

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene  
Faculté d'Électronique et d'Informatique

Université d'Artois  
Faculté Jean Perrin Lens

## THESE EN COTUTELLE

présentée pour l'obtention du diplôme de doctorat en :

**INFORMATIQUE**

Spécialité :

**Intelligence Artificielle et Bases de Données Avancées**

par :

**Ismahane ZEDDIGHA-SIDAMAR**

---

# Autour de la décision qualitative en théorie des possibilités

---

soutenue publiquement le 15/09/2015 devant le jury composé de :

Président :	Yassine DJOUADI	Professeur à l'USTHB.
Rapporteurs :	Narhimene BOUSTIA	Maître de conférences A à l'Université de Blida.
	Zied EL OUADI	Professeur à l'Université de Tunis.
Examineurs :	Eric LEFÈVRE	Professeur à l'Université d'Artois.
	Mohamed MEZGHICHE	Professeur à l'Université de Boumerdes.
	Henri PRADE	Directeur de Recherche CNRS, IRIT-Toulouse.
Directeurs de thèse :	Salem BENFERHAT	Professeur à l'Université d'Artois.
	Faiza KHELLAF	Maître de conférences à l'USTHB.

# Remerciements

Toutes mes remerciements au professeur Yassine Djouadi qui me fait l'honneur de présider ce jury et d'avoir accepté juger ce travail.

Je remercie chaleureusement le docteur Narhimene Boustia de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être rapporteur de ce travail.

Mes remerciements vont également au professeur Zied El ouadi d'avoir répondu à notre demande pour faire partie de ce jury en tant que rapporteur et d'avoir bien voulu accepter d'examiner ce travail.

Je remercie vivement le professeur Henri Prade d'avoir bien voulu participer au jury de soutenance.

Que le professeur Eric Lefèvre trouve ma gratitude d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je remercie vivement le professeur Mohamed Mezghiche d'avoir bien voulu participer au jury de soutenance.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance au professeur Salem Benferhat de m'avoir proposé ce sujet de thèse et d'avoir dirigé cette thèse. Je le remercie vivement pour les conseils et remarques qui ont permis d'améliorer la qualité de ce mémoire. Je tiens également à le remercier pour l'honneur qu'il m'a fait en participant à ce jury.

Je suis infiniment reconnaissante au docteur Faiza Khellaf de m'avoir accordé sa confiance en voulant bien être ma directrice de thèse. Un grand plaisir de travailler avec elle durant toutes ces années. Je tiens également à la remercier d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Enfin, je tiens à remercier tout membre de ma famille pour leurs encouragements et leur soutien moral durant toutes ces années. Un grand merci pour toute personne ayant collaboré de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

## Résumé

Dans de nombreuses applications réelles, nous sommes souvent confrontés à des problèmes de décision : de choisir des actions et de renoncer à d'autres. Les problèmes de décision deviennent complexes lorsque les connaissances disponibles sont entachées d'incertitude ou lorsque le choix établi présente un risque. L'un des principaux domaines de l'Intelligence Artificielle (IA) consiste à représenter les connaissances, à les modéliser et à raisonner sur celles-ci. Dans cette thèse, nous sommes intéressés à une discipline inhérente à l'IA portant sur les problèmes de décision. La théorie de la décision possibiliste qualitative a élaboré plusieurs critères, selon le comportement de l'agent, permettant de l'aider à faire le bon choix tout en maximisant l'un de ces critères. Dans ce contexte, la théorie des possibilités offre d'une part un cadre simple et naturel pour représenter l'incertitude et d'autre part, elle permet d'exprimer les connaissances d'une manière compacte à base de modèles logiques ou de modèles graphiques. Nous proposons dans cette thèse d'étudier la représentation et la résolution des problèmes de la décision qualitative en utilisant la théorie des possibilités. Des contreparties possibilistes des approches standards ont été proposées et chaque approche a pour objectif d'améliorer le temps de calcul des décisions optimales et d'apporter plus d'expressivité à la forme de représentation du problème. Dans le cadre logique, nous avons proposé une nouvelle méthode, pour résoudre un problème de la décision qualitative modélisé par des bases logiques possibilistes, basée sur la fusion syntaxique possibiliste. Par la suite, dans le cadre graphique, nous avons proposé un nouveau modèle graphique, basé sur les réseaux possibilistes, permettant la représentation des problèmes de décision sous incertitude. En effet, lorsque les connaissances et les préférences de l'agent sont exprimées de façon qualitative, nous avons proposé de les représenter par deux réseaux possibilistes qualitatifs distincts. Nous avons développé un algorithme pour le calcul des décisions optimales optimistes qui utilise la fusion de deux réseaux possibilistes. Nous avons montré aussi comment une approche basée sur les diagrammes d'influence peut être codée d'une manière équivalente dans notre nouveau modèle. Nous avons en particulier proposé un algorithme polynomial qui permet de décomposer le diagramme d'influence en deux réseaux possibilistes. Dans la dernière partie de la thèse, nous avons défini le concept de la négation d'un réseau possibiliste qui pourra servir au calcul des décisions optimales pessimistes.

## Mots-Clefs

La théorie de la décision, la théorie des possibilités, la logique possibiliste, les réseaux possibilistes, les arbres de jonctions, les diagrammes d'influence, les décisions séquentielles.

## Abstract

In many applications, we are often in presence of decision making problems where the choice of appropriate actions need to be done. When the choice is clear and the risks are null,

---

the decision becomes easy to select right actions. Decisions are more complex when available knowledge is flawed by uncertainty or when the established choice presents a risk. One of the main areas of Artificial Intelligence (AI) is to model, represent and reason about knowledge. In this thesis, we are interested in an inherent discipline in AI which concerns decision making problems. The qualitative possibility decision theory has developed several criteria, depending on the agent behavior, for helping him to make the right choice while maximizing one of these criteria. In this context, possibility theory provides a simple and natural way to encode uncertainty. It allows to express knowledge in a compact way using logical and graphical models. We propose in this thesis to study the representation and resolution of possibilistic qualitative decision problems. Possibilistic counterparts of standard approaches have been proposed and each approach aims to improve the computational complexity of computing optimal decisions and to provide more expressiveness to the representation model of the problem. In the logical framework, we proposed a new method for solving a qualitative decision problem, encoded by possibilistic bases, based on syntactic representations of data fusion problems. Subsequently, in a graphical framework, we proposed a new graphical model for decision making under uncertainty based on qualitative possibilistic networks. Indeed, when agent's knowledge and preferences are expressed in a qualitative way, we suggest to encode them by two distinct qualitative possibilistic networks. We developed an efficient algorithm for computing optimistic optimal decisions based on syntactic counterparts of the possibilistic networks fusion. We also showed how an influence diagram can be equivalently represented in our new model. In particular, we proposed a polynomial algorithm for equivalently decomposing a given possibilistic influence diagram into two qualitative possibilistic networks. In the last part of the thesis, we defined the concept of negated possibilistic network that can be used for computing optimal pessimistic decisions.

## Keywords

Decision theory, possibilist theory, possibilistic logic, possibilistic networks, junction trees, influence diagrams, sequential decisions.

# Table des matières

Table des figures	8
Liste des tableaux	10
Introduction générale	12
<b>I Les problèmes de décisions sous incertitude</b>	<b>16</b>
<b>Introduction partie I</b>	<b>17</b>
<b>1 Concepts de la théorie de la décision</b>	<b>18</b>
1.1 Introduction . . . . .	18
1.2 Concepts de base d'une théorie de la décision . . . . .	19
1.2.1 Le choix . . . . .	19
1.2.2 La décision . . . . .	19
1.2.3 Les préférences . . . . .	20
1.2.4 Incertitude et préférences . . . . .	20
1.3 Décision dans l'ignorance totale . . . . .	23
1.3.1 Critère Maximin et Maximax . . . . .	24
1.3.2 Critères Minimax regret "Critère de Savage" . . . . .	25
1.3.3 Critère de Hurwicz . . . . .	25
1.3.4 Critère de Laplace . . . . .	26
1.3.5 Démarche axiomatique . . . . .	27
1.4 Décision dans l'incertain probabilisé . . . . .	28
1.4.1 Décision sous risque "Approche de Von Neumann et Morgenstern" . . . . .	28
1.4.1.1 Critère de l'utilité espérée . . . . .	29
1.4.1.2 Démarche axiomatique . . . . .	29
1.4.2 Décision sous incertitude généralisée "Approche de Savage" . . . . .	30
1.4.2.1 Critère de l'utilité espérée subjective . . . . .	30
1.4.2.2 Démarche axiomatique . . . . .	31
1.4.3 Limites de la théorie de l'utilité espérée . . . . .	33
1.4.3.1 Paradoxe d'Allais . . . . .	33
1.4.3.2 Paradoxe d'Ellsberg . . . . .	33
1.5 Généralisation du critère de l'utilité espérée . . . . .	34
1.5.1 Décision basée sur l'utilité dépendante du rang "Rank-Dependent Utility" . . . . .	34
1.5.2 Décision basée sur l'intégral de Choquet . . . . .	35
1.5.3 Décision basée sur l'intégrale de Sugeno "Décision qualitative" . . . . .	36
1.6 Conclusion . . . . .	36

<b>2</b>	<b>Théorie de la décision qualitative</b>	<b>38</b>
2.1	Introduction . . . . .	38
2.2	Concepts de base de la théorie des possibilités . . . . .	38
2.2.1	La distribution de possibilités . . . . .	39
2.2.2	Conditionnement possibiliste . . . . .	41
2.2.3	Indépendance possibiliste . . . . .	42
2.3	Décision basée sur la théorie des possibilités . . . . .	42
2.3.1	Loterie possibiliste . . . . .	42
2.3.2	Critères d'utilité optimiste et pessimiste . . . . .	43
2.3.2.1	Critère d'utilité pessimiste : . . . . .	43
2.3.2.2	Critère d'utilité optimiste : . . . . .	44
2.3.3	Critère d'utilité binaire . . . . .	45
2.4	Décision séquentielle basée sur la théorie des possibilités . . . . .	47
2.4.1	Processus décisionnels markoviens . . . . .	47
2.4.2	Processus décisionnels markoviens possibilistes . . . . .	51
2.4.2.1	Critère d'utilité pessimiste d'une stratégie . . . . .	52
2.4.2.2	Critère d'utilité optimiste d'une stratégie . . . . .	53
2.5	Conclusion . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Modèles de décisions basés sur une représentation logique</b>	<b>59</b>
3.1	Introduction . . . . .	59
3.2	La logique possibiliste . . . . .	59
3.2.1	Les bases possibilistes . . . . .	59
3.2.2	La distribution de possibilités d'une base possibiliste . . . . .	60
3.3	Représentation logique de la décision qualitative . . . . .	61
3.3.1	Approches syntaxiques de la décision qualitative . . . . .	62
3.3.1.1	Cas pessimiste . . . . .	62
3.3.1.2	Cas optimiste . . . . .	63
3.3.2	La sémantique des approches syntaxiques de la décision en logique possibiliste . . . . .	65
3.4	Evaluation des décisions optimales basée sur les ATMS . . . . .	67
3.4.1	Le système de maintien de cohérence "ATMS" . . . . .	67
3.4.2	Calcul des décisions optimales en utilisant la procédure MPL . . . . .	71
3.4.2.1	Contexte optimiste . . . . .	72
3.4.2.2	Contexte pessimiste . . . . .	72
3.5	Conclusion . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Modèles de décisions basés sur une représentation graphique</b>	<b>77</b>
4.1	Introduction . . . . .	77
4.2	Les réseaux possibilistes qualitatifs . . . . .	78
4.2.1	Définition d'un réseau possibiliste qualitatif . . . . .	78
4.2.2	Inférence dans un réseau possibiliste qualitatif . . . . .	79
4.2.2.1	Construction de l'arbre de jonction . . . . .	80
4.2.2.2	Processus d'inférence . . . . .	85
4.3	Arbres de décision possibilistes qualitatifs . . . . .	90
4.3.1	Définition d'un arbre de décision possibiliste . . . . .	90
4.3.2	Evaluation d'un arbre de décision possibiliste . . . . .	92
4.4	Diagrammes d'influence possibilistes qualitatifs . . . . .	94
4.4.1	Définition d'un diagramme d'influence qualitatif . . . . .	95
4.4.2	Evaluation d'un diagramme d'influence qualitatif . . . . .	97

4.5	Conclusion . . . . .	101
<b>II</b>	<b>Décisions possibilistes basées sur la fusion syntaxique</b>	<b>102</b>
	<b>Introduction partie II</b>	<b>103</b>
<b>5</b>	<b>Décisions qualitatives basées sur la fusion de bases logiques</b>	<b>104</b>
5.1	Introduction . . . . .	104
5.2	Fusion d'informations incertaines . . . . .	105
5.2.1	Fusion en logique possibiliste . . . . .	105
5.2.1.1	Opérateurs conjonctifs . . . . .	106
5.2.1.2	Opérateurs disjonctifs . . . . .	107
5.3	Calcul des décisions optimales optimistes basé sur la fusion de bases possibilistes	107
5.4	Calcul des décisions optimales pessimistes basé sur la fusion de bases possibilistes	111
5.4.1	La contrepartie syntaxique de la négation d'une base possibiliste . . .	112
5.4.2	La forme clausale d'une base disjonctive . . . . .	116
5.4.3	Calcul des décisions optimales pessimistes . . . . .	117
5.5	Optimisation des bases possibilistes générées lors de l'étape de la fusion . . .	120
5.6	Etude expérimentale . . . . .	121
5.7	Conclusion . . . . .	122
<b>6</b>	<b>Nouveau Modèle Graphique de la Décision qualitative basé sur les Réseaux Possibilistes : MGDRP</b>	<b>124</b>
6.1	Introduction . . . . .	124
6.2	Fusion de réseaux possibilistes qualitatifs . . . . .	125
6.3	Un nouveau modèle graphique pour les problèmes de décision possibiliste : description du problème . . . . .	127
6.4	Calcul de décisions optimistes basé sur la fusion syntaxique des réseaux possibilistes . . . . .	130
6.4.1	Décisions optimistes basées sur le processus de fusion . . . . .	130
6.4.2	Calcul des décisions optimistes optimales basé sur la structure de l'arbre de jonction . . . . .	133
6.5	La contrepartie logique de l'approche graphique de la décision . . . . .	142
6.5.1	Description logique de l'approche graphique de la décision . . . . .	142
6.5.2	Calcul des décisions optimistes optimales . . . . .	143
6.6	Etude expérimentale . . . . .	145
6.7	Conclusion . . . . .	146
<b>7</b>	<b>Décomposition d'un diagramme d'influence qualitatif</b>	<b>148</b>
7.1	Introduction . . . . .	148
7.2	Processus de décomposition d'un diagramme d'influence qualitatif . . . . .	148
7.2.1	Construction du réseau possibiliste qualitatif représentant les connaissances . . . . .	149
7.2.2	Construction du réseau possibiliste qualitatif représentant les préférences	155
7.2.2.1	Codification naive du réseau possibiliste des préférences avec un seul nœud utilité . . . . .	156
7.2.2.2	Codification compacte du réseau possibiliste des préférences	159
7.3	Calcul de stratégies optimales optimistes dans un MGDRP . . . . .	172
7.4	Etude expérimentale . . . . .	177

## TABLE DES MATIÈRES

---

7.5	Conclusion . . . . .	179
<b>8</b>	<b>La négation d'un réseau possibiliste</b>	<b>180</b>
8.1	Introduction . . . . .	180
8.2	Représentation de la négation d'un réseau possibiliste qualitatif . . . . .	180
8.3	L'inférence dans la négation d'un réseau possibiliste qualitatif . . . . .	187
8.3.1	Construction de l'arbre de jonction : . . . . .	187
8.3.2	Processus de propagation : . . . . .	187
8.3.2.1	Initialisation : . . . . .	188
8.3.2.2	Réponse aux requêtes : . . . . .	190
8.4	Conclusion . . . . .	191
	<b>Conclusion générale</b>	<b>192</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>197</b>

# Table des figures

2.1	Espace d'états et fonctions d'utilités. . . . .	55
2.2	Possibilités de transition pour l'acte "A Droite". . . . .	56
2.3	Calcul récursif d'une stratégie pessimiste optimale. . . . .	58
3.1	Étape 1 : trace de $MPL$ sur $BC$ par rapport à $H^\neg$ . . . . .	70
3.2	Étape 2 : trace de $MPL$ sur $IRP(BC, H^\neg)^{\neg\wedge}$ par rapport à $H$ . . . . .	71
3.3	Calcul de l'utilité optimiste d'une décision. . . . .	74
3.4	Calcul de l'utilité pessimiste d'une décision. . . . .	75
4.1	Exemple d'un DAG. . . . .	79
4.2	DAG : $G(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ . . . . .	83
4.3	Graphe moral $G_{\mathcal{M}}$ associé à $G$ . . . . .	83
4.4	Graphe triangulé $G_{\mathcal{T}}$ associé à $G_{\mathcal{M}}$ . . . . .	84
4.5	Arbre de jonction $\mathcal{JT}$ associé à $G$ . . . . .	85
4.6	Diagramme de l'algorithme de propagation en présence de l'évidence $\varepsilon$ . . . . .	86
4.7	Flux des messages dans $\mathcal{JT}$ de l'Exemple 4.2. . . . .	90
4.8	Exemple d'un arbre de décision possibiliste. . . . .	92
4.9	La stratégie optimale optimiste de l'Exemple 4.4. . . . .	94
4.10	Un exemple d'un diagramme d'influence possibiliste. . . . .	96
4.11	Le réseau possibiliste correspondant au diagramme d'influence de la Figure 4.10. . . . .	100
4.12	Arbre de jonction correspondant au réseau possibiliste de la Figure 4.11. . . . .	101
5.1	Contrepartie syntaxique des fusions sémantiques des bases possibilistes. . . . .	106
5.2	Processus de construction de la négation d'une base possibiliste. . . . .	113
5.3	Temps de réponse pour le calcul des décisions optimales optimistes en utilisant l'Algorithme 5.1. . . . .	121
5.4	Temps de réponse pour le calcul des décisions optimales pessimistes en utilisant l'Algorithme 5.3 avec et sans simplifications. . . . .	122
6.1	Contrepartie syntaxique des fusions sémantiques des réseaux possibilistes. . . . .	125
6.2	Réseau possibiliste représentant les connaissances incertaines. . . . .	128
6.3	Réseau possibiliste représentant les préférences de l'agent. . . . .	129
6.4	Le DAG $G_{\oplus}$ correspondant à la fusion de $G_K$ de la Figure 6.2 et $G_P$ de la Figure 6.3. . . . .	131
6.5	Feuille de l'arbre de jonction $\mathcal{JT}$ . . . . .	138
6.6	L'arbre de jonction associé à $G_{\oplus}$ de l'Exemple 6.2. . . . .	140
6.7	Comparaison des deux Algorithmes 6.3 et 6.4 pour le calcul des décisions optimistes optimales. . . . .	146
7.1	Un exemple d'un diagramme d'influence. . . . .	151

TABLE DES FIGURES

---

7.2	Réseau possibiliste des connaissances déduit à partir du diagramme d'influence de la Figure 7.1. . . . .	153
7.3	Le diagramme d'influence de la Figure 7.1 avec un seul nœud utilité. . . . .	158
7.4	Réseau possibiliste des préférences naïf déduit à partir du diagramme d'influence de la Figure 7.1. . . . .	158
7.5	Diagramme d'influence possibiliste qualitatif. . . . .	161
7.6	Première partie du DAG $G_P$ construit à partir du diagramme d'influence de la Figure 7.5. . . . .	162
7.7	Le DAG $G_P$ construit à partir du diagramme d'influence de la Figure 7.5. . .	162
7.8	La première partie du DAG $G_P$ construit à partir du diagramme d'influence de la Figure 7.1. . . . .	166
7.9	Le DAG $G_P$ construit à partir du diagramme d'influence de la Figure 7.1. . .	167
7.10	Exemple d'un diagramme d'influence. . . . .	173
7.11	Réseau possibiliste qualitatif (Connaissances). . . . .	174
7.12	Réseau possibiliste qualitatif (Préférences). . . . .	175
7.13	Le réseau possibiliste $G_{\oplus}$ . . . . .	175
7.14	Arbre de jonction associé à $G_{\oplus}$ de la Figure 7.13. . . . .	176
7.15	Comparaison des temps de réponse de calcul des stratégies optimales optimistes en utilisant les Algorithmes 7.2 et 7.3 pour la décomposition du DIP initial. .	178
8.1	Exemple d'un DAG. . . . .	181
8.2	Arbre de jonction associé au DAG de la Figure 8.1. . . . .	187

# Liste des tableaux

1.1	Exemple de la préparation d'une omelette. . . . .	22
1.2	Les utilités associées aux choix du voyageur. . . . .	24
1.3	Les regrets associés aux choix du voyageur. . . . .	25
1.4	Caractérisation axiomatique des critères de décision dans l'ignorance totale. . . . .	28
1.5	Les utilités associées aux états du monde. . . . .	32
2.1	La distribution de possibilités $\pi$ sur $CO, PI$ . . . . .	40
2.2	Mesure de possibilité $\Pi$ . . . . .	40
2.3	Mesure de nécessité $N$ . . . . .	41
2.4	La distribution de possibilités $\pi'_{min}$ sur $CO, PI$ . . . . .	41
2.5	La distribution de possibilités $\pi_*$ sur $CO, PI$ . . . . .	41
2.6	Revenu de la vente. . . . .	50
2.7	Récompenses. . . . .	50
2.8	Probabilités conditionnelles. . . . .	50
3.1	La distribution de possibilités associée à $\Sigma$ . . . . .	61
4.1	Distributions de possibilités initiales. . . . .	79
4.2	Distributions de possibilités initiales. . . . .	79
4.3	Distribution de possibilités jointe $\pi_{min}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ . . . . .	79
4.4	L'ordre d'élimination des nœuds. . . . .	84
4.5	Choix des séparateurs appropriés. . . . .	84
4.6	Distribution de possibilités initiales sur $X_1$ et $X_2$ . . . . .	97
4.7	Utilité qualitative $\mu_1$ sur $X_2, D_1, D_2$ . . . . .	97
4.8	Distribution de possibilités conditionnelle jointe $\pi_{min}^{ID}$ sur $X_1, X_2$ sachant $D_1, D_2$ . . . . .	97
4.9	Utilité globale qualitative $\mu_{min}^{ID}(D_1, D_2, X_1, X_2)$ . . . . .	97
4.10	Distributions de possibilités initiales sur $D_1$ et $D_2$ . . . . .	100
4.11	Distributions de possibilités initiales sur $V_1$ . . . . .	100
5.1	Résumé du problème de préparation de l'omelette. . . . .	111
5.2	Les distributions de possibilités associées à $\Sigma$ . . . . .	116
5.3	Les distributions de possibilités associées à $n_\Sigma$ . . . . .	117
6.1	Distributions de possibilités initiales $\Pi K_{min}$ sur $X_1$ et $X_2$ . . . . .	128
6.2	Distributions de possibilités initiales $\Pi K_{min}$ sur $X_3$ sachant $X_1$ . . . . .	128
6.3	Distributions de possibilités initiales $\Pi K_{min}$ sur $D$ sachant $X_1 X_2$ . . . . .	128
6.4	Distributions de possibilités initiales $\Pi K_{min}$ sur $X_4$ sachant $DX_2$ . . . . .	129
6.5	Distribution de possibilités jointe $\Pi K_{min}$ sur $X_1, X_2, X_3, X_4, D$ . . . . .	129
6.6	Distributions de possibilités initiales $\Pi P_{min}$ sur $X_3$ sachant $DX_4, D$ et $X_4$ . . . . .	130
6.7	L'utilité qualitative jointe $\Pi P_{min}$ sur $DX_3 X_4$ . . . . .	130

6.8	Distributions de possibilités initiales $\Pi G_{\oplus}$ sur $X_1$ and $X_2$ . . . . .	131
6.9	Distributions de possibilités initiales $\Pi G_{\oplus}$ sur $D$ sachant $X_1 X_2$ . . . . .	132
6.10	Distributions de possibilités initiales $\Pi G_{\oplus}$ sur $X_4$ sachant $D X_2$ . . . . .	132
6.11	Distributions de possibilités initiales $\Pi G_{\oplus}$ sur $X_3$ sachant $X_1 D X_4$ . . . . .	132
6.12	Distribution de possibilités jointe $\Pi G_{\oplus}$ sur $X_1, X_2, X_3, X_4, D$ . . . . .	132
6.13	Potentiel attaché à $C_1$ . . . . .	140
6.14	Potentiel attaché à $C_2$ . . . . .	141
6.15	Potentiel attaché à $C_1$ . . . . .	141
6.16	Potentiel attaché à $C_2$ . . . . .	141
7.1	Distributions de possibilités initiales $\pi_{ID}$ sur $X_1   D_1, X_2   D_2$ et $X_3   D_2$ . . .	151
7.2	Utilités qualitatives $\mu_1$ sur $X_3, D_2$ et $\mu_2$ on $X_2, D_1$ . . . . .	152
7.3	La distribution de possibilités conditionnelle jointe $\pi_{min}^{ID}$ sur $X_1, X_2, X_3$ sachant $D_1, D_2$ . . . . .	152
7.4	L'utilité qualitative globale $\mu_{min}^{ID}(D_1, D_2, X_1, X_2, X_3)$ . . . . .	153
7.5	Distributions de possibilités initiales $\Pi K_{min}$ sur $X_1   D_1, X_2   D_2$ et $X_3   D_2$ . . . . .	154
7.6	Distributions de possibilités initiales $\Pi K_{min}$ sur $D_1$ . . . . .	154
7.7	Distributions de possibilités initiales $\Pi K_{min}$ sur $D_2   D_1 X_1$ . . . . .	154
7.8	Distribution de possibilités jointe $\pi_K(X_1, X_2, X_3, D_1, D_2)$ . . . . .	154
7.9	Distributions de possibilités initiales $\Pi P_{min}$ sur $X_3$ sachant $D_1 D_2 X_2$ . . . . .	159
7.10	Distributions de possibilités initiales $\Pi P_{min}$ sur $D_1, D_2$ et $X_2$ . . . . .	159
7.11	L'utilité qualitative jointe $\mu_P(D_1, D_2, X_2, X_3)$ . . . . .	159
7.12	Distributions de possibilités initiales $\Pi P_{min}$ sur $D_1$ et $D_2$ . . . . .	171
7.13	Distributions de possibilités initiales $\Pi P_{min}$ sur $X_2   D_1$ et $X_3   D_2$ . . . . .	171
7.14	L'utilité qualitative jointe $\mu_P(X_2, X_3, D_1, D_2)$ . . . . .	171
7.15	Distribution de possibilités initiales sur $X_1   D_1$ et $X_2   D_2$ . . . . .	173
7.16	Utilité qualitative $\mu$ sur $X_2, D_1, D_2$ . . . . .	173
7.17	Distributions de possibilités initiales $\pi(D_1)$ et $\pi(X_1   D_1)$ . . . . .	174
7.18	Distributions de possibilités initiales $\pi(D_2   D_1 X_1)$ . . . . .	174
7.19	Distributions de possibilités initiales $\pi(X_2   D_2)$ . . . . .	174
7.20	Distributions de possibilités initiales $\mu(D_1)$ et $\mu(D_2)$ . . . . .	175
7.21	Distributions de possibilités initiales $\mu(X_2   D_1 D_2)$ . . . . .	175
7.22	Distributions de possibilités initiales $\pi_{\oplus}(D_1)$ et $\pi_{\oplus}(X_1   D_1)$ . . . . .	175
7.23	Distributions de possibilités initiales $\pi_{\oplus}(D_2   D_1 X_1)$ . . . . .	176
7.24	Distributions de possibilités initiales $\pi_{\oplus}(X_2   D_1 D_2)$ . . . . .	176
8.1	Distributions de possibilités initiales. . . . .	181
8.2	Distributions de possibilités initiales. . . . .	182
8.3	Distributions de possibilités initiales. . . . .	182
8.4	Distributions de possibilités initiales. . . . .	182
8.5	Distribution de possibilités jointe $\pi_{min}$ . . . . .	183
8.6	Négation des distributions de possibilités initiales de $\Pi G_{min}$ de l'Exemple 8.1. . . . .	184
8.7	Négation des distributions de possibilités initiales de $\Pi G_{min}$ de l'Exemple 8.1. . . . .	185
8.8	Négation des distributions de possibilités initiales de $\Pi G_{min}$ de l'Exemple 8.1. . . . .	185
8.9	Négation des distributions de possibilités initiales de $\Pi G_{min}$ de l'Exemple 8.1. . . . .	185
8.10	Négation de la distribution de possibilités jointe $\pi_{min}$ . . . . .	186
8.11	Potentiels affectés aux clusters. . . . .	189
8.12	Distribution de possibilités jointe associée à $\mathcal{JT}$ . . . . .	189

# Introduction générale

## Contexte et problématique

Le problème de la décision se pose à nous tous en toutes circonstances : des décisions doivent être prises, certaines difficiles, d'autres insignifiantes, d'autres encore bonnes ou mauvaises. Un agent (humain ou artificiel) doit raisonner en fonction de ses objectifs (buts, préférences, intentions) sur les informations dont il dispose pour mieux agir et prendre la bonne décision. Cette décision devient plus complexe lorsque les connaissances disponibles sont entachées d'incertitude ou lorsque le choix établi présente un risque.

Le problème de la décision est une discipline inhérente à l'Intelligence Artificielle (IA) [1]. En effet, le processus décisionnel consiste à représenter les connaissances, à les modéliser et à raisonner sur celles-ci. Des progrès importants en été enregistrés dans ce domaine, ces dernières décennies, permettant ainsi la production de nombreux systèmes et modèles permettant la prise de décision. La modélisation de la décision ne se ramène pas à une fonction unique à optimiser : la présence de plusieurs critères sur lesquels évaluer la situation, l'incertitude existante sur les événements futurs sont autant de cas où la prise de décision devient un processus très complexe. Le choix de la meilleure décision possible est la plupart du temps délicat à effectuer puisque il fait intervenir de nombreux facteurs. Ceci implique le besoin d'avoir des méthodes et des critères permettant à la fois de calculer les meilleurs choix et de justifier la manière dont ils ont été obtenus. Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés aux problèmes de prise de décision sous incertitude.

Afin de prendre des décisions dans des environnements incertains, l'incertitude est souvent représentée par un ensemble d'états susceptibles de refléter l'état réel du monde et ainsi que des préférences sur les conséquences des actions dans les différents états.

De manière générale, le problème de décision [2, 3, 4] doit être traité sur deux plans :

- Représentation des connaissances : De nombreux modèles en IA ont été développés afin de permettre la représentation et le raisonnement en présence de l'incertitude. Dans certaines situations, en absence d'informations numériques, l'agent ne peut exprimer qu'un ordre entre les différents états possibles du monde (du plus certain au moins certain) et ne peut fournir qu'une relation de préférence entre les différentes conséquences. Dans cette situation, la théorie des possibilités semble appropriée pour la représentation des connaissances et des préférences de l'agent. Elle permet de coder l'incertitude d'une manière naturelle et simple. De plus, elle offre la possibilité de travailler dans un contexte quantitatif ou qualitatif d'une façon logique ou graphique.
- Décision : En parallèle au volet représentation des connaissances, des théories de la décision dans l'incertain ont été proposées, selon le type de représentation de connaissances incertaines. Ces théories visent à élaborer des critères de choix entre les actions en se basant sur la nature de l'incertitude et des préférences de l'agent. La théorie de la décision probabiliste basée sur le critère de l'utilité espérée est la plus populaire et la plus ancienne. Cependant, cette théorie n'est pas adaptée à représenter le compor-

tement d'un agent pour certains problèmes. Des paradoxes ont été mis en évidence [5, 6] et des généralisations ou des alternatives ont été développées comme la théorie des fonctions de croyance [7], la théorie de la décision possibiliste qui offre des critères de décision qualitatifs [8], etc.

Notre étude s'insère dans l'esprit des approches ordinales (qualitatives) des problèmes de décisions sous incertitude. En effet, la théorie des possibilités offre d'une part un cadre naturel et simple pour représenter les connaissances incertaines et permet d'autre part la représentation graphique et logique des connaissances. De plus, contrairement à la théorie de la décision probabiliste qui se base principalement sur le critère de l'utilité espérée pour évaluer les différentes décisions, la théorie de la décision possibiliste offre plusieurs critères (critère d'utilité optimiste et pessimiste [9], critère d'utilité binaire [10], etc).

Cependant, peu de travaux existent dans le domaine de prise de décision basés sur la théorie des possibilités. Pour les problèmes des décisions séquentielles (à plusieurs niveaux) [4], les contreparties possibilistes des modèles standards (probabilistes) ont été proposées : Les arbres de décision possibilistes [11, 12], les diagrammes d'influence possibilistes [11, 13, 14], etc. Les relations de connaissances et les préférences sont exprimées qualitativement sur la même structure. Comme dans le cadre probabiliste, la structure graphique différencie les nœuds représentant les états possibles du monde, les décisions et les utilités (permettant de coder les préférences de l'agent). L'incertitude est décrite par une distribution de possibilités sur les états possibles du monde et les préférences sont exprimées par des degrés de satisfaction sur les nœuds utilités. La résolution d'un diagramme d'influence possibiliste consiste à trouver les meilleures décisions maximisant l'un des critères de décision. Pour trouver la décision optimale, une des méthodes consiste à transformer le diagramme d'influence possibiliste en une structure secondaire (arbre de décision possibiliste [11] ou réseau possibiliste qualitatif [14]). L'autre méthode propose de travailler directement sur la structure initiale mais cette dernière nécessite des calculs additionnels pour mettre à jour les tables de distributions de possibilités [11].

Pour les problèmes de décision à un seul niveau (décisions mutuellement exclusives), une représentation possibiliste basée sur la logique possibiliste a été proposée dans [15]. Cette représentation propose de coder les connaissances et les préférences de l'agent séparément dans deux bases stratifiées. Le calcul des décisions optimales fait appel au système de maintien de la cohérence, appelé "ATMS" (Assumption-based Truth Maintenance System) [16]. La solution proposée ne permet pas de traiter un nombre important de variables [17].

L'intérêt pour la problématique du calcul de la décision qualitative ne cesse d'augmenter et plusieurs approches et modèles ont été proposés. Chaque méthode a pour objectif, en plus du calcul des décisions, d'améliorer et de répondre aux inconvénients des autres méthodes : en terme de temps de calcul, de la forme de représentation des connaissances et de facilité de compréhension.

### **Principales contributions**

Notre premier objectif est de proposer, dans le cadre d'une représentation logique des problèmes de la décision qualitative, une alternative pour calculer les décisions optimales sans passer par les ATMS. L'idée consiste à exploiter la contrepartie syntaxique des techniques de fusion possibiliste [18]. En effet, deux algorithmes ont été proposés pour le calcul des décisions optimales optimistes et pessimistes dans [19, 20].

Le second objectif de notre thèse est de proposer une nouvelle approche pour la modélisation des problèmes de la décision qualitative en se basant sur les réseaux possibilistes. Notre idée est motivée par l'importance et l'efficacité qu'offre les réseaux possibilistes [21] pour le rai-

sonnement sous incertitude. En effet, notre approche consiste à représenter les connaissances et les préférences de l'agent séparément par deux réseaux possibilistes : le premier code la distribution d'une fonction d'incertitude et le deuxième la fonction d'utilité. Cette approche est en accord avec la définition sémantique d'un problème de la décision qualitative donnée dans [15]. Contrairement aux approches existantes, notre approche traite, dès le départ, tous les nœuds (états, décisions et utilités) de la même manière ce qui offre un format de représentation simple pour l'agent décideur. Les résultats de ce travail ont été publiés dans [22, 23, 20].

Cette nouvelle approche sera exploitée pour calculer les décisions optimales optimistes en se basant sur les techniques de la fusion des réseaux possibilistes [24]. Plus précisément, l'algorithme de propagation basé sur la structure de l'arbre de jonction a été adapté à notre contexte de problèmes de la décision qualitative pour le calcul des décisions optimistes. Dans le cas où l'algorithme proposé trouve des difficultés pour construire l'arbre de jonction à cause de nombre important des variables, une deuxième alternative, basée sur l'approche logique, a été proposée. Ce travail est publié dans [20].

Le troisième objectif est de proposer une méthode pour coder un diagramme d'influence possibiliste dans notre nouvelle approche en le décomposant en deux réseaux possibilistes. Nous verrons que le réseau possibiliste obtenu, après la fusion des deux réseaux possibilistes (résultats de la décomposition du diagramme d'influence) pour le calcul des décisions optimales, est plus compacte que celui obtenu après la transformation du diagramme d'influence en réseau possibiliste en utilisant la solution proposée dans [14].

Enfin, dans la dernière partie de la thèse nous nous intéressons à calculer la négation d'un réseau possibiliste. Ceci est important dans certains domaines où la manipulation de l'inverse de la distribution de possibilités s'avère nécessaire. Ce travail a été publié dans [25, 26].

## Organisation de la thèse

Ce mémoire de thèse est composé de deux parties principales :

La première partie propose une vue globale sur le problème de prise de décisions sous incertitude sur le plan de la représentation et l'évaluation. Elle comporte quatre chapitres :

- Le chapitre 1 introduit les différents concepts de base d'un problème de décision sous incertitude. L'évolution de la théorie de la décision sous incertitude dans le temps a été présentée brièvement.
- Dans le chapitre 2, nous nous focalisons sur la théorie de la décision qualitative. Nous détaillons certains critères de décision dans le cadre des problèmes à un seul niveau comme dans le cadre des problèmes de décisions séquentielles.
- Dans le chapitre 3, nous présentons un modèle logique pour coder un problème de la décision qualitative. Une méthode basée sur les ATMS sera détaillée permettant l'évaluation des décisions optimistes et pessimistes.
- Dans le chapitre 4, certains modèles graphiques pour la représentation des problèmes de la décision qualitative seront abordés. Pour chaque modèle, une méthode d'évaluation des différentes décisions sera détaillée.

La seconde partie de la thèse présente les principaux résultats de cette thèse. Elle comporte quatre chapitres :

- Nous proposons dans le chapitre 5 une nouvelle alternative pour le calcul des décisions optimales optimistes et pessimistes basée sur la contrepartie syntaxique de la fusion de bases possibilistes.
- Le chapitre 6 porte sur notre nouveau modèle graphique pour coder un problème de décision sous incertitude. Ce modèle est basé sur les réseaux possibilistes, lorsque les

connaissances et les préférences de l'agent sont exprimées de façon qualitative. Nous suggérons de les représenter par l'intermédiaire de deux réseaux possibilistes qualitatifs distincts. Le premier code la distribution de possibilités jointe représentant les connaissances incertaines de l'agent et le second réseau code l'utilité qualitative représentant ses préférences. Ainsi, nous développons un algorithme pour le calcul des décisions optimales optimistes en se basant sur la fusion des deux réseaux possibilistes. Une alternative basée sur la logique possibiliste est proposée.

- Dans le chapitre 7, nous montrons comment un diagramme d'influence possibiliste qualitatif peut être codé d'une manière équivalente dans notre nouveau modèle. Nous proposons un algorithme polynomial permettant de décomposer d'une façon équivalente un diagramme d'influence en deux réseaux possibilistes. Ces deux réseaux induisent respectivement la distribution de possibilités et l'utilité possibiliste codées par le diagramme d'influence. Une généralisation de l'algorithme de calcul des décisions optimistes, proposé dans le cas des décisions exclusives, a été proposée pour le calcul des stratégies optimistes (décisions séquentielles).
- Nous nous intéressons, dans le chapitre 8, à la définition d'un nouveau concept : la négation d'un réseau possibiliste, qui permettra le codage de l'inverse de la distribution de possibilités jointe. Par la suite, nous proposerons un algorithme de propagation pour calculer la distribution de possibilités associée à chaque événement. Cette étape est importante pour le développement d'un algorithme permettant de calculer les décisions optimales pessimistes dans le cadre de notre approche basée sur les réseaux possibilistes.

**Première partie**

**Les problèmes de décisions sous  
incertitude**

# Introduction de la partie I

La prise de décision concerne toute situation nécessitant la réalisation d'un choix entre au moins deux alternatives d'actions, dans la perspective d'atteindre un but donné. Bien souvent, les conséquences de ces choix ne peuvent être totalement anticipées car soumises à une certaine loi d'incertitude. Afin de réduire cette incertitude et espérer s'orienter progressivement vers une décision adaptée, des méthodes et des critères ont été proposés.

La première partie de la thèse présente un état de l'art sur le problème de prise de décision sous incertitude. Les trois étapes du processus décisionnel seront abordées à savoir : l'axiomatisation, la représentation et la résolution.

En premier, la théorie de la décision probabiliste est présentée. Par la suite, notre étude est focalisée sur la théorie de la décision qualitative basée sur la théorie des possibilités. Dans le cadre de la théorie de la décision qualitative, plusieurs modèles de représentation ont été proposés dans la littérature sur le plan logique et graphique. Le chapitre 3 est consacré aux modèles logiques et leurs algorithmes de résolution. Cependant, les modèles graphiques sont abordés dans le chapitre 4.

# Chapitre 1

## Concepts de la théorie de la décision

### 1.1 Introduction

L'objectif d'une théorie de la décision est de proposer un ou des critères permettant de modéliser le comportement d'un agent (humain ou artificiel) face à un problème de choix tout en respectant ses préférences. Le problème est complexe lorsque l'agent ne peut avoir qu'une vision incomplète de l'environnement. Les problèmes de prise de décisions dans un environnement incertain font intervenir deux notions : incertitude et préférences. L'incertitude est souvent représentée par un ensemble d'états susceptibles de refléter l'état réel du monde et les préférences sont exprimées sur les conséquences des décisions dans les différents états. Le problème essentiel de la théorie de la décision consiste à articuler du mieux possible un concept de rationalité avec la réalité de perceptions subjectives. Décider, ce n'est pas uniquement choisir ce que l'on préfère, c'est aussi et en premier lieu percevoir le champ des possibles. En effet, dans toute décision il y'a deux phases : perception et choix. Le postulat de rationalité porte essentiellement sur la façon de choisir étant donné une perception. Mais il y'a toujours une partie du processus de perception qui est en dehors du champ de la rationalité, qui est, en ce sens, subjective.

La théorie de la décision [8] la plus communément utilisée est basée sur le critère de l'utilité espérée. Ce critère est basé sur la théorie des probabilités [27] pour représenter l'incertitude. Malgré que ce critère a été équipé d'une base axiomatique très solide, la théorie de l'utilité espérée peut se révéler inapte pour représenter le comportement d'un agent décideur face à certains problèmes. Des paradoxes ont été mis en évidence et des généralisations ou des alternatives à la théorie de l'utilité espérée ont été proposées.

Plusieurs modèles ont été proposés pour la décision dans l'incertain, faisant appel à des mesures d'incertitude/fonctions d'utilité non classiques : quantitatifs ou qualitatifs. L'aspect qualitatif signifie que les échelles utilisées pour mesurer l'incertitude et les préférences sont ordinales.

Dans ce chapitre, nous allons passer en revue un certain nombre de théories pour la décision dans l'incertain. Ces théories diffèrent principalement par la nature de l'incertitude et par sa représentation. Dans un premier temps, nous aborderons les théories de la décision dites classiques ou standards. Par la suite, les théories non classiques de la décision seront évoquées.

## 1.2 Concepts de base d'une théorie de la décision

Toutes les théories de la décision proposées dans la littérature ont pour objectif d'aider un agent à prendre la bonne décision selon un certain critère. En effet, une théorie de la décision propose un ou des critères permettant de modéliser le comportement d'un agent face à un problème de choix d'une action parmi un ensemble des décisions envisageables. D'une manière générale, selon Savage un problème de décision est formalisé par [28] :

- Un ensemble  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots\}$  qui représente l'ensemble des états possibles du monde.
- un ensemble  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots\}$  de conséquences,
- un ensemble  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$  d'événements,
- un ensemble  $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_p\}$  de décisions,
- un ensemble  $\mathcal{A}$  d'actes, tel que chaque acte  $A$  est une fonction  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$  qui correspond à la description d'une alternative par décision. En effet, une alternative peut avoir plusieurs conséquences suivant la réalisation d'un événement ou d'un autre.

L'incertitude dans un tel problème peut porter sur les conséquences et/ou sur les états possibles du monde. Plus explicitement, lorsque les conséquences d'une décision ne sont pas complètement connues avant l'exécution de cette décision et/ou lorsque l'état du monde n'est pas exactement connu au moment du choix de la décision. De plus, des préférences sur les décisions sont exprimées par l'agent reflétant ses préférences sur les conséquences des décisions. Nous décrirons dans ce qui suit la différence entre décision et choix, ainsi que les préférences d'un agent et le lien entre choix et préférences.

### 1.2.1 Le choix

Le processus de choix consiste en l'évaluation des alternatives (actions). Formellement, soit  $\mathcal{D}$  un ensemble fini d'alternatives, un agent peut effectuer un choix parmi un sous-ensemble d'alternatives de  $\mathcal{D}$  qui lui sont proposées. Soit donc  $2^{\mathcal{D}}$  l'ensemble des parties de  $\mathcal{D}$ , alors une fonction de choix est définie par [29] :

**Définition 1.1 :**

*Une fonction de choix est la donnée de  $c : 2^{\mathcal{D}} \setminus \{\emptyset\} \rightarrow 2^{\mathcal{D}} \setminus \{\emptyset\}$  telle que pour tout  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$ ,  $c(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$ .*

Ceci dit que si l'agent a le choix entre les éléments de  $\mathcal{D}$ , cet agent dira que tous les éléments de  $c(\mathcal{D})$  conviennent.

### 1.2.2 La décision

Pour choisir, il faut préalablement délimiter l'ensemble des choix ainsi que l'ensemble des conséquences associées, de façon plus au moins certaine. Cela revient à " Fermer l'univers décisionnel ", une terminologie qui a été utilisée par Pierre Garelo [30]. C'est exactement ce qui est effectué au cours du processus de perception.

Une théorie de la décision ne sera donc complète qu'une fois qu'elle aura proposée non seulement une analyse du processus de choix, c'est à dire d'évaluation des alternatives (décisions), mais aussi une analyse du processus de perception par lequel le décideur ferme son univers décisionnel, sélectionnant les connaissances qui lui paraissent pertinentes pour la décision à prendre. La théorie de la décision est plus vaste que la théorie des choix [30].

### 1.2.3 Les préférences

Une relation d'ordre doit être définie permettant ainsi à un agent d'exprimer ses préférences [29] :

**Définition 1.2 :**

*Une relation de préférence entre deux décisions  $d_i$  et  $d_j$  de l'ensemble  $\mathcal{D}$ , notée :  $d_i \succ d_j$  signifie que l'agent préfère strictement  $d_i$  à  $d_j$ .*

Une relation de préférence peut vérifier les axiomes suivants :

- **Asymétrie** : Si  $d_i$  est strictement préférée à  $d_j$ , alors  $d_j$  n'est pas strictement préférée à  $d_i$ . Formellement,

$$\text{Si } d_i \succ d_j \text{ alors } \neg(d_j \succ d_i).$$

- **Transitivité** : Si  $d_i$  est strictement préférée à  $d_j$  et  $d_j$  est strictement préférée à  $d_k$ , alors  $d_i$  est strictement préférée à  $d_k$ . Formellement,

$$\text{Si } (d_i \succ d_j \text{ et } d_j \succ d_k) \text{ alors } (d_i \succ d_k).$$

- **Irreflexivité** : Il n'existe pas de décision  $d_i$  strictement préférée à elle-même. Formellement,

$$\forall d_i, \text{ il n'est pas vrai que } d_i \succ d_i.$$

- **Transitivité négative** : Annoncée comme suit :

S'il n'est pas vrai que  $(d_i \succ d_j)$  et il n'est pas vrai que  $(d_j \succ d_k)$  alors, il n'est pas vrai que  $(d_i \succ d_k)$ .

- **Acyclicité** : Si chaque  $d_i$  est strictement préférée à  $d_{i+1}$ , alors  $d_n$  n'est pas strictement préférée à  $d_1$ . Formellement,

$$\text{Si } d_1 \succ d_2 \text{ et } d_2 \succ d_3 \text{ et } \dots \text{ et } d_{n-1} \succ d_n \text{ alors il n'est pas vrai que } (d_n \succ d_1).$$

Le comportement d'un agent se caractérise par la rationalité. Il est censé agir de telle façon à satisfaire ses intérêts. Dans ce contexte, la relation de préférence est dite rationnelle et elle est définie par [29] :

**Définition 1.3 (Rationalité) :**

*Une relation de préférence est dite rationnelle si elle est asymétrique et négativement transitive.*

Ce qui sous-entend qu'une relation de préférence rationnelle possède forcément les autres propriétés citées juste avant (transitivité, irreflexivité, acyclicité). Par conséquent, cette relation de préférence rationnelle définit un ordre partiel [29].

### 1.2.4 Incertitude et préférences

D'une manière générale, les préférences de l'agent peuvent être complexes à déterminer entièrement. Mais dans la plupart des cas, ces préférences sont exprimées par l'intermédiaire d'une fonction d'utilité  $\mu : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{U}$ , numérique ou ordinale, sur les conséquences dans une échelle  $\mathcal{U}$ . Il est à noter qu'il existe des cas où un agent exprime ses préférences suivant plusieurs critères et l'un des problèmes à résoudre est d'agréger ces différents critères : ce sont des problèmes de décision multicritères [31, 32, 33]. Dans la suite de ce document, nous

nous limiterons au cas où les préférences seraient exprimées directement par un seul critère (numérique ou ordinale).

Dans le cas où l'état du monde est parfaitement connu, les décisions sont directement assimilées à leur conséquence et ordonnées d'après la relation de préférence entre ces dernières. En effet, le problème de décision revient à choisir l'action dont la conséquence (dans cet état) est préférée à toutes les conséquences des autres actions. La situation se complique davantage lorsque le problème de décisions est entaché d'incertitude.

Toutes les théories de la décision dans l'incertain font intervenir une relation d'incertitude entre les états possibles du monde et une relation de préférence sur l'ensemble des conséquences éventuelles des actions applicables. En effet, le choix de l'agent de la meilleure action est guidé par ces deux relations (incertitude et préférences) : une action peut donner de meilleurs résultats qu'une autre dans certains états du monde et de moins bons dans d'autres états. Dans ce cas, ce n'est pas que les préférences qui comptent pour évaluer les actions (décisions), mais aussi l'incertitude relative aux différents états possibles du monde doit être prise en compte .

Cependant, ces théories diffèrent principalement par la nature et la représentation de l'incertitude. Cette incertitude sur les états possibles du monde peut avoir différentes formes [8] :

- **Incertain non mesurable (ignorance totale)** : Dans ce cas, l'agent n'a aucune information sur l'état réel du monde.
- **Incertain probabilisée** : L'incertain dans ce cas est modélisée par une distribution de probabilités [34] sur les états possibles du monde. Il existe deux approches pour attribuer les probabilités [35] :
  - **Probabilité objective (fréquentiste)** : L'approche fréquentiste est fondée sur le fait qu'une probabilité peut être vérifiée empiriquement par la répétition d'une expérience dans exactement les mêmes conditions. En effet, elle indique la fréquence relative à la réalisation d'un événement. Dans la littérature, les problèmes où l'incertain est modélisée par une probabilité objective sont connus par des problèmes sous risque.
  - **Probabilité subjective (incertain généralisée)** : Dans ce cas, la réalisation de l'événement ne peut pas ou peut difficilement être confirmée par l'expérience. La probabilité subjective reflète l'avis d'une personne concernant son appréciation personnelle face à la réalisation d'un événement. Elle est subjective dans le sens où elles représentent une estimation d'une personne individuelle basée sur ses connaissances et son opinion.
- **Incertain non probabilisée** : La théorie des probabilités peut être inappropriée pour exprimer certaines formes d'incertitudes. Par conséquent, de nouvelles théories, non classiques, ont vu le jour permettant la modélisation de cette variante d'incertain telles que la théorie des évidences [7, 36], la théorie des possibilités [8], etc.

Dans le cas d'absence de valeurs numériques pour la représentation de l'incertain dans les problèmes de décision, une relation d'ordre peut être représentée par des valeurs numériques non significatives permettant ainsi sa modélisation. L'incertain dans ces problèmes de décision est dite qualitative. La théorie des possibilités permet la modélisation et le traitement des problèmes de la décision qualitative.

Les différentes notions évoquées dans cette section seront illustrées dans l'exemple suivant [28] :

**Exemple 1.1 (Préparation d'une omelette) :**

*L'exemple suivant illustre un problème de décision très utilisé dans la littérature : pour pré-*

parer une omelette, cinq œufs sont déjà cassés dans un bol et le sixième tenu en main semble suspect (est-il pourri ou sain ?). Soient les trois décisions disponibles suivantes :

- casser l'œuf dans le bol (omelette) :  $CB$ ,
- le jeter directement dans la poubelle :  $JP$ ,
- sortir une tasse pour y casser l'œuf et examiner son état de fraîcheur, avant d'éventuellement l'incorporer à l'omelette :  $CT$ .

D'où,

$$\mathcal{D} = \{CB, JP, CT\}.$$

Les états du monde pertinents au problème sont :

- l'œuf est sain :  $S$ ,
- l'œuf est pourri :  $P$ ,

D'où,

$$\mathcal{X} = \{S, P\}.$$

L'ensemble des événements  $\mathcal{E} = \{\emptyset, \{S\}, \{P\}, \{S, P\}\}$ .

La Table 1.1 résume le problème de décision ainsi défini.

Décision	États du monde	
	œuf sain ( $S$ )	œuf pourri ( $P$ )
Casser l'œuf dans le bol ( $CB$ )	Omelette à 6 œufs (6O)	Pas d'omelette ( $G$ )
Le casser dans une tasse ( $CT$ )	Omelette à 6 œufs (6T) Une tasse à laver	Omelette à 5 œufs (5T) Une tasse à laver
Le jeter ( $JP$ )	Omelette à 5 œufs Un œuf gâché (5G)	Omelette à 5 œufs (5O)

TABLE 1.1 – Exemple de la préparation d'une omelette.

D'où,  $\mathcal{C} = \{ \text{Grande omelette (6O)}, \text{pas d'omelette (G)}, \text{petite omelette (5O)}, \text{omelette à 6 œufs et tasse à laver (6T)}, \text{omelette à 5 œufs et une tasse à laver (5T)}, \text{omelette à 5 œufs et un œuf gâché (5G)} \}$ .

L'ensemble des actes est défini par :

$$\mathcal{A} = \{A_{CB}, A_{JP}, A_{CT}\},$$

tels que :

$A_{CB}$  est l'acte représentant la décision "Casser l'œuf dans le bol" et il est défini par  $A_{CB} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{C}$ , avec :

$A_{CB}(S) = \text{omelette à 6 œufs}$ ,

$A_{CB}(P) = \text{pas d'omelette}$ .

$A_{CT}$  est l'acte représentant la décision "Casser l'œuf dans une tasse" et il est défini par  $A_{CT} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{C}$ , avec :

$A_{CT}(S) = \text{omelette à 6 œufs, une tasse salie}$ ,

$A_{CT}(P) = \text{pas d'omelette, une tasse salie}$ .

$A_{JP}$  est l'acte représentant la décision "Jeter l'œuf dans la poubelle" et il est défini par  $A_{JP} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{C}$ , avec

$A_{JP}(S) = \text{omelette à 5 œufs, un œuf gâché}$ .

$A_{JP}(P) = \text{omelette à 5 œufs}$ .

Dans ce problème, il est évident que la conséquence "omelette à 6 œufs" est préférée à "omelette à 5 œufs", etc. Supposons que l'ordre de préférence entre les conséquences est exprimé par la fonction d'utilité  $\mu$ , affectant les utilités suivantes aux conséquences :

$\mu(6O) = 20$ ,  $\mu(6T) = 15$ ,  $\mu(5O) = 12$ ,  $\mu(5T) = 8$ ,  $\mu(5G) = 5$  et  $\mu(G) = 0$ .

*Le problème de décision revient à choisir quelle est la décision à appliquer parmi les trois décisions disponibles. En effet, si l'état du monde est parfaitement connu et que l'œuf est sain, le choix le plus judicieux est de casser l'œuf directement dans l'omelette, ce qui aura pour effet d'obtenir une omelette à 6 œufs. Si au contraire l'œuf est pourri, la meilleure conséquence qui peut être obtenue sera en choisissant de jeter l'œuf.*

*Mais si l'état réel de fraîcheur de l'œuf est inconnu, prendre la décision de casser l'œuf dans l'omelette est excellent si l'œuf est sain, mais déplorable s'il est pourri. Jeter l'œuf est la meilleure chose à faire s'il est pourri, la pire s'il est sain. La meilleure décision est-elle de le casser dans une tasse à part, alors que cette décision n'est pas la meilleure ni dans le cas où l'on sait que l'œuf est sain, ni dans celui où on sait qu'il est pourri ?*

Selon le modèle adapté pour représenter les connaissances incertaines, plusieurs théories de la décision dans l'incertain ont été proposées dans la littérature. Principalement, nous distinguons deux modèles : les théories classiques de la décision et les théories non classiques. Les théories classiques comprennent la théorie de la décision sous incertitude totale et la théorie de la décision probabilisée. Malgré le succès des théories classiques de la décision, elles ont pu être mises en défaut par Allais [5] et Ellsberg [6]. En effet, les théories classiques de la décision ne permettent pas la formalisation des problèmes de la décision comportant à la fois risque et ambiguïté ou risque et incertitude. Pour remédier à ces restrictions, des modèles alternatifs (théories non classiques) ont été proposés comme ceux basés sur l'intégrale de Choquet [37, 38] et l'intégrale de Sugeno [39, 40, 41]. Les théories non classiques reposent sur des modèles non classiques pour la représentation de l'incertitude telles que la théorie de la décision possibiliste [42], la théorie des évidences [36], etc.

Cependant, ces théories diffèrent par la nature des relations envisagées. En effet, les critères de décision proposés par les différentes théories peuvent être numériques (quantitatifs) ou ordinaux (qualitatifs) : préférences et incertitude.

Selon que l'incertitude sera représentée sur l'état réel du monde, un certain nombre de théories pour la décision dans l'incertain sera brièvement discuté dans ce qui suit. Tout d'abord, les deux cas classiques d'incertitude seront évoqués : l'incertitude totale et l'incertitude probabilisée (objective et subjective). Par la suite, les théories non classiques de la décision seront abordées.

### 1.3 Décision dans l'ignorance totale

Dans un tel type de problèmes de décision dans l'ignorance totale (incertitude non mesurable), l'information est très grossièrement représentée, c'est-à-dire les connaissances de l'agent décideur sont les moins informatives. Dans ce cas, l'agent ne connaît pas l'état réel du monde, mais il sait seulement que cet état appartient à un ensemble d'états possibles. Des critères de décision ainsi que leurs justifications axiomatiques ont été définis dans [43] et peuvent être utilisés pour résoudre ces problèmes.

Dans le cas où l'incertitude ne peut pas être quantifiée, l'ensemble des états possibles du monde  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$  est supposé fini, ainsi que l'ensemble des décisions disponibles  $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_p\}$ . La conséquence de la décision  $d$  lorsque l'état du monde est  $x$  est quantifiée par l'utilité  $\mu(d(x))$ . Une vue globale sur les critères de décision sous incertitude non mesurable fera l'objectif du paragraphe suivant.

### 1.3.1 Critère Maximin et Maximax

Le critère *Maximin* (aussi dit "Critères de Wald") reflète le comportement pessimiste de l'agent. Il ordonne les décisions selon l'utilité de leurs conséquences obtenues dans le pire cas, c'est-à-dire lorsque l'état du monde est le plus défavorable. Formellement, l'utilité dans ce cas est définie par [44] :

**Définition 1.4 :**

La décision optimale selon le critère *Maximin* est celle qui maximise l'expression :

$$u_*(d) = \min_{x \in \mathcal{X}} \mu(d(x)). \quad (1.1)$$

Où  $\mu(d(x))$  représente l'utilité de la conséquence de la décision  $d$  lorsque l'état du monde est  $x$ .

Cependant, le critère *Maximax* représente l'attitude optimiste de l'agent. Il consiste à choisir la décision dont l'utilité est la plus élevée dans le meilleur des cas. Formellement, l'utilité dans ce cas est définie par [45] :

**Définition 1.5 :**

La décision optimale selon le critère *Maximax* est celle qui maximise l'expression :

$$u^*(d) = \max_{x \in \mathcal{X}} \mu(d(x)). \quad (1.2)$$

**Exemple 1.2 :**

Soit le problème de décision suivant : un voyageur doit choisir le moyen de transport le plus intéressant qui doit prendre entre le bateau, le train et l'avion. Son choix dépendra du climat : beau temps, pluvieux ou neigeux. La Table 1.2 représente les utilités associées à chaque choix.

Décision \ État	Climat		
	Beau temps	Pluvieux	Neigeux
Bateau	400	100	-50
Train	450	300	200
Avion	250	300	350

TABLE 1.2 – Les utilités associées aux choix du voyageur.

En se basant sur le critère *Maximin*, l'utilité associée à chaque décision est calculée en utilisant l'Équation 1.1. Ainsi,

$u_*(\text{Bateau}) = -50$ ,  $u_*(\text{Train}) = 200$  et  $u_*(\text{Avion}) = 250$  ce qui implique :  $\text{Avion} \succ \text{Train} \succ \text{Bateau}$ .

Selon ce critère, la décision optimale  $d_{Op}$  est celle qui possède une utilité maximale, donc le voyageur doit prendre l'avion.

Cependant, si le critère *Maximax* est utilisé, l'utilité associée à chaque décision est calculée en utilisant l'Équation 1.2 :

$u^*(\text{Bateau}) = 400$ ,  $u^*(\text{Train}) = 450$  et  $u^*(\text{Avion}) = 350$  ce qui implique :  $\text{Train} \succ \text{Bateau} \succ \text{Avion}$ .

Selon ce critère, la décision optimale  $d_{Op}$  est celle qui possède une utilité maximale, donc le voyageur doit prendre le train.

Les critères *maximin* et *maximax* peuvent se révéler peu discriminants. En effet, dans certains exemples, des décisions peuvent avoir les mêmes utilités d'où toutes les décisions seront considérées comme équivalentes.

### 1.3.2 Critères Minimax regret "Critère de Savage"

Le critère *Minimax regret* a été proposé par Savage [46]. Il minimise le regret maximal associé à chaque décision. En effet, le regret associé à une décision dans un état donné, représente la différence entre l'utilité de la conséquence que l'on obtiendrait en appliquant la meilleure décision dans cet état et celle que l'obtient effectivement. Ce regret mesure le manque à gagner en n'ayant pas choisi la « bonne décision » pour chaque état du monde.

**Définition 1.6 :**

La décision optimale selon le critère *Minimax regret* est celle qui minimise l'expression :

$$r(d) = \max_{x \in \mathcal{X}} [\max_{d' \in \mathcal{D}} \mu(d'(x)) - \mu(d(x))]. \quad (1.3)$$

Où  $\mu(d(x))$  représente l'utilité de la conséquence de la décision  $d$  lorsque l'état du monde est  $x$ .

**Exemple 1.3 :**

Reprenons le problème de décision présenté dans l'Exemple 1.2. La Table 1.3 représente le regret associé à l'application d'une décision dans un état du monde en utilisant le critère *Minimax regret*.

Décision \ État	Climat		
	Beau temps	Pluvieux	Neigeux
Bateau	50	200	400
Train	0	0	150
Avion	200	0	0

TABLE 1.3 – Les regrets associés aux choix du voyageur.

Le regret associé à chaque décision est calculé en utilisant l'Équation 1.3. Ainsi  $r(\text{Bateau}) = 400$ ,  $r(\text{Train}) = 150$  et  $r(\text{Avion}) = 200$  ce qui implique :  $\text{Train} \succ \text{Avion} \succ \text{Bateau}$ .

Selon ce critère, la décision optimale  $d_{Op}$  est celle qui possède un regret minimal, donc le voyageur doit prendre le train.

Les deux critères *Maximin* et *Minimax regret* modélisent le comportement pessimiste de l'agent décideur malgré que le deuxième critère traite le problème d'une façon plus élaborée basée sur les regrets. Cependant, le critère *Minimax regret* peut lui aussi produire le même regret minimal pour toutes les décisions.

### 1.3.3 Critère de Hurwicz

Le critère de Hurwicz se base sur le principe de compensation, en utilisant un indice de pessimisme  $\alpha \in [0, 1]$ , entre l'utilité obtenue dans le pire des cas et l'utilité obtenue dans le meilleur des cas.

**Définition 1.7 :**

La décision optimale selon le critère de Hurwicz est celle qui maximise l'expression :

$$u_h(d) = \alpha \min_{x \in \mathcal{X}} \mu(d(x)) + (1 - \alpha) \max_{x \in \mathcal{X}} \mu(d(x)). \quad (1.4)$$

Où  $\mu(d(x))$  représente l'utilité de la conséquence de la décision  $d$  lorsque l'état du monde est  $x$ .

L'indice de pessimisme reflète l'attitude de l'agent (optimiste ou pessimiste). En effet, lorsque  $\alpha = 1$  (resp.  $\alpha = 0$ ), le critère *Maximin* (resp. *Maximax*) est retrouvé.

**Exemple 1.4 :**

Reprenons l'Exemple 1.2 du voyageur. En appliquant l'Equation 1.4 avec  $\alpha = .7$ , les utilités suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned} u_h(\text{Bateau}) &= .7 * (-50) + .3 * 400 = 85, \\ u_h(\text{Train}) &= .7 * (200) + .3 * 450 = 275, \text{ et} \\ u_h(\text{Avion}) &= .7 * (250) + .3 * 350 = 280 \end{aligned}$$

Donc  $\text{Avion} \succ \text{Train} \succ \text{Bateau}$ .

Selon ce critère, la décision optimale  $d_{Op}$  est celle qui possède une utilité maximale, donc le voyageur doit prendre l'avion.

### 1.3.4 Critère de Laplace

Le critère de Laplace [47] [48] fut le premier à intégrer la notion des probabilités pour représenter l'incertitude. Puisque l'agent décideur se trouve dans le cas de l'ignorance totale, alors ce critère consiste à déterminer, pour chaque décision, l'espérance mathématique en affectant la même probabilité à chaque état possible du monde et en sélectionnant celle dont l'espérance est la plus élevée.

**Définition 1.8 :**

La décision optimale, selon le critère de Laplace, est celle qui maximise l'expression :

$$u_L(d) = \frac{\sum_{x \in \mathcal{X}} \mu(d(x))}{n}. \quad (1.5)$$

Où  $n = |\mathcal{X}|$ .

**Exemple 1.5 :**

En appliquant l'Equation 1.5 sur l'Exemple 1.2, les utilités suivantes sont obtenues :

$$u_L(\text{Bateau}) = 150, \quad u_L(\text{Train}) = 316.66 \text{ et } u_L(\text{Avion}) = 300. \text{ Ainsi, } \text{Train} \succ \text{Avion} \succ \text{Bateau}.$$

Selon ce critère, la décision optimale  $d_{Op}$  est celle qui possède une utilité maximale, donc le voyageur doit prendre le train.

Cependant, pour ce critère également les décisions peuvent avoir la même utilité (moyenne) et le problème de choix de la meilleure décision reste délicat.

### 1.3.5 Démarche axiomatique

Les différents critères peuvent classer de manière totalement contradictoire les différentes décisions. Ceci peut être constaté lors du traitement du problème du voyageur (voir Exemples 1.2, 1.3, 1.4 et 1.5). En effet, différentes solutions ont été trouvées selon le critère utilisé. La question qui se pose est la suivante : "lequel de ces critères devons-nous choisir lorsque nous retrouvons face à un problème de décision?". Pour aider un agent décideur à faire ce choix, dans [49] l'auteur a proposé l'axiomatisation de ces critères fondée sur dix axiomes. Par conséquent, selon les axiomes respectés par la relation de préférences, l'agent décideur choisira un critère pour évaluer les décisions. Cette base axiomatique nécessite la définition de la notion de domination suivante :

**Définition 1.9 (Domination) :**

*La décision  $d_i$  domine fortement (resp. faiblement) la décision  $d_j$  si et seulement si,*

$$\forall x \in \mathcal{X}, \mu(d_i(x)) > \mu(d_j(x)) \text{ (resp. } \mu(d_i(x)) \geq \mu(d_j(x)) \text{)}$$

*Les deux décisions sont dites équivalentes si et seulement si elles se dominent faiblement l'une l'autre :*

$$\forall x \in \mathcal{X}, \mu(d_i(x)) = \mu(d_j(x))$$

Un problème de décision sous incertitude sera considéré sous forme matricielle (les colonnes représentant les états possibles du monde et les lignes les décisions disponibles). Les dix axiomes, proposés dans [49], sont définis par :

1. **Ordre** : Toutes les décisions doivent être ordonnées (le pré-ordre entre les décisions est complet).
2. **Symétrie** : L'ordre doit être indépendant de l'étiquetage des lignes et des colonnes.
3. **Domination forte** :  $d_i$  est préférée à  $d_j$  si  $d_i$  domine fortement  $d_j$ .
4. **Continuité** : Si tout élément  $d_i$  d'une suite convergente ( $d$ ) de décisions est préféré à tout élément  $d_j$  d'une autre suite convergente ( $d'$ ), alors la limite de la suite ( $d'$ ) n'est pas préférée à celle de ( $d$ ).
5. **Linéarité** : L'ordre est invariant par transformation linéaire des utilités ( $\mu' = \alpha * \mu + \beta$ ,  $\alpha > 0$ ).
6. **Ajout de lignes** : L'ajout de nouvelles décisions ne modifie pas l'ordre entre les autres décisions.
7. **Linéarité par rapport aux colonnes** : L'ajout d'une même constante à toutes les colonnes ne change pas l'ordre entre les décisions.
8. **Duplication de colonnes** : Le duplicata d'une colonne dans la matrice ne changera pas l'ordre.
9. **Convexité** : Si  $d_i$  et  $d_j$  sont classées indifférentes par l'ordre, alors aucune des deux n'est préférée à la décision  $1/2 * d_i + 1/2 * d_j$ .
10. **Ajout de lignes affaibli** : Ajouter une nouvelle décision faiblement dominée par toutes les autres décisions ne modifie pas l'ordre entre les autres décisions.

La Table 1.4 résume la caractérisation axiomatique des différents critères cités précédemment. Aucun des quatre critères ne vérifie les dix axiomes à la fois. Le choix d'un critère dépendra alors du choix des axiomes que l'agent décideur souhaitera voir respectés par la relation de préférences.

Axiomes	<i>Maximin</i>	<i>Minimax</i>	<i>Hurwicz</i>	<i>Laplace</i>
1. Ordre	✓	✓	✓	✓
2. Symétrie	✓	✓	✓	✓
3. Domination forte	✓	✓	✓	✓
4. Continuité	✓	✓	✓	✓
5. Linéarité	✓	✓	✓	✓
6. Ajout de lignes	✓		✓	✓
7. Linéarité colonnes		✓		✓
8. Duplication colonnes	✓	✓	✓	
9. Convexité	✓	✓		✓
10. Ajout lignes affaibli	✓	✓	✓	✓

TABLE 1.4 – Caractérisation axiomatique des critères de décision dans l'ignorance totale.

Les critères cités ci-dessus supposent que la matrice d'utilité  $\mu(d_i, x_j)$  du problème de décision est une donnée de ce problème. D'autres travaux ont été développés dans [50][51] et qui se placent dans une optique différente en proposant une axiomatisation permettant de déterminer la matrice d'utilité, lorsque l'on choisit le critère que l'on souhaite adopter. Ce type d'approche est dite constructive.

## 1.4 Décision dans l'incertain probabilisé

Principalement, les critères de la décision dans l'incertain se partagent entre critères quantitatifs et qualitatifs. Dans cette section, nous focalisons notre étude sur les critères de décision quantitatifs les plus réputés.

Contrairement aux problèmes de la décision dans l'ignorance totale, l'agent décideur dans les problèmes de décision sous incertitude probabilisée dispose d'une information plus riche sur les états possibles du monde. L'incertitude, dans ce cas, est représentée par une distribution de probabilités (valeurs numériques) sur les différents états possibles du monde. Selon que la probabilité soit conçue d'une manière objective ou subjective, deux approches ont été proposées : la décision sous risque et la décision sous incertitude généralisée.

### 1.4.1 Décision sous risque "Approche de Von Neumann et Morgenstern"

Dans le cas des problèmes de la décision sous risque [52], la connaissance du décideur est représentée de façon plus élaborée. En effet, l'agent dispose des données statistiques sur les états possibles du monde, exprimées par une distribution de probabilité. Ces problèmes forment un sous-ensemble des problèmes de la décision sous incertitude généralisée qui seront évoqués dans la section suivante.

Les décisions, dans le cas de la décision sous risque, sont assimilées à des loteries probabilistes, dont les lots sont les conséquences éventuelles des décisions. Les probabilités des différentes conséquences (les lots) peuvent être déterminées à partir des données statistiques sur les états possibles du monde. Dans ce contexte, les probabilités sur les états possibles du monde peuvent être vérifiées empiriquement par la répétition du problème dans les mêmes conditions. Les jeux de type roulette, les jeux de dés, sont des exemples typiques des problèmes de la décision sous risque.

Formellement, un problème de la décision sous risque est représenté de la manière suivante :

- L'incertitude sur les états du monde  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$  est modélisée par une distribution de probabilités  $\mathbb{P}$  (connue a priori) sur  $\mathcal{X}$ ,
- Soit  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots\}$ , l'ensemble de conséquences,

- $\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \{l_1, l_2, \dots\}$ , l'ensemble de loteries (les choix possibles) où une loterie  $l$  est simplement une distribution de probabilités  $\mathbb{P}$  sur l'ensemble de conséquences  $\mathcal{C}$  pouvant être fini ou infini.

Dans ce qui suit, le critère de l'utilité espérée basé sur la comparaison des loteries sera détaillé, puis l'axiomatisation de ce dernier sera abordée permettant de justifier son utilisation pour le choix des décisions optimales [52].

#### 1.4.1.1 Critère de l'utilité espérée

Dans le cadre de la décision sous risque, comparer des décisions revient à comparer des distributions de probabilités sur les conséquences, donc des loteries. Formellement une loterie  $l = \langle \lambda_1/\mu_1, \dots, \lambda_n/\mu_n \rangle$  est définie par :

##### Définition 1.10 :

Une loterie  $l = \langle \lambda_1/\mu_1, \dots, \lambda_q/\mu_q \rangle$  associe à chaque décision  $d_j$  une distribution de probabilité  $\mathbb{P}_{d_j}$  sur les conséquences de la façon suivante :

$$\forall c_k \in \mathcal{C}, \mathbb{P}_{d_j}(c_k) = \lambda_k = \sum_{x_i \in \mathcal{X}, d_j(x_i)=c_k} \mathbb{P}(x_i). \quad (1.6)$$

Où  $q$  représente la taille de la loterie qui n'est que le nombre de ses conséquences et  $d_j(x_i)$  représente la conséquence de la décision  $d_j$  lorsque l'état du monde est  $x_i$ .

Les loteries sont donc évaluées par l'espérance mathématique d'une fonction d'utilité sur les conséquences définie par :

##### Définition 1.11 :

Soit  $l = \langle \lambda_1/\mu_1, \dots, \lambda_q/\mu_q \rangle$  une loterie. L'utilité espérée associée à  $l$  est donnée par l'équation suivante :

$$u(l) = \sum_{c_k \in \mathcal{C}} \lambda_k * \mu_k. \quad (1.7)$$

#### 1.4.1.2 Démarche axiomatique

Les loteries ne peuvent être résumées par l'espérance mathématique de la fonction d'utilité sur les conséquences que si les préférences de l'agent sur ses loteries respectent une série d'axiomes. De ce fait, Von Neumann et Morgenstern (VNM) [52] ont proposé un système axiomatique  $S_{VNM}$  pour caractériser la relation de préférence entre les loteries probabilistes. Soient  $\succeq$  une relation d'ordre sur  $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  sont des loteries. Les axiomes de VNM sont les suivants :

1. **VNM 1 (Rationalité)** :  $\succeq$  est une relation de préférence rationnelle (voir Définition 1.3).
2. **VNM 2 (Continuité)** :

$$l_1 \succeq l_2 \succeq l_3 \Rightarrow \exists \alpha \in ]0, 1[ \langle \alpha/l_1, (1 - \alpha)/l_3 \rangle \sim l_2.$$

3. **VNM 3 (Indépendance)** :

$$l_1 \succeq l_2 \Rightarrow \forall \alpha \in ]0, 1[, \langle \alpha/l_1, (1 - \alpha)/l_3 \rangle \succeq \langle \alpha/l_2, (1 - \alpha)/l_3 \rangle.$$

4. **VNM 4 (Substitution) :**

$$(l_1 \sim l_2) \Rightarrow \exists \alpha \in ]0, 1[ [\langle \alpha/l_1, (1 - \alpha)/l_3 \rangle \sim \langle \alpha/l_2, (1 - \alpha)/l_3 \rangle].$$

5. **VNM 5 (Réduction) :** Une loterie composée peut être réduite en loterie simple en utilisant les lois de probabilité :

$$\langle \alpha/l_1, (1 - \alpha)/\langle q/l_2, (1 - q)/l_3 \rangle \rangle \Rightarrow \langle \alpha/l_1, (1 - \alpha) * q/l_2, (1 - p) * (1 - q)/l_3 \rangle.$$

Le théorème suivant affirme que la relation d'ordre  $\preceq$  qui satisfait l'ensemble des axiomes cités précédemment, peut être représentée par la fonction d'utilité définie dans la section précédente (voir Définition 1.11).

**Théorème 1.1 :**

Soit  $\mathcal{C}$  un ensemble de conséquences et  $\preceq$  une relation d'ordre sur  $\mathcal{L}(\mathcal{C})$  vérifiant le système axiomatique  $S_{VNM}$  (VNM 1, ..., VNM 5), alors il existe une fonction d'utilité  $u$  sur  $\mathcal{L}(\mathcal{C})$  telle que :

$$\forall l_1, l_2, l_1 \preceq l_2 \Leftrightarrow u(l_1) \leq u(l_2). \quad (1.8)$$

Où  $u(l_1)$  (resp.  $u(l_2)$ ) représente la fonction d'utilité espérée associée à  $l_1$  (resp.  $l_2$ ).

**Exemple 1.6 :**

Continuons l'Exemple 1.1. Si  $\mathbb{P}(S) = .3$  et  $\mathbb{P}(P) = .7$ , alors les trois loteries  $l_1, l_2$  et  $l_3$  associées aux trois décisions  $CB, CT$  et  $JP$  sont définies comme suit :

$l_1(CB) = \langle .3/20, .7/0 \rangle$ ,  $l_2(CT) = \langle .3/15, .7/8 \rangle$  et  $l_3(JP) = \langle .3/5, .7/12 \rangle$ . En utilisant l'Équation 1.7, les utilités espérées associées à  $l_1, l_2$  et  $l_3$  sont respectivement :  $u(l_1) = (.3 * 20) + (.7 * 0) = 6$  (resp.  $u(l_2) = 10.1$  et  $u(l_3) = 9.9$ ). D'après le critère de l'utilité espérée (voir Théorème 1.1),  $l_2$  est préférée à  $l_3$  qui est elle même préférée à  $l_1$ .

### 1.4.2 Décision sous incertitude généralisée "Approche de Savage"

La théorie de l'utilité espérée (Approche de VNM) est un outil puissant et attrayant pour la représentation et la résolution des problèmes de la décision sous incertitude [53, 8]. Cependant, dans le cas où l'incertitude sur les états possibles du monde ne peut être mesurée par la simple observation des phénomènes physiques extérieurs au décideur (statistiques, symétries du problème...), c'est l'agent décideur qui devra délivrer ses impressions à propos des états du monde qu'il considère possibles ou non. Dans ce cas, nous sommes confrontés à un problème de la décision sous incertitude généralisée et non pas sous risque. En effet, dans les deux situations, l'incertitude sur les états possibles du monde est résumée en une distribution de probabilités : objective lorsqu'on est "sous risque" et subjective lorsqu'on est sous "incertitude généralisée".

Pour résoudre ce type de problème, une extension de la théorie de l'utilité espérée a été proposée basée sur des probabilités subjectives [8]. Cette nouvelle approche, dite aussi modèle de Savage [28], considère une relation de préférence entre décisions (et non pas loteries). Les probabilités sur les états possibles du monde sont déterminées à partir de ses préférences (Ces probabilités ne sont pas des données du problèmes comme dans l'approche de VNM).

#### 1.4.2.1 Critère de l'utilité espérée subjective

Le fait de supposer que l'incertitude, dans la théorie de l'utilité espérée (approche de VNM [52]) est représentée par une distribution de probabilités connue a priori, présente le point

faible de cette théorie [28]. L'approche de Savage [28] est plus générale, elle utilise toujours une distribution de probabilités pour représenter les connaissances de l'agent, mais celle-ci est maintenant subjective. Elle est construite, au même titre que la fonction d'utilité, directement à partir des préférences entre les décisions, en supposant toujours que ces préférences sont représentables par comparaison de l'utilité espérée des différentes décisions. Comme une loterie peut être déduite à partir de toute décision, mais plusieurs décisions peuvent générer les mêmes loteries, l'approche de Savage compare des décisions au lieu des loteries. Dans l'approche de Savage, le problème de décision est toujours modélisé par deux ensembles  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{C}$  qui présente respectivement les états du monde et les préférences. Pour pouvoir construire la distribution de probabilités modélisant l'incertitude de l'agent, Savage suppose que  $\mathcal{X}$  est infini. L'ensemble de conséquences  $\mathcal{C}$  peut être fini ou infini. L'ensemble des décisions est défini par  $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_p\}$ . La relation de préférence est représentée par le pré-ordre  $\preceq$  sur les actes  $\mathcal{A} = \mathcal{C}^{\mathcal{X}}$ . Le critère de l'utilité espérée subjective a été défini par Savage comme suit :

**Définition 1.12 :**

*L'utilité espérée subjective associée à un acte  $f$  est donnée par :*

$$u_{Sav}(f) = \sum_{x_i \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(x_i) * \mu(f(x_i)). \quad (1.9)$$

**1.4.2.2 Démarche axiomatique**

La relation de préférence  $\preceq$  entre les actes doit respectée un certain nombre d'axiomes. Certaines définitions sont nécessaires avant d'aborder le système axiomatique de Savage.

**Définition 1.13 (Acte constant) :**

*Un acte constant  $f$  donne la même conséquence, quel que soit l'état réel du monde :*

$$\forall x \in \mathcal{X}, f(x) = \{c\},$$

avec  $c \in \mathcal{C}$ .

**Définition 1.14 (Acte mixte) :**

*Soient  $f$  et  $g$  deux actes, et  $E \subseteq \mathcal{E}$  un événement. L'acte mixte  $fEg$  est défini par :*

$$\forall x \in E, fEg(x) = f(x) \text{ et } \forall x \in \bar{E}, fEg(x) = g(x).$$

Un acte binaire est un acte mixte constant. Formellement,

$$\forall x \in E, c_1, c_2 \in \mathcal{C}, c_1Ec_2(x) = c_1 \text{ et } \forall x \in \bar{E}, c_1Ec_2(x) = c_2.$$

**Définition 1.15 (Événement nul) :**

*Un événement  $E$  est dit nul si et seulement si :*

$$\forall f, g \in \mathcal{A}, fEg \succeq g \text{ et } gEf \succeq g.$$

Le système axiomatique de Savage  $S_{Sav}$  est défini comme suit :

1. **Sav1 (préordre totale) :**  $(\mathcal{A}, \preceq)$  est un préordre complet.

2. **Sav2 (principe de la chose certaine)** : cet axiome stipule si deux actes donnent les mêmes conséquences sur un événement alors leur classement ne dépend pas de ces conséquences.

$$\forall f, g, h, h' \in \mathcal{A}, \forall E \in \mathcal{E}, fEh \succeq gEh \iff fEh' \succeq gEh'.$$

3. **Sav3 (Conditionnement restreint aux actes constants)** : Soient  $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$  et  $E \in \mathcal{E}$  un événement non nul. Soient  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  deux actes constants tel que  $\forall x \in \mathcal{X} \mathbf{f}(x) = c_1$  et  $\forall x \in \mathcal{X} \mathbf{g}(x) = c_2$ , alors :

$$\mathbf{f} \succeq \mathbf{g} \iff c_1 \succeq_{\mathcal{X}} c_2,$$

avec  $\succeq_{\mathcal{X}}$  est un préordre complet sur  $\mathcal{X}$ .

4. **Sav4 (Préférence sur les événements)** :  $\forall \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{f}', \mathbf{g}', \forall c_1, c_2, c'_1, c'_2 \in \mathcal{C}$  tels que  $\forall x \in \mathcal{X} \mathbf{f}(x) = c_1, \mathbf{g}(x) = c_2, \mathbf{f}'(x) = c'_1, \mathbf{g}'(x) = c'_2$ , et  $c_1 \succeq_{\mathcal{X}} c_2, c'_1 \succeq_{\mathcal{X}} c'_2, \forall E, F \subseteq \mathcal{X}$ , alors,

$$\mathbf{f}E\mathbf{g} \succeq \mathbf{f}'F\mathbf{g}' \text{ si et seulement si } \mathbf{f}'E\mathbf{g}' \succeq \mathbf{f}F\mathbf{g}'.$$

5. **Sav5 (Non trivialité)** : cet axiome évite le cas où toutes les conséquences sont équivalentes, auquel cas tous les actes sont équivalents.

$$\exists \mathbf{f}, \mathbf{g}, \text{ tels que } \forall x \in \mathcal{X} \mathbf{f}(x) = c_1 \text{ et } \mathbf{g}(x) = c_2, \mathbf{f} \succ \mathbf{g}.$$

6. **Sav6 (continuité)** : cet axiome implique une forme de continuité de l'espace d'état.  $\forall f, g \in \mathcal{A}$ , tel que  $f \succ g$ , pour n'importe quel acte constant  $\mathbf{h}$  il existe une partition  $\cup E_i$  de  $\mathcal{X}$  telle que pour tout  $i$ ,

$$\mathbf{h}E_i f \succ g \text{ et } f \succ \mathbf{h}E_i g.$$

Le théorème suivant affirme que la relation d'ordre  $\preceq$  satisfaisant le système axiomatique de Savage (Sav1, ..., Sav6), peut être représentée par la fonction d'utilité définie dans la section précédente (voir Définition 1.12).

### Théorème 1.2 :

Soit  $\mathcal{A} = \mathcal{C}^{\mathcal{X}}$  un ensemble fini d'actes et  $\preceq$  une relation d'ordre sur  $\mathcal{A}$  vérifiant les axiomes **Sav1** à **Sav6**, alors il existe une fonction d'utilité  $u_{Sav}$  sur  $\mathcal{A}$  et une distribution de probabilités  $\mathbb{P}$  déduite à partir de la relation de préférence sur les actes telle que :

$$\forall f, g \in \mathcal{A}, f \preceq g \iff u_{Sav}(f) \leq u_{Sav}(g). \quad (1.10)$$

Où  $u_{Sav}(f)$  (resp.  $u_{Sav}(g)$ ) représente la fonction d'utilité espérée associée à l'acte  $f$  (resp.  $g$ ) (voir Définition 1.12).

### Exemple 1.7 :

Soit le problème de décision défini sur l'ensemble  $\mathcal{X} = X_1, X_2, X_3$  des états du monde tels que  $\mathbb{P}(X_1) = .5, \mathbb{P}(X_2) = .3$  et  $\mathbb{P}(X_3) = .2$ . L'ensemble des utilités associées aux actes  $f$  et  $g$  est résumé dans la Table 1.5.

Actes \ État	État		
	$X_1$	$X_2$	$X_3$
f	20	10	30
g	10	20	30

TABLE 1.5 – Les utilités associées aux états du monde.

En utilisant l'Equation 1.9, l'utilité espérée  $u_{Sav}(f) = (.5 * 20) + (.3 * 10) + (.2 * 30) = 19$ . De même  $u_{Sav}(g) = 17$ , d'où  $f \succ g$

L'utilisation des probabilités additives ( $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ ) pour représenter l'incertitude dans le cas des problèmes faisant intervenir risque et incertitude a été mise en défaut. Cette limite a été expérimentée dans les contre exemples d'Allais [5] et d'Ellsberg [6] où l'utilisation du critère de l'utilité espérée et le critère de l'utilité espérée subjective ne sont pas possibles.

### 1.4.3 Limites de la théorie de l'utilité espérée

#### 1.4.3.1 Paradoxe d'Allais

L'exemple (tiré de [12]) proposé par Allais [5] présente un problème de la décision sous risque pour lequel un choix incompatible avec le critère de l'utilité espérée a été fait par différents décideurs. En effet, une contradiction avec l'axiome d'indépendance du système axiomatique de VNM (**VNM 2**) a été révélée.

Un décideur doit choisir d'abord entre les deux loteries suivantes :

$l_1 = \langle 1/1 \rangle$  et  $l_2 = \langle .01/0, .89/1, .1/5 \rangle$ .

Puis il doit choisir entre :  $l'_1 = \langle .89/0, .11/1 \rangle$  et  $l'_2 = \langle .9/0, .1/5 \rangle$ .

Logiquement, le décideur préfère  $l_1$  à  $l_2$  et il préfère  $l'_2$  à  $l'_1$ .

Soit maintenant le jeux suivant avec quatre loteries :  $A = \langle 1/1 \rangle$ ,  $B = \langle .09/0, .9/5 \rangle$ ,  $C = \langle 1/0 \rangle$  et  $D = \langle 1/1 \rangle$ .

Les loteries  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l'_1$  et  $l'_2$  peuvent être réécrites de la façon suivante :

$$- l_1 = .11A + .89D,$$

$$- l_2 = .11B + .89D,$$

$$- l'_1 = .11A + .89C,$$

$$- l'_2 = .11B + .89C.$$

Comme  $l_1 \succeq l_2$  alors  $.11A + .89D \succeq .11B + .89D$ .

Selon l'axiome d'indépendance (**VNM 3**), cette relation de préférence est équivalente à  $A \succeq B$  avec  $\alpha = .11$ ,  $(1 - \alpha) = .89$  et  $l_3 = D$ . Par conséquence, nous devrions obtenir :

$$l'_1 = .11A + .89C \succeq l'_2 = .11B + .89C.$$

Ce qui contredit le choix initial du décideur ( $l'_2 \succeq l'_1$ ) : l'axiome d'indépendance est non respecté.

Pour résoudre le paradoxe, une généralisation de ce critère a été proposée dans [54] qui sera abordée dans la Section 1.5.

#### 1.4.3.2 Paradoxe d'Ellsberg

Dans ce qui suit, un exemple proposé par Ellsberg [6] traitant un problème de décision comportant à la fois risque et ambiguïté. Soit une urne remplie de 90 boules (30 boules rouges (R) et 60 de couleur blanche (B) ou jaune (J)). La description est volontairement vague et non-spécifique concernant la distribution des boules blanches et jaunes. Une boule est tirée au hasard et le problème de décision consiste à ordonner les deux paires de paris suivantes :

Paris	Rouge "R"	Blanc "B"	Jaune "J"
f	1000 €	0 €	0 €
g	0 €	1000 €	0 €
f'	1000 €	0 €	1000 €
g'	0 €	1000 €	1000 €

Le pari  $f$  rapporte 1000 € si la boule tirée est rouge, et rien sinon. Le même principe est appliqué pour le reste des paris. L'information probabilisable est donnée par l'intermédiaire de la répartition (connue) des boules : 30 rouges et 60 blanches ou jaunes. L'information ambiguë concerne la répartition des boules blanches et jaunes. Les solutions proposées par le décideur d'Ellsberg sont dictées par l'attitude du décideur envers l'ambiguïté : aversion ou attrait. En revanche, elles sont incompatibles avec une représentation probabiliste (subjective) de l'ambiguïté. En effet, si le décideur a une aversion pour l'ambiguïté, il considérera que le pire cas se présentera pour chaque décision.

Lorsqu'il évalue le pari  $g$  (1000 € pour une boule blanche), c'est la situation « aucune boule blanche » qui gouverne son évaluation, donc il est tout à fait raisonnable de préférer  $f$  à  $g$  (aversion pour l'ambiguïté). Pour la même raison, le décideur doit préférer  $g'$  à  $f'$  car lorsqu'il évalue  $f'$  (1000 € pour une boule J ou R), c'est au contraire sur la situation « aucune boule jaune » qu'il se concentre.

Ces préférences ( $f \succ g$  et  $g' \succ f'$ ) sont incompatibles avec la théorie de l'utilité espérée : le « principe de la chose certaine » (Sav2) est violé. En effet,  $f$  et  $g$  donnent la même conséquence pour l'état "J" et la modification de cette conséquence conduit à un renversement des préférences.

Les préférences  $f \succ g$  et  $g' \succ f'$  imposent les deux contraintes suivantes aux probabilités  $\mathbb{P}(B)$ ,  $\mathbb{P}(J)$  et  $\mathbb{P}(R)$  :

- a)  $\mathbb{P}(R) > \mathbb{P}(B) \implies \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(R \cup J) < \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(B \cup J)$ .
- b)  $\mathbb{P}(B \cup J) > \mathbb{P}(R \cup J)$

Or les probabilités sont additives puisque  $B$ ,  $R$  et  $J$  sont disjoints, d'où :  $\mathbb{P}(R \cup B \cup J) < \mathbb{P}(R \cup B \cup J)$ , ce qui est impossible. Dans ce type des problèmes où l'incertitude comporte à la fois une composante statique et une composante non statique (risque et ambiguïté), la théorie de l'utilité espérée peut être mise en défaut. Pour résoudre ce paradoxe, l'hypothèse d'additivité des probabilités subjectives doit être abandonnée. Une généralisation basée sur l'intégrale de Choquet a été proposée dans [37, 38].

## 1.5 Généralisation du critère de l'utilité espérée

Comme il a été montré dans la sous-section précédente, malgré que le critère de l'utilité espérée a été équipé d'une base axiomatique très solide, que ce soit pour la décision sous risque ou sous incertitude, des paradoxes remettent en cause certains fondements axiomatiques : paradoxe d'Allais (pour la décision sous risque) et paradoxe d'Ellsberg (pour la décision sous incertitude). Des généralisations de ces deux critères ont été proposées :

### 1.5.1 Décision basée sur l'utilité dépendante du rang "Rank-Dependent Utility"

Le paradoxe d'Allais pour la décision sous risque a été généralisé dans [54] en proposant le critère de l'utilité dépendante du rang (RDU). Ce critère repose principalement sur un

affaiblissement de l'axiome d'indépendance (**VNM 2**). Il se base sur une fonction de transformation des probabilités ayant le même tableau de variation. Généralement, les degrés de probabilités proches de 0 sont négligés par le décideur et ils n'ont pas un impact important sur ses choix. En se basant sur cette hypothèse, le critère de l'utilité dépendante du rang traite le problème de décision en utilisant des probabilités non linéaires (ce qui induit à un traitement non linéaire sur les conséquences dans la prise de décision). Formellement, le critère d'utilité dépendante du rang est défini comme suit :

**Définition 1.16 :**

L'utilité dépendante du rang associée à  $l = \langle \lambda_1/\mu_1, \dots, \lambda_n/\mu_n \rangle$  est donnée par :

$$u_{RDU}(l) = \mu_1 + \sum_{i=2}^n \varphi\left(\sum_{k=i}^n \lambda_k\right) [\mu_i - \mu_{i-1}], \quad (1.11)$$

avec  $\varphi(\lambda_k)$  est la fonction de transformation de la probabilité  $\lambda_k$ .

**Exemple 1.8 :**

Soient  $l_1 = \langle .3/5, .4/10, .5/20 \rangle$  et  $l_2 = \langle .8/5, .3/20 \rangle$  deux loteries et  $\varphi$  une fonction de transformation des probabilités telle que :

- Si  $0 \leq \lambda_k < .35$  alors  $\varphi(\lambda_k) = 0$ ,
- Si  $.35 \leq \lambda_k < .7$  alors  $\varphi(\lambda_k) = .3$ ,
- Si  $.7 \leq \lambda_k \leq 1$  alors  $\varphi(\lambda_k) = 1$ .

En utilisant l'Equation 1.11, l'utilité dépendante du rang  $u_{RDU}(l_1) = 5 + \varphi(.4 + .5) * (10 - 5) + \varphi(.5)(20 - 10) = 13$  et  $u_{RDU}(l_2) = 5 + \varphi(.3) * (20 - 5) = 5$ , d'où  $l_1 \succ l_2$  selon ce critère.

### 1.5.2 Décision basée sur l'intégral de Choquet

Une généralisation basée sur l'affaiblissement du principe de la chose certaine (SAV 2) a été proposée dans [37, 38, 8] pour résoudre le paradoxe d'Ellsberg et d'Allais :

**SAV 7 (Principe de la chose certaine affaibli) :**

D'après ce principe, si le fait de changer  $f$  en  $g$  sur  $E$  ou sur  $\bar{E}$  améliore l'utilité de  $f$ , alors  $g$  est forcément préférée à  $f$ , quel que soit l'évènement  $E$ . Formellement,

$$\forall f, g \in \mathcal{A}, \forall E \subseteq \mathcal{X}, \text{ si } fEg \succ f \text{ et } gEf \succ f \iff g \succ f.$$

Le critère de l'utilité basé sur l'intégrale de Choquet [8] permet la représentation des situations comportant le risque et l'incertitude. Ce critère est numérique tout comme le critère de l'utilité espérée qui s'étend aux mesures non additives. En effet, l'intégrale de Choquet est basée sur une mesure d'incertitude  $\nu$ , appelée capacité, très générale caractérisée par :

- $\nu(\emptyset) = 0$  et  $\nu(\mathcal{X}) = 1$ ,
- Propriété de monotonie :  $\forall X_1, X_2 \subseteq \mathcal{X}, X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow \nu(X_1) \geq \nu(X_2)$ . Cette propriété est vérifiée par de nombreuses mesures d'incertitude (probabilité, possibilité et nécessité, etc).

Une mesure monotone est toute fonction satisfaisant ces deux propriétés.

L'intégrale de Choquet  $\int_{\mathcal{X}} \phi d\nu$  d'une fonction  $\phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , relativement à une mesure monotone  $\nu$  est définie comme suit :

$$\int_{\mathcal{X}} \phi d\nu = \int_{-\infty}^0 [\nu(\phi > t) - 1] dt + \int_0^{+\infty} \nu(\phi > t) dt. \quad (1.12)$$

Dans le cas d'un problème de la décision sous risque, l'utilité espérée basée sur l'intégrale de Choquet associée à une loterie  $l$  est définie par :

$$u_{Ch}(l) = \sum_{i=1}^n (\mu_i - \mu_{i-1}) \nu(l \geq \mu_i) = \mu_1 + \sum_{i=2}^n (\mu_i - \mu_{i-1}) \nu(\mu \geq \mu_i). \quad (1.13)$$

Dans le cas d'un problème de la décision sous incertitude, l'utilité espérée basée sur l'intégrale de Choquet associée à l'acte  $f \in \mathcal{A}$  lorsque  $\mathcal{C}$  est fini, est donnée par :

$$u_{Ch}(f) = \mu_1 + \sum_{i=2}^n (\mu_i - \mu_{i-1}) \nu(F_i), \quad (1.14)$$

avec  $F_i = \{x, \mu(f(x)) \geq \mu_i\}$ . La mesure  $\nu$  dans le critère de l'utilité basé sur l'intégrale de Choquet peut être remplacée par n'importe quelle mesure floue. Il est à noter que dans le cas où cette mesure est une mesure de probabilité, le critère de l'utilité basée sur l'intégrale de Choquet n'est autre qu'un cas particulier du critère de l'utilité espérée. De même, dans le cas où la mesure  $\nu$  est la fonction de transformation des probabilités  $\varphi$ , on retombe sur le critère de l'utilité dépendante de rang.

**Exemple 1.9 :**

Considérons l'Exemple 1.7 et calculons cette fois ci l'utilité basée sur l'intégrale de Choquet (Equation 1.14) pour les deux actes  $f$  et  $g$  :

$$u_{Ch}(f) = 10 + (10 * .7) + (10 * .2) = 19,$$

$$u_{Ch}(g) = 10 + (10 * .5) + (10 * .2) = 17.$$

Comme le critère de l'utilité basé sur l'intégrale de Choquet généralise le critère d'utilité espérée, les mêmes résultats sont retrouvés ( $u_{Ch}(f) = u_{Sav}(f)$  et  $u_{Ch}(g) = u_{Sav}(g)$ ).

### 1.5.3 Décision basée sur l'intégrale de Sugeno "Décision qualitative"

Dans des situations l'agent décideur ne dispose pas de valeurs numériques pour exprimer son incertitude ou ses préférences. En revanche, il ne peut donner qu'un ordre entre les différents états du monde pour exprimer son incertitude (il en est de même pour ses préférences). Dans des cas pareils, les critères déjà vus ne peuvent pas évaluer les différentes décisions puisque ils ont été développés dans un contexte quantitatif. Par conséquence, le modèle de la décision qualitative a été introduit en se basant sur l'intégrale de Sugeno [39, 40]. Le critère de l'utilité basé sur l'intégrale de Sugeno est la contrepartie ordinale de l'intégrale de Choquet qui généralise le critère de l'utilité espérée. Il est défini relativement à une mesure floue  $\nu$  de la manière suivante :

$$\forall f \in \mathcal{A}, u_{Sug}(f) = \max_{c \in \mathcal{C}} \min(\nu(F_c), \mu(c)), \quad (1.15)$$

avec  $F_c = \{x \in \mathcal{X}, \mu(f(x)) \geq \mu(c)\}$ .

## 1.6 Conclusion

Une brève présentation des théories de la décision a été donnée tout au long de ce chapitre. Ces théories ont toutes la caractéristique commune de faire intervenir des relations de préférence sur un ensemble de conséquences et de plausibilité sur un ensemble d'états du monde.

La théorie de la décision basée sur le critère de l'utilité espérée est la plus utilisée. Cependant, des théories alternatives ont été proposées, permettant de résoudre certains paradoxes

comme celui d'Allais ou celui d'Ellsberg qui la mettent en défaut, entre autres : les théories de la décision basées sur l'intégrale de Choquet dans le contexte quantitatif (incertitude et préférences représentées par une probabilité additive ou non additive) et les théories de la décision basées sur l'intégrale de Sugeno dans le contexte qualitatif (incertitude et préférences peuvent seulement être ordonnées).

Dans le chapitre qui suit, une théorie qualitative (non classique) de la décision basée sur des distributions de possibilités sera exposée. En effet, les distributions de possibilités seront utilisées pour représenter à la fois les connaissances et les préférences d'un agent. Cette théorie utilise des données ordinales et non additives, en se basant sur l'intégrale de Sugeno.

## Chapitre 2

# Théorie de la décision qualitative

### 2.1 Introduction

Les différentes théories de la décision proposées dans le Chapitre 1 présentent des limites. D'une part dans le cas d'absence de valeurs numériques pour exprimer l'incertitude et les préférences d'un agent décideur. D'autre part elles ne permettent de traiter que des problèmes de décision à un seul niveau : le décideur est limité à choisir et appliquer un seul acte. En effet, dans certaines situations l'agent décideur peut seulement ordonner les états du monde et les conséquences (en termes d'incertitude et préférence). Dans ce contexte qualitatif, des théories de la décision (non classiques) dans l'incertain ont été développées [42] pour permettre à un agent d'évaluer les différentes décisions afin de choisir la meilleure. Dans de telles situations, la théorie des possibilités [55, 8] offre un environnement approprié pour représenter les connaissances incertaines et les préférences de l'agent. Contrairement à la théorie de la décision probabiliste, la théorie de la décision possibiliste offre plusieurs critères : les critères d'utilité optimiste et pessimiste [56], le critère d'utilité binaire [10], le critère de dominance vraisemblable possibiliste (Possibilistic Likely Dominance), le critère de l'utilité espérée d'ampleur ordonnée (Order of Magnitude expected utility), etc.

Pour traiter des problèmes de décision plus complexes (à plusieurs niveaux) [4], dits séquentiels, une extension des critères de la décision qualitative (optimiste et pessimiste) a été proposée dans [57, 58]. Dans les problèmes des décisions séquentielles, l'agent est confronté à choisir une suite d'actes. La conséquence de l'exécution d'un acte à l'instant  $t$  présentera l'état du monde à l'instant  $t + 1$ .

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons les concepts de base de la théorie des possibilités. Par la suite toujours dans le cadre des problèmes de décision à un seul niveau, nous passons en revue certains critères développés dans le cadre de la théorie des possibilités. La deuxième partie sera consacrée aux problèmes des décisions séquentielles. Nous présenterons la contrepartie possibiliste de la théorie des processus décisionnels markoviens généralisant ainsi les deux critères (optimiste et pessimiste proposés dans le cadre d'un problème de décision à un seul niveau) aux problèmes des décisions séquentielles.

### 2.2 Concepts de base de la théorie des possibilités

Afin de remédier aux limites de la théorie des probabilités : impossibilité de représenter l'incertitude qualitative et l'ignorance totale (représentée par la notion d'équiprobabilité), la théorie des possibilités a été introduite dans [59] et développée dans [60, 8]. Cette théorie permet d'exprimer l'incertitude de deux manières : quantitative ou qualitative. Les deux contextes partagent le même ensemble de fonctions mais diffèrent dans leurs définitions des

concepts de conditionnement et d'indépendance [61, 62].

Le traitement des connaissances incertaines implique l'affectation d'une pondération aux formules logiques. Le sens attribué à cette pondération dépend du contexte : qualitatif ou quantitatif. Dans le contexte quantitatif, chaque pondération a un sens sur l'échelle numérique. Dans ce contexte, l'opérateur de multiplication sert à combiner les différentes formules. Cependant, dans le contexte qualitatif les pondérations induisent seulement un ordre entre les formules et l'opérateur minimum (*min*) combine les différentes formules. Dans ce mémoire, nous nous intéressons au contexte qualitatif, comme un moyen pour représenter les connaissances et les préférences d'un agent dans un problème de décision. Avant de procéder à la présentation des éléments de base de la théorie des possibilités, les notations suivantes sont nécessaires :

Soit  $\mathcal{V} = \{X_1, \dots, X_n\}$  l'ensemble des variables et  $\mathbb{D}_{X_i} = \{x_{i1}, \dots, x_{im}\}$  le domaine associé à la variable  $X_i$  tel que  $x_{ij}$  dénote la  $j$  ème instance de  $X_i$ . L'univers de discours est noté par  $\Omega = \times_{X_i \in \mathcal{V}} \mathbb{D}_{X_i}$  représentant le produit cartésien des domaines de toutes les variables de  $\mathcal{V}$ . Chaque élément  $\omega \in \Omega$ ,  $\omega = (x_{1i}, \dots, x_{nj})$  est appelé une interprétation. Un événement  $\psi, \varphi, \dots$  représente un sous ensemble de  $\Omega$ .

La conjonction, la disjonction et la négation classique sont représentées respectivement par  $\wedge, \vee, \neg$ .  $\perp$  et  $\top$  représentent respectivement la contradiction et la tautologie.

Un littéral est un symbole propositionnel ou la négation d'un symbole propositionnel.

Une clause est une disjonction de littéraux et un cube est une conjonction de littéraux. Une forme normale conjonctive (CNF) est une conjonction de clauses. Une forme normale disjonctive (DNF) est une disjonction de cubes [63].

L'expression  $\omega \in [\phi]$  signifie que  $\omega$  est un modèle de  $\phi$ .  $\vdash$  est le symbole de déduction de la logique propositionnelle classique.

### 2.2.1 La distribution de possibilités

L'élément de base de la théorie des possibilités est la distribution de possibilités  $\pi$  qui est une fonction de l'ensemble  $\Omega$  vers une échelle totalement ordonnée :

$$\pi : \Omega \rightarrow [0, 1].$$

Cette distribution permet de coder les connaissances disponibles sur le monde réel. En effet, si  $\pi(\omega) = 1$  cela signifie que cette interprétation est totalement possible, sinon ( $\pi(\omega) = 0$ ) il est impossible pour  $\omega$  de représenter le monde réel. Une distribution de possibilités  $\pi$  est dite plus spécifique qu'une distribution  $\pi'$ , c'est-à-dire  $\pi \leq \pi'$ , si et seulement si  $\forall \omega \in \Omega, \pi(\omega) \leq \pi'(\omega)$ . C'est-à-dire que l'information véhiculée par  $\pi$  englobe celle contenue dans  $\pi'$ , et de plus elle est strictement plus précise,  $\pi'$  est donc redondante et peut être ignorée [64]. La théorie des possibilités permet d'exprimer les formes extrêmes des connaissances partielles de la façon suivante :

- L'ignorance totale peut présentée par :  $\forall \omega \in \Omega, \pi(\omega) = 1$ .
- Connaissance complète :  $\exists \omega \in \Omega, \pi(\omega) = 1$  et  $\forall \omega' \neq \omega, \pi(\omega') = 0$ .

La condition de normalisation d'une distribution de possibilités reflète la présence d'une interprétation totalement possible.

#### Définition 2.1 :

Une distribution de possibilités est dite  $\alpha$ -normalisée si son degré de normalisation  $h(\pi)$  est égale à  $\alpha$ , c'est-à-dire :

$$h(\pi) = \max_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = \alpha. \quad (2.1)$$

Si  $\alpha = 1$ , alors  $\pi$  est dite normalisée.

**Exemple 2.1 :**

Soient  $CO$  et  $PI$  deux variables binaires relatives à la dégradation de la Couche d'Ozone et la Pollution Industrielle, telles que :  $\mathbb{D}_{CO} = \{Oui(o), Non(\neg o)\}$  et  $\mathbb{D}_{PI} = \{Faible(f), Elevée(\neg f)\}$ . Un exemple de la distribution de possibilités  $\pi$  est donné par la Table 2.1 :

$CO$	$PI$	$\pi(CO, PI)$	$CO$	$PI$	$\pi(CO, PI)$
$o$	$f$	.6	$\neg o$	$f$	1
$o$	$\neg f$	.2	$\neg o$	$\neg f$	.5

 TABLE 2.1 – La distribution de possibilités  $\pi$  sur  $CO, PI$ 

La distribution de possibilités  $\pi$  est normalisée puisque  $h(\pi) = \max_{\omega \in \Omega}(\pi(\omega)) = \max(.6, .2, 1, .5) = 1$ .

Contrairement à la théorie des probabilités où l'incertitude d'un événement  $\phi$  est déterminée par l'incertitude quantifiant l'événement complémentaire  $\mathbb{P}(\phi) = 1 - \mathbb{P}(\neg\phi)$ , en théorie des possibilités étant donnée une distribution de possibilités  $\pi$  sur l'ensemble  $\Omega$ , deux mesures duales sont définies pour chaque événement  $\phi$  :

1. **Mesure de possibilité  $\Pi(\phi)$**  : elle représente le degré de compatibilité de  $\phi$  avec les croyances codées par  $\pi$ . En d'autres termes, cette mesure évalue le degré de cohérence de la formule  $\phi$  avec les connaissances représentées par  $\pi$ . Formellement, la mesure de possibilité  $\Pi(\phi)$  est définie par :

$$\Pi(\phi) = \max_{\omega \in \Omega} \{\pi(\omega) : \omega \in [\phi]\}. \quad (2.2)$$

La Table 2.2 résume les caractéristiques d'une mesure de possibilité.

$\Pi(\phi) = 1$ et $\Pi(\neg\phi) = 0$	$\phi$ est certainement vraie
$\Pi(\phi) = 1$ et $\Pi(\neg\phi) \in ]0, 1[$	$\phi$ est certaine à un certain degré
$\Pi(\phi) = 1$ et $\Pi(\neg\phi) = 1$	Ignorance totale
$\Pi(\phi) > \Pi(\psi)$	$\phi$ est préférée à $\psi$
$\max(\Pi(\phi), \Pi(\neg\phi)) = 1$	$\phi$ et $\psi$ ne peuvent pas être toutes les deux impossibles
$\Pi(\phi \vee \psi) = \max(\Pi(\phi), \Pi(\psi))$	Axiome de disjonction
$\Pi(\phi \wedge \psi) \leq \min(\Pi(\phi), \Pi(\psi))$	Axiome de conjonction

 TABLE 2.2 – Mesure de possibilité  $\Pi$ .

2. **Mesure de nécessité  $N(\phi)$**  : c'est la mesure duale de la mesure de possibilité. Elle représente le degré de certitude de  $\phi$  à partir des croyances codées par  $\pi$ . Formellement, la mesure de nécessité  $N(\phi)$  est définie par :

$$N(\phi) = 1 - \Pi(\bar{\phi}) = \min_{\omega \notin [\phi]} (1 - \pi(\omega)). \quad (2.3)$$

Notons que,  $N(\phi) > 0 \Rightarrow \Pi(\phi) = 1$ . Cela signifie qu'un événement n'est nécessaire que s'il est complètement possible. Cette propriété assure l'inégalité  $N(\phi) \leq \Pi(\phi)$  [65]. La Table 2.3 résume les caractéristiques d'une mesure de nécessité.

$N(\phi) = 1$ et $N(\neg\phi) = 0$	$\phi$ est totalement certaine
$N(\phi) \in ]0, 1[$ et $N(\neg\phi) = 0$	$\phi$ est certaine à un certain degré
$N(\phi) = 0$ et $N(\neg\phi) = 0$	Ignorance totale
$\min(N(\phi), N(\neg\phi)) = 0$	La seule relation qui lie $N(\phi)$ à $N(\neg\phi)$
$N(\phi \wedge \psi) = \min(N(\phi), N(\psi))$	Axiome de conjonction
$N(\phi \vee \psi) \geq \max(N(\phi), N(\psi))$	Axiome de disjonction

 TABLE 2.3 – Mesure de nécessité  $N$ .

### 2.2.2 Conditionnement possibiliste

Le conditionnement possibiliste [66, 61] consiste à réviser des connaissances initiales, codées par la distribution de possibilités  $\pi$ , à l'arrivée d'une information certaine  $\phi \subseteq \Omega$ . La distribution de possibilités initiale est alors remplacée par une nouvelle  $\pi' = \pi(\cdot | \phi)$ . Selon l'interprétation associée à l'échelle possibiliste (quantitative ou qualitative), deux types de conditionnement sont à distinguer :

1. **Conditionnement basé sur le minimum** : dans un contexte qualitatif, le degré de possibilités maximal est assigné au meilleur modèle de  $\phi$  comme suit.

$$\pi(\omega | \phi) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \pi(\omega) = \Pi(\phi) \text{ and } \omega \in [\phi] \\ \pi(\omega) & \text{si } \pi(\omega) < \Pi(\phi) \text{ and } \omega \in [\phi] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.4)$$

2. **Conditionnement basé sur le produit** : dans le contexte quantitatif, le conditionnement possibiliste est donné par :

$$\pi(\omega |_* \phi) = \begin{cases} \frac{\pi(\omega)}{\Pi(\phi)} & \text{Si } \omega \in [\phi] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.5)$$

#### Exemple 2.2 :

Reprenons le problème de dégradation de la couche d'ozone et la pollution industrielle donné dans l'Exemple 2.1. Supposons qu'une nouvelle information arrive affirmant un taux élevé de pollution. Soit  $\phi = \{o \wedge \neg f, \neg o \wedge \neg f\}$ . Cette information a un degré de possibilité  $\Pi(\phi) = \max(.2, .5) = .5$ .

Dans le contexte qualitatif, en utilisant l'Equation 2.4, la nouvelle distribution  $\pi'_{min}(\omega) = \pi(\omega | \phi)$  est donnée par la Table 2.4.

CO	PI	$\pi(CO, PI)$	CO	PI	$\pi(CO, PI)$
<i>o</i>	<i>f</i>	0	$\neg o$	<i>f</i>	0
<i>o</i>	$\neg f$	.2	$\neg o$	$\neg f$	1

 TABLE 2.4 – La distribution de possibilités  $\pi'_{min}$  sur  $CO, PI$ .

De même, dans le contexte quantitatif la nouvelle distribution  $\pi'_*(\omega) = \pi(\omega | \phi)$  est obtenue en utilisant l'Equation 2.5. Le résultat est donné par la Table 2.5.

CO	PI	$\pi(CO, PI)$	CO	PI	$\pi(CO, PI)$
<i>o</i>	<i>f</i>	0	$\neg o$	<i>f</i>	0
<i>o</i>	$\neg f$	.4	$\neg o$	$\neg f$	1

 TABLE 2.5 – La distribution de possibilités  $\pi'_*$  sur  $CO, PI$ .

### 2.2.3 Indépendance possibiliste

La relation d'indépendance possibiliste est basée sur le conditionnement possibiliste. En effet,  $X$  est considérée indépendante de  $Y$  dans le contexte de  $Z$ , si pour tout instance  $z \in \mathbb{D}_Z$  le degré de possibilité de n'importe quelle instance  $x \in \mathbb{D}_X$  reste inchangé pour n'importe quelle instance  $y \in \mathbb{D}_Y$ . Formellement :

$$\forall x, y, z \Pi(x \mid y \wedge z) = \Pi(x \mid z). \quad (2.6)$$

La théorie des possibilités offre plusieurs définitions pour l'indépendance possibiliste [62, 61, 67]. En particulier, deux définitions ont été utilisées dans le développement des réseaux possibilistes qui feront l'objet du Chapitre 4.

1. **Indépendance basée sur le minimum** : initialement définie comme une relation de non-interactivité dans [59], cette relation est obtenue en utilisant le conditionnement basé sur le minimum (Equation 2.4) de la façon suivante :

$$\forall x, y, z \Pi(x \wedge y \mid z) = \min(\Pi(x \mid z), \Pi(y \mid z)). \quad (2.7)$$

2. **Indépendance basée sur le produit** : cette relation est fondée sur le conditionnement basé sur le produit (Equation 2.5). Elle définie par :

$$\forall x, y, z \Pi(x \wedge y \mid z) = \Pi(x \mid z) * \Pi(y \mid z). \quad (2.8)$$

## 2.3 Décision basée sur la théorie des possibilités

Comme il a été déjà mentionné, dans plusieurs situations, il serait plus simple pour un agent décideur d'exprimer son incertitude d'une façon qualitative en ordonnant seulement les différents états du monde. De même, il serait plus simple d'établir une relation de préférence entre les conséquences. Dans ce cas, la théorie des possibilités offre un contexte purement qualitatif pour la résolution de ce type de problème de décision. En effet, la théorie de la décision possibiliste qualitative [68, 69, 70] modélise les connaissances de l'agent par une distribution de possibilités normalisée, qui est une fonction de l'ensemble des états du monde  $\mathcal{X}$  vers une échelle simplement ordonnée  $\mathcal{L} : [0, 1]$  où  $\pi(x)$  représente le degré de vraisemblance que  $x$  soit l'état réel du monde. Il en est de même pour les préférences de l'agent sur les conséquences. Elles sont représentées par une autre distribution de possibilités  $\mu$  (pas forcément normalisée) prenant ses valeurs dans une échelle simplement ordonnée  $\mathcal{U}$ . Un acte est comme dans la théorie de la décision probabiliste, représenté par une fonction de  $\mathcal{X}$  vers  $\mathcal{C}$  (l'ensemble des conséquences).

### 2.3.1 Loterie possibiliste

Au départ dans [9, 71], la contrepartie possibiliste d'une loterie probabiliste (voir Chapitre 1, Section 1.4.1) a été proposée. Soit  $\mathcal{L}(\mathcal{C})$  un ensemble de loteries. Une loterie possibiliste  $l = \langle \lambda_1/\mu_1, \dots, \lambda_n/\mu_n \rangle$  associe à chaque décision une distribution de possibilités  $\pi$  sur l'ensemble des conséquences  $\mathcal{C}$ , tel que  $\lambda_i = \pi(\mu_i)$  est la possibilité que la décision induit à une conséquence d'utilité  $\mu_i \in \mathcal{U}$ .

Une loterie possibiliste composée  $l = \langle \lambda_1/l_1, \dots, \lambda_m/l_m \rangle$  est une distribution de possibilités sur l'ensemble  $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ . Une loterie composée peut être réduite en loterie simple de la façon suivante [9] :

**Définition 2.2 :**

La réduction d'une loterie possibiliste composée  $\langle \lambda_1/l_1, \dots, \lambda_m/l_m \rangle$  en une loterie possibiliste simple, notée  $\text{Réd}(\langle \lambda_1/l_1, \dots, \lambda_m/l_m \rangle)$ , est définie formellement par :

$$\begin{aligned} \text{Réd}(\langle \lambda_1/l_1, \dots, \lambda_m/l_m \rangle) &= \text{Réd}(\langle \lambda_1 / \langle \lambda_1^1/\mu_1, \dots, \lambda_n^1/\mu_n \rangle, \dots, \lambda_m / \langle \lambda_1^m/\mu_1, \dots, \lambda_n^m/\mu_n \rangle \rangle) \\ &= \langle \max_{j=1..m} (\lambda_j \square \lambda_1^j) / \mu_1, \dots, \max_{j=1..m} (\lambda_j \square \lambda_n^j) / \mu_n \rangle, \end{aligned} \quad (2.9)$$

où  $\square$  correspond soit à l'opérateur  $\min$  dans le cas de théorie possibiliste qualitative, soit à l'opérateur  $*$  dans le cas quantitatif.

**Exemple 2.3 :**

Soient  $l_1 = \langle .1/5, .8/10, .3/20 \rangle$ ,  $l_2 = \langle .6/5, .4/10, .7/20 \rangle$  et  $l_3 = \langle .9/5, .3/10, .4/20 \rangle$  trois loteries possibilistes.

Soit  $l_4 = \langle .5/l_1, .3/l_2, 1/l_3 \rangle$  une loterie possibiliste composée. La loterie  $l_4$  peut être réduite en une loterie possibiliste simple  $\text{Réd}(l_4)$  dans les deux contextes (qualitatif et quantitatif) :

– Contexte qualitatif :

- $\text{Réd}(l_4(5)) = \max[\min(.5, .1), \min(.3, .6), \min(1, .9)] = .9$ ,
  - $\text{Réd}(l_4(10)) = \max[\min(.5, .8), \min(.3, .4), \min(1, .3)] = .5$ ,
  - $\text{Réd}(l_4(20)) = \max[\min(.5, .3), \min(.3, .7), \min(1, .4)] = .4$ .
- Donc,  $\text{Réd}(l_4) = \langle .9/5, .5/10, .4/20 \rangle$ .

– Contexte quantitatif :

- $\text{Réd}(l_4(5)) = \max[(.5 * .1), (.3 * .6), (1 * .9)] = .9$ ,
  - $\text{Réd}(l_4(10)) = \max[(.5 * .8), (.3 * .4), (1 * .3)] = .4$ ,
  - $\text{Réd}(l_4(20)) = \max[(.5 * .3), (.3 * .7), (1 * .4)] = .4$ .
- Donc,  $\text{Réd}(l_4) = \langle .9/5, .4/10, .4/20 \rangle$ .

### 2.3.2 Critères d'utilité optimiste et pessimiste

La conséquence  $d(x) \in \mathcal{C}$  de l'application de la décision  $d$  sur l'état du monde  $x$  est évaluée en combinant les degrés de possibilités  $\pi(x)$  et les utilités  $\mu(d(x))$ . Deux critères d'évaluation ont été proposés dans [72, 73] assurant cette combinaison en supposant une certaine forme de commensurabilité entre les échelles de plausibilité  $\mathcal{L}$  et d'utilité  $\mathcal{U}$  [56]. Pour l'utilisation de ces deux critères en décision dans l'incertain, une justification axiomatique à la von Neumann et Morgenstern a été d'abord proposée dans [74]. Par la suite, une justification à la Savage a été proposée dans [53, 75].

#### 2.3.2.1 Critère d'utilité pessimiste :

Le critère pessimiste a été initialement proposé dans [73]. Il généralise le critère *maximin* (voir Chapitre 1, Section 1.3.1) pour la décision dans l'incertain.

**Définition 2.3 :**

L'utilité pessimiste associée à un acte  $f \in \mathcal{A}$  est définie par :

$$u_{Pes}(f) = \min_{x \in \mathcal{X}} \max(n(\pi(x)), \mu(f(x))), \quad (2.10)$$

avec  $n$  une fonction croissante de  $\mathcal{L}$  vers  $\mathcal{U}$ , telle que  $n(1_{\mathcal{L}}) = 0_{\mathcal{U}}$  et  $n(0_{\mathcal{L}}) = 1_{\mathcal{U}}$ .

### Démarche axiomatique "à la Savage"

Le système axiomatique de l'utilité pessimiste  $S_{Pes}$  est basé sur les axiomes suivants :

1. **Pes 1** : correspond à l'axiome 1 (**SAV 1**) de  $S_{Sav}$ , qui concerne le pré-ordre complet entre les actes.
2. **Pes 2 (Cohérence Faible avec les Actes Constants)** : correspond à une version affaiblie de l'axiome **SAV 3**. Soient  $c_1$  et  $c_2$  deux conséquences,

$$c_1 \succeq_C c_2 \Rightarrow c_1 E \mathbf{h} \succeq c_2 E \mathbf{h}, \forall E \subseteq \mathcal{X} \text{ et } \forall \mathbf{h} \in \mathcal{A}.$$

3. **Pes 3** : correspond à l'axiome 5 (**SAV 5**) de  $S_{Sav}$ , qui concerne la non trivialité.
4. **Pes 4 (Domination Disjonctive Restreinte)** : Soient  $f, g$  deux actes quelconques et  $\mathbf{h}$  un acte constant dont l'unique conséquence est  $c$ .

$$f \succ g \text{ et } f \succ \mathbf{h} \Rightarrow f \succ g \vee \mathbf{h}.$$

Cet axiome permet la semi-décomposabilité (basée sur le  $max$ ) de l'utilité qualitative pessimiste par rapport à la disjonction des actes dans le cas où l'un d'eux est constant.

5. **Pes 5 (Pessimisme)** : le critère d'utilité pessimiste respecte l'axiome de la chose certaine affaibli (**SAV 7**) (voir Chapitre 1, Section 1.5.2) de la façon suivante :

$$\forall f, g, \forall E \subseteq \mathcal{X}, (f E g \succ f) \Rightarrow (f \succeq g E f).$$

Le théorème suivant affirme que la relation de préférence  $\succeq$  satisfaisant les axiomes du système  $S_{Pes}$ , peut être représentée par la fonction d'utilité pessimiste (voir Définition 2.3).

#### Théorème 2.1 :

Une relation de préférence  $\succeq$  sur les actes satisfait le système axiomatique  $S_{Pes}$  ssi il existe une fonction d'utilité  $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$  et une distribution de possibilités  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$  telle que :

$$\forall f, g \in \mathcal{A}, f \succeq g \text{ ssi } u_{Pes}(f) \geq u_{Pes}(g).$$

Le critère pessimiste n'est qu'une forme particulière de l'intégrale de Sugeno (voir Chapitre 1, Section 1.5.3) lorsque la mesure  $\nu$  est la mesure de nécessité  $N$ .

#### 2.3.2.2 Critère d'utilité optimiste :

Le critère optimiste a été initialement proposé dans [72] généralisant le critère *maximax* (voir Chapitre 1, Section 1.3.1) pour la décision dans l'incertain.

#### Définition 2.4 :

L'utilité optimiste associée à un acte  $f \in \mathcal{A}$  est définie par :

$$u_{Opt}(f) = \max_{x \in \mathcal{X}} \min(\pi(x), \mu(f(x))). \quad (2.11)$$

### Démarche axiomatique "à la Savage"

Le système axiomatique de l'utilité optimiste  $S_{Opt}$  est basé sur les axiomes suivants :

1. **Opt 1** : correspond à **Pes 1** du système axiomatique  $S_{Pes}$ .
2. **Opt 2** : correspond à **Pes 2** du système axiomatique  $S_{Pes}$ .
3. **Opt 3** : correspond à **Pes 3** du système axiomatique  $S_{Pes}$ .
4. **Opt 4 (Domination Conjonctive Restreinte)** : Soient  $f, g$  deux actes quelconques et  $\mathbf{h}$  un acte constant dont l'unique conséquence est  $c$ .

$$g \succ f \text{ et } \mathbf{h} \succ f \Rightarrow g \wedge \mathbf{h} \succ f.$$

Cet axiome permet la semi-décomposabilité (basée sur le *min*) de l'utilité qualitative optimiste par rapport à la conjonction des actes dans le cas où l'un d'eux est constant.

5. **Opt 5 (Optimisme)** : le critère d'utilité optimiste respecte l'axiome de la chose certaine affaibli (**SAV 7**) (voir Chapitre 1, Section 1.5.2) de la façon suivante :

$$\forall f, g, \forall E \subseteq \mathcal{X}, (f \succ fEg) \Rightarrow (gEf \succeq f).$$

Le théorème suivant affirme que la relation de préférence  $\succeq$  satisfaisant les axiomes du système  $S_{Opt}$ , peut être représentée par la fonction d'utilité optimiste (voir Définition 2.4).

**Théorème 2.2 :**

Une relation de préférence  $\succeq$  sur les actes satisfait le système axiomatique  $S_{Opt}$  ssi il existe une fonction d'utilité  $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$  et une distribution de possibilités  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$  telle que :

$$\forall f, g \in \mathcal{A}, f \succeq g \text{ ssi } u_{Opt}(f) \geq u_{Opt}(g).$$

Le critère optimiste n'est qu'une forme particulière de l'intégrale de Sugeno (voir Chapitre 1, Section 1.5.3) lorsque la mesure  $\nu$  est la mesure de possibilité  $\Pi$ .

### 2.3.3 Critère d'utilité binaire

Les critères d'utilité qualitatifs (optimiste et pessimiste), proposés dans [74, 75], ont été critiqués dans [10]. En effet, la justification axiomatique (à la Savage) des critères d'utilité qualitatifs a été basée sur l'axiome **Pes 2** qui exprime l'attitude de l'agent envers l'incertitude, contrairement au système axiomatique de VNM qui exprime l'attitude de l'agent envers le risque (ce qui est contradictoire avec la théorie des possibilités permettant de représenter l'incertitude plutôt que le risque). De plus, l'agent décideur doit choisir d'être optimiste ou pessimiste, ce qui n'est pas toujours évident, pour utiliser l'un des deux critères d'utilité qualitatifs. Même si l'agent décideur arrive à se classer dans l'une des catégories (optimiste ou pessimiste), cela pourra induire à un raisonnement non correcte [10, 14].

Pour remédier à ces limites, un critère d'utilité binaire plus générale qui englobe les deux critères d'utilité qualitatifs a été proposé dans [10, 76]. Ce critère est bipolaire, il se base sur les meilleures et les pires loteries étant donné leur rôle important dans la prise de la décision. En effet, l'utilité binaire d'une conséquence est représentée par une paire  $\mu = \langle \bar{\mu}, \underline{\mu} \rangle$  avec  $\max(\bar{\mu}, \underline{\mu}) = 1$ , telles que  $\bar{\mu}$  représente la possibilité d'avoir la meilleure conséquence (notée  $\top$ ) et  $\underline{\mu}$  représente la possibilité d'avoir la pire conséquence (notée  $\perp$ ). Un ordre linéaire  $\succeq_B$  sur l'ensemble  $\mathcal{U} = \{ \langle \bar{\mu}, \underline{\mu} \rangle \in [0, 1]^2, \max(\bar{\mu}, \underline{\mu}) = 1 \}$  est défini comme suit :

$$\langle \bar{\mu}, \underline{\mu} \rangle \succeq_B \langle \bar{\nu}, \underline{\nu} \rangle \text{ ssi } \begin{cases} \bar{\mu} = \bar{\nu} = 1 & \text{et } \underline{\mu} \leq \underline{\nu}, \text{ ou} \\ \bar{\mu} \geq \bar{\nu} & \text{et } \underline{\mu} = \underline{\nu} = 1, \text{ ou} \\ \bar{\mu} = 1, \underline{\mu} = 1 & \text{et } \bar{\nu} > 1. \end{cases} \quad (2.12)$$

Une loterie  $\langle \lambda_1/\mu_1, \dots, \lambda_n/\mu_n \rangle$  peut être vue comme une loterie composée, telle que chaque utilité  $\mu_i = \langle \bar{\mu}_i, \underline{\mu}_i \rangle \in \mathcal{U}$  est considérée comme une loterie basique  $\langle \bar{\mu}_i/\top, \underline{\mu}_i/\perp \rangle$ .

**Définition 2.5 :**

L'utilité binaire associée à une loterie  $l = \langle \lambda_1/\mu_1, \dots, \lambda_n/\mu_n \rangle$  est définie par :

$$\begin{aligned}
 u_B(\langle \lambda_1/\mu_1, \dots, \lambda_n/\mu_n \rangle) &= \text{Réd}(\langle \lambda_1 / \langle \mu_1/\top, \underline{\mu}_1/\perp \rangle, \dots, \lambda_n / \langle \mu_n/\top, \underline{\mu}_n/\perp \rangle \rangle) \\
 &= \langle \max_{j=1..n} (\min(\lambda_j, \bar{\mu}_j)) / \top, \max_{j=1..n} (\min(\lambda_j, \underline{\mu}_j)) / \perp \rangle.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

**Démarche axiomatique**

Le système axiomatique de l'utilité binaire  $S_B$  est basé sur les axiomes suivants :

1. **UB 1 (pré-ordre complet)** : la relation d'ordre  $\succeq$  est reflexive, transitive et complète.
2. **UB 2 (monotonie qualitative)** : ceci revient à satisfaire la relation suivante :

$$\langle \lambda_1/\mu_\top, \lambda_2/\mu_\perp \rangle \succeq \langle \lambda'_1/\mu_\top, \lambda'_2/\mu_\perp \rangle \text{ si } \begin{cases} (1 \geq \lambda_1 \geq \lambda'_1 \text{ et } \lambda_2 = \lambda'_2 = 1) \text{ ou} \\ (\lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda'_1 < 1) \text{ ou} \\ (\lambda_1 = \lambda'_1 = 1 \text{ et } \lambda'_2 \geq \lambda_2). \end{cases}$$

3. **UB 3 (substitution)** :

$$\text{si } l_1 \sim l_2 \text{ alors } \langle \lambda_1/l_1, \lambda'_1/l_3 \rangle \sim \langle \lambda_1/l_2, \lambda'_1/l_3 \rangle.$$

4. **UB 4 (continuité)** :

$$\forall c \in \mathcal{C}, \exists l \in \mathcal{L}(\mathcal{C}) \text{ telle que } c \sim l.$$

Le théorème suivant affirme que la relation de préférence  $\succeq$  satisfaisant les axiomes du système  $S_B$ , peut être représentée par la fonction d'utilité binaire (voir Définition 2.5).

**Théorème 2.3 :**

Une relation de préférence  $\succeq$  sur l'ensemble des loteries  $\mathcal{L}(\mathcal{C})$  satisfait le système axiomatique  $S_B$  ssi il existe une fonction d'utilité binaire telle que :

$$l_1 \succeq l_2 \text{ ssi } u_B(l_1) \geq u_B(l_2).$$

**Exemple 2.4 :**

Soient  $l_1 = \langle .3/\mu_1, 1/\mu_2, .3/\mu_3, .9/\mu_4 \rangle$  et  $l_2 = \langle 1/\mu_1, .8/\mu_2, .9/\mu_3, .1/\mu_4 \rangle$  deux loteries possibilistes dont les utilités sont définies sur une échelle binaire  $\mathcal{U} = \{\mu_1 = \langle 1, .2 \rangle, \mu_2 = \langle 1, .5 \rangle, \mu_3 = \langle 1, .8 \rangle, \mu_4 = \langle 1, 1 \rangle\}$ .

En appliquant l'Equation 2.13, nous avons  $u_B(l_1) = \langle 1, .9 \rangle$  et  $u_B(l_2) = \langle 1, .8 \rangle$ . D'après le Théorème 2.3,  $l_2 \succ l_1$ .

D'autres critères ont été développés comme :

- le critère de dominance vraisemblable [77, 2] qui a été proposé dans le cadre où les deux échelles de plausibilité  $\mathcal{L}$  et de préférences  $\mathcal{U}$  ne sont pas commensurables.
- Le critère d'utilité espérée d'ampleur ordonnée, qui repose sur une représentation qualitative des croyances, proposé initialement dans [55] via les fonctions conditionnelles ordinales et plus tard popularisé sous le nom "kappa-ordre".

## 2.4 Décision séquentielle basée sur la théorie des possibilités

Dans cette partie de ce chapitre, nous présentons le problème de la décision séquentielle dans l'incertain. En effet, le problème de la décision séquentielle ne se limite plus au choix d'un acte unique à appliquer, mais d'une suite d'actes visant à atteindre un but donné. De ces actes résultent des conséquences d'une certaine utilité. Ils modifient également l'état du monde d'une manière dont vont dépendre les futures décisions.

Avant de présenter l'extension de la théorie de l'utilité qualitative possibiliste aux problèmes de la décision séquentielle [53, 57, 78], nous procédons d'abord à la formulation des problèmes de décision markoviens [79, 80, 81], puis nous exposons la méthode de résolution de tels problèmes basée sur la programmation dynamique.

### 2.4.1 Processus décisionnels markoviens

La théorie de l'utilité espérée peut être étendue à la prise des décisions séquentielles en se basant sur la théorie des processus décisionnels markoviens [81, 8]. Dans le cadre des problèmes des décisions séquentielles, un agent doit observer l'état du monde afin qu'il puisse choisir l'acte à appliquer. En effet, la conséquence de l'application de l'acte choisi est double :

- Comme dans le cas des théories décrites précédemment, l'agent reçoit une récompense immédiate.
- L'état du monde évolue.

Un problème de décisions séquentielles est formalisé par :

- Un ensemble des états possibles du monde  $\mathcal{X}_t$  à l'étape  $t$ , tel que  $T = \{1, 2, \dots, p\}$  représente l'ensemble des instants (étapes) auxquelles les décisions peuvent être prises, il peut être fini ou infini discret.
- Une récompense additive  $r_t(x, f)$  est associée à chaque fois que l'agent effectue l'acte  $f \in \mathcal{A}_{x,t}$  dans l'état  $x$  à l'instant  $t$ .
- L'incertitude sur l'état du monde successeur est représentée par une distribution de probabilités  $\mathbb{P}_t(\cdot | x, f)$  sur  $\mathcal{X}_{t+1}$ .
- Un ensemble de règles de décision  $\mathcal{D}_t$ , telle que chaque règle de décision  $d_t : \mathcal{X}_t \rightarrow \mathcal{A}_{x,t}$  associe un acte à chaque état possible du monde à l'étape  $t$ .
- Un ensemble de stratégies  $\Delta = D_1 \times \dots \times D_p$ , telle que chaque stratégie  $\delta = \{d_1, \dots, d_p\}$  est une séquence de règles de décision applicables tout au long de l'évolution du système.

Les processus décisionnels markoviens peuvent être identifiés par un quadruplet  $\langle p, \mathbb{P}, +, u \rangle$  résumant ses principales caractéristiques en précisant en premier sa nature séquentielle (dans le cas fini  $p$  étapes), le modèle utilisé pour représenter l'incertitude sur les états possibles de monde (distribution de probabilités  $\mathbb{P}$ ), les coûts des actes effectués qui est additive (+) et en fin un critère de choix entre les stratégies (critère de l'utilité espérée  $u$  maximisant l'espérance mathématique de la fonction d'utilité).

L'objectif de l'agent est de maximiser la récompense totale reçue au cours de l'évolution du système (état du monde). Ainsi, il est important, au moment du choix de l'acte à appliquer, de prendre en compte l'évolution future du système.

### Hypothèse markovienne

Une méthode basée sur la recherche arrière de la séquence d'actes optimales a été proposée dans [80, 81], en se basant sur l'hypothèse markovienne permettant une recherche par induction : l'état suivant se déduit de l'état courant et de l'acte appliqué dans cet état uniquement.

Les états successifs du système (l'état réel du monde) sont décrits par une chaîne de Markov. En effet, une stratégie  $\delta$  définit un ensemble de probabilités de transition entre les états successifs du système (l'état réel du monde). Elle génère un ensemble de trajectoires de la forme  $\{x_1^\delta, \dots, x_p^\delta\}$  parcourues éventuellement par l'état réel du système, avec la probabilité  $\mathbb{P}(x_2^\delta | x_1, d_1(x_1^\delta)) \times \dots \times \mathbb{P}(x_{p+1}^\delta | x_p, d_p(x_p^\delta))$ , où  $x_{p+1}^\delta$  est un état fictif, ajouté au problème. L'utilité d'une stratégie  $\delta$  est l'espérance mathématique de la somme de ses récompenses, le long de la chaîne de Markov :

$$u_p^\delta(x_1) = E_{\delta, x_1} \left( \sum_{t=1}^p r_t(x_t^\delta, d_t(x_t^\delta)) \right), \quad (2.14)$$

telle que  $E_{\delta, x_1}$  est l'espérance mathématique, relativement à la distribution de probabilités sur l'ensemble des trajectoires, générée par  $\delta$ , conditionnellement à l'état initial  $x_1$ . Le but de l'agent est de trouver la stratégie la plus optimale.

**Définition 2.6 :**

*La stratégie la plus optimale  $\delta^*$  est celle maximisant l'utilité  $u_p^\delta(x_1)$ .*

$$u_p^{\delta^*}(x_1) = \max_{\delta \in \Delta} u_p^\delta(x_1). \quad (2.15)$$

Un problème de la décision séquentielle qui se modélise par une chaîne de markov peut être résolu grâce à la programmation dynamique [81] en décomposant le problème initial en une série de problèmes élémentaires (à chaque étape). La méthode proposée dans [80] pour évaluer les différentes stratégies se base sur la recherche par induction arrière qui est la seule à fonctionner pour les processus décisionnels markoviens probabilistes.

Trouver la stratégie optimale  $\delta^*$  en utilisant la programmation dynamique revient à résoudre l'équation fonctionnelle reliant les utilités des stratégies optimales  $u^t(x)$  et  $u^{t+1}(x)$  aux étapes  $t$  et  $t + 1$ .

$$\forall t \in \{1, \dots, p\}, \forall x \in \mathcal{X}_t, u^t(x) = \max_{f \in \mathcal{A}_{x,t}} \{r_t(x, f) + \sum_{x' \in \mathcal{X}_{t+1}} \mathbb{P}_t(x' | x, f) * u^{t+1}(x')\}. \quad (2.16)$$

Ainsi, le but est de maximiser à chaque étape, la somme de la récompense obtenue immédiatement et de l'espérance mathématique des valeurs des états successeurs possibles de  $x$  par  $f$ .

Nous présentons dans ce qui suit, l'algorithme proposé dans [80] pour le calcul de la stratégie optimale  $\delta^*$ . La solution proposée est basée sur la méthode de recherche arrière par induction en calculant d'une façon itérative la valeur de la stratégie la plus optimale.

---

**Algorithme 2.1 :** Calcul des stratégies optimales.

---

**Entrées :**  $\langle p, \mathbb{P}, +, u \rangle$ ,

**Sorties :**  $u^1(x_1)$ ,

$$\delta^* = \{f_1^*, \dots, f_p^*, f_t^* \in \mathcal{A}_{x,t}^*\}.$$

**début**

$t = p + 1$ ;

$u^t \leftarrow 0$ ;

$\forall x, u^{p+1}(x) \leftarrow 0$ ;

**tant que**  $t \geq 2$  **faire**

$t \leftarrow t - 1$ ;

**pour**  $x \in X_t$  **faire**

            Calculer  $u^t(x) = r_t(x, f) + \sum_{x' \in X_{t+1}} \mathbb{P}_t(x' | x, f) * u^{t+1}(x')$ ;

            Conserver les actes  $\mathcal{A}_{x,t}^*$  maximisant  $u^t(x)$ ;

---

**Exemple 2.5 :**

Soit l'exemple suivant traité dans [80]. Afin de garnir le stock de l'entrepôt pour satisfaire la demande aléatoire des clients, un directeur doit déterminer la quantité des produits à commander. Son but est de maximiser l'espérance mathématique de son profit. Pour simplifier le problème, certaines hypothèses ont été supposées :

- Les commandes et livraisons au stock sont exécutées simultanément, en début de mois.
- Les demandes des clients sont livrées en fin de mois.
- Dans le cas où la demande des clients excède le stock, seule la valeur du stock est livrée et payée.
- Le produit est acheté et vendu par lots (unités entières).
- La capacité de l'entrepôt est de  $M$  unités (lots).
- Le système évolue dans un horizon de  $p$  étapes.

**Formalisation du problème**

- La quantité du stock à l'étape  $t$  est représentée par :  $x_t$ ,
- la quantité additionnelle commandée au fournisseur est représentée par :  $a_t$ ,
- la demande totale des clients à l'étape  $t$  est représentée par :  $D_t$ ,
- la probabilité que la demande totale soit de  $d$  unités à l'étape  $t$  est décrite par :  $\mathbb{P}_d$ ,
- le coût d'une commande de  $u$  unités au fournisseur est :  $c(u)$ ,
- le coût de stockage de  $u$  unités est :  $h(u)$ ,
- le revenu de la vente de  $u$  unités est :  $f(u)$ .
- l'horizon du problème est :  $T = \{1, \dots, p\}$ .

L'espérance mathématique du revenu de la vente sachant que le stock initial est de  $u$  unités, est déterminée par la formule suivante :

$$F(u) = \sum_{d=0}^{u-1} f(d) * \mathbb{P}_d + f(u) * \mathbb{P}\{D_t \geq u\}.$$

La récompense espérée  $r_t(x_t, a_t)$  est calculée par la formule suivante :

$$r_t(x_t, a_t) = F(x_t + a_t) - c(a_t) - h(x_t + a_t).$$

$r_{p+1}(x_{p+1}, a_{p+1})$  représente la valeur du stock à la fin de la période.

Des valeurs numériques ont été associées au problème :

- Le coût d'une commande de  $u$  unités au fournisseur est  $c(u) = 4 + 2 * u$  si  $u > 0$  et  $c(u) = 0$  sinon,
- le coût de stockage de  $u$  unités est  $h(u) = u$ ,
- la capacité de stockage est  $M = 3$ ,
- l'horizon  $T = \{1, 2, 3\}$ ,
- le revenu de la vente de  $u$  unités est  $f(u) = 8 * u$ ,
- les probabilités que 0, 2 ou 1 unités soient commandées par les clients sont  $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}_2 = 1/4$  et  $\mathbb{P}_1 = 1/2$ .

Dans ce cas, l'espérance mathématique du revenu de la vente est reportée dans la Table 2.6.

$u$	0	1	2	3
$F(u)$	0	6	8	8

TABLE 2.6 – Revenu de la vente.

La récompense espérée  $r_t(x_t, a_t)$  selon la quantité du stock et la quantité additionnée est mentionnée dans la Table 2.7.

	a	0	1	2	3
x					
0		0	-1	-2	-5
1		5	0	-3	×
2		6	-1	×	×
3		5	×	×	×

TABLE 2.7 – Récompenses.

Les probabilités conditionnelles  $\mathbb{P}_t(x' | x, a)$  sont reportées dans la Table 2.8.

	x'	0	1	2	3
x+a					
0		1	0	0	0
1		3/4	1/4	0	0
2		1/4	1/2	1/4	0
3		0	1/4	1/2	1/4

TABLE 2.8 – Probabilités conditionnelles.

### Evaluation des stratégies

L'algorithme 2.1 est appliqué pour calculer la stratégie optimale que le directeur peut adopter pour maximiser son profit. L'utilité de l'acte  $a$  à l'étape  $t$ , dans l'état  $x$  doit être d'abord définie :

$$u^t(x, a) = r_t(x, a) + \sum_{x' \in \mathcal{X}} \mathbb{P}_t(x' | x, a) * u^{t+1}(x').$$

Initialement,  $t = 4$ ,  $u^4(x) = 0$ ,  $\forall x \in 0, 1, 2, 3$ . Les résultats obtenus à chaque étape sont reportés dans les tables suivantes :

- $t=3$

x	$u^3(x)$	$\mathcal{A}_{x,3}^*$
0	0	{0}
1	5	{0}
2	6	{0}
3	5	{0}

-  $t=2$

x	$u^2(x)$	$\mathcal{A}_{x,2}^*$
0	2	{2}
1	6.25	{0}
2	10	{0}
3	10.5	{0}

-  $t=1$

x	$u^1(x)$	$\mathcal{A}_{x,1}^*$
0	67/16	{3}
1	129/16	{0}
2	194/16	{0}
3	227/16	{0}

*La stratégie optimale est exprimée par :*

- Ne pas passer de commande tant qu'il reste du produit en stock,
- Lorsque il n'en reste plus, il faudrait commander 3 unités à l'étape 1 et 2 unités à l'étape 2.

### 2.4.2 Processus décisionnels markoviens possibilistes

Dans [53], la théorie de l'utilité qualitative possibiliste [69] a été étendue pour la prise en compte des problèmes de la décision séquentielle. Pour cela, la contrepartie possibiliste de la théorie du processus décisionnel markovien a été proposée utilisant les méthodes de programmation dynamique pour l'évaluation inductive par recherche arrière des stratégies optimales au sens du critère possibiliste.

Les processus décisionnels markoviens possibilistes sont décrits par [8] :

- Une structure temporelle des étapes représentée par un ensemble fini (de  $p$  étapes) ordonné d'instantanés auxquels des décisions peuvent être prises.
- L'incertitude sur les états possibles du monde  $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_p\}$  est codée par une distribution de possibilités  $\pi$  définie sur une échelle  $\mathcal{L} : [0, 1]$ .  $\pi_t(x' | x, a)$  est le degré de possibilité que l'état  $x'$  soit atteint à l'étape  $t + 1$  après l'application de l'acte  $a \in \mathcal{A}_{x,t}$  à l'étape  $t$ .
- Les préférences de l'agent portent sur l'état final atteint par le système. Elles sont exprimées par l'intermédiaire d'une fonction d'utilité définie sur une échelle ordonnée  $[0, 1]$ . Les degrés de satisfaction attachés aux états intermédiaires sont agrégés par l'opérateur min.
- Un ensemble de règles de décision  $\mathcal{D}_t$ , telle que chaque règle de décision  $d_t : \mathcal{X}_t \rightarrow \mathcal{A}_{x,t}$  associe un acte  $d_t(x_t) \in \mathcal{A}_{x,t}$  à chaque état possible du monde à l'étape  $t$ .
- Un ensemble de stratégies  $\Delta = D_1 \times \dots \times D_p$ , telle que chaque stratégie  $\delta = \{d_1, \dots, d_p\}$  est une séquence de règles de décision applicables tout au long de l'évolution du système. Une stratégie partielle  $\delta_t = \{d_t, \dots, d_p\}$  spécifie la séquence des règles de décision à appliquer à partir de l'étape  $t$  jusqu'à l'horizon du problème.

- Un critère de décision permettant de choisir entre les stratégies. Une stratégie optimale associe à chaque état du monde pouvant être atteint la meilleure décision disponible. Deux critères purement qualitatifs, l'un optimiste et l'autre pessimiste ont été proposés dans ce cadre.

Les deux critères qualitatifs (voir Section 2.3.2), proposés dans le cadre des problèmes de la décision à un seul niveau, ont été généralisés pour l'évaluation des stratégies dans le cadre des problèmes de la décision séquentielle. Avant de détailler les deux critères dans le cas séquentiel, il est nécessaire de définir l'utilité globale en utilisant les utilités intermédiaires des sous-états agrégées par l'opérateur min.

**Définition 2.7 :**

Soient les fonctions d'utilités qualitatives  $\mu_t : X_t \rightarrow [0, 1]$ , pour chaque étape  $t$ . L'utilité globale attachée au système  $\mu(x_t)$  est donnée par :

$$\mu(x) = \min_{i \in 1..p} \mu_t(x_i),$$

avec  $x = \{x_1, \dots, x_p\} \in X_1 \times \dots \times X_p$ .

**2.4.2.1 Critère d'utilité pessimiste d'une stratégie**

Le critère de l'utilité qualitative pessimiste dans le cas des problèmes de la décision séquentielle est une généralisation du critère pessimiste proposé dans [9] (voir Section 2.3.2) pour l'évaluation d'une stratégie au lieu d'un acte [53, 57, 78]. Il est exprimé à partir des distributions de possibilités et des utilités qualitatives définies sur les états possibles du monde [58].

**Définition 2.8 :**

L'utilité qualitative pessimiste d'une stratégie  $\delta_t$  est :

$$u_{Pes}(\delta_t | x_t) = \min_{x' \in X_{t+1}} \max(n(\pi(x' | x_t, \delta_t)), \mu(x')), \quad (2.17)$$

Le processus décisionnel markovien possibiliste pessimiste peut être identifié par un quadruplet  $\langle p, \pi, \min, u_{Pes} \rangle$  résumant ses principales caractéristiques en précisant en premier sa nature séquentielle (dans le cas fini  $p$  étapes), le modèle utilisé pour représenter l'incertitude sur les états possibles de monde (distribution de possibilités  $\pi$ ), des utilités ordinales agrégées par le (min) et en fin le critère de l'utilité pessimiste  $u_{Pes}$  permettant de faire le choix entre les stratégies.

Comme dans les processus décisionnels markoviens, le critère d'utilité pessimiste peut être calculé récursivement permettant ainsi l'application de l'algorithme de recherche par induction pour le calcul des stratégies optimales.

**Définition 2.9 :**

Une stratégie optimale pessimiste peut être définie récursivement par :

- L'utilité globale :  $\forall x \in X_{p+1}, u_{Pes}^{p+1}(x) = \mu_{p+1}(x)$ ,
- l'utilité de l'application de l'acte  $a$  à l'étape  $t$  :

$$\forall x \in X_t, \forall a \in \mathcal{A}_{x,t}, u_{Pes}^t(x, a) = \min_{x' \in X_{t+1}} \max(n(\pi_t(x' | x, a)), u_{Pes}^{t+1}(x')), \quad (2.18)$$

- les actes optimaux en  $t$  :  $\forall x \in X_t, u_{Pes}^t(x) = \max_{a \in \mathcal{A}_{x,t}} u_{Pes}^t(x, a) = u_{Pes}^t(x, a^*)$ , où  $a^* \in \mathcal{A}_{x,t}^*$  l'ensemble des actes optimaux en  $t$ .

Une relation de préférence sur les actes peut être représentée par la fonction d'utilité pessimiste.

**Théorème 2.4 :**

A l'état  $x \in X_t$ , une relation de préférence  $\succeq_{Pes}^x$  entre l'acte  $a$  et l'acte  $a'$  dans le sens pessimiste peut être représentée par l'utilité pessimiste de la façon suivante :

$$a \succeq_{Pes}^x a' \text{ ssi } u_{Pes}^t(x, a) \geq u_{Pes}^t(x, a').$$

Dans le même ordre d'idées des processus décisionnels markoviens, nous présentons dans ce qui suit l'Algorithme 2.2 pour le calcul de la stratégie optimale  $\delta^*$  au sens pessimiste. La solution proposée est basée sur la méthode de recherche arrière par induction en calculant d'une façon itérative l'utilité de la stratégie la plus optimale [53].

---

**Algorithme 2.2 :** Calcul des stratégies optimales pessimistes.

---

**Entrées :**  $\langle p, \pi, min, u_{Pes} \rangle$ ,

**Sorties :**  $\delta^*$  : la stratégie optimale pessimiste,  
 $u_{Pes}^1(\delta^*)$  : l'utilité de la stratégie  $\delta^*$ .

**début**

```

     $\delta^* \leftarrow \emptyset$ ;
     $t = p + 1$ ;
     $u_{Pes}^t \leftarrow 0$ ;
    tant que  $t \geq 2$  faire
         $t \leftarrow t - 1$ ;
        pour  $x \in X_t$  faire
            pour  $a \in \mathcal{A}_{x,t}$  faire
                 $u_{Pes}^t(x, a) = \min_{x' \in X_{t+1}} \max(n(\pi_t(x' | x, a)), u_{Pes}^{t+1}(x'))$ ;
             $d_t(x) = a^*$ ;
             $u_{Pes}^t(x) = u_{Pes}^t(x, a^*)$ ;
         $\delta^* = \delta^* \cup d_t$ 
    
```

---

### 2.4.2.2 Critère d'utilité optimiste d'une stratégie

Le critère de l'utilité qualitative optimiste dans le cas des problèmes de la décision séquentielle est une généralisation du critère optimiste proposé dans [9] (voir Section 2.3.2) pour l'évaluation d'une stratégie au lieu d'un acte [53, 57, 78]. Il est exprimé à partir des distributions de possibilités et des utilités qualitatives définies sur les états possibles du monde [58].

**Définition 2.10 :**

L'utilité qualitative optimiste d'une stratégie  $\delta_t$  est :

$$u_{Opt}(\delta_t | x_t) = \max_{x' \in X_{t+1}} \min(\pi(x' | x_t, \delta_t), \mu(x')), \quad (2.19)$$

Le processus décisionnel markovien possibiliste optimiste peut être identifié par un quadruplet  $\langle p, \pi, max, u_{Opt} \rangle$  résumant ses principales caractéristiques en précisant en premier sa nature séquentielle (dans le cas fini  $p$  étapes), le modèle utilisé pour représenter l'incertitude sur les états possibles de monde (distribution de possibilités  $\pi$ ), des utilités ordinales agrégées par le (max) et en fin le critère de l'utilité optimiste  $u_{Opt}$  permettant de faire le choix entre les stratégies.

Comme dans les processus décisionnels markoviens, le critère d'utilité optimiste peut être calculé récursivement permettant ainsi l'application de l'algorithme de recherche par induction pour le calcul des stratégies optimales.

**Définition 2.11 :**

*Une stratégie optimale optimiste peut être définie récursivement par :*

- L'utilité globale :  $\forall x \in X_{p+1}, \mu_{Opt}^{p+1}(x) = \mu_{p+1}(x)$ ,
- l'utilité de l'application de l'acte  $a$  à l'étape  $t$  :

$$\forall x \in X_t, \forall a \in \mathcal{A}_{x,t}, u_{Opt}^t(x, a) = \max_{x' \in X_{t+1}} \min(\pi_t(x' | x, a), u_{Opt}^{t+1}(x')), \quad (2.20)$$

- les actes optimaux en  $t$  :  $\forall x \in X_t, u_{Opt}^t(x) = \max_{a \in \mathcal{A}_{x,t}} u_{Opt}^t(x, a) = u_{Opt}^t(x, a^*)$ , où  $a^* \in \mathcal{A}_{x,t}^*$  l'ensemble des actes optimaux en  $t$ .

Une relation de préférence sur les actes peut être représentée par la fonction d'utilité optimiste.

**Théorème 2.5 :**

*A l'état  $x \in X_t$ , une relation de préférence  $\succeq_{Opt}^x$  entre l'acte  $a$  et l'acte  $a'$  dans le sens optimiste peut être représentée par l'utilité optimiste de la façon suivante :*

$$a \succeq_{Opt}^x a' \text{ ssi } u_{Opt}^t(x, a) \geq u_{Opt}^t(x, a').$$

Dans le même ordre d'idées des processus décisionnels markoviens, nous présentons dans ce qui suit l'Algorithme 2.3 pour le calcul de la stratégie optimale  $\delta^*$  au sens optimiste. La solution proposée est basée sur la méthode de recherche arrière par induction en calculant d'une façon itérative l'utilité de la stratégie la plus optimale [53].

---

**Algorithme 2.3 :** Calcul des stratégies optimales optimistes.

---

**Entrées :**  $\langle p, \pi, max, u_{Opt} \rangle$ ,  
**Sorties :**  $\delta^*$  : la stratégie optimale optimiste,  
 $u_{Opt}^1(\delta^*)$  : l'utilité de la stratégie  $\delta^*$ .

**début**

```

 $\delta^* \leftarrow \emptyset$ ;
 $t = p + 1$ ;
 $u_{Opt}^t \leftarrow 0$ ;
tant que  $t \geq 2$  faire
   $t \leftarrow t - 1$ ;
  pour  $x \in X_t$  faire
    pour  $a \in \mathcal{A}_{x,t}$  faire
       $u_{Opt}^t(x, a) = \max_{x' \in X_{t+1}} \min(\pi_t(x' | x, a), u_{Opt}^{t+1}(x'))$ ;
     $d_t(x) = a^*$ ;
     $u_{Opt}^t(x) = u_{Opt}^t(x, a^*)$ ;
   $\delta^* = \delta^* \cup d_t$ 

```

---

**Exemple 2.6 :**

Nous reprenons et étendons un exemple traité dans [53]. La Figure 2.1 représente une salle où un robot doit se déplacer. Son point de départ est la case identifiée par  $x_{11}$ . Son but principale est d'atteindre de préférence la case identifiée par  $x_{33}$  sinon l'une des deux cases  $x_{32}$  ou  $x_{23}$ . Le problème se formalise de la façon suivante :

- Les états possibles du monde  $\mathcal{X} = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}\}$ .
- L'ensemble d'actes lui permettant d'effectuer ses déplacements est :  $\mathcal{A} = \{(H)aut, (B)as, (G)auche, (D)roite, (R)ester\}$ .
- Les distributions de possibilités de transition pour l'acte  $D$  sont données par la Figure 2.2. Les autres (sauf  $R$ ) se déterminent par symétrie. Si le robot choisit de Rester ( $R$ ) en place, alors il est certain de demeurer sur la même case c'est-à-dire  $\forall x, \pi(x | x, R) = 1$ . S'il choisit  $H, B, D, G$ , il est tout à fait possible qu'il se retrouve dans une case voisine.
- La structure temporelle des étapes de prise des décisions est représentée par  $T = \{1, \dots, 5\}$ , ce qui signifie que les buts sont à atteindre à l'étape 6.
- Les préférences du robot sont exprimées par la fonction d'utilité  $\mu$ , elles sont représentées dans la Figure 2.1 ( $\mu(x_{23}) = \mu(x_{32}) = .5$  et  $\mu(x_{33}) = 1$ ).

$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$
$x_{21}$	$x_{22}$	$.5$ $x_{23}$ B
$x_{31}$	$.5$ $x_{32}$ B	1 $x_{33}$ B

FIGURE 2.1 – Espace d'états et fonctions d'utilités.

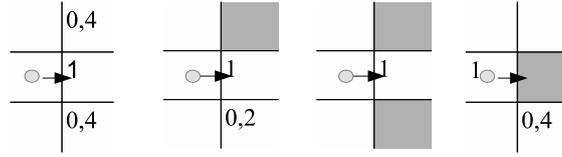


FIGURE 2.2 – Possibilités de transition pour l'acte "A Droite".

Pour calculer la stratégie optimale pessimiste  $\delta_{Pes}^*$ , nous procédons d'abord par calculer les actes optimaux pour les états de  $X_5 = \{x_{13}, x_{22}, x_{23}, x_{32}, x_{33}\}$  (la stratégie optimale pessimiste à l'étape 5). Pour chaque état  $x \in X_5$ , nous calculons l'utilité pessimiste de l'application d'un acte possible  $a$  en utilisant l'Equation 2.18 comme suit :

$$u_{Pes}^5(x, a) = \min_{x' \in X_6} \max(1 - \pi(x' | x, a), u_{Pes}^6(x')),$$

avec  $X_6 = \{x_{23}, x_{32}, x_{33}\}$ ,  $u_{Pes}^6(x_{23}) = u_{Pes}^6(x_{32}) = \mu(x_{23}) = \mu(x_{32}) = .5$  et  $u_{Pes}^6(x_{33}) = \mu(x_{33}) = 1$ .

Pour chaque état  $x \in X_5$ , l'acte optimal  $a^*$  est celui qui maximise  $u_{Pes}^5(x, a)$  :

$$u_{Pes}^5(x) = \max_{a \in \mathcal{A}_{x,5}} u_{Pes}^5(x, a).$$

L'Algorithme 2.2 est appliqué pour trouver la stratégie optimale, au sens pessimiste, que le robot doit exécuter pour atteindre son but. Voici le détail des calcul pour l'étape 5 :

– **t=5 :**

– **Pour chaque état  $x \in X_5$  :**

1.  $x = x_{13}$  :

Dans ce cas, l'ensemble des actes applicables  $\mathcal{A}_{x_{13},5} = \{B\}$  et  $x' = \{x_{23}\}$ , d'où :

$$\mu_{Pes}^5(x_{13}, B) = \min_{x' \in \{x_{23}\}} \max(1 - 1, .5) = .5.$$

2.  $x = x_{22}$  :

Dans ce cas, l'ensemble des actes applicables  $\mathcal{A}_{x_{22},5} = \{D, B\}$  :

- Pour l'acte  $D$ ,  $x' \in \{x_{23}, x_{33}\}$ ,

$$\mu_{Pes}^5(x_{22}, D) = \min_{x' \in \{x_{23}, x_{33}\}} [\max(1 - 1, .5), \max(1 - 1, 1)] = .5.$$

- Pour l'acte  $B$ ,  $x' \in \{x_{32}, x_{33}\}$ ,

$$\mu_{Pes}^5(x_{22}, B) = \min_{x' \in \{x_{32}, x_{33}\}} [\max(1 - 1, .5), \max(1 - .2, 1)] = .5.$$

Donc, pour l'état  $x_{22}$  les deux actes  $D$  et  $B$  sont également optimales puisque  $\mu_{Pes}^5(x_{22}, D) = \mu_{Pes}^5(x_{22}, B)$ .

3.  $x = x_{23}$  :

Dans ce cas, l'ensemble des actes applicables  $\mathcal{A}_{x_{23},5} = \{B, R\}$  :

- Pour l'acte  $B$ ,  $x' \in \{x_{32}, x_{33}\}$ ,

$$\mu_{Pes}^5(x_{23}, B) = \min_{x' \in \{x_{32}, x_{33}\}} [\max(1 - .2, .5), \max(1 - 1, 1)] = .8.$$

- Pour l'acte  $R$ ,  $x' \in \{x_{23}\}$ ,

$$\mu_{Pes}^5(x_{23}, R) = \min_{x' \in \{x_{32}\}} \max(1 - 1, .5) = .5.$$

Donc, pour l'état  $x_{23}$  l'acte optimal est  $B$  (puisque  $\mu_{Pes}^5((x_{23}, B) = .8 > \mu_{Pes}^5(x_{23}, R) = .5)$  d'une utilité  $\mu_{Pes}^5(x_{23}) = .8$ .

4.  $x = x_{32}$  :

Dans ce cas, l'ensemble des actes applicables  $\mathcal{A}_{x_{32},5} = \{D, H, R\}$  :

- Pour l'acte  $D$ ,  $x' \in \{x_{23}, x_{33}\}$ ,

$$\mu_{Pes}^5(x_{32}, D) = \min_{x' \in \{x_{23}, x_{33}\}} [\max(1 - .2, .5), \max(1 - 1, 1)] = .8.$$

- Pour l'acte  $H$ ,  $x' \in \{x_{23}\}$ ,

$$\mu_{Pes}^5(x_{32}, H) = \min_{x' \in \{x_{23}\}} \max(1 - .4, .5) = .6.$$

- Pour l'acte  $R$ ,  $x' \in \{x_{32}\}$ ,

$$\mu_{Pes}^5(x_{32}, G) = \min_{x' \in \{x_{32}\}} \max(1 - 1, .5) = .5.$$

Donc, pour l'état  $x_{32}$  l'acte optimal est  $D$  d'une utilité  $\mu_{Pes}^5(x_{32}) = .8$ .

5.  $x = x_{33}$  :

Dans ce cas, l'ensemble des actes applicables  $\mathcal{A}_{x_{33},5} = \{H, G, R\}$  :

- Pour l'acte  $H$ ,  $x' \in \{x_{23}\}$ ,

$$\mu_{Pes}^5(x_{33}, H) = \min_{x' \in \{x_{23}\}} [\max(1 - 1, .5), \max(1 - 1, 1)] = .5.$$

- Pour l'acte  $G$ ,  $x' \in \{x_{32}\}$ ,

$$\mu_{Pes}^5(x_{33}, G) = \min_{x' \in \{x_{32}\}} \max(1 - 1, .5) = .5.$$

- Pour l'acte  $R$ ,  $x' \in \{x_{33}\}$ ,

$$\mu_{Pes}^5(x_{33}, R) = \min_{x' \in \{x_{32}\}} \max(1 - 1, 1) = 1.$$

Donc, pour l'état  $x_{33}$  l'acte optimal est  $R$  d'une utilité  $\mu_{Pes}^5(x_{33}) = 1$ .

Le processus doit être itéré cinq fois pour calculer les stratégies optimales, ce qui est représenté par la Figure 2.3. Pour chaque étape  $X_i$ , les utilités pessimistes sont calculées pour chaque état  $x \in X_i$  ainsi que l'acte optimale pour chacune de ces étapes.

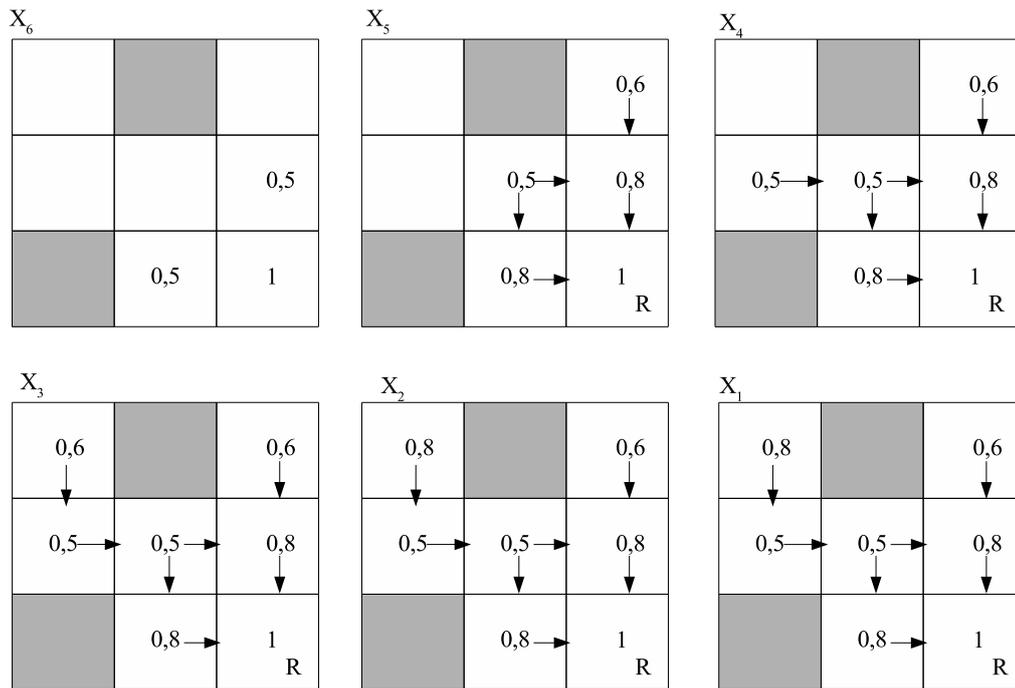


FIGURE 2.3 – Calcul récursif d'une stratégie pessimiste optimale.

Après quatre itérations, l'utilité pessimiste associée à chaque état ainsi que les actes optimaux correspondants ne changent plus. En conclusion, deux stratégies optimales pessimistes peuvent être exécutées par le robot pour atteindre son objectif :

- $\delta_1^* = \{B, D, D, B, R\}$ ,
- $\delta_2^* = \{B, D, B, D, R\}$ .

D'une façon identique, les stratégies optimales optimistes peuvent être calculées en utilisant l'Equation 2.20 (au lieu de l'Equation 2.18 ).

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre a traité la théorie de la décision possibiliste qui permet le traitement des problèmes de décision en absence des valeurs numériques pour quantifier l'incertitude. Nous avons présenté en premier lieu certains critères dans le cas des problèmes de la décision à un seul niveau, puis nous avons présenté la généralisation des critères optimiste et pessimiste dans le cadre des problèmes de la décision séquentielle (processus décisionnels markoviens possibilistes). Des algorithmes, basés sur la programmation dynamique, permettant la résolution de ces problèmes ont été présentés.

Un problème de la décision sous incertitude doit être traité sur deux plans : décision et représentation. Les deux premiers chapitres ont portés sur les différentes théories de la décision. Les deux prochains chapitres seront consacrés aux différents modèles (logiques et graphiques), qui ont été proposés dans la littérature, pour représenter les problèmes de décision utilisant des structures ordinales pour coder à la fois les relations de préférence et d'incertitude dans le contexte qualitatif.

## Chapitre 3

# Modèles de décisions basés sur une représentation logique

### 3.1 Introduction

Dans les deux premiers chapitres, différentes théories de la décision ont été exposées. Ces théories proposent des critères de décision dans l'incertain permettant d'aider un agent à prendre la meilleure décision. Dans le reste de ce mémoire, nous nous intéressons aux modèles représentatifs des problèmes de la décision sous incertitude. Plus précisément, notre étude se focalisera sur les approches ordinales (qualitatives) des problèmes de la décision sous incertitude en se basant sur la théorie des possibilités. Dans le cadre des problèmes de la décision qualitative à un seul niveau, nous présentons, dans ce chapitre, une façon de coder ces problèmes basée sur la logique possibiliste.

Dans un premier temps la logique possibiliste sera représentée et nous allons montrer comment cette logique permet une représentation compacte des problèmes de la décision qualitative. En suite, deux approches syntaxiques basées sur la logique seront exposées, l'une optimiste et l'autre pessimiste, permettant de résoudre les problèmes de la décision sous incertitude. Enfin, nous traitons une méthode d'évaluation basée sur les ATMS (Assumption-based Truth Maintenance Systems) pour calculer les décisions optimales optimistes ou pessimistes.

### 3.2 La logique possibiliste

La logique possibiliste [82, 83, 21] permet la manipulation des connaissances incertaines en se basant sur la théorie des possibilités. Les connaissances sont exprimées par des formules propositionnelles (qui peuvent être facilement étendues aux formules du premier ordre) [84]. L'incertitude est quantifiée en associant à chaque formule un degré de certitude correspondant au seuil minimal de degré de nécessité. Comme nous l'avons déjà vu dans le Chapitre 2 Section 2.2, la théorie des possibilités offre deux contextes de travail : l'un est quantitatif et l'autre qualitatif selon l'interprétation associée à l'échelle représentant l'incertitude des connaissances. Ainsi, un agent pourra exprimer ses connaissances dans l'un des deux contextes en utilisant la logique possibiliste qualitative ou bien la logique possibiliste quantitative.

#### 3.2.1 Les bases possibilistes

En logique possibiliste, au niveau syntaxique les connaissances du monde sont codées dans une base possibiliste qui est un ensemble fini de formules pondérées de la forme (3.1).

$$\Sigma = \{(\phi_i, \alpha_i) : i = 1, \dots, n\}, \quad (3.1)$$

avec  $\phi_i$  est une formule propositionnelle et  $\alpha_i \in [0, 1]$  est le degré de nécessité minimal de  $\phi_i$  ( $N(\phi_i) \geq \alpha_i$ ). Le degré de nécessité  $\alpha_i$  représente le degré de certitude de  $\phi_i$  si la base  $\Sigma$  code les croyances d'un agent sur le monde réel, ou son niveau de priorité si  $\Sigma$  code les préférences d'un agent. En effet, la formule  $\phi$  est dite plus certaine (resp. plus prioritaire) que la formule  $\psi$  si le poids associé à  $\phi$  est plus grand que celui associé à  $\psi$ .

### 3.2.2 La distribution de possibilités d'une base possibiliste

Au niveau sémantique, les croyances d'une base possibiliste  $\Sigma$  sont codées par une distribution de possibilités  $\pi_\Sigma$  qui associe à chaque interprétation possible son degré de possibilité. Cette distribution de possibilités  $\pi_\Sigma$  est déduite à partir des distributions de possibilités associées à chaque formule  $(\phi_i, \alpha_i)$  dans  $\Sigma$ . Formellement, la distribution de possibilités associée au couple  $(\phi_i, \alpha_i)$  est définie par [83] :

$$\forall \omega \in \Omega, \pi_{(\phi_i, \alpha_i)}(\omega) = \begin{cases} 1 - \alpha_i & \text{Si } \omega \notin [\phi_i] \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.2)$$

avec  $[\phi_i]$  représente les modèles de la formule  $\phi_i$ .

Si une interprétation  $\omega$  est complètement compatible avec la croyance  $\phi_i$  ( $\omega$  satisfait la formule  $\phi_i$ ), alors le degré de possibilité  $\pi_{(\phi_i, \alpha_i)}(\omega) = 1$  sinon il est égale à  $1 - \alpha_i$  (plus  $\phi_i$  est certaine, moins  $\omega$  est possible). En effet, chaque couple  $(\phi_i, \alpha_i) \in \Sigma$  est considéré comme une contrainte qui restreint l'ensemble des interprétations possibles.

Plus généralement, la distribution de possibilités associée à la base  $\Sigma$  est le résultat de la combinaison de l'ensemble des distributions de possibilités associées aux formules élémentaires  $(\phi_i, \alpha_i) \in \Sigma$  [83] :

$$\forall \omega \in \Omega, \pi_\Sigma(\omega) = \square \{ \pi_{(\phi_i, \alpha_i)}(\omega), (\phi_i, \alpha_i) \in \Sigma \}, \quad (3.3)$$

avec  $\square$  correspond soit à l'opérateur min (le cas de la logique possibiliste qualitative), soit à l'opérateur  $*$  (le cas de la logique possibiliste quantitative). Comme notre étude porte sur des problèmes de la décision qualitative, nous nous contentons de la définition qualitative de la distribution de possibilités. L'Equation 3.3 peut être réécrite de façon équivalente :

$$\forall \omega \in \Omega, \pi_\Sigma(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \forall (\phi_i, \alpha_i) \in \Sigma, \omega \in [\phi_i] \\ \min \{ (1 - \alpha_i) : (\phi_i, \alpha_i) \in \Sigma, \omega \notin [\phi_i] \} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.4)$$

avec  $[\phi_i]$  représente les modèles de la formule  $\phi_i$ .

En effet, les interprétations satisfaisant toutes les formules de  $\Sigma$  auront le plus grand degré de possibilité à savoir 1, et les autres interprétations seront ordonnées par rapport à la formule de plus grand poids qu'elles falsifient.

#### Exemple 3.1 :

Soient "P" et "C" deux symboles propositionnelles, signifiant respectivement "Plage" et "Compagne". Soit  $\Sigma = \{(c, .6), (p \vee c, .8)\}$  une base possibiliste.

Dans le contexte qualitatif, la distribution de possibilités est calculée en utilisant l'Equation 3.4. Les résultats sont donnés dans la Table 3.1.

$P$	$C$	$\pi(P, C)$	$P$	$C$	$\pi(P, C)$
$p$	$c$	1	$\neg p$	$c$	1
$p$	$\neg c$	.4	$\neg p$	$\neg c$	.2

TABLE 3.1 – La distribution de possibilités associée à  $\Sigma$ .

Les interprétations  $p \wedge c$  et  $\neg p \wedge c$  sont les préférées car elles satisfont toutes les formules de la base  $\Sigma$ . Par ailleurs, l'interprétation  $p \wedge \neg c$  est préférée à  $\neg p \wedge \neg c$  car cette dernière falsifie la formule la moins certaine de la base ( $c, .6$ ).

Le degré d'incohérence d'une base possibiliste  $\Sigma$ , noté  $Inc(\Sigma)$ , correspond au plus grand poids dans  $\Sigma$  où l'incohérence est rencontrée. Formellement,

$$\begin{aligned} Inc(\Sigma) &= \max\{\alpha_i : \Sigma_{\geq \alpha_i} \vdash \perp\} \\ &= 1 - \max_{\omega \in \Omega}(\pi_{\Sigma}(\omega)), \end{aligned} \tag{3.5}$$

avec  $\Sigma_{\geq \alpha_i} = \{(\phi_j, \alpha_j) \in \Sigma \text{ et } \alpha_j \geq \alpha_i\}$ .

Une base possibiliste  $\Sigma$  est dite cohérente pour tout  $\alpha_i$  si  $Inc(\Sigma) = 0$ .

### 3.3 Représentation logique de la décision qualitative

Plusieurs langages logiques ont été proposés dans la littérature pour modéliser et résoudre des problèmes de la décision qualitative. Ces approches sont basées sur la notion des préférences conditionnelles (dans le contexte  $\phi$ , l'agent préfère que  $\Phi$  soit vraie où  $\phi$  et  $\Phi$  sont des propositions) pour exprimer d'une façon compacte les préférences d'un agent. Selon l'interprétation donnée à ces préférences conditionnelles, des approches ont vu le jour [8] :

- Approches basées sur les préférences ceteris paribus [85, 86, 87] : ces approches interprètent une préférence conditionnelle en imposant de préférer les interprétations satisfaisant  $\Phi$  et  $\phi$  à celles satisfaisant  $\neg\Phi$  et  $\phi$  (toutes choses étant égales par ailleurs).
- Approches basées sur les opérateurs de type idéalité : ces approches interprètent la même préférence conditionnelle en terme d'idéalité. Parmi les interprétations satisfaisant  $\phi$ , celles qui satisfont également  $\Phi$  sont idéales (préférées à toutes les autres) : cette interprétation a été proposée dans [88]. La logique bimodale a été utilisée pour représenter et raisonner sur ces préférences.

Dans [89] l'idéalité a été interprétée autrement. Les opérateurs d'idéalités proposés dans ce travail sont utilisés comme des contraintes sur une fonction d'utilité numérique sur les interprétations. Un pré-ordre partiel sur les interprétations est défini en distinguant les fonctions d'utilité respectant ces contraintes.

Un modèle a été proposé dans [15, 90] permettant d'exprimer non seulement les connaissances incertaines de l'agent mais aussi ses préférences graduelles en utilisant un langage logique possibiliste. Une machinerie associée, permettant de calculer les décisions optimales basée sur des critères d'utilité qualitatifs, a été aussi proposée.

Le modèle proposé, code les connaissances et les préférences de l'agent par deux bases possibilistes (formules logiques valuées) dont la fonction d'utilité et d'incertitude correspondantes peuvent être déduites. Pour résoudre le problème de la décision qualitative, deux approches syntaxiques ont été développées, l'une optimiste et l'autre pessimiste. Ces deux approches syntaxiques sont respectivement en accord avec les deux critères d'utilités qualitatifs possibilistes, optimiste et pessimiste, vus dans le Chapitre 2, Section 2.3.2.

Comme nous l'avons déjà vu dans le Chapitre 2, en théorie de la décision qualitative, les

connaissances de l'agent sont modélisées par une distribution de possibilités  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{L} : ]0, 1]$  normalisée. Il en est de même pour les préférences de l'agent, il sont modélisées par une autre distribution de possibilités  $\mu : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{U} : [0, 1]$ , pas forcément normalisée.

Avant d'aborder ce modèle, il est nécessaire de préciser certaines notations. Les lettres majuscules " $P, K, D, \dots$ " représentent des ensembles de propositions. Pour tout ensemble  $A$ ,  $A^\wedge$  représente la conjonction des formules de  $A$  et  $A^\vee$  représente leurs disjonction. Si  $H = \{l_i\}$  est un ensemble de littéraux,  $\neg H = \{\neg l_i, l_i \in H\}$  est l'ensemble constitué de la négation de ces littéraux.

Le modèle logique propose une représentation compacte des connaissances et des préférences de l'agent dans deux bases stratifiées  $K$  et  $P$  respectivement. Ces deux bases sont aptes à modéliser les connaissances et les préférences graduelles grâce aux degrés de certitude affectés aux formules logiques propositionnelles de  $K$  et aux niveaux de priorité affectés aux formules de  $P$  :

- La base de connaissance  $K = \{(\phi_i, \alpha_i) : i = 1..n, \alpha_i \in \mathcal{L} : ]0, 1]\}$  où  $\alpha_i$  est le degré de certitude de la connaissance codée par la formule  $\phi_i$ . Les formules de  $K$  peuvent contenir les littéraux de décisions.
- La base de préférence  $P = \{(\psi_i, \beta_i) : i = 1..n, \beta_i \in \mathcal{U} : ]0, 1]\}$  où  $\beta_i$  est le degré de priorité de la conséquence codée par la formule  $\psi_i$  dont les littéraux de décision peuvent aussi apparaître.

### 3.3.1 Approches syntaxiques de la décision qualitative

Les deux approches syntaxiques proposées dans [15] reposent sur l'hypothèse de commensurabilité entre l'échelle de plausibilité  $\mathcal{L}$  et l'échelle de priorité  $\mathcal{U}$ . Cette hypothèse qui signifie le partage de la même échelle (entre les connaissances et les préférences) est importante pour le calcul des décisions optimales qualitatives.

Le problème à résoudre revient à prendre une décision  $d \subseteq \mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_p\}$ , telle que la représentation logique de cette décision est la conjonction logique des variables de  $d$ , notée  $d^\wedge$ . L'objectif de l'approche syntaxique est de proposer, pour chaque décision  $d$ , une utilité syntaxique  $u$  telle que :

$$d \succeq d' \Leftrightarrow u(d) \geq u(d').$$

Selon que l'agent soit prudent ou aventureux, nous distinguons deux utilités syntaxiques l'une pessimiste et l'autre optimiste.

#### 3.3.1.1 Cas pessimiste

Dans le cas pessimiste, la décision  $d$  recherchée satisfait :

$$K_{\geq \alpha}^\wedge \wedge d^\wedge \vdash P_{\geq \beta}^\wedge, \tag{3.6}$$

avec  $\alpha$  élevé et  $\beta$  faible.

Ceci signifie qu'il est exigé de la décision  $d$ , la satisfaction de toutes les préférences de  $P$  (y compris les moins prioritaires) qu'avec la partie la plus certaine de  $K$ . Il est à noter que la décision  $d$  est cohérente avec  $K_{\geq \alpha}$ , pour les  $\alpha$  satisfaisant l'Equation 3.6. En effet, par convention pour toute décision non cohérente avec  $K_{>0}$ , une utilité égale à 0 lui est attribuée. Les décisions les plus optimales sont celles qu'avec uniquement la partie la plus certaine  $K_1$  (les formules de la strate de degré de certitude égale à 1) permettront la satisfaction de toutes les préférences de  $P_{>0}$ . Réciproquement, les pires décisions sont celles qui ne parviennent même pas à induire les préférences les plus prioritaires  $P_1$  à partir de toutes les connaissances  $K_{>0}$  (même les moins certaines).

Soit  $n$  une fonction de renversement sur l'échelle  $\mathcal{L} : 0 = \alpha_0 < \dots < \alpha_i < \dots < \alpha_n = 1$  telle que  $n(\alpha_i) = \alpha_{n-i}$ . Supposons que  $d$  est une décision satisfaisant la condition donnée par l'Equation 3.6 avec  $\beta < n(\alpha)$ . Dans ce cas, puisque  $P_{>n(\alpha)}^\wedge \subseteq P_{\geq\beta}^\wedge$  il a été prouvé dans [53] que :

$$K_{\geq\alpha}^\wedge \wedge d^\wedge \vdash P_{>n(\alpha)}^\wedge \Rightarrow P_{\geq\beta}^\wedge \vdash P_{>n(\alpha)}^\wedge.$$

D'après ce résultat, une décision optimale pessimiste est celle qui maximise  $\alpha$  tel que  $K_{\geq\alpha}^\wedge \wedge d^\wedge \vdash P_{\geq n(\alpha)}^\wedge$ , avec  $\alpha > 0$  et  $\beta = n(\alpha)$ .

**Définition 3.1 :**

Soit  $\phi = K_{\geq\alpha}^\wedge \wedge d^\wedge$ . Syntactiquement, l'utilité pessimiste d'une décision est définie par :

$$u_{Pes}(d) = \begin{cases} \max_{\phi \vdash P_{>n(\alpha)}^\wedge, \phi \neq \perp} \alpha & \text{si } \{\phi \vdash P_{>n(\alpha)}^\wedge \text{ et } \phi \neq \perp\} \neq \emptyset. \\ 0 & \text{si } \{\phi \vdash P_{>n(\alpha)}^\wedge \text{ et } \phi \neq \perp\} = \emptyset. \end{cases} \quad (3.7)$$

**3.3.1.2 Cas optimiste**

Dans le cas optimiste, la décision  $d$  recherchée satisfait :

$$K_{\geq\alpha}^\wedge \wedge d^\wedge \wedge P_{\geq\beta}^\wedge \neq \perp, \quad (3.8)$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  aussi petits que possible ( $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ ).

Cette condition signifie que la décision  $d$  doit être cohérente avec l'ensemble des connaissances et l'ensemble des préférences.

**Définition 3.2 :**

Soit  $\phi = K_{>\alpha}^\wedge \wedge d^\wedge \wedge P_{>\alpha}^\wedge$ . Syntactiquement, l'utilité optimiste d'une décision est définie par :

$$u_{Opt}(d) = \begin{cases} \max_{\phi \neq \perp} n(\alpha) & \text{si } \{\alpha < 1 \text{ et } \phi \neq \perp\} \neq \emptyset. \\ 0 & \text{si } \{\alpha < 1 \text{ et } \phi \neq \perp\} = \emptyset. \end{cases} \quad (3.9)$$

Dans la cas où la décision  $d$  est cohérente avec l'ensemble des connaissances de degrés de certitude non nuls et des préférences de priorités non nulles, c'est-à-dire  $K_{\geq\alpha}^\wedge \wedge d^\wedge \wedge P_{\geq\alpha}^\wedge \neq \perp$ , alors  $u_{Opt}(d) = 1$ .

**Exemple 3.2 :**

Reprenons la version possibiliste de l'Exemple 1.1 pour la préparation de l'omelette vu dans le Chapitre 1.

Rappelons que l'ensemble des décisions disponibles  $\mathcal{D} = \{CB, CT, JP\}$ , avec :

- casser l'œuf dans le bol (omelette) :  $CB$ ,
- le jeter directement dans la poubelle :  $JP$ ,
- sortir une tasse pour y casser l'œuf et examiner son état de fraîcheur, avant d'éventuellement l'incorporer à l'omelette :  $CT$ .

Les états possibles du monde  $\mathcal{X} = \{S, P\}$  (l'œuf est soit Sain soit Pourri).

Soit  $\mathcal{L} = \{0, .6, .7, .8, .9, 1\}$  l'échelle utilisée pour représenter les niveaux de certitude et de priorité (les nombres sont utilisés uniquement pour refléter la structure ordinaire de  $\mathcal{L}$ ).

Au niveau syntaxique, les préférences de l'agent sont modélisées par des formules propositionnelles auxquelles sont attachés des degrés de priorités. La base possibiliste  $P$  est :

$P = \{$

**Strate 5** ( $\alpha_5 = 1$ ) : *On ne souhaite pas gâcher l'omelette.*

$$\neg g,$$

**Strate 4** ( $\alpha_4 = .9$ ) : *On ne souhaite pas gâcher l'œuf.*

$$\neg og,$$

**Strate 3** ( $\alpha_3 = .8$ ) : *Si omelette à cinq œuf, on ne souhaite pas avoir une tasse à laver.*

$$\neg 5o \vee \neg t,$$

**Strate 2** ( $\alpha_2 = .7$ ) :

$$\neg 5o,$$

**Strate 1** ( $\alpha_1 = .6$ ) : *On ne souhaite pas avoir une tasse à laver.*

$$\neg t,$$

}

Les connaissances de l'agent sont modélisées par des formules propositionnelles auxquelles sont attachés des degrés de certitude. La base possibiliste  $K$  décrit tous les actes, les connaissances sur l'état réel du monde et les contraintes entre les variables de décision :

$K = \{$

**Strate 5** ( $\alpha_5 = 1$ ) :

*Les décisions  $CB, CT$ , et  $J$  sont mutuellement exclusives.*

$$CB \vee CT \vee J,$$

$$\neg CB \vee \neg CT,$$

$$\neg CB \vee \neg J,$$

$$\neg CT \vee \neg J,$$

*Une omelette à six œufs est obtenue ssi l'œuf est sain et s'il est cassé dans l'omelette ou dans la tasse.*

$$\neg s \vee \neg CB \vee 6o,$$

$$\neg s \vee \neg CT \vee 6o,$$

$$\neg 6o \vee s,$$

$$\neg 6o \vee \neg J,$$

*Une omelette à cinq œufs est obtenue ssi l'œuf est pourri et s'il est cassé dans la tasse ou s'il est jeté.*

$$\neg J \vee 5o,$$

$$\neg p \vee \neg CT \vee 5o,$$

$$\neg 5o \vee J \vee p,$$

$$\neg 5o \vee \neg CB,$$

*Une tasse a laver ssi on n'y casse l'œuf.*

$$\begin{aligned} &\neg CT \vee t, \\ &\neg t \vee CT, \end{aligned}$$

*Un œuf est gâché ssi l'œuf sain est jeté.*

$$\begin{aligned} &\neg J \vee \neg s \vee og, \\ &\neg og \vee s, \\ &\neg og \vee J, \end{aligned}$$

*L'omelette est gâchée ssi l'œuf pourri est cassé dedans.*

$$\begin{aligned} &\neg CB \vee \neg p \vee g, \\ &\neg g \vee CB, \\ &\neg g \vee p, \end{aligned}$$

*Un œuf est soit sain soit pourri.*

$$\begin{aligned} &\neg s \vee \neg p, \\ &s \vee p, \end{aligned}$$

**Strate 4** ( $\alpha_4 = .9$ ) :

$$\emptyset,$$

**Strate 3** ( $\alpha_3 = .8$ ) :

$$\emptyset,$$

**Strate 2** ( $\alpha_2 = .7$ ) :

*Dans cet exemple l'agent est relativement convaincu que l'œuf est sain,*

$$s,$$

**Strate 1** ( $\alpha_1 = .6$ ) :

$$\emptyset,$$

}

### 3.3.2 La sémantique des approches syntaxiques de la décision en logique possibiliste

Au niveau sémantique, l'expression syntaxique des problèmes de la décision qualitative est codée par deux distributions de possibilités  $\pi_{K_d}$  et  $\mu$  induites à partir des connaissances et des préférences de l'agent respectivement.

En effet, les  $\alpha_i$  attachés aux strates de la base de connaissance  $K$  représentent les degrés de nécessité des formules des strates de  $K \cup \{(d, 1)\}$ . La distribution de possibilités  $\pi_{K_d}$  exprimant la sémantique de  $K$  est donnée par :

$$\pi_{K_d}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \forall(\phi_i, \alpha_i), \omega \in [\phi_i] \text{ et } \omega \in [d^\wedge] \\ 0 & \text{si } \omega \notin [d^\wedge] \\ \min_{(\phi_i, \alpha_i) \in K, \omega \notin [\phi_i]} n(\alpha_i) & \text{si } \omega \in [d^\wedge]. \end{cases} \quad (3.10)$$

La distribution de possibilités  $\pi_{K_d}$  est normalisée ( $\exists \omega, \pi(\omega) = 1$ ), puisque  $K_{>0}^\wedge \wedge d^\wedge$  est cohérent. La sémantique de la représentation logique d'un problème de la décision qualitative est en accord avec le sens attribué à une interprétation telle qu'elle est d'autant moins possible qu'elle viole des formules de degrés de certitude élevés.

Il en est de même pour les  $\beta_i$  attachés aux strates de la base de préférence  $P$ , ils sont interprétés comme des degrés de priorité des formules de  $P$ . De la même façon, une distribution de possibilités  $\mu$  sur  $\Omega$  peut coder la fonction d'utilité comme suit :

$$\mu(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \forall(\psi_j, \beta_j), \omega \in [\psi_j] \\ \min_{(\psi_j, \beta_j) \in P, \omega \notin [\psi_j]} n(\beta_j). & \end{cases} \quad (3.11)$$

L'interprétation  $\omega$  est d'autant plus satisfaisante qu'elle viole moins de contraintes de forte priorité.

Les deux fonctions d'utilité syntaxiques définies dans la Section 3.3.1 s'expriment en fonction des distributions de possibilités  $\pi_{K_d}$  et  $\mu$ , ce qui a été prouvé dans [53]. Formellement,

**Théorème 3.1 (Cas Pessimiste) :**

*L'utilité pessimiste syntaxique (Equation 3.7) peut être réécrite de la façon suivante :*

$$u_{Pes}(d) = \min_{\omega \in \Omega} \max(n(\pi_{K_d}(\omega)), \mu(\omega)), \quad (3.12)$$

où  $n$  est la fonction de renversement sur l'échelle  $\mathcal{L}$ .

**Théorème 3.2 (Cas Optimiste) :**

*L'utilité optimiste syntaxique (Equation 3.9) peut être réécrite de la façon suivante :*

$$u_{Opt}(d) = \max_{\omega \in \Omega} \min(\pi_{K_d}(\omega), \mu(\omega)). \quad (3.13)$$

Les deux expressions sémantiques (Equation 3.12 et Equation 3.13) sont respectivement en accord avec les deux fonctions d'utilité qualitatives possibilistes, pessimiste et optimiste vues dans le Chapitre 2, Section 2.3.2 (Equation 2.10 et Equation 2.11).

**Exemple 3.3 (suite de l'Exemple 3.2) :**

*Rappelons l'ensemble de conséquences :*

$\mathcal{C} = \{ \text{Grande omelette (6O), pas d'omelette (G), petite omelette (5O), omelette à 6 œufs et tasse à laver (6T), omelette à 5 œufs et une tasse à laver (5T), omelette à 5 œufs et un œuf gâché (5G)} \}$ .

*Les utilités qualitatives (optimiste et pessimiste) des différentes décisions peuvent être évaluées en fonction des degrés de nécessité des deux états possibles du monde  $s$  et  $p$  ( $N(s) = n(\Pi(p))$  et  $N(p) = n(\Pi(s))$ ).*

– **Cas pessimiste :** *Les utilités pessimiste associées à chaque décision sont :*

$$u_{Pes}(CB) = \min[\max(n(\Pi(p)), \mu(G)), \max(n(\Pi(s)), \mu(6O))].$$

$$u_{Pes}(CT) = \min[\max(n(\Pi(p)), \mu(5T)), \max(n(\Pi(s)), \mu(6T))].$$

$$u_{Pes}(JP) = \min[\max(n(\Pi(p)), \mu(5O)), \max(n(\Pi(s)), \mu(5G))].$$

- **Cas optimiste** : Les utilités optimiste associées à chaque décision sont :
  - $u_{Opt}(CB) = \max[\min(\Pi(p), \mu(G)), \max(\Pi(s), \mu(6O))]$ .
  - $u_{Opt}(CT) = \max[\min(\Pi(p), \mu(5T)), \max(\Pi(s), \mu(6T))]$ .
  - $u_{Opt}(JP) = \max[\min(\Pi(p), \mu(5O)), \max(\Pi(s), \mu(5G))]$ .

### 3.4 Evaluation des décisions optimales basée sur les ATMS

Une solution a été proposée dans [91, 15] pour le calcul des décisions optimales lorsque le problème est codé en logique possibiliste. Cette solution repose sur l'utilisation de la procédure MPL (Modèles Préférés et Littéraux) [92], initialement proposée pour le calcul des différents éléments de base d'un ATMS (Assumption-based Truth Maintenance System) [93, 94]. Dans un premier temps, nous allons présenter la façon d'interpréter un problème de la décision qualitative dans le cadre des ATMS. Dans un second temps, nous allons exposer les algorithmes proposés dans [53, 15] pour le calcul des décisions optimales optimiste et pessimiste.

#### 3.4.1 Le système de maintien de cohérence "ATMS"

Quelques définitions liées au contexte des ATMS sont nécessaires avant la codification d'un problème de la décision qualitative dans ce contexte.

Le système de maintien de cohérence ATMS, initialement conçu pour le diagnostic de panne, est actuellement utilisé dans de nombreuses applications (restauration de la cohérence, argumentation, etc). Dans cette section, nous définissons certains concepts utiles pour le calcul des décisions optimales.

Soit  $\mathcal{S}$  un ensemble de symboles propositionnels.  $H \subseteq \mathcal{S}$  est l'ensemble des symboles hypothèses. Un environnement est un ensemble  $E \subseteq H$ . Une base de connaissance  $BC$  est un ensemble de justifications, telle qu'une justification est une clause de Horn de la forme  $l_1, \dots, l_n \Rightarrow l$  avec  $l_i \in \mathcal{S}$  et  $l \in \mathcal{S} \cup \{\perp\}$ .

Un environnement  $E$  est cohérent ssi il n'est pas incohérent. En effet, un environnement  $E$  est dit incohérent avec  $BC$  ssi  $BC \wedge E \vdash \perp$ .

#### Définition 3.3 (Nogood) :

Un Nogood de  $BC$ , noté  $NG(BC)$  est un environnement  $E$  minimal incohérent avec  $BC$ . Formellement,

$$BC \wedge E \vdash \perp \text{ et } \nexists E' \subset E \text{ tel que } BC \wedge E' \vdash \perp.$$

#### Définition 3.4 (Label) :

Le Label d'une formule  $\phi \in BC$ , noté  $Label_{CB}(\phi)$ , est l'ensemble des environnements  $E_i$  cohérents et minimaux tels que,

$$BC \wedge E_i \vdash \phi.$$

Pour calculer ces éléments (Nogoods et Label), une solution basée sur le calcul d'impliquants premiers a été développée dans [17] faisant appel à la procédure MPL. Définissons d'abord la notion d'impliquant et d'impliquant premier.

#### Définition 3.5 (Impliquant et impliquant premier) :

Soit  $\phi$  une formule et soit  $\varphi$  une conjonction de littéraux (un cube). Si  $\varphi \models \phi$  alors  $\varphi$  est

appelée un *impliquant* de  $\phi$ .

$\varphi$  est un *impliquant premier* de  $\phi$  ssi  $\varphi$  est un *impliquant* de  $\phi$  et  $\forall \varphi'$  un *impliquant* de  $\phi$ , si  $\varphi \models \varphi'$  alors  $\varphi' \models \varphi$ .

**Définition 3.6 (Impliquant P-restreint, impliquant P-restreint premier) :**

Soit  $P$  un ensemble de littéraux et soit  $E \subseteq P$ .  $E^\wedge$  est un *impliquant P-restreint* de la formule  $\phi$  ssi  $\exists M$  *impliquant* de  $\phi$  tel que  $M \cap P = E$ .  $E^\wedge$  est un *impliquant P-restreint premier* de  $\phi$ , noté  $IRP(\phi, P)$ , ssi  $\nexists E'^\wedge$  *impliquant P-restreint* de  $\phi$  tel que  $E' \subset E$ .

**Exemple 3.4 :**

Soit  $BC = \{c \Rightarrow a, d \Rightarrow b, c \wedge d \Rightarrow\}$ . Soit  $P = \{\neg c, d, \neg d\}$ .

- Les *impliquants* de  $BC$  :  $\neg c \wedge \neg d$ ,  $\neg c \wedge b$  et  $\neg d \wedge a$ .
- Les *impliquants P-restreint* de  $BC$  :  $\neg c \wedge \neg d$ ,  $\neg c$  et  $\neg d$ .
- Les *impliquants P-restreints premiers* de  $BC$  :  $\neg c$  et  $\neg d$ .

Dans [17], un algorithme pour calculer l'ensemble des *impliquants P-restreints premiers* a été développé basé sur la procédure MPL (Modèles Préférés et Littéraux). L'objectif de cette procédure est le suivant : étant donnée une formule  $\phi$ , exprimée sous forme normale conjonctive et comportant deux types distincts de littéraux, MPL calcule une projection de  $\phi$  sur l'ensemble des littéraux d'un des deux types. Cette projection est une formule sous forme normale disjonctive qui est une représentation minimale de l'ensemble des modèles de  $\phi$ , restreints à ce type de littéral.

Cet algorithme [17] génère l'ensemble des *impliquants P-restreints Premiers*  $IRP(BC, P)$  d'une base de clauses  $BC$  et un ensemble  $P$  cohérent de littéraux. L'hypothèse de cohérence imposée sur l'ensemble  $P$ , est importante pour éviter de tester toutes les variables de  $BC$ . En effet, il faut effectuer d'abord les branchements sur les variables de  $P$ , puis quand toutes les variables auront une valeur de vérité, un algorithme de satisfaction classique pour tester la cohérence de la base sera suffisant.

L'algorithme développé est basé sur la procédure de Davis et Putnam (DP) [95], les symboles de  $P$  sont d'abord choisis, pour effectuer les branchements (pour obtenir une énumération selon un ordre compatible avec l'inclusion restreinte à  $P$ ). Lorsque la base ne contient plus de symboles de  $P$  non affectés, le test de cohérence de la base restante suffira en utilisant un prouveur SAT habituel (de type DP). Pour garantir la primarité d'un *impliquant P-restreint*, il a été proposé de rajouter dans la base une clause qui sera falsifiée par tous les *impliquants P-restreints* contenant ce dernier. La falsification d'une des clauses ajoutées apporte de l'information : la non minimalité de la solution trouvée. Pour cela, l'algorithme différencie les clauses ajoutées des clauses originales en utilisant une autre base de clauses  $BA$  (pour Base de clauses Ajoutées), appelée base de minimisation.

---

**Fonction 3.1 :**  $MPL(BC, BA, P, IP)$  : Calcul des impliquants P-restreints premiers.

---

$BC$  : Base de clauses,  
 $BA$  : Base de minimisation,  
 $IP$  : Littéraux satisfaits,  
**début**  
   **si**  $\Rightarrow \in BC$  **alors**  
     └ Retourner  $BA$ ,  $BC$  est incohérente.  
   **si**  $(BA \wedge IP \wedge)$  *incohérent* **alors**  
     └ Retourner  $BA$ , Test de primarité.  
   **si**  $BC = \emptyset$  **alors**  
     └ Retourner  $BA \cup \{\neg((IP \cap P) \wedge)\}$ ,  $BC$  est cohérente.  
    $l \leftarrow$  LittéralPourSimplifier( $BC, P$ ),  
   **si**  $l \neq null$  **alors**  
     └ Retourner  $MPL(BC[l], BA, P, IP \cup l)$ ,  $BC$  est simplifié par  $l$ .  
    $l \leftarrow$  Choix-Symbole-De-P( $BC, P$ ),  
   **si**  $l \neq null$  **alors**  
     └  $Sol \leftarrow MPL(BC[\neg l], BA, P, IP \cup \{\neg l\})$   
       └ Retourner  $MPL(BC[l], Sol, P, IP \cup \{l\})$ ,  
   **sinon**  
     **si**  $DP(BC) = vrai$  **alors**  
       └ Retourner  $BA \cup \{\neg((IP \cap P) \wedge)\}$ ,  $BC$  est cohérente.  
     **sinon**  
       └ Retourner  $BA$ ,

---

La fonction  $MPL(BC, \emptyset, P, \emptyset)$  est appelée avec  $BA$  et  $IP$  vides pour le calcul des IRP( $BC, P$ ). Le résultat est retourné dans la nouvelle base de minimisation  $BA$  où les Impliquants P-Restreints Premiers sont sous forme clausale niée.

La fonction LittéralPourSimplifier( $BC, P$ ) permet la propagation des clauses unitaires ou littéraux purs apparaissant dans  $BC$  et  $P$ . En effet, elle retourne un littéral dont la satisfaction permet de simplifier la base  $BC$  en garantissant que tout impliquant P-restreint premier de la base est un impliquant P-restreint premier de la base simplifiée  $BC[l]$  (propagation de la satisfaction de  $l$  dans  $BC$ ). Il est à noter qu'une clause unitaire est une clause avec un seul littéral et un littéral pur est celui que sa négation n'apparaît pas dans la base.

---

**Fonction 3.2 :** LittéralPourSimplifier( $BC, P$ )

---

**début**  
   **si**  $\exists l$  tel que  $l$  est une clause unitaire dans  $BC$  **alors**  
     └ Retourner  $l$ ,  
   **si**  $\exists l \in P^\neg$  tel que  $l$  est pur dans  $BC$  **alors**  
     └ Retourner  $l$ ,

---

La fonction Choix-Symbole-De-P( $BC, P$ ) retourne le meilleur littéral de  $P$  conformément à une heuristique donnée.

Le test de cohérence se fait par un appel à un prouveur de type DP.

L'algorithme proposé pour le calcul des IRP( $BC, P$ ), basé sur la procédure  $MPL$ , repose sur les mêmes concepts que celui de Davis et Putnam [95] :

- Propagation des clauses unitaires,
- propagation des littéraux purs dont la négation est dans  $P$ ,
- appel à des heuristiques utilisées dans les meilleures implementations de DP.

La primarité des solutions obtenues est garantie grâce à :

- Une énumération des impliquants P-restreint compatible avec l'inclusion grâce à un ordre sur les littéraux de branchement. Ceci garantit que le premier impliquant trouvé est un impliquant P-restreint premier,
- l'ajout d'une nouvelle clause dans la base lorsqu'une solution est trouvée : cette clause empêche la production d'impliquants P-restreints sous-sommés par l'impliquant P-restreint premier trouvé.

Après avoir présenté la procédure  $MPL$  pour le calcul des impliquants P-restreints premiers, une nouvelle définition a été attribuée aux différents éléments d'un ATMS (Nogood et Label). Le calcul des Nogoods et des Labels s'effectue de la même manière, en partant de  $BC^\wedge$  pour les Nogoods et de  $BC^\wedge \wedge \neg\phi$  pour le calcul du Label de  $\phi$ .

**Définition 3.7 (Calcul des Nogoods) :**

L'ensemble des Nogoods d'une base de clauses  $BC$  par rapport à l'ensemble d'hypothèses  $H$  est calculé à partir des impliquants  $H$ -restreints premiers comme suit :

$$NG(BC) = IRP(IRP(BC, H^\neg)^{\neg\wedge}, H). \tag{3.14}$$

**Exemple 3.5 :**

Soit  $BC = \{A \wedge b \Rightarrow c, B \Rightarrow b, c \Rightarrow\}$  une base de clauses. Soit  $H = \{A, B\}$  l'ensemble d'hypothèses. L'ensemble des Nogoods  $NG(BC)$  par rapport à  $H$  est calculé en appliquant l'Equation 3.14. En effet, nous avons besoin d'appeler la Fonction  $MPL$  (3.1) deux fois.

- **Premier appel ( $IRP(BC, H^\neg) = MPL(BC, BA, H^\neg, IP)$ ) :** L'arbre binaire développé par la procédure  $MPL$  est donné par la Figure 3.1.

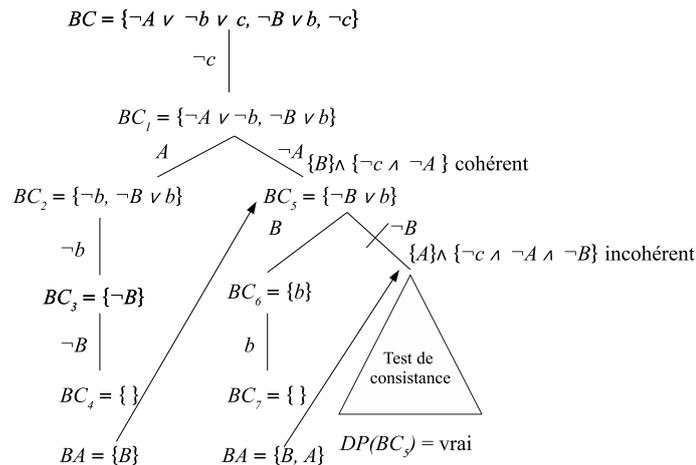


FIGURE 3.1 – Étape 1 : trace de  $MPL$  sur  $BC$  par rapport à  $H^\neg$ .

L'algorithme commence par simplifier la base de clauses  $BC$  (appel à la fonction *LittéralPourSimplifier*( $BC, H^\neg$ )) par la clause unitaire  $\neg c$ . Les impliquants  $H^\neg$ -restreints

premiers sont produit dans un ordre compatible avec l'inclusion de leur restriction aux littéraux positifs. Pour cela, la fonction *Choix-Symbole-De-P*( $BC, H^\neg$ ) commence par choisir la négation d'un littéral de  $H^\neg$  ( $A$  sur l'arbre binaire). Une fois que tous les littéraux ont une valeur de vérité, la base de clauses est vide à la fin et la négation du premier impliquant  $H^\neg$ -restreint premier est trouvé ( $BA = \{B\}$ ). La procédure *MPL* est relancée pour développer la branche  $\neg A$ . De la même façon la négation du deuxième impliquant  $H^\neg$ -restreint premier est choisie. La dernière branche (avec  $\neg B$ ) est coupée, ceci est dû à l'incohérence de l'intersection de la négation du dernier impliquant  $H^\neg$ -restreint  $A$  et l'ensemble des littéraux satisfaits  $\{\neg c \wedge \neg A \wedge \neg B\}$ . Une fois que tous les littéraux de  $H^\neg$  ont une valeur de vérité dans  $BC$ , il suffit de tester la cohérence de la base restante.

Le résultat de cet algorithme est les impliquants  $H^\neg$ -restreints premiers de  $BC$ , qui correspond à la négation de la base  $BA$  :  $IRP(BC, H^\neg) = \{\{\neg A\}\{\neg B\}\}$ .

- **Deuxième appel** ( $IRP(\{A, B\}, H) = MPL(\{A, B\}, BA, H, IP)$ ) : La base de clauses du deuxième appel à la procédure *MPL*,  $BC = IRP(BC, H^\neg)^{\neg\wedge} = \{A, B\}$ . L'arbre binaire développé par la procédure *MPL* à cette deuxième étape est donné par la Figure 3.2.

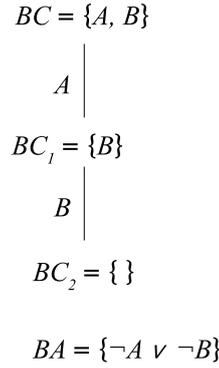


FIGURE 3.2 – Étape 2 : trace de *MPL* sur  $IRP(BC, H^\neg)^{\neg\wedge}$  par rapport à  $H$ .

Donc,  $IRP(\{A, B\}, H) = \{A \wedge B\}$ .

En conclusion, l'ensemble des Nogoods de  $BC$ ,  $NG(BC) = \{\{A \wedge B\}\}$ .

Le calcul du Label d'une formule nécessite d'abord le calcul des Nogoods afin d'enlever les environnements incohérents qui pourraient apparaître. Pour cela, il faut ajouter à la base intermédiaire les Nogoods de la base sous leur forme niée (la forme clausale) [17].

**Définition 3.8 (Calcul des Labels) :**

Le  $Label_{BC}(\phi)$  d'une formule  $\phi$  (cube ou clause), étant donné un ensemble d'hypothèses  $H$  est calculé à partir des impliquants  $H$ -restreints premiers comme suit :

$$Label_{BC}(\phi) = IRP(IRP(BC \wedge \neg\phi, H^\neg)^{\neg\wedge} \wedge NG(BC)^{\neg\wedge}, H). \quad (3.15)$$

**3.4.2 Calcul des décisions optimales en utilisant la procédure *MPL***

Un problème de la décision qualitative, tel qu'il était défini dans la Section 3.3, peut être codé dans le langage des ATMS [16].

Les décisions seront modélisées par des ensembles de littéraux positifs de  $\mathcal{D}$ , cohérents avec  $K$ . Ainsi,  $\mathcal{D}$  jouera le rôle de l'ensemble d'hypothèses  $H$  d'un ATMS. Lorsqu'une décision  $d$  contient un ensemble de littéraux positifs,  $d$  ne doit pas être interprétée comme une séquence d'actions, mais plutôt comme une décision unique, cohérent à l'affectation des valeurs de vérité positives aux littéraux de  $d$ . Supposons que les connaissances et les préférences de l'agent sont modélisées dans les deux bases  $K$  et  $P$  respectivement. Une restriction de la solution proposée est qu'elle impose que  $K_{>\alpha}^{\wedge} \wedge P_{>\alpha}^{\wedge}$  soit sous la forme normale conjonctive. Dans les deux contextes, optimiste et pessimiste, les deux algorithmes proposés reposent sur la procédure *MPL*.

### 3.4.2.1 Contexte optimiste

Dans [53, 16], les décisions qualitatives optimistes sont directement calculées à partir de la procédure *MPL* décrite dans la section précédente. Une bonne décision  $d$  d'un point de vu optimiste est celle qui maximise  $u_{Opt}(d) = n(\alpha)$  tel que  $K_{>\alpha}^{\wedge} \wedge d^{\wedge} \wedge P_{>\alpha}^{\wedge} \neq \perp$ , minimisant  $\alpha$  (voir Définition 3.2). D'une façon équivalente, cette définition est réécrite comme suit [15] :

**Définition 3.9 :**

*Une décision optimale optimiste est calculée en faisant appel à la procédure MPL de la façon suivante :*

$$K_{>\alpha}^{\wedge} \wedge d^{\wedge} \wedge P_{>\alpha}^{\wedge} \neq \perp \Leftrightarrow \exists E \in MPL(K_{>\alpha}^{\wedge} \cup P_{>\alpha}^{\wedge}, \emptyset, \mathcal{D}, IP) \neq \emptyset \text{ tel que } E \subseteq d.$$

L'Algorithme 3.3 [15, 17] présente les étapes de calcul des décisions optimales optimistes, étant données  $K$  et  $P$ .

---

**Algorithme 3.3 :** Décisions optimales optimistes.

---

**Entrées :**  $K^{\wedge}$  : Base de connaissances,  
 $P^{\wedge}$  : Base de préférences,  
 $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_p\}$  : l'ensemble des symboles de décisions.  
**Sorties :**  $\alpha^*$  : l'utilité de la décision optimale optimiste,  
 $d^*$  : la décision optimale optimiste.

**début**

$\alpha \leftarrow 0$ a priori toutes les connaissances sont utilisées, $BA \leftarrow MPL(K_{>\alpha}^{\wedge} \cup P_{>\alpha}^{\wedge}, \emptyset, \mathcal{D}, IP)$ , <b>tant que</b> $((BA = \emptyset) \text{ et } (\alpha < 1))$ <b>faire</b> <table style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>Inc(\alpha)</math>, élimination de la strate la moins certaine de <math>K</math> et la moins prioritaire de <math>P</math>,</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>BA \leftarrow MPL(K_{&gt;\alpha}^{\wedge} \cup P_{&gt;\alpha}^{\wedge}, BA, \mathcal{D}, IP)</math>,</td> </tr> </table> $d^* = BA^{\neg}$ , $\alpha^* = n(\alpha)$ ,	$Inc(\alpha)$ , élimination de la strate la moins certaine de $K$ et la moins prioritaire de $P$ ,	$BA \leftarrow MPL(K_{>\alpha}^{\wedge} \cup P_{>\alpha}^{\wedge}, BA, \mathcal{D}, IP)$ ,
$Inc(\alpha)$ , élimination de la strate la moins certaine de $K$ et la moins prioritaire de $P$ ,		
$BA \leftarrow MPL(K_{>\alpha}^{\wedge} \cup P_{>\alpha}^{\wedge}, BA, \mathcal{D}, IP)$ ,		

---

L'algorithme cherche en premier les impliquants D-restreints premiers de  $K \cup P$ . Dans le cas où aucune solution existe, le processus est réitéré, jusqu'à obtention d'une solution, après élimination des connaissances les moins certaines et les préférences les moins prioritaires.

### 3.4.2.2 Contexte pessimiste

Dans [53, 16], un problème de la décision qualitative pessimiste a été traduit dans le langage des ATMS immédiatement à partir de la définition d'un Label. En effet, une bonne

décision  $d$  d'un point de vu pessimiste est celle qui maximise  $u_{Pes}(d) = \alpha$  tel que  $K_{\geq \alpha}^{\wedge} \wedge d^{\wedge} \vdash P_{>n(\alpha)}^{\wedge}$ , et  $K_{\geq \alpha}^{\wedge} \wedge d^{\wedge} \not\vdash \perp$ , maximisant  $\alpha$  (voir Définition 3.1). D'une façon équivalente, cette définition est réécrite comme suit [15] :

**Définition 3.10 :**

Une décision optimale pessimiste est traduite dans le langage des ATMS comme suit :

$$K_{\geq \alpha}^{\wedge} \wedge d^{\wedge} \vdash P_{>n(\alpha)}^{\wedge}, \text{ et } K_{\geq \alpha}^{\wedge} \wedge d^{\wedge} \not\vdash \perp \Leftrightarrow \exists E \in \text{Label}_K(P_{>n(\alpha)}^{\wedge}) \text{ tel que } E \subseteq d.$$

Les étapes de calcul des décisions optimales pessimistes étant données  $K$  et  $P$  sont résumées par l'Algorithme 3.4 [15, 17].

---

**Algorithme 3.4 :** Décisions optimales pessimistes.

---

**Entrées :**  $K^{\wedge}$  : Base de connaissances,  
 $P^{\wedge}$  : Base de préférences,  
 $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_p\}$  : l'ensemble des symboles de décisions.  
**Sorties :**  $\alpha^*$  : l'utilité de la décision optimale pessimiste,  
 $d^*$  : la décision optimale pessimiste.

début

```

     $\alpha \leftarrow 1,$ 
     $BA \leftarrow \emptyset,$ 
    tant que  $((BA = \emptyset) \text{ et } (\alpha > 0))$  faire
        Calcul des Nogoods de  $K_{\geq \alpha}$ 
         $NG' \leftarrow \text{MPL}(K_{\geq \alpha}, \emptyset, \mathcal{D}^{\neg}, IP),$ 
         $NG \leftarrow \neg \text{MPL}(NG', \emptyset, \mathcal{D}, IP),$ 
        Calcul du Label de  $P_1,$ 
         $BA' \leftarrow \text{MPL}(K_{\geq \alpha}^{\wedge} \cup P_1^{\neg}, \emptyset, \mathcal{D}^{\neg}, IP),$ 
         $BA \leftarrow \text{MPL}(BA' \cup NG^{\neg}, \emptyset, \mathcal{D}, IP),$ 
         $\beta \leftarrow 1,$ 
        tant que  $((\beta > n(\alpha)) \text{ et } (BA \neq \emptyset))$  faire
            Calcul incrémental du Label de  $P_{>n(\alpha)},$ 
             $BA' \leftarrow BA' \cup \text{MPL}(K_{\geq \alpha}^{\wedge} \cup P_{\beta}^{\neg}, \emptyset, \mathcal{D}^{\neg}, IP),$ 
             $BA \leftarrow \text{MPL}(BA' \cup NG^{\neg}, \emptyset, \mathcal{D}, IP),$ 
             $\text{Dec}(\beta),$ 
        if  $BA = \emptyset$  then
             $\alpha^* \leftarrow \max(\underline{\alpha}, n(\beta)),$   $\underline{\alpha}$  est le niveau de certitude ou de priorité de la prochaine
            strate non vide sous  $\alpha,$ 
     $d^* \leftarrow BA^{\neg},$ 

```

---

L'Algorithme 3.4 suit la même démarche que l'Algorithme 3.3. Il cherche en premier les impliquants D-restreints premiers de  $K \cup P$ . Dans le cas où aucune solution existe, le processus est réitéré, jusqu'à obtention d'une solution, après élimination des connaissances les moins certaines et les préférences les moins prioritaires. Soient  $K$  et  $P$  les deux bases de connaissances et de préférences de l'agent, chacune composée de  $n$  strates. Le calcul du  $\text{Label}_K(P_{>n(\alpha)}^{\wedge})$  se fait d'une manière incrémental, en calculant le  $\text{Label}(P_1)$ , puis  $\text{Label}(P_{\beta_{n-1}}), \dots,$  et enfin le  $\text{Label}(P_{n(\alpha)})$ , jusqu'à ce que  $\beta = n(\alpha)$ . Le calcul du Label est interrompu dès qu'un Label intermédiaire est trouvé vide. Ceci permet de déterminer une borne inférieure de la prochaine strate à considérer. En effet, si le  $\text{Label}(P_1, \dots, P_{\beta_i})$  est vide, cela signifie que si d'autres in-

formations ne sont pas ajoutées dans  $K_\alpha$ , alors on ne peut pas trouver de solutions d'utilité supérieure à  $n(\beta_i)$  (car  $\alpha = n(\beta)$ ).

**Exemple 3.6 :**

Poursuivons l'Exemple 3.2 qui correspond à la version possibiliste de l'exemple de préparation de l'omelette vu dans le Chapitre 1. Dans ce chapitre, cet exemple a été codé en logique qualitative possibiliste par deux bases (voir Exemple 3.2) :

- Une base de connaissances  $K$ ,
- une base de préférences  $P$ .

Rappelons que l'échelle d'incertitude et de priorité  $\mathcal{L} = \{0, .6, .7, .8, .9, 1\}$ .

- **Décisions optimistes :**

Le comportement de l'Algorithme 3.3 est illustré dans la Figure 3.3. Son déroulement donne comme résultats :

- **Étape 1 :**  $\alpha = 0$

- La procédure  $MPL(K_{>0}^\wedge \cup P_{>0}^\wedge, \emptyset, \mathcal{D}, IP)$  retourne la solution  $d^* = \{CB\}$ . Ce résultat est cohérent avec l'impression optimiste de l'agent. Puisque l'agent est relativement convaincu que l'œuf est sain, donc le plus judicieux dans ce cas est de le casser directement dans le bol.

- L'utilité optimiste de cette solution  $u_{Opt}^*(CB) = n(\alpha) = 1$ .

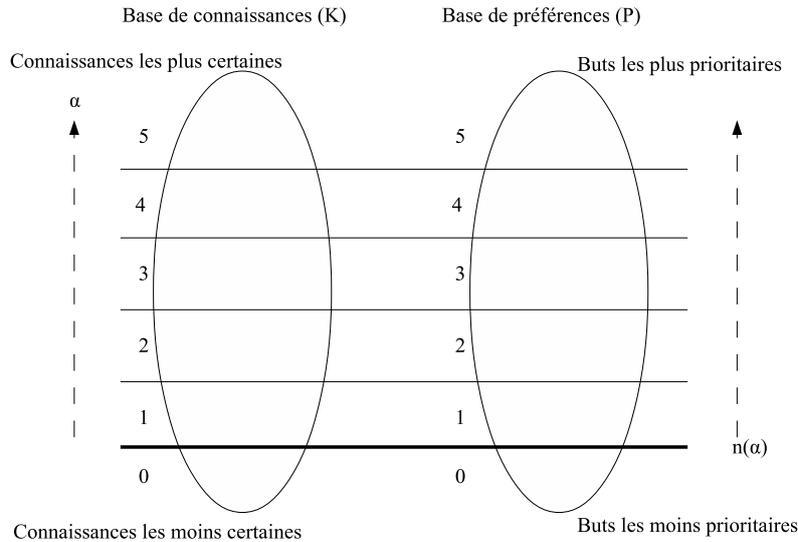


FIGURE 3.3 – Calcul de l'utilité optimiste d'une décision.

- **Décisions pessimistes :** Le comportement de l'Algorithme 3.4 est illustré dans la Figure 3.4. Son déroulement donne comme résultats :

- **Étape 1 :**  $\alpha = 5$  (strate 5)

- Calcul des Nogoods  $NG(K_5) = \{\{CB, CT\}, \{CB, JP\}, \{CT, JP\}\}$ .
  - Calcul incrémental du  $Label_{K_5}(P_{>0}) = Label_{K_5}(\neg g \wedge \neg og \wedge (\neg 5o \vee \neg t) \wedge \neg 5o \wedge \neg t)$  :
  - $Label_{K_5}(P_5) = Label_{K_5}(\neg g) = \{\{CT\}, \{JP\}\}$  avec  $\beta = 5$ ,
  - $Label_{K_5}(P_{\geq 4}) = Label_{K_5}(\neg g \wedge \neg og) = \{\{CT\}\}$  avec  $\beta = 4$ ,
  - $Label_{K_5}(P_{\geq 3}) = Label_{K_5}(\neg g \wedge \neg og \wedge (\neg 5o \vee \neg t)) = \{\}$  avec  $\beta = 3$ ,
- Puisque le  $Label_{K_5}(P_{\geq 3})$  est vide, le calcul s'arrête et le processus est relancé avec  $\alpha = \max(2, 2) = 2$  (le niveau  $\alpha$  de la prochaine strate non vide de  $K$  est 2 et  $n(\beta) = 2$ )

- ).
- **Étape 2** :  $\alpha = 2$  (strate 2)
    - Calcul des Nogoods  $NG(K_5) = \{\{CB, CT\}, \{CB, JP\}, \{CT, JP\}\}$ .
    - Calcul incrémental du  $Label_{K_5}(P_{>3}) = Label_{K_5}(\neg g \wedge \neg og)$  :
    - $Label_{K_5}(P_5) = Label_{K_5}(\neg g) = \{\{CT\}, \{CB\}\}$  avec  $\beta = 5$ ,
    - $Label_{K_5}(P_{\geq 4}) = Label_{K_5}(\neg g \wedge \neg og) = \{\{CT\}, \{CB\}\}$  avec  $\beta = 4$ ,
- Comme  $\beta = n(\alpha)$  ( $3=3$ ) et  $Label_{K_5}(P_{\geq 4})$  est non vide, l'algorithme s'arrête et les décisions optimales pessimistes sont  $d^* = \{CB, CT\}$ , d'une utilité pessimiste  $u_{Pes}^* = \alpha = .7$ . Ce résultat est cohérent avec le point de vue pessimiste de l'agent sachant  $N(s) = 2$ . Donc le plus judicieux dans ce cas est de casser l'œuf dans une tasse avant de l'ajouter à l'omelette.

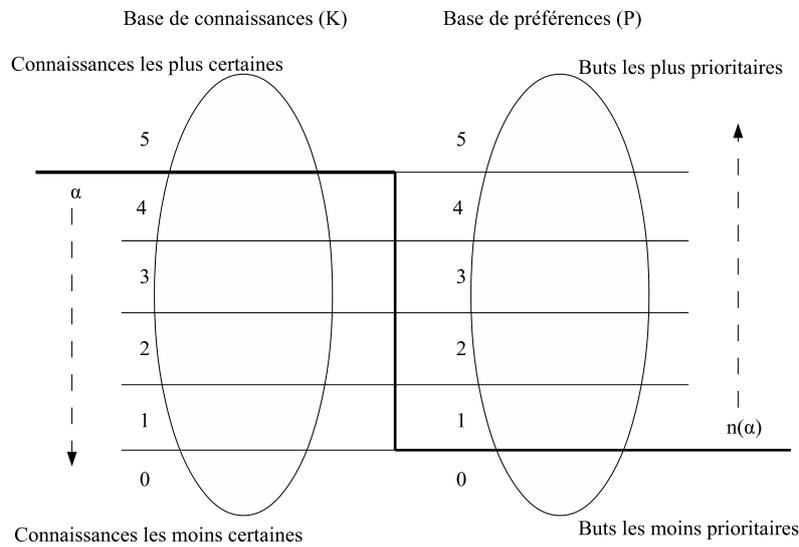


FIGURE 3.4 – Calcul de l'utilité pessimiste d'une décision.

### 3.5 Conclusion

Nous avons passé en revue dans ce chapitre une représentation compacte des problèmes de la décision qualitative basée sur la logique possibiliste. Nous avons aussi vu comment un tel problème de décision a été codé dans le langage des ATMS. Ainsi, des algorithmes d'évaluation des décisions optimales ont été exposés faisant appel à des procédures spécifiques appliquées aux ATMS. Le calcul des décisions optimales est effectué dans les deux cas pessimiste et optimiste. La décision optimiste se base sur un test de satisfiabilité, par contre la décision pessimiste se base sur le calcul des composants de base des ATMS (Nogoods et Labels). Les deux algorithmes de calcul des décisions optimales, dans le cas optimiste et pessimiste, ont été implémentés dans [17]. L'approche par ATMS présente deux limitations :

- Dans le contexte pessimiste, le cas où la strate de la base de préférences contient plus d'une formule n'est pas pris en considération dans l'algorithme proposé,
- La capacité limitée de l'outil développé, et qui ne prend en charge qu'un nombre limité de variables. Ceci est dû au passage obligatoire par la première étape de compilation avant de pouvoir obtenir le Label ou le Nogood (l'un des défauts majeurs de cette méthode) [17]. En effet, ce calcul intermédiaire s'avère en pratique plus difficile que

l'extraction des solutions qui est immédiate (leur nombre peut être exponentiel par rapport à la taille de la formule compilée) [17].

Le prochain chapitre portera sur certains modèles graphiques qui existent dans la littérature pour la représentation des problèmes de la décision séquentielle (à plusieurs niveaux).

## Chapitre 4

# Modèles de décisions basés sur une représentation graphique

### 4.1 Introduction

Ces dernières années, le succès des modèles décisionnels pour résoudre des problèmes industriels complexes s'est accompagné d'une exigence de modélisation de plus en plus fine et réaliste de ces problèmes. L'utilisation des modèles graphiques dans de nombreux problèmes de décision apporte de l'expressivité et de l'efficacité de calcul tant pour la représentation de l'incertitude que pour la représentation des préférences. La structure du graphe exprime les spécificités du problème traité et est utilisée pour propager des informations et optimiser des décisions. Plusieurs modèles graphiques ont été proposés dans la littérature [96], pour la prise de la décision séquentielle (voir Chapitre 2, Section 2.4) [4], à titre d'exemples : les arbres de décision [97, 98], les diagrammes d'influence [99], les systèmes basés sur les évaluations [100], etc. Ces modèles permettent une représentation simple et dense des problèmes de la décision séquentielle [4], et offrent aussi des techniques simples et intuitives pour le traitement des problèmes de décision de grande taille. Le but est de trouver la stratégie la plus optimale par rapport à un critère de décision. En fonction du modèle graphique, différents algorithmes ont été proposés :

- La programmation dynamique [81] : initialement introduite dans [79]. La principale contribution de ce travail est la redéfinition du problème d'optimisation en une forme récursive. C'est une méthode d'induction arrière où les dernières décisions sont examinées en premier ensuite le processus est réitéré jusqu'à l'obtention de la première décision.
- Le choix résolu [101] : Ces algorithmes ne peuvent pas être appliqués dans le cas où l'agent décideur adopte le critère d'utilité espérée (voir Chapitre 1) pour évaluer ses décisions. En effet ces algorithmes reposent sur une autre théorie pour la prise de décision (théorie du choix résolu [101]).

Initialement, ces modèles graphiques ont été proposés dans le cadre de la théorie de la décision probabiliste. La contrepartie possibiliste de ces modèles a été proposée afin de permettre à un agent d'exprimer ses connaissances et ses préférences d'une façon qualitative en absence de valeurs numériques [96]. Ces modèles graphiques possibilistes reposent sur le processus décisionnel markovien possibiliste (voir Chapitre 2, Section 2.4) pour évaluer les différentes stratégies et choisir les plus optimales entre elles.

Comme notre travail s'inscrit dans le cadre des problèmes de la décision qualitative basés sur la théorie des possibilités, nous limitons notre étude aux modèles graphiques possibilistes (qui sont des contreparties des modèles graphiques probabilistes). Ce chapitre présente

tout d'abord les réseaux possibilistes qualitatifs (basés sur le min), qui sont des modèles graphiques pour la représentation des connaissances incertaines en théorie des possibilités. Ainsi, nous exposons un algorithme d'inférence dans les réseaux possibilistes qualitatifs basé sur la structure de l'arbre de jonction [102]. Par la suite, nous allons voir deux modèles possibilistes graphiques pour la prise de la décision qualitative : les arbres de décision possibilistes [11, 12] et les diagrammes d'influence possibilistes [14]. Pour chaque modèle, des algorithmes d'évaluation seront présentés.

## 4.2 Les réseaux possibilistes qualitatifs

En plus des représentations logiques, comme la logique possibiliste (voir Chapitre 3, Section 3.2), il existe d'autres moyens de représentation des connaissances incertaines. Nous allons voir dans cette section, une représentation graphique : il s'agit des réseaux possibilistes [21]. Selon le type de conditionnement utilisé (voir Chapitre 2, Section 2.2.2), il existe deux manières de définir un réseau possibiliste. Dans ce mémoire, comme pour la logique possibiliste, nous nous limitons aux réseaux possibilistes qualitatifs ou basés sur le min.

### 4.2.1 Définition d'un réseau possibiliste qualitatif

Un réseau possibiliste qualitatif  $\Pi G_{min}(G, \pi)$  défini sur un ensemble de variables  $\mathcal{V} = \{X_1, \dots, X_n\}$ , est caractérisé par [8] :

1. **Une composante graphique** : elle est représentée par un DAG (Directed Acyclic Graph)  $G(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ , où les nœuds correspondent aux variables  $\mathcal{V}$  et les arcs  $\mathcal{A}$  représentent les relations de dépendance entre les variables. Un arc orienté de  $X$  vers  $Y$  signifie que  $X$  est le parent de  $Y$  (vice versa  $Y$  est l'enfant de  $X$ ).
2. **Une composante numérique** : elle quantifie les différents liens du DAG en associant une distribution de possibilités pour chaque variable  $X$  dans le contexte de ses parents, notés  $Par(X)$ , de la façon suivante :
  - Pour chaque nœud racine  $X$  ( $Par(X) = \emptyset$ ), l'incertitude est représentée par un degré de possibilité a priori  $\pi(x)$  pour chaque instance  $x \in \mathbb{D}_X$ , tel que  $\max_{x \in \Omega} \pi(x) = 1$ .
  - Pour le reste des nœuds ( $Par(X) \neq \emptyset$ ), l'incertitude est représentée par un degré de possibilité conditionnel  $\pi(x | u_X)$  pour chaque instance  $x \in \mathbb{D}_X$  et pour chaque instance  $u_X \in \mathbb{D}_{Par(X)}$  (où  $\mathbb{D}_{Par(X)}$  représente le produit cartésien de tous les domaines des variables de  $Par(X)$ ), tel que  $\max_{x \in \Omega} \pi(x | u_X) = 1$ , pour n'importe quel  $u_X$ .

Un réseau possibiliste qualitatif code une distribution de possibilités jointe des variables par le biais de la règle de chaînage de la façon suivante :

**Définition 4.1 :**

*L'ensemble des degrés de possibilités à priori et conditionnel d'un réseau possibiliste  $\Pi G_{min}(G, \pi)$  induit une distribution de possibilités jointe unique  $\pi_{min}$  définie par la règle de chaînage basée sur le min de la façon suivante :*

$$\pi_{min}(X_1, \dots, X_n) = \min_{i=1..n} \pi(X_i | U_i). \quad (4.1)$$

**Exemple 4.1 :**

*Soit le réseau possibiliste qualitatif  $\Pi G_{min}(G, \pi)$ , composé du DAG de la Figure 4.1. et dont les distributions de possibilités initiales associées aux variables  $X_1, X_2, X_3$  et  $X_4$  sont données dans les Tables 4.1 et 4.2. Supposons que les variables sont binaires.*

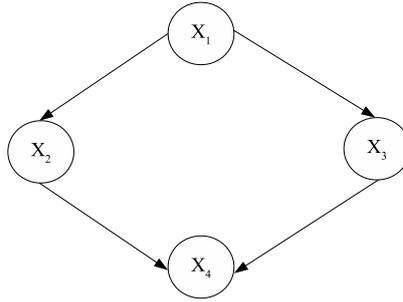


FIGURE 4.1 – Exemple d’un DAG.

$X_1$	$\pi(X_1)$	$X_2$	$X_1$	$\pi(X_2   X_1)$	$X_3$	$X_1$	$\pi(X_3   X_1)$
$x_1$	.1	$x_2$	$x_1$	.9	$x_3$	$x_1$	.2
$\neg x_1$	1	$x_2$	$\neg x_1$	1	$x_3$	$\neg x_1$	1
		$\neg x_2$	$x_1$	1	$\neg x_3$	$x_1$	1
		$\neg x_2$	$\neg x_1$	.6	$\neg x_3$	$\neg x_1$	1

TABLE 4.1 – Distributions de possibilités initiales.

$X_4$	$X_2$	$X_3$	$\pi(X_4   X_2, X_3)$	$X_4$	$X_2$	$X_3$	$\pi(X_4   X_2, X_3)$
$x_4$	$x_2$	$x_3$	.8	$\neg x_4$	$x_2$	$x_3$	1
$x_4$	$x_2$	$\neg x_3$	1	$\neg x_4$	$x_2$	$\neg x_3$	.7
$x_4$	$\neg x_2$	$x_3$	.2	$\neg x_4$	$\neg x_2$	$x_3$	1
$x_4$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	.3	$\neg x_4$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	1

TABLE 4.2 – Distributions de possibilités initiales.

L’application de la règle de chaînage basée sur le min donnée par l’Equation 4.1, au réseau possibiliste défini précédemment, donne la distribution de possibilités jointe présentée dans la Table 4.3.

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$\pi_{min}(X_1, X_2, X_3, X_4)$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$\pi_{min}(X_1, X_2, X_3, X_4)$
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	.1	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	.8
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	.1	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	1
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	.1	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	1
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	.1	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	.7
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	.1	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	.2
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	.1	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	.6
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	.1	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	.3
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	.1	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	.6

TABLE 4.3 – Distribution de possibilités jointe  $\pi_{min}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ .

#### 4.2.2 Inférence dans un réseau possibiliste qualitatif

La modélisation des connaissances incertaines par des réseaux (probabilistes ou possibilistes) [103, 21] offre d’une part un moyen convenable pour exprimer les hypothèses et d’autre

part elle facilite la représentation compacte de l'incertitude et la réalisation des inférences à partir des observations. Le processus d'inférence ou de propagation consiste à quantifier l'incertitude a posteriori (probabilités ou possibilités) de l'ensemble du système à l'arrivée de nouvelles informations (observations) nommées habituellement évidence [104].

Dans le cadre de notre thèse, nous nous intéressons au processus de propagation dans les réseaux possibilistes, plus particulièrement les réseaux possibilistes qualitatifs. D'une manière générale, les travaux réalisés dans le domaine d'inférence possibiliste sont une adaptation des algorithmes d'inférence probabilistes. Parmi ces travaux, dans le cas des réseaux simplement connectés (DAG sans boucles), l'adaptation de l'algorithme de Pearl [105] a été proposée dans [106]. Tandis que, une solution plus générale a été proposée dans le cas des réseaux à connexion multiple (DAG qui peut avoir des boucles) [107, 108], c'est une adaptation de l'algorithme basé sur la structure de l'arbre de jonction [109]. Des travaux plus récents [102, 110] ont été proposés basés sur le processus de compilation des paramètres au lieu des graphes.

Dans ce qui suit, nous présentons un algorithme connu dans la littérature [108], basé sur la structure de l'arbre de jonction [102], pour inférer dans un réseaux possibilistes qualitatifs. L'idée de cette méthode est de transformer la graphe initial en une nouvelle structure, nommée arbre de jonction, sur laquelle l'algorithme d'inférence peut être accompli d'une façon efficace. En effet, c'est sur l'arbre de jonction que l'information (l'observation) se propage afin de calculer les distributions de possibilités marginales a posteriori. Le processus d'inférence garantit la mise à jour ou la révision du réseau, il est de complexité NP-hard bien que dans les réseaux simplement connecté, l'inférence se fait en un temps polynomial.

#### 4.2.2.1 Construction de l'arbre de jonction

Cette phase de pré-traitement permet la transformation du graphe initial  $G(\mathcal{V}, \mathcal{A})$  en un arbre de jonction  $\mathcal{JT}$ , dont les nœuds sont des clusters (regroupement des nœuds du graphe initial). Le but de cette transformation est d'une part l'élimination des boucles du graphe initial, et d'autre part l'obtention d'un graphe plus efficace quant au temps de calcul nécessaire à l'inférence.

Étant donné un DAG  $G$ , il est possible de générer plusieurs arbres de jonction correspondants. Cependant, il est important de noter que le temps de calcul exigé pour la propagation dépend de la taille des clusters dans l'arbre de jonction. La construction de l'arbre de jonction s'effectue en trois étapes :

– **Étape 1 (Moralisation) :**

Cette étape consiste à marier deux à deux les parents de chaque variable, c'est-à-dire à les relier par un arc non-dirigé, puis supprimer toutes les orientations dans le graphe. Soit  $G$  le graphe initial, alors le graphe moral associé noté  $G_{\mathcal{M}}$  est obtenu par la procédure 4.1 :

---

**Algorithme 4.1 :** Construction du graphe moral .

---

**Entrées :** DAG  $G(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ .

**Sorties :** Graphe moral  $G_{\mathcal{M}}$ .

**début**

**pour chaque** *arc* dans  $G$  **faire**

    └ Supprimer son orientation,

**pour chaque** *nœud*  $X \in \mathcal{V}$  **faire**

    └ Créer un lien entre toute paire de nœuds appartenant à  $Par(X)$ ,

---

– **Étape 2 (Triangulation) :**

Il existe plusieurs façons de trianguler un graphe moral. En effet, l'efficacité de l'algorithme de l'arbre de jonction reste dépendant de la qualité de la triangulation. Mais trouver une bonne triangulation dépend de l'ordre d'élimination des variables. D'une manière générale, trouver une triangulation optimale pour des graphes non-dirigés reste un problème difficile [111, 112, 113]. Néanmoins, plusieurs heuristiques ont été développées afin de réduire le coût induit par l'inférence, parmi lesquelles se trouve le critère de sélection de nœuds qui est une heuristique (induisant une complexité polynômiale) produisant une triangulation de haute qualité [114].

Dans ce qui suit, nous présentons l'algorithme de Golumbic [115] qui permet à la fois la triangulation du graphe moral et l'identification de l'ensemble des clusters (cliques)  $C_1, \dots, C_m$ . Ce dernier garantit la minimalité de chaque cluster.

---

**Algorithme 4.2 :** Triangulation du graphe moral .

---

**Entrées :** Graphe moral  $G_{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_{\mathcal{M}}, \mathcal{A}_{\mathcal{M}})$ .

**Sorties :** Graphe triangulé  $G_{\mathcal{T}}$ ,

l'ensemble de clusters  $Cluster - set = \{C_1, \dots, C_m\}$ .

**début**

$Cluster - set = \emptyset$ ;

$G'_{\mathcal{M}}(\mathcal{V}'_{\mathcal{M}}, \mathcal{A}'_{\mathcal{M}}) \leftarrow G_{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_{\mathcal{M}}, \mathcal{A}_{\mathcal{M}})$ ;

**tant que**  $\mathcal{V}'_{\mathcal{M}} \neq \emptyset$  **faire**

**si**  $\exists X \in \mathcal{V}'_{\mathcal{M}}$  **et**  $Adjacents(X)$  **sont tous liés** **alors**

$Cluster \leftarrow X \cup Adjacents(X)$ ;

$\mathcal{V}'_{\mathcal{M}} \leftarrow \mathcal{V}'_{\mathcal{M}} - \{X\}$ ;

**sinon**

            Sélectionner un nœud  $X$  tel que  $Adjacents(X)$  soit minimal;

$Arcs(X)$  l'ensemble des arcs ajoutés afin de connecter les nœuds

$Adjacents(X)$ ;

$\mathcal{A}'_{\mathcal{M}} \leftarrow Arcs(X)$ ;

$\mathcal{A}_{\mathcal{M}} \leftarrow Arcs(X)$ ;

$Cluster \leftarrow X \cup Adjacents(X)$ ;

$\mathcal{V}'_{\mathcal{M}} \leftarrow \mathcal{V}'_{\mathcal{M}} - \{X\}$ ;

**si**  $Cluster \not\subseteq Cluster - set$  **alors**

$Cluster - set \leftarrow Cluster - set \cup \{Cluster\}$ ;

– **Étape 3 (Génération de l'arbre de jonction) :**

La construction de l'arbre de jonction est la dernière partie avant de procéder à l'inférence proprement dite. Il est important de signaler que l'arbre de jonction est construit une et une seule fois. Les calculs des distributions de possibilités auront lieu dans l'arbre de jonction autant de fois que nécessaire. Pour construire un arbre de jonction optimal, il faudrait connecter les différents clusters générés dans l'étape précédente par  $m - 1$  séparateurs (où  $m$  représente le nombre de clusters) [116]. Chaque séparateur  $S_{ij}$  qui présente l'intersection entre les deux clusters  $C_i$  et  $C_j$  doit vérifier le critère d'optimalité. Ce critère permet d'optimiser le temps d'inférence dans l'arbre de jonction. Il dépend de la masse et du coût du séparateur :

- La masse d’un séparateur est le nombre de variables contenu dans ce séparateur :

$$Mass_{S_{ij}}(X_1, \dots, X_m) = m; \quad (4.2)$$

- Le coût d’un séparateur est la somme des poids associés aux deux clusters qui le relie :

$$Cost_{S_{ij}}(X_1, \dots, X_m) = Poids(C_i) + Poids(C_j); \quad (4.3)$$

- Le poids d’un cluster est le produit des poids associés à chacune de ses variables :

$$Poids_{C_i}(X_1, \dots, X_{m'}) = \prod_{i=1}^{m'} Poids(X_i);$$

- Le poids d’une variable est le nombre de ses valeurs possibles :

$$Poids_{X_i}(x_1, \dots, x_n) = n;$$

Ainsi, le choix du séparateur candidat se fait sur la base de la masse la plus élevée. Dans le cas d’égalité de masse entre plusieurs candidats, le temps d’inférence peut être optimisé en choisissant le séparateur induisant le moindre coût.

La procédure permettant de générer l’arbre de jonction optimal à partir d’un ensemble de  $m$  clusters (cluster-set) et ceci en les reliant par un ensemble de séparateurs (Separator-set) est donnée par l’Algorithme 4.3 [117] :

---

**Algorithme 4.3 :** Construction de l’arbre de jonction .

---

**Entrées :** Graphe triangulé  $G_{\mathcal{T}}$ .

**Sorties :** Arbre de jonction  $\mathcal{JT}$ .

**début**

**pour chaque**  $C_i \in Cluster - set$  **faire**

*masse - max*  $\leftarrow 0$ ;

*Sep - candidat*  $\leftarrow \emptyset$ ;

**pour chaque**  $C_j \in Cluster - set$  **et**  $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ , **avec**  $i \neq j$  **faire**

$S_{ij} \leftarrow C_i \cap C_j$ ;

    Calculer la masse associée à  $S_{ij}$  en utilisant l’équation 4.2;

**si**  $Mass_{S_{ij}} \geq masse - max$  **alors**

*Sép - candidat*  $\leftarrow Sep - candidat \cup S_{ij}$ ;

      Calculer le coût associé à  $S_{ij}$  en utilisant l’équation 4.3;

  Choisir le séparateur  $S_{ik} \in sep - candidat$  de coût minimal pour lier les clusters  $C_i$  et  $C_k$ ;

---

La nouvelle structure (arbre de jonction) obtenue après ces trois étapes reste équivalente au niveau sémantique à l’information codée par le réseau possibiliste initial.

**Exemple 4.2 :**

*Illustrons cette phase de construction, qui précède la phase d’inférence, sur un exemple de réseau possibiliste dont le graphe  $G(\mathcal{V}, \mathcal{A})$  est représenté par la Figure 4.2. Supposons que les variables sont binaires.*

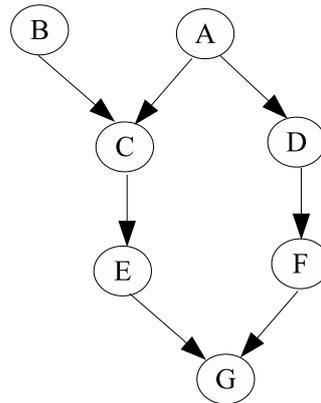


FIGURE 4.2 – DAG :  $G(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ .

**Moralisation :**

Nous procédons tout d'abord à la moralisation du graphe  $G$  donné dans la Figure 4.2. Nous marions deux à deux les parents de chaque variable (ce qui sera présenté par l'arc en pointillé), puis nous supprimons toutes les orientations dans le graphe. le graphe moral  $G_{\mathcal{M}}$  présenté dans la Figure 4.3 est ainsi obtenu.

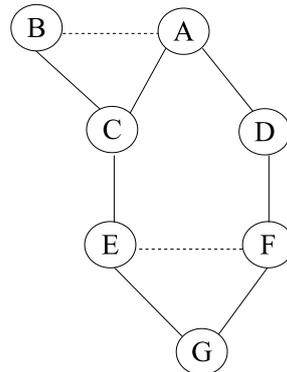


FIGURE 4.3 – Graphe moral  $G_{\mathcal{M}}$  associé à  $G$ .

**Triangulation :**

La deuxième étape consiste à trianguler le graphe moral  $G_{\mathcal{M}}$  obtenue à l'étape précédente. La triangulation se fait en effectuant une suite d'élimination des nœuds afin d'identifier les différents clusters. L'ordre d'élimination des variables ainsi que la construction des clusters sont illustrés par la Table 4.4 .

Nœuds éliminés	Clusters induits	Arcs ajoutés	Cluster-set
$G$	$EFG$	aucun	$\{EFG\}$
$B$	$ABC$	aucun	$\{EFG, ABC\}$
$E$	$CEF$	$(C, F)$	$\{EFG, ABC, CEF\}$
$C$	$ACF$	$(A, F)$	$\{EFG, ABC, CEF, ACF\}$
$F$	$ADF$	aucun	$\{EFG, ABC, CEF, ACF, ADF\}$
$A$	$AD$	aucun	$\{EFG, ABC, CEF, ACF, ADF\}$ ( $AD \subseteq ADF$ )
$D$	$D$	aucun	$\{EFG, ABC, CEF, ACF, ADF\}$ ( $D \subseteq ADF$ )

TABLE 4.4 – L'ordre d'élimination des nœuds.

La Figure 4.4 représente le graphe triangulé  $G_{\mathcal{T}}$  obtenu à partir du graphe moral  $G_{\mathcal{M}}$  de la Figure 4.3. Les arcs en gras représentent les arcs ajoutés par la procédure de triangulation.

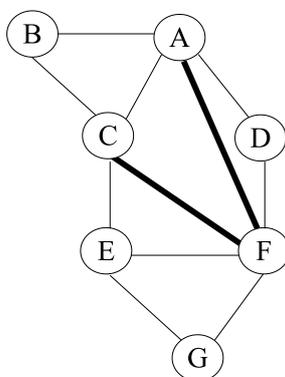


FIGURE 4.4 – Graphe triangulé  $G_{\mathcal{T}}$  associé à  $G_{\mathcal{M}}$ .

**Arbre de jonction :**

Enfin, en se basant sur l'ensemble des clusters Cluster – set trouvé lors de l'étape précédente (en appliquant l'Algorithme 4.2), nous sélectionnons les séparateurs qui satisfont les critères de maximisation de nombre des variables contenu dans le séparateur et celui de minimisation du coût (ce qui est résumé dans la Table 4.5) :

Clusters	Séparateurs candidats	Masse	Coût sélectionnés	Séparateurs
$EFG, ADF$	$F$	1	16	
$EFG, CEF$	$EF$	2	16	*
$EFG, ACF$	$F$	1	16	
$EFG, ABC$	$\emptyset$	-	-	
$ADF, CEF$	$F$	1	16	
$ADF, ACF$	$AF$	2	16	*
$ADF, ABC$	$A$	1	16	
$CEF, ACF$	$CF$	2	16	*
$CEF, ABC$	$C$	1	16	
$ACF, ABC$	$AC$	2	16	*

TABLE 4.5 – Choix des séparateurs appropriés.

Ainsi, l'arbre de jonction obtenu est donné par la Figure 4.5.

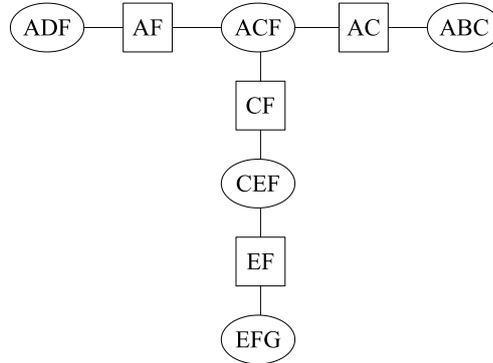


FIGURE 4.5 – Arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  associé à  $G$ .

L'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  ainsi construit code une distribution de possibilités jointe unique  $\pi_{\mathcal{JT}}$  défini par :

**Définition 4.2 :**

La distribution jointe associée à l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  est donnée par :

$$\pi_{\mathcal{JT}}(X_1, \dots, X_n) = \min_{i=1..m} \pi(C_i), \quad (4.4)$$

tel que  $\pi(C_i)$  est le potentiel associé au cluster  $C_i$  (une distribution jointe locale relative aux variables du cluster).

**4.2.2.2 Processus d'inférence**

La deuxième phase (la phase de propagation) consiste à calculer l'ensemble des distributions de possibilités du réseau après l'avènement de nouvelles informations. Cette phase s'effectue par le biais de passage de messages entre les clusters de l'arbre de jonction généré dans la phase précédente.

Une fois que l'arbre de jonction optimal est construit, nous procédons au calcul de la composante numérique de ce dernier. La composante numérique associée à l'arbre de jonction consiste à calculer la distribution de possibilités  $\pi(X)$  associée à une variable  $X$  dans le contexte d'aucune évidence [117].

Cependant, le processus général de propagation à l'arrivée d'une observation est illustré par la Figure 4.6. Il consiste à calculer la distribution de possibilités  $\pi(X | \varepsilon)$  associée à une variable  $X$  dans le contexte de l'évidence  $\varepsilon$ . Ce processus intègre des étapes supplémentaires pour la prise en compte de l'évidence. En effet, les étapes " Intégration de l'observation " et " Normalisation " ne figurent pas dans le processus de propagation sans la prise en compte de l'évidence.

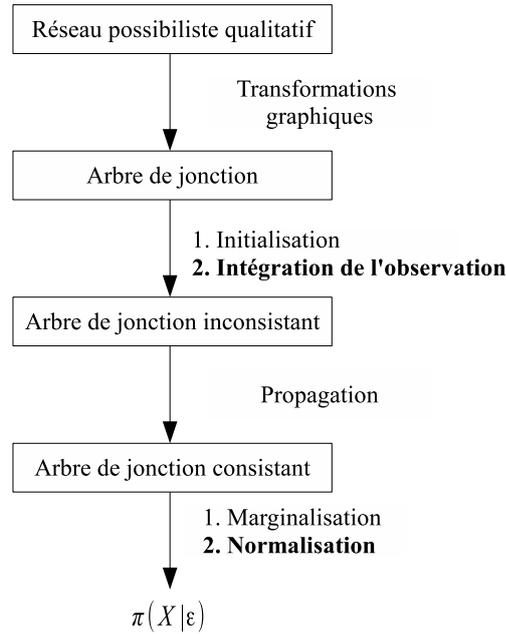


FIGURE 4.6 – Diagramme de l’algorithme de propagation en présence de l’évidence  $\varepsilon$ .

### 1. Initialisation :

Cette étape quantifie l’arbre de jonction avec les potentiels de croyance. La procédure 4.4 initialise les fonctions potentielles associées à l’arbre de jonction en utilisant les degrés de possibilités conditionnels initiaux.

---

**Algorithme 4.4 :** Initialisation de l’arbre de jonction .

---

**Entrées :** Arbre de jonction  $\mathcal{JT}$ .

**début**

**pour chaque** Cluster  $C_i$  **faire**  $\pi_{C_i}^I \leftarrow 1$  ;  
**pour chaque** Séparateur  $S_{ij}$  **faire**  $\pi_{S_{ij}}^I \leftarrow 1$  ;  
**pour chaque** Variable  $X$  **faire**  
    Sélectionner un Cluster  $C_i$  contenant  $X \cup Par(X)$  ;  
     $\pi_{C_i}^I \leftarrow \min(\pi_{C_i}^I, \pi(X | U_X))$  ;

---

Les potentiels obtenus après l’étape de l’initialisation codifient une distribution de possibilités jointe associée à l’arbre de jonction tout en satisfaisant :

$$\pi_{min}(X_1, \dots, X_n) = \pi_{\mathcal{JT}}^I(X_1, \dots, X_n). \quad (4.5)$$

Où  $\pi_{min}(X_1, \dots, X_n)$  est la distribution de possibilités jointe associée au réseau possibiliste initial  $\Pi_{G_{min}}(G, \pi)$  obtenue en utilisant l’Equation 4.1 et  $\pi_{\mathcal{JT}}^I(X_1, \dots, X_n)$  est la distribution de possibilités jointe associée à l’arbre de jonction obtenue en utilisant l’Equation 4.4.

A l’issue de cette étape, l’arbre de jonction est considéré incohérent du moment que

l'affectation initiale ne garantit pas la cohérence globale formalisée par :

$$\min_{C_i \setminus S_{ij}} \pi_{C_i} = \pi_{S_{ij}} = \min_{C_j \setminus S_{ij}} \pi_{C_j}. \quad (4.6)$$

En effet, pour assurer une cohérence globale, l'étape de propagation globale est primordiale.

Une étape intermédiaire est à prendre en considération dans le cas de présence d'une observation. Cette étape correspond à l'intégration de l'évidence dans l'arbre de jonction.

## 2. Intégration de l'évidence :

En présence d'une nouvelle information (l'évidence  $\varepsilon$ ), cette dernière doit être incorporée dans l'arbre de jonction de la façon suivante :

(a) Encoder chaque variable  $X$  par son potentiel  $\Lambda_X$  "Likelihood" comme suit :

– Si  $X \in E$ , c'est-à-dire que  $X$  est une variable observée, alors  $\forall x \in \mathcal{D}_X$  :

$$\Lambda_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \text{ est instanciée à } x \\ 0 & \text{si } X \text{ sinon} \end{cases}$$

– Si  $X \notin E$ , c'est-à-dire  $X$  n'est pas instanciée, alors :

$$\forall x \in \mathbb{D}_X, \Lambda_X(x) = 1.$$

(b) Identifier un cluster  $C_i$  contenant la variable observée  $X$ .

(c) Mettre à jour le potentiel  $\pi_{C_i}$  comme suit :

$$\pi_{C_i} \leftarrow \min(\pi_{C_i}^I, \Lambda_X).$$

En introduisant l'observation  $\varepsilon$ , l'arbre de jonction encode la distribution de possibilités jointe  $\pi_{\mathcal{J}\mathcal{T}}(X_1, \dots, X_n, \varepsilon)$  au lieu  $\pi_{\mathcal{J}\mathcal{T}}(X_1, \dots, X_n)$ .

## 3. Propagation globale :

Cette étape garantit la cohérence globale de l'arbre de jonction en satisfaisant l'Equation 4.6. Elle est la même dans le cas de présence d'une observation ou dans le cas de son absence.

La phase de propagation globale est assurée par le mécanisme de passage de messages entre les clusters jusqu'à atteindre un état d'équilibre (cohérence globale de l'arbre). Le mécanisme de passage de message entre deux clusters  $C_i$  et  $C_j$  séparés par un séparateur  $S_{ij}$  consiste à mettre à jour leurs potentiels respectifs  $\pi_{C_i}$ ,  $\pi_{C_j}$  et  $\pi_{S_{ij}}$  comme suit :

---

### Fonction 4.5 : Message( $C_i, C_j$ )

---

début

Préserver le même potentiel pour  $C_i$  ;

$$\pi_{C_i}^{t+1} \leftarrow \pi_{C_i}^t ;$$

Assigner un nouveau potentiel à  $S_{ij}$  ;

$$\pi_{S_{ij}}^{t+1} \leftarrow \max_{C_i \setminus S_{ij}} \pi_{C_i}^t ;$$

Assigner un nouveau potentiel à  $C_j$  ;

$$\pi_{C_j}^{t+1} \leftarrow \min(\pi_{C_j}^t, \pi_{S_{ij}}^{t+1}) ;$$


---

Les messages se propagent dans l'arbre de jonction  $\mathcal{J}\mathcal{T}$  en deux phases par rapport à un cluster arbitraire qui jouera le rôle d'un pivot :

– **Collecte de l'évidence :**

Dans cette phase, chaque cluster envoie un message à ses clusters adjacents dans le sens du pivot, tout en commençant par les clusters les plus éloignés de celui-ci (ce qui correspond aux feuilles de l'arbre).

---

**Fonction 4.6 :** Collecte-évidence( $C_i$ )

---

début

┌ **pour chaque**  $C_j$ , *adjacent à  $C_i$*  **faire**  
├     Collecte-évidence( $C_j$ );  
└     Message( $C_i, C_j$ );

---

– **Distribution de l'évidence :**

Dans cette phase, les messages se propagent d'un cluster à ses voisins (clusters adjacents) en partant du cluster racine (pivot) et en arrivant aux clusters feuilles.

---

**Fonction 4.7 :** Distribution-évidence( $C_i$ ) .

---

début

┌ **pour chaque**  $C_j$ , *adjacent à  $C_i$*  **faire**  
├     Message( $C_i, C_j$ );  
└     Distribution-évidence( $C_j$ );

---

La procédure de propagation globale peut être résumée comme suit :

---

**Algorithme 4.8 :** Propagation globale .

---

**Entrées :** Arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  incohérent.

**Sorties :** Arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  cohérent.

début

┌ Soit un cluster arbitraire  $C_i$  représentant la racine de la propagation ;  
├     *Pivot*  $\leftarrow C_i$ ;  
├     Collecte-évidence(*Pivot*);  
└     Distribution-évidence(*Pivot*);

---

4. **Marginalisation :**

Après l'étape de propagation globale, l'arbre de jonction obtenu est cohérent. A ce stade, le calcul de la distribution de possibilités associée à chaque variable peut être effectué. Selon que nous traitons un arbre de jonction où l'évidence  $\varepsilon$  est incorporée ou non, nous distinguons deux cas :

Le cas où l'évidence  $\varepsilon$  n'est pas prise en charge (omission de l'étape : Intégration de l'observation), le potentiel de chaque cluster correspond à son degré de possibilité. Par conséquent, le degré de possibilité associé à chaque variable  $X$  est calculé par marginalisation (voir Algorithme 4.9).

---

**Procédure 4.9** : Possibilités marginales .

---

**début**

**Entrées** : Arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  cohérent.

**Sorties** :  $\pi(X)$  : Degré de possibilité marginale associé à chaque variable  $X \in \mathcal{JT}$

**pour chaque variable  $X \in \mathcal{JT}$  faire**

    Identifier un cluster  $C_i$  contenant  $X$  ;

$$\pi(X) = \max_{C_i \setminus X} \pi_{C_i}^C$$

---

Le cas où l'évidence  $\varepsilon$  est incorporée dans l'arbre de jonction, le potentiel associé à chaque cluster  $C_i$  correspond au degré de possibilité  $\pi(C_i, \varepsilon)$ . D'où la marginalisation du potentiel sur une variable  $X$  donnera plutôt le degré de possibilité de  $X$  et  $\varepsilon$  :

$$\pi(X, \varepsilon) = \max_{C_i \setminus X} \pi_{C_i}.$$

**5. Normalisation :**

A l'arrivée d'une nouvelle information  $\varepsilon$ , le but est de calculer la distribution de possibilités conditionnelle  $\pi(X | \varepsilon)$ . Ceci est obtenu à partir de  $\pi(X, \varepsilon)$  en appliquant la définition du conditionnement basé sur le min :

$$\pi(X | \varepsilon) = \begin{cases} \pi(X, \varepsilon) & \text{Si } \pi(X, \varepsilon) < \pi(\varepsilon) = \max_X \pi(X, \varepsilon) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exemple 4.3 :**

Reprenons l'arbre de jonction de la Figure 4.5 de l'Exemple 4.2. Supposons que de nouvelles informations ont été obtenues par les nœuds  $C$  et  $G$ , c'est-à-dire l'évidence  $E = \{C, G\}$  (ce qui reflète les variables instanciées). L'instance correspondante à  $E$  est définie par  $\varepsilon = (-c, g)$ . Alors, pour propager ces informations dans tout l'arbre de jonction, un cluster sera choisi arbitrairement pour jouer le rôle du pivot, soit  $C = \{ACF\}$  ce dernier. Nous appelons la fonction **Collecte-evidence(C)** sur ce cluster qui à son tour appelle récursivement la fonction **Collecte-evidence** sur ses clusters adjacents  $ADF$ ,  $ABC$  et  $CEF$ . Cette opération se poursuit jusqu'aux feuilles où commencera l'opération de passage de messages des clusters adjacents (mise à jour des possibilités des clusters concernés par la modification).

Dans une deuxième étape, la fonction **Distribution-evidence(C)** est appelée sur le pivot  $ACF$  pour passer le message aux clusters adjacents et ainsi de suite jusqu'à ce que l'équilibre soit rétabli (l'Equation 4.6 est satisfaite).

La Figure 4.7 montre le flux des messages transmis entre les différents clusters.

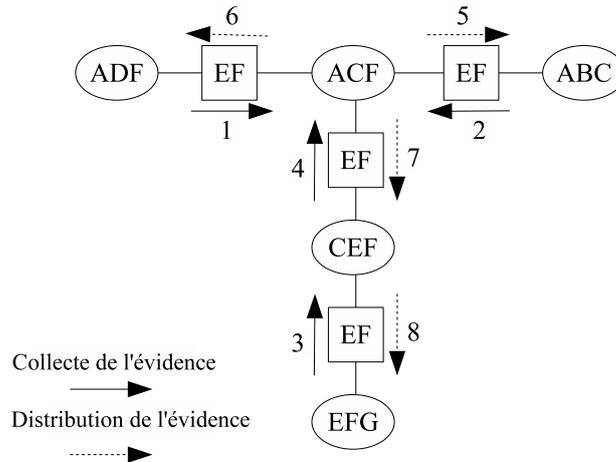


FIGURE 4.7 – Flux des messages dans  $\mathcal{JT}$  de l'Exemple 4.2.

### 4.3 Arbres de décision possibilistes qualitatifs

Les arbres de décision permettent une modélisation simple et explicite des problèmes de la décision séquentielle [4] en représentant de façon graphique tous les scénarios possibles. Ils ont été utilisés dans plusieurs applications du monde réel tels que la santé, l'environnement et l'énergie.

Les arbres de décision probabilistes [97] sont les premiers modèles graphiques de décision. La contrepartie possibiliste de ce modèle a été proposée dans [11, 12] permettant ainsi l'utilisation des critères de décision développés dans la théorie de la décision possibiliste (voir Chapitre 2) pour évaluer les différentes stratégies.

#### 4.3.1 Définition d'un arbre de décision possibiliste

Comme dans le cadre probabiliste, un arbre de décision possibiliste est caractérisé par deux composantes : une composante graphique (identique à celle des arbres de décision probabilistes) et une composante numérique [11, 12].

##### 1. Une composante graphique :

elle est représentée par un arbre  $T(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ , où  $\mathcal{N} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{F}$  représente l'ensemble des variables contenant trois types différents de nœuds : nœuds chances, nœuds de décisions et nœuds utilités.  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des arcs, représentant les relations de dépendances entre les variables.

- **Les nœuds chances** : ils sont représentés par des cercles. Ils représentent les états du monde et reflètent l'aspect incertain du problème de décision.  $X_i \in \mathcal{C} = \{X_1, \dots, X_n\}$  telle que la combinaison des valeurs des différentes variables  $x = \{x_{1i}, \dots, x_{ni}\}$  représente un état du monde.
- **Les nœuds décisions** : ils sont représentés par des rectangles. L'ensemble des décisions  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_p\}$  illustrent les options de décisions. Les indices des nœuds sont supposés en accord avec l'ordre temporel d'exécution des décisions. Une combinaison des valeurs  $d = \{d_{1i}, \dots, d_{pi}\}$  représente une décision.
- **Les nœuds utilités** : ce sont les feuilles de l'arbre. L'ensemble des feuilles d'utilité est  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_k\}$  telle que,  $\forall f_i \in \mathcal{F}, \mu(f_i)$  est l'utilité d'être éventuellement dans le

nœud  $f_i$ .

L'ensemble des enfants d'un nœud  $N_i \in \mathcal{N}$ , est noté  $Succ(N_i) \subseteq \mathcal{N}$ . L'ensemble  $Succ(D_i) \subseteq \mathcal{C}$  représente les actions qui peuvent être décidées quand  $D_i$  est observée,  $\forall D_i \in \mathcal{D}$ .  $\forall X_i$ ,  $Succ(X_i) \subseteq \mathcal{F} \cup \mathcal{D}$ ,  $Succ(X_i)$  est en effet l'ensemble des résultats possibles de l'action  $X_i$  : soit un nœud feuille est observé (son utilité est accumulée), soit un nœud décision est observé (nouvelle action doit être exécutée).

La taille d'un arbre de décision  $|T|$  est le nombre de ses arcs qui est égale aux nombre de ses nœuds moins 1.

## 2. Une composante numérique :

La composante numérique d'un arbre de décision permet d'une part la représentation de l'incertitude en quantifiant les arcs sortants des nœuds chances et d'autre part en attribuant des utilités aux nœuds feuilles. Dans les arbres de décision classiques probabilistes, l'incertitude portant sur le résultat de chaque nœud  $X_i$  est représentée par une distribution de probabilités sur  $Succ(X_i)$ . Dans le cadre possibiliste, un étiquetage possibiliste est bien évidemment utilisé.

- L'incertitude relative aux résultats possibles pour chaque  $X_i \in \mathcal{C}$  est représentée par une distribution de possibilités conditionnelle  $\pi_i(X_j \mid Chemin(X_i))$ ,  $\forall X_j \in Succ(X_i)$ , où  $Chemin(X_i)$  désigne toutes les affectations de valeurs aux nœuds de chances et de décisions sur le chemin du nœud racine au nœud  $X_i$ . Pour chaque nœud  $X_i \in \mathcal{C}$  est associé une loterie possibiliste  $l_{X_i}$  relativement à ses conséquences.
- Une utilité est associée à chaque nœud feuille. Cette utilité peut être numérique ou ordinale (qualitative) selon le critère de décision utilisé (dans notre cas, l'utilité est ordinale puisque nous traitons les arbres de décision qualitatifs).

### Exemple 4.4 :

Soit l'arbre de décision de la Figure 4.8 défini sur un ensemble de nœuds  $\mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{F}$ . Un ensemble de nœuds chances  $\mathcal{C} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$ , un ensemble de nœuds décisions  $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3\}$  et un ensemble de feuilles utilités  $\mathcal{F} = \{0, .1, .2, .8, 1\}$ .

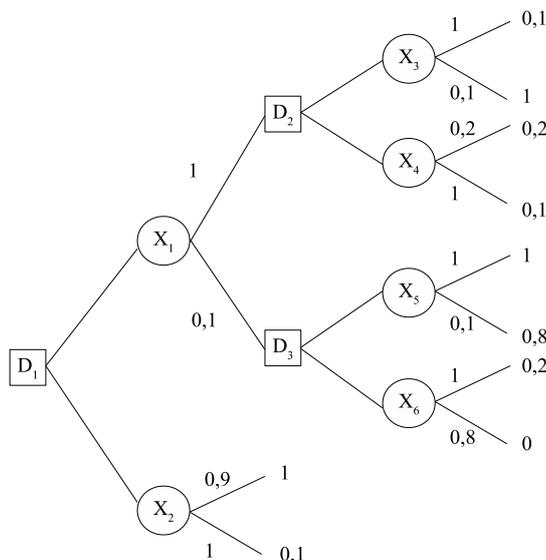


FIGURE 4.8 – Exemple d’un arbre de décision possibiliste.

La composante numérique de cet arbre de décision peut être interprétée par les loteries associées à chaque nœud chance de la façon suivante :

- $l_{X_1} = \langle 1/l_{D_2}, .1/l_{D_3} \rangle$ ,
- $l_{X_2} = \langle .9/1, 1/.1 \rangle$ ,
- $l_{X_3} = \langle 1/.1, .1/1 \rangle$ ,
- $l_{X_4} = \langle .2/.2, 1/.1 \rangle$ ,
- $l_{X_5} = \langle 1/1, .1/.8 \rangle$ ,
- $l_{X_6} = \langle 1/.2, .8/0 \rangle$ ,

### 4.3.2 Evaluation d’un arbre de décision possibiliste

La résolution d’un arbre de décision possibiliste revient à trouver la stratégie la plus optimale  $\delta^* \in \Delta$  (voir Chapitre 2, Section 2.4.2) maximisant un critère de décision donné.

Les stratégies peuvent être évaluées et comparées grâce à la notion de réduction de loterie (voir Chapitre 2, Section 2.3.1). En effet, chaque stratégie  $\delta_i$  est une loterie composée et peut être réduite à une autre loterie équivalente simple.

Il a été montré dans [53] (voir Chapitre 2, Section 2.4.2) que les deux critères de décision qualitatifs (optimiste et pessimiste) peuvent être réécrits d’une manière récursive. Par conséquent, nous pouvons faire appel à la programmation dynamique pour trouver la meilleur stratégie. L’Algorithme 4.10 a été proposé dans [118, 12], pour le calcul des décisions optimales optimistes et pessimistes, basé sur la programmation dynamique. L’algorithme de calcul est une contrepartie possibiliste de celui proposé pour les arbres de décision probabilistes [79].

---

**Fonction 4.10 :** Stratégie-Arbre-Décision( $N, \delta$ ).

---

**Entrées :** Un nœud  $N \in \mathcal{N}$ .

**Sorties :** Une loterie  $l = \langle l[\mu_1]/\mu_1, \dots, l[\mu_n]/\mu_n \rangle$ ,  
une stratégie  $\delta$ .

**début**

```

pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  faire  $l[\mu_i] \leftarrow 0$ ,  $l[\mu_i]$  est le degré de possibilité d'avoir l'utilité  $\mu_i$ 
dans  $l$ ;
si  $N \in \mathcal{F}$  alors  $l[\mu(N)] \leftarrow 1$ ;
si  $N \in \mathcal{C}$  alors
    Réduction de loterie composée,
    pour chaque  $Y \in Succ(N)$  faire
         $l_Y \leftarrow$  Stratégie-Arbre-Décision ( $Y, \delta$ ),
        pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  faire
             $l[\mu_i] \leftarrow \max(l[\mu_i], \min(\pi_N(Y), l_Y[\mu_i]))$ ,
    si  $N \in \mathcal{D}$  alors
        Choix de la meilleure décision,
         $Y^* \leftarrow Succ(N).premier$ ,
        pour chaque  $Y \in Succ(N)$  faire
             $l_Y \leftarrow$  Stratégie-Arbre-Décision ( $Y, \delta$ ),
            si  $l_Y >_o l_{Y^*}$  alors  $Y^* \leftarrow Y$ ,  $o$  présente un critère de décision (Optimiste ou
            Pessimiste);
         $\delta_N \leftarrow Y^*$ ,
         $l \leftarrow l_{Y^*}$ ,
    Retourner  $l$ ,

```

---

Le calcul d'une stratégie optimale (optimiste ou pessimiste) s'effectue en profondeur en attachant à chaque nœud un degré d'utilité et en effectuant des coupures d'arrêtes issues de chaque nœud décision (une seule arrête issue de chaque nœud décision étant conservée) tout en réduisant les loteries composées générées au niveau de chaque nœud. Les deux opérations de base appliquées par cet algorithme sont :

- Dans le cas d'un nœud décision : ce nœud reçoit la plus grande utilité possibiliste associée à l'un de ses fils. En effet, le choix porte sur la stratégie partielle optimale maximisant le critère de décision utilisé (optimiste ou pessimiste) en comparant les loteries simples équivalentes à chaque stratégie partielle. Graphiquement parlant, c'est l'arrête issue de ce nœud ayant la plus grande valeur d'utilité qui est conservée.
- Dans le cas d'un nœud chance : une stratégie partielle optimale est construite pour chacun de ses fils. Ces stratégies partielles seront combinées par rapport aux degrés de possibilité et la loterie composée résultante sera par la suite réduite à une loterie simple représentant ainsi la stratégie partielle courante la plus optimale. L'utilité possibiliste (optimiste ou pessimiste) de ce nœud chance est calculée à partir des utilités associées à chacun de ses fils.

L'algorithme s'arrête jusqu'à ce qu'une utilité possibiliste soit attachée à la racine. Le sous-arbre restant représente la stratégie optimale ainsi que son utilité (optimiste ou pessimiste).

**Exemple 4.5 :**

*Procédons à la résolution de l'arbre de décision de la Figure 4.8 de l'Exemple 4.4 en exécutant l'Algorithme 4.10. La Figure 4.9 illustre les différents calculs nécessaires pour la résolution de cet arbre de décision. Le but est de trouver la stratégie  $\delta_{Opt}^*$  optimiste optimale.*

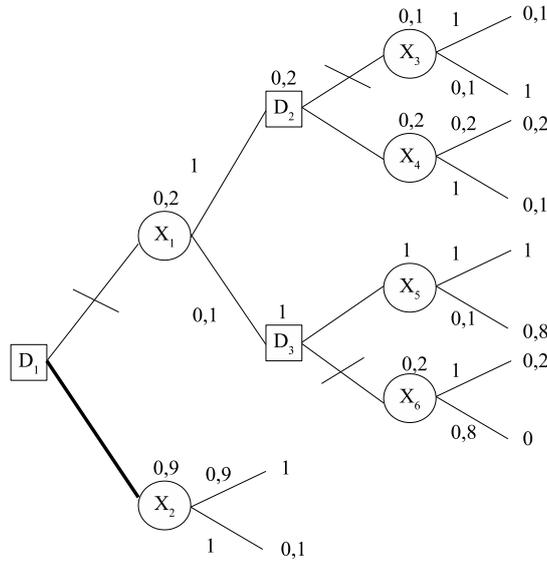


FIGURE 4.9 – La stratégie optimale optimiste de l’Exemple 4.4.

Pour le nœud chance  $X_3$  :

- $l_{X_3} = \langle 0/0, 1/.1, 0/.2, 0/.8, .1/1 \rangle$ ,
- En utilisant l’Equation 2.19,  $u_{Opt}(l_{X_3}) = .1$ .

Il en est de même pour le nœud chance  $X_4$  :  $l_{X_4} = \langle 0/0, 1/.1, .2/.2, 0/.8, 0/1 \rangle$  et  $u_{Opt}(l_{X_4}) = .2$ ,

Pour le nœud décision  $D_2$  :

- Puisque  $u_{Opt}(l_{X_4}) > u_{Opt}(l_{X_3})$  donc la stratégie partielle optimale est  $\delta_{D_2} = X_4$  (coupure de l’arrête  $X_3$ ). Par conséquent, l’utilité associée à  $D_2$  :  $u_{Opt}(D_2) = .2$
- La stratégie partielle optimale optimiste au niveau du nœud  $D_2$  peut être interprétée par la loterie :  $l_{D_2} = \langle 0/0, 1/.1, .2/.2, 0/.8, 0/1 \rangle$ .

De la même façon le reste des nœuds est traité jusqu’à ce que l’utilité  $u_{Opt}(D_1) = .9$  est affectée au nœud racine  $D_1$  avec une stratégie optimiste optimale  $\delta_{Opt}^* = \{(D_1, X_2)\}$  représentée par des arrêtes en gras sur la Figure 4.9.

#### 4.4 Diagrammes d’influence possibilistes qualitatifs

Malgré la popularité des arbres de décision, ils présentent certaines limites lorsqu’il s’agit des problèmes de décision de grands tailles. Les Diagrammes d’Influence (DI) sont ainsi développés pour la formalisation des problèmes de décision comme modèle alternatif aux arbres de décision. Initialement, les diagrammes d’influence probabiliste ont été proposés dans [99, 119], ce sont des modèles graphiques compacts pour représenter les connaissances et les préférences du décideur sur une séquence de décisions. Comme pour les arbres de décision, la contrepartie possibiliste des diagrammes d’influence a été proposée dans [11, 13, 14] permettant ainsi la représentation des problèmes de la décision séquentielle dans un contexte qualitatif ou quantitatif.

Dans ce mémoire, nous nous contentons par la représentation des diagrammes d’influence qualitatifs (basés sur le min) où les connaissances et les préférences de l’agent sont toutes les deux exprimées d’une façon qualitative.

#### 4.4.1 Définition d'un diagramme d'influence qualitatif

Comme dans le cadre probabiliste, un Diagramme d'Influence Possibiliste (DIP)  $IID(G_{ID}, \pi_{min}^{ID}, \mu_{min}^{ID})$  est caractérisé par deux composantes : une composante graphique (identique à celle des diagrammes d'influence probabilistes) et une composante numérique permettant l'évaluation des différents liens du graphe [11, 13, 14].

##### 1. Une composante graphique :

Elle est représentée par un DAG  $G_{ID} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ , où  $\mathcal{N} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{V}$  représente l'ensemble des variables contenant trois types différents de nœuds : nœuds chances, nœuds décisions et nœuds utilités.  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des arcs (informationnels ou conditionnels), représentant les relations de dépendances entre les variables.

- **Les nœuds chances  $\mathcal{C}$**  : ils sont représentés par des cercles. Ils représentent les états du monde et reflètent l'aspect incertain du problème de décision.  $X_i \in \mathcal{C} = \{X_1, \dots, X_n\}$  telle que la combinaison des valeurs des différentes variables  $x = \{x_{1i}, \dots, x_{ni}\}$  représente un état du monde.
- **Les nœuds décisions  $\mathcal{D}$**  : ils sont représentés par des rectangles. L'ensemble des décisions  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_p\}$  illustrent les options de décisions. Une combinaison de valeurs  $d = \{d_{1i}, \dots, d_{pi}\}$  représente une décision.
- **Les nœuds utilités (valeurs)  $\mathcal{V}$**  : ces nœuds  $V_k \in \mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_q\}$  sont représentés par des losanges. Ils représentent les fonctions d'utilité locales (degrés de satisfaction locaux)  $\mu_k \in \{\mu_1, \dots, \mu_q\}$ .

L'ensemble des arcs  $\mathcal{A}$  représente les dépendances locales entre les différentes variables. Deux types d'arcs sont à distinguer en fonction de leurs cibles.

- **Arcs informationnels** : ils pointent vers des nœuds de décisions et impliquent une précédence temporelle. En effet, ils spécifient les variables  $Par(D_j) \subseteq \mathcal{C}$  dont la valeur est révélée immédiatement avant que la valeur de  $D_j$  soit choisie.
- **Arcs conditionnels** : ils pointent vers des nœuds chances ou utilités. Les arcs qui ont pour cible un nœud chance  $X_i$  spécifient l'ensemble des variables  $Par(X_i) \subseteq \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$  dont dépend le degré de possibilité conditionnel de ce nœud. Il en est de même pour les arcs pointant vers un nœud utilité  $V_k$ . Ils spécifient les variables  $Par(V_k) \subseteq \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$  dont dépend la fonction d'utilité locale  $\mu_k$ .

Un DIP doit satisfaire certaines propriétés importantes :

- Le chemin qui lie les différentes variables de décision représente l'ordre dans lequel elles doivent être prises.
- Les nœuds d'utilité n'ont pas de successeurs.

##### 2. Une composante numérique :

La composante numérique d'un DIP permet de quantifier les différents liens du DAG pour exprimer l'incertitude et les préférences de l'agent. D'une part, l'agent doit exprimer son incertitude en affectant des degrés de possibilités a priori et conditionnels aux nœuds chance. Les distributions de possibilités sont définies sur une échelle ordonnée  $\mathcal{L} = [0, 1]$  et elles sont supposées normalisées. D'autre part, il doit quantifier les nœuds utilités sur une échelle  $\mathcal{U}$  (pas forcément normalisée) pour exprimer ses préférences.

- Pour chaque nœud  $X \in \mathcal{C}$ , l'incertitude est représentée par :
  - Si  $X$  est un nœud racine, un degré de possibilités a priori  $\pi_{ID}(x)$  est associé pour chaque instance  $x \in \mathbb{D}_X$ , tel que  $\max_{x \in \mathbb{D}_X} \pi_{ID}(x) = 1$ ,
  - Si  $X$  a des parents ( $Par(X) \neq \emptyset$ ), un degré de possibilités conditionnel  $\pi_{ID}(x | u_X)$  est associé pour chaque instance  $x \in \mathbb{D}_X$  et  $u_X \in \mathbb{D}_{Par(X)} = \times_{X_j \in Par(X)} \mathbb{D}_{X_j}$ , tel que  $\max_{x \in \mathbb{D}_X} \pi_{ID}(x | u_X) = 1$ , pour toute instance  $u_X$ .

- Les nœuds de décisions ne sont pas quantifiés. En effet, la valeur d'un nœud décision  $D_j$  est déterministe, elle est fixée par l'agent décideur.

Une fois que la décision  $d = \{d_{1i}, \dots, d_{pj}\} \in \mathcal{D}$  est fixée, les nœuds chances du diagramme d'influence possibiliste qualitatif forment un réseau possibiliste qualitatif induisant une distribution de possibilités conditionnelle jointe unique relative aux interprétations des nœuds chance  $x = \{x_{1i}, \dots, x_{nj}\}$ , dans le contexte de  $d$ .

$$\pi_{min}^{ID}(x | d) = \min_{i=1..n} \pi_{ID}(x_{il} | u_{X_i}), \quad (4.7)$$

avec  $x_{il} \in \mathbb{D}_{X_i}$  et  $u_{X_i} \in \mathbb{D}_{Par(X_i)} = \times_{X_m \in Par(X_i), D_j \in Par(X_i)} \mathbb{D}_{X_m} \cup \mathbb{D}_{D_j}$ .

- Pour chaque nœud utilité  $V_{k=1..q} \in \mathcal{V}$ , des valeurs ordinales (qualitatives)  $\mu_k(u_{V_k})$  sont affectées à toutes les instantiations possibles  $u_{V_k}$  des parents  $Par(V_k)$ . Les valeurs ordinales  $\mu_k$  représentent les degrés de satisfaction associés aux instantiations locales des variables parents.

Le degré de satisfaction global  $\mu_{min}^{ID}(x, d)$  relative à l'instantiation globale  $(x, d)$  de toutes les variables (nœuds chances et décisions) peut être calculé par le minimum des degrés de satisfaction locaux :

$$\mu_{min}^{ID}(x, d) = \min_{k=1..q} \mu_k(u_{V_k}), \quad (4.8)$$

avec  $u_{V_k} \in \mathbb{D}_{Par(V_k)} = \times_{X_i \in Par(V_k), D_j \in Par(V_k)} \mathbb{D}_{X_i} \cup \mathbb{D}_{D_j}$ .

**Exemple 4.6 :**

Considérons un problème de décision simple modélisé par un diagramme d'influence possibiliste qualitatif  $\Pi ID_{min}(G_{ID}, \pi_{min}^{ID}, \mu_{min}^{ID})$ . La composante graphique  $G_{ID}$  est représentée par la Figure 4.10. Elle est composée de deux nœuds chances  $\mathcal{C} = \{X_1, X_2\}$ , de deux nœuds décisions  $\mathcal{D} = \{D_1, D_2\}$  et un nœud utilité  $\mathcal{V} = \{V_1\}$ . Toutes les variables sont supposées être binaires.

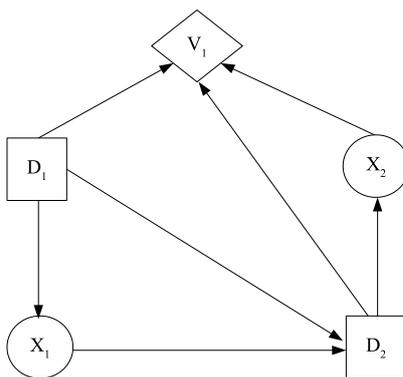


FIGURE 4.10 – Un exemple d'un diagramme d'influence possibiliste.

La composante numérique est représentée par les distributions de possibilités conditionnelles associées aux nœuds chances  $X_1, X_2$  et l'utilité ordinal locale attachée au nœud  $V_1$  dans le contexte de ses parents. Les distributions conditionnelles sont représentées dans la Table 4.6. Les utilités attachées au nœud  $V_1$  sont données dans la Table 4.7.

$X_1$	$D_1$	$\pi_{ID}(X_1   D_1)$	$X_2$	$D_2$	$\pi_{ID}(X_2   D_2)$
$x_1$	$d_1$	.7	$x_2$	$d_2$	1
$x_1$	$\neg d_1$	.1	$x_2$	$\neg d_2$	.9
$\neg x_1$	$d_1$	1	$\neg x_2$	$d_2$	.2
$\neg x_1$	$\neg d_1$	.5	$\neg x_2$	$\neg d_2$	1

TABLE 4.6 – Distribution de possibilités initiales sur  $X_1$  et  $X_2$ .

$X_2$	$D_1$	$D_2$	$\mu_1(X_2, D_1, D_2)$	$X_2$	$D_1$	$D_2$	$\mu_1(X_2, D_1, D_2)$
$x_2$	$d_1$	$d_2$	.5	$\neg x_2$	$d_1$	$d_2$	1
$x_2$	$d_1$	$\neg d_2$	.9	$\neg x_2$	$d_1$	$\neg d_2$	.4
$x_2$	$\neg d_1$	$d_2$	.5	$\neg x_2$	$\neg d_1$	$d_2$	.9
$x_2$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.1	$\neg x_2$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.7

TABLE 4.7 – Utilité qualitative  $\mu_1$  sur  $X_2, D_1, D_2$ .

La distribution de possibilités conditionnelle jointe  $\pi_{min}^{ID}$ , induite par  $\text{IID}_{min}$ , est donnée par la Table 4.8 en utilisant l'Equation 4.7.

$X_1$	$X_2$	$D_1$	$D_2$	$\pi_{min}^{ID}$	$X_1$	$X_2$	$D_1$	$D_2$	$\pi_{min}^{ID}$
$x_1$	$x_2$	$d_1$	$d_2$	.5	$\neg x_1$	$x_2$	$d_1$	$d_2$	.5
$x_1$	$x_2$	$d_1$	$\neg d_2$	.7	$\neg x_1$	$x_2$	$d_1$	$\neg d_2$	.9
$x_1$	$x_2$	$\neg d_1$	$d_2$	.5	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg d_1$	$d_2$	.5
$x_1$	$x_2$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.5	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.9
$x_1$	$\neg x_2$	$d_1$	$d_2$	.7	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$d_1$	$d_2$	1
$x_1$	$\neg x_2$	$d_1$	$\neg d_2$	.7	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$d_1$	$\neg d_2$	1
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg d_1$	$d_2$	.5	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg d_1$	$d_2$	1
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.5	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	1

TABLE 4.8 – Distribution de possibilités conditionnelle jointe  $\pi_{min}^{ID}$  sur  $X_1, X_2$  sachant  $D_1, D_2$ .

Le degré de satisfaction global  $\mu_{min}^{ID}(D_1, D_2, X_1, X_2)$  généré par  $\text{IID}_{min}$  est calculé en utilisant l'Equation 4.8. Les résultats sont reportés dans la Table 4.9.

$D_1$	$D_2$	$X_1$	$X_2$	$\mu_{min}^{ID}$	$D_1$	$D_2$	$X_1$	$X_2$	$\mu_{min}^{ID}$
$d_1$	$d_2$	$x_1$	$x_2$	.5	$\neg d_1$	$d_2$	$x_1$	$x_2$	.5
$d_1$	$d_2$	$x_1$	$\neg x_2$	1	$\neg d_1$	$d_2$	$x_1$	$\neg x_2$	.9
$d_1$	$d_2$	$\neg x_1$	$x_2$	.5	$\neg d_1$	$d_2$	$\neg x_1$	$x_2$	.5
$d_1$	$d_2$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	1	$\neg d_1$	$d_2$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	.9
$d_1$	$\neg d_2$	$x_1$	$x_2$	.9	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$x_1$	$x_2$	.1
$d_1$	$\neg d_2$	$x_1$	$\neg x_2$	.4	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$x_1$	$\neg x_2$	.7
$d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_1$	$x_2$	.9	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_1$	$x_2$	.1
$d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	.4	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	.7

TABLE 4.9 – Utilité globale qualitative  $\mu_{min}^{ID}(D_1, D_2, X_1, X_2)$ .

#### 4.4.2 Evaluation d'un diagramme d'influence qualitatif

L'évaluation d'un diagramme d'influence consiste à trouver la stratégie optimale maximisant un des critères de décision (voir Chapitre 2, Section 2.4). Rappelons qu'une stratégie

affecte une instantiation  $d \in \mathcal{D}$  pour chaque instantiation globale  $x \in \mathcal{C}$  des variables d'état. Toutes les solutions, proposées pour l'évaluation d'un DI, supposent que le diagramme d'influence satisfait la contrainte de régularité. Cette contrainte exige l'existence d'un pré-ordre total entre les nœuds de décisions. Ce type de diagramme modélise les problèmes à un seul décideur. Cette propriété est importante pour une résolution locale (pour chaque décision) du DI en utilisant la programmation dynamique. Cependant, les DI modélisant, les problèmes où plusieurs décideurs coopèrent pour atteindre un but commun, ne satisfont pas la contrainte de régularité. Ces DI sont connus dans la littérature sous le nom "Limited Memory Influence Diagrams" et leur résolution consiste à trouver un plan optimal [120]. Notre travail concerne le premier cas de DI.

Dans le cadre probabiliste, nous distinguons deux méthodes d'évaluation : des méthodes directes [121] qui nécessitent un nombre important de calculs et des méthodes indirectes [119] qui requièrent la transformation graphique du graphe initial en une structure secondaire sur laquelle s'effectuera les différents calculs. Les contreparties possibilistes des méthodes de résolution probabilistes ont été proposées dans différents travaux : (1) des méthodes directes qui se basent sur la structure initiale mais exigent des calculs additionnels pour l'élimination des variables [11]. (2) des méthodes indirectes qui transforment le DIP en un arbre de décision [11] possibiliste ou en un réseau possibiliste [13, 14].

Dans ce qui suit, nous présentons une méthode de résolution indirecte d'un DIP qualitatif proposée dans [14, 12] et qui est la contrepartie possibiliste de la solution probabiliste proposée dans [122]. La solution proposée consiste d'abord à transformer le DIP qualitatif initial en un réseau possibiliste qualitatif, en suite un appel aux algorithmes de propagation est nécessaire permettant d'effectuer des calculs d'une manière locale pour trouver les stratégies optimales. Il est à noter que les algorithmes de propagation dans les réseaux possibilistes se basent sur la programmation dynamique, donc ils peuvent être utilisés pour résoudre un DIP qualitatif en se basant sur l'un des deux critères de décision (optimiste ou pessimiste) vus dans le Chapitre 2 (Section 2.4.2).

La solution proposée se résume en trois étapes :

- **Réduction des nœuds utilités** : La résolution d'un DIP avec plusieurs nœuds utilités nécessite une étape de pré-traitement avant sa transformation. Cette étape consiste à la réduction des nœuds utilités en un seul nœud (noté  $V_r$ ) qui va hériter les parents de tous les nœuds d'utilité. L'utilité attachée au nœud d'utilité  $V_r$  est le minimum des utilités, formellement :

$$\mu_r(u_{V_r}) = \mu_{min}^{ID}(x, d) = \min_{k=1..q} \mu_k(u_{V_k}), \quad (4.9)$$

avec  $u_{V_r} \in \mathbb{D}_{Par(V_r)}$  et  $u_{V_k} \in \mathbb{D}_{Par(V_k)}$ .

- **Transformation du PID en un réseau possibiliste qualitatif** : Le principe est de transformer les nœuds de décisions et d'utilités en des nœuds chances afin d'obtenir un réseau possibiliste équivalent.
  - Chaque nœud décision  $D_j$  est transformé en un nœud chance représentant l'ignorance totale, à savoir :

$$\forall D_j \in \mathcal{D}, \pi(d_{jl} | u_{D_j}) = 1, \quad (4.10)$$

pour chaque instance  $d_{jl} \in \mathbb{D}_{D_j}$  et  $u_{D_j} \in \mathbb{D}_{Par(D_j)}$ .

- Chaque nœud utilité  $V_k$  est transformé en un nœud chance binaire. Sa quantification dépend de la nature des utilités. Deux cas sont à distinguer :
  - La contrainte de commensurabilité est satisfaite (incertitude et préférences définies sur la même échelle  $[0, 1]$ ),

$$\pi(v_r | u_{V_r}) = \mu_r(u_{V_r}), \quad (4.11)$$

et

$$\pi(\neg v_r \mid u_{V_r}) = 1, \quad (4.12)$$

avec  $u_{V_r} \in \mathbb{D}_{Par(V_r)}$ .

- La contrainte de commensurabilité n'est pas satisfaite, alors chaque utilité doit être redéfinie sur l'échelle unitaire,

$$\pi(v_r \mid u_{V_r}) = \frac{\mu_r(u_{V_r}) - U_{min}}{U_{max} - U_{min}}, \quad (4.13)$$

et

$$\pi(\neg v_r \mid u_{V_r}) = \frac{\mu_r(u_{V_r}) - U_{min}}{U_{max} - U_{min}}, \quad (4.14)$$

avec  $U_{max}$  (resp.  $U_{min}$ ) l'utilité maximale dans  $\mu(U_{V_r})$  (resp. l'utilité minimale dans  $\mu(U_{V_r})$ ).

- **Propagation** : L'algorithme de propagation est effectué sur la structure secondaire générée à l'étape précédente pour calculer les stratégies optimales. L'évaluation du DIP qualitatif se fait d'une manière itérative en commençant par l'instantiation de la dernière décision  $D_p$  qui maximise l'utilité (optimiste ou pessimiste) en prenant en considération l'ensemble des évidences  $E$  (l'ensemble des nœuds instanciés). Par la suite, le processus est itéré pour chaque décision  $D_j$  ( $j = p - 1, \dots, 1$ ) en considérant l'ensemble des évidences mis à jour avec les instantiations sélectionnées des décisions des étapes précédentes.

Il a été montré dans [14, 12] que le critère d'utilité optimiste (Equation 2.19) peut être réécrit de la façon suivante :

$$u_{Opt}^*(D_j, E) = \max_{d_j \in \mathbb{D}_{D_j}} \pi(v_r \mid d_j, \varepsilon). \quad (4.15)$$

De même pour le critère pessimiste (Equation ??), peut être réécrit de la façon suivante :

$$u_{Pes}^*(D_j, E) = \max_{d_j \in \mathbb{D}_{D_j}} \min_{u'_r \in \mathbb{D}_{Par'_r}} \pi(v_r \mid u'_r, d_j, \varepsilon), \quad (4.16)$$

avec  $Par'_r$  est l'ensemble des nœuds chances dans les parents du nœud  $V_r$ .

**Exemple 4.7 :**

*Le calcul des stratégies optimales optimistes de l'Exemple 4.6 se déroule de la façon suivante :*

- **Étape 1 :**

*La première étape consiste à transformer le DIP de la Figure 4.10 en réseau possibiliste qualitatif dont la composante graphique est donnée par la Figure 4.11.*

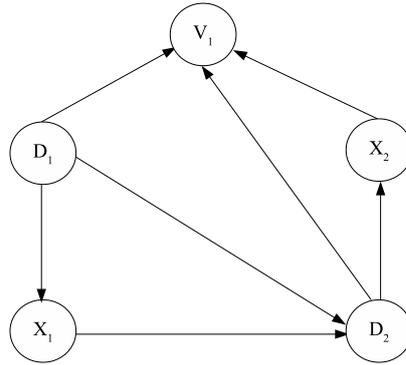


FIGURE 4.11 – Le réseau possibiliste correspondant au diagramme d'influence de la Figure 4.10.

– **Étape 2 :**

La deuxième étape consiste à calculer les distributions de possibilités initiales associées aux nœuds du réseau possibiliste construit à la première étape. Les nœuds de décisions  $D_1$  et  $D_2$  sont transformés en nœuds chances représentant l'ignorance totale. Leurs distributions de possibilités sont données dans la Table 4.10.

$D_1$	$\pi(D_1)$	$D_2$	$D_1$	$X_1$	$\pi(D_2   D_1 X_1)$	$D_2$	$D_1$	$X_1$	$\pi(D_2   D_1 X_1)$
$d_1$	1	$d_2$	$d_1$	$x_1$	1	$\neg d_2$	$d_1$	$x_1$	1
$\neg d_1$	1	$d_2$	$d_1$	$\neg x_1$	1	$\neg d_2$	$d_1$	$\neg x_1$	1
		$d_2$	$\neg d_1$	$x_1$	1	$\neg d_2$	$\neg d_1$	$x_1$	1
		$d_2$	$\neg d_1$	$\neg x_1$	1	$\neg d_2$	$\neg d_1$	$\neg x_1$	1

TABLE 4.10 – Distributions de possibilités initiales sur  $D_1$  et  $D_2$ .

Le nœud utilité  $V_1$  est transformé en un nœud chance binaire dont les distributions de possibilités sont obtenues par les Equations (4.11) et (4.12). Les résultats sont donnés dans la Table 4.11.

$V_1$	$D_1$	$D_2$	$X_2$	$\pi(V_1   D_1 D_2 X_2)$	$V_1$	$D_1$	$D_2$	$X_2$	$\pi(V_1   D_1 D_2 X_2)$
$v_1$	$d_1$	$d_2$	$x_2$	.5	$\neg v_1$	$d_1$	$d_2$	$x_2$	1
$v_1$	$d_1$	$d_2$	$\neg x_2$	1	$\neg v_1$	$d_1$	$d_2$	$\neg x_2$	1
$v_1$	$d_1$	$\neg d_2$	$x_2$	.9	$\neg v_1$	$d_1$	$\neg d_2$	$x_2$	1
$v_1$	$d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_2$	.4	$\neg v_1$	$d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_2$	1
$v_1$	$\neg d_1$	$d_2$	$x_2$	.5	$\neg v_1$	$\neg d_1$	$d_2$	$x_2$	1
$v_1$	$\neg d_1$	$d_2$	$\neg x_2$	.9	$\neg v_1$	$\neg d_1$	$d_2$	$\neg x_2$	1
$v_1$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$x_2$	.1	$\neg v_1$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$x_2$	1
$v_1$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_2$	.7	$\neg v_1$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_2$	1

TABLE 4.11 – Distributions de possibilités initiales sur  $V_1$ .

Le reste des nœuds ( $X_1$  et  $X_2$ ) conservent leurs distributions.

– **Étape 3 :**

La dernière étape concerne le processus de propagation pour calculer les stratégies optimales optimistes. Le réseau possibiliste, généré dans les deux premières étapes, est utilisée pour assurer ce calcul. En effet, un algorithme de propagation tel que celui basé

sur l'arbre de jonction (vu dans la Section 4.2.2) est exécuté afin de générer les stratégies optimales optimistes. L'arbre de jonction correspondant au réseau possibiliste de la Figure 4.11 est donné par la Figure 4.12.



FIGURE 4.12 – Arbre de jonction correspondant au réseau possibiliste de la Figure 4.11.

Le calcul se fait d'une manière itérative sur  $\mathcal{D} = \{D_1, D_2\}$ , en commençant par la dernière décision.

– **Décision  $D_2$**  : L'ensemble des évidences  $E = \emptyset$  et l'application de l'Equation 4.15 donne :

-  $\pi(v_r \mid d_2) = .5$  et

-  $\pi(v_r \mid \neg d_2) = .9$ .

Donc la meilleure décision pour  $D_2$  est  $D_2 = \neg d_2$ .

– **Décision  $D_1$**  : Cette fois-ci l'ensemble des évidences  $E = \{D_2 = \neg d_2\}$ . L'application de l'Equation 4.15 donne :

-  $\pi(v_r \mid d_1 \neg d_2) = .9$  et

-  $\pi(v_r \mid \neg d_1 \neg d_2) = .7$ .

En conclusion, il existe une seule stratégie optimale optimiste  $\delta_{Opt}^* = \{(D_1 = d_1, D_2 = \neg d_2)\}$  avec  $u(\delta_{Opt}^*) = .9$ .

## 4.5 Conclusion

Le problème de la décision qualitative séquentielle peut être représenté par plusieurs modèles graphiques. Dans ce chapitre, certains de ces modèles ont été présentés avec leurs algorithmes d'évaluation. Plus précisément, nous avons abordé la contrepartie possibiliste du modèle à base d'arbres de décision. Ce modèle n'est pas approprié dans le cas des problèmes de décision à grandes instances.

Par la suite, la contrepartie possibiliste d'un modèle plus général, permettant de traiter les limites de l'ancien modèle, a été présenté : diagramme d'influence possibiliste. Dans le cadre de notre travail, nous nous sommes limités aux modèles qualitatifs. Les deux modèles présentés dans ce chapitre utilisent une seule structure pour coder les connaissances et les préférences de l'agent. Cependant, dans la pratique un problème de décision est exprimé par deux composantes différentes : une fonction d'incertitude (connaissances incertaines) et une fonction d'utilité (préférences). Dans ce sens, nous proposerons par la suite un nouveau modèle graphique basé sur les réseaux possibilistes qualitatifs.

La contribution du prochain chapitre concernera l'évaluation des décisions lorsque le problème de la décision qualitative est représenté dans le cadre de la logique possibiliste.

## Deuxième partie

# Décisions possibilistes basées sur la fusion syntaxique

# Introduction de la partie II

La deuxième partie de la thèse sera consacrée à présenter les principales investigations développées dans cette étude relatives à la représentation et au calcul des décisions optimales possibilistes.

Le premier chapitre de cette deuxième partie (Chapitre 5) concerne l'évaluation des décisions lorsque le problème de décision est codé dans un cadre logique. En effet, une nouvelle alternative aux ATMS, pour évaluer les décisions optimales optimistes et pessimistes sera développée [19, 20]. Elle permet ainsi d'éviter les problèmes signalés dans le Chapitre 3. L'idée est d'exploiter la contrepartie syntaxique des techniques de la fusion possibiliste.

Les deux modèles graphiques présentés dans le Chapitre 4 codent les connaissances et les préférences d'un agent dans une même structure. Par ailleurs, un problème de décision est exprimé, en pratique, par deux composantes différentes (une fonction de possibilités sur les états possibles du monde et une fonction d'utilité sur les conséquences). Par conséquent, un nouveau modèle graphique, en accord avec la sémantique d'un problème de la décision qualitative donnée dans [15], est proposé dans le Chapitre 6 [22, 23, 20]. Ce modèle permet la modélisation d'un problème de la décision qualitative d'une façon compacte en se basant sur les réseaux possibilistes qualitatifs. Dans ce cadre de problème de décisions exclusives, un algorithme d'évaluation des décisions optimales optimistes est aussi proposé [23, 20].

Notre nouveau modèle graphique de décision code aussi bien des problèmes de la décision à un seul niveau (décisions exclusives) comme les problèmes de la décision à plusieurs niveaux (décisions séquentielles). En effet, le Chapitre 7 propose un algorithme polynomial pour coder un diagramme d'influence possibiliste qualitatif (voir Chapitre 4) dans notre modèle. L'idée consiste à décomposer le DIP en deux réseaux possibilistes qualitatifs. Par la suite, une généralisation de l'algorithme proposé dans le cadre de problème de décisions exclusives, sera proposée pour le calcul des stratégies optimales optimistes.

En dernier, le concept de la négation d'un réseau possibiliste sera défini et qui sera éventuellement utilisé pour le calcul des décisions optimales pessimistes [25, 26].

## Chapitre 5

# Décisions qualitatives basées sur la fusion de bases logiques

### 5.1 Introduction

Dans le cadre classique de la théorie de la décision sous incertitude, le choix de la bonne décision repose sur le critère de l'utilité espérée. Ce dernier était toujours équipé d'une base axiomatique solide. Cependant, des paradoxes en ont été mis en évidence et remettent en cause certains fondements axiomatiques. Des généralisations et des théories alternatives ont été proposées, afin de remédier à ce type de paradoxes.

D'un autre point de vue, des théories qualitatives ont été proposées, dans lesquelles les structures utilisées pour représenter les relations de préférence et d'incertitude ne sont pas numériques (les connaissances et les préférences d'un agent sont exprimées de manière ordinale). Dans ce cas, deux critères qualitatifs ont été proposés dans [75] (voir Chapitre 2, Section 2.3.2), l'un pessimiste et l'autre optimiste, basés sur la théorie des possibilités. Le calcul des décisions optimales, dans les deux cas optimiste et pessimiste, a été proposé et développé dans [17] en se basant sur les ATMS où les connaissances et les préférences sont codées dans deux bases possibilistes stratifiées (voir Chapitre 3). Néanmoins, les algorithmes proposés présentent les limites suivantes :

- L'expressivité limitée, due à l'utilisation d'une seule clause par strate (niveau) dans la base de préférences.
- L'outil développé ne peut pas prendre en charge un problème de décision de grandes instances. Ceci est dû au passage obligatoire par la première étape de compilation avant de pouvoir obtenir le Label ou le Nogood (l'un des défauts majeurs de cette méthode) [17]. En effet, ce calcul intermédiaire s'avère en pratique plus difficile que l'extraction des solutions qui est immédiate vu leur nombre qui peut être exponentiel par rapport à la taille de la formule compilée [17].

Notre contribution dans ce chapitre consiste à l'utilisation des contreparties syntaxiques de la fusion des connaissances afin de pouvoir calculer les décisions qualitatives optimales optimistes et pessimistes qui sera une autre alternative aux ATMS [93]. En effet, le calcul de décision peut être vu comme un problème de fusion de deux distributions de possibilités particulières : une représentant les croyances d'un agent et l'autre représentant l'utilité qualitative.

Une étude expérimentale a été réalisée à la fin de ce chapitre en implémentant les deux algorithmes proposés pour les deux cas : optimiste et pessimiste. Les résultats obtenus ont confirmé l'efficacité des deux algorithmes permettant ainsi la résolution des problèmes signalés dans l'implémentation proposée dans [17].

## 5.2 Fusion d'informations incertaines

De manière générale, un problème de décision consiste en un choix (ou un classement) parmi une liste d'alternatives possibles, compte tenu des connaissances que l'agent a sur l'état du monde et des préférences qu'il a sur les résultats possibles de sa décision. Les connaissances peuvent être entachées d'incertitude et les préférences sont par nature, en général, nuancées. Ainsi, la prise de décision est souvent rendue complexe par l'incertitude qui affecte les conséquences des décisions potentielles et par la multiplicité et l'hétérogénéité des critères ou des points de vues à considérer pour évaluer ces conséquences. La problématique générale du traitement de l'information peut alors s'articuler autour des trois points clés suivants :

- Quelles informations extraire ?
- Comment et dans quel but les représenter ?
- Quelles informations retrouver ?

Afin de bien mener le raisonnement d'un agent, les différentes sources d'informations doivent être liées et coordonnées. La fusion d'informations de différentes sources est un problème important en représentation de l'information [123, 124, 125]. En effet, le but de la fusion est d'extraire le maximum d'informations de chacune des bases fournies par les sources. Ainsi, si les différentes bases réunies sont cohérentes, leur intégration consiste simplement à prendre leur union. Cependant, les informations sont souvent en parties contradictoires, et prendre simplement l'union des bases dans ce cas n'est pas appropriée. La fusion peut également porter sur les préférences. Elle a alors, en général, pour fonction de proposer un « compromis » entre des préférences partiellement contradictoires [126].

Les problèmes de fusion des connaissances et de fusion des préférences ne doivent pas être confondus. En effet, localiser l'état réel du monde n'est pas une question de recherche de compromis en général mais de classement des localisations possibles selon leur plausibilité. Lorsqu'aucune relation de priorité (qu'elle soit à l'intérieur de la base et/ou entre les différentes sources) n'est disponible, alors le choix d'opérateurs d'agrégation est limité entre la conjonction classique (inefficace en présence d'incohérence) et la disjonction classique (extrêmement prudente) [126].

Dans cette étude, nous nous intéressons à la fusion d'informations pour lesquelles les priorités sont données explicitement et codées en logique possibiliste [127, 128].

### 5.2.1 Fusion en logique possibiliste

Soient  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$  un ensemble de  $n$  bases de croyances stratifiées provenant de  $n$  experts. Soient  $\pi_1, \dots, \pi_n$  leurs distributions de possibilités associées. Tous les experts sont supposés utilisés le même langage pour exprimer leurs connaissances. Le processus de fusion consiste à calculer, à partir de ces  $n$  bases possibilistes (resp. distributions de possibilités), une base possibiliste (resp. une distribution de possibilités) représentant la fusion de ces  $n$  bases (resp.  $n$  distributions de possibilités). Ceci revient à agréger  $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$  (resp.  $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ ) en  $\Sigma_{\oplus}$  (resp. en  $\pi_{\oplus}(\omega) = \oplus(\pi_1(\omega), \dots, \pi_n(\omega))$ ), où  $\oplus$  est un opérateur de fusion qui prend comme entrée un vecteur  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$  de réels dans  $[0, 1]$ , et rend comme résultat un réel dans  $[0, 1]$ . Intuitivement, dans le cas de fusion de bases possibilistes, ce vecteur correspond aux degrés de nécessités. Quand des degrés de possibilité sont agrégés, les deux propriétés considérées nécessaires pour tout opérateur de fusion sont [128] :

- **Cohérence** : cette propriété affirme que si toutes les sources conviennent que  $\omega$  est entièrement possible, alors le résultat de la combinaison devrait aussi le confirmer. Formellement,

$$\text{Si } \forall i, \pi_i(\omega) = 1 \implies \pi_{\oplus}(\omega) = 1.$$

Cette propriété garantit que si l'union des bases est cohérente, alors le résultat de la fusion doit être cohérent.

- **Monotonie** : cette propriété implique que si toutes les sources considèrent que  $\omega$  est préférée à  $\omega'$  alors le résultat de la fusion doit également le conclure. Formellement,

$$\text{Si } \forall i, \pi_i(\omega) > \pi_i(\omega') \implies \pi_{\oplus}(\omega) > \pi_{\oplus}(\omega').$$

Il existe plusieurs opérateurs de fusion possibiliste, selon que les sources à fusionner sont conflictuelles ou non, indépendantes ou non. A chaque opérateur de fusion possibiliste défini sémantiquement, est associée une contrepartie syntaxique : soient  $(\pi_1, \dots, \pi_n)$  des distributions de possibilités associées à  $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$ , pour tout opérateur  $\oplus$  appliqué à  $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ , sera construite à partir de  $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$  une base possibiliste  $\Sigma_{\oplus}$  telle que  $\pi_{\Sigma_{\oplus}} = \pi_{\oplus}$  [126] (voir Figure 5.1).

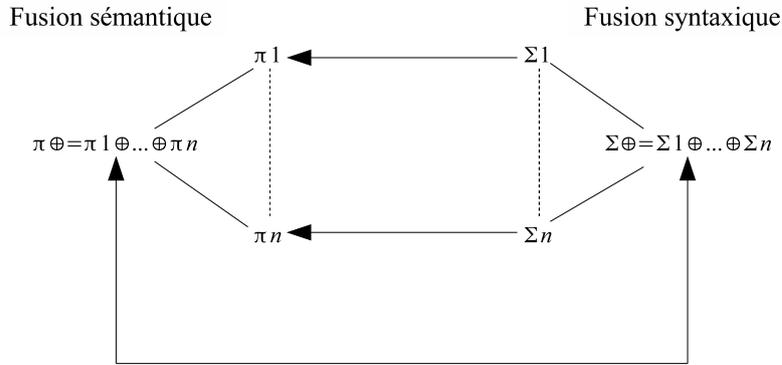


FIGURE 5.1 – Contrepartie syntaxique des fusions sémantiques des bases possibilistes.

Dans ce qui suit, nous présentons deux types d'opérateur, qui sont à la base de notre travail.

### 5.2.1.1 Opérateurs conjonctifs

Un des objectifs de la fusion d'informations incertaines est d'exploiter la complémentarité entre les sources afin d'avoir un point de vue global plus complet et plus précis. Puisque les informations manipulées sont représentées avec des priorités, deux sortes de complémentarité sont distinguées : une concernant la complémentarité sur la partie symbolique de l'information représentée par les formules, et l'autre concernant les priorités attachées aux formules. Les opérateurs conjonctifs exploitent la complémentarité symbolique entre les sources. Formellement, un opérateur conjonctif est défini par [126] :

#### Définition 5.1 :

Un opérateur  $\oplus$  est dit conjonctif si :  $\forall \alpha \in [0, 1], \oplus(1, \alpha) = \alpha$ .

Au niveau syntaxique, la fusion de  $\pi_1$  et  $\pi_2$  est la base possibiliste  $\Sigma_{\oplus} = \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$  définie par :

$$\Sigma_{\oplus} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \{(\varphi_i \vee \psi_j, 1 - \oplus(1 - \alpha_i, 1 - \beta_j)) : (\varphi_i, \alpha_i) \in \Sigma_1 \text{ et } (\psi_j, \beta_j) \in \Sigma_2\}.$$

Un exemple d'opérateurs conjonctifs, l'opérateur idempotent : le minimum (min). La base  $\Sigma_{\min}$  associée à  $\pi_{\min}(\omega) = \min(\pi_1(\omega), \pi_2(\omega))$  est donnée par :

$$\Sigma_{\min} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2. \quad (5.1)$$

### 5.2.1.2 Opérateurs disjonctifs

Un point important lors de la fusion d'informations multi-sources est de définir comment résoudre les conflits. Quand toutes les sources ont le même degré de fiabilité, il est imprudent de choisir arbitrairement des informations en favorisant une source plutôt qu'une autre. Autrement dit, si l'union de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  est incohérente alors le résultat de leur combinaison ne doit inférer ni  $\Sigma_1$  ni  $\Sigma_2$ . Cependant, une telle contrainte ne peut être satisfaite par aucun opérateur conjonctif. Elle est satisfaite par des opérateurs disjonctifs définis par [126] :

#### Définition 5.2 :

Un opérateur  $\oplus$  est dit disjonctif si :  $\forall \alpha \in [0, 1], \oplus(1, \alpha) = \oplus(\alpha, 1) = 1$ .

Au niveau syntaxique, la fusion de  $\pi_1$  et  $\pi_2$  est la base possibiliste  $\Sigma_{\oplus} = \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$  définie par :

$$\Sigma_{\oplus} = \{(\varphi_i \vee \psi_j, 1 - \oplus(1 - \alpha_i, 1 - \beta_j)) : (\varphi_i, \alpha_i) \in \Sigma_1 \text{ et } (\psi_j, \beta_j) \in \Sigma_2\}.$$

L'opérateur maximum (max) est un exemple d'opérateurs disjonctifs. La base  $\Sigma_{\max}$  associée à  $\pi_{\max}(\omega) = \max(\pi_1(\omega), \pi_2(\omega))$  est donnée par :

$$\Sigma_{\max} = \{(\varphi_i \vee \psi_j, \min(\alpha_i, \beta_j)) : (\varphi_i, \alpha_i) \in \Sigma_1 \text{ et } (\psi_j, \beta_j) \in \Sigma_2\}. \quad (5.2)$$

## 5.3 Calcul des décisions optimales optimistes basé sur la fusion de bases possibilistes

Dans cette section, nous proposons notre première contribution pour le calcul des décisions optimales optimistes sans utiliser les ATMS. Nous suggérons de préserver la même représentation logique du problème de la décision qualitative [15, 90] (voir Chapitre 3), c'est-à-dire les connaissances de l'agent sont représentées dans une base de connaissances stratifiée  $\Sigma_K$  induisant une distribution de possibilités  $\pi_K$  et les préférences sont représentées dans une autre base stratifiée  $\Sigma_P$ , à laquelle est associée l'utilité qualitative  $\mu_P$ . Prendre une décision revient à choisir un sous-ensemble  $d$  de l'ensemble des décisions disponibles  $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_p\}$ . L'algorithme proposé repose sur les contreparties syntaxiques de la fusion de bases possibilistes. En effet, les décisions qualitatives optimistes peuvent être vues comme un problème de fusion de deux distributions de possibilités particulières [129, 19, 20] :

- La distribution de possibilités associée à  $\Sigma_K \cup \{(d, 1)\}$  [15] :

$$\pi_{K_d}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \forall (\phi_i, \alpha_i) \in \Sigma_K, \omega \in [\phi_i] \text{ et } \omega \in [d^\wedge] \\ 0 & \text{si } \omega \notin [d^\wedge] \\ \min_{(\phi_i, \alpha_i) \in \Sigma_K, \omega \notin [\phi]} n(\alpha_i) & \text{si } \omega \in [d^\wedge], \end{cases} \quad (5.3)$$

où  $n$  est la fonction de renversement de l'échelle  $\mathcal{L}[0, 1]$ .

- L'utilité qualitative associée à  $\Sigma_P$  [15] :

$$\mu_P(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \forall (\psi_j, \beta_j) \in \Sigma_P, \omega \in [\psi_j] \\ \min_{(\psi_j, \beta_j) \in \Sigma_P, \omega \notin [\psi]} n(\beta_j). & \end{cases} \quad (5.4)$$

Nous avons vu dans le Chapitre 3, que le calcul de la décision qualitative optimiste revient à prendre la décision  $d \in \mathcal{D}$ , qui maximise la fonction d'utilité  $u_{Opt}(d)$  tel que [53] :

$$u_{Opt}(d) = \max_{\omega \in \Omega} \min(\pi_{K_d}(\omega), \mu_P(\omega)). \quad (5.5)$$

D'autre part, la contrepartie syntaxique de la fusion de deux distributions de possibilités  $\pi_1$  et  $\pi_2$  en mode conjonctif correspond à la base possibiliste  $\Sigma_{min} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  (voir Section 5.2.1.1, Equation 5.1). En combinant ces deux résultats, la base possibiliste associée au  $\min(\pi_{K_d}(\omega), \mu_P(\omega))$  est la base  $\Sigma_{\oplus_d} = \Sigma_K \cup \Sigma_P \cup \{(d, 1)\}$ .

Ainsi, calculer la décision optimale dans le cas optimiste qui maximise  $u_{Opt}(d)$  donnée par l'Equation 5.5, revient à calculer :

$$u_{Opt}(d) = \max_{\omega \in \Omega} \{\pi_{\Sigma_{\oplus_d}}(\omega)\}, \quad (5.6)$$

où  $\pi_{\Sigma_{\oplus_d}}$  est la distribution de possibilités jointe induite par la base  $\Sigma_{\oplus_d}$  en utilisant l'Equation 3.4.

D'autre part, nous avons vu dans le Chapitre 3, Equation 3.5, que le degré d'incohérence d'une base possibiliste  $Inc(\Sigma)$  est donné par :

$$Inc(\Sigma) = 1 - \max_{\omega \in \Omega} (\pi_{\Sigma}(\omega)). \quad (5.7)$$

Le résultat suivant exprime la fonction d'utilité, de l'Equation 5.5, en fonction du degré d'incohérence de la base  $\Sigma_{\oplus_d}$ , en combinant les Equations 5.6 et 5.7 :

**Proposition 5.1 :**

*La fonction d'utilité optimiste associée à une décision  $d$  est redéfinie en fonction du degré d'incohérence de la base  $\Sigma_K \cup \Sigma_P \cup \{(d, 1)\}$  de la façon suivante :*

$$u_{Opt}(d) = 1 - Inc(\Sigma_{\oplus_d}), \quad (5.8)$$

où  $Inc(\Sigma_{\oplus_d})$  représente le degré d'incohérence de la base  $\Sigma_K \cup \Sigma_P \cup \{(d, 1)\}$ .

En exploitant l'algorithme donné dans [130], le calcul de degré d'incohérence  $Inc(\Sigma_{\oplus_d})$  revient à :

$$\Sigma_K \cup \Sigma_P \cup \{(d, 1)\} \models (\perp, \alpha), \quad (5.9)$$

où  $\alpha$  représente le degré d'incohérence de  $\Sigma_K \cup \Sigma_P \cup \{(d, 1)\}$ .

Ainsi, afin d'optimiser  $u_{Opt}(d)$ , il suffit de calculer les degrés d'incohérence des bases  $\Sigma_K \cup \Sigma_P \cup \{(d_i, 1)\}$ ,  $d_i \in \mathcal{D}$ .

Le processus d'inférence dans une base possibiliste est basé sur le principe de réfutation. En effet, vérifier l'inférence de  $\phi$  à partir de  $\Sigma$  revient à rajouter d'abord la formule  $(\neg\phi, 1)$  à  $\Sigma$ . En suite, le degré d'incohérence  $\alpha$  de  $\Sigma \cup (\neg\phi, 1)$  est calculé. Si  $\alpha > Inc(\Sigma)$  alors  $\phi$  est déduite à partir de  $\Sigma$  avec un degré  $\alpha$ . Formellement,

$$\Sigma \models (\phi, \alpha) \text{ si et seulement si } \Sigma \cup \{(\neg\phi, 1)\} \models (\perp, \alpha). \quad (5.10)$$

Ce qui est équivalent à :

$$N(\phi) = Inc(\Sigma \cup \{(\neg\phi, 1)\}). \quad (5.11)$$

En remplaçant ce résultat dans l'Equation 5.8, la fonction d'utilité peut être réécrite sous la forme suivante :

$$u_{Opt}(d) = 1 - N(\neg d). \quad (5.12)$$

Donc, calculer les décisions optimales optimistes en utilisant l'Equation 5.12 revient à calculer le degré d'incohérence de la base  $\Sigma_{\oplus_d}$  issue de la fusion de la base de connaissances  $\Sigma_K$ , la base de préférences  $\Sigma_P$  et la décision  $d_i \in \{d_1, \dots, d_p\}$ . Optimiser l'utilité de la décision revient à prendre la décision  $d_i \in \{d_1, \dots, d_p\}$  qui a le degré d'incohérence le plus minimale avec  $\Sigma_K \cup \Sigma_P$ .

Le calcul de l'ensemble des décisions optimales dans le cas optimiste en se basant sur les résultats présentés ci-dessus est donné par l'Algorithme 5.1.

---

**Algorithme 5.1** : Calcul des décisions optimales optimistes basé sur la fusion de bases possibilistes.

---

**Entrées** :  $\Sigma_K$  : Base de connaissances,  
 $\Sigma_P$  : base de préférences,  
 $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_p\}$  : l'ensemble des décisions,  
**Sorties** :  $d_{Opt}^*$  : décisions optimales optimistes,  
 $u_{Opt}^*$  : l'utilité optimale optimiste.

**début**

- $min \leftarrow 1$ , degré d'incohérence minimal,
- $Inc \leftarrow 1$ , degré d'incohérence pour chaque variable de décision,
- $u_{Opt}^* \leftarrow 0$ , l'utilité optimiste,
- $d_{Opt}^* \leftarrow \emptyset$ , décisions optimistes optimales,
- pour**  $i = 1..p$  **faire**
  - $\Sigma_{d_{\oplus}} = \Sigma_K \cup \Sigma_P \cup \{(d_i, 1)\}$ ,
  - $Incons - Opt(\Sigma_{d_{\oplus}}, Inc, Bool)$ , pour calculer le degré d'incohérence de  $\Sigma_{d_{\oplus}}$ ,
  - si**  $Bool = vrai$  **alors**
    - si**  $Inc < min$  **alors**
      - $min \leftarrow Inc$ ,
      - $d_{Opt}^* \leftarrow \{d_i\}$ ,
      - $u_{Opt}^* \leftarrow 1 - Inc$ ,
    - sinon**
      - si**  $Inc = min$  **alors**
        - $d_{Opt}^* \leftarrow d_{Opt}^* \cup \{d_i\}$ ,

---

Pour chaque décision  $d_i \in \{d_1, \dots, d_p\}$ , l'Algorithme 5.1 calcule son utilité à partir du degré d'incohérence de  $\Sigma_K \cup \Sigma_P \cup \{(d_i, 1)\}$ , en faisant appel à la fonction **Incons-Opt**. Ainsi, les décisions les plus cohérentes avec la base  $\Sigma_K \cup \Sigma_P$  seront retenues.

La fonction **Incons - Opt**( $\Sigma \cup \{(\neg\phi, 1)\}$ ,  $Inc$ ,  $Bool$ ), définie par l'Algorithme 5.2, est une adaptation de l'algorithme dichotomique proposé dans [130] pour le calcul de degré d'incohérence d'une base possibiliste. Cette fonction a trois paramètres : une base stratifiée  $\Sigma$ , un entier  $Inc$  représentant le degré d'incohérence courant et une variable booléenne  $Bool$ . L'optimisation proposée concerne le calcul du degré d'incohérence de la base, en effet dès que le degré d'incohérence de  $\Sigma_K \cup \Sigma_P \cup \{(d_{i \in [1,p]}, 1)\}$  est supérieur à celui de  $\Sigma_K \cup \Sigma_P \cup \{(d_{j \in [1,i-1]}, 1)\}$ , l'algorithme s'arrête. Ceci est matérialisé par l'utilisation de la variable booléenne  $Bool$ .

---

**Algorithme 5.2 :**  $\text{Incons-Opt}(\Sigma \cup \{(-\phi, 1)\}, Inc, Bool)$

---

**Entrées :**  $\Sigma$  : une base stratifiée,  
 $\{(-\phi, 1)\}$  : une formule pondérée,  
 $Inc$  : degré d'incohérence,  
**Sorties :**  $Bool$  : un booléen,  
**début**

$n$ , nombre de strates dans  $\Sigma$ ,  
 $l \leftarrow 0$ , pointeur, initialement sur la dernière strate de  $\Sigma$ ,  
 $u \leftarrow n$ , pointeur, initialement sur la première strate de  $\Sigma$ ,  
 $Bool \leftarrow \text{vrai}$ ,

**tant que**  $(l < u)$  *et*  $(Bool = \text{vrai})$  **faire**

$r \leftarrow \lceil (l + u)/2 \rceil$ , pointeur utilisé pour la dichotomie,  
**si**  $(\Sigma_{\geq \alpha_r}^* = \{\phi_i/\alpha_i \geq \alpha_r\} \wedge \neg\phi)$  *cohérente* **alors**  
|  $u \leftarrow r - 1$ , chercher l'incohérence dans une base plus grande,  
**sinon**  
| **si**  $Inc \geq \alpha_r$  **alors**  
| |  $l \leftarrow r$ , chercher l'incohérence dans la base délimitée par  $u$  et  $l$ ,  
| **sinon**  
| |  $Bool \leftarrow \text{faux}$ ,

**si**  $Bool = \text{vrai}$  **alors**

**si**  $u = 0$  **alors**  
|  $Inc \leftarrow 0$ ,  
**sinon**  
|  $Inc \leftarrow \alpha_r$ ,

Le test de cohérence de la base  $\Sigma_{\geq \alpha_r}^*$  se fait par un appel au SAT.

**Exemple 5.1 :**

Reprenons l'Exemple 3.2 où le problème de la préparation de l'omelette a été présenté par deux bases possibilistes :  $\Sigma_k$  codant les connaissances de l'agent et  $\Sigma_P$  représentant ses préférences.  
 $\Sigma_K = \{(CB \vee CT \vee J, 1), (\neg CB \vee \neg CT, 1), (\neg CB \vee \neg J, 1), (\neg CT \vee \neg J, 1), (\neg s \vee \neg CB \vee 6o, 1), (\neg s \vee \neg CT \vee 6o, 1), (\neg 6o \vee s, 1), (\neg 6o \vee \neg J, 1), (\neg J \vee 5o, 1), (\neg p \vee \neg CT \vee 5o, 1), (\neg 5o \vee J \vee p, 1), (\neg 5o \vee \neg CB, 1), (\neg CT \vee t, 1), (\neg t \vee CT, 1), (\neg J \vee \neg s \vee og, 1), (\neg og \vee s, 1), (\neg og \vee J, 1), (\neg CB \vee \neg p \vee g, 1), (\neg g \vee CB, 1), (\neg g \vee p, 1), (\neg s \vee \neg p, 1), (s \vee p, 1), (s, .7)\}$ .

Et  $\Sigma_P = \{(\neg t, .6), (\neg 5o, .7), (\neg 5o \vee \neg t, .8), (\neg og, .9), (\neg g, 1)\}$ .

Rappelons que l'ensemble des décisions disponibles est  $\mathcal{D} = \{CB, CT, JP\}$  :

- casser l'œuf dans le bol (omelette) :  $CB$ ,
- le jeter directement dans la poubelle :  $JP$ ,
- sortir une tasse pour y casser l'œuf et examiner son état de fraîcheur, avant d'éventuellement l'incorporer à l'omelette :  $CT$ .

Les états possibles du monde  $\mathcal{X} = \{S, P\}$  (l'œuf est soit Sain soit Pourri).

La Table 5.1 résume le problème de préparation de l'omelette.

Décision	États du monde	
	œuf sain ( $S$ )	œuf pourri ( $P$ )
Casser l'œuf dans le bol (CB)	Omelette à 6 œufs (6O)	Pas d'omelette (G)
Le casser dans une tasse (CT)	Omelette à 6 œufs (6T) Une tasse à laver	Omelette à 5 œufs (5T) Une tasse à laver
Le jeter (JP)	Omelette à 5 œufs Un œuf gâché (5G)	Omelette à 5 œufs (5O)

TABLE 5.1 – Résumé du problème de préparation de l'omelette.

Soit  $\mathcal{L} = \{0, .6, .7, .8, .9, 1\}$  l'échelle utilisée pour représenter les niveaux de certitude et de priorité (les nombres sont utilisés uniquement pour refléter la structure ordinaire de  $\mathcal{L}$ ). En appliquant l'Algorithme 5.1 pour le calcul des décisions optimales optimistes, nous obtenons :

– **Étape 1 :  $d_1 = CB$**

L'algorithme fait appel à la fonction **Incons – Opt**( $\Sigma_K \cup \Sigma_P \cup \{(CB, 1)\}$ , **Inc = 1**, **Bool = vrai**). Cette fonction retourne **Inc = 0** et **Bool = vrai**. D'où  $\min = 0$  et  $d_{Opt}^* = \{CB\}$ .

Dans ce cas, l'utilité optimiste  $u_{Opt}^*(CB) = 1 - Inc = 1$ .

– **Étape 2 :  $d_2 = CT$**

L'algorithme fait appel à la fonction **Incons – Opt**( $\Sigma_K \cup \Sigma_P \cup \{(CT, 1)\}$ , **Inc = 0**, **Bool = vrai**). Cette fonction retourne **Bool = faux**.

L'algorithme s'arrête puisque **Incons – Opt**( $\Sigma_K \cup \Sigma_P \cup \{(CB, 1)\}$ , **Inc = 1**, **Bool = vrai**) < **Incons – Opt**( $\Sigma_K \cup \Sigma_P \cup \{(CT, 1)\}$ , **Inc = 0**, **Bool = vrai**).

– **Étape 3 :  $d_3 = JP$**

L'algorithme fait appel à la fonction **Incons – Opt**( $\Sigma_K \cup \Sigma_P \cup \{(J, 1)\}$ , **Inc = 0**, **Bool = vrai**). Cette fonction retourne **Bool = faux**.

L'algorithme s'arrête puisque **Incons – Opt**( $\Sigma_K \cup \Sigma_P \cup \{(CB, 1)\}$ , **Inc = 1**, **Bool = vrai**) < **Incons – Opt**( $\Sigma_K \cup \Sigma_P \cup \{(JP, 1)\}$ , **Inc = 0**, **Bool = vrai**).

Donc la décision optimale optimiste est  $d_{Opt}^* = \{CB\}$  avec une utilité optimiste  $u_{Opt}^*(CB) = 1 - Inc = 1$ .

## 5.4 Calcul des décisions optimales pessimistes basé sur la fusion de bases possibilistes

Dans cette section, nous proposons un algorithme pour le calcul des décisions optimales en se basant sur le critère d'utilité pessimiste (Equation 3.12) [131, 19]. En préservant la même représentation logique du problème de la décision qualitative [15] (voir Chapitre 3), la solution proposée repose, comme dans le cas optimiste, sur la contrepartie syntaxique de la fusion des deux bases  $\Sigma_K$  et  $\Sigma_P$ .

Rappelons que le calcul de la décision qualitative pessimiste revient à prendre la décision  $d \in \mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_p\}$ , qui maximise la fonction d'utilité  $u_{Pes}(d)$  tel que [53] :

$$u_{Pes}(d) = \min_{\omega \in \Omega} \max(n(\pi_{K_d}(\omega)), \mu_P(\omega)), \quad (5.13)$$

où  $n$  est la fonction de renversement sur l'échelle  $\mathcal{L}$ .

D'autre part, la contrepartie syntaxique de la fusion en mode disjonctif du  $\max(\pi_1, \pi_2)$  a été définie dans [126]. Elle correspond à la base  $\Sigma_{max} = \Sigma_1 \vee \Sigma_2$  (voir Equation 5.2). En combinant ces deux résultats, la base possibiliste associée au  $\max(n(\pi_{K_d}(\omega)), \mu_P(\omega))$  est la base  $\Sigma_{max} =$

$n_{\Sigma_K} \vee \Sigma_P$ , où  $n_{\Sigma_K}$  est la base de connaissances de distribution de possibilités  $n(\pi_{K_d})$  et  $\Sigma_P$  est la base de préférences d'utilité qualitative  $\mu_P$ . Ceci revient à calculer en premier la contrepartie de  $n(\pi_{K_d}) = 1 - \pi_{K_d}$ , puis à calculer la contrepartie de  $\max(1 - \pi_{K_d}(\omega), \mu_P(\omega))$  et enfin calculer  $u_{Pes}$  ce qui rend cette approche pas très intéressante. En effet, ce calcul est très coûteux vu que dans le cas général la base de connaissances  $\Sigma_K$  est beaucoup plus importante que la base  $\Sigma_P$ .

Nous proposons alors d'explorer une autre alternative. L'Equation 5.13 peut être réécrite d'une façon équivalente comme suit :

$$u_{Pes}(d) = 1 - \max_{\omega \in \Omega} \min(\pi_{K_d}(\omega), 1 - \mu_P(\omega)), \quad (5.14)$$

En effet, le calcul de  $\min(\pi_{K_d}(\omega), 1 - \mu_P(\omega))$  est beaucoup moins coûteux que le calcul de  $\max(1 - \pi_{K_d}(\omega), \mu_P(\omega))$ .

En outre, la contrepartie syntaxique de la fusion de deux distributions de possibilités  $\pi_1$  et  $\pi_2$  en mode conjonctif correspond à la base possibiliste  $\Sigma_{min} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  (voir Section 5.2.1.1, Equation 5.1). En combinant ces deux résultats, la base possibiliste associée au  $\min(\pi_{K_d}(\omega), 1 - \mu_P(\omega))$  est la base  $\Sigma_{\oplus_d} = \Sigma_K \cup n_{\Sigma_P} \cup \{(d, 1)\}$ , tel que  $n_{\Sigma_P}$  est la base possibiliste de fonction d'utilité  $1 - \mu_P$ .

Le calcul des décisions optimales dans le cas pessimiste est plus compliqué que dans le cas optimiste. En effet, certaines modifications doivent être apportées sur la base de connaissances  $\Sigma_K$  et celle de préférences  $\Sigma_P$  afin d'avoir la base  $\Sigma_{\oplus_d}$  sous une forme normale conjonctive. Pour cela, nous avons besoin d'effectuer certaines transformations sur la base d'un ensemble de propositions.

#### 5.4.1 La contrepartie syntaxique de la négation d'une base possibiliste

Dans cette section, nous présentons la première étape nécessaire pour le calcul des décisions optimales pessimiste. Elle consiste à la définition de la contrepartie syntaxique de la distribution de possibilités  $1 - \mu_P$ .

D'une manière générale, si  $\Sigma = \{(\phi_i, \alpha_i) : i = 1..n\}$  est une base possibiliste tels que  $\alpha_0 = 0 < \dots < \alpha_n$ , alors la contrepartie syntaxique de  $1 - \pi_\Sigma$  est donnée par la définition suivante.

##### Définition 5.3 :

*La négation d'une base possibiliste  $\Sigma = \{(\phi_i, \alpha_i) : i = 1..n\}$ , est une base possibiliste, notée  $n_\Sigma$  et définie par :*

$$n_\Sigma = \{(\neg\phi_n \vee \neg\phi_{n-1} \vee \dots \vee \neg\phi_1, 1), (\neg\phi_n \vee \neg\phi_{n-1} \vee \dots \vee \neg\phi_2, 1 - \alpha_1), \dots, (\neg\phi_n \vee \neg\phi_{n-1}, 1 - \alpha_{n-2}), (\neg\phi_n, 1 - \alpha_{n-1})\} \cup \{(\perp, 1 - \alpha_n)\}. \quad (5.15)$$

*Preuve.* Les interprétations associées à la base  $\Sigma = \{(\phi_i, \alpha_i) : i = 1..n\}$  de  $n$  niveaux :  $\alpha_0 = 0 < \dots < \alpha_n$  peuvent être déduites à partir de la définition de la distribution de possibilités, Equation 3.4. Elles sont ordonnées par strate. Les interprétations associées à la distribution de possibilités  $n_{\pi_\Sigma}$  sont ordonnées dans l'ordre inverse.

Notre but est de définir la base possibiliste dont la distribution jointe est égale à  $n_{\pi_\Sigma}$ . Soit  $n_\Sigma = \{(\psi_i, \beta_i) : i = 1..n\}$  cette base. La construction se fait en deux étapes : la première étape consiste à définir les formules logiques  $\psi_{i \in [1, n]}$  et la deuxième étape consiste à calculer leurs degrés de nécessité  $\beta_{i \in [1, n]}$ .

– **Étape 1 : Construction de formules**

Pour obtenir la base possibiliste  $n_\Sigma$  qui induit la distribution  $1 - \pi_\Sigma$ , nous devons :

1. Calculer la distribution de possibilités inverse  $n(\pi_\Sigma(\omega)) = 1 - \pi_\Sigma$ .
2. Générer la base  $n_\Sigma = \{(\psi_i, \beta_i) : i = 1..n\}$  de distribution de possibilités  $n(\pi_\Sigma(\omega))$ .

Le passage de la base possibiliste  $\Sigma$  à la base des interprétations associées, ainsi que le passage de cette dernière base à la base des interprétations de distribution de possibilités égale à  $n_{\pi_\Sigma}$  sont illustrés par la Figure 5.2.

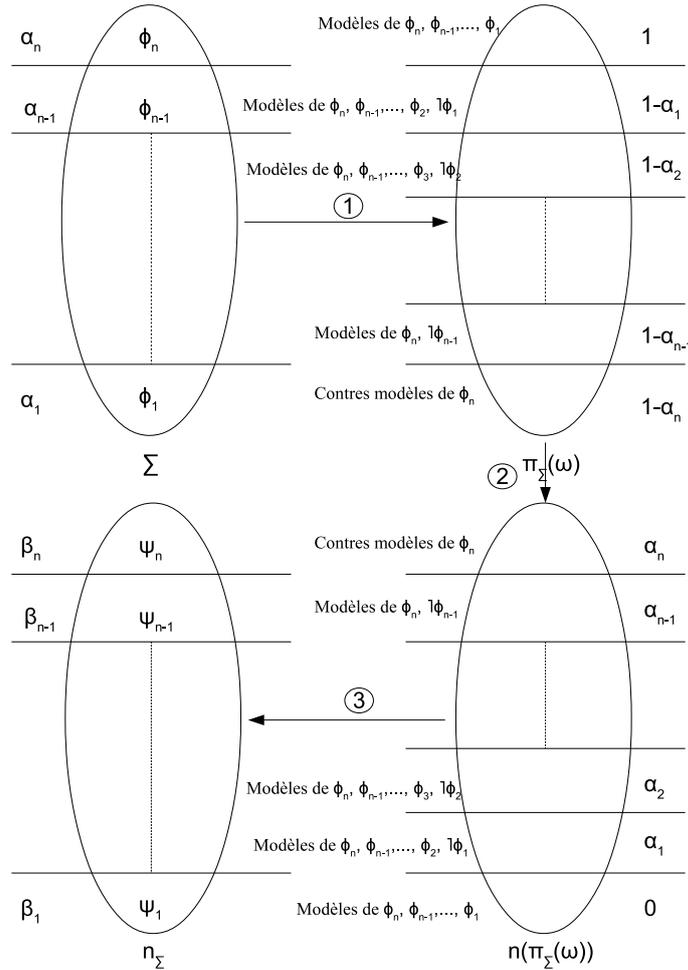


FIGURE 5.2 – Processus de construction de la négation d’une base possibiliste.

Chaque formule  $\psi_i$  est obtenue par construction. Pour chaque strate, l’interprétation  $\omega$  doit satisfaire les formules de  $n_\Sigma$  et leurs correspondantes dans  $\Sigma$ , puisque  $n(\pi_\Sigma(\omega)) = 1 - \pi_\Sigma$ . Nous illustrons ce processus comme suit :

**Strate n :**

$$\begin{cases} \omega \notin [\psi_n] \\ \omega \in [\phi_n \wedge \phi_{n-1} \wedge \dots \wedge \phi_1]. \end{cases} \Rightarrow \psi_n \equiv \neg\phi_n \vee \neg\phi_{n-1} \vee \dots \vee \neg\phi_1$$

**Strate n-1 :**

$$\begin{cases} \omega \in [\psi_n \wedge \neg\psi_{n-1}] \\ \omega \in [\phi_n \wedge \phi_{n-1} \wedge \dots \wedge \phi_2 \wedge \neg\phi_1]. \end{cases} \Rightarrow \psi_{n-1} \equiv \neg\phi_n \vee \neg\phi_{n-1} \vee \dots \vee \neg\phi_2$$

De la même façon jusqu'à arriver au strate 1 :

**Strate 2 :**

$$\begin{cases} \omega \in [\psi_n \wedge \psi_{n-1} \wedge \dots \wedge \psi_3 \wedge \neg\psi_2] \\ \omega \in [\phi_n \wedge \phi_{n-1} \wedge \dots \wedge \neg\phi_{n-2}]. \end{cases} \Rightarrow \psi_2 \equiv \neg\phi_n \vee \neg\phi_{n-1}$$

**Strate 1 :**

$$\begin{cases} \omega \in [\psi_n \wedge \psi_{n-1} \wedge \dots \wedge \psi_2 \wedge \neg\psi_1] \\ \omega \in [\phi_n \wedge \neg\phi_{n-1}]. \end{cases} \Rightarrow \psi_1 \equiv \neg\phi_n$$

– **Étape 2 : Calcul des degrés de nécessité**

Il est nécessaire de calculer le degré de nécessité minimal  $\beta_i$ , associé à chaque formule  $\psi_{i \in [1, n]}$ , définie en première étape. Le calcul des  $\beta_i$  s'effectue en appliquant la définition du degré de nécessité associé à une formule  $\phi$  :  $N(\phi) = 1 - \Pi(\neg\phi)$ , sachant que la distribution de possibilités associée à une formule  $\phi$  est  $\Pi(\phi) = \max\{\pi(\omega) : \omega \in [\phi]\}$  (voir Chapitre 2, Section 2.2). Ainsi, pour chaque strate, le calcul du degré de nécessité associé se fait comme suit :

**Strate n :**

$$\begin{aligned} \beta_n &= N(\psi_n) \\ &= N(\neg\phi_n \vee \neg\phi_{n-1} \vee \dots \vee \neg\phi_1) \\ &= 1 - \Pi(\phi_n \wedge \phi_{n-1} \wedge \dots \wedge \phi_1) \\ &= 1 - \max\{\pi(\omega) : \omega \in [\phi_n \wedge \phi_{n-1} \wedge \dots \wedge \phi_1]\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

**Strate n-1 :**

$$\begin{aligned} \beta_n &= N(\psi_{n-1}) \\ &= N(\neg\phi_n \vee \neg\phi_{n-1} \vee \dots \vee \neg\phi_2) \\ &= 1 - \Pi(\phi_n \wedge \phi_{n-1} \wedge \dots \wedge \phi_2) \\ &= 1 - \max\{\pi(\omega) : \omega \in [\phi_n \wedge \phi_{n-1} \wedge \dots \wedge \phi_2]\} \\ &= 1 - \max\{0, \alpha_1\} \\ &= 1 - \alpha_1. \end{aligned}$$

De la même façon jusqu'à arriver au strate 1 :

**Strate 2 :**

$$\begin{aligned} \beta_n &= N(\psi_2) \\ &= N(\neg\phi_n \vee \neg\phi_{n-1}) \\ &= 1 - \Pi(\phi_n \wedge \phi_{n-1}) \\ &= 1 - \max\{\pi(\omega) : \omega \in [\phi_n \wedge \phi_{n-1}]\} \\ &= 1 - \max\{0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2}\} \\ &= 1 - \alpha_{n-2}. \end{aligned}$$

**Strate 1 :**

$$\begin{aligned}
 \beta_n &= N(\psi_1) \\
 &= N(-\phi_n) \\
 &= 1 - \Pi(\phi_n) \\
 &= 1 - \max\{\pi(\omega) : \omega \in [\phi_n]\} \\
 &= 1 - \max\{0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}\} \\
 &= 1 - \alpha_{n-1}.
 \end{aligned}$$

□

Si  $\alpha_n \neq 1$  alors la distribution de possibilités  $n(\pi_\Sigma(\omega)) = 1 - \pi_\Sigma(\omega)$  n'est pas normalisée. En effet, dans ce cas, il n'existe pas une interprétation  $\omega$  tel que  $n(\pi_\Sigma(\omega)) = 1$ . Il est alors nécessaire de rajouter une contradiction à la base résultante  $n_\Sigma$  avec le degré de nécessité  $1 - \alpha_n$ . La nouvelle base  $n'_\Sigma$  est alors équivalente à  $n_\Sigma$ .

**Lemme 5.1 :**

Soit la base possibiliste  $\Sigma = \{(\phi_i, \alpha_i) : i = 1..n\}$  de  $n$  niveaux :  $\alpha_0 = 0 < \dots < \alpha_n$ , de distribution de possibilités jointe  $\pi_\Sigma$ . Soit  $n_\Sigma$  la base possibiliste de distribution de possibilités jointe  $1 - \pi_\Sigma$ .

La base possibiliste  $n'_\Sigma = n_\Sigma \cup \{(\perp, 1 - \alpha_n)\}$  est équivalente à  $n_\Sigma$ . Formellement,

$$\forall \omega \in \Omega, \pi_{n_\Sigma} = \pi_{n'_\Sigma},$$

avec  $\pi_{n'_\Sigma}$  est la distribution de possibilités jointe induite par la base  $n'_\Sigma$ .

*Preuve.* L'ajout de la formule  $(\perp, 1 - \alpha_n)$  à la base  $n_\Sigma$  est nécessaire dans le cas où  $\alpha_n \neq 1$ . Alors,

- $\alpha_n < 1$  : la distribution de possibilités  $n(\pi_\Sigma) = 1 - \pi_\Sigma$  n'est pas normalisée, c'est-à-dire :  $\exists \omega \in [n_\Sigma]$ , d'où :

$$\pi_{n_\Sigma} = \min\{1 - (1 - \alpha_{i \in [1, n-1]})\} = \min\{\alpha_{i \in [1, n-1]}\} \text{ avec } \omega \notin [\psi_i].$$

D'autre part, puisque  $\omega \notin [n_\Sigma]$  alors  $\omega \notin [n'_\Sigma]$ . Ceci est équivalent à :

$$\begin{aligned}
 \pi_{n'_\Sigma}(\omega) &= \min\{1 - (1 - \alpha_n), 1 - (1 - \alpha_{i \in [1, n-1]})\} \\
 &= \min\{\alpha_n, \alpha_{i \in [1, n-1]}\} \\
 &= \min\{\alpha_{i \in [1, n-1]}\} \\
 &= \pi_{n_\Sigma}.
 \end{aligned}$$

□

La proposition suivante affirme que la base  $n_\Sigma$  code bien la négation de  $\Sigma$ .

**Proposition 5.2 :**

Soit  $\Sigma = \{(\phi_i, \alpha_i) : i = 1..n\}$  une base possibiliste de  $n$  niveaux et  $n_\Sigma$  la base négation correspondante obtenue en utilisant la Définition 5.3. Soient  $\pi_\Sigma$  et  $\pi_{n_\Sigma}$  les distributions de possibilités associées à  $\Sigma$  et  $n_\Sigma$  respectivement. Alors,

$$\forall \omega \in \Omega, \pi_\Sigma(\omega) = 1 - \pi_{n_\Sigma}(\omega). \quad (5.16)$$

*Preuve.* Rappelons que lorsque  $\pi_\Sigma(\omega) = \alpha$  (resp.  $\pi_{n_\Sigma}(\omega) = \beta$ ), l'interprétation  $\omega$  falsifie les formules de  $\Sigma$  (resp.  $n_\Sigma$ ) de degré de certitude  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ). Cependant,  $\omega$  satisfait toutes les formules de  $\Sigma$  (resp.  $n_\Sigma$ ) ayant un degré de certitude strictement supérieur à  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ). Nous distinguons trois cas :

1.  $\pi_\Sigma(\omega) = 1$ , ce qui signifie que  $\forall(\phi_i, \alpha_i) \in \Sigma, \omega \in [\phi_i]$ . Ceci revient à dire que  $\omega$  falsifie toutes les formules de  $n_\Sigma$  et en particulier la formule la plus certaine avec le plus grand degré de certitude  $\beta_n = 1$ , formellement  $\omega \notin [\psi_n]$ .  
D'où,  $\pi_{n_\Sigma}(\omega) = 0 = 1 - \pi_\Sigma(\omega)$ .
2.  $\pi_\Sigma(\omega) = 1 - \alpha_n$ , cela signifie que  $\omega$  falsifie toutes les formules de  $\Sigma$ . Cela aussi veut dire, que  $\omega$  satisfait toutes les formules de  $n_\Sigma$  sauf  $(\perp, 1 - \alpha_n)$ .  
D'où,  $\pi_{n_\Sigma}(\omega) = 1 - (1 - \alpha_n) = \alpha_n = 1 - \pi_\Sigma(\omega)$ .
3.  $\pi_\Sigma(\omega) = 1 - \alpha_j$  avec  $\alpha_j < n$ . Cela signifie d'une part que  $\omega \notin [\phi_j]$  et d'autre part que  $\forall k > j, \omega \in [\phi_k]$ . Cela aussi veut dire que d'une part  $\omega \notin [\psi_{n-j}]$  et d'autre part  $\omega \in [\psi_n \wedge \dots \wedge \psi_{n-(j-1)}]$ .  
D'où,  $\pi_{n_\Sigma}(\omega) = 1 - \beta_{n-j} = 1 - (1 - \alpha_j) = \alpha_j = 1 - \pi_\Sigma(\omega)$ .

□

**Exemple 5.2 :**

Soit  $\Sigma = \{(\neg x_1 \vee x_2, .3), (x_2 \vee \neg x_3, .6)\}$  une base possibiliste dont la distribution de possibilités jointe est donnée dans la Table 5.2. Elle est calculée en utilisant l'Equation 3.4.

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$\pi_\Sigma$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$\pi_\Sigma$
$x_1$	$x_2$	$x_3$	1	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	1
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	1	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	1
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	.4	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	.4
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	.7	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	1

TABLE 5.2 – Les distributions de possibilités associées à  $\Sigma$ .

La négation de la base possibiliste  $\Sigma$  est définie en utilisant l'Equation 5.15. Elle est donnée par :

$$n_\Sigma = \{((x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_2 \wedge x_3), 1), (\neg x_2 \wedge x_3, .7), (\perp, .4)\}.$$

**5.4.2 La forme clausale d'une base disjonctive**

La base possibiliste  $n_\Sigma = \{(\psi_i, \beta_i) : i = 1..n\}$ , résultante de l'étape précédente, doit être mise sous la forme clausale (Forme Normale Conjonctive) de la façon suivante [130] :

- Mettre chaque formule  $\psi_i$  sous une forme clausale, c'est-à-dire :  $\psi_i = \wedge_j(c_{ij})$ , telle que  $c_{ij}$  est une clause.
- Attribuer à chaque clause le degré de nécessité initial. La base clausale correspondante à  $n_\Sigma$  est :  $C_{n_\Sigma} = \wedge_j(c_{ij}, \beta_i)$

**Exemple 5.3 :**

La négation de la base  $\Sigma = \{(\neg x_1 \vee x_2, .3), (x_2 \vee \neg x_3, .6)\}$  traitée dans l'Exemple 5.2 doit être mise sous une forme clausale en appliquant les étapes décrites précédemment. En effet, chaque formule de la base  $n_\Sigma = \{((x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_2 \wedge x_3), 1), (\neg x_2 \wedge x_3, .7), (\perp, .4)\}$  doit être mise sous une forme clausale. La forme clausale  $C_{n_\Sigma}$  de la base  $n_\Sigma$  est :

$$C_{n_\Sigma} = \{(x_3, .7), (x_1 \vee \neg x_2, 1), (x_1 \vee x_3, 1), (\neg x_2, 1), (\neg x_2 \vee x_3, 1), (\perp, .4)\}.$$

La distribution de possibilités jointe  $\pi_{C_{n_\Sigma}}$  associée à la base  $C_{n_\Sigma}$  est calculée en utilisant l'Equation 3.4. Les résultats sont reportés dans la Table 5.3.

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$\pi_{C_{n_\Sigma}}$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$\pi_{C_{n_\Sigma}}$
$x_1$	$x_2$	$x_3$	<b>0</b>	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	<b>0</b>
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	<b>0</b>	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	<b>0</b>
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	<b>.6</b>	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	<b>.6</b>
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	<b>.3</b>	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	<b>0</b>

TABLE 5.3 – Les distributions de possibilités associées à  $n_\Sigma$ .

Il est clair que  $\pi_{C_{n_\Sigma}}(\omega) = 1 - \pi_\Sigma(\omega)$ .

### 5.4.3 Calcul des décisions optimales pessimistes

Nous avons montré que l'utilité pessimiste d'une décision peut être réécrite de la façon suivante :

$$u_{Pes}(d) = 1 - \max_{\omega \in \Omega} \pi_{\oplus_d}(\omega), \quad (5.17)$$

où  $\pi_{\oplus_d}(\omega) = \min(\pi_{K_d}(\omega), 1 - \mu_P(\omega))$  est la distribution de possibilités jointe associée à la base  $\Sigma_{\oplus_d} = \Sigma_K \cup C_{n_{\Sigma_P}} \cup \{(d, 1)\}$  et  $C_{n_{\Sigma_P}}$  représente la forme clausale de la base  $n_{\Sigma_P}$  de fonction d'utilité  $1 - \mu_P$ .

Le calcul de la base  $n_{\Sigma_P}$  s'effectue en utilisant l'Equation 5.15 de la Définition 5.3.

Dans le même ordre d'idées que le cas optimiste, le degré d'incohérence d'une base possibiliste  $Inc(\Sigma)$  est donné par [82] :

$$Inc(\Sigma) = 1 - \max_{\omega \in \Omega} (\pi_\Sigma(\omega)). \quad (5.18)$$

Le résultat suivant exprime la fonction d'utilité pessimiste, de l'Equation 5.14, en fonction du degré d'incohérence de la base  $\Sigma_{\oplus_d}$ , en combinant les équations 5.17 et 5.18 :

**Proposition 5.3 :**

La fonction d'utilité pessimiste associée à une décision  $d$  est redéfinie en fonction du degré d'incohérence de la base  $\Sigma_K \cup C_{n_{\Sigma_P}} \cup \{(d, 1)\}$  de la façon suivante :

$$u_{Pes}(d) = Inc(\Sigma_{\oplus_d}), \quad (5.19)$$

où  $Inc(\Sigma_{\oplus_d})$  représente le degré d'incohérence de la base  $\Sigma_K \cup C_{n_{\Sigma_P}} \cup \{(d, 1)\}$ .

Ainsi, le calcul des décisions qualitatives optimales pessimistes, en se basant sur les résultats présentés ci-dessus, est obtenu par l'Algorithme 5.3.

**Algorithme 5.3 :** Calcul des décisions optimales pessimistes basé sur la fusion de bases possibilistes.

---

**Entrées :**  $\Sigma_K$  : Base de connaissances,  
 $\Sigma_P$  : base de préférences,  
 $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_p\}$  : l'ensemble de décisions,  
**Sorties :**  $d_{Pes}^*$  : décisions optimales pessimistes,  
 $u_{Pes}^*$  : l'utilité optimale pessimiste.

**début**

```

     $max \leftarrow 0$ , degré d'incohérence maximal,
     $u_{Pes}^* \leftarrow 0$ , l'utilité pessimiste,
     $Decisions \leftarrow \emptyset$ , décisions pessimistes optimales,
     $n_{\Sigma_P} = \text{Négation}(\Sigma_P, \mu_P)$ ,
     $C_{n_{\Sigma_P}} = \text{Clausal}(n_{\Sigma_P})$ ,
    pour  $i = 1..p$  faire
         $\Sigma_{d_{\oplus}} = \Sigma_K \cup C_{n_{\Sigma_P}} \cup \{(d_i, 1)\}$ ,
         $Inc - Pes(\Sigma_{d_{\oplus}}, max, Bool)$ , pour calculer le degré d'incohérence de  $\Sigma_{d_{\oplus}}$ ,
        si  $Bool = \text{vrai}$  alors
            si  $Inc > max$  alors
                 $max \leftarrow Inc$ ,
                 $d_{Pes}^* \leftarrow \{d_i\}$ ,
                 $u_{Pes}^* \leftarrow Inc$ ,
            sinon
                si  $Inc = max$  alors
                     $d_{Pes}^* \leftarrow d_{Pes}^* \cup \{d_i\}$ ,

```

---

L'algorithme proposé se compose de trois phases :

1. La première phase consiste à calculer la négation de la base de préférences  $\Sigma_P$ . Ce calcul est assuré par la fonction **Négation**( $\Sigma_P, \mu_P$ ) qui prend en entrée la base de préférences  $\Sigma_P$  de distribution  $\mu_P$  et rend en sortie sa négation  $n_{\Sigma_P}$ .
2. La deuxième phase concerne la mise en forme clausale de la base  $n_{\Sigma_P}$ . Ceci est assuré par la fonction **Clausal**( $n_{\Sigma_P}$ ) qui prend en entrée la négation de la base  $\Sigma_P$  et rend en sortie la base  $n_{\Sigma_P}$  sous une forme clausale.
3. La troisième phase consiste à calculer, pour chaque décision  $d_i \in \{d_1, \dots, d_p\}$ , son utilité pessimiste à partir du degré d'incohérence de la base  $\Sigma_K \cup C_{n_{\Sigma_P}} \cup \{(d_i, 1)\}$ . Le calcul du degré d'incohérence se fait par appel à la fonction **Inc - Pes**( $\Sigma \cup \{(\neg\phi, 1)\}, Inc, Bool$ ), décrite par l'Algorithme 5.4, qui prend en entrée la base  $\Sigma_{d_{\oplus}} = \Sigma_K \cup C_{n_{\Sigma_P}} \cup \{(d_i, 1)\}$ . Ce dernier repose sur les mêmes principes de l'Algorithme 5.2 proposé dans le cas optimiste. La seule différence est l'attribution de la valeur de la variable *Bool*. En effet, contrairement au cas optimiste, cette variable ne peut avoir la valeur "Faux" que si le degré d'incohérence de  $\Sigma_K \cup C_{n_{\Sigma_P}} \cup \{(d_{i \in [1,p]}, 1)\}$  est inférieur à celui de  $\Sigma_K \cup C_{n_{\Sigma_P}} \cup \{(d_{j \in [1,i-1]}, 1)\}$ . Dans ce cas, la décision  $d_i$  sera écartée de l'ensemble des décisions optimales pessimistes.

---

**Algorithme 5.4 :**  $\text{Incons-Pes}(\Sigma \cup \{(\neg\phi, 1)\}, \text{Inc}, \text{Bool})$

---

**Entrées :**  $\Sigma$  : une base stratifiée,  
 $\{(\neg\phi, 1)\}$  : une formule pondérée,  
 $\text{Inc}$  : degré d'incohérence,  
**Sorties :**  $\text{Bool}$  : un booléen,  
**début**  
 $n$ , nombre de strates dans  $\Sigma$ ,  
 $l \leftarrow 0$ , pointeur, initialement sur la dernière strate de  $\Sigma$ ,  
 $u \leftarrow n$ , pointeur, initialement sur la première strate de  $\Sigma$ ,  
 $\text{Inc} \leftarrow 0$ , degré d'incohérence pour chaque variable de décision,  
 $\text{Bool} \leftarrow \text{vrai}$ ,  
**tant que**  $(l < u)$  **faire**  
     $r \leftarrow \lfloor (l + u)/2 \rfloor$ , pointeur utilisé pour la dichotomie,  
    **si**  $(\Sigma_{\geq \alpha_r}^* = \{\phi_i/\alpha_i \geq \alpha_r\} \wedge \neg\phi)$  **cohérente** **alors**  
         $u \leftarrow r - 1$ , chercher l'incohérence dans une base plus grande,  
    **sinon**  
         $l \leftarrow r$ , chercher l'incohérence dans la base délimitée par  $u$  et  $l$ ,  
**si**  $u = 0$  **alors**  
     $\alpha_r \leftarrow 0$ ,  
**si**  $\alpha_r < \text{max}$  **alors**  
     $\text{Bool} \leftarrow \text{faux}$ ,  
**sinon**  
     $\text{Inc} \leftarrow \alpha_r$ ,

---

Le test de cohérence de la base  $\Sigma_{\geq \alpha_r}^*$  se fait par un appel à un prouver SAT.

**Exemple 5.4 :**

Continuons l'Exemple 5.1 pour calculer les décisions optimales dans le cas pessimiste. En appliquant l'Algorithme 5.3, ce dernier calcul en premier la négation de la base de préférences  $\Sigma_P$ . En suite, la base résultante  $n_{\Sigma_P}$  est mise sous une forme clausal. A ce moment, l'algorithme calcule pour chaque décision sa cohérence avec la base  $\Sigma_K \cup C_{n_{\Sigma_P}}$  de la façon suivante :

– **Étape 1 :**  $d_1 = CB$

L'algorithme fait appel à la fonction  $\text{Incons}(\Sigma_K \cup C_{n_{\Sigma_P}} \cup \{(CB, 1)\}, \text{max} = 0, \text{Bool} = \text{vrai})$ . Cette fonction retourne  $\text{Inc} = .7$  et  $\text{Bool} = \text{vrai}$ . D'où,  $\text{max} = .7$  et  $d_{\text{Pes}}^* = \{CB\}$ .

Dans ce cas, l'utilité pessimiste  $u_{\text{Pes}}^*(CB) = \text{Inc} = .7$ .

– **Étape 2 :**  $d_2 = CT$

L'algorithme fait appel à la fonction  $\text{Incons}(\Sigma_K \cup C_{n_{\Sigma_P}} \cup \{(CT, 1)\}, \text{max} = .7, \text{Bool} = \text{vrai})$ . Cette fonction retourne  $\text{Inc} = .7$  et  $\text{Bool} = \text{vrai}$ . D'où,  $d_{\text{Pes}}^* = \{CB, CT\}$ .

Dans ce cas, l'utilité pessimiste  $u_{\text{Pes}}^*(CT) = \text{Inc} = .7$ .

– **Étape 3 :**  $d_3 = J$

L'algorithme fait appel à la fonction  $\text{Incons}(\Sigma_K \cup C_{n_{\Sigma_P}} \cup \{(J, 1)\}, \text{max} = .7, \text{Bool} = \text{vrai})$ . Cette fonction retourne  $\text{Bool} = \text{faux}$ .

L'algorithme s'arrête puisque toutes les décisions ont été traitées.

Donc l'ensemble des décisions optimales pessimistes est  $d_{\text{Pes}}^* = \{CB, CT\}$  avec une utilité pessimiste  $u_{\text{Pes}}^*(CB) = u_{\text{Pes}}^*(CT) = \text{Inc} = .7$ .

## 5.5 Optimisation des bases possibilistes générées lors de l'étape de la fusion

Nous avons proposé dans les deux sections précédentes des algorithmes pour le calcul des décisions optimales dans les deux cas : optimiste et pessimiste. Le processus de calcul des décisions optimales, dans les deux cas, nécessite la fusion des bases de connaissances et de préférences. Dans le cas optimiste, la fusion s'applique directement sur la base de connaissances  $\Sigma_K$  et de préférences  $\Sigma_P$ . Cependant, dans le cas pessimiste, l'étape de fusion doit être précédée par deux autres étapes qui concernent le calcul de la négation de la base de préférences et sa mise en forme clausale. La fusion portera alors sur  $\Sigma_k$  et  $C_{n_{\Sigma_P}}$ . Dans les deux cas, la base résultante du processus de fusion peut être optimisée en appliquant certaines simplifications concernant l'élimination des formules dupliquées et sous-sommées [132].

### Définition 5.4 :

Soit  $(\phi, \alpha)$  une formule dans une base possibiliste  $\Sigma$ . Alors  $(\phi, \alpha)$  est dite sous-sommée dans  $\Sigma$  si et seulement si  $(\Sigma - \{(\phi, \alpha)\})_{\geq \alpha} \vdash \phi$ .

Les simplifications qui peuvent être apportées à une base possibiliste découlent de la définition des formules sous sommées. Ces simplifications sont matérialisées par l'implémentation des deux définitions suivantes, ainsi que l'élimination des formules dupliquées.

### Définition 5.5 :

Soit  $\Sigma$  une base possibiliste. Soient  $(\phi, \alpha)$  et  $(\phi \vee \psi, \beta)$  deux clauses de  $\Sigma$ , tel que  $\alpha \geq \beta$ . La base  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  obtenue à partir de  $\Sigma$  en remplaçant  $(\phi \vee \psi, \beta)$  par  $(\phi, \alpha)$  sont équivalentes.

### Définition 5.6 :

Soit  $(\phi \vee \psi, \alpha)$  une formule pondérée dans la base  $\Sigma$ . Si  $\Sigma \vdash (\psi, \alpha)$ , alors la base  $\Sigma$  et la base  $\Sigma'$  obtenue en remplaçant  $(\phi \vee \psi, \alpha)$  par  $(\psi, \alpha)$  sont équivalentes.

Une base possibiliste  $\Sigma'$  obtenue après l'élimination des formules sous-sommées dans la base  $\Sigma$  reste équivalente à cette dernière. C'est-à-dire  $\pi_{\Sigma} = \pi_{\Sigma'}$  [132].

Une fois le processus de fusion est appliqué et la base  $\Sigma_K \cup \Sigma_P$  (resp.  $\Sigma_K \cup C_{n_{\Sigma_P}}$ ) est construite, cette dernière est simplifiée d'abord en appliquant les définitions 5.5 et 5.6 pour éliminer les formules sous-sommées et ensuite les formules dupliquées sont éliminées.

A ce niveau, le calcul des décisions optimales optimistes et pessimistes peut être effectué. Ces étapes de simplifications sont résumées par la fonction **Simplification**( $\Sigma$ ) qui prend en entrée une base possibiliste et la rend simplifiée en appliquant les définitions précédentes.

---

### Fonction 5.5 : Simplification( $\Sigma$ )

---

début

*Simplifier – sous – sommées*1( $\Sigma$ ), simplifier la base en appliquant la Définition 5.5,

*Simplifier – sous – sommées*2( $\Sigma$ ), simplifier la base en appliquant la Définition 5.6,

*Simplifier – Dupliquées*( $\Sigma$ ), simplifier la base en éliminant les formules dupliquées,

---

Cette fonction doit être insérée dans l’Algorithme 5.1 de calcul des décisions optimales optimistes (resp. Algorithme 5.3 de calcul des décisions optimales pessimistes) après le calcul de  $\Sigma_{\oplus_d} = \Sigma_K \cup \Sigma_P \cup \{(d, 1)\}$  (resp.  $\Sigma_{\oplus_d} = \Sigma_K \cup C_{n_{\Sigma_P}} \cup \{(d, 1)\}$ ).

**Exemple 5.5 :**

*Voici deux exemples de bases possibilistes qui peuvent être simplifiées en supprimant des formules sous sommées.*

*Soit  $\Sigma_1 = \{(x, .6), (x \vee y, .4)\}$  une base possibiliste. Cette dernière peut être simplifiée en appliquant la Définition 5.5. En effet la base  $\Sigma_1$  est équivalente à la base  $\Sigma' = \{(x, .6)\}$ .*

*Soit  $\Sigma_2 = \{(x, .5), (\neg x \vee y, .5)\}$  une base possibiliste. Cette dernière peut être simplifiée en appliquant la Définition 5.6. En effet, la base  $\Sigma_2$  est équivalente à la base  $\Sigma' = \{(x, .5), (y, .5)\}$ .*

## 5.6 Etude expérimentale

Le but de cette étude expérimentale est d’évaluer les performances des algorithmes proposés pour le calcul des décisions optimales optimistes et pessimistes dans un cadre logique de représentation. Le langage de programmation JAVA a été utilisé pour l’implémentation des algorithmes (Algorithme 5.1 et 5.3). Comme les algorithmes sont basés sur le calcul de degré d’incohérence des bases logiques possibilistes, l’outil SAT4J 10 est utilisé. C’est une bibliothèque Java pour résoudre les problèmes de satisfaisabilité booléenne et d’optimisation. Pour la transformation des formules DNF en forme CNF, la bibliothèque Orbital 20 a été utilisée. C’est une bibliothèque d’utilitaires logiques classiques permettant une représentation orientée objet des problèmes logiques et mathématiques.

L’expérimentation a été élaborée sur des couples de bases logiques possibilistes générées aléatoirement et représentant les connaissances et les préférences de l’agent respectivement. Les paramètres considérés dans cette étude sont le ratio représenté par la quotient (nombres de variable/nombres de clauses) et le temps de réponse en millisecond.

Dans le contexte optimiste, les tests ont été réalisés en appliquant l’Algorithme 5.1. Les résultats obtenus sont reportés dans le diagramme de la Figure 5.3.

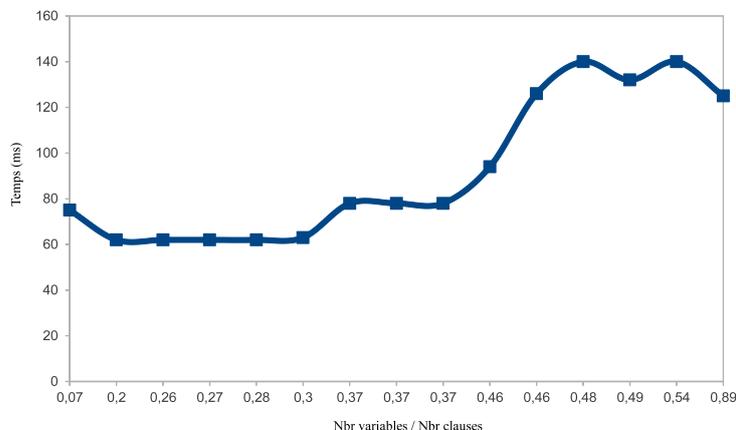


FIGURE 5.3 – Temps de réponse pour le calcul des décisions optimales optimistes en utilisant l’Algorithme 5.1.

Dans le contexte pessimiste, deux séries d'expériences ont été réalisées. La première expérience a été réalisée en appliquant l'Algorithme 5.3 pour le calcul des décisions optimales pessimistes. Cependant, dans la deuxième expérience, l'étape d'optimisation a été introduite en appliquant la Fonction 5.5. La Figure 5.4 illustre les résultats obtenus.

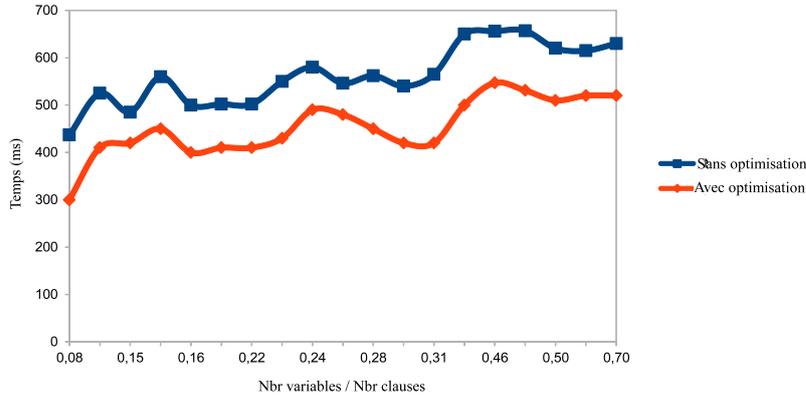


FIGURE 5.4 – Temps de réponse pour le calcul des décisions optimales pessimistes en utilisant l'Algorithme 5.3 avec et sans simplifications.

Les résultats obtenus confirment l'efficacité des algorithmes proposés en ce qui concerne le nombre de variables et des clauses traitées (plus de 200 variables pour le critère optimiste et 60 variables pour le critère pessimiste).

## 5.7 Conclusion

Nous avons passé en revue dans le début du chapitre certaines classes d'opérateurs de fusion de bases de connaissances possibilistes et plus précisément les opérateurs disjonctifs et conjonctifs. Les opérateurs disjonctifs sont appropriés quand les bases sont fortement conflictuelles. Les opérateurs conjonctifs quant à eux sont appropriés quand les bases sont cohérentes, ou si leur niveau de conflit est faible.

Par la suite, nous avons appliqué les contreparties syntaxiques de la fusion aux décisions qualitatives, en utilisant un opérateur conjonctif (min) et un opérateur disjonctif (max). En effet, nous avons pu interpréter un problème de la décision qualitative (pessimiste ou optimiste) comme un problème de fusion de deux distributions de possibilités particulières : une représentant les croyances d'un agent notée  $\pi$ , et l'autre représentant l'utilité qualitative notée  $\mu$ . La distribution de possibilités  $\pi$  est associée à la base de connaissances  $\Sigma_K$  et l'utilité qualitative  $\mu$  est associée à la base de préférences  $\Sigma_P$ .

Dans le cas optimiste, nous avons montré que la bonne décision est celle qui minimise le degré d'incohérence de la base  $\Sigma_K \cup \Sigma_P \cup \{(d_i, 1) : i = 1..p\}$ . Cependant, dans le cas pessimiste la procédure est plus compliquée et nécessite le calcul de la négation de la base de préférences et sa mise en forme clausale notée  $C_{n\Sigma_P}$ . En effet, nous avons aussi montré que la bonne décision est celle qui maximise le degré d'incohérence de la base  $\Sigma_K \cup C_{n\Sigma_P} \cup \{(d_i, 1) : i = 1..p\}$ .

Deux algorithmes, pour le calcul des décisions optimales pessimistes et optimistes, ont été proposés représentant ainsi une alternative aux ATMS.

Ainsi, le problème de la décision qualitative a été contourné dans le cas optimiste (resp. pessimiste) vers un problème d'incohérence d'une base donnée obtenue en fusionnant la

base de connaissances  $\Sigma_K$ ,  $\{(d_i, 1) : i = 1..p\}$  et la base de préférences  $\Sigma_P$  (resp.  $\Sigma_K$ ,  $\{(d_i, 1) : i = 1..p\}$  et la forme clausal de la négation de la base de préférences  $C_{n_{\Sigma_P}}$ ). Cette solution permet de palier au problème relatif au nombre de variables posé dans [17]. Cependant, les performances des deux algorithmes proposés dans le cas optimiste et le cas pessimiste dépendent du nombre de variables de décision.

Dans le prochain chapitre, notre contribution concernera la représentation graphique des problèmes de la décision qualitative. Nous proposerons un nouveau modèle, basé sur les réseaux possibilistes qualitatifs, pour coder un problème de la décision qualitative.

## Chapitre 6

# Nouveau Modèle Graphique de la Décision qualitative basé sur les Réseaux Possibilistes : MGD RP

### 6.1 Introduction

Le problème de la prise de décisions sous incertitude [3, 2] prend de l'ampleur dans le domaine de l'Intelligence Artificielle. De nombreux outils [133, 134] ont été développés pour aider un agent à prendre des décisions dans un environnement incertain : techniques de simulation, programmation dynamique [81], modèles logiques pour la prise de décision [15], modèles graphiques pour la prise de décision [119, 11], etc.

Initialement la sémantique d'un problème de la décision qualitative a été défini dans [9]. Cette définition prend en entrée deux distributions de possibilités : une représente les connaissances de l'agent et l'autre exprime les préférences.

Dans ce contexte qualitatif, les contreparties possibilistes des modèles graphiques standards ont été développés tels que les arbres de décision possibilistes [11, 12] inappropriés dans le cas des problèmes de grande instances (voir Chapitre 4), les diagrammes d'influence possibilistes [11, 14] (voir Chapitre 4), etc. L'incertitude et les préférences sont codées sur la même structure graphique. Ces modèles graphiques de décision qualitatifs contiennent trois types de nœuds : des nœuds de type chance, des nœuds de type décisions et des nœuds de type utilités. En effet, l'incertitude d'un agent est décrite par une distribution de possibilités sur les états possibles du monde (nœuds chances) et ses préférences par des degrés de satisfaction sur les nœuds utilités.

La résolution d'un diagramme d'influence possibiliste se fait soit d'une manière directe sur la structure initiale [11] soit d'une manière indirecte sur une structure secondaire après avoir procédé à sa transformation en un arbre de décision [11] ou en un réseau possibiliste qualitatif [13, 14].

Les réseaux possibilistes qualitatifs permettent d'une part une représentation compacte d'informations incertaines et d'autre part ils offrent des outils d'inférence efficaces pour leur résolution. Vu l'expressivité et l'efficacité qu'offrent ces modèles graphiques, nous proposons dans la première partie de ce chapitre un nouveau modèle pour la prise de décision sous l'incertitude basée sur les réseaux possibilistes qualitatifs [23, 20]. En effet, nous suggérons lorsque les connaissances et les préférences d'un agent sont exprimées sur une échelle ordinale, de les représenter par deux réseaux possibilistes qualitatifs distincts. Le premier code la distribution de possibilités jointe représentant les connaissances de l'agent et le deuxième code son utilité qualitative. Cette représentation est tout à fait en accord avec la définition

sémantique d'un problème de la décision qualitative. Le problème de la décision qualitative peut être ainsi vu comme un problème de fusion de ces deux réseaux possibilistes. Grâce à notre nouveau modèle, nous montrons que le calcul des décisions optimales optimistes peut être effectué d'une manière unifiée en faisant appel à l'algorithme d'inférence basé sur l'arbre de jonction associé à la fusion du réseau des connaissances et celui des préférences. Nous montrons que le calcul des décisions optimales revient à calculer le degré de normalisation de cet arbre.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous proposons une autre alternative pour calculer les décisions optimales optimistes. Cette nouvelle alternative est exploitée quand la construction de l'arbre de jonction associé aux connaissances et aux préférences s'avère impossible. Notre idée consiste à transformer les deux réseaux possibilistes en deux bases logiques possibilistes équivalentes. Par conséquent, le calcul des décisions optimales revient à calculer le degré d'incohérence de la base résultante de la fusion des deux bases possibilistes représentant les connaissances et les préférences de l'agent (voir Chapitre 5).

Enfin, une étude expérimentale sera présentée afin d'évaluer les performances des deux alternatives proposées pour le calcul des décisions optimales optimistes.

## 6.2 Fusion de réseaux possibilistes qualitatifs

D'une manière générale, un des objectifs de la fusion d'informations incertaines (voir Chapitre 5, Section 5.2) est d'exploiter la complémentarité entre les sources d'informations afin d'avoir un point de vue global plus complet et plus précis sur un problème donné. Nous nous intéressons dans cette section au mode conjonctif de la fusion. D'une façon générale, le mode de fusion conjonctif est significatif si toutes les sources sont considérées également fiables. Les opérateurs conjonctifs exploitent la complémentarité entre les sources. Ils favorisent les informations les plus spécifiques. Par exemple, si une source  $S_1$  contient toutes les informations fournies par  $S_2$ , alors le résultat de la fusion des deux sources est bien  $S_1$ .

Nous avons présenté dans le chapitre précédent, le problème de fusion en logique possibiliste [126]. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la fusion des réseaux possibilistes [135, 136, 137]. Dans le cas général, à chaque opérateur de fusion possibiliste défini sémantiquement, sa contrepartie syntaxique lui est associée (voir Figure 6.1). C'est-à-dire que si  $(\pi_1, \dots, \pi_n)$  sont des distributions de possibilités associées aux réseaux possibilistes  $(\Pi G_1, \dots, \Pi G_n)$ , alors pour tout opérateur  $\oplus$  appliqué à  $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ , sera construit à partir de  $(\Pi G_1, \dots, \Pi G_n)$  un réseau possibiliste  $\Pi G_\oplus$  telle que  $\pi_{\Pi G_\oplus} = \pi_\oplus$ .

$$\forall \omega \in \Omega, \pi_\oplus(\omega) = \oplus(\pi_{G_1}(\omega), \dots, \pi_{G_n}(\omega)). \quad (6.1)$$

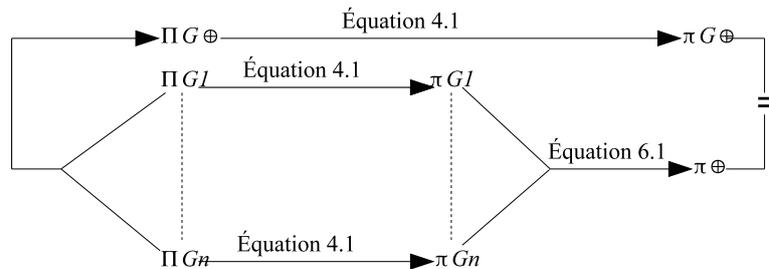


FIGURE 6.1 – Contrepartie syntaxique des fusions sémantiques des réseaux possibilistes.

Comme notre contribution, proposée par la suite, se base sur les résultats de la fusion des réseaux possibilistes qualitatifs [24], notre étude sera focalisée sur l'un des opérateurs basiques de la fusion en mode conjonctive qui est le minimum. Pour des raisons de simplicité, nous nous limitons dans cette étude au cas de la fusion de deux réseaux possibilistes qualitatifs. Soient  $\Pi G_{min} = (G, \pi)$  et  $\Pi G'_{min} = (G', \pi')$  ces deux réseaux. Le réseau  $\Pi G_{min}$  induit une distribution de possibilistes jointe  $\pi_G$  en utilisant l'Equation 4.1. En utilisant la même équation, le réseau possibiliste  $\Pi G'_{min}$  induit une distribution de possibilités jointe  $\pi'_{G'}$ . Le résultat de la fusion de  $\Pi G_{min}$  et  $\Pi G'_{min}$  est le réseau possibiliste  $\Pi G_{\oplus} = (G_{\oplus}, \pi_{\oplus})$  induisant la distribution de possibilités jointe  $\pi_{G_{\oplus}}$  définie par [24] :

$$\forall \omega \in \Omega, \pi_{G_{\oplus}}(\omega) = \min(\pi_G(\omega), \pi'_{G'}(\omega)). \quad (6.2)$$

La contrepartie syntaxique de la fusion des deux distributions de possibilités, associées aux deux réseaux possibilistes, en utilisant l'opérateur min est un nouveau réseau possibiliste qualitatif. L'union de deux *DAG* est utile, par la suite, pour la définition de la fusion de réseaux possibilistes. En effet, l'union de  $G_1$  et  $G_2$  est un graphe dont :

- l'ensemble des variables est l'union des ensembles des variables de  $G_1$  et  $G_2$ ,
- pour chaque variable  $X$ , ses parents sont ceux de  $G_1$  et  $G_2$

Dans [24, 136], les auteurs proposent deux classes principales de la fusion de réseaux possibilistes qualitatifs basés sur le min :

**1. Fusion des réseaux possibilistes de structures identiques :**

Dans ce cas, les deux réseaux possibilistes  $\Pi G_{min}$  et  $\Pi G'_{min}$  à fusionner, partagent la même structure graphique ( $G = G'$ ). En effet, ils diffèrent seulement par les distributions de possibilités conditionnelles affectées aux variables. Le résultat de la fusion des réseaux de structures identiques est immédiat :

- Le réseau possibiliste  $\Pi G_{\oplus}$ , résultant de la fusion, préserve la même structure :  $G_{\oplus} = G = G'$ .
- Pour chaque variable  $X$ ,  $\pi_{\oplus}(X | U_X) = \min(\pi(X | U_X), \pi'(X | U_X))$ .

Autrement dit, le résultat de la fusion de  $\Pi G_{min}$  et  $\Pi G'_{min}$  est un réseau possibiliste dont le DAG est celui de  $\Pi G_{min}$  et  $\Pi G'_{min}$ , et dont les distributions de possibilités locales sont le minimum des distributions locales de  $\Pi G_{min}$  et  $\Pi G'_{min}$ .

**2. Fusion des réseaux possibilistes de structures différentes :**

Dans le cas où les deux réseaux possibilistes  $\Pi G_{min}$  et  $\Pi G'_{min}$  ont des structures différentes, deux cas à considérer :

– **L'union des graphes est acyclique :**

Dans ce cas, l'union des deux graphes est supposée sans cycle. Alors, les graphes de  $\Pi G_{min}$  et  $\Pi G'_{min}$  sont d'abord étendus en  $\Pi G_1 = (G_{\oplus} = G \cup G', \pi_1)$  et  $\Pi G'_1 = (G_{\oplus} = G \cup G', \pi'_1)$  respectivement sans affecter leurs distributions de possibilités. Le processus d'extension d'un réseau possibiliste est effectué par l'ajout de variables ou d'arcs de la façon suivante :

– **Ajout de variables :**

L'extension de  $\Pi G_{min}$  par l'ajout d'une variable  $X \notin \mathcal{V}$  donne un nouveau réseau possibiliste  $\Pi G_X = (G_X, \pi_X)$  induisant une distribution de possibilités jointe  $\pi_{G_X}$ , tel que :

- $G_X = G \cup \{X\}$ ,
- le nœud additionnel  $X$  représente l'ignorance totale, c'est-à-dire  $\forall x \in \mathbb{D}_X, \pi_X(x) = 1$ ,
- le reste des variables préservent les mêmes distributions de possibilités,  $\forall Y \in \mathcal{V}, Y \neq X, \pi_X(Y | U_Y) = \pi(Y | U_Y)$ .

Il a été montré dans [135, 136] que,  $\forall \omega \in \Omega, \pi_G(\omega) = \max_x \pi_{G_X}(x\omega)$ .

– **Ajout d’arcs :**

L’extension de  $\Pi G_{min} = (G, \pi)$  par l’ajout d’un arc de  $X$  vers  $Y$  ( $X \notin Par(Y)$ ) fournit un nouveau réseau possibiliste  $\Pi G_L = (G_L, \pi_L)$  induisant une distribution de possibilités jointe  $\pi_{G_L}$ , tel que :

- $\forall y \in \mathbb{D}_Y, x \in \mathbb{D}_X, u_Y \in \mathbb{D}_{Par(Y)}, \pi_L(y | u_Y x) = \pi(y | u_Y)$ .
- $\forall Z, Z \neq Y, \forall z \in \mathbb{D}_Z, u_Z \in \mathbb{D}_{Par(Z)}, \pi_L(z | u_Z) = \pi(z | u_Z)$ .

Il a été montré dans [24] que,  $\forall \omega \in \Omega, \pi_G(\omega) = \pi_{G_L}(\omega)$ .

A ce niveau, les deux réseaux possibilistes auraient la même structure (en ajoutant des variables et des arcs de la façon décrite au dessus), alors la procédure de fusion des réseaux possibilistes de structures identiques peut être appliquée.

– **L’union des graphes est cyclique :**

Dans ce cas, l’union des deux graphes est supposée contenir des cycles. Des variables additionnelles seront ajoutées au graphe afin d’éliminer les cycles. En effet, le nouveau réseau possibiliste  $\Pi G_{\oplus} = (G_{\oplus}, \pi_{\oplus})$  est obtenu de la manière suivante :

- Initialement  $G_{\oplus} = G'$ .
- Renommer chaque variable  $\forall X_i \in \mathcal{V}$  dans  $G_{\oplus}$  par une nouvelle variable  $X'_i$ .
- Ajouter  $G$  à  $G_{\oplus}$ , c’est-à-dire  $G_{\oplus} = G \cup G'$ .
- Lier chaque ancienne variable  $X_i$  à sa nouvelle variable correspondante  $X'_i$ .
- Pour chaque ancienne variable  $X_i, \forall x_i \in \mathbb{D}_{X_i}, \pi_{\oplus}(x_i | U_i) = \pi(x_i | U_i)$ .
- Pour chaque nouvelle variable  $X'_i,$

$$\pi_{\oplus}(x'_i | x_j u'_i) = \begin{cases} \pi'(x_i | u'_i) & \text{Si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les nouvelles distributions de possibilités relatives aux nouvelles variables assurent l’équivalence entre les nouvelles et les anciennes variables.

Pour plus de détails sur la fusion de réseaux possibilistes voir [24, 135].

### 6.3 Un nouveau modèle graphique pour les problèmes de décision possibiliste : description du problème

Notre but est de proposer un nouveau modèle pour représenter les problèmes de la décision qualitative sous incertitude. Le point de départ étant la distribution de possibilités  $\pi$  et la fonction d’utilité  $\mu$  représentant respectivement les connaissances incertaines sur les états possibles du monde et les préférences de l’agent.

Nous proposons de coder ces deux distributions de possibilités (incertitude et utilité) d’une façon compacte en utilisant deux réseaux possibilistes qualitatifs distincts : un représente les connaissances de l’agent et l’autre code ses préférences (l’utilité qualitative) [20]. Le premier réseau possibiliste, noté  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$ , code les connaissances incertaines de l’agent et induit une distribution de possibilités jointe unique  $\pi_K = \pi$  en utilisant l’Equation 4.1. Le second réseau possibiliste qualitatif, noté  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$ , définit les préférences de l’agent et induit une utilité qualitative unique  $\mu_P = \mu$  en utilisant la même Equation 4.1. Comme dans le cadre d’une représentation logique du problème de la décision qualitative [15] (voir Chapitre 3), les composantes graphiques  $G_K$  et  $G_P$  des deux réseaux possibilistes  $\Pi K_{min}$  et  $\Pi P_{min}$  respectivement sont définies sur deux types de variables : les variables de décisions  $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_p\}$  et les variables d’états  $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ . La prise de décision se fait sur l’un des critères qualitatif vus dans le chapitre 2. La solution proposée, par la suite, pour la résolution d’un problème de la décision qualitative repose sur le critère d’utilité optimiste

[53, 68] :

$$u_{Opt}(d) = \max_{\omega \in \Omega} \min(\pi_d(\omega), \mu(\omega)). \quad (6.3)$$

**Exemple 6.1 :**

Voici un exemple simple de problème de décision pour illustrer le modèle graphique proposé ci-dessus dont les connaissances de l'agent sont représentées par le réseau possibiliste qualitatif  $\Pi K_{min}$  et les préférences sont codées par un autre réseau possibiliste  $\Pi P_{min}$ .

**1. Les connaissances de l'agent :**

Elles sont décrites par un réseau possibiliste qualitatif  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$ . La composante graphique  $G_K$  est donnée par la Figure 6.2 dont quatre variables  $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$  représentent les états possibles du monde et une seule variable  $\{D\}$  représente une variable de décision. Les distributions de possibilités conditionnelles initiales associées à  $\Pi K_{min}$  sont données dans les Tables 6.1, 6.2, 6.3 et 6.4. Toutes les variables sont supposées être binaires.

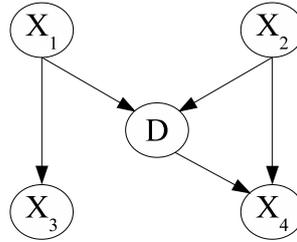


FIGURE 6.2 – Réseau possibiliste représentant les connaissances incertaines.

$X_1$	$\pi(X_1)$	$X_2$	$\pi(X_2)$
$x_1$	.5	$x_2$	.8
$\neg x_1$	1	$\neg x_2$	1

TABLE 6.1 – Distributions de possibilités initiales  $\Pi K_{min}$  sur  $X_1$  et  $X_2$ .

$X_3$	$X_1$	$\pi(X_3   X_1)$	$X_3$	$X_1$	$\pi(X_3   X_1)$
$x_3$	$x_1$	.5	$\neg x_3$	$x_1$	1
$x_3$	$\neg x_1$	.6	$\neg x_3$	$\neg x_1$	1

TABLE 6.2 – Distributions de possibilités initiales  $\Pi K_{min}$  sur  $X_3$  sachant  $X_1$ .

$D$	$X_1$	$X_2$	$\pi(D   X_1 X_2)$	$D$	$X_1$	$X_2$	$\pi(D   X_1 X_2)$
$d$	$x_1$	$x_2$	.1	$\neg d$	$x_1$	$x_2$	1
$d$	$x_1$	$\neg x_2$	.6	$\neg d$	$x_1$	$\neg x_2$	1
$d$	$\neg x_1$	$x_2$	.7	$\neg d$	$\neg x_1$	$x_2$	1
$d$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	.4	$\neg d$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	1

TABLE 6.3 – Distributions de possibilités initiales  $\Pi K_{min}$  sur  $D$  sachant  $X_1 X_2$ .

$X_4$	$D$	$X_2$	$\pi(X_4   DX_2)$	$X_4$	$D$	$X_2$	$\pi(X_4   DX_2)$
$x_4$	$d$	$x_2$	.1	$\neg x_4$	$d$	$x_2$	1
$x_4$	$d$	$\neg x_2$	.9	$\neg x_4$	$d$	$\neg x_2$	1
$x_4$	$\neg d$	$x_2$	.2	$\neg x_4$	$\neg d$	$x_2$	1
$x_4$	$\neg d$	$\neg x_2$	1	$\neg x_4$	$\neg d$	$\neg x_2$	.2

TABLE 6.4 – Distributions de possibilités initiales  $\Pi K_{min}$  sur  $X_4$  sachant  $DX_2$ .

En utilisant la règle de chaînage basée sur le min (Equation 4.1), la distribution de possibilités jointe est donnée dans la Table 6.5.

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$D$	$\pi_K$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$D$	$\pi_K$
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$d$	.1
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg d$	.2	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg d$	.2
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$d$	.6
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg d$	.5	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg d$	.6
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$d$	.1
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg d$	.2	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg d$	.2
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$d$	.7
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg d$	.5	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg d$	.8
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$d$	.5	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$d$	.4
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg d$	.2	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg d$	.6
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$d$	.5	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$d$	.4
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg d$	.2	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg d$	.2
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$d$	.5	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$d$	.4
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg d$	.5	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg d$	1
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$d$	.5	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$d$	.4
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg d$	.2	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg d$	.2

TABLE 6.5 – Distribution de possibilités jointe  $\Pi K_{min}$  sur  $X_1, X_2, X_3, X_4, D$ .

2. **Les préférences de l'agent :**

Elles sont exprimées par un autre réseau possibiliste qualitatif  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$ , dont sa composante graphique est donnée par le DAG de la Figure 6.3. Les distributions de possibilités conditionnelles initiales associées à  $\Pi P_{min}$  sont reportées dans la Table 6.6.

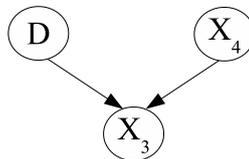


FIGURE 6.3 – Réseau possibiliste représentant les préférences de l'agent.

$X_3$	$D$	$X_4$	$\mu(X_3 DX_4)$	$X_3$	$D$	$X_4$	$\mu(X_3 DX_4)$	$D$	$\mu(D)$	$X_4$	$\mu(X_4)$
$x_3$	$d$	$x_4$	1	$\neg x_3$	$d$	$x_4$	.7	$d$	.1	$x_4$	1
$x_3$	$d$	$\neg x_4$	.6	$\neg x_3$	$d$	$\neg x_4$	1	$\neg d$	1	$\neg x_4$	.3
$x_3$	$\neg d$	$x_4$	.8	$\neg x_3$	$\neg d$	$x_4$	1				
$x_3$	$\neg d$	$\neg x_4$	.2	$\neg x_3$	$\neg d$	$\neg x_4$	1				

TABLE 6.6 – Distributions de possibilités initiales  $\Pi P_{min}$  sur  $X_3$  sachant  $DX_4$ ,  $D$  et  $X_4$ .

Les préférences de l'agent codées par l'utilité qualitative jointe sont obtenues en utilisant la règle de chaînage basée sur le min (Equation 4.1). Les résultats sont donnés dans la Table 6.7.

$X_3$	$D$	$X_4$	$\mu_P$	$X_3$	$D$	$X_4$	$\mu_P$
$x_3$	$d$	$x_4$	.1	$\neg x_3$	$d$	$x_4$	.1
$x_3$	$d$	$\neg x_4$	.1	$\neg x_3$	$d$	$\neg x_4$	.1
$x_3$	$\neg d$	$x_4$	.8	$\neg x_3$	$\neg d$	$x_4$	1
$x_3$	$\neg d$	$\neg x_4$	.2	$\neg x_3$	$\neg d$	$\neg x_4$	.3

TABLE 6.7 – L'utilité qualitative jointe  $\Pi P_{min}$  sur  $DX_3X_4$ .

## 6.4 Calcul de décisions optimistes basé sur la fusion syntaxique des réseaux possibilistes

Étant donné un problème de la décision qualitative codé dans le modèle proposé dans la section précédente, nous proposons dans cette section un algorithme pour évaluer les différentes décisions et d'en choisir la meilleure [22, 23, 20]. En effet, au niveau sémantique le problème de la décision qualitative peut être vu comme un problème de fusion de deux distributions de possibilités particulières : une représentant les croyances de l'agent et la seconde représentant l'utilité qualitative.

Rappelons que les connaissances de l'agent et ses préférences sont représentées par deux réseaux possibilistes différents  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$  et  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  respectivement. Le premier réseau induit la distribution de possibilités  $\pi_K$  et le second induit l'utilité qualitative  $\mu_P$ .

L'idée de la méthode proposée, pour le calcul des décisions optimales optimistes, repose sur la fusion de  $\pi_K$  et  $\mu_P$  (ou bien la fusion de  $\Pi K_{min}$  et  $\Pi P_{min}$ ).

Il est à noter que chaque ensemble de décisions  $d \in \mathcal{D}$  induit une distribution de possibilités  $\pi_{K_d}$  de la façon suivante [53, 68] :

$$\pi_{K_d}(\omega) = \min(\pi_K(\omega), \pi_d(\omega)), \quad (6.4)$$

tel que,

$$\pi_d(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \omega \models d \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (6.5)$$

et  $\omega \models d$  signifie que la valeur de  $D$  dans  $\omega$  est égale à  $d$ .

### 6.4.1 Décisions optimistes basées sur le processus de fusion

Une décision optimale optimiste  $d$  est définie par l'affectation des variables de  $\mathcal{D}$  qui maximise l'expression suivante :

$$u_{Opt}(d) = \max_{\omega \in \Omega} \min(\pi_{K_d}(\omega), \mu_P(\omega)). \quad (6.6)$$

En utilisant l'Equation 6.4, l'utilité optimiste d'une décision  $u^*(d)$  devient :

$$u_{Opt}(d) = \max_{\omega \in \Omega} \min(\min(\pi_K(\omega), \mu_P(\omega)), \pi_d(\omega)). \quad (6.7)$$

En appliquant le processus de fusion de deux réseaux possibilistes qualitatifs (Equation 6.2), l'Equation 6.7 peut être réécrite d'une façon équivalente à :

$$u_{Opt}(d) = \max_{\omega \in \Omega} \min(\pi_{G_{\oplus}}(\omega), \pi_d(\omega)), \quad (6.8)$$

avec  $\pi_{G_{\oplus}}(\omega) = \min(\pi_K(\omega), \mu_P(\omega))$ .

En outre, la procédure de calcul de la contrepartie du  $\min(\pi, \pi')$ , décrite dans [135, 136], a été rappelée dans la Section 6.2. Soit  $\Pi G_{\oplus} = (G_{\oplus}, \pi_{\oplus})$  la contrepartie syntaxique de  $\min(\pi_K(\omega), \mu_P(\omega))$ , dont la structure  $G_{\oplus}$  est construite selon que les DAG initiaux sont identiques ou non. Le réseau possibiliste résultant  $\Pi G_{\oplus}$  induit une distribution de possibilités jointe unique  $\pi_{G_{\oplus}}$ .

**Exemple 6.2 :**

Soient les deux DAG ( $G_K$  et  $G_P$ ) de l'Exemple 6.1 (Figure 6.2 et 6.3). Les deux graphes sont de structures différentes. Puisque leur union ne contient pas de cycle, alors le résultat de la fusion de  $\Pi K_{min}$  et  $\Pi P_{min}$  est le réseau possibiliste qualitatif  $\Pi G_{\oplus} = (G_{\oplus}, \pi_{\oplus})$ , dont la composante graphique  $G_{\oplus}$  est donnée par la Figure 6.4. Le DAG  $G_{\oplus}$  est simplement l'union des deux graphes de la Figure 6.2 et 6.3. Le nouveau réseau possibiliste  $\Pi G_{\oplus}$  induit une distribution de possibilités jointe unique  $\pi_{G_{\oplus}}$  en utilisant l'Equation 4.1.

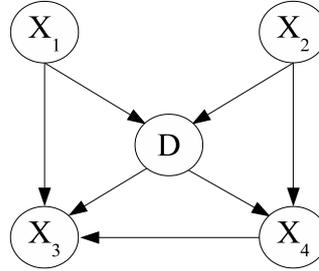


FIGURE 6.4 – Le DAG  $G_{\oplus}$  correspondant à la fusion de  $G_K$  de la Figure 6.2 et  $G_P$  de la Figure 6.3.

Les distributions de possibilités conditionnelles initiales associées au réseau  $\Pi G_{\oplus} = (G_{\oplus}, \pi_{\oplus})$  résultant de la fusion sont obtenues en combinant les distributions de possibilités locales de  $\Pi K_{min}$  et  $\Pi P_{min}$  par le min. Les résultats sont données dans les Tables 6.8, 6.9, 6.10 et 6.11.

$X_1$	$\pi_{\oplus}(X_1)$	$X_2$	$\pi_{\oplus}(X_2)$
$x_1$	.5	$x_2$	.8
$\neg x_1$	1	$\neg x_2$	1

TABLE 6.8 – Distributions de possibilités initiales  $\Pi G_{\oplus}$  sur  $X_1$  and  $X_2$ .

$D$	$X_1$	$X_2$	$\pi_{\oplus}(D   X_1X_2)$	$D$	$X_1$	$X_2$	$\pi_{\oplus}(D   X_1X_2)$
$d$	$x_1$	$x_2$	.1	$\neg d$	$x_1$	$x_2$	1
$d$	$x_1$	$\neg x_2$	.1	$\neg d$	$x_1$	$\neg x_2$	1
$d$	$\neg x_1$	$x_2$	.1	$\neg d$	$\neg x_1$	$x_2$	1
$d$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	.1	$\neg d$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	1

TABLE 6.9 – Distributions de possibilités initiales  $\Pi G_{\oplus}$  sur  $D$  sachant  $X_1X_2$ .

$X_4$	$D$	$X_2$	$\pi_{\oplus}(X_4   DX_2)$	$X_4$	$D$	$X_2$	$\pi_{\oplus}(X_4   DX_2)$
$x_4$	$d$	$x_2$	.1	$\neg x_4$	$d$	$x_2$	.3
$x_4$	$d$	$\neg x_2$	.9	$\neg x_4$	$d$	$\neg x_2$	.3
$\neg x_4$	$\neg d$	$x_2$	.2	$\neg x_4$	$\neg d$	$x_2$	.3
$\neg x_4$	$\neg d$	$\neg x_2$	1	$\neg x_4$	$\neg d$	$\neg x_2$	.2

TABLE 6.10 – Distributions de possibilités initiales  $\Pi G_{\oplus}$  sur  $X_4$  sachant  $DX_2$ .

$X_3$	$X_1$	$D$	$X_4$	$\pi_{\oplus}(X_3   X_1DX_4)$	$X_3$	$X_1$	$D$	$X_4$	$\pi_{\oplus}(X_3   X_1DX_4)$
$x_3$	$x_1$	$d$	$x_4$	.5	$\neg x_3$	$x_1$	$d$	$x_4$	.7
$x_3$	$x_1$	$d$	$\neg x_4$	.5	$\neg x_3$	$x_1$	$d$	$\neg x_4$	1
$x_3$	$x_1$	$\neg d$	$x_4$	.5	$\neg x_3$	$x_1$	$\neg d$	$x_4$	1
$x_3$	$x_1$	$\neg d$	$\neg x_4$	.2	$\neg x_3$	$x_1$	$\neg d$	$\neg x_4$	1
$x_3$	$\neg x_1$	$d$	$x_4$	.6	$\neg x_3$	$\neg x_1$	$d$	$x_4$	.7
$x_3$	$\neg x_1$	$d$	$\neg x_4$	.6	$\neg x_3$	$\neg x_1$	$d$	$\neg x_4$	1
$x_3$	$\neg x_1$	$\neg d$	$x_4$	.6	$\neg x_3$	$\neg x_1$	$\neg d$	$x_4$	1
$x_3$	$\neg x_1$	$\neg d$	$\neg x_4$	.2	$\neg x_3$	$\neg x_1$	$\neg d$	$\neg x_4$	1

TABLE 6.11 – Distributions de possibilités initiales  $\Pi G_{\oplus}$  sur  $X_3$  sachant  $X_1DX_4$ .

En utilisant la règle de chaînage basée sur le min (Equation 4.1), nous obtenons la distribution de possibilités jointe donnée dans la Table 6.12.

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$D$	$\pi_{G_{\oplus}}$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$D$	$\pi_{G_{\oplus}}$
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$d$	.1
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg d$	.2	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg d$	.2
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$d$	.1
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg d$	.2	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg d$	.2
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$d$	.1
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg d$	.2	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg d$	.2
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$d$	.1
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg d$	.3	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg d$	.3
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$d$	.1
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg d$	.5	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg d$	.6
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$d$	.1
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg d$	.2	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg d$	.2
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$d$	.1
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg d$	.5	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg d$	1
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$d$	.1
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg d$	.2	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg d$	.2

TABLE 6.12 – Distribution de possibilités jointe  $\Pi G_{\oplus}$  sur  $X_1, X_2, X_3, X_4, D$ .

*Il est clair que la distribution de possibilités jointe  $\pi_{G_{\oplus}}$  induite par  $\Pi G_{\oplus}$  est égale au minimum des distributions de possibilités jointes  $\pi_K$  et  $\mu_P$  induites par  $\Pi K_{min}$  et  $\Pi P_{min}$  respectivement.*

Un algorithme de propagation doit être appliqué sur le réseau  $\Pi G_{\oplus}$ , issue de la fusion de  $\Pi K_{min}$  et  $\Pi P_{min}$ , pour générer les décisions optimales optimistes en maximisant l'utilité qualitative relative à chaque décision.

Dans la littérature, plusieurs algorithmes ont été développés dans un réseau possibiliste qualitatif selon la structure du *DAG* (sans boucles ou avec boucles). Dans le cas de *DAG* sans boucles, l'adaptation possibiliste qualitative [106] de la version centralisée de l'algorithme de Pearl peut être utilisée. Cependant, pour les *DAG* à connexions multiples (avec boucles), l'adaptation possibiliste qualitative de l'algorithme de propagation de l'arbre de jonction [65] est plus appropriée (voir Chapitre 4, Section 4.2.2).

Dans le cas où les adaptations précédentes n'aboutissent pas, des approches approximatives [130] ont été proposées et peuvent être appliquées tel que l'algorithme anytime [138, 139].

La solution proposée pour le calcul des décisions optimales optimistes, dans le cas d'une représentation basée sur les réseaux possibilistes qualitatifs, est assuré en appliquant le processus de propagation basé sur une adaptation de l'algorithme de l'arbre de jonction.

#### 6.4.2 Calcul des décisions optimistes optimales basé sur la structure de l'arbre de jonction

Une adaptation du processus de propagation basé sur la structure de l'arbre de jonction sera détaillée dans cette section permettant ainsi le calcul de décisions optimales optimistes lorsque le problème de la décision qualitative est codé dans notre modèle présenté dans la Section 6.3. Plus précisément, le calcul du  $\min(\pi_{G_{\oplus}}(\omega), \pi_d(\omega))$  est effectué en appliquant une adaptation de l'algorithme de propagation, basé sur la structure de l'arbre de jonction, sur le réseau  $\Pi G_{\oplus}$ . En effet, l'algorithme de propagation sera appliqué avec une étape supplémentaire dans la partie d'initialisation de l'arbre de jonction.

Notre arbre de jonction sera, en effet, paramétré par une certaine décision  $d$ . Ce paramètre  $d$  fait la différence essentielle entre un algorithme de propagation appliqué à un réseau possibiliste représentant uniquement les connaissances d'un agent et un autre représentant les connaissances et les préférences.

Il est à noter, que la construction de l'arbre de jonction est effectuée qu'une seule fois. Tandis que, l'étape de propagation et d'initialisation, de complexité polynomiale, sont répétées pour chaque décision possible.

Les principales étapes de notre algorithme sont décrites dans ce qui suit [22, 23, 20] :

##### 1. Construction de l'arbre de jonction $\mathcal{JT}$ :

La première étape de l'algorithme de propagation dans un réseau possibiliste qualitatif consiste à transformer le graphe initial  $G_{\oplus}$  en une structure secondaire. Cette structure qui correspond à l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  est obtenue, en éliminant les boucles existantes dans  $G_{\oplus}$ , en trois étapes (voir Chapitre 4, Section 4.2.2.1) :

- Moralisation du graphe initial  $G_{\oplus}$ .
- Triangulation du graphe moral.
- Génération de l'arbre de jonction optimal  $\mathcal{JT}$ .

Cette étape de construction de l'arbre de jonction est identique à celle dans le cas des réseaux possibilistes standards ou les réseaux probabilistes. Cependant, l'étape d'initialisation diffère, ce qui sera décrit dans la deuxième étape.

**2. L'initialisation pour une décision  $d$  :**

Une fois que l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  est construit, nous procédons à sa quantification en transformant les distributions de possibilités initiales en des distributions jointes locales attachées aux clusters et aux séparateurs compte tenu de la décision  $d$ . En effet, un potentiel  $\pi_{C_i}^t$  (resp.  $\pi_{S_{ij}}^t$ ) est affecté à chaque cluster  $C_i$  (resp. séparateur  $S_{ij}$ ) de l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$ , tel que  $t$  est relatif à l'étape de propagation. L'étape d'initialisation s'effectue comme suit :

- (a) Pour chaque cluster  $C_i$  (resp.  $S_{ij}$ ),  $\pi_{C_i}^I \leftarrow 1$  (resp.  $\pi_{S_{ij}}^I \leftarrow 1$ ).
- (b) Pour chaque variable  $X_i$ , choisir un cluster  $C_i$  contenant  $\{X_i\} \cup Par(X_i)$ ,

$$\pi_{C_i}^I \leftarrow \min(\pi_{C_i}^I, \pi_{\oplus}(X_i | U_i)).$$

- (c) Coder l'évidence  $D = d$  par son potentiel "likelihood"  $\Lambda_D(d)$  :

$$\Lambda_D(d) = \begin{cases} 1 & \text{Si } D \text{ est instanciée à } d \\ 0 & \text{Si } D \text{ est instanciée par une valeur différente de } \\ & d \end{cases} \quad (6.9)$$

- (d) Identifier un cluster  $C_i$  contenant  $D$ , et mettre à jour  $C_i$  comme suit :

$$\pi_{C_i}^I \leftarrow \min(\pi_{C_i}^I, \Lambda_D). \quad (6.10)$$

Il est à noter que les Equations 6.9 et 6.10 n'apparaissent pas dans la procédure standard d'initialisation d'un arbre de jonction associé à un réseau possibiliste qualitatif. Ces deux étapes additionnelles sont propres aux problèmes de la décision qualitative. Elles sont rajoutées pour permettre le calcul des décisions optimales optimistes. En intégrant la décision  $D = d$ , l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  code la distribution de possibilités  $\pi_{\mathcal{JT}}(\omega) = \min(\pi_{G_{\oplus}}(\omega), \pi_d(\omega))$ , tel que  $\pi_{\mathcal{JT}}$  peut être redéfinie comme suit :

**Définition 6.1 :**

La distribution de possibilités jointe associée à l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  est exprimée par :

$$\pi_{\mathcal{JT}}(\omega) = \min_{i=1..m} \pi_{C_i}(\omega), \quad (6.11)$$

où  $m$  représente le nombre de clusters dans  $\mathcal{JT}$ .

Alors l'utilité qualitative optimiste relative à la décision  $d$  est exprimée par la proposition suivante :

**Proposition 6.1 :**

Soient  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$  et  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  deux réseaux possibilistes qualitatifs représentant les connaissances et les préférences de l'agent respectivement. Soit  $\Pi G_{\oplus} = (G_{\oplus}, \pi_{\oplus})$  le résultat de la fusion de  $\Pi K_{min}$  et  $\Pi P_{min}$  en utilisant l'opérateur  $\min$ . Soit  $\mathcal{JT}$  l'arbre de jonction associé à  $\Pi G_{\oplus}$ . Alors,

$$u_{Opt}(d) = h(\pi_{\mathcal{JT}}) = \max_{\omega \in \Omega} \pi_{\mathcal{JT}}(\omega), \quad (6.12)$$

où  $u_{Opt}(d)$  est donnée par l'Equation 6.8.

*Preuve.* Le but est de prouver qu'en appliquant la procédure d'initialisation (résumée par les étapes (a), (b), (c) et (d)), l'utilité qualitative relative à une décision  $d$  donnée par l'Equation 6.8 peut être réécrite de la manière suivante :

$$u_{Opt}(d) = h(\pi_{\mathcal{JT}}) = \max_{\omega \in \Omega} \pi_{\mathcal{JT}}(\omega).$$

Procédons en deux étapes :

– **Étape 1 (Arbre de jonction standard) :**

Par définition, en utilisant l'Equation 6.11, la distribution de possibilités jointe associée à l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  est exprimée par :

$$\pi_{\mathcal{JT}}(X_1, \dots, X_n) = \min_{j=1..m} \pi_{C_j}.$$

A partir des étapes (a) et (b) de la procédure d'initialisation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{JT}}(X_1, \dots, X_n) &= \min(\min_{i=1..n} \pi_{\oplus}(X_i | U_i), 1) \\ &= \min_{i=1..n} \pi_{\oplus}(X_i | U_i) \\ &= \pi_{G_{\oplus}}(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

– **Étape 2 (Arbre de jonction paramétré) :**

En appliquant les Equations 6.9 et 6.10, la distribution de possibilités jointe associée à l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  revient à calculer :

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{JT}}(X_1, \dots, X_n) &= \min(\pi_{G_{\oplus}}(X_1, \dots, X_n), \Lambda_D) \\ &= \min(\pi_{G_{\oplus}}(X_1, \dots, X_n), \pi_d(X_1, \dots, X_n)), \end{aligned}$$

tel que,

$$\pi_d(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{Si } X_1, \dots, X_n \models d \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

En remplaçant ce résultat dans l'Equation 6.8, nous obtenons :

$$u_{Opt}(d) = \max_{\omega \in \Omega} \pi_{\mathcal{JT}}(\omega).$$

□

En conclusion, après l'étape d'initialisation, l'arbre de jonction code la décision possibiliste optimiste.

L'Algorithme 6.1 résume l'étape d'initialisation assurée par l'appel à la fonction  $Init(\mathcal{JT}, d)$ . Cette fonction a deux paramètres : l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  de  $m$  clusters et obtenu à partir de  $G_{\oplus}$ , et la décision  $d$  qui paramétra l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$ .

---

**Algorithme 6.1** :  $\text{Init}(\mathcal{JT}, d)$

---

**Entrées** :  $\mathcal{JT}$ , Arbre de jonction,  
 $d$ , instance de décision,

**début**

- $m$ , nombre de clusters dans  $\mathcal{JT}$ ,
- pour**  $i = 1..m$  **faire**
  - └  $\pi_{C_i}^I \leftarrow 1$ ,
- pour**  $j = 1..(m - 1)$  **faire**
  - └  $\pi_{S_j}^I \leftarrow 1$ ,
- $n$ , nombre de variables dans  $\mathcal{JT}$ ,
- pour**  $i = 1..n$  **faire**
  - └ Sélectionner un cluster  $C_{j \in \{1, \dots, m\}}$  contenant  $X_i \cup \text{Par}(X_i)$ ,
  - └  $\pi_{C_i}^I \leftarrow \min(\pi_{C_i}^I, \pi_{\oplus}(X_i \mid U_i))$ ,
- pour**  $i = 1..m$  **faire**
  - └ **si**  $D \in C_i$  **alors**
    - └ **si**  $D = \neg d$  **alors**
      - └  $\pi_{C_i}^I \leftarrow 0$ ,

---

La prochaine étape décrit le processus de propagation permettant de déterminer efficacement la valeur  $u_{Opt}(d)$ .

**3. Propagation globale :**

Après l'étape d'initialisation de l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$ , le processus de propagation est lancé afin de le rendre consistant, c'est-à-dire :

$$\max_{C_i \setminus S_{ij}} \pi_{C_i}^t = \pi_{S_{ij}}^t = \max_{C_j \setminus S_{ij}} \pi_{C_j}^t. \quad (6.13)$$

En effet, lorsque un cluster  $C_i$  envoie son potentiel à l'un de ses clusters adjacents  $C_j$ , alors le potentiel de  $C_j$  et de leur séparateur  $S_{ij}$  sont mis à jour comme suit (voir Chapitre 4) :

(a) Mettre à jour le potentiel de  $S_{ij}$  :  $\pi_{S_{ij}}^{t+1} \leftarrow \max_{C_i \setminus S_{ij}} \pi_{C_i}^t$ .

(b) Mettre à jour le potentiel de  $C_j$  :  $\pi_{C_j}^{t+1} \leftarrow \min(\pi_{C_j}^t, \pi_{S_{ij}}^{t+1})$ .

Les étapes (a)-(b) sont répétées jusqu'à ce que le potentiel des clusters se stabilise (aucune modification). Une fois que la stabilité est atteinte, le calcul de degré de normalisation de  $\mathcal{JT}$  peut être effectué par l'Algorithme 6.2. Cet algorithme de propagation est identique à celui utilisé dans les réseaux possibilistes standards (Algorithme 4.8, Chapitre 4) au quel une étape de calcul de degré de normalisation est ajoutée. Notre fonction **Prog**( $\mathcal{JT}, Norm$ ) a un paramètre de plus  $Norm$  qui recevra en sortie le degré de normalisation de l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  donné en entrée.

---

**Algorithme 6.2 :**  $\text{Prog}(\mathcal{JT}, \text{Norm})$  .

---

**Entrées :** Arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  inconsistant.

**Sorties :** Arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  consistant,

$\text{Norm}$  : degré de normalisation de  $\mathcal{JT}$ .

**début**

Soit un cluster arbitraire  $C_i$  représentant la racine de la propagation ;

$\text{Pivot} \leftarrow C_i$  ;

Collecte-évidence( $\text{Pivot}$ ) ;

Distribution-évidence( $\text{Pivot}$ ) ;

Sélectionner un cluster  $C_i$ ,  $\text{Norm} \leftarrow \max_{C_i} \pi_{C_i}$ ,

---

Les fonctions *Collect – évidence* et *Distribution – évidence* correspondent aux fonctions 4.6 et 4.7 respectivement, détaillées dans le Chapitre 4.

A ce niveau, le calcul de l'utilité qualitative relative à la décision  $d$  peut être effectué. Dans la proposition suivante, nous assurons que les étapes de mise à jour ((a) et (b) décrites ci-dessus) n'influent pas sur le calcul des décisions optimales possibilistes.

**Proposition 6.2 :**

Soient  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$  et  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  deux réseaux possibilistes qualitatifs représentant les connaissances et les préférences de l'agent respectivement. Soit  $\Pi G_{\oplus} = (G_{\oplus}, \pi_{\oplus})$  le résultat de la fusion de  $\Pi K_{min}$  et  $\Pi P_{min}$  en utilisant l'opérateur  $\min$ . Soit  $\mathcal{JT}$  l'arbre de jonction associé à  $\Pi G_{\oplus}$  et généré en utilisant la procédure de propagation ci-dessus. Alors, le calcul des décisions optimistes revient à calculer le degré de normalisation de  $\mathcal{JT}$  :

$$u_{Opt}(d) = h(\pi_{\mathcal{JT}}) = \max_{C_i} \pi_{C_i}. \quad (6.14)$$

*Preuve.* Le but est de prouver que l'utilité qualitative correspond bien au degré de normalisation de l'un des clusters une fois que la stabilité de l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  est atteinte (voir Equation 6.13). Cette preuve montre globalement la stabilité de l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  et traite en particulier sa normalisation. En effet, la Proposition 6.1 indique que le calcul de l'utilité optimiste revient à calculer le degré de normalisation de l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$ . Par conséquent, prouver que l'utilité optimiste correspond au degré de normalisation d'un certain cluster revient à prouver que le degré de normalisation de l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  correspond au degré de normalisation de l'un des clusters une fois que le processus de propagation est achevé (cohérence atteinte). Formellement, ceci revient à prouver l'égalité suivante :

$$\max_{\omega \in \Omega} \pi_{\mathcal{JT}} = \max_{C_i} \pi_{C_i}.$$

Cette égalité est satisfaite dans le cas d'un arbre de jonction avec un seul cluster. En effet, dans ce cas :

$$\pi_{\mathcal{JT}} = \pi_{C_i}.$$

Supposons maintenant que cette propriété est vraie dans le cas d'un arbre de jonction avec  $m$  clusters, et montrons qu'elle reste satisfaite avec  $m + 1$  clusters.

Soit  $\mathcal{JT}$  un arbre de jonction de  $m + 1$  clusters défini sur l'ensemble de variables  $\mathcal{V}$ . Soit  $\mathcal{JT}' = \mathcal{JT} \setminus C_{m+1}$  défini sur  $m$  clusters et soit  $\mathcal{V}'$  l'univers relatif à  $\mathcal{JT}'$ . Le cluster  $C_{m+1}$

doit être une feuille de l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$ , connecté au cluster  $C_m$  via le séparateur  $S_{(m+1)m}$  comme le montre la Figure 6.5, sinon  $C_{m+1}$  est relié à un autre cluster de  $\mathcal{JT}'$  c'est-à-dire  $\{C_{m+1} \setminus S_{(m+1)m}\} \cap \mathcal{V}' \neq \emptyset$  ce qui contredit l'hypothèse  $\mathcal{JT}' = \mathcal{JT} \setminus C_{m+1}$ .

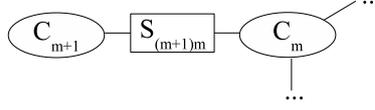


FIGURE 6.5 – Feuille de l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$ .

Soit  $L = C_{m+1} \setminus S_{(m+1)m}$ , alors  $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \setminus L$ . De l'hypothèse d'induction, nous obtenons :

$$\max_{\mathcal{V} \setminus L} \pi_{\mathcal{JT}'} = \max_{C_i} \pi_{C_i}.$$

Par définition, en utilisant l'Equation 6.11 :

$$\pi_{\mathcal{JT}} = \min(\pi_{\mathcal{JT}'}, \pi_{C_{m+1}}).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \max_{\omega \in \Omega} \pi_{\mathcal{JT}} &= \max_{\omega \in \Omega} \min(\pi_{\mathcal{JT}'}, \pi_{C_{m+1}}) \\ &= \min(\max_{\mathcal{V} \setminus L} \pi_{\mathcal{JT}'}, \max_{C_{m+1}} \pi_{C_{m+1}}). \end{aligned}$$

L'hypothèse d'induction nous donne :

$$\max_{\omega \in \Omega} \pi_{\mathcal{JT}} = \min(\max_{C_i} \pi_{C_i}, \max_{C_{m+1}} \pi_{C_{m+1}}).$$

Dans le cas, où  $C_i$  correspond au cluster  $C_m$  (le cluster adjacent à  $C_{m+1}$ ) et puisque l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  est cohérent (voir Equation 6.13), alors :

$$\max_{C_m} \pi_{C_m} = \max_{C_{m+1}} \pi_{C_{m+1}}.$$

Par conséquent, le degré de normalisation de l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  correspond au degré de normalisation d'un certain cluster  $C_i \in \{C_1, \dots, C_{m+1}\}$  :

$$\max_{\omega \in \Omega} \pi_{\mathcal{JT}} = \max_{C_i} \pi_{C_i}.$$

D'où, l'utilité optimiste correspond au degré de normalisation de l'un des clusters  $C_i \in \{C_1, \dots, C_{m+1}\}$  :

$$u_{Opt}(d) = \max_{C_i} \pi_{C_i}.$$

□

Les décisions optimales optimistes sont celles maximisant l'utilité qualitative. Le calcul de ces décisions est assuré par l'Algorithme 6.3.

**Algorithme 6.3 :** Calcul de décision optimistes optimales basé sur la fusion de réseaux possibilistes.

---

**Entrées :**  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$ , réseau possibiliste des connaissances,  
 $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$ , réseau possibiliste des préférences,  
 $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_p\}$ , ensemble des décisions.

**Sorties :**  $d_{Opt}^*$ , Décisions optimistes optimistes  
 $u_{Opt}^*$ , l'utilité optimale optimiste.

**begin**

*Fusion*( $\Pi K_{min}, \Pi P_{min}, \Pi G_{\oplus}$ ),  $\Pi G_{\oplus}$  est la fusion de  $\Pi K_{min}$  et  $\Pi P_{min}$ ,  
*Junction - Tree*( $\Pi G_{\oplus}, \mathcal{JT}$ ),  $\mathcal{JT}$  arbre de jonction associé à  $\Pi G_{\oplus}$ ,

$i \leftarrow 1$ ,  
 $Norm \leftarrow 0$ , degré de normalisation,  
 $u^* \leftarrow 0$ ,  
 $d_{Opt}^* \leftarrow \emptyset$ ,

**pour**  $i = 1..p$  **faire**

*Init*( $\mathcal{JT}, d_i$ ), étape d'initialisation,  
*Prog*( $\mathcal{JT}, Norm$ ), propagation globale,  
**si**  $Norm > u^*$  **alors**

$u^* \leftarrow Norm$ ,  
 $d_{Opt}^* \leftarrow \{d_i\}$ ,  
 $u_{Opt}^* \leftarrow Norm$ ,

**sinon**

**si**  $Norm = u^*$  **alors**

$d_{Opt}^* \leftarrow d_{Opt}^* \cup \{d_i\}$

---

Dans l'Algorithme 6.3, la fonction *Fusion*( $\Pi K_{min}, \Pi P_{min}, \Pi G_{\oplus}$ ) définit les étapes de fusion des deux réseaux possibilistes initiaux  $\Pi K_{min}$  et  $\Pi P_{min}$ . Le résultat de l'étape de fusion est le réseau possibiliste qualitatif  $\Pi G_{\oplus}(G_{\oplus}, \pi_{\oplus})$ . La construction de l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  associé au réseau possibiliste  $\Pi G_{\oplus}$ , issu de l'étape de fusion, est réalisé par l'appel à la fonction *Junction - Tree*( $\Pi G_{\oplus}, \mathcal{JT}$ ). Par ailleurs, la fonction *Init*( $\mathcal{JT}, d$ ) correspond à l'étape d'initialisation définie par l'Algorithme 6.1. De même, la fonction *Prog*( $\mathcal{JT}, Norm$ ) correspond au processus de propagation global défini par l'Algorithme 6.2.

Comme nous l'avons déjà noté, contrairement aux étapes d'initialisation et de propagation qui sont répétées pour chaque décision, la construction de l'arbre de jonction est effectuée une et une seule fois. En effet, une fois que l'arbre de jonction est construit, l'Algorithme 6.3 procède à l'initialisation et à la propagation dans  $\mathcal{JT}$  pour chaque décision, ce qui est matérialisé par l'utilisation de la boucle. Plus précisément, pour chaque décision  $d_i \in \{d_1, \dots, d_p\}$ , un appel aux fonctions *Init* et *Prog* se produit.

La fonction *Init*( $\mathcal{JT}, d$ ) permet le paramétrage de l'arbre de jonction par la décision  $d_{i \in [1, p]}$ . Quant à la fonction *Prog*( $\mathcal{JT}, Norm$ ), elle permet le calcul du degré de normalisation associé à l'arbre de jonction paramétré après avoir atteint la cohérence globale. Enfin, l'algorithme retourne les décisions optimales, celles maximisant le degré de normalisation de l'arbre de jonction.

La fonctionnalité intéressante de notre approche, est que le processus de décision a fondamentalement la même complexité du processus de raisonnement. Par conséquent, il n'y a aucun coût de calcul supplémentaire important ajouté à cause de la présence des variables

de décisions. En effet, le seul surcoût dû aux variables de décisions concerne la complexité de calcul du processus de fusion. Une fois que les deux structures graphiques (réseau possibiliste des connaissances et le réseau possibiliste des préférences) sont fusionnées, la complexité de la variante de l'algorithme de l'arbre de jonction, présentée dans ce chapitre, est la même que celle de la version standard. En outre, la complexité algorithmique du processus de fusion est moins importante que celle du processus d'inférence dans l'arbre de jonction, en particulier lorsque l'union des deux graphes est sans boucles. Dans ce cas, la complexité du processus de fusion est linéaire par rapport aux nombre de variables et les paramètres des deux graphes.

**Exemple 6.3 :**

Considérons le problème de la décision qualitative décrit dans l'Exemple 6.1. Notre but est de calculer la décision optimiste optimale  $D = \{d, \neg d\}$ . Comme indiqué par l'Algorithm 6.3, il faut commencer par construire l'arbre de jonction (voir Figure 6.6) associé au graphe  $G_{\oplus}$  (Figure 6.4), issu de la fusion de  $\Pi K_{min}$  et  $\Pi P_{min}$  (voir Exemple 6.2). L'arbre de jonction résultant, contient deux clusters  $C_1 = \{X_1, X_2, X_4, D\}$  et  $C_2 = \{X_1, X_3, X_4, D\}$  et leur séparateur  $S_{12} = \{X_1, X_4, D\}$ .

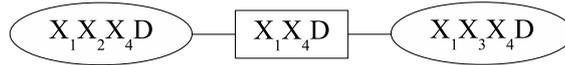


FIGURE 6.6 – L'arbre de jonction associé à  $G_{\oplus}$  de l'Exemple 6.2.

Pour chaque instance de la décision  $D = \{d, \neg d\}$ , l'algorithme d'initialisation et de propagation sera exécuté pour calculer le degré de normalisation associé à l'arbre de jonction.

**Étape 1 :**  $D = d$ ,

Dans ce cas, le fait  $D = d$  est codé comme suit :

$$\Lambda_D(d) = \begin{cases} 1 & \text{Si } D \text{ est instanciée à } d \\ 0 & \text{Si } D \text{ est instanciée à } \neg d \end{cases}$$

Les distributions de possibilités conditionnelles sont transformées à des distributions de possibilités jointes locales attachées aux clusters et séparateurs de la façon suivante :

$$\pi_{C_1} = \min(1, \pi_{\oplus}(X_1), \pi_{\oplus}(X_2), \pi_{\oplus}(X_4 | DX_2)) \text{ and } \pi_{C_2} = \min(1, \pi_{\oplus}(X_3 | DX_1X_4), \Lambda_D).$$

La procédure d'initialisation génère les potentiels attachés à  $C_1$  et  $C_2$ . Les résultats sont donnés dans les Tables 6.13 et 6.14.

$X_1$	$X_2$	$X_4$	$D$	$\pi_{C_1}$	$X_1$	$X_2$	$X_4$	$D$	$\pi_{C_1}$
$x_1$	$x_2$	$x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$x_2$	$x_4$	$d$	.1
$x_1$	$x_2$	$x_4$	$\neg d$	.2	$\neg x_1$	$x_2$	$x_4$	$\neg d$	.2
$x_1$	$x_2$	$\neg x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_4$	$d$	.1
$x_1$	$x_2$	$\neg x_4$	$\neg d$	.3	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_4$	$\neg d$	.3
$x_1$	$\neg x_2$	$x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_4$	$d$	.1
$x_1$	$\neg x_2$	$x_4$	$\neg d$	.5	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_4$	$\neg d$	1
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_4$	$d$	.1
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_4$	$\neg d$	.2	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_4$	$\neg d$	.2

TABLE 6.13 – Potentiel attaché à  $C_1$ .

$X_1$	$X_4$	$D$	$X_3$	$\pi_{C_2}$	$X_1$	$X_4$	$D$	$X_3$	$\pi_{C_2}$
$x_1$	$x_4$	$d$	$x_3$	.5	$\neg x_1$	$x_4$	$d$	$x_3$	.6
$x_1$	$x_4$	$d$	$\neg x_3$	.7	$\neg x_1$	$x_4$	$d$	$\neg x_3$	.7
$x_1$	$x_4$	$\neg d$	$x_3$	0	$\neg x_1$	$x_4$	$\neg d$	$x_3$	0
$x_1$	$x_4$	$\neg d$	$\neg x_3$	0	$\neg x_1$	$x_4$	$\neg d$	$\neg x_3$	0
$x_1$	$\neg x_4$	$d$	$x_3$	.5	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$d$	$x_3$	.6
$x_1$	$\neg x_4$	$d$	$\neg x_3$	1	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$d$	$\neg x_3$	1
$x_1$	$\neg x_4$	$\neg d$	$x_3$	0	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$\neg d$	$x_3$	0
$x_1$	$\neg x_4$	$\neg d$	$\neg x_3$	0	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$\neg d$	$\neg x_3$	0

TABLE 6.14 – Potentiel attaché à  $C_2$ .

Enfin, le processus de propagation globale permet de calculer le degré de normalisation de l'arbre de jonction qui correspond au degré de normalisation de l'un des deux clusters. En exécutant cette procédure, le résultat suivant est obtenu :

$$u_{Opt}(d) = \max_{C_1} \pi_{C_1} = \max_{C_2} \pi_{C_2} = .1.$$

**Étape 2** :  $D = \neg d$

La même procédure, décrite dans l'étape précédente, est répétée avec :

$$\Lambda_D(\neg d) = \begin{cases} 1 & \text{Si } D \text{ est instanciée à } \neg d \\ 0 & \text{Si } D \text{ est instanciée à } d \end{cases}$$

De la même façon, des potentiels sont attachés à  $C_1$  et  $C_2$ , selon la valeur de la décision  $D = \neg d$ , de la manière suivante :

$$\pi_{C_1} = \min(1, \pi_{\oplus}(X_1), \pi_{\oplus}(X_2), \pi_{\oplus}(X_4 | DX_2)) \text{ and } \pi_{C_2} = \min(1, \pi_{\oplus}(X_3 | DX_1 X_4), \Lambda_D).$$

Les résultats correspondants sont reportés dans les Tables 6.15 et 6.16.

$X_1$	$X_2$	$X_4$	$D$	$\pi_{C_1}$	$X_1$	$X_2$	$X_4$	$D$	$\pi_{C_1}$
$x_1$	$x_2$	$x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$x_2$	$x_4$	$d$	.1
$x_1$	$x_2$	$x_4$	$\neg d$	.2	$\neg x_1$	$x_2$	$x_4$	$\neg d$	.2
$x_1$	$x_2$	$\neg x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_4$	$d$	.1
$x_1$	$x_2$	$\neg x_4$	$\neg d$	.3	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_4$	$\neg d$	.3
$x_1$	$\neg x_2$	$x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_4$	$d$	.1
$x_1$	$\neg x_2$	$x_4$	$\neg d$	.5	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_4$	$\neg d$	1
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_4$	$d$	.1	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_4$	$d$	.1
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_4$	$\neg d$	.2	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_4$	$\neg d$	.2

TABLE 6.15 – Potentiel attaché à  $C_1$ .

$X_1$	$X_4$	$D$	$X_3$	$\pi_{C_2}$	$X_1$	$X_4$	$D$	$X_3$	$\pi_{C_2}$
$x_1$	$x_4$	$d$	$x_3$	0	$\neg x_1$	$x_4$	$d$	$x_3$	0
$x_1$	$x_4$	$d$	$\neg x_3$	0	$\neg x_1$	$x_4$	$d$	$\neg x_3$	0
$x_1$	$x_4$	$\neg d$	$x_3$	.5	$\neg x_1$	$x_4$	$\neg d$	$x_3$	.6
$x_1$	$x_4$	$\neg d$	$\neg x_3$	1	$\neg x_1$	$x_4$	$\neg d$	$\neg x_3$	1
$x_1$	$\neg x_4$	$d$	$x_3$	0	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$d$	$x_3$	0
$x_1$	$\neg x_4$	$d$	$\neg x_3$	0	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$d$	$\neg x_3$	0
$x_1$	$\neg x_4$	$\neg d$	$x_3$	.2	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$\neg d$	$x_3$	.2
$x_1$	$\neg x_4$	$\neg d$	$\neg x_3$	1	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$\neg d$	$\neg x_3$	1

TABLE 6.16 – Potentiel attaché à  $C_2$ .

L'application du processus de propagation génère l'utilité optimiste associée à  $\neg d$  :

$$u_{Opt}(\neg d) = \max_{C_1} \pi_{C_1} = \max_{C_2} \pi_{C_2} = 1.$$

En conclusion, la décision optimale optimiste est  $D_{Opt}^* = \neg d$  avec une utilité qualitative maximale  $u_{Opt}^* = 1$ .

Ce résultat est exactement le même que celui obtenu dans l'Exemple 6.2.

## 6.5 La contrepartie logique de l'approche graphique de la décision

Une contrepartie logique de notre approche graphique est proposée, dans cette section, permettant ainsi une nouvelle procédure pour le calcul des décisions optimales [20]. Cette procédure est particulièrement appropriée lorsque l'application de l'algorithme de propagation basé sur l'arbre de jonction s'avère fastidieuse voire impossible dans le cas de graphes volumineux. Notamment, quand la taille des clusters de l'arbre de jonction est importante, alors la nouvelle alternative, basée sur une codification logique, est plus appréciée.

### 6.5.1 Description logique de l'approche graphique de la décision

La première étape consiste à transformer les deux réseaux possibilistes initiaux en deux bases possibilistes logiques équivalentes. L'algorithme proposé dans [132] est exploré pour transformer le modèle graphique, utilisé initialement pour coder le problème de la décision qualitative, en modèle logique équivalent. Le réseau possibiliste  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$  peut être représenté par un ensemble de triplets  $\Pi K_{min} = \{(x_i, u_i, \alpha_i) : \alpha_i = \pi(x_i | u_i) \neq 1 \text{ est un élément du graphe}\}$ , tel que  $x_i \in \mathbb{D}_{X_i}$  et  $u_i$  est un élément du produit cartésien de domaines  $\mathbb{D}_j$  des variables  $X_j \in Par(X_i)$ . Alors, la base possibiliste logique équivalente au réseau possibiliste  $\Pi K_{min}$  est donnée par [132] :

$$\Sigma_{K_{min}} = \{(\neg x_i \vee \neg u_i, 1 - \alpha_i) : (x_i, u_i, \alpha_i) \in \Pi K_{min}\}. \quad (6.15)$$

La base possibiliste  $\Sigma_{K_{min}}$  induit la même distribution de possibilités jointe  $\pi_K$  induite par le réseau possibiliste qualitatif  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$  en utilisant l'Equation 3.4.

De même, le réseau possibiliste  $\Pi P_{min}$ , représentant les préférences de l'agent, peut être codé par un ensemble de triplets  $\Pi P_{min} = \{(y_j, u_j, \beta_j) : \beta_j = \pi(y_j | u_j) \neq 1 \text{ est un élément du graphe}\}$ , tel que  $y_j \in \mathbb{D}_{Y_j}$  et  $u_j$  est un élément du produit cartésien de domaines  $\mathbb{D}_l$  des variables  $Y_l \in Par(Y_j)$ . Le réseau possibiliste qualitatif  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  est transformé en base possibiliste logique de la façon suivante :

$$\Sigma_{P_{min}} = \{(\neg y_j \vee \neg u_j, 1 - \beta_j) : (y_j, u_j, \beta_j) \in \Pi P_{min}\}. \quad (6.16)$$

La base possibiliste représentant les préférences  $\Sigma_{P_{min}}$  induit encore la même distribution de possibilités jointe  $\mu_P$  générée par le réseau possibiliste  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  en utilisant l'Equation 3.4.

#### Exemple 6.4 :

Le problème de la décision qualitative abordé dans l'Exemple 6.1, sera codé dans le modèle logique. En effet, le réseau possibiliste qualitatif  $\Pi K_{min}$  exprimant les connaissances de l'agent peut être représenté par l'ensemble des triplets suivant :

$$\begin{aligned} \Pi K_{min} = \{ & (x_1, .5), (x_2, .8), (x_3, x_1, .5), (x_3, \neg x_1, .6), (d, x_1 x_2, .1), (d, x_1 \neg x_2, .6), (d, \neg x_1 x_2, \\ & .7), (d, \neg x_1 \neg x_2, .4), (x_4, dx_2, .1), (x_4, d\neg x_2, .9), (x_4, \neg dx_2, .2), (\neg x_4, \neg d\neg x_2, .2)\} \end{aligned}$$

De la même manière, le réseau possibiliste  $\Pi P_{min}$  peut être représenté par :

$$\Pi P_{min} = \{(d, .1), (\neg x_4, .3), (\neg x_3, dx_4, .7), (x_3, d\neg x_4, .6), (x_3, \neg dx_4, .8), (x_3, \neg d\neg x_4, .2), (\neg x_3, dx_4, .7)\}$$

Le réseau possibiliste  $\Pi K_{min}$  est transformé en une base possibiliste logique  $\Sigma_{K_{min}}$  en utilisant l'Equation 6.15 :

$$\Sigma_{K_{min}} = \{(\neg d \vee \neg x_1 \vee \neg x_2, .9), (\neg x_4 \vee \neg d \vee \neg x_2, .9), (\neg x_4 \vee d \vee \neg x_2, .8), (x_4 \vee d \vee x_2, .8), (\neg d \vee x_1 \vee x_2, .6), (\neg x_1, .5), (\neg x_3 \vee \neg x_1, .5), (\neg x_3 \vee x_1, .4), (\neg d \vee \neg x_1 \vee x_2, .4), (\neg d \vee x_1 \vee \neg x_2, .3), (\neg x_2, .2), (\neg x_4 \vee \neg d \vee x_2, .1)\}.$$

De la même manière, en utilisant l'Equation 6.16, la base possibiliste codant les préférences de l'agent est :

$$\Sigma_{P_{min}} = \{(\neg d, .9), (x_4, .7), (x_3 \vee \neg d \vee \neg x_4, .3), (\neg x_3 \vee \neg d \vee x_4, .4), (\neg x_3 \vee d \vee \neg x_4, .2), (\neg x_3 \vee d \vee x_4, .8), (x_3 \vee \neg d \vee \neg x_4, .3)\}.$$

Une fois que la première étape, concernant la codification logique de l'approche graphique de la décision, est achevée, le calcul des décisions optimistes optimales peut être effectué.

### 6.5.2 Calcul des décisions optimistes optimales

Indépendamment de la structure utilisée pour coder les connaissances et les préférences de l'agent, l'utilité qualitative optimiste est donnée par l'Equation 6.7 :

$$u_{Opt}(d) = \max_{\omega \in \Omega} \min(\min(\pi_K(\omega), \mu_P(\omega)), \pi_d(\omega)), \quad (6.17)$$

avec  $\pi_d(\omega)$  est donnée par l'Equation 6.5.

La contrepartie syntaxique du  $\min(\pi_K(\omega), \mu_P(\omega))$ , dans le cas d'une représentation logique du problème de la décision qualitative, est la base possibiliste  $\Sigma_{\oplus} = \Sigma_{K_{min}} \cup \Sigma_{P_{min}}$ . Donc l'Equation 6.17 devient :

$$u_{Opt}(d) = \max_{\omega \in \Omega} \min(\pi_{\Sigma_{\oplus}}(\omega), \pi_d(\omega)). \quad (6.18)$$

En utilisant l'Equation 3.4, l'utilité optimiste  $u^*(d)$  relative à  $d$  est :

$$u_{Opt}(d) = \max_{\omega \in \Omega} \pi_{\Sigma_{d_{\oplus}}}(\omega), \quad (6.19)$$

avec  $\pi_{\Sigma_{d_{\oplus}}}$  est la distribution de possibilités jointe induite par la base  $\Sigma_{d_{\oplus}} = \Sigma_{K_{min}} \cup \Sigma_{P_{min}} \cup \{(d, 1)\}$ . Comme nous l'avons déjà montré dans le Chapitre 5, Section 5.3, la contrepartie syntaxique de l'Equation 6.19 est :

$$u_{Opt}(d) = 1 - Inc(\Sigma_{d_{\oplus}}), \quad (6.20)$$

où  $Inc(\Sigma_{d_{\oplus}})$  est le degré d'incohérence de  $\Sigma_{K_{min}} \cup \Sigma_{P_{min}} \cup \{(d, 1)\}$ .

La solution proposée dans le Chapitre 5, Section 5.3, peut être appliquée à ce niveau pour calculer les décisions optimistes optimales. En effet, l'Algorithme 6.4 calcule les décisions optimistes optimales lorsque le problème de la décision qualitative est modélisé graphiquement par deux réseaux possibilistes qualitatifs. Cet algorithme est une alternative au premier algorithme (voir Algorithme 6.3). Il se base sur le modèle logique pour calculer les décisions

optimales [20].

---

**Algorithme 6.4 :** Calcul des décisions optimistes optimales basé sur la contrepartie logique de l'approche graphique de décision.

---

**Entrées :**  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$  : réseau possibiliste des connaissances,  
 $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  : réseau possibiliste des préférences,  
 $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_p\}$  : l'ensemble des décisions.

**Sorties :**  $d_{Opt}^*$  : décisions optimales optimistes,  
 $u_{Opt}^*$  : l'utilité optimale optimiste.

**début**

```

 $\Sigma_{K_{min}} = \{(\neg x_i \vee \neg u_i, 1 - \alpha_i) : (x_i, u_i, \alpha_i) \in \Pi K_{min}\}$ , base de connaissances
 $\Sigma_{P_{min}} = \{(\neg y_j \vee \neg u_j, 1 - \beta_j) : (y_j, u_j, \beta_j) \in \Pi P_{min}\}$ , base de préférences
 $min \leftarrow 1$ , degré d'incohérence minimal,
 $Inc \leftarrow 1$ , degré d'incohérence,
 $u^* \leftarrow 0$ ,
 $d_{Opt}^* \leftarrow \emptyset$ ,
pour  $i = 1..p$  faire
     $\Sigma_{d_{\oplus}} = \Sigma_{K_{min}} \cup \Sigma_{P_{min}} \cup \{(d_i, 1)\}$ ,
     $Incons - Opt(\Sigma_{d_{\oplus}}, Inc, Bool)$ , pour calculer le degré d'incohérence de  $\Sigma_{d_{\oplus}}$ ,
    si  $Bool = vrai$  alors
        si  $Inc < min$  alors
             $min \leftarrow Inc$ ,
             $d_{Opt}^* \leftarrow \{d_i\}$ ,
             $u_{Opt}^* \leftarrow 1 - Inc$ ,
        sinon
            si  $Inc = min$  alors
                 $d_{Opt}^* \leftarrow d_{Opt}^* \cup \{d_i\}$ ,
    fin

```

---

La fonction  $Incons - Opt(\Sigma_{d_{\oplus}}, Inc, Bool)$  est décrite par l'Algorithme 5.2 du Chapitre 5.

**Exemple 6.5 :**

Dans cet exemple, le calcul des décisions optimistes optimales du problème de décision décrit dans l'Exemple 6.1 est effectué en se basant sur la contrepartie logique du problème.

Dans l'Exemple 6.4, les connaissances et les préférences de l'agent, codées initialement par deux réseaux possibilistes qualitatifs  $\Pi K_{min}$  et  $\Pi P_{min}$ , ont été transformées en deux bases possibilistes  $\Sigma_{K_{min}}$  et  $\Sigma_{P_{min}}$  respectivement. Rappelons l'ensemble des décisions :

$$D = \{d, \neg d\}.$$

L'approche logique, détaillée dans l'Algorithme 6.4, est appliquée pour générer les décisions optimistes optimales. Pour chaque décision  $d_i \in \mathcal{D}$ , le degré d'incohérence de la base logique  $\Sigma_{d_{\oplus}} = \Sigma_{K_{min}} \cup \Sigma_{P_{min}} \cup \{(d_i, 1)\}$ , issue de la fusion de la base de connaissances  $\Sigma_{K_{min}}$  et la base de préférences  $\Sigma_{P_{min}}$ , est calculé.

Voici les étapes de déroulement de l'algorithme :

– **Étape 1 :**  $D = d$ ,

La fonction  $Incons(\Sigma_{\oplus} \cup \{(d, 1)\}, Inc, Bool)$  est appelée avec le fait  $d$ . Elle retourne

$Inc = .9$  et  $Bool = vrai$ . Dans ce cas,  $Inc < min$  (initialement  $min = 1$ ), ce qui implique  $d_{Opt}^* \leftarrow \{d\}$  et  $min \leftarrow .9$ . L'utilité optimiste relative à  $d$  est alors,

$$u_{Opt}^*(d) = 1 - Inc = .1.$$

– **Étape 2** :  $D = \neg d$ ,

La fonction **Incons**( $\Sigma_{\oplus} \cup \{(-d, 1)\}$ , **Inc**, **Bool**) est appelée avec le fait  $\neg d$ . Elle retourne  $Inc = 0$  et  $Bool = vrai$ . Dans ce cas,  $Inc < min$ , ce qui implique  $d_{Opt}^* \leftarrow \{-d\}$  et  $min \leftarrow 0$ . L'utilité optimiste relative à  $\neg d$  est alors,

$$u_{Opt}^*(-d) = 1 - Inc = 1.$$

En conclusion, comme dans l'Exemple 6.3, la décision optimiste optimale est  $D^* = \neg d$  avec une utilité qualitative maximale  $u_{Opt}^*(-d) = 1$ .

La complexité de la contrepartie logique de l'approche graphique de décision est la même que celle de la logique possibiliste standard. En effet, la complexité de l'étape de transformation d'un réseau possibiliste qualitatif vers une base possibiliste est linéaire. Et la complexité de la fonction **Incons** (pour le calcul de degré d'incohérence) nécessite  $\log_2 n$  tests de satisfiabilité [130], tel que  $n$  est le nombre de strates (degrés) de la base possibiliste.

## 6.6 Etude expérimentale

Cette étude expérimentale a pour but l'évaluation des performances des différentes alternatives de calcul des décisions optimales optimistes lorsque les connaissances et les préférences de l'agent sont codées par deux réseaux possibilistes. Pour l'implémentation de l'Algorithme 6.3, nous avons opté pour le langage *MATLAB<sup>MT</sup>* qui est à la fois un langage de programmation et un environnement d'exécution. MATLAB (MATrix LABoratory) est un logiciel pour le calcul scientifique, basé sur les vecteurs et les listes de données. Ce dernier manipule des réseaux possibilistes, d'où l'utilisation du package "PNT" (Possibilistic Network Tools) destiné aux modèles graphiques possibilistes.

Cependant, la deuxième alternative (Algorithme 6.4) a été déjà implémentée dans le chapitre 5.

L'expérimentation a été élaborée comme suit :

1. La première phase consiste à générer d'une manière aléatoire des couples de réseaux possibilistes qualitatifs représentant les connaissances et les préférences de l'agent.
2. Dans la deuxième phase, l'algorithme de transformation d'un réseau possibiliste qualitatif vers une base possibiliste est appliqué sur les deux réseaux possibilistes générés dans la première phase (Pour plus de détails voir [132])
3. La troisième phase consiste à appliquer l'Algorithme 6.3, pour calculer les décisions optimistes optimales, basé sur la fusion des deux réseaux possibilistes générés dans la première phase.
4. Enfin, l'Algorithme 6.4 est appliqué, pour calculer les décisions optimistes optimales, basé sur la fusion des deux bases possibilistes générées dans la deuxième phase.

Les résultats obtenus, en comparant le temps de réponses des deux algorithmes (Algorithme 6.3 et 6.4) en fonction de la taille des réseaux possibilistes initiaux (en termes de nombre de nœuds), sont illustrés par la Figure 6.7.

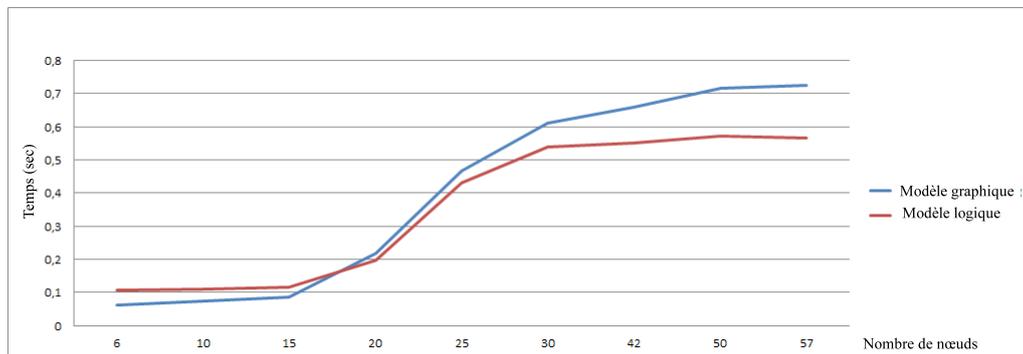


FIGURE 6.7 – Comparaison des deux Algorithmes 6.3 et 6.4 pour le calcul des décisions optimistes optimales.

Le diagramme de comparaison de la Figure 6.7 indique, dans le cas de réseaux possibilistes d’une taille inférieure à 18 nœuds, que le calcul basé sur la représentation graphique initiale (Algorithme 6.3) offre un temps de réponse meilleur que celui basé sur la contrepartie logique de l’approche graphique (Algorithme 6.4). Tandis que, dès que le nombre de nœuds dépasse ce seuil, la contrepartie logique l’emporte. En effet, dès que la construction de l’arbre de jonction devient fastidieuse (taille importante des clusters), la contrepartie logique de l’approche graphique est conseillée.

## 6.7 Conclusion

La contribution de ce chapitre a porté dans un premier temps sur les différents modes de représentation des problèmes de la décision qualitative. Dans un deuxième temps, elle a porté sur les méthodes de résolutions de ces problèmes de décision. En effet, un nouveau modèle graphique pour la décision qualitative a été proposé ainsi que des algorithmes de résolution pour calculer les décisions optimales. Ce modèle graphique code les connaissances et les préférences de l’agent d’une façon compacte par deux réseaux possibilistes qualitatifs distincts. Le premier réseau code la distribution de possibilités jointe représentant les états possibles du monde et le second code l’utilité qualitative. Par la suite, une nouvelle approche est alors proposée pour calculer les décisions optimistes optimales en tirant profit des algorithmes d’inférence existants pour les réseaux possibilistes qualitatifs. Notre approche consiste en premier lieu à fusionner le réseau possibiliste associé aux connaissances incertaines et le réseau possibiliste associé aux préférences de l’agent. Nous montrons alors que le calcul des décisions optimistes revient à calculer le degré de normalisation de l’arbre de jonction associé au réseau possibiliste issu de la fusion des croyances et des préférences de l’agent codées par les deux réseaux possibilistes. Ceci permet de calculer les décisions optimistes d’une manière efficace. La seconde partie de ce chapitre a proposé un algorithme alternatif pour calculer les décisions optimistes lorsque le problème de la décision qualitative est codé dans notre modèle basé sur les réseaux possibilistes. Nous avons montré ainsi que la contrepartie logique de notre approche graphique est équivalente à l’arbre de jonction généré à partir du réseau possibiliste issu de la fusion des réseaux possibilistes représentant les connaissances et les préférences de l’agent. La contrepartie logique est plus appropriée quand la construction de l’arbre de jonction s’avère difficile voir impossible.

Par rapport aux modèles existants pour la représentation des problèmes de décision sous

incertitude, notre nouveau modèle graphique offre plusieurs avantages :

- La séparation entre les connaissances et les préférences. En effet, les modèles graphiques existants, y compris les diagrammes d'influence, n'offrent pas cette séparation qui rend le modèle plus intuitif puisque elle reflète d'une manière naturelle la sémantique d'un problème de décision possibiliste.
- L'enrichissement de la puissance expressive du langage de représentation graphique en ajoutant des variables de décision, sans augmenter la complexité de calcul.
- Le modèle proposé bénéficie de la simplicité d'utilisation des graphes pour coder les connaissances et les préférences de l'agent. Il est aussi ouvert à tous les outils développés pour les réseaux possibilistes et peuvent être utilisés afin d'améliorer les performances de notre algorithme.
- Notre modèle offre un format simple pour représenter les connaissances et les préférences de l'agent en utilisant un seul type de nœud.

Le nouveau modèle proposé dans ce chapitre peut être étendu pour la prise en compte des problèmes de la décision séquentielle. En effet, dans le prochain chapitre, nous montrons comment un diagramme d'influence qualitatif peut être codé dans notre modèle. Notre idée consiste à décomposer la structure graphique en deux réseaux possibilistes qualitatifs : le premier code la distribution de possibilités représentant les connaissances de l'agent et le second code l'utilité qualitative. Une généralisation de l'algorithme, basée sur la contrepartie syntaxique de la fusion des réseaux possibilistes, sera proposée pour générer une stratégie optimiste optimale.

## Chapitre 7

# Décomposition d'un diagramme d'influence qualitatif

### 7.1 Introduction

Les diagrammes d'influence qualitatifs [11, 14, 13] sont des modèles graphiques pour une représentation compacte des problèmes de décision sous incertitude [140, 42]. Les relations d'incertitude et de préférences sont exprimées sur la même structure. L'incertitude est décrite par une distribution de possibilités sur les nœuds chances et les préférences sont exprimées par des degrés de satisfaction sur les nœuds utilités. Dans la pratique, il est plus facile pour un agent d'exprimer ses connaissances et ses préférences d'une façon indépendante. En outre, il est plus simple de traiter tous les nœuds de la même manière.

Notre modèle [23, 20], proposé dans le chapitre précédent, permet ainsi la représentation compacte des problèmes de la décision qualitative [42] en se basant sur les réseaux possibilistes. En effet, il code les connaissances et les préférences de l'agent par deux réseaux possibilistes distincts et traite tous les nœuds indifféremment. Cette nouvelle représentation est en accord avec la sémantique initiale des problèmes de décision possibilistes donnée dans [91].

Un diagramme d'influence qualitatif [11] peut être codé d'une manière équivalente dans notre modèle. Ceci sera détaillé dans ce chapitre en proposant de décomposer ce dernier en deux réseaux possibilistes. Pour cela, nous définissons les étapes requises pour assurer le processus de décomposition tout en préservant la même distribution de possibilités et la même utilité qualitative. En effet, deux algorithmes polynomiaux seront développés permettant ainsi la décomposition d'un diagramme d'influence en deux réseaux possibilistes codant respectivement la distribution de possibilités et l'utilité qualitative induites par ce dernier. Cette procédure de décomposition génère un réseaux possibiliste plus compacte (en termes de dépendances) pour le calcul des décisions optimales.

Par la suite, une généralisation de notre algorithme, proposé pour le calcul des décisions optimistes [23, 20], sera développée pour le calcul de stratégies optimistes. Par conséquent, ce processus de décomposition permet de tirer profit des algorithmes d'inférence déjà développés dans le cadre des réseaux possibilistes [110], pour résoudre les diagrammes d'influence.

### 7.2 Processus de décomposition d'un diagramme d'influence qualitatif

Cette section décrit comment le processus de décomposition peut être efficacement utilisé pour coder un diagramme d'influence dans notre modèle basé sur les réseaux possibilistes.

Rappelons qu'un diagramme d'influence possibiliste  $\Pi ID_{min}(G_{ID}, \pi_{min}^{ID}, \mu_{min}^{ID})$  est défini par sa composante graphique et une composante numérique. La structure graphique contient trois types de nœuds : chances ( $\mathcal{C} = \{X_1, \dots, X_n\}$ ), décisions ( $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_p\}$ ) et nœuds utilités ( $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_q\}$ ). La composante numérique code les connaissances de l'agent par des distributions de possibilités et les préférences par une utilité qualitative. Les distributions de possibilités sont définies sur une échelle ordonnée  $\mathcal{L} = [0, 1]$  et elles sont supposées normalisées. L'utilité qualitative est définie sur une échelle  $\mathcal{U}$  (pas forcément normalisée). Le diagramme d'influence possibiliste génère une distribution de possibilités conditionnelle jointe unique  $\pi_{min}^{ID}(x | d)$  définie par :

$$\pi_{min}^{ID}(x | d) = \min_{i=1..n} \pi_{ID}(x_{il} | u_{X_i}), \quad (7.1)$$

avec  $x_{il} \in \mathbb{D}_{X_i}$  et  $u_{X_i} \in \mathbb{D}_{Par(X_i)} = \times_{X_m \in Par(X_i), D_j \in Par(X_i)} \mathbb{D}_{X_m} \cup \mathbb{D}_{D_j}$ . Le degré de satisfaction global  $\mu_{min}^{ID}(x, d)$  relative à l'instantiation globale  $(x, d)$  de toutes les variables (nœuds chances et décisions) est défini par :

$$\mu_{min}^{ID}(x, d) = \min_{k=1..q} \mu_k(u_{V_k}), \quad (7.2)$$

avec  $u_{V_k} \in \mathbb{D}_{Par(V_k)} = \times_{X_i \in Par(V_k), D_j \in Par(V_k)} \mathbb{D}_{X_i} \cup \mathbb{D}_{D_j}$ . Voir Chapitre 4, Section 4.4 pour plus de détail.

Notre modèle, proposé dans [23, 20], code le même problème de la décision qualitative à un seul niveau (exclusive) mais en se basant sur deux réseaux possibilistes (pour plus de détail, voir Chapitre 6).

Notre but est de montrer qu'un diagramme d'influence possibiliste qualitatif peut être modélisé par deux distributions de possibilités dont une représentera les connaissances de l'agent et l'autre exprimera l'utilité qualitative. Ainsi, nous proposons une procédure de décomposition d'un diagramme d'influence possibiliste qualitatif  $\Pi ID_{min}(G_{ID}, \pi_{min}^{ID}, \mu_{min}^{ID})$  en deux réseaux possibilistes qualitatifs :

1.  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$  représentant les connaissances de l'agent. Ce réseau possibiliste doit coder la même distribution conditionnelle jointe  $\pi_{min}^{ID}$  induite par le DIP  $\Pi ID_{min}$ .
2.  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  représente les préférences de l'agent. Ce réseau possibiliste doit aussi coder la même utilité qualitative  $\mu_{min}^{ID}$  induite par le DIP.

Le processus de décomposition ainsi proposé, assure l'extension de notre modèle [20] pour le traitement des problèmes de la décision qualitative séquentielle.

### 7.2.1 Construction du réseau possibiliste qualitatif représentant les connaissances

Le réseau possibiliste  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$  code les connaissances de l'agent. Il induit une distribution de possibilités jointe unique  $\pi_K$  en utilisant l'Equation 4.1. La composante graphique  $G_K$  du nouveau réseau  $\Pi K_{min}$  est définie sur l'ensemble des variables  $\mathcal{Y} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D} = \{Y_1, \dots, Y_{n+p}\}$  représentant les nœuds chances et décisions (avec  $n = |\mathcal{C}|$  et  $p = |\mathcal{D}|$ ). La construction de ce réseau possibiliste s'effectue sur trois étapes :

1. Chaque nœud décision  $D_j$  est transformé en nœud chance représentant l'ignorance totale, à savoir :

$$\forall D_j \in \mathcal{D}, \pi(d_{jl} | u_{D_j}) = 1, \quad (7.3)$$

pour chaque instance  $d_{jl} \in \mathbb{D}_{D_j}$  et  $u_{D_j} \in \mathbb{D}_{Par(D_j)}$ .

2. Tous les nœuds chances restent inchangés :

$$\forall X_i \in \mathcal{C}, \pi(x_{il} | u_{X_i}) = \pi_{ID}(x_{il} | u_{X_i}), \quad (7.4)$$

pour chaque instance  $x_{il} \in \mathbb{D}_{X_i}$  et  $u_{X_i} \in \mathbb{D}_{Par(X_i)}$ .

3. Tous les nœuds utilités  $\{V_1, \dots, V_q\}$  et leurs degrés associés sont supprimés.

L'Algorithme 7.1 résume les étapes de construction du réseau possibiliste  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$ .

---

**Algorithme 7.1 :** Réseau possibiliste représentant les connaissances.

---

**Entrées :**  $\Pi ID_{min}(G_{ID}, \pi_{min}^{ID}, \mu_{min}^{ID})$ , DIP qualitatif.

**Sorties :**  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$ , réseau possibiliste des connaissances.

**début**

**pour chaque**  $D_j \in \mathcal{D}$  **faire**

    Transformer chaque nœud décision  $D_j$  en un nœud chance en utilisant l'Equation 7.3.

**pour chaque**  $X_i \in \mathcal{C}$  **faire**

    Quantifier chaque nœud chance  $X_i$  en utilisant l'Equation 7.4.

  Supprimer les nœuds utilités  $\{V_1, \dots, V_q\}$ .

---

Il est clair que l'Algorithme 7.1 s'exécute en un temps polynomial par rapport au nombre de nœuds et des paramètres (degrés d'incertitude et degrés d'utilité) du DIP. Le nouveau réseau possibiliste  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$  généré par l'Algorithme 7.1 induit une distribution de possibilités jointe unique  $\pi_K$  définie par la règle de chaînage basée sur le min (Equation 4.1). Par la proposition suivante, il sera montré que la distribution de possibilités jointe induite par le nouveau réseau possibiliste  $\Pi K_{min}$  code les mêmes états représentés par le diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}$ .

**Proposition 7.1 :**

*Soit  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$  le réseau possibiliste qualitatif obtenu par l'Algorithme 7.1. La distribution de possibilités jointe  $\pi_K$  induite par  $\Pi K_{min}$  est égale à celle induite par le diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}$ . C'est-à-dire,*

$$\begin{aligned} \pi_K(Y_1, \dots, Y_{n+p}) &= \pi_{min}^{ID}(X_1, \dots, X_n \mid D_1, \dots, D_p) \\ &= \min_{X_i \in \mathcal{C}} \pi_{ID}(X_i \mid U_i). \end{aligned} \quad (7.5)$$

*Preuve.* En utilisant l'Equation 4.1, la distribution de possibilités jointe induite par le réseau possibiliste qualitatif est :

$$\pi_K(Y_1, \dots, Y_{n+p}) = \min_{i=1..(n+p)} \pi(Y_i \mid U_{Y_i}),$$

avec  $n = |\mathcal{C}|$  et  $p = |\mathcal{D}|$ .

Comme  $\mathcal{Y} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D} = \{Y_1, \dots, Y_{n+p}\}$ , et l'opérateur min est associatif et commutatif, la distribution de possibilités jointe associée à  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$  peut être réécrite comme suit :

$$\pi_K(Y_1, \dots, Y_{n+p}) = \min \left[ \min_{k=1..n} \pi(X_k \mid U_{X_k}), \min_{j=1..p} \pi(D_j \mid U_{D_j}) \right].$$

Par construction, les distributions de possibilités affectées aux nœuds de décisions (Equation 7.3) codent l'ignorance totale c'est-à-dire  $\forall d_{jl} \in \mathbb{D}_{D_j}, \pi(d_{jl} \mid u_{D_j}) = 1$ . Alors,

$$\pi_K(Y_1, \dots, Y_{n+p}) = \min_{k=1..n} \pi(X_k \mid U_{X_k}).$$

Étant donné que les distributions de possibilités conditionnelles initiales des nœuds chances ont été préservées (Equation 7.4), c'est-à-dire :

$\forall x_{il} \in \mathbb{D}_{X_i}, \pi(x_{il} | u_{X_i}) = \pi_{ID}(x_{il} | u_{X_i})$ . Alors,

$$\pi_K(Y_1, \dots, Y_{n+p}) = \min_{k=1..n} \pi_{ID}(x_{il} | u_{X_i}).$$

La dernière équation correspond à la distribution de possibilités conditionnelle jointe induite par le diagramme d'influence (voir Equation 7.1). Par conséquent,

$$\pi_K(Y_1, \dots, Y_{n+p}) = \pi_{min}^{ID}(X_1, \dots, X_n | D_1, \dots, D_p).$$

□

**Exemple 7.1 :**

Soit un exemple simple de problème de décision représenté par un diagramme d'influence  $\Pi_{ID_{min}}(G_{ID}, \pi_{min}^{ID}, \mu_{min}^{ID})$ . La composante graphique  $G_{ID}$  est donnée par la Figure 7.1. Elle contient trois nœuds chances  $\mathcal{C} = \{X_1, X_2, X_3\}$ , deux nœuds de décisions  $\mathcal{D} = \{D_1, D_2\}$  et deux nœuds utilités  $\mathcal{V} = \{V_1, V_2\}$ . Toutes les variables sont supposées être des variables binaires.

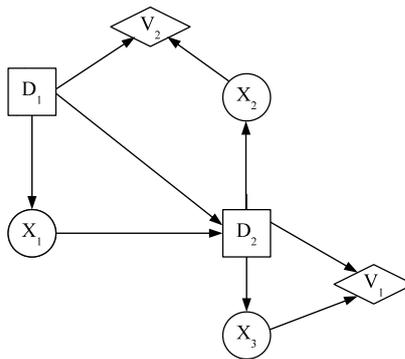


FIGURE 7.1 – Un exemple d'un diagramme d'influence.

La composante numérique est représentée par les distributions de possibilités conditionnelles attachées aux nœuds  $X_1, X_2, X_3$  et les utilités qualitatives codées par  $V_1$  et  $V_2$ , dans le contexte de leurs parents. En effet, les distributions de possibilités conditionnelles sont représentées par la Table 7.1. Les utilités attachées à  $V_1$  et  $V_2$  sont représentées par la Table 7.2. Il est à noter que l'utilité qualitative associée à  $V_2$  n'est pas normalisée.

$X_1$	$D_1$	$\pi_{ID}(X_1   D_1)$	$X_2$	$D_2$	$\pi_{ID}(X_2   D_2)$	$X_3$	$D_2$	$\pi_{ID}(X_3   D_2)$
$x_1$	$d_1$	1	$x_2$	$d_2$	.3	$x_3$	$d_2$	1
$x_1$	$\neg d_1$	.4	$x_2$	$\neg d_2$	1	$x_3$	$\neg d_2$	1
$\neg x_1$	$d_1$	.2	$\neg x_2$	$d_2$	1	$\neg x_3$	$d_2$	.4
$\neg x_1$	$\neg d_1$	1	$\neg x_2$	$\neg d_2$	.4	$\neg x_3$	$\neg d_2$	.8

TABLE 7.1 – Distributions de possibilités initiales  $\pi_{ID}$  sur  $X_1 | D_1, X_2 | D_2$  et  $X_3 | D_2$ .

$X_3$	$D_2$	$\mu_1(X_3, D_2)$	$X_2$	$D_1$	$\mu_2(X_2, D_1)$
$x_3$	$d_2$	.2	$x_2$	$d_1$	.5
$x_3$	$\neg d_2$	.3	$x_2$	$\neg d_1$	.9
$\neg x_3$	$d_2$	1	$\neg x_2$	$d_1$	.1
$\neg x_3$	$\neg d_2$	0	$\neg x_2$	$\neg d_1$	.4

TABLE 7.2 – Utilités qualitatives  $\mu_1$  sur  $X_3, D_2$  et  $\mu_2$  on  $X_2, D_1$ .

La distribution de possibilités conditionnelle jointe  $\pi_{min}^{ID}$  induite par le diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}$ , en utilisant l'Equation 7.1, est donnée par la Table 7.3.

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$D_1$	$D_2$	$\pi_{min}^{ID}$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$D_1$	$D_2$	$\pi_{min}^{ID}$
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$d_1$	$d_2$	.3	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$d_1$	$d_2$	.2
<b><math>x_1</math></b>	<b><math>x_2</math></b>	<b><math>x_3</math></b>	<b><math>d_1</math></b>	<b><math>\neg d_2</math></b>	<b>1</b>	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	.2
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	.3	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	.3
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.4	<b><math>\neg x_1</math></b>	<b><math>x_2</math></b>	<b><math>x_3</math></b>	<b><math>\neg d_1</math></b>	<b><math>\neg d_2</math></b>	<b>1</b>
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$d_2$	.3	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$d_2$	.2
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	.8	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	.2
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	.3	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	.3
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.4	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.8
<b><math>x_1</math></b>	<b><math>\neg x_2</math></b>	<b><math>x_3</math></b>	<b><math>d_1</math></b>	<b><math>d_2</math></b>	<b>1</b>	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$d_1$	$d_2$	.2
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	.3	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	.2
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	.4	<b><math>\neg x_1</math></b>	<b><math>\neg x_2</math></b>	<b><math>x_3</math></b>	<b><math>\neg d_1</math></b>	<b><math>d_2</math></b>	<b>1</b>
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.4	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.4
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$d_2$	.4	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$d_2$	.2
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	.4	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	.2
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	.4	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	.4
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.4	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.4

TABLE 7.3 – La distribution de possibilités conditionnelle jointe  $\pi_{min}^{ID}$  sur  $X_1, X_2, X_3$  sachant  $D_1, D_2$ .

Le degré de satisfaction global  $\mu_{min}^{ID}(D_1, D_2, X_1, X_2, X_3)$  généré par le diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}$  est calculé en utilisant l'Equation 7.2. Les résultats sont reportés dans la Table 7.4.

$D_1$	$D_2$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$\mu_{min}^{ID}$	$D_1$	$D_2$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$\mu_{min}^{ID}$
$d_1$	$d_2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	.2	$\neg d_1$	$d_2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	.2
$d_1$	$d_2$	$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	.5	$\neg d_1$	$d_2$	$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	.9
$d_1$	$d_2$	$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	.1	$\neg d_1$	$d_2$	$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	.2
$d_1$	$d_2$	$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	.1	$\neg d_1$	$d_2$	$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	.4
$d_1$	$d_2$	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	.2	$\neg d_1$	$d_2$	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	.2
$d_1$	$d_2$	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	.5	$\neg d_1$	$d_2$	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	.9
$d_1$	$d_2$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	.1	$\neg d_1$	$d_2$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	.2
$d_1$	$d_2$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	.1	$\neg d_1$	$d_2$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	.4
$d_1$	$\neg d_2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	.3	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	.3
$d_1$	$\neg d_2$	$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	0	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	0
$d_1$	$\neg d_2$	$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	.1	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	.3
$d_1$	$\neg d_2$	$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	0	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	0
$d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	.3	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	.3
$d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	0	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	0
$d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	.1	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	.3
$d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	0	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	0

 TABLE 7.4 – L'utilité qualitative globale  $\mu_{min}^{ID}(D_1, D_2, X_1, X_2, X_3)$ .

Dans cet exemple, nous procédons à la décomposition du diagramme d'influence  $\Pi D_{min}$  en deux réseaux possibilistes qualitatifs séparés. Le premier réseau possibiliste  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$  décrit les connaissances de l'agent et le second  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  exprime ses préférences.

La construction du réseau possibiliste  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$  est effectuée en utilisant l'Algorithme 7.1. La composante graphique  $G_K$  est donnée par la Figure 7.2. En effet, la composante graphique  $G_K$  correspond au diagramme d'influence de la Figure 7.1 dans lequel les nœuds utilités ont été supprimés.

En appliquant l'Algorithme 7.1, les distributions de possibilités initiales associées au réseau possibiliste  $\Pi K_{min}$  sont données dans les Tables 7.5, 7.6 et 7.7.

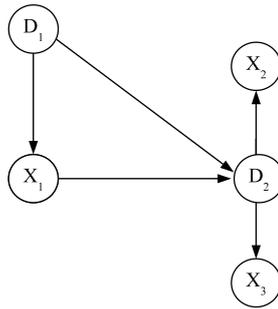


FIGURE 7.2 – Réseau possibiliste des connaissances déduit à partir du diagramme d'influence de la Figure 7.1.

$X_1$	$D_1$	$\pi(X_1   D_1)$	$X_2$	$D_2$	$\pi(X_2   D_2)$	$X_3$	$D_2$	$\pi(X_3   D_2)$
$x_1$	$d_1$	1	$x_2$	$d_2$	.3	$x_3$	$d_2$	1
$x_1$	$\neg d_1$	.4	$x_2$	$\neg d_2$	1	$x_3$	$\neg d_2$	1
$\neg x_1$	$d_1$	.2	$\neg x_2$	$d_2$	1	$\neg x_3$	$d_2$	.4
$\neg x_1$	$\neg d_1$	1	$\neg x_2$	$\neg d_2$	.4	$\neg x_3$	$\neg d_2$	.8

 TABLE 7.5 – Distributions de possibilités initiales  $\Pi K_{min}$  sur  $X_1 | D_1$ ,  $X_2 | D_2$  et  $X_3 | D_2$ .

$D_1$	$\pi(D_1)$
$d_1$	1
$\neg d_1$	1

 TABLE 7.6 – Distributions de possibilités initiales  $\Pi K_{min}$  sur  $D_1$ .

$D_2$	$D_1$	$X_1$	$\pi(D_2   D_1 X_1)$	$D_2$	$D_1$	$X_1$	$\pi(D_2   D_1 X_1)$
$d_2$	$d_1$	$x_1$	1	$\neg d_2$	$d_1$	$x_1$	1
$d_2$	$d_1$	$\neg x_1$	1	$\neg d_2$	$d_1$	$\neg x_1$	1
$d_2$	$\neg d_1$	$x_1$	1	$\neg d_2$	$\neg d_1$	$x_1$	1
$d_2$	$\neg d_1$	$\neg x_1$	1	$\neg d_2$	$\neg d_1$	$\neg x_1$	1

 TABLE 7.7 – Distributions de possibilités initiales  $\Pi K_{min}$  sur  $D_2 | D_1 X_1$ .

La Table 7.8 présente la distribution de possibilités jointe  $\pi_K$  (en utilisant l'Equation 4.1) induite par le réseau possibiliste qualitatif  $\Pi K_{min}$ .

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$D_1$	$D_2$	$\pi_K$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$D_1$	$D_2$	$\pi_K$
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$d_1$	$d_2$	.3	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$d_1$	$d_2$	.2
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	1	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	.2
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	.3	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	.3
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.4	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	1
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$d_2$	.3	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$d_2$	.2
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	.8	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	.2
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	.3	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	.3
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.4	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.8
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$d_1$	$d_2$	1	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$d_1$	$d_2$	.2
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	.3	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	.2
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	.4	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	1
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.4	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.4
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$d_2$	.4	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$d_2$	.2
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	.4	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	.2
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	.4	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	.4
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.4	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.4

 TABLE 7.8 – Distribution de possibilités jointe  $\pi_K(X_1, X_2, X_3, D_1, D_2)$ .

Il est clair que la distribution de possibilités jointe  $\pi_K$  associée au réseau possibiliste  $\Pi K_{min}$ , représentant les connaissances de l'agent, est la même que celle induite par le diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}$  (voir Table 7.3).

### 7.2.2 Construction du réseau possibiliste qualitatif représentant les préférences

Le deuxième réseau possibiliste qualitatif, issu du processus de décomposition d'un diagramme d'influence, est le réseau  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$ . Ce dernier exprime les préférences de l'agent en codant l'utilité qualitative  $\mu_P$  induite par l'Equation 4.1. Dans cette section, nous montrons que cette utilité qualitative est équivalente à l'utilité qualitative  $\mu_{min}^{ID}$  (Equation 7.2) codée par le diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}$ .

La composante graphique  $G_P$  du nouveau réseau possibiliste qualitatif  $\Pi P_{min}$  est définie sur l'ensemble des variables  $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_m\} \subseteq \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$  des nœuds chances et décisions. En effet, l'ensemble des nœuds  $\mathcal{Z}$  représente l'union des variables parents de tous les nœuds utilités  $\{V_1, \dots, V_q\}$  du diagramme d'influence. A savoir,  $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_m\} = Par(V_1) \cup \dots \cup Par(V_q)$ , tel que  $m = |Par(V_1) \cup \dots \cup Par(V_q)|$  représente le nombre des variables parents de tous les nœuds utilités dans  $\Pi ID_{min}$ .

Durant la phase de construction de la composante graphique  $G_P$ , il est important de s'assurer que le graphe généré correspond bien à une structure de DAG. Il est aussi important d'éviter la création de boucle à l'étape de fusion du processus d'évaluation [23, 20]. Par conséquent, certaines notions sur l'ordre topologique généré par un DAG nécessitent d'être rappelées avant d'aborder le processus de décomposition d'un diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}$ .

#### Définition 7.1 :

*Un Graphe Acyclique Orienté "DAG" génère un ordre linéaire  $\prec$  sur les nœuds tel que pour chaque arc du nœud  $X_i$  vers  $X_j$ ,  $X_i$  se trouve avant le nœud  $X_j$  par rapport à l'ordre généré par  $\prec$ . Chaque DAG génère au moins un ordre topologique.*

Les algorithmes de construction de l'ordre topologique d'un DAG le font en un temps linéaire. L'algorithme polynomial habituel pour générer l'ordre topologique d'un DAG consiste à trouver un nœud racine (sans parents) qui correspondra au nœud de départ. Ensuite, les arcs sortant de ce nœuds seront supprimés. Ce processus est répété jusqu'à ce que tous les nœuds soient visités.

#### Exemple 7.2 :

*Le DAG  $G_{ID}(\mathcal{V}, \mathcal{A})$  associé au diagramme d'influence de l'Exemple 7.1, Figure 7.1 a deux possibilités d'ordre topologique valides :*

- $D_1 \prec_1 X_1 \prec_1 D_2 \prec_1 X_2 \prec_1 X_3$ ,
- $D_1 \prec_2 X_1 \prec_2 D_2 \prec_2 X_3 \prec_2 X_2$ .

*Ceci est équivalent à :*

$$D_1 \prec X_1 \prec D_2 \prec X_2 \sim X_3,$$

*avec  $X_2 \sim X_3$  signifie que  $X_2$  peut être avant ou après  $X_3$ .*

Pour la construction du réseau possibiliste associé aux préférences, une solution naïve sera d'abord proposée, qui nécessite une étape de pré-traitement concernant la réduction des nœuds utilités en un seul nœud. Ce nœud héritera tous les parents des nœuds utilités du diagramme d'influence. Par la suite, une solution plus précise, préservant la structure initiale du diagramme d'influence, sera proposée. Ainsi, travailler sur la structure initiale induit une représentation plus compacte du problème de décision initial.

### 7.2.2.1 Codification naive du réseau possibiliste des préférences avec un seul nœud utilité

La première solution consiste à réduire tous les nœuds utilités en un seul nœud. Donc, une étape de pré-traitement doit être effectuée sur le diagramme d'influence initial avant de procéder à sa décomposition. Formellement, cette étape de pré-traitement consiste à réduire le nombre de nœuds utilités à un seul nœud, noté  $V_r$ , qui héritera tous les parents des nœuds utilités ( $Par(V_1), \dots, Par(V_q)$ ) c'est-à-dire  $Par(V_r) = Par(V_1) \cup \dots \cup Par(V_q)$ . L'utilité qualitative attachée au nouveau nœud  $V_r$  correspond au degré de satisfaction global, c'est-à-dire au minimum des utilités.

$$\mu_r(u_{V_r}) = \mu_{min}^{ID}(x, d) = \min_{k=1..q} \mu_k(u_{V_k}), \quad (7.6)$$

avec  $u_{V_r} \in \mathbb{D}_{Par(V_r)}$  et  $u_{V_k} \in \mathbb{D}_{Par(V_k)}$ .

Une fois que cette étape est accomplie, la construction du réseau possibiliste  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$ , représentant les préférences de l'agent, est effectuée comme suit :

- Sélectionner arbitrairement un nœud, noté  $Z_k \in Par(V_r)$  pour être l'enfant des variables parents restantes  $Par(V_r) \setminus Z_k$ . Ce choix doit être en accord avec l'ordre topologique induit par le DAG associé au diagramme d'influence réduit. Cela signifie que le nœud sélectionné  $Z_k$  apparaît dans le dernier rang de l'ordre topologique.
- Créer des arcs à partir des nœuds restants  $\{Par(V_r) - Z_k\}$  vers le nœud  $Z_k$ .
- Chaque nœud  $Z_j \neq Z_k$  code l'ignorance totale, la distribution de possibilités suivante lui est associée :

$$\forall z_{jl} \in \mathbb{D}_{Z_j}, \mu(z_{jl}) = 1. \quad (7.7)$$

- Le nœud  $Z_k$  est quantifié selon le type des utilités. Deux situations sont à distinguer :
  1. Dans le cas où les possibilités et les utilités sont commensurables (définies sur la même échelle  $[0, 1]$ ) alors, la distribution de possibilités conditionnelle  $\mu(Z_k | U_{Z_k})$  affectée au nœud  $Z_k$  est définie comme suit :

$$\mu(z_{kl} | u_{Z_k}) = \mu_{min}^{ID}(u_{V_r}), \quad (7.8)$$

avec  $u_{Z_k} \in \mathbb{D}_{Par(Z_k)}$  et  $u_{V_r} \in \mathbb{D}_{Par(V_r)}$ .

2. Si les possibilités et les utilités ne sont pas commensurables, alors la distribution de possibilités conditionnelle  $\mu(Z_k | U_{Z_k})$  doit être normalisée sur l'échelle  $[0, 1]$  de la façon suivante [141] :

$$\forall z_{kl} \in \mathbb{D}_{Z_k}, \mu(z_{kl} | u_{Z_k}) = \frac{\mu_{min}^{ID}(u_{V_r}) - U_{min}}{U_{max} - U_{min}}, \quad (7.9)$$

tel que  $U_{max}$  (resp.  $U_{min}$ ) est l'utilité maximale dans  $\mu(U_{V_r})$  (resp. est l'utilité minimale dans  $\mu(U_{V_r})$ ).

Les étapes de construction du réseau possibiliste  $\Pi P_{min}$ , représentant les préférences de l'agent, sont résumées par l'Algorithme 7.2.

---

**Algorithme 7.2 :** Réseau possibiliste naïf représentant les préférences.

---

**Entrées :**  $\{V_1, Par(V_1)\}, \dots, \{V_q, Par(V_q)\}$ , les nœuds utilités avec leurs parents dans  $\Pi ID_{min}$ .

**Sorties :**  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$ , réseau possibiliste des préférences.

**début**

$Z \leftarrow \{Par(V_1) \cup \dots \cup Par(V_q)\}$ ,  
 Réduire les nœuds utilités en un seul nœud  $V_r$ ,  
 Sélectionner un nœud  $Z_k \in Par(V_r)$ , pour être l'enfant des variables parents restantes, en accord avec l'ordre topologique induit par le DIP réduit,  
 Créer des arcs de  $\{Par(V_r) \setminus Z_k\}$  vers  $Z_k$ ,  
**si**  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{U}$  sont commensurables **alors**  
   | Quantifier le nœud chance  $Z_k$  en utilisant l'Equation 7.8,  
**sinon**  
   | Quantifier le nœud chance  $Z_k$  en utilisant l'Equation 7.9,  
**pour chaque**  $Z_j \neq Z_k$  **faire**  
   | Quantifier  $Z_j$  en utilisant l'Equation 7.7,

---

La proposition suivante indique que le réseau possibiliste  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$ , généré par l'Algorithme 7.2, code la même utilité qualitative induite par le diagramme d'influence initial  $\Pi ID_{min}(G_{ID}, \pi_{min}^{ID}, \mu_{min}^{ID})$ .

**Proposition 7.2 :**

*Soit  $\Pi ID_{min}(G_{ID}, \pi_{min}^{ID}, \mu_{min}^{ID})$  un diagramme d'influence qualitatif. Soit  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  le réseau possibiliste qualitatif obtenu en utilisant l'Algorithme 7.2. L'utilité qualitative jointe  $\mu_P$  induite par  $\Pi P_{min}$  est équivalente à celle induite par le diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}$ . c'est-à-dire,*

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_m) = \mu_{min}^{ID}(X_1, \dots, X_n, D_1, \dots, D_p). \quad (7.10)$$

*Preuve.* En utilisant l'Equation 4.1, la distribution de possibilités jointe induite par le réseau possibiliste qualitatif  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  est :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_m) = \min_{j=1..m} \mu(Z_j | U_{Z_j}).$$

Comme l'opérateur min est associatif et commutatif, l'utilité qualitative associée à  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu_{min}^P)$  peut être réécrite de la façon suivante :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_m) = \min_{l=1..k-1, k+1..m} [\min_{l=1..k-1, k+1..m} \mu(Z_l | U_{Z_l}), \mu(Z_k | U_{Z_k})].$$

Par définition, ceci revient à :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_m) = \min(1, \mu_{min}^{ID}(U_{V_r})).$$

Ce qui est équivalent à :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_m) = \mu_{min}^{ID}(X_1, \dots, X_n, D_1, \dots, D_p).$$

□

**Exemple 7.3 :**

Poursuivons le processus de décomposition du diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}(G_{ID}, \pi_{min}^{ID}, \mu_{min}^{ID})$  de l'Exemple 7.1, Figure 7.1. Dans cet exemple, nous procédons à la construction du deuxième réseaux possibiliste  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$ , représentant les préférences de l'agent. En se basant sur la solution naïve, nous proposons d'abord de réduire  $V_1$  et  $V_2$  en un seul nœud utilité, noté  $V_r$ . Le nouveau nœud hérite tous les parents des nœuds précédents  $V_1$  and  $V_2$ , à savoir  $D_1, X_1, D_2$  et  $X_2$ . Le nouveau diagramme d'influence réduit est donné par la Figure 7.3.

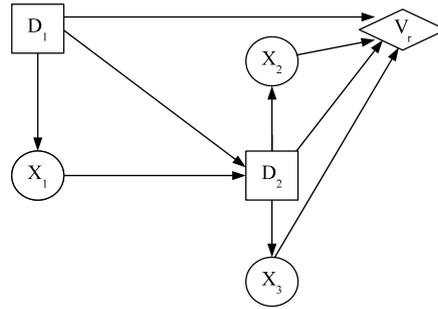


FIGURE 7.3 – Le diagramme d'influence de la Figure 7.1 avec un seul nœud utilité.

En utilisant l'Algorithme 7.2, la composante graphique  $G_P$  du nouveau réseau possibiliste est définie sur l'ensemble des variables  $\mathcal{Z} = \text{Par}(V_r) = \{X_2, X_3, D_1, D_2\}$ . Un nœud arbitraire est sélectionné à partir de  $\mathcal{Z}$  pour être l'enfant des variables parents restantes. Le choix de ce nœud doit être en accord avec l'ordre topologique induit par le diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}$  après sa réduction. L'ordre topologique généré par ce dernier est donné dans l'Exemple 7.2. Par conséquent, deux nœuds candidats se présentent :  $X_2$  ou  $X_3$ . Soit  $X_3$  ce nœud. D'où, la composante graphique  $G_P$  est donnée par la Figure 7.4.

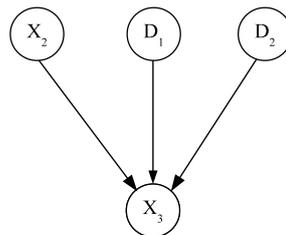


FIGURE 7.4 – Réseau possibiliste des préférences naïf déduit à partir du diagramme d'influence de la Figure 7.1.

Comme les possibilités et les utilités sont commensurables (définies sur la même échelle  $[0, 1]$ ), les distributions de possibilités conditionnelles  $\mu(X_3 | D_1 D_2 X_2)$  affectées à  $X_3$  sont définies en utilisant l'Equation 7.8. Les résultats sont reportés dans la Table 7.9. Les distributions de possibilités affectées aux nœuds restants  $\{D_1, D_2, X_2\}$  sont uniformes (voir Table 7.10).

$X_3$	$D_1$	$D_2$	$X_2$	$\mu(X_3   D_1 D_2 X_2)$	$X_3$	$D_1$	$D_2$	$X_2$	$\mu(X_3   D_1 D_2 X_2)$
$x_3$	$d_1$	$d_2$	$x_2$	.2	$\neg x_3$	$d_1$	$d_2$	$x_2$	.5
$x_3$	$d_1$	$d_2$	$\neg x_2$	.9	$\neg x_3$	$d_1$	$d_2$	$\neg x_2$	.1
$x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	$x_2$	.3	$\neg x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	$x_2$	0
$x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_2$	.1	$\neg x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_2$	0
$x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	$x_2$	.2	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	$x_2$	.9
$x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	$\neg x_2$	.2	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	$\neg x_2$	.4
$x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$x_2$	.3	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$x_2$	0
$x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_2$	.3	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_2$	0

 TABLE 7.9 – Distributions de possibilités initiales  $\Pi P_{min}$  sur  $X_3$  sachant  $D_1 D_2 X_2$ .

$D_1$	$\mu(D_1)$	$D_2$	$\mu(D_2)$	$X_2$	$\mu(X_2)$
$d_1$	1	$d_2$	1	$x_2$	1
$\neg d_1$	1	$\neg d_2$	1	$x_2$	1

 TABLE 7.10 – Distributions de possibilités initiales  $\Pi P_{min}$  sur  $D_1$ ,  $D_2$  et  $X_2$ .

En utilisant l'Equation 4.1, le réseau possibiliste  $\Pi P_{min}$ , représentant les préférences de l'agent, induit une utilité qualitative jointe  $\mu_P$  donnée par la Table 7.11.

$D_1$	$D_2$	$X_2$	$X_3$	$\mu_P$	$D_1$	$D_2$	$X_2$	$X_3$	$\mu_P$
$d_1$	$d_2$	$x_2$	$x_3$	.2	$\neg d_1$	$d_2$	$x_2$	$x_3$	.2
$d_1$	$d_2$	$x_2$	$\neg x_3$	.5	$\neg d_1$	$d_2$	$x_2$	$\neg x_3$	.9
$d_1$	$d_2$	$\neg x_2$	$x_3$	.9	$\neg d_1$	$d_2$	$\neg x_2$	$x_3$	.2
$d_1$	$d_2$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	.1	$\neg d_1$	$d_2$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	.4
$d_1$	$\neg d_2$	$x_2$	$x_3$	.3	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$x_2$	$x_3$	.3
$d_1$	$\neg d_2$	$x_2$	$\neg x_3$	0	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$x_2$	$\neg x_3$	0
$d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_2$	$x_3$	.1	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_2$	$x_3$	.3
$d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	0	$\neg d_1$	$\neg d_2$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	0

 TABLE 7.11 – L'utilité qualitative jointe  $\mu_P(D_1, D_2, X_2, X_3)$ .

Comme illustré par les Tables 7.9 et 7.11, les distributions de possibilités conditionnelles  $\mu(X_3 | D_1 D_2 X_2)$  sont équivalentes à l'utilité qualitative jointe induite par le réseau possibiliste  $\Pi P_{min}$ . Par conséquent, la solution proposée, qui consiste à réduire le diagramme d'influence initial, n'offre pas une représentation compacte des références de l'agent.

### 7.2.2.2 Codification compacte du réseau possibiliste des préférences

L'inconvénient majeur de la première solution, présentée dans la Section 7.2.2.1 et inspirée des travaux réalisés dans [12], concerne la réduction des nœuds utilités en un seul nœud qui hérite tous les parents des nœuds utilités. Par conséquent, nous suggérons de préserver la structure initiale du diagramme d'influence. La solution proposée dans cette section repose sur l'idée de construire un réseau possibiliste, pour coder les préférences de l'agent, avec une structure aussi proche que possible de la structure du diagramme d'influence initiale. Ainsi, opérer directement sur la structure initiale du diagramme initial permettra une représentation plus compacte que la solution naïve opérant sur le diagramme d'influence réduit.

Le réseau possibiliste qualitatif  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$ , représentant les préférences de l'agent, est construit progressivement de la manière suivante :

- Pour chaque nœud utilité  $V_k \in \mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_q\}$ , un ordre est défini entre ses variables parents. Plus précisément, cet ordre est généré par le DAG associé au diagramme d'influence initial.

**Exemple 7.4 :**

Soit le diagramme d'influence de l'Exemple 7.1 (Figure 7.1). Les parents du nœud utilité  $V_2$  sont  $D_1$  et  $X_2$ . Rappelons que le diagramme d'influence  $\text{IID}_{\min}$  génère l'ordre topologique suivant (voir Exemple 7.2) :

$$D_1 \prec X_1 \prec D_2 \prec X_3 \sim X_2.$$

Par conséquent, un ordre entre les variables parents  $D_1$  et  $X_2$  est défini comme suit :

$$D_1 \prec X_2.$$

- Le DAG  $G_P$  est construit d'une manière itérative en traitant un nœud utilité à chaque étape. En effet, pour chaque nœud utilité  $V_k \in \mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_q\}$ , un ensemble de nœuds candidats est défini, parmi les variables parents de  $V_k$  de telle sorte que chaque nœud est éligible d'être l'enfant des parents restants. Les nœuds candidats sont ceux qui se trouvent dans le dernier rang de la liste d'ordre générée dans l'étape précédente. Cette contrainte d'ordre imposée sur les nœuds candidats, permet d'éviter la création de boucle à l'étape de fusion du processus d'évaluation [20]. Chaque nœud candidat peut avoir l'un des trois statuts suivants dans le DAG  $G_P$  en cours de construction :

1. Soit il n'a pas encore été introduit dans le DAG  $G_P$ ,
2. soit il présente une racine dans le DAG  $G_P$ ,
3. soit c'est un enfant dans  $G_P$ , c'est-à-dire l'ensemble de ses parents n'est pas vide.

- Un seul nœud, noté  $Z_k$ , doit être sélectionné à partir de l'ensemble des candidats généré dans l'étape précédente. Pour une représentation plus compacte, du DAG  $G_P$  en cours de construction, le nœud sélectionné  $Z_k$  doit satisfaire en priorité la propriété (1) ou (2) (pas encore introduit ou un nœud racine). Si le nœud sélectionné  $Z_k$  n'a pas encore été introduit dans le DAG  $G_P$  en cours de construction, alors il faut d'abord l'intégrer dans  $G_P$ . De la même manière, les parents qui n'ont pas encore été introduits dans  $G_P$ , doivent être créés. Finalement, des arcs à partir des parents restants vers  $Z_k$  doivent aussi être créés.

Cependant, si le nœud sélectionné  $Z_k$  figure dans le DAG  $G_P$ , en cours de construction, comme un nœud racine, alors il suffit d'intégrer les parents qui ne sont pas encore introduits dans  $G_P$  et de créer des arcs des parents restants vers  $Z_k$ .

Par la suite, nous procédons au calcul de la distribution de possibilités conditionnelle  $\mu(Z_k | U_{Z_k})$ . Dans les deux situations (1 et 2), cette distribution  $\mu(Z_k | U_{Z_k})$  affectée au nœud  $Z_k$  est définie selon le type des utilités :

- Les possibilités et les utilités sont commensurables :

$$\forall z_{kl} \in \mathbb{D}_{Z_k}, \forall u_{Z_k} \in \mathbb{D}_{\text{Par}(Z_k)} \mu(z_{kl} | u_{Z_k}) = \mu_k(u_{V_k}). \quad (7.11)$$

- Les possibilités et les utilités ne sont pas commensurables :

$$\forall z_{kl} \in \mathbb{D}_{Z_k}, \forall u_{Z_k} \in \mathbb{D}_{\text{Par}(Z_k)}, \mu(z_{kl} | u_{Z_k}) = \frac{\mu_k(u_{V_k}) - U_{\min}}{U_{\max} - U_{\min}}, \quad (7.12)$$

où  $U_{\max}$  (resp.  $U_{\min}$ ) est l'utilité maximale dans  $\mu(U_{V_r})$  (resp. est l'utilité minimale dans  $\mu(U_{V_r})$ ).

Si un tel nœud n'existe pas (tous les nœuds candidats sont déjà des enfants), alors il faut choisir un nœud ayant le moindre de parents afin d'avoir une représentation plus compacte. La distribution de possibilités conditionnelle  $\mu(Z_k | U_{Z_k})$  affectée au nœud  $Z_k$  est définie selon le type des utilités :

- Les possibilités et les utilités sont commensurables :

$$\forall z_{kl} \in \mathbb{D}_{Z_k}, \forall u_{Z_k} \in \mathbb{D}_{Par(Z_k)} \mu(z_{kl} | u_{Z_k}) = \min[\mu(z_{kl} | u_{Z_k}), \mu_k(u_{V_k})]. \quad (7.13)$$

- Les possibilités et les utilités ne sont pas commensurables [141] :

$$\forall z_{kl} \in \mathbb{D}_{Z_k}, \forall u_{Z_k} \in \mathbb{D}_{Par(Z_k)} \mu(z_{kl} | u_{Z_k}) = \frac{\min[\mu(z_{kl} | u_{Z_k}), \mu_k(u_{V_k})] - U_{min}}{U_{max} - U_{min}}, \quad (7.14)$$

où  $U_{max}$  (resp.  $U_{min}$ ) est l'utilité maximale dans  $\mu(U_{V_r})$  (resp. est l'utilité minimale dans  $\mu(U_{V_r})$ ).

- Chaque nœud  $Z_j \neq Z_k$  codera l'ignorance totale. Une distribution de possibilités uniforme lui est attachée :

$$\forall z_{jl} \in \mathbb{D}_{Z_j}, \mu(z_{jl}) = 1. \quad (7.15)$$

### Exemple 7.5 :

Le processus de construction du réseau possibiliste qualitatif  $\Pi P_{min}(G_P, \mu)$ , représentant les préférences d'un agent, sera illustré sur le diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}$  de la Figure 7.5.

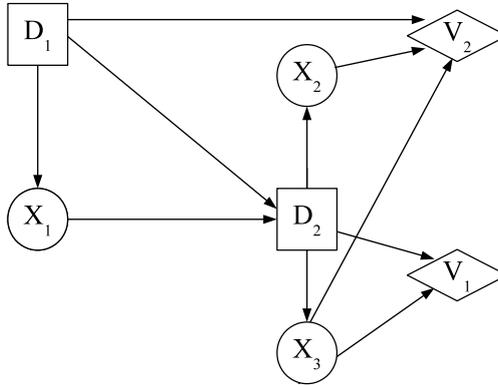


FIGURE 7.5 – Diagramme d'influence possibiliste qualitatif.

- **Étape 1 : Nœud utilité  $V_1$**

Les parents du nœud  $V_1$  doivent être intégrés dans le DAG  $G_P$  en cours de construction. Un ordre entre les parents  $\{D_2, X_3\}$  de  $V_1$  doit être d'abord généré. Cet ordre est induit par le DAG  $G_{ID}$  associé au diagramme d'influence initial. En effet, l'ordre généré par ce dernier est le suivant :

$$D_1 \prec X_1 \prec D_2 \prec X_2 \sim X_3.$$

D'où, l'ordre défini entre les parents  $\{D_2, X_3\}$  est donné par :

$$D_2 \prec X_3.$$

Dans ce cas, un seul nœud se trouve en dernier rang de la liste ( $X_3$ ). Donc le seul nœud candidat pour être l'enfant des parents restants ( $D_2$ ) est le nœud  $X_3$ . Cette étape génère la première partie du DAG  $G_P$  donnée par la Figure 7.6.



FIGURE 7.6 – Première partie du DAG  $G_P$  construit à partir du diagramme d'influence de la Figure 7.5.

– **Étape 2** : Nœud utilité  $V_2$

Les nœuds parents de  $V_2$  qui n'ont pas encore été intégrés dans la première partie du DAG  $G_P$ , générée dans l'étape précédente, doivent être introduits dans cette étape. Nous devons, en premier, définir un ordre entre les variables parents  $\{D_1, X_2, X_3\}$  du nœud utilité  $V_2$ . Cet ordre est induit par le DAG associé au diagramme d'influence initial. En effet, l'ordre généré par le diagramme d'influence est le suivant :

$$D_1 \prec X_1 \prec D_2 \prec X_2 \sim X_3.$$

L'ordre défini entre les parents  $\{D_1, X_2, X_3\}$  est donné par :

$$D_1 \prec X_2 X_3.$$

Dans ce cas, deux nœuds se portent candidats,  $X_2$  et  $X_3$ , pour être l'enfant des parents restants. Un seul nœud doit être sélectionné de l'ensemble des nœuds candidats  $\{X_2, X_3\}$  selon son statut. Il est à noter que :

- Le nœud  $X_2$  n'a pas encore été intégré dans  $G_P$ .
- Le nœud  $X_3$  est un nœud enfant dans la portion du DAG  $G_P$  déjà construite dans la première étape.

Par conséquent, le choix est porté sur le nœud  $X_2$  pour être l'enfant de  $X_3$  et  $D_1$  dans le DAG  $G_P$ . Par cette étape, la construction de la composante graphique du réseau possibiliste  $\Pi P_{min}$  est terminée puisque tous les nœuds utilités du diagramme d'influence initial ont été traités.

Le DAG  $G_P$  final associé au réseau possibiliste qualitatif  $\Pi P_{min}$ , représentant les préférences de l'agent, est donné par la Figure 7.7.

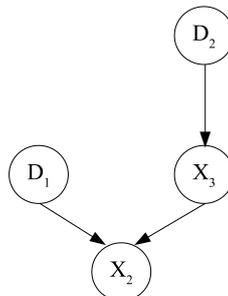


FIGURE 7.7 – Le DAG  $G_P$  construit à partir du diagramme d'influence de la Figure 7.5.

Les étapes de constructions du réseau possibiliste qualitatif  $\Pi P_{min}$ , représentant les préférences de l'agent, sont résumées dans l'Algorithme 7.3.

---

**Algorithme 7.3** : Réseau possibiliste compacte représentant les préférences.

---

**Entrées** :  $\{V_1, Par(V_1)\}, \dots, \{V_q, Par(V_q)\}$ , les nœuds utilités avec leurs parents dans  $\Pi ID_{min}$ .

**Sorties** :  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$ , réseau possibiliste des préférences.

**begin**

$\mathcal{Z} \leftarrow \emptyset$ , ensemble des variables intégrées dans  $G_P$ ,

$Child \leftarrow \emptyset$ ,

**pour chaque**  $V_k \in \{V_1, \dots, V_q\}$  **faire**

$List - ordered(V_k) \leftarrow \{Par(V_k)\}$  dans le même ordre induit par  $\Pi ID_{min}$ ,

$Candidate(V_k) \leftarrow \{ \text{les variables du dernier rang dans } List - ordered(V_k) \}$ ,

        Sélectionner une variable  $Z_k \in Candidate(V_k)$  et  $Z_k \notin Child$ .

**si**  $Z_k$  *exists* ( $Z_k$  a le statut 1 ou 2) **alors**

$Child \leftarrow Child \cup \{Z_k\}$ ,  $Z_k$  est un nœud enfant dans  $G_P$ ,

            Créer les nœuds  $Par(V_k) \notin \mathcal{Z}$ , mise à jour de  $\mathcal{Z}$  en intégrant les nœuds qui n'apparaissent pas dans  $G_P$ ,

            Créer les arcs de  $\{Par(V_k) - Z_k\}$  vers  $Z_k$ , créer des arcs des nœuds parents restants vers le nœud sélectionné  $Z_k$ ,

**si**  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{U}$  sont commensurables **alors**

                | Quantifier le nœud  $Z_k$  en utilisant l'Equation 7.11

**sinon**

                | Quantifier le nœud  $Z_k$  en utilisant l'Equation 7.12

**sinon**

            Sélectionner  $Z_k \in Candidate(V_k)$  et  $|Par(Z_k)|$  le plus petit.

            Créer les nœuds  $Par(V_k) \notin \mathcal{Z}$ ,

            Créer les arcs de  $\{Par(V_k) - Z_k\}$  vers  $Z_k$ ,

**si**  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{U}$  sont commensurables **alors**

                | Quantifier le nœud  $Z_k$  en utilisant l'Equation 7.13

**sinon**

                | Quantifier le nœud  $Z_k$  en utilisant l'Equation 7.14

**pour chaque**  $Z_j \in Par(V_k)$  et  $Z_j \neq Z_k$  **faire**

**si**  $Z_j \notin Child$  **alors**

            | Quantifier le nœud  $Z_j$  en utilisant l'Equation 7.15

La complexité de l'Algorithme 7.3 est aussi polynomiale par rapport au nombre de nœuds et des paramètres du PID.

L'algorithme proposé génère le réseau possibiliste qualitatif  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$ . En effet, pour chaque nœud utilité, l'algorithme sélectionne les parents candidats pour être l'enfant des parents restants dans le DAG  $G_P$  en cours de construction. Ces nœuds candidats apparaissent dans le dernier rang de l'ordre topologique induit par le diagramme d'influence. Parmi les candidats, s'il existe un nœud qui n'a pas encore été intégré dans  $G_P$  ou bien il présente une racine, alors ce dernier est sélectionné pour être l'enfant éventuel des parents restants dans le DAG  $G_P$  en cours de construction. Sinon, si un tel nœud n'existe pas, cela signifie que tous les nœuds candidats figurent déjà dans le DAG  $G_P$  et possèdent des parents.

Selon le statut du nœud sélectionné (non intégré, racine ou enfant), une utilité est associée à ce nœud. Cependant, l'utilité uniforme est affectée aux parents restants.

Il est évident que la dernière solution proposée, qui opère sur la structure initiale du diagramme d'influence (qui ne nécessite pas la réduction des nœuds utilité en un seul nœud), permet une représentation compacte de l'utilité qualitative.

Sur le plan graphique, la proposition suivante garantit que le graphe  $G_P$ , généré par l'Algorithme 7.3, présente bien une structure de DAG.

**Proposition 7.3 :**

Soit  $\Pi ID_{min}(G_{ID}, \pi_{min}^{ID}, \mu_{min}^{ID})$  un diagramme d'influence possibiliste qualitatif. Soit  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  le réseau possibiliste qualitatif obtenu en appliquant l'Algorithme 7.3. Alors, le graphe  $G_P$  a une structure de DAG.

*Preuve.* Le but est de prouver que le processus de la décomposition d'un diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}(G_{ID}, \pi_{min}^{ID}, \mu_{min}^{ID})$ , en utilisant l'Algorithme 7.3, génère bien un réseau possibiliste qualitatif  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$ . Nous devons d'abord vérifier que la composante graphique  $G_P$  correspond à une structure de DAG.

**Le cas d'un seul nœud utilité :**

Dans le cas d'un diagramme d'influence avec un seul nœud utilité  $V_1$ , il est évident que le graphe  $G_P$  obtenu est un DAG. En effet, la composante graphique  $G_P$  générée en utilisant l'Algorithme 7.3 est définie sur l'ensemble  $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_m\} = Par(V_1)$ , avec  $m = |Par(V_1)|$  est le nombre des parents du nœud utilité  $V_1$ . Selon l'Algorithme 7.3, les nœuds candidats pour être enfant des parents restants du nœud  $V_1$  sont ceux qui apparaissent dans le dernier rang de liste de l'ordre topologique généré par le diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}$ .

Comme le diagramme d'influence ne possède qu'un seul nœud utilité  $V_1$ , le graphe  $G_P$  est construit en une seule étape ce qui revient à dire que l'ensemble *Child* est vide. Par conséquent, les nœuds candidats auront le même niveau de priorité d'être sélectionnés pour être l'enfant des parents restants, soit  $Z_k$  ce nœud. Des arcs sont alors créés à partir des parents restants  $Par(V_1) \setminus \{Z_k\}$  vers le nœud  $Z_k$ . Il est clair, que le graphe obtenu  $G_P$  présente bien une structure de DAG.

**Cas de  $n$  nœuds utilités :**

Supposons que la propriété est vraie dans le cas d'un diagramme d'influence avec  $n$  nœuds utilités. Montrons que cela reste vraie pour un diagramme d'influence avec  $(n + 1)$  nœuds utilité.

Soit  $\Pi ID_{min}(G_{ID}, \pi_{min}^{ID}, \mu_{min}^{ID})$  un diagramme d'influence défini sur l'ensemble de variables  $\mathcal{X} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{V}$  avec  $(n + 1)$  nœuds utilités. Soit  $\Pi ID'_{min}(G'_{ID}, \pi'_{min}{}^{ID}, \mu'_{min}{}^{ID}) = \Pi ID_{min} \setminus V_{n+1}$  défini sur le même ensemble de variables  $\mathcal{X}$  avec  $n$  nœuds utilités. Par définition, le nœud utilité  $V_{n+1}$  est une feuille, dans  $\Pi ID_{min}$ , connecté à un sous-ensemble de nœuds chances et de décisions qui l'influencent.

**Hypothèse d'induction**

Supposons que l'application de l'Algorithme 7.3, sur le diagramme d'influence  $\Pi ID'_{min}$ , génère le réseau possibiliste  $\Pi P'_{min} = (G'_P, \mu')$  défini sur l'ensemble des variables  $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_m\} = Par(V_1) \cup \dots \cup Par(V_n)$ , avec  $m = |Par(V_1) \cup \dots \cup Par(V_n)|$  le nombre des parents de tous les nœuds utilités.

Le but est de prouver que le processus de décomposition du diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}(G_{ID}, \pi_{min}^{ID}, \mu_{min}^{ID})$  en utilisant l'Algorithme 7.3 produit bien le réseau possibiliste qualitatif  $\Pi P_{min} =$

$(G_P, \mu)$ . Donc, il faut d'abord prouver que la composante graphique  $G_P$  correspond bien à une structure de DAG. La composante graphique  $G_P$ , générée en appliquant l'Algorithme 7.3, est définie sur l'ensemble  $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_j\} = Par(V_1) \cup \dots \cup Par(V_{n+1})$ , avec  $j = |Par(V_1) \cup \dots \cup Par(V_{n+1})|$  présente le nombre de tous les parents des nœuds utilités.

A l'étape  $(n + 1)$ , de l'Algorithme 7.3, l'ensemble des nœuds candidats inclue les parents du nœud utilité  $V_{n+1}$  apparaissant dans le dernier rang de l'ordre topologique induit par le diagramme d'influence  $IID_{min}$ . Selon le statut des nœuds candidats (pas encore intégré, intégré comme une racine ou intégré comme un enfant), dans le graphe en cours de construction, nous distinguons deux cas :

1. **Cas 1 :**

Parmi les nœuds candidats, il existe un nœud  $Z_k$  qui n'a pas encore été intégré dans le DAG  $G'_P$  ou bien il a été introduit comme un nœud racine.

Si  $Z_k$  n'a pas encore été introduit dans le graphe  $G'_P$ , alors ce nœud doit être créé et ajouté à l'ensemble  $\mathcal{Z}$ . Le reste des parents qui n'ont pas encore été intégrés dans le DAG  $G'_P$  doivent aussi être introduits et ajoutés à l'ensemble des variables  $\mathcal{Z}$ . Enfin, des arcs sont créés des parents restants du nœud utilité  $V_{n+1}$  vers le nœud sélectionné  $Z_k$ .

L'hypothèse d'induction indique que le graphe  $G'_P$  a bien une structure de DAG et génère le même ordre topologique induit par le diagramme d'influence initial. Selon l'hypothèse d'induction et comme le nœud sélectionné  $Z_k$  (pour être l'enfant des parents restants) respecte l'ordre induit par le diagramme d'influence  $IID_{min}$ , alors le nouveau graphe  $G_P$ , généré par intégration du nœud sélectionné  $Z_k$ , les parents restants et les arcs, préservera toujours la structure d'un DAG.

De la même manière, si le nœud sélectionné  $Z_k$  a été déjà intégré, comme une racine, dans le DAG  $G'_P$ , alors seul les parents restants qui n'ont pas encore été introduits dans  $G'_P$  doivent être créés et ajoutés à l'ensemble de variables  $\mathcal{Z}$ . Des arcs sont créés des parents restants du nœud utilité  $V_{n+1}$  vers le nœud sélectionné  $Z_k$ . Selon l'hypothèse d'induction et comme le nœud  $Z_k$  apparaît dans le dernier rang de l'ordre topologique induit par  $IID_{min}$ , alors le nouveau graphe  $G_P$ , généré en intégrant les parents restants et les arcs, préservera toujours la structure d'un DAG.

2. **Cas 2 :**

Si les nœuds candidats figurent déjà dans le DAG  $G'_P$  comme nœuds ayant des parents (ne sont pas des nœuds racines), alors pour une représentation plus compacte, la sélection de l'Algorithme 7.3 portera sur le nœud  $Z_k$  avec le nombre minimum de parents dans le DAG  $G'_P$ . Les parents restants du nœud utilité  $V_{n+1}$  qui n'ont pas encore été intégrés dans le DAG  $G'_P$ , doivent être créés et ajoutés à l'ensemble de variables  $\mathcal{Z}$ . Par la suite, des arcs à partir des parents restants du nœud  $V_{n+1}$  vers le nœud sélectionné doivent être créés.

Selon l'hypothèse d'induction,  $G'_P$  présente une structure d'un DAG et génère le même ordre topologique induit par le diagramme d'influence initial. Cela signifie que le graphe  $G_P$ , généré par l'intégration des nœuds et des arcs, préservera la structure d'un DAG. En effet, aucun des nœuds parents restants  $Par(V_{n+1}) \setminus Z_k$  dans  $G_P$  ne peut être un descendant du nœud sélectionné  $Z_k$  (ce nœud  $Z_k$  apparaît dans le dernier rang de l'ordre topologique).

□

Il est à noter que dans le cas d'un diagramme d'influence avec plusieurs nœuds utilités n'ayant pas de parents communs, le réseau possibiliste représentant les préférences de l'agent,

aura une structure de DAG déconnectée. En effet, chaque composante (sous graphe) code le degré de satisfaction local associé à un nœud utilité.

**Exemple 7.6 :**

Contrairement à la solution proposée dans l'Exemple 7.3 pour construire le réseau des préférences associé au diagramme d'influence de l'Exemple 7.1. Nous proposons dans cet exemple de le construire en se basant sur la structure initiale du DIP. Le réseau possibiliste qualitatif  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$ , représentant les préférences de l'agent, est généré en utilisant l'Algorithme 7.3. En effet, la composante graphique  $G_P$  est définie sur l'ensemble des variables  $Z = Par(V_1) \cup Par(V_2) = \{X_2, X_3, D_1, D_2\}$ . Un ordre est défini entre les parents de chaque nœud utilité en accord avec l'ordre topologique induit par le diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}$  (Figure 7.1) (voir Exemple 7.4). Alors, la liste d'ordre attachée au nœud utilité  $V_1$  est :

$$List - ordered(V_1) = D_2 \prec X_3.$$

De la même manière, la liste d'ordre attachée au nœud  $V_2$  est :

$$List - ordered(V_2) = D_1 \prec X_2.$$

Un seul parent doit être sélectionné, pour chaque nœud utilité  $V_1$  et  $V_2$ , pour être l'enfant des parents restants. Dans les deux cas, un seul nœud se porte candidat pour être l'enfant des nœuds restants. Soient  $Candidate(V_1) = X_3$  et  $Candidate(V_2) = X_2$  ces deux candidats.

Dans la première étape, pour le nœud utilité  $V_1$ , le nœud sélectionné  $X_3$  et le nœud parent restant  $D_2$  ne sont pas encore intégrés dans le DAG  $G_P$ . Par conséquent, ces deux nœuds doivent être créés avec un arc de  $X_3$  vers  $D_2$ . La première portion du DAG  $G_P$  est donnée par la Figure 7.8.

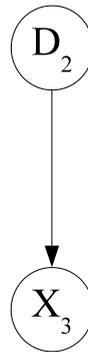
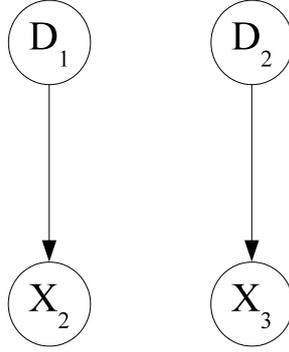


FIGURE 7.8 – La première partie du DAG  $G_P$  construit à partir du diagramme d'influence de la Figure 7.1.

Dans la deuxième étape, pour le nœud utilité  $V_2$ , le nœud sélectionné  $X_2$  et le nœud parent restant  $D_1$  ne sont pas encore intégrés dans la première portion du DAG  $G_P$ . Par conséquent, ces deux nœuds doivent être créés avec un arc de  $X_2$  vers  $D_1$ . La composante graphique  $G_P$  est donnée par la Figure 7.9. Il est clair que cette structure correspond bien à un DAG.


 FIGURE 7.9 – Le DAG  $G_P$  construit à partir du diagramme d'influence de la Figure 7.1.

Regardons maintenant les composantes numériques du réseau obtenu. La proposition suivante prouve l'équivalence sémantique entre le réseau possibiliste  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$ , généré par les étapes précédentes, et le diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}(G_{ID}, \pi_{min}^{ID}, \mu_{min}^{ID})$ .

**Proposition 7.4 :**

Soit  $\Pi ID_{min}(G_{ID}, \pi_{min}^{ID}, \mu_{min}^{ID})$  un diagramme d'influence qualitatif. Soit  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  le réseau possibiliste qualitatif obtenue par l'Algorithme 7.3. L'utilité qualitative jointe  $\mu_P$  induite par  $\Pi P_{min}$  est équivalente à celle induite par le diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}$ . C'est-à-dire :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_m) = \mu_{min}^{ID}(X_1, \dots, X_n, D_1, \dots, D_p). \quad (7.16)$$

*Preuve.* Le but est de prouver que le processus de décomposition du diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}(G_{ID}, \pi_{min}^{ID}, \mu_{min}^{ID})$  génère bien le réseau possibiliste qualitatif  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  en utilisant l'Algorithme 7.3. Sur le plan graphique, il a été déjà montré dans la preuve de la Proposition 7.3, que la composante graphique  $G_P$  correspond bien à une structure d'un DAG. Sur le plan numérique, ce qui reste à prouver concerne l'équivalence entre l'utilité qualitative jointe  $\mu_P$  induite par le réseau possibiliste qualitatif  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  et celle induite par le diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}$ , c'est-à-dire  $\mu_P = \mu_{min}^{ID}$ .

**Cas d'un seul nœud utilité :**

Dans le cas d'un diagramme d'influence avec un seul nœud utilité  $V_1$ , la composante graphique, générée en utilisant l'Algorithme 7.3, est définie sur l'ensemble des variables  $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_m\} = Par(V_1)$ , avec  $m = |Par(V_1)|$  est le nombre des parents du nœud  $V_1$ . Soit  $Z_k \in \mathcal{Z}$  le nœud candidat pour être l'enfant des parents restants du nœud utilité  $V_1$ . Sur le plan numérique, des distributions de possibilités conditionnelles  $\mu(Z_k | U_{Z_k})$  sont affectées au nœud  $Z_k$  en utilisant l'Equation 7.11, à savoir :

$$\forall z_{kl} \in \mathbb{D}_{Z_k}, \forall u_{Z_k} \in \mathbb{D}_{Par(Z_k)} \mu(z_{kl} | u_{Z_k}) = \mu_1(u_{V_1}). \quad (7.17)$$

Les variables restantes codent l'ignorance totale. Une distribution de possibilités uniforme est associée à chaque nœud de la façon suivante :

$$\forall z_{jl} \in \mathbb{D}_{Z_j}, \mu(z_{jl}) = 1. \quad (7.18)$$

L'utilité qualitative jointe  $\mu_P$  induite par le réseau possibiliste  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  est calculée en utilisant l'Equation 4.1 comme suit :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_m) = \min_{i=1..m} \mu(Z_i | U_{Z_i}).$$

Comme l'opérateur min est associatif et commutatif, l'utilité qualitative associée à  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  peut être réécrite de la façon suivante :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_m) = \min \left[ \min_{j=1..(k-1), (k+1)..m} \mu(Z_j | U_{Z_j}), \mu(Z_k | U_{Z_k}) \right].$$

Par définition, ceci revient à :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_m) = \min(1, \mu_1(U_{V_1})).$$

En utilisant l'Equation 7.2, ceci est équivalent à :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_m) = \mu_{min}^{ID}(X_1, \dots, X_n, D_1, \dots, D_p).$$

### Cas de $n$ nœuds utilités :

Supposons que cette propriété est vraie dans le cas d'un diagramme d'influence avec  $n$  nœuds utilités. Montrons que cela reste vraie pour un diagramme d'influence avec  $(n + 1)$  nœuds utilités.

Soit  $\Pi ID_{min}(G_{ID}, \pi_{min}^{ID}, \mu_{min}^{ID})$  un diagramme d'influence défini sur l'ensemble des variables  $\mathcal{X} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{V}$  avec  $(n + 1)$  nœuds utilités. Soit  $\Pi ID'_{min}(G'_{ID}, \pi'_{min}, \mu'_{min}) = \Pi ID_{min} \setminus V_{n+1}$  défini sur le même ensemble de variables  $\mathcal{X}$  avec  $n$  nœuds utilité. Par définition, le nœud utilité  $V_{n+1}$  est une feuille, dans  $\Pi ID_{min}$ , connecté à un sous-ensemble de nœuds chances et de décisions qui l'influencent.

#### Hypothèse d'induction

Supposons que l'application de l'Algorithme 7.3 sur le diagramme d'influence  $\Pi ID'_{min}$  génère le réseau possibiliste  $\Pi P'_{min} = (G'_P, \mu')$  défini sur l'ensemble  $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_m\} = Par(V_1) \cup \dots \cup Par(V_n)$ , avec  $m = |Par(V_1) \cup \dots \cup Par(V_n)|$  présente le nombre des parents de tous les nœuds utilités. L'utilité qualitative jointe  $\mu'_P$  induite par  $\Pi P'_{min}$  est égale à celle induite par le digramme d'influence  $\Pi ID'_{min}$ . C'est-à-dire,

$$\mu'_P(Z_1, \dots, Z_m) = \min_{i=1..m} \mu'(Z_i | U_{Z_i}) = \mu_{min}^{ID}(X_1, \dots, X_n, D_1, \dots, D_p). \quad (7.19)$$

Nous avons besoin de prouver que l'utilité qualitative  $\mu_P$  induite par le réseau possibiliste  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$ , généré par l'Algorithme 7.3, est la même que celle induite par le diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}$ . La composante graphique  $G_P$  est défini sur l'ensemble de variables  $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_j\} = Par(V_1) \cup \dots \cup Par(V_{n+1})$ , avec  $j = |Par(V_1) \cup \dots \cup Par(V_{n+1})|$  est le nombre des tous les parents des nœuds utilités.

A l'étape  $(n + 1)$  de l'Algorithme 7.3, l'ensemble des nœuds candidats inclue les parents du nœud utilité  $V_{n+1}$  qui apparaissent dans le dernier rang de l'ordre topologique induit par  $\Pi ID_{min}$ . Selon le statut du nœud candidat (pas encore intégré, intégré comme une racine ou intégré comme un enfant), dans le graphe en cours de construction, deux cas se distinguent :

#### 1. Cas 1 :

Parmi les nœuds candidats, il existe un nœud  $Z_k$  qui n'a pas encore été intégré dans le DAG  $G'_P$  ou bien il a été introduit comme un nœud racine.

Si  $Z_k$  n'a pas encore été introduit dans le DAG  $G'_P$ , alors ce nœud doit être créé (ajouté à l'ensemble  $\mathcal{Z}$ ) et quantifié en utilisant l'Equation 7.11. Le reste des nœuds parents  $Par(V_{n+1}) \setminus Z_k$  sont quantifiés en utilisant l'Equation 7.15. L'utilité qualitative jointe  $\mu_P$  induite par le réseau  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  est calculée en utilisant l'Equation 4.1 comme suit :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_j) = \min_{i=1..j} \mu(Z_i | U_{Z_i}).$$

En se basant sur l'hypothèse d'induction, l'utilité qualitative associée au réseau  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu_P)$  peut être réécrite de la façon suivante :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_j) = \min[\min_{i=1..m} \mu'(Z_i | U_{Z_i}), \mu(Z_{m+1}), \dots, \mu(Z_{j-1}), \mu(Z_k | U_{Z_k})].$$

Les nœuds  $Z_{m+1}, \dots, Z_{j-1}$  sont des nœuds parents du nœud utilité  $V_{n+1}$  récemment intégrés dans le DAG  $G'_P$ .

En utilisant l'Equation 7.15, ceci revient à :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_j) = \min[\mu'_P(Z_1, \dots, Z_m), 1, \mu(Z_k | U_{Z_k})].$$

En utilisant l'Equation 7.11, nous obtenons :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_j) = \min[\mu'_P(Z_1, \dots, Z_m), \mu_{n+1}(U_{V_{n+1}})].$$

En appliquant l'Equation 7.19, le résultat est le suivant :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_j) = \min[\mu_{min}^{ID}(X_1, \dots, X_n, D_1, \dots, D_p), \mu_{n+1}(U_{V_{n+1}})].$$

Par définition, ceci est équivalent à :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_j) = \mu_{min}^{ID}(X_1, \dots, X_n, D_1, \dots, D_p).$$

Si le nœud sélectionné  $Z_k$  figure déjà dans le DAG comme un nœud racine, alors il est quantifié en utilisant l'Equation 7.11. Les nœuds parents restants  $Par(V_{n+1}) \setminus Z_k$  sont quantifiés en utilisant l'Equation 7.15. L'utilité qualitative jointe  $\mu_P$  induite par le réseau possibiliste  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  est calculée en utilisant l'Equation 4.1 comme suit :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_j) = \min_{i=1..j} \mu(Z_i | U_{Z_i}).$$

A partir de l'hypothèse d'induction, l'utilité qualitative associée au réseau  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  peut être réécrite comme suit :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_j) = \min[\min_{i=1..(k-1), (k+1)..m} \mu'(Z_i | U_{Z_i}), \mu(Z_{m+1}), \dots, \mu(Z_{j-1}), \mu(Z_k | U_{Z_k})].$$

Les nœuds  $Z_{m+1}, \dots, Z_{j-1}$  présentent les nœuds parents du nœud utilité  $V_{n+1}$  récemment intégrés dans le DAG  $G'_P$ .

Le nœud sélectionné  $Z_k$  est déjà intégré dans le DAG  $G'_P$ , il présente un nœud racine. Selon l'hypothèse d'induction, une distribution de possibilités uniforme a été affectée à ce nœud, c'est-à-dire  $\mu'(Z_k) = 1$ . Alors :

$$\mu'_P(Z_1, \dots, Z_m) = \mu'_P(Z_1, \dots, Z_{k-1}, Z_{k+1}, \dots, Z_m).$$

Par conséquent, l'utilité qualitative jointe induite par le réseau possibiliste  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  peut être réécrite comme suit :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_j) = \min(\mu'_P(Z_1, \dots, Z_m), \mu(Z_{m+1}), \dots, \mu(Z_{j-1}), \mu(Z_k | U_{Z_k})).$$

En utilisant l'Equation 7.15, ceci revient à :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_j) = \min[\mu'_P(Z_1, \dots, Z_m), 1, \mu(Z_k | U_{Z_k})].$$

En utilisant l'Equation 7.11, nous obtenons :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_j) = \min[\mu'_P(Z_1, \dots, Z_m), \mu_{(n+1)}(U_{V_{n+1}})].$$

L'application de l'Equation 7.19 donne :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_j) = \min[\mu_{min}^{ID}(X_1, \dots, X_n, D_1, \dots, D_p), \mu_{n+1}(U_{V_{n+1}})].$$

Par définition, ceci est équivalent à :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_j) = \mu_{min}^{ID}(X_1, \dots, X_n, D_1, \dots, D_p).$$

## 2. Cas 2 :

Si les nœuds candidats ont déjà été intégrés dans le DAG  $G'_P$  et l'ensemble de leurs parents n'est pas vide, alors le nœud  $Z_k$  avec le plus petit nombre de parents dans  $G'_P$  sera sélectionné. Ce nœud est quantifié en utilisant l'Equation 7.13 comme suit :

$$\forall z_{kl} \in \mathbb{D}_{Z_k}, \forall u_{Z_k} \in \mathbb{D}_{Par(Z_k)} \mu(z_{kl} | u_{Z_k}) = \min[\mu'(z_{kl} | u_{Z_k}), \mu_{n+1}(u_{V_{n+1}})] \quad (7.20)$$

Les nœuds parents restants  $Par(V_{n+1}) \setminus Z_k$  sont quantifiés en utilisant l'Equation 7.15. L'utilité qualitative  $\mu_P$  induite par le réseau possibiliste  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  est calculée en utilisant l'Equation 4.1 comme suit :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_j) = \min_{i=1..j} \mu(Z_i | U_{Z_i}).$$

En appliquant l'hypothèse d'induction, l'utilité qualitative associée à  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  peut être réécrite de la façon suivante :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_j) = \min[\min_{i=1..(k-1), (k+1)..m} \mu'(Z_i | U_{Z_i}), \mu(Z_{m+1}), \dots, \mu(Z_{j-1}), \mu(Z_k | U_{Z_k})].$$

Les nœuds  $Z_{m+1}, \dots, Z_{j-1}$  désignent les nœuds parent du nœud utilité  $V_{n+1}$  récemment intégrés dans le DAG  $G'_P$ .

En utilisant l'Equation 7.20, l'équation précédente devient :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_j) = \min[\min_{i=1..(k-1), (k+1)..m} \mu'(Z_i | U_{Z_i}), \mu(Z_{m+1}), \dots, \mu(Z_{j-1}), \min[\mu'(Z_k | U_{Z_k}), \mu_{n+1}(U_{V_{n+1}})]]$$

Comme l'opérateur min est associatif et commutatif, l'utilité qualitative associée au réseau  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  peut être réécrite comme suit :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_j) = \min[\mu'_P(Z_1, \dots, Z_m), \mu(Z_{m+1}), \dots, \mu(Z_{j-1}), \mu_{n+1}(U_{V_{n+1}})].$$

En utilisant l'Equation 7.15, ceci revient à :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_j) = \min[\mu'_P(Z_1, \dots, Z_m), 1, \mu_{n+1}(U_{V_{n+1}})].$$

En appliquant l'Equation 7.19, nous obtenons :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_m) = \min[\mu_{min}^{ID}(X_1, \dots, X_n, D_1, \dots, D_p), \mu_{n+1}(U_{V_{n+1}})].$$

Par définition, ceci est équivalent à :

$$\mu_P(Z_1, \dots, Z_m) = \mu_{min}^{ID}(X_1, \dots, X_n, D_1, \dots, D_p).$$

□

**Exemple 7.7 :**

Dans cet exemple, la composante numérique du DAG  $G_P$  (Figure 7.9), de l'Exemple 7.6, sera définie. Comme les possibilités et les utilités sont commensurables (définies sur la même échelle  $[0, 1]$ ), les distributions de possibilités conditionnelles  $\mu(X_2 | D_1)$  affectées à  $X_2$  et  $\mu(X_3 | D_2)$  attachées à  $X_3$  sont définies en utilisant l'Equation 7.11. Les résultats sont reportés dans la Table 7.13.

Les distributions de possibilités attachées aux nœuds  $\{D_1, D_2\}$  sont uniformes (voir la Table 7.12 ).

$D_1$	$\mu(D_1)$	$D_2$	$\mu(D_2)$
$d_1$	1	$d_2$	1
$\neg d_1$	1	$\neg d_2$	1

 TABLE 7.12 – Distributions de possibilités initiales  $\Pi P_{min}$  sur  $D_1$  et  $D_2$ .

$X_2$	$D_1$	$\mu(X_2   D_1)$	$X_3$	$D_2$	$\mu(X_3   D_2)$
$x_2$	$d_1$	.5	$x_3$	$d_2$	.2
$x_2$	$\neg d_1$	.9	$x_3$	$\neg d_2$	.3
$\neg x_2$	$d_1$	.1	$\neg x_3$	$d_2$	1
$\neg x_2$	$\neg d_1$	.4	$\neg x_3$	$\neg d_2$	0

 TABLE 7.13 – Distributions de possibilités initiales  $\Pi P_{min}$  sur  $X_2 | D_1$  et  $X_3 | D_2$ .

En utilisant l'Equation 4.1, le réseau possibiliste qualitatif  $\Pi P_{min}$  induit l'utilité qualitative jointe  $\mu_P$  donnée par la Table 7.14.

$X_2$	$X_3$	$D_1$	$D_2$	$\mu_P$	$X_2$	$X_3$	$D_1$	$D_2$	$\mu_P$
$x_2$	$x_3$	$d_1$	$d_2$	.2	$\neg x_2$	$x_3$	$d_1$	$d_2$	.1
$x_2$	$x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	.3	$\neg x_2$	$x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	.1
$x_2$	$x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	.2	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	.2
$x_2$	$x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.3	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.3
$x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$d_2$	.5	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$d_2$	.1
$x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	0	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$d_1$	$\neg d_2$	0
$x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	.9	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$d_2$	.4
$x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	0	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	0

 TABLE 7.14 – L'utilité qualitative jointe  $\mu_P(X_2, X_3, D_1, D_2)$ .

L'utilité qualitative jointe  $\mu_P$  induite par le réseau possibiliste  $\Pi P_{min}$  est exactement égale à celle induite par le diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}$  (voir Table 7.4).

Il est évident que le deuxième algorithme (Algorithme 7.3) opérant sur la structure initiale du diagramme d'influence permet une représentation plus compacte des préférences de l'agent que le premier algorithme (Algorithm 7.2) qui nécessite la réduction des nœuds utilités en un seul nœud.

### 7.3 Calcul de stratégies optimales optimistes dans un MGDRP

Dans le Chapitre 6, notre nouveau Modèle Graphique de la Décision basé sur les Réseaux Possibilistes (MGDRP) a été présenté. Ce modèle permet de coder des problèmes de la décision qualitative à un seul niveau (exclusive) par deux réseaux possibilistes qualitatifs, comme il peut supporter les problèmes de la décision séquentielle : nous avons montré dans ce chapitre qu'un diagramme d'influence peut être codé dans notre modèle en le décomposant en deux réseaux. La prise en compte de la composante temporelle, dans notre modèle MGDRP, sera matérialisée par un ordre temporel que l'agent doit fournir initialement.

Un algorithme de résolution des problèmes de décision à un seul niveau (exclusive) a été aussi proposé dans le chapitre précédent lorsque le modèle MGDRP est utilisé pour coder le problème de décision.

Dans cette section, une généralisation de cet algorithme est proposée permettant ainsi de résoudre les problèmes de la décision séquentielle lorsque le modèle MGDRP est utilisé pour coder ce genre de problèmes.

Dans le cas de problèmes de décisions à un seul niveau, l'utilité qualitative optimiste relative à une décision peut être réécrite de la façon suivante, en se basant sur le processus de fusion (voir Chapitre 6, Section 6.4.1) :

$$u_{Opt}(d) = \max_{\omega \in \Omega} \min(\pi_{G_{\oplus}}(\omega), \pi_d(\omega)), \quad (7.21)$$

avec  $\pi_{G_{\oplus}}(\omega) = \min(\pi_K(\omega), \mu_P(\omega))$ .

Rappelons que la contrepartie syntaxique de  $\pi_{G_{\oplus}}(\omega)$  est le réseau possibiliste  $\Pi G_{\oplus} = (G_{\oplus}, \pi_{\oplus})$  induisant une distribution de possibilités jointe unique  $\pi_{G_{\oplus}}$ .

D'autre part, nous avons :

$$\min(\pi_{G_{\oplus}}(\omega), \pi_d(\omega)) = \begin{cases} \pi_{G_{\oplus}}(\omega) & \text{Si } \omega \models d \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

L'utilité optimale optimiste associée à une décision est calculée par la formule suivante :

$$u_{Opt}(d) = \max_{\omega \in \Omega} \pi_{G_{\oplus}}(\omega \wedge d) \quad (7.22)$$

Puisque les décisions doivent être prises dans l'ordre temporel initialement donné par le décideur, et vu que les algorithmes de propagation sont une forme de la programmation dynamique. Le calcul de la meilleure stratégie peut être effectué d'une manière itérative, tout en commençant par la dernière décision. Chaque étape  $i$  correspondra au calcul de la meilleure instantiation de la décision  $D_i$  en maximisant l'utilité optimiste dans le réseau possibiliste  $\Pi G_{\oplus}$  tenant compte des valeurs des décisions déjà prises lors des étapes précédentes. Cela est assuré par l'équation suivante :

$$u_{Opt}^*(D_i) = \max_{D_i} \max_{\omega \in \Omega} \pi_{G_{\oplus}}(\omega \wedge D_i \wedge E) \quad (7.23)$$

Tel que  $E$  représente l'ensemble des évidences mis à jour à chaque étape  $i$  du calcul de l'utilité optimiste optimale de la décision  $D_i$ .

L'Algorithme 6.3 (Chapitre 6), proposé pour le calcul des décisions optimistes optimales dans le cas des problèmes de la décision qualitative à un seul niveau, est adapté pour permettre le calcul des stratégies optimistes optimales. En effet, il suffit d'intégrer l'évidence  $\varepsilon$  (qui correspond aux décisions déjà instanciées) à chaque étape de traitement d'une décision  $D_i \in \mathcal{D}$ .

**Exemple 7.8 :**

Nous allons reprendre l'exemple étudié dans [12] d'un diagramme d'influence, pour lequel la stratégie optimale optimiste a été calculée par deux méthodes différentes : la première consistait à sa transformation en un arbre de décision et la deuxième consistait à sa transformation en un réseau possibiliste qualitatif.

Dans ce qui suit nous allons évaluer ce même diagramme d'influence en utilisant notre méthode (MGDRP). Nous allons d'abord procéder à sa décomposition en deux réseaux (connaissances et préférences), par la suite nous appliquerons notre proposition pour trouver la meilleure stratégie.

La Figure 7.10 montre le diagramme d'influence  $\Pi ID_{min}$  défini par l'ensemble de décisions  $\mathcal{D} = \{D_1, D_2\}$ , l'ensemble de variables d'état  $\mathcal{C} = \{X_1, X_2\}$  et un nœud d'utilité  $V$ . Les variables sont supposée être binaires.

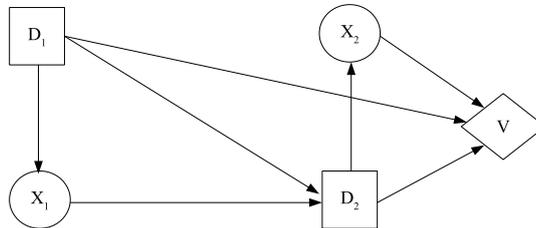


FIGURE 7.10 – Exemple d'un diagramme d'influence.

La composante numérique est représentée par les degrés de possibilités conditionnelles  $\pi_{ID}(X_1 | D_1)$  et  $\pi_{ID}(X_2 | D_2)$  et l'utilité qualitative  $\mu_{ID}(X_2, D_1, D_2)$  associée à  $V$ . Les degrés de possibilité sont représentés dans la Tables 7.15. L'utilité qualitative est représentée dans la Table 7.16 :

$X_1$	$D_1$	$\pi_{ID}(X_1   D_1)$	$X_2$	$D_2$	$\pi_{ID}(X_2   D_2)$
$x_1$	$d_1$	1	$x_2$	$d_2$	.3
$x_1$	$\neg d_1$	.4	$x_2$	$\neg d_2$	1
$\neg x_1$	$d_1$	.2	$\neg x_2$	$d_2$	1
$\neg x_1$	$\neg d_1$	1	$\neg x_2$	$\neg d_2$	.4

TABLE 7.15 – Distribution de possibilités initiales sur  $X_1 | D_1$  et  $X_2 | D_2$ .

$X_2$	$D_1$	$D_2$	$\mu(X_2, D_1, D_2)$	$X_2$	$D_1$	$D_2$	$\mu(X_2, D_1, D_2)$
$x_2$	$d_1$	$d_2$	.2	$\neg x_2$	$d_1$	$d_2$	.3
$x_2$	$d_1$	$\neg d_2$	.4	$\neg x_2$	$d_1$	$\neg d_2$	.6
$x_2$	$\neg d_1$	$d_2$	1	$\neg x_2$	$\neg d_1$	$d_2$	0
$x_2$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.1	$\neg x_2$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.7

TABLE 7.16 – Utilité qualitative  $\mu$  sur  $X_2, D_1, D_2$ .

Ce diagramme d'influence sera décomposé en deux réseaux possibilistes qualitatifs. Le premier  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$  représente les connaissances de l'agent et le deuxième  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$  représente ses préférences.

1. **Connaissances** :  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$

La composante graphique  $G_K$  est donnée par la Figure 7.11. Ce réseau est défini par

deux variables d'état  $\{X_1, X_2\}$  et deux variables de décision  $\{D_1, D_2\}$ . Les distributions de possibilités initiales sont données dans les Tables 7.17, 7.18 et 7.19.

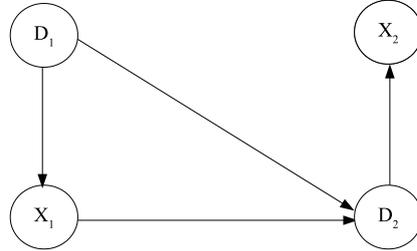


FIGURE 7.11 – Réseau possibiliste qualitatif (Connaissances).

$D_1$	$\pi(D_1)$	$X_1$	$D_1$	$\pi(X_1   D_1)$	$X_1$	$D_1$	$\pi(X_1   D_1)$
$d_1$	1	$x_1$	$d_1$	1	$\neg x_1$	$d_1$	.2
$\neg d_1$	1	$x_1$	$\neg d_1$	.4	$\neg x_1$	$\neg d_1$	1

TABLE 7.17 – Distributions de possibilités initiales  $\pi(D_1)$  et  $\pi(X_1 | D_1)$ .

$D_2$	$D_1$	$X_1$	$\pi(D_2   D_1 X_1)$	$D_2$	$D_1$	$X_1$	$\pi(D_2   D_1 X_1)$
$d_2$	$d_1$	$x_1$	1	$\neg d_2$	$d_1$	$x_1$	1
$d_2$	$d_1$	$\neg x_1$	1	$\neg d_2$	$d_1$	$\neg x_1$	1
$d_2$	$\neg d_1$	$x_1$	1	$\neg d_2$	$\neg d_1$	$x_1$	1
$d_2$	$\neg d_1$	$\neg x_1$	1	$\neg d_2$	$\neg d_1$	$\neg x_1$	1

TABLE 7.18 – Distributions de possibilités initiales  $\pi(D_2 | D_1 X_1)$ .

$X_2$	$D_2$	$\pi(X_2   D_2)$
$x_2$	$d_2$	.3
$x_2$	$\neg d_2$	1
$\neg x_2$	$d_2$	1
$\neg x_2$	$\neg d_2$	.4

TABLE 7.19 – Distributions de possibilités initiales  $\pi(X_2 | D_2)$ .

2. **Préférences** :  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$

Le DAG associé à ce réseau est donné par la Figure 7.12. Ce réseau contient deux variables de décision  $\{D_1, D_2\}$  et une variable d'état  $X_2$ . Les distributions de possibilités initiales associées à ce réseau sont données dans les Tables 7.20 et 7.21.

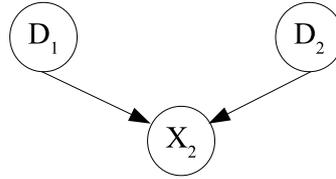


FIGURE 7.12 – Réseau possibiliste qualitatif (Préférences).

$D_1$	$\mu(D_1)$	$D_2$	$\mu(D_2)$
$d_1$	1	$d_2$	1
$\neg d_1$	1	$\neg d_2$	1

TABLE 7.20 – Distributions de possibilités initiales  $\mu(D_1)$  et  $\mu(D_2)$ .

$X_2$	$D_1$	$D_2$	$\mu(X_2   D_1 D_2)$	$X_2$	$D_1$	$D_2$	$\mu(X_2   D_1 D_2)$
$x_2$	$d_1$	$d_2$	.2	$\neg x_2$	$d_1$	$d_2$	.3
$x_2$	$d_1$	$\neg d_2$	0.4	$\neg x_2$	$d_1$	$\neg d_2$	.6
$x_2$	$\neg d_1$	$d_2$	1	$\neg x_2$	$\neg d_1$	$d_2$	0
$x_2$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.1	$\neg x_2$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.7

TABLE 7.21 – Distributions de possibilités initiales  $\mu(X_2 | D_1 D_2)$ .

Pour calculer les stratégies optimales optimistes, notre solution repose sur la fusion des deux réseaux  $\Pi K_{min} = (G_K, \pi)$  et  $\Pi P_{min} = (G_P, \mu)$ . Soit  $\Pi G_{\oplus} = (G_{\oplus}, \pi_{\oplus})$  le réseau possibiliste qualitatif obtenu par la fusion de  $\Pi K_{min}$  et  $\Pi P_{min}$ . La composante graphique associée à  $\Pi G_{\oplus}$  est donnée par la Figure 7.13.

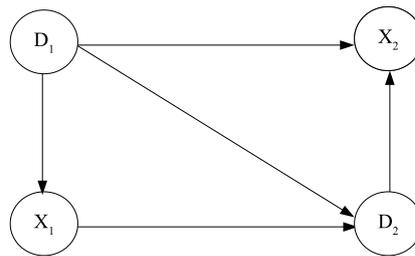


FIGURE 7.13 – Le réseau possibiliste  $G_{\oplus}$ .

Les degrés de possibilités initiaux associés au nouveau réseau  $\Pi G_{\oplus}$  qui représente l'union de  $\Pi K_{min}$  et  $\Pi P_{min}$  sont donnés dans les Tables 7.22, 7.23 et 7.24.

$D_1$	$\pi_{\oplus}(D_1)$	$X_1$	$D_1$	$\pi_{\oplus}(X_1   D_1)$	$X_1$	$D_1$	$\pi_{\oplus}(X_1   D_1)$
$d_1$	1	$x_1$	$d_1$	1	$\neg x_1$	$d_1$	.2
$\neg d_1$	1	$x_1$	$\neg d_1$	.4	$\neg x_1$	$\neg d_1$	1

TABLE 7.22 – Distributions de possibilités initiales  $\pi_{\oplus}(D_1)$  et  $\pi_{\oplus}(X_1 | D_1)$ .

$D_2$	$D_1$	$X_1$	$\pi_{\oplus}(D_2 \mid D_1 X_1)$	$D_2$	$D_1$	$X_1$	$\pi_{\oplus}(D_2 \mid D_1 X_1)$
$d_2$	$d_1$	$x_1$	1	$\neg d_2$	$d_1$	$x_1$	1
$d_2$	$d_1$	$\neg x_1$	1	$\neg d_2$	$d_1$	$\neg x_1$	1
$d_2$	$\neg d_1$	$x_1$	1	$\neg d_2$	$\neg d_1$	$x_1$	1
$d_2$	$\neg d_1$	$\neg x_1$	1	$\neg d_2$	$\neg d_1$	$\neg x_1$	1

 TABLE 7.23 – Distributions de possibilités initiales  $\pi_{\oplus}(D_2 \mid D_1 X_1)$ .

$X_2$	$D_1$	$D_2$	$\pi_{\oplus}(X_2 \mid D_1 D_2)$	$X_2$	$D_1$	$D_2$	$\pi_{\oplus}(X_2 \mid D_1 D_2)$
$x_2$	$d_1$	$d_2$	.2	$\neg x_2$	$d_1$	$d_2$	.3
$x_2$	$d_1$	$\neg d_2$	.4	$\neg x_2$	$d_1$	$\neg d_2$	.4
$x_2$	$\neg d_1$	$d_2$	.3	$\neg x_2$	$\neg d_1$	$d_2$	0
$x_2$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.1	$\neg x_2$	$\neg d_1$	$\neg d_2$	.4

 TABLE 7.24 – Distributions de possibilités initiales  $\pi_{\oplus}(X_2 \mid D_1 D_2)$ .

Sachant que l'ordre temporel associé aux décisions est le suivant :  $D_1 \prec D_2$ , alors le calcul de la stratégie optimale optimiste se base sur le calcul, en premier, de l'instantiation de la variable  $D_2$  qui maximise l'utilité optimiste. Une fois que cette décision est choisie, le calcul de l'instantiation de la deuxième variable de décision  $D_1$  est effectué.

Au départ, l'ensemble des évidences  $E = \emptyset$ , alors :

$$u_{opt}(D_2) = \max_{\omega \in \Omega} (\max_{\omega \in \Omega} \pi_{\oplus}(\omega \wedge d_2), \max_{\omega \in \Omega} \pi_{\oplus}(\omega \wedge \neg d_2)).$$

Pour calculer cette utilité, nous utilisons notre algorithme de propagation basé sur l'arbre de jonction (Algorithme 6.3) auquel nous ajoutons l'étape de condensation de l'évidence. L'arbre de jonction associé au réseau possibiliste  $\Pi G_{\oplus}$  est donné par la Figure 7.14 :


 FIGURE 7.14 – Arbre de jonction associé à  $G_{\oplus}$  de la Figure 7.13.

L'arbre de jonction résultant contient deux clusters  $C_1 = \{D_1, D_2, X_1\}$ ,  $C_2 = \{D_1, D_2, X_2\}$  et un séparateur  $S_{12} = \{D_1, D_2\}$ .

– **Étape 1** :  $D_2 = d_2$

Dans ce cas, le fait  $D_2 = d_2$  est codé par la fonction :

$$\Lambda_D(d_2) = \begin{cases} 1 & \text{Si } D \text{ est instancié } d_2 \\ 0 & \text{si } D \text{ est instanciée } \neg d_2 \end{cases}$$

La procédure d'initialisation, nous donne :

$$\pi_{C_1} = \min(1, \pi_{\oplus}(D_1), \pi_{\oplus}(D_2 \mid D_1 D_2), \pi_{\oplus}(X_1 \mid D_1)),$$

$$\pi_{C_2} = \min(1, \pi_{\oplus}(X_2 \mid D_1 D_2), \Lambda_{D_2})$$

Une fois que l'arbre de jonction est quantifié, le processus de propagation peut être exécuté pour calculer le degré de normalisation de l'arbre de jonction qui correspond au degré de normalisation de l'un de ses clusters. Cette procédure nous donne le résultat suivant :

$$u_{opt}(d_2) = .3.$$

- **Étape 2** :  $D_2 = \neg d_2$

La même procédure que la première étape est relancée avec  $D_2 = \neg d_2$ , c'est-à-dire :

$$\Lambda_D(d_2) = \begin{cases} 1 & \text{Si } D \text{ est instancié } \neg d_2 \\ 0 & \text{si } D \text{ est instanciée } d_2 \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$u_{opt}(\neg d_2) = .4.$$

De ces deux étapes, l'utilité optimale optimiste pour la décision  $D_2$  est :

$$u_{opt}^*(D_2) = .4$$

Le choix de  $D_2$  est alors fixé, donc l'ensemble des évidences  $E = \{D_2 = \neg d_2\}$ . De la même façon est calculé l'utilité optimale optimiste de la décision  $D_1$  tenant compte de la valeur de la variable de décision  $D_2$ .

- **Étape 1** :  $D_1 = d_1$

Dans ce cas, le fait  $D_1 = d_1$  et  $D_2 = \neg d_2$  est codé par la fonction :

$$\Lambda_{D_1 D_2}(d_1 \neg d_2) = \begin{cases} 1 & \text{Si } D_1 D_2 \text{ est instanciée } d_1 \neg d_2 \\ 0 & \text{si } D_1 D_2 \text{ autre que } d_1 \neg d_2 \end{cases}$$

En appliquant le processus de propagation, nous obtenons :

$$u_{opt}(d_1) = .4.$$

- **Étape 2** :  $D_1 = \neg d_1$

Dans ce cas, le fait  $D_1 = \neg d_1$  et  $D_2 = \neg d_2$  est codé par la fonction :

$$\Lambda_{D_1 D_2}(\neg d_1 \neg d_2) = \begin{cases} 1 & \text{Si } D_1 D_2 \text{ est instanciée } \neg d_1 \neg d_2 \\ 0 & \text{si } D_1 D_2 \text{ autre que } \neg d_1 \neg d_2 \end{cases}$$

En appliquant le processus de propagation, nous obtenons :

$$u_{opt}(\neg d_1) = .4.$$

En conclusion, il existe deux stratégies optimistes optimales :

$$\delta_{Opt}^* = \{(D_1 = d_1, D_2 = \neg d_2), (D_1 = \neg d_1, D_2 = \neg d_2)\} \text{ avec une utilité } \mu(\delta_{Opt}^*) = 0.4.$$

## 7.4 Etude expérimentale

Dans cette section une étude expérimentale sera menée permettant ainsi la validation des résultats théoriques obtenus dans ce chapitre. L'objectif de cette étude est de comparer le temps de réponse nécessaire pour le calcul des stratégies optimales optimistes en utilisant les deux alternatives proposées pour la décomposition d'un diagramme d'influence. En effet, une application a été développée permettant le calcul des stratégies optimales optimistes en se basant sur notre modèle graphique de la décision qualitative basé sur les réseaux possibilistes qualitatifs (voir Section 7.3). Cette application offre la possibilité de traiter les deux processus suivants :

1. Le calcul des stratégies optimales optimistes en exploitant l'algorithme naïf (Algorithme 7.2) de la procédure de décomposition d'un diagramme d'influence.

2. Le calcul des stratégies optimales optimistes en exploitant l'Algorithme 7.3 de la procédure de décomposition d'un diagramme d'influence.

Le langage de programmation *MATLAB<sup>MT</sup>*, utilisé lors du développement de l'application vue dans le Chapitre 6, a été utilisé pour le développement de cette application. L'application a été testée sur quatre modèles de diagrammes d'influences possibilistes qualitatifs :

- **Type 1** : ce sont des diagrammes d'influence simples contenant un seul nœud utilité et un seul nœud de décision.
- **Type 2** : ce modèle représente des diagrammes d'influence contenant un seul nœud utilité mais plusieurs nœuds de décisions.
- **Type 3** : ce sont des diagrammes d'influence d'une complexité moyenne, qui contiennent plusieurs nœuds utilités et plusieurs nœuds de décisions.
- **Type 4** : ce modèle représente des diagrammes d'influence plus complexe que ceux du troisième type. Leur structure est aléatoire.

Pour chaque DIP de ces quatre modèles, un ensemble d'échantillons a été généré en variant le nombre de nœuds tout en respectant la définition de chacun de ces DIP. Par la suite, l'application procède, pour chaque échantillon généré, à :

- décomposer le DIP en deux réseaux possibilistes qualitatifs en exploitant l'algorithme naïf (Algorithme 7.2) afin de calculer les stratégies optimales optimistes en se basant sur la fusion des deux réseaux obtenus (voir Section 7.3),
- décomposer le DIP en deux réseaux possibilistes qualitatifs en exploitant l'Algorithme 7.3 afin de calculer les stratégies optimales optimistes en se basant sur la fusion de ces deux réseaux (voir Section 7.3).

Les résultats obtenus, à l'issue de l'application de ces deux alternatives, pour le calcul des stratégies optimales optimistes, sont récapitulés dans l'histogramme de la Figure 7.15.

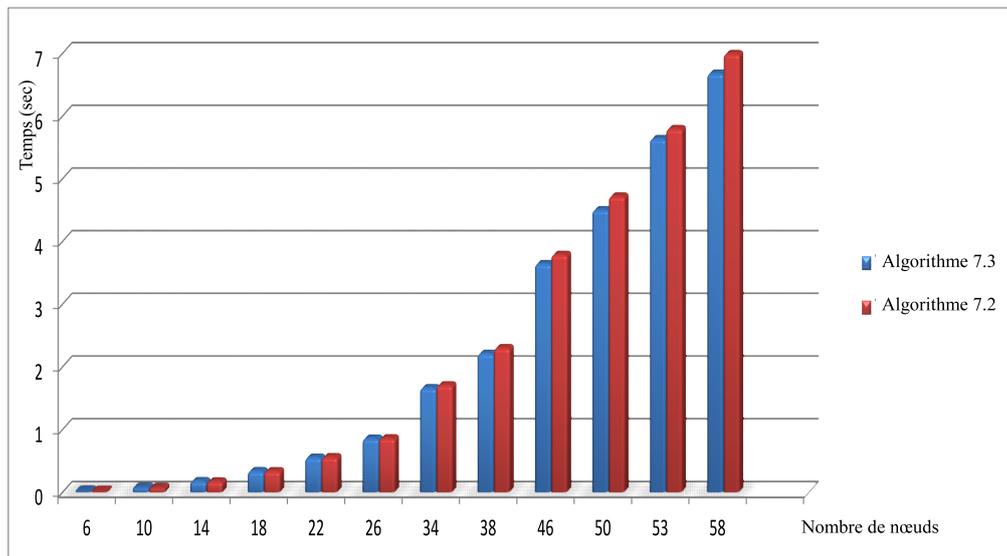


FIGURE 7.15 – Comparaison des temps de réponse de calcul des stratégies optimales optimistes en utilisant les Algorithmes 7.2 et 7.3 pour la décomposition du DIP initial.

L'histogramme de la Figure 7.15 indique que le calcul des stratégies optimales optimistes, en se basant sur la structure initial du DIP (sans réduire les nœuds utilités : Algorithme

7.3), se réalise en un temps plus optimal que lorsque l'Algorithme 7.2 est utilisé. En effet, la réduction des nœuds utilités offre une représentation non compacte des croyances. Elle ne fait qu'augmenter la complexité du graphe.

## 7.5 Conclusion

Il a été montré dans ce chapitre qu'un problème de la décision séquentielle, codé par un diagramme d'influence, peut être interprété dans notre modèle de décision basé sur les réseaux possibilistes (MGDRP). En effet, nous avons proposé de décomposer, d'une manière équivalente, le diagramme d'influence possibiliste (DIP) en deux réseaux possibilistes qualitatifs : le premier exprime les connaissances de l'agent en codant la distribution de possibilités générée par le DIP et le second représente les préférences de l'agent en codant l'utilité qualitative du DIP. Cet algorithme polynomial permet une représentation simple tout à fait en accord avec la définition sémantique d'un problème de la décision qualitative. En fait, par ce processus de décomposition, l'agent pourra exprimer ses connaissances et ses préférences séparément d'une façon unifiée en utilisant seulement un seul type de nœud.

Par la suite, deux algorithmes de complexité polynomiale ont été proposés. Le premier opère sur un seul nœud utilité pour générer le réseau possibiliste, représentant les préférences de l'agent, associé au diagramme d'influence. Le deuxième algorithme code plusieurs nœuds utilités avec un nombre réduit des variables parents des nœuds utilités. Il offre une représentation plus compacte du réseau possibiliste représentant les préférences de l'agent.

Ce processus de décomposition nous a permis de confirmer que notre modèle de décision graphique basé sur les réseaux possibilistes, proposé dans le cadre des problèmes de la décision à un seul niveau, peut prendre en compte et coder des problèmes de la décision séquentielle. Enfin, pour résoudre les problèmes de la décision séquentielle, codés dans notre modèle, notre algorithme proposé dans le cadre des problèmes de la décision à un seul niveau a été généralisé. En effet, à chaque étape de traitement d'une décision, l'algorithme prendra en compte les décisions déjà instanciées.

Le chapitre suivant introduira le concept de négation d'un réseau possibiliste nécessaire pour le calcul des décisions optimales pessimistes dans le cadre de notre approche basée sur les réseaux possibilistes.

## Chapitre 8

# La négation d'un réseau possibiliste

### 8.1 Introduction

Les modèles graphiques [104] offrent des outils efficaces pour la prise en compte des connaissances incertaines. Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux réseaux possibilistes [142, 110] qui constituent des méthodes de représentation et d'analyse importantes en présence d'informations incertaines. Ils permettent de représenter les connaissances d'une façon compacte en les codifiant par une distribution de possibilités jointe.

Ce chapitre définit un nouveau concept : la négation d'un réseau possibiliste basé sur le minimum (min), qui permettra la codification de l'inverse de la distribution de possibilités jointe. En effet, la négation de la distribution de possibilités s'avère nécessaire pour certaines applications. Cette situation peut être rencontrée dans les problèmes de décision sous incertitude où la fonction d'utilité pessimiste est exprimée par la négation de la distribution de possibilités [19]. Par conséquent, il est important de définir le réseau possibiliste qui codifie la négation d'une certaine distribution de possibilités. L'idéal est de construire un réseau possibiliste basé sur le min qui codifie la négation de cette dernière.

La construction d'un tel réseau s'avère difficile. Pour cela, l'idée évoquée dans ce chapitre consiste à garder la même représentation graphique que le modèle original. Par la suite, nous traitons le processus d'inférence qui permet de calculer le degré de possibilités pour chaque événement. Un algorithme, basé sur la construction de l'arbre de jonction associé à la structure initiale, sera proposé.

La contribution proposée dans ce chapitre, peut servir à une éventuelle proposition pour calculer les décisions pessimistes optimales lorsque le problème de décision est codé dans le modèle (MGDRP) proposée dans [20] et basé sur les réseaux possibilistes qualitatifs.

Le travail de ce chapitre est publié dans [25, 26].

### 8.2 Représentation de la négation d'un réseau possibiliste qualitatif

Dans cette section, nous détaillons la façon de représenter la négation de la distribution de possibilités [25, 26].

Afin d'aborder ce chapitre, il est nécessaire de rappeler certaines notions de base d'un réseau possibiliste qualitatif. Un réseau possibiliste basé sur le min  $\Pi G_{min} = (G, \pi)$  est défini sur un ensemble de variables  $\mathcal{V} = \{X_1, \dots, X_n\}$  est caractérisé par une composante graphique  $G$  (DAG) et un ensemble de distributions de possibilités conditionnelles  $\pi(X_i | U_i), \forall X_i \in \mathcal{V}$ . Il

codifie une distribution de possibilités jointe unique  $\pi_{min}$  décrite par :

$$\pi_{min}(X_1, \dots, X_n) = \min_{i=1..n} \pi(X_i | U_i). \quad (8.1)$$

L'*inférence possibiliste* est l'un des traitements les plus pratiqués sur les réseaux possibilistes. Ceci revient à évaluer l'impact de la réalisation d'un certain événement sur le reste des variables. Les algorithmes de propagation possibiliste [138] assurent ce processus d'inférence en calculant les distributions de possibilités a posteriori pour chaque variable  $X_i \in \mathcal{V}$ . Ils sont principalement une adaptation directe des méthodes probabilistes exactes avec le même degré de complexité [106, 143]. L'un des algorithmes connu est celui basé sur la structure de l'arbre de jonction. Son principe est de transformer le graphe initial en une nouvelle structure nommée *arbre de jonction* sur laquelle l'algorithme de propagation est efficacement appliqué [138].

Pour plus de détails sur les réseaux possibilistes qualitatifs, voir Chapitre 4, Section 4.2.

Dans plusieurs situations, l'utilisation de la négation de la distribution de possibilités jointe semble nécessaire. En d'autres termes, nous serons emmenés à travailler avec  $1 - \pi_{min}$  au lieu  $\pi_{min}$  donnée initialement.

Notre idée consiste à définir un nouveau réseau possibiliste  $\Pi G_{neg} = (G', \pi_N)$  induisant une distribution de possibilités jointe  $\pi_{neg} = 1 - \pi_{min}$  qui correspond à la négation du premier réseau  $\Pi G_{min}$ . Une fois la négation du réseau initial est établie, nous montrerons, dans la section suivante, comment effectuer des requêtes sur le nouveau réseau  $\Pi G_{neg}$ .

**Exemple 8.1 :**

Considérons le réseau possibiliste basé sur le min  $\Pi G_{min} = (G, \pi)$ , composé du DAG de la Figure 8.1 et des distributions de possibilités initiales associées aux variables  $X_1, X_2, X_3, X_4$  et  $X_5$ , données dans les Tables 8.1, 8.2, 8.3 et 8.4. Supposons que les variables sont binaires.

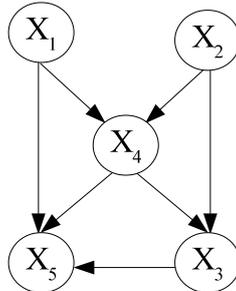


FIGURE 8.1 – Exemple d'un DAG.

$X_1$	$\pi(X_1)$	$X_2$	$\pi(X_2)$
$x_1$	.5	$x_2$	.8
$\neg x_1$	1	$\neg x_2$	1

TABLE 8.1 – Distributions de possibilités initiales.

$X_4$	$X_1$	$X_2$	$\pi(X_4   X_1 X_2)$
$x_4$	$x_1$	$x_2$	1
$x_4$	$x_1$	$\neg x_2$	.6
$x_4$	$\neg x_1$	$x_2$	.7
$x_4$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	.4
$\neg x_4$	$x_1$	$x_2$	.3
$\neg x_4$	$x_1$	$\neg x_2$	1
$\neg x_4$	$\neg x_1$	$x_2$	1
$\neg x_4$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	1

TABLE 8.2 – Distributions de possibilités initiales.

$X_3$	$X_2$	$X_4$	$\pi(X_3   X_2 X_4)$
$x_3$	$x_2$	$x_4$	.1
$x_3$	$x_2$	$\neg x_4$	.4
$x_3$	$\neg x_2$	$x_4$	1
$x_3$	$\neg x_2$	$\neg x_4$	.7
$\neg x_3$	$x_2$	$x_4$	1
$\neg x_3$	$x_2$	$\neg x_4$	1
$\neg x_3$	$\neg x_2$	$x_4$	.3
$\neg x_3$	$\neg x_2$	$\neg x_4$	1

TABLE 8.3 – Distributions de possibilités initiales.

$X_5$	$X_1$	$X_4$	$X_3$	$\pi(X_5   X_1 X_4 X_3)$
$x_5$	$x_1$	$x_4$	$x_3$	.5
$x_5$	$x_1$	$x_4$	$\neg x_3$	.6
$x_5$	$x_1$	$\neg x_4$	$x_3$	1
$x_5$	$x_1$	$\neg x_4$	$\neg x_3$	1
$x_5$	$\neg x_1$	$x_4$	$x_3$	1
$x_5$	$\neg x_1$	$x_4$	$\neg x_3$	.1
$x_5$	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$x_3$	1
$x_5$	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$\neg x_3$	1
$\neg x_5$	$x_1$	$x_4$	$x_3$	1
$\neg x_5$	$x_1$	$x_4$	$\neg x_3$	1
$\neg x_5$	$x_1$	$\neg x_4$	$x_3$	.3
$\neg x_5$	$x_1$	$\neg x_4$	$\neg x_3$	.4
$\neg x_5$	$\neg x_1$	$x_4$	$x_3$	.9
$\neg x_5$	$\neg x_1$	$x_4$	$\neg x_3$	1
$\neg x_5$	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$x_3$	.2
$\neg x_5$	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$\neg x_3$	.7

TABLE 8.4 – Distributions de possibilités initiales.

*En utilisant la règle de chaînage basée sur le min (Équation 8.1), nous obtenons la distribution de possibilités jointe donnée dans la Table 8.5.*

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$\pi_{min}$
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	.1
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	.1
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	.3
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	.3
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$x_5$	.5
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	.5
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	.3
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	.3
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	.5
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	.5
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	.5
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	.3
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$x_5$	.3
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	.3
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	.5
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	.4
$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	.1
$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	.1
$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	.4
$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	.2
$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$x_5$	.1
$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	.7
$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	.8
$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	.7
$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	.4
$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	.4
$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	.7
$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	.2
$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$x_5$	.1
$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	.3
$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	1
$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	.7

 TABLE 8.5 – Distribution de possibilités jointe  $\pi_{min}$ .

La négation d'un réseau possibiliste basé sur le min  $\Pi G_{min} = (G, \pi)$  est le réseau possibiliste  $\Pi G_{neg} = (G', \pi_N)$  défini comme suit :

**Définition 8.1 :**

Soit  $\Pi G_{min} = (G, \pi)$  un réseau possibiliste basé sur le min. Nous définissons la négation de ce réseau, notée  $\Pi G_{neg} = (G', \pi_N)$ , comme suit :

1. Le nouveau réseau  $\Pi G_{neg}$  préserve la même composante graphique, c'est-à-dire  $G' = G$ ,
2. La négation des distributions de possibilités relative à chaque nœud  $X \in \mathcal{V}$  est donnée par :
  - Pour chaque nœud racine  $\forall x \in \mathbb{D}_X$ ,  $\pi_N(x) = 1 - \pi(x)$ .
  - Pour le reste des nœuds  $\forall x \in \mathbb{D}_X$  et  $\forall u_X \in \mathbb{D}_{Par(X)}$ ,  $\pi_N(x | u_X) = 1 - \pi(x | u_X)$ .

L'ensemble des distributions a priori et conditionnelles induisent une distribution de possibilités jointe unique  $\pi_{neg}$  définie par la règle de chaînage basée sur le maximum (max).

**Définition 8.2 :**

Étant donnée la négation d'un réseau possibiliste basé sur le min  $\Pi G_{neg} = (G, \pi_N)$ , sa distribution de possibilités jointe associée, notée  $\pi_{neg}$ , est définie en utilisant la règle de chaînage basée sur le max comme suit :

$$\pi_{neg}(X_1, \dots, X_n) = \max_{i=1..n} \pi_N(X_i | U_i). \quad (8.2)$$

La proposition suivante indique que la négation d'un réseau possibiliste basé sur le min code bien la distribution de possibilités  $\pi_{neg} = 1 - \pi_{min}$ .

**Proposition 8.1 :**

Soit  $\Pi G_{min} = (G, \pi)$  un réseau possibiliste basé sur le min. Soit  $\Pi G_{neg}$  le réseau possibiliste associé à la négation de  $\Pi G_{min}$  en utilisant les définitions précédentes (Définitions 8.1 et 8.2). Alors, nous avons :

$$\pi_{neg}(X_1, \dots, X_n) = 1 - \pi_{min}(X_1, \dots, X_n). \quad (8.3)$$

*Preuve.* La preuve est immédiate. Par définition, nous avons :

$$\begin{aligned} \pi_{neg}(X_1, \dots, X_n) &= \max_{i=1..n} \pi_N(X_i | U_i) \\ &= \max_{i=1..n} [1 - \pi(X_i | U_i)] \\ &= 1 - \min_{i=1..n} \pi(X_i | U_i) \\ &= 1 - \pi_{min}(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

□

**Exemple 8.2 :**

Dans cet exemple, le réseau possibiliste  $\Pi G_{neg} = (G, \pi_N)$  qui définit la négation de  $\Pi G_{min}$  (voir Exemple 8.1) sera généré en appliquant la Définition 8.1. Sa composante graphique est la même donnée par le DAG de la Figure 8.1 et sa composante numérique est la négation des distributions de possibilités données dans les Tables 8.6, 8.7, 8.8 et 8.9.

$X_1$	$\pi_N(\mathbf{X}_1)$	$X_2$	$\pi_N(\mathbf{X}_2)$
$x_1$	<b>.5</b>	$x_2$	<b>.2</b>
$\neg x_1$	<b>0</b>	$\neg x_2$	<b>0</b>

TABLE 8.6 – Négation des distributions de possibilités initiales de  $\Pi G_{min}$  de l'Exemple 8.1.

$X_4$	$X_1$	$X_2$	$\pi_N(X_4   X_1 X_2)$
$x_4$	$x_1$	$x_2$	<b>0</b>
$x_4$	$x_1$	$\neg x_2$	<b>.4</b>
$x_4$	$\neg x_1$	$x_2$	<b>.3</b>
$x_4$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	<b>.6</b>
$\neg x_4$	$x_1$	$x_2$	<b>.7</b>
$\neg x_4$	$x_1$	$\neg x_2$	<b>0</b>
$\neg x_4$	$\neg x_1$	$x_2$	<b>0</b>
$\neg x_4$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	<b>0</b>

TABLE 8.7 – Négation des distributions de possibilités initiales de  $\Pi G_{min}$  de l'Exemple 8.1.

$X_3$	$X_2$	$X_4$	$\pi_N(X_3   X_2 X_4)$
$x_3$	$x_2$	$x_4$	<b>.9</b>
$x_3$	$x_2$	$\neg x_4$	<b>.6</b>
$x_3$	$\neg x_2$	$x_4$	<b>0</b>
$x_3$	$\neg x_2$	$\neg x_4$	<b>.3</b>
$\neg x_3$	$x_2$	$x_4$	<b>0</b>
$\neg x_3$	$x_2$	$\neg x_4$	<b>0</b>
$\neg x_3$	$\neg x_2$	$x_4$	<b>.7</b>
$\neg x_3$	$\neg x_2$	$\neg x_4$	<b>0</b>

TABLE 8.8 – Négation des distributions de possibilités initiales de  $\Pi G_{min}$  de l'Exemple 8.1.

$X_5$	$X_1$	$X_4$	$X_3$	$\pi_N(X_5   X_1 X_4 X_3)$
$x_5$	$x_1$	$x_4$	$x_3$	<b>.5</b>
$x_5$	$x_1$	$x_4$	$\neg x_3$	<b>.4</b>
$x_5$	$x_1$	$\neg x_4$	$x_3$	<b>0</b>
$x_5$	$x_1$	$\neg x_4$	$\neg x_3$	<b>0</b>
$x_5$	$\neg x_1$	$x_4$	$x_3$	<b>0</b>
$x_5$	$\neg x_1$	$x_4$	$\neg x_3$	<b>.9</b>
$x_5$	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$x_3$	<b>0</b>
$x_5$	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$\neg x_3$	<b>0</b>
$\neg x_5$	$x_1$	$x_4$	$x_3$	<b>0</b>
$\neg x_5$	$x_1$	$x_4$	$\neg x_3$	<b>0</b>
$\neg x_5$	$x_1$	$\neg x_4$	$x_3$	<b>.7</b>
$\neg x_5$	$x_1$	$\neg x_4$	$\neg x_3$	<b>.6</b>
$\neg x_5$	$\neg x_1$	$x_4$	$x_3$	<b>.1</b>
$\neg x_5$	$\neg x_1$	$x_4$	$\neg x_3$	<b>0</b>
$\neg x_5$	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$x_3$	<b>.8</b>
$\neg x_5$	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$\neg x_3$	<b>.3</b>

TABLE 8.9 – Négation des distributions de possibilités initiales de  $\Pi G_{min}$  de l'Exemple 8.1.

*La distribution de possibilités jointe associée à  $\Pi G_{neg}$ , obtenue en utilisant la règle de chaîne basée sur le max (Équation 8.2), est donnée dans la Table 8.10.*

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$\pi_{neg}$
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	<b>.9</b>
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	<b>.9</b>
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	<b>.7</b>
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	<b>.7</b>
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$x_5$	<b>.5</b>
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	<b>.5</b>
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	<b>.7</b>
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	<b>.7</b>
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	<b>.5</b>
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	<b>.5</b>
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	<b>.5</b>
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	<b>.7</b>
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	<b>.7</b>
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$x_5$	<b>.7</b>
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	<b>.7</b>
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	<b>.5</b>
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	<b>.6</b>
$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	<b>.9</b>
$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	<b>.9</b>
$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	<b>.6</b>
$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	<b>.8</b>
$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$x_5$	<b>.9</b>
$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	<b>.3</b>
$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	<b>.2</b>
$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	<b>.3</b>
$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	<b>.6</b>
$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	<b>.6</b>
$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	<b>.3</b>
$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	<b>.8</b>
$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$x_5$	<b>.9</b>
$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	<b>.7</b>
$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	<b>0</b>
$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	<b>.3</b>

 TABLE 8.10 – Négation de la distribution de possibilités jointe  $\pi_{min}$ .

Il est facile de vérifier par exemple que :

$$\pi_{neg}(\neg x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 1 - \pi_{min}(\neg x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
 \pi_{neg}(\neg x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \max(\pi_N(\neg x_1), \pi_N(\neg x_2), \pi_N(x_4 \mid x_1 x_2), \pi_N(x_3 \mid x_4 x_2), \pi_N(x_5 \mid \neg x_1 x_4 x_3)) \\
 &= \max(0, .2, 0, .9, 0) \\
 &= 1 - \pi_{min}(\neg x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\
 &= 1 - .1 \\
 &= .9.
 \end{aligned}$$

### 8.3 L'inférence dans la négation d'un réseau possibiliste qualitatif

La négation d'un réseau possibiliste basé sur le min telle qu'elle a été définie précédemment sera utilisée pour le calcul des distributions marginales pour chaque variable. Plus précisément, nous proposons un algorithme de propagation [25] similaire à celui proposé dans [138] basé sur la structure de l'arbre de jonction, pour la négation d'un réseau possibiliste.

Le principe de notre algorithme est de transformer le graphe initial en une structure secondaire nommée arbre de jonction notée  $\mathcal{JT}$  [104, 102] qui sera utilisée durant le processus de propagation.

Contrairement aux algorithmes de propagation standards dans les réseaux possibilistes, le processus de propagation dans la négation d'un réseau possibiliste basé sur le min est réduit en deux étapes (au lieu des trois définies dans le processus de propagation dans les réseaux possibilistes [138], voir Chapitre 4, Section 4.2.2).

La première étape consiste à l'*initialisation* de l'arbre de jonction permettant ainsi sa quantification à l'aide des distributions initiales. La seconde étape concerne la *réponse aux requêtes* pour fournir la distribution marginale pour chaque variable.

#### 8.3.1 Construction de l'arbre de jonction :

La première étape de l'algorithme de propagation dans la négation d'un réseau possibiliste qualitatif consiste à construire l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  à partir du DAG initial  $G$ . Le but de cette étape est d'éliminer les boucles existantes dans  $G$ . Ce processus s'effectue en trois étapes (voir Chapitre 4, Section 4.2.2.1) :

- Moralisation du graphe initial  $G_{\oplus}$ .
- Triangulation du graphe moral.
- Génération de l'arbre de jonction optimal  $\mathcal{JT}$ .

Cette étape de construction de l'arbre de jonction est identique à celle dans le cas des réseaux possibilistes standards ou les réseaux probabiliste. Cependant, l'étape d'initialisation diffère.

#### Exemple 8.3 :

La Figure 8.2 donne l'arbre de jonction associé au DAG de la Figure 8.1 de l'Exemple 8.2, contenant les deux cliques  $C_1 = \{X_3, X_1, X_4, X_2\}$  et  $C_2 = \{X_5, X_1, X_4, X_3\}$  ainsi que leur séparateur  $S_{12} = \{X_4, X_3, X_1\}$ .

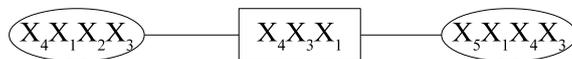


FIGURE 8.2 – Arbre de jonction associé au DAG de la Figure 8.1.

#### 8.3.2 Processus de propagation :

Contrairement au processus de propagation standard [138] (pour les réseaux possibilistes qualitatifs), le processus de propagation que nous proposons dans la négation d'un réseau possibiliste basé sur le min s'effectue en deux étapes au lieu des trois étapes (voir Chapitre 4, Section 4.2.2).

La première étape concerne la quantification de l'arbre de jonction à l'aide des distributions initiales. La seconde étape consiste à fournir la distribution marginale pour chaque variable.

### 8.3.2.1 Initialisation :

Une fois l'arbre de jonction est construit, nous procédons à la quantification de cette nouvelle structure en transformant les distributions de possibilités conditionnelles initiales en des distributions jointes locales rattachées aux clusters et aux séparateurs.

Pour chaque cluster  $C_i$  (resp. séparateur  $S_{ij}$ ), nous affectons un potentiel  $\pi_{C_i}$  (resp.  $\pi_{S_{ij}}$ ). Cette étape de quantification associe à l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  une unique distribution de possibilités jointe, notée  $\pi_{\mathcal{JT}}$  définie par :

#### Définition 8.3 :

Soit  $\mathcal{JT}$  l'arbre de jonction associé au graphe  $G$ , alors :

$$\pi_{\mathcal{JT}}(X_1, \dots, X_n) = \max_{i=1..m} \pi_{C_i}, \quad (8.4)$$

où  $m$  est le nombre de clusters dans  $\mathcal{JT}$ .

Cette phase permet la quantification de l'arbre de jonction  $\mathcal{JT}$  en utilisant la négation des distributions de possibilités initiales comme suit :

- Pour chaque cluster  $C_i$ ,  $\pi_{C_i} \leftarrow 0$ .
- Pour chaque séparateur  $S_{ij}$ ,  $\pi_{S_{ij}} \leftarrow 0$ .
- Pour chaque variable  $X_i$ , choisir un cluster  $C_i$  contenant  $\{X_i\} \cup \{Par(X_i)\}$  :  $\pi_{C_i} = \max(\pi_{C_i}, \pi_N(X_i | U_{X_i}))$ .

#### Exemple 8.4 :

L'arbre de jonction de la Figure 8.2 de l'Exemple 8.3, associé à la négation du réseau possibiliste définie dans l'Exemple 8.2 sera quantifié dans cet exemple en appliquant la procédure d'initialisation.

- Affecter des potentiels à chaque cluster. Ainsi à partir de la procédure d'initialisation, le potentiel associé à  $C_1$  est défini comme suit :

$$\pi_{C_1} = \max(0, \pi_N(X_1), \pi_N(X_2), \pi_N(X_4 | X_1X_2), \pi_N(X_3 | X_1X_2)).$$

De la même manière, le potentiel associé à  $C_2$  est défini par :

$$\pi_{C_2} = \max(0, \pi_N(X_5 | X_1X_4X_3)).$$

Les résultats sont reportés dans la Table 8.11.

$X_4$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$\pi_{C_1}$	$X_5$	$X_1$	$X_4$	$X_3$	$\pi_{C_2}$
$x_4$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	.9	$x_5$	$x_1$	$x_4$	$x_3$	.5
$x_4$	$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	.5	$x_5$	$x_1$	$x_4$	$\neg x_3$	.4
$x_4$	$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	.5	$x_5$	$x_1$	$\neg x_4$	$x_3$	0
$x_4$	$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	.7	$x_5$	$x_1$	$\neg x_4$	$\neg x_3$	0
$x_4$	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	.9	$x_5$	$\neg x_1$	$x_4$	$x_3$	0
$x_4$	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	.3	$x_5$	$\neg x_1$	$x_4$	$\neg x_3$	.9
$x_4$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	.6	$x_5$	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$x_3$	0
$x_4$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	.7	$x_5$	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$\neg x_3$	0
$\neg x_4$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	.7	$\neg x_5$	$x_1$	$x_4$	$x_3$	0
$\neg x_4$	$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	.7	$\neg x_5$	$x_1$	$x_4$	$\neg x_3$	0
$\neg x_4$	$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	.5	$\neg x_5$	$x_1$	$\neg x_4$	$x_3$	.7
$\neg x_4$	$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	.5	$\neg x_5$	$x_1$	$\neg x_4$	$\neg x_3$	.6
$\neg x_4$	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	.6	$\neg x_5$	$\neg x_1$	$x_4$	$x_3$	.1
$\neg x_4$	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	.2	$\neg x_5$	$\neg x_1$	$x_4$	$\neg x_3$	0
$\neg x_4$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	.3	$\neg x_5$	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$x_3$	.8
$\neg x_4$	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	0	$\neg x_5$	$\neg x_1$	$\neg x_4$	$\neg x_3$	.3

TABLE 8.11 – Potentiels affectés aux clusters.

- Calculer la distribution de possibilités induite par l'arbre de jonction en utilisant l'Équation 8.4. Les résultats sont donnés par la Table 8.12.

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$\pi_{\mathcal{JT}}$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$\pi_{\mathcal{JT}}$
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	.9	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	.9
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	.9	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	.9
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	.7	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	.6
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	.7	$\neg x_1$	$x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	.8
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$x_5$	.5	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$x_5$	.9
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	.5	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	.3
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	.7	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	.2
$x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	.7	$\neg x_1$	$x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	.3
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	.5	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	.6
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	.5	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	.6
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	.5	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	.3
$x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	.7	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	.8
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$x_5$	.7	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$x_5$	.9
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	.7	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_4$	$\neg x_5$	.7
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	.5	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$x_5$	0
$x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	.6	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$\neg x_4$	$\neg x_5$	.3

 TABLE 8.12 – Distribution de possibilités jointe associée à  $\mathcal{JT}$ .

La proposition suivante montre que l'arbre de jonction initialisé, codifie la même distribution que le réseau initial qui correspond à la négation du réseau possibiliste basé sur le min.

**Proposition 8.2 :**

Soit  $\Pi G_{neg} = (G, \pi_N)$  la négation du réseau possibiliste basé sur le min  $\Pi G_{min}$ . Soit  $\mathcal{JT}$  l'arbre de jonction correspondant à  $\Pi G_{neg}$  généré en utilisant la procédure d'initialisation ci-dessus. Soient  $\pi_{neg}$  la distribution jointe codée par  $\Pi G_{neg}$  en utilisant l'Équation 8.2 et

$\pi_{\mathcal{JT}}$  la distribution jointe codée par  $\mathcal{JT}$  en utilisant 8.4. Alors,

$$\pi_{neg}(X_1, \dots, X_n) = \pi_{\mathcal{JT}}(X_1, \dots, X_n). \quad (8.5)$$

*Preuve.* Le but est de montrer que  $\pi_{neg} = \max_{i=1..m} \pi_{C_i}$ . De la procédure d'initialisation, nous avons :

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{JT}}(X_1, \dots, X_n) &= \max_{i=1..m} (\max(\pi_N(X_i | U_i), 0)) \\ &= \max_{i=1..n} \pi_N(X_i | U_i) \\ &= \pi_{neg}(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

□

### 8.3.2.2 Réponse aux requêtes :

Le calcul de la distribution de possibilités marginale relative à chaque variable  $X_i \in \mathcal{V}$  peut se faire en utilisant le potentiel de chaque cluster et en choisissant le maximum comme suit :

#### Proposition 8.3 :

Soit  $\Pi G_{neg} = (G, \pi_N)$  la négation du réseau possibiliste basé sur le min  $\Pi G_{min}$ . Soit  $\mathcal{JT}$  l'arbre de jonction correspondant à  $\Pi G_{neg}$  généré en utilisant la procédure d'initialisation ci-dessus. La distribution de possibilités  $\pi_N(X_i)$  relative pour chaque variable  $X_i \in \mathcal{V}$  est donnée par :

$$\forall X_i \in \mathcal{V}, \pi_N(X_i = x_i) = \max_{i=1..m} \max_{X_i=x_i} \pi_{C_i}. \quad (8.6)$$

*Preuve.* Le but est de prouver que la distribution de possibilités marginale relative à chaque variable revient à marginaliser le potentiel de chaque cluster et en choisissant le maximum.

$$\begin{aligned} \pi_N(X_i = x_i) &= \pi_{\mathcal{JT}}(X_i = x_i) \\ &= \max_{\mathcal{V} \setminus X_i} \pi_{\mathcal{JT}}(X_1, \dots, x_i, \dots, X_n) \end{aligned}$$

En utilisant l'Équation 8.4,

$$\begin{aligned} &= \max_{\mathcal{V} \setminus X_i} [\max_{i=1..m} \pi_{C_i}] \\ &= \max_{i=1..m} [\max_{\mathcal{V} \setminus X_i} \pi_{C_i}] \\ &= \max_{i=1..m} [\max_{X_i=x_i} \pi_{C_i}] \end{aligned}$$

□

#### Exemple 8.5 :

En utilisant l'arbre de jonction quantifié dans l'Exemple 8.4, nous souhaitons calculer la distribution de possibilités marginale  $\pi_N(\neg x_4)$ .

En utilisant l'Équation 8.6, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \pi_N(\neg x_4) &= \max(\max_{X_1 X_2 X_3} \pi_{C_1}, \max_{X_5 X_1 X_3} \pi_{C_2}) \\ &= \max(.7, .8) \\ &= .8. \end{aligned}$$

Le même résultat est obtenu en utilisant la négation du réseau possibiliste basé sur le min, c'est-à-dire :

$$\pi_N(\neg x_4) = \max_{X_1 X_2 X_3 X_5} \pi_N = .8.$$

## 8.4 Conclusion

Les réseaux possibilistes sont des outils importants pour modéliser le raisonnement sous incertitude. Cependant, certaines applications manipulent l'inverse de la distribution de possibilités. Ce chapitre porte sur la représentation compacte de la négation d'une certaine distribution de possibilités.

La contribution principale de ce chapitre concerne la définition de la négation d'un réseau possibiliste basé sur le min qui préserve la même composante graphique et induit une distribution jointe unique obtenue en utilisant la règle de chaînage basée sur le max. Le processus de propagation permet le calcul des distributions marginales en se basant sur la structure de l'arbre de jonction.

Cette proposition peut être utile pour le calcul des décisions optimales pessimistes. En effet, l'utilité pessimiste est exprimée par la négation de la distribution de possibilités représentant les connaissances de l'agent.

# Conclusion générale

La prise de décision est l'une des activités les plus couramment pratiquées dans la vie quotidienne. En pensant ou en discutant, nous cherchons souvent à prendre la bonne décision qui maximise certains intérêts et minimise d'autres. Cependant, nous manquons d'informations nécessaires pour cette prise de décision et on peut avoir des doutes sur certaines autres. Nos raisonnements, sont donc souvent basés sur des informations incertaines et/ou entachées d'incertitudes.

L'étude du processus décisionnel s'effectue en trois phases :

- Axiomatisation : l'étude des théories de la décision.
- Représentation : l'étude des langages de représentation des connaissances et des préférences.
- Résolution : l'étude des algorithmes de prises de décision.

Dans cette thèse, notre étude a porté sur le processus décisionnel (exclusif et séquentiel) qualitatif basé principalement sur la théorie des possibilités. La synthèse de l'état de l'art qui a été menée dans la Partie I, nous a permis d'une part, de comparer les solutions déjà existantes et d'autre part de procéder à la proposition d'autres solutions plus pratiques, moins coûteuses et plus proches des sémantiques initiales de la décision qualitative.

Notre objectif principale est de proposer un modèle de représentation compacte des problèmes de la décision qualitative en théorie des possibilités. Par conséquent, les critères de décision optimiste et pessimiste étaient à la base du processus décisionnel étudié dans cette thèse. Pour le langage de représentation, notre étude était projetée sur les deux plans : logique et graphique. Enfin, des algorithmes de résolution ont été proposés pour la prise des décisions optimales.

Par cette conclusion, en premier, un bilan de notre contribution sera dressé, puis des axes de recherches futurs seront proposés.

## Bilan

Les travaux réalisés durant cette thèse ont apportés diverses contributions autour de la décision qualitative, basée sur la théorie des possibilités, tant sur le plan de la représentation des connaissances que sur le plan de raisonnement (résolution).

La première contribution de cette thèse concerne les méthodes de résolution des problèmes de la décision qualitative (exclusive) basés sur la logique possibiliste. En effet, dans [91], l'approche logique permet d'exprimer les connaissances et les préférences de l'agent à l'aide de formules logiques valuées permettant ainsi d'induire la distribution de possibilités sur les états possibles du monde et la fonction d'utilité correspondantes. Plus précisément, le problème de la décision qualitative est codé moyennant deux bases logiques possibilistes : (1) la base de connaissances décrivant les connaissances de l'agent sur le monde et (2) une base de préférences décrivant les conséquences satisfaisant ses préférences. Dans ce cadre logique de représentation, un algorithme pour calculer les décisions optimales, basé sur les ATMS

(Assumption-based Truth Maintenance System), a été proposé dans [15]. La solution proposée ne permet pas de traiter des problèmes avec un nombre de variables important.

Une solution basée sur les contreparties syntaxiques de la fusion de données a été proposée dans cette thèse. En effet, les décisions optimistes ou pessimistes peuvent être vues comme un problème de fusion de deux distributions de possibilités particulières : une représentant les croyances de l'agent et l'autre l'utilité qualitative. Plus précisément, nous avons proposé deux algorithmes de calcul des décisions optimales dans le cas optimiste et pessimiste. Ces deux algorithmes préservent la même représentation logique du problème de la décision qualitative.

Dans le cas optimiste, le calcul de la décision optimale revient à calculer le degré d'incohérence de la fusion de la base de connaissances et la base de préférences (la décision optimale est la plus cohérente avec l'ensemble de connaissances et de préférences). Cependant, dans le cas pessimiste, l'algorithme développé nécessite une étape supplémentaire qui consiste à définir la base possibiliste logique qui code la négation de la distribution de possibilités associée à la base de préférences. Par conséquent, le calcul de la décision optimale pessimiste revient à calculer le degré d'incohérence de la fusion de la base de connaissance et la négation de la base de préférences.

Dans les deux cas optimiste et pessimiste, le problème de la décision qualitative a été redéfini comme un problème de calcul de degré d'incohérence des bases de connaissances. Intuitivement, cette solution alternative est plus naturelle et est moins contraignante par rapport au nombre de variables du problème de décision. En effet, l'étude expérimentale réalisée dans cette thèse a confirmé l'efficacité des algorithmes proposés (optimiste et pessimiste) par rapport au nombre de variables et clauses traitées.

La deuxième contribution intervient sur le plan de la représentation des problèmes de la décision qualitative. Notre but est de proposer un nouveau modèle graphique permettant une codification compacte du problème de la décision qualitative en se basant sur la définition sémantique donnée dans [15]. En effet, notre point de départ est la distribution de possibilités et l'utilité qualitative qui représentent respectivement l'incertitude sur les états possibles du monde et les préférences de l'agent. Nous avons proposé de coder ces deux distributions de possibilités (incertitude et utilité) par deux réseaux possibilistes qualitatifs : le premier exprime les connaissances de l'agent et le deuxième code ses préférences.

La troisième contribution intervient sur le plan de raisonnement de l'approche graphique proposée. Deux algorithmes ont été proposés pour calculer, d'une manière efficace et unifiée, les décisions optimales optimistes. Le premier algorithme est une adaptation du processus d'inférence basé sur l'arbre de jonction associé à la fusion des deux réseaux possibilistes représentant les connaissances et les préférences de l'agent respectivement. Il a été montré que le calcul des décisions optimales revient à calculer le degré de normalisation de cet arbre de jonction. Le problème de la décision qualitative peut être alors vu comme un problème de fusion de ces deux distributions de possibilités particulières (ou des deux réseaux possibilistes qualitatifs).

Dans le cas où la construction de l'arbre de jonction, associé aux connaissances et préférences de l'agent, est difficile voire impossible, la contrepartie logique de l'approche graphique a été proposée comme une deuxième alternative pour calculer les décisions optimales optimistes. Notre idée était d'abord de transformer les deux réseaux possibilistes initiales en deux bases logiques possibilistes équivalentes, ensuite de faire appel à notre algorithme proposé dans l'approche logique de la résolution du problème de la décision qualitative.

Les deux alternatives proposées pour le calcul des décisions optimales optimistes ont été

mises en oeuvre. Afin d'évaluer l'efficacité des deux alternatives, une étude expérimentale a été menée en comparant le temps de réponse des deux algorithmes par rapport au nombre de variables des réseaux possibilistes initiaux. Les résultats obtenus ont confirmé l'efficacité de l'approche graphique et le besoin de la contrepartie logique lorsque le nombre de variables devient important (construction de l'arbre de jonction difficile).

Dans la littérature, les contreparties possibilistes des modèles graphiques standards (probabilistes) ont été proposées tels que les arbres de décision possibilistes, les diagrammes d'influences possibilistes, etc. Notre nouvelle approche graphique de la décision qualitative offre plusieurs avantages par rapport aux approches existantes.

Le premier avantage est la séparation entre les connaissances et les préférences de l'agent, une caractéristique que les autres modèles graphiques ne la possèdent pas, y compris les diagrammes d'influence. Ceci présente un avantage puisque en pratique un problème de décision est exprimé par deux composantes distinctes : une distribution de possibilité et une fonction d'utilité. En outre, la séparation entre les connaissances et les préférences est totalement en accord avec la définition sémantique d'un problème de la décision qualitative. En effet, la définition sémantique d'un problème de décision possibiliste prend en entrée deux distributions de possibilités : une représentant les connaissances et l'autre les préférences [15]. Ainsi, nous avons fourni une représentation compacte pour ces deux distributions et un modèle graphique pour calculer les décisions possibilistes optimales. Selon la définition sémantique, le modèle proposé est basé sur l'utilisation de deux réseaux possibilistes qualitatifs : le premier représente les connaissances de l'agent et le second code ses préférences. Cette séparation rend le modèle plus intuitif et naturel étant donné qu'il reflète la sémantique d'un problème de décision possibiliste.

Le deuxième aspect important de notre approche est que la puissance d'expressivité des langages de représentation graphique a été enrichie, en intégrant des variables de décision, sans augmenter la complexité de calcul. Comme il a été déjà signalé dans ce document, notre processus de décision (qui incorpore des variables d'états et de décisions) a la même complexité que celui du processus de raisonnement standard (qui n'accepte que les variables d'états). Ceci est vrai pour les deux approches logique et graphique. Par exemple, dans la contrepartie logique de l'approche graphique, le coût supplémentaire dû à l'ajout des variables décision, correspond au coût de la transformation des réseaux possibilistes en bases logiques. Cette étape de transformation est réalisée en un temps linéaire par rapport au nombre de paramètres (degrés de possibilités) des réseaux possibilistes.

Le troisième avantage de notre approche graphique est qu'elle bénéficie de l'expressivité et de la simplicité de manipulation des modèles graphiques pour représenter les connaissances et les préférences de l'agent. Elle bénéficie ainsi des travaux intenses réalisés sur les algorithmes d'inférence développés pour les modèles graphiques comme par exemple les algorithmes basés sur la structure de l'arbre de jonction. Par conséquent, toute nouvelle heuristique pour une construction compacte de l'arbre de jonction ou tout nouveau compilateur pour les réseaux possibilistes peuvent être facilement réutilisés dans notre modèle intégrant des variables de décision.

Le quatrième avantage important est la manipulation d'un type unique de nœud pour représenter les variables d'états aussi bien que les variables de décisions. Ceci n'est pas le cas dans les autres modèles graphiques tel que les diagrammes d'influence, où trois types de nœuds sont distingués : nœuds d'états, de décisions et d'utilités. Par conséquent, notre modèle offre un format simple pour représenter aussi bien les connaissances que les préférences de l'agent.

La quatrième contribution de notre travail de thèse concerne les problèmes de la décision séquentielle. Nous avons montré qu'un problème de décisions qualitatives séquentielles, codé par un diagramme d'influence qualitatif, peut être représenté dans notre modèle basé sur les

réseaux possibilistes. Pour cela, nous avons proposé deux algorithmes polynomiaux permettant de décomposer d'une manière équivalente un diagramme d'influence en deux réseaux possibilistes qualitatifs, un représentant les connaissances de l'agent et le second exprimant ses préférences. La première alternative (naïve) opère sur le diagramme d'influence après avoir réduit ses nœuds utilités. Cependant, la deuxième alternative opère directement sur la structure initiale du diagramme d'influence ce qui offre une représentation plus compacte du problème de la décision qualitative.

Ce processus de décomposition nous a permis de confirmer l'extensibilité de notre modèle pour la prise en charge des problèmes de la décision séquentielle.

L'algorithme, proposé pour résoudre un problème de décisions exclusives basé sur les réseaux possibilistes, a été généralisé pour résoudre un problème de décisions séquentielles codé dans notre approche basé aussi sur les réseaux possibilistes. En effet, comme notre algorithme proposé dans le cas de problème de décisions à un seul niveau (exclusives) repose sur l'algorithme d'inférence dans les réseaux possibilistes qui est une forme de la programmation dynamique, alors le problème de décisions séquentielles peut être traité d'une manière locale tout en commençant par la dernière décision. Il suffit, à chaque étape de traitement d'une décision, de prendre en compte les décisions déjà instanciées.

Une méthode de résolution de diagramme d'influence a été proposée dans [12] et qui repose sur la transformation de ce dernier en un réseau possibiliste qualitatif en réduisant tous les nœuds utilités en un seul nœud. Cependant, notre processus de décomposition, qui opère directement sur le DIP initial (sans réduire les nœuds utilités) en construisant deux réseaux possibilistes dont leur fusion génère une structure plus compacte qui est utilisée par la suite dans l'algorithme de résolution.

Une étude expérimentale a été menée permettant ainsi de comparer le temps de réponse de calcul des stratégies optimales optimistes en utilisant les deux alternatives de décomposition d'un diagramme d'influence (l'algorithme de décomposition sans réduction des nœuds utilités et l'algorithme de décomposition avec réduction). Les résultats expérimentaux ont confirmé la performance de la procédure de décomposition d'un diagramme d'influence qui opère directement sur la structure initiale.

La cinquième contribution de cette thèse était la définition de la négation d'un réseau possibiliste. Ce nouveau concept nous a permis de coder l'inverse d'une distribution de possibilités par un réseau possibiliste qualitatif. Le réseau obtenu préserve la même structure que le réseau initial et génère une distribution de possibilités en utilisant une règle de chaînage basée sur le max. Par la suite, un algorithme de propagation basé sur la structure de l'arbre de jonction a été proposé permettant ainsi de calculer les distributions marginales de chaque variable. Le processus de propagation proposé se réduit en deux étapes (au lieu des trois définies dans le processus de propagation standard).

### Perspectives

Plusieurs axes de recherche pourraient être explorés. Une première piste consiste à exploiter notre approche graphique pour la prise en compte d'autres critères de décision tel que le critère pessimiste. Dans ce sens, le nouveau concept de la négation d'un réseau possibiliste peut être utilisé pour la résolution des problèmes de décision dans le cas pessimiste. En effet, l'utilité qualitative pessimiste est exprimée en fonction de l'inverse de la distribution de possibilités.

Afin d'évaluer l'efficacité de notre approche graphique basée sur l'algorithme de calcul des décisions optimales optimistes en utilisant la fusion des deux réseaux possibilistes, il serait

## CONCLUSION

---

intéressant de mener une étude expérimentale dans le but de comparer les résultats de ce dernier avec un autre modèle comme par exemple celui basé sur la transformation du diagramme d'influence en un réseau possibiliste pour calculer les décisions optimales optimistes.

Dans le contexte des problèmes de la décision quantitative, un axe de recherche peut être développé qui consiste à représenter ce genre de problèmes par deux réseaux possibilistes quantitatifs (basés sur le produit) et de faire appel à un critère de décision quantitatif tel que l'intégrale de Choquet afin de trouver les décisions optimales. Il est à noter que le critère de l'intégrale de Choquet ne vérifie pas la propriété de monotonie et du coup les algorithmes basés sur la programmation dynamique ne peuvent pas résoudre ce type de problèmes.

Une autre voie intéressante serait d'adapter notre modèle graphique de la décision basé sur les réseaux possibilistes qualitatifs pour la résolution des problèmes de décision possibilistes multicritères [33].

# Bibliographie

- [1] P. Brézillon. Context in artificial intelligence : I. A survey of the literature. *Computers and Artificial Intelligence*, 18(4), 1999.
- [2] D. Dubois, H. Fargier, and P. Perny. Qualitative decision theory with preference relations and comparative uncertainty : An axiomatic approach. *Artif. Intell.*, 148(1-2) :219–260, 2003.
- [3] A. Achs. Computed answer from uncertain knowledge : A model for handling uncertain information. *Computers and Artificial Intelligence*, 26(1) :63–76, 2007.
- [4] N. Ben Amor, H. Fargier, and W. Guezguez. Possibilistic sequential decision making. *Int. J. Approx. Reasoning*, 55(5) :1269–1300, 2014.
- [5] M. Allais. Le comportement de l’homme rationnel devant le risque. critique des postulats et axiomes de l’école américaine. *Econometrica*, 21 :503–546, 1953.
- [6] D. Ellsberg. Risk, ambiguity, and the savage axioms. *the quarterly journal of economics*, 75(4) :643–669, Novembre 1961.
- [7] G. Shafer. A mathematical theory of evidence. In *New Jersey : Princeton University Press*, 1976.
- [8] D. Bouyssou, D. Dubois, H. Prade, and M. Pirlot. *Decision Making Process : Concepts and Methods*. ISTE. Wiley, 2010.
- [9] D. Dubois and H. Prade. Possibility theory as a basis for qualitative decision theory. In *Proceedings of the 14th international joint conference on Artificial intelligence (IJ-CAI)*, volume 2, pages 1924–1930, San Francisco, CA, USA, 20-25 August 1995. Morgan Kaufmann Publishers Inc.
- [10] P.H. Giang and P.P. Shenoy. Two axiomatic approaches to decision making using possibility theory. *European Journal of Operational Research*, 162(2) :450–467, 2005.
- [11] L. Garcia and R. Sabbadin. Complexity results and algorithms for possibilistic influence diagrams. *Artif. Intell.*, 172(8-9) :1018–1044, 2008.
- [12] W. Guezguez. *Possibilistic Decision Theory : From Theoretical Foundations to Influence Diagrams Methodology*. Thèse de doctorat, Université Toulouse III-Paul Sabatier, France, Mai 2012.
- [13] W. Guezguez and N. Ben Amor. Possibilistic influence diagrams using information fusion. In *12th International conference, Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge Based Systems (IPMU)*, pages 345–352, Torremolinos (Malaga), 22-27 Juin 2008.
- [14] W. Guezguez, N. Ben Amor, and K. Mellouli. Qualitative possibilistic influence diagrams based on qualitative possibilistic utilities. *European Journal of Operational Research*, 195(1) :223–238, May 2009.

- [15] D. Dubois, D. Le Berre, H. Prade, and R. Sabbadin. Using possibilistic logic for modeling qualitative decision : Atms based algorithms. In *Fundamenta Informaticae*, 37 :1–30, 1999.
- [16] R. Sabbadin. Une approche logique de la résolution de problèmes de décision sous incertitude basée sur les atms. In *Actes du 11ème Congrès Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle (RFIA)*, pages 391–400, Paris, janvier 1998.
- [17] D. Le Berre. *Autour de SAT : le calcul d’impliquants P-restreints algorithmes et applications*. PhD thesis, université Paul Sabatier Toulouse, 2000.
- [18] S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. Possibilistic merging and distance-based fusion of propositional information. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 34 :217–252, 2002.
- [19] S. Benferhat, F. Haned-Khellaf, A. Mokhtari, and I. Zeddigha. Using syntactic possibilistic fusion for modeling optimal optimistic qualitative decision. In *Proceedings of the Joint International Fuzzy Systems Association World Congress and European Society of Fuzzy Logic and Technology Conference (IFSA/EUSFLAT)*, pages 1712–1716, july 2009.
- [20] I. Zeddigha, S. Benferhat, and F. Khellaf. A new graphical model for computing optimistic decisions in a possibility theory framework. *Computing and Informatics*, 2014.
- [21] S. Benferhat. Graphical and logical-based representations of uncertain information in a possibility theory framework. In *Scalable Uncertainty Management 4th International Conference (SUM)*, pages 3–6, Toulouse, France, 27-29 September 2010.
- [22] S. Benferhat, F. Khellaf, and I. Zeddigha. A possibilistic graphical model for handling decision problems under uncertainty. In *31st Annual Meeting of North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS)*, pages 1–6, Berkeley, CA, August 2012.
- [23] S. Benferhat, F. Khellaf, and I. Zeddigha. A possibilistic graphical model for handling decision problems under uncertainty. In *The 8th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT)*, pages 736–743, Milano, Italy, September 2013.
- [24] S. Benferhat and F. Titouna. Min-based fusion of possibilistic networks. In *Fourth Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT)*, pages 553–558, 2005.
- [25] S. Benferhat, F. Khellaf, and I. Zeddigha. La négation d’un réseau possibiliste basé sur le minimum. In *Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA)*, pages 131–138, Compiègne, France, 2012. Cépaduès-Éditions.
- [26] S. Benferhat, F. Khellaf, and I. Zeddigha. Negated min-based possibilistic networks. In *10th International Conference on Uncertainty Modeling in Knowledge Engineering and Decision Making (FLINS)*, Istamboul, Turquie, August 2012.
- [27] J. Pearl. *Probabilistic reasoning in intelligent systems : networks of plausible inference*. Morgan Kaufmann Publishers Inc, San Francisco, CA, USA, 1988.
- [28] L.J. Savage. *The Foundations of Statistics*. Wiley, 1954.
- [29] O. Gossner. *Théorie des jeux et théorie de la décision*. Université Paris-Jourdan, sciences économiques, 2003.
- [30] P. Garelo. Théorie de la décision : Bilan et perspective. Document de recherche N°2000-1 24, Centre de Recherche Economique. Université de Saint-Etienne, 2000.
- [31] D. Dubois, M. Grabisch, F. Modave, and H. Prade. Relating decision under uncertainty and multicriteria decision making models. *Int. J. Intell. Syst.*, 15(10) :967–979, 2000.

- [32] M. Grabisch and S. Dia. A multicriteria decision making framework in ordinal context based on sugeno integral. In *Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS Int. Conf*, 2(10) :986–991, Jul 2001.
- [33] N. Ben Amor, F. Essghaier, and H. Fargier. Solving multi-criteria decision problems under possibilistic uncertainty using optimistic and pessimistic utilities. In *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems - 15th International Conference (IPMU). Proceedings, Part III*, pages 269–279, Montpellier, France, 15-19 July 2014.
- [34] N. Berglund. Théorie des probabilités. Master’s thesis, Université du Sud Toulon\_Var, Novembre 2006.
- [35] P. Naim, P.H. Wuillemin, P. Leray, O. Pourret, and A. Becker. *Réseaux Bayésiens*. Eyrolles, Paris, Mai 2004.
- [36] J. Ma, W. Liu, D. Dubois, and H. Prade. Revision rules in the theory of evidence. In *22nd IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence (ICTAI)*, volume 1, pages 295–302, Arras, France, 27-29 October 2010.
- [37] G. Choquet. Theory of capacities. *Annales de l’institut Fourier*, 5 :131–295, 1954.
- [38] T. Murofushi and M. Sugeno. Choquet integral models and independence concepts in multiattribute utility theory. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 8(4) :385–416, 2000.
- [39] M. Sugeno. *Theory of fuzzy integrals and its applications*. PhD thesis, Institute of technology, Tokyo, 1974.
- [40] M. Sugeno. Ordinal preference models based on s-integrals and their verification. 1 :1–18, 7-9 September 2011.
- [41] D. Dubois, H. Prade, and A. Rico. The logical encoding of sugeno integrals. *Fuzzy Sets and Systems*, 241 :61–75, 2014.
- [42] L. Anzilli. A possibilistic approach to investment decision making. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 21(02) :201–221, April 2013.
- [43] R.D. Luce and H. Raiffa. *Games and Decisions*. J. Wiley, New York, 1957.
- [44] A. Wald. *Statistical Decision Functions which Minimize the Maximum Risk*. Annals of Mathematics, 1945.
- [45] A. Wald. *Statistical decision functions*. Chelsea Publ. Co., Bronx, N.Y., 2. ed edition, 1971.
- [46] L.J. Savage. The theory of statistical decision. *the American Statistical Association*, pages 55–67, 1951.
- [47] H. Raiffa. *Decision Analysis - Introductory lectures on choices under uncertainty*. Addison Wesley, Reading, MA, 1970. traduction française : *Analyse de la décision : introduction aux choix en avenir incertain*, Dunod, 1973.
- [48] H. Raiffa, Y. de Calan, and H. de Carpentier. *Analyse de la décision : introduction aux choix en avenir incertain*. Collection Sigma. Dunod, 1973.
- [49] J.W. Milnor. *Games Against Nature*. Project Rand research memorandum. Rand Corporation, 1951.
- [50] R. Brafman and M. Tennenholtz. On the foundations of qualitative decision theory. In *Proceedings of the thirteenth national conference on Artificial intelligence - Volume 2, AAAI’96*, pages 1291–1296. AAAI Press, 1996.

- [51] R. Brafman and M. Tennenholtz. On the axiomatization of qualitative decision criteria. In *Proceedings of the fourteenth national conference on artificial intelligence and ninth conference on Innovative applications of artificial intelligence (AAAI/IAAI)*, pages 76–81. AAAI Press, 1997.
- [52] J. Von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.
- [53] R. Sabbadin. *Une Approche Ordinale de la Decision dans l'Incertain : Axiomatisation, Representation Logique et Application à la Décision Séquentielle*. Phd theses, Paul Sabatier University, Toulouse, France, december 1998.
- [54] J. Quiggin. *Generalized Expected Utility Theory : The Rank-Dependent Model*. Springer, December 1993.
- [55] Hélène Fargier and Régis Sabbadin. Qualitative decision under uncertainty : back to expected utility . *Artificial Intelligence*, 164 :245–280, 2005.
- [56] D. Dubois, L. Godo, H. Prade, and A. Zapico. On the possibilistic decision model : from decision under uncertainty to case-based decision. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 7(6) :631–670, 1999.
- [57] R. Sabbadin, H. Fargier, and J. Lang. Towards qualitative approaches to multi-stage decision making. *Int. J. Approx. Reasoning*, 19(3-4) :441–471, 1998.
- [58] R. Sabbadin. Possibilistic markov decision processes. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 14(03) :287–300, 2001.
- [59] L. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1 :3–28, 1978.
- [60] D. Dubois and H. Prade. *Possibility Theory : An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. Plenum Press, New York, 1988.
- [61] G. Coletti, D. Petturiti, and B. Vantaggi. Independence in possibility theory under different triangular norms. In *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty - 12th European Conference (ECSQARU)*, pages 133–144, Utrecht, The Netherlands., 8-10 July 2013.
- [62] P. Fonck. Conditional independence in possibility theory. *CoRR*, abs/1302.6806, 2013.
- [63] B. Lesner and B. Zanuttini. Résolution exacte et approchée de problèmes de décision markoviens formulés en logique propositionnelle. *Revue d'Intelligence Artificielle*, 24(2) :131–158, 2010.
- [64] A. Hadj Ali. *Raisonnement Qualitatif sur les Ordres de Grandeur Relatifs : Formalisation et Traitement en Logique Floue*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, décembre 2002.
- [65] N. Ben Amor. *Qualitative possibilistic graphical models : from independence to propagation algorithms*. Thèse de doctorat, ISG - Université de Tunis, Tunis, juin 2002.
- [66] B. Bouchon-Meunier, G. Coletti, and C. Marsala. Independence and possibilistic conditioning. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 35 :107–123, May 2002.
- [67] N. Ben Amor, S. Benferhat, D. Dubois, K. Mellouli, and H. Prade. A theoretical framework for possibilistic independence in weakly ordered setting. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 10(2) :117–155, 2002.
- [68] L. Godo and A. Zapico. On the possibilistic-based decision model : Characterization of preference relations under partial inconsistency. *Appl. Intell.*, 14(3) :319–333, 2001.

- [69] D. Dubois, H. Prade, and R. Sabbadin. Decision-theoretic foundations of qualitative possibility theory . *European Journal of Operational Research*, 128 :459–478, 2001.
- [70] D. Dubois, H. Fargier, and R. Sabbadin. Qualitative decision rules under uncertainty. In *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty, 7th European Conference (ECSQARU)*, pages 1–21, Aalborg, Denmark, 2-5 July 2003.
- [71] D. Dubois, L. Godo, H. Prade, and A. Zapico. Making decision in a qualitative setting : from decision under uncertainty to case-based decision. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR)*, pages 594–607, Trento, Italy, 2-5 June 1998.
- [72] R. R. Yager. Possibilistic decision making. *IEEE Trans. on systems, Man and Cybernetics*, (09) :388–392, 1979.
- [73] T. Whalen. Decision making under uncertainty with various assumptions about available information. *IEEE Trans. on systems, Man and Cybernetics*, (14) :888–900, 1984.
- [74] D. Dubois and H. Prade. Possibilistic mixtures and their applications to qualitative utility theory – part ii : Decision under incomplete knowledge. In *Proc. of the Conf. on Foundations and Applications of Possibility Theory (FAPT)*, pages 256–266, Singapore, december 1995. World Scientific.
- [75] D. Dubois, H. Prade, and R. Sabbadin. Qualitative decision theory with Sugeno integrals. In M. Grabisch, T. Murofushi, and M. Sugeno, editors, *Fuzzy Measures and Integrals – Theory and Applications*, pages 314–332. Physica Verlag, Heidelberg, 2000.
- [76] P. Weng. Ordinal decision models for markov decision processes. In *20th European Conference on Artificial Intelligence. Including Prestigious Applications of Artificial Intelligence (ECAI/PAIS) System Demonstrations Track*, pages 828–833, Montpellier, France, 27-31 August 2012.
- [77] H. Fargier and P. Perny. Qualitative models for decision under uncertainty without the commensurability assumption. In *Proceedings of the Fifteenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI)*, pages 188–195, Stockholm, Sweden, 30 July - 1 August 1999.
- [78] R. Sabbadin. A possibilistic model for qualitative sequential decision problems under uncertainty in partially observable environments. In *Proceedings of the Fifteenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI)*, pages 567–574, Stockholm, Sweden, 30 July - 1 August 1999.
- [79] R. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1st edition, 1957.
- [80] M.L Puterman. *Markov Decision Processes : Discrete Stochastic Dynamic Programming*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1st edition, 1994.
- [81] M. Sniedovich. *Dynamic Programming : Foundations and Principles*. Pure and Applied Mathematics. CRC Press, Hoboken, 2nd edition, 2010.
- [82] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Possibilistic logic. In *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, 3 :439–513, 1994.
- [83] D. Dubois and H. Prade. Possibilistic logic : a retrospective and prospective view. *Fuzzy Sets and Systems*, 144(1) :3–23, 2004.
- [84] F. Dupin. *Gestion de l'évolutif et de l'incertain en logiques pondérées*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, décembre 1996.
- [85] J. Doyle and M.P. Wellman. Representing preferences as ceteris paribus comparatives. In *Proceedings of the AAAI Spring Symposium on Decision-Theoretic Planning*, pages 69–75, 1994.

- [86] S.W. Tan and J. Pearl. Qualitative decision theory. In *Proceedings of the 12th National Conference on Artificial Intelligence*, volume 2, pages 928–933, Seattle, WA, USA, 31 July - 4 August 1994.
- [87] J. Lang and J. Mengin. The complexity of learning separable ceteris paribus preferences. In *Proceedings of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJ-CAI)*, pages 848–853, Pasadena, California, USA, 11-17 July 2009.
- [88] C. Boutilier. Toward a Logic for Qualitative Decision Theory. In *Proceedings of the 4th International Conference on Principles of Knowledge Representation (KR)*, pages 75–86, 1994.
- [89] M. Bienvenu, J. Lang, and N. Wilson. From preference logics to preference languages, and back. In *Principles of Knowledge Representation and Reasoning : Proceedings of the Twelfth International Conference (KR)*, Toronto, Ontario, Canada, 9-13 May 2010.
- [90] R. Confalonieri and H. Prade. Using possibilistic logic for modeling qualitative decision : Answer set programming algorithms. *Int. J. Approx. Reasoning*, 55(2) :711–738, 2014.
- [91] D. Dubois, D. Le Berre, H. Prade, and R. Sabbadin. Logical representation and computation of optimal decisions in a qualitative setting. In *Proceedings of the Fifteenth National Conference on Artificial Intelligence and Tenth Innovative Applications of Artificial Intelligence Conference, AAAI*, pages 588–593, USA, 26-30 July 1998. Madison, Wisconsin.
- [92] T. Castell, C. Cayrol, M. Cayrol, and D. Le Berre. Using the davis and putnam procedure for an efficient computation of preferred models. In *In Proceedings of the Twelfth European Conference on Artificial Intelligence (ECAI)*, pages 350–354, 1996.
- [93] J. De Kleer. An assumption-based tms. *Artificial Intelligence Journal*, 28 :127–162, 1986.
- [94] J. De Kleer. Extending the atms. *Artificial Intelligence Journal*, 28 :163–196, 1986.
- [95] M. Davis and H. Putnam. A computing procedure for quantification theory. *Journal of the ACM*, 7 :201–215, 1960.
- [96] N. Ben Amor. Possibilistic graphical models : From reasoning to decision making. In *Fuzzy Logic and Applications - 10th International Workshop (WILF)*, pages 86–99, Genoa, Italy, 19-22 November 2013.
- [97] H. Raiffa. *Decision Analysis - Introductory Lectures on Choices under Uncertainty*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1968.
- [98] M. Cernak. A comparison of decision tree classifiers for automatic diagnosis of speech recognition errors. *Computing and Informatics*, 29(3) :489–501, 2010.
- [99] R. A Howard and J. E Matheson. Influence Diagrams. In *Readings on the Principles and Applications of Decision Analysis*, pages 721–762. Strategic Decisions Group, 1984.
- [100] P.P. Shenoy. Consistency in valuation-based systems. *INFORMS Journal on Computing*, 6(3) :281–291, 1994.
- [101] E.F. McClennen. *Rationality and Dynamic Choice : Foundational Explorations*. Cambridge University Press, 1990.
- [102] A. Darwiche. *Modeling and Reasoning with Bayesian Networks*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1st edition, 2009.
- [103] F. Jensen. *Introduction to Bayesian Networks*. Springer-Verlag New York, Inc, Secaucus, NJ, USA, 1st edition, 1996.

- [104] C. Huang and A. Darwiche. Inference in belief networks : A procedural guide. *Int. J. Approx. Reasoning*, 15(3) :225–263, 1996.
- [105] J. Pearl. Fusion, propagation, and structuring in belief networks. *Artif. Intell.*, 29(3) :241–288, 1986.
- [106] P. Fonck. *Réseaux d'inférence pour le raisonnement possibiliste*. PhD thesis, Université de Liège, Faculté des sciences, 1994.
- [107] J. Gebhardt and R. Kruse. Background and perspectives of possibilistic graphical models. In *4th European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty ECSQARU*, pages 108–121, 1997.
- [108] N. Ben Amor, S. Benferhat, and K. Mellouli. A two-steps propagation algorithm for min-based possibilistic causal networks. In *6th European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty (ECSQARU)*, pages 266–277, Toulouse, 2001.
- [109] M.A. Peot and R.D. Shachter. Fusion and propagation with multiple observations in belief networks. *Artif. Intell.*, 48(3) :299–318, April 1991.
- [110] R. Ayachi, N. Ben Amor, and S. Benferhat. A comparative study of compilation-based inference methods for min-based possibilistic networks. In *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty - 12th European Conference (ECSQARU)*, pages 25–36, Utrecht, The Netherlands, 8-10 July 2013.
- [111] S.A. Arnborg, D. G. Corneil, and A. Proskurowski. Complexity of finding embeddings in a k-tree. *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, 8 :277–284, 1987.
- [112] G.F.Cooper. Computational complexity of probabilistic inference using bayesian belief networks. *Artificial Intelligence*, 42(2–3) :393–405, 1990.
- [113] M.Yannakakis. Computing the minimum fill-in is np-complete. *SIAM Journal on Algebrics and Discrete Methods*, 2 :77–79, 1981.
- [114] U. Kjærulff. Triangulation of graphs – algorithms giving small total state space. Technical report, Departement of Mathematics and computer Science, Aalborg University, Denmark, 1990.
- [115] C.Golumbic. *Triangulated graphs*, chapter Algorithms graph theory and perfect graphs, pages 98–100. Academic Press, New York University, 1980.
- [116] F.V.Jensen and F.Jensen. Optimal junction trees. In *Tenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 360–366. Seatle, Wash, 1994.
- [117] A.Darwiche and C.Huang. Inference in belief networks : A procedural guide. *International Journal of Approximate Reasoning*, 15 :225–263, 1996.
- [118] H. Fargier, N. Ben Amor, and W. Gueguez. On the complexity of decision making in possibilistic decision trees. In *Proceedings of the Twenty-Seventh Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI)*, pages 203–210, Barcelona, Spain, 14-17 July 2011.
- [119] N.L. Zhang. Probabilistic inference in influence diagrams. In *Computational Intelligence*, pages 514–522, 1998.
- [120] N.L. Zhang, R. Qi, and D. Poole. A computational theory of decision networks. *International Journal of Approximate Reasoning*, 11 :83–158, 1994.
- [121] J.A. Tatman and R.D. Shachter. Dynamic programming and influence diagrams. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 20(2) :365–379, Mars 1990.

- [122] G. Cooper. A method for using belief networks as influence diagrams. In *Proceedings of the Fourth Conference Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI)*, pages 55–63, Corvallis, Oregon, 1988. AUAI Press.
- [123] S. Benferhat and S. Kaci. Fusion of possibilistic knowledge bases from a postulate point of view. *Int. J. Approx. Reasoning*, 33(3) :255–285, 2003.
- [124] G. Qi, W. Liu, D.H. Glass, and D.A. Bell. A split-combination approach to merging knowledge bases in possibilistic logic. *Ann. Math. Artif. Intell.*, 48(1-2) :45–84, 2006.
- [125] G. Qi, W. Liu, and D.A. Bell. Combining multiple prioritized knowledge bases by negotiation. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(23) :2535–2551, 2007.
- [126] S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. Bipolar representation and fusion of preferences in the possibilistic logic framework. In *Proceedings of the eighth International Conference on Principle of Knowledge Representation and Reasoning (KR)*, pages 158–169, 2002.
- [127] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. From semantic to syntactic approaches to information combination in possibilistic logic. *Aggregation and Fusion of Imperfect Information*, Physica Verlag, pages 141–151, 1997.
- [128] G. Qi, W. Liu, and D. Bell. A comparison of merging operators in possibilistic logic. In *KSEM*, pages 39–50, 2010.
- [129] S. Benferhat, F. Haned-Khellaf, A. Mokhtari, and I. Zeddigha. On the use of syntactic possibilistic fusion for computing optimistic qualitative decisions. In *12th International Conference on Fuzzy Theory and Technology (FTT)*, pages 1384–1390, Salt Lake City, USA, july 2007.
- [130] J. Lang. Possibilistic logic : Complexity and algorithms. In *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, 5 :179–220, 2000.
- [131] S. Benferhat, F. Haned-Khellaf, A. Mokhtari, and I. Zeddigha. On the use of syntactic possibilistic fusion for computing possibilistic qualitative decision. In *Proceedings of the Third International Conference on Software and Data Technologies (ICSOFT)*, volume PL/DPS/KE, pages 356–359, Porto, Portugal, 5-8 July 2008.
- [132] S. Benferhat, D. Dubois, L. Garcia, and H. Prade. On the transformation between possibilistic logic bases and possibilistic causal networks. *International Journal of Approximate Reasoning*, 29 :135–173, 2002.
- [133] M. Bélanger and J. Martel. Explanations for a decision support system based on mcda. *Computing And Informatic (CAI)*, 25(2-3), 2006.
- [134] A. Smirnov, M. Pashkin, N. Chilov, and T. Levashova. Ksnet-approach to knowledge fusion from distributed sources. *Computing And Informatics (CAI)*, 25(2-3), 2003.
- [135] S. Benferhat et F. Titouna. Fusion and normalization of quantitative possibilistic networks. *Appl. Intell.*, 31(2) :135–160, 2009.
- [136] S. Benferhat and F. Titouna. On the fusion of probabilistic networks. In *Modern Approaches in Applied Intelligence - 24th International Conference on Industrial Engineering and Other Applications of Applied Intelligent Systems (IEA/AIE). Proceedings, Part I*, pages 49–58, Syracuse, NY, USA, 28 June - 1 July 2011.
- [137] F. Titouna and S. Benferhat. Merging possibilistic networks through a disjunctive mode. In *Belief Functions : Theory and Applications - Third International Conference (BELIEF)*, pages 265–274, Oxford, UK, 26-28 September 2014.
- [138] N. Ben Amor, S. Benferhat, and K. Mellouli. Anytime propagation algorithm for min-based possibilistic graphs. *Soft Comput.*, 8(2) :150–161, 2003.

- [139] R. Ayachi, N. Ben Amor, and S. Benferhat. Possibilistic local structure for compiling min-based networks. In *Synergies of Soft Computing and Statistics for Intelligent Data Analysis, Proceedings of the 6th International Conference on Soft Methods in Probability and Statistics (SMPS)*, pages 479–487, Konstanz, Germany, 4-6 October 2012.
- [140] E.V. Denardo, E.A. Feinberg, and U.G. Rothblum. Splitting in a finite markov decision problem. *SIGMETRICS Performance Evaluation Review*, 39(4) :38, 2012.
- [141] D.H. Peluffo-Ordóñez, A.E. Castro-Ospina, D. Chavez-Chamorro, C.D. Acosta-Medina, and G. Castellanos-Domínguez. Normalized cuts clustering with prior knowledge and a pre-clustering stage. In *21st European Symposium on Artificial Neural Networks (ESANN)*, Bruges, Belgium, 24-26 April 2013.
- [142] C. Borgelt, J. Gebhardt, and R. Kruse. Possibilistic graphical models. In *In Proceedings of International School for the Synthesis of Expert Knowledge (ISSEK)*, pages 51–68, Udine, Italy, 1998. Wiley.
- [143] C. Borgelt, J. Gebhardt, and R. Kruse. Inference methods. In *Handbook of Fuzzy Computation*, chapter F1.2. Institute of Physics Publishing, Bristol, United Kingdom, 1998.