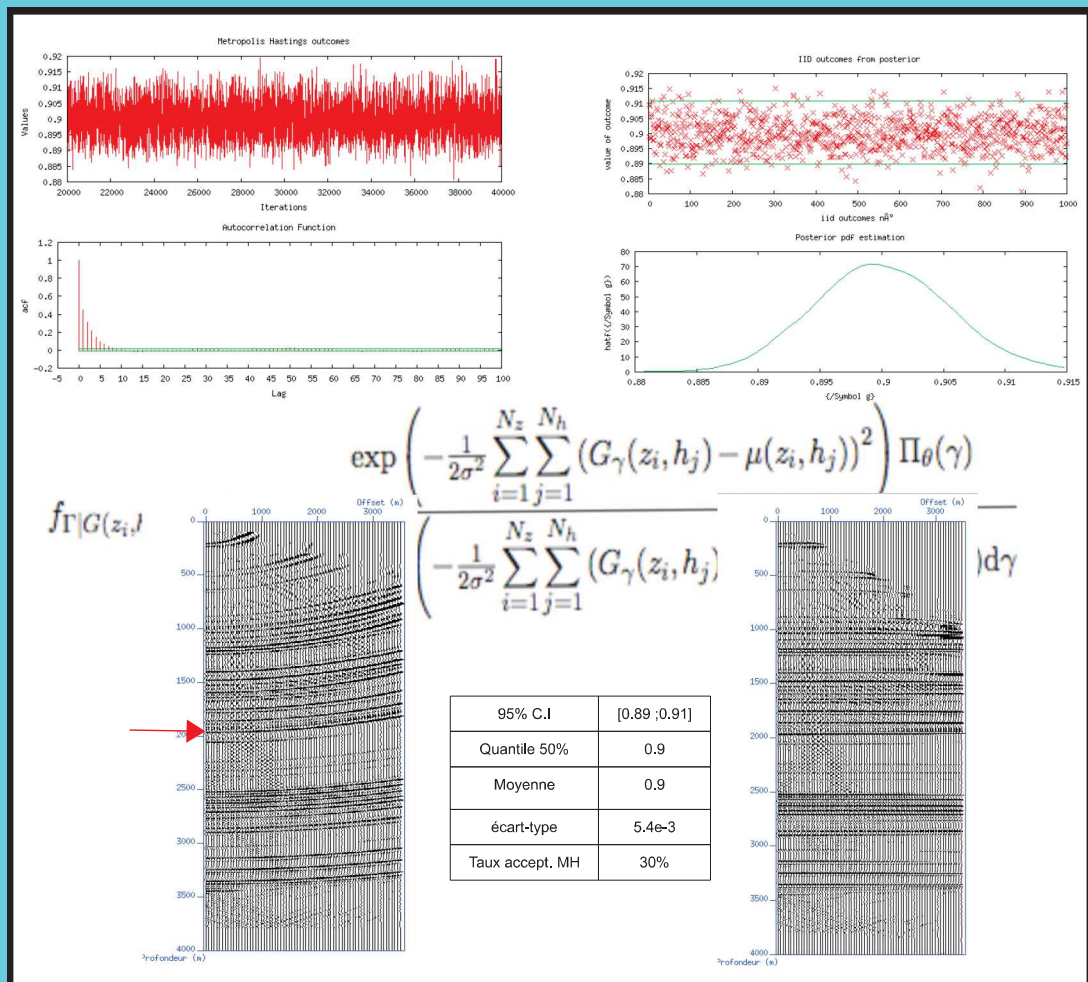


Tamatoro Johng-Ay

# Approche stochastique de l'analyse du « residual moveout » pour la quantification de l'incertitude dans l'imagerie sismique





UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR**

**Spécialité : Mathématiques Appliquées**

préparée au **Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications-Pau  
& Organisme Pétrolier de Recherche Appliquée**

dans le cadre de l'**ÉCOLE DOCTORALES DES SCIENCES EXACTES  
ET LEURS APPLICATIONS**

présentée et soutenue publiquement

par

**TAMATORO JOHNG-AY**

le 09 Avril 2014

Titre :

**Approche stochastique de l'analyse du « Residual Move  
Out » pour la quantification de l'incertitude dans l'imagerie  
sismique**

Directeur de thèse : **LAURENT BORDES**

Co-directeur de thèse : **SIMPLICE DOSSOU-GBÉTÉ**

Encadrant OPERA : **EVGENY LANDA**

### Jury

Mme. SOPHIE MERCIER,	Présidente du jury
Mme. SOPHIE DABO-NIANG,	Rapportrice
M. BERTRAND IOOS,	Rapporteur
M. KLAUS MOSEGAARD,	Rapporteur
M. CHRISTOPHE BARNES,	Examineur
M. EVGENY LANDA,	Encadrant OPERA
M. LAURENT BORDES,	Directeur de thèse
M. SIMPLICE DOSSOU-GBÉTÉ,	Co-directeur de thèse



A mon père, à mes oncles, à mes tantes, à mes cousins et à mes amis partis très tôt ...



# Remerciements

Après trois années passées dans l'équipe probabilité-statistiques du Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications - Pau (LMAP) et à l'Organisme Pétrolier de Recherches Appliquées (OPERA), je tiens à adresser mes remerciements à toutes les personnes sans lesquelles ce travail n'aurait été possible.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, le Professeur Laurent BORDES pour le temps conséquent qu'il m'a accordé et pour ses qualités pédagogiques et scientifiques qui ont beaucoup contribué à ma formation.

Je remercie M. Simplicie DOSSOU-GBÉTÉ pour la rigueur avec laquelle il a évalué mes travaux, pour ses précieux conseils, pour sa sympathie et sa bonne humeur.

Je remercie M. Evgeny LANDA directeur de l'OPERA pour la confiance qu'il a placée en moi malgré les connaissances plutôt légères que j'avais en 2011 sur la géophysique.

Je remercie M. Reda BAINA pour les nombreux conseils qu'il m'a donné au cours de ses trois années.

Je remercie M. Raoul BEAUDUIN pour m'avoir aidé à déboguer à de nombreuses reprises mes codes.

Je remercie M. Adam GOSSELET pour les discussions bien enrichissantes que nous avons eu aussi bien au tableau qu'autour des déjeuners.

Je tiens à remercier Mme Brigitte BOULAIGUE et Mme Isabelle BARGY DU GARDIN pour les aides qu'elles m'ont apportées lors des nombreuses démarches administratives.

Je tiens à remercier tous les autres membres de l'équipe de recherche de l'OPERA que j'ai eu à rencontrer tout au long de ses trois années pour leur bonne humeur sans laquelle ces trois années n'auraient pas été pareilles.

Je remercie tous les doctorants que j'ai eu à côtoyer lors des différents séminaires, lors des séances de foot et pour nos discussions autour des maths et du foot.

Je remercie ma mère, mes frères et mes soeurs pour leurs soutiens indéfectibles.



# Résumé

Le principale objectif de l'imagerie sismique pétrolière telle qu'elle est réalisée de nos jours est de fournir une image représentative des quelques premiers kilomètres du sous-sol pour permettre la localisation et l'estimation précise des ressources en hydrocarbures. Les réservoirs où sont piégés ces hydrocarbures sont des structures géologiques qui ont une complexité plus ou moins grande. Pour pouvoir caractériser ces réservoirs et permettre la production des hydrocarbures, le géophysicien utilise la *migration-profondeur* qui est un outil d'imagerie sismique qui sert à *convertir* des données-temps enregistrées lors des campagnes d'acquisition sismique en des images-profondeur qui seront exploitées par l'ingénieur-réservoir avec l'aide de l'interprète sismique et du géologue. Lors de la migration profondeur, les événements sismiques (réflecteurs, points diffractants, failles, ...) sont replacés à leurs positions spatiales correctes. Une migration-profondeur pertinente requiert une évaluation précise de la variation verticale, latérale et horizontale de la vitesse de propagation (modèle de vitesse) des ondes dans le sous-sol. La précision du modèle de vitesse utilisé pour une migration est jugée au travers l'alignement horizontal des événements présents sur les *Common Image Gather* (CIG) qui sont des panneaux des profondeurs des événements en fonction des distances entre les sources et les récepteurs ayant servi à enregistrer les données. Les événements non horizontaux (*Residual Move Out*) présents sur les CIG sont dus au ratio ( $\gamma$ ) du modèle de vitesse de migration par la vitesse effective du milieu. L'analyse du Residual Move Out (RMO) a pour but d'évaluer ce ratio pour juger de la pertinence du modèle de vitesse et sa mise à jour.

Les images avant sommation formant les CIG qui servent de données pour l'analyse du RMO sont obtenues par des outils mathématiques pour la résolution de problèmes inverses mal posés, et sont corrompues par du bruit. Une analyse de l'incertitude s'avère nécessaire pour améliorer l'évaluation des résultats obtenus. Le manque d'outils d'analyse de l'incertitude dans l'analyse du RMO en font sa faiblesse. L'analyse et la quantification de l'incertitude pourrait aider à la prise de décisions qui auront des impacts socio-économiques importantes.

Ce travail de thèse a pour but de contribuer à l'analyse et à la quantification de l'incertitude dans l'analyse des paramètres calculés pendant le traitement des données sismiques et particulièrement dans l'analyse du RMO. Pour atteindre ces objectifs plusieurs étapes ont été nécessaires. Nous avons commencés par nous approprier les

---

différents concepts géophysiques nécessaires à la compréhension du problème à savoir l'organisation des données de sismique réflexion, les différents traitements qu'elles subissent et les différents outils mathématiques et méthodologiques utilisés (chapitres 2 et 3). Nous avons ensuite présentés les méthodes et outils pour l'analyse classique du RMO (chapitre 4). Dans le chapitre 5 nous donnons une interprétation statistique avant de proposer une approche stochastique de cette approche.

Cette approche stochastique consiste en un modèle statistique hiérarchique dont les paramètres sont :

- la variance  $\sigma^2$  traduisant le niveau de bruit dans les données,
- une fonction  $G$  qui traduit la cohérence des amplitudes le long des évènements
- et le ratio  $\gamma$  qui est considéré comme une variable aléatoire et non comme un paramètre fixe inconnue comme c'est le cas dans l'approche *classique* de l'analyse du RMO.

L'ajustement du modèle aux données, fait en utilisant des méthodes de lissage des données, combiné avec l'utilisation des ondelettes pour l'estimation de  $\sigma^2$  permet de calculer la loi de probabilité *a posteriori* du ratio  $\gamma$  conditionnellement aux données dans une approche du type bayésien empirique. Une estimation du paramètre  $\gamma$  et l'incertitude associée sont obtenues en utilisant des simulation de Monte Carlo par Chaîne de Markov de sa distribution *a posteriori*. L'approche proposée dans cette thèse permet d'obtenir autant de cartes de valeurs du paramètre  $\gamma$  qu'on le désire par le biais des quantiles.

La méthodologie proposée est validée au chapitre 6 en l'appliquant tout d'abord à des données synthétiques puis à des données réelles. Une étude de sensibilité de l'estimation du paramètre  $\gamma$  a été réalisée. L'utilisation de l'incertitude de ce paramètre pour quantifier l'incertitude des positions spatiales des réflecteurs est présentée dans ce travail de thèse.

# Abstract

The main goal of the seismic imaging for oil exploration and production as it is done nowadays, is to provide an image of the first kilometers of the subsurface to allow the localisation and an accurate estimation of hydrocarbon resources. The reservoirs where this hydrocarbons are trapped, are structures which have a more or less complex geology. To characterize these reservoirs and allow the production of hydrocarbons, the geophysicist uses the depth migration which is a seismic imaging tool which serves to convert time data recorded during seismic surveys into depth images which will be exploited by the reservoir engineer with the help of the seismic interpreter and the geologist. During the depth migration, seismic events (reflectors, diffractions, faults, ...) are moved to their correct locations in space. Relevant depth migration requires an accurate knowledge of vertical and horizontal seismic velocity variations (velocity model). Usually the so-called Common-Image-Gathers (CIGs) serve as a tool to verify correctness of the velocity model. Often the CIGs are computed in the surface offset (distance between shot point and receiver) domain and their flatness serve as criteria of the velocity model correctness. Residual moveout (RMO) of the events on CIGs due to the ratio  $\gamma$  of migration velocity model and effective velocity model, indicates incorrectness of the velocity model and is used for the velocity model updating.

The post-stacked images forming the CIGs which are used as data for the RMO analysis are the results of an inverse problem and are corrupt by noises. An uncertainty analysis is necessary to improve evaluation of the results. Dealing with the uncertainty is a major issue, which supposes to help in decisions that have important social and commercial implications.

The goal of this thesis is to contribute to the uncertainty analysis and its quantification in the analysis of various parameters computed during the seismic processing and particularly in RMO analysis. To reach these goals several stages were necessary. We began by appropriating the various geophysical concepts necessary for the understanding of :

- the organization of the seismic data ;
- the various processing ;
- the various mathematical and methodological tools which are used (chapters 2 and 3).

---

In the chapter 4, we present different tools used for the conventional RMO analysis. In the fifth one, we give a statistical interpretation of the conventional RMO analysis and we propose a stochastic approach of this analysis. This approach consist in hierarchical statistical model where the parameters are :

- the variance  $\sigma^2$  which express the noise level in the data ;
- a functional parameter  $G$  which express coherency of the amplitudes along events ;
- and the ratio  $\gamma$  which is assume to be a random variable and not an unknown fixed parameter as it is the case in conventional approach.

The adjustment of data to the model done by using smoothing methods of data, combined with the using of the wavelets for the estimation of  $\sigma^2$  allow to compute the posterior distribution of  $\gamma$  given the data by the empirical Bayes methods. An estimation of the parameter  $\gamma$  is obtained by using Markov Chain Monte Carlo simulations of its posterior distribution. The various quantiles of these simulations provide different estimations of  $\gamma$ .

The proposed methodology is validated in the sixth chapter by its application on synthetic data and real data. A sensitivity analysis of the estimation of the parameter  $\gamma$  was done. The using of the uncertainty of this parameter to quantify the uncertainty of the spatial positions of reflectors is presented in this thesis.

# Sommaire

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I</b>	<b>Présentations des concepts géophysiques</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Présentation des données de sismique réflexion</b>	<b>7</b>
2.1	L'acquisition des données sismiques . . . . .	8
2.2	La préparation des données enregistrées . . . . .	9
2.2.1	Collection Point Milieu Commun ou Common Mid Point Gathers (CMP) et le Normal MoveOut (NMO) . . . . .	11
2.2.2	Collection déport commun ou Common Offset Gathers (COG)	14
2.3	Imagerie profondeur . . . . .	15
2.3.1	L'analyse de vitesse . . . . .	15
2.3.2	Imagerie . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Migration profondeur et Common Image Gathers</b>	<b>21</b>
3.1	Migration Profondeur . . . . .	22
3.1.1	Illustration de la migration profondeur dans le domaine offset commun . . . . .	22
3.1.2	Propagation des ondes sismiques en milieux acoustiques . . . .	23
3.1.3	Principe d'imagerie et représentation cinématique de la migration . . . . .	24
3.2	Common Image Gathers (CIG) . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Analyse classique du Residual Move Out</b>	<b>31</b>
4.1	Semblance . . . . .	32
4.2	Equation du RMO . . . . .	37
4.2.1	Réflecteur horizontal . . . . .	37
4.2.2	Réflecteur à géométrie quelconque . . . . .	39
4.2.3	Impact de la géométrie du réflecteur . . . . .	40
4.3	Analyse du RMO . . . . .	42
4.4	Étude de la sensibilité de la semblance par rapport au modèle décrivant de la variation de l'amplitude avec l'offset . . . . .	43
4.5	Avantages et insuffisance de l'analyse classique du RMO . . . . .	47

---

<b>II</b>	<b>Approche Statistique</b>	<b>49</b>
<b>5</b>	<b>Approche stochastique de l'analyse du RMO</b>	<b>51</b>
5.1	Lissage par la méthode des splines à nœuds libres . . . . .	52
5.2	Données . . . . .	56
5.3	Prétraitement des données pour la prise en charge de leur caractère fonctionnel . . . . .	57
5.4	Approche fréquentiste de l'analyse classique du RMO et du calcul de la semblance . . . . .	59
5.4.1	Modèle statistique . . . . .	59
5.4.2	Semblance et approche statistique de la détermination du paramètre de courbure $\gamma$ . . . . .	62
5.5	Approche bayésienne de l'analyse du RMO . . . . .	66
5.5.1	Modèle statistique . . . . .	67
5.5.2	Loi <i>a posteriori</i> de $\Gamma$ conditionnelle aux données . . . . .	68
5.5.3	Ajustement du modèle aux données . . . . .	70
5.6	Algorithme de Metropolis-Hastings . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Mise en œuvre et Résultats</b>	<b>77</b>
6.1	Implémentation . . . . .	78
6.2	Analyse de sensibilité des paramétrisations du modèle . . . . .	78
6.2.1	Choix de la méthode d'estimation de $\sigma^2$ . . . . .	79
6.2.2	Sensibilité des caractéristiques de la loi <i>a posteriori</i> par rapport à la loi <i>a priori</i> de $\Gamma$ . . . . .	80
6.2.3	Influence du choix de l'estimateur de la moyenne $\mu_{ij}$ des données sur la loi <i>a posteriori</i> . . . . .	81
6.3	Résultats de l'approche bayésienne de l'analyse sur données synthétiques	87
6.3.1	Résultats sur un CIG synthétique . . . . .	87
6.3.2	Résultats sur des données 2D synthétiques . . . . .	91
6.4	Résultats de l'approche bayésienne de l'analyse sur données réelles . .	95
6.4.1	Résultats sur un CIG réelles à profondeur fixée . . . . .	96
6.4.2	Résultats sur un CIG réel . . . . .	97
6.4.3	Résultats sur des données 2D réelles . . . . .	98
6.4.4	Utilisation de l'incertitude sur l'estimation de $\gamma$ . . . . .	102
6.5	Temps de calcul . . . . .	103
6.6	Avantages et inconvénients de l'approche bayésienne de l'analyse du Residual Move Out . . . . .	104

---

<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>105</b>
7.1	Conclusions . . . . .	105
7.2	Perspectives . . . . .	106
7.2.1	Hypothèse du bruit additif gaussien . . . . .	106
7.2.2	Corrélation spatiale des points . . . . .	107
<b>III</b>	<b>Annexes</b>	<b>109</b>
<b>A</b>	<b>Relation entre semblance généralisée et semblance classique</b>	<b>111</b>
<b>B</b>	<b>Algorithme</b>	<b>113</b>
B.1	Pseudo - code pour le calcul de la semblance et de sa maximisation. .	113
B.2	Pseudo code pour l'analyse stochastique du RMO . . . . .	117
	<b>Bibliographie</b>	<b>121</b>



# Table des figures

2.1	Principe de l'acquisition: En marine comme en terrestre, les ondes générées en surface sont réfléchies et réfractées dans le sous-sol. A l'aide des hydrophones (a) ou des géophones (b), le géophysicien enregistre les échos des ondes depuis la surface. . . . .	8
2.2	Refcurve avec les raies représentant les différents types de tris. Par souci de clarté, on a représenté des raies se réfléchissant sur un réflecteur à la fois. . . . .	10
2.3	Schéma du rangement des traces en CMP gathers et CMP synthétique correspondant. La courbe du temps de trajet en fonction de l'offset pour un réflecteur horizontal dans un milieu homogène à vitesse de propagation d'onde constante est une hyperbole avec le sommet situé sur la trace à offset nul. . . . .	12
2.4	Géométrie des réflecteurs illustrant les équations (2.1) et (2.2). . . . .	12
2.5	CMP gathers situé à la position 12km en surface du modèle <i>refcurve</i> . . . . .	13
2.6	Cube de données temps pour le modèle <i>refcurve</i> . . . . .	14
2.7	Exemple d'analyse de vitesse : Le critère de semblance est utilisé pour pointer la vitesse qui effectue au mieux la correction des évènements de réflexion. . . . .	18
2.8	Collection de traces à offset nul du modèle <i>refcurve</i> . Les réflecteurs sont distordus . . . . .	19
2.9	Après migration, les évènements de réflexions sont repositionnés en profondeur . . . . .	19
3.1	Illustration d'évènement sur un CMP . . . . .	22
3.2	Construction de l'évènement migré dans le domaine iso-offset en 2D. . . . .	23
3.3	Le temps de trajet de la source au récepteur en passant par un point de coordonnées $(x, y)$ . . . . .	27
4.1	Représentation fenêtre pour le calcul de la semblance . . . . .	33
4.2	Représentation des amplitudes et de leurs interpolations . . . . .	33
4.3	Représentation de la fenêtre (pointillés bleus) pour différentes corrections (b)-(d) avec la famille d'hyperboles sur (a). . . . .	34
4.4	Géométrie des réflecteurs illustrant les équations (4.6) et (4.11). . . . .	39

## TABLE DES FIGURES

---

4.5	L'erreur commise par l'utilisation de l'équation (4.10) au lieu l'équation (4.13) en fonction de $a/b$ pour plusieurs valeurs de $\gamma$ . . . . .	41
4.6	Mise en œuvre de l'analyse du RMO . . . . .	43
4.7	CIG synthétique (a) et variation de l'amplitude le long de l'évènement de courbure $\gamma = 1.1$ situé à 1650 à l'offset nul. . . . .	44
4.8	Comparaison du modèle dans le calcul de la semblance . . . . .	45
4.9	CIG obtenue par migration des données issue d'un modèle synthétique complexe pour lequel le calcul de la semblance et le pointé sont montrés sur la figure (4.10) . . . . .	46
4.10	Panneau de semblance pour des courbures allant de 0.8 à 1.1. Le pointé des courbures maximisant la semblance est représenté sur la figure (a). Les lissages avec différentes valeurs de $\varepsilon$ sont montrés sur les figures (b), (c) et (d). . . . .	48
5.1	CIG synthétique . . . . .	54
5.2	Semblance calculée sur le CIG ci-contre avec $\mathcal{G}$ représenté en noir et la valeur théorique de $\mathcal{G}$ représentée en violet . . . . .	54
5.3	Lissage avec splines à nœuds libres . . . . .	55
5.4	Images avant sommation : données synthétiques complexes obtenues avec migration pour les vitesses correctes . . . . .	56
5.5	Courbe du RMO passant par le point de profondeur $z_i = 900m$ à l'offset 1500m donc de demi-offset $h_j = 750m$ et de courbure $\gamma = 1.1$ . . . . .	62
5.6	Schéma de correction du RMO . . . . .	66
6.1	L'évènement <b>A</b> du CIG ne présente pas de variation d'amplitudes avec l'offset tandis que l'évènement <b>B</b> présente une variation d'amplitude avec l'offset ainsi qu'un changement de polarité. La valeur théorique de $\gamma$ est de 1.1 pour les 2 évènements. . . . .	79
6.2	Amplitudes en fonction des offsets pour la valeur théorique de $\gamma$ . . . . .	83
6.3	Itérations de Metropolis Hastings et Fonctions d'autocorrélation . . . . .	83
6.4	Réalisations « indépendantes » et estimation par noyau de la loi $a_{posteriori}$ de $\Gamma$ sachant les données . . . . .	84
6.5	Amplitudes en fonction des offsets pour la valeur théorique de $\gamma$ . . . . .	85
6.6	Itérations de Metropolis Hastings et fonction d'autocorrélation associées . . . . .	86
6.7	Réalisations « indépendantes » et estimation par noyau de la loi $a_{posteriori}$ de $\Gamma$ sachant les données . . . . .	86

6.8	CIG synthétique avec un effet de variation de l'amplitude avec l'offset et l'AB-Semblance. . . . .	88
6.9	Comparaison de l'approche classique et de l'approche bayésienne de l'analyse du RMO sur un CIG synthétique. . . . .	89
6.10	Comparaison des intervalles de crédibilité obtenue par l'approche bayésienne du RMO et par le lissage des résultats de l'approche classique	90
6.11	Données synthétique 2D : Refcurve migré avec modèle de vitesse exact	91
6.12	Valeurs de $\gamma$ pour les données Refcurves obtenue par analyse classique du RMO. . . . .	92
6.13	AB-Semblance associée aux $\gamma$ de la figure 6.12 . . . . .	92
6.14	Valeurs moyennes <i>a posteriori</i> de $\gamma$ pour les données Refcurve . . . .	93
6.15	Quantiles 2.5% <i>a posteriori</i> de $\gamma$ pour les données Refcurve . . . . .	93
6.16	Quantiles 97.5% <i>a posteriori</i> de $\gamma$ pour les données Refcurve . . . . .	94
6.17	Ecart - type <i>a posteriori</i> de $\gamma$ pour les données Refcurve . . . . .	94
6.18	Données réelles . . . . .	95
6.19	Résultats de l'approche bayésienne sur un point de profondeur fixée de données réelles . . . . .	96
6.20	Hyperbole en bleu avec la valeur moyenne <i>a posteriori</i> de $\gamma$ estimée .	97
6.21	Résultats sur le CIG à la position 17475m . . . . .	98
6.22	Résultat de l'approche classique sur des données réelles . . . . .	99
6.23	Valeurs moyennes <i>a posteriori</i> des courbures $\gamma$ . . . . .	99
6.24	Quantiles 2.5% des valeurs <i>a posteriori</i> de $\gamma$ pour les données réelles .	100
6.25	Quantiles 97.5% des valeurs <i>a posteriori</i> de $\gamma$ pour les données réelles	101
6.26	Écarts-types des valeurs <i>a posteriori</i> de $\gamma$ sur les données réelles . . .	101
6.27	Intervalle de crédibilité sur des réflecteurs cibles . . . . .	103



# Liste des tableaux

6.1	Table comparative des estimations de $\sigma^2$ en fonction des méthodes. . .	80
6.2	Table comparative des résultats en fonction de la loi <i>a priori</i> sur $\Gamma$ . .	81
6.3	Table récapitulative des paramètres de la loi <i>a posteriori</i> . . . . .	84
6.4	Table récapitulative des paramètres de la loi <i>a posteriori</i> . . . . .	87



## Introduction

*« It is those who know little, and not those who know much, who so positively assert that this or that problem will never be solved by science. »*

Charles Darwin.

CE travail de thèse vise à apporter une contribution à l'étude et à la quantification des incertitudes présentes sur les paramètres calculés tout au long du processus d'imagerie sismique pétrolière. En effet, l'imagerie sismique pétrolière telle qu'elle est réalisée de nos jours a pour but la construction d'une image représentative des quelques premiers kilomètres du sous-sol pour permettre la localisation et l'estimation précise des ressources en hydrocarbures. Les réservoirs où sont piégés ces hydrocarbures sont des structures géologiques qui ont une complexité plus ou moins grande. Pour pouvoir caractériser ces réservoirs et permettre la production des hydrocarbures, l'on a besoin, sans entrer dans les détails, de « convertir » des données-temps enregistrées lors des campagnes d'acquisition sismique en une image-profondeur qui sera exploitée par l'ingénieur réservoir avec l'aide de l'interprète sismique et du géologue.

Les incertitudes qui sont présentes à toutes les étapes du processus allant de l'acquisition des données à la production des hydrocarbures sont peu, voire pas prises en compte.

Lors des campagnes sismiques, l'on génère à l'aide de sources explosives ou vibrantes, généralement disposées en surface, un champ d'ondes qui se propage dans le sous-sol, se réfléchit à la rencontre des discontinuités des propriétés physiques du milieu et est enregistré par des récepteurs placés en surface. Le placement des sources et des récepteurs est entaché d'erreurs par rapport à la géométrie d'acquisition préétablie par le géophysicien et ces erreurs pourraient être source d'incertitude sur l'image finale obtenue.

Lors de la conversion appelée migration profondeur des données-temps en images-profondeurs, l'on a besoin d'estimer la vitesse de propagation des ondes dans le milieu. Estimation qui est inévitablement entachée d'erreurs qui sont source d'incertitudes sur l'image finale obtenue. Cette conversion est en elle même une résolution d'un problème mathématique mal posé [Cameron *et al.*, 2007] et pour ce faire elle induit des incertitudes importantes sur l'image finale obtenue.

L'interprétation de l'image finale obtenue peut avoir autant d'interprétations que d'interprètes. Cela s'explique par le fait que chaque interprète à ses propres expériences passées qui influenceront son interprétation. Ainsi l'interprétation en elle-même est entachée d'incertitudes.

L'ingénieur réservoir pour localiser les structures géologiques complexes formant le réservoir fait un pointé, souvent manuel, sur l'image finale obtenue. Ce pointé est entaché d'erreurs qui sont encore sources d'incertitudes.

Nous voyons que les incertitudes sont présentes et se propagent tout au long du traitement des données sismiques. Comprendre et quantifier ces incertitudes qui sont présentes sur les informations géophysiques peut être très important pour l'exploration des ressources [Caers, 2011]. Quantifier ces incertitudes pourrait aider dans les prises de décisions qui auront des implications socio-économiques importantes [Bond *et al.*, 2007] et [Osypov *et al.*, 2011].

Depuis la seconde moitié des années 90, certains aspects de ces incertitudes sont étudiés. Nous pouvons citer entre autres les études liées :

- à l'impact sur l'image finale des incertitudes liées à l'estimation de la vitesse de propagations des ondes ; Voir [Grubb *et al.*, 2001], [Thore *et al.*, 2002], [Bube *et al.*, 2004a], [Bube *et al.*, 2004b], [Pon et Lines, 2005] et [Fomel et Landa, 2014] ;
- à la caractérisation des réservoirs ; Voir [Ballin *et al.*, 1992], [Subbey *et al.*, 2004], [M.Zafari et Reynolds, 2005], [Osypov *et al.*, 2012] ;
- à l'utilisation de l'incertitude dans le management de l'exploration et la pro-

---

duction des hydrocarbures telle que décrit par Lerche [1997], Bickel et Bratvold [2008] et Osypov *et al.* [2011].

Cette liste, qui est loin d'être exhaustive, donne une idée de l'intérêt que suscite cet aspect de quantification de l'incertitude dans le traitement des données sismiques.

Ce travail de thèse peut se classer dans la famille des études portant sur l'impact des incertitudes liées à l'estimation de la vitesse de propagation des ondes dans le milieu.

L'aspect innovant de ce travail se situe au niveau de la méthodologie proposée pour aborder le problème de l'étude et de la quantification de l'incertitude présente sur les paramètres calculés. La méthodologie proposée peut-être appliquée à différents paramètres. Nous nous sommes focalisé sur un paramètre qui est le rapport de la vitesse de propagation d'ondes estimée par la vitesse de propagation effective qui elle est inconnue. L'étude de ce paramètre est réalisée par l'analyse des courbures résiduelles (« Residual Move Out » en anglais) présentes sur les panneaux de cohérence générés par une migration-profondeur avant sommation des données-temps.

Nous proposons une version stochastique de cette analyse du Residual Move Out. Une approche bayésienne partielle est introduite pour considérer le paramètre non comme une inconnue fixe, mais comme une variable aléatoire et d'en déduire la loi de probabilité correspondante afin de pouvoir quantifier l'incertitude qui lui est associée.

Ce manuscrit se compose de deux grandes parties. La première expose, entre autres, les outils géophysiques dont nous aurons besoin pour comprendre le problème étudié et l'approche « classique » de l'analyse du Residual Move Out. La deuxième partie est consacrée à l'approche statistique proposée pour répondre à la question de l'étude et de la quantification de l'incertitude qui est à l'origine de ces travaux.





# **Présentations des concepts géophysiques**



- 2.1 L'acquisition des données sismiques
- 2.2 La préparation des données enregistrées
- 2.3 Imagerie profondeur

## Présentation des données de sismique réflexion

« *Causa latet, vis est notissima* »

« *The cause is hidden, but the result is well known.* »

Publius Ovidius Naso.

L'objectif de ce chapitre est d'introduire quelques éléments de base de la sismique réflexion dans le but de situer les problèmes statistiques qui font l'objet de cette thèse dans leur contexte géophysique. Les différentes notions exposées dans ce chapitre ne sont qu'une petite partie des outils dont dispose le géophysicien pour l'acquisition et le traitement de données sismiques. La présentation de ces notions se restreint donc aux éléments utiles à la compréhension du sujet. Nous présenterons les différentes étapes que comporte la sismique réflexion, à savoir l'acquisition, le prétraitement et le traitement des données proprement dit. L'accent sera mis sur l'aspect cinématique du traitement des données sismiques.

## 2.1 L'acquisition des données sismiques

Les campagnes acquisition sismiques ont pour but de « récolter » des données sismiques qui serviront à construire une image d'une zone du sous-sol. Selon que la zone dont on veut construire une image se trouve en mer ou sur terre, différents types d'outils sont utilisés pour l'acquisition des données. Le principe d'acquisition des données qui consiste en une création d'ondes acoustiques par une source placée en surface et l'enregistrement numérique des échos par une série de récepteurs sismiques placés en surface selon une géométrie prédéfinie. Lors de la propagation de l'onde en sismique, la diffraction se produit lorsque l'onde arrive sur un point anguleux ou une hétérogénéité dont l'extension est inférieure à la longueur d'onde de l'onde incidente. L'hétérogénéité ou point diffractant renvoie de l'énergie dans toutes les directions. Un réflecteur peut être considéré comme une succession de points diffractant.

En sismique marine (figure 2.1(a)), les sources qui génèrent l'onde sont principalement des canons à air qui libèrent brusquement un volume d'air sous pression. Les récepteurs, des hydrophones dans ce cas, mesurent la variation de pression dans l'eau [Henry, 1997].

En sismique terrestre (figure 2.1(b)), les sources sont des explosifs ou des camions vibreurs qui génèrent des ondes dont les échos sont enregistrés par des géophones. Ces géophones mesurent la vitesse des particules qui caractérise le mouvement du sol [Henry, 1997].

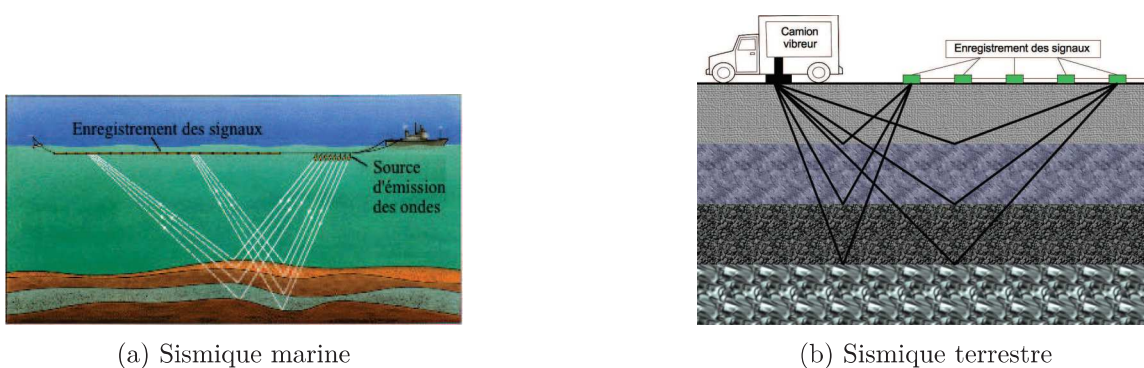


FIGURE 2.1 – Principe de l'acquisition: En marine comme en terrestre, les ondes générées en surface sont réfléchies et réfractées dans le sous-sol. A l'aide des hydrophones (a) ou des géophones (b), le géophysicien enregistre les échos des ondes depuis la surface.

Un enregistrement par un récepteur de l'écho de l'onde créée par une source est

appelé **trace sismique**. Elle contient des informations [Mari *et al.*, 1997] sur :

- des ondes directes ;
- des ondes réfractées ;
- des ondes de surface ;
- des ondes réfléchies primaires ;
- des ondes réfléchies converties ;
- des diffractions ;
- des multiples (les réflexions sur plusieurs surfaces) ;
- et des bruits naturels et industriels, sans relations avec le tir sismique.

Chaque trace est décrite par les vecteurs positions  $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$  de la source et  $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$  du récepteur.

Les opérations de génération d'onde et d'enregistrement d'échos sont répétées en quantité abondante tout en faisant varier la position de la source et des récepteurs. Le but de cette manœuvre est de permettre d'avoir une redondance dans les données enregistrées pour pouvoir au final obtenir une mesure « moyenne », atténuée des bruits naturels, des imperfections d'acquisition, et d'augmenter ainsi la qualité de l'image du sous-sol.

## 2.2 La préparation des données enregistrées

La réalisation de cette étape est principalement guidée par le traitement futur que les données sismiques enregistrées subiront. Dans le cadre de la sismique réflexion par exemple, l'étape d'imagerie n'utilise que les ondes réfléchies primaires. C'est ainsi que l'on voit lors de cette étape, l'élimination des autres types d'ondes (ondes directes, ondes réfractées, diffractions, multiples...) et le filtrage des bruits naturels. Pour pouvoir mettre en œuvre ce « nettoyage », durant cette étape de préparation des données, les traces sismiques sont réarrangées (ou triées) pour pouvoir exploiter la redondance qui existe dans les données sismiques.

Le tri des traces sismiques se fait de plusieurs manières. Les types de tri rencontrés le plus couramment sont :

- le tri en fonction du point tir (source) commun ou « Common Shot Gathers » en anglais. Dans ce type de tri, les traces sismiques ayant une même source sont regroupées et ordonnées suivant la distance source-récepteur (déport ou offset).
- le tri en fonction du récepteur ou « Common Receiver Gathers ». Dans cette manière de trier les données, les traces enregistrées par le même récepteur sont regroupées et ordonnées en fonction des offsets.
- le tri en fonction de l'offset ou « Common Offset Gathers ». Les traces composant un même groupe dans ce tri, ont en commun la distance source-récepteur (déport ou offset) ayant servi à les enregistrés.
- le tri en fonction du point milieu commun ou « Common Mid Point Gathers ». Ici, les traces appartenant au même groupe ont en commun le point à mi-distance de la source et du récepteur et sont aussi triées en fonction de l'offset.

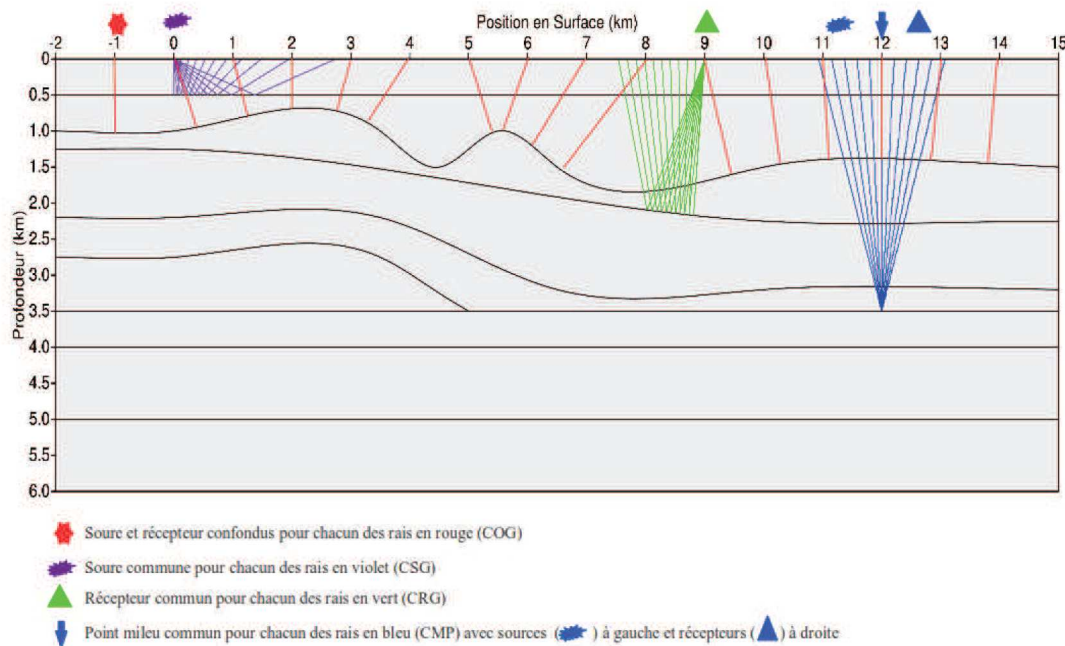


FIGURE 2.2 – Refcurve avec les raies représentant les différents types de tris. Par souci de clarté, on a représenté des raies se réfléchissant sur un réflecteur à la fois.

Pour illustrer ces différents types de tri, nous considérons un modèle synthétique 2D que nous appellerons *refcurve* et dont la géométrie des réflecteurs est donnée par les lignes noires sur la figure (2.2). Sur cette figure, le groupe de raies en violet

représente un groupe de traces qui ont en commun la source qui a servi à les générer (CSG). Le groupe de raies en vert représente quant à lui les traces ayant en commun le récepteur qui les a enregistrées (CRG). Pour la suite, nous nous focaliserons sur les types de tris en rouge (COG) où les traces ont en commun la distance source-récepteur (offset nulle sur la figure) et le type de tri en bleu où les traces du même groupe ont en commun le point milieu entre source et récepteur.

Le choix du type de tri revient au géophysicien et au traitement futur qu'il souhaite appliquer aux données sismiques.

### 2.2.1 Collection Point Milieu Commun ou Common Mid Point Gathers (CMP) et le Normal MoveOut (NMO )

Rappelons qu'une trace sismique est repérée à l'enregistrement par les vecteurs positions  $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$  de la source et  $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$  du récepteur ayant servi à l'enregistrer. Dans le tri CMP gathers, chaque trace est identifiée par :

- le vecteur position du point milieu  $\vec{x}_M = (\frac{x_s + x_r}{2}, \frac{y_s + y_r}{2}, 0)$ . La côte du point milieu est nulle, car il est repéré en surface.
- l'offset  $2\vec{h} = \vec{r} - \vec{s}$ . Cette distance peut être signée pour préciser le fait que le récepteur soit d'un côté ou de l'autre de la source. En général la source et les récepteurs sont supposés être sur la même ligne d'acquisition et sont supposés avoir la même côte.

Pour les groupes où les traces sont rassemblées en fonction du point milieu et de l'offset, nous avons en première approximation pour un milieu homogène et un réflecteur, le même point d'impact du front d'onde (figure 2.3). Nous remarquons donc que le temps de trajet augmente quand l'offset augmente.

**Définition 2.2.1.** *On appelle Normal Move Out la différence du temps de trajet pour un offset quelconque avec le temps de trajet pour un offset nul. Le Normal Move Out (NMO) dépend de la vitesse de propagation de l'onde, de l'offset, du temps de trajet à offset nul associé à l'évènement de réflexion, à l'inclinaison du réflecteur par rapport à l'horizontale, et du degré de complexité du milieu au-dessus du réflecteur [Yilmaz, 2001].*

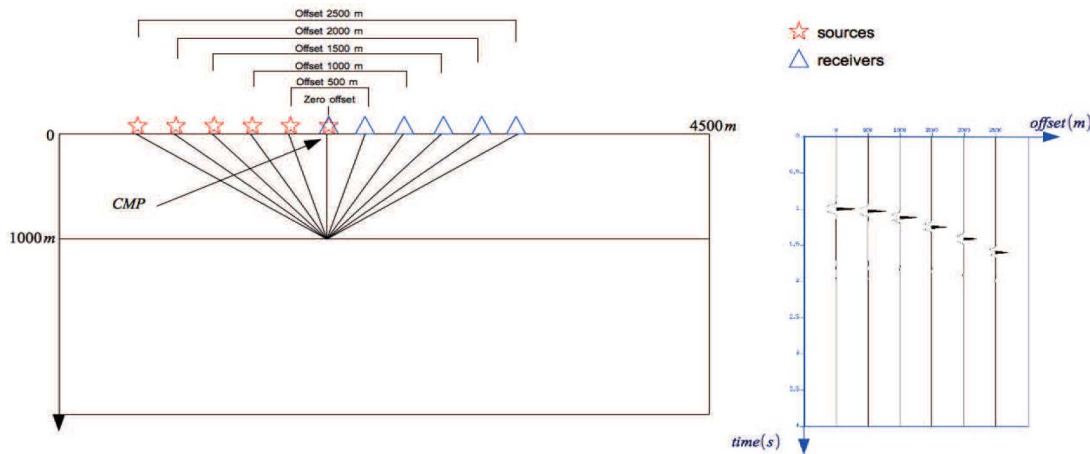
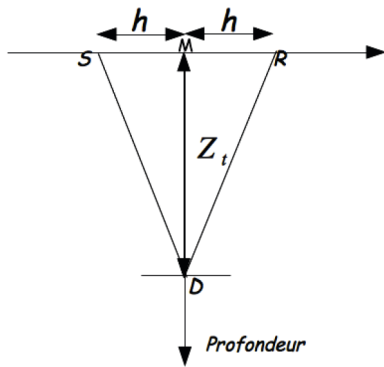
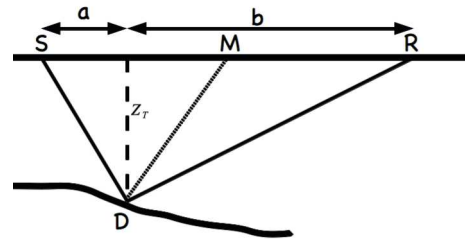


FIGURE 2.3 – Schéma du rangement des traces en CMP gathers et CMP synthétique correspondant. La courbe du temps de trajet en fonction de l'offset pour un réflecteur horizontal dans un milieu homogène à vitesse de propagation d'onde constante est une hyperbole avec le sommet situé sur la trace à offset nul.

Pour comprendre et illustrer l'équation utilisée pour le calcul du NMO, considérons le cas simple d'un milieu à un réflecteur et une vitesse de propagation de l'onde constante  $c$ . Soit un point diffractant  $D$  faisant partie du réflecteur situé à une profondeur  $Z_T$  et soit une trace enregistrée grâce à une source ( $S$ ) et un récepteur ( $R$ ) distant de  $2h$  (figure 2.4(a)).



(a) Réflecteur horizontal



(b) Réflecteur quelconque

FIGURE 2.4 – Géométrie des réflecteurs illustrant les équations (2.1) et (2.2).

Le théorème de Pythagore nous permet d'écrire l'équation  $SD + DR = 2\sqrt{Z_T^2 + h^2}$ . Le temps de trajet observé  $t$  en fonction du demi-offset est obtenu en divisant le trajet

par la vitesse de propagation  $c$  :

$$\begin{aligned} t &= \frac{2\sqrt{Z_T^2 + h^2}}{c} \\ t^2 &= t_0^2 + \frac{(2h)^2}{c^2}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

où  $2h$  est la distance entre les positions de la source et du récepteur, et  $t_0$  est le double temps de trajet suivant  $MD$ . Nous remarquons que la projection perpendiculaire du point  $D$  sur la surface coïncide avec le point milieu  $M$ . Ceci se produit que lorsque nous sommes en présence d'un réflecteur horizontal. Dans un cas plus général, où le réflecteur serait quelconque (figure 2.4(b)), nous pouvons nous inspirer du raisonnement précédent pour établir l'équation du temps de trajet en fonction de l'offset suivante :

$$t_{obs}(a, b) = \frac{\sqrt{a^2 + Z_T^2}}{c} + \frac{\sqrt{b^2 + Z_T^2}}{c}. \quad (2.2)$$

Les équations (2.1) et (2.2) sont utilisées pour le pointé de la vitesse de correction. Sur la figure (2.5) ci-dessous, nous présentons le CMP gathers du groupe représenté en bleu sur le modèle *refcurve* (figure 2.2) ci-dessus. Le point milieu commun se situe à la position  $12km$  en surface. La vitesse de propagation des ondes dans ce modèle a été prise constante avec une valeur  $c = 2000m.s^{-1}$ .

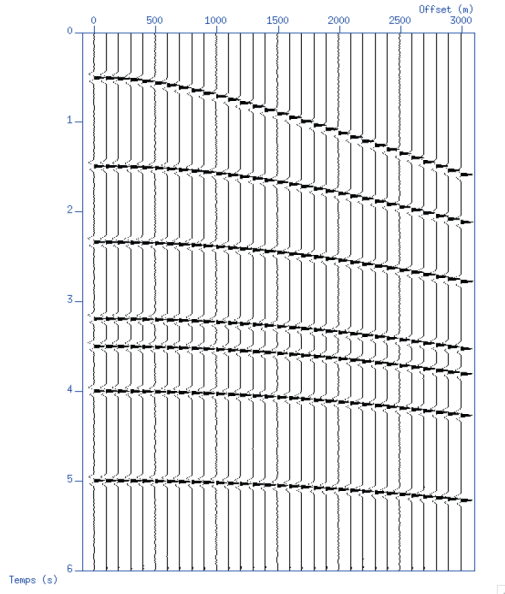


FIGURE 2.5 – CMP gathers situé à la position  $12km$  en surface du modèle *refcurve*.

Les événements de réflexions observés suivent une géométrie hyperbolique d'équation (2.1) en fonction de l'offset.

### 2.2.2 Collection déport commun ou Common Offset Gathers (COG)

Lorsque l'expérience "*tir - enregistrement des échos des ondes*" est répétée le long d'une ligne d'acquisition, nous nous retrouvons avec des traces qui ont en commun l'offset, mais pas le point milieu. Les traces de ce groupe ayant le même offset, arrangées suivant le point milieu font apparaître une "*image temps*" du sous-sol. Cette image dépend donc de l'offset, ce qui la rend difficile à interpréter pour le géophysicien. Un exemple de cette *image temps* du modèle *refcurve* pour l'offset nul est présenté sur la figure (2.6) en rouge. Pour la suite du document, nous choisissons de représenter des données temps pour une imagerie 2D sous forme de cube. Les trois dimensions du cube de données représentent :

- le temps orienté du haut vers le bas,
- la position du CMP orienté de gauche vers la droite
- l'offset orienté de l'avant vers l'arrière

La figure (2.6) ci-dessous montre le cube de données temps pour le modèle *refcurve* triées selon le schéma ci-dessus décrit.

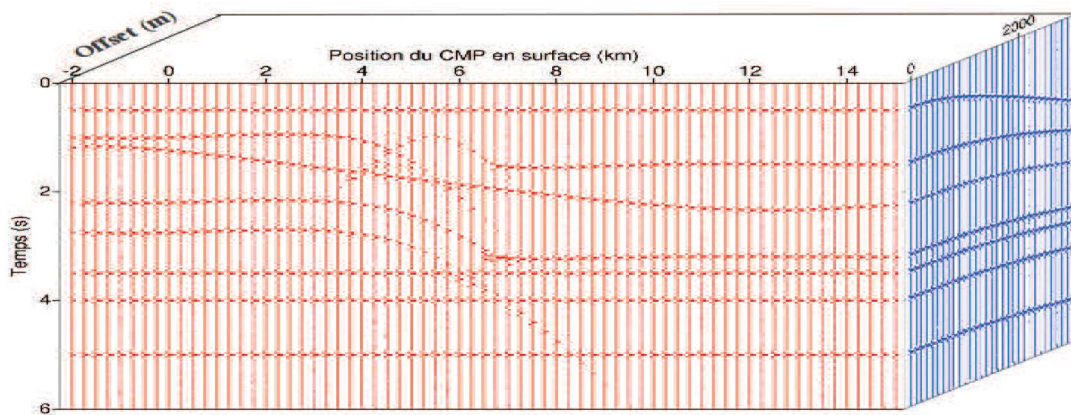


FIGURE 2.6 – Cube de données temps pour le modèle *refcurve*.

Les traces en rouge (face avant du cube) sur la figure 2.6 représentent les collections des traces qui ont même offset (offset nul sur la figure). Les réflecteurs ap-

paraissent distordus sur l'image. Cette distorsion est due au fait qu'on ait affaire à une image dans le domaine temps et non dans le domaine profondeur. Le groupe de traces en bleu (face latérale) a en commun le point milieu (CMP). Les événements qui y apparaissent ont une géométrie hyperbolique.

Après avoir convenablement trié, nettoyé, etc. les données, le géophysicien les utilise pour construire une image profondeur du sol. C'est l'étape suivante de la chaîne de traitement des données sismiques.

## 2.3 Imagerie profondeur

Dans le contexte pétrolier, le but final de l'imagerie sismique est de fournir au foreur une carte représentant le plus fidèlement possible les réflecteurs du sous-sol (profondeur, position par rapport à un point en surface, densité des roches...) pour lui permettre de placer les puits dans de bonnes conditions. Les données sismiques étant enregistrées en fonction du temps, une conversion en profondeur (migration profondeur) est donc nécessaire. Le lien entre le temps et la distance étant la vitesse de propagation des ondes, une estimation de celle-ci (car elle est inconnue) est nécessaire. C'est l'étape de l'analyse de la vitesse qui est utilisée pour accomplir cette tâche.

### 2.3.1 L'analyse de vitesse

Différents procédés sont utilisés pour l'estimation de la vitesse de propagation. Il y a entre autres :

- la tomographie qui est une technique qui sert à mesurer et à afficher la valeur de la vitesse de propagation de l'onde dans un volume de la Terre ou de sa réflectivité en utilisant de nombreux couples source-récepteur.
- l'analyse de la vitesse de migration qui est un procédé itératif qui utilise la redondance des images migrées (images dans le domaine profondeur). Une mesure de la cohérence des images obtenues pour différents offsets est utilisée pour la mise à jour de la vitesse.

Il existe différents types de vitesses. Henry [1997, p. 100] montre que l'exploitation sismique donne accès à une série de **vitesses sismiques** qui s'appliquent :

- soit à un ensemble homogène situé entre les temps 0 et  $t$  : ce sont les **vitesse moyennes** entre le sol et un horizon<sup>1</sup> situé au temps  $t$  ;
- soit à une succession de  $n$  intervalles de vitesse  $v_1, \dots, v_n$  où  $v_k$  correspond à un temps de trajet  $\Delta t_k$  : ce sont les **vitesse quadratiques moyennes** depuis la surface (0 et  $t$ ) ;
- soit enfin à l'une des tranches de terrain situé entre les horizons  $(k-1)$  et  $k$  : ce sont les **vitesse d'intervalle** qui sont calculables à partir des vitesses précédentes (vitesses moyennes et vitesses quadratiques moyennes).

Dans les formules qui suivent,  $t$  représentera le temps et  $\Delta t_k$  le temps de trajet dans la tranche de terrain situé entre les horizons  $(k-1)$  et  $k$ .

- Vitesses moyennes  $V_m$  sur  $[0, t_n]$  :

$$V_m = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} v(u) du \approx \frac{1}{t_n} \sum_{k=1}^n v_k \Delta t_k \quad \text{où} \quad t_n = \sum_{k=1}^n \Delta t_k. \quad (2.3)$$

$v(u)$  est la vitesse instantanée au temps  $u$ , telle qu'on la mesure par exemple en diagraphie<sup>2</sup>.

- Vitesses quadratiques moyennes  $\bar{V}_m$  sur  $[0, t_n]$  :

$$\bar{V}_m^2 = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} v^2(u) du \approx \frac{1}{t_n} \sum_{k=1}^n v_k^2 \Delta t_k \quad \text{avec} \quad t_n = \sum_{k=1}^n \Delta t_k. \quad (2.4)$$

- Vitesses d'intervalle  $v_k$  : elles sont calculées à partir de (2.3) et (2.4) pour  $1 \leq k \leq n$ .

$$v_k = \frac{V_k t_k - V_{k-1} t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \quad (2.5)$$

---

1. Une interface qui pourrait être représentée par une réflexion sismique due à un contact entre deux corps de roche ayant des vitesses sismiques différentes, des densités différentes, des porosités différentes ou toutes ces caractéristiques différentes.

2. Une diagraphie (well log) consiste à mesurer, à l'aide de différentes sondes, les caractéristiques des roches traversées lors d'un forage. D'une manière générale, on appelle diagraphie tout enregistrement d'une caractéristique d'une formation géologique traversée par un sondage en fonction de la profondeur.

ou

$$v_k^2 = \frac{\bar{V}_k^2 t_k - \bar{V}_{k-1}^2 t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \quad (2.6)$$

avec  $t_0 = 0$  et où  $V_k$  et  $\bar{V}_k$  sont respectivement les vitesses moyennes et vitesses quadratiques moyennes pour les tranches de terrains entre les horizons au temps 0 et  $k$ .

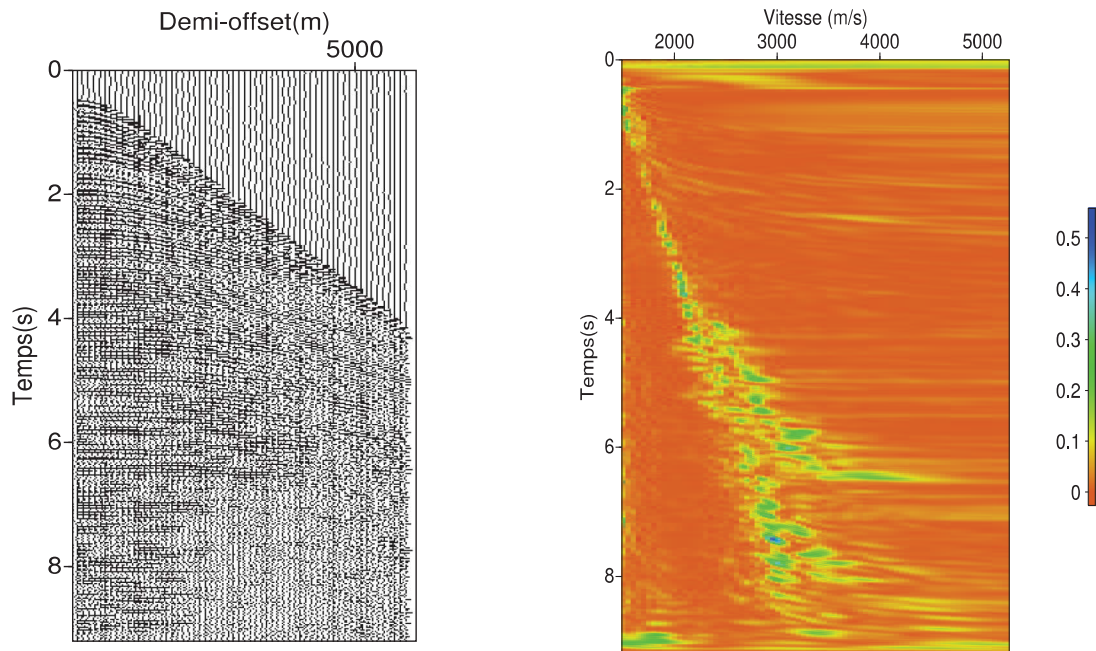
Cette dernière expression est appelée **formule de Dix**. Elle est importante, car la sismique donne généralement accès aux vitesses quadratiques moyennes. Ces dernières sont supérieures aux vitesses moyennes c'est à dire  $\bar{V}_k > V_k$  [Cordier, 1983].

- Vitesses de correction ou de sommation  $V_{stack}$ . Dans les collections CMP gathers pour un réflecteur horizontal, le temps de réflexion en fonction de l'offset est régi par l'équation (2.1) :  $t = \sqrt{t_0^2 + \frac{(2h)^2}{c^2}}$ . La vitesse de correction ou de sommation est la valeur estimée  $V_{stack}$  de  $c$  permettant de ramener tous les temps de réflexion au temps de réflexion à offset nul appelé rayon en **autocollimation** en appliquant une correction

$$\Delta t = t - \sqrt{t^2 - \frac{(2h)^2}{c^2}} = -t_0 + \sqrt{t_0^2 + \frac{(2h)^2}{c^2}}.$$

Les différents types de vitesses exposés ci-dessus sont exploités pour construire un modèle de vitesse qui est supposé approcher le plus possible la vitesse de propagation des ondes dans le milieu exploré. Cette vitesse de propagation estimée, utilisée pour l'étape d'imagerie, sera appelée **vitesse de migration**. Elle sera la vitesse dont nous parlerons le plus fréquemment dans la suite de ce document.

Sur la figure (2.7) ci-dessous nous montrons un exemple de résultat d'analyse de vitesse par balayage ou *scan* sur une collection CMP de données réelles. Un critère d'optimisation (maximisation) appelé semblance (que nous exposerons dans la suite) est utilisé pour choisir la vitesse qui réalise au mieux la correction.



(a) Collection CMP de données réelles. (b) Analyse de vitesse par balayage de la collection CMP de la figure (2.7a) ci-contre.

FIGURE 2.7 – Exemple d’analyse de vitesse : Le critère de semblance est utilisé pour pointer la vitesse qui effectue au mieux la correction des évènements de réflexion.

### 2.3.2 Imagerie

Cette étape est communément appelée migration. Il existe deux types de migration :

- la **migration temps** qui a pour but de replacer les évènements de réflexion à leur position temps correcte. L’image résultante est présentée en terme de temps de trajet et non de profondeur, et doit être convertie en profondeur avec une connaissance précise du modèle de vitesse.
- la migration profondeur qui doit replacer les réflecteurs à leur position spatiale correcte.

Nous voyons que quelque soit le type de migration, l’objectif premier est de repositionner correctement à leur place les évènements de réflexion enregistrés en surface. La migration profondeur se décompose en deux grandes familles, à savoir la migration profondeur avant sommation et la migration profondeur après sommation. Ces

deux familles de migration profondeur peuvent être effectuées dans différents domaines (point tir commun, offset commun, ...). Le résultat de la migration dépend du modèle de vitesse utilisé, car elle est le lien qui relie les données temps et l'image profondeur obtenue.

Dans la suite de ce document, nous utiliserons le terme migration en référence à la migration profondeur avant sommation effectuée dans le domaine offset commun. La figure (2.9) montre le résultat de la migration de nos données synthétiques *refcurve* pour le domaine offset nul (figure 2.8).

Les aspects intuitifs et théoriques de cette étape qu'est la migration seront exposés plus en détail dans le chapitre suivant.

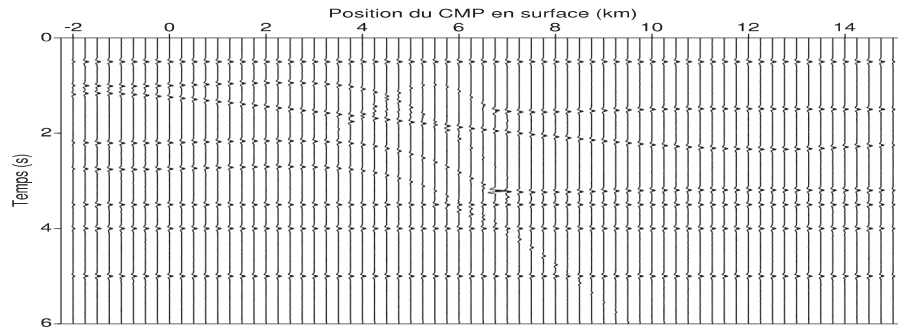


FIGURE 2.8 – Collection de traces à offset nul du modèle *refcurve*. Les réflecteurs sont distordus

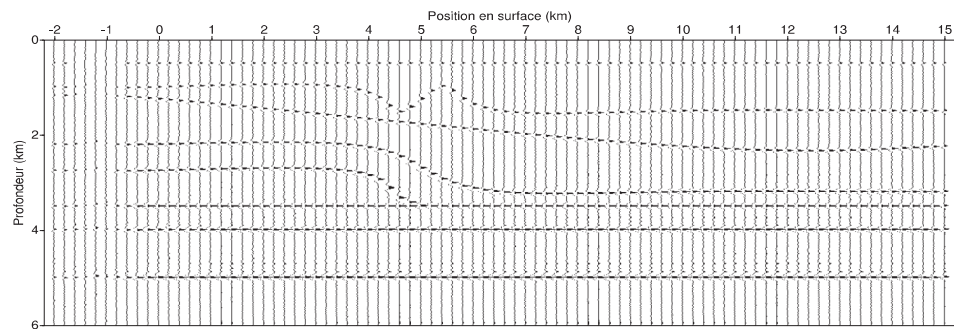


FIGURE 2.9 – Après migration, les événements de réflexions sont repositionnés en profondeur



# Migration profondeur et Common Image Gathers

*There is no gospel of seismic imaging concepts.  
It is up to us individuals to find the best way we can.*

Jon Claerbout.

DANS ce chapitre nous parlerons de la migration profondeur en présentant la théorie de la migration dite de Kirchhoff. Une définition du concept du *common image gathers* (CIG) dans le domaine offset sera aussi développé dans ce chapitre.

Le terme *évènement* dont nous donnons une définition ci-dessous et une illustration sur la figure 3.1, reviendra tout au long du document.

**Définition 3.0.1.** *On appelle évènement toute variation cohérente d'amplitudes des signaux sismiques qui caractérise une diffraction, une réflexion ou une réfraction, produite par l'arrivée de l'énergie sismique. Un évènement peut être observé sur une trace ou un ensemble de plusieurs traces. Un évènement dans une section sismique peut représenter une interface géologique, telle qu'une faille ou un changement de propriétés (densité, porosité, ...) dans une couche.*

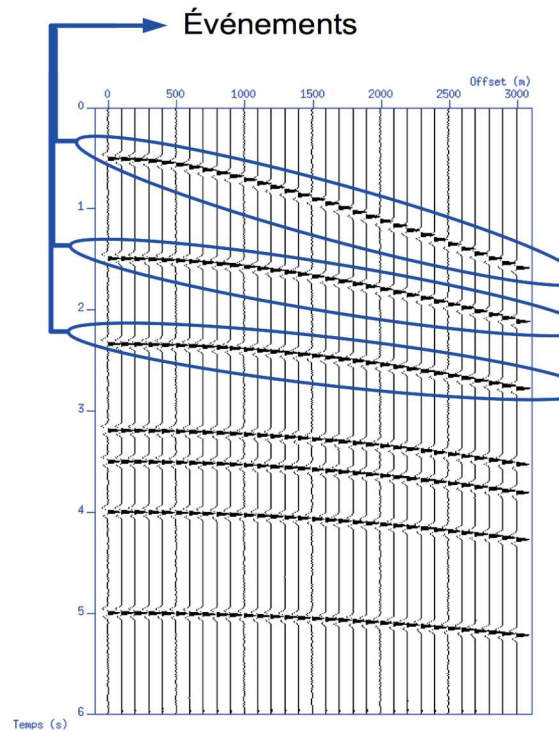


FIGURE 3.1 – Illustration d'évènement sur un CMP

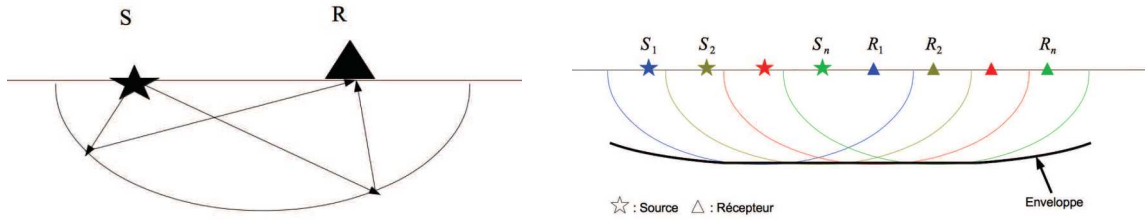
## 3.1 Migration Profondeur

Comme nous l'avons introduit au chapitre précédent, la migration est l'étape du processus des traitements de données sismique qui vise à repositionner correctement les évènements de réflexion à leur place à partir des enregistrements effectués en surface. Ce processus dépend fortement de l'estimation du modèle de vitesse de propagation des ondes pour sa mise en œuvre. Cette technique d'imagerie s'appuie sur l'équation d'onde et le plus souvent sur l'équation d'onde en milieu acoustique hétérogène pour la sismique réflexion.

### 3.1.1 Illustration de la migration profondeur dans le domaine offset commun

Pour illustrer ce qu'est la migration, supposons que le milieu ne comporte qu'un seul point diffractant et que la vitesse de propagation des ondes est constante (ne varie pas avec la position). Les traces sismiques sont enregistrées avec l'offset à  $2h$ . Pour ce couple source-récepteur et une vitesse de migration donnée, l'ensemble des points du sous-sol de position  $\vec{x}$  qui sont des points diffractant potentiels définit ce

qu'on appelle une surface d'isochrone (ellipsoïde pour une vitesse constante)(figure 3.2(a)). Un réflecteur pouvant se définir comme un ensemble de points diffractants, en déplaçant ce couple source - récepteur, nous construirons à chaque fois une surface d'isochrone. L'enveloppe de la famille d'isochrone paramétrisées par  $h$  définit alors la géométrie d'un évènement migré (figure 3.2(b)). Cette vision intuitive servait de principe pour effectuer la migration dans les années 20 où elle se faisait à base de règles et compas. Les méthodes actuelles reposent sur l'équation des ondes et le principe d'imagerie que l'on doit à Claerbout [1971]. Nous exposerons le principe et la représentation cinématique de la migration dans le paragraphe qui suit.



- (a) Le temps de trajet définit l'isochrone qui est une ellipse (vitesse constante) de focale source (S) et récepteur (R).
- (b) La géométrie de l'évènement migré est donnée par l'enveloppe des isochrones indexées par l'offset associé à chaque couple source récepteur.

FIGURE 3.2 – Construction de l'évènement migré dans le domaine iso-offset en 2D.

### 3.1.2 Propagation des ondes sismiques en milieux acoustiques

Pendant l'acquisition sismique, l'on mesure la composante verticale de la vitesse de déplacement des particules. Une quantité scalaire  $\psi(\vec{x}, t)$  décrivant le champs d'ondes acoustiques en un point du sous-sol de vecteur position  $\vec{x}(x, y, z)$  ( $x, y$  et  $z$  sont respectivement les coordonnées latérale, transversale et profondeur) et à un instant  $t$  est enregistrée. L'équation de mouvement d'une particule dans un milieu acoustique hétérogène, caractérisé par des fonctions régulières de compressibilité  $k(\vec{x})$  et de densité  $\rho(\vec{x})$ , s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \psi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = k(\vec{x}) \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{1}{\rho(\vec{x})} \vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t) \right). \quad (3.1)$$

Dans le cas d'un milieu hétérogène à densité constante  $\rho(\vec{x}) = \rho$ , qui est le modèle communément utilisé en sismique réflexion, l'équation des ondes acoustiques devient

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} &= \frac{k(\vec{x})}{\rho} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t)) \\ &= \frac{k(\vec{x})}{\rho} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t),\end{aligned}\tag{3.2}$$

où  $v(\vec{x}) = \sqrt{\frac{k(\vec{x})}{\rho}}$  est la vitesse de propagation des ondes acoustiques. Il est à noter que si le milieu de propagation est homogène, la fonction de compressibilité devient constante  $k(\vec{x}) = k$  et la vitesse de propagation est également constante.

Finalement, en tenant compte du terme source  $s(\vec{x}, t)$  qui engendre le champ d'ondes de compression  $\psi(\vec{x}, t)$ , l'équation des ondes (3.2) s'écrit :

$$\frac{1}{v^2(\vec{x})} \frac{\partial^2 \psi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi(\vec{x}, t) = s(\vec{x}, t)\tag{3.3}$$

Notons que  $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$  est l'opérateur gradient et  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  est le laplacien.

### 3.1.3 Principe d'imagerie et représentation cinématique de la migration

Cette partie est en grande partie inspirée des thèses de Assouline [2001] et de Liu [1995] qui exposent clairement la théorie de la migration profondeur et sa représentation cinématique.

#### 3.1.3.a Principe d'imagerie

Le champ d'onde incident généré par une source sismique se propage dans le sol. À la rencontre d'un point diffractant, un second champ d'onde est créé. Ce champ d'onde réfléchi ainsi engendré se propage dans le sol et est enregistré en surface sous forme de trace sismique. Partant de ce fait, Claerbout [1971] a énoncé un principe d'imagerie qui est à la base de bon nombre de méthodes de migration utilisées de nos jours dans l'industrie (Reverse Time Migration, Migration de Kirchhoff,...). Ce principe stipule que *s'il y a une coïncidence temporelle entre deux champs d'ondes en un point précis du milieu alors ce point est nécessairement un point diffractant.*

Considérons un réflecteur qui est un ensemble de points diffractant dans un milieu où la vitesse de propagation des ondes est  $v(\vec{x})$  avec  $\vec{x}$  le vecteur position d'un point du milieu. Le champ d'onde total  $\psi$  en un point de position  $\vec{x}$  au-dessus du réflecteur s'écrit comme la superposition du champ d'onde incident  $\psi_i$  engendré par une source de vecteur position  $\vec{s}$  et du champ réfléchi montant  $\psi_r$  enregistré par le récepteur de vecteur position  $\vec{r}$ .

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi_i(\vec{x}, t) + \psi_r(\vec{x}, t). \quad (3.4)$$

La migration profondeur, qui a pour but la construction de l'image des réflecteurs à partir des enregistrements effectués en surface et d'un modèle de vitesse de propagation supposé représenter correctement la vitesse exacte, se décompose comme suit :

- une modélisation de la propagation du champ d'ondes incident  $\psi_i(\vec{x}, t)$  engendré par la source  $\mathbf{S}$  de vecteur position  $\vec{s}$ . Ce champ d'ondes incident est modélisé avec l'équation des ondes acoustiques en milieux hétérogène :

$$\frac{1}{v^2(\vec{x})} \frac{\partial^2 \psi_i(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi_i(\vec{x}, t) = s(\vec{x}, t), \quad (3.5)$$

avec pour conditions initiales :

$$\psi_i(\vec{x}, t=0) = \frac{\partial \psi_i}{\partial t}(\vec{x}, t)|_{t=0} = 0. \quad (3.6)$$

- une modélisation de la rétropropagation du champ d'ondes réfléchi  $\psi_r(\vec{r}, t)$  enregistré par différents récepteurs de vecteurs de positions  $\vec{r}$ . Le champ d'ondes réfléchi satisfait l'équation des ondes :

$$\frac{1}{v^2(\vec{x})} \frac{\partial^2 \psi_r(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi_r(\vec{x}, t) = 0. \quad (3.7)$$

Le champ d'ondes réfléchi rétropropagé noté  $\psi_{rr}$  est défini comme la solution de l'équation de propagations des ondes :

$$\frac{1}{v^2(\vec{x})} \frac{\partial^2 \psi_{rr}(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \psi_{rr}(\vec{x}, t) = \int_{\Sigma} \delta(\vec{x} - \vec{r}) \psi_r(\vec{r}, t) d^2 \vec{r}, \quad (3.8)$$

avec pour conditions finales :

$$\psi_{rr}(\vec{x}, t = 0) = \frac{\partial \psi_{rr}}{\partial t}(\vec{x}, t)|_{t=T} = 0, \quad (3.9)$$

où  $\Sigma$  est la surface où est disposée l'ensemble des récepteurs ayant servi à enregistrer le champ d'ondes réfléchi et  $T$  le temps d'enregistrement de ce champ d'ondes.

Notons que les deux modélisations impliquées peuvent se faire en considérant des extrapolateurs du champ d'ondes basés soit sur l'approximation WKBJ, soit sur l'approximation paraxiale de l'équation des ondes.

- l'application du principe d'imagerie de Claerbout [1971] qui consiste à rechercher les points du milieu où il y a coïncidence temporelle entre le champ d'onde incident et le champ d'ondes réfléchi rétropropagé. L'autocorrélation des deux champs d'ondes prise à l'instant  $t = 0$ , permet d'évaluer cette coïncidence temporelle. Plus précisément, l'image migrée profondeur, avec un champ de vitesse  $v(\vec{x})$  en un point  $\vec{x}$  du sous-sol s'écrit :

$$m^v(\vec{x}) = \int \psi_{rr}(\vec{x}, t) \psi_i(\vec{x}, t) dt \quad (3.10)$$

Cette formule peut s'exprimer dans le domaine fréquentiel en utilisant le théorème de Parseval généralisé :

$$m^v(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \int \psi_{rr}(\vec{x}, \omega) \psi_i^*(\vec{x}, \omega) d\omega \quad (3.11)$$

avec  $\psi_i^*$  le conjugué complexe de  $\psi_i$

Suivant l'approximation (WKBJ, approximation paraxiale de l'équation d'ondes...) des champs d'ondes incidents et réfléchis rétropropagés et du domaine de migration choisi nous aurons des formules de migrations différentes. L'objectif final n'étant pas d'étudier la migration, nous nous focaliserons plutôt sur sa représentation cinématique qui a une importance capitale pour la suite de ce document.

### 3.1.3.b Représentation cinématique de la migration

Dans ce paragraphe, les équations servant à décrire la migration sont construites à partir de la loi de Snell-Descartes. Elles sont la représentation cinématique du processus de migration.

Considérons un cas d'étude 2D. Soit  $\vec{s} = (x_s(\xi), z_s(\xi))$  le vecteur position de la source et  $\vec{r} = (x_r(\xi), z_r(\xi))$  le vecteur position du récepteur localisé en surface, où  $\xi$  est un paramètre de position en surface. Par exemple, dans le domaine offset commun,  $\xi$  est le point milieu entre la source et le récepteur; dans le domaine point tir,  $\xi$  est le paramètre désignant la position du récepteur, ce qui est pour une source fixée, l'offset. Pour tout point  $\vec{x} = (x, z)$  dans le milieu,  $\tau_s(\vec{s}, \vec{x})$  désigne le temps de trajet de l'onde de la source de vecteur de position  $\vec{s}$  au point de vecteur position  $\vec{x}$ , et  $\tau_r(\vec{x}, \vec{r})$  le temps du trajet du point de vecteur de position  $\vec{x}$  au récepteur de vecteur position  $\vec{r}$  (voir figure 3.3).

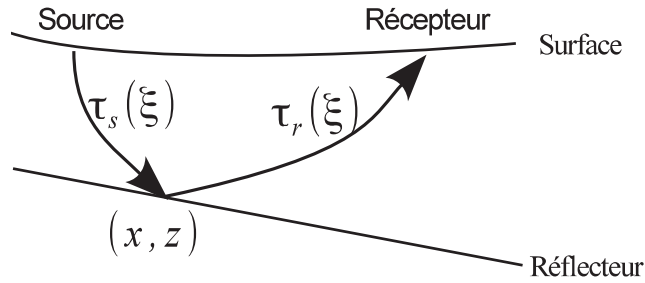


FIGURE 3.3 – Le temps de trajet de la source au récepteur en passant par un point de coordonnées  $(x, y)$ .

Pour un réflecteur, on peut calculer le temps x total du trajet de réflexion  $t(\xi)$  en utilisant

$$\tau_s(\vec{s}, \vec{x}) + \tau_r(\vec{x}, \vec{r}) = t(\xi), \quad (3.12)$$

où le point de réflexion de vecteur de position  $\vec{x}$  satisfait la loi de Snell-Descartes,

$$[\nabla_{\vec{x}} \tau_s(\vec{s}, \vec{x}) + \nabla_{\vec{x}} \tau_r(\vec{x}, \vec{r})] \cdot \frac{d\vec{x}}{d\xi} = 0. \quad (3.13)$$

Les équations (3.12) et (3.13) décrivent la modélisation du problème direct pour un réflecteur donné. D'un autre côté, la fonction du temps de trajet total  $t(\xi)$  peut être aussi utilisée pour déterminer la position du réflecteur. Remarquons que le vecteur position  $\vec{x}$  dépend du paramètre  $\xi$ . En dérivant l'équation (3.12) par rapport au paramètre  $\xi$ , on obtient

$$\frac{\partial \tau_s}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_r}{\partial \xi} + [\nabla_{\vec{x}} (\tau_s + \tau_r)] \cdot \frac{d\vec{x}}{d\xi} = \frac{dt}{d\xi}. \quad (3.14)$$

En utilisant l'équation (3.13) pour éliminer le troisième terme de l'expression à gauche de l'égalité dans l'équation (3.14), on obtient

$$\frac{\partial \tau_s(\vec{s}, \vec{x})}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_r(\vec{x}, \vec{r})}{\partial \xi} = \frac{dt}{d\xi}. \quad (3.15)$$

Ainsi, chaque point de vecteur position  $\vec{x} = (x, z)$  du réflecteur (donc le réflecteur lui-même) est déterminé par la résolution du système d'équations formé des équations (3.12) et (3.15); i.e  $\vec{x}$  doit satisfaire

$$\tau_s(\vec{s}, \vec{x}) + \tau_r(\vec{x}, \vec{r}) = t(\xi), \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \tau_s(\vec{s}, \vec{x})}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_r(\vec{x}, \vec{r})}{\partial \xi} = \frac{dt}{d\xi}. \quad (3.17)$$

L'équation (3.17) montre que le réflecteur est juste l'enveloppe des isochrones formés par différents couples source - récepteur. Cette équation est aussi connue comme condition de stationnarité dans le cas de la migration dite de *Kirchhoff*. Les équations (3.16) et (3.17) sont valables pour n'importe quelle géométrie d'acquisition. En particulier, considérons le cas des données rangées par offset commun. Sans perte de généralité, supposons que  $z_s = z_r = 0$ , nous pouvons ainsi repérer la source et le récepteur juste par leurs coordonnées horizontales respectives  $x_s$  et  $x_r$ . Notons  $x_M$  le point milieu et  $h$  le demi-offset :

$$x_s = x_M - h, \quad x_r = x_M + h. \quad (3.18)$$

Comme le paramètre  $\xi = x_M$  dans ce cas, (3.16) et (3.17) deviennent :

$$\tau_s(\vec{s}, \vec{x}) + \tau_r(\vec{x}, \vec{r}) = t(x_M, h), \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \tau_s(\vec{s}, \vec{x})}{\partial x_M} + \frac{\partial \tau_r(\vec{x}, \vec{r})}{\partial x_M} = \frac{\partial t}{\partial x_M}. \quad (3.20)$$

Les équations (3.19) et (3.20) montrent que si le temps de trajet  $t(x_M, h)$  (et donc  $\frac{\partial t}{\partial x_M}$ ) est connu pour un offset  $h$  donné alors on peut calculer une image profondeur pour chaque position en surface  $x$ . En outre, si la vitesse de migration est égale à la vraie vitesse (vitesse du milieu), l'image profondeur doit être indépendant de l'offset  $h$  car le sol étant unique, quelque soit l'offset on doit avoir la même image ; Sinon, pour

une vitesse de migration fausse (différente de la vitesse du milieu), l'image profondeur varie avec l'offset  $h$ . Par conséquent, les images profondeurs avec différents offsets apportent des informations qui permettront de corriger la vitesse de migration, c'est l'*analyse de vitesse de migration*.

## 3.2 Common Image Gathers (CIG)

Le processus de migration pour une image 3D produit à terme un cube d'images qui est fonction de trois coordonnées spatiales  $I(x, y, z)$ . Pour pouvoir effectuer une analyse de la vitesse de migration ou une analyse de l'amplitude des traces formant le cube d'images, il est nécessaire d'utiliser la redondance des données sismiques et de produire un cube d'image avec des dimensions supplémentaires aux coordonnées spatiales. Comme nous l'avons vu dans la section 3.1 précédente, la migration avant sommation produit des images dans différents domaines d'imagerie. En particulier dans le domaine offset commun, nous avons vu que pour chaque offset nous avons des images qui peuvent varier d'un offset à l'autre si la vitesse de migration est erronée. La dimension offset rajoutée au cube de données images nous donne ce qu'on peut appeler des *images partielles avant sommation*. Si nous nous fixons à une position de surface donnée et que nous observons les images pour les offsets disponibles, nous effectuons une analyse de la vitesse. Le sous-ensemble des données pour une position en surface fixée est ce que nous appellerons *Offset Domain Common Image Gather* ou simplement *Common Image Gather* (CIG) s'il n'y a pas de confusion.

Comme il a été précisé ci-dessus, l'image profondeur obtenue par migration ne dépend pas de l'offset si la vitesse de migration est correcte. Les images ainsi obtenues sont quasi identiques. Un point particulier du milieu aura donc la même position en surface  $x$  et la même profondeur  $z$  quelque soit l'offset sur laquelle on l'observe. Le CIG auquel appartient ce point fera apparaître un événement horizontal. L'allure de cet événement dépend de la vitesse de migration. Elle aura une géométrie sous forme d'hyperbole convexe ( $\smile$ ) si la vitesse moyenne au-dessus du réflecteur est sous-estimée. Dans le cas contraire où la vitesse moyenne au-dessus du réflecteur est surestimée, l'évènement à une géométrie hyperbolique concave ( $\frown$ ). C'est l'allure de cette courbure résiduelle appelée ***Residual MoveOut*** en anglais qui est analysée pour permettre la mise à jour du modèle de vitesse. Le chapitre suivant montrera de manière plus formelle comment on obtient cette courbure résiduelle et comment son analyse est faite.



## Sommaire

- 4.1 Semblance
- 4.2 Equation du RMO
- 4.3 Analyse du RMO
- 4.4 Étude de la sensibilité de la semblance par rapport au modèle décrivant de la variation de l'amplitude avec l'offset
- 4.5 Avantages et insuffisance de l'analyse classique du RMO

## Analyse classique du Residual Move Out

*Today's problems come from yesterday's solutions.*

Peter Senge.

Ce chapitre nous permettra d'introduire le principe de l'analyse de la courbure résiduelle (RMO) observée sur les CIG précédemment introduits. Nous l'appellerons analyse classique du RMO car c'est la méthode la plus répandue dans le monde industriel et aussi parce que dans la suite du document, nous proposerons une alternative stochastique de cette analyse.

Nous commencerons par exposer la mesure de cohérence des événements appelée **semblance** telle qu'elle a été introduite par Taner et Koelher [1969] et ses variantes proposées par divers auteurs, car elle constitue le critère principal permettant de faire l'analyse du RMO. Nous présenterons ensuite comment l'équation régissant cette courbure résiduelle est obtenue. L'analyse classique du RMO sera ensuite détaillée avec ses avantages et ses insuffisances.

## 4.1 Semblance

La semblance est une mesure de cohérence qui a été introduite pour permettre de déterminer les vitesses de correction ou encore appelée vitesse de sommation dans les collections CMP par *analyse par balayage* ou encore *scan*. En effet, comme nous l'avons vu au paragraphe 2.2.1 de ce document, le temps de trajets des évènements de réflexion en fonction de l'offset est régi par l'équation ci-dessous :

$$t^2 = t_0^2 + \frac{(2h)^2}{v^2}. \quad (4.1)$$

Nous considérons que les  $N_o$  traces formant le CMP  $\mathcal{P}$  sont des observations échantillonnées de taille  $N_t$  d'un signal continu dans le temps. Dans la suite ce document, nous noterons par  $g_j$  la fonction dont les observations discrètes constituent la trace à offset  $h_j$  du CMP  $\mathcal{P}$  et par  $\hat{g}$  son estimation.

Dans le plan temps-offset que définit le CMP, l'équation (4.1) ci-dessus représente une **famille d'hyperboles** dont l'ordonnée commune au sommet est le temps  $t_0$  de trajet pour l'offset nul et dont le paramètre  $v$  détermine la pente des asymptotes (figure 4.3(a)). Intuitivement, la semblance est la sommation des amplitudes des traces normalisées par le nombre de traces et la somme des carrées des amplitudes des traces le long de cette courbure hyperbolique défini par  $v$  pour chaque temps  $t_0$ . L'information de réflexion étant contenue dans l'ondelette tout entière, on définit une fenêtre assez grande centrée en  $t_0$  contenant l'ondelette pour y faire cette sommation normalisée (figure 4.3). Soit  $\mathcal{I}_0(t_0, w)$  l'ensemble des indices des temps d'arrivées présents dans la fenêtre centrée en  $t_0$  d'indice  $i_{t_0}$ , c'est à dire  $\mathcal{I}_0(t_0, w) = \{1, \dots, N_t\} \cap \{i_{t_0} - w, \dots, i_{t_0} + w\}$ .

La semblance que nous appellerons **semblance classique** pour une vitesse  $v$  et un temps d'arrivée  $t_0$  est calculée à partir du CMP  $\mathcal{P}$  et son l'expression est donnée par :

$$S(\mathcal{P}, v, \mathcal{I}_0(t_0, w)) = \frac{\sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0(t_0, w)} \left( \sum_{j=1}^m g_j \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right) \right)^2}{m \sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0(t_0, w)} \left( \sum_{j=1}^m g_j^2 \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right) \right)}, \quad (4.2)$$

où  $g_j(t)$  est une fonction donnant l'amplitude de la trace pour le temps  $t$  à l'offset

$h_j$  du CMP  $\mathcal{P}$ ;  $t_{i_0}$  étant le temps de trajet pour l'offset nul dans la fenêtre centrée en  $t_0$ .

Pour le calcul de la semblance, il arrive que pour certains  $j \in \{1, \dots, N_o\}$ , les amplitudes des traces  $g_j(t)$  constituant le CMP ne soient pas disponibles pour les temps  $t$ . La trace à l'offset  $h_j$  est alors ignorée pour le calcul de la semblance. Nous définissons ainsi par  $m \leq N_o$  le nombre de traces prises en compte pour le calcul. Dans le calcul de la semblance, l'interpolation linéaire est le plus souvent utilisée pour estimer les  $g_j(\cdot)$  (figure 4.2).

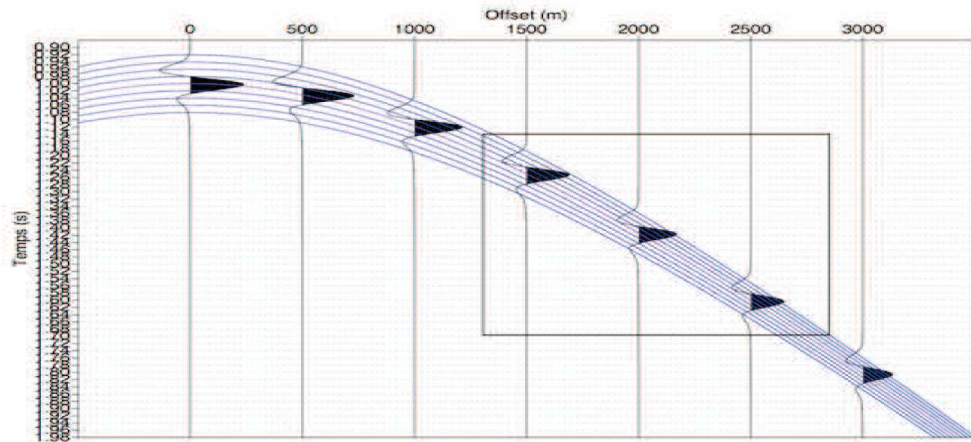


FIGURE 4.1 – Représentation fenêtre pour le calcul de la semblance

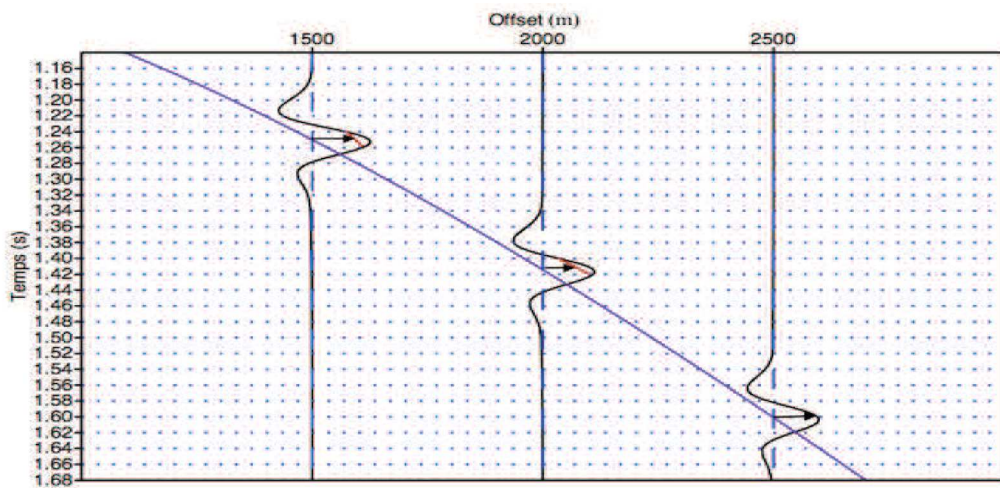
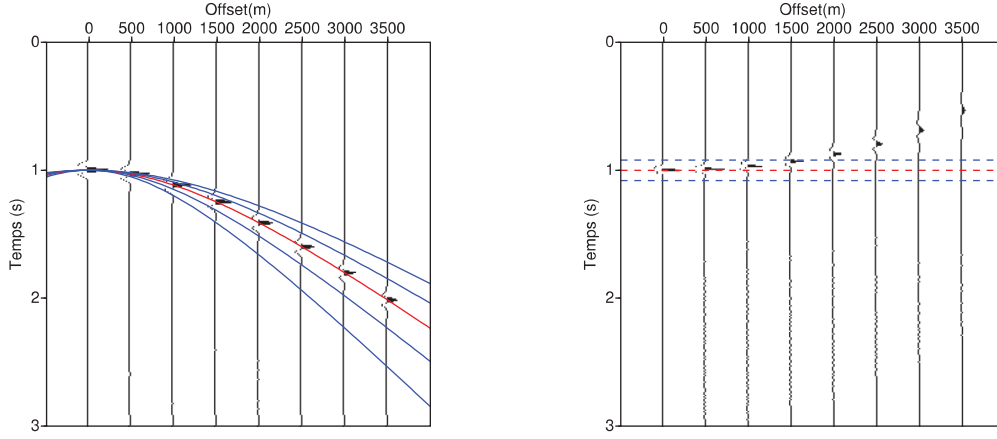


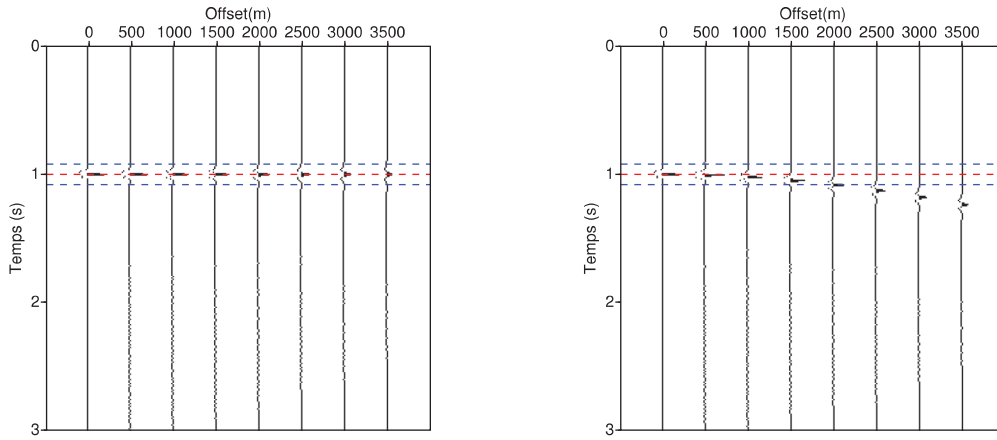
FIGURE 4.2 – Représentation des amplitudes et de leurs interpolations

La figure 4.1 présente les hyperboles pour les indices  $i_0 \in \mathcal{I}_0$  avec  $t_0 = 1s$ . La

figure 4.2 quant à elle montre les amplitudes des traces ( $\rightarrow$ ) obtenue parfois par une interpolation linéaire ( $\backslash$ ).



(a) Famille d'hyperboles dont le sommet se trouve en  $t_0 = 1s$  à l'offset nul. (b) CMP corrigé avec une vitesse  $v < c$  où  $c$  est la vitesse du milieu.



(c) CMP corrigé avec une vitesse  $v = c$  où  $c$  est la vitesse du milieu. (d) CMP corrigé avec une vitesse  $v > c$  où  $c$  est la vitesse du milieu.

FIGURE 4.3 – Représentation de la fenêtre (pointillés bleus) pour différentes corrections (b)-(d) avec la famille d'hyperboles sur (a).

Sarkar *et al.* [2001] ont montré que l'expression de la semblance classique (équation (4.2)) introduite par Taner et Koelher [1969] suppose implicitement que l'amplitude de l'ondelette caractérisant l'évènement de réflexion ne varie pas avec l'offset.

Le modèle plutôt simple de cette mesure en fait sa robustesse en présence du bruit et en fait son succès dans le traitement des données sismiques [Sarkar *et al.*, 2002].

En présence d'une forte variation de l'amplitude avec l'offset (AVO), d'un changement de polarité de l'ondelette tel qu'on en rencontre très souvent dans les données réelles, la qualité de la semblance classique est fortement dégradée. C'est ainsi que plusieurs auteurs ont proposé, des alternatives à cette mesure de cohérence qu'est la semblance classique.

Symes et Kern [1994] ont proposé une méthode de mesure de la cohérence appelée la *semblance différentielle*. Cette méthode est mise en œuvre en faisant la différence des traces adjacentes. Le point faible de cette méthode est qu'elle ne donne pas une bonne résolution des paramètres estimés. Cela vient de la différence des traces des offsets voisins qui rend la courbe de la semblance peu sensible aux variations d'amplitude.

Biondi et Kostov [1989] ainsi que Key et Smithson [1990] ont quant à eux proposé une approche alternative basée sur l'étude des valeurs propres de la matrice de variance-covariance du signal. Cette méthode des *valeurs propres* exploite le fait que cette matrice est de rang faible en absence de bruits, incorpore les effets d'AVO et d'autres variations complexes.

Sarkar *et al.* [2001, 2002] ont proposé deux méthodes de mesure de la cohérence appelées **AB-Semblance** et **AK-Semblance** qu'ils ont présentées comme étant des généralisations de la semblance classique. L'avantage de ces deux mesures est qu'elles permettent de représenter les valeurs de semblance calculées pour toutes les vitesses et tous les temps échantillonnés de façon similaire à la semblance classique. Ces mesures sont plus coûteuses en temps de calcul que la semblance classique, mais elles permettent de prendre en compte les variations d'amplitude et le changement de polarité. Pour définir la AB-semblance et la AK-semblance, Sarkar *et al.* [2001, 2002] ont défini une mesure appelée **semblance généralisée** qui a pour expression :

$$S_G(\mathcal{P}, v, \mathcal{I}_0(t_0, w)) = 1 - \frac{\sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0(t_0, w)} \sum_{j=1}^m (M(t_{i_0}, h_j, v) - g_j(t_h(i_0, v)))^2}{\sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0(t_0, w)} \sum_{j=1}^m g_j^2(t_h(i_0, v))} \quad (4.3)$$

avec

$$t_h(i_0, v) = \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}}$$

et où, comme précédemment,  $v$  est la vitesse de sommation pour laquelle on calcule la semblance,  $t_0$  le temps de trajet pour l'offset nul sur laquelle on centre la fenêtre et  $i_0$  indice de temps appartenant à l'ensemble  $\mathcal{I}_0$  des indices des temps de trajet présents dans la fenêtre centrée en  $t_0$  du CMP  $\mathcal{P}$  et  $M(t_{i_0}, h_j, v)$  un modèle paramétrique qui modélise les amplitudes des traces dans le CMP  $\mathcal{P}$  en fonction de l'offset. Le calcul de la semblance généralisée s'effectue donc en trois étapes. La première étape est celle du choix du modèle  $M$  décrivant la variation de l'amplitude avec l'offset. Les paramètres du modèle  $M$  sont déterminés dans la deuxième étape. Dans la troisième étape, on remplace le modèle  $M$  de l'équation (4.3) par celui obtenu à l'issue de la deuxième étape.

Le choix du modèle détermine donc le type de semblance que nous obtiendrons. Si par exemple nous faisons le choix d'un modèle indépendant de l'offset  $M(t_{i_0}, h_j, v) = A(t_{i_0}) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m g_j \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right)$  nous obtenons une expression de la semblance généralisée qui est celle de la semblance classique (voir annexe A)

$$S_G(\mathcal{P}, v, \mathcal{I}_0(t_0, w)) = \frac{\sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0(t_0, w)} \left[ \sum_{j=1}^m g_j \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right) \right]^2}{m \sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0(t_0, w)} \left[ \sum_{j=1}^m g_j^2 \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right) \right]}.$$

Sarkar *et al.* [2001] ont utilisé le modèle paramétrique basé sur la simplification de l'équation de Zoeppritz proposée par Shuey [1985] :

$$M(t_{i_0}, h_j, v) = A(t_{i_0}) + B(t_{i_0}) \sin^2 \theta_{h_j}, \quad (4.4)$$

où  $\theta_{h_j}$  est l'angle d'incidence au réflecteur pour l'offset  $h_j$  pour prendre en compte la variation de l'amplitude avec l'offset. Ainsi pour les  $N$  échantillons de temps présents dans la fenêtre centrée autour de  $t_0$ , il y a  $2N$  paramètres à estimer. Cette approche où les coefficients  $A(t_{i_0})$  et  $B(t_{i_0})$  sont estimés indépendamment est appelée l'AB-semblance.

Malheureusement, cette approche très flexible permet aux évènements avec des combinaisons de vitesse de sommation et d'AVO incorrectes d'avoir des valeurs de semblance élevées. Il en résulte une faible précision de la vitesse de sommation  $v$  estimée. Ainsi, Sarkar *et al.* [2002] ont fait une hypothèse supplémentaire pour réduire la flexibilité du modèle. Cette hypothèse suppose que la variation de l'amplitude avec l'offset le long de la courbe du NMO doit être proportionnelle pour tous les échan-

tillons de temps présents dans la fenêtre. Ainsi le ratio  $K = \frac{B(t_{i_0})}{A(t_{i_0})}$  doit être constant pour tous les échantillons de temps  $t_{i_0}$  présents dans la fenêtre. Cette hypothèse leur a permis de modéliser l'amplitude en fonction de l'offset comme suit :

$$M(t_{i_0}, h_j, v) = A(t_{i_0})(1 + K \sin^2 \theta_{h_j}) \quad (4.5)$$

où  $K$  est fixé pour la fenêtre. Nous avons ainsi  $N_t + 1$  paramètres à estimer pour ce modèle. Cette approche a été nommée par les auteurs « AK-Semblance ».

Fomel [2009] quant à lui a proposé une approche similaire à l'AB-Semblance. Il a utilisé comme modèle

$$M(t_{i_0}, h) = A(t_{i_0}) + B(t_{i_0})h_j.$$

L'estimateur des moindres carrés ordinaires est donc le meilleur estimateur linéaire sans biais du modèle  $M$ .

Al-Yahya [1989] a proposé une méthode d'analyse de vitesse basée sur les images partielles avant sommation que nous avons présentées au paragraphe (3.2). L'idée est que si la vitesse de migration est incorrecte alors il apparaît une courbure résiduelle (RMO). Estimer cette courbure permettra de mettre à jour la vitesse de migration.

## 4.2 Equation du RMO

Pour mettre à jour le modèle de vitesse après migration, Il nous faut pouvoir quantifier le non-alignement horizontal des événements apparaissant sur les CIG obtenus après migration. Pour cela, regardons ce qui se passe lors de la migration avec une vitesse qui n'est pas celle du milieu.

### 4.2.1 Réflecteur horizontal

Soit  $Z$  la profondeur du réflecteur horizontal, la vitesse moyenne du milieu au-dessus du réflecteur sera noté  $c$  et le temps de trajet enregistré sera quant à lui désigné par  $t$ . Si nous considérons par  $h$  le demi - offset, le théorème de Pythagore (voir figure 4.4a) nous permet d'écrire le temps de trajet comme

$$t = 2 \frac{\sqrt{Z^2 + h^2}}{c}. \quad (4.6)$$

Si au lieu de la vitesse  $c$  du milieu, nous utilisons une vitesse  $v \neq c$  pour la migration, le réflecteur se positionnera à la profondeur apparente  $z_h(\gamma)$  et le temps de trajet  $t$  sera donné par

$$t = 2 \frac{\sqrt{z_h^2(\gamma) + h^2}}{v}. \quad (4.7)$$

Notons que le temps de trajet dans l'équation (4.6) et l'équation (4.7) est le même, car c'est le temps de trajet observé. En éliminant le temps de trajet  $t$  entre (4.6) et (4.7), nous obtenons l'équation suivante :

$$z_h(\gamma) = \sqrt{\gamma^2 Z^2 + (\gamma^2 - 1)h^2}, \quad (4.8)$$

où  $\gamma = \frac{v}{c}$ .

L'équation (4.8) donne la relation qui existe entre la profondeur apparente du réflecteur et la profondeur réelle. Nous remarquons donc que lorsqu'une vitesse  $v \neq c$  est utilisée pour la migration, la position apparente dépend alors de l'offset. La position apparente  $z_0$  du réflecteur pour l'offset nul est donc donnée par

$$z_0(\gamma) = \gamma Z. \quad (4.9)$$

Une position apparente à l'offset  $h$  peut donc s'écrire comme fonction de la position apparente pour l'offset nul et de l'offset  $h$  comme suit :

$$z_h(\gamma) = \sqrt{z_0^2(\gamma) + (\gamma^2 - 1)h^2}. \quad (4.10)$$

Cette équation (4.10) définit alors l'allure de l'évènement et permet de calculer la courbure résiduelle (RMO).

Lorsque la vitesse du milieu  $c$  est utilisée, le ratio  $\gamma = 1$ , ainsi les profondeurs apparentes ne dépendent plus de l'offset et sont toutes égales à la profondeur réelle du réflecteur. Par contre si une vitesse  $v < c$  est utilisée pour la migration, alors le ratio  $\gamma = \frac{v}{c} < 1$  et la profondeur apparente décroît avec l'offset d'où l'évènement en forme de sourire observée ( $\smile$ ). Inversement si une vitesse  $v > c$  est utilisée, alors  $\gamma > 1$  et donc la profondeur apparente du réflecteur augmente quand l'offset augmente ; ce qui explique l'hyperbole tournée vers le bas ( $\frown$ ).

### 4.2.2 Réflecteur à géométrie quelconque

Nous avons besoin d'une équation du type de l'équation (4.10) qui serait valide pour tout type de réflecteur. Considérons un réflecteur à géométrie quelconque comme présenté sur la figure 4.4(b).

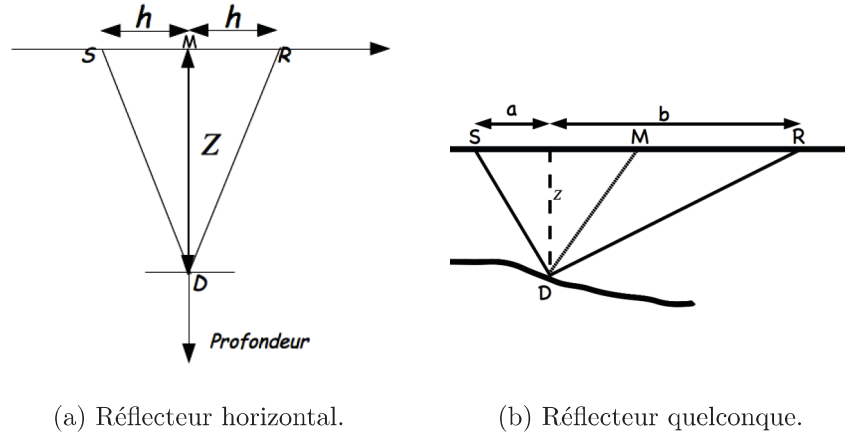


FIGURE 4.4 – Géométrie des réflecteurs illustrant les équations (4.6) et (4.11).

Le temps de trajet de la source au récepteur est donc donné par :

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + Z^2}}{c} + \frac{\sqrt{b^2 + Z^2}}{c}. \quad (4.11)$$

Si la vitesse  $v$  au lieu de  $c$  est utilisée, nous avons :

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + z_\gamma^2}}{v} + \frac{\sqrt{b^2 + z_\gamma^2}}{v}. \quad (4.12)$$

En éliminant le temps  $t$  entre (4.11) et (4.12), nous obtenons

$$z_\gamma^2 = \frac{\gamma^2}{4}X - \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{(a^2 - b^2)^2}{4\gamma^2 X} \quad (4.13)$$

où

$$X = 2Z^2 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{Z^4 + (a^2 + b^2)Z^2 + a^2b^2},$$

et  $a$  et  $b$  indiqués sur la figure 4.4(b).

Remarquons que l'équation (4.13) dépend du réflecteur. Il ne dépend pas seulement de la distance entre la source et le récepteur, mais aussi de la manière dont cette distance est partitionnée en  $a$  et  $b$ . Cette partition est à son tour dépendante de l'inclinaison locale du réflecteur au point de réflexion. Il se montre facilement

que l'équation (4.13) se ramène à l'équation (4.10) en posant  $a = b$  et aussi qu'en cas d'utilisation de la vitesse  $c$ , la profondeur apparente est la profondeur réelle ( $z_h(\gamma = 1) = Z$ ).

### 4.2.3 Impact de la géométrie du réflecteur

La dépendance de l'équation (4.13) par rapport à la géométrie du réflecteur la rend difficile d'utilisation pour l'estimation de l'erreur commise sur la vitesse de migration. Le fait que les images soient horizontalement cohérentes sur les CIG ne dépend pas de la géométrie du réflecteur. Ainsi utiliser l'équation (4.10) au lieu de (4.13) serait acceptable si la vitesse de migration est proche de celle du milieu ( $v \approx c$ ).

L'utilisation de l'équation (4.10), suppose que  $a = b = h$  dans l'équation (4.13). L'équation (4.10) ignore l'effet de la géométrie du réflecteur, ce qui serait justifiable si nous pouvons montrer que la différence des résultats obtenus par les équations (4.10) et (4.13) devient négligeable lorsque nous approchons de la vitesse effective du milieu. C'est ce qu'a montré Al-Yahya [1989] en étudiant la différence entre les profondeurs obtenues par les deux équations. Si  $z_1$  est la profondeur apparente obtenue par l'équation (4.13) et  $z_2$  celle obtenue par l'équation (4.8),

$$z_1^2 = \frac{\gamma^2}{4}X - \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{(a^2 - b^2)^2}{4\gamma^2 X} \quad (4.14)$$

et

$$z_2^2 = \gamma^2 z^2 + (\gamma^2 - 1)h^2. \quad (4.15)$$

La différence  $\Delta z^2$  entre  $z_1^2$  et  $z_2^2$  est :

$$z_1^2 - z_2^2 = \frac{\gamma^2}{4}X - \frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{(a^2 - b^2)^2}{4\gamma^2 X} - \gamma^2 z^2 - \gamma^2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2. \quad (4.16)$$

Or  $z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2)$ ,

$$z_1 - z_2 = \frac{1}{z_1 + z_2} \left[ \frac{\gamma^2}{4}X - \frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{(a^2 - b^2)^2}{4\gamma^2 X} - \gamma^2 z^2 - \gamma^2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \right].$$

La figure (4.5) montre comment la différence relative à la profondeur varie avec le rapport  $a/b$  pour différentes valeurs de  $\gamma$ . L'erreur est toujours nulle quand  $\gamma = 1$ . Cette erreur tend à s'annuler aussi lorsque la valeur de  $\gamma$  se rapproche de 1, ce qui

veut dire que pour un modèle plus ou moins correct, on peut négliger l'effet de la géométrie du réflecteur et utiliser l'équation (4.10)

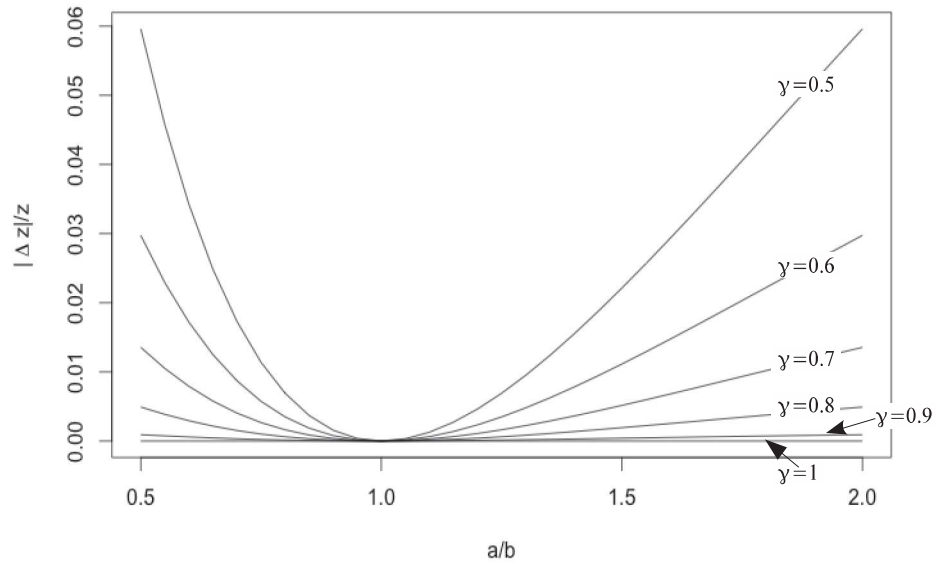


FIGURE 4.5 – L'erreur commise par l'utilisation de l'équation (4.10) au lieu l'équation (4.13) en fonction de  $a/b$  pour plusieurs valeurs de  $\gamma$ .

Après avoir vu comment se comportent les événements observés sur les CIG en fonction de la vitesse de migration utilisée, il nous faut maintenant un moyen pour pouvoir mesurer ces courbures. Ce qui nous amène à la section suivante.

### 4.3 Analyse du RMO

Un moyen de calculer les courbures pour l'analyse du RMO est de procéder comme dans l'analyse de vitesse exposée en section 2.3.1, c'est-à-dire par analyse par balayage. En effet, sur les CIG, comme exposé ci-dessus, la profondeur apparente des évènements de réflexion en fonction de l'offset est régie par l'équation (4.10) :

$$z_h(\gamma) = \sqrt{z_0^2(\gamma) + (\gamma^2 - 1)h^2}.$$

Cette équation représente, dans le plan profondeur-offset une **famille d'hyperboles** dont l'ordonnée commune au sommet est la profondeur apparente pour l'offset nul  $z_0$  et dont le paramètre  $\gamma$  que nous appellerons **courbure** détermine la pente des asymptotes (figure 4.6(a)).

L'analyse du RMO s'effectue alors comme suit :

- à chaque profondeur apparente  $z_0$  d'indice  $i_{z_0}$  sur l'offset nul, on définit alors un ensemble de courbures  $\gamma$ .
- Pour chaque valeur de  $\gamma$ , on calcule la semblance associée qui est donnée par

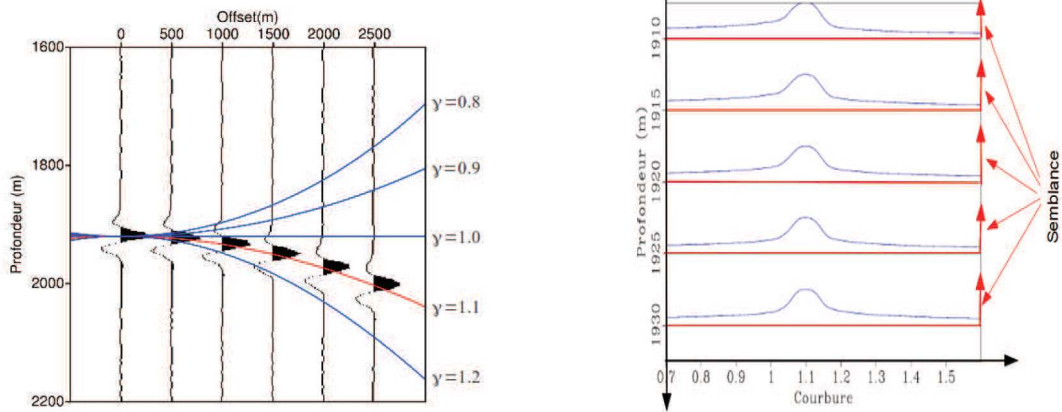
$$S(\mathcal{A}, \gamma, \mathcal{I}_0(z_0, w)) = \frac{\sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0(z_0, w)} \left[ \sum_{j=1}^m g_j \left( \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_j^2} \right) \right]^2}{m \sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0(z_0, w)} \left[ \sum_{j=1}^m \left[ g_j \left( \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_j^2} \right) \right]^2 \right]}, \quad (4.17)$$

où  $g_j(z)$  est une fonction qui évalue l'amplitude de la trace de l'offset  $j$  à la profondeur  $z$  du CIG  $\mathcal{A}$ ,  $w$  définissant la fenêtre pour le calcul de la semblance,  $m \leq N_o$  le nombre de traces utilisées pour le calcul de la semblance et  $\mathcal{I}_0(z_0, w) = \{1, \dots, N_z\} \cap \{i_{z_0} - w, \dots, i_{z_0} + w\}$

Remarquons que dans l'expression (4.17) de la semblance, l'équation de la courbure est celle du RMO et la profondeur a remplacé le temps.

Nous obtenons alors pour chaque profondeur  $z_0$  de l'offset nul, une valeur de la semblance pour chaque valeur de  $\gamma$  utilisée pour corriger les évènements. La valeur de  $\gamma$  qui donne la plus grande valeur de la semblance est donc retenue comme valeur optimale pour rendre les évènements horizontaux.

#### 4.4 Étude de la sensibilité de la semblance par rapport au modèle décrivant de la variation de l'amplitude avec l'offset

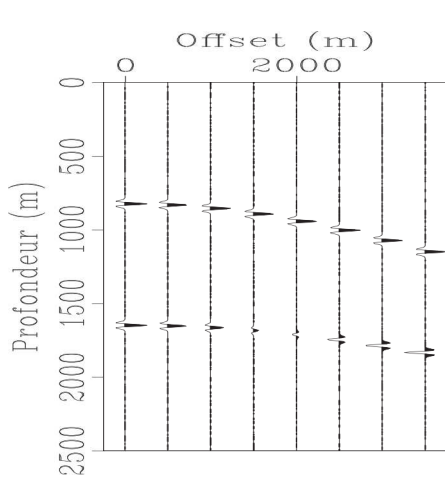


(a) Portion de CIG où la vitesse de migration a été surestimée. (b) Calcul de la semblance pour différentes profondeurs échantillonnées.

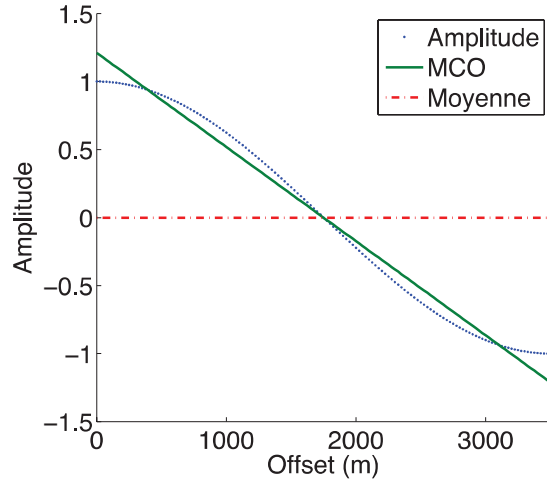
FIGURE 4.6 – Mise en œuvre de l'analyse du RMO

#### 4.4 Étude de la sensibilité de la semblance par rapport au modèle décrivant de la variation de l'amplitude avec l'offset

Pour voir l'influence du choix du modèle de variation de l'amplitude des traces avec l'offset, nous utiliserons un CIG synthétique à deux réflecteurs, le premier situé à  $750m$  et le deuxième à  $1500m$ . La vitesse utilisée pour la migration a été surestimée. La valeur de la courbure  $\gamma = \frac{v}{c}$  est de  $1.1$ . Les positions apparentes respectives à l'offset nul sont alors  $825m$  et  $1650m$  (figure 4.7(a)). Le deuxième réflecteur présente une variation d'amplitudes avec l'offset et un changement de polarité (figure 4.7b) tandis que le premier garde une amplitude constante (au bruit près) le long de l'offset. Ces deux types d'événements nous serviront à observer le comportement de la semblance généralisée vis-à-vis du modèle choisi décrivant la variation de l'amplitude.



(a) CIG présentant 2 évènements avec une courbure de  $\gamma = 1.1$  où le 1<sup>er</sup> a une amplitude constante le long de l'offset et le 2<sup>eme</sup> une variation d'amplitude avec changement de polarité.



(b) Variation de l'amplitude avec l'offset pour le second évènement situé à 1650m à l'offset nul pour la courbure  $\gamma = 1.1$  (point) et les estimateurs par MCO (trait continu) et moyenne arithmétique (tiret).

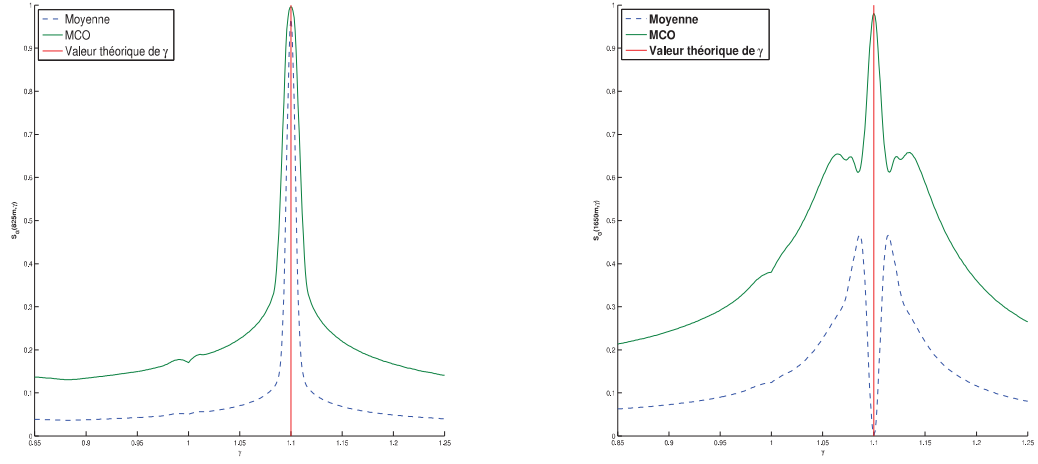
FIGURE 4.7 – CIG synthétique (a) et variation de l'amplitude le long de l'évènement de courbure  $\gamma = 1.1$  situé à 1650 à l'offset nul.

Sur la figure 4.7(b) ci-dessus, nous montrons les amplitudes  $g_j \left( \sqrt{z_0^2(\gamma) + (\gamma^2 - 1)h_j^2} \right)$  avec  $\gamma = 1.1$ ,  $z_0 = 1650m$  et  $h_j$  variant de 0 à 3500m avec un pas de 25m. Ces amplitudes sont représentées en pointillés bleus. Les estimateurs par MCO et par moyenne arithmétique y sont respectivement représentés en trait continu vert et en tiret rouge. L'influence du choix de ces deux estimateurs sur le calcul de la semblance généralisée s'observe sur la figure 4.8 ci-dessous.

Sur la figure 4.8(a), la semblance généralisée a été calculée pour le premier évènement qui ne présente pas de variation d'amplitude avec l'offset pour la courbure  $\gamma = 1.1$ . Ainsi pour les modèles d'estimations de l'amplitude, les valeurs de la semblance coïncident et sont proches de 1. Ce qui se justifie, car l'amplitude est indépendante de l'offset donc les deux modèles sont semblables (voir annexe A).

Sur la figure 4.8(b) où les semblances généralisées sont présentées pour le second évènement ayant une variation de l'amplitude avec changement de phase pour la courbure  $\gamma = 1.1$ , nous observons que la valeur de la semblance généralisée obtenue avec l'estimateur par moyenne, donc la semblance classique, est presque nulle pour la courbure de l'évènement  $\gamma = 1.1$ . Le maximum de la semblance est quant à lui obtenu pour  $\gamma = 1.08$ . La valeur maximale de la semblance obtenue avec l'estimateur par MCO est proche de 1 pour la même courbure  $\gamma = 1.1$ .

#### 4.4 Étude de la sensibilité de la semblance par rapport au modèle décrivant de la variation de l'amplitude avec l'offset



(a) Semblance généralisée pour le premier événement à la profondeur apparente pour l'offset nul de 825m (b) Semblance généralisée pour le deuxième événement à la profondeur apparente pour l'offset nul de 1650m

FIGURE 4.8 – Comparaison du modèle dans le calcul de la semblance

Sur les graphiques 4.8(a) et 4.8(b) nous représentons en pointillés la semblance généralisée avec pour modèle  $M(z_{i_0}, h) = \frac{1}{m} \sum_j g_j \left( \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_j^2} \right)$  et en continu le modèle  $M$  est l'estimateur des MCO. Le trait vertical représente la valeur théorique de  $\gamma$  qui est de 1.1

La semblance généralisée avec l'estimateur des MCO s'avère donc plus robuste vis-à-vis de la variation d'amplitude et du changement de polarité que la semblance classique. L'algorithme de l'analyse du RMO détectera pour l'évènement avec variation d'amplitude une courbure de  $\gamma = 1.08$  au lieu de 1.1.

Le CIG étant constitué de  $N_z$  points de profondeur, l'opération de la maximisation de la semblance est répétée pour tous les  $N_z$  points et ensuite pour tous les CIG que contiennent les données sismiques. Pour un CIG donné, on dispose à la fin du processus d'un vecteur  $\mathcal{G} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{N_z})$  de valeur de  $\gamma$  de taille  $N_z$  correspondant aux  $N_z$  profondeurs. L'optimisation de la semblance pour chaque profondeur étant numérique, il arrive que pour des profondeurs voisines où les amplitudes des traces décrivent un même évènement de réflexion, on ait des valeurs de  $\gamma$  différentes. Les points voisins décrivant un seul évènement de réflexion on doit avoir des valeurs  $\gamma$  égales ou du moins variant d'une *façon lisse*. Un interpolateur polynomial  $s$  est

introduit pour lisser  $\mathcal{G}$ . Cet interpolateur minimise la quantité suivante :

$$\sum_{i=1}^{N_z} p_i (\gamma_i - s(z_i))^2 + \varepsilon \int_0^{z_{N_z}} (s''(z))^2 dz,$$

où  $p_i$  est un poids qui est fonction de la semblance en  $z_i$  et  $\varepsilon$  un paramètre servant à contrôler le degré de lissage.

Pour observer l'influence du choix du paramètre  $\varepsilon$ , considérons le CIG de la figure 4.9 suivante. Comme on l'observe sur cette figure, les événements de réflexion qu'on y observe ne sont pas vraiment hyperboliques. Néanmoins, une approximation hyperbolique est utilisée pour l'étude du RMO. Trois valeurs de  $\varepsilon$  (0.1, 1. et 10.) sont utilisées pour faire le lissage. Les résultats de l'analyse classique du RMO et du lissage sont présentés sur la figure 4.10.

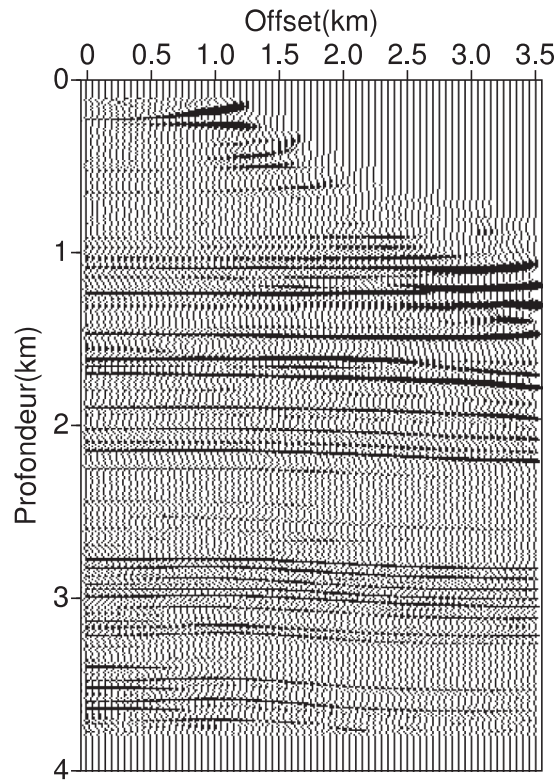


FIGURE 4.9 – CIG obtenue par migration des données issue d'un modèle synthétique complexe pour lequel le calcul de la semblance et le pointé sont montrés sur la figure (4.10)

La figure 4.10 est le résultat d'une analyse classique du RMO sur le CIG synthétique présenté sur la figure 4.9. Les valeurs des courbures  $\gamma$  maximisant la semblance (figure 4.10(a)) ont été lissées respectivement avec des valeurs de  $\varepsilon$  de 0.1, 1 et 10. Plus la valeur de  $\varepsilon$  est grande plus grand est le degré de lissage de  $\mathcal{G}$ . Le choix du paramètre  $\varepsilon$  doit donc se faire de manière judicieuse pour ne pas perdre de l'information lors du lissage. Une méthode de validation croisée pourrait être envisagée, mais elle serait coûteuse en temps de calcul donc le choix de ce paramètre est laissé à l'appréciation du géophysicien.

## 4.5 Avantages et insuffisance de l'analyse classique du RMO

Le principal avantage de l'analyse classique du RMO est d'ordre pratique. Sa facilité d'implémentation et sa vitesse d'exécution en font un outil très répandu dans l'industrie géophysique. Les nombreuses approches de cette analyse ont pour but de prendre plus en compte la complexité des données sismiques. Cette complexité des données sismiques vient de leur nature stochastique. En effet, différents modèles de vitesse de migration peuvent donner une *même* image sismique. L'analyse classique du RMO, qui est une méthode déterministe, va donc tendre à choisir une valeur de  $\gamma$  sur le critère de la semblance optimale qui elle-même comporte de nombreuses approximations et différents choix de paramètres. Cette approche n'apporte donc aucune information sur l'incertitude de l'estimation du paramètre  $\gamma$ . Jedlicka [1989] a aussi montré qu'utiliser l'incertitude pourrait apporter un plus (amélioration de l'image finale) dans le traitement des données.

Nous nous proposons donc de prendre en compte la nature stochastique des données sismiques dans l'analyse du RMO dans le chapitre suivant.

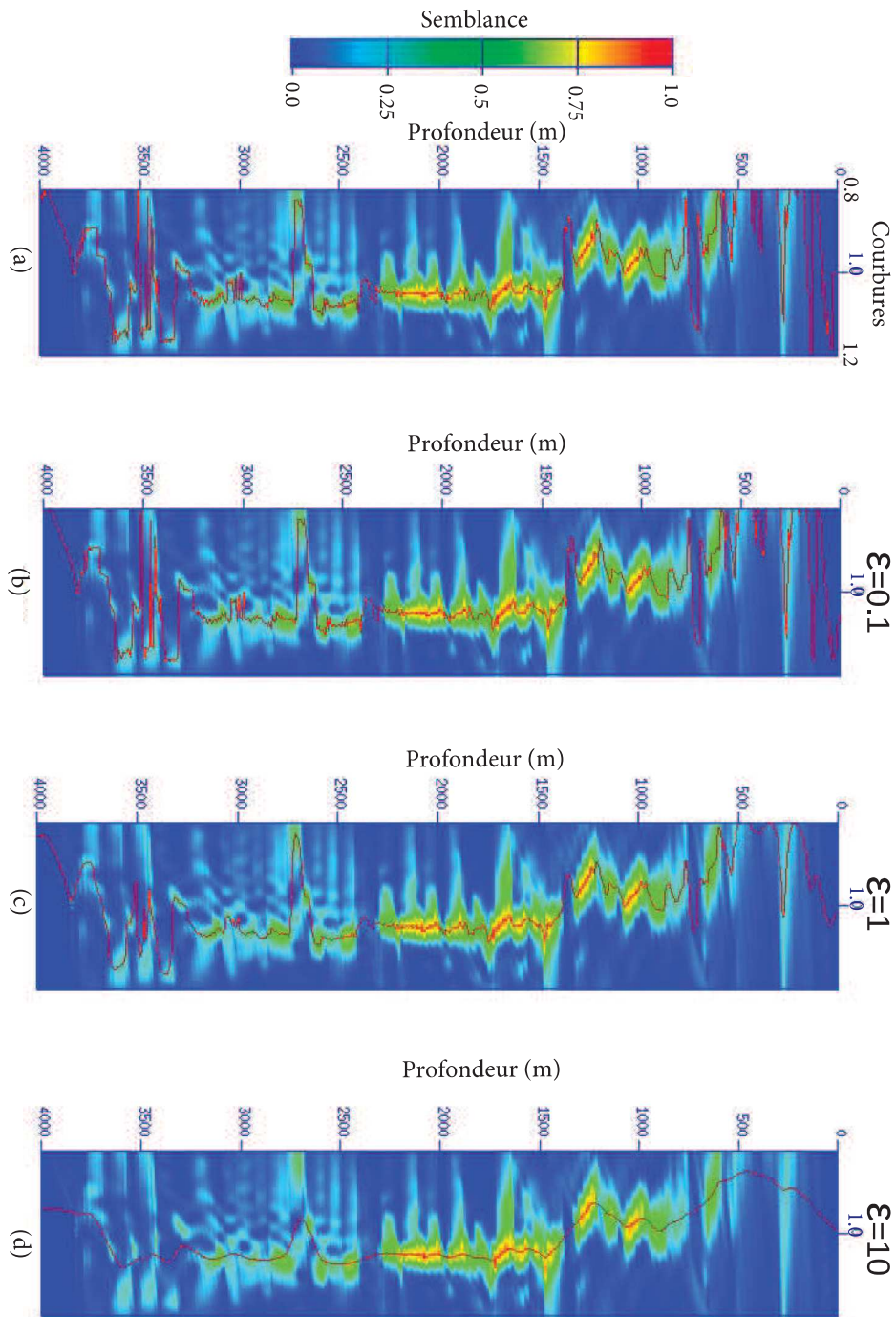


FIGURE 4.10 – Panneau de semblance pour des courbures allant de 0.8 à 1.1. Le pointé des courbures maximisant la semblance est représenté sur la figure (a). Les lissages avec différentes valeurs de  $\epsilon$  sont montrés sur les figures (b), (c) et (d).



# **Approche Statistique**



- 5.1 Lissage par la méthode des splines à nœuds libres
- 5.2 Données
- 5.3 Prétraitement des données pour la prise en charge de leur caractère fonctionnel
- 5.4 Approche fréquentiste de l'analyse classique du RMO et du calcul de la semblance
- 5.5 Approche bayésienne de l'analyse du RMO
- 5.6 Algorithme de Metropolis-Hastings

## Approche stochastique de l'analyse du RMO

*« Using observations to infer the values of some parameters corresponds to solving an "inverse problem".*

*Practitioners usually seek the "best solution" implied by the data, but observations should only be used to falsify possible solutions, not to deduce any particular solution. »*

A. Tarantola.

L'analyse du RMO tient une place importante dans le processus de la mise à jour du modèle de vitesse pour la migration, et aussi dans la validation de l'image finale obtenue. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent cette analyse telle qu'elle est faite dans l'industrie, tient peu ou pas du tout compte du fait que les données résultent d'un signal corrompu par un bruit. Ceci peut s'expliquer par le coût en temps de calcul des méthodes statistiques. Avec la puissance des moyens de calcul actuels, cette alternative est envisageable [Tarantola, 2004]. Prendre en compte les bruits présents dans les données sismiques avec des méthodes statistiques basées sur des modèles stochastiques permettrait d'améliorer la qualité du signal extrait et aussi d'avoir des informations sur l'incertitude des différents paramètres estimés le long du processus et pourrait aider dans la prise des décisions qui ont des impacts socio-économiques importants. C'est dans cette optique que cette thèse a été initiée. Le travail effectué au cours de cette thèse est axé autour de l'analyse du RMO,

mais il est à noter que cette approche peut être envisagée pour toute autre analyse du processus des traitements des données sismiques. Ce chapitre présente donc les résultats méthodologiques de l'approche statistique de l'analyse du RMO.

## 5.1 Lissage par la méthode des splines à nœuds libres

Une première approche pour l'évaluation de l'incertitude présente sur le résultat du calcul de  $\mathcal{G} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{N_z})$  par l'approche classique a été abordée par Johnngay [2010]. Pour cela, cette approche a supposé que  $\mathcal{G}$  peut être modélisée par des splines cubiques. Les splines étant caractérisées par le nombre et l'emplacement des nœuds, nous avons considérés une approche bayésienne qui mets des lois *a priori* sur la configuration (nombre et emplacement) des nœuds. Cette approche peut être vu comme un problème de selection de modèle car chaque modèle est ici entièrement déterminé par la configuration des nœuds.

Le choix du nombre et de l'emplacement des nœuds des splines sont donc des paramètres libres. Une méthode de régression appelée **BARS** (« Bayesian adaptative Regression Spline ») proposée par Dimatteo *et al.* [2001] qui utilise les MCMC à sauts réversibles pour changer les configurations des nœuds a été utilisée pour lisser  $\mathcal{G}$  et obtenir un intervalle de crédibilité associé.

Nous considérons pour cette approche que les données sont les couples  $(z_i, \gamma_i)_{1 \leq i \leq N_z}$  où les  $z_i$  sont les points de profondeurs échantillonnés et les  $\gamma_i$ , les courbures maximisant les semblances aux profondeurs  $z_i$  correspondantes. Ces observations sont supposées indépendantes et générées par le modèle suivant :

$$\Gamma_i \sim p\{\gamma_i | s(z_i), \sigma\} \quad (i = 1, \dots, N_z),$$

où  $s$  est une fonction à valeurs réelles sur un intervalle  $[a, b]$  et  $\sigma^2$  la variance d'un bruit additif. Nous supposons que  $p$  est une distribution gaussienne. Nous pouvons écrire que :

$$\Gamma_i = s(z_i) + \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, N_z), \quad (5.1)$$

où les  $\varepsilon_i$  sont des variables aléatoires gaussiennes  $N(0, \sigma^2)$  et  $\sigma > 0$  est inconnu.

La méthode suppose que  $s$  est bien approximée entre  $a$  et  $b$  par des B-splines cubiques avec un certain nombre de nœuds. Cette classe de spline est supposée assez grande pour bien approximer et lisser  $\mathcal{G}$ .

Notons la configuration des nœuds par le couple  $(k, \xi)$  où  $k$  désigne le nombre de

nœuds et  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$  le vecteur donnant la localisation des nœuds, pour  $a < z_1 < \xi_1 \leq \dots \leq \xi_k < z_{N_z} < b$ . Soit  $b_j(z)$ , pour  $j = 1, \dots, k+2$ , la  $j^{eme}$  fonction de la base des splines cubique où les fonctions de la base sont linéaires en dehors de  $[a, b]$  et soit  $B_{k,\xi}$  la matrice dont la composante  $(i, j)$  est  $b_j(z_i)$ . Sous ces hypothèses, nous pouvons écrire  $s$  comme une combinaison linéaire

$$s(z) = \sum_{j=1}^{k+2} \beta_j b_j(z) \quad (5.2)$$

pour un vecteur  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{k+2})$ . Nous avons la relation linéaire  $B_{k,\xi}\beta = s(z) \equiv (s(z_1), \dots, s(z_{N_z}))$  aux points d'observations.

Pour compléter la formulation bayésienne du modèle, nous devons préciser les lois *a priori* sur les inconnues  $\beta, \sigma, k$  et  $\xi$ . Pour notre travail, nous utilisons une loi *a priori* uniforme ou de poisson sur  $k$  et une loi *a priori* uniforme sur  $\xi$  induite par le prior uniforme sur le  $k$ -simplexe par réorganisation de  $\xi$  sur  $[a, b]$ . Sachant  $k$  et  $\xi$ , nous utilisons une loi *a priori* normale conjuguée particulière sur  $\beta$  que Kass et Wasserman [1995] ont appelé "the unit-information prior" et, indépendamment une loi *a priori* impropre  $\pi_\sigma(\sigma) = \frac{1}{\sigma}$ . Avec ces choix, sous le modèle gaussien, nous pouvons calculer analytiquement la loi *a posteriori* sur  $(k, \xi)$  :

$$p(\gamma|k, \xi) = \int p(\gamma|\beta, k, \xi, \sigma) \pi(\beta, \sigma|k, \xi) d\beta d\sigma. \quad (5.3)$$

Ceci facilite le calcul du rapport de vraisemblance, qui est utilisé dans l'algorithme du saut réversible pour déterminer s'il faut ou pas passer de l'état  $(k, \xi)$  à un état candidat  $(k^c, \xi^c)$ . Par exemple, un déplacement dans la mise en oeuvre de la méthode de Monté Carlo par Chaîne de Markov implique l'ajout d'un nœud. Si l'état courant est  $(k, \xi)$  et l'état candidat  $(k^c = k+1, \xi^c)$ , alors le rapport de vraisemblance devient dans le cadre du modèle général

$$\frac{p(\mathcal{G}|k^c, \xi^c)}{p(\mathcal{G}|k, \xi)} = \frac{1}{\sqrt{(N_z+1)}} \left( \frac{\mathcal{G}^T \{I_{N_z} - \frac{N_z}{N_z+1} B_{k,\xi} (B_{k,\xi}^T B_{k,\xi})^{-1} B_{k,\xi}^T\} \mathcal{G}}{\mathcal{G}^T \{I_{N_z} - \frac{N_z}{N_z+1} B_{k^c, \xi^c} (B_{k^c, \xi^c}^T B_{k^c, \xi^c})^{-1} B_{k^c, \xi^c}^T\} \mathcal{G}} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (5.4)$$

et dans le cas du modèle gaussien

$$\frac{p(\mathcal{G}|k^c, \xi^c)}{p(\mathcal{G}|k, \xi)} \simeq \frac{1}{\sqrt{N_z}} \left( \frac{(\mathcal{G} - B_{k,\xi} \hat{\beta})^T (\mathcal{G} - B_{k,\xi} \hat{\beta})}{(\mathcal{G} - B_{k^c, \xi^c} \hat{\beta}^c)^T (\mathcal{G} - B_{k^c, \xi^c} \hat{\beta}^c)} \right)^{\frac{N_z}{2}} = \exp(-\text{BIC}/2) \quad (5.5)$$

où  $\hat{\beta}$  est l'estimateur des moindres carrés. Nous obtenons l'espérance conditionnelle *a posteriori*

$$\mathbb{E}\{s(z)|k, \xi, \gamma\} \simeq B_{k, \xi} \hat{\beta} \quad (5.6)$$

L'espérance *a posteriori*  $\mathbb{E}\{s(z)|\gamma\}$  peut ensuite être calculée en faisant la moyenne sur les différents échantillonnage de  $(k, \xi)$ . Cette espérance est l'estimateur de bayes  $\hat{s}(z)$  de  $s(z)$  sous les moindres carrés. Un intervalle de confiance *a posteriori* peut ainsi être calculé en utilisant ces échantillonnages. Nous appliquons cette approche au CIG synthétique de la figure 5.1. Les courbures  $\mathcal{G} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{N_z})$  maximisant la semblance aux profondeurs  $(z_1, \dots, z_{N_z})$  sont représentées en noirs sur la figure 5.2.

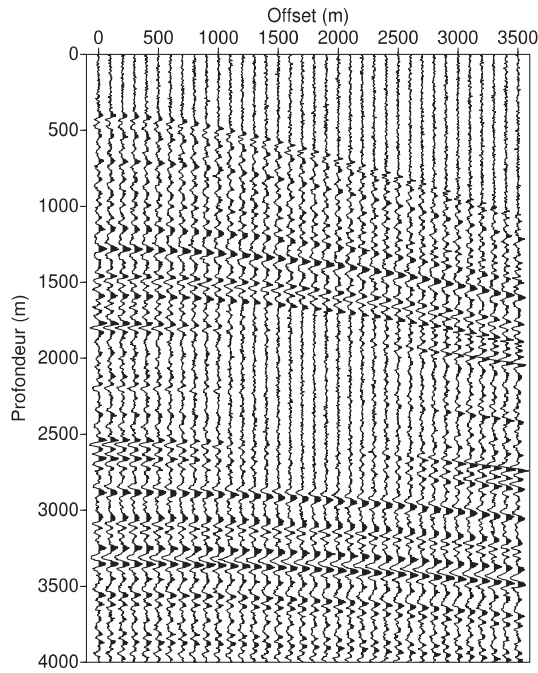


FIGURE 5.1 – CIG synthétique

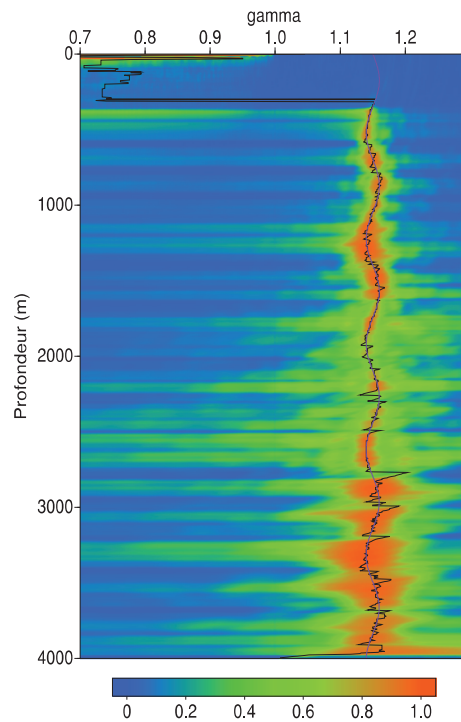
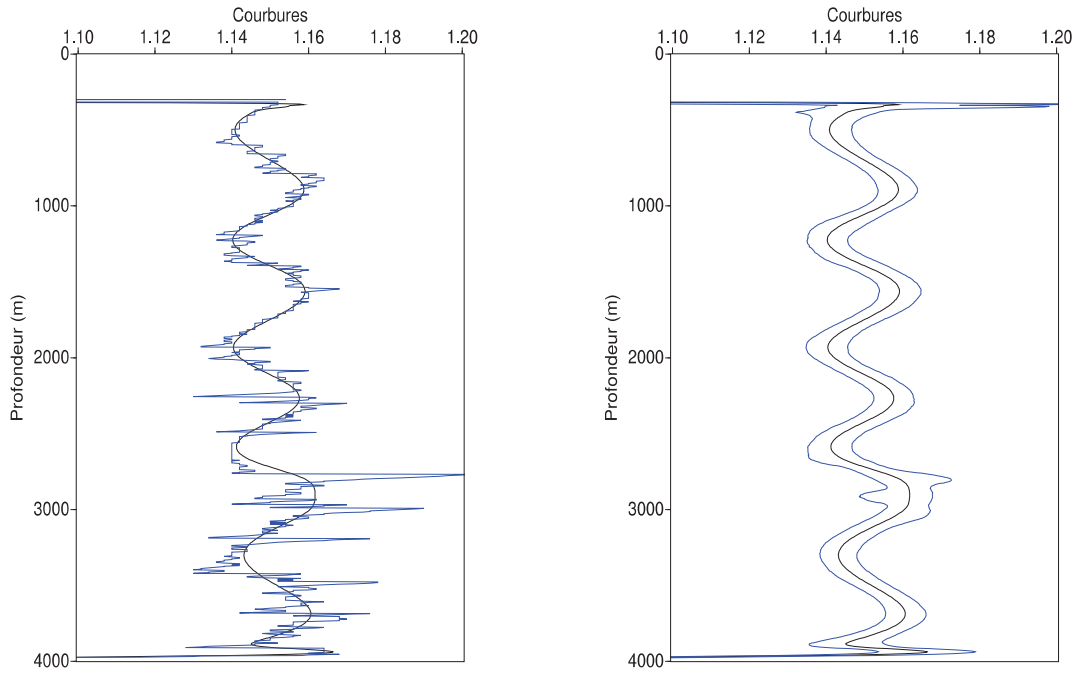


FIGURE 5.2 – Semblance calculée sur le CIG ci-contre avec  $\mathcal{G}$  représenté en noir et la valeur théorique de  $\mathcal{G}$  représentée en violet



(a) Courbe  $\mathcal{G}$  (bleue) lissée par des splines à nœuds libres (noir)      (b) Lissage (courbe noire) et intervalle de crédibilité à 95 % (courbes bleues)

FIGURE 5.3 – Lissage avec splines à nœuds libres

Sur la figure 5.2 ci-dessus, nous montrons un panneau où la semblance a été calculée pour des courbures allant de 0.7 à 1.3 avec un pas de 0.003. Les courbures maximisant la semblance ont été tracées (courbe en noire). Cette courbe a ensuite été lissée par des splines cubiques à nœuds libres (courbe moyenne *a posteriori* en noire figure 5.3(a)). Les intervalles de crédibilité à 95% dont les bornes correspondent aux quantiles 2.5% et 97.5% sont représentées en bleu sur la figure 5.3(b).

Cette approche ne prennent pas directement en compte les CIG sur lesquels on calcule la semblance, une nouvelle approche utilisant les CIG a été abordée. Nous l'exposons dans les sections suivantes.

## 5.2 Données

Les données considérées dans cette approche sont les images avant sommation obtenues par migration. Ces données sont sous forme d'une hypermatrice à 3 dimensions de taille  $N_x \times N_z \times N_o$  à coefficients réels avec  $(N_x, N_z, N_o) \in \mathbb{N}_*^3$ .

Notons par  $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_{ijk})_{\substack{1 \leq i \leq N_z \\ 1 \leq j \leq N_o \\ 1 \leq k \leq N_x}}$  (voir figure 5.4) cette hypermatrice où les  $\mathcal{A}_{ijk}$  sont les amplitudes représentant la réflectivité obtenue par migration au point de position en surface  $x_k$ , à la profondeur  $z_i$  et pour l'offset  $2h_j$  :

- les  $x_k$  désignent les positions échantillonnées en surface avec  $1 \leq k \leq N_x$ ;
- les  $z_i$  désignent les points échantillonnés en profondeur avec  $1 \leq i \leq N_z$ ;
- les  $h_j$  désignent les demi-offsets échantillonnés avec  $1 \leq j \leq N_o$ .

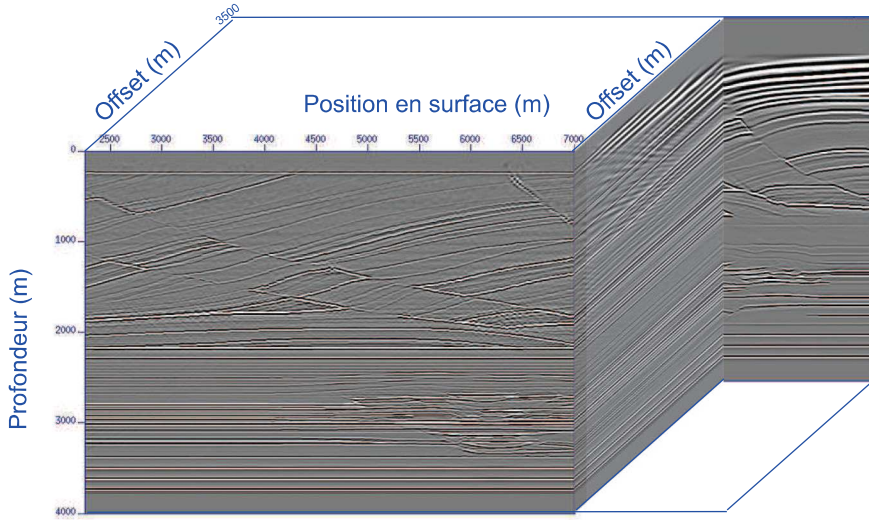


FIGURE 5.4 – Images avant sommation : données synthétiques complexes obtenues avec migration pour les vitesses correctes

Les observations soumises au traitement dans cette approche sont les « *Common Image Gather (CIG)* » c'est-à-dire une sous-matrice  $\mathcal{A}^{(k)} = (\mathcal{A}_{ijk})_{\substack{1 \leq i \leq N_z \\ 1 \leq j \leq N_o}} \equiv (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq N_z \\ 1 \leq j \leq N_o}}$  de l'hypermatrice  $\mathbb{A}$  pour  $k$  fixé. Les  $(x_k)_{1 \leq k \leq N_x}$  représentant les différentes localisations de la zone à imager, tout le traitement réalisé pour  $x_1$  sera répété aux positions  $x_2, \dots, x_{N_x}$ .

## 5.3 Prétraitement des données pour la prise en charge de leur caractère fonctionnel

Dans cette section nous présentons la procédure permettant de prendre en charge le caractère fonctionnel des données  $\mathcal{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq N_z \\ 1 \leq j \leq N_o}}$ . En effet, comme nous l'avons dit en section 4.1 de ce document, nous considérons que à  $j$  fixé, les  $(a_{ij})_{1 \leq i \leq N_z}$  sont des observations réalisées aux profondeurs échantillonnées  $z_i$ , et corrompues par un bruit, d'une fonction continue  $g_j$ . Nous noterons par  $\hat{g}_j$  son estimation nous permettant d'évaluer les amplitudes pour toute profondeur. En effet, nous considérons dans le cadre général que nous disposons pour chaque offset  $h_j$  des observations indépendantes  $\{(z_1, a_{1j}), (z_2, a_{2j}), \dots, (z_{N_z}, a_{N_zj})\}$  qui sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes bidimensionnels de même densité  $f_{Z,A}(z, a)$ . L'estimation du paramètre fonctionnel  $g_j$  peut se faire de plusieurs manières dont nous présentons deux possibilités ci-dessous.

1. Dans le cadre d'une estimation fonctionnelle de  $g_j$  au point  $z$  par interpolation linéaire, l'estimation est donnée par :

$$\hat{g}_j(z) = (1 - p_z)a_{i_zj} + p_z a_{i_z+1,j}, \quad (5.7)$$

où  $p_z = z/\delta z - 1 - \lfloor z/\delta z - 1 \rfloor$  et  $i_z = \lfloor z/\delta z - 1 \rfloor$ .

$\delta z$  est le pas d'échantillonnage dans la direction profondeur et  $\lfloor a \rfloor$  désigne la partie entière par défaut de  $a$ , c'est-à-dire que  $\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ .

2. Une autre approche consiste à utiliser une méthode à noyau pour évaluer les amplitudes aux points  $(z_{h_j}, h_j)$ . Nous faisons le choix d'estimer  $g_j(\cdot)$  à l'aide de l'estimateur à noyau de Nadaraya-Watson.

Le modèle de régression est défini conditionnellement à  $Z = z_i$  par

$$a_{ij} = g_j(z_i) + \varepsilon_{ij},$$

où  $g_j(\cdot)$  est une fonction de régression inconnue et les  $\varepsilon_{ij}$  sont des réalisations d'une variable aléatoire de moyenne nulle et de variances  $\sigma_\varepsilon^2$ . La fonction de régression  $g_j(z)$  peut être exprimée en terme de densité jointe des variables

aléatoires  $A$  et  $Z$  comme suit :

$$g_j(z) = \mathbb{E}[A|Z = z] = \int_{\mathbb{R}} a f_{A|z}(a|z) da = \frac{\int_{\mathbb{R}} a f_{Z,A}(z, a) da}{\int_{\mathbb{R}} f_{Z,A}(z, a) da}.$$

L'estimateur à noyau est utilisé ici pour estimer séparément le numérateur et le dénominateur. La loi jointe est estimée à l'aide des estimateurs à noyau des densités de manière suivante :

$$\begin{aligned} \hat{f}_{Z,A}(z, a) &= \frac{1}{N_z l_z l_a} \sum_{i=1}^{N_z} K\left(\frac{z - z_i}{l_z}\right) K\left(\frac{a - a_{ij}}{l_a}\right) \\ &= \frac{1}{N_z} \sum_{i=1}^{N_z} K_{l_z}(z - z_i) K_{l_a}(a - a_{ij}) \end{aligned}$$

avec  $K_l(\cdot) = \frac{1}{l} K(\cdot/l)$  où  $K(\cdot)$  est un noyau qui pénalise les points éloignés de celui où l'approximation veut être obtenue, et les fenêtres  $l_z > 0$  et  $l_a > 0$  contrôlent la « force » de cette pénalisation respectivement pour  $z$  et  $a$ .

Ainsi, nous avons que

$$\int_{\mathbb{R}} a \hat{f}_{Z,A}(z, a) da = \frac{1}{N_z} \sum_{i=1}^{N_z} K_{l_z}(z - z_i) K_{l_a}(a - a_{ij}) da$$

et puisque  $\int_{\mathbb{R}} a K_{l_a}(a - a_{ij}) da = a_{ij}$ , nous pouvons écrire que

$$\int_{\mathbb{R}} a \hat{f}_{Z,A}(z, a) da = \frac{1}{N_z} \sum_{i=1}^{N_z} K_{l_z}(z - z_i) a_{ij}$$

qui est l'estimateur du numérateur. Le dénominateur est quant à lui estimé par

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{Z,A}(z, a) da &= \frac{1}{N_z} \sum_{i=1}^{N_z} K_{l_z}(z - z_i) \int_{\mathbb{R}} K_{l_a}(a - a_{ij}) da \\ &= \frac{1}{N_z} \sum_{i=1}^{N_z} K_{l_z}(z - z_i) = \hat{f}_Z(z). \end{aligned}$$

L'estimateur de Nadaraya-Watson de la fonction de régression inconnue est

alors donné par

$$\hat{g}_j(z) = \frac{\sum_{i=1}^{N_z} K_{l_z}(z - z_i) a_{ij}}{\sum_{i=1}^{N_z} K_{l_z}(z - z_i)}. \quad (5.8)$$

Dans les deux cas présentés ci-dessus, ces estimations des  $g_j$  pour  $j \in 1, \dots, N_o$  nous permettrons d'évaluer les amplitudes des traces de « manière continue ».

## 5.4 Approche fréquentiste de l'analyse classique du RMO et du calcul de la semblance

### 5.4.1 Modèle statistique

Nous posons que les quantités  $a_{ij}$  observées aux points  $(z_i, 2h_j)$  sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes  $A_{ij}$  de moyennes respectives égales à  $G\left(\sqrt{\frac{z_i^2 - (\gamma^2 - 1)h_j^2}{\gamma^2}}\right)$  et de variance  $\sigma^2$  où  $G$  est une fonction inconnue,  $\sigma^2$  et  $\gamma$  sont des paramètres numériques inconnus.

Nous avons donc

$$\mathbb{E}[A_{ij}|\gamma, G] = G\left(\sqrt{\frac{z_i^2 - (\gamma^2 - 1)h_j^2}{\gamma^2}}\right)$$

et

$$\text{Var}[A_{ij}|\gamma, G] = \sigma^2.$$

Les paramètres de notre modèle sont donc  $G$ ,  $\gamma$  et  $\sigma^2$  qui appartiennent respectivement à  $\mathcal{G} = \{G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+), G \text{ non constante}\}$ ,  $\mathbb{R}_+$  et  $\mathbb{R}_+$ . La non constance de  $G$  est nécessaire car si  $G$  est constante c'est qu'il n'y a pas d'évènement de réflexion donc pas de courbure à « corriger ».

Pour un modèle statistique donné  $\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$  où  $F_\theta$  est une loi de probabilité et  $\theta$  un paramètre donné, il ne devrait correspondre qu'une unique distribution  $F_\theta$ . Ce qui veut dire que pour deux valeurs distinctes  $\theta_1$  et  $\theta_2$  du paramètre, on devrait avoir  $F_{\theta_1} \neq F_{\theta_2}$ . Cette contrainte définit l'identifiabilité du modèle. En effet une

paramétrisation non identifiable pose souvent des problèmes d'inférence statistique et d'interprétation de la valeur du paramètre estimé à partir des données.

**Proposition 5.4.1.** *Identifiabilité des paramètres du modèle*

Soit  $\mathcal{G} = \{G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+), G \text{ non constante}\}$ ,  $\mathcal{Z} = \mathbb{R}_+$  et  $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}_+$  contenant au moins 0 et  $h_0$  distincts. Soit  $G_i \in \mathcal{G}$  pour  $i = 1, 2$  et  $\gamma_i \in ]0, +\infty[$  pour  $i = 1, 2$ .

Si

$$G_1 \left( \sqrt{\frac{z^2 - (\gamma_1^2 - 1)h^2}{\gamma_1^2}} \right) = G_2 \left( \sqrt{\frac{z^2 - (\gamma_2^2 - 1)h^2}{\gamma_2^2}} \right) \quad \forall (z, h) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{H}$$

alors on a (5.9)

$$G_1 = G_2 \text{ et } \gamma_1 = \gamma_2.$$

*Démonstration.*

Nous avons pour  $(z, h) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{H}$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ G \left( \sqrt{\frac{z^2 - (\gamma^2 - 1)h^2}{\gamma^2}} \right) \right] = \frac{z}{\gamma \sqrt{z^2 - (\gamma^2 - 1)h^2}} G' \left( \sqrt{\frac{z^2 - (\gamma^2 - 1)h^2}{\gamma^2}} \right)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial h} \left[ G \left( \sqrt{\frac{z^2 - (\gamma^2 - 1)h^2}{\gamma^2}} \right) \right] = \frac{(1 - \gamma^2)h}{\gamma \sqrt{z^2 - (\gamma^2 - 1)h^2}} G' \left( \sqrt{\frac{z^2 - (\gamma^2 - 1)h^2}{\gamma^2}} \right).$$

Comme

$$G_1 \left( \sqrt{\frac{z^2 - (\gamma_1^2 - 1)h^2}{\gamma_1^2}} \right) = G_2 \left( \sqrt{\frac{z^2 - (\gamma_2^2 - 1)h^2}{\gamma_2^2}} \right) \quad \forall (z, h) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{H},$$

il vient pour tout  $(z, h) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{H}$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left[ G_1 \left( \sqrt{\frac{z^2 - (\gamma_1^2 - 1)h^2}{\gamma_1^2}} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[ G_2 \left( \sqrt{\frac{z^2 - (\gamma_2^2 - 1)h^2}{\gamma_2^2}} \right) \right], \\ \frac{\partial}{\partial h} \left[ G_1 \left( \sqrt{\frac{z^2 - (\gamma_1^2 - 1)h^2}{\gamma_1^2}} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial h} \left[ G_2 \left( \sqrt{\frac{z^2 - (\gamma_2^2 - 1)h^2}{\gamma_2^2}} \right) \right], \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \frac{z}{\gamma_1 \sqrt{z^2 - (\gamma_1^2 - 1)h^2}} G'_1 \left( \sqrt{\frac{z^2 - (\gamma_1^2 - 1)h^2}{\gamma_1^2}} \right) = \frac{z}{\gamma_2 \sqrt{z^2 - (\gamma_2^2 - 1)h^2}} G'_2 \left( \sqrt{\frac{z^2 - (\gamma_2^2 - 1)h^2}{\gamma_2^2}} \right) \\ \frac{(1 - \gamma_1^2)h}{\gamma_1 \sqrt{z^2 - (\gamma_1^2 - 1)h^2}} G'_1 \left( \sqrt{\frac{z^2 - (\gamma_1^2 - 1)h^2}{\gamma_1^2}} \right) = \frac{(1 - \gamma_2^2)h}{\gamma_2 \sqrt{z^2 - (\gamma_2^2 - 1)h^2}} G'_2 \left( \sqrt{\frac{z^2 - (\gamma_2^2 - 1)h^2}{\gamma_2^2}} \right) \end{cases}$$

Comme  $G_1$  est dérivable et non constante par hypothèse, il existe  $x_0^{(1)} \in \mathbb{R}_+$  tel que  $G'_1(x_0^{(1)}) \neq 0$ . Soit  $(z_0, h_0) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{H} \setminus (0, 0)$  tel que

$$x_0^{(1)} = \sqrt{\frac{z_0^2 - (\gamma_1^2 - 1)h_0^2}{\gamma_1^2}} \text{ et } x_0^{(2)} = \sqrt{\frac{z_0^2 - (\gamma_2^2 - 1)h_0^2}{\gamma_2^2}}$$

on a d'après ce qui précède que

$$G'_1(x_0^{(1)}) \neq 0 \implies G'_2(x_0^{(2)}) \neq 0$$

$$\text{et } \begin{cases} \frac{z_0}{\gamma_1^2 x_0^{(1)}} G'_1(x_0^{(1)}) = \frac{z_0}{\gamma_2^2 x_0^{(2)}} G'_2(x_0^{(2)}) & (1) \\ \frac{(1 - \gamma_1^2)h_0}{\gamma_1^2 x_0^{(1)}} G'_1(x_0^{(1)}) = \frac{(1 - \gamma_2^2)h_0}{\gamma_2^2 x_0^{(2)}} G'_2(x_0^{(2)}) & (2) \end{cases}$$

En simplifiant (1) par  $z_0$  et en l'injectant dans (2), il s'ensuit :

$$1 - \gamma_1^2 = 1 - \gamma_2^2 \implies \gamma_1 = \gamma_2.$$

Comme  $\gamma_1 = \gamma_2$  on a :

$$G_1\left(\sqrt{\frac{z^2 - (\gamma_1^2 - 1)h^2}{\gamma_1^2}}\right) = G_2\left(\sqrt{\frac{z^2 - (\gamma_1^2 - 1)h^2}{\gamma_1^2}}\right) \quad \forall (z, h) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{H},$$

en prenant  $h = 0$  on en déduit  $G_1 = G_2$  ce qui termine la démonstration.

□

Le modèle est identifiable car du point de vue pratique, l'évènement caractérisant le RMO est une hyperbole et l'on n'a besoin que de deux points de l'hyperbole dont l'un au sommet pour déterminer son allure ce qui explique l'hypothèse sur  $\mathcal{H}$  dans la proposition.

L'évènement caractérisant le RMO est détecté grâce à la cohérence des amplitudes des points qui le constitue. Cette cohérence est exprimée dans ce modèle à l'aide de la fonction  $G$  et du paramètre de courbure  $\gamma$  d'où la nécessité de l'identifiabilité.

### 5.4.2 Semblance et approche statistique de la détermination du paramètre de courbure $\gamma$

Le calcul de la semblance que nous avons appelé *classique* (section 4.1) est basé sur une hypothèse selon laquelle l'amplitude ne varie pas « trop » avec l'offset en présence d'évènement [Sarkar *et al.*, 2001]. Cette amplitude est estimée par la moyenne arithmétique des amplitudes le long de l'évènement. La géométrie de cet évènement est donné par l'équation  $z_{h_j} = \sqrt{z_0^2 + (\gamma^2 - 1)h_j^2}$  où  $z_0$  est le sommet de l'hyperbole qui se trouve à l'offset nul. Ainsi pour un point quelconque  $(z_i, 2h_j)$  du CIG, le sommet de l'hyperbole de courbure  $\gamma$  qui y passe est donné par  $\sqrt{z_i^2 - (\gamma^2 - 1)h_j^2}$ . À partir de ce sommet, l'équation de l'hyperbole de courbure  $\gamma$  qui passe par le point  $(z_i, 2h_j)$  s'écrit  $z_{h'_j} = \sqrt{\left(\sqrt{z_i^2 - (\gamma^2 - 1)h_j^2}\right)^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2} = \sqrt{z_i^2 + (\gamma^2 - 1)(h_{j'}^2 - h_j^2)}$ .

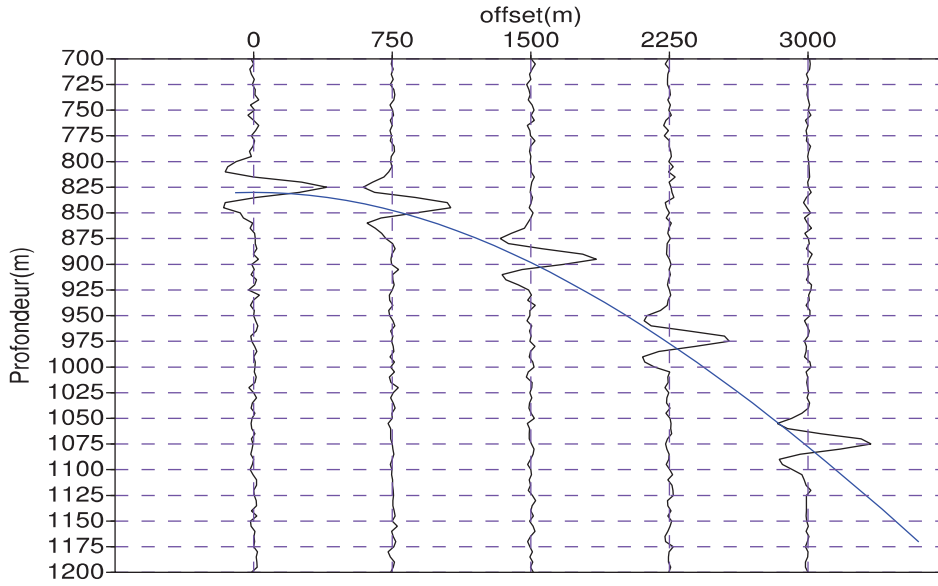


FIGURE 5.5 – Courbe du RMO passant par le point de profondeur  $z_i = 900m$  à l'offset  $1500m$  donc de demi-offset  $h_j = 750m$  et de courbure  $\gamma = 1.1$ .

L'hyperbole en bleu sur la figure 5.5 passe par le point  $(z_i, 2h_j) = (900, 1500)$  et est de courbure  $\gamma = 1.1$ .

L'équation de cette hyperbole est donc  $z_{h'_j} = \sqrt{900^2 + (1.1^2 - 1)(h_{j'}^2 - 750^2)}$ .

Ainsi pour tout point  $(z_i, 2h_j)$  du CIG la valeur moyenne de l'amplitude est

## 5.4 Approche fréquentiste de l'analyse classique du RMO et du calcul de la semblance

estimée par :

$$\hat{G}\left(\sqrt{\frac{z_i^2 - (\gamma^2 - 1)h_j^2}{\gamma^2}}\right) = \frac{1}{m} \sum_{j'=1}^m \hat{g}_{j'}(z_{h_{j'}}) \text{ où } z_{h_{j'}} = \sqrt{z_i^2 + (\gamma^2 - 1)(h_{j'}^2 - h_j^2)}.$$

où l'entier  $m$  indique le nombre de traces pour lesquelles les amplitudes  $g_j(z_{h_{j'}})$  peuvent être évaluées.

$\hat{g}_{j'}$  est, comme nous l'avons vu en section 5.3, l'estimation d'une fonction  $g_{j'}$  qui évalue l'amplitude du signal à la profondeur  $z$  de l'offset  $j'$ .

Considérons la profondeur apparente  $z_0$  d'indice  $i_{z_0} = \lfloor z_0/\delta z - 1 \rfloor$  sur l'offset nul et une courbure  $\gamma$ . Définissons une fenêtre, c'est-à-dire un échantillon de  $2w + 1$  de points de profondeurs centrés autour de  $z_0$  (voir figure 5.6 pour illustration)  $\{z_{i_{z_0}-w}, \dots, z_{i_{z_0}+w}\}$ .

Nous noterons par  $i_0$  les indices des profondeurs des points à l'offset nul.

La maximisation de la semblance pour l'estimation de  $\gamma$  correspond à l'optimisation d'une fonction de perte spécifique  $V(\mathcal{A}^{(k)}, z_0, \gamma, w)$  qui est fonction de la somme des variances  $\text{Var}[A_{i_0,1}] = \frac{1}{m} \sum_{j'=1}^m \left[ \hat{g}_{j'}(\sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2}) - \hat{G}\left(\frac{z_{i_0}}{\gamma}\right) \right]^2$  des variables aléatoires  $A_{i_0,1}$  à offset nul présentes dans la fenêtre de taille  $2w + 1$  considérée.

La fonction de perte est donnée par :

$$V(\mathcal{A}^{(k)}, z_0, \gamma, w) = \frac{\sum_{i_0=i_{z_0}-w}^{i_{z_0}+w} \sum_{j'=1}^m \left[ \hat{g}_{j'}(\sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2}) - \hat{G}\left(\frac{z_{i_0}}{\gamma}\right) \right]^2}{\sum_{i_0=i_{z_0}-w}^{i_{z_0}+w} \sum_{j'=1}^m \left[ \hat{g}_{j'}(\sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2}) \right]^2}.$$

**Proposition 5.4.2.** *Minimiser la fonction de perte*

$$V(\mathcal{A}^{(k)}, z_0, \gamma, w) = \frac{\sum_{i_0=i_{z_0}-w}^{i_{z_0}+w} \sum_{j'=1}^m \left[ \hat{g}_{j'}(\sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2}) - \hat{G}\left(\frac{z_{i_0}}{\gamma}\right) \right]^2}{\sum_{i_0=i_{z_0}-w}^{i_{z_0}+w} \sum_{j'=1}^m \left[ \hat{g}_{j'}(\sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2}) \right]^2}$$

revient à maximiser la semblance

$$S(\mathcal{A}^{(k)}, z_0, \gamma, w) = \frac{\sum_{i_0=i_{z_0}-w}^{i_{z_0}+w} \left[ \sum_{j=1}^m \hat{g}_{j'} \left( \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2} \right) \right]^2}{m \sum_{i_0=i_{z_0}-w}^{i_{z_0}+w} \left[ \sum_{j=1}^m \left[ \hat{g}_{j'} \left( \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2} \right) \right]^2 \right]}.$$

*Démonstration.* Nous montrons ci-dessous que la quantité  $V(\mathcal{A}^{(k)}, z_0, \gamma, w)$  ci-dessus minimisée qui est une somme de variance normalisée est proportionnelle à la semblance.

$$\begin{aligned} V(\mathcal{A}^{(k)}, z_0, \gamma, w) &= \frac{\sum_{i_0=i_{z_0}-w}^{i_{z_0}+w} \sum_{j'=1}^m \left[ \hat{g}_{j'} \left( \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2} \right) - \hat{G} \left( \frac{z_{i_0}}{\gamma} \right) \right]^2}{\sum_{i_0=i_{z_0}-w}^{i_{z_0}+w} \sum_{j'=1}^m \left[ \hat{g}_{j'} \left( \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2} \right) \right]^2} \\ &= \frac{\sum_{i_0=i_{z_0}-w}^{i_{z_0}+w} \sum_{j=1}^m \left[ \hat{g}_{j'} \left( \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2} \right) \right]^2 - m \sum_{i_0=i_{z_0}-w}^{i_{z_0}+w} \left[ \hat{G} \left( \frac{z_{i_0}}{\gamma} \right) \right]^2}{\sum_{i_0=i_{z_0}-w}^{i_{z_0}+w} \sum_{j=1}^m \left[ \hat{g}_{j'} \left( \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2} \right) \right]^2} \\ &= 1 - \frac{m \sum_{i_0=i_{z_0}-w}^{i_{z_0}+w} \left[ \hat{G} \left( \frac{z_{i_0}}{\gamma} \right) \right]^2}{\sum_{i_0=i_{z_0}-w}^{i_{z_0}+w} \sum_{j=1}^m \left[ \hat{g}_{j'} \left( \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2} \right) \right]^2} \\ &= 1 - \frac{\sum_{i_0=i_{z_0}-w}^{i_{z_0}+w} \left[ \sum_{j=1}^m \hat{g}_{j'} \left( \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2} \right) \right]^2}{m \sum_{i_0=i_{z_0}-w}^{i_{z_0}+w} \left[ \sum_{j=1}^m \left[ \hat{g}_{j'} \left( \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2} \right) \right]^2 \right]}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$V(\mathcal{A}^{(k)}, z_0, \gamma, w) = 1 - S(\mathcal{A}^{(k)}, z_0, \gamma, w). \quad (5.10)$$

L'équation (5.10) montre la relation qui existe entre la variation totale des amplitudes des points  $z_{i_0}$  vérifiant  $z_{i_{z_0}-w} \leq z_{i_0} \leq z_{i_{z_0}+w}$  et la semblance. Maximiser la semblance dans l'analyse du RMO reviendrait donc en quelque sorte à minimiser la variation totale normalisée par la somme des carrés des  $\hat{g}_{j'} \left( \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2} \right)$ .

## 5.4 Approche fréquentiste de l'analyse classique du RMO et du calcul de la semblance

Taner [1996] montre qu'il est nécessaire de normaliser cette variation totale pour éliminer l'effet des amplitudes lors du processus d'évaluation de  $\hat{\gamma}$ .

L'estimation du paramètre de courbure  $\gamma$  se fait selon les trois étapes suivantes.

1. Estimation fonctionnelle  $\hat{g}_{j'}$  de  $g_{j'}$  à partir des observations  $(a_{ij'})_{1 \leq i \leq N_z}$  pour tous les offsets  $h_{j'}$ .

2. Estimation  $\hat{G} \left( \sqrt{\frac{z_{i_0}^2 - (\gamma^2 - 1)h_j^2}{\gamma^2}} \right)$  de  $G \left( \sqrt{\frac{z_{i_0}^2 - (\gamma^2 - 1)h_j^2}{\gamma^2}} \right)$  pour  $h_j = 0$  et pour les  $i_0$  tels que  $z_{i_{z_0}-w} \leq z_{i_0} \leq z_{i_{z_0}+w}$ . Cette estimation est réalisée comme nous l'avons mentionné plus haut par une moyenne arithmétique des estimations  $\hat{g}_{j'}(z_{h_{j'}})$  avec  $z_{h_{j'}} = \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)(h_{j'}^2 - h_j^2)}$ ,  $j' = 1, \dots, m$  et  $h_j = 0$  c'est-à-dire par :

$$\hat{G} \left( \sqrt{\frac{z_{i_0}^2 - (\gamma^2 - 1)h_j^2}{\gamma^2}} \right) = \hat{G} \left( \frac{z_{i_0}}{\gamma} \right) = \frac{1}{m} \sum_{j'=1}^m \hat{g}_{j'}(z_{h_{j'}}) = \frac{1}{m} \sum_{j'=1}^m \hat{g}_{j'} \left( \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2} \right)$$

3. Estimation  $\hat{\gamma}$  de  $\gamma$ . La procédure d'estimation repose sur l'hypothèse selon laquelle : « lorsqu'on est en présence d'un événement,  $G \left( \frac{z_{i_0}}{\gamma} \right) \approx g_{j'} \left( \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2} \right)$  pour tous les  $i_0$  tels que  $z_{i_{z_0}-w} \leq z_{i_0} \leq z_{i_{z_0}+w}$  ». d'où la minimisation de la quantité

$$V(\mathcal{A}^{(k)}, z_0, \gamma, w) = \frac{\sum_{i_0=i_{z_0}-w}^{i_{z_0}+w} \sum_{j'=1}^m \left[ \hat{g}_{j'} \left( \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2} \right) - \hat{G} \left( \frac{z_{i_0}}{\gamma} \right) \right]^2}{\sum_{i_0=i_{z_0}-w}^{i_{z_0}+w} \sum_{j'=1}^m \left[ \hat{g}_{j'} \left( \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2} \right) \right]^2},$$

pour estimer la valeur de  $\gamma$  optimale. Cela se traduit par :

$$\hat{\gamma} = \arg \min_{\gamma > 0} V(\mathcal{A}^{(k)}, z_0, \gamma, w).$$

Il est à noter qu'avec cette méthode d'estimation de  $\gamma$ , nous ne disposons pas d'outils nous permettant d'évaluer correctement la variance associée.

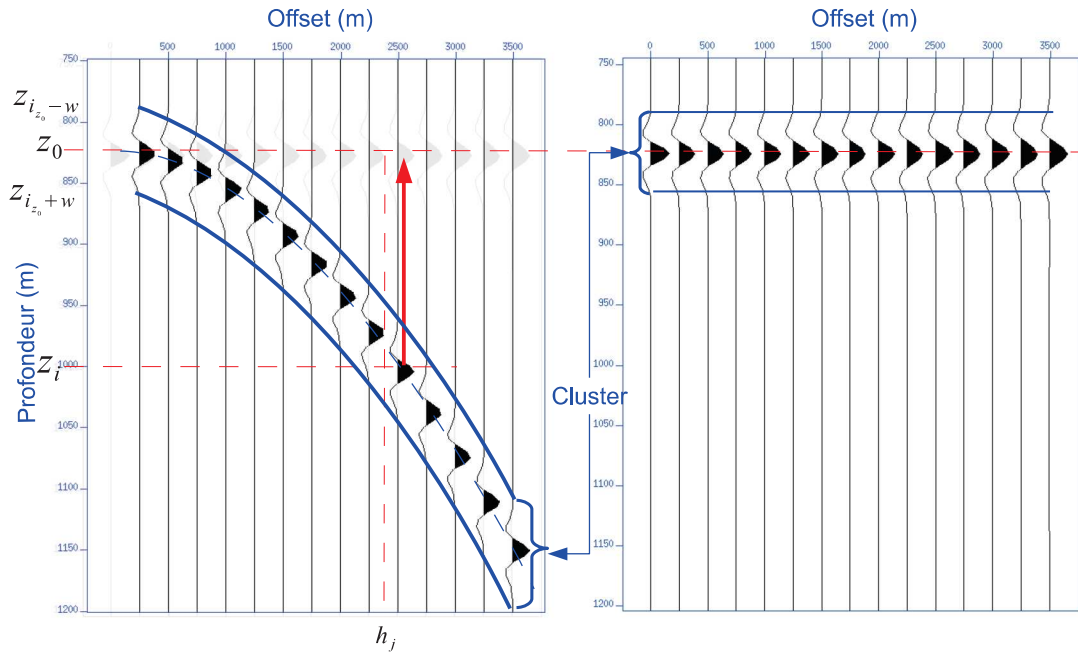


FIGURE 5.6 – Schéma de correction du RMO

La figure de gauche représente un CIG non corrigé de ses RMO et celle de droite montre ce même CIG corrigé de RMO avec la valeur de  $\gamma$  recherchée.

Rappelons que cette section nous présentons une approche fréquentiste du calcul de la semblance. Dans la section suivante, nous présentons une approche bayésienne de cette analyse.

## 5.5 Approche bayésienne de l'analyse du RMO

L'évaluation de l'incertitude qui peut mieux être appréhendée à travers la variabilité du paramètre  $\gamma$  décrite par une loi de probabilité va motiver le choix de l'approche bayésienne.

Dans l'approche bayésienne, les paramètres ne sont plus considérés comme des valeurs fixes inconnues, mais comme des variables aléatoires dont il faut spécifier la *distribution de probabilité*. L'information contenue dans les données est utilisée par le calcul de la distribution dite *a posteriori* et qui n'est autre que la distribution conditionnelle (calculée par la formule du théorème de Bayes) aux données. En

d'autres termes, les données sont utilisées pour « réduire » l'incertitude *a priori* des paramètres.

Dans cette partie, nous introduisons une approche bayésienne fondée sur une modélisation hiérarchique de l'analyse du RMO. Pour l'analyse locale du RMO, c'est-à-dire pour l'analyse à une profondeur  $z_0$  donnée, introduisons un *cluster* de points qui correspond à la fenêtre de taille  $2w + 1$  introduite dans l'approche classique de l'analyse du RMO. Ce *cluster* se définissant par :

$$\mathcal{C}(z_0, \gamma, \Delta) = \left\{ (z_i, 2h_j) \mid z_0 - \Delta \leq \sqrt{z_i^2 - (\gamma^2 - 1)h_j^2} \leq z_0 + \Delta \right\},$$

où  $\Delta = w\delta z$  avec  $\delta z$  le pas d'échantillonnage dans la direction  $z$ .

Posons

$$\mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta) = \{(i, j) \in \{1, \dots, N_z\} \times \{1, \dots, N_o\} \mid (z_i, 2h_j) \in \mathcal{C}(z_0, \gamma, \Delta)\}$$

et

$$N_{\mathcal{C}} = \text{Card}(\mathcal{C}(z_0, \gamma, \Delta)).$$

### 5.5.1 Modèle statistique

Nous considérons les données présentées en section 5.2.

Nous supposons que les observations  $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq N_z \\ 1 \leq j \leq N_o}}$  sont corrompues par un bruit gaussien additif de moyenne nulle. Nous écrivons alors que :

$$a_{ij} = \mu_{ij}(G, \gamma) + \varepsilon_{ij}$$

où les  $\varepsilon_{ij}$  sont des réalisations indépendantes et identiquement distribuées d'une gaussienne  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

Nous pouvons ainsi dire que les observations  $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq N_z \\ 1 \leq j \leq N_o}}$  sont des réalisations des variables aléatoires  $(A_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq N_z \\ 1 \leq j \leq N_o}}$  indépendantes de moyennes respectives  $\mu_{ij}$  et de variance  $\sigma^2$ .

Les différentes hypothèses faites pour construire le modèle hiérarchique se résument comme suit :

- sachant  $G, \gamma$  et  $\forall (i, j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)$ ,  $a_{ij}$  est la réalisation d'une variable aléatoire gaussienne  $A_{ij}$  de moyenne  $\mathbb{E}[A_{ij} | \gamma, G] = \mu_{ij}(G, \gamma)$  et de variance  $\sigma^2$ . Les variables  $A_{ij}$  sont indépendantes.

- $\gamma$  est la réalisation d'une variable aléatoire réelle positive  $\Gamma$  de loi *a priori*  $\Pi(\theta)$  où  $\theta$  est un paramètre a priori connu. La densité des  $A_{ij}$  conditionnelle à  $\Gamma = \gamma$  et  $G$  est donc :

$$f_{A_{ij}|\Gamma=\gamma, G}(a_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (a_{ij} - \mu_{ij}(G, \gamma))^2 \right]$$

où

$$\mu_{ij}(G, \gamma) = G \left( \sqrt{\frac{z_i^2 - (\gamma^2 - 1)h_j^2}{\gamma^2}} \right).$$

### 5.5.2 Loi a posteriori de $\Gamma$ conditionnelle aux données

**Proposition 5.5.1.** *La loi a posteriori de  $\Gamma$  conditionnelle aux données s'écrit :*

$$\begin{aligned} f_{\Gamma|(A_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)}} \left( \gamma | (a_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)} \right) \\ = \frac{\exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)} (a_{ij} - \mu_{ij}(G, \gamma))^2 \right] \Pi_{\theta}(\gamma)}{\int_{\mathbb{R}_+} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)} (a_{ij} - \mu_{ij}(G, \gamma))^2 \right] \Pi_{\theta}(\gamma) d\gamma}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

*Démonstration.*

Les variables aléatoires  $A_{ij}|\Gamma = \gamma, G, \sigma^2$  tel que  $(i, j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)$  étant indépendantes et de même variance par hypothèse, leur vraisemblance s'écrit :

$$\begin{aligned} L \left( (A_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)} | \Gamma = \gamma, G, \sigma^2 \right) \\ = \prod_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)} f_{A_{ij}|\Gamma=\gamma}(a_{ij}) \\ = \prod_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (a_{ij} - \mu_{ij}(G, \gamma))^2 \right] \\ = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^{N_C}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)} (a_{ij} - \mu_{ij}(G, \gamma))^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

La loi marginale des données  $(A_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)}$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}\left((A_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)}\right) \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+} \left[ \prod_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)} f_{A_{ij}|\Gamma=\gamma}(a_{ij}) \right] \Pi_\theta(\gamma) d\gamma \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^{N_C}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)} (a_{ij} - \mu_{ij}(G, \gamma))^2 \right] \Pi_\theta(\gamma) d\gamma \\
 &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^{N_C}} \int_{\mathbb{R}_+} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)} (a_{ij} - \mu_{ij}(G, \gamma))^2 \right] \Pi_\theta(\gamma) d\gamma.
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

L'application du théorème de Bayes nous amène à la loi *a posteriori* de  $\Gamma$  conditionnellement aux données  $(a_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)}$  qui est donnée par :

$$\begin{aligned}
 & f_{\Gamma|(A_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)}} \left( \gamma | (a_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)} \right) \\
 &= \frac{\mathcal{L}\left((A_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)} | \Gamma = \gamma, G, \sigma^2\right) \Pi_\theta(\gamma)}{\mathcal{L}\left((A_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)}\right)} \\
 &= \frac{\frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^{N_C}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)} (a_{ij} - \mu_{ij}(G, \gamma))^2 \right] \Pi_\theta(\gamma)}{\frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^{N_C}} \int_{\mathbb{R}_+} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)} (a_{ij} - \mu_{ij})^2 \right] \Pi_\theta(\gamma) d\gamma} \\
 &= \frac{\exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)} (a_{ij} - \mu_{ij}(G, \gamma))^2 \right] \Pi_\theta(\gamma)}{\int_{\mathbb{R}_+} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)} (a_{ij} - \mu_{ij}(G, \gamma))^2 \right] \Pi_\theta(\gamma) d\gamma}.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Nous remarquons que la loi *a posteriori* de  $\Gamma$  conditionnellement aux données contient les hyperparamètres qui sont  $\mu_{ij}(G, \gamma)$  et  $\sigma^2$ . Pour spécifier cette loi *a posteriori*, il faudrait spécifier une loi *a priori* pour le couple  $(G, \sigma)$  ou adopter une approche bayésienne empirique en remplaçant  $G$  et  $\sigma$  par leur estimations basées sur les données. Mettre des lois de probabilité sur ces hyperparamètres augmenterait considérablement le temps de calcul qui s'annonce déjà grand, le choix de l'approche bayésienne empirique sera fait pour notre mise en oeuvre.

### 5.5.3 Ajustement du modèle aux données

L'ajustement du modèle aux données en vue d'estimer la loi *a posteriori* de notre paramètre d'intérêt s'effectuera comme suit. Nous commencerons par estimer les paramètres fonctionnels et la variance du bruit additif. Ces estimations faites, nous serons alors à mesure d'estimer la loi *a posteriori* du paramètre  $\gamma$  ou du moins les valeurs caractéristiques de sa loi *a posteriori*. Une méthode de simulation de Monte-Carlo par Chaîne de Markov sera utilisé pour atteindre ces objectifs.

#### 5.5.3.a Estimation du paramètre fonctionnel $G$

Nous avons vu précédemment que la moyenne  $\mu_{ij}(G, \gamma)$  de  $A_{ij}$  est une fonction des amplitudes des signaux  $g_{j'}(\cdot)$  le long des hyperboles dont les sommets se trouve à l'offset nul et à la profondeur  $\sqrt{z_i^2 - (\gamma^2 - 1)h_j^2}$ .

L'équation de ces hyperboles est donnée par  $z_{h_{j'}} = \sqrt{z_i^2 + (\gamma^2 - 1)(h_{j'}^2 - h_j^2)}$  pour  $j' = 1, \dots, m$  avec  $m \leq N_o$  le nombre d'offsets pour lesquelles on peut évaluer  $z_{h_{j'}}$  et  $g_{j'}(z_{h_{j'}})$ .

Plusieurs estimateurs du paramètre fonctionnel  $G$  qui sont fonctions des estimateurs (5.8) définis par :

$$\hat{g}_{j'}(z) = \frac{\sum_{i=1}^{N_z} K_{l_z}(z - z_i) a_{ij'}}{\sum_{i=1}^{N_z} K_{l_z}(z - z_i)},$$

sont envisageables. Nous proposons les deux ci-dessous qui consistent à estimer  $G$  par :

1. moyenne arithmétique des  $\hat{g}_{j'}$  comme suit

$$\hat{G}\left(\sqrt{\frac{z_i^2 - (\gamma^2 - 1)h_j^2}{\gamma^2}}\right) = \frac{1}{m} \sum_{j'=1}^m \hat{g}_{j'}(z_{h_{j'}}). \quad (5.15)$$

2. moindres carrées ordinaires comme suit

$$\hat{G}(z_i, \gamma, h_j) = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i h_j, \quad (5.16)$$

avec

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum_{j'=1}^m \left[ \left( h_{j'} - \frac{1}{m} \sum_{j'=1}^m h_{j'} \right) \left( \hat{g}_{j'}(z_{h_{j'}}) - \frac{1}{m} \sum_{j'=1}^m \hat{g}_{j'}(z_{h_{j'}}) \right) \right]}{\sum_{j'=1}^m \left( h_{j'} - \frac{1}{m} \sum_{j'=1}^m h_{j'} \right)^2}$$

et

$$\hat{\alpha}_i = \frac{1}{m} \sum_{j'=1}^m \hat{g}_{j'}(z_{h_{j'}}) - \hat{\beta}_i \frac{1}{m} \sum_{j'=1}^m h_{j'}.$$

Ces deux estimateurs reposent sur les hypothèses que les amplitudes ne dependent pas des offsets (estimateur (5.15)) ou que les amplitudes varient linéairement en fonction des offsets (estimateur (5.16)). Ce dernier s'inspire de l'AB-semblance proposé par Fomel [2009] et qui s'inspire des travaux de Sarkar *et al.* [2001, 2002].

### 5.5.3.b Estimation du paramètre $\sigma^2$

Les deux approches qui ont été explorées pour estimer la variance du bruit sont présentées ci-dessous.

- i. Estimation de  $\sigma^2$  par la variance empirique des résidus.

Cette première méthode est basée sur l'utilisation des résidus  $e_{ij} = a_{ij} - \hat{g}_j(z_i)$ .

La variance  $\sigma^2$  est estimé dans ce cas par  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N_z N_o} \sum_{i=1}^{N_z} \sum_{j=1}^{N_o} e_{ij}^2$ .

- ii. Estimation de  $\sigma^2$  basée sur la décomposition en ondelettes.

La deuxième approche est celle proposée par Mallat [2000]. Elle est basée sur la décomposition en ondelettes de  $\mathcal{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq N_z \\ 1 \leq j \leq N_o}}$ . Cette méthode fait l'hypothèse d'un bruit gaussien additif, ce qui s'avère être le cas dans notre modèle.

#### Définition 5.5.1. (Multiresolutions)[MALLAT, 2000]

Une suite  $\{\mathbf{V}_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$  de sous-espaces fermés de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  est une approximation multirésolution si elle vérifie pour tout  $f$  de cet espace les 6 propriétés suivantes :

$$i. \forall (l, s) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in \mathbf{V}_j \Leftrightarrow f(t - 2^l s) \in \mathbf{V}_l,$$

$$ii. \forall l \in \mathbb{Z}, \mathbf{V}_{l+1} \subset \mathbf{V}_l,$$

$$iii. \forall l \in \mathbb{Z}, f(t) \in \mathbf{V}_l \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in \mathbf{V}_{l+1},$$

$$iv. \lim_{l \rightarrow +\infty} \mathbf{V}_l = \bigcap_{l=-\infty}^{+\infty} \mathbf{V}_l = \{0\},$$

$$v. \lim_{l \rightarrow -\infty} \mathbf{V}_l = \text{Adhérence} \left( \bigcup_{l=-\infty}^{+\infty} \mathbf{V}_l \right) = \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$$

vi. il existe  $\theta$  tel que  $\{\theta(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  soit une base de Riesz de  $\mathbf{V}_0$ , c'est-à-dire qu'il existe  $A > 0$  et  $B > 0$  tels que tout  $f \in \mathbf{V}_0$  puisse se décomposer de manière unique en

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] \theta(t-n)$$

avec

$$A \|f\|_2^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a[n]|^2 \leq B \|f\|_2^2$$

On appelle espace de « details »  $\mathbf{W}_l$  le complémentaire orthogonal de  $\mathbf{V}_l$  dans  $\mathbf{V}_{l-1}$ :

$$\mathbf{V}_{l-1} = \mathbf{V}_l \oplus \mathbf{W}_l$$

On définit alors :

$$\mathbf{W}_l^2 = (\mathbf{V}_l \otimes \mathbf{W}_l) \oplus (\mathbf{W}_l \otimes \mathbf{V}_l) \oplus (\mathbf{W}_l \otimes \mathbf{W}_l),$$

où  $\otimes$  et  $\oplus$  désignent respectivement le produit tensoriel et la somme directe de deux espaces vectoriels.

NB : L'espace  $\mathbf{V}_l$  regroupe toutes les approximations possibles à l'échelle  $2^l$ .

**Théorème 5.5.1.** [Mallat, 2000]

Soit  $\phi$  une fonction d'échelle et  $\psi$  l'ondelette correspondante engendrant une base d'ondelettes orthonormée de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ . On définit trois ondelettes :

$$\psi^1(x_1, x_2) = \phi(x_1) \psi(x_2), \quad \psi^2(x_1, x_2) = \psi(x_1) \phi(x_2), \quad \psi^3(x_1, x_2) = \psi(x_1) \psi(x_2),$$

et on pose, pour  $1 \leq k \leq 3$

$$\psi_{l,n}^k(x) = \frac{1}{2^l} \psi^k \left( \frac{x_1 - 2^l n_1}{2^l}, \frac{x_2 - 2^l n_2}{2^l} \right).$$

Alors la famille d'ondelettes

$$\{\psi_{l,n}^1, \psi_{l,n}^2, \psi_{l,n}^3\}_{n \in \mathbb{Z}^2}$$

est une base orthonormée de  $\mathbf{W}_l^2$ , et

$$\{\psi_{l,n}^1, \psi_{l,n}^2, \psi_{l,n}^3\}_{(l \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^2)}$$

est une base orthonormée de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ .

Notons que la matrice  $\mathcal{A}$  s'écrit comme la somme d'un signal  $\mathcal{S}$  et d'un bruit  $\mathcal{B}$ . Calculons les coefficients d'ondelettes de la matrice des données  $\mathcal{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq N_z \\ 1 \leq j \leq N_o}}$  dans une base orthonormée d'ondelettes. À la plus fine échelle  $2^L$ , un signal de taille  $N$  a  $N/2$  coefficients d'ondelette et on a  $L = \log_2(N) - 1$ .

Les coefficients d'ondelette s'écrivent alors :

$$d_L^k[i, j] = \langle \mathcal{A}, \psi_{L,i,j}^k \rangle = \langle \mathcal{S}, \psi_{L,i,j}^k \rangle + \langle \mathcal{B}, \psi_{L,i,j}^k \rangle \text{ pour } k = 1, 2, 3.$$

Le coefficient  $|\langle \mathcal{S}, \psi_{L,i,j}^k \rangle|$  est petit si  $\mathcal{S}$  est régulier sur le support de  $\psi_{L,i,j}^k$ , auquel cas  $\langle \mathcal{A}, \psi_{L,i,j}^k \rangle \approx \langle \mathcal{B}, \psi_{L,i,j}^k \rangle$ . Au contraire,  $|\langle \mathcal{S}, \psi_{L,i,j}^k \rangle|$  est grand si  $\mathcal{S}$  varie brutalement sur le support de  $\psi_{L,i,j}^k$ . Un signal régulier par morceaux a peu de transition brutale, et génère donc un petit nombre de grands coefficients relativement aux nombre des coefficients à l'échelle minimum. A l'échelle la plus fine, la composante du signal n'influence donc qu'un petit nombre de coefficients  $\langle \mathcal{A}, \psi_{L,i,j}^k \rangle$  de grande amplitude. Les autres sont approximativement égaux à  $\langle \mathcal{B}, \psi_{L,i,j}^k \rangle$ , qui est une variable aléatoire gaussienne de variance  $\sigma^2$  et de moyenne nulle. Notons par  $D$  cette variable aléatoire, nous avons

$$F_{|D|}(t) = \begin{cases} \mathbb{P}(|D| \leq t) & \text{si } 0 \leq t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} F_D(t) - F_D(-t) & \text{si } 0 \leq t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc

$$f_{|D|}(y) = \begin{cases} f_D(y) + f_D(-y) & \text{si } 0 \leq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } 0 \leq y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $M$  la valeur médiane de  $D$ .

$$\mathbb{P}(D \leq M) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^M \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy = \frac{1}{2}$$

si nous posons  $t = \frac{y}{\sqrt{2}\sigma}$  nous obtenons  $dy = \sqrt{2}\sigma dt$  et

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{M}{\sqrt{2}\sigma}} \exp(-t^2) dt &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \operatorname{erf}\left(\frac{M}{\sqrt{2}\sigma}\right) &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \sigma &= \frac{M}{\sqrt{2}\operatorname{erf}^{-1}(0.5)} \\ \Rightarrow \sigma &= \frac{M}{0.6745} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Nous avons donc  $\hat{\sigma} = \frac{\widehat{M}}{0.6745}$  où  $\widehat{M}$  est l'estimation de la médiane des valeurs absolues des coefficients d'ondelettes de  $\mathcal{A}$  à la plus fine échelle.

Une analyse de sensibilité par rapport à la méthode d'estimation de la variance du bruit est réalisée en l'application.

### 5.5.3.c Estimation de la loi a posteriori de $\Gamma$ conditionnelle aux observations

Maintenant que nous avons à notre disposition les outils et moyens nécessaires pour estimer les différents paramètres de notre modèle, nous sommes en mesure d'estimer la loi *a posteriori* de  $\Gamma$  conditionnelle aux observations  $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq N_z \\ 1 \leq j \leq N_o}}$ . Comme nous l'avons fait remarquer en section 5.5.2, les estimations à l'aide de méthodes fréquentistes des paramètres  $G$  et  $\sigma^2$  seront injectés dans l'équation (5.11) pour obtenir une estimation de cette loi *a posteriori*. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{\Gamma|(A_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)}}(\gamma, |(a_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)}|) \\ = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)} (a_{ij} - \hat{\mu}_{ij}(\hat{G}, \gamma))^2\right] \Pi_{\theta}(\gamma)}{\int_{\mathbb{R}_+} \exp\left[-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}(z_0, \gamma, \Delta)} (a_{ij} - \hat{\mu}_{ij}(\hat{G}, \gamma))^2\right] \Pi_{\theta}(\gamma) d\gamma}. \end{aligned}$$

Le dénominateur de l'estimation ci-dessus n'étant pas calculable de façon analytique, nous utiliserons une méthode de type Monte Carlo par Chaîne de Markov et en particulier l'algorithme de Metropolis-Hastings générant des réalisations « pseudo-indépendantes » qui nous aideront caractériser cette loi *a posteriori*. L'algorithme de Metropolis-Hastings a été choisi car il nous permet de générer des réalisations d'une

variable aléatoire à partir d'une fonction qui est proportionnelle à sa densité.

On appelle **algorithme MCMC** (pour Monte Carlo Markov Chain) toute méthode de simulation produisant une chaîne de Markov ergodique ayant pour loi stationnaire la distribution d'intérêt.

## 5.6 Algorithme de Metropolis-Hastings

Historiquement, l'algorithme de Metropolis-Hastings est la première des méthodes *MCMC* [Parent et Bernier, 2007, chapitre 12]. Sa première version a été introduite par Metropolis *et al.* [1953] dans le domaine de la physique statistique qui considérait une distribution de Boltzmann. Il a ensuite été généralisé à d'autres distributions par Hastings [1970]. Cependant, selon Robert [1996] les méthodes de Metropolis-Hastings se sont véritablement imposées à la communauté statistique qu'à partir du développement de l'*échantillonnage de Gibbs* par Gelfand et Smith [1990] malgré les tentatives précédentes de Geman et Geman [1984], Tanner et Wong [1987] et de Besag [1989]. Le point fort de cet algorithme est qu'il permet de simuler des réalisations de n'importe quelle loi de probabilité à partir d'une fonction qui est proportionnelle à sa densité. Dans le cadre bayésien, la constante de normalisation est souvent difficilement calculable, ainsi, la capacité de générer des réalisations sans la connaissance au préalable de cette constante en fait sa vertu.

De manière générale, l'algorithme de Metropolis-Hastings associé à une loi de densité objectif  $f$  et une loi conditionnelle  $q(\cdot|\cdot)$ , appelée *loi instrumentale*, produit une chaîne de Markov fondée sur la transition suivante : étant donné un état courant  $x^{(t)}$ ,

i. Générer un état candidat  $y_t \sim q(y|x^{(t)})$ .

ii. Prendre

$$x^{(t+1)} = \begin{cases} y_t & \text{avec probabilité } \rho(x^{(t)}, y_t) \\ x^{(t)} & \text{avec probabilité } 1 - \rho(x^{(t)}, y_t) \end{cases}$$

où

$$\rho(x^{(t)}, y_t) = \min \left\{ \frac{f(y_t) q(x^{(t)}|y_t)}{f(x^{(t)}) q(y_t|x^{(t)})}, 1 \right\}.$$

Cet algorithme accepte automatiquement les candidats  $y_t$  telles que « le rapport de vraisemblance »  $f(y_t)/q(y_t|x^{(t)})$  est supérieur à la valeur précédente. Ce n'est que dans le cas symétrique que l'acceptation est gouvernée par le rapport  $f(y_t)/f(x^{(t)})$ .

L'algorithme de Metropolis-Hastings ne dépend que des rapports  $f(y_t)/f(x^{(t)})$  et  $q(x^{(t)}|y_t)/q(y_t|x^{(t)})$  et est donc indépendant des constantes de normalisation.

La probabilité  $\rho(x^{(t)}, y_t)$  n'est définie que si  $f(x^{(t)})$  est non nulle. Il faut donc initialiser la chaîne par une valeur  $x^{(0)}$  tel que  $f(x^{(0)}) > 0$ , il vient donc que pour tout  $t$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $f(x^{(t)}) > 0$  car les valeurs  $y_t$  telles que  $f(y_t) = 0$  conduisent à  $\rho(x^{(t)}, y_t) = 0$  et sont rejetées par l'algorithme.

Dans le chapitre qui suit, nous présentons la mise en œuvre et les résultats obtenus.

## Sommaire

- 6.1 Implémentation
- 6.2 Analyse de sensibilité des paramétrisations du modèle
- 6.3 Résultats de l'approche bayésienne de l'analyse sur données synthétiques
- 6.4 Résultats de l'approche bayésienne de l'analyse sur données réelles
- 6.5 Temps de calcul
- 6.6 Avantages et inconvénients de l'approche bayésienne de l'analyse du Residual Move Out

## Mise en œuvre et Résultats

*« It doesn't matter how beautiful your theory is,  
it doesn't matter how smart you are.  
If it doesn't agree with experiment, it's wrong. »*

R. Feynman.

Nous présentons dans ce chapitre une expérimentation de la méthodologie exposée dans les chapitres précédents à partir des données synthétiques et réelles. Nous commencerons par présenter les outils et moyens utilisés pour la mise en œuvre. Différentes analyses de sensibilité seront exposées pour justifier les différents choix que nous avons faits. Nous présenterons ensuite les résultats d'une manière « ascendante ». Nous verrons dans un premier temps les résultats à position en surface et profondeur fixées ( $\mathcal{A}_{ijk}$  pour  $k$  et  $i$  fixés), ensuite on verra les résultats à position en surface fixée c'est-à-dire pour un CIG fixé et enfin sur des données 2D c'est-à-dire un ensemble de CIG. Des comparaisons avec des méthodes existantes seront aussi faites tout au long du chapitre. L'influence des différents choix de paramètres pour l'exécution des codes mis en œuvre sera étudiée. On terminera ce chapitre en énumérant les avantages et les inconvénients de l'approche mise en place.

## 6.1 Implémentation

Pour générer une chaîne  $(\gamma^{(t)})$  des réalisations de la loi *a posteriori* donnée par (5.11), l'algorithme de Metropolis-Hastings implémenté est inspiré de celui que Geyer et Johnson [2012] ont développés pour le package `MCMC` de R. Il utilise une loi gaussienne comme loi *instrumentale*, donc une loi symétrique. Ainsi, l'acceptation de l'état candidat  $\gamma^{cand}$  dépendra que du rapport  $f(\gamma^{cand})/f(\gamma^{(t)})$ .

L'implémentation du code pour l'approche bayésienne de l'analyse du RMO qui a constitué une grande partie du travail mené au cours de cette thèse a été faite en `fortran 90` avec les bibliothèques `MPI` et `OpenMP` pour la parallélisation. Ce choix a été fait pour exploiter la puissance du calcul parallèle et parce que les outils d'analyse statistique bayésienne classique n'étaient pas adaptés pour les données auxquelles nous avons affaire. Les pseudo-codes sont donnés en annexe B de ce document.

## 6.2 Analyse de sensibilité des paramétrisations du modèle

Pour l'étude de la sensibilité des différents paramètres du modèle, nous considérons les données présentées sur la figure 6.1 ci-dessous. C'est CIG synthétique non bruité auquel on a ajouté un bruit gaussien de variance 0.03 et de moyenne nulle.

Ce CIG contient deux événements dont le second présente une variation de l'amplitude avec l'offset (AVO) ainsi qu'un changement de polarité. Les deux événements ont pour courbure  $\gamma = 1.1$ . Nous commençons par étudier l'erreur relative commise lors de l'estimation de  $\sigma^2$  avec les deux méthodes exposées en paragraphe 5.5.3.b du chapitre précédent. La plus petite erreur relative va déterminer notre choix.

Ensuite nous observerons l'impact du choix de la loi *a priori* de  $\Gamma$  sur sa loi *a posteriori*. Ainsi nous choisirons la loi uniforme et la loi gamma pour mener cette étude.

Nous avons vu en section 4.1 que l'estimation de  $G$  par la moyenne arithmétique des  $g_j$  faisait que la semblance classique n'était pas robuste face à une variation linéaire ou quasi-linéaire des amplitudes avec l'offset. Ainsi nous verrons comment cet estimateur influence la loi *a posteriori* de  $\Gamma$  conditionnellement aux observations.

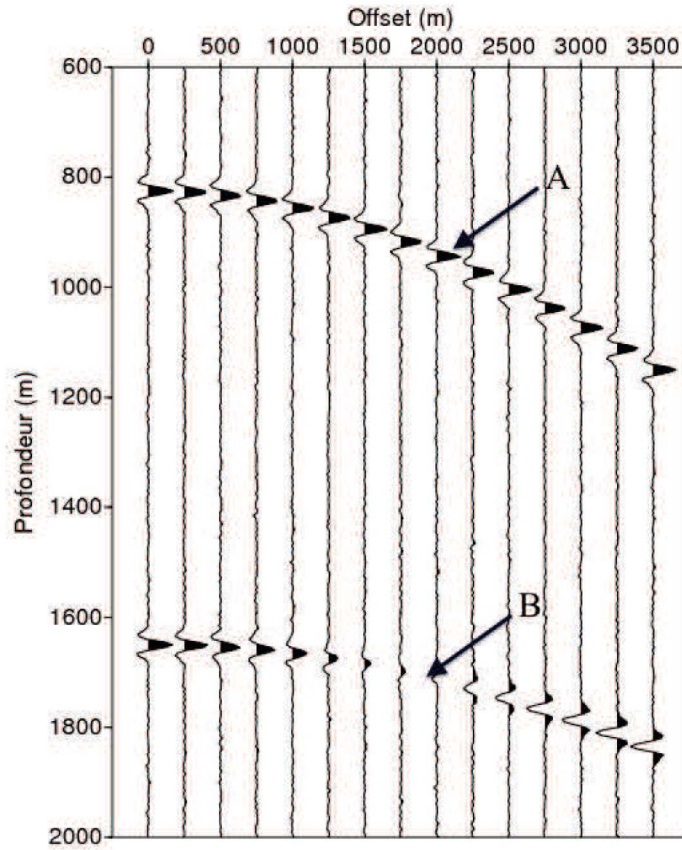


FIGURE 6.1 – L'évènement **A** du CIG ne présente pas de variation d'amplitudes avec l'offset tandis que l'évènement **B** présente une variation d'amplitude avec l'offset ainsi qu'un changement de polarité. La valeur théorique de  $\gamma$  est de 1.1 pour les 2 évènements.

### 6.2.1 Choix de la méthode d'estimation de $\sigma^2$

Les deux méthodes exposées en paragraphe 5.5.3.b sont testées et les résultats sont exposés ci-dessous. Pour ce test, nous générons un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance théorique 0.03. L'erreur relative est donnée par :

$$E_r = \frac{|\text{valeur théorique} - \text{valeur estimée}|}{|\text{valeur théorique}|} \times 100$$

	Valeur estimée de $\sigma^2$	Erreur relative	Temps de calcul
Méthode des résidus	0.0264	11.87 %	$5.836 \cdot 10^{-3}$ s
Méthode des ondelettes	0.0294	2 %	$3.2824 \cdot 10^{-2}$ s

TABLE 6.1 – Table comparative des estimations de  $\sigma^2$  en fonction des méthodes.

Nous voyons que pour un CIG, le temps mis pour l'estimation de  $\sigma^2$  est négligeable comparer au temps d'exécution du code dans son ensemble pour un point (voir table 6.2). Cette estimation étant faite qu'une seule fois par CIG, nous retiendrons le critère de l'erreur relative pour choisir la méthode d'estimation. Les deux options restent disponibles dans le code, mais notre préférence va vers la méthode basée sur la décomposition en ondelette du fait de sa faible erreur relative.

## 6.2.2 Sensibilité des caractéristiques de la loi *a posteriori* par rapport à la loi *a priori* de $\Gamma$

Pour étudier de manière numérique la sensibilité de la loi *a posteriori* de  $\Gamma$  par rapport au choix de sa loi à *a priori*, nous fixons certains paramètres du modèle. Le paramètre fonctionnel  $G$  sera estimé par la moyenne arithmétique tel que c'est exposé au paragraphe 5.5.3.a. La variance du bruit est quant à elle estimée par la méthode des ondelettes.

Nous faisons le choix d'une loi uniforme sur  $[0.6, 1.4]$  et d'une loi Gamma de paramètre de forme  $k = 0.5$  et de paramètre d'intensité  $\theta = 2$  dont la densité est donnée par  $f(\gamma; k, \theta) = \gamma^{k-1} \frac{\exp(-\frac{\gamma}{\theta})}{\Gamma(k)\theta^k}$  de sorte à avoir une moyenne *a priori* de  $k\theta = 1$  et une variance  $k\theta^2 = 2$ . Pour éviter toutes confusions, précisons que  $\Gamma(k) = \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt$  est la fonction gamma et non la variable aléatoire  $\Gamma$ . Les paramètres de la loi uniforme ont été arbitrairement choisis car au vue du CIG l'information *a priori* que nous pouvons avoir en fonction de l'allure de l'évènement (courbure vers le bas) est que la valeur de  $\gamma$  est supérieur à 1. Si nous considérons l'équation de la géométrie du RMO donnée par  $z_h(\gamma) = \sqrt{z_0^2(\gamma) + (\gamma^2 - 1)h^2}$  alors pour  $z_0(\gamma) = 800$  et  $z_h(\gamma) = 1200$  pour  $h = 1750$  nous en déduisons que  $\gamma \approx \sqrt{\frac{1200^2 - 800^2}{1750^2}} + 1 = 1.12$ . Ainsi le choix de tout intervalle contenant  $[1, 1.12]$  en l'occurrence  $[0.6, 1.4]$  serait satisfaisant. Les résultats sont présentés sur le tableau ci-dessous.

	Loi uniforme	Loi Gamma
Moyenne <i>a posteriori</i>	1.1000	1.0999
Écart-type <i>a posteriori</i>	$1.636 \cdot 10^{-3}$	$1.7705 \cdot 10^{-3}$
Quantile 2.5%	1.0969	1.0969
Quantile 97.5%	1.1030	1.1037
Temps de calcul	160 s	177 s

TABLE 6.2 – Table comparative des résultats en fonction de la loi *a priori* sur  $\Gamma$

La première remarque que nous pouvons faire est que au niveau des résultats attendus, les différences sur les quantiles estimés apparaissent sur les quatrième décimales. Une différence notable réside dans le temps d'exécution du code. Pour ce test, nous avons simulé sur un cœur, 100000 itérations pour chaque loi *a priori* et nous avons gardé les 50000 dernières pour évaluer les paramètres de la distribution *a posteriori*. Nous constatons que pour la simulation avec la loi Gamma comme loi *a priori*, nous mettons 17 secondes de plus qu'avec la loi uniforme comme loi *a priori*. Pour faire les simulations pour les  $800 \times 1200 = 960000$  points que comporte nos données réelles sur 200 cœurs par exemple, nous mettrons environ  $4800 \times 17$  secondes de plus soit environ 22 heures de plus. Notons que si les paramètres de réglage de l'algorithme de Métropolis-Hastings sont bien choisis, il n'est pas nécessaire de faire 100000 itérations, nous pourrions faire autour de 60000 itérations et obtenir pratiquement les mêmes résultats qu'avec les 100000 itérations. Cette grande différence de temps s'explique par le fait que pour une loi Gamma, on calcule autant de fois qu'il y a d'itérations la densité de loi Gamma. Or la loi uniforme ayant une densité constante sur son support, cette densité est calculée une seule fois. Le temps d'exécution est donc le critère qui va orienter notre choix vers la loi uniforme comme loi *a priori*, et aussi le fait qu'il est plus facile pour une personne non familière avec les lois de probabilité de se représenter intuitivement une loi uniforme qu'une loi gamma.

### 6.2.3 Influence du choix de l'estimateur de la moyenne $\mu_{ij}$ des données sur la loi *a posteriori*

Nous avons vu dans la section 5.5.2 du chapitre 5 que le calcul de la loi *a posteriori* nécessite l'estimation des moyennes  $\mu_{ij}(G, \gamma)$  des données. Cette estimation est fonction du choix de l'hypothèse de la dépendance des amplitudes avec l'offset. Nous nous proposons dans ce paragraphe d'étudier l'influence de ces hypothèses et pour ce faire nous considérerons deux types d'événements : un événement où les amplitudes

ne dépendent pas de l'offset et un autre où les amplitudes sont fonction de l'offset (voir figure 6.1).

Nous estimerons les moyennes  $\mu_{ij}(G, \gamma)$  par une moyenne arithmétique et ensuite par moindres carrés ordinaires et observerons leurs influences sur l'estimation de la loi *a posteriori* de  $\Gamma$  conditionnelle à  $\mathcal{A}$ .

Dans le cas de l'hypothèse selon laquelle l'amplitude ne varie pas « trop » avec l'offset, la moyenne arithmétique est utilisée et nous avons :

$$\hat{\mu}_{ij}(G, \gamma) = \hat{G} \left( \sqrt{\frac{z_i^2 - (\gamma^2 - 1)h_j^2}{\gamma}} \right) = \frac{1}{m} \sum_{j'=1}^m \hat{g}_{j'}(z_{h_{j'}}),$$

avec  $z_{h_{j'}} = \sqrt{z_i^2 - (\gamma^2 - 1)(h_{j'}^2 - h_j^2)}$  et  $m$  le nombre de traces pour lesquelles l'expression sous le radical ci-dessus reste positif.

La dépendance de l'amplitude avec l'offset est prise en compte en prenant  $G$  comme fonction de l'offset. Les moindres carrés ordinaires sont utilisés comme suit :

$$\hat{\mu}_{ij}(G, \gamma) = \hat{G}(z_i, \gamma, h_j) = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i h_j,$$

avec

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum_{j'=1}^m \left[ \left( h_{j'} - \frac{1}{m} \sum_{j'=1}^m h_{j'} \right) \left( \hat{g}_{j'}(z_{h_{j'}}) - \frac{1}{m} \sum_{j'=1}^m \hat{g}_{j'}(z_{h_{j'}}) \right) \right]}{\sum_{j'=1}^m \left( h_{j'} - \frac{1}{m} \sum_{j'=1}^m h_{j'} \right)^2}$$

et

$$\hat{\alpha}_i = \frac{1}{m} \sum_{j'=1}^m \hat{g}_{j'}(z_{h_{j'}}) - \hat{\beta}_i \frac{1}{m} \sum_{j'=1}^m h_{j'}.$$

L'idée d'utiliser les moindres carrés ordinaires a été introduite par Fomel [2009] pour pouvoir prendre en compte les changement de polarité dans le calcul de la semblance.

### 6.2.3.a Estimation de $\mu_{ij}$ par moyenne arithmétique

Les figures 6.2a et 6.2b ci-dessous représentent les variations des amplitudes avec l'offset le long des évènements **A** et **B** et l'estimation par la moyenne arithmétique. Nous avons représenté en bleu les amplitudes des traces aux profondeurs  $z_{h_j} = \sqrt{z_0^2 + (\gamma^2 - 1)h_j^2}$  où  $z_0 = 825$  pour l'évènement **A**,  $z_0 = 1650$  pour **B** et  $\gamma = 1.1$ . les offsets  $h_j$  varient de 0 à 3500 m avec un pas de 500 m.

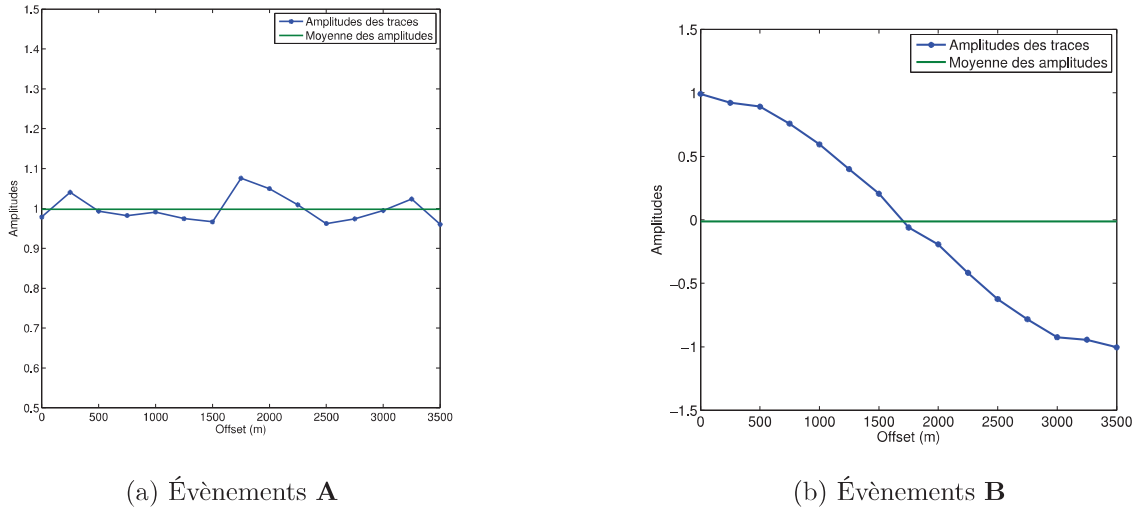


FIGURE 6.2 – Amplitudes en fonction des offsets pour la valeur théorique de  $\gamma$ .

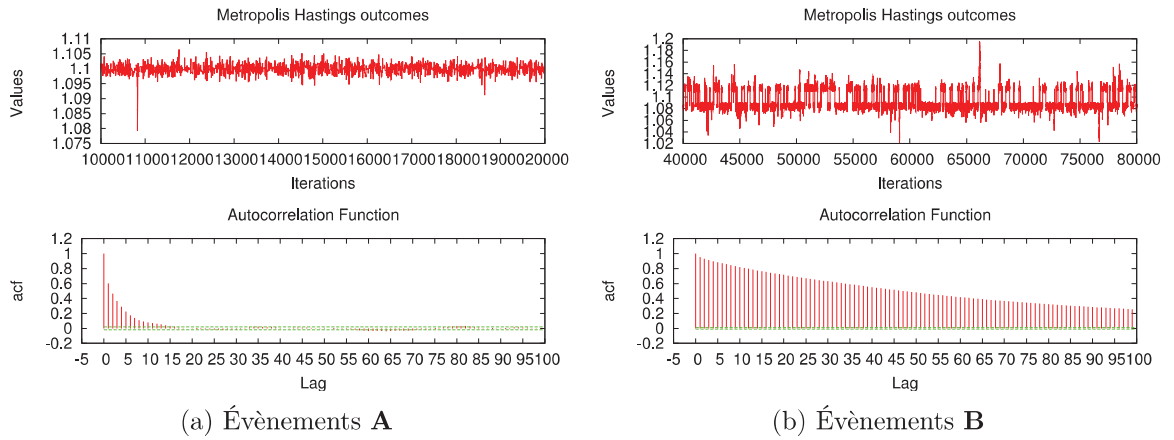


FIGURE 6.3 – Itérations de Metropolis Hastings et Fonctions d'autocorrélation .

Sur les figures 6.3(a) et 6.3(b) nous observons les dernières itérations de l'algorithme de Metropolis Hastings (10000 pour l'évènement **A** et 40000 pour l'évènement **B**) et les fonctions d'autocorrélation correspondantes. Les corrélations entre les itérations pour l'évènement **A** s'annulent tous les 20 itérations alors que pour l'évènement **B** elle s'annuleraient au delà des 100 itérations. Ainsi pour avoir des réalisations « indépendantes » de la loi *a posteriori* , nous garderons les dernières itérations avec un écart de 20 réalisations pour l'évènement **A** et 200 itérations pour l'évènement **B**.

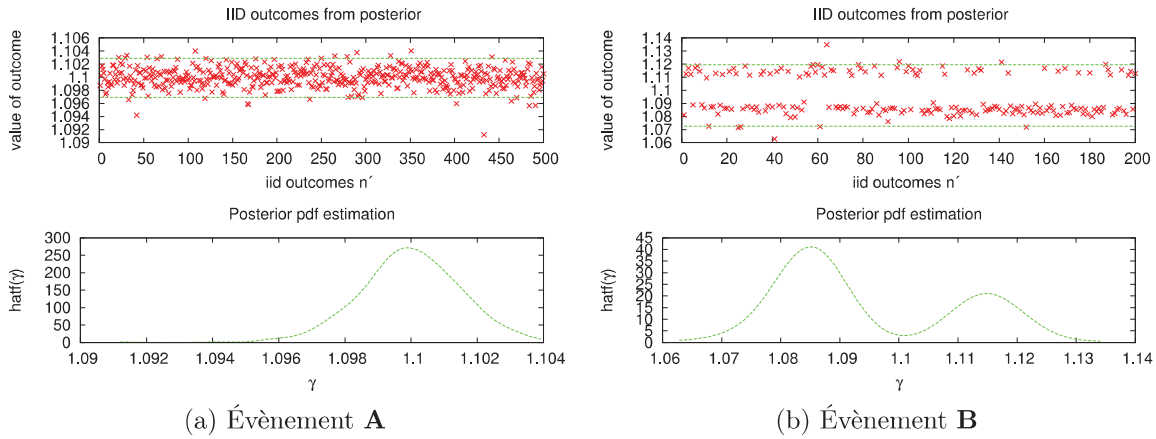


FIGURE 6.4 – Réalisations « indépendantes » et estimation par noyau de la loi  $a$  *posteriori* de  $\Gamma$  sachant les données

Les figures 6.4(a) et 6.4(b) montrent sur les figures du haut, les réalisations « indépendantes » (500 pour **A** et 200 pour **B**) et les intervalles de crédibilité à 95% dont les bornes correspondent aux quantiles 2.5% et 97.5% et sur les figures du bas l'estimation de la loi  $a$  *posteriori* par la méthode des noyaux à partir des réalisations « indépendantes ». Nous voyons qu'en présence de variation de l'amplitude avec l'offset, l'estimateur tend à estimer une loi bimodale (figure 6.4(b)) alors que nous sommes en présence d'un seul évènement donc d'une loi unimodale.

Valeur théorique	1.1
Quantile 2.5%	1.097
Quantile 97.5%	1.103
Médiane	1.099
Moyenne	1.099
Ecart-type	$1.10^{-3}$

(a) Évènement **A**

Valeur théorique	1.1
Quantile 2.5%	1.072
Quantile 97.5%	1.12
Médiane	1.099
Moyenne	1.099
Ecart-type	$2.10^{-3}$

(b) Évènement **B**

TABLE 6.3 – Table récapitulative des paramètres de la loi  $a$  *posteriori*

Les tables 6.3(a) et 6.3(b) résument le type d'information qu'on peut avoir sur la loi  $a$  *posteriori*. Nous avons choisi de montrer les quantiles 2.5% et 97.5% qui constituent les bornes de l'intervalle de crédibilité à 95%, la valeur médiane, la valeur moyenne et l'écart-type.

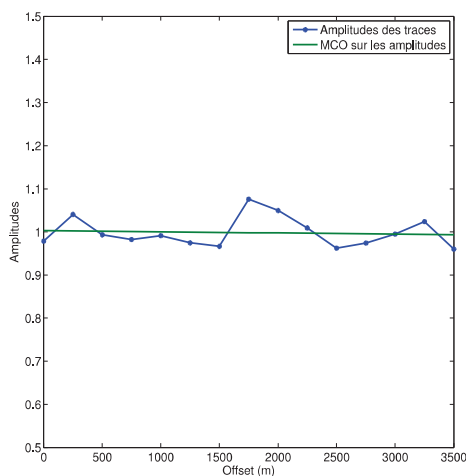
La valeur théorique de  $\gamma$  qui a permis de simuler les données est aussi donnée

pour faire la comparaison et permettre de voir la qualité de l'estimation soit par la valeur moyenne soit par la valeur médiane.

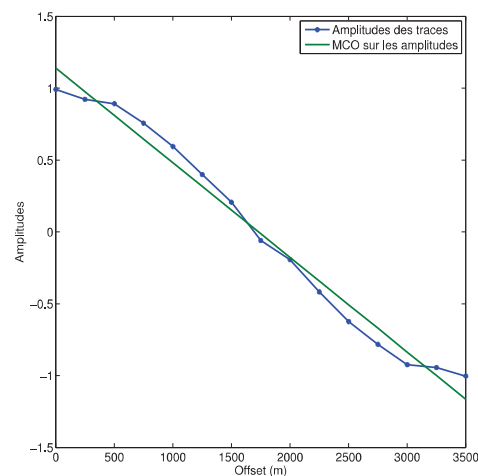
Dans le paragraphe qui suit, nous conduisons la même étude, mais cette fois-ci avec les moindres carrés ordinaires comme estimateurs des moyennes au lieu de la moyenne arithmétique comme dans le cas précédent.

### 6.2.3.b Estimation des $\mu_{ij}$ par moindres carrés ordinaires

Dans cette étude, les moindres carrés ordinaires (MCO) sont utilisés pour estimer les moyennes  $\mu_{ij}(G, \gamma)$  des données  $a_{ij}$ . Les figures 6.5a et 6.5b présentent les amplitudes en fonction des offsets et leur estimation par MCO.



(a) Évènements **A**



(b) Évènements **B**

FIGURE 6.5 – Amplitudes en fonction des offsets pour la valeur théorique de  $\gamma$ .

Les 10000 dernières itérations de l'algorithme de Metropolis Hastings et les fonctions d'autocorrélation correspondantes sont données sur les figures 6.6(a) et 6.6(b) ci-dessous. Les itérations avec un pas de 20 sont « indépendantes » aussi bien pour le réflecteur **A** que pour le réflecteur **B**.

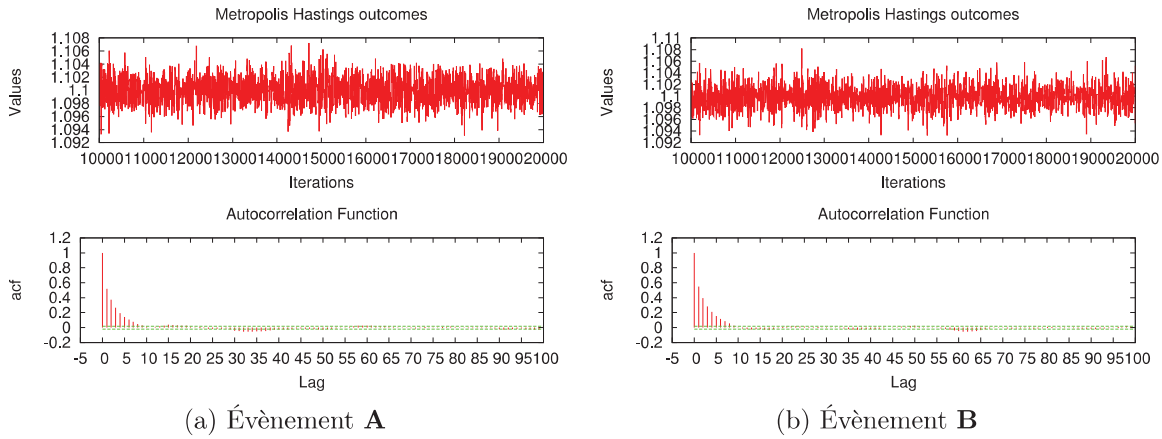


FIGURE 6.6 – Itérations de Metropolis Hastings et fonction d'autocorrélation associées

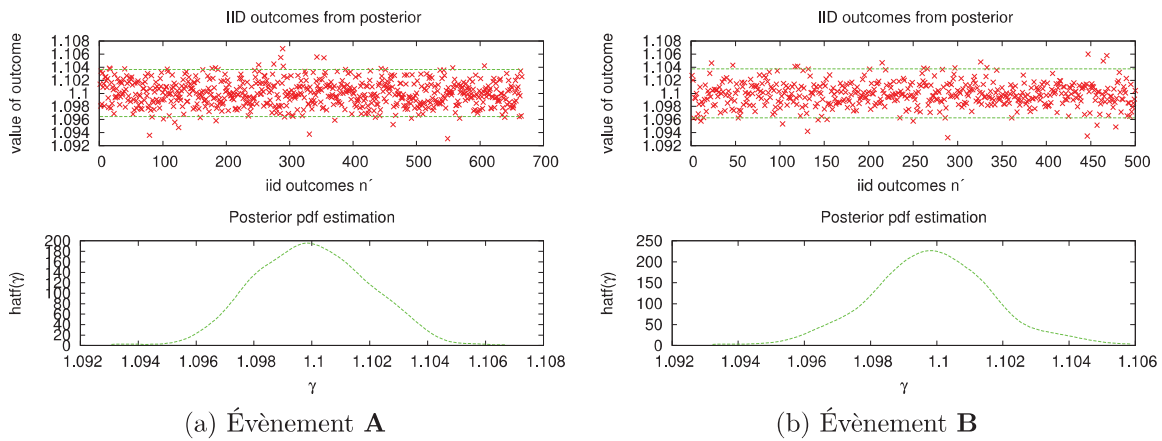


FIGURE 6.7 – Réalisations « indépendantes » et estimation par noyau de la loi  $a$  *posteriori* de  $\Gamma$  sachant les données

Les figures 6.7(a) et 6.7(b) montrent que les lois *a posteriori* de  $\Gamma$  conditionnelles aux données sont similaires pour les événements **A** et **B**. Ce qui s'observe aussi sur les tables 6.4a et 6.4a ci-dessous.

### 6.3 Résultats de l'approche bayésienne de l'analyse sur données synthétiques

Valeur théorique	1.1
Quantile 2.5%	1.096
Quantile 97.5%	1.104
Médiane	1.099
Moyenne	1.099
Ecart-type	$3.10^{-3}$

(a) Évènement **A**

Valeur théorique	1.1
Quantile 2.5%	1.096
Quantile 97.5%	1.104
Médiane	1.099
Moyenne	1.099
Ecart-type	$2.10^{-3}$

(b) Évènement **B**

TABLE 6.4 – Table récapitulative des paramètres de la loi *a posteriori*

Cette étude sur l'influence du choix de l'estimateur fréquentiste de la moyenne des données nous permet de dire qu'il est le plus judicieux de choisir les moindres carrés ordinaire comme estimateur que de choisir la moyenne arithmétique. En effet, cette dernière est sensible aux variations d'amplitudes avec l'offset et ce phénomène n'est pas rare sur les données réelles.

Nous faisons le choix des moindres carrés ordinaires pour les applications sur les données synthétiques complexes et les données réelles.

Ce paragraphe présente le type de résultat attendus avec l'approche bayésienne de l'analyse du RMO. Pour chaque point, nous pouvons estimer à partir des données la courbure  $\gamma$  par la valeur moyenne ou la valeur médiane des réalisations de la loi *a posteriori*, ainsi que les quantiles qui nous donnerons des intervalles de crédibilité.

## 6.3 Résultats de l'approche bayésienne de l'analyse sur données synthétiques

Nous présentons dans cette section les résultats de l'approche bayésienne sur des données synthétiques. Nous montrons les données sur lesquelles l'analyse est faite et les résultats associés. Les résultats de l'approche classique sont aussi présentés parallèlement pour permettre la comparaison.

### 6.3.1 Résultats sur un CIG synthétique

La figure 6.8(a) ci-dessous montre un CIG synthétique qui présente une variation de l'amplitude avec l'offset en son « milieu » avec un changement de polarité. Pour pouvoir prendre en compte cet effet AVO (Amplitude Versus Offset) dans l'approche classique de l'analyse du RMO, nous utilisons l'AB-semblance introduite par Fomel

[2009] pour le calcul de la cohérence. La figure 6.8b présente le résultat de l'analyse classique du RMO pour des valeurs de  $\gamma$  allant de 0.7 à 1.3 avec un pas de 0.01. Le niveau des couleurs représente la valeur de l'AB-semblance. Les valeurs théoriques de  $\gamma$  qui ont permis de générer les données de la figure 6.8(a) sont représentées sur la figure 6.8b par la courbe violette. Les valeurs de  $\gamma$  maximisant ce critère de cohérence qu'est l'AB-semblance sont représentés par la courbe noire sur la figure 6.8(b).

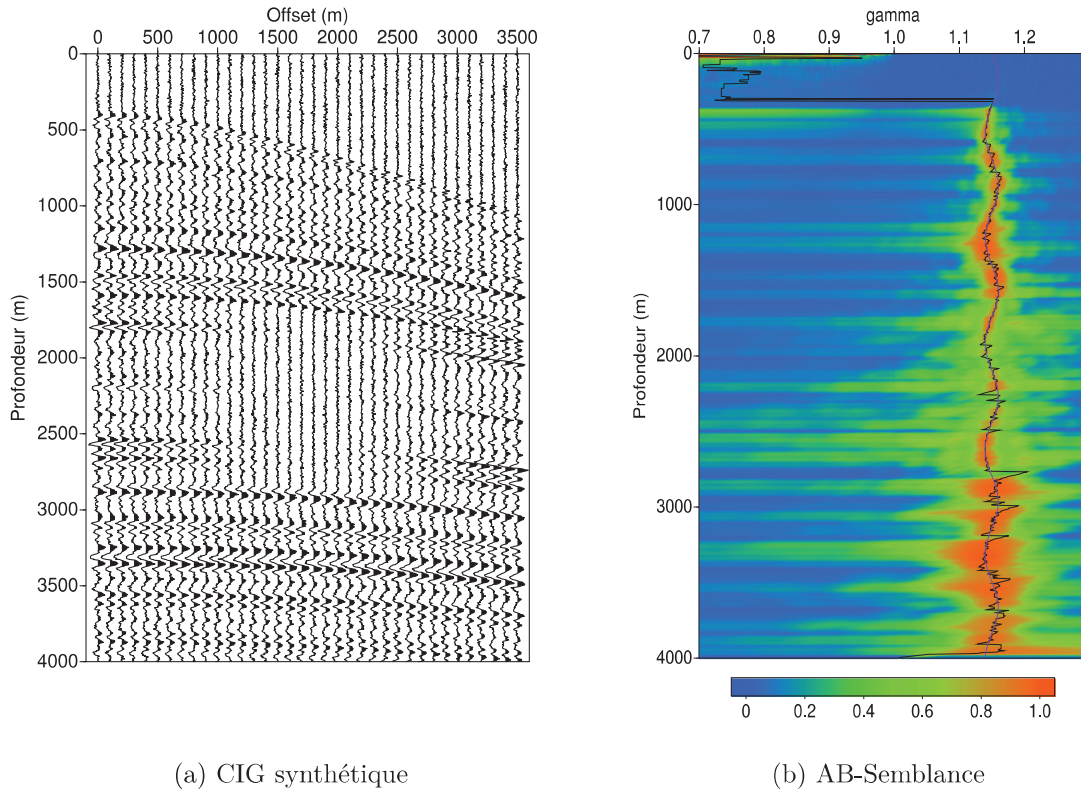


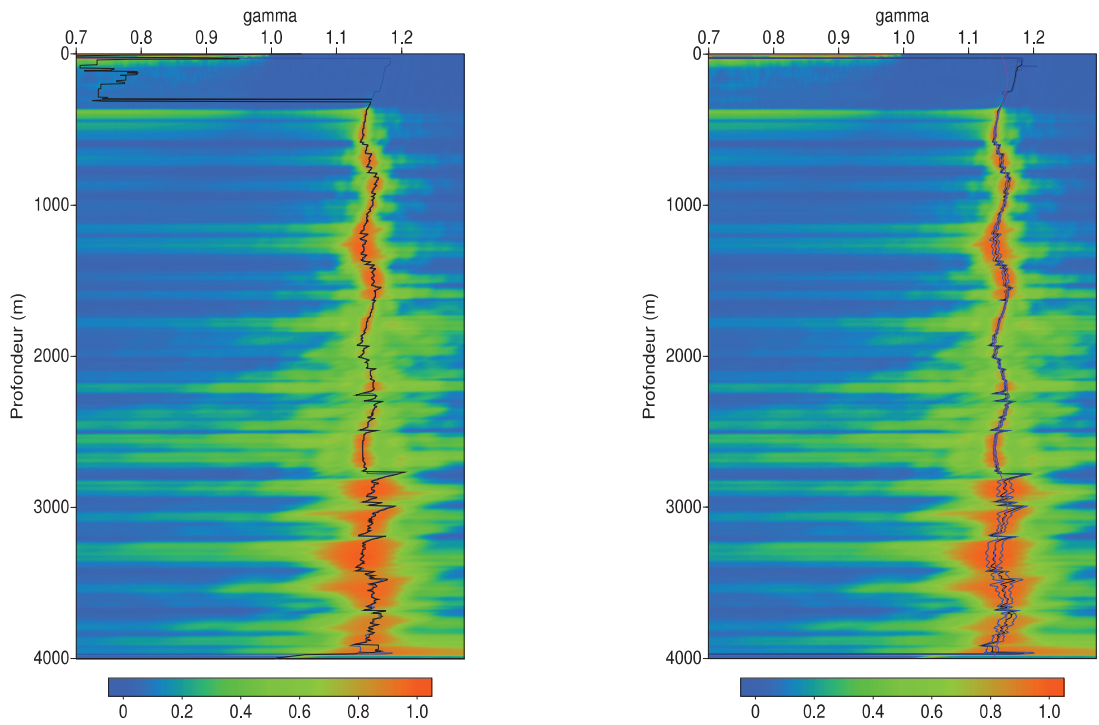
FIGURE 6.8 – CIG synthétique avec un effet de variation de l'amplitude avec l'offset et l'AB-Semblance.

Nous remarquons que la courbe optimale des valeurs de  $\gamma$  (en noir) au sens du calcul de l'AB-semblance est proche de la courbe des valeurs théoriques. La question à laquelle on ne répond pas avec cette approche est celle de savoir quelle est l'incertitude présente sur cette estimation, ou encore, à quel point on est « sûr » de cette estimation.

La réponse à ces questions est apportée avec l'approche bayésienne dont les résultats sont en partie présentés sur la figure 6.9(b) ci-dessous. La première remarque que nous pouvons faire (figure 6.9(a)) est que sur ces données synthétiques, en présence d'évènement, la courbe des valeurs moyennes *a posteriori* de  $\gamma$  estimée par

### 6.3 Résultats de l'approche bayésienne de l'analyse sur données synthétiques

l'approche bayésienne n'est pas très différente de la courbe optimale calculée avec l'approche classique mais est meilleure tout de même. Pour comparaison, la somme des carrés résiduels est de 0.215 pour l'approche classique et 0.152 pour l'approche bayésienne. En plus de ce gain en précision, nous avons la possibilité de calculer différents quantiles qui feront office d'intervalle de crédibilité. Nous présentons l'intervalle de crédibilité à 95% calculer avec les quantiles 2.5% et 97.5% sur la figure 6.9(b).

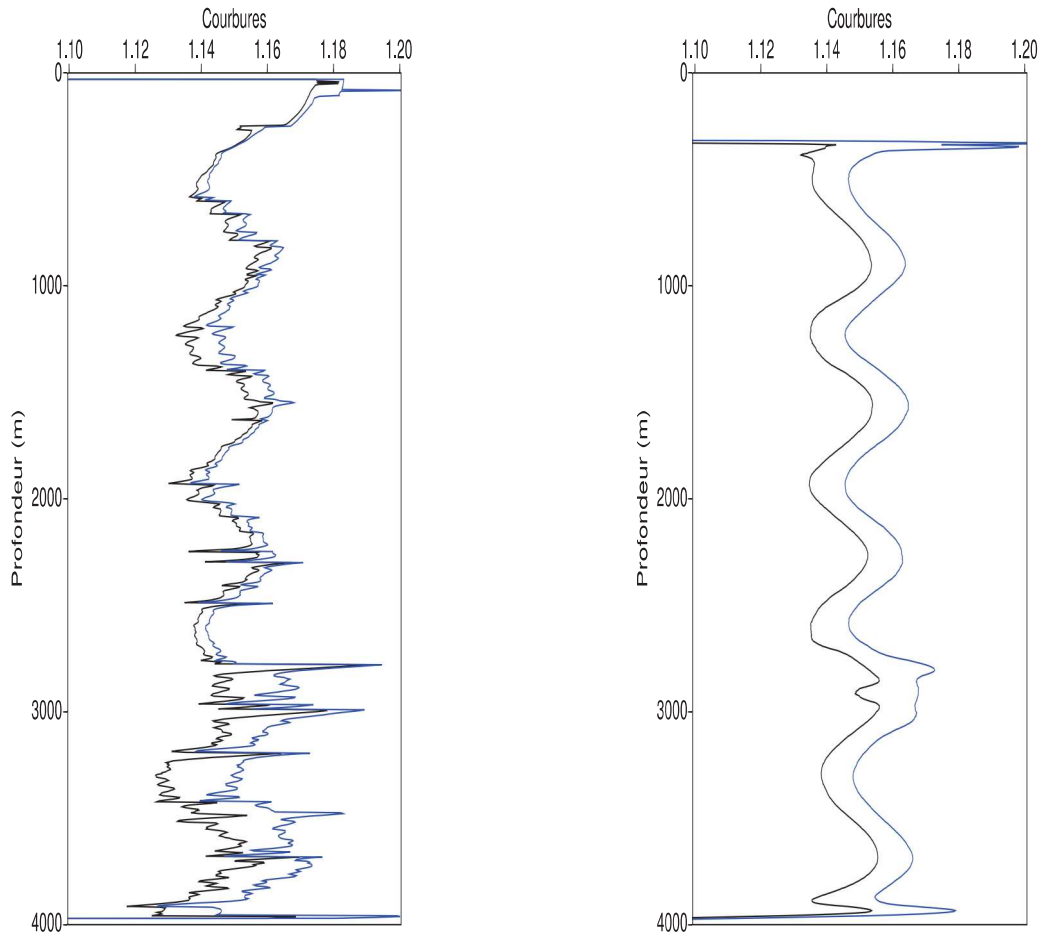


(a) Courbures optimales obtenues par approche classique et approche bayésienne

(b) Courbures optimales obtenue par approche bayésienne et intervalle de crédibilité à 95% associé

FIGURE 6.9 – Comparaison de l'approche classique et de l'approche bayésienne de l'analyse du RMO sur un CIG synthétique.

Nous comparons les intervalles de crédibilité pour cette approche bayésienne et pour l'approche qui consiste à lisser les résultats de l'approche classique avec les splines. La figure 6.10 ci-dessous montre l'intervalle de crédibilité de l'approche bayésienne et l'intervalle de crédibilité lié au lissage par spline à nœuds libres.



(a) Quantile 2.5% (courbe noire) et Quantile 97.5% (courbe bleue) formant l'intervalle de crédibilité à 95% avec l'approche Bayésienne de l'analyse du RMO

(b) Quantile 2.5% (courbe noire) et Quantile 97.5% (courbe bleue) formant l'intervalle de crédibilité à 95% avec le lissage par spline des résultats de l'approche classique

FIGURE 6.10 – Comparaison des intervalles de crédibilité obtenue par l'approche bayésienne du RMO et par le lissage des résultats de l'approche classique

La première remarque que nous pouvons faire est que la largeur de l'intervalle de crédibilité est plutôt la même pour toutes les profondeurs avec le lissage par spline (courbes noires), alors qu'elle augmente avec la profondeur dans le cas l'approche bayésienne du RMO. Cela s'explique par le fait que l'approche bayésienne estime l'intervalle de crédibilité à partir des données et plus on avance en profondeur, plus

la complexité du milieu joue sur l'estimation du paramètre  $\gamma$ . La méthode des splines ne prenant pas en compte directement les données, elle ne traduit pas ce phénomène.

### 6.3.2 Résultats sur des données 2D synthétiques

Une application sur les données synthétiques 2D Refcurve présentées en début du document est effectuée dans cette section. La figure 6.11 présente ces données migrées avec le modèle de vitesse exact.

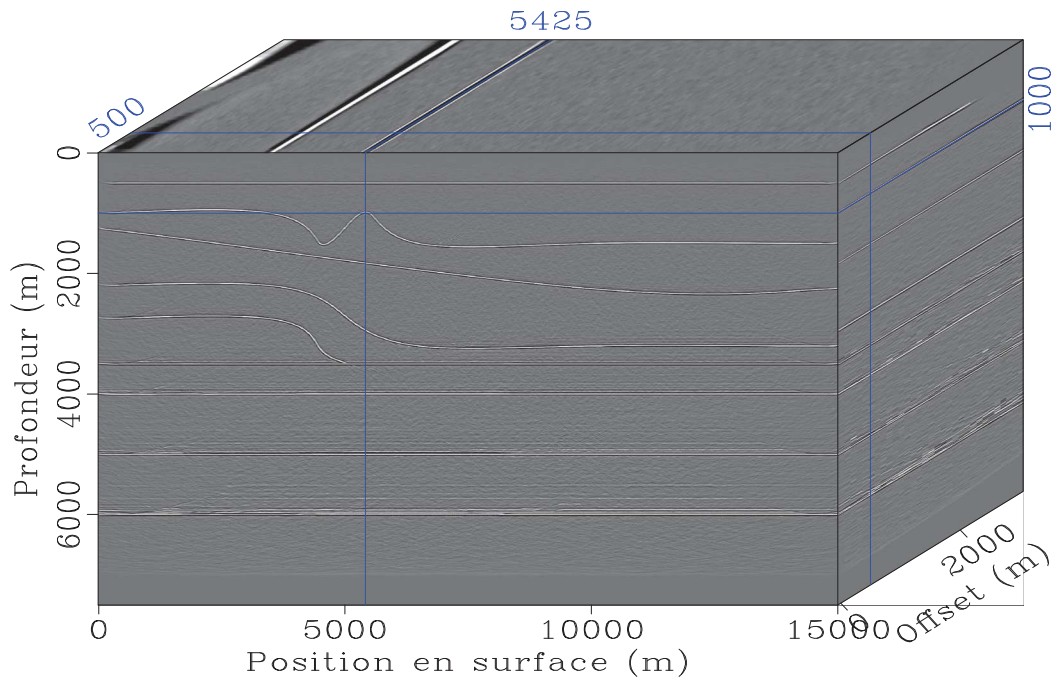


FIGURE 6.11 – Données synthétique 2D : Refcurve migré avec modèle de vitesse exact

Le modèle de vitesse étant exact, en présence d'évènements, nous devons avoir une valeur de  $\gamma$  « très proche » de 1. Ceci se traduit sur les CIG par des évènements horizontaux : la profondeur d'un réflecteur, observée sur l'image pour l'offset nul, est la même pour tous les offsets.

Les résultats de l'analyse classique du RMO sont présentés sur la figure 6.12 ci-dessous. Les valeurs de  $\gamma$  en présence d'évènements sont proches de 1 comme prévue et en absence d'évènement nous avons à faire à des valeurs quelconques. En observant les valeurs des semblances associées à ces courbures  $\gamma$  (figure 6.13), nous remarquons les valeurs élevées pour les courbures en présence d'évènements et des valeurs faibles ailleurs.

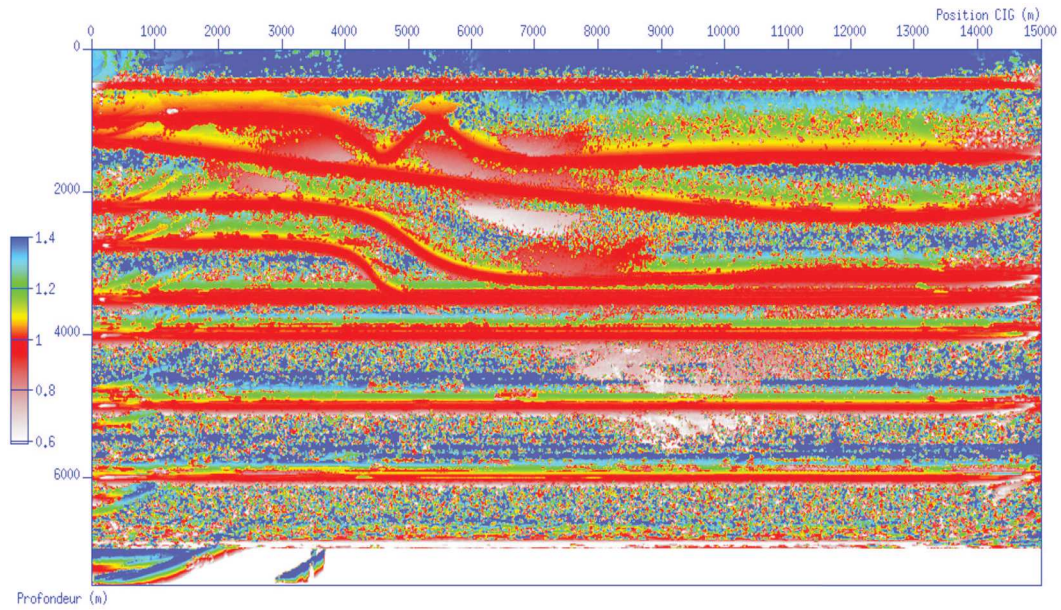


FIGURE 6.12 – Valeurs de  $\gamma$  pour les données Refcurves obtenue par analyse classique du RMO.

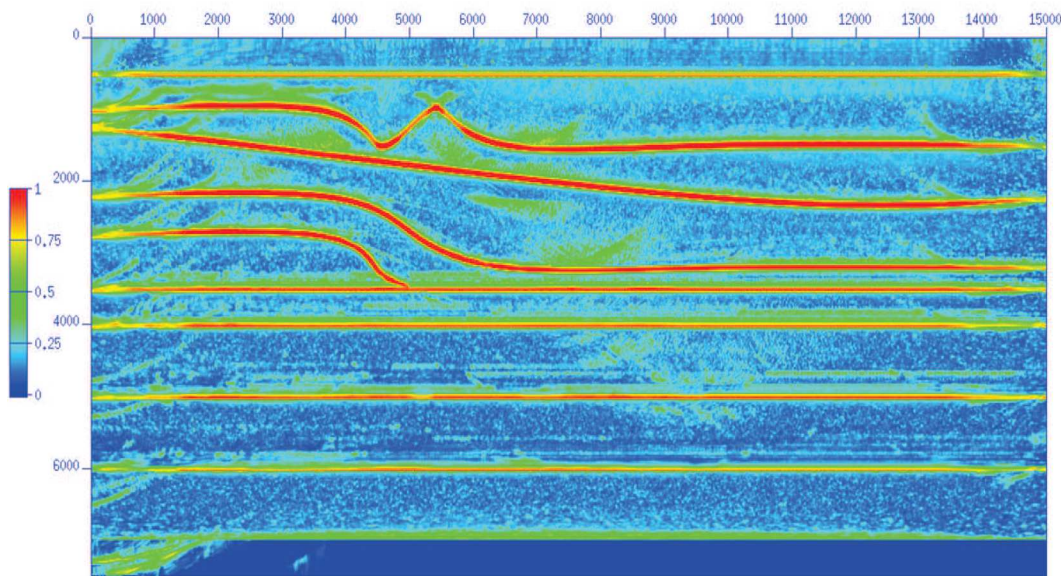


FIGURE 6.13 – AB-Semblance associée aux  $\gamma$  de la figure 6.12

L'approche bayésienne de l'analyse du RMO appliquée à ces données produit les résultats que nous présentons sur les figures 6.14, 6.15, 6.16 et 6.17.

La valeur des moyennes *a posteriori* de  $\gamma$  sont présentées sur la 6.14. Nous avons des valeurs proches de 1 en présence d'événements comme dans l'approche classique.

### 6.3 Résultats de l'approche bayésienne de l'analyse sur données synthétiques

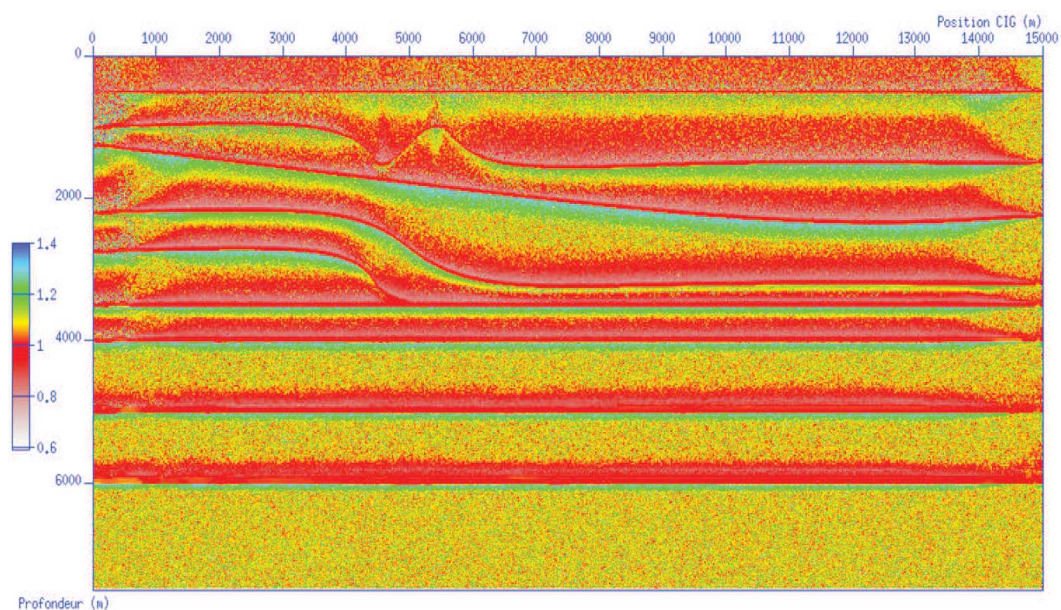


FIGURE 6.14 – Valeurs moyennes *a posteriori* de  $\gamma$  pour les données Refcurve

Les quantiles (figures 6.15 et 6.16) sont proches des bornes de la loi *a priori* de  $\gamma$  qui est ici la loi uniforme sur  $[0.6, 1.6]$  lorsque nous ne sommes pas en présence d'événements. Les bornes de l'intervalle de crédibilité se resserrent en présence d'événements.

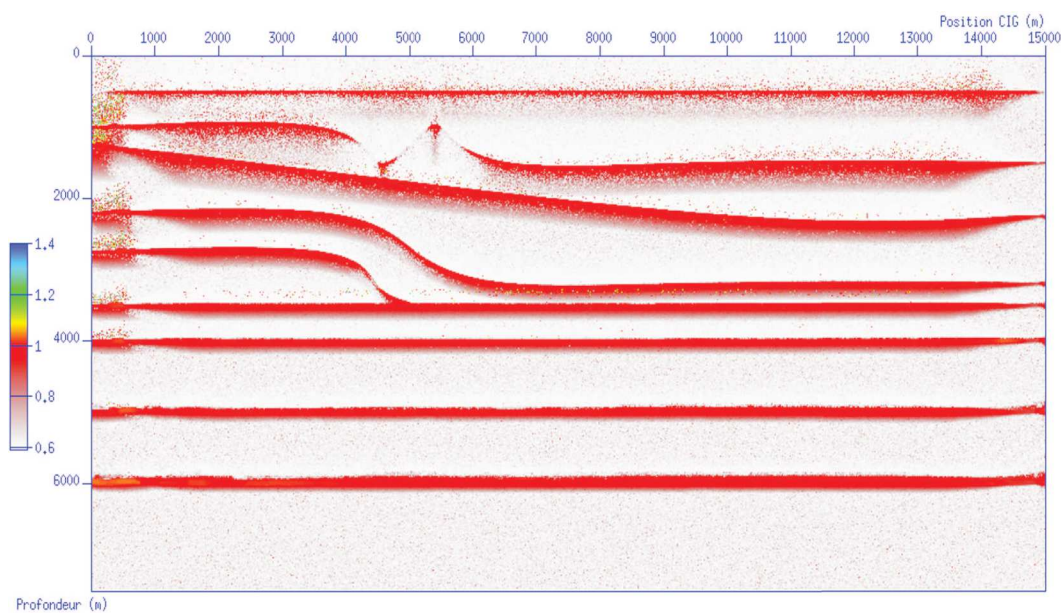


FIGURE 6.15 – Quantiles 2.5% *a posteriori* de  $\gamma$  pour les données Refcurve

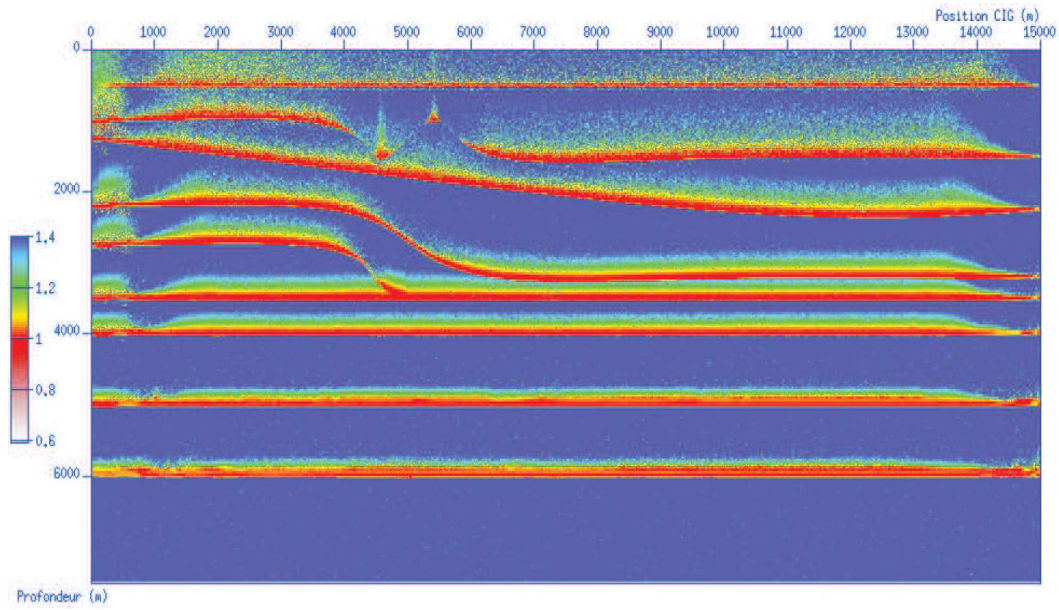


FIGURE 6.16 – Quantiles 97.5% *a posteriori* de  $\gamma$  pour les données Refcurve

Nous avons aussi accès avec l'approche bayésienne à l'écart-type *a posteriori* sur  $\gamma$  et la figure 6.17 montre que l'écart-type est supérieur à 0.01 en l'absence d'évènement. Ce critère peut nous permettre de localiser le signal cohérent au sens du RMO dans nos données.

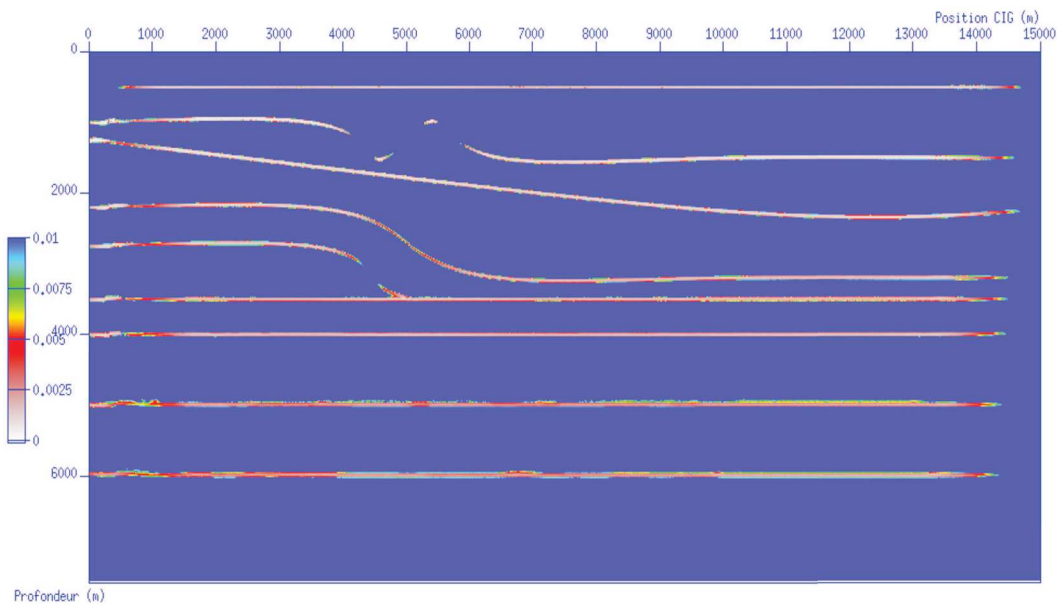


FIGURE 6.17 – Ecart - type *a posteriori* de  $\gamma$  pour les données Refcurve

## 6.4 Résultats de l'approche bayésienne de l'analyse sur données réelles

Les données réelles (figure 6.18) que nous utilisons pour cette application sont des données marines où le fond de mer est entre 1500 et 2000 mètres. Les structures géologiques sont majoritairement des failles anticlinales qui forment les pièges à hydrocarbures à leurs sommets. Les réflecteurs eux, ont des pentes allant jusqu'à 50°. Du fait de l'effet « lentille » qu'ont ces hydrocarbures sur le trajet des ondes et de la géologie complexe, les outils standards d'imagerie s'avère inefficace. Le développement des outils novateurs pour le traitement a été nécessaire. Le choix de ces données complexes a été fait pour tester la robustesse de l'approche bayésienne. La figure 6.18 ci-dessous présente la ligne de données sur lequel l'approche bayésienne est testée. Cette ligne comporte 800 points dans la direction profondeur allant de 900m à 4895m avec un pas de 5 mètres, 50 offsets allant de 779m à 5679m avec un pas de 100 mètres et 1199 CIG. Les géométries d'acquisition ont été modifiées pour des raisons de confidentialité.

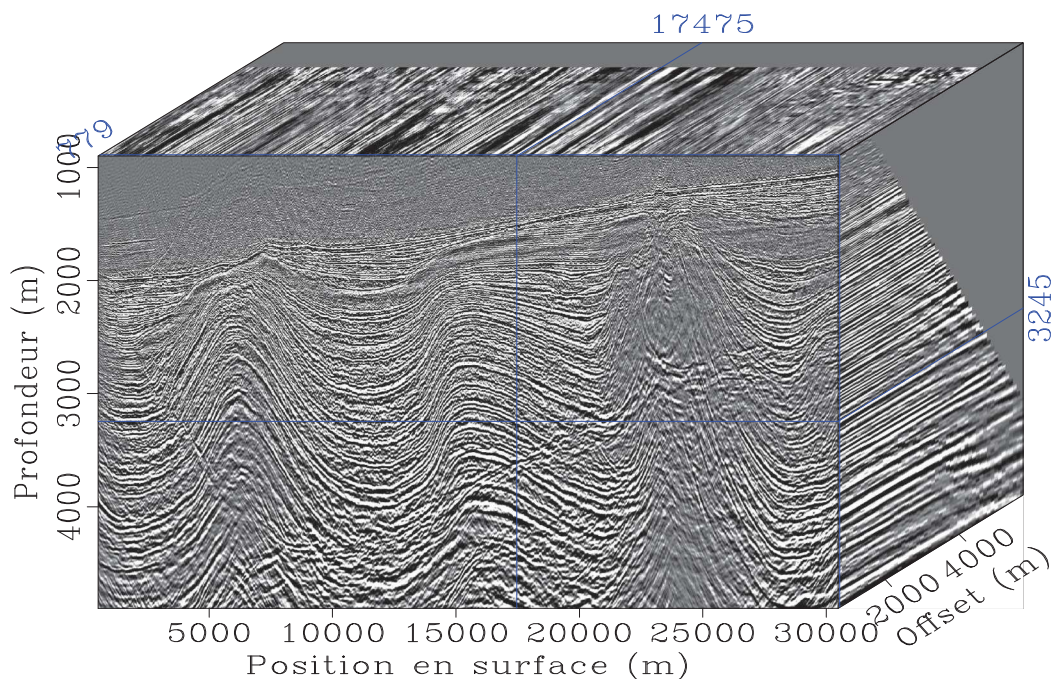
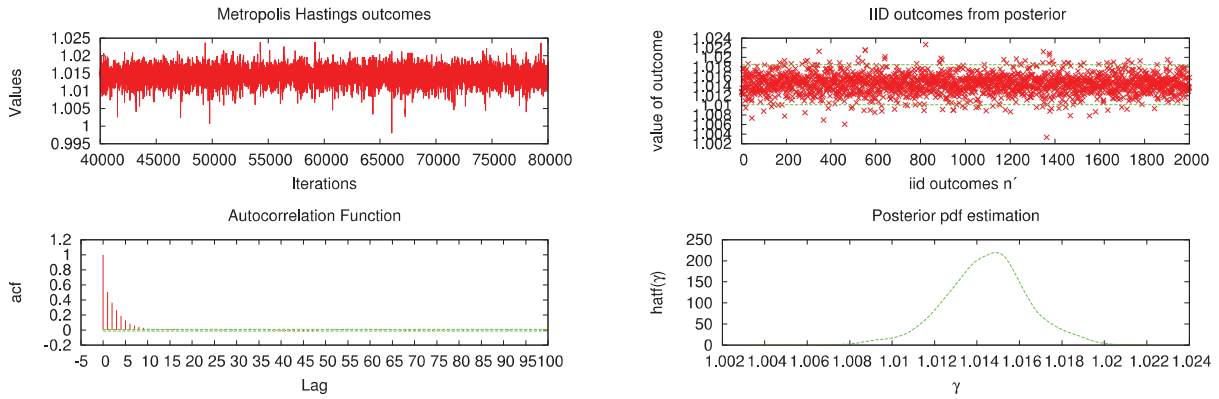


FIGURE 6.18 – Données réelles

### 6.4.1 Résultats sur un CIG réelles à profondeur fixée

Pour le test à profondeur fixée, nous choisissons le point à la profondeur 3245m du CIG à la position 17475m (intersection lignes bleues figure 6.18).

Les figures 6.19 montrent les résultats de l'approche bayésienne. Nous y observons les 40000 dernières itérations de l'algorithme de Metropolis - Hastings (figure 6.19(a) haut) et la fonction d'autocorrélation (figure 6.19(a) bas) qui indique que les itérations sont non corrélées tous les 20 itérations. Ce *lag* de 20 itérations permet ainsi de choisir 2000 réalisations (figure 6.19(b) haut) qui serviront pour estimer la densité *a posteriori* de  $\gamma$  (figure 6.19(b) bas) et de calculer les paramètres de la loi *a posteriori*.



(a) 40000 dernières itérations et fonction d'autocorrélation

(b) Réalisations indépendantes et estimation de la loi *a posteriori*

FIGURE 6.19 – Résultats de l'approche bayésienne sur un point de profondeur fixée de données réelles

La valeur moyenne *a posteriori* de  $\gamma$  en ce point étant pratiquement égale à 1, nous remarquons que l'hyperbole est quasi-horizontale. La valeur moyenne *a posteriori* de  $\gamma$  est de 1.015 avec un intervalle de crédibilité [1.010, 1.018] à 95%. La valeur réelle de  $\gamma$  étant inconnue, nous représentons l'hyperbole avec pour courbure la valeur moyenne *a posteriori* estimée en bleu sur la figure 6.20 pour voir si la courbure est bien ajustée.

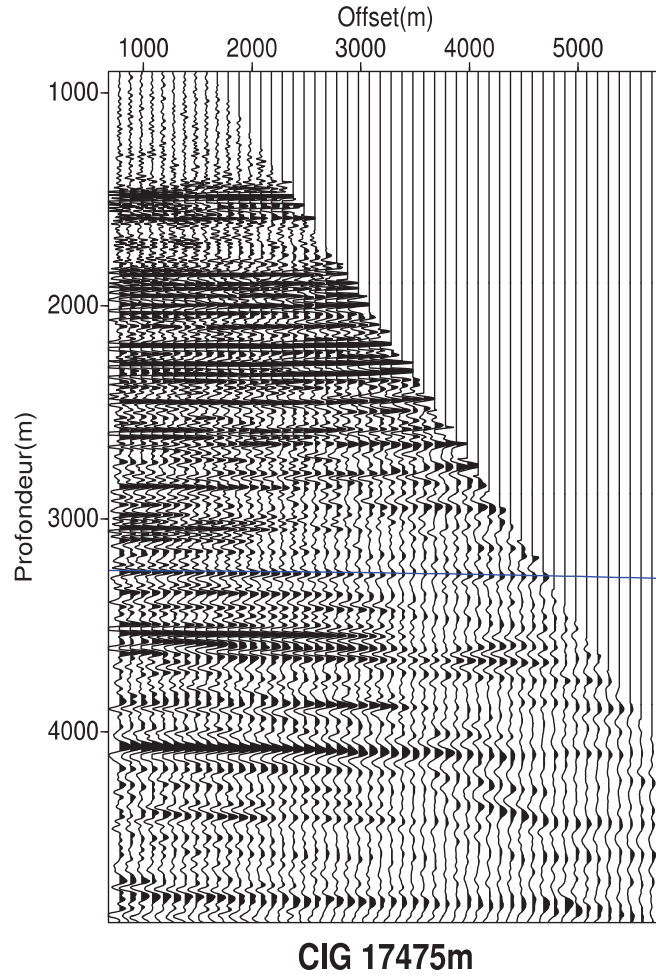
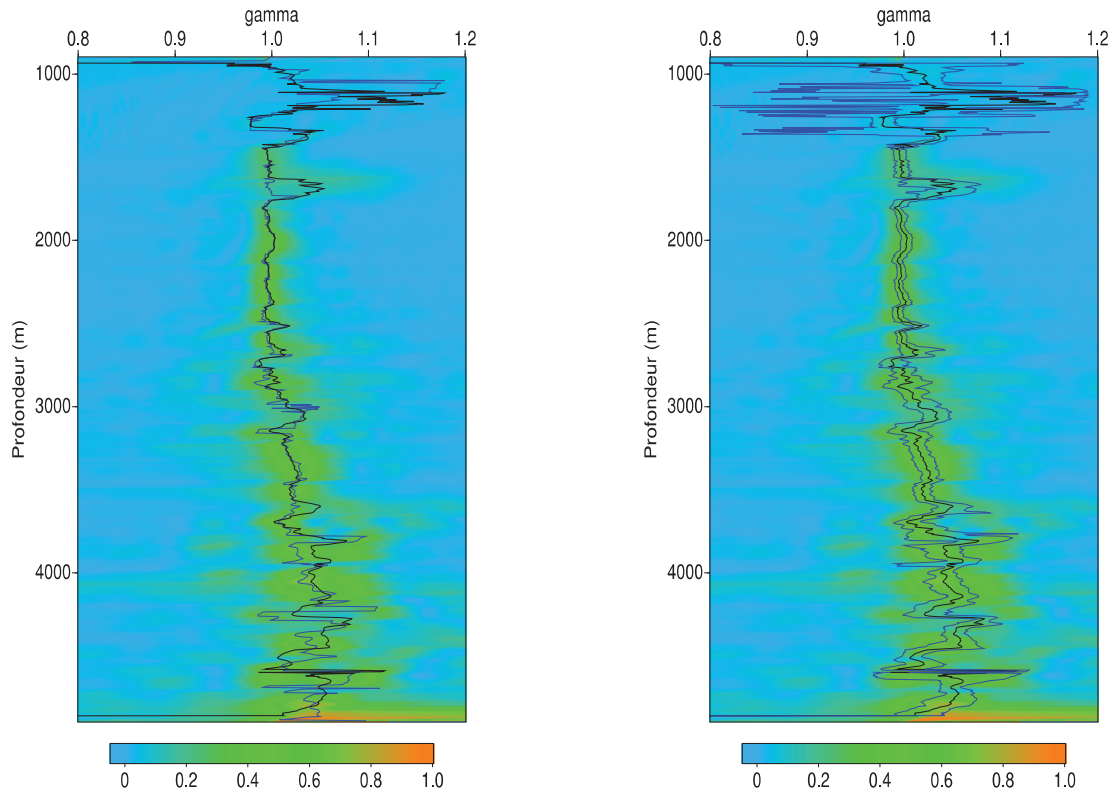


FIGURE 6.20 – Hyperbole en bleu avec la valeur moyenne *a posteriori* de  $\gamma$  estimée

### 6.4.2 Résultats sur un CIG réel

Nous gardons le CIG de la figure 6.20 pour ce test. Nous présentons dans un premier temps sur la figure 6.21(a), les valeurs moyennes *a posteriori* (courbe noire) comparées aux valeurs obtenues par l'approche classique (courbe bleue), puis les valeurs moyennes (courbe noire) *a posteriori* et les intervalles de crédibilité à 95% (courbes bleues) sur la figure 6.21(b). Nous remarquons que l'écart entre les valeurs estimées de  $\gamma$  par l'approche classique et l'approche bayésienne est relativement grande autour de la profondeur 3900m. L'incertitude sur l'estimation est donc plus grande pour ces profondeurs et se remarque sur la figure 6.21(b) par l'intervalle de crédibilité qui est plus grand que pour les autres profondeurs.



(a) Comparaison des résultats de l'approche classique (courbe bleue) et de l'approche bayésienne (courbe noire)

(b) Moyennes *a posteriori* (courbe noire) et intervalles de crédibilité (courbes bleues)

FIGURE 6.21 – Résultats sur le CIG à la position 17475m

### 6.4.3 Résultats sur des données 2D réelles

Nous avons vu que l'approche bayésienne marche bien sur les données synthétiques et donnent des résultats proches des résultats de l'approche classique et nous donnent en plus une information sur l'incertitude. Nous nous proposons ici de présenter les résultats sur les données réelles de la figure 6.18.

Le première remarque que nous pouvons faire, est que les estimations de  $\gamma$  par les deux approches donnent globalement la « même » information. Les valeurs de  $\gamma$  (figures 6.22 et 6.23) sont autour de 1 donc le modèle de vitesse utilisé pour la migration est plus ou moins correct. Le gain obtenue au niveau des estimations est l'apparition d'une « cohérence » géologique dans les valeurs estimées de  $\gamma$  avec l'approche bayésienne, alors qu'aucune corrélation spatiale n'a été introduite dans le modèle statistique. Cette cohérence géologique peut aider dans la mise à jour du

## 6.4 Résultats de l'approche bayésienne de l'analyse sur données réelles

modèle de vitesse. On obtiendrait après mise à jour un modèle de vitesse géologiquement cohérent, ce qui permettrait d'avoir une convergence plus rapide des méthodes itératives d'imageries.

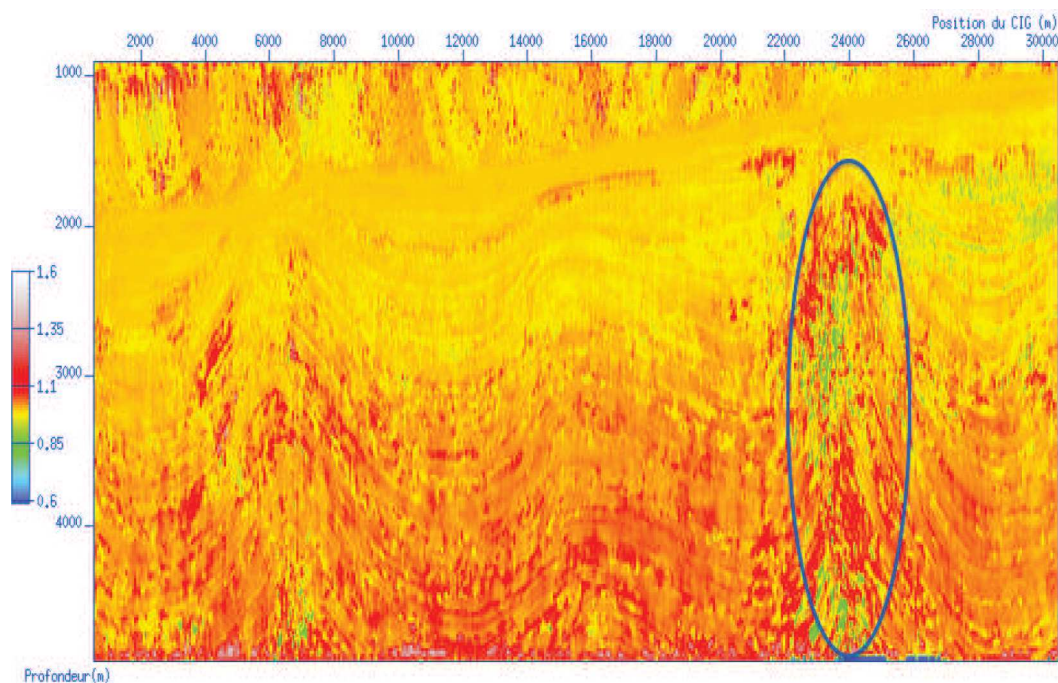


FIGURE 6.22 – Résultat de l'approche classique sur des données réelles

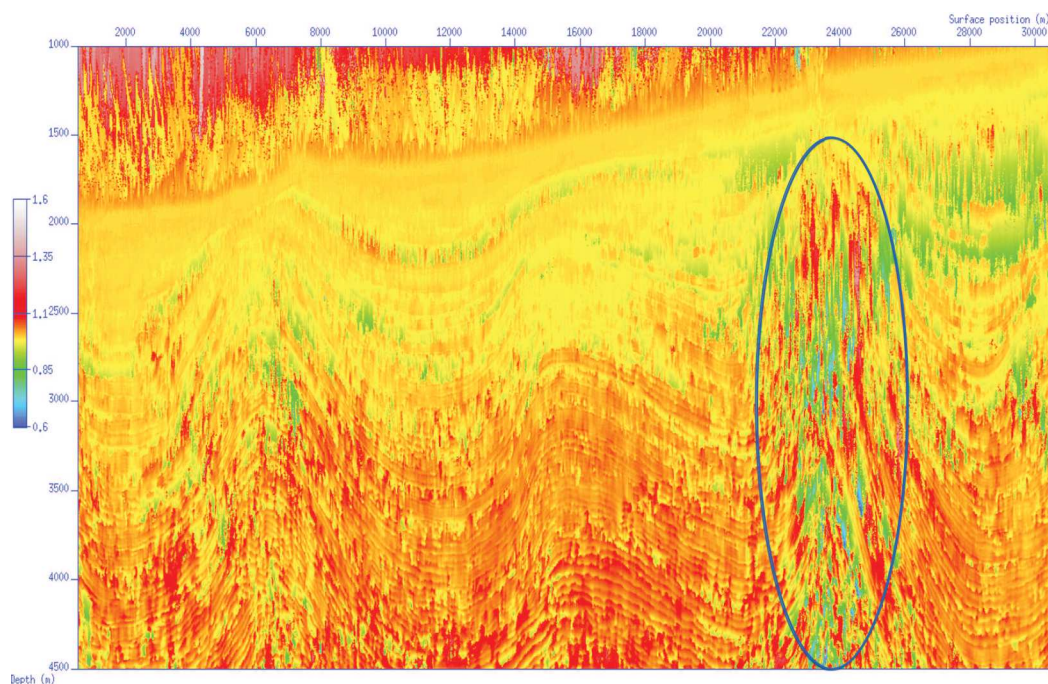


FIGURE 6.23 – Valeurs moyennes *a posteriori* des courbures  $\gamma$

La deuxième remarque est la différence des estimations des valeurs de  $\gamma$  dans la zone encadrée (figures 6.22 et 6.23 ). L'approche bayésienne suggère que le modèle de vitesse a été sous-estimé dans cette zone alors que l'approche classique affirme le contraire. Ce phénomène est dû à la mauvaise illumination de cette zone à cause de l'effet lentille dont on a parlé dans la présentation des données réelles. L'information apportée par l'approche bayésienne est appuyée par les intervalles de crédibilité à 95% dont les bornes sont données par les quantiles 2.5% et 97.5% présentées sur les figures 6.24 et 6.25 ci-dessous. Les « cohérences » géologiques observées sur la figure des valeurs moyennes *a posteriori* (figure 6.23) sont aussi observables sur les quantiles des figures 6.24 et 6.25.

L'incertitude traduite par les écarts-types des valeurs *a posteriori* de  $\gamma$  sur la figure 6.26 est « très petite » pour les premières structures géologiques représentant le fond de l'eau, car la vitesse de propagation des ondes au-dessus de ces structures c'est-à-dire la vitesse de propagation des ondes dans l'eau est connue de façon précise. Ces écarts-types augmentent avec la profondeur, car plus on va en profondeur, plus l'incertitude sur le modèle de vitesse augmente. Ces incertitudes viennent des complexités des réflecteurs qui sont de plus en plus difficilement gérables par les outils d'évaluation du modèle de vitesse avec la profondeur.

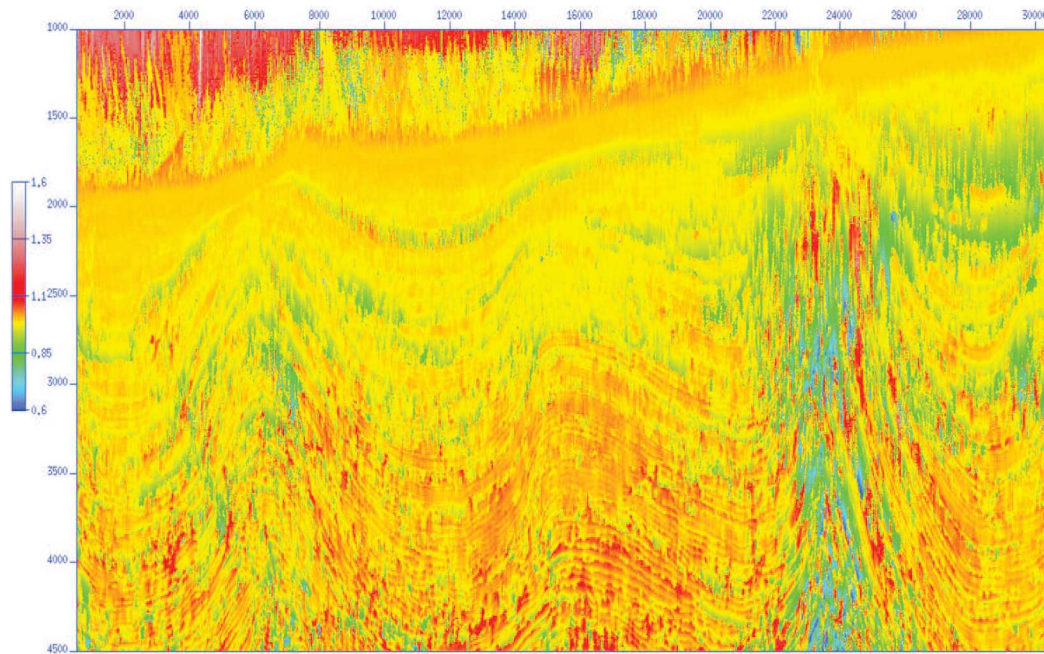


FIGURE 6.24 – Quantiles 2.5% des valeurs *a posteriori* de  $\gamma$  pour les données réelles

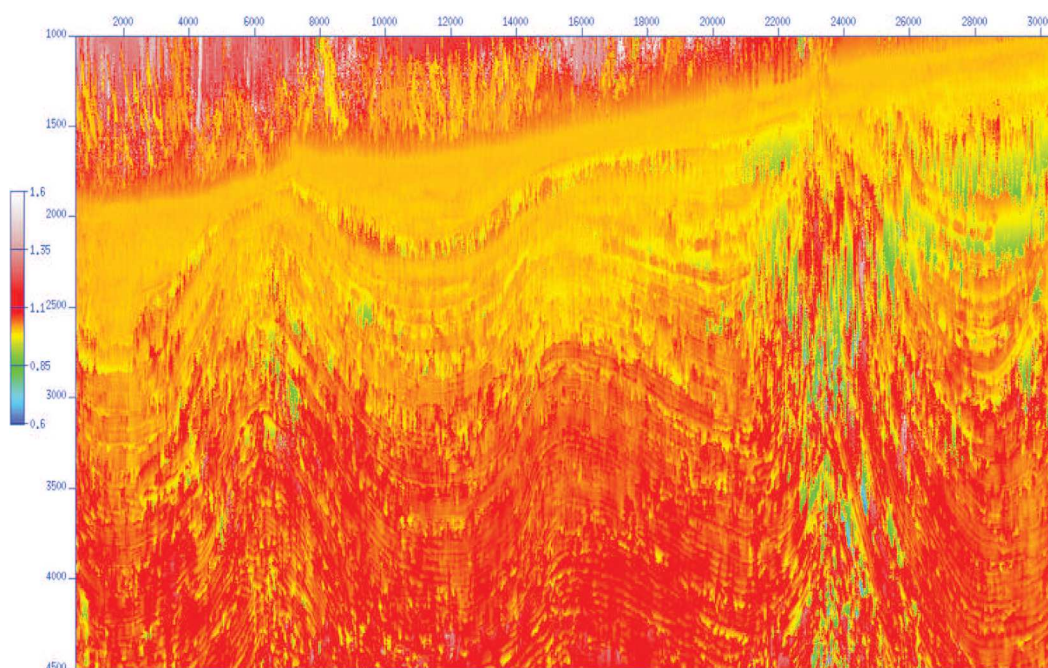


FIGURE 6.25 – Quantiles 97.5% des valeurs *a posteriori* de  $\gamma$  pour les données réelles

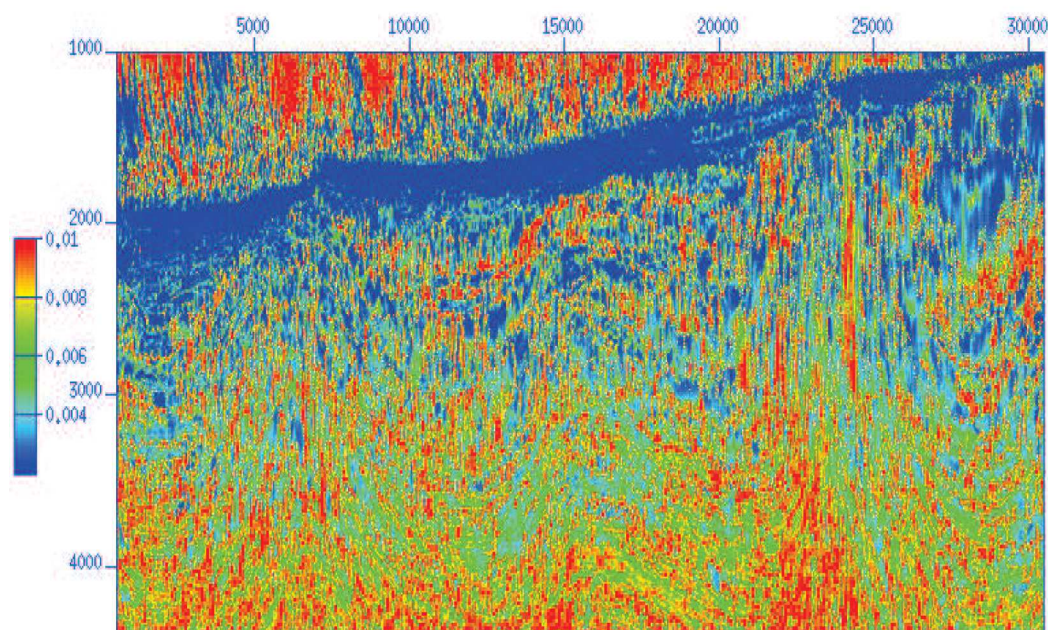


FIGURE 6.26 – Écart-types des valeurs *a posteriori* de  $\gamma$  sur les données réelles

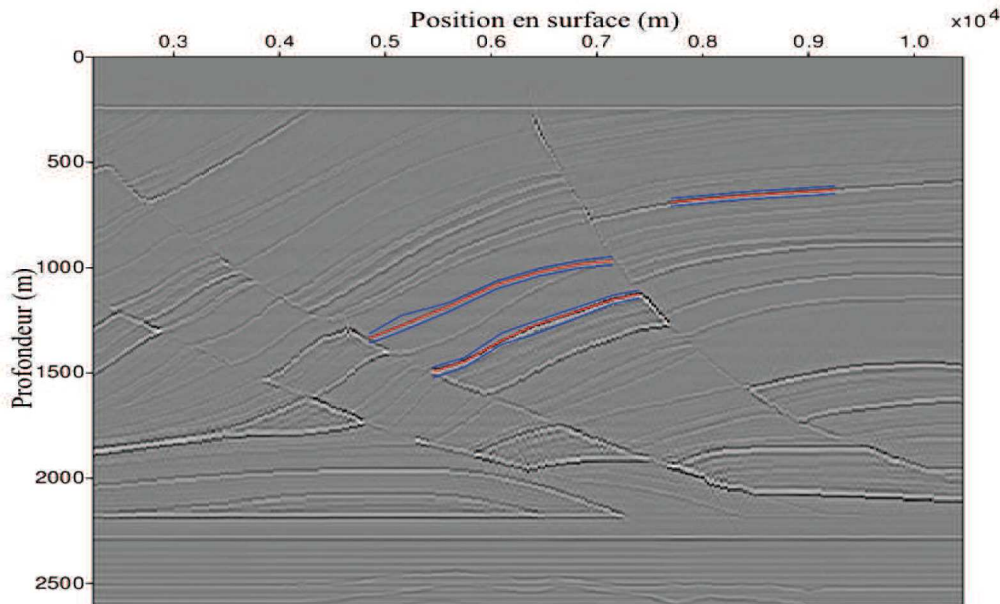
#### 6.4.4 Utilisation de l'incertitude sur l'estimation de $\gamma$

La première idée nous venant à l'esprit est de traduire l'incertitude sur  $\gamma$  en incertitude sur un réflecteur cible. L'idée est d'utiliser l'équation du RMO  $z_h(\gamma) = \sqrt{(\gamma Z)^2 + (\gamma^2 - 1)h^2}$  comme suit :

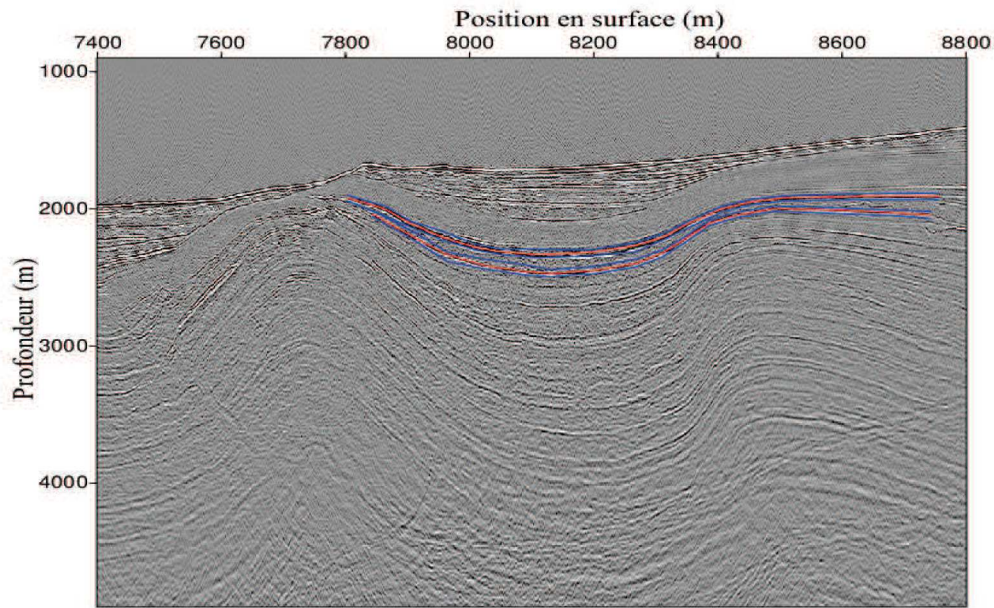
pour  $h = 0$  on a  $z_0(\gamma) = \gamma Z$  où  $Z$  est la vraie profondeur du réflecteur cible et  $z_0(\gamma)$  la profondeur du réflecteur cible observé sur l'image pour l'offset nul. Ainsi on peut traduire l'intervalle de crédibilité  $[\gamma_{min}, \gamma_{max}]$  sur  $\gamma$  en intervalle de crédibilité sur la vraie profondeur de manière suivante :

$$\frac{z_0(\gamma)}{\gamma_{max}} \leq Z \leq \frac{z_0(\gamma)}{\gamma_{min}}$$

Pour qu'elle soit valable, il faudrait comme nous l'avons montré en paragraphe 4.2.3 que la vitesse de migration utilisée soit le plus proche possible de la vitesse de propagation effective du milieu. Nous montrons une application de cette idée sur données synthétiques (figure 6.27(a)) et données réelles (figure 6.27(b)).



(a) Données synthétiques : Marmousi



(b) Données réelles

FIGURE 6.27 – Intervalle de crédibilité sur des réflecteurs cibles

Les lignes rouges désignent les réflecteurs cibles et les bleues les intervalles de crédibilité à 95% calculés à partir des quantiles 2.5% et 97.5% des valeurs de  $\gamma$  aux positions des réflecteurs cibles.

Le point faible de cette méthode est que l'équation utilisée fait l'hypothèse d'un milieu à vitesse homogène et réflecteurs horizontaux, ce qui est loin d'être le cas dans les données réelles. Une approche plus rigoureuse serait de faire une *dé-migration*<sup>1</sup> du réflecteur cible et de le migré de nouveau avec un modèle de vitesse modifié proportionnellement à  $\gamma_{min}$  ou  $\gamma_{max}$  pour obtenir des intervalles de crédibilité sur la vraie profondeur. Cette idée est une extension possible de ce travail de thèse.

## 6.5 Temps de calcul

Cette section à pour but de donner une idée du temps de calcul constaté. Ce temps dépend des paramètres et des données. Nous donnons à titre indicatif le temps de calcul pour les données réelles avec les configurations suivantes :

- données de tailles  $N_z \times N_o \times N_x = 800 \times 50 \times 1199$  ;

1. La dé-migration peut se définir nativement comme l'opération inverse de la migration [Santos *et al.*, 2000].

- paramètre définissant la taille de la fenêtre  $2 \times w + 1 = 15$ .

Pour un point de profondeur, le programme tourne pendant environ 60 secondes sur 1 coeur pour réaliser 80.000 itérations.

Pour un CIG de taille  $800 \times 50$ , le temps de calcul est d'environ 160 secondes sur 200 coeurs et pour l'ensemble des données le temps de calcul est de 154671 secondes soit environ 1 jour et 19 heures pour une chaîne de 80.000 itérations par point de profondeur (soit  $800 \times 1199 = 959200$  au total).

### 6.6 Avantages et inconvénients de l'approche bayésienne de l'analyse du Residual Move Out

Les avantages de l'approche bayésienne de l'analyse du Residual Move Out sont ceux que nous avons évoqués tout au long des chapitres 5 et 6 à savoir :

- la possibilité de spécifier des lois de probabilité des paramètres estimés conditionnellement aux données (images avant sommation dans notre cas),
- la possibilité d'avoir des informations sur l'incertitude des paramètres estimés par le biais des lois de probabilité,
- la possibilité d'obtenir plusieurs cartes de valeurs des paramètres par le biais des quantiles,
- l'obtention d'une cohérence géologique dans les paramètres estimés,
- le fait de disposer d'un moyen *stochastique* conditionnelle aux données, pour la mise à jour du modèle de vitesse de migration, pour traduire les incertitudes des paramètres en incertitudes sur les positions des couches géologiques.

L'inconvénient majeur de cette approche bayésienne est le temps de calcul nécessaire pour la mise en oeuvre. Cet inconvénient peut cependant se gérer en focalisant l'analyse de l'incertitude dans les zones de l'image où l'on considère cruciale.

## Conclusions et perspectives

*Un problème livré à lui-même se dessèche ou pourrit.  
Mais fertilisez un problème à l'aide d'une solution  
et vous allez-en faire éclore des dizaines.*

Norman Frederik Simpson.

### 7.1 Conclusions

L'étude et la quantification de l'incertitude des paramètres calculés le long du traitement de données sismiques constituent un enjeu majeur pour l'optimisation et la gestion du risque liées à l'exploration et à la production des hydrocarbures. Les différentes étapes qui ont constitué ce travail de thèse se résument en :

- la compréhension des phénomènes physiques modélisés par des équations déterministes ;
- la compréhension du concept de l'analyse du « Residual Move Out » ou encore de l'analyse de vitesse par migration ;
- l'interprétation statistique de l'analyse du « Residual Move Out » ;
- la modélisation de type Bayes-empirique de l'analyse du « Residual Move Out » ;

- la spécification de loi de probabilité *a posteriori* et quantification des incertitudes.

Ces travaux nous ont permis de mettre en place un cadre stochastique pour l'analyse de l'incertitude des paramètres du « Residual Move Out » en particulier. Cette méthodologie reste valable pour tout autre paramètre ayant une méthode d'estimation semblable à celle du « Residual Move Out » c'est-à-dire par balayage.

## 7.2 Perspectives

Au début de la thèse, la principale question qui était posée était celle de savoir comment quantifier l'incertitude des paramètres calculés pendant le traitement des données sismiques.

Une fois cette question traitée, l'on peut se poser d'autres questions telles que :

- pourquoi avoir fait l'hypothèse d'un bruit additif gaussien de moyenne nulle pour la construction du modèle statistique ?
- pourquoi n'avoir pas pris en compte la corrélation spatiale des points ?
- comment traiter directement l'hypermatrice formant les images avant sommation ?
- pourquoi ne pas utiliser d'autres estimateurs que l'estimateur de Nadaraya-Watson pour estimer le paramètre fonctionnelle du modèle statistique proposée ?

mais aussi bien d'autres questions.

Nous apportons quelques éléments de réponses à ces questions.

### 7.2.1 Hypothèse du bruit additif gaussien

Une étude en amont de la quantification de l'incertitude pourrait être effectuée pour déterminer la loi de probabilité du bruit avant l'inférence bayésienne. Harlan [1986] propose une méthode pour la séparation du signal et du bruit qui pourrait être utilisée pour faire cette étude.

### 7.2.2 Corrélation spatiale des points

La corrélation spatiale serait prise en compte pour apporter une cohérence géologique dans les paramètres estimés. Cette cohérence géologique est déjà observable sur les résultats de l'approche bayésienne proposée. Prendre en compte la corrélation spatiale pourrait néanmoins améliorer cette cohérence.

Les points énumérés ci-dessus représentent les extensions immédiates possibles de ce travail de thèse, mais d'autres extensions peuvent être envisagées à savoir :

- le développement des méthodes de dé-migration remigration en les associant à la méthode d'estimation bayésienne des paramètres pour établir de manière rigoureuse l'incertitude sur la positions des réflecteurs,
- considérer le modèle de vitesse de migration  $v$  comme variable aléatoire et se servir de la loi de probabilité *a posteriori* de  $\gamma = \frac{v}{c}$  pour en déduire une loi de probabilité de  $v$  conditionnellement aux données.





## **Annexes**



## A

## Relation entre semblance généralisée et semblance classique

L'expression de la semblance généralisée pour un évènement de réflexion sur un CMP  $\mathcal{P}$  (domaine temps) est donnée par :

$$S_G(\mathcal{P}, t_0, v, w) = 1 - \frac{\sum_{i \in \mathcal{I}_0} \sum_{j=1}^m \left( M(t_{i_0}, h_j, v) - g_j \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right) \right)^2}{\sum_{i \in \mathcal{I}_0} \sum_{j=1}^m g_j^2 \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right)} \quad (\text{A.1})$$

où  $\mathcal{I}_0 = \{i_0 \in \{1, \dots, N_z\}, i_{t_0} - w \leq i_0 \leq i_{t_0} + w\}$ ,  $g_j(t)$  la fonction qui donne l'amplitude de la trace de l'offset  $h_j$  au temps  $t$ .

$M(t_{i_0}, h_j, v)$  est le modèle décrivant la variation de l'amplitude avec l'offset dans le CMP corrigé  $P_v$ .

Si nous posons

$$M(t_{i_0}, h_j, v) = A(t_{i_0}) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m g_j \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right)$$

avec  $m \leq N_h$  le nombre de traces prises en compte pour le calcul de la semblance,

alors on a :

$$\begin{aligned}
 S_G(\mathcal{P}, t_0, v, w) &= 1 - \frac{\sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0} \sum_{j=1}^m \left[ g_j \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right) - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m g_j \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right) \right]^2}{\sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0} \sum_{j=1}^m g_j^2 \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right)} \\
 &= 1 - \frac{\sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0} m \left[ \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m g_j^2 \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right) \right) - \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m g_j \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right) \right)^2 \right]}{\sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0} \sum_{j=1}^m g_j^2 \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right)} \\
 &= \frac{\sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0} \sum_{j=1}^m g_j^2 \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right)}{\sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0} \sum_{j=1}^m g_j^2 \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right)} - \frac{\sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0} \sum_{j=1}^m g_j^2 \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right)}{\sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0} \sum_{j=1}^m g_j^2 \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right)} \\
 &\quad + \frac{\frac{1}{m} \sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0} \left( \sum_{j=1}^m g_j \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right) \right)^2}{\sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0} \sum_{j=1}^m g_j^2 \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right)} \\
 S_G(\mathcal{P}, t_0, v, w) &= \frac{\sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0} \left( \sum_{j=1}^m g_j \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right) \right)^2}{m \sum_{i_0 \in \mathcal{I}_0} \sum_{j=1}^m g_j^2 \left( \sqrt{t_{i_0}^2 + \frac{(2h_j)^2}{v^2}} \right)} \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

L'équation A.2 est l'expression de la semblance classique.

- B.1 Pseudo - code pour le calcul de la semblance et de sa maximisation.
- B.2 Pseudo code pour l'analyse stochastique du RMO

## Algorithme

Nous donnons le pseudo-code qui permet le calcul de la semblance et sa maximisation dans le paragraphe suivant.

### B.1 Pseudo - code pour le calcul de la semblance et de sa maximisation.

L'algorithme 1 calcule pour un ensemble de valeur de courbure, les semblances correspondantes et retient la valeur de la courbure maximisant la semblance pour toutes les profondeurs disponibles.

L'algorithme 3 calcule quant à lui la semblance pour une courbure et une profondeur donnée.

L'algorithme 4 permet d'estimer par un procédé choisi, l'amplitude du signal en un point  $(z, h)$  du CIG. Dans l'approche classique du calcul de la semblance, le procédé choisi pour l'estimation de l'amplitude est l'interpolation linéaire. Les amplitudes des points voisins sur l'offset concerné sont utilisées pour cette interpolation. Rappelons que la formule de la semblance dont le pseudo-code est donné par l'algorithme 3 est :

$$S(z_0, \gamma) = \frac{\sum_{i_0=i_{z_0}-w}^{i_{z_0}+w} \left[ \sum_{j'=1}^m \hat{g}_{j'} \left( \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2} \right) \right]^2}{m \sum_{i_0=i_{z_0}-w}^{i_{z_0}+w} \left[ \sum_{j'=1}^m \left[ \hat{g}_{j'} \left( \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_{j'}^2} \right) \right]^2 \right]}.$$

**Fonction** Courbures\_Optimales(  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_K\}, (a_{ij})_{1 \leq i \leq n_z, 1 \leq j \leq N_o}, w$  : **réel**) :  
**réel**

*$[\{\gamma_1, \dots, \gamma_K\} : \text{ensemble de } K \text{ courbures pour lesquelles on calcule la semblance}]$*

*$[(a_{ij})_{1 \leq i \leq n_z, 1 \leq j \leq N_o} : \text{CIG de taille } N_z \times N_o]$*

*$[w : \text{taille de la fenêtre pour le calcul de la semblance}]$*

résultat : **réel**  *$[\text{Vecteur de taille } N_z \text{ contenant les valeurs des courbures maximisant la semblance}]$*

**Pour**  $i_0$  **de** 1 **à**  $N_z$  **faire**

**Pour**  $k$  **de** 1 **à**  $K$  **faire**

Semblance[ $k$ ]  $\leftarrow$  Calcul\_Semblance( $z_{i_0}, \gamma_k, (a_{ij})_{1 \leq i \leq n_z, 1 \leq j \leq N_o}, w$ )

**Fin Pour**

résultat[ $i_0$ ]  $\leftarrow \arg \max_{\gamma} \text{semblance}[k], 1 \leq k \leq K$

*$[Pointé de la courbure maximisant la semblance pour } z_{i_0}]$*

**Fin Pour**

**Retourner** résultat;

**Fin**

Algorithme 1 – Recherche des courbures maximisant la semblance pour les  $N_z$  points de profondeur formant le CIG.

**Fonction** Calcul\_Semblance(  $z_0, \gamma, (a_{ij})_{1 \leq i \leq n_z, 1 \leq j \leq N_o}, w$  : réel) : réel

*[ $z_0$  : profondeur pour laquelle on calcule la semblance]*

*[ $\gamma$  : courbure pour laquelle on calcule la semblance]*

*[( $a_{ij}$ ) $_{1 \leq i \leq n_z, 1 \leq j \leq N_o}$  : CIG de taille  $N_z \times N_o$ ]*

*[ $w$  : taille de la fenêtre pour le calcul de la semblance]*

résultat : réel *[compris entre 0 et 1]*

numérateur  $\leftarrow 0$  *[vecteur de taille  $2w + 1$ ]*

denominateur  $\leftarrow 0$  *[vecteur de taille  $2w + 1$ ]*

**Pour**  $i_0$  **de**  $(i_{z_0} - w)$  **à**  $(i_{z_0} + w)$  **faire**

$m \leftarrow 0$

**Pour**  $j$  **de** 1 **à**  $N_o$  **faire**

**Si**  $(0 \leq z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_j^2)$  **Alors**

$z_h \leftarrow \sqrt{z_{i_0}^2 + (\gamma^2 - 1)h_j^2}$

$A \leftarrow \text{Estimation\_Amplitude}(z_h, h_j, (a_{ij})_{1 \leq i \leq n_z, 1 \leq j \leq N_o})$

numérateur[ $i_0$ ]  $\leftarrow$  numérateur [ $i_0$ ] +  $A$

dénominateur[ $i_0$ ]  $\leftarrow$  dénominateur [ $i_0$ ] +  $A^2$

$m \leftarrow m + 1$

**Fin Si**

**Fin Pour**

denominateur  $\leftarrow m \cdot$ denominateur

**Fin Pour**

résultat  $\leftarrow \frac{\text{somme}(\text{numérateur}^2)}{\text{somme}(\text{denominateur})}$

*[numérateur<sup>2</sup> : éléments du vecteur élevé au carré]*

*[somme : fonction retournant la somme des éléments d'un vecteur]*

**Retourner** résultat;

**Fin**

Algorithme 3 – Calcul de la semblance pour une profondeur et une courbure données.

**Fonction** Estimation\_Amplitude(  $z, h_j, (a_{ij})_{1 \leq i \leq n_z, 1 \leq j \leq N_o} : \text{réel}$  ) : **réel**

$[(z, h_j) : \text{point pour lequel on estime l'amplitude}]$

$[(a_{ij})_{1 \leq i \leq n_z, 1 \leq j \leq N_o} : \text{CIG de taille } N_z \times N_o]$

    résultat : **réel**

    résultat  $\leftarrow \hat{g}_j(z)$

$[\hat{g}_j(z) : \text{estimation d'une fonction lisse à partir de la } j^{\text{e}}$   
          $\text{colonne de } (a_{ij})_{1 \leq i \leq n_z, 1 \leq j \leq N_o}]$

**Retourner** résultat;

**Fin**

Algorithme 4 – Estimation de l'amplitude en un point  $(z, h_j)$  quelconque

## B.2 Pseudo code pour l'analyse stochastique du RMO

Nous donnons un pseudo code pour l'analyse stochastique du RMO.

```

Fonction Analyse_Stochastique_RMO(  $G[z_i, h_j], \gamma_0, w, N_{it}$  : réel) : objet
   $[G[z_i, h_j] : \text{CIG de taille } N_z \times N_o]$ 
   $[\gamma_0 : \text{valeur pour initialiser la chaîne de Markov}]$ 
   $[w : \text{fenêtre pour l'analyse de la cohérence}]$ 
   $[N_{it} : \text{nombre d'itérations y compris les itérations de chauffage}]$ 
  résultat : objet  $[\text{objet contenant les quantiles (2.5\%, 50\%, 97.5\%),}$ 
     $\text{les moyennes, et variances estimés pour les}$ 
     $N_z \text{ points de profondeur}]$ 
  Pour  $i$  de 1 à  $N_o$  faire
    iid_chain  $\leftarrow$  iid_from_ppdf( $i, \gamma_0, G[z_i, h_j], w, N_{it}$ )
     $[\text{iid\_from\_ppdf retourne des réalisations iid de la loi à postérieure}$ 
     $\text{pour } z_i]$ 
     $(q_1, q_2, q_3, m, v) \leftarrow \text{stat\_analyse}(\text{iid\_chain})$ 
     $[\text{stat\_analyse retourne les quantiles (2.5\%, 50\%, 97.5\%),}$ 
     $\text{les moyennes, et variances estimés pour la chaîne iid\_chain}]$ 
    résultat%quantile_2.5% $[i] \leftarrow q_1$ 
    résultat%quantile_50% $[i] \leftarrow q_2$ 
    résultat%quantile_97.5% $[i] \leftarrow q_3$ 
    résultat%moyenne $[i] \leftarrow m$ 
    résultat%variance $[i] \leftarrow v$ 
  Fin Pour
  Retourner résultat;
Fin

```

Algorithme 5 – Analyse Stochastique du RMO pour un CIG

```

Fonction iid_from_ppdf(  $i, \gamma_0, G[z_i, h_j], w, N_{it} : \text{réel}$  ) : réel
    [ $i$  : indice de la profondeur  $z_i$ ]
    [ $\gamma_0$  : valeur pour initialiser la chaîne de Markov]
    [ $G[z_i, h_j]$  : CIG de taille  $N_z \times N_o$ ]
    [ $w$  : fenêtre pour l'analyse de la cohérence]
    [ $N_{it}$  : nombre d'itérations y compris les itérations de chauffage ]
    résultat : réel [vecteur contenant des réalisations iid de la loi à postérieure]
    tmpChain  $\leftarrow$  M_H( $i, \gamma_0, G[z_i, h_j], w, N_{it}$ )
    [ $M\_H$  retourne  $N_{it}$  itérations d'une chaîne de Markov par Metropolis -
    Hastings]
    chain  $\leftarrow$  tmpChain[( $N_{it}/2 + 1$ ) :  $N_{it}$ ]
    [ $\text{première moitié de tmpChain considérée comme chauffage}$ ]
    Lag  $\leftarrow$  acf(chain)
    [ $\text{acf étudie l'autocorrélation et retourne la valeur du}$ 
     $\text{décalage pour lequel on obtient des réalisations iid}$ ]
     $it \leftarrow 1$ 
    Tant que ( $it \leq N_{it}/2$ ) faire
        | résultat[ $it$ ]  $\leftarrow$  chain[ $1 + (it - 1)Lag$ ]
    Fait
    Retourner résultat;
Fin

```

Algorithme 7 – Génération d'un vecteur contenant des réalisations iid de la loi  $a posteriori$  par Metropolis - Hastings pour  $z_i$

```

Fonction M_H(  $i, \gamma_0, G[z_i, h_j], w, N_{it} : \text{réel}$  ) : réel
    [ $i$  : indice de la profondeur  $z_i$ ]
    [ $\gamma_0$  : valeur pour initialiser la chaîne de Markov]
    [ $G[z_i, h_j]$  : CIG de taille  $N_z \times N_o$ ]
    [ $w$  : fenêtre pour l'analyse de la cohérence]
    [ $N_{it}$  : nombre d'itérations y compris les itérations de chauffage ]
    résultat : réel [vecteur contenant des itérations de Metropolis - Hastings
        ayant de la loi à postérieure pour loi cible]
     $\gamma_{curr} \leftarrow \gamma_0$ 
     $P_1 \leftarrow \text{ppdf}(i, \gamma_{curr}, G[z_i, h_j], w)$ 
    Pour  $it$  de 1 à  $N_{it}$  faire
         $\gamma_{cand} \leftarrow q(\gamma_{curr})$  [ $q$  est la loi instrumentale permettant de générer
            des points candidats]
         $P_2 \leftarrow \text{ppdf}(i, \gamma_{cand}, G[z_i, h_j], w)$  [calcul de la densité a posteriori
            de  $\gamma_{cand}$  sachant les données]

        Si ( $P_1 \leq P_2$ ) Alors
            résultat[ $it$ ]  $\leftarrow \gamma_{cand}$ 
             $\gamma_{curr} \leftarrow \gamma_{cand}$ 
             $P_1 \leftarrow P_2$ 
        Sinon
            résultat[ $it$ ]  $\leftarrow \gamma_{curr}$ 
        Fin Si
    Fin Pour
    Retourner résultat;
Fin
    
```

Algorithme 8 – Génération d'un vecteur contenant des réalisations iid de la loi *a posteriori* par Metropolis - Hastings pour  $z_i$



# Bibliographie

- Abramovich, F., Sapatinas, T. et Silverman, B. : Wavelet thresholding via a bayesian approach. *Journal of the Royal Statistical Society*, 60:725–749, 1998.
- Al-Yahya, K. : Velocity analysis by iterative profile migration. *Geophysics*, 54 (6):718–729, 1989.
- Assouline, F. : *Migration profondeur et demigration pour l'analyse de vitesse de migration 3D*. Thèse de doctorat, École doctorale des sciences exactes et de leurs applications - UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR, 2001.
- Ballin, P. R., Journel, A. G. et Aziz, K. : Prediction of uncertainty in reservoir performance forecast. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 31(4), 1992.
- Besag, J. : Towards bayesian image analysis. *Journal of Applied Statistics*, 16 (3):395–407, 1989.
- Bickel, J. E. et Bratvold, R. B. : From uncertainty quantification to decision making in the oil and gas industry. *Energy exploration and exploitation*, 26(5):311–325, 2008.
- Biondi, B. L. et Kostov, C. : High-resolution velocity spectra using eigenstructure methods. *Geophysics*, 54(7):832–842, 1989.
- Bond, C., Gibbs, A., Shipton, Z. et Jones, S. : What do you think this is? “conceptual uncertainty” in geoscience interpretation. *GSA Today*, 17(11), November 2007.
- Bube, K. P., Kane, J. A., Nemeth, T., Medwedeff, D. et Mikhailov, O. : The influence of stacking velocity uncertainties on structural uncertainties. *In 2004 SEG Annual Meeting*, p. 2188 – 2191. Society of Exploration Geophysicists, 2004a.
- Bube, K. P., Kane, J. A., Nemeth, T., Medwedeff, D. et Mikhailov, O. : The influence of stacking velocity uncertainties on structural uncertainties. *In 2004 SEG Annual Meeting*, p. 2192–2195. Society of Exploration Geophysicists, 2004b.
- Caers, J. : *Modeling Uncertainty in the Earth Sciences*. Wiley-Blackwell, 2011.
- Caiado, C., Goldstein, M. et Hobbs, R. : Bayesian strategies to assess uncertainty in velocity models. *Bayesian Analysis*, 7(1):211–234, 2012.

- Cameron, M. K., Fomel, S. B. et Sethian, J. A. : Seismic velocity estimation from time migration. *Inverse Problems*, 23(4):1329, 2007.
- Claerbout, J. F. : Toward a unified theory of reflector mapping. *Geophysics*, 36(3):467–481, 1971.
- Cordier, J. P. : *Les Vitesses en sismique réflexion*. Technique & documentation. Technique et Documentation Lavoisier, 1983.
- Cowles, M. K. et Carlin, B. P. : Markov chain monte carlo convergence diagnostics: A comparative review. *Journal of the American Statistical Association*, 91(434):883–904, 1996.
- Dimatteo, I., Genovese, C. R. et Kass, R. E. : Bayesian curve-fitting with free-knot splines. *Biometrika*, 4(88):1055–1071, 2001.
- Fomel, S. : Velocity analysis using ab semblance. *Geophysical Prospecting*, 57(3):311–321, 2009.
- Fomel, S. et Landa, E. : Structural uncertainty of time-migrated seismic images. *Journal of Applied Geophysics*, 101:27–30, 2014.
- Gelfand, A. E. et Smith, A. F. M. : Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American Statistical Association*, 85(410):398–409, 1990.
- Geman, S. et Geman, D. : Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 6(6):721–741, 1984.
- Geyer, C. J. : Pratical markov chain monte carlo. *Statistical Science*, 7(4):473–483, 1992.
- Geyer., C. J. : *mcmc: Markov Chain Monte Carlo*, 2010. URL <http://CRAN.R-project.org/package=mcmc>. R package version 0.8.
- Geyer, C. J. et Johnson, L. T. : *mcmc: Markov Chain Monte Carlo*, 2012.
- Glogovsky, V., Landa, E., Langman, S. et Moser, T. J. : Validating the velocity model: the hamburg score. *First Break*, 27(3):77–85, 2009.
- Grubb, H., Tura, A. et Hanitzsch, C. : Estimating and interpreting velocity uncertainty in migrated images and avo attributes. *Geophysics*, 66(4):1208–1216, 2001.

- Harlan, W. S. : *Signal/noise separation and seismic inversion*. Thèse de doctorat, Stanford university, 1986.
- Hastings, W. K. : Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. *Biometrika*, 57:97–109, 1970.
- Henry, G. : *La sismique réflexion : principes et développements*. Editions Technip, 1997.
- Jedlicka, J. : Stochastic normal moveout correction. *SEP*, 60:165–178, 1989.
- Johng-ay, T. : Approche statistique de la détection du signal dans l’exploration sismique pétrolière. Mémoire de Master, Université Paul Sabatier, 2010.
- Kass, R. E. et Wasserman, L. : A reference bayesian test for nested hypotheses and its relationship to the schwarz criterion. *Journal of the American Statistical Association*, 90, No 431:928–934, 1995.
- Key, S. C. et Smithson, S. B. : New approach to seismic reflection event detection and veleocity determination. *Geophysics*, 55(8):1057–1069, 1990.
- Lerche, I. : *Geological Risk and Uncertainty in Oil Exploration: Uncertainty, Risk and Strategy*. Academic Press, 1997.
- Liu, Z. : *Migration Velocity Analysis*. Thèse de doctorat, Colorado School of Mines, 1995.
- Liu, Z. et Bleistein, N. : Velocity analysis by residual moveout. Rap. tech., COLORADO SCHOOL OF MINES GOLDEN CENTER FOR WAVE PHENOMENA, May 1992.
- Mallat, S. : *Une exploration des signaux en ondelettes*. Les éditions de l’école polytechnique, 2000.
- Mari, J.-L., Coppens, F. et Glangeaud, F. : *Traitement du signal pour géologues et géophysiciens*. Publications de l’Institut Français du Pétrole. Editions Technip, 1997.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H. et Teller, E. : Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, 21(6):1087 – 1092, 1953.

## Bibliographie

---

M.Zafari et Reynolds, A. : Assessing the uncertainty in reservoir description and performance predictions with the ensemble kalman filter. *In SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. Society of Petroleum Engineers, 2005.

Osypov, K., Yang, Y., Esmersoy, C., Bachrach, R. et Buendia, I. : Geohazard prediction and real-time updates with uncertainties. *In 74th EAGE Conference and Exhibition*, 2012.

Osypov, K., Nichols, D., Woodward, M., Zdraveva, O., Qiao, F., Yarman, E., Vyas, M., Yang, Y. et Liu, Y. K. : From quantifying seismic uncertainty to assessing e&p risks and the value of information. *In SEG Annual Meeting, September 18 - 23, 2011 , San Antonio, Texas*. Society of Exploration Geophysicists, 2011.

Parent, E. et Bernier, J. : *Le raisonnement bayésien : Modélisation et inférence*. Statistiques et probabilités appliquées. Springer, 2007.

Pon, S. et Lines, L. R. : Sensitivity analysis of seismic depth migrations. *Geophysics*, 70:S39–S42, 2005.

Robert, C. : *Méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov*. Statistique mathématique et probabilité. Economica, 1996.

Santos, L. T., Schleicher, J., Tygel, M. et Hubral, P. : Modeling, migration, and demigration. *The Leading Edge*, 19(7):712–715, 2000.

Sarkar, D., Baumel, R. T. et Larner, K. L. : Velocity analysis in the presence of amplitude variation. *Geophysics*, 67(5):1664–1672, 2002.

Sarkar, D., Castagna, J. P. et Lamb, W. J. : Avo and velocity analysis. *Geophysics*, 66(4):1284–1293, 2001.

Schlumberger : Schlumberger oilfield glossary. *Site web*, 08 2013. URL <http://www.glossary.oilfield.slb.com>.

Shuey, R. : A simplification of zoeppritz equations. *Geophysics*, 50(4):609–614, 1985.

Subbey, S., Christie, M. et Sambridge, M. : Prediction under uncertainty in reservoir modeling. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 44(1-2), 2004.

- Symes, W. W. et Kern, M. : Inversion of reflection seismograms by differential semblance analysis: algorithm structure and synthetic examples1. *Geophysical Prospecting*, 42(6):565–614, 1994. ISSN 1365-2478.
- Taner, M. T. : Semblance and other similarity measurements. *Rock Solid Images*, November 1996.
- Taner, M. T. et Koelher, F. : Velocity spectra-digital computer derivation applications of velocity function. *Geophysics*, 34(6):851–889, 1969.
- Tanner, M. A. et Wong, W. H. : The calculation of posterior distribution by data augmentation. with discussion and with reply by the authors. *Journal of the American Statistical Association*, 82(398):528–550, 1987.
- Tarantola, A. : *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation* Albert Tarantola. SIAM, 2004.
- Thore, P., Shtuka, A., Lecour, M., Ait-Ettajer, T. et Cognot, R. : Structural uncertainties: Determination, management, and applications. *Geophysics*, 67:840–852, 2002.
- Yilmaz, Ö. : *Seismic Data Analysis*. Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, OK, 2001. ISBN 9781560801580.





L'imagerie sismique pétrolière telle qu'elle est réalisée de nos jours a pour but la construction d'une image représentative des quelques premiers kilomètres du sous-sol pour permettre la localisation et l'estimation précise des ressources en hydrocarbures. Les réservoirs où sont piégés ces hydrocarbures sont des structures géologiques qui ont une complexité plus ou moins grande. Pour pouvoir caractériser ces réservoirs et permettre la production des hydrocarbures, le géophysicien a besoin, sans entrer dans les détails, de convertir des données-temps enregistrées lors des campagnes d'acquisition sismique en des images-profondeur qui seront exploitées par l'ingénieur-réservoir avec l'aide de l'interprète sismique et du géologue. Pour que cette conversion soit pertinente, le géophysicien doit estimer de manière plus ou moins précise le modèle de vitesse de propagation des ondes acoustiques dans le milieu. La pertinence de cette conversion est jugée au travers d'une analyse des images avant sommation obtenue en fonction de la distance entre les sources et les récepteurs ayant servi à enregistrer les données. Cette analyse en question, estime à l'aide de méthodes dites déterministes le ratio entre la vitesse utilisée pour la conversion et la vitesse effective du milieu en vue de la mise à jour du modèle de vitesse. Le travail développé au cours de cette thèse propose une alternative stochastique via une modélisation du type bayésien empirique de cette analyse pour, à terme, donner accès aux informations relatives aux incertitudes présentes sur l'estimation de ce ratio. Des pistes sur l'utilisation de cette incertitude y sont évoqués.