} \kappa_{\text{cnt}} (\underline{n}_{kl} \cdot \underline{r}_{i,k})_+^2 \Big\} \\
 & + \sum_{\text{contacts } (i,j)} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{\text{plan}} \beta_{ij}^2 + \mu_{ij} (\beta_{ij} + \beta_{ji}) \right. \\
 & \left. + \sum_{k \text{ voisin de } P_{ij}} \kappa_{\text{cnt}} \left[\underline{n}_{ij} \cdot \left(\underline{r}_{i,k} - \frac{1}{2} (\underline{r}_i^M + \underline{r}_j^M) - \beta_{ij} \underline{n}_{ij} \right) \right]_-^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

où κ_{plan} est une rigidité très petite associée à chaque plan, afin de garantir la coercivité du problème lorsque les plans ne sont en contact avec aucun disque. Le problème couplé correspond alors à la recherche d'un point selle de ce Lagrangien, ce qui s'écrit sous forme faible :

Trouver $\{\underline{r}_{i,k}\} \in \mathbb{R}^2$, $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$, $\mu_{ij} = \mu_{ji} \in \mathbb{R}$, $\underline{n}_{ij} \in H_{\text{ad}}$ tels que
 $\forall \{\hat{\underline{r}}_{i,k}\} \in \mathbb{R}^2$, $\forall \hat{\beta}_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall \hat{\lambda}_{ij} \in \mathbb{R}^2$, $\forall \hat{\mu}_{ij} = \hat{\mu}_{ji} \in \mathbb{R}$, $\forall \hat{\underline{n}}_{ij} \in H_0(\underline{n}_{ij})$:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{N_{\text{Macro}}} \left\{ \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \left[\frac{\partial \Psi^{\text{int}}(\underline{r}_{i,k})}{\partial \underline{r}_{i,k}} \cdot \hat{\underline{r}}_{i,k} + \sum_{l \text{ voisin de } k} F_{kl}^{\text{cnt}} \underline{n}_{kl} \cdot \hat{\underline{r}}_{i,k} \right] \right. \\
 & + \sum_{j \in V(i)} \sum_{k \text{ voisin de } P_{ij}} F_{ij,k}^{\text{cnt}} \left[\underline{n}_{ij} \cdot \left(\hat{\underline{r}}_{i,k} - \frac{1}{2} (\hat{\underline{r}}_i^M + \hat{\underline{r}}_j^M) - \hat{\beta}_{ij} \underline{n}_{ij} \right) + \left(\underline{r}_{i,k} - \frac{1}{2} (\underline{r}_i^M + \underline{r}_j^M) \right) \cdot \hat{\underline{n}}_{ij} \right] \\
 & \left. + \sum_{j \in V(i)} \left[\kappa_{\text{plan}} \beta_{ij} \hat{\beta}_{ij} + \mu_{ij} \hat{\beta}_{ij} + \hat{\mu}_{ij} \beta_{ij} \right] \right\} = \sum_{i=1}^{N_{\text{Macro}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \underline{F}_k^{\text{ext}}(\underline{r}_{i,k}) \cdot \hat{\underline{r}}_{i,k} \tag{5.20}
 \end{aligned}$$

où on rappelle que F_{kl}^{cnt} désigne l'effort normal de contact entre les disques k et l , défini par l'équation 5.5, et $F_{ij,k}^{\text{cnt}}$ désigne l'effort normal de contact entre le plan P_{ij} et le disque k donné par l'expression 5.12.

5.3.3 Équations d'équilibre et interprétations

A partir de la formulation faible du problème 5.20, on peut déduire les équations d'équilibre suivantes :

- Le terme en $\hat{\mu}_{ij}$ fournit l'équation

$$\beta_{ij} = -\beta_{ji} \quad (5.21)$$

qui garantit l'unicité de chaque plan séparateur ;

- Le terme en $\hat{\beta}_{ij}$ fournit l'équation d'Euler Lagrange suivante :

$$\forall i \in [1; N_{\text{Macro}}], \forall j \in V(i), \quad \kappa_{\text{plan}} \beta_{ij} + \mu_{ij} - \sum_{k \text{ voisin de } P_{ij}} F_{ij,k}^{\text{cnt}}(\underline{r}_{i,k}, \beta_{ij}) = 0$$

Étant donné que κ_{plan} est choisi très petit, nous approchons cette relation par :

$$\forall i \in [1; N_{\text{Macro}}], \forall j \in V(i), \quad \mu_{ij} - \sum_{k \text{ voisin de } P_{ij}} F_{ij,k}^{\text{cnt}}(\underline{r}_{i,k}, \beta_{ij}) = 0 \quad (5.22)$$

On peut déduire de cette équation que le multiplicateur μ_{ij} correspond à la résultante des efforts de contact sur le plan P_{ij} . De la même manière, le terme sur la cellule voisine en $\hat{\beta}_{ji}$ permet d'obtenir la relation suivante :

$$\forall j \in [1; N_{\text{Macro}}], \forall i \text{ voisin de } j, \quad \mu_{ji} - \sum_{l \text{ voisin de } P_{ji}} F_{ji,l}^{\text{cnt}}(\underline{r}_{j,l}, \beta_{ji}) = 0$$

Si l'on tient compte de la relation $\mu_{ij} = \mu_{ji}$, alors on en déduit l'équation d'**équilibre des efforts sur chaque plan** P_{ij} :

$$\forall \text{ paire de contact } (i, j), \quad \sum_{k \text{ voisin de } P_{ij}} F_{ij,k}^{\text{cnt}}(\underline{r}_{i,k}, \beta_{ij}) - \sum_{l \text{ voisin de } P_{ji}} F_{ji,l}^{\text{cnt}}(\underline{r}_{j,l}, \beta_{ji}) = 0 \quad (5.23)$$

- En tenant compte du fait que $\hat{n}_{ij} = -\hat{n}_{ji}$, le terme en $\hat{n}_{ij}$ s'écrit sous la forme :

$$\forall \hat{n}_{ij} \in H_0(\underline{n}_{ij}), \quad \left[\sum_{k \in i} F_{ij,k}^{\text{cnt}} \left(\underline{r}_{i,k} - \frac{1}{2}(\underline{r}_i^M + \underline{r}_j^M) \right) - \sum_{l \in j} F_{ji,l}^{\text{cnt}} \left(\underline{r}_{j,l} - \frac{1}{2}(\underline{r}_i^M + \underline{r}_j^M) \right) \right] \cdot \hat{n}_{ij} = 0$$

Or l'espace des variations admissibles de la normale peut être également défini sous la forme :

$$H_0(\underline{n}_{ij}) = \left\{ \hat{n}_{ij} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \exists \hat{v} \in \mathbb{R}^2, \hat{n}_{ij} = \hat{v} \wedge \underline{n}_{ij} \quad \forall i, j \in [1; N_{\text{Macro}}] \right\}$$

Ainsi, l'équation d'Euler Lagrange associée correspond à l'**équilibre des moments sur chaque plan** P_{ij} , qui s'écrit sous la forme :

$$\underline{n}_{ij} \wedge \left[\sum_{k \in i} F_{ij,k}^{\text{cnt}} \{ \underline{r}_{i,k} - \underline{x}_{ij} \} - \sum_{l \in j} F_{ji,l}^{\text{cnt}} \{ \underline{r}_{j,l} - \underline{x}_{ij} \} \right] = \underline{0} \quad (5.24)$$

- Le terme en $\hat{r}_{i,k}$ donne l'équation d'équilibre en efforts de chaque disque local :

$$\forall k \in [1; N_{\text{micro}}], \quad \frac{\partial \Psi_k(\underline{r}_{i,k})}{\partial \underline{r}_{i,k}} - \underline{F}_k^{\text{ext}}(\underline{r}_{i,k}) + \sum_l F_{kl}^{\text{cnt}}(\underline{r}_{i,k}, \underline{r}_{i,l}) \underline{n}_{kl} + \sum_{j \text{ voisin de } i} F_{ij,k}^{\text{cnt}}(\underline{r}_{i,k}, \beta_{ij}) \underline{n}_{ij} = \underline{0} \quad (5.25)$$

En sommant sur tous les disques locaux, on obtient alors la relation décrivant l'**équilibre des efforts sur le paquet de disques** :

$$\sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \left(\frac{\partial \Psi_k(\underline{r}_{i,k})}{\partial \underline{r}_{i,k}} - \underline{F}_k^{\text{ext}}(\underline{r}_{i,k}) \right) + \sum_{j \text{ voisin de } i} \sum_{k \in i} F_{ij,k}^{\text{cnt}}(\underline{r}_{i,k}, \beta_{ij}) \underline{n}_{ij} = \underline{0} \quad (5.26)$$

Dans ce nouveau système d'optimalité (équations 5.21, 5.22, 5.24 et 5.26), on voit apparaître à la fois des inconnues locales internes aux microdisques qui sont les positions $\underline{r}_{i,k}$, et des inconnues globales associées aux plan séparateurs $\beta_{ij} = -\beta_{ji}$, $n_{ij} = -n_{ji}$ et $\mu_{ij} = \mu_{ji}$. En ce sens, on peut parler de problèmes multiéchelles.

De plus, par rapport au problème hérité, on introduit deux types de couplages nouveaux :

- un couplage local-global dans l'équation d'équilibre des efforts des plans séparateurs (équation 5.22) ;
- un couplage entre cellules voisines dans l'équation d'équilibre des moments des plans séparateurs (équation 5.24).

5.3.4 Algorithme de résolution du problème multi-échelles couplé

Comme nous l'avons dit précédemment, le problème multi-échelles couplé consiste à rechercher le point selle du Lagrangien 5.19. Pour résoudre ce problème non-linéaire, nous proposons de découpler le calcul des normales aux plans $\underline{n}_{ij}$ du calcul des autres quantités cinématiques. Pour simplifier les notations, nous noterons $\underline{U} \in \mathbb{R}^{neq}$ le vecteur global contenant les inconnues $\{\underline{r}_{i,k}\} \in \mathbb{R}^2$, $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$ et $\mu_{ij} \in \mathbb{R}$. Avec cette forme condensée, le problème s'écrit :

Trouver $\underline{n}_{ij}^{opt} \in H_{ad}$ et $\underline{U}^{opt} \in \mathbb{R}^{neq}$ tels que
 $\forall \hat{\underline{n}}_{ij}^{opt} \in H_0(\underline{n}_{ij}), \forall \hat{\underline{U}}^{opt} \in \mathbb{R}^{neq},$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \underline{U}}(\underline{U}^{opt}, \underline{n}_{ij}^{opt}) \cdot \hat{\underline{U}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \underline{n}_{ij}}(\underline{U}^{opt}, \underline{n}_{ij}^{opt}) \cdot \hat{\underline{n}}_{ij} = 0 \end{cases}$$

On introduit alors la fonctionnelle $\Psi(\underline{n}_{ij}) = L(\bar{\underline{U}}(\underline{n}_{ij}), \underline{n}_{ij})$, où $\bar{\underline{U}}(\underline{n}_{ij})$ est défini comme étant la solution de l'équation non-linéaire suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{U}}(\bar{\underline{U}}(\underline{n}_{ij}), \underline{n}_{ij}) \cdot \hat{\underline{U}} = 0 \quad \forall \hat{\underline{U}} \in \mathbb{R}^{neq} \quad (5.27)$$

de telle sorte que le problème couplé peut s'écrire sous la forme :

Trouver $\underline{n}_{ij}^{opt} \in H_{ad}$ tel que

$$\underline{n}_{ij}^{opt} = \arg \min_{\underline{n}_{ij} \in V_{ad}} \Psi(\underline{n}_{ij}) \quad (5.28)$$

Rappelons que l'équation (5.27) se réduit au système (5.23), (5.25) par rapport aux inconnues $\underline{r}_{i,k}$ et $\beta_{ij} = -\beta_{ji}$ avec $\mu_{ij} = \sum_k F_{ij,k}^{cnt}$.

L'algorithme de calcul de $\bar{\underline{U}}(\underline{N})$ par résolution de 5.27 à normales des plans fixées est très similaire à l'algorithme 4 utilisé à l'échelle microscopique dans le problème hérité, sauf que maintenant toutes les cellules sont couplées par l'inconnue position β_{ij} du plan séparateur. L'algorithme à normales de plan fixées devient alors :

Données : Positions précédentes des disques $\{\underline{r}_{i,k}\}$ et des plans séparateurs β_{ij}

tant que les normales de contact ne sont pas stabilisées **faire**

Calculer les normales de contact ;

Méthode de Newton à normales de contact fixées :

tant que $\text{norme}(\underline{R}) > \varepsilon_{res}$ et $\text{norme}(\delta \underline{U}) > \varepsilon_{depl}$ **faire**

Calculer le résidu $\underline{R}$;

Calculer la matrice tangente $\underline{K} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{U}}$;

Résoudre le système $\underline{K} \cdot \delta \underline{U} = -\underline{R}$;

Calcul du pas d'avancement $\alpha \in]0; 1]$ par l'algorithme de recherche linéaire 3 ;

Incrémenter les déplacements : $\underline{U} = \underline{U} + \alpha \delta \underline{U}$;

fin

fin

Résultat : Positions actualisées des disques $\{\underline{r}_{i,k}\}$ et des plans séparateurs $\beta_{ij} = -\beta_{ji}$

Algorithme 5 : Algorithme utilisé pour la résolution du problème multi-échelles couplé à normales de plan $\underline{n}_{ij}$ fixées.

Par contre, plusieurs difficultés apparaissent pour la résolution du problème 5.28 sur les normales des plans :

- L'espace des vecteurs normaux aux plans admissibles H_{ad} est une variété différentielle non linéaire, et non un espace linéaire comme c'est le cas classiquement. Pour gérer cette première difficulté, nous devons introduire un opérateur de projection $\underline{\Pi}$ qui assure que la normale à chacun des plans reste de norme unité tout au long de la résolution. Cet opérateur de projection sur l'espace des normales aux plans admissibles H_{ad} est défini par :

$$\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^2, \quad \underline{\Pi}(\underline{v}) = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} \quad (5.29)$$

On peut alors remarquer que la dérivée de cet opérateur s'écrit de la manière suivante :

$$\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial \underline{\Pi}}{\partial \underline{v}}(\underline{v}) = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \left(\underline{I} - \frac{1}{\|\underline{v}\|^2} \underline{v} \otimes \underline{v} \right) \quad (5.30)$$

Avec ces notations, une condition nécessaire pour atteindre la solution de 5.28 est de respecter l'équation suivante :

$$\underline{R}_{ij}(\underline{n}_{ij}) = \frac{\partial \underline{\Pi}}{\partial \underline{v}}(\underline{n}_{ij}) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{n}_{ij}}(\underline{n}_{ij}) = \underline{0}$$

En tenant compte de l'expression 5.30, cela s'écrit encore sous la forme :

$$\underline{R}_{ij}(\underline{n}_{ij}) = (\underline{I} - \underline{n}_{ij} \otimes \underline{n}_{ij}) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{n}_{ij}}(\underline{n}_{ij}) = \underline{0} \quad (5.31)$$

Rappelons que si U^{opt} vérifie (5.27), alors le gradient $\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{n}_{ij}}$ est donné par (5.24).

- La seconde difficulté réside dans le fait que le calcul de la dérivée seconde de la fonction Ψ est non accessible, car elle fait intervenir le terme $\frac{\partial \bar{\underline{U}}}{\partial \underline{n}_{ij}}$, qui est difficilement calculable. Par conséquent, il est impossible de résoudre le problème 5.31 avec une méthode de Newton classique. Nous avons alors choisi d'utiliser un algorithme de gradient, qui est une méthode itérative consistant à prendre comme direction de descente $\underline{\delta n}_{ij}$ l'opposé du résidu $\underline{R}_{ij}(\underline{n}_{ij}) = (\underline{I} - \underline{n}_{ij} \otimes \underline{n}_{ij}) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{n}_{ij}}(\underline{n}_{ij})$.

Finalement, le problème sur les normales des plans consiste à résoudre l'équation non-linéaire 5.31 par un algorithme de gradient projeté sur l'espace des normales aux plans admissibles H_{ad} , qui est

résumé par l'algorithme 6.

Données : Déplacements micro précédents $\underline{U}^{n-1}$

Données : Élongation imposée τ^n

Données : Normales de contact macroscopiques $(\underline{n}_{ij}^{M,n})$

Initialiser les normales aux plans $\underline{n}_{ij}^{n,0}$:

si *Premier incrément de calcul* ($n=1$) **alors**

 | Prendre les normales de contact $\underline{n}_{ij}^M$ du problème macroscopique

sinon

 | Prendre les normales aux plans $\underline{n}_{ij}^{n-1}$ calculés à l'incrément précédent

fin

tant que $\sqrt{\sum \|\underline{R}_{ij}(\underline{n}_{ij}^{n,K})\|^2} > \varepsilon_{plan}$ **faire**

 | Résoudre l'équation 5.27 à $\underline{n}_{ij}^{n,K}$ fixées avec l'algorithme 5 ;

 | Calculer $\Psi(\underline{n}_{ij}^{n,K})$ et $\underline{R}_{ij}(\underline{n}_{ij}^{n,K})$;

 | Définir la direction de descente $\underline{\delta n}_{ij} = -\underline{R}_{ij}(\underline{n}_{ij}^{n,K})$;

 | Déterminer le pas de descente $\gamma > 0$ dans la direction $\underline{\delta n}_{ij}$ selon l'algorithme 7 ;

 | Incrémenter les normales des plans $\underline{n}_{ij}^{n,K+1} = \Pi(\underline{n}_{ij}^{n,K} + \gamma \underline{\delta n}_{ij})$;

fin

Résultat : Normales aux plans $\underline{n}_{ij}^n$

Algorithme 6 : Algorithme de gradient projeté utilisé pour la résolution du problème multi-échelles couplé.

A chaque itération de l'algorithme 6, le calcul du pas de descente γ est plus complexe que dans les algorithmes précédents. En effet, dans une méthode de Newton le pas de descente est recherché dans l'intervalle $]0; 1]$ par une méthode de recherche linéaire. Par contre, étant donné que la résolution sur les normales de contact est réalisée par un algorithme de gradient, le pas de descente appartient cette fois-ci à l'intervalle $]0; +\infty[$. Une valeur trop petite de γ engendrerait un nombre très important d'itérations pour atteindre le minimum d'énergie, alors qu'un pas trop grand risquerait de déstabiliser le calcul. Pour contourner ce problème, nous proposons alors d'utiliser les critères de Wolfe.

Pour simplifier les notations dans ce qui suit, à $\underline{n}_{ij}^{n,K}$ et $\underline{\delta n}_{ij}$ fixés, on définit la fonction d'énergie suivante :

$$\tilde{\Psi}(\gamma) = \Psi\left(\Pi\left(\underline{n}_{ij}^{n,K} + \gamma \underline{\delta n}_{ij}\right)\right) \quad (5.32)$$

On montre alors très facilement que la dérivée de cette fonction s'écrit sous la forme :

$$\tilde{\Psi}'(\gamma) = \sum_{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{n}_{ij}} \left(\Pi\left(\underline{n}_{ij}^{n,K} + \gamma \underline{\delta n}_{ij}\right) \right) \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{v}} \left(\underline{n}_{ij}^{n,K} + \gamma \underline{\delta n}_{ij} \right) \cdot \underline{\delta n}_{ij} \quad (5.33)$$

En tenant compte de ces notations, l'algorithme de recherche linéaire utilisé pour calculer le pas de descente est décrit par le schéma suivant :

Données : Normales actuelles aux plans $\underline{n}_{ij}^{n,K}$
Données : Direction de descente $\underline{\delta n}_{ij}$
Calculer $\tilde{\Psi}(0)$ et $\tilde{\Psi}'(0)$ selon 5.32 et 5.33 ;
Initialiser $\gamma_{min} = 0$ et $\gamma_{max} = +\infty$
Initialiser le pas de descente γ^0 tel que $\max_{i,j} \{\gamma^0 \underline{\delta n}_{ij}\} = \varepsilon$;
tant que critère de Wolf non vérifié **faire**
 Actualiser la normale $\underline{n}_{ij}^{n,K,L} = \Pi \left(\underline{n}_{ij}^{n,K} + \gamma^L \underline{\delta n}_{ij} \right)$;
 Résoudre l'équation 5.27 à $\underline{n}_{ij}^{n,K,L}$ fixées avec l'algorithme 5 ;
 Calculer $\tilde{\Psi}(\gamma^L)$ et $\tilde{\Psi}'(\gamma^L)$ selon 5.32 et 5.33 ;
 si $\tilde{\Psi}(\gamma^L) > \tilde{\Psi}(0) + m_1 \gamma^L \tilde{\Psi}'(0)$ **alors**
 | $\gamma_{max} = \gamma^L$
 | $\gamma^{L+1} = \frac{1}{2} (\gamma_{min} + \gamma_{max})$
 sinon
 si $\tilde{\Psi}'(\gamma^L) < m_2 \tilde{\Psi}'(0)$ **alors**
 | $\gamma_{min} = \gamma^L$
 si $\gamma_{max} = +\infty$ **alors**
 | $\gamma^{L+1} = 2\gamma_{min}$
 sinon
 | $\gamma^{L+1} = \frac{1}{2} (\gamma_{min} + \gamma_{max})$
 fin
 sinon
 | Le pas vérifie le critère de Wolfe → **Fin de l'algorithme**
 fin
 fin
fin

Résultat : Pas de descente γ

Algorithme 7 : Algorithme de recherche linéaire pour le calcul du pas de descente utilisé dans la résolution du problème multi-échelles couplé.

Remarque :

Typiquement les deux paramètres utilisés dans les critères de Wolfe valent $m_1 = 0.1$ et $m_2 = 0.9$.

5.3.5 Résultats numériques

Nous proposons d'appliquer cette approche multi-échelles sur le cas test qui avait été présenté dans la sous-section 5.2.5, en conservant les mêmes paramètres numériques. Comme nous l'avons expliqué précédemment, on commence par la résolution du problème macroscopique qui nous permet d'initialiser l'orientation des plans séparateurs. Ensuite, pour chaque incrément de chargement, on cherche à équilibrer les sous-domaines avec un couplage explicite entre les deux échelles. Contrairement au problème hérité, la résolution n'est pas réalisée d'une manière indépendante sur chaque cellule, mais sur la géométrie complète, et les plans séparateurs ne sont pas dupliqués.

Sur la figure 5.12, on présente la superposition des deux résultats obtenus aux échelles macroscopique et microscopique. La topologie des macrodisques et la position correspondante des plans (définie comme étant la médiatrice du segment liant les centres de deux macrodisques voisins) y sont présentés en rouge. Les disques à l'échelle microscopique sont quant à eux représentés en blanc, alors que la position des plans après résolution du problème couplé est en couleur noire.

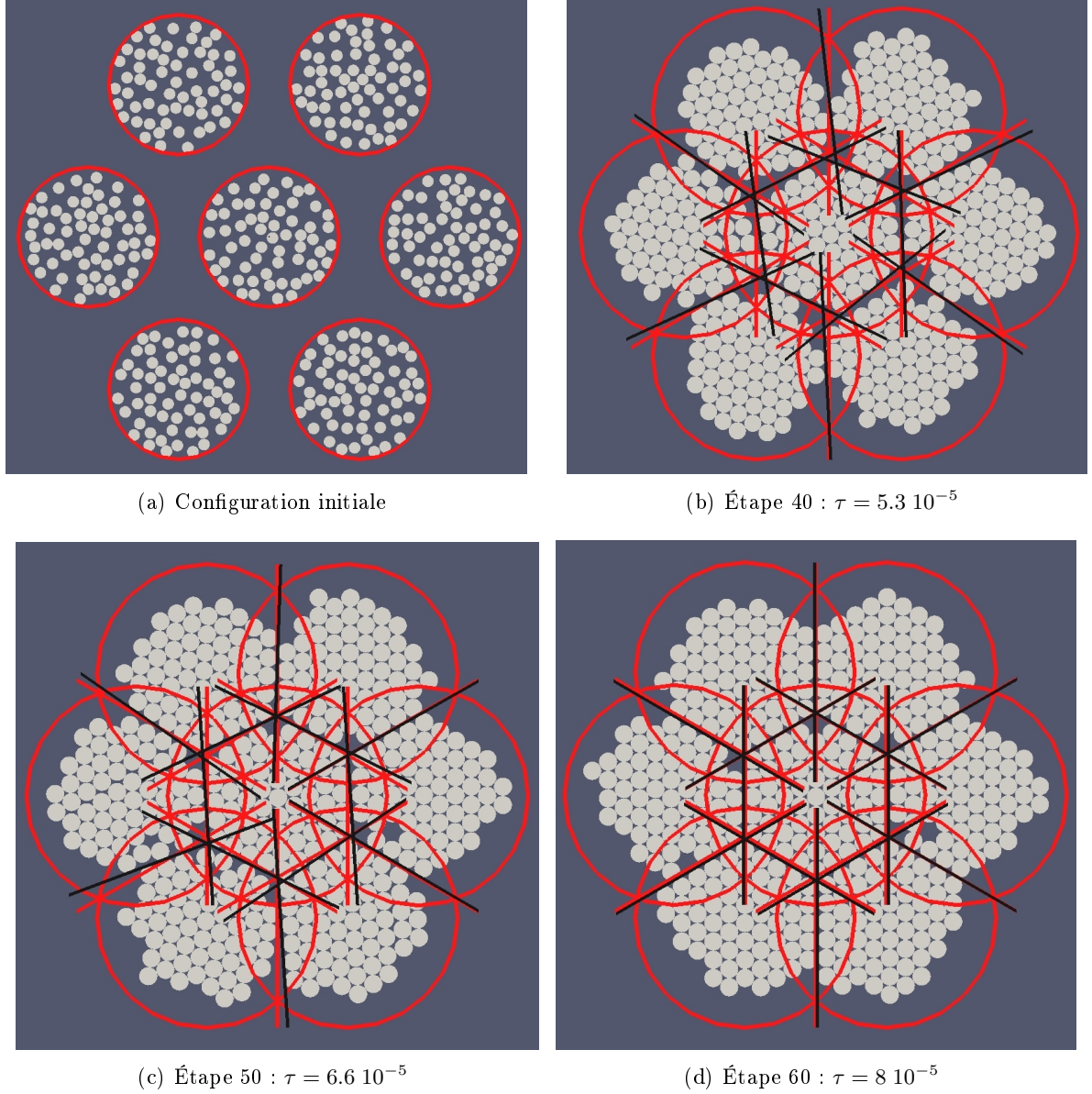


FIGURE 5.12 – Résultats du calcul numérique multi-échelles couplé avec couplage explicite entre les échelles

On peut remarquer sur ces résultats numériques une rotation des vecteurs normales des plans séparant les cellules (en couleur noire) par rapport à la direction normale du contact entre les macrodisques (en rouge), surtout lorsque le milieu n'est pas très dense (cf images 5.12(b) et 5.12(c)). Par contre, lorsque le chargement augmente et qu'on approche l'état de compaction maximale des disques, on retrouve la superposition des deux orientations (cf image 5.12(d)).

Comme nous l'avons souligné dans le chapitre 4 de ce rapport, les coupes de section d'un câble réel obtenu par tomographie (figure 4.21) montrent que l'arrangement des fils est assez dense. Par conséquent, le résultat obtenu ici est très rassurant, car il semble prouver que l'hypothèse consistant à bloquer la rotation des plans dans le problème hérité est tout à fait admissible. Nous allons confirmer ce point par d'autres validations dans la section suivante.

5.4 Comparaisons entre les modèles

L'objectif de cette section est de valider la pertinence des hypothèses qui ont été réalisées pour construire le problème multi-échelles hérité. Cette validation se fait en deux étapes :

- Dans un premier temps, nous allons comparer les résultats obtenus avec le modèle multi-échelles couplé et ceux obtenus par calcul microscopique sur la géométrie complète, ce qui montrera l'impact de l'hypothèse de division en sous-domaines séparés par des plans ;
- Ensuite, nous comparerons les résultats des problèmes multi-échelles hérité et couplé, en analysant notamment si l'équilibre calculé avec le modèle hérité est proche de respecter les équations établies pour le modèle couplé dans la sous-section 5.3.3.

5.4.1 Comparaison entre les modèles microscopique et multi-échelles couplé

Tout d'abord, pour visualiser l'impact de la division en sous-domaines séparés par des plans, nous présentons la densité mesurée sur les configurations obtenues avec chacun des modèles. Comme cela est représenté sur la figure 5.13, la densité autour de chaque disque est calculée comme étant le rapport des surfaces des portions des disques contenues dans le polygone centré sur le disque concerné et ayant comme sommets les centres de ses voisins (couleur bleue) et la surface du polygone (couleur rouge).

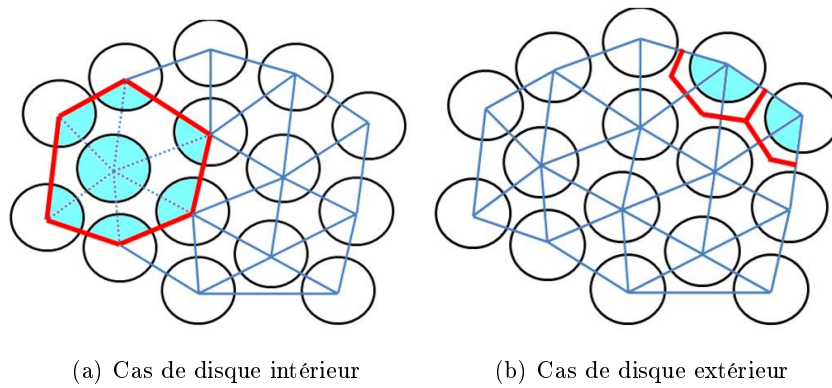


FIGURE 5.13 – Définition adoptée pour l'estimation de la densité par disque.

On présente sur la figure 5.14 les cartes de densités obtenues avec le modèle multi-échelles couplé et avec calcul microscopique sur la géométrie complète.

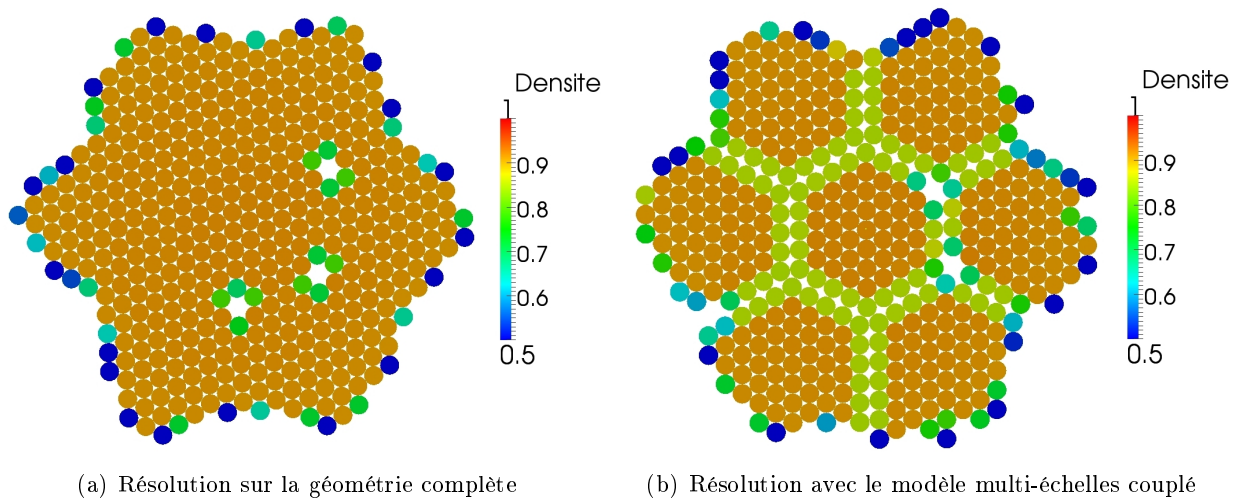


FIGURE 5.14 – Cartes de densité pour une elongation $\tau = 8 \cdot 10^{-5}$.

On observe sur la figure 5.14(b), relative aux résultats obtenus avec le modèle multi-échelles couplé, que la densité des disques y est plus faible dans ces zones entourant les plans. En effet, chaque plan forme un obstacle géométrique qui empêche les disques de se rapprocher autant qu'ils l'auraient souhaité. Par conséquent, la densité des disques est plus faible dans ces zones.

Cependant, nous vérifions sur la figure 5.15 que cet écart sur la densité a un impact tout à fait négligeable sur le comportement global du paquet de disques, puisque les énergies calculées par les deux méthodes diffèrent seulement d'environ 1%.

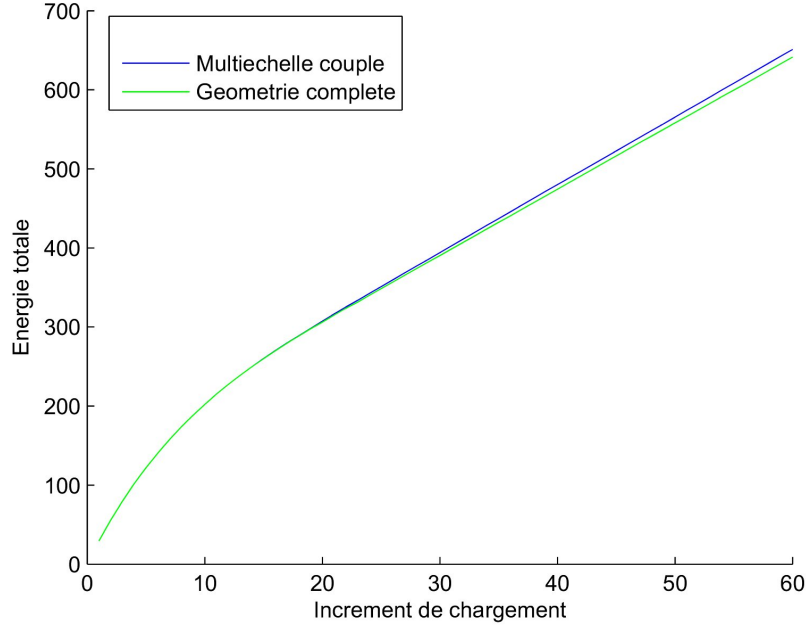


FIGURE 5.15 – Comparaison de l'énergie totale calculée avec les différents modèles.

En conclusion, cette comparaison montre que les résultats obtenus avec le modèle multi-échelles couplé sont très proches de ceux d'un calcul microscopique sur la géométrie complète. Cela va nous permettre de nous servir du problème multi-échelles couplé comme d'un problème intermédiaire de référence pour valider l'approche multi-échelles héritée.

5.4.2 Comparaison entre les modèles multi-échelles couplé et hérité

L'objectif est ici de comparer les résultats obtenus entre le modèle multi-échelles hérité et le problème couplé, dans le but de valider les deux hypothèses suivantes :

- la pertinence du modèle de macrodisque utilisé à l'échelle macroscopique.
- le blocage de la rotation des plans séparateurs ;

Pour étudier l'impact du blocage de la rotation des plans, nous avons mesuré le moment sur les plans, qui d'après l'équation 5.24 de l'équilibre des moments sur les plans est défini par :

$$\underline{M} = \underline{n}_{ij} \wedge \left[\sum_{k \in i} F_{ij,k}^{cnt} \left(\underline{r}_{i,k} - \frac{1}{2}(\underline{r}_j^M + \underline{r}_i^M) \right) + \sum_{l \in j} F_{ji,l}^{cnt} \left(\underline{r}_{j,l} - \frac{1}{2}(\underline{r}_i^M + \underline{r}_j^M) \right) \right]$$

Pour étudier ce moment de manière relative par rapport aux efforts exercés par les fils sur ce plan, nous avons post-traité la grandeur suivante :

$$\underline{M}_{\text{adim}} = \frac{\sum_{k \in i} F_{ij,k}^{\text{cnt}} \underline{n}_{ij} \wedge \left(\underline{r}_{i,k} - \frac{1}{2}(\underline{r}_j^M + \underline{r}_i^M) \right) + \sum_{l \in j} F_{ji,l}^{\text{cnt}} \underline{n}_{ji} \wedge \left(\underline{r}_{j,l} - \frac{1}{2}(\underline{r}_i^M + \underline{r}_j^M) \right)}{\sum_{k \in i} F_{ij,k}^{\text{cnt}} \left| \underline{n}_{ij} \wedge \left(\underline{r}_{i,k} - \frac{1}{2}(\underline{r}_j^M + \underline{r}_i^M) \right) \right| + \sum_{l \in j} F_{ji,l}^{\text{cnt}} \left| \underline{n}_{ji} \wedge \left(\underline{r}_{j,l} - \frac{1}{2}(\underline{r}_i^M + \underline{r}_j^M) \right) \right|}$$

On peut voir sur la figure 5.16 que le moment calculé avec le modèle hérité semble significativement différent de zéro. Nous allons alors vérifier que le résultat du problème hérité reste pertinent malgré ce moment exercé sur les plans, qui traduit le fait que les plans auraient voulu légèrement pivoter.

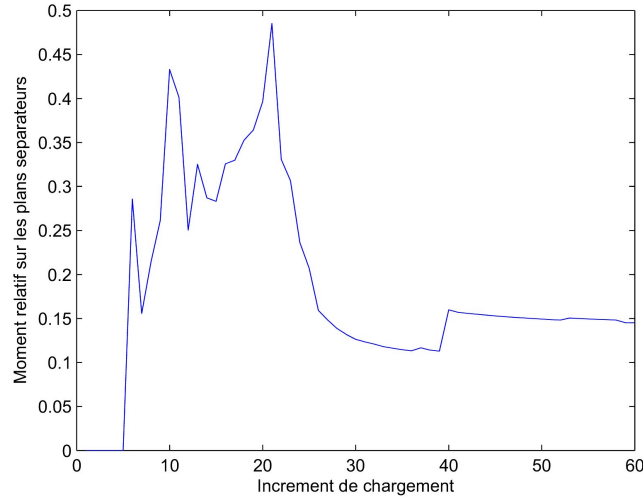


FIGURE 5.16 – Moment relatif moyen sur les plans dans le problème hérité.

Dans un second temps, nous comparons la force exercée par les disques sur les plans entre le problème hérité, dans lequel cette force est héritée du problème macroscopique, et le problème couplé, dans lequel cette force est calculée à l'échelle microscopique. Nous visualisons alors sur la figure 5.17 une comparaison de la moyenne des forces exercées par les disques sur un plan par ces deux approches. On peut constater que l'écart entre les deux modèles est très faible, ce qui prouve que les efforts hérités de l'échelle macroscopique étaient très précis. Ce résultat est très intéressant puisqu'il permet de valider la pertinence du modèle de macrodisque.

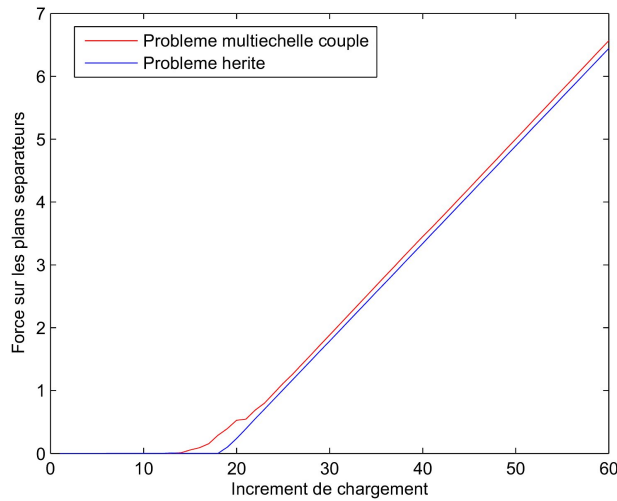


FIGURE 5.17 – Moyenne des forces exercées par les disques sur un plan.

En comparant les équations d'équilibres du paquet de disques 5.16 et 5.26 dans les problèmes hérité et couplé, on constate que le fait que les efforts exercés sur les plans sont très proches entre les deux problèmes devrait impliquer que le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'imposition en moyenne de la position du macrodisque aux disques locaux devrait être proche de zéro :

$$\underline{\lambda}_i \approx 0 \quad (5.34)$$

Nous vérifions alors sur la figure 5.18 que $\underline{\lambda}_i$ conserve une valeur très faible tout au long du chargement, surtout si nous le comparons de manière relative aux efforts exercés par les disques sur les plans. Ce résultat traduit le fait que les disques locaux suivent "naturellement" la trajectoire du macrodisque, donc très peu d'efforts sont nécessaires pour respecter la contrainte de position moyenne.

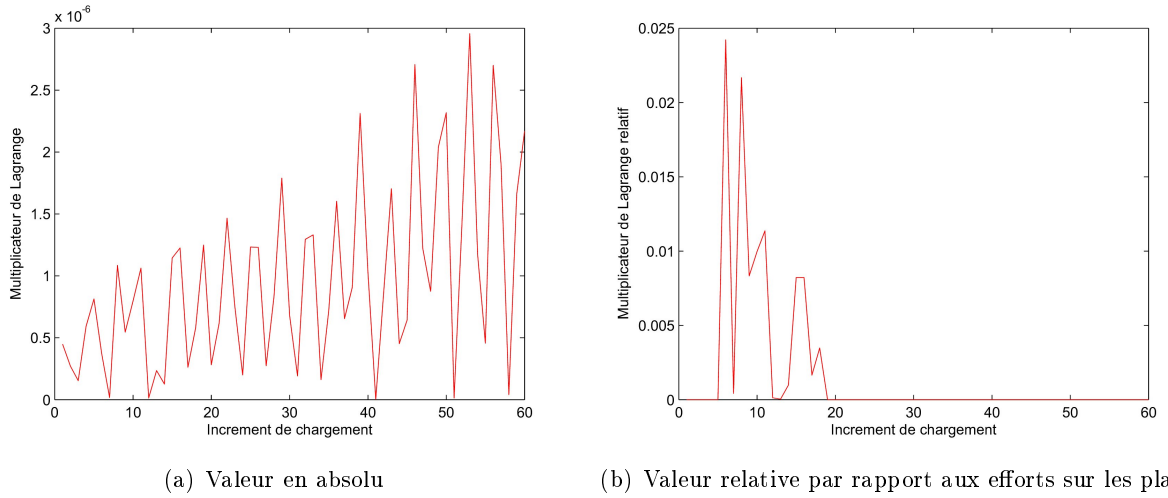


FIGURE 5.18 – Évolution de la valeur du multiplicateur $\underline{\lambda}_i$.

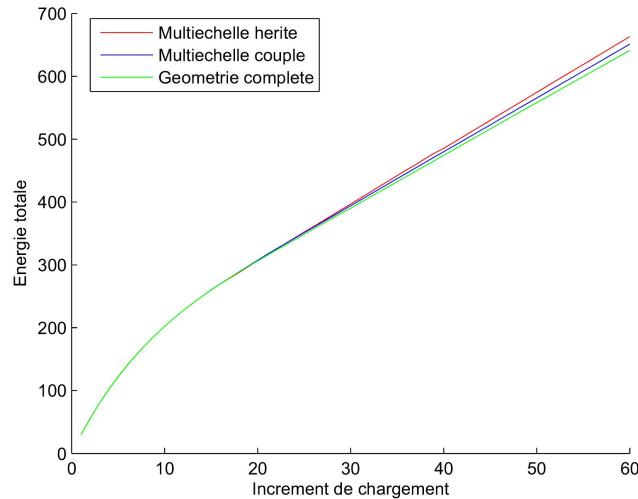


FIGURE 5.19 – Comparaison du minimum de l'énergie totale calculée par les trois approches.

Par ailleurs, on montre sur la figure 5.19, une comparaison de l'évolution de l'énergie totale calculée avec tous les modèles. On peut observer sur ces courbes que l'écart entre les modèles est très faible (inférieur à 2 %). Plus précisément, on vérifie que le problème multi-échelles couplé fournit un résultat intermédiaire entre les deux autres :

- l'écart entre le calcul sur la géométrie complète et le multi-échelles couplé s'explique par l'hypothèse de séparation par les plans, qui ajoute une contrainte supplémentaire sur les disques ;
- l'écart entre le calcul avec le modèle hérité et le modèle multi-échelles couplé illustre à la fois l'impact de l'hypothèse cinématique sur les plans, qui sont empêchés de tourner.

Enfin, si l'on observe les cartes de densité sur la figure 5.20, on constate des petits écarts au niveau des plans entre les différents modèles. Au niveau de ces zones, ni le problème couplé ni le problème hérité ne prennent en compte les contacts localisés entre microdisques de sous-domaines différents, ce qui engendre un petit écart par rapport au calcul sur la géométrie complète (cf figure 5.14). De plus, un écart entre le problème couplé et le problème hérité est également visible, qui s'explique par le fait que la loi de contact macroscopique qui fournit les efforts sur les plans dans le modèle hérité est correcte en moyenne, mais ne permet pas de capter les phénomènes localisés. Néanmoins, on peut vérifier sur la figure 5.21 que les densités moyennes correspondant aux équilibres calculés par les trois approches sont très proches. Ces résultats nous permettent par conséquent de valider complètement notre approche héritée, ce qui rend légitime le fait de l'appliquer à la modélisation d'un câble tridimensionnel.

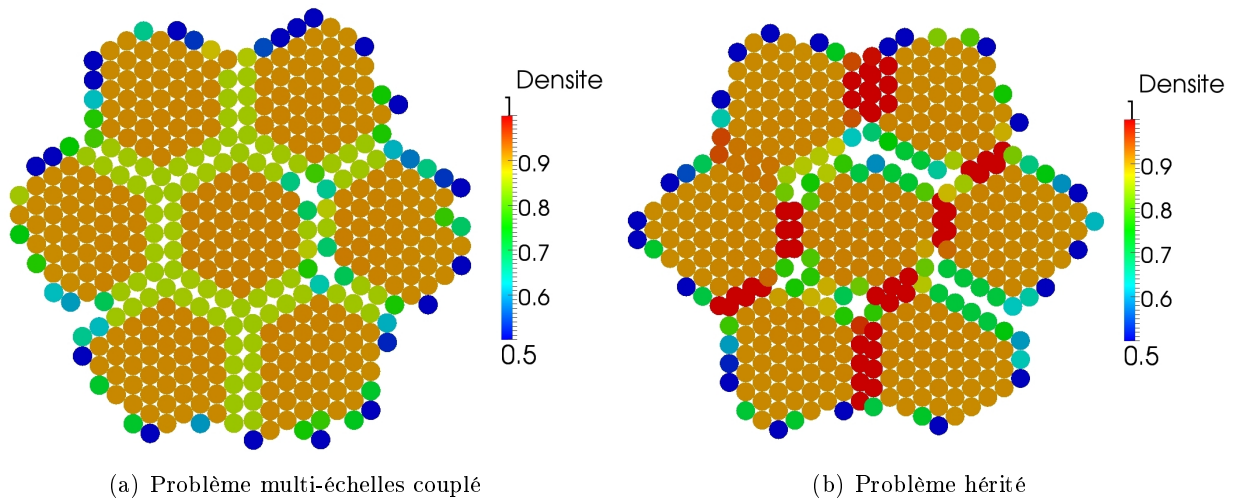


FIGURE 5.20 – Cartes de densité pour les différents modèles.

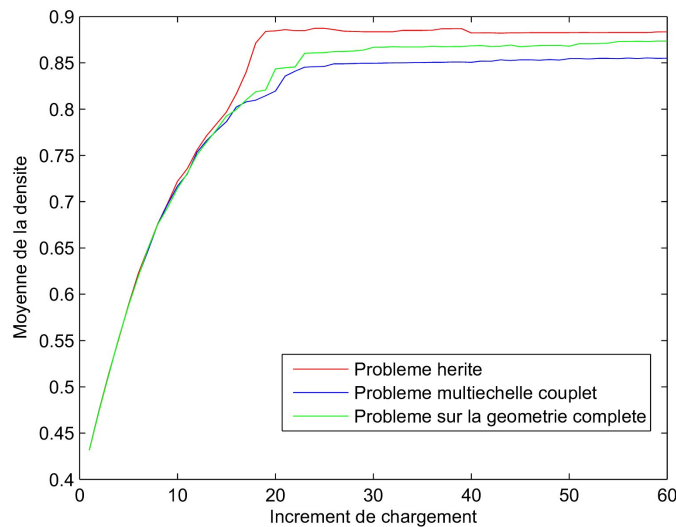


FIGURE 5.21 – Comparaison de la densité obtenue par les trois approches.

Conclusion

En vue de simuler le comportement d'un câblé textile comportant un grand nombre de filaments, nous avons construit dans le chapitre précédent une approche multi-échelles fondée sur la notion de macrofibre représentant un paquet de filaments. La stratégie repose sur le développement d'un modèle simplifié de macrofibre pour résoudre le problème à l'échelle macroscopique, et la formulation d'un problème à l'échelle microscopique piloté par des quantités pertinentes déterminées à l'échelle macroscopique. Afin de corriger l'erreur commise sur le modèle macroscopique, qui se traduit en terme de densité, nous avons proposé d'autoriser des interpénétrations importantes entre les macrofibres. De plus, les paramètres du modèle macroscopique sont recalés, de manière à obtenir un accord entre les densités déterminées aux échelles macroscopique et microscopique.

Ce chapitre a présenté un modèle bidimensionnel simplifié correspondant à une section du câblé. Nous avons décrit dans la section 5.1 les choix de modélisation permettant de se rapprocher des problématiques rencontrées sur des câblés réels avec des phénomènes de densification et de migration.

Le problème dit "hérité", basé sur une descente de l'échelle macroscopique à l'échelle locale associée à une étape de recalage du modèle du contact macroscopique, a été formulé et mis en œuvre dans la section 5.2. Le cadre simplifié du modèle bidimensionnel nous a permis de réaliser des calculs locaux sur l'ensemble des cellules. Cette étude a démontré la faisabilité de l'approche multi-échelle envisagée en clarifiant les échanges entre échelles. Les tests préliminaires d'ajustement de la loi de contact à l'échelle macroscopique, basés sur un accord de la densité entre les deux échelles, sont très encourageants.

Enfin, nous avons présenté dans la section 5.3 la formulation et l'algorithme de résolution d'un problème multi-échelles couplé servant de problème intermédiaire de référence. Les résultats numériques obtenus par cette méthode ont été présentés et comparés avec les résultats obtenus avec le modèle sur la géométrie microscopique globale et le modèle avec l'approche héritée. Cela nous a permis de valider l'ensemble des hypothèses réalisées dans l'approche héritée, et prouvé que cette modélisation multi-échelles semble prometteuse tant en terme de pertinence physique qu'en terme de temps de calcul.

L'objectif du chapitre suivant est d'adapter cette approche à des applications sur câbles réels. Nous y présenterons notamment le traitement des difficultés relatives au passage en 3D (définition des cellules locales, conditions aux extrémités, mode d'imposition des quantités macroscopiques à l'échelle locale...).

Méthode multi-échelles sur un câblé tridimensionnel

Sommaire

Introduction	119
6.1 Modèle macroscopique continu	120
6.1.1 Principe général et notations	120
6.1.2 Cinématique d'une macrofibre	121
6.1.3 Comportement	121
6.1.4 Loi de contact originale	123
6.1.5 Formulation du problème continu	126
6.1.6 Équations d'équilibre	127
6.2 Méthode de "downscaling"	128
6.2.1 Géométrie locale et choix de modélisation	128
6.2.2 Passage Macro-Micro	129
6.2.3 Formulation continue du problème local	134
6.2.4 Équations d'équilibre et interprétations	135
6.2.5 Discrétisation en temps	136
6.3 Discrétisation et résolution	137
6.3.1 Discrétisation en espace	137
6.3.2 Algorithme de résolution	139
6.3.3 Application sur un exemple simple	141
6.4 Application sur un câblé textile réel	143
6.4.1 Présentation de la géométrie et du chargement imposé	143
6.4.2 Simulation de la traction aux deux échelles	144
6.4.3 Application à la prédiction de l'endommagement	145
Conclusion	148

Introduction

Les chapitres 4 et 5 ont permis de construire une approche multi-échelles originale pour étudier le comportement des câbles textiles, et de la tester numériquement dans un cadre simplifié bidimensionnel. Les résultats obtenus étant très encourageants, nous décidons de passer à l'étape d'implémentation de l'approche dans un cadre tridimensionnel. Par ailleurs, seule l'approche "héritée" sera mise en œuvre. En effet, l'application numérique du problème complet en couplant les deux échelles n'est pas envisageable dans le cadre de cette étude pour des raisons évidentes de coût de calcul. Le chapitre est divisé en quatre sections :

- Les deux premières sections sont consacrées à la description de la modélisation des problèmes aux deux échelles macroscopique et microscopique, dans lesquels on considère un assemblage de poutres en grandes déformations et en interaction de contact-frottement. Nous invitons le lecteur à se rapporter aux chapitres 2 et 3 pour une présentation plus détaillée du modèle de poutre utilisé et des aspects liés à la gestion des interactions de contact entre les poutres. L'accent sera mis à l'échelle macroscopique sur le choix de la loi de contact originale, alors qu'à l'échelle microscopique nous décrirons en particulier le choix de quantités pertinentes à hériter de l'échelle macroscopique. Le mode d'imposition de ces informations à l'échelle locale sera également explicité.
- La méthodologie de résolution numérique des problèmes aux différentes échelles sera décrite dans la troisième section, où des résultats numériques sur des cas tests simples seront également présentés pour vérifier la validité du modèle ;
- La dernière section rassemble quelques tests numériques réalisés sur un cas réel de câble utilisé comme renfort dans le pneumatique. Ces différents tests nous permettront d'évaluer l'efficacité de la démarche proposée. Le modèle sera analysé sous deux aspects : la cohérence entre des quantités mesurées aux deux échelles, et la pertinence par rapport aux résultats expérimentaux disponibles.

6.1 Modèle macroscopique continu

6.1.1 Principe général et notations

Comme cela a été expliqué dans les chapitres précédents, le nombre réel de fibres au sein d'un câblé textile réel s'élève à plusieurs milliers de fibres. Pour pouvoir modéliser ces câbles, la voie de modélisation qui a été adoptée consiste à regrouper un certain nombre des fibres réelles (quelques dizaines) en une structure équivalente. Il s'agit alors de créer un modèle de "paquet de fibres" dit de *macrofibre*, introduit à une échelle mésoscopique, et dont le comportement soit équivalent. On attend de cette modélisation de déterminer le comportement global en terme de courbe force allongement pour alimenter un modèle à l'échelle du pneumatique.

Dans ce qui suit, nous choisissons les notations suivantes pour décrire la constitution d'un câble :

- N_{tot} : Nombre de fibres total dans le câble ;
- R : Rayon des fibres locales (supposé identique pour toutes les fibres) ;
- $A = \pi R^2$: Aire d'une section d'une fibre ;
- E : Module d'Young des fibres locales.

Pour introduire le modèle de macrofibre, nous serons également amenés à utiliser les quantités suivantes :

- N_{micro} : Nombre de fibres dans une macrofibre (supposé identique pour toutes les macrofibres) ;
- $N_{\text{Macro}} = \frac{N_{\text{tot}}}{N_{\text{micro}}}$: Nombre de macrofibres dans le câble ;
- R^M : Rayon d'une macrofibre ;
- $A^M = \pi R^{M2}$: Aire d'une section d'une macrofibre ;
- α : Taux de vide dans une macrofibre, donné par

$$\alpha = 1 - \frac{N_{\text{micro}} A}{A^M} \quad (6.1)$$

- E^M : Module d'Young homogénéisé utilisé dans une macrofibre.

Pour déterminer la valeur du rayon des macrofibres R^M , l'idée est de conserver la valeur de la surface réelle de la section du câblé lorsqu'on le modélise avec des macrofibres. Pour cela, nous devons

respecter la relation suivante :

$$N_{\text{Macro}} (1 - \alpha) \pi R^M = N_{\text{tot}} \pi R^2$$

Le rayon d'une macrofibre est alors donné par l'expression suivante :

$$R^M = \sqrt{\frac{N_{\text{micro}}}{(1 - \alpha)}} R \quad (6.2)$$

6.1.2 Cinématique d'une macrofibre

Les macrofibres sont représentées par des poutres en grandes déformations dont le modèle cinématique est proposé dans [Durville 1998]. La position de tout point matériel à l'intérieur de la macrofibre indexée i , défini par son abscisse curviligne s et ses coordonnées dans la section de la poutre (ξ_1, ξ_2) dans la configuration de référence, est alors donnée par :

$$\underline{x}_i^M(\xi_1, \xi_2, s) = \underline{r}_i^M(s) + \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha \underline{d}_{\alpha,i}^M(s) \quad (6.3)$$

Dans cette expression, le vecteur $\underline{r}_i^M(s)$ représente le vecteur position du centre de la section et les vecteurs $\underline{d}_{\alpha,i}^M, \alpha = 1..2$ sont deux vecteurs directeurs de la section. Aucune hypothèse n'est faite sur les deux vecteurs de section, ils peuvent varier en norme et en angle, ce qui permet à ce modèle de rendre compte de déformations planes et linéaires des sections de la poutre.

Le choix de ce modèle cinématique s'appuie sur l'étude comparative des principaux modèles de poutres proposés dans la littérature, qui a été faite dans le chapitre 2 de ce manuscrit. En particulier, ce modèle cinématique a été analysé avec plus de détails dans la section 2.2.2.

6.1.3 Comportement

Comme cela été expliqué dans la sous-section 4.2.2, la détermination d'un modèle rhéologique approprié pour représenter un paquet de fibres est loin d'être triviale. Pour qu'il soit apte à reproduire les déformations subies par un paquet de fibres, le modèle de poutre pour la macrofibre doit pouvoir représenter des déformations complexes de ses sections dans les directions transverses. L'exercice consisterait à représenter à l'aide d'un modèle continu le comportement d'un milieu discret fortement non linéaire à cause des interactions de contact frottant entre les fibres du paquet et régi par un couplage entre les chargements dans les différentes directions. Par ailleurs, les comportements dans les directions longitudinale et transverses se trouvent couplés par le fait que les efforts de frottements développés entre les fibres, agissant principalement dans les directions transverses, sont conditionnés par les tensions portées longitudinalement par les fibres.

Dans cette étude, en absence d'un modèle rhéologique de macrofibre consistant, nous proposons d'utiliser un modèle rhéologique simplifié, dans lequel nous supposons alors que tous les constituants sont élastiques isotropes. Nous cherchons alors à ce que le comportement d'une macrofibre soit "équivalent" au comportement d'un paquet de fibres, dans le sens où il respecte les propriétés mécaniques suivantes :

Égalité des rigidités en extension :

On cherche à conserver la rigidité en extension entre le paquet de fibres et la macrofibre équivalente. Les rigidités en extension d'un paquet de N_{micro} fibres parallèles et d'une macrofibre sont respectivement égales à $N_{\text{micro}} E A$ et $E^M A^M$. L'égalité des rigidités en extension entre les deux échelles s'écrit alors :

$$N_{\text{micro}} E A = E^M A^M$$

On en déduit la valeur du module d'Young des macrofibres, donnée par :

$$E^M = (1 - \alpha) E \quad (6.4)$$

où α étant le taux de vide dans une macrofibre, qui a été introduit ci-dessus.

Rigidité réduite en flexion :

Si l'on modélise le comportement d'une macrofibre par une loi de Hooke tridimensionnelle classique de module d'Young E^M , alors on peut facilement montrer que sa rigidité en flexion est égale à

$$E^M \frac{\pi}{4} R^4$$

On rappelle le rayon de la macrofibre R^M est défini par l'expression 6.2, donc cette rigidité de flexion peut se réécrire en fonction du rayon d'un filament sous la forme :

$$\frac{N_{\text{micro}}^2}{(1 - \alpha)^2} E^M \frac{\pi}{4} R^4 \quad (6.5)$$

Par contre, le comportement en flexion d'un paquet de N_{micro} fibres est assez complexe, et donc sa rigidité en flexion est beaucoup plus difficile à estimer. En général, on distingue deux modes de fonctionnement :

1. Mode « *fil collés* » :

Ceci consiste à supposer que les efforts de contact normaux entre fibres sont assez importants pour empêcher les glissements. Ce cas de figure se présente en particulier lorsque le câble est sous une forte traction.

Sous une sollicitation en flexion du paquet, les fibres situées à l'intérieur de la courbure sont en compression alors que celles à l'extérieur sont en traction. La rigidité de ce paquet est alors équivalente à celle de la poutre continue contenant l'ensemble des fibres, dont le moment d'inertie est calculé en prenant en compte la position réelle de chacun des fils. Par exemple, dans le cas particulier où les fils sont disposés de manière régulière et que la section du paquet est proche d'avoir une forme circulaire, la macrofibre peut être assimilée à un poutre circulaire de rayon $\sqrt{N_{\text{micro}}}R$, et sa rigidité en flexion s'écrit alors :

$$N_{\text{micro}}^2 E \frac{\pi}{4} R^4 \quad (6.6)$$

2. Mode « *fil libres* » :

Cela correspond à une situation où les fibres peuvent glisser les unes sur les autres. La rigidité en flexion du paquet est alors plus petite dans ce cas de figure et vaut :

$$N_{\text{micro}} E \frac{\pi}{4} R^4 \quad (6.7)$$

Dans les deux cas de figure, on peut observer que la rigidité de flexion attribuée à la macrofibre donnée par 6.5 est sur-estimée. Pour corriger cet effet, on propose de la multiplier par un facteur de réduction β compris en 0 et 1. Dans notre cas d'étude, nous faisons l'hypothèse que les filaments gardent la possibilité de glisser les uns sur les autres, et donc que la rigidité en flexion du paquet de filaments correspond au mode « *fil libres* », donnée par l'expression 6.7. En tenant compte de l'équation 6.4, le coefficient de réduction de la rigidité en flexion de la macrofibre est alors le suivant :

$$\beta = \frac{1 - \alpha}{N_{\text{micro}}} \quad (6.8)$$

Ce comportement de macrofibre correspond à une première approximation du comportement d'un paquet de filaments, c'est à dire sans prendre compte des effets non-linéaires du frottement, et reste par ailleurs inconsistant. En effet, comme déjà décrit dans le chapitre précédent, les erreurs commises sur le modèle à l'échelle macroscopique semblent se traduire en termes de densité, ce qui peut être lié à l'incapacité des macrofibres à prendre compte des effets de densification locale (écrasement transverse, réduction des vides entre elles). L'idée originale de notre modélisation est alors d'autoriser des pénétrations importantes entre les macrofibres afin de contrôler l'égalité des encombrements (densités) entre les deux échelles.

Dans la suite de ce chapitre, la densité calculée à l'échelle des filaments sera notée δ , alors que la densité calculée à l'échelle des macrofibres sera notée δ^M . A l'échelle macroscopique, la densité réelle des fibres en tenant compte des vides, notée δ^M , s'écrit alors en fonction de la densité de macrofibres à l'échelle globale Δ sous la forme suivante :

$$\delta^M = (1 - \alpha) \Delta \quad (6.9)$$

Pour respecter l'égalité des densités δ et δ^M , les pénétrations à autoriser entre les macrofibres seront contrôlées par un modèle de contact adaptée, que nous allons décrire dans ce qui suit.

6.1.4 Loi de contact originale

Dans un premier temps, nous cherchons à exprimer la pénétration entre macrofibres en fonction de la densité locale visée. Pour cela, on s'appuie sur l'illustration donnée par la figure 6.1 :

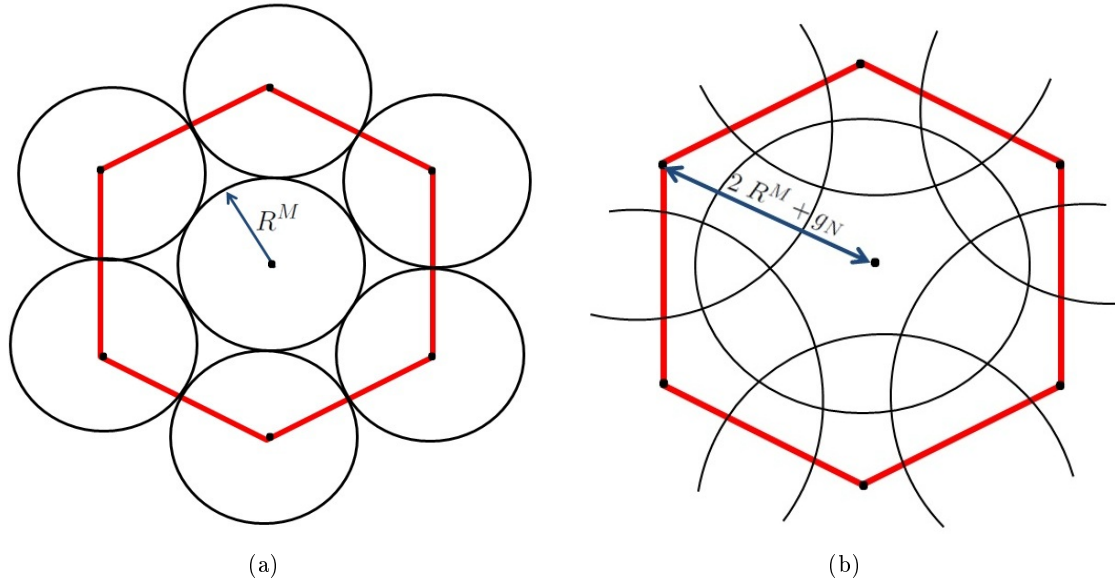


FIGURE 6.1 – Définition adoptée pour la détermination de la densité (a) configuration hexagonale compacte (b) Interpénétration entre macrofibres à l'échelle macroscopique

D'après cette illustration, nous définissons la densité macroscopique Δ comme étant l'aire occupée par les parties des macrofibres à l'intérieur de l'hexagone rouge formé par les centres des macrofibres voisines (voir figure 6.1), divisée par la surface de cet hexagone :

$$\Delta = \frac{S}{S_{\text{hex}}} \quad (6.10)$$

La surface S occupée par les macrofibres dans l'hexagone correspond, en plus de la surface occupée par la section de la macrofibre centre, aux tiers de chaque section des six macrofibres voisines, et est

donc égale à :

$$\begin{aligned} S &= A^M + 6 \frac{A^M}{3} \\ &= 3 \pi (R^M)^2 \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour calculer l'aire de l'hexagone, on découpe celui-ci en 6 triangles équilatéraux, chacun de côté $2 R^M + g_N$. L'aire de chaque triangle valant $\frac{\sqrt{3}}{4} (2 R^M + g_N)^2$, on en déduit que l'aire de l'hexagone est donnée quant à elle par l'expression :

$$S_{\text{hex}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} (2 R^M + g_N)^2$$

où g_N est la distance signée entre les contours de deux macrofibres. En mécanique du contact, cette distance doit être maintenue positive pour garantir la non interpénétration entre deux corps en contact (cf. équation 3.1). Mais dans notre modélisation macroscopique, nous souhaitons au contraire autoriser des interpénétrations pour contrôler la densité, donc g_N pourra prendre des valeurs négatives.

Finalement, en tenant compte des expressions précédente pour S et S_{hex} , la densité définie par 6.10 vaut :

$$\Delta = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\left(1 + \frac{g_N}{2 R^M}\right)^2} \quad (6.11)$$

Maintenant que nous avons exprimé la densité des macrofibres à l'échelle macroscopique en fonction du gap toléré g_N , nous cherchons à évaluer les densités aux deux échelles, ce qui se traduit par la relation 6.9 :

$$\Delta = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\left(1 + \frac{g_N}{2 R^M}\right)^2} = \frac{\delta}{1 - \alpha}$$

On en déduit alors l'expression de la distance de pénétration entre macrofibres permettant d'atteindre la densité locale δ visée :

$$g_N = 2 R^M \left[\sqrt{(1 - \alpha) \frac{1}{\delta} \frac{\pi}{2\sqrt{3}}} - 1 \right] \quad (6.12)$$

A partir de cette expression, on distingue deux cas particuliers intéressants :

1. *Configuration hexagonale compacte des fibres à l'échelle locale* : cette configuration correspond à une compaction maximale des fibres au sein du câble réel ,qui parviennent à se réorganiser de manière optimale. En négligeant les déformations des sections des filaments, la densité locale (pour une section de câble) est égale dans ce cas à :

$$\delta = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

A partir de l'équation 6.12, on en déduit la valeur de la distance de pénétration à autoriser entre les macrofibres pour atteindre cette configuration :

$$g_N^{\text{hex}} = 2 R^M [\sqrt{1 - \alpha} - 1] \quad (6.13)$$

2. *Polygonalisation des sections des fibres locales* : cette configuration correspond à l'écrasement transverse des sections des fibres constituant le câble sous des fortes valeurs de tension. Ce phénomène de densification a été observé à partir de résultats expérimentaux par tomographie X de la microstructure d'une section du câble au cours d'un chargement de traction (cf. section 4.4.2). Dans ce cas, tous les vides entre les filaments sont remplis et on atteint une densité locale dans le câble égale à $\delta = 1$. On en déduit alors à partir de l'expression 6.12 la valeur du gap entre les macrofibres :

$$g_N^{\text{poly}} = 2 R^M \left[\sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{3}} (1 - \alpha)} - 1 \right] \quad (6.14)$$

En se basant sur ce constat, nous proposons de gérer le problème de contact à l'échelle macroscopique par une méthode de pénalisation régie par une loi adaptée. Nous rappelons que le choix de la méthode de pénalisation ainsi que d'autres aspects liés aux problèmes de contact entre poutres ont fait le sujet du chapitre 3. La loi proposée est donnée par la courbe présentée sur la figure 6.2 :

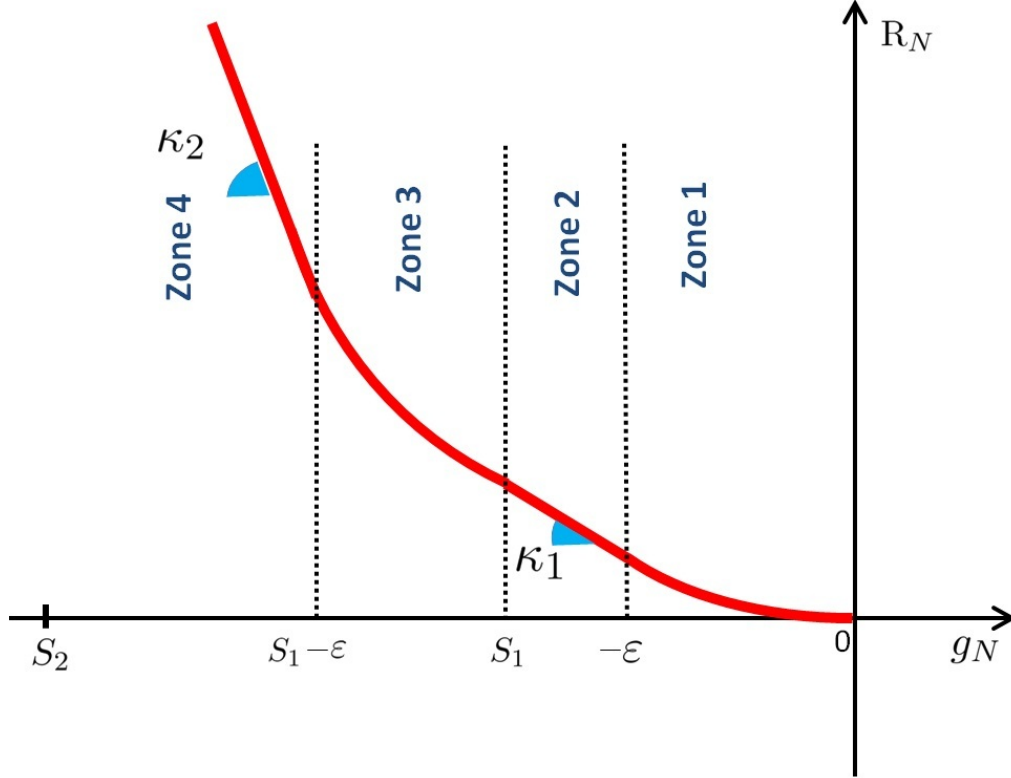


FIGURE 6.2 – Loi de contact bi-pente originale utilisée à l'échelle macroscopique.

Dans cette loi de contact originale, nous distinguons en particulier deux parties linéaires de raideurs respectives κ_1 et κ_2 :

- Zone 2 : Cette partie correspond à la phase de réarrangement des fibres locales jusqu'à atteindre une configuration d'hexagonale compacte, sans déformer leurs sections. On propose de prendre en compte cet effet en autorisant la pénétration entre les macrofibres jusqu'à une distance de pénétration qui correspond au paramètre S_1 de la loi de contact, pris égal à la pénétration g_N^{hex} donné par l'équation 6.13. Le coefficient de pénalisation κ_1 s'interprète comme étant la résistance des fibres locales pour atteindre la configuration hexagonale compacte, qui correspond a priori à une rigidité en flexion et à des effets de frottement ;
- Zone 4 : Au delà de la configuration hexagonale compacte, les sections des fibres à l'échelle locale doivent se déformer pour qu'elles puissent réduire d'avantage le vide entre elles. La rigidité transverse des filaments étant très grande par rapport à celle est flexion, le modèle de contact à l'échelle macroscopique doit être beaucoup plus raide pour empêcher davantage de pénétration, ce qui se traduit par $\kappa_2 \gg \kappa_1$.

Les zones 1 et 3 représentent quant à elles des parties de régularisation, dont le rôle est d'améliorer la convergence de l'algorithme de contact par rapport à une méthode de pénalisation standard, comme expliqué dans la section 3.2.3. Dans ces deux zones, nous utilisons une régularisation quadratique de la

fonction de pénalisation du contact selon une profondeur de régularisation que l'on note ici ε . L'idée est de supprimer les discontinuités sur les raideurs de contact en 0 et S_1 par lissage, et de rendre ainsi différentiable l'effort de contact. La profondeur de pénalisation ε étant un paramètre de réglage numérique.

Comme nous l'avons dit précédemment, à terme l'objectif est d'adapter les paramètres de cette loi de contact de manière à ajuster les densités macroscopique et microscopique au cours du chargement de traction. Mais dans un premier temps, le choix de la valeur de ces paramètres est le suivant :

- les seuils S_1 et S_2 sont déterminées selon les critères géométriques précédemment décrits ;
- le coefficient de pénalisation κ_1 est arbitraire, pris suffisamment faible pour autoriser des pénétrations ;
- Enfin, afin de contrôler les pénétrations maximales, nous proposons d'adapter de manière itérative le coefficient de pénalisation κ_2 , qui devient par conséquent variable et ajustable. Comme nous l'avons présenté dans la sous-section 3.2.3 de ce rapport, une telle méthode d'ajustement présente l'avantage de contrôler la pénétration maximale tout en assurant que le problème reste bien conditionné. La pénétration maximale à tolérer entre les macrofibres correspond au cas où les sections des fils se sont déformées jusqu'à boucher complètement les vides et atteindre une densité locale $\delta = 1$, donc sa valeur est alors égale à g_N^{poly} donnée par l'équation 6.14. Si l'on note $g_{N,\max}^k$ la valeur la plus élevée de la pénétration évaluée sur une zone de contact à l'itération k et κ_2^k le coefficient de pénalisation qui lui est affecté, alors le coefficient de pénalisation κ_2^{k+1} est déterminé en fonction du seuil de pénétration maximal S_2 autorisé comme suit :

$$\kappa_2^{k+1} = \frac{g_{N,\max}^k - S_1}{S_1 - S_2} \kappa_2^k \quad (6.15)$$

A terme, si cet ajustement était conservé, nous aurions une contradiction intrinsèque entre définir la raideur de contact en fonction de la densité micro et de la pénétration courante, et définir la raideur de contact pour contrôler la pénétration maximale autorisée. Par conséquent, il sera essentiel de ne plus utiliser cet ajustement du coefficient de pénalisation κ_2 lorsque le recalage à partir des résultats micro sera développé.

6.1.5 Formulation du problème continu

Pour simplifier la formulation du problème continu, nous supposons sans perte de généralité que la structure du câblé obtenue par assemblage de N_{Macro} macrofibres n'est pas soumise à des densités volumiques de forces et que l'unique chargement extérieur correspond à des déplacements imposés à ses extrémités.

En nous basant sur l'expression du travail virtuel interne pour une poutre donnée par l'équation 2.36 et en tenant compte des interactions de contact frottant entre les macrofibres, nous montrons facilement que le problème d'équilibre continu de l'assemblage de N_{Macro} macrofibres s'écrit alors en appliquant le principe des puissances virtuelles :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\underline{r}_i^M, \underline{d}_{\alpha,i}^M)_{i \in [1..N_{\text{Macro}}]} \in K \text{ tel que } \forall (\hat{\underline{r}}_i^M, \hat{\underline{d}}_{\alpha,i}^M)_{i \in [1..N_{\text{Macro}}]} \in K_0, \\ & \sum_{i=1}^{N_{\text{Macro}}} \left[\int_0^{L_i} - \left\{ \underline{N}_{int,i}^M \cdot \hat{\underline{r}}_i^M + \underline{G}_{\alpha,int,i}^M \cdot \hat{\underline{d}}_{\alpha,i}^M + \underline{H}_{\alpha,int,i}^M \cdot \hat{\underline{d}}_{\alpha,i}^{M'} \right\} ds + \sum_{j=1}^{N_{\text{Macro}}} \left(\int_{\Gamma_{\text{cnt}}^{ij}} \underline{F}_{ij}^N \hat{g}_{ij}^N + \underline{F}_{ij}^T \cdot \hat{\underline{g}}_{ij}^T \right) d\Gamma \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

où, nous rappelons que les espaces de transformations et de perturbations admissibles K et K_0 sont définis par 2.2 et 2.3, Γ_{cnt}^{ij} représente l'interface du contact entre deux macrofibres indicées par i et j ,

alors que $\hat{g}_{ij}^N$ et $\hat{g}_{ij}^T$ correspondent aux termes de variation virtuelle des parties normale et tangentielle de la fonction gap, donnés par le système d'équations 3.12.

6.1.6 Équations d'équilibre

Pour illustrer ces équations d'équilibre, nous considérons le cas particulier d'un champ virtuel qui respecte l'hypothèse de Timoshenko, c'est à dire appartenant au sous-espace $dK^{ort}(\underline{r}_i^M, \underline{d}_{\alpha,i}^M)$. Dans ce cas, comme cela a été montré dans la section 2.2.1, les variations virtuelles des vecteurs directeurs $\underline{d}_{\alpha,i}^M$ s'écrivent sous la forme :

$$\exists \hat{\underline{\omega}}_i^M \in W^{1,q}([0; L]^3), \quad \forall s \in [0, L], \quad \underline{d}_{\alpha,i}^M(s) = \hat{\underline{\omega}}_i^M(s) \wedge \underline{d}_{\alpha,i}^M(s)$$

Par ailleurs, le déplacement virtuel du point de contact situé sur le contour de la poutre i , noté $\hat{\underline{x}}_i^{cont}$, s'écrit sous la forme :

$$\hat{\underline{x}}_i^{cont} = \hat{\underline{r}}_i^M + \hat{\underline{\omega}}_i^M \wedge (\underline{x}_c^i - \underline{r}_i^M)$$

Si l'on néglige les déformations des sections de la macrofibre, ce déplacement virtuel peut se réécrire comme suit :

$$\hat{\underline{x}}_i^{cont} = \hat{\underline{r}}_i^M + \hat{\underline{\omega}}_i^M \wedge R^M \underline{n}_{ij} \quad (6.17)$$

où on rappelle que R^M est le rayon de la macrofibre considérée.

En reprenant le problème d'équilibre 6.16 et après une intégration par partie, nous montrons alors que l'équilibre d'une macrofibre $i \in [1..N_{Macro}]$ doit satisfaire l'équation suivante :

$$\forall (\hat{\underline{r}}_i^M, \hat{\underline{\omega}}_i^M) \in \mathcal{U},$$

$$\int_0^{L_i} \left\{ \underline{N}_{int,i}^{M'} \cdot \hat{\underline{r}}_i^M + \left(\underline{r}_i^{M'} \wedge \underline{N}_{int,i}^M + \underline{M}_{int,i}^{M'} \right) \cdot \hat{\underline{\omega}}_i^M \right\} ds + \sum_{j=1}^{N_{Macro}} \left(\int_{\Gamma_{cnt}^{ij}} F_{ij}^N \underline{n}_{ij} + \underline{F}_{ij}^T \right) \cdot \hat{\underline{x}}_i^{cont} d\Gamma = 0 \quad (6.18)$$

où $\underline{N}_{int,i}^M$ et $\underline{M}_{int,i}^M$ représentent respectivement les vecteurs d'effort et de moment internes de la macrofibre considérée et dont les expressions sont données par le système d'équation 2.22, alors que $\underline{n}_{ij}$ représente la normale de contact entre les macrofibres i et j .

A partir de cette équation, on peut enfin établir les équations d'équilibres locales d'une macrofibre $i \in [1..N_{Macro}]$, qui s'écrivent pour toute abscisse curviligne $s \in [0, L]$:

$$\underline{N}_{int,i}^{M'} + \sum_{j=1}^{N_{Macro}} (F_{ij}^N \underline{n}_{ij} + \underline{F}_{ij}^T) = \underline{0} \quad (6.19)$$

$$\underline{r}_i^{M'} \wedge \underline{N}_{int,i}^M + \underline{M}_{int,i}^{M'} + \sum_{j=1}^{N_{Macro}} R^M \underline{F}_{ij}^T \wedge \underline{n}_{ij} = \underline{0} \quad (6.20)$$

Ces deux équations décrivent respectivement l'équilibre des efforts et des moments d'une section de macrofibres. Elles pourront être comparées par la suite à l'équilibre d'une coupe du paquet de filaments correspondant.

6.2 Méthode de "downscaling"

6.2.1 Géométrie locale et choix de modélisation

Comme nous l'avons souligné précédemment, un des objectifs de cette étude est de pouvoir appréhender les mécanismes locaux qui sont à l'origine de l'endommagement des fibres élémentaires du câble. Cela nécessite alors d'avoir accès aux valeurs de contraintes et de déformations à l'échelle microscopique des filaments élémentaires à partir des résultats d'un calcul macroscopique. Pour cela, le passage de l'échelle macroscopique à l'échelle microscopique va se faire d'une manière sélective, en "zoomant" sur la macrofibre dont on cherche à analyser localement le comportement des filaments.

Avant d'entrer dans les détails des quantités à hériter de l'échelle macroscopique, la première étape consiste à définir la géométrie locale étudiée. Le problème local fait intervenir un groupe de N_{micro} filaments compris à l'intérieur du volume de la macrofibre dans la géométrie initiale. Pour simplifier les notations dans ce qui suit, nous supposons sans perte de généralité que les fibres sont droites dans la géométrie initiale et de même longueur que la macrofibre associée. Pour assurer la cohérence entre les deux échelles, on respecte la valeur de rayon d'une macrofibre définie par l'équation 6.2.

Comme cela a été expliqué dans la section 4.4.4, nous avons choisi de représenter l'action de chaque macrofibre voisine sur le paquet de filaments étudié via une surface intermédiaire, mobile selon la direction de sa normale, sur laquelle est imposé l'effort d'interaction entre macrofibres. Plus précisément, pour toute abscisse curviligne $s \in \Gamma_{\text{cnt}}^{ij}$ entre la macrofibre considérée, indicée i , et une autre macrofibre $j \in [1..N_{\text{Macro}}]$, on définit une droite $D_{ij}(s)$ caractérisée par :

- un point $\underline{x}_{ij}^0$ situé au milieu des centres de macrofibres, défini par :

$$\underline{x}_{ij}^0 = \frac{1}{2} (\underline{r}_i^M + \underline{r}_j^M) \quad (6.21)$$

- un vecteur directeur $\underline{v}_{ij}$, défini comme le produit vectoriel de la normale de contact $\underline{n}^{ij}$ et du vecteur tangent à la ligne intermédiaire du contact décrite dans la section 3.2.2 de ce manuscrit.

Ainsi, pour chaque zone de contact, une surface S_{ij} est définie comme suit : (voir figure 6.3)

$$S_{ij} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 / \exists s \text{ tel que } \underline{x} \in D_{ij}(s) \} \quad (6.22)$$

D'un point de vue modélisation, il est essentiel que le modèle cinématique utilisé pour représenter les fibres à l'échelle microscopique soit assez riche, de manière à approcher de manière précise les phénomènes locaux complexes. Pour cela, nous proposons d'utiliser le modèle de poutre à cinématique enrichie présenté dans la section 2.2.2 pour modéliser chacune des fibres constituant le paquet. A l'intérieur d'une macrofibre $i \in [1..N_{\text{Macro}}]$, la position de tout point matériel appartenant à un filament local $k \in [1..N_{\text{micro}}]$ s'écrit alors en fonction de son abscisse curviligne $s \in [0, L]$ et ses positions dans la section à la configuration de référence sous la forme :

$$\underline{x}_{i,k}(\xi_1, \xi_2, s) = \underline{r}_{i,k}(s) + \sum_{\alpha=1}^2 \xi_{\alpha} \underline{d}_{\alpha,i,k}(s) \quad \alpha = 1, 2$$

Par ailleurs, le comportement des fibres sera quant à lui supposé élastique, décrit par le modèle rhéologique tridimensionnel présenté dans la section 2.3.2.

Enfin, les interactions de type contact-frottement qui se produisent entre les fibres seront prises en compte. En effet, les simulations sont réalisées par le logiciel *Multifil*, dont nous avons présenté le traitement numérique du contact-frottant dans la section 3.2.

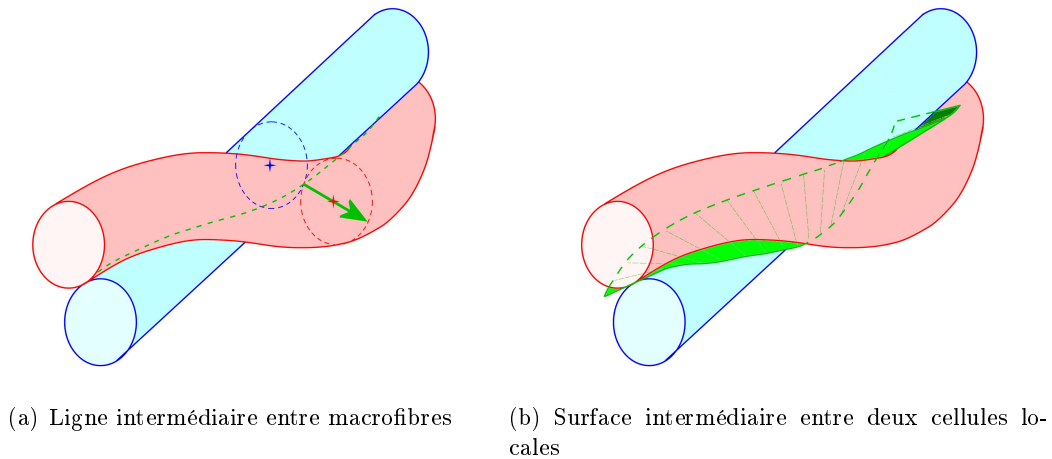


FIGURE 6.3 – Définition d'une surface intermédiaire entre deux cellules locales.

6.2.2 Passage Macro-Micro

Quantités globales transmises à l'échelle locale

Une des difficultés de l'approche proposée consiste à déterminer les informations macroscopiques à transmettre à l'échelle microscopique. Dans notre analyse, nous estimons que **les trajectoires** des macrofibres (c'est à dire la position de leur ligne moyenne) et **les efforts d'interactions de contact** entre elles sont des quantités dont le calcul macroscopique est assez précis, et dans lesquelles on peut donc avoir confiance pour alimenter l'échelle microscopique. Nous proposons alors un mode de pilotage mixte à l'échelle locale, dans lequel on impose :

- la trajectoire de la macrofibre au paquet de filaments qui lui est associé ;
- les efforts normaux de contact sur les surfaces mobiles situées autour du paquet de filaments.

La trajectoire de la macrofibre sera imposée en moyenne le long du paquet. Ce mode d'imposition en moyenne est une manière souple d'imposer la trajectoire de la macrofibre à l'échelle locale. En effet, les filaments à l'échelle microscopique suivent globalement le mouvement de la macrofibre à laquelle ils sont associés, tout en leur laissant la liberté de se réorganiser et migrer localement. En outre, le pilotage en effort des surfaces permet de transmettre les efforts transverses subis par la macrofibre au paquet de filament local.

Par ailleurs, à l'échelle macroscopique, chaque macrofibre subit un mouvement de rotation de section autour de sa fibre moyenne. Ceci est dû d'une part aux conditions appliquées aux extrémités du câble (rotation imposée), et d'autre part à la particularité d'un assemblage torsadé :

- les macrofibres constituant le câblé sont modélisées par des poutres soumises à une tension et enroulées autour de l'axe de l'assemblage sous une forme hélicoïdale. Pour trouver un état d'équilibre, ces poutres auront tendance à se dérouler, ce qui entraîne des mouvements de rotation ;
- les macrofibres sont liées entre elles par des interactions de contact frottant. Ces liens engendrent des glissements relatifs entre elles, ce qui les entraînent en rotation.

On cherche ainsi à hériter de ce mouvement de rotation macroscopique et l'imposer à l'échelle locale, afin de prendre compte l'effet de torsion au niveau du paquet de filaments. De ce fait, on propose d'imposer en moyenne **le mouvement de rotation** de la macrofibre aux filaments à l'échelle locale.

Définition d'un repère local associé à la macrofibre

Les conditions aux limites que l'on souhaite appliquer au paquet de filaments à l'échelle locale sont liées à la ligne moyenne de la macrofibre et l'orientation de ses sections, données à chaque instant. Par conséquent, ces conditions ne peuvent pas être exprimées par rapport à un repère fixe de l'espace, et il est nécessaire de se placer dans un repère local associé à la macrofibre, défini en tout point matériel de sa ligne moyenne.

En tout point repéré par son abscisse curviligne s , on détermine le vecteur tangent à la ligne moyenne en ce point et que l'on note $\underline{t}_i^M(s) = \frac{\partial \underline{r}_i^M}{\partial s}(s)$. Le repère local orthonormé noté $(\underline{b}_{1,i}(s), \underline{b}_{2,i}(s), \underline{b}_{3,i}(s))$ lié à la macrofibre en ce point est défini de la manière suivante :

$$\begin{cases} \underline{b}_{1,i}^M(s) = \frac{\underline{d}_{2,i}^M(s) \wedge \underline{t}_i^M(s)}{\|\underline{d}_{2,i}^M(s) \wedge \underline{t}_i^M(s)\|} \\ \underline{b}_{2,i}^M(s) = \frac{\underline{t}_i^M(s) \wedge \underline{b}_{1,i}^M(s)}{\|\underline{t}_i^M(s) \wedge \underline{b}_{1,i}^M(s)\|} \\ \underline{b}_{3,i}^M(s) = \frac{\underline{t}_i^M(s)}{\|\underline{t}_i^M(s)\|} \end{cases}$$

où $(\underline{d}_{1,i}^M(s), \underline{d}_{2,i}^M(s))$ représentent les vecteurs directeurs de la section correspondant à l'abscisse curviligne s et relatifs au modèle de poutre considéré.

Trajectoire moyenne dans la longueur

Comme nous l'avons expliqué précédemment, cette condition vise à positionner le paquet de filaments locaux sur la ligne moyenne de la macrofibre correspondante, qui est variable d'étape en étape. Nous proposons d'imposer cette condition en moyenne aux fibres constituant le paquet dans les deux directions transverses du repère local $(\underline{b}_{1,i}^M, \underline{b}_{2,i}^M)$. Par contre, nous laissons la possibilité aux filaments de glisser librement dans la direction $\underline{b}_{3,i}^M$, ce qui permet de ne pas introduire d'erreur à l'échelle locale si le comportement en extension de la macrofibre était mal rendu à l'échelle macroscopique.

Avec cette hypothèse, la condition à imposer en tout point d'abscisse curviligne $s \in [0; L]$ le long de la ligne moyenne de la macrofibre s'écrit sous la forme :

$$\forall \alpha = 1, 2, \quad \frac{1}{N_{\text{micro}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} (\underline{r}_{i,k}(s) - \underline{r}_i^M(s)) \cdot \underline{b}_{\alpha,i}^M(s) = 0 \quad (6.23)$$

Nous proposons d'imposer cette condition par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Nous introduisons alors le vecteur multiplicateur de Lagrange $\underline{\lambda}^i(s) \in \mathbb{R}^2$, $i \in [1..N_{\text{Macro}}]$ associé à la condition imposée pour la macrofibre considérée. Dans la forme faible du problème, le terme additionnel correspondant à cette contrainte s'écrit alors :

$$\sum_{\alpha=1}^2 \int_0^L \left[\underline{\lambda}_{\alpha,i}^M(s) \left(\frac{1}{N_{\text{micro}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \underline{\hat{r}}_{i,k}(s) \right) \cdot \underline{b}_{\alpha,i}^M(s) + \underline{\lambda}_{\alpha,i}^M(s) \left(\frac{1}{N_{\text{micro}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \underline{r}_{i,k}(s) - \underline{r}_i^M(s) \right) \cdot \underline{b}_{\alpha,i}^M(s) \right] ds \quad (6.24)$$

Rotation moyenne dans la longueur

La condition d'imposition en moyenne du mouvement de rotation de la macrofibre au paquet de filaments se traduit par l'imposition de l'égalité des vitesses de rotation angulaire en moyenne entre

les fibres locales et la macrofibre considérée. Chaque point d'une fibre locale du paquet, de vecteur position $\underline{r}_{i,k}$, correspond à un point matériel dans le volume de la macrofibre, paramétré par un angle $\theta(\underline{r}_{i,k})$ et la distance $R(\underline{r}_{i,k})$ par rapport au centre de la macrofibre (voir figure 6.4).

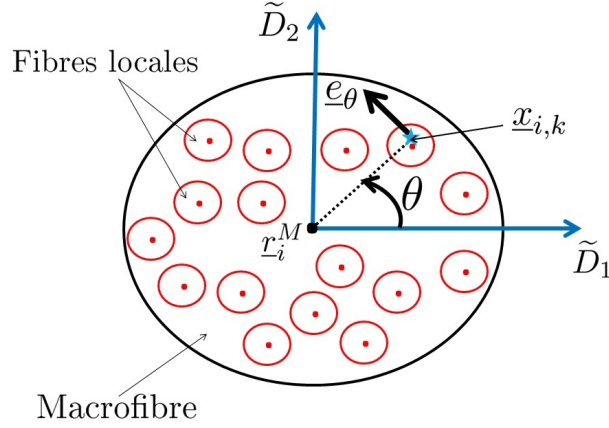


FIGURE 6.4 – Paramétrage d'un point matériel de la fibre locale dans le repère de la macrofibre

Le vecteur position de ce point s'écrit alors dans le repère de la macrofibre :

$$\underline{x}^M(\underline{r}_{i,k}) = \underline{r}_i^M + R(\underline{r}_{i,k}) \underline{e}_r(\theta(\underline{r}_{i,k})) \quad (6.25)$$

où $\underline{e}_r$ désigne le vecteur radial en ce point, alors que $\underline{e}_\theta$ représentera le vecteur orthoradial.

Avec ces notations, la contrainte à imposer en tout point de la ligne moyenne de la macrofibre, d'abscisse curviligne s , s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{1}{N_{\text{micro}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} (\dot{\underline{r}}_{i,k} - \dot{\underline{r}}_i^M) \cdot \underline{e}_\theta(\theta(\underline{r}_{i,k})) = 0 \quad (6.26)$$

Ci-dessus la notation $(\dot{})$ représente la vitesse du point considéré. De plus, si l'on dérive l'expression 6.25, on peut montrer facilement que le vecteur vitesse du point matériel dans la macrofibre vaut :

$$\dot{\underline{x}}^M(\underline{r}_{i,k}) = \dot{\underline{r}}_i^M + \dot{R}(\underline{r}_{i,k}) \underline{e}_r(\theta(\underline{r}_{i,k})) + \dot{\theta}^M R(\underline{r}_{i,k}) \underline{e}_\theta(\theta(\underline{r}_{i,k}))$$

où $\dot{R}$ est la vitesse de dilatation de la section de macrofibre, et $\dot{\theta}^M$ désigne sa vitesse de rotation autour de $\underline{b}_{3,i}^M$.

Finalement, en injectant cette expression dans l'équation 6.26, la contrainte de rotation moyenne imposée à l'échelle locale s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{N_{\text{micro}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \left(\dot{\underline{r}}_{i,k}(s) - \dot{\underline{r}}_i^M(s) - \dot{\theta}^M R(\underline{r}_{i,k}) \underline{e}_\theta(\theta(\underline{r}_{i,k})) \right) \cdot \underline{e}_\theta(\theta(\underline{r}_{i,k})) = 0 \quad (6.27)$$

Cette condition sera imposée par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Nous noterons $\mu_i^M(s)$ le multiplicateur associé à cette contrainte. Nous démontrons alors dans l'annexe C de ce rapport que le terme additionnel correspondant à cette contrainte dans la forme faible du problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_0^L \hat{\mu}_i^M(s) \left[\frac{1}{N_{\text{micro}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \left[\dot{\underline{r}}_{i,k}(s) - \dot{\underline{r}}_i^M(s) - \dot{\theta}^M R(\underline{r}_{i,k}) \underline{e}_\theta(\theta(\underline{r}_{i,k})) \right] \cdot \underline{e}_\theta(\theta(\underline{r}_{i,k})) \right] ds \\ + \int_0^L \mu_i^M(s) \left[\frac{1}{N_{\text{micro}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \dot{\underline{r}}_{i,k}(s) \cdot \underline{e}_\theta(\theta(\underline{r}_{i,k})) \right] ds \end{aligned} \quad (6.28)$$

Pilotage des surfaces entourant la cellule locale

Comme nous l'avons mentionné plus tôt, les surfaces entourant le paquet de fibres et définies le long des lignes de contact macroscopiques sont pilotées par une densité linéique de force. Ces forces correspondent aux réactions de contact développées entre les macrofibres et héritées du calcul macroscopique, qui doit avoir été résolu préalablement.

Dans la modélisation proposée, nous choisissons dans un premier temps de ne pas prendre en compte les interactions de frottement du paquet de filaments avec son environnement, en ne prenant en compte que les efforts normaux de contact $F_{ij}^N(s)$. Nous faisons alors l'hypothèse que ces surfaces sont mobiles uniquement selon leur direction normale, qui correspond à la direction normale du contact à l'échelle macroscopique. Par conséquent, le mouvement de tout point matériel de ces surface est décrit par un unique scalaire noté β_{ij} , correspondant au déplacement normal. Le vecteur position d'un point P, de position initiale $\underline{x}_P^0$ donnée par l'équation 6.21, s'écrit alors :

$$\underline{x}_P = \frac{1}{2} (\underline{r}_i^M + \underline{r}_j^M) + \beta_{ij} \underline{n}_{ij}$$

Les interactions développées entre les plans et les fibres du paquet sont des interactions de contact sans frottement. La condition du contact unilatérale entre la surface et les fibres est décrite par les conditions de Hertz-Signorini-Moreau données par l'équation 3.5. Le gap étant déterminé par projection orthogonale du point de ligne moyenne de la fibre sur la surface avec laquelle elle est en contact, la condition cinématique de non interpénétration entre une surface S_{ij} et une fibre locale $k \in [1..N_{\text{micro}}]$ s'écrit :

$$\left[\underline{r}_{i,k} - \frac{1}{2} (\underline{r}_i^M + \underline{r}_j^M) \right] \cdot \underline{n}_{ij} - \beta_{ij} \leq 0$$

Si l'on note $F_{ij,k}^{cnt}$ la composante normale de la force de contact développée entre cette surface et les fibres du paquet avec lesquelles elle est en contact, alors le terme à ajouter dans la forme faible du problème s'écrit :

$$\sum_{j \text{ voisin de } i} \left\{ F_{ij}^N(s) \hat{\beta}_{ij}(s) + \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} F_{ij,k}^{cnt} \left[\hat{\underline{r}}_{i,k}(s) \cdot \underline{n}_{ij} - \hat{\beta}_{ij}(s) \right] \right\} \quad (6.29)$$

En pratique, la force $F_{ij,k}^{cnt}$ est définie par une loi de contact classique, selon la loi de pénalisation régularisée illustrée sur la figure 3.13.

Remarque :

A ce stade de notre étude, nous avons fait l'hypothèse de ne pas introduire d'effets de frottement dans les liaisons entre les plans et les fibres. A terme, il serait intéressant de réfléchir à l'héritage de la composante tangentielle du contact entre macrofibres et de la prendre compte dans le contact tangentiel entre le paquet et les surfaces qui le délimitent. Dans cette étude, nous estimons pouvoir hériter des effets du frottement dans la direction orthoradiale entre les macrofibres par l'intermédiaire du mouvement de rotation de la macrofibre imposé à l'échelle locale.

Conditions aux extrémités

Quelle que soit l'échelle de la modélisation, les assemblages étudiés ne représentent réellement qu'une partie de câbles. En effet, les simulations réalisées portent typiquement sur quelques pas d'hélices du câble, qui mesurent quelques millimètres, alors que le câble complet peut mesurer plusieurs mètres de long.

A l'échelle locale, il est alors nécessaire de formuler des conditions aux limites à appliquer au paquet de filaments de manière à ce que le problème mécanique à résoudre à l'échelle microscopique soit bien posé. Ces conditions aux limites doivent être cohérentes avec celles appliquées à l'échelle macroscopique, et seront exprimées par rapport au repère local lié à la macrofibre $(\underline{b}_{1,i}^M, \underline{b}_{2,i}^M, \underline{b}_{3,i}^M)$ défini précédemment.

Nous proposons deux types de conditions en déplacement aux extrémités : des conditions aux limites de type Dirichlet à imposer explicitement à chacune des extrémités des fils de l'assemblage individuellement, et d'autres modes de contrôle en moyenne à appliquer à toutes les fibres du paquet. Le mode de pilotage en moyenne vise à contrôler le mouvement des fibres de l'assemblage d'une manière souple en leur laissant la liberté de se réorganiser localement, ce qui autorisera ainsi la migration de certains filaments.

Condition de type Dirichlet

La condition de type déplacements imposés à chaque extrémité des fibres locales et d'abscisse curviligne $s_{\text{ext}} = \{0; L\}$ s'écrit dans le repère local associé et entre l'instant actuel t et précédent $t - 1$ et pour tout $k \in [1..N_{\text{micro}}]$:

$$\left(\underline{r}_{i,k}^t(s_{\text{ext}}) - \underline{r}_i^{M,t}(s_{\text{ext}}) \right) \cdot \underline{b}_{\alpha,i}^{M,t}(s_{\text{ext}}) = \left(\underline{r}_{i,k}^{t-1}(s_{\text{ext}}) - \underline{r}_i^{M,t-1}(s_{\text{ext}}) \right) \cdot \underline{b}_{\alpha,i}^{M,t-1}(s_{\text{ext}}) \quad (6.30)$$

Condition en moyenne

Cette condition aux limites, écrite pour une abscisse $s_{\text{ext}} = \{0; L\}$ est équivalente à la condition de trajectoire moyenne formulée par l'équation 6.23 :

$$\frac{1}{N_{\text{micro}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \left(\underline{r}_{i,k}^t(s_{\text{ext}}) - \underline{r}_i^{M,t}(s_{\text{ext}}) \right) \cdot \underline{b}_{\alpha,i}^{M,t}(s_{\text{ext}}) = 0 \quad (6.31)$$

Condition de type Neumann

L'objectif du pilotage en effort est de pouvoir transmettre à l'assemblage de fibres la tension réelle à laquelle il est soumis dans le câble. Pour cela, nous utilisons la notion de corps rigide introduite dans le logiciel *Multifil* pour pouvoir appliquer globalement une condition aux limites à un ensemble d'extrémités de fibres. Un corps rigide sert à définir un repère local orthonormé mobile, et est décrit par trois degrés de liberté de translation et trois degrés de liberté de rotation. Pour mieux comprendre le principe, chaque corps rigide peut être assimilé à un trièdre indéformable placé à l'extrémité du paquet de filaments. Les conditions aux limites que l'on souhaite imposer à l'assemblage sont alors appliquées à ce trièdre, et des liaisons sont définies entre lui et les extrémités des fibres constituant l'assemblage, soit point par point, soit en moyenne. Ce mode de pilotage permet d'imposer un effort global à l'ensemble des filaments, alors qu'une condition de Neumann classique s'appliquerait indépendamment sur chaque fibre.

Dans notre approche, nous attachons à chaque paquet local un corps rigide. La force correspondant à la tension longitudinale issue du calcul macroscopique est alors exercée sur ce corps rigide, et nous imposons aux extrémités des fibres de suivre en moyenne le déplacement de celui-ci (voir figure 6.5).

En pratique, la force héritée du calcul macroscopique et imposée à l'échelle locale, notée $\underline{F}^M$, est déterminée par :

$$\begin{aligned}\underline{T}^M &= A^M \underline{\underline{P}}^M \cdot \underline{N}^M \\ &= A^M \underline{\underline{F}}^M \cdot \underline{\underline{S}}^M \cdot \underline{N}^M\end{aligned}$$

où $A^M = \pi R^{M2}$ est l'aire d'une section de macrofibre, $\underline{\underline{P}}^M$ et $\underline{\underline{S}}^M$ sont respectivement le premier et le second tenseurs de Piola Kirchhoff et $\underline{N}^M$ est le vecteur normal à la section de la macrofibre dans la configuration initiale.

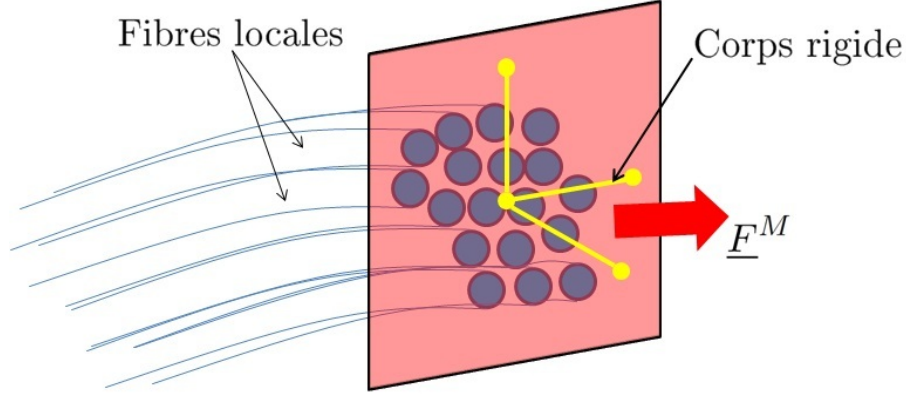


FIGURE 6.5 – Effort imposé sur un corps rigide à l'extrémité d'un paquet de fibres.

Par ailleurs, nous négligeons les termes de cisaillement, ce qui revient à supposer que la macrofibre travaille uniquement en élévation. La force exercée à l'extrémité de la macrofibre s'écrit alors :

$$\underline{T}^M = A^M S_{33}^M \underline{n}^M \quad (6.32)$$

où $\underline{n}^M$ est le vecteur normal à la section de la macrofibre dans la configuration déformée.

Enfin, comme nous l'avons précisé plus tôt, nous avons choisi pour le moment de ne pas prendre en compte les interactions de frottement du paquet de filaments avec son environnement à l'échelle microscopique, ce qui implique que la moyenne de la tension dans les fils est constante dans la longueur. Par contre, les efforts de frottements calculés à l'échelle macroscopique font que la tension fluctue dans la longueur de la macrofibre correspondante. Par conséquent, pour avoir un meilleur accord entre les tensions aux deux échelles et améliorer la précision des calculs microscopiques, la contrainte axiale S_{33} issue du problème macroscopique n'est pas calculée par interpolation au bout du paquet, mais est moyennée sur toute la longueur de la macrofibre.

6.2.3 Formulation continue du problème local

Pour écrire la formulation faible du problème local, nous supposons pour simplifier que les extrémités sont pilotées en déplacement avec les conditions 6.30 ou 6.31. D'après les expressions 6.24, 6.28 et 6.29, en prenant en compte les termes dus à l'énergie interne des fibres et la contribution des interactions du contact frottant développées entre elles, le problème mécanique local de l'équilibre du paquet de fibres se formule finalement sous forme continue comme suit :

Trouver $(\underline{r}_{i,k}, \underline{d}_{\alpha,i,k})_{k \in [1..N_{\text{micro}}]} \in K$, $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$, $\underline{\lambda}_i^M \in \mathbb{R}^2$, $\mu_i^M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (\hat{\underline{r}}_{i,k}, \hat{\underline{d}}_{\alpha,i,k})_{k \in [1..N_{\text{micro}}]} \in K_0, \forall \hat{\beta}_{ij} \in \mathbb{R}, \forall \hat{\underline{\lambda}}_i^M \in \mathbb{R}^2, \forall \hat{\mu}_i^M \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \int_0^L - \left\{ N_{\text{int},i,k}(s) \cdot \hat{\underline{r}}'_{i,k}(s) + G_{\alpha,\text{int},i,k}(s) \cdot \hat{\underline{d}}_{\alpha,i,k}(s) + H_{\alpha,\text{int},i,k}(s) \cdot \hat{\underline{d}}'_{\alpha,i,k}(s) \right\} ds \\ & + \int_0^L \lambda_{\alpha,i}^M(s) \left(\frac{1}{N_{\text{micro}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \hat{\underline{r}}_{i,k}(s) \right) \cdot \underline{b}_{\alpha,i}^M(s) ds + \int_0^L \hat{\lambda}_{\alpha,i}^M(s) \left(\frac{1}{N_{\text{micro}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \underline{r}_{i,k}(s) - \underline{r}_i^M(s) \right) \cdot \underline{b}_{\alpha,i}^M(s) ds \\ & + \int_0^L \hat{\mu}_i^M(s) \frac{1}{N_{\text{micro}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \left(\dot{\underline{r}}_{i,k}(s) - \dot{\underline{r}}_i^M(s) - \theta^M R(\underline{r}_{i,k}) \underline{e}_{\theta}(\underline{r}_{i,k}(s)) \right) \cdot \underline{e}_{\theta}(\underline{r}_{i,k}(s)) \\ & + \int_0^L \mu_i^M(s) \left(\frac{1}{N_{\text{micro}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \hat{\underline{r}}_{i,k}(s) \cdot \underline{e}_{\theta}(\underline{r}_{i,k}(s)) \right) ds + \sum_{\text{contacts } (k,l)} \int_{\Gamma_{\text{cnt}}^{kl}} F_{kl}^N \hat{\underline{g}}_{kl}^N + \underline{F}_{kl}^T \cdot \hat{\underline{g}}_{kl}^T d\Gamma \\ & + \sum_{j \text{ voisin de } i} \int_{\Gamma_{\text{cnt}}^{ij}} F_{ij}^N \hat{\beta}_{ij}(s) + \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} F_{ij,k}^{\text{cnt}} \left(\hat{\underline{r}}_{i,k}(s) \cdot \underline{n}_{ij} - \hat{\beta}_{ij}(s) \right) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (6.33)$$

6.2.4 Équations d'équilibre et interprétations

La première équation d'équilibre, qui se déduit du terme en $\hat{\beta}_{ij}$ dans la formulation faible 6.33, décrit le fait que les efforts exercés par les fibres sur chaque surface Γ_{cnt}^{ij} équilibrent la force de contact issue de l'échelle macroscopique :

$$\forall s \in \Gamma_{\text{cnt}}^{ij}, \quad \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} F_{ij,k}^{\text{cnt}} = F_{ij}^N$$

Après une intégration par partie des termes de l'énergie interne des fibres, le terme en $\hat{\underline{r}}_{i,k}$ fournit l'équation d'équilibre en efforts de chaque filament :

$$\forall s \in [0, L], \quad \underline{N}'_{\text{int},i,k} + \frac{1}{N_{\text{micro}}} \lambda_{\alpha,i}^M \underline{b}_{\alpha,i}^M + \frac{1}{N_{\text{micro}}} \mu_i^M \underline{e}_{\theta}(\underline{r}_{i,k}) + \sum_{l \text{ voisin de } k} \underline{F}_{kl} + \sum_{j \text{ voisin de } i} F_{ij,k}^{\text{cnt}} \underline{n}_{ij} = \underline{0}$$

Pour simplifier l'interprétation des équations, nous considérons un champ virtuel macroscopique respectant l'hypothèse de Timoshenko, qui s'écrit sous la forme : (cf partie 6.1.6)

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{S}, \forall s \in [0, L], \quad \hat{\underline{x}}_i^M(\xi_1, \xi_2, s) = \hat{\underline{r}}_i^M(s) + \hat{\underline{\omega}}_i^M(s) \wedge (\underline{x}_i^M(\xi_1, \xi_2, s) - \underline{r}_i^M(s))$$

Nous nous intéressons alors au cas particulier où les fibres à l'échelle locale suivent le même mouvement virtuel qu'à l'échelle macroscopique, ce qui s'écrit :

$$\forall k \in [1..N_{\text{micro}}], \forall s \in [0, L], \quad \hat{\underline{r}}_{i,k}(s) = \hat{\underline{r}}_i^M(s) + \hat{\underline{\omega}}_i^M(s) \wedge \underbrace{(\underline{r}_{i,k}(s) - \underline{r}_i^M(s))}_{R(\underline{r}_{i,k}(s)) \underline{e}_r(\theta(\underline{r}_{i,k}(s)))} \quad (6.34)$$

En injectant cette expression du mouvement virtuel dans la formulation du problème 6.33, on en déduit que les équations d'Euler-Lagrange correspondant aux équations d'équilibre des efforts et des moments sur le paquet à l'échelle microscopique s'écrivent alors pour toute abscisse curviligne $s \in [0, L]$:

$$\sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \underline{N}'_{\text{int},i,k} + \lambda_{\alpha,i}^M \underline{b}_{\alpha,i}^M + \mu_i^M \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \underline{e}_{\theta}(\theta(\underline{r}_{i,k})) + \sum_{j \text{ voisin de } i} F_{ij}^N \underline{n}_{ij} = \underline{0} \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \left[R(\underline{r}_{i,k}) \underline{e}_r(\theta(\underline{r}_{i,k})) \wedge \underline{N}'_{int,i,k} \right] + \lambda_{\alpha,i}^M \left[\frac{1}{N_{\text{micro}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} R(\underline{r}_{i,k}) \underline{e}_r(\theta(\underline{r}_{i,k})) \wedge \underline{b}_{\alpha,i}^M \right] \\
& + \mu_i^M \left[\frac{1}{N_{\text{micro}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} R(\underline{r}_{i,k}) \underline{b}_{3,i}^M \right] + \sum_{j=1}^{N_{\text{Macro}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} F_{ij,k}^{cnt} R(\underline{r}_{i,k}) \underline{e}_r(\theta(\underline{r}_{i,k})) \wedge \underline{n}_{ij} = \underline{0}
\end{aligned} \tag{6.36}$$

6.2.5 Discrétisation en temps

Le problème temporel 6.33 est résolu de manière incrémentale en discrétisant le temps en N intervalles :

$$[0, T] = \bigcup_{n=1}^N [t_n, t_{n+1}]$$

La résolution du problème mécanique est réalisée à chaque incrément dans un cadre quasi-statique, donc la dimension temporelle n'y intervient pas. Cependant dans la formulation continue du problème d'équilibre local, deux termes font intervenir une dérivée en temps : les termes liés au frottement entre les fibres locales, et les termes associés à la condition de rotation moyenne imposée au paquet de fibres. Nous allons alors construire dans ce qui suit la formulation incrémentale de ces termes pour construire un problème mécanique cohérent.

En ce qui concerne la modélisation du frottement entre les fibres, nous utilisons un modèle de frottement régularisé formulé d'une manière incrémentale, comme cela a été présenté dans la section 3.2.5, tel que la partie réversible (élastique) du déplacement relatif soit transmise d'une étape à une autre.

Dans ce qui suit, nous nous focalisons alors sur la formulation incrémentale de la condition de rotation moyenne, dont la forme continue est donnée par l'équation 6.27. Pour cela, à chaque incrément n , nous approchons la vitesse du point de la ligne moyenne de la macrofibre $\underline{r}_i^M$ et du point situé sur la k^{eme} fibre $\underline{r}_{i,k}$ par différence finie de la manière suivante :

$$\forall s \in [0; L], \quad \begin{cases} \dot{\underline{r}}_i^M(s, t_n) \approx \frac{1}{\Delta t} \left(\underline{r}_i^{M,n}(s) - \underline{r}_i^{M,n-1}(s) \right) \\ \dot{\underline{r}}_{i,k}(s, t_n) \approx \frac{1}{\Delta t} \left(\underline{r}_{i,k}^n(s) - \underline{r}_{i,k}^{n-1}(s) \right) \end{cases} \tag{6.37}$$

Il nous reste alors à discrétiser en temps le terme $\theta^M R(\underline{r}_{i,k})$ intervenant dans l'équation 6.27. Pour cela, nous commençons par le réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\theta^M R(\underline{r}_{i,k}) &= \theta^M \underline{e}_r(\underline{r}_{i,k}^n) \cdot \left(\underline{r}_{i,k}^n(s) - \underline{r}_i^{M,n}(s) \right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\underline{e}_\theta \right) \cdot \left(\underline{r}_{i,k}^n(s) - \underline{r}_i^{M,n}(s) \right)
\end{aligned}$$

puis nous approchons la dérivée $\frac{\partial}{\partial t} \left(\underline{e}_\theta \right)$ de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\underline{e}_\theta \right) \approx \frac{1}{\Delta t} \left[\underline{e}_\theta \left(\theta \left(\underline{r}_{i,k}^{n-1} \right) + \Delta \theta^M \right) - \underline{e}_\theta \left(\underline{r}_{i,k}^{n-1}(s) \right) \right]$$

où $\Delta \theta^M$ désigne l'incrément de rotation de la section de macrofibre autours de $\underline{b}_{3,i}^M$ entre les étapes $n-1$ et n .

En injectant les expressions précédentes dans l'équation 6.27, la condition s'écrit alors :

$$\frac{1}{N_{\text{micro}}} \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \left[\left(\left(\underline{r}_{i,k}^n(s) - \underline{r}_{i,k}^{n-1}(s) \right) - \left(\underline{r}_i^{M,n}(s) - \underline{r}_i^{M,n-1}(s) \right) \right) \cdot \underline{e}_\theta \left(\underline{r}_{i,k}^{n-1}(s) \right) \right. \\ \left. + \left(\underline{r}_{i,k}^n(s) - \underline{r}_i^{M,n}(s) \right) \cdot \left(\underline{e}_\theta \left(\theta \left(\underline{r}_{i,k}^{n-1} \right) + \Delta\theta^M \right) - \underline{e}_\theta \left(\underline{r}_{i,k}^{n-1}(s) \right) \right) \right] = 0$$

Soit après simplification :

$$\frac{1}{N_{\text{micro}}} \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \left[- \left(\underline{r}_{i,k}^{n-1}(s) - \underline{r}_i^{M,n-1}(s) \right) \cdot \underline{e}_\theta \left(\underline{r}_{i,k}^{n-1}(s) \right) + \left(\underline{r}_{i,k}^n(s) - \underline{r}_i^{M,n}(s) \right) \cdot \underline{e}_\theta \left(\theta \left(\underline{r}_{i,k}^{n-1} \right) + \Delta\theta^M \right) \right] = 0$$

De plus, par construction du vecteur orthoradial, on peut remarquer la relation suivante :

$$\left(\underline{r}_i^{M,n-1} - \underline{r}_{i,k}^{n-1} \right) \cdot \underline{e}_\theta \left(\underline{r}_{i,k}^{n-1} \right) = 0$$

Finalement, la condition d'imposition en moyenne de la rotation de la macrofibre au paquet de fibres à l'échelle locale s'écrit sous la forme discrète suivante :

$$\frac{1}{N_{\text{micro}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} \left(\underline{r}_{i,k}^n(s) - \underline{r}_i^{M,n}(s) \right) \cdot \underline{e}_\theta \left(\theta \left(\underline{r}_{i,k}^{n-1} \right) + \Delta\theta^M \right) = 0 \quad (6.38)$$

6.3 Discrétisation et résolution

6.3.1 Discrétisation en espace

La résolution numérique du problème nécessite une discrétisation en espace de la géométrie, ce qui soulève trois questions :

- Comment discrétiser les fibres et les macrofibres à chacune des échelles ?
- Comment discrétiser les surfaces entourant le paquet de filaments à l'échelle locale ?
- Comment discrétiser les contraintes moyennes imposées dans la longueur du paquet de filaments ?

Discrétisation des fils et des macrofibres

La résolution numérique des problèmes aux deux échelles macroscopique et microscopique est réalisée par la méthode des éléments finis, qui a été présentée dans la section 2.4.1 de ce rapport. Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 2, les éléments finis considérés sont des éléments quadratiques pour limiter les phénomènes de verrouillage numérique (cf. partie 2.4.2). Nous noterons que la discrétisation en éléments finis des lignes moyennes des fibres à l'échelle locale et des macrofibres est indépendante. Nous désignerons alors par NN^M et NN le nombre de nœuds respectivement le long d'une macrofibre et d'une fibre locale discrétisées.

Discrétisation des surfaces

A l'échelle locale, les surfaces entourant le paquet de fibres sont discrétisées en un certain nombre de facettes. Pour cela, nous nous basons sur la discrétisation de la ligne intermédiaire utilisée pour gérer le contact entre les macrofibres à l'échelle macroscopique, car les réactions de contact macro à imposer à l'échelle locale sont connues en ces points discrets. Nous rappelons que la construction de ces lignes intermédiaires a été présentée dans la section 3.2.2 de ce manuscrit.

Pour chaque point de cette ligne intermédiaire qui a un état de contact actif, l'idée consiste alors à définir une facette plane ayant comme normale le vecteur normal du contact évalué en ce point

(voir image 6.6). La longueur de la facette dans direction longitudinale est prise égale à la distance de discrétisation entre points tests du contact macroscopique. Par contre, sa largeur dans la direction transverse est indépendante de la discrétisation de cette ligne intermédiaire, et doit être suffisante pour garantir de ne pas rater le contact avec certains filaments. Elle sera donc choisie de sorte à être plus large que le rayon moyen du paquet.

La force à appliquer sur chaque facette correspond alors simplement à la réaction normale du contact calculée à l'issue du calcul macroscopique au point discret correspondant, à laquelle nous avons accès pour chaque incrément de chargement.

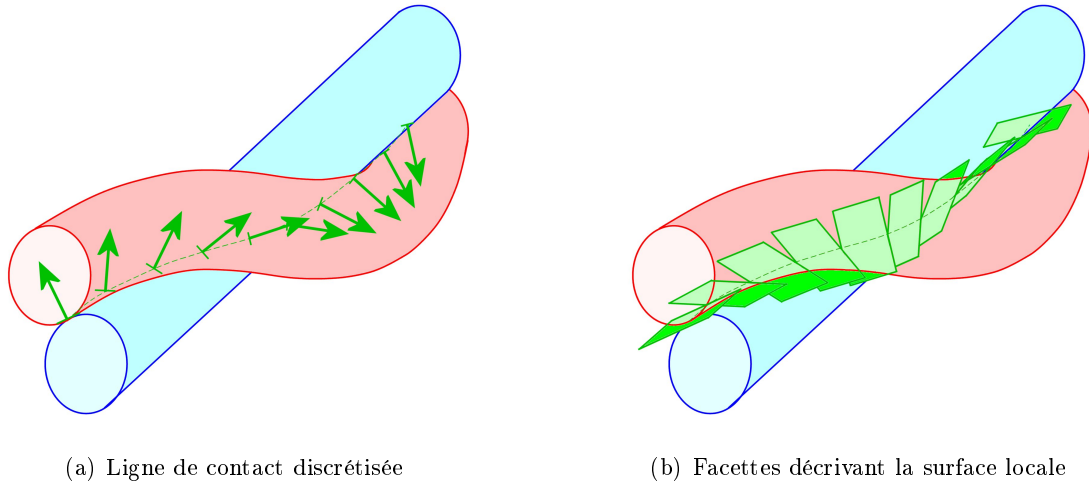


FIGURE 6.6 – Approximation par des facettes de la surface séparant deux cellules locales.

Imposition des conditions de pilotage à l'échelle locale

Les conditions de pilotage imposées à l'échelle locale ne peuvent pas être respectées de manière exacte partout dans la longueur du paquet de filaments. En effet, les fibres discrétisées en éléments finis ont un nombre de degrés de liberté limité, et ne sont pas suffisamment riches pour satisfaire une telle contrainte.

Par conséquent, nous avons choisi d'imposer les conditions de trajectoire moyenne et de rotation moyenne au paquet de fibres uniquement en un certain nombre de points discrets. Pour cela, nous proposons d'imposer ces deux conditions avec une discrétisation indépendante de la discrétisation éléments finis des fibres locales. Le fait de découpler la discrétisation des structures modélisées et celle des conditions géométriques procure une souplesse au pilotage du problème local et permet d'éviter l'apparition de modes de déformation purement numériques.

Pour ce faire, la trajectoire de la ligne moyenne macroscopique est approchée par des splines cubiques, qui permettent de lisser la solution macroscopique et d'assurer sa continuité C_2 . Par ailleurs, en fonction du choix du pas de discrétisation choisi pour les fils, un certain nombre $N_{control}$ de plans orthogonaux à cette ligne lissée sont créés, que nous appellerons des "plans de contrôle". En pratique, nous avons choisi de prendre un nombre de plans de contrôle $N_{control}$ égal à $\frac{1}{2}(NN - 3)$, ce qui permet de :

- ne pas sur-contraindre le problème local ;
- respecter la trajectoire de la macrofibre de manière suffisante ;
- éviter de déclencher des oscillations non physiques des filaments.

Au niveau de chacun de ces plan, les conditions formulées par les équations 6.23 et 6.38 sont alors imposées en calculant l'intersection des lignes moyennes des fibres constituant le paquet local avec ce plan (voir figure 6.7).

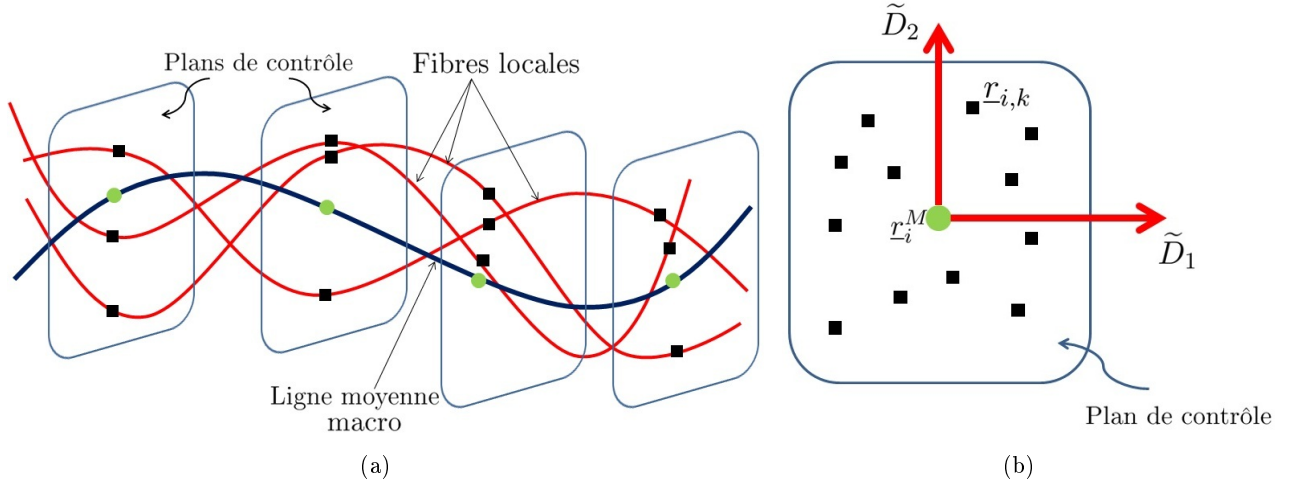


FIGURE 6.7 – Méthode d'imposition des quantités macroscopiques à l'échelle locale.

6.3.2 Algorithme de résolution

La résolution multi-échelles du problème mécanique se fait en trois étapes :

1. Résoudre le problème macroscopique pour tous les incréments de chargement ;
2. Sélectionner la/les macrofibre(s) à l'intérieur desquelles des zones critiques sont identifiées ;
3. Résoudre le(s) problème(s) microscopique(s) correspondant(s) pour tous les incréments de chargement, en utilisant les résultats macroscopiques déjà calculés.

A l'échelle macroscopique, l'algorithme de résolution utilisé à chaque incrément de chargement est équivalent à l'algorithme 1, qui a été décrit en détails dans la section 3.2.6. A l'issue de cette résolution, les résultats obtenus par le calcul macroscopique nous fournissent :

- les vecteurs positions $\underline{r}_i^M$ et les vecteurs directeurs des sections $\underline{d}_{\alpha,i}^M$ pour tous les nœuds des macrofibres ;
- la tension $\underline{T}_i^M$ pour tous les noeuds des macrofibres ;
- les coordonnées $\frac{1}{2} (\underline{r}_i^M + \underline{r}_j^M)$ des points définissant les lignes intermédiaires de contact entre macrofibres ;
- le vecteur normal du contact $\underline{n}_{ij}$ et la valeur de la réaction normale F_{ij}^N pour tous les points des lignes intermédiaires.

Une fois que les macrofibres "critiques" ont été identifiées selon un critère (en se basant par exemple sur les valeurs de tension dans les macrofibres), il est nécessaire de résoudre un problème microscopique dans chacune d'entre elles pour le même nombre d'incrément de chargement qu'à l'échelle macroscopique.

La principale particularité de l'algorithme de résolution à l'échelle microscopique consiste à construire pour chaque étape les plans qui délimitent le paquet. En effet, le nombre de ces plans est variable d'une étape à une autre, donc leur position doit être réinitialisée au début de chaque incrément. Par ailleurs, la mise en oeuvre numérique du problème à l'échelle locale a soulevé quelques

difficultés numériques similaires à celles rencontrées lors de la résolution numérique du problème simplifié bidimensionnel (cf. section 5.2.4) :

1. La particularité des plans est qu'ils n'ont pas de rigidité qui leur est associée, ce qui implique que le problème mécanique est alors mal posé en cas d'absence d'au moins un disque en contact avec le plan. Pour contourner ce problème, présent en particulier au début de l'incrément de chargement, l'idée consiste à amener les plans en contact affleurant avec la fibre la plus proche ;
2. les fibres risquent de subir de très grands déplacements pendant les premières itérations de la résolution, pouvant provoquer de fortes interpénétrations avec les autres disques et ainsi engendrer une configuration trop éloignée d'un équilibre pour permettre à l'algorithme de converger.

Ces grands déplacements ont deux causes possibles :

- dans le cas où une force de contact macroscopique très importante est appliquée sur un plan initialement en contact avec un nombre réduit de fibres, alors ceux-ci risquent de subir un très grand déplacement ;
- le rapport de dimensions entre les deux échelles est très grand, donc un déplacement macroscopique de l'ordre du rayon d'une macrofibre est très grand par rapport aux filaments locaux et induit des grands déplacements à l'échelle locale.

Pour améliorer la convergence dans ce genre de situations, nous proposons de borner la norme de l'incrément de déplacement des fibres locales à chaque itération.

Finalement, la méthode de résolution utilisée à l'échelle microscopique est résumée sur l'algorithme 8.

Données : Déplacements microscopiques précédents $\underline{U}_{micro}^{n-1}$

Données : Quantités macroscopiques $\underline{U}_{Macro}^{n-1}$ et $\underline{U}_{Macro}^n$

Calcul des conditions aux limites héritées de l'échelle macroscopique ;

Construction des plans en se basant sur les lignes intermédiaires du calcul macroscopique ;

Initialisation des plans en contact affleurant avec les fils ;

Boucle sur les points de contacts

Calculer les zones de proximité entre fils ;

Discrétiser les lignes intermédiaires ;

Construire les points de contact ;

Calcul de l'intersection des fibres avec les plans de contrôle ;

Boucle sur les normales de contact

Calculer les normales de contact ;

Méthode de Newton à points de contact et normales fixés :

Tant que $norme(\underline{R}) > R_{tol}$ **et** $norme(\delta \underline{U}) > R_{tol}$

Calculer le résidu $\underline{R}$;

Calculer la matrice tangente $\underline{K} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{U}}$;

Résoudre le système $\underline{K} \cdot \delta \underline{U} = -\underline{R}$;

Calcul du pas d'avancement $\alpha = \min \left(1; \min_k \left\{ \frac{R_k}{\|\delta \underline{u}_k\|} \right\} \right)$;

Incrémentation des déplacements microscopiques : $\underline{U}_{micro} = \underline{U}_{micro} + \alpha \delta \underline{U}$ **fin**

Ajuster les coefficients de pénalisation pour chaque zone de proximité ;

fin

fin

Résultat : Déplacements microscopiques $\underline{U}_{micro}^n$

Algorithme 8 : Algorithme de résolution utilisé à l'échelle microscopique pour chaque incrément de chargement (en bleu : parties spécifiques à la résolution microscopique).

6.3.3 Application sur un exemple simple

Description de la géométrie

Pour appliquer la méthodologie d'héritage entre les deux échelles et les problématiques liées à la gestion des plans dans un cadre de grands déplacements, nous proposons de la mettre en œuvre sur un cas de forte torsion d'une mèche, composée d'un assemblage de 1300 filaments. Toutes les fibres ont un rayon identique de $7.5\mu m$, mesurent $10mm$ de longueur et sont constitués d'un même matériau, dont le comportement est supposé élastique et modélisé par une loi de Hooke isotrope décrite par les paramètres suivants :

- Module d'Young de l'aramide : 72000 MPa ;
- Coefficient de poisson : 0.3.

A l'échelle macroscopique, cette mèche est modélisée comme un assemblage de 26 macrofibres, dont chacune représente un paquet de 50 filaments. En considérant un taux de vide de 0.1 dans chaque macrofibre et pour conserver la section nominale de la mèche réelle, les macrofibres sont modélisées par des poutres de rayon à $0.0559mm$ (d'après l'expression 6.2). De plus, et comme nous l'avons décrit dans la section 6.1.3, leur comportement élastique est supposé linéaire et orthotrope, caractérisé par :

- un module d'Young égale à 64800 MPa déterminé à partir de la relation 6.4 ;
- un coefficient de poisson de 0.3 ;
- un coefficient de réduction de la rigidité en flexion égale à 0.018 d'après l'équation 6.8.

Aux deux échelles d'étude, les structures élémentaires sont liées entre elles par des interactions de contact-frottant. Pour les efforts d'interaction de frottement dans les directions tangentielles, un modèle de frottement de Coulomb régularisé est utilisé (cf section 3.1.2), dans lequel le coefficient de frottement est pris égal à 0.2 à l'échelle microscopique et 0.1 à l'échelle macroscopique. Par ailleurs, comme nous l'avons expliqué dans le principe de l'approche proposée, la particularité de la modélisation du contact à l'échelle macroscopique est d'autoriser des interpénétrations entre les macrofibres selon la loi de contact décrit par la courbe 6.2, de manière à prendre en compte les effets de densification locale. Pour ce cas d'application, nous choisissons les valeurs suivantes pour les paramètres de la loi de contact :

- le seuil S_1 est calculé selon l'expression 6.13, et donc égal dans notre cas à 0.0057 mm ;
- le seuil S_2 est égal dans notre cas à 0.0107 mm d'après l'expression 6.14 ;
- Le paramètre ε correspondant à la profondeur de régularisation est pris égal à 10^{-4} ;
- Le coefficient de pénalisation κ_1 est choisi égal à 1.

Simulation de la torsion aux deux échelles

A l'échelle macroscopique, un mouvement de rotation opposé est imposé aux extrémités de l'ensemble des macrofibres (cf figure 6.8). Une rotation de 540° est ainsi appliquée à chaque extrémité en 60 incréments.

Une fois la résolution macroscopique effectuée, les simulations à l'échelle microscopique sont réalisées sur un paquet de filaments qui correspond à une macrofibre sélectionnée (voir figure 6.9). La résolution du problème microscopique est faite selon l'algorithme 8.

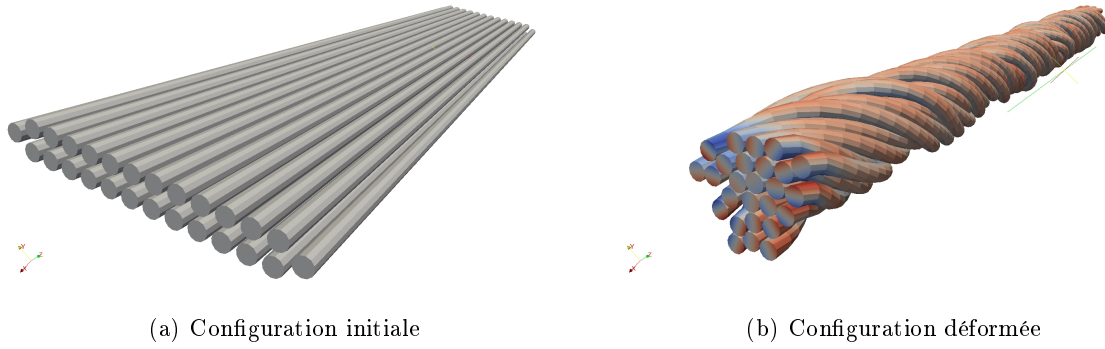


FIGURE 6.8 – Simulation à l'échelle macroscopique de la torsion d'une mèche composée de 26 macro-fibres.

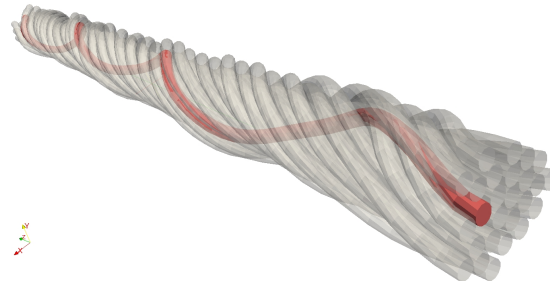


FIGURE 6.9 – Sélection de la macrofibre sur laquelle une étude locale est réalisée.

Nous présentons sur la figure 6.10 la déformée du paquet de filaments à l'échelle microscopique à la fin de la torsion de la mèche. Les résultats obtenus sur ces simulations aux deux échelles illustrent les possibilités de l'approche proposée. Ainsi, comme on peut le voir sur la figure, cet exemple montre la bonne robustesse des simulations réalisées aux deux échelles, même en présence de grandes déformations. Par ailleurs, on observe que notre méthode multi-échelles permet de calculer une configuration d'équilibre présentant un grand nombre d'enchevêtrements (voir figure 6.11, ce qui se rapproche des observations sur une mèche en textile réelle(cf figure 6.11)).

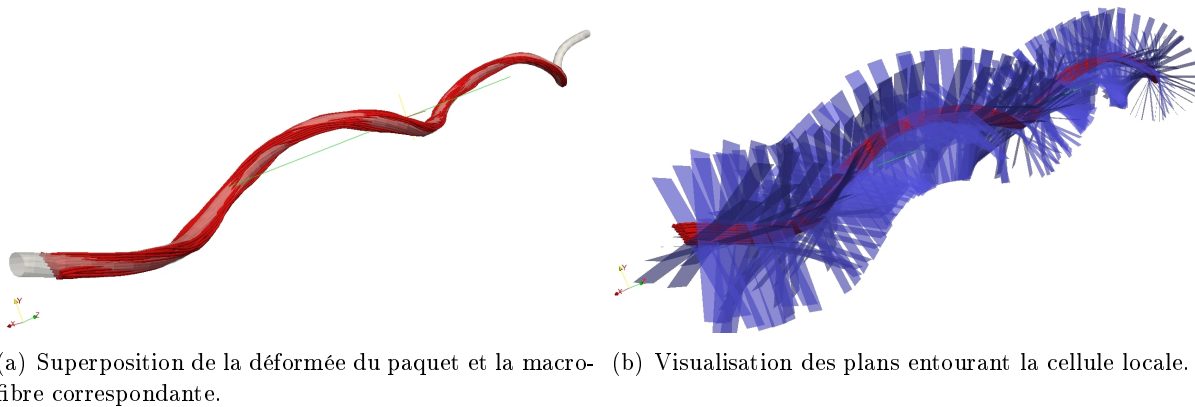


FIGURE 6.10 – Résultat de la simulation à l'échelle microscopique de la torsion d'un paquet de filaments.

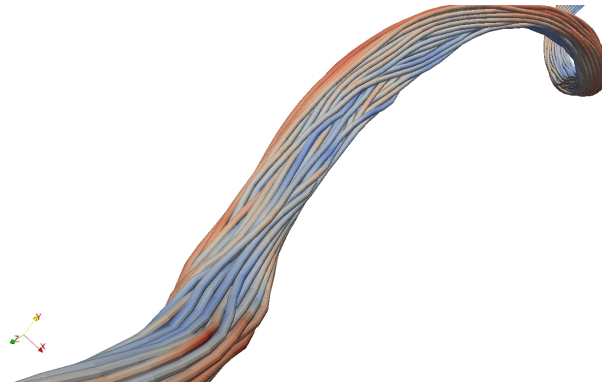


FIGURE 6.11 – Enchevêtrement de filaments à l'échelle locale.

Enfin, on peut visualiser sur la figure 6.12 que des migrations importantes de filaments se produisent dans le paquet de filaments à l'échelle locale. En effet, on peut observer en se référant aux couleurs que les fibres ne gardent pas leurs voisins au cours du chargement. Ce phénomène est très intéressant, puisqu'il avait été observé expérimentalement dans le chapitre 4 de ce rapport.

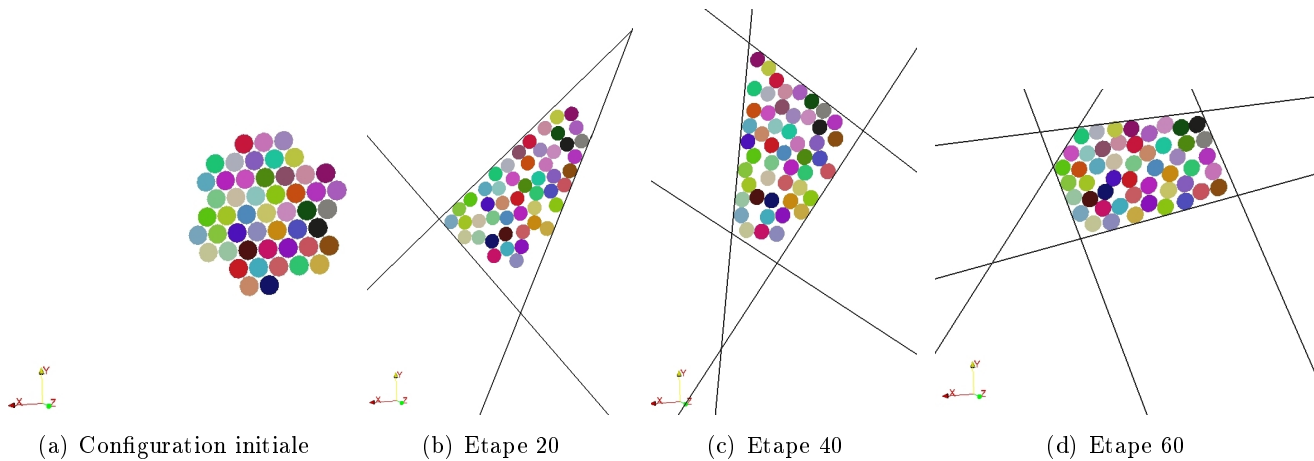


FIGURE 6.12 – Mise en évidence du phénomène de migration sur une coupe transverse du paquet de filaments.

Finalement, les résultats présentés sur ce cas simple montrent le potentiel de la méthode développée comme un moyen d'exploration du comportement local d'un assemblage à grand nombre de fibres.

6.4 Application sur un câblé textile réel

6.4.1 Présentation de la géométrie et du chargement imposé

Afin de mettre en évidence l'apport de notre modélisation multi-échelles, nous l'appliquons ici sur un câblé textile réel. Nous considérons un câble hybride constitué de trois brins et composé de deux types de matériaux : deux brins en aramide et un brin en nylon. Les brins d'aramide sont constitués chacun d'un assemblage de 1300 fibres, alors que celui en nylon en comporte environ 700, soit de l'ordre de 3300 filaments au total. Tous les filaments ont un rayon de $7,5\mu m$, une longueur de $13.3mm$, et leur comportement est modélisé selon une loi de Hooke isotrope caractérisée par :

- un module d'Young de 72000 MPa pour l'aramide et 3000 MPa pour le nylon ;
- un coefficient de poisson de 0.3.

A l'échelle macroscopique, le câble est modélisé comme un assemblage de 66 macrofibres, tel que chaque macrofibre représente un groupe de 50 fibres. En considérant un taux de vide de 0.1 dans chaque macrofibre et pour conserver la section nominale de la mèche réelle, les macrofibres sont modélisées par des poutres de rayon à 0.0559mm (d'après l'expression 6.2). Par ailleurs, comme nous l'avons décrit précédemment, le comportement des macrofibres est approché par un comportement élastique orthotrope caractérisé par :

- un module d'Young égale à 64800 MPa déterminé à partir de la relation 6.4 ;
- un coefficient de poisson de 0.3 ;
- un coefficient de réduction de la rigidité en flexion égale à 0.018 d'après l'équation 6.8.

Aux deux échelles d'étude, le frottement est géré par une loi de Coulomb régularisée dans laquelle le coefficient de frottement est pris égal à 0.2. Par ailleurs, nous choisissons les valeurs suivantes pour les paramètres de la loi de contact macroscopique :

- le seuil S_1 est calculé selon l'expression 6.13, et donc égal dans notre cas à 0.0057 mm ;
- le seuil S_2 est égal dans notre cas à 0.0107 mm d'après l'expression 6.14 ;
- Le paramètre ε correspondant à la profondeur de régularisation est pris égal à 10^{-4} ;
- Le coefficient de pénalisation κ_1 est choisi égal à 1.

Sur cette géométrie, nous réalisons un essai de traction à l'échelle macroscopique en imposant d'une manière incrémentale un déplacement aux extrémités des macrofibres. Plus précisément, un déplacement de 1.2 mm est imposé dans la direction axiale en 60 incréments, ce qui correspond à un allongement du câble de 9%. La force héritée de ce calcul macroscopique est par la suite imposée au paquet de filaments à l'échelle microscopique selon le mode de pilotage en effort décrit dans la sous-section 6.2.2. Ce passage de l'échelle macroscopique à l'échelle microscopique est réalisé au niveau de quelques macrofibres dont nous cherchons à étudier l'état de sollicitation local.

6.4.2 Simulation de la traction aux deux échelles

Nous présentons sur la figure 6.13 une visualisation de l'essai de traction réalisé à l'échelle macroscopique sur le câble composé de macrofibres. On peut remarquer que les contraintes sont très faibles dans le brin composé de fils en nylon, ce qui est logique puisque l'aramide est beaucoup plus rigide.

Comme nous l'avons déjà expliqué, une fois que la simulation est réalisée à l'échelle macroscopique, nous choisissons une macrofibre pour laquelle nous cherchons à étudier l'état de sollicitation locale à l'échelle des filaments (cf figure 6.14). En d'autres termes, nous souhaitons effectuer un "zoom" sur le paquet de filaments correspondant à cette macrofibre, afin d'y analyser localement les concentrations de contraintes.

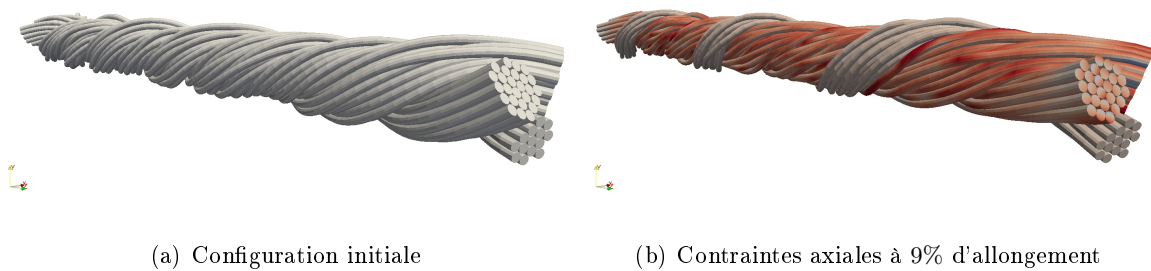


FIGURE 6.13 – Simulation de la traction d'un câble hybride à l'échelle macroscopique.

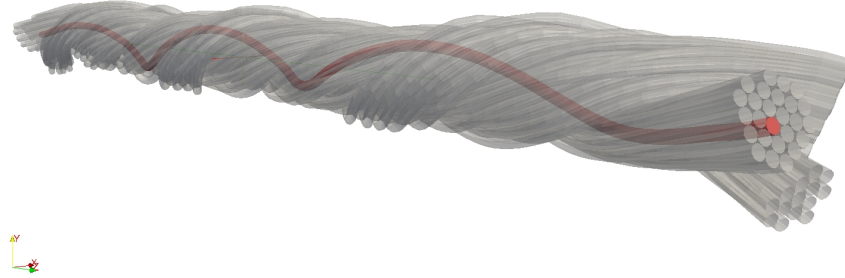


FIGURE 6.14 – Choix d’une macrofibre pour une analyse locale.

Nous présentons sur la figure 6.15 le résultat du calcul de traction réalisé à l’échelle microscopique sur le paquet de filaments associé à la macrofibre sélectionnée. Afin d’améliorer la visibilité de la déformée, nous avons choisi de ne pas afficher les plans délimitant le paquet de filaments sur cette figure. On peut remarquer sur ces images que les contraintes locales sont relativement lisses lorsque l’élongation restent modérée, mais que des localisations de contraintes se forment au niveau des zones d’enchevêtrement lorsque l’élongation devient plus importante.

6.4.3 Application à la prédiction de l’endommagement

Comme nous l’avons expliqué dans le chapitre d’introduction, l’enjeu principal de cette thèse est de caractériser les contraintes à l’échelle des filaments afin d’étudier les phénomènes d’endommagement au sein du câble. L’objectif de cette sous-section est alors de montrer l’apport des calculs locaux par rapport à la simulation purement macroscopique. Pour cela, nous allons étudier la distribution statistique des contraintes aux deux échelles. Dans ce qui suit, on va étudier dans un premier temps des sollicitations en extension car la compression semble plus compliquée à mettre en œuvre. Nous allons donc focaliser notre analyse sur les contraintes axiales dans les filaments. Ça serait intéressant d’étendre l’étude à d’autres sollicitations.

Postraitement de la contrainte axiale dans la section de la macrofibre

Nous commençons par décrire la méthode de calcul de la distribution de contrainte axiale au sein de la macrofibre sélectionnée. A l’issue du calcul macroscopique, la valeur de la tension T , qui correspond à la composante de la contrainte S_{33} du second tenseur de Piola-Kirchhoff, est évaluée pour chaque nœud sur la ligne moyenne du maillage élément finis sous la forme : (points verts sur la figure 6.16)

- une contrainte axiale au centre de la section que l’on note T_0 ;
- 8 contraintes réparties sur la circonférence de la section pour 8 différentes angles notées $T_{\text{peri}}(\theta_i)_{i=1,8}$, en prenant en compte l’effet de la réduction de la rigidité de flexion introduit dans le comportement de la macrofibre (cf section 6.1.3)..

Pour décrire la distribution statistique de contraintes dans la section de la macrofibre, nous découpons celle-ci en secteurs comme représenté sur la figure 6.16 :

En supposant que la variation de la contrainte axiale est linéaire dans la section, nous cherchons alors à reconstruire les contraintes axiales dans les différents secteurs de chaque section à partir de ces 9 contraintes. Pour cela, la contrainte axiale en un point de la section de la macrofibre identifié par

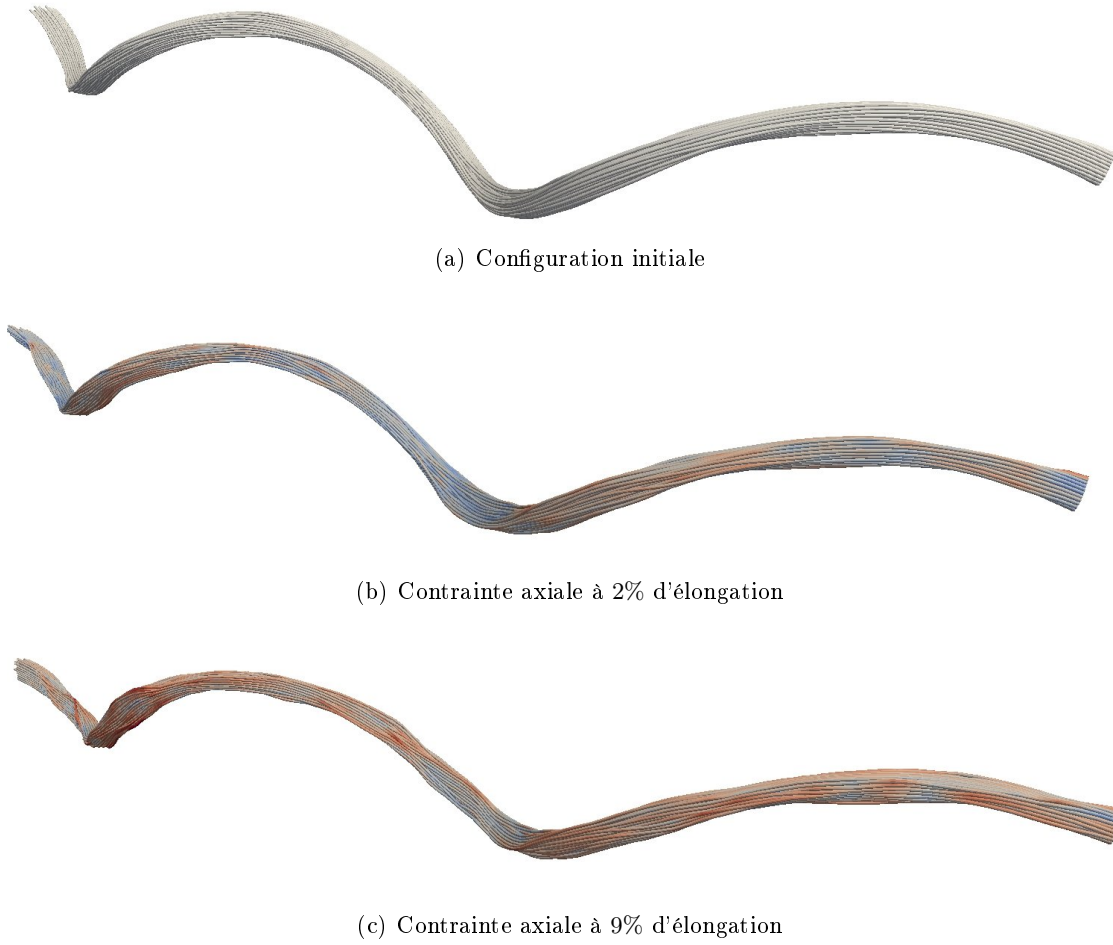


FIGURE 6.15 – Simulation de la traction à l'échelle microscopique sur le paquet de filaments associé à la marofibre choisie.

(ρ, θ_i) (voir figure 6.16), est déterminée par interpolation linéaire comme suit :

$$T(\rho, \theta_i) = T_0 + \frac{\rho}{R^M} (T_{\text{peri}}(\theta_i) - T_0)$$

où nous rappelons que R^M désigne le rayon de la macrofibre. Par ailleurs, nous associons un poids noté $\omega(\rho, \theta_i)$ à chacune de ces valeurs $T(\rho, \theta_i)$, correspondant à l'aire du secteur angulaire correspondant.

Par ailleurs, afin de se ramener à des quantités comparables entre les deux échelles, la tension calculée à l'échelle macroscopique doit prendre compte le taux de vide α dans la macrofibre, donné par l'expression 6.1.

Considérons le cas particulier où la macrofibres et les filaments locaux sont rectilignes. Dans ce cas, la contrainte axiale est homogène dans le paquet de filaments, de valeur S_{33}^{mic} , et l'équilibre local sous la force macroscopique 6.32 imposée aux extrémités implique la relation suivante :

$$A^M S_{33}^M = \sum_{k=1}^{N_{\text{micro}}} A S_{33}^{\text{mic}}$$

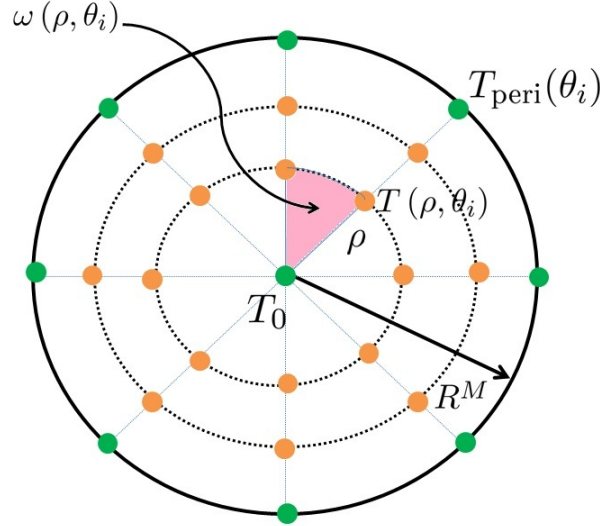


FIGURE 6.16 – Interpolation de la contrainte axiale dans la section de la macrofibre

On en déduit alors la relation suivante entre les contraintes axiales aux deux échelles pour ce cas particulier :

$$\begin{aligned} S_{33}^{mic} &= \frac{A^M}{N_{\text{micro}} A} S_{33}^M \\ &= \frac{1}{(1 - \alpha)} S_{33}^M \end{aligned}$$

Ainsi, dans la suite de cette section, nous choisissons de post-traiter la distribution de la contrainte axiale dans la macrofibre divisée par la valeur de densité des filaments du paquet qu'elle représente.

Finalement, ces choix nous permettent de tracer sur la figure 6.17 l'histogramme de la contrainte axiale dans la macrofibre sélectionnée à l'issue du test de traction.

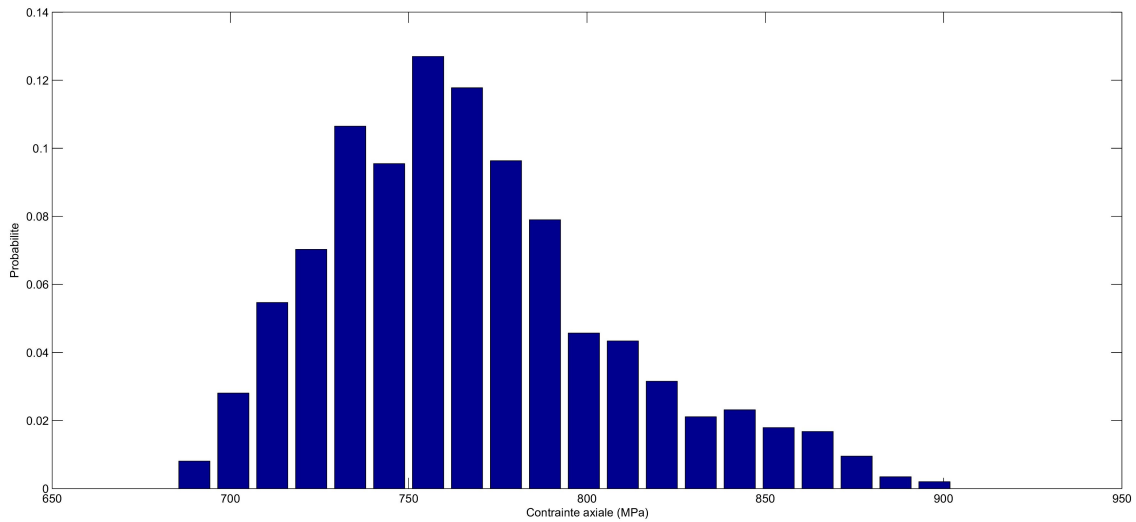


FIGURE 6.17 – Histogramme de la distribution de la contrainte axiale dans la macrofibre.

Comparaisons de la distribution des tensions aux deux échelles

Nous cherchons maintenant à étudier la distribution des contraintes locales au sein du paquet de filaments, afin de mettre en évidence l'apport de la descente à l'échelle microscopique. Étant donné

que seul le comportement en élongation nous intéresse à l'échelle des fils unitaires, cette distribution des contraintes est construite à partir des contraintes aux centres des filaments. Nous présentons le résultat sur la figure 6.18.

A partir de ces résultats, on peut vérifier la bonne cohérence des résultats microscopiques avec les résultats macroscopiques, puisque la moyenne des contraintes axiales est très proche entre les deux échelles (environ 750 MPa). Par ailleurs, en comparant les deux histogrammes, on remarque que le spectre des contraintes est plus large à l'échelle microscopique. Ce résultat est très intéressant puisqu'il met en évidence l'apport de la simulation à l'échelle microscopique. En effet, les contraintes locales les plus élevées (en rouge sur la figure 6.18) correspondent aux localisations de contraintes dans les zones d'enchevêtrement (cf figure 6.15), où les premières ruptures de filaments sont susceptibles de se produire. Ce phénomène n'était pas captable dans des simulations purement macroscopiques, et ces premiers résultats sont donc très encourageants pour l'étude de l'endommagement des câbles textiles.

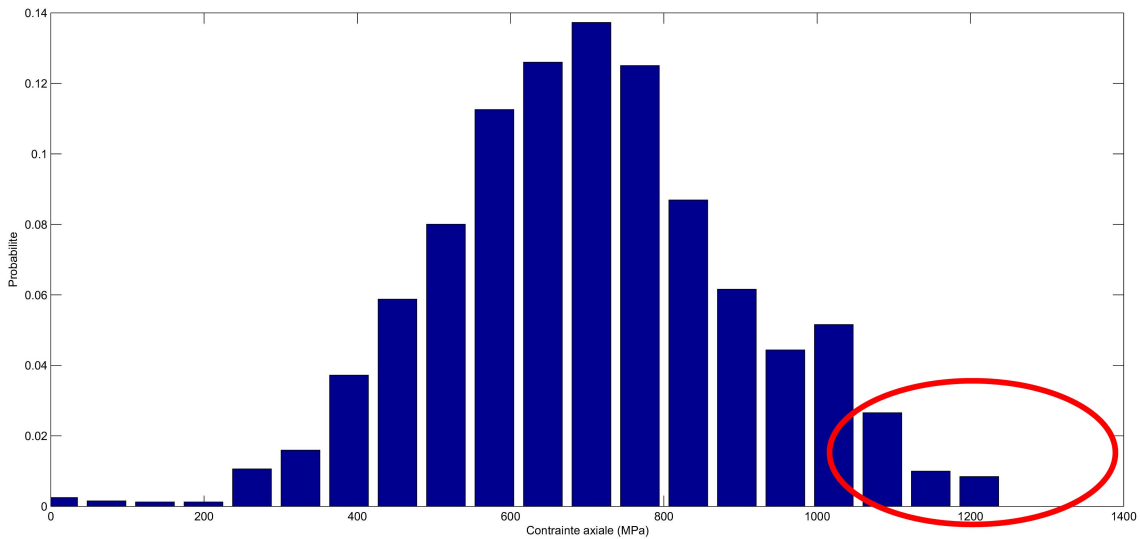


FIGURE 6.18 – Histogramme de la distribution de la contrainte axiale dans le paquet de filaments.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre la mise en œuvre de l'approche multi-échelles proposée dans le cadre de cette thèse permettant d'aborder la simulation de câblés textiles à grands nombres de filaments, en vue de déterminer le comportement global de ces structures tout en approchant les sollicitations locales subies à l'échelle des filaments.

Dans la première section, nous avons présenté le modèle utilisé pour décrire le câble à l'échelle macroscopique. Pour cela, le modèle de macrofibre que nous avons introduit précédemment a été détaillé ainsi que le modèle rhéologique simplifié utilisé. Ce modèle étant trop pauvre pour rendre compte de manière satisfaisante de déformations dans un paquet de fibres, une loi de contact originale a été proposée pour gérer les interactions entre macrofibres, permettant de corriger les erreurs commises sur le modèle macroscopique en prenant en compte les effets de densification locale. Ensuite, les questions se rattachant à la méthodologie du passage de l'échelle macroscopique à l'échelle microscopique ont été abordées dans la section 6.2.1 : définition des plans entourant le paquet de filaments en 3D, choix du mode d'imposition des quantités macroscopiques, gestion des conditions aux limites au paquet de filaments, ...

Cette approche a été implémentée dans le logiciel *Multifil*. Les simulations réalisées sur un cas relativement simple de torsion d'une mèche ont permis de montrer la faisabilité de la démarche ainsi que la robustesse des calculs en présence de grandes déformations. Enfin, les résultats obtenus sur un câble réel plus complexe ont mis en évidence l'apport de la méthode multi-échelles proposée pour accéder à la distribution des contraintes locales, qui est particulièrement hétérogène par rapport à l'échelle macroscopique.

Cette étude préliminaire est donc très encourageante, et laisse envisager de futurs travaux intégrant ces distributions de contraintes locales dans des modèles d'endommagement plus réalistes du câble textile.

Conclusion générale

L'enjeu initial de ce travail de thèse était de proposer une stratégie multi-échelles originale permettant de modéliser des câblés textiles à grand nombre de filaments tels que ceux utilisés dans les pneumatiques. Il s'agissait en particulier de répondre à une problématique double :

- Déterminer le comportement global du câble en terme de courbe force-allongement, afin d'alimenter les modèles de simulation numérique à l'échelle du pneumatique ;
- Approcher l'état de contraintes mécaniques local au niveau des fibres afin de pouvoir appréhender les mécanismes responsables de l'endommagements des renforts textiles.

Les câbles textiles présentent des caractéristiques (aspect multi-échelles, complexité de leur comportement mécanique, géométrie aléatoire, migration de filaments, ...) qui rendent impossible l'application de modèles analytiques. Nous avons donc choisi d'utiliser une modélisation numérique basée sur la méthode des éléments finis, qui permet de comprendre les mécanismes complexes à l'échelle locale de la structure en modélisant individuellement chaque fibre élémentaire. Plus précisément, les modèles développés dans cette thèse ont été développés dans le logiciel Multifil, qui est un solveur éléments finis dont les caractéristiques ont été présentées dans les chapitres 2 et 3 de ce rapport. Cependant, en raison du coût important de ce type de calculs, les simulations numériques portant sur l'échelle microscopique sont limitées à des câbles comportant un nombre relativement faible de filaments (quelques centaines). Pour pouvoir réaliser des calculs sur des câbles à grand nombre de filaments (plusieurs dizaines de milliers), nous avons alors du avoir recours à une méthode numérique multi-échelles.

L'étude bibliographique réalisée dans le chapitre 4 a montré que les méthodes d'homogénéisation numérique et de décomposition de domaine classiques ne sont pas applicables dans notre cas à cause des spécificités de notre problème (milieu discret, migration de filaments, ...). Nous avons alors développé une méthode multi-échelles originale basée sur un modèle intermédiaire, dit de "macrofibre", dont le comportement mécanique soit équivalent à celui d'un paquet de fibres réelles.

Pour modéliser ces macrofibres, une première piste a visé à utiliser un modèle de poutre à cinématique enrichie permettant de représenter les modes de déformations complexes subies par un tel paquet de filaments, mais nous nous sommes heurtés à la difficulté de formuler une loi de comportement permettant de tirer parti de cette richesse cinématique. Pour chercher un modèle plus simple, une étude nous a permis de mettre en évidence que le comportement du câble semble principalement contrôlé par la rigidité en extension des filaments et les phénomènes de densification entre eux (rapprochement des filaments, écrasement de leurs sections). En nous basant sur cette analyse, nous avons fait le choix de ne pas mettre l'accent sur la représentation des déformations dans les directions transverses des macrofibres en utilisant un modèle cinématique simplifié dans lequel leurs sections restent elliptiques. La densification des filaments est alors prise en compte en autorisant des interpénétrations entre les macrofibres, contrôlées à travers une loi de contact adaptée. La loi proposée est une loi de pénalisation régularisée décrite par deux distances de pénétration, qui correspondent au rapprochement des filaments et à l'écrasement transverses de leurs sections.

Une fois le modèle défini à l'échelle macroscopique, la deuxième étape a concerné le passage de l'échelle macroscopique à l'échelle microscopique, ce qui représente le cœur de l'approche et l'apport principal de cette thèse. Afin de représenter les sollicitations qui s'appliquent au paquet de filaments qui constituent une macrofibre, nous avons proposé un mode d'héritage mixte, qui consiste à appliquer les interactions de contact entre macrofibres comme sollicitations transverses à l'échelle locale par le moyen d'un plan rigide mobile, ainsi que le positionnement de la macrofibre.

Ce mode d'héritage présente l'avantage de pouvoir représenter au sein d'une macrofibre les effets de chargements transverses de chaque macrofibre voisine sur les filaments locaux, et les effets de courbure (flexion et torsion) subis par la macrofibre.

Nous avons commencé par appliquer cette méthode multi-échelles à un problème bidimensionnel simplifié dans le chapitre 5, afin de cerner ses difficultés dans un environnement numérique moins complexe. Pour cela, nous avons construit un problème 2D représentatif des phénomènes se produisant dans une coupe de câble, qui reproduit en particulier les problématiques de densification et de migration de certains éléments. Par ailleurs, les coûts de calcul étant beaucoup plus abordables dans ce cadre bidimensionnel, cela nous a permis de développer un modèle couplant les deux échelles et servant de référence, dans lequel chaque paquet de fibres (disques en 2D) est en interaction avec les paquets voisins à travers des plans séparateurs qui sont positionnés de manière à être en équilibre mécanique. Les comparaisons réalisées entre les résultats donnés par l'approche multi-échelles proposée, l'approche totalement microscopique et le problème couplé nous a permis de valider l'ensemble des hypothèses réalisées dans l'approche multi-échelles et prouver sa pertinence.

Enfin, nous avons décrit dans le chapitre 6 le développement de la méthode multi-échelles proposée dans un cadre tridimensionnel pour l'appliquer sur des câbles textiles. Nous avons en particulier présenté les détails de l'implémentation du modèle à l'échelle microscopique (définition des facettes mobiles, imposition de la trajectoire et la rotation macroscopiques, conditions aux limites). La faisabilité de la démarche ainsi que la robustesse des calculs ont d'abord été prouvés sur des tests simples, puis nous avons appliqué notre méthode sur un câblé réel. Les premiers résultats obtenus sont très prometteurs, puisqu'ils ont permis de mettre en évidence l'apparition de concentrations de contraintes dans certaines zones des filaments à l'échelle microscopique, ce qui devrait permettre d'améliorer les prédictions de l'endommagement des câbles textiles.

Perspectives

Plusieurs perspectives intéressantes s'ouvrent à l'issue de ce travail de thèse. Tout d'abord, nous disposons de trois axes pour améliorer la précision de la prédiction macroscopique :

- La première piste consiste à améliorer la précision des coefficients de la loi de contact macroscopique, qui sont actuellement estimés de manière purement analytique. Pour cela, nous proposons de réaliser un recalage de ces paramètres en cherchant à égaliser la densité macroscopique avec :
 - soit la densité locale calculée par la résolution numérique de problèmes microscopiques ;
 - soit la densité réelle dans le câblé à partir d'images de tomographie.
- Une autre voie serait d'utiliser une loi de comportement plus complexe dans les macrofibres, en s'inspirant notamment des travaux de [Charmetant 2011a] et [Charmetant 2011b]. La difficulté principale consistera à établir un modèle rhéologique reliant les contraintes aux termes de déformations issus du modèle cinématique. Les termes de la loi de comportement mise en œuvre devront d'une part tenir compte des couplages entre les différentes directions, et d'autre part représenter les phénomènes non linéaires liés aux frottements, par exemple à la manière des modèles de plasticité.
- Par ailleurs, un travail de réflexion semble également nécessaire en ce qui concerne le frottement entre macrofibres. Actuellement, ce frottement est géré de manière standard par une loi de Coulomb dans laquelle le coefficient de frottement est arbitraire. Il serait intéressant de réaliser une étude afin de mieux comprendre l'impact de l'enchevêtrement entre les filaments sur le

glissement de deux paquets de fibres, et d'en déduire une loi de frottement macroscopique plus adaptée.

Enfin, il serait également possible d'améliorer la précision des simulations réalisées à l'échelle microscopique en transmettant l'effort de frottement macroscopique aux facettes mobiles. Pour cela, la difficulté principale sera de convenablement gérer la situation où tous les filaments glissent sur ces facettes, auquel cas des modes d'énergie nulle risquent d'apparaître.

Modèle de poutres à cinématique enrichie d'ordre N

Dans les câblés textiles, le nombre élevé de fibres rend impossible de représenter chacune d'elles par une poutre, et on doit recourir à un modèle de macrofibre apte à rendre compte du comportement moyen d'un ensemble de fibres. La formulation d'un tel modèle de macrofibre soulève des difficultés tant au niveau de la description cinématique qu'à celui de la loi de comportement.

On présente dans cette annexe un résumé des travaux qui concernent l'enrichissement du modèle cinématique.

A.1 Modèle cinématique à l'ordre N

Le modèle cinématique de poutre, formulé comme un développement au premier ordre du déplacement des particules de la poutre autour de la fibre moyenne, et comportant neuf degrés de liberté par section, ne permet d'approcher que des déformations constantes de la section dans les directions transverses, de type ovalisation si on considère des sections initialement circulaires. Ce modèle a été étudié dans la section 2.2.2 du manuscrit.

Ce modèle cinématique se révèle trop pauvre pour pouvoir décrire des modes de déformations plus complexes dans les directions transverses des sections comme attendu dans le cas des macrofibres. Dans ce sens un modèle de poutre à cinématique transverse enrichie a été développé. L'idée de ce modèle cinématique de poutre consiste à décrire la cinématique des particules de la section de la poutre sous la forme d'un développement polynomial à un ordre quelconque :

$$\underline{x}(\xi_1, \xi_2, s) = \underline{r}(s) + \sum_{p=1}^N \sum_{q=0}^p \xi_1^q \xi_2^{p-q} \underline{d}_{q,q-p}(s) \quad (\text{A.1})$$

Les vecteurs $\underline{d}_{q,q-p}(s)$ représentent les vecteurs de sections. Le nombre de degrés de liberté cinématique est égale à :

$$Nb_{ddl} = 3 \frac{(N+1)(N+2)}{2}$$

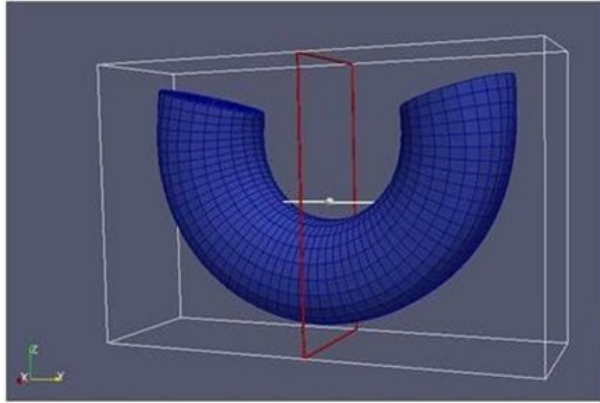
De cette manière, tout en conservant un formalisme de poutre s'accordant avec l'aspect linéique de la structure, il est possible de reproduire des déformations plus ou moins complexes des sections de la poutre, suivant l'ordre de développement retenu.

A.2 Résultats numériques

On présente dans ce qui suit l'apport de l'enrichissement de la cinématique sur un test de flexion d'une poutre. Il s'agit d'un test de flexion simple en imposant une rotation aux deux extrémités sur une poutre. Le diamètre de la poutre est choisi important par rapport à sa longueur, afin de mettre en évidence les déformations de la section. La sollicitation est imposée d'une manière incrémentale en 7 incréments. On s'est intéressé en particulier à la comparaison de la contribution de chaque ordre

d'enrichissement (ordre 1 jusqu'à l'ordre 4).

Comme illustration, nous montrons sur la figure A.1 les modes de déformation de la section de la poutre. On observe qu'au premier ordre, on obtient une section nettement circulaire et à partir du second ordre on remarque des déformations plus générales qui correspondent à l'apport de la variation des champs vectoriels introduits au fur et à mesure. Par comparaison avec le modèle cinématique au premier ordre, la déformée de la section de la poutre au quatrième ordre est plus physique. On s'aperçoit que la partie en extension devient de plus en plus aplatie.



(a) Test de flexion



(b) Déformées de section pour différents ordres

FIGURE A.1 – Comparaison des déformations de section pour un test de flexion

A.3 Adaptation du traitement du contact

L'enrichissement du modèle cinématique de poutre a des répercussions sur la manière de traiter le contact entre poutres. Avec le modèle cinématique au premier ordre, le contact entre deux poutres était envisagé comme un phénomène linéique (cf Chapitre 3). À partir du moment où on permet aux sections de la poutre de se déformer davantage, le contact entre deux poutres doit être considéré comme un phénomène surfacique. La stratégie de détection des contacts devra être adaptée afin de gérer des surfaces de contact s'adaptant à l'écrasement des macro-fibres.

Pour cela, on propose d'adapter l'approche basée sur une ligne intermédiaire qui a été introduite dans la section 3.2.2. Une fois la ligne intermédiaire construite (voir figure A.2), on introduit une surface (un ruban) donnée par une extension transverse de la ligne (symétrique) selon la direction $\underline{d}_T$ définie par :

$$\underline{d}_T = \frac{\underline{x}_i \wedge \underline{D}_{12}}{\|\underline{x}_i \wedge \underline{D}_{12}\|}$$

avec $\underline{x}_i$ et $\underline{D}_{12}$ sont respectivement la tangente et la normale à la ligne intermédiaire.

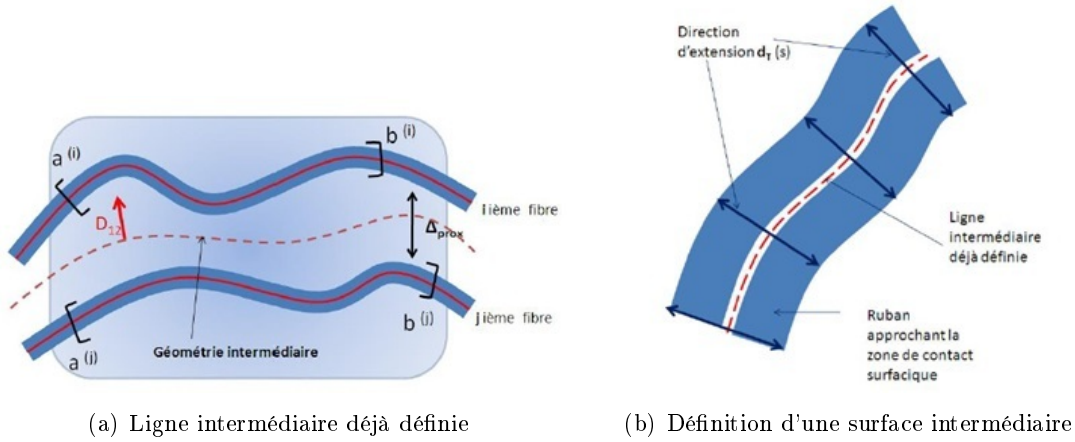


FIGURE A.2 – Construction d'une surface intermédiaire

Cette surface sera par la suite discrétisée en un certain nombre de points discrets dans la longueur et la largeur. A l'instar de l'approche existante, en chaque point discret on cherche à déterminer le couple de points matériels sur les contours de section des deux poutres (voir la figure A.3). Ceci revient à résoudre le système d'équations suivant :

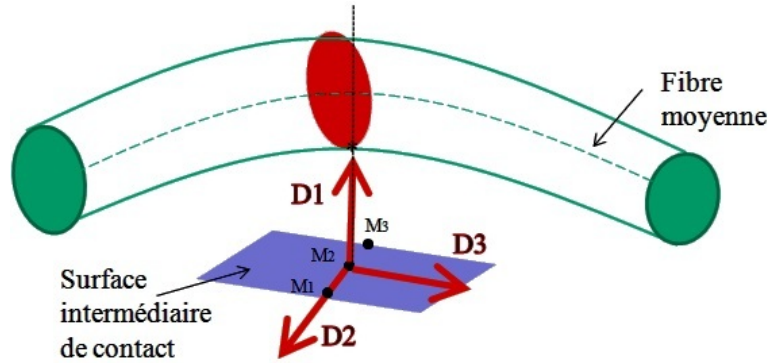


FIGURE A.3 – Détermination des particules candidates d'être en contact au niveau des points discrets de la surface du contact

$$\begin{cases} (\underline{x}(\xi) - \underline{M}_i) \cdot \underline{D}_2 = 0 \\ (\underline{x}(\xi) - \underline{M}_i) \cdot \underline{D}_3 = 0 \\ R^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

avec $\underline{x}(\xi)$ est donné par l'expression A.1. Les vecteurs $\underline{M}_i$ représentent les vecteurs positions des points discrets de la surface intermédiaire. $\{\underline{D}_1, \underline{D}_2, \underline{D}_3\}$ est un trièdre orthonormé défini en chaque point discret de la surface et représenté sur la figure A.3. Le problème de contact est par la suite résolu pour chaque paire de particule par pénalisation comme présenté dans la section 3.2.3.

Pour illustrer cette adaptation de la gestion du contact, nous avons simulé un test d'écrasement d'une poutre entre deux poutres plus rigides (voir figure A.4). On présente sur la figure A.5, les points discrets de la surface intermédiaire du contact (représentés en couleur rouge) et les couples de particules matériels en contact (représentés en couleur bleue).

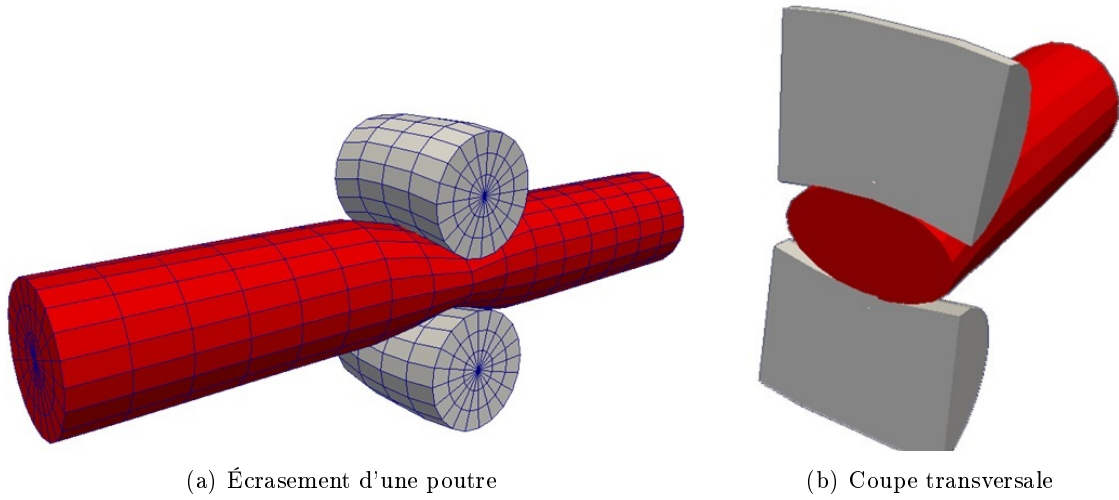


FIGURE A.4 – Gestion du contact surfacique

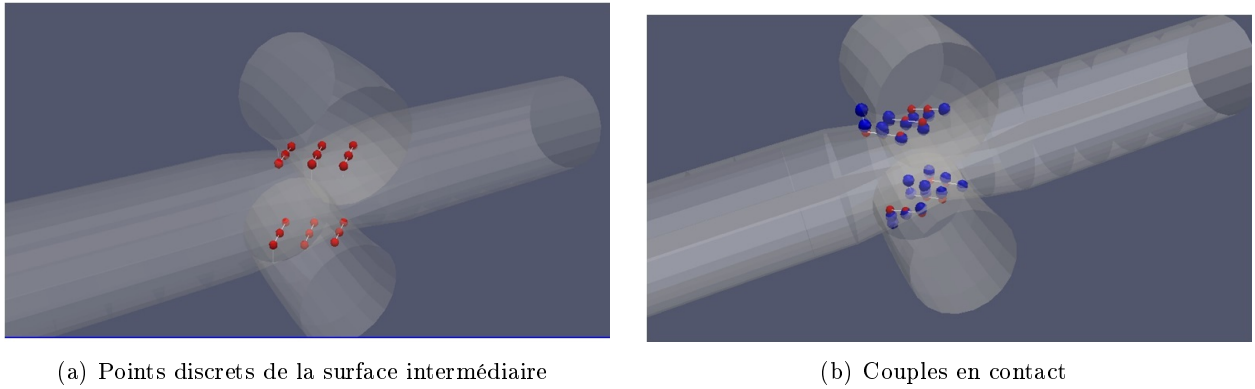


FIGURE A.5 – Visualisation de la surface intermédiaire des couples de contact

A.4 Commentaires

Les résultats obtenus à l'issu de ce travail sont très intéressants. Cet enrichissement du modèle cinématique devra aller de pair avec une profonde réflexion sur le modèle rhéologique de loi de comportement à appliquer à la macrofibre. Un ensemble de fibres présente un comportement moyen global qui se caractérise par une forte anisotropie et des couplages non linéaires entre les différentes directions. Formuler une loi équivalente décrivant le comportement d'un tel milieu constitue une problématique très complexe.

Réflexion sur la prise en compte de la matrice de gomme en 2D

L'étude présentée dans le manuscrit a porté sur la modélisation d'un câble nu, c'est à dire sans prendre en compte l'effet de la gomme qui l'entoure. Cependant, au sein du pneumatique le câble se trouve dans un environnement confiné, enrobé d'une matrice de gomme qui lui transmet différents types de sollicitations. Ces effets ont été jusqu'à ici négligés puisque les bords libres des fibres de la couche externes du câble ont été supposés non contraints. On présente dans cette annexe, quelques réflexions sur une méthodologie d'héritage des effets de la gomme à l'échelle locale. En guise de simplification, on se place dans le cadre du problème bidimensionnel présenté dans le chapitre 5.

B.1 Modélisation de la matrice de gomme à l'échelle macroscopique

B.1.1 Réalisation du maillage de la gomme

On présente ici la démarche utilisée pour définir le maillage de la matrice de gomme à l'échelle macroscopique. La première étape concerne la détermination des macro-disques de la couche extérieure qui seront en liaison avec la matrice de gomme. Ces macro-disques forment en d'autres termes la frontière interne de la matrice. Cette frontière n'est pas forcément convexe. Pour déterminer ce contour on utilise une démarche relativement simple. Dans un premier temps, chaque macro-disque est divisé en un certain nombre de secteurs angulaires. Ensuite, le critère qui permet de déterminer si un macro-disque est externe ou interne se base sur le nombre de secteur angulaire (choisi 75% du nombre de total des secteurs angulaires) à partir duquel "un observateur" placé au centre du macro-disque "observe" d'autres macro-disques voisins.

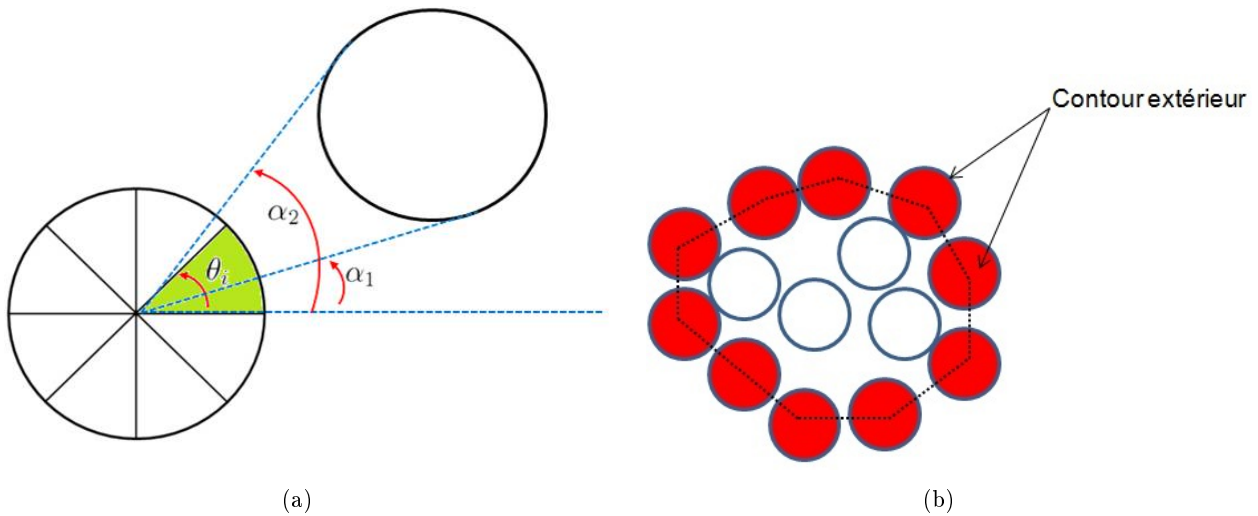


FIGURE B.1 – (a) Critère de détermination des macro-disques externes (b) Contour extérieur de l'assemblage

En se référant à l'illustration par la figure B.1(a), le critère de recherche "des secteurs internes" s'écrit :

$$\begin{cases} \text{si } \alpha_1 < \theta_i < \alpha_2 & \text{C'est un un secteur angulaire interne} \\ \text{si non } \alpha_1 < \theta_i < \alpha_2 & \text{C'est un un secteur angulaire externe} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Les macro-disques formant le contour extérieur sont schématisés sur la figure B.1(b).

La géométrie de la matrice de gomme est définie comme une cellule rectangulaire centrée sur l'ensemble des macro-disques. Cette cellule est par la suite discrétisée. La réalisation du maillage du volume occupé par la matrice de gomme est relativement simple. D'abord, les arrêtes externes de la cellule sont discrétisées. Ensuite, ces nœuds externes sont projetés sur le contour externe de l'ensemble des macro-disques, formant ainsi le contour interne de la matrice de gomme (voir figure B.2(b)). Le maillage final de la matrice de gomme est donné par la figure B.2(c). On fait le choix que le volume de gomme recouvre en partie celui des macro-disques.

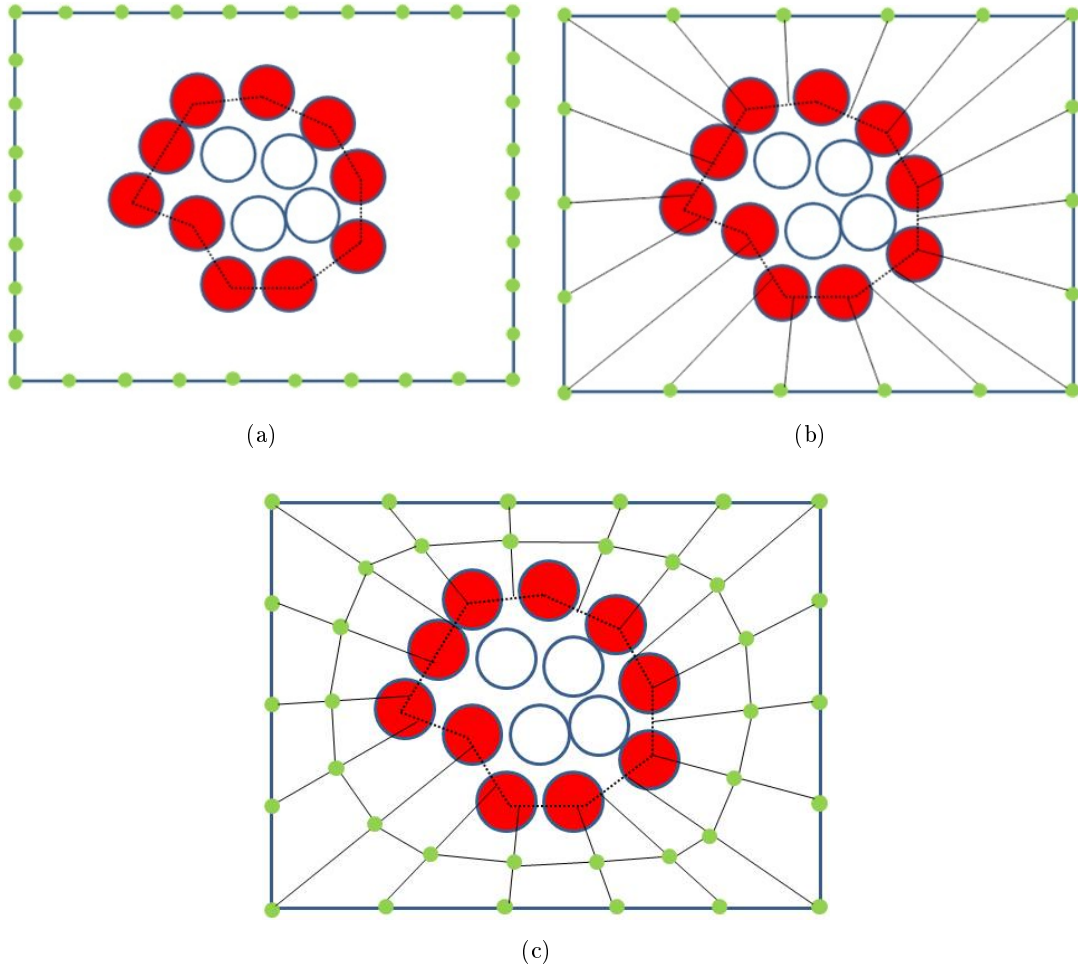


FIGURE B.2 – B.2(a) Discrétisation des bords externes de la cellule (b) Projection des nœuds externes (c) Maillage final de la matrice de gomme

B.1.2 Loi de comportement de la gomme

La gomme constituant la cellule est un matériau élastomère considéré incompressible. Le comportement de la gomme est considéré hyperélastique et que l'on modélise par un modèle de Mooney-Rivlin.

L'énergie de déformation incompressible s'écrit sous la forme :

$$\omega(I_1, I_2, I_3) = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3) + \frac{\kappa}{2} \left(\sqrt{I_3} - 1 \right)^2$$

Où I_1 , I_2 et I_3 représentent les invariants du tenseur de déformation. κ est un coefficient de pénalisation de la contrainte d'incompressibilité.

C_1 et C_2 sont des coefficients caractéristiques du matériau. D'après [Lignon 2011], on considère pour les applications numériques les coefficients suivants :

$$\begin{cases} C_1 = 0.539 \text{ MPa} \\ C_2 = 1.062 \text{ MPa} \\ \kappa = 1000 \text{ MPa} \end{cases}$$

Le terme de pénalisation de l'incompressibilité est calculé par sous-intégration (élément P_0) pour contourner le risque de verrouillage numérique qui pourrait accompagner l'imposition d'une telle contrainte.

B.1.3 Pilotage de la matrice de gomme

Pour modéliser des sollicitations subies par la nappe fibrée dans l'environnement du pneumatique, on introduit des conditions aux limites cinématiques sur les nœuds des extrémités de la matrice de gomme. Ces conditions, qu'on exprimera dans le repère fixe $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, sont prises en compte par une méthode de pénalisation. Elles s'écrivent pour les nœuds N_{bord} considérés comme suit :

$$(\underline{x}^t(N_{\text{bord}}) - \underline{x}^0(N_{\text{bord}}), \underline{e}_1) = \delta x \quad (\text{B.2})$$

$$(\underline{x}^t(N_{\text{bord}}) - \underline{x}^0(N_{\text{bord}}), \underline{e}_2) = \delta y \quad (\text{B.3})$$

Tel que δx et δy sont les valeurs de déplacement à imposer respectivement dans les directions $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ entre la configuration initiale et la configuration courante t .

B.1.4 Liaison entre la matrice de gomme et les macro-disques : notion d'agrafe

On aborde ici la méthode de couplage entre la matrice de gomme et les macro-disques appartenant au contour extérieur de l'ensemble. L'idée est d'imposer une continuité de déplacement entre le centre des macro-disques appartenant au contour extérieur au point matériel occupant la même position dans l'élément fini de la matrice de gomme correspondant. En d'autres termes, cela revient à agraffer ces macro-disques à la gomme. Les nœuds des éléments finis de la matrice de gomme, qui sont concernés par le couplage, sont considérés comme esclaves par rapport à ces macro-disques. D'où la notion d'agrafe. Cette approche que l'on appliquera ici sur un cadre bidimensionnel simplifié, est similaire à celle présentée dans [Durville 2011] pour assurer le couplage entre la structure câblée tridimensionnelle et la matrice de gomme.

Considérons un macro-disque qui se rattache à un élément fini de gomme. La position du centre de ce macro-disque s'écrit en fonction des positions des nœuds $\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ de l'élément fini de gomme auquel il se rattache de la manière suivante :

$$\underline{x}_{i,g} = \sum_{i=1}^4 \varphi_i \underline{x}(N_i)$$

Avec φ_i représente la fonction de base du nœud N_i . Le point matériel de position $\underline{x}_{i,g}$ est dit point d'agrafe.

La liaison entre les deux structures est prise en compte en pénalisant la distance entre le centre du macro-disque concerné et sa position dans l'élément fini de gomme correspondant. Le terme de couplage macro-disque / gomme s'écrit :

$$\Psi = \frac{1}{2} K_g d \|\underline{x}_i - \underline{x}_{i,g}\|^2 \quad (\text{B.4})$$

Avec $\underline{x}_i$ la position du centre du macro-disque concerné par la liaison et K_g le coefficient de pénalisation. d est une dimension choisi de l'ordre du diamètre du macro-disque et introduite pour homogénéiser la dimension du terme de couplage. La valeur du coefficient de pénalisation est choisi de l'ordre du module d'Young de la gomme, définie en fonction des coefficients de Lamé par :

$$K_g = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

Tels que

$$\lambda = 4C_2 + K$$

$$\mu = 2C_1 + 2C_2$$

B.1.5 Résultat numérique

La figure B.5 présente un exemple de simulation numérique sur l'ensemble gomme/macrodisques. Dans ce test, la matrice de gomme est pilotée en déplacement. On cherche par ce test à se rapprocher de ce qui se passe dans un câble sous compression dans un environnement confiné de gomme.

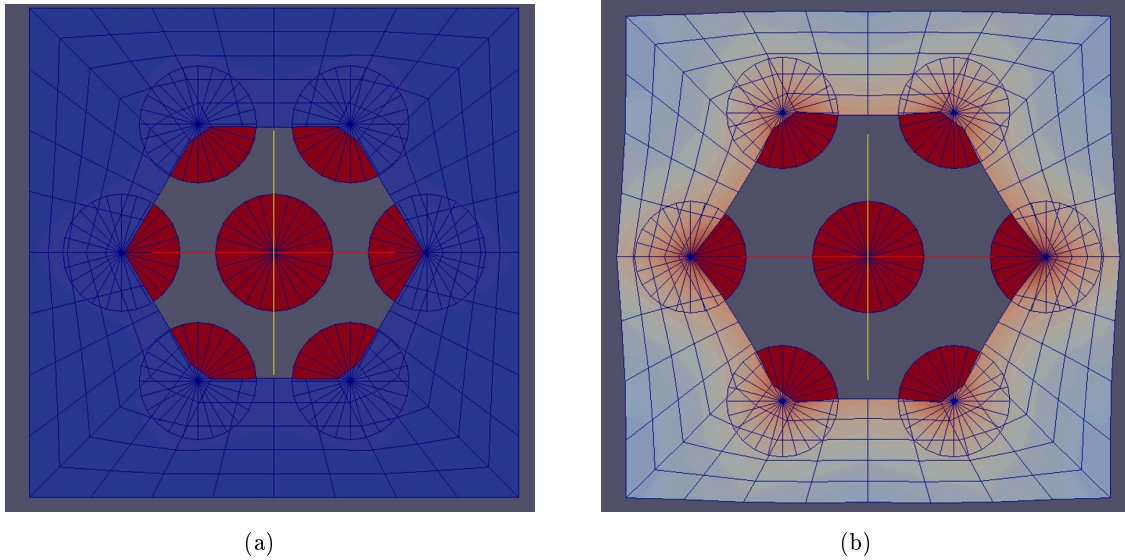


FIGURE B.3 – (a) Configuration initiale (b) Configuration déformée

B.2 Héritage des effets de la gomme à l'échelle locale

B.2.1 Choix des disques microscopiques à lier à la matrice de gomme

A l'échelle macroscopique, la matrice de gomme recouvre en partie la section des macro-disques appartenant au contour extérieur de l'assemblage. A l'échelle locale, on fait le choix de considérer les

disques en liaison avec la gomme, les disques situés sur le contour externe des portions angulaires des macro-disques recouvert par la matrice de gomme (voir figure B.4).

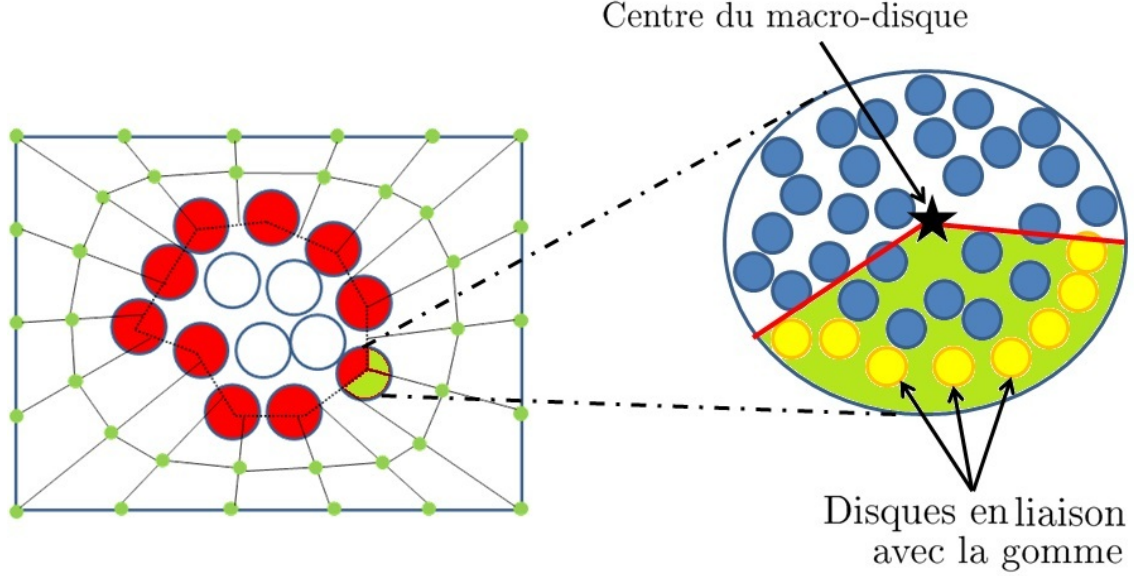


FIGURE B.4 – Détermination des disques en liaison avec la gomme à l'échelle locale

B.2.2 Mode d'héritage des effets de la gomme

Quantités héritées de l'échelle macroscopique

A l'issue de chaque incrément de chargement macroscopique, on hérite au niveau de chaque macro-disk du contour extérieur de l'assemblage, la position du point d'agrafe $\underline{x}_{i,g}$. On lui associe un repère $\{l_1, l_2\}$ tel que :

$$l_\alpha = \partial_\alpha \underline{x}_{i,g} \quad \alpha = 1, 2$$

On hérite aussi la force $\underline{F}_{\text{gomme}}$ qu'exerce la gomme sur les macro-disques avec laquelle ils sont en liaison à l'échelle macroscopique.

Méthode de couplage

Pour modéliser l'effet de la matrice de gomme à l'échelle locale, on propose :

- d'imposer la force exercée par la gomme à l'échelle macroscopique sur le point d'agrafe. La position du point d'agrafe est considérée une inconnue supplémentaire au problème à l'échelle locale.
- d'imposer une liaison bilatérale entre le point d'agrafe et les centres des disques concernés selon les deux directions l_1 et l_2 définie précédemment. Le terme de couplage, pris en compte par pénalisation, s'exprime comme suit :

$$\psi_{\text{couplage}} = \frac{\kappa_\alpha}{2} d \left[\left(\underline{x}_k^{i,t} - \underline{x}_{i,g}^t \right) \cdot l_\alpha^t - \left(\underline{x}_k^{i,0} - \underline{x}_{i,G}^0 \right) \cdot l_\alpha^0 \right]^2, \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{B.5})$$

Avec

$\underline{x}_k^{i,t}$ et $\underline{x}_k^{i,0}$ sont respectivement les positions actuelles et initiales des disques à l'échelle locale.
 $\underline{x}_{i,G}^t$ et $\underline{x}_{i,G}^0$ représentent respectivement la position actuelle du point d'agrafe et sa position initiale héritée du calcul macroscopique.

$\underline{l}_\alpha^t$ et $\underline{l}_\alpha^0$ les vecteurs actuelles et initiales associés aux points d'agrafe.

κ_1 et κ_2 sont deux facteurs de pénalisation associés aux deux directions $\{l_1, l_2\}$.

L'estimation de la valeur des coefficients de pénalisation traduisant la raideur de la liaison entre la gomme et les disques locaux n'est pas triviale. Cependant, dans les applications numériques qu'on présentera dans cette annexe la valeur attribuée à ces coefficients est heuristique. En effet, notre objectif principale ici est d'étudier la faisabilité de l'approche sur un cas d'étude simple. Une des perspectives de ce travail est de réfléchir à la détermination de ces paramètres dans un cadre d'application plus physique sur un câble réel.

B.2.3 Résultats numériques à l'échelle locale

On présente sur la figure, un résultat préliminaire de la prise en compte de l'effet de la gomme dans le processus d'héritage à l'échelle locale pour le même cas test réalisé à l'échelle macroscopique (cf figure B.5). Comme décrit précédemment, l'héritage de l'effet de la gomme est réalisé par l'intermédiaire d'une liaison bilatérale entre les disques concernés et le point d'agrafe soumis à la force exercée par la l'élément finis de gomme à l'échelle macroscopique. Il n'y pas donc un maillage élément finis de la cellule de gomme à l'échelle locale. Le maillage élément finis de gomme est représenté uniquement pour des fins de visualisation.

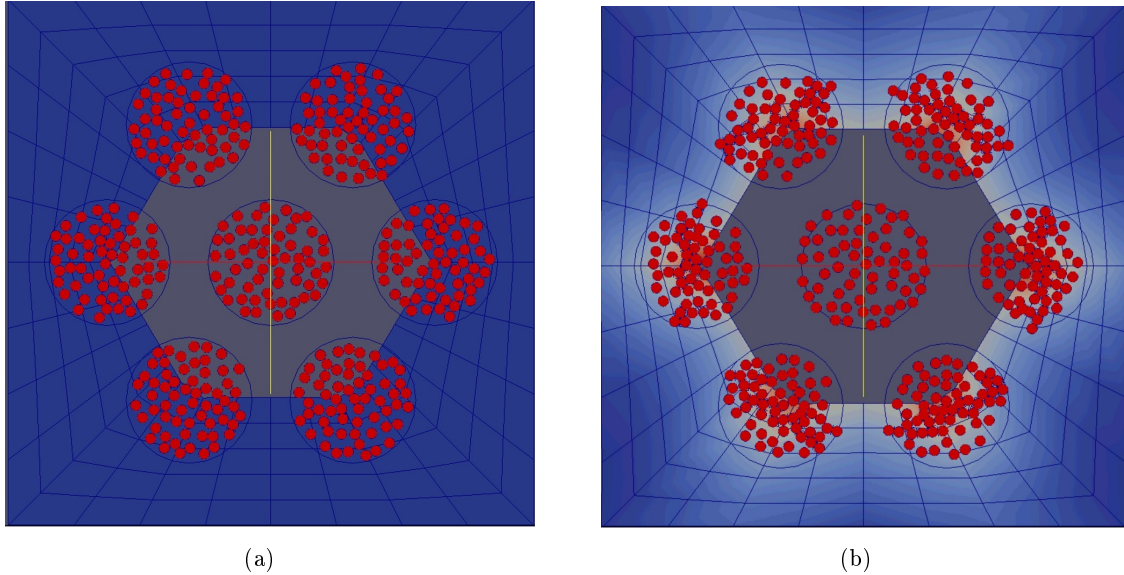


FIGURE B.5 – Prise en compte de l'effet de la gomme à l'échelle locale (a) Configuration initiale (b) Configuration déformée

Nous avons présenté dans cette annexe quelques réflexions sur la prise en compte des effets de la matrice de gomme à l'échelle locale. Les résultats obtenus sont intéressants et l'approche d'héritage des effets de la gomme de l'échelle macroscopique semble prometteuse. En revanche, ce travail n'est pas encore finis et les résultats restent tout de même dans un stage préliminaire.

Limite asymptotique d'un modèle discret avec liaisons imposées aux incréments de solutions

Le problème discret posé à échelle des microfibrés avec contraintes en rotation de section peut s'écrire sous la forme abstraite

Rechercher le champ y^{n+1} qui minimise l'énergie potentielle $J(y)$ sur l'espace V des champs cinématiquement admissibles sous la contrainte

$$B(y^n) \cdot \frac{y - y^n}{\Delta t} - C(y^n) = 0 \text{ dans } M^*.$$

Dans cette formulation, l'énergie J est une fonctionnelle différentiable définie sur l'espace V à valeurs dans R et l'opérateur de contrainte $B(y^n)$ est un opérateur linéaire continu de rang fini, défini sur V à valeurs dans M^* . Les équations d'optimalité de ce problème discret s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dJ}{dy}(y^{n+1}), \hat{v} \right\rangle &= 0, \forall \hat{v} \in \text{Ker } B(y^n), \\ \left\langle B(y^n) \cdot \frac{y - y^n}{\Delta t} - C(y^n), \hat{p} \right\rangle &= 0, \forall \hat{p} \in M, y^{n+1} \in V. \end{aligned}$$

En passant à la limite quand la variation de temps Δt (donc de configuration) tend vers zéro, cette équation d'optimalité tend vers le problème limite

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dJ}{dy}(y(t)), \hat{v} \right\rangle &= 0, \forall \hat{v} \in \text{Ker } B(y(t)), \forall t, \\ \left\langle B(y(t)) \cdot \dot{y} - C(y(t)), \hat{p} \right\rangle &= 0, \forall \hat{p} \in M, y(t) \in V. \end{aligned}$$

Autrement dit, on a $\frac{dJ}{dy}(y(t)) \in \text{Ker } B(y(t))^\perp$. Par application du théorème de l'image fermée $\text{Ker } B(y(t))^\perp = \text{Im } B(y(t))^T$, cette équation variationnelle limite s'écrit encore

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dJ}{dy}(y(t)), \hat{v} \right\rangle + \langle \lambda(t), B(y(t)) \cdot \hat{v} \rangle &= 0, \forall \hat{v} \in V, \lambda(t) \in M, \forall t, \\ \left\langle B(y(t)) \cdot \dot{y} - C(y(t)), \hat{p} \right\rangle &= 0, \forall \hat{p} \in M, y(t) \in V. \end{aligned}$$

Ceci correspond à l'équation d'équilibre satisfaite au niveau des microfibrés quand on impose les contraintes de rotation moyenne imposée par section.

Bibliographie

- [Alart 1991] P. Alart et A. Curnier. *A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 92, pages 353–375, 1991.
- [Alart 2012] P. Alart, D. Iceta et D. Dureisseix. *A nonlinear Domain Decomposition formulation with application to granular dynamics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 205-208, pages 59–67, 2012.
- [Antman 1974] S.S. Antman. *Kirchhoff's Problem For Nonlinearly Elastic Rods*. Quarterly of Applied Mathematics., vol. 32, pages 221–240, 1974.
- [Antman 1981] S.S. Antman et C.S. Kenney. *Large Buckled States of Nonlinearly Elastic Rods under Torsion, Thrust and Gravity*. Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 76, pages 289–338, 1981.
- [Antman 1995] S.S. Antman. *Nonlinear problems of elasticity*. Springer-Verlag New York, 1995.
- [Antman 2005] S.S. Antman. *Nonlinear problems of elasticity - second edition*. Springer-Verlag New York, 2005.
- [Argyris 1960] J.H. Argyris. *Energy theorems and structural analysis*. London : Butterworths, 1960.
- [Argyris 1982] J.H. Argyris. *An Excursion Into Large Rotations*. Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., vol. 32, pages 85–155, 1982.
- [Attia 2011] H. Attia. *Développement d'un modèle de macro-fibre pour la simulation du comportement de câblés textiles*. Master's thesis, École des Ponts ParisTech, Laboratoire Navier, 2011.
- [Audoly 2013] B. Audoly et J.F. Semblat. *Thin structures*. Ressources Pédagogiques École Polytechnique, Modélisation et calcul des structures élancées, 2013.
- [Badel 2008] P. Badel. *Analyse mésoscopique du comportement mécanique des renforts tissés de composites utilisant la tomographie aux rayons X*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2008.
- [Badel 2009] P. Badel, S. Gauthier, E. Vidal-Sallé et P. Boisse. *Rate constitutive equations for computational analyses of textile composite reinforcement mechanical behaviour during forming*. Composites Part A : Applied Science and Manufacturing, vol. 40, no. 8, pages 997–1007, 2009.
- [Bajas 2009] H. Bajas et D. Durville. *Simulation de la mise en forme et du comportement mécanique de câbles supraconducteurs*. Compte rendu du colloque de Giens, 2009.
- [Bajas 2012] H. Bajas, D. Durville et A. Devred. *Finite element modelling of cable-in-conduit conductors*. Superconductor Science and Technology, vol. 25, no. 5, page 054019, 2012.
- [Béal 1998] P. Béal. *Modélisation du contact entre tiges élastiques en grands déplacements*. PhD thesis, Université Blaise Pascal, 1998.
- [Beltran 2003] J.F. Beltran, J. Rungamornrat et E.B. Williamson. *Computational Model for the Analysis of Damaged Ropes*. The International Society of Offshore and Polar Engineers, vol. 5, pages 158–163, 2003.
- [Beltran 2005] J.F. Beltran et E.B. Williamson. *Degradation of rope properties under increasing monotonic load*. Ocean Eng, vol. 32, pages 826–844, 2005.
- [Beltran 2006] J.F. Beltran. *Computational modeling of synthetic-fiber ropes*. PhD thesis, University of Texas at Austin, 2006.
- [Bisshopp 1945] K.E. Bisshopp et D.C. Drucker. *Large deflection of cantiliver beams*. Quarterly of Applied Mathematics, vol. 3, pages 272–175, 1945.

- [Bonnans 1997] J. Frédéric Bonnans, Jean Charles Gilbert, Claude Lemaréchal et Claudia Sagastizábal. *Optimisation numérique : aspects théoriques et pratiques*. Mathématiques & applications. Springer-Verl, Berlin, Heidelberg, Paris, 1997.
- [Bonnet 2007] M. Bonnet et A. Frangi. *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*. Les éditions de l'École Polytechnique, 2007.
- [Bornert 2001] M. Bornert, T. Bretheau et P. Gilormini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux*, Tome 1 : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques. Hermes science, 2001.
- [Bourgat 1988] JF. Bourgat, P. Le Tallec et S. Mani. *Modélisation et calcul des grands déplacements de tuyaux élastiques en flexion-torsion*. Journal de Mécanique théorique et appliquée, vol. 7, pages 379–408, 1988.
- [Campos 1996] A. Campos et F. Rochinha. *Dynamics of rods : numerical formulation*. Advances in Computational Techniques for Structure Engineering, 1996.
- [Cardou 1997] A. Cardou et C. Jolicoeur. *Mechanical models of helical strands*. Applied Mechanics Reviews, vol. 50, pages 1–14, 1997.
- [Chamkch 2009] M. Chamkch, S.M Aouadi et M. Moakher. *Modeling and numerical treatment of elastic rods with frictionless self-contact*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, vol. 198, pages 3751–3764, 2009.
- [Chamoret 2004] D. Chamoret, P. Saillard, A. Rassineux et J.-M. Bergheau. *New smoothing procedures in contact mechanics*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 168, pages 107–116, 2004.
- [Chapelle 1997] D. Chapelle. *A locking-free approximation of curved rods by straight beam elements*. Numerische Mathematik, vol. 77, pages 299–322, 1997.
- [Chapelle 2003] D. Chapelle et K. Bathe. *The finite element analysis of shells*. Springer, 2003.
- [Charmetant 2011a] A. Charmetant. *Approches hyperélastiques pour la modélisation du comportement mécanique de préformes tissées de composites*. PhD thesis, Institut National des Sciences appliquées de Lyon, 2011.
- [Charmetant 2011b] a. Charmetant, E. Vidal-Sallé et P. Boisse. *Hyperelastic modelling for mesoscopic analyses of composite reinforcements*. Composites Science and Technology, vol. 71, no. 14, pages 1623–1631, 2011.
- [Costello 1976] G.A. Costello et J.W Philips. *Effective modulus of twisted wire cables*. Journal of the Engineering Mechanics Division, no. 102, pages 171–181, 1976.
- [Costello 1997] G.A. Costello. *Theory of wire rope*. Springer-Verlag, New-York (U.S.A), 2 édition, 1997.
- [Curnier 1984] A. Curnier. *Int. J. Solids Struct.* A theory of friction, no. 20, pages 637–647, 1984.
- [Curnier 1988] A. Curnier et P. Alart. *A generalized Newton method for contact problems with friction*. J. Mech. Theory Appl., vol. 7, pages 67–82, 1988.
- [Durville 1998] D. Durville. *Modélisation du comportement mécanique de câbles métalliques*. Revue Européenne des Éléments Finis, vol. 7, pages 9–22, 1998.
- [Durville 2004] D. Durville. *Modelling of contact-friction interactions in entangled fibrous materials*. Published in VI World Wide Congress on computational Mechanics, Beijin China, 2004.
- [Durville 2010] D. Durville. *Simulation of the mechanical behaviour of woven fabrics at the scale of fibers*. International Journal of Material Forming, vol. 3, pages 1241–1251, 2010.
- [Durville 2011] D. Durville. *Contact modelling in entangled fibrous materials*. Trends in Computational Contact Mechanics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pages 1–22, 2011.

- [Durville 2012] D. Durville. *Contact-friction modeling within elastic beam assemblies : an application to knot tightening*. Comput Mech, vol. 49, pages 687–707, 2012.
- [Farhat 1998] C. Farhat et J. Mandel. *The two level FETI method for static and dynamic plate problems part i : An optimal iterative solver for biharmonic system*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, vol. 155, pages 129 – 151, 1998.
- [Farhat 2001] C. Farhat, M. Lesoinne, P. LeTallec, K. Pierson et D. Rixen. *FETI-DP : a dualprimal unified FETI method - part I : a faster alternative to the two-level FETI method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 50, pages 1523–1544, 2001.
- [Feyel 2000] F. Feyel et J.L. Chaboche. *{FE2} Multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 183, no. 3-4, pages 309 – 330, 2000.
- [Feyrer 2006] K. Feyrer. *Wire ropes : Tension, endurance, reliability*. Springer, 2006.
- [Finckh 2004] H. Finckh. *Numerical simulation of the mechanical properties of fabrics*. LS-DYNA Users Conference, Bamberg, 2004.
- [Gasser 2000] A. Gasser, P. Boisse et S. Hanklar. *Mechanical behaviour of dry fabric reinforcements. 3D simulations versus biaxial tests*. Computational Materials Science, vol. 17, no. 1, pages 7–20, 2000.
- [Geers 2010] M.G.D. Geers, V.G. Kouznetsova et W.a.M. Brekelmans. *Multi-scale computational homogenization : Trends and challenges*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 234, no. 7, pages 2175–2182, 2010.
- [Genovese 2014] D. Genovese. *A two-director Cosserat rod model using unconstrained quaternions*. European Journal of Mechanics - A/Solids, vol. 43, pages 44–57, 2014.
- [Ghoreishi 2005] S.R. Ghoreishi. *Modélisation analytique et caractérisation expérimentale du comportement de câbles synthétiques*. PhD thesis, École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes, France, 2005.
- [Ghoreishi 2007a] S.R. Ghoreishi, P. Cartraud, P. Davies et T. Messenger. *Analytical modeling of synthetic fiber ropes subjected to axial loads . Part I : A new continuum model for multilayered fibrous structures*. vol. 44, pages 2924–2942, 2007.
- [Ghoreishi 2007b] S.R. Ghoreishi, P. Davies, P. Cartraud et T. Messenger. *Analytical modeling of synthetic fiber ropes. Part II : A linear elastic model for 1+6 fibrous structures*. International Journal of Solids and Structures, vol. 44, no. 9, pages 2943–2960, 2007.
- [Gloria 2007] A. Gloria. *Modélisation et méthodes numériques multi-échelles en élasticité non linéaire*. PhD thesis, Marne-la-Vallée, ENPC, 2007. Thèse de doctorat : Mathématiques appliquées.
- [Glowinski 1984] R. Glowinski et P. Letallec. *Finite element analysis in nonlinear incompressible elasticity*. Special Problems in Solid Mechanics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
- [Gould 2006] T. Gould et D. Burton. *A Cosserat rod model with microstructure*. New Journal of Physics, vol. 8, no. 8, pages 137–137, 2006.
- [Green 1967] A.E. Green, N. Laws et P.M. Naghdi. *A linear theory of straight elastic rods*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 25, pages 285–298, 1967.
- [Hagege 2004] B. Hagege. *Simulation du comportement mécanique des milieux fibreux en grandes transformations : application aux renforts tricotés*. PhD thesis, École Nationale Supérieure d'Art et Métiers, 2004.
- [Hallquist 1985] J.O. Hallquist, G.L. Goudreau et D.J. Benson. *Sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 51, pages 107–137, 1985.

- [Hearle 1998] J.W.S. Hearle, B. Lomas et W.D. Cooke. *Atlas of fibre fracture and damage to textiles*. Woodhead Publishing, Cambridge (England), 2 édition, 1998.
- [Hearle 2001] J. W.S. Hearle. *High-performance fibres*. Woodhead Publishing Limited in association with The Textile Institute, Cambridge (England), 2001.
- [Herrera 2004] J.M.R. Herrera. *Les mécanismes de fatigue dans les fibres thermoplastiques*. PhD thesis, École des Mines de Paris, 2004.
- [Hobbs 1982] R.E. Hobbs et M. Raoof. *Interwire slippage and fatigue prediction in stranded cables for TLP tethers*. Behaviour of Offshore Structures, Hemisphere publishing/McGraw-Hill, New York, vol. 2, pages 77–99, 1982.
- [Johnson 1985] K.L. Johnson. *Contact mechanics*. Cambridge University Press, 1985.
- [Kikuchi 1988] N. Kikuchi et J.T. Oden. *Contact problems in elasticity*. Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1988.
- [Klarbrin 1997] A. Klarbrin. *Steady sliding and linear complementarity*. Complementarity and Variational Problems : State of the Art, pages 132–147, 1997.
- [Kouznetsova 2002a] V. Kouznetsova, M.G.D. Geers et W.A.M. Brekelmans. *Multi-scale constitutive modelling of heterogenous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 54, pages 1235–1260, 2002.
- [Kouznetsova 2002b] V.G. Kouznetsova. *Computational homogenization for the multiscale analysis of multi-phase materials*. PhD thesis, Netherlands Institute for Metals Research (NIMR), 2002.
- [Kragelsky 1982] IV. Kragelsky, MN. Dobychin et VS. Komalov. *In Friction and Wear*. Calculation Methods (Translated from The Russian by N. Standen), 1982.
- [Kumar 2011] A. Kumar et S. Mukherjee. *A Geometrically exact rod model including in-plane cross-sectional deformation*. Journal of Applied Mechanics, vol. 78, page 011010, 2011.
- [Labrosse 1998] M. Labrosse. *Contribution à l'étude du rôle du frottement sur le comportement et la durée de vie des câbles monocouches*. PhD thesis, École Centrale de Nantes, France, 1998.
- [Laursen 1993] T.A. Laursen et J.C. Simo. *A continuum-based finite-element formulation for the implicit solution of multibody, Large-deformation frictional contact problems*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, vol. 36, pages 3451–3485, 1993.
- [LeBris 2005] C. LeBris. *Systèmes multi-échelles, modélisation et simulation*, volume 47. Mathématiques & applications, Volume 47, Hermes Science Publications, 2005.
- [Lechat 2007] C. Lechat. *Comportement mécanique de fibres et d'assemblages de fibres en polyester pour câbles d'amarrage de plates-formes Offshore*. PhD thesis, École des Mines de Paris, 2007.
- [LeClerc 2006] C. LeClerc. *Mécanismes microstructuraux impliqués dans la fatigue des fibres thermoplastiques*. PhD thesis, École des Mines de Paris, 2006.
- [Lee 1993] S.H. Lee. *Rudimentary considerations for adaptive gap/friction element based on the penalty method*. Comput Structures, vol. 47, pages 1043–1056, 1993.
- [Leech 1990] CM Leech. *Aspects of modelling of synthetic fibre rope*. Marine Technology Society, Washington DC, 1990.
- [Leech 2002] C.M. Leech. *The modeling of friction in polymer fibre rope*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 44, pages 621–643, 2002.
- [LeTallec 1993] P. LeTallec et M. Vidrascu. *Méthode de décomposition de domaines en calcul de structure*. Actes du premier colloque national en calcul des structures, pages 33–49, 1993.
- [Lignon 2011] E. Lignon. *Modélisation multi-échelles de nappes fibrées en compression*. PhD thesis, École Polytechnique, 2011.

- [Litewka 2002a] P. Litewka et P. Wriggers. *Contact between 3D beams with rectangular cross-sections*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 53, pages 2019–2041, 2002.
- [Litewka 2002b] P. Litewka et P. Wriggers. *Frictional contact between 3D beams*. Computational Mechanics, vol. 28, pages 26–39, 2002.
- [Lopez-Pamies 2006] O. Lopez-Pamies. *On the effective behavior, microstructure evolution, and macroscopic stability of elastomeric composites*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2006.
- [Love 1944] A.E.H. Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4th edition. Dover, New York, 1944.
- [Luenberger 1984] D.G. Luenberger. *Linear and nonlinear programming*. Addison-Wesley, Reading Mass, second edition, 1984.
- [Marcellan 2003] A. Marcellan. *Microstructures, micromécanismes et comportement à rupture de fibres PA 66*. PhD thesis, École des Mines de Paris, 2003.
- [McDevitt 2000] T.W. McDevitt et T.A. Laursen. *A mortar-finite element formulation for frictional contact problems*. Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 48, pages 1525–1547, 2000.
- [Miao 2008] Y. Miao, E. Zhou, Y. Wang et B.A. Cheeseman. *Mechanics of textile composites : Micro-geometry*. Composites Science and Technology, vol. 68, no. 7-8, pages 1671 – 1678, 2008.
- [Michalowski 1978] R.L. Michalowski et Z. Mroz. *Associated and non associated sliding rules in contact friction problems*. Archives of Mechanics, vol. 30, no. 3, pages 259–276, 1978.
- [Miehe 2009] C. Miehe et J. Dettmar. *Homogenization and Two-Scale Simulations of Granular Materials for Different Microstructural Constraints*. no. 2010, 2009.
- [Naghdi 1984] P.M. Naghdi et M.B. Rubin. *Constrained theories of rods*. J. Elast, vol. 14, pages 343–361, 1984.
- [Neukirch 2009] S. Neukirch. *Enroulement, contact et vibrations de tiges élastiques*. PhD thesis, Habilitation à diriger des recherches, UPMC Univ Paris6, 2009.
- [Nour-Omid 1987] B. Nour-Omid et P. Wriggers. *A note on the optimum choice for penalty parameters*. Communications In Applied Numerical Methods, vol. 3, no. 6, pages 581–585, 1987.
- [Oden 1983] J.T. Oden et E.B. Pires. *Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity*. Journal of Applied Mechanics, vol. 50, pages 67–76, 1983.
- [Oden 1985] J.T. Oden et J.A.C. Martins. *Models and computational methods for dynamic friction phenomena*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 52, no. 1-3, pages 527–634, 1985.
- [O'Reilly 1998] O.M. O'Reilly. *On constitutive relations for elastic rods*. Int. J. Solids Structures, vol. 35, no. 11, pages 1009–1024, 1998.
- [Pan 1993] N.I.N.G. Pan. *Prediction of statistical strengths of twisted fibre structures*. Journal of Materials Science, vol. 28, pages 6107–6114, 1993.
- [Phoenix 1979] S.L. Phoenix. *Statistical theory for the strength of twisted fiber bundles with applications to yarns and cables*. Textile Research Journal, vol. 49, no. 7, pages 407–423, 1979.
- [Pickett 2009] A.K. Pickett, J. Sirtautas et A. Erber. *Braiding simulation and prediction of mechanical properties*. Appl Compos Mater, vol. 16, pages 345–364, 2009.
- [Pietrzak 1999] G. Pietrzak et A. Curnier. *Large deformation frictional contact mechanics : continuum formulation and augmented Lagrangian treatment*. Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, vol. 177, pages 351–381, 1999.
- [Porwal 2006] P.K. Porwal, I. Beyerlein et S.L. Phoenix. *Statistical strength of a twisted fiber bundle : an extension of Daniels equal-load-sharing parallel bundle theory*. Journal of Mechanics of Materials and Structures, vol. 1, no. 8, pages 1425–1447, 2006.

- [Raoof 1988] M. Raoof et R.E. Hobbs. *Analysis of Multilayered Structural Strands*. Journal of engineering Mechanics, vol. 114, pages 1166–1182, 1988.
- [Raous 1999] M. Raous. Quasistatic signorini problem with coulomb friction and coupling to adhesion. In P. Wriggers and P. Panagiotopoulos, editors, CISM Courses and Lectures. Springer, 1999.
- [Rebel 2000] G. Rebel, K.C. Park et C.A. Felippa. *A contact-impact Formulation Based on Localised Lagrange Multipliers*. Technical Report, College of Engineering at University of Colorado, 2000.
- [Rungamornrat 2002] J. Rungamornrat, J.F. Beltran, E.B. Williamson et al. *Computational model for synthetic-fiber rope response*. In 15th Eng. Mechanics Conference, ASCE, New York, USA, 2002.
- [Salencon 1998] J. Salencon. Mécanique des milieux continus, milieux curvilignes. École Polytechnique, 1998.
- [Simo 1985a] J.C. Simo. *A Finite Strain Beam Formulation. The Three-Dimensional Dynamic Problem. Part I*. New Journal of Physics, no. 49, pages 55–70, 1985.
- [Simo 1985b] J.C. Simo, P. Wriggers et R.L. Taylor. *A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 50, pages 163–180, 1985.
- [Simo 1992] J.C. Simo et T.A. Laursen. *An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction*. Computers & Structures, vol. 42, no. 1, pages 97–116, 1992.
- [Sluis 1999] O.V.D. Sluis, P.J.G. Schreurs et M.E.H. Meijer. *Effective properties of a viscoplastic constitutive model obtained by homogenisation*. Mechanics of Materials, vol. 31, no. 11, pages 743–759, 1999.
- [Tallec 1991] P. Le Tallec, S. Mani et F.A. Rochinha. *Finite element computation of hyperelastic rods in large displacements*. Mathematical modelling and numerical analysis, 1991.
- [Tallec 1994] P. Le Tallec. *Domain decomposition methods in computational mechanics*. Computational mechanics advances, vol. 1, no. 2, pages 121–220, 1994.
- [Tallec 2009] P. Le Tallec. Modélisation et calcul des milieux continus. Editions de l'École Polytechnique, 2009.
- [Temizer 2007] I. Temizer et P. Wriggers. *An adaptive method for homogenization in orthotropic nonlinear elasticity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196, no. 35–36, pages 3409–3423, 2007.
- [Timoshenko 1921] S.P. Timoshenko. *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*. Philosophical Magazine, no. 41, pages 742–746, 1921.
- [Turner 1956] M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin et L.P. Topp. *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*. J. Aeron. Sci., vol. 23, no. 9, pages 805–823, 1956.
- [Usabiaga 2008] H. Usabiaga et J.M. Pagalday. *Analytical procedure for modelling recursively and wire by wire stranded ropes subjected to traction and torsion loads*. International Journal of Solids and Structures 45, vol. 21, pages 5503–5520, 2008.
- [Utting 1984] W.S. Utting et N. Jones. *A survey Literature on the Behaviour of Wire Ropes*. Wire Industry, pages 623–629, 1984.
- [V. Visseq 2013] D. Dureisseix V. Visseq P. Alart. *High performance computing of discrete nonsmooth contact dynamics with domain decomposition*. High performance computing of discrete nonsmooth contact dynamics with domain decomposition, vol. 96(9), pages 584–598, 2013.
- [Velinsky 1985] S.S. Velinsky. *General nonlinear theory for complex wire rope*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 27, pages 497–507, 1985.

- [Vu 2013] TH.D. Vu, D. Durville et P. Davies. *Simulation du passage de câbles tressés synthétiques sur une poulie*. vol. 1, no. 1, pages 1–7, 2013.
- [Wang 2000] Y. Wang et X. Sun. *Digital-element simulation of textile processes*. Composites Science and Technology, vol. 61, pages 311–319, 2000.
- [Wang 2010] Y. Wang, Y. Miao, D. Swenson, B.A. Cheeseman, C.F. Yen et B. LaMattina. *Digital element approach for simulating impact and penetration of textiles*. International Journal of Impact Engineering, vol. 37, no. 5, pages 552–560, 2010.
- [Wielhorski 2012] Y. Wielhorski, D. Durville et L. Marcin. *finite Element Simulation of 3D Interlock Fabrics*. Composites Week Leuven and Texcomp-11 Conference, 9 2012.
- [Willner 1997] K. Willner et L. Gaul. *Contact description by fem based on interface physics*. D.R.J. Owen, E. Hinton and E. Onate, editors, Proceedings of COMPLAS, vol. 1, pages 173–182, 1997.
- [Wriggers 1985] P. Wriggers, J. Simo et R. Taylor. *Penalty and augmented lagrangian formulations for contact problems*. J. Middleton and G. Pande, editors, Proceedings of NUMETA Conference. Balkema, Rotterdam, 1985.
- [Wriggers 1997] P. Wriggers et G. Zavarise. *On Contact Between Three-dimensional Beams Undergoing Large Deflections*. Communications in Numerical Methods in Engineering, vol. 13, pages 429–438, 1997.
- [Wriggers 2004] P. Wriggers et G. Zavarise. *Computational Contact Mechanics*. Encyclopedia of Computational Mechanics, Solids and Structures, vol. 2, 2004.
- [Wriggers 2006] P. Wriggers. Computational contact mechanics second edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [Yvonnet 2009] J. Yvonnet, D. Gonzalez et D.-C. He. *Numerically explicit potentials for the homogenization of nonlinear elastic heterogeneous materials*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 198, pages 2723–2737, 2009.
- [Zavarise 1992] G. Zavarise, P. Wriggers, E. Stein et B. Schrefler. *A numerical model for thermomechanical contact based on microscopic interface laws*. Mech. Res. Comm, no. 19, pages 173–182, 1992.
- [Zavarise 1998] G. Zavarise et P. Wriggers. *A segment-to-segment contact strategy*. Mathematical and Computer Modelling, vol. 28, pages 497–515, 1998.
- [Zhou 2004] G. Zhou, X. Sun et Y. Wang. *Multi-chain digital element analysis in textile mechanics*. MComposites Science and Technology, vol. 64, pages 239–244, 2004.