

**THÈSE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITÉ PARIS OUEST - NANTERRE LA DÉFENSE**

Spécialité
Mathématiques

École doctorale Connaissance, langage, modélisation

Présentée par
Line LE GOFF

Pour obtenir le grade de
**DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS OUEST - NANTERRE
LA DÉFENSE**

Sujet de la thèse

**Formation spontanée de chemins : des fourmis aux
marches aléatoires renforcées**

soutenue le 15 décembre 2014

devant le jury composé de :

M. Olivier RAIMOND	Directeur de thèse
M. Philippe SOULIER	Co-directeur de thèse
M. Pierre TARRÈS	Rapporteur
M. Jean-Louis DENEUBOURG	Rapporteur
Mme. Élisabeth GASSIAT	Examineur
M. Hugues CHATÉ	Examineur

Remerciements

Je voudrais remercier en premier lieu Olivier Raimond pour avoir accepté de diriger ma thèse. Sa patience et ses remarques toujours rigoureuses et justes m'ont permis de progresser énormément dans le développement de résultats mathématiques.

Je remercie également Philippe Soulier d'avoir co-encadré la partie mathématique de ma thèse. Les discussions et le travail effectués ensemble m'ont aidé à me considérer comme une chercheuse à part entière et non plus comme une étudiante.

Si je dois désigner un maître qui m'a guidé tout le long de mes années de thèse et de master, c'est bien Hugues Chaté. Auprès de lui, j'ai appris énormément sur la façon de mener une réflexion solide et pertinente sur mon sujet de thèse, mais aussi sur toute problématique scientifique. Je le remercie donc de m'avoir suivie et formée toutes ces années.

J'aimerais également remercier Guy Theraulaz qui m'a ouvert la porte du monde de l'éthologie. Nos longues discussions m'ont beaucoup appris sur le domaine du comportement animal et l'interaction de ce dernier avec d'autres disciplines comme la physique. Il a toujours mis à ma disposition ses conseils avisés et le matériel nécessaire à mon projet de thèse.

Je remercie Elisabeth Gassiat qui m'a permis de trouver un directeur pertinent et un financement pour mon projet de thèse. Je lui suis donc particulièrement reconnaissante qu'elle ait accepté de faire partie du jury de ma thèse.

Je remercie aussi mes rapporteurs. Les remarques de Pierre Tarrès ont permis à mon manuscrit de gagner en exactitude et en pertinence. Les travaux de Jean-Louis Deneubourg m'ont inspirée tout le long de mon master et de ma thèse et donc sa participation en tant que rapporteur signifie beaucoup pour moi.

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier les membres du CRCA qui m'ont aidée par leur écoute ou leur travail durant ma thèse. Merci à Christian Jost, Raphaël Jeanson, Audrey Dussutour et Vincent Fourcassié pour les discussions enrichissantes que nous avons eues. Merci à Gérard Latil qui m'a permis de toujours avoir ce dont j'avais besoin pour mes expériences. Merci à Stéphane Ferrere et Patrick Arrufat pour la conception et la réalisation excellentes de mes dispositifs expérimentaux. Merci également à mes stagiaires qui m'ont bien aidée dans mes expériences : Judith, Marie, Aurore et Benjamin.

Merci à Maria Vela Perez pour sa collaboration durant ma dernière année de thèse, qui m'a permis de préparer mon projet post-doctoral.

Merci au laboratoire Modal'X qui m'a accueillie en son sein. La gentillesse et la disponibilité des membres de l'équipe m'ont bien souvent aidée durant ma thèse.

Merci au CEA de Saclay et plus particulièrement au SPEC d'avoir mis à ma disposition les structures qui m'ont permis de mener à bien ma collaboration avec Hugues Chaté et mes différents séjours à Toulouse.

Je remercie chaleureusement mes différents relecteurs qui m'ont permis de corriger beaucoup de fautes dans mon manuscrit et de prendre de l'assurance quant à la qualité de mes mots : maman, papa, Anaïs et Vincent.

J'aimerais remercier mes amis de fac que j'ai rencontrés tout au long de mon cursus universitaire. Je remercie Vincent et Justine pour les fous rires. Merci à tous mes amis de licence et de master que je ne peux tous citer ici.

J'aimerais aussi remercier mes amis de Toulouse qui ont fait de cette ville une de mes destinations préférées. Ils m'ont logée, nourrie, supportée et sans eux je n'aurais pu mener à bien le travail qui me liait à Toulouse. Merci à Sara et Daniel pour leur amitié profonde et attentionnée. Merci à Ugo, Pierre et David pour toutes ces soirées et tous ces rires. Merci aussi à Cepideh, Hélène, Laure-Anne et Kévin.

J'aimerais aussi remercier l'ENSIIE pour m'avoir offert un milieu d'amis et de richesses tout au long de ces années. Merci à DANSIIE qui m'a permis d'être danseuse, professeur de danse et même chorégraphe. Je remercie également tous les amis que j'ai rencontré dans

REMERCIEMENTS

cette école que je ne peux tous citer ici. Je tiens tout de même à remercier particulièrement Alexandre et Pierre qui m'ont été d'un soutien quotidien et plus que précieux. Merci aussi à Hippolyte d'en avoir assuré une bonne part également.

Je réserve mes derniers remerciements à ma famille. Je ne peux exprimer en quelques lignes tout ce qu'elle a fait pour la réalisation de cette thèse, car cela reviendrait à décrire ce qu'elle représente pour moi. Je resterai donc concise. Maman, Papa, Léni, Luc, Laura et Olivier, je vous aime.

Table des matières

Résumé & Abstract	12
Résumé	12
Abstract	13
Présentation de la thèse	15
I Étude mathématique	23
1 État de l'art : les urnes et les marches aléatoires renforcées	25
Introduction	25
1.1 Les urnes	26
1.2 Les marches aléatoires renforcées	29
1.2.1 Les marches aléatoires renforcées par arête	30
1.2.2 Les marches aléatoires renforcées par sommet	32
1.3 Objectifs de la thèse dans le domaine des mathématiques	33
2 Marches aléatoires renforcées	37
2.1 Introduction	38
2.1.1 Un exemple de marche au retour en arrière interdit	39
2.1.2 Le modèle	42
2.1.3 Les résultats	44
2.1.3.1 Le théorème principal : convergence presque sûre de v_n	44
2.1.3.2 Stabilité des équilibres	45
2.1.3.3 Application de ces résultats à un exemple	46
2.2 Notations	47
2.3 Une classe de marches aléatoires renforcées	49
2.3.1 Théorème principal	51

TABLE DES MATIÈRES

2.3.2	Démonstration du théorème 2.3.6	54
2.3.3	Stable and unstable equilibria	57
2.3.3.1	Convergence towards stable equilibria with positive probability	58
2.3.3.2	Non convergence towards unstable equilibria	58
2.4	The forward vertex reinforced random walk	63
2.4.1	Definition and theorem	63
2.4.2	The reinforced measure v_n	65
2.4.3	The Markov matrix $K(v)$	66
2.4.4	The invariant probability of $K(v)$	67
2.4.5	The pseudo-inverse of $I - K(v)$	69
2.4.6	A strict Lyapunov function	79
2.4.7	Stable and unstable equilibria	80
2.4.7.1	The set of equilibria	80
2.4.7.2	Stability of the equilibria when $\alpha = 1$	86
2.4.7.3	Stability of the equilibria when $\alpha > 1$	88
2.4.7.4	Attainability of stable equilibria	93
2.4.7.5	Non convergence towards unstable equilibria	94
3	Estimation des paramètres d'une chaîne de Markov paramétrée renforcée 97	
Introduction	98
3.1	Estimation des paramètres d'une chaîne de Markov paramétrée renforcée	103
3.1.1	Définition d'une chaîne de Markov paramétrée renforcée	103
3.1.2	Estimateur du maximum de vraisemblance	106
3.1.3	Estimateurs du minimum du contraste pondéré	108
3.2	Modèle d'urne bicolore	110
3.2.1	Estimateur du maximum de vraisemblance	111
3.2.2	Estimateurs des moindres carrés pondérés	113
3.3	Application : l'urne de Deneubourg	116
3.3.1	Régularité de l'urne	116
3.3.2	Estimation à partir d'un seul chemin	118
3.3.3	Comportement de l'urne de Deneubourg	118
3.3.4	Estimation de α en tant qu'indice de queue	120
3.3.5	Estimation à partir de simulations	121
	Performance théorique	123
	Performance numérique	124

TABLE DES MATIÈRES

	Régions de confiance	125
	Corrélation des paramètres	126
3.4	Conclusion	133
	Résultats théoriques	133
	Application à l'urne de Deneubourg	134
3.5	Démonstrations	136
3.5.1	Démonstrations des théorèmes 3.2.4 et 3.2.6	136
3.5.1.1	Un théorème central limite pour les probabilités conditionnelles empiriques	136
3.5.1.2	Un résultat général pour les estimateurs du minimum de contraste	137
3.5.1.3	Démonstrations des théorèmes 3.2.4 et 3.2.6	140
3.5.2	Démonstrations pour l'urne de Deneubourg	141
3.5.2.1	Démonstration des théorèmes 3.3.2 et 3.3.3	141
3.5.2.2	Démonstration du théorème 3.3.5, pour le cas $\alpha_0 = 1$	143
3.5.2.3	Démonstration du théorème 3.3.5, pour le cas $\alpha_0 < 1$	143
3.5.2.4	Démonstration du théorème 3.3.5, pour le cas $\alpha_0 > 1$	143
3.5.2.5	Démonstration de l'équation (3.3.6)	144
II Étude comportementale		147
4 Introduction		149
4.1	Présentation générale du sujet	149
4.2	Une méthodologie minimaliste ascendante basée sur la modélisation et l'expérimentation	153
4.3	Les marches aléatoires renforcées sur graphe	154
4.4	L'importance d'une démarche statistique	161
4.5	Description des expériences	163
5 Choix binaires par une colonie de fourmis		167
Introduction		167
5.1	Description de l'expérience	169
5.1.1	Le modèle biologique	169
5.1.2	Dispositif et protocoles expérimentaux	169
5.1.3	Nature des données	172
5.2	Le modèle	174

TABLE DES MATIÈRES

5.3	Résultats et analyses	175
5.3.1	Présentation des données : un premier signe de renforcement	175
5.3.1.1	Résultats expérimentaux obtenus avec le protocole utilisant l'air comprimé	175
5.3.1.2	Résultats expérimentaux obtenus avec le protocole utilisant un pinceau	177
5.3.1.3	Conclusion	177
5.3.2	Estimation des paramètres α et c	182
5.3.2.1	Résultats expérimentaux obtenus avec le protocole utilisant l'air comprimé	182
5.3.2.2	Résultats expérimentaux obtenus avec le protocole utilisant un pinceau	185
5.4	Conclusion	191
5.4.1	Analyse statistique	191
5.4.2	Analyse comportementale	192
6	Comportement d'une fourmi dans un réseau	199
	Introduction	200
6.1	Description de l'expérience	202
6.1.1	Le modèle biologique	202
6.1.2	Dispositif et protocole expérimentaux	202
6.1.3	Nature des données	204
6.2	Modélisation en temps discret	206
6.2.1	Des modèles discrets avec à mémoire	208
6.2.1.1	Modèle persistant	208
6.2.1.2	Modèle renforcé	210
6.2.2	La diffusion dans le réseau	214
6.2.2.1	La diffusion observée expérimentalement	215
6.2.2.2	Diffusion des modèles persistant et renforcé avec les paramètres estimés à partir des expériences	220
6.2.2.3	Diffusion du modèle persistant	222
6.2.2.4	Diffusion du modèle renforcé	224
6.3	Discussion	231
	Des signes de l'utilisation de phéromones	232
	<i>Les résultats d'estimation</i>	232
	<i>La diffusion dans le réseau</i>	233

TABLE DES MATIÈRES

Les fourmis seraient dans un état critique	234
<i>Les résultats du chapitre 5</i>	234
<i>Une diffusion particulière et un état critique intéressant</i>	235
<i>Les fourmis isolées feraient peu usage des phéromones</i> .	236
Une étude plus approfondie pour un meilleur modèle	236
III Conclusion	241
7 Conclusion	243
7.1 Résultats de l'étude mathématique	243
7.1.1 Étude de l'asymptotique d'une nouvelle classe de marches aléatoires renforcées	243
7.1.2 Paramétrisation des marches aléatoires renforcées et estimation de leurs paramètres	245
7.2 Résultats de l'étude comportementale	246
Acronymes	249
Figures	252
Tableaux	254
Bibliographie	258

Résumé

Cette thèse est consacrée à la modélisation de la formation spontanée de chemins préférentiels par des marcheurs déposant des traces attractives sur leurs trajectoires. Plus précisément, par une démarche pluridisciplinaire couplant modélisation et expérimentation, elle vise à dégager un ensemble de règles minimales individuelles permettant l'apparition d'un tel phénomène. Dans ce but, nous avons étudié sous différents angles les modèles minimaux que sont les marches aléatoires renforcées (MAR).

Ce travail comporte deux parties principales. La première démontre de nouveaux résultats dans le domaine des probabilités et statistiques. Nous avons généralisé le travail publié par M. Benaïm et O. Raimond en 2010 afin d'étudier l'asymptotique d'une classe de MAR auxquelles les demi-tours sont interdits. Nous avons également développé une procédure statistique permettant, sous certaines conditions adéquates de régularité, d'estimer les paramètres de MAR paramétrées et d'évaluer des marges d'erreur.

Dans la seconde partie, sont décrits les résultats et analyses d'une étude comportementale et expérimentale de la fourmi *Linepithema humile*. Une partie de notre réflexion est centrée sur le rôle et la valeur des paramètres du modèle proposé par J.-L. Deneubourg et al. en 1990. Nous nous sommes aussi demandés dans quelle mesure une MAR peut reproduire les déplacements d'une fourmi dans un réseau. Dans ces objectifs, nous avons mené des expériences confrontant des fourmis à des réseaux à une ou plusieurs bifurcations. Nous avons appliqué aux données expérimentales les outils statistiques développés dans cette thèse. Nous avons aussi effectué une étude comparative entre les simulations de plusieurs modèles et les expériences.

Abstract

This thesis is devoted to the modelisation of the spontaneous formation of preferential paths by walkers that deposit attractive trails on their trajectories. More precisely, through a multidisciplinary approach, which combines modelisation and experimentation, this thesis aims to bring out a set of minimal individual rules that allow the apparition of this phenomena. In this purpose, we study in several ways the minimal models, which are the Reinforced Random Walk (RRW).

This work contains two main parts. The first one proves some new results in the field of probability and statistics. We have generalized the work published by M. Benaïm and O. Raimond in 2010 in order to study the asymptotics of a class of RRW, to which U-turns are forbidden. We developed also a statistical procedure that allows under some appropriate regularity hypotheses to estimate the parameters of parametrized RRW and to evaluate margins of error.

In the second part we describe the results and the analyses of a experimental and behavioral study of the *Linepithema humile* ants. One part of our reflection is centered on the role and the value of the parameters of the model defined by J.L. Deneubourg et al. in 1990. We investigated also the extent to which RRW could reproduce the moving of an ant in a network. To these purposes, we performed experiments that confront ants to a network of one or several forks. We applied to experimental data the statistical tools developed in this thesis and we performed a comparative study between experiments and simulations of several models.

Présentation de la thèse

Ce mémoire présente les travaux réalisés dans le cadre de ma thèse de doctorat portant sur la modélisation du phénomène de formation spontanée de chemins préférentiels par des marcheurs déposant des traces attractives sur leurs trajectoires. L'objectif de cette thèse est d'aborder cette problématique du point de vue de plusieurs disciplines : les probabilités, les statistiques, la physique de la matière et l'éthologie quantitative. Dans le domaine des probabilités et statistiques théoriques, de nouveaux résultats ont été démontrés sur les marches aléatoires renforcées. Une étude comportementale a été également menée couplant expérimentation et modélisation et adoptant une approche minimaliste ascendante inspirée des méthodes utilisées dans le domaine de la physique de la matière.

Ce travail a été dirigé par Olivier Raimond, professeur de mathématiques spécialisé en probabilités, et par Philippe Soulier, professeur de mathématiques spécialisé en statistiques. Ils sont tous les deux membres de *MODAL'X*, une équipe de mathématiques rattachée à l'université Paris Ouest Nanterre La Défense. Ce laboratoire est axé sur la modélisation aléatoire et couvre un large spectre des probabilités et statistiques théoriques et appliquées.

Cette thèse est aussi l'œuvre d'une collaboration avec Hugues Chaté et Guy Theraulaz. Hugues Chaté est un chercheur en physique de la matière condensée du *CEA*¹, à Saclay, spécialisé dans l'étude des mouvements collectifs. Guy Theraulaz est un directeur de recherche en éthologie quantitative du *CRCA*², à Toulouse, spécialisé dans l'étude comportementale de l'auto-organisation chez les systèmes biologiques.

Les expériences ont été effectuées au CRCA au sein de l'équipe *Dynactom*³, dirigée par Guy Theraulaz. Elles ont été financées par Dynactom et par *TRACES* un projet CNRS porté par Hugues Chaté.

Un système biologique doit résoudre quotidiennement des problèmes afin d'assurer sa

1. Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives

2. Centre de Recherches sur la Cognition Animale

3. Dynamiques complexes et réseau d'interactions dans les sociétés animales

survie : approvisionnement en nourriture et en matière première, recherche ou construction d'un abri, accouplement, élevage de la progéniture... L'une des clés fondamentales de réussite est l'exploitation dynamique et optimale de l'environnement. Pour profiter des meilleurs sites de ressources, d'habitat ou de reproduction, il faut les découvrir, puis les exploiter dans les meilleurs délais.

Les fourmis de beaucoup d'espèces relèvent ce défi en développant un réseau de pistes qui relie les différents points stratégiques : nids, sources de nourriture... Ce réseau routier est un outil de transport qui permet aux fourmis d'explorer et d'exploiter leur environnement de façon dynamique et optimale. Les pistes sont constituées de phéromones, substances chimiques attirantes qui sont déposées par les fourmis elles-même et qui s'évaporent au cours du temps. Selon les besoins et les circonstances, les routes se font et se défont reliant par exemple un nid à une source de nourriture par le plus court chemin, puis se résorbe une fois la source tarie.

Aucun maître d'œuvre ne dirige les expéditions d'exploration, ni ne coordonne les trafics qui construisent et modulent ce réseau. Aucun de ces insectes n'a les capacités cognitives suffisantes pour appréhender dans sa globalité le fonctionnement de toute la colonie.

Cette stratégie d'exploration et de transport est le résultat de ce qu'on appelle une intelligence collective. Chaque fourmi n'a accès qu'à des informations limitées et ne peut agir que localement. Elles suivent des règles comportementales simples qui consistent à interagir avec leur environnement et leurs congénères. La somme de ces actions locales mène à l'émergence d'une structure spatio-temporelle globale complexe.

Ce phénomène a déjà fait l'objet de nombreux travaux. Par la combinaison d'études expérimentales et de modélisation, il a été démontré que, dans un réseau de galeries, de simples règles de dépôt et de suivi de phéromones suffisent à sélectionner le plus court chemin reliant un nid à une source de nourriture. Toutefois les modèles conçus jusqu'à présent ne reproduisent pas complètement toutes les propriétés des réseaux observés dans la nature. Par exemple, dans un espace homogène, les fourmis simulées s'enferment dans des boucles de phéromones sans cesse renforcées par leur passage.

Il existe donc d'autres règles comportementales qui permettent aux fourmis de prévenir tout enfermement dans un espace réduit. Une des solutions réside sans nul doute dans la compréhension de la façon dont les fourmis, dotées de capacités individuelles d'orientation faibles, se dirigent dans la "bonne" direction. Par exemple comment elles retrouvent le nid, quand elles se sont éloignées ?

Plusieurs hypothèses ont été avancées notamment certaines relatives à la persistance de la marche de la fourmi. Les fourmis choisissent préférentiellement des directions qui les dévient le moins possible de leur propre direction. De plus, les fourmis ont toujours

une certaine probabilité de faire spontanément des demi-tours le long d'une piste. Il a été démontré que ces deux propriétés jouent un rôle important dans la performance d'exploration et d'exploitation d'une colonie, plus particulièrement elles améliorent les capacités de retour au nid et de pistage du plus court chemin (cf. [JHR04] et [BDG92]).

L'objectif de cette thèse est de participer aux efforts pour dégager les règles minimales individuelles qui aboutissent à la formation d'un réseau aussi performant que ceux observés dans la nature.

Nous avons choisi d'adopter une démarche minimaliste, dites ascendante, fréquemment utilisée dans le domaine de la physique. Le principe est de partir du plus simple pour aboutir au plus compliqué. Il consiste à d'abord étudier un modèle le plus élémentaire possible. En raison de sa simplicité, ce premier modèle ne reproduit presque jamais le phénomène étudié. Toutefois il est possible de l'appréhender complètement et de spéculer sur ce qu'il manque. Au vu de cette première étude, une nouvelle hypothèse/règle est ajoutée. Le nouveau modèle est étudié permettant l'établissement d'une nouvelle hypothèse et ainsi de suite.

Une telle démarche de construction pas à pas établit une connaissance solide des fondamentaux de la problématique.

Dans notre étude comportementale, nous nous sommes concentrés sur un aspect précis de la formation de chemins : la sélection d'un chemin parmi des voies pré-existantes. Dans leur déplacements, les fourmis sont régulièrement confrontées à des bifurcations à deux branches : obstacles à contourner, pistes qui se séparent en deux... Pour chacun de ces carrefours, les passages successifs de fourmis déposant des traces de phéromones mènent à deux issues : une des deux branches finie par être abandonnée et seule l'autre est empruntée ou alors les fourmis empruntent les deux branches uniformément.

Beaucoup d'expériences ont été menées pour observer le comportement d'une colonie de fourmis dont le nid a été connecté à une source de nourriture par un réseau plus ou moins complexe de galeries ou de passerelles (cf. [DAGP90], [VTG⁺06] et [GGC⁺09]). Ces expérimentations ont révélé que dans une majorité des cas les fourmis finissent par marquer fortement le plus court ou le deuxième plus court chemin qui relie le nid à la source. Mais aussi, dans un nombre non négligeable de répliques de ces expériences, aucun chemin préférentiel n'apparaît.

La fonction de choix que J.L. Deneubourg et al. ont proposé en 1990 est souvent utilisée pour modéliser le comportement de fourmis face à une bifurcation. Il est considéré que les fourmis arrivent une par une, choisissent une branche et y laissent une trace de phéromones

par leur passage. La probabilité de choisir une branche donnée est une fonction du nombre de passages déjà effectués par chacune des deux branches. Cette fonction possède deux paramètres :

- α qui introduit une non-linéarité dans le choix (lorsque $\alpha \neq 1$) et qui traduit la sensibilité des fourmis aux différences perçues de phéromones.
- c qui est l'inverse de l'intensité du renforcement. Plus c est grand, moins les fourmis déposent de phéromones à chacun de leurs passages.

Des variantes du modèle de Deneubourg permettent de tenir compte de situations plus complexes qu'une simple bifurcation. Par exemple, [VTG+06] et [GGC+09] ont étudié les déplacements de fourmis dans un réseau constitué de plusieurs carrefours. Chacune des bifurcations sont modélisées par une fonction de choix.

Lorsque l'on suppose que les fourmis déposent peu de phéromones ($c > 1$) et qu'elles amplifient la différence perçue entre les quantités de phéromones présentes sur les deux branches ($\alpha > 1$), le modèle de Deneubourg et ses variantes reproduisent très bien le phénomène rétroactif qui mène à une sélection de chemin. Avec une probabilité égale à 1, un chemin est emprunté exclusivement après un grand nombre de passages.

En revanche, cette configuration de paramètres ne convient pas pour modéliser une non sélection de chemin. D'autres valeurs de paramètres ($\alpha < 1$) peuvent entraîner une fréquence homogène des voies, mais alors nous avons le problème inverse : aucun chemin n'est sélectionné avec une probabilité égale à 1.

Le modèle de Deneubourg possède donc un grand potentiel pour modéliser la sélection (ou non sélection) de chemins, mais il est pénalisé par des valeurs de paramètres fixés qui fige son comportement vers telle ou telle issue.

Nous avons décidé d'explorer à nouveau le modèle de Deneubourg et ses variantes en centrant notre réflexion sur le rôle et la valeur de ces paramètres. Nous avons effectué des expériences qui confrontent des fourmis *Linepithema humile* à une ou plusieurs bifurcations :

- une expérience qui fait passer séquentiellement une centaine de fourmis par une bifurcation en forme de Y (cf. chapitre 5)
- une expérience qui consiste à observer les déplacements d'une fourmi dans un réseau en triangle, forme géométrique symétrique la plus simple comportant plus d'une bifurcation (cf. chapitre 6).

Conformément à la démarche minimaliste ascendante que nous avons choisi, les situations étudiées sont très simples.

- Durant les expériences, il n'y a pas de nourriture et les fourmis sont affamées. Nous observons donc des fourmis en exploration ou du moins à la recherche de leur nid.

- Les fourmis sont isolées lors de leur déplacement et leurs prises de décision. La seule communication possible entre les fourmis est celle indirecte du dépôt de phéromones.

Le modèle de Deneubourg et ses variantes sont des cas particuliers de la classe très générale des marches aléatoires renforcées (MAR). Par leur simplicité, les MAR sur un graphe fini sont des modèles particulièrement appropriés pour une démarche ascendante minimaliste visant à comprendre le phénomène de formation de chemins. Ces processus stochastiques décrivent la trajectoire d'un marcheur qui saute de sommet en sommet en empruntant les arêtes d'un graphe. Chaque passage par un sommet renforce ce dernier et augmente la probabilité pour le marcheur de sauter à nouveau sur lui.

Un des aspects des MAR qui fait leur force est que par, une étude mathématique, il est possible de prévoir leurs comportements selon les valeurs de leurs paramètres. C'est d'ailleurs grâce à de telles études que nous sommes capables de décrire le comportement du modèle de Deneubourg.

Les marches aléatoires renforcées ont déjà beaucoup été étudiées par les mathématiciens et les résultats confirment ce qui a été dit précédemment : de simples règles de dépôt et de suivi de phéromones ne suffisent pas à former des chemins. Un renforcement dit fort peut entraîner la sélection d'un ensemble fini de sommets du graphe, mais aucun sens de parcours privilégié n'apparaît.

Il faut donc ajouter de nouvelles contraintes aux marches aléatoires renforcées. Dans cette thèse, nous avons décidé d'étudier le comportement de MAR, dont les retours en arrière sont pénalisés. Les probabilités de sauts à un instant donné des MAR étudiées jusqu'à présent dépendent de deux choses :

- la position de la marche à cet instant
- le renforcement du graphe à cet instant.

Or une marche à laquelle nous pénalisons le retour en arrière doit également se souvenir de la position qu'elle occupait à l'instant précédent. Ce qui pourrait passer pour un détail complique considérablement toutes études probabilistes et aucun travail n'a été fait dans ce sens.

Le chapitre 2 de cette thèse est consacré à cette question. Nous avons élargi les résultats démontrés par M. Benaim et O. Raimond en 2010 pour les étendre aux marches aléatoires renforcées au retour en arrière pénalisé (cf. [BR10]). Nous avons appliqué nos résultats à un exemple de marche aléatoire renforcée sur un graphe complet à laquelle le retour en arrière est interdit. Nous avons démontré que lorsque le renforcement est dit fort, une telle marche présente un cas simple de formation de chemins.

Ce résultat est un premier pas pour démontrer mathématiquement l'importance du souvenir de la position précédemment occupée. Cette remarque fait écho aux hypothèses selon lesquels l'implémentation d'une persistance dans la marche des fourmis est fondamentale pour reproduire le phénomène de formation de réseau observé dans la nature. Il est donc prévu de continuer le travail commencé dans le chapitre 2 pour fournir de nouveaux outils de modélisation à l'étude comportementale de l'auto-organisation chez le règne animal.

Notre étude comportementale étant centrée sur le rôle et les valeurs des paramètres du modèle de Deneubourg et ses variantes, nous avons fait appel au savoir-faire des statistiques. Le chapitre 3 développe les outils statistiques qui permettent d'estimer α et c et d'évaluer des intervalles et des régions de confiance. Nous avons appliqué ces outils aux données obtenues des expériences que nous avons menées. Ces résultats ont fourni des éléments solides pour une analyse comportementale. En particulier, ils nous ont permis d'émettre de nouvelles hypothèses au sujet de l'impact de la variabilité inter-individuelle comportementale des fourmis sur la formation de chemins.

Mais le chapitre 3 ne traite pas seulement du modèle de Deneubourg et de ses variantes. Il définit une classe de chaînes de Markov non homogènes qui sont des modèles d'urnes généralisées. Le chapitre 3 est le début d'un travail visant à démontrer que, sous certaines conditions adéquates de régularité, tout estimateur du minimum de contraste du paramètre d'une MAR est consistant et asymptotiquement normal. À terme nous serons capables de fournir des estimations avec évaluation de marges d'erreur pour les paramètres d'une grande classe de MAR.

Dans cette thèse, nous avons traité entièrement le cas des urnes bicolores, qui sont une classe particulière de MAR dont le modèle de Deneubourg fait partie. Nous avons défini l'estimateur du maximum de vraisemblance et les estimateurs des moindres carrés pondérés pour toute urne bicolore régulière et avons démontré qu'ils étaient consistants et asymptotiquement normaux. Nous avons également éprouvé la qualité de ces estimateurs en les appliquant à des simulations du modèle de Deneubourg.

Cette thèse est composée de deux parties. La première partie est consacrée à l'étude mathématiques des marches aléatoires renforcées. Le chapitre 1 est un état de l'art des résultats déjà démontrés au sujet des modèles d'urne et des MAR. Le chapitre 2 est la généralisation des résultats de M. Benaïm et O. Raimond qui permet l'étude du comportement asymptotique des MAR auxquelles le retour en arrière est pénalisé. Le chapitre 3 étudie des estimateurs des paramètres des chaînes de Markov paramétrées renforcées.

La deuxième partie est consacrée à une étude comportementale visant à mieux com-

prendre les mécanismes qui sont à l'origine de la formation de chemins par une colonie de fourmis. Elle se concentre sur le cas particulier de la sélection de chemin parmi un ensemble de voies pré-existantes. Le chapitre 4 est une introduction de la problématique. Le chapitre 5 présente les résultats et l'analyse de l'expérience confrontant séquentiellement une centaine de fourmis à une bifurcation en Y. Le chapitre 6 est consacré à l'étude et la discussion des résultats de l'expérience observant les déplacements d'une fourmi dans un réseau en triangle.

Cette thèse est un travail pluridisciplinaire impliquant des disciplines très éloignées dans leur principe. Nous demandons donc au lecteur d'être indulgent envers les passages techniques et détaillés adressés aux spécialistes ou au contraire à l'égard des paragraphes destinés aux non initiés rappelant les fondamentaux d'une méthode ou d'un concept.

Première partie
Étude mathématique

Chapitre 1

État de l'art : les urnes et les marches aléatoires renforcées

Sommaire

Introduction	25
1.1 Les urnes	26
1.2 Les marches aléatoires renforcées	29
1.2.1 Les marches aléatoires renforcées par arête	30
1.2.2 Les marches aléatoires renforcées par sommet	32
1.3 Objectifs de la thèse dans le domaine des mathématiques . .	33

Introduction

La problématique de la formation ou sélection de chemin est présente dans le domaine des mathématiques avec les marches aléatoires renforcées (MAR) dont l'étude a débuté à la fin des années 80 (cf. [CD87]). On peut même considérer qu'elle a commencé dès le début des années 20 avec l'introduction des modèles d'urne.

Cette thèse étant consacrée à l'étude de formation de chemins dans un milieu discret (labyrinthe, bifurcation...), cet état de l'art ne rendra compte que des résultats des marches aléatoires renforcées sur des graphes.

Le principe de ces modèles est très simple. Un marcheur sur un graphe donné saute de sommet en sommet en empruntant les arêtes qui les relient. Il renforce les sommets qu'il visite (renforcement par sommet) ou les arêtes qu'il traverse (renforcement par arêtes). À chacun des sauts, la probabilité de choisir tel ou tel sommet dépend du renforcement.

Comme l'on peut s'y attendre, le comportement de ces marches dépend du type de renforcement, mais également de la "force" de celui-ci. Lorsque le renforcement est faible, la marche visite une infinité de fois chacun des sommets. Lorsque le renforcement est fort, la marche *se localise*, c'est-à-dire qu'après un temps aléatoire mais fini, elle ne visite plus qu'un nombre fini de sommets. Cette dernière situation peut être assimilée à une formation/sélection de chemin. Le cas pour lequel la divergence entre le renforcement par sommet et celui par arête est la plus remarquable est lorsque le renforcement est dit linéaire (renforcement proportionnel aux nombres de visites). Une marche renforcée linéairement par arête parcourt une infinité de fois tous les sommets, tandis que renforcée linéairement par sommet elle se localise. Quelques études proposent des estimées de la vitesse de convergence de certaines de ces marches vers leur comportement limite.

Dans cet état de l'art, nous commencerons par présenter les modèles d'urnes, cas particuliers des marches aléatoires renforcées parfaitement adaptés à la modélisation d'une sélection de chemin. Ensuite nous introduirons les MAR.

Pour de plus amples détails et exemples d'applications, nous conseillons au lecteur l'excellent état de l'art que R. Pemantle a publié en 2007 (cf. [Pem07]).

1.1 Les urnes

Le principe de ces modèles d'urne provient d'un jeu de hasard simple. On considère une urne contenant un même nombre de boules rouges et noires. Les règles consistent à tirer une boule au hasard et à la remettre dans l'urne avec une autre boule de la même couleur. Puis on recommence. Ainsi, à chaque tirage, la probabilité de tirer une boule rouge est égale à la proportion de boules rouges présentes dans l'urne.

Ce jeu possède une infinité de variantes. Les règles d'ajout et le nombre de boules rouges et noires présentes initialement dans l'urne peuvent être modifiées. Avec les outils mathématiques, il est de plus possible de s'éloigner du jeu réalisable. Par exemple, nous pouvons imaginer un nombre non entier de boules ou encore une probabilité de tirage qui n'est plus une simple proportion du nombre de boules de chaque couleur. La question naturelle qui se pose alors pour chacune de ces variantes est comment évolue la proportion de boules rouges lorsque le nombre de tirages/boules augmente, lorsqu'il converge vers l'infini.

Cette problématique a donné naissance aux modèles d'urne. En plus de l'intérêt mathématiques en l'étude de tels modèles, ces derniers constituent un outil puissant de modélisation. Par exemple, K. et R. Khanin ont utilisé l'urne de Deneubourg, définie dans la

suite, pour modéliser la croissance de neurones (cf. [KK01]).

Dans le but de présenter quelques résultats, nous allons poser un modèle qui couvre les modèles d'urne bicolore les plus connus. Considérons une urne contenant initialement y_0 boules noires et z_0 boules rouges. Notons $X_n \in \{0, 1\}$ la couleur de la n -ième boule tirée (0 pour noire et 1 pour rouge). Nous posons \mathcal{F}_n la tribu engendrée par $\{X_k : k \leq n\}$. Nous appelons *matrice de renforcement*, la matrice 2×2 réelle $A = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} \end{pmatrix}$, telle que lorsqu'une boule rouge est tirée, $a_{1,1}$ boules rouges et $a_{1,0}$ boules noires sont ajoutées dans l'urne et lorsqu'une boule noire est tirée, $a_{0,1}$ boules rouges et $a_{0,0}$ boules noires sont ajoutées dans l'urne.

Notons Z_n (resp. Y_n) le nombre de boules rouges (resp. noires) présentes dans l'urne après le n -ième tirage. Ainsi

$$\begin{aligned} Y_n &= y_0 + \sum_{k=1}^n a_{X_k,0} , \\ Z_n &= z_0 + \sum_{k=1}^n a_{X_k,1} . \end{aligned}$$

Soit $W : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction, que nous appellerons *fonction de poids*. Le renforcement est dit de poids W si

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | \mathcal{F}_n) = 1 - \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | \mathcal{F}_n) = \frac{W(Z_n)}{W(Z_n) + W(Y_n)} .$$

On dit aussi que la probabilité de tirer une boule d'une couleur donnée sachant l'état de l'urne après le n -ième tirage est *W -proportionnelle* à la quantité de cette couleur dans l'urne.

Les urnes de Polya et de Friedman sont les modèles d'urne les plus connus. L'urne de Polya a été introduite pour la première fois en 1923 par F. Eggenberger et G. Polya (cf. [EP23]). La fonction de poids de ce modèle est la fonction identité et la matrice de renforcement est égale à aI , où I est la matrice identité 2×2 et a un réel strictement positif. G. Polya a montré en 1931 que $v_n := \frac{Y_n}{Y_n + Z_n}$, la proportion de boules noires présentes dans l'urne après le n -ième tirage, converge presque sûrement vers une variable aléatoire de loi bêta de paramètre $(y_0/a, z_0/a)$. La démonstration de ce résultat repose sur le fait que v_n est une martingale (cf. [Pol31]¹).

Une autre urne très célèbre est l'urne de Friedman introduite par B. Friedman en 1949 (cf. [Fri49]). La fonction de poids est de nouveau la fonction identité, mais la matrice de

1. Pour les détails de cette démonstration, nous orientons le lecteur vers l'article de D. Freedman publié en 1965, car il est disponible en ligne (cf. section 2, [Fre65])

renforcement est donnée par $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels positifs ou nuls. Le cas $a > 0$ et $b = 0$ n'est autre que l'urne de Polya. D. Freedman a montré que si $a > b > 0$, alors v_n converge presque sûrement vers $1/2$ (cf. sections 3-5, [Fre65]). Le caractère non aléatoire de cette limite est de premier abord étonnant, mais l'est beaucoup moins après la constatation qu'il existe une fonction F tel que

$$\mathbb{E}(v_{n+1} - v_n | F_n) = \frac{1}{n} (F(v_n) + o(1)). \quad (1.1.1)$$

Le comportement asymptotique de v_n est alors régie d'une certaine façon par l'équation différentielle ordinaire $\dot{v} = F(v)$ et v_n converge avec probabilité 1 vers l'ensemble des points d'équilibres de F . Cette technique, qui s'appuie sur les algorithmes stochastiques d'approximation, a en fait été développée pour le cas plus général que constituent les marches aléatoires renforcées sur un graphe. Nous aurons l'occasion de l'aborder plus en détail dans la suite.

Les remarques précédentes mettent en évidence une différence fondamentale entre l'asymptotique de l'urne de Polya et celle de l'urne de Friedman telle que $a > b > 0$. En sont issues, les notions de "Polya-like" et "Friedman-like" faisant référence aux modèles de marches aléatoires dont la mesure empirique d'occupation v_n vérifie une formule du type (1.1.1) avec $F = 0$ pour la première et $F \neq 0$ sauf en certains points pour la seconde (cf. [PV99]).

La troisième urne que nous évoquerons ici est bien plus connue dans le domaine de l'éthologie que dans celui des mathématiques. En effet, elle a été proposée en 1990 par J.-L. Deneubourg et al. afin de modéliser la sélection d'une branche par des fourmis confrontées à une bifurcation (cf. [DAGP90]). Par la suite elle n'a pas cessé d'être utilisée dans ce domaine.

Afin de constater la pertinence des modèles d'urne pour modéliser une sélection de chemin par des fourmis, il suffit de remplacer la bifurcation par une urne, les branches par des boules de couleur et enfin les choix et passages des fourmis par des tirages et ajouts de boules. Sur ce point également nous aurons l'occasion d'y revenir.

Prenons une matrice de renforcement égale à la matrice identité et considérons une quantité initiale de c boules rouges et c boules noires. La fonction de poids est une fonction puissance, i.e. $W : t \mapsto t^\alpha$, avec α un réel strictement positif. Dorénavant cette urne sera dit de Deneubourg. Le théorème suivant rassemble les résultats principaux concernant ce modèle.

Théorème 1.1.1. (i) Si $\alpha < 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{n} = \frac{1}{2} \text{ p.s.}$$

(ii) Si $\alpha = 1$ (urne de Polya), alors Z_n/n converge presque sûrement vers une variable aléatoire de loi bêta de paramètre (c, c) .

(iii) Si $\alpha > 1$, alors après un nombre aléatoire mais fini de tirages une seule couleur est tirée à chaque tirage (une couleur est sélectionnée), i.e.

$$\exists i \in \{0, 1\}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, X_n = i.$$

De plus, il existe trois constantes $Q^* \in (0, \infty)$ et $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ telles que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} l^\alpha \mathbb{P}(Q_\infty = l) = Q^*, \quad (1.1.2)$$

$$C_1 x^{-(\alpha+1/\alpha-2)} \leq \mathbb{P}(T_\infty > x) \leq C_2 x^{-(\alpha+1/\alpha-2)}, \quad (1.1.3)$$

où Q_∞ est le nombre total de boules tirées de la couleur non sélectionnée et T_∞ le temps du dernier tirage d'une boule de la couleur non sélectionnée.

Une démonstration du cas $\alpha < 1$ est proposée dans l'article publié en 2011 par P. Tarrès (cf. section 1.1.1., cas 3) $\rho < 1$, [Tar11]). Le cas $\alpha > 1$ découle des résultats publiés par B. Davis en 1990 (cf. [Dav90]). On trouve également une démonstration de ce cas dans [Lim03]. Les convergences (1.1.2) et (1.1.3) viennent d'un travail publié en 2009 par C. Cotar et V. Limic (cf. (5) et théorème 10(a), [CL09]). Enfin le cas $\alpha = 1$ correspond à l'urne de Polya évoquée plus haut (cf. théorème 2.2, [Fre65]).

1.2 Les marches aléatoires renforcées

Les modèles d'urnes sont des cas particuliers des marches aléatoires renforcées (MAR) sur un graphe. Nous verrons que les MAR n'ont pas le même comportement lorsqu'elles sont renforcées par sommet ou par arête. Cette divergence provient de la nature "Polya-like" des MAR renforcée par arête et "Friedman-like" des MAR renforcée par sommet (cf. section 2, [PV99]). Ainsi les démonstrations des résultats présentés dans la suite font appel à des techniques très différentes selon le type de renforcement.

Toutefois les outils développés dans l'article publié en 2010 par M. Benaïm et O. Raimond, offrent un cadre assez général pour englober les marches aléatoires renforcées par arête (MARA) et par sommet (MARS) (cf. [BR10]). Cette technique se base sur les algorithmes stochastiques d'approximation et consiste à établir une équation différentielle

ordinaire (ODE) du type $\dot{v} = F(v)$ régissant d'une certaine façon l'asymptotique de v_n , la mesure empirique d'occupation de la marche. Un travail de M. Benaïm, O. Raimond et B. Schapira pré-publié en 2012 applique ces outils aux marches MARS (cf. [BRS12]). Le chapitre 2 reprend les résultats de [BR10] pour les démontrer dans un cadre plus large, qui inclut une classe de MAR non encore étudiées.

1.2.1 Les marches aléatoires renforcées par arête

Nous allons d'abord poser la structure des marches aléatoires renforcées par arête (MARA). Elle est très similaire à celle établie pour les urnes dans la partie précédente et sera largement reprise pour décrire les marches aléatoires renforcées par sommet (MARS).

Considérons $G = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$ un graphe connexe localement fini, c'est-à-dire que \mathcal{X} est l'ensemble des sommets, que $\mathcal{E} \subset \{\{x, y\} : x, y \in \mathcal{X}\}$ est l'ensemble des arêtes non orientées, que le nombre maximal d'arêtes connectées à un sommet est fini et enfin que pour tout couple de sommets il existe un chemin (suite d'arêtes) qui les relie. Pour toute arête non orientée $\{x, y\} \in \mathcal{E}$, notons (x, y) et (y, x) les arêtes orientées correspondantes et $\vec{\mathcal{E}}$ l'ensemble des arêtes orientées.

Pour tout $n \geq 1$, notons également $X_n \in \mathcal{X}$ le sommet visité par le marcheur au n -ième saut et Z_n le vecteur sur \mathcal{E} tel que pour toute arête non orientée $\{x, y\} \in \mathcal{E}$

$$Z_n(\{x, y\}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_{k-1}, X_k\} = \{x, y\}}.$$

En d'autres termes, $Z_n(\{x, y\})$ est le nombre fois que l'arête $\{x, y\}$ a été traversée après le n -ième saut. Le poids initial de l'arête $\{x, y\}$ est noté $z_0(\{x, y\}) \in \mathbb{R}$ et la *mesure empirique d'occupation* notée $v_n = Z_n/n$, pour tout $n \geq 1$. Ainsi $v_n(\{x, y\})$ donne la proportion de passages par l'arête $\{x, y\}$ après le n -ième saut. Pour être plus concis, pour tout $\{x, y\} \in \mathcal{E}$, nous noterons dorénavant $Z_n(\{x, y\}) = Z_n(x, y)$, pour tout $n \geq 0$ et $v_n(\{x, y\}) = v_n(x, y)$, pour tout $n \geq 1$.

Notons \mathcal{F}_n la tribu engendrée par $\{X_k : k \leq n\}$. Comme pour le modèle d'urne, il existe une fonction $W : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}_+$, avec $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}_+$, appelée *fonction de poids*, telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x | \mathcal{F}_n) = \frac{W(z_0(X_n, x) + Z_n(X_n, x))}{\sum_{y: \{X_n, y\} \in \mathcal{E}} W(z_0(X_n, y) + Z_n(X_n, y))} \mathbb{1}_{\{X_n, x\} \in \mathcal{E}}. \quad (1.2.1)$$

Dans cette thèse nous nous intéressons aux MAR sur des graphes finis de renforcement $W : t \mapsto t^\alpha$ (avec $\alpha > 0$).

Il est à noter que les hypothèses posées ici sont parfois plus fortes que celles des articles d'origine. Cette liberté est prise pour alléger cet état de l'art et invitons le lecteur à consulter directement ces articles pour en savoir plus.

Le renforcement est dit *linéaire* lorsque $W : t \mapsto t$. Dans ce cas particulier, M.S. Keane et S.W.W. Rolles ont publié la démonstration en 2000 que si G est fini, la marche traverse presque sûrement et infiniment souvent toutes les arêtes orientées. Ils montrent de plus que v_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire, dont ils proposent une expression explicite de la densité (cf. théorème 1 et proposition 1, [KR00]). En réalité, ces résultats ont été démontrés sans être publiés en 1987 par D. Coppersmith et P. Diaconis (cf. [CD87]).

Le renforcement est considéré *fort*, lorsque $\sum_{k=1}^{\infty} 1/W(k) < \infty$. Avec un tel renforcement, V. Limic et P. Tarrès ont montré que si de plus W est croissante, la marche ne parcourt presque sûrement qu'une seule arête après un certain temps aléatoire, mais fini (cf. corollaire 3, [LT07]).

Le renforcement est dit *faible*, lorsque $\sum_{k=1}^{\infty} 1/W(k) = \infty$. Il n'existe pas de résultats généraux sur le comportement d'une marche à renforcement faible, qu'il soit par sommet ou par arête. Jusqu'à maintenant seules les cas particuliers du renforcement linéaire, des marches sur \mathbb{Z}^d , $d \geq 1$ et des modèles d'urne ont été traités.

Nous allons à présent décrire l'asymptotique des MARA sur \mathbb{Z}^d , $d \geq 1$, qui donne un excellent exemple de transition de phase entre localisation et non localisation.

En 1990, B. Davis s'est intéressé aux MARA sur \mathbb{Z} , c'est-à-dire que l'ensemble des sommets est \mathbb{Z} et l'ensemble des arêtes non orientées est $\mathcal{E} = \{\{x, x+1\} : x \in \mathbb{Z}\}$. La fonction de poids est définie sur \mathbb{N}^* telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $W(k) = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i$, avec $(a_i)_{i \geq 1}$ une suite de réels positifs ou nuls. Le poids initial de chaque arête est égal à un. B. Davis a montré que X_n/n converge presque sûrement vers 0 (cf. théorème 4, [Dav90]). De plus si le renforcement est fort, la marche se localise presque sûrement sur une seule arête. Tandis que si le renforcement est faible, la marche visite presque sûrement une infinité de fois tous les sommets (cf. théorème 3.2, [Dav90]).

En 1994 (publié en 2008), T. Sellke a montré des résultats similaires pour les MARA sur \mathbb{Z}^d , avec $d \geq 2$. La fonction de poids est toujours définie sur \mathbb{N}^* , mais son expression, comme la valeur du poids initial des arêtes, n'est plus fixée. Notamment il n'est plus nécessaire que W soit croissante. De nouveau lorsque le renforcement est fort, la marche se localise presque sûrement sur une seule arête. Mais l'hypothèse d'un renforcement faible n'est plus suffisante pour établir un résultat. Il faut que $\sum_{k=0}^{\infty} 1/W(2k) = \infty$

et $\sum_{k=0}^{\infty} 1/W(2k+1) = \infty$ pour démontrer que $\sup_n X_n = +\infty$ et $\inf_n X_n = -\infty$ p.s. (cf. théorème 2 et 3, [Sel08]).

1.2.2 Les marches aléatoires renforcées par sommet

Nous allons maintenant aborder les marches aléatoires renforcées par sommet (MARS). Comme mentionné précédemment, leur structure est très similaire à celle des MARA. Les MARS se déplacent également sur $G = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$, défini dans la sous-partie précédente et X_n est toujours le sommet visité au n -ième saut. Mais comme le renforcement est différent, il faut définir Z_n et v_n sur l'ensemble des sommets et non plus sur l'ensemble des arêtes non orientées. Nous avons donc une nouvelle expression de $\mathbb{P}(X_{n+1} = x | \mathcal{F}_n)$.

Nous notons $z_0(x)$ le poids initial du sommet x ,

$$Z_n(x) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{X_k=x},$$

le nombre de visites du sommet x après le n -ième saut et $v_n(x) = Z_n(x)/n$ la proportion de temps passé sur x après le n -ième saut. Il existe toujours une fonction de poids W telle que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x | \mathcal{F}_n) = \frac{W(z_0(x) + Z_n(x))}{\sum_{y: \{X_n, y\} \in \mathcal{E}} W(z_0(y) + Z_n(y))} \mathbf{1}_{\{X_n, x\} \in \mathcal{E}}. \quad (1.2.2)$$

Lorsque le renforcement est linéaire et G est un graphe complet à $N \geq 3$ sommets, R. Pemantle a montré en 1992 que v_n converge presque sûrement vers $(1/N, \dots, 1/N)$. Autrement dit la marche tend à passer autant de temps sur chacun des sommets (cf. [Pem92]).

En 2012, M. Benaïm et al. ont étudié une MARS sur un graphe complet à $N \geq 2$ sommets de renforcement $W : k \mapsto k^\alpha$, défini sur N^* avec $\alpha > 1$. Les poids initiaux sont tous égaux à 1 (cf. [BRS12]).

Théorème 1.2.1.

- Avec probabilité 1, il existe un entier $\ell \in \llbracket 2, N \rrbracket$, tel que X_n visite infiniment souvent exactement ℓ sommets et v_n converge vers la mesure de probabilité uniforme sur ces ℓ sommets.
- Soit un entier $k \in \llbracket 3, N \rrbracket$. Si $\alpha > (k-1)/(k-2)$, alors la probabilité de visiter plus de $k-1$ sommets infiniment souvent est nulle. Si $\alpha < (k-1)/(k-2)$, alors pour tout $\ell \in \llbracket 2, k \rrbracket$, la probabilité de visiter ℓ sommets infiniment souvent est strictement positive.

Comme pour les MARA, le comportement des MARS sur \mathbb{Z} est intéressant. Le comportement asymptotique de telles marches pour un renforcement du type $W : t \mapsto t^\alpha$ ($\alpha > 0$) est entièrement connu.

P. Tarrès a montré en 2004 que lorsque $\alpha = 1$, la marche se localise presque sûrement sur exactement cinq sommets. Il propose aussi une certaine description de la répartition du temps passé asymptotiquement sur chacun de ces sommets (cf. théorème 1.4. [Tar04]).

Deux ans plus tard, S. Volkov a traité les cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$ pour les MARS sur \mathbb{Z} . Lorsque $\alpha < 1$, la marche visite au moins une fois chacun des sommets. De plus le parcours ne peut se faire que de deux façons différentes : soit aucun des sommets n'est visité une infinité de fois, soit une infinité d'entre eux est visité une infinité de fois. Lorsque $\alpha > 1$, la marche ne visite qu'un nombre fini de sommets et seulement deux d'entre eux sont visités une infinité de fois (cf. théorème 1, [Vol06]).

Il est intéressant de noter la différence de comportement des MAR sur \mathbb{Z} renforcées par sommet ou par arête, lorsque le renforcement est linéaire. En effet les MARA sur \mathbb{Z} visitent presque sûrement une infinité de fois tout les sommets, tandis que les MARS sur \mathbb{Z} se localisent sur cinq sommets.

1.3 Objectifs de la thèse dans le domaine des mathématiques

L'apport de cette thèse à l'étude des modèles qui ont été décrits dans cet état de l'art se présente en deux points.

L'étude de MAR au retour en arrière interdit. L'objectif est de trouver des MAR susceptibles de générer des chemins sur des graphes finis, c'est-à-dire des marches qui parcourent toujours dans le même sens un nombre fini de sommets. Lorsque le renforcement est fort, les MAR se localisent et donc ne visitent qu'un nombre fini de sommets. Mais aucun sens de parcours n'est privilégié.

Nous nous sommes demandés si pénaliser voire même interdire le retour en arrière suffisait à insuffler un sens de parcours à une marche. Une telle contrainte n'est possible que pour des marches qui se souviennent du sommet qu'elles viennent de quitter. Leurs probabilités de saut vers un sommet donné ne dépend pas seulement du renforcement (nombre de visites) et du sommet qu'elles occupent, mais aussi du sommet qu'elles viennent de quitter.

Dans le but d'étudier de tels modèles, le chapitre 2 développe des résultats basés sur l'article [BR10]. Nous appliquons ensuite ces résultats à une marche aléatoire renforcée

par sommet sur un graphe complet dont le surplace et le retour en arrière est interdit. Ce modèle particulier présente un exemple de formation de chemins.

L'estimation des paramètres des MAR. La profusion d'applications des MAR dans le domaine de la modélisation justifie à elle seule l'intérêt d'un développement de méthodes d'inférence pour de tels modèles. Pourtant il semble qu'aucun travail n'ait été effectué dans ce sens. Une grande partie de cette thèse est consacrée à cette question. Le chapitre 3 étudie une classe d'estimateurs et s'intéresse particulièrement au cas des modèles d'urnes bicolores. Ces outils statistiques sont appliquées à des données expérimentales dans les chapitres 5 et 6.

CHAPITRE 1. ÉTAT DE L'ART : LES URNES ET LES MARCHES ALÉATOIRES
RENFORCÉES

Chapitre 2

Les marches aléatoires renforcées sur un graphe fini

Sommaire

2.1	Introduction	38
2.1.1	Un exemple de marche au retour en arrière interdit	39
2.1.2	Le modèle	42
2.1.3	Les résultats	44
2.2	Notations	47
2.3	Une classe de marches aléatoires renforcées	49
2.3.1	Théorème principal	51
2.3.2	Démonstration du théorème 2.3.6	54
2.3.3	Stable and unstable equilibria	57
2.4	The forward vertex reinforced random walk	63
2.4.1	Definition and theorem	63
2.4.2	The reinforced measure v_n	65
2.4.3	The Markov matrix $K(v)$	66
2.4.4	The invariant probability of $K(v)$	67
2.4.5	The pseudo-inverse of $I - K(v)$	69
2.4.6	A strict Lyapunov function	79
2.4.7	Stable and unstable equilibria	80

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de trouver et d'étudier des marches aléatoires sur des graphes pouvant servir de modèle au phénomène de formation de chemins par une fourmi sur un réseau. Par formation de chemins, nous voulons dire qu'après un certain temps la marche visite un nombre fini de sommets toujours dans le même sens.

Dans cette optique, il est naturel de considérer des marches aléatoires renforcées : plus les marches visitent un sommet, plus elles sont attirées par celui-ci. L'analogie avec les fourmis est directe : ces insectes déposent sur leur trajectoire des phéromones, substances chimiques qui attirent leurs congénères.

Les marches aléatoires renforcées sont étudiées depuis près de trois décennies et le chapitre 1 présente les principaux résultats démontrés à leur sujet. Notamment, nous savons que les marches, pour lesquelles le renforcement est fort se localisent, c'est-à-dire qu'elles ne visitent qu'un nombre fini de sommets. Par exemple,

- les marches aléatoires fortement renforcées par arêtes se localisent sur une arête (voir [LT07]),
- les marches aléatoires fortement renforcées par sommets évoluant sur un graphe fini abandonnent un nombre possiblement nul de sommets et visitent uniformément les autres (voir le théorème 1.2.1).

Nous connaissons donc des marches aléatoires renforcées qui sélectionnent un ensemble de sommets sans pour autant les parcourir dans un sens privilégié. Il faut ajouter des contraintes supplémentaires pour amener ces marches à former des chemins ou plus précisément à parcourir les sommets sélectionnés dans un certain ordre.

Nous nous sommes alors intéressés aux marches aléatoires renforcées auxquelles il est interdit de rester surplace et de retourner en arrière. La première contrainte est satisfaite si le graphe considéré ne possède pas de boucles. Ainsi la marche est obligée de changer de sommets à chaque saut et donc ne peut faire de surplace.

Pour interdire le demi-tour, la marche doit tenir compte du sommet sur lequel elle se trouve mais aussi du sommet qu'elle vient de quitter. Ce qui pourrait passer pour un détail change en réalité la structure de la marche et complique considérablement son étude. En effet, cela nous ramène à étudier des marches sur l'ensemble des arêtes orientées du graphe et non plus seulement sur l'ensemble des sommets. De telles marches n'ont jamais été étudiées et nous proposons de le faire dans cette thèse.

Pour aider à la compréhension de ce chapitre rédigé essentiellement en anglais, nous expliquons notre démarche en français dans cette introduction.

2.1.1 Un exemple de marche au retour en arrière interdit

Dans un premier temps nous proposons un exemple de marche aléatoire renforcée par sommet pour laquelle le retour en arrière et le surplace sont interdits. Nous verrons que cette marche a une probabilité non nulle de former un chemin.

Considérons un graphe $G = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$ sans boucle d'ensemble de sommets \mathcal{X} et d'ensemble d'arêtes non orientées $\mathcal{E} \subset \{\{x, y\} : x, y \in \mathcal{X}, x \neq y\}$. Deux sommets x et y sont dit *voisins*, lorsqu'il existe une arête qui les connecte. Nous notons alors cette relation $x \sim y$ et $\{x, y\}$ l'arête non orientée qui relie x et y . Remarquons que $\{x, y\} = \{y, x\}$ et que $x \sim y$ si et seulement si $\{x, y\} \in \mathcal{E}$.

Nous souhaitons étudier une marche qui saute de sommet en sommet en empruntant les arêtes existantes et qui ne peut retourner sur le sommet qu'elle vient de quitter. Autrement dit si nous notons X_n le sommet que la marche occupe après le n -ième saut, alors $X_{n+1} \sim X_n$ (la marche ne saute que sur des sommets voisins) et $X_{n+1} \neq X_{n-1}$ (la marche ne peut pas retourner sur le sommet qu'elle vient de quitter). Remarquons que nous avons aussi $X_{n+1} \neq X_n$ (surplace interdit), car un sommet n'est pas voisin de lui-même.

La marche (X_n) renforce chaque sommet qu'elle visite. Nous notons $Z_n(x)$ le nombre de fois que le sommet x a été visité après que la marche ait sauté n fois. Ainsi nous avons $Z_n(x) = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=x}$ ou encore $Z_{n+1}(x) - Z_n(x) = \mathbb{1}_{X_{n+1}=x}$.

La probabilité que la marche saute sur un sommet donné dépend du renforcement (nombre de visites de chaque sommet), du sommet sur lequel la marche se trouve et du sommet qu'elle vient de quitter. Nous notons $\mathbb{P}(X_{n+1} = z | X_0, \dots, X_n)$ la probabilité que la marche saute sur le sommet z en sachant le sommet de départ et les n sommets suivants que la marche a visités. Cette probabilité est choisie de telle sorte qu'elle est proportionnelle à $W(Z_n(z))$, où W est une fonction définie sur \mathbb{N} à valeurs dans $]0, \infty[$. La fonction W est appelée *fonction de poids*, elle donne le poids de chaque sommet en fonction de son nombre de visites. Plus précisément, si z est voisin de X_n et si z est différent de X_{n-1} , nous avons

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = z | X_0, \dots, X_n) = \frac{W(Z_n(z))}{\sum_{z' \in \mathcal{X}} W(Z_n(z')) \mathbb{1}_{z' \sim X_n} \mathbb{1}_{z' \neq X_{n-1}}}. \quad (2.1.1)$$

Si z n'est pas un voisin de X_n ou si z est égal à X_{n-1} , alors $\mathbb{P}(X_{n+1} = z | X_0, \dots, X_n) = 0$. Dans la suite, nous choisirons souvent comme fonction de poids $W(k) = (1+k)^\alpha$, avec $\alpha \geq 1$.

Nous retrouvons le vecteur de poids Z_n et la fonction de poids W déjà introduits dans le chapitre 1. La probabilité de transition de cette marche est de plus très similaire à celle des marches déjà étudiées par le passé. Elle se distingue par l'interdiction à X_{n+1} de valoir X_{n-1} , c'est-à-dire de revenir en arrière.

Une propriété importante de ce modèle est que la marche lorsqu'elle est fortement renforcée a une probabilité strictement positive de former un chemin.

Plus précisément, considérons $C = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ un cycle de sommets, c'est-à-dire tels que $x_{\ell+1}$ est voisin de x_ℓ si $0 \leq \ell \leq n-1$ et $x_n = x_0$. Nous supposons également que tout sommet x de C possède exactement deux voisins inclus dans C . Autrement dit parmi les voisins de x , exactement deux (ni plus ni moins) d'entre eux appartiennent à C et donc $|\{y \in C : x \sim y\}| = 2$.

Dans la suite de cette section, nous démontrons qu'une marche aléatoire fortement renforcée par sommet pour laquelle le surplace et le demi-tour sont interdits a une probabilité strictement positive de parcourir toujours dans le même sens les sommets de C sans jamais visiter un sommet n'appartenant pas à C .

Dans la figure 2.1 nous donnons deux exemples de cycles de sommets représentés en rouge. Le cycle de gauche vérifie la propriété selon laquelle tous ses sommets n'ont que deux voisins dans le cycle. Comme le retour en arrière est interdit, la marche ne peut parcourir les sommets de ce cycle que dans un seul sens. Le cycle de droite comporte deux sommets possédant trois voisins rouges. Chacun de ces sommets forme une intersection. Sur un de ces sommets, malgré l'interdiction de demi-tour, la marche a le choix entre deux sommets rouges et donc peut changer son sens de parcours.

Expliquons heuristiquement pourquoi la marche a une probabilité strictement positive de parcourir C toujours dans le même sens sans jamais visiter un sommet hors de C . Supposons que la marche n'ait visité que des sommets de C durant ses n premiers sauts. Le demi-tour étant interdit, pour son $n+1$ -ième saut, la marche a le choix de sauter vers un sommet hors de C ou sur le sommet de C qui lui est accessible. Or le sommet de C a été visité plusieurs fois tandis que ceux hors de C ne l'ont jamais été. La marche a donc de grandes chances de sauter à nouveau sur un sommet de C . Le renforcement étant fort, il est possible que la marche ne quitte jamais C . Nous avons vu de plus que la marche ne peut parcourir C que dans un seul sens.

La suite de cette sous-section est consacrée à la démonstration de cette assertion.

Proposition 2.1.1. *Soit $n \geq 3$ et $C = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ un cycle de sommets tel que*

$$\circ \{x \in C : x \sim x_\ell\} = \{x_{\ell-1}, x_{\ell+1}\}, \text{ pour tout } \ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket,$$

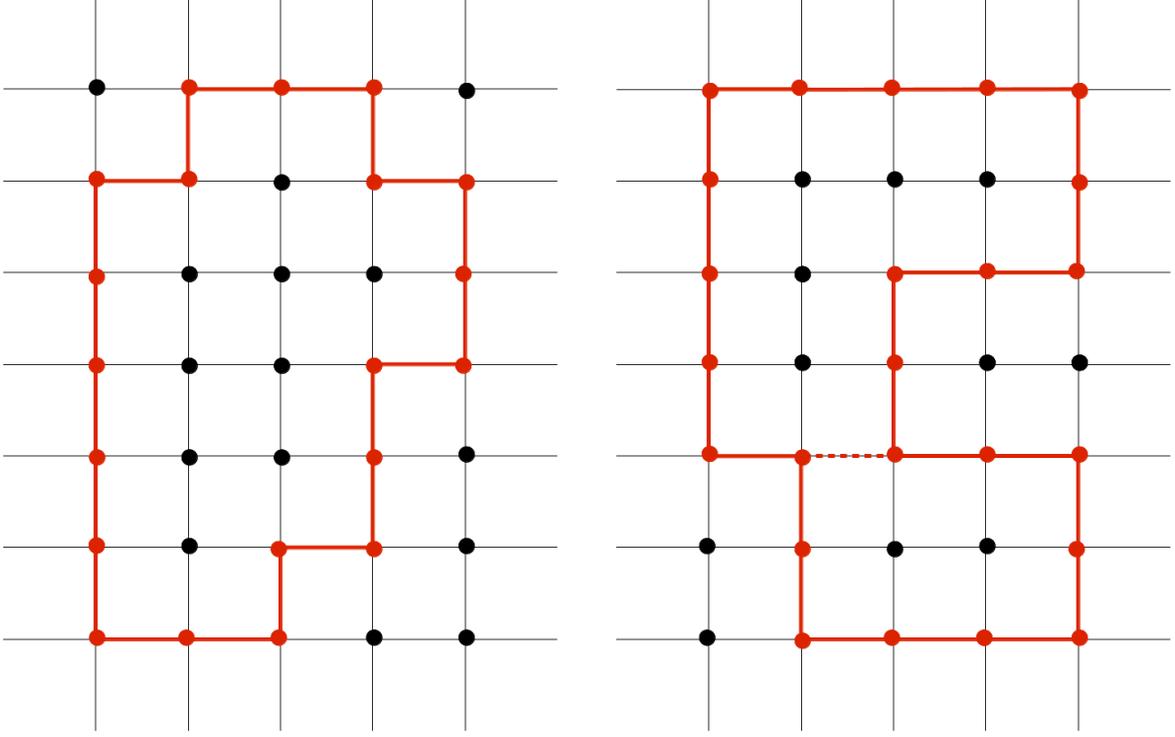


FIGURE 2.1 – Deux exemples de cycles de sommets (dessinés en rouge) : l'exemple de droite possède les mêmes propriétés que l'ensemble C défini dans le texte, c'est-à-dire que chaque sommet possède exactement deux sommets voisins rouges (gris pour une impression en noir et blanc). En revanche le cycle de droite ne possède pas les mêmes propriétés que C . Deux de ses sommets possèdent plus de deux voisins rouges (gris).

◦ $x_0 = x_n$ et $x_{-1} = x_n$ par convention.

Si le renforcement est fort, c'est-à-dire si $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{W(k)} < \infty$, et si $X_0 = x_0$, alors la probabilité que pour tout $k \geq 0$ on ait $X_{kn} = x_0, X_{kn+1} = x_1, \dots, X_{kn+(n-1)} = x_{n-1}$ est strictement positive.

Démonstration. Soit x un sommet, nous notons d_x le nombre de voisins de x , c'est-à-dire que $d_x = |\{y \in \mathcal{X} : x \sim y\}|$. Nous avons pour tout $m \geq 2$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\forall k \in \llbracket 0, m+1 \rrbracket, \forall \ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, X_{nk+\ell} = x_\ell) = \\ \frac{W(0)}{d_{x_0} W(0)} \times \frac{W(0)}{(d_{x_1} - 1) W(0)} \times \dots \times \frac{W(0)}{(d_{x_{n-1}} - 1) W(0)} \\ \times \frac{W(1)}{W(1) + (d_{x_0} - 2) W(0)} \times \frac{W(1)}{W(1) + (d_{x_1} - 2) W(0)} \times \dots \times \frac{W(1)}{W(1) + (d_{x_{n-1}} - 2) W(0)} \\ \times \dots \times \frac{W(m)}{W(m) + (d_{x_0} - 2) W(0)} \times \frac{W(m)}{W(m) + (d_{x_1} - 2) W(0)} \times \dots \times \frac{W(m)}{W(m) + (d_{x_{n-1}} - 2) W(0)} \end{aligned}$$

Ainsi lorsque m tend vers l'infini, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\forall k \geq 0, \forall \ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, X_{nk+\ell} = x_\ell) &= a \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{\ell=0}^{n-1} \left(\frac{W(k)}{W(k) + a_\ell} \right), \\ &= \frac{a}{\prod_{k=1}^{\infty} \prod_{\ell=0}^{n-1} \left(1 + \frac{a_\ell}{W(k)} \right)}. \end{aligned}$$

où a est une constante strictement positive et $a_\ell = (d_{x_\ell} - 2)W(0)$, pour tout $\ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Comme $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{W(k)} < \infty$ et W est une fonction positive, le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a_\ell}{W(k)} \right)$ converge vers une limite strictement positive, pour tout $\ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Nous avons donc

$$\mathbb{P}(\forall k \geq 0, \forall \ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, X_{nk+\ell} = x_\ell) > 0.$$

□

Cet exemple de marche est donc la preuve qu'interdire le retour en arrière et le sur-place suffit à rendre possible un phénomène de formation de chemins. Toutefois nous ne savons pas avec quelle probabilité un chemin apparaît, ni quelle forme peut prendre ce chemin. L'objectif de ce chapitre est de répondre partiellement à ces questions. Nous avons développé et démontré des résultats généraux et les avons appliqués à un exemple particulier. Les marches au retour en arrière interdit étant compliquées à étudier, nous nous sommes cantonnés à des graphes complets.

2.1.2 Le modèle

Pour comprendre la structure du processus que nous avons choisi d'étudier dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle écriture de la marche (X_n) définie dans la section 2.1.1.

Si $\{x, y\}$ est une arête non orientée du graphe, nous notons (x, y) et (y, x) les deux arêtes orientées correspondantes et $\vec{\mathcal{E}}$ l'ensemble des arêtes orientées. L'arête $E_n = (X_{n-1}, X_n)$ est l'arête orientée parcourue par la marche au n -ième saut.

Pour décrire la loi de la marche (X_n) , nous allons donner la loi de (E_n) , qui est une marche sur l'ensemble des arêtes orientées. Nous ne considérons plus seulement le sommet qui est visité, mais aussi l'arête orientée qui est parcourue. Il est à noter que l'on peut extraire (X_n) de (E_n) .

Ainsi dire que la probabilité de saut vers un sommet donné dépend du sommet que la marche occupe et de celui qu'elle vient de quitter revient à dire que cette probabilité

dépend de l'arête orientée que la marche vient de parcourir. Nous pouvons donc réécrire la probabilité de transition définie en (2.1.1) comme suit

$$\mathbb{P}(E_{n+1} = e | X_0, \dots, X_n) = M_n(E_n, e),$$

où e est une arête orientée et M_n est une matrice de transition sur l'ensemble des arêtes orientées. Plus précisément si (x, y) et (y', z) sont deux arêtes orientées, nous avons

$$M_n((x, y), (y', z)) = \begin{cases} \frac{W(Z_n(z))}{\sum_{z' \in \mathcal{X}} W(Z_n(z')) \mathbb{1}_{z' \sim y} \mathbb{1}_{z' \neq x}}, & \text{si } y' = y, z \neq x \text{ et } z \sim y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous appelons M_n la *matrice de transition* de la marche (E_n) au n -ième saut.

Notons d le nombre de sommets de G et v_n la *mesure empirique d'occupation* de la marche (X_n) après n sauts, c'est-à-dire que $v_n(x)$ est la fréquence à laquelle le sommet x a été visité après n sauts :

$$v_n(x) = \frac{1 + Z_n(x)}{d + n}.$$

Si nous supposons que $W(k) = (1 + k)^\alpha$, la matrice de transition M_n peut être vue comme une fonction de v_n . Plus précisément, $M_n = K(v_n)$, où $K(v)$ est la matrice de transition sur l'ensemble des arêtes orientées définie par

$$K(v)((x, y), (y', z)) = \begin{cases} \frac{v(z)^\alpha}{\sum_{z' \in \mathcal{X}} v(z')^\alpha \mathbb{1}_{z' \sim y} \mathbb{1}_{z' \neq x}}, & \text{si } y' = y, z \neq x \text{ et } z \sim y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'écriture que nous venons de présenter fait entrevoir une classe plus générale de marches aléatoires renforcées incluant la marche que nous venons de décrire ainsi qu'une grande partie des marches déjà étudiées par le passé. Les résultats généraux que nous allons énoncer et démontrer dans ce chapitre concernent cette classe, que nous définissons maintenant.

Nous nous donnons un ensemble fini R appelé *ensemble de renforcement*. Cet ensemble est ce qui va être renforcé par la marche. Par exemple nous prendrons $R = \mathcal{X}$ l'ensemble des sommets pour un renforcement par sommet et $R = \mathcal{E}$ l'ensemble des arêtes non orientées pour un renforcement par arête. Ainsi nous ne choisissons pas de renforcement en particulier et notre structure est assez générale pour inclure les deux types de renforcement les plus courants.

Au saut n , la marche renforce donc un point de R que l'on note $R_n \in R$ et qui est une fonction de $E_n = (X_{n-1}, X_n)$, l'arête orientée que la marche vient de parcourir. Par exemple, si le renforcement est par sommet, alors $R_n = X_n$, le sommet sur lequel la marche saute et si le renforcement est par arête, alors $R_n = \{X_{n-1}, X_n\}$ l'arête non orientée associée à l'arête orientée que la marche vient de parcourir.

Pour représenter le renforcement des éléments de R , nous notons $Z_n(r) = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{R_k=r}$ le nombre de fois que $r \in R$ a été renforcé. Remarquons qu'il existe une fonction \hat{V} définie sur R telle que

$$Z_n = \sum_{k=1}^n \hat{V}(E_k).$$

Par exemple lorsque le renforcement est par sommet, pour toute arête orientée (x, y) , $\hat{V}(x, y)$ est le vecteur défini par $\hat{V}(x, y)(y) = 1$ et $\hat{V}(x, y)(z) = 0$ pour tout $z \neq y$. Ainsi $\hat{V}(E_n)(X_n) = 1$ et $\hat{V}(E_n)(x) = 0$ pour tout $x \neq X_n$.

Afin de travailler avec un ensemble convexe, nous ne rendrons pas compte du renforcement avec le vecteur Z_n , mais avec la mesure d'occupation empirique notée v_n et définie par

$$v_n = \frac{1}{n+d} (1 + Z_n) = \frac{1}{n+d} \left(1 + \sum_{k=1}^n \hat{V}(E_k) \right),$$

où $d = |R|$ est le cardinal de R . Nous avons $v_n(R) = \sum_{x \in R} v_n(x) = 1$ et donc pour tout n , v_n est une mesure de probabilité sur R . Nous notons Δ_R l'ensemble des mesures de probabilité sur R . Ainsi \hat{V} est une fonction de $\vec{\mathcal{E}}$ dans Δ_R .

Nous supposons que pour tout $n \geq 1$, il existe une matrice M_n sur l'ensemble des arêtes orientées telle que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0, \dots, X_n) = M_n \left((X_{n-1}, X_n), (X_n, y) \right),$$

où $M_n = K(v_n)$ pour une certaine fonction K définie sur Δ_R . Autrement dit K indique la façon dont la matrice de transition dépend du renforcement.

2.1.3 Les résultats

Cette partie présente les résultats de ce chapitre.

2.1.3.1 Le théorème principal : convergence presque sûre de v_n

Le théorème 2.3.6 est le résultat principal de ce chapitre. Il démontre que v_n , sous certaines hypothèses, est en quelque sorte une approximation des trajectoires d'une équation

différentielle ordinaire (EDO) définie explicitement (voir la théorie des pseudo-trajectoires asymptotiques, section 3, [Ben99]).

Ce résultat est fondamental pour la suite, car il permet d'utiliser les résultats de la théorie des pseudo-trajectoires asymptotiques qui sont analogues à certaines propriétés de la théorie des EDO. Notamment s'il existe une fonction de Lyapunov stricte, notée H , pour l'EDO et si l'ensemble des équilibres de l'EDO, noté Λ , est discret, alors v_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire à valeurs dans Λ . Ce résultat est d'autant plus intéressant lorsqu'il est possible de décrire explicitement les éléments de Λ .

Le théorème 2.3.6 est une généralisation d'un résultat démontré par M. Benaim et O. Raimond dans l'article [BR10]. Ils ont montré ce lien entre (v_n) et l'EDO sous l'hypothèse qu'il existe un compact $\Sigma \subset \Delta_R$ tel que

- $v_n \in \Sigma$, pour tout n ,
- la restriction de K sur Σ est Lipschitz,
- $K(v)$ est indécomposable pour tout $v \in \Sigma$.

Nous élargissons le cadre en autorisant K à ne pas être indécomposable sur la frontière de Σ (voir les hypothèses 2.3.1 et 2.3.3). Le processus (X_n, M_n, V_n) en devient plus compliqué à étudier, mais il couvre plus d'exemples susceptibles de nous intéresser dans notre problématique de formation de chemins.

2.1.3.2 Stabilité des équilibres

Après avoir démontré que v_n converge presque sûrement vers v_∞ , une variable aléatoire à valeurs dans Λ , l'étape suivante est de décrire la loi de v_∞ . La stabilité et non stabilité des équilibres permettent de préciser le support de la loi de v_∞ , c'est-à-dire de déterminer l'ensemble des probabilités sur R vers lesquelles v_n a une probabilité non nulle de converger.

En effet, des applications directes des résultats de l'article [Ben99] montrent qu'étant donné un équilibre stable de l'EDO, v_n a une probabilité strictement positive de converger vers celui-ci.

Nous avons démontré également la non convergence presque sûre de v_n vers un équilibre instable. Ce théorème est le second résultat principal que ce chapitre apporte. La démonstration est délicate et se base sur les résultats de M. Duflo du livre [Duf96].

Une conséquence directe des deux résultats sur la stabilité est que si les équilibres sont ou stables ou instables, alors v_n converge presque sûrement vers un équilibre stable.

2.1.3.3 Application de ces résultats à un exemple

Nous appliquons les résultats présentés précédemment aux marches aléatoires renforcées par sommet auxquelles le demi-tour est interdit et qui évoluent sur un graphe complet sans boucle à N sommets. Leur probabilité de transition est définie en (2.1.1) avec $W(k) = (1 + k)^\alpha$ et $\alpha \geq 1$.

Lorsque $\alpha = 1$, nous montrons que v_n converge presque sûrement vers la probabilité uniforme sur tous les sommets. Ce résultat n'est pas étonnant, car la plupart des marches aléatoires fortement renforcées sur un graphe complet tendent à visiter uniformément tous les sommets et arêtes du graphe (cf. chapitre 1).

Nous nous sommes penchés sur le cas particulier d'un graphe complet à $N = 4$ sommets et avons démontré que lorsque $\alpha \geq 1$, v_n converge presque sûrement vers une probabilité uniforme sur 3 ou 4 sommets.

De plus, lorsque le renforcement est suffisamment fort ($\alpha > 3$), v_n converge presque sûrement vers une probabilité uniforme sur trois sommets. Autrement dit la marche tend à abandonner un sommet et à ne rester que sur les trois autres. Étant donné que le retour en arrière et le surplace sont interdits, la marche ne peut parcourir ces trois sommets que dans un seul sens. C'est donc un cas de formation de chemins.

Lorsque le renforcement est moins fort ($1 < \alpha < 3$), v_n a une probabilité strictement positive de converger vers une probabilité uniforme. Le support de cette dernière peut être un ensemble de trois ou quatre sommets. Ainsi la probabilité pour la marche de former un chemin n'est plus égale à 1, mais reste strictement positive.

Nous n'avons pas encore terminé l'étude du cas $N \geq 5$. En effet nous n'avons pas encore réussi à décrire Λ et notamment à démontrer que Λ est discret.

2.2 Notations

Pour alléger la suite, cette section présente une grande partie des notations utilisées dans ce chapitre. Beaucoup de notations sont classiques. Le lecteur peut donc se rendre directement à la section suivante et revenir en cas de besoin à cette section.

Soit A un ensemble fini. L'ensemble des parties de A est noté par $\mathcal{P}(A)$ et son cardinale $|A|$. Soit $n = |A|$, nous identifierons parfois A à $\llbracket 1, n \rrbracket$. Nous notons \mathcal{S}_n , l'ensemble des permutations à n éléments, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

La fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sera parfois notée sous forme vectorielle, c'est-à-dire $f = (f(1), f(2), \dots, f(|A|))^t$, où w^t est la transposée de tout vecteur w . Posons $\min(f) = \min\{f(x) : x \in A\}$ et $\max(f) = \max\{f(x) : x \in A\}$. Pour $x \in A$, nous notons parfois $f(x)$ par f_x .

Un *vecteur de probabilité* (ou *mesure*) sur A est une fonction $v : A \rightarrow [0, 1]$ telle que $\sum_{x \in A} v(x) = 1$. Le *support* de v , noté $\text{Supp}(v)$, est l'ensemble de tous points $x \in A$ tels que $v(x) \neq 0$. Pour $x \in A$, la *mesure de Dirac* δ_x en x est la mesure de probabilité sur A , définie par $\delta_x(x) = 1$ et $\delta_y(x) = 0$, pour tout $y \in A \setminus \{x\}$.

L'ensemble des mesures de probabilités sur A est notée Δ_A . Soit $k \leq |A|$, nous notons par Δ_A^k , l'ensemble des mesures de probabilité de Δ_A , dont le support contient exactement k points, c'est-à-dire

$$\Delta_A^k = \left\{ v \in \Delta_A : |\text{Supp}(v)| = k \right\} .$$

Pour $B \subset \Delta_A^k$, l'ensemble B^k est défini par

$$B^k = B \cap \Delta_A^k . \tag{2.2.1}$$

Une matrice de probabilité sur A est une fonction $M : A \times A \rightarrow [0, 1]$ telle que

$$\sum_{y \in A} M(x, y) = 1 ,$$

pour $x \in A$. La fonction $y \mapsto M(x, y)$ est notée $M(x, \cdot)$ ou $M(x)$, pour $x \in A$. Remarquons que $M(x) \in \Delta_A$. Pour $x, y \in A$, nous notons parfois $M_{x,y} = M(x, y)$. L'ensemble des matrices de Markov sur A est noté $\mathcal{M} = \mathcal{M}_A$.

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $v \in \Delta_A$, nous utilisons la notation

$$vf = \sum_{x \in A} v(x)f(x) .$$

Une matrice de Markov M agit sur l'ensemble des fonctions sur A selon la formule

$$Mf(x) = \sum_{y \in A} M(x, y)f(y) ,$$

pour $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $x \in A$. La matrice M agit également sur l'ensemble des mesures de probabilité sur A selon la formule

$$vM(y) = \sum_{x \in A} v(x)M(x, y),$$

pour $v \in \Delta_A$ et $y \in A$.

Soit $x, y \in A$ et $M \in \mathcal{M}$, nous notons $x \xrightarrow{M} y$, lorsque $M(x, y) > 0$. La matrice de Markov M est dite *indécomposable* s'il existe un ensemble $\mathcal{R} \subset A$ tel que pour tout $x \in A$ et tout $y \in \mathcal{R}$, il existe un chemin (x_1, \dots, x_n) dans A pour lequel $x \xrightarrow{M} x_1 \xrightarrow{M} \dots \xrightarrow{M} x_n \xrightarrow{M} y$. L'ensemble \mathcal{R} est appelé la *classe récurrente* de M . L'ensemble des matrices de Markov indécomposable sur A est noté \mathcal{M}_{ind} .

Nous notons par $\mathbf{1}_A : A \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction sur A , qui vaut 1 partout. Par des résultats standards, lorsque $M \in \mathcal{M}_{ind}$ est indécomposable, M possède une unique *mesure de probabilité invariante* $\pi \in \Delta_A$, caractérisée par la relation $\pi M = \pi$. De plus, le générateur $-I + M$ a comme noyau $\mathbb{R}\mathbf{1}_A$ et sa restriction à $\{f : A \rightarrow \mathbb{R} : \pi f = 0\}$ est un isomorphisme. Il s'en suit que $I - M$ admet une *pseudo-“inverse”* Q caractérisée par

$$\begin{cases} Q\mathbf{1}_A = 0, \\ Q(I - M) = (I - M)Q = I - \Pi, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

où $\Pi \in \mathcal{M}$ désigne la matrice définie par $\Pi(x, y) = \pi(y)$, pour $x, y \in A$. En d'autres termes, Π est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}\mathbf{1}_A$ pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle_\pi = \sum_{x \in A} f(x)g(x)\pi(x)$. En particulier, pour tout $x \in A$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Pi f(x) = \sum_{y \in A} \Pi(x, y)f(y) = \sum_{y \in A} \pi(y)f(y) = \pi f. \quad (2.2.3)$$

Il est à noter que $Q \in T\mathcal{M}_A$, où $T\mathcal{M}_A$ est l'ensemble des fonctions $N : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$, telles que $\sum_{y \in A} N(x, y) = 0$, pour tout $x \in A$.

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{M}_A$, nous définissons les deux normes suivantes

$$\|f\| = \max_{x \in A} |f(x)| \quad \text{et} \quad \|M\| = \max_{x, y \in A} |M(x, y)|. \quad (2.2.4)$$

Pour $\delta > 0$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, nous notons par $\mathcal{B}(f, \delta) = \{g : A \rightarrow \mathbb{R} : \|f - g\| \leq \delta\}$ la *boule fermée* de centre f et de rayon δ pour la norme $\|\cdot\|$.

Soit B un ensemble fini et soit $\hat{V} : A \times B \rightarrow [0, 1]$ une fonction telle que $\sum_{y \in B} \hat{V}(x, y) = 1$, pour tout $x \in A$. Alors pour tout $x \in A$, la fonction $\hat{V}(x) : B \rightarrow [0, 1]$, définie par $\hat{V}(x)(y) = \hat{V}(x, y)$ pour tout $y \in B$, est la mesure de probabilité sur B . De telles fonctions sont appelée *matrices de transition* de A dans B . Lorsque $A = B$, ce sont des matrices

de Markov sur A . De cette façon, la fonction \hat{V} agit sur l'ensemble des fonctions sur B , c'est-à-dire que

$$\hat{V}f(x) = \sum_{y \in B} \hat{V}(x, y)f(y), \quad (2.2.5)$$

pour $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ et $x \in A$. La fonction \hat{V} agit également sur l'ensemble des mesures de probabilité sur A , c'est-à-dire que

$$v\hat{V}(y) = \sum_{x \in A} v(x)\hat{V}(x, y),$$

pour $v : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $y \in B$. Remarquons que

$$\hat{V}\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A. \quad (2.2.6)$$

Soit Γ un sous-ensemble compact de l'espace euclidien \mathbb{R}^n , où $n \in \mathbb{N}^*$. L'intérieur de Γ est noté $\overset{\circ}{\Gamma}$ et sa frontière $\partial\Gamma = \Gamma \setminus \overset{\circ}{\Gamma}$. Le gradient en $v \in \overset{\circ}{\Gamma}$ d'une fonction différentiable $H : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ est le vecteur $\nabla H(v) := (\partial_1 H(v), \dots, \partial_n H(v))^t$, où $\partial_i H$ est la dérivée partielle de H par rapport à sa i -ième coordonnée. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard sur \mathbb{R}^n .

2.3 Une classe de marches aléatoires renforcées

Considérons un *graphe* fini non orienté noté $G = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$, où \mathcal{X} est l'ensemble de ses *sommets* et $\mathcal{E} \subset \{\{x, y\} : x, y \in \mathcal{X}\}$ l'ensemble de ses *arêtes non orientées*. Pour toute arête non orientée $\{x, y\} \in \mathcal{E}$, nous notons (x, y) et (y, x) les *arêtes orientées* correspondantes et $\vec{\mathcal{E}}$ l'ensemble des arêtes orientées.

Soient $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\vec{\mathcal{E}}}$ l'ensemble des matrices de Markov sur $\vec{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{M}_{ind} \subset \mathcal{M}$ l'ensemble des matrices de Markov indécomposables sur $\vec{\mathcal{E}}$. Soit R un ensemble fini, qui sera appelé *l'ensemble renforcé*. Par exemple l'ensemble renforcé d'une marche aléatoire renforcée par sommet (MARS) est \mathcal{X} et celui d'une marche aléatoire renforcée par arête (MARA) est \mathcal{E} .

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un ensemble de probabilité équipé d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, c'est-à-dire une suite de sous-tribu, telles que pour tout n , $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}$.

Le processus stochastique que nous étudions est le processus à temps discret $(X, M, V) = ((X_n, M_n, V_n))$ définis sur (Ω, \mathcal{F}, P) , prenant ses valeurs dans $\mathcal{X} \times \mathcal{M} \times \Delta_R$ et tel que

1. (X_n, M_n, V_n) est \mathcal{F}_n -mesurable pour tout $n \geq 1$.
2. Pour tout $n \geq 1$, $E_n := (X_{n-1}, X_n) \in \vec{\mathcal{E}}$,

3. Pour tout $(x, y) \in \vec{\mathcal{E}}$,

$$\mathbb{P}(E_{n+1} = (x, y) | \mathcal{F}_n) = M_n(E_n, (x, y)) ,$$

c'est-à-dire que la loi conditionnelle de E_{n+1} sachant \mathcal{F}_n est $M_n(E_n)$.

Pour tout n , posons $v_n \in \Delta_R$ la *mesure de probabilité du renforcement* au temps n définie par

$$v_n = \frac{1}{n+d} \left(1 + \sum_{k=1}^n V_k \right) , \quad (2.3.1)$$

où $d = |R|$.

Nous supposons les hypothèses suivantes

Hypothèse 2.3.1. *Il existe Σ un sous ensemble compact de Δ_R , $K : \Sigma \rightarrow \mathcal{M}_{\vec{\mathcal{E}}}$ une fonction continue et \hat{V} une matrice de transition de $\vec{\mathcal{E}}$ dans R tels que pour tout $n \geq 1$*

1. $V_n = \hat{V}(E_n)$,
2. $v_n \in \overset{\circ}{\Sigma}$,
3. $M_n = K(v_n)$.

Les hypothèses précédentes suffisent à définir le modèle, c'est-à-dire qu'elles déterminent la loi conditionnelle de (X, M, V) sachant \mathcal{F}_0 . Pour être plus précis, l'hypothèse 2.3.1-(1) donne le type de renforcement, l'hypothèse 2.3.1-(2) précise l'ensemble auquel la mesure de probabilité du renforcement appartient et enfin l'hypothèse 2.3.1-(3) donne la *matrice de renforcement*, c'est-à-dire la manière dont (X, M, V) est renforcé.

Voici quelques exemples pour mieux comprendre ce modèle.

Exemple 2.3.2.

1. *Pour étudier une marche aléatoire renforcée par sommet, il faut que l'ensemble de renforcement soit l'ensemble des sommets, i.e. $R = \mathcal{X}$ et que la matrice de transition \hat{V} renforce de 1 chaque sommet visité, c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in \vec{\mathcal{E}}$,*

$$\hat{V}(x, y) = \delta_y .$$

A chaque temps n ,

$$V_n = \hat{V}(E_n) = \delta_{X_n}$$

et la mesure de probabilité du renforcement v_n est la mesure empirique d'occupation des sommets par (X_n) au temps n .

2. Pour étudier une marche aléatoire renforcée par arête, il faut que l'ensemble de renforcement soit l'ensemble des arêtes non orientée, i.e. $R = \mathcal{E}$ et que la matrice de transition \hat{V} renforce de 1 chaque arêtes non orientée parcourue, c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in \vec{\mathcal{E}}$,

$$\hat{V}(x, y) = \delta_{\{x, y\}} .$$

Pour chaque temps n ,

$$V_n = \hat{V}(E_n) = \delta_{\{X_{n-1}, X_n\}}$$

et la mesure de probabilité du renforcement v_n est la mesure empirique d'occupation des arêtes non orientées par (X_n) au temps n .

2.3.1 Le théorème principal

Cette section établit les hypothèses nécessaires à la définition de l'EDO qui décrit le comportement asymptotique de v_n . Elle énonce également le théorème principal de ce chapitre ainsi que les corolaires qui en découlent directement.

À la définition du modèle donné dans la sous-section précédente, nous ajoutons les hypothèses suivantes.

Hypothese 2.3.3.

1. La fonction $K : \Sigma \rightarrow \mathcal{M}_{\vec{\mathcal{E}}}$ est Lipschitz.
2. La matrice $K(v)$ est indécomposable pour tout $v \in \overset{\circ}{\Sigma}$.

Bien que très similaire à celui présenté dans l'article [BR10], le modèle que nous étudions se distingue par le fait que la mesure de probabilité V_n n'appartient pas nécessairement au compact Σ et que la matrice $K(v)$ peut ne pas être indécomposable sur la frontière de Σ , c'est-à-dire pour des $v \in \partial\Sigma$. Le processus (X, M, V) en devient plus difficile à étudier, mais nos résultats couvrent une classe plus grande d'exemples.

Une conséquence des hypothèses 2.3.3-(1) et 2.3.3-(2) est l'existence d'une fonction Lipschitz $\pi : \overset{\circ}{\Sigma} \rightarrow \Delta_{\vec{\mathcal{E}}}$, qui à $v \in \overset{\circ}{\Sigma}$ associe la mesure de probabilité invariante de $K(v)$. Notons $\hat{\pi} : \overset{\circ}{\Sigma} \rightarrow \Delta_R$ la fonction Lipschitz, qui à v associe la mesure de probabilité $\hat{\pi}(v) = \pi(v)\hat{V}$. Pour tout n , nous notons de plus $\pi_n = \pi(v_n)$ et $\hat{\pi}_n = \hat{\pi}(v_n)$.

Exemple 2.3.4. Pour une MARS, nous avons $\hat{\pi}_n \in \Delta_{\mathcal{X}}$ et

$$\hat{\pi}_n = \sum_{x \in \mathcal{X}} \pi_n(x, \cdot) ,$$

pour tout $n \geq 1$. Pour une MARA, nous avons $\hat{\pi}_n \in \Delta_{\mathcal{E}}$ et

$$\hat{\pi}_n(\{x, y\}) = \pi_n(x, y) + \pi_n(y, x) - \pi_n(x, x)\mathbf{1}_{x=y},$$

pour tout $\{x, y\} \in \mathcal{E}$ et $n \geq 1$.

Une autre conséquence des hypothèses 2.3.3-(1) et 2.3.3-(2) est l'existence d'une fonction continue $Q : \overset{\circ}{\Sigma} \rightarrow T\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$, qui à v associe la pseudo-inverse de $I - K(v)$ définie par (2.2.2). Nous ajoutons à $\hat{\pi}$ et Q les conditions suivantes.

Hypothese 2.3.5.

1. La fonction $\hat{\pi} : \overset{\circ}{\Sigma} \rightarrow \Delta_R$ est continument prolongeable à Σ et cette prolongation est Lipschitz.
2. Pour tout $e \in \vec{\mathcal{E}}$, la fonction $v \mapsto Q(v)\hat{V}(e)$ définie sur $\overset{\circ}{\Sigma}$ est continument prolongeable à Σ .

Il est temps à présent de définir l'EDO. Pour $r \in \{0, 1\}$, posons $T_r\Delta_R = \{f : R \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{x \in R} f(x) = r\}$ et notons $\mu : T_1\Delta_R \rightarrow \Sigma$ la fonction définie par $\mu(v) = \arg \min_{w \in \Sigma} \{||w - v||\}$. Comme Σ est convexe, μ est une rétraction Lipschitz de $T_1\Delta_R$ à Σ , c'est-à-dire que μ est Lipschitz et sa restriction à Σ est la fonction identité sur Σ .

Soit $F : T_1\Delta_R \rightarrow T_0\Delta_R$ le champ de vecteur défini par

$$F(v) = -v + \hat{\pi}(\mu(v)). \tag{2.3.2}$$

Il est à noter que F est Lipschitz (par l'hypothèse 2.3.5-(1)). Ainsi par des résultats classique, F induit un flot global $\Phi : \mathbb{R} \times T_1\Delta_R \rightarrow T_1\Delta_R$, où pour tout $v_0 \in T_1\Delta_R$, $t \mapsto \Phi(t, v_0) := \Phi_t(v_0)$ est la solution de

$$\dot{v} = F(v) \tag{2.3.3}$$

avec la condition initiale $\Phi(0, v_0) = v_0$.

Nous allons maintenant introduire les notions d'attracteur et libre d'attracteur. Un ensemble $A \subset \Sigma$ est dit *invariant* si pour tout $v_0 \in A$, $\Phi(\mathbb{R}, v_0) \subset A$. Un ensemble compact non vide A est un *ensemble attractif* si il existe un voisinage U de A et une fonction \mathbf{t} de $(0, \varepsilon_0)$ à \mathbb{R}^+ avec $\varepsilon_0 > 0$, tels que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $t \geq \mathbf{t}(\varepsilon)$,

$$\Phi_t(U) \subset A^\varepsilon,$$

où A^ε est le ε -voisinage de A . Un ensemble invariant attractif est appelé un *attracteur*.

Le *bassin d'attraction* d'un ensemble attractif (resp. attracteur) A est l'ensemble

$$\mathcal{B}(A) = \{v \in \Sigma : \exists t \geq 0, \Phi_t(v) \in U\} .$$

Lorsque $\mathcal{B}(A) = \Sigma$, il est dit que A est un *ensemble attractif global* (resp. un *attracteur global*).

Un ensemble invariant fermé est dit *libre d'attracteur* s'il n'existe aucun sous-ensemble B de A , qui serait un attracteur pour Φ^A , le flot restreint à A défini par $\Phi_t^A(v) = \Phi_t(v)$ pour tout $t \geq 0$ et $v \in A$.

L'ensemble limite de (v_n) est l'ensemble $L = L((v_n))$, qui est constitué de tous les points $v = \lim_{k \rightarrow \infty} v_{n_k}$ pour des suites telles que $n_k \rightarrow \infty$. Le théorème suivant est similaire au théorème 2.6 de [BR10].

Nous avons tous les éléments pour énoncer le théorème principal de ce chapitre, celui qui établit le lien entre v_n et l'EDO définie en (2.3.3).

Théorème 2.3.6. *Supposons que les hypothèses 2.3.1, 2.3.3 et 2.3.5 sont vérifiées, alors l'ensemble limite de (v_n) est libre d'attracteur pour l'équation différentielle*

$$\dot{v} = -v + \hat{\pi}(v) .$$

Remarque 2.3.7. *En réalité, le résultat du théorème 2.6 de [BR10] est que L est une “internally chain transitive set” (terme non traduit de l'anglais). Or un ensemble est un “internally chain transitive set” si et seulement si il est libre d'attracteur. Ces résultats proviennent de la théorie des pseudo-trajectoires asymptotiques. Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à se référer à la section 3 de l'article [BHS05] et plus précisément la section 3.3 pour les définitions et le lemme 3.5 et la proposition 3.20 pour l'équivalence.*

Avec les notions de stabilité des équilibres et de fonction de Lyapunov stricte, la description de L est plus précise.

Définition 2.3.8. *Un équilibre de F est un point v_* tel que $F(v_*) = 0$, c'est-à-dire $\hat{\pi}(v_*) = v_*$. Nous notons $\Lambda = \{v_* \in \Sigma : v_* = \hat{\pi}(v_*)\}$ l'ensemble des équilibres de F .*

Définition 2.3.9. *Une fonction $H : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov stricte pour Φ , si $\langle \nabla H(v), F(v) \rangle > 0$, pour tout $v \in \Sigma \setminus \Lambda$.*

Le théorème suivant est une application directe de la proposition 3.27 de [BHS05].

Théorème 2.3.10. *Si les hypothèses 2.3.1, 2.3.3 et 2.3.5 sont vraies, s'il existe une fonction de Lyapunov stricte H pour Φ et si $H(\Lambda)$ est d'intérieur vide, alors L est un sous-ensemble connexe de Λ et la restriction de H à L est constante.*

Lorsque $|\Lambda| < \infty$, les sous-ensembles connexes de Λ sont des singletons. Le corollaire suivant est donc une conséquence directe du théorème 2.3.10.

Corollaire 2.3.11. *Si les hypothèses 2.3.1, 2.3.3 et 2.3.5 sont vraies, s'il existe une fonction de Lyapunov stricte H pour Φ et si Λ est un ensemble fini, alors $v_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ existe et $v_\infty \in \Lambda$.*

Dans la section 2.3.3, nous discuterons de la convergence de v_n vers un équilibre selon sa stabilité. Plus précisément nous montrerons sous certaines conditions que v_n converge vers tout équilibre stable avec une probabilité non nulle et ne converge pas presque sûrement vers un équilibre instable.

2.3.2 Démonstration du théorème 2.3.6

We first write the sequence (v_n) as a stochastic algorithm of step $1/(n+d)$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+d+1} (F(v_n) + U_{n+1}), \quad (2.3.4)$$

where

$$U_{n+1} = \hat{V}(E_{n+1}) - \hat{\pi}(v_n),$$

Indeed, $(n+d+1)v_{n+1} - (n+d)v_n = \hat{V}(E_{n+1})$, which implies that

$$\begin{aligned} (n+d+1)(v_{n+1} - v_n) &= -v_n + \hat{V}(E_{n+1}) \\ &= -v_n + \hat{\pi}_n - \hat{\pi}_n + \hat{V}(E_{n+1}) \end{aligned}$$

and thus that (2.3.4) holds. To prove Theorem 2.3.6 we will use Proposition 5.1 in [BR10]. In the following lemma, we restate this proposition in our setting (with the notations of Proposition 5.1 of [BR10], $\tau_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+d} \sim \log(n)$, $m(t) := \sup\{k \geq 0 : t \geq \tau_k\} \sim e^t$ and $m(\tau_n + T) \sim ne^T$, for $T > 0$).

Lemma 2.3.12. *Assume that for all $T \in \mathbb{N}^*$,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \in \llbracket n+1, \dots, nT \rrbracket} \left\| \sum_{q=n}^{k-1} \frac{U_{q+1}}{q+d+1} \right\| = 0, \quad (2.3.5)$$

then the limit set of (v_n) is attractor free for the dynamics induced by F .

Lemma 2.3.12 implies that Theorem 2.3.6 holds if we have (2.3.5).

Lemma 2.3.13. *If Hypotheses 2.3.1, 2.3.3 and 2.3.5 hold, then (2.3.5) is verified for all $T > 0$.*

Proof. Along this proof, C is a non-random constant that may vary from lines to lines. For all n , denote $Q_n = Q(v_n)$, $\Pi_n = \Pi(v_n)$, $\pi_n = \pi(v_n)$ and $\hat{\pi}_n = \hat{\pi}(v_n) = \pi_n \hat{V}$. Remark that for all $e \in \vec{\mathcal{E}}$, $\Pi_n \hat{V}(e) = \pi_n \hat{V} = \hat{\pi}_n$ by using (2.2.3).

By using that Σ is compact and that Hypothesis 2.3.5-(2) holds, we have that for all $e \in \vec{\mathcal{E}}$, the map $v \mapsto Q(v) \hat{V}(e)$ is uniformly continuous on Σ . Moreover, by using Hypothesis 2.3.5-(1), the map $v \mapsto \hat{\pi}(v)$ is Lipschitz continuous on Σ . This implies that for all $e \in \vec{\mathcal{E}}$ and all $n \geq 1$

$$\|Q_n \hat{V}(e)\| = \|Q(v_n) \hat{V}(e)\| \leq C, \quad (2.3.6)$$

$$\|(\Pi_{n+1} - \Pi_n) \hat{V}(e)\| = \|\hat{\pi}(v_{n+1}) - \hat{\pi}(v_n)\| \leq \frac{C}{n}, \quad (2.3.7)$$

and that as $n \rightarrow \infty$

$$\|(Q_{n+1} - Q_n) \hat{V}(e)\| = \|(Q(v_{n+1}) - Q(v_n)) \hat{V}(e)\| \rightarrow 0. \quad (2.3.8)$$

Moreover, for n a positive integer, we have

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= (I - \Pi_n) \hat{V}(E_{n+1}) \\ &= (Q_n - M_n Q_n) \hat{V}(E_{n+1}) \end{aligned}$$

Thus we can write

$$U_{n+1} = \epsilon_{n+1} + r_{n+1}, \quad (2.3.9)$$

where

$$\epsilon_{n+1} = Q_n \hat{V}(E_{n+1}) - M_n Q_n \hat{V}(E_n) \quad (2.3.10)$$

and

$$r_{n+1} = \sum_{i=1}^3 r_{n+1,i}, \quad (2.3.11)$$

with

$$\begin{aligned} r_{n+1,1} &= \left(1 - \frac{n+d+1}{n+d}\right) M_n Q_n \hat{V}(E_n) \\ r_{n+1,2} &= \frac{n+d+1}{n+d} M_n Q_n \hat{V}(E_n) - M_{n+1} Q_{n+1} \hat{V}(E_{n+1}) \\ r_{n+1,3} &= M_{n+1} Q_{n+1} \hat{V}(E_{n+1}) - M_n Q_n \hat{V}(E_{n+1}). \end{aligned}$$

Set $T \in \mathbb{N}^*$, denote

$$\epsilon_n(T) = \sup_{k \in \llbracket n+1, \dots, nT \rrbracket} \left\| \sum_{q=n}^{k-1} \frac{\epsilon_{q+1}}{q+d+1} \right\|$$

and

$$r_n^i(T) = \sup_{k \in \llbracket n+1, \dots, nT \rrbracket} \left\| \sum_{q=n}^{k-1} \frac{r_{q+1,i}}{q+d+1} \right\| ,$$

for all $1 \leq i \leq 3$ and $n \in \mathbb{N}^*$.

The sequence (ϵ_{n+1}) is a martingale difference. Indeed, for all $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{E}[Q_n \hat{V}(E_{n+1}) | \mathcal{F}_n] = M_n Q_n \hat{V}(E_n) . \quad (2.3.12)$$

And using (2.3.6) we have

$$\|\epsilon_{n+1}\| \leq |Q_n \hat{V}(E_{n+1})| + |M_n| |Q_n \hat{V}(E_n)| \leq 2C ,$$

for all $n \in \mathbb{N}^*$. Moreover by an application of the Hoeffding's inequality (see [Hoe63], Theorem 2), we have for all $\beta > 0$ and all positive integer n ,

$$\mathbb{P}(\epsilon_n(T) \geq \beta) \leq C \exp \left(\frac{-\beta^2}{C \sum_{q=n}^{nT} (1/(q+d+1))^2} \right)$$

For all integer n , we have

$$\sum_{q=n}^{nT} \frac{1}{(q+d+1)^2} \leq \frac{nT}{(n+d+1)^2} \leq \frac{T}{n} .$$

Thus

$$\sum_n \mathbb{P}(\epsilon_n(T) \geq \beta) < \infty .$$

By Borel-Cantelli Lemma, we conclude that $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n(T) = 0$ a.s.

For $n \in \mathbb{N}^*$ and $k \in \llbracket n+1, nT \rrbracket$,

$$\sum_{q=n}^{k-1} \frac{r_{q+1,1}}{q+d+1} = \sum_{q=n}^{k-1} \frac{M_q Q_q \hat{V}(E_q)}{(q+d)(q+d+1)} .$$

Thus using (2.3.6)

$$r_n^1(T) \leq \sum_{q=n}^{nT} \frac{\|M_q Q_q \hat{V}(E_q)\|}{(q+d)(q+d+1)} \leq \sum_{q=n}^{nT} \frac{C}{(q+d)(q+d+1)} \leq \frac{CT}{n} .$$

Hence $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^1(T) = 0$.

For $n \in \mathbb{N}^*$ and $k \in \llbracket n + 1, nT \rrbracket$,

$$\sum_{q=n}^{k-1} \frac{r_{q+1,2}}{q+d+1} = \frac{1}{n+d} M_n Q_n \hat{V}(E_n) - \frac{1}{k+d} M_k Q_k \hat{V}(E_k)$$

so that using (2.3.6)

$$r_n^2(T) \leq 2C/n,$$

and thus $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^2(T) = 0$.

Finally, by using $M_n Q_n = Q_n - I + \Pi_n$ (see (2.2.2)), we have

$$r_{n+1,3} = (Q_{n+1} - Q_n) \hat{V}(E_{n+1}) + (\Pi_{n+1} - \Pi_n) \hat{V}(E_{n+1}),$$

for all $n \in \mathbb{N}^*$. Therefore by using (2.3.7) and (2.3.8),

$$r_n^3(T) \leq C \sup_{k \geq n} (|(Q_{k+1} - Q_k) \hat{V}(E_{k+1})| + |(\Pi_{k+1} - \Pi_k) \hat{V}(E_{k+1})|) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

2.3.3 Stable and unstable equilibria

In this section we prove under some additional assumptions that v_n converges with positive probability towards any stable equilibrium (Theorem 2.3.1) and cannot converge towards an unstable equilibrium (Theorem 2.3.2). To define the stability of an equilibrium, we have to assume the following hypothesis.

Hypothesis 2.3.14. *The map $\hat{\pi} : \Sigma \rightarrow \Delta_R$ is \mathcal{C}^1 .*

For $v \in \Sigma$, we denote by $DF(v)$ the differential of F at v . Thus $DF(v)$ is a linear map from $T_0 \Delta_R$ to $T_0 \Delta_R$ and for $u \in T_0 \Delta_R$, $D_u F(v) := DF(v)(u)$ is the derivative of F at v in the direction u .

Definition 2.3.15. *Let v_* be an equilibrium. We say that v_* is stable if all eigenvalues of $DF(v_*)$ have a negative real part and v_* is unstable if there exists at least one eigenvalue of $DF(v_*)$ with a positive real part.*

Remark 2.3.16. *If v_* is a stable equilibrium, then $\{v_*\}$ is an attractor.*

Definition 2.3.17. *Let v_* be an equilibrium. A stable (unstable) direction of v_* is an eigenvector such that the real part of its eigenvalue is negative (positive).*

Remark 2.3.18. *All directions of stable equilibria are stable and an unstable equilibrium has at least one unstable direction.*

2.3.3.1 Convergence towards stable equilibria with positive probability

This section states that a stable equilibrium v_* just has to be attainable in order to have that v_n converges towards v_* with positive probability.

Definition 2.3.19. *A point v_* is said attainable by (v_n) if for all $\epsilon > 0$ and for all positive integer n_0*

$$\mathbb{P}(\exists n \geq n_0, \|v_n - v_*\| < \epsilon) > 0 .$$

The following theorem is a particular case of Theorem 7.3 of [Ben99] (using Remark 2.3.16).

Theorem 2.3.1. *If v_* is a stable attainable equilibrium, then*

$$\mathbb{P}(v_n \rightarrow v_*) > 0 .$$

2.3.3.2 Non convergence towards unstable equilibria

Let $v_* \in \Sigma$ be an unstable equilibrium. Thus there exists an unstable direction f of v_* .

Denote $K_* = K(v_*)$, $Q_* = Q(v_*)$ and $\pi_* = \pi(v_*)$. Denote also $\mathcal{R}_* = \text{Supp}(\pi_*)$ the support of π_* . For all $(x, y) \in \vec{\mathcal{E}}$, let $\mathcal{A}_{x,y} = \{z \in \mathcal{X} : (x, y) \xrightarrow{K_*} (y, z)\}$ and $\mathcal{A}_y = \bigcup_{x:(x,y) \in \mathcal{R}_*} \mathcal{A}_{x,y}$.

Remark 2.3.20. *If $(E_n^*) = ((X_{n-1}^*, X_n^*))$ is a Markov chain of transition matrix K_* and of initial law π_* , then $\mathcal{A}_{x,y}$ is the set of vertices that (X_n^*) can reach in one step coming from x and starting from y and \mathcal{A}_y is the set of vertices that (X_n^*) can reach in one step starting from y .*

Let π_1 and π_2 be the marginals of π_* , i.e. for all $x, y \in \mathcal{X}$,

$$\pi_1(x) = \sum_z \pi_*(x, z) , \quad \pi_2(y) = \sum_z \pi_*(z, y) .$$

Lemma 2.3.21. *We have $\pi_1 = \pi_2$ and $\mathcal{R}_* = \{(x, y) \in \vec{\mathcal{E}} : x \in \text{Supp}(\pi_1), y \in \mathcal{A}_x\}$.*

Proof. Let $(E_n^*) = ((X_{n-1}^*, X_n^*))$ be a Markov chain of transition matrix given by K_* and of initial law π_* . We know that, for all $n \geq 1$, the law of $E_n^* = (X_{n-1}^*, X_n^*)$ is π_* , hence the law of X_{n-1}^* is π_1 and the law of X_n^* is π_2 . Thus $\pi_1 = \pi_2$.

Since $\pi_* = \pi_* K_*$, we have $(y, z) \in \mathcal{R}_*$ if and only if there exists $x \in \mathcal{X}$, such that $\pi_*(x, y) K_*((x, y), (y, z)) > 0$. This is equivalent to the fact that there exists $x \in \mathcal{X}$, such that $(x, y) \in \mathcal{R}_*$ and $z \in \mathcal{A}_{x,y}$, i.e. $z \in \mathcal{A}_y$.

Note finally that \mathcal{A}_y is not empty if and only if $y \in \text{Supp}(\pi_2) (= \text{Supp}(\pi_1))$. □

Denote now $\mathcal{A} = \text{Supp}(\pi_1) (= \text{Supp}(\pi_2))$. Thus $(x, y) \in \mathcal{R}_*$ if and only if $x \in \mathcal{A}$ and $y \in \mathcal{A}_x$.

Lemma 2.3.22. *There exists $k \geq 1$, such that for all $e \in \vec{\mathcal{E}}$,*

$$\mathcal{R}_* = \bigcup_{q=1}^k \text{Supp}(K^{q-1}(v_*)(e, \cdot)). \quad (2.3.13)$$

Proof. Since \mathcal{R}_* is the unique recurrent class of K_* and $|\vec{\mathcal{E}}| < \infty$ there exists $k \geq 1$, such that for all $e \in \vec{\mathcal{E}}$ and $e' \in \mathcal{R}_*$, there exists $q \leq k$, $K_*^{q-1}(e, e') > 0$. \square

Hypothese 2.3.23.

1. *There exists $\delta > 0$, such that $v \mapsto Q(v)\hat{V}(e)$ is Lipschitz on $\mathcal{B}(v_*, \delta) \cap \Sigma$, for all $e \in \vec{\mathcal{E}}$.*
2. *For all $y \in \mathcal{A}$ and all $z, z' \in \mathcal{A}_y$, there exists $x \in \mathcal{X}$ such that $(x, y) \in \mathcal{R}_*$ and that $z, z' \in \mathcal{A}_{x,y}$.*
3. *There doesn't exist any map $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, such that for all $(x, y) \in \mathcal{R}_*$,*

$$\hat{V}f(x, y) = C + g(x) - g(y),$$

with C a constant.

This section is devoted to the proof of the following theorem.

Theorem 2.3.2. *If Hypotheses 2.3.1, 2.3.3, 2.3.5 and 2.3.23 hold, then*

$$\mathbb{P}(v_n \rightarrow v_*) = 0.$$

Proof. Along this proof, we will denote by C a non-random constant that may vary from lines to lines.

Equations (2.3.4) and (2.3.9) imply that

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+d+1} \left(F(v_n) + \epsilon_{n+1} + r_{n+1} \right).$$

The expression of ϵ_{n+1} and r_{n+1} are given by (2.3.10) and (2.3.11) and we recall that $\mathbb{E}[\epsilon_{n+1} | \mathcal{F}_n] = 0$ (see (2.3.12)).

We will apply Corollary 3.IV.15, p.126 in [Duf96] to the stochastic algorithm z_n , defined for each n by

$$z_n = v_n - \frac{1}{n+d} \left(M_n Q_n \hat{V}(E_n) \right).$$

By using (2.3.6), $\|z_n - v_n\| \leq C/n$ and $\{z_n \rightarrow v_*\} = \{v_n \rightarrow v_*\}$.

We have $z_n \in T_1\Delta_R$. Indeed, using (2.2.6) and the definition of Q_n (see (2.2.2))

$$M_n Q_n \hat{V} \mathbf{1}_R(E_n) = M_n Q_n \mathbf{1}_{\vec{\mathcal{E}}}(E_n) = 0 .$$

For all n ,

$$\begin{aligned} z_{n+1} - z_n &= v_{n+1} - v_n - \frac{r_{n+1,2}}{n+d+1} , \\ &= \frac{1}{n+d+1} \left(F(z_n) + \epsilon_{n+1} + \tilde{r}_{n+1} \right) , \end{aligned}$$

where

$$\tilde{r}_{n+1} = F(v_n) - F(z_n) + r_{n+1,1} + r_{n+1,3} .$$

Lemma 2.3.24. *On $\{v_n \rightarrow v_*\}$, we have $\tilde{r}_{n+1} = O\left(\frac{1}{n}\right)$.*

Proof. Recall the definition of F given by (2.3.2). Then Hypothesis 2.3.5-(1) implies that F is Lipschitz on $T_1\Delta_R$. Thus we have that $\|F(v_n) - F(z_n)\| \leq C/n$, for all $n \geq 1$. We also have $\|r_{n+1,1}\| \leq C/n$ (see (2.3.6)).

Let $e \in \vec{\mathcal{E}}$ and n_0 be an integer such that for all $n \geq n_0$, $v_n \in \mathcal{B}(v_*, \delta) \cap \Sigma$, with $\delta > 0$ defined as in Hypothesis 2.3.23-(1). Let $n \geq n_0$, then using Hypothesis 2.3.23-(1), the map $v \mapsto Q(v)\hat{V}(e)$ is Lipschitz on $\mathcal{B}(v_*, \delta) \cap \Sigma$. Since $|\vec{\mathcal{E}}| < \infty$, the Lipschitz constants of these mappings are uniformly bounded in $e \in \vec{\mathcal{E}}$. Recall that $v \mapsto K(v)$ is also Lipschitz, we then have

$$\|r_{n+1,3}\| = \left\| K(v_{n+1})Q(v_{n+1})\hat{V}(E_{n+1}) - K(v_n)Q(v_n)\hat{V}(E_{n+1}) \right\| \leq C/n .$$

Hence $\tilde{r}_{n+1} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ on $\{v \rightarrow v_*\}$. □

The previous lemma directly implies that on $\{v_n \rightarrow v_*\}$, $\sum_n \|\tilde{r}_{n+1}\|^2 < \infty$.

Let k be a positive integer such that (2.3.13) is verified. To achieve this proof, according to Corollary 3.IV.15, p126 of [Duf96], it remains to show that on $\{v_n \rightarrow v_*\}$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{q=0}^{k-1} (\epsilon_{n+q+1} f)^2 \middle| \mathcal{F}_n \right] > 0 . \quad (2.3.14)$$

Let μ be a probability measure on $\vec{\mathcal{E}}$ and $G : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}$. Define the variance $V_\mu(G)$ by

$$V_\mu(G) = \sum_{e \in \vec{\mathcal{E}}} G(e)^2 \mu(e) - \left(\sum_e G(e) \mu(e) \right)^2 \quad (2.3.15)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{e, e' \in \vec{\mathcal{E}}} \mu(e) \mu(e') (G(e) - G(e'))^2 . \quad (2.3.16)$$

Recall that the conditional law of E_{n+1} with respect to \mathcal{F}_n is $M_n(E_n, \cdot) = K(v_n)(E_n, \cdot)$. The conditional mean and variance with respect to \mathcal{F}_n of $Q_n \hat{V}f(E_n)$ are respectively $M_n Q_n \hat{V}f(E_n)$ and $\mathbb{E}[(\epsilon_{n+1} f)^2 | \mathcal{F}_n] = \varphi_{v_n}(E_n)$, where

$$\varphi_v(e) = V_{K(v)(e, \cdot)}(Q(v) \hat{V}f) ,$$

for all $v \in \Sigma$ and $e \in \vec{\mathcal{E}}$. We denote $\varphi(v_*)$ by φ_* .

Lemma 2.3.25. *There exists $C > 0$, such that for all $v, v' \in \mathcal{B}(v_*, \delta) \cap \Sigma$ and for all $e \in \vec{\mathcal{E}}$,*

$$|\varphi_v(e) - \varphi_{v'}(e)| \leq C \|v - v'\| .$$

Proof. Indeed, $(\mu, G) \mapsto V_\mu(G)$ is Lipschitz, i.e. there exists C , such that

$$|V_\mu(G) - V_{\mu'}(G')| \leq C(\|\mu - \mu'\| + \|G - G'\|)$$

(norms $\|\cdot\|$ defined in (2.2.4)). Moreover, for all $e \in \vec{\mathcal{E}}$, $v \mapsto K(v)(e, \cdot)$ is Lipschitz on Σ and by using Hypothesis 2.3.23-(1), $v \mapsto Q(v) \hat{V}f$ is Lipschitz on $\mathcal{B}(v_*, \delta) \cap \Sigma$. We conclude using the property that the composition of two Lipschitz functions is Lipschitz. \square

By using several times Lemma 2.3.25, let us prove that on $\{v_n \rightarrow v_*\}$, for all $q \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, we have

$$\mathbb{E} \left[(\epsilon_{n+q+1} f)^2 \middle| \mathcal{F}_n \right] = K_*^q \varphi_*(E_n) + O \left(\frac{1}{n} + \|v_n - v_*\| \right) . \quad (2.3.17)$$

We have for all $q \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$,

$$\mathbb{E} \left[\left(\epsilon_{n+q+1} f \right)^2 \middle| \mathcal{F}_n \right] = \mathbb{E}[\varphi_{v_{n+q}}(E_{n+q}) | \mathcal{F}_n] \quad (2.3.18)$$

$$= \mathbb{E}[\varphi_{v_n}(E_{n+q}) | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[(\varphi_{v_{n+q}} - \varphi_{v_n})(E_{n+q}) | \mathcal{F}_n] . \quad (2.3.19)$$

Let $\delta > 0$ be defined as in Hypothesis 2.3.23-(1). Notice that $\{v_n \rightarrow v_*\} \subset \bigcup_{n'} \Omega_{n', \delta}$, where $\Omega_{n', \delta} = \{v_n \in \mathcal{B}(v_*, \delta/2) \cap \Sigma, \forall n \geq n'\}$, for all $n' \in \mathbb{N}^*$. Let n_1 be a positive integer such that $\frac{2k}{n_1+d} \leq \delta/2$. Then for all $n \geq n_1$,

$$\sup_{0 \leq q \leq k-1} \|v_{n+q} - v_n\| \leq \delta/2 .$$

Indeed, for all $q \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$,

$$v_{n+q} - v_n = \left(\frac{n+d}{n+d+q} - 1 \right) v_n + \frac{1}{n+d+q} \sum_{k=n+1}^{n+q} \hat{V}(E_i) .$$

Thus $\|v_{n+d} - v_n\| \leq \frac{2k}{n+d} \leq \delta/2$.

Let $q \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$. On $\Omega_{n_1, \delta}$, the event $\{v_n \in \mathcal{B}(v_*, \delta/2)\} \in \mathcal{F}_n$ occurs. Hence on $\Omega_{n_1, \delta}$, for all $n \geq n_1$ and for all $q \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, we have

$$\left| \mathbb{E}[(\varphi_{v_{n+q}} - \varphi_{v_n})(E_{n+q}) | \mathcal{F}_n] \right| = \left| \mathbb{E}[(\varphi_{v_{n+q}} - \varphi_{v_n})(E_{n+q}) \mathbf{1}_{\{v_n \in \mathcal{B}(v_*, \delta/2)\}} | \mathcal{F}_n] \right|.$$

Since for all $n \geq n_1$, $v_n \in \mathcal{B}(v_*, \delta/2)$ implies that $v_{n+q} \in \mathcal{B}(v_*, \delta)$ for all $q \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, and using Lemma 2.3.25, we have on $\Omega_{n_1, \delta}$

$$\left| \mathbb{E}[(\varphi_{v_{n+q}} - \varphi_{v_n})(E_{n+q}) | \mathcal{F}_n] \right| \leq C \mathbb{E}[\|v_{n+q} - v_n\| | \mathcal{F}_n] \leq C/n, \quad (2.3.20)$$

for all $n \geq n_1$ and for all $q \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$.

Once again by using Lemma 2.3.25, we can write that, on $\Omega_{n_1, \delta}$ and for all $n \geq n_1$,

$$\mathbb{E}[\varphi_{v_n}(E_{n+q}) | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\varphi_*(E_{n+q}) | \mathcal{F}_n] + O(\|v_n - v_*\|).$$

Moreover on $\Omega_{n_1, \delta}$ and for all $n \geq n_1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi_*(E_{n+q}) | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi_*(E_{n+q}) | \mathcal{F}_{n+q-1}] | \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[K(v_{n+q-1})\varphi_*(E_{n+q-1}) | \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[K_*\varphi_*(E_{n+q-1}) | \mathcal{F}_n] + O\left(\frac{1}{n} + \|v_n - v_*\|\right), \end{aligned}$$

where the fact that $K(v_{n+q-1})(E_{n+q-1}, \cdot)$ is the conditional law with respect to \mathcal{F}_{n+q-1} of E_{n+q} is used for the second equality and the facts that

$$\|v_{n+q-1} - v_*\| \leq C/n + \|v_n - v_*\|$$

and that K is Lipschitz on Σ are used for the third equality. Finally by repeating q times the last computations, we have on $\Omega_{n_1, \delta}$ and for all $n \geq n_1$

$$\mathbb{E}[\varphi_*(E_{n+q}) | \mathcal{F}_n] = K_*^q \varphi_*(E_n) + O\left(\frac{1}{n} + \|v_n - v_*\|\right). \quad (2.3.21)$$

Thus by using (2.3.19), (2.3.20) and (2.3.21), we obtain that (2.3.17) holds on $\Omega_{n_1, \delta}$. Thus (2.3.17) holds on $\{v_n \rightarrow v_*\} \subset \bigcup_{n'} \Omega_{n', \delta}$.

Note that (2.3.17) implies that on $\{v_n \rightarrow v_*\}$

$$\mathbb{E} \left[\sum_{q=1}^k (\epsilon_{n+q+1} f)^2 \middle| \mathcal{F}_n \right] \geq \inf_{e \in \mathcal{E}} \left(\sum_{q=0}^{k-1} K_*^q \varphi_*(e) \right) + O\left(\frac{1}{n} + \|v_n - v_*\|\right).$$

Thus

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{q=0}^{k-1} (\epsilon_{n+q+1} f)^2 \middle| \mathcal{F}_n \right] \geq I_* := \inf_{e \in \mathcal{E}} \left(\sum_{q=0}^{k-1} K_*^q \varphi_*(e) \right).$$

We will now prove that $I_* > 0$. To this purpose, suppose that $I_* = 0$. This implies that $\varphi_*(e') = 0$, for all $e' \in \mathcal{R}_*$. Indeed if $I_* = 0$, there exists $e \in \vec{\mathcal{E}}$, such that $K_*^q \varphi_*(e) = 0$ for all $q \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$. This implies that $\varphi_*(e') = 0$ for all $e' \in \bigcup_{q=0}^{k-1} \text{Supp}(K_*^q(e, \cdot))$, i.e. there exists $q \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ such that $K_*^q(e, e') > 0$. Thus using Lemma 2.3.22, we have $\varphi_*(e') = 0$ for all $e' \in \mathcal{R}_*$.

Set $G = Q_* \hat{V} f$ and fix $(x, y) \in \mathcal{R}_*$. Remark that using (2.3.16), $\varphi_*(x, y) = 0$ implies that $z \mapsto G(y, z)$ is constant on $\mathcal{A}_{x,y}$. Thus by using Hypothesis 2.3.23-(2) this implies that $z \mapsto G(y, z)$ is constant on \mathcal{A}_y . Hence there exists a map $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $G(y, z) = g(y)$ for all $y \in \mathcal{A}$ and $z \in \mathcal{A}_y$.

On one hand, using (2.2.2),

$$(I - K_*)G(x, y) = \hat{V} f(x, y) - \Pi_* \hat{V} f,$$

where $\Pi_*(e, e') = \pi_*(e')$, for all $e, e' \in \vec{\mathcal{E}}$. Remark that $\Pi_* \hat{V} f = \hat{\pi}(v_*) f$ is a constant. On the other hand,

$$\begin{aligned} (I - K_*)G(x, y) &= G(x, y) - K_* G(x, y) \\ &= g(x) - \sum_{z \in \mathcal{A}_{x,y}} K_*((x, y), (y, z)) G(y, z) \\ &= g(x) - g(y). \end{aligned}$$

Hence we have proved that if $I_* = 0$, then there exists a map $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\hat{V} f(x, y) = \hat{\pi}(v_*) f + g(x) - g(y)$ for all $(x, y) \in \mathcal{R}_*$. This is impossible by Hypothesis 2.3.23-(3). Thus $I_* > 0$ and $\mathbb{P}(v_n \rightarrow v_*) = 0$. \square

2.4 The forward vertex reinforced random walk

2.4.1 Definition and theorem

Let $G = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$ be the complete graph with $N \geq 4$ vertices. Then $\mathcal{X} = \llbracket 1, N \rrbracket$ and $\mathcal{E} = \{\{x, y\} : x, y \in \mathcal{X}, x \neq y\}$. In this section, we take for reinforced set R the set of vertices \mathcal{X} . Thus the walk will be vertex reinforced. We also set

$$\Sigma = \{v \in \Delta_{\mathcal{X}} : \max(v) \leq 1/3 + \min(v)\}.$$

Note that $\partial \Sigma = \{v \in \Delta_{\mathcal{X}} : \max(v) = 1/3 + \min(v)\} \cup \{v \in \Sigma : \exists x \in \mathcal{X}, v_x = 0\}$. Let $\hat{V} : \vec{\mathcal{E}} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ be the transition matrix defined by

$$\hat{V}(x, y) = \delta_y, \tag{2.4.1}$$

for $(x, y) \in \vec{\mathcal{E}}$. Then the reinforced probability measure v_n is the empirical occupation measure of the vertices by X_n :

$$v_n = \frac{1}{n + N} \left(1 + \sum_{k=1}^n \delta_{X_k} \right).$$

Set $\alpha \geq 1$ and let $K : \Sigma \rightarrow \mathcal{M}_{\vec{\mathcal{E}}}$ be the map defined by

$$K(v) \left((x, y), (x', y') \right) = \frac{v(y')^\alpha}{\sum_{z \in \mathcal{X} \setminus \{x, y\}} v(z)^\alpha} \mathbb{1}_{y=x'} \mathbb{1}_{x \neq y'}, \quad (2.4.2)$$

for all $v \in \Sigma$ and $(x, y), (x', y') \in \vec{\mathcal{E}}$. We then set $M_n = K(v_n)$, for all $n \geq 0$.

In this section, we will prove the following theorem.

- Theorem 2.4.1.**
1. When $\alpha = 1$, v_n converges almost surely to the uniform probability on \mathcal{X} .
 2. When $\alpha > 1$ and $N = 4$, v_n converges almost surely to a uniform probability measure v_∞ . Furthermore,
 - if $\alpha > 3$, then v_∞ is almost surely a uniform probability measure on three vertices and for all v , a uniform probability measure on three vertices, $\mathbb{P}(v_\infty = v) > 0$.
 - if $1 < \alpha < 3$, then for all v , a uniform probability measure on three or four vertices, $\mathbb{P}(v_\infty = v) > 0$.
 3. When $\alpha > 1$ and $N \geq 5$, the limit set of v_n is a connected subset of Λ .

More results are also proved in the case $\alpha > 1$ and $N \geq 5$. Despite their interest, they do not describe completely the limit set of v_n . In particular, they do not permit to prove the almost sure convergence of v_n .

The first step of the proof of the theorem 2.4.1 is to prove that the hypotheses 2.3.1 and 2.3.3 are true and then that the theorem 2.3.6 is true for the forward vertex reinforced random walk.

The map K and the transition matrix \hat{V} defined by 2.4.1 and by 2.4.2 are such that Hypotheses 2.3.1-(1) and 2.3.1-(3) hold. Moreover since the denominator of (2.4.2) doesn't vanish for all $v \in \Sigma$, the map K is \mathcal{C}^1 on Σ and Hypothesis 2.3.3-(1) is verified.

Remark 2.4.1. For all $n \geq 1$, $X_{n+1} \notin \{X_{n-1}, X_n\}$. In other words, the walk doesn't stay at the same vertex and cannot return to the vertex it has just visited before.

Remark 2.4.2. Remark that Σ^3 (defined in (2.2.1)) is the set of uniform probability measures on exactly three points, i.e. $\Sigma^3 = \{v \in \Sigma : \forall x \in \text{Supp}(v), v(x) = 1/3\}$. Moreover $\overset{\circ}{\Sigma} \subset \Sigma \setminus \Sigma^3$, i.e. the support of any measure in $\overset{\circ}{\Sigma}$ contains at least four points.

2.4.2 The reinforced measure v_n

Proposition 2.4.3. *Hypothesis 2.3.1-(2) holds, i.e. $v_n \in \overset{\circ}{\Sigma}$.*

Proof. We will prove 2.3.1-(2) by induction. Remark that for all n ,

$$(n + N + 1)v_{n+1} = \left((n + N)v_n + \delta_{X_{n+1}} \right) \quad (2.4.3)$$

and then that

$$\min(v_n) \leq \frac{n + N + 1}{n + N} \min(v_{n+1}). \quad (2.4.4)$$

Notice that since $\min(v_n) > 0$, $v_n \in \overset{\circ}{\Sigma}$ if and only if $\max(v_n) < 1/3 + \min(v_n)$. We will prove that $v_0, v_1, v_2 \in \overset{\circ}{\Sigma}$. It is obvious for v_0 , since for all $x \in \mathcal{X}$, $v_0(x) = 1/N$. Note that $\min(v_1) = 1/(N+1)$ and that $\max(v_1) = 2/(N+1) < 1/3 + 1/(N+1)$, thus $v_1 \in \overset{\circ}{\Sigma}$. Finally by using Remark 2.4.1, $\min(v_2) = 1/(N+2)$ and $\max(v_2) = 2/(N+2) < 1/3 + 1/(N+2)$. Then $v_2 \in \overset{\circ}{\Sigma}$.

Let $n \geq 2$ and suppose that for all integer $k \leq n$, $v_k \in \overset{\circ}{\Sigma}$. We will prove, that $v_{n+1} \in \overset{\circ}{\Sigma}$. For all $x \in \mathcal{X}$ such that $x \neq X_{n+1}$, by using (2.4.3) in the first line, $v_n \in \overset{\circ}{\Sigma}$ in the second and (2.4.4) in the third, we have

$$\begin{aligned} v_{n+1}(x) &= \frac{n + N}{n + N + 1} v_n(x) \\ &< \frac{n + N}{n + N + 1} \left(1/3 + \min(v_n) \right) \\ &< \frac{n + N}{n + N + 1} \left(1/3 + \frac{n + N + 1}{n + N} \min(v_{n+1}) \right) \\ &< 1/3 + \min(v_{n+1}) \end{aligned}$$

Moreover by using Remark 2.4.1, we know that $X_{n+1} \notin \{X_{n-1}, X_n\}$. Thus, by using (2.4.3) three times,

$$\begin{aligned} (n + N + 1)v_{n+1}(X_{n+1}) &= (n + N)v_n(X_{n+1}) + 1 \\ &= (n + N - 1)v_{n-1}(X_{n+1}) + 1 \\ &= (n + N - 2)v_{n-2}(X_{n+1}) + 1 \end{aligned}$$

Since $v_{n-2} \in \overset{\circ}{\Sigma}$, we have

$$(n + N + 1)v_{n+1}(X_{n+1}) < (n + N - 2) \left(1/3 + \min(v_{n-2}) \right) + 1$$

And finally, by using (2.4.4) three times,

$$(n + N + 1)v_{n+1}(X_{n+1}) < (n + N - 2)\left(1/3 + \frac{n + N + 1}{n + N - 2} \min(v_{n+1})\right) + 1$$

Thus

$$\begin{aligned} v_{n+1}(X_{n+1}) &< \frac{n + N - 2}{3(n + N + 1)} + \frac{1}{n + N + 1} + \min(v_{n+1}) \\ &< 1/3 + \min(v_{n+1}) \end{aligned}$$

Consequently, $v_{n+1} \in \overset{\circ}{\Sigma}$. We can conclude that Hypothesis 2.3.1-(2) holds. \square

To conclude this section, we have proved that Hypothesis 2.3.1 holds.

2.4.3 The Markov matrix $K(v)$

Hypothesis 2.3.3-(2) directly follows from the proposition below, after remarking that $\overset{\circ}{\Sigma} \subset \Sigma \setminus \Sigma^3$ (Σ^3 defined by (2.2.1)).

Proposition 2.4.4. *The matrix $K(v)$ is indecomposable for all $v \in \Sigma \setminus \Sigma^3$.*

Proof. Let $v \in \Sigma \setminus \Sigma^3$, then by Remark 2.4.2, the support of v contains at least four points. We will prove that the matrix $K(v)$ is indecomposable and that its recurrent class is $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \vec{\mathcal{E}} : v(x) > 0, v(y) > 0\}$. Recall that $(x, x) \notin \vec{\mathcal{E}}$ and that $e \xrightarrow{K(v)} e'$ means $K(v)(e, e') > 0$.

Let $(x_1, x_2) \in \vec{\mathcal{E}}$ and $(x_3, x_4) \in \mathcal{S}$.

Case 1 : $|\{x_1, x_2, x_3, x_4\}| = 4$

Since $x_i \neq x_j$, for $i \neq j$ and since $v(x_i) > 0$, for all i , we have

$$(x_1, x_2) \xrightarrow{K(v)} (x_2, x_3) \xrightarrow{K(v)} (x_3, x_4) .$$

Case 2 : $|\{x_1, x_2, x_3, x_4\}| = 3$ and $x_2 \neq x_3$

Since the support of v contains at least four points, there exists $x \in \mathcal{X} \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ such that $v(x) > 0$. Thus

$$(x_1, x_2) \xrightarrow{K(v)} (x_2, x) \xrightarrow{K(v)} (x, x_3) \xrightarrow{K(v)} (x_3, x_4) .$$

Case 3 : $|\{x_1, x_2, x_3, x_4\}| = 3$ and $x_2 = x_3$

In this case we simply have

$$(x_1, x_2) \xrightarrow{K(v)} (x_3, x_4) .$$

Case 4 : $|\{x_1, x_2, x_3, x_4\}| = 2$

In this case $\{x_1, x_2\} = \{x_3, x_4\}$. Since the support of v contains at least four points, there exists $x, y \notin \{x_3, x_4\}$ with $x \neq y$ such that $v(x) > 0$ and $v(y) > 0$. Thus

$$(x_1, x_2) \xrightarrow{K(v)} (x_2, x) \xrightarrow{K(v)} (x, y) \xrightarrow{K(v)} (y, x_3) \xrightarrow{K(v)} (x_3, x_4) .$$

Consequently $K(v)$ is indecomposable for all $v \in \Sigma \setminus \Sigma^3$. \square

Remark 2.4.5. For $v \in \Sigma^3$, the matrix $K(v)$ is not indecomposable. Indeed, v is uniform on exactly three different points $\{x_1, x_2, x_3\}$. Then there are two irreducible classes \mathcal{R}_1 and \mathcal{R}_2 , with $\mathcal{R}_1 = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1)\}$ and $\mathcal{R}_2 = \{(x_2, x_1), (x_1, x_3), (x_3, x_2)\}$, such that

$$(x_1, x_2) \xrightarrow{K(v)} (x_2, x_3) \xrightarrow{K(v)} (x_3, x_1) \xrightarrow{K(v)} (x_1, x_2)$$

and

$$(x_2, x_1) \xrightarrow{K(v)} (x_1, x_3) \xrightarrow{K(v)} (x_3, x_2) \xrightarrow{K(v)} (x_2, x_1) .$$

But since $X_{n+1} \notin \{X_{n-1}, X_n\}$, we have

$$\mathbb{P}(X_n, X_{n+1}) \in \mathcal{R}_2 | ((X_{n-1}, X_n) \in \mathcal{R}_1) = \mathbb{P}((X_n, X_{n+1}) \in \mathcal{R}_1 | (X_{n-1}, X_n) \in \mathcal{R}_2) = 0 .$$

In other words, if $(E_n) = ((X_{n-1}, X_n))$ is a Markov chain of transition matrix $K(v)$, then $X_n \in \{x_1, x_2, x_3\}$ for all $n \geq 1$ and (E_n) has two different ways to cross this three points, but cannot switch from one to the other.

2.4.4 The invariant probability of $K(v)$

For $x, y \in \mathcal{X}$, with $x \neq y$, let $H_{x,y} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $H_x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ and $H : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ be the maps, which to $v \in \Sigma$ associates

$$H_{x,y}(v) = \sum_{z \in \mathcal{X} \setminus \{x,y\}} v(z)^\alpha , \quad (2.4.5)$$

$$H_x(v) = \sum_{\substack{z, z' \in \mathcal{X} \setminus \{x\} \\ z \neq z'}} v(z)^\alpha v(z')^\alpha = \sum_{z \in \mathcal{X} \setminus \{x\}} v(z)^\alpha H_{x,z}(v) , \quad (2.4.6)$$

$$H(v) = \sum_{\substack{z, z', z'' \in \mathcal{X} \\ z \neq z' \neq z'' \neq z}} v(z)^\alpha v(z')^\alpha v(z'')^\alpha = \sum_{z \in \mathcal{X}} v(z)^\alpha H_z(v) . \quad (2.4.7)$$

Thus we can write for all $(x, y), (x', y') \in \vec{\mathcal{E}}$,

$$K(v)((x, y), (x', y')) = \frac{v(y')^\alpha}{H_{x,y}(v)} \mathbb{1}_{y=x'} \mathbb{1}_{x \neq y'} .$$

Proposition 2.4.6. *For all $v \in \Sigma \setminus \Sigma^3$, the invariant probability measure $\pi(v)$ of $K(v)$ is such that for all $(x, y) \in \vec{\mathcal{E}}$,*

$$\pi(v)(x, y) = \frac{v(x)^\alpha v(y)^\alpha H_{x,y}(v)}{H(v)}. \quad (2.4.8)$$

The probability measure $\hat{\pi}(v) \in \Delta_{\mathcal{X}}$ is such that for all $x \in \mathcal{X}$

$$\hat{\pi}(v)(x) = \frac{v(x)^\alpha H_x(v)}{H(v)}. \quad (2.4.9)$$

Moreover Hypothesis 2.3.5-(1) holds.

Proof. For $v \in \Sigma \setminus \Sigma^3$, let $\mu : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ be the map defined by

$$\mu(x, y) = \frac{v(x)^\alpha v(y)^\alpha H_{x,y}(v)}{H(v)},$$

for $(x, y) \in \vec{\mathcal{E}}$. The map μ belongs to $\Delta_{\mathcal{X}}$. Indeed,

$$\sum_{(x,y) \in \vec{\mathcal{E}}} \mu(x, y) = \sum_x \frac{v(x)^\alpha H_x(v)}{H(v)} = 1.$$

Moreover μ is invariant for the indecomposable matrix $K(v)$. Indeed,

$$\begin{aligned} \mu K(v)(x, y) &= \sum_{(x', y') \in \vec{\mathcal{E}}} \mu(x', y') K(v)((x', y'), (x, y)) \\ &= \sum_{(x', y') \in \vec{\mathcal{E}}} \frac{v(x')^\alpha v(y')^\alpha v(y)^\alpha}{H(v)} \mathbf{1}_{y'=x} \mathbf{1}_{x' \neq y} \\ &= \frac{v(x)^\alpha v(y)^\alpha}{H(v)} \sum_{x'} v(x')^\alpha \mathbf{1}_{x' \neq x} \mathbf{1}_{x' \neq y} \\ &= \frac{v(x)^\alpha v(y)^\alpha H_{x,y}(v)}{H(v)} = \mu(x, y). \end{aligned}$$

Thus a consequence of the indecomposability of $K(v)$ is that $\mu = \pi(v)$.

Since $\alpha \geq 1$ and since $H(v) > 0$, for all $v \in \Sigma$, the map $\pi : v \mapsto \pi(v)$ is \mathcal{C}^1 on $\Sigma \setminus \Sigma^3$. Moreover π is continuously extendable to Σ and its extension is \mathcal{C}^1 . Thus the map $\hat{\pi} : v \mapsto \hat{\pi}(v)$ verifies Hypothesis 2.3.5-(1). Recall that $\hat{V}(x, y) = \delta_y$ for $(x, y) \in \vec{\mathcal{E}}$. Hence for all $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned}
 \hat{\pi}(v) &= \sum_{(x,y) \in \vec{\mathcal{E}}} \pi(v)(x,y) \delta_y \\
 &= \sum_{(x,y) \in \vec{\mathcal{E}}} \frac{v(x)^\alpha v(y)^\alpha H_{x,y}(v) \delta_y}{H(v)} \\
 &= \sum_y \frac{v(y)^\alpha H_y(v) \delta_y}{H(v)}.
 \end{aligned}$$

Hence Equation (2.4.9) actually gives the expression of $\hat{\pi}(v)(x)$, for $x \in \mathcal{X}$. \square

2.4.5 The pseudo-inverse of $I - K(v)$

In this section we will prove that Hypothesis 2.3.5-(2) holds. Let e be an oriented edge. Using Proposition 2.4.4, we know that $K(v)$ is indecomposable for all $v \in \Sigma \setminus \Sigma^3$. Then K and $v \mapsto Q(v)\hat{V}(e)$ are continuous on $\Sigma \setminus \Sigma^3$. By Remark 2.4.2, recall that Σ^3 is the set of uniform probability measures on exactly three vertices.

It remains to extend $v \mapsto Q(v)\hat{V}(e)$ by continuity to Σ^3 , which is the statement of the following proposition (taking $g = \hat{V}$).

Proposition 2.4.7. *Let $v_0 \in \Sigma^3$, let $a : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ and let $g : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ be the map on the set of oriented edges defined by $g(x,y) = a(y)$ for all $(x,y) \in \vec{\mathcal{E}}$. Then the limit of $Q(v)g$ as $v \in \Sigma \setminus \Sigma^3$ goes to v_0 exists. In other words, $v \mapsto Q(v)g$ is continuously extendable to Σ^3 .*

Proof. By symmetry, we just have to prove the extension to $v_0 = (1/3, 1/3, 1/3, 0, \dots, 0)$, (uniform probability measure on the three first vertices).

All vector W will be assimilated to W^t . Let us present the following vectorial notations for functions $f : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 X_1^f = (f(3,1), f(1,2), f(2,3)) , \\
 X_2^f = (f(2,1), f(3,2), f(1,3)) , \\
 Y_\ell^f = (f(1,\ell), f(2,\ell), f(3,\ell)) , \\
 Z_\ell^f = (f(\ell,1), f(\ell,2), f(\ell,3)) , \\
 T_\ell^f = (f(4,\ell), \dots, f(N,\ell)) , \\
 U_\ell^f = (f(\ell,4), \dots, f(\ell,N)) ,
 \end{array} \right. \quad (2.4.10)$$

for $\ell \in \llbracket 4, N \rrbracket$ and with the convention $f(\ell, \ell) = 0$. In other words X_1^f and X_2^f gives f for the oriented edges, starting from $\{1, 2, 3\}$ and ending in $\{1, 2, 3\}$, Y_ℓ^f gives f for the oriented

edges, starting from $\{1, 2, 3\}$ and ending to ℓ , Z_ℓ^f gives f for oriented edges, starting from ℓ and ending in $\{1, 2, 3\}$, T_ℓ^f gives f for oriented edges, starting from $\llbracket 1, N \rrbracket$ and ending to ℓ and U_ℓ^f gives f for oriented edges, starting from ℓ and ending in $\llbracket 1, N \rrbracket$. Note that when $N = 4$, $T_\ell^f = U_\ell^f = 0$. Vectors $X_1^f, X_2^f, (Y_\ell^f)_{\ell \geq 4}, (Z_\ell^f)_{\ell \geq 4}$ and $(T_\ell^f)_{\ell \geq 4}$ are enough to describe f , but vectors $(U_\ell^f)_{\ell \geq 4}$ will be useful in the following.

We will simply denote by λ all constant vectors $(\lambda, \dots, \lambda)$ and by δ_ℓ the vector $(\delta_\ell(4), \dots, \delta_\ell(N))$, where $\ell \geq 4$, $\delta_\ell(\ell) = 1$ and $\delta_\ell(m) = 0$ with $m \in \llbracket 4, N \rrbracket \setminus \{\ell\}$. Set $h = (a(1), a(2), a(3))$. With these notations and Notations (2.4.10), we have

$$\begin{cases} X_1^g = X_2^g = Z_\ell^g = h, \\ Y_\ell^g = a(\ell)(1, 1, 1) = a(\ell), \\ T_\ell^g = a(\ell)(1 - \delta_\ell), \end{cases} \quad (2.4.11)$$

for $\ell \in \llbracket 4, N \rrbracket$.

We now denote $L_1 = \frac{1}{3}(J + 2J^2)$ and $L_2 = \frac{1}{3}(2J + J^2)$, where $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remark that $J^3 = I$ and $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

For all $W \in \mathbb{R}^3$, we denote $\bar{W} = (W(1) + W(2) + W(3))/3$. Remark that we also denote $\bar{W} = \bar{W}(1, 1, 1)$. We will prove that

$$\begin{cases} X_1^{Q(v)g} \xrightarrow[v \in \Sigma]{v \rightarrow v_0} -L_1 h + \bar{h}, \\ X_2^{Q(v)g} \xrightarrow[v \in \Sigma]{v \rightarrow v_0} -L_2 h + \bar{h}, \\ Y_l^{Q(v)g} \xrightarrow[v \in \Sigma]{v \rightarrow v_0} -\frac{h}{4} + a(\ell) - \frac{3\bar{h}}{4}, \\ Z_l^{Q(v)g} \xrightarrow[v \in \Sigma]{v \rightarrow v_0} \frac{h - \bar{h}}{2}, \\ T_l^{Q(v)g} \xrightarrow[v \in \Sigma]{v \rightarrow v_0} (a(\ell) - \bar{h})(1 - \delta_\ell), \end{cases} \quad (2.4.12)$$

which prove Proposition 2.4.7.

Set $\epsilon_i = 1 - 3v_i$ for $i \in \{1, 2, 3\}$, $\epsilon_\ell = 3v_\ell$ for $\ell \geq 4$ and $\epsilon = \sum_{i=1}^3 \epsilon_i (= \sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell)$. Remark that $\epsilon_x = O(\epsilon)$ for all $x \in \mathcal{X}$. Indeed, $v_\ell \geq 0$ implies $0 \leq \epsilon_\ell \leq \epsilon$ and $\epsilon_\ell = O(\epsilon)$, for $\ell \geq 4$. Moreover (as ϵ goes to 0) since v_i is close to $1/3$ for $i \in \{1, 2, 3\}$ and v_ℓ is close to 0

for $\ell \geq 4$, we have $\max(v) = \frac{1 - \min_{i \in \{1,2,3\}} \epsilon_i}{3}$ and $\min(v) = \frac{\min_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell}{3}$. Thus since $v \in \Sigma$, for all ϵ enough small,

$$\max(v) - \min(v) = \frac{1 - \min_{i \in \{1,2,3\}} \epsilon_i - \min_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell}{3} \leq \frac{1}{3}.$$

This implies that $\min_{i \in \{1,2,3\}} \epsilon_i + \min_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell \geq 0$. Since $0 \leq \epsilon_\ell \leq \epsilon$ for $\ell \geq 4$, this means that $\min_{i \in \{1,2,3\}} \epsilon_i \geq -\epsilon$. Since $\epsilon = \sum_{i=1}^3 \epsilon_i$, we have

$$\epsilon \geq \max_{i \in \{1,2,3\}} \epsilon_i + 2 \min_{i \in \{1,2,3\}} \epsilon_i \geq \max_{i \in \{1,2,3\}} \epsilon_i - 2\epsilon.$$

Thus $3\epsilon \geq \max_{i \in \{1,2,3\}} \epsilon_i$ and $\epsilon_i = O(\epsilon)$ for $i \in \{1, 2, 3\}$.

For the sake of brevity we will now denote $X_1 := X_1^{Q(v)g}$, $X_2 := X_2^{Q(v)g}$, $Y_\ell := Y_\ell^{Q(v)g}$, $Z_\ell := Z_\ell^{Q(v)g}$, $T_\ell := T_\ell^{Q(v)g}$ and $U_\ell := U_\ell^{Q(v)g}$. Recall that $Q(v)g$ is defined by

$$\begin{cases} (I - K(v))Q(v)g = (I - \Pi(v))g \\ \pi(v)Q(v)g = 0 \end{cases}. \quad (2.4.13)$$

To prove (2.4.12), we will give an estimate of $Q(v)g$ as v goes to v_0 (or equivalently as ϵ goes to 0). More precisely we will give estimates of X_1 , X_2 , Y_ℓ , Z_ℓ and T_ℓ as ϵ goes to 0.

Along this proof i , j and k will always denote three different integers in $\{1, 2, 3\}$, i.e. $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, and ℓ , m and n will always denote three different integers in $\llbracket 4, N \rrbracket$, i.e. $|\{\ell, m, n\}| = 3$.

For all $x, y, z \in \mathcal{X}$, such that $|\{x, y, z\}| = 3$, denote $p_{x,y,z} = K(v)((x, y), (y, z))$. Remark that $p_{x,y,z} = p_{y,x,z}$. For $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, the probability $p_{i,j,k}$ only depends on k , then denote $p_k = p_{i,j,k}$. As ϵ goes to 0, we have

$$p_k = 1 - \sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha + O(\epsilon^{\alpha+1}).$$

Indeed, remarking that $(1 - \epsilon_k)^{-\alpha} = 1 + O(\epsilon)$, we can write

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{(1 - \epsilon_k)^\alpha}{(1 - \epsilon_k)^\alpha + \sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha}{(1 - \epsilon_k)^\alpha}} \\ &= \left(1 + (1 + O(\epsilon)) \sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha \right)^{-1}, \end{aligned}$$

and the Taylor expansion of p_k follows.

We also give the following Taylor expansion as ϵ goes to 0

$$\begin{aligned} p_{i,j,\ell} = p_{j,i,\ell} &= \frac{\epsilon_\ell^\alpha}{(1 - \epsilon_k)^\alpha + \sum_{l \geq 4} \epsilon_l^\alpha} \\ &= \epsilon_\ell^\alpha + O(\epsilon^{\alpha+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{i,\ell,j} = p_{\ell,i,j} &= \frac{(1 - \epsilon_j)^\alpha}{(1 - \epsilon_j)^\alpha + (1 - \epsilon_k)^\alpha + \sum_{\ell' \geq 4, \ell' \neq \ell} \epsilon_{\ell'}^\alpha} \\
 &= \frac{1}{2} + O(\epsilon) ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{i,\ell,m} = p_{\ell,i,m} &= \frac{\epsilon_m^\alpha}{(1 - \epsilon_j)^\alpha + (1 - \epsilon_k)^\alpha + \sum_{\ell' \geq 4, \ell' \neq \ell} \epsilon_{\ell'}^\alpha} \\
 &= \frac{\epsilon_m^\alpha}{2} + O(\epsilon^{\alpha+1}) ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{\ell,m,i} = p_{m,\ell,i} &= \frac{(1 - \epsilon_i)^\alpha}{\sum_{i'=1}^3 (1 - \epsilon_{i'})^\alpha + \sum_{\substack{\ell' \geq 4 \\ \ell' \neq \ell, \ell' \neq m}} \epsilon_{\ell'}^\alpha} \\
 &= \frac{1}{3} + O(\epsilon)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{\ell,m,n} = p_{m,\ell,n} &= \frac{\epsilon_n^\alpha}{\sum_{i'=1}^3 (1 - \epsilon_{i'})^\alpha + \sum_{\substack{\ell' \geq 4 \\ \ell' \neq \ell, \ell' \neq m}} \epsilon_{\ell'}^\alpha} \\
 &= \frac{\epsilon_n^\alpha}{3} + O(\epsilon^{\alpha+1}) ,
 \end{aligned}$$

for $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ and $\ell, m, n \geq 4$, with $|\{\ell, m, n\}| = 3$. This estimates will be used thereafter.

Let $L_0 = \frac{1}{3}(I + J + J^2)$ and let A_1 and A_2 be the matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \\ p_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Remark that $L_0 W = \bar{W}$ for $W \in \mathbb{R}^3$. The following lemma gives estimates of $(I - A_1)^{-1}$ and of $(I - A_2)^{-1}$.

Lemma 2.4.8. *If $p_1 p_2 p_3 \neq 1$, $I - A_1$ et $I - A_2$ are invertible. Moreover,*

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha \right) (I - A_1)^{-1} &= (1 + O(\epsilon)) L_0 - \left(\sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha \right) L_1 + O(\epsilon^{\alpha+1}), \\ \left(\sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha \right) (I - A_2)^{-1} &= (1 + O(\epsilon)) L_0 - \left(\sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha \right) L_2 + O(\epsilon^{\alpha+1}). \end{aligned}$$

Proof. Since the determinants of $I - A_1$ and of $I - A_2$ are both equal to $1 - p_1 p_2 p_3$, $I - A_1$ and $I - A_2$ are both invertible when $p_1 p_2 p_3 \neq 1$. When it is the case, we have

$$\begin{aligned} (I - A_1)^{-1} &= (1 - p_1 p_2 p_3)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & p_2 & p_2 p_3 \\ p_1 p_3 & 1 & p_3 \\ p_1 & p_1 p_2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (1 - p_1 p_2 p_3)^{-1} \left(3L_0 - 3 \left(\sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha \right) L_1 + O(\epsilon^{\alpha+1}) \right). \end{aligned}$$

Moreover

$$\begin{aligned} p_1 p_2 p_3 &= 1 - 3 \left(\sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha \right) + O(\epsilon^{\alpha+1}) \\ (1 - p_1 p_2 p_3)^{-1} &= \frac{1}{3} \left(\sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha \right)^{-1} [1 + O(\epsilon)]. \end{aligned}$$

Thus we have

$$\left(\sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha \right) (I - A_1)^{-1} = (1 + O(\epsilon)) L_0 - \left(\sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha \right) L_1 + O(\epsilon^{\alpha+1})$$

By the same way, we can prove that

$$\left(\sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha \right) (I - A_2)^{-1} = (1 + O(\epsilon)) L_0 - \left(\sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha \right) L_2 + O(\epsilon^{\alpha+1})$$

□

The following lemma gives the Taylor expansion of $\pi(v)$ as ϵ goes to 0.

Lemma 2.4.9.

$$\begin{aligned} \pi(v)(i, j) &= \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha + O(\epsilon^{\alpha+1}), \\ \pi(v)(i, \ell) = \pi(v)(\ell, i) &= \frac{\epsilon_\ell^\alpha}{3} + O(\epsilon^{\alpha+1}), \\ \pi(v)(\ell, m) &= O(\epsilon^{\alpha+1}). \end{aligned}$$

Proof. Recall that for $x \neq y$

$$\pi(v)(x, y) = \frac{v_x^\alpha v_y^\alpha \sum_{z \in \mathcal{X} \setminus \{x, y\}} v_z^\alpha}{H(v)},$$

where $H(v) = 6 \sum_{x < y < z} v_x^\alpha v_y^\alpha v_z^\alpha$. We have

$$\begin{aligned} H(v) &= \frac{6}{3^{3\alpha}} \left(\prod_{i=1}^3 (1 - \epsilon_i^\alpha) \right) \left[1 + \frac{\left(\sum_{1 \leq i < j \leq 3} (1 - \epsilon_i)^\alpha (1 - \epsilon_j)^\alpha \right) \sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha}{\prod_{i=1}^3 (1 - \epsilon_i^\alpha)} \right] \\ &= \frac{6}{3^{3\alpha}} \left(\prod_{i=1}^3 (1 - \epsilon_i^\alpha) \right) \left[1 + 3 \sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha + O(\epsilon^{\alpha+1}) \right] \\ &= \frac{6}{3^{3\alpha}} + O(\epsilon). \end{aligned}$$

Thus for i, j, k such that $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} \pi(v)(i, j) &= \frac{(1 - \epsilon_i)^\alpha (1 - \epsilon_j)^\alpha \left((1 - \epsilon_k)^\alpha + \sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha \right)}{6 \left(\prod_{i'=1}^3 (1 - \epsilon_{i'}^\alpha) \right) \left(1 + 3 \sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha + O(\epsilon^{\alpha+1}) \right)} \\ &= \frac{1 + \frac{\sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha}{(1 - \epsilon_k)^\alpha}}{6 \left(1 + 3 \sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha + O(\epsilon^{\alpha+1}) \right)} \\ &= \frac{1}{6} \frac{1 + \sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha + O(\epsilon^{\alpha+1})}{1 + 3 \sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha + O(\epsilon^{\alpha+1})} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha + O(\epsilon^{\alpha+1}) \end{aligned}$$

We also have for $\ell, m \geq 4$, with $\ell \neq m$

$$\begin{aligned} \pi(v)(i, \ell) = \pi(v)(\ell, i) &= \frac{(1 - \epsilon_i)^\alpha \epsilon_\ell^\alpha \left((1 - \epsilon_j)^\alpha + (1 - \epsilon_k)^\alpha + \sum_{\ell' \geq 4, \ell' \neq \ell} \epsilon_{\ell'}^\alpha \right)}{6 \left(\prod_{i'=1}^3 (1 - \epsilon_{i'}^\alpha) \right) \left(1 + 3 \sum_{\ell' \geq 4} \epsilon_{\ell'}^\alpha + O(\epsilon^{\alpha+1}) \right)} \\ &= \frac{\epsilon_\ell^\alpha}{3} + O(\epsilon^{\alpha+1}) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \pi(v)(\ell, m) &= \frac{\epsilon_\ell^\alpha \epsilon_m^\alpha \left(\sum_{i'=1}^3 (1 - \epsilon_{i'})^\alpha + \sum_{\substack{\ell' \geq 4 \\ \ell' \neq \ell, \ell' \neq m}} \epsilon_{\ell'}^\alpha \right)}{6 \left(\prod_{i'=1}^3 (1 - \epsilon_{i'}^\alpha) \right) \left(1 + 3 \sum_{\ell' \geq 4} \epsilon_{\ell'}^\alpha + O(\epsilon^{\alpha+1}) \right)} \\ &= O(\epsilon^{2\alpha}) = O(\epsilon^{\alpha+1}). \end{aligned}$$

□

The previous lemma permits to give an estimate of $\pi(v)g$:

$$\begin{aligned}\pi(v)g &= \sum_{(x,y) \in \vec{\mathcal{E}}} \pi(v)(x,y)g(x,y) \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3} \sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha \right) a(j) + \sum_{i=1}^3 \sum_{\ell \geq 4} \frac{\epsilon_\ell^\alpha}{3} (a(i) + a(\ell)) + O(\epsilon^{\alpha+1}) \\ &= (1 + O(\epsilon)) \bar{h} + \sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha a_\ell + O(\epsilon^{\alpha+1}).\end{aligned}$$

Let us first prove (2.4.12) in the case $\bar{h} = 0$. Thus by denoting $\langle \epsilon^\alpha, a \rangle = \sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha a_\ell$, we have

$$\pi(v)g = \langle \epsilon^\alpha, a \rangle + O(\epsilon^{\alpha+1}).$$

We now will express $K(v)Q(v)g$ in function of $Q(v)g$ using Notations (2.4.10) and using the equation

$$K(v)Q(v)g(x,y) = \sum_{z \in \mathcal{X}} p_{x,y,z} Q(v)g(y,z),$$

for $x, y \in \mathcal{X}$. Let i, j, k be such that $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ and $\ell, m \geq 4$, with $\ell \neq m$. Since

$$K(v)Q(v)g(i,j) = p_k Q(v)g(i,j) + \sum_{\ell' \geq 4} p_{i,j,\ell'} Q(v)g(j,\ell'),$$

using the Taylor expansion of p_k and $(p_{i,j,\ell'})_{\ell' \geq 4}$, we have

$$\begin{aligned}X_1^{K(v)Q(v)g} &= A_1 X_1 + \sum_{\ell' \geq 4} (\epsilon_{\ell'}^\alpha + O(\epsilon^{\alpha+1})) Y_{\ell'}, \\ X_2^{K(v)Q(v)g} &= A_2 X_2 + \sum_{\ell' \geq 4} (\epsilon_{\ell'}^\alpha + O(\epsilon^{\alpha+1})) Y_{\ell'}.\end{aligned}$$

Since

$$K(v)Q(v)g(i,\ell) = p_{i,\ell,j} Q(v)g(\ell,j) + p_{i,\ell,k} Q(v)g(\ell,k) + \sum_{\substack{m' \geq 4 \\ m' \neq \ell}} p_{i,\ell,m'} Q(v)g(\ell,m'),$$

using the Taylor expansion of $p_{i,\ell,j}$, $p_{i,\ell,k}$ and $(p_{i,\ell,m'})_{m' \geq 4, m' \neq \ell}$, we have

$$Y_\ell^{K(v)Q(v)g} = (1 + O(\epsilon)) \left(\frac{J + J^2}{2} \right) Z_\ell + O(\epsilon^\alpha) U_\ell.$$

Since

$$K(v)Q(v)g(\ell,i) = p_{\ell,i,j} Q(v)g(i,j) + p_{\ell,i,k} Q(v)g(i,k) + \sum_{\substack{m' \geq 4 \\ m' \neq \ell}} p_{\ell,i,m'} Q(v)g(i,m'),$$

using the Tylor expansion of $p_{\ell,i,j}$, $p_{\ell,i,k}$ and $(p_{\ell,i,m'})_{m' \geq 4, m' \neq \ell}$, we have

$$Z_\ell^{K(v)Q(v)g} = (1 + O(\epsilon)) \left(\frac{JX_1 + J^2X_2}{2} \right) + O(\epsilon^\alpha) \sum_{\substack{m' \geq 4 \\ m' \neq \ell}} Y_{m'} .$$

Since

$$\begin{aligned} K(v)Q(v)g(m, \ell) &= p_{m,\ell,i}Q(v)g(\ell, i) + p_{m,\ell,j}Q(v)g(\ell, j) \\ &\quad + p_{m,\ell,k}Q(v)g(\ell, k) + \sum_{\substack{n \geq 4 \\ n \neq \ell, n \neq m}} p_{m,\ell,n}Q(v)g(\ell, n) , \end{aligned}$$

using the Taylor expansion of $(p_{m,\ell,i'})_{i' \in [1,3]}$ and $(p_{m,\ell,n})_{n \in [4,N] \setminus \{\ell, m\}}$ we have

$$T_\ell^{K(v)Q(v)g} = (1 + O(\epsilon)) \overline{Z}_\ell + O(\epsilon^\alpha) U_\ell .$$

Using the previous estimates and the expression of g given by (2.4.11), the system (2.4.13) implies that

$$\begin{aligned} (I - A_1)X_1 &= h - \langle \epsilon^\alpha, a \rangle + \sum_{\ell' \geq 4} \epsilon_{\ell'}^\alpha Y_{\ell'} + O(\epsilon^{\alpha+1}) , \\ (I - A_2)X_2 &= h - \langle \epsilon^\alpha, a \rangle + \sum_{\ell' \geq 4} \epsilon_{\ell'}^\alpha Y_{\ell'} + O(\epsilon^{\alpha+1}) , \\ Y_\ell &= a_\ell - \langle \epsilon^\alpha, a \rangle + (1 + O(\epsilon)) \left(\frac{J + J^2}{2} \right) Z_\ell + O(\epsilon^\alpha) U_\ell + O(\epsilon^{\alpha+1}) , \\ Z_\ell &= h - \langle \epsilon^\alpha, a \rangle + (1 + O(\epsilon)) \left(\frac{JX_1 + J^2X_2}{2} \right) + O(\epsilon^\alpha) \sum_{m \geq 4, m \neq \ell} Y_m + O(\epsilon^{\alpha+1}) , \\ T_\ell &= a_\ell \mathbf{1}_\ell - \langle \epsilon^\alpha, a \rangle + (1 + O(\epsilon)) \overline{Z}_\ell + O(\epsilon^\alpha) U_\ell + O(\epsilon^{\alpha+1}) , \end{aligned}$$

for $\ell \geq 4$. Recall the definition of $\|\cdot\|$ given by (2.2.4) and denote

$$\|X\| = \sup\{\|X_1\|, \|X_2\|\} .$$

Thus we have

$$Z_\ell = h + \frac{JX_1 + J^2X_2}{2} + O(\epsilon(1 + \|X\| + \|Y\|)) .$$

Remarking that $J\mathbf{1} = J^2\mathbf{1} = \mathbf{1}$, we have

$$T_\ell = a(\ell)(1 - \delta_\ell) + \frac{\overline{X}_1 + \overline{X}_2}{2} + O(\epsilon(1 + \|X\| + \|Y\| + \|U\|)) . \quad (2.4.14)$$

Remarking that $(J + J^2)h = -h$, we also have

$$Y_\ell = -\frac{h}{2} + a_\ell + \left(\frac{I + J^2}{4}\right) X_1 + \left(\frac{I + J}{4}\right) X_2 + O(\epsilon(1 + \|X\| + \|Y\| + \|U\|)).$$

Using Lemma 2.4.8, remarking that $L_0J = L_0J^2 = L_0$, that $L_0b = \bar{b}$ for $b \in \mathbb{R}^3$ and recalling that $\bar{h} = 0$, we have

$$\begin{aligned} X_1 &= (I - A_1)^{-1} \left(h + \left(\sum_{\ell \geq 4} \epsilon_\ell^\alpha \right) \left(\frac{I + J^2}{4} X_1 + \frac{I + J}{4} X_2 - \frac{h}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + O(\epsilon(1 + \|X\| + \|Y\| + \|U\|)) \right) \\ &= -L_1 h + \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2} + O(\epsilon(1 + \|X\| + \|Y\| + \|U\|)). \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

and likewise

$$X_2 = -L_2 h + \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2} + O(\epsilon(1 + \|X\| + \|Y\| + \|U\|)). \quad (2.4.16)$$

Using (2.4.15) and (2.4.16), we obtain the following expression of Y_ℓ and of Y_ℓ . Remark-
ing that

$$JL_1 + J^2L_2 = I + L_0,$$

we have

$$Z_\ell = \frac{h}{2} + \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2} + O(\epsilon(1 + \|X\| + \|Y\| + \|U\|)). \quad (2.4.17)$$

Remarking that

$$(I + J^2)L_1 + (I + J)L_2 = \frac{5}{2}L_0 - \frac{I}{2},$$

we have using $L_0h = \bar{h} = 0$

$$Y_\ell = -\frac{h}{4} + a_\ell + \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2} + O(\epsilon(1 + \|X\| + \|Y\| + \|U\|)). \quad (2.4.18)$$

We have immediately

$$\begin{aligned} \|Y\| &= O(1 + \|X\|), \\ \|Z\| &= O(1 + \|X\|), \\ \|T\| &= \|U\| = O(1 + \|X\|), \end{aligned}$$

where (2.4.18) for the first equality, (2.4.17) for the second equality and (2.4.14) for the third equality are used.

Since $\pi(v)f = 0$, Lemma 2.4.9 implies that

$$\frac{\overline{X_1} + \overline{X_2}}{2} \left(1 - 2 \sum_{\ell' \geq 4} \epsilon_{\ell'}^\alpha \right) + \sum_{\ell' \geq 4} \epsilon_{\ell'}^\alpha (\overline{Y_{\ell'}} + \overline{Z_{\ell'}}) + O(\epsilon^{\alpha+1}(1 + \|X\|)) .$$

Thus

$$\frac{\overline{X_1} + \overline{X_2}}{2} = O(\epsilon^\alpha(1 + \|X\|)) . \quad (2.4.19)$$

Using (2.4.15), (2.4.16) and (2.4.19), we get

$$\|X\| = O(1) .$$

Thus

$$\begin{aligned} X_1 &= -L_1 h + O(\epsilon) , \\ X_2 &= -L_2 h + O(\epsilon) , \\ Y_\ell &= -\frac{h}{4} + a(\ell) + O(\epsilon) , \\ Z_\ell &= \frac{h}{2} + O(\epsilon) , \\ T_\ell &= a(\ell)(1 - \delta_\ell) + O(\epsilon) . \end{aligned}$$

Suppose now that $\bar{h} \neq 0$. Set $g_0 = g - \bar{h}$. Then since $Q(v)\mathbf{1} = 0$, $Q(v)g = Q(v)g_0$ and $\lim_{v \rightarrow v_0} Q(v)g = \lim_{v \rightarrow v_0} Q(v)g_0$. Note that

$$\begin{cases} X_1^{g_0} = X_2^{g_0} = Z_\ell^{g_0} = h - \bar{h} , \\ Y_\ell^{g_0} = a(\ell) - \bar{h} , \\ T_\ell^{g_0} = (a(\ell) - \bar{h})(1 - \delta_\ell) \end{cases} , \quad (2.4.20)$$

for $\ell \in \llbracket 4, N \rrbracket$. Thus (2.4.12) holds. □

Since Hypotheses 2.3.1, 2.3.3 and 2.3.5 holds, the vector field $F : T_1\Delta_{\mathcal{X}} \rightarrow T_0\Delta_{\mathcal{X}}$, defined by (2.3.2) induces a flow Φ for the differential equation

$$\dot{v} = F(v) . \quad (2.4.21)$$

Moreover Theorem 2.3.6 holds and the limit set of (v_n) is attractor free for (2.4.21).

2.4.6 A strict Lyapunov function

A useful property of the forward reinforced random walk is that Φ has a strict Lyapunov function.

Proposition 2.4.10. *The map $H : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, defined by (2.4.7) is a strict Lyapunov function for Φ .*

Proof. The map H is \mathcal{C}^1 on Σ . For $x \in \mathcal{X}$ and $v \in \Sigma$, denote

$$f_x(v) = v_x^{\alpha-1} H_x(v) .$$

Then for $v \in \Sigma$

$$H(v) = \sum_x v_x^\alpha H_x(v) = \sum_x v_x f_x(v) .$$

For $x, y \in \mathcal{X}$, with $x \neq y$, the maps $H_{x,y}$, H_x and H are defined on Σ . But we will consider here that they are maps respectively defined on \mathbb{R}^N by (2.4.5), (2.4.6) and (2.4.7). Denote now ∂_x the differential operator with respect to the x -th coordinate. Remark that

$$\langle \nabla H(v), F(v) \rangle = \sum_{x \in \mathcal{X}} \partial_x H(v) F_x(v) .$$

For $y \neq x$, we have

$$\begin{aligned} \partial_y H_y(v) &= 0 , \\ \partial_x H_y(v) &= 2\alpha v_x^{\alpha-1} H_{x,y}(v) , \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \partial_x H(v) &= \sum_{y \neq x} v_y^\alpha \partial_x H_y(v) + \alpha v_x^{\alpha-1} H_x(v) \\ &= 2\alpha v_x^{\alpha-1} \sum_{y \neq x} v_y^\alpha H_{x,y}(v) + \alpha v_x^{\alpha-1} H_x(v) \\ \partial_x H(v) &= 3\alpha v_x^{\alpha-1} H_x(v) . \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

Thus

$$\begin{aligned} \langle \nabla H(v), -v + \hat{\pi}(v) \rangle &= \sum_x \partial_x H(v) \left(-v_x + \hat{\pi}(v)(x) \right) \\ &= 3\alpha \left(-\sum_x v_x^\alpha H_x(v) + \sum_x \frac{v_x^{2\alpha-1} (H_x(v))^2}{H(v)} \right) \\ &= 3\alpha \left(-H(v) + \frac{\sum_x v_x f_x^2(v)}{H(v)} \right) \\ &= \frac{3\alpha}{H(v)} \left(\sum_x f_x^2(v) v_x - \left(\sum_x f_x(v) v_x \right)^2 \right) \end{aligned}$$

By the strong convexity of the square function and the Jensen inequality, we know that :

$$\langle \nabla H(v), \hat{\pi}(v) - v \rangle \geq 0$$

and that we have the equality only when $\hat{\pi}(v) = v$, i.e. when $v \in \Lambda$. Thus H is a strict Lyapunov function for Λ . □

Since Hypotheses 2.3.1, 2.3.3 and 2.3.5 hold and since there exists a strict Lyapunov function for Φ , Theorem 2.3.10 and Corollary 2.3.11 hold for the forward reinforced random walk. This means that if $H(\Lambda)$ has an empty interior, the limit set of (v_n) is a connected subset of Λ and if Λ is a finite set, then $v_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ exists and $v_\infty \in \Lambda$.

2.4.7 Stable and unstable equilibria

In this section, we describe the set of equilibria of (2.4.21) and we discuss their stability or instability. This permits to conclude the proof of Theorem 2.4.1.

2.4.7.1 The set of equilibria

We describe in this section Λ the set of equilibria of (2.4.21).

Proposition 2.4.11. *Uniform probability measures on at least three vertices are equilibria for F .*

Proof. Let v be a uniform probability measure in Σ , i.e. there exists $A \subset \mathcal{X}$ such that $|A| \geq 3$, $v_x = 1/|A|$ if $x \in A$ and $v_x = 0$ if $x \notin A$. We have for all $x, y \in A$ such that $x \neq y$,

$$\begin{aligned} H_x(v) &= (|A| - 1)(|A| - 2)|A|^{-2\alpha}, \\ H(v) &= |A|(|A| - 1)(|A| - 2)|A|^{-3\alpha}. \end{aligned}$$

Thus for all $x \in A$,

$$F_x(v) = -v(x) + \frac{v_x^\alpha H_x(v)}{H(v)} = 0.$$

Moreover $F_x(v) = 0$, for $x \notin A$. Hence $v \in \Lambda$. □

Proposition 2.4.12. *When $\alpha = 1$, uniform probability measures on at least three vertices are the only equilibria.*

Proof. Let v be an equilibrium and suppose that $\alpha = 1$. Thus for all $x \in \text{Supp}(v)$, $H_x(v) = H(v)$. This means for all $x, y \in \text{Supp}(v)$, $H_x(v) = H_y(v)$. Moreover for $x \neq y$,

$$\begin{aligned}
 H_x(v) = H_y(v) &\Leftrightarrow \sum_{z \neq x} v_z H_{x,z}(v) = \sum_{z \neq y} v_z H_{y,z}(v) , \\
 &\Leftrightarrow \sum_{z \in \mathcal{X} \setminus \{x,y\}} v_z (H_{x,z}(v) - H_{y,z}(v)) + (v_y - v_x) H_{x,y}(v) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{z \in \mathcal{X} \setminus \{x,y\}} v_z (v_y - v_x) + (v_y - v_x) H_{x,y}(v) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2(v_y - v_x) H_{x,y}(v) = 0 \\
 &\Leftrightarrow v_x = v_y .
 \end{aligned}$$

The last equivalence is due to the fact that $H_{x,y}(v) > 0$. Indeed, the support of v contains at least three points. Thus v is uniform on its support. \square

A consequence of the previous proposition is that, when $\alpha = 1$, Λ is finite.

Proposition 2.4.13. *Suppose that $N = 4$. Then, the set of equilibria Λ is a finite set. Moreover, if $v \in \Lambda$, then we have $\max(v) \leq 1/3$ and $|\{v_x : x \in \mathcal{X}\}| \leq 2$.*

More precisely, there exist two continuous maps

- $a_1 :]3, \infty[\rightarrow]1/6, 1/4[$, such that $a_1(3) = 1/4$ and for all $t \in]3, \infty[$, $a_1(t) < 1/4$,
- and $a_2 :]1, \infty[\rightarrow]0, 1/3[$, such that $a_2(3) = 1/4$ and for all $t \in]1, 3[$ and all $s \in]3, \infty[$, $a_2(s) < 1/4 < a_2(t)$

such that

- when $\alpha = 3$, v is an equilibrium if and only if v is uniform on exactly three or four distinct vertices,
- when $1 < \alpha < 3$, v is an equilibrium if and only if
 - v is uniform on exactly three or four distinct vertices ,
 - or there exists $\sigma \in \mathcal{S}_4$, such that $v_{\sigma(1)} = a_2(\alpha)$ and $v_{\sigma(2)} = v_{\sigma(3)} = v_{\sigma(4)} = \frac{1-a_2(\alpha)}{3}$.
- and when $\alpha > 3$, v is an equilibrium if and only if
 - v is uniform on exactly three or four distinct vertices ,
 - or there exists $\sigma \in \mathcal{S}_4$, such that $v_{\sigma(1)} = v_{\sigma(2)} = a_1(\alpha)$ and $v_{\sigma(3)} = v_{\sigma(4)} = \frac{1}{2} - a_1(\alpha)$,
 - or there exists $\sigma \in \mathcal{S}_4$, such that $v_{\sigma(1)} = a_2(\alpha)$ and $v_{\sigma(2)} = v_{\sigma(3)} = v_{\sigma(4)} = \frac{1-a_2(\alpha)}{3}$.

Proof. Let v be an equilibrium and suppose that $\alpha > 1$. Using Proposition 2.4.11, we have already proved that uniform probability measures on three or four vertices are equilibria. We thus make the assumption that v is not uniform. If $|\text{Supp}(v)| = 3$, then, since $v \in \Sigma$, v is uniform. Thus $|\text{Supp}(v)| = 4$.

Note that there exists $\gamma > 0$, such that, for all x , $f(v_x) = \gamma$, where f is the map $t \mapsto t^\alpha(1 - 3t)$ defined on $]0, 1[$. Indeed

$$\hat{\pi}(v)(1) = \frac{v_1^\alpha \sum_{1 < y < z} v_y^\alpha v_z^\alpha}{3 \sum_{x < y < z} v_x^\alpha v_y^\alpha v_z^\alpha}$$

Thus, since

$$\sum_{x < y < z} v_x^\alpha v_y^\alpha v_z^\alpha - v_1^\alpha \sum_{1 < y < z} v_y^\alpha v_z^\alpha = v_2^\alpha v_3^\alpha v_4^\alpha,$$

we have

$$\begin{aligned} v_1 = \hat{\pi}(v)(1) &\Leftrightarrow 1 - 3v_1 = \frac{v_2^\alpha v_3^\alpha v_4^\alpha}{\sum_{x < y < z} v_x^\alpha v_y^\alpha v_z^\alpha} \\ &\Leftrightarrow v_1^\alpha (1 - 3v_1) = \frac{v_1^\alpha v_2^\alpha v_3^\alpha v_4^\alpha}{\sum_{x < y < z} v_x^\alpha v_y^\alpha v_z^\alpha} \\ &\Leftrightarrow v_1^\alpha (1 - 3v_1) = \left(v_1^{-\alpha} + v_2^{-\alpha} + v_3^{-\alpha} + v_4^{-\alpha} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Thus for all $x \in \mathcal{X}$,

$$v_x = \hat{\pi}(v)(x) \Leftrightarrow v_x^\alpha (1 - 3v_x) = \left(v_1^{-\alpha} + v_2^{-\alpha} + v_3^{-\alpha} + v_4^{-\alpha} \right)^{-1}.$$

Let $\gamma(v) = (v_1^{-\alpha} + v_2^{-\alpha} + v_3^{-\alpha} + v_4^{-\alpha})^{-1} > 0$ and $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ be the map defined by $f(t) = t^\alpha(1 - 3t)$, then $v \in \Lambda$ if and only if

$$f(v_1) = f(v_2) = f(v_3) = f(v_4) = \gamma(v). \quad (2.4.23)$$

Let us first remark that $f(t) > 0$ if and only if $t \in]0, 1/3[$. Therefore $\max(v) < 1/3$. The derivative of f is for all $t \in]0, 1/3[$,

$$f'(t) = t^{\alpha-1}(\alpha - 3(\alpha + 1)t).$$

Thus f' vanishes only at $\beta_0 = \frac{\alpha}{3(\alpha + 1)} < 1/3$, $f' > 0$ on $]0, \beta_0[$ and $f' < 0$ on $]\beta_0, 1/3[$. Therefore for all $c > 0$, $|\{t \in]0, 1/3[: f(t) = c\}| \leq 2$, which implies that $|\{v_1, v_2, v_3, v_4\}| = 2$.

Thus there exists $\sigma \in \mathcal{X}$, such that either $v_{\sigma(1)} = v_{\sigma(2)} < v_{\sigma(3)} = v_{\sigma(4)}$ or $v_{\sigma(1)} \neq v_{\sigma(2)} = v_{\sigma(3)} = v_{\sigma(4)}$. Without loss of generality, we will assume that $\sigma = (1, 2, 3, 4)$.

Case 1 : $v \in \{v \in \Lambda : v_1 = v_2 < v_3 = v_4\}$

Set $a = v_1$ and $b = v_3$. Then $a + b = 1/2$ and since a and b are less than $1/3$, we have $1/6 < a < 1/4 < b < 1/3$.

Set now $s = 2(b - a)$. Then $s \in]0, 1/3[$, $a = (1 - s)/4$ and $b = (1 + s)/4$. Note that $s = 0$ corresponds to v uniform on \mathcal{X} .

Formula (2.4.23) states that v is an equilibria if and only if $f(a) = f(b)$, which is equivalent to $g(s) = 1$, where

$$g(s) := \frac{f(b)}{f(a)} = \frac{(1 + s)^\alpha(1 - 3s)}{(1 - s)^\alpha(1 + 3s)}.$$

We now study the function g on $[0, 1/3]$. We will denote q a positive function defined on $]0, 1/3[$ that may vary from lines to lines.

We have for all $s \in]0, 1/3[$

$$g'(s) = q(s)[\alpha - 3 - 3(3\alpha - 1)s^2].$$

Indeed

$$\begin{aligned} g'(s) &= q(s)(1 + s)^{\alpha-1}(1 - s)^{\alpha-1} \left[(1 - s)(1 + 3s)(\alpha(1 - 3s) - 3(1 + s)) \right. \\ &\quad \left. + (1 + s)(1 - 3s)(\alpha(1 + 3s) - 3(1 - s)) \right] \\ &= q(s) \left[\alpha(1 - s)(1 - 9s^2) - 3(1 - s^2)(1 + 3s) \right. \\ &\quad \left. + \alpha(1 + s)(1 - 9s^2) - 3(1 - s^2)(1 - 3s) \right] \\ &= q(s) \left[\alpha(1 - 9s^2) - 3(1 - s^2) \right]. \end{aligned}$$

When $\alpha \leq 3$, $g' < 0$ on $]0, 1/3[$. Since $g(0) = 1$, there does not exist any $s \in]0, 1/3[$ such that $g(s) = 1$.

Now suppose that $\alpha > 3$, then for all $s \in]0, 1/3[$

$$\begin{aligned} g'(s) > 0 &\Leftrightarrow \alpha - 3 - 3(3\alpha - 1)s^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{\alpha - 3}{3(3\alpha - 1)}} > s. \end{aligned}$$

Remark that $\beta_1 := \sqrt{\frac{\alpha - 3}{3(3\alpha - 1)}} \in]0, 1/3[$. Thus g increases on $]0, \beta_1[$ and decreases on $] \beta_1, 1/3[$. Since $g(0) = 1$ and $g(1/3) = 0$, there exists a unique $s \in]0, 1/3[$ such that $g(s) = 1$.

To conclude the case 1,

- when $\alpha \leq 3$, there does not exist any $s \in]0, 1/3[$ such that $g(s) = 1$ and then

$$\{v \in \Lambda : v_1 = v_2 < v_3 = v_4\} = \emptyset,$$

- when $\alpha > 3$, there exists a unique $s \in]0, 1/3[$ such that $g(s) = 1$, then there exists a unique $a_1(\alpha) \in]1/6, 1/4[$, such that

$$\{v \in \Lambda : v_1 = v_2 < v_3 = v_4\} = \left\{ \left(a_1(\alpha), a_1(\alpha), 1/2 - a_1(\alpha), 1/2 - a_1(\alpha) \right) \right\}.$$

Case 2 : $v \in \{v \in \Lambda : v_1 \neq v_2 = v_3 = v_4\}$

Set $a = v_1$ and $b = v_2$. Then we have $a + 3b = 1$ and since a and b are less than $1/3$, we have $a \in]0, 1/3[\setminus \{1/4\}$ and $b \in]2/9, 1/3[\setminus \{1/4\}$.

Set now $s = a/b$. Then $s \in]0, 3/2[\setminus \{1\}$, $a = s/(s+3)$ and $b = 1/(s+3)$. Note that $s = 0$ corresponds to v uniform on $\{2, 3, 4\}$ and $s = 1$ corresponds to v uniform on \mathcal{X} .

Formula 2.4.23 states that v is an equilibria if and only if $f(a) = f(b)$, which is equivalent to $h(s) = 1$, where

$$h(s) := \frac{f(a)}{f(b)} = s^{\alpha-1}(3-2s).$$

We now study h on $]0, 3/2[$ and we have for all $s \in]0, 3/2[$,

$$h'(s) = s^{\alpha-2}(3(\alpha-1) - 2\alpha s).$$

Set

$$\beta_2 = \frac{3(\alpha-1)}{2\alpha} \tag{2.4.24}$$

and remark that $\beta_2 \in]0, 3/2[$. Thus h increases on $]0, \beta_2[$ and decreases on $]\beta_2, 3/2[$.

Since $h(0) = h(3/2) = 0$ and $h(1) = 1$, if $h'(1) \neq 0$, then there exists a unique $s \in]0, 3/2[\setminus \{1\}$, such that $h(s) = 1$. Furthermore $h'(1) = 0$ if and only if $\alpha = 3$.

Remark that $\beta_2 < 1$ if and only if $\alpha < 3$ and $\beta_2 > 1$ if and only if $\alpha > 3$. Thus

$$s \in]0, \beta_2[\text{ when } 1 < \alpha < 3, \tag{2.4.25}$$

$$s \in]\beta_2, 3/2[\text{ when } \alpha > 3 \tag{2.4.26}$$

and s does not exist when $\alpha = 3$.

To conclude case 2, we have

- when $\alpha = 3$, there does not exist any $s \in]0, 3/2[\setminus \{1\}$, such that $h(s) = 1$. Thus

$$\{v \in \Lambda : v_1 \neq v_2 = v_3 = v_4\} = \emptyset,$$

- when $\alpha < 3$, there exists a unique $s \in]0, 3/2[\setminus \{1\}$ such that $h(s) = 1$. Thus there exist a unique $a_2(\alpha) \in]0, 1/3[\setminus \{1/4\}$, such that

$$\{v \in \Lambda : v_1 \neq v_2 = v_3 = v_4\} = \left\{ \left(a_2(\alpha), (1-a_2(\alpha))/3, (1-a_2(\alpha))/3, (1-a_2(\alpha))/3 \right) \right\},$$

Moreover using (2.4.25), we have $a_2(\alpha) \in]0, 1/4[$,

- when $\alpha > 3$, there exists a unique $s \in]0, 3/2[\setminus \{1\}$ such that $h(s) = 1$. Thus there exist a unique $a_2(\alpha) \in]0, 1/3[\setminus \{1/4\}$, such that

$$\{v \in \Lambda : v_1 \neq v_2 = v_3 = v_4\} = \left\{ \left(a_2(\alpha), (1 - a_2(\alpha))/3, (1 - a_2(\alpha))/3, (1 - a_2(\alpha))/3 \right) \right\},$$

Moreover using (2.4.26), we have $a_2(\alpha) \in]1/4, 1/3[$.

□

When $N \geq 5$, we think that Λ is a finite set. Even though we couldn't give a proof of this assertion, we can establish the two following propositions.

Proposition 2.4.14. *The set $H(\Lambda)$ has an empty interior.*

Proof. Using (2.4.22), we get that $(\partial_x - \partial_y)H(v) = 3\alpha(v_x^{\alpha-1}H_x(v) - v_y^{\alpha-1}H_y(v))$. Thus for $v \in \overset{\circ}{\Sigma}$, $F(v) = 0$ if and only if $\nabla H(v) = 0$. In other words $\Lambda \cap \overset{\circ}{\Sigma} = \nabla H^{-1}(0) \cap \overset{\circ}{\Sigma}$. By Sard's theorem, it follows that $H(\Lambda \cap \overset{\circ}{\Sigma})$ has empty interior (see Chapter 2 of [Mil97]). In the same way, we can prove that for all $k \in]3, N - 1[$, $H(\Lambda \cap \Sigma^k)$ has an empty interior (Σ^k defined by 2.2.1). Thus we conclude that $H(\Lambda)$ has an empty interior. □

Using Theorem 2.3.10, the previous proposition allows to prove the statement 2.4.1-(3).

Proposition 2.4.15. *Assume that $\alpha > 1$. Then for all $v \in \Lambda$, $|\{v_x : x \in \text{Supp}(v)\}| \leq 2$.*

Proof. Let v be an equilibrium and suppose that $\alpha > 1$. Without loss of generality, we suppose that $v_1 > 0$. Then

$$v_1 = \frac{v_1^\alpha \sum_{1 < x \neq y} v_x^\alpha v_y^\alpha}{H(v)}.$$

Furthermore

$$\begin{aligned} \sum_{1 < x \neq y} v_x^\alpha v_y^\alpha &= \sum_{1 < x, y} v_x^\alpha v_y^\alpha - \sum_{1 < x} v_x^{2\alpha} \\ &= \left(\sum_{1 < x} v_x^\alpha \right)^2 - \sum_{1 < x} v_x^{2\alpha} \\ &= (C_1 - v_1^\alpha)^2 + v_1^{2\alpha} - C_2, \end{aligned}$$

where $C_1 = \sum_x v_x^\alpha$ and $C_2 = \sum_x v_x^{2\alpha}$. Thus for all $x \in \text{Supp}(v)$, we have

$$H(v) = v_x^{\alpha-1} \left[v_x^{2\alpha} - 2C_1 v_x^\alpha + C_1^2 - C_2 \right]$$

and v is an equilibrium if and only if for all $x \in \text{Supp}(v)$, $f(v_x) = H(v)$, where $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ is the function, which to $t \in]0, 1[$ associates

$$f(t) = t^{\alpha-1} [t^{2\alpha} - 2C_1 t^\alpha + C_1^2 - C_2] .$$

Let $s = t^\alpha$, $\beta = (\alpha - 1)/\alpha$ and $g(s) = f(s^{1/\alpha})$. Thus for all $s \in]0, 1[$, we have

$$g(s) = s^\beta (s - C_1 - C_2)(s - C_1 + C_2) .$$

Remark that $C_1 > C_2$ and that $\alpha > 1$ if and only if $0 < \beta < 1$.

For all $s \in]0, 1[$, we have

$$g'(s) = s^{\beta-1} h(s) ,$$

where $h(s) = \beta(s - C_1 - C_2)(s - C_1 + C_2) + 2s(s - C_1)$.

Since $h(0) > 0$, $h(C_1 - C_2) < 0$ and $h(C_1 + C_2) > 0$, there exist s_- and s_+ two positive numbers, such that $s_- < C_1 - C_2 < s_+ < C_1 + C_2$ and that $h(s) < 0$ if $s \in]s_-, s_+[$ and $h(s) > 0$, if $s < s_-$ or $s > s_+$. Thus g increases on $]0, s_-[$ and $]s_+, +\infty[$ and decreases on $]s_-, s_+[$. We can already conclude that $|\{v_x : x \in \text{Supp}(v)\}| \leq 3$.

If there exist three positive number s_1, s_2 and s_3 , such that $g(s_i) = H(v)$, for all $i \in \{1, 2, 3\}$, thus $s_1 < s_- < s_2 < s_+ < s_3$. Let $s \in \{v_x^\alpha : x \in \text{Supp}(v)\}$, then $g(s) = H(v)$ and $s < C_1 = \sum_x v_x^\alpha$. Since $h(C_1) < 0$, we have $s \leq s_+$. Consequently, $|\{v_x : x \in \text{Supp}(v)\}| \leq 2$. □

2.4.7.2 Stability of the equilibria when $\alpha = 1$

In this section we study the stability or instability of the equilibria when $\alpha = 1$.

Proposition 2.4.16. *When $\alpha = 1$, the unique stable equilibrium is the uniform measure on \mathcal{X} and any other equilibrium is unstable.*

Proof. Let v be an equilibrium and suppose that $\alpha = 1$. Recall that

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(v)(x) &= \frac{v_x H_x(v)}{H(v)} , \\ \partial_x H_x(v) &= 0 , \\ \partial_y H_x(v) &= 2H_{x,y}(v) , \\ \partial_x H(v) &= 3H_x(v) , \end{aligned}$$

where $x, y \in \mathcal{X}$ and $x \neq y$.

Let $x, y \in \mathcal{X}$ with $x \neq y$, then

$$\begin{aligned}\partial_x F_x(v) &= -1 + \frac{H_x(v)}{H(v)} - 3v_x \left(\frac{H_x(v)}{H(v)} \right)^2, \\ \partial_x F_y(v) &= v_y \left(2 \frac{H_{x,y}(v)}{H(v)} - 3 \frac{H_x(v)}{H(v)} \frac{H_y(v)}{H(v)} \right).\end{aligned}$$

The map F is defined on Σ . But we will consider here that it is a map defined on \mathbb{R}^N by (2.3.2). Since v is an equilibrium, for $x \in \text{Supp}(v)$ and $y \in \mathcal{X}$ such that $x \neq y$, we have $H(v) = H_x(v) = H_y(v)$ and thus

$$\begin{aligned}\partial_x F_x(v) &= -3v_x \\ \partial_x F_y(v) &= v_y \left(2 \frac{H_{x,y}(v)}{H(v)} - 3 \right)\end{aligned}$$

For $x \notin \text{Supp}(v)$ and $y \in \mathcal{X}$ such that $x \neq y$, we have

$$\begin{aligned}\partial_x F_x(v) &= -1 + \frac{H_x(v)}{H(v)} \\ \partial_x F_y(v) &= \frac{v_y}{H(v)} (2H_{x,y}(v) - 3H_x(v)).\end{aligned}$$

Lemma 2.4.7.1 states that v is uniform on its support. Thus noting $k = |\text{Supp}(v)|$, we have $v(x) = 1/k$, for all $x \in \text{Supp}(v)$. Therefore it is easy to see that for $x, y \in \text{Supp}(v)$ with $x \neq y$, we have

$$\begin{aligned}H_{x,y}(v) &= \frac{k-2}{k}, \\ H_x(v) &= H(v) = \frac{(k-1)(k-2)}{k^2},\end{aligned}$$

that for $x \notin \text{Supp}(v)$ and $y \in \text{Supp}(v)$,

$$H_{x,y}(v) = H_x(v) = \frac{k-1}{k}$$

and that for $x, y \notin \text{Supp}(v)$,

$$H_{x,y}(v) = 1.$$

Thus for $x \in \text{Supp}(v)$,

$$\begin{aligned}
 \partial_x F(v) &= -3v_x e_x + \sum_{y \neq x} v_y \left(2 \frac{H_{x,y}(v)}{H(v)} - 3 \right) e_y \\
 &= -3v + \frac{2k}{k-1} \sum_{y \neq x} v_y e_y \\
 &= -3v + \frac{2k}{k-1} \left(v - \frac{1}{k} e_x \right) \\
 &= -\frac{k-3}{k-1} v - \frac{2}{k-1} e_x
 \end{aligned}$$

and for $x \notin \text{Supp}(v)$,

$$\begin{aligned}
 \partial_x F(v) &= \left(-1 + \frac{H_x(v)}{H(v)} \right) e_x + \sum_{y \in \text{Supp}(v)} \frac{v_y}{H(v)} (2H_{x,y}(v) - 3H_x(v)) e_y \\
 &= \frac{2}{k-2} e_x - \frac{k}{k-2} v
 \end{aligned}$$

Therefore for $x, y \in \text{Supp}(v)$, we have

$$D_{e_x - e_y} F(v) = -\frac{2}{k-1} (e_x - e_y)$$

and for $x \notin \text{Supp}(v)$,

$$D_{e_x - v} F(v) = \frac{2}{k-2} (e_x - v).$$

Hence the spectrum of $DF(v)$ is completely described : $-2/(k-2) < 0$ is an eigenvalue of multiplicity $k-1$ and $2/k-2 > 0$ is an eigenvalue of multiplicity $N-k$.

When $k = N$, i.e. when v is uniform on \mathcal{X} , $-2/(k-2)$ is the only eigenvalue of $DF(v)$, thus v is stable. Whereas when $k \geq N-1$, there exists at least one positive eigenvalue and v is unstable. \square

Consequently, it remains to establish the non convergence to an unstable equilibria and the attainability of the uniform probability measure on \mathcal{X} , to prove the statement 2.4.1-(1).

2.4.7.3 Stability of the equilibria when $\alpha > 1$

In this section we study the stability or instability of the equilibria when $\alpha > 1$. Recall that $T_0 \Delta_{\mathcal{X}} = \{f \in \mathbb{R}^N : \sum_x f_x = 0\}$ and that $DF(v)$ is a linear map from $T_0 \Delta_{\mathcal{X}}$ to $T_0 \Delta_{\mathcal{X}}$. Remark that $e_x - e_y \in T_0 \Delta_{\mathcal{X}}$ and $e_x - v \in T_0 \Delta_{\mathcal{X}}$, for all $x, y \in \mathcal{X}$. In all following derivative

calculations, we consider F as a map defined of \mathbb{R}^N . We will use the convention $H_{x,x}(v) = 0$, for $x \in \mathcal{X}$.

The following lemma provides some formulas and properties useful in order to study the stability of equilibria.

Lemma 2.4.17. *Let v be an equilibrium. We have for $x, y \in \text{Supp}(v)$,*

$$\begin{aligned} D_{e_x - e_y} F(v) &= (\alpha - 1)(e_x - e_y) \\ &\quad + 2\alpha \sum_{z \in \mathcal{X}} v_z^\alpha \left(\frac{H_{x,z}(v)}{H_x(v)} - \frac{H_{y,z}(v)}{H_y(v)} \right) e_z \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

and for $x \notin \text{Supp}(v)$,

$$D_{e_x - v} F(v) = -(e_x - v) \quad (2.4.28)$$

Furthermore, $DF(v)$ is diagonalisable and its eigenvalues are all real.

Proof. Let v be an equilibrium and suppose that $\alpha > 1$. Recall that

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(v)(x) &= \frac{v_x^\alpha H_x(v)}{H(v)}, \\ \partial_x H_x(v) &= 0, \\ \partial_y H_x(v) &= 2\alpha v_y^{\alpha-1} H_{x,y}(v), \\ \partial_x H(v) &= 3\alpha v_x^{\alpha-1} H_x(v), \end{aligned}$$

where $x, y \in \mathcal{X}$ and $x \neq y$.

Let $x, y \in \mathcal{X}$ with $x \neq y$, then

$$\begin{aligned} \partial_x F_x(v) &= -1 + \alpha \frac{v_x^{\alpha-1} H_x(v)}{H(v)} - 3\alpha v_x \left(\frac{v_x^{\alpha-1} H_x(v)}{H(v)} \right)^2, \\ \partial_x F_y(v) &= v_y \left(2\alpha \frac{v_x^{\alpha-1} v_y^{\alpha-1} H_{x,y}(v)}{H(v)} - 3\alpha \frac{v_x^{\alpha-1} H_x(v)}{H(v)} \frac{v_y^{\alpha-1} H_y(v)}{H(v)} \right). \end{aligned}$$

Since v is an equilibrium, if $x, y \in \text{Supp}(v)$, then $\frac{v_x^{\alpha-1} H_x(v)}{H(v)} = \frac{v_y^{\alpha-1} H_y(v)}{H(v)} = 1$. Thus when $x \in \text{Supp}(v)$ and $y \in \mathcal{X}$, with $y \neq x$, we have

$$\begin{aligned} \partial_x F_x(v) &= \alpha - 1 - 3\alpha v_x, \\ \partial_x F_y(v) &= 2\alpha v_y^\alpha \frac{H_{x,y}(v)}{H_x(v)} - 3\alpha v_y, \end{aligned}$$

which implies that for $x \in \text{Supp}(v)$,

$$\begin{aligned}\partial_x F(v) &= (\alpha - 1 - 3\alpha v_x)e_x + \sum_{y \neq x} \left(2\alpha v_y^\alpha \frac{H_{x,y}(v)}{H_x(v)} - 3\alpha v_y \right) e_y \\ &= (\alpha - 1)e_x - 3\alpha v + 2\alpha \sum_y v_y^\alpha \frac{H_{x,y}(v)}{H_x(v)} e_y\end{aligned}$$

Thus (2.4.27) follows.

For $x \notin \text{Supp}(v)$, we have $\partial_x F_x(v) = -1$ and $\partial_x F_y(v) = 0$, for $y \in \mathcal{X}$ with $y \neq x$. Thus $\partial_x F(v) = -e_x$, for $x \notin \text{Supp}(v)$.

We will now prove (2.4.28). Let $x \notin \text{Supp}(v)$,

$$\begin{aligned}D_{e_x - v} F(v) &= \partial_x F(v) - \sum_z v_z \partial_z F(v) \\ &= -e_x - (\alpha - 1)v - 3\alpha v + 2\alpha \sum_z \sum_y v_z v_y^\alpha \frac{H_{y,z}(v)}{H_z(v)} e_y\end{aligned}$$

Since $\frac{1}{H_z(v)} = \frac{v_z^{\alpha-1}}{H(v)}$, we have

$$\begin{aligned}D_{e_x - v} F(v) &= -(e_x - v) - 2\alpha v + 2\alpha \sum_y v_y^\alpha \sum_z v_z \frac{H_{y,z}(v)}{H(v)} e_y \\ &= -(e_x - v) - 2\alpha v + 2\alpha \sum_y v_y^\alpha \frac{H_y(v)}{H(v)} e_y \\ &= -(e_x - v) - 2\alpha v + 2\alpha \sum_y v_y e_y \\ &= -(e_x - v) .\end{aligned}$$

It remains to prove that $DF(v)$ is diagonalisable and that its eigenvalues are real. A consequence of (2.4.28) is that for all $u \in \text{Span}(\{e_x - v : v_x = 0\})$, $D_u F(v) = -u$.

Set $\mathcal{H} = \text{Span}(\{e_x - e_y : v_x > 0, v_y > 0\})$ and let $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/v}$ be the scalar product defined on \mathcal{H} by $\langle f, g \rangle_{1/v} = \sum_{x \in \mathcal{X}} f_x g_x / v_x$, for $f, g \in \mathcal{H}$. We conclude the proof using the fact that the restriction of $DF(v)$ to \mathcal{H} is self-adjoint for the scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/v}$.

Indeed, since $H(v) = v_x^{\alpha-1} H_x(v) = v_y^{\alpha-1} H_y(v)$, we have

$$\begin{aligned}v_y \partial_y F_x(v) &= 2\alpha v_x^\alpha v_y^\alpha \frac{H_{x,y}(v)}{H(v)} - 3\alpha v_x v_y , \\ &= v_x \partial_x F_y(v) ,\end{aligned}$$

for all $x, y \in \mathcal{X}$ with $x \neq y$. □

Proposition 2.4.18. *When $\alpha > 1$, uniform probability measures on exactly $k \geq 3$ vertices are stable if and only if $\alpha < \frac{k-1}{k-3}$ and are unstable if and only if $\alpha > \frac{k-1}{k-3}$.*

Proof. Let v be a uniform probability measure on exactly $k \in \llbracket 3, N \rrbracket$ vertices and suppose that $\alpha > 1$. It is easy to see that for $x, y \in \text{Supp}(v)$ with $x \neq y$, we have

$$\frac{H_{x,y}(v)}{H_x(v)} = \frac{k^\alpha}{k-1}.$$

Using (2.4.27) of Lemma 2.4.17, we have for $x, y \in \text{Supp}(v)$,

$$D_{e_x - e_y} F(v) = \left(-1 + \alpha \left(\frac{k-3}{k-1} \right) \right) (e_x - e_y).$$

Thus using Equation (2.4.28) of Lemma 2.4.17, the description of the spectrum of $DF(v)$ is completed : -1 is an eigenvalue of multiplicity $N - k$ and $-1 + \alpha \left(\frac{k-3}{k-1} \right)$ is an eigenvalue of multiplicity $k - 1$. Therefore, v is stable if and only if $\alpha < \frac{k-1}{k-3}$ and unstable if and only if $\alpha > \frac{k-1}{k-3}$. \square

Remark 2.4.19. *When $\alpha > 1$, uniform probability measures on exactly three vertices are always stable equilibria.*

Proposition 2.4.20. *When $N = 4$, every equilibrium that is not a uniform probability measure is unstable.*

Proof. Suppose that $N = 4$ and that $\alpha \in]1, 3[\cup]3, +\infty[$. Let v be an equilibrium non uniform on its support, then $\text{Supp}(v) = \mathcal{X}$ and Proposition 2.4.13 states that when $1 < \alpha < 3$, there exists $\sigma \in \mathcal{S}_4$, such that $v_{\sigma(1)} = v_{\sigma(2)} < v_{\sigma(3)} = v_{\sigma(4)}$ and when $\alpha > 3$, there exists $\sigma \in \mathcal{S}_4$, such that $v_{\sigma(1)} = v_{\sigma(2)} < v_{\sigma(3)} = v_{\sigma(4)}$ or $v_{\sigma(1)} \neq v_{\sigma(2)} = v_{\sigma(3)} = v_{\sigma(4)}$.

We first suppose that $v_{\sigma(1)} \neq v_{\sigma(2)} = v_{\sigma(3)} = v_{\sigma(4)}$ and without loss of generality that $v = (a, b, b, b)$. We have $a + 3b = 1$ and Proposition 2.4.13 states that $a, b \in]0, 1/3[\setminus \{1/4\}$.

We have also

$$\begin{aligned} H_{1,x}(v) &= 2b^\alpha, \\ H_{x,y}(v) &= a^\alpha + b^\alpha, \\ H_1(v) &= 6b^{2\alpha}, \\ H_x(v) &= 2b^\alpha(2a^\alpha + b^\alpha) \end{aligned}$$

for $x, y \in \{2, 3, 4\}$, with $y \in \{2, 3, 4\}$. Thus Lemma 2.4.17 states that for $x, y \in \{2, 3, 4\}$,

$$\begin{aligned} D_{e_x - e_y} F(v) &= \left(\alpha - 1 - 2\alpha b^\alpha \frac{H_{x,y}(v)}{H_x(v)} \right) (e_x - e_y) \\ &= \left(\frac{\alpha a^\alpha}{2a^\alpha + b^\alpha} - 1 \right) (e_x - e_y). \end{aligned}$$

Therefore $\lambda_1 := \frac{\alpha a^\alpha}{2a^\alpha + b^\alpha} - 1$ is an eigenvalue of $DF(v)$ of multiplicity 2. Furthermore Proposition 2.4.13 states that when $\alpha > 3$, $a > b$ and that when $\alpha < 3$, $a < b$. Hence when $\alpha > 3$, $\lambda_1 > 0$ and when $\alpha < 3$, $\lambda_1 < 0$.

The real $\lambda_2 := \frac{\alpha b^\alpha}{2a^\alpha + b^\alpha} - 1$ is an eigenvalue of $DF(v)$ of multiplicity 1. Indeed, noting $f_{\lambda_2} = e_1 - (e_2 + e_3 + e_4)/3$, we have

$$\begin{aligned} D_{f_{\lambda_2}} F(v) &= \sum_{x \in \{2,3,4\}} D_{(e_1 - e_x)/3} F(v) \\ &= (\alpha - 1)f_{\lambda_2} + \frac{2}{3}\alpha(e_2 + e_3 + e_4) \\ &\quad - \frac{2\alpha}{3} \left(\frac{3a^\alpha}{2a^\alpha + b^\alpha} e_1 + \frac{(a^\alpha + b^\alpha)}{2a^\alpha + b^\alpha} (e_2 + e_3 + e_4) \right) \\ &= \left(\alpha - \frac{2\alpha a^\alpha}{2a^\alpha + b^\alpha} - 1 \right) f_{\lambda_2} \\ &= \left(\frac{\alpha b^\alpha}{2a^\alpha + b^\alpha} - 1 \right) f_{\lambda_2}. \end{aligned}$$

We will now prove that when $1 < \alpha < 3$, $\lambda_2 > 0$. Set $s = a/b \in]0, 1[$ and remark that it is equal to the s defined at the end of the proof of Proposition 2.4.13. Recall the definition of $\beta_2 = \frac{3(\alpha - 1)}{2\alpha}$ in (2.4.24) and that when $1 < \alpha < 3$, $s \in]0, \beta_2[$ (using (2.4.25)).

Since v is an equilibrium, we have $3s^{\alpha-1} = 2s^\alpha + 1$ and $\lambda_2 = \alpha(1 - 2s/3) - 1$. Hence λ_2 is a continuous map of α and vanishes if and only if $s = \beta_2$. Since $s \neq \beta_2$, the eigenvalue λ_2 keeps the same sign for any values of α belonging to $]1, 3[$.

Furthermore if $\alpha = 2$, $s = 1/2$ and $\lambda_2 = 1/3 > 0$. Thus when $1 < \alpha < 3$, λ_2 is positive and v is an unstable equilibrium.

Suppose now that $\alpha > 3$, that $v_{\sigma(1)} = v_{\sigma(2)} < v_{\sigma(3)} = v_{\sigma(4)}$ and without loss of generality that $v = (a, a, b, b)$. We have $a + b = 1/2$ and Proposition 2.4.13 states that $a \in]1/6, 1/4[$ and $b \in]1/4, 1/3[$. We have also $H_{1,2}(v) = 2b^\alpha$ and $H_1(v) = H_2(v) = 2b^\alpha(2a^\alpha + b^\alpha)$. Thus Lemma 2.4.17 states that

$$\begin{aligned} D_{e_1 - e_2} F(v) &= \left(\alpha - 1 - 2\alpha a^\alpha \frac{H_{1,2}(v)}{H_1(v)} \right) (e_1 - e_2) \\ &= \left(\frac{\alpha b^\alpha}{2a^\alpha + b^\alpha} - 1 \right) (e_1 - e_2). \end{aligned}$$

Thus since $\alpha > 3$ and $a < b$, $\frac{\alpha b^\alpha}{2a^\alpha + b^\alpha} - 1$ is a positive eigenvalue of $DF(v)$ and v is unstable. \square

Consequently, it remains to establish the non convergence to an unstable equilibria and the attainability of uniform probability measures, to prove the statement 2.4.1-(2).

2.4.7.4 Attainability of stable equilibria

This section shows that uniform equilibria are attainable and consequently v_n has a positive probability to converge toward them.

Proposition 2.4.21. *Uniform equilibria on their support are attainable.*

Proof. Let $k \geq 3$ be an integer and v be a uniform probability on k vertices. It is easy to see that v is attainable, if we consider the walk which stays on the support of v and which cross these k vertices uniformly and always in the same way. We will write this more precisely.

Without loss of generality, we suppose that the support of v is the k first vertices, i.e. $\text{Supp}(v) = \llbracket 1, k \rrbracket$. Let $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of vertices, such that for all integer $n \geq 1$ and all vertex $x \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $x_{nk+x} = x$. Denote $\Omega_n = \{\forall q \leq nk, X_q = x_q\}$, the event, where during the $nk + 1$ first steps the random process X stays in $\llbracket 1, k \rrbracket$ and cross these k vertices always in the order $(1, 2, \dots, k, 1, \dots)$.

Set $n \geq 1$, under the event Ω_n , we have

$$\begin{aligned} \|v_{nk} - v\| &= \max_{x \in \mathcal{X}} |v_{nk}(x) - v(x)| \\ &= \max \left(\left| \frac{n+1}{N+nk} - \frac{1}{k} \right|, \frac{1}{N+nk} \right) \\ &= \max \left(\frac{N-k}{k(N+nk)}, \frac{1}{N+nk} \right). \end{aligned}$$

Thus for all $\epsilon > 0$ and integer n_0 , there exists an integer $n \geq n_0/k$, such that under the event Ω_n , $\|v_{nk} - v\| < \epsilon$. To conclude it remains to remark that for all $n \geq 1$, $\mathbb{P}(\Omega_n) > 0$. Indeed,

$$\mathbb{P}(\Omega_n) = K(v_0)(X_0, 1) \prod_{q=0}^{n-1} \prod_{x=1}^{k-1} K(v_{kq+x})(x, x+1) \prod_{q=1}^{n-1} K(v_{kq})(k, 1).$$

Since G is a complete graph and $v_n(x) > 0$ for all $n \geq 1$ and $x \in \llbracket 1, k \rrbracket$, we have $K(v_n)(x, y) > 0$, for all $n \geq 1$ and all $x, y \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Therefore $\mathbb{P}(\exists n \geq n_0, \|v_{nk} - v\| < \epsilon) \geq \mathbb{P}(\Omega_n) > 0$. \square

Theorem 2.3.1 implies the following statements. When $\alpha = 1$, v_n has a positive probability to converge toward the uniform probability on the N vertices (see Proposition 2.4.16).

When $\alpha < 1$, v_n has a positive probability to converge toward uniform probability on less than $\frac{3\alpha-1}{\alpha-1}$ vertices (see Proposition 2.4.18).

Hence to achieve the proof of Theorem 2.4.1, it remains to prove the non convergence to unstable equilibria.

2.4.7.5 Non convergence towards unstable equilibria

This section shows that v_n does not converge to unstable equilibria almost surely. Let v_* be an unstable equilibrium and f an unstable direction of v_* . Using Propositions 2.4.16 and 2.4.18, we know that $v_* \in \Sigma \setminus \Sigma^3$. Since $K : \Sigma \setminus \Sigma^3 \rightarrow \mathcal{M}_{ind}$ is \mathcal{C}^1 , then Hypothesis 2.3.23-(1) holds for v_* .

Recall the definitions of \mathcal{A} , \mathcal{A}_x , $\mathcal{A}_{x,y}$ and \mathcal{R}_* given in section 2.3.3.2 and that recall that π_1 and π_2 are the marginals of $\pi(v_*)$. Denote $\hat{\pi}_* = \hat{\pi}(v_*)$ and since v_* is an equilibrium, $v_* = \hat{\pi}_*$.

Remark 2.4.22. *By definitions of K_* , π_* and $\hat{\pi}_*$, we have $\mathcal{A}_{x,y} = \mathcal{A} \setminus \{x, y\}$, $\mathcal{A}_x = \mathcal{A} \setminus \{x\}$ and $\mathcal{R}_* = \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, for all $(x, y) \in \vec{\mathcal{E}}$.*

By using the previous remark and the fact that $|\text{Supp}(v_*)| \geq 4$, Hypothesis 2.3.23-(2) holds.

Lemma 2.4.23. *Hypothesis 2.3.23-(3) holds.*

Proof. Remark that $f \in T_0\Delta_{\mathcal{X}}$, i.e. that $\sum_{x \in \mathcal{X}} f(x) = 0$. Suppose that there exists a map $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\hat{V}f(x, y) = C + g(x) - g(y),$$

with C a constant. We calculate

$$\begin{aligned} \hat{V}f(x, y) &= \sum_z \hat{V}((x, y), z)f(z) \\ &= \sum_z \delta_y(z)f(z) = f(y), \end{aligned}$$

for all $x, y \in \mathcal{A}$. Thus for all $x, x', y \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} f(y) &= C + g(x) - g(y) \\ &= C + g(x') - g(y). \end{aligned}$$

This implies that g is constant on \mathcal{A} and thus that f is constant. Since $f \in T_0\Delta_{\mathcal{X}}$, then $f = 0$, which is impossible. \square

This last lemma achieves the proof of Theorem 2.4.1. Indeed, it proves that the statement of Theorem 2.3.2 is true.

Chapitre 3

Estimation des paramètres d'une chaîne de Markov paramétrée renforcée

Sommaire

Introduction	98
3.1 Estimation des paramètres d'une chaîne de Markov paramétrée renforcée	103
3.1.1 Définition d'une chaîne de Markov paramétrée renforcée	103
3.1.2 Estimateur du maximum de vraisemblance	106
3.1.3 Estimateurs du minimum du contraste pondéré	108
3.2 Modèle d'urne bicolore	110
3.2.1 Estimateur du maximum de vraisemblance	111
3.2.2 Estimateurs des moindres carrés pondérés	113
3.3 Application : l'urne de Deneubourg	116
3.3.1 Régularité de l'urne	116
3.3.2 Estimation à partir d'un seul chemin	118
3.3.3 Comportement de l'urne de Deneubourg	118
3.3.4 Estimation de α en tant qu'indice de queue	120
3.3.5 Estimation à partir de simulations	121
3.4 Conclusion	133
3.5 Démonstrations	136
3.5.1 Démonstrations des théorèmes 3.2.4 et 3.2.6	136
3.5.2 Démonstrations pour l'urne de Deneubourg	141

Introduction

L'idée à l'origine de ce chapitre est de développer des outils statistiques permettant d'estimer les paramètres de l'urne de Deneubourg à partir de données expérimentales. Ce modèle est très souvent utilisé pour modéliser le phénomène de sélection de chemin par une colonie de fourmis.

Ces insectes déposent sur leur trajectoire des phéromones, substances chimiques qui attirent leurs congénères. La circulation des fourmis autour de leur nid forme alors un réseau dynamique de routes composées de phéromones. Au gré des passages et va-et-vient, les chemins qui relient les différents points stratégiques de la colonie se font et se défont. Par exemple, à la découverte d'une source de nourriture intéressante, un chemin se forme entre elle et le nid puis disparaît une fois la source tarie. La formation et la modulation de ce réseau routier constitue donc un enjeu fondamental dans la survie de la colonie.

Une des clés de voute de cette stratégie d'exploration et d'exploitation est la sélection de chemin. Au cours de leurs déplacements, les fourmis sont constamment confrontées à des embranchements : carrefours dans les réseaux de galeries souterraines, obstacles sur la piste suivie... Une bifurcation à deux branches oblige donc les fourmis qui l'atteignent à choisir entre la gauche et la droite. Au fur et à mesure de ces choix, les traces de phéromones s'accumulent sur chacune des branches de cette bifurcation. Il existe alors deux issues : une des deux branches est sélectionnée ou les deux branches s'égalisent. On dit qu'une branche est sélectionnée, lorsque toutes les fourmis empruntent la branche en question et abandonnent l'autre. Les deux branches sont égalisées lorsque les fourmis empruntent uniformément l'une comme l'autre.

Les éthologues étudient ce phénomène de sélection (ou non sélection) de branches depuis plusieurs décennies. Dans ces études, les expériences consistent à confronter une colonie de fourmis à un réseau plus ou moins complexe de galeries comportant une ou plusieurs bifurcations (cf. chapitres 5 et 6, [DAGP90], [VTG⁺06] et [GGC⁺09]).

Le comportement des insectes est souvent modélisé comme suit. Considérons une bifurcation à deux branches, dont chacune possède un poids initial c . Le poids d'une branche est incrémenté de 1 à chaque passage d'une fourmi par celle-ci. La probabilité qu'une fourmi choisisse une branche donnée dépend du poids de chaque branche. Plus précisément, notons Z_n le nombre de fois que la branche droite a été choisie après le passage de n fourmis. La probabilité que la $n + 1$ -ième fourmi choisisse la branche de droite après le passage de n fourmis est égale à

$$prob_{n+1}^D = \frac{(c + Z_n)^\alpha}{(c + Z_n)^\alpha + (c + n - Z_n)^\alpha},$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre qui introduit une non-linéarité (si $\alpha \neq 1$) dans le choix des fourmis. Remarquons que $n - Z_n$ est le nombre de fois que la branche gauche a été choisie après n passages et que la probabilité de choisir la branche de gauche après n passages est égale à $1 - prob_{n+1}^D$. Cette façon de modéliser le comportement de fourmis à une bifurcation a été proposée pour la première fois par J.-L. Deneubourg et al. en 1990 (cf. [DAGP90]) et est souvent utilisé par les éthologues.

Notre objectif initial était de développer des outils statistiques permettant d'estimer les paramètres α et c , qui ont chacun une interprétation éthologique bien définie (cf. chapitres 5 et 6). Nous n'avons toutefois pas uniquement traité le modèle de Deneubourg. Ce dernier n'est autre qu'un modèle d'urne. La bifurcation à deux branches peut être vue comme une urne contenant des boules de deux couleurs. La probabilité de tirer une boule d'une couleur donnée dépend du nombre de boules de chaque couleur présentes dans l'urne comme la probabilité de choisir une branche donnée dépend du poids de chacune des branches. Lorsqu'une couleur est tirée, une boule de cette couleur est ajoutée dans l'urne de la même manière que le poids d'une branche est incrémenté de 1 lorsqu'une fourmi passe par celle-ci. Le modèle que nous venons de définir a déjà été introduit dans l'état de l'art (cf. section 1.1, chapitre 1) et nous l'appelons l'urne de Deneubourg.

Nous avons étudié une classe générale de modèle d'urne incluant l'urne de Deneubourg. Considérons une urne contenant des boules rouges et noires. Nous notons Z_n le nombre de boules rouges tirées après n tirages. Ainsi $n - Z_n$ est le nombre total de boules noires tirées. Soit Θ un sous ensemble de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. Nous supposons qu'il existe un vecteur $\theta \in \Theta$ et une fonction $f : \Theta \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telle que la probabilité de tirer une boule rouge après n tirages est égale à

$$prob_{n+1}^R = f(\theta, Z_n, n - Z_n).$$

Ainsi $1 - prob_{n+1}^R$ est la probabilité de tirer une boule noire. La fonction f est appelée fonction de choix paramétrée et θ le paramètre de l'urne. Par exemple, le modèle proposé par J.-L. Deneubourg en 1990 (cf [DAGP90]) est une urne de paramètre (α, c) et de fonction de choix paramétrée définie sur $]0, \infty[^2 \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par

$$f : ((\alpha, c), x, y) \rightarrow \frac{(c + x)^\alpha}{(c + x)^\alpha + (c + y)^\alpha}. \quad (*)$$

Pour un échantillon de N chemins indépendants de même longueur n et une urne bicolore de paramètre θ et de fonction de choix paramétrée f , nous avons écrit la vraisemblance et défini l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV). Nous avons démontré que sous certaines conditions de régularité sur f , l'EMV est consistant et asymptotiquement

normal (pour $N \rightarrow \infty$ et n fixé). Nous avons également défini une classe générale d'estimateurs : les estimateurs des moindres carrés pondérés (EMCP). Sous certaines conditions de régularité sur f , tout EMCP est consistant et asymptotiquement normal (pour $N \rightarrow \infty$ et n fixé). À la fin de cette introduction, nous proposons une vulgarisation de la démarche statistique adoptée dans ce chapitre, notamment elle explique ce qu'est un estimateur consistant et asymptotiquement normal.

Nous avons appliqué ces résultats théoriques à l'urne de paramètre (α, c) et de fonction de choix paramétrée f définie en (*) (urne de Deneubourg). La fonction f est régulière et donc l'EMV et l'EMCP sont consistants et asymptotiquement normaux pour un échantillon de N chemins indépendants de même longueur n . Un résultat remarquable est qu'il n'est pas possible d'estimer α et c avec un seul chemin ($N = 1$) même si la longueur de cet dernier tend vers l'infini ($n \rightarrow \infty$). C'est pour cette raison que nos résultats asymptotiques sont établis pour $N \rightarrow \infty$ et n fixé. Nous avons évalué la qualité de l'EMV et l'EMCP en les appliquant à des simulations d'urnes de Deneubourg, dont nous connaissons déjà la vraie valeur des paramètres. Nous avons utilisé la méthode du Bootstrap pour évaluer l'intervalle de confiance des paramètres.

Les résultats démontrés et l'étude sur simulation menée au sujet de l'urne de Deneubourg sont utilisés aux chapitres 5 et 6. Dans ces chapitres, nous analysons les données d'expériences qui confrontent des fourmis à une ou plusieurs bifurcations. Nous avons modélisé le comportement des insectes par des urnes de Deneubourg seules ou en réseau et avons estimé les paramètres α et c avec l'EMV et l'EMCP.

À terme nous aimerions disposer pour toute marche aléatoire renforcée paramétrée d'au moins un estimateur consistant et asymptotique normal se basant sur un échantillon de chemins indépendants de longueurs variables. Dans ce chapitre nous avons fait les premiers pas dans ce sens. En plus de l'étude complète des urnes bicolores, nous considérons une classe de modèles d'urnes généralisées, que nous appelons chaînes de Markov paramétrée renforcée (CMPR).

La nature non homogène des CMPR rend éventuellement impossible l'estimation des paramètres à partir d'un seul chemin, même si la longueur de celui-ci tend vers l'infini. C'est par exemple le cas de l'urne de Deneubourg. Ainsi tous les estimateurs mentionnés se basent sur un échantillon de plus d'un chemin. Les chemins de l'échantillon ne sont pas nécessairement tous de même longueur.

Pour toute CMPR de paramètre θ et tout échantillon de N chemins indépendants de longueurs variables, nous avons écrit explicitement la vraisemblance et ainsi avons défini l'estimateur du maximum de vraisemblance. Nous avons également introduit la classe très générale des estimateurs du minimum de contraste pondéré. Sous des conditions adéquates

de régularité sur la paramétrisation de la fonction de choix, nous pourrions démontrer que l'EMV et les estimateurs du minimum du contraste pondéré de θ sont consistants et asymptotiquement normaux. Cette partie reste à faire.

La section 3.1 définit les CMPR et décrit pour ces modèles l'EMV et les estimateurs du minimum de contraste pondéré basés sur un échantillon de chemins indépendants de longueurs variables. La section 3.2 traite des modèles d'urne bicolore. Elle propose une version simplifiée des CMPR pour décrire les urnes bicolorées et introduit l'EMV et les estimateurs des moindres carrés pondérés basés sur un échantillon de chemins indépendants de même longueur. La section 3.3 est consacrée à l'urne de Deneubourg. Elle décrit le comportement du modèle en fonction de la valeur de ces paramètres et évalue la qualité de l'EMV et l'EMCP en les appliquant à des échantillons simulés.

Vulgarisation de la démarche statistique Supposons que nous avons observé N fois n fourmis passer par une bifurcation. Nous disposons de ce que l'on appelle un échantillon de N chemins de longueur n : N séries de n choix. Nous modélisons le comportement des fourmis par le modèle de Deneubourg de paramètre $\theta_0 = (\alpha_0, c_0)$ défini plus haut. L'objectif est d'estimer α_0 et c_0 (et donc θ_0), appelés les vraies valeurs de paramètres.

En inférence statistique, la première étape est de choisir un estimateur. Un estimateur est une fonction de l'échantillon susceptible d'évaluer la valeur de θ_0 . Il est essentiel de garder à l'esprit qu'un estimateur repose sur l'hypothèse que le modèle choisi est vrai et que les données sont générées par ce dernier. Pour cette raison, il faut être particulièrement prudent lors de l'interprétation des résultats statistiques. L'estimation d'un paramètre ne fournit pas une vérité, mais une valeur qui n'a de sens que dans l'hypothèse où le modèle est vrai. Tout modèle est nécessairement une simplification de la réalité et donc ne rend jamais compte parfaitement de la réalité. La manière dont les résultats d'un estimateur doivent être interprétés et utilisés est discutée dans l'introduction du chapitre 5.

Il existe une infinité d'estimateurs et nous allons en décrire deux. L'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) est un des estimateurs les plus utilisés par les statisticiens. Il consiste à considérer la fonction qui à (α, c) associe la probabilité que les fourmis effectuent la suite des choix que nous avons observée sous l'hypothèse que les fourmis suivent l'urne de Deneubourg de paramètre α et c . Cette fonction est appelée la vraisemblance. L'EMV est le couple (α, c) qui maximise la vraisemblance, celui qui maximise la probabilité de réalisation de l'échantillon observé. Le second estimateur est l'estimateur le plus connu et le plus utilisé par les éthologues : l'estimateur des moindres carrés pondérés (EMCP). Il consiste à choisir les valeurs de α et c qui ajustent au mieux (au sens des moindres carrés pondérés) le modèle à l'échantillon.

CHAPITRE 3. ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UNE CHAÎNE DE MARKOV PARAMÉTRÉE RENFORCÉE

Notons $\hat{\theta}_N = (\hat{\alpha}_N, \hat{c}_N)$ l'estimateur que nous avons choisi. La première propriété à vérifier est si $\hat{\theta}_N$ est consistant, c'est-à-dire que si N , le nombre de séries de choix observés, tend vers l'infini, alors $\hat{\theta}_N = (\hat{\alpha}_N, \hat{c}_N)$ converge vers $\theta_0 = (\alpha_0, c_0)$. Ceci assure que plus nous avons de données, meilleure est l'estimation. Dans ce chapitre, nous avons démontré que l'EMV et l'EMCP sont des estimateurs consistants pour le modèle de Deneubourg et plus généralement pour toute urne de fonction de choix paramétrée régulière.

Nous ne disposons évidemment pas d'un échantillon de taille infini, par conséquent inmanquablement $\hat{\theta}_N$ ne peut être égale exactement à θ_0 . Nous souhaitons donc connaître la vitesse avec laquelle $\hat{\theta}_N$ converge vers θ_0 , pour estimer l'erreur faite. Une solution est d'établir des intervalles de confiance. L'intervalle de confiance à 95% d'un paramètre est un intervalle où "on a 95% de chance de trouver la vraie valeur du paramètre". Pour une expérience donnée, cette expression n'a pas de sens, parce que le paramètre θ_0 n'est pas aléatoire. En effet, il est ou bien dans l'intervalle ou bien en dehors. Le niveau de confiance doit être compris comme étant, dans un grand nombre d'expériences répétées à l'identique, la proportion des expériences où nos conclusions seront correctes. Insistons sur le fait qu'il est inhérent à la nature aléatoire de nos expériences que nos conclusions seront erronées dans 5% des cas si nous répétons un grand nombre de fois cette expérience dans les mêmes conditions.

Pour déterminer un intervalle de confiance il est nécessaire de connaître, au moins asymptotiquement, la loi de l'écart $\hat{\theta}_N - \theta_0$. L'estimateur $\hat{\theta}_N$ est dit asymptotiquement normal, lorsque $\hat{\theta}_N - \theta_0$ suit approximativement une loi normale de moyenne nulle de covariance $\frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \Sigma$, où Σ est une matrice 2×2 notée :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha^2 & \sigma_{\alpha c}^2 \\ \sigma_{\alpha c}^2 & \sigma_c^2 \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que $\hat{\alpha}_N - \alpha_0$ suit la loi normale de moyenne nulle et de variance σ_α^2/N et que $\hat{c}_N - c_0$ suit la loi normale de moyenne nulle et de variance σ_c^2/N . De plus $\sigma_{\alpha c}^2/N$ est la covariance de $\hat{\alpha}_N$ et \hat{c}_N . Par conséquent si $\sigma_{\alpha c}^2 \neq 0$ (si Σ n'est pas diagonale), $\hat{\alpha}_N$ et \hat{c}_N sont dépendants, c'est-à-dire que l'estimateur $\hat{\theta}_N$ n'estime pas indépendamment α et c . Nous avons démontré que l'EMV et l'EMCP sont asymptotiquement normaux pour le modèle de Deneubourg et plus généralement pour toute urne de fonction de choix paramétrée régulière.

Connaître la loi de $\hat{\theta}_N - \theta_0$, nous permettrait de construire les intervalles de confiance. Mais cette loi dépend des paramètres inconnus à travers Σ . Dans un modèle simple, on peut envisager d'estimer cette matrice. Mais c'est difficilement réalisable pour l'urne de Deneubourg.

Nous avons donc décidé d'utiliser la méthode de rééchantillonnage dite du Bootstrap (voir section 8, [Was04]). Cette méthode statistique permet de générer artificiellement K échantillons à partir de l'échantillon que nous avons observé. Pour chacun des K échantillons artificiels, nous pouvons estimer α et c . Ainsi nous obtenons K estimations de $\hat{\alpha}_N$ et \hat{c}_N , à partir des quelles nous pouvons calculer des intervalles de confiance.

3.1 Estimation des paramètres d'une chaîne de Markov paramétrée renforcée

Nous nous intéressons à l'estimation des paramètres d'une classe de chaîne Markov non homogène à partir d'un échantillon de chemins indépendants.

3.1.1 Définition d'une chaîne de Markov paramétrée renforcée

Définissons dans un premier temps un noyau de transition et une chaîne de Markov non homogène.

Définition 3.1.1. Soit R un ensemble fini. Un noyau de transition K sur \mathbb{N}^R est une fonction de $\mathbb{N}^R \times \mathbb{N}^R$ dans $[0, 1]$ telle que pour tout $\mathbf{z} \in \mathbb{N}^R$,

$$\sum_{\mathbf{z}' \in \mathbb{N}^R} K(\mathbf{z}, \mathbf{z}') = 1.$$

Remarque 3.1.2. Soit Γ un sous-ensemble de \mathbb{R} et R un ensemble fini de cardinal $|R|$. Par définition Γ^R est l'ensemble des fonctions définies sur R et à valeurs dans Γ . L'ensemble $\Gamma^{|R|}$ est l'ensemble des vecteurs de taille $|R|$ et de composantes dans Γ . Dans la suite nous confondons souvent $\Gamma^{|R|}$ et Γ^R , c'est-à-dire que selon le besoin $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^R$ sera vu comme indexé par R ou par $\llbracket 1, |R| \rrbracket$.

Définition 3.1.3. L'espace \mathbb{R}^R est muni de la norme ℓ^1 notée $|\cdot|$ et définie par $|\mathbf{z}| = \sum_{r \in R} \mathbf{z}(r)$, pour tout $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^R$.

Définition 3.1.4. Soit R un ensemble fini, $(K_n)_{n \geq 0}$ une suite de noyaux de transition sur \mathbb{N}^R et μ_0 une loi de probabilité sur \mathbb{N}^R . Une chaîne de Markov non homogène de suite de noyaux $(K_n)_{n \geq 0}$ et de loi initiale μ_0 est un processus $(\mathbf{Z}_n)_{n \geq 0}$ sur \mathbb{N}^R vérifiant pour tout $\mathbf{z} \in \mathbb{N}^R$ et tout $n \geq 0$ les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{Z}_0 = \mathbf{z}) &= \mu_0(\mathbf{z}), \\ \mathbb{P}(\mathbf{Z}_{n+1} = \mathbf{z} | \mathcal{F}_n) &= K_n(\mathbf{Z}_n, \mathbf{z}), \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UNE CHAÎNE DE MARKOV
PARAMÉTRÉE RENFORCÉE

où $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ est la filtration naturelle du processus $(\mathbf{Z}_n)_{n \geq 0}$.

Pour définir les chaînes de Markov paramétrées renforcées, nous avons besoin de définir deux types de fonctions : les fonctions de renforcement et les fonctions de choix.

Définition 3.1.5. Soit E et R deux ensembles finis. Une fonction de renforcement \hat{V} est une fonction de E dans $\{0, 1\}^R$ telle que, pour tout $e \in E$, il existe $r \in E$ tel que $\hat{V}(e)(r) = 1$ et que $\hat{V}(e)(r') = 0$, pour tout $r' \in R$ avec $r' \neq r$. Autrement dit, pour tout $e \in E$, $|\hat{V}(e)| = 1$.

Remarque 3.1.6. Nous appelons états les éléments de E et ensemble renforcé l'ensemble R .

Définition 3.1.7. Soit E et R deux ensembles finis et soit Θ un sous-ensemble de \mathbb{R}^d , avec $d \in \mathbb{N}^*$. Une fonction de choix paramétrée est une fonction \mathbf{f} définie sur $\Theta \times \mathbb{N}^R \times E \rightarrow [0, 1]$ telle que

$$\sum_{e \in E} \mathbf{f}(\theta, \mathbf{z}, e) = 1 ,$$

pour tout $\theta \in \Theta$ et pour tout $\mathbf{z} \in \mathbb{N}^R$.

Remarque 3.1.8. Nous appelons paramètres les éléments de Θ . Pour chaque $\theta \in \Theta$, $f(\theta, \cdot, \cdot)$ est un noyau de transition de \mathbb{N}^R sur E . Le terme "fonction de choix" s'inspire du vocabulaire des modèles utilisés en éthologie. Elle caractérise la probabilité de choisir/sauter vers chaque état en fonction du renforcement.

Définition 3.1.9. Soit $\Theta \subset \mathbb{R}^d$, θ_0 un élément de Θ , E et R deux ensembles finis, \mathbf{f} une fonction de choix paramétrée définie sur $\Theta \times \mathbb{N}^R \times E$ et \hat{V} une fonction de renforcement de E dans $\{0, 1\}^R$. Une chaîne de Markov paramétrée renforcée (CMPR) sur R , de fonction de choix paramétrée \mathbf{f} , de fonction de renforcement \hat{V} et de paramètre θ_0 est une chaîne de Markov non homogène $(\mathbf{Z}_n)_{n \geq 0}$ sur \mathbb{N}^R telle que pour tout $n \geq 0$

$$\mathbf{Z}_0 = 0 , \quad \mathbf{Z}_{n+1} = \mathbf{Z}_n + \hat{V}(E_{n+1}) ,$$

où le processus $(E_n)_{n \geq 1}$ vérifie pour tout $e \in E$,

$$\mathbb{P}(E_{n+1} = e | \mathcal{F}_n) = \mathbf{f}(\theta_0, \mathbf{Z}_n, e) , \tag{3.1.1}$$

où $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ est la filtration naturelle du processus $(\mathbf{Z}_n)_{n \geq 0}$. Le processus $(E_n)_{n \geq 1}$ est appelé la marche associée à $(\mathbf{Z}_n)_{n \geq 0}$.

Remarque 3.1.10. La loi de E_1 est la loi de densité $\mathbf{f}(\theta_0, 0, \cdot)$. La suite des noyaux de transition $(K_n)_{n \geq 0}$ de $(\mathbf{Z}_n)_{n \geq 0}$ est de la forme

$$K_n(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{\substack{e \in E: \\ \hat{V}(e) = \mathbf{z} - \mathbf{y}}} \mathbf{f}(\theta_0, \mathbf{y}, e),$$

où $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{N}^R$. Dans la suite, notamment pour les calculs de vraisemblance, nous utiliserons la formule (3.1.1).

Remarque 3.1.11. La fonction de renforcement est définie de telle façon que pour tout $n \geq 1$, $|\mathbf{Z}_{n+1} - \mathbf{Z}_n| = 1$, c'est-à-dire qu'une seule composante de la chaîne $(\mathbf{Z}_n)_{n \geq 0}$ est incrémentée de 1 à chaque pas de temps. Par conséquent, la chaîne $(\mathbf{Z}_n)_{n \geq 0}$ ne peut visiter l'état \mathbf{z} qu'une seule fois et ceci seulement au temps $|\mathbf{z}|$. Autrement dit nous avons la relation $\mathbf{Z}_n = \mathbf{z} \Rightarrow n = |\mathbf{z}|$.

L'emploi des termes "renforcé" et "renforcement" se comprend avec les exemples d'urnes. Le processus $(E_n)_{n \geq 0}$ passe d'état en état et chaque passage renforce un élément de R . La probabilité d'aller de tel état vers tel état dépend de la façon dont les éléments de R sont renforcés. La fonction de renforcement caractérise la manière dont R est renforcé et la fonction de choix donne la probabilité de saut en fonction du renforcement.

Pour fixer les idées, nous donnons quelques exemples d'urnes écrites sous la forme d'une CMPR.

Exemples 3.1.12. \circ **Une urne contenant des boules de N couleurs différentes** est modélisable par une CMPR. Pour rester simple, nous considérons que la probabilité de tirer une boule d'une couleur donnée est la proportion de boules de cette couleur dans l'urne.

L'ensemble d'états E et l'ensemble de renforcement R sont tous les deux l'ensemble des couleurs des boules de l'urne. La fonction de renforcement \hat{V} est la fonction qui à toute couleur $e \in E$ associe la mesure de Dirac δ_e , c'est-à-dire un vecteur dont la composante en e vaut 1 et les autres valent 0.

Ainsi E_n est la couleur obtenue au n -ième tirage et $\mathbf{Z}_n(e)$ est le nombre de boules de couleur e tirées au total à l'instant n . Généralement, pour les modèles d'urne, E_n est noté X_n .

Pour toute couleur $e \in E$, nous notons $c_e^0 \in \mathbb{R}$ le nombre de boules de couleur e que l'urne contient initialement. Ces quantités initiales ne sont pas nécessairement entières. Le paramètre de l'urne est alors $\theta_0 = (c_e^0)_{e \in E}$, la composition initiale de l'urne.

Enfin la fonction de choix $\mathbf{f} : \mathbb{R}^E \times \mathbb{N}^E \times E$ est définie par

$$\mathbf{f}(\theta, \mathbf{z}, e) = \frac{c_e + \mathbf{z}_e}{\sum_{e' \in E} c_{e'} + \mathbf{z}_{e'}},$$

où $\theta = (c_e)_{e \in E} \in \mathbb{R}^E$.

- **L'urne de Friedman de matrice de renforcement** $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix}$ contenant initialement c_0 boules rouges et c'_0 boules noires est une CMPR de paramètre $\theta_0 = (a_0, b_0, c_0, c'_0)$ et de fonction de choix définie sur $[0, +\infty[^4 \times \mathbb{N}^2 \times \{0, 1\}$ et par

$$\mathbf{f} : ((a, b, c, c'), (x, y), e) \mapsto \frac{(ax + by + c)e + (bx + ay + c')(1 - e)}{(a + b)(x + y) + c + c'}.$$

Les ensembles E et R , les processus (E_n) et (\mathbf{Z}_n) et la fonction de renforcement \hat{V} sont définies de la même façon que pour l'urne à N couleurs définie précédemment. En revanche le paramètre n'est pas composé uniquement de la situation initiale de l'urne, mais aussi des paramètres intervenant dans la forme de la probabilité de choix.

Remarque 3.1.13. Il est possible d'étendre la classe des CMPR aux marches aléatoires renforcées définies dans le chapitre 2. Il faut pour cela introduire dans la fonction de choix la dépendance par rapport à la position occupée par la marche, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(E_{n+1} = \cdot | \mathcal{F}_n)$ doit dépendre de E_n . Ceci entraîne d'autres changements dans la structure du processus comme par exemple la tribu \mathcal{F}_n devient la filtration naturelle de $(E_n)_{n \geq 1}$ et plus seulement de $(\mathbf{Z}_n)_{n \geq 1}$.

Définition 3.1.14. Soit E un ensemble fini. On appelle chemin de taille n sur E toute suite d'éléments de taille n de valeurs dans E .

Par exemple (E_1, \dots, E_k) est le chemin parcouru par la marche $(E_n)_{n \geq 1}$ durant les k premiers temps. La problématique de ce chapitre est d'estimer le paramètre θ_0 d'une CMPR à partir d'un échantillon de chemins finis parcourus par cette CMPR. Pour simplifier les notations, nous noterons \mathbf{f}_0 la fonction définie sur $\mathbb{N}^E \times E$ et par $\mathbf{f}_0 : (\mathbf{z}, e) \mapsto \mathbf{f}(\theta_0, \mathbf{z}, e)$, que nous appellerons *fonction de choix*.

3.1.2 Estimateur du maximum de vraisemblance

Une remarque importante est que nous pouvons écrire explicitement la vraisemblance et donc disposer de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

CHAPITRE 3. ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UNE CHAÎNE DE MARKOV
PARAMÉTRÉE RENFORCÉE

Notons $(\mathbf{Z}_n)_{n \geq 0}$ une CMPR sur R de fonction de choix paramétrée \mathbf{f} et de paramètre θ_0 et $(E_n)_{n \geq 1}$ la marche associée de $(\mathbf{Z}_n)_{n \geq 0}$.

Soit $(\mathbf{Z}_n^j)_{n \geq 0}, j = 1, \dots, N$ des copies indépendantes de $(\mathbf{Z}_n)_{n \geq 0}$ et $(E_n^j)_{n \geq 1}, j = 1, \dots, N$ leurs marches associées. Soit $\nu_j, j = 1, \dots, N$ des variables aléatoires iid à valeurs entières et indépendantes des $(E_n^j)_{n \geq 1}$.

Nous supposons que nous observons les N chemins indépendants $\{E_k^j, 1 \leq k \leq \nu_j\}, j = 1, \dots, N$. Autrement dit nous observons pour chaque expérience j , les ν_j premiers pas. Pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $k \in \llbracket 1, \nu_j \rrbracket$, E_k^j est le k -ième état du chemin j et \mathbf{Z}_k^j le vecteur de renforcement au temps k du chemin j , c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(E_{k+1}^j = e | \mathcal{F}_k) = \mathbf{f}(\theta_0, \mathbf{Z}_k^j, e),$$

pour tout $k \in \llbracket 0, \nu_j - 1 \rrbracket$ et tout $e \in E$.

La structure du modèle nous permet d'écrire que pour tout chemin (e_1, \dots, e_n) de E et de taille $n \geq 1$

$$\mathbb{P}(E_1 = e_1, \dots, E_n = e_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \mathbf{f}(\theta_0, \mathbf{z}_k, e_{k+1}),$$

où $\mathbf{z}_k \in \mathbb{N}^R$ est tel que $\mathbf{z}_k(e) = \sum_{\ell=1}^k \mathbf{1}_{E_\ell=e}$ pour tout $e \in R$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Ce qui nous fournit une forme multiplicative de la vraisemblance au paramètre $\theta \in \Theta$

$$V_N(\theta) = \prod_{j=1}^N \prod_{k=0}^{\nu_j-1} \mathbf{f}(\theta, \mathbf{Z}_k^j, E_{k+1}^j).$$

La log-vraisemblance s'écrit alors

$$L_N(\theta) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{\nu_j-1} \log \mathbf{f}(\theta, \mathbf{Z}_k^j, E_{k+1}^j)$$

et nous pouvons définir $\hat{\theta}_N$ l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ_0 comme suit

$$\hat{\theta}_N = \arg \max_{\theta \in \Theta} L_N(\theta).$$

L'EMV est donc en théorie calculable pour toute CMPR. Sous les hypothèses usuelles de régularité du modèle statistique, il est possible d'établir sa consistance et sa normalité asymptotique.

Le calcul de l'EMV est pour certains modèles numériquement instable ou nécessite un temps excessif, ce qui est notamment un défaut rédhibitoire pour la méthodologie du Bootstrap. Il est alors nécessaire de se tourner vers des estimateurs qui perdent en efficacité asymptotique, mais gagnent en temps de calcul et stabilité numérique.

C'est pour ces raisons que nous ne nous contentons pas uniquement de l'EMV, mais traitons le cas des estimateurs du minimum de contraste pondérés et en particulier des estimateurs des moindres carrés pondérés. De plus les estimateurs des moindres carrés évoqués sont de loin les plus populaires auprès des praticiens.

3.1.3 Estimateurs du minimum de contraste pondéré

Les estimateurs du minimum de contraste pondéré sont comme leur nom l'indique le minimum d'un contraste pondéré entre les valeurs théoriques et les valeurs empiriques des probabilités de transition.

Nous sommes donc amenés dans un premier temps à proposer un estimateur empirique des probabilités de transition à partir des chemins $\{E_k^j, 1 \leq j \leq \nu_j\}$, $j = 1, \dots, N$.

Soit $\mathbf{z} \in \mathbb{N}^R$ et $e \in E$. Nous notons $\mathbf{a}_N(\mathbf{z})$ la probabilité empirique qu'au temps $|\mathbf{z}|$, $\mathbf{Z}_{|\mathbf{z}|}$ soit égal à \mathbf{z} et $\mathbf{b}_N(\mathbf{z}, e)$ la probabilité empirique qu'au temps $|\mathbf{z}|$, $\mathbf{Z}_{|\mathbf{z}|}$ soit égal à \mathbf{z} et qu'au temps $|\mathbf{z}| + 1$, $E_{|\mathbf{z}|+1}$ soit égal à e .

Pour que les estimateurs \mathbf{a}_N et \mathbf{b}_N soient calculés avec le même nombre d'observations, nous excluons de \mathbf{a}_N les chemins qui se terminent en $|\mathbf{z}|$, c'est-à-dire tels que $|\mathbf{z}| = \nu_j$. Ainsi nous avons

$$\mathbf{a}_N(\mathbf{z}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{\mathbf{Z}_{|\mathbf{z}|}^j = \mathbf{z}} \mathbb{1}_{|\mathbf{z}| < \nu_j}, \quad (3.1.2)$$

$$\mathbf{b}_N(\mathbf{z}, e) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{\mathbf{Z}_{|\mathbf{z}|}^j = \mathbf{z}} \mathbb{1}_{E_{|\mathbf{z}|+1}^j = e}. \quad (3.1.3)$$

Remarquons que $\mathbb{1}_{\mathbf{Z}_{|\mathbf{z}|}^j = \mathbf{z}} = \mathbb{1}_{E_{|\mathbf{z}|}^j = e} = 0$, dès que $|\mathbf{z}| > \nu_j$. La probabilité $\mathbf{p}_N(\mathbf{z}, e)$ définie comme suit

$$\mathbf{p}_N(\mathbf{z}, e) = \frac{\mathbf{b}_N(\mathbf{z}, e)}{\mathbf{a}_N(\mathbf{z})}. \quad (3.1.4)$$

est donc la probabilité empirique conditionnelle qu'au temps $|\mathbf{z}| + 1$ le processus saute en e en sachant qu'au temps $|\mathbf{z}|$, le renforcement de tout $e \in E$ est égal à $\mathbf{z}(e)$, c'est-à-dire $\mathbf{Z}_{|\mathbf{z}|} = \mathbf{z}$.

CHAPITRE 3. ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UNE CHAÎNE DE MARKOV PARAMÉTRÉE RENFORCÉE

La probabilité empirique $\mathbf{p}_N(\mathbf{z}, e)$ est un estimateur consistant de $\mathbf{f}_0(\mathbf{z}, e)$, c'est-à-dire que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{p}_N(\mathbf{z}, e) = \mathbf{f}_0(\mathbf{z}, e),$$

pour tout $\mathbf{z} \in \mathbb{N}^R$ et tout $e \in E$. En effet, les chemins sont indépendants deux à deux et sont indépendants de leur propre longueur. La loi des grands nombres nous permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{p}_N(\mathbf{z}, e) &= \frac{\mathbb{P}(\mathbf{Z}_{|\mathbf{z}|} = \mathbf{z}, E_{|\mathbf{z}|+1} = e, |\mathbf{z}| < \nu_j)}{\mathbb{P}(\mathbf{Z}_{|\mathbf{z}|} = \mathbf{z}, |\mathbf{z}| < \nu_j)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\mathbf{Z}_{|\mathbf{z}|} = \mathbf{z}, E_{|\mathbf{z}|+1} = e) \mathbb{P}(|\mathbf{z}| < \nu_j)}{\mathbb{P}(\mathbf{Z}_{|\mathbf{z}|} = \mathbf{z}) \mathbb{P}(|\mathbf{z}| < \nu_j)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\mathbf{Z}_{|\mathbf{z}|} = \mathbf{z}, E_{|\mathbf{z}|+1} = e)}{\mathbb{P}(\mathbf{Z}_{|\mathbf{z}|} = \mathbf{z})} \\ &= \mathbb{P}(E_{|\mathbf{z}|+1} = e | \mathbf{Z}_{|\mathbf{z}|} = \mathbf{z}) = \mathbf{f}_0(\mathbf{z}, e). \end{aligned}$$

Définissons maintenant l'estimateur du minimum de contraste pondéré.

Définition 3.1.15. Soit R et E deux ensembles finis, w_N une fonction définie sur $\mathbb{N}^R \times E$ et à valeurs dans \mathbb{R} et G une fonction définie sur $[0, 1] \times (0, 1)$ à valeurs dans \mathbb{R} . Le contraste empirique \mathbb{W}_N de forme G et de poids w_N est la fonction définie sur Θ qui à associe

$$\mathbb{W}_N(\theta) = \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{N}^R} \sum_{e \in E} w_N(\mathbf{z}, e) G(\mathbf{p}_N(\mathbf{z}, e), \mathbf{f}(\theta, \mathbf{z}, e)). \quad (3.1.5)$$

L'estimateur du minimum de contraste de forme G et de poids w_N , noté $\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}}$, est caractérisé par

$$\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \mathbb{W}_N(\theta). \quad (3.1.6)$$

Sous certaines conditions de régularité sur w_N , G et \mathbf{f} , il est possible de démontrer que $\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}}$ est un estimateur consistant et asymptotiquement normal. Le paramètre de toute CMPR "régulière" est donc estimable. Le travail réside essentiellement dans l'écriture du modèle pour disposer d'une fonction de choix "régulière" et dans le choix d'estimateurs pertinents. La seule difficulté se loge dans le calcul de la matrice de covariance de la limite normale des estimateurs. Il est souvent possible d'écrire l'EMV comme un estimateur du minimum de contraste pondéré.

Nous n'avons pas encore écrit les théorèmes et leurs démonstrations pour une CMPR générale ni déterminé les conditions de "régularité". Nous traitons uniquement dans ce chapitre l'exemple des urnes bicolores.

3.2 Modèle d'urne bicolore

Cette partie propose l'écriture des urnes bicolores sous la forme d'une CMPR et deux estimateurs consistants et asymptotiquement normaux de leurs paramètres.

Considérons une urne contenant des boules rouges et des boules noires. Nous notons $X_n \in \{0, 1\}$ la couleur de la n -ième boule tirée (0 pour noire et 1 pour rouge).

L'ensemble des états et l'ensemble renforcé sont tous les deux égaux à l'ensemble des couleurs $\{0, 1\}$. La fonction de renforcement \hat{V} associée à $e \in \{0, 1\}$ la mesure de Dirac en e . Ainsi $\mathbf{Z}_n(e)$ est le nombre de boules de couleur $e \in \{0, 1\}$ tirées après le n -ième tirage.

Soit Θ un ensemble de dimension $d \in \mathbb{N}^*$. Nous supposons qu'il existe une fonction de choix paramétrée $\mathbf{f} : \Theta \times \mathbb{N}^2 \times \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$ et un paramètre $\theta_0 \in \Theta$ tels que $(\mathbf{Z}_n)_{n \geq 0}$ est une CMPR sur $\{0, 1\}$, de fonction de choix paramétrée \mathbf{f} , de paramètre θ_0 , de fonction de renforcement \hat{V} et de marche associée $(X_n)_{n \geq 1}$.

Étant donné qu'il n'existe que deux états, nous allons simplifier l'écriture du modèle. En effet, il nous suffit de connaître la fonction $f(\cdot, \cdot, 1)$ et la suite $(\mathbf{Z}(1))_{n \geq 1}$ pour décrire complètement le processus. Nous posons $Z_n = \mathbf{Z}_n(1)$, le nombre de boules rouges tirées après le n -ième tirage. Ainsi $n - Z_n$ est le nombre de boules noires tirées après le n -ième tirage, c'est-à-dire $n - Z_n = \mathbf{Z}_n(0)$.

Nous allons également réduire la fonction de choix paramétrée en définissant la fonction $f : \Theta \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par

$$f(\theta, x, y) = \mathbf{f}(\theta, (x, y), 1),$$

pour tout paramètre $\theta \in \Theta$ et tout entier $x, y \in \mathbb{N}$. Pour simplifier les calculs de ce chapitre nous définissons également trois autres fonctions $\bar{f} = 1 - f$, $f_0 = f(\theta_0, \cdot, \cdot)$ et $\bar{f}_0 = 1 - f_0$.

Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | \mathcal{F}_n) &= f(\theta_0, Z_n, n - Z_n) = f_0(Z_n, n - Z_n), \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | \mathcal{F}_n) &= \bar{f}(\theta_0, Z_n, n - Z_n) = \bar{f}_0(Z_n, n - Z_n). \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Voici quelques exemples d'urnes bicolores écrites sous cette forme simplifiée de CMPR.

Exemples 3.2.1. \circ La fonction de choix d'une **urne de Friedman** de matrice de renforcement $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix}$ et contenant initialement c_0 boules rouges et c'_0 boules noires est une CMPR de fonction de choix paramétrée définie sur $[0, +\infty[^4 \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telle que

$$f : ((a, b, c, c'), x, y) \mapsto \frac{ax + by + c}{(a + b)(x + y) + c + c'}$$

et de paramètre $\theta_0 = (a_0, b_0, c_0, c'_0)$.

\circ L'**urne de Deneubourg** a une fonction de choix définie sur $]0, +\infty[^2 \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telle que

$$f : ((\alpha, c), x, y) \mapsto \frac{(c + x)^\alpha}{(c + x)^\alpha + (c + y)^\alpha}$$

Soit $(X_n^j)_{n \geq 0}$, $j = 1, \dots, N$ des copies indépendantes du processus $(X_n)_{n \geq 0}$. Nous supposons que nous observons les N chemins indépendants $\{X_k^j, 1 \leq k \leq n\}$, $j = 1, \dots, N$ tous de taille $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_k^j est la k -ième couleur du chemin j et Z_k^j est le nombre de boules rouges tirées au temps k du chemin j , c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X_{k+1}^j = 1 | \mathcal{F}_k) = f_0(Z_k^j, k - Z_k^j),$$

pour tout $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Remarquons que nous avons les relations $Z_k^j = \sum_{\ell=1}^k X_\ell^j$ et $X_k^j = Z_k^j - Z_{k-1}^j$.

Nous fixons n (la longueur des expériences) et nos résultats asymptotiques sont obtenus lorsque N (le nombre d'expériences) tend vers ∞ .

Remarque 3.2.2. *Comme le modèle étudié est une chaîne de Markov non homogène, rien n'assure l'existence d'un estimateur consistant permettant d'estimer θ_0 à partir d'une seule expérience ($N = 1$). La section 3.3.2 montre l'inexistence d'un tel estimateur pour l'urne de Deneubourg. C'est pour cette raison que nous considérons que N tend vers l'infini.*

3.2.1 Estimateur du maximum de vraisemblance

Cette partie définit l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) et établit sa consistance et son asymptotique normalité. La structure du modèle nous permet d'écrire pour tout $n \geq 1$ et tout chemin $(e_1, \dots, e_n) \in \{0, 1\}^n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = e_1, \dots, X_n = e_n) &= \prod_{k=0}^{n-1} f_0(e_1 + \dots + e_k, k - e_1 - \dots - e_k)^{e_{k+1}} \\ &\quad \times \{1 - f_0(e_1 + \dots + e_k, k - e_1 - \dots - e_k)\}^{1 - e_{k+1}}. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

CHAPITRE 3. ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UNE CHAÎNE DE MARKOV
PARAMÉTRÉE RENFORCÉE

Si nous notons \mathcal{T}_k l'ensemble des suites de longueur $k + 1$ et d'entiers i_0, \dots, i_k tels que $i_0 = 0$ et $i_q - i_{q-1} \in \{0, 1\}$ pour tout $q = 1, \dots, k$, il est possible d'écrire explicitement la loi de Z_k . Soit $i \leq k$ et $\mathcal{T}_k(i) = \{(i_0, \dots, i_k) \in \mathcal{T}_k : i_k = i\}$, alors

$$\mathbb{P}(Z_k = i) = \sum_{(i_0, \dots, i_k) \in \mathcal{T}_k(i)} \prod_{q=0}^{k-1} f_0(i_q, q - i_q)^{i_{q+1} - i_q} (1 - f_0(i_q, q - i_q))^{1 - i_{q+1} + i_q}. \quad (3.2.3)$$

L'indépendance des N chemins observés (définis dans la sous-section précédente) et la structure du modèle fournissent la forme multiplicative de la vraisemblance V_N en θ

$$V_N(\theta) = \prod_{j=1}^N \prod_{k=0}^{n-1} f(\theta, Z_k^j, k - Z_k^j)^{X_{k+1}^j} \{1 - f(\theta, Z_k^j, k - Z_k^j)\}^{1 - X_{k+1}^j}.$$

La log-vraisemblance L_N basée sur N chemins est donc donnée par

$$L_N(\theta) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ X_{k+1}^j \log f(\theta, Z_k^j, k - Z_k^j) + (1 - X_{k+1}^j) \log \{1 - f(\theta, Z_k^j, k - Z_k^j)\} \right\}.$$

Soit $\hat{\theta}_N$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ_0 , c'est-à-dire

$$\hat{\theta}_N = \arg \max_{\theta \in \Theta} L_N(\theta). \quad (3.2.4)$$

Posons $L(\theta) = N^{-1} \mathbb{E}[L_N(\theta)]$. Ainsi nous avons

$$L(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[f_0(Z_k, k - Z_k) \log f(\theta, Z_k, k - Z_k) + \{1 - f_0(Z_k, k - Z_k)\} \log \{1 - f(\theta, Z_k, k - Z_k)\} \right]. \quad (3.2.5)$$

Pour toute fonction g définie sur Θ , nous notons \dot{g} et \ddot{g} respectivement son gradient et sa matrice hessienne par rapport à θ et $\partial_s g$ sa dérivée partielle par rapport à la s -ième coordonnée θ_s de θ , pour $1 \leq s \leq d$.

Hypothèses 3.2.3 (Hypothèses de régularité pour la fonction de choix).

- (i) (Régularité) L'ensemble Θ est un compact de \mathbb{R}^d . Pour tout $0 \leq i \leq k \leq n - 1$, nous avons $f_0(i, k - i) > 0$ et la fonction $\theta \rightarrow f(\theta, i, k - i)$ est \mathcal{C}^2 sur Θ .
- (ii) (Identifiabilité) Si $f(\theta_1, i, k - i) = f(\theta_2, i, k - i)$ pour tout $0 \leq i \leq k \leq n - 1$, alors $\theta_1 = \theta_2$,
- (iii) Les vecteurs de dimension $n(n - 1)$ $\{\partial_s f(\theta_0, i, k - i), 0 \leq i \leq k \leq n - 1\}$, $1 \leq s \leq d$, sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^{n(n-1)}$.

Dans la partie précédente par “conditions de régularité”, nous faisons allusion aux hypothèses 3.2.3. Elles assurent l’unicité du maximum θ_0 de L et l’inversibilité de la matrice d’information de Fisher. Cette dernière est de la forme

$$\mathcal{I}_n(\theta_0) = -\ddot{L}(\theta_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k \frac{\mathbb{P}(Z_k = i)}{f_0(i, k-i) \bar{f}_0(i, k-i)} \dot{f}_0(i, k-i) \dot{f}_0(i, k-i)^t,$$

où A^t est la transposé de tout vecteur ou matrice A .

Soit $\mathcal{N}(m, \Sigma)$ la loi gaussienne de dimension d de moyenne m et de covariance Σ .

Théorème 3.2.4. *Si les hypothèses 3.2.3 - (i) - (ii) sont vérifiées, alors $\hat{\theta}_N$ est un estimateur consistant de θ_0 . Si de plus l’hypothèse 3.2.3-(iii) est vraie et si θ_0 est un point de l’intérieur de Θ , alors quand N tend vers ∞ ,*

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta_0) \rightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathcal{I}_n^{-1}(\theta_0)\right).$$

Ainsi l’EMV est consistant et asymptotiquement normal pour les urnes régulières. La démonstration de ce théorème se trouve à la fin de la section 3.5.1.

3.2.2 Estimateurs des moindres carrés pondérés

L’EMV est l’estimateur asymptotiquement efficace le plus connu. Nous verrons de plus par la suite que cet estimateur fonctionne bien pour estimer les paramètres des CMRP de fonction de choix paramétrée définie en (3.3.1). Il est donc nécessaire de justifier l’étude d’autres estimateurs basés sur les moindres carrés (EMCP).

Les arguments sont les mêmes que ceux qui motivent l’étude des estimateurs du minimum de contraste définis dans la section précédente. Du point de vue de la pratique et du calcul numérique, l’EMV est parfois difficile et long à calculer, ce qui peut rendre matériellement impossible toute méthode du Bootstrap. De plus, de par une implémentation facile et intuitive, les EMCP sont beaucoup utilisés par les praticiens et donnent souvent de bons résultats. Il nous est donc paru intéressant de vérifier théoriquement et en pratique la qualité d’estimateurs d’une telle nature.

Nous définissons maintenant ce qu’est un EMCP et débutons en proposant des estimateurs empiriques des valeurs de f_0 . Pour $0 \leq i \leq k \leq n-1$, notons

$$a_N(i, k-i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{\{Z_k^j = i\}}, \tag{3.2.6}$$

$$b_N(i, k-i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{\{Z_k^j = i\}} X_{k+1}^j. \tag{3.2.7}$$

La quantité $a_N(i, k - i)$ est la probabilité empirique que i boules rouges ont déjà été tirées au temps k et $b_N(i, k - i)$ la probabilité empirique qu'au temps $k + 1$ une boule rouge soit tirée et qu'au temps k , i boules rouges ont été tirées. Ainsi pour $0 \leq i \leq k \leq n - 1$, la probabilité $p_N(i, k - i)$ définie par

$$p_N(i, k - i) = \frac{b_N(i, k - i)}{a_N(i, k - i)}, \quad (3.2.8)$$

est la probabilité empirique conditionnelle qu'au temps $k + 1$ une boule rouge soit tirée sachant que i boules rouges ont déjà été tirées au temps k . Nous adoptons la convention $\frac{0}{0} = 0$ et notons $q_N(i, k - i) = 1 - p_N(i, k - i)$, pour tout $0 \leq i \leq k \leq n - 1$.

Définition 3.2.5. Soit w_N une fonction réelle définie sur $\mathbb{N}^R \times E$. Le contraste empirique W_N de moindres carrés pondérés de poids w_N est la fonction définie sur Θ qui à θ associe

$$W_N(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k w_N(i, k - i) \{p_N(i, k - i) - f(\theta, i, k - i)\}^2 \quad (3.2.9)$$

L'estimateur des moindres carrés pondérés (EMCP) de poids w_N , noté $\hat{\theta}_N^W$, est caractérisé par

$$\hat{\theta}_N^W = \arg \min_{\theta \in \Theta} W_N(\theta). \quad (3.2.10)$$

En d'autres termes, $\hat{\theta}_N^W$ est la valeur θ qui fournit le meilleur (au sens des moindres carrés pondérés) ajustement de la courbe $(i, k) \rightarrow f(\theta, i, k - i)$ aux points $((i, k), p_N(i, k - i))$, pour $0 \leq i \leq k \leq n - 1$. Si la paramétrisation est triviale (tautologique), c'est-à-dire si $\theta = \{f(i, k - i), 0 \leq i \leq k \leq n - 1\}$, alors $\hat{\theta}_N^W = p_N$ est le maximum de vraisemblance de f . Voir la remarque 3.5.2 dans la partie démonstrations 3.5.1.

Il est à noter qu'un estimateur des moindres carrés pondérés de poids w_N n'est autre qu'un estimateur du minimum de contraste de poids w_N et de forme $(x, y) \mapsto (x - y)^2$.

Théorème 3.2.6. Soit w_N une série de poids et $\hat{\theta}_N^W$ l'estimateur des moindres carrés pondérés par w_N . Supposons que les hypothèses 3.2.3 sont vérifiées et que les poids w_N convergent presque sûrement vers un poids positifs w_0 . Alors $\hat{\theta}_N^W$ est un estimateur consistant de θ_0 et $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N^W - \theta_0)$ converge faiblement (quand N tend vers ∞) vers une loi gaussienne de moyenne nulle et de matrice de covariance définie positive $\Sigma_n(\theta_0)$.

Ainsi sous les hypothèses 3.2.3, les EMCP sont consistants et asymptotiquement normaux pour les urnes régulières. La démonstration de ce théorème se trouve à la fin de la section 3.5.1.

CHAPITRE 3. ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UNE CHAÎNE DE MARKOV
PARAMÉTRÉE RENFORCÉE

Dans la suite, nous nous intéressons à l'EMCP de poids $w_N : (i, k - i) \mapsto a_N(i, k - i)$. Ce choix s'explique par le fait que l'EMCP de poids

$$w_N : (i, k - i) \mapsto \frac{a_N(i, k - i)}{p_N(i, k - i)q_N(i, k - i)} \quad (3.2.11)$$

est efficace asymptotiquement, c'est-à-dire que sa matrice de covariance limite $\Sigma_n(\theta_0)$ est égale à l'inverse de l'information de Fisher. Mais nous avons constaté que cet EMCP est numériquement instable pour l'urne de Deneubourg (voir section 3.3.5). En effet les probabilités empiriques p_N and q_N peuvent devenir très petites pour certains couples $(i, k - i)$ et faire exploser les poids. Par conséquent, au prix d'une perte d'efficacité asymptotique mais au profit de performances numériques bien meilleures, nous utilisons l'EMCP de poids $w_N : (i, k - i) \mapsto a_N(i, k - i)$.

Nous tenons également à montrer le lien asymptotique qu'il existe entre l'EMV et l'EMCP de poids défini en (3.2.11). En supposant que $0 < p_N(i, k - i) < 1$ pour tout $i \leq k$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}L_N(\theta) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{n-1} \{X_{k+1}^j \log f(\theta, Z_k^j, k - Z_k^j) + (1 - X_{k+1}^j) \log \bar{f}(\theta, Z_k^j, k - Z_k^j)\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k a_N(i, k - i) \{p_N(i, k - i) \log f(\theta, i, k - i) + q_N(i, k) \log \bar{f}(\theta, i, k - i)\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k a_N(i, k - i) \{p_N(i, k - i) \log p_N(i, k - i) + q_N(i, k - i) \log q_N(i, k - i)\} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k a_N(i, k - i) p_N(i, k - i) \log \left(1 + \frac{f(\theta, i, k - i) - p_N(i, k - i)}{p_N(i, k - i)}\right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k a_N(i, k - i) q_N(i, k - i) \log \left(1 - \frac{f(\theta, i, k) - p_N(i, k - i)}{q_N(i, k - i)}\right). \end{aligned}$$

Pour chaque $0 \leq i \leq k \leq n - 1$, la probabilité $p_N(i, k - i)$ converge presque sûrement vers $f_0(i, k - i)$ et $a_N(i, k - i)$ vers $\mathbb{P}(Z_k = i)$ lorsque N tend vers l'infini. Un développement de Taylor au second ordre donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}L_N(\theta) \sim -S_N(\theta) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k a_N(i, k - i) \{p_N(i, k - i) \log p_N(i, k - i) \\ + q_N(i, k - i) \log q_N(i, k - i)\}, \end{aligned}$$

avec

$$S_N(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k a_N(i, k - i) \frac{(p_N(i, k - i) - f(\theta, i, k - i))^2}{p_N(i, k - i)q_N(i, k - i)}. \quad (3.2.12)$$

Ainsi maximiser la vraisemblance est d'une certaine façon "équivalent" à minimiser $S_N(\theta)$.

3.3 Application : l'urne de Deneubourg

L'urne de Deneubourg est un modèle souvent utilisé par les éthologues pour modéliser le comportement d'une colonie de fourmis face à une bifurcation. L'un des objectifs de ce chapitre est de développer des outils statistiques permettant d'estimer les paramètres α et c à partir de données expérimentales.

Dans cette partie, nous appliquons l'EMV et l'EMCP à l'urne de Deneubourg. Dans un premier temps, nous définissons le modèle dans le cadre des CMPR simplifiées et établissons la consistance et l'asymptotique normalité des deux estimateurs pour un échantillon de chemins¹ indépendants de même longueur. Nous démontrons qu'il n'est pas possible d'estimer les paramètres à partir d'un seul chemin. Ensuite nous décrivons le comportement de ce modèle en fonction de ses paramètres. Et enfin nous appliquons les estimateurs à des simulations et commentons leur performance.

Le chapitre 5 utilise les deux estimateurs pour une étude expérimentale. De vraies fourmis ont été confrontées à une bifurcation à deux branches dont les choix sont modélisés par une urne de Deneubourg.

3.3.1 Régularité de l'urne

L'urne de Deneubourg déjà définie dans la partie 1.1 du chapitre 1 est une urne de fonction de choix définie sur $\Theta \times \mathbb{N}^2$ et par

$$f : ((\alpha, c), x, y) \mapsto \frac{(c+x)^\alpha}{(c+x)^\alpha + (c+y)^\alpha}, \quad (3.3.1)$$

où $x, y \in \mathbb{N}$ et $\Theta =]0, +\infty[^2$. Il existe un paramètre $\theta_0 = (\alpha_0, c_0) \in \Theta$ tel que

$$\mathbb{P}(X_n = 1 | \mathcal{F}_n) = f(\theta_0, Z_n, n - Z_n).$$

Ainsi l'urne contient initialement c_0 boules de chaque couleur. Lorsque $\alpha_0 = 1$, l'urne de Deneubourg devient une urne de Polya.

Les théorèmes 3.2.4 et 3.2.6 sont vérifiées pour l'urne de Deneubourg et nous en proposons une nouvelle écriture adaptée pour ce cas particulier.

Commençons par l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_N = (\hat{\alpha}_N, \hat{c}_N)$ définie par (3.2.4). La matrice de l'information de Fisher a l'expression suivante

$$\mathcal{I}_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(Z_k = i) f(\alpha, c, i, k-i) \bar{f}(\alpha, c, i, k-i) \mathcal{J}(\alpha, c, i, k-i), \quad (3.3.2)$$

1. Ici, le mot *chemin* désigne une série de choix, i.e. une série de 0 et de 1 qui retranscrit la succession de couleurs des boules tirées l'une après l'autre

où $\theta = (\alpha, c)$ et pour $0 \leq i \leq k \leq n - 1$,

$$\mathcal{J}(\alpha, c, i, k - i) = \begin{pmatrix} \log^2 \left(\frac{c+i}{c+k-i} \right) & \log \left(\frac{c+i}{c+k-i} \right) \frac{\alpha(k-2i)}{(c+i)(c+k-i)} \\ \log \left(\frac{c+i}{c+k-i} \right) \frac{\alpha(k-2i)}{(c+i)(c+k-i)} & \frac{\alpha^2(k-2i)^2}{(c+i)^2(c+k-i)^2} \end{pmatrix}. \quad (3.3.3)$$

Remarque 3.3.1. *Il est important de noter que la matrice de l'information de Fisher n'est pas diagonale. Ainsi l'EMV des paramètres α et c ne sont pas indépendants, c'est-à-dire qu'ils influent l'un sur l'autre. Cette corrélation se retrouve dans l'application des estimateurs sur des données de simulations ou d'expérience sur de vraies fournis.*

Théorème 3.3.2. *Soit Θ un compact inclus dans $(0, \infty)^2$ et qui contient (α_0, c_0) , alors l'EMV, noté $\hat{\theta}_N$, est consistant et asymptotiquement normal et efficace, i.e. $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta_0)$ converge faiblement vers $\mathcal{N}(0, \mathcal{I}_n^{-1}(\theta_0))$.*

La démonstration de ce théorème est dans la section 3.5.2. Comme mentionné précédemment, nous allons utiliser l'estimateur des moindres carrés pondérés défini par (3.2.5) pour une suite de poids w_N , tels que $w_N(i, k - i)$ converge presque sûrement vers $w_0(i, k - i) > 0$, pour tout $0 \leq k \leq n - 1$ et $0 \leq i \leq k$. Sa matrice de covariance limite s'écrit

$$\Sigma_n(\theta_0) = \ddot{W}^{-1}(\theta_0)H(\theta_0)\ddot{W}^{-1}(\theta_0) \quad (3.3.4)$$

avec

$$H(\theta_0) = 4 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k w_0(i, k - i)^2 \frac{f_0^3(i, k - i)\bar{f}_0^3(i, k - i)}{\mathbb{P}(Z_k = i)} \mathcal{J}(\alpha_0, c_0, i, k - i)$$

et

$$\ddot{W}(\theta_0) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k w_0(i, k - i) f_0^2(i, k - i)\bar{f}_0^2(i, k - i) \mathcal{J}(\alpha_0, c_0, i, k - i).$$

Théorème 3.3.3. *Soit Θ un compact inclus dans $(0, \infty)^2$, qui contient (α_0, c_0) , supposons que w_N converge presque sûrement vers $w_0 > 0$, alors l'estimateur des moindres carrés pondérés $\hat{\theta}_N^W$ est consistant et asymptotiquement normal, i.e. $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N^W - \theta_0)$ converge faiblement vers $\mathcal{N}(0, \Sigma_n(\theta_0))$.*

Si de plus le poids est égal à $w_N : (i, k - i) \mapsto p_N^{-1}q_N^{-1}a_N(i, k - i)$, alors $\hat{\theta}_N^W$ est asymptotiquement efficace.

Remarque 3.3.4. *Pour les deux exemples de poids étudiés $w_N : (i, k - i) \mapsto p_N^{-1}q_N^{-1}a_N(i, k - i)$ et $w_N : (i, k - i) \mapsto pa_N(i, k - i)$, la matrice de covariance $\Sigma_n(\theta_0)$ n'est pas diagonale. Ainsi les EMCP de α et c ne sont pas indépendants. Cette corrélation se retrouve dans l'application des estimateurs sur des données de simulations ou d'expérience sur de vraies fournis.*

3.3.2 Estimation à partir d'un seul chemin

Dans la remarque 3.2.2, nous avons déjà évoqué le fait que le caractère non homogène de notre chaîne de Markov rend éventuellement impossible l'estimation des paramètres à partir d'un seul chemin. Les résultats présentés dans cette section corroborent le fait que ce soit peut-être le cas pour l'urne de Deneubourg.

Une des caractéristiques principales de ce modèle est que pour $\alpha > 1$ il existe un temps fini à partir duquel une seule couleur est tirée. Il est alors intuitif qu'une procédure statistique basée sur seulement un chemin ne peut-être consistante. En effet une fois qu'une couleur est abandonnée, le chemin n'apporte plus aucune nouvelle information.

Dans cette logique il paraît alors étonnant que l'estimation à partir d'un seul chemin soit également inconsistante pour le cas $\alpha = 1$.

Soit ℓ_n la log-vraisemblance d'un seul chemin de longueur n et $\dot{\ell}_n$ son gradient.

Théorème 3.3.5.

- (i) Si $\alpha = 1$ et $c > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}_n(c) < \infty$.
- (ii) Si $\alpha < 1$, alors $n^{-1} \ell_n(\theta) \rightarrow -\log 2$.
- (iii) Si $\alpha > 1$, alors $\ell_n(\theta)$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire, lorsque $n \rightarrow \infty$.

La démonstration de ce théorème se trouve dans la section 3.5.2. Le résultat (i) signifie que quand $\alpha = 1$, l'information de Fisher est bornée, ce qui implique que le paramètre c ne peut-être estimé à partir d'un seul chemin. Cela signifie également que la longueur n de chaque chemin doit être choisi le plus grand possible (théoriquement infini) afin de minimiser la variance asymptotique des estimateurs.

Les résultats (ii) et (iii) ne suffisent pas pour montrer que l'EMV est inconsistant si $N = 1$ et $\alpha \neq 1$, mais il laissent peu d'espoir de le voir converger.

3.3.3 Comportement de l'urne de Deneubourg

Avant de nous lancer dans l'estimation sur simulation, cette sous-partie décrit le comportement de l'urne de Deneubourg en fonction de la valeur des paramètres α et c .

Nous rappelons les résultats principaux du théorème 1.1.1. Lorsque $\alpha \neq 1$, le comportement asymptotique de la proportion de boules rouges tirées dépend uniquement de la valeur de α et non de c . Si $\alpha > 1$, une couleur est sélectionnée, c'est-à-dire que toutes les boules tirées seront toutes de la même couleur après un temps aléatoire mais fini. Si $\alpha < 1$, les couleurs seront asymptotiquement tirées de façon équivalente, i.e. les proportions des

couleurs tendent vers $1/2$. Plus α est grand ou plus α est proche de 0 et plus rapidement ces effets seront visibles sur les chemins.

Remarque 3.3.6. *Pour éviter toute confusion, nous précisons le vocabulaire suivant :*

- choisir une couleur sera toujours employé pour qualifier l'action de tirer une boule de cette couleur,
- sélectionner une couleur désignera l'action de ne tirer que des boules de la couleur en question,
- abandonner une couleur sera l'action de ne plus tirer la couleur en question,
- égalisation des couleurs sera employé lorsque les proportions des boules de couleur présentes dans l'urne sont égales à $1/2$, c'est-à-dire lorsqu'il y a autant de boules rouges que de boules noires.

Lorsque $\alpha = 1$, le comportement asymptotique de Z_n/n est déterminé par c . Lorsque c croît de 0 à l'infini, la loi limite évolue continûment d'une loi à deux masses en 0 et 1 vers une loi à une masse en $1/2$. Pour illustrer ce point, la figure 3.1 montre la densité de la loi bêta de paramètre $(0.1, 0.1)$ d'une part et $(10, 10)$ d'autre part et voici quelques commentaires et

- Si $c < 1$, une forte asymétrie apparaît dans le choix des couleurs. Une couleur tend à être plus tirée que l'autre. De plus lorsque c tend vers 0, la densité de la loi bêta de paramètre (c, c) tend vers une distribution avec deux masses en 0 et 1. Ce cas limite correspond à la sélection d'une couleur, c'est-à-dire $\alpha > 1$.
- Si $c = 1$, la loi limite est uniforme sur $[0, 1]$.
- Si $c > 1$, Z_n/n est plus concentré autour de $1/2$. Lorsque c tend vers l'infini, la densité de la loi bêta de paramètre (c, c) tend vers une distribution avec une masse en $1/2$. Ce qui correspond au cas $\alpha < 1$, c'est-à-dire une égalisation des couleurs.

Pour l'urne de Deneubourg, les premiers tirages sont très importants. En effet, si une boule de couleur rouge est choisie en premier, alors le poids relatif de la couleur rouge pour le deuxième tirage est $\{(1+c)/c\}^\alpha$. Même si α est plus petit que 1, un c très petit donnera à la couleur rouge un poids relatif très grand devant 1 et ainsi les premiers tirages seront fortement attirés par la couleur rouge.

Tandis que si c est grand, même si α est plus grand que 1, le poids relatif de la couleur rouge s'éloigne peu de 1 après les premiers tirages et donc il sera difficile de lire une sélection de couleur, s'il y a lieu, sur les premiers pas d'un chemin.

Pour conclure, nous pouvons déjà deviner les difficultés que nous allons rencontrer dans l'estimation des paramètres α et c . Les paramètres peuvent contribuer tous les deux aux mêmes effets sur le modèle : favorisation d'une couleur ou égalisation des couleurs.

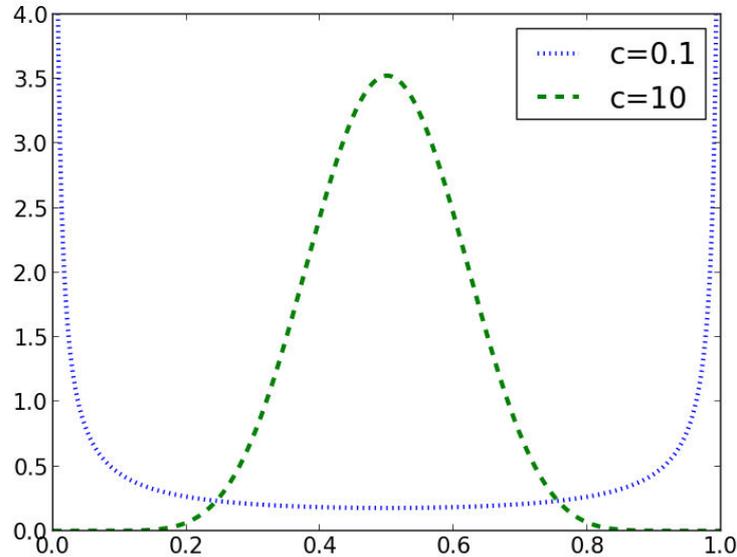


FIGURE 3.1 – Densité de la loi bêta de paramètre (c, c) , où $c = 0.1$ ou $c = 10$

Le paramètre α a une influence “asymptotique” en déterminant la limite de Z_n/n et le paramètre c a une influence à “court terme”, qui s’estompe lorsque le nombre de tirage augmente. Étant donné que nous observons seulement un nombre fini de tirages, notre travail d’inférence sera perturbé, que les paramètres contribuent aux mêmes effets ou au contraire aient des effets compétitifs.

3.3.4 Estimation de α en tant qu’indice de queue

Si $\alpha > 1$, l’urne sélectionne une couleur : après un temps fini, une seule des deux couleurs est tirée. Le paramètre α devient alors l’indice de queue de la distribution de Q_∞ , le nombre total de boules tirées de la couleur non sélectionnée (rappelons également que T_∞ le temps du dernier tirage d’une boule de la couleur non sélectionnée). En effet,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\alpha-1} \mathbb{P}(Q_\infty > x) = \frac{Q^*}{\alpha - 1},$$

(cf. la limite (1.1.2) du théorème 1.1.1).

Vient alors naturellement l’idée d’estimer α comme un indice de queue. Étant donné que cet indice ne dépend que de α et non de c , cette idée semble raisonnable.

Toutefois, nous n’avons pas accès à Q_∞ , car nous observons seulement des chemins de longueur finie. Pour le chemin j , nous estimons alors Q_∞ par $Q_n = \min(Z_n, n - Z_n)$.

Par définition, $Q_n \leq n/2$ et $Q_n \leq Q_\infty$. En utilisant les résultats du théorème 1.1.1, la probabilité d'erreur peut être bornée de la façon suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Q_n < Q_\infty) &= \mathbb{P}(Q_n < Q_\infty, T_\infty > n) + \mathbb{P}(Q_n < Q_\infty, T_\infty \leq n) \\ &= \mathbb{P}(T_\infty > n) + \mathbb{P}(Q_n < Q_\infty, T_\infty \leq n) \\ &\leq \mathbb{P}(T_\infty > n) + \mathbb{P}(Q_\infty > n/2) = O\left(n^{-(\alpha+1/\alpha-2)}\right). \end{aligned}$$

Plus α est proche de 1 et plus la probabilité d'erreur est grande. Des simulations révèlent que cette probabilité devient relativement petite lorsque $\alpha > 1.5$. Nous avons donc essayé d'estimer α comme un indice de queue en supposant que nous observions des données non censurées, c'est-à-dire des chemins infinis.

L'estimateur d'indice de queue le plus connu est l'estimateur de Hill (cf. [Res07]) et nous l'avons implémenté comme le suggère H. Drees et al. dans l'article [DRDH00].

Nos essais sur simulation n'ont rien donné. Nous ne retrouvons pas les vraies valeurs de α à partir des chemins simulés et avons décidé de pas présenter ces résultats. Toutefois nous pensons que cette méthode mérite d'être améliorée et sera l'objet de recherches futures pour estimer α plus efficacement et sans l'influence de c .

3.3.5 Estimation à partir de simulations

Le chapitre 5 étudie le comportement d'une colonie de fourmis confrontées à une bifurcation à deux branches. Lors d'une expérience, cent fourmis sont introduites une par une dans un réseau en Y. Chacune des fourmis choisit une des deux branches du Y et la renforce par son passage. Cette expérience a été répliquée environ 50 fois et est modélisée par une urne de Deneubourg. À partir des données expérimentales, nous estimons les paramètres α et c avec l'EMV $\hat{\theta}_N$ défini en (3.2.4) et l'EMCP $\hat{\theta}_N^W$ de poids $w_N : (i, k - i) \rightarrow a_N(i, k - i)$ défini en (3.2.5).

La partie présente propose au préalable d'éprouver la qualité des deux estimateurs. Le principe est de répliquer un grand nombre de fois $N = 50$ chemins indépendants de longueur $n = 100$ d'une urne de Deneubourg de paramètres α et c (cette forme d'échantillon correspond à la forme des données expérimentales du chapitre 5). Pour chaque réplique, nous avons estimé α et c et comparé ces valeurs estimées aux vraies valeurs de paramètres.

Nous avons considéré plusieurs valeurs de paramètres (α, c) :

- des valeurs arbitraires de α et c entre 0.5 et 2,
- les valeurs $(\alpha, c) = (1.1, 3)$ et $(\alpha, c) = (1.1, 7)$, qui sont les valeurs estimées à partir des expériences décrites dans le chapitre 5,

- les valeurs $(\alpha, c) = (2, 20)$ et $(\alpha, c) = (2.6, 60)$, qui sont des valeurs de paramètres trouvées dans la littérature éthologique (cf. chapitre 1 ou les articles [DAGP90] et [GGC⁺09]).

Pour chaque couple de paramètres (α, c) , nous avons évalué

- *dans quelle mesure les estimateurs sont proches des vraies valeurs.* Pour ce faire, nous avons simulé 1000 échantillons de $N = 50$ chemins indépendants de longueur $n = 100$ d'une urne de Deneubourg de paramètre (α, c) . Pour chacun de ces échantillons, nous avons calculé l'EMV et l'EMCP de poids $w_N : (i, k - i) \rightarrow a_N(i, k - i)$ et avons constaté à quel point ils sont éloignés des vraies valeurs de paramètres.
- *la confiance que l'on peut avoir dans l'estimation.* Nous avons simulé un échantillon de $N = 50$ chemins indépendants de longueur $n = 100$ d'une urne de Deneubourg de paramètre (α, c) . Ensuite nous avons calculé des intervalles de confiance des deux estimateurs pour les deux paramètres avec la méthode du Bootstrap.

Nous nous sommes intéressés à l'EMCP de poids $w_N : (i, k - i) \rightarrow a_N p_N^{-1} q_N^{-1}(i, k - i)$, qui est asymptotiquement efficace et donc théoriquement meilleur que l'EMCP de poids $w_N : (i, k - i) \rightarrow a_N(i, k - i)$. Mais cet estimateur fournit des estimations de α sévèrement biaisées et des estimations de c proche de 0 avec une très faible dispersion. Cette instabilité numérique provient du fait que les probabilités empiriques p_N et q_N s'annulent fréquemment et ainsi certains poids des moindres carrés sont infinis. Nous avons donc décidé de ne pas reporter les résultats de cet estimateur.

Une remarque importante pour les calculs numériques est que l'urne de Deneubourg est un modèle symétrique, c'est-à-dire que $f(\alpha, c, k - i, i) = 1 - f(\alpha, c, i, k - i)$. Nous avons exploité cette propriété pour améliorer la performance numérique de l'EMCP de poids $w_N : (i, k - i) \rightarrow a_N(i, k - i)$. Nous définissons une nouvelle probabilité empirique \tilde{p}_N par

$$\tilde{p}_N(i, k - i) = \frac{b_N(i, k - i) + a_N(k - i, i) - b_N(k - i, i)}{a_N(i, k - i) + a_N(k - i, i)}, \quad (3.3.5)$$

pour tout $0 \leq i \leq k \leq n - 1$. Nous avons alors une nouvelle définition de l'EMCP de poids $w_N : (i, k - i) \rightarrow a_N(i, k - i)$

$$\hat{\theta}_N^W = \arg \min_{\alpha, c} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (a_N(i, k - i) + a_N(k - i, i)) \left\{ f(\alpha, c, i, k - i) - \tilde{p}_N(i, k - i) \right\}^2. \quad (3.3.6)$$

La démonstration de cette égalité se trouve dans la partie 3.5.2. Comme $p_N(i, k - i)$, la probabilité empirique $\tilde{p}_N(i, k - i)$ est un estimateur consistant de $f_0(i, k - i)$, qui de plus se base sur deux fois plus de données. Dans toute cette étude nous utilisons la définition (3.3.6) pour estimer α et c avec l'EMCP de poids $w_N : (i, k - i) \rightarrow a_N(i, k - i)$.

Dorénavant par souci de brièveté, lorsque nous parlerons de l'EMCP, nous désignerons de l'EMCP de poids $w_N : (i, k - i) \rightarrow a_N(i, k - i)$.

Performance théorique Nous commençons par donner les valeurs des écart-types théoriques de l'EMV et l'EMCP pour chacune des valeurs de (α, c) choisies. Ces écart-types sont calculés à partir des coefficients de la matrice de covariance de chacun des deux estimateurs.

Plus précisément, pour une valeur de (α, c) donnée, notons $\sigma_\alpha^{\text{EMV}}$ (resp. σ_c^{EMV}) la racine carré du premier (resp. second) coefficient diagonal de l'inverse de l'information de Fisher, dont la formule explicite est donnée par (3.3.2). L'écart-type de l'EMV de α vaut $\sigma_\alpha^{\text{EMV}}/\sqrt{N}$ et l'écart-type de l'EMV de c vaut $\sigma_c^{\text{EMV}}/\sqrt{N}$.

De la même manière, pour une valeur de (α, c) donnée, notons $\sigma_\alpha^{\text{EMCP}}$ (resp. σ_c^{EMCP}) la racine carré du premier (resp. second) coefficient diagonal de la matrice de covariance, dont la formule explicite est définie en (3.3.4). L'écart-type de l'EMCP de α vaut $\sigma_\alpha^{\text{EMCP}}/\sqrt{N}$ et l'écart-type de l'EMCP de c vaut $\sigma_c^{\text{EMCP}}/\sqrt{N}$.

Ces écart-types théoriques sont reportés dans le tableau 3.1 et sont tracés dans les figures 3.2 et 3.3 comme fonction de α pour quelques valeurs de c fixées. Nous faisons quelques commentaires :

- **La variance asymptotique de l'EMV est plus petite que celle de l'EMCP.**
Ceci est conforme à la théorie : l'inverse de l'information de Fisher est la meilleure variance possible. Toutefois les variances de l'EMCP ne sont jamais plus de quatre fois supérieures à celles de l'EMV. De plus les variances des deux estimateurs ont globalement un comportement similaire.
- **L'estimation de α est meilleure lorsque les deux estimateurs ne participent pas au même effet.** Les variances théoriques des estimateurs de α sont plus petites, lorsque les deux estimateurs ne participent pas au même effet ($\alpha > 1$ et $c > 1$ ou $\alpha < 1$ et $c < 1$). La pire variance reportée est lorsque α est grand et c petit, ce qui correspond à la contribution des deux paramètres pour la sélection d'une couleur. La variance semble tendre vers l'infini lorsque α tend aussi vers l'infini.
- **L'estimation de c est meilleure lorsque la vraie valeur de c est proche de 1.**
Les variances théoriques des estimateurs de c croissent avec c et semblent tendre vers l'infini lorsque c tend vers l'infini ou 0.

Les deux dernières remarques peuvent être expliquées par le fait que tous les coefficients de la matrice de l'information de Fisher tendent vers 0 lorsque α tend vers 0, mis à part justement celui de α (cf. l'équation (3.3.3)).

La conclusion de ses résultats est que l'estimation des paramètres est théoriquement meilleure lorsque les paramètres ne participent pas aux mêmes effets et lorsque la vraie

valeur de c reste raisonnablement proche de 1.

Performance numérique Dans les tableaux 3.2 et 3.3, nous reportons la performance des estimateurs sur les simulations évoquées précédemment. Pour évaluer cette performance, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne (MSE, sigle venant de l'anglais) des deux estimateurs pour chacune des valeurs de α et c choisies.

Par exemple, considérons K simulations d'une urne de paramètre (α, c) . Notons $\hat{\alpha}_N^j$ l'EMV du paramètre α calculé à partir des données de la j -ème simulation. L'erreur quadratique moyenne de l'EMV de α , notée $\text{MSE}_\alpha^{\text{EMV}}$, est égale à

$$\text{MSE}_\alpha^{\text{EMV}} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K (\hat{\alpha}_N^j - \alpha)^2 .$$

Nous définissons de la même façon l'erreur quadratique moyenne quadratique de l'EMV de c , notée $\text{MSE}_c^{\text{EMV}}$ et les erreurs quadratiques moyennes de l'EMCP de α et c , notées respectivement $\text{MSE}_\alpha^{\text{EMCP}}$ et $\text{MSE}_c^{\text{EMCP}}$.

L'erreur quadratique moyenne évalue donc l'erreur faite par les estimateurs calculés numériquement. Le tableau 3.2 reporte les racines carrées des MSE des estimateurs pour les différentes valeurs de (α, c) choisies. La MSE estime la variance théorique, ainsi comparer les tableaux 3.1 et 3.2 permet de constater si les estimateurs sont aussi performants que la théorie le prévoit.

Nous rappelons que 1000 échantillons de $N = 50$ chemins de longueur $n = 100$ ont été simulés. En raison de son temps de calcul long, l'EMV n'est évalué que sur $K = 500$ échantillons. En revanche, l'EMCP a été calculé sur $K = 1000$ échantillons.

- **Les MSE ont les mêmes caractéristiques que les variances théoriques.** Les MSE explosent lorsque c est grand. Elles sont globalement plus grandes lorsque les deux paramètres contribuent à une sélection de chemin et le sont systématiquement lorsqu'ils participent à une égalisation des couleurs. Ces variations de la MSE sont bien plus accentuées pour l'EMCP que pour l'EMV.
- **Les MSE sont plus grandes que les variances théoriques.** Cette différence est en partie due à la dissymétrie de la distribution des valeurs des estimations. Les deux estimateurs ont tendance à surestimer plutôt que sous-estimer les paramètres. Pour illustrer ce point, le tableau 3.3 montre le premier et le neuvième décile empirique de la distribution des estimations du paramètre α d'une part (D_1^α et D_9^α) et du paramètre c d'autre part (D_1^c et D_9^c) pour les pires cas des tableaux 3.1 et 3.2.

La variation de la performance des estimateurs en fonction de la vraie valeur des paramètres provient peut-être d'un problème d'identifiabilité. Par exemple une apparente

sélection de couleur peut entraîner deux types différents d'estimation : un c estimé très petit et α inférieur à 1 ou bien un c estimé peu éloigné de 1 et un α bien supérieur à 1.

Cette perte d'efficacité peut également s'expliquer numériquement. En effet, dans le cas d'une sélection de couleur rapide (les deux paramètres favorisent une couleur), beaucoup des poids de l'EMCP sont nuls et les moindres carrés doivent se contenter de très peu de points pour ajuster la courbe aux données. L'EMV n'est pas concerné par ce problème. Dans le cas où les deux paramètres contribuent à l'égalisation des couleurs, la probabilité de choisir une des deux couleurs converge très rapidement vers $1/2$ et donc les chemins apportent moins d'information, ce qui affecte les deux estimateurs.

Régions de confiance Nous allons calculer l'intervalle de confiance de l'EMV et l'EMCP pour un échantillon de $N = 50$ chemins indépendants de longueur $n = 100$ d'une urne de Deneubourg de paramètres α et c . Lorsque l'on analyse un échantillon de données expérimentales, comme dans le chapitre 5, nous ne connaissons pas la valeur de α et c . Nous ne pouvons donc pas accéder à la variance des estimations grâce aux équations (3.3.2) et (3.3.4) et donc en déduire des intervalles de confiance.

Une solution est d'utiliser la méthode du Bootstrap. Nous avons donc voulu constater de l'efficacité de cette méthode à estimer l'intervalle de confiance des estimateurs pour des simulations d'urnes de Deneubourg. Expliquer simplement la méthode du Bootstrap permet de simuler K échantillons artificiels à partir d'un seul échantillon. Par exemple, à partir de l'expérience du chapitre 5, nous créons artificiellement K expériences pour lesquelles nous pouvons estimer K fois chacun des estimateurs et donc évaluer leur dispersion.

En pratique, nous avons simulé pour chaque valeur de paramètre (α, c) choisie un échantillon de $N = 50$ urnes de Deneubourg de longueur $n = 100$. À partir de cet échantillon, nous avons généré un échantillon Bootstrap de $K = 500$ échantillons de $N = 50$ urnes de Deneubourg de longueur $n = 100$. Nous avons calculé l'EMV et l'EMCP pour chacun des 500 échantillons artificiels et nous en avons déduit les intervalles de confiance Bootstrap à pivot à 95% pour les deux estimateurs et les deux paramètres. Voir la section 8 page 107 du livre [Was04] pour plus de détails sur la méthode. Ces intervalles sont reportés dans le tableau 3.4.

Pour vérifier la qualité de l'estimation de la dispersion par la méthode Bootstrap, nous avons comparé dans le tableau 3.4 les intervalles de confiance Bootstrap aux intervalles de confiance de Monte-Carlo. C'est-à-dire que pour chaque valeur de paramètre (α, c) , nous avons simulé 500 échantillons de $N = 50$ chemins indépendants de longueur $n = 100$ et avons calculé l'EMV et l'EMCP pour chacun de ces échantillons. Les intervalles de confiance de Monte-Carlo à 95% sont les intervalles de confiance à 95% de la distribution

des valeurs des estimateurs.

Une fois encore l'EMV prouve sa qualité en présentant pour le paramètre α des intervalles de confiance Bootstrap et Monte-Carlo très proches. Comme auparavant les résultats concernant c sont moins bons : les intervalles sont plus étendus à droite, mais contiennent toutefois la vraie valeur de c . La méthode du Bootstrap fonctionne donc bien pour évaluer les intervalles de confiance des estimateurs des paramètres de l'urne de Deneubourg.

Corrélation des paramètres Un aspect important des deux estimateurs est leur corrélation asymptotique, qui est démontrée par le caractère non diagonal de leurs matrices de covariance (cf. remarques 3.3.1 et 3.3.4). Cette corrélation se retrouve dans les valeurs des estimations.

Pour le constater, nous avons simulé 500 échantillons de $N = 50$ chemins de longueur $n = 100$ d'une urne de Deneubourg de paramètres $\alpha = 1.1$ et $c = 7$. Pour chaque échantillon, nous avons estimé l'EMV et l'EMCP. La figure 3.4 représente les 500 estimations dans le plan (c, α) . C'est-à-dire que nous avons représenté les 500 estimations de α en fonction des estimations de c correspondantes par l'EMV (graphe du haut) et par l'EMCP (graphe du bas). La forme du nuage montre que les estimateurs de α et c sont positivement corrélés.

CHAPITRE 3. ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UNE CHAÎNE DE MARKOV
PARAMÉTRÉE RENFORCÉE

(α, c)	$\sigma_{\alpha}^{\text{EMV}}/\sqrt{N}$	$\sigma_{\alpha}^{\text{EMCP}}/\sqrt{N}$	$\sigma_c^{\text{EMV}}/\sqrt{N}$	$\sigma_c^{\text{EMCP}}/\sqrt{N}$
(0.5, 0.5)	$5.02 \cdot 10^{-2}$	$6.25 \cdot 10^{-2}$	$2.54 \cdot 10^{-1}$	$3.17 \cdot 10^{-1}$
(0.5, 1.0)	$6.45 \cdot 10^{-2}$	$8.56 \cdot 10^{-2}$	$5.98 \cdot 10^{-1}$	$7.94 \cdot 10^{-1}$
(0.5, 2.0)	$8.80 \cdot 10^{-2}$	$1.29 \cdot 10^{-1}$	1.46	2.14
(1.0, 0.5)	$3.81 \cdot 10^{-2}$	$4.97 \cdot 10^{-2}$	$1.18 \cdot 10^{-1}$	$1.59 \cdot 10^{-1}$
(1.0, 1.0)	$4.34 \cdot 10^{-2}$	$5.91 \cdot 10^{-2}$	$2.52 \cdot 10^{-1}$	$3.49 \cdot 10^{-1}$
(1.0, 2.0)	$5.83 \cdot 10^{-2}$	$8.72 \cdot 10^{-2}$	$5.93 \cdot 10^{-1}$	$8.91 \cdot 10^{-1}$
(1.5, 0.5)	$7.83 \cdot 10^{-2}$	$1.28 \cdot 10^{-1}$	$1.23 \cdot 10^{-1}$	$1.87 \cdot 10^{-1}$
(1.5, 1.0)	$6.69 \cdot 10^{-2}$	$1.08 \cdot 10^{-1}$	$2.10 \cdot 10^{-1}$	$3.31 \cdot 10^{-1}$
(1.5, 2.0)	$6.88 \cdot 10^{-2}$	$1.15 \cdot 10^{-1}$	$4.17 \cdot 10^{-1}$	$6.88 \cdot 10^{-1}$
(2.0, 0.5)	$1.94 \cdot 10^{-1}$	$4.18 \cdot 10^{-1}$	$1.64 \cdot 10^{-1}$	$2.86 \cdot 10^{-1}$
(2.0, 1.0)	$1.35 \cdot 10^{-1}$	$2.87 \cdot 10^{-1}$	$2.39 \cdot 10^{-1}$	$4.43 \cdot 10^{-1}$
(2.0, 2.0)	$1.12 \cdot 10^{-1}$	$2.31 \cdot 10^{-1}$	$4.07 \cdot 10^{-1}$	$7.72 \cdot 10^{-1}$
(2.0, 20.0)	$3.55 \cdot 10^{-1}$	1.29	7.94	$2.88 \cdot 10^1$
(2.6, 60.0)	1.66	$1.23 \cdot 10^1$	$5.78 \cdot 10^1$	$4.32 \cdot 10^2$
(1.1, 3.0)	$7.20 \cdot 10^{-2}$	$1.19 \cdot 10^{-1}$	$8.99 \cdot 10^{-1}$	1.48
(1.1, 7.0)	$1.38 \cdot 10^{-1}$	$2.95 \cdot 10^{-1}$	2.97	6.33

TABLE 3.1 – Écart-types théoriques des deux estimateurs EMV et EMCP des paramètres α et c pour $N = 50$ chemins de longueur 100

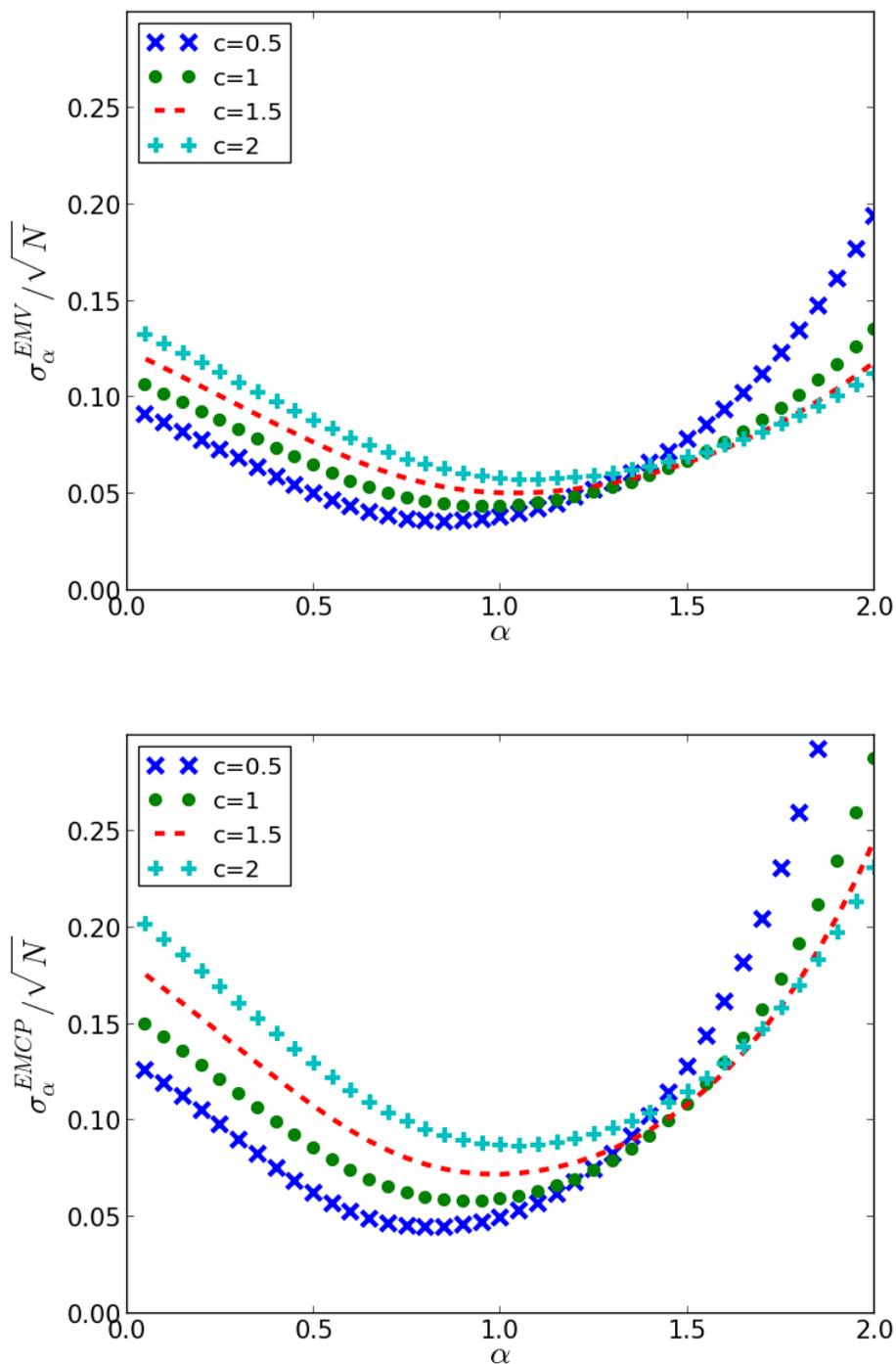


FIGURE 3.2 – Écart-types théoriques de l'EMV (en haut) et l'EMCP (en bas) du paramètre α pour $N = 50$ chemins de longueur $n = 100$ en fonction de α dans $]0, 2[$ et pour différentes valeurs fixées de c .

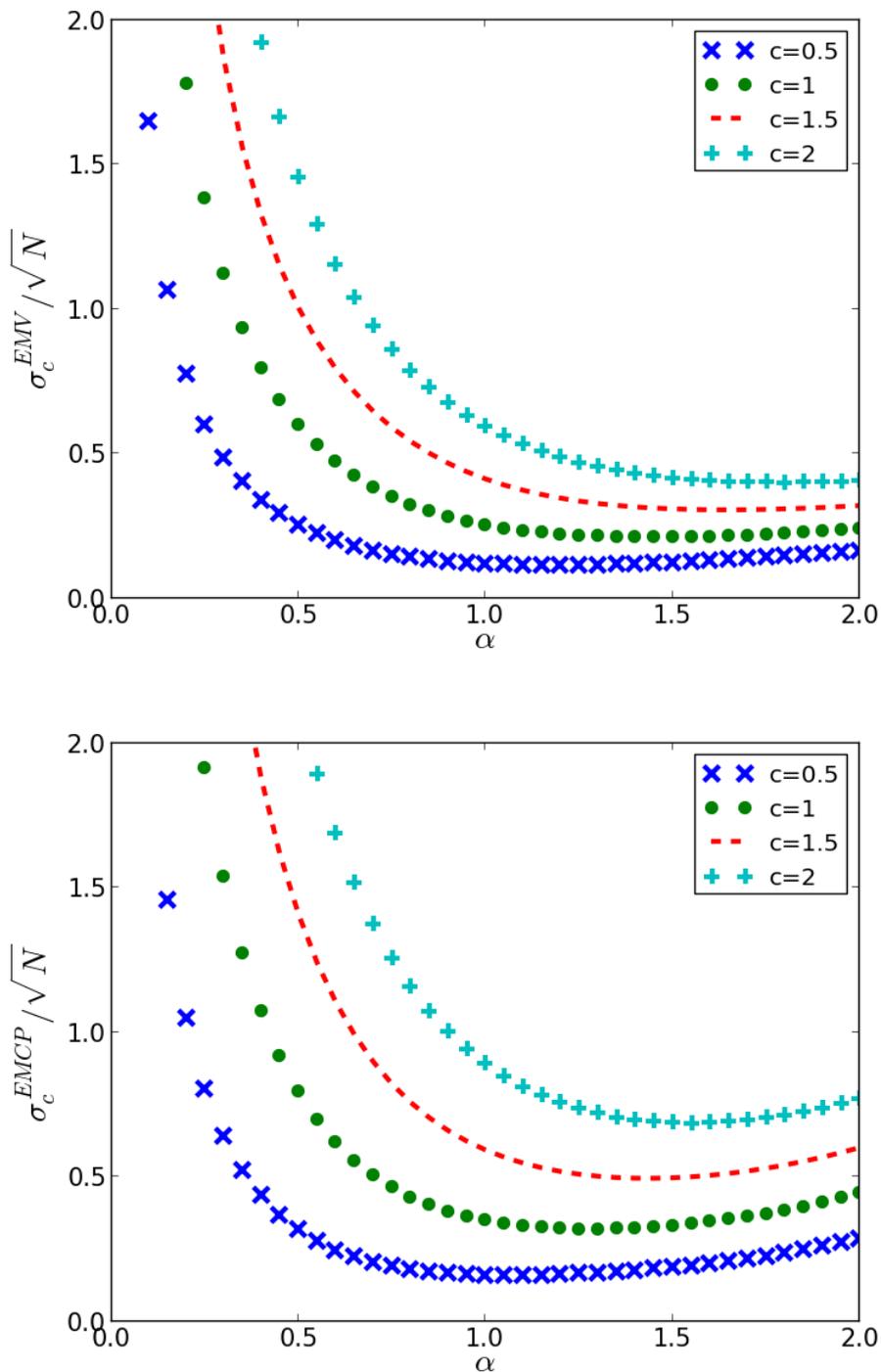


FIGURE 3.3 – Écart-types théoriques de l'EMV (en haut) et l'EMCP (en bas) du paramètre c pour $N = 50$ chemins de longueur $n = 100$ en fonction de α dans $]0, 2]$ et pour différentes valeurs fixées de c .

CHAPITRE 3. ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UNE CHAÎNE DE MARKOV
PARAMÉTRÉE RENFORCÉE

(α, c)	$\sqrt{\text{MSE}_\alpha^{\text{EMV}}}$	$\sqrt{\text{MSE}_\alpha^{\text{EMCP}}}$	$\sqrt{\text{MSE}_c^{\text{EMV}}}$	$\sqrt{\text{MSE}_c^{\text{EMCP}}}$
(0.5, 0.5)	$5.60 \cdot 10^{-2}$	$7.60 \cdot 10^{-2}$	$5.41 \cdot 10^{-1}$	$5.88 \cdot 10^{-1}$
(0.5, 1.0)	$7.39 \cdot 10^{-2}$	$1.02 \cdot 10^{-1}$	1.37	1.69
(0.5, 2.0)	$1.69 \cdot 10^{-1}$	3.56	6.51	$2.95 \cdot 10^2$
(1.0, 0.5)	$3.90 \cdot 10^{-2}$	$6.25 \cdot 10^{-2}$	$1.24 \cdot 10^{-1}$	$2.10 \cdot 10^{-1}$
(1.0, 1.0)	$4.98 \cdot 10^{-2}$	$7.34 \cdot 10^{-2}$	$3.13 \cdot 10^{-1}$	$4.73 \cdot 10^{-1}$
(1.0, 2.0)	$5.80 \cdot 10^{-2}$	$9.38 \cdot 10^{-2}$	$6.49 \cdot 10^{-1}$	1.11
(1.5, 0.5)	$7.85 \cdot 10^{-2}$	$1.94 \cdot 10^{-1}$	$1.30 \cdot 10^{-1}$	$2.46 \cdot 10^{-1}$
(1.5, 1.0)	$6.59 \cdot 10^{-2}$	$1.51 \cdot 10^{-1}$	$2.14 \cdot 10^{-1}$	$4.03 \cdot 10^{-1}$
(1.5, 2.0)	$7.24 \cdot 10^{-2}$	$1.39 \cdot 10^{-1}$	$4.59 \cdot 10^{-1}$	$7.84 \cdot 10^{-1}$
(2.0, 0.5)	$2.61 \cdot 10^{-1}$	$2.69 \cdot 10^1$	$1.98 \cdot 10^{-1}$	$1.41 \cdot 10^1$
(2.0, 1.0)	$1.42 \cdot 10^{-1}$	9.85	$2.60 \cdot 10^{-1}$	9.88
(2.0, 2.0)	$1.17 \cdot 10^{-1}$	$3.54 \cdot 10^{-1}$	$4.34 \cdot 10^{-1}$	1.01
(2.0, 20.0)	$5.88 \cdot 10^{-1}$	1.24	$1.42 \cdot 10^1$	$3.24 \cdot 10^1$
(2.6, 60.0)	8.64	$3.59 \cdot 10^1$	$3.25 \cdot 10^2$	$1.42 \cdot 10^3$
(1.1, 3.0)	$7.80 \cdot 10^{-2}$	$1.13 \cdot 10^{-1}$	1.11	2.01
(1.1, 7.0)	$1.74 \cdot 10^{-1}$	$2.83 \cdot 10^{-1}$	4.33	7.58

TABLE 3.2 – Racine carré de l'erreur quadratique moyenne à partir de 500 échantillons simulés pour l'EMV et à partir de 1000 échantillons simulés pour l'EMPC. Les échantillons comportent tous $N = 50$ chemins de longueur $n = 100$.

	(α, c)	D_1^α	D_9^α	D_1^c	D_9^c
EMV	(0.5, 2.0)	0.39	0.65	0.83	5.65
	(2.0, 0.5)	1.79	2.35	0.33	0.82
EMCP	(0.5, 2.0)	0.34	0.70	0.45	8.29
	(2.0, 0.5)	1.60	3.73	0.24	1.57

TABLE 3.3 – Premiers et neuvièmes déciles empiriques de la distribution empirique des paramètres α et c à partir de 500 échantillons pour l'EMV et à partir de 1000 échantillons pour l'EMPC.

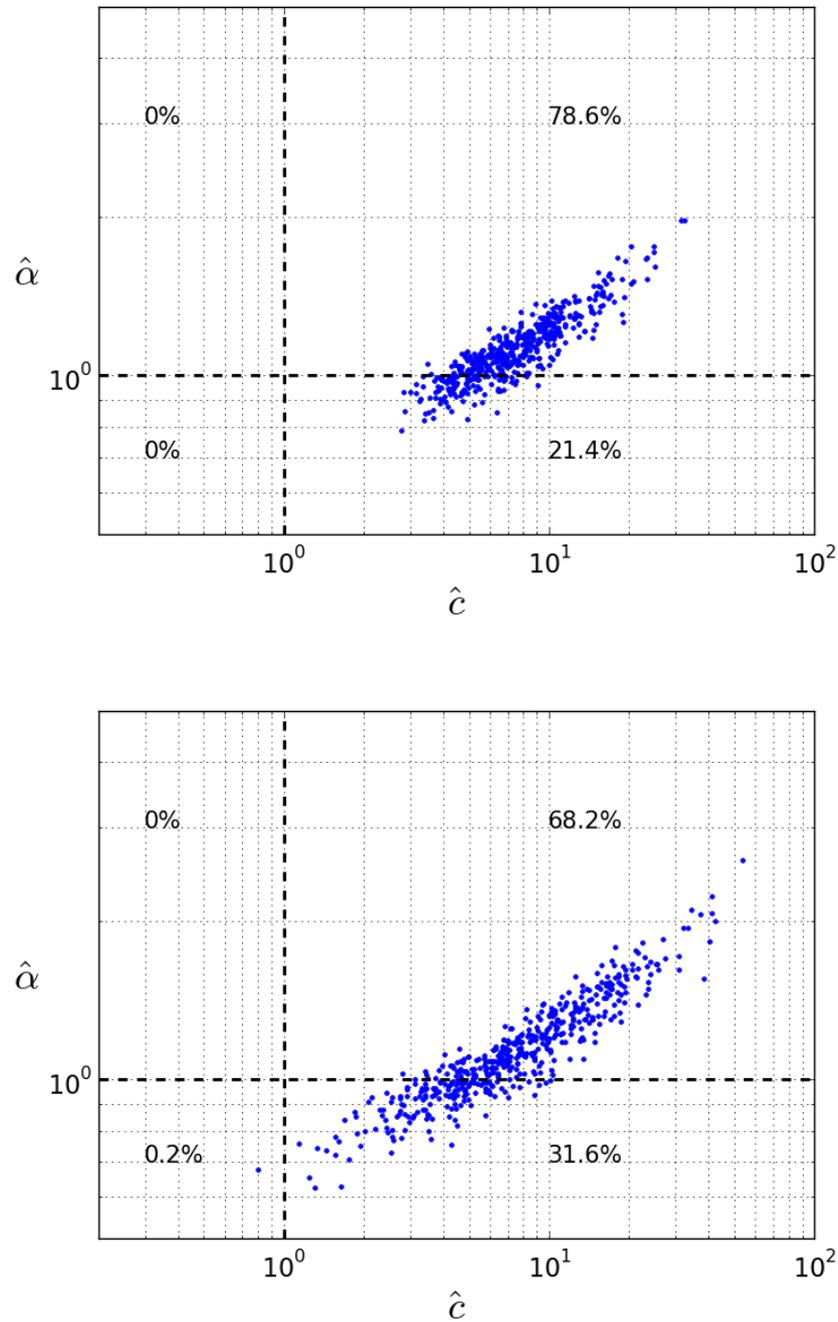


FIGURE 3.4 – Nuages de points des 500 couples $(\hat{c}_N^{EMV}, \hat{\alpha}_N^{EMV})$ (en haut) et des 500 couples $(\hat{c}_N^{EMCP}, \hat{\alpha}_N^{EMCP})$ (en bas) obtenus de 500 échantillons simulés de $N = 50$ chemins de longueur $n = 100$ d'une urne de Deneubourg de paramètres $\alpha = 1.1$ et $c = 7$. Les lignes en tiret matérialisent les transitions de phases entre les quatre états du modèle. Les chiffres sont les pourcentages de points présents dans chacun des quatre états.

CHAPITRE 3. ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UNE CHAÎNE DE MARKOV
PARAMÉTRÉE RENFORCÉE

	(α, c)	IC 95% pour α		IC 95% pour c	
		Monte-Carlo	Bootstrap	Monte-Carlo	Bootstrap
EMV	(1.0, 1.0)	(0.91, 1.11)	(0.91, 1.09)	(0.62, 1.88)	(0.75, 1.82)
	(1.0, 2.0)	(0.90, 1.13)	(0.92, 1.17)	(1.20, 3.71)	(1.17, 3.70)
	(1.5, 1.0)	(1.38, 1.65)	(1.34, 1.57)	(0.68, 1.51)	(0.42, 1.07)
	(1.5, 2.0)	(1.38, 1.66)	(1.42, 1.74)	(1.39, 3.06)	(1.55, 3.63)
-----	(2.0, 20)	(1.50, 3.38)	(1.90, 5.10)	(9.90, 55.5)	(19.1, 94.4)
	(2.6, 60)	(1.23, 29.3)	(1.12, 38.7)	(15.9, 1053)	(19.9, 1637)
	(1.1, 3.0)	(0.98, 1.29)	(1.01, 1.23)	(1.81, 6.22)	(1.34, 3.99)
	(1.1, 7.0)	(0.89, 1.53)	(0.75, 1.44)	(3.5, 19.16)	(3.05, 19.8)
EMCP	(1.0, 1.0)	(0.87, 1.16)	(0.89, 1.14)	(0.49, 2.17)	(0.57, 2.07)
	(1.0, 2.0)	(0.84, 1.22)	(0.80, 1.18)	(0.87, 5.13)	(0.56, 3.49)
	(1.5, 1.0)	(1.26, 1.83)	(1.24, 1.64)	(0.47, 2.02)	(0.29, 1.20)
	(1.5, 2.0)	(1.26, 2.26)	(1.41, 2.10)	(0.94, 3.82)	(1.71, 6.70)
-----	(2.0, 20)	(1.26, 4.85)	(1.06, 3.99)	(5.92, 88.1)	(2.76, 69.3)
	(2.6, 60)	(0.74, 88.3)	(0.24, 87.7)	(3.86, 3754)	(0.17, 4132)
	(1.1, 3.0)	(0.89, 1.41)	(1.06, 1.44)	(1.21, 8.72)	(1.70, 6.76)
	(1.1, 7.0)	(0.75, 1.83)	(0.55, 2.56)	(1.68, 30.3)	(1.48, 66.0)

TABLE 3.4 – Intervalles de confiance de Monte-Carlo à 95% basés sur 500 échantillons de $N = 50$ chemins de longueur $n = 100$ et intervalles de confiance Bootstrap à 95% basés sur un échantillon de 50 chemins de longueur 100

3.4 Conclusion

L'idée fondatrice de ce chapitre est de développer des outils statistiques utiles à l'étude de la sélection de chemin par des fourmis. Plus précisément, nous voulions estimer les paramètres α et c de la fonction de choix de Deneubourg à partir de données expérimentales.

Résultats théoriques En définitive, nous ne nous sommes pas contentés de traiter ce cas particulier. Nous avons défini les chaînes de Markov paramétrée renforcée (CMPR), une classe de modèles d'urnes généralisées. Il est possible de modifier la structure de ces processus pour l'étendre aux marches aléatoires renforcées définies dans le chapitre 2.

À terme, pour toute CMPR (et même pour toutes MAR) de paramètre θ , nous aimerions disposer d'une classe d'estimateurs de θ consistants et asymptotiquement normaux basés sur un échantillon de chemins de longueurs différentes. Dans cet but, nous avons écrit explicitement la log-vraisemblance d'une CMPR et avons défini la classe très générale des estimateurs du minimum de contraste pondéré (cf. sections 3.1.2 et 3.1.3).

Dans ce chapitre, nous avons établi la consistance et l'asymptotique normalité unique pour le cas particulier des modèles d'urne bicolore. Nous proposons pour ces modèles, une écriture simplifiée de la structure des CMPR (cf. début section 3.2). Cette nouvelle écriture se rapproche plus de la façon dont les modèles de sélection de chemin sont décrits dans la littérature éthologique. Une urne bicolore est définie par une fonction de choix paramétrée f et par un paramètre θ . Par exemple, l'urne de Deneubourg est de paramètre $\theta = (\alpha, c)$ et de fonction de choix paramétrée $f : ((\alpha, c), x, y) \rightarrow \frac{(c+x)^\alpha}{(c+x)^\alpha + (c+y)^\alpha}$. La probabilité de tirer une boule rouge sachant que l'urne contient x boules rouges et y boules noires est égale à $f(\theta, x, y)$.

Nous nous sommes intéressés à l'estimation de θ à partir d'un échantillon de N chemins de même longueur. Nous avons défini deux types estimateurs : l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) (cf. équation (3.2.4)) et l'estimateur des moindres carrés pondérés (EMCP) par le poids w_N (cf. définition 3.2.5). Sous certaines conditions de régularité pour f et w_N , nous avons démontré que ces deux types d'estimateurs étaient consistants et asymptotiquement normaux (cf. théorèmes 3.2.4 et 3.2.6). La démonstration se base sur le résultat préliminaire 3.5.5 qui établit que tout estimateur du minimum de contraste pondéré est consistant et asymptotiquement normal (pour les modèles d'urne bicolore et pour un échantillon de chemins de même longueur). Ensuite nous démontrons que l'EMV et l'EMCP sont des estimateurs du minimum de contraste pondéré.

L'EMV est l'estimateur asymptotiquement efficace, c'est-à-dire le meilleur d'un point de vue théorique. Nous avons étudié les EMCP pour plusieurs raisons d'ordre pratique.

Pour certains modèles, l'EMV est très long à calculer, ce qui rend par exemple toute utilisation de la méthode du Bootstrap difficile. Il est donc important de pouvoir faire appel à un EMCP moins efficace asymptotiquement, mais plus performant numériquement. De par leur implémentation simple et intuitive, les EMCP sont fréquemment utilisés par les praticiens et notamment les éthologues. Nous avons donc trouvé intéressant d'étudier ces estimateurs.

Application à l'urne de Deneubourg Dans la partie 3.3, nous avons éprouvé la qualité des deux types d'estimateurs en les appliquant à l'urne de Deneubourg. Cette dernière est définie dans la structure simplifiée des chaînes de Markov paramétrée renforcées (cf. section 3.3.1). Nous fournissons une expression explicite de l'information Fisher et de la matrice de covariance de l'EMCP de poids $w_N : (i, k - i) \rightarrow a_N(i, k - i)$. Ces matrices n'étant pas diagonales, les estimateurs de α et c sont corrélés.

La section 3.3.3 est consacrée à la description du comportement de l'urne de Deneubourg en fonction des valeurs de α et c . Le paramètre α contrôle le comportement asymptotique de l'urne. Lorsque $\alpha > 1$, une couleur est sélectionnée : après un nombre aléatoire mais fini de tirages, une seule couleur est tirée. Lorsque $\alpha < 1$, les proportions des boules de chaque couleur présentes dans l'urne convergent vers $1/2$. Le paramètre c conditionne le comportement de l'urne lors des premiers tirages. Si c est très petit devant 1, la première couleur tirée sera fortement privilégiée par rapport à l'autre durant les tirages suivants. Tandis que si c est grand devant 1, les proportions de boules des deux couleurs différeront peu de $1/2$ durant les premiers tirages. En résumé, les deux paramètres sont des paramètres de renforcement, qui ont les mêmes effets sur l'urne mais à différentes échelles de temps : c à court terme et α à long terme.

Comme nous n'observons que des chemins de taille fini, cette particularité rend difficile l'estimation. Par exemple, lorsque $\alpha > 1$ et c est grand devant 1, aucune couleur n'est privilégiée durant les premiers tirages, mais après un grand nombre de tirages, une seule des deux couleurs sera tirée. Il est donc difficile de deviner une sélection de chemin sur des trajectoires courtes. De même lorsque $\alpha < 1$ et c est petit devant 1, une couleur sera fortement privilégiée durant les premiers tirages, mais les deux couleurs seront choisies uniformément au fur et à mesure des tirages. Ainsi contrairement à ce que pourrait faire croire l'observation des premiers tirages, aucune couleur n'est sélectionnée.

Il n'est pas possible d'estimer α et c à partir d'un seul chemin. Nous pouvons le deviner intuitivement en constatant que lorsque $\alpha > 1$, après un temps aléatoire mais fini, une seule couleur est tirée et l'autre ne l'est plus jamais. Ainsi après un certain nombre de tirages, aucune nouvelle information est apportée. Lorsque $\alpha = 1$, nous avons démontré que l'information de Fisher converge (cf. (i) du théorème 3.3.5). Pour les autres valeurs

de α , nous n'avons pas de résultats permettant d'affirmer avec certitude que l'information de Fisher converge ou que l'EMV est inconsistant. Toutefois nous avons établi quelques résultats laissant peu d'espoir que le contraire soit vrai (cf. (ii) et (iii) du théorème 3.3.5).

Dans la partie 3.3.4, nous nous sommes demandés s'il était possible d'estimer le paramètre α comme un indice de queue. Lorsque $\alpha > 1$, Q_∞ , le nombre total de boules tirées de la couleur non sélectionnée, suit une loi de queue de distribution d'indice $\alpha - 1$ (cf. équation (1.1.2) du théorème 1.1.1). Cette propriété est particulièrement intéressante, car elle pourrait fournir un moyen d'estimer α indépendamment de c . Toutefois nous n'avons pas encore réussi à en dégager un procédé d'estimation exploitable. En utilisant l'estimateur de Hill, l'estimateur d'indice de queue le plus connu, nous n'avons pas réussi à retrouver les vraies valeurs de α à partir de simulations.

Le chapitre 5 utilise l'EMV et l'EMCP pour estimer α et c à partir de données expérimentales. Nous avons éprouvé la qualité des estimateurs sur des données simulées. Nous avons répliqué des expériences de $N = 50$ chemins indépendants de longueurs $n = 100$, ce qui correspond à la forme des données expérimentales. Nous avons constaté que les estimations sont meilleures lorsque la vraie valeur de c est peu éloignée de 1 et lorsque les deux paramètres ne participent pas aux mêmes effets ($\alpha > 1$ et $c > 1$ ou $\alpha < 1$ et $c < 1$). Nous avons également constaté que la méthode du Bootstrap fonctionne bien pour évaluer les intervalles de confiance. Les estimations numériques de α et c confirment le fait que les estimateurs de α et c sont corrélés positivement.

Perspectives Ce chapitre n'est que le début du développement d'outils statistiques permettant d'estimer les paramètres des chaînes de Markov paramétrées renforcées et des marches aléatoires renforcées sur graphe fini. Nous prévoyons de démontrer que pour toute CMPR régulière, tout estimateur du minimum de contraste pondéré par un poids régulier basé sur un échantillon de chemins de longueurs variables est consistant et asymptotiquement normal.

Lorsque nous avons appliqué l'EMV et l'EMCP à l'urne de Deneubourg, la principale difficulté que nous avons rencontrée est due au fait que les paramètres contribuent aux mêmes effets. Si nous ne remettons pas en question le modèle en lui-même, il faudrait estimer un des paramètres indépendamment de l'autre par un autre moyen. Bien que cette piste n'ait encore rien donné, nous pensons qu'estimer α comme un indice de queue pourrait constituer une solution. Nous aimerions comprendre pourquoi l'estimateur de Hill ne fonctionne pas. Lorsque l'urne de Deneubourg modélise le phénomène de formation de chemins, le paramètre c est l'inverse de la quantité de phéromones déposée par chaque fourmi. Peut-être est-il possible de concevoir une expérience permettant d'estimer la valeur de ce dépôt de phéromones ?

3.5 Démonstrations

3.5.1 Démonstrations des théorèmes 3.2.4 et 3.2.6

Nous rappelons la définition des probabilités empiriques a_N , b_N et p_N (voir respectivement (3.2.6), (3.2.7) et (3.2.8)).

3.5.1.1 Un théorème central limite pour les probabilités conditionnelles empiriques

Lemme 3.5.1. *Soit p_N défini comme en (3.2.8). Le vecteur*

$$\{\sqrt{N}(p_N(i, k - i) - f_0(i, k - i)), 0 \leq i \leq k \leq n - 1\}$$

converge faiblement vers un vecteur gaussien, dont la matrice de covariance Γ_0 est diagonale et dont

$$\gamma_0(i, k - i) = \frac{f_0(i, k - i)\bar{f}_0(i, k - i)}{\mathbb{P}(Z_k = i)}. \quad (3.5.1)$$

est la variance limite de $\sqrt{N}(p_N(i, k - i) - f_0(i, k - i))$.

Le caractère diagonal de la matrice de covariance est dû à la structure markovienne.

Démonstration. Notons $a(i, k) = \mathbb{P}(Z_k = i)$ et $b(i, k - i) = \mathbb{P}(Z_k = i, X_{k+1} = 1)$. Ainsi a_N est l'estimateur empirique de a et b_N celui de b . Alors

$$\begin{aligned} p_N(i, k - i) - f_0(i, k - i) &= \frac{b_N(i, k - i) - b(i, k - i)}{a_N(i, k - i)} \\ &\quad - \frac{b(i, k - i)}{a_N(i, k - i)a(i, k - i)}(a_N(i, k - i) - a(i, k - i)). \end{aligned}$$

Comme les chemins (X_1^j, \dots, X_n^j) , $1 \leq j \leq N$ sont i.i.d., le théorème central limite multidimensionnel est applicable à la suite de $2n(n - 1)$ vecteurs

$$\{(b_N(i, k - i) - b(i, k - i), a_N(i, k - i) - a(i, k - i)), 0 \leq i \leq k \leq n - 1\}.$$

La démonstration se conclut par des calculs fastidieux que nous épargnons au lecteur. En effet la remarque suivante fournit une alternative plus simple à ces calculs. \square

Remarque 3.5.2. *Nous pouvons démontrer que la matrice de covariance Γ_0 est diagonale par un argument statistique. Si nous considérons le modèle tautologique suivant*

$$\{f(i, k - i), 0 \leq i \leq k \leq n - 1\},$$

c'est-à-dire que $\theta = f$ et notons f_0 la vraie valeur, alors la vraisemblance est

$$L_N(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k a_N(i, k-i) \{p_N(i, k-i) \log f(i, k-i) + q_N(i, k-i) \log \bar{f}(i, k-i)\},$$

où $\bar{f}(i, k-i) = 1 - f(i, k-i)$. Ainsi $\{p_N(i, k-i), 0 \leq i \leq k \leq n-1\}$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance de f_0 .

Ce modèle est un modèle statistique régulier, donc $\sqrt{N}(p_N - f_0)$ converge faiblement vers la loi gaussienne de matrice de covariance $I_n^{-1}(f_0)$, où $I_n(f)$ est l'information de Fisher de ce modèle. Il est alors facile de constater que $I_n(f_0)$ est la matrice diagonale de dimension $n(n-1)$, dont les éléments sont donnés par (3.5.1).

3.5.1.2 Un résultat général pour les estimateurs du minimum de contraste

Soit $w_N(i, k-i)$, $0 \leq i \leq k \leq n-1$ une suite de poids aléatoire et G une fonction définie sur $[0, 1] \times (0, 1)$. Nous définissons le contraste empirique de poids w_N et de forme G par

$$\mathbb{W}_N(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k w_N(i, k-i) G(p_N(i, k-i), f(\theta, i, k-i)).$$

Par exemple choisir $G(p, q) = (p-q)^2$ donne la fonction de contraste des moindres carrés pondérés. Ou encore choisir $G(p, q) = -p \log q - (1-p) \log(1-q)$ et $w_N(i, k-i) = a_N(i, k-i)$ fournit à une constante prêt la log-vraisemblance. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_N(\theta) &= - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k a_N(i, k-i) \{p_N(i, k-i) \log f(\theta, i, k-i) + q_N(i, k-i) \log \bar{f}(\theta, i, k-i)\} \\ &= -N^{-1} L_N(\theta). \end{aligned}$$

Ainsi minimiser \mathbb{W}_N revient à maximiser la vraisemblance.

Soit $\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}}$ l'estimateur de contraste de θ_0 :

$$\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \mathbb{W}_N(\theta).$$

La consistance et l'asymptotique normalité de $\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}}$ ont besoin des quelques hypothèses suivantes sur G et les poids $w_N(i, k-i)$. Nous notons $\partial_2 G$ et $\partial_2^2 G$ les dérivées première et seconde de G par rapport à sa deuxième variable.

Hypothèse 3.5.3. *La fonction G est positive et \mathcal{C}^2 sur $[0, 1] \times (0, 1)$ avec*

- $G(p, q) - G(p, p) > 0$ si $p \neq q$

- $\partial_2 G(p, p) = 0$
- et $\partial_2^2 G(p, p) > 0$.

Hypothèse 3.5.4. *Pour tout $0 \leq i \leq k \leq n - 1$, $w_N(i, k - i)$ converge presque sûrement vers $w_0(i, k - i)$ tel que $w_0(i, k - i) > 0$.*

Théorème 3.5.5. *Supposons les hypothèses 3.2.3-(i)-(ii), 3.5.3 et 3.5.4 vraies, alors $\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}}$ est consistant. Si de plus θ_0 est inclus dans l'intérieur de Θ et que l'hypothèse 3.2.3-(iii) est vérifiée, alors $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}} - \theta_0)$ converge faiblement vers une loi gaussienne de moyenne nulle.*

L'expression exacte de la matrice de covariance est donnée dans la démonstration.

Démonstration. Sous l'hypothèse 3.5.3, $\mathbb{W}_N(\theta)$ converge presque sûrement vers

$$\mathbb{W}(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k w_0(i, k - i) G(f_0(i, k - i), f(\theta, i, k - i)).$$

Les hypothèses 3.2.3-(ii) et 3.5.3 assure que θ_0 est le seul à minimiser \mathbb{W} . En effet $G(p, q) > 0$ si $p \neq q$ et $G(p, p) = 0$. Donc \mathbb{W} est minimisé par toute valeur θ telle que $f(\theta, i, k - i) = f(\theta_0, i, k - i)$. Or par l'hypothèse 3.2.3-(ii), cela implique que $\theta = \theta_0$.

Les hypothèses 3.2.3 et 3.5.3 impliquent également que la convergence est uniforme, ce qui fournit la consistance de $\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}}$. Par souci de complétude, nous en donnons une preuve brève. Comme θ_0 minimise \mathbb{W} et $\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}}$ minimise \mathbb{W}_N , nous avons

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{W}(\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}}) - \mathbb{W}(\theta_0) \\ &= \mathbb{W}(\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}}) - \mathbb{W}_N(\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}}) + \mathbb{W}_N(\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}}) - \mathbb{W}_N(\theta_0) + \mathbb{W}_N(\theta_0) - \mathbb{W}(\theta_0) \\ &\leq \mathbb{W}(\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}}) - \mathbb{W}_N(\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}}) + \mathbb{W}_N(\theta_0) - \mathbb{W}(\theta_0) \leq 2 \sup_{\theta \in \Theta} |\mathbb{W}_N(\theta) - \mathbb{W}(\theta)|. \end{aligned}$$

Puisque θ_0 est le seul à minimiser \mathbb{W} , nous pouvons trouver pour tout $\epsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que si $\theta \in \Theta$ et $|\theta - \theta_0| > \epsilon$, alors $\mathbb{W}(\theta) - \mathbb{W}(\theta_0) \geq \delta$. Donc

$$\mathbb{P}(|\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}} - \theta_0| > \epsilon) \leq \mathbb{P}(\mathbb{W}(\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}}) - \mathbb{W}(\theta_0) \geq \delta) \leq \mathbb{P}\left(2 \sup_{\theta \in \Theta} |\mathbb{W}_N(\theta) - \mathbb{W}(\theta)| \geq \delta\right) \rightarrow 0.$$

Le théorème central limite est la conséquence de la consistance et du lemme 3.5.1. En effet, un développement de Taylor à l'ordre premier de $\dot{\mathbb{W}}_N(\theta)$ en θ_0 donne

$$0 = \dot{\mathbb{W}}_N(\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}}) = \dot{\mathbb{W}}_N(\theta_0) + \ddot{\mathbb{W}}_N(\tilde{\theta}_N)(\hat{\theta}_N^{\mathbb{W}} - \theta_0),$$

CHAPITRE 3. ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UNE CHAÎNE DE MARKOV
PARAMÉTRÉE RENFORCÉE

avec $\tilde{\theta}_N \in [\theta_0, \hat{\theta}_N^{\text{W}}]$. En notant $\dot{f}_0(i, k-i) = \dot{f}(\theta_0, i, k-i)$, nous avons

$$\dot{\mathbb{W}}_N(\theta_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k w_N(i, k-i) \partial_2 G(p_N(i, k-i), f_0(i, k-i)) \dot{f}_0(i, k-i).$$

Soit $\partial_{12}^2 G$ la dérivée seconde mixte de G . Remarquons que $\partial_2 G(f_0(i, k-i), f_0(i, k-i)) = 0$, ainsi par la méthode delta (cf. théorème 3.3.11 de [DCD86]), nous avons

$$\sqrt{N} \dot{\mathbb{W}}_N(\theta_0) \rightharpoonup \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k w_0(i, k-i) \partial_{12}^2 G(f_0(i, k-i), f_0(i, k-i)) \Lambda_0(i, k-i) \dot{f}_0(i, k-i).$$

où \rightharpoonup note la convergence faible et $\Lambda_0(i, k-i)$ sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes de moyenne nulle et de variance $\gamma_0(i, k-i)$ définie par 3.5.1. De façon équivalente, $\sqrt{N} \dot{\mathbb{W}}_N(\theta_0)$ converge faiblement vers un vecteur gaussien de moyenne nulle est de matrice de covariance $H(\theta_0)$ définie par

$$H(\theta_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k w_0^2(i, k-i) \left\{ \partial_{12}^2 G(f_0(i, k-i), f_0(i, k-i)) \right\}^2 \gamma_0(i, k-i) \\ \times \dot{f}_0(i, k-i) (\dot{f}_0(i, k-i))'.$$

Par la loi des grands nombres, $\ddot{\mathbb{W}}_N(\theta)$ converge presque sûrement vers $\ddot{\mathbb{W}}(\theta)$ et cette convergence est de plus localement uniforme. Donc $\ddot{\mathbb{W}}_N(\tilde{\theta}_N)$ converge presque sûrement vers $\ddot{\mathbb{W}}(\theta_0)$. En utilisant de nouveau le fait que $\partial_2 G(p, p) = 0$, nous obtenons

$$\ddot{\mathbb{W}}(\theta_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k w_0(i, k-i) \partial_2^2 G(f_0(i, k-i), f_0(i, k-i)) \dot{f}_0(i, k-i) (\dot{f}_0(i, k-i))^t.$$

Ainsi pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, nous avons

$$u \ddot{\mathbb{W}}(\theta_0) u^t = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k w_0(i, k-i) \partial_2^2 G(f_0(i, k-i), f_0(i, k-i)) \left(\sum_{s=1}^d u_s \partial_s f(\theta_0, i, k-i) \right)^2.$$

Comme $w_0(i, k-i) \partial_2^2 G(f_0(i, k-i), f_0(i, k-i)) > 0$ pour tout $0 \leq i \leq k \leq n-1$, $u \ddot{\mathbb{W}}(\theta_0) u^t$ ne peut s'annuler que si pour tout $k = 0, \dots, n-1$ et $i = 0, \dots, k$,

$$\sum_{s=1}^d u_s \partial_s f(\theta_0, i, k-i) = 0.$$

Par l'hypothèse 3.2.3-(iii), ce n'est possible uniquement si $u_s = 0$ pour tout $s = 1, \dots, d$. Donc $\ddot{\mathbb{W}}(\theta_0)$ est définie positive.

Nous pouvons alors conclure que pour un entier N assez grand, $\ddot{W}_N(\tilde{\theta}_N)$ est inversible et nous pouvons écrire

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_N^{\ddot{W}} - \theta_0) = -\ddot{W}_N^{-1}(\tilde{\theta}_N)\sqrt{N}\ddot{W}_N(\theta_0).$$

et donc affirmer que $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N^{\ddot{W}} - \theta_0)$ converge faiblement vers une loi gaussienne de moyenne nulle et de matrice de covariance $\ddot{W}^{-1}(\theta_0)H(\theta_0)\ddot{W}^{-1}(\theta_0)$. \square

3.5.1.3 Démonstrations des théorèmes 3.2.4 et 3.2.6

Nous pouvons désormais démontrer les théorèmes 3.2.4 et 3.2.6 en utilisant les deux résultats précédents.

Lemme 3.5.6. *Les poids $a_N(i, k - i)$ et $\frac{a_N(i, k - i)}{p_N(i, k - i)q_N(i, k - i)}$ vérifient l'hypothèse 3.5.4 pour tout $0 \leq i \leq k \leq n - 1$.*

Démonstration. Pour tout $0 \leq i \leq k \leq n - 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} a_N(i, k - i) &= \mathbb{P}(Z_k = i) \quad p.s., \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_N(i, k - i)}{p_N(i, k - i)q_N(i, k - i)} &= \frac{\mathbb{P}(Z_k = i)}{f_0(i, k - i)\bar{f}_0(i, k - i)} \quad p.s.. \end{aligned}$$

De plus l'hypothèse 3.2.3 implique que $f_0(i, k - i) > 0$ et $\bar{f}_0(i, k - i) > 0$ pour tout $0 \leq i \leq k \leq n - 1$. En utilisant la formule (3.2.3), cela implique que $\mathbb{P}(Z_k = i) > 0$ pour tout $0 \leq i \leq k \leq n - 1$. \square

Démonstration du théorème 3.2.4. Rappelons que

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}L_N(\theta) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{n-1} \{X_{k+1}^j \log f(\theta, Z_k^j, k - Z_k^j) + (1 - X_{k+1}^j) \log \bar{f}(\theta, Z_k^j, k - Z_k^j)\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k a_N(i, k - i) \{p_N(i, k - i) \log f(\theta, i, k - i) + q_N(i, k) \log \bar{f}(\theta, i, k - i)\}. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons

$$\frac{1}{N}L_N(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k a_N(i, k - i) G(p_N(i, k - i), f(\theta, i, k - i)),$$

avec $G(p, q) = -p \log q - (1 - p) \log(1 - q)$ et l'EMV est un estimateur du minimum de contraste de forme G et de poids $a_N(i, k - i)$. Il suffit donc de s'assurer que les hypothèses 3.5.3 et 3.5.4 sont vérifiées pour conclure cette démonstration.

Le lemme 3.5.6 implique que l'hypothèse 3.5.4 est vraie. De plus la fonction G satisfait hypothèse 3.5.3. En effet, pour $p, q \in (0, 1)$, notons

$$K(p, q) = G(p, q) - G(p, p) = p \log(p/q) + (1 - p) \log((1 - p)/(1 - q)) ,$$

où $K(p, q)$ est la distance de Kullback-Leibler entre deux variables aléatoires de Bernoulli de paramètre respectivement p et q . Il est bien connu que $K(p, q) > 0$ sauf si $p = q$. En effet, par l'inégalité de Jensen,

$$K(p, q) \geq -\log(pq/p + (1 - p)(1 - q)/(1 - p)) = \log 1 = 0 ,$$

et par la concavité stricte de la fonction logarithme il n'y a égalité que lorsque $p = q$. De plus, $\partial_2 G(p, q) = -p/q + (1 - p)/(1 - q)$ et donc $\partial_2 G(p, p) = 0$ et $\partial_2^2 G(p, p) = p^{-1}(1 - p)^{-1} > 0$. \square

Démonstration du théorème 3.2.6. Pour cette démonstration aussi, il suffit de vérifier que les hypothèses 3.5.3 et 3.5.4 sont vraies. La dernière est vérifiée grâce au lemme 3.5.6 et l'hypothèse 3.5.3 est trivialement vraie pour $G(p, q) = (p - q)^2$. \square

Nous proposons l'expression des matrices de covariance limite pour les deux poids qui nous intéressent dans ce chapitre :

- Si $w_N(i, k - i) = p_N^{-1}(i, k - i)q_N^{-1}(i, k - i)a_N(i, k - i)$, alors

$$H(\theta_0) = 2\ddot{W}(\theta_0) = 4\mathcal{I}_n(\theta_0) = 4 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k \frac{\mathbb{P}(Z_k = i)}{f_0(i, k - i)\bar{f}_0(i, k - i)} \dot{f}_0(i, k - i)(\dot{f}_0(i, k - i))^t . \quad (3.5.2)$$

Ainsi comme $\Sigma_n(\theta) = \ddot{W}^{-1}(\theta_0)H(\theta_0)\ddot{W}^{-1}(\theta_0)$, la matrice de covariance limite est égale à l'inverse de l'information de Fisher.

- Si les poids sont choisis tels que $w_N(i, k) = a_N(i, k)$, alors $w_0(i, k - i) = \mathbb{P}(Z_k = i)$ et

$$H(\theta_0) = 4 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(Z_k = i) f_0(i, k - i) \bar{f}_0(i, k - i) \dot{f}_0(i, k - i) (\dot{f}_0(i, k - i))^t , \quad (3.5.3)$$

$$\ddot{W}(\theta_0) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(Z_k = i) \dot{f}_0(i, k - i) (\dot{f}_0(i, k - i))^t . \quad (3.5.4)$$

3.5.2 Démonstrations pour l'urne de Deneubourg

3.5.2.1 Démonstration des théorèmes 3.3.2 et 3.3.3

Les théorèmes 3.3.2 et 3.3.3 ne sont que des applications respectivement des théorèmes 3.2.4 et 3.2.6.

CHAPITRE 3. ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UNE CHAÎNE DE MARKOV
PARAMÉTRÉE RENFORCÉE

Pour les démontrer il suffit donc de vérifier que la fonction f définie en (3.3.1) respecte les hypothèses 3.2.3. L'hypothèse 3.2.3-(i) est évidemment vraie.

Vérifions maintenant la condition d'identifiabilité 3.2.3-(ii). Par des calculs élémentaires, nous avons, pour tout $0 \leq i \leq k \leq n-1$,

$$\begin{aligned} f(\alpha, c, i, k-i) = f(\alpha_0, c_0, i, k-i) &\Leftrightarrow \left(\frac{c+i}{c+k-i}\right)^\alpha = \left(\frac{c_0+i}{c_0+k-i}\right)^{\alpha_0} \\ &\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\log(c_0+i) - \log(c_0+k-i)}{\log(c+i) - \log(c+k-i)}. \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

en injectant $(i, k) = (0, 1)$ et $(i, k) = (0, 2)$ dans l'équation (3.5.5) nous obtenons

$$\frac{\log(c_0) - \log(c_0+1)}{\log(c) - \log(c+1)} = \frac{\log(c_0) - \log(c_0+2)}{\log(c) - \log(c+2)},$$

ou de façon équivalente

$$\frac{\log(1+1/c_0)}{\log(1+2/c_0)} = \frac{\log(1+1/c)}{\log(1+2/c)}. \quad (3.5.6)$$

Il est alors facile de vérifier que la fonction $x \rightarrow \log(1+x)/\log(1/2x)$ est strictement décroissante sur $(0, \infty)$. Alors (3.5.6) implique que $c = c_0$. En injectant cette égalité dans (3.5.5), nous obtenons $\alpha = \alpha_0$. Ce qui démontre l'hypothèse 3.2.3-(ii).

Démontrons maintenant l'hypothèse 3.2.3-(iii), c'est-à-dire que si $n \geq 2$, les vecteurs $\{\partial_\alpha f(\theta_0, i, k-i), 0 \leq i \leq k \leq n-1\}$ et $\{\partial_c f(\theta_0, i, k-i), 0 \leq i \leq k \leq n-1\}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^{n(n-1)}$. Pour $0 \leq i \leq k \leq n-1$, nous avons,

$$\begin{aligned} \partial_\alpha f(\alpha, c, i, k-i) &= f(\alpha, c, i, k-i) f(\alpha, c, k-i, i) \log\left(\frac{c+i}{c+k-i}\right), \\ \partial_c f(\alpha, c, i, k-i) &= f(\alpha, c, i, k-i) f(\alpha, c, k-i, i) \frac{\alpha(k-2i)}{(c+i)(c+k-i)}. \end{aligned}$$

Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel pour tout $i, j \leq n-1$ avec $i+j \leq n-1$, nous avons

$$u \log\left(\frac{c_0+i}{c_0+j}\right) + v \frac{\alpha_0(j-i)}{(c_0+i)(c_0+j)} = 0.$$

En remplaçant successivement (i, j) par $(0, 1)$ et $(0, 2)$, nous avons

$$\begin{cases} u \log\left(\frac{c_0}{c_0+1}\right) + v \frac{\alpha_0}{c_0(c_0+1)} = 0, \\ u \log\left(\frac{c_0}{c_0+2}\right) + v \frac{2\alpha_0}{c_0(c_0+2)} = 0. \end{cases}$$

Si $(u, v) \neq (0, 0)$, cela implique

$$\frac{c_0+2}{c_0} \log\left(\frac{c_0+2}{c_0}\right) + 2 \frac{c_0+1}{c_0} \log\left(\frac{c_0+1}{c_0}\right) = 0.$$

Par la stricte concavité de la fonction $x \rightarrow x \log x$ définie sur $(0, \infty)$, ceci est impossible. Donc $u = v = 0$ et l'hypothèse 3.2.3-(iii) est vérifiée.

3.5.2.2 Démonstration du théorème 3.3.5, pour le cas $\alpha_0 = 1$

Lorsque $\alpha_0 = 1$, le modèle est une urne de Polya et nous avons

$$\mathcal{I}_n(c) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2c+k} \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{1}{c+Z_k} \right] + \mathbb{E} \left[\frac{1}{c+k-Z_k} \right] - \frac{4}{2c+k} \right\}. \quad (3.5.7)$$

La loi de Z_k est donnée par

$$\mathbb{P}(Z_k = i) = \binom{k}{i} \frac{c(c+1) \cdots (c+i-1) \times c(c+1) \cdots (c+k-i-1)}{2c(2c+1) \cdots (2c+k-1)}.$$

Donc,

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{c+Z_k} \right] = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{c(c+1) \cdots (c+i-1) \times c(c+1) \cdots (c+k-i-1)}{2c(2c+1) \cdots (2c+k-1)} \frac{1}{c+i}.$$

Pour tout $c > 0$, il existe deux constantes $C_1 < C_2$ telles que, pour tout entier $h \geq 1$,

$$C_1 h^c \leq \prod_{i=1}^h (1 + c/i) \leq C_2 h^c.$$

Donc, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{c+Z_k} \right] \leq C k^{-2} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{i}{k} \right)^{c-2} \left(1 - \frac{i}{k} \right)^{c-1} = \begin{cases} O(k^{-1}) & \text{if } c > 1, \\ O(k^{-1} \log k) & \text{if } c = 1, \\ O(k^{-c}) & \text{if } c < 1. \end{cases}$$

Dans chacun des trois cas, la première espérance dans l'équation (3.5.7) est sommable. Par symétrie, la somme de la seconde espérance est aussi finie.

3.5.2.3 Démonstration du théorème 3.3.5, pour le cas $\alpha_0 < 1$

Lorsque $\alpha_0 < 1$, nous savons par le théorème 1.1.1 que Z_n/n converge presque sûrement vers $1/2$. Ce qui implique que $f(\theta, Z_n, n - Z_n)$ converge presque sûrement vers $1/2$ pour tout θ . Par le lemme de Cesaro, cela implique que $n^{-1} \ell_n(\theta) \rightarrow -\log 2$ presque sûrement.

3.5.2.4 Démonstration du théorème 3.3.5, pour le cas $\alpha_0 > 1$

Soit Ω_1 , l'événement tel que la couleur 1 (rouge) est finalement sélectionnée. D'après le théorème 1.1.1, cet événement se produit avec une probabilité $1/2$. Alors, sous Ω_1 ,

CHAPITRE 3. ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UNE CHAÎNE DE MARKOV
PARAMÉTRÉE RENFORCÉE

$Z_n/n \rightarrow 1$ et si $k > T_\infty$, alors $X_{k+1} = 1$ et $Z_k = k - Q_\infty$. Donc pour tout n assez grand, la log-vraisemblance d'un seul chemin est égale à

$$\begin{aligned} \ell_n(\theta) &= \sum_{k=0}^{T_\infty} X_{k+1} \log f(\theta, Z_k, k - Z_k) + (1 - X_{k+1}) \log\{1 - f(\theta, Z_k, k - Z_k)\} \\ &\quad + \sum_{k=T_\infty+1}^n \log f(\theta, k - Q_\infty, Q_\infty). \end{aligned}$$

Lorsque $k \rightarrow \infty$, pour tout $\alpha > 0$, nous avons

$$\log f(\theta, k - Q_\infty, Q_\infty) = -\log \left\{ 1 + \frac{(c + Q_\infty)^\alpha}{(c + k - Q_\infty)^\alpha} \right\} \sim -\frac{(c + Q_\infty)^\alpha}{(c + k - Q_\infty)^\alpha}.$$

Si $\alpha \leq 1$, la série $\sum_{k=T_\infty+1}^\infty \log f(\theta, k - Q_\infty, Q_\infty)$ diverge et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n(\theta) = -\infty$. Si $\alpha > 1$, alors la série converge et donc, sous Ω_1 ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n(\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} X_{k+1} \log f(\theta, Z_k, k - Z_k) + (1 - X_{k+1}) \log\{1 - f(\theta, Z_k, k - Z_k)\} \\ &= \sum_{k=0}^{T_\infty} X_{k+1} \log f(\theta, Z_k, k - Z_k) + (1 - X_{k+1}) \log\{1 - f(\theta, Z_k, k - Z_k)\} \\ &\quad + \sum_{k=T_\infty+1}^{\infty} \log f(\theta, k - Q_\infty, Q_\infty). \end{aligned}$$

Ceci implique que $\arg \max_{\theta \in \Theta} \ell_n(\theta) = \arg \max_{\theta \in \Theta, \alpha > 1} \ell_n(\theta)$ et que cet argmax est une variable aléatoire, qui est une fonction de tout le chemin et ne dépend pas de la vraie valeur θ_0 .

3.5.2.5 Démonstration de l'équation (3.3.6)

Nous allons montrer que l'équation (3.3.6) est vraie lorsque $w_N(i, k - i) = a_N(i, k - i)$. Nous rappelons la définition de a_N , b_N , p_N et \tilde{p}_N donnés en (3.2.6), (3.2.7), (3.2.8) et (3.3.5). Notons $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de tout réel x . Remarquons que

$$a_N(i, k - i) - b_N(i, k - i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{Z_k^j = i\}} (1 - X_{k+1}^j)$$

et

$$p_N(i, k - i) = \frac{b_N(i, k - i)}{a_N(i, k - i)}.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}_N^W &= \arg \min_{\alpha, c} W_N(\alpha, c) \\
 &= \arg \min_{\alpha, c} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=0}^k w_N(i, k-i) \{p_N(i, k-i) - f(\alpha, c, i, k-i)\}^2 \\
 &= \arg \min_{\alpha, c} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} a_N(i, k-i) \left\{ \frac{b_N(i, k-i)}{a_N(i, k-i)} - f(\alpha, c, i, k-i) \right\}^2 \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{i=\lfloor k/2 \rfloor + 1}^k a_N(i, k-i) \left\{ \frac{a_N(i, k-i) - b_N(i, k-i)}{a_N(i, k-i)} - f(\alpha, c, k-i, i) \right\}^2.
 \end{aligned}$$

Avec un changement de variable dans la deuxième double somme, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}_N^W &= \arg \min_{\alpha, c} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} a_N(i, k-i) \left\{ \frac{b_N(i, k-i)}{a_N(i, k-i)} - f(\alpha, c, i, k-i) \right\}^2 \\
 &\quad + a_N(k-i, i) \left\{ \frac{a_N(k-i, i) - b_N(k-i, i)}{a_N(k-i, i)} - f(\alpha, c, i, k-i) \right\}^2.
 \end{aligned}$$

Enfin en soustrayant $(b_N(i, k-i))^2$ et $(a_N(k-i, i) - b_N(k-i, i))^2$, qui sont indépendants de α et c , puis en ajoutant $\left(\frac{b_N(i, k-i) + a_N(k-i, i) - b_N(k-i, i)}{a_N(i, k-i) + a_N(k-i, i)}\right)^2$ qui est également indépendant de α et c , nous avons finalement

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}_N^W &= \arg \min_{\alpha, c} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \left\{ (a_N(i, k-i) + a_N(i-k, i)) f(\alpha, c, i, k-i)^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2(b_N(i, k-i) + a_N(k-i, i) - b_N(k-i, i)) f(\alpha, c, i, k-i) \right\} \\
 &= \arg \min_{\alpha, c} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \left(a_N(i, k-i) + a_N(i-k, i) \right) \left\{ f(\alpha, c, i, k-i)^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2 \left(\frac{b_N(i, k-i) + a_N(k-i, i) - b_N(k-i, i)}{a_N(i, k-i) + a_N(k-i, i)} \right) f(\alpha, c, i, k-i) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{b_N(i, k-i) + a_N(k-i, i) - b_N(k-i, i)}{a_N(i, k-i) + a_N(k-i, i)} \right)^2 \right\} \\
 &= \arg \min_{\alpha, c} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (a_N(i, k-i) + a_N(i-k, i)) \left\{ f(\alpha, c, i, k-i) - \tilde{p}_N(i, k-i) \right\}^2.
 \end{aligned}$$

Deuxième partie

Étude comportementale

Chapitre 4

Introduction

Sommaire

4.1	Présentation générale du sujet	149
4.2	Une méthodologie minimaliste ascendante basée sur la modélisation et l'expérimentation	153
4.3	Les marches aléatoires renforcées sur graphe	154
4.4	L'importance d'une démarche statistique	161
4.5	Description des expériences	163

4.1 Présentation générale du sujet

L'objectif de cette partie, consacrée à une étude comportementale, est de mieux comprendre les mécanismes qui sont à l'origine de la formation de chemins par une colonie de fourmis. Nous nous sommes concentrés sur un aspect précis de ce phénomène : la sélection d'un chemin parmi plusieurs voies pré-existantes. Une grande partie de notre réflexion est centrée sur le rôle et la valeur des paramètres du modèle proposé par J.-L. Deneubourg et al. en 1990 (cf. [DAGP90]). Nous nous sommes aussi demandé dans quelle mesure les modèles minimaux que constituent les marches aléatoires renforcées sur un graphe peuvent reproduire les déplacements de fourmis dans un réseau.

De nombreuses espèces de fourmis déploient autour de leurs colonies des réseaux de pistes qui connectent les différents points stratégiques comme les entrées du nid et les sources de nourriture. Ces chemins sont constitués de traces de phéromones, un mélange de substances chimiques que les fourmis déposent sur le sol et qui attire leurs congénères. Ce réseau est un outil qui permet à une colonie d'explorer et d'exploiter son environnement

de façon dynamique (ramifications du réseau en constante évolution) et optimale (chemins les plus courts en terme de distance totale ou de temps de parcours).

Les phéromones sont très méconnues. Nous ne connaissons pas toutes les substances qui la composent, ni la quantité déposée par les fourmis sur leur trajectoire, ni encore la façon dont les phéromones réagissent au substrat sur lequel elles sont appliquées, notamment quelle est leur vitesse d'évaporation. De plus il nous est impossible de détecter les dépôts de phéromones après le passage d'une ou plusieurs fourmis. Dans notre étude nous ne pouvons qu'estimer les quantités de phéromones en comptant les passages. Toutefois nous savons que les fourmis ne déposent pas de traces continues. De façon ponctuelle et à une fréquence plus ou moins régulière, elles posent leur abdomen sur le sol pour y laisser un trait de substance.

Le développement d'un réseau de phéromones par des fourmis ne suit pas un plan préalablement conçu, aucun maître d'œuvre ne dirige l'activité des ouvrières qui explorent et exploitent les alentours du nid. À vrai dire aucune des fourmis impliquées dans l'élaboration et l'entretien du réseau n'a les capacités cognitives suffisantes pour appréhender le réseau de pistes dans son ensemble. De plus, certaines espèces de fourmis ont des capacités individuelles d'orientation très faibles. Ces fourmis n'ont qu'une perception limitée de leur environnement et donc ne peuvent retourner au nid par leurs seuls moyens individuels.

Pour certaines espèces dites à recrutement de masse, le réseau est en réalité le résultat de mécanismes stigmergiques et d'auto-organisation. La stigmergie désigne l'ensemble des mécanismes qui permettent à un groupe d'individus de communiquer indirectement en modifiant leur environnement (cf. [Gra59]). Le comportement de dépôt-suivi de phéromones des fourmis en est un excellent exemple. Les fourmis modifient l'environnement en déposant des phéromones sur leur passage. En analysant le paysage chimique qui l'entoure, une fourmi repère les différentes voies empruntées précédemment par ses congénères.

Le terme d'auto-organisation désigne l'émergence spontanée et dynamique d'une structure spatiotemporelle résultant de multiples interactions d'un groupe d'individus avec lui-même et avec son environnement (cf. [CDF⁺01]). Par exemple, lorsqu'une fourmi parcourt un espace vierge de toute trace chimique, elle y dépose une piste de phéromones. Une autre fourmi peut alors décider de suivre la piste laissée par sa congénère et donc marquer une nouvelle fois le chemin naissant. Plus les fourmis empruntent la piste, plus celle-ci attire d'autres fourmis et plus elle est renforcée. Ce phénomène est une boucle rétro-active positive.

Une piste fortement marquée se résorbe par le même genre de mécanismes. Pour une raison quelconque (épuisement d'une source, découverte d'un itinéraire plus court...), le nombre de fourmis qui parcourent la piste diminue, laissant les traces de phéromones

s'évaporer en partie. La piste est alors moins attractive et moins de fourmis décident de l'emprunter et donc de renouveler le marquage. Moins les fourmis empruntent la piste, plus vite les traces de phéromones s'évaporent. C'est une boucle rétroactive négative.

Les mécanismes individuels qui sont à l'origine du réseau de pistes sont encore méconnus. Plusieurs études combinant modélisation et expérimentation ont démontrées que des règles simples de dépôt et de suivi de phéromones suffisent à former des chemins. Mais les simulations de fourmis artificielles ne reproduisent pas systématiquement le caractère optimal et dynamique observé dans les réseaux naturels. Par exemple, dans beaucoup de modèles, les fourmis artificielles se piègent dans des boucles sans cesse renforcées par leur passage.

Il manque donc aux modèles des propriétés fondamentales pour décrire le comportement des fourmis. Une des clés de ce problème réside sans nul doute dans la question suivante : si nous interdisons toute capacité individuelle d'orientation globale, comment les fourmis rentrent-elles au nid ? Comment décident-elles leur direction quand elles partent explorer ? Il doit exister des règles aussi simples que celles du dépôt-suivi de phéromones pour expliquer comment les fourmis se dirigent globalement dans la "bonne" direction.

Plusieurs hypothèses ont déjà été avancées. Récemment plusieurs travaux ont démontré que la structure du réseau de phéromones pourrait jouer un rôle important dans l'orientation des fourmis. Lorsqu'elle est confrontée à un choix entre deux chemins, une fourmi préfère celui qui la dévie le moins possible de sa direction de déplacement. Chez beaucoup d'espèces de fourmis, les pistes du réseau se déploient autour du nid à la manière des branches d'un arbre (cf. p.285 du livre [HW90]). Quelques routes principales partent directement du nid et se séparent en deux chemins vers deux directions différentes. Plus loin, ces chemins se dédoublent également et ainsi de suite. Le réseau comporte donc un grand nombre de bifurcations symétriques dont les deux branches qui s'éloignent du nid forment un angle moyen de 60° (*Atta sexdens*, *A. capiguara*, *A. laevigata* et *Messor Barbarus* cf. [ALS93], *Monomorium pharaonis* cf. [JHR04], *Linepithema humile*, données non publiées).

Par conséquent, lorsqu'une fourmi s'éloigne du nid en suivant une piste de phéromones, elle rencontre surtout des bifurcations dont chacune des branches s'écarte de la piste d'un angle moyen de 30° . Si les deux pistes ont une attractivité chimique équivalente, la fourmi choisit uniformément une des deux branches. En revanche, une fourmi qui retourne au nid rencontre en général des bifurcations asymétriques, dont une branche déviant d'environ 30° conduit au nid et une autre d'environ 120° qui s'éloigne du nid (cf. figure 4.1). La fourmi a donc tendance à emprunter la branche qui se dirige vers le nid. Par des travaux couplant expérimentation et modélisation, il a été montré que cette simple règle de persistance dans la marche améliore considérablement les capacités de retour au nid et d'exploitation du

plus court chemin (cf. [JHR04], [GGR⁺08] et [GCJT13]).

Les fourmis pourraient également s’orienter en fonction de l’état d’affamement de ces congénères (cf. [Mof87] et [MJT⁺13]). En effet, les fourmis pratiquent souvent la trophallaxie qui consiste à échanger information et nourriture par contact buccal (cf. p.291 du livre [HW90]). Une fourmi s’éloignant du nid croise principalement des fourmis gavées, qui reviennent d’une source de nourriture. Une fourmi se dirigeant vers le nid rencontre surtout des fourmis affamées, à la recherche de nourriture.

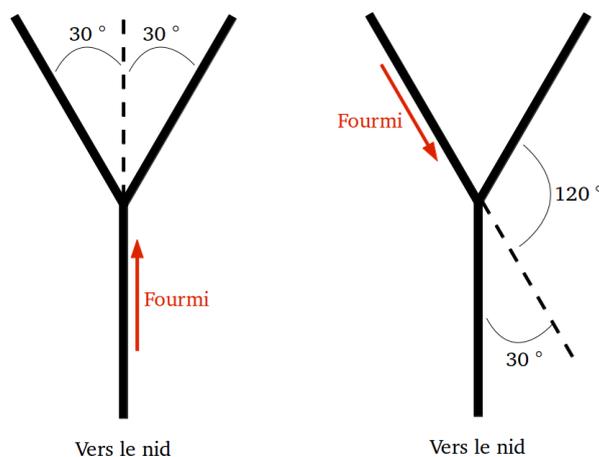


FIGURE 4.1 – Schémas de bifurcations typiques présentes dans le réseau de pistes qui se déploie autour d’une fourmilière. Les bifurcations, que les fourmis quittant le nid rencontrent, présentent en général deux branches dont chacune dévie d’un angle moyen de 30° par rapport à la direction de la piste incidente (à gauche). En revanche, lorsque les fourmis retournent au nid, les bifurcations qu’elles croisent ne sont plus symétriques : la branche conduisant au nid dévie en moyenne de 30° et celle qui s’en éloigne de 120° (à droite).

Un des aspects important de la formation spontanée de chemins est le processus de sélection d’un chemin parmi des voies pré-existantes et initialement équivalentes. Au cours de leurs déplacements, les fourmis sont régulièrement confrontées à des choix binaires. Nous avons déjà évoqué la présence de bifurcations le long du réseau de pistes qui s’étend autour du nid. Mais les fourmis sont aussi amenées à choisir entre deux voies sur un terrain initialement vierge de toute trace chimique (par exemple pour contourner un obstacle). Quelle que soit la nature de la bifurcation rencontrée, il existe deux issues : une des deux branches est sélectionnée ou les branches sont égalisées¹ (cf. [DAGP90]).

1. Pour éviter toute confusion, nous précisons le vocabulaire suivant :
 ◦ “choix d’une branche” sera toujours employé pour qualifier le fait qu’une fourmi choisi d’emprunter une branche,

Par conséquent, lorsque les fourmis évoluent dans un réseau (constitué de galeries, d'obstacles, de passerelles...), le phénomène de sélection ou non sélection de chemin à chaque carrefour peut faire apparaître des chemins préférentiels : les voies sont sélectionnées et les fourmis les parcourent dans un certain sens. Mais il est également possible qu'aucune piste n'apparaisse (cf. [VTG⁺06] et [GGC⁺09]).

L'objectif de cette étude comportementale est de mieux comprendre les mécanismes qui mènent une colonie de fourmis à sélectionner ou non sélectionner un chemin dans un réseau.

4.2 Une méthodologie minimaliste ascendante basée sur la modélisation et l'expérimentation

Le but de cette thèse est de dégager un ensemble minimal de règles comportementales individuelles qui mènent un ou plusieurs marcheurs à former spontanément des chemins préférentiels dans un réseau de voies pré-existantes. Il est aussi de comprendre les mécanismes qui font que ces règles produisent le phénomène qui nous intéresse.

Par ensemble minimal, nous signifions que chaque règle qui le compose est nécessaire à la formation de chemins. De plus, le rôle et la nécessité de chacune des règles doivent être compris/justifiés.

Dans cet objectif, nous adoptons une démarche, dite ascendante, qui consiste à partir du plus simple pour à aboutir au plus compliqué par étapes successives. Par exemple, dans une étude de modélisation, une telle démarche réside dans la conception d'un modèle basé sur un ensemble d'hypothèses le plus simple possible susceptible de reproduit le phénomène étudié. Du fait de sa simplicité, ce premier jeu d'hypothèses ne suffit généralement pas. L'étude du modèle permet de comprendre dans quelle mesure le phénomène n'est pas reproduit et donc de suggérer la modification d'une hypothèse ou l'ajout d'une nouvelle pour y remédier. Cette étape produit un nouveau modèle qu'il faut étudier pour concevoir de nouvelles hypothèses et ainsi de suite.

Le chapitre 2 est le début d'une étude de modélisation minimaliste ascendante du

-
- o “ *sélection d'une branche* ” désignera le fait que toutes les fourmis ne passent que par la branche en question,
 - o “ *abandonner une branche* ” est le fait qu'aucune fourmi ne choisit la branche en question,
 - o “ *égalisation des branches* ” sera employé lorsque la proportion de passages par chacune des branches est égale à 1/2, i.e. lorsqu'il y a autant de passages à droite qu'à gauche.

phénomène de formation spontanée de chemin, basée sur l'étude probabiliste des marches aléatoire renforcée sur graphe.

Il est possible aussi de coupler une telle étude de modélisation avec de l'expérimentation. C'est ce que nous proposons de faire dans cette partie afin de comprendre les mécanismes qui mènent une colonie de fourmis à sélectionner ou non un chemin. Dans un premier temps nous étudions des situations les plus simples possibles : fourmis isolées, milieu homogène, absence de nourriture... Cette simplicité permet alors de mieux appréhender les mécanismes individuels qui pourraient intervenir en concevant un modèle et en le confrontant aux données expérimentales. La conception du modèle se fait par une méthode minimaliste ascendante et la confrontation du modèle aux données expérimentales se fait numériquement en utilisant par exemple des outils statistiques d'estimation de paramètres (cf. chapitre 3).

Une fois la première situation bien comprise, on peut s'intéresser à une situation plus complexe : fourmis étudiées par petits groupes, ajout d'un obstacle ou d'une source de nourriture... Les résultats de la première étude sert alors de base à l'analyse de cette nouvelle situation et aide à mieux comprendre ce que l'ajout d'un nouvel élément change dans le comportement d'une fourmi.

4.3 Les marches aléatoires renforcées sur graphe

Les marches aléatoires renforcées (MAR) sur graphe² sont par la simplicité de leur principe des modèles adaptés à une étude minimaliste ascendante du phénomène de sélection de chemin. Elles sont utilisées depuis des années par les éthologues pour modéliser le comportement de fourmis dans un réseau. Le modèle proposé par J.-L. Deneubourg et al. en 1990 et ses variantes en sont un bon exemple ([DAGP90], [VTG⁺06] et [GGC⁺09]).

En plus de leur capacité de modélisation, les MAR présentent le grand avantage d'être à la portée d'études probabilistes et statistiques. Sous certaines conditions, il est possible

1. **de prédire le comportement** d'une marche en fonction des paramètres de celle-ci sans faire appel à des simulations.
2. **d'estimer les paramètres** d'une marche et d'évaluer des marges d'erreur à partir de données expérimentales.

2. Un graphe est un objet mathématique constitué de sommets reliés par les arêtes. Une MAR sur un graphe est un processus stochastique qui décrit les déplacements d'un marcheur sautant de sommets en sommets en empruntant les arêtes existantes du graphe. La probabilité de saut vers tel ou tel sommet dépend du nombre de passages du marcheur par chacun des sommets du graphe.

En s'appuyant sur l'exemple du modèle de Deneubourg, les deux sous-parties suivantes montrent l'intérêt des deux points précédents. La première décrit le modèle et interprète le théorème 1.1.1 (p.28) en termes comportementaux. La seconde est une courte réflexion sur l'importance d'une démarche statistique.

L'urne de Deneubourg

Le modèle proposé par J.L. Deneubourg en 1990 et ses variantes reposent sur les hypothèses suivantes.

1. Toutes les fourmis déposent constamment sur leur passage le même type de phéromones (même mélange) et toujours de la même façon (même quantité déposée à la même fréquence).
2. Les traces de phéromones ne s'évaporent pas.
3. Toutes les fourmis sont strictement équivalentes, c'est-à-dire qu'elles réagissent aux traces de phéromones de la même façon.

Ces hypothèses sont probablement fausses. Il existe une variabilité inter-individuelle dans le comportement des fourmis qui induit vraisemblablement une modulation dans la fréquence et l'intensité du dépôt de phéromones selon une multitude de variables environnementales et physiologiques inconnues ou non mesurables. De plus les fourmis ne réagissent pas de la même façon aux phéromones ne serait-ce qu'en raison du bruit de perception. Pour finir beaucoup de choses sont méconnues sur les phéromones et notamment la façon dont les traces chimiques se dissipent.

Toutefois chacune des trois hypothèses sont réfléchies et sont considérées comme une approximation du comportement réel. De plus lors de confrontations entre les modèles et des données expérimentales, les protocoles sont conçus pour conforter le plus possible les hypothèses. Ils minimisent la variabilité inter-individuelle et rend raisonnable l'hypothèse d'une colonie de fourmis "identiques".

L'hypothèse 1 est souvent justifiée par le choix du modèle biologique³. Par exemple, les *Linepitema humile* déposent de façon régulière une quantité de phéromones et des études expérimentales confortent l'idée que cette quantité est toujours la même et constituée par le même type de phéromones (cf.[VVKB82] et [APD89]). La hypothèse 2 est légitime lorsque les durées d'observation sont relativement proches de la demi-vie des phéromones, supposée d'une demi-heure (cf. [JRD03]). La troisième hypothèse est généralement posée, car

3. Le modèle biologique est l'organisme vivant étudié. Dans cette thèse, il s'agit de la fourmi *Linepitema humile*.

les fourmis sont conditionnées de la même façon avant chaque expérience : élevées dans la même colonie, nourries de la même façon, soumises à la même période de jeun...

Le modèle proposé par J.L. Deneubourg et al. en 1990 décrit les choix successifs de fourmis passant une par une par une bifurcation en forme de Y, c'est-à-dire par un carrefour composé d'un tronc qui se sépare symétriquement en deux branches. Chaque fourmi arrive par le tronc et choisit une des deux branches. Elle ne revient pas sur ses pas et donc marque uniquement la branche choisie.

Notons Z_n le nombre de fois que la branche de droite a été choisie après le passage de n fourmis. Nous notons X_n le choix effectué par la n -ième fourmi, c'est-à-dire que X_n vaut 1 si la n -ième fourmi est passée par la branche droite et 0 si elle est passée par la branche gauche. Ainsi nous avons la formule $Z_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et la quantité $n - Z_n$ est le nombre de fois que la branche de gauche a été choisie. Une conséquence directe des hypothèses 1 et 2 est que la quantité de phéromones déposée sur une branche est proportionnelle aux nombres de passages effectués par cette branche (et donc à Z_n ou à $n - Z_n$).

Nous supposons que les branches ont chacune un poids initial (attraction intrinsèque) noté c . Nous notons $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_1, \dots, X_n)$ la probabilité que la $n + 1$ -ième fourmi choisisse la branche de droite sachant les choix effectués par les n premières fourmis. Cette probabilité dépend du poids initial des branches, des quantités de phéromones déposées sur chacune des branches et de la sensibilité des fourmis aux phéromones. Plus précisément nous supposons que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_1, \dots, X_n) = \frac{(c + Z_n)^\alpha}{(c + Z_n)^\alpha + (c + n - Z_n)^\alpha}, \quad (4.3.1)$$

où $\alpha > 0$ introduit une non-linéarité dans le choix lorsque $\alpha \neq 1$. Ainsi la probabilité que la $n + 1$ -ième fourmi choisisse la branche de gauche sachant les choix effectués par les n premières fourmis vaut

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_1, \dots, X_n) &= 1 - \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_1, \dots, X_n) \\ &= \frac{(c + n - Z_n)^\alpha}{(c + Z_n)^\alpha + (c + n - Z_n)^\alpha}. \end{aligned}$$

Le modèle que nous venons de décrire n'est autre qu'un modèle d'urne bicolore. En effet, une bifurcation à deux branches peut être assimilée à une urne contenant des boules de deux couleurs différentes. Le passage d'une fourmi par une branche renforce cette dernière de la même façon qu'une couleur est renforcée lorsque l'on ajoute une boule de cette couleur dans

l'urne. La probabilité d'emprunter une branche peut s'exprimer en fonction du nombre de passages par chaque branche comme la probabilité de tirer une couleur s'écrit en fonction du nombre de tirages de chaque couleur. Ainsi il suffit d'un changement de vocabulaire pour appliquer les résultats des urnes au domaine du comportement animal, notamment le théorème 1.1.1 (p.28) et les méthodes d'estimation de paramètres du chapitre 3.

Les paragraphes suivants interprètent en termes comportementaux le rôle des paramètres α et c en s'appuyant sur les résultats du théorème 1.1.1.

Le paramètre α caractérise la sensibilité différentielle des fourmis aux phéromones. Lorsque α est strictement supérieur à 1, plus les quantités de phéromones sur les deux branches sont importantes, plus les fourmis sont sensibles à la différence entre ces quantités et plus elles sont attirées par la branche la plus marquée. Avec une probabilité égale à 1, toutes les fourmis n'empruntent qu'une seule branche après un certain nombre de passages, i.e. une branche est sélectionnée. En revanche, lorsque α est strictement inférieur à 1, plus les quantités de phéromones sont importantes, moins les fourmis sont sensibles à la différence entre ces quantités et plus les poids des branches paraissent équivalents aux fourmis. Avec une probabilité 1, les passages des fourmis entraînent une répartition uniforme des choix sur les deux branches, i.e. les branches sont égalisées. Ainsi lorsque $\alpha \neq 1$, le comportement asymptotique du modèle dépend uniquement de la valeur de α et non de c . Le paramètre α a une influence à long terme.

L'hypothèse 3 implique que les fourmis sont toutes sensibles de la même façon aux phéromones et justifie donc que α soit un paramètre et non une variable aléatoire. Ce paramètre est une approximation du paramètre individuel de chaque fourmi qui fixe la sensibilité aux phéromones de cette dernière.

Le rôle du paramètre c est mis en évidence par la réécriture de la probabilité (4.3.1) suivante :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_1, \dots, X_n) = \frac{\left(1 + \frac{Z_n}{c}\right)^\alpha}{\left(1 + \frac{Z_n}{c}\right)^\alpha + \left(1 + \frac{n-Z_n}{c}\right)^\alpha}.$$

Par la formule précédente, nous constatons que le modèle correspond à une situation dans laquelle les poids initiaux valent 1 et dont les fourmis déposent une quantité $1/c$ de phéromones. Par conséquent, le paramètre c est l'inverse de l'incrément du renforcement après chaque passage. Lorsque c est petit, le passage de la première fourmi renforce fortement une des deux branches. Les premières fourmis emprunteront alors majoritairement la branche ainsi favorisée et ceci quelle que soit la valeur de α . En revanche lorsque c est grand, le passage de chaque fourmi modifie peu le poids des branches. Par conséquent, même si la sensibilité différentielle des fourmis est forte, les fréquentations des deux branches seront

quasiment égales aux premiers passages.

Lorsque $\alpha \neq 1$, le paramètre c a seulement une influence à court terme. En revanche, lorsque $\alpha = 1$, le paramètre c est le seul à déterminer le comportement asymptotique du modèle. Plus précisément, la loi de Z_n/n , la proportion de passages par la branche de droite après n passages, converge vers une loi bêta de paramètre (c, c) , lorsque n tend vers l'infini. Lorsque c croît de 0 à l'infini, la loi limite évolue continûment d'une distribution avec deux masses en 0 et 1 vers une distribution avec une masse en 1/2. Pour illustrer ce point, la figure 3.1 dans le chapitre 3 (page 120) donne la densité de la loi bêta de paramètre $(0.1, 0.1)$ d'une part et $(10, 10)$ d'autre part et nous faisons quelques commentaires.

- Si $c < 1$ (dépôt important), une forte asymétrie apparaît dans le choix des branches. Une branche est plus empruntée que l'autre, i.e. la densité de la loi bêta de paramètre (c, c) est en forme de U. Cette dernière tend vers une distribution avec deux masses en 0 et 1, lorsque c tend vers 0. Ce cas limite correspond à la sélection d'une branche, c'est-à-dire $\alpha > 1$.
- Si $c = 1$, la loi limite est uniforme sur $[0, 1]$, i.e. la densité de la loi bêta de paramètre (c, c) est constante.
- Si $c > 1$ (dépôt faible), Z_n/n est plus concentré autour de 1/2, i.e. la densité de la loi bêta de paramètre (c, c) est en forme de cloche. Cette dernière converge vers une distribution avec une masse en 1/2, lorsque c tend vers l'infini. Ce cas limite correspond au cas $\alpha < 1$, c'est-à-dire à une égalisation du choix des fourmis.

Les hypothèses 1 et 2 impliquent que les fourmis déposent toutes la même quantité de phéromones de la même façon et justifie donc que c soit un paramètre et non une variable aléatoire. Ce paramètre est une approximation du paramètre individuel de chaque fourmi qui fixe l'intensité des dépôts de phéromones de cette dernière.

En résumé, le modèle possède quatre états illustrés dans le diagramme de phase de la figure 4.2.

- **Sélection rapide d'une branche** : dépôt et sensibilité différentielle importants : $c < 1$ et $\alpha > 1$. Après un petit nombre de passages, les fourmis n'empruntent qu'une seule branche.
- **Sélection lente d'une branche** : dépôt faible et sensibilité différentielle importante : $c > 1$ et $\alpha > 1$. Après un grand nombre de passages, les fourmis n'empruntent qu'une seule branche.
- **Égalisation lente des branches** : dépôt important et sensibilité différentielle faible : $c < 1$ et $\alpha < 1$. Dans les premiers passages, une des deux branches est plus empruntée que l'autre. Mais après un grand nombre de passages, les fourmis empruntent de façon égale les deux branches.

- **Égalisation rapide des branches** : dépôt et sensibilité différentielle faibles : $c > 1$ et $\alpha < 1$. Après un petit nombre de passages, les fourmis empruntent de façon égale les deux branches.

Le modèle possède également deux transitions d'état. Lorsque $\alpha = 1$, le modèle est dans un état critique situé entre la sélection et non-sélection de chemin. Nous pourrions qualifier cette transition de discontinue. La transition entre un comportement de dépôts importants ($c < 1$) à celui de dépôts faibles ($c > 1$) n'est pas aussi radicale. Les probabilités des premiers choix diffèrent peu si c est proche de 1. Il faut que la valeur de c soit assez grande ou assez proche de 0 pour voir réellement l'effet à court terme de c .

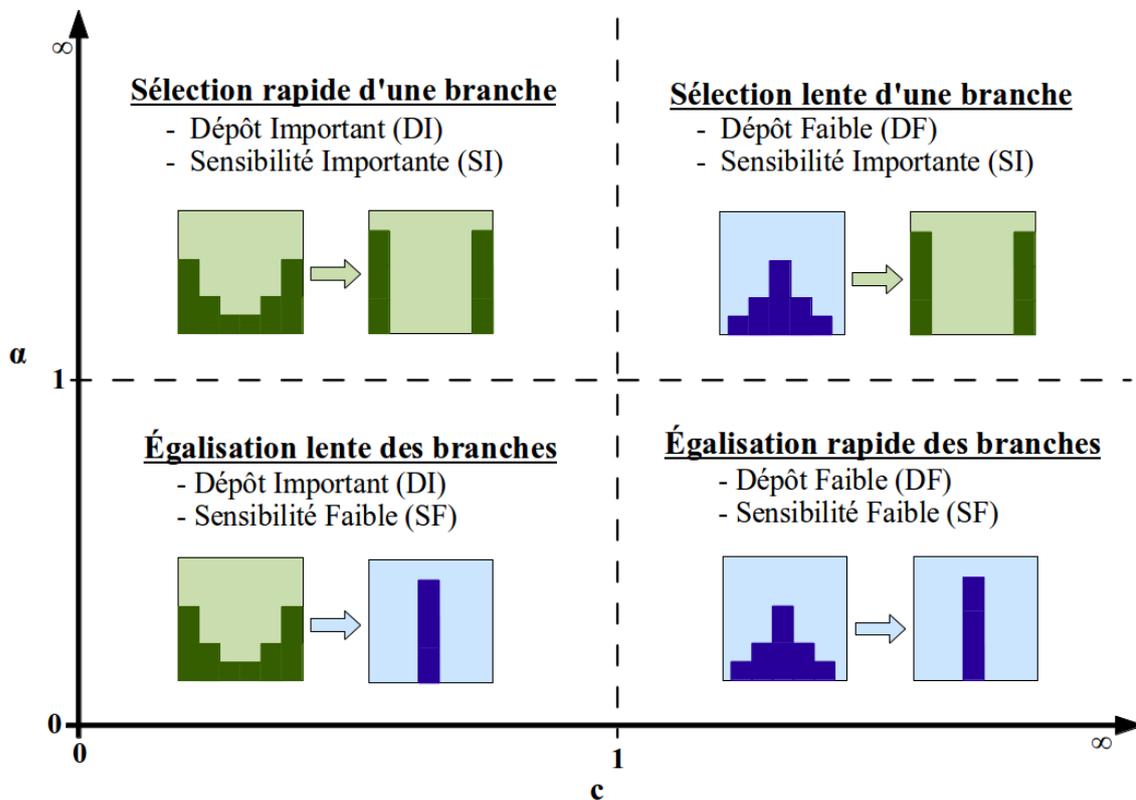


FIGURE 4.2 – Diagramme de phase de l'urne de Deneubourg dans le plan (c, α) . Les graphiques dans les encadrés colorés donnent d'une part l'allure de la distribution empirique de Z_n/n pour un n petit (à gauche) et d'autre part de la loi limite de Z_n/n lorsque n tend vers ∞ (à droite).

Jusqu'à présent, le phénomène de sélection de chemin a toujours été modélisé par un état de sélection lente. Ce scénario est pertinent pour les expériences pendant lesquelles le passage de plusieurs centaines d'individus est nécessaire pour voir apparaître la sélection

d'un chemin. Par exemple, J.-L. Deneubourg et al. ont trouvé $\alpha = 2$ et $c = 20$ en 1990 (cf. [DAGP90]). Plus récemment, K. Vittori et al. ont évalué $\alpha = 2$ et $c = 60$ en 2006 (cf. [VTG+06]) et S. Garnier et al. ont calculé $\alpha = 2.6$ et $c = 60$ en 2009 (cf. [GGC+09]).

Toutefois le fait qu'une branche soit inmanquablement et irréversiblement sélectionnée est peu réaliste. En effet, il arrive qu'aucune des branches ne soit sélectionnée. De plus, quelle que soit la force d'attraction d'une piste de phéromones, une partie des fourmis choisit toujours de ne pas la suivre.

Ajoutons à cela que ce modèle ne tient pas compte de l'égalisation des branches observées dans les galeries trop fréquentées. En effet, il existe une concentration limite au-dessus de laquelle les fourmis ne détectent plus les variations de la quantité de phéromones (cf. [PDG87]). Les galeries d'un réseau se saturent rapidement lorsque leur fréquentation est trop importante pour laisser l'évaporation faire son œuvre. Les fourmis s'y déplacent alors uniformément.

Imaginons une bifurcation dont une des branches est arrivée à saturation et l'autre n'est que peu marquée. Le passage d'une fourmi par la branche saturée ne changera rien au poids de celle-ci. En revanche, chaque passage par la branche non saturée la rend plus attractive et la rapproche un peu plus de la saturation. Une fois les deux galeries saturées, les fourmis les considèrent de poids équivalents et donc les parcourent uniformément.

De ce point de vue, l'état d'égalisation lente du modèle de Deneubourg est très intéressant. Dès le premier passage, la première branche parcourue (disons la droite) est fortement marquée par rapport à l'autre branche. Les fourmis suivantes emprunteront donc principalement la branche droite, sans pour autant abandonner la branche gauche. À mesure que les traces de phéromones s'accumulent, la différence de concentration est diminuée par le fait que α est inférieur à 1. La fréquentation de la branche de gauche augmente alors diminuant encore plus les différences de concentration. De fil en aiguille, les passages des fourmis se répartissent uniformément sur les deux branches.

En réalité, les fourmis ont besoin de passer plusieurs fois pour sélectionner une branche. Il arrive rarement qu'une colonie favorise une branche dès les premiers passages et donc l'état d'égalisation lente n'est jamais envisagé pour modéliser une sélection de chemin.

Le modèle de Deneubourg présente donc des dynamiques pertinentes pour tenir compte du phénomène qui nous intéresse. Il semble toutefois desservi par les hypothèses 1 et 3 qui supposent que les fourmis déposent la même quantité de phéromones et sont sensibles de la même manière à cette dernière. Supposer que les fourmis ne sont pas dans le même *état comportemental*, i.e. que α et c sont différents pour chaque fourmi, pourrait constituer une bonne hypothèse de modélisation.

Au vu de nos résultats, nous pensons que l'impact de la variabilité inter-individuelle a été sous-estimé. Les paramètres que nous avons estimés sont très proches des valeurs critiques (α ou c proche de 1). Par conséquent, une variabilité inter-individuelle même infime suffirait à placer les fourmis dans des états comportementaux différents. Par exemple, une partie des fourmis serait fortement sensible aux traces de phéromones et les autres faiblement.

Au cœur de notre réflexion réside la valeur des paramètres α et c . Quelles que soient les variantes du modèle de Deneubourg employées, ces deux paramètres sont présents et jouent un rôle important. Nous avons donc apporté un soin particulier à l'estimation de ces paramètres et fait appel au savoir-faire des statistiques.

4.4 L'importance d'une démarche statistique

Cette partie explique l'intérêt et l'importance d'une démarche statistique dans l'art de la modélisation du comportement animal. Le chapitre 3 présente intégralement la démarche statistique que nous avons choisie et propose dans son introduction une partie de vulgarisation.

Un modèle biologique est soumis à une multitude de variables environnementales et physiologiques souvent inconnues ou difficilement mesurables : état d'affamement, taux d'excitation, niveau d'alerte, température, pression atmosphérique, déplacement d'air, humidité... Il existe donc toujours une variabilité inter-individuelle comportementale plus ou moins importante. Un modèle qui prendrait en compte tous ces paramètres serait inexploitable, car bien trop compliqué à implémenter et à appréhender. Il n'est pour autant pas nécessaire d'avoir un modèle parfaitement fidèle à la réalité pour comprendre les mécanismes individuels qui permettent aux fourmis de sélectionner un chemin. Par exemple, notre objectif est de découvrir les règles comportementales minimales sélectionnant spontanément des chemins et non de décrire tous les rouages qui régissent l'ensemble du répertoire comportemental d'une fourmi.

Pertinent dans son domaine et non dénué d'humour, le statisticien Georges Box a un jour déclaré : *“Tous les modèles sont faux, mais certains sont utiles”*. Un modèle sans le but pour lequel il a été conçu n'a pas de sens. L'art de la modélisation ne réside donc pas dans la conception du modèle idéal. Il consiste à définir précisément les questions que nous nous posons, puis à établir des hypothèses nécessairement simplistes mais raisonnées et susceptibles de constituer une réponse et enfin de tester ces suppositions par des moyens divers. Souvent ces derniers sont des comparaisons entre les données d'une expérimentation

et les résultats de simulation du modèle choisi.

Comme il est expliqué précédemment, des travaux pertinents de modélisation ont démontré que des mécanismes simples de dépôt et de suivi de phéromones comme ceux décrits par le modèle de Deneubourg reproduisent en partie le phénomène de sélection (ou non sélection) de chemin observé dans la nature. Cependant le phénomène n'est pas encore complètement compris et il reste encore des règles à identifier. Nous pensons qu'une des clés de la sélection de chemin réside dans les valeurs que prennent les paramètres α et c du modèle de Deneubourg. Ces paramètres possèdent une interprétation éthologique précise et déterminent l'état comportemental de chaque fourmi.

Dans les travaux précédents, ces paramètres ont déjà été évalués à partir de données expérimentales (cf. [DAGP90], [VTG+06] et [GGC+09]). Les méthodes employées dites d'estimation sont en réalité des méthodes de calibration, c'est-à-dire que l'on choisit les valeurs de paramètres qui ajustent le mieux possible le modèle aux données. Ces procédés fournissent donc des valeurs exactes de paramètres. Dans certains domaines, disposer de valeurs exactes de paramètres est essentiel à la prise de décision : achat de telle ou telle marchandise, fixation des tarifs d'un service, établissement de la posologie d'un médicament donné...

Cependant dans une démarche scientifique, où le modèle est un outil d'étude et non de décision, l'exactitude des paramètres perd de son intérêt voire même de son sens. Se décider pour une valeur précise de paramètre revient à admettre que le modèle est vrai et qu'une seule valeur de paramètre est juste. Le principe de la modélisation consiste effectivement à supposer un modèle vrai, mais il réside aussi dans la conscience que ce modèle est faux. L'essence même des statistiques est de traiter avec ce paradoxe et d'émettre des conclusions dans la prudence que ce dernier exige.

La démarche statistique effectuée dans cette thèse n'est pas une sélection de modèle. Nous n'avons pas cherché à évaluer la validité du modèle de Deneubourg. Les outils de statistiques que nous avons développés permettent de déterminer quelles valeurs de paramètres sont vraisemblables sous l'hypothèse que le modèle de Deneubourg est vrai. Plus précisément, pour chacune de nos estimations sur un jeu de données, nous donnons la valeur de paramètre qui s'ajuste au mieux aux données, mais aussi l'intervalle de confiance associé. L'intervalle de confiance est un moyen d'évaluer le degré de confiance de l'estimation. Si on choisit une valeur de paramètre en-dehors d'un intervalle de confiance de niveau 95%, nous aurons une probabilité inférieure à 5% de voir le modèle reproduire le jeu de données.

Ces outils statistiques ne fournissent donc pas des valeurs exactes de paramètre, mais une estimation de la confiance que l'on peut avoir dans un ensemble de paramètres. Ceci

nous permettra d'estimer l'erreur que nous ferions si nous supposions les fourmis dans tel ou tel état comportemental. Ces indications apportent des éléments constructifs à notre réflexion sur le rôle des paramètres du modèle de Deneubourg.

4.5 Description des expériences

Nous avons effectué deux types d'expériences observant des fourmis dans des réseaux constitués d'une ou plusieurs bifurcations. Conformément à la méthodologie que nous avons choisie, les situations étudiées sont simples et comportent les deux particularités suivantes :

- absence de nourriture.
- isolement des fourmis lors de leurs prises de décision.

Un réseau à une bifurcation et plusieurs fourmis

Le premier type d'expériences confronte une centaine de fourmis à jeun à une bifurcation en forme de Y (cf. chapitre 5). Cette situation a déjà été maintes fois étudiée. L'originalité de notre protocole réside dans un soin particulier à assurer l'isolement des fourmis lors de leurs prises de décision. Les fourmis sont introduites une par une dans le réseau et leurs seules issues sont les deux branches du Y. Les fourmis sont retirées de l'expérience dès leur choix effectué entre la gauche et la droite de telle sorte que jamais plus d'une fourmi ne se trouve dans le réseau. La seule communication inter-individuelle possible est donc celle indirecte induite par l'utilisation des phéromones.

Le chapitre 5 comporte la description et l'analyse des résultats de deux variantes de ce protocole expérimental. Notre contribution consiste essentiellement en un travail rigoureux d'estimation des paramètres α et c utilisant les outils développés dans le chapitre 3. Nous discutons sur le rôle et la valeur de ces paramètres dans le phénomène de formation de chemin.

Un réseau à trois bifurcations et une fourmi

Le second type d'expériences a pour objectif d'étudier le comportement d'une fourmi seule évoluant dans un réseau constitué de plusieurs bifurcations. Nous avons choisi la forme géométrique symétrique la plus simple contenant plus d'un carrefour à deux choix : le triangle (cf. chapitre 6). Lors d'une expérience, la fourmi enfermée dans le réseau est donc libre de ses déplacements et est régulièrement confrontée aux trois bifurcations et donc à des choix binaires.

CHAPITRE 4. INTRODUCTION

Nous nous posons la question de la pertinence des marches aléatoires renforcées à tenir compte du comportement de fourmis dans un réseau. Nous nous demandons s'il est possible de décrire les déplacements d'une fourmi par une série de choix ou s'il faut intégrer d'autres critères comme l'orientation de la fourmi, lorsqu'elle atteint une bifurcation. Pour cela nous avons étudié plusieurs modèles et estimé les paramètres de ces derniers par les outils de statistiques développés dans le chapitre 3. Un des modèles est une MAR qui considère chaque sommet du triangle comme une urne de Deneubourg.

Chapitre 5

Choix binaires par une colonie de fourmis

Sommaire

Introduction	167
5.1 Description de l'expérience	169
5.1.1 Le modèle biologique	169
5.1.2 Dispositif et protocoles expérimentaux	169
5.1.3 Nature des données	172
5.2 Le modèle	174
5.3 Résultats et analyses	175
5.3.1 Présentation des données : un premier signe de renforcement . . .	175
5.3.2 Estimation des paramètres α et c	182
5.4 Conclusion	191
5.4.1 Analyse statistique	191
5.4.2 Analyse comportementale	192

Introduction

Dans ce chapitre, par expérimentation et modélisation, nous cherchons à mieux comprendre les mécanismes de réponse d'une colonie de fourmis confrontée à un choix à deux branches. Pour tenir compte de cette situation, nous avons choisi le modèle de Deneubourg (cf. équation (4.3.1), p.156 et [DAGP90]) et avons placé au cœur de notre étude le rôle et la valeur des paramètres α et c de ce modèle.

Le modèle de Deneubourg se base sur les hypothèses que les phéromones ne s'évaporent pas et que les fourmis adoptent toutes le mêmes comportements, i.e. elles sont dans le même état comportemental et contribuent à la même issue : sélection ou non sélection d'une branche (cf. hypothèses 1, 2 et 3, p.155). Ces conjectures impliquent que les paramètres α et c sont des constantes de même valeur pour toutes les fourmis.

Ces hypothèses vraisemblablement fausses sont considérées comme des approximations raisonnables du comportement réel des fourmis et des phéromones. Toutefois nous pensons que le rôle de la variabilité inter-individuelle est sous-estimée.

Nous avons effectué deux séries d'expériences. Ce sont des variantes d'un protocole expérimental qui consiste à faire passer des fourmis une par une par une bifurcation en forme de Y. Ces protocoles ont les deux particularités suivantes :

- chaque fourmi est complètement isolée, lorsqu'elle choisit entre la branche gauche et droite et donc ne peut être informées des choix précédents que par les traces de phéromones éventuellement déposées.
- les fourmis sont retirées de l'expérience dès leurs choix effectués. Elles ne marquent donc que la branche qu'elles choisissent.

Ces deux spécificités ont été mises en place afin d'accentuer la plausibilité des hypothèses 1 et 3. Nous avons de plus effectué un nombre conséquent de répliques pour chacune des expériences : 49 pour l'une et 31 pour l'autre.

Pour les deux expériences, nous avons estimé les paramètres α et c ainsi que les intervalles de confiance correspondants. Ces résultats révèlent que nous ne pouvons vraiment conclure qu'une sélection de chemin a lieu. Les paramètres estimés sont proches d'une valeur critique délimitant deux états (α ou c proche de 1). Par conséquent, la variabilité inter-individuelle, même faible, implique que les fourmis ne contribuent pas toutes à la même issue (sélection ou non sélection de chemin).

Dans la partie 5.1 nous décrivons dans le détail l'expérience que nous avons réalisé. Dans la partie 5.2, nous définissons succinctement le modèle de Deneubourg. Dans la partie 5.3, nous analysons les résultats de l'expérience. Dans un premier temps, nous apportons une preuve statistique que les fourmis déposent des phéromones et y sont sensibles. Ensuite nous estimons les paramètres du modèle de Deneubourg avec les outils développés dans le chapitre 3. Enfin dans la partie 5.4, nous discutons des résultats que nous avons obtenus.

5.1 Description de l'expérience

5.1.1 Le modèle biologique

Le modèle biologique est la fourmi *Linepithema humile* (Formicidae, Dolichoderinae) appelée communément fourmi d'Argentine. Cette espèce a été choisie pour deux raisons :

- **Une grande vitesse de déplacement** : les individus se déplacent beaucoup et rapidement. H. Shapley a enregistré des vitesses allant jusqu'à 4 cm/s (cf. [Sha24]).
- **Un marquage constant et uniforme** : les fourmis de cette espèce semblent marquer systématiquement leur trajectoire. De plus elles utiliseraient toujours le même type de phéromones et de la même façon (cf. [VVKB82] et [APD89]).

Cette espèce est considérée invasive et elle est monomorphe : toutes les ouvrières sont identiques avec une longueur de corps entre 2 à 3 mm.

Les fourmis ont été récoltées à Toulouse et sont élevées par colonies de plusieurs milliers d'individus sans reine ni couvain. Elles sont nourries tous les deux ou trois jours avec un mélange d'œufs, de glucides et de vitamines suivant la recette proposée par A. Bhatkar et W.H. Whitcomb en 1970 (cf. [BW70]). Un nid artificiel est constitué d'une boîte en plastique dont les bords sont recouverts de Fluon (téflon liquide) afin de prévenir toute évasion. Des tubes à essai offrant abris et abreuvoirs y sont disposés.

Deux jours avant une expérience, les fourmis qui seront utilisées sont isolées par groupes de quelques centaines d'individus dans des boîtes circulaires en plastique ($\varnothing = 10$ cm) également tapissées de Fluon. Les fourmis ne sont pas nourries durant l'isolement. Ce conditionnement assure l'état d'affamement des fourmis et permet de supposer qu'elles sont toutes dans le même état comportemental avant chaque expérience.

Une fourmi ayant déjà effectué une fois l'expérience n'est jamais réutilisée, ce qui permet de prévenir un effet éventuel d'apprentissage.

5.1.2 Dispositif et protocoles expérimentaux

Nous avons effectué deux variantes d'un protocole expérimental qui confrontent une part une cent fourmis à un choix binaire en forme de Y. Lorsqu'elle arrive au point de bifurcation, chaque fourmi choisit entre la branche de droite ou celle de gauche avant d'être retirée du dispositif. Une nouvelle fourmi est alors introduite et ainsi de suite de sorte que jamais deux fourmis ne sont présentes en même temps à la bifurcation.

La figure 5.1 à la page 173 donne un schéma détaillé du dispositif. Les fourmis à jeun sont placées dans le réservoir. Cette boîte circulaire ($\varnothing = 8$ cm) tapissée de Fluon est reliée par un tuyau flexible (également en plastique) à la bifurcation en Y. Ce dernier est une

plaque de PVC blanc dans laquelle est gravée une galerie (appelée tronc) se séparant avec un angle de 60° en deux autres galeries identiques (appelées branches). Toutes les galeries ont une section carrée de 5 mm de côté. Le tronc comporte une petite chambre circulaire ($\varnothing = 2$ cm) dont chacun des deux accès est contrôlé par une porte (un petit cylindre en Plexiglas de 5 mm de diamètre). Pour que les fourmis introduites restent dans les galeries, le réseau est partiellement recouvert d'une vitre en plexiglas transparent. L'extrémité des branches est à l'air libre pour permettre le retrait des fourmis du dispositif une fois qu'elles ont réalisé leur choix.

Deux répliques de ce dispositif D_1 et D_2 ont été fabriquées. Elles ont été utilisées alternativement durant les séries d'expériences. Avant chaque expérience, le dispositif utilisé est nettoyé au savon, puis à l'alcool et enfin rincé abondamment pour s'assurer qu'aucune trace de phéromones ne subsiste entre deux expériences.

Une expérience se déroule comme suit :

1. **Introduction des fourmis dans le réservoir** : Des fourmis à jeun sont placées dans le réservoir afin que ce dernier contienne environ 200 fourmis. Toutes les portes sont fermées.
2. **Introduction d'un petit groupe de fourmis dans la chambre** : La porte qui sépare le réservoir de la chambre est ouverte le temps de laisser entrer une dizaine de fourmis. Cette chambre permet de contrôler l'afflux des fourmis et facilite l'étape suivante.
3. **Introduction d'une fourmi dans le Y** : La porte séparant la chambre du Y est ouverte puis refermée pour ne laisser passer qu'une seule fourmi. Les seules issues sont les extrémités des branches.
4. **Extraction de la fourmi du dispositif** : Dès que la fourmi atteint la zone non recouverte d'une des deux branches, il est considéré que la fourmi a fait son choix entre la gauche et la droite et elle est retirée du dispositif et de l'expérience.
5. **Réitération** : Tant que 100 fourmis ne sont pas passées, les étapes 3 et 4 sont répétées. La densité de fourmis étant très influente sur le comportement des individus, les étapes 1 et 2 sont parfois réitérées afin de maintenir un nombre constant de fourmis dans le réservoir et la chambre.

Les fourmis déjà passées par le Y et leurs congénères attendant dans le réservoir ou la chambre ne sont jamais en contact pendant toute la durée de l'expérience. Ce protocole expérimental est unique pour deux raisons :

- Il assure l'isolement complet de chaque fourmi lors du choix et de l'éventuel dépôt de phéromones. Ainsi nous savons qu'aucune communication inter-individuelle di-

recte n'est possible. La seule information qu'une fourmi peut recevoir sur les choix précédents de ses congénères est l'éventuel marquage chimique présent sur les branches du Y.

- Les fourmis ne peuvent pas revenir sur leurs pas une fois qu'elles ont choisi leur branche, ce qui limite dans la mesure du possible un double marquage des branches. Cette précaution constitue un argument en faveur de l'hypothèse que nous faisons par la suite : les fourmis marquent uniquement la branche qu'elles ont choisi et ceci avec la même quantité.

L'expérience se déroule dans une pièce complètement fermée aux murs blancs. L'éclairage est assuré par quatre tubes de néon situés à plus d'1m70 du dispositif. Le protocole expérimental exige la présence de l'expérimentateur tout le temps que dure l'expérience. Le dispositif est orienté de telle façon que les branches soient dirigées vers un mur blanc et l'expérimentateur se tient derrière le réservoir.

Nous avons réalisé deux variantes du protocole expérimental qui se distinguent dans la façon dont les fourmis sont extraites du dispositif :

- par air comprimé
- ou à l'aide d'un pinceau.

La méthode d'extraction la plus souvent utilisée est l'emploi d'un pinceau : ces insectes ont le réflexe de pincer avec leurs mandibules les poils de la brosse. Un coup rapide sur une fourmi suffit à l'emporter. Cependant ce procédé présente plusieurs inconvénients. Premièrement, il laisse une grande place à l'action de l'expérimentateur, dont le geste ne sera jamais le même. Par exemple, s'il est manqué, la fourmi retourne en état de panique dans les branches et perturbe ainsi l'expérience. Cela introduit donc une variabilité extérieure au modèle biologique que nous étudions et en règle générale, il est préférable d'éliminer au maximum de tout protocole expérimental l'action directe de l'expérimentateur. Deuxièmement, il est impossible d'assurer la propreté du pinceau. En effet les poils peuvent s'imprégner de substances chimiques et laisser des traces sur leurs passages.

Pour prévenir ces effets, nous avons utilisé une seconde méthode qui consiste à retirer les fourmis par un jet d'air comprimé. Les extrémités des branches sont connectées par des tuyaux en plastique flexible à un compresseur électrique qui expulse de l'air sur commande. Ainsi dès qu'une fourmi a fait son choix, le compresseur est actionné par l'expérimentateur et la fourmi est éjectée hors du dispositif. Malheureusement malgré une orientation des jets d'air vers l'extérieur et la fermeture des deux portes, nous avons constaté qu'un appel d'air se répand jusqu'à la zone de choix et même dans la chambre et le réservoir. Ceci constitue le point faible de cette méthode d'extraction. En effet nous ne connaissons pas

l'influence que cette circulation sporadique d'air a sur l'évaporation des phéromones et le comportement des fourmis. Cela est d'autant plus problématique que ces déplacements d'air ne sont pas réguliers. Leur fréquence et leur durée dépendent de l'expérimentateur, de la facilité avec laquelle chaque fourmi est expulsée, etc... Ceci introduit entre autres une influence de l'action de l'expérimentateur possiblement plus forte que celle induite par la méthode au pinceau.

À ces problèmes potentiels liés à la méthode d'extraction des fourmis, nous avons également rencontré les situations suivantes :

- des fourmis qui passent à deux dans le Y,
- une fourmi qui s'arrête dans le tronc et y reste très longtemps,
- aucune fourmi ne se décide à entrer dans le Y.

Par conséquent, ces expériences peuvent être longues et fastidieuses à réaliser. Ainsi les répliques peuvent durer longtemps (une demi-heure à deux heures), ce qui rend discutable l'hypothèse d'une non évaporation des phéromones au cours d'une réplique de l'expérience. Nous avons toutefois pu faire un certain nombre de répliques pour chacun des deux protocoles :

- 49 répliques de l'expérience dont l'extraction est à air comprimé : 27 effectuées dans la période de avril à mai 2013 et 24 effectuées dans la période de juillet à août 2013
- et 31 répliques de l'expérience dont l'extraction se fait à l'aide d'un pinceau : toutes ont été effectuées dans la période de juillet à août 2013.

5.1.3 Nature des données

Les données extraites des expériences décrites précédemment sont les séquences de choix des fourmis : 0 pour gauche et 1 pour droite. Ces choix ont été enregistrés par l'expérimentateur au cours des expériences. Des tests de χ^2 ont été effectués pour s'assurer qu'il n'existe aucun biais significatif entre les branches gauche et droite, entre les dispositifs D_1 et D_2 et entre les données récoltés en avril-mai 2013 et en juillet-août 2013. Nous avons également vérifié statistiquement que le choix de la première fourmi de chaque expérience est bien uniforme (la première fourmi a autant de chance de choisir la branche de droite que celle de gauche).

Nous ne disposons pour le moment d'aucune information sur le déroulement de ces choix : le temps qui s'écoule entre chaque choix, l'hésitation ou la détermination des fourmis au moment du choix, etc... En effet, le dispositif étant beaucoup manipulé par l'expérimentateur, tout suivi automatique des fourmis est difficile à implémenter. Il est prévu dans le futur d'analyser les vidéos des expériences qui ont toutes été filmées afin de récupérer ces informations et de compléter la discussion de ce chapitre.

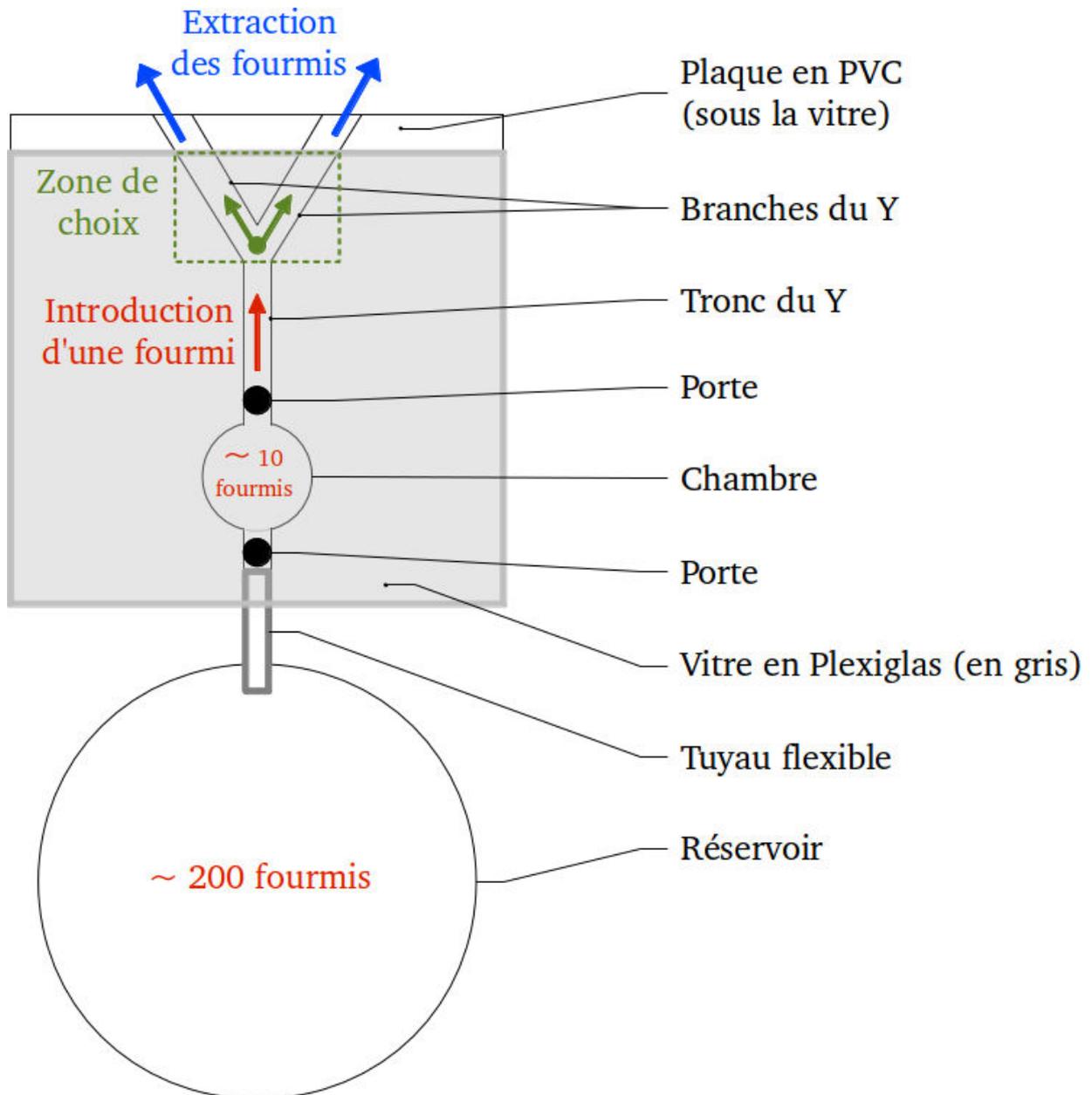


FIGURE 5.1 – Dispositif expérimental.

5.2 Le modèle

Le modèle choisi, l'urne de Deneubourg, a déjà été décrit à plusieurs reprises dans cette thèse, notamment dans partie 4.3, p.155. Il repose sur les hypothèses 1, 2 et 3 décrites page 155.

Comme expliqué dans la section 4.3, l'hypothèse 1 est rendue crédible par le choix du modèle biologique. De plus le protocole utilisé empêchant les fourmis de faire demi-tour une fois le choix réalisé, les insectes ne passent qu'une seule fois par la branche qu'ils ont choisie et n'empruntent jamais l'autre.

L'hypothèse 2 peut être plus sujette à discussion, car les expériences durent souvent bien plus longtemps que la demi-vie des phéromones, estimée à 30 minutes. En réalité nous connaissons peu de choses sur les phéromones. Nous ne savons pas quelle quantité les fourmis déposent au sol ni à quelle fréquence. Nous ignorons la manière dont les phéromones réagissent aux différents substrats, à la circulation d'air... Même la valeur de la demi-vie n'est qu'une estimation basée sur l'étude du (Z)-9-hexadécénal, un des composants des phéromones utilisées par les fourmis d'Argentine (cf. [VVKB82]). Nous avons donc décidé de maintenir l'hypothèse de non évaporation des phéromones pour garder un modèle simple et de se servir des résultats obtenus comme base pour une nouvelle modélisation plus fidèle à la réalité.

Nous notons X_k la branche empruntée par la k -ième fourmi (0 pour la branche gauche et 1 pour la branche droite) et Z_k le nombre total de passages par la branche de droite au temps k . Ainsi nous avons la relation $Z_k = \sum_{\ell=1}^k X_\ell$ et le nombre de passages par la branche de gauche est égal à $k - Z_k$.

Comme expliqué dans la section 4.3, les hypothèses 1, 2 et 3 nous permettent de supposer qu'il existe deux réels strictement positifs α et c tels que la probabilité de choisir la branche de droite au temps $k + 1$ en sachant les k premiers choix est égale à

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_1, \dots, X_k) = \frac{(c + Z_k)^\alpha}{(c + Z_k)^\alpha + (c + k - Z_k)^\alpha}, \quad (5.2.1)$$

avec $\alpha > 0$ et $c > 0$. Le paramètre α est appelé le paramètre de *sensibilité différentielle aux phéromones* et c le paramètre d'*incrément du renforcement* (intensité du dépôt de phéromones). Il est à noter que plus c est petit et plus l'intensité du dépôt est importante et inversement.

Le modèle de Deneubourg possède quatre états décrits à la page 4.3. Dans tous les travaux qui modélisent les choix binaires de fourmis par le modèle de Deneubourg ou par une de ses variantes, il est considéré que la sensibilité différentielle des fourmis est impor-

tante et que toutes les fourmis déposent de faibles quantités de phéromones (cf. [DAGP90], [VTG+06] et [GGC+09]). C'est-à-dire que même en n'écartant pas complètement l'existence d'une certaine variabilité inter-individuelle, il est toujours admis que les fourmis ont le même état comportemental, i.e. contribuent à la même issue.

Nous verrons que nos résultats d'estimation ne nous permettent pas de conclure avec une grande degré de confiance qu'une branche est sélectionnée ($\alpha > 1$) ou même favorisée dans les premiers temps ($c < 1$). Les valeurs estimées sont proches des valeurs critiques (α ou c proche de 1).

5.3 Résultats et analyses

Dans un premier temps nous démontrons par un test statistique que les fourmis déposent des phéromones et y sont sensibles. Nous montrons également que le comportement des fourmis est différent selon le protocole expérimental utilisé.

Dans un second temps, nous présentons les résultats d'estimation des paramètres du modèle en utilisant les outils développés dans le chapitre 3. Il n'est pas possible de déterminer avec une grande confiance l'état comportemental dans lequel se trouvent les fourmis. Toutefois nous sommes capables de d'évaluer l'erreur que nous faisons en supposant les fourmis dans un état comportemental donné.

5.3.1 Présentation des données : un premier signe de renforcement

5.3.1.1 Résultats expérimentaux obtenus avec le protocole utilisant l'air comprimé

Nous rappelons que l'expérience dont l'extraction des fourmis se fait à l'air comprimé possède 49 répliques. Nous notons Z_k^j le nombre total de passages par la branche de droite après k passages durant la j -ième réplique.

La figure 5.2 (p.178) représente les 49 séquences de choix sous forme de somme cumulative, où un passage à droite est compté 1 et un passage à gauche compté -1 . Autrement dit ce graphe représente $k - 2Z_k^j$ en fonction de k . La figure 5.3 (p.179) représente l'histogramme des proportions de passages par la branche droite à la fin de chaque réplique, ou autrement dit l'histogramme des $Z_{100}^j/100$.

Dans 7 des répliques, les fourmis sélectionnent une branche dès le début et donnent des proportions de choix très proches de 0 ou 1. Mais la majorité des répliques ne présentent

aucune sélection évidente de branches, c'est-à-dire que les proportions de passages sont centrées autour de $1/2$. Nous avons donc testé si l'hypothèse de dépôt de traces chimiques attractives était plausible.

Le dispositif expérimental a été conçu de telle façon que les branches soient parfaitement identiques (cf. section 5.1.3, p.172). Par conséquent, si les fourmis ne déposent pas de phéromones, la probabilité de choisir une branche donnée doit être égale à $1/2$ quelque soit le nombre de passages déjà effectués.

L'hypothèse d'une absence de traces chimiques attractives est peu plausible au vu de la comparaison entre la distribution des proportions de passages par la branche droite de l'expérience (histogramme de la figure 5.3) et la distribution théorique des proportions de passages par la branche droite si chaque fourmi avait choisi sa branche avec une probabilité $1/2$ (courbe en pointillé rouge de la figure 5.3).

Nous avons testé si les probabilités de choix sont différentes de $1/2$ à chaque passage. Nous utilisons un test statistique d'hypothèse nulle \mathcal{H}_0 : *les fourmis choisissent la branche de droite avec probabilité $1/2$ à chaque passage*. La p -valeur vaut $5.47 \cdot 10^{-4}$ ce qui indique que \mathcal{H}_0 est fortement rejetée.

Nous rappelons que la p -valeur donne le degré de confiance que l'on peut avoir dans l'hypothèse nulle, où une p -valeur égale à 1 signifie un degré de confiance à 100% et une p -valeur nulle implique un degré de confiance nul. Nous pouvons aussi dire que la quantité 1 moins la p -valeur évalue l'erreur que nous faisons en supposant l'hypothèse nulle vraie.

Dans notre cas, le degré de confiance que nous pouvons avoir dans l'hypothèse nulle est très proche de zéro et donc supposer \mathcal{H}_0 induit une erreur très forte. Par conséquent, il est fortement statistiquement significatif de supposer que les fourmis déposent des traces de phéromones et sont influencées par celles-ci.

Remarque 5.3.1 (Description du test). *Sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 , les Z_{100}^j suivent une loi binomiale de paramètre $(n, p) = (100, 0.5)$. Le théorème limite central nous assure que sous \mathcal{H}_0 , la loi des Z_{100}^j est approximativement une loi normale de moyenne 50 et de variance 25. Plus précisément,*

$$\frac{Z_{100}^j - 50}{\sqrt{25}}$$

suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Notre hypothèse nulle est donc en réalité \mathcal{H}_0 : la loi des $\frac{Z_{100}^j - 50}{\sqrt{25}}$ est une normale centrée réduite et nous utilisons le test de Kolmogorov-Smirnov.

5.3.1.2 Résultats expérimentaux obtenus avec le protocole utilisant un pinceau

Nous rappelons que l'expérience dont l'extraction des fourmis se fait à l'aide d'un pinceau possède 31 répliques. Les résultats de cette expérience sont différents de ceux de l'expérience utilisant l'air comprimé. Cette remarque est développée dans la section 5.4 (p.191).

Nous notons \tilde{Z}_k^j le nombre total de passages par la branche de droite après k passages durant la j -ième réplique. La figure 5.4 (p.180) représente les 31 séquences de choix sous forme de somme cumulative, où un passage à droite est compté 1 et un passage à gauche compté -1 . Autrement dit ce graphe représente $k - 2\tilde{Z}_k^j$ en fonction de k .

La figure 5.5 (p.181) représente l'histogramme des proportions de passages par la branche droite à la fin de chaque réplique, ou autrement dit l'histogramme des $\tilde{Z}_{100}^j/100$. Cette fois, les trajectoires et les proportions restent très proches de la situation d'égalisation des branches : probabilité de choisir une branche proche de $1/2$. De plus, la distribution des proportions de passages par la branche droite de l'expérience (histogramme de la figure 5.5) et la distribution théorique des proportions de passages par la branche droite si chaque fourmi avait choisi sa branche avec une probabilité $1/2$ (courbe en pointillé de la figure 5.5) ne semblent pas très différentes.

Cependant le test décrit dans la remarque 5.3.1 rejette l'hypothèse nulle \mathcal{H}_0 : *les fourmis choisissent une branche avec probabilité $1/2$ à chaque passage*. En effet, la p -valeur vaut $7.57 \cdot 10^{-1}$ ou autrement dit l'erreur est évaluée près de 25% lorsque que nous supposons l'hypothèse nulle.

Nous ne sommes donc pas confiants à 100% si nous supposons l'hypothèse \mathcal{H}_0 fausse. Toutefois nous considérons l'erreur trop forte et donc supposons qu'il existe un marquage chimique par les fourmis.

5.3.1.3 Conclusion

Nous avons démontré que l'hypothèse d'une absence de trace chimique attractive n'est statistiquement pas significative. C'est-à-dire que sans déposer de phéromones sur leurs passages ou sans être influencées par celle-ci, les fourmis ont une chance assez faible d'effectuer les séries de choix que nous avons observées.

Les résultats expérimentaux obtenus avec le protocole utilisant l'air comprimé ne laisse aucun doute sur la question. Ils présentent même quelques séries de choix où une branche est clairement choisie dès les premiers passages.

Les résultats expérimentaux obtenus avec le protocole utilisant un pinceau ne sont pas aussi catégoriques quant à la présence et l'influence de phéromones. Nous pouvons tout

de même supposer sans trop d'erreur que les fourmis déposent des phéromones et y sont sensibles.

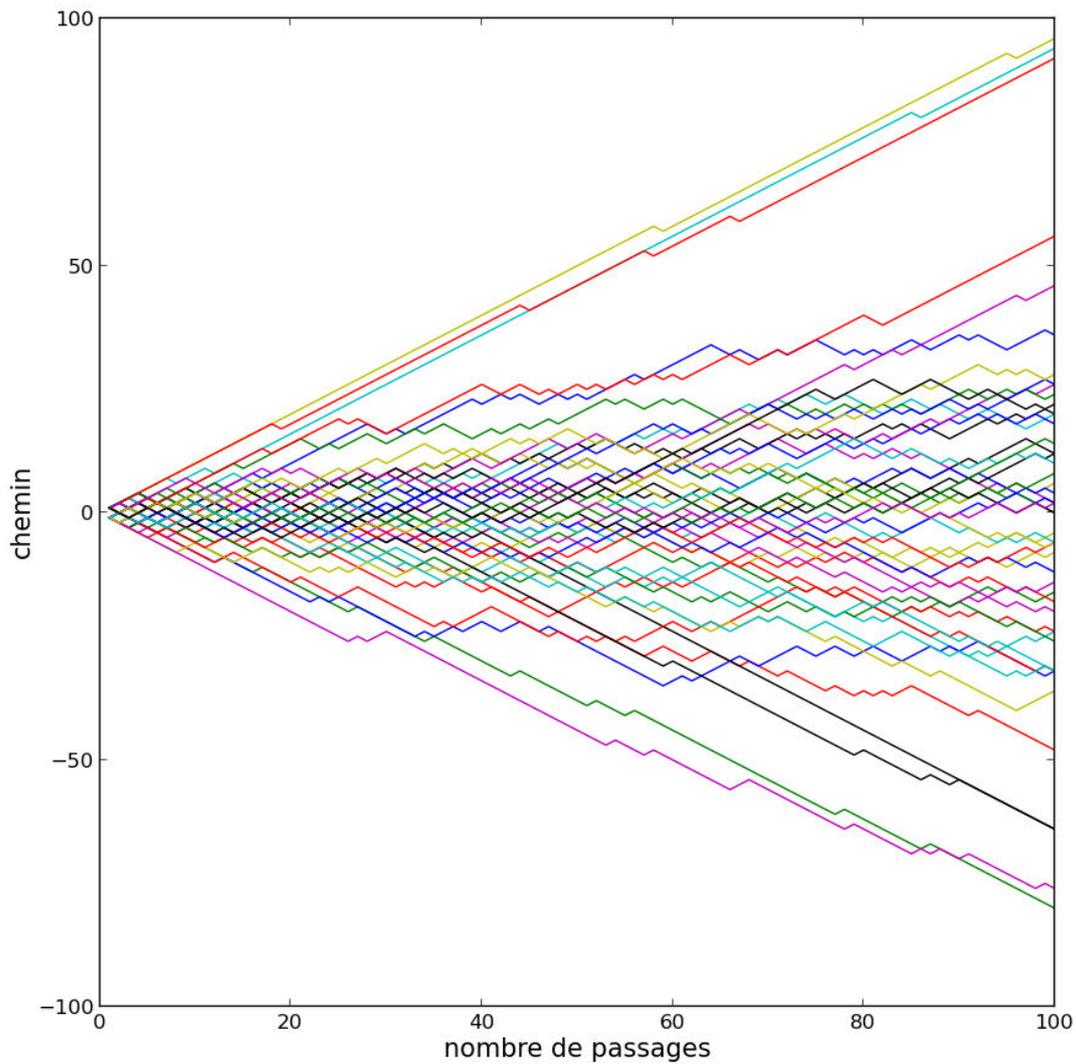


FIGURE 5.2 – Expérience utilisant l'air comprimé : les 49 séquences de choix. Ces trajectoires sont sous forme de somme cumulative, où un passage à droite est compté 1 et un passage à gauche compté -1. Autrement dit $k - 2Z_k^j$ est représenté en fonction de k .

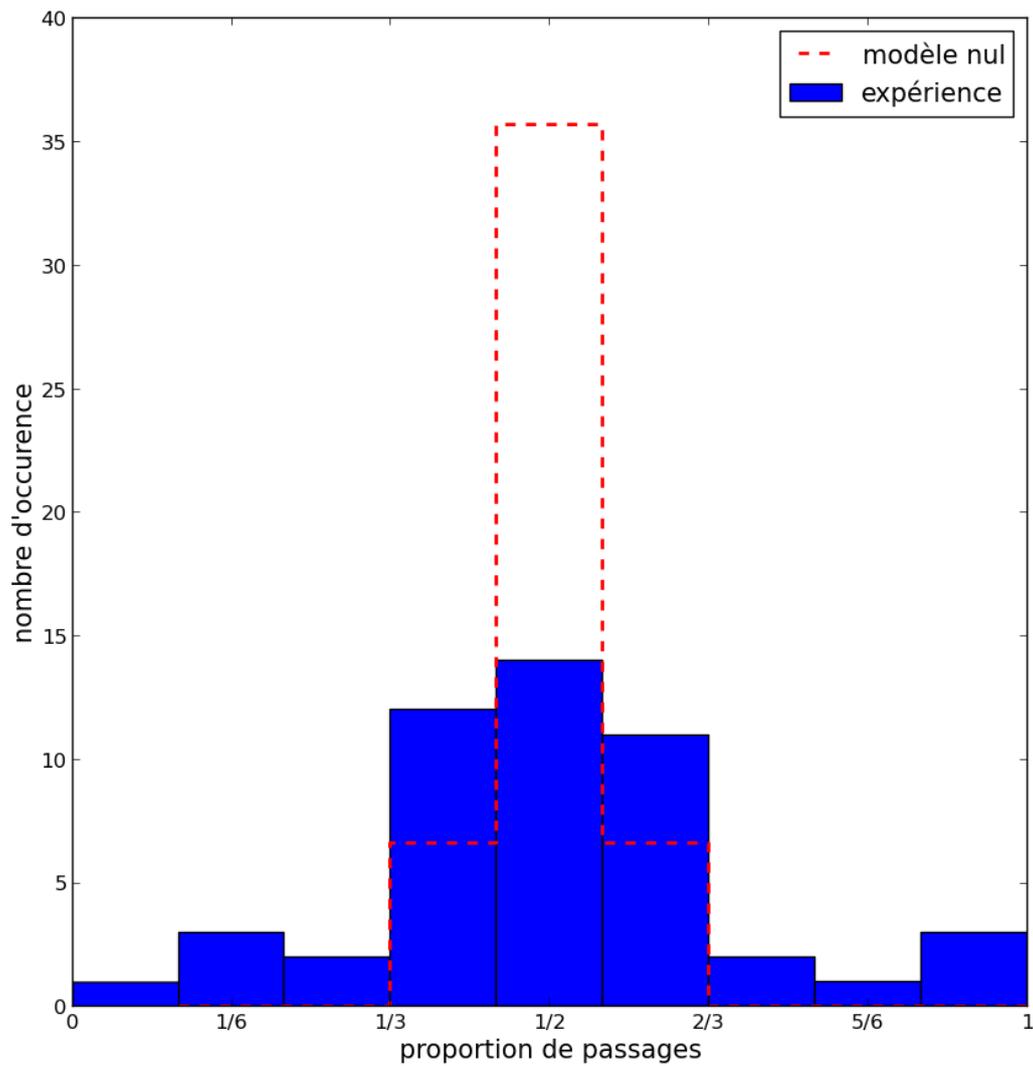


FIGURE 5.3 – Expérience utilisant l'air comprimé : histogramme des proportions finales de passages par la branche droite pour chaque réplique ou autrement dit l'histogramme des $Z_{100}^j/100$. La courbe en pointillé rouge est la distribution théorique des proportions de passages par la branche de droite, sous l'hypothèse que les fourmis ne sont pas influencées par les traces de phéromones, i.e. si chaque fourmi avait choisi avec une probabilité $1/2$.

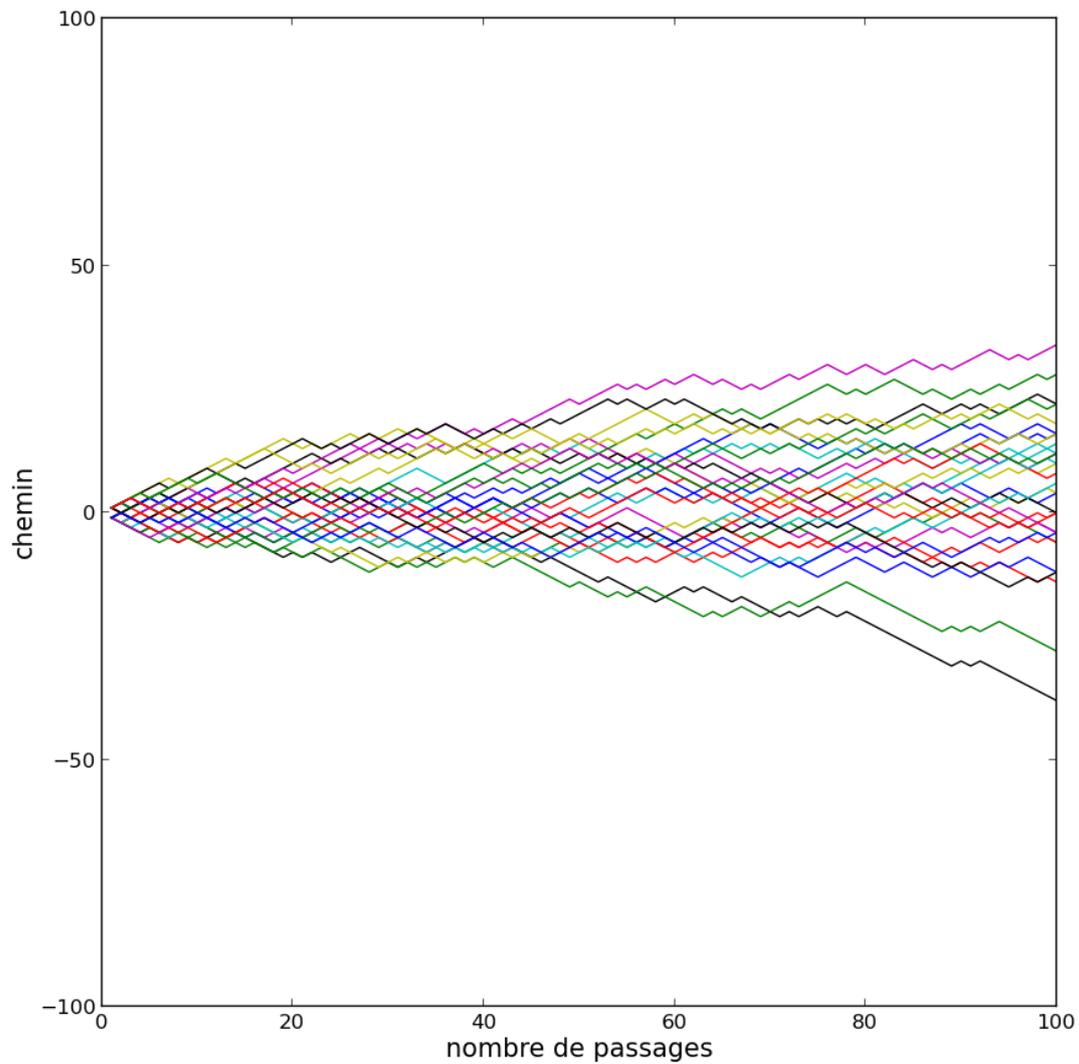


FIGURE 5.4 – *Expérience utilisant un pinceau : les 31 séquences de choix. Ces trajectoires sont sous forme de somme cumulative, un passage à droite est compté 1 et un passage à gauche compté -1. Autrement dit $k - 2Z_k^j$ est représenté en fonction de k .*

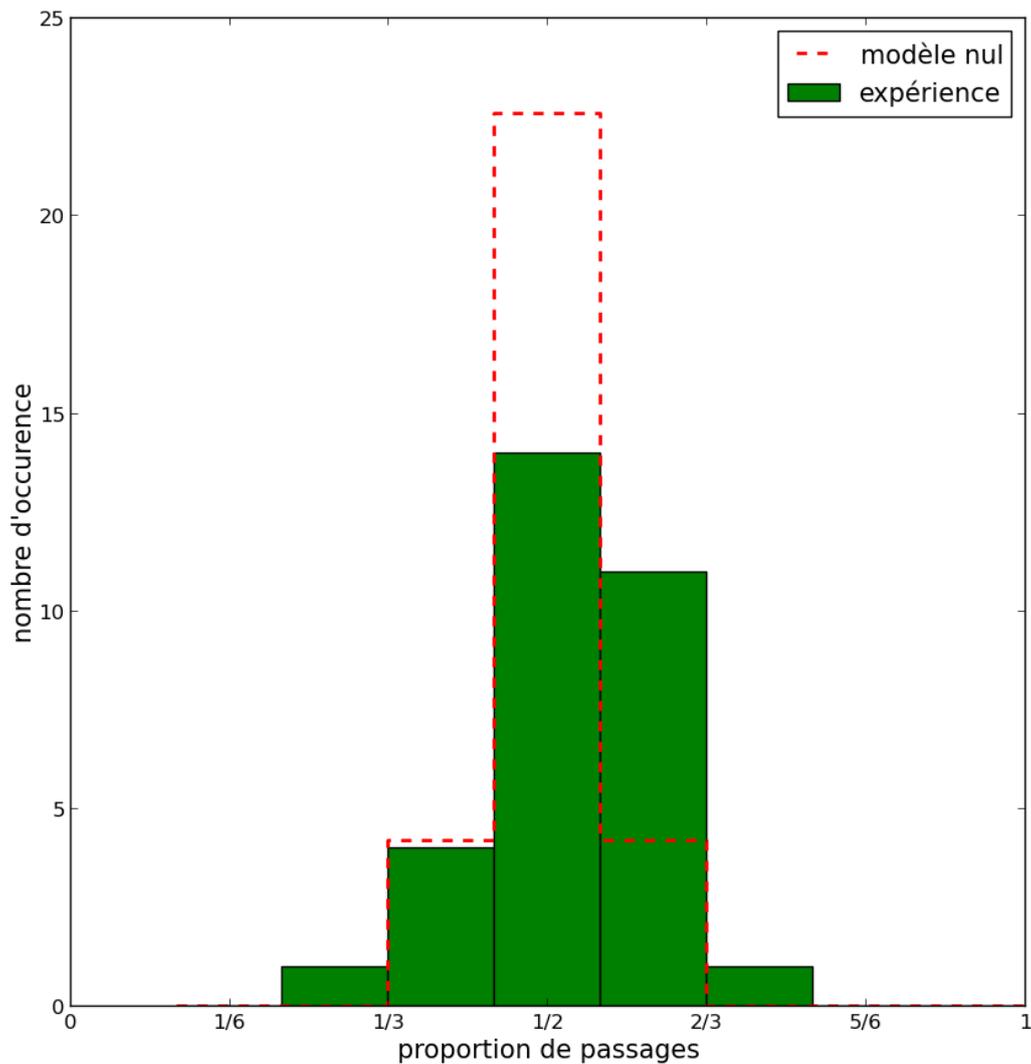


FIGURE 5.5 – *Expérience utilisant un pinceau : histogramme des proportions finales de passages par la branche droite pour chaque réplique ou autrement dit l’histogramme des $Z_{100}^j/100$. La courbe en pointillé rouge est la distribution théorique des proportions de passages par la branche de droite, sous l’hypothèse que les fourmis ne sont pas influencées par les traces de phéromones, i.e. si chaque fourmi avait choisi avec une probabilité $1/2$.*

5.3.2 Estimation des paramètres α et c

Dans cette partie nous estimons les paramètres α et c pour les deux expériences. Nous proposons de le faire en utilisant les outils statistiques développés dans le chapitre de statistiques 3. Ce dernier propose une partie de vulgarisation dans son introduction.

Ces outils sont constitués de deux séries d'expériences : l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) et l'estimateur des moindres carrés pondérés (EMCP). Ce sont des fonctions des séries de choix qui évaluent les valeurs des paramètres α et c . Pour chaque estimation, nous fournirons également l'intervalle confiance de niveau 95% correspondant. Un intervalle de confiance est une manière d'évaluer le degré de confiance de l'estimation. Si on choisit une valeur de paramètre en-dehors d'un intervalle de confiance de niveau 95%, nous aurons une probabilité inférieure à 5% de voir le modèle reproduire le jeu de données observées.

5.3.2.1 Résultats expérimentaux obtenus avec le protocole utilisant l'air comprimé

Nous commençons par commenter les résultats d'estimation pour les données de l'expérience qui utilise l'air comprimé. Le tableau 5.1 donne la valeur des estimateurs EMV et EMCP pour α et c ainsi que leur intervalle de confiance bootstrap à 95%.

	$\hat{\alpha}$	IC Bootstrap 95%	\hat{c}	IC Bootstrap 95%
EMV	1.07	(0.80, 1.99)	3.26	(1.14, 23.0)
EMCP	1.10	(0.62, 3.81)	6.91	(0.94, 85.4)

TABLE 5.1 – *Expérience utilisant l'air comprimé : valeurs des estimateurs EMV et EMCP pour α et c ainsi que les intervalles de confiance bootstrap à 95% correspondants.*

Les deux estimations de α sont proches de 1.1 et les estimations de c sont proches de 3 ou 7. Les intervalles de confiance sont plus grands que ceux calculés à partir de données simulées par Monte-Carlo pour des valeurs de paramètres similaires (voir le tableau 5.2 qui est un extrait du tableau 3.4 du chapitre 3, p.132). C'est-à-dire qu'en simulant des expériences suivant un modèle de Deneubourg de paramètre (1.1, 3.0) ou (1.1, 7.0), nous trouvons des intervalles de confiance meilleurs que ceux estimés sur les données expérimentales.

Cette plus grande variabilité pourrait résulter des quelques répliques de l'expérience pendant lesquelles les fourmis sélectionnent très rapidement une branche (voir les figures 5.2 et 5.3, p.178-179). Ceci suggère que les fourmis n'adoptent pas toujours le même comporte-

	(α, c)	IC 95% pour α	IC 95% pour c
EMV	(1.1, 3.0)	(0.98, 1.29)	(1.81, 6.22)
EMCP	(1.1, 7.0)	(0.75, 1.83)	(1.68, 30.3)

TABLE 5.2 – Extrait du tableau 5.2 du chapitre 3, p.132). Intervalles de confiance de Monte-Carlo à 95% basés sur 500 expériences simulées de $N = 50$ séries de $n = 100$ choix d'un modèle de Deneubourg de paramètres (α, c) .

ment d'une expérience à l'autre et que la distribution de $Z_{100}/100$ est un mélange de lois. Cette idée est discutée dans la partie 5.4.

Les intervalles de confiance sont trop grands pour décider dans quel état les fourmis se trouvent. Pour les deux estimateurs, les intervalles de confiance de α contiennent la valeur 1. Nous ne pouvons donc pas conclure avec une confiance suffisante que $\alpha > 1$ et donc qu'une sélection de branche a lieu. L'hypothèse d'une non sélection de branche n'est pas statistiquement négligeable.

En revanche nous pouvons affirmer avec une confiance proche de 95% que c est supérieur à 1. En effet, la valeur 1 pour le paramètre c est proche de la borne inférieure ou même carrément exclue des intervalles de confiance. Nous sommes donc statistiquement sûr à 95% que le marquage est faible.

Même si nous ne pouvons nous décider pour un des quatre états, il est possible d'évaluer la confiance que nous pouvons avoir si nous supposons un état donné être celui dans lequel les fourmis se trouvent. Pour cela l'intervalle de confiance ne suffit plus, nous avons besoin d'estimer une région de confiance dans le plan (c, α) , ce que les figures 5.6 et 5.7 pages 187-188 proposent. C'est-à-dire qu'avec une méthode de Bootstrap, nous avons généré 500 expériences artificielles à partir de celles que nous avons observée. Cette méthode statistique est décrite dans l'article [Was04].

Pour chacune de ces 500 expériences artificielles, nous avons calculé l'EMV et l'EMCP. La figure 5.6 représente les valeurs estimées par l'EMV de α en fonction des valeurs estimées de c correspondantes (représentées par des '+' bleus). La figure 5.7 représente de la même manière les estimations de l'EMCP. Pour avoir une évaluation de la confiance que l'on peut avoir dans un état donné, il suffit de calculer le pourcentage d'expériences artificielles dont les valeurs des paramètres estimés correspondent à l'état en question. L'hypothèse

- d'une sélection lente de branche ($\alpha > 1$ et $c > 1$) a un degré de confiance autour de 65%,
- d'une égalisation rapide des branches ($\alpha < 1$ et $c > 1$) a un degré de confiance d'environ 32%,

- d'une égalisation lente des branches ($\alpha < 1$ et $c < 1$) a un degré de confiance inférieure à 4%,
- d'une sélection rapide d'une branche ($\alpha > 1$ et $c < 1$) a un degré de confiance nul.

Ces résultats sont résumés dans le tableau 5.3 et ils confirment l'idée que le dépôt des fourmis est faible ($c > 1$) et soutient à 65% l'hypothèse d'une sensibilité différentielle importante ($\alpha > 1$).

	Sélection rapide	Sélection lente	Égalisation lente	Égalisation rapide
EMV	0%	67.4%	31.4%	1.2%
EMCP	0%	63.6%	33.2%	3.2%

TABLE 5.3 – *Expérience utilisant l'air comprimé : résumé des résultats des figures 5.6 et 5.7 (nuages de '+' bleus). Ce tableau donne le degré de confiance de chaque état estimé par l'EMV et l'EMCP.*

Les figures 5.6 et 5.7 montrent également une corrélation très forte entre les estimations des deux paramètres en accord avec l'étude statistique du modèle (cf. chapitre 3). En effet, si les paramètres étaient indépendants, les nuages de points auraient la forme d'un disque centré autour d'un point. Tandis que les nuages obtenus ont la forme d'un ellipsoïde. Deux valeurs critiques apparaissent

- si $\hat{c}^* > 8$, alors $\hat{\alpha}^* > 1$,
- si $\hat{c}^* < 1.5$, alors $\hat{\alpha}^* < 1$.

Autrement dit si c est estimé assez grand, alors α est estimé supérieur à 1 et nous sommes statistiquement certains d'avoir une sélection lente de branche. En revanche si c est estimé trop petit, alors α est estimé inférieur à 1 et nous sommes statistiquement certains d'avoir une égalisation des branches. Il est à noter que les paramètres estimés des articles [DAGP90], [VTG+06] et [GGC+09] respectent ces caractéristiques : la valeur estimée de α augmente avec celle de c et de plus $c > 8$ et $\alpha > 1$.

Nous pouvons alors fixer arbitrairement la valeur de c et estimer seulement α . La figure 5.8 représente les estimations de α en fonction des valeurs fixées de c , ainsi que les intervalles de confiance obtenus par la méthode du Bootstrap correspondants. Sans surprise, ces derniers sont plus petits et les estimations de α sont en moyenne une fonction croissante de c .

Nous constatons que les intervalles de confiance obtenus par la méthode du Bootstrap des estimations de α se placent entièrement au-dessus de 1 lorsque les valeurs de c sont supérieures à 6 pour l'EMV et 12 pour l'EMCP. Nous pouvons donc décider avec une confiance de 95% que nous avons une sélection lente de branche. En revanche pour les

valeurs de c inférieures à 1, nous avons $\alpha < 1$ (une égalisation lente des branches) avec une confiance de 95%.

5.3.2.2 Résultats expérimentaux obtenus avec le protocole utilisant un pinceau

Considérons maintenant l'expérience dans laquelle était utilisé un pinceau, pour laquelle nous n'avons pas obtenu les mêmes résultats que celle qui utilise l'air comprimé.

Le tableau 5.4 donne la valeur des estimateurs EMV et EMCP pour α et c ainsi que leur intervalle de confiance à 95%. Les deux estimations de α sont proches de 0.3 et les estimations de c sont 0.32 et 0.81. Les deux estimateurs ne concordent pas quant à la possibilité d'un α supérieure à 1 : l'intervalle de confiance de l'EMV pour α inclus 1 tandis que celui de l'EMCP ne comporte que des valeurs inférieures à 1. Pour c , l'EMV choisit des valeurs plus grandes que celles sélectionnées par l'EMCP. De plus, chose étonnante, l'EMV a des intervalles de confiance plus grands que l'EMCP.

	$\hat{\alpha}$	IC Bootstrap 95%	\hat{c}	IC Bootstrap 95%
EMV	0.32	(0.13, 2.08)	0.81	(0.02, 86.4)
EMCP	0.29	(0.09, 0.74)	0.32	(0.002, 14.3)

TABLE 5.4 – *Expérience utilisant un pinceau : valeurs des estimateurs EMV et EMCP pour α et c ainsi que leur intervalle de confiance bootstrap à 95% correspondants.*

Les intervalles de confiance sont ici également trop grands pour décider dans quel état comportemental les fourmis se trouvent. Comme pour l'expérience à extraction à air comprimé, nous avons évalué la confiance que nous pouvons avoir dans l'hypothèse que les fourmis sont dans un état donné.

Par la méthode du Bootstrap (cf. [Was04]), nous avons donc simulé 500 expériences artificielles de 31 répliques à 100 passages et estimé pour chacune les paramètres avec les deux estimateurs. La figure 5.6 représente les 500 estimations par l'EMV de α en fonction des 500 estimations de c correspondantes (représentés par des 'x' verts). La figure 5.6 représente les mêmes quantités, mais pour les estimations de l'EMCP. Il est à noter que les nuages de points de ces estimations sont plus étendus que ceux de l'expérience utilisant l'air comprimé (représentés par des '+' bleus). Ceci est en partie dû à la quantité inférieure de données : 31 répliques pour l'extraction au pinceau contre 49 pour l'extraction à air comprimé.

À partir des figures 5.6 et 5.7, nous évaluons le degré de confiance d'avoir

- une égalisation lente des branches à près de 80% par l'EMV et 60% par l'EMCP,

- une égalisation rapide des branches à plus de 30% par l'EMV et moins de 20% par l'EMCP,
- une sélection lente de branche à 6.5% par l'EMV et 1.4% par l'EMCP,
- une sélection rapide de branche à 0% par les deux estimateurs.

Le tableau 5.5 résume ces résultats.

	Sélection rapide	Sélection lente	Égalisation lente	Égalisation rapide
EMV	0%	6.5%	59.8%	33.7%
EMCP	0%	1.4%	79.7%	18.9%

TABLE 5.5 – *Expérience utilisant un pinceau : résumé des résultats des figures 5.6 et 5.7 (nuages de 'x' verts). Ce tableau donne le degré de confiance de chaque état estimé par l'EMV et l'EMCP.*

Le désaccord des deux estimateurs n'est pas aussi marqué que nous l'avons cru dans un premier temps. C'est un fait que les degrés de confiance ne concordent pas exactement, mais les deux estimateurs donnent une valeur α inférieur à 1 avec une très grande confiance. De plus dans une majorité des cas, ils concluent que c est inférieur à 1. Ce désaccord apparent vient du fait que les paramètres ont tendance à être surestimés par l'EMV et sous-estimés par l'EMCP.

L'hypothèse la moins erronée semble être que les fourmis marquent fortement leur passage, mais sont de moins en moins sensibles aux différences de concentration de phéromones à mesure que la quantité de celle-ci augmente. Autrement dit une branche est favorisée au début puis les branches sont égalisées à terme.

Pour cette expérience également, les estimations des paramètres sont très corrélées. En effet, la forme des nuages de points des figures 5.6 et 5.7 (en 'x' vert) est encore en ellipsoïde. Nous avons donc estimé α en fixant les valeurs de c dans son intervalle de confiance. La figure 5.9 représente les estimations de α en fonction des valeurs fixées de c avec les intervalles de confiance correspondant obtenus par la méthode Bootstrap. Lorsque c est inférieur à 20 pour l'EMV et 9 pour l'EMCP, la valeur 1 est exclue de l'intervalle de confiance de α et donc nous pouvons conclure avec une confiance supérieure à 95% que α est inférieur à 1. Contrairement à l'expérience utilisant l'air comprimé, il n'existe pas ici de valeurs de c au-dessus de laquelle α à une forte chance d'être supérieur à 1.

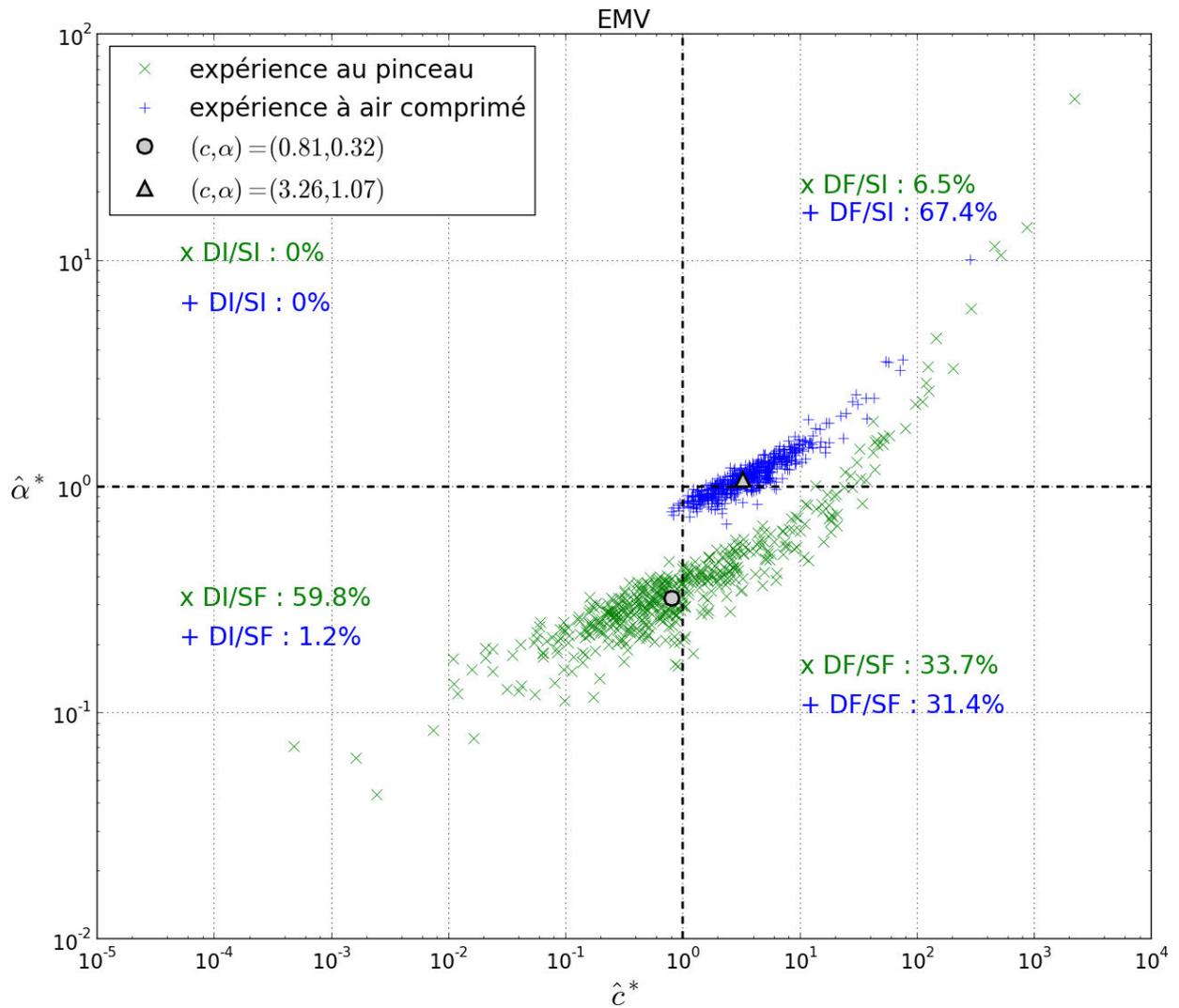


FIGURE 5.6 – Nuages de points des 500 couples de paramètres estimés par l’EMV à partir de 500 expériences artificielles simulées à partir des données expérimentales par la méthode du Bootstrap.

Les points bleus en ‘+’ correspondent à l’expérience utilisant l’air comprimé et les points verts en ‘x’ correspondent à l’expérience utilisant un pinceau. Les points gris correspondent à la valeur des paramètres estimés à partir des vraies expériences (le rond pour l’expérience à l’air comprimé et le triangle pour l’expérience au pinceau). Les lignes en pointillé matérialisent les transitions d’état entre les quatre états du modèle. Les chiffres sont les pourcentages de points présents dans chacun des quatre états.

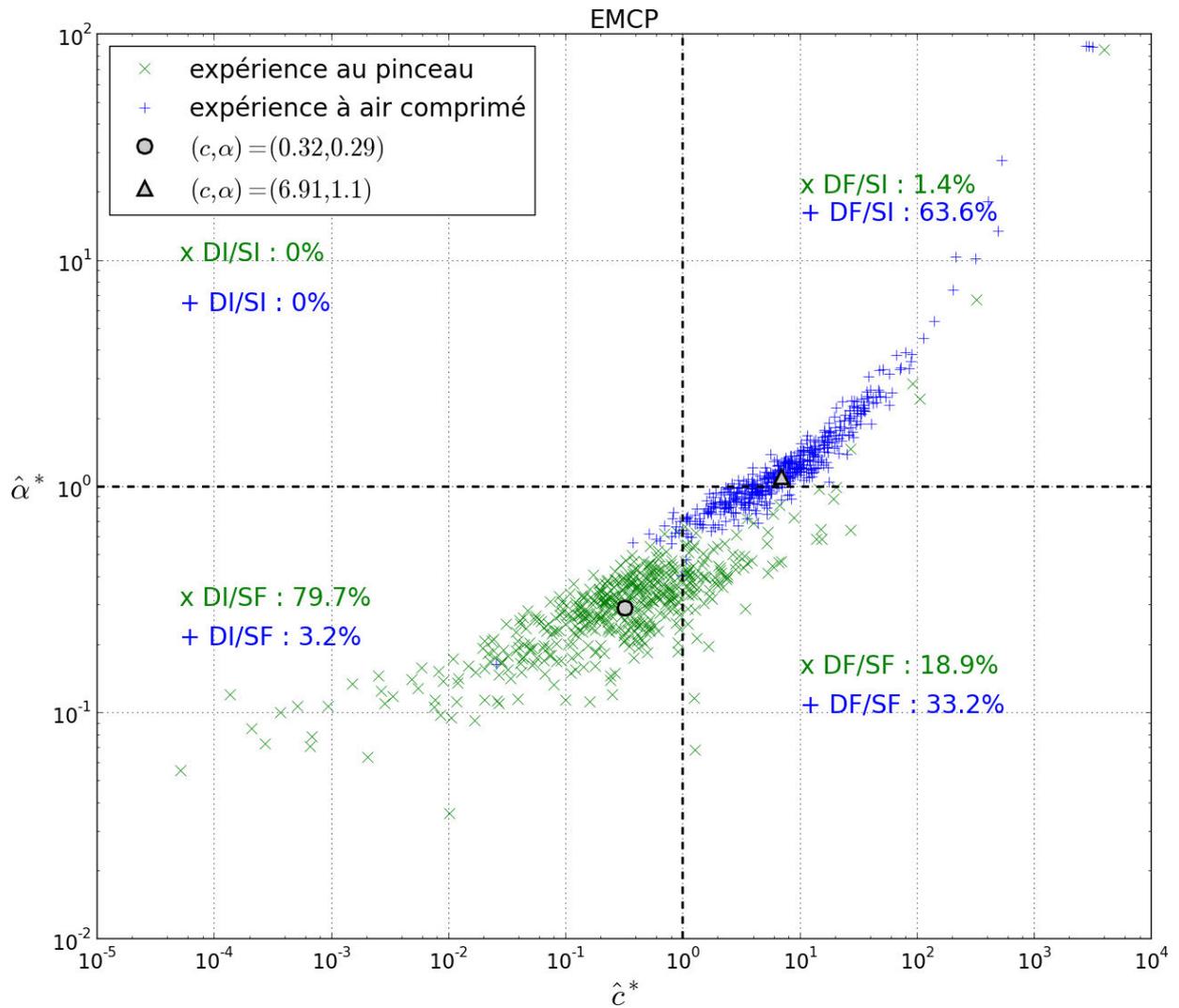


FIGURE 5.7 – Nuages de points des 500 couples de paramètres estimés par l’EMCP à partir de 500 expériences artificielles simulées à partir des données expérimentales par la méthode du Bootstrap.

Les points bleus en ‘+’ correspondent à l’expérience utilisant l’air comprimé et les points verts en ‘x’ correspondent à l’expérience utilisant un pinceau. Les points gris correspondent à la valeur des paramètres estimés à partir des vraies expériences (le rond pour l’expérience à l’air comprimé et le triangle pour l’expérience au pinceau). Les lignes en pointillé matérialisent les transitions d’état entre les quatre états du modèle. Les chiffres sont les pourcentages de points présents dans chacun des quatre états.

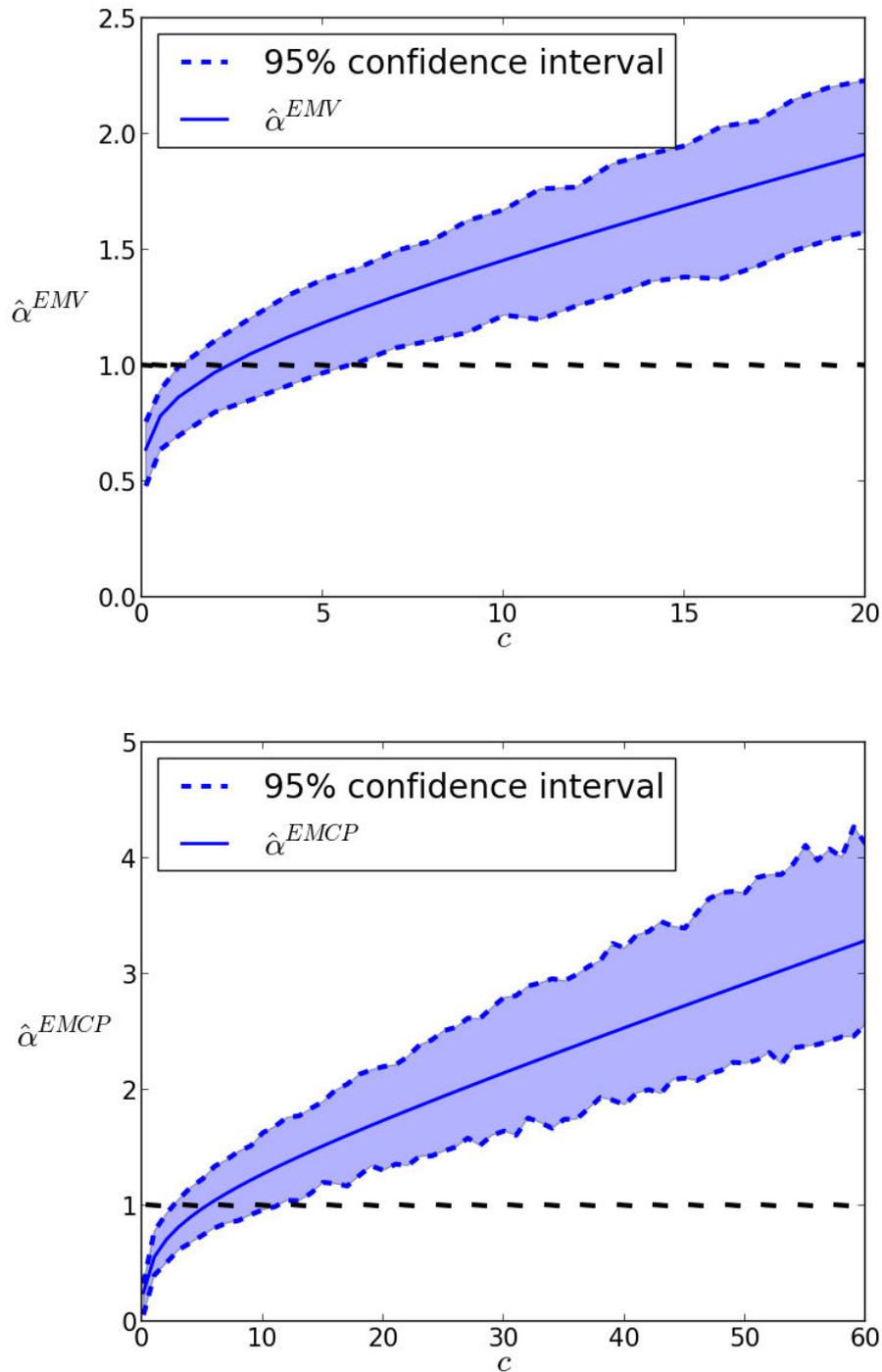


FIGURE 5.8 – Expérience utilisant l'air comprimé : estimation de α (EMV en haut, EMCP en bas) en fonction des valeurs fixées de c et les intervalles de confiance Bootstrap à 95% correspondants.

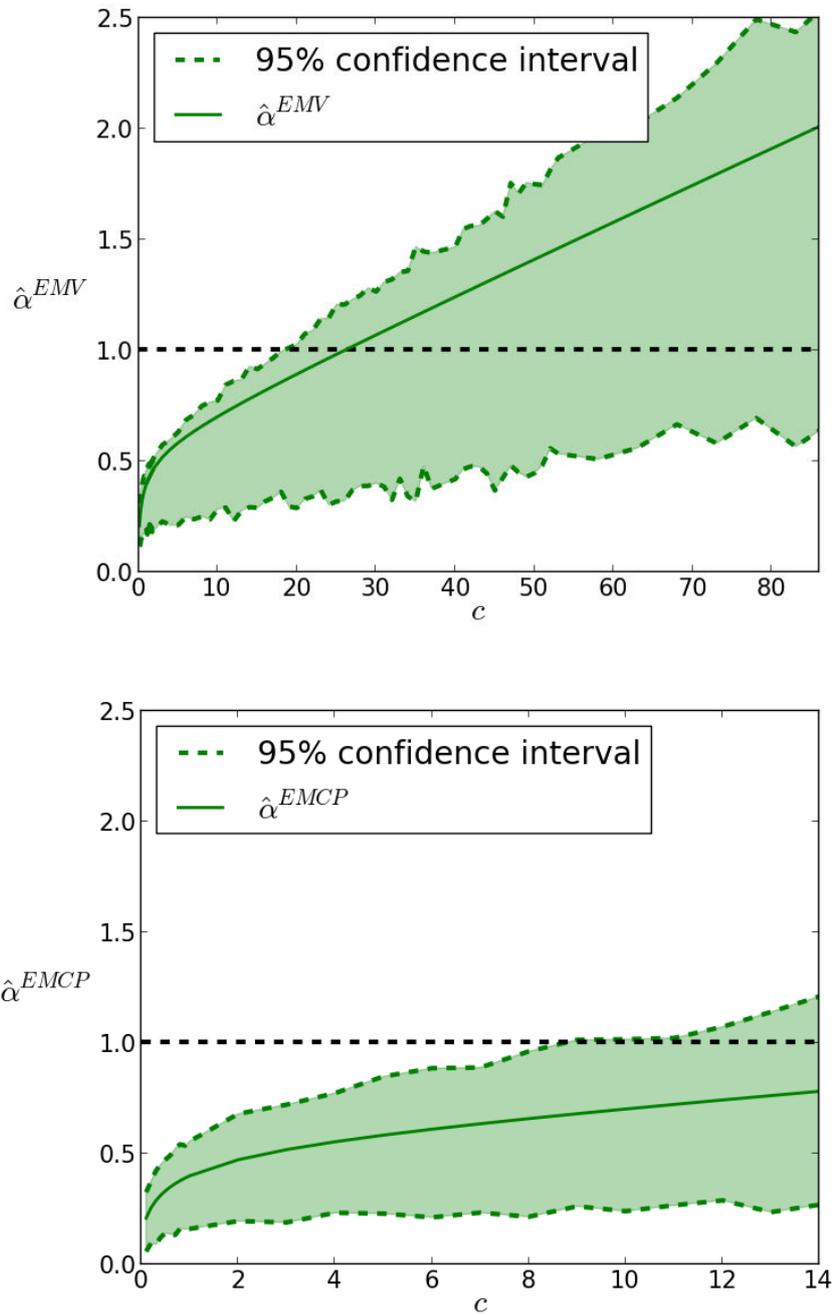


FIGURE 5.9 – Expérience utilisant un pinceau : estimation de α (EMV en haut, EMCP en bas) en fonction des valeurs fixées de c et les intervalles de confiance Bootstrap à 95% correspondants.

5.4 Discussion

5.4.1 Analyse statistique

Dans cette partie nous analysons la qualité des estimations du point de vue de la statistique. Elle explique les difficultés rencontrées, en expose les causes et propose quelques solutions. Elle indique également comment interpréter les résultats d'estimation.

Les estimations fournissent des intervalles et régions de confiance trop grands pour déterminer l'état dans lequel se trouve les fourmis. Nous rappelons que les états du modèle sont au nombre de quatre :

- sélection rapide d'une branche : $c < 1$ et $\alpha > 1$,
- sélection lente d'une branche : $c > 1$ et $\alpha > 1$,
- égalisation lente des branches : $c < 1$ et $\alpha < 1$,
- égalisation rapide des branches : $c > 1$ et $\alpha < 1$.

Cependant la méthode du Booststrap nous donne une bonne évaluation de l'erreur que nous faisons si nous supposons les fourmis dans un état comportemental donné. Ces résultats donnent des éléments intéressants à la discussion comportementale de la partie suivante.

Nous avançons trois explications techniques aux difficultés que nous avons rencontrées lors de l'estimation.

Premièrement, les données sont insuffisantes. Plus nombreuses sont les données et meilleures sont les estimations. Dans ce modèle, cela est particulièrement marqué, car dès lors que le paramètre c est grand devant 1, la variance de l'estimation se dégrade fortement (voir la partie 3.3.5 du chapitre 3, p.121). Or, au moins pour l'expérience à extraction à air comprimé, les fourmis semblent marquer faiblement, ce qui correspond à un c grand. Par conséquent, les paramètres sont parfois sur- ou sous-estimés, ce qui étend les intervalles et régions de confiance.

Nous tenons également à mettre en évidence la sur-paramétrisation du modèle. Dans la section 5.2, il est expliqué que les paramètres ont les mêmes effets sur le comportement du modèle (favorisation d'une branche ou égalisation des branches). De plus les estimations de α et c sont positivement corrélées (cf. figures 5.6 et 5.7, p.187-188). Ces deux particularités perturbent l'estimation au même titre que la quantité insuffisante de données diminue la qualité des estimateurs.

L'idéal serait d'éliminer un des paramètres. Une première solution est d'estimer un des paramètres par un autre biais. Le paramètre c a une interprétation éthologique directe : l'inverse de la quantité de phéromones déposée par chaque fourmi. Il est donc peut-être envisageable d'accéder à ce paramètre par une autre méthode (nouvelle expérience).

La deuxième solution est de changer le modèle. D'un point de vue comportemental, les deux paramètres sont tout à fait justifiés. Il est pertinent de tenir compte d'une part de la sensibilité de la fourmi aux phéromones et d'autre part de la quantité de phéromones déposée. Il est fort possible qu'en réalité ces deux caractères soient dépendants l'un de l'autre, mais nous ne savons pas dans quelle mesure. Du point de vue des statistiques, deux paramètres aux mêmes effets sont nuisibles à l'estimation.

Il serait donc approprié de revoir le modèle. Par cette remarque nous rejoignons la troisième explication à la grande variance des paramètres : une variabilité inter-individuelle du comportement des fourmis non prise en compte par le modèle. Les données de l'expérience utilisant l'air comprimé semblent présenter deux comportements différents, qui vont au-delà de la simple variabilité inter-individuelle. Dans sept des répliques, les fourmis sélectionnent très rapidement une branche tandis que les autres semblent être dans un état de sélection lente (cf. figures 5.2 et 5.3). Un modèle supposant un comportement uniforme est peut-être inadapté à notre problématique.

5.4.2 Analyse comportementale

Cette partie propose une interprétation et une discussion comportementale des résultats des expériences en tenant compte des recommandations statistiques de la partie précédente.

Rappelons dans un premier temps les résultats d'estimation. Pour l'expérience utilisant l'air comprimé, le paramètre c est estimé supérieur à 1 avec un degré de confiance proche de 100%, ce qui correspond à un marquage chimique faible des branches. Le paramètre α est estimé supérieur à 1 avec une grande confiance ($\sim 65\%$), mais avoir $\alpha < 1$ n'est pas statistiquement négligeable ($\sim 32\%$). Autrement dit l'erreur que nous ferions en supposant une sélection lente d'une branche est évaluée plus petite que si nous supposions avoir une égalisation rapide des branches. Toutefois ce dernier scénario n'est pas à écarter.

Les conclusions pour l'expérience utilisant un pinceau sont différentes. Le paramètre α est estimé inférieur à 1 avec un degré de confiance proche de 95%, ce qui signifie que plus la concentration de phéromones déposées est importante et moins les fourmis sont sensibles aux différences de quantité de phéromones. C'est l'estimation du paramètre c qui cette fois-ci est plus délicate. Bien que la confiance que nous pouvons avoir en supposant c supérieur à 1 (dépôt important) est évaluée assez grande, l'hypothèse d'un c supérieur à 1 (dépôt faible) est statistiquement non négligeable.

Les résultats de l'expérience utilisant l'air comprimé vont dans le sens des hypothèses et résultats que l'on trouve dans la littérature : dépôt faible ($c > 1$) et sensibilité différentielle aux phéromones importante ($\alpha > 1$). En revanche l'expérience utilisant un pinceau présente

une configuration de paramètres, qui n'a encore jamais été envisagée et qui pourtant "sélectionne" une branche dans les premiers passages. En effet un dépôt important ($c < 1$) malgré une sensibilité différentielle faible ($\alpha < 1$) favorise le choix initial d'une des deux branches pour ensuite égaliser le choix des branches. Nous pourrions imaginer qu'un tel scénario est préférable à la sélection unilatérale d'une branche dans un environnement où la capacité d'adaptation est essentielle à la survie.

La divergence de comportement constaté entre les deux types d'expérience ne peut provenir que de l'unique différence qui existe entre les deux protocoles expérimentaux : les procédés d'extraction des fourmis. La méthode à air comprimé se distingue de celle du pinceau en soumettant sporadiquement les fourmis en attente à un déplacement d'air. Nous savons que les fourmis sont extrêmement sensibles au climat et particulièrement à la pression atmosphérique et aux courants d'air.

Par exemple, C. Jost et al. ont étudié la modulation de la constitution d'agrégats de cadavres chez les fourmis *Messor Sanctus* en fonction de l'intensité des courants d'air ambiants (cf. [JVC⁺06]). Plus le vent est fort et plus les fourmis ont de chance de prendre un cadavre si elles sont à vide et moins elles ont de chance de déposer leur fardeau, si elles portent un cadavre. De plus le comportement des fourmis est réceptif aux changements météorologiques. En particulier, les fourmis sont plus actives et se déplacent plus rapidement lorsque les conditions sont orageuses.

On peut donc supposer que les fourmis sont plus sensibles aux différences de concentration de phéromones, lorsqu'elles sont soumises sporadiquement à un déplacement d'air. Ceci expliquerait que l'estimation de α de l'expérience utilisant l'air comprimé est supérieure à celle de l'expérience utilisant un pinceau. Dans la même logique, nous pourrions imaginer que les fourmis déposent plus de phéromones par temps de vent. Dans ce cas nous aurions dû trouver un marquage plus fort avec l'extraction à l'air comprimé qu'avec l'extraction au pinceau, ce qui n'est pas le cas.

En revanche si nous supposons que les fourmis déposent toujours la même quantité de phéromones quelles que soient les conditions atmosphériques, le dépôt plus faible de l'expérience utilisant l'air comprimé peut s'expliquer par une évaporation plus forte que lorsque l'extraction se fait au pinceau. À chacun de ses passages, l'air comprimé libéré estomperait les traces chimiques. Pour que notre modèle reste valide, il faut alors supposer que les traces de phéromones s'évaporent toujours de la même façon entre deux passages de fourmis.

En posant le modèle de Deneubourg, nous supposons que celui-ci est vrai, c'est-à-dire

qu'il existe une valeur de α et c qui détermine l'état comportemental adopté par chaque fourmi. Cet état comportemental caractérise l'état de la colonie. Par exemple, des fourmis fortement sensibles aux différences de concentration de phéromones et déposant de faibles quantités de substance chimique provoque la sélection lente d'une branche.

Les résultats d'estimation ne nous permettent pas de décider dans quel état comportemental les fourmis se trouvent. Pour les deux expériences, il existe deux états plausibles :

- un état comportemental de degré de confiance supérieur à 60% qui mène à la sélection d'une branche (soit à long terme, soit durant les premiers passages). Toutes les fourmis contribuent par une forte sensibilité différentielle ou par des dépôts importants à la favorisation d'une branche
- un état comportemental de degré de confiance d'environ 30% qui conduit à l'égalisation lente des branches. Les fourmis sont faiblement sensibles aux différences de concentration de phéromones et marquent peu leur passage. Elles ne font que passer par la bifurcation.

Cette incapacité à pouvoir déterminer l'état comportemental ne provient peut-être pas d'un déficit du modèle ou de la méthode d'estimation, mais d'un aspect fondamental du comportement des fourmis.

La variabilité inter-individuelle des fourmis implique que les valeurs estimées de α et c sont des valeurs moyennes et que donc chaque fourmi possède ses propres valeurs de α et c . Par conséquent, les paramètres α et c étant estimés très proches des valeurs critiques du modèle (α ou c proche de 1), les paramètres individuels des fourmis se répartissent de par et d'autre de ces valeurs critiques. Les fourmis ne sont donc pas toutes dans le même état comportemental.

Nous pourrions faire une analogie avec un système physique proche d'une transition de phase. Par une petite variation de paramètre, un tel système passe d'un état à l'autre. Par exemple, l'eau de température voisinant 0°C sous une pression atmosphérique standard se solidifie ou se liquéfie par une variation infime de température.

Nous pourrions imaginer qu'une colonie de fourmis est constamment proche d'une transition d'état et qu'elle passe de l'un à l'autre par des variations de paramètres. Une telle propriété constituerait une capacité puissante d'adaptation face aux situations multiples et diverses rencontrées quotidiennement. Mais pour être complet, il faut considérer une échelle intermédiaire entre les paramètres et l'état d'une colonie : l'état comportemental des fourmis. Chaque fourmi suit son propre comportement et la somme de ces comportements conduit la colonie vers tel ou tel état à l'échelle macroscopique.

Dans une situation de formation de chemins, chaque fourmi serait proche d'une transition d'état ce qui la ferait osciller selon les circonstances entre deux états comporte-

mentaux : un état de “contribution” à la formation de chemins et un état de “passage”. Pour explorer et exploiter un environnement, l’intérêt de l’état conduisant à la sélection de chemin a déjà été justifiée dans cette thèse. La nécessité d’un seconde état est peut-être moins évidente.

Dans une optique d’exploration, il est important de pouvoir aller de l’avant et de ne pas s’enfermer dans une zone réduite. Il faut également pouvoir revenir au nid une fois un point d’intérêt trouvé. Les fourmis de certaines espèces ne marquent leurs trajectoires qu’une fois une source de nourriture découverte et retournent au nid en s’orientant à l’aide de repères. Or ce n’est pas le cas des fourmis d’Argentine : elles s’orientent essentiellement par rapport aux traces chimiques (cf. [ABDP93]). Il est donc important qu’elles déposent en permanence des phéromones sur leur passage pour retrouver le nid.

Cependant les simulations de formation de chemins ont montré que la simple stratégie de dépôt-suivi de phéromones ne suffisait pas. En effet, dans le modèle, les fourmis se piègent dans des boucles de phéromones sans cesse renforcées. Un état de “passage” pourrait permettre aux fourmis de s’éloigner du nid et suffire à les prévenir de tout enfermement. Les insectes s’éloigneraient du nid sans tenir compte des traces de phéromones tout en marquant leurs passages, puis pour diverses raisons passeraient à l’état de sélection et redeviendraient sensibles aux phéromones.

Les paramètres qui régiraient ce changement d’état nous sont encore inconnus. Supposons qu’une fourmi passe de l’état de passage à celui de sélection, lorsqu’elle est assez éloignée du nid. Il lui faut un moyen pour estimer de cet éloignement. La densité des fourmis alentour ou la fréquence de contacts avec ces congénères peuvent alors être de bons critères. En effet plus on s’éloigne du nid et plus les fourmis se raréfient. De plus en théorie, les zones inexplorées sont des zones exemptes de fourmis (et de phéromones).

Plusieurs travaux expérimentaux ont déjà montré que les contacts des fourmis avec les congénères croisés avaient une forte influence sur leur comportement. Par exemple, M.W. Moffett a démontré en 1987 que les fourmis granivores *Pheidologeton diversus* chargées d’une graine s’orientent en fonction du mouvement de leurs congénères également chargés (cf. [Mof87]). Plus récemment, en 2007, A. Dussutour et al. ont démontré que l’efficacité de la recherche de nourriture chez les fourmis champignonnistes *Atta colombica* augmente avec la densité des individus et donc avec la quantité d’informations échangées (cf. [DBDF07])

Dans la discussion que nous venons de mener, nous restons prudents. En effet, notre modélisation repose sur deux hypothèses fortes : durant toute l’expérience les fourmis déposent la même quantité de phéromones et les phéromones ne s’évaporent pas ou alors se dissipent toujours de la même façon. Ces deux hypothèses sont régulièrement admises

dans la littérature.

Cependant, supposer constant le dépôt de phéromones est une approximation raisonnable lorsque l'on étudie le comportement collectif de plusieurs milliers d'individus. Dans notre cas, une telle hypothèse devient moins justifiée, car nous observons seulement une centaine d'individus et nous nous intéressons à leurs choix et actions individuels. Par ailleurs la supposition d'une évaporation inexistante ou constante est mise à mal par la durée de nos expériences, les intervalles de temps très variables entre chaque passage et la circulation sporadique et inégale de l'air comprimé.

Pour aller plus loin dans la discussion et vérifier notre thèse de transition d'état, il nous faut avoir une meilleure idée de la manière dont les phéromones sont déposées, dont elles s'évaporent et dont elles réagissent au substrat. Peut-être qu'une collaboration avec des chimistes mènerait à la conception d'un procédé de détection et de mesure des traces de phéromones déposées.

Une meilleure appréciation de l'utilisation des phéromones nous permettrait de concevoir un nouveau modèle prenant en compte la nature instable et volatile des dépôts chimiques. Dans ce sens, nous rejoignons les suggestions de la partie précédente qui proposent soit d'estimer c indépendamment de α , soit de concevoir un nouveau modèle.

Quel que soit le modèle choisi, le travail statistique a besoin d'un nombre important de données pour fournir des résultats d'estimation plus précis. Malheureusement les expériences se sont révélées pénibles et longues à réaliser limitant le nombre de répliques. De plus le préambule de ce chapitre explique comment l'action de l'expérimentateur reste présente tout le long de l'observation, remettant en cause l'indépendance des résultats au facteur humain. Il est donc important de réviser les dispositifs et protocoles afin de rendre plus performantes nos expérimentations futures.

Pour conclure nous prévoyons de concevoir de nouveaux modèles, outils statistiques, expériences et pourquoi pas procédés chimiques pour préciser la nature et l'usage des phéromones et pour étayer notre thèse de transition d'état.

Chapitre 6

Comportement d'une fourmi dans un réseau

Sommaire

Introduction	200
6.1 Description de l'expérience	202
6.1.1 Le modèle biologique	202
6.1.2 Dispositif et protocole expérimentaux	202
6.1.3 Nature des données	204
6.2 Modélisation en temps discret	206
6.2.1 Des modèles discrets avec à mémoire	208
6.2.2 La diffusion dans le réseau	214
6.3 Discussion	231

Introduction

Dans ce chapitre nous étudions le comportement d'une fourmi dans un réseau constitué de trois bifurcations. Nous modélisons cette expérience par une variante du modèle de Deneubourg qui comporte elle aussi les deux paramètres α et c . Nous estimons ces derniers avec les outils de statistiques développés dans le chapitre 3. De plus nous examinons s'il est pertinent de décrire les déplacements d'une fourmi en les réduisant à une série de choix.

De nombreux modèles utilisés pour décrire les déplacements de fourmis dans un réseau sont, ce que l'on appelle en mathématiques, des marches aléatoires renforcées (MAR) sur un graphe fini.

Le réseau parcouru par les fourmis est réduit à un graphe, dont les sommets représentent les points de bifurcation et les arêtes les connections entre ces différents points. Il est considéré que les fourmis sautent de sommet en sommet en renforçant les arêtes qu'elles empruntent par des dépôts de phéromones. À chaque saut, la probabilité qu'une fourmi rejoigne tel ou tel sommet dépend du marquage chimique, qui est proportionnel au nombre de passages précédemment effectués par les arêtes. Les déplacements des insectes sont alors réduits à une série de choix.

Notre objectif étant de trouver un modèle minimal qui reproduise le phénomène de formation de chemins, les marches aléatoires renforcées sur graphe sont par leur simplicité de très bons candidats. Nous avons déjà démontré que ce type de modèle constituait un outil puissant de modélisation. En effet, le modèle de Deneubourg est une marche aléatoire renforcée sur un graphe en forme de Y et reproduit partiellement le phénomène de formation de chemins.

De plus, un modèle de MAR sur graphe présente un avantage non négligeable : il est à la portée d'études mathématiques qui peuvent

1. **prédire son comportement** en fonction des valeurs de ses paramètres sans faire appel à des simulations. Ceci peut être plus ou moins compliqué selon les propriétés de la marche. Il existe déjà beaucoup de résultats, qui sont présentés dans la partie mathématique de l'état de l'art de cette thèse (cf. chapitre 1, p.25). Le chapitre 2 étend ces résultats à une classe de MAR susceptibles d'être intéressantes pour la problématique de la modélisation du phénomène de formation de chemins.
2. **estimer ses paramètres** à partir de données expérimentales. Le chapitre 3 est entièrement consacré à cette question et les résultats du chapitre 5 démontre l'intérêt pour l'art de la modélisation d'un travail d'estimation avec évaluation de marges d'erreur.

Compte tenu du potentiel des MAR, nous avons décidé de vérifier par une étude expérimentale dans quelle mesure une MAR peut reproduire les déplacements d'une fourmi non contrainte dans un réseau. Ce dernier comporte trois bifurcations et a la forme d'un triangle, figure géométrique symétrique la plus simple comportant plus d'une bifurcation. Sur un critère de diffusion, nous comparons les données expérimentales à plusieurs modèles. Nous estimons les paramètres de chacun de ses modèles avec des outils de statistiques classiques ou développés dans le chapitre 3.

Dans la partie 6.1, nous décrivons en détail l'expérience. Dans la partie 6.2, nous présentons dans un premier temps les modèles et dans un second temps nous les confrontons aux données expérimentales. Enfin dans la partie 6.3, nous discutons de nos résultats.

6.1 Description de l'expérience

6.1.1 Le modèle biologique

Le modèle biologique est la fourmi *Linepithema humile* (Formicidae, Dolichoderinae) appelée communément fourmi d'Argentine. Cette espèce est déjà décrite dans la section 5.1.1, p.169.

Deux jours avant une expérience, la fourmi qui sera utilisée est isolée de sa colonie avec quelques centaines de ces congénères dans une boîte circulaire en plastique ($\varnothing = 10$ cm) également tapissées de Fluon. La fourmi n'est pas nourrie durant cette isolement. Ce conditionnement assure l'état d'affaînement des fourmis de chaque expérience et permet de supposer qu'elles sont toutes dans le même état comportemental en début d'expérience.

Une fourmi ayant déjà effectué une fois l'expérience n'est jamais réutilisée, ce qui prévient tout effet éventuel d'apprentissage.

6.1.2 Dispositif et protocole expérimentaux

Le schéma de gauche de la figure 6.1 représente le dispositif expérimental : un réseau en triangle formé par des morceaux de PVC blanc de 5 mm d'épaisseur collés sur une plaque de la même matière et de 1.5 cm d'épaisseur. Chaque sommet du triangle est doté d'une chambre circulaire de 18 mm de diamètre. Les arêtes sont des galeries de 5 mm de large et 5 cm de long. Tout au long de l'expérience, une vitre de Plexiglas transparent est placée sur le réseau afin de prévenir toute évasion.

Par souci de clarté, un numéro est attribué à chacune des zones tout le long de ce chapitre. Les chambres sont numérotées 0, 2 et 4 et les galeries 1, 3 et 5 (cf. schéma de droite de la figure 6.1).

Le principe de l'expérience est d'enfermer une fourmi dans le réseau et de filmer son déplacement pendant deux heures. Initialement, la fourmi est toujours placée dans la chambre 0. Le réseau a été imaginé de façon à ce que lorsqu'une fourmi s'apprête à quitter une chambre, elle se retrouve confrontée à une bifurcation dont chacune des branches est une galerie. Au cours de son évolution la fourmi est donc soumise à des choix binaires comme dans l'expérience du Y décrite dans le chapitre 5. À ceci près que la fourmi est seule et donc ne rencontre que les traces de phéromones qu'elle a éventuellement déposées. De plus dans l'expérience du Y, les fourmis sont retirées dès leurs choix effectués. Alors que dans l'expérience présente, la fourmi est libre de ses mouvements et traverse les bifurcations comme bon lui semble.

Afin de multiplier le nombre de répliques de l'expérience, 24 réseaux chacun doté d'une fourmi ont été filmés simultanément à chaque séance. C'est-à-dire que 24 copies du dispositif étaient placées en damier de 4 sur 6 sous la caméra (cf. photo 6.2).

Pour constituer un environnement homogène, les dispositifs sont disposés dans une boîte cubique entièrement blanche d'un mètre de côté. Le sommet de la boîte est constitué d'une plaque de plastique blanc opaque qui diffuse une lumière homogène grâce à quatre néons situés plus de 1m70 au dessus. Cette plaque est percée d'un trou afin de glisser l'objectif de la caméra.

Entre chaque séance d'expérience, les 24 dispositifs sont nettoyés au savon, puis à l'alcool et enfin rincés abondamment pour enlever les traces éventuelles de phéromones. Les résultats présentés dans la suite reposent sur les données de 459 répliques de l'expérience.

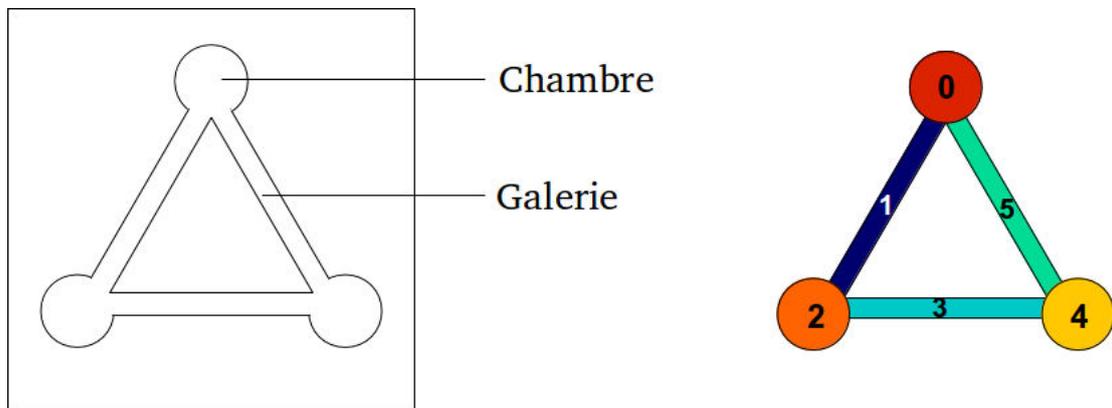


FIGURE 6.1 – Le schéma de gauche représente succinctement le dispositif expérimental. Celui de droite donne la numérotation des zones.

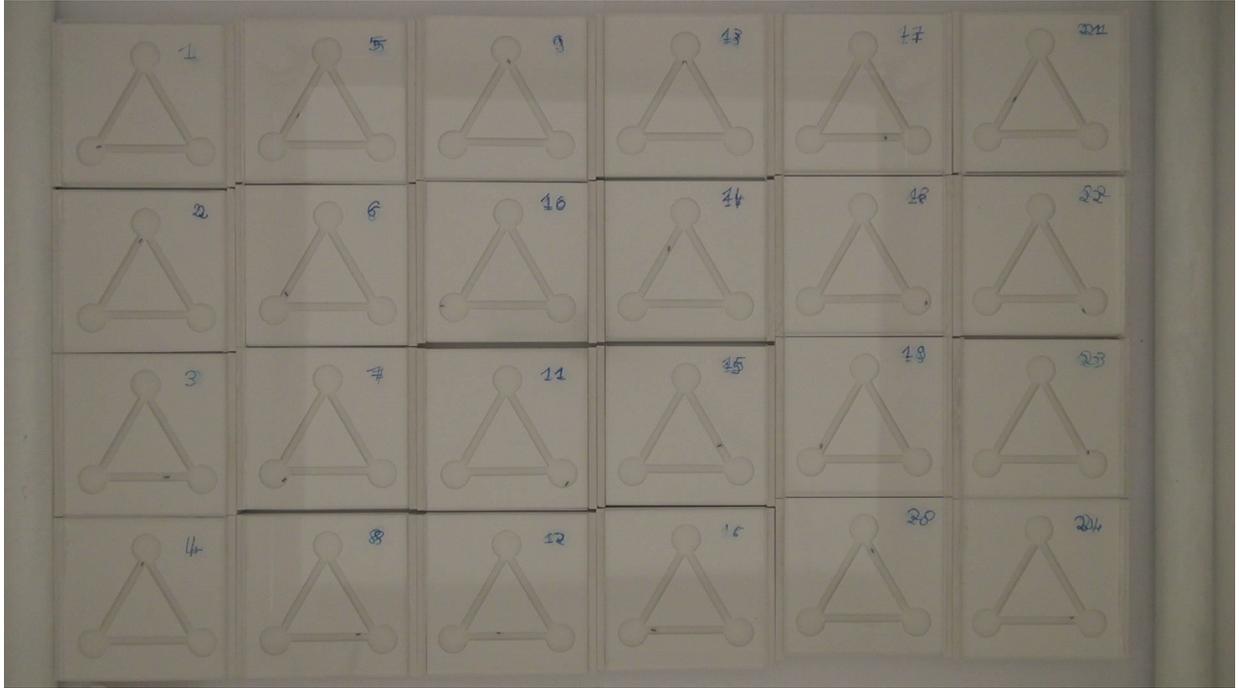


FIGURE 6.2 – Photo d'une séance d'expérience : 24 répliques du réseau en triangle sont disposées en damier de 4 sur 6. Chaque réseau contient une seule fourmi.

6.1.3 Nature des données

Les trajectoires des fourmis ont été extraites des vidéos à l'aide d'un programme de suivi automatique. Pour chacune des 459 répliques de l'expérience, la position de la fourmi observée a été calculée deux fois par seconde avec une précision d'un pixel près (un pixel équivaut à 0.3 mm).

Les fourmis étant noires sur un substrat blanc, l'algorithme de suivi détecte et calcul le barycentre des pixels suffisamment sombres dans les zones de l'image où les fourmis se trouvent. Nous écrivons ce programme en Python.

La figure 6.3 donne un exemple de trajectoire. Un dégradé de bleu indique le temps : les positions sont initialement de couleur claire et s'assombrissent à mesure que le temps s'écoule. Nous devinons facilement la forme du réseau en triangle.

Nous avons également codé en Python un programme qui détermine à chaque pas de temps dans quelle zone du réseau la fourmi se trouve. La figure 6.4 représente les positions d'une fourmi dans chacune des zones avec une couleur différente pour chaque zone.

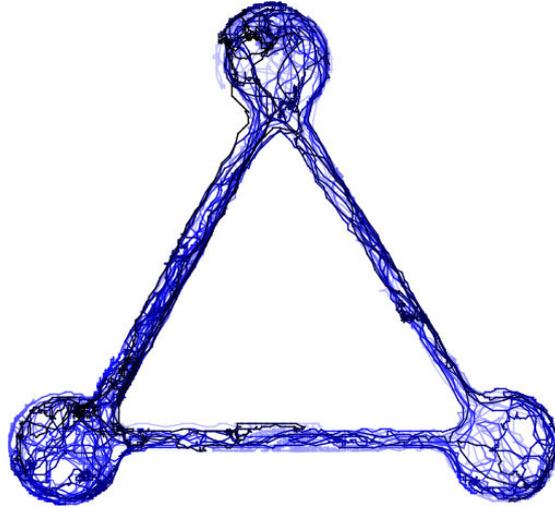


FIGURE 6.3 – Exemple d'une trajectoire suivie automatiquement dans le réseau en triangle : initialement, les positions sont en bleu clair et s'assombrissent à mesure que le temps s'écoule.

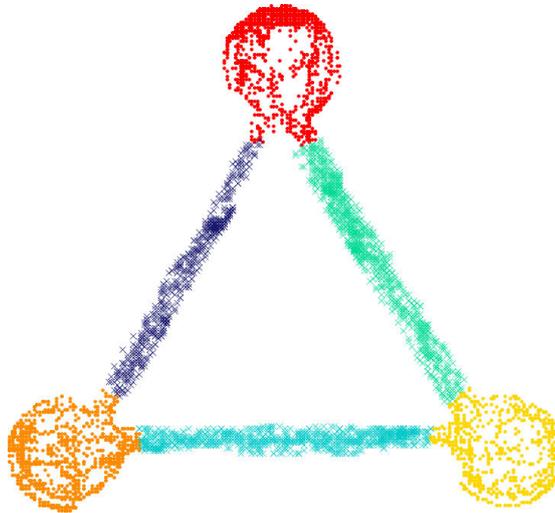


FIGURE 6.4 – Positions d'une fourmi représentées dans des couleurs différentes pour chaque zone. Les positions dans une chambre sont représentées par des “.” et celles dans les galeries par des “x”.

Lorsqu'une fourmi s'apprête à quitter une chambre, elle se retrouve face à une bifurcation constituée par les entrées des deux galeries. Tant que la fourmi ne choisit pas une des deux galeries et s'y engage, nous considérons qu'elle est toujours dans la chambre. C'est pour cette raison que les extrémités des galeries sont considérées appartenant aux chambres.

6.2 Modélisation en temps discret

Dans ce chapitre, nous proposons plusieurs modèles à temps discret susceptibles de reproduire les déplacements des fourmis. Nous simplifions le réseau et la trajectoire des fourmis en ne tenant compte que des changements de zone. Autrement dit nous considérons que les fourmis sautent de zone en zone sans nous soucier du parcours effectué dans chacune d'elles.

Le réseau en triangle est représenté par un graphe, noté G , à six sommets numérotés de 0 à 5. Un graphe est un objet mathématique composé de sommets connectés par des arêtes. La figure 6.5 représente le graphe G . Les sommets 0, 2 et 4 correspondent aux trois chambres et les sommets 1, 3 et 5 aux trois galeries. Ainsi un numéro est attribué à chaque zone. Deux sommets sont reliés par une arête lorsque les deux zones correspondantes sont connectées, c'est-à-dire lorsqu'il est possible de passer directement de l'une à l'autre. Par exemple, les sommets 0 et 1 sont connectés par une arête, car une fourmi peut passer de la chambre 0 à la galerie 1 directement.

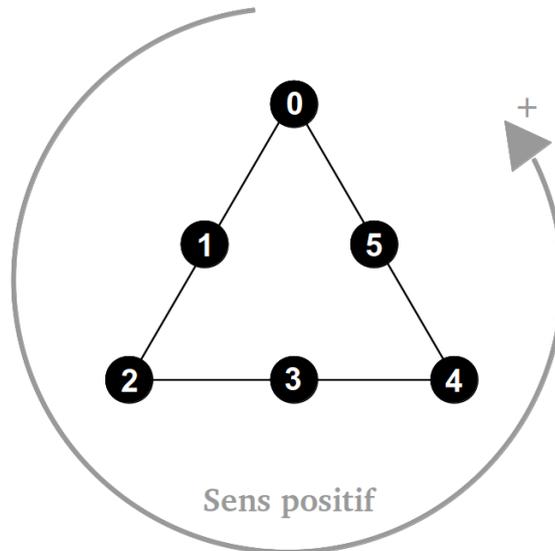


FIGURE 6.5 – Représentation du graphe G qui schématise le réseau en triangle. Les disques noirs numérotés sont les sommets et les traits noirs les arêtes. La flèche grise indique le sens positif de parcours.

La trajectoire d'une fourmi dans le réseau est donc assimilée à une marche sur le graphe G qui saute de sommet en sommet en passant par les arêtes existantes. Le temps est alors discrétisé et chaque pas de temps correspond à un saut. Nous notons X_n la zone dans laquelle la fourmi se trouve après son n -ième saut. Par exemple, si $X_{14} = 2$, cela signifie que la fourmi se trouve dans la chambre 2 après le 14-ième saut.

Remarque 6.2.1. *Les pas de temps étant marqués par un changement de zone, X_n n'a jamais deux fois de suite la même valeur.*

De plus, le réseau est conçu de telle façon que la fourmi ne visite jamais deux fois consécutives une zone du même type, elle alterne entre une chambre et une galerie. Ainsi la marche sur le graphe alterne entre les sommets pairs et les sommets impairs.

Chaque sommet du graphe est connecté à exactement deux autres sommets illustrant le fait qu'à chaque changement de zone, la fourmi a deux possibilités. Pour quitter une chambre, une fourmi doit choisir entre deux galeries formant une bifurcation. Pour sortir d'une galerie, la fourmi peut retourner dans la chambre qu'elle vient juste de quitter ou elle peut traverser toute la galerie et entrer dans une autre chambre.

Nous choisissons arbitrairement un *sens positif* et un *sens négatif*. Lorsque la fourmi saute vers une zone au numéro supérieur ou qu'elle passe de la galerie 5 à la chambre 0, la fourmi va dans le sens positif. Lorsque la fourmi saute vers une zone au numéro inférieur ou lorsqu'elle passe de la chambre 0 à la galerie 5, la fourmi va dans le sens négatif. Une flèche représente le sens positif du graphe G dans la figure 6.5.

Remarque 6.2.2. *La suite des zones parcourues, notée X_n , appartient à l'ensemble considéré cyclique $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Si $X_n = 5$ et si la fourmi va dans le sens positif, alors $X_{n+1} = 0$. De la même façon, si $X_n = 0$ et si la fourmi va dans le sens négatif, alors $X_{n+1} = 5$.*

Supposons qu'après le n -ième saut, la fourmi est dans la zone y connectée aux zones x et z . Pour le $n + 1$ -ième saut (prochain saut), la fourmi n'a le choix qu'entre les zones x et z . Si de plus nous supposons que la fourmi était dans la zone x au $n - 1$ -ième saut (saut précédent), nous notons $p_{x,y,z}^{n+1}$ la probabilité que la fourmi saute dans la zone z et $p_{x,y,x}^{n+1}$ la probabilité que la fourmi retourne dans la zone x .

Nous aimerions trouver un ensemble minimal de variables et paramètres comportementaux dont $p_{x,y,z}^{n+1}$ doit dépendre pour reproduire la série de changements de zone qu'effectue une fourmi lorsqu'elle se déplace dans le triangle. Nous distinguons deux classes d'influence.

- **Effet de mémoire** : le choix d'une nouvelle zone est corrélé avec les sauts précédents de la fourmi. Dans ce chapitre, nous explorons deux types de corrélation.
- **Persistance de la marche** : la probabilité de saut d'une fourmi dépend de la zone qu'elle occupait au temps précédent. Ceci modélise par exemple le fait que retourner dans une chambre juste après l'avoir quittée est physiquement différent que de traverser toute une galerie pour atteindre une autre chambre. Ainsi lorsqu'une fourmi est sur un sommet impair, i.e. dans une galerie, sa probabilité de sauter sur un sommet pair adjacent, i.e. une chambre voisine, va dépendre du fait qu'elle

occupait ou non ce sommet au temps précédent. La fourmi a donc une mémoire à court terme de ses déplacements.

- **Renforcement de la marche** : la fourmi renforce chacun de ses passages en déposant des phéromones et ses choix dépendent du renforcement des zones. Le réseau conserve donc une mémoire à long terme des déplacements de la fourmi.
- **Effet du temps continu** : le comportement d'une fourmi peut évoluer au cours du temps passé dans le réseau. Nous citons deux exemples de l'influence que le temps continu peut avoir sur les déplacements.
- **Effet d'évaporation** : les phéromones peuvent s'évaporer et détériorer la mémoire des passages au cours du temps.
- **Effet de fatigue** : la fourmi peut se fatiguer et cette fatigue pourrait avoir une influence sur ses choix.

En posant un modèle à temps discret, nous supposons implicitement que $p_{x,y,z}^{n+1}$ ne dépend pas du temps continu. L'objectif de la section présente est d'étudier dans quelle mesure une marche aléatoire sur le graphe G peut rendre compte de la dynamique de changement de zone des fourmis.

6.2.1 Des modèles discrets avec à mémoire

Nous avons exploré deux modèles. Le premier est une marche aléatoire sur G sans renforcement prenant en compte une certaine persistance. Le second modèle est une marche aléatoire renforcée que l'on pourrait qualifier d'urnes de Deneubourg en réseau.

6.2.1.1 Modèle persistant

Afin d'éprouver l'hypothèse que les fourmis ne subissent aucune influence temporelle (pas de renforcement ni d'évolution dans le temps), nous proposons dans cette partie un modèle de marches aléatoires sur le graphe G qui ne garde pas en mémoire leurs trajectoires passées. Toutefois nous supposons que la géométrie du réseau a une influence sur les fourmis. Aller dans une chambre n'est pas physiquement la même chose que de pénétrer dans une galerie, de même que retourner dans une chambre juste après l'avoir quittée est différent de traverser toute une galerie pour atteindre une autre chambre.

Nous notons p_{cg} la probabilité qu'une fourmi entre dans une chambre en sachant qu'elle vient de quitter celle-ci et p_{gcg} la probabilité qu'une fourmi entre dans une galerie en sachant qu'elle vient de quitter celle-ci. Nous supposons que ces deux probabilités sont constantes au cours du temps et ne dépendent pas du nombre de passages dans chacune des zones.

Nous avons donc les formules suivantes pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 p_{0,1,0}^n &= p_{0,5,0}^n = p_{cgc} , & p_{0,1,2}^n &= p_{0,5,4}^n = 1 - p_{cgc} , \\
 p_{2,1,2}^n &= p_{2,3,2}^n = p_{cgc} , & p_{2,1,0}^n &= p_{2,3,4}^n = 1 - p_{cgc} , \\
 p_{4,3,4}^n &= p_{4,5,4}^n = p_{cgc} , & p_{4,3,2}^n &= p_{4,5,0}^n = 1 - p_{cgc} , \\
 p_{1,0,1}^n &= p_{1,2,1}^n = p_{gcg} , & p_{1,0,5}^n &= p_{1,2,3}^n = 1 - p_{gcg} , \\
 p_{3,2,3}^n &= p_{3,4,3}^n = p_{gcg} , & p_{3,2,1}^n &= p_{3,4,5}^n = 1 - p_{gcg} , \\
 p_{5,0,5}^n &= p_{5,4,5}^n = p_{gcg} , & p_{5,0,1}^n &= p_{5,4,3}^n = 1 - p_{gcg} .
 \end{aligned}$$

Considérons la marche sur G à laquelle la fourmi est assimilée et rappelons que les sommets pairs de G représentent les chambres et les sommets impairs les galeries (cf. figures 6.1 et 6.5, p.203 et p.206). La probabilité p_{cgc} est alors la probabilité que la marche saute dans le sens contraire que précédemment sachant qu'elle est sur un sommet impair et p_{gcg} la probabilité que la marche saute dans le sens contraire que précédemment sachant qu'elle est sur un sommet pair. Il nous suffit donc de choisir les valeurs de p_{cgc} et p_{gcg} pour décrire complètement le comportement de la marche. Cette marche sera appelée *modèle persistant* de paramètres (p_{cgc}, p_{gcg}) .

L'hypothèse la plus simple est de supposer que $p_{cgc} = p_{gcg} = 1/2$, c'est-à-dire que la fourmi a toujours une probabilité uniforme de choisir entre le sens positif et le sens négatif qu'elle soit dans une chambre ou dans une galerie et quel que soit la zone qu'elle occupait précédemment. La marche est alors brownienne et nous l'appellerons *modèle nul*. Il tient compte du comportement de la fourmi si celle-ci ne subit aucune influence de son environnement ou d'autres variables.

Sous l'hypothèse que les fourmis observées suivent un modèle persistant, nous avons estimé à partir des données expérimentales les valeurs de p_{cgc} et p_{gcg} par leurs moyennes empiriques. Nous avons également calculé les intervalles de confiance à 95% correspondants par une méthode classique de statistique et effectué deux tests statistiques ce niveau 95% d'hypothèses nulles respectives $\mathcal{H}_0 : "p_{cgc} = 1/2"$ et $\mathcal{H}_0 : "p_{gcg} = 1/2"$. Le tableau 6.1 résume ces résultats.

La probabilité que la fourmi fasse demi-tour lorsqu'elle est dans une galerie est estimée légèrement supérieure à 1/2. Mais la valeur 1/2 est incluse dans l'intervalle de confiance à 95% et l'hypothèse $\mathcal{H}_0 : "p_{cgc} = 1/2"$ est acceptée par le test, i.e. la p -valeur est supérieure à 0.95. Ainsi avec une confiance de 95%, nous pouvons supposer qu'une fourmi a autant de chance de traverser une galerie pour changer de chambre que de retourner dans la chambre qu'elle vient de quitter.

La probabilité que la fourmi retourne dans la galerie qu'elle vient de quitter est estimée

Para.	Moy. emp.	IC à 95%	p -valeur
p_{cgc}	0.51	(0.5, 0.511)	0.98
p_{gcg}	0.47	(0.469, 0.48)	$4.9 \cdot 10^{-17}$

TABLE 6.1 – Tableau rassemblant les moyennes empiriques de p_{cgc} et p_{gcg} , les intervalles de confiance de niveau 95% correspondants et les p -valeurs des tests statistiques d'hypothèses nulles $\mathcal{H}_0 : "p_{cgc} = 1/2"$ et $\mathcal{H}_0 : "p_{gcg} = 1/2"$

inférieure à $1/2$. De plus, la valeur $1/2$ n'est pas incluse dans l'intervalle de confiance à 95% et le test rejette fortement l'hypothèse $\mathcal{H}_0 : "p_{cgc} = 1/2"$, i.e. la p -valeur est très proche de 0. Par conséquent nous pouvons affirmer avec une confiance à 95%, qu'une fourmi préfère (modérément) changer de galerie lorsqu'elle entre et sort d'une chambre plutôt que de retourner dans la galerie qu'elle vient de quitter.

Comme le réseau est symétrique, ces résultats démontrent que les choix des fourmis sont influencés par la géométrie du réseau. Toutefois les valeurs estimées de p_{cgc} et p_{gcg} diffèrent peu de $1/2$ et les fourmis effectuent en moyenne 113 changements durant une expérience. Il n'est pas évident que la différence de dynamique entre le modèle nul et le modèle persistant de paramètres $p_{cgc} = 0.51$ et $p_{gcg} = 0.47$ soit significative à sur l'échelle de l'expérience.

6.2.1.2 Modèle renforcé

Afin d'éprouver l'hypothèse selon laquelle les fourmis déposent des traces de phéromones et y sont sensibles, nous proposons dans cette partie un modèle de marches aléatoires renforcées sur le graphe G . Nous faisons les hypothèses suivantes.

- les fourmis déposent toujours le même type et la même quantité de phéromones sur leurs trajectoires,
- les fourmis sont attirées par les traces de phéromones,
- les phéromones ne s'évaporent pas.

La quantité de phéromones déposée est donc proportionnelle aux nombres de passages des fourmis.

Nous ne modélisons pas de la même façon le comportement d'une fourmi lorsqu'elle est dans une chambre ou lorsqu'elle est dans une galerie.

Comportement dans une chambre Lorsqu'une fourmi quitte une chambre, elle doit choisir entre deux galeries formant une bifurcation. Si ce choix dépend des quantités de phéromones déposées, il ne peut s'agir que des traces situées aux extrémités des deux

galeries. En effet, une fourmi ne détecte les phéromones que dans un rayon d'un centimètre autour d'elle (cf. [PGG⁺12]).

Nous considérons que la fourmi renforce par arête le graphe G . Cela signifie que la marche renforce les arêtes à chacun de ses passages. Plus une arête est empruntée, plus elle est attractive. Une arête entre deux sommets symbolise la jonction entre les deux zones correspondantes. Par exemple, l'arête $(0, 1)$ qui relie le sommet 0 au sommet 1 correspond à la jonction entre la chambre 0 et la galerie 1.

Le choix d'une fourmi entre deux galeries dépend du renforcement des jonctions de ces dernières à la chambre. Lorsque la fourmi a effectué n sauts, nous notons $Z_n(x, y)$ le nombre de fois que la fourmi est passée de la zone x à la zone y ou de la zone y à la zone x . Remarquons que nous avons $Z_n(x, y) = Z_n(y, x)$.

Nous avons choisi de modéliser la probabilité de choix par la fonction de choix que J.-L. Deneubourg et al. ont proposée en 1990 (cf. [DAGP90]). Supposons qu'après n changements de zone, la fourmi se trouve dans la chambre y connectée aux galeries x et z . Supposons de plus qu'au temps précédent, la fourmi était dans la galerie x . La probabilité que la fourmi rejoigne la galerie z vaut

$$p_{x,y,z}^n = \frac{(c + Z_n(y, z))^\alpha}{(c + Z_n(x, y))^\alpha + (c + Z_n(y, z))^\alpha}, \quad (6.2.1)$$

avec $\alpha > 0$ le paramètre de sensibilité différentielle aux concentrations de phéromones et $c > 0$ l'incrément du renforcement après chaque passage. Nous expliquons le rôle de α et c dans la suite. La probabilité que la fourmi revienne dans la galerie x vaut

$$p_{x,y,x}^n = 1 - p_{x,y,z}^n = \frac{(c + Z_n(x, y))^\alpha}{(c + Z_n(x, y))^\alpha + (c + Z_n(y, z))^\alpha}. \quad (6.2.2)$$

Remarquons qu'ici la galerie que la fourmi a quittée n'a pas d'influence sur le choix de cette dernière. Les probabilités (6.2.1) et (6.2.2) sont les mêmes que la fourmi vienne de la galerie x ou de la galerie z , c'est-à-dire que $p_{z,y,z}^n = p_{x,y,z}^n$ et $p_{x,y,x}^n = p_{z,y,x}^n$.

Comportement dans une galerie Une fourmi peut parcourir et donc renforcer une galerie d'une infinité de façon : elle peut traverser la zone d'une traite, comme elle peut effectuer de multiples demi-tours, arrêts et aller-retours.

Avec le modèle à temps discret, nous réduisons le comportement d'une fourmi dans une galerie à seulement deux possibilités. Supposons qu'une fourmi est dans la chambre 0 et choisit d'entrer dans la galerie 1 en renforçant la jonction entre les deux zones. Pour le

modèle cela signifie que la marche saute du sommet 0 au sommet 1 et renforce l'arête $(0, 1)$. La fourmi a ensuite deux choix :

- avec une probabilité p , la fourmi traverse la galerie et atteint la chambre 2 en renforçant la jonction entre la galerie 1 et la chambre 2. Pour le modèle cela signifie qu'avec une probabilité p , la marche saute sur le sommet 2 et renforce l'arête $(1, 2)$.
- avec une probabilité $1 - p$, la fourmi s'engage dans la galerie et à mi-parcours décide de faire demi-tour en renforçant une nouvelle fois la jonction entre la chambre 0 et la galerie 1. Pour le modèle cela signifie qu'avec une probabilité $1 - p$, la marche retourne sur le sommet 0 et renforce une fois de plus l'arête $(0, 1)$.

Nous supposons que p est une constante qui ne dépend pas des traces de phéromones.

La constante p peut être aussi décrite comme la probabilité pour une fourmi d'effectuer en tout un nombre impair de demi-tour dans une galerie. Et donc $1 - p$ est la probabilité qu'une fourmi effectue un nombre pair de demi-tour entre le moment où elle entre dans une galerie et celui où elle en sort.

Nous appellerons *modèle renforcé* de paramètres (α, c, p) , le modèle que nous venons de définir. Nous pourrions le décrire comme un ensemble de trois urnes de Deneubourg en réseau dont la probabilité de passer de l'une à l'autre est donnée par p . En effet, chaque chambre est considérée comme une bifurcation que nous modélisons avec la fonction de choix de Deneubourg et la probabilité de revenir dans une chambre/urne après l'avoir quitté est égale à p .

Le modèle renforcé et l'urne de Deneubourg. Le comportement d'une urne de Deneubourg seule en fonction de ces deux paramètres α et c est décrit dans la section 4.3, page 155. Selon les valeurs des deux paramètres, le modèle adopte quatre états menant plus ou moins vite vers une sélection ou une non sélection de chemin.

Il existe une différence fondamentale entre une urne seule et une urne en réseau. Cette différence réside dans la façon dont les branches sont renforcées. Pour une urne seule, à chaque choix, une seule des deux branches est renforcée (celle qui est choisie). En revanche les branches d'une urne en réseau peuvent être renforcées de deux façons différentes. Lorsqu'une fourmi quitte une chambre, elle renforce une fois l'extrémité de la galerie qu'elle choisit. Quand la fourmi revient, elle peut arriver par la même galerie et donc renforcer son extrémité une seconde fois. Mais elle peut également revenir par l'autre galerie et les extrémités des deux galeries ont été renforcées chacune une fois. Ainsi le renforcement de l'urne ne dépend pas uniquement de son propre renforcement, mais aussi de celui des deux autres urnes.

Par conséquent, il n'est pas possible de décrire entièrement le comportement du modèle

renforcé à partir de celui d'une urne de Deneubourg seule. Il faudrait pour cela utiliser les outils mathématiques développés dans le chapitre 2, ce qui est le sujet d'un futur article.

Estimation des paramètres α , c et p . Nous avons déjà estimé le paramètre p dans la partie précédente. Le paramètre p_{cgc} du modèle persistant est la probabilité qu'une fourmi retourne dans une chambre juste après l'avoir quittée. La probabilité p est donc égale à p_{cgc} et a été estimée à 0.51 (cf. tableau 6.1, p.210). Dorénavant nous fixons $p = 0.51$.

Les outils statistiques développés dans la section 3.2 du chapitre 3 page 110 permettent d'estimer les paramètres α et c . Des deux estimateurs proposés dans la section 3.2, nous n'utilisons ici que l'estimateur des moindres carrés pondérés (EMCP).

Remarque 6.2.3. *Les résultats de consistance et d'asymptotique normalité de l'EMCP n'ont pas été démontrés pour la situation présente. En effet dans la section 3.2 du chapitre 3, les deux estimateurs proposés reposent sur des données constituées de séries de choix de la même longueur. Dans l'expérience du réseau en triangle, les séries de choix expérimentaux ont des longueurs très variables. Cependant il est possible de démontrer que même dans ce cas les deux estimateurs sont consistants et asymptotiquement normaux (cf. section 3.4, p.133).*

Le tableau 6.2 résume les résultats d'estimation de α et c à partir des données expérimentales. Le paramètre α est estimé à 0.36 et le paramètre c à 3.41. Les intervalles de confiance permettent d'affirmer avec une confiance de 95% que $\alpha < 1$ et $c > 1$. Ceci correspond à un état de "passage" des fourmis, décrit dans la section 5.4 du chapitre 5 (p.191). L'intensité des dépôts de phéromones est faible et les fourmis sont faiblement sensibles aux différences de concentration de phéromones.

Para.	EMCP	IC Bootstrap 95%
α	0.36	(0.22, 0.87)
c	3.41	(1.1, 17.8)

TABLE 6.2 – Valeurs de l'EMCP pour α et c ainsi que leur intervalle de confiance bootstrap à 95% correspondants.

6.2.2 La diffusion dans le réseau

Pour étudier le comportement des fourmis observées expérimentalement et des modèles définis précédemment, nous nous sommes intéressés à la diffusion¹ des marcheurs dans le dispositif. C'est-à-dire que nous avons étudié la dynamique de changements de zone, la façon dont les fourmis observées ou simulées investissent le réseau en triangle. Restent-elles toujours dans une même zone ? Font-elles constamment des aller-retours entre deux ou trois zones ? Ou encore tournent-elles toujours dans le même sens lorsqu'elles changent de zone ?

Pour répondre à ces questions, il suffit de s'intéresser au nombre de sauts effectués dans le sens positif et dans le sens négatif. Une manière simple de le quantifier est d'associer la trajectoire d'une fourmi dans le dispositif à une marche sur \mathbb{Z} , l'ensemble des entiers relatifs². Lorsque la fourmi avance dans le sens positif, la marche avance de 1 sur \mathbb{Z} . Lorsque la fourmi se déplace dans le sens négatif, la marche recule de 1 (avance de -1) sur \mathbb{Z} . Ainsi lorsque la fourmi saute de la galerie 5 à la chambre 0 pour la première fois, la marche se déplace du sommet 5 au sommet 6. De cette façon si la fourmi tourne toujours dans le sens positif (resp. négatif), sa marche associée ira très loin dans les entiers positifs (resp. négatifs) de \mathbb{Z} . En revanche si la fourmi retourne souvent sur ses pas, la marche s'éloignera peu de 0.

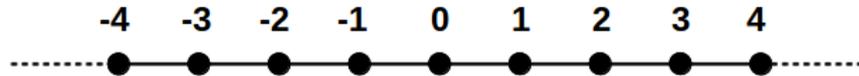


FIGURE 6.6 – Schéma du graphe constitué par \mathbb{Z} . Chacun des entiers relatifs (représentés par les points noirs) est connecté à ses deux entiers consécutifs par des arêtes (représentées par les traits).

Remarque 6.2.4. Lorsque la marche est sur le sommet k de \mathbb{Z} , la fourmi est dans la zone k modulo 6 du dispositif. Par exemple lorsque la marche est sur le sommet 12 de \mathbb{Z} , la fourmi se trouve dans la chambre 0.

Les sommets pairs de \mathbb{Z} correspondent aux chambres et les sommets impairs aux galeries. Comme toutes fourmis commencent dans la chambre 0, les chambres ne peuvent

1. Par diffusion, nous désignons la dynamique de répartition des fourmis dans le dispositif au cours du temps. Autrement dit c'est l'évolution en fonction du nombre de sauts de la probabilité de présence des fourmis dans les différentes zones du dispositif.

2. L'ensemble \mathbb{Z} est considéré comme un graphe dont les sommets sont les entiers relatifs et dont les arêtes relient les entiers consécutifs. Par exemple, le sommet 2 est connecté aux sommets 1 et 3 (cf. figure 6.6).

être atteintes qu'après un nombre pair de sauts et les galeries après un nombre impairs de sauts.

Nous confondrons souvent les fourmis avec leur marche associée. Par abus de langage, nous parlerons donc de la diffusion et de la distribution des fourmis sur \mathbb{Z} .

La marche associée sur \mathbb{Z} du modèle nul est en réaliste une marche brownienne sur \mathbb{Z} . Cette propriété nous permet d'affirmer qu'à l'instant n la loi de distribution sur \mathbb{Z} des fourmis suivant le modèle nul est approximativement la loi gaussienne de moyenne nulle et de variance n .

Dans un premier temps, nous allons présenter la diffusion des fourmis observée expérimentalement et montrer que les distributions sont de nature exponentielle et non gaussienne comme pour le modèle nul. Ensuite nous confronterons la diffusion observée à celles des trois modèles décrits précédemment dont les paramètres seront fixés aux valeurs estimées à partir des données expérimentales. Nous constaterons qu'aucun des modèles ainsi paramétrés ne reproduit des queues de distribution exponentielles. Puis nous décrirons le comportement diffusif du modèle persistant pour différentes valeurs de paramètres. En dernière partie, nous nous intéresserons au modèle renforcé et montrerons que ce dernier peut produire des distributions de nature exponentielle et ceci uniquement lorsqu'il est dans un état que nous appelons critique.

Pour chaque modèle et chaque jeux de paramètres, nous avons simulé 10 000 marches afin d'estimer les loi de présence sur \mathbb{Z} à chaque pas de temps.

6.2.2.1 La diffusion observée expérimentalement

Les fourmis observées expérimentalement se sont diffusées dans le réseau différemment que si elles avaient choisi avec une probabilité $1/2$ chacune des nouvelles zones. Plus précisément, les distributions des fourmis dans \mathbb{Z} comportent des queues exponentielles et non gaussiennes. Cette sous-partie montre graphiquement cette dernière affirmation.

Pour donner une première idée de la diffusion observée expérimentalement, la figure 6.7 (p.217) représente en gris les trajectoires des 459 marches sur \mathbb{Z} associées aux séries de changements de zone des 459 fourmis. C'est-à-dire que pour chaque fourmi nous traçons une courbe qui associe à n le sommet occupé par la marche après n sauts. Les fourmis partent toutes de 0. Lorsqu'une fourmi saute vers le sens positif (resp. négatif), la trajectoire de sa marche augmente (resp. diminue).

Les trajectoires ne sont pas toutes de la même longueur, car toutes les fourmis observées n'ont pas eu la même activité. Certaines ont beaucoup changé de zone : la plus active a effectué plus de 500 sauts en deux heures. D'autres n'ont jamais quitté la chambre 0. En

fonction de n , la sous-figure 6.7(a) représente (en pointillé bleu) le nombre de fourmis qui ont effectué au moins n sauts. La moitié des fourmis n'a pas fait plus de 100 changements de zone durant l'expérience.

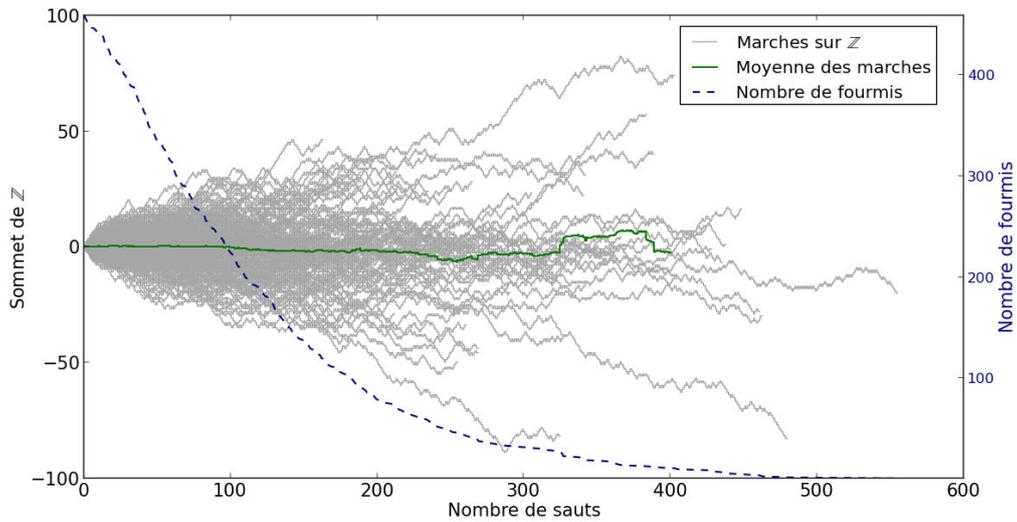
Dans la sous-figure 6.7(b), en fonction de n , nous avons représenté les intervalles de confiance de niveau 95% de la distribution des fourmis sur \mathbb{Z} au temps n (courbes en gras). C'est-à-dire que 95% des fourmis se trouvent sur les sommets situés entre les deux bornes de l'intervalle. Toujours en fonction de n , nous avons également représenté (courbes en pointillé) les intervalles de confiance de niveau 95% de la loi gaussienne de moyenne nulle et de variance n . Durant les 80 premiers changements de zone, les intervalles de confiance de l'expérience sont très proches de ceux du modèle nul. Au-delà, les vraies fourmis s'aventurent plus loin sur \mathbb{Z} que si elles avaient choisi avec une probabilité uniforme chacun de leurs sauts.

La figure 6.7 donne une idée de la manière dont les fourmis se répartissent sur \mathbb{Z} au cours du temps. Toutefois la superposition de 459 courbes n'est pas assez claire pour étayer correctement une discussion. Dans la figure 6.8 (p.218), nous avons donc représenté (en semi-log) la distribution sur \mathbb{Z} des fourmis à chacun des temps suivants : $n = 8$, $n = 22$, $n = 52$, $n = 114$, $n = 200$ et $n = 238$ ³. Autrement dit nous regardons la probabilité de présence des fourmis sur les différents sommets de \mathbb{Z} à chaque temps n . Comme ces distributions sont symétriques par rapport au sommet 0, nous avons "replié" les données sur les sommets positifs, c'est-à-dire qu'à k nous associons la proportion de fourmis présentes au temps n sur le sommet k et sur le sommet $-k$.

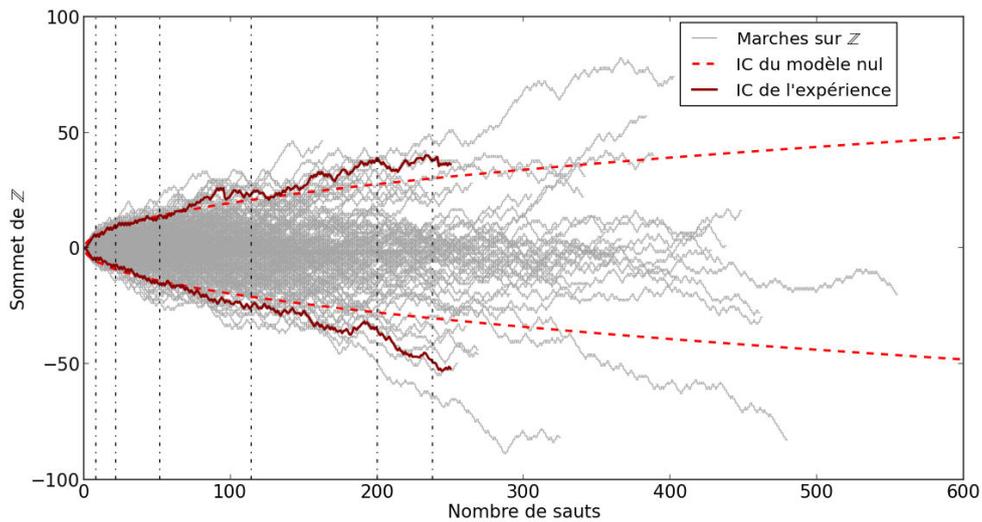
La figure 6.8 montre la nature exponentielle des queues de distribution. Mise à part pour la proportion de fourmis sur le sommet 0, les points représentés en semi-log sont alignés. Il est évidemment plus difficile de s'en convaincre pour les plus grands temps, car la quantité de données est moins importantes. Nous avons donc effectué un lissage les données afin de disposer de meilleurs graphes pour effectuer l'analyse comparative présentée dans la suite.

À savoir que pour chaque temps n , nous ne considérons plus seulement les fourmis présentes sur les sommets au temps n , mais pour tout k nous représentons la proportion totale de fourmis qui ont occupé les sommet k et $-k$ pendant l'intervalle de temps $[n - \delta n, n + \delta n]$, où δn est choisi de telle façon que le graphe utilise au moins 1000 fourmis. Ces distributions lissées sont représentées dans la figure 6.9 (p.214). Pour constater que ce lissage ne dénature pas les résultats, nous avons superposé sur les courbes lissées (courbes en couleur) les distributions non lissées de la figure 6.8 (courbes en gris).

3. Les temps choisis sont tous pairs, nous traçons donc les probabilités de présence dans les sommets correspondants aux chambres. La probabilité d'être sur un sommet impair à un temps pair étant nul, nous ne prenons pas en compte les temps impairs dans l'intervalle $[n - \delta n, n + \delta n]$ de chaque graphe lissé



(a) Trajectoires, moyenne et nombre de fourmis



(b) Trajectoires et intervalles de confiance

FIGURE 6.7 – Trajectoires (en gris) des 459 marches sur \mathbb{Z} associées aux séries de changements de zone des 459 fourmis, i.e. pour chaque fourmi nous traçons en fonction de n le sommet occupé par la marche associée après n sauts.

Sur la sous-figure 6.7(a), la moyenne de ces trajectoires est tracée en gras et en vert. La courbe en pointillé bleu représente le nombre de fourmis qui ont au moins effectué n sauts en fonction de n .

Sur la sous-figure 6.7(b), nous avons représenté en fonction de n les bornes inférieure et supérieure les intervalles de confiance de niveau 95% de la distribution sur \mathbb{Z} au temps n des fourmis observées expérimentalement d'une part (en gras rouge foncé) et de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance n d'autre part (en pointillé rouge clair). Les lignes verticales en pointillé indiquent les temps ($n = 8$, $n = 22$, $n = 52$, $n = 114$, $n = 200$ et $n = 238$) pour lesquelles nous représentons la distribution des fourmis sur \mathbb{Z} dans les figures suivantes.

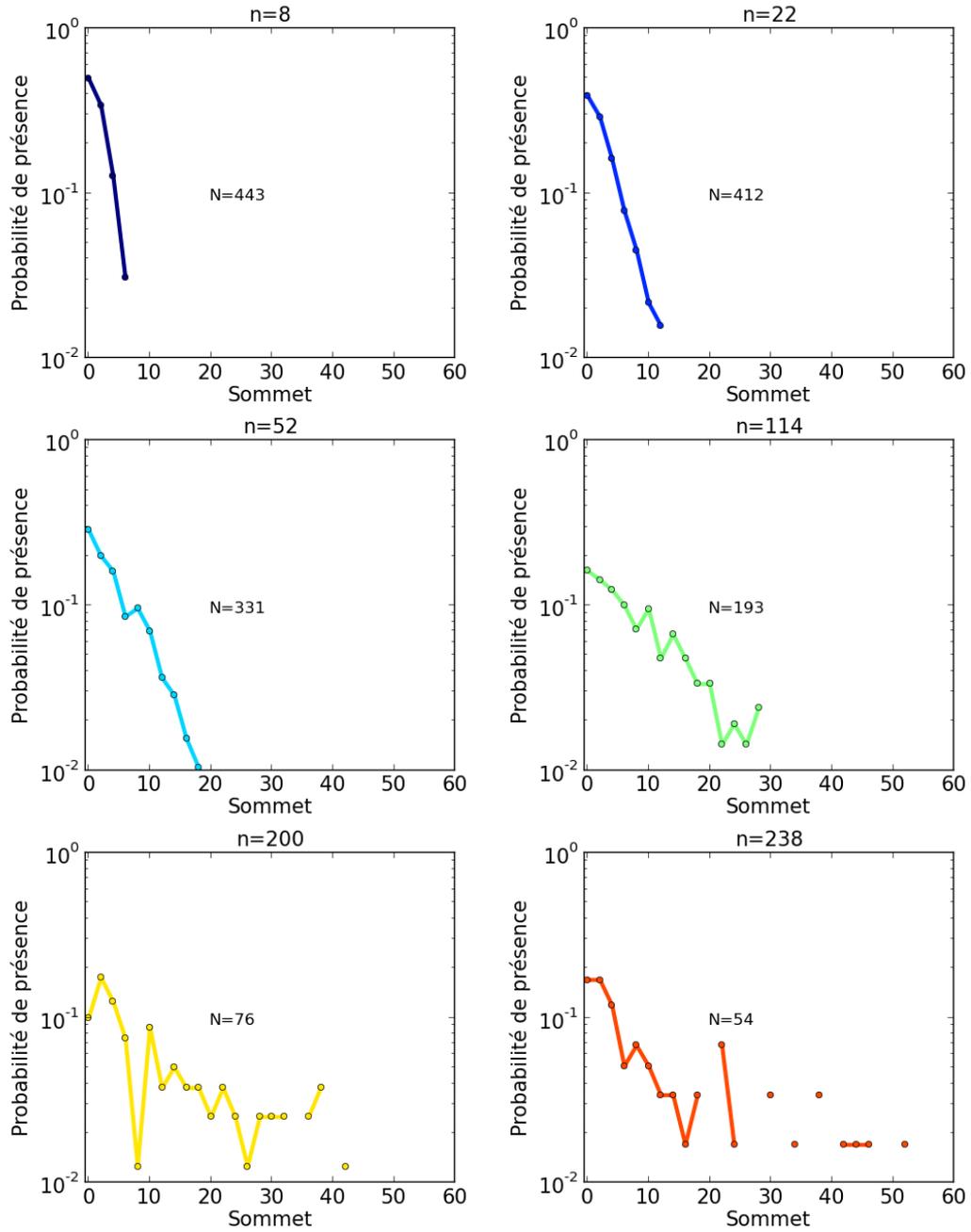


FIGURE 6.8 – Distribution sur \mathbb{Z} des fourmis observées expérimentalement aux temps : $n = 8$, $n = 22$, $n = 52$, $n = 114$, $n = 200$ et $n = 238$. Plus précisément, pour chaque temps n , nous représentons en fonction de k (en semi-log) la proportion de fourmis présentes au temps n sur les sommets k et $-k$. Nous donnons également le nombre N de fourmis utilisées pour chaque graphe, i.e. le nombre de fourmis ayant effectué au moins n sauts.

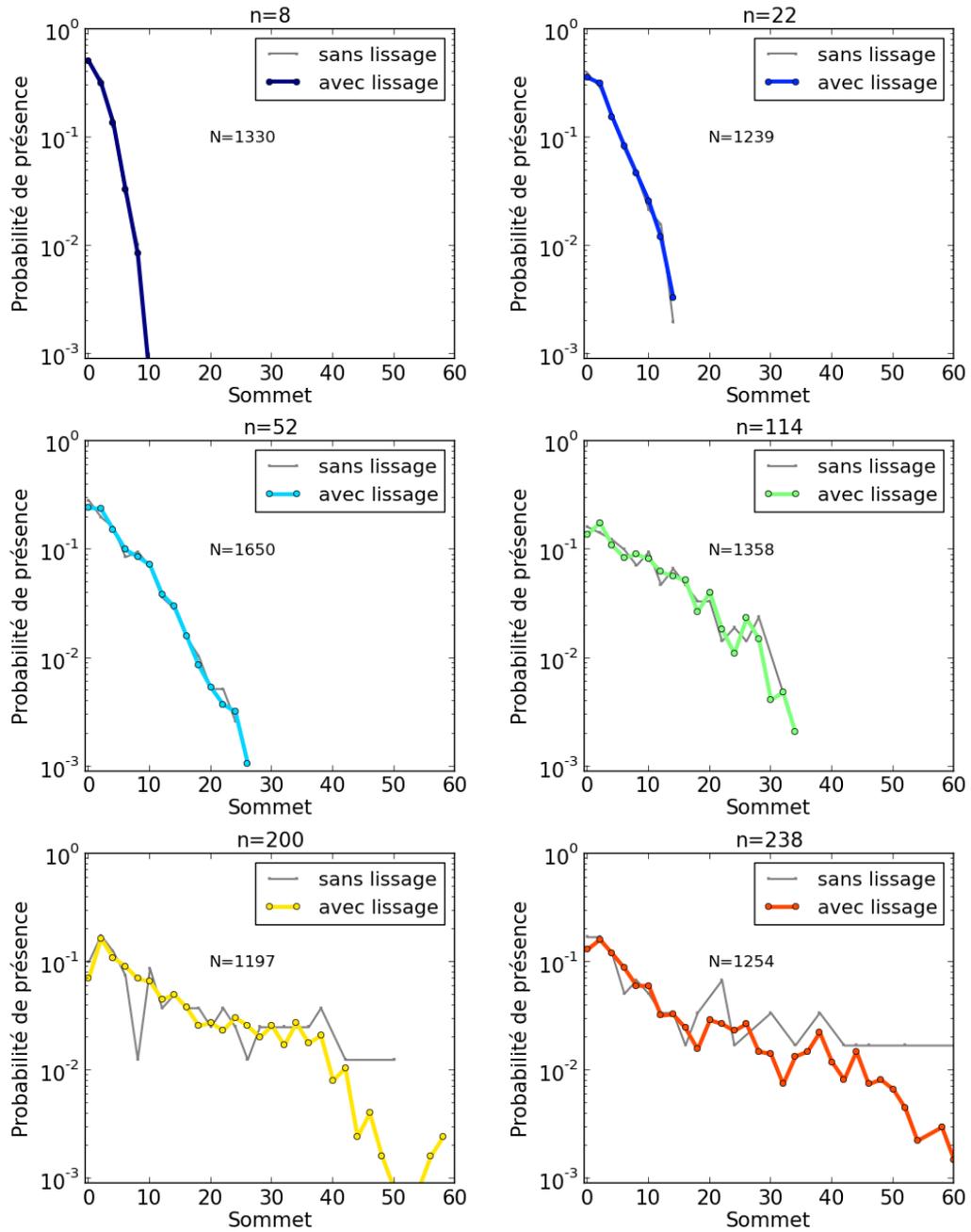


FIGURE 6.9 – *Distribution lissée sur \mathbb{Z} des fourmis observées expérimentalement aux temps : $n = 8$, $n = 22$, $n = 52$, $n = 114$, $n = 200$ et $n = 238$. Plus précisément, pour chaque temps n , nous représentons en fonction de k (en semi-log) la proportion de fourmis présentes entre les temps $n - \delta n$ et $n + \delta n$ sur les sommets k et $-k$, où δn est choisi de telle façon qu'au moins 1000 fourmis est utilisées pour tracer le graphe. Nous donnons le nombre exacte N de fourmis utilisées pour chaque graphe.*

6.2.2.2 Diffusion des modèles persistant et renforcé avec les paramètres estimés à partir des expériences

Dans cette sous-partie, nous comparons la distribution expérimentale des fourmis sur \mathbb{Z} à celle des trois modèles proposés dont les paramètres sont égaux à leurs valeurs estimées à partir des données expérimentales. Les paramètres du modèle persistant sont fixés à $p_{cgc} = 0.51$ et $p_{gcg} = 0.47$ et ceux du modèle renforcé sont fixés à $\alpha = 0.36$, $c = 3.41$ et $p = 0.51$ (cf. tableaux 6.1 et 6.2).

Pour chaque modèle, nous avons calculé la distribution des fourmis sur \mathbb{Z} aux temps $n = 22$, $n = 52$, $n = 114$ et $n = 238$. La figure 6.10 (p.221) représente en semi-log ces distributions (courbes en couleur) ainsi que celles calculées à partir des données expérimentales (histogrammes gris).

Pour chaque temps n , nous avons également tracé la densité de la loi normale de moyenne nulle et de variance n (courbe rouge en pointillé), qui est une approximation de la distribution théorique sur \mathbb{Z} au temps n des fourmis suivant le modèle nul. Nous pouvons constater que plus n est grand, plus la distribution sur \mathbb{Z} des fourmis suivant le modèle nul (en \circ bleu foncé) coïncide avec la courbe rouge en pointillé.

Comme il avait été suggéré dans la partie précédente, le comportement du modèle persistant de paramètre $(p_{cgc}, p_{gcg}) = (0.51, 0.47)$ diffère peu de celui du modèle nul. En effet, les valeurs des paramètres sont très peu éloignées de $1/2$ et le nombre de sauts effectués n'est pas suffisant pour voir apparaître une divergence entre les dynamiques des deux modèles.

La diffusion du modèle à mémoire de paramètre $(\alpha, c, p) = (0.36, 6.41, 0.51)$ est différente de celle du modèle nul. Les fourmis artificielles déposant des phéromones vont plus loin dans \mathbb{Z} , i.e. elles reviennent moins souvent sur leur pas que les fourmis qui choisissent uniformément leurs nouveaux sommets.

Aucun des trois modèles ainsi paramétrés ne reproduit la diffusion expérimentale des fourmis. Le modèle renforcé est le plus proche, mais nous ne retrouvons pas de queues de distribution exponentielles. Dans les parties suivantes, nous étudions le comportement de ces deux modèles pour différentes valeurs de paramètres.

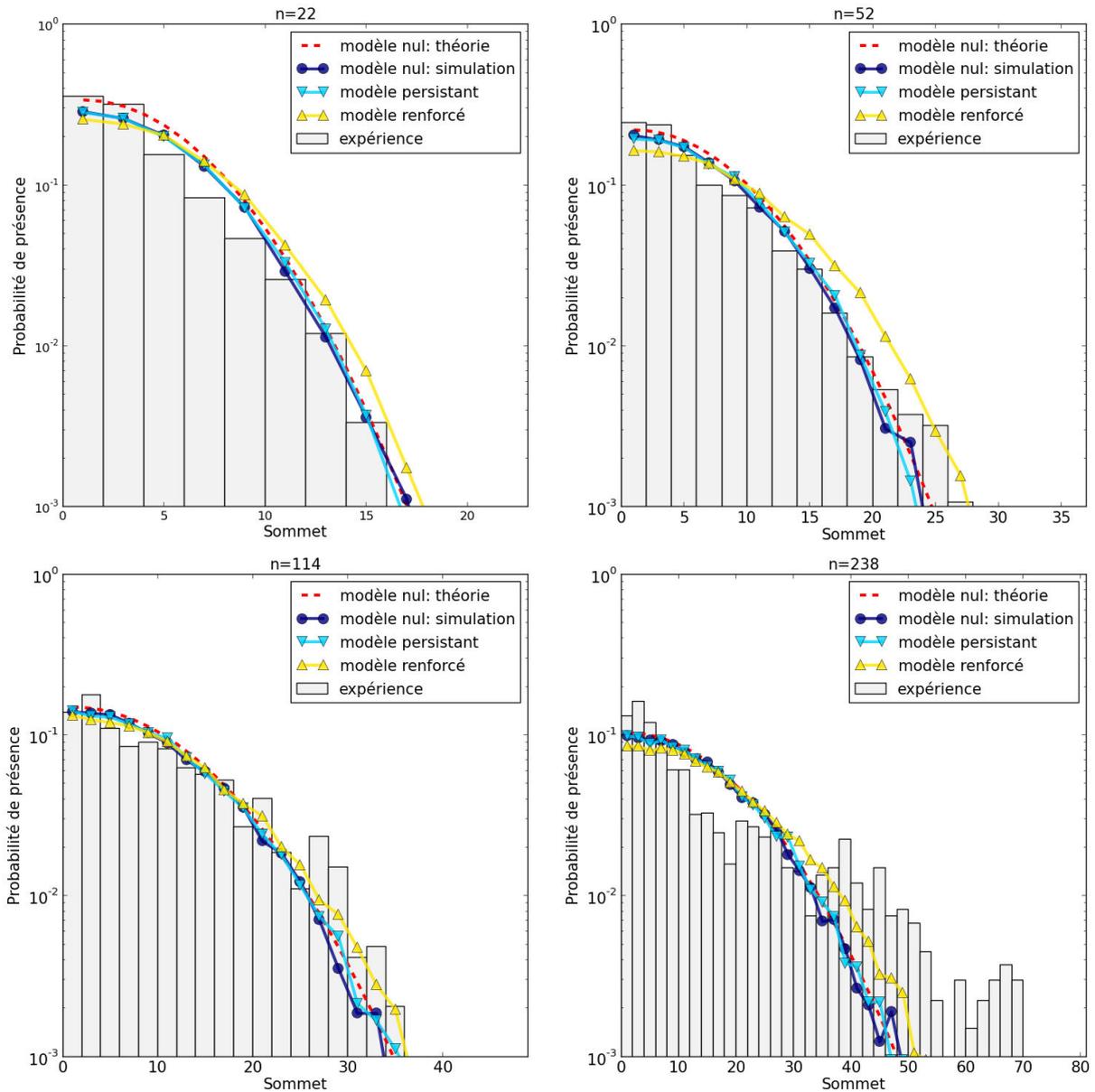


FIGURE 6.10 – *Expérience et modèles aux paramètres fixés aux valeurs estimés à partir des données expérimentales : distributions des fourmis sur les sommets de \mathbb{Z} aux temps $n = 22$, $n = 52$, $n = 114$ et $n = 238$ représentées en semi-log. Plus précisément, nous traçons en fonction de k la proportion de fourmis présentes sur les sommets k et $-k$.*

La courbe en \circ bleu foncé représente les données simulées du modèle nul; la courbe en ∇ cyan représente les données simulées du modèle persistant de paramètres $(p_{cgc}, p_{gcg}) = (0.51, 0.47)$; la courbe en Δ jaune représente les données simulées du modèle renforcé de paramètres $(\alpha, c, p) = (0.36, 6.41, 0.51)$; la courbe en rouge représente la densité de la loi normale de moyenne nulle et de variance n . Les histogrammes gris sont les distributions lissées observées expérimentalement représentées dans la figure 6.9.

6.2.2.3 Diffusion du modèle persistant

Dans cette partie, nous explorons le comportement du modèle persistant pour différentes valeurs de paramètres. Nous avons choisi quatre jeux différents de paramètres :

- $p_{cgc} = 0.51$ et $p_{gcg} = 0.47$. Ces valeurs ont été estimées à partir des données expérimentales sous l'hypothèse que les fourmis suivent un modèle persistant. La figure 6.10 (p.221) montre qu'un modèle persistant avec de tels paramètres ne reproduit pas une diffusion similaire à celle de l'expérience.
- $p_{cgc} = 0.25$ et $p_{gcg} = 0.25$. À chaque saut, la marche a une plus grande probabilité de continuer dans le même sens que de changer de sens. La marche revient donc peu sur ses pas.
- $p_{cgc} = 0.75$ et $p_{gcg} = 0.75$. À chaque saut, la marche a une grande probabilité de faire demi-tour. La diffusion reste faible dans ce cas.
- $p_{cgc} = 0.25$ et $p_{gcg} = 0.75$. Sur un sommet impair (dans une galerie), la marche préfère continuer dans le même sens, alors que sur un sommet pair (dans une chambre), la marche préfère changer de sens. Il est à noter que ce modèle a une diffusion similaire à un modèle persistant de paramètres $p_{cgc} = 0.75$ et $p_{gcg} = 0.25$.

Pour chaque jeu de paramètres, la figure 6.11 (p.223) représente (en semi-log) la distribution des fourmis artificielles sur \mathbb{Z} aux temps $n = 22$, $n = 52$, $n = 114$ et $n = 200$. Nous avons également représenté ces distributions pour l'expérience et pour le modèle nul.

Comme nous l'avons déjà constaté dans une section précédente, la diffusion du modèle nul est très similaire à celle du modèle persistant de paramètres $(p_{cgc}, p_{gcg}) = (0.51, 0.47)$.

Sans surprise, les fourmis artificielles suivant le modèle persistant de paramètres $(p_{cgc}, p_{gcg}) = (0.25, 0.25)$ sont celles qui s'aventurent le plus loin dans \mathbb{Z} et celles suivant le modèle persistant de paramètres $(p_{cgc}, p_{gcg}) = (0.75, 0.75)$ sont celles qui restent le plus autour du sommet 0.

La diffusion du modèle persistant de paramètres $(p_{cgc}, p_{gcg}) = (0.25, 0.75)$ se situe entre celles du modèle nul et celle du modèle persistant de paramètres $(p_{cgc}, p_{gcg}) = (0.75, 0.75)$.

Avec aucun des jeux de paramètres proposés, nous n'obtenons des distributions de queues exponentielles.

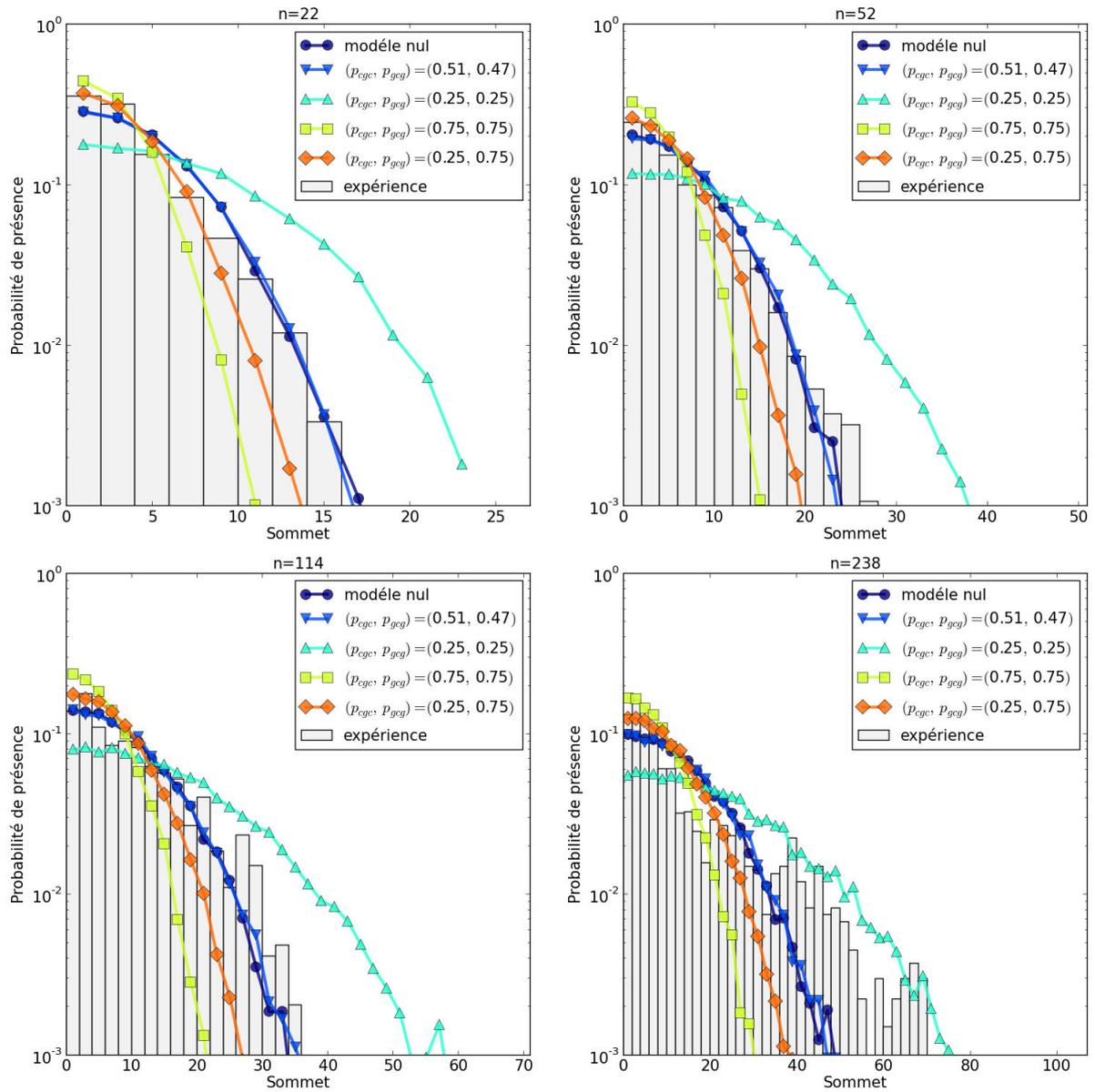


FIGURE 6.11 – *Expérience et le modèle persistant : distributions des fourmis sur les sommets de \mathbb{Z} aux temps $n = 22$, $n = 52$, $n = 114$ et $n = 238$ représentées en semi-log. Plus précisément, nous traçons en fonction de k la proportion de fourmis présentes sur les sommets k et $-k$.*

La courbe en \circ bleu foncé représente les données simulées du modèle nul ; la courbe en ∇ bleu clair représente les données simulées du modèle persistant de paramètres $(p_{cgc}, p_{gcg}) = (0.51, 0.47)$; la courbe en Δ cyan représente les données simulées du modèle persistant de paramètres $(p_{cgc}, p_{gcg}) = (0.25, 0.25)$; la courbe en \square jaune représente les données simulées du modèle persistant de paramètres $(p_{cgc}, p_{gcg}) = (0.75, 0.75)$; la courbe en \diamond orange représente les données simulées du modèle persistant de paramètres $(p_{cgc}, p_{gcg}) = (0.25, 0.75)$. Les histogrammes gris sont les distributions lissées observées expérimentalement représentées dans la figure 6.9.

6.2.2.4 Diffusion du modèle renforcé

Dans cette sous-partie, nous décrivons la diffusion du modèle renforcé en fonction de ses valeurs de paramètres. En particulier, nous montrons que ce modèle présente des distributions de nature exponentielle dans un état que l'on qualifie de critique.

Dans la figure 6.13 (p.228), nous avons représenté (en semi-log) la distribution sur \mathbb{Z} des fourmis suivant le modèle pour les temps $n = 22$, $n = 52$, $n = 114$ et $n = 200$ et pour les jeux de paramètres suivants :

- $\alpha = 0.5$ et $c = 2$. Les trois urnes de Deneubourg sont dans un état d'égalisation rapide.
- $\alpha = 2$ et $c = 2$. Les trois urnes de Deneubourg sont dans un état de sélection lente.
- $\alpha = 2$ et $c = 0.5$. Les trois urnes de Deneubourg sont dans un état de sélection rapide.
- $\alpha = 0.5$ et $c = 0.5$. Les trois urnes de Deneubourg sont dans un état d'égalisation lente.
- $\alpha = 1$ et $c = 1$. Les trois urnes de Deneubourg sont dans un état critique, i.e. au point d'intersection des quatre états.

Le paramètre p est fixée à sa valeur estimées à partir des données expérimentales, i.e. $p = 0.51$. Nous avons également représenté ces distributions pour l'expérience et pour le modèle nul.

Selon la valeur des paramètres, le modèle renforcée a deux types de comportement : favorisation d'une branche, i.e. à chaque urne, la probabilité de choix d'une des deux branches est proche de 1, ou égalisation des branches, i.e. à chaque urne, les probabilités de choix des branches sont proches de $1/2$.

Lorsque les branches sont égalisées, la répartition des fourmis sur \mathbb{Z} est proche de celle du modèle nul, i.e. les distributions sont des gaussiennes plus ou moins étirées selon la distance des probabilités de choix de $1/2$. Cette forme de distribution apparait dans deux cas : lorsque c est grand pour des temps petits, illustré par exemple par la courbe cyan en Δ pour $n = 22$ ou lorsque α est inférieur à 1 pour des temps grands, illustré par exemple par la courbe cyan en Δ pour $n = 238$.

Lorsqu'une branche de chaque urne est favorisée, la répartition des fourmis sur \mathbb{Z} présente deux extrema locaux, un sur le sommet 0 et un autre sur les sommets éloignés de 0. Cette forme de distribution apparait dans deux cas : lorsque c est proche de 0 pour des temps petits, illustré par exemple par la courbe verte en \square au temps $n = 22$ ou lorsque α est inférieur à 1 pour des temps grands, illustré par exemple par la courbe verte en \square au temps $n = 238$.

Cette allure particulière s'explique par le fait que favoriser fortement une branche à chaque urne induit un sens de parcours du triangle. Par exemple, si la chambre 2 favorise

sa jonction vers la galerie 1, une fourmi dans la chambre 2 sortira presque toujours par la galerie 1 et très peu par la galerie 3 (cf. dessin gauche de la figure 6.12, p.227). En revanche le fait qu'une fourmi revienne dans la chambre 2 par la galerie 1 ou 3 dépend des favorisations des deux autres urnes. Par exemple, si la chambre 4 favorise la jonction vers la galerie 5 et donc quasiment abandonné la jonction vers la galerie 3, la fourmi ne pourra atteindre la galerie 3 qu'avec une probabilité très faible : les deux accès de la galerie sont quasiment interdits (cf. dessin gauche de la figure 6.12, p.227).

Nous comprenons alors comment une partie des fourmis restent sur les premiers sommets. Imaginons que la chambre 0 et la chambre 2 favorisent toutes les deux leurs jonctions vers la galerie 1 (cf. dessin gauche de la figure 6.12, p.227). Une fourmi située dans l'une ou l'autre des deux chambres a une très grande probabilité de sortir par la galerie 1. La fourmi se retrouve donc enfermée avec une forte probabilité sur les sommets 0, 1 et 2.

Dans la même logique, nous pouvons expliquer comment une partie des fourmis se retrouve sur les sommets les plus éloignés de 0, i.e. les sommets vers $-n$ et n . Imaginons que toutes les chambres ont favorisé leurs jonctions vers leur galerie du sens positif (cf. dessin droite de la figure 6.12, p.227). Dès qu'une fourmi quitte une chambre, elle a une forte probabilité de sauter vers le sens positif. De cette façon, elle tourne presque toujours dans le sens positif et donc atteint des sommets positifs très éloignés de 0. De même si les chambres favorisent leurs jonctions orientées vers le sens négatif, la fourmi ira loin dans les sommets négatifs de \mathbb{Z} .

En fonction de la valeurs des paramètres, la distribution sur \mathbb{Z} des fourmis peut évoluer continument au cours du temps d'une forme gaussienne à une forme à deux extrema locaux ou inversement. Prenons comme exemple, le cas où les urnes sont en état de sélection lente, illustré par la courbe jaune en \diamond de la figure 6.13 (p.228). Pour les premiers sauts (cf le temps $n = 22$), les probabilités restent proche de $1/2$ et les distributions sont des gaussiennes étirées. Mais au fur et à mesure des passages, chaque urne favorise de plus en plus une de leur branche et les distributions se creusent pour voir apparaître au final deux extrema locaux (cf les temps $n = 52$, $n = 114$ et $n = 238$).

Il est intéressant de constater la façon dont cette transition se traduit lorsque $\alpha = 1$ et $c = 1$. Pour des temps suffisamment grands, les distributions sur \mathbb{Z} des fourmis sont exponentielles pour une grande partie des sommets. Plus précisément, la distribution au temps $n = 22$ est de forme gaussienne étirée. Mais à mesure que le temps passe, la distribution représentée en semi-log se linéarise sur un ensemble de sommets centrés en 0 de plus en plus grand. Il semblerait que cette aspect linéaire n'apparait que pour cette configuration de paramètres.

Pour illustrer ce point et résumer les remarques précédentes, nous avons dressé un

diagramme de phase sur le plan (c, α) (cf. figure 6.14). Il donne pour différentes valeurs de α et c l'évolution au cours du temps de l'allure de la répartition sur \mathbb{Z} des fourmis. Nous pouvons constater que dès que α et c s'éloignent de 1, les courbes s'incurvent pour donner une forme gaussienne ou se creusent pour faire apparaître deux extrema locaux.

Bien que les distributions de la diffusion observée expérimentalement et celles du modèle renforcé à l'état critique sont de nature proche, elles ne coïncident pas du tout. Le point principal de divergence est la variance. En effet, les fourmis qui suivent le modèle renforcé à l'état critique s'aventurent plus loin sur \mathbb{Z} et sont moins présentes dans les premières zones. Il est possible de diminuer ou augmenter les variances des distributions du modèle renforcé en modifiant la valeur du paramètre p . Par exemple, si les fourmis ont une plus grande probabilité de faire demi-tour dans les galeries, elles resteront plus sur leur pas et donc la variance des distributions de diffusion sera moins grande.

La figure 6.15 donne la distribution sur \mathbb{Z} des fourmis suivant le modèle renforcé avec $\alpha = 1$ et $c = 1$ pour différentes valeurs de p : 0.51, 0.6 et 0.75. On peut constater qu'effectivement la variance des distributions diminue quand p augmente. Mais plus p est grand, plus les courbes (en semi-log) mettent du temps à se linéariser. Ainsi faire varier p ne suffit pas à faire coïncider le modèle renforcé à l'état critique aux données expérimentales.

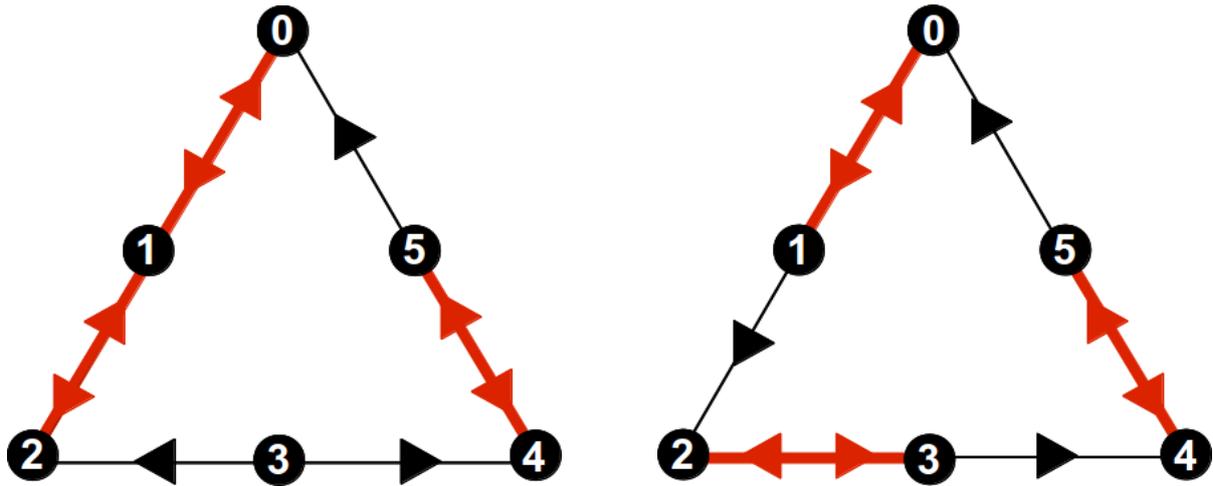


FIGURE 6.12 – Exemples du graphe G parcouru par une fourmi suivant le modèle renforcé, dont chacune des trois urnes favorise fortement une de leur branche ($\alpha > 1$ pour des temps grands ou $c < 1$ pour des temps petits). Les arêtes favorisées sont en rouge (en gris pour une impression en noir et blanc) et les autres en noir.

Lorsqu'une fourmi veut quitter un sommet pair, elle emprunte avec une forte probabilité l'arête rouge (grise). Lorsque la fourmi est sur un sommet impair (dans une galerie), elle a une probabilité p de sauter sur le sommet qu'elle vient de quitter et une probabilité $1-p$ de sauter sur l'autre sommet auquel elle a accès. Les flèches sur les graphes indiquent dans quel sens une fourmi peut parcourir les arêtes avec une probabilité non petite.

Les chambres 0 et 4 du graphe de gauche ont favorisé leurs arêtes orientées vers le sens positif et la chambre 2 son arête vers le sens négatif. La fourmi a une forte probabilité d'être enfermée sur les sommets 0, 1 et 2. Les chambres du graphe de droite ont toutes favorisé leurs arêtes orientées vers le sens positif. Dès que la fourmi sera sur un sommet pair, elle ira dans le sens positif avec une forte probabilité. Sur un sommet impair, elle a une probabilité $1-p$ d'aller dans le sens positif. Ainsi la fourmi va la plupart du temps dans le sens positif.

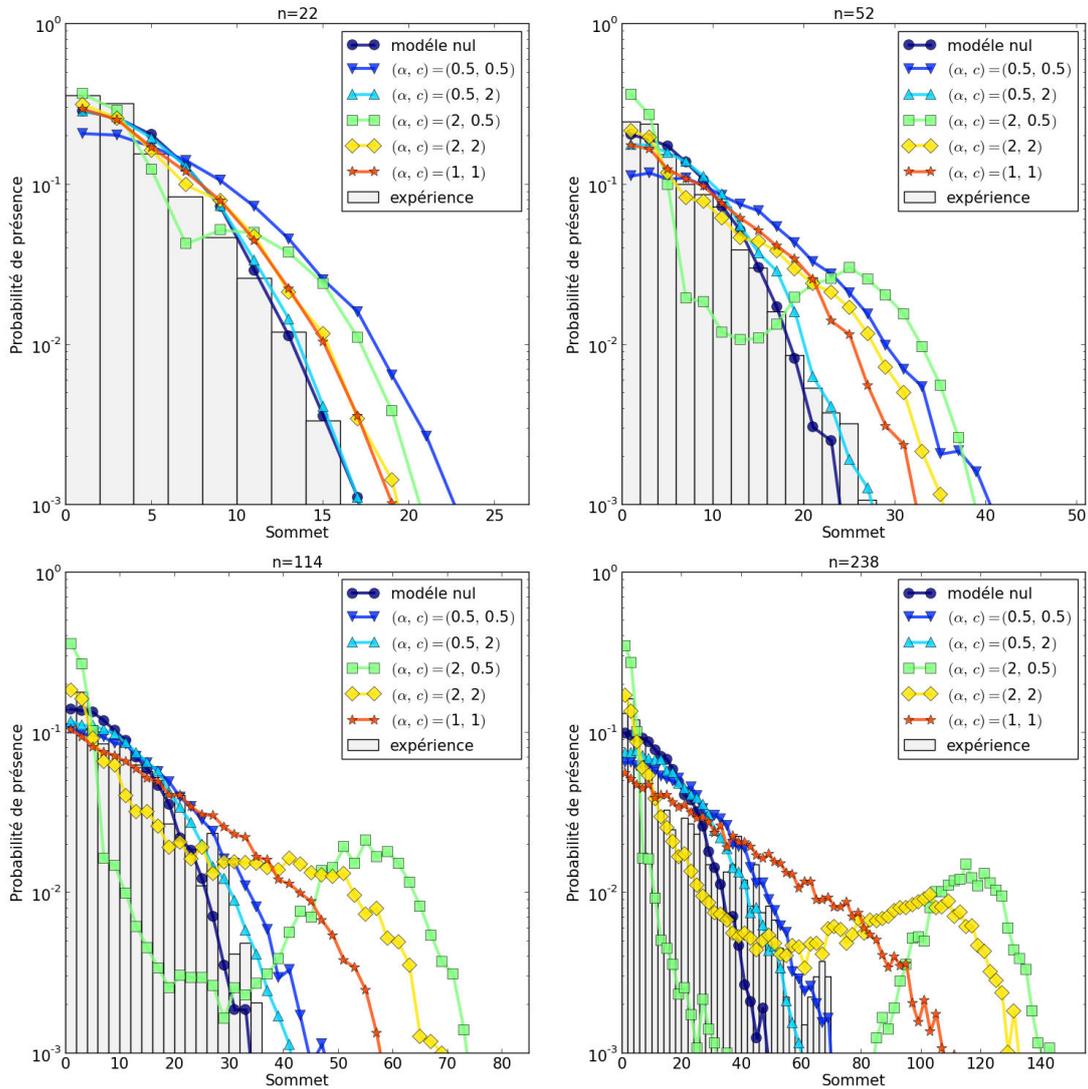


FIGURE 6.13 – *Expérience et le modèle renforcé : distributions des fourmis sur les sommets de \mathbb{Z} aux temps $n = 22$, $n = 52$, $n = 114$ et $n = 238$ représentées en semi-log. Plus précisément, nous traçons en fonction de k la proportion de fourmis présente sur les sommets k et $-k$.*

La courbe en \circ bleu foncé représente les données simulées du modèle nul; la courbe en ∇ bleu clair représente les données simulées du modèle renforcé de paramètres $(\alpha, c, p) = (0.5, 0.5, 0.51)$; la courbe en \triangle cyan représente les données simulées du modèle renforcé de paramètres $(\alpha, c, p) = (0.5, 2, 0.51)$; la courbe en \square vert représente les données simulées du modèle renforcé de paramètres $(\alpha, c, p) = (2, 0.5, 0.51)$; la courbe en \diamond jaune représente les données simulées du modèle renforcé de paramètres $(\alpha, c, p) = (2, 2, 0.51)$; la courbe en \star orange représente les données simulées du modèle renforcé de paramètres $(\alpha, c, p) = (1, 1, 0.51)$. Les histogrammes gris sont les distributions lissées observées expérimentalement représentées dans la figure 6.9.

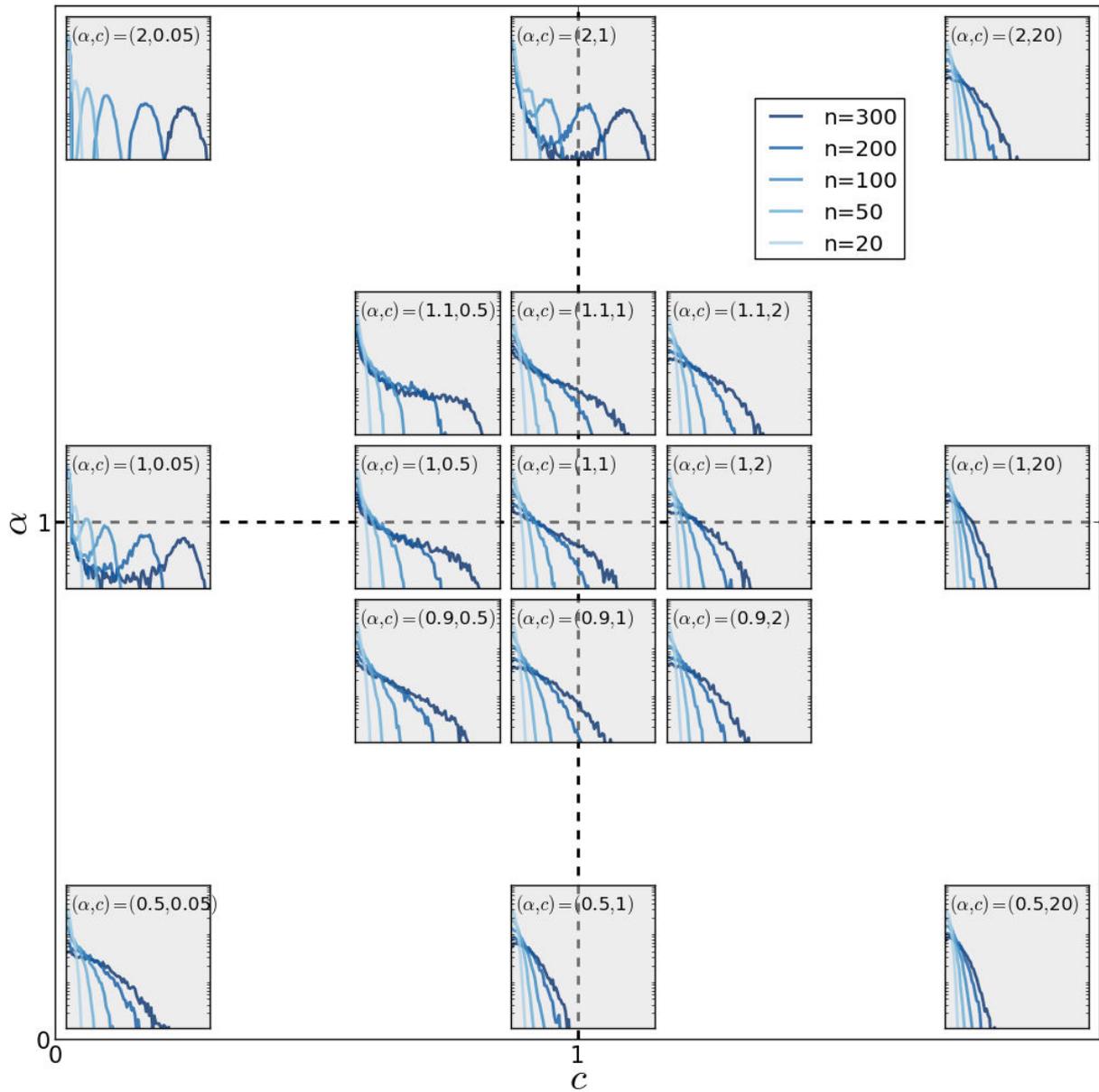


FIGURE 6.14 – Diagramme de phase dans le plan (c, α) du modèle renforcé. Chaque encadré gris correspond à un jeu de paramètres α et c placé dans le repère avec c en abscisse et α en ordonnée. Dans chaque encadré est représentée (en semi-log) l’allure des distributions sur \mathbb{Z} des fourmis aux temps $n = 20$, $n = 50$, $n = 100$, $n = 200$ et $n = 300$. Plus précisément, pour chaque temps n , nous traçons en fonction de k la probabilité de présence d’une fourmi sur le sommet k ou le sommet $-k$.

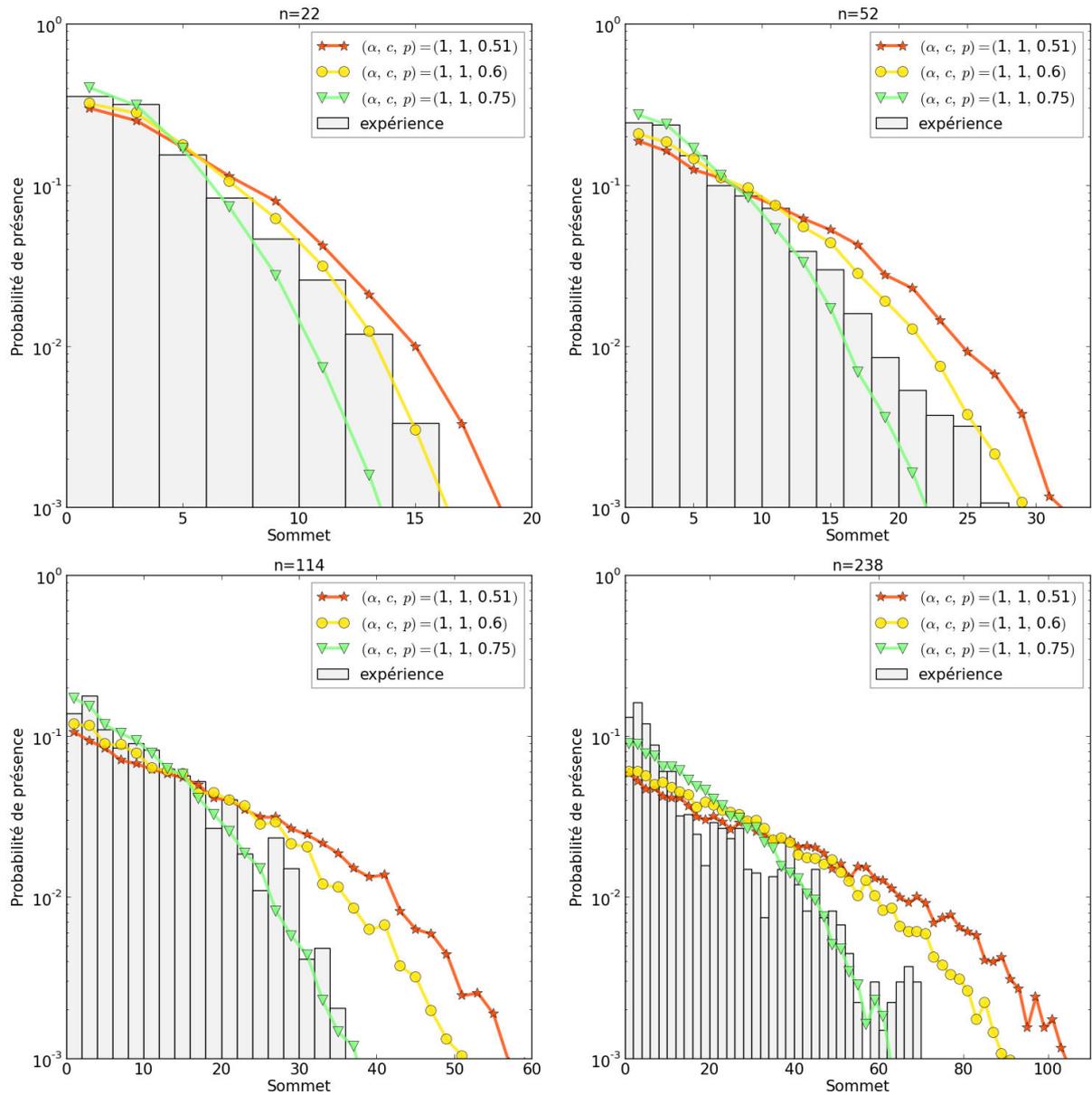


FIGURE 6.15 – Expérience et le modèle renforcé à l'état critique : distributions sur \mathbb{Z} (en semi-log) aux temps $n = 22$, $n = 52$, $n = 114$ et $n = 238$ des fourmis suivant le modèle renforcé avec $\alpha = 1$ et $c = 1$ pour différentes valeurs de p . Plus précisément, nous traçons en fonction de k la proportion de fourmis présente sur les sommets k et $-k$.

La courbe en \star orange représente les données simulées du modèle renforcé de paramètres $(\alpha, c, p) = (1, 1, 0.51)$; la courbe en \circ jaune représente les données simulées du modèle renforcé de paramètres $(\alpha, c, p) = (1, 1, 0.6)$; la courbe en ∇ vert représente les données simulées du modèle renforcé de paramètres $(\alpha, c, p) = (1, 1, 0.75)$. Les histogrammes gris sont les distributions lissées observées expérimentalement représentées dans la figure 6.9.

6.3 Discussion

Nous avons observé le comportement de 459 fourmis évoluant seules dans un réseau en forme de triangle. Nous avons cherché à savoir s'il était possible de modéliser le comportement de ces fourmis par des marches aléatoires sur un graphe fini.

Le réseau est assimilé à un graphe G , comportant six sommets : trois pour les chambres et trois pour les galeries. Les connections entre les chambres et les galeries sont représentées par des arêtes (cf. figures 6.1 et 6.5, p.203 et 206). Nous ne considérons que les changements de zone des fourmis et donc assimilons ces dernières à des marches sur G qui sautent de sommet en sommet en empruntant les arêtes existantes. Qu'une fourmi soit dans une chambre ou dans une galerie, elle a seulement deux issues possibles. Dans une chambre, elle a le choix entre deux galeries qui constituent une bifurcation. Dans une galerie, la fourmi peut retourner dans la chambre qu'elle occupait auparavant ou traverser la galerie pour entrer dans une nouvelle chambre.

Pour changer de zone (chambre ou galerie), la fourmi fait donc face à un choix binaire dont les probabilités peuvent être modélisées de différentes façons. En effet, plusieurs variables comportementales peuvent intervenir dans ce choix : tendance à ne pas changer de direction, présence de traces chimiques attirantes, fatigue... Dans ce chapitre, nous avons écarté l'influence du temps continu, c'est-à-dire que nous supposons que le comportement d'une fourmi est le même en début et en fin d'expérience, i.e. pas d'effet de fatigue, ni d'habituation à un nouvel environnement. Nous supposons également que si des traces de phéromones sont déposées, ces dernières ne s'évaporent pas.

Pour tenir compte du comportement d'une fourmi dans le réseau, nous avons proposé trois modèles de marches aléatoires sur G , c'est-à-dire trois types différents de probabilités de choix binaires :

- **modèle nul** : il est supposé qu'à chaque saut, la fourmi choisit avec une probabilité $1/2$ une des deux issues. Ce modèle sert de référence, il reproduit les déplacements d'une fourmi qui subirait aucune influence : pas de phéromones, ni de fatigue, ni de persistance.
- **modèle persistant de paramètre** (p_{cgc}, p_{gcg}) : la fourmi dans une galerie a une probabilité p_{cgc} de retourner dans la chambre qu'elle vient de quitter. Dans une chambre, la fourmi a une probabilité p_{gcg} de retourner dans la galerie qu'elle occupait au temps précédent. Les probabilités p_{cgc} et p_{gcg} sont constantes et donc ne dépendent pas des traces de phéromones éventuellement déposées par la fourmi.
- **modèle renforcé de paramètre** (α, c, p) : la fourmi dépose des traces de phéromones sur son passage et est influencée par ces dépôts. De plus ces derniers sont identiques

et ne s'évaporent pas. Les probabilités de choix ne sont pas modélisées de la même façon selon la nature de la zone dans laquelle la fourmi se trouve. Les chambres sont considérées comme des bifurcations dont les branches sont ses jonctions avec les deux galeries voisines. Les choix d'une fourmi dans une chambre sont modélisés par la fonction de choix de Deneubourg de paramètres α et c (cf. équation 6.2.1, p.211). Lorsqu'une fourmi est dans une galerie, elle a une probabilité p de retourner dans la chambre qu'elle vient de quitter et donc une probabilité $1 - p$ de traverser la galerie pour changer de chambre. La probabilité p est constante et donc ne dépend pas des traces de phéromones déposées. Le modèle renforcé peut être décrit comme une combinaison de trois urnes de Deneubourg en réseau.

Pour chaque modèle, nous avons estimé les paramètres à partir des données expérimentales sous l'hypothèse que les fourmis suivent le modèle en question. Nous avons également calculé des intervalles de confiance de niveau 95%.

Pour confronter les modèles aux données expérimentales, nous nous sommes intéressés à la diffusion dans le réseau en triangle. Nous avons étudié la dynamique de changements de zone des fourmis observées expérimentalement et des fourmis suivant les modèles pour différents jeux de paramètres. Pour chaque modèle et pour chaque jeu de paramètres, nous avons estimé 10 000 marches.

Des signes de l'utilisation de phéromones Notre analyse a révélé deux indices sur l'emploi de phéromones par les fourmis : un provient du travail d'estimation des paramètres des modèles à partir des données expérimentales et l'autre résulte de la forme particulière de la diffusion dans le réseau des fourmis observées expérimentalement.

Les résultats d'estimation Dans un premier temps, les résultats d'estimation du modèle persistant mettent en doute l'existence de dépôts de phéromones, car les probabilités p_{cgc} et p_{gcg} sont estimées proches de $1/2$:

- p_{cgc} est estimée à 0.51 avec un intervalle de confiance à 95% égal à (0.5, 0.511),
- p_{gcg} est estimée à 0.47 avec un intervalle de confiance à 95% égal à (0.469, 0.48).

(cf. tableau 6.1, p.210). Bien que nous ne pouvons affirmer avec une confiance à 95% que $p_{cgc} = p_{gcg} = 1/2$, nous avons constaté que le comportement du modèle persistant de paramètres (0.51, 0.47) diffère peu de celui du modèle nul à notre échelle de temps d'observation, i.e. quelques centaines de changements de zone (cf. figure 6.10, p.221).

Toutefois les estimations du modèle renforcé apportent des signes d'une influence de traces chimiques. En effet, sous l'hypothèse que les fourmis suivent un modèle renforcé

de paramètre (α, c, p) , nous avons estimé, grâce aux outils statistiques développés dans le chapitre 3,

- α à 0.36 avec un intervalle de confiance égal à $(0.22, 0.87)$,
- c à 3.41 avec un intervalle de confiance égal à $(1.1, 17.8)$,

(cf. tableau 6.2, p.213). Le paramètre p est équivalent au paramètre p_{cgc} du modèle persistant, nous avons donc repris les mêmes valeurs d'estimation à savoir p estimé à 0.51.

Les valeurs incluses dans l'intervalle de confiance de l'estimation de α sont toutes inférieures à 1 et celles de l'estimation de c sont toutes supérieures à 1. Nous pouvons donc affirmer avec une confiance de 95% que si les fourmis suivent un modèle renforcé, nous avons $\alpha < 1$ et $c > 1$, c'est-à-dire que les fourmis déposent peu de phéromones et qu'elles sont faiblement sensibles aux différences de quantités de phéromones présentes aux points de bifurcation. Une urne de Deneubourg seule dans une telle configuration de paramètres est dans un état d'égalisation rapide des branches, i.e. ses branches sont également fréquentées après un petit nombre de passages (cf. section 5.2, p.174).

D'après ces résultats d'estimation, les fourmis déposent des phéromones et même si elles n'utilisent pas de substances chimiques pour sélectionner une branche, les insectes sont sensibles à celle-ci. Bien que nous ne l'avons pas démontré mathématiquement, nous pensons que les urnes en réseau égalisent leurs branches comme une urne isolée. Ceci expliquerait les estimations proches de 1/2 des paramètres du modèle persistant.

La diffusion dans le réseau Pour comprendre la façon dont les fourmis se répartissent dans le réseau en triangle au cours du temps, nous avons étudié la diffusion sur \mathbb{Z} . C'est-à-dire que nous avons associé à chaque fourmi une marche sur \mathbb{Z} . La marche avance de 1, lorsque la fourmi change de zone vers le sens positif et recule de 1 (avance de -1), lorsque la fourmi saute dans une zone dans le sens négatif (cf. figures 6.1, 6.5 et 6.6 resp. p.203, p.206 et p.214).

Pour appréhender comment une fourmi investit le réseau, il suffit alors d'étudier sa marche associée sur \mathbb{Z} . Si la marche reste autour de 0, cela signifie que la fourmi retourne souvent sur ses pas. En revanche si la marche va loin vers les sommets positifs ou vers les sommets négatifs de \mathbb{Z} , la fourmi tourne globalement toujours dans le même sens lorsqu'elle change de zone. Par souci de simplicité, nous assimilons une fourmi à sa marche associée sur \mathbb{Z} et donc nous parlons de diffusion et de distribution des fourmis sur \mathbb{Z} .

Un résultat remarquable est que les distributions sur \mathbb{Z} des fourmis observées expérimentalement présentent des queues de distribution exponentielles. En effet les représentations en semi-log de ses distributions suivent des droites. Par conséquent, la diffusion sur \mathbb{Z} des fourmis de l'expérience ne correspond pas à celle du modèle nul, c'est-à-dire à la diffusion

qu'elles auraient effectuée si elle avait choisi avec une probabilité $1/2$ chacun de leurs sauts. En effet, la distribution sur \mathbb{Z} de fourmis, suivant le modèle nul après n sauts, suit approximativement une loi normale de moyenne nulle et de variance n , qui n'est pas une loi à queue de distribution exponentielle.

Les fourmis ne suivent donc pas un modèle persistant de paramètres $p_{cgc} = p_{gcg} = 1/2$ (correspond au modèle nul). Mais sous l'hypothèse que les fourmis suivent un modèle persistant et donc que les probabilités de choix sont constantes, nous estimons p_{cgc} et p_{gcg} très proches de $1/2$ et donc une dynamique identique à celle du modèle nul. Ce résultat contredit l'hypothèse que les probabilités de choix sont constantes au cours du temps et donc constitue un nouvel argument en faveur de l'hypothèse de dépôts de phéromones qui influencent le choix des fourmis.

Les fourmis seraient dans un état critique Dans les études de modélisation, il est souvent supposé que les fourmis ont toute le même comportement. Il est évident que cette hypothèse est fautive étant donné la variabilité inter-individuelle qui existe chez les modèles biologiques. Toutefois il est considéré que les fourmis œuvrent toutes pour la même issue et que donc l'hypothèse d'un comportement identique est une approximation raisonnable. On dit alors que les fourmis sont toutes dans le même état comportemental.

Dans cette thèse, nous émettons l'hypothèse que les fourmis seraient dans un état critique, c'est-à-dire qu'il existerait plusieurs états comportementaux et que chaque fourmi aurait des paramètres individuels qui détermineraient quel état comportemental elle adopte. La valeur de ces paramètres placeraient chaque fourmi à la frontière de plusieurs états comportementaux de telle sorte qu'une variation infime des paramètres physiologiques et environnementales entraînerait un changement d'état. Par conséquent, la variabilité inter-individuelle (i.e. des paramètres individuels différents pour chaque fourmi) impliqueraient que les fourmis n'ont pas toute le même état comportemental.

Une telle inhomogénéité et dynamique dans l'état comportemental des fourmis constituerait une grande capacité d'adaptation aux différentes situations auxquelles les fourmis doivent faire face. Sans pouvoir démontrer cette hypothèse, nous apportons plusieurs éléments en faveur de cette théorie de transition d'état.

Les résultats du chapitre 5 Nous rappelons succinctement une partie des conclusions du chapitre 5. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à la section 5.4.2 du chapitre 5, page 192.

Dans le chapitre 5, nous avons étudié le comportement d'une colonie de fourmis face à une bifurcation. Nous avons fait passer une par une des fourmis par une bifurcation à

deux branches et avons observé leur choix. Chaque fourmi est seule lorsqu'elle effectue son choix. Sous l'hypothèse que les fourmis adoptent toute le même comportement, nous avons modélisé cette expérience par une urne de Deneubourg et avons estimé les paramètres α et c à partir des données expérimentales. Les paramètres α et c sont donc supposés de même valeur pour toutes les fourmis et nous considérons l'estimation de ces paramètres comme une approximation de la valeur réelle des paramètres individuels de chaque fourmi.

Contrairement à l'expérience du chapitre présent, les résultats d'estimation du chapitre 5 ne prêtent à aucun des quatre états de l'urne de Deneubourg une confiance de niveau supérieur à 95%, c'est-à-dire que les intervalles de confiance incluent les valeurs critiques de paramètres : $\alpha = 1$ ou $c = 1$ (cf. tableaux 5.1 et 5.4, p.182 et 185). Les paramètres sont donc estimés très proche d'une transition entre deux états que nous pourrions décrire comme suit :

1. les fourmis contribuent à une sélection de branches en déposant une forte quantité de phéromones ou en étant très sensibles aux différences de concentration,
2. les fourmis déposent une faible quantité de phéromones et sont très peu sensibles aux différences de concentration.

(cf. tableaux 5.3 et 5.5, p.184 et 186). Par conséquent, si α et c sont bien des approximations de la valeur réelle des paramètres individuels, la variabilité inter-individuelle entraîne une inhomogénéité dans les états comportementaux adoptaient par les fourmis.

Une diffusion particulière et un état critique intéressant Comme nous l'avons déjà mentionné, les distributions de diffusion sur \mathbb{Z} des fourmis observées expérimentalement possèdent des queues exponentielles. Les modèles dont les paramètres sont fixés aux valeurs estimées à partir des données expérimentales ne reproduisent pas des distributions d'une telle nature.

Toutefois, nous avons constaté que lorsque $\alpha = 1$ et $c = 1$, le modèle renforcé produit des distributions en partie exponentielle et ceci uniquement avec ce jeu de paramètres. De plus, $(\alpha, c) = (1, 1)$ correspond au point d'intersection des quatre états comportementaux de l'urne de Deneubourg.

Nous pouvons donc affirmer que le modèle renforcé n'a une diffusion aux distributions exponentielles que lorsqu'il est dans un état critique. Cette particularité aurait pu constitué un argument solide en faveur de l'hypothèse de transition d'état comportemental. Mais sous l'hypothèse que les fourmis observées expérimentalement suivent un modèle renforcé, nous estimons avec une confiance supérieure à 95%, que α et c sont différents de 1. De plus, même en jouant avec le paramètre p , le modèle à l'état critique ne reproduit pas complètement

la diffusion observée expérimentalement.

A défaut d'une preuve, cet état critique particulier du modèle renforcé constitue une nouvelle piste intéressante dans l'étude du phénomène de formation de chemins et plus généralement des comportements collectifs. A savoir qu'étudier des modèles proches d'un état critique peut s'avérer intéressant voir même essentiel.

Les fourmis isolées feraient peu usage des phéromones Nous avons estimé que les fourmis isolées dans le réseau déposent peu de phéromones et sont faiblement sensibles aux différences de concentration. Ce fait est peut-être lié justement à l'isolement des fourmis.

Sous l'hypothèse de l'existence de plusieurs états comportementaux, les paramètres qui seraient impliqués dans les transitions d'état sont sans doute très multiples. Dans le chapitre 5, nous avons proposé que l'état comportemental d'une fourmi, qui déciderait de sa contribution ou non au réseau de phéromones déployé autour du nid, pourrait changer en fonction de la fréquence de contacts avec ses congénères. Plus précisément, une fourmi proche du nid contribuerait à la formation du réseau par des dépôts importants de phéromones ou une grande sensibilité à ceux-ci. Une fourmi loin du nid ne doit pas s'enfermer dans un espace réduit trop marqué de phéromones et donc ne ferait que passer en déposant peu de phéromones et en étant peu sensible aux différences de concentration.

Les fourmis étant nombreuses près du nid et absentes sur les territoires inexplorés, ce critère serait un bon moyen pour une fourmi d'évaluer son éloignement du nid. Une fourmi rencontrant beaucoup de fourmis contribuerait à la formation de réseau tandis qu'une fourmi seule serait en état de passage. Ceci justifierait le fait qu'isolées pendant deux heures, les fourmis observées dans le réseau en triangle déposent peu de phéromones et sont peu sensibles aux différences de concentration.

Une étude plus approfondie pour un meilleur modèle Il est difficile de tirer plus de conclusions à partir des séries de changements de zone. Pour mieux comprendre le comportement des fourmis, nous prévoyons d'analyser plus en détail les déplacements. Ce qui est possible, car nous avons suivi automatiquement les trajectoires de toutes les fourmis au pixel près (0.3 mm).

Dans cette première étape de modélisation, nous nous sommes permis de grandes simplifications. La plus radicale est sans doute celle que nous avons fait pour les galeries. Dans ces zones, nous avons réduit le comportement des fourmis à deux possibilités : la fourmi traverse sans interruption une galerie pour changer de chambre ou bien elle entre, puis fait demi-tour pour retourner dans la chambre qu'elle vient de quitter. Nous avons de plus supposé que les probabilités de ces événements étaient constantes, c'est-à-dire que les fourmis

dans les galeries ne subissent aucune influence que ce soit des traces de phéromones ou de toutes autres variables comme la fatigue.

La persistance de la marche et notamment les demi-tours jouant un rôle clé dans les déplacements d'une fourmi (cf. introduction p.152 et [BDG92]), cette simplification nuit vraisemblablement à une bonne modélisation des déplacements. Pour mieux cerner comment agit une fourmi dans une galerie, nous allons quantifier plus précisément les événements de demi-tours dans une galerie. Dans quelle partie de la zone et à quelle fréquence la fourmi préfère-t-elle se retourner ? Comment la présence éventuelle de phéromone influence-t-elle ces demi-tours ?

Nous avons considéré les chambres comme des bifurcations que nous avons modélisée par des urnes de Deneubourg. Bien que cette modélisation soit souvent faite dans la littérature, il est possible qu'elle soit trop réductrice dans notre situation. En effet, les fourmis sont entièrement libres de leurs déplacements. Elles peuvent parcourir une chambre d'une infinité de façon et notamment aborder le point de bifurcation entre les deux galeries voisines sous différents angles.

Par exemple, les fourmis ont une forte tendance à suivre les murs qu'elles rencontrent au cours de leur déplacement (cf. [DDF05]). Il est donc possible que les fourmis passent l'essentiel de leur temps le long des parois circulaires des chambres. Par conséquent, lorsqu'une fourmi sort d'une chambre, elle se retrouverait peu souvent en face de la bifurcation dans une position qui lui permettrait d'évaluer de façon équivalente les traces de phéromones déposées aux entrées des deux galeries. Nous prévoyons d'étudier de près la façon dont les fourmis se déplacent dans la chambre pour vérifier la pertinence du modèle de Deneubourg pour cette expérience.

L'accès aux trajectoires complètes des fourmis nous permettra également d'analyser l'influence du temps sur le comportement des fourmis. Dans cette première étape de modélisation, nous avons supposé que l'état comportemental des fourmis ne varie pas avec le temps passé dans le dispositif. Or il est fort probable que les fourmis subissent une influence du temps.

Nous avons démontré que les fourmis déposent des traces de phéromones et y sont sensibles. Or l'expérience dure deux heures et malgré l'espace clos que constitue le dispositif expérimental, les dépôts doivent vraisemblablement se détériorer par évaporation. De plus, l'état physiologique d'une fourmi peut évoluer. La fourmi peut se fatiguer ou encore s'habituer à son nouvel environnement, entraînant l'apparition de nouveaux comportements. Précédemment, nous avons supposé que des fourmis ne rencontrant pas de congénères pendant un certain temps pouvaient changer de comportement. Or avant d'être placée seule dans le dispositif expérimental, chaque fourmi est conditionnée avec une cen-

taine de ces congénères.

Nous prévoyons donc de réaliser une analyse plus approfondie du comportement des fourmis en considérant la variable essentielle que constitue le temps. Nous comptons comprendre l'origine de la nature exponentielle des distributions de la diffusion des fourmis sur \mathbb{Z} . De plus, avec ces nouveaux éléments, nous voulons concevoir un nouveau modèle du comportement.

La nature du nouveau modèle pourrait changer. En effet, les marches aléatoires renforcées sur un graphe fini ne comportent pas d'évolution avec le temps continu. Le temps est considéré discret et est rythmé par les sauts des fourmis de sommet en sommet. Une marche aléatoire renforcée ne tient donc pas compte de l'intervalle de temps qui s'écoule entre chaque changement de zone. Toutefois il n'est pas exclus que nous découvriions que le temps n'a que peu d'influence sur le comportement des fourmis et que nous dégagions des règles minimales comportementales qui soient implémentables par une MAR sur un graphe.

Troisième partie

Conclusion

Chapitre 7

Conclusion

Ce dernier chapitre rappelle succinctement les résultats principaux et énumère les perspectives émanant de cette thèse.

L'objectif de ce doctorat est d'apporter des nouveaux éléments dans la compréhension des mécanismes minimaux qui sont à l'origine de la formation spontanée de chemins par des marcheurs déposant des traces attractives sur leurs trajectoires. En particulier, par une démarche pluridisciplinaire associant modélisation et expérimentation, nous nous sommes penchés sur la sélection d'un chemin préférentiel parmi plusieurs voies pré-existantes. Dans cet objectif, nous avons étudié sous différents angles la classe de modèles minimaux que constitue les marches aléatoires renforcées (MAR) sur un graphe.

7.1 Résultats de l'étude mathématique

Dans un premier temps, nous présentons les résultats de probabilités et de statistiques démontrés dans cette thèse.

7.1.1 Étude de l'asymptotique d'une nouvelle classe de marches aléatoires renforcées

Pour toutes les MAR étudiées jusqu'à présent, les probabilités de saut vers tel ou tel sommet à un instant donné dépendent du renforcement du graphe et du sommet occupé à cet instant par la marche. Beaucoup de résultats ont été démontrés sur ces marches et aucun ne présente un exemple de formation de chemins. Il est vrai que quand le renforcement est dit fort, un ensemble fini de sommets est sélectionné, mais aucun sens de parcours privilégié n'apparaît.

Nous nous sommes alors demandés si interdire le demi-tour à une MAR suffirait à provoquer la formation d'un chemin. Pour implémenter une telle contrainte, la marche doit se souvenir à chaque instant du sommet qu'elle a visité précédemment en plus du sommet qu'elle occupe actuellement. Il faut alors ne plus considérer que la marche saute de sommet en sommet, mais d'arête en arête. Cette modification qui semble être de l'ordre du détail complique considérablement l'étude de ces marches et aucun résultat n'a encore été démontré sur le sujet.

Nous avons décidé d'établir des résultats qui permettent la description de l'asymptotique des MAR aux demi-tours interdits. Dans cet objectif, nous avons étendu le travail publié par M. Benaïm et O. Raimond en 2010 (cf. [BR10]) à une classe de MAR qui inclut une grande partie des MAR déjà étudiées par le passé ainsi que les MAR qui nous intéressent.

Le principal théorème que nous avons démontré établit des hypothèses sous lesquelles la mesure empirique d'occupation v_n d'une marche converge vers v_∞ , une variable aléatoire à valeur dans l'ensemble d'équilibres Λ d'une équation différentielle explicitement définie. Lorsqu'il est possible de décrire explicitement Λ et plus spécifiquement quand l'on peut déterminer la stabilité des éléments de Λ , alors nous sommes capables de déterminer le support de la loi de v_∞ .

Nous avons appliqué ces résultats à une marche aléatoire renforcée par sommet au surplace et au demi-tour interdits évoluant sur un graphe complet à $N \geq 3$ sommets. Nous avons traité entièrement le cas $N = 4$ et notamment nous avons démontré que lorsque le renforcement est assez fort, la marche a une probabilité 1 de sélectionner trois sommets et de les parcourir toujours dans le même sens. C'est donc un exemple simple de formation de chemins.

Pour le cas $N \geq 5$, nous avons quelques résultats, mais n'avons pas encore pu décrire complètement l'ensemble Λ .

Perspectives

Ces premiers résultats sont un premier exemple simple de formation de chemins sur un graphe par une MAR. Nous prévoyons :

- de finir l'étude de la MAR renforcée par sommet au surplace et au demi-tour interdits évoluant sur un graphe complet à $N \geq 3$ sommets. Nous voulons traiter complètement le cas $N \geq 5$ en achevant de décrire Λ .
- d'étudier de nouveaux exemples :
 - une marche aléatoire renforcée par arête au surplace et au demi-tour interdits

évoluant sur un graphe complet à $N \geq 3$ sommets.

- le modèle d’urnes en réseau utilisé dans l’étude comportementale de cette thèse.

7.1.2 Paramétrisation des marches aléatoires renforcées et estimation de leurs paramètres

Initialement, l’objectif était de développer des outils statistiques permettant à partir de données expérimentales d’estimer les paramètres du modèle proposé par J.-L. Deneubourg et al. en 1990 (cf. [DAGP90]). Mais nous ne nous sommes pas contentés de traiter ce cas particulier, nous nous sommes intéressés à l’estimation du paramètre de tout modèle d’urne bicolore régulière.

Pour un échantillon de chemins de même longueur et pour une urne bicolore paramétrée, nous avons défini l’estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) et les estimateurs des moindres carrés pondérés (EMCP). Nous avons démontré que sous des conditions de régularité classiques ces estimateurs sont consistants et asymptotiquement normaux.

Au vu d’une application de nos résultats d’estimation dans l’étude comportementale, nous avons éprouvé la qualité de l’EMV et d’un EMCP particulier sur des échantillons simulés de l’urne de Deneubourg. Nous avons également utilisé la méthode du Bootstrap pour évaluer des intervalles de confiance.

Perspectives

À terme pour toute marche aléatoire renforcée paramétrée, nous aimerions disposer d’au moins un estimateur consistant et asymptotiquement normal pour un échantillon de chemins de longueurs variables.

Dans cette objectif, nous avons défini les chaînes de Markov paramétrées renforcées, qui sont des modèles d’urnes généralisées. Nous avons également écrit pour ces processus et pour un échantillon de chemins de longueurs variables, l’estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) et une classe très générale d’estimateur : les estimateurs du minimum de contraste (EMCP). Nous prévoyons :

- d’étendre cette structure aux marches aléatoires renforcées définies dans le chapitre 2.
- de démontrer sous des hypothèses adéquates de régularité que l’EMV et les EMCP sont consistants et asymptotiquement normaux sous des conditions adéquates de régularité.
- d’effectuer une étude sur simulation du modèle d’urnes en réseau utilisé dans l’étude comportementale de cette thèse. Cette étude sera similaire à celle faite pour l’urne de Deneubourg.

7.2 Résultats de l'étude comportementale

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous avons mené une étude expérimentale et de modélisation du comportement des fourmis *Linepithema humile* évoluant dans un réseau de une ou plusieurs bifurcations.

Notre réflexion s'articule sur deux axes :

- le rôle et la valeur des paramètres de la fonction de choix proposée par J.-L. Deneubourg et al. en 1990 (cf. [DAGP90]).
- la capacité d'une MAR à reproduire les déplacements d'une fourmi non contrainte dans un réseau.

Nous avons mené deux expériences :

- une confrontant, une par une une, centaine de fourmis à une bifurcation en Y. Nous avons modélisé cette expérience par l'urne de Deneubourg et avons estimé les paramètres α et c par les outils de statistiques développés dans le chapitre 3.
- une observant les déplacements d'une fourmi dans un réseau en triangle, forme géométrique symétrique la plus simple comportant plus d'une bifurcation. Nous avons comparé les résultats de cette expérience à plusieurs modèles, dont un qui consiste à considérer les sommets du triangle comme des urnes de Deneubourg. Pour ce modèle, nous avons également estimé α et c par les outils de statistiques développés dans le chapitre 3.

Nous pensons que l'impact de la variabilité inter-individuelle comportementale des fourmis joue un rôle fondamental dans la formation de chemins. Parce qu'un modèle doit nécessairement être simple, il est souvent supposé que les fourmis agissent toutes de la même façon. Le modèle est alors une approximation du comportement réel des fourmis et les paramètres estimés sont considérés comme des approximations des vraies valeurs de paramètres individuels, qui sont différentes pour chaque fourmi. Ces hypothèses supposent implicitement que les fourmis ont toutes le même état comportemental. Chacune à leur niveau, elles vont toutes soit contribuer à la formation d'un chemin soit juste passer en changeant peu leur environnement.

Nous aimerions explorer l'hypothèse suivante : les fourmis passent d'un état comportemental à un autre par un infime changement de variables physiologiques ou environnementales à la manière d'un système physique qui change d'état à la variation d'un paramètre.

Cette hypothèse est étayée par les valeurs de α et c estimées très proches des valeurs critiques du modèle de Deneubourg dans l'expérience au réseau en Y.

Pour valider ou invalider cette hypothèse, nous proposons plusieurs axes de développement :

- amélioration des protocoles de l'expérience du réseau en Y afin de récolter plus de données.
- conception d'un nouveau modèle de choix binaires. Nous proposons de reprendre le modèle de Deneubourg, en considérant α et c comme des variables aléatoires de distribution centrée sur les valeurs de paramètres déjà estimés. Nous comparerons ce modèle aux données expérimentales déjà enregistrées et à celles récoltées dans le futur.
- conception et réalisation d'une étude visant à mieux comprendre l'usage et la nature des phéromones. Quelle que soit la situation étudiée, le travail de modélisation est rendu difficile par le peu d'information que nous avons sur les différents types de phéromones. Nous aimerions réfléchir à comment estimer les quantités de phéromones déposées par chaque fourmi.
- analyse plus approfondie des données de l'expérience du réseau en triangle. Des résultats préliminaires non présentés dans cette thèse démontreraient un comportement bimodal chez les fourmis : un mode actif, où les fourmis marcheraient vite et couvriraient de grandes distances et un mode inactif, où les fourmis peuvent se déplacer mais en restant dans un espace réduit.

Acronymes

CM : chaîne de Markov

CMPR : chaîne de Markov paramétrée renforcée

D : Décile

EDO : Équation Différentielles Ordinaires

EMV : Estimateur du Maximum de Vraisemblance

EMC : Estimateur du minimum de contraste

EMCP : Estimateur des moindres carrés pondérés

DI/DF : Dépôt Important/Faible

SI/SF : Sensibilité différentielle Importante/Faible

IC : Intervalle de Confiance

iid : indépendants et identiquement distribués

MAR : Marche Aléatoire Renforcées

MARA : Marche Aléatoire Renforcées par Arête

MARS : Marche Aléatoire Renforcées par Sommet

MSE : Erreur quadratique moyenne, sigle venant de l'anglais Mean Squared Error

p.s. : presque sûrement

TCL : Théorème Central Limite

Table des figures

2.1	Deux exemples de cycles de sommets	41
3.1	Densité de la loi bêta de paramètre (c, c) , où $c = 0.1$ ou $c = 10$	120
3.2	Écart-types théoriques de l'EMV et l'EMCP du paramètre α	128
3.3	Écart-types théoriques de l'EMV et l'EMCP du paramètre c	129
3.4	Nuages de points des $(\hat{c}_N^{\text{EMV}}, \hat{\alpha}_N^{\text{EMV}})$ et des $(\hat{c}_N^{\text{EMCP}}, \hat{\alpha}_N^{\text{EMCP}})$	131
4.1	Schémas de bifurcations typiques présentes dans le réseau de pistes qui se déploie autour d'une fourmilière	152
4.2	Diagramme de phase de l'urne de Deneubourg	159
5.1	Dispositif expérimental	173
5.2	Expérience utilisant l'air comprimé : les 49 séquences de choix	178
5.3	Expérience utilisant l'air comprimé : histogramme des proportions finales de passages par la branche droite	179
5.4	Expérience utilisant un pinceau : les 31 séquences de choix	180
5.5	Expérience utilisant un pinceau : histogramme des proportions finales de passages par la branche droite	181
5.6	Nuages de points des paramètres estimés par l'EMV à partir de 500 expériences artificielles	187
5.7	Nuages de points des paramètres estimés par l'EMV à partir de 500 expériences artificielles	188
5.8	Expérience utilisant l'air comprimé : estimation de α en fonction des valeurs fixées de c et les intervalles de confiance Bootstrap à 95% correspondants .	189
5.9	Expérience utilisant un pinceau : estimation de α en fonction des valeurs fixées de c et les intervalles de confiance Bootstrap à 95% correspondants .	190
6.1	Schémas du réseau en triangle	203

TABLE DES FIGURES

6.2	Photo d'une séance d'expérience	204
6.3	Exemple d'une trajectoire dans le réseau en triangle	205
6.4	Positions d'une fourmi représentées dans des couleurs différentes pour chaque zone	205
6.5	Représentation du graphe G qui schématise le réseau en triangle	206
6.6	Schéma du graphe constitué par \mathbb{Z}	214
6.7	Trajectoires des marches sur \mathbb{Z} associées aux séries de changements de zone des 459 fourmis	217
6.8	Distribution en semi-log sur \mathbb{Z} des fourmis observées expérimentalement à des temps donnés	218
6.9	Distribution lissée en semi-log sur \mathbb{Z} des fourmis observées expérimentalement à des temps donnés	219
6.10	Expérience et modèles aux paramètres estimés : distributions des fourmis sur les sommets de \mathbb{Z}	221
6.11	Expérience et le modèle persistant : distributions des fourmis sur les sommets de \mathbb{Z} aux temps $n = 22$, $n = 52$, $n = 114$ et $n = 238$	223
6.12	Exemples du graphe G parcouru par une fourmi suivant le modèle à mémoire, dont chacune des trois urnes favorise fortement une de leur branche	227
6.13	Expérience et le modèle renforcé : distributions des fourmis sur les sommets de \mathbb{Z} aux temps $n = 22$, $n = 52$, $n = 114$ et $n = 238$	228
6.14	Diagramme de phase dans le plan (c, α) du modèle renforcé	229
6.15	Expérience et le modèle renforcé à l'état critique : distributions des fourmis sur les sommets de \mathbb{Z} aux temps $n = 22$, $n = 52$, $n = 114$ et $n = 238$	230

Liste des tableaux

3.1	Écart-types théoriques des deux estimateurs EMV et EMCP des paramètres α et c pour $N = 50$ chemins de longueur 100	127
3.2	Racine carré de l'erreur quadratique moyenne à partir de 500 échantillons simulés pour l'EMV et à partir de 1000 échantillons simulés pour l'EMPC. Les échantillons comportent tous $N = 50$ chemins de longueur $n = 100$. . .	130
3.3	Premiers et neuvièmes déciles empiriques de la distribution empirique des paramètres α et c à partir de 500 échantillons pour l'EMV et à partir de 1000 échantillons pour l'EMPC.	130
3.4	Intervalles de confiance de Monte-Carlo à 95% basés sur 500 échantillons de $N = 50$ chemins de longueur $n = 100$ et intervalles de confiance Bootstrap à 95% basés sur un échantillon de 50 chemins de longueur 100	132
5.1	Expérience utilisant l'air comprimé : valeurs des estimateurs EMV et EMCP pour α et c ainsi que les intervalles de confiance bootstrap à 95% correspondants.	182
5.2	Extrait du tableau 5.2 du chapitre 3, p.132). Intervalles de confiance de Monte-Carlo à 95% basés sur 500 expériences simulées de $N = 50$ séries de $n = 100$ choix d'un modèle de Deneubourg de paramètres (α, c)	183
5.3	Expérience utilisant l'air comprimé : résumé des résultats des figures 5.6 et 5.7 (nuages de '+' bleus). Ce tableau donne le degré de confiance de chaque état estimé par l'EMV et l'EMCP.	184
5.4	Expérience utilisant un pinceau : valeurs des estimateurs EMV et EMCP pour α et c ainsi que leur intervalle de confiance bootstrap à 95% correspondants.	185
5.5	Expérience utilisant un pinceau : résumé des résultats des figures 5.6 et 5.7 (nuages de 'x' verts). Ce tableau donne le degré de confiance de chaque état estimé par l'EMV et l'EMCP.	186

LISTE DES TABLEAUX

6.1	Tableau rassemblant les moyennes empiriques de p_{cgc} et p_{gcg} , les intervalles de confiance de niveau 95% correspondants et les p -valeurs des tests statistiques d'hypothèses nulles $\mathcal{H}_0 : "p_{cgc} = 1/2"$ et $\mathcal{H}_0 : "p_{gcg} = 1/2"$	210
6.2	Valeurs de l'EMCP pour α et c ainsi que leur intervalle de confiance bootstrap à 95% correspondants.	213

Bibliographie

- [ABDP93] S. Aron, R. Beckers, J.-L. Deneubourg, and J. Pasteels. Memory and chemical communication in the orientation of two mass-recruiting ant species. *Insectes Sociaux*, 40 :369–380, 1993.
- [ALS93] F. J. Acosta, F. López, and J. M. Serrano. Branching angles of ant trunk trails as an optimization cue. *Journal of Theoretical Biology*, 160 :297–310, 1993.
- [APD89] S. Aron, J.M. Pasteels, and J.-L. Deneubourg. Trail-laying behaviour during exploratory recruitment in the argentine ant, *iridomyrmex humilis* (mayr). *Biology of Behaviour*, 14 :207–217, 1989.
- [BDG92] R. Beckers, J.L. Deneubourg, and S. Goss. Trails and u-turns in the selection of a path by the ant *lasius niger*. *Journal of Theoretical Biology*, 159 :397–415, 1992.
- [Ben99] M. Benaïm. Dynamics of stochastic approximation algorithms. *Séminaire de Probabilités (Strasbourg)*, 33 :1–68, 1999.
- [BHS05] M. Benaïm, J. Hofbauer, and S. Sorin. Stochastic approximations and differential inclusions. *SIAM*, 44 :328–348, 2005.
- [BR10] M. Benaïm and O. Raimond. A class of non homogeneous self interacting random processes with applications to learning in games and vertex-reinforced random walks. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 48 :4707–4730, 2010.
- [BRS12] M. Benaïm, O. Raimond, and B. Schapira. Strongly reinforced vertex-reinforced-random-walk on the complete graph. *Non publié : arXiv :1208.6375*, 2012.
- [BW70] A. Bhatkar and W. H. Whitcomb. Artificial diet for rearing various species of ants. *The Florida Entomologist*, 53 :229–232, 1970.
- [CD87] D. Coppersmith and P. Diaconis. Random walk with reinforcement. *Unpublished manuscript*, 1987.

BIBLIOGRAPHIE

- [CDF⁺01] S. Camazine, J.-L. Deneubourg, N.R. Franks, J. Sneyd, G. Theraulaz, and E. Bonabeau. *Self-organization in biological systems*. Princeton studies in complexity. Princeton University Press, Princeton, N.J., 2001.
- [CL09] C. Cotar and V. Limic. Attracting time for strongly reinforced walks. *The Annals of Applied Probability*, 19 :1972–2007, 2009.
- [DAGP90] J.-L. Deneubourg, S. Aron, S. Goss, and J.M. Pasteels. The self-organizing exploratory pattern of the argentine ant. *Journal of Insect Behavior*, 3 :159–168, 1990.
- [Dav90] B. Davis. Reinforced random walk. *Probability Theory and Related Fields*, 84 :203–229, 1990.
- [DBDF07] A. Dussutour, S. Beshers, J.-L. Deneubourg, and V. Fourcassié. Crowding increases foraging efficiency in the leaf-cutting ant *atta colombica*. *Insectes Sociaux*, 54 :158–165, 2007.
- [DCD86] D. Dacunha-Castelle and M. Duflo. *Probability and statistics. Vol. II*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [DDF05] A. Dussutour, J.-L. Deneubourg, and V. Fourcassié. Amplification of individual preferences in a social context : the case of wall-following in ants. *Proceedings of the the Royal Society B*, 272 :705–714, 2005.
- [DRDH00] H. Drees, S. Resnick, and L. De Haan. How to make a hill plot. *The Annals of Statistics*, 28 :1–335, 2000.
- [Duf96] M. Duflo. *Algorithmes stochastiques*. Springer, 1996.
- [EP23] F. Eggenberger and G. Pólya. Über die statistik verketteter vorgänge. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 3 :279–289, 1923.
- [Fre65] D.A. Freedman. Bernard friedman’s urn. *The Annals of Mathematical Statistics*, 36 :956–970, 1965.
- [Fri49] B. Friedman. A simple urn model. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2 :59–70, 1949.
- [GCJT13] S. Garnier, M. Combe, C. Jost, and G. Theraulaz. Do ants need to estimate the geometrical properties of trail bifurcations to find an efficient route ? a swarm robotics test bed. *PLoS Computational Biology*, 9 :e1002903, 2013.
- [GGC⁺09] S. Garnier, A. Guérécheau, M. Combe, V. Fourcassié, and G. Theraulaz. Path selection and foraging efficiency in argentine ant transport networks. *Behavioral Ecology and Sociobiology*, 63 :1167–1179, 2009.

BIBLIOGRAPHIE

- [GGR⁺08] G. Gerbier, S. Garnier, C. Rieu, G. Theraulaz, and V. Fourcassié. Are ants sensitive to the geometry of tunnel bifurcation? *Animal Cognition*, 11 :637–642, 2008.
- [Gra59] P.-P. Grassé. La reconstruction du nid et les coordinations inter-individuelles chez *Bellicositermes natalensis* et *Cubitermes* sp. la théorie de la stigmergie : essai d’interprétation du comportement des termites constructeurs. *Insectes Sociaux*, 6 :41–80, 1959.
- [Hoe63] W. Hoeffding. Probability inequalities for sums of bounded random variables. *Journal of the American Statistical Association*, 58 :13–30, 1963.
- [HW90] B. Hölldobler and E.O. Wilson. *The Ants*. Springer, 1990.
- [JHR04] D.E. Jackson, M. Holcombe, and F. Ratnieks. Trail geometry gives polarity to ant foraging networks. *Nature*, 432 :907–909, 2004.
- [JRD03] R. Jeanson, F.W. Ratnieks, and J.-L. Deneubourg. Pheromone trail decay rates on different substrates in the pharaoh’s ant, *monomorium pharaonis*. *Physiological Entomology*, 28 :192–198, 2003.
- [JVC⁺06] C. Jost, J. Verret, E. Casellas, J. Gautrais, M. Challet, J. Lluc, S. Blanco, M.J. Clifton, and G. Theraulaz. The interplay between a self-organized process and an environmental template : corpse clustering under the influence of air currents in ants. *Journal of the Royal Society Interface*, 4 :107–116, 2006.
- [KK01] K. Khanin and R. Khanin. A probabilistic model for the establishment of neuron polarity. *Journal of Mathematical Biology*, 42 :26–40, 2001.
- [KR00] M. S. Keane and S. W. W. Rolles. Edge-reinforced random walk on finite graphs. In Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences, editors, *Infinite-dimensional stochastic analysis*, pages 217–234, 2000.
- [Lim03] V. Limic. Attracting edge property for a class of reinforced random walks. *The Annals of Probability*, 31 :1615–1654, 2003.
- [LT07] V. Limic and P. Tarrès. Attracting edge and strongly edge reinforced walks. *The Annals of Probability*, 35 :1783–1806, 2007.
- [Mil97] J. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. 1997.
- [MJT⁺13] Q. Ma, A. Johansson, A. Tero, T. Nakagaki, and D. Sumpter. Current-reinforced random walks for constructing transport networks. *Journal of The Royal Society Interface*, 10(80) :20120864, 2013.
- [Mof87] M. W. Moffett. Ants that go with the flow : a new method of orientation by mass communication. *Naturwissenschaften*, 74 :551–553, 1987.

BIBLIOGRAPHIE

- [PDG87] J.M. Pasteels, J.-L. Deneubourg, and S. Goss. Transmission and amplification of information in a changing environment : The case of insect societies. Eds I. Prigogine & M. Sanglier. Gordes, Bruxelles, 1987.
- [Pem92] R. Pemantle. Vertex-reinforced random walk. *Probability Theory and Related Fields*, 92 :117–136, 1992.
- [Pem07] R. Pemantle. A survey of random processes with reinforcement. *Probability Surveys*, 4 :1–79, 2007.
- [PGG⁺12] A. Perna, B. Granovskiy, S. Garnier, S.C. Nicolis, M. Labédan, G. Theraulaz, V. Fourcassié, and D.J.T. Sumpter. Individual rules for trail following in argentine ants (*linepithema humile*). *PLoS Computational Biology*, 8 :e1002592, 2012.
- [Pol31] G. Polya. Sur quelques points de la théorie des probabilités. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 1 :117–161, 1931.
- [PV99] R. Pemantle and S. Volkov. Vertex-reinforced random walk on \mathbb{Z} has finite range. *The Annals of Probability*, 27 :1368–1388, 1999.
- [Res07] S. Resnick. *Heavy-Tail Phenomena*. Springer series in operations research and financial engineering. Springer, 2007.
- [Sel08] T. Sellke. Reinforced random walk on the d-dimensional integer lattice. *Markov Processes and Related Fields*, 14 :291–308, 2008.
- [Sha24] H. Shapley. Note on the thermokinetics of dolichoderine ants. 1924.
- [Tar04] P. Tarrès. Vertex-reinforced random walk on \mathbb{Z} eventually gets stuck on five points. *The Annals of Probability*, 32 :2650–2701, 2004.
- [Tar11] P. Tarrès. Localization of reinforced random walks, 2011.
- [Vol06] S. Volkov. Phase transition in vertex-reinforced random walk on \mathbb{Z} with non-linear reinforcement. *Journal of Theoretical Probability*, 19 :691–700, 2006.
- [VTG⁺06] K. Vittori, G. Talbot, J. Gautrais, V. Fourcassié, A.F.R. Araujo, and G. Theraulaz. Path efficiency of ant foraging trails in an artificial network. *Journal of Theoretical Biology*, 239 :507–515, 2006.
- [VVKB82] S.E. Van Vorhis Key and T.C. Baker. Trail-following responses of the argentine ant, *iridomyrmex humilis* (mayr), to a synthetic trail pheromone component and analogs. *Journal of Chemical Ecology*, 8 :3–14, 1982.
- [Was04] L. Wasserman. *All of Statistics : A Concise Course in Statistical Inference*. Springer, 2004.

