UNIVERSITÉ PARIS 8 – VINCENNES – SAINT-DENIS

ECOLE DOCTORALE COGNITION, LANGAGE ET INTERACTION

U.F.R. de Psychologie, pratiques cliniques et sociales

THESE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 8

Discipline : Psychologie du Développement

Par

Evelyne MENGUE METOULE

Le 19 décembre 2014

Titre :

Résolution des problèmes arithmétiques :

rôle intermédiaire des situations de changement d'état par rapport à celle de type ensembliste et temporel

---

Jury :

M. Bruno VILETTE, Professeur, Université Lille 3 (Rapporteur)

M. Gérard SENSEVY, Professeur, Université de Bretagne Occidentale (Rapporteur)

M. Jean-François RICHARD, Professeur Honoraire, Université Paris 8

M. Emmanuel SANDER, Professeur, Université Paris 8 (Directeur de Thèse)

Thèse préparée au Laboratoire PARAGRAPHE (EA349), équipe « Compréhension, Raisonnement et Acquisition des Connaissances (C.R.A.C.) », Université Paris 8.

Résumé

Cette thèse porte sur l'influence des facteurs sémantiques dans la résolution de problèmes additifs isomorphes, et sur les différences de difficulté en résultant. Les contextes statiques favorisent la stratégie basée sur la recherche de la valeur de la partie complémentaire et ceux de type temporel favorisent l'analogie entre éléments homologues. L'objectif est de : (i) montrer que les situations de transformation d'états sont intermédiaires entre les situations statiques et temporelles, (ii) faire appliquer à des contextes statiques la procédure favorisée par le contexte temporel et inversement. Les expériences sont réalisées auprès d'élèves de CM1/CM2. La première atteste du statut intermédiaire des situations de transformation d'état, leur conférant un rôle pivot potentiel pour certaines acquisitions. Les problèmes de transvasement favorisent moins la solution fondée sur le complément que les énoncés de type ensembliste et moins la solution fondée sur la comparaison que ceux de type temporel. Dans la seconde expérience, deux conditions d'apprentissage sont testées : l'une par instruction écrite, l'autre par intervention pédagogique orale. Cette dernière favorise nettement la stratégie par différence-comparaison pour des problèmes d'effectifs, et celle par différence-complément pour les problèmes d'âges. L'effet de généralisation est plus marqué dans le groupe qui a appris la stratégie par différence-comparaison. Dans l'apprentissage écrit, la stratégie différence-comparaison est transférée aux problèmes d'effectifs et généralisée aux problèmes non appris ; la stratégie différence-complément n'est pas transférée aux contextes inhabituels.

Mots clés : abstraction, apprentissage, analogie, choix de procédures alternatives, problèmes isomorphes, recodage sémantique, résolution de problèmes arithmétiques, transfert.

Abstract

This thesis examines semantic factors in additive problem solving and the related differences in difficulties. The problems studied can be solved by two strategies: the complementation strategy, based on a step by step procedure ; and the matching procedure, based on the analogy between homologous elements. The two objectives of this work are: (i) to show that change problems are intermediate between combination problems with frequency contexts and combination problems with age contexts ; (ii) to transfer to age problems the complementation procedure usually applied to frequency problems, and transfer to frequency problems the matching strategy usually applied to age problem. The experiments were conducted with children of 4th and 5th grades. The first experiment demonstrates that the change situations are intermediate between frequency and age problems. less often solved by a complementation strategy than frequency problems and less often solved by a matching strategy than age problems. In the second experiment, two teaching situations were tested. The first consisted in giving written instruction, in order to transfer the matching strategy to frequency problems, and to transfer the complementation procedure to age problems the transfer was observed for the matching strategy but not for the complementation strategy. The second teaching method consisted in oral lessons in class, the goal bieing similar: a massive effect of transfer of both procedures was observed as well as a generalization effect to problems with other contexts.

Keywords: abstraction, arithmetic problem solving, analogy, choice of alternative strategies, isomorphic problems, learning, semantic recoding, transfer.

Remerciements

Cette thèse est née et a fait du chemin pour arriver jusqu'ici. J'exprime ici toute ma gratitude à tous ceux qui ont contribué à son projet et à sa finalisation.

Je remercie particulièrement le Professeur Emmanuel Sander pour m'avoir fourni un cadre de recherche pour mon épanouissement intellectuel. Je remercie aussi M. Jean François Richard pour toutes les orientations et tous les encouragements qu'il m'a donnés pour la réalisation de cette thèse.

Je remercie Madame Caroline Guérini pour son aide à travers ses précieux conseils et son soutien psychologique.

Je remercie messieurs les Professeurs Bruno Vilette et Gérard Sensevy d'avoir accepté d'être membres de mon Jury.

Je remercie Valentine Chaillet et Elisabeth Broge pour avoir toujours été présentes aussi bien dans ma vie universitaire que dans ma vie privée.

Je remercie les chercheurs et étudiants de l'équipe C.R.A.C., pour nos échanges et l'équipe du projet ACE qui a enrichi ma formation universitaire dans le domaine de la recherche en arithmétique. Je remercie également les écoles en Ile de France et Libreville qui ont accepté de faire participer leurs élèves à toutes mes expériences.

Ma reconnaissance va également vers mes parents et les autres membres de ma famille qui n'ont cessé de m'encourager dans mon parcours universitaire. Je pense particulièrement à Yvette Gracia, Jean Hilaire Zogo Metoulou, Gaelle Obono Metoulou, Edouard Ondo Metoule, Boukar Hamza et Monsieur et Madame Zogo Ondo, Félicien Ndong Nguema, Thierry Fouassier et Téko Foly qui ont contribué sur les plans matériel, financier, et psychologique au bon déroulement de mes expériences à Paris et au Gabon.

Je remercie aussi mes amis, Eugène Be pour avoir toujours été mon meilleur ami depuis le collège et de m'avoir donné l'envie de poursuivre mes études. Je remercie Ida Mouanga, l'amie que la psychologie m'a offert dès ma première année à l'université et avec qui j'ai révisé pour des examens.

« Mieux vaut la fin d'une chose que son commencement. »
Proverbe

« Pour éviter le nivellement par le bas, il est urgent de diagnostiquer les difficultés scolaires actuelles, d'admettre le fait de l'hétérogénéité des élèves et de mettre en place des situations d'apprentissage diversifiées qui permettront à un plus grand nombre d'acquérir des connaissances et les capacités dont ils auront besoin demain. Autrement dit il est urgent de susciter la réussite chez un maximum d'élèves tout en respectant les objectifs qu'on souhaite atteindre et qu'il faudrait définir avec plus de précision. »

Britt-Marie Barth

Tables des matières

Introduction

Résoudre un problème c'est développer des stratégies pour atteindre un but, qui est selon les cas, plus ou moins difficile à atteindre. La résolution de problème, notamment les problèmes de transformation ou de changement d'état, passe par trois étapes principales : (i) l'état initial, (ii) un ou plusieurs états intermédiaires, (iii) l'état final. On parle aussi de but et de sous-buts pour parvenir à la solution. Il y a deux types de connaissances qui permettent de résoudre le problème : on possède des connaissances préalables en mémoire à long terme, dans le cas contraire on doit réaliser des inférences qui guident les différentes actions à effectuer. Ce qui fait qu'une tâche devienne une situation-problème, c'est non seulement la tâche elle-même mais également les compétences propres à la personne qui résout. Les stratégies qu'elle met en oeuvre dépendent des contraintes de la tâche et des opérateurs qui doivent résoudre le problème.

Dans l'activité de résolution de problème, il faut différencier l'espace de recherche du problème que réalise le sujet et l'espace de la tâche. L'espace de recherche est l'espace dans lequel le sujet se déplace pour trouver la solution du problème, c'est sa propre interprétation, ses transformations qu'il opère sur le problème. L'espace de la tâche correspond à l'espace de recherche utilisé par l'expert pour résoudre le problème, il permet un cheminement qui mène à la solution effective du problème. L'espace de recherche du problème est un graphe constitué des nœuds reliés par des arcs. Les nœuds sont différents états que peuvent prendre les situations du problème par les différentes actions et transformations que réalise la personne qui résout en passant d'un état à un autre. Dans un problème, lorsque les buts sont connus les actions qui s'en rapprochent sont définies et l'objectif de résolution consiste à ne pas s'en éloigner. Il arrive que certaines contraintes soient sacrifiées, en fonction de la situation ou qu'il ne soit pas important de les respecter.

Les recherches réalisées dans le domaine de la résolution des problèmes de changement d'état ont d'abord cherché à cerner les différences de difficulté entre les problèmes isomorphes. Les études ont été principalement effectuées sur les problèmes de la tour de Hanoï ainsi que ses isomorphes. Les travaux réalisés montrent que la première difficulté de résolution de ces problèmes vient de la charge en mémoire de travail au cours du traitement du problème. Cette grande charge serait due au contexte sémantique de présentation du problème (Kotovsky, Hayes & Simon, 1985 ; Kotovsky & Fallside, 1989). Cette difficulté serait également inhérente à l'utilisation que les participants font du contexte sémantique. Si les règles du problème sont extériorisées du fait des conditions physiques qui déterminent l'action cela libère de l'espace dans la mémoire ; plus elles sont intériorisées, plus elles occupent l'espace de traitement du problème (Zhang & Norman, 1994). Clément (1994, 1996, 2009), Clément et Richard, (1997), De Viviés, (1999) et Richard et al. (2002) se sont également intéressés au rôle joué par l'interprétation de la situation sur les procédures mises en œuvre et la différence de difficulté de résolution des problèmes isomorphes de la tour de Hanoi. Ils ont proposé une explication liée à la difficulté d'adopter un point de vue pertinent au problème. Les participants sont influencés par leur connaissance sur les objets du problème. Ce point de vue de l'interprétation du problème n'est pas pertinent pour le résoudre. Lorsqu'ils n'y parviennent pas, ils se retrouvent dans des situations de répétition des erreurs d'action, dans des situation d'impasses, restent fixer dans des états ou abandonnent la résolution du problème.

Cette idée montre que le changement de point de vue est crucial dans la résolution de problème. C'est un indice d'adaptation et de flexibilité mentale qui, dans la plupart des situations, requiert une aide pour s'opérer. Les premières recherches qui ont porté sur le changement de point de vue se sont réalisées dans le contexte de l'insight. La découverte par la restructuration des données du problème a été prônée par la théorie de la forme. Les chercheurs de ce courant ont suggéré que le changement de point de vue ou la réorganisation des propriétés de la situation permet de partir d'un état initial à un état but qui est cette configuration réorganisée des données de départ. Dans ces recherches, il a été démontré que la difficulté de changer de point de vue peut être due à difficulté de modifier l'organisation perceptive du problème (c'est le cas du problème des 9 points de Maier, 1930), à la fixité fonctionnelle des objets et leurs propriétés (Dunker, 1945 ; Birch et Rabinowitz, 1951).

Un autre aspect a été développé par Luchins (1942) en montrant le rôle des connaissances antérieures dans la mécanisation de la pensée. Les connaissances antérieures seraient un frein à la découverte des solutions alternatives même lorsqu'elles sont plus simples à appliquer. Cette question porte sur le rôle des connaissances antérieures, sur l'acquisition des connaissances et sur le transfert analogique.

Les études dans le domaine du transfert analogique ont montré que les novices et les experts n'utilisent pas les mêmes informations dans le transfert des connaissances. Les novices se basent sur les traits de surface et les experts sur les traits de surface et de structure.

Bassok et Olseth (1995) apportent une dimension interprétative dans la difficulté du transfert analogique. Cette difficulté serait due à la structure induite par le contexte sémantique du problème qui est dépendant des connaissances familières sur les objets et leurs propriétés. Le contexte sémantique serait un indice d'orientation qui guiderait vers le schéma de structure du problème. Cette interprétation de l'influence des contextes sémantiques est également observée dans la résolution de problèmes arithmétiques.

Dans le domaine de la résolution de problèmes arithmétiques. Il a été démontré qu'il existe de nombreux processus qui participent à la compréhension et à la représentation du schéma de résolution du problème. Les modèles de schéma et celui de situation y participent. Sander et al. (2003) et Hakem et al. (2005) ont montré que les variables impliquées dans le problème orientent vers un schéma de résolution partie-tout selon la catégorie des problèmes de combinaison et vers la représentation du schéma de comparaison des parties homologues pour les problèmes de type comparaison. De plus, Richard & Sander, (2000), Sander & Richard (1997, 2004) ont proposé d'identifier les contextes dont l'interprétation influence la résolution de problèmes. Ils proposent de changer l'interprétation initiale en se basant sur les propriétés décrites et de procéder à un codage qui permet de généraliser la situation du problème. Tout comme Bassok et Olseth (1995) qui expliquent le rôle de la structure induite par le contexte sémantique dans le transfert des problèmes, ces auteurs défendent l'idée selon laquelle les propriétés des objets peuvent être catégorisés à un niveau plus abstrait, qui n'est ni trop général ni trop spécifique pour la résolution et le transfert.

Dans cette thèse, nous avons choisi de travailler sur les contextes de recodage des situations afin de favoriser ce type d'apprentissage et de faire découvrir dans le système de l'éducation que le transfert des apprentissages est un enjeu majeur dans l'acquisition des connaissances. Nous avons travaillé sur la résolution de problèmes isomorphes qui admettent plusieurs procédures de résolution. Ces problèmes ont l'avantage de montrer par le choix de la procédure utilisée, le schéma d'interprétation qui a mené à la solution. Les classifications classiques distinguent trois catégories de problèmes. La catégorie de problèmes de combinaison induit une interprétation du schéma partie-tout ; elle intègre des variables de type ensembliste facilement regroupables et incite à l'utilisation de l'inférence de complément afin d'appliquer la procédures différence-complément lorsque ces variables sont représentées dans un problème. La catégorie des problèmes de comparaison induit une interprétation du schéma de comparaison, incite à la comparaison des parties homologues conduit à faire une inférence de comparaison afin d'appliquer la procédure différence-comparaison aux variables dont les valeurs sont situées sur un axe temporel. Nous émettons l'hypothèse que les problèmes de transformation d'état se situent à un niveau intermédiaire entre les deux catégories. Ils peuvent selon une représentation inciter à la représentation d'un schéma partie-tout ou celle d'un schéma de comparaison. Nous pensons à partir de cette hypothèse qu'il est possible de procéder à un recodage des propriétés dans les variables matérielles et temporelles afin que les propriétés de leurs contextes sémantiques soient catégorisées à un niveau plus général qui dépasse les effets de contexte spécifiques aux situations-problèmes.

Les travaux de Gamo (2009), Gamo et al. (2010) , Gamo et al. (2014) ont montré qu'un recodage de la situation est possible en favorisant le choix d'appliquer la procédure la plus efficiente après l'avoir comparée à une autre qui nécessite plus de calcul et en présentant plusieurs contextes sémantiques des problèmes. Cette méthode favorise le transfert de la procédure non spontanément mise en œuvre étant donné la variable du problème. Nous pensons qu'il est possible de procéder également au transfert de la procédure non spontanément mise en œuvre en utilisant un contexte et une condition d'apprentissage qui favorisent ce transfert.

La première partie de cette thèse est consacrée à la revue théorique de notre recherche. Elle est organisée en deux chapitres sur la résolution des problèmes dans le cadre général et sur la résolution des problèmes arithmétiques.

Le premier chapitre est consacré aux recherches conduites dans le but de comprendre les différences de difficulté entre les problèmes isomorphes. Ces recherches montrent que les effets de contexte sémantique jouent un rôle déterminant dans la difficulté des problèmes. Ce chapitre montre également les mécanismes qui empêchent d'adopter un point de vue alternatif dans la résolution de problèmes. La dernière partie de ce chapitre présente les recherches sur le transfert analogique qui est un processus de résolution des problèmes. Elles présentent les conditions nécessaires pour un transfert analogique positif entre problèmes. Elle présente également le point de vue de l'interprétation des structures induites par le contexte sémantique dans le transfert des solutions.

Le deuxième chapitre est consacré à la résolution des problèmes arithmétiques. Dans un premier temps nous notons la classification des problèmes arithmétiques et le modèle des schémas et celui du modèle de situation qui participent à la résolution de problèmes. Une dernière section apporte l'explication de l'influence des contextes sémantiques dans les problèmes qui admettent plusieurs procédures de solution.

Le troisième chapitre détaille le contexte qui justifie la problématique de notre recherche.

La deuxième partie concerne notre contribution expérimentale. Elle comporte deux chapitres. Le premier porte sur le contexte sémantique des problèmes. Le deuxième porte sur le contexte d'apprentissage par recodage en situation scolaire.

Plus précisement, le quatrième chapitre décrit la position des problèmes de transvasements dans la représentation des schémas de résolution. Nous utilisons le contexte des problèmes de transvasements pour que ces problèmes se situent à un niveau intermédiaire entre les problèmes matériels et les variables temporelles.

Le cinquième chapitre présente les résultats sur l'apprentissage par recodage des propriétés sémantiques du problème. Cet apprentissage a été effectué en classe par instruction orale et écrite. Il s'est agi de procéder à un transfert des procédures dans un contexte qui ne favorise pas sa mise en œuvre spontanée.

Première partie :

Contributions des recherches en résolution de problèmes

Chapitre I. Le cadre général de la résolution de problèmes

La recherche en résolution de problèmes a évolué à travers la contribution de trois grands courants : les courants behavioriste, gestaltiste et celui du traitement de l'information. Sans vouloir faire un récit exhaustif des apports de chacun d'eux, nous retenons quelques éléments de base, apportés, par ces courants, qui ont contribué à la recherche en résolution de problèmes.

Le béhaviorisme étudie le comportement comme une fonction essentiellement adaptative, qu'il soit inné ou acquis par apprentissage. Nous retiendront dans ce courant, l'apport de Thorndike, avec l'approche du Learning by Doing, qui a étudié la résolution de problème par essais et erreurs chez l'animal. Un exemple de dispositif est une cage dont la porte ne peut s'ouvrir qu'en tirant sur une corde attachée à un loquet. Il place un animal affamé dans cette cage et expose à l'extérieur, à sa vue, un aliment. L'animal doit résoudre le problème : trouver comment sortir de sa cage pour récupérer la nourriture. Cette expérience se fait en plusieurs essais. Il s'en suit tout un répertoire de comportements avant que l'animal n'apprenne et sélectionne la procédure qui le mène à la nourriture. Au départ, l'animal explore l'environnement de la cage et par hasard tire sur la corde et sort de la cage et prend la nourriture. Puis après plusieurs essais, le comportement de l'animal s'affine, il tâtonne de moins en moins dans les actions qu'il entreprend et parvient au bout de l'apprentissage à ouvrir instantanément la porte une fois enfermé. Le temps de résolution de la tâche diminue considérablement à la fin par rapport au début de l'apprentissage. Toutes les recherches béhavioristes accordent de l'importance à l'expérience par la prise en compte des comportements acquis par essai et erreurs. Elles négligent les représentations de la situation. A la suite des expériences et conclusion de Thorndike, Watson (1930) et Hull (1943) cités par Richard (1994) ont étudié les apprentissages chez l'humain et les expliquent par un ensemble de réponses adaptées aux stimuli qui forment un ensemble hiérarchisé qui y est associé. Dans une situation, plusieurs réponses sont appliquées, ces réponses sont apprises et associées à l'apparition d'un stimulus. Après de nombreuses expériences impliquant ce stimulus, des réponses sont organisées, de sorte que lorsque cette organisation est bien établie seules les réponses les plus adaptées sont sélectionnées et permettent de résoudre le problème en moins de temps. L'apprentissage par essais et erreurs crée des habitudes dans le répertoire de réponses. Dans la résolution de problèmes lorsqu'une situation s'apparente à une déjà rencontrée, il est facile de faire appel aux connaissances ou répertoire de comportement appris et de sélectionner la plus appropriée (qui se trouve en haut de la hiérarchie des comportements propres à cette situation). Ainsi, le béhaviorisme accorde un rôle primordial aux expériences antérieures dans l'adaptation. Le béhaviorisme a le mérite d'avoir fourni à la psychologie un objet d'étude basé sur le comportement et une méthode d'observation objective. Cependant, la conception du schéma Stimulus-Réponse a conduit la psychologie à négliger d'autres aspects du comportement notamment la découverte brusque de la solution, le courant gestaltiste intègre les mécanismes sous-jacents au comportement, le système cognitif et les représentations, à l'étude de la psychologie.

Dans le contexte de la résolution de problèmes, la théorie de la gestalt prône une réorganisation perceptive de la structure générale du problème au cours de la résolution et décrit les différentes étapes qui y interviennent. Elle s'est opposée à la conception béhavioriste sur le rôle des apprentissages en résolution de problèmes. Elle s'oppose à la théorie béhavioriste qui accorde une importance primordiale aux apprentissages antérieurs dans la résolution de problèmes. Selon la théorie de la gestalt, résoudre un problème c'est réaliser un ensemble d'opérations mentales en procédant à une réorganisation perceptive du problème. Cette reconstruction mentale donne une nouvelle structure à l'ensemble des éléments du problème de telle sorte qu'aucun des éléments ne soit analysé séparément mais qu'ils forment un tout cohérent qui rapproche le plus possible de la solution. La réadaptation de la situation permet d'avoir une autre vision générale du problème qui n'était pas perceptible à l'état initial du problème. Cette nouvelle présentation correspond à la solution recherchée. La résolution de problèmes se déroule essentiellement en quatre phases successives : la préparation, l'incubation, l'illumination et la vérification. (i) La préparation : correspond à la prise d'information sur les données du problème, sa compréhension, l'identification de l'état initial et du but final à atteindre. Cette première phase est importante dans la mesure où elle permet ou pas la prise de conscience. En effet, après l'analyse une situation peut représenter un problème pour certains sujets et ne pas en être pour d'autres. Juger qu'on est face à un problème suppose qu'il a été décelé comme tel, avec un état initial, et l'objectif à atteindre. (ii) L'incubation : au cours de cette phase, le sujet tente de résoudre, sans succès, le problème. A la suite de cela, il arrête de chercher toute solution au problème ; c'est la période de lâcher prise. (iii) L'illumination suit le période d'incubation. Après que le sujet ait recommencé à chercher la solution, il a un « insight », c'est-à-dire une révélation soudaine sur la solution du problème. Cette phase souvent considérée comme une intuition sur la solution, peut également être perçue comme la période au cours de laquelle apparait une autre possibilité, l'évocation d'une voie de solution qui pourrait être empruntée (l'insight a été étudié dans le contexte de la difficulté de changer de point de vue, que nous présenterons dans la section suivante). (iv) La vérification est la dernière phase de la recherche de la solution. Le sujet vérifie que la solution apparue par illumination répond à l'objectif de la résolution du problème. Les gestaltistes se sont concentrés sur la période d'incubation, l'insight pour montrer que la résolution de problème découle de la restructuration des éléments du problème, d'une nouvelle réorganisation mentale et non des actions par essais et erreurs. Une des expériences les plus célèbre réalisées par Köhler avec le singe Sultan, sur les conduites de détours[1], montre bien l'effet de la restructuration des éléments du problème. Il fait entrer un singe dans une cage, met deux bâtons dont les extrémités ont des trous de sorte qu'on puisse les introduire l'un dans l'autre. A l'extérieur de la cage se trouve une banane que Sultan doit rapprocher pour la saisir. Après de nombreux essais par chacun des deux bâtons, essayant de se rapprocher en utilisant ses épaules, il ne parvient pas à saisir la banane. Après une période d'inactivité, sultan manipule les deux bâtons sans objectif précis et les tient par hasard dans le prolongement l'un de l'autre. Il insère le bout du petit bâton dans le grand et attire la banane vers lui. Ces expériences sont réalisées par la suite avec plus de deux bâtons suivant la distance, et la solution est trouvé sans essais. Bien qu'ils ne reconnaissent pas principalement les apprentissages antérieurs comme un facteur facilitant la résolution de problèmes, mais plutôt comme un facteur qui freine l'apprentissage et serait à l'origine de fixité fonctionnelle, les gestaltistes ont apporté une nuance sur deux types d'apprentissages : les apprentissages reproductifs et les apprentissages productifs (Wertheimer, 1959, et Katona, 1940). L'apprentissage reproductif est axé sur la mémorisation ; il se fait par imitation aveugle sans compréhension des éléments qui organisent le problème. L'apprentissage productif favorise la compréhension du problème grâce à laquelle les transferts positifs sont réalisés. L'une des expériences réalisée par Wertheimer (1959) pour montrer la différence entre ces deux apprentissages a été effectuée sur le calcul de l'air du parallélogramme. Deux groupes apprenaient, selon deux méthodes différentes, le calcul de l'air du parallélogramme. Le premier groupe mémorisait la formule de la procédure de calcul en deux étapes : d'abord, tracer une droite perpendiculaire à la base du parallélogramme puis multiplier la hauteur par la base. Le deuxième groupe apprenait par compréhension à calculer en se basant sur les caractéristiques de la figure géométrique, notamment, le fait qu'un parallélogramme peut être

[1] Par opposition au dispositif de la cage à problème de Thorndike qui cachent les éléments qui permettent de résoudre le problème, rendre ces éléments visibles permet d'observer les conduites intelligentes des humains et

considéré comme un rectangle composé de deux triangles de chaque côté. Les résultats ont montré que les caractéristiques du parallélogramme apprises ont été transférées pour trouver l'aire d'un autre parallélogramme de configuration différente et ses propriétés ont permis, dans le même temps, de différencier un problème soluble et non soluble. Ainsi, la pensée reproductrice transfère et applique la solution antérieurement mémorisée dans des situations similaires, et la pensée productive, analyse et reconstruit le problème et crée des solutions à partir de la compréhension.

Le troisième courant, celui du traitement de l'information, s'est s'attaché à modéliser à l'aide des programmes informatiques, les types de problèmes, les processus et stratégies de résolution de problèmes chez l'être humain. Il a apporté une dimension expérimentale, formelle et modélisable sur la résolution de problèmes. Dans l'exploration de l'espace-problème, l'interprétation de la situation se fait en utilisant deux stratégies : la stratégie exploratoire ou hill climbing et la stratégie de planification ou means-end readiness. La stratégie exploratoire ou hill climbing est exploratoire dans le sens où toutes les actions et étapes réalisées sur le problème ont pour but de se rapprocher le plus possible de l'état final sans une analyse préalable des différentes étapes et opérateurs qui permettraient de l'atteindre. La stratégie de planification ou means-end readiness nécessite avant résolution une analyse approfondie de la distance entre l'état initial et l'état final du problème et de trouver les opérateurs et les sous-buts qui réduisent l'écart entre les deux états et de les appliquer jusqu'à atteindre l'état final. L'espace-problème est l'interprétation que le sujet construit sur le problème. Il est différent de l'espace de la tâche ou de recherche qui est l'interprétation du problème faite par un expert qui résout le problème.

Ainsi, les trois courants ont contribué chacun à l'évolution des recherches en résolution de problèmes. La position du courant gestaltiste a laissé un objet d'étude intéressant sur l'insight considéré aujourd'hui sur le plan du changement de point de vue. La résolution de problème selon le point de vue de l'espace de la tâche et celui du point de vue de l'espace-problème que construit un sujet non expert suggère que des compréhensions différentes peuvent être faites à partir d'un même contexte sémantique. La section suivante présente la revue de cette question d'interprétation du problème. Nous verrons que le contexte d'un problème peut mener à différentes interprétations, de ce fait à différentes résolutions. Ces effets de contexte sémantique ont conduit à s'interroger sur la différence de difficulté entre les problèmes isomorphes et ont mené à d'autres travaux pour savoir comment les solutions de problèmes isomorphes sont transférées d'un problème à un autre, et quelles propriétés dans la représentation du problème interviennent dans le transfert entre problèmes isomorphes.

I.1. Le contexte sémantique et différence de difficulté entre problèmes isomorphes

Les études sur la tour de Hanoï et ses isomorphes ont été réalisées sous l'instigation de Herbert A. Simon (1916-2001). Ces problèmes sont dits bien définis car leur état initial, état but, les opérateurs ainsi que les modalités de la mise en pratique des opérateurs ou les règles du problème sont mentionnées. Nous verrons justement que la variation de l'interprétation de l'opérateur, qui utilise une grande charge mentale, est à l'origine de la difficulté entre problèmes isomorphes, mais il y a également la forme de présentation interne ou externe des règles du problèmes, et le point de vue que les sujets adoptent pour résoudre le problème.

Nous présentons d'abord ci-dessous (figure 1) la version classique de la tour de Hanoï, d'où sont parties les recherches. Dans cette version, trois piquets (qu'on peut nommer A, B et C) sont placés de manière espacée sur un support : à droite, au milieu et à gauche. Dans le premier piquet on empile successivement les trois disques : on introduit le plus grand, le moyen et le plus petit. Cette disposition est l'état initial du problème. L'objectif du problème est de parvenir à placer tous les disques dans le même ordre, du premier piquet (état initial) au troisième (état but). Pour ce faire, il faut respecter les contraintes du problème dont les 3 règles sont :

1. On ne peut soulever qu'un disque à la fois ;

2. Si plus de deux disques sont situés dans le même piquet, on ne peut déplacer que le plus petit ;

3. on ne peut pas placer un disque à l'endroit où il y déjà un plus petit.

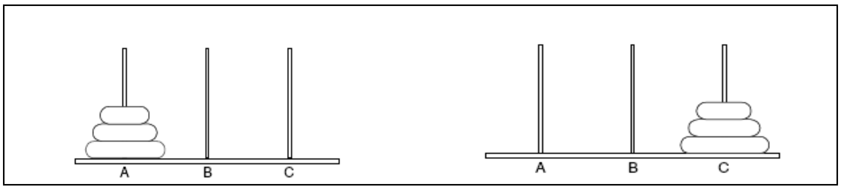


Figure 1. Présentation de l'état initial (à gauche) à l'état but (à droite) du Problème de la tour de Hanoï.

Les isomorphes de la tour de Hanoï notamment les problèmes de la cérémonie du thé (Hayes & Simon, 1974), des monstres (Hayes & Simon, 1977 ; Simon, & Hayes 1976) ; des Acrobates et Acrobates inversés (Kotovsky, Hayes & Simon, 1985) présentés dans les encadrés suivants (encadrés 1 et 2), partagent le même espace de recherche et ont un espace de problème différent en ce sens que la représentation objective sous jacente demeure identique pour l'espace de recherche, mais l'interprétation de l'espace sémantique sera subjective du fait qu'elle sera propre à chaque sujet. En d'autres termes, la structure sous jacente du problème est commune à tous les problèmes, elle représente le graphe de tous les états possibles par lesquels on passe pour résoudre un problème tout en tenant compte des contraintes. Toute la différence dans la résolution viendra de l'interprétation de l'habillage du problème selon le participant, de quelle manière il va interpréter l'état initial, l'état but et les contraintes relatifs au problème (Kotovsky & Simon, 1990 ; Clément, 1996, 2009 ; Richard, 2004).

La règle de la cérémonie du thé est la suivante :

Pendant la cérémonie, n'importe lequel des invités peut demander à un autre : « Honorable seigneur, puis-je accomplir cette pénible tâche à votre place ? » Cependant une personne ne peut demander à une autre la moins noble tâche que ce dernier est en train d'accomplir. Si une personne accomplit déjà certaines tâches, il ne peut pas demander une tâche plus noble que la moins noble que celle qu'il est en train d'exécuter. La coutume veut qu'à la fin de la cérémonie, toutes les tâches aient été transférées de l'hôte le plus jeune vers l'hôte le plus âgé des invités .

Question du problème : Comment cela peut-il être réalisé ?

Le problème de la cérémonie du thé, (Traduction de Hayes & Simon, 1974, p 169) :

« Dans les auberges de certains villages himalayens, on pratique une cérémonie du thé très civilisée et raffinée. La cérémonie implique trois hôtes ni un de plus ni un de moins. Quand les invités arrivent, ils prennent place à leur table, leur hôte accomplit cinq actions pour eux. Les voici dans l'ordre de priorité honorifique que les himalayens leur attribuent :
1- alimenter le feu,
2-servir des gâteaux,
3- verser de l'huile sur le feu,
4- servir le thé,
5- lire des poèmes.

Encadré 1. Le problème de la cérémonie du thé (Hayes & Simon, 1974).

L'isomorphisme entre les problèmes tour de Hanoï et cérémonie de thé :

- Il faut utiliser cinq disques pour cette version de la tour de Hanoï ;

- Les trois nobles de la cérémonie de thé correspondent aux trois emplacements ;

- L'ordre de la pratique des 5 rituels correspond à l'ordre de positionnement des disques

- Les actions pour atteindre l'objectif final sont identiques pour les deux problèmes.

La version du problème des monstres qui porte sur le changement de taille (Traduction de Kotovsky et al. 1985, p 249).

« *Trois monstres extra-terrestres à cinq mains tenaient trois globes en cristal. À cause des particularités des lois de la mécanique quantique qui règnent dans leur monde, les globes et les monstres ne peuvent avoir que trois tailles, le plus petit monstre tenait le globe de taille moyenne, le monstre de taille moyenne tenait le grand globe et le plus grand monstre tenait le petit globe.*
Comme cette situation offensait leur sens de la symétrie, ils ont entrepris d'augmenter et diminuer la taille des globes de telle sorte que chaque monstre tienne le globe proportionnel à sa taille ».

Encadré 2. Le problème des monstres version changement de taille (Hayes & Simon, 1977, Simon, & Hayes 1976).

Les règles de ce problème sont :

1. On ne peut transférer qu'un globe à la fois,

2. Si deux globes ont la même taille, on ne peut changer que le globe tenu par le monstre le plus grand.

3. On ne peut pas changer la taille d'un globe dans la taille du globe tenu par le monstre le plus grand.

Question : Par quelles séquences de déplacement, les monstres peuvent-ils résoudre ce problème ?

Dans la version problème changement de taille:

- les trois disques dans la tour représentent les trois monstres dans la version changement de taille ;

- les trois emplacements sont remplacés par les globes.

Comme leur titre l'indique les deux versions du problème de monstre (changement de taille et de déplacement) ne sont différentes que sur les plans des actions engagées. La version changement requiert d'agir dans le problème en prenant en considération qu'il faut changer la taille des objets, chaque monstre tient un globe dont on doit changer la taille. Dans la version déplacement il faut changer la place des objets afin que chaque monstre ait un globe qui correspond à sa taille : le grand monstre avec le grand globe, le monstre moyen avec le globe moyen, le petit monstre avec le petit globe.

Les résultats des expériences de Hayes et Simon (1977) montrent que l'interprétation de la situation influe sur le temps de résolution. Le problème de la tour de Hanoï, qui a été présenté avec un support matériel, a été résolu plus rapidement soit 1.83 minutes que chacune des deux versions du problème des monstres, celle portant sur le déplacement et celle portant sur le changement de taille. Des deux versions, celle du changement de taille a pris plus de temps soit 29.39 minutes, que celle sur le déplacement soit 13.95 minutes. A partir de ces résultats, les auteurs ont tiré la conclusion selon laquelle la formulation sémantique des problèmes rend la construction de l'interprétation des isomorphes de la tour de Hanoï difficile. Il apparaît que les règles d'action contraignantes de la version changement de taille, poussent les sujets à vérifier, à chaque étape de la résolution, qu'ils n'ont violé aucune règle, ce qui augmente le temps des opérations et rend ce problème plus difficile que la version déplacement. Il est difficile de percevoir les opérateurs communs entre ces problèmes. Chaque sujet crée une représentation du problème, selon sa compréhension et peut créer des règles intermédiaires qui rendent la solution astreignante.

Partant de ce constat, Kotovsky et al. (1985) ont conduit des études pour comprendre et expliquer les causes de ces différences de difficulté entre les problèmes isomorphes. Pour cela, ils ont intégré trois facteurs dans leurs recherches : (i) la forme de présentation du problème, le problème de la tour de Hanoï (représentée sur un support matériel), (ii) la nature de l'opérateur et l'application des règles, les deux versions, déplacement et changement de taille des problème de monstres (également matérialisé par des figurines représentées avec un matériel en papier mâché) et (iii) le degré d'éloignement ou rapprochement entre les règles des problèmes et les connaissances sur l'environnement familier, les deux problèmes sur les figures acrobatiques. De ces résultats, il ressort des différences de difficultés entre les problèmes.

Les problèmes de déplacement demeurent plus faciles à résoudre que les problèmes de changement. Par ailleurs, ceux-ci requièrent 16 fois plus de temps de résolution que la version de base de la tour de Hanoï. Ces différences sont imputées à la charge mentale qu'impose le traitement de chaque version sémantique des problèmes. Cette charge mentale a été mesurée d’une part par la quantité d’objets qui participent aux problèmes et d’autre part par les étapes par lesquelles les opérateurs sont appliqués pour vérifier qu’une action est légale. La charge mentale est supérieure dans la version changement de taille que dans la version déplacement. Ceci s’explique par le fait que dans la version déplacement pour décider qu’une action est légale, il faut comparer des objets situés dans le même emplacement, la représentation de cette comparaison réduit la charge mentale (si un monstre tient deux globes ils sont facilement comparés puisqu’ils occupent le même espace), le temps de réponse est court. Cela est différent dans la version changement de taille car pour juger de la légalité d’un mouvement il faut anticiper mentalement l’action d’attribuer une taille à un globe et il faut comparer cette représentation à un globe qui est tenu par un autre monstre que celui avec lequel on construit la représentation. De plus, la version dont les règles sont en rapport avec les représentations du monde réel diminue notablement la charge de travail et facilite la mémorisation des règles d’action du problème. C’est le cas des problèmes des acrobates, qui est résolu deux fois plus rapidement que les deux versions de monstres. La version matérialisée par des figurines en forme de papier mâché est mieux réussie que celle où les monstres ne sont pas représentés. Pour les auteurs, la matérialisation des monstres allège la charge mentale car la représentation des états est manipulée et perçue par les sujets.

Comme la représentation physique d’un problème influe sur la résolution du problème, Zang & Norman (1994) ont montré qu’elle pourrait également causer la différence de difficulté entre les problèmes isomorphes. Ces auteurs font la distinction entre la représentation externe et interne d’un problème. La première est faite à partir des éléments issus de l’environnement, tels que les symboles physiques, les objets, leurs dimensions, les règles externes, les contraintes et la structure physique des éléments du problème. La seconde est une interprétation construite à partir de l’activation des connaissances organisées en mémoire. A partir des deux types de représentation, les auteurs proposent deux analyses différentes du problème de la tour de Hanoï. Dans la version physique, la première règle, « ne déplacer qu’un disque à la fois » et la troisième « ne pas poser un disque sur un plus petit » sont internes, il faut les expliciter et les mémoriser. La deuxième règle « ne prendre que le plus petit disque qui se trouve au sommet de la pile » est une règle externe, qui peut être respectée sans être explicitement donnée car l’organisation physique de la tour de Hanoï a elle même cette configuration, il n’est donc pas nécessaire de la retenir puisqu’elle est appliquée avec la présentation du problème. Plus les contraintes du problème sont intégrées dans la construction physique, (donc leurs représentations sont externes) plus la probabilité de réussir le problème est élevée, et moins elles le sont, (donc plus la représentation interne est prépondérante), plus cette probabilité est faible.

Pour montrer que les représentations internes et externes des règles sont des facteurs de difficultés des problèmes, Zang & Norman (1994) ont créé des problèmes isomorphes à celui de la tour de Hanoï dans lesquels les règles extérieures aident à résoudre le problème. Les isomorphes sont déclinés en trois versions dont chacune possède une règle externe spécifique.

La première version, le problème des oranges obéit au scénario suivant : dans un restaurant 3 personnes assises à droite au milieu et à gauche commandent des oranges de différentes tailles : petite, moyenne et grande. La personne de gauche commande la plus grande orange, celle du milieu l'orange de taille moyenne, et celle de droite l'orange la plus petite. Une serveuse apporte les oranges dans une assiette, la pose face à la personne du milieu et les distribue suivant les consignes suivantes :

1. Une seule orange peut être déplacée à la fois,
2. On ne peut pas poser une orange dans une assiette s'il y en déjà une plus grosse,
3. On ne peut prendre que la plus grosse orange qui se trouve dans une assiette.

Les règles de ce problème sont toutes internes et le participant doit nécessairement les mémoriser pour les connaître car il n'y a pas de disposition des oranges qui faciliterait l'application des règles du fait qu'elles sont disposées dans l'assiette de façon à être déplacées librement. Dans la deuxième version, les oranges sont remplacées par 3 beignets en rondelle de taille petite, moyenne et grande, avec un trou au centre, on peut les empiler sur un des trois piquets placés sur un support comme dans la version de base de le tour de Hanoï. Dans cette version la règle 1 et 2 sont externes et la troisième est interne. La dernière version est un problème de trois tasses de café différentes, petite, moyenne, et grande remplies de café. Des trois règles précédemment citées, seule la première est interne, la deuxième, une petite tasse ne peut pas être posée sur une grande tasse sans renverser son contenu, et la troisième une tasse ne peut pas être déplacée si une autre tasse est déjà posée, sont des règles externes. Les trois versions sont présentées avec un matériel physique. Les résultats vont dans le sens des hypothèses de Zhang & Norman (1994). En effet, les versions où il y a plus de règles externes facilitent l'application des actions et sont plus faciles à résoudre que les versions qui en ont moins. En termes d'erreurs, il y a eu moins d'erreurs dans le problème des tasses que dans celui des oranges. En termes de nombre de coups, il y a eu 2 fois moins de coups dans la résolution du problème des tasses que dans celui des oranges. Zhang et Norman (1994) concluent également que la charge mentale requise dans la résolution des problèmes a un impact sur sa difficulté. Cependant, si les problèmes ont plus de règles externes qu'internes, cela contribue notablement à alléger le traitement du problème qui serait plus facilement réussi. L'externalisation des règles est un facteur facilitant le traitement du problème et est en rapport avec les affordances développées par Gibson (1979) qui sont les possibilités d'actions perçues sur les objets. Ce sont les propriétés des objets qui permettent de les utiliser et d'agir sur eux. Elles accompagnent le but d'une personne au cours de la résolution de problèmes. Dans le problème de la tour de Hanoï, la consigne, « Si plus de deux disques sont situés dans le même piquet, on ne peut déplacer que le plus petit », la décision du disque à prendre (on remarque qu'il s'agit du disque le plus petit) se fait directement à partir du moment où les propriétés des disques et leurs emplacements sur les piquets sont perçus. Aider les sujets à prendre du recul dans la situation d'exécution peut les aider à réorienter leur attention sur les propriétés pertinentes à la réalisation de la tâche, (Clément, 2009). Dans ce cas, cela les oblige à se détourner ou à s'éloigner momentanément du but.

Clément (2009), Richard et al. (2002) partagent l'explication de Kotovsky et al. (1985) et de Kotovsky et Fallside (1989) sur la différence de difficulté entre les problèmes isomorphes en termes de différence dans l'apprentissage des mouvements au cours de la résolution, mais apportent un éclairage différent sur les processus sémantiques impliqués dans l'apprentissage des mouvements. Ce sont ces processus qui offrent un contexte pertinent d'interprétation des opérateurs et qui créent un espace de recherche adéquat. Ces auteurs distinguent également deux points de vue dans la résolution de problèmes isomorphes : celui qui rend le résultat de l'action saillant et celui qui met en relief le déroulement de l'action. Le premier concerne les différents états, de l'état initial à l'état final, par lesquels on passe et qui permettent de résoudre le problème. Ce point de vue ne tient pas compte des processus utilisés pour passer d'un état à un autre. C'est l'interprétation des états qui permettent d'atteindre le résultat qui compte. Ce point de vue est abstrait car il n'indique pas de quelle manière une action peut s'effectuer, ces orientations restent implicites, c'est au participant de les inférer et les réaliser. Le problème de la tour de Hanoï facilite la prise en compte de ce point de vue. En effet, dans ce problème, on conçoit facilement qu'on peut déplacer un disque de n'importe quel emplacement à n'importe quel autre, alors que dans un problème de changement de taille il est difficile de concevoir qu'on peut changer directement une petite taille en une grande.

Afin de tester l'hypothèse selon laquelle apprendre à appliquer les règles du problème c'est utiliser le contexte sémantique qui permet de trouver l'opérateur adéquat et construire l'espace de recherche pertinent, Clément (1994, 1994, 1996, 2009) fait passer 4 expériences aux adultes dans lesquelles elle utilise les tâches d'évaluation de la légalité de mouvement (expérience 1 et 3) et les tâches de résolution de problèmes (expériences 2 et 4). Dans la première et la deuxième, elle présente 3 problèmes différents sur la nature de l'opérateur, dont 2 sur le changement de taille et 1 sur le déplacement. Dans ces expériences elle cherche à démontrer que le problème de déplacement était plus facile à comprendre et à résoudre que les deux problèmes de changement de taille. Dans la troisième et quatrième expérience, elle propose quatre problèmes en croisant le facteur nature de l'opérateur avec le facteur nature du point de vue. Les expériences 3 et 4 ont pour objectif de montrer que lorsqu'on rend le point de vue des processus ou des résultats plus ou moins saillant dans un problème de déplacement, cela peut influencer la procédure de résolution, ces deux points de vue n'étant pas spontanément perçus de la même façon dans les problèmes de changement de taille et de déplacement. Le point de vue des résultats est facilement perçu dans le problème de déplacement alors que dans le problème de changement il est très difficile d'abandonner le point de vue du processus qui conduit à la conception inadéquate que les seuls changements permis sont ceux de changement pour une taille voisine. C'est lorsque le solveur est conscient des règles correctes et des actions qu'elles permettent que les buts et sous buts sont planifiés.

Les résultats de la première expérience, qui porte sur les différences de difficulté selon la nature de l'opérateur dans une tâche de jugement de la légalité des actions montre que les problèmes de déplacement ont un temps de réponse plus court que ceux de changement de taille. Ceux-ci ont un temps de vérification d'application de règle plus long (deux fois plus), que les problèmes de déplacement. L'analyse des erreurs a montré d'une part, que les participants font des erreurs d'interprétation qui les conduisent à créer eux-mêmes des contraintes qui restreignent leurs actions et d'autre part que les participants violent les règles du problème en ne respectant pas les actions obligatoires ou les actions interdites, notamment dans les problèmes de changement (soit trois fois plus que dans les problèmes de déplacement). La deuxième expérience qui analyse les différences de difficulté selon la nature de l'opérateur dans une tâche de résolution de problème montre que le temps de résolution est plus long pour les problèmes de changement. Deux types de stratégies ont été observées : (i) la stratégie par essai-erreur qui privilégie la rapidité, et dans laquelle les participants essaient toutes les actions possibles et mêmes celles interdites par des règles pour résoudre le problème. Le temps pris pour les coups est moins long mais leur nombre est plus élevé, (ii) la stratégie de mémorisation des règles avant toute action. Cette stratégie évite de faire des erreurs et des violations de règles. Les temps par coup sont plus longs mais le nombre de coups réalisés est moins élevé. Le nombre de violations des règles est plus élevé dans le problème changement que dans le problème de déplacement.

Dans la troisième et la quatrième expérience (figure 2 page suivante). L'auteur veut montrer à travers ces deux expériences que si l'on met en relief le point de vue du processus de déroulement de l'action dans un problème de changement d'état dont la représentation la plus favorable est le point de vue du résultat de l'action, il sera difficile à résoudre. Dans les deux cas c'est le point de vue du résultat de l'action qui permet la résolution, c'est pourquoi dans les problèmes de changement il faut abandonner le point de vue du déroulement de l'action. Deux problèmes de déplacement et de changement isomorphes sont présentés chacun sous l'aspect résultat et l'aspect processus, selon le contexte sémantique. Cela revient pour chaque version à : (1) un problème de déplacement qui met en relief le point de vue du résultat (c'est un problème de la tour de Hanoï), compatible avec les règles de l'action telles que « déplacer », « prendre et poser » ; (2) un problème de déplacement qui met en relief le point de vue du processus, c'est un problème ascenseur. Dans ce dernier contexte, les participants doivent utiliser l'ascenseur pour déplacer des personnes d'un étage à un autre. Le trajet est l'aspect saillant dans cette situation car les participants détiennent des connaissances familières sur l'utilisation d'un ascenseur qui implique de passer par des étages intermédiaires. Cette représentation empêcherait de percevoir le point de vue du changement d'état résultant du déplacement comme « entrer à un étage » et « sortir d'un étage » sans tenir compte des étages par lesquels on passe ; (3) un problème de changement qui met en relief le point de vue du résultat, un problème des compteurs dans lequel on change la valeurs des compteurs en indiquant une valeur sans nécessairement donner au compteur des valeurs intermédiaires car les compteurs tournent automatiquement dans le sens que les participants désirent. Dans ce contexte, pour changer de valeur il faut enlever une valeur et la remplacer par une autre ; (4) un problème de changement qui met en relief le point de vue du processus, un problème de changement de taille comme ceux utilisés dans la première et la deuxième expérience. Dans ce dernier contexte, il est demandé aux sujets de changer la taille de cubes situés à trois emplacements, et l'interprétation de la représentation de « changer de taille » sera difficilement perçue comme « enlever » la taille actuelle et « donner » une nouvelle taille.

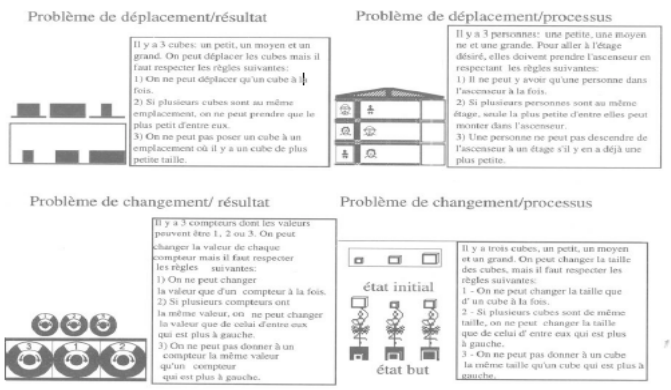


Figure 2. Les quatre problèmes isomorphes construits en croisant les facteurs « nature de l'opérateur » et « nature du point de vue » (Clément, 1996 P.421).

Le point de vue du processus augmente la difficulté des problèmes de déplacement (le problème des ascenseurs). Lorsque le point de vue des processus est saillant, le temps de réflexion est deux fois plus long pour répondre aux questions car les participants prennent le temps de juger de la légalité des actions proposées. Le point de vue axé sur le processus accentue la différence de difficulté entre les problèmes de changement et de déplacement (c'est le cas des problèmes des ascenseurs et de changement de taille) cependant le point de vue qui met en relief le résultat de l'action diminue cette distance (le problème de la tour de Hanoï et celui des compteurs). Les sujets violent plus les consignes dans les problèmes de changement et les respectent moins dans le contexte où le point de vue met en relief le processus de transformation de l'action. Les problèmes des ascenseurs et du changement de taille sont plus difficiles que les problèmes de la tour de Hanoï et des compteurs.

Dans la même optique De Viviés (1999) a réalisé une étude sur le point de vue et la représentation des règles dans la résolution de problèmes. Pour cerner le premier aspect, il utilise deux problèmes « de changement d'état » l'un étant la version classique du problème de la tour de Hanoï (cette version a été choisie pour avoir été utilisée par Clément en 1996), et l'autre des objets à déplacer d'une boîte à une autre. Et pour étudier l'aspect transformation, il se sert des problèmes de trafic routier, les sujets devaient déplacer trois véhicules d'un garage à un autre. Cette version suggère des informations qui orientent la représentation plutôt du côté du changement d'état ou du côté de la transformation. Ces conditions sont associées aux représentations externes et internes des règles pour la résolution de problèmes. Ces résultats montrent que le point de vue de l'opérateur, que ce soit le changement d'état ou la transformation, influence le temps de résolution. La représentation des règles influence également la résolution, elles peuvent être externes ou internes. Les règles externes augmentent considérablement les réussites des problèmes. Ces résultats s'expliquent par le fait que la représentation du problème fait intervenir « la construction de l'opérateur » : lorsqu'il faut au cours d'un état anticiper sur l'état suivant, le problème est plus long à résoudre. Elle fait également intervenir « la planification générale » au cours de laquelle les sous buts permettent d'aboutir à la résolution, ceux sélectionnés permettent de respecter les consignes à suivre et ces consignes ont des supports externes.

Ces recherches ont mis en exergue les contextes qui favorisent la résolution de problèmes et ont montré que le point de vue adopté pour résoudre un problème n'est pas toujours un point de vue pertinent. Les résultats des expériences de Clément (1994) montrent que le point de vue du résultat facilite la compréhension du problème, qu'il s'agisse des problèmes de déplacement ou de changement. Le point de vue du processus de déroulement de l'action, quand il est suggéré par le contexte du problème (comme un changement de taille) doit être abandonné parce qu'inapproprié dans les problèmes de type tour de Hanoi. Les propriétés sémantiques mises en évidence permettent de définir le point de vue de l'opérateur de l'action pour résoudre le problème (Clément, et Richard, 1997 ; De Viviés, 1999). Le cadre de description de la situation du problème, lorsqu'il n'est pas saillant, peut rendre la résolution difficile.

Ainsi, l'adoption d'un point de vue différent de celui que suggère le contexte du problème est souvent très difficile. Les recherches sur le changement de point de vue dans l'interprétation l'ont bien démontré. Aussi, dans la section suivante, nous allons analyser les recherches qui ont montré les limites des connaissances antérieures sur la résolution des problèmes et comment ces connaissances peuvent empêcher la découverte de la solution et le changement de point de vue sur une situation.

I.2. L'importance du changement de point de vue dans la résolution de problèmes

En introduction de ce chapitre nous avons indiqué que les gestaltistes s'opposaient aux béhavioristes sur le fait qu'ils considéraient les connaissances antérieures comme un facteur empêchant la création des solutions originales, et pour utiliser des termes actuels, ces connaissances empêchent de changer de point de vue dans la résolution de problèmes, mènent quelques fois à des situations d'impasses et à des fixations.

Le phénomène de fixation se manifeste en résolution de problème par la persévération de l'erreur produite dans le probléme précédent. La représentation joue un rôle dans l'interprétation qui mènera à la résolution du problème. Les recherches menées sur la difficulté de changer la représentation d'un problème montrent que les propriétés perceptives y jouent un rôle. L'un des problèmes les plus connus qui montrent la découverte de la solution est celui des 9 points de Maier (1930). Il s'agit d'un problème composé de 9 points dont trois sont disposés dans trois lignes et trois colonnes, cette structure forme un carré. Le but est de relier tous les points, sans lever le crayon, en utilisant quatre segments de droite. La difficulté de résoudre ce problème vient de la présentation du problème sous la forme d'un carré que les participants ont du mal à dépasser. Ils essaient de résoudre le problème en respectant la configuration du carré et en se donnant la contrainte implicite de ne pas sortir du carré ; cela les empêche de trouver la solution qui nécessite de sortir de la bonne forme du carré pour résoudre le problème. Pour les gestaltistes, la perception saillante des points sous la forme d'un carré empêche de changer la représentation du problème, dont la solution requiert la restructuration des éléments et la configuration : il faut dépasser la bonne forme et considérer que pour relier les traits, il faut dépasser la configuration initiale du carré. Or, on assiste à un phénomène de fixation des essais à l'intérieur du carré par certains participants, alors que ceux qui parviennent à sortir du carré arrivent à la solution après de nombreux essais.

Une autre expérience qui porte sur les propriétés familières qui empêchent d'envisager une fonction alternative des objets d'un problème a été présentée par Dunker (1945). Dans cette étude, il présente au sujet une bougie, une boîte remplie d'allumettes et une remplie de punaises. La tâche consiste à faire tenir la bougie au mur et de l'allumer. Pour ce faire, il faut vider l'une des deux boîtes, allumer la bougie et la faire fondre sur la boîte choisie et fixer la boîte au mûr à l'aide des punaises pour qu'elle serve de support à la bougie. L'expérience a montré que cette tâche est plus facile à réaliser lorsque les deux boîtes sont vides, et que les allumettes et les punaises sont mises de part et d'autre. Lorsque les boîtes sont remplies de punaises et d'allumettes, il est difficile de percevoir leur fonction de support. Ce n'est pas le cas quand elles sont vides, car cette fonctionnalité est alors facilement perçue. Pour Sander et Richard (1997), cette difficulté de percevoir que la boîte peut être considérée comme un support s'explique par les propriétés habituellement attribuées à une boîte. Dans la vie quotidienne, les propriétés attribuées à une boîte sont celles relatives à un contenant ; c'est la mise en relief de cette considération qui bloque la prise en compte des propriétés du carton comme support pour réussir le problème. Ces propriétés sont aisément perçues quand la boîte est vide car elles ne sont plus masquées par les propriétés d'un contenant.

Dans le même sens, en s'inspirant des travaux de Maier (1930 ; 1931), une expérience en deux tâches a été réalisée par Birch et Rabinowitz (1951) pour observer le phénomène de fixité fonctionnelle. La première tâche consistait pour la moitié du groupe à compléter un circuit électrique en se servant d'un interrupteur et à l'autre moitié du groupe de le compléter à l'aide d'un relais. Dans la seconde tâche, il fallait rapprocher deux cordes suspendues éloignées l'une de l'autre d'une certaine distance. L'interrupteur et le relais utilisés dans la première tâche pouvaient servir de support pour rapprocher les deux cordes. Les participants devaient attacher soit le relais soit l'interrupteur à l'une des deux cordes le faire basculer, aller saisir la deuxième corde, et attendre que la première corde parvienne à la deuxième pour la saisir et les attacher. Il a été observé que les sujets qui avaient au départ utilisé le relais dans la première tâche utilisaient l'interrupteur pour attacher les deux cordes et ceux qui s'étaient servis de l'interrupteur utilisaient le relais. Ces expériences ramènent à la notion d'affordance qui peut bloquer la flexibilité dans l'utilisation des objets. Les connaissances familières sur les fonctions des objets guident vers une représentation spécifique et vers un cheminement de solution. C'est la raison pour laquelle une boîte remplie de bougie fait difficilement percevoir qu'il peut servir de support.

Wickelgren (1974) propose le problème de l'échiquier tronqué pour montrer la nécessité de changer de point de vue dans la résolution. L'énoncé est le suivant : « On vous donne un damier de 32 dominos, chaque domino couvre deux cases adjacentes du damier. Ainsi, les 32 dominos peuvent couvrir les 64 cases du damier. Supposez maintenant qu'un carré noir soit enlevé dans chacun des deux coins diagonalement opposés du damier. Est-il possible de placer 31 dominos sur le damier de sorte que les 62 cases restantes soient totalement couvertes. Si cela est possible prouvez-le, sinon démontrez le contraire ».[2]

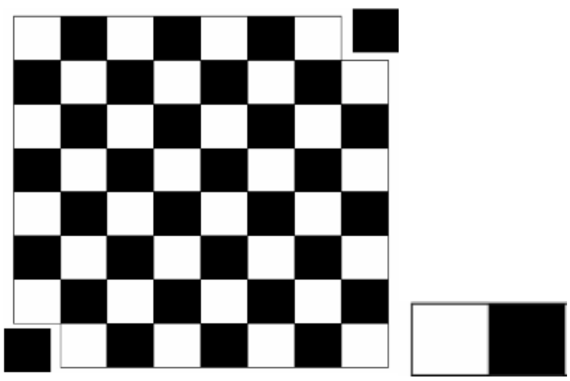


Figure 3. Le problème de l'échiquier tronqué (Wilckelgren, 1974).

[2] Selon notre traduction

Lorsque les participants commencent à traiter ce problème, ils considèrent la disposition des dominos sur le damier, ce qui laisse penser que le problème est soluble. Or en adoptant ce point de vue, ils se fixent sur l'indice de l'énoncé sur l'égalité du nombre de cases et des demi-dominos qui conduit les participants à ne pas adopter le point de vue pertinent, celui de la couleur des cases. En effet, si on prend en compte la couleur des cases, le raisonnement selon lequel un domino couvre une case noire et une case blanche, si on dispose 30 dominos, on couvrira 30 cases blanches et 30 cases noires. A la fin de cette opération il restera 2 cases noires. Pour prouver que ce problème est insoluble, certains participants ont besoin d'aide pour se détourner de la tentative de recouvrir les cases par les dominos. Le changement de point de vue est dans ce cas aussi nécessaire pour trouver la solution du problème.

L'expérience passée peut dans certains contextes faire obstacle à la découverte d'une solution alternative et entrainer une mécanisation de la pensée et une fixité fonctionnelle dans la résolution de problèmes. Les connaissances acquises à partir de celles d'un problème antérieur peuvent empêcher la découverte d'une solution originale, plus simple ou plus adaptée à la résolution du problème en cours. Luchins (1942), Luchins et Luchins (1959) ont montré les effets de la mécanisation de la pensée dans des expériences sur les problèmes de jarres. Ils ont utilisé les problèmes de jarres dans le but de montrer la difficulté de changer de stratégie dans les situations où deux procédures de résolution sont possibles. La base de l'expérience est la suivante : à partir de trois jarres non graduées de contenances différentes, il faut obtenir par des transvasements une quantité d'eau déterminée en se basant sur les capacités de chaque jarre. Après avoir montré un modèle de résolution, il est demandé aux participants de résoudre les dix problèmes restants (Tableau 1). La même solution est possible pour résoudre les problèmes de 2 à 6 : remplir la plus grande jarre (B), verser son contenu une fois dans la moyenne (A) et deux fois dans la plus petite (2C), la quantité restante constitue la réponse au problème (B-A-C-C). Cette procédure est également applicable aux problèmes suivants mais une solution alternative, plus simple, peut être utilisée. L'introduction de la novelle procédure permet de vérifier si la procédure utilisée au départ peut être abandonnée au profit d'une plus simple. Pour les problèmes 7 et 11 il faut remplir la jarre moyenne (A) et transvaser le contenu dans la petite jarre (C), la quantité restante est la réponse au problème (A-C). Pour obtenir la solution des problèmes 8 et 10, on peut mettre ensemble les jarres moyenne (A) et petite (C) après les avoir remplies (A+C). Seul le problème 9 ne peut se résoudre que par une seule solution : remplir la jarre (A) et verser le contenu dans la jarre (C), la quantité restante est la solution recherchée (A-C). Les résultats ont montré que bien qu'ayant une solution simple le problème 9 n'est pas réussi ; le taux d'échec est de à 64 %. Les participants continuent à utiliser la procédure B-A-C-C, même lorsqu'il est possible d'utiliser une procédure plus simple (83% pour les problèmes 7 et 8). Cependant, les participants qui n'ont résolu que les problèmes de 7 à 11 ont peu utilisé la méthode B-A-C-C et leur taux d'échec est très bas 9 (soit 5%). Ces résultats montrent la grande difficulté que les sujets rencontrent pour abandonner une solution apprise pour utiliser une autre plus simple. Les sujets ne parviennent pas à se détacher de cette procédure pour reconstruire une nouvelle représentation des problèmes et continuent d'appliquer les solutions apprises dans les problèmes précédents. Cette expérience montre que l'application des connaissances acquises dans une expérience antérieure peut mener à des fixations et bloquer l'analyse pertinente des éléments de la situation afin de trouver une solution alternative permettant une économie cognitive, en termes de temps de résolution et de procédure à mettre en œuvre.

Problèmes	Capacité jarre A B C	Quantité désirée	Procédure de résolution
Problème 1	29 3	20	B-3C
Problème 2	21 127 3	100	B-A-2C
Problème 3	14 163 25	99	B-A-2C
Problème 4	18 43 10	5	B-A-2C
Problème 5	9 42 6	21	B-A-2C ou A+2C
Problème 6	20 59 4	31	B-A-2C
Problème 7	23 49 3	20	B-A-2C ou A-C
Problème 8	15 39 3	18	B-A-2C ou A+C
Problème 9	28 76 3	25	A-C
Problème10	18 48 4	22	B-A-2C ou A+C
Problème 11	14 36 8	6	B-A-2C ou A-C

Tableau 1. Les problèmes de jarres (d'après Luchins & Luchins, 1959, p.109).

Dans la continuité de ces recherches, Clément (2001, 2006, 2008, 2009) a réalisé une série de recherches pour montrer que pour changer de point de vue, il faut avoir une certaine flexibilité mentale qui aide à recoder les éléments du problème. L'auteure définit la flexibilité cognitive comme un mécanisme qui participe à l'acquisition de nouvelles connaissances. Elle permet, dans une situation-problème, d'analyser la situation et de sélectionner le point de vue le plus adapté à la résolution. C'est un processus d'adaptation et une preuve de conduite intelligente. A partir d'une expérience, l'auteur a réalisé une analyse qualitative (2006) sur l'apprentissage et ses conséquences sur l'automatisation de la procédure optimale[3]. Il s'agit dans cette étude de faire apprendre aux élèves, par leur propre contrôle, à résoudre un problème de la tour de Hanoï. Pour cela, elle demandait aux enfants de trouver la solution du problème qui s'effectuait en peu d'actions, soit en 5 étapes. A la fin de chaque essai, l'expérimentateur indiquait à l'enfant s'il avait trouvé cette procédure. Un maximum d'essais était requis pour s'assurer que l'apprentissage était emprunt d'automatisme. L'effet de cet apprentissage a été testé au bout de quinze jours. Pour analyser les performances, il fallait cinq résolutions successives en cinq actions. En phase test le critère retenu était la résolution optimale en cinq étapes. Les résultats de cet apprentissage montrent que parmi les enfants qui ont réussi à la phase d'apprentissage certains se trouvent dans le groupe qui utilise la solution optimale et d'autres dans le groupe qui ne l'utilise pas lors de la phase test. Les enfants qui utilisent la solution optimale montrent une flexibilité dans l'exploration de l'espace de recherche, car ils ne reviennent pas sur les états auparavant visités. Ce n'est pas le cas pour ceux qui n'ont pas réussi qui reviennent plusieurs fois sur les espaces déjà visités et répètent les mêmes actions à l'intérieur de leurs espaces de recherche.

Dans la résolution de problèmes, les situations statiques où les sujets ne parviennent plus à avancer vers une solution sont des situations d'impasses. Ces situations sont particulièrement intéressantes car elles constituent un point de départ pour le changement de point de vue. En effet, après des recherches infructueuses dans l'espace de recherche, des retours en arrière, des violations des règles et des consignes, les sujets ne trouvent pas le moyen d'avancer vers la solution, jugent le problème sans solution et abandonnent l'activité. Selon Clément (2009 p.124) : « l'impasse est l'état dans lequel la liste courante de contraintes n'autorise plus aucune action. La seule façon de sortir de l'impasse est la relaxation de contraintes jusqu'à ce qu'une action soit possible ». Pour sortir des impasses il faut gérer les contraintes, les violations des règles, les buts intermédiaires (qui nécessitent de respecter les règles tout en réalisant quelques conduites de détour pour atteindre le but final). Les violations des règles sont souvent guidées par l'objectif d'atteindre directement le but du

[3] La procédure optimale est la solution que l'on trouve en peu d'action ou en un minimum de coup. C'est le chemin le plus court pour atteindre le but du problème. Rapidité, simplicité et économie cognitive.

problème. Les situations d'impasse permettent à certains sujets de changer de point de vue. Ils arrivent à abandonner les codages non pertinents pour identifier les propriétés plus adéquates à la situation qui mènent vers la solution. Et pour d'autres, au contraire, ils persistent en réalisant les mêmes actions dans l'espace de recherche.

La flexibilité réactive est déclenchée soit lorsqu'on se trouve en situation d'impasse, soit lorsqu'on réalise que la procédure précédemment utilisée est infructueuse et qu'il faut procéder au recodage des propriétés de la situation. Les conduites de persévération se manifestent lorsque les sujets continuent d'utiliser une procédure apprise alors qu'elle n'est pas appropriée pour résoudre le problème. Cette conduite de persévération se poursuit même lorsqu'on donne des indices sur le recodage de la situation. Clément, (2001, 2006, 2008) a étudié la flexibilité mentale dans la résolution de problèmes. Elle a notamment étudié les problèmes de jarres de Luchins (Tableau 1) pour différencier la flexibilité spontanée, la flexibilité réactive et les conduites de persévération. La flexibilité spontanée s'observe dans le cadre d'une application d'une procédure apprise précédemment dans une situation similaire. Dans les problèmes de jarres il y a deux types d'analyse qu'on peut effectuer, l'analyse des procédures à appliquer et l'analyse des propriétés. La première est relative à la combinaison des jarres et la deuxième aux nombre de jarres à utiliser pour résoudre le problème. S'il est possible d'utiliser trois jarres dans certaines situations (problèmes, 2, 3, 4 et 6), cela n'est pas le cas dans d'autres, il faut en utiliser deux (problème 9). Dans le cas où les deux procédures sont applicables (problème, 5, 7, 8, 10 et 11), il faut s'engager dans la recherche d'une autre procédure. Lorsqu'on procède très tôt à l'analyse des propriétés du recodage de la situation, cela permet d'éviter les situations d'impasse (par exemple la représentation de la solution à deux jarres dans le problème 7 indique un recodage des propriétés). Dans la situation d'impasse au cours de la quelle on se retrouve après l'utilisation d'une ancienne procédure alors qu'une autre doit être effectuée (tenir compte de deux jarres au lieu de trois), soit les sujets prêtent attention aux propriétés de la situation jusqu'alors ignorées, soit ils n'y font pas attention et continuent de faire des essais avec trois jarres jusqu'à ce qu'un indice leur soit fourni sur la nécessité de changer de codage sur les propriétés du problème pour qu'ils appliquent la solution à deux jarres.

Les problèmes de jarres sont particulièrement intéressants car ils montrent plusieurs aspects de la résolution de problèmes. D'abord nous pouvons noter qu'ils démontrent la possibilité de procéder à une analyse des propriétés d'une situation et d'y percevoir les différents points de vue et adopter celui qui est le plus efficient. Cela relève d'une capacité de flexibilité en résolution de problème. Cette flexibilité peut également s'observer dans des situations d'impasse ; dans ce cas ce sont les propriétés du problème qui contraignent à une représentation alternative, sinon on persiste dans des situations où la solution serait définitivement impossible. Ils montrent également les problèmes de transfert des connaissances en résolution des problèmes. En effet, nous avons vu que, dans ces situations, l'application de la procédure à trois jarres devenait inappropriée pour résoudre le problème 9 mais que certains sujets continuaient à l'appliquer. Ces résultats conduisent à se poser la question de la nature du transfert en résolution de problème, comment il s'opère, quels processus entrent en jeux, et dans quelles conditions peut-on réussir le transfert sans craindre de rester dans la simple application des procédures, mais de procéder à un recodage des propriétés de la situation. Pour tenter de répondre à ces questions, nous faisons, dans la section suivante, une présentation de recherches qui se sont intéressées au transfert analogique en résolution de problème.

I.3. Le rôle de l'analogie et du transfert dans la résolution de problèmes

Raisonner à partir d'une situation connue pour en comprendre une nouvelle, c'est faire de l'analogie. Ce mécanisme cognitif a d'abord été étudié dans un contexte philosophique dont Aristote est le fondateur. Son étude s'est ensuite développée dans le domaine de la linguistique, et est, depuis quelques années, étudiée dans le domaine de la psychologie. La comparaison, la catégorisation et l'abstraction sont trois angles à partir desquels se manifeste l'analogie. L'analogie est un processus de traitement de l'information qui consiste à traiter une situation nouvelle en se basant sur une procédure déjà utilisée dans une autre situation semblable du point de vue de leurs structures apparentes ou sous jacentes. C'est un mode de transfert des apprentissages et d'abstraction des connaissances qui trouve un lien entre une situation déjà connue et une nouvelle. Dans le raisonnement analogique, on parle d'un élément cible pour désigner la situation nouvelle, objet du problème à résoudre et d'une source, situation ancienne activée en mémoire afin d'appliquer sa solution à la situation cible. L'analogie utilise donc les connaissances des expériences passées, de la mémoire à long terme, pour résoudre de nouveaux problèmes. Pour les appliquer à une nouvelle situation il faut trouver un lien entre la situation passée et la situation actuelle et faire une mise en correspondance entre le problème passé et le problème en cours de résolution. Ces deux situations peuvent se ressembler soit sur le plan de la forme ou du fond. L'objet de ce mécanisme est d'élaborer de nouvelles connaissances en intégrant les deux problèmes dans une catégorie plus abstraite dans laquelle ils sont des exemplaires par leurs éléments communs et par des relations qu'ils entretiennent.

Dans les premières considérations, l'analogie est vue comme une relation symétrique entre quatre termes. En considérant les éléments, A, B, C et D, à partir des relations de proportionnalité qu'ils peuvent entretenir, il est possible de considérer que « B est à A ce que D est à C ». Cette conception de l'analogie a fait l'objet de plusieurs recherches en psychologie expérimentale (notamment Gentner, 1977 ; Sternberg, 1977). Ensuite les travaux se sont orientés vers la recherche d'une mise en correspondance entre un domaine source et un domaine cible. A ce propos, les travaux réalisés d'un côté par Gentner (1983) et de l'autre, par Holyoak (1985) représentent les bases théoriques du nouvel axe de recherche sur l'analogie. Gentner, développe la théorie de la projection des structures (Structure Mapping Theory) et celle de Holyoak porte sur les contraintes auxquelles ce mécanisme obéit.

Pour expliquer sa théorie Gentner part de l'organisation des connaissances en mémoire sous la forme des réseaux de propositions. Les propositions sont composées des nœuds (reliés par des arcs avec flèches et étiquettes pour marquer leur relation) dont chacun possède un argument (les concepts) et les prédicats (qui fournissent une information sur un état de connaissance des concepts et des relations qu'ils peuvent entretenir). Le nœud d'un argument, évocation d'un objet réel, est représenté par une lettre majuscule, le nœud d'un prédicat qui indique une proposition sur un nom, est représenté par une lettre minuscule. Gentner et ses collaborateurs expliquent cette organisation en prenant l'exemple des connaissances sur le système solaire. Les concepts et les relations qu'ils entretiennent sont organisés en mémoire sous forme de structures. De ce fait, les domaines qui sont analogues possèdent des structures qui se ressemblent. Les structures de la situation source seront projetées dans la situation cible. Les relations unissant les concepts du domaine cible seront projetées dans la nouvelle situation. Pour Gentner (1977) si les concepts du domaine source jouent le même rôle que ceux de la situation cible, le domaine source peut servir de modèle au domaine cible, on peut effectuer une projection des structures, « structure mapping ». C'est à partir de cette projection que les solutions du domaine source peuvent être transférées au domaine cible. L'appariement de structures ne dépend donc pas des objets impliqués dans les informations mais des rôles qu'ils jouent et des relations qu'ils entretiennent. L'appariement entre les deux domaines s'effectue sur le plan des relations, et leur niveau abstraction est un bon indicateur de la richesse de l'analogie.

Holyoak et ses collaborateurs apportent une alternative pragmatique à l'étude sur l'analogie par l'explication de la théorie des schémas. En effet, ces auteurs présentent l'analogie comme une méthode qui permet de résoudre les problèmes à partir d'une expérience analogue antérieure. Ces auteurs reconnaissent comme dans les travaux de Gentner que l'analogie se base sur la correspondance des ressemblances entre les traits de structure et les traits de surface. Pour construire un schémas général à deux situations analogues, une représentation locale est faite sur chaque situation-problème, pour le problème source elle a été effectuée antérieurement et stockée dans la mémoire à long terme, elle sera activée lorsqu'elle sera évoquée par la situation-cible. La représentation de celle-ci est effectuée en cours de traitement. Les deux situation analogues vont former par leurs éléments communs un schémas plus général et abstrait. Holyoak et ses collaborateurs (Gick et Holyoak, 1980, Holyoak, 1984) joignent l'apprentissage aux éléments de l'analogie développés par Gentner (le recouvrement d'une source, la projection des structures et le transfert de la solution). Le recouvrement de l'analogue peut être spontané ; dans le cas contraire, il faut rechercher par des indices, des ressemblances, des plans ou des schémas les situations analogues au problème cible. La projection procède à la mise en correspondance des relations communes entre les problèmes à partir de la représentation de chacun des domaines qu'ils représentent. Le rôle des arguments des deux situations oriente la projection. Celle-ci permettra de définir la solution du problème cible qui sera mise en correspondance avec la solution du problème source. Pour Holyoak et ses collaborateurs, le mécanisme de projection est géré et contrôlé par l'activation de la source et du but à réaliser. La dernière phase, l'apprentissage à partir du nouveau problème, se construit après le transfert analogique de la solution du problème source activé. Cette solution sera conservée en mémoire et servira plus tard de source dont les inférences serviront de point de départ pour un transfert vers une situation semblable.

Reed et al. (1974) ont étudié le transfert entre des problèmes, celui des missionnaires et des cannibales et celui des maris jaloux (Encadré 3). Dans le problème des missionnaires, il faut inférer que le conducteur du bateau fait partie de l'effectif des personnes qui traversent la rivière et aussi, que ce soit dans le bateau ou à la rive, qu'il n'y ait plus de cannibales que de missionnaires. Les missionnaires et les cannibales sont symétriques dans le sens où n'importe quel missionnaire peut être apparié à n'importe quel cannibale, il n'y a pas de contrainte dans la représentation. Ce qui n'est pas le cas dans celui des maris jaloux pour lequel, il y a une contrainte d'appariement entre maris et femmes, de façon qu'aucune femme ne doive être laissée en compagnie d'un autre mari quand le sien est absent. Les résultats ont montré qu'il y a peu de transfert spontané entre les deux problèmes. Quand les sujets sont informés sur la similitude entre les deux problèmes, il y a un effet d'asymétrie dans le sens de résolution maris jaloux vers missionnaires et cannibales : le temps de résolution est plus court et les sujets font moins d'erreurs. Les auteurs attribuent cet effet d'asymétrie au fait que les deux espaces problèmes n'ont pas les mêmes contraintes dans leur représentation.

Le problème des missionnaires et des cannibales

Trois missionnaires et trois cannibales se trouvent sur la même rive d'une rivière. Ils voudraient tous se rendre sur l'autre rive. Cependant, si le nombre de cannibales est supérieur à celui des missionnaires, alors les cannibales mangeront les missionnaires. Le seul bateau disponible ne peut pas supporter le poids de plus de deux personnes. Comment est-ce que tout le monde peut traverser la rivière sans que les missionnaires risquent d'être mangés ?

But : Faire traverser les trois missionnaires et les trois cannibales pour qu'ils se trouvent sur l'autre rive.

Le problème des maris jaloux

Trois maris et leurs femmes qui doivent traverser une rivière trouvent un bateau. Celui-ci ne peut pas prendre plus de deux personnes à son bord. Trouver le moyen le plus simple de traverser qui permettra aux 6 personnes de traverser de telle sorte qu'aucune femme n'est laissée en compagnie du mari d'une autre femme en l'absence de son propre mari. Aucun des passagers ne doit descendre avant la rive et au moins une personne doit être dans le bateau à chaque traversée.

But : Faire traverser les maris et leurs femmes pour qu'ils se trouvent sur l'autre rive.

Encadré 3. Le problème des missionnaires et des cannibales et celui des maris jaloux, (Reed, Ernst et Banerji, 1974, p 438).

Les recherches menées par Hayes & Simon (1974) ; Kotovsky et al. (1985) ont montré qu'un transfert positif s'observe lorsque le temps de résolution du problème, le nombre de coup réalisés et le nombre d'erreurs baissent sur le problème cible. Ces auteurs ont étudié les problèmes de déplacement des monstres et les deux versions de problèmes des « acrobates » et « acrobates inversés ». Dans une expérience, ils ont présenté aux sujets le problème des acrobates, dont la configuration est compatible avec les connaissances familières et la version de monstres. Ces deux problèmes ne possèdent pas d'opérateurs compatibles. Certains sujets ont commencé par résoudre le problème des acrobates et ensuite celui des monstres et d'autres ont commencé par résoudre le problème de monstres et résolu par la suite le problème des acrobates. Les résultats n'ont montré aucun transfert significatif dans les deux sens. Dans une autre expérience ils ont proposé le problème des acrobates inversés et celui de monstres. La version des acrobates est incompatible avec les connaissances familières du fait que le sens des déplacement des tailles est inversé (du plus petit au plus grand) mais elle est compatible avec les contraintes du problèmes de monstres dans le sens où les plus grands monstres empêchent les petits de se déplacer. Dans ces deux versions, les mêmes actions peuvent être utilisées pour résoudre ces problèmes. Les résultats montrent un transfert asymétrique dans le sens problème des acrobates inversés-problème de monstres soit 57.1% contre 38.5% dans le sens inverse. Cette dernière expérience montre que le transfert entre deux problèmes isomorphes peut être facilité par la compatibilité de leurs actions. Les mêmes résultats ont été également observés par Kotovsky et Fallside (1989). Ils ont donné à résoudre par ordinateur deux versions isomorphes de la tour de Hanoï dont l'opérateur porte sur le changement de taille et peut être perçu le point de vue de la taille ou de la distance de l'objet. Une version de la présentation de la taille était réelle et l'autre était dû à un effet d'optique[4] qui faisait qu'un objet proche était perçu comme éloigné. Pour étudier l'effet de transfert d'apprentissage, qui portait sur le temps de résolution de problèmes, ils ont croisé toutes les variables : taille-taille ; taille-distance, distance-taille et distance-distance. Bien que dans ces problèmes les stimuli physiques soient identiques dans toutes les versions, les résultats montrent un transfert positif lorsque les participants comprennent que deux versions, taille-taille, distance-distance, ont les actions compatibles. La résolution du deuxième problème prend moins de temps que le premier et les règles d'actions sont moins violées. Ainsi, il a été observé que la similitude des opérateurs est un facteur qui facilite le transfert entre les problèmes isomorphes, car dans les autres versions, seule l'interprétation des actions a été perçue**.**

[4] Un effet de profondeur du champ, les objets proches paraissent plus grands *vs*. Ceux qui sont plus loin paraissent plus petits

I.3.1. Le niveau d'expertise et l'utilisation de la structure profonde et les traits de surface dans le transfert analogique

Pour réussir un transfert analogique des conditions doivent être remplies, à savoir : accéder à la source, utiliser cette source par une mise en correspondance avec le problème cible par des ajustements. Pour remplir ces conditions, il faut une ressemblance entre la source et la cible ; elle peut s'établir sur le plan superficiel ou structurel correspondant à la forme de présentation du problème. Les problèmes source et cible doivent avoir la même structure de solution et les mêmes buts. Les traits de surface correspondent aux informations relatives à l'énoncé du problème, les objets, les actions, le thème développé, le scénario de l'histoire, les acteurs et leur rôle dans le scénario, la forme de la formulation du problème. Ils ne jouent aucun rôle dans le choix de la solution entre le problème source et le problème cible, mais dans l'accès au problème source, et peuvent servir d'indice de récupération de la source. Les traits de structures sont des éléments qui correspondent à la structure profonde, cette structure est caractérisée par les relations entre les prédicats et un schéma beaucoup plus général de la situation-problème. Selon Sander et Richard (2005), ces deux structures se différencient en ce sens que les traits de surface ne sont pas essentiels pour atteindre l'objectif du problème, alors que les traits de structures le sont. Les traits de structure orientent le choix de la solution et garantissent le transfert car le schéma de solution du problème est lié aux traits de structure, d'où la nécessité de faire des connexions entre les relations communes de la source et la cible (Gineste, 1997). Les travaux réalisés en résolution de problèmes montrent que la structure profonde et les traits de surface jouent un rôle pour favoriser ou non le transfert de résolution. Ces deux éléments sont nécessaires pour accéder au problème source. Lorsque les traits de surface et de structure permettent d'accéder à la bonne source, on parle de transfert positif. Dans le cas contraire, il s'agit d'un transfert négatif. A travers les recherches menées sur l'analogie il a été montré que ce n'est pas la mise en correspondance entre les éléments des problèmes qui est difficile mais la sélection du problème source qui permettrait de faire l'analogie. Pour cerner cette principale difficulté de trouver le problème source on s'est attaché à trouver la différence entre les traits de structure et de surface notamment dans l'analogie spontanée.

Le but est d'observer dans quelles conditions la solution du problème source est utilisée pour résoudre le problème cible, et si l'analogie entre ces deux problèmes serait effectuée spontanément. Les auteurs utilisent dans leurs expériences le problème de

« radiation d'une tumeur » décrit par Duncker (1945) et le problème de la forteresse. Pour réaliser l'analogie entre ces deux problèmes il faut procéder à une mise en correspondance qui permet d'appliquer une solution de convergence commune aux deux problèmes. Dans le problème de la tumeur il faut atteindre un but : la destruction de la tumeur. Pour cela, il faut diriger simultanément différents rayons de faible intensité sur la tumeur tout en respectant la contrainte de ne pas détruire les cellules saines au passage. Le principe ou le schéma de solution est le même pour le problème militaire ; par analogie, le but est de prendre la forteresse (correspondant dans le problème source à : « il faut détruire la tumeur »). Pour y parvenir il faut répartir les soldats en plusieurs groupes à travers différentes routes qui mènent à la forteresse sans courir le risque de faire exploser des mines (correspondant à diriger plusieurs rayons de faibles intensités vers la tumeur pour ne pas détruire les cellules saines). Dans cette expérience, 20% des participants transfèrent spontanément la solution du problème de la forteresse à la solution du problème de la tumeur. Le pourcentage de transfert augmente considérablement jusqu'à 92% lorsqu'on indique aux participants que le premier problème peut aider à résoudre le second. Gick et Holyoak (1983) ont conclu que l'analogie implique bien une activation des connaissances antérieures.

Lorsque certains problèmes ne partagent pas les mêmes traits de surface les sujets ne réussissent le transfert que s'ils ont des informations d'accès à la source. Gick et Holyoak (1983) montrent également que la similarité entre les traits de structure et les traits de surface augmente le taux de transfert. Ils ont utilisé, pour cela, les problèmes des deux cordes de Maier (encadré 4) et celui de la fête d'anniversaire qui partagent les mêmes traits de structure et de surface. Les résultats montrent un taux de transfert spontané positif dans le groupe ayant appris le problème d'anniversaire. 98% de participants réussissent mieux le problème de deux cordes lorsqu'ils ont appris le problème d'anniversaire et seulement 30% du groupe contrôle réussissent à réaliser le même transfert.

Ces résultats ont été également observés par Ross (1984) dans les problèmes d'algèbre. Il a fait résoudre les problèmes dont (i) les énoncés sont similaires aux conditions d'apprentissage de la formule de solution, (ii) les énoncés sont résolus dans un contexte neutre. On observe les mêmes résultats chez les experts dans les études de Blessing et Ross (1996). Holyoak et Koh (1987) ont présenté le problème de l'ampoule similaire au problème de la tumeur sur les traits de structure et de surface. Pour résoudre le problème de l'ampoule, il faut la réparer en soudant son filament à l'aide de plusieurs rayons de laser de faible intensité. Lorsque ce problème est présenté comme source 81 % des participants transfèrent spontanément la solution vers le problème de la tumeur. Lorsque le problème de l'ampoule n'est pas présenté au préalable dans un groupe contrôle seul 10 % applique cette solution. Ces résultats montrent que le transfert spontané est facilité par la ressemblance des traits de surface qui sont une aide à l'évocation et à la récupération d'un problème source, les traits de structures aident à la fois à l'évocation de la source et à la mise en correspondance pour la solution.

Le problème des deux cordes, Maier (1930 ; 1931) :

« Supposez que vous soyez dans une pièce où deux cordes sont attachées au plafond. La longueur de ces deux cordes est telle que vous ne pouvez les attacher ensemble, les deux cordes sont d'une longueur telle que quand vous en tenez une, vous ne pouvez pas attraper l'autre. Votre tâche est de les attacher. Pour vous aider vous pouvez utiliser tous les objets qui se trouvent dans cette liste : poteaux, pinces, tenailles, rallonges, tables, chaises. »

Solution « analogique » : attacher les tenailles à une corde et provoquer un effet de balancier.

Le problème de la fête d'anniversaire (traduction du texte de Gick & Holyoak, 1983) :

« C'était le sixième anniversaire de Jane et sa mère tenait à en faire un jour spécial pour elle. Elle organisa donc une grande fête surprise et y invita les enfants du voisinage sans rien dire à Jane. Il était prévu que la mère de Jane, qui d'habitude venait la chercher après l'école, serait ce jour-là en retard pour pouvoir permettre aux enfants d'arriver avant Jane. Le grand jour arriva…Tout était presque prêt, nous étions à un quart d'heure de l'arrivée des enfants. La mère de Jane réglait les derniers détails des décorations de la salle réservée à la fête, couvrant les murs et le plafond de ballons, de serpentins en crêpe et de rubans. Elle était sur le point de terminer, les deux dernières décorations pendouillaient du panneau de bois du dessus. Au départ, elle voulait nouer ces deux rubans ensemble pour pouvoir ensuite y attacher des ballons. Mais à chaque fois qu'elle prenait le bout d'un ruban, de couleur bleue, elle ne pouvait pas en même temps prendre le bout de l'autre ruban, de couleur rose. Les rubans n'étaient tout simplement pas assez longs pour être noués de cette manière. Il semblait donc qu'elle devrait renoncer à sa dernière décoration. La mère de Jane était sur le point de se résigner lorsqu'elle eut une idée. Elle prit la paire de ciseaux qui lui avait servi pour couper les rubans et le papier crêpe et attacha les ciseaux au bout du ruban bleu. Elle saisit ensuite les ciseaux et en dirigea les lames en direction du ruban rose, qu'elle secoua vigoureusement de sorte que le ruban bleu se balance alternativement entre le ruban rose et le mur proche. Puis elle courut assez rapidement pour s'emparer du bout oscillant du ruban rose et repartit vers le ruban bleu pour s'en approcher aussi près que possible sans lâcher le ruban rose. Elle attendit jusqu'à ce que le mouvement du bout du ruban bleu lui permette de l'attraper. Tout en maintenant le ruban rose, elle ôta les ciseaux du ruban bleu et noua les deux bouts ensemble. La mère de Jane parvint de justesse à attacher tous les ballons à ces deux rubans et à finir ses décorations avant que les enfants n'envahissent la maison. Jane arriva sur ces entrefaits et montra une réelle surprise. La fête fut un véritable succès et toutes les mamans félicitèrent Jane pour ses décorations ».

Encadré 4. Le problème de la fête d'anniversaire (traduction du texte de Gick & Holyoak, 1983).

Les novices et les experts, dans la résolution de problème par transfert analogique ne traitent pas les problèmes et ne transfèrent pas leurs solutions de la même manière. Les novices, au cours de la résolution de problème, se servent essentiellement des informations superficielles notamment les objets, les expressions, la formulation de la question du problème. Les experts se servent également des traits de surface mais intègrent également les traits de structure pour comprendre et résoudre les problèmes. Dans une étude, Chi et al. (1981) ont demandé à un groupe de novices et experts en physique de classer certains problèmes. Les résultats montrent que les novices regroupaient les problèmes en tenant compte des caractéristiques des mêmes objets (problème de poulie ou plans inclinés). Les experts intègrent également ces critères dans leurs classifications, cependant ils se servent également des traits de structure dans la compréhension du problème (par exemple les principes physiques). Le principe de solution, traits de structure des problèmes, est utilisé par les élèves les plus performants au cours de la résolution. Silver (1981) présente 4 problèmes mathématiques en ligne et en colonne. Ils partageaient les mêmes traits sémantiques mais n'avaient pas la même procédure de résolution. Les résultats montrent que pour résoudre les problèmes les meilleurs élèves les classaient en fonction de leurs traits de structure, la procédure de résolution, alors que les plus faibles le faisaient par rapport aux traits de surface tels que le thème et le scénario de l'histoire.

D'autres recherches sur le transfert analogique montrent que lorsque le problème source et cible partagent les mêmes traits de surface et diffèrent entre traits de structures, le transfert est négatif. Dans ce sens, Novick (1988) a présenté des problèmes mathématiques aux participants (novices et experts) dans lesquels il s'agit de trouver le plus grand multiple commun pour la solution. Certains problèmes sources partagent ou pas les mêmes traits de structure et de surface avec le problème cible (soit l'un ou l'autre ou les deux ou pas du tout de traits communs ni de structure ni de surface). Les participants sont répartis en deux groupes, apprentissage et groupe contrôle. Ceux du groupe apprentissage résolvent un problème après avoir appris à résoudre 4 problèmes parmi lesquels un seul partage la même structure de solution que le problème cible. Les participants du groupe contrôle résolvent le problème mathématique sans résoudre les quatre problèmes présentés au groupe apprentissage. Les résultats révèlent que lorsque les problèmes ont une grande similarité de surface et des traits de structure différents, il y a un transfert négatif : 92% de novices et 83% des experts dans le groupe apprentissage transfèrent la procédure du problème ayant de fortes similitudes de surface pour résoudre le problème cible, bien qu'ils possèdent des principes de solution différents. Seulement 13 % des novices et 11 % des experts utilisent cette procédure dans la condition de contrôle. L'auteur attribue cette erreur de transfert à la grande ressemblance des traits de surface. Cependant, les experts parviennent à montrer une flexibilité en appliquant la solution du problème source ayant les traits de structure communs au problème cible, tandis que les novices persistent dans le transfert négatif. Si les problèmes partagent les mêmes traits de structure et diffèrent par des traits de surface le transfert est positif chez les experts à 56.3%. Cela n'est pas le cas chez les novices qui ne parviennent pas à un transfert positif dans le même cas notamment si le problème source est présenté juste avant le problème cible par rapport au cas où le problème cible est présenté sans problème source. Pour démontrer qu'au cours de la phase de mise en correspondance les traits de surface peuvent intervenir, ce matériel de Novick (1988) a également fait l'objet d'une autre expérience par Novick et Holyoak (1991). Il s'agissait des problèmes isomorphes dont le problème source avait pour objectif de répartir en lignes et colonnes des plants de légumes dans un jardin et le problème cible était un problème dans lequel il fallait répartir les membres d'une fanfare. Dans un groupe on donnait l'information sur les traits de surface à travers des consignes de mise en correspondance entre les nombres du problème source et cible. On informait le deuxième groupe de la similitude des traits de structure notamment au niveau de la difficulté et des buts entre le problème source et cible. Les résultats ont montré un taux de réussite plus élevé dans le groupe à qui on a montré la mise en correspondance entre les nombres que dans celui que l'on a informé de la similarité des buts et de la difficulté entre les deux problèmes. Les novices essaient de trouver une analogie entre un problème source et un problème cible mais ils ne comprennent pas toujours la structure du problème source, raison pour laquelle ils se fient aux traits de surface pour mettre des problémes en relation. Ross (1987, 1989) définit une expérience pour observer comment les novices utilisent la distinction à l'intérieur des traits de surface dans la résolution de problèmes. Il propose des problèmes de permutation qui traitent des mêmes objets qui sont mis en correspondance. Les sujets sont répartis dans 4 groupes dont chacun possède un principe de solution pour résoudre les problèmes. Dans tous les groupes la formule exacte a été fournie. Chaque groupe a deux conditions expérimentales : une condition à laquelle il donne à résoudre les problèmes sans la solution et dans l'autre condition il présente le principe de solution qu'ils doivent utiliser pour résoudre 4 problèmes. Les participants appliquent la formule aux données du problème. Les principes de solution sont testés selon la similarité de surface. Celle-ci a deux modalités d'observation : le thème de l'histoire et la mise en correspondance entre les objets ou la mise en correspondance inversée des objets (par exemple dans le problème de voiture au lieu que les mécaniciens choisissent les voitures ce sont les voitures qui sélectionnent à travers leurs conducteurs les mécaniciens). Trois principes sont testés avec des problèmes étudiés ayant les mêmes traits de surface, il y a 3 possibilités de présentation des traits de surface : un problème cible partage les mêmes objets et le principe de solution similaire avec le problème d'apprentissage. Le second problème cible a les mêmes objets que l'exemple étudié mais ils ont des principes de solution différents, le troisième problème avait un contenu similaire mais les objets utilisés ne présentaient pas de correspondances évidentes avec le problème étudié (des objets choisissent des personnes). Le dernier problème n'a aucune relation avec celui étudié. Les résultats montrent que lorsque les problèmes partagent les mêmes thèmes sémantiques, tels que le rôle des personnages et /ou les objets, ces traits de surface influencent non seulement l'accès à la source mais également la mise en correspondance entre problèmes source et cible. Dans le problème où la mise en correspondance entre le problème cible et le problème d'apprentissage est identique 75% de participants trouvent la solution. Lorsque cette mise en correspondance n'est pas évidente on observe assez peu de réussites soit 37% dans le problème cible 2 car les participants tiennent compte des traits de surface de la source et transfèrent difficilement la solution. Ross (1989 expérience 2A) explique cette difficulté par l'effet d'interférence des traits de surface sur la structure de solution. En effet, les participants font une erreur d'interprétation. Par exemple, dans les problèmes de permutation dont le thème porte sur le choix des voitures, ils appliquent la même règle de choix du problème source à la cible. Dans le problème source il s'agissait de se représenter l'ensemble de voitures choisies par les mécaniciens alors que dans le problème cible il s'agit de représentation des mécaniciens sélectionnés par les véhicules à travers les commerciaux (mise en correspondance inversée). L'influence de la similarité des rôles joués par les mêmes personnages est accentuée lorsqu'on présente la procédure de résolution et ce facteur n'influe plus sur les performances si la formule n'est pas présentée. Selon l'auteur, les différents contextes de similitude des traits de surface affectent l'accès à la source et le transfert de solution aux problèmes cibles, ce qui conduit aux erreurs dans la résolution.

Ces études ont montré que malgré la présentation d'une solution appropriée, les novices utilisent les détails des problèmes vus précédemment pour les problèmes en cours de résolution. Dans les problèmes accompagnés d'une solution, les novices utilisent la similarité entre les objets pour instancier les variables et les formules de solution. La mise en correspondance entre les objets des problèmes source et cible influe sur l'application de la formule, ce qui n'est pas le cas pour la similarité des traits de surface qui n'influe pas sur l'accès à la source. La similarité de surface aide à l'accès mais pas à l'utilisation de la source (la similarité des objets peut être une aide dans l'accès à la source et au transfert de sa solution au problème cible). Certains traits de surface non saillants n'ont pas d'effet sur l'utilisation du problème source. Pour Ross (1989), la variation de la correspondance entre les objets n'affecte pas l'accès à la source malgré l'effet considérable sur l'utilisation. Le fait que la correspondance entre les objets influe sur la mise en correspondance dépend de l'interprétation qu'on fait sur la variable. Les traits de surface qui sont non pertinents mais qui se ressemblent interagissent avec les traits de structure.

Les recherches de Bassok et al. (1995) accordent un rôle différent aux traits de surface. Pour ces auteurs les traits de surface sont des indices qui orientent vers une interprétation de la structure induite par le contexte sémantique du problème. Celui-ci étant lié au niveau de connaissances des sujets, leur interprétation dépendra de ce fait de l'interprétation que le sujet fera en fonction de son état de connaissance sur le contexte sémantique du problème. Il peut donc arriver que la structure induite par l'interprétation du contexte sémantique soit compatible avec la structure du problème. Cette conception est définie par les auteurs à partir de qu'ils appellent l'hypothèse interprétative. Selon eux, les connaissances familières sur les propriétés et les relations des objets et des événements jouent un rôle important dans l'interprétation, les représentations des situations-problèmes ainsi que dans le transfert. Si les problèmes source et cible amènent à une interprétation dont la structure induite correspond au modèle de situation et au schéma mathématique du problème, alors le transfert sera positif, et si l'interprétation conduit à inférer une structure différente du modèle mathématique, on parlera de transfert négatif. Pour cela, ces auteurs donnent une autre explication à l'expérience de Ross (1989) : les erreurs ne sont pas attribuées à la catégorisation animé/inanimé ou personne/objet, lors de la mise en correspondance, mais seraient plutôt dues au fait que l'interprétation de la relation sémantique des éléments décrits dans le problème perturbe la représentation de la structure du problème. Dans ces problèmes, la mise en correspondance inversée (des objets choisissent des personnes) entraîne des échecs dans le tranfert et la résussite des problèmes. La structure induite par le contexte sémantique ne correspond ni à la structure du modèle de situation ni à celui de la structure profonde. Pour montrer que l'interprétation du problème reste dépendante des connaissances que les sujets ont des contextes sémantiques impliqués dans les problèmes, Bassok et al. (1995) ont mené deux expériences. Dans la première expérience (1995) elles présentent trois problèmes de permutation qui ont la même structure mathématique de résolution, sémantiquement proche des problèmes proposés par Ross (1989). Dans le premier problème, la relation sémantique est asymétrique : des objets sont attribués à des personnes (des ordinateurs sont attribués à des secrétaires). Le deuxième problème décrit une relation sémantique symétrique : des personnes sont attribuées à d'autres personnes (des médecins choisissent des médecins d'un autre hôpital pour travailler en binôme). Le troisième décrit une relation sémantique asymétrique, des personnes sont attribuées à des objets (des étudiants sont attribués aux prix). Les résultats valident leur hypothèse interprétative : lorsque la relation sémantique est asymétrique entre les éléments du problème, 87 % de participants utilisent une structure mathématique asymétrique. Ils construisent des formules dans lesquelles les étudiants et les prix jouent également des rôles mathématiques asymétriques. Lorsque la relation sémantique est symétrique entre les éléments, 78 % des participants choisissent une structure mathématique symétrique. Ils construisent des formules qui donnent un rôle équivalent à chaque ensemble de médecins. Les auteures obtiennent les mêmes résultats dans la deuxième expérience.

Dans cette expérience, les problèmes sources mettaient en scène une relation symétrique entre les caddies et les joueurs de golfs/ des « caddies » sont attribués à des joueurs de golf. Les problèmes cibles montraient des relations asymétriques : des charriots étaient attribués aux porteurs et ceux-ci étaient attribués aux chariots. Les résultats montrent que les participants cherchent toujours à établir la relation proportionnelle que les personnes entretiennent avec les objets dans la vie quotidienne. Pour cela ils construisent une relation conceptuelle en rapport avec les connaissances familières qu'ils ont des relations entre les propriétés des objets du problème. La difficulté du transfert vient du fait qu'en cherchant à faire un alignement entre les structures des connaissances familières et celle du problème, la structure induite par le contexte sémantique ne correspond pas à la structure profonde du problème. Ainsi, même si deux problèmes partagent la même structure de résolution, c'est le niveau dans lequel se situe leur structure induite par leur contexte sémantique qui va faciliter ou non le transfert.

Novick et Hmelto (1994) ont mené une étude pour identifier les contextes schématiques et représentationnels qui favorisent le transfert analogique entre les problèmes. Ils ont présenté des problèmes sources accompagnés soit d'un schéma partie-tout, soit d'une matrice ou d'un réseau hiérarchique, et un problème qui n'était accompagné d'aucune représentation symbolique. Les résultats montrent que la représentation en réseau facilite la compréhension du problème source et son transfert à un problème cible. La représentation hiérarchique facilite également le transfert entre le problème source et le problème cible sur la classification. La représentation sous la forme de labyrinthe n'a pas facilité le transfert de solution entre les problèmes source et cible. Le transfert de solution par la représentation partie-tout est difficile pour les sujets car ils éprouvent des difficultés à procéder à la mise en correspondance entre les éléments des problèmes source et cible.

Novick et Hmelo (1994) apportent des explications à ces résultats. L'indication d'utiliser la représentation du problème source (donné dans le problème source accompagné du schéma de représentation partie-tout), n'est pas une condition suffisante pour réaliser le transfert ; les sujets doivent aussi comprendre la relation de correspondance entre source et cible. Si les sujets ne parviennent pas à procéder à une mise en correspondance entre les éléments et les relations, une information leur sera nécessaire pour réussir le transfert. L'information apportée pour aider les participants à évoquer la source doit se faire par la compréhension des problèmes, pour réussir la mise en correspondance et le transfert. L'échec de la mise en correspondance entre les problèmes qui impliquent des calculs a engendré des erreurs dans l'utilisation des données numériques dans le problème cible. Les résultats sur l'absence de transfert pour le schéma de représentation « partie-tout » ont permis de vérifier l'importance de la mise en correspondance dans le transfert. Aussi, les auteurs aident les participants à procéder à la mise en correspondance entre les problèmes source et cible. Si la raison principale de l'échec du transfert pour le schéma de résolution partie-tout est due à un défaut de mise en correspondance entre les objets et les relations des problèmes source-cible, les informations sur les étapes de la mise en correspondance devraient favoriser la réussite du transfert. Cet apprentissage est réalisé dans trois conditions : une condition où on indique le lien entre source et cible, une condition où on procède à la mise en correspondance entre les objets et une condition où on procède à la mise en correspondance entre les relations. Les résultats montrent que lorsque le problème source est bien résolu les sujets comprennent la représentation du schéma partie-tout pour résoudre le problème cible : 98% utilisent la représentation correctement et 89% résolvent correctement.

Ainsi, résoudre un problème requiert une représentation et une procédure adéquates pour effectuer les opérations en rapport avec la représentation construite. Lorsque les sujets apprennent la résolution s'ils ne se représentent pas de façon adéquate le schéma de la représentation symbolique en mémoire, ils ne peuvent réussir le transfert de la solution du problème source. La représentation symbolique en elle même favorise la résolution de problèmes, et augmente la probabilité de réussite aux problèmes cibles. Cette expérience a montré également que comme la structure profonde, la structure de surface influence le processus de récupération, de mise en correspondance et le transfert entre problème source et cible.

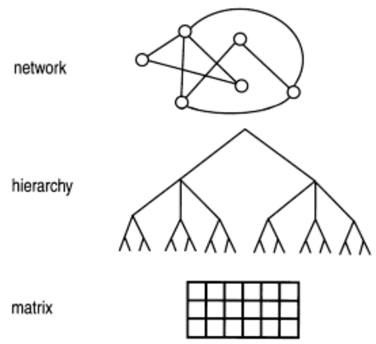


Figure 4. Les diagrammes utilisés pour la représentation symbolique des problèmes Novick et Hmelto (1994 P. 1299).

Les recherches sur l'analogie montrent que c'est un outil d'apprentissage qui permet de gérer les conditions d'apprentissage des problèmes source et le degré d'application au problème cible de la procédure apprise à partir du problème source. Le transfert analogique permet également d'observer les influences des traits de structure et de surface dans les processus d'évocation, de récupération et de mise en correspondance entre les données source et cible. Nous avons vu que dans le transfert analogique les traits de surface jouent un rôle dans le processus d'évocation, mais la difficulté réside dans le processus de mise en correspondance entre les éléments des deux situations. Cependant, l'étude sur le transfert analogique a aussi des limites en l'occurrence le fait que les conditions d'apprentissage du problème source et la résolution du problème ont un délai très court. Il serait intéressant de savoir si les connaissances seraient rappelées après un temps plus long. Sander (2000) pose également le problème de la négligence des analogies spontanées dans les processus de représentation des connaissances. Ces recherches ne tiennent pas compte des connaissances antérieures et des analogies spontanées. Or, pour Sander et Richard (1997) et Sander, (2000) les connaissances antérieures peuvent inspirer le processus d'analogie. De sorte qu'on transfère les propriétés des objets familiers à ceux en cours de traitement. En effet, ces auteurs ont montré dans une expérience que les connaissances quotidiennes peuvent servir à réaliser des analogies. Ces connaissances interviennent également dans la représentation des problèmes et aux stratégies de résolution. Aussi, Sander et Richard, (1997) ont montré que lorsque les sujets apprennent à faire du traitement de texte, ils se servent des connaissances qu'ils possèdent sur l'utilisation d'une machine à écrire, ils se réfèrent aux connaissances sur l'écriture, à la manipulation d'objets, faisant ainsi une analogie entre l'apprentissage en cours et les 3 domaines de connaissances antérieures. Les auteurs indiquent que la compréhension et la résolution des problèmes de soustraction à colonne par les enfants sont liées à la signification que les expériences sémantiques quotidiennes donnent à cette opération. Par exemple, la notion de « soustraire » est toujours attachée au fait d'ôter un sous-ensemble à un grand ensemble. L'intégration de l'interprétation des problèmes à des propriétés induites par le contexte sémantique suggérée par Bassok et ses collaborateurs (1990, 1995, 1998, Novick & Bassok, 2005) a eu le mérite d'expliquer comment ces propriétés des connaissances antérieures sur la relation entre les objets orientent vers la structure profonde du problème. Les sujets utilisent les traits de surface comme des indices d'accès à la structure des problèmes source et cible. Lorsque la structure induite par le contexte sémantique ne correspond pas à la structure du problème, le transfert est positif et lorsqu'elle ne l'est pas, il y a un transfert négatif.

I.3.2. L'analogie dans l'abstraction et la catégorisation

Les informations perçues du monde extérieur sont codées, intériorisées et stockées sous la forme de connaissances. Celles-ci sont des concepts organisés en mémoire sous la forme de réseau sémantique, de schémas ou d'image mentale. Le but serait de comprendre comment ces connaissances sont organisées pour former un système de représentation symbolique plus complexe. La catégorisation fait partie des stratégies d'organisation et de classification des connaissances. C'est un mode de traitement qualitatif des objets qui s'effectue par compréhension (ensemble de critères de ressemblance et de distinction qui attribue des objets à une catégorie) et par extension (le cadre qui délimite l'appartenance des objets inclus dans une classe). Catégoriser c'est utiliser un objet dans des contextes différents. La catégorie donne des contours à une classe et précise les relations entre elles. Les concepts associent des classes hiérarchisées. Les objets appartenant à une même classe sont équivalents du fait qu'ils possèdent les caractéristiques de cette classe. Les concepts sont classés dans différents niveaux hiérarchiques : en haut de la hiérarchie se situent les concepts abstraits, en bas de la hiérarchie se trouvent les concepts dont les propriétés sont distinctives.

Les objets sont représentés et classés en fonction de leurs propriétés et des relations qu'ils entretiennent (Gineste, 1997). La catégorisation permet d'inférer les propriétés des objets. On peut ainsi inférer les propriétés des objets d'une catégorie mêmes si elles ne sont pas explicitement indiquées. De même que les objets et leurs propriétés les concepts sont organisés dans une structure relationnelle ; ils forment des schémas et des prototypes. Les schémas sont des systèmes de concepts organisés dans un contexte particulier. Ils peuvent se présenter sous différentes formes notamment imagée ou propositionnelle**.**

Le processus de transfert analogique ne peut se réaliser sans catégorisation. Celle-ci permet de sélectionner et de réorganiser dans une catégorie créée à cet effet, les nouvelles propriétés communes entre les problèmes source et cible. La catégorie aide donc à créer une catégorie plus abstraite en mettant en correspondance les propriétés communes entre objets. L'une des préoccupations importante est de savoir à quel niveau faire cette catégorisation pour que les connaissances soit organisées à un niveau d'abstraction pertinent pour réussir l'analogie. Pour répondre à cette préoccupation, Gick et Holyoak (1980) suggèrent de ne pas se situer à un niveau trop spécifique (ce qui mettrait plus en relief les différences entre les propriétés du problème et conduirait à un échec) ni à un niveau trop général où le processus analogique ne serait pas pertinent. Rosch et al. (1976) suggèrent que la direction vers une catégorie commune des propriétés peut être une aide à la décision du bon niveau d'abstraction. Une façon serait pour y parvenir de trouver une image à un niveau abstrait dans laquelle on situerait l'ensemble de la catégorie. Il serait aussi possible de créer un niveau abstrait dans lequel on intègre les propriétés communes des membres d'une même catégorie.

Ainsi, les propriétés des objets peuvent s'intégrer dans différents niveaux plus abstraits en fonction des critères que l'on veut catégoriser. Les critères sélectionnés peuvent se situer au niveau des attributs, de leurs valeurs ou au niveau des relations entre ces valeurs et ces attributs, ou encore à un niveau plus abstrait des concepts qui définissent l'aspect perceptif des objets : la taille, la forme, la couleur. Une autre manière de catégoriser à un niveau plus abstrait est de trouver des similitudes entre les propriétés qui ne se ressemblent pas à un niveau très spécifique tels que les objets qui ont la même forme mais ont des couleurs différentes ou l'inverse. Richard (1990, 2004) propose une analyse de cet aspect de recodage des propriétés proposé par Kotovsky et Gentner (1996) et par Gentner et Médina (1998) qui explique le développement et l'acquisition des règles plus abstraites à partir de la théorie de l'alignement de structures. Les auteurs ont proposé une analyse des comparaisons entre les dimensions et à l'intérieur des dimensions des propriétés des objets. A l'intérieur des dimensions un appariement peut se faire entre les deux situations du point de vue des relations entre les valeurs des attributs : dans les deux situations, l'objet au centre est grand et les deux autres sont petits, dans chaque triplet les objets ont la même forme et la même couleur. Le deuxième appariement demande d'échanger les dimensions ainsi que les valeurs des objets. Cet échange à travers « le X ici est comme le Y là » se fait sur des relations entre les propriétés des objets pour leur trouver une catégorie commune : la forme des objets joue le même rôle dans le premier triplet que la couleur dans le deuxième triplet. Les objets ont également la même forme. Ces figures sont présentées à des enfants de 5 et 6 ans afin qu'ils décident celles qui vont ensemble. Dans une condition les triplets portant sur les figures à l'intérieur des dimensions et entre les dimensions sont mélangés. Il est apparu que les enfants de 6 ans distinguent convenablement les deux types d'appariement, ceux de 4 ans ne reconnaissent que la ressemblance à l'intérieur des dimensions, celle entre dimensions s'effectuant par hasard. Lorsque les figures sont présentées soit entre les dimensions et à l'intérieur des dimensions, 80% des enfants de 4 ans réussissent à comparer les propriétés entre les dimensions.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu la contribution des trois principaux courants qui ont contribué à l'évolution de la résolution et la recherche de la compréhension de la difficulté entre les problèmes isomorphes. Ces différences de difficulté ont été attribuées à la charge en mémoire de travail. Celle-ci peut être libérée en partie lorsque les règles de résolution sont représentées de façon externe plutôt qu'interne. Le contexte sémantique peut suggérer l'adoption d'un point de vue pour construire l'interprétation du problème (Clément, et Richard, 1997 ; De Viviés, 1999, Richard et al. 2002). Pour résoudre un problème, il faut adopter le point de vue pertinent pour le problème. Lorsque cette représentation n'est pas suggérée spontanément par les aspects sémantiques du problème, il faut abandonner la représentation initiale non pertinente. L'adoption d'un point de vue différent de celui que suggère le contexte du problème est très difficile. La capacité de changement de point de vue peut être bloquée par les connaissances antérieures observées dans les études sur le transfert analogique. Celui-ci est un mécanisme de traitement de connaissance qui n'est pas utilisé de la même manière chez les experts que chez les novices. Les travaux de Bassok et ses collaborateurs (1990, 1995, 1998, Novick & Bassok, 2005) apportent les explications sur les effets de structures induites et dans le transfert des proprités des objets dans la résolution de problèmes. Pour une résolution efficace, les propriétés des problèmes doivent être catégorisées à un niveau plus abstrait ni trop général ni trop particulier.

Dans le chapitre suivant nous allons analyser le développement des recherches conduites en résolution des problèmes arithmétiques. Les classifications des catégories des problèmes et les difficultés rencontrées en résolution de problèmes arithmétiques. Nous allons découvrir que les propriétés sémantiques qui influencent l'interprétation des problèmes développés par Novick et ses collaborateurs sont également mises en jeu dans la résolution des problèmes.

Chapitre II. La résolution de problèmes arithmétiques

Selon Verschaffel et al. (2000), les énoncés verbaux décrivent des situations compréhensibles et interprétables pour le lecteur et sont accompagnés de questions mathématiques qui peuvent se contextualiser. Ces descriptions sont l'application aux situations réelles du formalisme des opérations arithmétiques. Ces situations sont importantes, car elles permettent aux élèves de comprendre le sens que prennent les concepts mathématiques dans l'utilisation qui en est faite dans le monde réel.

Les études sur la résolution des problèmes arithmétiques ont connu une évolution considérable depuis quelques années. Ces recherches ont montré que plusieurs facteurs influencent la résolution de ces problèmes. Parmi ces facteurs il y a l'état de connaissances du sujet au cours de la résolution, les conditions liées au problème à résoudre, les processus qu'elles impliquent et l'influence mutuelle entre le problème et les connaissances du sujets. La variabilité des situation-problèmes notamment sur sa nature, ses concepts et opérations mathématiques mis en œuvre, et l'habillage du problème, ont pour but d'offrir de nombreuses possibilités d'acquérir la capacité de généraliser l'application des opérations arithmétiques à la résolution de problème. Nous présentons les recherches qui ont été développées pour identifier les mécanismes impliqués dans la résolution de problèmes arithmétiques et les différentes classifications qui ont été faites à partir des leurs contextes sémantiques. Nous présentons également les recherches qui montrent de quelle manière les contextes de présentation de problèmes et leurs propriétés influent sur la représentation du problème et notamment l'importance de la réinterprétation des contextes sémantiques qui permettent de percevoir l'équivalence des procédures dans des problèmes qui admettent plus d'une stratégie de résolution.

Ce chapitre est organisé en trois sections. La première porte sur le rôle des facteurs sémantiques dans la résolution de problèmes arithmétiques. Des auteurs ont proposé des classifications sur les problèmes à structure additive[5]. Ces classifications ont donné lieu à plusieurs catégories de problèmes réparties en fonction des relations sémantiques entre les éléments des problèmes (Riley et al. 1983 ; Fayol, 1990 ; Thévenot et al. 2004 ; Vergnaud, 1982). Les travaux s'appuyant sur cette distinction entre catégories ont montré que certains

[5] Les problèmes additifs se résolvent exclusivement par addition et soustraction.

problèmes sont plus difficiles que d'autres à résoudre, et que la nature de la question est également un facteur de réussite du problème.

La deuxième section est consacrée aux modèles proposés pour comprendre la résolution de problèmes. Nous verrons principalement deux modèles qui ont permis de comprendre le rôle de l'interprétation : le modèle des schémas développé par Riley et al. (1983) ; Kintsch et Greeno, (1985) et le modèle de situation développé par Reusser (1990, 1996, 1997). Le modèle des schémas défend l'idée selon laquelle lors de la résolution de problèmes un schéma général correspondant à la structure du problème est sélectionné et les éléments de l'énoncé sont intégrés à ce schéma à partir duquel se fera la résolution. Toutefois, ce modèle ne prend pas en compte les aspects interprétatifs. Cette limite, nous le verrons, est dépassée par le modèle de situation, qui est issu de la compréhension de texte et qui est une étape intermédiaire entre l'énoncé du problème et la sélection d'un schéma de résolution.

La troisième est centrée sur les propriétés plus génériques qui interviennent dans les problèmes et qui influent sur l'interprétation et la résolution de problèmes. Ainsi, les recherches ont montré l'influence de facteurs sémantiques très généraux, en rapport avec les les propriétés des objets décrits dans le problème, sur la résolution et même sur les procédures, (Bassok et al. 1995 ; Novick & Bassok, 2005 ; Bassok et al. 1998). Lorsqu'un problème peut être résolu par deux procédures, le contexte de présentation du problème, l'habillage ou les variables impliquées dans le problème orientent préférentiellement vers une procédure de solution plutôt qu'une autre (Coquin-Viennot & Moreau, 2003 ; Hakem et al. 2005 ; Thévenot, 2008 ; Gamo, 2009 ; Gamo et al. 2011 ; Brissiaud & Sander, 2010).

Dans la dernière section, nous présentons les travaux réalisés dans le contexte du recodage sémantique dans la résolution de problèmes qui admettent plus d'une procédure. Nous verrons comment il est possible de provoquer la prise en compte d'un point de vue non apparent lors de la résolution de problèmes. Certains auteurs tels que Sander (2007) ; Dupuch et Sander (2007), Gamo, 2009, Gamo et al. (2010, 2011), Gamo et al. (2014) ont fait concevoir un point de vue équivalent dans la résolution de problème. Cette approche a pour objectif la généralisation des connaissances et permet de faire prendre conscience de l'équivalence des procédures de résolution lorsque les éléments du problème mettent une procédure en relief et masquent une autre tout aussi applicable.

II. 1. La classification des problèmes arithmétiques additifs

Les problèmes additifs et multiplicatifs[6] ont fait l'objet de nombreuses études en arithmétique. Dans cette section nous ne nous intéressons qu'aux problèmes additifs. Dans ce domaine, les problèmes simples qui se résolvent par une seule opération, ont fait l'objet des premières recherches dans ce domaine. Les apports des auteurs ont porté sur les relations sémantiques d'accroissement, de transformation, de combinaison et de comparaison entre les données de l'énoncé des problèmes (Riley et al. 1983 ; Vergnaud et Durand, 1976 ; Nesher 1981, Vergnaud 1982), et sur les difficultés rencontrées par les élèves au cours de la résolution. A partir de ces relations deux types de classifications de problèmes ont été proposées : la classification sémantique et la classification conceptuelle.

La classification sémantique met en exergue les rapports entre les différentes données de la situation du problème. Nesher (1981) a donné une description de ces différentes relations :

- Les éléments peuvent entretenir une relation statique, l'énoncé présente la situation d'un état stable :

« Jean a 5 billes, il en possède 3 de plus que Pierre. Jean a combien de billes ? ».

- Les éléments peuvent également entretenir une relation dynamique, les évènements du problème évoluent dans le temps :

« Tom a 6 billes, il perd 3 billes. Combien lui reste-t-il ? ».

A la conception relationnelle de Nesher (1981), Carpenter et Moser (1981), joignent celle du type de rapports entretenu par les données du problème et les actions qui y interviennent. Les rapports entre les données offrent des indications sur l'orientation du calcul arithmétique à effectuer sur le problème et la procédure de résolution à adopter.

Le type de problème proposé par Carpenter et Moser (1981) :

« Pierre avait 9 billes. Puis il a donné 6 billes à Jean. Combien Pierre a de billes maintenant » ;

« Tom avait 2 billes. Jules lui en a donné. Tom a maintenant 7 billes. Combien de billes Jules a donné à Tom ».

Riley et al. (1983) ont, dans leur catégorisation, distingué les problèmes de changement, de combinaison et de comparaison.

[6] Problèmes résolus par la multiplication et la division.

- Les problèmes de changement font intervenir une transformation sur un état aboutissant à un autre état. Les problèmes de changement font intervenir une dimension temporelle, l'évènement évolue en partant d'un état initial, en définissant un changement et aboutit à l'état final. La question peut, selon la formulation du problème, porter sur l'un ou l'autre de ces trois états : « *Tom a 5 billes, il en donne 2 à Pierre, combien lui reste-t-il ?* » (état final) ; « *Tom avait des billes, il en donne 2 à Pierre, il lui reste 3 billes. Combien de billes Tom avait-il avant d'en donner à Pierre ?* » (état initial) ; « *Tom a 5 billes, il en donne à Pierre, après il lui reste 2 billes. Combien de billes Tom a donné à pierre ?* » (événement intermédiaire).

- Les problèmes de combinaison décrivent des situations statiques sans évolution de la situation. Les éléments du problème entretiennent une relation partie-tout. L'information à rechercher peut être le tout (la somme) : « *Jean a 7 billes et Yves 6 billes. Combien de billes ont-ils ensemble ?* » ou l'une des parties.

- Les problèmes de comparaison englobent les éléments d'une situation stable. Dans ces problèmes, les indices de comparaison des données sont introduits par les termes « plus que, moins que ». Le but du problème peut être de rechercher l'une des données ou leur différence : « *Jean a 9 bille, Pierre a 4 billes de moins que X. Combien Pierre a-t-il de billes ?* » .

La distinction entre ces différentes catégories de problèmes a permis d'étudier les niveaux de réussites des sujets selon chaque catégorie et à différents âges. Les auteurs ont réalisé des études comparatives sur les réussites entre différentes classes de problèmes et au sein des mêmes types de problèmes. La classification des problèmes selon leur niveau de difficulté a permis d'observer que les problèmes de comparaison sont les plus difficiles à résoudre, les problèmes de changement ont un niveau de difficulté intermédiaire et les problèmes de combinaison sont les plus faciles à résoudre (Riley et al. 1983).

Quant à la classification conceptuelle développée par Vergnaud (1982), elle intègre le calcul numérique et sémantique entre les données d'un problème. Dans ce cas, pour résoudre un problème il faut d'abord identifier les relations et poser un calcul correspondant aux relations entre les éléments du problème. Par la suite, il faut traduire ce calcul relationnel en calcul numérique pour aboutir à la réponse du problème. Cette classification propose 6 catégories de problèmes, dont les trois premières correspondent aux problèmes de changement, de combinaison et de comparaison de Riley et al. (1983), et les dernières sont des compositions des différents états des problèmes de changement (état initial, transformation, état final).

TYPES DE PROBLEME		TAUX DE REUSSITE			
PROBLEME DE CHANGEMENT		**Mat**	**CP**	**CE1**	**CE2**
Changement 1	*X avait 3 billes. Puis lui Y a donné 5 billes. Combien de billes a maintenant X ?*	.87	1.00	1.00	1.00
Changement 2	*X avait 8 billes. Puis il a donné 5 billes à Y. Combien de billes a maintenant X ?*	1.00	1.00	1.00	1.00
Changement 3	*X avait 3 billes. Y lui en a donné. X a maintenant 8 billes. Combien de billes Y a-t-il donné à X ?*	.61	.56	1.00	1.00
Changement 4	*X avait 8 billes. Il en a donné à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien a-t-il donné à Y ?*	.91	.78	1.00	1.00
Changement 5	*X avait des billes. Y lui en a donné 5 de plus. Maintenant X a 8 billes. Combien avait-il de billes ?*	.09	.28	.80	.95
Changement 6	*X avait des billes. Il en a donné 5 à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien avait-il de billes ?*	.22	.39	.70	.80
PROBLEME DE COMBINAISON					
Combinaison 1	*X a 3 billes. Y a 5 billes. Combien X et Y ont des billes ensemble ?*	1.00	1.00	1.00	1.00
Combinaison 2	*X et Y ont ensemble 8 billes. X en a 3 billes. Combien Y a-t-il de billes*	.22	.39	.70	1.00
PROBLEME DE COMPARAISON					
Comparaison 1	*X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien X a-t-il de billes plus que Y ?*	.17	.28	.85	1.00
Comparaison 2	*X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien Y a-t-il de billes de moins que X ?*	.04	.22	.75	1.00
Comparaison 3	*X a 3 billes. Y a 5 billes de plus que X. Combien Y a-t-il de billes ?*	.13	.17	.80	1.00
Comparaison 4	*X a 8 billes. Y a 5 billes de moins. Combien Y a-t-il de billes ?*	.17	.28	.90	.95
Comparaison 5	*X a 8 billes. Il a 5 billes de plus que Y. Combien Y a-t-il de billes ?*	.17	.11	.65	.75
Comparaison 6	*X a 3 billes. Il a 5 billes de moins que Y. Combien Y a-t-il de billes ?*	.00	.06	.35	.75

Tableau 2. Catégorisation des problèmes et taux de réussite selon Riley, Greeno et Heller (1983).

(1) Deux mesures s'assemblent pour former une seule mesure. Deux données connues permettent de trouver l'inconnue, « *X a 4 bonbons rouges et 3 bonbons verts. Il a en tout 7 bonbons* ».

(2) La transformation agit sur deux données pour créer une nouvelle mesure. On peut chercher à trouver l'une des données ou le nouvel élément, « *X a 8 billes avant la recréation, il gagne 2 billes pendant la récréation. Il a maintenant 10 billes* » .

(3) La relation entre deux données stables. Le calcul peut s'effectuer sur l'une des données ou sur leur relation. *« X a 5 billes. Y a 3 billes en moins. Y a 2 billes ».*

(4) La combinaison de deux transformations. Ces deux transformations forment une transformation qui les englobe. On peut rechercher l'une des transformations ou la transformation finale, « *lundi X gagne 5 billes. Mardi il perd 8. Il perd au total 3 billes* ».

(5) La transformation de deux relations stables. On peut calculer, soit l'une des deux relations, soit la transformation, « *X devait 9 billes à Y. Il lui rend d'abord 5 billes. Il ne lui reste plus que 4 billes à lui rendre* ».

(6) La combinaison de deux états relatifs pour former un état relatif, « *X doit 7 billes à Y, mais Y lui doit 5 billes. X doit donc 2 billes à Y* ».

S'inspirant d'une étude réalisée avec Durand (Vergnaud et Durand, 1976), Vergnaud (1982) compare les réussites des élèves des niveaux CP, CE et CM, aux catégories de problèmes sur la transformation reliant deux mesures et la composition de deux transformations (tableau 3). Les résultats de cette étude ont montré un décalage sur les performances entre les deux catégories de problèmes. En effet, il a observé un écart d'un an entre les problèmes 1 et 2 ; entre les problèmes 5 et 6 ; cet écart est de 3 ans entre les problèmes 3 et 4. Les élèves réalisent de meilleures performances sur les problèmes de type 2 que ceux de type 4, cependant leur résolution nécessite de procéder au même calcul.

Concernant les comparaisons intra-catégories de problèmes, dans les problèmes de changement, la recherche de l'état final est plus facile par rapport à celle de l'état initial, (Fayol et al. 1987, Riley et al. 1983, Vergnaud, 1982, Sander et al. 2002). Dans les problèmes de combinaison, la recherche du tout est plus facile à trouver que celle des deux sous-parties. Lorsqu'on compare les problèmes à l'intérieur d'une même catégorie l'analyse des problèmes sur la différence entre le calcul du tout et de la partie a montré que la question qui porte sur les différences entre les parties est plus facile à résoudre que celle qui porte sur le tout quand les données entretiennent une relation de comparaison. La donnée sur la transformation placée en début du problème augmente les performances ce qui n'est pas le cas quand la transformation est placée après les données sur les états.

Problèmes de catégories II sur la transformation reliant deux mesures	**Problèmes de catégorie IV sur la composition de deux transformations**
1) *pierre a 6 billes. Il joue une partie et perd 4 billes. Combien Pierre a-t-il de billes après la partie ?*	2) *Paul joue deux parties de billes. Après une première partie, il gagne 6 billes. A la seconde partie, il perd 4 billes. Qu'est-il arrivé en tout ?*
3) *Bertrand joue une partie de billes. Il perd 7 billes. Après la partie, il a 3 billes. Combien de billes avait-il avant la partie ?*	4) *Bruno joue deux parties de billes. Il joue une première partie puis une deuxième partie. A la deuxième partie, il perd 7 billes. Après les deux parties, il a gagné 3 billes en tout. Que s'est-il passé à la première partie?*
5) *Claude a 5 billes. Il joue une partie. Après la partie il a 9 billes. Que s'est-il passé pendant la partie ?*	6) *Christian joue deux parties de billes. A la première partie, il gagne 5 billes. Il joue une seconde partie. Après les deux parties, il a gagné 9 billes en tout. Que s'est-il passé lors de la seconde partie ?*

Tableau 3. Problèmes de catégorie 2 et de catégorie 4 de Vergnaud et Durand (1976).

Le plus grand taux de réussite pour ces problèmes est atteint à partir du CE. La place de la question en début d'énoncé facilite la représentation, la construction du schéma de solution et la procédure de résolution du problème (Fayol et al. 1987). De ce fait, la nature de la question est un facteur important, qui peut, dans certains cas, être au moins aussi important, que le type de problème. Le taux de réussite aux problèmes est différent selon que la question porte sur l'état initial ou l'état final.

Ainsi, les travaux sur la classification des problèmes ont permis de montrer les relations qu'entretiennent les données des problèmes avec la classification sémantique, et de montrer avec la classification conceptuelle que les problèmes sont résolus par le calcul numérique et le calcul relationnel à partir des données du problème. Ces recherches ont également montré que les problèmes sont classés en fonction du niveau de difficulté rencontré par les élèves au cours de la résolution. Au sein d'une même catégorie de problèmes il y aurait également des différences selon l'information à calculer et selon l'organisation des informations dans le problème.

Pour comprendre le processus sous-jacent à la résolution de problèmes, les auteurs ont fait des recherches sur l'activité d'interprétation des énoncés qui conduit à la représentation de la situation décrite et à la mise en place de la procédure de résolution. Il y a plusieurs façons d'interpréter un problème, notamment à travers la construction d'un schéma particularisé, d'un modèle de situation ou comme nous l'avons vu dans la section 3 du chapitre 1, par un raisonnement analogique à partir d'une situation connue. Dans la section suivante nous allons présenter les recherches qui ont montré la manière dont les problèmes sont résolus à l'aide du modèle des schémas décrit par Kintsch et Greeno (1985) et ensuite nous analyserons l'apport de la théorie des modèles de situation dans la construction de la représentation du problème.

II.2. Les modèles de résolution de problèmes

Pour résoudre un problème, il faut en construire une représentation ; dans ce cas, on parle de la façon de comprendre l'énoncé. Pour cela, il y a certaines conditions à remplir, notamment : interpréter les informations sémantiques, les relations que les éléments du problème entretiennent entre eux. Il faut posséder des connaissances en rapport avec le problème posé afin de les activer en mémoire à long terme. Comprendre un problème, c'est construire une interprétation qui permette d'élaborer des stratégies de calcul pour avancer vers la solution. Pour une meilleure représentation, une analyse du problème est indispensable, elle permet de relever les informations pertinentes impliquées dans le contexte. Elle peut se faire sur les traits de surface, à partir des mots clés tels que gagner ou perdre. La résolution est guidée par la signification sémantique des termes: « *Jean avait des billes le matin, à la récréation il a perdu 5 billes. Combien de billes avait-il avant la recréation ? ».* Ce problème fait une référence directe à la notion de perte. L'élève pourra inférer qu'il s'agit de faire une soustraction en se référant à l'analyse des relations qu'entretiennent les éléments du problème. Ces relations forment une structure d'ensemble, qui constitue la structure profonde du problème, (Escarabajal, 1988). Comprendre c'est trouver une cohérence entre les éléments du problème afin qu'ils forment un tout porteur de sens. La représentation de la situation s'appuie d'une part, sur les propriétés des objets, les valeurs quantitative et qualitative des données, la signification des expressions et d'autre part, sur les expériences acquises sur les objets du problème (Greeno, 1977, 1991).

Des recherches ont mis en exergue les processus de compréhension impliqués dans la résolution de problème. De ces processus, des modèles de compréhension de problèmes ont été développés. Nous décrivons principalement deux modèles : le modèle de schéma (Kintsch et Greeno, 1985) et le modèle de situation (Russer, 1990). Le modèle des schémas explique la compréhension des problèmes de transformation. Le but de ce modèle est d'expliciter comment, à partir de la syntaxe, les relations conceptuelles des problèmes arithmétiques sont transformées en langage mathématique afin d'en trouver la solution. Ce modèle met en relation les connaissances antérieures activables stockées, sous forme de schémas en mémoire à long terme et l'organisation conceptuelle du problème à résoudre qui vont activer le schéma concerné.

Le modèle de situation considère la compréhension du problème comme une étape importante pour sa résolution. L'interprétation du problème est influencée par la représentation de la situation décrite dans le problème, représentation au départ sans fondement mathématique. Celle-ci sera intégrée plus tard à la représentation de la situation particularisée. Ce ne sont que les actions et les événements du problème qui construisent la compréhension du problème avant sa résolution mathématique. Selon ce modèle, la représentation et l'interprétation faites sur les constituants du problème influent sur les performances. Elles déterminent également le choix de l'opération qui est fait dans la résolution de problèmes. Nous verrons plus tard que d'autres auteurs ont montré que les propriétés de ces constituants peuvent influencer le choix de procédure de solution.

II.2.1. Le modèle de schémas

Le modèle des schémas est issu des recherches sur la compréhension de texte, ainsi que la conception des stéréotypes décrite en psychologie sociale. La notion de schéma explique comment les connaissances agissent et sont utilisées, dans les processus de compréhension, de mémorisation et de production d'inférences. Introduite par Minsky (1975 cité par Richard, 1995) pour désigner le cadre ou frame, et par Shank et Abelson (1977, cité par Richard, 1995) pour désigner les scripts, le schéma a d'abord été utilisé pour désigner l'organisation des connaissances relatives aux événements et aux situations telles que les fêtes d'anniversaire, un repas au restaurant ou un rendez-vous chez le médecin (Richard, 1995). Les schémas permettent de faire des économies lors des traitements cognitifs, en faisant appel aux connaissances en mémoire. Un ensemble de connaissances acquises sont stockées en mémoire à long terme sous la forme d'une structure générale appelée schémas de sorte que les informations du texte activent ces schémas et y soient insérées au cours de la représentation d'une situation. Lorsqu'un schéma est sélectionné, les éléments de la situation sont interprétés et intégrés dans les cadres des variables du schéma afin qu'il devienne le schéma complété de l'énoncé en cours de traitement. On parle d'instancier le schéma ou de construire une représentation particularisée du schéma. Les informations non explicitées, manquantes, nécessaires ou pas, liées à la situation décrite, sont inférées grâce au schéma. A partir du moment où les éléments du texte ont trouvé une place dans le schéma, les informations inutiles, qui ont été activées, sont exclues de la représentation.

La représentation des énoncés se construit sur la base de l'information textuelle et selon la catégorie du problème à résoudre (Van Dijk et Kintsch, 1983). Comprendre un texte consiste à construire une représentation de la situation en activant au cours de la lecture un schéma de connaissance en mémoire, interpréter les éléments du texte et leur attribuer une place dans les cadres vides des variables prévus à cet effet dans le but de construire un schéma particularisé (Richard, 1995). Ce processus de compréhension a également été élargi dans le contexte de la résolution des problèmes arithmétiques, notamment les catégories de problèmes développées par Riley et al. (1983). Kintsch et Greeno (1985) ont mis en place un modèle de représentation textuelle lors de la résolution de problèmes de la classification de Riley et al. (1983). Ils ont distingué trois types de connaissances intervenant dans la représentation et la résolution de problème : les frames propositionnels (qui permettent de transformer les phrases de l'énoncé en propositions), les schémas d'ensemble (qui sont des propriétés et des relations d'ensemble), et les schémas (qui représentent les catégories de problème et sont considérés comme le fondement de la représentation). La première phase est une décomposition des données de l'énoncé en propositions, elle correspond à la structure de surface du texte, elle est cohérente et représente la microstructure. Celle-ci permet de construire une macrostructure, qui est au niveau le plus élevé, l'idée générale développée dans l'énoncé. La seconde résulte à la fois des informations textuelles et des connaissances inférées auxquelles renvoient ces connaissances.

L'élaboration des connaissances de base et des modèles de problèmes sont faits à partir des schémas d'ensemble. Dans un schéma d'ensemble, il y a des places vides pouvant être remplacées, grâce aux informations du texte ou aux inférences, par quatre caractéristiques notamment, la nature de l'objet, la quantité, l'identificateur et le statut.

Si nous prenons l'exemple du problème de transformation suivant décrit par Kintsch et Greeno (1985) : *« Jean avait 3 billes, puis Tom lui a donné d'autres billes, maintenant Joe a 8 billes. Combien Tom lui a t'il donné de billes ? ».*

(i) L'espace « objet » renvoie aux objets situés dans l'ensemble (pour notre exemple il s'agit des billes).

(ii) L'espace « quantité » représente une valeur numérique précise (« 3 » quantité de billes). Cet espace peut ne pas être défini (« jean a des billes ») et peut représenter un des états suivants : initial, transformation, final. Dans notre exemple la notion « combien », impliquera d'inférer qu'il s'agit de trouver la quantité de billes que Tom a donnée à Jean. La même inférence est faite par le groupe de mots « d'autres billes » situé dans la proposition « puis Tom lui a donné d'autres billes ».

(iii) L'espace « identificateur » informe sur un endroit, le moment des actions ou celui à qui appartient un objet. « Joe » et « Tom » sont des possesseurs de « billes », « avait et maintenant » désignent le moment.

(iv) L'espace « *statut* » met en évidence les relations que les éléments entretiennent dans le problème sur le plan formel. Elle représente la structure d'ensemble que forme la somme des informations sémantiques de l'énoncé. Cela peut être un ensemble de départ, « *Jean avait trois billes* », un ensemble de transfert, qui est dans notre exemple, activé par le verbe « a donné », ensemble partie « *Jean avait 3 billes* », un ensemble tout « *maintenant Joe a 8 billes* ».

L'ensemble des schémas activés par les propositions va au final aboutir à la construction du schéma du problème.

II.2.1.1. Qu'est ce qui permet de sélectionner un schéma ?

La sélection d'un schéma est guidée par la nature des expressions linguistiques contenues dans l'énoncé et par le schéma du problème. Si on se réfère aux études de Riley et al. (1983) un schéma de problème se construit à partir de la structure sémantique du problème : si dans un problème les ensembles entretiennent des relations axées sur les accroissements et les diminutions, ce problème, de type changement, va déclencher un schéma de transfert. Si les ensembles refèrent à des quantités différentes et l'énoncé formulé de manière à introduire des indices de comparaison tels que « de plus que ; de moins que ; plus grand que ; plus petit que », il s'agit d'un schéma de problème de type comparaison. Si deux parties des éléments du problème peuvent se réunir pour former un ensemble plus grand, le tout, ces parties forment des ensembles du type de problème de combinaison et entretiennent des relations qui forment un schéma partie-tout. La représentation du schéma partie-tout implique la compréhension des nombres comme intégrés les uns dans les autres. Le schéma partie-tout inclut la compréhension de la commutativité et de l'associativité comme la compréhension de la complémentarité des relations entre l'addition et la soustraction (Stern et Lehrndorfer, 1992).

Les enfants se réfèrent à la relation partie-tout pour la résolution de problèmes additifs. Pour cela, ils peuvent, dans la résolution de certains problèmes, procéder à la construction de la représentation de la partie complémentaire. Selon Riley et al. (1983), c'est par l'apprentissage que l'enfant acquiert de l'expérience et stocke des connaissances sous la forme de schémas. Dans le contexte de la résolution de problèmes mathématiques et physiques, les schémas désignent l'ensemble des relations structurelles constituées par les éléments d'un problème. Ces structures sont stockées en mémoire à long terme et sont consolidées par la multiplicité de rencontre des problèmes de même type. La rencontre d'un problème ultérieur activera un schéma déjà présent en mémoire à long terme. Richard (1995) propose quatre caractéristiques propres aux schémas : d'abord, ils organisent et stockent les connaissances, qui ne sont pas forcément liées, dans le contexte où elles sont le plus souvent rencontrées. Dans le problème de changement de notre exemple, le fait d'avoir rencontré plusieurs fois ce type de problème provoque un stockage d'information en mémoire à long terme. Ces informations sont organisées sous forme d'un schéma de relation partie-tout. Lorsqu'un problème de ce type est rencontré ce schéma est directement activé grâce aux expressions telles que « en tout », « ils ont ensemble » « X a donné à Y » « quand ils mettent leur quantité ensemble ».

II.2.1.2. Comment l'énoncé se transforme en schéma particularisé de résolution ?

C'est par les quatre caractéristiques précédemment citées que les éléments de l'énoncé vont trouver une place. D'abord la transformation en proposition (P) se fait au cours de la lecture en traduisant chaque phrase de l'énoncé en propositions. Pour le problème de billes, la première partie de la phrase « *Jean avait 3 billes » :* « P1 : Joe, P2 : avoir, P3 : 3 billes » sont trois propositions qui vont construire un premier ensemble à partir de la quantité P3. Ensuite, les propositions créent des ensembles dont les valeurs vont être insérées dans les places vides du schéma activé. P3 : « 3 billes » active une représentation d'un ensemble dans lequel sont intégrées les valeurs des variables : P1 : « Joe » est reconnu comme identificateur, un deuxième identificateur P2 (avoir) est décrit au passé et indique ce que P1 (Joe) possède dans la proposition P3 qui présente à la fois la quantité « 3 » et l'objet « billes ». Le statut de ces propositions est un ensemble-départ. La même procédure est appliquée pour construire un nouvel ensemble à partir de la seconde partie de la phrase « puis (P5) Tom (P6 : identificateur) lui donne (P7 : identificateur de temps lié à P5 et P6), d'autres billes « (P8) ». Dans cet ensemble le verbe « donner » active le schéma ensemble « transfert dans ». Dans la dernière partie de la phrase « *maintenant Joe a 8 billes »,* un nouvel ensemble est formé avec la quantité « 8 » ayant pour objet « billes », Joe est reconnu comme possesseur. Cette proposition a un statut dont le schéma est un ensemble-résultat. Ainsi, le schéma du problème transfert est constitué de 3 schémas d'ensemble : ensemble-départ, ensemble-transfert et ensemble-résultat qui vont former un schéma général du problème. Celui-ci étant instancié, il ne reste plus qu'à compléter les variables qui n'ont pas encore de valeurs numériques grâce au schéma de résolution mathématique du problème. A la question « *Combien Tom lui a t-il donné de billes ?* » un symbole est instancié pour signifier qu'il faut une quantité de l'identificateur « Tom » pour répondre à la question.

Les travaux de Riley et al. (1983) ainsi que de Kintsch et Greeno (1985) considèrent que les différences de difficulté entre les types de problèmes relèvent à la fois de leur structure sémantique et de la charge cognitive en mémoire de travail au cours de la résolution. Lorsqu'un problème est résolu, la transformation de l'énoncé en proposition requiert que tous les ensembles soient interprétés et aient un statut précis pour former un schéma du problème. Certains traitements demandent une augmentation de la charge mentale, tels que les termes ou les variables inconnus qui n'ont pas encore trouvé de place dans le schéma activé, les ensembles dont les rôles n'ont pas encore été déterminés et qui doivent être maintenus en mémoire. Tant qu'un élément ou une proposition du problème n'a pas encore été interprété et n'a pas trouvé un statut dans le schéma, il est maintenu en mémoire de travail. Cette tâche demande plus de ressources cognitives notamment lorsque les problèmes sont difficiles à résoudre. Puisqu'il s'agit des représentations, les opérations requises fluctuent à mesure que les informations sont traitées pour former un schéma du problème. Ces opérations freinent le stockage des connaissances en mémoire de travail. Pour comprendre comment les structures des problèmes, les catégories auxquelles ils appartiennent et les expressions linguistiques influent sur la résolution, Cummins et al. (1988) ont montré que les élèves d'écoles primaires résolvaient plus facilement des problèmes sous forme numérique que ceux présentés en énoncé verbal. Il semble que la transformation des énoncés sous la forme d'une équation mathématique dépend du degré de compréhension des expressions impliquées dans le problème. Le défaut d'interprétation d'un terme, d'un verbe ou un élément de comparaison pourrait conduire à une erreur de l'opération de résolution. Ainsi, selon ces auteurs c'est notamment l'interprétation de certains termes tels que « avoir plus que » comme « avoir », à traiter « quelques » comme un adjectifs, à considérer « ensemble » comme « chaque », que les élèves font beaucoup d'erreurs dans la résolution de problèmes. Ils ont observé ces effets d'interprétation en demandant aux élèves de formuler des questions à des énoncés sans questions. Les résultats ont montré que lorsque les problèmes ont une forme standard par exemple : « *Marie et Jean ont 8 billes à eux deux. Marie a 5 billes* », les élèves attribuent la quantité 8, qui correspond au tout dans la relation de schéma partie-tout pour les problèmes de combinaison, à la quantité correspondant à la partie manquante. Il n'y a donc pas eu une construction de la représentation du schéma partie-tout propre à ce problème. Cependant, lorsque la formulation du problème a été enrichie avec une situation réelle, familière ou susceptible de se produire, la représentation se construit en se basant sur la situation décrite dans le texte. Ce qui permet de se rapprocher de la représentation du schéma partie-tout, structure du problème, même si la formulation de l'opération arithmétique ne correspond pas au schéma formel du problème. Dans l'énoncé: *« Jeanne et Susanne ont une soirée pyjama samedi. Elles doivent récupérer des oreillers pour chaque participante. Elles ont récupéré 16 oreillers à elles deux. Susanne en a ramené 7 de chez elle, Jeanne a emprunté le reste à son cousin. Combien d'oreillers Jeanne a-t-elle emprunté à son cousin ? »* Les auteurs ont observé que l'erreur la plus fréquente est une opération présentée sous la forme : « 16+7 » au lieu de la forme « 16-7 ». Par ces résultats on pourrait comprendre que la formulation réaliste des problèmes favorise la construction de la représentation des schémas des problèmes correspondant à leur catégorie. Certains indices sémantiques ou syntaxiques des problèmes sont difficiles à traiter car ils peuvent exiger des inférences et des surcharges cognitives. Stern (1993) a montré que dans les problèmes de comparaison introduisant les termes tels que « de plus ou de moins que » le taux de réussites aux problèmes est bas notamment pour les élèves de maternelle qui ne parviennent pas à comprendre la signification relationnelle de ces termes. L'utilisation des noms à la place des pronoms personnels dans des ensembles de l'élément inconnu ne contribue pas à l'amélioration des réussites. Les élèves de première année d'école primaire sont capables de résoudre les problèmes de comparaison avec ensemble de référence connu (*Jean a 5 billes. Pierre a 2 billes de moins que Jean. Combien de billes pierre a-t-il ?),* mais pas sur un ensemble de référence inconnu (*Jean a 5 billes. Il a 2 billes de moins que Pierre. Combien de billes pierre a-t-il ?)*. Le problème avec l'ensemble de référence inconnu peut être résolu en reformulant le problème en un schéma de relation partie-tout ou en le transformant en problème de comparaison avec ensemble d'état connu.

Ainsi, la théorie des schémas (Riley *et al.* 1983 ; Kintsch et Greeno, 1985) a cherché à intégrer l'interprétation du texte et la résolution de problème. De la même manière que des schémas généraux sont évoqués dans la compréhension d'un texte, la compréhension des problèmes se fait en insérant les éléments de l'énoncé dans les variables à instancier du schéma sélectionné. La résolution consiste à appliquer la structure de calcul correspondant au schéma qui est conçu à la fois comme un moyen d'interprétation et de résolution du problème. Cette théorie a permis de montrer l'origine des erreurs dans la résolution de problèmes. En effet, Escarabajal, (1984) a montré que certaines erreurs étaient imputées à la mauvaise interprétation des relations entre les éléments du problème. Certaines interprétations ne formant pas de schéma de résolution complet mènent à un schéma particularisé incomplet ou inapproprié à la résolution de problème. Toutefois, l'approche du modèle de schéma sous estime les effets d'interprétation. Or, l'interprétation permet de tenir compte des éléments utiles ou non à la résolution de problèmes. Ces éléments peuvent aller de la formulation des problèmes aux détails dans la constitution des scénarios des problèmes. Un autre modèle a remis en question la théorie des schéma en accordant plus de valeur au rôle de l'interprétation au cours de la résolution de problème : le modèle de situation.

II.2.2. Le modèle de situation

Les recherches des auteurs tels que Hudson (1983), De Corte, Vershaffel et De Win (1985), Cummins et al. (1988) ont montré l'importance du rôle de l'interprétation dans la résolution de problème. La réussite à un problème ne se fait donc pas seulement en deux étapes principales : la sélection d'un schéma relatif au modèle du problème et la formulation mathématique de ce schéma pour résoudre le problème. L'interprétation de la situation décrite, la manière de présenter la situation du problème, le type de langage utilisé, la nature du scénario décrit et la manière dont la question est posée, sont, entre autres, des éléments qui influent, ou participent à la compréhension du problème pour sa résolution. En partant des travaux réalisés par d'Hudson (1983), De Corte et al. (1985), Cummins *et al.* (1988), Reusser (1990) a développé le modèle de situation SPS « S*ituation-Problem-Solver* », qui se situe à un niveau intermédiaire entre l'énoncé du problème et la sélection d'un schéma de résolution, tel que proposé par Kintsch et Greeno (1985). Reusser (1989) ainsi que Staub et Reusser (1995) reprochent à la théorie des schémas de ne pas tenir compte de l'interprétation de l'énoncé et de ne pas donner des explications à l'effet de la formulation du problème sur les performances.

Hudson (1983) a démontré que, même avant la première année d'école primaire ; de nombreux jeunes enfants possèdent une certaine compréhension des correspondances et des différences numériques entre ensembles disjoints. Dans son étude Hudson (1983) proposent à des enfants de niveau maternel et de première année d'école élémentaire deux formulations de questions au problème de type 5 de comparaison de la classification de Riley et al. (1983). La première phase de l'énoncé est « *Il y a 5 oiseaux et 3 vers* ». Une première version de formulation de la question était « *Combien d'oiseaux y a-t-il de plus que de vers ?* » qui incite à faire une comparaison entre le nombre d'oiseaux et celui des vers et une deuxième dans laquelle il incite les enfants à faire une correspondance entre un oiseau et un ver et de se représenter le nombre d'oiseaux qui ne pourront pas obtenir de ver. Cette interprétation a pour formulation « *Combien d'oiseaux n'auront pas de ver ?* ».

Il apparaît, selon les critères de performances définis[7] au préalable par Hudson (1983), que l'ensemble des enfants de première année sont capables de mettre en oeuvre leurs connaissances sur la correspondance entre les objets, pour déterminer les différences numériques entre les ensembles disjoints. A partir de ces critères, 100 % de réponse des enfants de première année ont utilisé leur connaissance sur la correspondance entre objets pour déterminer les différences numériques exactes entre ensembles disjoints. Cependant, 64% de ces mêmes enfants ont répondu correctement à la question « *Combien d'oiseaux y a-t-il de plus que de vers ?* » lorsque l'illustration de ce problème était la même que celle utilisée dans la question « *Combien d'oiseaux n'auront pas de ver ?* ». Lorsque la performance parfaite est utilisée comme critère de réussite (c'est-à-dire que l'enfant donne une réponse qui indique clairement qu'un oiseau n'aura pas de verre), le pourcentage d'enfants qui ont répondu parfaitement aux deux tâches étaient respectivement, 79% de bonnes réponse pour le problème « *Combien d'oiseaux n'auront pas de ver ?* » et 39% pour le problème « *Combien d'oiseaux y a-t-il de plus que de vers ?* » Une analyse détaillée des stratégies de résolution pour réaliser des correspondances entre les ensembles disjoints a permis de déterminer le niveau de compréhension des enfants sur la mise en relation entre les quantités d'objets et sur les différences numériques. Hudson observe que les enfants utilisent différentes stratégies dans la résolution de ces problèmes notamment : la stratégie d'appariement, celle de mise en correspondance un à un entre les ensembles, et celle du comptage des sous-ensembles équivalents entre les éléments quantitatifs du problème. L'étude de Hudson (1983) montre que la formulation de la question dans un contexte qui se rapproche d'une situation suffisamment réaliste contribue à l'augmentation du taux de réussites par rapport à une formulation qui s'en éloigne. Elle influe sur l'interprétation de la situation décrite dans

[7] A la question combien « d'oiseaux n'auront pas de vers ? » Le critère de réussite que nous retenons ici concerne les réponses correctes notamment: « un oiseau, un de plus n'aura pas de verre, quatre auront et un aura pas et le quatrième n'aura pas de vers ».

l'énoncé ; elle peut conduire à des interprétations et aux procédures de résolution différentes. Pour Staub & Reusser (1995) les performances observées par Hudson ne peuvent être attribuées à la formulation des problèmes, mais à la construction d'une représentation de la situation décrite dans le problème. Ces auteurs considèrent que la reformulation des problèmes permet aux élèves de prendre appui sur les scènes familières ou qui peuvent arriver pour construire un modèle de situation qui mènent au modèle mathématique. D'où l'observation des réussites chez les élèves ayant habituellement de faibles performances.

II.2.2.1. L'effet de reformulation et le schéma général de résolution de problème

Dans la même ligne, les recherches de De Corte et al. (1985) ont montré que des modifications de la formulation qui rendent plus apparente la catégorie du problème facilitent notablement la résolution. Selon ces auteurs, un schéma général de résolution est activé au cours de la résolution de problème (« Word Problem Schema » ; WPS). Ce schéma général (acquis vers 8 ans selon Brissiaud, 1988) serait une heuristique de résolution qui permettrait : (i) de construire une représentation abstraite du problème en construisant des relations entre des éléments du problème et déterminer, ainsi, la catégorie du problème à résoudre[8] ; (ii) à partir de cette représentation une structure arithmétique formelle ou une stratégie jugée appropriée pour la résolution est choisie ; (iii) après avoir résolu l'opération arithmétique, la représentation initiale du problème est réactualisée par l'intégration des données inconnues par les valeurs numériques calculées et la formulation de la réponse ; (iv) enfin, la réponse formulée et les calculs sont vérifiés afin de s'assurer de l'exactitude du calcul et qu'elle soit en rapport avec la question du problème. De Corte et al. (1985) considèrent que les problèmes présentés régulièrement aux élèves sont sous forme canonique. Les données sont présentées de manière hiérarchisée (pour faciliter la reconnaissance de la structure) et ambiguë de sorte que les élèves doivent continuellement faire des inférences sur les expressions sémantiques utilisées dans les énoncés. L'interprétation de la situation est très souvent sollicitée. Si les meilleurs élèves bénéficient de la présentation hiérarchisée et de la structure conceptuelle du problème et peuvent par cette structure compenser les ambiguïtés sémantiques grâce aux

[8] Ces problèmes peuvent avoir une structure sous-jacente particulière selon qu'ils soient de type combinaison, de changement d'état ou de combinaison. Le « Word Problem Schema » (WPS) facilite la reconnaissance de la structure de ces problèmes, leur rôle sémantique et leur but.

nombreux contextes de problèmes rencontrés auparavant, ce n'est pas le cas des novices ou des élèves qui ont des difficulté en résolution de problème. Une manière de les aider au mieux serait de lever les expressions qui prêtent à confusion par une reformulation qui faciliterait la représentation du problème et la maîtrise du schéma structurel du problème. Pour valoriser cette idée, De Corte et al. (1985) ont présenté deux formulations différentes sur les problèmes de changement de comparaison et de combinaison aux élèves âgés de 6-7ans et 7-8 ans afin de comprendre dans quels contextes les relations sémantiques peuvent faciliter la construction d'une représentation mentale adéquate pour réussir la résolution de problèmes. Ils cherchaient également à observer leurs stratégies de résolution. Les trois catégories de problèmes avaient chacune une formulation canonique de l'énoncé caractéristique de la forme habituelle des problèmes rencontrés dans les manuels scolaires. Un exemple de problème de la catégorie changement d'état est le suivant : « *Joe a gagné 3 billes. Maintenant il a 5 billes. Combien avait-il de billes au début ?* » (Change 5, Riley et *al.* 1983). Une formulation alternative du même problème mettait en exergue, de façon explicite, les relations sémantiques, de sorte qu'elles soient plus clairement perçues dans le problème. En voici un exemple : « *Joe a des billes. Il a gagné 3 billes de plus. Maintenant il a 5 billes. Combien avait-il de billes au début ?* ». Les éléments de tous les problèmes partageaient des relations partie-tout. Les résultats ont montré que la formulation qui explicite les relations sémantiques a conduit à une amélioration des réussites par rapport à la formulation standard. Ce résultat a également été observé pour les problèmes de comparaison qui sont souvent reconnus par les auteurs comme étant les plus difficiles à résoudre (Riley et al. 1983).

Ces résultats montrent l'effet de la reformulation sur l'augmentation des réussites. Tous les problèmes de l'expérience se résolvaient par la soustraction, or, la plupart des erreurs rencontrées portaient sur l'opération d'addition et sur le choix d'une information explicitée dans l'énoncé. Dans le premier cas, l'élève peut résoudre le problème (sans nécessairement penser répondre à la question ou en répondant à la question qui lui semble facile ou encore à laquelle il s'attend) en effectuant l'addition. L'opération « 5+2 » = 7 est, selon ces critères, la réponse pour l'énoncé cité précédemment : « *Joe a des billes. Il a gagné 3 billes de plus. Maintenant il a 5 billes. Combien avait-il de billes au début ?* », l'enfant identifie l'information quantitative « *Il a gagné 3 billes* » comme une variable quantitative qu'on instancie et qu'on ajoute à la réelle variable quantitative pour résoudre le problème. Dans le deuxième cas l'enfant choisit la variable numérique qui est dans l'énoncé car il considère qu'elle répond à la question. Dans le même énoncé, il identifie et interprète l'information quantitative « *Il a gagné 3 billes* » comme la quantité de billes que Joe a gagné avant la recréation. Ces deux types d'erreurs sont observés dans les problèmes de changement d'état. Les auteurs expliquent ces erreurs par le fait que les enfants ne sont pas parvenus à construire ni une représentation mentale appropriée ni à procéder au traitement hiérarchique des données du problème qui conduisent aux processus de résolution car ils n'ont pas encore acquis la compréhension du schéma partie-tout.

Dans le souci de répondre à la question et de correspondre au schéma de résolution de problème en classe, les élèves font des inférences et créent d'autres heuristiques de type « répondre à la question en utilisant tous les nombres », si ces nombres sont présents dans l'énoncé, c'est parce qu'ils doivent servir à répondre à la question. Ce type d'introduction d'heuristique implicite erronée en classe a été démontré par Coquin-Viennot (2001) dans une étude avec des élèves de CM2. Des problèmes sont donnés à résoudre en variant le fait que la question soit attendue (la réponse utilise toutes les données numériques du problèmes), inattendue (la réponse n'utilise pas toute les données numériques du problèmes) et selon la place de la question en fin ou en début de l'énoncé. Elle note que la question attendue correspond au contrat didactique établit en classe entre l'enseignant et l'élève. Ce contrat engage l'élève à toujours répondre à la question rien qu'en lisant l'énoncé. La question inattendue rarement pratiquée en classe pourrait engendrer des erreurs dans la résolution de problème. La place de la question en début ou en fin de problème permettrait de savoir si la question inattendue serait en conflit avec la construction formelle du problème, en d'autres termes, les enfants garderaient-ils la question attendue en accord avec la construction (utilisant toutes les données numériques du problème) de l'énoncé ou inhiberaient-ils la question implicite attendue pour répondre à la question formulée inattendue (en n'utilisant que les données qui répondent à la question) ? L'auteure observe que les énoncés dont les questions sont placées en début du problème sont mieux réussis notamment lorsque la question est attendue. Ce résultat est en accord avec l'étude de Fayol et Abdi (1986) ainsi que celle de Devidal et al. (1997), qui ont montré que les questions placées en début d'énoncé augmentent les performances en résolution de problèmes relativement à celles placées à la fin de l'énoncé. Cependant, l'auteur nuance ce résultat car la question inattendue (placée en début ou en fin d'énoncé) n'a pas conduit aux mêmes résultats pour ce qui est des réussites. Malgré la présence de la question inattendue au début de l'énoncé, les élèves anticipent la réponse à la question attendue. Selon l'auteure, ce résultat serait expliqué par le fait que la question inattendue n'est pas retenue en mémoire de travail en début de la lecture du problème. En oubliant cette question, les enfants construiraient « normalement » la réponse à la question attendue (compétences déjà bien établies dans la résolution). De plus, les énoncés étant plus longs et plus complexes, malgré le fait que la prise de note libère de l'espace en mémoire de travail, elle occupe la charge mentale, ce qui empêcherait le maintien en mémoire de la question inattendue en début d'énoncé.

L'observation des erreurs d'anticipation qui utilisent toutes les données numériques quand la question ne le requiert pas, correspond à la mise en oeuvre de deux heuristiques de résolution suivantes : (i) « il faut utiliser toute les données pour résoudre le problème » (ii) « donner » une solution numérique cohérente avec le corps du texte (Coquin-Viennot, 2001, p.193). Elle a également été observée chez les enfants avec les problèmes de types « l'âge du capitaine » insolubles proposés par Brissiaud (1988), tel que *« un berger a 75 moutons et 5 chiens. Quel est l'âge du berger ? »*. Pour résoudre cet énoncé les enfants doivent contrôler sa validité. Les résultat montrent que le jugement porté sur le problème dépend des connaissances de l'élève sur les structure des problèmes et que les élèves tendent à interpréter la difficulté du problème comme relevant de leur incompétence plutôt que de l'attribuer à la nature du problème. Ils ne peuvent pas accepter que cela est dû à la formulation du problème. Brissiaud, (1988) recommande de proposer des énoncés de problèmes incomplets afin de mieux apprendre aux élèves à formuler des énoncés cohérents et à les distinguer de ceux qui ne le sont pas.

L'effet de la reformulation des problèmes a également été expérimenté par Cummins (1991). Elle a proposé à des élèves de première année une formulation standard « *Marie et Jean ont 5 billes ensemble. Marie a 3 billes. Combien de billes a Jean ?* » et une deuxième formulation : « *Il y a 5 billes. Deux d'entre elles appartiennent à Marie. Le reste appartient à Jean. Combien de billes appartiennent à Jean ? ».* Les résultats ont également montré une augmentation des réponses au bénéfice de la deuxième reformulation, 85 % contre 30 % pour la première formulation. De même que De Corte et al. (1985), Cummins et al. (1988) considèrent que les erreurs dans la résolution sont dues à une mauvaise interprétation des éléments du problème, qu'il s'agisse des relations entre les éléments du problème, ou des termes abstraits sujets à des interprétations différentes dans un même problème. Une interprétation inadaptée conduit à des solutions erronées (Cummins, 1991). Selon eux, il faudrait multiplier les expériences sur la résolution des problèmes sur le plan conceptuel, présenter moins de problèmes qui inciteraient les enfants à procéder aux inférences par la présence des termes ambigus dans les énoncés, afin qu'ils puissent acquérir les compétences sur la mise en correspondance entre le schémas structurel et la formulation du problème.

Aussi, c'est en partant des études (entre autres, celles précédemment citées) qui montrent que l'interprétation des éléments, (le scénario, les acteurs, les évènements) du problème, la manière dont ils sont présentés et formulés, influe sur sa stratégie et sa réussite, que Reusser (1989, 1990) a développé la théorie du modèle de situation (Situation-Problem-Solver : SPS). Si Kintsch et Greeno (1985) proposent un modèle qui va directement de la l'énoncé à l'application de la structure arithmétique correspondant au schémas de problème, Reusser (1989, 1990) intègre, entre les deux éléments, la compréhension et la construction de la représentation du contexte du problème. La compréhension à partir du modèle de situation permet de construire une interprétation du problème aussi bien au niveau des opérations mathématiques à effectuer qu'au niveau de son contexte. Il considère que seuls les experts qui maîtrisent, par leurs expériences antérieures, les modèles des schémas des problèmes, après lecture, sont en mesure de sélectionner un schéma adéquat dans la mémoire à long terme et d'appliquer la procédure arithmétique au problème. Cela n'est pas le cas pour les jeunes ou les novices qui n'ont pas encore acquis une expérience significative pour avoir stocké en mémoire à long terme les schémas de problèmes. Il leurs faut construire une représentation particularisée de la situation en se servant des évènements, des éléments, de la formulation, et du déroulement du scénario des problèmes pour construire leurs relations conceptuelles. Cette représentation de la situation est une représentation concrète, elle permet de s'approprier l'histoire et le contexte du problème avant de procéder au calcul. Il s'agit donc de transformer la représentation du texte, avec sa formulation sémantique et ses ambiguïtés, en équation formelle propre à la résolution du problème. Il faut partir de la situation lexicale, sémantique et syntaxique pour donner une réponse numérique intégrée dans une phrase réponse qui tient compte du modèle de situation du problème. Selon le modèle de situation la compréhension du problème se déroule à trois niveaux : au niveau textuel, propositionnel et situationnel. L'objectif est de tenir compte de la grammaire, du vocabulaire, de la syntaxe, et des aspects pragmatiques de l'énoncé du problème pour comprendre les buts et les motivations des acteurs qui y sont impliqués et d'en construire un modèle mathématique.

La réalisation de la résolution par le modèle de situation passe par l'utilisation des macro-stratégies (Reusser, 1990) qui se matérialise en 5 étapes : (i) Une première étape intègre une macro-stratégie qui favorise la construction d'une structure propositionnelle, l'équivalent d'une base de texte dans le modèle de Kintsch et Greeno (1983). Elle utilise les règles de syntaxe, grammaticale et lexicale pour créer les formes propositionnelles des énoncés ; (ii) Une deuxième macro-stratégie crée, à partir de la compréhension de la situation, un modèle mental de l'action ou de la structure générale de la situation, appelé également le modèle de problème épisodique. Ce modèle épisodique permet de construire le modèle de la situation ; (iii) Une troisième macro-stratégie est utilisée pour formuler l'équation mathématique de l'énoncé. Elle transforme la représentation épisodique du problème en une structure mathématique abstraite, qui est le modèle de problème mathématique, qui s'appuie sur les structures des relations sémantiques entre les états et les actions dans le modèle de la situation et sur la structure abstraite des relations d'ensemble ; (iv) Après l'abstraction de la situation du modèle arithmétique, la quatrième macro-stratégie extrait le modèle de problème arithmétique et résout le problème en fonction de sa structure numérique et ce en utilisant différentes sous-stratégies ; (v) Enfin la cinquième macro-stratégie énonce une phrase-réponse qui renvoie à la question et donne un sens à la réponse numérique. Cette dernière étape rassemble le modèle de situation et l'équation numérique qui répond à la question. Elle démontre que non seulement le problème a été compris mais aussi que les acteurs ou les variables impliqués dans la question et dans le texte se retrouvent également dans l'équation qui résout et répond à la question.

Pour montrer l'importance de la compréhension dans la résolution de problème à travers le modèle de situation, Reusser (1989) fait intervenir deux facteurs : l'aspect narratif qui met en relief l'implication des protagonistes, acteurs et co-acteurs dans la formulation de l'énoncé et dans la formulation de la question. Le deuxième aspect est le contexte de la situation qui met en exergue la familiarité ou non entre les acteurs et protagonistes de l'énoncé. Ces deux facteurs font intervenir des situations variées à partir de l'énoncé et de la question: (i) soit l'acteur principal du scénario a des liens avec d'autres acteurs et est impliqué dans la question, comme dans un problème de changement de type 6 : *« Aujourd'hui, Ruedi a obtenu quelques billes de sa grand-mère au parc, maintenant Ruedi a onze billes. Hier, Ruedi a reçu huit billes de son grand-père ».* La question implique l'acteur principal Ruedi : « *Combien de billes Ruedi a obtenu au parc ?* » Question impliquant le co-acteur ayant un lien avec l'acteur principal : « *Combien de billes la grand-mère a donné au parc ? » (ii)* soit l'acteur principal n'a aucun lien avec les co-acteurs problème de changement de type 3: « *Aujourd'hui, Ruedi a reçu quelques billes de la part de Hannah dans la cour de récréation. Maintenant Ruedi a onze billes. Hier, Ruedi a reçu huit billes de Daniel ».* La question implique l'acteur principal Ruedi **:** « *Combien de billes Ruedi a obtenu dans la cour de* *récréation ? »* Question impliquant le co-acteur n'ayant aucun lien avec l'acteur principal, « *Combien de billes Hannah a-t-elle donné dans la cour de récréation ? » ; (iii)* les protagonistes du scénario n'ont aucun lien et un acteur secondaire est impliqué dans la question comme dans un problème de changement de type 5 : « *Aujourd'hui Silvia a reçu sept billes d'Urs. Hier Silvia a obtenu quelques billes de Hans dans la cour de récréation. Maintenant Silvia possède quinze billes. Combien de billes Hans a-t-il donné pendant qu'il était dans la cour de récréation ? »* Selon ces différents contextes, ou l'angle sous lequel le scénario du problème est présenté, c'est-à-dire, les relations entre les acteurs impliqués dans le texte ou dans la question, il y a des interprétations différentes du scénario qui peuvent mener à la réussite ou à l'échec. En faisant varier ces modalités, Reusser (1989) utilise 32 problèmes de changement de type 3 à 6[9] et propose aux étudiants en sciences humaines de les résoudre. Le choix des sujets adultes s'explique par le fait que le chercheur voulait s'assurer que les participants avaient des connaissances et des ressources cognitives nécessaires pour résoudre les problèmes. Les sujets lisaient les problèmes sur un écran d'ordinateur, faisaient un calcul mental et appuyaient sur une touche lorsqu'ils estimaient avoir la solution. Les résultats ont montré que la manière dont le problème est décrit est en rapport avec le temps de résolution. Autrement dit moins les acteurs entretiennent de relation, plus le temps de résolution est long car les participants prennent le temps de construire le modèle de situation qui n'est pas explicité dans l'énoncé. Lorsque les co-acteurs ont une relation familière les problèmes sont plus faciles à résoudre que dans le cas où ils n'en ont pas. De même, si le scénario est familier, l'incitation d'un co-acteur n'influencera pas la compréhension ; c'est la familiarité du problème qui facilitera la résolution. Lorsque le scénario n'est pas familier, les réussites varient car la forme de l'énoncé ou le contenu de la question obligent le participant à modifier son angle de traitement en se focalisation sur l'un des co-acteurs.

L'auteur interprète les résultats de manière suivante : si les acteurs entretiennent une relation (notamment de parenté ou d'amitié), le script semblera plus familier et plus cohérent, ce qui contribue à faciliter la construction du modèle de situation. Si le scénario est familier (il permet de distinguer les différents protagonistes notamment l'acteur principal désigné par un prénom et les protagonistes introduits par les relations qu'ils entretiennent avec l'acteur principal), cette formulation de la situation facilite la représentation, l'interprétation du problème et la réorganisation du scénario de l'histoire en facilitant le point de vue du

[9] Problèmes de changement correspondant à la classification de Riley et al. (1983). Les exemples sont tirés des problèmes de Reusser (1990)

protagoniste. Dans le cas où les éléments sur lesquels on doit se focaliser ne sont pas familiers, il est difficile de comprendre le problème. L'introduction des éléments de reformulation, sur l'énoncé ou sur la question, serait une aide à la résolution de problèmes. Imaginons qu'on nous raconte une fable de La Fontaine et qu'on nous pose des questions après narration. Si la question posée est en rapport avec les personnages principaux, il serait facile de répondre à la question puisque nous avons construit une représentation du conte à partir de leurs actions et des événements décrits. Cependant, si la question formulée est en rapport avec un personnage en périphérie de l'histoire, cela prendrait plus de temps pour placer ce personnage dans l'histoire en reconsidérant le thème de l'histoire, les rapports entre les personnages principaux et leurs relations avec ce personnage presque absent de l'histoire.

Comme dans la compréhension de texte, le modèle de situation donne un statut particulier au script malgré son inscription dans un schéma général. Comprendre un problème serait donc partir de la formulation de l'énoncé pour construire un modèle de situation propre au contexte du problème, qui fait son originalité, avant de le transformer en modèle mathématique. L'énoncé doit inciter à une interprétation suffisamment riche pour construire une représentation appropriée du problème et une représentation conceptuelle qui contribue à sa résolution. Comme Reusser (1985) l'affirme, la formulation des questions ne doit pas inciter à utiliser une opération comme certains thèmes, ou verbes tendent à le faire lorsqu'ils sont présents dans une question : « enlever », « retirer », car elle ne permet pas de traiter le problème en profondeur, les indices qui servent à effectuer les opérations sont formulés dans la question. Les expressions utilisées doivent au contraire susciter une représentation qui mène vers les opérations arithmétiques à utiliser.

Dans la même optique, Coquin-Viennot et Moreau (2003) ont cherché à spécifier la nature de la représentation construite pendant la lecture d'un énoncé de problème, afin de comprendre comment les enfants âgées de 10 à 11 ans, sélectionnent différentes types d'informations comprises dans le texte. Les énoncés étaient des problèmes additifs de type changement d'états tirés de la classification de Riley et al. (1983) et de Vergnaud (1982). Les énoncés était formulés de façon suivante *: « un berger s'est établit dans la montagne (SE). Le berger veut nourrir ses moutons (SE). Le berger possède un troupeau de 30 moutons (IN). Dans le troupeau, le berger a des moutons noirs et blancs de Scotland (NA). Chaque année, (TE) un grand marché est organisé dans le village (IE). Le berger achète des moutons au marché (INN). Ce qui augmente la taille de son troupeau (EX). Dans la soirée, (TE) le berger* *remarque un ours*[10] *dans la montagne (IE). La nuit d'après, (TE) l'ours dévore 12 moutons (IN). Ce qui réduit la taille du troupeau (EX). Le matin (TE) le berger compte son troupeau (EX). Il y a maintenant, (TE) 35 moutons dans le troupeau (IN). Combien de moutons le berger a-t-il acheté au marché? (Q) ».*

Les accronymes entre parenthèses ont les significations suivantes : IN : les informations numériques indispensables pour résoudre le problème ; INN : les informations indispensables non numériques ; EX : les informations qui donnent une explication sur les relations et conséquences des événements dans l'énoncé ; Q : la quantité inconnue ; IE l'événement initial ; SE : l'information sur le thème du problème. TE : les informations temporaires ; NA : les informations narratives.

Les enfants avaient deux types de tâches à effectuer. Dans une première tâche, il fallait sélectionner les éléments du problème pour formuler un nouveau problème, que celui-ci soit le plus court possible, à la fois facile à comprendre et à résoudre. Dans une deuxième tâche, il fallait sélectionner les éléments du problème qui facilitent sa compréhension. Les résultats confirment l'idée d'une représentation d'un modèle de situation et d'un modèle du problème comme dans les études de Reusser (1989, 1990) et de Nathan et al. (1992). La compréhension du problème implique bien, à un niveau non mathématique, la construction de la représentation spécifique des événements, des actions et des relations des concepts journaliers qui constituent le modèle de situation. En effet, les résultats ont montré que les élèves de cette tranche d'âge sont capables de distinguer les informations pertinentes pour la résolution de problèmes de celles qui ne le sont pas. Ceux qui ont de grandes capacités en mathématiques sélectionnent uniquement les informations qui sont utiles pour construire le modèle de situation telles que : l'événement initial, les explications, les informations temporelles et les états des situations. Ceux qui ont de faibles performances en mathématiques sélectionnent aussi bien les informations narratives que situationnelles. Les informations sélectionnées pour construire le modèle de situation (dans la tâche 1) sont plus nombreuses que les informations sélectionnées pour créer le modèle du problème. Les informations pour la résolution du problème telles que les informations numériques (état initial, final et intermédiaire : *« le berger possède un troupeau de 30 moutons », « l'ours dévore 12 moutons, maintenant il y a 35 moutons dans le troupeau »*) et les informations quantitatives inconnues du problèmes qui concernent les premiers changements dans le problème, sont sélectionnées dans la même

[10] Pour que l'énoncé soit plus réaliste, on pourrait remplacer l'ours par renard ou loup.

proportion dans les deux tâches. Mais dans la seconde tâche les informations qui décrivent la situation du texte sont plus sélectionnées dans la tâche 2 que 1 car la tâche 2 contribue à la création du modèle de situation, raison pour laquelle ils n'y sélectionnent pas les informations narratives. Ils construisent donc, dans la tâche 2, le modèle de situation pour comprendre l'énoncé. Lorsqu'on demande aux participants de sélectionner des informations pour créer un énoncé de problème facile à comprendre, ils préfèrent choisir celles qui rendent l'énoncé plus explicite (l'événement qui est la cause ou par laquelle débute la situation de l'énoncé : « *un marché est organisé dans le village* »*;* « *le berger remarque qu'il y a un ours dans la montagne* » ; le thème de l'histoire : c'est lui qui guide la lecture et permet l'implication des connaissances réelles relatives au domaine auquel l'énoncé fait référence : « *le berger veut nourrir ses moutons »* ; les informations explicatives : les explications décrites par la reformulation des relations implicites ou la conséquence des événements dans l'énoncé : ce qui fait croître ou réduire la taille du troupeau : « *le berger compte l'ensemble de son troupeau* »*;* l'information temporelle : les expressions temporelles ou les expressions de circonstances : « *le matin* », « *la nuit d'après* », « *l'après midi* »). Ils ignorent les informations narratives considérées comme superflues pour la compréhension. Cette expérience a également montré que la sélection des informations sur le modèle de résolution est un indice de performance en résolution de problèmes. Les enfants de faible capacité de résolution ont dans la tâche 1 sélectionné plus d'informations pour la construction du modèle de situation que pour le modèle du problème. Dans la tâche 2, ils ont sélectionné toutes les informations narratives qui sont pourtant superflues et qui ne sont d'aucune aide pour la compréhension du problème (« *dans le troupeau le berger a des moutons blancs et noirs* »). Ces résultats pourraient s'expliquer d'une part, par le fait que les élèves aux faibles capacités mathématiques ne possèdent pas de schéma qui puisse guider leur choix dans la sélection des informations (Kintsch et Greeno, 1985) et d'autre part, la situation décrite dans le problème est complexe et requiert la capacité de construire un modèle de situation pertinent (Reusser, 1989, 1990 ; Nathan et al. 1992).

Coquin-Viennot et Moreau (2003) ont réalisé une autre étude afin de comparer les deux types de modèles utilisés dans la résolution de problème : ceux qui donnent la priorité aux représentations qualitatives intermédiaires tels que le modèle de situation épisodique, et ceux qui sont au centre de l'activité du participant comme le type de procédure utilisée. Cette expérience a été réalisée avec des enfants âgés de 8 à 9 ans, et de 10 à 11 ans. Les auteurs ont proposé des problèmes de factorisation pouvant se résoudre par deux stratégies : la factorisation ou le développement. Chaque problème a été formulé sous 4 versions croisées avec deux variables ; une qui modifie le texte par la présence d'un élément qui structure les données énumérées dans le problème et une variable qui porte sur l'ordre numérique des données. Celui-ci est sensé influencé la procédure de résolution selon que l'élève active la représentation du modèle de situation ou la procédure de résolution.

Les 4 versions de problèmes utilisés sont les suivants :

(i) la version qui décrit la présence de l'élément structurant avec l'élément de factorisation placé au début de l'énoncé : « *Pour une remise de prix, le fleuriste prépare pour chacun des 14 candidats un bouquet composé de 5 roses et de 7 tulipes. Combien le fleuriste utilise-t-il de fleurs au total* ? »

(ii) la version qui décrit l'absence de l'élément structurant avec la donnée de factorisation placée à la fin : « *Pour une remise de prix, le fleuriste prépare pour chacun des candidats 5 roses et 7 tulipes. Combien le fleuriste utilise-t-il de fleurs s'il y a 14 candidats ? »*

(iii) la version qui décrit la présence de l'élément structurant avec la donnée de factorisation placée à la fin : « *Pour une remise de prix, le fleuriste prépare pour chacun des 14 candidats 5 roses et 7 tulipes. Combien le fleuriste utilise-t-il de fleurs s'il y a 14 candidats* ? »

(iv) la version dans laquelle l'élément structurant est absent, la donnée de factorisation est placé au début du problème : « *Pour une remise de prix, le fleuriste prépare pour chacun des candidats 5 roses et 7 tulipes. Combien de fleurs le fleuriste utilise-t-il au total ?* »

Les auteurs ont d'abord noté que le niveau scolaire a un effet sur la performance et que le choix des stratégies est un véritable indicateur car pour qu'un choix de résolution soit possible il faut que le schéma associé à cette stratégie soit disponible. Les enfants de 9 ans sont totalement capables d'activer un schéma partie-tout mais ont des difficultés à réaliser d'autres opérations à partir du résultat obtenu. Cette lacune est comblée 2 ans plus tard ; presque toutes les stratégies commençant par la factorisation sont complètes et se soldent par une réussite. Ainsi, la factorisation est une stratégie utilisée le plus souvent par les enfants plus âgés. La présence de l'élément structurant, lorsqu'il ne modifie pas les performances, augmente le nombre d'utilisations de la stratégie de factorisation. L'élément structurant confirme qu' au cours de la lecture c'est le modèle de situation épisodique qui intègre les éléments qualitatifs qui est construit plutôt que le schéma strictement formel du problème. Cependant l'ordre d'apparition des données n'a pas eu d'effet. Dans cette étude, les auteurs ne cherchent pas à remettre en question le rôle des modèles procéduraux largement construits dans des apprentissages en classe, mais à souligner l'intérêt de comprendre le rôle fondamental des schémas sémantiques activés au cours du traitement et de la résolution du problème. Il est recommandé, au cours des activités de résolution de problèmes, de travailler sur ces aspects qualitatifs, car ils contribuent, autant que les schémas, à la résolution de problèmes.

Nous avons retenu deux autres modèles dans la résolution de problème : le modèle de CHIPS (Concrete Human-Like Inferential Problem Solver) développé par Briars et Larkin (1984). Ce modèle matérialise la représentation et les structures de problèmes en utilisant les objets concrets tels que les jetons de poker pour trouver la solution. Il représente les verbes d'actions impliqués dans le problème : donner, perdre, trouver acheter et décrit le taux d'erreur, de réussite et d'utilisation des stratégies de calcul dans différents types de problèmes. Escarabajal (1988) propose également un modèle de compréhension de problème par l'instanciation des schémas. Elle a présenté à 51 élèves de CM1 et CM2 des problèmes de composition de transformation selon la classification de Vergnaud (1982). Ses résultats ont montré que la résolution des problèmes n'est pas toujours liée à l'activation d'un schéma, et il n'y a pas une relation directe entre les éléments de l'énoncé et l'exécution d'une procédure de résolution. La mise en relation entre les éléments du problème n'assure pas qu'il y aura un calcul approprié en rapport avec ces relations. L'activation d'un schéma n'est valable que pour les experts, mais pour les enfants qui n'ont pas d'expériences bien établies, ils construisent plutôt la signification de la situation en utilisant le contexte sémantique du problème (les traits de surface et le contexte de présentation du problème).

Dans les deux sections précédentes nous avons montré de quelles manières les modèles de compréhension participent à la résolution de problèmes. Dans un premier temps nous avons vu que le modèle de schéma développé par Riley et al. (1985) en se basant sur la classification des problèmes arithmétiques de Kintsch et Greeno (1985), propose la construction de la représentation à partir du schéma du problème, qui est la structure sous jacente de la catégorie auquel il appartient. Pour résoudre un problème avec le modèle des schémas il y a principalement deux étapes : (i) la transformation de l'énoncé en propositions qui permet de construire des ensembles dans lesquels chaque élément de la situation joue un rôle. Ces schémas seront par la suite intégrés dans un schéma général du problème, qui correspond à sa catégorie ; (ii) Dans la deuxième étape il s'agit de formuler la structure du problème en équation arithmétique afin d'apporter une réponse à la question posée. Dans un second temps nous avons vu que le modèle de situation a apporté quelques réponses aux limites du modèle de schéma. Il a expliqué les différences des performances entre les problèmes de même catégorie, introduit la charge mentale dans le traitement de l'énoncé et introduit la construction d'une représentation mentale propre à la situation décrite dans le problème. Le modèle de situation traite le problème avec les mêmes phases que le schéma à la différence qu'il introduit entre les deux la construction de l'interprétation propre au problème, afin de produire la phrase réponse qui s'articule avec le calcul numérique du problème.

D'autres facteurs ont été étudiés dans le domaine de la résolution de problèmes arithmétiques notamment les effets du contexte général de présentation en milieu scolaire et les particularités de formulation des problèmes. Nous présentons maintenant les résultats qui montrent l'influence du contexte scolaire dans la résolution de problèmes et développerons les résultats relatifs à la formulation des problèmes dans la section suivante.

II.2.2.2. L'influence du contexte scolaire dans la résolution de problèmes

Le milieu scolaire a pour rôle de développer les compétences, les savoirs et savoir-faire des apprenants. Toute forme d'apprentissage faite pour atteindre cet objectif se réalise dans un contexte bien défini. On apprend des leçons, des règles de grammaire, de conjugaison à partir des thèmes fixés et des buts visés par l'éducation en fonction de l'âge et du niveau scolaire des élèves. Il en est de même pour l'apprentissage des mathématiques. En effet, l'enseignement des mathématiques à l'école a d'abord eu pour objectif de développer des mécanismes répétitifs par les exercices en appliquant des règles de calcul (par exemple le calcul des périmètres et des surfaces et par la récitation des tables de multiplication). Les problèmes posés aux élèves servaient à vérifier leurs compétences en matière de calcul afin de leur faire intégrer le milieu professionnel. Bien que ces programmes faisaient appel aux capacités de raisonnement et de compréhension, les situations décrites dans les problèmes accordaient peu d'importance à ces deux éléments. Par la suite, les programmes scolaires se sont centrés sur la compréhension des concepts et notions impliqués dans les apprentissages des mathématiques. Cependant, dans la résolution de problèmes les énoncés, souvent stéréotypés, sont prévus pour vérifier l'état des connaissances formelles des élèves. Il en résulte un décalage entre le type d'apprentissage divulgué dans le contexte scolaire et celui de la vie quotidienne. Cette distance pourrait expliquer la baisse de performances en résolution de problème et pourrait être également liée au fait que la résolution de problèmes implique le traitement des processus cognitifs complexes d'autant plus que les pratiques des écoles semblent renforcer cette distance (Vincente et Orrantia, 2007). Plutôt que d'amener les élèves à résoudre les problèmes canoniques, à les considérer comme des tâches de résolution sans rapport avec le monde réel, les programmes scolaires devraient inviter les enfants à utiliser leurs connaissances, leur raisonnement, et leurs expériences du monde réel dans les processus de résolution de problèmes mathématiques, (Verschaffel et al. 2000). Les énoncés décrits doivent être suffisamment exhaustifs, représentatifs, et fidèles de façon à ressembler à une situation réelle simulée. Une performance pertinente dans la situation réelle doit être prise en compte dans des conditions représentatives des stimuli et des réponses qui se produisent dans la vie réelle. Cette correspondance entre l'énoncé et la réalité a une influence sur l'engagement de l'élève dans l'activité de résolution de problèmes.

A. Event	F. Circumstances F1. Availability of external tools F2. Guidance F3. Consultation and collaboration F4. Discussion opportunities F5. Time F6. Consequences
B. Question	
C. Information/data C1. Existence C2. Realism C3. Specificity	
D. Presentation D1. Mode D2. Language	
E. Solution strategies E1. Availability E2. Experienced plausibility	G. Solution requirements H. Purpose in the figurative context

Tableau 4. Les aspects des situations-problèmes importants pour leur représentation, (Palm, 2009).

Les 8 éléments essentiels (Palm, 2009) pour représenter la situation réelle en un énoncé de problème sont rattachés principalement à :

- la description des événements : les situations décrites doivent avoir une grande probabilité de se produire dans la vie réelle (une partie de billes à la cour de recréation, déplacement dans l'ascenseur ou en autobus, découpage d'un gâteau).

- la question posée dans les situations-problèmes doit également refléter les préoccupations des situations réelles (la quantité de billes avant de commencer une partie, combien de temps des personnes en file d'attente vont être servies, quelle quantité chaque personne aura à l'issu d'un partage).

- les informations ou les données du problème se réfèrent aux informations et données dans la tâche et comprennent des valeurs, des modèles et des conditions données. Les informations de la vie réelle doivent être en correspondance avec les énoncés des problèmes ; être suffisamment réalistes car les élèves raisonnent sur la plausibilité de la situation décrite en se basant sur les expériences vécues ; la spécificité de l'énoncé influence le raisonnement des élèves ; les objets décrits dans le problème sont interprétés de différentes manières et ont des utilités différentes dans la réalité.

- la forme de présentation du problème aux élèves renvoie aux conditions de présentation : écrit ou oral, sous forme schématique, diagramme ou tableaux. Elle concerne également le contexte linguistique du problème : les termes utilisés, la formulation des phrases et les concepts développés dans le problème. Ces facteurs impliquent des processus cognitifs différents, des charges en mémoire de travail et sont gérés différemment selon les élèves.

- les stratégies de résolution tiennent compte de la disponibilité des procédures nécessaires à la résolution. Ces stratégies doivent aller au delà de la situation présentée en classe, et faire appel aux compétences requises pour résoudre les problèmes dans la vie réelle. Elles intègrent les conditions des expériences : une procédure d'apprentissage suivie d'un exercice est automatiquement interprétée comme une mise en application de cette procédure et pourrait inhiber une alternative appliquée dans une situation réelle.

- les circonstances de présentation des problèmes sont des éléments importants dans la résolution de problèmes. Elles impliquent les outils externes qui aident à résoudre les problèmes tels qu'une calculatrice, un compas, une équerre ou un ordinateur. Ces éléments libèrent les espaces, le temps de traitement et réduisent la charge de la mémoire de travail qui peuvent être consacrés à d'autres traitements comme les procédures de résolution et la compréhension du problème. Les stratégies concernent également les orientations implicites et explicites données au cours de la résolution : résoudre selon un modèle présenté, résoudre en suivant un ordre précis, faire attention à certaines expressions du problème. Pour résoudre un problème dans la vie quotidienne on peut avoir besoin d'une aide et d'une collaboration. Cela devrait également être le cas dans la résolution des problèmes réalistes car ils peuvent contribuer à l'amélioration des performances.

- les situations-problèmes doivent faire l'objet de discussions en classe sur leurs buts et objectifs pour en garantir la compréhension. La généralisation des connaissances étant un des buts des apprentissages scolaires, il est nécessaire d'éclaircir notamment les concepts, les procédures ou les notions difficiles à comprendre afin qu'ils soient généralisés dans la résolution d'autres problèmes rencontrés à l'école et même dans la vie réelle. De plus, le temps de résolution des problèmes est un facteur d'échec dans la résolution de problèmes.

- les exigences de la solution sont liées à la méthode et au type de réponse finale et à la question : vérifier que la réponse résout le problème, faire prendre conscience aux élèves qu'elle devrait correspondre aux circonstances de la réalité.

Pour faire ressortir l'importance des problèmes conformes à ceux rencontrés dans la vie Verschaffel et al. (2000) ont adopté un regard critique sur les modèles et théories qui valorisent la prise en compte du contexte réel et des connaissances des élèves dans la formulation des énoncés, comment ils contribuent au développement des performances et participent à la compréhension des situations décrites dans les problèmes. La représentation des problèmes réalistes nécessite un raisonnement axé sur la connaissance de la vie quotidienne. Vicente & Orrantia, (2007) ont réorganisé la classification des problèmes réalistes proposé par Verschaffel et al. (1994), classification basée sur les connaissances des élèves (tableau 5). Vicente & Orrantia, (2007), considèrent que les modèles de résolution de problèmes nécessitent que l'enseignement des problèmes de mathématiques soit considéré comme une tâche d'application non seulement des structures mathématiques, mais qu'elle prenne également en compte le monde réel et les connaissances des élèves. Une véritable compréhension de la situation décrite par le modèle de situation permettra de faire des inférences pour se représenter un modèle mathématique qui varie selon le type de problème. La limite dans la capacité de résolution de problèmes est attribuée au fait que les problèmes mathématiques ont en commun d'avoir une structure mathématique sous-jacente qui a toujours une solution et qui aide à la résolution du problème, ce qui n'est pas souvent le cas en s'aidant des contextes réels. Or, la situation réaliste peut aider à dépasser le contexte mathématique de la résolution de problème, à généraliser les connaissances, à faire un lien entre les connaissances mathématiques et celles des contextes réels, tout en s'affranchissant de la simple compétence en matière d'exécution des opérations arithmétiques.

Par ailleurs, Coquin-Viennot et Moreau (2007) présentent à des enfants de 8 à 10 ans, des problèmes de changement d'état et de comparaison pour montrer le rôle de la représentation construite dans la résolution des situations-problèmes à l'école, et comment une représentation qualitative du problème peut intervenir en l'absence d'une activation automatique d'un schéma de résolution. Elles ont présenté deux versions de problèmes dont l'une est une version qualitative relative au modèle de situation et dans laquelle les informations du modèle du problème étaient rationnelles. Dans une autre version, les informations qualitatives du modèle de situation et celles du modèle du problèmes étaient contradictoires, cette contradiction n'était qu'apparente et ne changeaient pas le modèle du problème ni la logique formelle du problème. Nous prenons deux exemples de ces problèmes :

- le problème de changement:

La version cohérente entre le modèle de situation et le modèle de résolution du problème :

« Au début de l'année, un berger avait un troupeau de 22 moutons. A la fin de l'été, le troupeau avait augmenté de 9 moutons et au printemps suivant, comme d'autres agneaux étaient nés le troupeau était au total 42 moutons ».

Pour rendre cette version incohérente, une information qui rend les deux modèles incompatibles est introduite, la phrase qui parle des agneaux est introduite par une information contradictoire qui n'altère pas la structure mathématique du problème:

« *Au début de l'année, un berger avait un troupeau de 22 moutons. A la fin de l'été, le troupeau avait augmenté de 9 moutons et au printemps suivant, comme le loup avait dévoré certains moutons, le troupeau était au total 42 moutons ».*

Les résultats ont montré que dans la résolution de problèmes de changement les enfants de troisième année ont un taux de réussite faible lorsqu'il s'agit de la version où la situation décrite est en contradiction avec le modèle du problème. Cependant la cohéhence entre le modèle de situation et le modèle de l'énoncé n'influence pas les élèves de quatrième année. Les problèmes de comparaison restent toujours difficiles (même résultats que Riley et al. 1983) à résoudre dans le contexte d'incohérence quelque soit le niveau scolaire des élèves.

Raisonnement	Exemples de problèmes
Relier ou séparer des ensembles qui peuvent posséder des éléments communs	Jean a 5 amis et Pierre a 6 amis. Jean et Pierre décident de faire une fête ensemble. Ils invitent tous leurs amis. Tous les amis sont présents. Combien d'amis sont présents à la fête ?
	Robert et Alice vont à la même école. Robert vit à 17 km de l'école et Alicia à 8 km. A quelle distance vit Robert de Alice ?
Relever les éléments pertinents non explicites de l'énoncé	Robert a acheté 4 planches mesurant chacune 2.5 m. combien de planche de 1m peut former à partir de ces planches ?

	Un homme veut obtenir une corde suffisamment longue pour lier deux poteaux distants de 12 mètres. Mais il ne possède que des pièces de 1.5 mètres. Combien de pièces il faudrait nouer pour faire une corde suffisamment longue pour relier les deux poteaux ?
Soustraire ou additionner 1 au résultat	Si l'école Villaseco a été inaugurée le premier janvier 1964 et nous sommes en 2007, cela fait combien d'année qu'on a ouvert l'école ?
Interpréter le résultat d'une division non exacte	450 soldats doivent se rendre à leur lieu d'entrainement. Chaque autobus peut transporter 36 soldats. Combien d'autobus seront nécessaire ?
	Un grand-père donne à ses 4 petits enfants une boîte de 18 ballons à se partager de manière égale entre eux. Combien de ballons chacun aura-t-il ?
Décider si une solution directe ou pas	Jean court 100 mètres en 17 secondes. Combien de temps lui faudra t-il pour courir 1 km ?
	Ce récipient se remplit avec un robinet à un débit constant. Si l'eau atteint une profondeur de 4 cm après 10 secondes, Quelle sera sa profondeur au bout de 30 secondes? (Ce problème est accompagné du dessin d'un récipient en forme de cône.

Tableau 5. Classification des problèmes réalistes de Verschaffel et al. (1999) réadaptée par Vicente et Orrantia, (2007). [11]

Dans la section précédente, nous avons vu que les études réalisées dans la résolution de problème montrent deux types de représentations du problème. La première tendance développée par Kintsch et Greeno (1985) montre que pour résoudre un problème il y a deux étapes principales: la transformation des données du problème en propositions et la sélection d'un schéma de problème qui correspond à la structure du problème et à la catégorie auquel il appartient. La deuxième, tendance développée par Reusser (1988, 1990) propose une étape intermédiaire entre la transformation des données en propositions et la sélection du modèle mathématique du problème : la construction du modèle de situation. Le modèle de situation ou le modèle épisodique est la représentation qualitative du problème. Elle contribue à attribuer une phrase qualitative à la réponse numérique du problème. De nombreux auteurs partagent l'idée de la représentation du modèle épisodique du problème.

II.3. Le contexte sémantique dans la résolution de problèmes arithmétiques

[11] Selon notre propre traduction.

Les résultats des recherches sur les contextes sémantiques de présentation des problèmes de transformation et de changement montrent clairement que les objets et les actions décrites dans le problème ainsi que la nature de l'opérateur orientent vers la solution. Lorsque le point de vue pertinent du problème ne va pas dans le même sens que le contexte sémantique les participants doivent changer de point de vue pour percevoir celui qui est le plus pertinent pour la solution. Dans cette section, nous allons considérer les contextes de présentation des problèmes arithmétiques souvent exprimés sous forme d'énoncés. Dans ces contextes, pour résoudre le problème, la situation décrite doit être imaginée à partir de l'énoncé et les opérateurs y sont appliqués aux nombres. Nous voulons montrer à travers ces contextes sémantiques qu'il y a des connaissances sémantiques très générales qui orientent l'interprétation qui est faite de la situation décrite. Nous allons voir dans cette section que ces structures sémantiques influencent non seulement la difficulté du problème mais également les stratégies utilisées dans la résolution de problèmes arithmétiques.

Certaines recherches ont montré que la construction du modèle de situation n'est pas le seul aspect de la compréhension des énoncés, d'autres aspects interviennent également. Elles ont étudiés les effets de contexte et montré que la description détaillée des éléments de la situation est moins importante que les caractéristiques de l'énoncé qui donnent accès à des propriétés plus génériques. Si l'on part des recherches réalisées sur les modifications des énoncés ainsi que leurs structures mathématiques, notamment ceux de Vincente (2006) et de Vincente et al. (2007), il n'est pas toujours possible d'attribuer la réussite à la reformulation. Dans ces cas, le modèle de situation ne peut plus suffire à expliquer les différences de performances dans les problèmes enrichis. Vincente (2006) et Vincente et al. (2007) construisent deux types d'énoncés qu'ils font résoudre aux enfants de 9 à 11 ans : une version axée sur la réécriture conceptuelle où les informations conceptuelles guident vers le schéma mathématique du problème, et une version de la réécriture situationnelle qui facilite la représentation d'un modèle de situation épisodique. L'étude de la version de la réécriture situationnelle a été inspirée des travaux de Reusser qui organise l'énoncé autour d'un thème impliquant les motivations personnelles d'un acteur principal ainsi que ses protagonistes. Vincente (2006), considère les informations descriptives sur le protagoniste, les informations sur les intentions et sur les actions. Il y ajoute les informations temporelles et causales afin de valider la nature temporelle et causale des informations de la représentation du modèle de situation. Ces critères de réécriture situationnelle vont être joints aux énoncés standard pour former une version enrichie par le contexte situationnel. Les problèmes de l'expérience sont à étapes et sont constitués de deux des problèmes de changement de type 1 et 4 (jugés faciles) et des problèmes de changement type 3 et 6 (jugés difficiles). A partir de ces problèmes, les versions de problèmes standard, réécriture situationnelle et une réécriture conceptuelle (indique que l'ensemble total est identique dans les deux problèmes à étape) sont définis. Les résultats indiquent une augmentation des réussites dans les versions conceptuelles pour les problèmes jugés difficiles (il n'y a pas eu d'effet significatif pour les problème jugés faciles) soit 49%, 29% pour la version standard et 28% pour la version de la réécriture situationnelle. Vincente et al. (2007) réduisent les informations de l'expérience précédente en ne considérant que 3 versions dans lesquelles ils n'introduisent pas des informations temporelles, causales ou les deux types d'informations. Bien que les énoncés soient moins longs et plus simples, il n'a été observé aucune amélioration des réussites des réécritures situationnelles comparées aux problèmes standards. Ces études montrent bien que d'autres facteurs contribuent à la représentation et à la résolution de problèmes. Parmi ces facteurs il y a les effets de contexte sémantique. Ceux-ci obéissent à certains critères qui orientent l'interprétation du problème et la recherche de la solution. Les études qui ont mis l'accent sur les facteurs sémantiques ont montré qu'il existe des caractéristiques très générales dans ces contextes en rapport avec les propriétés des objets décrits dans le problème qui orientent l'interprétation du problème et la stratégie de résolution. Si les travaux dans le domaine de l'analogie ont prouvé que les propriétés induites par le contexte sémantique influencent le transfert des connaissances, (Bassok, 1995 ; Novick et Bassock, 2005), ces résultats ont également été montrés dans le domaine des problèmes mathématiques. Dans une étude sur l'influence des relations sémantiques, Bassok et al. (1998) ont montré que les propriétés des objets de la situation qui servent à catégoriser le problème déterminent la façon dont le problème est représenté et le choix de l'opération pour le résoudre. Ces catégorisations sont issues des connaissances familières. Ces auteurs ont demandé à des participants de construire des énoncés mathématiques pouvant se résoudre par une addition ou une division, en utilisant des objets qui entretiennent soit une relation symétrique, soit une relation asymétrique. Les résultats ont montré que lorsque les objets utilisés (par exemple des vases et des tulipes) entretiennent une relation asymétrique (ici, contenant-contenu), les sujets construisent les énoncés dont la structure mathématique est conforme à cette relation (ici, la division) ; à l'inverse, quand les sujets veulent illustrer une relation additive ils choisissent des classes aisément regroupables, ayant un statut symétrique au regard d'une catégorie superordonnée, par exemple des jonquilles et des tulipes). Les opérations arithmétiques s'avèrent entretenir des relations privilégiées avec des propriétés sémantiques très générales. Sander et Richard (2000) ont montré que la construction du modèle de situation d'un problème se fait également à partir des propriétés très générales issues des relations, des propriétés et du degré de familiarité avec des objets qui y sont impliqués. Ces propriétés des objets et les relations qu'elles entretiennent, sont un intérêt majeur dans la résolution car l'interprétation qu'on en fait guide le choix de la procédure de résolution dans les problèmes qui en admettent plus d'une. Aussi, lorsqu'un problème a plus d'une procédure de résolution, le choix de la stratégie dépendra de la représentation que le sujet se fait de la situation décrite dans l'énoncé du problème. La compréhension du problème amène à concevoir des méthodes permettant de le résoudre. Le contexte situationnel du problème oriente vers la procédure de résolution, les sujets doivent donc avoir la capacité de s'adapter aux différentes orientations des problèmes à résoudre ou au contexte que présente chaque situation-problème.

II.3.1. Le rôle de la variable dans le contexte sémantique

Le rôle des effets de contexte sémantique a fait l'objet d'études concernant la nature de la variable décrit dans l'énoncé. Certaines variables induisent l'utilisation spontanée d'une stratégie alors qu'une autre est possible. En effet, Richard & Sander (2000), Sander et al. (2003), Sander et Richard (2005), Hakem et al. (2005) et Gamo et al. (2011) ont étudié les problèmes isomorphes additifs complexes solubles par deux procédures dont l'une est préférentiellement utilisée selon que la variable impliquée met en exergue sa dimension ensembliste ou temporelle. La première dimension est saillante dans les problèmes qui font intervenir les variables telles que les effectifs et les prix, la deuxième dimension l'est avec des variables telles que les âges. Ces auteurs ont pour cela pris en compte 4 facteurs dans la construction des énoncés : (i) la présence ou l'absence de la question intermédiaire qui pourrait faciliter la résolution du problème ou bloquerait l'activation d'une stratégie de résolution alternative ; (ii) les variables, cardinales ou ordinales, contenues dans des problèmes qui influencent le niveau de difficulté et la mise en place d'une stratégie de résolution ; (iii) la combinaison de ces deux facteurs forme deux types de problèmes : les problèmes de complément et de comparaison. Les problèmes de complément peuvent se résoudre par deux opérations par complément, et les problèmes de comparaison se font en comparant deux ensembles ; (iv) la nature de la question selon qu'elle se rapporte au calcul d'un tout ou d'une partie du problème.

Les énoncés, étaient des problèmes à étapes de complément et de comparaison. Ils ont été conçus de manière suivante : un premier ensemble est formé en donnant d'abord la valeur d'une partie (partie 1) et d'un tout (tout 1). En fonction de la présence ou de l'absence d'amorçage, une question intermédiaire sur la partie non explicitée est posée. Un deuxième ensemble est formé avec le premier et sont, tous deux, en relation avec la partie 2. Si la question finale concerne le tout (tout 2), une information sur la partie non commune est donnée (partie 3), cette information peut être explicitée dans le problème de comparaison, ou être trouvée par comparaison avec la partie1, pour le problème de complément. Si la question finale porte sur la partie (partie 3), une information est donnée sur le tout (tout 2) cette information est explicite dans le problème de complément ou trouvée par comparaison avec le tout1 dans le problème de comparaison.

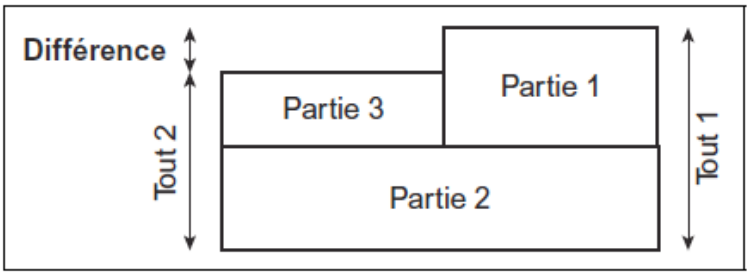
Les problèmes des expériences étaient de types suivants :

- *(i)* Problème de la variable à quantification directe de la variable prix lorsque la question porte sur le tout : « *Pierre a acheté un stylo à 9 euros* (**Partie 1**) *et un livre d'exercices. Il paie 15 euros* (**Tout 1**). *Tom a acheté un livre d'exercices, il paie 11 euros* (**Tout 2 donné directement**). *Combien coûte le classeur ?* (**Partie 3**) *».*

- *(ii)* Problème de la variable à quantification indirecte de la variable effectif lorsque la question porte sur la partie : « *Dans la famille Richard, il y a 5 personnes* (**partie 1**). *Quand les Richard partent en vacances avec les Robert, ils sont 7 à l'hôtel.* (**Tout 1 donné directement**). *Combien sont-ils dans la famille Robert ?* (**Amorce**). *Quand les Dumas partent en vacances avec les Robert, ils sont 3 de moins à l'hôtel* (**Tout 2 construit par comparaison avec Tout 1**). *Combien sont-ils dans la famille Dumas ?* (**Partie 3**) *»*

- *(ii)* Problème à quantification indirecte de la variable âge lorsque la question porte sur le tout : *« Antoine a suivi les cours de peinture à l'école d'art pendant 8 ans* (**partie 1**) *et s'est arrêté à 17 ans* (**Tout 1**). *Jean a commencé au même âge qu'Antoine et a suivi les cours 2 ans de moins* (**partie 3 construite par comparaison avec la partie 1**). *A quel âge Jean s'est-il arrêté ?* **(Tout 2)** *».*

Ces problèmes se résolvent par deux procédures qui nécessitent de faire une inférence de comparaison pour la procédure par calcul différence-comparaison et une inférence de complément pour le calcul par différence-complément. Les auteurs expérimentent sur les variables de même nature et présentent une analyse des problèmes qui montre que ces deux stratégies, relèvent de deux représentations : l'une ensembliste où les nombres sont des effectifs d'ensembles, et l'autre ordinale où les entités sont intrinsèquement ordonnées, (c'est le cas de la droite temporelle). La première représentation privilégie l'extraction des relations parties-tout où l'addition est vue comme le calcul de l'effectif du tout et la soustraction est conçue comme la recherche du complément d'une partie dans le tout. Dans la seconde représentation, les nombres sont des positions sur la droite avec une origine ou des intervalles entre des positions ; les âges et les durées sont des exemples de cette représentation. Si l'on considère deux séries d'événements caractérisés chacun par deux dates, celle du début et de la fin et une durée définie par l'intervalle entre les deux, cette représentation privilégie la comparaison des parties homologues dès lors qu'une date est commune ou que l'intervalle est le même. La mise en correspondance qui en résulte permet d'inférer que, si la date de début est la même et si l'intervalle est différent, la différence entre les dates de fin sera la même que la différence entre les intervalles. De ce fait, le raisonnement porte sur les identités et les différences engendrées par la comparaison. Dans ce cas, les relations ensemblistes existent toujours (l'addition est la somme de la date de début et de l'intervalle et la soustraction la différence entre la date de début et de fin) mais elles sont moins saillantes.



Encadré 5. Représentation schématique de la structure des problèmes étudiés par Sander et al. (2003).

Lors de la résolution de problèmes à quantification directe, la procédure de calcul par différence-complément consiste à faire utiliser une inférence de complément : (i) calculer la partie 2 inconnue du premier ensemble, puis (ii) calculer la partie 3 du deuxième ensemble (pour la question sur la partie) ou calculer le Tout 2 du deuxième ensemble (lorsque la question porte sur le Tout). Des trois exemples cités précédemment, nous prenons le premier sur la variable prix à quantification direct : « *Pierre a acheté un stylo à 9 euros* **(Partie 1**) *et un livre d'exercices. Il paie 15 euros* (**Tout 1**). *Tom a acheté un livre d'exercices, il paie 11 euros* (**Tout 2 donné directement**). *Combien coûte le classeur ?* (**Partie 3**) *».* Pour résoudre ce problème par calcul de la différence-complément, il faut d'abord calculer la partie 2, 15-9

= 6. Ensuite calculer la partie 3 avec le calcul de P2 et le tout du deuxième ensemble, 11-6 = 5 euros est le prix du classeur. La procédure par calcul de la différence-comparaison nécessite également de faire deux calculs avec l'inférence de comparaison : calculer d'abord la différence de prix entre Pierre et Tom, 15-11 = 4 euros, il faut ensuite réaliser une inférence de comparaison à partir de l'élément commun aux deux parties, le livre étant commun dans les deux ensembles, l'écart entre le prix de Pierre et celui de Paul est en rapport avec le prix du classeur qui coûte 4 euros de moins que le stylo, 9-4 = 5 euros étant le prix du classeur. La différence entre les calculs de la différence-comparaison et de différence-complément se situe dans l'économie de calcul dans les problèmes à quantification indirecte. En effet, si dans les problèmes à quantification directe, tous les calculs sont nécessaires, cela n'est pas le cas pour ceux à quantification indirecte. Pour résoudre ces problèmes avec la procédure différence-complément, il faut procéder à 3 calculs dont deux relèvent d'une inférence de complément et une de comparaison. Nous reprenons le problème de prix sous forme de quantification indirecte : ***(i)*** « *Pierre a acheté un stylo à 9 euros* (**Partie 1**) *et un livre d'exercices. Il paie 15 euros* (**Tout 1**). *Tom a acheté un livre d'exercices et un classeur. Il paie 4 euros de moins que Pierre* (**Tout 2 construit par comparaison avec le Tout 1**). *Combien coûte le classeur ?* (**Partie 3**) *»*. Pour résoudre ce problème, il faut d'abord calculer la partie 2 du premier ensemble, 15-9 = 6, ensuite, on calcule le deuxième ensemble Tout 2 appartenant à Tom, 15-4 = 11. Les deux calculs sont utilisés pour répondre à la question sur le coût du classeur, 11- 6 = 5 euros. Par contre, la procédure par calcul différence-comparaison permet d'économiser un calcul, dans le sens où il n'est pas nécessaire de l'effectuer du fait qu'il suffit de faire une inférence de comparaison. Celle-ci se fait à partir du raisonnement selon lequel, lorsque deux ensembles ont une partie commune, la différence entre leurs touts est la même que la différence entre leurs parties spécifiques. Pour notre exemple, pour trouver le prix du classeur, il suffit de faire 9-4 = 5 euros car la différence entre les prix totaux des deux ensembles se reflète dans la différence de prix des deux articles spécifiques que sont le stylo de Pierre et le classeur de Tom.

L'expérience de Sander et al. (2003) sur le rôle des facteurs sémantiques, des variables et de la nature de la question sur la résolution des problèmes a montré que les résultats sont différents selon que la question porte sur le tout ou sur les parties et qu'il s'agisse de variables ordinales ou cardinales. Les problèmes de complément avec question sur la partie sont plus difficiles lorsqu'il s'agit des âges que des effectifs et des prix. Le même résultat a été observé pour les problèmes sur la partie : il y a une différence entre les âges et les prix et entre les âges et les effectifs, mais cette différence ne s'observe pas entre les prix et les effectifs. Pour les problèmes de comparaison avec question portant sur le tout on remarque une différence de réussite entre les variables des problèmes : entre effectif et âge, entre prix et effectif, et entre âge et prix.

Problème de comparaison, variable, Age, question porte sur le tout	Réponse 1 Stratégie par étape	Réponse 2 Stratégie par différence
Eric a suivi les cours de peinture à l'école d'art pendant 8 ans (partie 1) et s'est arrêté à 17 ans (Tout 1). Alain a commencé au même âge qu'Eric et a suivi les cours 2 ans de moins (partie 3 est construite par comparaison avec la partie 1). A quel âge Alain s'est-il arrêté ?	17-8 = 9 8-2 = 6 9+6 = 15 Alain a arrêté à 15 ans	17-2 = 15 Alain a arrêté à 15 ans

Tableau 6. Exemple de réponses à un problème de comparaison (Hakem et al. 2005).

Sander et al. (2003) et Hakem et al. (2005) observent que les problèmes de prix se résolvent très souvent par la procédure différence-complément car il semble plus « naturel » (selon l'utilisation familière à l'égard des prix) de résoudre avec la procédure différence-complément, en passant par les étapes intermédiaires qui permettent de calculer le prix d'une partie (prix du livre) et le prix total du deuxième ensemble. Cependant, il est plus difficile de se représenter que la différence de prix payée par Pierre et Tom se reflète également dans la différence de prix entre les objets non communs (stylo et classeur). Cette dernière représentation est plus facilement réalisée dans les problèmes d'âges. Si nous prenons le problème à quantification indirecte de la variable âge suivant : *« Pierre a suivi les cours de peinture à l'école d'art pendant 8 ans* (**partie 1**) *et s'est arrêté à 17 ans* (**Tout 1**). *Tom a commencé au même âge que Pierre et a suivi les cours 2 ans de moins* (**partie 3 est construite par comparaison avec la partie 1**). *A quel âge Tom s'est-il arrêté ?* **(Tout 2)** *»* . Il serait plus facile de faire un seul calcul par ce raisonnement dans ce problème. La variable âge facilite une représentation temporelle de sorte qu'il soit facile de considérer que la différence entre la durée de cours est la même que la différence entre les âges. Si Tom a commencé les cours au même âge que Pierre et qu'il a suivi les cours deux ans de moins, cela veut dire qu'il s'est arrêté 2 ans avant Pierre. D'où la solution en un calcul : 17-2 = 15 ans.

Ces deux procédures ont permis aux auteurs d'observer l'influence de la variable du problème sur la mise en œuvre des procédures dans la résolution de problèmes à quantification directe et indirecte. Les résultats de leurs recherches ont montré que le problème à quantification directe est facilité par la variable dont le caractère ensembliste est le plus saillant (effectifs et prix) et moins facilité par la variable âge qui met en relief l'aspect temporel. La relation partie-tout est mise en exergue par l'aspect ensembliste des variables effectif et prix d'où l'utilisation préférentielle de la procédure différence-complément et un pourcentage très faible pour la procédure différence-comparaison (moins de 0.5% des réussites). Cependant, la procédure différence-complément est tout de même utilisée dans la variable temporelle âge. Cette tendance est inversée pour les problèmes à quantification indirecte. En effet, la variable âge rend saillant l'aspect temporel et active le schéma de comparaison entre les parties homologues, d'où l'utilisation préférentielle de la procédure différence-comparaison dans la formulation à quantification indirecte (64 % des réussites). Par contre, les variables ensemblistes (effectifs et prix) ne sont que très peu réussies par la procédure différence-comparaison (4%) et très largement par la procédure différence-complément (96 %) bien qu'elles nécessitent d'effectuer trois calculs.

A la suite de ces travaux, Gamo (2009) ; Gamo et al. (2010) et Gamo et al. (2011) réalisent des recherches qui vont dans ce sens. L'influence de la nature de la variable est également observée chez des adultes. En effet, Gamo (2009) a observé que les professeurs des écoles étaient, comme les enfants de 10-11 ans, influencés par la nature de la variable impliquée dans l'énoncé. Ils ont appliqué la procédure directe, différence-comparaison aux problèmes dont la variable est temporelle (âge et durée) et la procédure indirecte, par différence-complément aux variables ensemblistes (effectif, poids, hauteur). Ce choix est dû aux connaissances familières que les participants ont des variables du problème. Lors de la résolution de problèmes ayant plusieurs procédures, la première procédure utilisée est celle que suggère la description de l'énoncé du problème. Le changement de représentation du problème requiert l'abandon de la représentation initiale et un coût cognitif important qu'il est possible de réduire par apprentissage. Gamo (2009) a montré qu'il était possible de recoder ces problèmes et favoriser la représentation alternative qui n'est pas spontanément perçue et favoriser la procédure qui n'est pas naturellement appliquée. L'auteure a modifié le scénario des problèmes en supprimant les éléments de comparaison dans le problème ordinal en mettant en relief les éléments qui activeraient la représentation de la relation partie/tout. Inversement dans les problèmes où la procédure par différence-complément est la plus favorisée, les éléments de comparaison ont été mis en relief, pour favoriser la représentation du schéma de comparaison et l'application de la procédure différence-comparaison. Par rapport au groupe contrôle, les résultats montrent que, selon le relief du scénario, les sujets utilisent moins de procédures par différence-complément et plus la procédure par différence-comparaison pour les variables ensemblistes et moins de procédures différence-comparaison et plus la procédure différence-complément, pour les variables temporelles. De plus, l'ordre de présentation des valeurs influe sur le choix de la procédure. Pour les problèmes dont le scénario a été modifié, la proximité des valeurs de comparaison avec le tout ou la partie favorise, en fonction de la question, la mise en œuvre de la procédure différence-comparaison. Lorsque la valeur de la partie 1 est placée avant la valeur de comparaison du problème dont la question porte sur la partie, les sujets appliquent plus fréquemment la procédure par différence-comparaison.

	Recherche de la valeur de la partie	*Recherche de la valeur du tout*
Hauteur	*Une brique blanche a une hauteur de 6 cm. On la pose sur une brique noire. La hauteur de la pile est de 11 cm. Une brique verte est posée sur la même brique noire. Cette pile mesure 2 cm de moins. Quelle est la hauteur de la brique ?*	*Un dé rouge a une hauteur de 5 cm. On le pose sur un dé bleu. La hauteur de la pile est de 7 cm. Un dé jaune est posé sur le même dé bleu. Ce dé jaune mesure 3 cm de moins que le dé rouge. Quelle est la hauteur de la pile ?*
Poids	*Un sac de poires pèse 5 kg. On le pèse avec un sac de gruyère râpé. La balance indique 11 kg. Un pack de lait est pesé avec le même sac de gruyère. La balance indique 2 kg de moins. Combien pèse le pack de lait ?*	*Un sac de farine pèse 8 kg. On le pèse avec un sac de crevettes. La balance indique 14 kg. Un sac de moules est pesé avec le même sac de crevettes. Ce sac de moules pèse 3 kg de moins que le sac de farine. Quel est le poids indiqué par la balance ?*

Tableau 7. Exemples d'énoncés des problèmes à quantification indirecte, (Gamo et al. 2011, P. 630).

Pour les problèmes à quantification directe une valeur est donnée au lieu de l'information de comparaison.

II.3.2. L'équivalence des procédures et les effets de contextes sémantiques

Pour généraliser les résultats des expériences précédentes, Gamo et al. (2011) étendent à d'autres variables la distinction entre les variables de type ensembliste et temporel. Ils distinguent deux types de variables : (i) les variables à quantité temporelle (âge et durée) qui intègre toutes les situations temporelles et sont caractérisées par un intervalle. (ii) les variables matérielles ayant des propriétés des entités matérielles (effectif, poids, hauteur). Cette expérience a été soumise à des enfants âgés de 10 -11 ans. Les énoncés étaient des problèmes additifs à quantification directe et indirecte isomorphes à ceux présentés par Sander et al. (2003), ainsi que Hakem et al. (2005). Quelques exemples de problèmes sont présentés dans le tableau 7. Le but était d'observer si la nature de ces variables influencerait également la réussite et l'utilisation des procédures. Les résultats vont dans le même sens que ceux de Sander et al. (2003) et Hakem et al. (2005). La nature de la variable favorise l'application de la procédure spontanée plutôt que celle qui est alternative. Les problèmes à quantification indirecte favorisent l'utilisation de la procédure par un seul calcul qui n'est presque pas utilisée pour les variables dont les quantités mesurent l'aspect temporel. Lorsque les variables à quantité matérielle sont incluses dans les énoncés à quantification indirecte, leur nature oriente vers la procédure par différence-complément et bloque la perception de la procédure la plus directe et économique en termes du nombre de calculs à effectuer.

Toute la difficulté des procédures de résolution étudiées par Sander et al. (2003) et Hakem et al. (2005) est liée au fait que les variables impliquées dans les problèmes, de par leur nature, ne mettent pas en relief l'équivalence d'utilisation des deux procédures. Ces variables rendent saillante et favorisent l'utilisation d'une procédure et dans le même temps masquent la procédure alternative. Des chercheurs se sont penchées sur la question et ont cherché à concevoir des méthodes d'apprentissage pour que la procédure la moins spontanément mises en œuvre soit appliquée dans les problèmes qui impliquent cette variable.

Une étude de Gamo et al. (2010) a montré qu'il est possible de favoriser l'abstraction des connaissances par une représentation alternative des problèmes en amenant les élèves à procéder à un recodage sémantique des éléments de la situation. Il en est de même lorsque la question porte sur le tout. Dans cette étude, les problèmes faisant appel aux variables âge et prix ont été construits, et présentés aux élèves en pré et post test. Entre les deux, il y avait une phase d'apprentissage sur les problèmes de complément. Celle-ci avait pour but de montrer aux élèves, par compréhension et analyse des éléments de la situation, que les deux procédures, par différence-complément et différence-comparaison, peuvaient être, l'une ou l'autre, appliquées aux deux problèmes. Après l'apprentissage de l'équivalence des procédures dans les problèmes d'âge et de prix, les élèves ont pu modifier leur représentation initiale du problème au profit de la procédure efficace[12]. Dans la même optique, une autre expérience (Gamo et al., 2014) a permis aux élèves scolarisés en éducation prioritaire de résoudre des problèmes par une interprétation alternative après un apprentissage. Les élèves ont su dépasser la représentation spontanée des problèmes pour procéder à une interprétation plus générale. L'apprentissage de la représentation par différence-comparaison conduit à une augmentation des réussites et à adopter cette stratégie même si elle est implicite dans l'énoncé.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons passé en revue les recherches qui se sont centrés sur la catégorisation des problèmes et sur les facteurs qui influencent la résolution de problèmes. Nous avons relevé qu'en arithmétique les problèmes ont d'abord été classés selon leurs niveaux de difficultés. Cela a donné lieu à trois principales classes de problèmes selon le schéma qu'ils activent : les problèmes de comparaison, de combinaison et de changement d'état. Les études réalisées montrent deux types de représentations. Pour résoudre un problème il faut activer un schéma, ce schéma peut être activé directement en transformant les éléments de la situation en propositions (partisans du modèle des schémas), ou être précédé de deux étapes : (i) la traduction de l'énoncé en proposition et (ii) la représentation du modèle de

[12] Les auteurs parlent de procédure efficace en terme de cout cognitif et de temps de résolution dès que le raisonnement est bien appréhendé par les participants.

situation propre à l'énoncé du problème ; (ii) activation du schéma de résolution du problème qui permet de formuler l'équation mathématique du problème.

Nous avons montré que la culture de résolution de problèmes pratiquée dans des classes mène à des stéréotypes. Ceux-ci peuvent être un danger dans l'acquisition des compétences en résolution de problème. L'apprentissage des résolutions de problèmes en classe conduit à résoudre les problèmes canoniques, sans rapport avec des situations réalistes. Les énoncés utilisés dans la résolution de problèmes gagnent à être suffisamment réalistes afin de rendre possible une correspondance entre l'énoncé et une situation réelle ce qui permettrait d'accroître la participation des élèves à l'activité de résolution de problèmes.

Nous avons également vu que la reformulation des problèmes est un facteur important pour faciliter la résolution de problèmes. Les auteurs tels que Hudson (1984), montrent que celle-ci peut-être facilitée par certaines expressions, enrichissant les situations décrites dans les problèmes (Cummins, et al. 1988), personnalisant la résolution de problèmes et les présentant dans un contexte familier. Le contexte syntaxique joue un rôle important dans la résolution de problème, l'utilisation des pronoms peut entraver la réussite (Staub et Reusser, 1992). Le contexte sémantique est donc un facteur qui influe sur la résolution de problème. En effet, des recherches ont montré que les propriétés des objets et les contextes sémantiques pourraient avoir un effet sur la représentation du problème.

Sander et al. (2003) et Hakem et al. (2005) et Gamo (2009) montrent dans leurs études que les problèmes à quantification directe favorisent la réussite les variables qui rendent saillant l'aspect ensembliste (les prix et les effectifs) et ceux de quantification indirecte favorisent la réussite lorsque l'aspect temporel est rendu saillant. Une représentation du schéma partie-tout (variable de type ensembliste) favorise la mise en œuvre de la procédure différence-complément et un schéma de comparaison entre parties homologues (type temporel) favorise la procédure par différence-comparaison. Cela rend l'application d'une procédure alternative difficile en général. C'est la nature de la variable qui spécifie le contexte du problème, qui oriente l'interprétation du problème. Cette considération est différente de celle du modèle de situation où ce sont des aspects spécifiques de formulation qui sont étudiés.

Chapitre III. Problématique

De nombreuses recherches et différentes approches théoriques ont donné naissance à des modèles pour tenter d'expliquer les modes d'acquisition des connaissances. Un des domaines qui permet d'étudier l'acquisition des connaissances est la résolution de problème. La résolution de problèmes est une activité finalisée car elle concerne les fonctions supérieures du cerveau. Un problème est une tâche dans laquelle le sujet se trouve confronté à une situation qu'il doit dépasser mais dont il ne dispose pas dans l'immédiat la solution. Résoudre un problème revient à construire une représentation en réalisant une interprétation adéquate des composants de la tâche et établir les différents objectifs qui permettent de le résoudre.

III.1. Synthèse des travaux

Le domaine de la résolution de problème a connu une évolution depuis l'approche gestaltiste, béhavioriste et celui du traitement de l'information. Ces trois axes ont considéré la résolution de problèmes dans le contexte de l'apprentissage. La théorie béhavioriste accorde une importance à l'expérience du fait qu'elle permet d'ajuster le comportement et de donner une réponse adaptée à l'environnement. Les comportements adéquats sont acquis par essais et erreurs, les représentations de la situation ne sont pas prises en comptes. Seules les conduites face à la situation-problème importent et méritent d'être renforcées en l'occurrence lorsqu'ils mènent aux solutions afin qu'ils soient acquis. A l'inverse, la théorie de la gestalt considère que les expériences antérieures constituent un frein à l'apprentissage créatif ; pour optimiser un apprentissage il serait souhaitable de ne pas les y intégrer. Les meilleurs apprentissages sont ceux par lesquels une solution est trouvée grâce à la restructuration du problème. C'est le courant du traitement de l'information qui commence véritablement à s'intéresser à l'activité de résolution de problème en tant que tel. En premier lieu, il s'est axé sur les stratégies de résolution et de planification des problèmes. Les deux stratégies principalement développées (exploratoire ou hill climbing et de planification ou means-end readiness) contribuent à l'exploration de l'espace-problème en réalisant une interprétation qui permet d'identifier les différents états partant de l'état initial à l'état final, de prendre en considération les états intermédiaires possibles et les différents opérateurs qui permettent de transformer ces différents états jusqu'à atteindre l'état but. La stratégie exploratoire ou hill climbing est exploratoire dans le sens où toutes les actions et étapes réalisées ont pour but de se rapprocher le plus possible de l'état final sans toutefois une analyse préalable des différentes étapes et opérateurs qui permettraient de l'atteindre. La stratégie de planification ou means-end readiness nécessite avant résolution une analyse approfondie de la distance entre l'état initial et l'état final du problème et de trouver les opérateurs et les sous-buts qui réduisent l'écart entre les deux états et de les appliquer jusqu'à atteindre l'état final (Ian Robertson, 2001).

A la suite de la résolution axée sur la notion d'espace-problème, trois facteurs liés aux connaissances du sujet ont apporté un enrichissement notable au domaine de la résolution de problèmes. Le premier facteur concerne les contributions de Chi dans la résolution des problèmes physiques et de Chase dans le contexte de l'arithmétique. Au cours des années 1980 ces auteurs ont montré l'importance de l'expertise à travers les expériences de catégorisation des problèmes. Leurs recherches ont montré que la familiarité avec un domaine de connaissance amène à construire des représentations pertinentes pour résoudre les problèmes relatifs à ce domaine de connaissance. Une distinction entre novices et experts a permis de mettre en évidence les processus et stratégies mis en œuvre par l'un et l'autre au cours de la résolution des problèmes. Les experts, par la régularité des expériences, construisent une représentation adéquate lorsqu'ils sont face à un problème de leur domaine de connaissance. Ils analysent les éléments qui informent sur les catégories de problèmes (Chi et al. 1981, 1982) et distinguent les éléments pertinents et non pertinents à la résolution. Tandis que les novices détiennent peu de connaissance dans leur domaine, ne parviennent pas à faire la distinction entre les informations essentielles sur lesquelles se baser pour résoudre le problème ou encore organiser leurs connaissances en mémoire.

Ainsi, une représentation adéquate du problème peut conduire, entre autre, à avoir une expertise dans un domaine, de même, une meilleure représentation du problème dépend de l'interprétation de la situation. L'interprétation du problème dépend de plusieurs éléments, en l'occurrence, les contraintes de l'espace de recherche et le contexte sémantiques dans lequel un problème est présenté, dans ce cas on parle de l'habillage du problème, qu'il soit physique (la tour de Hanoï et ses isomorphes) ou verbal (les énoncés des problèmes arithmétiques). Dans le modèle de résolution de Newell et Simon, comprendre un problème c'est construire un espace de recherche dans lequel on se représente les différents états du problème, les différentes manières de transformer ces états et d'atteindre le but tout en respectant les contraintes. Richard (1990) distingue les contraintes propre au problème et les contraintes que le sujet s'impose par ses inférences et heuristiques. Les problèmes de transformation d'état tels que la tour de Hanoï et ses isomorphes (Problème de monstre, de cannibale) montrent que les problèmes sont résolus en fonction de l'interprétation que se fait le sujet de l'état initial et de l'état but. L'interprétation permet d'analyser les différents éléments du problème et de définir les relations qu'ils entretiennent afin de créer une structure du problème qui permet d'évaluer la distance entre l'état initial et le but (Hayes et Simon 1974, 1977 ; Clément 2009).

De nombreux auteurs se sont intéressés aux processus qui interviennent dans la résolution et aux facteurs qui les influencent. Certains ont établi des distinctions entre les problèmes en se basant sur leur niveau de difficulté, aux relations que les éléments du problème entretiennent entre eux et sur les types de résolution qu'ils impliquent. Dans le domaine scolaire, les problèmes additifs ont été catégorisés en fonction du niveau de difficulté rencontré par les élèves. Cette distinction a mis en avant les relations sémantiques entre les différents éléments du problème (Riley et al. 1983 ; Fayol, 1990). Une autre distinction a été apportée en fonction des relations entre les problème (Nesher, 1981 ; Carpenter et Moser, 1981). A cette classification s'ajoute celle conceptuelle qui s'appuie essentiellement sur le calcul relationnel entre les données d'un problème (Vergnaud, 1982). De ces distinctions on relève trois groupes de problèmes : les problèmes de combinaison, de comparaison et de transformation. Ces trois types de problèmes mènent à des schémas d'interprétation différent et influencent la représentation des problèmes ainsi que le choix de la procédure de résolution.

Parmi les théories qui expliquent l'interprétation, la représentation des problèmes et la manière dont ils sont résolus, il y a la théorie des schémas et celle des modèle de situation. Sans accorder un grande importance à l'interprétation des problèmes, la théorie des schémas considère que lorsqu'on lit un énoncé, on active un schéma de résolution dans lequel, après avoir analysé le problème, on juge que sa structure correspond à un schéma activé en mémoire (Riley et al. 1983 ; Kintsch et Greeno, 1985). C'est dans ce schéma que les éléments du problème sont intégrés et que la structure de calcul est utilisée pour résoudre le problème. Le modèle de situation intègre trois éléments : d'abord la représentation de l'énoncé qui construit un scénario propre au problème, ensuite ce scénario intègre les éléments du problème au schéma activé et permet enfin d'effectuer les calculs numériques qui conduisent à la solution (Reusser, 1990). Le modèle de situation montre l'importance de l'interprétation dans la compréhension du problème. Un problème présenté dans un contexte conceptuel active le bon schéma qui peut contribuer dans une certaine mesure à faciliter sa représentation, en l'occurrence la catégorie à laquelle il appartient (De Corte et al. 1985) et sa résolution. Les recherches de Hudson (1983) montrent comment un problème formulé de deux manières devient plus ou moins facile à interpréter et à résoudre. Un problème de type comparaison tel que « *Il y a 5 oiseaux et 3 vers, combien y a-t-il d'oiseaux de plus que de vers? »* devient plus facile pour des enfants s'il est reformulé de cette façon : « *combien d'oiseaux n'auront pas de vers ? »*. Pour aider les élèves à mieux interpréter et résoudre les problèmes les chercheurs recommandent de proposer les concepts familiers aux élèves dans la formulation des énoncés (Stetic, 1999). Il faut préférentiellement proposer la formulation conceptuelle qui facilite la résolution plutôt que la reformulation situationnelle (Vincente et al. 2007).

Ces différentes recherches montrent l'importance des contextes sémantiques dans l'interprétation, la classification et la résolution de problème. Les contextes sémantiques peuvent faciliter la compréhension, la résolution et notamment orienter vers une procédure de résolution. Nous cherchons dans notre thèse à développer des contextes parmi d'autres qui peuvent faciliter la résolution et le transfert des procédures de résolution, notamment entre les problèmes isomorphes. Comme nous l'avons vu, la classification des problèmes a toujours séparé en plusieurs catégories. Nous nous interrogeons sur les relations sémantiques entre ces classes de problèmes. La recherche de Hakem et al. (2005) et celle de Sander et al. (2011) montrent l'existence de deux pôles de variables : d'un côté il y a l'aspect cardinal ou matériel et de l'autre l'aspect ordinal et temporel. En cherchant à savoir si les problèmes de transformation constituent un contexte intermédiaire entre ces deux pôles, nous nous demandons si les problèmes d'addition et de soustraction ne sont pas organisés selon une dimension sémantique allant du pôle des variables matérielles où il n'y a pas d'ordre (dans lesquelles se situent les problèmes de combinaison typique) aux variables temporelles où les unités sont intrinsèquement ordonnées (dans cette dimension les problèmes de comparaison ont une représentation privilégiée). Entre ces deux pôles on passerait par les problèmes de transformation (dans lesquels se situent des variables matérielles sur lesquelles interviennent des événements temporels). En ce sens, on peut parler d'une dimension sémantique, cependant ces catégories de problèmes diffèrent sémantiquement mais sur le plan mathématique ils sont isomorphes. De ce fait, pour permettre que les procédures basées sur la relation de comparaison soient applicables à toutes les catégories de problèmes, il faut opérer un recodage sémantique et faire de même pour les procédures basées sur le calcul des relations parties-tout. Aussi, l'objectif premier de l'apprentissage, pour que toutes ces classes de problèmes puissent être reconnues comme isomorphes, est le recodage sémantique au cours de la résolution.

La variabilité des contextes sémantiques induit des représentations différentes pour chaque situation-problème. Lors de la résolution, une adéquation est faite entre les traits de surfaces jugés pertinents, l'objectif de la tâche du problème, et le niveau de connaissance sur le domaine traité par le problème. Les problèmes qui présentent des contextes sémantiques différents peuvent avoir, dans certains cas, les mêmes procédures de résolution. Pour cerner ce processus, il faut s'intéresser aux problèmes isomorphes, car ils peuvent présenter entre eux une différence du point de vue de la difficulté. Des problèmes sont dits isomorphes lorsqu'ils ont le même espace de recherche mais ne présentent pas nécessairement la même structure sémantique. Cependant, bien qu'ayant les mêmes modes de résolution, ces problèmes peuvent avoir un niveau de difficulté différent car la représentation du problème est différente selon les contextes sémantiques. Si les problèmes ne présentent pas les mêmes traits de surface, la réussite à un problème ne garantit pas la réussite à un autre. Ceci peut être dû, entre autres, à un problème d'interprétation des données du problème. L'interprétation rend la situation jusque là inconnue familière car elle l'analyse, la compare et l'intègre aux catégories en mémoire (Sander 2006). L'incapacité de déceler la structure commune entre problèmes et la difficulté d'appliquer à un nouveau problème la procédure apprise d'un problème isomorphe peuvent également constituer un niveau de difficulté dans la résolution des problèmes isomorphes. Lorsqu'on fait apprendre aux sujets une procédure de résolution avec un problème ayant les mêmes traits de surface mais pas les mêmes traits de structures que le problème cible, les sujets transfèrent quand même cette procédure au problème cible (Richard et Sander, 2004). Il semble donc que les sujets établissent des liens entre les traits superficiels entre problèmes n'ayant pas la même procédure de résolution et n'analysent pas s'ils partagent les mêmes traits de structures, condition indispensable pour le transfert de solution. Ce constat pose le problème de l'analyse des informations pertinentes dans le problème source pour la résolution du problème cible, car entre les deux contextes il y a des éléments qui facilitent ou non le transfert des procédures.

III.2. Objectifs

Cette thèse s'inscrit dans la recherche de l'origine des différences de difficulté entre problèmes isomorphes. Nous nous intéressons aux problèmes de manipulation non pas de type de la tour de Hanoï mais en référence aux modèles des problèmes arithmétiques, et aux contextes de problèmes additifs (résolus en milieux scolaires) qui sont plus ou moins difficiles à résoudre même lorsqu'ils partagent une structure de résolution identique. Nous nous référons spécifiquement à l'hypothèse développée dans les recherches réalisées par Sander et al. (2003), Hakem et al. (2005) et Gamo et al. (2010). Ces auteurs ont montré que les variables utilisées pour définir les contextes des problèmes induisent une représentation des quantités qui met en exergue l'aspect cardinal du nombre, et nous retenons de ces résultats les deux variables typiques que sont les effectifs, qui favorisent une interprétation en termes de relations partie-tout et les âges qui favorisent une interprétation en termes de comparaison. A travers ces deux variables qui sont l'une du groupe des problèmes de combinaison (effectif) et l'autre du groupe des problèmes de comparaison (âge) nous voulons situer le groupe de problème de transformation d'état (transvasements). Nous nous demandons à quel niveau situer ce dernier groupe de problèmes du point de vue des réussites et de l'utilisation des stratégies par rapport aux problèmes de combinaison et de comparaison. L'un de nos objectifs est de parvenir à montrer que les problèmes de transformation d'état se situent à un niveau intermédiaire entre les deux types de problèmes du point de vue des procédures. Il est possible de l'observer par une illustration de ces problèmes présentée selon des orientations différentes. Ces différentes orientations favoriseraient une interprétation dont la représentation serait un schéma de type comparaison (comme pour les âges) et un schéma de relation partie-tout (comme pour les effectifs).

Pour notre recherche nous avons choisi d'étudier les problèmes de transformation dont les énoncés portent sur les transvasements de liquide plutôt que ceux de transfert de possession utilisés habituellement dans les recherches. De nombreuses raisons peuvent justifier ce choix, notamment le fait qu'il s'agit des problèmes faciles à représenter mentalement. Si on dispose dans les problèmes de transvasements d'une variété de catégories et de noms pour désigner des contenants (vases, carafes, bidons), ce n'est pas le cas pour les problèmes de transfert de possession pour lesquels on ne dispose que des noms de personnes.

Après avoir longtemps insisté sur les modèles de situation, facteurs spécifiques qui influencent la résolution de problèmes, des recherches ont vu le jour, et suggéré que les facteurs sémantiques très généraux influencent également la représentation du problème et de là orientent vers les choix des procédures de résolution. Les connaissances habituelles ou familières sur des concepts, des objets ou des notions, les expériences vécues à partir de leurs informations, ont permis de stocker des connaissances les concernant. Ces connaissances qui définissent les propriétés plus génériques des actions ou des objets et leur catégorie d'appartenance détermineront non seulement la représentation de la situation mais également la stratégie de résolution comme le montrent Bassok et al. (1998) ainsi que Sander et Richard (2000). Si les aspects sémantiques généraux influent sur la construction de l'interprétation du problème plutôt que sur les facteurs spécifiques, alors les variables contenus dans les problèmes également. En ce sens, Sander et al. (2003), Hakem et al. (2005), Gamo et al. (2009, 2010, 2011) ont étudié les stratégies de résolution chez les enfants de niveau élémentaire. Ces auteurs défendent l'idée selon laquelle les variables qui définissent les contextes des problèmes impliquent une représentation des quantités qui met en relief l'aspect cardinal du nombre (les relations parties-tout), ou l'aspect ordinal qui rend plus saillant les rôles analogues des éléments du problème, et peuvent être comparés. Ce sont ces aspects intrinsèques à la nature de la variable qui déclenchent le schéma de représentation pour sa résolution.

L'étude des problèmes de jarres chez les adultes a permis de cerner la résolution de problème à partir d'un environnement physique. Luchins **(**1942**)** a utilisé les problèmes de jarres dans le but de montrer la difficulté de changement de stratégie dans les situations où deux procédures de résolution sont possibles. Nous nous intéressons aux problèmes de jarres, car ils peuvent offrir un contexte de quasi-manipulation dans la résolution des problèmes arithmétiques. En effet l'intégration des problèmes de jarres au contexte de problèmes arithmétiques permet de donner une représentation physique de la situation et des changements d'état qui interviennent en même temps que le texte. Nous cherchons à travers cette étude à découvrir si ce contexte ne peut pas jouer un rôle pivot entre les deux types de représentations, car on peut concevoir plusieurs représentations graphiques dont l'une rendrait plus saillantes les relations de parties-tout et l'autre la comparaison entre parties homologues. Nous estimons que l'environnement physique pourrait être un des facteurs de réussite des problèmes arithmétiques, du fait qu'il offre aux enfants un cadre matériel de résolution et une économie cognitive sur le plan de la représentation. L'enfant procède seulement à la compréhension de la situation décrite et recherche les stratégies permettant d'atteindre le but du problème. De plus, en partant des travaux qui ont montré la difficulté du changement de point de vue dans la résolution des problèmes (Luchins, 1942), nous voudrions savoir dans quelle mesure ce type de contexte physique pourrait aider les enfants à changer de point de vue induit par la variable et à adopter un point de vue qui conduit à appliquer une stratégie alternative. Ce contexte étant nouveau, nous voulons savoir quel serait son niveau de difficulté, et aussi si un même problème de changement d'état, incarné physiquement mais selon des orientations différentes, peut engendrer ou pas les mêmes niveaux de difficultés.

Le dernier facteur qui a contribué à l'essor de la résolution de problème est celui du rôle joué par les connaissances spécifiques ou le rôle de l'analogie (Gentner, 1983; Holyoak, 1985; Holyoak et al. 1987, Sander, 2000 ; Sander et Hofstadter, 2013 Gineste, 1997, Richard, 2004). Ce facteur nous intéresse car de nombreuses recherches ont montré qu'il aide notablement dans les apprentissages. L'analogie est un processus cognitif qui permet le transfert des procédures de résolution. Elle montre comment les connaissances antérieures peuvent être utilisées pour acquérir de nouvelles. En résolution de problème faire de l'analogie c'est comprendre un problème en activant un problème en mémoire qui lui ressemble. On parle de transfert analogique lorsqu'on utilise la solution du problème qu'on active en mémoire (la source) pour résoudre le problème en cours (la cible). Deux tendances théoriques sont distinguées dans l'étude de l'analogie : le modèle de projection de structure (structure mapping-theory) de Gentner et ses collaborateurs (1983) et le modèle multicontrainte de Holyoak et al. (1985). Pour réaliser un transfert des connaissances, il faut procéder à la mise en correspondance entre les différents éléments et entre les relations qu'ils entretiennent. Avant la mise en correspondance il faut encoder les propriétés des éléments du problème en se basant sur leurs attributs (par exemple, la forme, la couleur, ou la taille) ou les valeurs de leurs attributs (carré, bleu ou grand). C'est cet encodage qui permet de procéder à l'alignement des structures (Richard 2004). L'alignement des structures peut se faire à deux niveaux : à l'intérieur des dimensions et entre les dimension (Kotovsky et Gentner, 1996, Gentner et Medina, 1998, Richard 2004). Effectuer un appariement à l'intérieur d'une dimension c'est faire une analogie en mettant en correspondance les valeurs et les attributs des valeurs entre les problèmes source et cible. Tandis que dans l'alignement entre les dimensions, il s'agit de faire une analogie en mettant en correspondance les relations entre les dimensions, c'est-à-dire, trouver des similitudes entre les rôles que jouent les attributs et les valeurs des attributs dans les problèmes source et cible (exemple : a dans le problème X joue le même rôle que b dans le problème Y). Les deux types d'alignements permettent d'accéder à l'abstraction et à la généralisation des connaissances. L'analogie établit une relation entre le problèmes source et cible en réalisant un alignement entre les éléments des deux problèmes qui forment la même structure. Les études ont montré que deux types de similitudes influencent le transfert analogique : les similitudes de surface et de structure. Les premières sont très régulièrement utilisées par les novices alors que les experts se servent des deux dans la résolution des problèmes. Un transfert est dit positif lorsque les similitudes de structure et de surface influencent la réussite du transfert (Gick et Holyoak, 1980 ; 1983 ; Reed, Ernst et Banerji, 1974). Le transfert analogique est également une méthode d'apprentissage scolaire (Crahay et Dutrévis, 2010 ; Presseau et Frenay, 2004). C'est un processus de généralisation des connaissances qui permet de réaliser l'abstraction des connaissances en intégrant le problème source et cible dans un même schéma.

Ainsi, le transfert analogique constitue un outil pédagogique d'apprentissage. D'autant plus que deux principales difficultés sont liés au transfert : la difficulté de percevoir les traits de structure communs aux problèmes souce et cible et celle liée à la mise en œuvre de la procédure du problème source vers celle de la cible. Comme l'ont suggéré de nombreux auteurs, si les participants ne sont pas informés de la similitude entre problèmes, très peu de tansfert est observé (Gick & Holyoak, 1980). Bassok (2001) met en relation le contexte sémantique qui oriente l'interprétation du problème et ses traits de structure pour la résolution. L'activation des connaissances, des procédures antérieures ou l'évocation du problème source ne suffisent pas au transfert. Il faut aussi trouver une relation entre les deux situations pour appliquer la connaissance activée. Il y a des conditions qui favorisent l'évocation, l'accès, la récupération de la source et l'application de sa procédure de résolution au nouveau problème. Afin de ne pas conduire à un transfert négatif, les chercheurs qui encouragent l'apprentissage par codage analogique tiennent compte de toutes ces conditions pour l'acquisition des connaissances. Etant donné qu'il a été démontré que les traits de surface aident à l'évocation du problème analogue et les traits de structure à la mise en relation et à l'application de la procédure apprise, le problème est de savoir dans quelles conditions mettre en œuvre ces facteurs, parmi d'autres, pour un transfert positif et que les structures inutiles ne se transfèrent pas.

Les recherches de Novick (1988) montrent que les similitudes de surface aident à l'évocation de la source. Novick et Holyoak (1991) ainsi que Ross (1987, 1989) ajoutent qu'ils interviennent aussi pour la mise en correspondance et à l'adapatation entre problème source et cible. Genter, Loewenstein et Thomson (2003, 2004) montrent que le codage par analogie aide à l'acquistion des connaissances par l'utilisation de la comparaison de deux exemples pour découvrir les traits de structure communs entre les problèmes, au cours d'un apprentissage. Cette comparaison aide à la découverte de la stratégie la plus pertinente pour la résolution du problème par rapport à la résolution sans comparaison au préalable. Cette méthode de comparaison fonctionne également lorsque les problèmes sont partiellement appris ou ne sont résolus que partiellement du fait qu'elle permet de découvrir les principes communs entre les problèmes qui partagent les mêmes traits de structure et favorise le transfert par codage analogique (Kurtz & Loewenstein, 2007). La récupération en mémoire des principes de solution par codage analogique est facilitée par l'activation des exemples sources qui partagent les mêmes traits de structure que le problème à résoudre. Il convient, pour développer les principes de résolution et le transfert à partir des problèmes semblables sur le plan des traits de structure, de présenter les cas des problèmes cibles avec lesquels on peut comparer les stratégies de résolution avec les exemples de problèmes sources. Brissiaud (1994) a développé une méthode de comparaison de deux procédures, compter en avant et compter en arrière, dans les problèmes de soustraction. Le but était de montrer l'équivalence des procédure de résolution, en utilisant l'addition ou la soustraction, et de choisir l'opération qui rend le calcul plus facile. Si on présente aux enfants, le problème suivant : « *Pierre a 65 billes et Tom en a 4. Tom veut obtenir le même nombre de billes que Pierre. Combien de bille Tom doit-il gagner ? ».* Ce problème active sémantiquement une procédure de comptage vers l'avant car il incite à poser l'opération 4+…= 65. De ce fait, l'enfant aura tendance à poser une opération qui aura un coût cognitif important en comptant de 4 jusqu'à 65 pour trouver le nombre de billes nécessaires. Or, en comptant vers l'arrière, une autre opération plus facile est possible, il suffit de poser l'opération 65-4 = ? Lorque les problèmes de ce type sont formulés avec des petits nombres cela ne pose aucun problème pour les enfants. Cependant, lorsqu'on leur présente des problèmes avec des nombres plus grands comme dans l'exemple, si ces deux procédures sont comparées, il va sans dire que la deuxième rend le problème plus facile à résoudre notamment au cours d'un calcul mental. Ainsi, lorsque dans leur contenu les énoncés incitaient à l'utilisation d'un comptage en avant, la comparaison entre les deux procédures, les enfants procédaient au codage des problèmes afin d'utiliser la stratégie la plus appropriée selon les valeurs numériques impliquées dans les problèmes.

Un des aspects de l'acquisistion qui intéresse les chercheurs est le transfert d'apprentissage par recodage sémantique. Il a été observé que les sujets interprêtent les problèmes en fonctions des propriétés des objets que le contexte du problème rend saillant. Ces propriétés relatives au problème résolu sont retenues et servent à résoudre à tort les problèmes rencontrés ultérieurement. Une des explications relatives aux echecs au transfert et à l'asymétrie dans le transfert s'explique par l'intégration dans la classe des problèmes déjà résolus celui à résoudre (Sander et Richard, 2000). Ces auteurs notent que catégoriser un problème au bon niveau est souvent difficile car il y a une inadéquation entre le codage spontané dû aux propriétés rendues saillantes par l'énoncé et le niveau de catégorisation qui est pertinent pour résoudre le problème. Une autre difficulté du codage au bon niveau est un cas où l'objet du problème est déjà abstrait ; il faut donc concevoir une représentation spécifique à cette abstraction. Sander et Richard (2000) prennent l'exemple de la notion virtuelle de la moyenne en évoquant le nombre moyen des enfants des familles d'une classe égale à 2.2 qui n'est pas représentée dans la réalité. Pour que cette notion ait un sens il faut l'intégrer dans une classe qui lui donne un sens, autrement dit il faut lui créer un objet qui puisse intégrer ses propriétés à un niveau plus spécifique de compréhension. Dans leur exemple, l'objet construit est l'ensemble des familles des élèves et non au niveau de la notion de famille individuelle.

L'abstraction montre bien qu'il faut crééer des objets à partir des propriétés communes entre les problèmes. Lorsque cela n'est pas réalisé, il peut survenir des transferts asymétriques entre les problèmes isomorphes. Reed (1987) a proposé un problème d'apprentissage sur un mélange de substances liquides aux participants. Après les avoir mélangé il ne reste plus qu'une substance. La solution de ce problème devait être transférée à un problème cible de mélange de taux d'intérêts entre différents comptes bancaires et un autre problème cible de mélange de substances non liquides. L'auteur observe qu'il y a très peu de transfert de solution sur les deux problème cibles. Sander et Richard (2000) expliquent ces résultats par un défaut de construction d'un objet au niveau abstrait des propriétés des problèmes. Le problème cible ayant été catégorisé à un niveau spécifique (mélange physique), les participants n'ont pas trouvé que sa solution était pertinente pour résoudre les problèmes cibles qui demandaient la construction d'un objet avec lequel doivent s'appliquer la propriété abstraite celui des mélange des comptes par exemple qui est purement virtuel. Pour que le transfert réussisse, il faut que le problème source soit catégorisé au niveau plus abstrait, dans ce cas ce sont les problèmes cibles qui doivent être codés au niveau plus abstrait. Il est donc difficile de transférer la solution du mélange physique.

Dans le contexte scolaire, les problèmes présentés en classe et les expériences vécues par les élèves en dehors (leurs connaissances familières), sur les propriétés des objets, participent activement à leur classification. Dans la résolution de problèmes aithmétiques l'influence des objets induit par leur contexte sémantique influence la représentation de la situation du problème et sa résolution. Pour étudier ces influences et analyser le transfert des stratégies de résolution par recodage sémantique Gamo (2009) ; Gamo et al. (2010), Gamo et al. (2014) ont réalisé des expériences sur l'abstraction des connaissances. La méthode de comparaison des procédures, effectuée par ces auteurs s'est réalisée à partir des problèmes présentés par Hakem et al. (2005). L'intérêt de ces problèmes est qu'ils peuvent se résoudre par deux procédures : la procédure par différence-complément et par différence-comparaison. L'utilisation de chacune de ces deux procédures relève d'encodages bien différents qui sont influencés par la nature de la variable que le contexte rend saillant. Ces deux procédures requièrent des inférences. La procédure par différence-comparaison est plus économique car son inférence permet de réaliser un seul calcul, alors que la procédure par calcul différence-complément qui nécessite une inférence de complément, se réalise en procédant aux calculs intermédiaire, une méthode par étape pour répondre à la question finale. Hakem et al. (2005) ont montré que lorsque les variables du problème sont de type ensembliste (effectifs, prix), les participants utilisent spontanément la procédure différence-complément, la procédure alternative par différence-comparaison l'étant beaucoup moins. Par contre, dans les problèmes où les variables sont de type temporel les participants appliquent la procédure différence-comparaison et moins la procédure différence-complément. Ainsi, les deux types de variables inhibent l'utilisation de la procédure alternative dans les deux problèmes.

Gamo (2009) a permis aux élèves de recoder ces problèmes de façon à ce que les élèves construisent une représentation alternative qui n'est pas spontanément perçue dans le problème de manière à favoriser la procédure qui n'est pas naturellement appliquée dans le problème. L'auteure y est parvenue en modifiant le scénario des problèmes par la suppression des éléments de comparaison dans le problème ordinal et en mettant en relief les éléments qui activent la représentation de la relation partie/tout. De même, dans les problèmes où la procédure par différence-complément est la plus favorisée (effectifs, prix), les éléments de comparaison ont été mis en relief pour favoriser la représentation du schéma de comparaison et l'application de la procédure différence-comparaison. Elle a également modifié le scénario en fonction de l'ordre de présentation des données. Les problèmes dont le scénario a été modifié (la proximité des valeurs de comparaison avec le tout ou la partie) favorisent, en fonction de la question, la mise en œuvre de la procédure différence-comparaison. Lorsque l'auteure a présenté la valeur de la partie 1 avant la valeur de la comparaison, les sujets ont appliqué la procédure par différence-comparaison. Dans la continuité de ces recherches, Gamo et al. (2010) montrent qu'il est possible, à partir de la comparaison entre les procédures (plusieurs calculs *vs.* un seul), et entre les problèmes isomorphes, de reconstruire un problème en adoptant un point de vue masqué par l'influence de la variable. Ils ont montré aux élèves la représentation qui active le schéma partie-tout (variables ensemblistes : effectif et prix) et celle qui active le schéma de comparaison dans les deux types de problèmes (variable temporelle : âge). La stratégie différence-comparaison par un recodage sémantique qui permet de voir la relation de comparaison entre les parties homologues qui ont une partie commune était efficiente du point de vue de l'économie de la charge cognitive et du nombre de calcul à effectuer (un seul calcul). La stratégie de calcul par différence-complément nécessitait d'effectuer trois calculs par étape pour trouver la solution. Les élèves pouvaient, après comparaison, choisir la stratégie la plus efficiente, celle du calcul par différence-comparaison, pour résoudre le problème. Les élèves ont plus souvent utilisés la stratégie de calcul par différence-comparaison dans les trois types de problèmes après apprentissage qu'avant apprentissage. Cette expérience a permis de montrer que pour un recodage des problèmes la catégorisation des problèmes à un niveau plus abstrait permet de ne pas tenir compte des propriétés spécifiques comme celle prônée par le modèle de situation dans la résolution de problème.

Gamo et al. (2014) ont étendu les résultats de ces recherches aux élèves en éducation prioritaire. Ils présentent les mêmes problèmes isomophes que ceux des expériences précédentes qui mettent en jeu les variables temporelles (âges) et les variables ensemblistes (effectifs et prix). Les deux types de variables mettent toujours spontanément la procédure de calcul par différence-complément (pour les variables effectifs et prix) et la différence-comparaison (la variable âge). Après avoir montré l'équivalence d'utilisation des deux procédures et les deux encodages qui mènent à chacune d'elles, les auteurs demandent aux élèves de comparer les deux procédures et de choisir la plus pertinente. Les élèves ont plus souvent utilisé la stratégie de calcul par différence-comparaison dans les trois types de problèmes après qu'avant apprentissage.

Cette méthode d'apprentissage a permis aux élèves d'atteindre un niveau d'abstraction dans la généralisation des connaissances en appliquant cette méthode à d'autres problèmes de types ensemblistes tels que les prix et les hauteurs. Dans la suite des travaux de Gamo et al. (2010), nous cherchons dans cette thèse à faire apprendre les deux stratégies les moins favorisées dans les problèmes de combinaison (tels que les effectifs) et les problèmes de comparaison (les âges). Hakem et al. (2005) ont montré que les problèmes de comparaison avec des variables tels que les effectifs et les prix favorisent la résolution par la procédure différence-complément et les problèmes de comparaison tels que la durée et les âges la procédure différence-comparaison. Bien que ces deux types de problèmes puissent être résolus indifféremment par les deux procédures, il y a une distinction dans l'utilisation des procédures qui est due à deux encodages propres à chaque variable impliquée dans le problème. Nous voulons réaliser l'apprentissage par encodage analogique en utilisant les problèmes de transformation d'état (les situations de transvasement) pour faire un transfert des procédures entre les différentes variables du problèmes afin de favoriser la procédure la moins spontanée dans la résolution. Pour ce faire, nous procédons à l'apprentissage par alignement des structures. Ce transfert des procédures permettrait de mettre en relation les problèmes de comparaison, de combinaison et de transformation d'état qui sont considérés comme relevant d'encodages très différents.

Nous voulons savoir si un apprentissage par transfert des procédures, qui consiste à montrer les similitudes entre les relations qu'entretiennent les éléments des problèmes isomorphes peut aider les élèves à utiliser la procédure la moins favorisée dans la résolution du problème qui ne la favorise pas spontanément. Pour réaliser cette étude nous utilisons les problèmes de transformation d'état (les problèmes de transvasements) comme contexte pivot pour faire appliquer significativement la procédure par différence-comparaison dans les problèmes de complément (les effectifs) ainsi que la procédure par différence-complément dans les problèmes de comparaison (les âges). Les apprentissages scolaires peuvent se faire de plusieurs manières, notamment par instruction écrite par une intervention pédagogique orale avec des modèles de résolution ou sans modèle. Ces types de méthodes sont très souvent pratiqués dans les milieux scolaires. Notre objectif est de découvrir quel contexte d'apprentissage oral ou écrit peut favoriser au mieux le transfert des connaissances, et aussi dans quelle condition l'apprentissage des transferts de connaissances peut être généralisé aux problèmes n'ayant pas fait l'objet d'apprentissage (les poids et les hauteurs utilisés dans notre expérience). Nous essayons de répondre à ces questions dans deux expériences. La première pour montrer que les problèmes de comparaison et de combinaison peuvent être encodés pour les mêmes procédures de résolution que les problèmes de transformation d'état. Dans la deuxième nous voulons montrer qu'il est possible d'utiliser le contexte de transvasement pour faire un transfert des procédures de résolution entre les effectifs et les âges par un apprentissage, et que cette procédure peut se généraliser à d'autres problèmes isomorphes non appris.

Deuxième partie :

Contributions expérimentales

Contribution expérimentale 1 :

La structure sémantique des catégories de problèmes arithmétiques

Chapitre IV. La structure sémantique des catégories de problèmes arithmétiques

De nombreuses recherches se sont intéressées aux processus qui interviennent dans la résolution des problèmes arithmétiques. Dans ces recherches les problèmes arithmétiques ont été classés en fonction de leurs difficultés et par leurs modes de résolution.

Pour mieux comprendre la nature de leurs difficultés, les problèmes arithmétiques ont été classés en fonction des relations sémantiques entre les différents éléments impliqués dans les problèmes. Aussi, Riley et al. (1983) ; Fayol, (1990) ont proposé une classification basée sur la situation impliquée dans le problème. A partir de ces situations 3 types de problèmes ont été définis, les problèmes de combinaison, de changement d'état et de comparaison. Nesher (1981) ; Carpenter et Moser (1981) distinguent les relations statiques qui caractérisent les situations des états stables et les relations qui décrivent des situations dynamiques, où les évènements évoluent dans le temps. Vergnaud (1982) a proposé une classification conceptuelle dont le calcul numérique intègre la prise en compte des relations impliquées dans les problèmes. Riley et al. (1983) ; Kintsch et Greeno (1985)ont montré que les schémas jouent un rôle dans la résolution de problèmes. Dans l'approche de Kintsch et Greeno (1985), l'interprétation des problèmes se fait à partir d'un schéma vide dans lequel on intègre les éléments du problème, ce qui permet par la même occasion de définir une structure de calcul conforme au schémas sélectionné au préalable.

Des recherches ont également montré les effets de l'interprétation dans la résolution de problèmes. De Corte et al. (1985) ont montré que la reformulation des énoncés facilite la résolution de problème, notamment la reformulation conceptuelle (Vincente et al. 2007).

Dans le modèle de situation introduit par Reusser (1990), la résolution des problèmes passe par la lecture de l'énoncé et la construction du scénario de la situation qui permet de passer du texte au modèle du problème et au traitement des données numériques. L'étude du contexte sémantique a montré que l'explicitation des données du problème mène à une meilleure compréhension de la situation décrite (Hudson, 1983 ; De Corte et al. 1985 ; Staub et Reusser, 1995 ; Cummins et al. 1988). La présentation des problèmes dans un contexte familier présenté par Stetic (1999) est également un facteur de réussite aux problèmes chez les enfants. Les recherches sur l'influence des facteurs sémantiques ont aussi montré que la catégorisation joue un rôle primordial dans la résolution des problèmes. Elles indiquent que la description détaillée des éléments de la situation est moins importante que les caractéristiques de l'énoncé qui donnent accès aux propriétés plus génériques de la situation, lesquelles orientent l'interprétation du problème et la recherche de la solution. Ces recherches ont mis l'accent sur l'importance des facteurs sémantiques très généraux en rapport avec les propriétés des objets décrits dans le problème. Parmi ces recherches figurent celles sur le transfert analogique qui ont montré d'une part que la manière selon laquelle les sujets catégorisent les propriétés sémantiques des problèmes oriente le choix de la procédure de résolution, (Bassok & Olseth, 1995 ; Novick &Bassok, 2005) et d'autre part que les propriétés des objets de la situation qui servent à catégoriser le problème déterminent la façon dont le problème est conçu ainsi que l'opération choisie pour le résoudre (Bassok, Chase et Martin, 1998).

Des auteurs (Sander et al. 2003 ; Hakem et al. 2005 ; Gamo et al. 2011 ; Sander et al. 2003, Hakem et al. (2005, 2011) ont montré que la nature de la variable impliquée dans un problème qui admet deux procédures de résolutions, favorise l'une d'elles, celle basée sur le complément pour les effectifs et celle basée sur la comparaison pour les âges, et empêche de percevoir la procédure alternative. Gamo et al. (2011) ont montré que ces deux procédures relèvent d'encodages très différents de la situation. Dans ces recherches deux représentations fondamentales du nombre sont distinguées : une représentation ensembliste où les nombres sont des effectifs d'ensembles et où il n'y a pas d'ordre entre les objets qui sont comptés, l'ordre étant introduit par la numération et une représentation dans laquelle les objets sont intrinsèquement ordonnés et dont la droite temporelle est l'exemple typique. Selon le contexte ensembliste ou temporel de l'énoncé, la différence la plus saillante, celle qui va orienter l'interprétation du problème et sa solution, peut être soit la différence liée au calcul du complément (la différence-complément) d'une partie dans le tout, soit la différence liée à la comparaison entre quantités homologues (différence-comparaison). Ces deux types de différences relèvent de deux catégories de problèmes : ceux de combinaison et ceux de comparaison. Il est donc intéressant de se demander comment se situe la troisième catégorie de problèmes dans la classification, celle des problèmes de transformation d'état, par rapport aux deux représentations du nombre que nous avons distinguées : les problèmes de transformation d'état sont-ils vus comme des problèmes de partie-tout ou comme des problèmes de comparaison ?

Le but de cette recherche est de montrer que les problèmes de transformation d'état occupent une position intermédiaire : en effet, les variables en jeu portent sur des objets matériels, comme dans les situations ensemblistes, mais le scénario est temporel. Du point de vue des procédures utilisées pour les résoudre, nous pensons qu'ils évoquent plus la procédure de comparaison que les problèmes d'effectifs mais moins que les problèmes d'âges et inversement ils favorisent plus la procédure complément que les problèmes d'âges et moins que les problèmes d'effectifs.

Si l'on peut montrer que les situations de transformation d'état sont intermédiaires entre les situations d'effectifs et d'âges et que, selon la façon dont est illustrée la situation, on peut induire une lecture complément ou une lecture comparaison, c'est un argument en faveur de l'idée que les facteurs sémantiques très généraux liés aux propriétés des objets et à leurs relations déterminent l'interprétation qui sera faite du problème. Dans notre étude, nous nous proposons de montrer que les particularités de la situation ont un rôle négligeable. Pour cela, nous avons comparé la version texte du problème à une version où le texte est accompagné d'une illustration neutre qui se limite à représenter la suite des événements décrits dans l'énoncé.

IV.1. Hypothèses

Notre hypothèse générale est que les problèmes de transformation d'état représentés dans notre expérience par les problèmes de transvasements occupent une position intermédiaire par rapport aux procédures de résolution entre les problèmes de comparaison (représenté dans notre expérience par la variable âge) et les problèmes de combinaison (représentés dans notre expérience par la variable effectif). Nous formulons trois hypothèses sur les procédures utilisées pour résoudre les problèmes de transvasement en comparaison avec celles utilisées pour les problèmes d'effectifs et d'âges.

Hypothèse 1. La procédure de différence-complément sera moins fréquente dans les problèmes de transvasements que dans ceux d'effectifs, mais plus fréquente que dans les problèmes d'âges. A l'inverse, la procédure de différence-comparaison sera plus fréquente dans les problèmes de transvasements que dans ceux d'effectifs mais moins fréquente que dans les problèmes d'âges.

Hypothèse 2. Une présentation graphique orientée gauche-droite permettant la mise en correspondance des états et transformations favorise la procédure différence-comparaison par rapport à une présentation haut-bas illustrant chaque état ou événement décrit dans le texte.

Hypothèse 3.

On n'attend pas de différence entre la version texte seul et la version texte accompagnée d'un dessin illustrant seulement la succession des états. Dans ce cas, nous supposons que l'illustration (plus neutre et sans particularité), n'ajoute rien à la compréhension et à l'interprétation du texte.

IV.2. Méthodologie

IV.2.1. Participants

Cette étude a été réalisée dans 32 classes d'écoles situées en région parisienne. Les problèmes de cette expérimentation ont été résolus par 800 élèves dont 150 en CM1 et 650 en CM2 (412 garçons et 388 filles) âgés de 8 ans 2 mois à 12 ans un mois : âge moyen 10 ans 8 mois, écart-type 11 mois, sans distinction de sexes ni de catégories socioprofessionnelles.

IV.2.2. Matériel

Outre les problèmes d'effectifs et d'âges, nous avons construit un matériel constitué de récipients dont certains sont vidés dans d'autres. La version de base comporte seulement le texte du problème dont le schéma est le suivant : deux vases de même capacité ont une certaine quantité d'eau, on verse dans l'un le contenu d'un bidon plein d'eau et dans l'autre le contenu d'une carafe et l'on considère le contenu des deux vases après transvasement. La quantité p1 peut indiquer le contenu initial du vase 1, qui est alors différent de celui du vase 2, et la quantité p2 est alors la quantité ajoutée qui est la même dans les deux vases (le bidon et la carafe ont la même contenance) t1 est le contenu final du vase 1. Comme les quantités p3, le contenu initial du vase 2 et t2, le contenu final du vase 2 sont définies par différence à p1 et t1, d est la dernière donnée du problème: p3 = p1- d et t2 = t1 - d (par exemple « il y a maintenant 2 litres de moins dans le vase bleu » (vase 2) que dans le vase rouge (vase 1). La seconde possibilité est que la quantité p2 indique le contenu initial des vases quand il est le même et p1 indique alors le contenu du bidon et p1-d le contenu de la carafe.

Les problèmes : quatre types de problèmes sont définis dans les contextes de transvasement et d'âges et deux types dans le contexte d'effectifs. Tout d'abord la question peut porter soit sur la quantité t2 (t1-d), le second tout, soit sur la quantité p3 (p1-d), la partie propre au second tout. Le second critère est le type d'objet représenté par les quantités p1 et p2. Soit, comme on l'a vu, p1, la première quantité connue, représente l'état initial du vase 1 et p2 la quantité ajoutée, qui est la même pour les deux vases (le transvasement de la carafe est le même que celle du bidon) : on appelle ce cas « information sur l'état initial ». Soit la quantité connue p1 représente la transformation, le contenu du bidon ajouté dans le vase 1 et p2 la quantité initiale qui est la même dans les deux vases : on appelle ce cas information sur la transformation. La distinction vaut également dans le contexte âges. Soit on donne l'information p1 sur l'âge de X au début de l'activité et l'information t1 sur l'âge de X à la fin de l'activité et p2 représente alors la durée de l'activité, qui est la même pour X et Y. Soit on donne l'information p1 sur la durée de l'activité de X qui est alors différente de la durée de l'activité de Y (p3 = p1-d) et p2 est l'âge du début de l'activité qui est le même pour X et Y. Les différences entre les deux types de problèmes sont représentées sur la figure 1. Cette distinction n'a pas lieu d'être pour les problèmes d'effectifs, pour lesquels il y a une symétrie parfaite entre les parties p1 et p2 : que l'on indique en premier le nombre de personnes composant la famille X ou la famille Y ne change rien au problème.

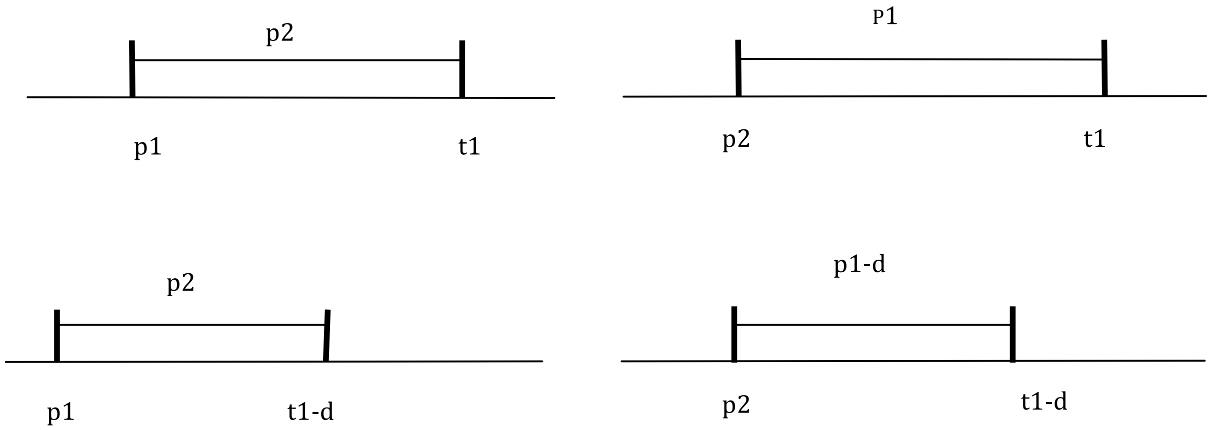
Problèmes dont la question porte sur le tout		
Effectifs	**Ages**	**Transvasements**
Dans la famille Gauthier il y a 8 personnes. Quand les Gauthier mangent avec les Pascal, ils sont 15 à table. Dans la famille Etienne il y a 3 personnes de moins que dans la famille Gauthier. La famille Etienne va au restaurant avec la famille Pascal. ***Combien sont–ils à table?***	*Marie a suivi les cours de théâtre pendant 9 ans et s'est arrêtée à 14 ans. Annie a commencé au même âge que Marie et a suivi les cours 2 ans de moins.* ***A quel âge Annie s'est-elle arrêtée ?***	*On a versé 5 litres d'eau dans un vase rouge et un vase bleu. On a un bidon plein d'eau. On verse le bidon dans le vase rouge. Il y a maintenant 12 litres dans le vase rouge. On a une carafe pleine d'eau qui contient 3 litres de moins que le bidon. On la verse dans le vase bleu.* ***Combien de litres y- a-t-il dans le vase bleu ?***
Problèmes dont la question porte sur la partie		
Effectifs	**Ages**	**Transvasements**
Dans la famille Bernard il y a 7 personnes. Quand les Bernard vont avec les Durand à la pizzeria ils sont 15 à table. Quand les Durand vont avec les Rousseau à la pizzeria, ils sont 2 de moins à table. ***Combien sont–ils dans la famille Rousseau ?***	*Aline a suivi les cours de danse pendant 7 ans et s'est arrêtée à 15 ans. Léa a commencé au même âge qu'Aline et s'est arrêtée 3 ans avant.* ***Combien de temps Léa a-t-elle suivi les cours ?***	*On a versé 9 litres d'eau dans un vase rouge et un vase bleu. On a un bidon plein d'eau. On verse le bidon dans le vase rouge. Il y a maintenant 14 litres dans le vase rouge. On a une carafe pleine d'eau. On la verse dans le vase bleu. Il y a maintenant 2 litres de moins dans le vase bleu que dans le vase rouge.* ***Combien de litres y a-t-il dans la carafe ?***

Tableau 8. Les trois types de problèmes dont la question porte sur la transformation : âges, transvasements et effectifs (les problèmes effectifs sont invariants dans le contexte état initial et transformation).

Problèmes dont la question porte sur le tout		
Effectifs	**Ages**	**Transvasements**
Dans la famille Gauthier il y a 8 personnes. Quand les Gauthier mangent avec les Pascal, ils sont 15 à table. Dans la famille Etienne il y a 3 personnes de moins que dans la famille Gauthier. La famille Etienne va au restaurant avec la famille Pascal. ***Combien sont–ils à table?***	*Nicolas a commencé les cours de dessin à l'école d'art à 7 ans et s'est arrêté à 15 ans. Emile a commencé 2 ans plus tôt et a suivi les cours de dessin pendant autant de temps que Nicolas.* ***A quel âge Emile s'est-il arrêté ?***	*On a versé 5 litres d'eau dans un vase rouge et 3 litres de moins dans un vase bleu. On a un bidon plein d'eau. On verse le bidon dans le vase rouge. Il y a maintenant 12 litres dans le vase rouge. On a une carafe pleine d'eau qui contient autant que le bidon. On la verse dans le vase bleu.* ***Combien de litres y a-t-il dans le vase bleu ?***
Problèmes dont la question porte sur la partie		
Effectifs	**Ages**	**Transvasements**
Dans la famille Bernard il y a 7 personnes. Quand les Bernard vont avec les Durand à la pizzeria ils sont 15 à table. Quand les Durand vont avec les Rousseau à la pizzeria, ils sont 2 de moins à table. ***Combien sont–ils dans la famille Rousseau ?***	*Sylvain a commencé les cours de musique au conservatoire à 7 ans et s'est arrêté à 15 ans. Jacques a suivi les cours de musique pendant autant de temps que Sylvain et s'est arrêté 3 ans plus tôt.* ***A quel âge Jacques a-t-il commencé ?***	*On a versé de l'eau dans un vase rouge et dans un vase bleu. Il y a 9 litres dans le vase rouge. On a un bidon plein d'eau. On verse le bidon dans le vase rouge. Il y a maintenant 14 litres dans le vase rouge. On a une carafe pleine d'eau qui contient autant que le bidon. On la verse dans le vase bleu. Il y a maintenant 2 litres de moins dans le vase bleu que dans le vase rouge.* ***Combien de litres y avait-il avant dans le vase bleu ?***

Tableau 9. Les trois types de problèmes dont la question porte sur l'état initial : âges, transvasements et effectifs (les problèmes effectifs sont invariants dans le contexte état initial et transformation).

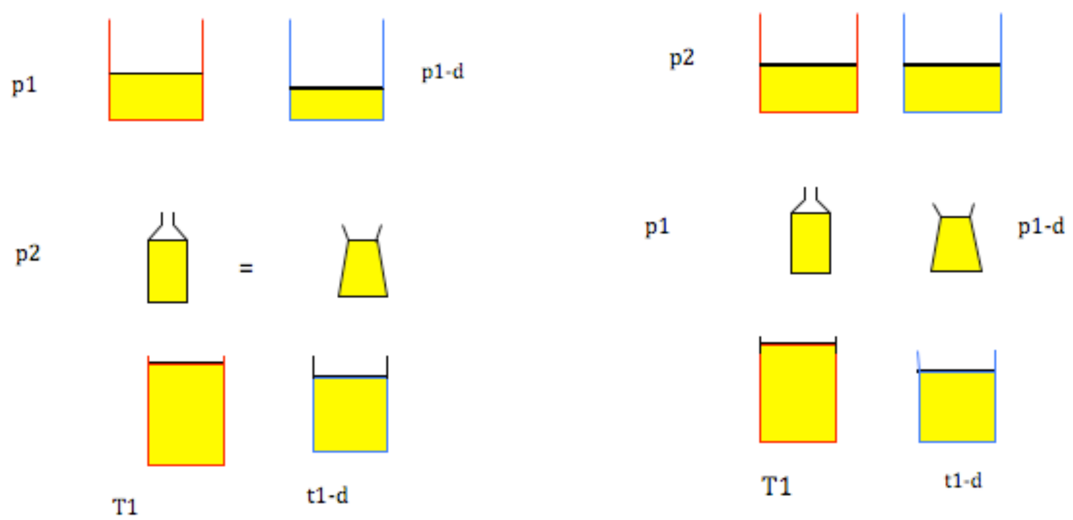
Contexte âges



Information état initial

Information transformation

Contexte transvasements



Information état initial

Information transformation

Schéma 1. Représentation du type de problème où l'information porte sur l'état initial et sur la transformation.

Les illustrations dans le contexte de transvasement: trois types d'illustrations décrivant les différents états et transformations qui y interviennent ont été joints au texte. Nous avons ainsi défini quatre versions différentes de présentation de ces problèmes : la première est une version sous forme d'énoncé sans illustration nous la nommons « présentation texte ». La seconde version présente, de haut en bas, les différents états du problème avec l'état de remplissage des vases illustrés sur 4 lignes, sans rappel des états du vase 1 qui n'ont pas changé. Cette version illustre pas à pas chaque information du texte, nous l'appelons « Présentation verticale version sans rappel ». La troisième version présente, sur deux lignes de gauche à droite, l'illustration de l'état comparé des deux vases et des changements qui interviennent. Cette version devrait favoriser une lecture de type comparaison car elle illustre le déroulement dans le temps dans le sens où on se le représente naturellement et donc privilégier la procédure différence-comparaison, nous la nommons « présentation Horizontale ». La dernière version présente aussi l'état comparé des vases mais verticalement de haut en bas : elle devrait moins favoriser la lecture comparaison que la version horizontale. Cette orientation suggère moins l'évolution temporelle mais elle peut néanmoins être plus favorable à cette lecture que la première version, car elle présente l'état comparé des vases, nous l'appelons « Présentation verticale version avec rappel ».

Le choix des nombres dans les énoncés a été effectué selon plusieurs contraintes. La première est d'éviter les nombres élevés. Ce choix a été fait dans le but de faciliter les calculs et d'éviter les erreurs dues à l'exécution des opérations. La deuxième a été d'éviter l'utilisation du nombre dix dans le calcul final pour éviter des calculs trop faciles : les nombres se situent entre 2 et 15. De plus, afin de pouvoir identifier quelles opérations avaient été faites dans le cas du calcul mental, nous avons fait en sorte que toutes les quantités données dans l'énoncé (ou calculables) soit toutes différentes les unes des autres. Ces quantités sont : p1, t1, d (la valeur de la différence entre p1 et p3, comme entre t1 et t2 qui vaut 2 ou 3) t1-p1, p1-d, t1-d, auxquelles nous avons ajouté (t1-p1)-1 et (t1-p1) +1, pour prendre en compte le fait que le calcul du complément peut donner lieu à une erreur de calcul de 1. Cela a été réalisé à l'aide d'un logiciel écrit sur Excel. On trouvera l'ensemble des problèmes en annexe.

Les problèmes étaient présentés aux élèves sous forme de carnets. Chacun de ceux-ci était composé de deux problèmes d'âges, deux problèmes d'effectifs et deux problèmes de transvasements avec une question sur le tout et une sur la partie. Afin d'éviter que les enfants ne se rendent compte de la similarité entre les différents problèmes, deux problèmes de remplissage étaient intercalés à la 3ème et 6ème place.

Pour contrôler l’ordre et la succession des problèmes, nous avons utilisé la méthode de contre-balancement qui consiste à utiliser des nombres circulaires qui permettent d'assurer l'équilibre sur six élèves, (correspondant aux six problèmes proposés à chaque élève hormis les deux problèmes de remplissage). Elle permet de s’assurer que chaque problème est passé dans chaque rang et qu’il suit chacun des autres le même nombre de fois, dans les six ordres de chacun des carnets. De la sorte, chaque problème apparaît une fois dans le premier rang, une fois dans le second, une fois dans le troisième, etc.

Une série de carnets est faite pour chacune des quatre versions des problèmes de transvasements et des deux types d’information donnée en premier (sur l’état initial ou la transformation) soit au total huit séries de carnets. Dans une classe on distribuait les carnets correspondant aux quatre versions des problèmes de transvasements et aux six ordres et si cela ne correspondait pas exactement au nombre d’élèves de la classe on équilibrait avec la classe suivante. Ainsi les facteurs ordre et version des problèmes de transvasement sont équilibrés dans la classe. En revanche ce sont des classes différentes qui ont eu les problèmes correspondant à chaque type d’information.

IV.2.3. Condition de passation

L’expérience s’est déroulée en une séance d’une heure. A chaque séance, les élèves recevaient des carnets dans lesquels les problèmes étaient écrits. Sur la première page se trouvaient les informations relatives à l’identification de l’élève et les problèmes se trouvaient sur les autres pages. Après avoir distribué les carnets, nous leurs avons indiqué que sur chaque page il y a un problème à résoudre avec deux parties pour répondre aux questions : une partie brouillon où il fallait effectuer tous les calculs et une partie où il fallait noter les réponses aux questions. On soulignait l’importance de noter tous les calculs pour montrer comment la réponse avait été trouvée. Des explications étaient reprises pour ceux qui n’avaient pas compris. Une pré-expérimentation a été effectuée dans une classe de CM2 de 20 élèves. Cette pré-expérimentation a permis d’observer les différentes réactions des élèves face aux problèmes proposés, afin de tester les problèmes et corriger les incompréhensions.

IV.2.4. Codage et calcul de scores

Dans un premier codage nous n'avons tenu compte que des réussites, afin de vérifier si les problèmes de transvasements ont le même niveau de difficulté que les problèmes d'âges et d'effectifs. Un problème est réussi lorsque l'élève utilise l'une des procédures de résolution décrites dans le tableau 10 (par différence-comparaison ou par différence-complément). Le calcul mental donnant un calcul exact a également été considéré comme une réponse exacte. Les questions portant sur le tout et la partie n'ont pas été distinguées : pour un élève, les deux problèmes partie/tout ont été regroupés pour chaque type de contexte (effectifs, âges, transvasements de récipients) dans chacune des 4 conditions de versions de transvasements et chaque type d'information donnée en premier. On a ainsi deux problèmes âges, deux problèmes effectifs et deux problèmes de transvasements. Pour que la solution soit considérée comme correcte on a exigé une formulation cohérente avec le calcul. Nous avons attribué : 0 lorsqu'aucun des deux problèmes n'est réussi, 1 si l'un des deux problèmes est réussi et 2 si les deux problèmes sont réussis.

Le second codage est destiné à l'analyse des stratégies. Nous avons noté, pour chaque élève, la différence entre le nombre de problèmes réussis avec la stratégie de différence-complément et le nombre de problèmes réussis avec la stratégie de différence-comparaison. Nous avons effectué la différence entre le nombre de problèmes résolus par différence-complément et le nombre de problèmes résolus par différence-comparaison. Ce score est la force relative des deux stratégies: il est positif si la différence-complément est majoritaire et négatif dans le cas contraire. Il va de +2 (quand les deux problèmes, question sur la partie et question sur le tout, sont résolus par différence-complément) à –2 (quand les deux sont résolus par différence-comparaison). Nous avons attribué 0 lorsqu'aucun des deux problèmes n'est réussi (donc aucune des procédures n'est utilisée) ou en cas de calcul mental, car on ne peut identifier la stratégie utilisée. On a également 0 quand un problème est résolu par l'une des deux procédures et le second par l'autre stratégie. Le tableau 10 présente les formules algébriques correspondant aux calculs qui caractérisent les deux procédures de résolution.

	Les procédures de résolution	
Questions	Différence-complément	Différence-comparaison
Tout (T2)	(T1-P1)+(P1-D)	T1-D
Partie (P3)	(T1-D)-(T1-P1)	P1-D

Tableau 10. Les codages des procédures de résolution des problèmes.

IV.3. Résultats

Nous nous attendons à ce que les problèmes de transvasements se situent à un niveau intermédiaire sur l'application des deux procédures de résolution relevé par Sander et al. (2003) et Hakem et al. (2005) entre les problèmes qui décrivent les situations temporelles, relatives aux problèmes de comparaison et celles décrivant les quantités, relatives aux problèmes de combinaison. Nous nous attendons également que les versions de transvasements qui représentent les différentes formes d'illustration des problèmes de transvasements favorisent selon chacune des 4 versions soit la procédure différence-complément soit par différence-comparaison.

IV.3.1. Analyse des réussites

Cette analyse vise à comparer la difficulté des problèmes de transvasements par rapport aux problèmes d'effectifs et d'âges et celle des deux types d'information : état initial donné en premier ou transformation. Cette première analyse ne fait pas partie de nos hypothèses, mais le degré de difficulté des différentes catégories de problèmes est une information utile. Le plan d'analyse est de type $S<A_2*B_4>*T_3$.

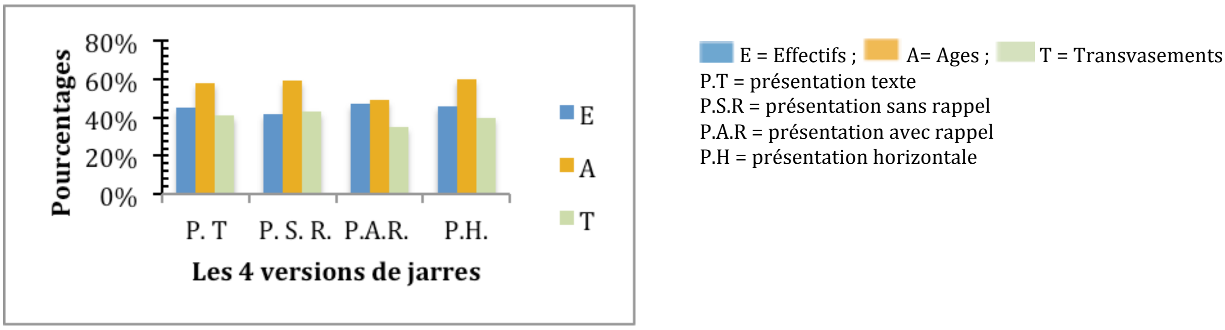
Où A est le facteur information sur état initial versus information sur la transformation ;

B représente les quatre versions des problèmes de transvasements ;

T représente les contextes des problèmes: effectif, âge, transvasement.

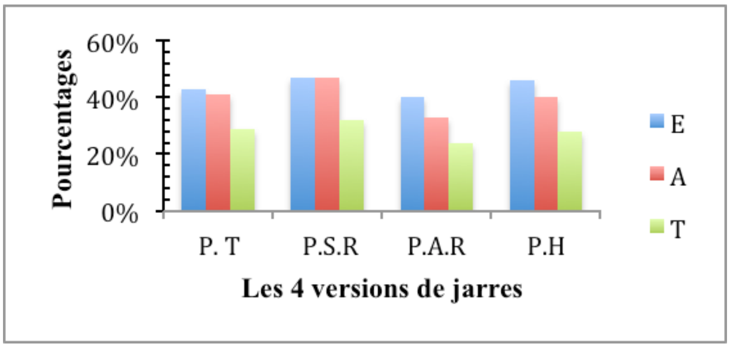
Les graphiques 1 et 2 présentent respectivement les résultats dans la situation où l'information porte sur la transformation et l'état initial. Ces résultats portent sur le taux de réussite des trois variables effectif, âge et transvasement, sans distinguer la question sur le tout et la partie, pour les 4 versions des problèmes de transvasements (présentation texte, présentation verticale version sans rappel, verticale version avec rappel, présentation horizontale).

Le graphique 1 présente les pourcentages de réussite des 3 variables, pour les 4 conditions, dans la situation où l'information porte sur la transformation. Dans la condition présentation texte : effectifs (45 %), âges (58%), transvasements, (41 %), Dans la condition présentation sans rappel : effectifs (42 %), âges (59%), transvasements, (43 %), Dans la condition présentation avec rappel : effectifs (47 %), âges (49%), transvasements, (35 %), Dans la condition présentation horizontale : effectifs (46 %), âges (60%), transvasements, (40 %).



Graphique 1. Taux de réussite des 3 variables, pour les 4 conditions, dans la situation où l'information porte sur la transformation**.**

Le graphique 2 présente les pourcentages de réussite des 3 variables, pour les 4 conditions, dans la situation où l'information porte sur l'état initial. Dans la condition présentation texte : effectifs (43 %), âges (41%), transvasements, (29 %), Dans la condition présentation sans rappel : effectifs (47 %), âges (47%), transvasements, (32 %), Dans la condition présentation avec rappel : effectifs (40 %), âges (33%), transvasements, (24 %), Dans la condition présentation horizontale : effectifs (46 %), âges (40%), transvasements, (28 %).



E = Effectifs ; A= Ages ; T = Transvasements

P.T = présentation texte
P.S.R = présentation sans rappel
P.A.R = présentation avec rappel
P.H = présentation horizontale

Graphique 2. Taux de réussite des 3 variables, pour les 4 conditions, dans la situation où l'information porte sur l'état initial**.**

Dans ces graphiques, les valeurs de la variable transvasement correspondent à des problèmes différents : les différences entre les valeurs effectifs et âges sont aléatoires, puisque les problèmes sont les mêmes : les différences sont dues au fait que les sujets ne sont pas les mêmes. De plus, comme la distinction transformation versus état initial ne vaut pas pour les effectifs, les différences sur les valeurs effectifs sont aussi aléatoires.

• On observe un effet significatif du facteur nature de l'information indiquée en premier; F (1, 792) = 22.71 ; pour p. <.0005. Il y a une différence significative entre les réussites selon que la première information porte sur la transformation ou sur l'état initial. Les problèmes ayant en premier l'information sur la transformation sont mieux réussis que ceux dont l'information porte sur l'état initial, cette différence n'étant due évidemment qu'aux problèmes d'âges et de transvasements.

• On note une différence significative entre les différents contextes (âge, effectif, transvasement) F (2, 1584) = 48.61 pour p< .0005. La moyenne sur les huit conditions pour le contexte effectif est 44,5% ; pour le contexte âges, la moyenne est 40,25% quand la première information concerne l'état initial et 56,5 quand elle concerne la transformation. La différence va dans le même sens dans le contexte transvasement : la moyenne est 28,25 dans le premier cas et 47,5 dans le second. Nous reviendrons sur ces différences dans la discussion.

• Il y a un effet non significatif du facteur versions de transvasements sur les réussites (F (1, 792) = 2.13 ; p <.10 ns.).

IV.3.2. Analyse des procédures

Le tableau 11 présente les moyennes (écart type) des procédures utilisées et leur pourcentage (écart type) de tous les problèmes du groupe dont l'information porte sur la transformation.

	Réussite		**Echecs**	**% Réussite**	
	complément	**comparaison**		**complément**	**comparaison**
texte	44.33 (30)	36.33 (37)	119.33 (7)	56.03 (38)	46.63 (48)
sans rappel	38.33 (29)	40.67 (40)	121.00 (12)	52.52 (41)	47.48 (41)
avec rappel	39.67 (28)	32.00 (28)	128.33 (15)	55.85 (34)	44.15 (34)
horizontale	39.00 (34)	39.67 (36)	121.33 (16)	49.87 (40)	50.12 (40)

Tableau 11. Moyennes (écart type) des procédures utilisées et leur pourcentage (écart type) lorsque l'information porte sur la transformation.

Le tableau 12 présente les moyennes (écart type) des procédures utilisées et leur pourcentage (écart type) de tous les problèmes du groupe dont l'information porte sur l'état initial.

	Réussite		**Echecs**	**% Réussite**	
	complément	**comparaison**		**complément**	**comparaison**
texte	44.33 (20)	20.67 (16)	135.00 (9)	82.97 (41)	37.45 (26)
sans rappel	54.33 (24)	13.67 (12)	132.00 (17)	78.72 (20)	21.28 (20)
avec rappel	39.67 (20)	16.33 (10)	144. 00 (16)	69.04 (19)	30.96 (19)
horizontale	45.33 (28)	20.33 (17)	134.33 (24)	67.74 (25)	32.26 (25)

Tableau 12. Moyennes (écart type) des procédures utilisées et leur pourcentage (écart type) lorsque l'information porte sur l'état initial.

Hypothèse 1. Effet du type de variable et du type d'information sur les procédures

D'après l'hypothèse 1, nous nous attendons à ce que, dans l'utilisation des procédures de résolution, les problèmes de transvasements soient intermédiaires entre les problèmes d'effectifs et les problèmes d'âges. Plus précisément, les problèmes de transvasements engendreront d'une part plus de procédures par différence-comparaison et moins de procédures par différence-complément que les problèmes d'effectifs et d'autre part, plus de procédures par différence-complément et moins de procédures par différence-comparaison que les problèmes d'âges.

Le tableau 13 présente les scores moyens sur la force relative des procédures lorsque l'information porte sur l'état initial et sur la transformation.

	Information sur l'état initial			**Information sur la transformation**		
	effectif	âge	transvasement	effectif	âge	transvasement
prés. texte	0.255	-0.08	0.18	0.295	-0.345	0.17
prés. V. Sans rappel	0.375	0.04	0.195	0.255	-0.395	0.135
prés. V. Avec rappel	0.275	0.01	0.065	0.28	-0.25	0.085
prés. horizontale	0.335	-0.07	0.11	0.365	-0.31	-0.065

Tableau 13. Scores moyens sur la force relative des procédures

Le tableau 13 présente les scores moyens sur la force relative des procédures par différence-complément et par différence-comparaison pour les 4 versions des problèmes de transvasements comparés aux problèmes d'effectifs et d'âges résolus par les mêmes élèves. On observe que pour chacune des huit conditions le score moyen de la force relative des procédures a une valeur intermédiaire entre celle observée pour les problèmes d'effectifs qui, comme attendu, montrent une prévalence de la procédure différence-complément et celle observée pour les problèmes d'âges qui dans la plupart des cas est négative, ce qui indique une prévalence de la procédure différence-comparaison. Cet effet est significatif, comme le révèle l'analyse de la variance révèle, pour le facteur types de contextes (âge, effectif, transvasement) $F(2, 1584) = 288.28$ pour $p < .0005$. Le facteur nature de l'information donnée en premier est également significatif : $F(1, 792) = 31.04$, $p. < .0005$. On voit en effet sur le tableau 13 que pour les contextes âge et transvasement la valeur de la variable dépendante qui exprime la force relative des procédures a tendance à être plus forte quand la première information porte sur l'état initial plutôt que sur la transformation, ce qui indique que la condition information sur l'état initial favorise la procédure différence-complément, tandis que l'information sur la transformation favorise la procédure différence-comparaison. Nous discuterons cet aspect plus loin.

L'analyse de variance révèle aussi des interactions: (i) entre la nature de l'information donnée en premier et le type de contextes (effectif, âge, transvasement) $F (2, 1584) = 29.93$ pour $p< .0005$; (ii) entre les versions de transvasements et les contextes (effectif, âge, transvasement) $F (6, 1584) = 4.57$ pour $p<.0005$. En conséquence, nous poursuivrons l'analyse à l'intérieur de chacune des conditions portant sur la nature de la première information donnée.

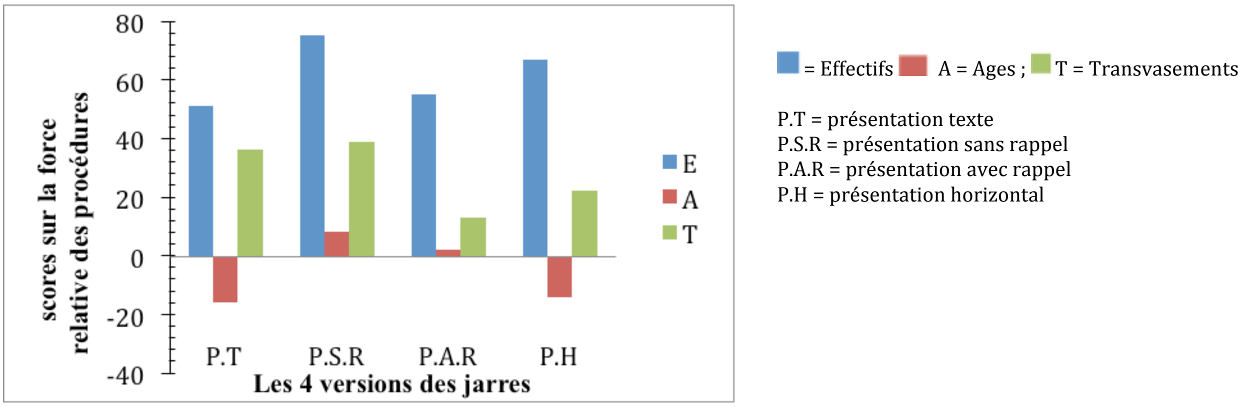
➢ **Comparaisons entre les contextes à l'intérieur de la condition information sur l'état initial**

Dans le tableau 13 et graphique 3 les différences entre les colonnes « effectif » et à l'intérieur de ces colonnes sont aléatoires et ne sont dues qu'à des différences de populations pour la raison énoncée précédemment. Les différences à l'intérieur des colonnes « âge » sont aléatoires pour la même raison. Nous allons examiner si les différences entre d'une part, le contexte transvasement et d'autre part, soit le contexte effectif soit le contexte âge sont significatives pour chacune des quatre conditions de présentation des problèmes de transvasements : il s'agit donc d'une comparaison entre données appariées puisque chaque élève résout les deux problèmes de chaque contexte.

On constate que pour les problèmes de transvasement la force relative de la procédure est pour toutes les conditions de présentation plus faible que la valeur observée pour les effectifs : cela signifie qu'on observe moins de procédures passant par le calcul du complément. La différence est significative pour trois conditions : présentation verticale sans rappel ($t_{99} = 4.11$, $p<.05$) la condition présentation verticale avec rappel ($t_{99} = 4.19$, $p<.05$) et la condition présentation horizontale ($t_{99} = 4.57$, $p<.05$).

On observe que les problèmes de transvasements sont plus souvent résolus par la procédure de calcul par complément que les problèmes d'âges ; il y a une fréquence moindre d'utilisation de la procédure par comparaison. Ceci s'observe dans les quatre conditions, la différence est significative dans trois cas : condition présentation texte (t_{99} = 4.13 $p<.05$), présentation verticale sans rappel (t_{99} = 2.85, $p<.05$) et présentation horizontale (t_{99} = 3.32, $p<.05$).

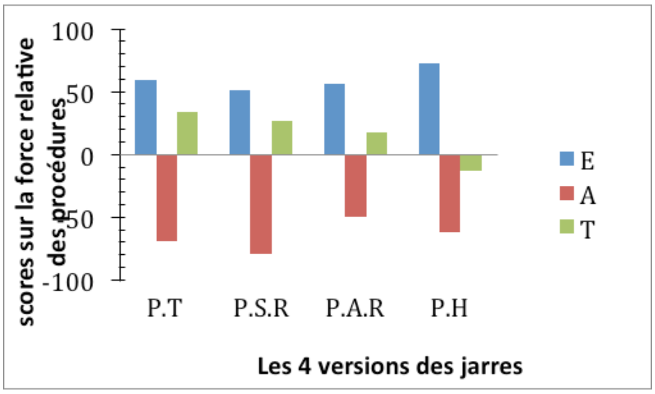
Le graphique 3 présente les scores des réussites des 3 variables, pour les 4 conditions, dans la situation où l'information porte sur l'état initial. Dans la condition présentation texte : effectifs (51), âges (16), transvasements, (36), Dans la condition présentation sans rappel : effectifs (75), âges (8), transvasements, (39), Dans la condition présentation avec rappel : effectifs (55), âges (2), transvasements, (13), Dans la condition présentation horizontale : effectifs (67), âges (14), transvasements, (22).



Graphique 3. Scores sur la force relative de la procédure dans la situation état initial.

➢ **Comparaisons entre les contextes à l'intérieur de la condition information sur la transformation.**

Le graphique 4 présente les scores des réussites des 3 variables, pour les 4 conditions, dans la situation où l'information porte sur la transformation. Dans la condition présentation texte : effectifs (59), âges (69), transvasements, (34), Dans la condition présentation sans rappel : effectifs (51), âges (79), transvasements, (27), Dans la condition présentation avec rappel : effectifs (56), âges (50), transvasements, (17), Dans la condition présentation horizontale : effectifs (73), âges (62), transvasements, (13).



= Effectifs A = Ages ; T = Transvasements

P.T = présentation texte
P.S.R = présentation sans rappel
P.A.R = présentation avec rappel
P.H = présentation horizontal

Graphique 4. Scores obtenus dans les 4 versions sur la force relative de la procédure dans la situation transformation.

D'après le graphique 4 on constate que pour les problèmes de transvasements la force relative de la procédure est pour toutes les conditions de présentation plus faible que la valeur observée pour les effectifs : cela signifie qu'on observe moins de procédures passant par le calcul du complément et donc corrélativement plus de procédures basées sur la comparaison. La différence est significative pour les 4 conditions : version texte ($t_{99} = 2.44$ $p<.05$), présentation verticale sans rappel ($t_{99} = 2.11$, $p<.05$), présentation avec rappel ($t_{99} = 3.44$, $p<.05$), présentation horizontale ($t_{99} = 8.19$, $p<.05$).

On constate également que la force relative de la procédure est, dans toutes les conditions de présentation, plus faible pour les problèmes de transvasement que la valeur observée pour les âges: on observe moins de procédures par comparaison ; donc plus de procédures par complément. La différence est aussi significative pour les 4 conditions : version texte ($t_{99} = 8.91$ $p<.05$), présentation verticale sans rappel ($t_{99} = 8.25$, $p<.05$), présentation avec rappel ($t_{99} = 5.14$, $p<.05$), présentation horizontale ($t_{99} = 3.87$, $p<.05$).

Au vu des résultats nous pouvons conclure que notre hypothèse est vérifiée : les problèmes de transvasement sont intermédiaires entre les effectifs et les âges dans les 4 conditions, c'est-à-dire, d'une part, les problèmes d'effectifs favorisent plus de stratégies complément que les problèmes de transvasement et moins de stratégies par comparaison, d'autre part, les problèmes d'âges favorisent plus de stratégies par différence-comparaison et moins de stratégies par différence-complément que les problèmes de transvasement.

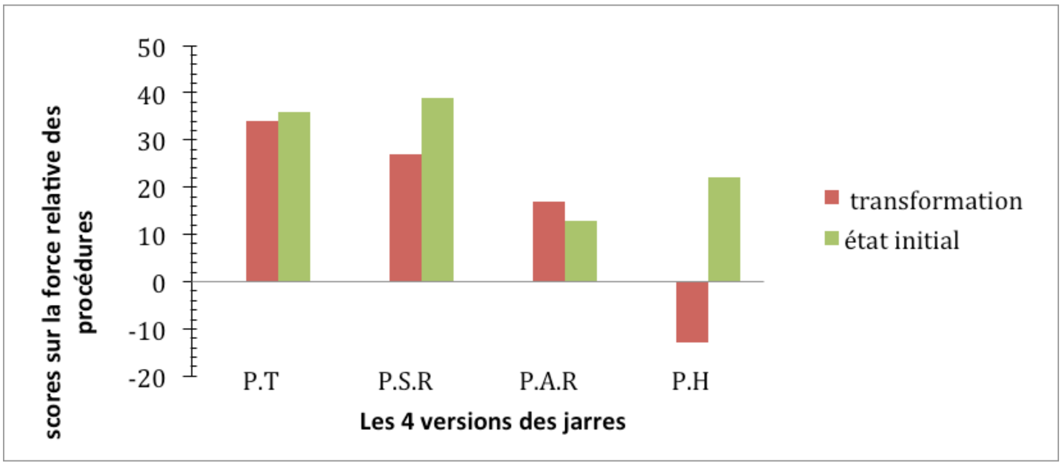
➢ **Comparaison des procédures entre les différentes présentations des problèmes de transvasements**

Hypothèse 2. Effet du type de version des jarres

Selon cette hypothèse la présentation horizontale doit être la plus favorable à la stratégie différence-comparaison, parce que l'orientation gauche-droite de la comparaison correspond à l'orientation de la ligne temporelle. La présentation haut-bas de la succession des états doit être la plus défavorable à cette stratégie et doit susciter davantage de procédures basées sur le calcul du complément, car les états des deux vases ne sont pas comparés. La présentation verticale avec rappel devrait être intermédiaire, car l'orientation verticale ne correspond pas à l'orientation temporelle, mais elle permet de faire des comparaisons, puisque les états sont rappelés et mis en correspondance.

Le tableau 14 reprend les données du tableau 13 sur le scores moyens de la force relative des procédures en ne retenant que les problèmes de transvasement, et le graphique 5 présente les scores obtenus dans cette variable lorsque l'information porte sur l'état initial et sur la transformation. Ce graphique présente les scores des réussites de la variable transvasement pour les 4 conditions, dans la situation où l'information porte sur la transformation et l'état initial. Dans la condition présentation texte : transformation (34), état initial (36). Dans la condition présentation sans rappel : transformation (27), état initial (39). Dans la condition présentation avec rappel : transformation (17), état initial (13). Dans la condition présentation horizontale : effectifs (13), âges (22).

Le tableau 14 et graphique 5 permettent de comparer les procédures de résolution des différentes versions des problèmes de transvasements et de tester les hypothèses 2 et 3. Nous considérons d'abord les comparaisons entre les trois présentations illustrées des problèmes de transvasement en vue de tester l'hypothèse 2. Nous examinerons ensuite la comparaison entre la présentation texte seul et la présentation verticale sans rappel qui permet de tester l'hypothèse 3.



Graphique 5. Scores obtenus sur la force relative à la procédure dans la situation état initial et transformation pour les problèmes de transvasements.

P.T = présentation texte ; P.S.R = présentation sans rappel ; P.A.R = présentation avec rappel ; P.H = présentation horizontal.

Versions de transvasements	**Transvasements information sur l'état initial**	**Transvasements information sur la transformation**
prés. texte	0.18	0.17
prés. Sans rappel	0.195	0.135
Prés. Avec rappel	0.065	0.085
Prés. horizontale	0.11	-0.065

Tableau 14. Scores moyens sur la force relative à la procédure sur les problèmes de transvasement, pour les 4 conditions, dans les situations où l'information porte sur la transformation et l'état initial.

➢ **Effet du type de version des problèmes de transvasements en situation d'information sur l'état initial**

Le test t de Student pour groupes indépendants montre seulement une différence significative entre la présentation verticale sans rappel et la présentation avec rappel (t_{198} = 2.35, p<.05). La différence entre la présentation verticale sans rappel et présentation horizontale est dans le sens attendu mais n'est pas significative (t_{198} = 1.55, p>.05) et la différence entre la présentation verticale avec rappel et la présentation horizontale n'est pas dans le sens attendu et n'est pas significative ($t_{198} = 0.85$, $p>.05$). L'effet du type d'illustration accompagnant le texte n'est donc pas avéré dans le cas où la première information porte sur l'état initial.

- **Effet du type de version des transvasements en situation d'information sur la transformation**

Le test t de Student pour groupes indépendants montre une différence significative dans le sens attendu entre :

- la version texte et la condition présentation horizontale, ($t_{198} = 3.48$, $p<.05$) ;

- la condition présentation verticale sans rappel (0.135) et la présentation horizontale (-0.065 ($t_{198} = 2.97$, $p<.05$) ;

- la condition présentation verticale avec rappel et la condition présentation horizontale, ($t_{198} = 2.33$, $p<.05$).

Par contre, la différence entre la présentation sans rappel et la présentation verticale avec rappel, tout en étant dans le sens attendu n'est pas significative ($t_{198} = 0.74$, $p>.05$). Ces résultats confirment l'importance de l'orientation soulignée dans l'hypothèse 2 : l'illustration du texte favorise la procédure basée sur le calcul de la différence-comparaison et ce, dans la mesure où l'illustration permet une comparaison graphique des états de la situation et d'autant plus que la suite comparée des états est orientée gauche-droite. Par contre, la condition état initial n'a pas permis de confirmer cette hypothèse, car elle semble favoriser exclusivement la stratégie par différence-complément. Nous discuterons plus loin ce qui peut expliquer cette différence.

Hypothèse 3 : d'après cette hypothèse, on n'attend pas d'effet de l'illustration ajoutée au texte lorsque celle-ci figure pas à pas la succession des états sans rappel des états antérieurs (version verticale sans rappel).

Le test de Student ne révèle aucune différence significative sur la variable force relative de la procédure entre la présentation du texte seul et la présentation verticale sans rappel, que ce soit dans la condition information sur la transformation ($t_{198} = 0.49$, $p>.05$) ou dans la condition information sur l'état initial ($t_{198} = 0.24$, $p>.05$), la différence évoluant en outre en sens inverse dans les deux conditions. De plus, l'analyse des réussites n'a pas montré de différence significative entre les deux versions ni dans la condition état initial ($t_{198} = 0.45$, $p>.05$) ni dans la condition transformation ($t_{198} = 0.27$, $p>.05$). Ces résultats confirment l'hypothèse 3 : il n'y a pas de différence entre la version verticale sans rappel et la version texte ; l'illustration n'ajoute rien à la compréhension du texte quand celle-ci représente simplement les états successifs de chaque vase sans mettre en correspondance le contenu des deux vases.

Discussion

Notre recherche avait pour objectif de montrer que les problèmes de transformation, en prenant comme exemples des problèmes de transvasements, étaient, pour le choix des procédures de résolution, intermédiaires entre les problèmes de type ensembliste (les effectifs) qui favorisent la stratégie par différence-complément et ceux de type temporel (les âges) qui favorisent la procédure par différence-comparaison. Notre première hypothèse qui énonce ce point est vérifiée que la première information porte sur l'état initial ou sur la transformation, mais les différences sont plus importantes dans le second cas que dans le premier.

La deuxième hypothèse, selon laquelle une illustration du texte permettant une comparaison grâce à une mise en correspondance des états orientée gauche-droite favorise la procédure différence-comparaison est confirmée par les données mais seulement dans le cas où la première information porte sur la transformation.

Enfin la troisième hypothèse, selon laquelle l'illustration graphique n'ajoute rien à la compréhension du texte quand celle-ci montre seulement la succession des états, est vérifiée dans les deux conditions où la nature de la première information varie.

Il convient d'examiner d'abord ce qui peut expliquer que dans les contextes âges et transvasements l'importance de la procédure différence-comparaison se trouve diminuée quand la première information porte sur l'état initial. Si l'on se reporte à la figure 1, on remarque que dans ce cas c'est l'information comparaison qui est commune aux deux ensembles, alors que lorsque la première information porte sur la transformation, c'est l'état initial qui est commun aux deux ensembles. Or, l'état initial est le premier dans l'ordre temporel et il est plus facile d'inférer une différence à partir d'une autre en suivant l'ordre temporel qu'en le remontant. En prenant l'exemple des problèmes d'âges, quand l'état initial est le même, le raisonnement est : s'ils ont commencé au même âge, s'ils n'ont pas suivi les cours le même temps, celui qui finit le premier est celui qui a suivi les cours le moins longtemps. Ce raisonnement peut s'appuyer sur une simulation mentale de parcours, comme des mobiles qui partent en même temps et roulent un temps différent (comme dans la situation de Piaget). Quand c'est la transformation (la durée des cours) qui est la même, le raisonnement est : s'ils ont suivi les cours le même temps, celui qui finit le premier est celui qui a commencé le premier. L'inférence est très difficile à simuler mentalement, car l'élément commun qui déclenche la comparaison (la durée) est postérieur à l'événement (le départ) à partir duquel peut débuter la simulation. On observe d'ailleurs que dans la condition où l'âge de départ est le même, la comparaison est plus fréquente quand la question porte sur l'âge à la fin des cours que lorsqu'elle porte sur la durée des cours (Hakem et al. 2005) : il est plus facile d'inférer la différence d'âge à la fin des cours à partir d'une différence de durée qu'une différence de durée à partir de la différence d'âge à la fin des cours. Parallèlement, le calcul du complément est plus facile, lorsque la première information concerne l'état initial : en ce cas c'est la durée qu'il faut calculer dans le cadre de la procédure différence-complément. Or on sait, d'après les résultats de Vergnaud et Durand, (1976), que dans un problème simple de calcul de complément le problème est plus facile quand la question porte sur la transformation que sur l'état initial. Ainsi les deux facteurs concourent pour rendre la procédure différence-comparaison moins dominante quand la première information porte sur l'état initial : l'inférence est plus difficile à faire, du fait quelle ne peut plus s'appuyer sur la simulation mentale et le calcul du complément est alors plus facile.

La même démonstration vaut pour expliquer que la réussite est moindre quand l'information donnée en premier porte sur l'état initial. Comme la procédure de différence-comparaison est prépondérante dans la situation âges et contribue principalement aux réussites, le blocage de cette procédure n'est pas compensé par un surcroît suffisant de fréquence de la procédure-complément.

La différence observée en fonction de la nature de l'information donnée en premier s'explique donc par le fait que le raisonnement basé sur la comparaison est plus difficile à mettre en œuvre lorsque la première information porte sur l'état initial. Notre première hypothèse selon laquelle le contexte transvasement typique de la situation de transformation d'état se situe entre le contexte effectif, qui évoque massivement la procédure basée sur le calcul du complément et le contexte âge qui induit préférentiellement la procédure basée sur la comparaison est donc très solidement étayée. Elle est attestée dans une gamme très large de conditions (nature de la première information, versions des problèmes de transvasement) en utilisant des comparaisons intra-sujets, qui sont toutes significatives sauf une. La présente expérience confirme aussi les résultats antérieurs montrant que le contexte effectif induit massivement une lecture qui privilégie la relation complément de l'énoncé alors que le contexte âge induit majoritairement une lecture qui extrait les relations de comparaison.

Pour ce qui est de notre seconde hypothèse selon laquelle l'ajout au texte d'une illustration qui met en correspondance les états homologues dans une présentation orientée gauche-droite favorise la procédure basée sur la comparaison, nous pouvons conclure, à la lumière de ce qui vient d'être dit, qu'elle est vérifiée dans le mesure où l'ordre dans lequel sont données les informations du problème fournit des conditions favorables à la comparaison, c'est-à-dire fournit dans l'ordre : la base de la comparaison (la quantité identique dans les deux suites à comparer) , la différence à l'origine de l'inférence et la différence qui résulte de l'inférence. Cet ordre permet une simulation de l'inférence par l'image d'un parcours mental.

La troisième hypothèse, selon laquelle la présentation explicite d'un modèle de la situation sous la forme d'une illustration graphique des états successifs de la situation n'ajoute rien au texte, est clairement confirmée par les données : la différence est non significative et très faible. Ce résultat est cohérent avec la revue de la littérature faite par Vincente et al. (2007) et avec les résultats expérimentaux de ces auteurs montrant que seule a un effet une reformulation conceptuelle qui oriente vers un schéma d'interprétation. D'ailleurs l'expérience d'Hudson (1985), souvent citée comme exemple de modèle de situation, est en fait un recodage qui permet de reformuler un énoncé de problème de comparaison (*Il y a 5 oiseaux et 3 vers, combien y a-t-il d'oiseaux de plus que de vers?)* en un énoncé de problème parties-tout (*Combien d'oiseaux n'auront pas de vers ?*).

Les données de la présente expérience complètent la généralisation formulée par Gamo, Taabane et Sander (2011) qui distinguent deux catégories de variables pour caractériser les contextes de problèmes : les variables matérielles qui rendent plus saillantes les relations parties-tout et les variables temporelles qui rendent plus saillantes les relations de comparaison (les homologies avec les similitudes et différences). On peut dire que les variables qui définissent des changements d'état (troisième catégorie de problèmes) se rattachent à la fois aux variables matérielles et aux variables temporelles en ce qu'elles évoquent à la fois les relations de complément et les relations de comparaison. On peut définir alors la structuration sémantique des contextes des problèmes additifs qui sont organisés autour de deux significations de l'opération mathématique de soustraction : la différence qui est le complément d'une partie dans un tout et la différence entre deux quantités homologues dans une mise en correspondance. Les contextes définis par des variables matérielles activent préférentiellement la première signification, ceux qui sont définis par des variables temporelles activent la seconde signification et les variables qui expriment des changements d'états matériels intervenant dans un scénario temporel sont relativement neutres par rapport à ces significations et peuvent activer aussi bien l'une que l'autre.

Cette expérience montre le rôle qu'ont, dans la résolution des problèmes arithmétiques, les facteurs sémantiques liés au contexte qui incarne le problème. Elle confirme que les effets sémantiques liés à la particularisation de la situation sont négligeables et que derrière la classification des problèmes arithmétiques il y a une dimension sémantique très générale qui permet d'opposer les variables de quantité qui concernent les objets matériels aux variables temporelles. Elle montre également que les situations de transformation d'état qui portent sur des changements de valeurs de variables décrivant des états matériels sont intermédiaires entre les objets matériels et les moments ordonnés temporellement. Cette dimension sémantique intervient en amont dans la lecture de l'énoncé puisqu'elle influence le point de vue adopté dans la lecture : elle intervient dans la sélection du schéma, parties-tout ou comparaison, qui servira à interpréter les données. Selon les modèles de résolution qui utilisent la notion de schéma (Kintsch et Greeno, 1985), la compréhension du problème consiste au moment de la lecture à remplir les places vides du schéma sélectionné. Ces modèles ne disent rien sur la sélection du schéma : nos données suggèrent que la dimension sémantique que nous avons décrite intervient dans cette sélection. De plus, on peut supposer que cette dimension sémantique est en relation avec la notion de ligne numérique mentale invoquée dans les recherches neurophysiologiques sur la représentation du nombre basées sur l'effet SNARC (Dehaene et al. 1993). En effet, nous avons pu montrer que le même énoncé d'un problème de transformation d'état n'induit pas la même interprétation du problème selon l'orientation de la représentation graphique qui l'accompagne : la présentation montrant la suite des états et leurs correspondances dans une orientation gauche-droite donne lieu à plus d'interprétations correspondant au schéma comparaison (comme les variables temporelles) que dans une orientation haut-bas. Ce résultat confirme l'idée que la prépondérance de la procédure différence-comparaison dans les problèmes d'âges est liée à l'orientation de la droite temporelle et donc à une représentation basée sur la métaphore spatiale.

Contribution expérimentale 2 :

Apprentissage du transfert des stratégies de résolution par recodage des propriétés

Chapitre V. Apprentissage du transfert des procédures par recodage des propriétés par guidage en situation de classe

Cette expérience se base sur deux aspects théoriques : les contextes sémantiques aussi bien physiques (les problèmes de la tour de Hanoï et de ses isomorphes) que les énoncés mathématiques, et le rôle du transfert dans les apprentissages. Des recherches qui ont étudié l'influence du contexte sémantique dans la résolution des problèmes isomorphes et la différence de difficulté ont montré que la représentation et la résolution du problème sont influencées par son contexte, (Kotovsky et al. 1985). Le contexte de présentation du problème montre également la difficulté de modifier sa représentation quand celle qui est initialement évoquée et qui correspond au contexte sémantique du problème ne permet pas de le résoudre efficacement (Clément et Richard, 1997). Dans le domaine de la résolution de problèmes arithmétiques les recherches ont montré que le contexte du problème, la nature de la variable, la nature de la question et le scénario du problème induisent le choix d'une procédure de résolution et peut faciliter ou non la résolution du problème, (Coquin-Viennot et Moreau, 2003 ; Thévenot et al. 2007). Les travaux de Hakem et al. (2005), ont montré que la variable impliquée dans un problème influence le choix d'une procédure et déclenche soit un schéma partie-tout, lorsque les variables des problèmes sont de type cardinal ; et un schéma de comparaison des parties analogues du problèmes lorsque les variables qui y interviennent sont de type ordinal. Ces deux types de résolution impliquent deux interprétations différentes du même énoncé. A la suite, les recherches de Gamo (2009) ; Gamo et al. (2010) et Gamo et al. (2011) ont montré que la procédure différence-complément et la différence-comparaison relèvent d'interprétations différentes. La première est rendue saillante par les variables ensemblistes et la seconde par les variables de type temporelles. Ces problèmes empêchent de considérer la procédure alternative dans ces problèmes. Du fait qu'il a été démontré que le changement de point de vue est difficile à réaliser, il n'est possible de procéder à l'application de la stratégie alternative dans les problèmes que par un apprentissage. Gamo (2009) a montré qu'en modifiant le scénario du problème qui consiste à mettre en relief les propriétés du problème, les élèves parviennent à modifier la représentation du problème et à adopter la procédure de résolution alternative du problème. Elle a également montré qu'en procédant à un apprentissage de la procédure de résolution par un recodage sémantique il est possible de provoquer la mise en œuvre des procédures possibles dans le problème et de choisir celle qui est la plus efficiente pour le résoudre.

L'analogie se base sur la correspondance des ressemblances entre les traits de structure et de traits de surface. Cette mise en correspondance se fait à partir des similitudes entre des objets, des valeurs des attributs, au niveau des relations, entre les objets ou entre les attributs. Pour construire un schémas général de deux situations analogues il faut recoder les objets à un niveau commun plus abstrait. Les recherches dans le domaine de l'analogie indiquent que la présentation d'exemples de problèmes avec des procédures de solution aide à transférer ces procédures à de nouveaux problèmes (Nogry et Didierjean, 2006). Le transfert est facilité lorsque les problèmes source et cible partagent les mêmes traits de surface (Novick et Holyoak, 1991). Cependant, ces traits de surface ne participent pas à l'apprentissage par transfert analogique. Le processus du transfert analogique est lié à la manière dont les propriétés des objets sont codées et à l'interprétation des objets et des événements décrits dans les problèmes. Gentner et Medina, (1998) montrent que le codage des problèmes à partir de la comparaison entre des exemples de problèmes permet d'extraire la structure commune sous jacente entre les problèmes. Ce codage de problèmes est un processus qui favorise l'abstraction du principe selon lequel les problèmes qui partagent les mêmes traits de structure peuvent se résoudre par le même principe de solution. La comparaison entre les problèmes aide à découvrir leur structure commune et à utiliser la procédure la plus efficace dans la résolution de problèmes. Les problèmes non résolus sont aussi une aide lorsqu'ils sont comparés à d'autres problèmes du fait que leur comparaison contribue à inciter à une représentation par analogie de la situation.

Cette expérience s'inscrit dans la même voie que les travaux de Sylvie Gamo sur la généralisation et l'abstraction des procédures de résolution arithmétique. Dans notre première expérience nous avons montré qu'une représentation graphique du problème de transformation peut conduire à l'utilisation de la procédure différence-complément ou différence-comparaison, alors que les problèmes de combinaison favorisent majoritairement le calcul par différence-complément et ceux de comparaison la procédure de calcul par différence-comparaison. Dans cette expérience, nous voulons à travers les instructions écrites et un apprentissage oral, savoir si les problèmes de transformation que sont, dans notre expérience précédente, les problèmes de transvasement, analogues aux problèmes de Luchins, peuvent servir de contexte pivot pour qu'il soit possible de transférer de manière significative la procédure différence-comparaison aux effectifs, et inversement, qu'il soit possible d'appliquer massivement la procédure différence-complément aux problèmes d'âges.

Les résultats de l'expérience 1 sur les problèmes de transvasements sont allés dans le même sens que ceux de Sander et al. (2003) et Hakem et al. (2005, 2011) sur les procédures utilisées dans la résolution des problèmes selon le contexte sémantique. Cette expérience a montré que certaines présentations des transvasements orientent, selon la version, vers l'utilisation d'une procédure plutôt qu'une autre. Nous avons conclu que les versions de transvasements sont, selon les versions, intermédiaires entre les problèmes d'âges et les problèmes d'effectifs. Les études sur la difficulté de changement de point de vue ont montré qu'il est difficile de percevoir un point de vue alternatif, même s'il est plus économique de l'utiliser, lorsque l'environnement de présentation du problème favorise déjà une procédure.

L'objectif de cette expérience est de montrer que les procédures différence-complément et différence-complément qui relève de codages différents dans l'interprétation des problèmes peuvent faire l'objet d'un apprentissage par transfert analogique à partir des propriétés et des relations communes entre leurs éléments. Ceci afin de montrer que les problèmes qui partagent la même structure formelle, ayant des contextes sémantiques différents sont solubles par une même procédure de résolution. Nous voulons parvenir à transférer les procédures habituellement utilisées, des âges aux effectifs, et inversement, des effectifs aux âges. Nous comptons y arriver en intégrant les versions de transvasements intermédiaires entre les âges aux effectifs, pour transférer la procédure par différence-comparaison aux effectifs, et des effectifs aux âges pour transférer la procédure de la différence-complément des effectifs aux âges. C'est dans ce cadre que s'inscrit notre deuxième expérience.

Cette expérience a été réalisée en trois étapes : une séance pré-test, 10 séances d'apprentissage, et une séance post-test. Neuf groupes de 50 élèves participaient à l'expérience dont 8 groupes expérimentaux et 1 groupe contrôle. Les pré-test et post-test ont été formulés selon une même structure et étaient communs à tous les groupes. Nous avons réalisé une condition d'apprentissage de l'expérience par instruction écrite et une autre sur un apprentissage par recodage des propriétés à travers un guidage oral en situation de classe. Aussi, nos hypothèses portent sur l'effet de l'instruction par écrit et par explication orale avec deux conditions plaçant les versions de transvasements en situation intermédiaire et finale.

V.1. Hypothèses

Nous émettons d'une part, l'hypothèse que le recodage des propriétés par guidage l'apprentissage de la stratégie la moins fréquemment utilisée dans une variable entrainera une augmentation de l'application de cette procédure sur la variable qui la favorise le moins spontanément, autrement dit, un progrès de la stratégie apprise sera observé.

Nous émettons trois hypothèses spécifiques sur le facteur de la force de stratégie dans la résolution des problèmes selon l'ordre de transfert.

Hypothèse 1. Grâce à l'apprentissage par guidage du recodage des propriétés nous devrions observer un effet de transfert par l'utilisation de la procédure différence-comparaison sur les problèmes d'effectifs chez les groupes d'élèves qui ont suivi cette méthode par rapport au groupe contrôle.

Hypothèse 2. Grâce à l'apprentissage par guidage du recodage des propriétés nous devrions observer un effet de transfert par l'utilisation de la procédure différence-complément des problèmes d'effectifs vers les problèmes d'âges chez les groupes d'élèves qui ont suivi cette méthode par rapport au groupe contrôle.

Hypothèse 3. La présentation de la version de transvasement placée en situation intermédiaire favorisera dans les deux cas le transfert de la procédure apprise.

V.2. Participants

L'expérimentation a été réalisée à Libreville au Gabon. Etant donné que les enfants gabonais ne résolvent pas souvent les problèmes de notre étude, nous avons dans un premier temps effectué une pré-expérimentation pour observer comment ils résolvent ce type de problème. Nous avons procédé à une pré-expérimentation dans 6 classes de 50 élèves. A partir de ces observations, nous avons modifié la formulation des premiers problèmes d'apprentissage afin de les rapprocher au mieux au contexte culturel de ces élèves. Nous avons choisi cette population, car nous avions de meilleures conditions pour conduire un apprentissage en situation de classe. Nous avons réalisé l'expérimentation dans 10 classes de

CM2 de 4 écoles élémentaires. Au total 450 élèves ont participé à l'expérimentation, toutes catégories socio-professionnelles confondues. Ces élèves étaient âgés de 11 à 14 ans. Nous avions 8 groupes expérimentaux et 1 groupe contrôle. Du fait que les séances d'apprentissage s'étendaient sur deux semaines et qu'il fallait s'adapter au rythme des enseignants, nous avons obtenu de faire des séances d'une heure par jour dans chaque classe. De ce fait, 4 classes ont constitué nos quatre groupes d'apprentissages oraux. Seuls les groupes d'apprentissages écrits et le groupe contrôle qui ne nécessitaient aucune intervention orale, ont été choisis dans des écoles différentes.

V.3. Méthodologie

V.3.1. Matériel

Dans tous les problèmes de cette expérience l'une des données était de type comparatif. Dans le but de familiariser les participants aux problèmes proposés à l'apprentissage, nous avons proposé lors de la prise de contact deux problèmes analogues aux problèmes de l'expérience, formulés en référence au contexte culturel des participants. Les problèmes du pré-test étaient les mêmes que ceux du post-test seuls les nombres ont été modifiés afin d'éviter les effets de mémorisation. Les problèmes d'apprentissage sont les problèmes d'âges, d'effectifs et de transvasements. Nous avons également considéré deux variables (poids et hauteurs) ne faisant pas partie des problèmes de l'apprentissage afin de tester une éventuelle généralisation de l'application des procédures. En tout, nous avons proposé 2 problèmes d'entrainement, 10 problèmes aux pré et post tests avec 2 problèmes distracteurs (intercalés à la $4^{ième}$ et $7^{ième}$ place) jouant le même rôle que dans l'expérience 1 et 2. Nous avons proposé 10 problèmes d'apprentissage pour les 8 groupes expérimentaux et également pour le groupe contrôle.

➢ ***Les deux problèmes d'entrainement*** :

Problème d'anniversaire	**Problèmes des bougies**
Jean et Pierre sont nés le même jour. Jean a 7 ans. On fête l'anniversaire des deux frères. On met 22 bougies sur le gâteau. ***Qui est le plus âgé des deux ? Il a combien d'années de plus que son frère?***	*Lucien et Paul sont nés le même jour. Jean a 9 ans, Pierre a 5 ans de plus. On fête l'anniversaire des deux frères.* ***Combien de bougies faut-il acheter pour le gâteau d'anniversaire ?***

Tableau 15. Les deux problèmes d'entrainement avant apprentissage.

➢ ***Les problèmes du pré-test et post-test***

Problèmes de la variable effectif :

Effectifs question sur le tout	**Effectifs question sur la partie**
Dans le groupe de gymnastique il y a 20 personnes. Quand le groupe de gymnastique va au pique-nique avec le groupe de théâtre ils sont 35. Dans le groupe de musique il y a 3 personnes de moins que dans le groupe de gymnastique. Le groupe de musique va au restaurant avec le groupe de théâtre. ***Combien sont-ils à table ?***	*Dans le groupe de ballet il y a 15 personnes. Quand le groupe de ballet va au cinéma avec le groupe de piano ils sont 31. Quand le groupe de piano va au spectacle avec le groupe de chant ils sont 2 personnes de moins.* ***Combien sont-ils dans le groupe de chant ?***

Tableau 16. Problèmes de la variable effectif.

Problèmes de la variable âge :

Ages question sur le tout	Ages question sur la partie
Aline a suivi les cours de danse pendant 16 ans. Léa a commencé au même âge qu'Aline et a suivi les cours 3 ans de moins. Aline s'est arrêtée à 35 ans. ***A quel âge Léa s'est-elle arrêtée ?***	*Paul a suivi les cours de musique au conservatoire pendant 14 ans et s'est arrêté à 36 ans. Pierre a commencé au même âge que Paul et s'est arrêté 2 ans avant.* ***Combien de temps Pierre a-t-il suivi les cours de musique ?***

Tableau 17. Problèmes de la variable âge.

Problèmes de la variable poids :

Poids question sur le tout	Poids question sur la partie
Un sac de farine pèse 17 kg. Ndong achète le sac de farine et un sac de pommes de terre. Il a 36 kg d'achats. Un sac d'avocats pèse 2 kg de plus que le sac de farine. Bika achète le sac de pommes de terre et le sac d'avocats. ***Combien pèsent ses achats ?***	*Un sac de mangues pèse 19 kg. Koumba achète le sac de mangues et un sac d'oranges. Il a 35 kg d'achats. Mouanga achète le sac d'oranges et un sac d'arachides, il a 3 kg d'achats de plus que Koumba.* ***Combien pèse le sac d'arachide ?***

Tableau 18. Problèmes de la variable poids.

Problèmes de la variable hauteur :

Hauteur question sur le tout	Hauteur question sur la partie
Un carton rouge a une hauteur de 16 cm. Quand on pose le carton rouge sur un carton bleu, la hauteur de la pile est de 34 cm. Un carton jaune mesure 2 cm de plus que le carton rouge. On pose le carton jaune sur le carton bleu. ***Quelle est la hauteur de la pile ?***	*Une valise blanche a une hauteur de 18 cm. Quand on pose la valise blanche sur une valise noire, leur hauteur est de 38 cm. Si on pose une valise verte sur la valise noire, leur hauteur mesure 3 cm de plus.* ***Quelle est la hauteur de la valise verte ?***

Tableau 19. Problèmes de la variable hauteur.

Problèmes transvasements :

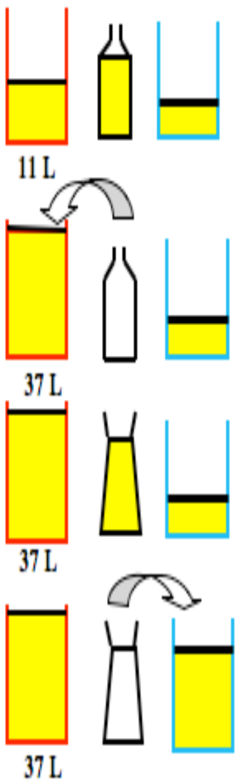
Question sur le tout		**Question sur la partie**	
On a versé 11 litres d'eau dans le vase rouge. On a un bidon plein d'eau. On verse le bidon dans le vase rouge. Il y a maintenant 37 litres dans le vase rouge. Dans le vase bleu il y a 2 litres de moins qu'il y avait au début dans le vase rouge On a un flacon plein d'eau qui contient autant que le bidon. On le verse dans le vase bleu. ***Combien de litres y a-t-il dans le vase bleu ?***		*On a versé de l'eau dans les vases rouge et bleu. Il y a 21 litres dans le vase rouge. On a un bidon plein d'eau. On verse le bidon dans le vase rouge. Il y a maintenant 32 litres dans le vase rouge. On a un flacon plein d'eau qui contient autant que le bidon. On verse le flacon dans le vase bleu. Il y a maintenant 3 litres de moins dans le vase bleu que dans le vase rouge* ***Combien de litres y avait-il avant dans le vase bleu ?***	

Schéma 2. Version de transvasements présentation avec rappel avec question sur le tout et la partie.

- ***Les problèmes des apprentissages***

Nous avions 4 groupes d'apprentissage à l'oral en situation de classe et 4 groupes faisant un apprentissage à l'écrit.

Un groupe qui apprenait la procédure par différence-comparaison à l'oral dans un ordre allant de la variable qui favorise le plus cette procédure (âges), à celle qui la favorise le moins (effectifs) et sur laquelle nous voulions qu'elle soit transférée au post test. Entre les deux types de problèmes nous avons présenté les problèmes de transvasement dans la version qui favorise la procédure différence-comparaison pour assurer le transfert de cette procédure. Le sens de l'apprentissage de ce groupe était : âges-transvasements-effectifs. Chaque élève avait sur une feuille des tableaux vides dans lesquels il fallait reporter les éléments sur lesquels portait le raisonnement par différence-comparaison. Le tableau du problème en cours de résolution était présenté au tableau noir. Les élèves travaillaient également avec des tableaux sur feuilles et reproduits par l'expérimentateur au tableau noir.

L'ordre d'apprentissage âges-transvasements-effectifs a été présenté aussi à l'écrit à un groupe avec deux modèles de résolution (question sur la partie et question sur le tout) présentant le raisonnement par différence-comparaison. Les élèves devaient suivre ces modèles pour résoudre les problèmes suivants. Un groupe de participants a effectué un apprentissage dans le sens, âges-effectifs-transvasement, et ce, dans le but de vérifier si le contexte de transvasement peut favoriser ou non le transfert des procédures.

Un groupe de participants apprenait la procédure par différence-complément à l'oral. L'ordre de présentation suivait la logique de partir du problème qui favorise le plus cette procédure à celle qui la favorise le moins afin qu'elle y soit transférée au post test. La présentation du problème de transvasement qui favorisait le plus cette procédure était placée entre ces deux variables pour effectuer le transfert de la procédure. L'apprentissage des problèmes s'est effectué dans le sens : effectifs-transvasements-âges.

Cet ordre d'apprentissage, effectifs-transvasement-âges s'est également effectué à l'écrit pour un groupe avec deux modèles de résolution (question sur la partie et question sur le tout) présentant le raisonnement par différence-complément. Les élèves devaient suivre ces modèles afin de résoudre les problèmes suivants. Un groupe a appris à résoudre les problèmes avec la procédure par différence-complément dans un ordre où les transvasements sont placés en situation intermédiaire (effectifs-transvasements-âges) et un autre groupe dans un ordre où les problèmes de transvasements sont à la fin (effectifs-âges-transvasement). Le matériel utilisé était le même que ceux du groupe dont l'ordre d'apprentissage était effectifs-transvasements-âges.

- ***Les problèmes du groupe contrôle***

Les carnets des problèmes du groupe contrôle étaient composés de la page de garde comportant les informations sur l'identité de l'élève son âge, école et classe. Dans les pages suivantes il y avait les 10 problèmes présentés dans les groupes d'apprentissages et deux problèmes distracteurs placés à la 4ème et à la 7ème place. Mais ces problèmes étaient présentés sans aucun modèle de résolution. Sur chaque feuille il y avait le problème à résoudre, une partie du brouillon pour faire tous les calculs et une partie dans laquelle l'élève devait reporter les réponses à la question du problème. L'ordre de présentation de ces problèmes était la même que celui de l'expérience 1.

V.3.2. La passation

- **La phase d'entraînement**

Cette séance concernait la résolution de deux problèmes partie/tout pour s'initier aux problèmes de raisonnement. Elle s'est effectuée pendant une séance d'une heure en présence de tous les élèves, dans les classes expérimentales et celle du groupe contrôle. Nous avons sollicité la participation des élèves afin de les inciter à adopter le raisonnement du schéma de comparaison et de la relation partie-tout.

- **Le pré test**

Le pré-test s'est déroulé pendant une séance de deux heures. Chaque élève avait un carnet de 12 problèmes soit deux problèmes effectifs, deux problèmes d'âges, deux problèmes de transvasements, deux problèmes poids, deux problèmes hauteurs et deux problèmes distracteurs. Ceux-ci ne faisaient pas partie de l'expérience, ils ont été introduits pour que les élèves ne se rendent pas compte de la ressemblance entre les problèmes. Seuls 10 problèmes ont été pris en compte pour les analyses. A la première page de chaque carnet les informations relatives à l'identité de l'élèves ; son prénom, sa classe et sa date de naissance. Il y avait un problème à résoudre sur chaque page, avec une partie brouillon où l'élève avait la possibilité d'écrire tous ses calculs, une partie pour rédiger les réponses et les calculs correspondant à la question du problème, et une partie où il devait écrire une solution alternative dans le cas où il avait trouvé une autre manière de parvenir à la solution du problème. Avant la distribution des carnets nous avons recommandé aux élèves de bien lire les problèmes, et de veiller à bien noter tous les calculs même les plus simples. Après s'être assuré que tous les élèves avaient compris la consigne, nous leurs avons distribué les carnets et aucune question n'était plus permise.

V.3.3. Les séances d'apprentissage des procédures de résolution

L'apprentissage du transfert de la procédure différence-comparaison comme celle de la différence-complément se fait par proximité, c'est-à-dire, les élèves commencent par résoudre un problème dont le contexte rend saillant l'utilisation de la procédure à apprendre avec une procédure de résolution à suivre, pour résoudre par cette stratégie les problèmes qui suivent. Les élèves ont deux séries de problèmes, une série commençant par la question sur le tout et une autre commençant par une question sur la partie. Les deux premiers problèmes de chaque série sont des exemples avec les procédures de résolution. Deux groupes avec les mêmes apprentissages ont présenté les problèmes de transvasements en situation finale, c'est-dire, après les problèmes d'âges (pour l'apprentissage différence-comparaison) et après les problèmes d'effectifs (pour l'apprentissage du calcul différence-comparaison). Dans la condition de l'apprentissage écrit, les énoncés sont accompagnés d'un texte à trou pour aider l'élève à conduire son raisonnement. Nous avons noté les informations que l'élève doit remplir en gras (Voir annexe A). L'ordre de présentation des problèmes est résumé dans le tableau 20.

Apprentissages	Ordre des problèmes	
	Ordre 1	Ordre 2
Différence-comparaison	- Ages - Transvasements - Effectifs	- Ages - effectifs - Transvasements
Différence-complément	- Effectifs - Transvasements - Ages	- Effectifs - Ages - Transvasements

Tableau 20. Les deux ordres de présentation de problèmes dans les groupes d'apprentissage oral ou écrit.

V.3.3.1. Ordre de présentation des problèmes dans le groupe apprentissage différence-comparaison

Dans le groupe de l'apprentissage de la procédure différence-comparaison les élèves résolvent 10 problèmes présentés en deux séries. Si un élève commence par résoudre une série de 5 problèmes avec une question sur le tout. Il aura :

(i) un problème d'âge dont la question porte sur le tout avec une solution de la procédure de calcul par différence-comparaison dont l'énoncé et la procédure sont : *Lucas a suivi les cours de dessin à l'école d'art pendant 16 ans. Eric a commencé au même âge que Lucas et a suivi les cours 2 ans de moins. Lucas s'est arrêté à 33 ans.* ***A quel âge Eric s'est-il arrêté*** ? La procédure et la solution du problème sont présentées ensuite ***: Eric*** *a commencé au même âge que* **Lucas Eric** *a suivi les cours* **2** *ans de moins que* **Lucas.** *Donc* **Eric** *s'est arrêté* **2** *ans plus tôt que* **Lucas.** Grâce à ce raisonnement, la solution est : ***33-2 = 31 ans.*** *La réponse est : Eric a arrêté les cours de dessin à l'âge de 31 ans.*

(ii) un deuxième problème d'âge question sur le tout est présenté cette fois sans solution et l'élève a la consigne de résoudre de la même façon que l'exemple en écrivant les calculs et la réponse dans les espaces prévus. L'énoncé est le suivant : *Nicolas a suivi les cours de musique au conservatoire pendant 14 ans. Emile a commencé au même âge que Nicolas et a suivi les cours 3 ans de moins. Nicolas s'est arrêté à 32 ans****. A quel âge Emile s'est-il arrêté ?***

(iii) un troisième problème sur les transvasements version présentation horizontale est présenté. L'énoncé porte sur la donnée de la transformation et est accompagné d'une illustration. (**Schémas 3** ci-dessous) : *On a versé la même quantité d'eau dans les vases rouge et bleu. On a un bidon plein d'eau qui contient 6 litres. On a un flacon plein d'eau qui contient 2 litres de moins que le bidon. On verse le bidon dans le vase rouge : il y a maintenant 14 litres dans le vase rouge. On verse le flacon dans le vase bleu.* ***Combien de litres y a-t-il dans le vase bleu ?***

(iv) deux problèmes sur les effectifs sont présentés avec la même consigne que les problèmes précédents. Le quatrième problème est : *Dans la classe de CM2 il y a 16 élèves. Dans la classe de CE1 il y a 2 élèves de moins que dans la classe de CM2. Quand les CM2 vont à la salle de la cantine avec les CM1, ils sont 33. Si à la place des CM2, les CE1 vont à la salle d'étude avec les CM1, c****ombien seront-ils dans la salle ?*** Le cinquième problème : *Il y a 17 élèves dans la classe de CE2. Dans la classe de CM1 il y a 3 élèves de moins que dans* *la classe de CE2. Quand les CE2 vont à la salle de la cantine avec les CP, ils sont 35. Si les CM1 vont à la salle d'étude avec les CP,* ***combien seront-ils dans la salle ?***

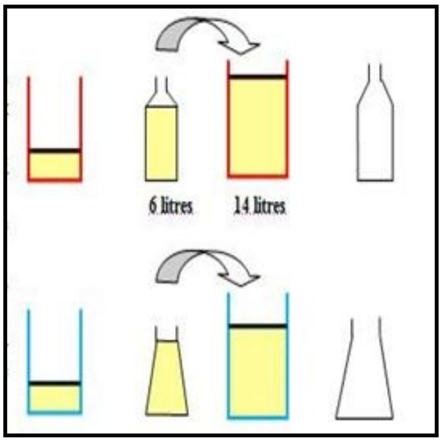


Schéma 3. Présentation de la version de transvasements ; information donnée sur la transformation utilisée dans l'apprentissage de la stratégie différence-comparaison.

La deuxième série de 5 problèmes avec une question sur la partie suit le même principe que la première série.

(i) un sixième problème d'âge dont la question porte sur la partie avec une procédure de solution de la procédure de calcul par différence-comparaison dont l'énoncé et la procédure sont : *Aline a suivi les cours de danse pendant 18 ans et s'est arrêtée à 35 ans. Léa a commencé au même âge qu'Aline et s'est arrêtée 3 ans avant.* ***Combien de temps Léa a-t-elle suivi les cours ?*** La procédure et la solution du problème sont présentées ensuite : ***Léa*** *a commencé au même âge qu'**Aline. Léa** s'est arrêtée 3 ans plus tôt qu'* ***Aline.*** *Donc* ***Léa*** *a suivi les cours 3 ans de moins qu'**Aline.*** Grâce à ce raisonnement, la solution est ***: 18 - 3=15.*** *La réponse est : Léa a suivi les cours pendant 15 ans.*

(ii) un septième problème d'âge question sur la partie est présenté cette fois sans solution et l'élève a la consigne de résoudre de la même façon que l'exemple en écrivant les calculs et la réponse dans les espaces prévus. Ce problème est : *Paul a suivi les cours de musique au conservatoire pendant 15 ans et s'est arrêté à 32 ans. Pierre a commencé au même âge que Paul et s'est arrêté 3 ans avant.* ***Combien de temps Pierre a-t-il suivi les cours ?***

(iii) un huitième problème sur les transvasements version présentation horizontale est présenté. L'énoncé porte sur la donnée de la transformation et est accompagné d'une illustration. (**Schémas 3** ci-dessus) : *On a versé la même quantité d'eau dans les vases rouge et bleu. On a un bidon plein d'eau qui contient 6 litres. On verse le bidon dans le vase rouge. Il y a maintenant 14 litres dans le vase rouge. On a un flacon plein d'eau. On le verse dans le vase bleu. Il y a maintenant 3 litres de moins dans le vase bleu que dans le vase rouge.* ***Combien contient le flacon ?***

(iv) deux problèmes sur les effectifs sont présentés avec la même consigne. Le neuvième problème est *: Dans la classe de CP il y a 18 élèves. Quand les CP vont à la salle de la cantine avec les CE2 ils sont 35. Quand les CM1 sont à la salle d'étude avec les CE2 à la place des CP, ils sont 3 de moins dans la salle.* ***Combien sont-ils dans la classe de CM1*** ? Le dixième : *Dans la classe de CP il y a 19 élèves. Quand les CP vont à la salle de la cantine avec les CM2 ils sont 33 dans la salle. Quand les CM2 sont à la salle d'étude avec les CE2 ils sont 2 de moins.* ***Combien sont-ils dans la classe de CE2 ?***

V.3.3.2. Ordre de présentation des problèmes dans le groupe apprentissage différence-complément

Le groupe de l'apprentissage de la procédure différence-complément suit le même principe de présentation que le groupe précédent, seul l'ordre des problèmes à présenter change. Les élèves résolvent également 10 problèmes présentés en deux séries. Si un élève commence par résoudre une série de 5 problèmes avec une question sur le tout. Il aura :

(i) un problème d'effectif avec question sur le tout avec une procédure de solution du calcul par différence-complément dont l'énoncé et la procédure sont : *Il y a 19 élèves dans la classe de CE2. Quand les CE2 sont à la salle de la cantine avec les CP, ils sont 33. Dans la classe de CM1 il y a 2 élèves de moins que dans la classe de CE2. Les CM1 vont à la salle d'étude avec les CP.* **Combien sont-ils dans la salle d'étude ?** La procédure et la solution du problème sont présentées ensuite ***:*** *Les élèves à la salle de la cantine sont les* ***CE2*** *et les* ***CP****. Ensemble ils sont* ***33****. Donc les* ***CP*** *sont* ***33-19 = 14.*** *Les* ***CM1*** *sont* ***2*** *de moins que les* ***CE2****. Donc les* ***CM1*** *sont* ***19-2 = 17****. Les élèves à la salle d'étude sont les* ***CM1*** *et les* ***CP****. Donc à la salle d'étude ils sont* ***17 + 14=31.*** Grâce à ce raisonnement, la solution est ***:*** *Les* ***CP*** *sont :* ***33-19=14*** *élèves. Les CM1 sont :* ***19-2=17****. Dans la salle ils sont :* ***17+14=31.*** *Les* ***CP*** *sont :* ***33-***

19=14** élèves. Les CM1 sont : **19-2=17**. Dans la salle ils sont : **17+14=31. La réponse est : A la salle d'étude les CM1 et CP sont 31 élèves.

(ii) un deuxième problème d'effectif question sur le tout est présenté sans solution, l'élève a la consigne de résoudre de la même façon que l'exemple en écrivant les calculs et la réponse dans les cadres prévus. L'énoncé est : *Il y a 18 élèves dans la classe de CM2. Quand les CM2 sont à la salle de la cantine avec les CM1, ils sont 35. Dans la classe de CE1 il y a 3 élèves de moins que dans la classe de CM2. Les CE1 vont à la salle d'étude avec les CM1.* **Combien sont-ils dans la salle d'étude ?**

(iii) un troisième problème sur les transvasements version présentation verticale sans rappel des deux premiers états est présenté. L'énoncé porte sur la donnée de l'état initial et est accompagné d'une illustration. (Schémas 4 ci-dessous) : *On a versé 19 litres d'eau dans le vase rouge. On a un bidon plein d'eau. On verse le bidon dans le vase rouge. Il y a maintenant 33 litres dans le vase rouge. Dans le vase bleu il y a 2 litres de moins qu'il y avait au début dans le vase rouge. On a un flacon plein d'eau. On le verse dans le vase bleu qui contient autant que le bidon.* ***Combien de litres y a-t-il dans le vase bleu ?***

(iv) deux problèmes sur les âges sont présentés avec la même consigne que les problèmes précédents. Le quatrième problème est : *Eva a suivi les cours de théâtre pendant 15 ans et s'est arrêtée à 32 ans. Marina a commencé au même âge qu'Eva et a suivi les cours 3 ans de moins.* ***A quel âge Marina s'est-elle arrêtée ?*** Le cinquième problème : *Tom a suivi les cours de théâtre pendant 11 ans et s'est arrêté à 33 ans. Luc a commencé au même âge que Tom et a suivi les cours 2 ans de moins.* ***A quel âge Luc s'est-il arrêté ?***

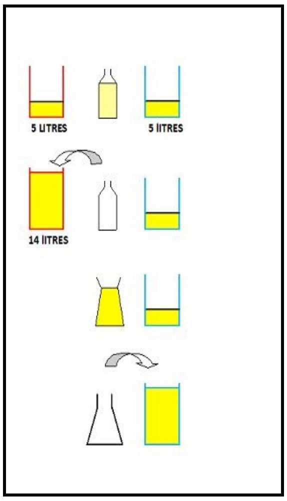


Schéma 4. Présentation de la version de transvasement; information donnée sur l'état initial dans l'apprentissage de la stratégie différence-complément.

La deuxième série de 5 problèmes avec une question sur la partie suit le même principe que la première série.

(i) un sixième problème d'effectif dont la question porte sur la partie avec une procédure de solution de la procédure de calcul par différence-complément dont l'énoncé et la procédure de résolution sont : *Dans la classe de CP il y a 14 élèves. Quand les CP vont à la salle de la cantine avec les CM1 ils sont 32. Quand les CM1 sont à la salle d'étude avec les CM2 ils sont 2 de moins.* ***Combien sont-ils dans la classe de CM2 ?*** La solution est présentée ***:*** *Les* ***CP*** *et les* ***CM1*** *sont ensemble* ***32*** *à la salle d'étude. Les* ***CP*** *sont* ***14****. Donc les CM1 sont* ***32-14 = 18****. A la salle de la cantine les* ***CM1*** *et les* ***CM2*** *sont* ***2*** *de moins que les élèves à la salle d'étude. Donc les* ***CM1*** *et les* ***CM2*** *ensemble sont* ***32-2=30****. Comme les* ***CM1*** *sont* ***18*** *alors les* ***CM2*** *sont :* ***30-18 = 12.*** Grâce à ce raisonnement, la solution est ***:*** *Les* ***CM1*** *sont :* ***32-14 = 18*** *élèves. Les* ***CM1*** *et les* ***CM2*** *sont :* ***32-2 = 30*** *élèves. Les* ***CM2*** *sont :* ***30-18=12*** *élèves****.*** *La réponse est : Ils sont 12 élèves dans la classe de CM2.*

(ii) un septième problème d'âge question sur la partie est présenté, cette fois sans solution et l'élève a la consigne de résoudre de la même façon que l'exemple en écrivant les calculs et la réponse dans les espaces prévus. Ce problème est : *Dans la classe de CM2 il y a 17 élèves. Quand les CM2 vont à la salle de la cantine avec les CM1 ils sont 35. Quand les CM1 sont à la salle d'étude avec les CE1 ils sont 3 de moins.* ***Combien sont-ils dans la classe de CE1 ?***

(iii) un huitième problème sur les transvasements version présentation verticale sans rappel des deux premiers états est présenté. L'énoncé porte sur la donnée de l'état initial et est accompagné d'une illustration, (voir **schémas 4** ci-dessus). *On a versé de l'eau dans les vases rouge et bleu. Il y a 14 litres dans le vase rouge. On a un bidon plein d'eau. On verse le bidon dans le vase rouge. Il y a maintenant 32 litres dans le vase rouge. On a un flacon plein d'eau qui contient autant que le bidon. On verse le flacon dans le vase bleu. Il y a maintenant 2 litres de moins dans le vase bleu que dans le vase rouge.* ***Combien de litres y avait-il avant dans le vase bleu ?***

(iv) deux problèmes sur les âges sont présentés avec la même consigne. Le neuvième problème est : *Aline a commencé les cours de théâtre à 16 ans et s'est arrêtée à 34 ans. Léa a suivi les cours de théâtre pendant autant de temps qu'Aline et s'est arrêtée 2 ans plus tôt.* ***A quel âge Léa a-t-elle commencé les cours de théâtre ?*** Le dixième : *Luc a commencé les cours de théâtre à 19 ans et s'est arrêté à 33 ans. Jean a suivi les cours de théâtre pendant* *autant de temps que Luc et s'est arrêté 2 ans plus tôt.* ***A quel âge Jean a-t-il commencé les cours de théâtre ?***

Ordre du transfert de la stratégie différence-comparaison dans le sens âges vers effectifs	
1. Un problème d'âges déjà résolu la question porte sur le tout ; l'information est sur la donnée transformation ; la quantité comparée est proche de la quantité de référence.	6. Un problème d'âges déjà résolu la question porte sur la partie ; l'information est sur la donnée transformation ; la quantité comparée est proche de la quantité de référence.
2. Un problème d'âges à résoudre la question porte sur le tout l'information est sur la donnée transformation ; la quantité comparée est proche de quantité de référence ; les nombres du problème sont différents du problème 1 ; la consigne est : « résous de la même façon ».	7. Un problème d'âges à résoudre la question porte sur la partie ; l'information est la donnée sur la transformation ; la quantité comparée est proche de la quantité de référence ; les nombres sont différents du problème 6 ; la consigne est : « résous de la même façon ».
3. Un problème de transvasements à résoudre la question porte sur le tout ; la version de transvasements est la présentation horizontale ; l' information est donnée sur la transformation ; la quantité comparée est proche de la quantité de référence ; les nombres sont les mêmes que ceux du problème 1 ; la consigne est : « résous de la même façon ».	8. Un problème de transvasements à résoudre la question porte sur la partie ; la version de transvasements est la présentation horizontale ; l'information est la donnée sur la transformation ; la quantité comparée est proche de quantité de référence ; les nombres sont les mêmes que ceux du problème 6 ; consigne : « résous de la même façon ».
4. Un problème d'effectifs à résoudre la question porte sur le tout ; la quantité comparée est proche de la quantité de référence dans l'énoncé on écrit P3 à la place de P1 ; les nombres sont les mêmes que ceux des problèmes 1 et 3 ; la consigne est :	9. Un problème d'effectifs à résoudre la question porte sur la partie ; la quantité comparée est proche de quantité de référence ; dans l'énoncé on écrit : P3 à la place de P1 ; les nombres sont les mêmes que ceux des problèmes

« résous de la même façon ».	6 et 8 ; la consigne est : « résous de la même façon ».
5. Un problème d'effectifs à résoudre la question porte sur le tout ; la quantité comparée est proche de quantité de référence dans l'énoncé, on supprime P3 à la place de P1 ; les nombres sont différents de ceux des problèmes 1 et 3 ; la consigne est : « résous de la même façon ».	10. Un problème d'effectifs à résoudre la question porte sur la partie ; la quantité comparée est proche de la quantité de référence ; dans l'énoncé, on supprime : P3 à la place de P1; les nombres sont différents de ceux des problèmes 6 et 8 ; la consigne est : « résous de la même façon ».

Tableau 21. Ordre de présentation des problèmes dans l'apprentissage de la stratégie par différence-comparaison.

Ordre du transfert de la stratégie différence-complément dans le sens âges vers effectifs	
1. Un problème d'effectifs déjà résolu la question porte sur la partie ; la quantité comparée est éloignée de la quantité de référence.	6. Un problème d'effectifs déjà résolu la question porte sur le tout ; la quantité comparée est éloignée de quantité de référence.
2. Un problème d'effectifs à résoudre la question porte sur la partie ; la quantité comparée est éloignée de quantité de référence ; les nombres sont différents du problème 1 ; la consigne est : « résous de la même façon ».	7. Un problème d'effectifs à résoudre la question porte sur le tout ; la quantité comparée est éloignée de quantité de référence ; les nombres sont différents de ceux des problèmes 1 ; la consigne est : « résous de la même façon ».
3. Un problème de transvasements à résoudre la question porte sur la partie ; la version de jarres: présentation verticale sans rappel ; l'information est sur la donnée état initial ; la quantité comparée est éloignée de la quantité de référence ; les nombres sont les mêmes que ceux du problème 1 ; la consigne est : « résous de la même façon ».	8. Un problème de transvasements à résoudre la question porte sur le tout ; la version de transvasements est la présentation verticale sans rappel ; l'information est sur la donnée de l état initial ; la quantité comparée est éloignée de la quantité de référence ; les nombres sont les mêmes que ceux du problème 6 ; la consigne est : « résous de la même façon ».
4. Un problème d'âges à résoudre la question porte sur la partie ; l'information est sur la	9. Un problème d'âges à résoudre la question porte sur le tout ; l'information est sur la

donnée état initial ; la quantité comparée est éloignée de la quantité de référence ; les nombres sont les mêmes que ceux des problèmes 1 et 3 ; la consigne est : « résous de la même façon ».	donnée état initial ; la quantité comparée est éloignée de la quantité de référence ; les nombres sont les mêmes que ceux des problèmes 6 et 8 ; la consigne est : « résous de la même façon ».
5. Un problème d'âges à résoudre la question porte sur la partie ; l'information est sur la donnée transformation ; la quantité comparée est éloignée de quantité de référence ; les nombres sont différents des problèmes 1 et 3 ; la consigne est : « résous de la même façon ».	10. Un problème d'âges à résoudre la question porte sur le tout ; l'information est sur la donnée transformation; la quantité comparée est éloignée de la quantité de référence ; les nombres sont différents de ceux des problèmes 6 et 8 ; la consigne est : « résous de la même façon ».

Tableau 22. Ordre de présentation des problèmes dans l'apprentissage de la stratégie par différence-complément.

V.4. Apprentissage par instruction orale

V.4.1. Apprentissage de la procédure différence-comparaison

Au cours de ces séances nous avons procédé à l'apprentissage par transfert analogique. Pour cela, nous avons présenté les éléments homologues des données des problèmes par l'appariement des structures.

Séance 1 durée 1 heure : le problème âge question sur le tout

L'expérimentateur a distribué le premier problème aux élèves ainsi qu'une feuille avec un tableau vide à remplir, il a dessiné le même tableau vide au tableau. Après deux séances de lecture par un élève et l'expérimentateur. Celui-ci a expliqué aux élèves que le but de l'exercice est de résoudre le problème en passant par un raisonnement qui permet de remplir le tableau. Pour cela, il fallait retrouver dans l'énoncé du problème les éléments qui permettent de réaliser ce raisonnement et de trouver la solution. Le raisonnement permettrait de trouver la solution en effectuant un seul calcul. Pour le raisonnement par différence-comparaison, le raisonnement de base était « si dans un problème deux éléments ont une partie commune les parties se calculent comme les touts ». Nous avons suscité ce raisonnement en demandant aux élèves de remplir le tableau en trouvant les parties homologues, et nous leurs montrons la relation avec les problèmes suivants par appariement des structures. Pour tous les problèmes, nous demandions aux élèves de remplir le tableau en fonction des informations des personnages et des éléments concernés dans le problème, en relevant ; « ce qu'on sait / ne sait pas » ; « ce qu'il y a de pareil / qui n'est pas pareil », « qui a fini plus tôt/plus tard » ; « qui a le plus plus/le moins » et de résoudre les problèmes suivant en retrouvant les mêmes éléments. Par exemple, pour remplir le tableau 1 nous expliquons aux élèves que nous allons répondre à la question du problème en comparant les parties qui se ressemblent et celles qui ne se ressemblent pas, et faire la différence sur ce qui est pareil dans les problèmes et ce qui fait que les problèmes soient différents.

Pour le problème sur le devoir nous proposions aux élèves de mettre à gauche les informations sur les 4ème année parce qu'on a plus d'information sur cette classe et mettre à droite du tableau les informations sur les 5ème année parce qu'on ne possède pas beaucoup d'informations sur cette classe, et dans les cases du milieu nous mettons les relations entre les informations. On relève la durée du devoir : on la connaît pour les 4ème année et pour les 5ème année elle est de 2 heures de moins ; l'heure du début du devoir n'est pas donnée mais on sait que c'est la même pour les deux classes, l'heure de la fin de cours est donnée pour les 4ème année et on doit trouver à quelle heure les 5ème année ont terminé leur devoir. Après avoir rempli ce tableau nous demandons aux élèves s'ils ont la réponse et par quel raisonnement ils sont passés pour la trouver. Nous formulions la réponse par le raisonnement suivant : si les 5ème année ont commencé à la même heure, s'ils ont fait le devoir 2 heure de moins, alors ils terminé 2 heures plus tôt ; la réponse est : 13-2=11 heures ; les 5ème année ont terminé leur devoir à 11 h. Les quatre problèmes suivants sont résolus selon le même principe.

LES 4ème ANNEE		LES 5ème ANNEE
Durée du devoir : 6 H	2 heures de moins	?
heure du début du devoir :	même heure	?
heure de fin du devoir : 13 H	2 heures PLUS TÔT	Question 13-2 = 11 H

Séance 2 durée 1 heure : le problème âge question sur le tout

Nous commencions la deuxième séance en présentant le premier problème ainsi que le tableau rempli de la première séance nous avions demandé aux élèves de se rappeler de la manière dont nous avions rempli le tableau et quel raisonnement nous avions tiré pour trouver la solution. Nous faisions un résumé du raisonnement et la solution du problème. Ensuite nous commencions la résolution du deuxième problème, nous reprenions les explications de façon analogue à la première séance et demandions de remplir le tableau en faisant comme le premier problème c'est–à-dire de mettre à gauche du tableau les éléments du problème dont on a le plus d'informations et à droite ceux dont on a le moins d'informations et au milieu les relations qui existent entre les deux parties. Le raisonnement final du deuxième problème est : Si Emile a commencé au même âge, s'il a suivi les cours 3 ans de moins, alors il s'est arrêté 3 ans plus tôt ; la solution est 32-3 = 29 ans, la réponse est Emile a fini les cours à 29 ans.

NICOLAS		EMILE
Durée des cours : 14 ans	3 ans de moins	?
Début des cours : ?	même âge	?
Âge de fin des cours : 32 ans	3 ANS PLUS TÔT	Question 32-3 = 29 ans

Séance 3 durée environ 1 heure 30 mn : version de jarre présentation horizontale question sur le tout

Comme la deuxième séance, la troisième séance commençait par un rappel de ce qui a été vu à la séance précédente, comment les tableaux ont été remplis, à partir de quelles questions et les raisonnements énoncés pour répondre à la question finale. Nous présentions l'énoncé et le tableau rempli du deuxième problème. Nous présentions un tableau vide et l'énoncé du problème de transvasement. La résolution était analogue au problème suivant, et nous demandions aux élèves de remplir le tableau de la même façon que les précédents. Comme cela n'a pas semblé évident, nous avions préparé une maquette représentant l'état d'un vase rouge au début et à la fin, l'état du vase bleu au début et à la fin une carafe et un bidon. Nous avions également préparé un carton sur lequel nous avions inscrit les prénoms des personnages du problème d'âges. Nous représentions au tableau les éléments de la maquette du problème de jarres. Et nous demandions aux élèves de se rappeler de la manière dont nous avions rempli le tableau du problème précédent et de mettre en-dessous des éléments du problème de transvasements les éléments qui ressemblent aux problèmes des âges. Ensuite, nous avions demandé aux élèves de remplir le tableau en mettant à gauche le vase dont on sait le plus de choses, à droite le moins et au milieu les relations, comme dans le problème précédents, en faisant attention à savoir ce qu'il y a de commun et de différent dans les deux problèmes. Les élèves répondaient à ces questions en se référant au tableau préalablement rempli sur l'énoncé sur les âges et aux schémas des parties analogues représentés au tableau. Ainsi, pour le problème transvasement on a des vases au lieu de personnes, on a des litres pour les vases et des ans pour les personnes, mais les litres sont comme les ans : ce sont des quantités. Donc pour les deux problèmes on a une quantité au départ qui est la même pour les deux, on ajoute une quantité et on a une quantité plus grande à la fin. Pour ce problème, nous faisions le raisonnement en montrant la colonne du milieu : au début il y a la même quantité d'eau dans les deux vases, on ajoute de l'eau dans les deux vases mais 2 litres de moins dans le bleu, donc après il y a 2 litres de moins dans le vase bleu que dans le rouge. La solution est 33-2 = 31 : il y a 31 litres dans le vase bleu.

Problème à résoudre :

VASE ROUGE		VASE BLEU
une quantité d'eau au début	la même quantité	une quantité d'eau au début
on verse un bidon de 16 litres	2litres de moins	on verse le flacon de 2 litres de moins
après il y a 33 litres	2 LITRES DE MOINS	Question 33-2 = 31 litres

Séance 4 durée environ 1 heure 30 mn : résolution du problème effectif question sur le tout.

Au cours de cette séance nous reprenions le dernier problème de transvasement son schéma et son tableau pour résoudre le premier problème d'effectifs. Après la lecture du problème nous demandions aux élèves de trouver les parties qui ressemblent aux problèmes de transvasements et de prendre les inscriptions cartonnées du problème d'effectifs et de les placer en dessous des éléments du schéma des problèmes de transvasements. Pour cela nous avions suscité la réflexion sur les éléments communs et différents entre les deux problèmes, à savoir ce qu'on va mettre en dessous du vase rouge et bleu, du bidon et de la carafe. Ainsi, dans la classe de CM2 il y a 16 élèves et dans la classe de CE1 il y a 2 élèves de moins. La classe de CM2 c'est comme le bidon et la classe de CE1 c'est comme le flacon : il y a 2 de moins en quantité. On les met en dessous. Quand les CM2 vont à la cantine avec les CM1 ils sont 33 : c'est comme le bidon qui a été ajouté à l'eau qui était dans le vase rouge. Les élèves de CM1 : c'est comme l'eau qui était avant dans le vase rouge. Les élèves de CM2 : c'est comme l'eau qui était dans le bidon. Les élèves à la cantine : c'est comme l'eau qui est dans le bidon à la fin. Après avoir mis les éléments du problème des effectifs en dessous de ceux du problème de transvasement, nous demandions aux élèves de remplir le tableau en prenant comme modèle le tableau précédemment rempli sur les transvasements et de faire le même raisonnement. Pour remplir le tableau on va écrire à la dernière ligne CM2+CM1 : 33 élèves, à la première CANTINE et à la seconde CM1. Si à la place des CM2 les CE1 vont à l'étude avec les CM1, combien seront-ils dans la salle ? L'étude c'est comme le vase bleu, on l'écrit à droite et les CE1+CM1 c'est comme ce qu'il y avait dans le vase bleu après, on l'écrit à la dernière ligne à droite. Il faut compléter le tableau. Qu'est-ce qu'il faut mettre à la deuxième ligne en-dessous d'ETUDE : les CM1 auxquels on rajoute les CE1 pour aller à l'étude. C'est comme à la cantine : on a les CM1 et on rajoute les CM2 pour aller à la cantine. A la colonne du milieu on écrit que c'est le même nombre d'élèves, puisque dans les deux cas il y a les CM1. Pour les vases on a fait le raisonnement : au début il y a la même quantité d'eau dans les deux vases, on ajoute de l'eau dans les deux vases mais 2 litres de moins dans le bleu, donc après il y a 2 litres de moins dans le vase bleu que dans le rouge : on écrit 2 litres de moins. La solution est : 33-2=31 : il y a 31 litres dans le vase bleu.

On fait donc le même raisonnement pour le problème d'effectifs : comme les CM1 vont à la fois à la cantine et à l'étude, comme les CE1 qui vont avec eux à l'étude sont 2 de moins que les CM2 qui vont avec eux à la cantine, ils seront 2 de moins à l'étude qu'à la cantine. Donc 33-2=31. La réponse est : ils seront 31 élèves à l'étude.

CANTINE		ETUDE
CM1	le même nombre	CM1
CM2 : 16 élèves	2 de moins	CE1 : 2 élèves de moins
CM2+CM1 : 33 élèves	2 DE MOINS	Question CE1+CM1= 33-2 = 31

Séance 5 durée environ 1 heure 30 mn : résolution du problème effectif question sur le tout.

Le cinquième problème d'effectifs a été résolu suivant le même principe que le problème précédent.

- **Les séances d'apprentissage de la différence-comparaison des problèmes dont les questions portent sur la partie**

Nous avons réalisé 5 séances d'apprentissage des cinq problèmes, d'âges, de transvasements et des effectifs sur les questions portant sur la partie selon les mêmes principes, en remplissant les tableaux, en trouvant les parties homologues suivant les schémas des problèmes et en tirant le raisonnement permettant d'arriver à la solution du problème.

V.4.2. Apprentissage de la procédure différence-complément

Au cours de ces séances nous avons procédé à l'apprentissage par différence-complément qui met en relief le schéma partie-tout du problème dans lequel résoudre la question sur le tout revient à effectuer une addition entre les parties ; et l'utilisation d'une soustraction convient pour trouver le complément de la partie manquante pour un tout. Nous avions commencé par le problème d'effectif dont la variable ensembliste favorise la représentation du schéma partie-tout.

Séance 1 durée 1 heure : le problème classe question sur le tout

Nous avions distribué l'énoncé du problème d'effectifs, et un schéma boîte (voir la figure 12) dans lequel il fallait noter les différents éléments de l'énoncé du problème. Après avoir lu le problème, nous avons rempli les schémas-boîte du premier problème en suscitant la participation des élèves ; ce premier problème servant de modèle de résolution aux problèmes suivants. Ce problème a été résolu en remplissant les boîtes et en suivant le raisonnement suivant : les élèves à la cantine sont CE2 et les CP, ensemble ils sont 33. Donc les CP sont 33-19=14 élèves. Ensuite il fallait remplir la deuxième partie du schéma-boîte ; les CM1 sont 2 de moins que les CE2. Donc les CM1 sont : 19-2 = 17 élèves dans la classe de CM. Enfin, il fallait remplir le dernier schéma-boîte et répondre à la question finale ; les élèves à la salle d'étude sont les CM et les CP. Donc à la salle d'étude ils sont 17+14 = 31 élèves.

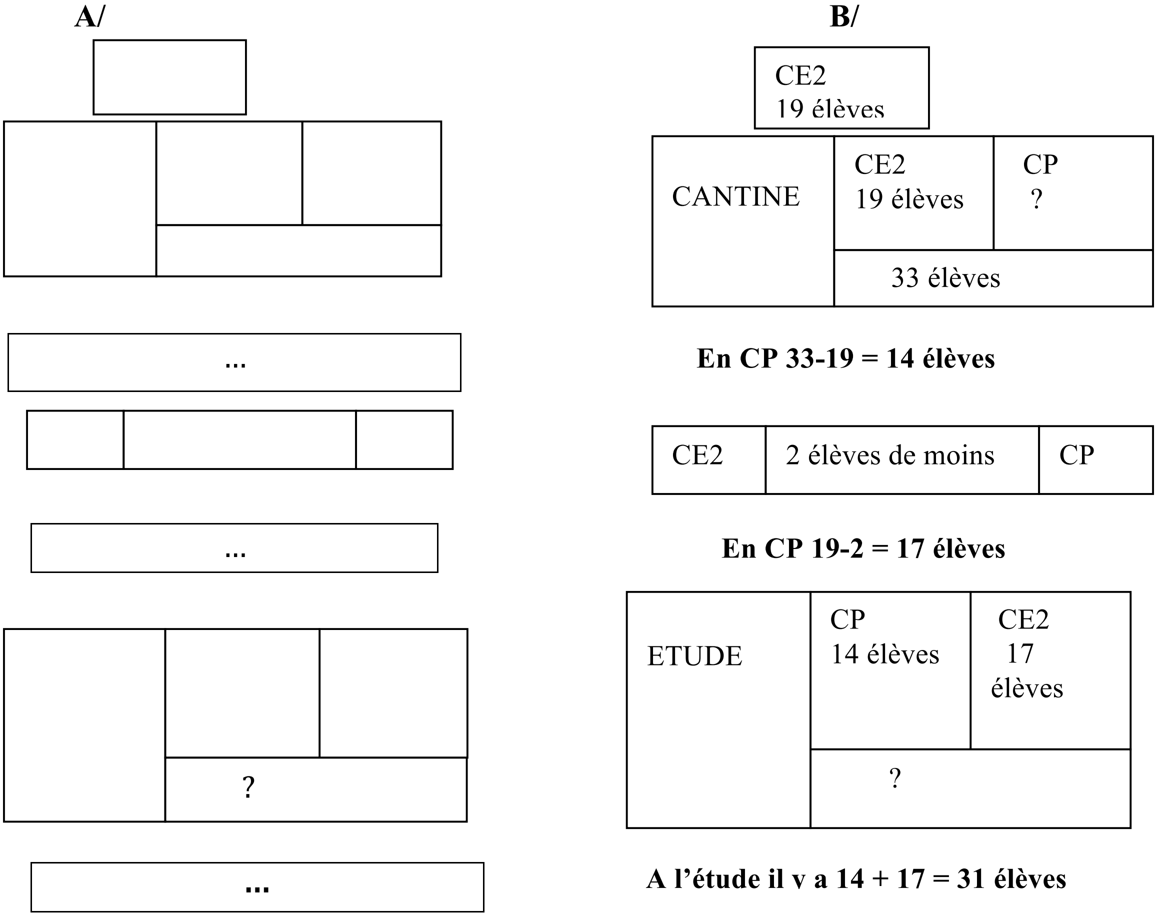


Schéma 5. Schémas-boîtes de résolution des problèmes différence-complément A (boîtes vides) ; B (boîtes remplies effectifs).

Séance 2 durée 1 heure : le problème effectif question sur le tout

Après avoir présenté les schémas-boîtes du problème d'effectifs précédent nous suscitions la participation des élèves pour les remplir comme la séance précédente. Ensuite nous présentions le deuxième problème d'effectifs et demandions aux élèves de remplir les schémas-boîtes en suivant le modèle et en répondant à la question finale. Les schémas-boîtes étaient remplis selon le raisonnement analogue aux problèmes précédents.

Modèle

CE2 19 élèves

CANTINE	CE2 19 élèves	CP ?
	33 élèves	

En CP il y a 33 – 19 = 14 élèves

CE2	2 élèves de moins	CM1

En CM1 il y a 19 – 2 = 17 élèves

ETUDE	CP 17 élèves	CM1 17 élèves
	?	

A l'étude il y a 14 + 17 = 31 élèves

Problème à résoudre

CM2 18 élèves

CANTINE	CM2 18 élèves	CM1 ?
	35 élèves	

En CM1 il y a 35 – 18 = 17 élèves

CM2	3 élèves de moins	CE1

En CE1 il y a 18 – 3 = 15 élèves

ETUDE	CE1 15 élèves	CM1 17 élèves
	?	

A l'étude il y a 15 + 17 = 32 élèves

Ainsi, pour le premier problème le raisonnement est : à la cantine il y a les CM2 et les CM1, ils sont ensemble 35. On sait combien sont les CM2, mais on ne sait pas combien sont les CM1. A la salle d'étude il y a les CE1 et les CM1. On ne sait pas combien sont les CE1 mais on sait qu'ils sont 2 élèves de moins que les CM2. L'élément commun est que les CM1 vont avec les CM2 à la cantine et avec les CE1 à la salle d'étude. Le raisonnement à faire est : dans le premier problème, les élèves à la cantine sont les CE2 et les CP, ensemble ils sont 33. Donc les CP sont 33-19 = 14 élèves. Les CM1 sont 2 de moins que les CE2. Donc les CM1 sont : 19-2 = 17 élèves dans la classe. Les élèves à la salle d'étude sont les CM et les CP. Donc à la salle d'étude ils sont 17+14 = 31 élèves. De même pour le deuxième problème on fait le même raisonnement : les élèves à la cantine sont les CM2 et les CM1, ensemble ils sont 35. Donc les CM1 sont 35-18 = 17 élèves. Les CE1 sont 3 de moins que les CM2. Donc les CE1 sont : 18-3 = 15 élèves dans la classe. Les élèves à la salle d'étude sont les CE1 et les CM1. Donc à la salle d'étude ils sont 15+17 = 31 élèves.

Séance 3 durée environ 1 heure 30 mn : version de jarre présentation verticale sans rappel des deux derniers états question sur le tout.

A la troisième séance nous commencions par faire un rappel de ce qui a été vu à la séance précédente, comment nous avions rempli les schémas-boîtes du problème d'effectifs précédent, par quelles étapes nous étions passées et les raisonnements énoncés pour répondre à la question final. Ensuite, nous présentions l'énoncé et les schémas-boîtes à remplir du deuxième problème et l'énoncé du problème de transvasement. Nous demandions aux élèves de remplir les schémas-boîtes de la même façon que celui du problème précédent.

Comme cela n'a pas semblé évident, nous avions préparé une maquette en carton représentant les schémas boîtes dans lesquels des situations de transvasements sont mis en scène. Nous avions également préparé une maquette des schémas-boîtes sur lequel les éléments du problème d'effectifs étaient également représentés. Nous représentions au tableau les éléments de la maquette du problème de transvasements. Et nous demandions aux élèves de se rappeler de la manière dont nous avions rempli le tableau du problème précédant et de mettre en-dessous des éléments du problème de transvasements les éléments qui ressemblent aux problèmes d'effectifs. Ensuite nous avions demandé aux élèves de remplir les schémas-boîtes en faisant attention à ce qu'il y a de différent et de commun dans les deux problèmes et de mettre ensemble les éléments qui ont le même schéma-boîte. Ensuite de mettre en dessous des schémas-boîtes du problème de transvasements, les schémas-boîtes du problème d'effectifs qui se ressemblent.

Ainsi, le raisonnement pour le problème de transvasements est : on a versé 19 litres d'eau dans le VASE ROUGE. On a un bidon plein d'eau, on le verse dans le vase rouge. Après il y a 33 litres dans le vase rouge. Dans le VASE BLEU il y a 2 litres de moins qu'il y avait au début dans le vase rouge. On a un flacon plein d'eau qui contient autant que le bidon ; on verse le flacon dans le vase bleu. On demande combien il y a dans le VASE BLEU ? Nous demandions aux élèves de trouver ce qu'il y a de pareil et différent dans les deux problèmes. On a des vases au lieu des salles, on a des litres pour les vases et les élèves pour les salles, mais les litres sont comme les élèves : ce sont des quantités. Pour le problème des vases : on a une quantité au départ dans le vase rouge, on ajoute une quantité et on a une quantité plus grande à la fin. On va faire le même raisonnement pour les élèves que pour les vases : les élèves à la cantine sont les CM2 et les CM1, ensemble ils sont 35. Donc les CM1 sont 35-18=17 élèves. Les CE1 sont 3 de moins que les CM2. Donc les CE1 sont : 18-3 = 15 élèves dans la classe de CE1. Les élèves à la salle d'étude sont les CE1 et les CM1. Donc à la salle d'étude ils sont 15+17 = 32 élèves. Pour les vases on fait le même raisonnement : Au début il y a 19 litres dans le vase rouge, on ajoute l'eau du bidon dans le vase rouge. Après il y a 33 litres dans le vase rouge. Donc dans le bidon il y avait : 14 litres. Ce qu'il y a dans le vase rouge après avoir versé le bidon c'est comme les élèves à la cantine : les 19 litres qu'il y a avant c'est comme les 18 élèves de CM2 et le bidon c'est comme le CM1 : il faut calculer combien il y a de litres dans le bidon, comme il fallait calculer combien il y a d'élèves dans la classe de CM1. Dans le vase bleu il y avait 2 litres de moins qu'il y avait au début dans le vase rouge. Donc dans le vase bleu il y avait au début : 19-2 = 17 litres. C'est comme les CE1 qui sont 3 de moins que les CM1 : 18-3 = 15 élèves. On verse l'eau du flacon dans le vase bleu. Comme le flacon contient autant que le bidon, on a versé 14 litres dans le vase bleu. Après il y a 17+14 = 31 litres dans le vase bleu. C'est comme les CE1 avec les CM1 à l'étude : ils sont 15 au CE1 et 17 au CM1, en tout ils sont 32 élèves.

Modèle	**Problème à résoudre**
CM2 18 élèves	VASE ROUGE 19 litres

CANTINE	CE2 18 élèves	CM1 ?
	35 élèves	

En CM1 il y a 35 – 18 = 17 élèves

VASE ROUGE	Vase rouge 19 litres	Bidon ?
	33 litres	

Dans le bidon il y a 33-19=14 litres

CM2	3 élèves de moins	CE1

En CE1 18 – 3 = 15 élèves

Vase rouge au début	2 litres de moins	Vase bleu au début

Dans le vase bleu il y avait au début : 19-2 = 17 litres

ETUDE	CP 14 élèves	CM1 17
	?	

A l'étude il y a 15 + 17 = 32 élèves

Vase bleu	Flacon 14 litres	Vase bleu au début : 17
	?	

Dans le vase bleu il y a 14+17 = 31 litres

Séance 4 durée environ 1 heure 30 mn : résolution du problème âge question sur le tout.

Au cours de cette séance nous reprenions le dernier problème de transvasements ses différents schéma-boîtes pour résoudre le premier problème d'âges. Après la lecture du problème nous demandions aux élèves de trouver les parties des schémas qui ressemblent aux problèmes de transvasements et de prendre les inscriptions cartonnées du problème d'âges et de les placer en dessous des éléments du schéma des problèmes de transvasements. Nous présentions des schémas-boîtes suivants :

Modèle | **Problème à résoudre**

VASE ROUGE 19 litres

LUC : 19 ans	

VASE ROUGE	Vase rouge 19 litres	Bidon ?
	33 litres	

LUC	Début des cours : 19 ans	Durée des cours ?
	Fin des cours 33 ans	

Dans le bidon il y a 33-19 = 14 litres

Luc a suivi les cours pendant 33-19 = 14 ans

Vase rouge au début	2 litres de moins	Vase bleu au début

LUC	2 ans plus tôt	PIERRE

Dans le vase bleu il y avait au début : 19-2 = 17 litres

Pierre a commencé à 19-2 = 17 ans

Vase bleu	Flacon 14 litres	Vase bleu au début : 17 litres
	?	

LUC	Début des cours : 17 ans	Durée des cours : 14 ans
	?	

Dans le vase bleu il y a 14+17 = 31 litres

Luc s'est arrêté à : 17+14 = 31 ans

Ces schémas-boîtes ont été remplis sur les deux problèmes à partir des raisonnements suivants : Pour le problème âge ; *Luc a commencé les cours de théâtre à 19 ans et s'est arrêté à 33 ans.* L'âge de début des cours c'est comme les 19 litres qu'il y avait au début dans le vase rouge. L'âge de fin des cours c'est comme les 33 litres qu'il y a après dans le vase rouge quand on a versé le bidon. La durée des cours c'est comme l'eau du bidon. *Pierre a commencé 2 ans plus tôt et a suivi les cours de théâtre pendant autant de temps que Luc. A quel âge Pierre s'est-il arrêté ?* Nous allons écrire de la même manière que nous l'avons fait pour les vases. L'âge du début des cours de Pierre c'est comme les 2 litres de moins qu'il y avait au début dans le vase bleu par rapport au vase rouge. La durée des cours de Pierre c'est comme ce qui était dans le flacon. La fin des cours de Pierre c'est comme ce qu'il y avait dans le vase bleu après avoir versé le flacon. Le raisonnement pour les vases est : au début il y a 19 litres dans le vase rouge on ajoute l'au du bidon dans le vase rouge. Après il y a 33 litres dans le vase rouge. Donc dans le bidon il y avait : 14 litres. Dans le vase bleu il y avait 2 litres de moins qu'il y avait au début dans le vase rouge. Donc dans le vase bleu il y avait au début : 19-2 = 17 litres. On verse l'eau du flacon dans le vase bleu. Comme le flacon contient autant que le bidon, on a versé : 14 litres dans le vase bleu. Donc après il y a 17+14 = 31 litres dans le vase rouge. On fait le même raisonnement pour les problèmes d'âges : Luc a commencé à 19 ans. Il a arrêté les cours à 33 ans. Donc il a suivi les cours pendant : 33-19 = 14 ans. Pierre a commencé deux ans plus tôt. Donc il a commencé à : 19-2 = 17 ans. Comme il a suivi les cours pendant autant de temps que Luc ; il a suivi les cours pendant 17 ans. Donc il s'est arrêté à : 17+14 = 31 ans.

Séance 5 durée environ 1 heure 30 mn : résolution du problème âges question sur le tout.

Le cinquième problème d'âges a été résolu suivant le même principe que le problème précédent.

- **Les séances d'apprentissage de la différence-complément des problèmes dont les questions portent sur la partie.**

Nous avons réalisé 5 séances d'apprentissage des cinq problèmes, d'âges, de transvasements et des effectifs sur les questions portant sur la partie selon les mêmes principes, en remplissant les schémas-boîtes des problèmes et en tirant le raisonnement permettant d'arriver à la solution du problème.

V.5. Apprentissage par instruction écrite

Les deux groupes d'apprentissage de la procédure différence-comparaison et de la procédure différence-complément ont résolus les problèmes pendant 2 h. Pendant la séance, les élèves recevaient des carnets dans lesquels les problèmes étaient écrits. Sur la première page se trouvaient les informations relatives à l'identification de l'élève et les problèmes se trouvaient sur les pages suivantes. Après avoir distribué les carnets, nous avons demandé aux élèves de bien lire les problèmes et de prendre soin de compléter le texte de remplissage et de noter tous les calculs même ceux qu'ils font de tête.

Au cours de ces séances d'apprentissage, les élèves ont appris à résoudre les problèmes en se basant sur le modèle de résolution et du mode de raisonnement menant aux solutions. Ils n'ont bénéficié d'aucune explication de l'intervenante ni de l'enseignant.

Le choix des nombres des problèmes a été effectué selon les contraintes de l'expérience 1 : éviter les nombres très élevés, l'utilisation du nombre dix dans le calcul final. Nous avons aussi utilisé la règle des contrebalancements des nombres. Les nombres que nous avons utilisés pour cette expérience variaient de 2 à 37.

Le but de l'apprentissage était de favoriser le transfert de la procédure la moins spontanément mise en œuvre, celle induite par la nature de la variable, et de favoriser celle qui ne l'est pas. Pour les problèmes d'effectif qui induisent une application de la stratégie différence-complément, faire utiliser la procédure par différence-comparaison et pour la procédure différence-comparaison spontanément mise en œuvre dans les problèmes d'âges faire appliquer la stratégie par différence-complément non spontanément utilisée. Nous cherchions à vérifier si les problèmes de transvasements peuvent jouer un rôle pivot dans le transfert des procédures de résolution sur les problèmes d'effectifs et d'âges. L'idée est de partir de la variable du problème qui favorise le plus la stratégie à faire apprendre, d'y introduire la version de transvasements qui la favorise également, de présenter ensuite la variable du problème sur laquelle on veut transférer la stratégie d'abord dans la version la plus favorable et terminer par celle qui est moins favorable à cette stratégie. Nous avons basé notre expérimentation en considérant les résultats de l'expérience de Gamo (2009) sur l'effet de la modification du scénario et l'ordre de présentation des données quantitatives du problème sur le choix d'une procédure non spontanément induite par la variable du problème. Nous avons retenu de cette expérience que l'intégration des informations telles que « à la place de », dans les problèmes, incite à la projection des données sur un axe temporel et favorise l'utilisation de la procédure différence-comparaison dans les problèmes d'effectifs et prix. De même, dans les problèmes avec les variables ordinales (âges) la suppression des expressions tel que « même » peut rendre moins saillant l'aspect ordinal qui favorise spontanément la procédure différence-comparaison. Nous avons également retenu de l'auteure que l'ordre de présentation des données permet notablement d'orienter vers le choix de la procédure différence-comparaison pour les variables effectifs et prix.

La présentation des problèmes débute par le contexte de problème qui favorise le plus la stratégie à faire apprendre à celle qui la favorise le moins en vue de transférer la procédure d'apprentissage. Dans le groupe apprentissage de la procédure différence-comparaison nous avons d'abord présenté les problèmes d'âges car ils favorisent le plus cette stratégie, ensuite nous avons présenté la version de transvasement « horizontale » qui favorise la même stratégie et enfin nous présentons les problèmes d'effectifs qui favorisent le moins cette stratégie. De même, pour la stratégie différence-complément, nous avons d'abord présenté les problèmes d'effectifs (procédure préférentiellement utilisée dans ces problèmes), la version du problème de transvasement « présentation verticale sans rappel » qui favorisent majoritairement cette stratégie, et enfin le contexte des problèmes d'âges. Pour la vérification du rôle intermédiaire des problèmes de transvasement nous avons deux autres groupes d'apprentissage qui ont un ordre de présentation inverse des problèmes ; les problèmes de transvasements sont présentés à la fin de la série. Dans le groupe apprentissage différence-comparaison, les problèmes d'âges sont présentés, ensuite les problèmes d'effectifs et enfin les problèmes de transvasement « présentation horizontale ». Dans le groupe apprentissage différence-complément, apparaissent d'abord les problèmes d'effectifs, ensuite les problèmes d'âges et enfin les problèmes de transvasement version « présentation sans rappel du deuxième état du vase rouge ». Les participants du groupe contrôle ont résolu les mêmes problèmes que les groupes d'apprentissage mais sans aucune aide pour la résolution.

Chaque groupe d'apprentissage et groupe contrôle se compose de 10 problèmes, dont 5 sur la question partie et 5 sur la tout. Les problèmes étaient présentés sous forme de carnets, en deux séries : une série portant sur une question sur la partie et une sur la question sur le tout. Chaque série de problèmes des groupes apprentissage commençait toujours par un modèle de la procédure à faire apprendre. Les groupes apprentissage de la procédure différence-comparaison commençaient par un modèle de résolution, ensuite il était demandé aux élèves de résoudre les problèmes suivants avec la même procédure. La consigne était « résous de la même façon ». Afin d'éviter les effets de mémorisation des nombres et de l'application mécanique des procédures sans compréhension préalable de l'énoncé, une tâche de raisonnement qui met en exergue la procédure à apprendre a été proposée, avant de résoudre les problèmes, afin de s'assurer que le raisonnement qui mène à l'application de la procédure à apprendre a été bien mis en oeuvre.

- **Post test**

La passation du post test s'est déroulée dans les mêmes conditions que le pré-test à la seule différence qu'aucune consigne de résolution n'avait été donnée avant la distribution des carnets.

- **Codages des problèmes**

Nous avons tenu compte des procédures de résolution utilisées dans la réussite du problème. Comme dans l'expérience 1 les questions portant sur le tout et la partie n'ont pas été distinguées : pour un élève, les deux problèmes partie/tout ont été regroupés pour chaque type de contexte (effectifs, âges, transvasements, poids et hauteurs). Pour que la solution soit considérée comme correcte on a exigé une réponse correcte et une formulation cohérente avec le calcul. Nous avons attribué : 0 lorsqu'aucun des deux problèmes n'est réussi, 1 si l'un des deux problèmes est réussi et 2 si les deux problèmes sont réussis. Nous avons comptabilisé le nombre de stratégies utilisé pour chaque problème réussi.

Nous avons réalisé un codage sur l'ensemble des 9.000 problèmes résolus par les élèves. Nous avons fait un score total dans la procédure de résolution utilisée pour les trois variables de l'expérimentation (effectifs, transvasements, âges). Nous avons considéré le score total dans la procédure différence-complément, la procédure différence-comparaison et considéré le cas des procédures mixtes (c'est-à-dire lorsque les deux procédures sont considérées dans la même résolution ou si l'élève note précisément une solution alternative dans la partie prévue à cet effet, au pré et post test : dans ce cas on code 0. Les réponses données à partir d'un calcul mental ont été considérées dans les réussites mais n'ont été classées dans aucune procédure de résolution.

Dans les conditions d'apprentissage il y a trois facteurs : (i) la nature de la stratégie apprise, stratégie différence-comparaison versus stratégie différence-complément ; (ii) l'ordre d'apprentissage, le contexte transvasement intermédiaire versus en position finale, (ii) le type d'apprentissage, collectif oral en situation de classe versus individuel à partir d'instruction écrite et le groupe contrôle. Tous les groupes sont indépendants et les élèves sont répartis entre les 9 groupes.

Il y a cinq contextes dont trois sont présents dans l'apprentissage et servent à tester l'effet d'apprentissage : effectifs, âges et transvasements. Deux contextes ne bénéficient d'aucun apprentissage, ils servent à mesurer l'effet de transfert: poids et hauteurs. Les élèves sont croisés avec les contextes, les comparaisons entre contextes portent sur des groupes appariés. Nous avons réalisé deux types d'analyses. La première porte sur la comparaison des réussites au post-test par rapport au pré-test : la variable observée est le nombre de réussites sur les deux problèmes de chaque contexte, quelle que soit la stratégie utilisée : elle varie de 0 à 2. La variable utilisée pour tester l'effet de l'apprentissage sur la performance est la différence d entre le nombre de problèmes réussis par contexte au post-test et le nombre de problèmes réussis au post-test. La seconde analyse porte sur l'évolution des stratégies en fonction de l'apprentissage. La variable observée dans chaque épreuve est la force relative de chaque stratégie pour chaque contexte, qui compare la fréquence des deux stratégies sur les deux problèmes du contexte. Nous avons fait la différence entre le nombre de fois où apparaît la stratégie apprise et le nombre de fois où apparaît la stratégie alternative, spontanément mise en œuvre par la variable, sur les deux problèmes du contexte. Les valeurs possibles de la variable dépendante sont +2, +1,0, -1 et –2. La valeur 0 correspond à trois cas : soit un des deux problèmes est résolu par une stratégie et le second par l'autre, soit le problème est résolu par les deux stratégies à la fois, soit le problème n'a pas été résolu et aucune des deux stratégies n'a été appliquée.

Ainsi, une valeur positive indique que la stratégie enseignée est la plus fréquente et une valeur négative indique que c'est la stratégie non enseignée qui est la plus fréquente. Pour mesurer le progrès de la stratégie apprise, nous avons fait la différence entre la force relative de la stratégie au post-test et la force relative de la stratégie au pré-test. La différence est positive s'il y a un progrès de la stratégie. Ce qui signifie que la stratégie apprise est plus fréquente au post test.

V.6. Résultats

Pour tester l'effet de l'apprentissage nous avons analysé les résultats selon le plan d'expérience S < G > * T, soit S< rang transvasement > *Type de contexte dans lequel les lettres S, G, T renvoient respectivement aux facteurs Sujet, Groupe, (rang des problèmes de transvasements avec : G1 = groupe expérimental transvasements placés en situation intermédiaire, G2 = groupe expérimental transvasements placés en situation finale et Gc = groupe contrôle) ; T = Contexte dont effectif, âge, transvasement, poids et hauteur. La comparaison entre les deux groupes permet de tester si l'effet de l'ordre des problèmes de transvasement dans l'apprentissage c'est-à-dire le fait que l'ordre d'apprentissage est conforme ou non à la similitude des problèmes, est significatif. Pour comparer l'effet de l'apprentissage sur les problèmes de même contexte et l'effet de transfert de l'apprentissage sur des problèmes de contexte différent, nous avons analysé d'une part les trois contextes présentés dans l'apprentissage et les deux contextes qui permettent de tester l'effet de généralisation des procédures.

Selon l'hypothèse 1 nous devons observer un effet d'apprentissage et une progression sur la performance du pré au post test pour les groupes d'apprentissage. Nous nous attendons à une différence significative entre les groupes d'apprentissage et le groupe contrôle. Nous voulons également déterminer s'il y a des différences en fonction du rang des problèmes de transvasements selon qu'ils sont placés en situation intermédiaire et en situation finale. La variable dépendante est le nombre de réussites sur les deux problèmes de chaque contexte, elle varie de 0 à 2.

V.6.1. Résultats du groupe d'apprentissage par instruction orale

Le tableau 23 présente les moyennes des scores (écart-types) des réussites sur les progrès après apprentissage pour le groupe d'élèves qui a reçu l'apprentissage de la stratégie différence-comparaison pour les problèmes d'âges, d'effectifs et transvasements. La variable utilisée pour tester l'effet de l'apprentissage sur la performance est la différence d entre le nombre de problèmes réussis par contexte au post-test et le nombre de problèmes réussis au pré-test.

V.6.1.1. Analyse de l'effet du progrès de l'apprentissage : performances et stratégies

➢ **Analyse des performances pour le groupe de l'apprentissage de la procédure différence-comparaison**

Effet du progrès de l'apprentissage

Procédure différence-comparaison

Réussites

Variables	**APG1**	**APG2**	**GC**
Effectifs	0.62 (0.87)	0.68 (0.71)	0.3 (0.61)
Ages	0.96 (0.8)	0.84 (0.78)	0.22 (0.54)
Transvasements	0.92 (0.87)	0.54 (0.64)	0 (0.22)

Tableau 23. Scores moyens (écart-types) des performances pour l'effet du progrès de l'apprentissage de la stratégie différence-comparaison.

Le tableau 23 présente les scores moyens (écart-types) des procédures pour l'effet du progrès de la performance pour les variables effectifs, âges et transvasements pour les groupes d'apprentissage avec problèmes de transvasements placés en situation intermédiaire, en situation final et pour le groupe contrôle. Les scores moyens (écart-types) montrent des effets positifs. Pour tous les groupes l'apprentissage différence-comparaison a eu un effet pour toutes les variables qui constituent le contexte des problèmes. Les groupes d'apprentissage, que les problèmes de transvasements soient placés en situation intermédiaire ou en situation finale, ont eu des scores moyens plus élevés que le groupe contrôle.

L'ANOVA a montré un effet significatif entre les trois conditions de l'expérience (APG1, APG2 et GC) $F\ (2,\ 147) = 20.49$; $p<.0001$. La comparaison entre les groupes d'apprentissage et le groupe contrôle est significative à un seuil très élevé $F\ (1,\ 147) = 39.14$ $p<.0001$). Il n'y a pas d'effet significatif en fonction du rang des problèmes de transvasements, Transvasements en situation intermédiaire ou en situation finale $F\ (1,\ 147) =$

1.83 $p<0.5$). On n'observe pas non plus d'effet significatif du facteur type de contexte entre les variables effectif, âge et transvasement $F\ (2, 294) = 1.52\ p< 1$ ns, ni d'effet d'interaction entre les groupes et les variables $F, (4, 294) = 1.42, p< 1$ ns.

➢ **Analyse des performances pour le groupe de l'apprentissage de la procédure différence-complément**

Effet du progrès de l'apprentissage
Procédure différence-complément
Réussites

Variables	**APG3**	**APG4**	**GC**
Effectifs	0.58 (0.85)	0.74 (0.99)	0.3 (0.60)
Ages	0.64 (0.74)	0.64 (1.10)	0.22 (0.54)
Transvasements	0.52 (0.96)	0.58 (1.09)	0 (0.91)

Tableau 24. Scores moyens (écart-types) des performances pour l'effet du progrès de l'apprentissage de la stratégie différence-complément.

Le tableau 24 présente les scores moyens (écart-types) des procédures pour l'effet du progrès de la performance pour les variables effectifs, âges et transvasements pour les groupes d'apprentissage et le groupe contrôle. Pour tous les contextes de problèmes, l'apprentissage de la stratégie différence-complément a eu un effet positif. Les groupes d'apprentissage, que les problèmes de transvasements soient placés en situation intermédiaire et en situation finale, ont eu des scores moyens plus élevés que le groupe contrôle. L'ANOVA a montré un effet significatif entre les trois conditions de l'expérience (APG3, APG4 et GC) $F\ (2, 147) = 7.47$; $p<.001$, la différence est significative à un seuil très élevé entre les groupes d'apprentissage et le groupe contrôle $F\ (1, 147) = 14.64\ p<.0001$). Il n'y a pas d'effet significatif en fonction du rang occupé par les problèmes de transvasements $F\ (1, 147) = 0.30\ p<1$ ns). On n'observe pas non plus d'effet du facteur type de contexte (effectif et âge et transvasement) $F\ (2, 294) = 1.46\ p< 1$ ns, ni d'effet d'interaction entre les groupes et les variables $F, (4, 294) = 0.28, p< 1$ ns.

- **Analyse des stratégies pour le groupe de l'apprentissage de la procédure différence-comparaison**

Effet du progrès de l'apprentissage

Procédure différence-comparaison

	Stratégies		
Variables	**APG1**	**APG2**	**GC**
Effectifs	0.94 (1.03)	0.56 (1.02)	- 0.26 (0.74)
Ages	1.04 (0.89)	0.84 (0.78)	0.18 (0.62)
Transvasements	0.96 (0.82)	0.38 (0.69)	- 0.2 (1.06)

Tableau 25. Scores moyens (écart-types) de progrès de la procédure enseignée pour la stratégie différence-comparaison.

Le tableau 25 présente les scores moyens (écart-types) mesurant l'augmentation de fréquence de la procédure enseignée du pré-test au post-test pour les variables effectifs, âges et transvasements dans les groupes d'apprentissage et le groupe contrôle. Les groupes ayant bénéficié d'un apprentissage ont des scores plus élevés pour les trois contextes.

L'ANOVA montre que la différence est significative entre les trois conditions de l'expérience (APG1, APG2 et GC) $F(2, 147) = 42.54$; $p<.0001$, la comparaison entre les groupes d'apprentissage et le groupe contrôle est très significative $F(1, 147) = 74.32$ $p<.0001$). Il y a également un effet significatif du rang des problèmes de transvasements : le progrès est plus important quand ils sont en position intermédiaire, $F(1, 147) = 10.76$ $p<.001$). On observe également un effet du facteur type de contexte entre les variables effectif, âge et transvasement $F(2, 294) = 4.26$ $p<.001$. L'effet est moins important pour le contexte âge, ce qui s'explique par le fait que la stratégie différence-comparaison est déjà très fréquente en pré-test. Il n' y a pas d'effet d'interaction entre les groupes et les variables F, (4, 294) = 0.72, $p<1$ ns.

➢ Analyse des stratégies pour le groupe de l’apprentissage de la procédure différence-complément

Effet du progrès de l'apprentissage
Procédure différence-complément
Stratégies

Variables	**APG3**	**APG4**	**GC**
Effectifs	0.5 (0.98)	0.38 (0.97)	0.26 (0.74)
Ages	0.64 (1.29)	0.36 (1.07)	-0.18 (0.62)
transvasements	0.24 (1.06)	0.26 (0.82)	0.2 (1.05)

Tableau 26. Scores moyens (écart-types) de progrès de la procédure enseignée pour la stratégie différence-complément.

Le tableau 26 montre que l’apprentissage de la stratégie différence-complément a eu un effet positif pour les trois contextes, mais cet effet est nettement plus faible pour les problèmes de transvasements.

L’ANOVA a montré un effet significatif entre les trois conditions de l’expérience (APG1, APG2 et GC) F (2, 147) = 4.12 ; p<.025, ainsi qu’un effet significatif entre les groupes d’apprentissage et le groupe contrôle F (1, 147) = 7.29 p<.01). L’effet du rang des problèmes de transvasements, qui empiriquement témoigne d’un progrès légèrement plus important quand ces problèmes sont en situation intermédiaire n’est pas significatif F (1, 147) = 0.95 p<.1 ns). Il n’y a pas non plus d’effet du facteur type de contexte entre les variables effectif, âge et transvasement F (2, 294) = 0.89 p<1ns, ni d’effet d’interaction entre les groupes et les variables F, (4, 294) = 2.19, p<.1 ns.

V.6.1.2. Analyse de l'effet de généralisation : performances et stratégies

Le tableau 27 indique que la procédure différence-comparaison progresse pour des problèmes appartenant à des contextes qui n'ont pas fait l'objet d'un apprentissage.

- **Analyse de l'effet de généralisation sur les performances pour le groupe de l'apprentissage de la procédure différence-comparaison**

Effet du progrès de l'apprentissage

Procédure différence-comparaison

	Réussites		
Variables	**APG1**	**APG2**	**GC**
Poids	0.6 (0.87)	0.3 (0.67)	0.34 (0.73)
Hauteurs	0.72 (0.77)	0.58 (0.69)	0.12 (0.90)

Tableau 27. Scores moyens (écart-types) de généralisation du progrès de la procédure enseignée pour la stratégie différence-comparaison.

L'ANOVA montre un effet significatif entre les trois conditions de l'expérience (APG1, APG2 et GC) F (2, 147) = 5.34 ; $p<.0005$, ainsi qu'un effet significatif entre les groupes d'apprentissage et le groupe contrôle F (1, 147) = 7.79 $p<.025$). Il n'y a pas d'effet du rang des problèmes de transvasement F (1, 147) = 2.79 $p<1$ ns), ni du facteur type de contexte entre les variables hauteur et poids F (1, 147) = 0.37 $p<1$ ns. Il y a un effet d'interaction entre les groupes et les variables F, (2, 147) = 2.26, $p<.05$. Cela signifie que l'effet de généralisation est plus important pour les hauteurs que pour les poids.

➢ **Analyse l'effet de généralisation sur les performances pour le groupe de l'apprentissage de la procédure différence-complément**

Effet du progrès de l'apprentissage

Procédure différence-complément

Réussites

Variables	**APG3**	**APG4**	**GC**
Poids	0.38 (0.82)	0.36 (0.84)	0.34 (0.73)
Hauteurs	- 0.2 (0.74)	0.38 (0.97)	0.12 (0.90)

Tableau 28. Scores moyens (écart-types) de généralisation du progrès de la procédure enseignée pour la stratégie différence-complément.

Le tableau 28 ne montre pas d'effet de généralisation, ce qui est confirmé par l'ANOVA qui ne révèle aucun effet ni entre les groupes F (2, 147) = 1.94 ; $p<1$ ns, ni entre les variables hauteur et poids F (1, 147) = 9.70 $p<.005$. Il y a toutefois un effet d'interaction entre les groupes et les variables F, (2, 147) = 4.36, $p<.025$.

➢ **Analyse l'effet de généralisation sur les stratégies pour le groupe de l'apprentissage de la procédure différence-comparaison**

Effet du progrès de l'apprentissage

Procédure différence-comparaison

Stratégie

Variables	**APG1**	**APG2**	**GC**
Poids	0.52 (1.04)	0.26 (0.74)	0.06 (0.90)
Hauteurs	0.6 (0.91)	0.38 (0.82)	-0.36 (0.84)

Tableau 29. Scores moyens (écart-types) de progrès de la généralisation la stratégie différence-comparaison.

Le tableau 29 indique un effet de généralisation de la stratégie enseignée à des contextes de problèmes nouveaux : les scores sont plus élevés pour les groupes d'apprentissage que pour le groupe contrôle ; l'ANOVA révèle un effet significatif entre les trois conditions de l'expérience F (2, 147) = 11.04 ; p<.0001 ainsi qu'entre les groupes d'apprentissage et le groupe contrôle F (1, 147) = 19.64 p<.0001. Il n' y a pas d'effet significatif du rang des problèmes de transvasements F (1, 147) = 2.43 p<1ns), non plus du facteur type de contexte entre les variables hauteur et poids F (1, 147) = 1.13 p<1 ns. Il y a en en revanche un effet d'interaction entre les groupes et les variables F (2, 147) = 6.36, p<.01 : l'effet est plus important pour les hauteurs que pour les poids.

- **Analyse l'effet de généralisation sur les stratégies pour le groupe de l'apprentissage de la procédure différence-complément**

Le tableau 30 indique que l'apprentissage de la différence-complément a un effet positif de généralisation dans le cas du poids et un effet négatif dans le cas de la hauteur.

Effet du progrès de l'apprentissage

Procédure différence-complément

	Stratégie		
Variables	**APG3**	**APG4**	**GC**
Poids	0.38 (0.99)	0.28 (0.91)	-0.06 (0.90)
Hauteurs	-0.2 (0.74)	0.1 (0.87)	0.36 (0.84)

Tableau 30. Scores moyens (écart-types) de progrès de la généralisation la stratégie différence-complément.

L'ANOVA ne révèle toutefois aucun effet significatif ni entre les trois conditions de l'expérience F (2, 147) = 0.25 ; p<1 ns ni entre les groupes d'apprentissage et le groupe contrôle F (1, 147) = .006 p<1 ns ni en fonction du rang des problèmes de transvasements F (1, 147) = 0.51 p<1ns), ni d'effet du facteur type de contexte entre les variables hauteur et poids F (1, 147) = 1.47 p<1 ns. Seule est significative l'interaction entre les groupes et les variables F, (2, 147) = 9.64, p<.01, ce qui confirme le fait que l'apprentissage de la stratégie différence-complément augmente sa fréquence dans le cas du poids et la diminue dans le cas de la hauteur.

V.6.2. Résultats du groupe d'apprentissage par instruction écrite

V.6.2.1. Analyse de l'effet de l'apprentissage : performances et stratégies

- **Analyse des performances pour le groupe de l'apprentissage de la procédure différence-comparaison**

Le tableau 31 présente les moyennes des scores (écart types) de progrès des réussites après apprentissage pour le groupe d'élèves qui a reçu l'apprentissage de la stratégie différence-comparaison pour les problèmes d'âges d'effectifs et transvasements. La variable utilisée pour tester l'effet de l'apprentissage sur la performance est la différence d entre le nombre de problèmes réussis par contexte au post-test et le nombre de problèmes réussis au pré-test. Les scores montrent un léger progrès de la performance pour les groupes qui ont bénéficié d'un apprentissage.

Analyse du progrès des performances
Procédure différence-comparaison

	Réussites		
Variables	**APG5**	**APG6**	**GC**
Effectifs	0.44 (0.66)	0.36 (0.62)	0.3 (0.60)
Ages	0.42 (0.91)	0.36 (0.76)	0.22 (0.54)
transvasements	0.18 (0.68)	0.32 (0.73)	0 (0.91)

Tableau 31. Scores moyens (écart-types) du progrès de la performance pour la différence-comparaison.

L'ANOVA ne révèle pas d'effet significatif entre les trois conditions de l'expérience $F(2, 147) = 2.19$; $p<1$ ns mais un effet significatif quand on oppose les groupes d'apprentissage et le groupe contrôle $F(1,147) = 4.38$ $p<.05$. Il n'y a pas de différence en fonction du rang des problèmes de transvasements $F(1, 147) = 0$ $p<1$ ns), ni d'effet du facteur type de contexte entre les variables effectif et âge et transvasements F (1,147) = 2.88 p<1 ns, ni d'effet d'interaction entre les groupes et les variables F, (4, 294) = 0.46, p<1 ns.

➢ **Analyse des performances pour le groupe de l'apprentissage de la procédure différence-complément**

Analyse du progrès des performances
Procédure différence-complément
Réussites

Variables	**APG7**	**APG8**	**GC**
Effectifs	0.16 (0.67)	0.16 (0.70)	0.3 (0.60)
Ages	0.18 (0.74)	0.16 (0.76)	0.22 (0.54)
transvasements	0.16 (0.67)	0.06 (0.75)	0 (0.91)

Tableau 32. Scores moyens (écart-types) du progrès de la performance pour différence-complément.

Il n'y a pas d'indication de progrès de la performance pour ce type d'apprentissage. L'ANOVA ne révèle aucune différence significative ni entre les trois conditions de l'expérience F (2, 147) = 0.16 ; p<1 ns, ni entre les groupes d'apprentissage et le groupe contrôle F (1, 147) = 0.12 p<1 ns, ni pour le rang des problèmes de transvasements F (1, 147) = 0.20 p<1 ns), ni pour le type de contexte entre les variables effectifs et âges et transvasements F (2, 294) = 1.43 p<1 ns, ni d'interaction entre les groupes et les variables F, (4, 294) = 0.56, p<1 ns.

Nous analysons à suite la progression de la stratégie enseignée à l'aide d'instructions écrites.

➢ Analyse des stratégies pour le groupe de l'apprentissage de la procédure différence-comparaison

Evolution de la force relative de la stratégie

Procédure différence-comparaison

	Stratégies		
Variables	**APG5**	**APG6**	**GC**
Effectifs	0.16 (0.83)	0.28 (0.77)	-0.26 (0.74)
Ages	1.3 (1.04)	0.36 (0.76)	0.18 (0.62)
transvasements	0.22 (0.72)	0.32 (0.73)	-0.2 (1.05)

Tableau 33. Scores moyens (écart-types) du progrès de la force relative de la stratégie pour la différence-comparaison.

Le tableau 33 indique une augmentation de la fréquence de la procédure différence-comparaison après enseignement. L'effet est significatif entre les trois conditions de l'expérience (APG5, APG6 et GC) $F(2, 147) = 24.01$; $p<.0001$, entre les groupes d'apprentissage et le groupe contrôle $F(1, 147) = 41.69$ p<0001. Il y a également un effet du facteur type de contexte entre les variables effectif, âge et transvasement $F(2, 294) = 17.41$ $p<.0001$, et un effet d'interaction entre les groupes et les variables $F, (4, 294) = 5.93$, $p<.0001$.

➢ Analyse des stratégies pour le groupe de l'apprentissage de la procédure différence-complément

Evolution de la force relative de la stratégie

Procédure différence-complément

	Stratégies		
Variables	**APG7**	**APG8**	**GC**
Effectifs	0.04 (0.84)	0.08 (0.89)	0.26 (0.74)
Ages	0.06 (0.85)	0.04 (0.89)	-0.18 (0.62)
transvasements	-0.4 (1.01)	-0 (0.81)	0.2 (1.05)

Tableau 34. Scores moyens (écart-types) du progrès de la force relative de la stratégie pour la différence-complément.

Le tableau 34 ne révèle aucun effet de l'apprentissage. De ce fait l'ANOVA n'a montré aucun effet significatif ni entre les trois conditions de l'expérience F (2, 147) = 1.94 ; p<1 ns, ni entre les groupes d'apprentissage et le groupe contrôle F (1, 147) = 2.12 p<1 ns, ni du rang des problèmes de transvasements F (1, 147) = 1.76 p<1 ns), ni du facteur type de contexte entre les variables effectif, âge et transvasement F (2, 294) = 2.10 p<1 ns, ni d'effet d'interaction entre les groupes et les variables F, (4, 294) = 3.01 p<1 ns.

V.6.3. Analyse de l'effet de généralisation : performances et stratégies

➢ **Analyse l'effet de généralisation sur les performances pour le groupe de l'apprentissage de la procédure différence-comparaison**

Nous examinerons d'abord les scores de réussites pour voir si après l'apprentissage de chaque stratégie, la performance s'est améliorée sur des problèmes qui appartiennent à des contextes différents des effectifs, transvasements ou âges sur lesquels a porté l'apprentissage.

Procédure différence-comparaison

Réussites

Variables	**APG5**	**APG6**	**GC**
Poids	0.22 (0.83)	0.14 (0.66)	0.34 (0.73)
Hauteurs	0.4 (0.69)	0.12 (0.65)	0.12 (0.90)

Tableau 35. Scores moyens (écart-types) de la généralisation des progrès de performance pour la stratégie différence-comparaison à d'autres contextes.

Le tableau ne montre pas d'effet systématique, l'ANOVA n'a montré aucun effet significatif ni entre les trois conditions de l'expérience F (2, 147) = 1.18 ; p<1 ; ni entre les groupes d'apprentissage et le groupe contrôle F (1, 147) = 0.009 p<1 ns, ni un effet du rang des problèmes d'apprentissage F (1, 147) = 2.35 p<.10, ni d'effet du type de contexte entre les variables hauteur et poids F (2, 294) = 0.05 p<1 ns, ni d'effet d'interaction entre les groupes et les variables F, (2, 147) = 1.74, p<1 ns.

- **Analyse l'effet de généralisation sur les performances pour le groupe de l'apprentissage de la procédure différence-complément**

Procédure différence-complément

	Réussites		
Variables	**APG7**	**APG8**	**GC**
Poids	0.2 (0.8))	0.2 (0.69)	0.34 (0.73)
Hauteurs	0.1 (0.67)	0.18 (0.62)	0.12 (0.90)

Tableau 36. Scores moyens (écart-types) de la généralisation des progrès de performance pour la stratégie différence-complément à d'autres contextes.

Le tableau 36 ne montre aucun effet de généralisation et aucun effet n'est significatif ni entre les trois conditions de l'expérience $F(2, 147) = 0.20$; $p<1$ ns, ni entre les groupes d'apprentissage et le groupe contrôle $F(1, 147) = 0.31$ $p<1$ ns, ni $F(1, 147) = 0.10$ $p<1$ ns), ni d'effet du facteur type de contexte entre les variables effectif, âge et transvasement $F(1, 147) = 2.21$ $p<1$ ns, ni d'effet d'interaction entre les groupes et les variables F, $(2, 147) = 0.58$, $p<1$ ns.

- **Analyse de l'effet de généralisation sur les stratégies**

Nous examinons maintenant si les stratégies enseignées dans les problèmes d'effectifs, transvasements et âges se transfèrent à des problèmes appartenant à des contextes de hauteur et de poids.

➢ **Analyse l'effet de généralisation sur les stratégies pour le groupe de l'apprentissage de la procédure différence-comparaison**

Effet du progrès de l'apprentissage

Procédure différence-comparaison

Stratégie

Variables	**APG5**	**APG6**	**GC**
Poids	0.18 (0.84)	0.22 (0.64)	0.06 (0.90)
Hauteurs	0.16 (0.78)	0 (0.66)	- 0.36 (0.84)

Tableau 37. Scores moyens (écart-types) de l'effet de la généralisation de la stratégie différence-comparaison à d'autres contextes.

Le tableau 37 montre un léger effet de généralisation. L'ANOVA montre que la différence entre les trois conditions de l'expérience est significative F (2, 147) = 3.45 ; p<.05, tout comme celle entre les groupes d'apprentissage et le groupe contrôle F (1, 147) = 6.69 p<.01. Il n'y a pas d'effet du rang des problèmes de transvasements F (1, 147) = 0.21 p<1 ns, mais un effet du facteur type de contexte entre les variables hauteur et poids, l'effet étant plus important pour la hauteur que pour le poids F (2, 294) = 8.54 p<.005, et pas d'effet d'interaction entre les groupes et les variables F (2, 147) = 2.35, p<1 ns.

➢ **Analyse l'effet de généralisation sur les stratégies pour le groupe de l'apprentissage de la procédure différence-complément**

Procédure différence-complément

Stratégie

Variables	**APG7**	**APG8**	**GC**
Poids	-0.04 (0.82)	0.2 (0.77)	-0.06 (0.90)
Hauteurs	0.02 (0.67)	0.1 (0.7)	0.36 (0.84)

Tableau 38. Scores moyens (écart-types) de l'effet de la généralisation de la stratégie différence-complément à d'autres contextes.

Le tableau 38 n'indique pas d'effet de généralisation l'ANOVA ne révèle aucun effet significatif ni entre les trois conditions de l'expérience F (2, 147) = 0.99 ; p<1 ns, ni entre les groupes d'apprentissage et le groupe contrôle F (1, 147) = 0.49 p<1 ns, ni en fonction du rang des problèmes de transvasements F (1, 147) = 1.49 p<1 ns), ni d'effet du facteur type de contexte entre les variables hauteur et poids F (1, 147) = 2.74 p<1 ns. Il y a seulement un effet significatif d'interaction entre les groupes et les variables (F (2, 147) = 4.03, p<.025), la hauteur se comportant très différemment du poids.

Discussion

L'hypothèse générale de cette expérience était que le recodage des problèmes par mise en correspondance des éléments du problème et des opérations avec ceux du problème précédemment résolu ferait apparaître l'analogie entre les problèmes et favoriserait la procédure apprise par rapport à celle qui ne l'a pas été. Les résultats de cette expérience valident nos hypothèses, non seulement sur l'apprentissage mais également sur le transfert des procédures aux problèmes appartenant à des contextes n'ayant pas fait l'objet d'apprentissage. Les deux types d'apprentissage ont été bien différenciés ; l'apprentissage par instruction orale favorise l'application de la procédure enseignée, et augmente les réussites. Le groupe expérimental apprenant la procédure par différence-comparaison a privilégié majoritairement cette stratégie qui consiste à comparer les parties homologues du problème, représentation utilisée spontanément très souvent par les problèmes d'âges. Dans ce groupe, les problèmes d'effectifs, et de transvasements qui favorisent plus souvent la procédure par différence-complément ont, après apprentissage, favorisé la procédure de différence-comparaison.

En comparant post-test et pré-test nous avons montré que l'apprentissage par analogie de la stratégie de différence-comparaison se généralise non seulement aux problèmes appartenant à des contextes qui sont les mêmes que ceux de l'apprentissage, mais également appartenant à d'autres contextes comme les hauteurs ou les poids. L'apprentissage qui a été réalisé n'est donc pas lié aux propriétés spécifiques des problèmes utilisés dans l'apprentissage. Les élèves ont véritablement appris à analyser la structure des problèmes : cela est d'autant plus notable que cet apprentissage a été conduit sur un temps assez court.

La stratégie différence-complément spontanément utilisée dans les problèmes de type cardinal tels que les effectifs, poids et hauteurs, a été généralisée à la suite de l'apprentissage ; à des problèmes d'âges dont la variable est ordinale et qui favorise majoritairement la procédure par différence-comparaison. Cette généralisation s'est accompagnée d'un progrès des performances. Le transfert de cet apprentissage à des problèmes appartenant à des contextes qui n'ont pas fait l'objet d'apprentissage est plus discutable : l'effet est positif pour le poids mais négatif pour la hauteur. Pour ce qui est de l'effet du rang des problèmes de transvasements, on ne peut conclure de façon nette. Dans l'ensemble l'effet d'apprentissage est meilleur quand ils sont en position intermédiaire, mais il est le plus souvent non significatif. Notre hypothèse que la similitude des problèmes favorise le transfert par analogie de la procédure apprise pour le problème précédent ne peut donc être considérée comme confirmée. L'apprentissage par instruction écrite de la stratégie différence-comparaison a eu un effet positif : cette procédure a été généralisée des problèmes d'âges aux problèmes d'effectifs et a même été transférée aux problèmes de hauteur et de poids qui appartiennent à des contextes qui n'ont pas fait l'objet d'une enseignement. Cela n'a pas été observé pour la stratégie de différence-complément : cette stratégie n'a pu être développée que par instruction orale, en situation de classe.

Pour conclure, cette expérience nous a permis de valider notre hypothèse que le recodage reposant sur la mise en correspondance des éléments du problème à résoudre avec les éléments analogues du problème précédent pour lequel une procédure de résolution a été enseignée joue un rôle déterminant dans le transfert des procédures de résolution à des problèmes isomorphes. Des procédures inhabituelles ont été transférées à des problèmes qui ne les mettent pas en œuvre spontanément. Dans cette expérience, nous avons également observé un transfert d'apprentissage plus effectif dans la condition instruction orale par rapport à l'instruction écrite, car cette situation a fortement sollicitée l'attention des élèves afin qu'ils repérent et mettent en relation les éléments pertinents des problèmes.

Discussion générale

Les recherches que nous avons menées rentrent dans le cadre de la recherche de difficulté entre les problèmes arithmétiques isomorphes. Elles ont contribué à confirmer le rôle des facteurs sémantiques dans la résolution de problème. En effet, les résultats comme ceux de Bassok et al.(1995) de Sander et Richard (2005) et deVincente et al. (2007) montrent les effets liés à la représentation du modèle de situation peuvent être ignoré dans la résolution de problèmes. Il existe des facteurs sémantiques plus généraux qui favorisent l'interprétation de la situation en fonction de la nature de la variable. Cette interprétation conduit vers la représentation d'un schéma partie-tout lorsque les variables sont de type temporel (par exemples : les prix, les effectifs, les poids et les hauteurs) et aisément regroupables et l'application de la stratégie différence-comparaison lorsque ces variables sont de nature temporelle (les âges et les durées), elles favorisent la représentation d'un schéma de comparaison entre les parties homologues et la mise en œuvre de la stratégie différence-comparaison.

Dans la première expérience nous avons situé les problèmes de transformation (présentés sous forme d'énoncé et d'illustration par les problèmes de transvasements de liquide) par rapport aux problèmes de combinaison (variable effectif) et de comparaison (variable âge). Les résultats ont montré que les problèmes de transformation sont, selon la forme de l'orientation de l'illustration, intermédiaires entre les problèmes de comparaison et de combinaison. Ils orientent à la fois vers un schéma de représentation partie-tout et vers un schéma de comparaison. Concrètement, les problèmes de transformation, ont sur le plan des procédures, utilisé plus souvent la procédure de différence-complément que les problèmes d'âges et moins souvent que les problèmes d'effectifs, et plus souvent utilisé la procédure différence-comparaison que les effectifs et moins que les âges. Les problèmes de transvasements sont un contexte favorable qui se présente bien à la description des états matériels et l'ordre des variables sur un axe temporel. Les résultats de cette expérience ont également montré que l'enrichissement d'un énoncé n'apporte pas d'élément nouveau à la compréhension de texte comme l'ont montré Vincente et al. (2007). En effet, parmi les illustrations des problèmes de transvasements une version présentait les états successifs dans le déroulement du problème, elle n'a eu aucune différence significative avec la version où le texte seul était présenté. Comme ces auteurs, il a été constaté que la formulation conceptuelle guide vers une représentation du schéma de résolution.

Dans la deuxième expérience, nous avons démontré que le recodage des problèmes pour le transfert des procédures peut s'effectuer dans un contexte scolaire par instruction orale et écrite. Ces deux contextes d'apprentissage ont été bien distingués. Les résultats de la recherches font suite à celles de Gamo, (2009) ; de Gamo et al. (2010), Gamo et al. (2014). La différence entre leurs travaux et ceux de notre étude réside dans la méthode d'apprentissage. En effet, ces auteurs ont procédé à l'apprentissage par recodage des situations en comparant leurs procédures de résolution et en présentant les différents contextes sémantiques. Les élèves ont eu à choisir la procédure la plus économique qui ne nécessitait qu'un seul calcul. Dans notre expérience, nous avons effectué des séances d'apprentissage des deux procédures celle qui favorise spontanément la représentation partie-tout dans les variables de type ensembliste (effectifs, poids, hauteurs, illustration de transvasement qui favorise cette stratégie) et la procédure différence-comparaison spontanément mise en œuvre dans les variables de type temporel (âges). L'apprentissage reposait sur la comparaison entre les propriétés communes des problèmes. Cette méthode permet d'extraire la structure profonde commune entre des problèmes isomorphes (Gentner et Medina, 1998). L'apprentissage se faisait à partir d'un modèle de résolution de problème car c'est un contexte qui favorise le transfert des procédures (Nogry et Didierjean, 2006) et également par un schéma de résolution, (Novick et Hmelto, 1994). L'utilisation des tableaux et des illustrations des transvasements a facilité la compréhension et la catégorisation des variables des problèmes au niveau des relations qu'ils entretiennent dans l'apprentissage oral et écrit de la procédure de différence-comparaison. La présentation des schéma-boîtes et les illustrations des transvasements l'a facilité principalement dans l'apprentissage oral pour la procédure différence-complément.

L'hypothèse était qu'il y a un transfert des apprentissages des procédures de calcul de la différence-complément et de la différence-comparaison dans chaque groupe. Les problèmes qui ne favorisent pas spontanément la procédure apprise l'utiliseront significativement après apprentissage. Les problèmes d'âges pour l'apprentissage de calcul par différence-complément et les problèmes d'effectifs, pour la procédure différence-comparaison. Cet effet sera généralisé aux problèmes n'ayant bénéficié d'aucun apprentissage (poids et hauteurs). Nous voulions également vérifier si la place des contextes des problèmes de transvasements avait un effet sur le transfert ainsi que l'effet de proximité dans la présentation des problèmes. Les résultats sont allés dans le même sens que notre hypothèse principale sur l'effet d'apprentissage, de transfert et de généralisation des procédures. En effet, l'apprentissage par instruction orale a augmenté les réussites et l'application des deux procédures apprises. Le groupe d'apprentissage différence-comparaison a procédé à la comparaison des propriétés des objets entre les parties homologues du problème et a appliqué préférentiellement cette stratégie, les problèmes d'effectifs ont été résolus majoritairement par la procédure différence-comparaison. Cette stratégie s'est généralisée sur les problèmes non appris (les poids et les hauteurs). Les problèmes d'effectifs, de poids et de hauteurs dont le contexte induit l'interprétation du schéma partie-tout et qui mettent en œuvre la stratégie différence-complément ont été catégorisé à un niveau plus abstrait au niveau des structures relationnelles communes avec les problèmes d'âges qui est de type temporel. La procédure de calcul par différence-complément a été majoritairement appliquée aux problèmes d'âges. L'effet de généralisation a été positif pour la variable poids et négative pour la variable hauteur. Nous n'avons pas trouvé un effet sur la place du contexte de transvasement. Dans l'apprentissage par instruction écrite de la stratégie par différence-comparaison il y a eu un effet d'apprentissage (des âges aux effectifs) et celui de généralisation (poids et hauteur). Ce qui n'est pas le cas de la stratégie différence-complément qui n'a pas montré d'effet de généralisation par écrit.

Nous pensons que l'effet de rang des problèmes de transvasements n'a pas eu d'effet parce que les problèmes de transvasement sont difficiles et qu'ils avaient un niveau de réussite au transfert assez bas, ce qui a eu un impact sur le transfert de la procédure différence-comparaison. De plus, l'apprentissage que nous avons proposé est très difficile, la durée de l'apprentissage a été très brève par rapport à la situation normale de classe il aurait fallu consacrer plus de 5 séances pour améliorer les résultats.

Conclusion générale

L'objectif de cette thèse était de contribuer à la compréhension de l'origine des différences de difficulté entre problèmes additifs isomorphes résolus dans le contexte scolaire. En premier lieu, nous cherchions à mettre en évidence que les problèmes de combinaison et de comparaison se situent sur un continuum au milieu duquel peuvent se situer les problèmes de transformation d'états. Cette idée des problèmes de transformation en situation intermédiaire nous a conduit à penser qu'ils pouvaient être utiles pour le transfert analogique des procédures de résolution quasiment exclusives dans les problèmes qui admettent plusieurs procédures. Dans un second temps, nous voulions montrer que pour réaliser ce transfert des procédures et leur généralisation à d'autres contextes un apprentissage spécifique était nécessaire.

Nous avons revu les recherches antérieures et contextes théoriques à la fois dans le domaine de la résolution de problèmes, problèmes de transformation physiques et mathématique, et celles qui se sont intéressées au transfert analogique, à l'abstraction des connaissance et aux processus d'apprentissage qui en sont nécessaires.

Dans le premier chapitre nous avons présenté les différentes recherches, parmi d'autres qui ont contribué à l'essor de l'étude sur la résolution des problèmes, le rôle que les contextes sémantiques y jouent et les différences de difficulté entre ces problèmes en l'occurrence lorsqu'ils sont isomorphes. Nous avons rappelé les trois courants à l'origine des recherches sur la résolution de problèmes. Le courant behavioriste dont les recherches de Thorndike, avec le « Learning by Doing », ont apporté des réponses sur la résolution de problèmes par essais et erreurs observée chez l'animal. Ces investigations ont été étendues chez l'homme par Watson et Hull qui ont expliqué qu'à force d'expérience, face à un stimulus précis, l'homme apprend en adaptant et en hiérarchisant ses réponses. L'apprentissage serait effectif lorsqu'il aura déclanché le comportement adéquat qui permet de résoudre le problème. Le behaviorisme apporte la dimension de l'étude du comportement objectivement observable mais néglige les aspects non directement mesurables. Cette limite est dépassée par le courant gestaltiste qui intègre les comportements non directement observables fruit d'un processus mental. Les partisans de ce courant tels que Wertheimer, (1959) et Katona, (1940) valorisent considérablement l'apprentissage productif qui favorise la compréhension et le transfert positif entre les problèmes plutôt que l'apprentissage reproductif qui n'est que le fruit de la mémorisation d'une solution. La découverte par l'insight, également importante, est une période cruciale au cours de laquelle les éléments du problème sont réorganisés pour avoir une structure finale qui apporte la réponse au problème. Le courant du traitement de l'information, a contribué à modéliser les types de problèmes. Une importance est accordée à la définition d'un problème, bien ou mal défini, aux différentes stratégies (exploratoire ou de planification) que l'homme utilise pour les résoudre. Les chercheurs comme Newell et Simon, définissent l'espace de recherche ou de la tâche et l'espace du problème. Le premier correspond à la résolution du problème par un expert et le second à l'interprétation que le sujet construit pour résoudre le problème, il peut ne pas correspondre à l'espace de la tâche. Ces deux facteurs montrent que l'interprétation du problème dépend de celui qui le résout et de la façon dont le problème est présenté, son contexte sémantique. Les recherches ont révélé que le contexte sémantique joue un rôle dans l'interprétation et la résolution de problèmes (Hayes et Simon, 1977). Un contexte peut faciliter la résolution ou au contraire accentuer sa difficulté. Cette différence de difficulté intervient même dans les problèmes isomorphes. Ces études ont démontré que la différence de difficulté entre problèmes isomorphes sont attribuées à la charge en mémoire de travail, qu'elle est également due à l'apprentissage des mouvements dans la résolution de ces problèmes (Kotovsky et al. 1985 ; Kotovsky et Fallside, 1989), et aussi aux processus sémantiques impliqués dans l'apprentissage des mouvements. Ces processus déterminent l'interprétation à faire sur les opérateurs et orientent vers l'espace de recherche adéquat pour la résolution, (Clément, 2009 ; Richard et al. 2002). Le contexte sémantique offre également le point de vue à adopter pour interpréter et résoudre le problème. Clément, et Richard (1997) proposent le point de vue des processus de l'action de l'opérateur et le point de vue des résultats, des deux, le premier est le plus pertinent pour résoudre le problème. Si le point de vue des processus de l'action de l'opérateur coïncide avec le contexte sémantique, le problème est facile à résoudre. Dans le cas contraire, il faudrait changer de point de vue induit par le contexte sémantique pour se représenter celui des résultats de l'opérateur. Le changement de point de vue est un mécanisme de la flexibilité mentale (Clément, 2006, 2009) qui a fait l'objet de recherche dans le courant de la gestalt et a été aussi étudié par Luchins et Luchins, (1959) pour étudier la mécanisation de la pensée. Celle-ci est le fait d'avoir des difficultés à percevoir une alternative à un problème sur lequel on applique une solution familière mais qui n'est pas pertinente pour la situation. Cette question d'application à une situation nouvelle la solution d'un problème plus ancien qui lui ressemble relève du transfert analogique. Les recherches sur l'analogie et le transfert ont montré que dans certaines situations l'analogie peut être spontanée et dans d'autres incitée.

Plusieurs auteurs s'accordent à dire que les traits de surface et les traits de structure jouent des rôles dans l'analogie. Cependant, pour certains auteurs, les traits de structure ne contribuent qu'à l'évocation de la source, et les traits de structure participent à la mise en correspondance entre les problèmes. D'autres partagent l'idée que les deux traits servent à l'évocation et à la mise en correspondance source-cible. Pour Sander et Richard (2000), seuls les traits de surface sont pertinents pour atteindre le but du problème. La différence entre la résolution de problèmes entre novices et expert montre qu'ils n'utilisent pas les mêmes informations pour réaliser le transfert. Les novices restent influencer par les traits de surface Chi et al. (1981) et les experts utilisent les traits de surface aussi bien que celle des structures. Lorsque les traits de structure ne mènent pas à la solution les experts sont en mesure de changer de point de vue et de ne se fier qu'aux traits de structure (Novick, 1988).

Une explication interprétative est apportée sur la difficulté du transfert entre les problèmes par Bassok et al. (1995). Pour ces auteurs les traits de surface servent d'indice d'orientation vers la structure du schéma du problème. Toute l'interprétation du problème est donc influencée par la structure induite par les connaissances familières du sujet sur le contexte sémantique impliqué dans le problème. Les erreurs de transfert sont dues au fait que dans un problème la structure induite par le contexte du problème ne coïncide pas avec le modèle de situation du problème ni avec sa structure mathématique. Le transfert ne peut être positif que si la structure induite coïncide avec les deux autres facteurs. Aussi, certains auteurs montrent que les indices informant du niveau de proximité entre les problèmes peuvent aider au transfert (Gick et Holyoak, 1980, 1983). D'autres montrent que la présentation d'un schéma peut faciliter le transfert (Novick et Hmelto, 1994).

Le deuxième chapitre avait pour objectif de présenter les études sur la résolution de problèmes arithmétiques aussi bien dans le contexte sémantique que dans le contexte de l'apprentissage par transfert analogique. L'étude sur la difficulté des problèmes arithmétiques a conduit à la classification conceptuelle et la classification sémantique des problèmes. Trois grandes catégories ont été définies : les problèmes de combinaison, de comparaison et de transformation. Les différences de difficultés varient entre les catégories, au sein d'une même catégorie, en fonction du niveau scolaire et selon la nature de la question. La construction de la représentation du problème peut s'effectuer notamment à partir du modèle de schémas (Riley et al. 1983) ; Kintsch et Greeno (1985) et du modèle de situation développé par Reusser (1990, 1996, 1997). Le modèle de schéma défend l'idée selon laquelle la résolution de problème s'effectue par la sélection d'un schéma qui correspond à la catégorie à laquelle le problème appartient et on applique la structure du schéma aux données du problème pour la solution mathématique. Les deux modèles montrent l'importance de la pratique de la résolution de problème en ce sens que pour réussir en résolution de problème, il faut déjà avoir en mémoire le schéma auquel appartient la catégorie du problème. Le modèle de situation enrichie la formulation des problèmes, il peut contribuer à enrichir le contexte d'apprentissage des problèmes, tels que la formulation des problèmes et les contextes sémantiques d'apprentissage. D'autres facteurs que la construction du modèle de situation interviennent dans la compréhension du problème, c'est le cas des effets de contexte de résolution. Les études sur les contextes sémantiques dans la résolution de problèmes ont montré que ce ne sont pas seulement les propriétés spécifiques dans les problèmes qui suffisent à en expliquer la compréhension. Le contexte général du problème comme la catégorie générale à laquelle la variable du problème appartient influence non seulement la réussite mais également le choix de la procédure de résolution lorsqu'il y en a plus d'une. Les recherches ont montré que les propriétés des objets et les événements ainsi que les relations qu'ils entretiennent sont interprétées et catégorisées dans nos connaissances selon nos expériences. Ces connaissances viennnent influencer l'interprétation et les stratégies de résolution (Bassok, 1995, Novick et Bassock, 2005). Ces résultats ont également été démontrés dans le domaine des problèmes mathématiques. Les sujets construisent les mêmes relations sémantiques que celles qui leurs sont familières. Ces effets de contexte sont intéressants dans la représentation dans le sens où ils permettent, dans un énoncé qui admet plusieurs procédures, d'observer celles qui sont influencées par les variables du problème (Sander et Richard, 2000). Les études montrent que la nature de la variable décrite dans l'énoncé induit l'utilisation spontanée d'une stratégie et masque la possibilité d'utiliser une alternative (Richard & Sander (2000) ; Sander & Richard (2005) ; Hakem et al. (2005) ; Gamo et al. (2011), Sander et al. (2003) ; Bosc-Miné et Sander (2007)). Ainsi, les variables de type temporel orientent vers un schéma de comparaison entre parties homologues et favorisent spontanément la procédure par différence-comparaison. De même, les variables de type ensembliste orientent spontanément vers un schéma de résolution partie-tout, car ils sont facilement regroupables, et favorisent le calcul par différence-complément. Ces observations ont conduit à penser que la seule possibilité de percevoir l'équivalence entre les deux types de variable, seraient de provoquer un recodage sémantique en catégorisant les problèmes au bon niveau d'abstraction (Gamo 2009 ; Gamo et al. 2010). Ce recodage a permis de comparer les problèmes et leurs procédures et de choisir la plus économique du point de vue du nombre de calcul. Les élèves qui ont participé à cet apprentissage ont appliquée la procédure de calcul par différence-comparaison aussi bien aux problèmes à variable ensemblistes que temporels.

L'originalité de notre travail réside, d'une part, dans la volonté d'unir les catégories de problèmes au lieu de les opposer et, d'autre part, sur l'intérêt porté sur le rôle des apprentissages dans la généralisation des connaissances.

Nous nous plaçons à la suite des travaux sur le recodage des problèmes et leur résolution lorsqu'ils admettent plus d'une procédure. Il est vrai comme l'a montré les études de Gamo (2009) et Gamo et al. (2014) qu'une procédure est plus économique que l'autre et que cet avantage, après comparaison des deux procédures, guiderait le choix, la préférence et l'application de la plus efficace pour résoudre le problème. Cependant, nous pensions que montrer l'équivalence des procédure à travers les relations qu'entretiennent les objets impliqués dans les problèmes aideraient à appliquer la procédure alternative non spontanément mise en œuvre dans le problème. Au lieu de choisir une procédure, il serait alors possible de catégoriser les problèmes au même niveau d'abstraction afin de les résoudre indifféremment par la même procédure.

La thèse défendue est que dans les énoncés ayant plus d'une procédure de résolution, la représentation du problème est influencée par la structure induite par la variable impliquée dans le problème et conduit spontanément à l'application d'une procédure en accord avec l'interprétation familière de cette variable et inhibe l'utilisation de l'autre stratégie. De ce fait, la résolution est complètement dépendante du contexte sémantique. Or, pour se détacher du contexte sémantique, il faut procéder à un recodage de la situation et catégoriser les problèmes à niveau plus général qui permet de se rendre compte de l'isomorphisme entre les problèmes et de l'équivalence des procédures pour résoudre le problème. Les deux procédures utilisées font intervenir deux codages bien différents des mêmes problèmes : un recodage qui met préférentiellement la relation partie-tout en œuvre dans les problèmes de type ensembliste par la procédure de calcul différence-complément et un recodage qui met en œuvre la relation de comparaison entre parties homologues, dans les problèmes de comparaison et utilise spontanément la procédure par différence-comparaison.

Les études ont montré que les variables des problèmes orientent l'interprétation du problème et aussi la procédure de résolution de calcul par différence réalisé à partir d'une inférence de complément (stratégie différence-complément) par la représentation du schéma partie-tout ou une inférence de comparaison (stratégie différence-comparaison) qui favorise la comparaison entre parties homologues. Ces deux schémas renvoient respectivement à la classe de problème de combinaison et à celle de comparaison. Nous voulions savoir si les problèmes de transformation activent préférentiellement un schéma partie-tout ou un schéma de comparaison. Dans notre première expérience nous avons confirmé le rôle des facteurs sémantiques présentés dans le problème. Elle a montré que la dimension sémantique est un facteur plus général que les propriétés spécifiques du problème et qu'elle agit derrière la classification des problèmes et permet d'opposer les variables matérielles et temporelles. L'expérience a également montré que les contextes de transformation d'état sont intermédiaires entre les objets matériels et temporels. Et aussi que l'orientation graphique d'un problème de transformation n'induit pas la même représentation du problème. En effet, comme la variable temporelle, la présentation montrant la suite des états et leurs correspondances dans une orientation gauche-droite favorise la représentation du schéma de comparaison que celle de l'orientation haut-bas.

Dans la deuxième partie expérimentale nous avons étudié la possibilité que les problèmes de transformation soient utilisés comme contexte pivot pour le transfert de la procédure non spontanément mise en œuvre dans les problèmes isomorphes et que cette procédure soit également généralisée aux problèmes isomorphes n'ayant pas fait l'objet d'apprentissage. Aussi, les deux conditions d'apprentissage proposées ont été distinguées : l'apprentissage par instruction orale favorise l'application de la procédure enseignée, et augmente les réussites. Le groupe expérimental apprenant la procédure par différence-comparaison a privilégié majoritairement cette stratégie. De même que celle qui a appris la stratégie par différence-complément. L'effet de généralisation qui s'est accompagné d'un progrès des performances a été plus observé dans le groupe qui a appris la stratégie par différence-comparaison. L'effet du rang dans la résolution ne peut être tranché car le fait que les problèmes de transvasements en situation intermédiaire enregistrent une meilleure performance n'entraîne pas un effet concluant. Dans l'apprentissage écrit, la stratégie différence-comparaison a un eu effet positif, elle a été transférée dans les problèmes qui ne la mettent pas spontanément en œuvre et a été généralisée aux problèmes non appris. Cependant, l'apprentissage de la stratégie différence-complément n'a pas eu le même effet que dans l'apprentissage oral.

Les résultats de notre travail ont des implications pédagogiques dans le cadre scolaire. Les réussites sur ce type de contexte sémantique mathématique nécessitent un apprentissage pour acquérir la richesse des schémas de résolution de problème notamment pour les élèves qui ne résolvent pas habituellement ce type de problème. Les apprentissages ont pour but la généralisation des connaissances. La présentation de différents contextes de problèmes permet de catégoriser au niveau plus général les propriétés des objets et leurs relations dans les problèmes. Il serait également intéressant de chercher à savoir pourquoi les problèmes de transformation n'ont pas montré un effet de rang, et dans quelles condition d'apprentissage il serait possible de l'obtenir. De plus, la généralisation des connaissances n'ayant pas fonctionné pour la variable hauteur, on pourrait chercher à comprendre ce qui a provoqué ce résultat et dans quelle condition elle pourrait être améliorée.

Ainsi, ce travail montre l'importance du recodage sémantique dans la résolution de problème. Gamo (2009) et Gamo et ses collaborateurs (Gamo et al. 2010, 2011) ont utilisé, pour enseigner le transfert, une méthode qui consiste à faire réfléchir les élèves sur la similitude de structure en utilisant une représentation symbolique (empruntée aux problèmes de hauteurs) qui fait apparaître visuellement que la différence entre les touts est la même que la différence entre les parties spécifiques des ensembles. Nous avons utilisé une autre méthode qui consiste à faire reporter l'attention des élèves sur les correspondances entre les éléments homologues des problèmes. Les deux méthodes se révèlent efficaces. On pourrait les combiner dans un apprentissage scolaire, cela pourrait le rendre plus efficace. Nous avons obtenu des effets de transfert très importants dans un contexte scolaire très difficile où le nombre d'élèves par classe est important d'autant que ces élèves n'avaient jamais résolus ce type de problèmes avant notre expérience. Nous soulignons également que le type de généralisation que démontre le transfert que nous avons obtenu est très abstrait, puisqu'il fait apparaître ce qu'il y a de commun dans la notion de différence entre les situations de complément et les situations de comparaison et puisque, comme nous l'avions noté, très peu d'adultes sont capables de découvrir la double procédure de résolution. Il apparaît de nos résultats que les enfants sont capables de faire des apprentissages difficiles, quand on utilise l'apprentissage par analogie, chose qui n'est pas faite dans l'apprentissage scolaire où on privilégie la résolution de problèmes isolés et dont la résolution ne relève que d'une seule opération.

Bibliographie

Bassok, M. (1990). Transfer of domain-specific problem-solving procedures. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, and Cognition*, *16*(3), 522-533.

Bassok, M., Chase, V. M., & Martin S. A. (1998). Adding apples and oranges : Alignment of semantic and formal knowledge. *Cognitive psychology*, vol. 35, no2, 99-134.

Bassok, M., Wu, L., & Olseth, L.K. (1995). Judging a book by its cover: Interpretative effects of content on problem solving transfer. *Memory & Cognition, 23, 354-367.*

Birch, H. G & et Rabinowitz, H.S. (1951). The negative effect of previous experience on productive thinking. *Journal of experimental psychology*, 41, 962-968.

Blessing, S. B., & Ross, B. H. (1996). Content effects in problem categorization and problem solving. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, and Cognition*, *22*(3), 792-810.

Briars, D. J., & Larkin, J. H. (1984). An Integrated Model of Skill in Solving Elementary Word Problems. *Cognition & Instruction*, *1*(3), 245-296.

Brissiaud, R. (1988). De l'âge du capitaine à l'âge du berger : Quel contrôle de la validité d'un énoncé de problème au CE2? *Revue Française de Pédagogie, (82)*, 23-31.

Brissiaud, R. (1994). Teaching and Development: Solving "Missing Addend" Problems Using Substraction. *European Journal of Psychology of Education*, 1994, Vol IX, n°4, 343-365.

Bosc-Miné, C., & Sander, E. (2007). Effets du contenu sur la mise en œuvre de l'inférence de complément. *L'Année Psychologique, 107(3)*, 61-89.

Carpenter, T. P., & Moser J. M. (1981). The Development of Addition and Subtraction

Problem Solving Skills. In *Addition and Subtraction: Developmental Perspective*. N.J. : Lawrence Erlbaum Associates.

Chi, M. T. H., Feltovitch, P. J., Glaser, R. G. (1981). Categorization and. Représentation of physics problems by experts and novices. *Cognitive. Science*, 5,121-152.

Chi, M. T., Glaser, R., & Rees, E. (1982). *Expertise in problem solving*. In Sternberg (Ed), Advances in psychology of human intelligence. 1, 7-76. Hillsdal, N.J : Erlbaum.

Clément, E. (1994). La représentation de l'action : l'interprétation des consignes dans des problèmes isomorphes. *Thèse de Doctorat nouveau régime*, Université Paris 8.

Clément E. (1996). L'effet du contexte sémantique dans l'élaboration de la représentation du problème. *L'Année Psychologique*, 96, 409-442.

Clément, E., et Richard, J-F. (1997). Knowledge of domain effects in problem representation : the case of the Tower of Hanoi isomorphs. *'Thinking and Reasoning*, 3(2), 133-157.

Clément, E. (2001). Etude des différences de flexibilité mentale dans l'activité de résolution de problèmes. *In A. Flieller, C. Bocéréan, J.L. Kop, E. Thiébaut*, *A.M*. 215

Clément, E. (2006). Approche de la flexibilité cognitive dans la problématique de la résolution de problème. *L'Année Psychologique*, 106, 415-434.

Clément, E. (2008). Flexibilité, changement de point de vue et découverte de solution. In G. Chasseigne, *Cognition, Santé et Vie Quotidienne*, 1, 21-42. Paris : Edition Publibook Université (collection Psychologie Cognitive).

Clément, E. (2009). *La résolution de problème. A la recherche de la flexibilité cognitive*. Armand Colin.

Coquin-Viennot, D. (2001). Problèmes arithmétiques verbaux à l'école : pourquoi les élèves ne répondent-ils pas à la question posée ? *Enfance*, *53*(2), 181–196.

Coquin-Viennot, D., & Moreau, S. (2003). Highlighting the Role of Episodic Model in the Solving of Arithmetical Problems. *European Journal of Psychology and Education, XVIII, 3,* 267-279.

Coquin-Viennot, D., & Moreau, S. (2007). Arithmetic Problems at school : when there is a apparent contradiction between the situation model and the problem model. *British Journal of Educational Psychology*, vol. 77(1), 69-80.

Crahay,M. et Dutrévis, M. (2010). *Psychologie des apprentissages scolaires*. De boeck.

Cummins, D.D., Kintsch, W, Reusser, K., & Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology, 20, 405-438.*

Cummins Dellarosa, D. (1991). Children's interpretations of arithmetic word problems. *Cognition and Instruction*, *8*(3), 261-289.

De Corte, E., Vershaffel, L., & De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solution. *Journal of Educational Psychology, 77,460-470.*

Dehaene, S., Bossini, S., & Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and numerical magnitude. *Journal of Experimental Psychology : General, 122, 371-396.*

Devidal, M., Fayol, M., & Barrouillet, P. (1997). Stratégies de lecture et résolution de problèmes arithmétiques. *L'Année Psychologique*, *97*(1), 9-31.

De Viviés, X (1999). Point de vue et type de représentation des règles. Deux niveaux de difficulté pour la résolution de problèmes. *L'Année Psychologique*, 99(2), p. 271–293

Dunker, K.(1945). On problem-solving (L. S. Lees, Trans). *Psychological Monographs*, 58 (Vhole No. 270).

Dupuch, L., et Sander, E., (2007). Apport pour les apprentissages de l'explicitation des relations d'inclusion de classes. *L'Année Psychologique*, 107(4), 565-596.

Escarabajal, M.-C. (1984). Compréhension et résolution de problèmes additifs. *Psychologie Française*, *29*(3-4), 247-252.

Escarabajal, M. C. (1988). Schémas d'interprétation et résolution de problèmes arithmétiques. *Revue Française Pédagogie,* 82, 15-21.

Fayol, M., et Abdi, H. (1986). Impact des formulations sur la résolution de problèmes additifs chez l'enfant de 6 à 10 ans. *European Journal of Psychology of Education*, 1 (1), 41-58.

Fayol, M., Abdi, H., & Gombert, J.-E. (1987). Arithmetic problems formulation and working memory load. *Cognition & Instruction*, *4*(3), 187-202.

Fayol, M. *(1990). L'enfant et le nombre : le comptage et la résolution de problèmes .Neuchâtel :* Delachaux &Niestlé.

Gamo, S. (2009). *Rôle des effets de contenu dans la catégorisation des problèmes arithmétiques à plusieurs solutions: recodage sémantique et transfert de procédures* (Thèse de doctorat inédite). Université Paris 8, Vincennes - Saint-Denis.

Gamo, S., Sander, E., & Richard, J.-F. (2010). Transfer of strategy use by semantic recoding in arithmetic problem solving. *Learning and Instruction*, *20*(5), 400-410.

Gamo, S., Taabane, L., & Sander, E. (2011). Rôle de la nature des variables dans la résolution de problèmes additifs complexes. *L'année psychologique*, 111, 613-640.

Gamo, S., Sander, E. & Richard, J.-F. (2010). Transfer of strategy use by semantic recoding in arithmetic problem solving. *Learning and Instruction*, 20,400-410.

Gamo, S., Nogry, S., & Sander, E. (2014). Apprendre à résoudre des problèmes en favorisant la construction d'une représentation alternative chez des élèves scolarisés en éducation priotaire, *Psychologie française*.

Gentner, D. (1977). Children's performance on spatial analogies task. *Child development*, 48, 1034-1039.

Gentner, D. (1983). Structure-mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science : A Multidisciplinary Journal*, *7*(2), 155-170.

Gentner, D., & Medina, J. (1998). Similarity and the development of rules. *Cognition*, *65*(2), 263–297.

Gibson, J.J. (1979). *The ecological approach to visual perception*. Boston: Houghton Miffin.

Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1980). Analogical Problem Solving. *Cognitive Psychology, 12*(3), 306-355.

Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1983). Schema Induction and Analogical Transfer. *Cognitive Psychology*, *15*(1), 1-38.

Gineste, M.-D., (1997) *Analogie et cognition*, PUF.

Greeno, J. G. (1976). Indefinite goals in well-structured problems. *Psychological Review*, *83*(6), 479.

Greeno, J. G. (1976). Number sense situated knowing in a conceptual domain. *Journal of research in mathematics education. 22(3), 170-218.*

Hakem, K., Sander, E, & Labat, J-M. (2005a). DIANE (Diagnostic Informatique sur l'arithmétique au niveau élémentaire). *Actes du congrès Environnements Informatiques pour l'apprentissage Humain* 05, 25-27 mai, Montpellier, PP. 81-92.

Hakem, K., Sander, E, & Richard, J-F. (2005b). DIANE, a Diagnostic system for arithmetical problem solving. In C-K. Looi, G. McCalla, B. Bredweg, and J. Breuker (Eds).

Supporting learning through Intelligent and Socially Informed Technology. Frontiers in Artificial Intelligence and applications. The Netherlands, IOS press pp. 628-635.

Hakem, K., Chaillet, V., & Sander, E. (2011). DIANE, un EIAH fondé sur les effets de contenu pour les apprentissages arithmétiques : du diagnostic automatique à son interprétation. *Proceedings of the Actes de la conférence EIAH*, 301-312.

Hayes, J.R., et Simon, H.A. (1974). Understanding written problem instructions. In L.W. Gregg (Ed.). *Knowledge and Cognition* (pp. 167-200). Potomac, Ma. Erlbaum.

Hayes, J. R., et Simon, H. A. (1977). Psychological differences among problem isomorphs. In N.J. Castellan, D.B. Pisoni, et G.R. Potts; (Eds). *Cognitive theory*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hofstadter, D., & Sander, E. (2013). Les Analogies Naïves. In D. Hofstadter et E. Sander, *L'Analogie coeur de la pensée* (pp. 465-526). Paris, Odile Jacob.

Holyoak, K. (1984). Analogical thinking and human intelligence. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the Psychology of Human Intelligence*, *Vol. 2* (pp. 199-230). Hillsdale, N.J: Erlbaum.

Holyoak, K. J. (1985). The pragmatics of analogical transfer (English). *Psychology of Learning and Motivation*, *19*, 59-87.

Holyoak, K.J., et Koh, K. (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory and Cognition*, 15,332-340.

Hudson, T. (1983). Correspondences and Numerical Differences between Disjoint Sets. *Child Development*, *54*(1), 84-90.

Ian Robertson, S. (2001). *Problem solving*. Psychological press.

Katona, G. (1940). *Organizing and memorizing : studies in the psychology of learning and teaching*. New York, Columbia University Press.

Kintsch, W., & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, *92*(1), 109-129.

Kurtz, K. J., & Loewenstein, J. (2007). Converging on a new role for analogy in problem solving and retrieval: When two problems are better than one. *Memory & Cognition*, *35*(2), 334-341.

Kotovsky, K., Hayes, J. R., & Simon, H. A. (1985). Why are some problems hard? Evidence from Tower of Hanoi. *Cognitive Psychology*, *17*(2), 248-294.

Kotovsky K., et Fallside D. (1989). Representation and Transfer in Problem Solving In K. Kotovsky (Ed) *Complex information Processing (What has Simon wrought?). 21st symposium of the Carnegie Mellon, Institute* (pp.69-108). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kotovsky, K. & Simon, H. A. (1990). What makes some problems really hard : explorations in the problem space difficulty. *Cognitive psychology*, 22, p.143-183.

Kotovsky, K. & Gentner, D. (1996). Comparison and categorization in the development of relational similarity. *Child Development*, 67, 2797-2822.

Luchins, A.S. (1942), Mechanization in problem solving, *Psychological Monographs,* n° 248.

.

Luchins, A.S. & Luchins E.H. (1959), *rigidity of behavior. A variational approach to the Effect of Einstellung.* Oregon, University of Oregon Books.

Maier, N. R. (1930). Reasoning in humans. I. On direction. *Journal of Comparative Psychology*, *10*(2), 115.

Maier, N.R.F. (1931). Reasoning in humans : II. The solution of a problem and its appearance in consciousness. *Journal of Comparative Psychology*, 12, 181-194.

Moreau, S., & Coquin-Viennot, D. (2003). Comprehension of arithmetic word problem by fifth-grade pupils : Representation and selection of information. *British Journal of Educational Psychology, 73*, 109-121.

Nathan, M. J., Kintsch, W., & Young, E. (1992). A theory of algebra-word-problem comprehension and its implications for the design of learning environments. *Cognition and Instruction*, *9*(4), 329–389.

Nesher, P., (1981) Levels of description in the analysis of addition and subtraction. In T. P. Carpenter, J. M. Moser and T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction : Developmental perspective*. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum.

Nogry, S., & Didierjean, A. (2006). Apprendre à partir d'exemples : interactions entre présentation du matériel, activités des apprenants et processus cognitifs. *L'année Psychologique*, *106*(01), 105–128.

Novick, L. R. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, and Cognition*, *14*(3), 510-520.

Novick, L.R., et Holyoak, K.J. (1991). Mathematical problem solving by analogy. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 17, 398-415.

Novick, L.R., & Bassok, M. (2005). Problem solving. In K. J. Holyoak and R. G. Morrison (Edit.), *The Cambridge Handbook of Thinking and Reasoning (pp.321-349)*. New York : Cambridge University Press.

Novick, L.R., & Hmelo, C.E. (1994). Transferring symbolic representations across nonisomorphic problems. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, and Cognition,* 20 (6), 1296-1321.

Palm, T. (2009). Theory of authentic task situations. In Verschaffel, L. Greer, B. Wim Van Dooren, W. V. & Mukhopadhyay, S. (Eds.). *Words and worlds modelling verbal descriptions of situations. Sens Publishers.*

Presseau, A. et Frenay, M. (2004). *Le transfert des apprentissages. Comprendre pour mieux intervenir.* Les presses de l'Université Laval.

Reed, S.K., Ernst, G.W., & Banerji, R. (1974). The role of analogy in transfer between similar problem states. *Cognitive Psychology, 6,* 436-450.

Reusser, K. (1989). Textual and situational factors in solving mathematical word problems. Bern, *Switzerland : University of Bern*.

Reusser K. (1990) - From Text to Situation to Equation : Cognitive Simulation of Understanding and Solving Mathematical Word Problems. *In H. Mandl, E. De Corte, N. Bennet & H.F. Friedrich (Eds), Learning and Instruction, European Research in an International Context, Vol. II. New York : Pergamon Press.*

Reusser, K. (1996). From cognitive modeling to the design of pedagogical tools. In S. Vosniadou, E. De Corte, R. Glaser, & H. Mandl (Eds.), *International perspectives on the design of technology-supported learning environments.* (pp. 81-103). Hillsdale, NJ England : Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Reusser, K., & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution: The social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and Instruction*, *7*(4), 309-327.

Richard, J.-F. (1990). La comphréhension de textes à viser pragmatique, in Richard, J.-F., Bonnet, C. Ghiglione, R. *Traité de psychologie cognitive, T.2 : Le traitement de l'information symbolique. Paris, Dunod.*

Richard, J.-F., & Sander, E. (2000), Activités d'interprétation et de recherche de solution dans la résolution de problèmes. *Dans J-N. Foulin & C. Ponce (Eds.), Lire, écrire, compter, apprendre : Les apports de la psychologie des apprentissages, pp. 91-102. Editions* *du CRDP de Bordeaux.*

Richard, J.-F. (1990, 1995, 2004). *Les activités mentales, Comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Armand Colin.

Richard, J.-F., Clément, E., Tijus, C.-A., & Pitrat, J. (2002). Les composantes sémantiques dans la résolution de problèmes isomorphes. *Revue d'intelligence*, *16*(1-2), 191-219.

Riley, M.S., Greeno, J.G., & Heller, J.I (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsberg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (PP. 153-196). New-York : Academic Press.

Rosch, E. Carolyn B. Mervis, Wayne D. Gray, David M. Johnson, AND Penny Boyes-Bream (1976). Basic Objects in Natural Categories . *Cognitive psychology* 8, 382-439.

Ross, B. H. (1984). Remindings and their effects in learning a cognitive skill. *Cognitive Psychology*. Vol. 16 p. 371-416.

Ross, B. H. (1987). This is like that: The use of earlier problems and the separation of similarity effects. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, and Cognition*, *13*(4), 629-639.

Ross, B.H. (1989). Distinguishing types of superficial similarities: Different effects on the access and use of earlier problems. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory and Cognition*, 15, 456-468.

Sander, E., & Richard, J-F. (1997). Analogical Transfer as guided by an abstraction process : the case of learning by doing in text editing. *Journal of Experimental Psychology*. 23 (6), 1459-1483.

Sander, E. (2000). *L'analogie, du naïf au créatif: analogie et catégorisation*. Paris : l'Harmattan.

Sander, E. (2006). Raisonnement et résolution de problèmes. In S. Ionescu, & A. Blanchet (Eds.), *Nouveau Cours de Psychologie : Psychologie cognitive et bases neurophysiologiques du fonctionnement cognitif* (Ouvrage coordonné par D. Gaonach, pp. 159-190). Paris, PUF.

Sander, E. (2007). Manipuler l'habillage d'un problème pour évaluer les apprentissages. *Bulletin de psychologie*, *60*, 119-124.

Sander, E., & Richard, J-F. (2005). Analogy and transfer : Encoding the problem at the right level of abstraction. *In Proceedings of the 27th Annual Conference of the Cognitive Science Society. 22nd-24th July, Stresa*, 925-930.

Sander, E., Levrat, B., Brissiaud, R., Porcheron, P., & Richard, R. (2003). Conceptualisation et propriétés sémantiques des situations dans la résolution de problèmes arithmétiques : *rapport d'étape. Ministère de la Recherche ; appel d'offre 2002, Ecole et Sciences Cognitives : les apprentissages et leurs dysfonctionnements*. Université Paris 8.

Schank, S.C. & Abelson, R.P. (1977). *Scripts, Plan, Goals and Understanding*. Lawrence Erlbaum, Hillsdale N.J.

Silver, E. A. (1981). Recall of mathematical problem information : solving related problem. *Journal for research in mathematics Education*. 12 (1), 54-64.

Simon, H. A., & Hayes, J. R. (1976). The understanding process : Problem isomorphs. *Cognitive Psychology*, *8*(2), 165–190.

Staub, F. C., & Reusser, K. (1995). The role of presentational structures in understanding and solving mathematical word problems. *In C. A. Weaver, S. Mannes, et C. R. Fletcher (Eds), Discourse comprehension. Essays in honor of Walter Kintsch (pp. 286-305). Hilsdale (NJ) : Lawrence Erlbaum.*

Stern, E., & Lehrndorfer, A. (1992). The role of situational context in solving word problems. *Cognitive Development*, *7*(2), 259-268.

Stern, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children? *Journal of Educational Psychology*, *85*(1), 7-23.

Sternberg, R.J. (1977). *Intelligence, information processing and analogical reasonning*, Hillsdale N.J. Lawrence Erbaum.

Stetic, W. (1999). Word-problem solving as a function of problem type, situational context and drawing. *Studia Psychologica, 41*, 49-62.

Thévenot, C. (2008). Représentations mentales et stratégies de résolution de problèmes arithmétiques verbaux chez les enfants de CM2. *L'Année Psychologique*, *108*, 617-630.

Thévenot, C., Barouillet, P., & Fayol, M. (2004). Mental representation and procedures in arithmetic word problems: The effect of the position of the question. *L'Année psychologique, 104,683-699.*

Thévenot, C., Devidal, M., Barrouillet, P., & Fayol, M. (2007). Why does placing the question before an arithmetic word problem improve performance ? A situation model account. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *60*(1), 43-56.

Van Dijk, T. A., & Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension.* New York: Academic Press.

Vergnaud G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and substraction problems. *Carpenter T.P., Moser J.M and Romberg T.A. (Eds.) Addition and substraction: A cognitive perspective. Hillsdale : Erlbaum*.

Vergnaud, G., & Durand C. (1976) Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue Française de pédagogie*, 36, 28-43.

Verschaffel, L. (1994). Using retelling data to study elementary school children's representations and solutions of compare problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(2), 141-165.

Vicente, S. (2006). *Conocimienta matematico y situational y su influencia en la resolucion de situaciones problematicas de estructura aditiva* (Thèse de doctorat inédite). Universidad de Salamanca.

Vicente, S., & Orrantia, J. (2007). Resolucion de problemas y comprension situacional Word problem solving and situational knowledge. *Cultura y Educación*, *19*(1), 61-85.

Vicente, S., Orrantia, J., & Verschaffel, L. (2007). Influence of situational and conceptual rewording on word problem solving. *British Journal of Educational Psychology, 77(4),* 829-848.

Verschaffel, L., Greer, B., and de Corte, E. (2000). Making Sense of Word Problems. *Educational Studies in Mathematics*. Vol.42. pp 211-213.

Wertheimer, M. (1959). *Productive thinking*. New York: Harper & Row.

Wickelgren, W.A., (1974). How to solve problems. *Freeman*, San Fransisco.

Zhang, J., & Norman, D. A. (1994). Representations in distributed cognitive tasks. *Cognitive Science : A Multidisciplinary Journal*, *18*(1), 87-122.

Annexes

Annexe A : Problèmes de l’apprentissage écrit de la stratégie différence-comparaison

N° _______

Prénom : ________________________________

Ecole : _________________________________

Date de naissance : _______________________

Classe : ________________________________

Lucas a suivi les cours de dessin à l'école d'art pendant 16 ans. Eric a commencé au même âge que Lucas et a suivi les cours 2 ans de moins. Lucas s'est arrêté à 33 ans.

A quel âge Eric s'est-il arrêté ?

Chapitre 1

Eric a commencé au même âge que **Lucas**

Eric a suivi les cours **2** ans de moins que **Lucas**

Donc **Eric** s'est arrêté **2** ans plus tôt que **Lucas**

Grâce à ce raisonnement, la solution est :

33 - 2 = 31 ans

La réponse est :

Eric a arrêté les cours de dessin à l'âge de 31 ans

zat

Nicolas a suivi les cours de musique au conservatoire pendant 14 ans. Emile a commencé au même âge que Nicolas et a suivi les cours 3 ans de moins. Nicolas s'est arrêté à 32 ans

A quel âge Emile s'est-il arrêté ?

<u>Consigne :</u> « Résous de la même façon».

______________a commencé au même âge que________________

___________a suivi les cours ______ ans de moins que ______________

Donc __________s'est arrêté _____ ans plus tôt que ________________

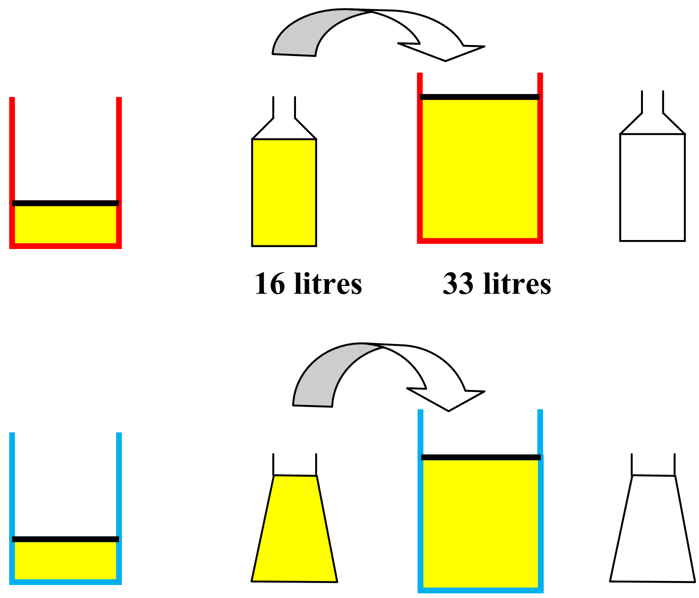
<u>Grâce à ce raisonnement, la solution est :</u>

<u>Ecris ici tes calculs</u>

<u>Ecris ici ta réponse</u>

zat

On a versé la même quantité d'eau dans les vases rouge et bleu. On a un bidon plein d'eau qui contient 16 litres. On a un flacon plein d'eau qui contient 2 litres de moins que le bidon. On verse le bidon dans le vase rouge : il y a maintenant 33 litres dans le vase rouge. On verse le flacon dans le vase bleu.



Combien de litres y a-t-il dans le vase bleu ?

<u>Consigne</u> : « résous de la même façon»

Il y a autant d'eau dans le vase ______________ que dans le vase _____________

et Il y a___________ litres de moins dans le___________ que dans le_________

on verse le bidon dans le vase __________ et la carafe dans le vase____________

Donc il y a _________ litres de moins dans le__________ que dans le_________

<u>Grâce à ce raisonnement, la solution est :</u>

<u>Ecris ici tes calculs</u>

<u>Ecris ici ta réponse</u>

jat

Dans la classe de CM2 il y a 16 élèves. Dans la classe de CE1 il y a 2 élèves de moins que dans la classe de CM2. Quand les CM2 vont à la salle de la cantine avec les CM1, ils sont 33. Si à la place des CM2, les CE1 vont à la salle d'étude avec les CM1, **combien seront-ils dans la salle d'étude ?**

Consigne : « Résous de la même façon».

Les élèves à la salle de la cantine sont les____________ et les_____________
Les élèves à la salle d'étude sont les____________ et les_____________
Les__________ sont_____________ de moins que les ______________
Donc à la __________ il y a______ élèves de moins qu' à la __________

Grâce à ce raisonnement, la solution est :

Ecris ici tes calculs

Ecris ici ta réponse

xat

Il y a 17 élèves dans la classe de CE2. Dans la classe de CM1 il y a 3 élèves de moins que dans la classe de CE2. Quand les CE2 vont à la salle de la cantine avec les CP, ils sont 35. Si les CM1 vont à la salle d'étude avec les CP, **combien seront-ils dans la salle ?**

Consigne : « Résous de la même façon».

Les élèves à la salle de la cantine sont les____________ et les_____________
Les élèves à la salle d'étude sont les____________ et les_____________
Les__________ sont_____________ de moins que les ______________
Donc à la __________ il y a______ élèves de moins qu'à la __________

Grâce à ce raisonnement, la solution est :

Ecris ici tes calculs

Ecris ici ta réponse

xat

Aline a suivi les cours de danse pendant 18 ans et s'est arrêtée à 35 ans. Léa a commencé au même âge qu'Aline et s'est arrêtée 3 ans avant.

Combien de temps Léa a-t-elle suivi les cours ?

Léa a commencé au même âge qu'**Aline**

Léa s'est arrêtée **3** ans plus tôt qu' **Aline**

Donc **Léa** a suivi les cours **3** ans de moins qu'**Aline**

Chapitre 2

Grâce à ce raisonnement, la solution est :

Chapitre 3

Ecris tes calculs

18 - 3=15

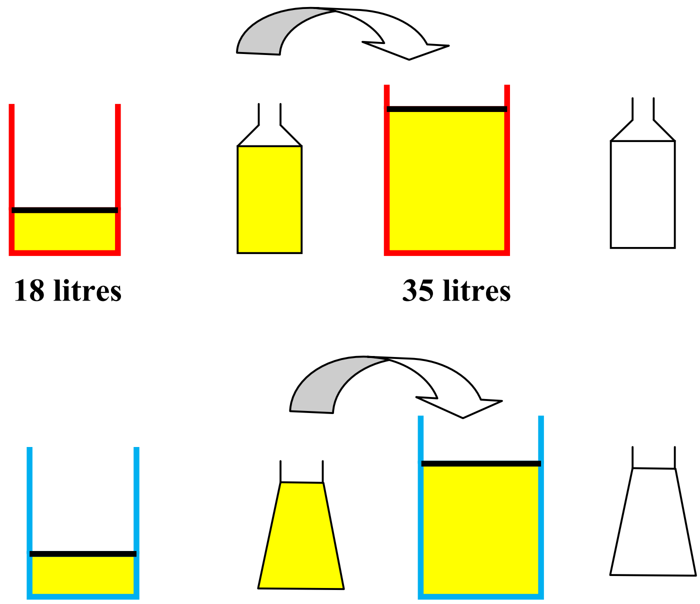
Zap

Paul a suivi les cours de musique au conservatoire pendant 15 ans et s'est arrêté à 32 ans. Pierre a commencé au même âge que Paul et s'est arrêté 3 ans avant. **Combien de temps Pierre a-t-il suivi les cours ?**
Consigne : « Résous de la même façon». ________ a commencé au même âge que ________ ________s'est arrêté ___ ans avant__________ Donc ________a suivi les cours _____ ans de moins que____________
Grâce à ce raisonnement, la solution est : **Ecris ici tes calculs**
Ecris ici ta réponse

Zap

On a versé la même quantité d'eau dans les vases rouge et bleu. On a un bidon plein d'eau qui contient 18 litres. On verse le bidon dans le vase rouge. Il y a maintenant 35 litres dans le vase rouge.

On a un flacon plein d'eau. On le verse dans le vase bleu. Il y a maintenant 3 litres de moins dans le vase bleu que dans le vase rouge.



Combien contient le flacon ?

Consigne : « Résous de la même façon».

Au début il y a autant d'eau dans le vase_______________ que dans le vase _______

on verse le bidon dans le vase __________ et on verse le flacon dans le vase _______

à la fin il y a______ litres de moins dans le vase ________ que dans le vase________

Donc il y a __________ litres de moins dans le___________ que dans le__________

Grâce à ce raisonnement, la solution est :

Ecris ici tes calculs

Ecris ici ta réponse

Jap

Dans la classe de CP il y a 18 élèves. Quand les CP vont à la salle de la cantine avec les CE2 ils sont 35. Quand les CM1 sont à la salle d'étude avec les CE2 à la place des CP, ils sont 3 de moins dans la salle.

Combien sont-ils dans la classe de CM1 ?

Consigne : **« Résous de la même façon».**

Les élèves à la salle de la cantine sont les____________ et les_____________
Les élèves à la salle d'étude sont les____________ et les_____________
A la ___________ il y a _____________ élèves de moins qu'à la
____
Donc les __________ sont______ de moins que les ________________

Grâce à ce raisonnement, la solution est :

Ecris ici tes calculs

Ecris ici ta réponse

xap

Dans la classe de CP il y a 19 élèves. Quand les CP vont à la salle de la cantine avec les CM2 ils sont 33 dans la salle. Quand les CM2 sont à la salle d'étude avec les CE2 ils sont 2 de moins.

Combien sont-ils dans la classe de CE2 ?

Consigne : « Résous de la même façon».

Les élèves à la salle de la cantine sont les____________ et les_____________
Les élèves à la salle d'étude sont les____________ et les_____________
A la ____________ il y a _____________ élèves de moins qu'à la _____________

Donc les __________ sont______ de moins que les ________________

Grâce à ce raisonnement, la solution est :

Ecris ici tes calculs

Ecris ici ta réponse

xap

Annexe B : Problèmes de l'apprentissage écrit de la stratégie différence-complément

N° _______

Prénom : ________________________________

Ecole : _________________________________

Date de naissance : _______________________

Classe : ________________________________

Dans la classe de CP il y a 14 élèves. Quand les CP vont à la salle de la cantine avec les CM1 ils sont 32. Quand les CM1 sont à la salle d'étude avec les CM2 ils sont 2 de moins.

Combien sont-ils dans la classe de CM2 ?

Consigne : **« Résous de la même façon».**

Les **CP** et les **CM1** sont ensemble **32** à la salle d'étude

Les **CP** sont **14**

Donc les CM1 sont **32 - 14**= **18**

A la salle de la cantine les **CM1** et les **CM2** sont **2** de moins que les élèves dans la salle d'étude

Donc les **CM1** et les **CM2** ensemble sont **32** - **2**=**30**

Comme les **CM1** sont **18** alors les **CM2** sont : **30** - **18**=**12**

Grâce à ce raisonnement, la solution est :

Les **CM1** sont : **32**- **14** = **18** élèves

Les **CM1** et les **CM2** sont : **32**-**2**=**30** élèves

Les **CM2** sont : **30**-**18**=**12** élèves

La réponse est :

Ils sont 12 élèves dans la classe de CM2

xap

Dans la classe de CM2 il y a 17 élèves. Quand les CM2 vont à la salle de la cantine avec les CM1 ils sont 35. Quand les CM1 sont à la salle d'étude avec les CE1 ils sont 3 de moins.

Combien sont-ils dans la classe de CE1 ?

<u>Consigne :</u> « Résous de la même façon».

Les_______ et les________ sont ensemble ___________à la salle de la cantine
Les_______ sont______________________________
Donc les CM1 sont_________________________
A la salle d'étude les_______ et les_______ sont ______ de moins que les élèves à la salle de la cantine.
Donc les __________ et les _________ ensemble sont _______________
Comme les __________ sont _________ alors les ____ sont _________________

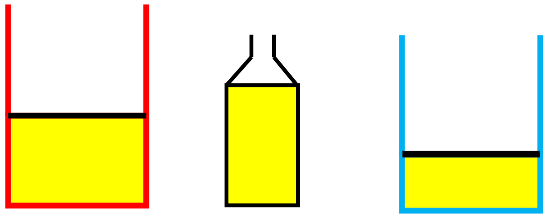
<u>Grâce à ce raisonnement, la solution est :</u>

<u>Ecris ici tes calculs</u>

<u>Ecris ici ta réponse</u>

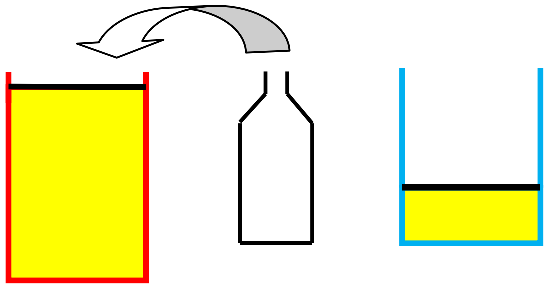
Xap

On a versé de l’eau dans les vases rouge et bleu.
Il y a 14 litres dans le vase rouge.
On a un bidon plein d’eau.



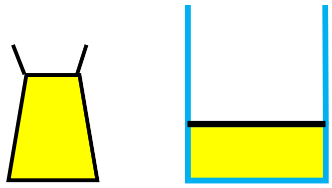
14 litres

On verse le bidon dans le vase rouge
Il y a maintenant 32 litres dans le vase rouge

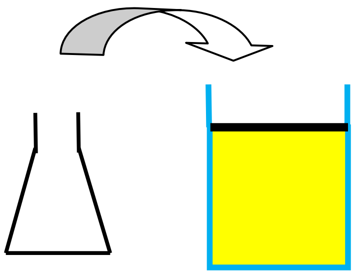


32 litres

On a un flacon plein d’eau qui contient
autant que le bidon



On verse le flacon dans le vase bleu
Il y a maintenant 2 litres de moins dans le vase bleu
que dans le vase rouge.



Combien de litres y avait-il avant dans le vase bleu ?

<u>Consigne</u> : « Résous de la même façon».

Il y a________ litres dans le _____________ après avoir versé le ________________
Il y avait avant ________ litres dans le ________________________________
Donc dans le bidon il y avait _________________________ litres
Quand on a versé le flacon dans le vase bleu Il y a _____ litres de moins dans le________________ que dans le___________________________________
Donc il y a dans le vase bleu : _______________________________ litres
Comme le flacon contient autant que le bidon, on a versé_______ litres dans le vase bleu.
Donc il y avait avant dans le vase bleu_____________________________ litres

<u>Grâce à ce raisonnement, la solution est :</u>

<u>Ecris ici tes calculs :</u>

<u>Ecris ici ta réponse :</u>

jap

Aline a commencé les cours de théâtre à 14 ans et s'est arrêtée à 32 ans. Léa a suivi les cours de théâtre pendant autant de temps qu'Aline et s'est arrêtée 2 ans plus tôt.

A quel âge Léa a-t-elle commencé les cours de théâtre?

<u>**Consigne :**</u> **« Résous de la même façon».**

_______a commencé les cours à ______ ans

Elle s'est arrêtée à ________ ans

Donc elle a suivi les cours pendant _________ ans.

Léa s'est arrêtée ______ plus tôt que _______

Donc Léa s'est arrêtée à ________ ans.

Comme elle a suivi les cours autant de temps qu'Aline elle a suivi les cours pendant____ ans.

Donc elle a commencé les cours à _______________ ans

<u>**Grâce à ce raisonnement, la solution est :**</u>

Ecris ici tes calculs

<u>**Ecris ici ta réponse**</u>

zap

Marion a suivi les cours de danse pendant 16 ans et s'est arrêtée à 33 ans. Chloé a commencé au même âge que Marion et s'est arrêtée 2 ans avant. **Combien de temps Chloé a-t-elle suivi les cours ?**
<u>Consigne :</u> « Résous de la même façon». _______a suivi les cours pendant ______ ans Elle s'est arrêtée à ________ ans Donc elle a commencé les cours à ________________________________ ans. Chloé s'est arrêtée ______ plus tôt que _______ Donc Chloé s'est arrêtée à ________________________________ ans. Comme elle a commencé au même âge que Marion ; elle a commencé à ____________________________ ans. Donc elle a suivi les cours pendant _______________ ans
<u>Grâce à ce raisonnement, la solution est :</u> **<u>Ecris ici tes calculs</u>**

zap

Il y a 19 élèves dans la classe de CE2. Quand les CE2 sont à la salle de la cantine avec les CP, ils sont 33. Dans la classe de CM1 il y a 2 élèves de moins que dans la classe de CE2. Les CM1 vont à la salle d'étude avec les CP.

Combien sont-ils dans la salle d'étude ?

Les élèves à la salle de la cantine sont les **CE2** et les **CP**
ensemble ils sont **33**
Donc les **CP** sont : **33** - **19** = **14**
Les **CM1** sont **2** de moins que les **CE2**
Donc les **CM1** sont : **19** – **2** = **17**
Les élèves à la salle d'étude sont les **CM1** et les **CP**
Donc à la salle d'étude ils sont : **17** + **14**=**31**

Grâce à ce raisonnement, la solution est :

Les **CP** sont : **33**-**19**=**14** élèves

Les CM1 sont : **19**-**2**=**17**

Dans la salle ils sont : **17**+**14**=**31**

La réponse est :

A la salle d'étude les CM1 et CP sont 31 élèves.

xat

Il y a 18 élèves dans la classe de CM2. Quand les CM2 sont à la salle de la cantine avec les CM1, ils sont 35. Dans la classe de CE1 il y a 3 élèves de moins que dans la classe de CM2. Les CE1 vont à la salle d'étude avec les CM1.

Combien seront-ils dans la salle d'étude ?

Consigne : « Résous de la même façon».

Les élèves à la salle de la cantine sont les____________ et les_____________
Ensemble ils sont________________
Les _________ sont____________
Donc les CM1 sont ______________
Les__________ sont_____________ de moins que les ______________
Donc les __________ sont________________
Les élèves à la salle d'étude sont les____________ et les_____________
Donc à la salle s'étude ils sont__________________________________

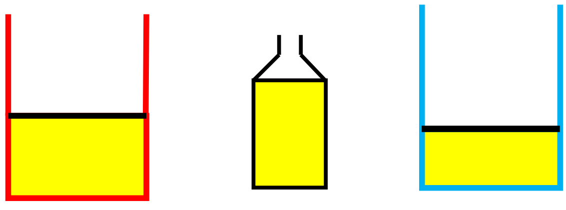
Grâce à ce raisonnement, la solution est :

Ecris ici tes calculs

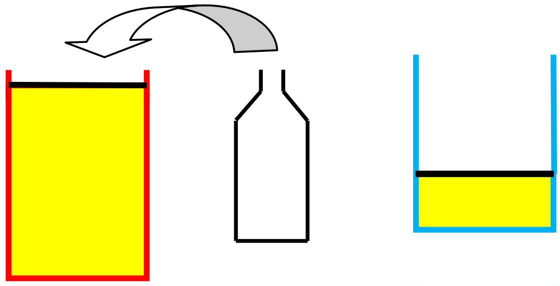
Ecris ici ta réponse

xat

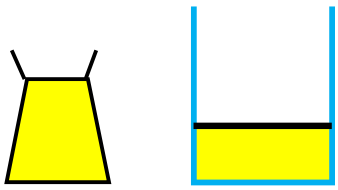
On a versé 19 litres d’eau dans le vase rouge
On a un bidon plein d’eau



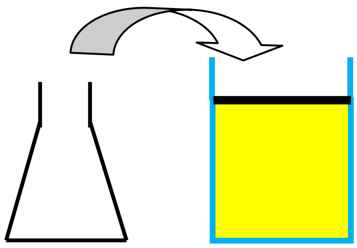
On verse le bidon dans le vase rouge
Il y a maintenant 33 litres dans le vase rouge.
Dans le vase bleu il y a 2 litres de moins
qu'il y avait au début dans le vase rouge



On a un flacon plein d’eau qui
Contient autant que le bidon



On le verse dans le vase bleu



Combien de litres y a-t-il dans le vase bleu ?

<u>Consigne</u> : « Résous de la même façon».

Il y a ____________ litres dans le ____________________
Après avoir versé le ________ Il y a________ litres dans le ________
Donc dans le bidon il y avait ________________________ litres
Comme dans le vase bleu Il y avait _____ litres de moins qu’il y avait au début dans le ________________
Donc dans le vase bleu il y avait au début___________________________ litres
Comme le flacon contient autant que le bidon, on a versé_______ litres dans le vase bleu.
Donc il y a dans le vase bleu : _____________________________ litres

<u>Grâce à ce raisonnement, la solution est :</u>

<u>Ecris ici ta réponse :</u>

<u>Ecris ici tes calculs :</u>

jat

Luc a commencé les cours de théâtre à 19 ans et s'est arrêté à 33 ans. Pierre a commencé 2 ans plus tôt et a suivi les cours de théâtre pendant autant de temps que Nicolas. **A quel âge Pierre s'est-il arrêté ?**
<u>Consigne :</u> « Résous de la même façon». _______a commencé les cours à ______ ans Il s'est arrêté à ________ ans Donc il a suivi les cours pendant ________________________________ ans. Pierre a commencé ______ plus tôt que _______ Donc il a commencé à ____________________________ ans. Comme il a suivi les cours pendant autant de temps que Luc ; il a suivi les cours pendant _______________ ans Donc Pierre s'est arrêté à ________________________________ ans.
<u>Grâce à ce raisonnement, la solution est :</u> **<u>Ecris ici tes calculs</u>**
<u>Ecris ici ta réponse</u>

zat

Eva a suivi les cours de théâtre pendant 15 ans et s'est arrêtée à 32 ans. Marina a commencé au même âge qu'Eva et a suivi les cours 3 ans de moins.

A quel âge Marina s'est-elle arrêtée ?

Consigne : « Résous de la même façon».

_______ a suivi les cours pendant ______ ans
Elle s'est arrêtée à ________ ans
Donc elle a commencé les cours à ________________________________ ans.
Marina a suivi les cours ______ ans de moins que _______
Donc elle a suivi les cours pendant _______________ ans
Comme elle a commencé au même âge qu'Eva ;
elle a commencé à ____________________________ ans.
Donc Marina s'est arrêtée à ________________________________ ans.

Grâce à ce raisonnement, la solution est :

Ecris ici tes calculs

Ecris ici ta réponse

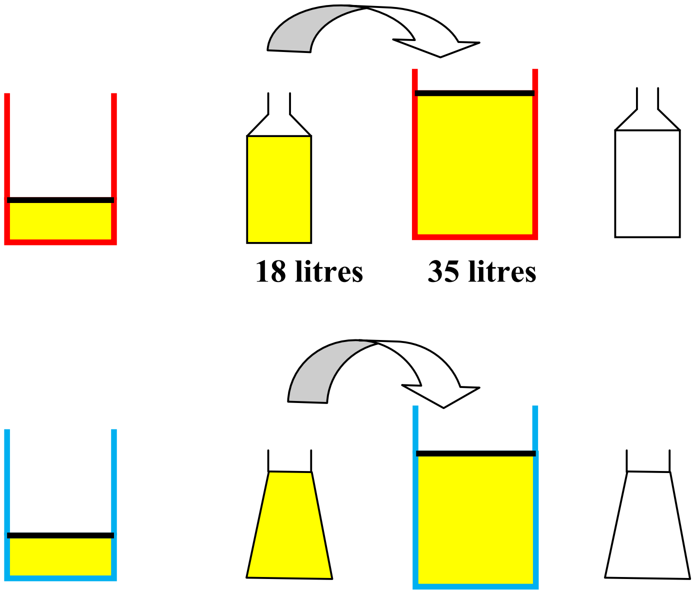
zat

Annexe C : Problèmes du groupe contrôle

Lucas a suivi les cours de dessin à l'école d'art pendant 16 ans. Eric a commencé au même âge que Lucas et a suivi les cours 2 ans de moins. Lucas s'est arrêté à 33 ans. **A quel âge Eric s'est-il arrêté ?**	

zat

On a versé la même quantité d'eau dans les vases rouge et bleu. On a un bidon plein d'eau qui contient 18 litres. On a un flacon plein d'eau qui contient 3 litres de moins que le bidon. On verse le bidon dans le vase rouge : il y a maintenant 35 litres dans le vase rouge. On verse le flacon dans le vase bleu.



Combien de litres y a-t-il dans le vase bleu ?

Ecris ici tes calculs	**Ecris ici ta réponse**
Jat	

Il y a 17 élèves dans la classe de CE2. Dans la classe de CM1 il y a 3 élèves de moins que dans la classe de CE2. Quand les CE2 vont à la salle de la cantine avec les CP, ils sont 35. Si les CM1 vont à la salle d'étude avec les CP, **combien seront-ils dans la salle ?**

Ecris ici tes calculs	**Ecris ici ta réponse**

xat

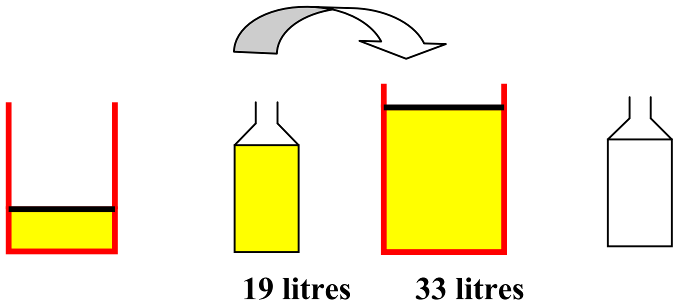
Aline a suivi les cours de danse pendant 18 ans et s'est arrêtée à 35 ans. Léa a commencé au même âge qu'Aline et s'est arrêtée 3 ans avant. **Combien de temps Léa a-t-elle suivi les cours ?**

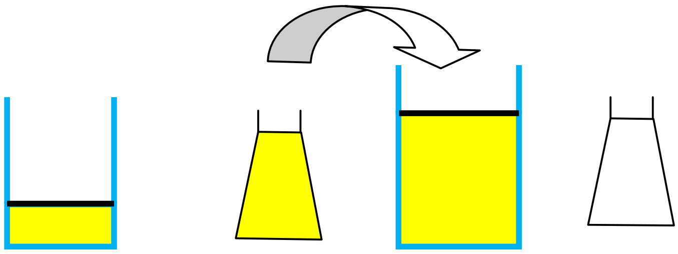
<u>Ecris ici tes calculs</u>	**<u>Ecris ici ta réponse</u>**

zap

On a versé la même quantité d'eau dans les vases rouge et bleu. On a un bidon plein d'eau qui contient 19 litres. On verse le bidon dans le vase rouge. Il y a maintenant 33 litres dans le vase rouge.

On a un flacon plein d'eau. On le verse dans le vase bleu. Il y a maintenant 2 litres de moins dans le vase bleu que dans le vase rouge.

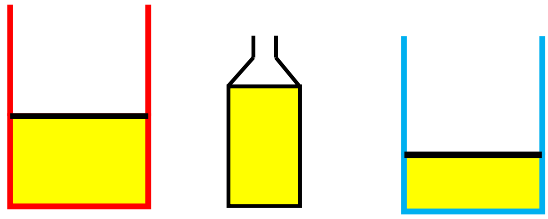




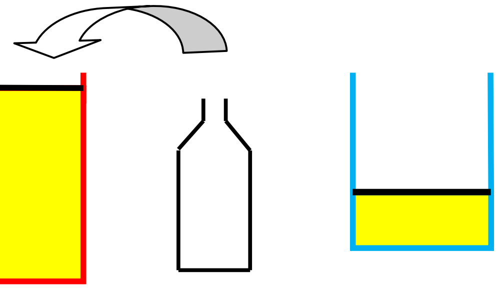
Combien contient le flacon ?

Ecris ici tes calculs	**Ecris ici ta réponse**
Jap	

On a versé de l'eau dans les vases rouge et bleu.
Il y a 15 litres dans le vase rouge.
On a un bidon plein d'eau.

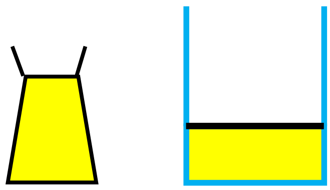


15 litres

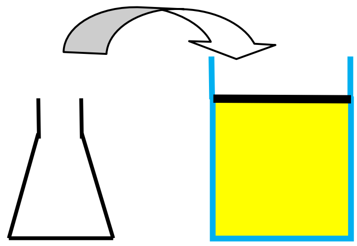


On verse le bidon dans le vase rouge
Il y a maintenant 32 litres dans le vase rouge

32 litres



On a un flacon plein d'eau qui contient
autant que le bidon



On verse le flacon dans le vase bleu
Il y a maintenant 3 litres de moins dans le vase bleu
que dans le vase rouge.

Combien de litres y avait-il avant dans le vase bleu ?

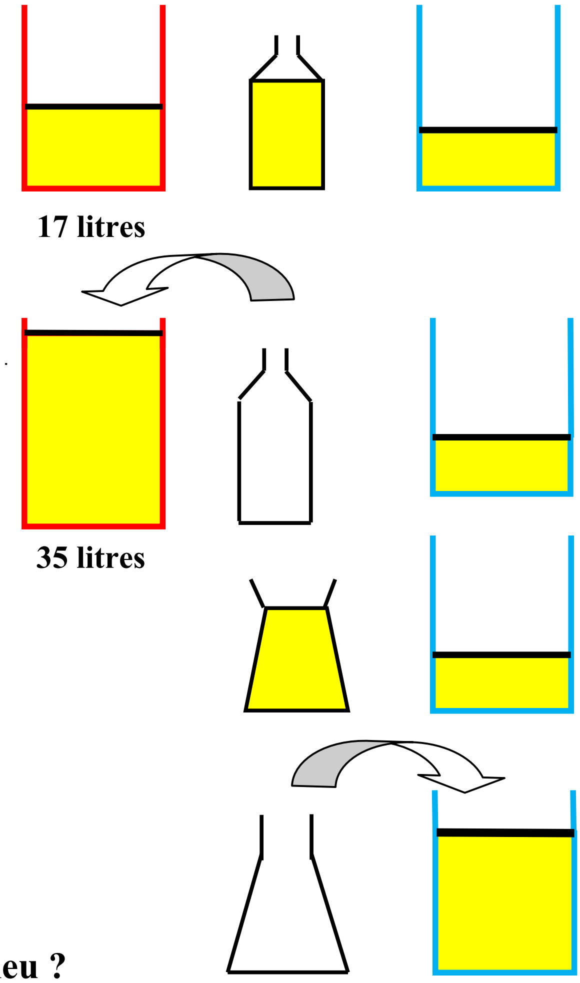
Ecris ici tes calculs	**Ecris ici ta réponse**

jap

Aline a commencé les cours de théâtre à 14 ans et s'est arrêtée à 32 ans. Léa a suivi les cours de théâtre pendant autant de temps qu'Aline et s'est arrêtée 2 ans plus tôt. **A quel âge Léa a-t-elle commencé les cours de théâtre?**

<u>Ecris ici tes calculs</u>	**<u>Ecris ici ta réponse</u>**

zap



On a versé 17 litres d'eau dans le vase rouge
On a un bidon plein d'eau

On verse le bidon dans le vase rouge
Il y a maintenant 35 litres dans le vase rouge.
Dans le vase bleu il y a 3 litres de moins
qu'il y avait au début dans le vase rouge

On a un flacon plein d'eau qui
Contient autant que le bidon

On le verse dans le vase bleu

Combien de litres y a-t-il dans le vase bleu ?

Ecris ici tes calculs	**Ecris ici ta réponse**

jat

Luc a commencé les cours de théâtre à 19 ans et s'est arrêté à 33 ans. Pierre a commencé 2 ans plus tôt et a suivi les cours de théâtre pendant autant de temps que Nicolas. **A quel âge Pierre s'est-il arrêté ?**

<u>**Ecris ici tes calculs**</u>	<u>**Ecris ici ta réponse**</u>

zat

Dans la classe de CP il y a 16 élèves. Quand les CP vont à la salle de la cantine avec les CE2 ils sont 33. Quand les CM1 sont à la salle d'étude avec les CE2 à la place des CP, ils sont 2 de moins dans la salle. **Combien sont-ils dans la classe de CM1 ?**

Ecris ici tes calculs	**Ecris ici ta réponse**

xap

Annexe C : Problèmes du pré et post test

N° ________

Prénom : ____________________________________

Ecole : ____________________________________

Date de naissance : __________________________

Classe : ____________________________________

Dans le groupe de gymnastique il y a 20 personnes. Dans le groupe de musique il y a 3 personnes de moins que dans le groupe de gymnastique. Quand le groupe de gymnastique va au pique-nique avec le groupe de théâtre ils sont 35. Le groupe de musique va au restaurant avec le groupe de théâtre. **Combien sont-ils à table ?**
<u>Ecris ici tes calculs</u>
<u>Ecris ici ta réponse</u>
<u>« Cherche s'il y a une autre façon de résoudre le problème. Si tu en trouves écris ici tes calculs ».</u>

xat

Dans le groupe de ballet il y a 15 personnes. Quand le groupe de ballet va au cinéma avec le groupe de piano ils sont 31. Quand le groupe de piano va au spectacle avec le groupe de chant ils sont 2 personnes de moins.

Combien sont-ils dans le groupe de chant ?

Ecris ici tes calculs

Ecris ici ta réponse

« Cherche s'il y a une autre façon de résoudre le problème. Si tu en trouves écris ici tes calculs ».

xap

Mathieu a 8 billes avant la récréation. Pendant la récréation, il gagne 6 billes à une première partie, et perd 2 billes à une deuxième partie. **Combien de billes a-t-il après la récréation ?**	
Ecris ici tes calculs	**Ecris ici ton résultat**

Aline a suivi les cours de danse pendant 16 ans. Léa a commencé au même âge qu'Aline et a suivi les cours 3 ans de moins. Aline s'est arrêtée à 35 ans.

A quel âge Léa s'est-elle arrêtée ?

Ecris ici tes calculs

Ecris ici ta réponse

« Cherche s'il y a une autre façon de résoudre le problème. Si tu en trouves écris ici tes calculs ».

zat

Paul a suivi les cours de musique au conservatoire pendant 14 ans et s'est arrêté à 36 ans. Pierre a commencé au même âge que Paul et s'est arrêté 2 ans avant. **Combien de temps Pierre a-t-il suivi les cours de musique ?**
Ecris ici tes calculs
Ecris ici ta réponse
« Cherche s'il y a une autre façon de résoudre le problème. Si tu en trouves écris ici tes calculs ».

zap

Stéphane achète une bande-dessinée à 6 euros, des crayons de couleurs à 5 euros, et des tubes de peintures à 2 euros. **Combien paie-t-il en tout ?**	
Ecris ici tes calculs	**Ecris ici ton résultat**

Annexe D : Protôle de passation de l'apprentissage du transfert des procédures

Apprentissage différence-comparaison : âges vers effectifs

QUESTION TOUT

Modèle

LUCAS		ERIC
Durée des cours : 16 ans	2 ans de moins	?
Age de début des cours : ?	même âge	?
Âge de fin des cours : 33 ans	2 ANS PLUS TÔT	31 ans

Problème à résoudre

NICOLAS		EMILE
Durée des cours : 14 ans	3 ans de moins	?
Début des cours : ?	même âge	?
Âge de fin des cours : 32 ans		Question

On met Nicolas à gauche parce qu'on sait plus de choses sur lui, comme Lucas.

Ce qu'il y a de pareil :

Durée des cours : on connaît la durée pour Nicolas et pour Emile c'est 3 ans de moins

Age de début des cours : on ne le connaît pas mais on sait que c'est le même pour les deux

Âge de fin des cours : on le connaît pour Nicolas et on demande combien c'est pour Emile

On pourrait aussi écrire :

Age de début des cours : on ne le connaît pas mais on sait que c'est le même pour les deux

Durée des cours : on connaît la durée pour Nicolas et pour Emile c'est 3 ans de moins

Âge de fin des cours : on le connaît pour Nicolas et on demande combien c'est pour Emile

Raisonnement à faire :

Dans le premier problème le raisonnement est :

Si Eric a commencé au même âge, s'il a suivi les cours 2 ans de moins, alors il s'est arrêté 2 ans plus tôt.

(Éventuellement faire l'analogie avec une course)

Quel raisonnement on va faire ?

Si Emile a commencé au même âge, s'il a suivi les cours 3 ans de moins, alors il s'est arrêté 3 ans plus tôt.

On écrit :

NICOLAS		EMILE
Durée des cours : 14 ans	3 ans de moins	?
Début des cours : ?	même âge	?
Âge de fin des cours : 32 ans	3 ANS PLUS TÔT	32-3= 29 ans

La colonne du milieu est la colonne des relations, celles de gauche et droite celles des personnes qui se ressemblent.

Modèle

NICOLAS		EMILE
Durée des cours : 14 ans	3 ans de moins	?
Début des cours : ?	même âge	?
Âge de fin des cours : 32 ans	3 ANS PLUS TÔT	32-3= 29 ans

Problème à résoudre :

VASE ROUGE		VASE BLEU
une quantité d'eau au début	la même quantité	une quantité d'eau au début
on verse un bidon de 19 litres	2 litres de moins	on verse le flacon de 2 litres de moins
après il y a 34 litres		question

On a deux vases le rouge et le bleu, on va mettre à gauche celui sur lequel on sait plus de choses : le rouge. On avait mis Nicolas à gauche parce que c'est celui sur qui on sait le plus.

On verse une même quantité d'eau au début dans les deux on écrit la même quantité dans la colonne des relations.

On a un bidon de 19 litres on le verse dans le vase rouge : on l'écrit à gauche

On écrit qu'il y a 34 litres dans le vase rouge.

On verse le flacon qui contient 2 litres de moins dans le vase bleu, on l'écrit à droite. Au milieu on écrit 2 litres de moins parce qu'on a versé deux litres de moins dans le vase bleu.

On demande combien il y a après dans le vase bleu : on écrit la question

(note : on remplit le tableau progressivement, comme plus loin

Qu'est-ce qu'il y a de pareil et de différent ?

On a des vases au lieu de personnes, on a des litres pour les vases et des ans pour les personnes, mais les litres sont comme les ans : ce sont des quantités. Pour les deux problèmes :

On a une quantité au départ qui est la même pour les deux, on ajoute une quantité et on a une quantité plus grande à la fin. On va écrire les choses dans le même ordre :

Modèle

NICOLAS		EMILE
Début des cours : ?	même âge	?
Durée des cours : 14 ans	3 ans de moins	?
Âge de fin des cours : 32 ans	3 ANS PLUS TÔT	32-3= 29 ans

Problème à résoudre :

VASE ROUGE		VASE BLEU
une quantité d'eau au début	la même quantité	une quantité d'eau au début
on verse un bidon de 19 litres	2litres de moins	on verse le flacon de 2 litres de moins
après il y a 34 litres	2 LITRES DE MOINS	question

On va faire le même raisonnement. Pour le dernier problème, le raisonnement est :

Si Emile a commencé au même âge, s'il a suivi les cours 3 ans de moins, alors il s'est arrêté 3 ans plus tôt.

on a écrit la relation 3 ANS PLUS TÔT dans la colonne des relations

on fait le même raisonnement pour les vases (en montrant la colonne du milieu) :

au début il y a la même quantité d'eau dans les deux vases, on ajoute de l'eau dans les deux vases mais 2 litres de moins dans le bleu, donc après il y a 2 litres de moins dans le vase bleu que dans le rouge : on écrit 2 LITRES DE MOINS

La solution est 34-2=32 : il y a 32 litres dans le vase bleu.

Modèle

VASE ROUGE		VASE BLEU
une quantité d'eau au début	la même quantité	une quantité d'eau au début
on verse un bidon de 19 litres	2litres de moins	on verse le flacon de 2 litres de moins
après il y a 34 litres	2 LITRES DE MOINS	34-2=31 litres

Dans la classe de CM2 il y a 13 élèves et dans la classe de CE1 il y a 2 élèves de moins

La classe de CM2 c'est comme le bidon et la classe de CE1 c'est comme le flacon : il y a 2 de moins en quantité. On va écrire cela comme on l'a fait pour les vases

CM2 : 13 élèves	2 de moins	CE1 : 2 élèves de moins

Quand les CM2 vont à la cantine avec les CM1 ils sont 36 :c'est comme le bidon qui a été ajouté à l'eau qui était dans le vase rouge.

Les élèves de CM1 : c'est comme l'eau qui était avant dans le vase rouge.

Les élèves de CM2 : c'est comme l'eau qui était dans le bidon.

Les élèves à la cantine : c'est comme l'eau qui est dans le bidon à la fin.

On va donc écrire à la dernière ligne CM2+CM1 : 36 élèves , à la première CANTINE et à la seconde CM1.

CANTINE		
CM1		
CM2 : 13 élèves	2 de moins	CE1 : 2 élèves de moins
CM2+CM1 : 36 élèves		CE1+CM1 : combien

Si à la place des CM2 les CE1 vont à l'étude avec les CM1, combien seront-ils dans la salle ? L'étude c'est comme le vase bleu, on l'écrit à droite et les CE1 +CM1 c'est comme ce qu'il y avait dans le vase bleu après, on l'écrit à la dernière ligne à droite.

CANTINE		ETUDE
CM1		
CM2 : 13 élèves	2 de moins	CE1 : 2 élèves de moins
CM2+CM1 : 36 élèves		CE1+CM1 : combien

Il faut compléter le tableau. Qu'est-ce qu'il faut mettre à la deuxième ligne en-dessous d'ETUDE : les CM1 auxquels on rajoute les CE1 pour aller à l'étude.

C'est comme à la cantine : on a les CM1 et on rajoute les CM2 pour aller à la cantine.

A la colonne du milieu on écrit que c'est le même nombre d'élèves, puisque dans les deux cas il y a les CM1.

On a donc :

CANTINE		ETUDE
CM1	le même nombre	CM1
CM2 : 13 élèves	2 de moins	CE1 : 2 élèves de moins
CM2+CM1 : 36 élèves	2 DE MOINS	CE1+CM1 : 34

Pour les vases on a fait le raisonnement :

Au début il y a la même quantité d'eau dans les deux vases, on ajoute de l'eau dans les deux vases mais 2 litres de moins dans le bleu, donc après il y a 2 litres de moins dans le vase bleu que dans le rouge : on écrit 2 LITRES DE MOINS

La solution est 34-2=32 : il y a 32 litres dans le vase bleu

On fait donc le raisonnement :

Comme les CM1 vont à la fois à la cantine et à l'étude, comme les CE1 qui vont avec eux à l'étude sont 2 de moins que les CM2 qui vont avec eux à la cantine, ils seront 2 de moins à l'étude qu'à la cantine.

Donc 36-2=34. Ils seront 34 élèves à l'étude.

Apprentissage différence-comparaison : âges vers effectifs

QUESTION PARTIE

Modèle

PAUL		PIERRE
Durée des cours : 14 ans	2 ANS DE MOINS	12 ans
Age de début des cours : ?	Même âge	?
Âge de fin des cours : 36 ans	2 ans plus tôt	?

Problème à résoudre

MARINA		EVA
Durée des cours : 15 ans	3 ANS DE MOINS	?
Début des cours : ?	même âge	?
Âge de fin des cours : 32 ans	3 ans plus tôt	?

On met PAUL à gauche parce qu'on sait plus de choses sur lui que sur Pierre.

Ce qu'il y a de pareil :

Durée des cours : on connaît la durée pour Paul, on ne dit pas combien pour PIERRE mais on indique que c'est 2 ans de moins

On connaît la durée pur Marina, on ne dit pas combien pour Eva mais on indique que c'est 3 ans de moins.

Age de début des cours : on ne le connaît pas mais on sait que c'est le même pour les deux.

Âge de fin des cours : on le connaît pour PAUL et on pose la question pour Pierre : on le connaît pour Marina et on pose la question pour Eva.

On pourrait aussi écrire :

Age de début des cours : on ne le connaît pas mais on sait que c'est le même pour les deux.

Durée des cours : on connaît la durée pour PAUL et on demande combien c'est pour PIERRE.

Âge de fin des cours : On le connaît pour Paul et on pose la question pour Pierre.

Raisonnement à faire :

Dans le premier problème le raisonnement est :

Si PIERRE a commencé au même âge, s'il s'est arrêté 2 ans plus tôt, alors il a suivi les cours 2 ans de moins. (Éventuellement faire l'analogie avec une course).

Quel raisonnement on va faire ?

Si EVA a commencé au même âge, si elle s'est arrêtée 2 ans plus tôt, alors elle a suivi les cours 2 ans de moins.

On écrit :

MARINA		EVA
Durée des cours : 15 ans	3 ANS DE MOINS	15-3=12 ans
Début des cours : ?	même âge	?
Âge de fin des cours : 32 ans	3 ans plus tôt	?

La colonne du milieu est la colonne des relations, celles de gauche et droite celles des personnes qui se ressemblent.

Modèle

MARINA		EVA
Durée des cours : 15 ans	3 ANS DE MOINS	15-3=12 ans
Début des cours : ?	même âge	?
Âge de fin des cours : 32 ans	3 ans plus tôt	?

Problème à résoudre :

VASE ROUGE		VASE BLEU
une quantité d'eau au début	la même quantité	une quantité d'eau au début
on verse un bidon de 18 litres	3 LITRES DE MOINS	on verse le flacon : combien ?
après il y a 35 litres	3 litres de moins	Question

On a deux vases : le rouge et le bleu, on va mettre à gauche celui sur lequel on sait plus de choses, le rouge. On avait mis MARINA à gauche parce que c'est celle sur laquelle on sait le plus.

On verse une même quantité d'eau au début dans les deux on écrit la même quantité dans la colonne des relations.

On a un bidon de 18 litres on le verse dans le vase rouge : on l'écrit à gauche.

Après il y a 35 litres dans le vase rouge.

On a un flacon qu'on verse dans le vase bleu, on l'écrit à droite.

Il y a 3 litres de moins dans le vase bleu que dans le vase rouge, Au milieu on écrit 3 litres de moins parce qu'il y a 3 litres de moins dans le vase bleu.

On demande combien il y a dans le flacon : on écrit question.

Qu'est-ce qu'il y a de pareil et de différent ?

On a des vases au lieu de personnes, on a des litres pour les vases et des ans pour les personnes, mais les litres sont comme les ans : ce sont des quantités. Pour les deux problèmes :

On a une quantité au départ qui est la même pour les deux, on ajoute une quantité et on a une quantité plus grande à la fin. On va écrire les choses dans le même ordre :

Modèle

MARINA		EVA
Durée des cours : 15 ans	3 ANS DE MOINS	15-3=12 ans
Début des cours : ?	même âge	?
Âge de fin des cours : 32 ans	3 ans plus tôt	?

Problème à résoudre :

VASE ROUGE		VASE BLEU
une quantité d'eau au début	la même quantité	une quantité d'eau au début
on verse un bidon de 18 litres	3 LITRES DE MOINS	on verse le flacon : combien ?
après il y a 35 litres	3 litres de moins	Question

On va faire le même raisonnement. Pour le dernier problème, le raisonnement est :

Si EVA a commencé au même âge, si elle s'est arrêtée 3 ans plus tôt, alors elle a suivi les cours 3 ans de moins.

On a écrit la relation 3 ANS PLUS TÔT dans la colonne des relations.

On fait le même raisonnement pour les vases (en montrant la colonne du milieu).

Pour le flacon et le bidon on a fait le raisonnement :

Au début il y a la même quantité d'eau dans les deux vases, mais on ajoute l'eau du bidon dans le vase rouge, et on verse celle du flacon dans le vase bleu qui contient après 3 litres de moins que le vase rouge, donc il y a 3 litres de moins dans le flacon que dans le bidon : on écrit 3 LITRES DE MOINS dans la colonne des relations.

La solution est 18-3=15 : il y a 15 litres dans le flacon.

Modèle

VASE ROUGE		VASE BLEU
une quantité d'eau au début	la même quantité	une quantité d'eau au début
on verse un bidon de 18 litres	3 LITRES DE MOINS	18-3=15 litres
après il y a 35 litres	3 litres de moins	

Dans le groupe de ballet il y a 21 personnes. Quand le groupe de ballet va au cinéma avec le groupe de piano ils sont 32. Le groupe de ballet c'est comme le vase rouge avant qu'on verse le bidon.

Le groupe de piano c'est comme le bidon.

Les groupes au cinéma c'est comme le vase rouge après qu'on ait versé le bidon.

Le groupe de ballet et le groupe de piano au cinéma c'est comme le bidon ajouté à l'eau qui était dans le vase rouge.

Le groupe de piano : c'est comme l'eau qui était avant dans le vase rouge.

Le groupe de ballet : c'est comme l'eau qui était dans le bidon.

Les deux groupes au cinéma : c'est comme l'eau qui est dans le vase rouge à la fin.

On va donc écrire à la dernière ligne BALLET+PIANO : 32 personnes, à la première CINEMA et à la seconde PIANO.

CINEMA		
PIANO		
BALLET : 21 personnes		
BALLET + PIANO : 32 personnes		

Quand le groupe de piano va au spectacle avec le groupe de chant ils sont 3 personnes de moins. Combien sont-ils dans le groupe de chant ?

Le groupe de: piano c'est comme l'eau qui était dans le flacon avant le groupe de chant c'est comme l'eau qui était dans le bidon.

Les élèves au spectacle c'est comme ce qu'il y avait après dans le vase bleu

Le groupe de piano et le groupe de chant au spectacle sont 3 personnes de moins. On écrit à droite PIANO+CHANT ; c'est comme le vase bleu qui avait 3 litres de moins à la fin après avoir versé le flacon.

CINEMA		SPECTACLE
PIANO		
BALLET : 21 personnes		CHANT : combien ?
BALLET+ PIANO: 32 personnes	3 de moins	CHANT+PIANO : 3 de moins

Il faut compléter le tableau. Qu'est-ce qu'il faut mettre à la deuxième ligne en-dessous de SPECTACLE : le groupe de PIANO auxquels on rajoute le groupe de CHANT pour aller au

spectacle. C'est comme au CINEMA : on a le group de PIANO et on rajoute le groupe BALLET pour aller au CINEMA. A la colonne du milieu on écrit que c'est le même nombre de personnes, puisque dans les deux cas il y a le groupe de PIANO.
On a donc :

CINEMA		SPECTACLE
PIANO	Le même nombre	PIANO
BALLET : 21 personnes	3 DE MOINS	CHANT : combien ?
BALLET+ PIANO: 32 personnes	3 de moins	CHANT+PIANO :3 de moins

Pour le flacon et le bidon on a fait le raisonnement :

Au début il y a la même quantité d'eau dans les deux vases, mais on ajoute l'eau du bidon dans le vase rouge, et on verse celle du flacon dans le vase bleu qui contient après 3 litres de moins que le vase rouge, donc il y a 3 litres de moins dans le flacon que dans le bidon : on écrit 3 LITRES DE MOINS.
La solution est 18-3=15 : il y a 15 litres dans le flacon.

On fait donc le raisonnement :

Comme le groupe de PIANO va à la fois au CINEMA et au SPECTACLE, comme au SPECTACLE le groupe de PIANO et le groupe de CHANT sont 3 personnes de moins que le groupe de PIANO ET BALLET qui vont au CINEMA, ils seront 3 de moins dans le groupe de CHANT que dans le groupe de BALLET.

Donc 21-3=18. Ils seront 18 élèves dans le groupe de chant

Apprentissage différence-complément effectifs vers âges

QUESTION TOUT

Modèle

CE2 19 élèves

CANTINE	CE2 19	CP ?
	33 élèves	

en CP 33 – 19 = 14 élèves

CE2	2 élèves de moins	CM1

en CM1 19 – 2 = 17 élèves

ETUDE	CP 14	CM1 17
	?	

à l'étude il y a 14 + 17 = 31 élèves

Problème à résoudre

CM2 21 élèves

CANTINE	CM2 23	CM1 ?
	37 élèves	

en CM1 il y a 37 – 21 = 16 élèves

CM2	3 élèves de moins	CE1

en CE1 il y a 21 – 3 = 18 élèves

ETUDE	CE1 18 élèves	CM1 16 élèves
	?	

à l'étude il y a 18 + 16 = 34 élèves

A la cantine il y a les CM2 et les CM1, ils sont ensemble 37.

On sait combien sont les CM2, mais on ne sait pas combien sont les CM1.

A la salle d'étude il y a les CE1 et les CM1.

On ne sait pas combien sont les CE1 mais on sait qu'ils sont 2 élèves de moins que les CM2.

Ce qu'il y a de pareil :

Les CM1 vont avec les CM2 à la cantine et avec les CE1 à la salle d'étude.

<u>Raisonnement à faire :</u>
Dans le premier problème le raisonnement est :

Les élèves à la cantine sont CE2 et les CP, ensemble ils sont 33

Donc les CP sont 33-19=14 élèves

Les CM1 sont 2 de moins que les CE2

Donc les CM1 sont : 19-2=17 élèves dans la classe de CM1

Les élèves à la salle d'étude sont les CM et les CP

Donc à la salle d'étude ils sont 17+14=31 élèves

<u>Quel raisonnement on va faire pour le deuxième problème?</u>
Les élèves à la cantine sont CM2 et les CM1, ensemble ils sont 37.

Donc les CM1 sont 37-21=16 élèves.

Les CE1 sont 3 de moins que les CM2.

Donc les CE1 sont : 21-3=18 élèves dans la classe de CE1.

Les élèves à la salle d'étude sont les CE1 et les CM1.

Donc à la salle d'étude ils sont 16+18=34 élèves.

Modèle

CM2 21	

CANTINE	CM2 21	CM1 ?
	37 élèves	

en CM1 il y a 37 – 21 = 16 élèves

CM2	3 élèves de moins	CE1

en CE1 21 – 3 = 18 élèves

ETUDE	CE1 18	CM1 16
	?	

à l'étude il y a 18 + 16 = 34 élèves

problème à résoudre

VASE ROUGE 11 litres	

VASE ROUGE	Vase rouge 11 litres	Bidon ?
	33 litres	

dans le bidon il y a 33-11=22 litres

Vase rouge	2 litres de moins	Vase bleu au début

dans le vase bleu il y avait au début : 11-2=9 litres

Vase bleu	Flacon 22 litres	Vase bleu au début : 9
	?	

Dans le vase bleu il y a 22+9=31 litres

On a versé 11 litres d'eau dans le VASE ROUGE

On a un bidon plein d'eau on le verse dans le vase rouge. Après il y a 33 litres dans le vase rouge.

Dans le VASE BLEU il y a 2 litres de moins qu'il y avait au début dans le vase rouge.

On a un flacon plein d'eau qui contient autant que le bidon ; on verse le flacon dans le vase bleu. On demande combien il y a dans le VASE BLEU ? :

<u>Qu'est-ce qu'il y a de pareil et de différent ?</u>

On a des vases au lieu des salles, on a des litres pour les vases et les élèves pour les salles, mais les litres sont comme les élèves : ce sont des quantités.

Pour le problème des vases :

on a une quantité au départ dans le vase rouge, on ajoute une quantité et on a une quantité plus grande à la fin.

On va faire le même raisonnement pour les élèves que pour les vases :

Les élèves à la cantine sont CM2 et les CM1, ensemble ils sont 37

Donc les CM1 sont 37-21=16 élèves

Les CE1 sont 3 de moins que les CM2

Donc les CE1 sont : 21-3=18 élèves dans la classe de CE1.

Les élèves à la salle d'étude sont les CE1 et les CM1

Donc à la salle d'étude ils sont 18+16=34 élèves

<u>On fait le même raisonnement pour les vases</u> :

Au début il y a 11 litres dans le vase rouge on ajoute l'eau du bidon dans le vase rouge. Après il y a 33 litres dans le vase rouge.

Donc dans le bidon il y avait : 22 litres

Ce qu'il y a dans le vase rouge après avoir versé le bidon c'est comme les élèves à la cantine : les 11 litres qu'il y a avant c'est comme les 21 élèves de CM2 et le bidon c'est comme le CM1 : il faut calculer combien il y a de litres dans le bidon, comme il fallait calculer combien il y a d'élèves dans la classe de CM1.

Dans le vase bleu il y avait 2 litres de moins qu'il y avait au début dans le vase rouge.

Donc dans le vase bleu il y avait au début : 11-2=9 litres.

C'est comme les CE1 qui sont 3 de moins que les CM1 : 21-3=18 élèves.

On verse l'eau du flacon dans le vase bleu. Comme le flacon contient autant que le bidon, on a versé 22 litres dans le vase bleu.

Donc après il y a 22+9=31 litres dans le vase bleu.

C'est comme les CE1 avec les CM1 à l'étude : ils sont 18 au CE1 et 16 au CM1, en tout ils sont 34 élèves.

Modèle

VASE ROUGE 11 litres

<table>
<tr><td rowspan="2">VASE ROUGE</td><td>Vase rouge
11 litres</td><td>Bidon
?</td></tr>
<tr><td colspan="2">33 litres</td></tr>
</table>

dans le bidon il y a 33-11=22 litres

Vase rouge	2 litres de moins	Vase bleu au début

Dans le vase bleu il y avait au début : 11-2=9 litres

<table>
<tr><td rowspan="2">Vase bleu</td><td>Flacon
22 litres</td><td>Vase bleu au début : 9 litres</td></tr>
<tr><td colspan="2">?</td></tr>
</table>

Dans le vase bleu il y a 22+9=31 litres

Problème à résoudre

LUC : 14 ans

<table>
<tr><td rowspan="2">LUC</td><td>Début des cours : 14 ans</td><td>Durée des cours ?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fin des cours 31 ans</td></tr>
</table>

Luc a suivi les cours pendant 31-14=17 ans

LUC	2 ans plus tôt	PIERRE

Pierre a commencé à 14-2=12 ans

<table>
<tr><td rowspan="2">LUC</td><td>Début des cours : 12 ans</td><td>Durée des cours : 17 ans</td></tr>
<tr><td colspan="2">?</td></tr>
</table>

Luc s'est arrêté à : 12+17=29 ans

Luc a commencé les cours de théâtre à 14 ans et s'est arrêté à 31 ans.

L'âge de début des cours c'est comme les 11 litres qu'il y avait au début dans le vase rouge.

L'âge de fin des cours c'est comme les 33 litres qu'il y a après dans le vase rouge quand on a versé le bidon.

La durée des cours c'est comme l'eau du bidon.

On va écrire cela comme on l'a fait pour les vases :

Pierre a commencé 2 ans plus tôt et a suivi les cours de théâtre pendant autant de temps que Luc. A quel âge Pierre s'est-il arrêté ?

L'âge du début des cours de Pierre c'est comme les 2 litres de moins qu'il y avait au début dans le vase bleu par rapport au vase rouge.

La durée des cours de Pierre c'est comme ce qui était dans le flacon.

La fin des cours de Pierre c'est comme ce qu'il y avait dans le vase bleu après avoir versé le flacon.

Pour les vases on a fait le raisonnement :

Au début il y a 11 litres dans le vase rouge on ajoute l'au du bidon dans le vase rouge. Après il y a 33 litres dans le vase rouge.
Donc dans le bidon il y avait : 22 litres.
Dans le vase bleu il y avait 2 litres de moins qu'il y avait au début dans le vase rouge,
donc dans le vase bleu il y avait au début : 11-2=9 litres.
On verse l'eau du flacon dans le vase bleu. Comme le flacon contient autant que le bidon, on a versé : 22 litres dans le vase bleu.
Donc après il y a 22+9=31 litres dans le vase rouge.

On fait donc le raisonnement :

Luc a commencé à 14 ans. Il a arrêté les cours à 31 ans.
Donc il a suivi les cours pendant : 31-14=17 ans
Pierre a commencé deux ans plus tôt.
Donc il a commencé à : 14-2= 12 ans
Comme il a suivi les cours pendant autant de temps que Luc ; il a suivi les cours pendant 17 ans.
Donc il s'est arrêté à : 17+12=29 ans

Apprentissage différence complément effectifs vers âges :

QUESTION PARTIE

Modèle

CP 14

CANTINE	CP 14	CM1 ?
	32 élèves	

en CM1 il y a 32 – 14 = 18 élèves

CANTINE	2 élèves de moins	ETUDE

à l'étude il y a 32– 2 = 30 élèves élèves

ETUDE	CM1 18	CM2 ?
	30	

En CM2 il y a 30 - 18 = 12 élèves

Problème à résoudre

CM2 16

CANTINE	CM2 16	CM1 ?
	35 élèves	

en CM1 il y a 35 – 16 = 19 élèves

CANTINE	3 élèves de moins	ETUDE

à l'étude il y a 35 – 3 = 32

ETUDE	CM1 19 élèves	CE1 ?
	32	

En CE1 il y a 32-19= 13 élèves

A la cantine il y a les CM2 et les CM1, ils sont ensemble 35.

On sait combien sont les CM2, mais on ne sait pas combien sont les CM1.

A la salle d'étude il y a les CE1 et les CM1.

On ne sait pas combien sont les CE1 mais on sait que les élèves à la salle s'étude sont 2 de moins que les élèves à la cantine.

<u>Ce qu'il y a de pareil :</u>
Les CM1 vont avec les CM2 à la cantine et avec les CE1 à la salle d'étude.

<u>Raisonnement à faire :</u>
Dans le premier problème le raisonnement est :

Les **CP** et les **CM1** sont ensemble **32** à la salle de la cantine

Les **CP** sont **14 élèves**

Donc les CM1 sont **32 - 14**= **18 élèves**

A la salle de la salle d'étude les **CM1** et les **CM2** sont **2** de moins que les élèves dans la salle de la cantine.

Donc les **CM1** et les **CM2** ensemble sont **32 - 2**=**30 élèves.**

Comme les **CM1** sont **18** alors les **CM2** sont : **30 - 18**=**12 élèves.**

<u>Quel raisonnement on va faire ?</u>

Les CM2 et les CM1 sont ensemble 35 à la salle de la cantine

Les CM2 sont 16 élèves.

Donc les CM1 sont 35 - 16= 19 élèves.

A la salle d'étude les CE1 et les CM1 sont 3 de moins que les élèves dans la salle de la cantine

Donc les CE1 et les CM1 ensemble sont 35 - 3=32 élèves.

Comme les CM1 sont 18 alors les CM2 sont : 32 - 19=13 élèves.

Modèle

CM2 16

CANTINE	CM2 16	CM1 ?
	35 élèves	

en CM1 il y a 35 – 16 = 19 élèves

CANTINE	3 élèves de moins	ETUDE

à l'étude il y 35-3 =32 élèves

ETUDE	CM1 19	CE1 ?
	32 élèves	

en CE1 il y a 32-19= 13 élèves

Problème à résoudre

VASE ROUGE 13 litres

VASE ROUGE	Vase rouge au début : 13 litres	Bidon ?
	après il y a 33 litres	

dans le bidon il y a 33-13=20 litres

Vase rouge Après avoir	2 litres de moins	Vase bleu après avoir versé le

dans le vase bleu il y a à la fin : 33-2=31 litres

Vase bleu	Flacon 15 litres	Vase bleu au début ?
	Vase bleu à la fin : 31 litres	

Dans le vase bleu il y avait au début 31-20=11 litres

On a deux vases : le rouge et le bleu. On verse 13 litres d'eau dans le vase rouge.
On a un bidon d'eau on ne sait pas combien il contient, on le verse dans le vase rouge. Après il y a 33 litres dans le vase rouge.
On a un flacon plein d'eau qui contient autant que le bidon. On verse le flacon dans le vase bleu. Il y a 2 litres de moins dans le vase bleu que dans le vase rouge.
On demande combien il y avait au début dans le vase bleu.

<u>Qu'est-ce qu'il y a de pareil et de différent ?</u>

On a des vases au lieu des salles, on a des litres pour les vases et les élèves pour les salles, mais les litres sont comme les élèves : ce sont des quantités. Pour les deux problèmes : on a une quantité au départ dans le vase rouge, on ajoute une quantité et on a une quantité plus grande à la fin.

<u>On va faire le même raisonnement. Pour le dernier problème, le raisonnement est</u> :

Les **CM2** et les **CM1** sont ensemble 35 à la salle de la cantine
Les **CM2** sont 17 élèves.
Donc les **CM1** sont 35 - 17= 18 élèves.
A la salle d'étude les CE1 et les CM1 sont 3 de moins que les élèves dans la salle de la cantine
Donc les **CE1** et les **CM1** ensemble sont 35 - 3=32 élèves.
Comme les **CM1** sont 18 alors les **CE1** sont : 32 - 18=12 élèves.

<u>On fait le même raisonnement pour la quantité du vase bleu au début :</u>

Au début il y a 13 litres dans le vase rouge on ajoute l'eau du bidon dans le vase rouge. Après il y a 33 litres dans le vase rouge.
Donc dans le bidon il y avait : 20 litres
Après avoir versé le flacon dans le vase bleu, il y a 2 litres de moins dans le vase bleu que dans le vase rouge
Donc il y a dans le vase bleu : 33-2=31 litres
Comme le flacon contient autant que le bidon, on a versé 20 litres dans le vase bleu.
Donc il y avait avant dans le vase bleu 31-20=11 litres.

Modèle | **Problème à résoudre**

VASE ROUGE
13 litres

VASE ROUGE | Vase rouge au début 13 litres | Bidon ?
Après il y a 33 litres

dans le bidon il y a 33-13=20 litres

ALINE : 16 ans

ALINE | Début des cours : 16 ans | Durée des cours ?
Fin des cours 34 ans

Aline a suivi les cours pendant 34-16=18 ans

Vase rouge Après avoir versé le bidon | 2 litres de moins | Vase bleu après avoir versé le flacon

dans le vase bleu il y a à la fin : 33-2=31 litres

ALINE | 2 ans plus tôt | LEA

Léa s'est arrêtée à 34-2=32 ans

Vase bleu | Flacon 20 litres | Vase bleu au début : ?
Vase bleu à la fin : 31 litres

dans le vase bleu il y avait au début 31-20=11 litres

LEA | Début des cours : ? | Durée des cours : 18 ans
Fin des cours à 32 ans

Léa a commencé à : 32-18=14 ans

Aline a commencé les cours de théâtre à 16 ans et s'est arrêtée à 34 ans.

Le début des cours c'est comme les 13 litres qu'il y avait au début dans le vase rouge. La fin des cours c'est comme les 33 litres qu'il y a dans le vase rouge après avoir versé le bidon.

Le début des cours c'est comme la quantité qu'il y a au début dans le vase rouge avant de verser le bidon.

La durée des cours c'est comme le bidon, on ne la connait pas.

La fin des cours c'est comme la quantité qu'il a dans le vase rouge après avoir versé le bidon.

Le début des cours c'est comme l'eau qui était au début du vase rouge.

La durée des cours : c'est comme l'eau qui était dans le bidon.

La fin des cours : c'est comme l'eau qui est dans le vase rouge à la fin.

Léa a suivi les cours de théâtre pendant autant de temps qu'Aline et s'est arrêtée 2 ans plus tôt. A quel âge Léa a-t-elle commencé les cours de théâtre?

La durée des cours de Léa c'est comme l'eau qui était dans le flacon avec la même quantité que le bidon.

La fin des cours de Léa c'est comme l'eau qui était dans le vase bleu après avoir versé le flacon. Léa s'est arrêtée 2 ans plus tôt ; la fin des cours : 2 ans de moins, c'est comme le vase bleu qui avait 2 litres de moins à la fin après avoir versé le flacon.

Pour LEA : on ajoute la durée des cours au début des cours auquel pour arriver à la fin des cours. C'est comme pour ALINE : on a le début des cours auquel on ajoute la durée des cours pour arriver à la fin des cours.

<u>Pour la quantité du vase bleu au début on fait le raisonnement :</u>

Au début il y a 13 litres dans le vase rouge, on ajoute l'eau du bidon dans le vase rouge. Après il y a 33 litres dans le vase rouge.

Donc dans le bidon il y avait : 20 litres

Après avoir versé le flacon dans le vase bleu, il y a 2 litres de moins dans le vase bleu que dans le vase rouge.

Donc il y a dans le vase bleu : 33-2=31 litres.

Comme le flacon contient autant que le bidon, on a versé 20 litres dans le vase bleu.

Donc il y avait avant dans le vase bleu 31-20=11 litres.

On fait donc le raisonnement :

ALINE a commencé les cours à 16 ans. Elle s'est arrêtée à 34 ans.

Donc elle a suivi les cours pendant : 34-16= 18 ans.

LEA s'est arrêtée 2 plus tôt qu'ALINE.

Donc LEA s'est arrêtée à 34-2= 32 ans.

Comme elle a suivi les cours autant de temps qu'Aline elle a suivi les cours pendant 18 ans.

Donc elle a commencé les cours à 32-18= 14 ans.

Table des encadrés

Table des figures

Table des graphiques

Table des schémas

Table des tableaux