THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par Giovanni LAZZARINI

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

⋆⋆⋆

Sur la Hauteur des Tores Plats

⋆⋆⋆

Soutenue le 19 février 2015 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux
devant le jury de thèse composé de

Roland BACHER	Maître de conférences, Université Grenoble-I	Rapporteur
Christine BACHOC	Professeure, Université de Bordeaux	
Renaud COULANGEON	Maître de conférences, Université de Bordeaux	Directeur
Driss ESSOUABRI	Professeur, Université de Saint-Étienne	Président
Gabriele NEBE	Professeure, RWTH Aix-la-Chapelle	Rapporteuse

Title : On the height of Flat Tori

Abstract

In this thesis we consider the Epstein zeta function of Euclidean lattices, in order to study the problem of the minima of the height of the flat torus associated to a lattice. The height is defined as the first derivative at the point $s = 0$ of the spectral zeta function of the torus ; this function coincides, up to a factor, with the Epstein zeta function of the dual lattice of the given lattice. We describe a sufficient condition for a given lattice to be a stationary point of the height. In particular, by means of the theory of spherical designs, we show that a lattice which has a spherical 2-design on every shell is a stationary point of the height. We give an algorithm to check whether a given lattice satisfies this 2-design condition or not, and we give some tables of results in dimension up to 7. Then, we show that a lattice which realises a local minimum of the height is necessarily irreducible. Finally, we deal with some tori defined over the imaginary quadratic number fields, and we show a formula which gives their height as a limit of a sequence of heights of discrete complex tori.

Keywords Euclidean lattice, flat torus, Epstein's zeta function, height, spherical design, laplacian, heat kernel.

Résumé

Nous considérons la fonction zêta d'Epstein des réseaux euclidiens pour étudier le problème des minima de la hauteur du tore plat associé à un réseau. La hauteur est définie comme la dérivée au point $s = 0$ de la fonction zêta spectrale du tore, fonction qui coïncide, à un facteur près, avec la fonction zêta d'Epstein du réseau dual du réseau donné. Nous donnons dans cette dissertation une condition suffisante pour qu'un réseau donné soit un point critique de la hauteur. En particulier, en utilisant la théorie des designs sphériques, nous montrons qu'un réseau qui a des 2-designs sphériques sur toutes ses couches est un point critique de la hauteur. Nous donnons un algorithme pour tester si un réseau donné satisfait cette condition de 2-designs, et nous donnons des tables de résultats en dimension jusqu'à 7. Ensuite, nous montrons qu'un réseau qui réalise un minimum local de la hauteur est nécessairement irréductible. Enfin, nous nous intéressons à certains tores définis sur les corps de nombres quadratiques imaginaires, et nous prouvons une formule qui donne leur hauteur comme limite d'une suite de hauteurs de tores complexes discrets.

Mots-clés Réseau euclidien, tore plat, fonction zêta d'Epstein, hauteur, design sphérique, laplacien, noyau de la chaleur.

Institut de Mathématiques de Bordeaux
Université de Bordeaux
351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex

Remerciements

Je voudrais remercier tous ceux qui m'ont aidé pendant mon doctorat ; ce n'est pas une tâche facile, vu leur nombre, j'espère donc que les personnes que j'aurais oublié de mentionner ici sauront m'en excuser.

Je remercie tout d'abord et du plus profond de mon cœur Renaud Coulangeon. Il m'a proposé un sujet de recherche intéressant et riche, et il a fait preuve d'une patience infinie en m'apportant son soutien constant, sur le plan scientifique et sur le plan humain.

Je remercie chaleureusement Roland Bacher et Gabriele Nebe d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse ; merci en particulier à Roland pour ses très nombreuses remarques qui m'ont permis d'améliorer ce manuscrit.

Je remercie également Christine Bachoc et Driss Essouabri, qui me font l'honneur d'être membres du jury. En particulier c'est un plaisir d'y retrouver Christine, qui m'a initié aux réseaux et aux designs sphériques en encadrant mon mémoire de master.

J'adresse un remerciement spécial à Pierre Lezowski, dont l'aide a été incontournable pour mener à bien cette thèse, je pense par exemple à toutes les fois que j'ai eu un problème informatique, ou quand je cherchais un conseil pour mes enseignements ; bref, il a été mon « grand frère » mathématique et cette thèse lui doit beaucoup.

Je remercie tous les membres de l'Institut de Mathématiques de Bordeaux que j'ai pu côtoyer, en particulier Yuri Bilu, Andreas Enge, Jean-Paul Cerri, Arnaud Jehanne, Bernhard Haak, Nicola Mazzari et Dajano Tossici. Merci également aux bibliothécaires et aux administrateurs pour leur efficacité.

Je remercie les amis doctorants avec lesquels j'ai grandi ici à l'IMB : il y a tout d'abord la vieille garde composée d'Arthur-le-Camembert (un salut affectueux de la part de Giova-le-Rital) et Louis, et ensuite Clément, Stéphanie, Samuel, Zoé, Jean-Baptiste, Marie, Enea, Francesco, Daniele et Alice et tous les autres.

Merci en particulier à Bruno et Alan, auxquels j'ai posé plein de questions de français pendant la rédaction de la thèse.

Je remercie mes (désormais nombreux) étudiants, qui m'ont fait beaucoup améliorer mes habilités oratoires et pédagogiques.

Nous étions quatre quand nous sommes arrivés à Bordeaux pour la première fois en 2009, Alberto, Andrea, Nicola et moi-même. Qui eût imaginé que nous allions passer quatre ans ensemble en partageant notre vie quotidienne et nos expériences ? En particulier Andrea et Nicola, avec lesquels j'ai partagé plus longtemps mon toit, ont été ma deuxième famille. Aujourd'hui je suis le dernier des quatre à obtenir ma thèse, et un cercle se ferme ; mais je repense encore avec nostalgie à quand sans Alberto je me perdais régulièrement en allant de la Victoire à l'Apollo ; ou quand, dans nos tout premiers jours passés ici, nous sommes allés tous les quatre à l'hôpital Pellegrin, avec moi le seul à parler déjà un peu de français, pour chercher un médecin qui parle italien pour Andrea. Au final nous y avons trouvé deux chirurgiens italiens, la preuve que les Italiens sont vraiment partout ! Je remercie Dario et Gabriele, qui leur ont succédé, pour m'avoir soutenu et aidé durant la dernière année de thèse, et pour la joie et l'esprit festif qu'ils apportent à notre maison : je peux dire avoir vraiment de la chance à habiter avec eux.

Je remercie aussi les autres amis qui ont habité avec moi, Samuele et Diego, dont je n'oublie pas l'aide reçue en un moment de difficulté, et Agostino. En conclusion, je suis persuadé que pour son atmosphère conviviale notre maison a été la meilleure colocation de Bordeaux.

Je remercie affectueusement Corinne pour sa patience et ses encouragements durant la dernière phase de cette thèse, et pour les beaux moments passés ensemble.

Je ne veux pas terminer sans remercier mes amis Gemma, François, Alexandra, Daniela et Roberto.

Je conclus cette longue liste en saluant mes deux chats Andrea et Nicola, ainsi baptisés en l'honneur des anciens colocataires. Comme disait Albert Schweitzer, « il y a deux moyens d'oublier les tracas de la vie : la musique et les chats ».

Res severa verum gaudium
Sénèque

Table des matières

Introduction

Cette dissertation est consacrée à l'étude de la hauteur des tores plats.

Soit $\mathbf{R}^n$ l'espace euclidien standard de dimension n, avec son produit scalaire classique $x \cdot y$, et soit $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de $\mathbf{R}^n$. Le *réseau* Λ de $\mathbf{R}^n$ engendré par $\mathcal{B}$ est l'ensemble des combinaisons à coefficients entiers des vecteurs de $\mathcal{B}$; c'est un sous-groupe additif de $\mathbf{R}^n$, qui est fermé dans $\mathbf{R}^n$ et discret. De plus, il a la propriété que le quotient $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\Lambda$ est compact. On appelle *tore* ce quotient, et l'on dit que $\mathbf{T}^n$ est un tore *plat* parce qu'il se présente naturellement comme variété riemannienne plate, c'est-à-dire de courbure nulle en tout point.

Le *réseau dual* Λ^* est l'ensemble

$$\Lambda^* := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \forall y \in \Lambda,\ x \cdot y \in \mathbf{Z}\} \tag{1}$$

des points de $\mathbf{R}^n$ tels que leur produit scalaire avec tous les points de Λ est entier. Sur le réseau Λ on définit la *fonction zêta d'Epstein* par la série

$$Z(\Lambda, s) := \sum_{0 \neq x \in \Lambda} \frac{1}{\|x\|^{2s}}, \quad s \in \mathbf{C} \text{ avec } \operatorname{Re}(s) > n/2. \tag{2}$$

C'est une fonction de variable complexe qui tire son nom du mathématicien allemand Paul Epstein qui l'a définie dans un article de 1903. Il s'agit d'une des (nombreuses) généralisations de la fonction zêta de Riemann ζ, puisque pour le réseau $\Lambda = \mathbf{Z}$ de dimension 1 on a $Z(\mathbf{Z}, s) = 2\zeta(2s)$, et comme cette-ci, elle possède plusieurs propriétés analytiques. Epstein a en effet prouvé que $Z(\Lambda, s)$, dont le domaine de convergence est le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > n/2$, admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe privé du point $s = n/2$. En outre, elle a un pôle simple en $s = n/2$, dont le résidu est connu, et satisfait une équation fonctionnelle semblable à celle de la fonction zêta de Riemann.

Considérons à nouveau le tore $\mathbf{T}^n$; on lui associe une autre fonction zêta, dite *fonction zêta spectrale*, qui est définie de la façon suivante pour toute variété riemannienne compacte connexe sans bord. Soit (M, g) une telle variété, où g est une métrique ; on considère le Laplacien Δ_g qui opère sur l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur M à valeurs dans $\mathbf{R}$. Le *spectre* de Δ_g est l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{R}$ tels qu'il existe une fonction f vérifiant $\Delta_g f = \lambda f$. On peut démontrer que le spectre du Laplacien forme une suite discrète

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \tag{3}$$

tendant vers $+\infty$, et toute valeur propre λ est de multiplicité finie. La fonction zêta spectrale associée à (M, g) est définie comme

$$\zeta_{(M,g)}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^s}. \tag{4}$$

Cette fonction admet également un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, en particulier $\zeta_{(M,g)}$ est analytique au point $s = 0$. Cela permet de définir la *hauteur* de la variété (M, g) comme la dérivée de la fonction zêta spectrale en $s = 0$,

$$h(M, g) = \frac{d}{ds}\zeta_{(M,g)}(s)\Big|_{s=0}. \tag{5}$$

Pour motiver pour cette définition, on remarquera qu'elle permet de donner un sens au déterminant du Laplacien, grâce à l'identité formelle

$$\det{}^*\Delta_g = \prod_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \exp(-h(M, g)) \tag{6}$$

(l'apostrophe dénote, comme d'habitude, que l'on fait le produit sur les λ_i non nuls). Le problème naturel qui se pose, et qui est à l'origine de cette dissertation, est alors de maximiser $\det^* \Delta_g$ sur M, donc de minimiser la hauteur, avec g variable à volume constant, et de trouver les métriques optimales. Ce problème a été étudié par plusieurs auteurs dans des contextes différents, notamment en géométrie quantique des cordes, et dans sa formulation générale il s'agit d'une question ouverte dont la solution apparaît difficile.

Si l'on restreint le problème au tores plats, il devient plus abordable, bien qu'il soit toujours loin d'être trivial. En effet, si M est $\mathbf{T} = \mathbf{R}^n/\Lambda$, avec la métrique plate héritée de $\mathbf{R}^n$, alors le spectre du Laplacien est connu et prend une forme simple, nommément

$$\operatorname{Spec} \Delta = \{4\pi^2\|x\|^2,\ x \in \Lambda^*\}. \tag{7}$$

Par conséquent, la fonction zêta spectrale de $\mathbf{R}^n/\Lambda$ est à un facteur près la fonction zêta d'Epstein du réseau dual Λ^*, et finalement

$$h(\mathbf{T}) = Z'(\Lambda^*, 0) + \text{constante}. \tag{8}$$

Donc pour les tores plats, le problème se réduit pour ainsi dire à déterminer les réseaux Λ de dimension n qui minimisent $Z'(\Lambda^*, 0)$, pour n fixé. Puisque $Z(c\Lambda, s) = c^{-2s} Z(\Lambda, s)$, on fait varier Λ parmi les réseaux de covolume 1.

Parmi les résultats connus, on peut citer les suivants :

1. Le minimum global de h existe en toute dimension n ;
2. Pour $n = 2$, il est atteint par le réseau hexagonal, pour $n = 3$ par le réseau cubique à faces centrées. Ces deux réseaux sont aussi les seuls à réaliser le minimum global en dimension 2 et 3 respectivement.

Pour $n \geq 4$, le minimum global de h n'est pas connu, mais on connaît des minima locaux, p.ex. les réseaux D_4, E_8 et Λ_{24} réalisent un minimum local en dimension respectivement 4, 8 et 24.

La théorie des *designs sphériques* permet d'étudier ce problème d'un point de vue différent, et elle est féconde en résultats nouveaux. Rappelons la définitions de ces objets combinatoires introduits par Delsarte, Goethals et Seidel en 1977 dans l'article [27]. Soit X une partie finie de la sphère unité $\mathbf{S}^{n-1}$ de $\mathbf{R}^n$. En analyse numérique, on s'intéresse à l'estimation de l'intégrale d'une fonction $f : \mathbf{S}^{n-1} \to \mathbf{R}$. On a l'approximation

$$\frac{1}{\sigma(\mathbf{S}^{n-1})} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(x)\, d\sigma(x) \sim \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(X) \tag{9}$$

et l'on dit que X est un t-design sphérique (t entier positif) si on a l'égalité pour tout polynôme f de degré au plus t. Pour des ensembles X définis sur des sphères de rayon supérieur à 1, on dit que X est un design sphérique si X réduit à l'échelle sur la sphère unité est un design sphérique.

Étant donné un réseau Λ, il est naturel de se demander si ses *couches* sont des designs sphériques : précisément, soit $m_1(\Lambda) < m_2(\Lambda) < \cdots$ la suite des longueurs carrées des vecteurs non nuls de Λ, la k-ième couche de Λ est l'ensemble des vecteurs de Λ de longueur carrée $m_k(\Lambda)$. L'idée sous-jacente en ce domaine est que si une ou plusieurs couches de Λ sont des t-designs sphériques pour quelques valeurs de t, alors le réseau a de bonnes propriétés par rapport à des invariants tels que la densité (de l'empilement de sphères associé), les minima de la fonction zêta d'Epstein (c'est le problème des réseaux dits *Z-extrêmes*, ceux qui réalisent un minimum local de la fonction $\Lambda \mapsto Z(\Lambda, s)$ pour quelques valeurs de $s \in \mathbf{R}$, cf. la Def. 86) et les minima de la hauteur.

Un résultat récent en ce sens est celui de Coulangeon, qui a montré en 2006 qu'un réseau dont toutes les couches sont des 4-designs sphériques réalise un minimum local strict de la hauteur. Ceci permet de montrer que nombre de réseaux réalisent un minimum local de la hauteur ; de l'autre côté, on sait que de tels réseaux n'existent pas en toute dimension, même en petite dimension, p.ex. si $n = 3$, 5 ou 9 il n'y a aucun réseau avec des 4-designs sur chaque couche, alors que le minimum global de la hauteur existe en toute dimension. Cette condition est donc trop forte, et il faut essayer de la relâcher. Cela nous a amenés au premier résultat de cette dissertation :

Théorème (cf. th. 98)**.** *Soit* Λ *un réseau de covolume* 1*. Si toutes les couches de* Λ *sont des* 2*-designs sphériques, alors* Λ *est un point critique pour la fonction* $\Lambda \mapsto h(\Lambda)$*.*

Ici, le terme «point critique» s'entend dans le sens des variétés différentielles ; une définition rigoureuse est donnée dans la suite.

Le théorème ci-dessus suggère la question suivante : étant donné un réseau de dimension n, comment déterminer s'il a des 2-designs sur chaque couche ? De plus, on voudrait une classification complète de ces réseaux, au moins en petite dimension. Or, en utilisant la théorie des formes modulaires, nous avons démontré qu'on peut savoir si un réseau donné a ou non cette propriété en vérifiant un nombre fini de couches. Nous avons par conséquent élaboré un algorithme qui fait ce calcul, à l'aide de logiciels de calcul formel, notamment Pari/GP et Magma, et nous pouvons produire la classification complète de ces réseaux en dimension jusqu'à 6. En passant, de tels réseaux existent en toute dimension.

Rappelons maintenant la définition de réseau *irréductible* : un réseau Λ est réductible s'il peut s'écrire comme somme directe orthogonale de sous-réseaux non nuls, c'est-à-dire

$$\Lambda = \Lambda_1 \perp \Lambda_2 \perp \cdots \perp \Lambda_r,$$

irréductible sinon. Avec cette définition nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Théorème (cf. cor. 114)**.** *Si un réseau* Λ *de covolume* 1 *réalise un minimum local de la hauteur, il est nécessairement irréductible.*

Le fait que tous les minima de la hauteur connus soient atteints par des réseaux irréductibles est donc vrai en général.

Sur ce résultat se clôt la partie principale de cette thèse ; ce qui suit change légèrement de point de vue et s'inspire de deux articles récents de Chinta, Jorgenson et Karlsson parus en 2010 et 2012. Ces trois auteurs ont considéré des suites de *tores discrets*, c'est-à-dire des quotients de la forme $\mathbf{Z}^n/B\mathbf{Z}^n$, où B est une matrice inversible à coefficients entiers. On peut définir un Laplacien combinatoire $\Delta_{\mathbf{Z}^n/B\mathbf{Z}^n}$ sur ces tores, qui est essentiellement le Laplacien combinatoire du graphe de Cayley par rapport aux générateurs canoniques du groupe. Ce Laplacien a un spectre, avec lequel on peut définir le déterminant du Laplacien comme le produit (fini) des valeurs propres non nulles. On a donc d'un côté les tores discrets avec $\log\det^*\Delta_{\mathbf{Z}^n/B\mathbf{Z}^n}$, et de l'autre côté le tore plat $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/A\mathbf{Z}^n$ avec sa hauteur h qui peut s'interpréter comme $-\log\det^*\Delta_{\mathbf{T}}$. Le résultat principal des trois auteurs susmentionnés est une formule asymptotique qui met en relation les deux quantités dans le cas d'une suite de tores discrets qui «tend» (sens à préciser) vers un tore plat, relation qui n'était nullement garantie a priori. Notre résultat est une généralisation de cette formule à des tores définis sur les complexes, c'est-à-dire une suite de tores discrets de la forme $\mathbf{Z}[i]^n/B\mathbf{Z}[i]^n$ qui «tend» vers un tore complexe de la forme $\mathbf{C}^n/A\mathbf{C}^n$. Le résultat est le théorème 116 ; puisque l'énoncé est assez technique, nous ne l'énonçons pas ici.

En conclusion, cette thèse étudie la hauteur des tores plats, d'abord du point de vue des réseaux euclidiens associés et à l'aide notamment de la théorie des designs sphériques, et ensuite dans sa relation avec le déterminant du Laplacien des tores discrets.

Plan de cette thèse

Cette dissertation est structurée de la façon suivante :

- Le Chapitre 1 contient du matériel préliminaire. Nous définissons les réseaux et leurs invariants, la fonction zêta d'Epstein, les designs sphériques. Nous rappelons également les propriétés de base des formes modulaires, utiles dans les démonstrations du chapitre suivant. Ensuite nous définissons la fonction zêta spectrale et nous introduisons le problème de la hauteur en rappelant les résultats connus. Le chapitre se termine par la description de quelques-unes des généralisations de la fonction zêta d'Epstein, notamment la fonction zêta de Koecher, qui permet de définir une généralisation de la hauteur.
- Dans le Chapitre 2 nous démontrons qu'un réseau qui a des 2-designs sur chaque couche est un point critique de la hauteur. Nous décrivons un algorithme pour décider si un réseau a cette propriété, et nous donnons les tables des résultats en dimension jusqu'à 7, avec une classification complète de ces réseaux en dimension jusqu'à 6. Enfin, nous démontrons qu'un réseau qui réalise un minimum local de la hauteur est nécessairement irréductible.
- Le Chapitre 3 s'intéresse aux travaux de Chinta, Jorgenson et Karlsson. Nous rappelons leur résultat, à savoir que la hauteur d'un tore plat peut s'obtenir comme limite d'une suite de hauteurs de tores discrets du type $\mathbf{Z}^n/B\mathbf{Z}^n$, et nous généralisons leur formule asymptotique aux tores définis sur les complexes, en prenant des suites de tores discrets

du type $\mathbf{Z}[i]^n/B\mathbf{Z}[i]^n$.

Il ne nous reste qu'à vous souhaiter une bonne lecture.

Chapitre 1

Réseaux euclidiens, fonctions zêta, designs sphériques, hauteur

Introduction et plan du chapitre

Le but de ce chapitre est de décrire les objets mathématiques qui apparaissent dans cette thèse et d'en fixer la notation. Nous allons nous intéresser aux *réseaux*, terme par lequel nous entendons des sous-groupes discrets de rang maximal d'un espace vectoriel euclidien, et aux fonctions zêta qui sont définies sur ces réseaux. Le chapitre est organisé ainsi :

- Dans la section 1.1 nous définissons les réseaux, et nous étudions leurs propriétés et invariants principaux. La référence première pour cette section est le livre de Martinet [42] : ici nous nous bornerons à décrire ce qui est nécessaire à la compréhension de cette thèse par un non spécialiste des réseaux, en renvoyant à [42] pour un traitement plus approfondi du sujet.

- Dans la Section 1.2 nous définissons la fonction zêta d'Epstein, nous présentons ses propriétés principales et nous nous intéressons à quelques-unes de ses généralisations, notamment la fonction zêta de Koecher.

- Dans la Section 1.3 nous décrivons les designs sphériques, des objets issus de la combinatoire et qui peuvent être utilisés pour étudier les réseaux. Ici notre référence principale est l'article de Venkov [62]. Ensuite nous faisons le lien avec les formes modulaires : après quelques rappels sur les propriétés de ces fonctions très classiques, nous étudions les connexions qui existent entre réseaux, designs sphériques et formes modulaires.

- Enfin, dans la Section 1.4, nous changeons le point de vue, nous considérons la variété riemannienne donnée par le tore plat associé à un réseau euclidien, nous définissons sa fonction zêta spectrale et finalement sa hauteur, l'étude de laquelle est au cœur de cette thèse. Nous terminons ce chapitre en donnant les résultats connus sur les extrema locaux de la hauteur.

1.1 Réseaux

1.1.1 Définitions et premières propriétés

Outre le livre *Perfect lattices in Euclidean spaces* de Martinet [42], nous avons utilisé comme ouvrages de référence le classique *Sphere packings, lattices and groups* de Conway et Sloane [17] (familièrement appelé SPLAG par les spécialistes) et le livre *Lattices and codes* de Wolfgang Ebeling [31]. D'ailleurs, le livre d'Ebeling a été aussi utile pour la partie sur les formes modulaires.

1.1.1.1 Réseaux des espaces vectoriels réels

Nous commençons par la définition générale de réseau, dans un espace vectoriel réel E de dimension n, muni de sa topologie naturelle, qui est définie par une norme arbitraire d'espace vectoriel. À partir de 1.1.1.2, E sera toujours $\mathbf{R}^n$ avec sa structure d'espace euclidien.

Définition 1. Un *réseau*[*] *de* E est un sous-groupe Λ de E vérifiant la propriété suivante : il existe une base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de E telle que Λ soit l'ensemble des combinaisons $\mathbf{Z}$-linéaires des v_i, c'est-à-dire

$$\Lambda = \{x \in E : x = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i,\ m_i \in \mathbf{Z}\}. \tag{1.1}$$

∗. Anglais *lattice*, allemand *Gitter*, espagnol *red* ou *retículo*, portugais *retículo* ou *reticulado*, italien *reticolo*. Le mots réseau et red dérivent du latin *retis*, «rets, filet», les autres langues romanes partent de son diminutif latin *reticulum*. Par contre Gitter, qui signifie littéralement «grille», semble être un dérivé de Gatter, «clôture», attesté dès le VIIIe siècle. Enfin, l'anglais lattice vient du vieux français *lattis*, qui en français moderne se prononce sans l's final, et qui est d'origine germanique.

On dit alors que $\mathcal{B}$ est une *base* de Λ. Le *parallélotope fondamental* de Λ par rapport à $\mathcal{B}$ est l'ensemble

$$P_{\mathcal{B}} = \{x \in E : x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i,\ x_i \in [0,1[\}. \tag{1.2}$$

On remarque tout de suite que deux bases $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ de E définissent le même réseau si et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ (c'est-à-dire, elle est entière et inversible de taille n).

Les réseaux définis par la Définition 1 sont aussi appelés *réseaux de rang n*, ou *réseaux de rang maximal.*

Définition 2. Un *réseau de rang $m \leq n$* de E est un réseau d'un sous-espace F de E de dimension m. En d'autres termes, c'est le sous-groupe M de E constitué des combinaisons $\mathbf{Z}$-linéaires d'un ensemble de m vecteurs indépendants $v_1, \ldots, v_m$ de E. Si Λ est un réseau de E, tout réseau M de E de rang $m \leq n$ contenu dans Λ est un *sous-réseau* de Λ.

Il faut préciser qu'avec cette définition, un sous-réseau de Λ n'est pas en général un réseau de E, sauf évidemment si $m = n$. Quelques auteurs (dont Martinet) parlent de *réseaux relatifs* pour se référer aux réseaux de rang non maximal de E, en réservant le terme de réseau aux seuls réseaux de rang n (*full-rank lattices* en anglais).

Remarque 3. Le réseaux relatifs sont des sous-groupes discrets et fermés de E, et les réseaux de rang maximal sont caractérisés par le fait que le quotient E/Λ est de plus compact. En effet, si Λ a rang n, alors E/Λ est l'image de l'adhérence d'un parallélotope fondamental P de Λ par la surjection canonique $E \to E/\Lambda$, donc c'est un ensemble compact. Réciproquement, si Λ n'est pas de rang maximal, soient $v_1, \ldots, v_m$ une base de Λ et complétons-la en une base $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, w_n$ de E. On voit alors que le quotient

$$E/\Lambda = \frac{\mathbf{R}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}v_n}{\mathbf{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}v_m} = (\mathbf{S}^1)^m \times \mathbf{R}^{n-m}$$

a une partie libre, et par conséquent il n'est pas compact.

La réciproque est vraie, à savoir les sous-groupes discrets des E sont des réseaux relatifs ; c'est une conséquence du résultat suivant plus général :

Théorème 4 (cf. Bourbaki [8], Ch. VII, Th. 2)**.** *Un sous-groupe fermé de E est de la forme $\Lambda \oplus F'$, où Λ est un réseau dans un sous-espace F de E et F' est un autre sous-espace de E en somme directe avec F.*

Corollaire 5. *Soit G un sous-groupe discret de E, soit V le sous-espace de E engendré par G et soit $m = \dim V$. Alors G est $\mathbf{Z}$-libre de rang m.*

Corollaire 6. *Un sous-groupe $\mathbf{Z}$-libre de E de $\mathbf{Z}$-rang supérieur ou égal à $n+1$ n'est pas discret.*

Donc les sous-groupes discrets de E, qui sont forcément fermés, sont des réseaux relatifs de rang $m \leq n$: ce résultat, parfois appelé *Théorème de Jacobi et Bravais*, justifie la définition de réseau donnée dans l'introduction.

Remarque 7. Il est utile d'observer que le $\mathbf{Z}$-rang d'une famille $v_1, \ldots, v_r$ de vecteurs de $\mathbf{R}^n$, qui est le cardinal d'une famille $\mathbf{Z}$-libre maximale de $\mathbf{Z}v_1 + \cdots + \mathbf{Z}v_r$ coïncide avec le $\mathbf{Q}$-rang de $v_1, \ldots, v_r$, qui n'est que la $\mathbf{Q}$-dimension du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par les v_i.

Sous-réseaux primitifs. Parmi les sous-réseaux d'un réseau Λ on distingue les sous-réseaux primitifs :

Définition 8. Un sous-réseau M d'un réseau Λ de E est dit *primitif* si le quotient Λ/M est un $\mathbf{Z}$-module sans torsion (donc libre, puisqu'il est de type fini).

Lemme 9. *Si M et M' sont deux sous-réseaux de Λ, tous deux primitifs, de même rang et tels que $M \subseteq M'$, alors $M = M'$.*

Démonstration. Le quotient M'/M est un sous-groupe de Λ/M, qui est sans torsion, donc il est aussi sans torsion. Comme M et M' ont le même rang, le quotient a rang zéro, donc c'est le groupe nul. □

Soit Λ un réseau de E, et soit F un sous-espace de E, de dimension m. L'intersection $M = \Lambda \cap F$ est un réseau relatif contenu dans F (c'est un sous-groupe discret de F), et c'est un réseau de F, c.-à-d. il a rang m, si et seulement si F contient m éléments indépendants de Λ.

Proposition 10 (cf. aussi [42], Prop. 1.1.3)**.** *(i) Pour tout réseau Λ de E et tout sous-espace F de E, $M = \Lambda \cap F$ est un sous-réseau primitif de Λ.*

(ii) Toute base de M peut être complétée en une base de Λ.

(iii) Tout sous-réseau N de rang m de Λ est contenu dans un unique sous-réseau primitif M de Λ du même rang m, nommément $M = \mathbf{Q}N \cap \Lambda$, où $\mathbf{Q}N$ est le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par les combinaisons $\mathbf{Q}$-linéaires des éléments de N.

Démonstration. (i) On vérifie immédiatement que le quotient Λ/M est sans torsion : soit $x \in \Lambda$ tel que $kx \in \Lambda \cap F$ pour quelque $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$, alors $kn \in F$, ce qui implique $(1/k)kx = x \in F$, et $x \in \Lambda$ par hypothèse, donc $x \in M$.

(ii) Soit $w_1, \dots, w_l$ une base de M : le quotient Λ/M est libre par *(i)*, donc soit

$$\Lambda/M = \mathbf{Z}\overline{u_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}\overline{u_{n-l}}. \tag{1.3}$$

Si on adjoint à $w_1, \dots, w_l$ des relèvements u_j dans Λ des $\overline{u}_j$ on obtient une base $w_1, \dots, w_l, u_1, \dots, u_{n-l}$ de Λ. En effet, soit $x \in \Lambda$: alors $\overline{x} \in \Lambda/M$ s'écrit comme combinaison

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{n-l} b_j \overline{u_j}, \;\; b_j \in \mathbf{Z}.$$

Cela implique que $x - \sum b_j u_j \in M$, donc

$$x - \sum b_j u_j = \sum_{i=1}^{l} a_i w_i, \;\; a_i \in \mathbf{Z}$$

d'où

$$x = \sum b_j u_j + \sum a_i w_i.$$

Les u_j et w_i sont au nombre de n, ils sont des éléments de Λ et ils engendrent Λ, donc ils forment une base de Λ.

(iii) Considérons $M = \mathbf{Q}N \cap \Lambda$: c'est un sous-réseau de Λ car il est un sous-groupe discret de E contenu dans Λ. Le rang de M est au moins m car M contient N, et il ne peut être supérieur à m car autrement $\mathbf{Q}N$ contiendrait plus de m vecteurs indépendants (sur $\mathbf{R}$), donc $\operatorname{rk} M = n$. On vérifie que le quotient Λ/M est sans torsion comme en *(i)*, donc M est primitif. Enfin, l'unicité découle du Lemme 9.

□

Remarque 11. Du point *(iii)* de la proposition précédente, on déduit que $\mathbf{R}N \cap \Lambda = \mathbf{Q}N \cap \Lambda = M$, car il est aisé de voir que $\mathbf{R}N \cap \Lambda$ est aussi un sous-réseau primitif de rang m de Λ contenant N, et donc par le Lemme 9 il coïncide avec M.

La proposition suivante sera utilisée en 1.1.2.1 :

Proposition 12 (cf. [42], Prop. 1.1.4)**.** *Soit F un sous-espace de E, et F' un sous-espace complémentaire de F dans E. La projection $\pi_F(\Lambda)$ d'un réseau Λ sur F parallèlement à F' est un sous-groupe discret de F si et seulement si $\Lambda \cap F'$ est un réseau de F'. Dans ce cas, $\pi_F(\Lambda)$ est un réseau de F.*

Démonstration. Si $\pi_F(\Lambda)$ est un sous-groupe discret de F, alors par le théorème de Jacobi et Bravais il est un réseau relatif de F, en particulier il a rang au plus $\dim F$. D'autre part le rang de $\pi_F(\Lambda)$ comme réseau relatif est le $\mathbf{Z}$-rang de $\pi_F(\Lambda)$ comme $\mathbf{Z}$-module, et ceci est égal à la dimension du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}\pi_F(\Lambda)$ (Remarque 7). Or la $\mathbf{Q}$-dimension de $\mathbf{Q}\pi_F(\Lambda)$ est $n - r_1$ où r_1 est la $\mathbf{Q}$-dimension du noyau de la projection $\mathbf{Q}$-linéaire

$$\tilde{\pi}_F : \mathbf{Q}\Lambda \to F.$$

Le noyau de $\tilde{\pi}_F$ est $\mathbf{Q}\Lambda \cap F'$, donc $r_1 \leq r$, où $r = \dim F'$. Alors $n - r_1 \geq n - r = \dim F$, donc on doit avoir l'égalité $r_1 = r$. Par conséquent, $\mathbf{Q}\Lambda \cap F' = \mathbf{Q}(\Lambda \cap F')$ a dimension $\dim F'$, donc $\Lambda \cap F'$ a rang $\dim F'$ et il est un réseau de F', et $\pi_F(\Lambda)$ a rang $\dim F$ et il est un réseau de F.

Réciproquement, si $\Lambda \cap F'$ est un sous-réseau de F', alors par la Proposition 10 on a

$$\Lambda = (\Lambda \cap F') \oplus N, \tag{1.4}$$

pour un certain réseau relatif N de rang $n - r$. Il est clair que $\pi_F(\Lambda) = \pi_F(N)$, et si

$$N = \mathbf{Z}v_{r+1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}v_n$$

avec les v_i indépendants sur $\mathbf{R}$, alors leurs projections $\pi_F(v_i)$ sont encore indépendantes sur $\mathbf{R}$ car $\langle v_{r+1}, \ldots, v_n \rangle$ est en somme directe avec F'. Ainsi $\pi_F(N)$ est un réseau relatif de rang $n - r$, contenu dans F, donc il est discret et il est un réseau de F. □

Identification des réseaux à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})/\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$**.** Si Λ est un réseau de E et ϕ est un élément de $\mathrm{GL}(E)$, alors il est clair que $\phi(\Lambda)$ est un nouveau réseau, et aussi qu'on peut obtenir tous les réseaux de E comme images d'un réseau fixé Λ_0 par des éléments de $\mathrm{GL}(E)$. En outre, on a $\phi(\Lambda_0) = \psi(\Lambda_0)$ si et seulement si $\phi^{-1}\psi$ appartient au stabilisateur en $\mathrm{GL}(E)$ de Λ_0. On en déduit une identification de l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des réseaux de E avec les classes d'équivalence gauches de $\mathrm{GL}(E)$ modulo $\mathrm{Stab}(\Lambda_0)$, c'est-à-dire avec les ensembles de la forme $u\,\mathrm{Stab}(\Lambda_0)$, $u \in \mathrm{GL}(E)$. Si maintenant on choisit une base $\mathcal{B}_0$ de Λ_0, on peut identifier $\mathrm{GL}(E)$ à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{Stab}\,\Lambda_0$ à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$: on en déduit une identification

$$\mathcal{L}(E) = \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})/\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}).$$

1.1.1.2 Réseaux de $\mathbf{R}^n$

Dorénavant on suppose $E = \mathbf{R}^n$ muni de sa structure d'espace euclidien, c'est-à-dire du produit scalaire standard noté $x \cdot y$, auquel est associée la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$. Dans la suite, il sera plus souvent question de la longueur carrée $\mathrm{N}(x) = x \cdot x$, ce qui permet d'avoir des nombres entiers dans beaucoup de formules. Les définitions et les résultats donnés ici et jusqu'à la fin de cette section peuvent se généraliser à un espace euclidien E quelconque, comme c'est le cas dans le livre de Martinet [42].

Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique orthonormée de $\mathbf{R}^n$.

Définition 13 (Matrice génératrice)**.** Si $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ est une base du réseau Λ, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix},$$

dont les colonnes sont les éléments de $\mathcal{B}$, est appelée une *matrice génératrice* de Λ. On a donc

$$\Lambda = A\mathbf{Z}^n = \{x \in \mathbf{R}^n : x = Am,\ m \in \mathbf{Z}^n\}.$$

Ainsi une matrice génératrice de Λ est toujours un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, et deux matrices A et $A' = \begin{pmatrix} v_1' & v_2' & \cdots & v_n' \end{pmatrix}$ sont matrices génératrices du même réseau Λ si et seulement si $A' = AP$, avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$, nommément P est la matrice de passage de la base $(v_1, \ldots, v_n)$ à la base $(v_1', \ldots, v_n')$.

Définition 14 (Matrice de Gram)**.** Avec les mêmes notations employées ci-dessus, la matrice

$$Q = (v_i \cdot v_j)_{i,j} = A^t A$$

est appelée la *matrice de Gram* de Λ relative à la base $\mathcal{B}$.

C'est une matrice carrée symétrique de taille n. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de Λ, avec matrices génératrices respectivement A et A', alors la relation qui existe entre les deux matrices de Gram Q et Q' est évidemment

$$Q' = P^t Q P, \tag{1.5}$$

où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ est la même matrice de changement de base évoquée plus haut. Puisque $\det P = \pm 1$, les définitions suivantes sont justifiées :

Définition 15 (Covolume)**.** Si $\mathcal{B}$ est une base de Λ et $A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ la matrice génératrice associée, on appelle *covolume* de Λ la valeur absolue du déterminant de A, et l'on écrit

$$\operatorname{vol} \Lambda = |\det A|.$$

Définition 16 (Déterminant)**.** Si Q est la matrice de Gram associée à $\mathcal{B}$, on appelle *déterminant* de Λ, noté $\det \Lambda$, le déterminant de Q.

En voici les propriétés fondamentales :

Proposition 17. *(i) Le covolume de Λ est le volume de n'importe quel parallélotope fondamental (d'où son nom).*

(ii) Tant le covolume que le déterminant ne dépendent pas de la base de Λ choisie.

(iii) On a la relation
$$\det \Lambda = (\operatorname{vol} \Lambda)^2. \tag{1.6}$$

La démonstration est immédiate. La relation (1.5) implique aussi que si une matrice de Gram de Λ est entière (c.-à-d. à coefficients dans $\mathbf{Z}$), alors toutes ses matrices de Gram le sont, ce qui justifie la définition suivante :

Définition 18. Un réseau Λ est dit *entier* si une matrice de Gram pour Λ est à coefficients entiers, et *unimodulaire* s'il est entier et de déterminant 1. Un réseau est *rationnel* si une de ses matrices de Gram est à coefficients dans $\mathbf{Q}$.

La proposition suivante se démontre rapidement :

Proposition 19. *Un réseau Λ est entier si et seulement si la valeur de $x \cdot y$ est entière pour tout x et y dans Λ.*

Démonstration. Il suffit d'observer que si $x = Am$, $y = Am'$, avec $m,\ m' \in \mathbf{Z}^n$, alors $x \cdot y = m^t Q m'$. □

Définition 20. Un réseau Λ est dit *pair* (resp. *impair*) s'il est entier, et si $x \cdot x$ est pair pour tout $x \in \Lambda$ (resp. s'il existe au moins un $x \in \Lambda$ de longueur carrée impaire).

Proposition 21. *Les assertions suivantes sont équivalentes pour un réseau Λ :*

(i) Λ est pair ;

(ii) Pour tout $x \in \Lambda$, $x \cdot x$ est pair ;

(iii) Λ a une matrice de Gram entière avec termes diagonaux pairs.

Démonstration. *(i)* $\Leftrightarrow$ *(ii)* L'implication $\Rightarrow$ est triviale, pour $\Leftarrow$ il faut montrer que Λ est entier, et pour cela, on utilise l'identité
$$x \cdot y = \frac{1}{2}(\mathrm{N}(x+y) - \mathrm{N}(x) - \mathrm{N}(y)).$$

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ L'implication $\Rightarrow$ est triviale, pour $\Leftarrow$ on remarque que si $Q = (q_{i,j})$ est une matrice de Gram pour Λ entière et avec diagonale principale paire, alors Λ est clairement entier, et si $x = Am$ avec $m \in \mathbf{Z}^n$ est un élément de Λ, on a

$$x \cdot x = Q[m] = \sum_{i=1}^{n} q_{i,i} m_i^2 + 2 \sum_{i<j} q_{i,j} m_i m_j \in 2\mathbf{Z}. \tag{1.7}$$

□

Il existe une généralisation naturelle de la matrice de Gram et du déterminant pour les réseaux relatifs de $\mathbf{R}^n$, dont il sera question en 1.4.6 :

Définition 22. Soit M un réseau relatif de $\mathbf{R}^n$ de rang m, et soit $w_1, \dots, w_m$ une base pour M. La matrice de Gram de M par rapport à $w_1, \dots, w_m$ est

$$Q = (w_i \cdot w_j)_{i,j} = A^t A \tag{1.8}$$

où A est la matrice $n \times m$ qui a les w_i en colonne. Le déterminant de M est le déterminant d'une de ses matrices de Gram.

Puisque si $w'_1, \dots, w'_m$ est une autre base pour M on a $A' = AP$, avec $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{Z})$, la relation entre les deux matrices de Gram est $Q' = P^t Q P$, et donc le déterminant du sous-réseau M ne dépend pas de la base choisie, exactement comme pour les réseaux de rang maximal.

Pour clore cette sous-section, un fait basique et d'usage fréquent :

Proposition 23 (cf. aussi [42], Prop. 1.1.5.)**.** *Soit Λ' un sous-réseau de Λ. Alors l'indice $[\Lambda : \Lambda']$ est fini si et seulement si Λ' est aussi de rang maximal n, et dans ce cas*

$$\mathrm{vol}(\Lambda') = \mathrm{vol}(\Lambda)[\Lambda : \Lambda'], \tag{1.9}$$

soit

$$\det(\Lambda') = \det(\Lambda)[\Lambda : \Lambda']^2. \tag{1.10}$$

Démonstration. Si Λ' a rang $m < n$, alors le quotient Λ/Λ' a une partie libre, donc l'indice de Λ' dans Λ est infini. En revanche, si Λ' a rang n, le *théorème des diviseurs élémentaires* de la théorie des anneaux principaux (cf. [40], Ch. III, Th. 7.8) affirme l'existence d'une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de Λ et d'entiers $a_1, \dots, a_n$ positifs tels que $\mathcal{B}' = (a_1 v_1, \dots, a_n v_n)$ soit une base de Λ'. Alors $\mathrm{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$, d'où $\det \mathrm{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \prod_i a_i$. Puisque

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}), \tag{1.11}$$

on a

$$\mathrm{vol}(\Lambda') = \mathrm{vol}(\Lambda) \prod_i a_i; \tag{1.12}$$

d'autre part, l'isomorphisme $\Lambda/\Lambda' = \bigoplus_i \mathbf{Z}/a_i\mathbf{Z}$ montre que $[\Lambda : \Lambda']$ est aussi égal à $\prod_i a_i$. □

1.1.2 Dualité, automorphismes, formes quadratiques

1.1.2.1 Réseau dual, orthogonalité

À tout réseau Λ est associé canoniquement son réseau dual Λ^* :

Définition 24 (Réseau dual)**.** Soit Λ un réseau de $\mathbf{R}^n$. Le *réseau dual* de Λ est

$$\Lambda^* := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \forall y \in \Lambda,\ x \cdot y \in \mathbf{Z}\}. \tag{1.13}$$

On observe que cette définition est compatible avec la notion standard de dualité pour $\mathbf{R}^n$: en effet, si $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de Λ, la base duale $\mathcal{B}^*$ de $\mathbf{R}^n$, définie comme l'unique base $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ telle que

$$v_i \cdot v_j^* = \delta_{i,j}, \tag{1.14}$$

est une $\mathbf{Z}$-base de Λ^*. La vérification est simple : si $y = a_1v_1 + \dots + a_nv_n \in \Lambda$, on a $v_i^* \cdot y = a_i \in \mathbf{Z}$, donc le réseau engendré par les v_i^* est contenu dans Λ^* ; d'autre part si $x \in \Lambda^*$, on peut écrire $x = b_1v_1^* + \dots + b_nv_n^*$ pour des $b_j \in \mathbf{R}$, mais la condition (1.14) implique $x \cdot v_j^* = b_j \in \mathbf{Z}$, donc Λ^* est contenu dans $\mathbf{Z}v_1^* \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}v_n^*$, d'où l'égalité.

Nous venons de voir que Λ^* est bien un réseau de $\mathbf{R}^n$. Voici les propriétés fondamentales du réseau dual :

Lemme 25. *(i) Si A est une matrice génératrice de Λ, $A^* = (A^{-1})^t$ est une matrice génératrice de Λ^*.*

(ii) Si Q est une matrice de Gram de Λ, $Q^* = Q^{-1}$ est une matrice de Gram de Λ^*.

(iii) Le déterminant de Λ^* est l'inverse du déterminant de Λ.

(iv) Le dual du dual $(\Lambda^*)^*$ de Λ est Λ.

Démonstration. Si $\mathcal{B}$ est la base de Λ associée à la matrice génératrice A, la condition (1.14) se traduit par $(A^*)^tA = \mathbf{1}_n$. Les autres sont des conséquences immédiates. □

La notion de sous-espace orthogonal $K^\perp$ d'un sous-ensemble K de $\mathbf{R}^n$ est bien connue ; la définition de sous-réseau orthogonal est analogue :

Définition 26. Soit K un sous-ensemble du réseau Λ. On appelle le $\mathbf{Z}$-module

$$K^\perp = \{y \in \Lambda \mid x \cdot y = 0\ \forall x \in K\} \tag{1.15}$$

le *sous-réseau* (puisqu'il s'agit bien d'un sous-réseau) *orthogonal* à Λ.

Au paragraphe 1.4.6 nous aurons besoin de la proposition suivante, qui met en évidence quelques-unes des relations entre orthogonalité et dualité.

Proposition 27 (cf. [42], Cor. 1.3.4)**.** *Soit Λ un réseau et F un sous-espace de $\mathbf{R}^n$. Alors $\Lambda \cap F$ est un réseau dans F si et seulement si $\Lambda^* \cap F^\perp$ est un réseau en $F^\perp$. Dans ce cas*

$$\det(\Lambda)\det(\Lambda^* \cap F^\perp) = \det(\Lambda \cap F). \tag{1.16}$$

Pour la démonstration, nous avons regroupé les Prop. 1.3.4 et 1.2.9 de [42] :

Lemme 28. *(i) Soient $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de $\mathbf{R}^n$, $F = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ et $\pi_{F^\perp}$ la projection orthogonale sur $F^\perp$. Si v_i' dénote $\pi_{F^\perp}(v_i)$ pour $i > r$, on a*

$$\det(\mathbf{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}v_n) = \det(\mathbf{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}v_r)\det(\mathbf{Z}v_{r+1}' \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}v_n'). \tag{1.17}$$

(ii) Soit Λ un réseau, F un sous-espace de $\mathbf{R}^n$ tel que $\Lambda \cap F$ soit un réseau de F, et $\pi_{F^\perp}$ la projection orthogonale sur $F^\perp$. Alors

$$\det(\Lambda) = \det(\Lambda \cap F)\det(\pi_{F^\perp}(\Lambda)). \tag{1.18}$$

Démonstration. (i) Soit $A = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_r \end{pmatrix}$, alors $\det(\mathbf{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}v_n) = (\det A)^2$. Pour tout $i > r$ on décompose v_i en une somme orthogonale $\pi_F(v_i) + \pi_{F^\perp}(v_i)$: alors

$$\begin{aligned}\det A = \det &\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_r & v_{r+1} & \cdots & \pi_F(v_i) & \cdots & v_n \end{pmatrix} \\ &+ \det \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_r & v_{r+1} & \cdots & \pi_{F^\perp}(v_i) & \cdots & v_n \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.19}$$

et le premier terme à droite est évidemment nul car $\pi_F(v_i)$ est dans l'espace engendré par les r premières colonnes. Donc

$$\det(\mathbf{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}v_n) = \det(\mathbf{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}v_r \oplus \mathbf{Z}v_{r+1}' \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}v_n'); \tag{1.20}$$

or la matrice de Gram de $(v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}', \ldots v_n')$ est par blocs à cause de l'orthogonalité, donc son déterminant est bien le produit des deux déterminants de l'énoncé.

(ii) Soit $r = \dim F$. Par la Proposition 12, $\pi_{F^\perp}(\Lambda)$ est un réseau de $F^\perp$, et par la Proposition 10 on peut prendre une base $(v_1, \ldots, v_r)$ de $\Lambda \cap F$ et la compléter en une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de Λ ; le résultat suit immédiatement du point précédent.

□

Démonstration de la Proposition 27. Si $\Lambda \cap F$ est un réseau de F, on peut trouver une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de Λ telle que $(v_1, \ldots, v_r)$ soit une base de $\Lambda \cap F$ par la Proposition 10. Les $n - r$ derniers vecteurs $(v^*_{r+1}, \ldots, v^*_n)$ de la base duale sont dans $\Lambda^* \cap F^\perp$. Puisque $\dim F^\perp = n - r$, $\Lambda^* \cap F^\perp$ est un réseau de $F^\perp$. En échangeant Λ avec Λ^* et F avec $F^\perp$, on obtient la réciproque. Dans ce cas, on voit que $(\pi_F(v^*_1), \ldots, \pi_F(v^*_r))$ est la base duale en F de la base $(v_1, \ldots, v_r)$, en particulier

$$(\Lambda \cap F)^* = \pi_F(\Lambda^*). \tag{1.21}$$

Retournée, cette identité donne $\Lambda^* \cap F^\perp = (\pi_{F^\perp}(\Lambda))^*$, d'où

$$\det(\Lambda^* \cap F^\perp) = \det(\pi_{F^\perp}(\Lambda))^{-1} \tag{1.22}$$

et l'on conclut grâce à (1.18). □

1.1.2.2 Groupe des automorphismes

Si Λ et Λ' sont deux réseaux de $\mathbf{R}^n$, alors il y a toujours un automorphisme ϕ de $\mathbf{R}^n$ tel que $\phi(\Lambda) = \Lambda'$, car il suffit de prendre des bases $\mathcal{B}$ de Λ et $\mathcal{B}'$ de Λ' et de considérer l'unique application linéaire ϕ qui envoie $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$. Cela justifie le fait que pour les réseaux des espaces euclidiens, en particulier de $\mathbf{R}^n$, la définition naturelle d'automorphisme ne permet que des isométries :

Définition 29. Une *isométrie* entre deux réseaux Λ et Λ' de $\mathbf{R}^n$ est une isométrie ϕ de $\mathbf{R}^n$ telle que $\phi(\Lambda) = \Lambda'$; on écrit $\Lambda \simeq \Lambda'$ pour indiquer que Λ et Λ' sont isométriques. Un *automorphisme* de Λ est une isométrie de Λ avec lui-même ; on dénote par $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ le groupe des automorphismes de Λ.

Définition 30. Une *similitude* de $\mathbf{R}^n$ de rapport $\lambda > 0$ est un endomorphisme σ tel que $\sigma(x) \cdot \sigma(y) = \lambda^2(x \cdot y)$ pour tout x et y en $\mathbf{R}^n$ (c'est la composition commutative d'une homothétie et d'une isométrie de $\mathbf{R}^n$). On écrit $\Lambda \sim \Lambda'$ pour indiquer que Λ et Λ' sont semblables.

Théorème 31 (cf. [42], th. 1.4.2)**.** *Le groupe des automorphismes d'un réseau est fini.*

Démonstration. On voit de sa définition que

$$\mathrm{Aut}(\Lambda) = \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})}(\Lambda).$$

Or, le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, et le stabilisateur $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})}(\Lambda)$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, car on a vu en 1.1.1.1 que l'on peut l'identifier à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$. Par conséquent, $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ est fini. □

Si Λ et Λ' sont deux réseaux isométriques de $\mathbf{R}^n$, et ϕ est une isométrie de Λ sur Λ', alors

$$\mathrm{Aut}(\Lambda') = \mathrm{Aut}(\phi(\Lambda)) = \phi\,\mathrm{Aut}(\Lambda)\phi^{-1}. \tag{1.23}$$

La classe de conjugaison du groupe des automorphismes de Λ, ainsi que son ordre, sont donc des invariants de la classe d'isométrie de Λ ; il en est de même du déterminant.

Composantes irréductibles Nous abordons maintenant la décomposition d'un réseau en somme orthogonale de sous-réseaux.

Définition 32. Soit Λ un réseau, et soient $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$ des sous-réseaux de Λ qui sont des réseaux des sous-espaces vectoriels $V_1, \dots, V_r$ de $\mathbf{R}^n$: on dit que Λ est *somme (directe) orthogonale* des Λ_i et l'on écrit

$$\Lambda = \Lambda_1 \perp \cdots \perp \Lambda_r$$

si $\Lambda = \Lambda_1 + \cdots + \Lambda_r$ et les V_i sont deux à deux orthogonaux.

Dans ce cas, les deux sommes $\sum \Lambda_i$ et $\sum V_i = \mathbf{R}^n$ sont directes.

Définition 33. Un réseau Λ est dit *irréductible* s'il n'est pas zéro, et s'il n'est pas somme orthogonale de deux réseaux relatifs non réduits à zéro.

Voici un résultat classique qui assure l'existence et l'unicité de la décomposition en irréductibles :

Théorème 34 (Eichler, Kneser ; cf. [42], th. 1.4.5)**.** *Un réseau Λ possède une décomposition en somme directe orthogonale de réseaux relatifs irréductibles $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$, appelés* composantes irréductibles*, et cette décomposition est unique à une permutation des Λ_i près.*

Démonstration. La démonstration suivante, plus détaillée, se trouve seulement dans la version française du livre de Martinet [42].

L'existence d'une telle décomposition se voit facilement par récurrence sur le rang des Λ_i : si Λ n'est pas irréductible, alors il est de la forme

$$\Lambda = \Lambda' \perp \Lambda''$$

avec Λ' et Λ'' non réduits à zéro, et l'on continue avec la décomposition de Λ' et Λ''.

Pour l'unicité, on utilise un argument dû à Eichler et à Kneser : on dit qu'un vecteur non nul $x \in \Lambda$ est *réduit* s'il n'est pas somme de deux vecteurs de Λ de normes plus petites, et que deux vecteurs réduits x et y de Λ sont *contigus* s'il existe une chaîne $x_0 = x, x_1, \dots, x_k = y$ de vecteurs réduits de Λ avec $x_i \cdot x_{i+1} \neq 0$ pour $1 \leq i < k$.

Ces définitions impliquent les trois propriétés suivantes :

1. la somme de deux vecteurs orthogonaux non nuls n'est pas réduite ;
2. la contiguïté est une relation d'équivalence ;
3. tout vecteur non nul $x \in \Lambda$ est somme de vecteurs réduits (soit x est réduit, soit il est somme de deux vecteurs de Λ de norme strictement inférieure, et l'on conclut par récurrence sur la norme de x, compte tenu du fait que les normes des vecteurs de Λ forment un sous-ensemble discret de $\mathbf{R}$).

Soit $\mathcal{R}$ un système de représentants des classes de vecteurs réduits de Λ pour la relation de contiguïté, et, pour $x \in \mathcal{R}$, soit $\Lambda(x)$ le sous-réseau de Λ engendré par les vecteurs réduits équivalents à x. Si $x, y \in \mathcal{R}$ sont distincts, alors la somme $\Lambda(x) + \Lambda(y)$ est orthogonale : par (3), il suffit de prouver que tous vecteurs réduits $x' \in \Lambda(x)$ et $y' \in \Lambda(y)$ sont orthogonaux, et cela est vrai, car autrement ils seraient contigus. Or, pour $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{R}$, on a $k \leq \bigoplus_{i \leq k} \dim \Lambda(x_i) \leq \dim \Lambda$, d'où $\mathcal{R}$ est fini et $\Lambda =\perp_{x \in \mathcal{R}} \Lambda(x)$ par (3).

Si maintenant $\Lambda =\perp_i \Lambda_i$ est une autre décomposition, tout $x \in \mathcal{R}$ appartient à un seul $\Lambda_{i(x)}$ car x est réduit. Les vecteurs contigus à x doivent appartenir à un seul Λ_i, et cela ne peut qu'être $\Lambda_{i(x)}$, d'où $\Lambda(x) \subseteq \Lambda_{i(x)}$; puisque les sommes orthogonales des $\Lambda(x)$ et des $\Lambda_{i(x)}$ ont même dimension, cela permet de conclure que $\Lambda(x) = \Lambda_{i(x)}$ pour tout $x \in \mathcal{R}$ et que l'application $x \mapsto i(x)$ est bijective. □

La décomposition en composantes irréductibles de Λ entraîne une décomposition de $\mathrm{Aut}(\Lambda)$, qui sera décrite par le prochain théorème. On dit que Λ est *isotypique* si ses composantes irréductibles sont isométriques. En regroupant les composantes irréductibles de Λ qui sont isométriques, on obtient la décomposition de Λ en *composantes isotypiques*, c'est-à-dire

$$\Lambda = M_1 \perp \cdots \perp M_l \quad \text{où} \quad M_i = \Lambda_{i,1} \perp \cdots \perp \Lambda_{i,r_i}. \tag{1.24}$$

On peut maintenant énoncer le résultat de décomposition du groupe des automorphismes de Λ :

Théorème 35. *(i) Le groupe des automorphisme d'un réseau Λ est le produit direct des groupes des automorphismes de ses composantes isotypiques.*

(ii) Si Λ est isotypique, alors $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ *est canoniquement isomorphe à un produit semi-direct*

$$\mathrm{Aut}(\Lambda_0)^r \rtimes S_r,$$

après identification de Λ à une puissance Λ_0^r d'un réseau Λ_0 irréductible.

Pour la démonstration, voir [42], th. 1.4.6.

1.1.2.3 Réseaux et formes quadratiques

La théorie des formes quadratiques est un outil d'usage quotidien dans le traitement des problèmes sur les réseaux. En effet, si Λ est un réseau engendré par la base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, l'application de $\mathbf{R}^n$ à $\mathbf{R}$ définie par

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \|x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n\|^2$$

est une forme quadratique, dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}$ est exactement la matrice de Gram Q de Λ relative à la base $\mathcal{B}$; en outre, si A est la matrice génératrice de Λ relative à la base $\mathcal{B}$, et $x = Am$, $y = Am'$ sont deux éléments de Λ, avec $m, m' \in \mathbf{Z}^n$, on a clairement $x \cdot x = Q[m]$ et $x \cdot y = m^t Q n$ comme on a vu à la Proposition 19. Il est donc nécessaire de décrire brièvement ici le dictionnaire qui existe entre le langage des réseaux euclidiens et celui des formes quadratiques ; en cela nous suivons encore le livre de Martinet [42], tandis qu'une référence générale pour la théorie des formes quadratiques est donnée par les ouvrages d'O'Meara [47] et Serre [56].

Z-modules munis d'une forme quadratique Il convient de rappeler d'abord la définition générale de forme quadratique :

Définition 36. Soit R un anneau commutatif, et soit M un R-module. Une *forme quadratique* sur M est une application q de M dans R telle que :

(1) pour tout $\lambda \in R$ et pour tout $x \in M$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$

(2) l'application $B_q : (x, y) \mapsto q(x + y) - q(x) - q(y)$ est une forme bilinéaire (symétrique) sur M.

Puisque pour tout $x \in M$, on a $B_q(x, x) = 2q(x)$, l'homomorphisme entre le R-module des formes quadratiques sur M et le R-module des formes bilinéaires sur M défini par $q \mapsto B_q$ est une bijection si et seulement si $x \mapsto 2x$ est une bijection en R. Dans ce cas, on préfère associer à q la forme bilinéaire $B'_q = \frac{1}{2} B_q$, de façon à avoir $q(x) = B'_q(x, x)$, et c'est exactement ce que nous avons fait en 1.1.1.2 avec $R = \mathbf{R}$, $M = \mathbf{R}^n$, $q(x) = N(x) = \|x\|^2$ et $B'(x, y) = x \cdot y$.

Soit maintenant Λ un réseau euclidien. La remarque précédente s'applique au cas $M = \Lambda$, $R = \mathbf{Z}$, donc à Λ correspond un couple (Λ, B'_q). On remarque cependant que la définition de réseau entier que nous avons donnée se base sur le critère de la forme bilinéaire symétrique entière (Proposition 19) et non sur celui de la forme quadratique entière, qui est moins restrictif et qui aurait conduit à des formes bilinéaires demi-entières.

Réciproquement, soit (M, B) un couple où M est un $\mathbf{Z}$-module de type fini sans torsion et de rang n, et B est une forme bilinéaire symétrique. Cette forme se prolonge en une forme bilinéaire symétrique sur le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $V = \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} M$, et V se plonge dans l'$\mathbf{R}$-espace vectoriel $E = \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} V$. Avec ce procédé, on peut identifier Λ à un réseau de l'espace vectoriel E. Si, de plus, la forme B est définie positive, alors E est un espace euclidien, et Λ est un réseau de E, autrement dit un *réseau euclidien.* Dans cette thèse nous traitons principalement les réseaux de $\mathbf{R}^n$, mais nous rappelons que la définition de réseau euclidien peut se donner pour un espace vectoriel euclidien quelconque. Cela explique aussi pourquoi il est courant dans la littérature, bien que nous n'ayons pas suivi cet usage, d'appeler «réseau» tout couple (M, B) de cette nature, sans référence à un espace vectoriel réel.

Équivalence de formes quadratiques Soit q une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$, et B la forme bilinéaire telle que $B(x, x) = q(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ ($B = \frac{1}{2}B_q$ du paragraphe précédent). On leur associe la matrice symétrique usuelle $Q \in \mathrm{S}_n(\mathbf{R})$ telle que $q(x) = x^t Q x = Q[x]$ et $B(x, y) = x^t Q y$.

Si $\phi \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, on peut considérer la forme quadratique $q \circ \phi$, et la forme bilinéaire correspondante $(x, y) \mapsto B(\phi(x), \phi(y))$. En termes de matrices, cela consiste à considérer la matrice symétrique $P^t Q P$, où P est la matrice de ϕ dans la base canonique. On dit que deux formes quadratiques q et q' sont *équivalentes* si $q' = q \circ \phi$ pour un $\phi \in \mathrm{GL}(\mathbf{Z}^n)$. En termes de matrices, cela se traduit par l'existence de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ telle que $Q' = P^t Q P$. On parle aussi d'*équivalence à proportionnalité près* : deux formes quadratiques q et q' sont équivalentes à proportionnalité près si $q' = \lambda q \circ \phi$ pour $\lambda \in \mathbf{R}^*$ (pour les matrices, $Q' = \lambda P^t Q P$).

Dans la suite, on s'occupe exclusivement de formes quadratiques q définies positives : on indique par $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des formes quadratiques définies positives. Cela signifie, comme on sait, que $q(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ non nul, et équivaut au fait que la matrice Q a toutes ses valeurs propres strictement positives. On indique aussi par $\mathcal{P}_n^\circ$ le sous-ensemble des formes définies positives de déterminant 1.

Rappelons ici le théorème classique de *décomposition en somme de carrés* :

Théorème 37. *Étant donnée une forme quadratique définie positive*

$$q(x) = \sum_i a_{i,i} x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{i,j} x_i x_j, \tag{1.25}$$

il est possible d'écrire q comme somme de n carrés, précisément il existe n coefficients A_i strictement positifs et $\frac{n(n-1)}{2}$ coefficients $\alpha_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$, tels que

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i (x_i + \sum_{j>i} \alpha_{i,j} x_j)^2. \tag{1.26}$$

Sur $\mathbf{R}^n$, l'application $x \mapsto \|x\|^2$ est une forme quadratique canonique définie positive, dont la forme bilinéaire associée est le produit scalaire usuel $(x, y) \mapsto x \cdot y$. On définit une application de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{P}_n$ en associant à $\phi \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ la forme quadratique définie positive $x \mapsto \|\phi(x)\|^2$. En termes de matrices, si l'on identifie une forme quadratique q à sa matrice de Gram en base canonique Q, c'est l'application $P \mapsto P^tP$ pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Cette application est surjective par la loi d'inertie de Sylvester, qui dit que les formes quadratiques réelles sont classée à équivalence près sur $\mathbf{R}$ par leur signature (donc en particulier les formes définies positives sont dans la même orbite de $\mathbf{I}_n$ par l'action P^tQP). De plus, il est clair que le stabilisateur de la forme canonique est le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$. Nous avons donc une identification de $\mathcal{P}_n$ avec $\mathrm{O}_n \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ (classes latérales droites) ; pour la même raison, les formes quadratiques définies positives sur $\mathbf{R}^n$ considérées à proportionnalité près sont en bijection avec $\mathbf{R}^*\mathrm{O}_n \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Quant aux classes de formes de $\mathcal{P}_n$ équivalentes et aux classes de formes équivalentes à proportionnalité près, elles sont décrites par les ensembles respectifs de doubles classes

$$\mathrm{O}_n \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) / \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}) \quad \text{et} \quad \mathbf{R}^*\mathrm{O}_n \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) / \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}). \tag{1.27}$$

Le dictionnaire entre réseaux et formes quadratiques (ce paragraphe s'inspire du §1.7 de [42]) Soit maintenant $\mathcal{L}$ l'ensemble des réseaux de $\mathbf{R}^n$. Nous avons vu dans le paragraphe qui suit la Proposition 12 qu'il existe une bijection entre $\mathcal{L}$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) / \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ (ici l'on prend $\Lambda_0 = \mathbf{Z}^n$ engendré par la base canonique de $\mathbf{R}^n$). On peut continuer les identifications : deux réseaux $\Lambda_1 = \phi(\mathbf{Z}^n)$ et $\Lambda_2 = \psi(\mathbf{Z}^n)$ sont isométriques (resp. semblables) si et seulement si $\psi = \xi\phi\eta$ pour des éléments convenables $\xi \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ (resp. $\xi \in \mathbf{R}^*\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$) et $\eta \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$. Par conséquent, on peut identifier l'ensemble des classes d'isométrie de réseaux de $\mathbf{R}^n$ avec

$$\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) / \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$$

et l'ensemble des classes de similitude avec

$$\mathbf{R}^*\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) / \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}).$$

On constate tout de suite que les réseaux et les formes quadratiques donnent le même ensemble de doubles classes. En effet, considérer les classes de réseaux par similitude est «la même chose» que considérer les classes de formes équivalentes à proportionnalité près, et le passage des réseaux aux formes et des formes aux réseaux se fait de la façon suivante :

- Soit $(\Lambda, \mathcal{B})$ un couple formé d'un réseau Λ et d'une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de Λ. Alors la forme quadratique $q(x) = \|x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n\|^2$ est telle que $q(x) = \|Ax\|^2$, où A est la matrice génératrice de Λ relative à la base $\mathcal{B}$. La matrice de q en base canonique est $Q = A^t A$, qui est la matrice de Gram de Λ relative à $\mathcal{B}$, donc $q(x) = Q[x]$. De plus, si $y \in \Lambda$, $y = Am$ avec $m \in \mathbf{Z}^n$, et l'on a $\|x\|^2 = Q[m]$.
- Vice-versa, si q est une forme quadratique définie positive, soit Q sa matrice en base canonique : alors Q est une matrice symétrique définie positive, et il existe une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $Q = A^t A$. En effet, puisque Q a la même signature de la matrice identité, il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $P^t Q P = \mathbf{I}_n$, et donc $Q = (P^{-1})^t P^{-1}$. Si l'on interprète A comme la matrice génératrice d'un réseau $\Lambda = A\mathbf{Z}^n$, alors Λ a évidemment Q comme matrice de Gram.

Dans cette correspondance,

(i) Si à un couple $(\Lambda, \mathcal{B})$ on applique une isométrie $\phi \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, le couple $(\phi(\Lambda), \phi(\mathcal{B}))$ donne la même forme q.

(ii) Changer de base pour Λ équivaut à remplacer q par une forme équivalente : en effet, la nouvelle matrice génératrice est AP avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$, ce qui donne la nouvelle matrice de Gram $P^t Q P$.

(iii) Si P est la matrice d'un endomorphisme $\phi \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ dans la base $\mathcal{B}$, alors $P = A^{-1} P' A$, où P' est la matrice de ϕ dans la base canonique, et A la matrice de $\mathcal{B}$. Par conséquent, ϕ est une transformation orthogonale si et seulement si $(P')^t P' = \mathbf{I}_n$, ce qui équivaut à $P'^t Q P' = Q$, où Q est la matrice de q dans la base canonique.

(iv) De plus, on a $\phi(\Lambda) = \Lambda$ si et seulement si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$; par conséquent on peut identifier le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ au groupe des automorphismes de q, défini par

$$\mathrm{Aut}(q) = \{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}) \mid P^t Q P = Q\}.$$

(v) À la décomposition en somme de carrés d'une forme quadratique correspond le *procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt* classique, avec lequel à partir d'une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de Λ on construit une base orthogonale $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ de $\mathbf{R}^n$ (en général pas de Λ) de la façon suivante : on pose $u_1 = v_1$, et, supposant construits $u_1, \dots, u_r \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$, on pose

$$u_{r+1} = v_{r+1} - \pi^{\perp}_{\langle v_1, \dots, v_r \rangle}(v_{r+1}), \tag{1.28}$$

où $\pi^{\perp}_{\langle v_1, \dots, v_r \rangle}$ est la projection orthogonale sur le sous-espace $\langle v_1, \dots, v_r \rangle$.

(vi) Le réseau dual correspond à la forme inverse, définie par la matrice inverse Q^{-1}.

Enfin, on définit la suite croissante des longueurs carrées des vecteurs non nuls de Λ,

$$m_1(\Lambda) < m_2(\Lambda) < \cdots \tag{1.29}$$

et la k-ième *couche* de Λ est définie comme

$$M_k(\Lambda) := \{x \in \Lambda \mid (x \cdot x) = m_k(\Lambda)\} \tag{1.30}$$

Maintenant, si q est la forme quadratique associée à Λ, de matrice Q, on définit la suite croissante $m_1(q) < m_2(q) < \cdots$ des valeurs non nuls atteints par q, et les couches correspondantes

$$M_k(Q) := \{x \in \mathbf{Z}^n \mid Q[x] = m_k(Q)\}. \tag{1.31}$$

En particulier, $m_1(\Lambda)$ est appelé la *norme* ou le *minimum* de Λ, et $M_1(\Lambda)$ la couche de ses *vecteurs minimaux* ; de façon analogue, $m_1(q)$ est dit le *minimum* de q. Le diagramme suivant résume les quotients et les identifications dont nous avons parlé :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{P}_n = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \arrow[dr] & & \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})/\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}) = \mathcal{L}_n \arrow[dl] \\
 & \mathcal{P}_n/\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}) = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})\backslash\mathcal{L}_n &
\end{tikzcd} \tag{1.32}$$

Le dictionnaire entre réseaux et formes est résumé dans le tableau 1.1.

1.2 Fonctions zêta

1.2.1 Fonction zêta d'Epstein

1.2.1.1 Définitions et propriétés principales

Soit $\Lambda = A\mathbf{Z}^n$ un réseau euclidien, engendré par la base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$, de matrice génératrice A et matrice de Gram $Q = A^tA$ relatives à $\mathcal{B}$, et soit s une variable complexe.

Définition 38. La fonction *zêta d'Epstein* du réseau Λ est la fonction complexe

$$Z(\Lambda, s) := \sum_{0 \neq x \in \Lambda} \frac{1}{\|x\|^{2s}}, \quad s \in \mathbf{C} \text{ avec } \mathrm{Re}(s) > n/2. \tag{1.33}$$

TABLE 1.1 – Dictionnaire entre réseaux et formes quadratiques

Réseaux	Formes quadratiques
(réseau Λ, base $\mathcal{B}$) modulo isométries	forme $x \mapsto \|\sum_i x_i v_i\|^2$
réseau à isométrie près	classe de forme
réseau à similitude près	classe de forme à proportionnalité près
groupe des automorphisme $\mathrm{Aut}(\Lambda)$	groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(q)$
suite des $m_k(\Lambda)$	suite des $m_k(q)$
couches $M_k(\Lambda)$	couches $M_k(q)$
orthogonalisation de Gram-Schmidt	décomposition en carrés
projection sur $\langle v_1, \ldots, v_r\rangle^\perp$	r carrés + forme en $x_{r+1}, \ldots, x_n$
réseau dual Λ^*	forme inverse (de matrice Q^{-1})

On définit aussi la fonction zêta d'Epstein d'une forme quadratique définie positive q à n variables comme

$$Z(q,s) := \sum_{0 \neq m \in \mathbf{Z}^n} \frac{1}{q(m)^s}, \quad s \in \mathbf{C} \text{ avec } \operatorname{Re}(s) > n/2, \tag{1.34}$$

et la fonction zêta d'Epstein d'une matrice réelle symétrique $n \times n$ définie positive Q comme

$$Z(Q,s) := \sum_{0 \neq m \in \mathbf{Z}^n} \frac{1}{Q[m]^s}, \quad s \in \mathbf{C} \text{ avec } \operatorname{Re}(s) > n/2. \tag{1.35}$$

La relation entre les trois définitions est claire : si Q est la matrice de Gram de Λ par rapport à une base $\mathcal{B}$, alors $Z(\Lambda, s) = Z(Q, s)$; c'est pourquoi, au vu du dictionnaire entre réseaux et formes quadratiques expliqué en 1.1.2.3, on peut passer à tout moment d'un cadre à l'autre.

Remarque 39. Beaucoup d'auteurs, dont notamment Terras dans son livre classique [60], définissent $Z(Q, s)$ comme

$$\frac{1}{2} \sum_{0 \neq m \in \mathbf{Z}^n} \frac{1}{Q[m]^s}.$$

La raison pour cela est que si $n = 1$, et $Q = 1$, on a

$$\frac{1}{2} \sum_{0 \neq m \in \mathbf{Z}} \frac{1}{m^{2s}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2s}} = \zeta(2s) \tag{1.36}$$

où ζ est évidemment la fonction zêta de Riemann. Il faut cependant remarquer que la définition originale d'Epstein donnée dans [33] n'a pas de constante $1/2$, donc avec notre notation

$$Z(\mathbf{Z}, s) = 2\zeta(2s); \tag{1.37}$$

de toute façon, il est correct de dire que la fonction zêta d'Epstein généralise la fonction zêta de Riemann.

La fonction zêta d'Epstein tire son nom du mathématicien allemand Paul Epstein (1871–1939), qui l'a définie dans ses articles [33] de 1903 et [34] de 1906. Nombre de cas particuliers de cette fonction étaient déjà connus en théorie des nombres avant les travaux d'Epstein, surtout à cause du fait que la fonction zêta de Dedekind d'un corps de nombres algébriques peut s'écrire comme une somme finie d'intégrales de différentes fonctions zêta d'Epstein. Sur ce sujet, et sur les nombreuses applications de la fonction zêta d'Epstein, notamment à la cristallographie, à la physique statistique et à la physique du solide, nous renvoyons au livre de Terras [60].

En tout cas, dans les articles d'Epstein on trouve la démonstration des propriétés principales de $Z(Q,s)$, à savoir :

- la convergence de la série en (1.34) pour $\mathrm{Re}(s) > n/2$;
- le prolongement méromorphe dans tout le plan complexe avec un pôle simple en $s = n/2$;
- une équation fonctionnelle semblable à celle de la fonction zêta de Riemann ;
- la *formule de la limite de Kronecker* pour $Z(Q,s)$, c.-à-d. le calcul du terme constant dans le développement de Laurent de $Z(Q,s)$ autour du pôle $s = n/2$.

Commençons par la convergence :

Proposition 40 (Convergence)**.** *La fonction zêta d'Epstein, définie par la série* (1.33) *converge absolument et uniformément dans tout sous-ensemble compact du demi-plan* $\mathrm{Re}(s) > n/2$*.*

Démonstration. Ici nos démontrons la convergence simple. Supposons d'abord $\Lambda = \mathbf{Z}^n$. Pour $m \in \mathbf{N}$, on pose

$$C_m = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid |x_i| \leq m \ \forall i\} \tag{1.38}$$

$$D_m = \partial C_m, \tag{1.39}$$

de façon que $\mathbf{Z}^n = \bigcup_{m \in \mathbf{N}} (D_m \cap \mathbf{Z}^n)$ et

$$Z(\mathbf{Z}^n, s) = \sum_{0 \neq m \in \mathbf{N}} \left(\sum_{x \in D_m \cap \mathbf{Z}^n} \frac{1}{\|x\|^{2s}} \right). \tag{1.40}$$

Or, $|D_m \cap \mathbf{Z}^n = O(m^{n-1})$ donc la somme interne (1.40) est $O(m^{n-1-2\,\mathrm{Re}(s)})$, d'où la conclusion. Le cas général suit en posant $\Lambda = A\mathbf{Z}^n$ pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. □

À côté de la fonction zêta d'Epstein, on peut considérer la fonction thêta d'un réseau Λ, définie par

$$\Theta(\Lambda, s) = \sum_{x\in\Lambda} e^{\pi i\|x\|^2 s}, \quad s \in \mathbf{C}. \tag{1.41}$$

Le lien entre les fonctions zêta et thêta est donné par la *transformation de Mellin*

$$(\mathbf{M}f)(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty f(y) y^s \frac{dy}{y},$$

puisqu'on a

$$Z(\Lambda, s) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty (\Theta(\Lambda, iy) - 1) y^s \frac{dy}{y}, \quad \mathrm{Re}(s) > \frac{n}{2}. \tag{1.42}$$

Ceci est la clef pour démontrer le prolongement méromorphe et l'équation fonctionnelle.

Proposition 41. *(i) La fonction $Z(\Lambda, s)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, avec un pôle simple en $s = n/2$, de résidu* $(\det\Lambda)^{-1/2}\pi^{n/2}\Gamma(n/2)^{-1}$.

(ii) Soit $F(\Lambda, s) = \pi^{-s}\Gamma(s)Z(\Lambda, s)$. Alors la fonction zêta d'Epstein satisfait l'équation fonctionnelle

$$F(\Lambda, s) = (\det\Lambda)^{-1/2} F(\Lambda^*, n/2 - s). \tag{1.43}$$

Esquisse de démonstration. On applique la technique classique de Riemann de découper l'intégrale en (1.42) en deux morceaux,

$$\int_0^1 (\Theta(\Lambda, iy) - 1) y^s \frac{dy}{y} + \int_1^\infty (\Theta(\Lambda, iy) - 1) y^s \frac{dy}{y}, \tag{1.44}$$

et l'on peut réécrire le premier terme comme

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Theta(\Lambda, iy) y^s \frac{dy}{y} - \frac{1}{s} &= \int_1^\infty \Theta(\Lambda, iy^{-1}) y^{-s-1} dy - \frac{1}{s} \\ &= \int_1^\infty \Theta(\Lambda^*, iy) y^{\frac{n}{2}-s-1} dy - \frac{1}{s}; \end{aligned} \tag{1.45}$$

dans la première étape on a effectué le changement de variable $y \to y^{-1}$, dans la seconde la formule de Poisson. Remplaçant cela dans (1.44), on arrive à exprimer $F(\Lambda, s)$ comme

$$\int_1^\infty (\Theta(\Lambda, iy) - 1) y^s \frac{dy}{y} + \int_1^\infty (\Theta(\Lambda^*, iy) - 1) y^{\frac{n}{2}-s-1} dy - \frac{1}{s} - \frac{1}{\frac{n}{2} - s}, \tag{1.46}$$

ce qui démontre essentiellement la proposition. □

Proposition 42 (Valeurs particulières). *La fonction zêta d'Epstein prend les valeurs*

$$Z(Q,0) = -\frac{1}{2}, \quad Z(Q,-k) = 0, \; k = 1,2,3,\dots. \tag{1.47}$$

Nous venons à la formule de la limite de Kronecker : on considère le développement de Laurent de $Z(Q,s)$ autour de son pôle en $s = n/2$,

$$Z(Q,s) = \frac{\mathrm{Res}_{s=n/2}(Z(Q,s))}{s-n/2} + k_n(Q) + a_1(s-n/2) + \cdots \tag{1.48}$$

La formule de la limite de Kronecker donne la valeur du terme constant $k_n(Q)$ (qui dépend de la dimension n et de la forme Q) ; puisque nous connaissons la valeur du résidu en $s = n/2$ (Proposition 41), il est clair qu'une définition équivalente de $k_n(Q)$ est

$$k_n(Q) = \lim_{s\to n/2} \left\{ Z(Q,s) - \frac{|Q|^{-1/2}\pi^{n/2}\Gamma(n/2)^{-1}}{s-n/2} \right\}. \tag{1.49}$$

Pour énoncer la formule, on décompose la matrice Q en produit de matrices par blocs à la manière de Siegel :

Lemme 43. *Il existe une matrice carrée symétrique Q_{n-1} de taille $n-1$, et une matrice colonne R de taille $(n-1)\times 1$, telles que*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & R^t \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ R & I \end{pmatrix}. \tag{1.50}$$

Ensuite, on pose

$$z\{b\} = b^t R + i\sqrt{q(Q_{n-1}^{-1}[b])^{-1}}, \tag{1.51}$$

et

$$c_n = \begin{cases} \gamma - \log 2 - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n/2-1} r^{-1} & \text{pour } n \text{ pair} \\ \gamma - \sum_{r=0}^{(n-3)/2} (2r+1)^{-1} & \text{pour } n \text{ impair,} \end{cases} \tag{1.52}$$

où γ est la constante d'Euler.

Proposition 44 (Formule de la limite de Kronecker). *Avec la notation introduite ci-dessus, on a*

$$\begin{aligned} k_n(Q) = {} & Z(Q_{n-1}, n/2) + 2\pi^{n/2}|Q_{n-1}|^{-1/2}\Gamma(n/2)^{-1} \\ & \cdot \left\{ c_n - \log\left(q^{1/2} \left| \prod_{\substack{b\in\mathbf{Z}^{n-1}/\pm 1 \\ b\neq 0}} (1-\exp(2\pi i z\{b\})) \right|^2 \right) \right\}. \end{aligned} \tag{1.53}$$

Ici $b/\pm 1$ signifie que b varie dans un ensemble complet de représentants pour la relation d'équivalence donnée par $b \sim b'$ si $b = (\pm 1)b'$; dans le produit infini, $|\cdot|$ dénote la valeur absolue usuelle d'un nombre complexe.

Nous concluons cette section sur la fonction zêta d'Epstein avec la remarque suivante : si cette fonction partage beaucoup de propriétés avec la fonction zêta de Riemann, elle se comporte néanmoins de façon très différente sous d'autres aspects, par exemple l'hypothèse de Riemann est en général fausse pour $Z(Q, s)$. On peut citer le théorème suivant :

Proposition 45. *Soit $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ une forme quadratique binaire, avec a, b, c entiers, et soit $d = b^2 - 4ac$. Si*

$$d \notin \{-4, -8\} \cup \{-p,\ p \text{ premier}\},$$

alors $Z(q, s) = 0$ a une infinité de solutions s avec $\operatorname{Re} s > 1$.

Pour la démonstration, cf. Davenport et Heilbronn, [24] et [25].

1.3 Designs sphériques

1.3.1 Introductions aux designs sphériques, motivations

Les designs sphériques ont été définis en 1977 par Delsarte, Goethals et Seidel dans l'article [27]. Ils sont un exemple d'*averaging set* sur la sphère, c'est-à-dire des ensembles finis de points sur la sphère qui permettent d'approximer bien les intégrales (cf. aussi [57]) : précisément, un ensemble fini X de points sur une sphère est un t-design sphérique pour un entier t si la moyenne faite sur X de tout polynôme f de degré au plus t est égale à la moyenne de f calculée sur la sphère, c'est-à-dire l'intégrale de f divisée par l'aire de la sphère. Bien qu'ils soient un objet mathématique récent, il y a une importante littérature sur les designs sphériques, provenant notamment de la combinatoire (travaux de Seidel, Bannai) et de l'analyse numérique (à partir de Sobolev, qui s'est intéressé à des *formules de cubature* dès les années 1960).

En ce qui concerne les réseaux euclidiens, la façon classique de construire des designs sphériques est de considérer les couches du réseau de longueur donnée, c'est-à-dire les ensembles finis des vecteurs du réseau qui ont la même longueur. On sait depuis longtemps que le fait qu'une ou plusieurs couches d'un réseau soient un design sphérique implique un bon comportement du réseau par rapport à la densité de l'empilement de sphères associé, maxima et minima de la fonction zêta d'Epstein, symétries etc. Dans ce sens un premier résultat est dû à Delone et Ryškov dans un article ([26]) de 1967, qui sans utiliser cette terminologie, fait apparaître des 2-designs.

Plus récemment, on pourra rappeler les travaux de Venkov, qui a systématisé l'approche combinatoire dans l'étude des réseaux, et a commencé une classification des réseaux selon les designs sphériques fournis par leurs couches. Ces travaux ont été continués par bien d'autres mathématiciens, dont notamment Martinet. Les designs sphériques sont désormais utilisés dans l'étude de plusieurs problèmes liés au nôtre, à savoir les configurations optimales et la minimisation de l'énergie (cf. les travaux de Cohn et Kumar, [16]).

Pour présenter la théorie des designs sphériques nous avons suivi principalement l'article [62] de Venkov et l'article original de Delsarte, Goethals et Seidel.

1.3.2 Généralités sur les designs sphériques

1.3.2.1 Polynômes harmoniques

L'anneau des polynômes réels à n indéterminées $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ s'identifie, à l'aide de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbf{R}^n$, à l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions polynomiales sur $\mathbf{R}^n$. On dénote par $\mathcal{F}_{n,m}$ ou parfois simplement $\mathcal{F}_m$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé par les polynômes homogènes de degré m. $\mathcal{F}_{n,m}$ est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

On définit un produit scalaire euclidien sur l'espace $\mathcal{F}_{n,m}$ de la façon suivante : étant donné un multi-indice $i = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n$, on pose

$$|i| = \sum_{k=1}^{i} i_k, \quad c(i) = \frac{|i|!}{i_1! \cdots i_n!}, \quad X^i = X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}, \quad x^i = x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}.$$

Étant donnés deux éléments f et g de $\mathcal{F}_{n,m}$, on les écrit sous forme canonique

$$f(x) = \sum_{|i|=m} c(i)a(i)x^i, \quad g(x) = \sum_{|i|=m} c(i)b(i)x^i, \tag{1.54}$$

et l'on pose

$$[f, g] = \sum_{|i|=m} c(i)a(i)b(i). \tag{1.55}$$

Proposition 46. *Le produit $[\cdot, \cdot]$ ainsi défini est un produit scalaire euclidien.*

On rappelle qu'on note par $x \cdot y$ le produit scalaire usuel de $\mathbf{R}^n$. Le polynôme

$$\omega(x) = x \cdot x = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

est homogène de degré 2, et si m est pair, $\omega^{m/2}$ est homogène de degré m ; le polynôme $\rho_\alpha^{(m)}(x) = (x \cdot \alpha)^m$ est homogène de degré m pour tout $\alpha \in \mathbf{R}^n$.

Proposition 47. *Pour tout* $f \in \mathcal{F}_m$ *et tout* $\alpha \in \mathbf{R}^n$*, on a* $[f, \rho_\alpha^{(m)}] = f(\alpha)$*.*

Démonstration. On écrit $\rho_\alpha^{(m)}$ en forme canonique :

$$\begin{aligned}\rho_\alpha^{(m)} = (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)^m &= \sum_{i_1+\cdots+i_n=m} \frac{m!}{i_1! \cdots i_n!} \alpha_1^{i_1} x_1^{i_1} \cdots \alpha_n^{i_n} x_n^{i_n} \\ &= \sum_{|i|=m} c(i) \alpha^i x^i;\end{aligned} \tag{1.56}$$

si la forme canonique de f est comme en (1.54), on déduit tout de suite que

$$[f, \rho_\alpha^{(m)}] = \sum_{|i|=m} c(i) \alpha^i a(i) = f(\alpha). \tag{1.57}$$

□

On introduit le gradient $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$, que nous pensons ici comme vecteur formel. Étant donné un polynôme $f \in \mathcal{F}_m$, on lui associe un opérateur différentiel, noté $f(\nabla)$, obtenu en remplaçant les x_i par les $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Avec cette notation, on a :

Proposition 48 (cf. [62], Prop. 1.2)**.** *Avec les notations ci-dessus, on a* $m![f, g] = f(\nabla) g$*.*

Si l'on considère en particulier le polynôme $\omega(x) = x \cdot x$, on a

$$\omega(\nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \tag{1.58}$$

qui est l'opérateur Δ de Laplace bien connu. Parmi ses propriétés, on rappelle qu'il est invariant par le groupe orthogonal de $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire, si $f \in C^2(\mathbf{R}^n)$ et $\sigma \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, on a

$$\Delta(f \circ \sigma) = \Delta(f) \circ \sigma. \tag{1.59}$$

Le Laplacien est une application linéaire de $\mathcal{F}_{n,m}$ dans $\mathcal{F}_{n,m-2}$. Son noyau est l'ensemble des polynômes harmoniques :

Définition 49. Un polynôme homogène $f \in \mathcal{F}_{n,m}$ est dit *harmonique* si $\Delta(f) = 0$.

On dénote par $\mathrm{Harm}_{n,m}$ (ou Harm_m) l'ensemble des polynômes harmoniques de degré m à n variables.

Proposition 50 (cf. [62], Prop. 1.3)**.** *L'opérateur* Δ *est surjectif.*

Démonstration. Soit $g \in (\mathrm{im}\Delta)^\perp \subset \mathcal{F}_{n,m-2}$, on montre que g est nul. En effet ωg est un élément de $\mathcal{F}_{n,m}$ et, pour tout $f \in \mathcal{F}_{n,m}$, on a que

$$\begin{aligned} m![\omega g, f] = (\omega g)(\nabla)f = \omega(\nabla)g(\nabla)f = \Delta g(\nabla)f \\ = g(\nabla)\Delta f = (m-2)![g, \Delta f] = 0. \end{aligned} \tag{1.60}$$

On en déduit que ωg est nul, donc g aussi. □

On vient de voir dans la démonstration que l'application $f \mapsto \omega f$ est linéaire de $\mathcal{F}_{n,m-2}$ dans $\mathcal{F}_{n,m}$.

Théorème 51 (cf. [62], th. 2.1)**.** *(i) L'espace $\mathcal{F}_{n,m}$ admet une décomposition en somme directe orthogonale*

$$\mathcal{F}_{n,m} = \mathrm{Harm}_m \perp \omega\mathrm{Harm}_{m-2} \perp \omega^2\mathrm{Harm}_{m-4} \perp \cdots \tag{1.61}$$

(ii) Chacun des sous-espaces ci-dessus est stable par $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$*.*

(iii) Ces sous-espaces sont irréductible, c'est-à-dire ils ne contiennent pas de sous-espaces non triviaux stables par $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$*.*

(iv) Un polynôme harmonique divisible par ω est nul.

(v) Un polynôme $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$*-invariant de degré m est nul si m est impair, et est proportionnel à $\omega^{m/2}$ si m est pair.*

1.3.2.2 Définitions et propriétés principales

La définition de designs sphériques donnée plus haut en 1.3 est parfaitement équivalente à la suivante, où l'on remplace un polynôme quelconque par un polynôme homogène :

Définition 52. Soit $X \subset \mathbf{S}^{n-1}$ un ensemble fini. On dit que X est un t-design sphérique si on a l'égalité

$$\frac{1}{\sigma(\mathbf{S}^{n-1})} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(x)\, d\sigma(x) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x) \tag{1.62}$$

pour tout polynôme homogène f de degré $\leq t$.

Pourtant, cette définition n'est pas la définition originale donnée par Delsarte, Goethals et Seidel. De plus, la notion de t-design admet un certain nombre de définitions équivalentes, dont nous recueillons quelques-unes dans la proposition suivante.

Remarque 53. Il faut préciser que la définition de design sphérique est traditionnellement donnée pour des sous-ensembles de la sphère unitaire, mais en réalité quand on étudie les designs produits par les couches des réseaux, on peut bien avoir des sous-ensembles de sphères de rayon $r > 1$: dans ce cas, on dit que X est un design sphérique si $\frac{1}{r}X \subset \mathbf{S}^{n-1}$ est un design sphérique :

$$\frac{1}{\sigma(\mathbf{S}^{n-1})}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(x)\,d\sigma(x) = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f\left(\frac{1}{r}x\right) \tag{1.63}$$

Cela équivaut à dire que la moyenne sur X de tout polynôme f de degré $\leq t$ est égale à l'intégrale de f faite sur la sphère $r\mathbf{S}^{n-1}$:

$$\frac{1}{\sigma(r\mathbf{S}^{n-1})}\int_{r\mathbf{S}^{n-1}} f(x)\,d\sigma(x) = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f\,(x) \tag{1.64}$$

Proposition 54 (cf. [62], th. 3.2)**.** *Soit $n \geq 2$, et soit X un sous-ensemble fini de la sphère de rayon m centrée à l'origine $m\mathbf{S}^{n-1}$. Pour tout entier positif t, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X est un t-design sphérique, c.-à-d.

$$\frac{1}{\sigma(m\mathbf{S}^{n-1})}\int_{m\mathbf{S}^{n-1}} f(x)\,dx = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x), \tag{1.65}$$

pour tout polynôme homogène f de degré $\leq t$;

(ii) pour tout polynôme f homogène de degré $\leq t$ et $\tau \in \mathrm{O}(n)$, on a

$$\sum_{x\in X} f(x) = \sum_{x\in X} f(\tau x). \tag{1.66}$$

(iii) pour tout polynôme harmonique homogène non constant P de degré $\leq t$, on a

$$\sum_{x\in X} P(x) = 0. \tag{1.67}$$

(iv) Soit p (resp. i) le plus grand entier pair (resp. impair) qui est $\leq t$. Il existe une constante $c = c_p$ telle que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}^n$,

$$\sum_{x\in X}(x\cdot\alpha)^p = c(\alpha\cdot\alpha)^{p/2} \quad \text{et} \quad \sum_{x\in X}(x\cdot\alpha)^i = 0. \tag{1.68}$$

La valeur de cette constante est

$$c = c_p = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(p-1)}{n(n+2)\cdots(n+p-2)} \tag{1.69}$$

En passant, la définition originale de Delsarte, Goethals et Seidel est la *(ii)*.

Remarque 55. (i) Supposons que X soit symétrique autour de l'origine 0, c.-à-d. $X = -X$, ce qui est toujours vrai quand on considère les couches des réseaux. Alors la condition $\sum_{x \in X}(x \cdot \alpha)^i = 0$ est automatiquement vérifiée.

(ii) Pour tout $\tau \in \mathrm{O}(n)$, $\tau(X)$ est encore un t-design sphérique.

(iii) La réunion de deux t-designs disjoints est encore un t-design.

(iv) Il est évident (par (iii) de la Proposition 54) qu'un t-design est aussi un t'-design pour tout $t' \le t$.

Remarque 56 (cf. [27], rem. 5.9). Le nom de design sphérique est dû au fait que ces ensembles sont l'analogue sur la sphère des designs combinatoires. Un t-design combinatoire $t - (n, d, \lambda)$ est une famille X de d-sous-ensembles d'un ensemble A à n éléments, avec la propriété que chaque t-sous-ensemble de A est contenu dans exactement λ éléments de X.

Or, si d et n sont tels que $1 \le d \le n/2$, on définit la «d-sphère discrète» en $\mathbf{R}^n$ comme

$$\mathbf{S} := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \,|\, x_i \in \{0,1\}, \sum_{i=1}^{n} x_i = d\}, \tag{1.70}$$

d'où $|\mathbf{S}| = \binom{n}{d}$. Considérons l'ensemble $\mathrm{Hom}(t)$ des fonctions $f : \mathbf{S} \to \mathbf{R}$ qui sont représentées par des polynômes homogènes $f(x)$ de degré total t et de degré ≤ 1 pour chaque coordonnée x_i. Une base de $\mathrm{Hom}(t)$ est donnée par les monômes $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_t}$, d'où la dimension de $\mathrm{Hom}(t)$ est $\binom{n}{t}$.

Alors un t-design combinatoire correspond à un sous-ensemble $X \subseteq \mathbf{S}$ avec la propriété que

$$\sum_{x \in X} f(\tau x) = \sum_{x \in X} f(x) \tag{1.71}$$

pour tout $\tau \in \mathrm{Sym}(n)$ et $f \in \mathrm{Hom}(d)$. En effet, cela équivaut à imposer que la somme sur X de tout monôme de $\mathrm{Hom}(t)$ soit constante par rapport à $\mathrm{Sym}(n)$, c'est-à-dire que le monôme prend la valeur 1 sur un nombre constant, disons λ d'éléments de X.

Ainsi de (1.71) voit-on que $\mathbf{S}$, $\mathrm{Sym}(n)$ et les t-designs combinatoires correspondent à $\mathbf{S}^{n-1}$, $\mathrm{O}(n)$ et les t-designs sphériques respectivement.

Quelques résultats combinatoires Il n'y a pas de borne supérieure pour le nombre de points d'un t-design (car la réunion disjointe de deux t-designs est un t-design). Par contre il y a des bornes inférieures : cf. [27], th. 5.11 et 5.12.

Proposition 57 (cf. [27], th. 5.11 et 5.12.)**.** *Soit X un t-design sphérique en $\mathbf{R}^n$.*

(i) Si $t = 2m$ est pair, alors

$$|X| \geq \binom{n-1+m}{m} + \binom{n-2+m}{m-1}. \tag{1.72}$$

(ii) Si $t = 2m+1$ est impair, alors

$$|X| \geq 2\binom{n-1+m}{m}. \tag{1.73}$$

La classification des designs sphériques en dimension 2 a été effectuée par Hong en [36] ; Dans ce cas, la borne inférieure est $|X| \geq t+1$. Voici son résultat :

Théorème 58 (Hong)**.** *Soit X un t-design sphérique en $\mathbf{R}^2$, avec $|X| = p$*

(i) Pour $t+1 \leq p \leq 2t+1$, X est un p-gone régulier.

(ii) Pour $p = 2t+2$, X est la réunion de deux polygones réguliers (à $t+1$ sommets chacun).

(iii) Pour tout $p \geq 2t+3$, il y a $\aleph_1$ ensembles X qui ne sont pas décomposables en réunion de polygones réguliers $\bigcup_i P_i$, où les P_i sont p_i-gones, $p_i \geq t+1$.

Pour $n \geq 3$, la classification des designs est plus compliquée. Ici nous nous limitons à rappeler un théorème non constructif de Seymour et Zaslavsky ([57]) d'après lequel il existe des t-designs dans $\mathbf{R}^n$ pour toutes les valeurs de n et de t.

Une caractérisation numérique des designs sphériques Une caractérisation ultérieure des t-designs, qui nous permet d'implémenter un algorithme pour tester si une couche donnée d'un réseau est un t-design ou non, est donnée par la proposition suivante, également tirée de l'article de Venkov :

Proposition 59 (cf. [62], Th. 8.1)**.** *Soit X un ensemble fini symétrique autour de l'origine et de rayon carré m, et soit t un entier pair. Alors*

$$\sum_{x,y\in X} (x\cdot y)^t \leq \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(t-1)}{n(n+2)\cdots(n+t-2)} m^t |X|^2 \tag{1.74}$$

et l'égalité a lieu si et seulement si X est un t-design.

En particulier, une couche $M_k(\Lambda)$ d'un réseau Λ est un 2-design si et seulement si

$$\sum_{x,y\in M_k(\Lambda)} (x\cdot y)^2 = \frac{1}{n} m_k(\Lambda)^2 |M_k(\Lambda)|^2. \tag{1.75}$$

Esquisse de démonstration. Supposons pour simplifier que $m = 1$. On sait que X est un t-design si et seulement si pour tout $\alpha \in \mathbf{R}^n$

$$\sum_{x\in X} (x,\alpha)^t = c(\alpha,\alpha)^{t/2}, \quad \text{où } c = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(t-1)}{n(n+2)\cdots(n+t-2)}|X|. \tag{1.76}$$

Donc en termes de polynômes

$$\left[\sum_{x\in X} \rho_x^{(t)} - c\omega^{t/2}, \sum_{x\in X} \rho_x^{(t)} - c\omega^{t/2}\right] \geq 0 \tag{1.77}$$

et l'égalité caractérise les t-designs. Le calcul de $[\cdot,\cdot]$ donne le résultat. $\square$

1.3.3 Réseaux et designs sphériques

1.3.3.1 Réseaux fortement eutactiques et fortement parfaits

Soit Λ un réseau de dimension n, et $M_k(\Lambda)$ la suite des couches de longueur carrée $m_k(\Lambda)$.

On a vu à la remarque 55 que les couches étant des ensembles symétriques par rapport à l'origine, la seconde condition de la Proposition 54.(iv) est toujours vérifiée. Donc pour t pair, une couche X est un t-design si et seulement si

$$\sum_{x\in X} (x\cdot\alpha)^t = c_t (x\cdot x)^{t/2} (\alpha\cdot\alpha)^{t/2} \tag{1.78}$$

pour tout $\alpha \in \mathbf{R}^n$, où c_t est la constante c_p de la Proposition 54.

Il est clair que pour les réseaux tout t-design avec t pair est aussi un $(t+1)$-design ; néanmoins traditionnellement on parle de 2-designs, 4-designs etc.

Dans le chapitre suivant nous nous intéresserons surtout aux couches d'un réseaux qui sont des 2-designs sphériques. On remarque que le fait d'être un 2-design pour une couche peut s'exprimer en termes de matrice de Gram du réseau :

Proposition 60. *Une couche non vide $M_k(\Lambda)$ d'un réseau $\Lambda = A\mathbf{Z}^n$ est un 2-design si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

(i) pour tout $\alpha \in \mathbf{R}^n$,

$$\sum_{x \in M_k(\Lambda)} (x \cdot \alpha)^2 = \frac{1}{n} m_k(\Lambda)(\alpha \cdot \alpha)|M_k(\Lambda)|; \tag{1.79}$$

(ii)

$$\sum_{y \in M_k(\Lambda)} yy^t = \frac{1}{n} m_k(\Lambda)|M_k(\Lambda)|\mathbf{I}_n; \tag{1.80}$$

(iii)

$$\sum_{m \in M_k(Q)} mm^t = \frac{1}{n} m_k(Q)|M_k(Q)|\, Q^{-1}. \tag{1.81}$$

Démonstration. (1.79) est simplement (1.78) car $c_2 = |M_k(\Lambda)|/n$. En la réécrivant

$$\sum_{y \in M_k(\Lambda)} (yy^t)[\alpha] = \frac{1}{n} m_k(\Lambda)|M_k(\Lambda)|\mathbf{I}_n[\alpha] \tag{1.82}$$

on voit bien que (1.79) vaut pour tout $\alpha \in \mathbf{R}^n$ si et seulement si (1.80) vaut. Pour passer de (1.80) à (1.81) il suffit d'écrire $y = Am$, $m \in M_k(Q)$. □

La condition de 4-design se traduit par

$$\sum_{x \in M_k(\Lambda)} (x \cdot \alpha)^2 = \frac{3}{n(n+2)} m_k(\Lambda)^2 (\alpha \cdot \alpha)^2 |M_k(\Lambda)|. \tag{1.83}$$

Nous rappelons maintenant les définitions de réseau eutactique, fortement eutactique, parfait et fortement parfait. Considérons donc la couche $M_1(\Lambda)$ des vecteurs minimaux de Λ, qui ont longueur carrée $m_1(\Lambda)$.

Définition 61. On dit que le réseau Λ est

(i) *eutactique* s'il existe des *coefficients d'eutaxie* λ_x, $x \in M_1(\Lambda)$, strictement positifs, tels que

$$\sum_{x \in M_1(\Lambda)} \lambda_x (x \cdot \alpha)^2 = (\alpha \cdot \alpha) \tag{1.84}$$

pour tout $\alpha \in \mathbf{R}^n$;

(ii) *fortement eutactique* s'il est eutactique avec des coefficients d'eutaxie égaux ;

(iii) *parfait* si l'ensemble des polynômes

$$\rho_x^{(2)} : \alpha \mapsto (x \cdot \alpha)^2, \quad x \in M_1(\Lambda)$$

engendre $\mathcal{F}_{n,2}$ (polynômes homogènes de degré 2 à n indéterminées) ;

(iv) *fortement parfait* si $M_1(\Lambda)$ est un 4-design sphérique.

Proposition 62 (cf. [62], Prop. 6.2 et th. 6.4)**.** *(i) Un réseau est fortement eutactique si et seulement si $M_1(\Lambda)$ est un 2-design sphérique. Les coefficient d'eutaxie sont alors égaux à $n/(m_1(\Lambda)|M_1(\Lambda)|)$.*

(ii) Un réseau fortement parfait est parfait.

Démonstration. (i) Suit immédiatement de (1.79).

(ii) (démonstration de T. Vust) Soit $P = P(x_1, \dots, x_n)$ un polynôme homogène de degré 2. On montre que si P est orthogonal à tous les $\rho_x^{(2)}$, $x \in M_1(\Lambda)$ (par rapport au produit scalaire $[\cdot, \cdot]$), alors P est nul.

Pour tout $x \in M_1(\Lambda)$, on a $P(x) = [P, \rho_x^{(2)}] = 0$ (Proposition 47) ; or $M_1(\Lambda)$ est un 4-design, donc

$$\frac{1}{\sigma(\mathbf{S}^{n-1})} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} P^2(x)\, d\sigma(x) = \frac{1}{|M_1(\Lambda)|} \sum_{x \in M_1(\Lambda)} P(x)^2 = 0. \tag{1.85}$$

Puisque $P^2(x) \geq 0$ et P^2 est une fonction continue, on a $P^2 = 0$, d'où $P = 0$.

□

Remarque 63. Le terme *eutaktisch* a été introduit par Schläfli en 1901 dans son livre [54], et il signifie «bien arrangé». À l'origine il y a la notion d'étoile eutactique (cf. aussi Coxeter, [22], §4) : on appelle *étoile* un ensemble de $2s$ vecteurs $\pm v_1, \dots, \pm v_s$ dans $\mathbf{R}^n$ (pas forcément de la même longueur). L'étoile est dite eutactique si la somme des carrés des projections orthogonales de $v_1, \dots, v_s$ sur une ligne est la même dans toutes les directions, donc s'il existe une constante c positive telle que

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{(v_k \cdot x)^2}{(x \cdot x)} = c \tag{1.86}$$

pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ non nul. Dans cette formulation, les réseaux eutactiques sont les réseaux tels que leurs vecteurs minimaux sont parallèles aux vecteurs d'une étoile eutactique.

La qualification de «bien arrangé» est justifiée par une autre caractérisation (cf. Coxeter [23]) : on appelle *croix* l'ensemble de s couples de vecteurs $\pm e_1, \dots, \pm e_s$ de l'espace euclidien s-dimensionnel, deux à deux orthogonaux et de même longueur. Les extrémités de ces vecteurs sont donc les sommets d'un polytope croisé ou hyperoctaèdre de dimension s. On peut montrer qu'une étoile est eutactique si et seulement si elle est la projection dans l'espace de dimension n d'une croix de dimension s pour un certain s, donc c'est un bon arrangement de points dans le sens qu'il provient d'un polytope croisé de dimension supérieure.

Si toutes les couches d'un réseau Λ sont des 2-designs, on a une caractérisation de cette propriété en termes de la fonction zêta d'Epstein :

Proposition 64 (cf. [19], Prop. 2.2)**.** *Soit $\Lambda = A\mathbf{Z}^n$ et $Q = A^t A$ la matrice de Gram associée à A. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) Toutes le couches de Λ sont des 2-designs.

(ii) Pour tout $s \in \mathbf{C}$ avec $\mathrm{Re}(s) > n/2$, on a

$$\sum_{0 \neq x \in \Lambda} \frac{xx^t}{\|x\|^{2(s+1)}} = \frac{Z(\Lambda, s)}{n} \mathbf{I}_n. \tag{1.87}$$

(iii) Pour tout $s \in \mathbf{C}$ avec $\mathrm{Re}(s) > n/2$, on a

$$\sum_{0 \neq m \in \mathbf{Z}^n} \frac{mm^t}{Q[m]^{s+1}} = \frac{Z(Q, s)}{n} Q^{-1}. \tag{1.88}$$

Pour une étude des réseaux fortement eutactiques, cf. l'article de Martinet et Venkov [43], et le livre de Martinet [42], en particulier les chapitres 3 et 9. Ici nous rappelons seulement les résultats suivants :

Proposition 65. *1) Soit Λ un réseau parfait. Alors :*

(i) Λ est irréductible ;

(ii) Λ est proportionnel à un réseau entier.

2) Soit Λ un réseau eutactique. Alors :

(i) Λ est well-rounded*, c.-à-d. ses vecteurs minimaux $m_1(\Lambda)$ engendrent $\mathbf{R}^n$.*

(ii) Si Λ est fortement eutactique, il est proportionnel à un réseau entier.

Démonstration. 1).(i) cf. [62], Rem. 6.9. La dimension de $\mathcal{F}_{n,2}$ est $\binom{n+2-1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$. Or si Λ est réductible, on peut démontrer que la dimension de l'espace engendré par les $\rho_x^{(2)}$, $x \in m_1(\Lambda)$ est strictement inférieure. (ii) C'est un résultat de Korkine et Zolotareff, cf. [42], Prop. 3.2.11.

2). (i) découle de la simple existence de coefficients d'eutaxie, sans restriction sur le signe. (ii) Résultat de Martinet et Venkov, cf. [43], Prop. 1.8. □

1.3.3.2 Résultats de classification

On s'intéresse à la classification des réseaux à similitude près. Il y a tout d'abord deux résultats de finitude, dus respectivement à Voronoï [63] pour les réseaux parfaits et à Ash [2] pour les réseaux eutactiques :

Théorème 66. *(i) Il y a un nombre fini de classes de similitude de réseaux parfaits en toute dimension n donnée ; en particulier le nombre de classes de réseaux fortement parfaits est également fini.*

(ii) Il y a un nombre fini de classes de similitude de réseaux eutactiques en toute dimension n donnée ; en particulier le nombre de classes de réseaux fortement eutactiques est également fini.

Des démonstration détaillées se trouvent aussi dans le livre de Martinet [42], th 3.5.4 et 9.4.3 respectivement.

Pour les réseaux fortement eutactiques, la classification effective à similitude près est complète jusqu'en dimension 6 ; elle a été réalisée successivement par plusieurs mathématiciens, nommément Štogrin, Bergé and Martinet pour les dimensions 2, 3 et 4 (voir [42], Sections 9.3 et 14.3), Batut pour la dimension 5 (en [5]), Elbaz-Vincent, Gangl et Soulé pour la dimension 6. Nous aurons besoin de leurs résultats dans au §2.3.

Pour la classification des réseaux parfaits et fortement parfaits, qui a été commencée par Voronoï, nous renvoyons au livre de Martinet [42], en particulier les chapitres III et VII et les notes historiques à la fin de ces chapitres, et à l'article de Venkov [62].

1.3.4 Lien avec les formes modulaires

Soit Λ un réseau de dimension n, et P un polynôme harmonique de degré r ; dénotons par $\mathbf{H}$ le demi-plan des nombres complexes qui ont partie imaginaire positive, alors pour $\tau \in \mathbf{H}$ on définit la fonction thêta pondérée par

$$\theta_{\Lambda,P}(\tau) = \sum_{x\in\Lambda} P(x)e^{\pi i\tau(x\cdot x)}. \tag{1.89}$$

La fonction $\theta_{\Lambda,P}$ est holomorphe sur $\mathbf{H}$. Si $P = 1$, c'est simplement la série thêta classique

$$\theta_\Lambda(\tau) = 1 + \sum_{k\geq 1} |M_k(\Lambda)| e^{\pi i\tau m_k(\Lambda)} \tag{1.90}$$

Si Λ est un réseau entier et pair, et P est non constant, on peut réécrire $\theta_{\Lambda,P}$ comme

$$\theta_{\Lambda,P} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{x\in M_k(\Lambda)} P(x) \right) q^{m_k(\Lambda)/2} \tag{1.91}$$

où $q = e^{2\pi i\tau}$. De cette expression on voit bien pourquoi les fonctions thêta pondérées sont utiles pour étudier la structure de design sphérique sur les couches de Λ :

Proposition 67. *Soit Λ un réseau entier et pair de $\mathbf{R}^n$. Pour $k > 0$, la couche $M_k(\Lambda)$ est un t-design sphérique si et seulement si le coefficient de $q^{m_k(\Lambda)/2}$ dans le développement de Fourier de $\theta_{\Lambda,P}$ est nul pour tout polynôme harmonique P de degré pair $r \leq t$.*

Corollaire 68. *Un réseau Λ comme dans la proposition a des t-designs sur toutes ses couches si et seulement si*

$$\theta_{\Lambda,P} \equiv 0 \tag{1.92}$$

pour tout polynôme harmonique P de degré pair $r \leq t$.

Il s'avère que la série thêta de Λ pondérée par un polynôme P est une forme modulaire pour un certain sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$. Comme référence générale sur les formes modulaires nous avons suivi le livre de Miyake [44] ; toutefois la définition de forme modulaire et le résultat dont nous avons besoin dans la suite (Proposition 70) se trouvent aux chapitres 2 et 3 du livre de Wolfgang Ebeling [31].

Si Γ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ et χ est un caractère de Γ, on dénote par $\mathcal{M}_k(\Gamma, \chi)$ l'espace des formes modulaires par rapport à Γ, de poids k et caractère χ. Nous rappelons ici le sous-groupes bien connus suivants de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, d'indice fini ($N \geq 1$ est un entier) :

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid N|c \right\} \tag{1.93}$$

$$\Gamma_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1 \bmod N,\ c \equiv 0 \bmod N \right\} \tag{1.94}$$

$$\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N \right\} \tag{1.95}$$

Maintenant soit Λ une réseau entier pair, de dimension n avec n pair.

Définition 69. Le *niveau* ℓ de Λ est le plus petit entier positif tel que le réseau $\sqrt{\ell}\Lambda^*$ soit aussi pair.

De façon équivalente, considérons le quotient $D = \Lambda^*/\Lambda$, muni de la forme quadratique $x \mapsto d(x) = \frac{1}{2}(x, x)$, avec image dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Alors ℓ est l'annulateur de D, qui est aussi le plus petit entier positif tel que ℓd soit la forme identiquement nulle.

Le résultat suivant, qui concerne la propriété des séries thêta définies ci-dessus d'être modulaires, est un résultat classique, dont nous offrons seulement une esquisse de démonstration.

Proposition 70. *Soit $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$ (avec n pair) un réseau entier pair de niveau ℓ, et P un polynôme harmonique de degré r, alors $\theta_{\Lambda,P}$ est une forme modulaire de poids $k = n/2 + r$ pour le groupe $\Gamma_1(\ell)$, c'ést-à-dire*

$$\theta_{\Lambda,P} \in \mathcal{M}_{n/2+\deg P}(\Gamma_1(\ell)). \tag{1.96}$$

Démonstration. La propriété de modularité est un cas particulier de [31], Cor. 3.1 et Th. 3.2, car le caractère qui y apparaît est trivial sur $\Gamma_1(\ell)$, comme il est démontré dans la preuve de ce même Théorème 3.2. Le fait que $\theta_{\Lambda,P}$ soit holomorphe dans toute pointe (cusp) de $\Gamma_1(\ell)$ est démontré dans [44], Cor. 4.9.4, et ceci complète la démonstration que $\theta_{\Lambda,P}$ est une forme modulaire pour $\Gamma_1(\ell)$. □

L'espace de formes modulaires $\mathcal{M}_{n/2+\deg P}(\Gamma_1(\ell))$ est de dimension finie sur $\mathbf{Q}$, et une base peut être obtenue algorithmiquement à l'aide de logiciels de calcul formel tels que Magma, ce que nous ferons au §2.3.

Nous concluons cette section avec un résultat qui sera utilisée dans la démonstration du Théorème 98 au chapitre suivant :

Proposition 71. *Soit Λ (resp. Q) un réseau (resp. une forme) avec la propriété que toute couche $M_k(\Lambda)$ (resp. $M_k(Q)$) est un t-design sphérique. Alors le réseau dual Λ^* (resp. la forme duale Q^{-1}) a aussi un t-design sphérique sur chaque couche.*

Démonstration. Nous démontrons le lemme dans le langage des réseaux, et il s'agit d'une conséquence de la formule de Poisson. Supposons que Λ ait un t-design sur toutes les couches : par le Corollaire 68, cela équivaut à

$$\theta_{\Lambda,P}(\tau) = \sum_{x \in \Lambda} P(x) e^{\pi i \tau (x,x)} \equiv 0 \tag{1.97}$$

pour tout polynôme harmonique homogène P de degré $r = 1, \ldots, t$. Alors par la formule de Poisson on a

$$\theta_{\Lambda^*,P}(\tau) = \theta_{\Lambda,P}\left(-\frac{1}{\tau}\right)\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right)^{-(n+2r)} i^r \operatorname{vol}(\mathbf{R}^n/\Lambda) = 0 \tag{1.98}$$

pour $\tau \in \mathbf{H}$, et cela implique que Λ^* a aussi un t-design sur chaque couche. □

1.4 Hauteur d'un tore plat

1.4.1 Fonction zêta spectrale, hauteur

Après avoir décrit les réseaux euclidiens et leurs propriétés, il est temps de parler des tores plats et de définir leur hauteur. Nous commençons par rappeler la définition de variété Riemannienne et de son spectre : notre référence sur ce sujet a été le livre de Berger, Gauduchon et Mazet [7].

Définition 72. Une *variété Riemannienne* est un couple (M, g) où M est une variété différentielle $\mathcal{C}^\infty$ et g est une famille de formes quadratiques définies positives

$$g_m : T_mM \times T_mM \to \mathbf{R},$$

définies sur l'espace tangent T_mM de tout point $m \in M$, avec la propriété que pour tous champs de vecteurs différentiables X, Y de M,

$$m \mapsto g_m(X(m), Y(m))$$

définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de M sur $\mathbf{R}$. La famille g est appelée *métrique Riemannienne* de la variété.

Soit M une variété Riemannienne connexe et compacte. À l'aide de la métrique g on met sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ un opérateur $\Delta = \Delta_g$, communément appelé *Laplacien*, qui est un opérateur différentiel elliptique auto-adjoint défini positif (cf. [7], ch. II, §F). Les définitions de valeur propre, spectre et fonction propre s'ensuivent naturellement :

Définition 73. On appelle *spectre* de la variété Riemannienne (M, g), et on note $\mathrm{Spec}(M, g)$, l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{R}$ tels qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $f \neq 0$, vérifiant $\Delta_g f = \lambda f$. Un tel λ est dit *valeur propre* de Δ_g et une telle f est dite *fonction propre* de Δ_g.

Remarque 74 ([7], Ch. III, Rem. A.I.2). On peut montrer que $\mathrm{Spec(M, g)}$ est aussi l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{C}$ tels qu'il existe $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbf{C}}(M)$ (fonctions lisses à valeurs dans $\mathbf{C}$) vérifiant $(\Delta_{\mathbf{C}})_g = \lambda f$, où $(\Delta_{\mathbf{C}})_g$ est l'extension de Δ_g à $\mathcal{C}^\infty_{\mathbf{C}}(M)$. On peut donc remplacer librement $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$ dans la recherche du spectre.

On a le théorème suivant (pour la démonstration, cf. [1])

Théorème 75. *(i)* $\mathrm{Spec}(M, g)$ *forme une suite* $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ *discrète, tendant vers* $+\infty$.

(ii) Pour tout $\Lambda \in \mathrm{Spec}(M, g)$*, l'espace des fonctions propres relatives à* λ *est de dimension finie ; cette dimension s'appelle la* multiplicité *de* λ.

En outre, la multiplicité de la valeur propre 0 est 1, car si M est compacte les seules fonction propres relatives à 0 sont les constantes ([7], Ch. III, Rem. A.I.5).

On définit alors la *fonction zêta spectrale* de (M, g) par la série

$$\zeta_{(M,g)}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^s}. \tag{1.99}$$

Cette série converge pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$, et admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe ; en particulier $\zeta_{(M,g)}$ est analytique au point $s = 0$ (cf. [52], §1). Cela permet de définir enfin la hauteur de la variété (M, g) :

Définition 76. Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte connexe sans bord : sa *hauteur* est la dérivée de la fonction zêta spectrale en $s = 0$,

$$h(M, g) = \frac{d}{ds}\zeta_{(M,g)}(s)\Big|_{s=0}. \tag{1.100}$$

Remarque 77. On remarquera qu'elle permet de donner un sens au *déterminant du Laplacien*, ou *déterminant spectral*, grâce à l'identité formelle

$$\prod_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \exp(-h(M, g)) \tag{1.101}$$

qu'on vérifie facilement. Si l'on pose alors $\det^* \Delta_g = \prod_{i=1}^{\infty} \lambda_i$, où l'étoile dénote que l'on fait le produit sur les λ_i non nuls, on peut écrire

$$\log \det^* \Delta_g = -h(M, g).$$

Comme on l'a dit dans l'introduction, le problème qui se pose est alors de minimiser $h(M, g)$ sur M avec g qui change à parité de volume, et trouver les métriques optimales.

1.4.2 Tores plats

Définition 78. Soit Λ un réseau de $\mathbf{R}^n$. Le *tore plat* associé à Λ est la variété Riemannienne $(\mathbf{T}_\Lambda, g_\Lambda) = (\mathbf{R}^n/\Lambda, g_0/\Lambda)$, où g_0/Λ est la métrique induite sur $\mathbf{R}^n/\Lambda$ par la métrique plate g_0 de $\mathbf{R}^n$.

Considérés comme variétés les tores plats sont tous difféomorphes au tore $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$, en particulier ils sont tous compacts. On a le théorème de classification suivant :

Théorème 79 (cf. [7], ch. III, th. D.8)**.** *Deux tores plats $\mathbf{R}^n/\Lambda$ et $\mathbf{R}^n/\Lambda'$ sont isométriques (en tant que variétés Riemanniennes) si et seulement s'ils ont même dimension n et s'il existe une isométrie de $\mathbf{R}^n$ qui transforme Λ en Λ'.*

Les tores plats sont des exemples de variétés Riemanniennes pour lesquelles on sait calculer explicitement le spectre et les fonctions propres. Pour les déterminer, on procède de la façon suivante : d'abord, grâce à la remarque 74, on peut chercher le spectre de $(\mathbf{T}_\Lambda, g_\Lambda)$ en tant que spectre de l'opérateur $\Delta_{\mathbf{C}}$ sur $\mathcal{C}^\infty_{\mathbf{C}}(\mathbf{T}_\Lambda)$; ensuite, considérons, pour tout $x \in \Lambda^*$, la fonction $\mathcal{C}^\infty$ définie sur $\mathbf{R}^n$ par

$$f_x(y) := e^{2\pi i (x\cdot y)}. \tag{1.102}$$

Puisque $x \in \Lambda^*$, cette fonction définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur le quotient $\mathbf{R}^n/\Lambda$, que nous notons toujours f_x. Calculons le Laplacien de f_x : on a

$$f_x = e^{2\pi i \sum_{j=1}^n x_j y_j}, \tag{1.103}$$

donc $\frac{\partial^2 f_x}{\partial y_j^2} = -4\pi^2 x_j^2 f_x$, et par conséquent

$$\Delta f_x = \sum_{j=1}^n 4\pi^2 x_j^2 f_x = 4\pi^2 \|x\|^2 f_x. \tag{1.104}$$

On a ainsi trouvé une partie du spectre de $(\mathbf{T}_\Lambda, g_\Lambda)$; en fait, il s'agit de tout le spectre, résultat contenu dans le théorème suivant :

Théorème 80 (cf. [7], ch. III, Prop. B.I.2)**.** *Le réel λ appartient au spectre de $(\mathbf{T}_\Lambda, g_\Lambda)$ si et seulement si $\lambda = 4\pi^2\|x\|^2$ pour $x \in \Lambda^*$. Le nombre de ces x est égal à la multiplicité de λ. Les fonctions*

$$f_x(y) = e^{2\pi i (x\cdot y)},\ x \in \Lambda^* \textit{ tel que } \|x\|^2 = \lambda,$$

forment une base de l'espace des fonctions propres relatives à λ.

Comme conséquence immédiate, la fonction zêta spectrale de $\mathbf{R}^n/\Lambda$ coïncide, à un facteur près, avec la fonction zêta d'Epstein du réseau dual Λ^*, nommément

$$\zeta_{(\mathbf{T}_\Lambda, g_\Lambda)}(s) = (2\pi)^{-2s} Z(\Lambda^*, s); \tag{1.105}$$

cela implique enfin

$$h(\mathbf{T}_\Lambda) = Z'(\Lambda^*, 0) + 2\log(2\pi). \tag{1.106}$$

Donc pour les tores plats, le problème est ramené à déterminer le réseau Λ de dimension n qui minimise $Z'(\Lambda^*, 0)$, pour n fixé. Puisque $Z(c\Lambda, s) = c^{-2s} Z(\Lambda, s)$, on fait varier Λ parmi les réseaux de covolume 1. On dénote par $\mathcal{L}_n^\circ$ l'ensemble des réseaux de covolume 1 : en conclusion notre tâche consiste à minimiser $Z'(\Lambda^*, 0)$ pour Λ qui varie dans $\mathcal{L}_n^\circ$.

1.4.3 Fonctions thêta spectrale

Nous aurons besoin au §3.2 des formules contenues dans cette section, qui se base sur le §2.6 de l'article [13]. Considérons à nouveau le spectre d'une variété riemannienne générale. À côté de la fonction zêta spectrale, on peut définir la *fonction thêta spectrale* par

$$\Theta_{(M,g)}(t) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(M,g)} e^{-\lambda t}. \tag{1.107}$$

Le lien entre les fonctions zêta et thêta se fait toujours par la transformation de Mellin : en effet, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\Theta_{(M,g)} - 1)(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \Big(\Theta_{(M,g)}(t) - 1\Big) t^s \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left(\sum_{\lambda \neq 0} e^{-\lambda t}\right) t^s \frac{dt}{t} = \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\sum_{\lambda \neq 0} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\right) t^s \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_\lambda \frac{1}{\lambda^s} \Gamma(s) = \zeta_{(M,g)}(s). \end{aligned} \tag{1.108}$$

Soit (M, g) le tore plat $\mathbf{R}^n / A\mathbf{Z}^n$, alors le théorème 80 implique immédiatement que la fonction thêta spectrale est essentiellement égale à la fonction thêta du réseau dual :

$$\Theta_A(t) = \sum_{x \in \Lambda^*} e^{-(2\pi)^2 \|x\|^2 t} = \Theta(\Lambda^*, 4\pi i t). \tag{1.109}$$

On connaît le comportement asymptotique de Θ_A, qui est

$$\Theta_A(t) = |\det A| (4\pi t)^{-n/2} + O(e^{-c/t}) \text{ pour un } c > 0 \text{ quand } t \to 0 \tag{1.110}$$

$$\Theta_A(t) = 1 + O(e^{-ct}) \text{ pour un } c > 0 \text{ quand } t \to \infty. \tag{1.111}$$

La première formule asymptotique se déduit avec la formule de Poisson, la seconde se voit de la définition. Nous utilisons ces asymptotiques pour déterminer une représentation intégrale de la hauteur d'un tore plat (pour les calculs suivants, cf. toujours §2.6 de [13]). On commence par écrire

$$\begin{aligned}\zeta_{(\mathbf{T}_\Lambda, g_\Lambda)}(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \Big(\Theta_A(t) - |\det A| (4\pi t)^{-n/2}\Big) t^s \frac{dt}{t} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \Big(|\det A| (4\pi t)^{-n/2} - 1\Big) t^s \frac{dt}{t} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^\infty \Big(\Theta_A(t) - 1\Big) t^s \frac{dt}{t} \end{aligned} \tag{1.112}$$

En développant la deuxième intégrale, on a

$$\zeta_{(\mathbf{T}_\Lambda, g_\Lambda)}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \Big(\Theta_A(t) - |\det A|(4\pi t)^{-n/2}\Big) t^s \frac{dt}{t}$$
$$+ (4\pi)^{-n/2} \frac{|\det A|}{(s - n/2)\Gamma(s)} - \frac{1}{\Gamma(s+1)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^\infty \Big(\Theta_A(t) - 1\Big) t^s \frac{dt}{t} \quad (1.113)$$

Grâce au comportement asymptotique de Θ_A, cette formule fournit un prolongement méromorphe de $\zeta_{(\mathbf{T}_\Lambda, g_\Lambda)}(s)$ pour $s \in \mathbf{C}$. En dérivant et en évaluant en zéro, on en tire une formule pour la hauteur $\zeta'_{(\mathbf{T}_\Lambda, g_\Lambda)}(0)$. En effet, on a

$$\zeta'_{(\mathbf{T}_\Lambda, g_\Lambda)}(s) = -\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma^2(s)} \int_0^1 \Big(\Theta_A(t) - |\det A|(4\pi t)^{-n/2}\Big) t^s \frac{dt}{t}$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \Big(\Theta_A(t) - |\det A|(4\pi t)^{-n/2}\Big) t^s \ln t \frac{dt}{t}$$
$$- |\det A|(4\pi)^{-n/2} \frac{\Gamma(s) + (s - n/2)\Gamma'(s)}{(s-n/2)^2 \Gamma(s)^2} + \frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma^2(s+1)}$$
$$- \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma^2(s)} \int_1^\infty \Big(\Theta_A(t) - 1\Big) t^s \frac{dt}{t} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^\infty \Big(\Theta_A(t) - 1\Big) t^s \ln t \frac{dt}{t}. \quad (1.114)$$

Rappelons les développements de la fonction Gamma : d'un côté $\Gamma(s) = 1/s - \gamma + O(1)$, d'où $\Gamma'(s) = -1/s^2 + O(1)$. De l'autre côté, $1/\Gamma(s) = s + O(s^2)$. On en déduit

$$-\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma^2(s)} = -(-1/s^2 + O(1))(s^2 + O(s^2)) = 1 + O(s). \quad (1.115)$$

Si l'on fait tendre s vers 0, la première intégrale donne donc

$$\int_0^1 \Big(\Theta_A(t) - |\det A|(4\pi t)^{-n/2}\Big) \frac{dt}{t} \quad (1.116)$$

et le même raisonnement peut s'appliquer à la dernière intégrale. La deuxième intégrale donne

$$\int_0^1 O(e^{-c/t}) t^s \ln t \frac{dt}{t} \cdot (s + O(s^2)) \to 0. \quad (1.117)$$

Le terme $\Gamma'(s+1)/\Gamma^2(s+1)$ tend naturellement vers $\Gamma'(1)$; enfin, le terme central donne

$$-|\det A|(4\pi)^{-n/2} \frac{(-1/s - \gamma + O(s)) + (s - n/2)(-1/s + O(1))}{(s-n/2)^2} (s^2 + O(s^2))$$
$$\to -\frac{2}{n} |\det A|(4\pi)^{-n/2} \quad (1.118)$$

En sommant les cinq termes, on parvient à la formule intégrale suivante pour la hauteur (cf. [13], eq. (21)) :

$$\zeta'_{(\mathbf{T}_\Lambda, g_\Lambda)}(0) = \int_0^1 \Big(\Theta_A(t) - |\det A|(4\pi t)^{-n/2}\Big)\frac{dt}{t} + \Gamma'(1) - \frac{2}{n}|\det A|(4\pi)^{-n/2} + \int_1^\infty \Big(\Theta_A(t) - 1\Big)\frac{dt}{t}, \quad (1.119)$$

qui sera utilisée pour (3.44).

1.4.4 Résultats connus sur les minima locaux de la hauteur

Commençons par donner une formule explicite de la hauteur : nous avons défini à la fin du §1.2.1.1 le terme de Kronecker $k_n(Q)$ lié à la fonction zêta d'Epstein de la forme Q, et nous avons rappelé la formule de la limite de Kronecker. Le théorème suivant montre que la hauteur d'un réseau coïncide, à des constantes positives près, avec le terme de Kronecker :

Théorème 81 (Chiu, [15] th. 2.3)**.** *Soient* $(\mathbf{T}_\Lambda, g_\Lambda)$ *un tore plat de dimension* n *et volume* 1*, et* Q *la forme quadratique associée. Alors la hauteur de* $\mathbf{T}$ *est*

$$h(\mathbf{T}_\Lambda, g_\Lambda) = Z'(\Lambda, 0) = \pi^{-n/2}\Gamma(n/2)k_n(Q) + \psi(n/2) - \psi(1/2), \quad (1.120)$$

où $\psi(s) = \Gamma'(s)/\Gamma(s)$ *est la dérivée logarithmique de la fonction gamma.*

Il est donc évident qu'étudier les minima de la hauteur équivaut à étudier les minima de k_n. Nous allons utiliser ce résultat pour la démonstration de notre Théorème 113.

Le premier résultat sur les minima de la hauteur est un résultat d'existence, dû à Chiu :

Théorème 82 (Chiu, [15] th. 3.1)**.** *Pour toute dimension* n*, la hauteur dans l'espace de modules des tores plats de dimension* n *et volume* 1 *atteint un minimum global.*

Le minimum global n'est connu qu'en dimension 2 et 3. Pour $n = 2$, il est atteint par le réseau hexagonal avec matrice génératrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(nous avons choisi une base de covolume 1). Le résultat est dû à Osgood, Phillips et Sarnak :

Théorème 83 ([48], Cor. 1.(b) du th. 1)**.** *La hauteur sur dans l'espace de modules des tores plats de dimension* 2 *et volume* 1 *atteint un minimum global sur le tore correspondant au réseau hexagonal.*

On peut montrer davantage : des travaux antérieurs et indépendants de Rankin [50], Cassels [11] et [12], Ennola [32] et Diananda [28] sur les minima de la fonction zêta d'Epstein, ont produit ce résultat :

Théorème 84 (Cassels, Diananda, Ennola, Rankin)**.** *Soit Q une forme quadratique de deux variables définie positive et de déterminant* 1*, et soit Q_2 la forme associée au réseau hexagonal. Alors pour tout $s > 0$ réel on a*

$$Z(Q, s) \geq Z(Q_2, s), \tag{1.121}$$

et on a l'égalité si et seulement si $Q = Q_2$.

Par la définition du terme de Kronecker $k_n(Q)$ en (1.49), il est clair que le Théorème 84 au point $s = n/2 = 1$ implique que $k_2(Q) \geq k_2(Q_2)$, ce qui par le théorème 81 de Chiu implique $h(Q) \geq h(Q_2)$. En conclusion, le réseau hexagonal est aussi l'unique réseau qui réalise le minimum global de la hauteur en dimension 2.

Résultat semblable en dimension $n = 3$: ici le minimum global est atteint par le réseau cubique à faces centrées D_3, dont une base est donnée par

$$A = 2^{1/6} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le résultat est dû à Sarnak et Strömbergsson :

Théorème 85 ([53], th. 2)**.** *Soit $\mathbf{T}$ un tore plat de dimension* 3 *et volume* 1*. Alors $h(\mathbf{T}) \geq h(\mathbf{T}_{D_3})$, et on a l'égalité si et seulement si $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{D_3}$.*

En dimension $n \geq 2$, on a plusieurs résultats locaux ; tout d'abord le suivant, contenu dans le même article de Sarnak et Strömbergsson. Rappelons la définition suivante :

Définition 86. Un réseau $\Lambda \in \mathcal{L}_n^\circ$ (de dimension n et covolume 1) est appelé Z*-extrême* en $s \in \mathbf{R}$ s'il réalise un minimum local strict de la function $\Lambda \mapsto Z(\Lambda, s)$, $\Lambda \in \mathcal{L}_n^\circ$

Par exemple le Théorème 84 montre qu'en dimension 2 le réseau hexagonal est Z-extrême pour tout $s > 0$.

Théorème 87 (Sarnak et Strömbergsson, [53])**.** *Les réseaux D_4 (réduit à l'échelle de façon à avoir covolume 1) et E_8 et le réseau de Leech Λ_{24} sont Z-extrêmes en tout $s > 0$, et ils réalisent un minimum local strict de la hauteur en dimension 4, 8 et 24 respectivement.*

La démonstration se base sur certaines propriétés du groupe des automorphisme de ces réseaux, et utilise des arguments assez subtils de théorie des groupes.

En utilisant la théorie des designs sphériques, Coulangeon a démontré le théorème suivant, rappelé dans l'introduction :

Théorème 88 (Coulangeon, [19])**.** *Soit $\Lambda \in \mathcal{L}_n^\circ$ un réseau dont toutes les couches sont un 4-design ; alors Λ est Z-extrême en s pour tout $s > n/2$, et le tore associé à Λ réalise un minimum local strict de la hauteur.*

Il s'agit du premier résultat qui établit un lien entre la hauteur d'un réseau et les designs sphériques de ses couches, et il contient, en ce qui concerne la hauteur, le théorème de Sarnak et Strömbergsson car D_4, E_8 et Λ_{24} ont des 4-designs sur toutes les couches. En outre, ce théorème s'applique à un bon nombre de *réseaux modulaires extrêmes*, pour lesquels on peut montrer que toutes les couches sont des 4-designs (cf. [4]). Toutefois, cette condition de 4-designs est trop forte, car les réseaux fortement parfaits ont été classifiés en dimension ≤ 12 (cf. [45, 46, 49]), et on sait qu'en dimension $n = 3$, 5 et 9 il n'y en a pas, alors que le minimum global, par le théorème de Chiu, existe en toute dimension. C'est pourquoi la recherche de la juste caractérisation des minima locaux de la hauteur est encore un problème ouvert, tout comme la recherche du minimum global en dimension $n \geq 4$.

1.4.5 Une généralisation de la fonction zêta d'Epstein : la fonction zêta de Koecher

Il y a plusieurs généralisations de la fonction zêta d'Epstein, définies entre autres par Koecher, Selberg et Terras : ici nous étudions celle de Koecher ; il est à remarquer que la fonction zêta primitive de Koecher, qui fait son apparition au paragraphe 1.4.6, quoique essentiellement déjà connue, n'avait pas encore été définie formellement dans la littérature.

Définition 89. Si Q est la matrice d'une forme quadratique définie positive à n variables, et s est une variable complexe, la *fonction zêta de Koecher* associée à Q est

$$Z_{n_1}(Q, s) = \sum_A \frac{1}{\det(A^t Q A)^s}, \tag{1.122}$$

où $1 \leq n_1 \leq n$ et la somme se fait sur un ensemble complet de représentants des matrices entières $A \in \mathrm{M}_{n,n_1}(\mathbf{Z})$ de rang n_1, par rapport à la relation d'équivalence donnée par $A \sim B$ si $A = BU$ pour une matrice unimodulaire U de taille n_1.

Par matrice unimodulaire nous entendons un élément du groupe modulaire $\mathfrak{U}_{n_1}$, qui est défini par

$$\mathfrak{U}_{n_1} = \{U \in \mathrm{M}_{n_1}(\mathbf{Z}),\ \det U = \pm 1\}; \tag{1.123}$$

dans la suite, nous utilisons la notation $Q[A] = A^t Q A$.

On remarque tout de suite que (1.122) est effectivement une généralisation de la fonction zêta d'Epstein, car si $n_1 = 1$ on a

$$Z_1(Q,s) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n - \{0\}/\{\pm 1\}} \frac{1}{Q[m]^s} = \frac{1}{2} Z(Q,s) \tag{1.124}$$

(Koecher dans son article [39] utilise la définition de la fonction zêta d'Epstein avec le facteur 1/2, donc dans sa notation $Z_1(Q,s) = Z(Q,s)$.

De l'autre côté, dans le cas $n_1 = n$, la fonction (1.122) prend une forme simple, mais n'introduit aucune fonction nouvelle. En effet, Koecher montre (cf. [39], équation (1.10)) que

$$Z_n(Q,s) = |Q|^{-s} \zeta(2s)\zeta(2s-1)\cdots\zeta(2s-n+1), \tag{1.125}$$

c'est-à-dire $Z_n(Q,s)$ est un produit de fonctions zêta de Riemann.

Pour ce qui concerne les propriétés principales de cette fonction zêta, Koecher a montré que $Z_{n_1}(Q,s)$ converge pour $\operatorname{Re} s > n/2$, et admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et une équation fonctionnelle. Nommément, si l'on définit

$$R_{n_1}(Q,s) = \pi^{n_1\left(\frac{n_1-1}{4} - s\right)} \prod_{j=0}^{n_1-1} \Gamma\left(s - \frac{j}{2}\right) Z_{n_1}(Q,s), \tag{1.126}$$

alors

$$R_{n_1}(Q,s) = |Q|^{-n_1/2} R_{n_1}(Q^{-1}, \frac{n}{2} - s). \tag{1.127}$$

Il faut signaler que la démonstration donnée par Koecher en [39] a une lacune, qui a été remplie par Terras dans son article [59]. Enfin, la fonction $Z_{n_1}(Q,s)$ a des pôles simples, dont un en $s = n/2$ et l'on connaît son résidu $s = n/2$:

$$\operatorname{Res}_{s=\frac{n}{2}}(Z_{n_1}(Q,s)) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}(1+nn_1-n_1^2)} |Q|^{-\frac{n_1}{2}} \prod_{k=2}^{n_1} \zeta(k)\Gamma(\frac{k}{2}) \prod_{j=0}^{n_1-1} \Gamma(\frac{n-j}{2})^{-1} \tag{1.128}$$

(cf. [39], p. 14 et [59], Théorème 1.3).

Ainsi $Z_{n_1}(Q,s)$ est analytique en $s=0$ pour tout $n_1=1,\dots,n$, et sa valeur en 0 est donnée par la formule suivante :

Proposition 90. *La fonction zêta de Koecher prend les valeurs suivantes en $s=0$:*

$$Z_{n_1}(Q,0)=\begin{cases}-\frac{1}{2} & si\ n_1=1\\ \frac{1}{24} & si\ n_1=2\\ 0 & pour\ n_1\geq 3\end{cases}. \tag{1.129}$$

Démonstration. En [59], à la page 184, on montre que

$$Z_{n_1}(Q,0)=\prod_{i=0}^{n_1-1}\zeta(-i); \tag{1.130}$$

maintenant il suffit de rappeler que $\zeta(0)=-1/2$, $\zeta(-1)=-1/12$ et $\zeta(-2k)=0$ pour tout entier $k>0$. □

Donc, cela a du sens de considérer d'un côté la dérivée de $Z_{n_1}(Q,s)$ en $s=0$,

$$\frac{d}{ds}Z_{n_1}(Q,s)\Big|_{s=0},$$

et de l'autre côté, l'expansion de Laurent de $Z_{n_1}(Q^{-1},s)$ autour du pôle en $s=n/2$,

$$Z_{n_1}(Q^{-1},s)=\frac{a_{-1}}{s-n/2}+k^{(n_1)}(Q)+O(s-n/2), \tag{1.131}$$

où $a_{-1}=\mathrm{Res}_{s=\frac{n}{2}}(Z_{n_1}(Q,s))$.

Dorénavant, soit $\det(Q)=1$ comme d'habitude. On a vu en 1.4.1 que pour $n_1=1$, la hauteur d'un réseau Λ associé à Q est $Z_1'(Q^{-1},0)$ à des constantes près, et que

$$Z_1'(Q^{-1},0)=A_n+B_nk^{(n_1)}(Q) \tag{1.132}$$

pour des constantes A_n et B_n par le Théorème 2.3 susmentionné de [15].

Si l'on essaye de généraliser cette relation pour n_1 supérieur à 1, on a le résultat suivant :

Théorème 91. *La dérivée de la fonction zêta de Koecher $Z_{n_1}'(Q^{-1},0)$ prend les valeurs suivantes :*

$$Z_{n_1}'(Q,0)=\begin{cases}-b_1a_{-1}+k^{(n_1)}b_0 & si\ n_1=1\ ou\ 2\\ -b_0a_{-1} & si\ n_1=3\ ou\ 4\\ 0 & pour\ n_1\geq 5\end{cases}. \tag{1.133}$$

Démonstration. On part de l'équation fonctionnelle (1.127), que l'on réécrit

$$\pi^{n_1(\frac{n_1-1}{4}-s)}\prod_{i=0}^{n_1-1}\Gamma(s-\frac{i}{2})\ Z_{n_1}(Q,s)=$$
$$\pi^{n_1(\frac{n_1-1-2n}{4}+s)}\prod_{i=0}^{n_1-1}\Gamma(\frac{n}{2}-\frac{i}{2}-s)\ Z_{n_1}(Q^{-1},\frac{n}{2}-s). \quad (1.134)$$

Ceci signifie que

$$Z_{n_1}(Q^{-1},s)=\pi^{n_1(2s-\frac{n}{2})}\ \frac{\prod_{i=0}^{n_1-1}\Gamma(\frac{n}{2}-\frac{i}{2}-s)}{\prod_{i=0}^{n_1-1}\Gamma(s-\frac{i}{2})}\ Z_{n_1}(Q,\frac{n}{2}-s). \quad (1.135)$$

Maintenant on prend le développement de Laurent de $Z_{n_1}(Q,s)$ autour de $n/2$, et l'on écrit

$$Z_{n_1}(Q,u)=\frac{a_{-1}}{u-\frac{n}{2}}+k^{(n_1)}+O(u-\frac{n}{2}), \quad (1.136)$$

qui devient, après avoir posé $u=n/2-s$,

$$Z_{n_1}(Q,\frac{n}{2}-s)=\frac{-a_{-1}}{s}+k^{(n_1)}+O(s). \quad (1.137)$$

En remplaçant cela dans (1.135), on a

$$Z_{n_1}(Q^{-1},s)=\pi^{n_1(2s-\frac{n}{2})}\ \frac{\prod_{i=0}^{n_1-1}\Gamma(\frac{n}{2}-\frac{i}{2}-s)}{\prod_{i=0}^{n_1-1}\Gamma(s-\frac{i}{2})}\ \Big(\frac{-a_{-1}}{s}+k^{(n_1)}+O(s)\Big). \quad (1.138)$$

Or, le produit

$$\prod_{i=0}^{n_1-1}\Gamma(\frac{n}{2}-\frac{i}{2}-s)$$

est holomorphe et non nul en $s=0$, tout comme le facteur $\pi^{n_1(2s-\frac{n}{2})}$; de l'autre côté, dans le produit

$$\prod_{i=0}^{n_1-1}\Gamma(s-\frac{i}{2})=\Gamma(s)\Gamma(s-\frac{1}{2})\Gamma(s-1)\cdots\Gamma(s-\frac{n_1-1}{2}), \quad (1.139)$$

les facteurs $\Gamma(s-k)$ avec k entier ont un pôle simple en $s=0$. Puisque (1.139) est au dénominateur en (1.138), les pôles se transforment en zéros, et (1.138) peut être réécrite comme

$$Z_{n_1}(Q^{-1},s)=s^{\lceil\frac{n_1}{2}\rceil}\Big(b_0+b_1s+O(s^2)\Big)\Big(\frac{-a_{-1}}{s}+k^{(n_1)}+O(s)\Big), \quad (1.140)$$

pour une fonction $f(s) = b_0 + b_1 s + O(s^2)$ qui est analytique et non nulle en $s = 0$. On a donc

$$Z_{n_1}(Q^{-1}, s) = s^{\lceil \frac{n_1}{2} \rceil - 1}(-b_0 a_{-1}) + s^{\lceil \frac{n_1}{2} \rceil}(-b_1 a_{-1} + k^{(n_1)} b_0) + O(s^{\lceil \frac{n_1}{2} \rceil + 1}). \tag{1.141}$$

En dérivant (1.141) et en l'évaluant en $s = 0$, on obtient le résultat :

i) si $\lceil \frac{n_1}{2} \rceil = 1$, c'est-à-dire $n_1 = 1$ ou 2 : dans ce cas (1.141) se spécialise en

$$Z_{n_1}(Q^{-1}, s) = -b_0 a_{-1} + s(-b_1 a_{-1} + k^{(n_1)} b_0) + O(s),$$

d'où

$$Z'_{n_1}(Q^{-1}, 0) = -b_1 a_{-1} + k^{(n_1)} b_0;$$

en particulier, pour $n_1 = 1$ on retrouve le Théorème 2.3 de [15] (on rappelle que les constantes a_{-1}, b_0 et b_1 dépendent aussi de n_1).

ii) Si $\lceil \frac{n_1}{2} \rceil = 2$, c'est-à-dire $n_1 = 3$ ou 4 : dans ce cas, (1.141) se spécialise en

$$Z_{n_1}(Q^{-1}, s) = s(-b_0 a_{-1}) + s^2(-b_1 a_{-1} + k^{(n_1)} b_0) + O(s^3),$$

d'où

$$Z'_{n_1}(Q^{-1}, 0) = -b_0 a_{-1},$$

pour des constantes b_0 et a_{-1} qui dépendent de n_1 et n mais non pas de Q.

iii) Enfin, si $\lceil \frac{n_1}{2} \rceil \geq 3$, c'est-à-dire $n_1 \geq 5$, toute l'expression (1.141) est $O(s^2)$, donc dérivant on trouve $Z'_{n_1}(Q^{-1}, 0) = 0$.

$\square$

En conclusion, nous avons vu que la fonction zêta de Koecher $Z_{n_1}(Q, s)$ admet une équation fonctionnelle et un prolongement méromorphe au plan complexe, mais d'autre part sa valeur en $s = 0$ est 0 pour $n_1 \geq 3$ et la valeur de $Z'_{n_1}(Q, 0)$ est constante pour $n_1 \geq 3$ et même 0 pour $n_1 \geq 5$. Par conséquent, la généralisation de (1.132) proposée dans le Théorème 91 n'est pas de grand intérêt.

Toutefois, si nous considérons une version légèrement modifiée de la fonction zêta de Koecher, que nous appelons *fonction zêta primitive de Koecher*, alors nous retrouvons l'équation fonctionnelle, le prolongement méromorhpe, l'analyticité en $s = 0$, et en plus une généralisation non triviale de (1.132). Nous en tirons une définition possible de la hauteur de rang n_1 d'un réseau.

1.4.6 La fonction zêta primitive de Koecher

1.4.6.1 Définition et propriétés principales

Tout d'abord, voyons l'interprétation géométrique de la fonction zêta de Koecher. Nous avons présenté cette fonction dans le langage des formes quadratiques, ce qui est d'ailleurs sa formulation originale. En termes de réseaux,

$$Z_{n_1}(Q,s) = \sum_A \frac{1}{\det(A^tQA)^s} \tag{1.142}$$

s'interprète comme une fonction zêta des sous-réseaux d'un réseau, de la façon suivante : soit $\Lambda = A\mathbf{Z}^n$ un réseau euclidien de rang n qui a $Q = A^tA$ comme matrice de Gram ; alors $Z_{n_1}(Q,s)$ coïncide avec

$$Z_{n_1}(\Lambda,s) = \sum_{\substack{M\subset\Lambda\\ \mathrm{rk}\, M=n_1}} \frac{1}{(\det M)^s}, \tag{1.143}$$

où la somme se fait sur tous les sous-réseaux M de Λ de rang n_1.

Soit maintenant $M \subset \Lambda$ de rang n_1 : par la Proposition 10, M est contenu dans le sous-réseau $N = \mathbf{Q}M \cap \Lambda$ de Λ, qui est l'unique sous-réseau primitif de même rang n_1. Alors par la Proposition 23, on a

$$\det M = [N:M]^2 \det N. \tag{1.144}$$

Par conséquent, on peut écrire (le rang est n_1 partout)

$$\begin{aligned} Z_{n_1}(\Lambda,s) &= \sum_{\substack{N\subset\Lambda\\ N \text{ primitif}}} \sum_{M\subset N} \frac{1}{(\det M)^s} \\ &= \sum_{\substack{N\subset\Lambda\\ N \text{ primitif}}} \sum_{M\subset N} \frac{1}{(\det N)^s[N:M]^{2s}} \\ &= \sum_{\substack{N\subset\Lambda\\ N \text{ primitif}}} \frac{1}{(\det N)^s} \sum_{M\subset N} \frac{1}{[N:M]^{2s}} \end{aligned} \tag{1.145}$$

Or, $N \cong \mathbf{Z}^{n_1}$, donc la somme

$$\sum_{M\subset N} \frac{1}{[N:M]^{2s}}$$

ne dépend pas de N, et ce n'est rien d'autre que

$$\zeta_{\mathbf{Z}^{n_1}}(2s) := \sum_{H\leq\mathbf{Z}^{n_1}} \frac{1}{[\mathbf{Z}^{n_1}:H]^{2s}}, \tag{1.146}$$

la fonction zêta du groupe abélien libre de rang n_1. Un résultat classique (cf. [41], Théorème 15.1, pour plusieurs démonstrations possibles) affirme que

$$\zeta_{\mathbf{Z}^{n_1}}(s) = \zeta(s)\zeta(s-1)\cdots\zeta(s-n_1+1), \tag{1.147}$$

où $\zeta(s)$ est la fonction zêta de Riemann. On en tire l'identité

$$Z_{n_1}(\Lambda, s) = \prod_{k=0}^{n_1-1} \zeta(2s-k) \ \cdot \sum_{\substack{N\subset\Lambda \\ N \text{ primitive}}} \frac{1}{(\det N)^s}. \tag{1.148}$$

La *fonction zêta de Koecher primitive* résulte ainsi définie comme

$$Z_{n_1,\,\mathrm{prim}}(\Lambda, s) := \sum_{\substack{N\subset\Lambda,\ \mathrm{rk}\, N = n_1 \\ N \text{ primitif}}} \frac{1}{(\det N)^s} = \prod_{k=0}^{n_1-1} \zeta(2s-k)^{-1} \cdot Z_{n_1}(\Lambda, s). \tag{1.149}$$

Il s'ensuit immédiatement que $Z_{n_1,\,\mathrm{prim}}(\Lambda, s)$ admet un prolongement méromorphe au plan complexe, puisqu'elle est produit de fonctions méromorphes (on peut rappeler le *théorème de factorisation de Hadamard*, selon lequel les fonctions méromorphes forment le corps des fractions de l'anneau des fonctions holomorphes).

D'autre part, concernant les pôles, la situation apparaît plus compliquée, puisque chaque facteur $\zeta(2s-k)$ a une infinité de zéros, dont la distribution n'est pas connue, comme on sait. Ici nous nous limitons à constater que, tout comme $Z_{n_1}(\Lambda, s)$, la fonction $Z_{n_1,\,\mathrm{prim}}(\Lambda, s)$ est analytique en $s = 0$.

En revanche, il est aisé de déduire une équation fonctionnelle pour $Z_{n_1,\,\mathrm{prim}}(\Lambda, s)$ de celle pour $Z_{n_1}(\Lambda, s)$, nommément

$$\begin{aligned} &\left[\pi^{n_1(\frac{n_1-1}{4}-s)} \prod_{i=0}^{n_1-1} \Gamma(s-\frac{i}{2})\zeta\Big(2(s-\frac{i}{2})\Big)\right] \ Z_{n_1,\,\mathrm{prim}}(\Lambda, s) = \\ &\left[\pi^{n_1(\frac{n_1-1-2n}{4}+s)} \prod_{i=0}^{n_1-1} \Gamma(\frac{n}{2}-\frac{i}{2}-s)\zeta\Big(2(\frac{n}{2}-\frac{i}{2}-s)\Big)\right] \ Z_{n_1,\,\mathrm{prim}}(\Lambda^*, \frac{n}{2}-s). \end{aligned} \tag{1.150}$$

Une propriété spécifique de $Z_{n_1,\,\mathrm{prim}}(\Lambda, s)$ est sa symétrie par rapport à n_1. Précisément, on a la proposition suivante :

Proposition 92. *Soit* Λ *un réseau de covolume* 1. *Alors*

$$Z_{n_1,\,prim}(\Lambda, s) = Z_{n-n_1,\,prim}(\Lambda^*, s) \tag{1.151}$$

pour $1 \leq n_1 \leq n-1$.

Cela produit le résultat suivant pour la fonction zêta de Koecher :

Corollaire 93. *Soit* $1 \leq n_1 < n/2$. *Alors*

$$Z_{n-n_1}(\Lambda^*, s) = \prod_{i=n_1}^{n-n_1-1} \zeta(2s-i) \ \cdot \ Z_{n_1}(\Lambda, s). \tag{1.152}$$

Démonstration de la Proposition. Par définition,

$$Z_{n_1,\,\mathrm{prim}}(\Lambda, s) := \sum_{\substack{N \subset \Lambda,\ \mathrm{rk}\, N = n_1 \\ N \text{ primitif}}} \frac{1}{(\det N)^s} \tag{1.153}$$

et

$$Z_{n-n_1,\,\mathrm{prim}}(\Lambda^*, s) := \sum_{\substack{M \subset \Lambda^*,\ \mathrm{rk}\, M = n-n_1 \\ M \text{ primitif}}} \frac{1}{(\det M)^s}. \tag{1.154}$$

Soit $N \subset \Lambda$ un sous-réseau primitif de rang n_1 : par la Proposition 10, $N = \Lambda \cap \mathbf{Q}N$. Considérons le sous-espace orthogonal $(\mathbf{Q}N)^\perp$: il a dimension $n-n_1$ et $M := \Lambda^* \cap (\mathbf{Q}N)^\perp$ est un sous-réseau de Λ^*, primitif et de rang $n-n_1$ par la Proposition 27. La même proposition nous dit que la correspondance ainsi établie est une bijection entre les sous-réseaux primitifs de Λ de rang n_1 et les sous-réseaux primitifs de Λ^* de rang $n-n_1$, et que

$$\det M = \det(\Lambda^* \cap (\mathbf{Q}N)^\perp) = \det(\Lambda \cap \mathbf{Q}N) = \det N.$$

Cela montre que (1.153) et (1.154) représentent la même somme. □

Enfin, on remarque que dans le cas trivial où $n_1 = n$, on a évidemment

$$Z_{n,\,\mathrm{prim}}(\Lambda, s) = \sum_{\substack{N \subset \Lambda,\ \mathrm{rk}\, N = n \\ N \text{ primitif}}} \frac{1}{(\det N)^s} = \frac{1}{\det(\Lambda)^s}, \tag{1.155}$$

car le seul sous-réseau primitif de Λ de rang n est exactement Λ lui-même.

1.4.7 Une généralisation de la hauteur

Dorénavant, supposons Λ de covolume 1 et $n_1 < n$. Le but de ce paragraphe est de produire une équation analogue à (1.132) pour la fonction zêta primitive de Koecher. Il faut pour cela étudier le comportement de $Z_{n_1,\,\mathrm{prim}}(\Lambda, s)$ autour de $s = 0$ et $s = n/2$.

Proposition 94. *La fonction zêta primitive de Koecher est analytique et non nulle en $s = 0$, et $Z_{n_1,prim}(\Lambda, 0) = 1$. En $s = n/2$, elle a un pôle simple de résidu*

$$\operatorname{Res}_{s=\frac{n}{2}}(Z_{n_1,prim}(\Lambda, s)) = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}(1+nn_1-n_1^2)} \frac{\prod_{i=2}^{n_1} \zeta(i)\Gamma(\frac{i}{2})}{\prod_{i=0}^{n_1-1} \zeta(n-i)\Gamma(\frac{n-i}{2})}. \tag{1.156}$$

Démonstration. Écrivons de nouveau

$$Z_{n_1,\text{ prim}}(\Lambda, s) = \prod_{i=0}^{n_1-1} \frac{1}{\zeta(2s-i)} \cdot Z_{n_1}(\Lambda, s). \tag{1.157}$$

Le comportement en $s = n/2$ est facile à étudier , car $Z_{n_1}(\Lambda, s)$ a un pôle simple en $s = n/2$ et tout facteur $\zeta(2s - i)$ est analytique et non nul. Par conséquent, $Z_{n_1,\text{ prim}}(\Lambda, s)$ a un pôle simple en $s = n/2$, et son résidu est

$$\operatorname{Res}_{s=\frac{n}{2}}(Z_{n_1,\text{prim}}(\Lambda, s)) = \prod_{i=0}^{n_1-1} \frac{1}{\zeta(n-i)} \cdot \operatorname{Res}_{s=\frac{n}{2}}(Z_{n_1}(\Lambda, s)), \tag{1.158}$$

ce qui en combinaison avec (1.128) donne (1.156).

Concernant $s = 0$, les facteurs $\zeta(2s - i)$ avec $i = 0$ ou i impair sont analytiques et non nuls en $s = 0$, en particulier on a les développements classiques

$$\zeta(2s) = -\frac{1}{2} + O(s) \tag{1.159}$$

$$\zeta(2s-i) = \zeta(-i) + O(s) = -\frac{B_{i+1}}{i+1} + O(s) \tag{1.160}$$

où les B_i sont les nombres de Bernoulli. En revanche, il est bien connu que les facteurs $\zeta(2s-i)$ avec i pair et strictement négatif ont un zéro simple en $s = 0$, en particulier

$$\zeta(2s-i) = 2\zeta'(-i)s + O(s^2) = 2(-i)^{\frac{i}{2}} \frac{i!}{2(2\pi)^i}\zeta(i+1)s + O(s^2). \tag{1.161}$$

Ceci apporte une contribution de

$$\prod_{i=0}^{n_1-1} \zeta(2s-i) = s^{\lceil \frac{n_1}{2} \rceil - 1}(c_0 + O(s)) \tag{1.162}$$

au dénominateur, pour une constante c_0 non nulle. Par ailleurs, nous avons déjà déterminé en (1.141) le développement de $Z_{n_1}(\Lambda, s)$ autour de $s = 0$:

$$Z_{n_1}(\Lambda, s) = s^{\lceil \frac{n_1}{2} \rceil - 1}(-b_0 a_{-1}) + s^{\lceil \frac{n_1}{2} \rceil}(-b_1 a_{-1} + k^{(n_1)} b_0) + O(s^{\lceil \frac{n_1}{2} \rceil + 1}), \tag{1.163}$$

pour des constantes non nulles b_0 et a_{-1}. On en tire

$$Z_{n_1,\mathrm{prim}}(\Lambda, s) = \frac{-b_0 a_{-1} + O(s)}{c_0 + O(s)}, \tag{1.164}$$

ce qui montre que $Z_{n_1,\mathrm{prim}}$ est analytique et non nulle en $s = 0$. En effet, $Z_{n_1,\mathrm{prim}}(\Lambda, 0) = 1$ (Terras, [59]), et pour cela il suffit de calculer explicitement les constantes. □

Encore une fois donc, cela a du sens de considérer le développement de Laurent de $Z_{n_1,\mathrm{prim}}(\Lambda, s)$ autour de $s = n/2$

$$Z_{n_1,\mathrm{prim}}(\Lambda, s) = \frac{a_{-1}}{s - n/2} + k^{(n_1)}_{\mathrm{prim}}(\Lambda) + O(s - n/2) \tag{1.165}$$

et d'exprimer

$$\frac{d}{ds} Z_{n_1,\mathrm{prim}}(\Lambda^*, s)\Big|_{s=0},$$

en termes de $k^{(n_1)}_{\mathrm{prim}}$. Nous trouvons le résultat suivant :

Théorème 95. *Avec les notations employées ci-dessus, et Λ de covolume 1, on a*

$$\frac{d}{ds} Z_{n_1,\mathrm{prim}}(\Lambda^*, s)\Big|_{s=0} = A_n + B_n k^{(n_1)}_{\mathrm{prim}}(\Lambda) \tag{1.166}$$

où A_n et B_n sont des constantes non nulles qui dépendent de n et n_1 mais non pas de Λ.

Démonstration. L'équation fonctionnelle (1.150) dit que

$$Z_{n_1,\mathrm{prim}}(\Lambda^*, s) = \pi^{n_1(2s-\frac{n}{2})} \frac{\prod_{i=0}^{n_1-1} \Gamma(\frac{n}{2} - \frac{i}{2} - s)\zeta\Big(2(\frac{n}{2} - \frac{i}{2} - s)\Big)}{\prod_{i=0}^{n_1-1} \Gamma(s - \frac{i}{2})\zeta\Big(2(s - \frac{i}{2})\Big)} Z_{n_1,\mathrm{prim}}(\Lambda, \frac{n}{2} - s). \tag{1.167}$$

Comme dans le cas de la fonction zêta de Koecher, (1.165) donne

$$Z_{n_1,\mathrm{prim}}(\Lambda, \frac{n}{2} - s) = \frac{-a_{-1}}{s} + k^{(n_1)}_{\mathrm{prim}} + O(s). \tag{1.168}$$

En regardant de près le quotient dans le membre de droite de (1.167), on remarque que au numérateur chaque facteur

$$\Gamma(\frac{n}{2} - \frac{i}{2} - s)\zeta\Big(2(\frac{n}{2} - \frac{i}{2} - s)\Big) \tag{1.169}$$

est analytique et non nul en 0. Au dénominateur, on trouve que, exception faite pour $\Gamma(s)$, tous les autres pôles $\Gamma(s-k)$ sont compensés par les zéros simples de $\zeta\Big(2(s-\frac{i}{2})\Big)$ pour i pair. En total on a un zéro simple, donc on peut écrire

$$\begin{aligned} Z_{n_1,\mathrm{prim}}(\Lambda^*,s) &= s(g_0+g_1s+O(s^2))(\frac{-a_{-1}}{s}+k_{\mathrm{prim}}^{(n_1)}+O(s)) \\ &= -g_0a_{-1}+(-g_1a_{-1}+g_0k_{\mathrm{prim}}^{(n_1)}(\Lambda))s+O(s^2). \end{aligned} \tag{1.170}$$

Dérivant en s et évaluant en $s=0$, on trouve (1.166), avec $A_n=-g_1a_{-1}$ et $B_n=g_0$. □

Lien avec les grassmanniennes Nous mentionnons ici très brièvement une autre interprétation de la fonction zêta primitive de Koecher, liée aux grassmanniennes de $\mathbf{R}^n$. Rappelons que la *variété grassmannienne* $\mathcal{G}_{m,n}$ est la variété des sous-espaces de dimension m de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. Or, si Λ est un réseau de $\mathbf{R}^n$, et $F\in\mathcal{G}_{n_1,n}$ est un sous-espace de $\mathbf{R}^n$ de dimension n_1, avec $1\leq n_1\leq n$, on a vu que $\Lambda\cap F$ est un sous-réseau primitif de Λ de rang n_1, et qu'en outre, tous les sous-réseaux primitifs de Λ de rang n_1 s'obtiennent ainsi. On peut donc écrire

$$Z_{n_1,\mathrm{prim}}(\Lambda,s)=\sum_{F\in\mathcal{G}_{n_1,n}}\frac{1}{\det(\Lambda\cap F)^s}. \tag{1.171}$$

Il existe une généralisation de la définition de design sphérique sur une variété grassmannienne, donnée par Bachoc, Coulangeon et Nebe dans l'article [3]. C'est une question tout à fait ouverte de savoir si on peut définir une hauteur sur les variétés grassmanniennes à l'aide de la fonction zêta primitive de Koecher, et si on peut caractériser ses minima locaux en termes de designs sphériques.

Chapitre 2

Sur les minima locaux de la hauteur

Ce chapitre reprend et développe, dans les Sections 2.1 à 2.4, l'article [21], écrit en collaboration avec Renaud Coulangeon, qui a paru dans *Journal of Number Theory* en 2014. Le résultat contenu dans la Section 2.5 est par contre inédit.

Contenu du chapitre

Dans ce chapitre nous montrons que

(i) un réseau dont toutes les couches sont des 2-designs sphériques est un point critique pour la hauteur ;

(ii) un réseau qui réalise un minimum local de la hauteur est nécessairement irréductible.

Nous donnons aussi un algorithme pour tester si un réseau a la propriété que toutes ses couches sont des 2-designs, et la classification de ces réseaux jusqu'à la dimension 6.

2.1 Motivations

Plusieurs faits suggèrent qu'un réseau qui a des designs sphériques sur toutes ses couches devrait avoir des propriétés intéressantes en termes, entre autres, de la hauteur. Un premier résultat est dû à Delone et Ryškov et concerne les réseaux Z-extrêmes (Z est toutjours la fonction zêta d'Epstein). Soit $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$ un réseau de covolume 1. On dit que Λ est *Z-extrême* en $s \in \mathbf{R}$

s'il réalise un minimum local stricte de la fonction $\Lambda \mapsto \mathbf{Z}(\Lambda, s)$. On a la caractérisation suivante :

Théorème 96 (Delone et Ryškov, [26], th.4)**.** *Les conditions suivantes pour $\Lambda \in \mathcal{L}_n^\circ$ sont équivalentes :*

(i) Il existe $s_0 > 0$ tel que Λ est Z-extrême en tout $s > s_0$;

(ii) Λ est un réseau parfait, et toutes ses couches sont des 2-designs.

Sur les réseaux Z-extrêmes, nous signalons également l'article de Gruber [35].

Plus récemment, Coulangeon a montré le résultat suivant :

Théorème 97 (Coulangeon, [19], th. 1)**.** *Soit $\Lambda \in \mathcal{L}_n^\circ$ un réseau dont toutes les couches sont des 4-designs. Alors Λ est Z-extrême en tout $s > n/2$. Si en plus $Z(\Lambda, s) < 0$ pour $0 < s < n/2$, alors Λ est Z-extrême en tout $s > 0$, $s \neq n/2$.*

En particulier ce dernier résultat montre que la famille infinie de réseaux qui ont de 4-designs sur toutes les couches réalisent un minimum local de la hauteur (cette famille est bien infinie, car p.ex. les réseaux de Barnes-Wall ont cette propriété, cf. [19]). En outre, le théorème s'applique à des réseaux tels que D_4, E_8 et Λ_{24}, et à beaucoup de réseaux modulaires extrêmes, pour lesquels on peut montrer que toutes leurs couches sont des 4-designs.

Par contre, cette condition de 4-design est manifestément trop forte par rapport au problème des minima de la hauteur, car les réseaux fortement parfaits n'existent pas en toute dimension. Par exemple, il n'y a pas de réseau fortement parfait en dimension 3, 5 et 9 (cf. [46], [45] et [49]). Compte tenu du théorème de Chiu qui dit que le minimum global de la hauteur existe en toute dimension, il est évident qu'il faut chercher des conditions moins fortes.

2.2 Énoncé et démonstration du théorème sur les points critiques

Théorème 98. *Soit $\Lambda \in \mathcal{L}_n^\circ$ un réseau de covolume 1 tel que toutes ses couches sont des 2-design sphériques ; alors Λ est un point critique pour la fonction $\Lambda \mapsto h(\Lambda)$.*

Pour étudier le comportement local de la hauteur autour d'un élément fixé $Q_0 \in \mathcal{P}_n^\circ$ (formes quadratiques définies positives de déterminant 1), nous dérivons une expression de la hauteur comme intégrale. Cette-ci est une vieille identité due à Riemann, cf. [60].

Lemme 99 (Riemann)**.** *La fonction zêta d'Epstein $Z(Q,s)$ admet l'expression suivante :*

$$\pi^{-s}\Gamma(s)Z(Q,s) = \frac{|Q|^{-1/2}}{s-n/2} - \frac{1}{s} + \sum_{m\in\mathbf{Z}^n\setminus\{0\}} \Big(\int_1^\infty e^{-\pi Q[m]t} t^s \frac{dt}{t} + \int_1^\infty e^{-\pi Q^{-1}[m]t} t^{n/2-s} \frac{dt}{t}\Big). \quad (2.1)$$

Supposons maintenant $Q \in \mathcal{P}_n^\circ$: par le Lemme 99 on a

$$Z(Q^{-1},s) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)}\Big(\frac{1}{s-n/2} - \frac{1}{s}\Big) + \\ + \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \underbrace{\sum_{m\in\mathbf{Z}^n\setminus\{0\}} \Big(\int_1^\infty e^{-\pi Q^{-1}[m]t} t^s \frac{dt}{t} + \int_1^\infty e^{-\pi Q[m]t} t^{n/2-s} \frac{dt}{t}\Big)}_{F(Q,s)}. \quad (2.2)$$

On différencie par rapport à la variable s et on évalue en $s=0$ pour obtenir la hauteur, suivant l'exemple de Chiu en [15]. Le premier terme dans (2.2) est holomorphe en $s=0$ et il est indépendant de Q, donc il contribue avec une constante C. On en tire l'identité

$$\frac{d}{ds}Z(Q^{-1},s)\Big|_{s=0} = C + \Big[\frac{\pi^s}{\Gamma(s)}\frac{d}{ds}F(Q,s) + \frac{\pi^s\log\pi}{\Gamma(s)}F(Q,s) + \pi^s\frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{\Gamma(s)}\Big)\cdot F(Q,s)\Big]_{s=0}. \quad (2.3)$$

Puisque $F(Q,0)$ et $\frac{d}{ds}F(Q,s)\big|_{s=0}$ sont clairement convergents, et $1/\Gamma(0) = 0$, le deuxième et troisième terme du membre de droite disparaissent. Dans le dernier terme, on a

$$\Big[\pi^s\frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{\Gamma(s)}\Big)\Big]_{s=0} = 1,$$

car l'inverse de la fonction Gamma est une fonction entière, avec série de Taylor

$$1/\Gamma(s) = s + \gamma s^2 + O(s^3)$$

(cf. [9] ou [64]). Ce qui reste est donc

$$\frac{d}{ds}Z(Q^{-1},s)\Big|_{s=0} = C + F(Q,0). \quad (2.4)$$

Nous regardons $\mathcal{P}_n^\circ$ comme une sous-variété différentielle de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ (cf. [6]) . L'espace tangent $\mathcal{T}_Q$ en un point Q s'identifie avec l'ensemble $\{H \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})\,|\langle Q^{-1},H\rangle = 0\}$, et l'application exponentielle $H \mapsto e_Q(H) = Q\exp(Q^{-1}H)$ induit un difféomorphisme local de $\mathcal{T}_Q$ sur $\mathcal{P}_n^\circ$. Notre tâche est donc étudier le comportement local de $F(Q,0)$, autour de $Q = Q_0$, à travers l'application $H \mapsto$

$Q = e_{Q_0}(H)$, et le moyen pour faire cela est calculer le développement de Taylor au premier ordre de l'application $H \mapsto F(e_{Q_0}(H), 0)$, pour $H \in \mathcal{T}_{Q_0}$, c'est-à-dire

$$F(e_{Q_0}(H), 0) = F(Q_0, 0) + \langle \operatorname{Grad} F(Q_0, 0), H\rangle + o(\|H\|). \tag{2.5}$$

Voici le détail de ce calcul : on part de la série de Taylor de l'application exponentielle, à savoir

$$\begin{aligned} Q = e_{Q_0}(H) = Q_0 \exp(Q_0^{-1}H) &= Q_0(\mathbf{I} + Q_0^{-1}H + 1/2(Q_0^{-1}H)^2 + o(\|H\|^2)) \\ &= Q_0 + H + 1/2HQ_0^{-1}H + o(\|H\|^2) \end{aligned} \tag{2.6}$$

et

$$\begin{aligned} Q^{-1} = \exp(-Q_0^{-1}H)Q_0^{-1} &= (\mathbf{I} - Q_0^{-1}H + 1/2Q_0^{-1}HQ_0^{-1}H)Q_0^{-1} + o(\|H\|^2) \\ &= Q_0^{-1} - Q_0^{-1}HQ_0^{-1} + 1/2Q_0^{-1}HQ_0^{-1}HQ_0^{-1} + o(\|H\|^2) \end{aligned} \tag{2.7}$$

et on l'introduit dans la définition de $F(e_{Q_0}(H), 0)$ donnée par (2.2). Cela donne

$$\begin{aligned} F(e_{Q_0}(H), 0) = &\sum_{m \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}} \int_1^\infty e^{-\pi(Q_0^{-1} - Q_0^{-1}HQ_0^{-1} + 1/2Q_0^{-1}HQ_0^{-1}HQ_0^{-1} + o(\|H\|^2))[m]t} \, \frac{dt}{t} \\ &+ \sum_{m \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}} \int_1^\infty e^{-\pi(Q_0 + H + 1/2HQ_0^{-1}H + o(\|H\|^2))[m]t} t^{n/2} \, \frac{dt}{t}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Puisque

$$\begin{aligned} e^{-\pi(H + 1/2HQ_0^{-1}H + o(\|H\|^2))[m]t} &= 1 - \pi(H + 1/2HQ_0^{-1}H + o(\|H\|^2))[m]t + o(\|H\|^2) \\ &= 1 - \pi H[m]t + o(\|H\|) \end{aligned} \tag{2.9}$$

la seconde somme donne une contribution

$$\begin{aligned} &\sum_{m \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}} \int_1^\infty e^{-\pi Q_0[m]t} t^{n/2} \, (1 - \pi H[m]t + o(\|H\|)) \frac{dt}{t} \\ = &\sum_{m \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}} \int_1^\infty e^{-\pi Q_0[m]t} t^{n/2} \, \frac{dt}{t} - \sum_{m \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}} \int_1^\infty e^{-\pi Q_0[m]t} t^{n/2} \pi H[m] \, dt + o(\|H\|). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Pour la première somme, puisque

$$e^{-\pi(-Q_0^{-1}HQ_0^{-1}+1/2Q_0^{-1}HQ_0^{-1}HQ_0^{-1}+o(\|H\|))[m]t} = 1+\pi Q_0^{-1}HQ_0^{-1}[m]+o(\|H\|), \tag{2.11}$$

nous avons la contribution suivante :

$$\begin{aligned}&\sum_{m\in\mathbf{Z}^n\setminus\{0\}}\int_1^\infty e^{-\pi Q_0^{-1}[m]t}\left(1+\pi Q_0^{-1}HQ_0^{-1}[m]t+o(\|H\|)\right)\frac{dt}{t}\\ =&\sum_{m\in\mathbf{Z}^n\setminus\{0\}}\int_1^\infty e^{-\pi Q_0^{-1}[m]t}\frac{dt}{t}+\sum_{m\in\mathbf{Z}^n\setminus\{0\}}\int_1^\infty e^{-\pi Q_0^{-1}[m]t}\pi(Q_0^{-1}HQ_0^{-1})[m]\,dt+o(\|H\|).\end{aligned} \tag{2.12}$$

En sommant le tout, nous obtenons

$$\begin{aligned}F(e_{Q_0}(H),0)=F(Q_0,0)&-\sum_{m\in\mathbf{Z}^n\setminus\{0\}}H[m]\int_1^\infty \pi e^{-\pi Q_0[m]t}t^{n/2}dt\\ &+\sum_{m\in\mathbf{Z}^n\setminus\{0\}}(Q_0^{-1}HQ_0^{-1})[m]\int_1^\infty e^{-\pi(Q_0^{-1}HQ_0^{-1})[m]t}dt+o(\|H\|)\end{aligned} \tag{2.13}$$

qui peut être réécrit comme

$$F(Q_0,0)+\sum_{m\in\mathbf{Z}^n\setminus\{0\}}[-\psi_1(m)H[m]+\psi_2(m)(Q_0^{-1}HQ_0^{-1})[m]]+o(\|H\|) \tag{2.14}$$

où

$$\psi_1(m)=\int_1^\infty \pi e^{-\pi Q_0[m]t}t^{n/2}\,dt>0 \quad\text{and}\quad \psi_2(m)=\frac{e^{-\pi Q_0^{-1}[m]}}{Q_0^{-1}[m]}>0. \tag{2.15}$$

On réécrit le terme du premier ordre comme un produit scalaire avec H, de façon à mettre en évidence le gradient :

$$\langle \mathrm{Grad}\,F(Q_0,0),H\rangle=\langle H,\sum_{m\in\mathbf{Z}^n\setminus\{0\}}\Big[-\psi_1(m)mm^t+\psi_2(m)(Q_0^{-1}m)(Q_0^{-1}m)^t\Big]\rangle. \tag{2.16}$$

Nous réordonnons les termes en (2.16) selon les couches de Q_0 et Q_0^{-1}, et puisque $\psi_1(m)$ et $\psi_2(m)$ en fait dépendent seulement de $Q_0[m]$ et $Q_0^{-1}[m]$, nous obtenons

$$\langle \mathrm{Grad}\,F(Q_0,0),H\rangle=\langle H,-\sum_{k=1}^\infty\alpha_k\sum_{m\in M_k(Q_0)}mm^t+\sum_{j=1}^\infty\beta_j\sum_{m\in M_j(Q_0^{-1})}Q_0^{-1}mm^tQ_0^{-1}\rangle \tag{2.17}$$

pour des α_k et β_j strictement positifs, nommément

$$\alpha_k = \int_1^\infty \pi e^{-\pi m_k(Q_0)t} t^{n/2}\, dt \quad \text{and} \quad \beta_j = \frac{e^{-\pi m_j(Q_0^{-1})}}{m_j(Q_0^{-1})}. \tag{2.18}$$

On remarque que puisque par hypothèse H peut être n'importe quel élément orthogonal à Q_0^{-1}, le produit scalaire dans (2.17) est nul si et seulement si le second membre est proportionnel à Q_0^{-1}. Nous avons donc prouvé le théorème suivant :

Théorème 100. *Soit $\Lambda = A\mathbf{Z}^n$ un réseau de covolume* 1 *comme ci-dessus, et soit $Q = A^t A$ une matrice de Gram pour Λ. Alors Λ est un point critique pour la fonction hauteur h si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que*

$$-\sum_{k=1}^\infty \alpha_k \sum_{m \in M_k(Q_0)} mm^t + \sum_{j=1}^\infty \beta_j \sum_{m \in M_j(Q_0^{-1})} Q_0^{-1} mm^t Q_0^{-1} = \lambda Q_0^{-1}, \tag{2.19}$$

où les α_k et β_j sont des constantes positives données par (2.18).

Pour obtenir le Théorème 98, on utilise la Proposition 71, qui nous dit que $M_k(Q_0)$ et $M_j(Q_0^{-1})$ sont tous les deux des 2-designs sphériques pour tout k (resp. j). Alors par la Proposition 60 nous avons pour tout k,

$$\sum_{m \in M_k(Q_0)} mm^t = c_k Q_0^{-1} \tag{2.20}$$

et pour tout j

$$\sum_{m \in M_j(Q_0^{-1})} Q_0^{-1} mm^t Q_0^{-1} = Q_0^{-1} \Big(\sum_{m \in M_j(Q_0^{-1})} mm^t \Big) Q_0^{-1} = Q_0^{-1} d_j Q_0 Q_0^{-1} = d_j Q_0^{-1}. \tag{2.21}$$

Cela implique que (2.17) devient

$$\langle \mathrm{Grad}\, F(Q_0, 0), H \rangle = \langle H, -\sum_{k=1}^\infty \alpha_k c_k Q_0^{-1} + \sum_{j=1}^\infty \beta_j d_j Q_0^{-1} \rangle. \tag{2.22}$$

Puisque H i est orthogonal à Q_0^{-1} et que le second membre est parallèle à Q_0^{-1}, le produit scalaire $\langle \mathrm{Grad}\, F(Q_0, 0), H \rangle$ est nul, c.-à-d. Q_0 est un point critique.

2.3 Réseaux qui ont des 2-designs sur toutes les couches

2.3.1 Considérations générales

On a vu que les réseaux avec un 4-design sur chaque couche n'existent pas en toute dimension. Or pour les 2-designs le contraire est vrai, car un résultat classique affirme que des réseaux avec un 2-design sur chaque couche existent en dimension n quelconque. En effet, tous les réseaux de racines irréductibles ont cette propriété : Ryškov avait déjà remarqué cela en [51], quoique dans un langage différent. Pour voir pourquoi c'est vrai, on définit d'abord le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(S)$ d'un ensemble fini S de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ de même norme comme

$$\mathrm{Aut}(S) = \{g \in \mathrm{O}(n) \mid g(S) \subseteq S\}.$$

Avec cette définition, le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ d'un réseau Λ est évidemment un sous-groupe du groupe des automorphismes de chacune de ses couches.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 101 (cf. [42], Theorème 3.6.6)**.** *Soit S une configuration de vecteurs de même norme en $\mathbf{R}^n$, et G un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}(S)$*, avec la propriété que G opère de façon irréductible sur $\mathbf{R}^n$. alors S est un* 2*-design.*

Or, si Λ est un réseau de racines irréductible de $\mathbf{R}^n$, son groupe de Weyl $W(\Lambda)$ (le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ engendré par les réflexions orthogonales par rapport aux vecteurs minimaux) opère de façon irréductible sur $\mathbf{R}^n$ (cf. [31], Lemme 1.9), donc pour conclure il suffit d'appliquer le Théorème 101 à chaque couche de Λ. Comme conséquence de cela et du Lemme 71 on a le résultat suivant :

Corollaire 102. *Les réseaux irréductibles A_n, D_n, E_6, E_7 e E_8, ainsi que leurs réseaux duaux, sont des points critiques pour la fonction hauteur.*

Remarque 103. Puisque E_6, E_7 et E_8 ont même des 4-designs sur chaque couche, il avait déjà été démontré par Coulangeon dans [19] que ces réseaux sont des minima locaux de la fonction hauteur.

Nous appelons *totalement critiques* des réseaux avec la propriété d'avoir des 2-designs sur toutes les couches. Après avoir prouvé que de tels réseaux existent en toute dimension, la question naturelle qui se pose est celle d'une classification complète en dimension n fixée, cette classification étant faite à similitude près. On voudrait aussi un critère simple pour savoir si un réseau donné Λ est totalement critique ou non.

Dans la page web sur les réseaux [10] créée par Martinet et Batut, on peut trouver une liste complète des classes de similitude des réseaux fortement eutactiques jusqu'en dimension 6, avec nombre de réseaux fortement eutactiques connus en dimensions supérieures. Chaque classe y est représentée par une matrice de Gram entière. Puisque les réseaux totalement critiques sont en particulier des réseaux fortement eutactiques, les représentants de leurs classes de similitude forment un sous-ensemble de cette liste. Notre tâche consiste donc à dire si une matrice de la liste de Batut et Martinet est ou non la matrice de Gram d'un réseau qui a un 2-design sur chaque couche. Les calculs que nous avons faits nous ont amené à distinguer le cas de dimension paire et le cas de dimension impaire.

2.3.2 Le cas de dimension paire

Nous commençons par le cas de dimension n paire : sans perte de généralité, on peut supposer Λ entier et même pair ; en termes de la matrice Q, cela revient à dire que la diagonale de Q est paire (Proposition 21). En effet, si Λ n'est pas pair, pour nos fins il suffit de considérer la matrice $2Q$: cette-ci est la matrice de Gram du réseaux $\sqrt{2}\Lambda$, homothétique à Λ, et la propriété d'être un 2-design se maintient par homothétie. On peut alors appliquer la Proposition 70, et déduire que pour tout polynôme P harmonique de degré r, la fonction $\theta_{\Lambda,P}$ est une forme modulaire de poids $n/2+r$ par rapport au groupe $\Gamma_1(\ell)$, où ℓ est le niveau de Λ.

Le problème de calculer explicitement une base de q-développements pour $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$, pour tout k et N, peut être résolue algorithmiquement par un logiciel de calcul formel : nous avons utilisé Magma. Magma produit en outre une telle base en forme triangulaire supérieure, avec premier coefficient de Fourier unitaire, en calculant des développements limités de degré arbitrairement grand des éléments d'une telle base. Supposons donc qu'une base de $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$ soit formée par

$$\begin{array}{llllll} q^{k_{1,1}} & +a_{1,2}q^{k_{1,2}} & +a_{1,3}q^{k_{1,3}} & +\cdots & & \\ & & q^{k_{2,1}} & +a_{2,2}q^{k_{2,2}} & +a_{2,3}q^{k_{2,3}} & +\cdots \\ & & \ddots & & & \\ & & & q^{k_{\dim M,1}} & +a_{\dim M,2}q^{k_{\dim M,2}} & +\cdots \end{array} \tag{2.23}$$

Or, pour tout P harmonique fixé de degré d, $\theta_{\Lambda,P}$ est une combinaison linéaire des éléments de cette base, donc on peut écrire

$$\begin{aligned} \theta_{\Lambda,P} = c_1(q^{k_{1,1}}+a_{1,2}q^{k_{1,2}}+a_{1,3}q^{k_{1,3}}+\cdots)+c_2(q^{k_{2,1}}+a_{2,2}q^{k_{2,2}}+a_{2,3}q^{k_{2,3}}+\cdots) \\ +\cdots+c_{\dim M}(q^{k_{\dim M,1}}+a_{\dim M,2}q^{k_{\dim M,2}}+\cdots). \end{aligned} \tag{2.24}$$

En particulier, le coefficient de $q^{k_{1,1}} = e^{2\pi i\tau k_{1,1}}$ est c_1. Supposons que la couche de Λ d'équation $(x,x) = 2k_{1,1}$ soit un t-design, avec t pair : alors, puisque

$$c_1 = \sum_{(x,x)=2k_{1,1}} P(x) \tag{2.25}$$

et P est harmonique, on a que $c_1 = 0$ par la Proposition 10. Donc on peut effacer ce terme, et l'on obtient

$$\begin{aligned}\theta_{\Lambda,P} = c_2(q^{k_{2,1}} + a_{2,2}q^{k_{2,2}} + a_{2,3}q^{k_{2,3}} + \cdots) + \cdots \\ + c_{\dim M}(q^{k_{\dim M,1}} + a_{\dim M,2}q^{k_{\dim M,2}} + \cdots).\end{aligned} \tag{2.26}$$

En itérant l'argument avec la couche $(x,x) = 2k_{2,1}$ de Λ, on déduit que $c_2 = 0$, et de même tous les autres coefficients sont nuls. Par conséquence, $\theta_{\Lambda,P}$ est la forme nulle, pour tout P homogène harmonique non-constant de degré au plus t. Si l'on prend $t = 2$, ceci est équivalent au fait que Λ a un 2-design sur chaque couche, car la condition $\theta_{\Lambda,P} \equiv 0$ pour P de degré 1 est toujours satisfaite. Autrement dit, nous avons prouvé la proposition suivante :

Proposition 104. *Soit Λ un réseau pair de dimension paire n, de niveau ℓ, et soit $\mathcal{B}$ une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n/2+2}(\Gamma_1(\ell))$ des formes modulaires, disposée en forme échelonnée par lignes par rapport aux puissances du q-développement. Soit N l'exposant de q dans le pivot de la dernière ligne. Si les premières N couches de Λ (c.-à-d. les couches jusqu'à $(x,x) = 2N$) sont des 2-designs sphériques, alors toutes les couches de Λ le sont également.*

On remarque que la condition formulée dans la Proposition 104 est en fait plus forte que ce qui est réellement nécessaire, car par la discussion faite ci-dessus il est clair qu'il suffit d'examiner les $\dim M$ couches d'équation $(x,x) = 2k_{1,1}, \ldots, 2k_{\dim M,1}$.

La Proposition 104 suggère l'algorithme 1 pour vérifier si un réseau Λ donné a un 2-design sur toutes les couches.

Nous avons effectué nos calculs avec Magma pour ce qui concerne la détermination d'une base de $\mathcal{M}_{n/2+2}(\Gamma_1(\ell))$, comme dit ci-dessus, et avec Pari/GP pour ce qui concerne la détermination des couches de Λ et les tests de 2-designs. Les résultats sont rapportés en 2.4.2, ainsi que les programmes que nous avons écrits. Ces résultats sont résumés par la Proposition suivante :

Proposition 105. *À similitude près, il y a :*

(i) 2 *réseaux fortement eutactiques, tous deux totalement critiques, en dimension* $n = 2$ *;*

(ii) 6 *réseaux fortement eutactiques, tous fortement critiques, en dimension* 4 *;*

(iii) 17 *réseaux totalement critiques, parmi les* 21 *fortement eutactiques, en dimension* 6.

Algorithme 1 Pour Λ donné, il dit si Λ est totalement critique ou non

Entrées : un réseau pair Λ de dimension n paire

Sorties : "Λ a un 2-designs sur chaque couche" OU "ECHEC à la couche k"

1: calculer le niveau ℓ de Λ ;
2: calculer la matrice de Gram Q ;
3: calculer une base de $\mathcal{M}_{n/2+2}(\Gamma_1(\ell))$;
4: transformer cette base en base échelonnée par lignes ;
5: trouver l'exposant N de q dans le dernier pivot ;
6: déterminer les couches de Q jusqu'à $(x \cdot x) = 2N$ (p.ex. avec LLL) ;
7: pour $k = 1$ à $2N$, tester la propriété de 2-design pour la couche $(x \cdot x) = k$ à travers la Proposition 10 ;
8: si toutes ces couches sont des 2-designs, conclure que Λ a un 2-design sur chaque couche, sinon ECHEC.

2.3.3 Le cas de dimension impaire

Si la dimension n de Λ est impaire, on ne peut appliquer la Proposition 70 directement ; notre stratégie consiste alors à considérer un réseau auxiliaire Λ_2 de dimension $n+1$. On se sert du lemme suivant, qui vaut en toute généralité ; probablement il est déjà connu, mais nous ne l'avons trouvé nulle part dans la littérature.

Lemme 106. *Soient Λ_1 et Λ_2 deux réseaux de dimensions n_1 et n_2 respectivement. Soit $P_1 = P_1(x_1, \ldots, x_{n_1}) \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_{n_1}]$ un polynôme harmonique pour le Laplacien n_1-dimensionnel $\Delta_{n_1} = \partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_{n_1}^2$ et soit $P_2 = P_2(y_1, \ldots, y_{n_2})$ un polynôme harmonique pour le Laplacien n_2-dimensionnel $\Delta_{n_2} = \partial^2/\partial y_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial y_{n_2}^2$. Alors le polynôme*

$$P = P(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}) = P_1(x_1, \ldots, x_{n_1})P_2(y_1, \ldots, y_{n_2})$$

est harmonique pour le Laplacien (n_1+n_2)-dimensionnel $\Delta_{n_1+n_2} = \partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_{n_1}^2 + \partial^2/\partial y_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial y_{n_2}^2$. En outre, si l'on dénote par $\Lambda := \Lambda_1 \perp \Lambda_2$ le réseau (n_1+n_2)-dimensionnel qui est somme directe orthogonale de Λ_1 et Λ_2, on a

$$\theta_{\Lambda,P}(\tau) = \theta_{\Lambda_1,P_1}(\tau)\theta_{\Lambda_2,P_2}(\tau) \tag{2.27}$$

Démonstration. Le fait que P est harmonique pour $\Delta_{n_1+n_2}$ est une conséquence immédiate de l'identité

$$\Delta_{n_1+n_2}P = (\Delta_{n_1}P_1)P_2 + P_1(\Delta_{n_2}P_2) \tag{2.28}$$

et la multiplicativité de la fonction thêta est due à la somme directe orthogonale, car tout $X \in \Lambda$ s'écrit de façon unique comme $x+y$, avec $x \in \Lambda_1$ et $y \in \Lambda_2$, $(x \cdot y) = 0$:

$$\begin{aligned}\theta_{\Lambda,P}(\tau) &= \sum_{X\in\Lambda} P(X) e^{\pi i \tau (X\cdot X)} \\ &= \sum_{x\in\Lambda_1, y\in\Lambda_2} P_1(x)P_2(y) e^{\pi i\tau(x\cdot x)} e^{\pi i \tau(y\cdot y)} = \theta_{\Lambda_1,P_1}(\tau)\theta_{\Lambda_2,P_2}(\tau),\end{aligned} \tag{2.29}$$

□

On applique le Lemme 106 au réseau

$$\Lambda' := \Lambda \perp A_1 \tag{2.30}$$

(ou bien, comme on a fait dans le cas de dimension impaire, au réseau $\sqrt{2}\Lambda \perp A_1$ si Λ n'est pas pair) et aux polynômes harmoniques $P_1(x_1, \ldots, x_n)$ de degré 2 pour Λ, choisi de façon arbitraire, et $P_2 = 1$ pour A_1. On remarque en passant qu'en termes de formes quadratiques, cela revient à considérer la matrice de Gram

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} & \\ & Q \\ & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 2 \end{array}\right) \tag{2.31}$$

(si la diagonale de Q n'est pas paire, on met $2Q$ au lieu de Q ; dorénavant on suppose Λ pair).

Par le choix que nous avons fait du polynôme constant comme P_2, le produit $P = P_1P_2$ est toujours de degré 2, et le Lemme 106 nous donne

$$\theta_{\Lambda',P}(\tau) = \theta_{\Lambda,P_1}(\tau)\theta_{A_1}(\tau), \tag{2.32}$$

où il faut remarquer que

$$\theta_{A_1}(\tau) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} e^{\pi i \tau \cdot 2m^2} = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots \tag{2.33}$$

n'est pas identiquement nulle. Maintenant on peut appliquer la Proposition 70 à $\theta_{\Lambda',P}$, de dimension paire $n+1$, et l'on a que

$$\theta_{\Lambda',P}(\tau) \in \mathcal{M}_{\frac{n+1}{2}+2}(\Gamma_1(\ell')) \tag{2.34}$$

où ℓ' est le niveau de Λ'. On raisonne comme pour le cas de dimension n paire : supposons qu'une base en forme échelonnée par lignes de $\mathcal{M}_{\frac{n+1}{2}+2}(\Gamma_1(\ell'))$ soit donnée par

$$\begin{array}{cccccccc} q^{k_{1,1}} & +a_{1,2}q^{k_{1,2}} & +a_{1,3}q^{k_{1,3}} & +\cdots & & & & \\ & & q^{k_{2,1}} & & +a_{2,2}q^{k_{2,2}} & & +a_{2,3}q^{k_{2,3}} & +\cdots \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & & q^{k_{\dim M,1}} & & +a_{\dim M,2}q^{k_{\dim M,2}} & +\cdots \end{array} \tag{2.35}$$

et dénotons $N = k_{\dim M,1}$. Si les couches de Λ jusqu'à $(x \cdot x) = 2N$ sont des 2-designs, alors par la Proposition 67 les premiers N coefficients de θ_{Λ,P_1} sont nuls, c'est-à-dire $\theta_{\Lambda,P_1} = a_{N+1}q^{N+1} + a_{N+2}q^{N+2} + \cdots$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \theta_{\Lambda',P} &= (a_{N+1}q^{N+1} + a_{N+2}q^{N+2} + \cdots)(1 + 2q + 2q^4 + \cdots) \\ &= a_{N+1}q^{N+1} + (2a_{N+1} + a_{N+2})q^{N+2} + \cdots \end{aligned} \tag{2.36}$$

et avec le même argument utilisé pour n pair, on déduit que la seule possibilité pour que $\theta_{\Lambda',P}$ soit combinaison des éléments de la base est la combinaison nulle. Puisque $\theta_{\Lambda',P} = \theta_{\Lambda,P_1}\theta_{A_1}$, et θ_{A_1} n'est pas identiquement nulle, cela implique que θ_{Λ,P_1} est elle-même identiquement nulle. Puisque P_1 est choisi de façon arbitraire, par le Corollaire 68 on conclut que toutes les autres couches de Λ sont également des 2-designs.

On résume tout cela dans la proposition suivante :

Proposition 107. *Soit Λ un réseau pair en dimension n, avec n impair, et soit Λ' le réseau $\Lambda \perp A_1$. Soit ℓ' le niveau de Λ', et $\mathcal{B}'$ une base de l'espace des formes modulaires $\mathcal{M}_{(n+1)/2+2}(\Gamma_1(\ell'))$, échelonnée par lignes par rapport aux puissances du q-développement. Soit N l'exposant de q dans le pivot de la dernière ligne. Si les couches de Λ jusqu'à $(x \cdot x) = 2N$ sont des 2-designs sphériques, alors toutes les autres couches de Λ le sont également.*

Comme pour le cas de n pair, nous donnons en 2.4.2 la liste complète des réseaux totalement critiques en dimension 3 et 5, et nous résumons nos résultats dans la Proposition suivante :

Proposition 108. *À similitude près, il y a*

(i) 3 *réseaux fortement eutactiques en dimension $n = 3$, tous les trois totalement critiques.*

(ii) 7 *réseaux totalement critiques, parmi les* 9 *fortement eutactiques, en dimension* 5.

En 2.4.2 nous avons ajouté aussi la liste des réseaux totalement critiques en dimension 7 parmi les réseaux fortement eutactiques énumérés par la liste de Martinet ; il faut rappeler cependant que cette liste n'est pas complète. D'après nos calculs, il y a 7 réseaux totalement eutactiques parmi les 17 de la liste de Martinet.

2.4 Résultats et commentaires

2.4.1 Commentaires

Nous recueillons ici quelques commentaires sur le Théorème 98, ainsi que des questions ouvertes qui se posent naturellement.

2.4.1.1

Le Théorème 98 donne seulement une condition suffisante pour qu'un réseau Λ soit un point critique de la hauteur. Nous ne savons pas, à présent, si cette condition d'avoir un 2-design sur chaque couche est aussi une condition nécessaire pour que Λ soit un point critique. En outre, puisque notre but est d'étudier les minima locaux de la fonction hauteur, on voudrait savoir, au cas où cette condition ne serait pas nécessaire, si le minimum (global) de h est atteint sur un réseau totalement critique. Cela est vrai pour le réseau hexagonal A_2 en dimension 2, et pour le réseau cubique à faces centrées A_3^* en dimension 3 ; on sait aussi que D_4, qui est bien totalement critique, atteint un minimum local stricte de h en dimension 4.

2.4.1.2

En outre, le Théorème 98 ne dit pas si un réseau totalement critique est un point de minimum ou maximum local ou bien un point selle pour h.

2.4.1.3

Nous avons remarqué un propriété assez curieuse des réseaux fortement eutactiques : jusqu'à la dimension 6, si un réseau fortement eutactique Λ n'est pas totalement critique, alors la suite des 2-designs s'arrête déjà à la deuxième couche, c.-à-d. $M_2(\Lambda)$ n'est pas un 2 design. Ayant poursuivi nos calculs sur les réseaux fortement eutactiques dont nous disposions en dimension 7 e 8, et n'ayant trouvé aucun contrexemple nous sommes amenés à formuler la conjecture suivante :

Conjecture 109. *Si les deux premières couches $M_1(\Lambda)$ et $M_2(\Lambda)$ d'un réseau Λ sont des 2-designs sphériques, alors toutes les autres couches le sont, en particulier Λ est totalement critique pour h.*

Nous sommes bien conscients que cette conjecture est peut-être hasardeuse en grande dimension, mais grâce à la classification complète des réseaux fortement eutactiques en petite dimension, elle prend la forme d'un théorème en dimension jusqu'à 6 :

Théorème 110. *Soit Λ un réseau de dimension $2 \leq n \leq 6$. Si les deux premières couches $M_1(\Lambda)$ $M_2(\Lambda)$ de Λ sont des 2-designs sphériques, alors toutes les autres couches de Λ le sont, en particulier Λ est totalement critique pour h.*

2.4.2 Les programmes et les tables des résultats

Ici nous reportons les programmes de Pari/gp et Magma que nous avons créés ; nous donnons un exemple explicite de calcul, et enfin nous donnons les tables des résultats.

2.4.2.1 Le programmes Pari/gp et Magma

Programme pour les formes modulaires Voici le programme Magma que nous avons utilisé pour calculer une base de l'espace des formes modulaires $\mathcal{M}_{n/2+2}(\Gamma_1(\ell))$ pour l'algorithme 1, c'est à dire pour le cas de dimension paire :

```
// Q is the Gram matrix of our lattice L

n:=4; // the computation is valid only in even dimension
assert IsEven(n);
Q := MatrixRing(IntegerRing(), n) ! [1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1];
assert  IsPositiveDefinite(Q);
    "Q is positive definite";
for i in [1..n] do
      if IsOdd(Q[i,i]) then
      Q := 2*Q;
      break;
      end if;
    end for;
"the lattice L is even"; // the lattice must be even, so if
\\the original Gram matrix is not even just multiply it by 2
L:= LatticeWithGram(Q);
"L is the", L;

l:= Level (L);
"the level of L is", l;
k:= n div 2  + 2; k; Type(k);
N2:=ModularForms(Gamma1(l),k );
SetPrecision(N2, 62);
 N2; Basis(N2);
```

Pour le cas de dimension impaire, nous avons utilisé une version légèrement modifiée, que nous ne reportons pas ici.

Programme pour les couches d'un réseau Le programme suivant est conçu pour Pari/gp : il détermine les couches d'un réseau entier donné jusqu'au rang $(x \cdot x) = k$, ensuite il fait sur chaque couche le test de 2-design.

```
allocatemem(1600000000);

Q=[1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1];
\\x is the Gram matrix of your lattice
k = 5; \\ you want to check the layers up to Q[m]=k
print(Q," " k);

\\ check that Q is indeed pos. def.

if(qfsign(Q) != [length(Q),0],
error("the matrix is not positive definite!"));

\\ first, we find the first k layers of Q,
\\rearranging the vectors given by qfminim

qfeval(Q,vec)={
  ((vec~)*Q*vec)[1,1];
}

qfscal(Q, v, w)={
  (v~)*Q*w;
}

l=qfrep(Q, k);
print(l)
Qlay= vector(k);
{for(j=1, k,
Qlay[j]=[;];)
}

v=qfminim(Q, {k});
t1=matsize(v[3])[2];
{
for(i = 1, t1,
```

```
vec=vecextract(v[3], [i]);
nr = qfeval(Q,vec);
Qlay[nr]= concat(Qlay[nr], vec);
);
}

\\print(Qlay); \\Qlay is now a vector whose components
\\are matrices, the columns of which are half of the layers of Q.

\\ now the 2-design test on each non-empty layer

{for(j=1, k,
if (Qlay[j]==[;] , print("the layer (x,x)=" j " is empty"),
if(matsize(Qlay[j])[2] != l[j], print("error on the layer " j),
S=0;
for (i1 =1, matsize(Qlay[j])[2],
for(i2 =1, matsize(Qlay[j])[2],
S = S + (qfscal(Q, Qlay[j][,i1], Qlay[j][,i2]))^2 ) )
);
c= (j^2)*(matsize(Qlay[j])[2])^2 / length(Q);
if(S== c,
print(S " = " c ", 2-DESIGN on the layer (x,x)=" j  ),
print(S " != " c ", FAILURE on the layer (x,x)=" j ))
)
) }
```

La fonction de Pari qui extrait les couches de Λ est `qfminim`. Pour les aspects algorithmiques, nous renvoyons à la documentation en ligne de Pari, disponible à l'adresse `http://pari.math.u-bordeaux.fr/doc.html` ; quant au test de 2-design, il n'est que la traduction de la Proposition 59.

2.4.2.2 Un exemple concret

Voici un exemple de calculs, pour éclairer les paragraphes précédents : on choisit le réseau de dimension 6 $\Lambda = \mathrm{Ext}^2(A_4) = ste10a$ de la liste de

Martinet. Sa matrice de Gram est

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

donc le réseau est impair. On prend alors la matrice

$$2Q = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

et l'on travaille avec le réseau pair $\sqrt{2}\Lambda$ qui a $2Q$ comme matrice de Gram. Avec Magma on calcule le niveau de $\sqrt{2}\Lambda$, qui est 20, et une base de $\mathcal{M}_{6/2+2}(\Gamma_1(20))$ en forme échelonnée par lignes. On obtient :

```
Space of modular forms on Gamma_1(20) of weight 5
and dimension 58 over Integer Ring.
[
    1 + 31159607208500*q^57 - 232196944448000*q^58 + 507270570810000*q^59 +
    1167922181810300*q^61 + O(q^62),
    q + 382543449223294*q^57 - 3514573787260680*q^58 + 11337240787683570*q^59 -
    134706130818436118*q^61 + O(q^62),
    q^2 + 548054839647181*q^57 - 5065849016146885*q^58 + 16478465006713624*q^59
    - 199877223135259773*q^61 + O(q^62),
    ...
    q^55 - 75*q^57 + 435*q^58 - 870*q^59 + 341*q^61 + O(q^62),
    q^56 - 11*q^57 + 46*q^58 - 72*q^59 - 409*q^61 + O(q^62),
    q^60 - 12*q^61 + O(q^62)
]
```

L'exposant N cherché est 60, par conséquent il faut faire le test de 2-design sur les couches de $\sqrt{2}\Lambda$ jusqu'à $(x\cdot x) = 120$; ceci équivaut à tester les couches de Λ jusqu'à $(x \cdot x) = 60$. Pari nous donne le résultat suivant :

```
? \r layers.gp;
```

```
  ***   Warning: new stack size = 1600000000 (1525.879 Mbytes).
[3, 1, 1, 1, 1, 0; 1, 3, -1, 1, 0, 1; 1, -1, 3, 0, 1, -1;
1, 1, 0, 3, -1, -1; 1, 0, 1, -1, 3, 1;
0, 1, -1, -1, 1, 3] 62
[0, 0, 10, 15, 12, 30, 30, 30, 60, 72, 120, 100, 60, 150, 190,
 195, 120, 200, 360, 267, 300, 240, 390, 510, 324, 600, 540, 420,
 480, 630, 960, 510, 480, 960, 1050, 1125, 540, 720, 1680, 1122, 1020,
 1160, 1170, 1560, 1152, 1590, 1470, 1420, 1500, 1704, 2880, 1440, 1140, 2460
 2520, 2550, 1440, 1920, 3480, 2620, 2220, 1920]
the layer (x,x)=1 is empty
the layer (x,x)=2 is empty
150 = 150, 2-DESIGN on the layer (x,x)=3
600 = 600, 2-DESIGN on the layer (x,x)=4
600 = 600, 2-DESIGN on the layer (x,x)=5
5400 = 5400, 2-DESIGN on the layer (x,x)=6
7350 = 7350, 2-DESIGN on the layer (x,x)=7
9600 = 9600, 2-DESIGN on the layer (x,x)=8
48600 = 48600, 2-DESIGN on the layer (x,x)=9
86400 = 86400, 2-DESIGN on the layer (x,x)=10
...
1122854400 = 1122854400, 2-DESIGN on the layer (x,x)=57
2066841600 = 2066841600, 2-DESIGN on the layer (x,x)=58
7026050400 = 7026050400, 2-DESIGN on the layer (x,x)=59
4118640000 = 4118640000, 2-DESIGN on the layer (x,x)=60
```

On peut donc conclure que toutes les couches de Λ (et de $\sqrt{2}\Lambda$) sont des 2-designs.

2.4.2.3 Tables des résultats

Dimension paire $n = 2, 4, 6$ Le premier élément est le nom du réseau Λ selon la classification de Martinet et Batut ; le deuxième est une matrice de Gram Q pour Λ ; si Λ est pair, nous donnons la dimension $\dim M$ de l'espace $\mathcal{M}_{n/2+2}(\Gamma_1(\ell))$ et l'exposant N dans le terme pivotal q^N. Enfin, nous donnons le nom traditionnel de Λ, s'il en a un. Si par contre Λ est impair, les nombres $\dim M$ et N se réfèrent au réseau associé à $2Q$, nommément $\sqrt{2}\Lambda$, qui se comporte comme Λ en ce qui concerne ses designs sphériques.

Λ	Q	$\dim M$	N	Remarques
sta2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2	1	$\mathbf{Z}^2$
sta3	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	2	1	A_2

Λ	Q	$\dim M$	N	Remarques
stc4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	3	2	$\mathbf{Z}^4$
stc5	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	5	4	A_2^*
stc6	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	2	1	$A_2 \perp A_2$
stc9	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	13	12	$A_2 \otimes A_2$
stc10	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	5	4	$A_4 = P_4^2$
stc12	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	2	1	$D_4 = P_4^1$

Λ	Q	$\dim M$	N	Remarques
ste6a	$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$	3	2	$\mathbf{Z}^6$
ste6c	$\begin{pmatrix} 3&1&1&1&1&1\\ 1&2&0&0&0&0\\ 1&0&2&0&0&0\\ 1&0&0&2&0&0\\ 1&0&0&0&2&0\\ 1&0&0&0&0&2 \end{pmatrix}$	3	2	D_6^*
ste7	$\begin{pmatrix} 6&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&6&-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&6&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&6&-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&6&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&6 \end{pmatrix}$	11	10	A_6^*
ste8	$\begin{pmatrix} 3&-1&-1&0&0&0\\ -1&3&-1&0&0&0\\ -1&-1&3&0&0&0\\ 0&0&0&3&-1&-1\\ 0&0&0&-1&3&-1\\ 0&0&0&-1&-1&3 \end{pmatrix}$	11	10	$A_3^* \perp A_3^*$
ste9	$\begin{pmatrix} 2&1&0&0&0&0\\ 1&2&0&0&0&0\\ 0&0&2&1&0&0\\ 0&0&1&2&0&0\\ 0&0&0&0&2&1\\ 0&0&0&0&1&2 \end{pmatrix}$	2	1	$A_2 \perp A_2 \perp A_2$
ste10a	$\begin{pmatrix} 3&1&1&1&1&0\\ 1&3&-1&1&0&1\\ 1&-1&3&0&1&-1\\ 1&1&0&3&-1&-1\\ 1&0&1&-1&3&1\\ 0&1&-1&-1&1&3 \end{pmatrix}$	58	60	$\mathrm{Ext}^2(A_4)$
ste12a	$\begin{pmatrix} 2&-1&-1&0&0&0\\ -1&2&1&0&0&0\\ -1&1&2&0&0&0\\ 0&0&0&2&-1&-1\\ 0&0&0&-1&2&1\\ 0&0&0&-1&1&2 \end{pmatrix}$	11	10	$A_3 \perp A_3$

Λ	Q	$\dim M$	N	Remarques
ste12b	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 5 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$	58	60	$\mathrm{Ext}^2(A_4)^*_{\mathrm{even}}$
ste12c	$\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 6 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 6 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & -1 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	21	20	$A_2 \otimes A_3^*$
ste15a	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	58	60	$\mathrm{Ext}^2(A_4)_{\mathrm{even}}$
ste16	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	39	40	D_6^+
ste18a	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	21	20	$A_2 \otimes A_3$
ste21a	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	11	10	A_6
ste21b	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	11	10	$A_6^{(2)} = P_6^5$

Λ	Q	$\dim M$	N	Remarques
ste27	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	2	1	$E_6^2 = P_6^2$
ste30	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	3	2	$D_6 = P_6^3$
ste36	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	3	2	$E_6 = P_6^1$

Dimension impaire $n = 1, 3, 5, 7$ (la dernière est partielle) Ici, si Λ est pair, l'élément $\dim M$ est la dimension de $\mathcal{M}_{(n+1)/2+2}(\Gamma_1(\ell'))$, où ℓ' est le niveau de $\Lambda' = \Lambda \perp A_1$, et N est l'exposant du dernier pivot q^N. Si par contre Λ est impair, $\dim M$ et N se réfèrent à $\sqrt{2}\Lambda \perp A_1$.

Λ	Q	$\dim M$	N	Remarques
stb3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	3	2	$\mathbf{Z}^3$
stb4	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	9	8	A_3^*
stb6	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	9	8	A_3

Λ	Q	$\dim M$	N	Remarques
std5a	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	3	2	$\mathbf{Z}^5$
std5b	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	11	10	D_5^*
std6	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$	21	20	A_5^*
std10	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	21	20	A_5^2
std15a	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	21	20	A_5^2
std15b	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	21	20	A_5^2
std20	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	11	10	A_5^2

Λ	Q	$\dim M$	N	Remarques
stf7a	$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$	4	3	$\mathbf{Z}^7$
stf7d	$\begin{pmatrix} 7&2&2&2&2&2&2\\ 2&4&0&0&0&0&0\\ 2&0&4&0&0&0&0\\ 2&0&0&4&0&0&0\\ 2&0&0&0&4&0&0\\ 2&0&0&0&0&4&0\\ 2&0&0&0&0&0&4 \end{pmatrix}$	13	12	D_7^*
stf8	$\begin{pmatrix} 7&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&7&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&7&-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&-7&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&7&-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&7&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&7 \end{pmatrix}$	47	46	A_7^*
stf28a	$\begin{pmatrix} 2&1&1&1&1&1&1\\ 1&2&1&1&1&1&1\\ 1&1&2&1&1&1&1\\ 1&1&1&2&1&1&1\\ 1&1&1&1&2&1&1\\ 1&1&1&1&1&2&1\\ 1&1&1&1&1&1&2 \end{pmatrix}$	47	46	A_7
stf28b	$\begin{pmatrix} 3&1&1&-1&1&1&1\\ 1&3&-1&1&1&1&1\\ 1&-1&3&1&1&1&1\\ -1&-1&-1&3&-1&-1&-1\\ 1&1&-1&-1&3&1&1\\ 1&1&-1&-1&1&3&1\\ 1&1&-1&-1&1&1&3 \end{pmatrix}$	4	3	E_7^*
stf42	$\begin{pmatrix} 2&0&1&1&1&1&1\\ 0&2&1&1&1&1&1\\ 1&1&2&1&1&1&1\\ 1&1&1&2&1&1&1\\ 1&1&1&1&2&1&1\\ 1&1&1&1&1&2&1\\ 1&1&1&1&1&1&2 \end{pmatrix}$	13	12	P_7^*

Λ	Q	$\dim M$	N	Remarques
stf63	$\begin{pmatrix} 2&0&0&1&1&1&1\\ 0&2&1&1&1&1&1\\ 0&1&2&1&1&1&1\\ 1&1&1&2&1&1&1\\ 1&1&1&1&2&1&1\\ 1&1&1&1&1&2&1\\ 1&1&1&1&1&1&2 \end{pmatrix}$	4	3	E_7

2.5 Un résultat d'irréductibilité

Cette section présente un autre résultat nouveau, à savoir les minima locaux de la hauteur ne peuvent être atteints par des réseaux réductibles, donc a fortiori les minima globaux non plus. L'énoncé précis est donné comme corollaire (Corollaire 114) du Théorème 113, qui est de nature technique.

2.5.1 Une généralisation de la formule de la limite de Kronecker

La démonstration de notre résultat se fonde sur deux éléments : une formule trouvée par Terras dans son papier [61], qui généralise la formule de la limite de Kronecker, et le théorème 2.3 de Chiu contenu dans [15], qui établit un lien entre la formule de la limite de Kronecker et la hauteur. Cette section reparcourt brièvement l'article de Terras, en signalant que sa notation diffère légèrement de la nôtre.

Soit toujours $\Lambda = A\mathbf{Z}^n$ un réseau de covolume 1, de matrice génératrice A et matrice de Gram $Q = A^tA$. La formule de Kronecker classique, que nous avons vue en 1.2.1.1, donne le terme constant dans le développement de Laurent de $Z(Q,s)$ autour du pôle simple $s = n/2$, nommément

$$k_n(Q) = \lim_{s\to n/2}\left\{Z(Q,s) - \frac{|Q|^{-1/2}\pi^{n/2}\Gamma(n/2)^{-1}}{s-n/2}\right\}. \tag{2.39}$$

Du Théorème 81, qui dit que

$$h(\Lambda) = Z'(\Lambda,0) = \pi^{-n/2}\Gamma(n/2)k_n(Q) + \psi(n/2) - \psi(1/2), \tag{2.40}$$

on déduit immédiatement qu'un réseau Λ est un point de minimum local (resp. un point de maximum local, un point critique) pour $h(\Lambda)$ si et seulement si la forme correspondante Q réalise un minimum local (resp. un maximum local, un point critique) de k_n.

Soit $n = n_1 + n_2$, avec $1 \leq n_i \leq n-1$; nous décomposons Q en produit de matrices par blocs de la façon suivante :

Lemme 111 (cf. Siegel, [58], pp. 24–25)**.** *Soit Q une matrice symétrique de taille n, telle que*

$$Q = \begin{pmatrix} T & S \\ S^t & Q_{n_2} \end{pmatrix}, \tag{2.41}$$

avec T de taille n_1 et Q_{n_2} de taille n_2 et non singulière. Alors il existe R de taille $n_2 \times n_1$ et Q_{n_1} de taille n_1 tels que

$$Q = \begin{pmatrix} T & S \\ S^t & Q_{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & R^t \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{n_1} & 0 \\ 0 & Q_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & I \end{pmatrix}. \tag{2.42}$$

On définit la fonction

$$\begin{aligned} H_{n_1,n_2}(Q,s) = |Q_{n_2}|^{-1/2} \sum_{\substack{a \in \mathbf{Z}^{n_1}-0 \\ b \in \mathbf{Z}^{n_2}-0}} & (Q_{n_1}[a])^{\frac{1}{4}n_2 - \frac{1}{2}s} (Q_{n_2}^{-1}[b])^{\frac{1}{2}s - \frac{1}{4}n_2} \\ & \times \exp(2\pi i b^t R a) K_{\frac{1}{2}n_2 - s}(2\pi (Q_{n_1}[a] Q_{n_2}^{-1}[b])^{1/2}), \end{aligned} \tag{2.43}$$

où $K_\nu(z)$ est la *fonction de Bessel modifiée de seconde espèce* définie par

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\{-\frac{1}{2} z (u + \frac{1}{u})\} u^{\nu-1}\, du, \quad \text{for } |\arg z| < \frac{\pi}{2}. \tag{2.44}$$

La fonction H_{n_1,n_2} est une fonction entière de la variable complexe s (cf. [61], Théorème 1), et sa relation avec $k_n(Q)$ est donnée par le théorème suivant :

Théorème 112 (cf. [61], Théorème 4)**.** *Avec les mêmes notations introduites ci-dessus,*

$$\begin{aligned} k_n(Q) &= Z(Q_{n_2}, n/2) + \Gamma(n_1/2)\Gamma(n/2)^{-1} k_{n_1}(Q_{n_1}) |Q_{n_2}|^{-1/2} \pi^{n_2/2} \\ &+ 2H_{n_1,n_2}(Q, n/2)\pi^{n/2}\Gamma(n/2)^{-1} + |Q|^{-1/2}\pi^{n/2}\Gamma(n/2)^{-1}\{\psi(n_1/2) - \psi(n/2)\}, \end{aligned} \tag{2.45}$$

où $\psi(s) = \Gamma'(s)/\Gamma(s)$, et $k_{n_1}(Q_{n_1})$ est le terme de Kronecker, défini par (2.39)*, de Q_{n_1} vue comme forme quadratique en dimension n_1.*

2.5.2 Énoncé et démonstration

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer notre résultat :

Théorème 113. *Soit q une forme quadratique définie positive en n variables, telle que sa matrice Q admette une écriture par blocs de type*

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{n_1} & 0 \\ 0 & Q_{n_2} \end{pmatrix}, \tag{2.46}$$

où Q_{n_1} et Q_{n_2} sont deux matrices carrées symétriques de taille n_1 et n_2 respectivement, avec $1 \leq n_i \leq n-1$. Alors pour toute autre matrice symétrique

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} I & R^t \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{n_1} & 0 \\ 0 & Q_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & I \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

avec R matrice non entière, on a $k_n(\tilde{Q}) < k_n(Q)$.

Corollaire 114. *Soit $\Lambda = \Lambda_1 \perp \Lambda_2$ un réseau n-dimensionnel de covolume 1, qui soit la somme directe orthogonale des deux réseaux Λ_1 de dimension n_1 et Λ_2 de dimensiom n_2, avec $1 \leq n_i \leq n-1$. Alors Λ n'est pas un point de minimum local pour la fonction hauteur h.*

Démonstration du Corollaire. En effet, un tel réseau Λ admet une matrice de Gram Q par blocs comme en (2.46). Si l'on considère par exemple

$$R_\varepsilon = \left(\begin{array}{c|c} \varepsilon & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \Large 0 \\ 0 & \end{array}\right) \tag{2.48}$$

avec $\varepsilon > 0$, alors par le Théorème 113, Q n'est pas un point de minimum local pour k_n, ce qui implique, par le Théorème 81, que Λ n'est pas un point de minimum local pour la hauteur. □

Démonstration du Théorème. La démonstration est un calcul direct à partir de l'identité (2.45). On a d'un côté :

$$\begin{aligned} k_n(Q) &= Z(Q_{n_2}, n/2) + \Gamma(n_1/2)\Gamma(n/2)^{-1}k_{n_1}(Q_{n_1})|Q_{n_2}|^{-1/2}\pi^{n_2/2} \\ &+ 2H_{n_1,n_2}(Q, n/2)\pi^{n/2}\Gamma(n/2)^{-1} + |Q|^{-1/2}\pi^{n/2}\Gamma(n/2)^{-1}\{\psi(n_1/2) - \psi(n/2)\}, \end{aligned} \tag{2.49}$$

et de l'autre côté :

$$\begin{aligned} k_n(\tilde{Q}) &= Z(Q_{n_2}, n/2) + \Gamma(n_1/2)\Gamma(n/2)^{-1}k_{n_1}(Q_{n_1})|Q_{n_2}|^{-1/2}\pi^{n_2/2} \\ &+ 2H_{n_1,n_2}(\tilde{Q}, n/2)\pi^{n/2}\Gamma(n/2)^{-1} + |Q|^{-1/2}\pi^{n/2}\Gamma(n/2)^{-1}\{\psi(n_1/2) - \psi(n/2)\}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Le seul terme qui varie est $H_{n_1,n_2}(Q,n/2)$, par conséquent il faut montrer que

$$H_{n_1,n_2}(\tilde{Q},n/2) < H_{n_1,n_2}(Q,n/2). \tag{2.51}$$

Par (2.43) qui définit H_{n_1,n_2}, on a d'un côté :

$$H_{n_1,n_2}(Q,n/2) = |Q_{n_2}|^{-1/2} \sum_{\substack{a\in\mathbf{Z}^{n_1}-0\\ b\in\mathbf{Z}^{n_2}-0}} (Q_{n_1}[a])^{-\frac{1}{4}n_1}(Q_{n_2}^{-1}[b])^{\frac{1}{4}n_1} \times K_{n_1/2}(2\pi(Q_{n_1}[a]Q_{n_2}^{-1}[b])^{1/2}), \tag{2.52}$$

car $R=0$ pour Q, et de l'autre côté :

$$H_{n_1,n_2}(\tilde{Q},n/2) = |Q_{n_2}|^{-1/2} \sum_{\substack{a\in\mathbf{Z}^{n_1}-0\\ b\in\mathbf{Z}^{n_2}-0}} (Q_{n_1}[a])^{-\frac{1}{4}n_1}(Q_{n_2}^{-1}[b])^{\frac{1}{4}n_1} \times \exp(2\pi i b^t Ra) K_{n_1/2}(2\pi(Q_{n_1}[a]Q_{n_2}^{-1}[b])^{1/2}), \tag{2.53}$$

(on a utilisé $K_\nu = K_{-\nu}$). L'expression pour $H_{n_1,n_2}(\tilde{Q},n/2)$ semble avoir une valeur complexe, mais en réalité est réelle, et pour le voir, on réordonne les termes de la somme en (2.52) : puisque

$$\begin{aligned}\exp(2\pi i b^t Ra) + \exp(2\pi i(-b)^t Ra) &= \exp(2\pi i b^t Ra) + \overline{\exp(2\pi i b^t Ra)}\\ &= 2\cos(2\pi b^t Ra),\end{aligned} \tag{2.54}$$

on a

$$\begin{aligned}H_{n_1,n_2}(\tilde{Q},n/2) &= |Q_{n_2}|^{-1/2} \sum_{\substack{a\in\mathbf{Z}^{n_1}-0\\ b\in\mathbf{Z}^{n_2}-0/\pm 1}} 2\cos(2\pi b^t Ra)(Q_{n_1}[a])^{-\frac{1}{4}n_1}(Q_{n_2}^{-1}[b])^{\frac{1}{4}n_1}\\ &\quad\times K_{n_1/2}(2\pi(Q_{n_1}[a]Q_{n_2}^{-1}[b])^{1/2})\\ &= 4|Q_{n_2}|^{-1/2} \sum_{\substack{a\in\mathbf{Z}^{n_1}-0/\pm 1\\ b\in\mathbf{Z}^{n_2}-0/\pm 1}} \cos(2\pi b^t Ra)(Q_{n_1}[a])^{-\frac{1}{4}n_1}(Q_{n_2}^{-1}[b])^{\frac{1}{4}n_1}\\ &\quad\times K_{n_1/2}(2\pi(Q_{n_1}[a]Q_{n_2}^{-1}[b])^{1/2}).\end{aligned} \tag{2.55}$$

On fait la même manipulation sur $H_{n_1,n_2}(Q,n/2)$ et l'on obtient :

$$H_{n_1,n_2}(Q,n/2) = 4|Q_{n_2}|^{-1/2} \sum_{\substack{a\in\mathbf{Z}^{n_1}-0/\pm 1\\ b\in\mathbf{Z}^{n_2}-0/\pm 1}} (Q_{n_1}[a])^{-\frac{1}{4}n_1}(Q_{n_2}^{-1}[b])^{\frac{1}{4}n_1} \times K_{n_1/2}(2\pi(Q_{n_1}[a]Q_{n_2}^{-1}[b])^{1/2}). \tag{2.56}$$

En comparant terme à terme la somme qui exprime $H_{n_1,n_2}(\tilde{Q}, n/2)$ et la somme qui exprime $H_{n_1,n_2}(Q, n/2)$, on voit tout de suite que

$$H_{n_1,n_2}(\tilde{Q}, n/2) \leq H_{n_1,n_2}(Q, n/2),$$

car $\cos(2\pi b^t Ra) \leq 1$. Puisque R est une matrice non entière, il y a sûrement un couple (a, b) tel que l'inégalité soit stricte, d'où la conclusion. $\square$

Par conséquent, si un réseau Λ de covolume 1 réalise un minimum local de la hauteur, il est nécessairement irréductible.

Remarque 115. Notre résultat est cohérent avec ce qui se passe au niveau de la fonction zêta d'Epstein. En effet, le résultat de Delone et Ryškov rappelé en 2.1 montre que la perfection est une condition nécessaire pour qu'un réseau Λ réalise un minimum local de $Z(\Lambda, s)$ pour tout s assez grand. Or, un réseau parfait est forcément irréductible, comme on l'a rappelé au §1.3.3.1.

Chapitre 3

Hauteur des formes de Humbert sur les corps quadratiques

Introduction et plan du chapitre

Nous avons vu dans les chapitres précédents que la hauteur $h(M)$ d'une variété riemannienne compacte (M, g) est définie comme l'opposé du logarithme de son déterminant spectral : plus précisément, les valeurs propres du Laplacien Δ_g défini sur (M, g) peuvent être disposées en une suite discrète $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ qui diverge vers ∞, et l'on définit la fonction zêta spectrale par

$$\zeta_g(M, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^s}, \quad \operatorname{Re} s > \frac{n}{2}.$$

Il s'avère que cette fonction zêta spectrale est liée à la fonction thêta spectrale

$$\Theta_M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t}$$

par la transformation de Mellin, et elle admet un prolongement méromorphe à tout le plan $\mathbf{C}$, avec un pôle simple en $s = n/2$ et une équation fonctionnelle semblable à celle de la fonction zêta de Riemann. La hauteur $h(M)$ est alors définie comme $\zeta_g'(0)$, et le déterminant spectral par

$$\det{}^*\Delta_g = e^{-\zeta_g'(0)},$$

ce qui formellement peut s'interpréter comme le produit infini des valeurs propres non nulles de Δ_g.

Nous avons aussi vu que dans le cas d'un tore plat $M = \mathbf{R}^n/\Lambda$, avec Λ un réseau de $\mathbf{R}^n$, la fonction zêta spectrale est essentiellement la fonction zêta d'Epstein du réseau dual Λ^*, nommément

$$\zeta_{\mathbf{R}^n/\Lambda}(s) = \frac{1}{(2\pi)^{2s}} Z(\Lambda^*, s) = \frac{1}{(2\pi)^{2s}} \sum_{0 \neq x \in \Lambda^*} \frac{1}{\|x\|^{2s}}.$$

Dans les deux articles [13] et [14], Chinta, Jorgenson et Karlsson ont considéré des suites d'objets qu'ils appellent *tores discrets*, c'est-à-dire des quotients de la forme

$$\frac{\mathbf{Z}^n}{B_k \mathbf{Z}^n},$$

où B_k est une matrice inversible $n \times n$ à coefficients entiers. On munit ces tores de leur structure de graphe de Cayley ; on peut alors étudier le spectre (fini) du Laplacien défini sur $\mathbf{Z}^n/B_k\mathbf{Z}^n$, qui est le Laplacien combinatoire $\Delta_{\mathbf{Z}^n/B_k\mathbf{Z}^n}$, et définir l'analogue du déterminant spectral pour un tore discret, à savoir le produit des $|\det B_k| - 1$ valeurs propres non nulles de $\Delta_{\mathbf{Z}^n/B_k\mathbf{Z}^n}$,

$$\det{}^* \Delta_{\mathbf{Z}^n/B_k\mathbf{Z}^n} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{|\det B_k| - 1}.$$

Le résultat principal de Chinta, Jorgenson et Karlsson est une formule asymptotique pour $\log\det{}^*\Delta_{\mathbf{Z}^n/B_k\mathbf{Z}^n}$ pour $k \to \infty$, sous l'hypothèse que $\det B_k \to \infty$ et $B_k/(\det B_k)^{1/n} \to A \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$. Voici leur formule ([14], th. 1) :

$$\log\det{}^*\Delta_{\mathbf{Z}^n/B_k\mathbf{Z}^n} = c_n|\det B_k| + \frac{2}{n}\log|\det B_k| - h(\mathbf{R}^n/A\mathbf{Z}^n) + o(1); \quad (3.1)$$

la constante c_n, qui dépend seulement de n, est définie par

$$c_n = \log 2n - \int_0^\infty e^{-2nt}(I_0(2t)^n - 1)\frac{dt}{t}, \quad (3.2)$$

où I_0 est la fonction de Bessel modifiée du premier type d'ordre 0, rappelée en (3.9). Cette formule a la propriété remarquable d'établir un lien entre la hauteur du tore plat (réel) $\mathbf{R}^n/A\mathbf{Z}^n$ qui apparaît à la limite, et le déterminant spectral des tores discrets. On a ainsi une connexion entre le cas discret et le cas continu qui n'est pas du tout évidente a priori.

Dans ce chapitre, nous généralisons la formule (3.1) au cas où les matrices B_k sont définies sur l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}(i)$: ainsi nous nous intéressons à des suites de *tores algébriques discrets*

$$\frac{\mathbf{Z}[i]^n}{B_k\mathbf{Z}[i]^n}.$$

Sur ces tores discrets nous définissons une version raffinée du graphe de Cayley, en fait un graphe pondéré, et le Laplacien combinatoire correspondant. Nous pouvons définir ensuite le déterminant spectral discret :

$$\det{}^*\Delta_{\mathbf{Z}[i]^n/B_k\mathbf{Z}[i]^n} = \prod_{\lambda\neq 0}\lambda.$$

De l'autre côté, si $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$ est la limite de la suite $B_k/|\det B_k|^{1/n}$, nous considérons la forme de Humbert H^{-1}, où $H = \overline{A^t}A$ (qui dans ce cas est simplement une forme hermitienne, mais nous allons développer la théorie en général), et la fonction zêta d'Epstein associée $Z(H^{-1}, s)$ (la définition de forme de Humbert est rappelée au §3.5). Dans ce contexte, nous avons obtenu le résultat suivant :

Théorème 116. *Soit $(B_k)_k$ une suite de matrices $n \times n$ de $\mathrm{M}_n(\mathbf{Z}[i])$. Supposons que*

(i) $|\det B_k| \to \infty$ *pour* $k \to \infty$ *;*

(ii) $B_k/|\det B_k|^{1/n} \to A \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$ *pour* $k \to \infty$*.*

Alors pour $n \to \infty$, on a

$$\begin{aligned}\log\det{}^*\Delta_{\mathbf{Z}[i]^n/B_k\mathbf{Z}[i]^n} = |\det B_k|^2 c_{2,n} - 2\frac{d}{ds}Z(H^{-1}, s)\Big|_{s=0} - \frac{2}{n}(4\pi)^{-n} \\ - 2\log 2\pi + \frac{2}{n}\log|\det B_k| + o(1)\end{aligned} \tag{3.3}$$

où

$$c_{2,n} = -\int_0^\infty ((e^{-2t}I_0(2t)^{2n}) - e^{-t})\frac{dt}{t}, \tag{3.4}$$

et I_0 est la fonction de Bessel modifiée de premier type.

Voici donc le plan de ce chapitre.

- Dans la Section 3.1 nous introduisons la terminologie employée dans les deux articles susmentionnés, notamment les tores discrets, le graphe de Cayley, le Laplacien combinatoire, le déterminant spectral discret et les noyaux de la chaleur.

- Dans la Section 3.2 nous donnons le résultat principal de Chinta, Jorgenson et Karlsson, qui est la formule asymptotique faisant apparaître la hauteur d'un tore plat, et nous en esquissons rapidement la démonstration. Cela sert à la compréhension de notre Théorème 116, dont la démonstration suit d'assez près leur schéma.

- dans la Section 3.3 nous définissons les tores discrets sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres quelconque, nous définissons le Laplacien discret et en déterminons le spectre ; enfin, nous calculons le noyau de la chaleur associé et nous l'utilisons pour donner une identité pour la fonction thêta.

- Ensuite, dans la section 3.5 nous nous concentrons sur le cas des entiers de Gauss : nous introduisons les formes de Humbert, ensuite nous montrons la convergence de la fonction thêta avec l'identité trouvée au §3.3, nous calculons l'asymptotique pour $\log\det^*\Delta_{\mathbf{Z}[i]^n/B_k\mathbf{Z}[i]^n}$ et nous le mettons en relation avec la fonction zêta des formes de Humbert.

3.1 Complexité des tores discrets

Soit X un graphe, fini ou infini. On suppose que pour tout sommet x de X, l'ensemble des sommets adjacents $N(x)$ soit fini. On peut définir alors le *Laplacien combinatoire* sur les fonctions $f : X \to \mathbf{R}$ en posant

$$\Delta f(x) = \sum_{y\in N(x)} (f(x) - f(y)) = |N(x)|f(x) - \sum_{y\in N(x)} f(y); \tag{3.5}$$

cependant quelques auteurs, cf. p.ex. [37], préfèrent poser

$$\Delta f(x) = f(x) - \frac{1}{|N(x)|}\sum_{y\in N(x)} f(y).$$

L'*équation de la chaleur* est l'équation aux dérivées partielles suivante, bien classique :

$$\left(\Delta + \frac{\partial}{\partial t}\right) f(t,x) = 0 \tag{3.6}$$

Soit δ_y la fonction delta de Kronecker, qui vaut 1 en y et 0 en tout $x \neq y$, et fixons un sommet $0 \in X$.

Définition 117. On appelle *noyau de la chaleur* (heat kernel) $K^X(t,x)$ l'unique fonction bornée qui est solution de l'équation de la chaleur, satisfaisant la condition initiale $K^X(0,x) = \delta_0(x)$:

$$K^X \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_{>0} \times X) \text{ t.q. } \begin{cases} \left(\Delta + \frac{\partial}{\partial t}\right) f(t,x) = 0 \\ \lim_{t\to 0} K^X(0,x) = \delta_0(x) \\ \forall t,\ x \mapsto K^X(t,x) \text{ est bornée.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Le noyau de la chaleur existe et il est unique (cf. [29] et [30]). Ici nous nous intéressons aux noyaux de la chaleur de $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}^n$ et des tores complexes $\mathbf{Z}^n/B\mathbf{Z}^n$. On munit ces différents groupes de leur graphe de Cayley standard. Rappelons sa définition : soit G un groupe engendré par un ensemble fini S, le graphe de Cayley de G correspondant à S est le graphe qui a comme sommets les éléments de G, et où deux sommets x et y sont adjacents s'il existe un élément s de $S \cup S^{-1}$ tel que $y = xs$.

Le premier exemple est $\mathbf{Z}$: ici on prend comme ensemble générateur $S = \{1\}$, et nous avons $m \sim n \Leftrightarrow m = n \pm 1$ (le symbole $\sim$ dénote les sommets adjacents). Le graphe de Cayley associé à $\mathbf{Z}$ est donc la droite réelle avec des sommets aux nombres entiers. Le Laplacien combinatoire est

$$\Delta_{\mathbf{Z}} = 2f(x) - (f(x+1) + f(x-1)).$$

Le noyau de la chaleur pour $\mathbf{Z}$ est donné par

$$K^{\mathbf{Z}}(t,x) = e^{-2t} I_x(2t), \tag{3.8}$$

où I_x est la I-fonction de Bessel d'ordre x, pour des entiers $x \geq 0$, appelée aussi fonction de Bessel modifiée du premier type, nommément

$$I_x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{x+2k}}{k!(x+k)!} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{t\cos\theta} \cos(\theta x)\, d\theta. \tag{3.9}$$

Pour x négatif, on a $I_x = I_{-x}$. La fonction I_x est une solution de l'équation différentielle

$$t^2 \frac{d^2 w}{dt^2} + t\frac{dw}{dt} - (t^2 + x^2) = 0, \tag{3.10}$$

et elle satisfait la relation récursive suivante :

$$I_{x+1}(t) + I_{x-1}(t) = 2\frac{d}{dt} I_x(t), \tag{3.11}$$

pour tout entier x, laquelle peut être prouvée à travers l'expression intégrale de I_x. Pour la démonstration et pour plus de détails sur les fonctions de Bessel, cf. [37].

Le deuxième exemple est $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$: on prend comme ensemble générateur $S = \{1\}$ comme dans le cas de $\mathbf{Z}$, et le Graphe de Cayley associé à $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ est ainsi le graphe cycle usuel à m sommets. Le Laplacien combinatoire est tout à fait analogue à celui de $\mathbf{Z}$, nommément

$$\Delta_{\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}} = 2f(x) - (f(x+1) + f(x-1)),$$

où $x \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. La détermination du noyau de la chaleur pour $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ est faite au §4 de [37] et nous nous contentons de la résumer : d'un côté les caractères de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$

$$\chi_j(x) = e^{2\pi i j x/m}, \quad j = 0, \dots, m-1$$

constituent une base orthonormée de fonctions propres du Laplacien, avec valeur propre correspondante $2 - 2\cos(2\pi j/m)$; le noyau de la chaleur est donné par

$$K^{\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}}(t,x) = e^{-t\Delta}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\chi_j(x)\right) = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} e^{-t(2-2\cos(2\pi j/m))}e^{2\pi i j x/m}. \tag{3.12}$$

De l'autre côté, on peut calculer le noyau de la chaleur pour $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ en périodisant $K^{\mathbf{Z}}$ par le sous-groupe $m\mathbf{Z}$ de $\mathbf{Z}$: on obtient une somme

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2t} I_{x+km}(2t) \tag{3.13}$$

qui converge (cf. [37], §5) et définit une fonction sur $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. On peut vérifier que cette fonction est un noyau de la chaleur pour $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$: par l'unicité, on arrive à l'identité

$$\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} e^{-t(2-2\cos(2\pi j/m))}e^{2\pi i j x/m} = e^{-2t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{x+km}(2t) \tag{3.14}$$

d'où, en spécialisant à $x = 0$, on déduit la *formule d'inversion de la fonction thêta* :

$$\sum_{j=0}^{m-1} e^{-t(2-2\cos(2\pi j/m))} = m \cdot e^{-2t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{km}(2t) \tag{3.15}$$

qui est fondamentale dans la suite. Pour comprendre ce nom, il suffit de remarquer que le membre de gauche n'est autre que la *fonction thêta spectrale* de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$

$$\theta_{\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}}(t) := \sum_{j=0}^{m-1} e^{-t\lambda_j},$$

où les λ_j sont les valeurs propres du Laplacien sur $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, comme on l'a vu.

Maintenant $\mathbf{Z}^n$: ici on prend comme ensemble générateur les vecteurs de la base canonique $S = \{e_1, \dots, e_n\}$, et nous avons $x \sim y \Leftrightarrow x = y \pm e_k$, c.-à-d. si et seulement x et y diffèrent de ± 1 dans une coordonnée et sont égaux ailleurs. Le Laplacien combinatoire est

$$\Delta_{\mathbf{Z}^n} = 2nf(x) - \sum_{k=1}^{n}(f(x+e_k) + f(x-e_k)).$$

Le noyau de la chaleur pour $\mathbf{Z}^n$ se trouve rapidement à partir de celui pour $\mathbf{Z}$, puisque le nouyau de la chaleur d'un produit cartesien est le produit des noyaux de la chaleur (cf. [13]), donc on a

$$K^{\mathbf{Z}^n}(t,x) = \prod_{k=1}^{n} K^{\mathbf{Z}}(t,x_k) = e^{-2nt}\prod_{k=1}^{n} I_{x_k}(2t). \tag{3.16}$$

Enfin, les tores discrets : Soit $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \cap \mathrm{M}_n(\mathbf{Z})$ une matrice inversible à coefficients entiers, et soit $\Lambda = B\mathbf{Z}_n$ le réseau euclidien associé. Le *tore discret* est le groupe quotient

$$\frac{\mathbf{Z}^n}{B\mathbf{Z}^n}$$

muni de son graphe de Cayley. Pour construire le graphe de Cayley on prend comme ensemble générateur les images des éléments e_k de la base canonique dans le quotient par $B\mathbf{Z}^n$. Deux éléments x et y sont adjacents s'ils diffèrent de ± 1 dans une coordonnée, et ils sont égaux ailleurs, modulo $B\mathbf{Z}^n$. On définit le Laplacien combinatoire sur $\mathbf{Z}^n/B\mathbf{Z}^n$ de la façon suivante : il s'agit d'un *Laplacien combinatoire pondéré* donnée par

$$\Delta_B f(x) = \sum_{y\sim x} w_{xy}(f(x) - f(y)), \tag{3.17}$$

où

$$w_{xy} = |\{(j,k)|\ y \equiv x + \alpha_k e_j \mod B\mathbf{Z}^n|\}.$$

En d'autres termes, pour chaque adjacent y d'un élément x, on tient compte du nombre d'adjacents coïncidents d'un relèvement de x dans $\mathbf{Z}^n$ qui sont représentés par y dans le quotient. Avec cette définition il est clair que

$$\sum_{y\sim x} w_{xy} = 2n,$$

ce qui signifie qu'on fait comme si chaque x avait toujours $2n$ adjacents.

Le spectre et les fonctions propres des tores discrets sont données par la proposition suivante :

Proposition 118 (cf. [14], Prop. 4)**.** *Les fonctions propres de Δ_B sont*

$$f_v(x) = e^{2\pi i(x\cdot v)}, \tag{3.18}$$

pour tout $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \Lambda^*/\mathbf{Z}^n$. Les valeurs propres correspondantes sont données par

$$\lambda_v = 2n - 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2\pi v_k). \tag{3.19}$$

Pour le noyau de la chaleur on a des formules analogues à celles pour $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$: d'un côté $K^{\mathbf{Z}^n/B\mathbf{Z}^n}$ est la périodisation de $K^{\mathbf{Z}^n}$ par le sous-groupe $B\mathbf{Z}^n$, de l'autre côté on peut exprimer $K^{\mathbf{Z}^n/B\mathbf{Z}^n}$ en terme des fonctions propres f_v. Plus précisément, on arrive aux formules suivantes :

Proposition 119 (cf. [14], Prop. 5)**.** *Le noyau de la chaleur pour $\mathbf{Z}^n/B\mathbf{Z}^n$ est donné par*

$$K^{\mathbf{Z}^n/B\mathbf{Z}^n}(t,x) = \sum_{y\in B\mathbf{Z}^n} K^{\mathbf{Z}^n}(t,x-y) = \frac{1}{|\det B|}\sum_{v\in\Lambda^*/\mathbf{Z}^n} e^{-t\lambda_v} f_v(x). \tag{3.20}$$

En particulier, pour $x=0$ on a la formule d'inversion de la fonction thêta :

$$\theta_B(t) := \sum_{v\in\Lambda^*/\mathbf{Z}^n} e^{-t\lambda_v} = |\det B| \sum_{y\in B\mathbf{Z}^n} e^{-2nt} I_{y_1}(2t)\cdots I_{y_n}(2t). \tag{3.21}$$

Remarque 120. Expliquons pourquoi dans le titre de cette Section nous avons mentionné la complexité : soit G un graphe fini, un *arbre couvrant* est un sous-graphe qui contient exactement un chemin entre chaque paire de sommets du graphe G ; la *complexité* $\tau(G)$ est le nombre d'arbres couvrants. Le théorème de Kirchhoff (de 1847, cf. [38]) affirme que la complexité de G est égale à $\det^*\Delta/|V(G)|$, c.-à-d. le produit des valeurs propres non nulles du Laplacien combinatoire divisé par le nombre de sommets. Appliqué au graphe de Cayley sur $\mathbf{Z}^n/B\mathbf{Z}^n$, cela nous dit que sa complexité est

$$\frac{\prod_{\lambda\neq 0}\lambda}{|\det B|}. \tag{3.22}$$

En d'autres termes, la complexité d'un tore discret peut être vue comme le «bon» analogue discret de la hauteur d'un tore plat.

3.2 Une formule asymptotique pour la hauteur

Partons de l'équation (3.21). La fonction $\theta_B(t)$ est aussi appelée la *trace* du noyau de la chaleur $K^{\mathbf{Z}^n/B\mathbf{Z}^n}$. Pour déterminer les développements asymptotiques du determinant spectral, il faut d'abord l'exprimer en termes du noyau de la chaleur, c.-à-d. en termes des fonctions de Bessel. Les étapes suivantes sont détaillées au §3 de [13] pour le seul cas de B diagonale, mais elles se démontrent de la même manière pour une matrice B quelconque avec de petites modifications secondaires.

On écrit

$$\theta_B(t) - 1 = |\det B| e^{-2nt}(I_0(2t))^n + [\theta_B(t) - |\det B| e^{-2nt}(I_0(2t))^n - 1] \quad (3.23)$$

où on a ôté le terme $e^{-t\lambda_v}$ correspondant à $\lambda_v = 0$ et on a mis en évidence le terme du noyau de la chaleur correspondant à $x = 0$. On applique aux deux membres la *transformation de Gauss*, qui est

$$(\mathbf{G}f)(s) = 2s \int_0^\infty f(t) e^{-s^2 t} dt.$$

On a à gauche

$$\mathbf{G}(\theta_B - 1)(s) = \int_0^\infty 2s \sum_{\lambda \neq 0} e^{-\lambda t} e^{-s^2 t} dt = \sum_{\lambda \neq 0} \frac{2s}{s^2 + \lambda}, \quad (3.24)$$

d'où l'identité suivante :

$$\sum_{\lambda \neq 0} \frac{2s}{s^2 + \lambda} = |\det B| 2s \int_0^\infty e^{-s^2 t} e^{-2nt} (I_0(2t))^n dt \\ + 2s \int_0^\infty e^{-s^2 t} [\theta_B(t) - |\det B| e^{-2nt} (I_0(2t))^n - 1] dt. \quad (3.25)$$

Ensuite on introduit les fonctions

$$f(s) = \sum_{\lambda \neq 0} \log(s^2 + \lambda) \quad (3.26)$$

$$\mathcal{I}_n(s) = -\int_0^\infty (e^{-s^2 t} e^{-2nt} I_0(2t)^n - e^{-t}) \frac{dt}{t} \quad (3.27)$$

$$\mathcal{H}_B(s) = -\int_0^\infty \left(e^{-s^2 t}[\theta_B(t) - |\det B| e^{-2nt} I_0(2t)^n - 1] + e^{-t}\right) \frac{dt}{t} \quad (3.28)$$

et l'on remarque (cf. [13], Lemme 3.3, Prop. 3.4 et Prop. 3.5) que

$$\partial_s f(s) = \sum_{\lambda \neq 0} \frac{2s}{s^2 + \lambda} \quad (3.29)$$

$$\partial_s \mathcal{I}_n(s) = 2s \int_0^\infty e^{-s^2 t} e^{-2nt} I_0(2t)^n dt \quad (3.30)$$

$$\partial_s \mathcal{H}_B(s) = 2s \int_0^\infty e^{-s^2 t} [\theta_B(t) - |\det B| e^{-2nt} I_0(2t)^n - 1] dt \quad (3.31)$$

Avec une intégration et quelques estimations on arrive à démontrer le théorème suivant :

Théorème 121 (cf. [13], th. 3.6, reformulé comme th. 6 en [14])**.** *Pour tout $s \in \mathbf{C}$ avec $\mathrm{Re}(s^2) > 0$, on a la relation*

$$\sum_{\lambda \neq 0} \log(s^2 + \lambda) = |\det B| \mathcal{I}_n(s) + \mathcal{H}_B(s). \tag{3.32}$$

En faisant tendre $s \to 0$, cela donne l'identité

$$\log \det{}^* \Delta_{\mathbf{Z}^n / B\mathbf{Z}^n} = \log \left(\prod_{\lambda \neq 0} \lambda \right) = |\det B| \mathcal{I}_n(0) + \mathcal{H}_B(0), \tag{3.33}$$

où

$$\mathcal{I}_n(0) = -\int_0^\infty (e^{-2nt} I_0(2t)^n - e^{-t}) \frac{dt}{t} \tag{3.34}$$

$$\mathcal{H}_B(0) = -\int_0^\infty (\theta_B(t) - |\det B| e^{-2nt} I_0(2t)^n - 1 + e^{-t}) \frac{dt}{t}. \tag{3.35}$$

Maintenant, la formule asymptotique de Chinta, Jorgenson et Karlsson : soit $(B_k)_k$ une suite de matrices entières $n \times n$ telle que $0 < \det B_k \to \infty$ et satisfaisant

$$\frac{1}{(\det B_k)^{1/n}} B_k \to A \text{ pour } k \to \infty \tag{3.36}$$

pour une certaine matrice $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$. Le premier résultat est la convergence ponctuelle de θ_{B_k} à la fonction thêta spectrale Θ_A définie en (1.109) :

Proposition 122 (cf. [14], Prop. 9)**.** *Pour tout $t > 0$ fixé on a la convergence ponctuelle*

$$\theta_{B_k}((\det B_k)^{2/n} t) \to \Theta_A(t) \text{ pour } k \to \infty. \tag{3.37}$$

Ensuite, la quantité $\mathcal{I}_n(0)$ ne dépend pas de B_k ; le comportement asymptotique de $\mathcal{H}_B(0)$ est donné par la proposition suivante :

Proposition 123 (cf. [14], Prop. 11 et Prop. 12 ; [13], Lemme 5.6)**.** *(i) Soit $u_k := (\det(B_k))^{1/n}$. On a*

$$\begin{aligned} &\int_1^\infty \left(\theta_{B_k}(u_k^2 t) - u_k^n e^{-2n u_k^2 t} I_0(2 u_k^2 t)^n - 1 + e^{-u_k^2 t} \right) \frac{dt}{t} \\ &\qquad = \int_1^\infty (\Theta_A(t) - 1) \frac{dt}{t} - \frac{2}{n} (4\pi)^{-n/2} + o(1) \end{aligned} \tag{3.38}$$

pour $k \to \infty$.

(ii) Avec les mêmes notations, on a

$$\int_0^1 \left(\theta_{B_k}(u_k^2 t) - u_k^n e^{-2nu_k^2 t} I_0(2u_k^2 t)^n\right)\frac{dt}{t} \to \int_0^1 \left(\Theta_A(t) - (4\pi t)^{-n/2}\right)\frac{dt}{t} \tag{3.39}$$

pour $k \to \infty$.

(iii) Pour $u \in \mathbf{R}$ on a la formule asymptotique

$$\int_0^1 (e^{-u^2 t} - 1)\frac{dt}{t} = \Gamma'(1) - 2\log(u) + o(1) \tag{3.40}$$

pour $u \to \infty$.

On peut maintenant déduire la formule asymptotique pour le déterminant spectral du tore discret : par le Théorème 121 on a

$$\log\det{}^*\Delta_{\mathbf{Z}^n/B\mathbf{Z}^n} = |\det B_k|\mathcal{I}_n(0) - \int_0^\infty (\theta_{B_k}(t) - |\det B_k|e^{-2nt}I_0(2t)^n - 1 + e^{-t})\frac{dt}{t}. \tag{3.41}$$

On fait le changement de variables $t \to u_k^2 t$ dans l'intégrale en (3.41), et on a

$$\begin{aligned}
&-\int_0^\infty (\theta_{B_k}(u_k^2 t) - |\det B_k|e^{-2nu_k^2 t}I_0(2u_k^2 t)^n - 1 + e^{-u_k^2 t})\frac{dt}{t} \\
&\quad = -\left[\int_0^1 + \int_1^\infty\right](\theta_{B_k}(u_k^2 t) - |\det B_k|e^{-2nu_k^2 t}I_0(2u_k^2 t)^n - 1 + e^{-u_k^2 t})\frac{dt}{t} \\
&\quad = -\int_0^1 (\theta_{B_k}(u_k^2 t) - |\det B_k|e^{-2nu_k^2 t}I_0(2u_k^2 t)^n)\frac{dt}{t} - \int_0^1 (e^{-u_k^2 t} - 1)\frac{dt}{t} \\
&\qquad\quad - \int_1^\infty (\theta_{B_k}(u_k^2 t) - |\det B_k|e^{-2nu_k^2 t}I_0(2u_k^2 t)^n - 1 + e^{-u_k^2 t})\frac{dt}{t}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Avec la proposition précédente, on développe ces trois intégrales : la première intégrale se traite avec (3.39), la deuxième avec (3.40) et la troisième avec (3.38). On obtient que l'intégrale en (3.41) est donc égale à

$$\begin{aligned}
-\int_1^\infty (\Theta_A(t) - 1)\frac{dt}{t} + \frac{2}{n}(4\pi)^{-n/2} - \int_0^1 \left(\Theta_A(t) - (4\pi t)^{-n/2}\right)\frac{dt}{t} \\
- \Gamma'(1) + 2\log(u_k) + o(1).
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Finalement, il suffit d'identifier les termes du développement de $-\zeta'(0) = \log\det{}^*\Delta_{\mathbf{R}^n/A\mathbf{Z}^n}$ déterminé en (1.119) pour trouver la formule (3.1) qui met en relation la hauteur $h(\mathbf{R}^n/A\mathbf{Z}^n)$ avec les déterminants spectraux des tores discrets. La voici encore une fois :

$$\log\det{}^*\Delta_{\mathbf{Z}^n/B_k\mathbf{Z}^n} = |\det B_k|\mathcal{I}_n(0) + \frac{2}{n}\log|\det B_k| - h(\mathbf{R}^n/A\mathbf{Z}^n) + o(1). \tag{3.44}$$

3.3 Tores discrets sur les anneaux de nombres

3.3.1 Le graphe de Cayley sur $\mathcal{O}_K^n/B\mathcal{O}_K^n$

Soit K un corps de nombres, de degré d sur $\mathbf{Q}$, et soit $n \geq 1$ un entier fixé. Dénotons par $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K. Supposons qu'on ait une matrice $B \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_K)$ avec déterminant non nul, on s'intéresse au *tore algébrique discret* associé à B, c.-à-d. le quotient $\mathcal{O}_K^n/B\,\mathcal{O}_K^n$.

On définit une structure de graphe sur $\mathcal{O}_K^n/B\mathcal{O}_K^n$, laquelle est essentiellement le graphe de Cayley : pour cela, fixons une base entière $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ pour $\mathcal{O}_K$ (rappelons que le choix n'est pas canonique), de telle façon que

$$\mathcal{O}_K = \alpha_1\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \alpha_d\mathbf{Z};$$

alors on associe à cette base l'ensemble

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_d \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_d \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{\alpha_k e_j\}_{\substack{j=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,d}}. \end{aligned}$$

Or, S est sans doute un ensemble générateur de $\mathcal{O}_K^n$ sur $\mathbf{Z}$ (cf. [37]), donc on peut définir les adjacents d'un élément $x \in \mathcal{O}_K^n$: on pose

$$y \sim x \Leftrightarrow y - x = \pm\alpha_k e_j.$$

Cela définit une structure de graphe sur $\mathcal{O}_K^n$. Ensuite on passe au quotient par $B\,\mathcal{O}_K^n$: le cardinal est

$$\left| \frac{\mathcal{O}_K^n}{B\,\mathcal{O}_K^n} \right| = |\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^K(\det B)|,$$

où $\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^K$ est la norme algébrique usuelle, cf. [55], Ch. III Prop. 2, avec le résultat classique que pour un idéal principal $b\mathcal{O}_K$,

$$|\mathcal{O}_K/b\mathcal{O}_K| = |\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^K(b)|.$$

Or le quotient est engendré sur $\mathbf{Z}$ par les classes des $\alpha_k e_j$; par conséquent on peut définir les adjacents d'un élément $x \in \mathcal{O}_K^n/B\mathcal{O}_K^n$ par

$$y \sim x \Leftrightarrow y - x \equiv \pm\alpha_k e_j \mod B\mathcal{O}_K^n.$$

Remarque 124. Le nombre exact d'adjacents de chaque sommet est $\leq 2dn$, à cause des chevauchements des sommets adjacents en $\mathcal{O}_K^n$ quand on passe au quotient. Les auteurs de l'article [14] semblent ne pas avoir tenu compte de la possibilité de chevauchement dans le cas $\mathbf{Z}^d/B\mathbf{Z}^d$, ce qui rend leur calcul des valeurs propres du Laplacien légèrement imprécis. Toutefois, cette difficulté peut être évitée aisément en utilisant un Laplacien pondéré qui tienne compte d'éventuelles arêtes multiples.

3.3.2 Laplacien discret

Une fois que l'on a défini une structure de graphe sur $\mathcal{O}_K^n$, on peut définir le Laplacien (combinatoire) associé, de la façon usuelle : pour une fonction f de $\mathcal{O}_K^n$ à valeurs dans $\mathbf{C}$, on pose

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= \sum_{y\sim x}(f(x)-f(y))\\ &= |\mathrm{N}(x)|f(x) - \sum_{y\sim x} f(y)\\ &= 2dn\, f(x) - \sum_{\substack{j=1,\dots,n\\ k=1,\dots,d}} [f(x+\alpha_k e_j) + f(x-\alpha_k e_j)].\end{aligned} \tag{3.45}$$

Maintenant, sur le quotient $\mathcal{O}_K^n/B\,\mathcal{O}_K^n$, on peut définir le *Laplacien combinatoire pondéré* par

$$\Delta_B f(x) = \sum_{y\sim x} w_{xy}(f(x)-f(y)), \tag{3.46}$$

où

$$w_{xy} = |\{(j,k) |\ y \equiv x+\alpha_k e_j \mod B\mathcal{O}_K^n|\}.$$

En d'autres termes, pour chaque adjacent y d'un élément x, on tient compte du nombre d'adjacents coïncidents de $\mathcal{O}_K^n$ qui sont représentés par y dans le quotient. Avec cette définition il est clair que

$$\sum_{y\sim x} w_{xy} = 2dn.$$

3.3.3 Spectre et fonctions propres

De la même façon que les auteurs de [14] le font pour $\mathbf{Z}^n/B\mathbf{Z}^n$, nous procédons à déterminer le spectre et les fonctions propres du Laplacien. On rappelle d'abord la définition de codifférente :

Définition 125. Soit $\mathrm{Tr}_{\mathbf{Q}}^{K}$ la forme trace associée au corps de nombres K. La *codifférente* de K est l'idéal fractionnaire $\mathcal{D}^{-1}$ de K constitué de tous les éléments x de K tels que $\mathrm{Tr}_{\mathbf{Q}}^{K}(xy) \in \mathbf{Z}$ pour tout y dans $\mathcal{O}_K$.

Proposition 126. *Les fonctions propres de Δ_B sont données par*

$$f_v(x) = e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(x,v)}, \tag{3.47}$$

pour chaque $v \in \mathcal{D}^{-1}B^*\mathcal{O}_K^n/\mathcal{D}^{-1}\mathcal{O}_K^n$, où $\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}_{\mathcal{O}_K}^{-1}$ est la codifférente de K. La valeur propre correspondante est

$$\lambda_v = 2dn - 2 \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,d}} \cos(2\pi \,\mathrm{Tr}_{\mathbf{Q}}^{K}(\alpha_k v_j)), \tag{3.48}$$

Démonstration. On vérifie facilement que les f_v sont bien définies, en effet si l'on remplace x par $x + B\eta$, $\eta \in \mathcal{O}_K^n$, et v par $v + \alpha\xi$, $\alpha \in \mathcal{D}^{-1}$ et $\xi \in \mathcal{O}_K^n$, on a

$$\begin{aligned} e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(x+B\eta, v+\alpha\xi)} &= e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(x,v)} \cdot e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(x,\alpha\xi)} \cdot e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(B\eta,v)} \cdot e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(B\eta,\alpha\xi)} \\ &= e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(x,v)}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

On vérifie que ces fonctions sont des fonctions propres par calcul direct :

$$\begin{aligned} \Delta_B f_v(x) &= \sum_{y\sim x} w_{xy}(f_v(x) - f_v(y)) \\ &= \sum_{y\sim x} w_{xy}\big(e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(x,v)} - e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(y,v)}\big) \\ &= \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,d}} \big(e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(x,v)} - e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(x+\alpha_k e_j,v)}\big) + \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,d}} \big(e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(x,v)} - e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(x-\alpha_k e_j,v)}\big) \\ &= 2dne^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(x,v)} - e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(x,v)} \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,d}} \big[e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(\alpha_k e_j,v)} + e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(-\alpha_k e_j,v)}\big] \\ &= \lambda_v f_v. \end{aligned} \tag{3.50}$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_v &= 2dn - \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,d}} \big[e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(\alpha_k e_j,v)} + e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(-\alpha_k e_j,v)}\big] \\ &= 2dn - \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,d}} \big[e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(\alpha_k v_j)} + e^{2\pi i \,\mathrm{Tr}(-\alpha_k v_j)}\big] \\ &= 2dn - 2 \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,d}} \cos(2\pi \,\mathrm{Tr}(\alpha_k v_j)). \end{aligned} \tag{3.51}$$

□

3.3.4 Noyaux de la chaleur et une identité pour θ_B

Ensuite on détermine le noyau de la chaleur du tore algébrique discret $\mathcal{O}_K^n/B\mathcal{O}_K^n$, que nous dénotons par

$$K^B(t,x) : \mathbf{R}_{\geq 0} \times \mathcal{O}_K^n/B\mathcal{O}_K^n.$$

Proposition 127. *Le noyau de la chaleur du tore algébrique discret $\mathcal{O}_K^n/B\mathcal{O}_K^n$ est donné par la formule suivante :*

$$\mathrm{K}^{\mathcal{O}_K^n/B\mathcal{O}_K^n} = \sum_{y\in B\mathcal{O}_k^n} \mathrm{K}^{\mathcal{O}_k^n}(t,x-y) = \frac{1}{|\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^k(\det B)|} \sum_{v\in \frac{\mathcal{D}^{-1}B^*\mathcal{O}_K^n}{\mathcal{D}^{-1}\mathcal{O}_K^n}} e^{-t\lambda_v} f_v(x). \quad (3.52)$$

En particulier

$$\theta_{\mathrm{DT}(B)}(t) = \sum_{v\in \frac{\mathcal{D}^{-1}B^*\mathcal{O}_K^n}{\mathcal{D}^{-1}\mathcal{O}_K^n}} e^{-t\lambda_v} = |\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^K(\det B)| \sum_{y\in B\mathcal{O}_K^n} e^{-2dnt} \prod_{\substack{j=1\ldots n\\ k=1\ldots d}} I_{y_{j,k}}(2t). \quad (3.53)$$

Démonstration. Analogue à celle de [14], Prop. 5, qui généralise le Lemme 3.1 de [13], lequel est une généralisation du Th. 9 de [37] :

D'un côté, le noyau de la chaleur d'un produit d'espaces est le produit des noyaux de la chaleur, donc

$$K^{\mathbf{Z}^n}(t,x) = e^{-2nt} I_{x_1}(2t)\cdots I_{x_n}(2t), \quad (3.54)$$

pour $x = (x_1,\ldots,x_n)$. Puisque choisir une base de $\mathcal{O}_K$ est équivalent à identifier $\mathcal{O}_K$ à $\mathbf{Z}^d$, il s'ensuit que si

$$\mathcal{O}_K^n \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,1}\alpha_1 + \cdots + x_{1,d}\alpha_d \\ \vdots \\ x_{n,1}\alpha_1 + \cdots + x_{n,d}\alpha_d \end{pmatrix}, \quad (3.55)$$

alors le noyau de la chaleur sur $\mathcal{O}_K^n$ est simplement

$$K^{\mathcal{O}_K^n}(t,x) = e^{-2dnt} \prod_{\substack{j=1,\ldots,n\\ k=1,\ldots,d}} I_{x_{j,k}}(2t). \quad (3.56)$$

Enfin, le noyau de la chaleur d'un quotient, dans ce cas le tore discret $\mathcal{O}_K^n/B\mathcal{O}_K^n$, est la périodisation de $K^{\mathcal{O}_K^n}$ par le sous-groupe $B\mathcal{O}_K^n$, nommément

$$K^{\mathcal{O}_K^n/B\mathcal{O}_K^n}(t,x) = \sum_{y\in B\mathcal{O}_K^n} K^{\mathcal{O}_K^n}(t,x-y) = \sum_{y\in \mathcal{O}_K^n} e^{-2dnt} \prod_{\substack{j=1,\ldots,n\\ k=1,\ldots,d}} I_{(x-y)_{j,k}}(2t). \quad (3.57)$$

De l'autre côté, le noyau de la chaleur sur le quotient fini $\mathcal{O}_K^n/B\mathcal{O}_K^n$ peut être calculé directement, en exprimant la solution

$$K(t,x) = e^{-t\Delta}\delta_0(x)$$

de l'équation de la chaleur à travers les fonctions propres f_v (cf. [37], p. 4 et 6). En effet, le Laplacien est un opérateur symétrique et les f_v forment une base orthonormée de fonctions propres, comme on le vérifie immédiatement : on a en effet

$$\begin{aligned}(f_v, f_w) &= \frac{1}{|\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^K(\det B)|}\sum_{x\in\mathcal{O}_K^n/B\mathcal{O}_K^n} \overline{f_v(x)} f_w(x)\\ &= \frac{1}{|\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^K(\det B)|}\sum_{x\in\mathcal{O}_K^n/B\mathcal{O}_K^n} e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(x,w-v)};\end{aligned}$$

si $w = v$ cela donne 1, sinon il faut montrer que si

$$0 \neq u \in \frac{\mathcal{D}^{-1}B^*\mathcal{O}_k^n}{\mathcal{D}^{-1}\mathcal{O}_k^n}, \quad \text{alors} \sum_{x\in\mathcal{O}_K^n/B\mathcal{O}_K^n} e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(x,u)} = 0.$$

Cela se voit par un argument classique, car si x_0 est un élément dans $\mathcal{O}_K^n/B\mathcal{O}_K^n$ tel que $\mathrm{Tr}(x_0,u) \notin \mathbf{Z}$ (et il existe parce que u n'est pas dans $\mathcal{D}^{-1}\mathcal{O}_K^n$), alors la dernière somme vaut

$$e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(x_0,u)} \sum_{x\in\mathcal{O}_K^n/B\mathcal{O}_K^n} e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(x,u)},$$

c'est-à-dire

$$(1 - e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(x_0,u)}) \sum_{x\in\mathcal{O}_K^n/B\mathcal{O}_K^n} e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(x,u)} = 0,$$

d'où le résultat.

On en déduit que

$$\delta_0 = \frac{1}{|\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^K(\det B)|}\sum_{v\in\frac{\mathcal{D}^{-1}B^*\mathcal{O}_K^n}{\mathcal{D}^{-1}\mathcal{O}_K^n}} \overline{f_v(0)} f_v \tag{3.58}$$

et

$$K^{\mathcal{O}_K^n/B\mathcal{O}_K^n}(t,x) = e^{-t\Delta}\delta_0(x) = \frac{1}{|\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^K(\det B)|}\sum_{v\in\frac{\mathcal{D}^{-1}B^*\mathcal{O}_k^n}{\mathcal{D}^{-1}\mathcal{O}_k^n}} e^{-t\lambda_v} f_v(x). \tag{3.59}$$

Par l'unicité du noyau de la chaleur, les deux expressions (3.57) et (3.59) sont égales. Enfin la seconde identité s'obtient en posant $x = 0$. □

3.3.5 Fonctions de Bessel

Nous rappelons ici deux résultats de convergence pour les fonctions de Bessel et les noyaux de la chaleur, qui seront utilisés dans la suite. On peut trouver les démonstrations dans la Section 4 de [13].

Proposition 128. *Pour tous $t > 0$ et $b \geq 0$, il existe une constante C telle que*

$$0 \leq \sqrt{b^2 t}\, e^{-b^2 t} I_0(b^2 t) \leq C < 1.$$

On fixe $t \geq 0$ et des entiers $y, n_0 \geq 0$. Alors pour tout $b \geq n_0$, on a la borne uniforme

$$0 \leq \sqrt{b^2 t} \cdot e^{-b^2 t} I_y(b^2 t) \leq \left(1 + \frac{y}{b n_0 t}\right)^{-n_0 y/2b}.$$

Proposition 129. *Soient $N_n \in \mathbf{Z}_{>0}$ et $u_n \in \mathbf{R}_{>0}$ deux suites telles que*

$$\frac{N_n}{u_n} \to \alpha > 0 \text{ pour } n \to \infty.$$

Alors pour tout réel $t > 0$ et tout entier $k \geq 0$, on a

$$\lim_{n \to \infty} N_n \cdot e^{-2u_n^2 t} I_{N_n k}(2u_n^2 t) = \frac{\alpha}{\sqrt{4\pi t}} \cdot e^{-(\alpha k)^2/(4t)}. \tag{3.60}$$

On utilisera ces deux résultats au §3.5.

3.4 Formes de Humbert et leur fonction zêta d'Epstein

Comme référence pour les formes de Humbert, nous avons suivi [18] et [20], ici nous rappelons seulement les notations de [20] pour les fonctions zêta et thêta d'une forme de Humbert. Bien qu'à partir de la section suivante nous aurons toujours $K = \mathbf{Q}(i)$, auquel cas les formes de Humbert ne sont rien d'autre que des formes de Hermite définies positives, nous avons cru bon de présenter la théorie générale, dans l'espoir d'une future généralisation de notre résultat.

Soit donc $[K : \mathbf{Q}] = d = r_1 + 2r_2$, avec r_1 et r_2 le nombre des places réelles et complexes de K respectivement. On dénote par $x^{(i)}$ (resp. par $A^{(i)}$) les conjugués d'un élément $x \in K$ (resp. d'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(K)$), pour $1 \leq i \leq r_1 + r_2$, avec la convention que $x^{(i)}$ est réel pour $1 \leq i \leq r_1$, et $x^{(i+r_1+r_2)} = \overline{x^{(i+r_1)}}$. Les formes de Humbert sont les éléments de l'ensemble

$$\mathbf{P}_n^K := S_n(\mathbf{R})_{>0}^{r_1} \times H_n(\mathbf{C})_{>0}^{r_2},$$

c.-à-d. les (r_1+r_2)-uplets de matrices $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_{r_1+r_2})$, où les r_1 premières composantes sont réelles symétriques et définies positives, et les r_2 dernières composantes sont complexes Hermitiennes et définies positives. Le déterminant d'une forme de Humbert est

$$\det \mathcal{A} = \prod_{i=1}^{r_1+r_2} \det A_i^{d_i},$$

où $d_i = 1$ pour $i \leq r_1$ et $d_i = 2$ pour $i \geq r_1 + 1$.

La fonction zêta d'Epstein d'une forme $\mathcal{A}$ avec déterminant 1, définie sur le réseau complexe $\mathcal{O}_K^n \subset K^n$ est :

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s) = \sum_{\substack{x \in \mathcal{O}_K^d / U_K \\ x \neq 0}} \mathrm{N}(\mathcal{A}[x])^{-s}, \quad \mathrm{Re}(s) > n/2 \tag{3.61}$$

où, pour $x \in K^n$,

$$\mathrm{N}(\mathcal{A}[x]) = \prod_{i=1}^{d} A_i[x^{(i)}]. \tag{3.62}$$

La fonction thêta est définie comme

$$\Theta_{\mathcal{A}}(y) = \sum_{x \in \mathcal{O}_K^n} \exp(-\pi d_{\mathcal{O}_K^n}^{-\frac{1}{dn}} \mathrm{Tr}(\mathcal{A}[x] y)) \tag{3.63}$$

où

$$\mathrm{N}(\mathcal{A}[x]) = \prod_{i=1}^{d} A_i[x^{(i)}] \tag{3.64}$$

et $d_{\mathcal{O}_K^n}$ est le déterminant de $\mathcal{O}_K^n$ vu comme réseau ($\mathbf{Z}$-module) de rang nd (cf. [20], §2.2).

3.5 Le cas des entiers de Gauss

Dorénavant, notre corps de nombres sera quadratique imaginaire, car pour ces corps de nombres nous avons été capables de prouver un résultat de convergence de la fonction thêta, généralisant la Prop. 9 de [14]. En plus, notre résultat principal, à savoir la formule asymptotique pour $\log \det{}^* \Delta_{\mathcal{O}_K^n / B_d \mathcal{O}_K^n}$, a été prouvé jusqu'à présent seulement pour $K = \mathbf{Q}[i]$ et son anneau des entiers de Gauss.

Soit donc K un corps de nombres quadratique imaginaire,

$$K = \mathbf{Q}[\sqrt{-m}],\ m > 0 \in \mathbf{Z},$$

avec m sans facteurs carrés. On a $r_1 = 0$ plongements réels et $r_2 = 1$ plongement complexe (plus son conjugué). Les seules unités sont les éléments du groupe fini et cyclique des racines de l'unité,

$$U_K = W_K = \begin{cases} \{\pm 1\} \text{ si } m \neq 1, 3 \\ \{\pm 1, \pm i\} \text{ si } m = 1 \text{ (cas des entiers de Gauss)} \\ \{\pm 1 \pm \exp(\pi i/3), \pm\exp(2\pi i/3)\} \text{ si } m = 3 \text{ (cas du corps cyclotomique)} \end{cases}.$$

En outre, la structure de $\mathcal{O}_K$ est bien connue, à savoir

$$\mathcal{O}_K = \begin{cases} \mathbf{Z}[\sqrt{-m}] \text{ si } m \equiv 2 \text{ ou } 1 \mod 4\,; \\ \mathbf{Z}[\frac{1+\sqrt{-m}}{2}] \text{ si } m \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

Rappelons les formules pour la trace et la norme : $\mathrm{Tr}^K_{\mathbf{Q}}(a + b\sqrt{-m}) = 2a$ et $\mathrm{N}^K_{\mathbf{Q}}(a + b\sqrt{-m}) = a^2 + mb^2$.

Comme base entière pour $\mathcal{O}_K$ on choisit

$$\begin{cases} \{1, \sqrt{-m}\} \text{ si } m \equiv 2, 1 \mod 4 \\ \{1, \frac{1+\sqrt{-m}}{2}\} \text{ si } m \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

Les formes de Humbert de K sont simplement les matrices hermitiennes définies positives,

$$\mathbf{P}^K_n := \mathrm{H}_n(\mathbf{C}) > 0,$$

et

$$\mathbf{P}^{K,*}_n = \{A \in \mathrm{H}_n(\mathbf{C}) |\det(A) = 1\}.$$

(En principe on devrait requérir $(\det A)^2 = 1$, mais ici il n'y a qu'un facteur et A est définie positive).

Remarque 130. Parfois on utilisera le couple $(A, \overline{A})$ à la place du seul A.

Les formules pour la trace et la norme se simplifient remarquablement :

$$\mathrm{Tr}(A[x]) = A[x] + \overline{A}[\overline{x}] = 2\,\mathrm{Re}(A[x])$$
$$\mathrm{N}(A[x]) = A[x]\overline{A}[\overline{x}] = |A[x]|^2.$$

La fonction zêta d'Epstein définie sur $L = \mathcal{O}_K^n$ prend l'aspect suivant :

$$\zeta_A(s) = \sum_{0 \neq x \in \mathcal{O}_K^n / U_K} \mathrm{N}(A[x])^{-s} = \frac{1}{|U_K|} \sum_{0 \neq x \in \mathcal{O}_K} \frac{1}{|A[x]|^{2s}} \tag{3.65}$$

pour $\mathrm{Re}(s) > n/2$.

3.5.1 Convergence de la fonction thêta

Nous avons l'identité pour la fonction thêta :

$$\begin{aligned}\theta_B(t) &= \mathrm{N}(\det B) \sum_{y\in\mathbf{Z}[i]^n} e^{-2\cdot 2nt} \prod_{j=1}^{n} I_{\mathrm{Re}(By)_j}(2t) I_{\mathrm{Im}(By)_j}(2t)\\ &= |\det B|^2 \sum_{y\in\mathbf{Z}[i]^n} e^{-2\cdot 2nt} \prod_{j=1}^{n} I_{\mathrm{Re}(By)_j}(2t) I_{\mathrm{Im}(By)_j}(2t).\end{aligned} \tag{3.66}$$

Considérons une suite de matrices

$$B_k \in \mathrm{M}_n(\mathbf{Z}[i])$$

avec $0 < |\det B_k| \to \infty$, et telle que

$$\frac{B_k}{|\det B_k|^{1/n}} \to A \text{ pour } k \to \infty,$$

pour un certain $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$. On a alors le résultat suivant :

Proposition 131. *Soit $H := {}^t\overline{A}A$. Pour tout $t > 0$ fixé, la suite θ_{B_k} converge ponctuellement :*

$$\theta_{B_k}(|\det(B_k)|^{2/n} t) \to \Theta_{H^{-1}}(4\pi t) \tag{3.67}$$

pour $k \to \infty$.

La démonstration de cette proposition se base sur les résultats de convergence pour les fonctions de Bessel énoncé à la Prop. 129 et sur le lemme suivant, qui n'est que la specialisation de la formule de Poisson à $\mathbf{Z}[i]^n$:

Lemme 132 (formule de Poisson)**.** *Avec les notations introduites ci-dessus,*

$$\Theta_{H^{-1}}(t) = \frac{1}{t^n} \Theta_H\left(\frac{1}{t}\right). \tag{3.68}$$

Démonstration du lemme. Sur $\mathbf{Z}[i]$, on a

$$\begin{aligned}\Theta_H(t) &= \sum_{y\in\mathbf{Z}[i]^n} \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{|\mathrm{disc}\, K|}} H[y]t\right)\\ &= \sum_{y\in\mathbf{Z}[i]^n} \exp\left(-\pi H[y]t\right)\end{aligned} \tag{3.69}$$

et la formule de Poisson, telle qu'elle est énoncée en [20], est

$$\Theta_{\mathbf{Z}[i]^n}(H^{-1}, t^{-1}) = t^n\, \Theta_{\mathbf{Z}[i]^*}(H, t), \tag{3.70}$$

ce qui équivaut à

$$\Theta_{\mathbf{Z}[i]^n}(H^{-1},t) = \frac{1}{t^n}\,\Theta_{\mathbf{Z}[i]^*}(H,1/t). \tag{3.71}$$

Or on voit facilement que

$$(\mathbf{Z}[i]^n)^* = \frac{1}{2}\mathbf{Z}[i]^n$$

et

$$d_{(\mathbf{Z}[i]^n)^*} = \frac{1}{4^n}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\Theta_{\mathbf{Z}[i]^n}(H^{-1},t) &= \frac{1}{t^n}\sum_{y\in\frac{1}{2}\mathbf{Z}[i]^n}\exp\left(-2\pi\, d^{-1/2n}_{(\mathbf{Z}[i]^n)^*}H[y]\frac{1}{t}\right)\\ &= \frac{1}{t^n}\sum_{y\in\mathbf{Z}[i]^n}\exp\left(-2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{4}H[y]\frac{1}{t}\right)\\ &= \frac{1}{t^n}\Theta_H\left(\frac{1}{t}\right).\end{aligned} \tag{3.72}$$

□

Démonstration de la proposition. Posons $u_k = |\det B_k|^{1/n}$. Par (3.66) on a

$$\theta_{B_k}(u_k^2 t) = u_k^{2n}\sum_{y\in\mathbf{Z}[i]^n} e^{-2\cdot 2du_k^2 t}\prod_{j=1}^{n} I_{\mathrm{Re}(By)_j}(2u_k^2 t)I_{\mathrm{Im}(By)_j}(2u_k^2 t).$$

Or pour chaque j on a

$$\frac{\mathrm{Re}(B_k y)_j}{u_k} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{|\det B_k|^{1/n}}By\right)_j = \mathrm{Re}\left(\frac{B_k}{|\det B_k|^{1/n}}y\right)_j \to \mathrm{Re}(Ay)_j$$

et

$$\frac{\mathrm{Im}(B_k y)_j}{u_k} = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{|\det B_k|^{1/n}}By\right)_j = \mathrm{Im}\left(\frac{B_k}{|\det B_k|^{1/n}}y\right)_j \to \mathrm{Im}(Ay)_j.$$

Alors pour tout $y \in \mathbf{Z}[i]^n$ et $1 \le j \le n$ on a, par la Proposition 129,

$$\begin{aligned}u_k e^{-2u_k^2 t} I_{\mathrm{Re}(B_k y)_j}(2u_k^2 t) &= \frac{u_k}{\mathrm{Re}(By)_j}\cdot \mathrm{Re}(By)_j e^{-2u_k^2 t} I_{\mathrm{Re}(B_k y)_j(2u_k^2 t)}\\ &\to \frac{1}{\mathrm{Re}(Ay)_j}\cdot\frac{\mathrm{Re}(Ay)_j}{\sqrt{4\pi t}}\cdot e^{-\frac{(\mathrm{Re}(Ay)_j)^2}{4t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\cdot e^{-\frac{(\mathrm{Re}(Ay)_j)^2}{4t}}\end{aligned} \tag{3.73}$$

et de la même façon

$$u_k e^{-2u_k^2 t} I_{\mathrm{Im}(B_k y)_j}(2u_k^2 t) \to \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \cdot e^{-\frac{(\mathrm{Im}(Ay)_j)^2}{4t}}. \tag{3.74}$$

Supposons qu'on puisse intervertir la limite et la somme : on a alors

$$\begin{aligned} \theta_{B_k}(u_k^2 t) &= \sum_{y \in \mathbf{Z}[i]^n} \prod_{j=1}^n u_k e^{-2u_k^2 t} I_{\mathrm{Re}(By)_j}(2u_k^2 t) \cdot u_k e^{-2u_k^2 t} I_{\mathrm{Im}(By)_j}(2u_k^2 t) \\ &\to \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^{2n}} \sum_{y \in \mathbf{Z}[i]^n} \prod_{j=1}^n \exp\left(-\frac{|Ay|_j^2}{4t}\right) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^{2n}} \sum_{y \in \mathbf{Z}[i]^n} \exp\left(-\frac{\|Ay\|^2}{4t}\right). \end{aligned} \tag{3.75}$$

Cette dernière quantité est égale à $\Theta_{H^{-1}}(4\pi t)$ par le Lemme 132. Pour démontrer qu'on peut intervertir la limite et la somme, on montre que pour t fixé, la somme converge uniformément en u_k (ou de façon équivalent en n), comme dans la Prop. 9 de [14].

On peut réarranger la somme $\theta_{B_k}(u_k^2 t)$ en $2n+1$ sommes selon le nombre de coordonnées nulles parmi les

$$(\mathrm{Re}(B_k y)_1, \mathrm{Im}(B_k y)_1, \ldots, \mathrm{Re}(B_k y)_n, \mathrm{Im}(B_k y)_n) = ((B_k y)_{1,1}, (B_k y)_{1,2}, \ldots, (B_k y)_{n,2}).$$

Prenons k_0 assez grand pour que

$$\frac{|(Ay)_{j,k}|}{2} \leq \frac{|(B_k y)_{j,k}|}{u_n} \leq 2|(Ay)_{j,k}| \tag{3.76}$$

pour tout $y \in \mathbf{Z}[i]^n$ et $k \geq k_0$ et $(Ay)_{j,k} \neq 0$; rappelons que $I_{-m} = I_m$. Alors si on considère un terme avec r zéros parmi les $(B_k y)_{j,k}$, on arrive à la borne suivante à l'aide de la Prop. 128 :

$$\begin{aligned} &\prod_{j=1}^n u_k e^{-2u_k^2 t} I_{\mathrm{Re}(By)_j}(2u_k^2 t) \cdot u_k e^{-2u_k^2 t} I_{\mathrm{Im}(By)_j}(2u_k^2 t) \\ &\quad \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right)^{2n} \prod_{(B_k y)_{j,k} \neq 0} \left(1 + \frac{|(B_k y)_{j,k}|}{u_k k_0 2t}\right)^{-k_0 |(B_k y)_{j,k}/2u_k} \\ &\quad \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right)^{2n} \prod_{(Ay)_{j,k} \neq 0} \left[\left(1 + \frac{|(Ay)_{j,k}|}{k_0 4t}^{-k_0/4}\right)\right]^{|(Ay)_{j,k}|} \\ &\quad \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right)^{2n} \prod_{(Ay)_{j,k} \neq 0} \left[\left(1 + \frac{a}{k_0 4t}^{-k_0/4}\right)\right]^{|(Ay)_{j,k}|} \end{aligned} \tag{3.77}$$

où a est la plus petite valeur absolue non nulle de tous les $(Ay)_{j,k}$, $y \in \mathbf{Z}[i]^n$. On déduit, comme dans [14], Prop. 9, que la série thêta est majorée par $2n+1$ sommes d'un produit de séries géométriques convergentes, donc la série thêta est elle-même uniformément convergente. $\square$

3.5.2 Comportement de la fonction thêta dans de corps de nombres autres que $\mathbf{Q}(i)$

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que bien que l'on puisse déterminer la limite de $\theta_{B_k}(u^2t)$ dans d'autres corps de nombres, on n'a pas de résultat analogue à la Proposition 131, car la limite qu'on obtient n'est pas la fonction $\Theta_{H^{-1}}$. En effet, considérons d'abord un corps de nombres quadratique imaginaire $K = \mathbf{Q}[\sqrt{-m}]$, tel que $\mathcal{O}_K = \mathbf{Z}[\sqrt{-m}]$, et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{Z}[\sqrt{-m}])$. L'identité (3.53) prend la forme suivante :

$$\theta_{B_k}(t) = |\det B_k|^2 \sum_{y\in\mathbf{Z}[\sqrt{-m}]^n} e^{-2\cdot 2nt} \prod_{j=1}^{n} I_{(By)_{j,i}}(2t) I_{(By)_{j,2}}(2t). \tag{3.78}$$

Maintenant supposons comme dans la section précédente que

$$\frac{B_k}{|\det B_k|^{1/n}} \to A.$$

En observant que $(B_ky)_{j,1}$ et $(B_ky)_{j,2}$ correspondent à $\mathrm{Re}(B_ky)_j$ et $\mathrm{Im}(B_ky)_j$, nous avons :

$$\frac{(B_ky)_{j,1}}{|B_k|^{1/n}} = \frac{\mathrm{Re}(B_k)_j}{|\det B_k|^{1/n}} \to \mathrm{Re}(Ay)_j = (Ay)_{j,1}$$
$$\frac{(B_ky)_{j,2}}{|B_k|^{1/n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{m}}\mathrm{Im}(B_k)_j}{|\det B_k|^{1/n}} \to \frac{1}{\sqrt{m}}\mathrm{Im}(Ay)_j = (Ay)_{j,2}$$

et par conséquent

$$\theta_{B_k}(u^2t) \to \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^{2n}} \sum_{y\in\mathbf{Z}[\sqrt{-m}]^n} \exp\left(-\frac{1}{4t}\sum_{j=1}^{n}(Ay)_{j,1}^2 + (Ay)_{j,2}^2\right). \tag{3.79}$$

De la même façon, dans le cas d'un corps de nombres $K = \mathbf{Q}[\sqrt{-m}]$ avec $\mathcal{O}_K = \mathbf{Z}[\frac{\sqrt{-m}+1}{2}]$ (qui se produit quand m est congru à 3 modulo 4), alors la fonction thêta vérifie l'identité suivante :

$$\theta_{B_k}(t) = |\det B|^2 \sum_{y\in\mathbf{Z}[\frac{1+\sqrt{-m}}{2}]} e^{-2\cdot 2nt} \prod_{j=1}^{n} I_{(By)_{j,1}} I_{(By)_{j,2}}(2t)$$

où

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,1} + \frac{1+\sqrt{-m}}{2} y_{1,2} \\ \vdots \\ y_{n,1} + \frac{1+\sqrt{-m}}{2} y_{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_{1,1} + \frac{1}{2} y_{1,2}) + \frac{\sqrt{-m}}{2} y_{1,2} \\ \vdots \\ (y_{n,1} + \frac{1}{2} y_{n,2}) + \frac{\sqrt{-m}}{2} y_{n,2} \end{pmatrix}.$$

On a en particulier les relations

$$\operatorname{Re} y_j = y_{j,1} + \frac{1}{2} y_{j,2}$$
$$\operatorname{Im} y_j = \frac{\sqrt{m}}{2} y_{j,2},$$

pour $1 \leq j \leq n$, sur lesquelles on vérifie la convergence des indices, p.ex.

$$\frac{(B_k y)_{j,1}}{|\det B_k|^{1/n}} = \frac{\operatorname{Re}(B_k y)_j - \frac{1}{\sqrt{m}} \operatorname{Im}(B_k y)_j}{|\det B_k|^{1/n}} = \operatorname{Re}(\frac{B_k}{|\det B|^{1/n}} y)_j - \frac{1}{\sqrt{m}} \operatorname{Im}(\frac{B_k}{|\det B|^{1/n}} y)_j$$
$$\to \operatorname{Re}(Ay)_j - \frac{1}{\sqrt{m}} \operatorname{Im}(Ay)_j =: (Ay)_{j,1},$$

où on pose par définition la dernière quantité égale à $(Ay)_{j,1}$, et on fait la même chose pour $(B_k y)_{j,2}$. On obtient

$$\theta_{B_k}(u^2 t) \to \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^{2n}} \sum_{y \in \mathbf{Z}[\frac{1+\sqrt{-m}}{2}]^n} \exp\left(-\frac{1}{4t} \sum_{j=1}^{n} (Ay)_{j,1}^2 + (Ay)_{j,2}^2 \right). \quad (3.80)$$

Puisque le membre de droite dans (3.79) et (3.80) n'est pas $\Theta_{H^{-1}}(\text{const} \cdot t)$, on ne peut conclure comme en (3.67) pour un corps de nombres quadratique imaginaire autre que $\mathbf{Q}[i]$.

3.5.3 Suites de matrices

Il est important d'observer, en vue d'une lecture de la Proposition 131 dans le sens inverse, que toute matrice A de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$ peut s'obtenir comme limite d'une suite de matrices comme dans la Proposition 131. Plus précisément on a la Proposition suivante :

Proposition 133. *Soit A une matrice dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$: il existe une suite $(B_k)_k$ de matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbf{Z}[i])$ telle que*

$$0 < |\det(B_n)| \to \infty \quad et \quad \frac{B_n}{|\det(B_n)|^{1/n}} \to A. \quad (3.81)$$

Démonstration. La démonstration se base sur la propriété de $\mathbf{Q}(i)$ d'être dense dans $\mathbf{C}$ et sur le fait que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Q}(i))$ est engendré par les transvections $T = \mathbf{I}_n + \lambda E_{i,j}$, $i \neq j$.

Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ prenons une suite $\lambda_k \to \lambda$, $\lambda_k \in \mathbf{Q}(i)$: on en déduit que toute transvection T de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Q}(i))$ est limite d'une suite de transvections T_k de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Q}(i))$, et par conséquent $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Q}(i))$ est dense en $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$. Donc étant donnée une matrice $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$, il existe une suite $(C_k)_k$ de matrices de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Q}(i))$ qui a comme limite A. Or pour tout k, on peut trouver un entier positif a_k tel que $a_k C_k$ soit dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{Z}(i))$. Considérons donc la suite

$$(B_k)_k \quad \text{où} \quad B_k = a_k C_k,$$

on a

$$\det B_k = a_k^n \det C_k = a_k^n$$

et par conséquent

$$\frac{B_k}{|\det(B_k)|^{1/n}} = \frac{B_k}{a_k} = C_k \to A$$

quand $k \to \infty$, ce qu'il fallait prouver. □

Ce que nous venons de démontrer n'est qu'un cas particulier d'un résultat général pour les formes de Humbert, dont voici une preuve :

Proposition 134. *Soit K un corps de nombres (les notations restent les mêmes), et $\mathcal{A} = (S_1, \ldots, S_{r_1}, H_{r_1+1}, \ldots, H_{r_1+r_2})$ une forme de Humbert, avec* $\det S_i = \det H_j = 1$. *Il existe une suite de matrices $(B_k)_k$ de $\mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_K)$ telle que*

$$\iota\left(\frac{B_k}{|\det B_k|^{1/n}}\right) \to (A_1, \ldots, A_{r_1}, C_{r_1+1}, \ldots C_{r_1+r_2}), \tag{3.82}$$

où ι est l'immersion usuelle de $\mathrm{SL}_n(K)$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})^{r_1} \times \mathrm{SL}_n(\mathbf{C})^{r_2}$ et $A_1, \ldots, A_{r_1}, C_{r_1+1}, \ldots C_{r_1+r_2}$ sont choisis de telle façon que $S_i = A_i^t A_i$ pour $1 \leq i \leq r_1$ et $H_j = \overline{C_j^t} C_j$ pour $r_1 + 1 \leq j \leq r_1 + r_2$.

Démonstration. Pour tout corps de nombre K,

$$K \hookrightarrow K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \ \simeq \mathbf{R}^{r_1} \times \mathbf{R}^{r_2} \tag{3.83}$$

et (l'image de) K est dense dans $K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$. Par un argument semblable à celui qu'on a utilisé ci-dessus, à savoir utilisant les transvections, on peut prouver, à travers l'immersion

$$\begin{aligned} \iota : \mathrm{SL}_d(K) &\hookrightarrow \mathrm{SL}_d(\mathbf{R})^{r_1} \times \mathrm{SL}_d(\mathbf{C})^{r_2} \\ B &\mapsto (B^{(1)}, \ldots, B^{(r_1)}, B^{(r_1+1)} \ \ldots, B^{(r_1+r_2)}), \end{aligned}$$

que (l'image de) $\mathrm{SL}_n(K)$ est aussi dense dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})^{r_1} \times \mathrm{SL}_n(\mathbf{C})^{r_2}$. Alors, si

$$\mathcal{A} = (S_1, \ldots, S_{r_1}, H_{r_1+1}, \ldots, H_{r_1+r_2})$$

est une forme de Humbert, avec $\det S_i = \det H_j = 1$, il existe des matrices $A_i \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ telles que $S_i = A_i^t A_i$ pour $1 \leq i \leq r_1$ et $C_j \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$ telles que $H_j = \overline{C_j^t} C_j$ pour $r_1 + 1 \leq j \leq r_1 + r_2$. Par la densité, il existe une suite

$$(\tilde{B}_k)_k, \quad \tilde{B}_k \in \mathrm{SL}_n(K)$$

telle que

$$\iota(\tilde{B}_k) \to (A_1, \ldots, A_{r_1}, C_{r_1+1}, \ldots, C_{r_1+r_2}); \tag{3.84}$$

ceci signifie en particulier que

$${}^t\tilde{B}^{(i)} \tilde{B}^{(i)} \to {}^tA_i A_i = S_i \quad 1 \leq i \leq r_1 \tag{3.85}$$

$$\overline{{}^t\tilde{B}^{(j)}} \tilde{B}^{(j)} \to \overline{{}^tC_j} C_j = H_j \quad r_1 + 1 \leq j \leq r_1 + r_2. \tag{3.86}$$

On veut montrer qu'on peut trouver une suite de matrices $(B_k)_k$ de $\mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_K)$ telle que

$$\iota\left(\frac{B_k}{|\det B_k|^{1/n}}\right) \to (A_1, \ldots, A_{r_1}, C_{r_1+1}, \ldots C_{r_1+r_2}),$$

ce qui est le cas général de la propriété montrée ci-dessus pour $\mathbf{Q}(i)$.

Pour voir pourquoi cela est vrai, il suffit de remarquer que pour chaque k il existe un entier positif $a_k > 0$ tel que $a_k \tilde{B}_k \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_K)$: on pose alors $B_k := a_k \tilde{B}_k$, de telle façon que $\det(B_k) = a_k^n$, et le raisonnement est le même de la Proposition 133. □

3.5.4 Développements asymptotiques

On considère maintenant les deux fonctions

$$\mathcal{I}_{K,n}(s) = -\int_0^\infty (e^{-s^2 t} e^{-2(nd)t} I_0(2t)^{nd} - e^{-t}) \frac{dt}{t} \tag{3.87}$$

et

$$\mathcal{H}_{B_n}(s) = -\int_0^\infty (e^{-s^2 t}[\theta_{B_k}(t) - |\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^K(\det B_k)| \cdot e^{-2dnt} I_0(2t)^{dn} - 1] + e^{-t}) \frac{dt}{t}. \tag{3.88}$$

Alors le déterminant spectral est exprimé par la formule suivante :

$$\log\Big(\prod_{\lambda_v \neq 0} \lambda_v\Big) = |\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^K(\det B_k)| \mathcal{I}_{K,n}(0) + \mathcal{H}(0). \tag{3.89}$$

Cette formule vaut en toute généralité pour un corps de nombres quelconque. En outre, le terme $\mathcal{I}_{K,n}$ dépend uniquement du degré de l'extension $K/\mathbf{Q}$ and the dimension d. L'équation (3.89) est analogue au théorème 3.6 de [13] et le Théorème 6 de [14], et on peut la prouver avec le même argument de la Section 3 de [13]. Les étapes principales de la démonstration ont été rappelées aux §3.1 et 3.2. Dans notre cas, on applique la transformation de Gauss

$$(\mathbf{G}f)(s) = 2s \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s^2 t}\, dt$$

aux deux côtés de l'identité

$$\sum_{v \neq 0} e^{-\lambda_v t} = |\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^K(\det B_k)| \cdot e^{-2(dn)t}(I_0(2t))^{dn} + \\ + \Big[\theta_{B_k}(t) - |\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^K(\det B_k)| \cdot e^{-2(dn)t}(I_0(2t))^{dn} - 1\Big] \quad (3.90)$$

qui n'est que (3.53) avec le terme correspondant à la valeur propre zéro mis en évidence. Cela donne

$$\sum_{v \neq 0} \frac{2s}{s^2 + \lambda_v} = |\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^K(\det B_k)| \int_0^\infty 2s \cdot e^{-2(dn)t}(I_0(2t))^{dn}\, dt + \int_0^\infty 2s \cdot \Big[\theta_{B_k}(t) - \\ - |\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^K(\det B_k)| \cdot e^{-2(dn)t}(I_0(2t))^{dn} - 1\Big]\, dt. \quad (3.91)$$

Maintenant, au membre de gauche on a

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big[\sum_{v \neq 0} \log(s^2 + \lambda_v)\Big], \quad (3.92)$$

tandis qu'au membre de droite on trouve exactement

$$|\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^K(\det B_k)|\, \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{I}_{K,n}(s) + \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{H}_{B_k}(s). \quad (3.93)$$

Comme il est démontré au §3 de [13], il est possible d'intégrer cette relation, obtenant ainsi

$$\sum_{v \neq 0} \log(s^2 + \lambda_v) = |\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^K(\det B_k)|\, \mathcal{I}_{K,n}(s) + \mathcal{H}_{B_k}(s), \quad (3.94)$$

d'où, faisant tendre $s \to 0$, on trouve

$$\sum_{v \neq 0} \log(\lambda_v) = \log\Big(\prod_{\lambda_v \neq 0} \lambda_v\Big) = |\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^K(\det B_n)|\, \mathcal{I}_{K,n}(0) + \mathcal{H}_{B_k}(0). \quad (3.95)$$

Rappelons aussi que les deux termes $\mathcal{I}_{K,n}(0)$ et $\mathcal{H}_{B_k}(0)$ sont exactement la transformée de Mellin

$$(\mathbf{M}f)(s) = \int_0^\infty f(t)\, t^s \,\frac{dt}{t}$$

de $-(e^{-2dnt}I_0(2t)^{dn}-e^{-t})$ et $-([\theta_{B_k}(t)-|\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^K(\det B_k)|\cdot e^{-2dnt}I_0(2t)^{dn}-1]+e^{-t})$.

On développe ultérieurement les expressions pour $\mathcal{I}_{K,n}(0)$ and $\mathcal{H}_{B_k}(0)$. Pour le premier, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{K,n}(0) &= -\int_0^\infty (e^{-2(dn)t}I_0(2t) - e^{-t})\frac{dt}{t}\\ &= -\int_0^\infty ((e^{-2t}I_0(2t))^{2n} - e^{-t})\frac{dt}{t}\end{aligned} \tag{3.96}$$

le dernier étant la spécialisation aux corps quadratiques. Pour le premier terme on se contente de cela, puisqu'il n'y a pas de dépendance des B_k ; en outre, ce terme est clairement commun à tous les corps de nombres quadratiques.

Pour le second terme, nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{B_k}(0) = &-\int_0^\infty ([\theta_{B_k}(t) - |\mathrm{N}_{\mathbf{Q}}^K(\det B_k)| \cdot e^{-2dnt}I_0(2t)^{dn} - 1] + e^{-t})\frac{dt}{t}\\ &\text{(on remplace } t \text{ avec } u_k^2t)\\ &= -\int_0^\infty (\theta_{B_k}(u_k^2t) - u_k^{2n}(e^{-2u_k^2t}I_0(2u_k^2t))^{2n} - 1 + e^{-u_k^2t})\frac{dt}{t}\\ &= -[\int_0^1 + \int_1^\infty](\theta_{B_k}(u_k^2t) - u_k^{2n}(e^{-2u_k^2t}I_0(2u_k^2t))^{2n} - 1 + e^{-u_k^2t})\frac{dt}{t}.\end{aligned} \tag{3.97}$$

On étudie séparément le comportement asymptotique de ces deux intégrales, quand $n \to \infty$. Pour la première, on a le résultat suivant :

Proposition 135.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty (\theta_{B_k}(u_k^2t) - u_k^{2n}(e^{-2u_k^2t}I_0(2u_k^2t))^{2n} - 1 + e^{-u_k^2t})\frac{dt}{t}\\ = \int_1^\infty (\Theta_{H^{-1}}(4\pi t) - 1)\frac{dt}{t} - \frac{1}{n}(4\pi)^{-n} + o(1)\end{aligned} \tag{3.98}$$

quand $n \to \infty$.

La démonstration se base sur le Lemme suivant, qui est l'analogue du Lemme 10 de [14] :

Lemme 136. *Étant donnée une suite $(B_k)_k$ satisfaisant $|\det B_k|^{-1/n} \to A$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout k assez grand,*

$$\theta_{B_k}(u_k^2 t) \leq 1 + \sum_{j=1}^{\infty} e^{-Ctj}. \tag{3.99}$$

Démonstration. Soit $u = |\det B_k|^{1/n}$ comme ci-dessus. On a, en toute généralité,

$$\begin{aligned}\theta_{B_k}(t) &= \sum_{v \text{ valeur propre}} e^{-t\lambda_v} = \sum_v \exp\Big(- t\Big(2dn - 2 \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,d}} \cos(2\pi \operatorname{Tr}(\alpha_k v_j))\Big)\Big) \\ &= 1 + \sum_{v \neq 0} \prod_{\substack{j=1,\dots,d \\ k=1,\dots,d}} \exp(-4t \sin^2(\pi \operatorname{Tr}(\alpha_k v_j)))\end{aligned} \tag{3.100}$$

d'où

$$\theta_{B_k}(u_k^2 t) = 1 + \sum_{v \neq 0} \prod_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,k}} \exp(-4t u_k^2 \sin^2(\pi \operatorname{Tr}(\alpha_k v_j))). \tag{3.101}$$

Dans notre cas $K = \mathbf{Q}[i]$ des entiers de Gauss, on a

$$\theta_{B_k}(u_k^2 t) = 1 + \sum_{v \neq 0} \prod_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,2}} \exp(-4t u_k^2 \sin^2(2\pi \operatorname{Re}(\alpha_k v_j))), \tag{3.102}$$

où $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = i$. Maintenant on utilise les bornes élémentaires $\sin x \geq x - x^3/6$ and $\sin(\pi - x) \geq x - x^3/6$ pour $x \in [0, \pi/2]$, et on trouve, comme dans le Lemme 10 de [14],

$$u_k \sin(2\pi \operatorname{Re}(\alpha_k v_j)) > c 2\pi u_n \operatorname{Re}(\alpha_k v_j) \text{ si } 2 \operatorname{Re}(\alpha_k v_j) \leq 1/2 \tag{3.103}$$

$$u_n \sin(2\pi \operatorname{Re}(\alpha_k v_j)) > c 2\pi u_n (1 - \operatorname{Re}(\alpha_k v_j)) \text{ si } 2 \operatorname{Re}(\alpha_k v_j) > 1/2, \tag{3.104}$$

pour une constante $c > 0$ et pour tout k assez grand. En outre, pour tout $v \neq 0$, les valeurs $2u_k \operatorname{Re}(\alpha_k v_j)$ tendent à un entier multiplié par la partie réelle ou imaginaire d'un coefficient de A^* quand $k \to \infty$, à cause de la convergence de $|\det B_k|^{-1/n} \to A$ en $\mathrm{SL}(\mathbf{C})$. On conclut qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout k assez grand

$$\theta_{B_k}(u_k^2 t) \leq 1 + \sum_{j=1}^{\infty} e^{-Ctj}. \tag{3.105}$$

□

Avec tout cela, on peut enfin prouver la Proposition 135 :

Démonstration de la Proposition 135. Elle suit la démonstration de la Proposition 11 in [14] : écrivons, comme dans [14],

$$\begin{aligned}\int_1^\infty (\theta_{B_k}(u_k^2 t) - u_k^{2n}(e^{-2u_k^2 t} I_0(2u_k^2 t))^{2n} - 1 + e^{-u_k^2 t})\frac{dt}{t} \\ = \int_1^\infty (\theta_{B_k}(u_k^2 t) - 1)\frac{dt}{t} - \int_1^\infty u_k^{2n}(e^{-2u_k^2 t} I_0(2u_k^2 t))^{2n}\frac{dt}{t} + \int_1^\infty e^{-u_k^2 t}\frac{dt}{t}.\end{aligned} \tag{3.106}$$

Alors dans la dernière ligne la troisième intégrale tend à zéro quand $k \to \infty$. Pour la première intégrale dans la même ligne, on a

$$\int_1^\infty (\theta_{B_k}(u_k^2 t) - 1)\frac{dt}{t} \to \int_1^\infty (\Theta_{H^{-1}}(4\pi t) - 1)\frac{dt}{t} \tag{3.107}$$

grâce à la convergence ponctuelle donnée par la Proposition 131 et la borne uniforme (intégrable) donnée par le Lemme 136. Finalement, on a

$$\int_1^\infty u_k^{2n}(e^{-2u_k^2 t} I_0(2u_k^2 t))^{2n}\frac{dt}{t} \to \int_1^\infty (4\pi t)^{-n}\frac{dt}{t} = \frac{1}{n}(4\pi)^{-n}, \tag{3.108}$$

grâce à la convergence du noyau de la chaleur donnée par les Propositions 129 et 128. Donc on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. □

Pour la deuxième intégrale, on a :

Proposition 137. *Avec les notations définies ci-dessus, et* $u_k = |\det B_k|^{1/n}$*, on a*

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\theta_{B_k}(u_k^2 t) - u_k^{2n}(e^{-2u_k^2 t} I_0(2u_k^2 t))^{2n} - 1 + e^{-u_k^2 t})\frac{dt}{t} \\ = \int_0^1 (\Theta_{H^{-1}}(4\pi t) - (4\pi t)^{-n})\frac{dt}{t} + \Gamma'(1) - 2\log(u) + o(1)\end{aligned} \tag{3.109}$$

quand $n \to \infty$.

Démonstration. Rappelons de [13], Lemme 5.6, que

$$\int_0^1 (e^{-u^2 t} - 1)\frac{dt}{t} = \Gamma'(1) - 2\log(u) + o(1) \quad \text{quand } u \to \infty. \tag{3.110}$$

Il faut donc montrer que

$$\int_0^1 (\theta_{B_k}(u_k^2 t) - u_k^{2n}(e^{-2u_k^2 t} I_0(2u_k^2 t))^{2n})\frac{dt}{t} \to \int_0^1 (\Theta_{H^{-1}}(4\pi t) - (4\pi t)^{-n})\frac{dt}{t}. \tag{3.111}$$

La convergence ponctuelle de l'intégrand est assurée par les Propositions 129 et 131, et il reste à produire des bornes uniformes et intégrables pour les intégrands (pour $k \gg 1$). Cela peut être fait de la même façon que la preuve de la Proposition 131. Cf. la Proposition 12 de [14]. $\square$

En faisant la somme, l'asymptotique pour $\mathcal{H}_{B_k}(0)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{B_k}(0) = &-\int_1^\infty (\Theta_{H^{-1}}(4\pi t) - 1)\frac{dt}{t} - \frac{1}{n}(4\pi)^{-n} \\ &- \int_0^1 (\Theta_{H^{-1}}(4\pi t) - (4\pi t)^{-n})\frac{dt}{t} - \Gamma'(1) + \frac{2}{n}\log|\det B_k| + o(1).\end{aligned} \tag{3.112}$$

Ce qu'il fait faire maintenant c'est faire apparaître, dans la dernière formule, la hauteur $\zeta'_{H^{-1}}(0)$ de la fonction zêta d'Epstein associée à H^{-1}.

3.5.5 Une formule asymptotique pour la hauteur

3.5.5.1 Transformée de Mellin

Le fait que la fonction zêta associée à une forme (de Humbert) soit liée à la fonction thêta correspondante à travers la transformée de Mellin est une chose connue, et des formules explicites sont données au §2.4 de [20]. Cette relation prend la forme se simplifie comme suit dans le cas de $\mathbf{Z}[i]^n$:

Proposition 138.

$$\frac{1}{4}\int_0^\infty [\Theta_H(\sqrt{t}) - 1]t^s\frac{dt}{t} = 2\Gamma(2s)\pi^{-2s}\zeta_H(s). \tag{3.113}$$

Démonstration. Cf. [20], Prop. 2.2 pour le cas général. La même formule se spécialise de la façon suivante à $\mathbf{Z}[i]$ (w_K est toujours le nombre des racines de l'unité de K) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{w_K}\int_0^\infty [\Theta_H(\sqrt{t}) - 1]t^s\frac{dt}{t} &= \frac{1}{4}\int_0^\infty \left(\sum_{0\neq x\in\mathbf{Z}[i]^n} e^{-\pi H[x]\sqrt{t}}\right)t^s\frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{x\neq 0}\int_0^\infty e^{-\pi H[x]\sqrt{t}}\,t^s\frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{x\neq 0}\int_0^\infty e^{-\pi H[x]y}\,y^{2s}\frac{2ny}{y} \quad \text{on remplace } \sqrt{t} = y \\ &= 2\sum_{\substack{x\in\mathbf{Z}[i]^n/U_K\\ x\neq 0}}\int_0^\infty e^{-\pi H[x]y}\,y^{2s}\frac{dy}{y} = 2\sum_{\substack{x\in\mathbf{Z}[i]^n/U_K\\ x\neq 0}}(\pi H[x])^{-2s}\,\Gamma(2s)\end{aligned} \tag{3.114}$$

où le dernier terme est exactement $2\Gamma(2s)\pi^{-2s}\zeta_H(s)$. $\square$

3.5.5.2 Calcul explicite

En lisant (3.113) dans l'autre sens on a

$$\zeta_H(s) = \frac{1}{2\Gamma(2s)\pi^{-2s}} \cdot \frac{1}{4} \int_0^\infty [\Theta_H(\sqrt{t}) - 1] t^s \frac{dt}{t}; \tag{3.115}$$

en remplaçant $t = y^2$ et en spécialisant à H^{-1}, qui est le cas qui nous intéresse, nous obtenons le prolongement analytique de $\zeta_{H^{-1}}$:

$$\zeta_{H^{-1}}(s) = \frac{\pi^{2s}}{\Gamma(2s)} \cdot \frac{1}{4} \int_0^\infty [\Theta_{H^{-1}}(y) - 1] y^{2s} \frac{dy}{y}. \tag{3.116}$$

On utilise (3.116) pour calculer $\zeta'_{H^{-1}}(0)$: pour commencer, on découpe, de façon classique, l'intégrale en deux parties, et puis en trois :

$$\begin{aligned}
\zeta_{H^{-1}}(s) &= \frac{\pi^{2s}}{\Gamma(2s)} \cdot \frac{1}{4} \int_0^1 [\Theta_{H^{-1}}(y) - 1] y^{2s} \frac{dy}{y} + \frac{\pi^{2s}}{\Gamma(2s)} \cdot \frac{1}{4} \int_1^\infty [\Theta_{H^{-1}}(y) - 1] y^{2s} \frac{dy}{y} \\
&= \frac{\pi^{2s}}{\Gamma(2s)} \cdot \frac{1}{4} \int_0^1 [\Theta_{H^{-1}}(y) - y^{-n}] y^{2s} \frac{dy}{y} \\
&+ \frac{\pi^{2s}}{\Gamma(2s)} \cdot \frac{1}{4} \int_0^1 [y^{-n} - 1] y^{2s} \frac{dy}{y} \\
&+ \frac{\pi^{2s}}{\Gamma(2s)} \cdot \frac{1}{4} \int_1^\infty [\Theta_{H^{-1}}(y) - 1] y^{2s} \frac{dy}{y}.
\end{aligned} \tag{3.117}$$

On garde la première et la troisième intégrale comme elle sont, et on développe la deuxième :

$$\frac{\pi^{2s}}{\Gamma(2s)} \cdot \frac{1}{4} \int_0^1 [y^{-n} - 1] y^{2s} \frac{dy}{y} = \frac{\pi^{2s}}{\Gamma(2s)} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2s - n} - \frac{\pi^{2s}}{\Gamma(2s)} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2s}. \tag{3.118}$$

Ainsi obtient-on

$$\begin{aligned}
\zeta_{H^{-1}}(s) = &\frac{\pi^{2s}}{\Gamma(2s)} \cdot \frac{1}{4} \int_0^1 [\Theta_{H^{-1}}(y) - y^{-n}] y^{2s} \frac{dy}{y} \\
&+ \frac{\pi^{2s}}{\Gamma(2s)} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2s - n} - \frac{\pi^{2s}}{\Gamma(2s)} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2s} \\
&+ \frac{\pi^{2s}}{\Gamma(2s)} \cdot \frac{1}{4} \int_1^\infty [\Theta_{H^{-1}}(y) - 1] y^{2s} \frac{dy}{y}
\end{aligned} \tag{3.119}$$

quantité qu'il faut dériver et évaluer en $s = 0$. Voici le détail des calculs : on recueille un facteur π^{2s} devant chacun des trois termes de la somme, puis en dérivant on obtient un premier terme

$$2\pi^{2s}\log\pi\cdot\{\frac{1}{\Gamma(2s)}\cdot\int_0^1[\Theta_{H^{-1}}(y)-\frac{1}{y^n}]y^{2s}\frac{dy}{y}+ \\ +\frac{1}{\Gamma(2s)}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2s-n}-\frac{1}{\Gamma(2s+1)}\cdot\frac{1}{4}+ \\ +\frac{1}{\Gamma(2s)}\cdot\frac{1}{4}\int_1^\infty[\Theta_{H^{-1}}(y)-1]y^{2s}\frac{dy}{y}\}. \quad (3.120)$$

Quand $s\to 0$, dans les deux intégrales on utilise les deux asymptotiques suivantes pour la fonction thêta, qui découlent directement de sa définition et de la formule de Poisson :

$$\Theta_H(t)=\frac{1}{t^n}+O(e^{-c/t}) \text{ pour } t\to 0 \quad (3.121)$$

$$\Theta_H(t)=1+O(e^{-ct}) \text{ pour } t\to\infty. \quad (3.122)$$

Avec cela, et le fait que $1/\Gamma(s)=s+O(s^2)$ autour de $s=0$, on conclut que le premier terme de la somme apporte une contribution de

$$-\frac{1}{2}\log\pi \quad (3.123)$$

quand $s\to 0$.

Le second terme est composé de trois termes, dont le premier est

$$\pi^{2s}\cdot\frac{d}{ds}\frac{1}{\Gamma(2s)}\cdot\frac{1}{4}\int_0^1[\Theta_{H^{-1}}(y)-y^{-n}]y^{2s}\frac{dy}{y} \quad (3.124)$$

qui contribue pour

$$\frac{1}{2}\int_0^1[\Theta_{H^{-1}}(y)-y^{-n}]\frac{dy}{y} \quad (3.125)$$

quand $s\to 0$. Ensuite on a

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\Gamma(2s)}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2s-n}-\frac{1}{\Gamma(2s)}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2s}\right] \quad (3.126)$$

qui contribue pour

$$-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\Gamma'(1) \quad (3.127)$$

quand $s\to 0$. Enfin on a

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{\Gamma(2s)}\cdot\frac{1}{4}\int_1^\infty[\Theta_{H^{-1}}(y)-1]y^{2s}\frac{dy}{y} \quad (3.128)$$

qui contribue pour
$$\frac{1}{2}\int_1^\infty [\Theta_{H^{-1}}(y)-1]\frac{dy}{y}$$
quand $s\to 0$.

Faisant la somme des termes, nous obtenons l'expression suivante pour $\zeta'_{H^{-1}}(0)$:

Proposition 139.
$$\zeta'_{H^{-1}}(0) = -\frac{1}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\int_0^1 [\Theta_{H^{-1}}(y)-y^{-n}]\frac{dy}{y} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\Gamma'(1) + \\ + \frac{1}{2}\int_1^\infty [\Theta_{H^{-1}}(y)-1]\frac{dy}{y}. \quad (3.129)$$

Démonstration. Faite ci-dessus. □

3.5.6 Fin de la démonstration

Le dernier pas consiste à mettre en relation les termes du développement pour $\zeta'_{H^{-1}}(0)$ avec ceux du développement de $\mathcal{H}_{B_k}(0)$ donné en (3.112). Par un simple changement de variables, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{B_k}(0) &= -\int_{4\pi}^\infty (\Theta_{H^{-1}}(y)-1)\frac{dy}{y} - \frac{1}{n}(4\pi)^{-n} - \int_0^{4\pi}(\Theta_{H^{-1}}(y)-y^{-n})\frac{dy}{y} \\
&\quad - \Gamma'(1) + \frac{2}{n}\log|\det B_k| + o(1) \\
&= -\int_1^\infty (\Theta_{H^{-1}}(y)-1)\frac{dy}{y} + \int_1^{4\pi}(\Theta_{H^{-1}}(y)-1)\frac{dy}{y} - \frac{1}{n}(4\pi)^{-n} \\
&\quad - \int_0^1 (\Theta_{H^{-1}}(y)-y^{-n})\frac{dy}{y} - \int_1^{4\pi}(\Theta_{H^{-1}}(y)-y^{-n})\frac{dy}{y} - \Gamma'(1) \\
&\quad + \frac{2}{n}\log|\det B_k| + o(1) \\
&= -2\zeta'_{H^{-1}}(0) - \frac{1}{n} - \log\pi + \int_1^{4\pi}(\Theta_{H^{-1}}(y)-1)\frac{dy}{y} - \frac{1}{n}(4\pi)^{-n} \\
&\quad - \int_1^{4\pi}(\Theta_{H^{-1}}(y)-y^{-n})\frac{dy}{y} + \frac{2}{n}\log|\det B_k| + o(1) \\
&= -2\zeta'_{H^{-1}}(0) - \frac{1}{n}(1+(4\pi)^{-n}) - \log\pi + \int_1^{4\pi}(y^{-n}-1)\frac{dy}{y} \\
&\quad + \frac{2}{n}\log|\det B_k| + o(1) \\
&= -2\zeta'_{H^{-1}}(0) - \frac{2}{n}(4\pi)^{-n} - 2\log 2\pi + \frac{2}{n}\log|\det B_k| + o(1).
\end{aligned} \quad (3.130)$$

Introduisant dans (3.89) le développement pour $\mathcal{H}_{B_k}(0)$ donné en (3.130) et celui pour $\mathcal{I}_{\mathbf{Q}(i),n}(0)$ donné en (3.112), on trouve enfin

$$\log\Big(\prod_{\lambda_v\neq 0}\lambda_v\Big) = -\int_0^\infty((e^{-2t}I_0(2t)^{2n})-e^{-t})\frac{dt}{t}|\det B_n|^2-2\zeta'_{H^{-1}}(0)-\frac{2}{n}(4\pi)^{-n} \\ -2\log 2\pi+\frac{2}{n}\log|\det B_k|+o(1). \quad (3.131)$$

En comparant cette formule avec la formule (3.1) de Chinta et coauteurs, on remarquera l'exposant 2 du terme $|\det B_n|$, qui est dû au degré 2 de l'extension $\mathbf{Q}[i]$ sur $\mathbf{Q}$. On remarque aussi le terme $-(2/n)(4\pi)^{-n}$, qui est l'analogue d'un des termes de (1.119), mais qui ici n'est plus absorbé par $\zeta'_{H^{-1}}(0)$, contrairement à ce qui se passait en (3.44).

Bibliographie

[1] Shmuel Agmon. *Lectures on elliptic boundary value problems.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2010. Prepared for publication by B. Frank Jones, Jr. with the assistance of George W. Batten, Jr., Revised edition of the 1965 original.

[2] Avner Ash. On eutactic forms. *Canad. J. Math.*, 29(5) :1040–1054, 1977.

[3] Christine Bachoc, Renaud Coulangeon, and Gabriele Nebe. Designs in Grassmannian spaces and lattices. *J. Algebraic Combin.*, 16(1) :5–19, 2002.

[4] Christine Bachoc and Boris Venkov. Modular forms, lattices and spherical designs. In *Réseaux euclidiens, designs sphériques et formes modulaires*, volume 37 of *Monogr. Enseign. Math.*, pages 87–111. Enseignement Math., Geneva, 2001.

[5] Christian Batut. Classification of quintic eutactic forms. *Math. Comp.*, 70(233) :395–417 (electronic), 2001.

[6] Christophe Bavard. Systole et invariant d'Hermite. *J. Reine Angew. Math.*, 482 :93–120, 1997.

[7] Marcel Berger, Paul Gauduchon, and Edmond Mazet. *Le spectre d'une variété riemannienne.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194. Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[8] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Première partie : Les structures fondamentales de l'analyse. Livre III : Topologie générale. Chapitre V : Groupes à un paramètre. Chapitre VI : Espace numériques et espaces projectifs. Chapitre VII : Les groupes additifs R^n. Chapitre VIII : Nombres complexes.* Actualités Sci. Ind., no. 1029. Hermann et Cie., Paris, 1947.

[9] L. Bourguet. Sur les intégrales eulériennes et quelques autres fonctions uniformes. *Acta Math.*, 2(1) :261–295, 1883.

[10] J. Martinet C. Batut. Web page on lattices.

[11] J. W. S. Cassels. On a problem of Rankin about the Epstein zeta-function. *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 4 :73–80 (1959), 1959.

[12] J. W. S. Cassels. Corrigendum to the paper "On a problem of Rankin about the Epstein zeta-function". *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 6 :116 (1963), 1963.

[13] Gautam Chinta, Jay Jorgenson, and Anders Karlsson. Zeta functions, heat kernels, and spectral asymptotics on degenerating families of discrete tori. *Nagoya Math. J.*, 198 :121–172, 2010.

[14] Gautam Chinta, Jay Jorgenson, and Anders Karlsson. Complexity and heights of tori. In *Dynamical systems and group actions*, volume 567 of *Contemp. Math.*, pages 89–98. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[15] Patrick Chiu. Height of flat tori. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125(3) :723–730, 1997.

[16] Henry Cohn and Abhinav Kumar. Universally optimal distribution of points on spheres. *J. Amer. Math. Soc.*, 20(1) :99–148 (electronic), 2007.

[17] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. *Sphere packings, lattices and groups*, volume 290 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, third edition, 1999. With additional contributions by E. Bannai, R. E. Borcherds, J. Leech, S. P. Norton, A. M. Odlyzko, R. A. Parker, L. Queen and B. B. Venkov.

[18] Renaud Coulangeon. Voronoï theory over algebraic number fields. In *Réseaux euclidiens, designs sphériques et formes modulaires*, volume 37 of *Monogr. Enseign. Math.*, pages 147–162. Enseignement Math., Geneva, 2001.

[19] Renaud Coulangeon. Spherical designs and zeta functions of lattices. *Int. Math. Res. Not.*, 2006.

[20] Renaud Coulangeon. On Epstein's zeta function of Humbert forms. *Int. J. Number Theory*, 4(3) :387–401, 2008.

[21] Renaud Coulangeon and Giovanni Lazzarini. Spherical designs and heights of Euclidean lattices. *J. Number Theory*, 141 :288–315, 2014.

[22] H. S. M. Coxeter. Extreme forms. *Canadian J. Math.*, 3 :391–441, 1951.

[23] H. S. M. Coxeter. *Regular polytopes.* Dover Publications, Inc., New York, third edition, 1973.

[24] H. Davenport and H. Heilbronn. On the Zeros of Certain Dirichlet Series. *J. London Math. Soc.*, S1-11(4) :307.

[25] H. Davenport and H. Heilbronn. On the Zeros of Certain Dirichlet Series. *J. London Math. Soc.*, S1-11(3) :181.

[26] B. N. Delone and S. S. Ryškov. A contribution to the theory of the extrema of a multi-dimensional ζ-function. *Soviet Math. Dokl.*, 8 :499–503, 1967.

[27] P. Delsarte, J. M. Goethals, and J. J. Seidel. Spherical codes and designs. *Geometriae Dedicata*, 6(3) :363–388, 1977.

[28] P. H. Diananda. Notes on two lemmas concerning the Epstein zeta-function. *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 6 :202–204 (1964), 1964.

[29] Józef Dodziuk. Elliptic operators on infinite graphs. In *Analysis, geometry and topology of elliptic operators*, pages 353–368. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.

[30] Józef Dodziuk and Varghese Mathai. Kato's inequality and asymptotic spectral properties for discrete magnetic Laplacians. In *The ubiquitous heat kernel*, volume 398 of *Contemp. Math.*, pages 69–81. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[31] Wolfgang Ebeling. *Lattices and codes.* Advanced Lectures in Mathematics. Springer Spektrum, Wiesbaden, third edition, 2013. A course partially based on lectures by Friedrich Hirzebruch.

[32] Veikko Ennola. A lemma about the Epstein zeta-function. *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 6 :198–201 (1964), 1964.

[33] Paul Epstein. Zur Theorie allgemeiner Zetafunctionen. *Math. Ann.*, 56(4) :615–644, 1903.

[34] Paul Epstein. Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen. II. *Math. Ann.*, 63(2) :205–216, 1906.

[35] Peter M. Gruber. Application of an idea of Voronoĭ to lattice zeta functions. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 276(Teoriya Chisel, Algebra i Analiz) :109–130, 2012.

[36] Yiming Hong. On spherical t-designs in $\mathbf{R}^2$. *European J. Combin.*, 3(3) :255–258, 1982.

[37] Anders Karlsson and Markus Neuhauser. Heat kernels, theta identities, and zeta functions on cyclic groups. In *Topological and asymptotic aspects of group theory*, volume 394 of *Contemp. Math.*, pages 177–189. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[38] Gustav Kirchhoff. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird. *Ann. Phys. Chem.*, 72 :497–508, 1847.

[39] Max Koecher. Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung. *J. Reine Angew. Math.*, 192 :1–23, 1953.

[40] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.

[41] Alexander Lubotzky and Dan Segal. *Subgroup growth*, volume 212 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

[42] Jacques Martinet. *Perfect lattices in Euclidean spaces*, volume 327 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[43] Jacques Martinet and Boris Venkov. Les réseaux fortement eutactiques. In *Réseaux euclidiens, designs sphériques et formes modulaires*, volume 37 of *Monogr. Enseign. Math.*, pages 112–134. Enseignement Math., Geneva, 2001. With an appendix by Renaud Coulangeon.

[44] Toshitsune Miyake. *Modular forms*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, english edition, 2006. Translated from the 1976 Japanese original by Yoshitaka Maeda.

[45] Gabriele Nebe and Boris Venkov. The strongly perfect lattices of dimension 10. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 12(2) :503–518, 2000. Colloque International de Théorie des Nombres (Talence, 1999).

[46] Gabriele Nebe and Boris Venkov. Low-dimensional strongly perfect lattices. I. The 12-dimensional case. *Enseign. Math. (2)*, 51(1-2) :129–163, 2005.

[47] O. Timothy O'Meara. *Introduction to quadratic forms*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2000. Reprint of the 1973 edition.

[48] B. Osgood, R. Phillips, and P. Sarnak. Extremals of determinants of Laplacians. *J. Funct. Anal.*, 80(1) :148–211, 1988.

[49] H.-G. Quebbemann. Modular lattices in Euclidean spaces. *J. Number Theory*, 54(2) :190–202, 1995.

[50] R. A. Rankin. A minimum problem for the Epstein zeta-function. *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 1 :149–158, 1953.

[51] S. S. Ryškov. On the question of the final ζ-optimality of lattices that yield the densest packing of n-dimensional balls. *Sibirsk. Mat. Ž.*, 14 :1065–1075, 1158, 1973.

[52] Peter Sarnak. Determinants of Laplacians ; heights and finiteness. In *Analysis, et cetera*, pages 601–622. Academic Press, Boston, MA, 1990.

[53] Peter Sarnak and Andreas Strömbergsson. Minima of Epstein's zeta function and heights of flat tori. *Invent. Math.*, 165(1) :115–151, 2006.

[54] Ludwig Schläfli. *Theorie der vielfachen Kontinuität*. Zürcher & Furrer, Zurich, 1901. Herausgegeben von J. H. Graf, Bern.

[55] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux.* Hermann, Paris, 1968. Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.

[56] Jean-Pierre Serre. *Cours d'arithmétique.* Presses Universitaires de France, Paris, 1977. Deuxième édition revue et corrigée, Le Mathématicien, No. 2.

[57] P. D. Seymour and Thomas Zaslavsky. Averaging sets : a generalization of mean values and spherical designs. *Adv. in Math.*, 52(3) :213–240, 1984.

[58] C. L. Siegel. *Lectures on quadratic forms.* Notes by K. G. Ramanathan. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 7. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1967.

[59] Audrey Terras. A generalization of Epstein's zeta function. *Nagoya Math. J.*, 42 :173–188, 1971.

[60] Audrey Terras. *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications. I.* Springer-Verlag, New York, 1985.

[61] Audrey A. Terras. Bessel series expansions of the Epstein zeta function and the functional equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 183 :477–486, 1973.

[62] Boris Venkov. Réseaux et designs sphériques. In *Réseaux euclidiens, designs sphériques et formes modulaires*, volume 37 of *Monogr. Enseign. Math.*, pages 10–86. Enseignement Math., Geneva, 2001.

[63] G. F. Voronoï. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques : 1 sur quelques propriétés des formes quadratiques parfaites. *J. Reine Angew. Math.*, 133 :97–178, 1907.

[64] John W. Wrench, Jr. Concerning two series for the gamma function. *Math. Comp.*, 22 :617–626, 1968.