



UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE

ECOLE DOCTORALE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
(ED184)

FACULTE DES SCIENCES

INSTITUT DE MATHEMATIQUES DE MARSEILLE, UMR 7373 (ex LABORATOIRE
D'ANALYSE TOPOLOGIE PROBABILITES, UMR 7353)

THESE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

Thomas AUPHAN

Analyse de modèles pour ITER ; Traitement des conditions aux limites de systèmes
modélisant le plasma de bord dans un tokamak

Soutenue le 18 mars 2014.

Composition du jury :

Didier BRESCH	CNRS, LAMA UMR 5127	Rapporteur
Laurence HALPERN	Université Paris 13	Rapporteur
Pierre DEGOND	Imperial College London	Président du jury
David GÉRARD-VARET	Université Denis Diderot Paris 7	Examinateur
Olivier GUÈS	Aix-Marseille-Université	Co-directeur de thèse
Philippe ANGOT	Aix-Marseille-Université	Co-directeur de thèse

Remerciements

Je commence par remercier Olivier Guès pour avoir accepté de co-diriger cette thèse, m'avoir aidé à me débattre avec ces normes à poids, ces espaces de Sobolev anisotropes... bref m'avoir fait bénéficier de sa grande culture mathématique.

Je tiens aussi à remercier Philippe Angot pour m'avoir permis de faire une thèse sous sa co-direction. Ses conseils avisés et sa rigueur scientifique m'ont beaucoup apportés.

Je suis touché par l'honneur que m'ont fait Didier Bresch et Laurence Halpern en acceptant d'être rapporteurs de cette thèse. Je remercie également Pierre Degond et David Gérard-Varet pour l'intérêt porté à mes travaux.

J'ai aussi une pensée pour tous les doctorants, post doctorants /ATERs du LATP. Notamment aux ex-membres du bureau 126, Sébastien, Fanny, Flore (la patronne), Guillaume, Hamal... et à ceux qui me supportent en 201 (Chady, Niklas, Benjamin et son minibus, Vi, Ayuna). Je n'oublie pas non plus Rima, Lionel, Mustapha, Mamadou, Boubacar, Bien, Thomas, Jordan, Bouchra, Clément, Trung (*little tiger*), Caroline... ainsi que tous ceux que j'ai eu la chance de rencontrer.

Merci à l'équipe du séminaire des doctorants et à MC2 pour les rendez-vous scientifiques conviviaux et les délicieux goûters.

Je tiens aussi à remercier les membres de l'équipe d'Analyse Appliquée pour leur accueil. Notamment à Jacques Liandrat, Franck Boyer, Florence Hubert, Thierry Gallouët, Assia Benabdallah et Anne Nouri. Une petite mention particulière à Raphaële Herbin pour son aide à la relecture du manuscrit.

Merci à l'équipe de l'ANR ESPOIR, Guido Ciraolo, Guillaume Chiavassa, Frédéric Schwaneder, Eric Serre, Philippe Ghendrih, Patrick Tamain...

Je profite aussi de ces lignes pour adresser un petit coucou à toute la bande des plongeurs, qui m'ont permis de décompresser quand c'était nécessaire (il paraît que l'eau du Congloue soigne tout!).

Quelques enseignants m'ont marqué durant ma scolarité. Je tiens particulièrement à exprimer ma gratitude à Roger Berthet (lycée) et à Mr Serre (école primaire) pour tout ce qu'ils m'ont apporté.

Merci aux techniciens et secrétaires du LATP (enfin, I2M maintenant) qui ont toujours pu répondre avec efficacité et gentillesse à mes multiples sollicitations.

Enfin, les derniers mais pas les moindres, merci à toute ma famille pour son soutien et notamment à Papa et Maman qui a accepté de me faire bénéficier de son radar à fautes d'orthographe.

Table des matières

1	Introduction	8
1.1	Quelques éléments sur le projet ITER	8
1.2	La fusion nucléaire	8
1.3	Modèles de plasma	11
1.4	La géométrie du bord d'un tokamak	12
1.5	Généralités sur les conditions aux limites étudiées dans les chapitres 2 et 4	18
1.6	Les méthodes de type domaines fictifs	18
1.6.1	Les méthodes sur le problème continu	19
1.6.2	Les méthodes sur le problème discret	21
1.6.3	Mise en évidence de la présence de couche limite pour une méthode de pénalisation	22
1.7	La problématique de la thèse	23
1.8	Résumé des résultats obtenus	23
1.8.1	Résumé du chapitre 2	24
1.8.2	Résumé du chapitre 3	25
1.8.3	Résumé du chapitre 4	27
2	Pénalisation pour un problème hyperbolique 1D	32
2.1	Présentation du schéma volumes finis utilisé	34
2.1.1	Le schéma volumes finis utilisé	34
2.1.2	Application à notre problème :	36
2.2	Les premiers essais de pénalisation	38
2.2.1	Une première méthode de pénalisation	38
2.2.2	Pénalisation des deux champs	39
2.3	Méthode de pénalisation optimale pour les CL modifiées	46
2.3.1	Développement asymptotique en ε	47
2.3.2	Tests numériques pour un limiteur à un seul coté	51
2.3.3	Pénalisation pour un limiteur à deux faces	55
2.3.4	Etude du comportement quand $ M_0 $ tend vers 1	58
2.4	Bilan du chapitre	60

3 Pénalisation d'un système quasilinéaire	62
3.1 Quelques résultats d'existence pour un système hyperbolique	62
3.1.1 Cas d'un problème hyperbolique linéaire	63
3.1.2 Plus de régularité!	73
3.1.3 Cas d'un problème quasilinéaire	79
3.1.4 Petit résumé des techniques clefs de cette partie	86
3.2 Pénalisation d'un problème hyperbolique quasilinéaire	86
3.2.1 Le théorème principal et ses hypothèses	86
3.2.2 Le développement asymptotique formel	93
3.2.3 Propriétés du problème pénalisé et estimation de l'erreur de pénalisation	97
3.2.4 Un premier exemple d'application	110
3.3 Conclusion du chapitre	111
4 Traitement des équations du potentiel électrique	113
4.1 Traitement du cas $\eta \rightarrow 0$ pour le modèle 1D	115
4.1.1 Quelques généralités sur les méthodes de type <i>Asymptotic-Preserving</i> .	115
4.1.2 Limite Robin-Neumann dans le cas linéaire	116
4.1.3 Cas d'une condition aux limites non linéaire pour le problème isotrope	133
4.1.4 Application au problème du potentiel électrique 1D	142
4.2 Pénalisation pour l'équation du potentiel en 1D	144
4.2.1 Présentation de la méthode de pénalisation proposée par Bensali <i>et al.</i>	144
4.2.2 Application au problème du potentiel électrique	145
4.3 Modèle 2D anisotrope	146
4.3.1 Décomposition micro-macro	150
4.3.2 Aspects numériques	178
4.4 Conclusion du chapitre	180
5 Conclusions de la thèse et perspectives	184
A Rappels pour un problème d'évolution du 1^{er} ordre	186

Notations importantes

On liste ici les notations de quantités, d'opérateurs, de fonctions ou d'espaces importants utilisés dans cette thèse.

Les éléments notés en gras représentent des vecteurs ou des matrices.

De manière générale, c ou, $c(\dots)$ désigne une constante strictement positive. Sa valeur peut changer d'une ligne à l'autre. Les paramètres qui n'influent pas sur sa valeur sont en général précisés. Cela permet d'éviter de multiplier les notations de constantes (l'alphabet latin n'a que 26 lettres et le grec que 24!).

Objet	Définition ou explications
N	Densité du plasma (grandeur adimensionnée).
Γ	Moment du plasma (grandeur adimensionnée).
η	Résistivité parallèle (en pratique, $\eta \ll 1$).
ϕ_η	Potentiel électrique.
ε	Paramètre de pénalisation (en général, $\varepsilon \ll 1$).
χ ou χ_1, χ_2	Fonctions caractéristiques des zones pénalisées.
Ω	Un domaine ouvert (ayant des propriétés différentes suivant les chapitres et section du manuscrit).
Ω_T	$\Omega_T =] -T_0, T[\times \Omega$ (chapitre 3) ou $\Omega_T =]0, T[\times \Omega$ (chapitre 4).
$\nabla_{\mathbf{u}}, \nabla_{\mathbf{v}}$	Dérivées partielles par rapport à \mathbf{u} ou \mathbf{v} (respectivement).
∇	Gradient par rapport aux variables t, \mathbf{x} .
$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$	Fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support compact.
$c, c(\dots)$	Constante strictement positive. Sa valeur peut changer d'une ligne à l'autre. Les paramètres qui n'influent pas sur sa valeur sont en général précisés.
$H_{tan}^m(\Omega_T)$	$H_{tan}^m(\Omega_T) = \{\Phi \in L^2(\Omega_T), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \alpha \leq m \implies \mathcal{T}^\alpha \Phi \in L^2(\Omega_T)\}$
$H^m(\Omega_T)$	$H^m(\Omega_T) = \{\Phi \in L^2(\Omega_T), \forall \beta \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \beta + \alpha \leq m \implies \partial_d^\beta \mathcal{T}^\alpha \Phi \in L^2(\Omega_T)\}$
$L^2(\Omega_T)$	$L^2(\Omega_T) = \{\Phi : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}^N, \int_{\Omega_T} \langle \Phi(t, \mathbf{x}), \Phi(t, \mathbf{x}) \rangle dt d\mathbf{x}\}$
$\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$	L'ensemble des matrices carrées de taille $N \times N$.
\mathbf{n}	La normale sortante unitaire de Ω .
t	Temps (variable).
\mathcal{T}	Dérivées tangentielles (par rapport à la frontière du domaine originel).
$W^{1,2}(0, T; V, H)$	$W^{1,2}(0, T; V, H) = \{f \in L^2(0, T; V), \partial_t f \in L^2(0, T; V^*)\}$ (voir annexe A)
$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$	Produit scalaire associé à l'espace X , où $X = \mathbb{R}^D, L^2(\Omega_T), V, \dots$
$\ \cdot, \cdot\ _X$	Produit scalaire associé à l'espace X , où $X = \mathbb{R}^D, L^2(\Omega_T), V, H_{tan}^m(\Omega_T), H^m(\Omega_T), \dots$
$\langle \phi \rangle$	Moyenne de ϕ sur son ensemble de définition Ω .

Chapitre 1

Introduction

1.1 Quelques éléments sur le projet ITER

Le projet de réacteur à fusion ITER a pour but de valider expérimentalement la possibilité d'utiliser la fusion nucléaire comme source d'énergie électrique.

Il s'agit ici de faire une brève présentation des principes généraux de la fusion nucléaire et des modèles physiques étudiés.

Il convient tout d'abord de rappeler que le plasma est considéré comme le 4^{ème} état de la matière : c'est un mélange d'électrons et de protons. Pour créer cet état, il faut arracher tout ou partie des électrons des atomes auxquels ils sont habituellement liés. L'arrachage de ces électrons nécessite de l'énergie qui peut être fournie :

- Par un champ électrique très intense (comme pour les éclairs par exemple).
- Par un bombardement par des photons (champ électromagnétique) ou par des particules (c'est le cas de la magnétosphère, ou du plasma interstellaire).
- Par un apport de chaleur très élevé, ce qui implique des températures très élevées ($> 10000K$).

C'est ce dernier cas qui nous intéresse dans cette thèse. On se concentre sur les plasmas utilisés en vue de réaliser réaction de fusion nucléaire.

1.2 La fusion nucléaire

La fusion nucléaire est une réaction où deux atomes légers (par exemple, de deutérium et de tritium) fusionnent pour former un atome plus lourd (comme l'hélium) en libérant éventuellement des particules et de l'énergie. La fusion du deutérium et du tritium est la plus facile à réaliser, notamment grâce à une barrière énergétique plus faible. Cette dernière réaction est représentée par l'équation ci-dessous



L'énergie nécessaire pour vaincre la barrière énergétique liée à la répulsion électrostatique est de l'ordre de 10 à 100 keV. Cela correspond à des températures de l'ordre de 10^8 à $10^9 K$, ce qui rend l'état plasma inévitable pour la fusion nucléaire. Par contre, la réaction dégage une

énergie de $17,6 \text{ MeV}$. En comparaison, la réaction de fission de l'uranium 235 dégage une énergie de l'ordre de 200 MeV , mais le noyau est alors très lourd : environ 235 u (unités de masse atomique unifiée) pour l'uranium 235 (sans compter la masse du neutron déclenchant la réaction de fission) contre environ 2 u et 3 u pour le deutérium et le tritium. Ainsi, pour une même masse de combustible, la réaction de fusion nucléaire dégagera environ quatre fois plus d'énergie que la fission.

L'objectif du projet ITER est la production d'énergie à l'échelle industrielle : l'espoir serait d'avoir un jour des centrales à fusion nucléaire qui seraient plus avantageuses que les centrales à fission actuelles. Il se pose alors la question de la rentabilité énergétique de la réaction, c'est à dire l'énergie produite par la fusion comparée à l'énergie dépensée pour chauffer le plasma et maintenir son confinement magnétique. En réalisant un bilan énergétique, on peut justifier le critère de Lawson : pour que la réaction de fusion nucléaire produise plus de 40 fois l'énergie dépensée pour la générer, il faut que $n\theta_i\tau_E \geq 2.7 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3} \cdot \text{keV} \cdot \text{s}^{-1}$. Ici, n désigne la densité du plasma, θ_i sa température ionique et τ_E le temps de confinement de l'énergie. Pour améliorer les conditions de la réaction de fusion, la température ionique est portée à $\theta_i \approx 30 \text{ keV}$. Deux techniques sont concurrentes pour essayer d'utiliser la réaction de fusion comme une source d'énergie : la fusion par confinement magnétique et la fusion par confinement inertiel, décrites ci-après.

Fusion par confinement magnétique :

Dans cette configuration, on opte pour une faible densité de plasma $n \approx 10^{20} m^{-3}$ un temps de confinement τ_E long, de l'ordre de la seconde. Les réacteurs les plus utilisés pour la fusion par confinement magnétique sont de type tokamak. Les tokamaks sont des machines dont la forme ressemble à un tore. La réaction de fusion se fait dans la région au cœur du tore où le plasma y est confiné par de forts champs magnétiques.

Les tokamaks, sous réserve d'un refroidissement adapté peuvent fonctionner pendant des temps longs, de l'ordre de quelques secondes à quelques minutes (6 min 30 s pour TORE SUPRA, mais sans réaction de fusion). On espère ainsi pouvoir un jour les faire tourner en continu pour les rendre adaptés à la production d'énergie. Les principaux tokamaks capables de réaliser la réaction de fusion nucléaire sont JET au Royaume Uni et JT-60 au Japon.

La technologie développée pour ce type de réacteur n'est pas directement transposable à la création d'armes nucléaires.

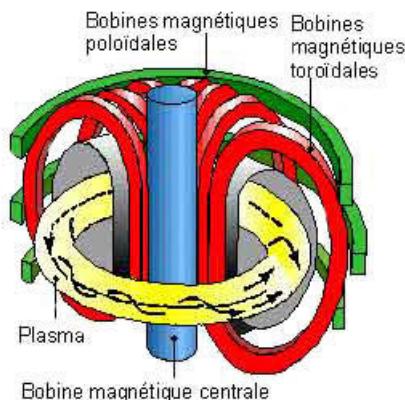


Schéma de principe d'un tokamak.

Source : [2]

Fusion par confinement inertiel :

On choisit ici une densité de plasma $n \approx 10^{31} m^{-3}$ élevée et un temps de confinement très court $\tau_E \approx 10^{-11} s$. La compression et le chauffage des micro-billes de deutérium-tritium est généralement faite à partir d'impulsions laser (réfléchies sur les parois intérieures de la capsule contenant la micro-bille de réactif).

Cette technologie sert notamment à la recherche sur les armes thermonucléaires, mais des recherches sont aussi réalisées dans le domaine de la production d'énergie. Les installations les plus connues explorant cette technique de fusion sont le laser Mégajoule à Bordeaux et National Ignition Facility (NIF) aux USA.

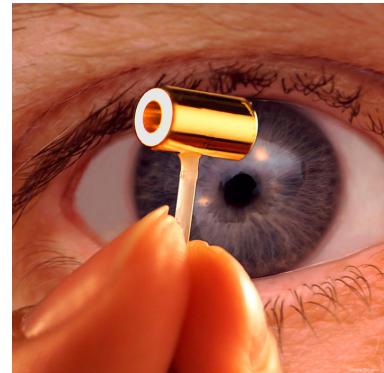


Photo d'une capsule contenant la micro-bille de deutérium-tritium pour la fusion inertielle par laser. Source : NIF au LLNL, voir sa galerie photo [1].

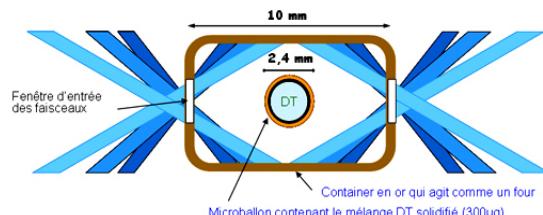


Schéma de fonction d'une capsule pour la fusion inertielle. Source : [3]

1.3 Modèles de plasma

Trois grandes catégories de modèles de plasma existent :

1. Les modèles particulaires qui reviennent à appliquer le principe fondamental de la dynamique à chaque particule. Ainsi si on considère un plasma composé de N particules, de position \mathbf{x}_j ($j \in \{1, \dots, N\}$), de charge q_j et de masse m_j , on a :

$$\forall j \in \{1, \dots, N\}, m_j \frac{d^2 \mathbf{x}_j}{dt^2}(t) = q_j \left(\mathbf{E} + \frac{d\mathbf{x}_j}{dt} \times \mathbf{B} \right),$$

où \mathbf{E} et \mathbf{B} désignent respectivement le champ électrique et le champ magnétique au point \mathbf{x}_j . L'effet de la pesanteur terrestre est considéré comme négligeable, comparé aux interactions électromagnétiques. Ce modèle est en apparence très simple, le seul souci est que N peut être très grand : dans un tokamak, la densité de plasma est typiquement de l'ordre de 10^{20} particules par m^3 , et le volume de l'ordre de plusieurs m^3 . Or à chaque intervalle de temps on a $6N$ composantes à calculer (position et vitesse de chaque particule). Cela rend en pratique les simulations numériques quasiment impossibles.

2. Les modèles cinétiques considèrent le comportement de la fonction de distribution $f_s(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ des particules de plasma situées en \mathbf{x} , à l'instant t et ayant une vitesse \mathbf{v} pour l'espèce s . Cette représentation permet de passer d'un espace des phases de dimension $6N$ à un espace des phases de dimension 6. Dans un modèle cinétique, le terme de collision $\partial_t f|_{coll}$ prend en compte les effets dus aux chocs des particules entre elles. On aboutit alors à l'équation de Boltzmann :

$$\partial_t f_s + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s = \partial_t f|_{coll}.$$

On peut donc considérer que dans un schéma numérique calculant f_s , à chaque pas de temps, il faut résoudre un problème dans un espace des phases à 6 dimensions (3 pour la position et 3 pour la vitesse). Cela est abordable pour des simulations sur des intervalles de temps court, de l'ordre de la milliseconde, notamment grâce aux supercalculateurs actuels. Dans le cas des plasmas de fusion par confinement magnétique, il est raisonnable de faire l'approximation gyrocinétique qui permet de réduire l'espace des phases à 5 dimensions : c'est cette approximation qui a été faite dans le cadre du code de simulation GYSELA. Afin de donner un ordre de grandeur, le code GYSELA a été utilisé en 2010 sur un domaine d'un quart de tore de dimension comparable à ITER : 8192 processeurs ont fonctionné pendant environ 31 jours pour calculer le comportement du plasma durant 1 ms [4, 5].

3. La dernière grande famille de modèles est l'ensemble des modèles fluides : le plasma est représenté comme un simple gaz (ou mélange de gaz). C'est l'approximation la plus grossière, mais aussi la seule où des simulations en temps longs, de l'ordre de la seconde, sont raisonnables. Le lien entre l'approche fluide et l'approche cinétique est réalisé en exprimant les différents moments de f_s (selon \mathbf{v}) :
 - La densité de particules :

$$n_s(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} f_s(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}$$

- Le flux de particules :

$$n_s \mathbf{u}_s = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f_s(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}$$

(\mathbf{u}_s désigne alors la vitesse de fluide pour l'espèce s).

- Le tenseur de pression :

$$\Pi_s = P_s = m_s \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} f_s(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}$$

- Le tenseur de pression isotrope :

$$p_s = n_s T_s = m_s \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{v} - \mathbf{u}_s|^2 f_s(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}$$

- Le flux d'énergie :

$$\Phi = \frac{1}{2} m_s \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} |\mathbf{v}|^2 f_s(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}$$

En moyennant l'équation de Boltzmann du modèle cinétique, on va retrouver les équations de conservation de la densité, de la quantité de mouvement et de l'énergie, moyennant l'utilisation d'équations supplémentaires pour fermer le système. Les avantages de la modélisation fluides sont que l'espace des phases est réduit à 3 dimensions et que les méthodes numériques classiquement utilisées pour le calcul d'écoulement de fluides sont transposables (volumes finis, éléments finis...).

Au cœur du tokamak, le plasma est dit peu collisionnel, au sens où les interactions entre les ions sont peu fréquentes. Dans ce domaine, les modèles cinétiques sont nécessaires. Au contraire, le plasma proche de la paroi, plus froid, est fortement collisionnel. Le comportement du plasma est alors plus proche d'un fluide.

Dans tout ce travail, on considérera des modèles fluides du plasma.

1.4 La géométrie du bord d'un tokamak

Le travail de la présente thèse s'inscrit dans le cadre du projet ANR ESPOIR dont le but est de développer des codes de calcul pour le plasma proche de la paroi du tokamak. Il est alors nécessaire d'aborder la géométrie de cette région.

Le confinement magnétique du plasma n'est jamais parfait et une partie du plasma est en contact avec la paroi du limiteur. Ce contact avec la paroi va poser différents problèmes comme :

- La détérioration de la paroi notamment lié aux températures élevées du plasma de bord (de l'ordre de $10^4 K$).
- L'altération de la pureté du plasma avec l'arrivée de particules issues de la paroi qui est essentiellement composée de carbone, de tungstène ou de beryllium.
- Le pompage du plasma par recombinaison au niveau de la paroi.

Pour protéger la paroi du plasma, il a été notamment choisi d'ouvrir les lignes de champ magnétique proches du bord. En effet, on rappelle que le plasma est essentiellement transporté le long des lignes de champ magnétique. Cela crée alors deux régions, une proche du cœur du

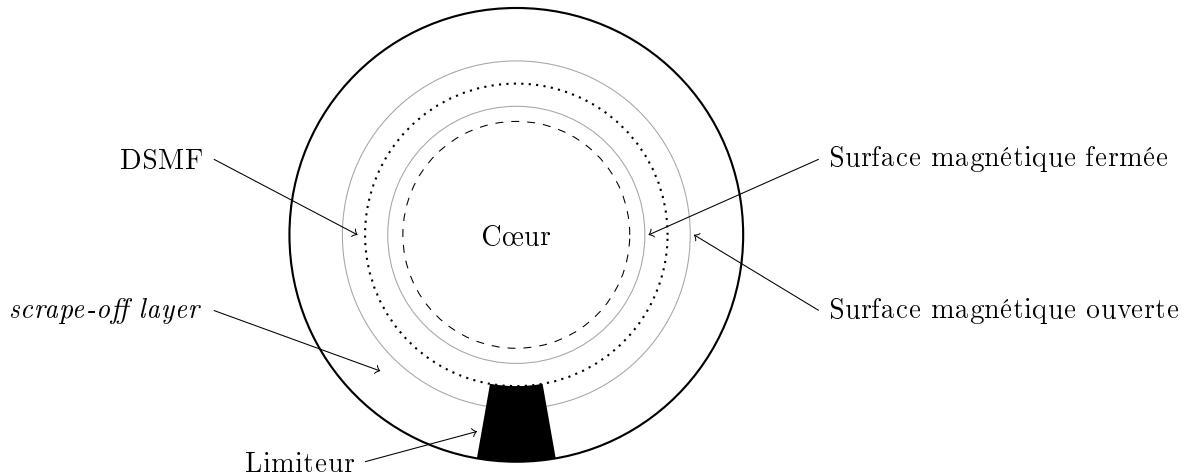


FIGURE 1.1 – Schéma de la zone proche de la paroi d'un tokamak en configuration limiteur. DSMF = Dernière Surface Magnétique Fermée. La *scrape-off layer* est la région se situant entre la dernière surface magnétique fermée (DSMF) et la paroi.

tokamak où les lignes de champ magnétique sont fermées et une limitrophe avec la paroi où les lignes de champ magnétique sont ouvertes, c'est la *scrape-off layer*.

Deux méthodes existent pour ouvrir les lignes de champ magnétique au niveau de la *scrape-off layer* :

- La première est la plus simple, elle consiste à placer un obstacle, appelé le limiteur, qui va interrompre les lignes de champ magnétique et absorber l'énergie du plasma. Dans le cas de TORE SUPRA, qui utilise cette configuration, le limiteur plancher (le plus gros) est refroidi par de l'eau sous pression.
- La deuxième, qui est la configuration *divertor*, modifie la configuration magnétique du tokamak. Cette configuration est plus complexe et permet d'améliorer le confinement de l'énergie dans le cœur du tokamak (au delà d'un certain seuil de puissance) tout en diminuant les effets des impuretés dans le plasma de bord. C'est cette géométrie qui a été retenue pour le projet ITER.

Nous allons donc commencer par décrire la configuration limiteur, présentée dans la figure 1.1.

La figure 1.2 montre l'intérieur du tokamak TORE SUPRA à l'arrêt et en fonctionnement. Le fort dégagement de lumière au niveau du limiteur indique une température d'au moins plusieurs milliers de kelvins. Dans la région centrale on ne voit rien car la lumière émise par le plasma chaud ($\approx 10^8 - 10^9 K$) correspond essentiellement aux rayons X voire aux rayons gamma (il est aisément de retrouver ces ordres de grandeur en utilisant les propriétés d'un corps noir). Ces ordres de grandeur évalués grossièrement permettent de comprendre que le confinement magnétique ne suffit pas à éviter les interactions plasma-limiteur. On notera que dans TORE SUPRA, d'autres limiteurs, sont mis en place comme les limiteurs poloïdaux et les limiteurs d'antenne qui visent à protéger des instruments.

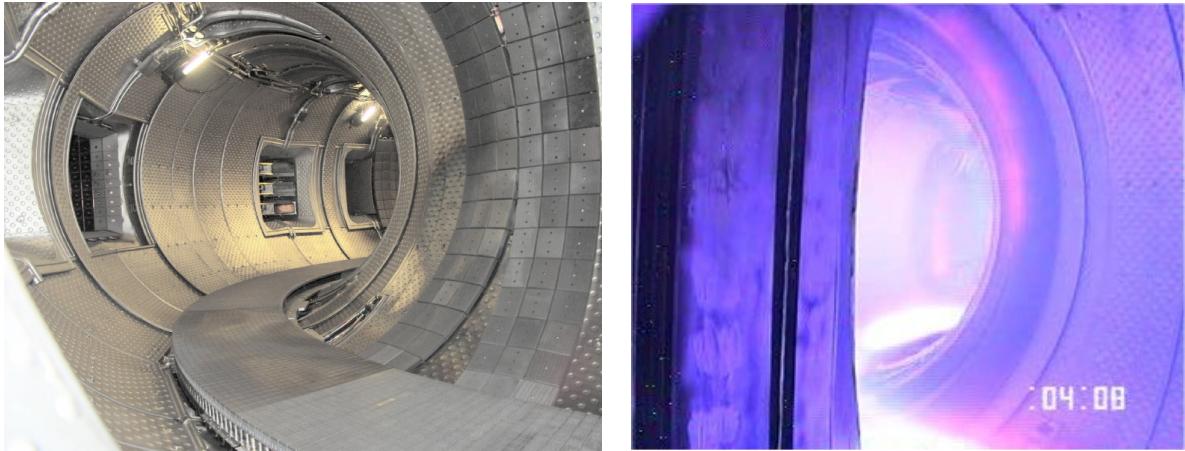


FIGURE 1.2 – A gauche : Photo de l'intérieur de Tore Supra (à l'arrêt). Le limiteur est le "trottoir" en bas de la photo. A droite : Image prise par une caméra CCD (dans le visible) de Tore Supra en fonctionnement. Un fort dégagement de lumière est généré au niveau du limiteur. Source des deux images : IRFM [2]

La configuration *divertor*, dans la figure 1.3, est sensiblement différente. On note entre autres l'apparition du point x où les lignes de champ magnétique semblent se croiser.

Il apparaît surprenant, en première approche, de s'intéresser à une configuration différente de celle retenue pour le projet ITER. Il faut en fait comprendre que les outils mathématiques développés pour cette structure s'adapteront à la configuration *divertor* avec point x. On notera tout de même que dans les deux cas il y a des obstacles qui interrompent les lignes de champ magnétique. De plus, les deux configurations comportent une zone où les lignes de champ sont ouvertes, la *scrape-off layer*.

Différents modèles fluides ont été établis pour le plasma de bord dans un tokamak (2D ou 3D), voir par exemple [24], SolEdge2D [60], Tokam-3D [60, 61]... On présentera ici rapidement le modèle utilisé dans Tokam-3D. La géométrie considérée est décrite dans la figure 1.4. On rappelle que l'on se place dans la configuration limiteur.

Les principales grandeurs adimensionnées des équations considérées sont :

- N : la densité du plasma (des électrons). A savoir qu'en dehors d'une fine couche au voisinage du limiteur (la gaine), le plasma est quasi-neutre, c'est à dire que la densité des électrons est approximativement égale à la densité des ions (chargés positivement) multiplié par le nombre de charge.
- M_v : la vitesse des ions dans la direction parallèle.
- M : le nombre de Mach du plasma (c'est à dire, à une constante multiplicative près, sa vitesse). Utilisé uniquement dans le chapitre 2. $M = M_v \sqrt{2} M$
- $\Gamma = NM$: le moment du plasma (c'est à dire, sa quantité de mouvement dans la direction parallèle).
- W : la vorticité du plasma.
- J_η : le courant électrique dans la direction parallèle, associé à la résistivité parallèle η .

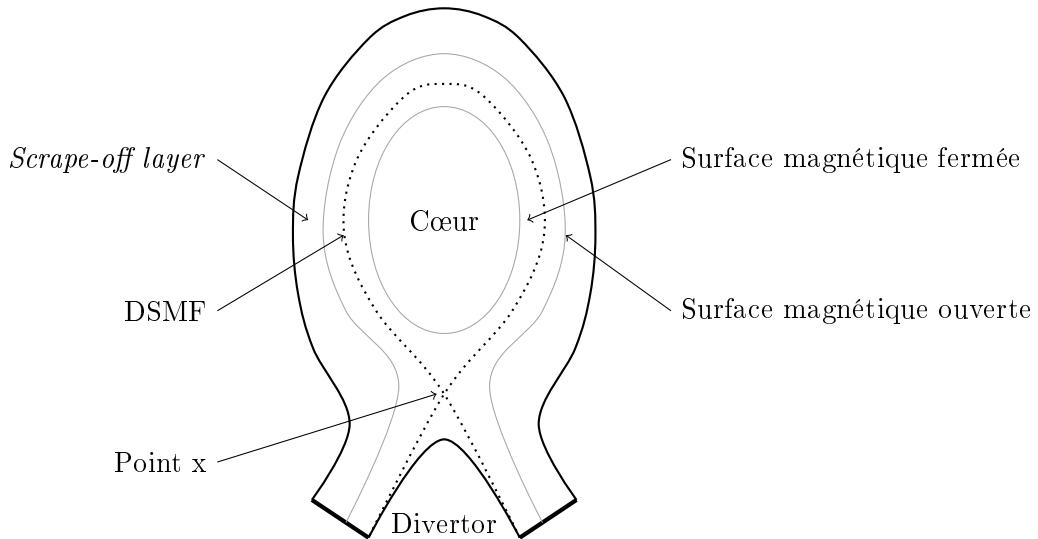


FIGURE 1.3 – Schéma de la configuration *divertor*, retenue pour ITER. La *scrape-off layer* est toujours la région se situant entre la dernière surface magnétique fermée (DSMF) et la paroi.

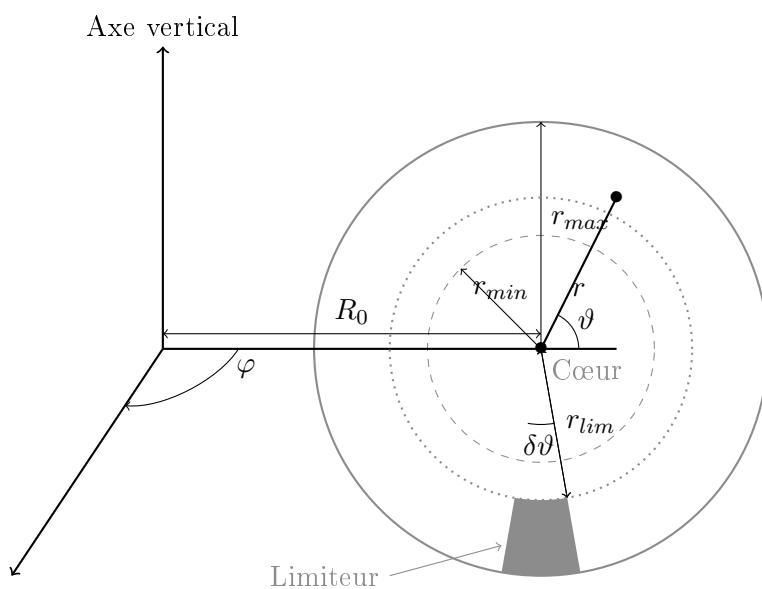


FIGURE 1.4 – Schéma du système de coordonnées toriques utilisé dans TOKAM-3D. r est le rayon mineur, φ est l'angle toroïdal et ϑ correspond à l'angle poloïdal.

- ϕ_η : le potentiel électrique.
- D_N, D_Γ, D_W : des coefficients de diffusion.
- \mathbf{b} : vecteur parallèle à la direction du champ magnétique. Dans les coordonnées toriques décrites dans la figure 1.4, \mathbf{b} s'écrit :

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon_B \\ 1 \end{pmatrix},$$

où $\epsilon_B = \frac{r}{q(r)R_0} \ll 1$. $q(r)$ étant, ici, le facteur de sécurité, lié à l'enroulement des lignes de champ magnétique autour de l'axe vertical.

- B : amplitude du champ magnétique.
- Z : nombre de charge des ions (en pratique on prendra $Z = 1$).

Nous donnons ici les équations utilisées dans le code Tokam-3D [60, 61], sous forme adimensionnées, pour un domaine en 3D :

$$\begin{aligned} \partial_t N + B \nabla_{\parallel} \frac{NM_v - J_\eta}{B} + \frac{1}{B} (\nabla \phi_\eta \times \nabla N) \cdot \mathbf{b} &= B \left((-N \nabla \phi_\eta + \nabla N) \times \nabla \frac{1}{B^2} \right) \cdot \mathbf{b} \\ &\quad + \nabla_{\perp} \cdot (D_N \nabla_{\perp} N) + S_N \\ \partial_t M_v + M_v \nabla_{\parallel} M_v + \frac{1}{B} (\nabla \phi_\eta \times \nabla M_v) \cdot \mathbf{b} + (1+Z) \frac{\nabla_{\parallel} N}{N} &+ \nabla_{\perp} \cdot (D_{M_v} \nabla_{\perp} M_v) + S_{M_v} \\ \partial_t W + M_v \nabla_{\parallel} W + \frac{1}{B} (\nabla \phi_\eta \times \nabla N) \cdot \mathbf{b} &= Z \frac{B^3}{N} \nabla_{\parallel} \frac{J_\eta}{B} + (1+Z) \frac{B^3}{N} \left(\nabla N \times \nabla \frac{1}{B^2} \right) \cdot \mathbf{b} \\ &\quad + \nabla_{\perp} \cdot (D_W \nabla_{\perp} W) \\ \eta N J_\eta &= \nabla_{\parallel} N - N \nabla_{\parallel} \phi_\eta \\ W &= \nabla_{\perp}^2 \phi_\eta + \frac{\nabla_{\perp}^2 \ln(N)}{Z}, \end{aligned}$$

où $\nabla_{\parallel} = \mathbf{b} \cdot \nabla$ représente le gradient dans la direction parallèle aux lignes de champ magnétique et $\nabla_{\perp} = \nabla - \nabla_{\parallel}$ le gradient dans la direction perpendiculaire. Ces équations s'appliquent à un plasma isotherme, où on a supposé que les valeurs des températures ioniques et électroniques étaient toutes les deux de 1. La vorticité W est une quantité qui vient du bilan de conservation, sous l'hypothèse d'un plasma quasi-neutre.

Les conditions aux limites à considérer sont les suivantes :

- Au niveau de l'interface avec la zone de cœur ($r = r_{min}$) :

$$\begin{aligned} \partial_r N &= 0 \\ \Gamma/N &= M_{centre} \\ \partial_r W &= 0 \\ \partial_r \phi_\eta &= 0. \end{aligned}$$

- Au niveau de la paroi ($r = r_{max}$) :

$$\begin{aligned}\partial_r N &= 0 \\ \Gamma/N &= M_{mur} \\ \partial_r W &= 0 \\ \partial_r \phi_\eta &= 0.\end{aligned}$$

- Au niveau du limiteur, en $r_{lim} \leq r \leq r_{max}$, $\vartheta = -\frac{\pi}{2} - \frac{\delta\vartheta}{2}$:

$$\begin{aligned}M_v &= +\sqrt{2} \\ \nabla_{||}\phi_\eta &= \nabla_{||}\ln(N) - \eta N \sqrt{2} \left(1 - e^{\Lambda - \phi_\eta}\right) \\ \partial_\vartheta W &= 0\end{aligned}\quad \text{où } \vartheta = \text{ angle poloïdal.}$$

- Au niveau du limiteur, en $r_{lim} \leq r \leq r_{max}$, $\vartheta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\delta\vartheta}{2}$:

$$\begin{aligned}M_v &= -\sqrt{2} \\ \nabla_{||}\phi_\eta &= \nabla_{||}\ln(N) + \eta N \sqrt{2} \left(1 - e^{\Lambda - \phi_\eta}\right) \\ \partial_\vartheta W &= 0.\end{aligned}$$

Dans toute la suite, on négligera les termes liés à la courbure. Les modèles étudiés seront en 1D ou en 2D, sauf pour le chapitre 2 qui donne un résultat théorique valable pour n'importe quelle dimension (finie) d'espace.

Au niveau de la tête du limiteur ($r = r_{lim}$, $\vartheta \in [-(\pi + \delta\vartheta)/2, (-\pi + \delta\vartheta)/2]$), le choix des conditions aux limites à considérer fait encore débat parmi les physiciens. Il apparaît que dans la réalité, cette zone où la paroi du limiteur est exactement parallèle aux lignes de champ magnétique est de surface nulle. Cela pourrait être pris en compte par une tête de limiteur arrondie. Ce choix complique la géométrie du problème sans apporter d'intérêt pour les difficultés que l'on va étudier par la suite. On choisira donc un limiteur dont la tête est plate et, pour le potentiel électrique, on imposera des conditions aux limites similaires à celles imposées au niveau de l'interface avec la paroi ($r = r_{max}$).

Dans ce manuscrit, on n'étudiera que les équations pour le transport de N, Γ (chapitre 2) et pour le potentiel électrique ϕ_η (chapitre 4).

Plusieurs simplifications seront faites dans la suite des calculs.

Notamment, les effets liés à la courbure seront négligés : x représentera l'abscisse curviligne le long d'une ligne de champ magnétique et y correspondra à la direction radiale. On peut lier y et le rayon mineur r par la relation $y = r_{max} - r$.

Les géométries utilisées ainsi que les systèmes d'équations étudiés paraîtront simplistes car il a été choisi de développer et tester les méthodes proposées sur des modèles jouets. L'intérêt du travail de recherche réside dans l'analyse théorique et numérique des propriétés mathématiques des méthodes proposées. L'application de ces méthodes à des configurations réalistes a été laissée à d'autres équipes de recherche impliquée dans le projet ANR ESPOIR, notamment aux membres du M2P2 et du CEA de Cadarache (Service d'Interactions Plasma-Paroi).

1.5 Généralités sur les conditions aux limites étudiées dans les chapitres 2 et 4

Dans cette section, nous allons brièvement expliquer l'origine physique des conditions aux limites qui seront étudiées par la suite. Dans la modélisation des nombreux phénomènes de type écoulement d'un fluide on remarque qu'il est souvent assez aisément de déterminer ce qu'il se passe à l'intérieur du domaine physique. Ainsi de nombreux modèles ont déjà été proposés. En revanche, la modélisation de ce qu'il se passe à la frontière du domaine de calcul est souvent plus délicate. Dans la thèse de Tamaïn [60], il est expliqué comment sont obtenues les conditions aux limites grâce à des arguments physiques.

Concernant le nombre de Mach $M = \Gamma/N$, il est précisé que plusieurs parties apparaissent :

- La pré-gaine, qui est une zone de la *scrape-off layer* qui est loin de l'interface plasma limiteur.
- La gaine qui est une couche à l'interface plasma-limiteur dont l'épaisseur est de l'ordre de $10^{-5} m$.

Pour la condition à la limite $\nabla_{\parallel}\phi_{\eta} = \nabla_{\parallel}\ln(N) \pm \eta N \sqrt{2} (1 - e^{\Lambda - \phi_{\eta}})$ au bord du limiteur, on observe une différence de potentiel électrique entre le limiteur et la limite gaine/pré-gaine lorsque la paroi n'est traversée par aucun courant, cette différence sera notée Λ . Pour le courant électrique, nous avons une condition de courant d'entrée/sortie du limiteur. Cette condition aux limites de type Fourier non linéaire est préférable à la condition de Dirichlet $\phi_{\eta} = \Lambda$ dans la direction parallèle aux lignes de champ. En effet, cette dernière condition, moins réaliste, n'est pas adaptée aux simulations de turbulence.

Dans la partie sur l'étude du modèle 2D pour le potentiel électrique (chapitre 4), il apparaît aussi des conditions sur le haut du limiteur où les lignes de champ magnétique semblent être parallèles à la frontière haute du limiteur. Or, dans la réalité, les lignes de champ magnétique, de par leur courbure, ne sont presque jamais exactement parallèles à la partie haute du limiteur. Néanmoins le fait de négliger cette courbure permet d'avoir une configuration simple, c'est à dire avec domaine et obstacle rectangulaire. Nous allons donc nous placer dans ce cadre confortable. Il a été mis en évidence dans [45] que des conditions aux limites de type Neumann homogène sur le haut du limiteur permet d'obtenir un système bien posé, moyennant des conditions aux limites adaptées sur les autres parois.

1.6 Les méthodes de type domaines fictifs

Dans cette section, nous allons présenter brièvement certaines méthodes de type domaines fictifs. Il ne s'agit pas de donner une description détaillée de chacune d'entre elles mais seulement de donner en quelques phrases les principales idées utilisées.

Les méthodes de domaines fictifs sont adaptées à des domaines originels dont la forme est complexe ou variable avec le temps. L'idée générale de ce type de méthode consiste à inclure le domaine original $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ dans un domaine plus grand Ω^{\sharp} de forme simple. Il faut alors étendre les équations définies sur Ω à Ω^{\sharp} . L'objectif étant de bien retrouver les conditions aux limites recherchées au bord de Ω . Contrairement aux méthodes classiques, les méthodes de domaines fictifs peuvent être appliquées à des maillages dont la forme ne dépend pas du

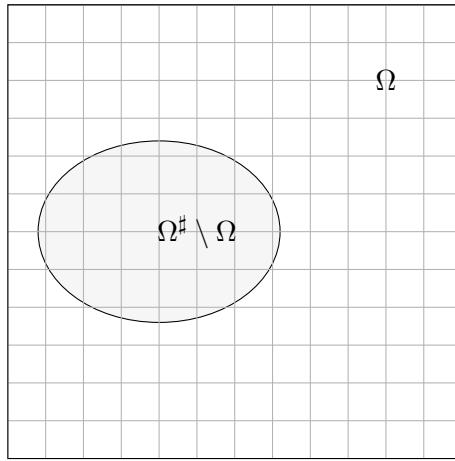


FIGURE 1.5 – Un exemple de domaine avec son domaine fictif

domaine originel. L'avantage est que l'on fait l'économie de l'usage d'un maillage et que l'on peut facilement traiter le cas de frontières qui évoluent dans le temps.

La première utilisation d'une méthode de type de domaines fictifs remonte au travaux de Hyman [36]. Le nom de méthodes de domaines fictifs (*fictitious domain method*) a été introduit par Saul'ev [57].

Les premières méthodes de frontière immergée ont été introduite par Peskin, en 1972 [48], afin de modéliser le cœur humain et les flux sanguins. Etant donné la forme complexe du domaine de calcul et son évolution temporelle, on comprend l'intérêt d'éviter d'avoir à faire un maillage adapté à l'interface à chaque pas de temps.

Pour présenter brièvement ces méthodes, nous allons considérer un problème continu sous la forme générale :

$$\begin{cases} \mathcal{P}\mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \Theta(\mathbf{u}_{\partial\Omega}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

L'inconnue est $\mathbf{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^D$.

1.6.1 Les méthodes sur le problème continu

Dans cette situation, on modifie directement le problème continu pour forcer la condition à la limite de l'obstacle.

L'intérêt est que la méthode est indépendante du schéma numérique utilisé. Outre la liberté sur le choix du schéma numérique, on peut alors établir les estimations d'erreur en restant dans le cadre du problème continu. Un autre intérêt est que dans certaines situations, la méthode peut avoir un sens physique : par exemple considérer l'obstacle comme un milieu faiblement poreux et utiliser la loi de Darcy [11, 43].

1.6.1.1 Méthodes d'interface fine ou méthode d'interface diffuse

L'idée de ces méthodes est de forcer la condition à la limite au niveau de la frontière. C'est le type de méthode mis en place par Peskin [48, 49], initialement pour la simulation d'écoulements sanguins au niveau du cœur humain. Dans ce problème, la position de la frontière du domaine originel évolue dans le temps.

On suppose que l'inconnue \mathbf{u} représente ici la vitesse du fluide. On modélise ici l'écoulement par des équations de Navier Stokes incompressibles adimensionnées. ∇p représente ici le gradient de pression.

On a ainsi un système d'équations couplé dont les inconnues sont la vitesse du fluide \mathbf{u} et la position des différents points de la frontière \mathbf{X} :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + \mathbf{f}_b & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{f}_b(t, \mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \delta(\|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)\|_2) d\sigma(\mathbf{X}(t)) & \text{sur } \partial\Omega \\ d_t \mathbf{X}(t) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \delta(\|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)\|_2) d\mathbf{x}, \end{cases}$$

où δ est la mesure de Dirac, \mathbf{f}_b correspond au terme de force lié au bord. Le terme de force \mathbf{F} est donné par une loi d'élasticité de type Hooke sur la frontière $\partial\Omega$.

On utilise alors deux maillages, un pour la frontière et un maillage cartésien sur lequel est représenté le domaine fluide. Le maillage de la frontière est donné par des points \mathbf{X}_k , $k \in \{1, \dots, K\}$.

En pratique, dans [48], la mesure de Dirac $\delta(\|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)\|_2)$ est approché par une fonction continue dont le support est inclus dans les cellules proches de la frontière : on parle de méthode de frontière diffuse, voir aussi les travaux de Ramière *et al.* [52].

1.6.1.2 Méthodes de pénalisation volumique

$$\mathcal{P}\mathbf{u}_\varepsilon + \frac{\chi}{\varepsilon} \tilde{\Theta}(\mathbf{u}_\varepsilon) = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega^\sharp.$$

Où $\tilde{\Theta}$ est une fonction $\mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^D$ choisie de manière à bien représenter les conditions aux limites en $\partial\Omega$. En général, on choisit $\tilde{\Theta}$ de manière à ce que, notamment, $\Theta(\mathbf{u}_{\partial\Omega}) = 0$ si et seulement si $\tilde{\Theta}(\mathbf{u}_{\varepsilon|\partial\Omega}) = \mathbf{0}$. χ est la fonction caractéristique de l'obstacle, c'est à dire qu'elle vaut 1 dans $\Omega^\sharp \setminus \Omega$ et 0 dans Ω . ε désigne le paramètre de pénalisation, en pratique, on prend $\varepsilon \ll 1$.

Il est aisément de comprendre formellement comment la pénalisation arrive à imposer les conditions aux limites : On admet que les termes $\mathcal{P}\mathbf{u}_\varepsilon$ et \mathbf{f} , sont bornés indépendamment de ε . Alors, $\frac{\chi}{\varepsilon} \tilde{\Theta}(\mathbf{u}_\varepsilon)$ doit aussi être borné indépendamment de ε . Donc, dans l'obstacle $\Omega^\sharp \setminus \Omega$, où $\chi = 1$, on s'attend à ce que $\tilde{\Theta}(\mathbf{u}_\varepsilon)$ tende vers $\mathbf{0}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Par continuité on doit donc se rapprocher de la vraie condition à la limite $\Theta(\mathbf{u}_{\partial\Omega}) = 0$ pour $\varepsilon \ll 1$. Bien évidemment, cette explication n'est en aucun cas une démonstration rigoureuse.

Les avantages de ces méthodes apparaissent alors :

- Possibilité d'utiliser des maillages simples, cartésiens, non adaptés à la frontière du domaine de calcul. Une programmation facile à mettre en place.
- Utilisation possible de solveurs rapides, méthodes pseudo spectrales par exemple [37], ou de méthodes multigrilles dans le domaine étendu Ω^\sharp .

L'inconvénient de ces méthodes est l'ajout d'une erreur de pénalisation qu'il faut contrôler. Le lecteur soucieux d'avoir une introduction aux aspects théoriques et numériques des méthodes de pénalisation volumique à travers le cas d'école de l'équation de propagation d'onde pourra regarder les travaux de Paccou *et al.* [46]. L'avantage de la méthode de pénalisation est la facilité de sa programmation. Outre l'ajout d'une erreur de pénalisation éventuelle, un des inconvénients de cette méthode est la résolution d'ordre 1 en espace sans adaptation locale du maillage. Pour récupérer l'ordre 2 en espace, il faut en général faire appel à une méthode de type *cut-cell* ou *ghost-cell* (présentées ci-dessous), voir par exemple [56].

Angot a proposé plusieurs méthodes de domaines fictifs avec ou sans condition de saut dans le cadre de problèmes elliptiques avec des conditions de type Dirichlet, Neumann ou encore Fourier [8]. Il s'agit, selon les cas de pénalisations volumiques ou surfaciques.

1.6.2 Les méthodes sur le problème discret

D'autres méthodes s'appliquent directement à partir de la discrétisation utilisée. Nous en présenterons ici deux : les méthodes *ghost-cell* et *cut-cell*.

1.6.2.1 Méthode de type *ghost-cell*

Cette méthode est en apparence assez naturelle. Elle consiste à ajouter des cellules dites *ghost-cells*, c'est à dire des inconnues au voisinage de la frontière $\partial\Omega$ et à les utiliser pour prolonger le schéma numérique utilisé à l'interface. Les valeurs des inconnues dans les *ghost-cells* sont déterminées à partir d'une interpolation (le plus souvent linéaire ou quadratique), en utilisant les conditions aux limites.

Cette méthode ne nécessite pas de reformuler les équations du modèle, ni de modifier le maillage.

Pour plus de détails, on pourra se reporter à l'article de Tseng et Ferziger [62].

1.6.2.2 Méthode de type *cut-cell*

Conservation des flux. Les méthodes de type *cut-cell*, sont particulièrement adaptées aux lois de conservation. D'où l'intérêt de les utiliser avec des schémas de type volumes finis. L'idée consiste à considérer initialement maillage cartésien, puis à couper en deux les cellules traversées par l'interface $\partial\Omega$, comme cela est représenté sur la figure 1.6. La coupure de chaque cellule se fait selon une approximation linéaire de la frontière $\partial\Omega$. Le prix à payer pour cette méthode est d'accepter d'avoir des cellules de forme trapézoïdale le long de la frontière $\partial\Omega$ et d'adapter le schéma au niveau de ces cellules. Par contre l'adaptation du maillage ne se fait qu'au voisinage de la frontière $\partial\Omega$. Il est ensuite possible d'implémenter directement les conditions aux limites sur les cellules tronquées. Pour une introduction accessible, on pourra regarder les travaux de Johansen et Cotella [39] qui présente la méthode *Cartesian grid embedded boundary method*.

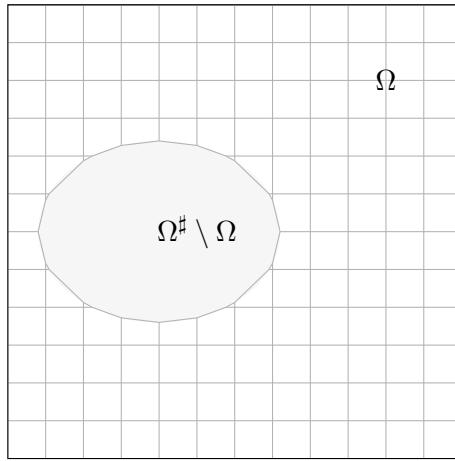


FIGURE 1.6 – Un exemple de domaine avec son domaine fictif pour une méthode de type cut-cell.

Par contre, la méthode *cut-cell* permet d'avoir des schémas conservatifs, ce qui rend l'utilisation avec un schéma volumes finis particulièrement intéressante.

Ces méthodes permettent alors de retrouver une convergence au maillage spatial d'ordre 2.

1.6.3 Mise en évidence de la présence de couche limite pour une méthode de pénalisation

Les méthodes de pénalisation peuvent générer une couche limite à l'interface domaine originel/domaine fictif, qui se trouve souvent du côté de la zone pénalisée. La couche limite provient en général d'une incompatibilité entre les équations dans le domaine originel Ω et le problème limite dans la zone pénalisée $\Omega^# \setminus \Omega$ (problème de perturbation singulière). Les chapitres 2 et 3 sont dédiés à la recherche de couche limite due aux méthodes de pénalisation utilisées. Il est donc important de lister brièvement les moyens de recherche de couche limite qui sont à notre disposition. Le principe de chaque méthode consiste à estimer l'erreur due à la pénalisation et étudier son comportement asymptotique quand ε tend vers 0.

Pour l'étude des couches limites, sur le plan théorique, il est possible de :

- Faire un calcul explicite (pour un problème simple) [15, 40, 46]. En pratique, cette technique n'est envisageable que pour des problèmes très simples, par exemple, pour un problème elliptique ou hyperbolique 1D linéaire. Par ce biais là il est aussi possible de mesurer l'épaisseur de la couche limite.
- Faire des estimations de l'erreur due à la pénalisation, comme cela a été fait dans les travaux de Angot *et al.* [11].
- Etudier un développement asymptotique de type BKW, pour ensuite faire une estimation de l'erreur. C'est ce qui a été fait pour des problèmes d'écoulement incompressible visqueux [22] ou pour des systèmes hyperboliques, voir les travaux de Fornet [30] et de

Kheriji [41]. En général, une couche limite est caractérisée par la présence de variables en x/ε^a dans les termes du développement asymptotique. Ainsi la construction d'un développement asymptotique sans la présence de telles variables est généralement un signe de l'absence de couche limite, même si une estimation d'erreur rigoureuse à partir du développement asymptotique *ad hoc* reste encore à faire.

Sur le plan numérique, le but est de rechercher les manifestations des couches limites que l'on trouve sur le problème continu. La méthode consiste à étudier l'erreur due à la pénalisation : c'est à dire que l'on résout le système d'équations aux dérivées partielles pénalisé avec notre schéma numérique préféré (idéalement d'ordre 2 ou plus, si on veut étudier l'erreur H^1). Puis on évalue $\|\mathbf{u}_{num,\varepsilon} - \mathbf{u}_{limite}\|$ pour une norme L^2 ou H^1 ou H^2 ... L'erreur de discréétisation doit être négligeable devant l'erreur due à la pénalisation d'où l'intérêt d'avoir un schéma d'ordre élevé. De plus, la couche limite ayant une faible épaisseur caractéristique, généralement tendant vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$ [40, 43], il est nécessaire d'avoir un maillage suffisamment fin pour avoir plusieurs points dans la couche limite. On pourra trouver des exemples de mise en oeuvre dans les travaux de Paccou *et al.* [46] et de Liu et Vasilyev [43].

1.7 La problématique de la thèse

Dans cette thèse on traite deux problématiques liées au plasma de bord et notamment à la prise en compte des conditions aux limites. Premièrement, il s'agit de proposer des méthodes de pénalisation volumique pour des modèles hyperboliques. Le but étant de trouver une méthode de pénalisation ne générant pas de couche limite à l'interface plasma-limiteur. Il convient de noter que la littérature de méthodes de pénalisation volumique pour des problèmes hyperboliques quasilinearaires n'est pas très abondante. Dans un travail de Kheriji [41], on trouve un premier résultat de méthode de pénalisation générant une couche limite. Dans le cas semilinéaire, une méthode de pénalisation sans couche limite a été proposée par Fornet et Guès [30].

Le deuxième problème concerne le modèle du potentiel électrique. La faible résistivité parallèle η du plasma mène à un problème fortement anisotrope dont la condition à la limite au niveau du limiteur tend formellement vers une condition de Neumann et rend le système sous déterminé. Pour le traitement de problèmes fortement anisotropes, des schémas de type *Asymptotic-Preserving* (AP) ont été proposés [26, 27]. L'étude de ces méthodes a été réalisée sur des problèmes elliptiques linéaires. Le travail réalisé dans ce manuscrit a consisté à adapter ces méthodes à des modèles non-linéaires 1D et 2D du potentiel électrique et d'étudier théoriquement et numériquement leur comportement quand la résistivité parallèle η tend vers 0.

1.8 Résumé des résultats obtenus

Les travaux réalisés dans cette thèse concernent trois thèmes faisant chacun l'objet d'un chapitre. Tout d'abord, dans le chapitre 2, on s'intéresse à un système hyperbolique modélisant la densité du plasma N et sa quantité de mouvement Γ dans un domaine spatial à une dimension. Plusieurs méthodes de pénalisation sont testées numériquement sur ce modèle simple.

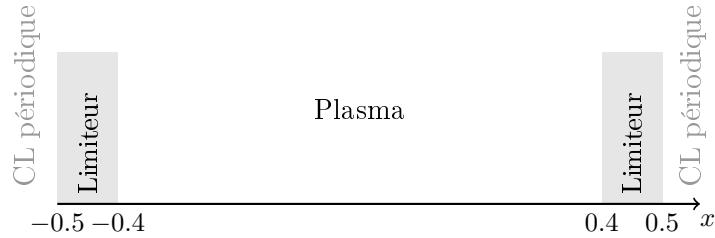


FIGURE 1.7 – Représentation du domaine 1D contenant le plasma de bord. x correspond à une abscisse curviligne le long d'une ligne de champ magnétique. L'aspect périodique vient du fait que sans le limiteur, la ligne de champ magnétique formerait une boucle fermée.

L'une d'entre elles permet d'éviter l'apparition de couches limites à l'interface plasma-limiteur. Cette dernière pénalisation apparaît relativement naturelle et s'étend à des systèmes hyperboliques, plus généraux y compris dans le cadre d'un espace multi-dimensionnel. Le chapitre 3 est consacré à la preuve rigoureuse de ce résultat, pour un système hyperbolique non-linéaire avec un bord non caractéristique et des conditions aux limites maximales dissipatives. Pour le 4^{ème} et dernier chapitre, on se focalise sur le problème du potentiel électrique. Le traitement de ce problème nécessite la mise en place de méthodes préservant l'asymptotique et permet de faire quelques essais sur la pénalisation de conditions de type Robin non-linéaires.

1.8.1 Résumé du chapitre 2

Dans ce chapitre, on se concentre sur l'exemple d'un système hyperbolique modélisant la densité N et la quantité de mouvement Γ du plasma. Le nombre de Mach du plasma est donné par la grandeur $M = \Gamma/N$. La figure 1.7 présente le domaine de calcul considéré.

Le système hyperbolique à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t N + \partial_x \Gamma = S_N & \text{dans }]-0.4, 0.4[\\ \partial_t \Gamma + \partial_x \left(\frac{\Gamma^2}{N} + N \right) = S_\Gamma \\ M(., 0.4) = 1 - \xi \\ M(., -0.4) = -1 + \xi, \end{cases} \quad (1.1)$$

où ξ est une constante strictement positive proche de 0, qui permet de nous assurer que le système (1.1) est bien posé. Trois méthodes de pénalisation volumique ont été testées dans ce travail. Premièrement les tests numériques pour une méthode introduite par Isoardi *et al.* [37] font apparaître un pic à proximité de l'interface plasma-limiteur, quand le maillage est suffisamment raffiné par rapport au paramètre de pénalisation ε . La seconde méthode de pénalisation étudiée impose de manière naturelle $M \approx \pm(1 - \xi)$ ainsi que la condition $N \approx 0$ par pénalisation des deux champs. Ce dernier choix vient du fait que le limiteur est un obstacle solide qui ne contient pas de plasma. On observe alors la formation de couches limites qui ralentissent la convergence de la solution du problème pénalisé (et donc approchée) vers

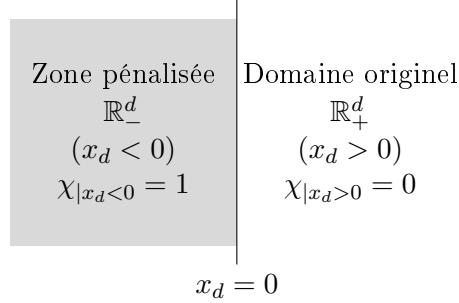


FIGURE 1.8 – Schéma du domaine spatial

la solution du problème limite. L'étude de ce système donne un cas d'école d'observation de couche limite par une étude de convergence. La troisième pénalisation étudiée est la suivante :

$$\begin{cases} \partial_t N + \partial_x \Gamma = S_N & \text{dans }]0, 0.5[\\ \partial_t \Gamma + \partial_x \left(\frac{\Gamma^2}{N} + N \right) + \frac{\chi}{\varepsilon} \left(\frac{\Gamma}{1-\eta} - N \right) = S_\Gamma, \end{cases} \quad (1.2)$$

où le domaine de calcul est $]0, 0.5[$, le plasma correspondant à la zone $]0, 0.4[$ (on a pris que la moitié du domaine de la figure 1.7). χ est la fonction caractéristique du limiteur qui est le domaine $[0.4, 0.5[$. Cette pénalisation, outre sa simplicité, a l'avantage de ne pas présenter de couche limite à l'interface plasma-limiteur. Ce résultat a été pressenti avec un développement asymptotique formel en ε et confirmé par des tests numériques.

On a ensuite étendu cette méthode de pénalisation au domaine $]-0.5, 0.5[$ entier, c'est à dire avec deux bords pour le limiteur et des conditions aux limites périodiques en $x = -0.5$ et $x = 0.5$. La contrainte étant d'éviter tout transfert d'information d'un bord à l'autre du limiteur. Pour cela, il suffit de multiplier le terme de transport par une fonction régulière α qui s'annule dans une région au centre du limiteur et qui vaut 1 dans le plasma.

1.8.2 Résumé du chapitre 3

Le chapitre 3 vise à étendre et montrer rigoureusement les résultats sur la méthode de pénalisation sans couche limite présentée dans le chapitre 1.1. Le domaine originel est le demi-espace \mathbb{R}_+^d et présenté dans la figure 1.8.

On s'intéresse alors à un système hyperbolique non linéaire symétrisable, d'inconnue \mathbf{u} : $]-T_0, T[\times\mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}^D$:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^d \bar{\mathbf{A}}_j(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}), \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) \partial_j \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}), \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) & (t, \mathbf{x}) \in]-T_0, T[\times\mathbb{R}_+^d \\ \Theta(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}', 0), \mathbf{u}(t, \mathbf{x}', 0)) = \mathbf{0} & (t, \mathbf{x}') \in]-T_0, T[\times\mathbb{R}^{d-1} \\ \mathbf{u}|_{t<0} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Les coefficients de ce système $\bar{\mathbf{A}}_j$ ($j \in \{1, \dots, d\}$), $\bar{\mathbf{f}}$, Θ sont supposés de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{D'} \times \mathbb{R}^D)$. La fonction \mathbf{a} est $H^\infty([-T_0, T] \times \mathbb{R}_+^d)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{D'}$, elle peut notamment représenter les différents paramètres physiques du modèle considéré. On suppose que \mathbf{a} est dans $H^\infty([-T_0, T] \times \mathbb{R}_+^d)$ et reste dans un voisinage suffisamment petit de $\mathbf{0}$ noté $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^{D'}$. On admet de plus que la fonction Θ utilisée pour les conditions aux limites vérifie les hypothèses suivantes : $(\mathbf{y}, \mathbf{U}) \in \mathbb{R}^{D'} \times \mathbb{R}^D$, $\nabla_{\mathbf{u}}\Theta(\mathbf{y}, \mathbf{U})$ a un rang constant noté p . De plus, pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{D'}$, $\Theta(\mathbf{y}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Le caractère symétrisable du système se traduit ici par l'existence d'un symétriseur $\mathbf{S}(\mathbf{y}, \mathbf{U})$ tel que, quelque soit $(\mathbf{y}, \mathbf{U}) \in \mathbb{R}^{D'} \times \mathbb{R}^D$:

- $\mathbf{S}(\mathbf{y}, \mathbf{U})$ est symétrique et définie positive, uniformément en (\mathbf{y}, \mathbf{U}) quand \mathbf{U} est dans un voisinage $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^D$ de $\mathbf{0}$ et quand \mathbf{y} est dans un voisinage \mathcal{Y} de $\mathbf{0}$. Cela signifie qu'il existe $\bar{e} > 0$ tel que, pour tout $(\mathbf{y}, \mathbf{U}) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{U}$, et pour tout $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^D$,

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{y}, \mathbf{U})\mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle \geq \bar{e}\|\mathbf{W}\|^2,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$ désignent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^D .

- Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, $\mathbf{S}(\mathbf{y}, \mathbf{U})\bar{\mathbf{A}}_j(\mathbf{y}, \mathbf{U})$ est symétrique.

On suppose par ailleurs que le problème est non caractéristique, ce qui signifie que pour tout $(\mathbf{y}, \mathbf{U}) \in \mathbb{R}^{D'} \times \mathbb{R}^D$, la matrice $\bar{\mathbf{A}}_d(\mathbf{y}, \mathbf{U})$ est inversible.

Enfin, les conditions aux limites sont supposées être maximales strictement dissipatives, c'est à dire : Pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$, s'il existe $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^D$ tel que $\Theta(\mathbf{y}, \mathbf{U}) = \mathbf{0}$, alors la forme quadratique vérifie les propriétés suivantes :

- $\exists \bar{\mu} > 0, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{D'}, \forall \mathbf{W} \in \ker \nabla_{\mathbf{u}}\Theta(\mathbf{y}, \mathbf{0}), \langle \mathbf{S}(\mathbf{y}, \mathbf{U})\bar{\mathbf{A}}_d(\mathbf{y}, \mathbf{U})\mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle \leq -\bar{\mu}\|\mathbf{W}\|^2$.
- $\dim \ker \nabla_{\mathbf{u}}\Theta(\mathbf{y}, \mathbf{0})$ est maximale pour la propriété ci-dessus.

On réalise ensuite le changement d'inconnue $\mathbf{u} = \mathbf{H}(\mathbf{a}, \mathbf{v})$, où la fonction \mathbf{H} est choisie de manière à ce que la condition à la limite $\Theta(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}', 0), \mathbf{u}(t, \mathbf{x}', 0)) = \mathbf{0}$ soit équivalente à la condition $\mathbf{P}\mathbf{v}(t, \mathbf{x}', 0) = \mathbf{0}$, où \mathbf{P} est la matrice de projection orthogonale sur le sous espace vectoriel $\mathbb{R}^p \times \{0\}^{D-p}$ (écrite dans la base canonique de \mathbb{R}^D).

Pour alléger les notations, on considère que la dépendance des paramètres en la fonction \mathbf{a} est implicite.

Le résultat principal est alors le suivant :

Théorème 1.8.1

On suppose que les hypothèses décrites dans cette section pour le problème (1.3) sont vérifiées.

Il existe un temps fini $T > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, le problème pénalisé

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon + \sum_{j=1}^d \bar{\mathbf{A}}_j(\mathbf{u}_\varepsilon) \partial_j \mathbf{u}_\varepsilon + \frac{\chi(\mathbf{x})}{\varepsilon} \mathbf{M}(\mathbf{u}_\varepsilon) \mathbf{u}_\varepsilon = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_\varepsilon) & (t, \mathbf{x}) \in [-T_0, T] \times \mathbb{R}^d \\ \mathbf{u}_{\varepsilon|t<0} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (1.4)$$

où

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}_\varepsilon) \mathbf{u}_\varepsilon = (\mathbf{S}(\mathbf{u}_\varepsilon))^{-1} \left(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{H}(\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{u}_\varepsilon))^\top \right)^{-1} \mathbf{P} \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{u}_\varepsilon),$$

admet une unique solution $\mathbf{u}_\varepsilon \in H^1(-T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d]) \cap W^{1,\infty}(-T_0, T[\times \mathbb{R}^d])$ qui est régulière de chaque côté de l'interface $x_d = 0$: $\mathbf{u}_{\varepsilon|x_d>0} \in H^\infty(-T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d])$ et $\mathbf{u}_{\varepsilon|x_d<0} \in H^\infty(-T_0, T[\times \mathbb{R}_-^d])$.

Quelque soit $s \geq 0$, l'erreur de pénalisation satisfait l'estimation suivante, quand ε tend vers 0 :

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{H^s(-T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d])} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

A notre connaissance, c'est le premier résultat théorique d'absence de couche limite pour une approximation par pénalisation d'un problème aux limites hyperbolique quasolinéaire.

Pour prouver ce théorème, on reformule d'abord le système (1.4) pour l'inconnue \mathbf{v}_ε telle que $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{H}(\mathbf{a}, \mathbf{v}_\varepsilon)$. On considère ensuite un développement asymptotique pour construire une approximation de la solution \mathbf{v}_ε du problème pénalisé de la forme $\mathbf{v}_\varepsilon = \sum_{n=0}^M \varepsilon^n \mathbf{V}^n$. On fait ensuite des estimations sur la solution du problème pénalisé reformulé en l'écrivant sous la forme $\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{w}$. La difficulté générée par le caractère non linéaire du problème est alors traitée par un schéma itératif de type Picard.

1.8.3 Résumé du chapitre 4

Après avoir réalisé les travaux sur les méthodes de pénalisation pour des systèmes hyperboliques linéaires, les chercheurs du CEA/IRFM impliqués dans l'ANR ESPOIR ont proposé un autre problème : Le traitement des équations liées au potentiel électrique ϕ en bord de tokamak.

Pour traiter ce problème au mieux, nous avons choisi de nous placer dans un cadre mathématique où l'existence et l'unicité de la solution ont déjà été prouvées [45]. Le domaine considéré est présenté dans la figure 1.9. Le modèle adimensionné étudié est alors le suivant :

$$\begin{cases} -\partial_t \partial_y^2 \phi_\eta - \frac{1}{\eta} \partial_x^2 \phi_\eta + \nu \partial_y^4 \phi_\eta = S & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\ \partial_y \phi_\eta|_{t=0} = \partial_y \phi_{ini} & \text{dans } \Omega \\ \partial_y \phi_\eta|_{\Sigma_{||}} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_y^3 \phi_\eta|_{\Sigma_{||}} = 0 & \text{sur }]0, T[\times \Sigma_{||} \\ \partial_x \phi_\eta|_{x=-L} = \eta \left(1 - e^{\Lambda - \phi_\eta|_{x=-L}}\right) & \text{sur }]0, T[\times \{-L\} \times]0, l[\\ \partial_x \phi_\eta|_{x=L} = -\eta \left(1 - e^{\Lambda - \phi_\eta|_{x=L}}\right) & \text{sur }]0, T[\times \{L\} \times]0, l[\\ \text{condition de périodicité de } \phi_\eta & \text{sur }]0, T[\times \{-0.5, 0.5\} \times]l, 1[, \end{cases} \quad (1.5)$$

où ν correspond à la viscosité ionique perpendiculaire et Λ désigne le potentiel de référence à l'intérieur du limiteur. Le paramètre η correspond à la résistivité du plasma dans la direction parallèle aux lignes de champ magnétiques. En pratique, η est très faible (de l'ordre de 10^{-6}). Cela induit une forte anisotropie dans le problème d'évolution : Quand η tend vers 0, le problème (1.5) devient mal posé car sous-déterminé.

Cela peut déjà se constater en se restreignant à une version 1D et linéarisée du problème ne considérant que la direction parallèle x . C'est pour cela que l'on va d'abord étudier ce cas simple pour se concentrer ensuite sur une version non linéaire du problème 1D. Cela permettra

d'introduire certaines méthodes de type *asymptotic-preserving* qui sont notamment utilisées pour les équations régissant les plasmas.

Sur le problème 1D, on fera également des essais de méthode de pénalisation en reprenant l'idée proposée par Bensiali *et al.* [15] : elle consiste simplement à ajouter la condition à la limite dans l'équation en la multipliant par un coefficient de la forme $\frac{\chi}{\varepsilon}$; χ désignant la fonction caractéristique d'une partie du limiteur et ε correspondant toujours au paramètre de pénalisation. Les résultats numériques obtenus par cette méthode de pénalisation semblent encourageants mais restent à être prouvés rigoureusement dans le cadre non linéaire.

Pour le problème 2D (1.5), une autre méthode de type *asymptotic-preserving* est proposée. Elle est basée sur la décomposition micro-macro décrite dans un article de Degond *et al.* pour un problème elliptique linéaire anisotrope [27]. La méthode consiste à poser $\phi_\eta = p_\eta + \eta q_\eta$ avec $\partial_x p_\eta = 0$ et $q_{\eta|x=-L} = 0$. L'idée étant ensuite de ne pas chercher le couple (p_η, q_η) mais de calculer (ϕ_η, q_η) .

On commence par donner les définitions des espaces que l'on va utiliser par la suite :

Définition 1.8.1

On définit les espaces de Hilbert suivants :

- $V = \{f \in H^1(\Omega), \partial_y^2 f \in L^2(\Omega), f \text{ périodique sur } \{-0.5, 0.5\} \times]l, 1[, \partial_y f = 0 \text{ sur } \Sigma_{||}\}$
avec pour produit scalaire :

$$\langle f, v \rangle_V = \int_{\Omega} \partial_x f \partial_x v \, dy dx + \int_{\Omega} \partial_y^2 f \partial_y^2 v \, dy dx + 2 \int_0^l f|_{x=L} v|_{x=L} \, dy.$$

- L'ensemble des éléments de V à dérivée par rapport à x (direction parallèle) nulle :

$$V_0 = \{f \in H^1(\Omega), \partial_y^2 f \in L^2(\Omega), \partial_x f = 0 \text{ dans } \Omega, \partial_y f = 0 \text{ sur } \Sigma_{||}\}.$$

On le munit du produit scalaire :

$$\langle f, v \rangle_{V_0} = \int_{\Omega} \partial_y^2 f \partial_y^2 v \, dy dx + 2 \int_0^l f|_{x=L} v|_{x=L} \, dy.$$

- $H = \{f \in L^2(\Omega), \partial_y f \in L^2(\Omega)\}$ avec son produit scalaire (pour $\epsilon > 0$) :

$$\langle f, v \rangle_H = \epsilon \int_{\Omega} f v \, dy dx + \int_{\Omega} \partial_y f \partial_y v \, dy dx.$$

- L'ensemble des éléments de H à dérivée par rapport à x (direction parallèle) nulle : $H_0 = \{f \in H^1(\Omega), \partial_y f \in L^2(\Omega), \partial_x f = 0 \text{ dans } \Omega\}$, muni du produit scalaire (pour $\epsilon > 0$) :

$$\langle f, v \rangle_{H_0} = \epsilon \int_{\Omega} f v \, dy dx + \int_{\Omega} \partial_y f \partial_y v \, dy dx.$$

- $Q = \{f \in L^2(\Omega), \partial_x f \in L^2(\Omega), f|_{x=-L} = 0 \text{ sur }]0, 1[\}$, muni du produit scalaire :

$$\langle f, v \rangle_Q = \int_{\Omega} \partial_x f \partial_x v \, dy dx.$$

On remarque que $V_0 \hookrightarrow H_0 \hookrightarrow V_0^*$ forme un triplet d'évolution (voir la définition dans l'annexe A).

On définit aussi :

Définition 1.8.2

L'espace \mathcal{A} est l'espace des fonctions ϕ telles que :

- $\phi \in L^2(0, T; V)$.
- $\partial_y \phi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.
- $\partial_y \phi \in L^2\left(0, T; \{f \in H^1(\Omega), \partial_y^2 f \in L^2(\Omega), f|_{\Sigma_\parallel} = 0\}\right)$.
- $\partial_y^2 \phi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.
- $\partial_t \phi \in L^2(0, T; V)$.
- $\partial_y \partial_t \phi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

L'espace \mathcal{A}_\perp est l'espace des fonctions ϕ telles que :

- $\phi \in L^2(0, T; V_0)$.
- $\partial_y \phi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.
- $\partial_y \phi \in L^2\left(0, T; \{f \in H^1(\Omega), \partial_y^2 f \in L^2(\Omega), \partial_x f = 0 \text{ dans } \Omega, f|_{\Sigma_\parallel} = 0\}\right)$.
- $\partial_y^2 \phi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.
- $\partial_t \phi \in L^2(0, T; V_0)$.
- $\partial_y \partial_t \phi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

On fait alors les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1.8.1

1. $S, \partial_y S, \partial_y^2 S, \partial_t S, \partial_t^2 S \in L^2(\Omega_T)$ et $\|S\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq C_s$ et $\|S|_{t=T}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_s$ avec C_s à définir.
2. $\phi_{ini} \in H^4(\Omega)$.
3. ϕ_{ini} est indépendant de x , c'est à dire $\partial_x \phi_{ini} = 0$.
4. $\int_{\Omega} S|_{t=0} dy dx = \int_{\Omega} \partial_y^4 \phi_{ini} dy dx + 2 \int_0^l \left(1 - e^{\Lambda - \phi_{ini}|x=L}\right) dy$.

Les deux dernières hypothèses sont des conditions de compatibilité de la condition initiale.

Pour le modèle 2D, on démontre alors le théorème de convergence suivant :

Théorème 1.8.2

Sous l'hypothèse 1.8.1, le problème : trouver $(\phi_\eta, q_\eta) \in \mathcal{A} \times L^2(0, T, Q)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \xi \in H^1(]0, T[), \forall v \in V \cap H^2(\Omega), \forall w \in Q, \\ \int_{\Omega} \partial_y \phi_{\eta|t=T} \partial_y v \, dy dx \xi(T) - \int_0^T \int_{\Omega} \partial_y \phi_{\eta|t=T} \partial_y v \, dy dx \xi' dt + \int_0^T \int_{\Omega} \partial_x q_{\eta} \partial_x v \, dy dx \xi dt \\ \quad + \nu \int_0^T \int_{\Omega} \partial_y^2 \phi_{\eta} \partial_y^2 v \, dy dx \xi dt + \int_0^T \int_0^l \left(1 - e^{\Lambda - \phi_{\eta|x=-L}}\right) v|_{x=-L} \, dy \xi dt \\ \quad + \int_0^T \int_0^l \left(1 - e^{\Lambda - \phi_{\eta|x=L}}\right) v|_{x=L} \, dy \xi dt = \int_{\Omega} \partial_y \phi_{ini} \partial_y v \, dy dx \xi(0) \\ \quad + \int_0^T \int_{\Omega} S v \, dy dx \xi dt \\ \eta \int_0^T \int_{\Omega} \partial_x q_{\eta} \partial_x w \, dy dx \xi dt = \int_0^T \int_{\Omega} \partial_x \phi_{\eta} \partial_x w \, dy dx \xi dt \end{array} \right. \quad (1.6)$$

admet une unique solution. De plus, on a la convergence faible de ϕ_{η} et q_{η} :

$$\phi_{\eta} \rightharpoonup \phi_0 \quad \text{et} \quad q_{\eta} \rightharpoonup q_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega_T)$$

Où $(\phi_0, q_0) \in \mathcal{A} \times L^2(0, T, Q)$ est l'unique solution faible de

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall v \in V, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \partial_y \phi_0 \partial_y v \, dy dx + \int_{\Omega} \partial_x q_0 \partial_x v \, dy dx + \nu \int_{\Omega} \partial_y^2 \phi_0 \partial_y^2 v \, dy dx \\ \quad + 2 \int_0^l (1 - \exp(\Lambda - \phi_0)) v \, dy = \int_{\Omega} S v \, dy dx \\ \partial_y \phi_0|_{t=0} = \partial_y \phi_{ini}. \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Enfin, on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|\phi_{\eta} - \phi_0\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))} \leq c(\Omega_T, \phi_0, S, \Lambda) \sqrt{\eta}.$$

Des tests numériques en 2D ont également été réalisés pour vérifier la convergence du problème faible (1.6) quand η tend vers 0. On observe que la matrice utilisée pour la résolution de chaque pas de temps, dans le schéma numérique, a un conditionnement bornée indépendamment de η .

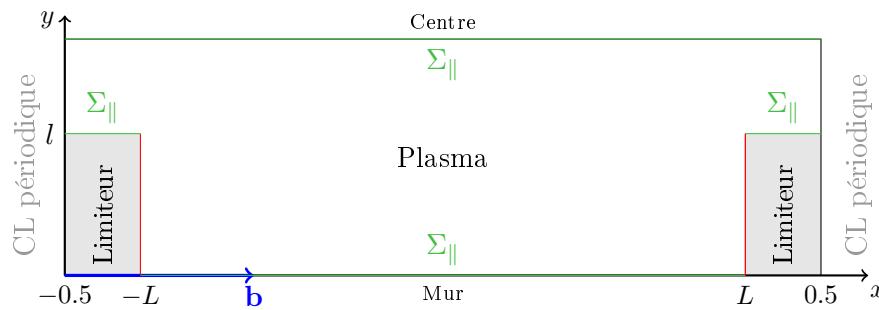


FIGURE 1.9 – Représentation en deux dimensions de la zone contenant le plasma de bord. L’axe x correspond à une abscisse curviligne le long d’une ligne de champ magnétique (de direction \mathbf{b}). L’axe y correspond à la direction radiale.

Chapitre 2

Pénalisation pour un problème hyperbolique non linéaire 1D modélisant la densité et le moment du plasma de bord

Ce chapitre étudie le problème de la pénalisation du système hyperbolique modélisant la densité N et la quantité de mouvement Γ , le long d'une ligne de champ magnétique (voir, par exemple, [37, 60]). Une première méthode de pénalisation a été introduite par Isoardi *et al.* [37] avec des résultats encourageants. Mais l'étude numérique est incomplète et le fait que le flux soit coupé à l'intérieur du limiteur pourrait générer une mesure de Dirac proche de l'interface plasma-limiteur. Dans ce chapitre, après une étude numérique de la pénalisation proposée par Isoardi *et al.*, on modifie les conditions aux limites du système N, Γ pour s'assurer qu'il soit bien posé. On étudie ensuite une seconde méthode de pénalisation afin de montrer comment se manifeste une couche limite. Dans la dernière section, on propose une troisième méthode de pénalité incomplète qui ne génère pas un tel phénomène. Par la suite, on notera $M = \frac{\Gamma}{N}$, le nombre de Mach.

Ce chapitre reprend les travaux d'un article publié Journal of Computational Physics [10].

Le système de lois de conservation 1D, pour la densité du plasma N et pour le flux (ou moment) Γ est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t N + \partial_x \Gamma = S_N & \text{dans }]-L, L[\\ \partial_t \Gamma + \partial_x \left(\frac{\Gamma}{N} + N \right) = S_\Gamma \\ M(., L) = 1 \\ M(., -L) = -1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Ici, le domaine contenant le plasma correspond à $x \in]-L, L[$, voir la figure 2.1. Le bord correspond à l'interface avec le limiteur, un obstacle matériel placé dans la *scrape-off layer*

et destiné à protéger les autres parties de la paroi du tokamak. Dans les membres de droite, S_N et S_Γ sont des termes sources fixés. On remarque que le système (2.1) correspond aux équations d'Euler isentropique avec une loi de pression linéaire. La première équation de (2.1) correspond à la conservation de la quantité de matière tandis que la seconde représente la conservation du moment.

Pour une fonction suffisamment régulière, on peut réécrire (2.1) sous forme non conservatrice :

$$\partial_t \begin{pmatrix} N \\ \Gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{\Gamma^2}{N^2} & 2\frac{\Gamma}{N} \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} N \\ \Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_N \\ S_\Gamma \end{pmatrix} \quad (t, x) \in \mathbb{R}_*^+ \times]-L, L[. \quad (2.2)$$

Les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - M^2 & 2M \end{pmatrix}$$

sont $\Lambda_1 = M - 1$ et $\Lambda_2 = M + 1$. Ainsi, comme $\Lambda_1 < \Lambda_2$, le système est strictement hyperbolique.

Les conditions aux limites : On rappelle que selon des considérations physiques, la *scrape-off layer* est séparée en deux régions ayant des régimes bien différents :

- Une région éloignée du limiteur, la pré-gaine, où le plasma est neutre et où la valeur absolue du nombre de Mach $|M| = |\Gamma/N|$ est inférieure à 1.
- Une fine couche à l'interface plasma-limiteur, dont l'épaisseur est de l'ordre de la longueur de Debye, soit $10^{-5}m$, où le plasma est électriquement chargé. Dans cette région, le nombre de Mach vérifie $|M| > 1$, plus précisément, on a $M > 1$ en $x \approx L$ et $M < -1$ en $x \approx -L$.

A première vue, il serait naturel d'imposer les conditions aux limites $M = 1$ en $x = L$ et $M = -1$ en $x = -L$, comme c'est le cas dans (2.1), puisque d'après la physique, $M = \pm 1$ à proximité de l'obstacle (critère de Bohm). C'est ce qui a été choisi par Isoardi *et al.* dans [37]. Mais, dans ce cas, comme les valeurs propres sont $\Lambda_1 = M - 1$ et $\Lambda_2 = M + 1$, on en déduit, qu'à l'interface plasma-limiteur, une des valeurs propres est nulle (c'est à dire que la frontière est caractéristique) et l'autre correspond à une onde sortante (que ce soit en $x = L$ ou en $x = -L$). Ainsi, le problème (2.1) ne satisfait pas les conditions pour appliquer les théorèmes usuels assurant l'existence et l'unicité de la solution d'un problème hyperbolique : le nombre de conditions à chaque bord (= 1) n'est pas égal au nombre d'ondes rentrantes (= 0).

Afin de travailler avec un système hyperbolique bien posé, dans les parties 2.2.2 et 2.3, nous avons légèrement modifié les conditions aux limites du problème (2.1) : on impose $M = 1 - \xi$ en $x = L$ et $M = -1 + \xi$ en $x = -L$ où $\xi > 0$ est une constante fixée, proche de 0. Le problème bien posé s'écrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t N + \partial_x \Gamma = S_N & \text{dans }]-L, L[\\ \partial_t \Gamma + \partial_x \left(\frac{\Gamma}{N} + N \right) = S_\Gamma \\ M(., L) = 1 - \xi \\ M(., -L) = -1 + \xi. \end{cases} \quad (2.3)$$

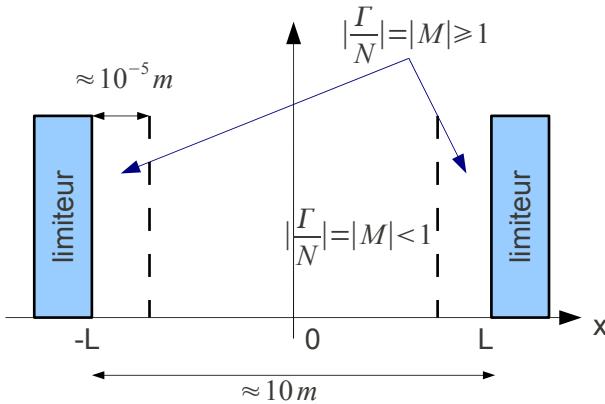


FIGURE 2.1 – Schéma de la *scrape-off layer*, proche de la paroi du tokamak. L’abscisse correspond aux coordonnées curvilignes le long d’une ligne de champ magnétique.

2.1 Présentation du schéma volumes finis utilisé

Plusieurs schémas volumes finis ont été testés pour résoudre le problème hyperbolique (2.3), voir [12]. On ne présente ici que celui qui a été retenu.

2.1.1 Le schéma volumes finis utilisé

Pour rechercher une éventuelle couche limite générée par les méthodes de pénalisation étudiées dans la suite, deux points doivent être vérifiés :

1. Le maillage doit être suffisamment fin de manière à avoir plusieurs cellules dans la couche limite éventuelle, afin que le schéma puisse résoudre correctement l’équation dans cette zone.
2. L’erreur de discréétisation doit être plus faible que l’erreur due à la pénalisation afin de pouvoir mesurer la convergence en fonction du paramètre de pénalisation. Pour cela on choisit de considérer un schéma d’ordre 2.

Le schéma retenu est un schéma de type VF Roe avec variables non conservatives (VF Roe ncv), présenté par Buffard, Gallouët, Hérard [20]. L’ordre 2 est atteint en utilisant des limiteurs de type minmod et une discréétisation en temps de type RK2 TVD.

On va donner ici une brève présentation du schéma VF Roe ncv [20]. On considère un système hyperbolique sous forme conservative :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

L’espace est discréétisé selon avec un maillage (x_i) uniforme ($x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = \Delta x$), voir la figure 2.2. L’intervalle $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ représente une cellule du schéma volumes finis (aussi appelée volume de contrôle), désignée par la suite comme étant la cellule i , son centre est

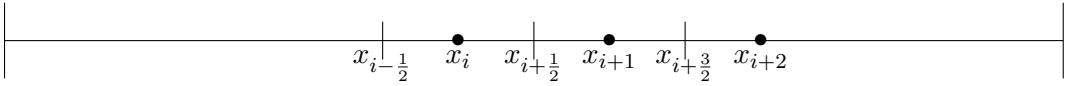


FIGURE 2.2 – Représentation du maillage utilisé.

noté x_i . Dans cette partie, on ne s'intéresse pas au traitement des conditions aux limites au bord du domaine de calcul.

La suite $(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}})$ approche la valeur moyenne de la solution du chaque cellule, c'est à dire que $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}(t) \approx \int_{]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[} \mathbf{u}(t, x) dx$. On intègre alors l'équation (2.4) sur l'intervalle $]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$:

$$\begin{cases} \partial_t \int_{]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[} \mathbf{u}(\cdot, x) dx + \mathbf{f}(\mathbf{u}(\cdot, x_{i+\frac{1}{2}})) - \mathbf{f}(\mathbf{u}(\cdot, x_{i-\frac{1}{2}})) = \mathbf{0} \\ \int_{]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+1}[} \mathbf{u}(0, x) dx = \int_{]x_i, x_{i+\frac{1}{2}}[} \mathbf{u}_0(x) dx. \end{cases} \quad (2.5)$$

On introduit alors la notion de flux $\mathbf{F}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{u}(\cdot, x_{i+\frac{1}{2}}))$. Le flux \mathbf{F} est supposé être consistant, c'est à dire que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$, $\mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{v})$. On peut alors écrire le système discréteisé en espace :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_i + \mathbf{F}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_i) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_i(0) = \int_{]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[} \mathbf{u}_0(x) dx. \end{cases} \quad (2.6)$$

Pour le calcul de \mathbf{F} , on utilise le schéma VF Roe avec variables non conservatives (VF Roe ncv) proposé par Buffard *et al.*. La méthode consiste à approcher la valeur de la solution de (2.4) à l'interface entre les cellules i et $i+1$, c'est à dire en $x_{i+\frac{1}{2}}$, puis à injecter cette approximation dans la fonction \mathbf{f} pour avoir le flux numérique $\mathbf{F}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1})$. Pour calculer la solution approchée de (2.4) en $x_{i+\frac{1}{2}}$, on va considérer le problème de Riemann linéarisé suivant, après avoir fait un changement d'inconnue de manière à faciliter la résolution du système :

$\mathbf{y} = \mathbf{w}(\mathbf{u})$ changement d'inconnue : \mathbf{w} \mathcal{C}^1 -difféomorphisme

$$\mathbf{A}(\mathbf{y}) = (\nabla \mathbf{w}^{-1}(\mathbf{y}))^{-1} \nabla \mathbf{f}(\mathbf{w}^{-1}(\mathbf{y})) \nabla \mathbf{w}^{-1}(\mathbf{y})$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{2} (\mathbf{w}(\mathbf{u}_i) + \mathbf{w}(\mathbf{u}_{i+1}))$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{y} \text{ tel que :} \\ \partial_t \mathbf{y} + \mathbf{A}(\bar{\mathbf{y}}) \partial_x \mathbf{y} = \mathbf{0} \\ \mathbf{y}(0, x) = \begin{cases} \mathbf{w}(\mathbf{u}_i) & \text{si } x < x_{i+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{w}(\mathbf{u}_{i+1}) & \text{si } x \geq x_{i+\frac{1}{2}}. \end{cases} \end{cases}$$

La méthode VF Roe ncv choisit alors comme flux $\mathbf{F}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}) = \mathbf{f}(\mathbf{w}^{-1}(\mathbf{y}(0^+, x_{i+\frac{1}{2}})))$. Ce flux est conservatif, par contre ce schéma n'est pas entropique. C'est pourquoi, dans les

endroits où la condition d'entropie pourrait ne pas être respectée, on remplace le flux par un flux de type Rusanov : c'est une correction entropique de type Rusanov.

Le schéma ainsi obtenu est d'ordre 1, or, pour rechercher une couche limite éventuelle il est nécessaire que l'erreur de discrétisation soit faible comparée à l'erreur due à la pénalisation : on considère donc une extension de ce schéma à l'ordre 2, obtenue grâce à une reconstruction de type MUSCL (*Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws*, voir [63]) avec des limiteurs de pente de type minmod. La méthode de reconstruction de type MUSCL permet d'avoir une méthode d'ordre 2 en réutilisant la fonction flux numérique \mathbf{F} du schéma VF Roe ncv.

La fonction minmod est définie de la manière suivante :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \text{minmod}(a, b) = \frac{1}{2}(\text{sign}(a) + \text{sign}(b)) \min(|a|, |b|).$$

Si a et b sont des vecteurs, on applique la définition ci-dessus composante par composante.

On définit ensuite les quantités suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, (\mathbf{u}_i)_x(t) = \text{minmod}\left(\frac{\mathbf{u}_{i+1}(t) - \mathbf{u}_i(t)}{\delta x}, \frac{\mathbf{u}_i(t) - \mathbf{u}_{i-1}(t)}{\delta x}\right).$$

On donne alors les reconstructions de \mathbf{u} au bord des cellules i et $i + 1$:

$$\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},l}(t) = \mathbf{u}_i(t) + \frac{\delta x}{2}(\mathbf{u}_i)_x(t).$$

$$\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},r}(t) = \mathbf{u}_{i+1}(t) - \frac{\delta x}{2}(\mathbf{u}_{i+1})_x(t).$$

Finalement, la discrétisation spatiale avec la reconstruction MUSCL s'écrit :

$$d_t \mathbf{u}_i + \frac{1}{\delta x} \left(\mathbf{F} \left(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},l}, \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},r} \right) - \mathbf{F} \left(\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},l}, \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},r} \right) \right).$$

Bien évidemment, si on veut tirer profit de la discrétisation spatiale d'ordre 2, il est nécessaire d'utiliser un schéma en temps d'ordre 2, au moins : on choisira le schéma de Heun, aussi appelé RK2.

2.1.2 Application à notre problème :

Maintenant, on va appliquer le schéma VF Roe au problème hyperbolique initial rappelé ici :

$$\begin{cases} \partial_t \begin{pmatrix} N \\ \Gamma \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \Gamma \\ \frac{\Gamma^2}{N} + N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} N(0, x) \\ \Gamma(0, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_0(x) \\ \Gamma_0(x) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Les reconstructions de N par la méthode de type MUSCL est définie par

$$N_{i,l}^n = N_i^n + \frac{\delta x}{2}(N_i^n)_x \quad \text{et} \quad N_{i,r}^n = N_i^n - \frac{\delta x}{2}(N_i^n)_x, \quad (2.7)$$

où

$$(N_i^n)_x = \text{minmod} \left(\frac{N_{i+1}^n - N_i^n}{\delta x}, \frac{N_i^n - N_{i-1}^n}{\delta x} \right).$$

$\Gamma_{i,l}^n, \Gamma_{i,r}^n$ sont définis de la même manière.

Pour le changement d'inconnue \mathbf{w} , on fait le choix naturel de considérer les variables non conservatives N et $M = \Gamma/N$.

Les reconstructions pour le nombre de Mach M sont définies à partir des reconstructions obtenues pour N et Γ :

$$M_{i+\frac{1}{2},l}^n = \frac{\Gamma_{i+\frac{1}{2},l}^n}{N_{i+\frac{1}{2},l}^n} \quad \text{et} \quad M_{i+\frac{1}{2},r}^n = \frac{\Gamma_{i+\frac{1}{2},r}^n}{N_{i+\frac{1}{2},r}^n}. \quad (2.8)$$

Les flux numériques $f_{N,i+\frac{1}{2}}^n$ et $f_{\Gamma,i+\frac{1}{2}}^n$ sont calculés de la manière suivante :

– Si la correction entropique n'est pas nécessaire :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{N,i+\frac{1}{2}}^n \\ f_{\Gamma,i+\frac{1}{2}}^n \end{pmatrix} &= \mathbf{F} \left(\begin{pmatrix} N_{i+\frac{1}{2},l}^n \\ \Gamma_{i+\frac{1}{2},l}^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N_{i+\frac{1}{2},r}^n \\ \Gamma_{i+\frac{1}{2},r}^n \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_{i+\frac{1}{2}}^n(t_n^+, x_{i+\frac{1}{2}}) \\ \frac{(\tilde{\Gamma}_{i+\frac{1}{2}}^n(t_n^+, x_{i+\frac{1}{2}}))^2}{\tilde{N}_{i+\frac{1}{2}}^n(t_n^+, x_{i+\frac{1}{2}})} + \tilde{N}_{i+\frac{1}{2}}^n(t_n^+, x_{i+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

où $\tilde{N}_{i+\frac{1}{2}}^n(t_n^+, x_{i+\frac{1}{2}})$ et $\tilde{\Gamma}_{i+\frac{1}{2}}^n(t_n^+, x_{i+\frac{1}{2}}) = \tilde{M}_{i+\frac{1}{2}}^n(t_n^+, x_{i+\frac{1}{2}})\tilde{N}_{i+\frac{1}{2}}^n(t_n^+, x_{i+\frac{1}{2}})$ sont évalués en résolvant le problème de Riemann linéarisé ci-dessous (t_n^+ est une valeur strictement plus grande que t_n) :

$$\begin{cases} \partial_t \begin{pmatrix} \tilde{N}_{i+\frac{1}{2}}^n \\ \tilde{M}_{i+\frac{1}{2}}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(M_{i+\frac{1}{2},l}^n + M_{i+\frac{1}{2},r}^n \right) & \frac{1}{2} \left(N_{i+\frac{1}{2},l}^n + N_{i+\frac{1}{2},r}^n \right) \\ \frac{2}{N_{i+\frac{1}{2},l}^n + N_{i+\frac{1}{2},r}^n} & \frac{1}{2} \left(M_{i+\frac{1}{2},l}^n + M_{i+\frac{1}{2},r}^n \right) \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \tilde{N}_{i+\frac{1}{2}}^n \\ \tilde{M}_{i+\frac{1}{2}}^n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{N}_{i+1}^n(t_n, x) \\ \tilde{M}_{i+1}^n(t_n, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{i+\frac{1}{2},l}^n \\ M_{i+\frac{1}{2},l}^n \end{pmatrix} \text{ si } x < x_{i+1} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} N_{i+\frac{1}{2},r}^n \\ M_{i+\frac{1}{2},r}^n \end{pmatrix} \text{ si } x \geq x_{i+1}. \end{cases}$$

– Si la correction entropique est nécessaire, c'est à dire si $M_{i+\frac{1}{2},l}^n - 1 \leq 0 \leq M_{i+\frac{1}{2},r}^n - 1$ (et $M_{i+\frac{1}{2},l}^n \neq M_{i+\frac{1}{2},r}^n$) ou si $M_{i+\frac{1}{2},l}^n + 1 \leq 0 \leq M_{i+\frac{1}{2},r}^n + 1$ (et $M_{i+\frac{1}{2},l}^n \neq M_{i+\frac{1}{2},r}^n$), le flux

numérique est remplacé par un flux de Rusanov :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{N,i+\frac{1}{2}}^n \\ f_{\Gamma,i+\frac{1}{2}}^n \end{pmatrix} &= \mathbf{F} \left(\begin{pmatrix} N_{i+\frac{1}{2},l}^n \\ \Gamma_{i+\frac{1}{2},l}^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N_{i+\frac{1}{2},r}^n \\ \Gamma_{i+\frac{1}{2},r}^n \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\left(\Gamma_{i+\frac{1}{2},l}^n \right)^2 + \left(\Gamma_{i+\frac{1}{2},r}^n \right)^2}{N_{i+\frac{1}{2},l}^n + N_{i+\frac{1}{2},r}^n} + N_{i+\frac{1}{2},l}^n + N_{i+\frac{1}{2},r}^n \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\max \left\{ |M_{i+\frac{1}{2},l}^n|, |M_{i+\frac{1}{2},r}^n| \right\} + 1 \right) \begin{pmatrix} N_{i+\frac{1}{2},r}^n - N_{i+\frac{1}{2},l}^n \\ \Gamma_{i+\frac{1}{2},r}^n - \Gamma_{i+\frac{1}{2},l}^n \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Au final, la version d'ordre 2 du schéma complet, c'est à dire avec la discréétisation spatiale et temporelle, s'écrit :

$$\begin{aligned} N_i^{1,n} &= N_i^n - \frac{\delta t}{\delta x} \left(f_{N,i+\frac{1}{2}}^n - f_{N,i-\frac{1}{2}}^n \right) + \delta t S_{N,i}^n \\ \Gamma_i^{1,n} &= \Gamma_i^n - \frac{\delta t}{\delta x} \left(f_{\Gamma,i+\frac{1}{2}}^n - f_{\Gamma,i-\frac{1}{2}}^n \right) + \delta t S_{\Gamma,i}^n \\ N_i^{n+1} &= \frac{1}{2} (N_i^{1,n} + N_i^n) - \frac{\delta t}{2\delta x} \left(f_{N,i+\frac{1}{2}}^{1,n} - f_{N,i-\frac{1}{2}}^{1,n} + f_{N,i+\frac{1}{2}}^n - f_{N,i-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{\delta t}{2} (S_{N,i}^n + S_{N,i}^{n+1}) \\ \Gamma_i^{n+1} &= \frac{1}{2} (\Gamma_i^{1,n} + \Gamma_i^n) - \frac{\delta t}{2\delta x} \left(f_{\Gamma,i+\frac{1}{2}}^{1,n} - f_{\Gamma,i-\frac{1}{2}}^{1,n} + f_{\Gamma,i+\frac{1}{2}}^n - f_{\Gamma,i-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{\delta t}{2} (S_{\Gamma,i}^n + S_{\Gamma,i}^{n+1}), \end{aligned}$$

où l'exposant $1, n$ représente l'étape intermédiaire du schéma de Heun.

Dans cette section, on ne s'intéresse pas au traitement des conditions aux limites, cela sera abordé dans la suite du chapitre. Nous avons choisi d'utiliser un pas de temps adaptatif δt en utilisant une condition de type CFL : $\max_i \{|M_i^n| + 1\} \frac{\delta t}{\delta x} = 0.8$.

2.2 Les premiers essais de pénalisation

2.2.1 Une première méthode de pénalisation

Une première méthode de pénalisation pour le système (2.1) a été développée par Isoardi *et al.* [37]. Cette méthode est basée sur des considérations physiques telles qu'une densité nulle de plasma dans le limiteur et une condition basée du critère de Bohm au bord. On note χ la fonction caractéristique du limiteur, c'est à dire que $\chi(x) = 1$ dans le limiteur et $\chi(x) = 0$ ailleurs. ε représente le paramètre de pénalisation et a une valeur proche de 0.

$$\begin{cases} \partial_t N + \partial_x \Gamma + \frac{\chi}{\varepsilon} N = (1 - \chi) S_N \\ \partial_t \Gamma + (1 - \chi) \partial_x \left(\frac{\Gamma^2}{N} + N \right) + \frac{\chi}{\varepsilon} (\Gamma - NM_0) = (1 - \chi) S_\Gamma. \end{cases} \tag{2.11}$$

Formellement, à l'intérieur du limiteur, on s'attend à avoir tous les termes de l'équation bornés indépendamment de ε , notamment $\frac{\chi}{\varepsilon}N$ et $\frac{\chi}{\varepsilon}(\Gamma - NM_0)$. Comme $0 < \varepsilon \ll 1$, cela imposerait, à l'intérieur du limiteur, $N \approx 0$, et $\Gamma \approx NM_0$. Ici, on rappelle que M_0 vaut 1 en $x = L$ et -1 en $x = -L$.

On constate que, dans l'équation sur la quantité de mouvement, le flux a été coupé à l'intérieur du limiteur, ce qui peut poser des problèmes du point de vue mathématique. En effet, le sens du terme

$$(1 - \chi)\partial_x \left(\frac{\Gamma^2}{N} + N \right). \quad (2.12)$$

n'est pas clair car il peut impliquer de faire le produit d'une mesure par une fonction discontinue, ce qui n'est pas défini au sens des distributions. Bien évidemment, on n'exclut pas qu'un autre sens puisse être attribué à ce produit. Les tests numériques ont montré qu'avec un maillage suffisamment fin, on observe la formation d'un pic sur le nombre de Mach M dès les premiers instants situé à l'interface plasma-limiteur, voir la figure 2.4. Ce pic peut être vu comme une mesure de Dirac et confirmerait les difficultés à donner un sens au terme (2.12). Pour l'interprétation de cette singularité, il se pourrait que le système admette des solutions généralisées dans l'esprit de Bouchut-James [18] (voir aussi Poupaud-Rascle [50] ou Fornet-Guès [29]) comme des solutions mesures, qui peuvent éventuellement faire apparaître des mesures de Dirac à l'interface. Cette solution généralisée pourrait ensuite être sélectionnée par le schéma numérique utilisé. Les tests numériques ont été réalisés en choisissant les termes sources S_N et S_Γ de manière à ce que les fonctions suivantes soient solution de (2.1) dans la zone correspondant au plasma :

$$\begin{aligned} N(t, x) &= \exp \left(\frac{-x^2}{0.16(t+1)} \right) \\ \Gamma(t, x) &= \sin \left(\frac{\pi x}{0.8} \right) \exp \left(\frac{-x^2}{0.16(t+1)} \right). \end{aligned}$$

La solution exacte est ainsi régulière et n'a pas de singularité à l'interface plasma-limiteur. On a fait une étude de convergence au maillage en faisant fixant $\varepsilon = 10^{-3}$. On constate alors qu'un pic se forme très rapidement à proximité de l'interface. On remarque aussi que, plus le maillage est fin, plus le pic apparaît tôt et plus il est proche de l'interface. Les valeurs de $|M|$ pour ce pics atteignent rapidement des valeurs de l'ordre de 10^8 causant ainsi des problèmes de stabilité du schéma à cause de la condition CFL.

Le deuxième problème de cette méthode de pénalisation est le fait qu'au bord du domaine plasma, on a $M(\pm L) = \pm 1$. En effet, cela fait qu'à l'interface plasma-limiteur on n'a aucun champ rentrant. Ainsi les conditions (suffisantes) des théorèmes usuels nous garantissant l'existence et l'unicité de la solution de (2.1) ne sont pas satisfaites.

2.2.2 Pénalisation des deux champs

Cette section présente une autre pénalisation qui génère des couches limites. Cette section a alors plusieurs buts :

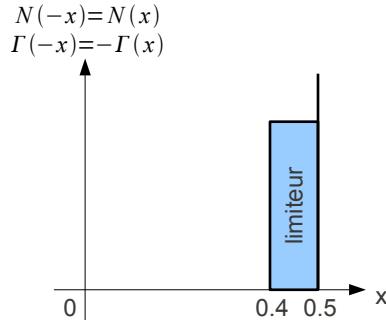


FIGURE 2.3 – Représentation du domaine de calcul $x \in [0, 0.5]$. La zone où se situe le plasma correspond à $x \in [0, L]$, avec $L = 0.4$.

- Un but plutôt pédagogique : montrer les effets d'une couche limite en étudiant la convergence quand le paramètre de pénalisation ε tend vers 0.
- Etudier le comportement d'une méthode qui a été utilisée pour un modèle plus complet prenant en compte les transferts d'énergie, voir [47].

Cette méthode de pénalisation impose non seulement $M \approx M_0$ mais aussi $N \approx 0$ dans le limiteur. Cette dernière condition permet de prendre en compte l'absence de plasma dans le limiteur. On rappelle que le critère de Bohm vient du raccordement continu de deux physiques différentes, [60] :

- Celle de la pré-gaine où on a $|M| < 1$.
- Celle de la gaine où $|M| > 1$.

Afin d'avoir de chaque côté un champ rentrant, on choisit d'imposer comme condition aux limites $M(t, +L) = 1 - \xi$ et $M(t, -L) = +1 - \xi$, avec $0 < \xi \ll 1$. Le système hyperbolique à résoudre est alors (2.3). Ici on teste la pénalisation naturelle suivante :

$$\begin{cases} \partial_t N + \partial_x \Gamma + \frac{\chi}{\varepsilon} N = (1 - \chi) S_N \\ \partial_t \Gamma + \partial_x \left(\frac{\Gamma^2}{N} + N \right) + \frac{\chi}{\varepsilon} (\Gamma - NM_0) = (1 - \chi) S_\Gamma, \end{cases} \quad (2.13)$$

sur le domaine de calcul décrit dans la figure 2.3. On pose $M_0 = 1 - \xi$.

La différence de (2.13) avec (2.11) est que l'on a retiré le terme en $(1 - \chi)$ qui posait problème. Ce problème a donc une unique solution régulière jusqu'à un certain temps T , pour des données initiales compatibles, voir par exemple [55] et le théorème 11.1 du livre de Benzoni-Serre [16].

Pour le test numérique de la convergence de la pénalisation, on essaie d'imposer les solutions manufaturées suivantes :

$$N(t, x) = \exp \left(\frac{-x^2}{0.16(t+1)} \right) \quad \Gamma(t, x) = M_0 \sin \left(\frac{\pi x}{0.8} \right) \exp \left(\frac{-x^2}{0.16(t+1)} \right). \quad (2.14)$$

Ainsi les termes S_N et S_Γ sont choisis de manière à ce que les fonctions ci-dessus vérifient les équations du système hyperbolique (2.3).

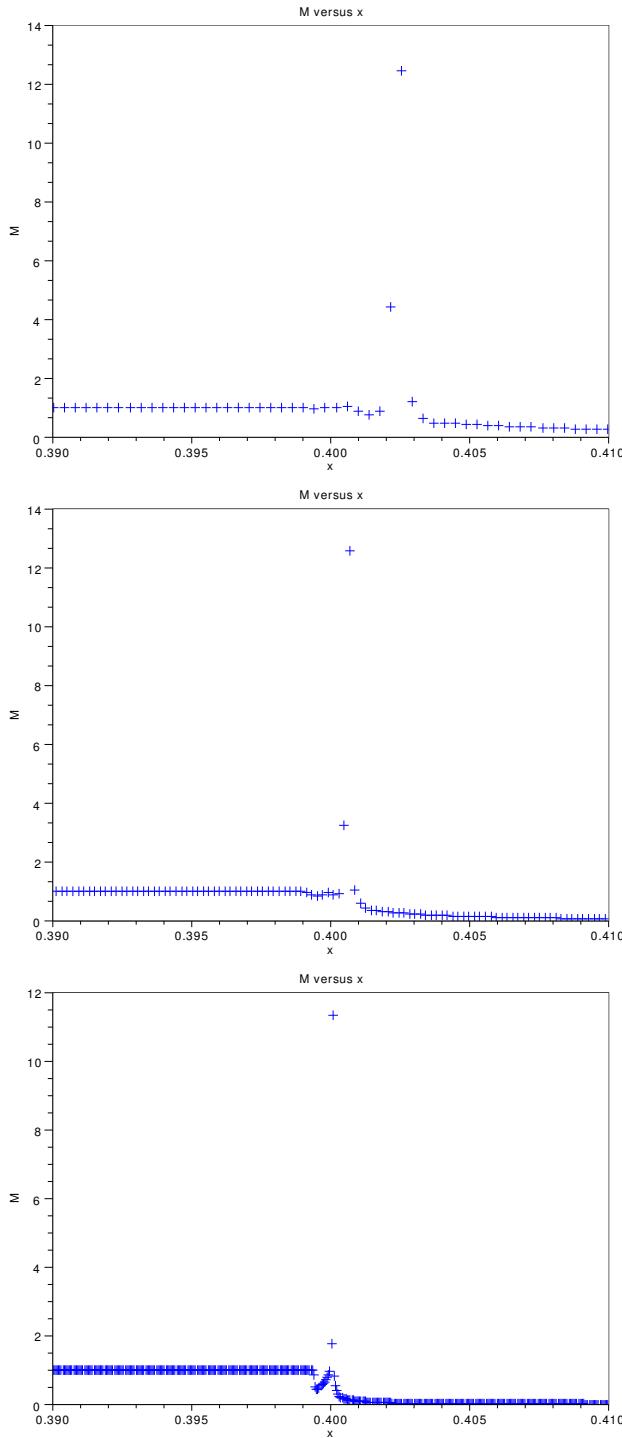


FIGURE 2.4 – M en fonction de x avec $\varepsilon = 10^{-3}$, avec trois maillages différents (respectivement 1280, 2560 et 10240 volumes de contrôle) en utilisant la pénalisation proposés par Isoardi *et al.* [37]. Les calculs sont arrêtés quand $\max_{i \in \{1, \dots, J\}} (|M_i^n|) > 10$, ce qui correspond aux instants suivants : $t = 0.008822$, $t = 0.004107$ et $t = 0.0015834$. Le domaine de calcul correspond à $[0, 0.5]$ et $L = 0.4$ (interface plasma-limiteur). Une condition de symétrie a été imposée en $x = 0$ (voir la figure 2.3).

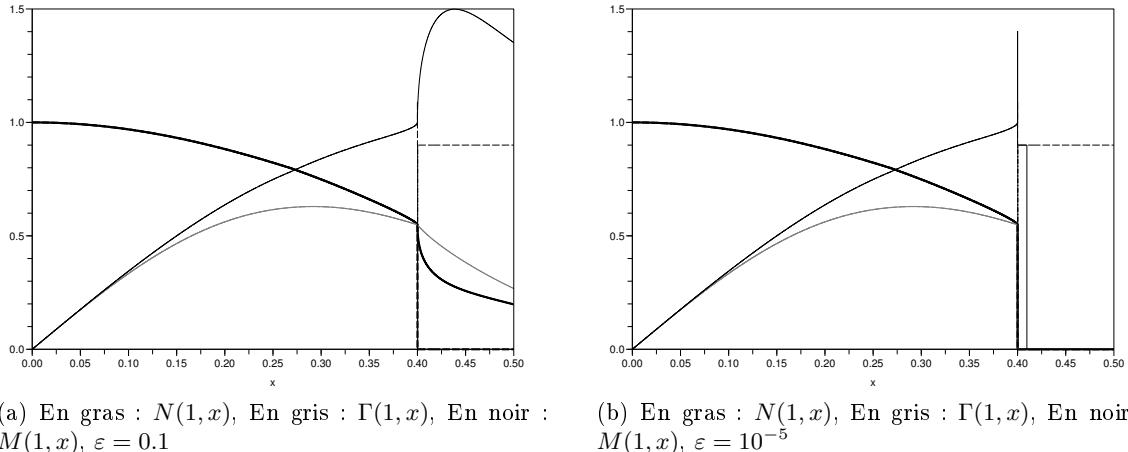
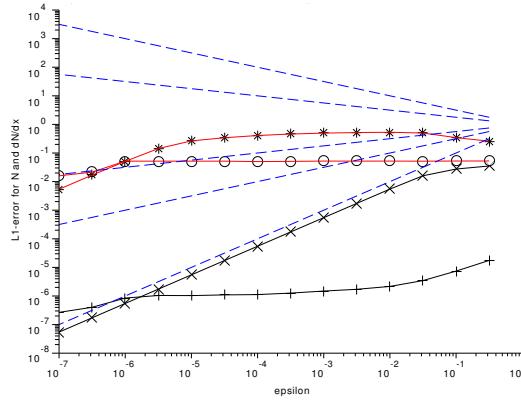


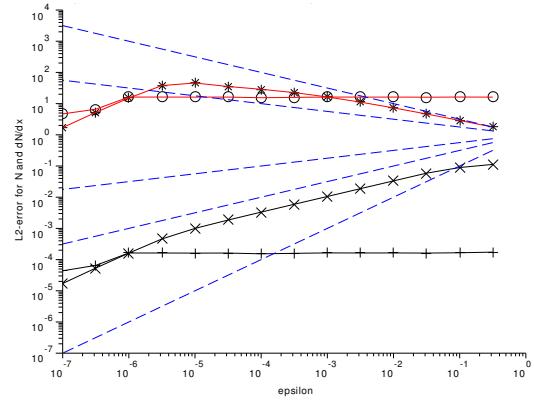
FIGURE 2.5 – Tracé de N , Γ et M en fonction de x à $t = 1$ avec la méthode de pénalisation des deux champs en prenant $\varepsilon = 0.1$ (courbe de gauche) et $\varepsilon = 10^{-5}$ (courbe de droite). Les lignes continues représentent les solutions approchées et les pointillés correspondent à la solution de référence ($\varepsilon = 10^{-20}$). Le limiteur est la zone $x \in [0.4, 0.5]$. Le pas du maillage en espace est $\delta x = 10^{-5}$.

Le tracé des solutions numériques sur la figure 2.5 montre que les solutions limites obtenues, quand ε tend vers 0, ne sont pas celles imposées dans (2.14) mais est proche de 1 au niveau de l’interface plasma-limiteur (bien que $M_0 = 1 - \xi = 0.9$). On observe le même résultat pour $\xi = 0.01$. Ghendrih *et al.* [31] expliquent ce phénomène comme une conséquence de la contrainte $N \approx 0$ dans le limiteur. Au final, on ne connaît pas la solution limite exacte (quand $\varepsilon \rightarrow 0$) de (2.13). Pour les tests numériques la solution de référence est celle donnée par le schéma pour $\varepsilon = 10^{-20}$.

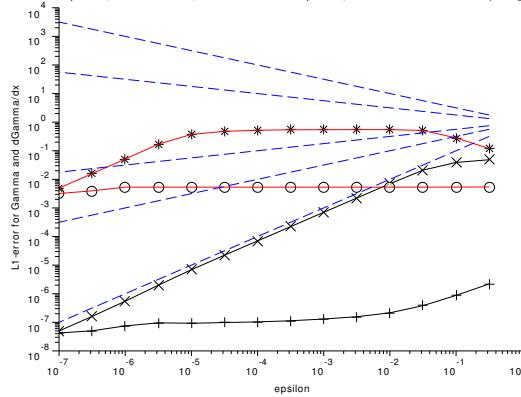
L’étude de convergence quand ε tend vers 0 permet de mettre en évidence une couche limite, capturée par le schéma numérique quand le pas en espace est suffisamment petit. Le schéma volumes finis d’ordre 2 finis utilisé pour la résolution de ce problème est donné par



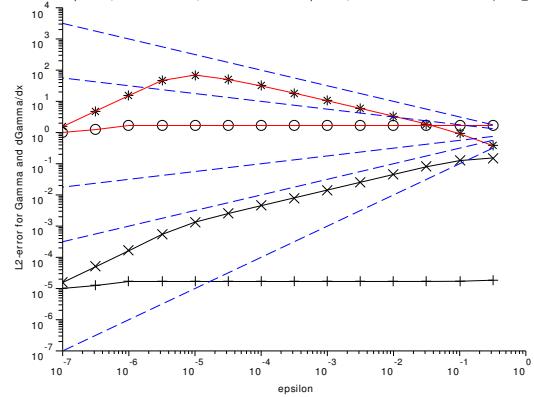
(a) Erreur L^1 pour N dans le plasma (+), N dans le limiteur (\times), $\partial_x N$ dans le plasma (\circ) et $\partial_x N$ dans le limiteur (*)



(b) Erreur L^2 pour N dans le plasma (+), N dans le limiteur (\times), $\partial_x N$ dans le plasma (\circ) et $\partial_x N$ dans le limiteur (*)



(c) Erreur L^1 pour Γ dans le plasma (+), Γ dans le limiteur (\times), $\partial_x \Gamma$ dans le plasma (\circ) et $\partial_x \Gamma$ dans le limiteur (*)



(d) Erreur L^2 pour Γ dans le plasma (+), Γ dans le limiteur (\times), $\partial_x \Gamma$ dans le plasma (\circ) et $\partial_x \Gamma$ dans le limiteur (*)

FIGURE 2.6 – Erreurs pour N , $\partial_x N$, Γ en $\partial_x \Gamma$ en norme L^1 et L^2 avec la pénalisation des deux champs, cf. (2.13). Les lignes en pointillés représentent respectivement les courbes $\epsilon^{-\frac{1}{2}}$, $\epsilon^{-\frac{1}{4}}$, $\epsilon^{1/4}$, $\epsilon^{1/2}$ et ϵ . Le pas du maillage en espace est $\delta x = 10^{-5}$.

les équations suivantes :

$$\begin{aligned} N_i^{1,n} &= \frac{N_i^n - \frac{\delta t}{\delta x} \left(f_{N,i+\frac{1}{2}}^n - f_{N,i-\frac{1}{2}}^n \right) + \delta t S_{N,i}^n}{1 + \frac{\delta t}{\varepsilon} \chi} \\ \Gamma_i^{1,n} &= \frac{\Gamma_i^n - \frac{\delta t}{\delta x} \left(f_{\Gamma,i+\frac{1}{2}}^n - f_{\Gamma,i-\frac{1}{2}}^n \right) + \delta t \frac{\chi}{\varepsilon} M_0 + \delta t S_{\Gamma,i}^n}{1 + \delta t \frac{\chi}{\varepsilon N_i^{1,n}}} \\ N_i^{n+1} &= \frac{\frac{1}{2}(N_i^{1,n} + N_i^n) - \frac{\delta t}{2\delta x} \left(f_{N,i+\frac{1}{2}}^{1,n} - f_{N,i-\frac{1}{2}}^{1,n} + f_{N,i+\frac{1}{2}}^n - f_{N,i-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{\delta t}{2} (S_{N,i}^n + S_{N,i}^{n+1})}{1 + \frac{\delta t}{\varepsilon} \chi} \\ \Gamma_i^{n+1} &= \frac{\frac{1}{2}(\Gamma_i^{1,n} + \Gamma_i^n) - \frac{\delta t}{2\delta x} \left(f_{\Gamma,i+\frac{1}{2}}^{1,n} - f_{\Gamma,i-\frac{1}{2}}^{1,n} + f_{\Gamma,i+\frac{1}{2}}^n - f_{\Gamma,i-\frac{1}{2}}^n \right) + \delta t \frac{\chi}{\varepsilon} M_0 + \frac{\delta t}{2} (S_{\Gamma,i}^n + S_{\Gamma,i}^{n+1})}{1 + \delta t \frac{\chi}{\varepsilon N_i^{n+1}}}, \end{aligned}$$

où les flux numériques $f_{N,i+\frac{1}{2}}^n, f_{\Gamma,i-\frac{1}{2}}^n$ sont calculés à partir des formules (2.7)-(2.10). L'exposant $1, n$ correspond à l'étape intermédiaire du schéma de Heun. Pour améliorer la stabilité du schéma, les termes pénalisés sont traités de manière implicite.

L'étude numérique présentée ci-dessous consiste à rechercher des symptômes des couches limites apparaissant sur le problème continu (2.13). Il est ainsi nécessaire d'avoir une approximation numérique suffisamment précise pour éviter autant que possible la présence d'artefacts dus à la discrétisation.

La couche limite se traduit par un taux de convergence non optimal quand le paramètre de pénalisation ε tend vers 0. Habituellement la taille de la couche limite décroît quand ε tends vers 0. La figure 2.7 indique une décroissance de la taille de la couche limite en $\mathcal{O}(\varepsilon)$ pour N . Ainsi, quand la couche limite est trop petite, comparée à la taille du maillage, c'est à dire quand il y a trop peu de cellules dans la couche limite pour la résoudre, le schéma numérique ne capture pas la couche limite et la vitesse de convergence semble être optimale. En présence d'une couche limite, l'étude de la convergence en ε (à δx fixé) fait d'abord apparaître un taux de convergence non optimal puis la décroissance de l'erreur de pénalisation redévient en $\mathcal{O}(\varepsilon)$ quand la couche limite est trop fine pour être capturée par le schéma. De plus, comme $M \approx 1$ à l'interface plasma-limiteur, il n'y a presque pas d'onde allant du limiteur vers le plasma, ce qui explique pourquoi les erreurs dans le plasma (*cf.* la figure 2.6) semblent être indépendantes du paramètre de pénalisation ε .

Dans la figure 2.6, on remarque que :

- Pour la norme L^1 dans le limiteur, la vitesse de convergence est en $\mathcal{O}(\varepsilon)$.
- Pour les normes L^1 et L^2 dans le plasma (pour $N, \Gamma, \partial_x N, \partial_x \Gamma$), les erreurs restent presque constantes, comme expliqué plus haut.
- Les erreurs de $\partial_x N$ et $\partial_x \Gamma$ en norme L^2 augmentent quand ε diminue jusqu'à $\varepsilon \approx 10^{-5}$. Quand ε devient plus petit que 10^{-5} , on retrouve la convergence en $\mathcal{O}(\varepsilon)$.
- Pour $\varepsilon \geq 10^{-5}$, l'erreur en norme L^2 est en $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ avant de revenir à $\mathcal{O}(\varepsilon)$ quand $\varepsilon < 10^{-5}$.

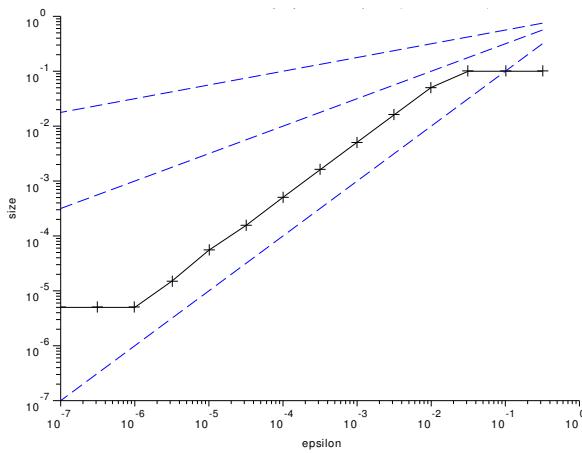


FIGURE 2.7 – Estimation de l'épaisseur de la couche limite en fonction du paramètre de pénalisation ε . L'épaisseur a été calculée avec la relation $x_{J_{bl}} - 0.4$ où $J_{bl} = \max\{|N_i^n - 0| < 0.01|N_I^n 0|\}$ et I le numéro de la cellule, dans le plasma, qui est en contact avec l'interface plasma-limiteur. En fait, $x_{J_{bl}}$ est la valeur de la coordonnée curviligne (x) où N atteint 99% de la valeur qui lui est imposée à l'intérieur de la zone pénalisée (0 pour la pénalisation considérée dans le paragraphe 2.2.2). Cette définition de la taille de la couche limite a été faite par analogie avec le cas d'un flux laminaire autour d'une lame plane (voir par exemple la page 30 de [58]). Les lignes en pointillés représentent respectivement les courbes $\varepsilon^{1/4}$, $\varepsilon^{1/2}$ et ε . Le pas en espace est $\delta x = 10^{-5}$.

Les résultats obtenus pour les deux méthodes pénalisation de cette section permettent d'en montrer les inconvénients. La première méthode décrite par Isoardi fait apparaître un pic sur le nombre de Mach M , quand le maillage est suffisamment fin par rapport au paramètre de pénalisation. La seconde méthode pénalisant présentée dans cette sous-section crée une couche limite au niveau de l'interface plasma-limiteur.

2.3 Une méthode de pénalisation optimale pour les conditions aux limites modifiées

Nous allons maintenant décrire une méthode de pénalisation pour le problème (2.3) ne générant pas de couche limite à l'interface plasma-limiteur. Pour transformer (2.3) en un problème avec des conditions aux limites de Dirichlet, on effectue le changement de variable décrit ci-dessous :

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t, \mathbf{x}) &= \ln(N(t, \mathbf{x})) \\ \tilde{v}(t, \mathbf{x}) &= \frac{\Gamma(t, \mathbf{x})}{N(t, \mathbf{x})} - M_0\end{aligned}$$

Ainsi le système hyperbolique (2.3) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{u} + (M_0 + \tilde{v}) \partial_x \tilde{u} + \partial_x \tilde{v} = S_{\tilde{u}} \\ \partial_t \tilde{v} + \partial_x \tilde{u} + (M_0 + \tilde{v}) \partial_x \tilde{v} = S_{\tilde{v}} \\ \text{Condition à la limite : } \tilde{v}(., L) = 0 \\ \text{Conditions initiales : } \tilde{u}(0, .) \text{ et } \tilde{v}(0, .) \text{ sont connus.} \end{array} \right. \quad \text{dans } \mathbb{R}_*^+ \times]-\infty, L[\quad (2.15)$$

Le fait d'avoir une condition au bord de type Dirichlet homogène nous permet d'utiliser une méthode développée dans le cas semi-linéaire par Fornet et Guès [30]. Bien que le système (2.15) soit quasolinéaire, et non pas semilinéaire, la méthode peut être étendue à ce problème. Une des particularités intéressante de cette pénalisation est l'absence de couche limite à l'intérieur du limiteur.

Pour la partie théorique, le domaine $x \in]0, L[$ a été remplacé par $x \in]-\infty, L[$. Cela permet d'éviter l'avoir à prendre en compte une condition à la limite en $x = 0$, ce bord n'étant pas l'objet de notre étude puisqu'il ne s'agit pas d'une interface plasma-limiteur.

On suppose désormais que $M_0 = 1 - \xi$ avec $\xi \in]0, 1[$. La région contenant le plasma est $x < L$ et le limiteur correspond à $x \geq L$. χ correspond toujours à la fonction caractéristique du limiteur. Le système pénalisé s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{u} + (M_0 + \tilde{v}) \partial_x \tilde{u} + \partial_x \tilde{v} = S_{\tilde{u}} \\ \partial_t \tilde{v} + \partial_x \tilde{u} + (M_0 + \tilde{v}) \partial_x \tilde{v} + \chi \frac{\tilde{v}}{\varepsilon M_0} = S_{\tilde{v}} \\ \tilde{u}(0, .) \text{ et } \tilde{v}(0, .) \text{ sont donnés.} \end{array} \right. \quad \text{dans } \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \quad (2.16)$$

En revenant aux variables conservatives, le problème pénalisé s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t N + \partial_x \Gamma = S_N \\ \partial_t \Gamma + \partial_x \left(\frac{\Gamma^2}{N} + N \right) + \frac{\chi}{\varepsilon} \left(\frac{\Gamma}{M_0} - N \right) = S_\Gamma. \end{cases} \quad \text{dans } \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \quad (2.17)$$

Comme $N > 0$, le système (2.16) est équivalent à (2.16) pour des solutions lipschitziennes.

2.3.1 Développement asymptotique en ε

Nous allons ici montrer qu'un développement asymptotique d'une solution régulière peut être construit jusqu'à n'importe quel ordre et sans termes de couche limite. Pour cela, on va chercher des solutions de (2.16) de la forme :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{u}_\varepsilon(t, x) &\sim \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n U^{n,-}(t, x) & \text{si } x \leq L \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n U^{n,+}(t, x) & \text{si } x \geq L \end{cases} \\ \tilde{v}_\varepsilon(t, x) &\sim \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n V^{n,-}(t, x) & \text{si } x \leq L \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n V^{n,+}(t, x) & \text{si } x \geq L. \end{cases} \end{aligned}$$

On suppose que :

- La condition initiale est régulière et compatible en $x = 0$.
- $M_0 \in]0, 1[$ ne dépend pas de (t, x) .
- $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, (M_0 + V^{0,\pm}(t, x))^2 < 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, U^{n,-}(., L) = U^{n,+}(., L)$ et $V^{n,-}(., L) = V^{n,+}(., L)$.
- Les termes sources $S_{\tilde{u}}$ et $S_{\tilde{v}}$ ne dépendent pas de $\tilde{u}_\varepsilon^\pm$ et $\tilde{v}_\varepsilon^\pm$.

La première et la quatrième hypothèse ne sont pas essentielles : on pourrait éventuellement considérer que M_0 varie continument en restant toujours en dehors d'un voisinage de 0.

La troisième hypothèse indique que la continuité de \tilde{u}_ε et \tilde{v}_ε est aussi reportée sur chaque terme du développement asymptotique.

En injectant les développements de \tilde{u}_ε et \tilde{v}_ε dans le problème pénalisé (2.16), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \partial_t U^{n,\pm} + M_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \partial_x U^{n,\pm} + \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n V^n \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \partial_x U^{k,\pm} + \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \partial_x V^{n,\pm} &= S_{\tilde{u}} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \partial_t V^{n,\pm} + \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \partial_x U^{n,\pm} + M_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \partial_x V^{n,\pm} + \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n V^{n,\pm} \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \partial_x V^{k,\pm} \\ + \frac{\chi \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n V^{n,\pm}}{\varepsilon M_0} &= S_{\tilde{v}}. \end{aligned}$$

En réarrangeant les termes, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \left(\partial_t U^{n,\pm} + M_0 \partial_x U^{n,\pm} + \sum_{k=0}^n V^{k,\pm} \partial_x U^{n-k,\pm} + \partial_x V^{n,\pm} \right) = S_{\tilde{u}} \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \chi \frac{V^0}{M_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \left(\partial_t V^{n,\pm} + \partial_x U^{n,\pm} + M_0 \partial_x V^{n,\pm} + \sum_{k=0}^n V^{k,\pm} \partial_x V^{n-k,\pm} + \chi \frac{V^{n+1,\pm}}{M_0} \right) = S_{\tilde{v}}. \quad (2.19)$$

On va construire $U^{n,\pm}, V^{n,\pm}$ en étudiant les équations données par chaque puissance de ε dans les équations (2.18) et (2.19).

Termes en ε^{-1} :

Si $x > L$: On a alors $V^{0,+}(x) = 0$ (pour tout $x > L$).

On considère ensuite l'hypothèse de récurrence : (\mathcal{H}^n) : $\forall k \leq n, (U^{k,\pm}, V^{k,\pm})$ sont bien définies sur $]0, T[\times \mathbb{R}$ et $V^{n+1,+}$ est bien définie sur $]0, T[\times]L, +\infty[$, pour une certaine valeur $T > 0$ indépendante de n .

Initialisation (\mathcal{H}^0) : On regarde les termes en ε^0 .

Pour $x < L$ ($\chi(x) = 0$) :

A partir des équations (2.18) et (2.19), on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t U^{0,-} + M_0 \partial_x U^{0,-} + V^{0,-} \partial_x U^{0,-} + \partial_x V^{0,-} &= S_{\tilde{u}} && \text{dans } \mathbb{R}_*^+ \times]-\infty, L[\\ \partial_t V^{0,-} + \partial_x U^{0,-} + M_0 \partial_x V^{0,-} + V^{0,-} \partial_x V^{0,-} &= S_{\tilde{v}} \\ V^{0,-}(., L) &= V^{0,+}(., L) = 0 \text{ (par continuité).} \end{aligned}$$

Comme la frontière plasma-limiteur est non caractéristique et que la condition à la limite est maximale dissipative, le système est bien posé et possède une unique solution régulière jusqu'à un temps T suffisamment petit, pour des conditions initiales compatibles, voir l'article de Rauch [55] ou le théorème 11.1 du livre de Benzoni-Serre [16]. La définition des conditions aux limites maximales strictement dissipatives est donnée dans le chapitre 3 de cette thèse et peut aussi être trouvée dans le chapitre 3 de [16]. On peut donc construire $U^{0,-}$ et $V^{0,-}$ sur $]0, T[\times] - \infty, L[$.

Maintenant, considérons le cas $x > L$ ($\chi(x) = 1$) :

En prenant en compte le fait que $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_*^+, V^{0,+}(t, x) = 0$, on a :

$$\partial_t U^{0,+} + M_0 \partial_x U^{0,+} = S_{\tilde{u}} \quad \text{dans }]0, T[\times]L, +\infty[\quad (2.20)$$

$$U^{0,+}(., L) = U^{0,-}(., L) \quad (2.21)$$

$$\partial_x U^{0,+} = S_{\tilde{v}} - \frac{V^{1,+}}{M_0}. \quad (2.22)$$

Le problème hyperbolique linéaire (2.20)-(2.21) est bien posé (comme $M_0 > 0$, il y a un champ rentrant pour une condition à la limite), donc $U^{0,+}$ et $V^{1,+}$ sont bien définis sur $]0, T[\times]L, +\infty[$.

Etape de récurrence ($(\mathcal{H}^{n-1}) \Rightarrow (\mathcal{H}^n)$) :

On admet \mathcal{H}^{n-1} , grâce aux termes en ε^n des équations (2.18) et (2.19), on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_t U^{n,\pm} + M_0 \partial_x U^{n,\pm} + \sum_{k=0}^n V^{k,\pm} \partial_x U^{n-k,\pm} + \partial_x V^{n,\pm} &= 0 \\ \partial_t V^{n,\pm} + \partial_x U^{n,\pm} + M_0 \partial_x V^{n,\pm} + \sum_{k=0}^n V^{k,\pm} \partial_x V^{n-k,\pm} + \chi \frac{V^{n+1,\pm}}{M_0} &= 0.\end{aligned}$$

Si $x < L$ ($\chi(x) = 0$) : On a alors, d'après (2.18) et (2.19) :

$$\begin{aligned}\partial_t U^{n,-} + M_0 \partial_x U^{n,-} + \sum_{k=0}^n V^{k,-} \partial_x U^{n-k,-} + \partial_x V^{n,-} &= 0 \\ \partial_t V^{n,-} + \partial_x U^{n,-} + M_0 \partial_x V^{n,-} + \sum_{k=0}^n V^{k,-} \partial_x V^{n-k,-} &= 0.\end{aligned}$$

En ne gardant que les termes d'ordre n dans le membre de gauche, on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_x V^{n,-} &= - \sum_{k=1}^n V^{k,-} \partial_x U^{n-k,-} && \text{dans }]0, T[\times]-\infty, L[\\ \partial_t V^{n,-} + \partial_x U^{n,-} + (M_0 + V^{0,-}) \partial_x V^{n,-} &= - \sum_{k=1}^n V^{k,-} \partial_x V^{n-k,-} \\ U^{n,-}(0,.) \text{ et } V^{n,-}(0,.) &\text{ sont connus} \\ V^{n,-}(.,L) &= V^{n,+}(.,L) \text{ (d'après } (\mathcal{H}^{n-1}) \text{ est la continuité en } x = L).\end{aligned}\tag{2.23}$$

Comme ce système est à nouveau à bord non caractéristique et a une condition à la limite maximale dissipative, on en déduit qu'il est bien posé. De plus, comme le système (2.23) est linéaire, les solutions sont définies sur l'intervalle de temps $]0, T[$ donné précédemment, pour des données initiales compatibles [16, 55]. Donc $U^{n,-}$ et $V^{n,-}$ existent et sont uniques.

Pour $x > L$ ($\chi(x) = 1$) :

Dans ce domaine, $V^{0,+} = 0$ et $V^{n,+}$ sont connus. A partir des équations (2.18) et (2.19), on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_t U^{n,+} + M_0 \partial_x U^{n,+} + \sum_{k=1}^n V^{k,+} \partial_x U^{n-k,+} + \partial_x V^{n,+} &= 0 \\ \partial_t V^{n,+} + \partial_x U^{n,+} + M_0 \partial_x V^{n,+} + \sum_{k=1}^{n-1} V^{k,+} \partial_x V^{n-k,+} + \frac{V^{n+1,+}}{M_0} &= 0.\end{aligned}$$

Donc $U^{n,+}$ est l'unique solution du problème hyperbolique linéaire bien posé suivant :

$$\partial_t U^{n,+} + M_0 \partial_x U^{n,+} = - \sum_{k=1}^n V^{k,+} \partial_x U^{n-k,+} - \partial_x V^{n,+} \quad \text{dans }]0, T[\times]L, +\infty[$$

$U^{n,+}(0, .)$ est connu

$U^{n,+}(., L) = U^{n,-}(., L)$ par continuité.

On calcule ensuite $V^{n+1,+}$ grâce à la relation :

$$V^{n+1,+} = -M_0 \left(\partial_t V^{n,+} + \partial_x U^{n,+} + M_0 \partial_x V^{n,+} + \sum_{k=1}^{n-1} V^{k,+} \partial_x V^{n-k,+} \right).$$

La propriété (\mathcal{H}^n) est donc vérifiée. C'est à dire que l'on peut construire un développement asymptotique de la solution jusqu'à n'importe quel ordre n .

A ce moment, on a construit un développement de Taylor en ε sans couche limite. En effet, l'absence de couche limite peut en général déjà être pressentie en construisant une solution à partir d'un développement asymptotique en ε où on n'a pas besoin de faire intervenir des variables du type x/ε^a . Le fait de réussir cette construction suggère fortement l'absence de couche limite pour (2.17), mais ce n'est pas une preuve complète.

Le chapitre 3 a pour objet de montrer rigoureusement que la méthode de pénalisation appliquée ici (dans un cas plus général) ne génère pas de couche limite au voisinage de l'interface plasma-limiteur.

Dans ce cas particulier, en remplaçant la condition initiale par des solutions régulières définies dans le passé ($t < 0$), on peut affirmer que le problème pénalisé (2.17) admet une unique solution N, Γ . La proposition 2.3.1 énoncée ci-dessous est démontrée pour un problème plus général dans le chapitre 3.

Proposition 2.3.1

Le problème pénalisé

$$\begin{cases} \partial_t N + \partial_x \Gamma = N S_{\tilde{u}} \\ \partial_t \Gamma + \partial_x \left(\frac{\Gamma^2}{N} + N \right) + \frac{\chi}{\varepsilon} \left(\frac{\Gamma}{M_0} - N \right) = N S_{\tilde{v}} + \Gamma S_{\tilde{u}} \\ N|_{t<0} \text{ et } \Gamma|_{t<0} \text{ sont connus et solution régulière} \\ \text{de l'équation ci-dessus,} \end{cases} \quad \text{dans }]-T_0, T[\times \mathbb{R} \quad (2.24)$$

admet une unique solution N, Γ . De plus, on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{N}, \quad \|N - N^{0,-}\|_{H^s(-T_0, T[\times] - \infty, L)} &= \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \|\Gamma - \Gamma^{0,-}\|_{H^s(-T_0, T[\times] - \infty, L)} &= \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

où $(N^{0,-}, \Gamma^{0,-})$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t N^{0,-} + \partial_x \Gamma^{0,-} = N^{0,-} S_{\tilde{u}} \\ \partial_t \Gamma^{0,-} + \partial_x \left(\frac{\Gamma^{0,-2}}{N^{0,-}} + N^{0,-} \right) = N^{0,-} S_{\tilde{v}} + \Gamma^{0,-} S_{\tilde{u}} \\ \frac{\Gamma^{0,-}(., 0)}{N^{0,-}(., 0)} = M_0 \quad \text{sur } x = 0 \\ N^{0,-}|_{t<0} = N|_{t<0} \text{ et } \Gamma^{0,-}|_{t<0} = \Gamma|_{t<0} \text{ sont connus.} \end{cases} \quad \text{dans }]-T_0, T[\times] - \infty, L[\quad (2.25)$$

La différence entre les systèmes pénalisés (2.17) et (2.24) est le remplacement de la condition initiale par l'hypothèse de solution régulière dans le passé $] -T_0, 0[$. Cela permet d'éviter les problèmes liés à la compatibilité de la condition initiale avec la condition à la limite. D'un point de vue physique, cela signifie que le plasma existait déjà pour $t < 0$ et ne fait que continuer à évoluer pour $t > 0$.

Dans la suite du chapitre, on étudie numériquement les propriétés de cette méthode de pénalisation.

2.3.2 Tests numériques pour un limiteur à un seul coté

A partir de l'expression (2.17), il est facile d'utiliser le schéma volumes finis développé dans la section 2.1 pour en calculer les solutions. Pour éviter les problèmes de stabilité, le terme pénalisé a été traité de manière implicite. Ainsi la discrétisation en temps utilisée est une variante semi-implicite du schéma de Heun. Ici, N_i^n et Γ_i^n représentent toujours les valeurs moyennes de N et Γ le long de la cellule i (dont le centre se situe en $x = i \delta x$). $f_{N,i+\frac{1}{2}}^n$ et $f_{\Gamma,i+\frac{1}{2}}^n$ désignent les flux numériques calculés par le schéma VF Roe ncv avec reconstruction de type MUSCL pour N et Γ , à l'instant t_n et à l'interface de la cellule i et $i+1$, voir les

formules (2.7)-(2.10). L'exposant 1, n correspond à l'étape intermédiaire du schéma de Heun.

$$\begin{aligned} N_i^{1,n} &= N_i^n - \frac{\delta t}{\delta x} \left(f_{N,i+\frac{1}{2}}^n - f_{N,i-\frac{1}{2}}^n \right) + \delta t S_{N,i}^n \\ \Gamma_i^{1,n} &= \frac{\Gamma_i^n - \frac{\delta t}{\delta x} \left(f_{\Gamma,i+\frac{1}{2}}^n - f_{\Gamma,i-\frac{1}{2}}^n \right) + \delta t \frac{\chi}{\varepsilon} N_i^{1,n} + \delta t S_{\Gamma,i}^n}{1 + \delta t \frac{\chi}{M_0 \varepsilon}} \\ N_i^{n+1} &= \frac{1}{2} (N_i^{1,n} + N_i^n) - \frac{\delta t}{2 \delta x} \left(f_{N,i+\frac{1}{2}}^{1,n} - f_{N,i-\frac{1}{2}}^{1,n} + f_{N,i+\frac{1}{2}}^n - f_{N,i-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{\delta t}{2} (S_{N,i}^n + S_{N,i}^{n+1}) \\ \Gamma_i^{n+1} &= \frac{\frac{1}{2} (\Gamma_i^{1,n} + \Gamma_i^n) - \frac{\delta t}{2 \delta x} \left(f_{\Gamma,i+\frac{1}{2}}^{1,n} - f_{\Gamma,i-\frac{1}{2}}^{1,n} + f_{\Gamma,i+\frac{1}{2}}^n - f_{\Gamma,i-\frac{1}{2}}^n \right) + \delta t \frac{\chi}{\varepsilon} N_i^{n+1} + \frac{\delta t}{2} (S_{\Gamma,i}^n + S_{\Gamma,i}^{n+1})}{1 + \delta t \frac{\chi}{M_0 \varepsilon}}. \end{aligned}$$

Le domaine de calcul est toujours $[0, 0.5]$ avec une condition de symétrie en $x = 0$ et la zone contenant le limiteur est $[0.4, 0.5]$, voir la figure 2.3. Deux cas tests sont présentés ici :

- Le premier cas avec la solution régulière 2.14, qui est rappelée ici :

$$N(t, x) = \exp \left(\frac{-x^2}{0.16(t+1)} \right) \quad \Gamma(t, x) = M_0 \sin \left(\frac{\pi x}{0.8} \right) \exp \left(\frac{-x^2}{0.16(t+1)} \right).$$

ainsi, S_N, S_Γ sont choisis de manière à ce que les fonctions ci-dessus soient solutions de (2.3) pour $x \in [0, 0.4]$. Grâce à cette solution manufaturée du problème limite (quand $\varepsilon \rightarrow 0$), l'évaluation de l'erreur et l'analyse de convergence est facile à réaliser. Le calcul de la solution manufaturée dans le limiteur se fait à partir de l'ordre 0 du développement asymptotique de la solution du problème pénalisé.

- Et avec des solutions stationnaires, comme cela a été étudié dans [37].

On analyse la convergence quand le paramètre de pénalisation ε tend vers 0 grâce à un maillage en espace uniforme de pas $\delta x = 10^{-5}$. Les erreurs ont été évaluées en norme L^1 et L^2 pour $N, \partial_x N, \Gamma$ et $\partial_x \Gamma$, dans le but de retrouver un taux de convergence optimal en $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Le maillage choisi est adapté au domaine contenant le plasma, au sens où l'interface plasma limiteur se situe à l'interface de deux cellules volumes finis. Ce point mérite d'être discuté. En effet, d'un côté ce choix est nécessaire pour avoir une convergence au maillage d'ordre 2 et ainsi avoir une erreur de discrétisation suffisamment faible pour étudier l'erreur due à la méthode de pénalisation. De l'autre côté, ce choix retire tout intérêt des méthodes de pénalisation où le but est d'avoir un maillage indépendant du domaine originel. Il convient de préciser que les tests numériques réalisés ici visent à étudier les propriétés du problème continu.

Une des difficultés majeures pour l'implémentation de la pénalisation est le choix d'une condition à la limite en $x = 0.5$ (à l'intérieur du limiteur), nécessaire pour faire fonctionner le schéma. Comme seule l'équation sur Γ est pénalisée, on a besoin d'une condition aux limites transparentes pour N . Pour les tests numériques, les conditions à la limite $x = 0.5$ proviennent de l'ordre 0 du développement asymptotique. Pour $x > 0.5$, dans le schéma numérique, N_i^n, Γ_i^n sont remplacés par, respectivement $N_{BC}(t_n, x_i), N_{BC}(t_n, x_i)M_{BC}(t_n, x_i)$ où N_{BC} et M_{BC} sont donnés par les expressions (2.26)-(2.27) précisées ci-dessous :

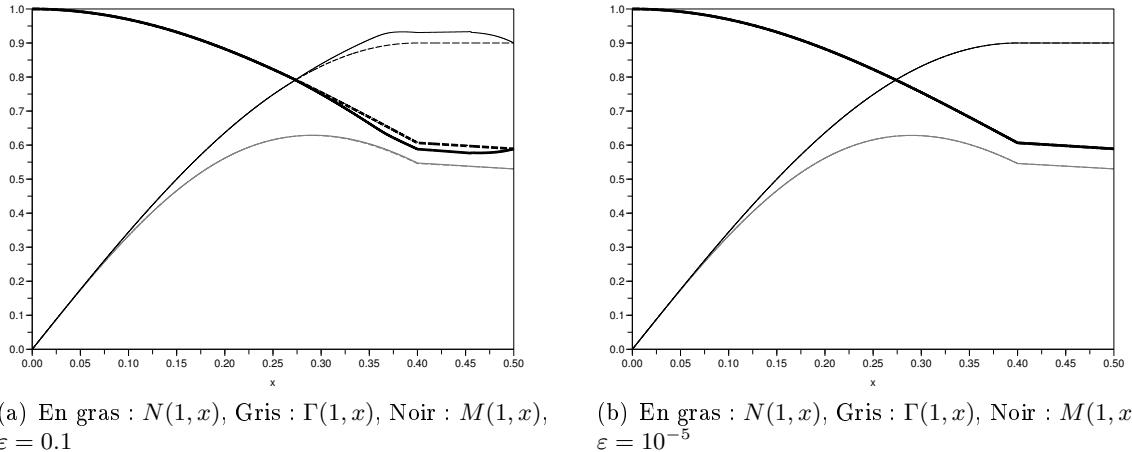


FIGURE 2.8 – Tracé de N , Γ et M en fonction de x avec la méthode de pénalisation sans couche limite (à gauche pour $\varepsilon = 0.1$ et à droite pour $\varepsilon = 10^{-5}$), voir l'équation (2.17). Les traits pleins représentent la solution approchée par le schéma numérique tandis que les pointillés correspondent à la solution exacte (à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$). Le limiteur correspond à la zone $x \in [0.4, 0.5]$. Le pas en espace est $\delta x = 10^{-5}$.

$$- \text{ Si } t < \frac{x - 0.4}{M_0} :$$

$$\begin{aligned} N_{BC}(t, x) &= \exp(U^{0,+}(t, x)) = \exp(-6.25(x - tM_0)^2) \\ M_{BC}(t, x) &= V^{0,+}(t, x) + M_0 = M_0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

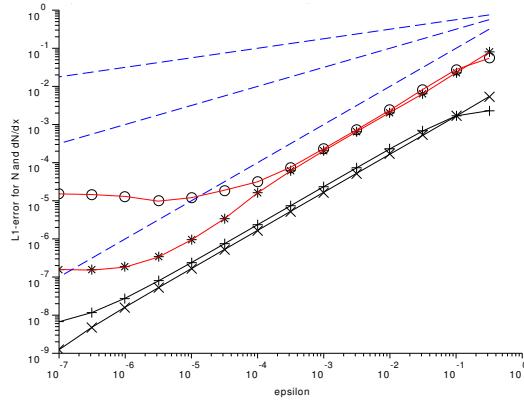
– sinon

$$\begin{aligned} N_{BC}(t, x) &= \exp(U^{0,+}(t, x)) = \exp\left(-\frac{1}{t - \frac{x-0.4}{M_0} + 1}\right) \\ M_{BC}(t, x) &= V^{0,+}(t, x) + M_0 = M_0. \end{aligned} \tag{2.27}$$

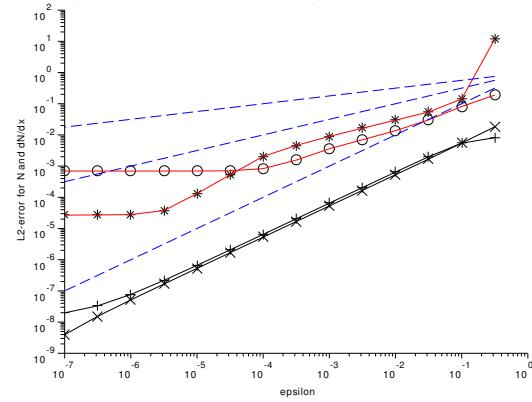
Les calculs ont été faits jusqu'à $t = 1$ avec un pas en temps adaptatif de manière à satisfaire la condition de type CFL donnée dans la section 2.1. Les résultats sont tracés dans la figure 2.9. Dans la figure 2.9, il apparaît que le taux de convergence optimal $\mathcal{O}(\varepsilon)$ est atteint pour la norme L^1 , même pour les dérivées. Concernant la norme L^2 , pour la dérivée de N dans le limiteur, la vitesse de convergence ne semble pas optimale mais cela peut être, au moins en partie, expliqué par la difficulté à trouver une bonne condition à la limite artificielle en $x = 0.5$ (puisque le problème semble plutôt être localisé en $x \approx 0.5$, voir la figure 2.10). L'anomalie à l'intérieur du domaine plasma pourrait elle être causée par une incompatibilité de la condition initiale à l'interface plasma/limiteur.

Des résultats numériques similaires ont été obtenus en remplaçant le terme pénalisé de (2.17) par

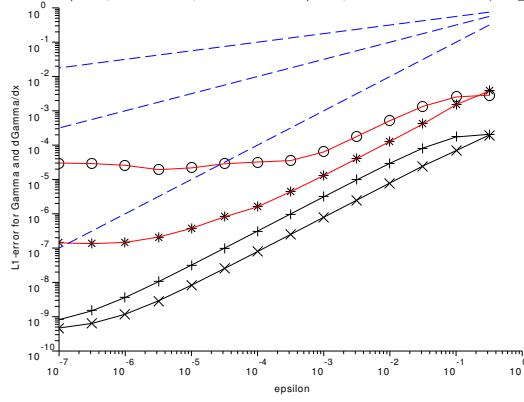
$$\frac{\chi}{\varepsilon} \left(\frac{\Gamma}{N} - M_0 \right),$$



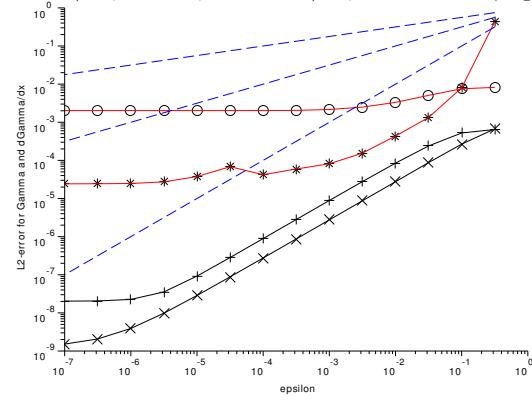
(a) Erreur L^1 pour N dans le plasma (+), N dans le limiteur (\times), $\partial_x N$ dans le plasma (\circ) et $\partial_x N$ dans le limiteur (*)



(b) Erreur L^2 pour N dans le plasma (+), N dans le limiteur (\times), $\partial_x N$ dans le plasma (\circ) et $\partial_x N$ dans le limiteur (*)



(c) Erreur L^1 pour Γ dans le plasma (+), Γ dans le limiteur (\times), $\partial_x \Gamma$ dans le plasma (\circ) et $\partial_x \Gamma$ dans le limiteur (*)



(d) Erreur L^2 pour Γ dans le plasma (+), Γ dans le limiteur (\times), $\partial_x \Gamma$ dans le plasma (\circ) et $\partial_x \Gamma$ dans le limiteur (*)

FIGURE 2.9 – Erreurs pour N , $\partial_x N$, Γ et $\partial_x \Gamma$ en norme L^1 et L^2 avec la pénalisation sans couche limite, voir l'équation (2.17). Les pointillées représentent les courbes $\epsilon^{1/4}$, $\epsilon^{1/2}$ et ϵ . Le pas en espace est toujours $\delta x = 10^{-5}$.

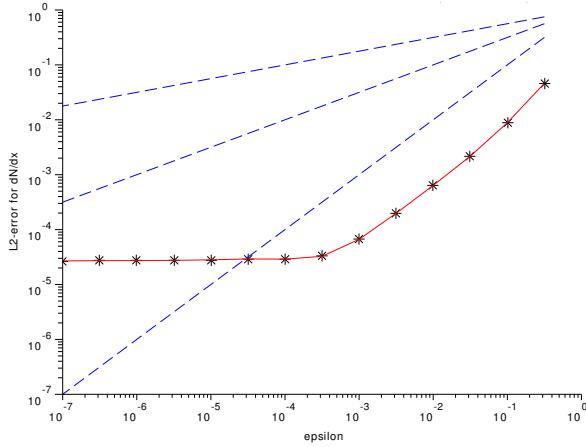


FIGURE 2.10 – Erreur pour $\partial_x N$ en norme L^2 avec la méthode de pénalisation sans couche limite, pour $0.4 \leq x \leq 0.45$. Les lignes en pointillés représentent les courbes $\varepsilon^{1/4}$, $\varepsilon^{1/2}$ et ε . Le pas en espace est $\delta x = 10^{-5}$. On constate que le taux de convergence optimal, en $\mathcal{O}(\varepsilon)$, est atteint.

voir [12]. En effet la seule différence entre le terme pénalisé de (2.17) et le terme ci-dessus est une multiplication par M_0/N , avec N ne tendant pas vers 0.

La solution stationnaire a été obtenue en supposant que $S_N = (1 - \chi)S$ et $S_\Gamma = 0$:

$$\Gamma(x) = Sx \text{ et } N(x) = 0.2S \left(\frac{1}{M_0} + M_0 \right) + \frac{S}{2} \sqrt{\left(0.4 \left(\frac{1}{M_0} + M_0 \right) \right)^2 - 4x^2}.$$

Cela a été étudié avec par Isoardi *et al.* [37] avec $M_0 = 1$ en utilisant un maillage relativement grossier ($\delta x = 0.01$) : ainsi, bien que la condition à la limite $M = 1$ nous empêche d'utiliser les résultats classiques justifiant l'existence et l'unicité de la solution, les calculs convergent tout de même vers une solution stationnaire. Cela est probablement dû à la diffusion numérique apportée par le schéma utilisé. Les tests ont été réalisés avec δx jusqu'à $5 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-3}$ ou 10^{-7} et $M_0 = 0.9, 0.99$ voire même 1. La solution numérique dans le domaine correspondant au plasma converge vers la solution stationnaire. Dans le limiteur, N est constant et non nul, comme prédict par le développement asymptotique. Un cas test a été représenté dans la figure 2.11.

Cette méthode de pénalisation n'impose pas $N = 0$ dans le limiteur ce qui implique que les variables N et Γ n'ont aucun sens physique dans le limiteur. Un autre point de vue consiste à dire que cette méthode ne modélise pas l'interface plasma-limiteur mais représente la frontière entre la prégaine et la gaine.

2.3.3 Pénalisation pour un limiteur à deux faces

La méthode de pénalisation (2.17) ne s'occupe que d'un côté du limiteur. Afin d'avoir un modèle plus réaliste tel que celui présenté par Isoardi *et al.*, on suppose désormais que le limiteur a deux faces en contact avec le plasma. On rappelle que l'axe des x suit une ligne de

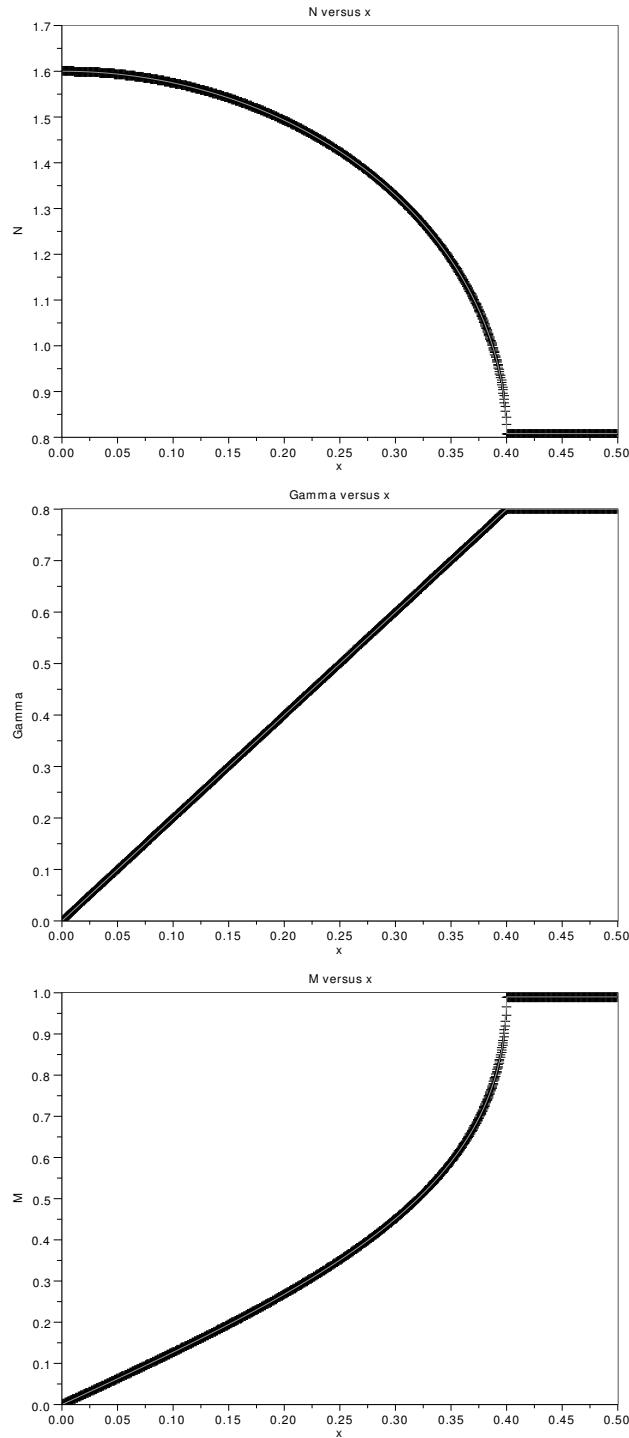


FIGURE 2.11 – Représentation graphique de N , Γ et M en fonction de x ($t = 1$) avec la pénalisation sans couche limite (la condition initiale est la solution stationnaire). La solution exacte correspond à la ligne grise en traits pleins. Le limiteur correspond à la zone $x \in [0.4, 0.5]$, voir la figure 2.3. On a choisi $\varepsilon = 10^{-3}$ et $M_0 = 0.99$.

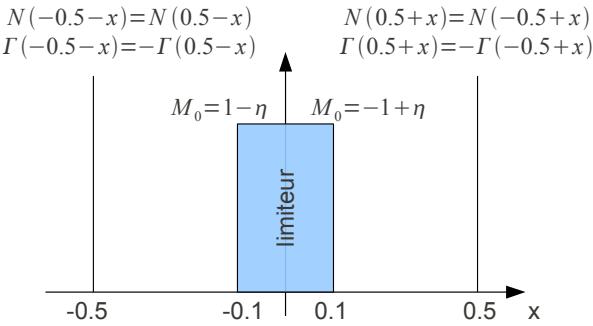


FIGURE 2.12 – Représentation du domaine de calcul pour le limiteur avec deux faces en contact avec le plasma.

champ magnétique qui forme une boucle interrompue par le limiteur : dans cette configuration, au bord du domaine de calcul, on impose donc des conditions aux limites périodiques.

En étudiant les termes d'ordre 0 du développement asymptotique, on en déduit que l'information se propage de l'interface plasma-limiteur vers l'intérieur du limiteur. Mais le limiteur a désormais deux faces en contact et on ne veut pas que de l'information puisse le traverser. Pour éviter ce phénomène, nous avons multiplié le flux par une fonction régulière α , qui est nulle dans une zone à l'intérieur du limiteur et qui vaut 1 dans le plasma et au voisinage des interfaces plasma-limiteur. Le système obtenu reste bien posé grâce à la régularité de α . Pour les tests numériques, le domaine de calcul est $x \in]-0.5, 0.5[$ et le limiteur correspond à la zone $x \in [-0.1, 0.1]$ (voir la figure 2.12).

Le système pénalisé obtenu s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} \partial_t N + \partial_x (\alpha \Gamma) = S_N \\ \partial_t \Gamma + \partial_x \left(\alpha \left(\frac{\Gamma^2}{N} + N \right) \right) + \text{sign}(-x) \frac{\chi}{\varepsilon} \left(\frac{\Gamma}{M_0} - N \right) = S_\Gamma \end{cases} \quad \text{dans } \mathbb{R}_*^+ \times]-0.5, 0.5[. \quad (2.28)$$

Pour α , on a choisi la fonction suivante :

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]-0.5, -0.075] \\ \frac{1}{2} \tanh \left(0.060 \left(-\frac{1}{x-0.015} - \frac{1}{x+0.075} \right) \right) + \frac{1}{2} & \text{si } x \in]-0.075, -0.015[\\ 0 & \text{si } x \in]-0.015, 0.015[\\ \frac{1}{2} \tanh \left(0.060 \left(\frac{1}{x+0.015} + \frac{1}{x-0.075} \right) \right) + \frac{1}{2} & \text{si } x \in]0.015, 0.075[\\ 1 & \text{si } x \in]0.075, 0.5]. \end{cases}$$

Pour le schéma numérique, on suit l'idée de Greenberg et Le Roux [34] qui consiste à voir α comme une des inconnues du système. Le problème hyperbolique obtenu avec cette astuce

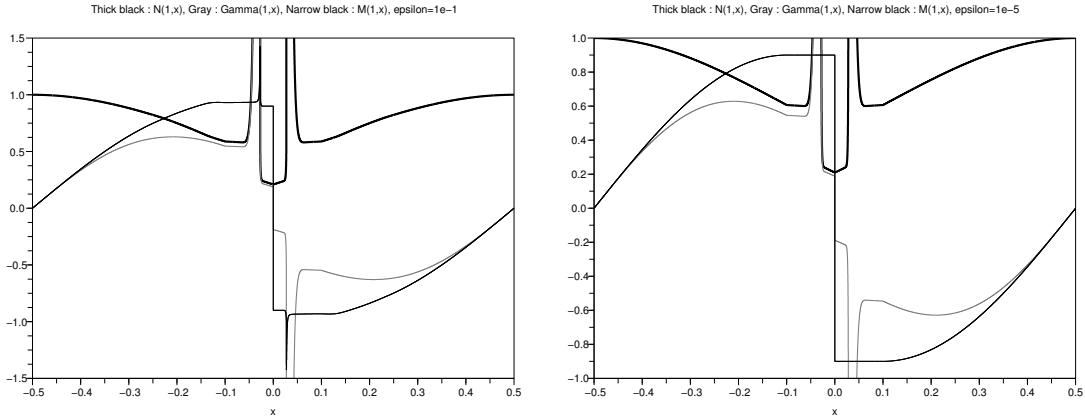


FIGURE 2.13 – Tracé de N , Γ et M en fonction de x (à $t = 1$) avec la pénalisation sans couche limite et le limiteur à deux faces (à gauche avec $\varepsilon = 0.1$ et à droite avec $\varepsilon = 10^{-5}$). Le limiteur correspond ici à la zone $x \in [-0.1, 0.1]$. Pour $\varepsilon = 0.1$, on a $\max(N) = 115.65$ et $\max(|\Gamma|) = 122.72$. Pour $\varepsilon = 10^{-5}$, on obtient $\max(N) = 168.91$ et $\max(|\Gamma|) = 152.04$.

est :

$$\partial_t \begin{pmatrix} N \\ \Gamma \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \Gamma \\ \alpha \left(1 - \frac{\Gamma^2}{N^2}\right) & 2\alpha \frac{\Gamma}{N} & \frac{\Gamma^2}{N} + N \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} N \\ \Gamma \\ \alpha \end{pmatrix} + \frac{\chi}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\Gamma}{M_0} - N \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_N \\ S_\Gamma \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Il est ainsi facile d'implémenter un schéma VF Roe ncv avec une reconstruction de type MUSCL et une discréttisation en temps de type Heun.

Pour les tests numériques (voir la figure 2.13), là où α s'approche de 0 (sans être égal à 0), on observe des pics pour la variable N . Cependant, ce n'est pas une mesure de Dirac : bien que les valeurs atteintes par les pics sont importantes elles restent bornées indépendamment des paramètres du schéma numérique. Cela peut être expliqué intuitivement par l'ordre 0 du développement asymptotique à l'intérieur du limiteur : N est essentiellement régi par une équation d'advection à la vitesse αM_0 vers le centre du limiteur. La variable N est donc transportée à la vitesse αM_0 depuis l'interface plasma-limiteur et est stoppée quand α tend vers 0. Ceci explique donc les deux zones d'accumulation observées.

L'étude numérique de la convergence quand le paramètre de pénalisation ε tend vers 0 (voir la figure 2.14) aboutit aux mêmes résultats que pour le cas du limiteur à une seule face.

2.3.4 Etude du comportement quand $|M_0|$ tend vers 1

Pour garantir le caractère bien posé du système N, Γ , la valeur de $|M_0|$ a été diminuée de 1 à $1 - \xi$. La plupart des tests numériques ont été réalisés avec $M_0 = 0.9$. Le comportement de la méthode de pénalisation (2.28) lorsque l'on s'approche du cas de la frontière caractéristique

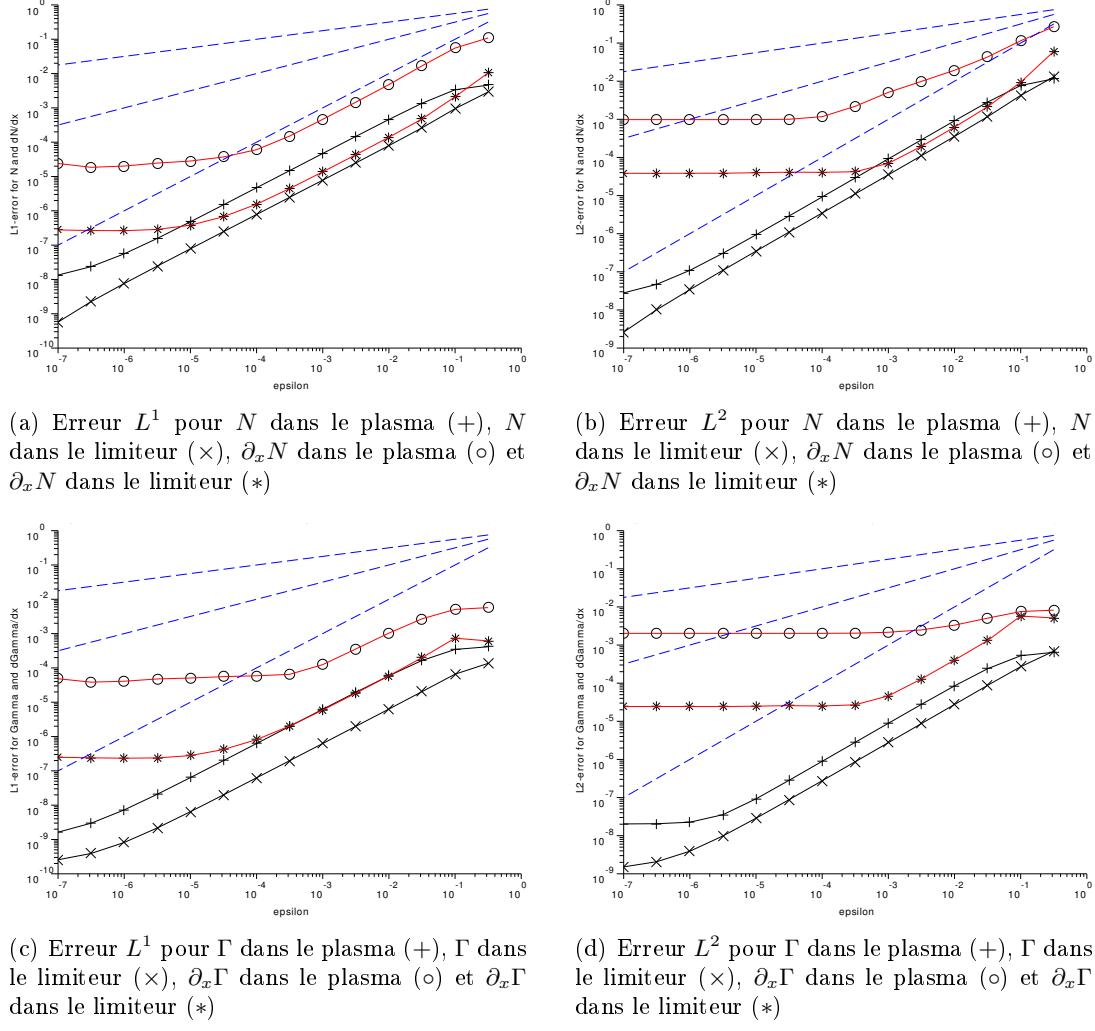


FIGURE 2.14 – Tracé des erreurs en norme L^1 et L^2 de N , $\partial_x N$, Γ et $\partial_x \Gamma$ avec la méthode de pénalisation sans couche limite appliquée à la configuration du limiteur à deux faces (voir la figure 2.12). Les pointillés représentent les courbes $\varepsilon^{1/4}$, $\varepsilon^{1/2}$ et ε . L'erreur dans le plasma est évaluée sur l'ensemble $x \in]-0.5, -0.1] \cup [0.1, 0.5[$. Dans le limiteur, la zone sur laquelle l'erreur est calculée est $x \in [-0.1, -0.075] \cup [0.075, 0.1]$. Ainsi la zone où $\alpha(x) \neq 1$ n'est pas incluse dans les endroits où l'erreur a été estimée. Ici, on a pris $M_0 = 0.9$ et le pas est $\delta x = 10^{-5}$.

(c'est à dire $|M_0| = 1$) est alors une question naturelle.

Avec le schéma pour la pénalisation des deux faces, nous avons testé les valeurs $M_0 = 0.9$ (voir le paragraphe 2.3.3 et la figure 2.14), $M_0 = 0.99$, $M_0 = 0.999$ et $M_0 = 0.9999$ (c'est à dire $\xi = 0.1, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$).

Les simulations montrent que pour ε suffisamment petit, de manière à ce que $\varepsilon \leq \mathcal{O}(\xi)$, les résultats de convergence sont les mêmes que pour le paragraphe précédent (sous-section 2.3.3). Cette condition pourrait venir du fait que $|M|$ doit être inférieur à 1 et que l'erreur de pénalisation sur M est en $\mathcal{O}(\varepsilon)$, cf l'ordre 1 du développement asymptotique présenté dans le paragraphe 2.3.1.

D'un point de vue théorique, l'étude de convergence vers la condition à la limite caractéristique de (2.3) reste une question non résolue. Les simulations nous permettent de penser que la solution numérique de (2.28) convergerait quand ξ tend vers 0, mais cela pourrait être lié au fait que le schéma est diffusif.

2.4 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, une méthode de pénalisation ne générant pas de couche limite a été proposée. La technique de pénalisation s'avère finalement assez simple : on réalise un changement d'inconnue de manière à ce que la condition aux limites soit de la forme $\mathbf{P} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, où \mathbf{P} est une matrice de projection, puis on ajoute simplement un terme de la forme $\frac{\chi}{\varepsilon} \mathbf{P} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$ au système de lois de conservation. Le chapitre 3 a pour vocation de généraliser et de fournir une preuve complète de ce résultat.

L'absence ou la présence de couche limite peut être entrevue par les tests numériques où une erreur de l'ordre de $\mathcal{O}(\varepsilon)$ est observée. Cela nécessite des pas de maillage très faibles. Ainsi, cette étude serait très gourmande en ressources informatiques si les tests numériques étaient réalisés sur des modèles 2D ou 3D.

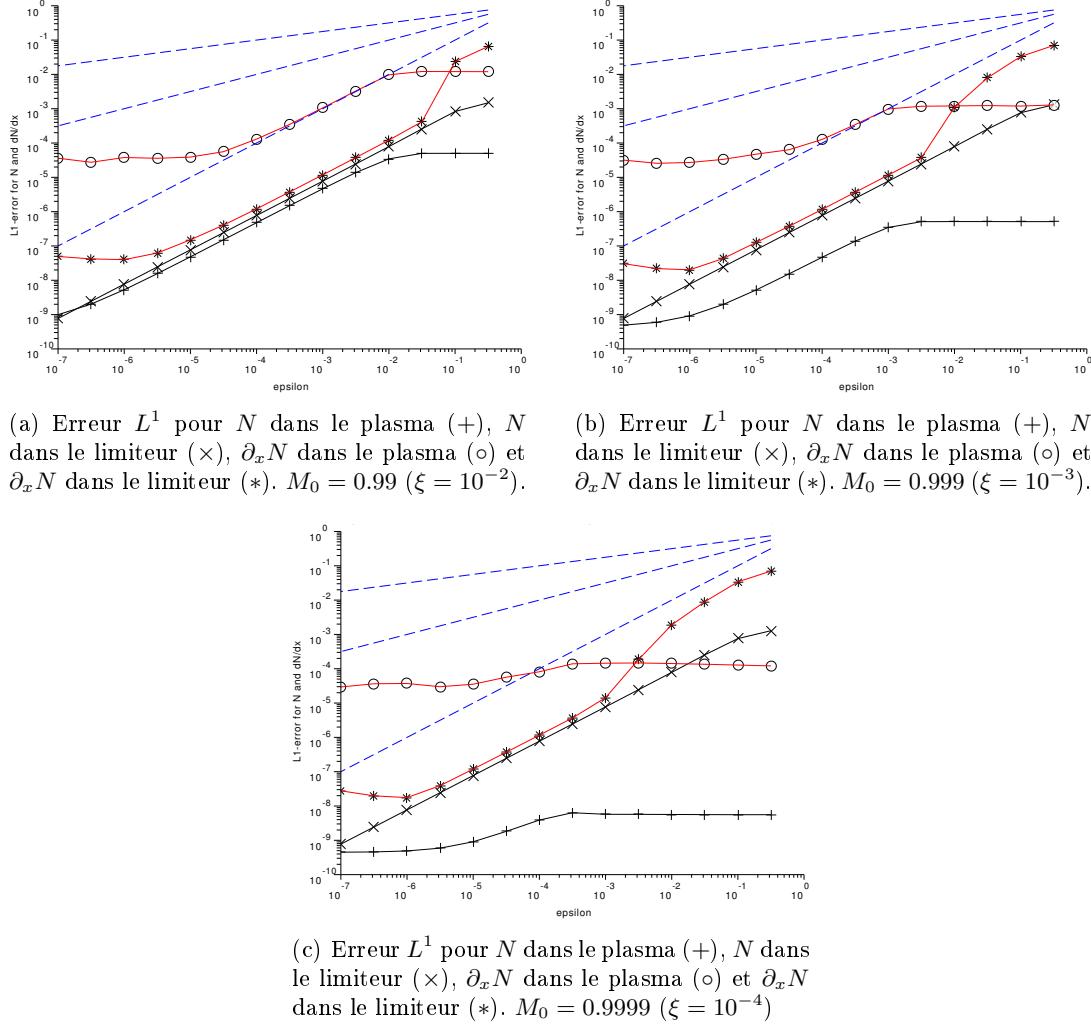


FIGURE 2.15 – Erreurs en norme L^1 pour N et $\partial_x N$ en fonction de ε pour la pénalisation sans couche limite avec le limiteur à deux faces (voir la figure 2.12). Les pointillés représentent les courbes $\varepsilon^{1/4}, \varepsilon^{1/2}$ et ε . L'erreur dans le plasma est évaluée sur l'ensemble $x \in]-0.5, -0.1] \cup [0.1, 0.5[$. Dans le limiteur, la zone sur laquelle l'erreur est calculée est $x \in [-0.1, -0.075] \cup [0.075, 0.1]$. Ainsi, la zone où $\alpha(x) \neq 1$ n'est pas incluse dans les endroits où l'erreur a été estimée.

Chapitre 3

Pénalisation d'un système quasolinéaire

Les résultats théoriques et numériques obtenus dans le chapitre 2 sont généralisés à des systèmes hyperboliques quasolinéaires multidimensionnels du premier ordre. En outre, nous démontrons un théorème de convergence de la méthode de pénalisation qui justifie les résultats numériques présentés au chapitre 2. Cela est fait en utilisant une méthodologie proche de celle proposée notamment par Fornet et Guès [30] dans un cadre d'équation semi-linéaire : développement asymptotique et estimations d'énergie sur la solution.

Ce chapitre comprend deux parties principales. La première partie est dédiée à la présentation des résultats classiques d'existence, d'unicité et de régularité de la solution d'un problème hyperbolique linéaire puis quasolinéaire et qui seront utiles pour la suite. La deuxième partie contient la généralisation de la méthode de pénalisation proposée au chapitre 2 ainsi que la démonstration rigoureuse de ces résultats de convergence.

3.1 Quelques résultats d'existence pour un système hyperbolique

Dans cette section, il s'agit de rappeler des théorèmes classiques.

Ces résultats sont présentés, dans des cadres légèrement différents, dans des livres de Chazarain-Piriou [25] et de Benzoni-Serre [16]. On pourra aussi se reporter aux travaux de Rauch et Massey [55]. Dans le cadre de problèmes linéaires avec conditions aux limites caractéristiques, des résultats ont aussi été présentés dans un article de Rauch [54].

Les solutions étudiées dans les problèmes linéaires puis quasolinéaires de ce chapitre seront des solutions fortes et régulières. En effet, comme on s'intéresse à des problèmes hyperboliques non scalaires dans des domaines de dimension d'espace généralement plus grande que 1, on n'a plus les résultats classiques des solutions faibles entropiques (avec les ondes de choc, les ondes de raréfaction, les discontinuités de contact...) comme on le trouve notamment dans le livre de Godewski et Raviart [33].

3.1.1 Cas d'un problème hyperbolique linéaire

Dans cette sous-section, on va étudier un problème hyperbolique linéaire.

On s'intéresse au problème :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0(\mathbf{a})\partial_t \mathbf{v} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{a})\partial_j \mathbf{v} + \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) & \text{dans }]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d \\ \mathbf{C}\mathbf{v}|_{x_d=0} = \mathbf{0} & \text{sur }]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}^{d-1} \\ \mathbf{v}_{t<0} = \mathbf{0} & \text{sur }]-T_0, 0[\times \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases} \quad (3.1)$$

La fonction \mathbf{a} représente des paramètres physiques comme la viscosité ou l'indice de réfraction, par exemple. Ainsi, cette fonction \mathbf{a} contient toutes les informations liées à ces paramètres.

\mathbf{C} est une matrice constante, donc indépendante, entre autres, de $t, \mathbf{x}, \mathbf{v}$.

On suppose que \mathbf{a} satisfait l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.1.1

$\boxed{\mathbf{a} :]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}^{D'} \text{ est une fonction qui appartient à } H^\infty(]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d) \text{ et qui est à valeur dans un voisinage de } \mathbf{0} \text{ noté } \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^{D'}}.$

Par la suite, on écrira :

$$L = \mathbf{A}_0 \partial_t \cdot + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{a}(t, \mathbf{x})) \partial_j \cdot + \mathbf{B}(\mathbf{a}(t, \mathbf{x})).$$

ainsi que

$$L^* = -\partial_t (\mathbf{A}_0(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}))). - \sum_{j=1}^d \partial_j (\mathbf{A}_j(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}))). + \mathbf{B}(\mathbf{a}(t, \mathbf{x})).$$

Dans un soucis de simplicité, dans ce chapitre, la dépendance des différentes constantes en d , la dimension du domaine spatial, sera implicite.

On fait alors les hypothèses suivantes :

Hypothèse 3.1.2

$\boxed{\text{Pour tout } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{D'}, \mathbf{A}_j(\mathbf{y}) \ (j \in \{0, \dots, d\}) \text{ et } \mathbf{B}(\mathbf{y}) \text{ sont des matrices symétriques.}}$

On choisit de considérer un bord non caractéristique et des conditions aux limites maximales strictement dissipatives, ce qui se traduit par les deux hypothèses suivantes :

Hypothèse 3.1.3

$\boxed{\text{Le bord } x_d = 0 \text{ est non caractéristique : pour tout } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{D'}, \mathbf{A}_d(\mathbf{y}) \text{ est inversible. De plus on suppose que } \mathbf{A}_{d|\mathcal{Y}}^{-1} \in L^\infty(\mathcal{Y}).}$

Hypothèse 3.1.4

$\boxed{\text{La condition à la limite est maximale strictement dissipative :}}$

- Il existe $c > 0$ (indépendant de t, \mathbf{y}) tel que pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ et pour tout $\mathbf{W} \in \ker \mathbf{C}$, $\langle \mathbf{A}_d(\mathbf{y})\mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle \leq -c\|\mathbf{W}\|$.
- $\dim \ker \mathbf{C}$ est maximale pour cette propriété.
- \mathbf{C} est surjectif, son rang est p .

Remarque : On pourrait penser que l'hypothèse 3.1.4 implique que seuls les champs rentrants sont concernés par la condition à la limite. Mais ce n'est pas vrai ! Pour s'en convaincre, il suffit de considérer, par exemple, le système hyperbolique linéaire suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{dans }]-T_0, T[\times \mathbb{R}_+ \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{|x=0} \\ v_{|x=0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{sur }]-T_0, T[. \end{cases}$$

Le bord du problème ci-dessus est non caractéristique, sa condition à la limite est maximale strictement dissipative et pourtant, elle porte sur les deux champs (un rentrant et un sortant).

Hypothèse 3.1.5

\mathbf{A}_0 est uniformément définie positive, c'est à dire qu'il existe $e > 0$ tel que pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$, pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^D$,

$$\langle \mathbf{A}_0(\mathbf{y})\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}^D} \geq e\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{R}^D}.$$

Où $\langle ., . \rangle_{\mathbb{R}^D}$ et $\|.\|_{\mathbb{R}^D}$ désignent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^D .

On fait aussi l'hypothèse ci-dessous sur \mathbf{f} et \mathbf{a} .

Hypothèse 3.1.6

On suppose que

- $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
- Pour tout $t < 0$ et pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbf{f}(\mathbf{a}(t, \mathbf{x})) = \mathbf{0}$.

Le second point de cette hypothèse nous permet de bien avoir la compatibilité avec la condition de solution nulle dans le passé, pour le système hyperbolique linéaire (3.1).

Pour la régularité des coefficients du problème hyperbolique (3.1), on suppose que :

Hypothèse 3.1.7

Les fonctions \mathbf{A}_j ($j \in \{0, \dots, d\}$), \mathbf{B} et \mathbf{f} vérifient :

- $\mathbf{A}_j \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^{D'})$ ($j \in \{0, \dots, d\}$) c'est à dire que \mathbf{A}_j et $\nabla \mathbf{A}_j$ (gradient par rapport aux variables t, \mathbf{x}) sont dans $L^\infty(\mathbb{R}^{D'})$.
- $\mathbf{B} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^{D'})$.
- $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{D'})$.

Etant donné la régularité de \mathbf{a} et \mathbf{f} , l'hypothèse $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, nous permet d'affirmer que $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in L^2(\Omega_\infty)$. Pour justifier ce point, il suffit d'écrire $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ à l'aide du développement limité à l'ordre 1 de \mathbf{f} en $\mathbf{0}$.

On démontre alors le théorème suivant, qui nous assure l'existence d'une unique solution au problème linéaire (3.1).

Théorème 3.1.1

On fait les hypothèses 3.1.1 à 3.1.7. Il existe $\lambda_0(L) > 0$ tel qu'il existe une unique solution $\mathbf{v} \in e^{\lambda_0(L)t} L^2([-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d)$ du problème hyperbolique linéaire (3.1), rappelé ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0(\mathbf{a})\partial_t \mathbf{v} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{a})\partial_j \mathbf{v} + \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) & \text{dans }]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d \\ \mathbf{C}\mathbf{v}|_{x_d=0} = \mathbf{0} & \text{sur }]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}^{d-1} \\ \mathbf{v}_{t<0} = \mathbf{0} & \text{sur }]-T_0, 0[\times \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases}$$

De plus, pour tout $\lambda > \lambda_0(L)$ on a l'estimation suivante :

$$\|\mathbf{v} \exp(-\lambda t)\|_{L^2(\Omega_\infty)} \leq \frac{2}{\lambda} \|\mathbf{f}(\mathbf{a}) \exp(-\lambda t)\|_{L^2(\Omega_\infty)}.$$

Dans la suite, afin d'alléger les équations, la dépendance en $\mathbf{a}(t, \mathbf{x})$ des fonctions \mathbf{A}_j , \mathbf{B} et \mathbf{f} sera implicite.

On va maintenant s'attacher à donner les outils nécessaires à la démonstration du théorème 3.1.1.

Pour cela, on va utiliser un problème légèrement différent qui est :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0 \partial_t \mathbf{v}_\lambda + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j \partial_j \mathbf{v}_\lambda + \mathbf{B} \mathbf{v}_\lambda + \lambda \mathbf{A}_0 \mathbf{v}_\lambda = \mathbf{f}_\lambda & (t, \mathbf{x}) \in]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d \\ \mathbf{C} \mathbf{v}_\lambda = \mathbf{0} & (t, \mathbf{x}') \in]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}^{d-1} \\ \mathbf{v}_{t<0} = \mathbf{0}, & \end{cases}$$

où λ est une constante qui va permettre d'établir les estimations d'énergies en renforçant le poids du terme $\lambda \mathbf{A}_0 \mathbf{v}_\lambda$ (en prenant $\lambda \gg 1$). Pour retrouver le lien entre les problèmes (3.1) et (3.1.1), il suffit de considérer $\mathbf{v}_\lambda = \exp(-\lambda t) \mathbf{v}$ et $\mathbf{f}_\lambda = \exp(-\lambda t) \mathbf{f}$.

On définit alors l'opérateur

$$L_\lambda = \mathbf{A}_0(\mathbf{a}(t, \mathbf{x})) \partial_t \cdot + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{a}(t, \mathbf{x})) \partial_j \cdot + \mathbf{B}(\mathbf{a}(t, \mathbf{x})) \cdot + \lambda \mathbf{A}_0(\mathbf{a}(t, \mathbf{x})) \cdot$$

De même, on écrit

$$L_\lambda^* = -\partial_t (\mathbf{A}_0(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}))) \cdot - \sum_{j=1}^d \partial_j (\mathbf{A}_j(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}))) \cdot + \mathbf{B}(\mathbf{a}(t, \mathbf{x})) \cdot + \lambda \mathbf{A}_0(\mathbf{a}(t, \mathbf{x})) \cdot$$

On définit les espaces suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_L &= \left\{ \Phi \in L^2([-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d), L\Phi \in L^2([-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d)) \right\} \\ \mathcal{H}_{L_\lambda} &= \left\{ \Phi \in L^2([-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d), L_\lambda \Phi \in L^2([-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d)) \right\}. \end{aligned}$$

Le lemme suivant fait appel à la définition du crochet de Poisson que l'on rappelle ici :

Définition 3.1.1 (*crochet de Poisson*)

Soit Φ et Ψ deux opérateurs, le crochet de Poisson est alors l'opérateur suivant :

$$[\Phi, \Psi]_+ = \Phi(\Psi(.)) - \Psi(\Phi(.))$$

On définit les domaines suivants :

$$\begin{aligned}\Omega_\infty &=]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d \\ \partial\Omega_\infty &=]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\} \\ \overline{\Omega}_\infty &=]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}^{d-1} \times]-\infty, 0].\end{aligned}$$

On commence par s'intéresser au lemme de Friedrich :

Lemme 3.1.1 (*lemme de Friedrich*)

Soit $\lambda > 0$. On suppose que \mathbf{A}_j et \mathbf{B} vérifient les hypothèses du théorème 3.1.1.

Soit $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}^d)$ tel que son support soit inclus dans la boule ouverte de rayon 1 et de centre $(0, 0, \dots, 0, -1)$ et tel que $\int_{]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}^d} \rho(t, \mathbf{x}) dt d\mathbf{x} = 1$.

On note alors $\rho_\epsilon(t, \mathbf{x}) = \epsilon^{d+1} \rho\left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right)$.

Alors :

$$\forall \mathbf{w} \in \mathcal{H}_{L_\lambda}, [L_\lambda, \rho_\epsilon *] \mathbf{w} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{0} \text{ dans } L^2(]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}^d)$$

Démonstration du lemme 3.1.1 : La démonstration de ce lemme se fait en trois étapes :

1. On montre que si on a le résultat pour \mathbf{w} à support borné alors, par densité, on peut étendre à $\mathbf{w} \in L^2(]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}^d)$.
2. $[L_\lambda, \rho_\epsilon *]$ est un opérateur continu sur $\mathcal{C}^\infty(]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}^d)$ qui se prolonge sur $L^2(]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}^d)$.
3. On achève la preuve!

Etape 1 : Commençons par montrer que si le résultat du lemme 3.1.1 est vrai pour une fonction à support borné, alors on peut l'étendre à une quelconque fonction $\mathbf{w} \in \mathcal{H}_{L_\lambda}$. Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}^d)$ telle que $\chi|_{B_{\mathbb{R}^{d+1}}(\mathbf{0}, 1)} = 1$ et $\chi|_{(B_{\mathbb{R}^{d+1}}(\mathbf{0}, 2))^c} = 0$. Où $B_{\mathbb{R}^{d+1}}(\mathbf{x}, r)$ est la boule ouverte de centre \mathbf{x} et de rayon r de \mathbb{R}^{d+1} . On définit alors la suite

$$\mathbf{w}_k : (t, \mathbf{x}) \mapsto \chi\left(\frac{t}{k}, \frac{\mathbf{x}}{k}\right) \mathbf{w}(t, \mathbf{x})$$

et on notera

$$\chi_k(t, \mathbf{x}) = \chi\left(\frac{t}{k}, \frac{\mathbf{x}}{k}\right).$$

On peut alors affirmer que \mathbf{w}_k est à support compact et que, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\mathbf{w}_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mathbf{w}$ dans l'espace $L^2(\Omega_\infty)$. De plus, on a :

$$L_\lambda \mathbf{w}_k = \chi_k L_\lambda \mathbf{w} + \underbrace{\frac{1}{k} \sum_{j=0}^d \mathbf{A}_j \mathbf{v}}_{\xrightarrow{k \rightarrow 0} \text{borné}} \underbrace{\partial_j \chi}_{\in L^2(\Omega_\infty)}.$$

Donc, toujours par convergence dominée, $\mathbf{w}_k \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{w}$ et $L_\lambda \mathbf{w}_k \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} L_\lambda \mathbf{w}$.

Ainsi $[L_\lambda, \rho_\epsilon *] \mathbf{w}_k \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} [L_\lambda, \rho_\epsilon *] \mathbf{w}$

Etape 2 : Montrons que l'opérateur $[L_\lambda, \rho_\epsilon *]$ est continu sur $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega_\infty)$ (pour la norme L^2) et se prolonge sur L^2 . Soit $\mathbf{w} \in \mathcal{C}(\Omega_\infty)$, on rappelle que

$$[L_\lambda, \rho_\epsilon *] \mathbf{w} = L_\lambda (\rho_\epsilon * \mathbf{w}) - \rho_\epsilon * (L_\lambda \mathbf{w}).$$

Dans cette étape de la démonstration, on note :

$$\mathbf{X} = (t, \mathbf{x}).$$

Pour calculer le produit de convolution $\rho_\epsilon * (L_\lambda \mathbf{w})$, on va faire un changement de variable ($\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{Z}}{\epsilon}$) :

$$\begin{aligned} \rho_\epsilon * (L_\lambda \mathbf{w}) &= \int_{\Omega_\infty} \rho_\epsilon(\mathbf{Z}) \left(\sum_{j=0}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{a}(\mathbf{X} - \mathbf{Z})) \partial_j \mathbf{w}(\mathbf{X} - \mathbf{Z}) + \mathbf{B}(\mathbf{a}(\mathbf{X} - \mathbf{Z})) + \lambda \mathbf{w}(\mathbf{X} - \mathbf{Z}) \right) d\mathbf{Z} \\ &= \int_{]-\frac{T_0}{\epsilon}, +\infty[\times \mathbb{R}^d} \rho(\mathbf{Y}) \sum_{j=0}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{a}(\mathbf{X} - \epsilon \mathbf{Y})) \frac{1}{\epsilon} \partial_{Y_j} \mathbf{w}(\mathbf{X} - \epsilon \mathbf{Y}) d\mathbf{Y} \\ &\quad + \int_{]-\frac{T_0}{\epsilon}, +\infty[\times \mathbb{R}^d} \rho(\mathbf{Y}) (\mathbf{B}(\mathbf{a}(\mathbf{X} - \epsilon \mathbf{Y})) + \lambda) \mathbf{w}(\mathbf{X} - \epsilon \mathbf{Y}) d\mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Où ∂_{Y_j} désigne la dérivée partielle par rapport à la variable Y_j .

Ensuite, il reste à évaluer $[L_\lambda, \rho_\epsilon *] \mathbf{w}$ grâce à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} [L_\lambda, \rho_\epsilon *] \mathbf{w} &= \int_{]-\frac{T_0}{\epsilon}, +\infty[\times \mathbb{R}^d} \rho(\mathbf{Y}) \sum_{j=0}^d (\mathbf{A}_j(\mathbf{a}(\mathbf{X})) - \mathbf{A}_j(\mathbf{a}(\mathbf{X} - \epsilon \mathbf{Y}))) \frac{1}{\epsilon} \partial_{Y_j} \mathbf{w}(\mathbf{X} - \epsilon \mathbf{Y}) d\mathbf{Y} \\ &\quad + \int_{]-\frac{T_0}{\epsilon}, +\infty[\times \mathbb{R}^d} \rho(\mathbf{Y}) (\mathbf{B}(\mathbf{a}(\mathbf{X})) - \mathbf{B}(\mathbf{a}(\mathbf{X} - \epsilon \mathbf{Y}))) \mathbf{w}(\mathbf{X} - \epsilon \mathbf{Y}) d\mathbf{Y} \\ &= \int_{]-\frac{T_0}{\epsilon}, +\infty[\times \mathbb{R}^d} \underbrace{- \left(\partial_{Y_j} \rho(\mathbf{Y}) \sum_{j=0}^d \frac{\mathbf{A}_j(\mathbf{a}(\mathbf{X})) - \mathbf{A}_j(\mathbf{a}(\mathbf{X} - \epsilon \mathbf{Y}))}{\epsilon} + \rho(\mathbf{Y}) \sum_{j=0}^d \partial_{Y_j} \mathbf{A}_j(\mathbf{a}(\mathbf{X} - \epsilon \mathbf{Y})) \right)}_{\text{Borné par rapport à } \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \text{ à support compact par rapport à } \mathbf{Y}} \mathbf{w}(\mathbf{X} - \epsilon \mathbf{Y}) d\mathbf{Y} \\ &\quad + \int_{]-\frac{T_0}{\epsilon}, +\infty[\times \mathbb{R}^d} \underbrace{\rho(\mathbf{Y}) (\mathbf{B}(\mathbf{a}(\mathbf{X})) - \mathbf{B}(\mathbf{a}(\mathbf{X} - \epsilon \mathbf{Y})))}_{\text{Borné par rapport à } \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \text{ à support compact par rapport à } \mathbf{Y}} \mathbf{w}(\mathbf{X} - \epsilon \mathbf{Y}) d\mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Donc on peut affirmer qu'il existe une constante $c(L, \rho)$ (indépendante de \mathbf{w} et ϵ) telle que :

$$\|[L_\lambda, \rho_\epsilon *] \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega_\infty)} \leq c(L, \rho) \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega_\infty)}.$$

Ainsi, l'opérateur $[L_\lambda, \rho_\epsilon *]$ est continu sur $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega_\infty)$ (pour la norme L^2) et se prolonge sur $L^2(\Omega_\infty)$.

Etape 3 : Soit $\mathbf{w} \in \mathcal{H}_{L_\lambda}$ et $\mathbf{w}_\delta \in \mathcal{H}_{L_\lambda}$ tel que le support de \mathbf{w}_δ est borné et $\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_\delta\|_{L^2(\Omega_\infty)} \leq \frac{\delta}{2}$ et $\tilde{\mathbf{w}}_\delta \in \mathcal{C}(\Omega_\infty)$ tel que $\|\mathbf{w}_\delta - \tilde{\mathbf{w}}_\delta\|_{L^2(\Omega_\infty)} \leq \frac{\delta}{2}$.

On a alors :

$$\|[L_\lambda, \rho_\epsilon *] \mathbf{w}_\delta\|_{L^2(\Omega_\infty)} \leq \|[L_\lambda, \rho_\epsilon *](\mathbf{w}_\delta - \tilde{\mathbf{w}}_\delta)\|_{L^2(\Omega_\infty)} + \|[L_\lambda, \rho_\epsilon *]\tilde{\mathbf{w}}_\delta\|_{L^2(\Omega_\infty)}.$$

De plus on peut montrer que (avec $c(L, \rho)$, une constante indépendante de δ, ϵ) :

$$\|[L_\lambda, \rho_\epsilon *]\tilde{\mathbf{w}}_\delta\|_{L^2(\Omega_\infty)} \leq c(L, \rho) \|\tilde{\mathbf{w}}_\delta\|_{H^1(\Omega_\infty)} \epsilon.$$

On arrive donc à l'estimation suivante (où $c(L, \rho)$ est toujours une constante indépendante de δ, ϵ) :

$$\|[L_\lambda, \rho_\epsilon *] \mathbf{w}_\delta\|_{L^2(\Omega_\infty)} \leq c(L, \rho) (\delta + \|\tilde{\mathbf{w}}_\delta\|_{H^1(\Omega_\infty)} \epsilon).$$

Donc en faisant tendre δ et ϵ vers 0, on a la démonstration du lemme de Friedrich (lemme 3.1.1). ■

On peut alors montrer que $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}_\infty)$ est dense dans \mathcal{H}_{L_λ} muni de la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega_\infty)} + \|L_\lambda \cdot\|_{L^2([-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d)}$.

Lemme 3.1.2

L'opérateur $\Psi \mapsto (\mathbf{A}_d \Psi)_{|x_d=0}$ se prolonge par continuité de $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega}_\infty)$ à \mathcal{H}_{L_λ} à valeurs dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\infty)$.

Démonstration du lemme 3.1.2 : Rappel : Soit $\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\infty)$ quelconque, alors, il existe un relèvement $\Psi \in H^1(\mathbb{R}_+^{d+1})$ tel que la trace de Ψ en $x_d = 0$ soit ψ .

Soit $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega}_\infty)$, on peut réaliser le calcul suivant :

$$\int_{\partial\Omega_\infty} -\mathbf{A}_d(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}', 0)) \psi(t, \mathbf{x}', 0) dt d\mathbf{x}' = \int_{\Omega_\infty} \mathbf{v} \cdot L_\lambda^* \Psi dt d\mathbf{x} + \int_{\Omega_\infty} L_\lambda \mathbf{v} \cdot \Psi dt d\mathbf{x}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la continuité de l'opérateur de relèvement, on peut affirmer que $\|\Psi\|_{H^1(\Omega_\infty)} \leq c \|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega_\infty)}$, où c ne dépend que du domaine Ω_∞ qui est ici fixé. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_\infty} -\mathbf{A}_d(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}', 0)) \psi(t, \mathbf{x}', 0) dt d\mathbf{x}' &\leq \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_\infty)} \|L_\lambda^* \Psi\|_{L^2(\Omega_\infty)} + \|L_\lambda \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_\infty)} \|\Psi\|_{L^2(\Omega_\infty)} \\ &\leq \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_\infty)} c(L) \|\Psi\|_{H^1(\Omega_\infty)} + \|L_\lambda \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_\infty)} \|\Psi\|_{H^1(\Omega_\infty)} \\ &\quad \text{car } \mathbf{A}_j, \mathbf{B} \in W^{1,\infty}(\Omega_\infty) \\ &\leq c(L) \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}_{L_\lambda}} \|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega_\infty)} \text{ d'après } \|\Psi\|_{H^1(\Omega_\infty)} \leq c \|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega_\infty)}. \end{aligned}$$

Or $\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega}_\infty)$ est dense dans \mathcal{H}_{L_λ} et pour tout $\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\infty)$, l'application

$$\mathbf{v} \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega}_\infty) \longmapsto \int_{\partial\Omega_\infty} -\mathbf{A}_d(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}', 0)) \psi(t, \mathbf{x}', 0) dt d\mathbf{x}'$$

est continue pour la norme sur \mathcal{H}_{L_λ} . Donc, la fonction

$$\mathbf{v} \longmapsto \int_{\partial\Omega_\infty} -\mathbf{A}_d(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}', 0)) \psi(t, \mathbf{x}', 0) dt d\mathbf{x}'$$

se prolonge de manière unique sur \mathcal{H}_{L_λ} . On en déduit que $(\mathbf{A}_d \mathbf{v})_{|x_d=0} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\infty)$. ■

En posant $\mathbf{C}_1(\mathbf{y}) = \mathbf{C}\mathbf{A}_d^{-1}(\mathbf{y})$, on a $\mathbf{C}_1 \in L^\infty(\mathcal{Y})$ et, pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^D$,

$$\mathbf{C}\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff \mathbf{C}_1(\mathbf{y})\mathbf{A}_d(\mathbf{y})\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

De la démonstration du lemme précédent (lemme 3.1.2), on en déduit :

Lemme 3.1.3

Pour tout $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega}_\infty)$, et pour tout $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_{L_\lambda}$

$$\langle \Phi, L_\lambda \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} = \langle L_\lambda^* \mathbf{v}, \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} + \langle \Phi|_{x_d=0}, (\mathbf{A}_d \mathbf{v})|_{x_d=0} \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\infty), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\infty)}.$$

Soit $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', 0)$, supposons que $\mathbf{v}|_{x_d=0} \in \ker \mathbf{C}$, cela implique que $(\mathbf{A}_d \mathbf{v})|_{x_d=0} \in \mathbf{A}_d \ker \mathbf{C}$. De plus si $\Phi|_{x_d=0} \in (\mathbf{A}_d \ker \mathbf{C})^\perp$, le terme de bord est nul, c'est à dire :

$$\langle \Phi|_{x_d=0}, (\mathbf{A}_d \mathbf{v})|_{x_d=0} \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\overline{\Omega}_\infty), H^{-\frac{1}{2}}(\overline{\Omega}_\infty)} = 0.$$

On en déduit le lemme suivant.

Lemme 3.1.4

On note

$$\mathcal{E} = \left\{ \Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega}_\infty) \mid \Phi|_{x_d=0} \in (\mathbf{A}_d \ker \mathbf{C})^\perp \right\}.$$

Soit $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_{L_\lambda}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbf{C}\mathbf{v}|_{x_d=0} = \mathbf{0}$.
2. $\forall \Phi \in \mathcal{E}, \langle \Phi, L_\lambda \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} = \langle L_\lambda^* \Phi, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Omega_\infty)}$.

On va maintenant s'attacher à montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème (3.1.1).

Lemme 3.1.5

Soit l'espace $L_\lambda^ \mathcal{E} = \{L_\lambda^* \Phi \mid \Phi \in \mathcal{E}\}$.*

L'adhérence de $L_\lambda^ \mathcal{E}$ dans $L^2(\Omega_\infty)$, notée $\overline{L_\lambda^* \mathcal{E}}$, est un espace de Hilbert (pour le produit scalaire usuel de $L^2(\Omega_\infty)$) car c'est un sous-espace vectoriel fermé (pour la norme L^2) de L^2 .*

Il existe $\lambda_0(L) \geq 0$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda_0(L)$, l'application

$$G_\lambda : \begin{aligned} L_\lambda^* \mathcal{E} &\rightarrow L^2(\Omega_\infty) \\ \Psi = L_\lambda^* \Phi &\mapsto \Phi. \end{aligned}$$

est bien définie, linéaire et continue (pour la norme L^2) et se prolonge donc par continuité sur $\overline{L_\lambda^ \mathcal{E}}$.*

Démonstration du lemme 3.1.5 : On va commencer faire une estimation d'énergie. Soit $\Psi \in L_\lambda^* \mathcal{E}$, donc il existe $\Phi \in L^2(\Omega_\infty)$ tel que $\Psi = L_\lambda^* \Phi$. On fait le produit scalaire de Ψ et Φ .

$$\langle L_\lambda^* \Phi, \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} = -\langle \partial_t(\mathbf{A}_0 \Phi), \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} - \sum_{j=0}^d \langle \partial_j(\mathbf{A}_j \Phi), \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} + \langle \mathbf{B} \Phi, \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} + \lambda \langle \mathbf{A}_0 \Phi, \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)}.$$

Il reste maintenant à estimer chaque terme. Comme \mathbf{A}_0 est uniformément définie positive, on a l'existence de $e_0 > 0$ tel que :

$$\lambda \langle \mathbf{A}_0 \Phi, \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} \geq e_0 \lambda \|\Phi\|_{L^2(\Omega_\infty)}^2.$$

Pour les dérivées spatiales selon les directions x_1, \dots, x_{d-1} ($j \in \{1, \dots, d-1\}$) :

$$\begin{aligned} \langle \partial_j(\mathbf{A}_j \Phi), \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} &= \langle \partial_j(\mathbf{A}_j) \Phi, \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} + \langle \mathbf{A}_j \partial_j \Phi, \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} \\ &= -\langle \mathbf{A}_j \Phi, \partial_j \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} \text{ par intégration par parties} \\ &= -\langle \mathbf{A}_j \partial_j \Phi, \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} \text{ comme } \mathbf{A}_j \text{ est symétrique} \\ &= \frac{1}{2} \langle \partial_j(\mathbf{A}_j) \Phi, \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} \text{ en combinant les lignes 1 et 3 de ce calcul} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\partial_j(\mathbf{A}_j)\|_\infty \|\Phi\|_{L^2(\Omega_\infty)}^2. \end{aligned}$$

Concernant terme de dérivée temporelle, même symptôme, même traitement, en n'oubliant pas les termes de bord (en $t = -T_0$ et $t = +\infty$) :

$$\begin{aligned} \langle \partial_t(\mathbf{A}_0 \Phi), \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} &= \frac{1}{2} \underbrace{\langle (\mathbf{A}_0 \Phi)|_{t=+\infty}, \Phi|_{t=+\infty} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}}_{>0 \text{ car } \mathbf{A}_0 \text{ est symétrique définie positive}} - \langle \mathbf{A}_0 \Phi, \partial_t \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \underbrace{\langle (\mathbf{A}_0 \Phi)|_{t=-T_0}, \Phi|_{t=-T_0} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}}_{=0} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\partial_t(\mathbf{A}_0)\|_\infty \|\Phi\|_{L^2(\Omega_\infty)}^2. \end{aligned}$$

Pour le terme avec la dérivée selon x_d , il faut prendre en compte le terme de bord en $x_d = 0$ et utiliser le fait que la condition à la limite est maximale strictement dissipative :

$$\begin{aligned} \langle \partial_d(\mathbf{A}_d \Phi), \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} &= -\langle \mathbf{A}_d \Phi, \partial_d \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} - \langle (\mathbf{A}_d \Phi)|_{x_d=0}, \Phi|_{x_d=0} \rangle_{L^2(\partial\Omega_\infty)} \\ &= \frac{1}{2} \langle \partial_d(\mathbf{A}_d) \Phi, \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} - \frac{1}{2} \langle (\mathbf{A}_d \Phi)|_{x_d=0}, \Phi|_{x_d=0} \rangle_{L^2(\partial\Omega_\infty)}. \end{aligned}$$

On va montrer par l'absurde que $\langle (\mathbf{A}_d \Phi)|_{x_d=0}, \Phi|_{x_d=0} \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\infty), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\infty)} \geq 0$:

Supposons que $\langle (\mathbf{A}_d \Phi)|_{x_d=0}, \Phi|_{x_d=0} \rangle_{L^2(\partial\Omega_\infty)} < 0$ alors d'après l'hypothèse des conditions aux limites maximales strictement dissipatives, on a, pour un certain $t, \mathbf{x}', \Phi(t, \mathbf{x}', 0) \in \ker \mathbf{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Dans ce cas, on a :

$$-e_0 \|\Phi(t, \mathbf{x}', 0)\|_2^2 \geq \underbrace{\langle \mathbf{A}_d(t, \mathbf{x}', 0) \Phi(t, \mathbf{x}', 0), \Phi(t, \mathbf{x}', 0) \rangle_{\mathbb{R}^D}}_{\in \mathbf{A}_d \ker \mathbf{C}} - \underbrace{\langle \Phi(t, \mathbf{x}', 0), \Phi(t, \mathbf{x}', 0) \rangle_{\mathbb{R}^D}}_{\in (\mathbf{A}_d \ker \mathbf{C})^\perp} = 0.$$

Ce qui implique que $\Phi(t, \mathbf{x}', 0) = \mathbf{0}$. On a alors une contradiction.

Donc on peut affirmer que $\langle (\mathbf{A}_d \Phi)|_{x_d=0}, \Phi|_{x_d=0} \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\infty), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\infty)} \geq 0$, est ainsi,

$$\langle \partial_d(\mathbf{A}_d \Phi), \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} \leq \frac{1}{2} \langle \partial_d(\mathbf{A}_d) \Phi, \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} - 0 \leq \frac{1}{2} \|\partial_d(\mathbf{A}_d)\|_\infty \|\Phi\|_{L^2(\Omega_\infty)}^2.$$

En réunissant toutes les inégalités précédemment prouvées, on obtient :

$$\|L_\lambda^* \Phi\|_{L^2(\Omega_\infty)} \|\Phi\|_{L^2(\Omega_\infty)} \geq \langle L_\lambda^* \Phi, \Phi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} \geq \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=0}^d \|\partial_j(\mathbf{A}_j)\|_\infty + \|\mathbf{B}\|_\infty + \lambda e_0 \right) \|\Phi\|_{L^2(\Omega_\infty)}^2.$$

On choisit désormais $\lambda > \lambda_0(L) = \frac{1}{2e_0} \sum_{j=0}^d \|\partial_j(\mathbf{A}_j)\|_\infty - \|\mathbf{B}\|_\infty$ et on a :

$$\|\Phi\|_{L^2(\Omega_\infty)} \leq \frac{2}{\lambda} \|L_\lambda^* \Phi\|_{L^2(\Omega_\infty)}. \quad (3.2)$$

Cette estimation d'énergie est importante car elle montre que l'application G , si elle est bien définie, est continue.

Pour montrer que G_λ est bien définie, il faut montrer l'unicité de l'image. On considère une fonction $\Psi \in L_\lambda^* \mathcal{E}$. Supposons que l'on ait Φ_1 et Φ_2 dans $L^2(\Omega_\infty)$ tels que $\Psi = L_\lambda^* \Phi_1 = L_\lambda^* \Phi_2$. Alors, par linéarité de L_λ^* (car on s'intéresse toujours au cas d'un système hyperbolique linéaire), $L_\lambda^*(\Phi_1 - \Phi_2) = \mathbf{0}$. Grâce à l'estimation d'énergie magique (3.2), on peut affirmer que

$$\|\Phi_1 - \Phi_2\|_{L^2(\Omega_\infty)} \leq \frac{2}{\lambda} \|L_\lambda^*(\Phi_1 - \Phi_2)\|_{L^2(\Omega_\infty)} = 0.$$

Donc G_λ se prolonge par continuité sur $\overline{L_\lambda^* \mathcal{E}}$. ■

On en déduit alors la solution faible du problème (3.1.1) :

Soit $\lambda \geq \lambda_0(L)$. L'application

$$\mathcal{G} : \begin{cases} \overline{L_\lambda^* \mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R} \\ \Psi \mapsto \langle G_\lambda(\Psi), \mathbf{f}_\lambda \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} \end{cases}$$

est linéaire et continue sur l'espace de Hilbert $\overline{L_\lambda^* \mathcal{E}}$ (où \mathbf{f} est le terme source défini dans le théorème 3.1.1).

D'après le théorème de Riesz, il existe $\mathbf{v}_\lambda \in \overline{L_\lambda^* \mathcal{E}}$ tel que :

$$\forall \Psi \in \overline{L_\lambda^* \mathcal{E}}, \langle G_\lambda(\Psi), \mathbf{f} \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} = \langle \Psi, \mathbf{v}_\lambda \rangle_{L^2(\Omega_\infty)}. \quad (3.3)$$

On pose $\Phi = G_\lambda(\Psi)$ (c'est à dire que $L_\lambda^* \Phi = \Psi$) et on obtient :

$$\forall \Psi \in \overline{L_\lambda^* \mathcal{E}}, \langle \Phi, \mathbf{f} \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} = \langle L_\lambda^* \Phi, \mathbf{v}_\lambda \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} = \langle \Phi, L_\lambda \mathbf{u}_\lambda \rangle_{L^2(\Omega_\infty)}. \quad (3.4)$$

C'est à dire que \mathbf{v}_λ est donc une solution faible du problème (3.1.1).

De plus, d'après le théorème de Riesz, on a l'égalité des normes de \mathbf{v}_λ et \mathcal{G} :

$$\|\mathbf{v}_\lambda\|_{L^2(\Omega_\infty)} = \|\mathcal{G}\|_{\overline{L_\lambda^* \mathcal{E}'}}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a, pour $\lambda > \lambda_0(L)$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(\Psi)\|_{\overline{L_\lambda^* \mathcal{E}'}} &\leq \|\mathbf{G}(\Psi)\|_{L^2(\Omega_\infty)} \|\mathbf{f}_\lambda\|_{L^2(\Omega_\infty)} \\ &\leq \frac{2}{\lambda} \|\Psi\|_{L^2(\Omega_\infty)} \|\mathbf{f}_\lambda\|_{L^2(\Omega_\infty)} \text{ d'après la continuité de } G \text{ (équation 3.2).} \end{aligned}$$

On a ainsi l'estimation suivante pour \mathbf{v}_λ :

$$\|\mathbf{v}_\lambda\|_{L^2(\Omega_\infty)} \leq \frac{2}{\lambda} \|\mathbf{f}_\lambda\|_{L^2(\Omega_\infty)}.$$

De cette relation, on en déduit l'unicité de \mathbf{v}_λ dans $\overline{L_\lambda^* \mathcal{E}}$.

On prend ensuite $\mathbf{v} = e^{\lambda t} \mathbf{v}_\lambda$ qui est alors solution du problème (3.1).

On peut ensuite montrer que \mathbf{v} ne dépend pas du choix de $\lambda > \lambda_0(L)$.

Pour justifier le fait que $\mathbf{v}|_{t<0} = \mathbf{0}$, on fait le produit scalaire dans L^2 avec une fonction $\Psi \in L^2(\Omega_\infty)$ dont le support est inclus dans $] -T_0, 0[\times \mathbb{R}_+^d$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \Psi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} &= \langle \mathbf{v}_\lambda, e^{\lambda t} \Psi \rangle_{L^2(\Omega_\infty)} \\ &\leq \|\mathbf{v}_\lambda\|_{L^2(\Omega_\infty)} \|e^{\lambda t} \Psi\|_{L^2(\Omega_\infty)} \\ &\leq \frac{2}{\lambda} \|\mathbf{f}_\lambda\|_{L^2(\Omega_\infty)} \|\Psi\|_{L^2(\Omega_\infty)} \\ &\leq \frac{2}{\lambda} \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega_\infty)} \|\Psi\|_{L^2(\Omega_\infty)} \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{quand } \lambda \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Le lemme de Friedrichs (lemme 3.1.1) nous permet ensuite de montrer que \mathbf{v}_λ est aussi une solution forte du problème hyperbolique (3.1.1) au sens suivant : Il existe une suite de fonctions $(u_\lambda^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega}_\infty) \cap \mathcal{H}_\lambda)^{\mathbb{N}}$ telle que :

1. $(\mathbf{C}\mathbf{v}_\lambda)_{x_d=0} = \mathbf{0}$
2. $L_\lambda \mathbf{v}_\lambda^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} L_\lambda \mathbf{v}_\lambda = \mathbf{f}_\lambda$

Cela achève la démonstration du théorème 3.1.1.

En reprenant la démonstration du théorème 3.1.1, on prouve sans difficulté l'existence et l'unicité d'une solution jusqu'à un temps T fixé :

Corollaire 3.1.1

Soit $T > 0$ quelconque. On reprend les hypothèses du théorème 3.1.1 en remplaçant l'intervalle de temps $] -T_0, +\infty[$ par $] -T_0, T[$.

Alors le problème hyperbolique linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{A}_0(\mathbf{a}) \partial_t \mathbf{v} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{a}) \partial_j \mathbf{v} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) & \text{dans }] -T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d \\ \mathbf{C}\mathbf{v}|_{x_d=0} = \mathbf{0} & \text{sur }] -T_0, T[\times \mathbb{R}^{d-1} \\ \mathbf{v}_{t<0} = \mathbf{0} & \text{sur }] -T_0, 0[\times \mathbb{R}^{d-1} \end{array} \right.$$

admet une unique solution $\mathbf{v} \in L^2(] -T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d)$. De plus, il existe $\lambda_0(L) > 0$ tel que, pour tout $\lambda > \lambda_0(L)$, on a l'estimation suivante :

$$\|\mathbf{v} \exp(-\lambda t)\|_{L^2(] -T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d)} \leq \frac{2}{\lambda} \|\mathbf{f}(\mathbf{a}) \exp(-\lambda t)\|_{L^2(] -T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d)}$$

3.1.2 Plus de régularité !

On souhaite désormais avoir plus de régularité sur la solution \mathbf{v} . Pour cela, nous allons montrer qu'il suffit de supposer que les coefficients $\mathbf{A}_j(\mathbf{a})$ et $\mathbf{B}(\mathbf{a})$ ainsi que le terme source $f(\mathbf{a})$ sont suffisamment réguliers sur Ω_T (en plus des hypothèses précédentes).

Hypothèse 3.1.8

Les fonctions \mathbf{A}_j ($j \in \{0, \dots, d\}$), \mathbf{B} et \mathbf{f} vérifient :

- $\mathbf{A}_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{D'})$ ($j \in \{0, \dots, d\}$).
- $\mathbf{B} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{D'})$.
- $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{D'})$, tel que pour tout $t < 0$ et pour tout \mathbf{x} , $\mathbf{f}(\mathbf{a}(t, \mathbf{x})) = \mathbf{0}$.

De l'hypothèse précédente, on en déduit que $\mathbf{A}_j(\mathbf{a})$ ($j \in \{0, \dots, d\}$) et $\mathbf{B}(\mathbf{a})$ sont dans $W^{1,\infty}(]-T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d)$.

A nouveau, le traitement de la direction x_d sera différent de celui des variables tangentialles t, x_1, \dots, x_{d-1} . Ainsi nous allons commencer par fournir un résultat de régularité tangentielle et, ensuite, nous en déduirons la régularité selon la dernière variable. Nous commençons par définir une norme à poids qui sera utilisé dans la suite :

Définition 3.1.2 (Normes à poids)

Soit $\Phi :]-T_0, +\infty[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^D$ telle que $\Phi \exp(-\lambda t) \in H^m(]-T_0, +\infty[\times \Omega)$, alors on définit la norme :

$$\|\Phi\|_{H^m, \lambda} = \sum_{|\alpha| \leq m} \lambda^{m-|\alpha|} \|\partial_t^{\alpha_0} \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d} \Phi \exp(-\lambda t)\|_{L^2(]-T_0, +\infty[\times \Omega)}.$$

On note

$$\mathcal{T}^\alpha = \partial_t^{\alpha_0} \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_{d-1}^{\alpha_{d-1}}$$

l'opérateur de dérivée tangentielle. On va aussi faire appel aux espaces de Sobolev tangentiels suivant :

Définition 3.1.3

Pour $m \in \mathbb{N}$, on note

$$H_{tan}^m(]-T_0, +\infty[\times \Omega) = \{\Phi \in L^2(]-T_0, +\infty[\times \Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m \Rightarrow \mathcal{T}^\alpha \Phi \in L^2(]-T_0, +\infty[\times \Omega)\}.$$

La norme sur $H_{tan}^m(]-T_0, +\infty[\times \Omega)$ que l'on considère est

$$\|\cdot\|_{H_{tan}^m(]-T_0, +\infty[\times \Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathcal{T}^\alpha \cdot\|_{L^2(]-T_0, +\infty[\times \Omega)}.$$

Livrons sans plus attendre le résultat principal cette sous-section :

Théorème 3.1.2

On fait les hypothèses 3.1.1 à 3.1.6 et 3.1.8. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_0(L, m)$, tel que :

- Le problème hyperbolique linéaire (3.1), rappelé ci-dessous

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0(\mathbf{a})\partial_t \mathbf{v} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{a})\partial_j \mathbf{v} + \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) & \text{dans }]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d \\ \mathbf{C}\mathbf{v}|_{x_d=0} = \mathbf{0} & \text{sur }]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}^{d-1} \\ \mathbf{v}_{t<0} = \mathbf{0} & \text{sur }]-T_0, 0[\times \mathbb{R}^{d-1} \end{cases}$$

admet une unique solution $\mathbf{v} \in e^{\lambda t} H^\infty(]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d)$.

- Il existe une constante $c(L, m)$ (indépendante de \mathbf{f} , \mathbf{v} et λ) tel que pour tout $\lambda > \lambda_0(L, m)$ on a l'estimation suivante :

$$\|\mathbf{v}\|_{H^m, \lambda} \leq \frac{c(L, m)}{\lambda} \|\mathbf{f}(\mathbf{a})\|_{H^m, \lambda}.$$

D'après le théorème 3.1.1, l'existence de \mathbf{v} dans $e^{\lambda_0(L, 0)t} L^2(]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d)$ (pour $\lambda_0(L, 0)$ suffisamment grand) est déjà garantie.

On va donc montrer que pour tout $m' \in \mathbb{N}$, $\mathbf{v} \in H_{tan}^{m'}(]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d)$.

Pour cela nous allons utiliser un opérateur de régularisation tangentiale ($\epsilon > 0$ et $s > 0$) :

$$\mathcal{R}_\epsilon : \begin{cases} H_{tan}^s(\mathbb{R}_+^{d+1}) \longrightarrow H_{tan}^{s+2}(\mathbb{R}_+^{d+1}) \\ \Phi \longmapsto \Psi \text{ solution faible de } \Psi - \epsilon \Delta_{t, \mathbf{x}'} \Psi = \Phi. \end{cases}$$

Cet opérateur permet à la fois de gagner en régularité et, en faisant tendre le paramètre ϵ vers 0, d'évaluer la régularité de la solution \mathbf{v} de (3.1).

Dans la suite, quand on appliquera l'opérateur \mathcal{R}_ϵ à \mathbf{v} (définie sur $]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d$), on confondra \mathbf{v} avec son prolongement sur \mathbb{R}_+^{d+1} en prenant $\mathbf{v}|_{t \leq -T_0} = \mathbf{0}$. Comme on sait que $\mathbf{v}|_{t<0} = \mathbf{0}$, cela ne modifie ni la régularité de \mathbf{v} ni sa norme (au sens $\|\mathbf{v}\|_{H_{tan}^m(]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d)} = \|\mathbf{v}\|_{H_{tan}^m(\mathbb{R}_+^{d+1})}$).

Pour montrer que \mathcal{R}_ϵ est bien défini, il suffit d'appliquer le théorème de Lax-Milgram.

Plusieurs lemmes doivent être établis pour \mathcal{R}_ϵ , afin de justifier les propriétés évoquées précédemment :

Lemme 3.1.6

Soit $\epsilon > 0$ et $s \in \mathbb{N}$. \mathcal{R}_ϵ est une application linéaire continue de $H_{tan}^s(\mathbb{R}_+^{d+1})$ vers $H_{tan}^{s+2}(\mathbb{R}_+^{d+1})$. De plus, les opérateurs

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\epsilon : H_{tan}^s(\mathbb{R}_+^{d+1}) &\rightarrow H_{tan}^s(\mathbb{R}_+^{d+1}) \\ \sqrt{\epsilon} \mathcal{R}_\epsilon : H_{tan}^s(\mathbb{R}_+^{d+1}) &\rightarrow H_{tan}^{s+1}(\mathbb{R}_+^{d+1}) \\ \epsilon \mathcal{R}_\epsilon : H_{tan}^s(\mathbb{R}_+^{d+1}) &\rightarrow H_{tan}^{s+2}(\mathbb{R}_+^{d+1}) \end{aligned}$$

sont uniformément bornés par rapport à ϵ .

Démonstration du lemme 3.1.6 : Pour la démonstration du lemme, on va utiliser la transformée de Fourier. On note alors la transformée de Fourier de Φ de la manière suivante :

$$\mathcal{F}_{tan}(\Phi(., x_d))(\xi_0, \dots, \xi_{d-1}) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t, \mathbf{x}) e^{-2\pi(t\xi_0 + \sum_{l=1}^{d-1} x_l \xi_l)} dt d\mathbf{x}'.$$

La variable dans ce domaine de Fourier est alors notée $\xi' = (\xi_0, \dots, \xi_{d-1})$. On remarque alors que la norme

$$\Phi \rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi'|^2)^s |\mathcal{F}_{tan}(\Phi(., x_d))(\xi')|^2 d\xi' dx_d \right)^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H_{tan}^s(\mathbb{R}_+^{d+1})}$.

Ici $c(s)$ désigne à chaque fois une constante indépendante de Φ , ϵ et \mathcal{R}_ϵ .

Soit $\Phi \in H_{tan}^s(\mathbb{R}_+^{d+1})$.

On réalise ensuite les trois estimations pour montrer le caractère borné indépendamment de ϵ de \mathcal{R}_ϵ , $\sqrt{\epsilon}\mathcal{R}_\epsilon$, $\epsilon\mathcal{R}_\epsilon$.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_\epsilon \Phi\|_{H_{tan}^s(\mathbb{R}_+^{d+1})} &\leq c(s) \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi'|^2)^m |\mathcal{F}_{tan}(\mathcal{R}_\epsilon \Phi(., x_d))(\xi')|^2 d\xi' dx_d \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c(s) \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi'|^2)^s (1 + \epsilon|\xi'|^2)^{-2} |\mathcal{F}_{tan}(\Phi(., x_d))(\xi')|^2 d\xi' dx_d \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c(s) \|\Phi\|_{H_{tan}^s(\mathbb{R}_+^{d+1})} \text{ car } (1 + \epsilon|\xi'|^2) > 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\epsilon}\mathcal{R}_\epsilon \Phi\|_{H_{tan}^{s+1}(\mathbb{R}_+^{d+1})} &\leq c(s) \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi'|^2)^{s+1} (1 + \epsilon|\xi'|^2)^{-2} \epsilon |\mathcal{F}_{tan}(\Phi(., x_d))(\xi')|^2 d\xi' dx_d \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c(s) \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi'|^2)^s \underbrace{\frac{\epsilon + \epsilon|\xi'|^2}{(1 + \epsilon|\xi'|^2)^2}}_{\leq 1} |\mathcal{F}_{tan}(\Phi(., x_d))(\xi')|^2 d\xi' dx_d \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c(s) \|\Phi\|_{H_{tan}^s(\mathbb{R}_+^{d+1})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\epsilon\mathcal{R}_\epsilon \Phi\|_{H_{tan}^{s+2}(\mathbb{R}_+^{d+1})} &\leq c(s) \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi'|^2)^{s+2} (1 + \epsilon|\xi'|^2)^{-2} \epsilon^2 |\mathcal{F}_{tan}(\Phi(., x_d))(\xi')|^2 d\xi' dx_d \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c(s) \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi'|^2)^s \underbrace{\frac{(\epsilon + \epsilon|\xi'|^2)^2}{(1 + \epsilon|\xi'|^2)^2}}_{\leq 1} |\mathcal{F}_{tan}(\Phi(., x_d))(\xi')|^2 d\xi' dx_d \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c(s) \|\Phi\|_{H_{tan}^s(\mathbb{R}_+^{d+1})}. \end{aligned}$$

■

On montre maintenant un lemme qui va nous permettre de suivre la régularité de \mathbf{v} .

Lemme 3.1.7

Soient $s \in \mathbb{R}_+^*$ et $\Phi \in H_{tan}^s(\mathbb{R}_+^{d+1})$.

Alors, on a $\mathcal{R}_\epsilon \Phi \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \Phi$ dans $H_{tan}^s(\mathbb{R}^{d+1})$.

De plus, pour tout $s' > s$:

$$\sup_{\epsilon > 0} \{ \|\mathcal{R}_\epsilon \Phi\|_{H_{tan}^{s'}(\mathbb{R}^{d+1})} \} < +\infty \implies \Phi \in H_{tan}^{s'}(\mathbb{R}^{d+1}). \quad (3.5)$$

Démonstration du lemme 3.1.7: $c(s)$ et $c(s')$ désignent ici des constantes indépendantes de ϵ .

Pour montrer le premier point du lemme 3.1.7, on étudie la norme de $\mathcal{R}_\epsilon \Phi - \Phi$:

$$\|\mathcal{R}_\epsilon \Phi - \Phi\|_{H_{tan}^s(\mathbb{R}_+^{d+1})} \leq c(s) \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi'|^2)^s \underbrace{\left| \frac{1}{1 + \epsilon |\xi'|^2} - 1 \right|^2}_{\leq 4} |\mathcal{F}_{tan}(\Phi(., x_d))(\xi')|^2 d\xi' dx_d \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue qui nous permet d'affirmer que $\|\mathcal{R}_\epsilon \Phi - \Phi\|_{H_{tan}^s(\mathbb{R}_+^{d+1})} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$.

Montrons maintenant la deuxième partie du lemme. On suppose d'abord que $s < s' \leq s+2$, ce qui nous permet d'affirmer que $\mathcal{R}_\epsilon \Phi \in H_{tan}^{s'}(\mathbb{R}_+^{d+1})$.

On prouve que $\Phi \in H_{tan}^{s'}(\mathbb{R}_+^{d+1})$ est équivalent à dire

$$(1 + |\xi'|^2)^{s'/2} \frac{1}{1 + \epsilon |\xi'|^2} |\mathcal{F}_{tan}(\Phi(., x_d))(\xi')| \in L^2(\mathbb{R}_+^{d+1}).$$

On sait déjà que $\mathcal{R}_\epsilon \Phi \in H_{tan}^{s'}(\mathbb{R}_+^{d+1})$ si et seulement si

$$(1 + |\xi'|^2)^{s'/2} \frac{1}{1 + \epsilon |\xi'|^2} |\mathcal{F}_{tan}(\Phi(., x_d))(\xi')| \in L^2(\mathbb{R}_+^{d+1}).$$

De plus on a :

$$\|\mathcal{R}_\epsilon \Phi\|_{H_{tan}^{s'}(\mathbb{R}_+^{d+1})} \geq c(s) \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi'|^2)^{s'} \frac{1}{(1 + \epsilon |\xi'|^2)^2} |\mathcal{F}_{tan}(\Phi(., x_d))(\xi')|^2 d\xi' dx_d \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On rappelle que pour tout $x_d \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$, $(1 + |\xi'|^2)^{s'} \frac{1}{(1 + \epsilon |\xi'|^2)^2} |\mathcal{F}_{tan}(\Phi(., x_d))(\xi')|^2$ décroît quand $\epsilon > 0$ tend vers 0, tout en étant positif. Donc d'après le lemme de convergence monotone :

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi'|^2)^{s'} \frac{1}{(1 + \epsilon |\xi'|^2)^2} |\mathcal{F}_{tan}(\Phi(., x_d))(\xi')|^2 d\xi' dx_d \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi'|^2)^{s'} |\mathcal{F}_{tan}(\Phi(., x_d))(\xi')|^2 d\xi' dx_d \right)^{\frac{1}{2}} \geq c(s') \|\Phi\|_{H_{tan}^{s'}(\mathbb{R}_+^{d+1})}. \end{aligned}$$

Donc, si

$$\sup_{\epsilon > 0} \left\{ \|\mathcal{R}_\epsilon \Phi\|_{H_{tan}^{s'}(\mathbb{R}_+^{d+1})} \right\} = K < +\infty$$

on a $\|\Phi\|_{H_{tan}^{s'}(\mathbb{R}_+^{d+1})} \leq K/c(s')$ (avec $c(s') > 0$).

C'est à dire $\Phi \in H_{tan}^{s'}(\mathbb{R}_+^{d+1})$. Si $s' > s + 2$, on procède par récurrence pour montrer que Φ est dans $H_{tan}^{s+2}(\mathbb{R}_+^{d+1})$, puis dans $H_{tan}^{s+4}(\mathbb{R}_+^{d+1})$ jusqu'à arriver à $H_{tan}^{s'}(\mathbb{R}_+^{d+1})$. ■

Démonstration du théorème 3.1.2 : On fait la démonstration par récurrence sur m . Le cas $m = 0$ correspond au théorème 3.1.1. Nous supposons maintenant que $\mathbf{v}_\lambda \in H^{m-1}$, pour $\lambda \geq \lambda(L, m-1)$ et nous montrons que $\mathbf{v}_\lambda \in H_{tan}^m$ puis ainsi $\mathbf{v}_\lambda \in H^m$ (pour tout $\lambda \geq \lambda(L, m) \geq \lambda(L, m-1)$). On pourra alors prouver l'estimation du théorème 3.1.2 .

On va chercher à appliquer le lemme 3.1.1.

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq m - 1$.

On prend l'équation (3.1.1), on multiplie par $\mathbf{A}_d(\mathbf{a})^{-1}$ et on applique l'opérateur $\mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon$, avant de multiplier à nouveau par $\mathbf{A}_d(\mathbf{a})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{d-1} \mathbf{A}_j \partial_j (\mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda) + \mathbf{A}_d \partial_d (\mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda) + \mathbf{B} (\mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda) + \lambda \mathbf{A}_0 (\mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda) \\ = - \sum_{j=0}^{d-1} \mathbf{A}_d [\mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{A}_j \partial_j, \mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon] \mathbf{v}_\lambda - \mathbf{A}_d [\mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{a}), \mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon] \mathbf{v}_\lambda \\ \quad - \lambda \mathbf{A}_d [\mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{A}_0, \mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon] \mathbf{v}_\lambda + \mathbf{A}_d \mathcal{T}^\alpha \mathbf{A}_d(\mathbf{a})^{-1} \mathbf{f}_\lambda \\ \mathbf{C} \mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda = \mathbf{0} \\ (\mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda)_{t<0} = \mathbf{0}. \end{array} \right.$$

Pour un opérateur \mathbf{Q} , on remarque que :

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q}, \mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon] \mathbf{v}_\lambda &= \mathbf{Q} (\mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda) - \mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon (\mathbf{Q} \mathbf{v}_\lambda) \\ &= [\mathbf{Q}, \mathcal{T}^\alpha] \mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda + \mathcal{T}^\alpha \mathbf{Q} (\mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda) - \mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon (\mathbf{Q} \mathbf{v}_\lambda) \\ &= [\mathbf{Q}, \mathcal{T}^\alpha] \mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda - \mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon [\mathbf{Q}, \mathcal{R}_\epsilon^{-1}] \mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda \\ &= [\mathbf{Q}, \mathcal{T}^\alpha] \mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda - \mathcal{T}^\alpha \epsilon \mathcal{R}_\epsilon [\mathbf{Q}, \Delta_{t, \mathbf{x}'}] \mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda. \end{aligned}$$

Ainsi

$$[\mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{A}_j \partial_j, \mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon] \mathbf{v}_\lambda = [\mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{A}_j \partial_j, \mathcal{T}^\alpha] \mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda - \mathcal{T}^\alpha \epsilon \mathcal{R}_\epsilon [\mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{A}_j \partial_j, \Delta_{t, \mathbf{x}'}] \mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda.$$

On va donc estimer les deux termes de l'égalité ci-dessus. On rappelle que la fonction \mathbf{a} (*cf* $\mathbf{A}_j(\mathbf{a}), \mathbf{A}_d(\mathbf{a})$) est $H^\infty([T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d)$ et à valeurs dans un borné de $\mathbb{R}^{D'}$.

Pour l'estimation du terme

$$\mathcal{T}^\alpha \epsilon \mathcal{R}_\epsilon [\mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{A}_j \partial_j, \Delta_{t, \mathbf{x}'}] \mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda,$$

on commence par relever que $\mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda \in H_{tan}^m([T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d)$ d'après l'hypothèse de récurrence et la définition de \mathcal{R}_ϵ . De plus, en faisant le développement du crochet de Poisson, on peut montrer que $[\mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{A}_j \partial_j, \Delta_{t, \mathbf{x}'}]$ est un opérateur borné de $H_{tan}^m([T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d)$

dans $H_{tan}^{m-2}(]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d)$. Enfin, $\epsilon \mathcal{R}_\epsilon$ est un opérateur borné (indépendamment de ϵ) de $H_{tan}^{m-2}(]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d)$ dans $H_{tan}^m(]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d)$.

Donc

$$\lambda^{m-|\alpha|} \|\mathbf{A}_d \mathcal{T}^\alpha \epsilon \mathcal{R}_\epsilon [\mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{A}_j \partial_j, \Delta_{t,x'}] \mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda\|_{L^2(\Omega_\infty)} \leq c(L, m) \lambda^{m-|\alpha|} \|\mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda\|_{H_{tan}^m(\Omega_\infty)}.$$

où $c(L, m)$ est une constante positive indépendante de ϵ et λ . Pour le terme $[\mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{A}_j \partial_j, \mathcal{T}^\alpha] \mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda$, un raisonnement similaire s'applique pour obtenir :

$$\lambda^{m-|\alpha|} \|[\mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{A}_j \partial_j, \mathcal{T}^\alpha] \mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda\|_{L^2(\Omega_\infty)} \leq c(L, m) \lambda^{m-|\alpha|} \|\mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda\|_{H_{tan}^m(\Omega_\infty)}.$$

L'estimation des termes

$$\mathbf{A}_d [\mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{a}), \mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon] \mathbf{v}_\lambda \quad \text{et} \quad \lambda \mathbf{A}_d [\mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{A}_0, \mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon] \mathbf{v}_\lambda$$

se fait de la même manière. On a alors :

$$\begin{aligned} \lambda^{m+1-|\alpha|} \|\mathbf{A}_d [\mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{A}_0, \mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon] \mathbf{v}_\lambda\|_{L^2(\Omega_\infty)} &\leq c(L, m) \lambda^{m+1-|\alpha|} \|\mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda\|_{H_{tan}^{m-1}(\Omega_\infty)} \\ &\leq c(L, m) \lambda^{m-|\alpha|} \|\mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda\|_{H_{tan}^m(\Omega_\infty)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^{m-|\alpha|} \|\mathbf{A}_d [\mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{a}), \mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon] \mathbf{v}_\lambda\|_{L^2(]-T_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^d)} &\leq c(L, m) \lambda^{m-|\alpha|} \|\mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda\|_{H_{tan}^{m-1}(\Omega_\infty)} \\ &\leq c(L, m) \lambda^{m-1-|\alpha|} \|\mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}\|_{H_{tan}^m(\Omega_\infty)}. \end{aligned}$$

Pour cette dernière inégalité, on voit l'importante des coefficients $\lambda^{m-|\alpha|}$ dans la définition de la norme : le second membre reste borné quand λ tend vers $+\infty$.

Or, d'après le théorème 3.1.1 :

Il existe $\lambda_0(L, m)$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0(L, m)$ on ait l'estimation suivante :

$$\lambda^{m-|\alpha|} \|\mathcal{T}^\alpha \mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda\|_{L^2(\Omega_\infty)} \leq \frac{c(L, m)}{\lambda} \lambda^{m-|\alpha|} (\|\mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda\|_{H_{tan}^m(\Omega_\infty)} + \|\mathcal{R}_\epsilon \mathbf{f}_\lambda\|_{H_{tan}^m(\Omega_\infty)}).$$

où $c(L, m)$ est une constante ne dépendant pas de λ et ϵ . Donc pour λ suffisamment grand :

$$\|\mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}_\lambda\|_{m, \lambda} \leq \frac{c(L, m)}{\lambda} \|\mathcal{R}_\epsilon \mathbf{f}_\lambda\|_{H_{tan}^m(\Omega_\infty)} \leq \frac{c(L, m)}{\lambda} \|\mathbf{f}\|_{m, \lambda}.$$

Donc $\|\mathcal{R}_\epsilon \mathbf{v}\|_{m, \lambda}$ est borné indépendamment de ϵ , ce qui signifie que $\mathbf{v}_\lambda \in H_{tan}^m(\Omega_\infty) \cap H^{m-1}(\Omega_\infty)$. De plus on rappelle que

$$\partial_d \mathbf{v}_\lambda = \mathbf{A}_d^{-1} \left(-\mathbf{A}_0 \partial_t \mathbf{v}_\lambda - \sum_{j=1}^{d-1} \mathbf{A}_j \partial_j \mathbf{v}_\lambda - \mathbf{B} \mathbf{v}_\lambda - \lambda \mathbf{A}_0 \mathbf{v}_\lambda + \mathbf{f}_\lambda \right) \in H_{tan}^{m-1}(\Omega_\infty).$$

Par récurrence, on montre que pour tout $k \leq m$, $\partial_d^m \mathbf{v}_\lambda$ est composée d'une somme finie d'éléments de la forme $\mathbf{K} \mathcal{T}^\beta \mathbf{v}_\lambda$ avec $|\beta| \leq m-k$ et \mathbf{K} une matrice dont les coefficients (ainsi que toutes leurs dérivées) sont bornées. Ainsi $\partial_d^m \mathbf{v}_\lambda \in H_{tan}^{m-k}(\Omega_\infty)$. Donc $\mathbf{v}_\lambda \in H_{tan}^m(\Omega_\infty)$.

Pour l'estimation, d'énergie en norme $\|\cdot\|_{H^m, \lambda}$, on fait comme pour l'estimation d'énergie avec les dérivées tangentielles sauf que l'on remplace $\lambda^{m-|\alpha|} \mathcal{T}^\alpha$ par $\lambda^{m-|\alpha|} \mathcal{T}^\beta \partial_d^\gamma$ avec $|\beta| + \gamma \leq m$. ■

On peut aussi montrer une version locale en temps. C'est d'ailleurs cette version qui nous servira pour l'étude du problème quasi-linéaire.

Théorème 3.1.3

Soit $T > 0$. On reprend les hypothèses du théorème 3.1.2 en remplaçant l'intervalle $] - T_0, +\infty[$ par $] - T_0, T[$.

Il existe une unique solutions $\mathbf{v} \in H^\infty(] - T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d) \cap W^{1,\infty}(] - T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d)$ du problème hyperbolique linéaire (3.1), rappelé ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0(\mathbf{a})\partial_t \mathbf{v} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{a})\partial_j \mathbf{v} + \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) & \text{dans }] - T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d \\ \mathbf{C}\mathbf{v}|_{x_d=0} = \mathbf{0} & \text{sur }] - T_0, T[\times \mathbb{R}^{d-1} \\ \mathbf{v}_{t<0} = \mathbf{0} & \text{sur }] - T_0, 0[\times \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases}$$

De plus, il existe $\lambda_0(L, m)$ et une constante $c(L, m)$ (indépendante de \mathbf{f} , \mathbf{v} et λ) tel que pour tout $\lambda > \lambda_0(L, m)$ on a l'estimation suivante :

$$\|\mathbf{v}\|_{H^{m,\lambda}} \leq \frac{c(L, m)}{\lambda} \|\mathbf{f}(\mathbf{a})\|_{H^{m,\lambda}}.$$

3.1.3 Cas d'un problème quasilinéaire

On s'intéresse maintenant au cas d'un problème quasilinéaire. Une des caractéristiques de ces systèmes hyperboliques qui fait tout leur difficulté est la génération possible de chocs et autres discontinuités ruinant ainsi à néant nos espoirs d'avoir une solution régulière globale en temps (sauf dans des cas particuliers). Dans cette sous-section, on va montrer que si on part d'une solution régulière dans le passé ($t < 0$), alors la solution reste régulière jusqu'à un certains temps T suffisamment petit, c'est à dire que si un choc ou une discontinuité de contact devait apparaître, alors leur génération ne serait pas immédiate.

On considère alors le problème hyperbolique :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0(\mathbf{a}, \mathbf{v})\partial_t \mathbf{v} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{a}, \mathbf{v})\partial_j \mathbf{v} + \mathbf{B}(\mathbf{a}, \mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{v}) & \text{dans }] - T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d \\ \mathbf{C}\mathbf{v}|_{x_d=0} = \mathbf{0} & \text{sur }] - T_0, T[\times \mathbb{R}^{d-1} \\ \mathbf{v}_{t<0} = \mathbf{0} & \text{sur }] - T_0, 0[\times \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Dans cette sous-section Ω_T , désigne $] - T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d$.

Pour cette démonstration on va s'appuyer sur un schéma itératif de Picard :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0(\mathbf{a}, \mathbf{v}^k)\partial_t \mathbf{v}^{k+1} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{a}, \mathbf{v}^k)\partial_j \mathbf{v}^{k+1} + \mathbf{B}(\mathbf{a}, \mathbf{v}^k)\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{v}^k) & \text{dans }] - T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d \\ \mathbf{C}\mathbf{v}^{k+1}|_{x_d=0} = \mathbf{0} & \text{sur }] - T_0, T[\times \mathbb{R}^{d-1} \\ \mathbf{v}^{k+1}_{t<0} = \mathbf{0} & \text{sur }] - T_0, 0[\times \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases} \quad (3.7)$$

\mathbf{v}^{k+1} est ainsi obtenu à partir des résultats précédents pour un problème hyperbolique linéaire. Après avoir justifié que la suite (\mathbf{v}^k) est bien construite, il restera à montrer qu'elle converge.

Pour la démonstration du problème quasi-linéaire, il sera nécessaire de faire appel à deux lemmes.

Nous allons enfin utiliser un inégalité de type Gagliardo-Niremberg-Moser :

Lemme 3.1.8 (Inégalité de Gagliardo-Niremberg-Moser pour $\|\cdot\|_{m;\lambda}$)

Soit $\Phi_1, \dots, \Phi_p \in H_{tan}^m(\Omega_T) \cap L^\infty(\Omega_T)$, $\alpha_{.,1}, \dots, \alpha_{.,p} \in \mathbb{N}^d$ ($\alpha_{.,l} = (\alpha_{0,l}, \dots, \alpha_{d,l})^t$) et $k \in \mathbb{N}$, tel que $\sum_{l=1}^p \sum_{i=0}^d \alpha_{i,l} \leq k \leq m$. Alors, il existe $r > 0$, indépendant de $\varepsilon, \lambda, \Phi_1, \dots, \Phi_p$ qui vérifie :

$$\lambda^{m-k} \|\mathcal{T}^{\alpha_{.,1}} \Phi_1 \dots \mathcal{T}^{\alpha_{.,p}} \Phi_p\|_{0,\lambda} \leq r \sum_{l=1}^p \left(\prod_{q \neq l} \|\Phi_q\|_\infty \right) \|\Phi_l\|_{m,\lambda}.$$

Une fois n'est pas coutume, ce lemme sera considéré ici comme admis. On trouvera néanmoins des éléments de démonstration dans [7, 35].

On va aussi faire appel au lemme suivant :

Lemme 3.1.9

Soit $T > 0$. Soient $d \in \mathbb{N}^*, m \geq m_0 = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2$ et $\lambda > 0$. Alors il existe $\kappa(m_0, T, T_0) \geq 0$ (qui ne dépend que de m_0, T_0 et T) tel que pour tout $\Phi \in H_{tan}^m(\Omega_T) \cap L^\infty(\Omega_T)$:

$$\|\Phi\|_\infty \leq \kappa(m_0, T, T_0) \frac{e^{\lambda T}}{\lambda^{m-m_0}} (\|\Phi\|_{m,\lambda} + \|\partial_d \Phi\|_{m-1,\lambda}).$$

Démonstration du lemme 3.1.9 : On prolonge Φ de $H_{tan}^m(\Omega_T)$ dans $H_{tan}^m(\mathbb{R}^{d+1})$. L'opérateur de prolongement de $H_{tan}^m(\Omega_T)$ muni de $\|\cdot\|_{m,\lambda}$ est continu dans $H_{tan}^m(\mathbb{R}^{d+1})$ muni de $\|\cdot\|_{H_{tan}^m(\mathbb{R}^{d+1})}$, uniformément par rapport à λ voir par exemple [35]. Cela nous permet de placer dans le domaine de Fourier pour Φ . On définit la transformée de Fourier de Φ par

$$\hat{\Phi}(\xi_0, \dots, \xi_d) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Phi(t, \mathbf{x}) e^{-2\pi(t\xi_0 + \sum_{l=1}^d x_l \xi_l)} dt d\mathbf{x}.$$

On cherche à faire intervenir la norme $\|\cdot\|_{m,\lambda}$ de Φ , ce qui implique de faire intervenir les transformées de Fourier des dérivées tangentielles de Φ . On note $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_d)$, $\xi' = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ et $\xi'^\alpha = \xi_0^{\alpha_0} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_d^{\alpha_{d-1}}$, pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

On rappelle que

$$\|\Phi\|_\infty = \|\Phi\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq \|\Phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{d+1})} \leq \|\hat{\Phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+1})} = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |\hat{\Phi}(\xi)| d\xi.$$

$$\begin{aligned}
\|\Phi\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+1})} &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \frac{\left(\sum_{|\alpha| \leq m_0} |\xi'^\alpha| + |\xi_d| \sum_{|\alpha| \leq m_0-1} |\xi'^\alpha| \right) |\hat{\Phi}(\xi)|}{\sum_{|\alpha| \leq m_0} |\xi'^\alpha| + |\xi_d| \sum_{|\alpha| \leq m_0-1} |\xi'^\alpha|} d\xi \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \left(\sum_{|\alpha| \leq m_0} |\xi'^\alpha| + |\xi_d| \sum_{|\alpha| \leq m_0-1} |\xi'^\alpha| \right)^2 |\hat{\Phi}(\xi)|^2 d\xi \right. \\
&\quad \times \left. \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \frac{1}{\left(\sum_{|\alpha| \leq m_0} |\xi'^\alpha| + |\xi_d| \sum_{|\alpha| \leq m_0-1} |\xi'^\alpha| \right)^2} d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

On souhaite maintenant montrer que la seconde intégrale de l'inégalité ci-dessus converge. Pour cela, on va majorer la fonction intégrée pour obtenir :

$$0 < \frac{1}{\left(\sum_{|\alpha| \leq m_0} |\xi'^\alpha| + |\xi_d| \sum_{|\alpha| \leq m_0-1} |\xi'^\alpha| \right)^2} \leq \frac{1}{1 + |\xi_d|^2 \left(|\xi_1|^{2(m_0-1)} + \dots + |\xi_{d-1}|^{2(m_0-1)} \right)}.$$

Or $2(m_0 - 1) > d$, donc l'intégrale converge.

Estimation de la première intégrale de l'inégalité sur $\|\Phi\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+1})}$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \left(\sum_{|\alpha| \leq m_0} |\xi'^\alpha| + |\xi_d| \sum_{|\alpha| \leq m_0-1} |\xi'^\alpha| \right)^2 |\hat{\Phi}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq c(m_0) \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \left(\sum_{|\alpha| \leq m_0} \frac{1}{(4\pi^2)^{|\alpha|}} \left| (2i\pi)^{|\alpha|} \xi'^\alpha \hat{\Phi}(\xi) \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{|\alpha| \leq m_0-1} \frac{1}{(4\pi^2)^{|\alpha|+1}} \left| (2i\pi)^{|\alpha|+1} \xi^d \xi'^\alpha \hat{\Phi}(\xi) \right|^2 \right) d\xi \\
&\leq c(m_0, T, T_0) \left(\sum_{|\alpha| \leq m_0} \frac{1}{(4\pi^2)^{|\alpha|}} \|\mathcal{T}^\alpha \Phi\|_{L^2}^2 + \sum_{|\alpha| \leq m_0-1} \frac{1}{(4\pi^2)^{|\alpha|+1}} \|\partial_d \mathcal{T}^\alpha \Phi\|_{L^2}^2 \right),
\end{aligned}$$

d'après l'égalité de Parseval et la continuité de l'opérateur de prolongement de $H_{tan}^{m_0}(\Omega_T)$ dans $H_{tan}^{m_0}(\mathbb{R}^{d+1})$.

On introduit maintenant le paramètre λ :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \left(\sum_{|\alpha| \leq m_0} |\xi'^{\alpha}| + |\xi_d| \sum_{|\alpha| \leq m_0-1} |\xi'^{\alpha}| \right)^2 |\hat{\Phi}(\xi)|^2 d\xi \\
& \leq c(m_0, T, T_0) e^{2\lambda T} \left(\sum_{|\alpha| \leq m_0} \frac{1}{(4\pi^2)^{|\alpha|}} \|\mathcal{T}^\alpha \Phi\|_{L_\lambda^2}^2 + \sum_{|\alpha| \leq m_0-1} \frac{1}{(4\pi^2)^{|\alpha|+1}} \|\partial_d \mathcal{T}^\alpha \Phi\|_{L_\lambda^2}^2 \right) \\
& \leq c(m_0, T, T_0) e^{2\lambda T} \left(\sum_{|\alpha| \leq m_0} \|\mathcal{T}^\alpha \Phi\|_{L_\lambda^2}^2 + \sum_{|\alpha| \leq m_0-1} \|\partial_d \mathcal{T}^\alpha \Phi\|_{L_\lambda^2}^2 \right) \\
& \leq c(m_0, T, T_0) e^{2\lambda T} (\|\Phi\|_{m_0, \lambda} + \|\partial_d \Phi\|_{m_0-1, \lambda})^2 \\
& \leq c(m_0, T, T_0) \frac{e^{2\lambda T}}{\lambda^{2(m-m_0)}} (\|\Phi\|_{m, \lambda} + \|\partial_d \Phi\|_{m-1, \lambda})^2.
\end{aligned}$$

Donc, on a bien l'existence d'une constante $\kappa(m_0, T, T_0) > 0$ ne dépendant de m_0, T et T_0 tel que :

$$\|\Phi\|_\infty \leq \kappa(m_0, T, T_0) \frac{e^{\lambda T}}{\lambda^{m-m_0}} (\|\Phi\|_{m, \lambda} + \|\partial_d \Phi\|_{m-1, \lambda}). \quad \blacksquare$$

Soient \mathcal{V} et \mathcal{Y} des voisinages de $\mathbf{0}$ dans respectivement \mathbb{R}^D et $\mathbb{R}^{D'}$.

On suppose toujours que le système (3.6) est symétrique :

Hypothèse 3.1.9

Pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{D'}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^D, \mathbf{A}_j(\mathbf{y}, \mathbf{w})$ ($j \in \{0, \dots, d\}$) et $\mathbf{B}(\mathbf{y}, \mathbf{w})$ sont des matrices symétriques.

Les hypothèses de bord non caractéristique et de conditions aux limites maximales strictement dissipatives du problème quasilinéaire (3.6) sont celles données pour le problème linéaire (voir hypothèses 3.1.3 et 3.1.4) après linéarisation. C'est à dire qu'elles sont reformulées de la manière suivante :

Hypothèse 3.1.10

Le bord $x_d = 0$ est non caractéristique : pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{D'}, \mathbf{W} \in \mathcal{V}, \mathbf{A}_d(\mathbf{y}, \mathbf{W})$ est inversible. De plus, on suppose que $\mathbf{A}_{d|\mathcal{Y}}^{-1} \in L^\infty(\mathcal{Y} \times \mathcal{V})$.

Hypothèse 3.1.11

La condition à la limite est maximale strictement dissipative :

- Il existe $c > 0$ (indépendant de t, \mathbf{y}) tel que pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ et pour tout $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \ker \mathbf{C} \cap \mathcal{V}$,

$$\langle \mathbf{A}_d(\mathbf{y}, \mathbf{V}) \mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle \leq -c \|\mathbf{W}\|.$$

- $\dim \ker \mathbf{C}$ est maximale pour cette propriété.
- \mathbf{C} est surjectif, son rang est p . Les coefficients de \mathbf{C} sont de classe \mathcal{C} .

Il en est de même pour la condition sur \mathbf{A}_0 :

Hypothèse 3.1.12

\mathbf{A}_0 est uniformément définie positive, c'est à dire qu'il existe $e > 0$ tel que pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$, pour tout $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}^D$, $\langle \mathbf{A}_0(\mathbf{y}, \mathbf{V})\mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle_{\mathbb{R}^D} \geq e\|\mathbf{W}\|_{\mathbb{R}^D}$.

Pour les coefficient du problème (3.6), on suppose aussi que :

Hypothèse 3.1.13

Les fonctions \mathbf{A}_j ($j \in \{0, \dots, d\}$), \mathbf{B} et \mathbf{f} vérifient :

- $\mathbf{A}_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{D'} \times \mathbb{R}^D)$ ($j \in \{0, \dots, d\}$).
- $\mathbf{B} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{D'} \times \mathbb{R}^D)$.
- $\mathbf{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^{D'} \times \mathbb{R}^D)$.

On admet que \mathbf{f} vérifie aussi :

Hypothèse 3.1.14

Pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$, $\mathbf{f}(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{0}$.

On donne maintenant l'énoncé complet du théorème sur le cas quasilinéaire :

Théorème 3.1.4

On fait les hypothèses 3.1.9 à 3.1.14.

Alors, il existe un temps $T > 0$ (suffisamment petit) tel qu'il existe une unique solutions $\mathbf{v} \in H^\infty(-T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d] \cap W^{1,\infty}(-T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d])$ du problème hyperbolique linéaire (3.1), rappelé ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0(\mathbf{a}, \mathbf{v})\partial_t \mathbf{v} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{a}, \mathbf{v})\partial_j \mathbf{v} + \mathbf{B}(\mathbf{a}, \mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{v}) & \text{dans }]-T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d \\ \mathbf{C}\mathbf{v}|_{x_d=0} = \mathbf{0} & \text{sur }]-T_0, T[\times \mathbb{R}^{d-1} \\ \mathbf{v}_{t<0} = \mathbf{0} & \text{sur }]-T_0, 0[\times \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases}$$

On insiste sur le fait que le théorème énoncé ci-dessus ne nous donne pas de solution globale en temps.

Démonstration du théorème 3.1.4 : Comme annoncé précédemment, la preuve de ce théorème utilise le schéma itératif de type Picard présenté dans l'équation (3.7). L'initialisation du schéma itératif se fait en considérant $\mathbf{v}^0 = \mathbf{0}$. D'après le théorème 3.1.3, on a l'existence d'une solution régulière \mathbf{v}^{k+1} à (3.7) quelque soit le temps T . Nous allons alors montrer que cette suite \mathbf{v}^k est bornée dans $W^{1,\infty}$ et H_{tan}^m (avec la norme $\|\cdot\|_{m,\lambda}$). Pour ensuite pouvoir justifier sa convergence. On ne peut pas directement utiliser l'estimation d'énergie du théorème 3.1.3 pour montrer le caractère borné de la suite (\mathbf{v}^k) , car la constante de cette estimation dépend des propriétés de \mathbf{v}^k et de ses dérivées.

Soit $R > 0$. Soit $m \geq m_0 = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 3$. On prend $R > 0$ tel que

$$\|\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{f}\|_{L^\infty(\mathcal{Y} \times B_{\mathbb{R}^D}(\mathbf{0}, R))} \leq \|\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{f}\|_\infty \leq \frac{1}{2}$$

(possible car pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$, $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$).

On fait alors les hypothèses de récurrence (sur k) suivante :

- $\|\mathbf{v}^k\|_\infty + \|\mathcal{T}\mathbf{v}^k\| \leq R$
- $\|\partial_d \mathbf{v}^k\|_\infty \leq 1$
- $\forall m \geq m_0 = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2, \|\mathbf{v}^k\|_{m,\lambda} \leq R$

Au rang $k = 0$, cette hypothèse est bien évidemment vérifiée. Reste alors à montrer l'hérédité. Sous cette hypothèse, la constante de l'estimation d'énergie du corollaire 3.1.1, sur le cas linéaire dans L^2 dépend de R mais pas de \mathbf{v}^k ni de ses dérivées.

De manière similaire à la démonstration du théorème 3.1.2, on prend l'équation (3.7), on la multiplie par $\mathbf{A}_d(\mathbf{a}, \mathbf{v}^k)^{-1}$ et on lui applique l'opérateur \mathcal{T}^α , avant de la multiplier à nouveau par $\mathbf{A}_d(\mathbf{a}, \mathbf{v}^k)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{d-1} \mathbf{A}_j(\mathbf{v}^k) \partial_j (\mathcal{T}^\alpha \mathbf{v}_\lambda^{k+1}) + \mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k) \partial_d (\mathcal{T}^\alpha \mathbf{v}_\lambda^{k+1}) + \mathbf{B}(\mathbf{v}^k) (\mathcal{T}^\alpha \mathbf{v}_\lambda^{k+1}) + \lambda \mathbf{A}_0(\mathbf{v}^k) (\mathcal{T}^\alpha \mathbf{v}_\lambda^{k+1}) \\ = - \sum_{j=0}^{d-1} \mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k) [\mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k)^{-1} \mathbf{A}_j \partial_j, \mathcal{T}^\alpha] \mathbf{v}_\lambda^{k+1} - \mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k) [\mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k)^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{v}^k), \mathcal{T}^\alpha] \mathbf{v}_\lambda^{k+1} \\ - \lambda \mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k) [\mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k)^{-1} \mathbf{A}_0(\mathbf{v}^k), \mathcal{T}^\alpha] \mathbf{v}_\lambda^{k+1} + \mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k) \mathcal{T}^\alpha \mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k)^{-1} \mathbf{f}_\lambda(\mathbf{v}^k). \end{array} \right.$$

A nouveau, dans l'unique but de simplifier les notations, on ne fait pas apparaître les dépendances en \mathbf{a} dans les coefficients de l'équation.

On note qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser ici l'opérateur de régularisation \mathcal{R}_ϵ car la régularité de \mathbf{v}^{k+1} est déjà assurée.

Afin de pouvoir appliquer l'estimation d'énergie du théorème 3.1.1, nous allons estimer chaque terme du crochet de Poisson, à l'aide des inégalités de type Gagliardo-Nirenberg-Moser. Les termes les plus délicats à estimer sont ceux de la forme $\mathbf{A}_d [\mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{A}_j \partial_j, \mathcal{T}^\alpha] \mathbf{v}_\lambda$ ($j \in \{0, \dots, d-1\}$) puisqu'ils font intervenir une dérivée tangentielle supplémentaire. On a alors :

$$\begin{aligned} & \lambda^{m-|\alpha|} \|\mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k) [\mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k)^{-1} \mathbf{A}_j(\mathbf{v}^k) \partial_j, \mathcal{T}^\alpha] \mathbf{v}_\lambda^{k+1}\|_{L^2(\Omega_T^+)} \\ & \leq c(L, m, T, R) (\|\mathcal{T}\mathbf{v}^k\|_{m-1,\lambda} \|\mathcal{T}\mathbf{v}^{k+1}\|_\infty + \|\mathcal{T}\mathbf{v}^{k+1}\|_{m-1,\lambda}) \\ & \leq c(L, m, T, R) \left(\underbrace{\|\mathbf{v}^k\|_{m,\lambda}}_{\leq R} \|\mathcal{T}\mathbf{v}^{k+1}\|_\infty + \|\mathbf{v}^{k+1}\|_{m,\lambda} \right) \\ & \leq c(L, m, T, R) (\|\mathcal{T}\mathbf{v}^{k+1}\|_\infty + \|\mathbf{v}^{k+1}\|_{m,\lambda}), \end{aligned}$$

où $c(L, m, T, R)$ est une constante qui dépend de R mais pas de $\mathbf{v}^k, \mathbf{v}^{k+1}$.

L'autre terme qui demande un peu d'attention est le suivant :

$$\begin{aligned} & \lambda^{m+1-|\alpha|} \mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k) [\mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k)^{-1} \mathbf{A}_0(\mathbf{v}^k), \mathcal{T}^\alpha] \mathbf{v}_\lambda^{k+1} \\ & \leq c(L, m, T, R) \lambda (\|\mathbf{v}^k\|_{m-1,\lambda} \|\mathcal{T}\mathbf{v}^{k+1}\|_\infty + \|\mathcal{T}\mathbf{v}^{k+1}\|_{m-1,\lambda}) \\ & \leq c(L, m, T, R) \lambda (\|\mathbf{v}^k\|_{m,\lambda} \|\mathcal{T}\mathbf{v}^{k+1}\|_\infty + \lambda \|\mathbf{v}^{k+1}\|_{m,\lambda}). \end{aligned}$$

Ainsi, à l'aide de l'estimation d'énergie du corollaire 3.1.1, on peut montrer que pour $\lambda \geq \lambda_m(L, m, T, R)$, on a l'estimation :

$$\|\mathbf{v}\|_{m,\lambda} \leq \frac{c(L, m, T, R)}{\lambda} (\|\mathcal{T}\mathbf{v}^{k+1}\|_\infty + \|\mathbf{v}^{k+1}\|_{m,\lambda} + \|\mathbf{f}\|_{m,\lambda}).$$

On applique ensuite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_d \mathcal{T}^\alpha \mathbf{v}_\lambda^{k+1} = - \sum_{j=0}^{d-1} \mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k)^{-1} \mathbf{A}_j(\mathbf{v}^k) \partial_j \mathcal{T}^\alpha \mathbf{v}_\lambda^{k+1} - \mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k)^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{v}^k) \mathcal{T}^\alpha \mathbf{v}_\lambda^{k+1} \\ \quad - \lambda \mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k)^{-1} \mathbf{A}_0(\mathbf{v}^k) \mathcal{T}^\alpha \mathbf{v}_\lambda^{k+1} - \sum_{j=0}^{d-1} [\mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k)^{-1} \mathbf{A}_j \partial_j, \mathcal{T}^\alpha] \mathbf{v}_\lambda^{k+1} \\ \quad - [\mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k)^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{v}^k), \mathcal{T}^\alpha] \mathbf{v}_\lambda^{k+1} - \lambda [\mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k)^{-1} \mathbf{A}_0(\mathbf{v}^k), \mathcal{T}^\alpha] \mathbf{v}_\lambda^{k+1} + \mathcal{T}^\alpha \mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k)^{-1} \mathbf{f}_\lambda(\mathbf{v}^k). \end{array} \right.$$

Ce qui permet d'avoir, d'après les inégalités précédentes :

$$\|\partial_d \mathbf{v}^{k+1}\|_{m-1,\lambda} \leq \frac{c(L, m, T, R)}{\lambda} (\|\mathcal{T} \mathbf{v}^{k+1}\|_\infty + \|\mathbf{v}^{k+1}\|_{m,\lambda} + \|\mathbf{f}\|_{m,\lambda}).$$

On a ainsi tous les éléments pour utiliser l'inégalité du lemme 3.1.9 :

$$\|\mathbf{v}^{k+1}\|_\infty \leq \kappa(m_0, T, T_0) \frac{e^{\lambda T}}{\lambda^{m-m_0}} (\|\mathbf{v}^{k+1}\|_{m,\lambda} + \|\partial_d \mathbf{v}^{k+1}\|_{m-1,\lambda}).$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T} \mathbf{v}^{k+1}\|_\infty &\leq \kappa(m_0, T, T_0) \frac{e^{\lambda T}}{\lambda^{m-1-m_0}} (\|\mathcal{T} \mathbf{v}^{k+1}\|_{m-1,\lambda} + \|\partial_d \mathcal{T} \mathbf{v}^{k+1}\|_{m-2,\lambda}) \\ &\leq \kappa(m_0, T, T_0) \frac{e^{\lambda T}}{\lambda^{m-1-m_0}} (\|\mathbf{v}^{k+1}\|_{m,\lambda} + \|\partial_d \mathbf{v}^{k+1}\|_{m-1,\lambda}). \end{aligned}$$

On a alors :

$$\|\mathbf{v}^{k+1}\|_\infty + \|\mathcal{T} \mathbf{v}^{k+1}\|_\infty \leq c(L, m, T, R) \frac{e^{\lambda T}}{\lambda^{m-1-m_0}} (\|\mathbf{v}^{k+1}\|_{m,\lambda} + \|\partial_d \mathbf{v}^{k+1}\|_{m-1,\lambda}).$$

Ce qui implique que :

$$\|\mathbf{v}^{k+1}\|_\infty + \|\mathcal{T} \mathbf{v}^{k+1}\|_\infty \leq K(L, m, T, R) \frac{e^{\lambda T}}{\lambda^{m-m_0}} (\|\mathcal{T} \mathbf{v}^{k+1}\|_\infty + \|\mathbf{v}^{k+1}\|_{m,\lambda} + \|\mathbf{f}\|_{m,\lambda}).$$

Où $K(L, m, T, R)$ est une constante positive.

On fixe $T \leq \frac{1}{\lambda}$ et on choisit λ tels que :
 $-\frac{e^1}{\lambda} \leq \frac{1}{2}$, pour avoir

$$\|\mathbf{v}^{k+1}\|_\infty + \|\mathcal{T} \mathbf{v}^{k+1}\|_\infty \leq \frac{K(L, m, T, R)}{\lambda^{m-1-m_0}} \|\mathbf{f}\|_{m,\lambda}.$$

$-\frac{K(L, m, T, R)}{\lambda^{m-1-m_0}} \|\mathbf{f}\|_{m,\lambda} \leq R$, afin d'obtenir

$$\|\mathbf{v}^{k+1}\|_\infty + \|\mathcal{T} \mathbf{v}^{k+1}\|_\infty \leq R.$$

et enfin

$$\begin{aligned} \|\partial_d \mathbf{v}^{k+1}\|_\infty &\leq \sum_{j=0}^{d-1} \|\mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k)^{-1} \mathbf{A}_j(\mathbf{v}^k)\|_\infty \|\mathcal{T} \mathbf{v}^{k+1}\|_\infty \\ &\quad + \|\mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k)^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{v}^k)\|_\infty \|\mathbf{v}^{k+1}\|_\infty + \|\mathbf{A}_d(\mathbf{v}^k)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{v}^k)\|_\infty \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Cela nous permet alors de vérifier qu'il existe $\lambda_1(L, m, T, R) > 0$ (dépendant de R, m mais pas de $\mathbf{v}^k, \mathbf{v}^{k+1}, k$) tel que pour tout $\lambda \leq \lambda_1(L, m, T, R), T \leq \frac{1}{\lambda}$ on a :

- $\|\mathbf{v}^{k+1}\|_\infty + \|\mathcal{T}\mathbf{v}^{k+1}\| \leq R.$
- $\|\partial_d \mathbf{v}^{k+1}\|_\infty \leq 1.$
- $\|\mathbf{v}^{k+1}\|_{m, \lambda} \leq R.$

On peut donc affirmer que la suite (\mathbf{v}^k) est bornée en norme L^∞ .

On peut ensuite montrer que pour λ suffisamment grand et donc pour T suffisamment petit, la suite (\mathbf{v}^k) est de Cauchy dans L^2 . (\mathbf{v}^k) converge donc vers une fonction \mathbf{v} dans $L^2(\Omega_T)$.

On peut ensuite montrer la régularité de \mathbf{v} dans $H_{tan}^m(\Omega_T) \times H^1(\Omega_T)$, puis, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, le fait que \mathbf{v} est bien solution du problème non linéaire original (3.6).

On justifie ensuite, par récurrence, la régularité de \mathbf{v} selon la direction x_d en se servant de la relation

$$\partial_d \mathbf{v} = - \sum_{j=0}^{d-1} \mathbf{A}_d(\mathbf{v})^{-1} \mathbf{A}_j(\mathbf{v}) \partial_j \mathbf{v} - \mathbf{A}_d(\mathbf{v})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{v}) \mathbf{v} + \mathbf{A}_d(\mathbf{v})^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{v}).$$

Cela permet d'aboutir au résultat souhaité. ■

3.1.4 Petit résumé des techniques clefs de cette partie

Au delà des manipulations classiques des espaces de Lebesgue et de Sobolev, quelques techniques sont à retenir et s'avèreront utiles par la suite :

- Les estimations d'énergie, qui consiste à faire le produit scalaire (dans L^2) de l'équation avec sa solution. Cela nous permet de majorer la norme L_λ^2 de la solution (ou une norme dérivée). Cela fait intervenir le côté maximal dissipatif du problème.
- Les crochets de Poisson et l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Moser qui nous aide lors de l'estimation des dérivées de la solution du problème. Cela nous permet de montrer la régularité des solutions.
- Le schéma itératif de type Picard, que l'on pourrait percevoir comme étant une simple méthode de type point fixe.

3.2 Pénalisation d'un problème hyperbolique quasilinéaire

Dans cette section, nous allons proposer une méthode de pénalisation pour un système hyperbolique non linéaire plus général que dans le chapitre 2. La méthode de pénalisation proposée a pour intérêt de ne pas générer de couche limite.

Le contenu est très proche de l'article [13] publié dans le journal *Advances in Differential Equations*.

3.2.1 Le théorème principal et ses hypothèses

Dans cette section on va présenter le résultat principal de ce chapitre : une méthode de pénalisation pour des systèmes hyperboliques non-linéaires. Dans le but d'avoir un résultat

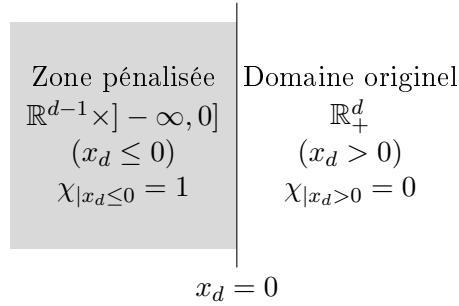


FIGURE 3.1 – Schéma du domaine spatial.

valable le cas d'un système défini sur un espace multidimensionnel ($d \geq 1$), on ne traitera que des solutions régulières en accord avec ce qui a été présenté dans la section 3.1.

Afin d'éviter les problèmes de compatibilité de la condition initiale et pour se concentrer sur l'aspect pénalisation, on considère un problème aux limites avec des données nulles dans le passé.

Dans cette étude, on pourrait considérer le problème hyperbolique suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^d \bar{\mathbf{A}}_j(\mathbf{u}(t, \mathbf{x})) \partial_j \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \bar{\mathbf{f}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) & (t, \mathbf{x}) \in]-T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d \\ \Theta(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}', 0)) = \mathbf{0} & (t, \mathbf{x}') \in]-T_0, T[\times \mathbb{R}^{d-1} \\ \mathbf{u}|_{t<0} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Mais, comme pour la section précédente, on introduit un fonction $\mathbf{a} :]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{D'}$ qui prend en compte, entre autres, les différents paramètres du modèle physique menant au problème hyperbolique étudié.

Au final, le problème hyperbolique que nous allons considérer est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^d \bar{\mathbf{A}}_j(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}), \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) \partial_j \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}), \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) & (t, \mathbf{x}) \in]-T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d \\ \Theta(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}', 0), \mathbf{u}(t, \mathbf{x}', 0)) = \mathbf{0} & (t, \mathbf{x}') \in]-T_0, T[\times \mathbb{R}^{d-1} \\ \mathbf{u}|_{t<0} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Dans ce chapitre, on rappelle que la variable d'espace s'écrit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) = (\mathbf{x}', x_d)$. Le domaine sur lequel est posé le problème (3.9) est représenté dans Fig. 3.1.

On suppose que le problème (3.9) satisfait les hypothèses décrites ci-dessous :

Hypothèse 3.2.1

1. $\mathbf{a} :]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{D'}$ appartient à $H^\infty(-T_0, T[\times \mathbb{R}^d)$.

2. $\bar{\mathbf{f}} : \mathbb{R}^{D'} \times \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^D$ est de classe C^∞ et, pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{D'}, \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
3. $\Theta : \mathbb{R}^{D'} \times \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe C^∞ et pour tout $(\mathbf{y}, \mathbf{U}) \in \mathbb{R}^{D'} \times \mathbb{R}^D, \nabla_{\mathbf{u}} \Theta(\mathbf{y}, \mathbf{U})$ a un rang constant noté p . De plus, pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{D'}, \Theta(\mathbf{y}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
4. Pour chaque j , $\bar{\mathbf{A}}_j : \mathbb{R}^{D'} \times \mathbb{R}^D \rightarrow \mathcal{M}_D(\mathbb{R})$ est de classe C^∞ .
5. Il existe un symétriseur $\mathbf{S}(\mathbf{y}, \mathbf{U})$ tel que, quelque soit $(\mathbf{y}, \mathbf{U}) \in \mathbb{R}^{D'} \times \mathbb{R}^D$:
 - $\mathbf{S}(\mathbf{y}, \mathbf{U})$ est symétrique et définie positive, uniformément en (\mathbf{y}, \mathbf{U}) quand \mathbf{U} est dans un voisinage $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^D$ de $\mathbf{0}$ et quand \mathbf{y} est dans un voisinage $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^{D'}$ de $\mathbf{0}$. Cela signifie qu'il existe $\bar{e} > 0$ tel que, pour tout $(\mathbf{y}, \mathbf{U}) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{U}$, et pour tout $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^D$, $\langle \mathbf{S}(\mathbf{y}, \mathbf{U})\mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle \geq \bar{e}\|\mathbf{W}\|^2$, où on rappelle que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$ désignent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^D .
 - Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, $\mathbf{S}(\mathbf{y}, \mathbf{U})\bar{\mathbf{A}}_j(\mathbf{y}, \mathbf{U})$ est symétrique.
6. On fait l'hypothèse que le problème est non caractéristique, c'est à dire que pour tout $(\mathbf{y}, \mathbf{U}) \in \mathbb{R}^{D'} \times \mathbb{R}^D$, la matrice $\bar{\mathbf{A}}_d(\mathbf{y}, \mathbf{U})$ est inversible.
7. Les conditions aux limites sont supposées être maximales strictement dissipatives : Pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{Z}$, s'il existe $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^D$ tel que $\Theta(\mathbf{y}, \mathbf{U}) = \mathbf{0}$, alors la forme quadratique vérifie les propriétés suivantes :
 - $\exists \bar{\mu} > 0, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{D'}, \forall \mathbf{W} \in \ker \nabla_{\mathbf{u}} \Theta(\mathbf{y}, \mathbf{0}), \langle \mathbf{S}(\mathbf{y}, \mathbf{U})\bar{\mathbf{A}}_d(\mathbf{y}, \mathbf{U})\mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle \leq -\bar{\mu}\|\mathbf{W}\|^2$.
 - $\dim \ker \nabla_{\mathbf{u}} \Theta(\mathbf{y}, \mathbf{0})$ est maximale pour la propriété ci-dessus.

D'après les résultats présentés dans la section 3.1, on peut affirmer qu'il existe un temps $\tau > 0$ fini tel que le problème original (voir l'équation (3.9)) admette une unique solution \mathbf{u} dans $H^\infty(]-T_0, \tau[\times \mathbb{R}_+^d) \cap W^{1,\infty}(]-T_0, \tau[\times \mathbb{R}_+^d)$.

Lemme 3.2.1

Il existe $\mathcal{Q} \subset \mathcal{U}, \mathcal{V}$, deux voisinages de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^D$ et $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Z}$ un voisinage de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{D'}$ vérifiant la propriété suivante : il existe $\mathbf{H} \in C^\infty(\mathcal{Y} \times \mathcal{V}, \mathcal{Q})$ tel que, pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$, $\mathbf{H}(\mathbf{y}, \cdot)$ est un C^∞ -difféomorphisme de \mathcal{V} vers \mathcal{Q} vérifiant

$$\forall \mathbf{U} \in \mathcal{Q}, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}, \Theta(\mathbf{y}, \mathbf{U}) = \mathbf{0} \iff V_1 = V_2 = \dots = V_p = 0$$

et $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}, \mathbf{H}(\mathbf{y}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$,

où $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^D$ est tel que $\mathbf{U} = \mathbf{H}(\mathbf{y}, \mathbf{V})$ et $(V_1, \dots, V_D) = \mathbf{V}$.

Démonstration du lemme 3.2.1 : La matrice $\nabla_{\mathbf{u}} \Theta(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ est de rang p . Quitte à réarranger les termes, on suppose que la matrice carrée de taille $p \times p$ dont les colonnes sont $\partial_{u_i} \Theta(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ ($i \in \{1, \dots, p\}$) est inversible.

On définit alors la fonction $\mathbf{Z} : (\mathbf{U}, \mathbf{y}) \mapsto (\Theta(\mathbf{y}, \mathbf{U}), U_{p+1}, \dots, U_D, \mathbf{y})$ et on pose $\mathbf{V} = (\Theta(\mathbf{y}, \mathbf{U}), U_{p+1}, \dots, U_D)$.

Notons que $\nabla_{\mathbf{u}, \mathbf{a}} \mathbf{Z}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ est inversible. Le théorème des fonctions implicites permet d'affirmer l'existence de deux voisinages $\mathcal{Q} \subset \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^D$ et $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^{D'}$ tels que \mathbf{Z} est un C^∞ -difféomorphisme défini sur $\mathcal{Q} \times \mathcal{Y}$ les D premières composantes de \mathbf{Z}^{-1} fournissent la fonction de changement d'inconnue \mathbf{H} . ■

A partir de cette ligne, on admet la fonction \mathbf{a} est à valeurs dans le voisinage \mathcal{Y} , c'est à dire que

Hypothèse 3.2.2

$$\boxed{\forall (t, \mathbf{x}) \in]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d, \mathbf{a}(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{Y}}.$$

On remarque que la démonstration du lemme 3.2.1 permet d'obtenir un choix simple pour le changement d'inconnue \mathbf{H} .

Tout comme pour la section 3.1, nous considérons désormais que, pour les différentes fonctions et matrices utilisées, la dépendance en (t, \mathbf{x}) et en $\mathbf{a}(t, \mathbf{x})$ est implicite. Ainsi, par exemple, $\bar{\mathbf{A}}_j(\mathbf{u})$ désigne $(t, \mathbf{x}) \mapsto \bar{\mathbf{A}}_j(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}), \mathbf{u}(t, \mathbf{x}))$ et $\partial_j(\bar{\mathbf{A}}_j(\mathbf{u}))$ correspond à $\nabla_{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{A}}_j(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}), \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) \cdot \partial_j \mathbf{a}(t, \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{A}}_j(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}), \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) \cdot \partial_j \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$.

La matrice \mathbf{P} est définie comme étant la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^p \times \{0\}^{D-p}$. La condition à la limite dans les nouvelles variables devient alors $\mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Avec la nouvelle inconnue \mathbf{v} , le système s'écrit :

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{H}(\mathbf{v}) \partial_t \mathbf{v} + \sum_{j=1}^d \bar{\mathbf{A}}_j(\mathbf{H}(\mathbf{v})) \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{H}(\mathbf{v}) \partial_j \mathbf{v} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{H}(\mathbf{v})) & \text{dans }]-T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d \\ \mathbf{P}\mathbf{v}|_{x_d=0} = \mathbf{0} & \text{sur }]-T_0, T[\times \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Le système est ensuite multiplié à gauche par $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{H}(\mathbf{v})^\top \mathbf{S}(\mathbf{H}(\mathbf{v}))$:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0(\mathbf{v}) \partial_t \mathbf{v} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{v}) \partial_j \mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) & \text{dans }]-T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d \\ \mathbf{P}\mathbf{v}|_{x_d=0} = \mathbf{0} & \text{sur }]-T_0, T[\times \mathbb{R}^{d-1} \\ \mathbf{v}|_{t<0} = \mathbf{0} & \text{sur }]-T_0, 0[\times \mathbb{R}_+^d. \end{cases} \quad (3.11)$$

Sous cette forme, les fonctions \mathbf{A}_j et \mathbf{f} s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0(\mathbf{v}) &= \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{H}(\mathbf{v})^\top \mathbf{S}(\mathbf{H}(\mathbf{v})) \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{H}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{A}_j(\mathbf{v}) &= \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{H}(\mathbf{v})^\top \mathbf{S}(\mathbf{H}(\mathbf{v})) \bar{\mathbf{A}}_j(\mathbf{v}) \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{H}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{v}) &= \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{H}(\mathbf{v})^\top \mathbf{S}(\mathbf{H}(\mathbf{v})) \left(\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{H}(\mathbf{v})) - \nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{H}(\mathbf{v}) \cdot \partial_t \mathbf{a} - \sum_{j=1}^d \bar{\mathbf{A}}_j(\mathbf{v}) \nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{H}(\mathbf{v}) \cdot \partial_j \mathbf{a} \right). \end{aligned}$$

D'après les propriétés sur $\mathbf{S}(\mathbf{H}(\mathbf{v}))$ et $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{H}(\mathbf{v})$, on peut en déduire que $\mathbf{A}_0(\mathbf{y}, \mathbf{V})$ est uniformément définie positive par rapport aux variables (\mathbf{y}, \mathbf{V}) , où $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ et \mathbf{V} vérifie $\mathbf{H}(\mathbf{y}, \mathbf{V}) \in \mathcal{Q}$. Ainsi, il existe $e > 0$ (ne dépendant pas de \mathbf{V}) tel que pour tout \mathbf{y} et pour tout $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^D$, $\langle \mathbf{A}_0(\mathbf{y}, \mathbf{V})\mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle \geq e\|\mathbf{W}\|^2$.

On rappelle que l'hypothèse de conditions à la limite maximale strictement dissipative est invariante par le changement d'inconnue :

Lemme 3.2.2

Si le problème original (3.9) a des conditions à la limite maximales et strictement dissipatives alors, il en est de même pour le problème (3.11).

Pour le problème reformulé (3.11) la propriété de condition à la limite maximale et strictement dissipative signifie que pour tout $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^D$ tel que $\mathbf{PV} = \mathbf{0}$, la forme quadratique $\mathbf{W} \mapsto \langle \mathbf{A}_d(\mathbf{y}, \mathbf{V})\mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle$ a les propriétés suivantes :

- $\exists \mu > 0, \forall \mathbf{W} \in \ker \mathbf{P}, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}, \langle \mathbf{A}_d(\mathbf{y}, \mathbf{V})\mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle \leq -\mu \|\mathbf{W}\|^2$
- $D - p$ est le nombre de valeurs propres strictement négatives de $\mathbf{A}_d(\mathbf{y}, \mathbf{V})$, comptées avec multiplicité. Ainsi, comme $\mathbf{A}_d(\mathbf{y}, \mathbf{V})$ est inversible, elle possède p valeurs propres strictement positives.

On en arrive maintenant au système pénalisé qui est la raison d'être de cette partie de ce chapitre :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0(\mathbf{v}_\varepsilon) \partial_t \mathbf{v}_\varepsilon + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{v}_\varepsilon) \partial_j \mathbf{v}_\varepsilon + \frac{\chi}{\varepsilon} \mathbf{P} \mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{f}(\mathbf{v}_\varepsilon) & \text{dans }]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d \\ \mathbf{v}_\varepsilon|_{t<0} = \mathbf{0} & \text{sur }]-T_0, 0[\times \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (3.12)$$

où χ est la fonction caractéristique de l'obstacle, c'est à dire que $\chi|_{x_d \leq 0} = 1$ et $\chi|_{x_d > 0} = 0$, comme indiqué dans la figure 3.1.

On remarque que la condition à la limite du problème reformulé (3.11) est $\mathbf{P} \mathbf{v}|_{x_d=0} = \mathbf{0}$ et que le terme ajouté dans le système pénalisé (3.12) s'écrit simplement $\frac{\chi}{\varepsilon} \mathbf{P} \mathbf{v}_\varepsilon$. Formellement, quand ε tend vers 0, on retrouve la condition à la limite $\mathbf{P} \mathbf{v}_\varepsilon|_{x_d=0} \approx \mathbf{0}$. Le résultat principal de cette partie est le théorème 3.2.1 (voir ci-dessous), qui justifie le caractère bien posé du système (3.12) et qui donne une estimation de l'erreur due à la pénalisation.

Théorème 3.2.1

Sous les hypothèses 3.2.1 et 3.2.2, présentées dans cette section, il existe un instant fini $T \in]0, \tau[$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, le problème pénalisé (3.12) rappelé ci-dessous

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0(\mathbf{v}_\varepsilon) \partial_t \mathbf{v}_\varepsilon + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{v}_\varepsilon) \partial_j \mathbf{v}_\varepsilon + \frac{\chi}{\varepsilon} \mathbf{P} \mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{f}(\mathbf{v}_\varepsilon) & \text{dans }]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d \\ \mathbf{v}_\varepsilon|_{t<0} = \mathbf{0} & \end{cases}$$

admette une unique solution $\mathbf{v}_\varepsilon \in H^1(]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d) \cap W^{1,\infty}(]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d)$. De plus, \mathbf{v}_ε est régulier de chaque côté de l'interface $x_d = 0$, c'est à dire $\mathbf{v}_\varepsilon|_{x_d>0} \in H^\infty(]-T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d)$ et $\mathbf{v}_\varepsilon|_{x_d<0} \in H^\infty(]-T_0, T[\times \mathbb{R}_-^d)$.

De plus, quelque soit $s \geq 0$, on a l'estimation suivante, quand ε tend vers 0 :

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^s(]-T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d)} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Le théorème 3.2.1 fournit une pénalisation linéaire du problème reformulé (3.11). Si on revient au problème original, (3.9), le terme de pénalisation devient non linéaire. Au final, pour le problème hyperbolique original, le théorème s'écrit :

Théorème 3.2.2

On rappelle ici l'écriture du problème original :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \sum_{j=1}^d \bar{\mathbf{A}}_j(\mathbf{u}) \partial_j \mathbf{u} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{u}) & \text{dans }]-T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d \\ \Theta(\mathbf{u}) = \mathbf{0} & x_d = 0 \\ \mathbf{u}|_{t<0} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.13)$$

On suppose que les hypothèses 3.2.1 et 3.2.2 sont vérifiées.

Il existe un temps fini $T \leq \tau$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, le problème pénalisé

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon + \sum_{j=1}^d \bar{\mathbf{A}}_j(\mathbf{u}_\varepsilon) \partial_j \mathbf{u}_\varepsilon + \frac{\chi(\mathbf{x})}{\varepsilon} \mathbf{M}(\mathbf{u}_\varepsilon) \mathbf{u}_\varepsilon = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_\varepsilon) & (t, \mathbf{x}) \in]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d \\ \mathbf{u}_{\varepsilon|t<0} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

où

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}_\varepsilon) \mathbf{u}_\varepsilon = (\mathbf{S}(\mathbf{u}_\varepsilon))^{-1} \left(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{H}(\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{u}_\varepsilon))^\top \right)^{-1} \mathbf{P} \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{u}_\varepsilon),$$

admet une unique solution $\mathbf{u}_\varepsilon \in H^1(-T_0, T[\times \mathbb{R}^d_+) \cap W^{1,\infty}(-T_0, T[\times \mathbb{R}^d)$ qui est régulière de chaque côté de l'interface $x_d = 0$: $\mathbf{u}_{\varepsilon|x_d>0} \in H^\infty(-T_0, T[\times \mathbb{R}^d_+)$ et $\mathbf{u}_{\varepsilon|x_d<0} \in H^\infty(-T_0, T[\times \mathbb{R}^d_-)$.

On rappelle que, pour \mathbf{S}, \mathbf{H} et donc aussi pour \mathbf{M} , la dépendance en la fonction \mathbf{a} est implicite.

Quelque soit $s \geq 0$, l'erreur de pénalisation satisfait la relation suivante, quand ε tend vers 0 :

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{H^s(-T_0, T[\times \mathbb{R}^d_+)} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

La matrice de pénalisation est non triviale et est de la forme $\mathbf{M}(\mathbf{u}_\varepsilon) \mathbf{u}_\varepsilon$ avec

$$(\mathbf{S}(\mathbf{0}))^{-1} \left(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{H}(\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{0}))^\top \right)^{-1} \mathbf{P} \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

On remarque que, si $p < n$, la matrice de pénalisation n'est pas inversible. De plus, il est fort possible que dans certains cas, l'expression de \mathbf{M} ne soit trop compliquée pour être vraiment utilisable en pratique.

D'un point de vue pratique, il est plus simple de considérer le problème reformulé (voir le théorème 3.2.1), car, sous cette forme, la pénalisation semble naturelle : les champs pénalisés sont simplement ceux concernés par les conditions à la limite. L'estimation $\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{H^s} = \mathcal{O}(\varepsilon)$, peut être interprétée comme une absence de couche limite pour la méthode de pénalisation décrite dans cette partie. Cette caractéristique diffère des autres résultats connus pour des problèmes hyperboliques quasilinéaires [41].

Pour montrer le théorème 3.2.1, on commence par construire une solution approchée \mathbf{v}_a du problème pénalisé (3.11) grâce à un développement asymptotique présenté dans la section 3.2.2. La seconde étape consiste à montrer que la solution exacte de (3.11) s'écrit $\mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{w}$ en justifiant que \mathbf{w} existe dans un espace de Sobolev adapté. Pour prouver l'existence de \mathbf{w} , on a créé un schéma itératif qui fournit une suite $(\mathbf{w}^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Dans la section 3.2.3, on utilise des estimations d'énergie pour prouver que (\mathbf{w}^k) est borné en norme L^2 et L^∞ et converge vers une fonction \mathbf{w} .

La solution du problème original \mathbf{u} est définie jusqu'au temps τ mais, d'après le théorème 3.2.1, la solution du problème pénalisé pourrait ne pas être définie jusqu'à cet instant. En effet, dans le développement asymptotique, on n'a pas donné de résultat garantissant l'existence

du développement dans la zone pénalisée jusqu'à l'instant τ . Ce point diffère de ce qui a été obtenu pour une méthode de pénalisation, dans le cas semi-linéaire [30].

Dans les sections suivantes, nous allons considérer le domaine ouvert $\Omega_T =] -T_0, T[\times \mathbb{R}^d$. $\Omega_T^+ =] -T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d$ désigne le domaine originel (c'est à dire le domaine du problème avec condition à la limite (3.9)) et que $\Omega_T^- =] -T_0, T[\times \mathbb{R}_-^d$ représente la zone pénalisée (c'est à dire, le domaine fictif). Fornet et Guès [30] ont présenté une méthode pour étendre le résultat du théorème 3.2.1 pour un domaine originel dont la forme est plus complexe.

La section 3.2.4 présente brièvement un exemple d'application de cette méthode de pénalisation dans le cas linéaire en comparant avec d'autres méthodes connues.

3.2.2 Le développement asymptotique formel

Afin de construire une solution approchée de (3.12), on commence par chercher un développement asymptotique d'un solution continue de la forme :

$$\mathbf{v}_\varepsilon(t, x) \sim \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \mathbf{V}^{n,-}(t, \mathbf{x}) & \text{si } x_d < 0 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \mathbf{V}^{n,+}(t, \mathbf{x}) & \text{si } x_d > 0. \end{cases}$$

Les termes $\mathbf{V}^{n,-}$ et $\mathbf{V}^{n,+}$ sont supposés avoir les propriétés suivantes :

- $\mathbf{V}_{|t<0}^{n,-} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{V}_{|t<0}^{n,+} = \mathbf{0}$.
- Quelque soit $t > -T_0$, $\mathbf{V}^{n,-}(t, x_1, \dots, x_{d-1}, 0) = \mathbf{V}^{n,+}(t, x_1, \dots, x_{d-1}, 0)$.

Nous allons construire $\mathbf{V}^{n,-}$ et $\mathbf{V}^{n,+}$ pour n'importe quel ordre n . $\mathbf{V}^{n,\pm}$ représente $\mathbf{V}^{n,+}$ dans la zone $x_d > 0$ et $\mathbf{V}^{n,-}$ où $x_d < 0$, cette écriture servant uniquement à définir d'autres notations. Comme la convergence des séries $\sum_n \varepsilon^n \mathbf{V}^{n,\pm}(t, \mathbf{x})$ n'est pas garantie (et ne nous intéresse pas), on considère que ce n'est qu'un développement formel et on utilise la notation \sim au lieu de $=$.

Ceci est en fait une généralisation de ce qui a été fait pour le système étudié dans le chapitre 2 (voir la sous-section 2.3.1).

Comme pour tout $j \in \{0, \dots, d\}$, $\mathbf{A}_j(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}), .)$ et \mathbf{f} sont de classe \mathcal{C}^∞ , on peut écrire leur développement asymptotique ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_j(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}), \mathbf{v}_\varepsilon(t, \mathbf{x})) &\sim \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \mathbf{A}_j^D(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}), \mathbf{V}^{0,\pm}(t, \mathbf{x}), \dots, \mathbf{V}^{n,\pm}(t, \mathbf{x})) \\ \mathbf{f}(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}), \mathbf{v}_\varepsilon(t, \mathbf{x})) &\sim \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \mathbf{f}^D(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}), \mathbf{V}^{0,\pm}(t, \mathbf{x}), \dots, \mathbf{V}^{n,\pm}(t, \mathbf{x})). \end{aligned}$$

Avec les développements asymptotiques, le système (3.12) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{\varepsilon} \mathbf{P} \mathbf{V}^{0,\pm} + \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \left(\mathbf{A}_0^0(\mathbf{V}^{0,\pm}) \partial_t \mathbf{V}^{n,\pm} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j^0(\mathbf{V}^{0,\pm}) \partial_j \mathbf{V}^{n,\pm} \right. \\ \left. + \mathbf{F}^n(\mathbf{V}^{0,\pm}, \mathbf{V}^{k,\pm}, \partial \mathbf{V}^{k-1,\pm}, 1 \leq k \leq n) + \chi \mathbf{P} \mathbf{V}^{n+1} \right) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

où $\mathbf{F}^n(\mathbf{V}^{0,\pm}, \mathbf{V}^{k,\pm}, \partial \mathbf{V}^{k-1,\pm}, 1 \leq k \leq n)$ est une fonction qui contient tous les termes qui dépendent de $\mathbf{V}^{0,\pm}, \partial_j \mathbf{V}^{0,\pm}, \dots, \mathbf{V}^{n-1,\pm}, \partial_j \mathbf{V}^{n-1,\pm}, \mathbf{V}^{n,\pm}$ mais pas de $\partial_j \mathbf{V}^{n,\pm}$. On note que la fonction $\mathbf{V}^{n,\pm} \mapsto \mathbf{F}^n(\mathbf{V}^{0,\pm}, \mathbf{V}^{k,\pm}, \partial \mathbf{V}^{k-1,\pm}, 1 \leq k \leq n)$ est affine.

Considérons maintenant l'hypothèse de récurrence (\mathcal{H}^n) : Il existe un certain temps $T > 0$ indépendant de n tel que pour tout $k \leq n$, $\mathbf{V}^{k,+}$ et $\mathbf{V}^{k,-}$ est bien défini sur, respectivement, $] - T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d$ et $] - T_0, T[\times \mathbb{R}_-^d$. De plus, $\mathbf{P} \mathbf{V}^{n+1,+}$ est bien défini sur $] - T_0, T[\times \mathbb{R}_-$.

Initialisation (\mathcal{H}^0), à partir des termes en ε^0 :

D'après le terme en ε^{-1} , on a $\mathbf{P} \mathbf{V}^{0,-} = 0$ (pour tout $x_d < 0$).

Pour $x_d > 0$ ($\chi(\mathbf{x}) = 0$) :

D'après les termes en ε^0 de l'équation (3.14), $\mathbf{V}^{0,+}$ est solution du problème hyperbolique suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0^0(\mathbf{V}^{0,+}) \partial_t \mathbf{V}^{0,+} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j^0(\mathbf{V}^{0,+}) \partial_j \mathbf{V}^{0,+} + \mathbf{F}^0(\mathbf{V}^{0,+}) = \mathbf{0} & \text{dans }] - T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d \\ \mathbf{P} \mathbf{V}_{|x_d=0}^{0,+} = \mathbf{P} \mathbf{V}_{|x_d=0}^{0,-} \\ \mathbf{V}_{|t \in [-T_0, 0[}^{0,+} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.15)$$

En fait, ce problème n'est autre que le système originel reformulé (3.11), il a donc des conditions à la limite maximales strictement dissipatives et un bord non caractéristique.

Ainsi, l'existence d'une unique solution régulière $\mathbf{V}^{0,+} \in H^\infty(-T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d)$ de (3.15) est assurée. Remarquons, qu'au final $\mathbf{V}^{0,+} = \mathbf{v}$ la solution du problème originel reformulé (3.11).

Pour $x_d < 0$ ($\chi(\mathbf{x}) = 1$) :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0^0(\mathbf{V}^{0,-}) \partial_t \mathbf{V}^{0,-} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j^0(\mathbf{V}^{0,-}) \partial_j \mathbf{V}^{0,-} + \mathbf{F}^0(\mathbf{V}^{0,-}) + \mathbf{P} \mathbf{V}^{1,-} = \mathbf{0} & \text{dans }] - T_0, T[\times \mathbb{R}_-^d \\ \mathbf{V}_{|x_d=0}^{0,-} = \mathbf{V}_{|x_d=0}^{0,+} \\ \mathbf{V}_{|t \in [-T_0, 0[}^{0,-} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Comme $\mathbf{P}\mathbf{V}^{0,-} = \mathbf{0}$ a déjà été calculé, si on veut obtenir $\mathbf{V}^{0,-}$, il reste seulement à construire $(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{V}^{0,-}$ qui est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{A}_0^0(\mathbf{V}^{0,-})(\mathbf{I} - \mathbf{P})\partial_t((\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{V}^{0,-}) + \sum_{j=1}^d (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{A}_j^0(\mathbf{V}^{0,-})(\mathbf{I} - \mathbf{P})\partial_j((\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{V}^{0,-}) \\ \quad + (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{F}^0(\mathbf{V}^{0,-}) = \mathbf{0} \quad \text{dans }]-T_0, T[\times \mathbb{R}_-^d \\ (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{V}_{|x_d=0}^{0,-} = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{V}_{|x_d=0}^{0,+} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{V}_{|t \in [-T_0, 0[}^{0,-} = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

On pose

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_{II}^{0,-} \end{array} \right) = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{V}^{0,-} \quad , \quad \left(\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{II}^0(\mathbf{V}^{0,-}) \end{array} \right) = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{F}^0(\mathbf{V}^{0,-})$$

et on définit les matrices $\mathbf{A}_j^{0,II}(\mathbf{V}^{0,-})$ de taille $D-p \times D-p$ telles que

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{A}_j^0(\mathbf{V}^{0,-})(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_j^{0,II}(\mathbf{V}^{0,-}) \end{array} \right)$$

Le problème (3.17) peut maintenant être réécrit comme un problème hyperbolique de $D-p$ champs (comme les p premières composantes sont nulles) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_0^{0,II}(\mathbf{V}^{0,-})\partial_t\mathbf{V}_{II}^{0,-} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j^{0,II}(\mathbf{V}^{0,-})\partial_j\mathbf{V}_{II}^{0,-} + \mathbf{F}_{II}^0(\mathbf{V}^{0,-}) = \mathbf{0} \quad \text{dans }]-T_0, T[\times \mathbb{R}_-^d \\ \mathbf{V}_{II|x_d=0}^{0,-} = \mathbf{V}_{II|x_d=0}^{0,+} \\ \mathbf{V}_{II|t \in [-T_0, 0[}^{0,-} = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

La matrice $\mathbf{A}_0^{0,II}(\mathbf{V}^{0,-})$ est symétrique et définie positive, de même que $\mathbf{A}_d^{0,II}(\mathbf{V}^{0,-})$. Pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution au système (3.18), on va vérifier que les conditions à la limite sont bien maximales strictement dissipatives :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{W}_{II} \in \mathbb{R}^{D-p}, \mathbf{W} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{W}_{II} \end{array} \right) \in \text{R}(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \ker \mathbf{P}, \\ \langle \mathbf{A}_d^{0,II}(\mathbf{V}_{|x_d=0}^{0,-})\mathbf{W}_{II}, \mathbf{W}_{II} \rangle_{\mathbb{R}^{D-p}} = \langle \mathbf{A}_d^{0,II}(\mathbf{V}_{|x_d=0}^{0,+})\mathbf{W}_{II}, \mathbf{W}_{II} \rangle_{\mathbb{R}^{D-p}} \\ = \langle \mathbf{A}_d^0(\mathbf{V}_{|x_d=0}^{0,+}) \underbrace{\mathbf{W}_{II}}_{\in \ker \mathbf{P}}, \mathbf{W}_{II} \rangle_{\mathbb{R}^{D-p}} \\ \leq -\mu \|\mathbf{W}\|^2 = -\mu \|\mathbf{W}_{II}\|^2, \end{aligned}$$

comme le problème reformulé a des conditions à la limite maximales strictement dissipatives.

Ainsi, la matrice $\mathbf{A}_d^{0,II}(\mathbf{V}_{|x_d=0}^{0,-})$ est symétrique et définie négative, ce qui montre que $\mathcal{N} = \{\mathbf{0}\} \in \mathbb{R}^{D-p}$ est l'espace de plus grande dimension pour lequel il existe $\mu_1 > 0$, tel

que pour tout $\mathbf{W}_H \in \mathcal{D}$, $\langle -\mathbf{A}_d^{0,H}(\mathbf{V}_{|x_d=0}^{0,+})\mathbf{W}_H, \mathbf{W}_H \rangle_{\mathbb{R}^{D-p}} \leq -\mu_1 \|\mathbf{W}_H\|^2$. On en déduit le caractère maximal strictement dissipatif des conditions à la limite du système (3.18).

Il existe donc $T \in]0, \tau]$ tel que (3.18) admette une unique solution $\mathbf{V}_H^{0,-}$, définie sur $] -T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d$. On peut donc construire $(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{V}^{0,-}$ et $\mathbf{V}^{0,-}$ jusqu'à l'instant T . *A priori*, il est possible que $T < \tau$.

Ensuite, $\mathbf{PV}^{1,-}$ est calculé grâce à la relation suivante, obtenue en multipliant l'équation du problème (3.16) par \mathbf{P} :

$$\mathbf{PV}^{1,-} = -\mathbf{PA}_0^0(\mathbf{V}^{0,-})\partial_t \mathbf{V}^{0,-} - \sum_{j=1}^d \mathbf{PA}_j^0(\mathbf{V}^{0,-})\partial_j \mathbf{V}^{0,-} - \mathbf{PF}^0(\mathbf{v}^{0,-}).$$

Etape de récurrence, grâce aux termes en ε^n : On admet l'hypothèse (\mathcal{H}^{n-1}) est vraie : c'est à dire que, pour chaque $k \leq n-1$, $\mathbf{V}^{k,-}$, $\mathbf{V}^{k,+}$ et $\mathbf{PV}^{n,-}$ sont construits jusqu'au temps T défini précédemment.

Pour $x_d > 0$ ($\chi(\mathbf{x}) = 0$) :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0^0(\mathbf{V}^{0,+})\partial_t \mathbf{V}^{n,+} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j^0(\mathbf{V}^{0,+})\partial_j \mathbf{V}^{n,+} + \mathbf{F}^n(\mathbf{V}^{0,+}, \mathbf{V}^{k,+}, \partial \mathbf{V}^{k-1,+}, 1 \leq k \leq n) = \mathbf{0} \\ \text{dans }] -T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d \\ \mathbf{PV}_{|x_d=0}^{n,+} = \mathbf{PV}_{|x_d=0}^{n,-} \\ \mathbf{V}_{|t \in [-T_0, 0[}^{n,+} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Comme $\mathbf{F}^n(\mathbf{V}^{0,+}, \mathbf{V}^{k,+}, \partial \mathbf{V}^{k-1,+}, 1 \leq k \leq n)$ est affine par rapport à la variable $\mathbf{V}^{n,+}$, le système (3.2.2) est un problème hyperbolique linéaire dont la version avec des conditions à la limite homogène a des conditions aux limites maximales strictement dissipatives. Ainsi le problème hyperbolique (3.2.2) admet une unique solution $\mathbf{V}^{n,+}$, définie jusqu'à l'instant T introduit dans la démonstration de l'étape d'initialisation (\mathcal{H}^0) [16, 25].

Cas $x_d < 0$ ($\chi(\mathbf{x}) = 1$) :

D'après les termes à l'ordre n de (3.14), $\mathbf{V}^{n,-}$ vérifie :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0^0(\mathbf{V}^{0,-})\partial_t \mathbf{V}^{n,-} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j^0(\mathbf{V}^{0,-})\partial_j \mathbf{V}^{n,-} \\ \quad + \mathbf{F}^n(\mathbf{V}^{0,-}, \mathbf{V}^{k,-}, \partial \mathbf{V}^{k-1,-}, 1 \leq k \leq n) + \mathbf{PV}^{n+1,-} = \mathbf{0} \quad \text{dans }] -T_0, T[\times \mathbb{R}_-^d \\ \mathbf{V}_{|x_d=0}^{n,-} = \mathbf{V}_{|x_d=0}^{n,+} \\ \mathbf{V}_{|t \in [-T_0, 0[}^{n,-} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.19)$$

A nouveau, $\mathbf{PV}^{n,-}$ étant connu, il suffit de déterminer $(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{V}^{n,-}$ pour avoir $\mathbf{V}^{n,-}$. On considère alors les $D - p$ dernières composantes du système linéaire ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{A}_0^0(\mathbf{V}^{0,-})(\mathbf{I} - \mathbf{P})\partial_t((\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{V}^{n,-}) + \sum_{j=1}^d (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{A}_j^0(\mathbf{V}^{0,-})(\mathbf{I} - \mathbf{P})\partial_j((\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{V}^{n,-}) \\ \quad + (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{F}^n(\mathbf{V}^{0,-}, \mathbf{V}^{k,-}, \partial\mathbf{V}^{k-1,-}, 1 \leq k \leq n) = \mathbf{0} \quad \text{dans }]-T_0, T[\times \mathbb{R}_-^d \\ (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{V}_{|x_d=0}^{n,-} = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{V}_{|x_d=0}^{n,+} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{V}_{|t \in [-T_0, 0]}^{n,-} = \mathbf{0}. \end{array} \right.$$

De la même manière que pour la démonstration de (\mathcal{H}^0) (cas $x_d < 0$), la solution $(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{V}^{n,-}$ est finalement construite jusqu'à l'instant T , défini dans la preuve de (\mathcal{H}^0) (encore!).

Grâce aux p premières composantes du problème (3.19), on obtient $\mathbf{PV}^{n+1,-}$.

Ainsi \mathcal{H}^n est démontré et le développement asymptotique peut être construit jusqu'à n'importe quel ordre.

Le premier terme du développement asymptotique $\mathbf{V}^{0,\pm}$ est la solution exacte du problème au limite, quand ε tend vers 0. Comme la pénalisation est incomplète (c'est à dire que la matrice de pénalisation n'est pas inversible), il est nécessaire de résoudre un problème hyperbolique dans la zone pénalisée ($x_d < 0$), pour calculer $(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{V}^{0,-}$.

On remarque que, pour générer ce développement asymptotique jusqu'à n'importe quel ordre, on n'a pas eu à introduire des variables de la forme x_d/ε^b (avec $b \neq 0$). Cela n'est pas le cas dans le théorème 2.6 de l'article de Fornet et Guès [30], où le développement asymptotique fait intervenir des termes en $\mathbf{V}^n(t, \mathbf{x}, x_d/\varepsilon)$. Une couche limite due à une méthode de pénalisation L^2 a aussi été mise en évidence dans un article de Carbou [22] pour des pénalisations de type Brinkman dans le cadre de fluides visqueux. Dans le cas d'un problème hyperbolique quasilinear, on pourra aussi se rapporter aux travaux de Kheriji [41] qui propose une matrice de pénalisation (inversible) générant une couche limite.

La couche limite permet un raccordement continu dans les conditions à la limite du domaine originel (ici, \mathbb{R}_+^d) et de la zone pénalisée ne sont pas compatibles, ce qui n'est pas le cas dans notre approche.

3.2.3 Propriétés du problème pénalisé et estimation de l'erreur de pénalisation

Le développement asymptotique crée dans la section précédente n'est pas forcément la solution du problème pénalisé (3.12), puisque c'est seulement une expression formelle. Mais, les premiers termes de ce développement (jusqu'à un certain ordre M) seront utiles pour trouver la solution de (3.12).

3.2.3.1 Définitions et notations

On rappelle le problème hyperbolique étudié :

$$\begin{cases} A_0(\mathbf{v}_\varepsilon) \partial_t \mathbf{v}_\varepsilon + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{v}_\varepsilon) \partial_j \mathbf{v}_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \chi \mathbf{P} \mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{f} & (t, \mathbf{x}) \in]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d \\ \mathbf{v}_\varepsilon|_{t<0} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Dans la section précédente, nous avons crée une solution approchée $\mathbf{v}_a(t, \mathbf{x}) = \sum_{n=0}^M \varepsilon^n \mathbf{V}^{n,\pm}(t, \mathbf{x})$ (pour M assez grand) tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0(\mathbf{v}_a) \partial_t \mathbf{v}_a + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{v}_a) \partial_j \mathbf{v}_a + \frac{1}{\varepsilon} \chi \mathbf{P} \mathbf{v}_a = \varepsilon^M \mathbf{R}_\varepsilon + \mathbf{f} & (t, \mathbf{x}) \in]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d \\ \mathbf{v}_a|_{t<0} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.21)$$

La démonstration du théorème 3.2.1 fait appel à la norme L^∞ de \mathbf{R}_ε qui est bornée indépendamment de ε . C'est ce qu'indique le lemme ci-dessous.

Lemme 3.2.3

Pour un $M \in \mathbb{N}^*$ fixé et pour $\varepsilon_0 > 0$, la fonction $\mathbf{v}_a = \sum_{n=0}^M \varepsilon^n \mathbf{V}^{n,\pm}$ est une solution du problème approché suivant

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0(\mathbf{v}_a) \partial_t \mathbf{v}_a + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{v}_a) \partial_j \mathbf{v}_a + \frac{1}{\varepsilon} \chi \mathbf{P} \mathbf{v}_a = \varepsilon^M \mathbf{R}_\varepsilon + \mathbf{f} & (t, \mathbf{x}) \in]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d \\ \mathbf{v}_a|_{t<0} = \mathbf{0} \end{cases}$$

et $\|\mathbf{R}_\varepsilon\|_\infty$ est bornée uniformément en $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$.

Démonstration : du lemme 3.2.3 : Comme le développement asymptotique est d'ordre fini, on peut considérer :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_j(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}), \mathbf{v}_a(t, \mathbf{x})) &= \sum_{n=0}^M \varepsilon^n \mathbf{A}_j^D(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}), \mathbf{V}^{0,\pm}(t, \mathbf{x}), \dots, \mathbf{V}^{n,\pm}(t, \mathbf{x})) \\ \mathbf{f}(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}), \mathbf{v}_a(t, \mathbf{x})) &= \sum_{n=0}^M \varepsilon^n \mathbf{f}^D(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}), \mathbf{V}^{0,\pm}(t, \mathbf{x}), \dots, \mathbf{V}^{n,\pm}(t, \mathbf{x})). \end{aligned}$$

Le terme correctif \mathbf{R}_ε vérifie :

$$\begin{aligned} \varepsilon^M \mathbf{R}_\varepsilon &= \mathbf{A}_0(\mathbf{v}_a) \partial_t \mathbf{v}_a + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{v}_a) \partial_j \mathbf{v}_a + \frac{1}{\varepsilon} \chi \mathbf{P} \mathbf{v}_a - \mathbf{f} \\ &= \sum_{j=0}^d \sum_{n=0}^M \varepsilon^n \mathbf{A}_j^D(\mathbf{V}^{0,\pm}, \dots, \mathbf{V}^{n,\pm}) \sum_{p=0}^M \varepsilon^p \partial_j \mathbf{V}^{n,\pm} + \sum_{n=0}^M \varepsilon^{n-1} \chi \mathbf{P} \mathbf{V}^{n,\pm} \\ &\quad - \sum_{n=0}^M \varepsilon^n \mathbf{f}^D(\mathbf{V}^{0,\pm}, \dots, \mathbf{V}^{n,\pm}). \end{aligned}$$

D'après la définition du terme $\mathbf{V}^{n,\pm}$, l'équation ci-dessus se réécrit :

$$\varepsilon^M \mathbf{R}_\varepsilon = \sum_{j=0}^d \sum_{n=M+1}^{2M} \varepsilon^n \sum_{p=-M}^M \mathbf{A}_j^p (\mathbf{V}^{0,\pm}, \dots, \mathbf{V}^{p,\pm}) \partial_j \mathbf{V}^{n-p,\pm} - \varepsilon^M \chi \mathbf{P} \mathbf{V}^{M+1,\pm}.$$

On a donc une somme de termes en $H^\infty(\Omega_T)$. On en déduit qu'il existe une constante $c > 0$, indépendante de $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, telle que :

$$\|\mathbf{R}_\varepsilon\|_\infty \leq c \varepsilon^M. \quad \blacksquare$$

Pour la suite de la preuve du théorème 3.2.1, on prendra $m \geq m_0 = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2$ et $M > 3 + \frac{1}{2}m_0$.

On rappelle ici les définitions des dérivées tangentielles : Soit $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1}) \in \mathbb{N}^d$, l'opérateur de dérivées tangentielles \mathcal{T}^α s'exprime de la manière suivante $\mathcal{T}^\alpha = \partial_t^{\alpha_0} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_{d-1}}^{\alpha_{d-1}}$.

On définit aussi un espace fonctionnel adapté à nos besoins :

Définition 3.2.1

On définit l'espace $\mathcal{A}(\Omega_T)$ comme l'ensemble des fonctions $\mathbf{v} : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}^D$ vérifiant :

- $\mathbf{v} \in H^1(\Omega_T)$.
- $\mathbf{v} \in H_{tan}^\infty(\Omega_T)$, c'est à dire que, quelque soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\mathcal{T}^\alpha \mathbf{v} \in L^2(\Omega_T)$.
- $\partial_d \mathbf{v} \in H_{tan}^\infty(\Omega_T)$.
- $\mathbf{v} \in W^{1,\infty}$ ce qui signifie que $\mathbf{v} \in L^\infty$, et, que pour tout $j \in \{0, \dots, d\}$, $\partial_j \mathbf{v} \in L^\infty$

Désormais, notre but est de construire $\mathbf{w} \in \mathcal{A}(\Omega_T)$ telle que $\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{w}$ soit une solution du problème pénalisé (3.12), c'est à dire :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0(\mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{w}) \partial_t(\mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{w}) + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{w}) \partial_j(\mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{w}) + \frac{1}{\varepsilon} \chi \mathbf{P}(\mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{w}) = \mathbf{f} \\ (t, \mathbf{x}) \in]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d \\ \mathbf{v}_a|_{t<0} + \varepsilon \mathbf{w}|_{t<0} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.22)$$

On fait ensuite la différence entre (3.22) et (3.21) :

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^d (\mathbf{A}_j(\mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{w}) \partial_j(\mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{w}) - \mathbf{A}_j(\mathbf{v}_a) \partial_j \mathbf{v}_a) + \frac{1}{\varepsilon} \chi \mathbf{P} \varepsilon \mathbf{w} = -\varepsilon^M \mathbf{R}_\varepsilon & (t, \mathbf{x}) \in]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d \\ \mathbf{w}|_{t<0} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

On définit l'application linéaire $\mathbf{B}(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \varepsilon \mathbf{w}) : \mathbf{W} \mapsto \mathbf{B}(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \varepsilon \mathbf{w}) \mathbf{W}$ telle que :

$$\sum_{j=0}^d (\mathbf{A}_j(\mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{w}) - \mathbf{A}_j(\mathbf{v}_a)) \partial_j \mathbf{v}_a = -\varepsilon \mathbf{B}(\mathbf{v}_a, \nabla \mathbf{v}_a, \varepsilon \mathbf{w}) \mathbf{w}.$$

Cette application dépend de $(\mathbf{a}, \mathbf{v}_a, \nabla \mathbf{v}_a, \mathbf{w})$ et est de classe \mathcal{C}^∞ . Dans le but de raccourcir les équations nous ne ferons plus apparaître les variables $\mathbf{v}_a, \nabla \mathbf{v}_a$ dans l'opérateur $\mathbf{B}(\mathbf{v}_a, \nabla \mathbf{v}_a, \varepsilon \mathbf{w})$ qui devient alors $\mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{w})$.

Ainsi, le problème hyperbolique pour \mathbf{w} est le suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0(\mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{w}) \partial_t \mathbf{w} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{w}) \partial_j \mathbf{w} - \mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{w}) \mathbf{w} + \frac{1}{\varepsilon} \chi \mathbf{P} \mathbf{w} = -\varepsilon^{M-1} \mathbf{R}_\varepsilon \\ (t, \mathbf{x}) \in]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d \\ \mathbf{w}|_{t<0} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Pour le traitement de la partie non linéaire du système, on va utiliser une méthode de type point fixe. L'existence de la solution peut alors être obtenue en étudiant une version linéarisée du système.

Cela nous amène à considérer un schéma itératif de type Picard :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^0 &= \mathbf{0} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad & \\ \begin{cases} \mathbf{A}_0(\mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{w}^k) \partial_t \mathbf{w}^{k+1} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{w}^k) \partial_j \mathbf{w}^{k+1} - \mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{w}^k) \mathbf{w}^{k+1} + \frac{\chi}{\varepsilon} \mathbf{P} \mathbf{w}^{k+1} = -\varepsilon^{M-1} \mathbf{R}_\varepsilon \\ \text{dans }]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d \\ \mathbf{w}^{k+1}|_{t<0} = \mathbf{0}. \end{cases} \end{aligned}$$

On s'attend à ce que cette suite converge vers \mathbf{w} dans $L^2(\Omega_T)$ puis aussi dans $H^\infty(\Omega_T^+)$, $H^\infty(\Omega_T^-)$ et $H^1(\Omega_T)$. C'est ce qu'on s'attache à montrer maintenant.

Dans toute la suite du chapitre, la dépendance des différentes constantes en \mathbf{v}_a, T_0, T , et en les différents coefficients du problème reformulé (3.12), $\mathbf{A}_0, \dots, \mathbf{A}_d, \mathbf{P}$ ne sera pas explicitée. Cela permettre d'alléger les notations.

3.2.3.2 Convergence de la suite (\mathbf{w}^k) dans L^2

3.2.3.2.1 Normes à poids : Pour prouver la convergence de la suite (\mathbf{w}^k) dans $L^2(\Omega_T)$, nous allons faire appel à des estimations d'énergie. Mais la norme L^2 n'est pas la plus pratique pour fournir des estimations bornées en $\varepsilon \ll 1$. C'est pour cette raison que l'on introduit ci-dessous les normes à poids que l'on utilisera dans cette partie :

Définition 3.2.2 (Normes à poids)

$$\begin{aligned} \forall \Phi \in L^2(\Omega_T), \|\Phi\|_{0,\lambda} &= \|e^{-\lambda t} \Phi\|_{L^2(\Omega_T)} \\ \forall \Phi \in H_{tan}^m(\Omega_T), \|\Phi\|_{m,\lambda} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \lambda^{m-|\alpha|} \|\mathcal{T}^\alpha \Phi\|_{0,\lambda} \\ \forall \Phi \in H_{tan}^m(\Omega_T), \|\Phi\|_{m,\lambda,\varepsilon} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \lambda^{m-|\alpha|} \|\sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|} \mathcal{T}^\alpha \Phi\|_{0,\lambda}. \end{aligned}$$

On fait les remarques suivantes, qui vont nous être utiles par la suite :

1. $\|\cdot\|_{0,\lambda}$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega_T)}$, pour une valeur de λ fixée.
2. $\|\cdot\|_{m,\lambda}$ et $\|\cdot\|_{m,\lambda,\varepsilon}$ sont équivalentes à la norme $\|\cdot\|_{H_{tan}^m(\Omega_T)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathcal{T}^\alpha \cdot\|_{L^2(\Omega_T)}$ à λ et ε fixés.
3. On a aussi ($\Phi \in H_{tan}^m(\Omega_T)$) :

$$\begin{aligned}\lambda \|\Phi\|_{m-1,\lambda,\varepsilon} &\leq \|\Phi\|_{m,\lambda,\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} \|\mathcal{T}\Phi\|_{m-1,\lambda,\varepsilon} &\leq \|\Phi\|_{m,\lambda,\varepsilon}.\end{aligned}$$

On peut facilement montrer qu'il existe $c > 0$ (dépendant de m , mais pas de λ, ε) et une fonction $\zeta_m(\lambda)$ indépendant de ε tel que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{R}_\varepsilon\|_{m,\lambda,\varepsilon} &\leq \zeta_m(\lambda) \\ \|\mathbf{R}_\varepsilon\|_\infty &\leq c.\end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{R}_{\varepsilon|t<0} = \mathbf{0}$, on note que $\zeta_m(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^m)$, quand λ tend vers l'infini.

3.2.3.2.2 Estimations d'énergie pour \mathbf{w}^{k+1} : Cette sous-section a pour but de prouver une estimation d'énergie pour le problème hyperbolique ci-dessous, d'inconnue $\tilde{\mathbf{w}}$:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0(\mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{b}) \partial_t \tilde{\mathbf{w}} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{b}) \partial_j \tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{b}) \tilde{\mathbf{w}} + \frac{1}{\varepsilon} \chi \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{g} & (t, \mathbf{x}) \in \Omega_T \\ \tilde{\mathbf{w}}|_{t<0} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.23)$$

Dans cette sous-section, \mathbf{b} représente \mathbf{w}^k (avec $k \in \mathbb{N}$) et $\tilde{\mathbf{w}}$ désigne \mathbf{w}^{k+1} . Dans nos estimations, les constantes ne doivent pas varier avec \mathbf{b} , $\tilde{\mathbf{w}}$ (c'est à dire, avec \mathbf{w}^k , \mathbf{w}^{k+1}) afin de pouvoir montrer par récurrence que la suite $(\mathbf{w}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée pour les normes $\|\cdot\|_{m,\lambda,\varepsilon}$ et $\|\cdot\|_\infty + \|\nabla \cdot\|_\infty$. \mathbf{g} correspond à $\varepsilon^{M-1} R_\varepsilon$, donc on admet que $\|\mathbf{g}\|_{m,\lambda,\varepsilon} \leq \zeta_m(\lambda) \varepsilon^{M-1}$ et $\|\mathbf{g}\|_\infty \leq c \varepsilon^{M-1}$.

Propriété 3.2.1

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées

- $\mathbf{b} \in \mathcal{A}(]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d)$.
- $\|\mathbf{b}\|_\infty + \|\nabla \mathbf{b}\|_\infty \leq R$.

alors il existe $\varepsilon_1(R) \in]0, 1[$ tel que le problème hyperbolique (3.23) admette une solution $\tilde{\mathbf{w}} \in \mathcal{A}(]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d)$, quelque soit $\varepsilon \leq \varepsilon_1(R)$. De plus, il existe $c(R)$ (indépendant de \mathbf{g}) et $\lambda_0(R) > 0$ tel que l'on ait l'estimation d'énergie suivante :

$$\forall \lambda > \lambda_0(R), \sqrt{\lambda} \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{0,\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\chi \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}\|_{0,\lambda} \leq \frac{c(R)}{\sqrt{\lambda}} \|\mathbf{g}\|_{0,\lambda}.$$

Démonstration de la propriété 3.2.1 : On utilise les notations suivantes :

$$\mathbf{v}_{a-}(t, x_1, \dots, x_d) = \mathbf{v}_a(t, x_1, \dots, -x_d) \text{ et } \mathbf{v}_{a+}(t, x_1, \dots, x_d) = \mathbf{v}_a(t, x_1, \dots, +x_d).$$

Soit le problème hyperbolique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cc} \mathbf{A}_0(\mathbf{u}_{a-} + \varepsilon \mathbf{b}_-) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0(\mathbf{u}_{a-} + \varepsilon \mathbf{b}_-) \end{array} \right) \partial_t \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_- \\ \tilde{\mathbf{w}}_+ \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{d-1} \left(\begin{array}{cc} \mathbf{A}_j(\mathbf{u}_{a-} + \varepsilon \mathbf{b}_-) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_j(\mathbf{u}_{a-} + \varepsilon \mathbf{b}_-) \end{array} \right) \partial_j \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_- \\ \tilde{\mathbf{w}}_+ \end{pmatrix} \\ + \underbrace{\left(\begin{array}{cc} -\mathbf{A}_d(\mathbf{u}_{a-} + \varepsilon \mathbf{b}_-) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_d(\mathbf{u}_{a-} + \varepsilon \mathbf{b}_-) \end{array} \right)}_{=\mathbb{A}_d} \partial_d \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_- \\ \tilde{\mathbf{w}}_+ \end{pmatrix} - \left(\begin{array}{cc} \mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{b}_-) \tilde{\mathbf{w}}_- & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{b}_+) \tilde{\mathbf{w}}_+ \end{array} \right) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_- \\ \tilde{\mathbf{w}}_+ \end{pmatrix} \\ + \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_- \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_- \\ \mathbf{g}_+ \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{w}}_-|_{t<0} = \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{w}}_+|_{t<0} = \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{w}}_-|_{x_d=0} - \tilde{\mathbf{w}}_+|_{x_d=0} = \mathbf{0}. \end{array} \right.$$

On remarque que le problème hyperbolique ci-dessus est symétrique et a des conditions à la limite qui sont maximales et strictement dissipatives. En effet,

- En $x_d = 0$, on a $\mathbf{A}_d(\mathbf{v}_{a-} + \varepsilon \mathbf{b}_-)|_{x_d=0} = \mathbf{A}_d(\mathbf{v}_{a+} + \varepsilon \mathbf{b}_+)|_{x_d=0}$ et $\tilde{\mathbf{w}}_- = \tilde{\mathbf{w}}_+$.
Donc, $\langle \mathbb{A}_d \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_- \\ \tilde{\mathbf{w}}_+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_- \\ \tilde{\mathbf{w}}_+ \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}^{2N}} = 0$.
- $\mathbf{A}_d(\mathbf{v}_{a+} + \varepsilon \mathbf{b}_+)$ est symétrique et inversible, pour ε assez petit ($\varepsilon < \varepsilon_1(R)$). Ainsi, la somme des sous-espaces propres associés aux valeurs propres strictement négatives de \mathbb{A}_d est de dimension n .

Le résultat du théorème 3.1.2 nous permet d'affirmer l'existence et l'unicité de $(\tilde{\mathbf{w}}_-, \tilde{\mathbf{w}}_+) \in H^\infty(\Omega_T^+)^2$. On peut aussi citer les résultats de Rauch [55], Guès [35], Benzoni-Serre [16] ou encore de Chazarain-Piriou [25] (page 475, théorème 6.10).

D'après les inclusions de Sobolev, on sait aussi que $(\tilde{\mathbf{w}}_-, \tilde{\mathbf{w}}_+) \in W^{1,\infty}(\Omega_T^+)^2$.

La solution de (3.23) peut être écrite :

$$\tilde{\mathbf{w}}(t, x_1, \dots, x_d) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{w}}_-(t, x_1, \dots, -x_d) & \text{si } x_d < 0 \\ \tilde{\mathbf{w}}_+(t, x_1, \dots, x_d) & \text{si } x_d \geq 0. \end{cases}$$

De plus, $\tilde{\mathbf{w}}$ et ces dérivées tangentielles $\mathcal{T}^\alpha \tilde{\mathbf{w}}$ sont dans $L^2(\Omega_T)$.

En calculant $\partial_d \tilde{\mathbf{w}}$ à l'aide de l'équation (3.23), on en déduit que $\tilde{\mathbf{w}} \in H^1(\Omega_T) \cap H_{tan}^\infty(\Omega_T)$. C'est à dire, au final, que $\tilde{\mathbf{w}} \in \mathcal{A}(\Omega_T)$.

Estimation d'énergie pour $\tilde{\mathbf{w}}$: On pose $\tilde{\mathbf{w}}_\lambda(t, \mathbf{x}) = \exp(-\lambda t) \tilde{\mathbf{w}}(t, \mathbf{x})$, tel que $\|\tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)} = \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{0,\lambda}$.

Comme $\mathbf{A}_0(\mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{b})$ est uniformément définie positive ($\langle \mathbf{A}_0(\varepsilon \mathbf{b}) \tilde{\mathbf{w}}_\lambda, \tilde{\mathbf{w}}_\lambda \rangle_{L^2(\Omega_T)} \geq e_0 \|\tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)}$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \mathbf{A}_0(\varepsilon \mathbf{b}) \tilde{\mathbf{w}}_\lambda + \sum_{j=0}^d \mathbf{A}_j(\varepsilon \mathbf{b}) \partial_j \tilde{\mathbf{w}}_\lambda - \mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{b}) \tilde{\mathbf{w}}_\lambda + \frac{1}{\varepsilon} \chi \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}_\lambda = \mathbf{g}_\lambda \quad (t, \mathbf{x}) \in]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d \\ \tilde{\mathbf{w}}_\lambda|_{t<0} = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (3.24)$$

On fait le produit scalaire $L^2(\Omega_T)$ de (3.24) avec $\tilde{\mathbf{w}}_\lambda$:

$$\begin{aligned} & \lambda e_0 \|\tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \sum_{j=0}^d \langle \mathbf{A}_j(\varepsilon \mathbf{b}) \partial_j \tilde{\mathbf{w}}_\lambda, \tilde{\mathbf{w}}_\lambda \rangle_{L^2(\Omega_T)} - \|\mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{b})\|_\infty \|\tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \|\chi \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq \|\mathbf{g}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)} \|\tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)}. \end{aligned}$$

De plus, pour $j \in \{1, \dots, d\}$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}_j(\varepsilon \mathbf{b}) \partial_j \tilde{\mathbf{w}}_\lambda, \tilde{\mathbf{w}}_\lambda \rangle_{L^2(\Omega_T)} &= -\frac{1}{2} \langle \partial_j (\mathbf{A}_j(\varepsilon \mathbf{b})) \tilde{\mathbf{w}}_\lambda, \tilde{\mathbf{w}}_\lambda \rangle_{L^2(\Omega_T)} \\ &\geq -\frac{1}{2} \|\partial_j (\mathbf{A}_j(\varepsilon \mathbf{b}))\|_\infty \|\tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)}^2. \end{aligned}$$

Pour le terme de dérivée en temps :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}_0(\varepsilon \mathbf{b}) \partial_0 \tilde{\mathbf{w}}_\lambda, \tilde{\mathbf{w}}_\lambda \rangle_{L^2(\Omega_T)} &= -\frac{1}{2} \langle \partial_0 (\mathbf{A}_0(\varepsilon \mathbf{b})) \tilde{\mathbf{w}}_\lambda, \tilde{\mathbf{w}}_\lambda \rangle_{L^2(\Omega_T)} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\mathbf{w}}_{\lambda|t=T}^\top \mathbf{A}_0(\varepsilon \mathbf{b})_{t=T} \tilde{\mathbf{w}}_{\lambda|t=T} d\mathbf{x}}_{\geq 0} \\ &\quad - \frac{1}{2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\mathbf{w}}_{\lambda|t=-T_0}^\top \mathbf{A}_0(\varepsilon \mathbf{b})_{t=-T_0} \tilde{\mathbf{w}}_{\lambda|t=-T_0} d\mathbf{x}}_{=0 \text{ car } \tilde{\mathbf{w}}_{t<0} = \mathbf{0}} \\ &\geq -\frac{1}{2} \|\partial_0 (\mathbf{A}_0(\varepsilon \mathbf{b}))\|_\infty \|\tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda e_0 \|\tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\chi \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)}^2 &\leq \left(\frac{1}{2} \sum_{j=0}^d \|\partial_j (\mathbf{A}_j(\varepsilon \mathbf{b}))\|_\infty + \|\mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{b})\|_\infty \right) \|\tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \\ &\quad + \|\mathbf{g}\|_{L^2(\Omega_T)} \|\tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)}. \end{aligned}$$

En remplaçant, dans l'inégalité précédente, le terme $\frac{1}{\varepsilon} \|\chi \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)}^2$ par 0, on obtient :

$$\forall \lambda > 0, \lambda e_0 \|\tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)} \leq \left(\frac{1}{2} \sum_{j=0}^d \|\partial_j (\mathbf{A}_j(\varepsilon \mathbf{b}))\|_\infty + \|\mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{b})\|_\infty \right) \|\tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)} + \|\mathbf{g}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)}.$$

On suppose ensuite que $\lambda > \lambda_0(R) = \frac{2}{e_0} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=0}^d \|\partial_j (\mathbf{A}_j(\varepsilon \mathbf{b}))\|_\infty + \|\mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{b})\|_\infty \right)$, cela donne

$$\lambda \|\tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)} \leq \frac{2}{e_0 \lambda_0(R)} \|\mathbf{g}\|_{L^2(\Omega_T)}.$$

A propos de l'estimation du terme $\|\chi \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)}$, le même procédé que ci-dessus est appliqué :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\chi \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)} &\leq \left(\left(\frac{1}{2} \sum_{j=0}^d \|\partial_j (\mathbf{A}_j(\varepsilon \mathbf{b}))\|_\infty + \|\mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{b})\|_\infty \right) \|\tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)} + \|\mathbf{g}\|_{L^2(\Omega_T)} \|\tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{C_1(R)}{\sqrt{\lambda}} \|\mathbf{g}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)} \quad \text{d'après } \lambda \|\tilde{\mathbf{w}}_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)} \leq \frac{2}{e_0} \|\mathbf{g}\|_{L^2(\Omega_T)} \quad (\lambda > \lambda_0(R)). \end{aligned}$$

Finalement, en posant $c(R) = \frac{2}{e_0} + C_1(R)$, on obtient l'estimation d'énergie souhaitée :

$$\sqrt{\lambda} \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{0,\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\chi \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}\|_{0,\lambda} \leq \frac{c(R)}{\sqrt{\lambda}} \|\mathbf{g}\|_{0,\lambda}. \quad \blacksquare$$

3.2.3.2.3 Inégalités pour les dérivées tangentielles de \mathbf{w}^{k+1} : Ce paragraphe a pour objectif d'étendre l'estimation d'énergie de la proposition 3.2.1 aux dérivées tangentielles de \mathbf{w}^{n+1} .

Propriété 3.2.2

On prend $R > 0$, $\mathbf{b} \in \mathcal{A}(]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d)$ et $\tilde{\mathbf{w}} \in \mathcal{A}(]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d)$ la solution du problème (3.23). On suppose que :

- $\|\mathbf{b}\|_\infty + \|\nabla \mathbf{b}\|_\infty \leq R$
- $0 < \varepsilon < \varepsilon_1(R)$
- $\lambda > \lambda_0(R, m) > 1$

Alors, il existe $c(R, m)$ (indépendant de $\tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{b}, \lambda, \varepsilon$) tel que $\tilde{\mathbf{w}}$ vérifie l'estimation suivante :

$$\sqrt{\lambda} \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{m, \lambda, \varepsilon} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\chi \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}\|_{m, \lambda, \varepsilon} \leq \frac{c(R, m)}{\sqrt{\lambda}} (\|\mathbf{b}\|_{m, \lambda, \varepsilon} (\|\mathcal{T} \tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\chi \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\mathbf{g}\|_\infty) + \|\mathbf{g}\|_{m, \lambda, \varepsilon}). \quad (3.25)$$

Démonstration de la propriété 3.2.2 : Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq m$. Dans cette preuve, les constantes de la forme $c(R, m)$ seront, entre autres, indépendantes de $\tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{b}, \lambda, \varepsilon$.

Après avoir appliqué l'opérateur de dérivée tangentielle $\sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|} \mathcal{T}^\alpha$ à (3.23), le problème hyperbolique obtenu s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^d \mathbf{A}_j(\varepsilon \mathbf{b}) \partial_j \left(\sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|} \mathcal{T}^\alpha \tilde{\mathbf{w}} \right) - \mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{b}) \left(\sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|} \mathcal{T}^\alpha \tilde{\mathbf{w}} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \chi \mathbf{P} \left(\sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|} \mathcal{T}^\alpha \tilde{\mathbf{w}} \right) = \\ \mathbf{A}_d(\varepsilon \mathbf{b}) \left(- \sum_{j=0}^{d-1} \left[\mathbf{A}_d^{-1}(\varepsilon \mathbf{b}) \mathbf{A}_j(\varepsilon \mathbf{b}) \partial_j, \sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|} \mathcal{T}^\alpha \right] \tilde{\mathbf{w}} - \frac{1}{\varepsilon} \left[\chi \mathbf{A}_d^{-1}(\varepsilon \mathbf{b}) \mathbf{P}, \sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|} \mathcal{T}^\alpha \right] \tilde{\mathbf{w}} \right. \\ \left. + \sqrt{\varepsilon} \mathcal{T}^\alpha (A_d^{-1}(\varepsilon \mathbf{b}) \mathbf{g}) \right) \\ \sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|} \mathcal{T}^\alpha \tilde{\mathbf{w}}|_{-T_0, 0} = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (3.26)$$

On applique la proposition 3.2.1 appliquée au problème (3.26) dont l'inconnue est $\sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|} \mathcal{T}^\alpha \tilde{\mathbf{w}}$. Ainsi, il est nécessaire d'estimer la norme $\|\cdot\|_{0, \lambda}$ du membre de droite de l'inégalité. Pour les termes comportant un produit de deux fonctions, on utilise à nouveau une inégalité de type Gagliardo-Nirenberg-Moser (pour une démonstration du lemme ci-dessous, on pourra voir les travaux de Guès [35]) :

Lemme 3.2.4 (Inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Moser pour $\|\cdot\|_{m, \lambda, \varepsilon}$)

Soit $\Phi_1, \dots, \Phi_p \in H_{tan}^m(\Omega_T) \cap L^\infty(\Omega_T)$, $\alpha_{.,1}, \dots, \alpha_{.,p} \in \mathbb{N}^d$ ($\alpha_{.,l} = (\alpha_{0,l}, \dots, \alpha_{d,l})^t$) et $k \in \mathbb{N}$, tel que $\sum_{l=1}^p \sum_{i=0}^d \alpha_{i,l} \leq k \leq m$. Alors, il existe $r > 0$, indépendant de $\varepsilon, \lambda, \Phi_1, \dots, \Phi_p$ qui vérifie :

$$\lambda^{m-k} \sqrt{\varepsilon}^{\sum_{l=1}^p \sum_{i=0}^d \alpha_{i,l}} \|\mathcal{T}^{\alpha_{.,1}} \Phi_1 \dots \mathcal{T}^{\alpha_{.,p}} \Phi_p\|_{0, \lambda} \leq r \sum_{l=1}^p \left(\prod_{q \neq l} \|\Phi_q\|_\infty \right) \|\Phi_l\|_{m, \lambda, \varepsilon}.$$

On commence avec le deuxième terme du second membre de (3.26) qui est le plus délicat à majorer (en norme $\|\cdot\|_{0, \lambda}$) à cause du coefficient ε^{-1} .

Pour cela il est nécessaire d'avoir un inégalité sur la norme de $\left[\chi \mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{P}, \sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|} \mathcal{T}^\alpha \right] \tilde{\mathbf{w}}$. Tout d'abord, ce terme peut être développé de la manière suivante ($\mathbf{L}_{\beta, \gamma, \delta}$ sont des matrices) :

$$\left[\chi \mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{P}, \sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|} \mathcal{T}^\alpha \right] \tilde{\mathbf{w}} = \chi \sum_{\substack{\sum \beta_p + \sum \gamma_q \\ + \delta \leq \alpha}} \mathbf{L}_{\beta, \gamma, \delta}(\varepsilon \mathbf{b}) \mathcal{T}^{\beta_1} \mathbf{v}_a \dots \mathcal{T}^{\beta_k} \mathbf{v}_a \mathcal{T}^{\gamma_1}(\varepsilon \mathbf{b}) \dots \mathcal{T}^{\gamma_l}(\varepsilon \mathbf{b}) \mathcal{T}^\delta \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}. \quad (3.27)$$

où $|\delta| < |\alpha|$. On regarde la norme $\|\cdot\|_{0, \lambda}$ de $\left[\chi \mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{P}, \sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|} \mathcal{T}^\alpha \right] \tilde{\mathbf{w}}$ ce qui donne les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^{m-|\alpha|}}{\varepsilon} \left\| \left[\chi \mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{P}, \sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|} \mathcal{T}^\alpha \right] \tilde{\mathbf{w}} \right\|_{0, \lambda} \\ &= \frac{\lambda^{m-|\alpha|}}{\varepsilon} \left\| \chi \sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|} \sum_{\substack{\sum \beta_p + \sum \gamma_q \\ + \delta \leq \alpha}} \mathbf{L}_{\beta, \gamma, \delta}(\varepsilon \mathbf{b}) \mathcal{T}^{\beta_1} \mathbf{v}_a \dots \mathcal{T}^{\beta_k} \mathbf{v}_a \mathcal{T}^{\gamma_1}(\varepsilon \mathbf{b}) \dots \mathcal{T}^{\gamma_l}(\varepsilon \mathbf{b}) \mathcal{T}^\delta \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}} \right\|_{0, \lambda} \\ &\leq \frac{\lambda^{m-|\alpha|}}{\varepsilon} \left(\sum_{(\gamma_1, \dots, \gamma_l)=0} c(R, m) \left\| \sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|} \chi \mathcal{T}^{\beta_1} \mathbf{v}_a \dots \mathcal{T}^{\beta_k} \mathbf{v}_a \mathcal{T}^\delta \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}} \right\|_{0, \lambda} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{(\gamma_1, \dots, \gamma_l) \neq 0} c(R, m) \left\| \sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|} \chi \mathcal{T}^{\beta_1} \mathbf{v}_a \dots \mathcal{T}^{\beta_k} \mathbf{v}_a \mathcal{T}^{\gamma_1}(\varepsilon \mathbf{b}) \dots \mathcal{T}^{\gamma_l}(\varepsilon \mathbf{b}) \mathcal{T}^\delta \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}} \right\|_{0, \lambda} \right) \\ &\leq \left(\sum_{(\gamma_1, \dots, \gamma_l)=0} c(R, m) \sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|-|\delta|} \lambda^{|\delta|-|\alpha|} \lambda^{m-|\delta|} \left\| \sqrt{\varepsilon}^{|\delta|} \chi \mathcal{T}^\delta \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}} \right\|_{0, \lambda} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{(\gamma_1, \dots, \gamma_l) \neq 0} \varepsilon c(R, m) (\|\mathbf{b}\|_{m, \lambda, \varepsilon} \|\chi \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\chi \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}\|_{m, \lambda, \varepsilon}) \right) \quad (\text{lemme 3.2.4}). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^{m-|\alpha|}}{\varepsilon} \left\| \left[\chi \mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{P}, \sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|} \mathcal{T}^\alpha \right] \tilde{\mathbf{w}} \right\|_{0, \lambda} \\ &\leq c(R, m) \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon} \lambda} \|\chi \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}\|_{m, \lambda, \varepsilon} + (\|\mathbf{b}\|_{m, \lambda, \varepsilon} \|\chi \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\chi \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}\|_{m, \lambda, \varepsilon}) \right). \end{aligned}$$

On voit ici l'intérêt d'introduire le coefficient $\sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|}$ dans la définition de la norme $\|\cdot\|_{m, \lambda, \varepsilon}$: cela permet de remplacer le coefficient ε^{-1} par $1/\sqrt{\varepsilon}$, qui est plus facile à contrôler (on rappelle que $\varepsilon \ll 1$).

Le traitement du premier terme du membre de droite de (3.26) est plus classique car il ne contient que des dérivées d'ordre inférieur ou égal à $|\alpha|$. Donc, d'après l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Moser (lemme 3.2.4) :

$$\begin{aligned} & \forall j \in \{0, \dots, d-1\}, \\ & \lambda^{m-|\alpha|} \left\| \left[\mathbf{A}_d^{-1}(\varepsilon \mathbf{b}) \mathbf{A}_j(\varepsilon \mathbf{b}) \partial_j, \sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|} \mathcal{T}^\alpha \right] \tilde{\mathbf{w}} \right\|_{0, \lambda} \leq c(R, m) (\|\varepsilon \mathbf{b}\|_{m, \lambda, \varepsilon} \|\mathcal{T} \tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{m, \lambda, \varepsilon}) \\ & \leq c(R, m) (\|\varepsilon \mathbf{b}\|_{m, \lambda, \varepsilon} \|\mathcal{T} \tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{m, \lambda, \varepsilon}). \end{aligned}$$

,m

Toujours d'après l'inégalité de Gagliardo-Niremberg-Moser, appliquée cette fois au dernier terme du membre de droite de (3.26), on a l'existence d'une constante $c(R)$, indépendante de $\mathbf{b}, \mathbf{g}, \lambda, \varepsilon$ telle que :

$$\|\sqrt{\varepsilon}^{|\alpha|} \mathcal{T}^\alpha (\mathbf{A}_d^{-1}(\varepsilon \mathbf{b}) \mathbf{g})\|_{0,\lambda} \leq c(R, m) (\|\mathbf{b}\|_{m,\lambda,\varepsilon} \|\mathbf{g}\|_\infty + \|\mathbf{g}\|_{m,\lambda,\varepsilon}).$$

En combinant les trois inégalités prouvées ci-dessus, on aboutit au résultat de la proposition 3.2.2. ■

3.2.3.2.4 Estimation L^∞ : Afin de pouvoir utiliser le théorème de récurrence, il est nécessaire de montrer que $\|\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\mathcal{T}\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty \leq R$, pour un λ fixé et pour ε suffisamment petit.

Lemme 3.2.5

On rappelle que $m_0 = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2$. Supposons que $\|\mathbf{g}\|_{m,\lambda,\varepsilon} \leq \zeta_m(\lambda) \varepsilon^{M-1}$ (avec $\zeta_m(\lambda) > 1$), $\|\mathbf{g}\|_\infty \leq c \varepsilon^{M-1}$, $\|\mathbf{b}\|_{m,\lambda,\varepsilon} \leq \zeta_m(\lambda) \varepsilon^{M-1}$ et $\|\mathbf{b}\|_\infty + \|\nabla \mathbf{b}\|_\infty \leq 1$. Alors, il existe $\lambda_0(1, m), \varepsilon_0(\lambda)$ (indépendant de $\mathbf{b}, \tilde{\mathbf{w}}$) tel que pour tout $\lambda \geq \lambda_0(1, m)$ et pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(\lambda)$, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\|\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\nabla \tilde{\mathbf{w}}\|_\infty \leq 1,$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\mathcal{T}\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty &\leq \zeta_m(\lambda) \varepsilon^{M - \frac{1}{2}m_0 - \frac{5}{2}}, \\ \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{m,\lambda,\varepsilon} &\leq \zeta_m(\lambda) \varepsilon^{M-1}, \\ \|\sqrt{\varepsilon} \partial_d \tilde{\mathbf{w}}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon} &\leq D(\lambda) \varepsilon^{M - \frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

où $D(\lambda)$ est une fonction positive qui ne varie pas avec $\mathbf{b}, \tilde{\mathbf{w}}, \varepsilon$.

Démonstration du lemme 3.2.5 : On commence par considérer la relation :

$$\partial_d \tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{A}_d^{-1}(\varepsilon \mathbf{b}) \left(- \sum_{j=0}^{d_1} \mathbf{A}_j(\varepsilon \mathbf{b}) \partial_j \tilde{\mathbf{w}} + \mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{b}) \tilde{\mathbf{w}} - \frac{\chi}{\varepsilon} \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}} + \mathbf{g} \right). \quad (3.28)$$

Grâce à l'inégalité de Gagliardo-Niremberg-Moser, on a :

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\varepsilon} \partial_d \tilde{\mathbf{w}}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon} &\leq c(m) \left(\sqrt{\varepsilon} \left(\|\mathcal{T}\tilde{\mathbf{w}}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon} + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|\mathbf{b}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon} (\|\mathcal{T}\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\mathbf{g}\|_\infty) + \|\mathbf{g}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\|\chi \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon} + \|\mathbf{b}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon} \|\chi \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}\|_\infty) \right). \end{aligned}$$

On rappelle que l'on a choisi $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1(1)$ et $\lambda \geq \lambda_0(1, m)$. En comparant les normes

$\|\cdot\|_{m-1,\lambda,\varepsilon}$ et $\|\cdot\|_{m,\lambda,\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\varepsilon}\partial_d\tilde{\mathbf{w}}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon} &\leq c(m) \left(\left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}\right) \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{m,\lambda,\varepsilon} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\lambda} \|\mathbf{b}\|_{m,\lambda,\varepsilon} (\|\mathcal{T}\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\mathbf{g}\|_\infty) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\lambda} \|\mathbf{g}\|_{m,\lambda,\varepsilon} + \frac{1}{\lambda\sqrt{\varepsilon}} (\|\chi\mathbf{P}\tilde{\mathbf{w}}\|_{m,\lambda,\varepsilon} + \|\mathbf{b}\|_{m,\lambda,\varepsilon} \|\chi\mathbf{P}\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty) \right). \end{aligned}$$

On ajoute le terme $\|\tilde{\mathbf{w}}\|_{m,\lambda,\varepsilon}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{m,\lambda,\varepsilon} + \|\sqrt{\varepsilon}\partial_d\tilde{\mathbf{w}}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon} &\leq c(R, m) \left(\|\tilde{\mathbf{w}}\|_{m,\lambda,\varepsilon} + \frac{1}{\lambda\sqrt{\varepsilon}} \|\chi\mathbf{P}\tilde{\mathbf{w}}\|_{m,\lambda,\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\lambda} \|\mathbf{b}\|_{m,\lambda,\varepsilon} (\|\mathcal{T}\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\mathbf{g}\|_\infty) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda\sqrt{\varepsilon}} \|\mathbf{b}\|_{m,\lambda,\varepsilon} \|\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \zeta_m(\lambda) \frac{\varepsilon^{M-\frac{1}{2}}}{\lambda} \right) \\ \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{m,\lambda,\varepsilon} + \|\sqrt{\varepsilon}\partial_d\tilde{\mathbf{w}}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon} &\leq c(R, m) \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\sqrt{\lambda} \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{m,\lambda,\varepsilon} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\chi\mathbf{P}\tilde{\mathbf{w}}\|_{m,\lambda,\varepsilon} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda\sqrt{\varepsilon}} \|\mathbf{b}\|_{m,\lambda,\varepsilon} (\|\mathcal{T}\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\mathbf{g}\|_\infty) + \zeta_m(\lambda) \frac{\varepsilon^{M-\frac{1}{2}}}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

D'après la proposition 3.2.2,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{m,\lambda,\varepsilon} + \|\sqrt{\varepsilon}\partial_d\tilde{\mathbf{w}}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon} &\leq c(R, m) \left(\frac{1}{\lambda} \left(\underbrace{\|\mathbf{b}\|_{m,\lambda,\varepsilon}}_{\leq \zeta_m(\lambda)\varepsilon^{M-1}} \left(\|\mathcal{T}\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \underbrace{\|\mathbf{g}\|_\infty}_{\leq c\varepsilon^{M-1}} \right) + \varepsilon^{M-1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda\sqrt{\varepsilon}} \|\mathbf{b}\|_{m,\lambda,\varepsilon} (\|\mathcal{T}\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\mathbf{g}\|_\infty) + \zeta_m(\lambda) \frac{\varepsilon^{M-1}}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

En rappelant que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \zeta_m(\lambda) = +\infty$ et que $\varepsilon \leq 1$, on prend une constante ξ (indépendante de λ, ε) telle que :

$$\xi \geq \frac{1 + \frac{\zeta_m(\lambda)}{\lambda} (1 + 2c)}{\zeta_m(\lambda)}.$$

$$\|\tilde{\mathbf{w}}\|_{m,\lambda,\varepsilon} + \|\sqrt{\varepsilon}\partial_d\tilde{\mathbf{w}}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon} \leq \frac{c(R, m)}{\lambda} \varepsilon^{M-\frac{3}{2}} (\|\mathcal{T}\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \xi \zeta_m(\lambda) \sqrt{\varepsilon}). \quad (3.29)$$

A l'aide des égalités de Parseval et de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on démontre le lemme ci-dessous :

Lemme 3.2.6

Soient $d \in \mathbb{N}^*, m \geq m_0 = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2, 0 < \varepsilon < 1$ et $\lambda > 0$. Alors il existe $\kappa(m_0) \geq 0$ (qui ne dépend que de d, m_0, T_0 et T) tel que pour tout $\Phi \in H_{tan}^m(\Omega_T) \cap L^\infty(\Omega_T)$:

$$\|\Phi\|_\infty \leq \kappa(m_0) \frac{e^{\lambda T}}{\lambda^{m-m_0} \sqrt{\varepsilon}^{m_0+1}} (\|\Phi\|_{m,\lambda,\varepsilon} + \|\sqrt{\varepsilon}\partial_d\Phi\|_{m-1,\lambda,\varepsilon}).$$

La preuve de ce lemme est similaire à celle du lemme 3.1.9.

L'utilisation du lemme 3.2.6 pour $\tilde{\mathbf{w}}$, nous conduit à l'inégalité suivante :

$$\|\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty \leq c(m_0) \frac{e^{\lambda T}}{\lambda^{m-m_0} \sqrt{\varepsilon}^{m_0+1}} (\|\tilde{\mathbf{w}}\|_{m,\lambda,\varepsilon} + \|\sqrt{\varepsilon} \partial_d \tilde{\mathbf{w}}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon}).$$

Comme $\sqrt{\varepsilon} \|\mathcal{T}\tilde{\mathbf{w}}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon} \leq \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{m,\lambda,\varepsilon}$ et $\sqrt{\varepsilon} \|\sqrt{\varepsilon} \partial_d \tilde{\mathbf{w}}\|_{m-2,\lambda,\varepsilon} \leq \|\sqrt{\varepsilon} \partial_d \tilde{\mathbf{w}}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon}$.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty &\leq c(m_0) \frac{e^{\lambda T}}{\lambda^{m-1-m_0} \sqrt{\varepsilon}^{m_0+1}} (\|\mathcal{T}\tilde{\mathbf{w}}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon} + \|\sqrt{\varepsilon} \partial_d \mathcal{T}\tilde{\mathbf{w}}\|_{m-2,\lambda,\varepsilon}) \\ &\leq c(m_0) \frac{e^{\lambda T}}{\lambda^{m-1-m_0} \sqrt{\varepsilon}^{m_0+2}} (\|\tilde{\mathbf{w}}\|_{m,\lambda,\varepsilon} + \|\sqrt{\varepsilon} \partial_d \tilde{\mathbf{w}}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon}). \end{aligned}$$

Grâce aux encadrements $\lambda \geq \lambda_0(1, m)$ et $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1(1)$, on obtient :

$$\|\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\mathcal{T}\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty \leq c(m_0) \frac{e^{\lambda T}}{\lambda^{m-1-m_0} \sqrt{\varepsilon}^{m_0+2}} (\|\tilde{\mathbf{w}}\|_{m,\lambda,\varepsilon} + \|\sqrt{\varepsilon} \partial_d \tilde{\mathbf{w}}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon}).$$

L'inégalité (3.29), permet d'aboutir à :

$$\|\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\mathcal{T}\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty \leq c(m_0, m) \frac{e^{\lambda T} \varepsilon^{M-\frac{3}{2}}}{\lambda^{m-m_0} \sqrt{\varepsilon}^{m_0+2}} (\|\mathcal{T}\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \xi \zeta_m(\lambda) \sqrt{\varepsilon}).$$

On fixe λ et on définit $\varepsilon_2(\lambda, m_0, m) \in]0, \varepsilon_1(1)]$ tel que $c(m_0, m) \frac{e^{\lambda T}}{\lambda^{m-m_0}} \sqrt{\varepsilon_2(\lambda, m_0, m)} \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, à partir de l'inégalité précédente, on a

$$\|\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\mathcal{T}\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty \leq \zeta_m(\lambda) \varepsilon^{M-\frac{1}{2}m_0-\frac{5}{2}}.$$

Comme $M - \frac{1}{2}m_0 - \frac{5}{2} > 0$, il existe $\varepsilon_3(\lambda, m_0, m) \in]0, \varepsilon_2(\lambda, m_0, m)]$ tel que, quelque soit $\varepsilon \leq \varepsilon_3(\lambda, m_0, m)$, $\|\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty + \|\mathcal{T}\tilde{\mathbf{w}}\|_\infty \leq \frac{1}{2}$. En utilisant l'égalité (3.28) avec $M > \frac{1}{2}m_0+3$, on peut affirmer qu'il existe $\varepsilon_0(\lambda, m, m_0) \in]0, \varepsilon_3(\lambda, m_0, m)]$ pour ε suffisamment petit, $\|\partial_d \tilde{\mathbf{w}}\|_\infty \leq \frac{1}{2}$.

Ainsi, pour $\lambda \geq \lambda_0(1, m)$ et $\varepsilon \leq \varepsilon_0(\lambda, m, m_0)$ on a la dernière inégalité que l'on souhaitait démontrer dans le lemme 3.2.6 : $\|\tilde{\mathbf{w}}\|_{m,\lambda,\varepsilon} \leq \zeta_m(\lambda) \varepsilon^{M-1}$. ■

3.2.3.3 Fin de la démonstration du théorème 3.2.1

Le premier terme $\mathbf{w}^0 = \mathbf{0}$ appartient à $\mathbf{w}^0 \in \mathcal{A}(]-T_0, T[\times \mathbb{R}^d)$ et vérifie les estimations nécessaires à la mise en place de la récurrence. De plus, pour une valeur fixée de $\lambda \geq \lambda_0(1, m)$ (c'est à dire $R = 1$) et pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0(\lambda, m, m_0)[$, si on a $\|\mathbf{w}^k\|_{m,\lambda,\varepsilon} \leq \zeta_m(\lambda) \varepsilon^{M-1}$ (pour un certain $m \geq m_0$) et $\|\mathbf{w}^k\|_\infty + \|\nabla \mathbf{w}^k\|_\infty \leq 1$, alors les propriétés du lemme 3.2.5 nous permettent d'affirmer que :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}^{k+1}\|_\infty + \|\nabla \mathbf{w}^{k+1}\|_\infty &\leq 1 \\ \|\mathbf{w}^{k+1}\|_{m,\lambda,\varepsilon} &\leq \zeta_m(\lambda) \varepsilon^{M-1} \\ \|\sqrt{\varepsilon} \partial_d \mathbf{w}^{k+1}\|_{m-1,\lambda,\varepsilon} &\leq D(\lambda) \varepsilon^{M-1}. \end{aligned}$$

Par récurrence, on en déduit que la suite (\mathbf{w}^k) est bornée pour la norme $\|\cdot\|_{m,\lambda,\varepsilon}$ et donc aussi pour la norme L^2 .

Pour justifier la convergence de la suite (\mathbf{w}^k) , on va montrer que c'est une suite de Cauchy dans l'espace $L^2(\Omega_T)$. On rappelle que le schéma itératif s'écrit :

$$\sum_{j=0}^d \mathbf{A}_j(\varepsilon \mathbf{w}^k) \partial_j \mathbf{w}^{k+1} - \mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{w}^k) \mathbf{w}^{k+1} + \frac{\chi}{\varepsilon} \mathbf{P} \mathbf{w}^{k+1} = -\varepsilon^{M-1} \mathbf{R}_\varepsilon.$$

On fait ensuite la différence entre le système pour \mathbf{w}^{k+1} (voir ci-dessus) et celui pour \mathbf{w}^k :

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=0}^d \mathbf{A}_j(\varepsilon \mathbf{w}^k) \partial_j - \mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{w}^k) + \frac{\chi}{\varepsilon} \mathbf{P} \right) (\mathbf{w}^{k+1} - \mathbf{w}^{k+2}) = - \sum_{j=0}^d (\mathbf{A}_j(\varepsilon \mathbf{w}^{k+1}) - \mathbf{A}_j(\varepsilon \mathbf{w}^k)) \partial_j \mathbf{w}^{k+2} \\ & + (\mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{w}^{k+1}) - \mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{w}^k)) \mathbf{w}^{k+2}. \end{aligned}$$

Comme $\lambda \geq \lambda_0(1, m)$, l'estimation d'énergie de la proposition 3.2.1 nous permet d'affirmer que, pour ε suffisamment petit :

$$\|\mathbf{w}^{k+2} - \mathbf{w}^{k+1}\|_{0,\lambda} \leq \frac{c}{\lambda} \left\| \sum_{j=0}^d (\mathbf{A}_j(\varepsilon \mathbf{w}^{k+1}) - \mathbf{A}_j(\varepsilon \mathbf{w}^k)) \partial_j \mathbf{w}^{k+2} - (\mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{w}^{k+1}) - \mathbf{B}(\varepsilon \mathbf{w}^k)) \mathbf{w}^{k+2} \right\|_{0,\lambda}.$$

où c est une constante notamment indépendante de ε et de $\mathbf{w}^{k+1}, \mathbf{w}^{k+2}$.

Comme les matrices \mathbf{A}_j et \mathbf{B} ont leurs coefficients continus par rapport aux variables (\mathbf{y}, \mathbf{v}) et comme $\|\mathbf{w}^k\|_\infty \leq 1$, $\|\mathbf{w}^{k+1}\|_\infty \leq 1$, $\|\mathbf{w}^{k+2}\|_\infty + \|\nabla \mathbf{w}^{k+2}\|_\infty \leq 1$, on montre que, pour ε suffisamment petit :

$$\|\mathbf{w}^{k+2} - \mathbf{w}^{k+1}\|_{0,\lambda} \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{w}^{k+1} - \mathbf{w}^k\|_{0,\lambda}.$$

On en conclut que la suite (\mathbf{w}^k) est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{0,\lambda}$ (et aussi pour $\|\cdot\|_{L^2(\Omega_T)}$). D'où la convergence de (\mathbf{w}^k) vers $\mathbf{w} \in L^2(\Omega_T)$.

Pour achever la démonstration du théorème 3.2.1, il reste à justifier que $\mathbf{w} \in \mathcal{A}(\Omega_T)$ et que \mathbf{w} est la solution du problème 3.2.3.1.

On commence par remarquer que, au sens des distributions, $\mathcal{T} \mathbf{w}^k \rightarrow \mathcal{T} \mathbf{w}$ et $\partial_d \mathbf{w}^k \rightarrow \partial_d \mathbf{w}$.

Comme (\mathbf{w}^k) est bornée, pour la norme $\|\cdot\|_{m,\lambda,\varepsilon}$, on en déduit que l'on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $H_{tan}^m(\Omega_T)$ et dans $H^1(\Omega_T)$ (car $\|\partial_d \mathbf{w}^k\|_{0,\lambda}$ est aussi borné). Ainsi $\mathbf{w} \in H_{tan}^m(\Omega_T) \cap H^1(\Omega_T)$.

Grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{w}$ est une solution du problème pénalisé (3.12). De plus, les estimations d'énergie L^2 assurent l'unicité de \mathbf{v}_ε .

Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, on peut montrer que, pour chaque $p \leq m$, $\partial_d^p \mathbf{v}_\varepsilon|_{x_d>0} \in H_{tan}^{m-p}(]-T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d)$ et $\partial_d^p \mathbf{v}_\varepsilon|_{x_d<0} \in H_{tan}^{m-p}(]-T_0, T[\times \mathbb{R}_-^d)$.

– Pour $p = 0$, on rappelle que $\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{w}$ est la somme de deux fonctions dont les restrictions à $x_d > 0$ et $x_d < 0$ sont respectivement dans $H_{tan}^m(]-T_0, T[\times \mathbb{R}_+^d)$ et $H_{tan}^m(]-T_0, T[\times \mathbb{R}_-^d)$.

- On admet que $p \leq m$ et que quelque soit $k \in \{0, \dots, p-1\}$, $\partial_d^k \mathbf{v}_\varepsilon$ est dans $H_{tan}^{m-k}(]-T_0, T[\times\mathbb{R}_+^d)$ et dans $H_{tan}^{m-k}(]-T_0, T[\times\mathbb{R}_-^d)$. On a :

$$\partial_d^p \mathbf{v}_\varepsilon = \partial_d^{p-1} \left(\mathbf{A}_d^{-1}(\mathbf{v}_\varepsilon) \left(- \sum_{j=0}^{d-1} \mathbf{A}_j(\mathbf{v}_\varepsilon) \partial_j \mathbf{v}_\varepsilon - \frac{\chi}{\varepsilon} \mathbf{P} \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{f}(\mathbf{v}_\varepsilon) \right) \right).$$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence et la régularité des coefficients, on peut prouver que, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, $\partial_d^p \mathbf{v}_\varepsilon$ est dans $H_{tan}^{m-p}(]-T_0, T[\times\mathbb{R}_+^d)$ et dans $H_{tan}^{m-p}(]-T_0, T[\times\mathbb{R}_-^d)$.

Au final \mathbf{v}_ε appartient à $H^\infty(]-T_0, T[\times\mathbb{R}_+^d)$ et à $H^\infty(]-T_0, T[\times\mathbb{R}_-^d)$.

L'estimation d'erreur est simplement obtenue en considérant $(\mathbf{v}_a + \varepsilon \mathbf{w})|_{x_d > 0} - \mathbf{v} = \varepsilon \mathbf{V}^{1,+} + \dots + \varepsilon^M \mathbf{V}^{M,+} + \varepsilon \mathbf{w}$ in $]-T_0, T[\times\mathbb{R}_+^d$.

Cela clôture la preuve du théorème 3.2.1.

3.2.4 Un premier exemple d'application

Dans cette section, on décrit une application simple de la méthode de pénalisation proposée dans le théorème 3.2.1, pour un problème linéaire et hyperbolique. Le fait que le problème soit linéaire rend possible la comparaison avec d'autres méthodes telles que celles décrites dans les papiers de Fornet [30] et de Rauch [53].

Dans cet exemple, $\bar{\mathbf{A}}$ est une matrice symétrique constante de taille $D \times D$ et \mathbf{C} est une matrice constante de taille $p \times D$ dont le rang est $p \leq D$.

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}(t, x) + \bar{\mathbf{A}} \partial_x \mathbf{u}(t, x) = \bar{\mathbf{f}}(t, x) & (t, x) \in]-T_0, T[\times]0, +\infty[\\ \mathbf{C} \mathbf{u}(t, 0) = \mathbf{0} & t \in]-T_0, T[\\ \mathbf{u}|_{t<0} = \mathbf{0}. & x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

On admet que toutes les hypothèses de la section 3.2.1 sont satisfaites. De plus, la sous-matrice $\mathbf{C}_{p \times p}$ composée des p premières colonnes de \mathbf{C} est supposée inversible.

La première étape est le changement d'inconnu. On choisit alors le changement d'inconnu décrit dans la preuve du lemme 3.2.1 :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{p \times p} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} \\ u_{p+1} \\ \vdots \\ u_D \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, le changement d'inconnu \mathbf{H} et son gradient sont les applications linéaires

suivantes :

$$\mathbf{H} : \mathbf{v} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{p \times p}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \\ v_{p+1} \\ \vdots \\ v_D \end{pmatrix} \end{pmatrix} \text{ et } \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{H}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{C}_{p \times p}^{-1}}{\mathbf{0}} \middle| \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{I}_{D-p}} \right).$$

où \mathbf{I}_{D-p} est la matrice identité de \mathbb{R}^{D-p} .

Au final, la matrice de pénalisation est

$$\mathbf{M} = \left(\frac{\mathbf{C}_{p \times p}^{\top}}{\mathbf{0}} \middle| \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{I}_{D-p}} \right) \left(\frac{\mathbf{I}_p}{\mathbf{0}} \middle| \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} \right) \left(\frac{\mathbf{C}_{p \times p}}{\mathbf{0}} \middle| \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{I}_{D-p}} \right) = \left(\frac{\mathbf{C}_{p \times p}^{\top} \mathbf{C}_{p \times p}}{\mathbf{0}} \middle| \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} \right).$$

et le problème pénalisé s'écrit, pour les inconnues originelles :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon + \bar{\mathbf{A}} \partial_x \mathbf{u}_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{M} \mathbf{u}_\varepsilon = \bar{\mathbf{f}} & \text{in }]-T_0, T[\times \mathbb{R} \\ \mathbf{u}_\varepsilon|_{t<0} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Dans les résultats de Rauch [53], pour créer la matrice de pénalisation, il est nécessaire de trouver une matrice définie positive \mathbf{E} telle que $\ker \mathbf{C}$ soit le sous-espace généré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres négatives ou nulles de $\mathbf{E}\bar{\mathbf{A}}$. Dans ce cas, la matrice de pénalisation s'écrit $\Psi^{\top} \Psi$ avec $\Psi = \mathbf{O} \mathbf{E}^{\frac{1}{2}}$, \mathbf{O} représentant une matrice orthogonale quelconque. Le théorème 2.7 de l'article de Fornet et Guès [30] propose une matrice de pénalisation de la forme $(\Psi^{-1})^{\top} \mathbb{P} \Psi^{-1}$ où \mathbb{P} est le projecteur de \mathbb{R}^D sur $\Psi^{-1} \ker \mathbf{C}$. Au final, pour ces deux méthodes de pénalisation (Rauch et Fornet-Guès), le point le plus délicat est la recherche de la matrice \mathbf{E} ainsi que le calcul de $\mathbf{E}^{\frac{1}{2}}$.

La méthode de pénalisation proposée dans ce chapitre est plus directe, même dans le cas linéaire, et s'étend au cas quasilinéaire. La principale difficulté est le choix du changement d'inconnue, qui est donné dans la démonstration du lemme 3.2.1. De plus, dans cet exemple précis, l'expression de la matrice de pénalisation est simple.

3.3 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a été l'occasion de se plonger dans les théories sur les solutions régulières locales en temps, pour des systèmes hyperboliques quasilinéaires et de rappeler quelques résultats connus de la théorie, puis de nous focaliser sur le problème de l'approximation par pénalisation d'un certain type de problème aux limites.

Nous avons étendu la nouvelle méthode de pénalisation proposée dans le chapitre 2 et montré rigoureusement que celle-ci ne génère pas de couche limite, à aucun ordre. On observe donc que l'erreur de pénalisation vérifie l'estimation $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^m} = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Un autre aspect de la méthode de pénalisation proposé est sa simplicité : après un changement de variable adapté,

on n'utilise qu'une matrice de projection. Par exemple, même dans le cas d'un système linéaire, la matrice de pénalisation est plus simple que celle proposée par d'autres auteurs [30, 53].

Cela clôt l'étude des systèmes hyperboliques dans cette thèse, car nous allons nous concentrer, dans la dernière partie, à l'étude du potentiel électrique, dans le problème de modélisation du plasma de bord.

D'autres points pourraient être étudiés de manière théorique concernant l'approche par pénalisation de problèmes aux limites hyperboliques, comme par exemple le cas d'un bord caractéristique, la convergence quand ε tend vers 0 pour un problème discrétréisé comme ce qui a été fait par Chainais-Hillairet et Grenier [23] dans le cadre de la limite visqueuse avec un schéma de Lax-Friedrichs. On pourrait aussi étudier le comportement de la méthode de pénalisation dans un cadre scalaire ou avec une seule dimension d'espace en s'autorisant l'utilisation de solutions faibles globales en temps.

Chapitre 4

Traitement des équations du potentiel électrique

Jusqu'à présent, nous avons étudié des méthodes de pénalisation appliquées au système N, Γ avec une généralisation à certains systèmes hyperboliques non linéaires.

Bien évidemment l'étude du système N, Γ n'est qu'un intermédiaire pour un modèle plus complet sur la géométrie réelle d'un tokamak. Les autres quantités physiques que l'on souhaiterait modéliser sont la température (ou l'énergie) ainsi que le courant (ou le potentiel électrique).

Pour la modélisation de la température, les conditions aux limites sont de type Neumann non-linéaire. Une pénalisation a été proposée par Paredes *et al.* [47], toujours dans le cadre de l'ANR ESPOIR.

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à une autre variable qui est le potentiel électrique ϕ_η . η désignant ici la résistivité dans la direction parallèle aux lignes de champ magnétique.

Nous allons nous intéresser à un modèle simplifié à deux dimensions d'espace proposé par des physiciens du CEA de Cadarache, s'écrivant :

$$\begin{cases} -\partial_t \partial_y^2 \phi_\eta - \frac{1}{\eta} \partial_x^2 \phi_\eta + \nu \partial_y^4 \phi_\eta = S & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\ \partial_y \phi_\eta|_{t=0} = \partial_y \phi_{ini} & \text{dans } \Omega \\ \partial_y \phi_\eta|_{\Sigma_{||}} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_y^3 \phi_\eta|_{\Sigma_{||}} = 0 & \text{sur }]0, T[\times \Sigma_{||} \\ \partial_x \phi_\eta|_{x=-L} = \eta \left(1 - e^{\Lambda - \phi_\eta|_{x=-L}} \right) & \text{sur }]0, T[\times]0, l[\times \{-L\} \\ \partial_x \phi_\eta|_{x=L} = -\eta \left(1 - e^{\Lambda - \phi_\eta|_{x=L}} \right) & \text{sur }]0, T[\times]0, l[\times \{L\} \\ \text{condition de périodicité de } \phi_\eta & \text{sur }]0, T[\times \{-0.5, 0.5\} \times]l, 1[, \end{cases} \quad (4.1)$$

où ν correspond à la viscosité ionique perpendiculaire et Λ désigne le potentiel de référence à l'intérieur du limiteur. x est la direction parallèle aux lignes de champ magnétique et y correspond à la direction radiale, voir la figure 4.1.

Dans l'article de Negulescu *et al.* [45], il est prouvé que, à $\eta > 0$ fixé, le problème (4.1) est bien posé, sous des hypothèses convenables sur les données ϕ_{ini} et S .

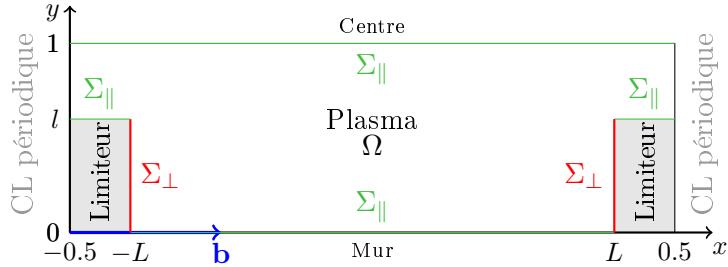


FIGURE 4.1 – Représentation en deux dimensions de la zone contenant le plasma de bord. x correspond à une abscisse curviligne le long d'une ligne de champ magnétique (de direction \mathbf{b}). Le domaine contenant le plasma est Ω et les frontières sont Σ_{\parallel} (pour tout la partie parallèle à \mathbf{b}) et Σ_{\perp} (pour la partie perpendiculaire à \mathbf{b}). Cette configuration sera notamment celle utilisée dans la section 4.3.

Les conditions aux limites de type Fourier non linéaire en $x = -L$ et $x = L$ correspondent à un courant électrique parallèle à l'interface plasma-limiteur, (*cf* loi d'Ohm). Les conditions sur le haut du limiteur ($y = l$) sont un peu artificielles. En effet, en principe, les lignes de champ sont parallèles à la face en haut du limiteur, donc il n'y a que très peu d'interactions avec le haut du limiteur. Le but est ainsi de proposer des conditions aux limites sur le haut du limiteur qui rendent le système bien posé tout en n'ayant pas un effet trop important.

Un des buts de notre travail est de proposer une méthode de pénalisation pour ce système, avec la difficulté engendrée par une condition aux limites de type Robin non linéaire. Mais une autre difficulté apparaît : En pratique, la résistivité parallèle η est très faible, de l'ordre de 10^{-6} [60]. Le système a donc un comportement fortement anisotrope. Remarquons que c'est sur la base de cette anisotropie, liés aux forts champs magnétiques dans le tokamak, que l'on a considéré un modèle à une dimension pour N, Γ , dans le chapitre 2. Pour résoudre numériquement l'équation modélisant le potentiel électrique, on va utiliser des méthodes préservant l'asymptotique (*asymptotic-preserving*, en anglais).

Pour se concentrer sur les difficultés inhérentes à la faible résistivité η , nous allons commencer par considérer le modèle jouet 1D stationnaire ci-dessous :

$$\begin{cases} -\partial_x \left(\frac{1}{\eta(x)} \partial_x \phi_\eta(x) \right) = S - \partial_x \left(\frac{1}{\eta(x)} f(x) \right) & x \in]-L, L[\\ \frac{1}{\eta} \partial_x \phi_\eta(-L) = \frac{1}{\eta(-L)} f(-L) + \left(1 - e^{\Lambda(-L) - \phi_\eta(-L)} \right) & x = -L \\ \frac{1}{\eta} \partial_x \phi_\eta(L) = \frac{1}{\eta(L)} f(L) - N(L) \left(1 - e^{\Lambda(L) - \phi_\eta(L)} \right) & x = L, \end{cases} \quad (4.2)$$

où S et f correspondent à des termes sources.

Ce problème est de type elliptique avec une condition aux limites de Robin non linéaire.

Malgré sa simplicité apparente, la question de l'existence et de l'unicité d'une solution à (4.2) n'est pas évidente, à cause de la non-linéarité des conditions aux limites. De plus, en pratique la valeur de la résistivité parallèle η est très faible, de l'ordre de 10^{-6} à 10^{-8} .

La résolution numérique de ce problème génère deux difficultés :

- $0 < \eta \ll 1$: Premièrement, on constate que, après multiplication des équations du système (4.2) par η , si on remplace formellement η par 0 dans (4.2), le problème obtenu devient mal posé. Cela se traduit numériquement par des difficultés à résoudre le système linéaire quand η est proche de 0. Cela sera l'objet de la section 4.1.
- La pénalisation d'une condition aux limites de type Robin non linéaire qui sera traité dans la section 4.2.

La section 4.1 de ce chapitre sera consacrée à l'étude du modèle 1D avec une généralisation pour un problème multidimensionnel elliptique isotrope. Dans la section 4.1, nous donnerons aussi quelques résultats numériques issus d'essais de méthodes de pénalisation des conditions aux limites.

4.1 Traitement du cas $\eta \rightarrow 0$ pour le modèle 1D

Dans cette section, nous allons mettre en évidence les difficultés pour la résolution numérique de (4.2) et proposer une méthode de résolution de type *Asymptotic-Preserving* (AP).

Après une brève introduction aux méthodes de type AP, nous allons en proposer une pour un modèle elliptique linéaire puis non-linéaire. Les tests numériques seront conduits sur des problèmes 1D tandis que les études théoriques seront présentées pour des problèmes multidimensionnels isotropes.

Il apparaît paradoxal d'étudier des problèmes isotropes alors que la difficulté décrite précédemment pour le problème du potentiel électrique vient de la forte anisotropie du plasma. Dans le modèle 1D du potentiel électrique (4.2), on ne conserve que la direction parallèle aux lignes de champ magnétique, qui est à l'origine du mauvais comportement des équations quand η tend vers 0. Les problèmes multidimensionnels isotropes étudiés dans la suite ne sont alors qu'une extension directe du modèle 1D (4.2).

4.1.1 Quelques généralités sur les méthodes de type *Asymptotic-Preserving*

Beaucoup de modèles s'écrivent sous la forme d'un problème \mathcal{P}_η liés à un paramètre $\eta > 0$ proche de 0. Dans certains cas, le fait de remplacer η par 0 rend le problème \mathcal{P}_0 mal posé. Dans cette situation, le système est souvent difficile à résoudre parce que \mathcal{P}_η est proche d'un problème mal posé : cela se traduira par un mauvais conditionnement de la matrice, un problème raide ou une condition de stabilité difficile à satisfaire.

L'idée est donc de reformuler le problème \mathcal{P}_η en un nouveau problème \mathcal{P}'_η équivalent tel que le problème limite \mathcal{P}'_0 soit bien posé et que l'unique solution de \mathcal{P}'_η converge vers celle de \mathcal{P}'_0 en un sens à donner, quand η tend vers 0. Cette approche a été introduit par Jin [38] pour des modèles cinétiques multi-échelles. Depuis, les schémas AP font l'objet de nombreuses publications pour des modèles de plasma fluides ou cinétiques : On peut par exemple citer les travaux de Degond *et al.* [26, 27], Mentrelli et Negulescu [44], Vignal [65], Filbet [28]. Bien évidemment, pour la résolution numérique du problème \mathcal{P}'_η , il est nécessaire d'en construire une approximation discrète $\mathcal{P}'_{\eta,h}$, où h désigne le pas de la discréttisation. Un schéma très classique sur les méthodes AP est donnée dans la figure 4.2.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}'_{\eta,h} & \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} & \mathcal{P}'_{0,h} \\
 \downarrow h \rightarrow 0 & & \downarrow h \rightarrow 0 \\
 \mathcal{P}'_\eta & \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} & \mathcal{P}'_0
 \end{array}$$

FIGURE 4.2 – Schéma présentant les convergences à montrer lors de l'utilisation de méthodes de type AP

Différentes techniques sont possibles, comme faire un développement asymptotique en η , séparer la partie moyenne de la partie "fluctuante". Dans cette section, nous nous concentrerons sur la dernière technique citée qui a l'avantage d'être assez naturelle à mettre en place.

4.1.2 Limite Robin-Neumann dans le cas linéaire

Nous remarquons qu'il se passe exactement la même chose dans le cas linéaire lorsque l'on passe à la limite Robin-Neumann. Dans un but pédagogique, on va présenter ici la méthode AP utilisée sur ce cas linéaire : cela permettra de mieux en saisir les idées principales en évitant les difficultés d'ordre technique.

4.1.2.1 Etude théorique

On s'intéresse ici à un problème linéaire avec des conditions de type Robin (ou Fourier). On considère Ω un domaine ouvert, connexe, borné dans \mathbb{R}^d (en pratique, $d = 2$ ou 3) et dont la frontière $\partial\Omega$ est supposée lipschitzienne. On note \mathbf{n} la normale unitaire sortante de Ω .

On étudie le comportement quand η tend vers 0 du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta\phi_\eta = f & \text{dans } \Omega \\ -\nabla\phi_\eta \cdot \mathbf{n} = \eta\phi_{\eta|\partial\Omega} + g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.3)$$

On suppose que $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ et qu'elles vérifient la condition de compatibilité suivante $\int_\Omega f d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} g d\sigma$. La condition de compatibilité précédente est une condition nécessaire pour l'existence d'une solution au problème avec conditions aux limites de Neumann (4.3) dans le cas $\eta = 0$.

On note

$$\langle \phi_\eta \rangle = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_\Omega \phi_\eta d\mathbf{x}.$$

On pose alors $\phi_\eta = \tilde{\phi}_\eta + \langle \phi_\eta \rangle$, c'est à dire que $\tilde{\phi}_\eta$ est une fonction telle que $m_\Omega(\tilde{\phi}_\eta) = 0$. Le problème ainsi reformulé devient :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\phi}_\eta = f & \text{dans } \Omega \\ -\nabla \tilde{\phi}_\eta \cdot \mathbf{n} = \eta \tilde{\phi}_\eta + \eta \langle \phi_\eta \rangle + g & \text{sur } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} \tilde{\phi}_\eta d\mathbf{x} = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

On notera que le problème (4.4) comporte *a priori* deux inconnues $\tilde{\phi}_\eta$ et $\langle \phi_\eta \rangle$. Cependant, en intégrant la condition aux limites sur la frontière, on remarque que l'on peut exprimer m_Ω en fonction de $\tilde{\phi}_\eta$. On a ainsi formellement :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} -\nabla \tilde{\phi}_\eta \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \eta \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta d\sigma + \eta \langle \phi_\eta \rangle \text{mes}(\partial\Omega) + \int_{\partial\Omega} g d\sigma \\ \int_{\Omega} -\Delta \tilde{\phi}_\eta d\mathbf{x} &= \eta \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta d\sigma + \eta \langle \phi_\eta \rangle \text{mes}(\partial\Omega) + \int_{\partial\Omega} g d\sigma \quad \text{d'après la formule de la divergence} \\ \int_{\Omega} f d\mathbf{x} &= \eta \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta d\sigma + \eta \langle \phi_\eta \rangle \text{mes}(\partial\Omega) + \int_{\partial\Omega} g d\sigma \quad \text{d'après (4.4)}. \end{aligned}$$

Comme $\int_{\Omega} f d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} g d\sigma$, on a l'expression suivante :

$$\langle \phi_\eta \rangle = -\frac{1}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta d\sigma. \quad (4.5)$$

Au final, le problème (4.4) se réécrit :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\phi}_\eta = f & \text{dans } \Omega \\ -\nabla \tilde{\phi}_\eta \cdot \mathbf{n} = \eta \tilde{\phi}_\eta - \frac{\eta}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta d\sigma + g & \text{sur } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} \tilde{\phi}_\eta d\mathbf{x} = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

On définit l'espace $H_m^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} v d\mathbf{x} = 0\}$ muni du produit scalaire hilbertien de $H^1(\Omega)$. L'espace $H_m^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert car c'est un sous espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega)$.

On peut donc écrire le problème (4.6) sous sa formulation faible : Trouver $\tilde{\phi}_\eta \in H_m^1(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} \forall \psi \in H_m^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla \tilde{\phi}_\eta \cdot \nabla \psi d\mathbf{x} + \eta \left(\int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta \psi d\sigma - \frac{1}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta d\sigma \int_{\partial\Omega} \psi d\sigma \right) = \int_{\Omega} f \psi d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} g \psi d\sigma. \end{cases} \quad (4.7)$$

On va commencer par énoncer le lemme préliminaire suivant :

Lemme 4.1.1

On admet la condition de compatibilité $\int_{\Omega} f \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma$. Le problème (4.7) est alors équivalent au problème : Trouver $\tilde{\phi}_{\eta} \in H_m^1(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} \forall \varphi \in H^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla \tilde{\phi}_{\eta} \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \eta \left(\int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_{\eta} \varphi \, d\sigma - \frac{1}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_{\eta} \, d\sigma \int_{\partial\Omega} \varphi \, d\sigma \right) \\ = \int_{\Omega} f \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} g \varphi \, d\sigma. \end{cases} \quad (4.8)$$

Démonstration : Supposons d'abord que $\tilde{\phi}_{\eta} \in H_m^1(\Omega)$ est solution de (4.7). Soit $\varphi \in H^1(\Omega)$. En posant $\psi = \varphi - \langle \varphi \rangle$, on constate que $\psi \in H_m^1(\Omega)$. Donc d'après (4.7), on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \tilde{\phi}_{\eta} \cdot \nabla (\varphi - \langle \varphi \rangle) \, d\mathbf{x} + \eta \left(\int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_{\eta} (\varphi - \langle \varphi \rangle) \, d\sigma - \frac{1}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_{\eta} \, d\sigma \int_{\partial\Omega} \varphi - \langle \varphi \rangle \, d\sigma \right) \\ &= \int_{\Omega} f (\varphi - \langle \varphi \rangle) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} g (\varphi - \langle \varphi \rangle) \, d\sigma. \end{aligned}$$

Comme $\langle \varphi \rangle$ est indépendant de \mathbf{x} , on en déduit que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \tilde{\phi}_{\eta} \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \eta \left(\int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_{\eta} \varphi \, d\sigma - \frac{1}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_{\eta} \, d\sigma \int_{\partial\Omega} \varphi \, d\sigma \right) \\ &= \int_{\Omega} f (\varphi - \langle \varphi \rangle) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} g (\varphi - \langle \varphi \rangle) \, d\sigma - \langle \varphi \rangle \underbrace{\left(\int_{\Omega} f \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma \right)}_{=0}. \end{aligned}$$

Donc $\tilde{\phi}_{\eta}$ est solution de (4.8). Pour la réciproque, il suffit de remarquer que $H_m^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. ■

On montre aussi que le problème faible reformulé avec la décomposition $\phi_{\eta} = \tilde{\phi}_{\eta} + \langle \phi_{\eta} \rangle$ est équivalent au problème faible originel pour ϕ_{η} , dans le cas $\eta > 0$:

Lemme 4.1.2

Soit $\eta > 0$. On pose $\phi_{\eta} = \tilde{\phi}_{\eta} + \langle \tilde{\phi}_{\eta} \rangle$. Alors $\tilde{\phi}_{\eta} \in H_m^1(\Omega)$ est solution de (4.7) si et seulement si $\phi_{\eta} \in H^1(\Omega)$ est solution de

$$\begin{cases} \forall \varphi \in H^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla \phi_{\eta} \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega} \phi_{\eta} \varphi \, d\sigma = \int_{\Omega} f \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} g \varphi \, d\sigma. \end{cases} \quad (4.9)$$

Démonstration : Soit $\tilde{\phi}_{\eta} \in H_m^1(\Omega)$ solution de (4.7), alors, d'après le lemme 4.1.1, cette fonction est aussi solution de (4.8). Ainsi, en posant $\phi_{\eta} = \tilde{\phi}_{\eta} - \frac{1}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_{\eta} \, d\sigma$, on montre que $\phi_{\eta} \in H^1(\Omega)$ est solution de (4.9).

Pour la réciproque, on considère que $\phi_\eta \in H^1(\Omega)$ est solution de (4.9). Alors en posant $\tilde{\phi}_\eta = \phi_\eta - \langle \phi_\eta \rangle \in H_m^1(\Omega)$, on obtient :

$$\begin{cases} \forall \varphi \in H^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla \tilde{\phi}_\eta \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta \varphi \, d\sigma + \eta \langle \phi_\eta \rangle \int_{\partial\Omega} \varphi \, d\sigma = \int_{\Omega} f \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} g \varphi \, d\sigma. \end{cases} \quad (4.10)$$

En prenant $\varphi = 1$, on a

$$\int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta \, d\sigma = \langle \phi_\eta \rangle \operatorname{mes}(\partial\Omega).$$

C'est à dire que $\tilde{\phi}_\eta$ est solution de (4.8) et donc aussi de (4.7). ■

On rappelle l'inégalité de Poincaré-Wirtinger qui sera utilisée à plusieurs reprises dans ce chapitre :

Lemme 4.1.3 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger)

Soit Ω , un ouvert bornée, connexe à frontière lipschitzienne. Alors, pour tout $v \in H_m^1(\Omega)$, on a :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{PW}(\Omega) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)},$$

où $C_{PW}(\Omega) > 0$ ne dépend que de Ω .

Lemme 4.1.4 (Inégalité de trace)

Pour tout $v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$\|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_{tr}(\Omega) \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

où $C_{tr}(\Omega) > 0$ ne dépend que de Ω .

On énonce aussi pour rappel le théorème III.27 du livre de Brezis [19] :

Lemme 4.1.5

Soit E un espace de Banach réflexif et soit (u_n) une suite bornée dans E . Alors on peut extraire une sous-suite de (u_n) qui converge faiblement dans E .

On va alors démontrer le résultat suivant :

Proposition 4.1.1

Pour tout $\eta \geq 0$, le problème faible (4.7) admet une unique solution $\tilde{\phi}_\eta \in H_m^1(\Omega)$. De plus, cette solution $\tilde{\phi}_\eta$ est solution du problème (4.6) au sens suivant :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\phi}_\eta = f & \text{dans } L^2(\Omega) \\ -\nabla \tilde{\phi}_\eta \cdot \mathbf{n} = \eta \tilde{\phi}_\eta - \frac{\eta}{\operatorname{mes}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta \, d\sigma + g & \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Omega) \\ \int_{\Omega} \tilde{\phi}_\eta \, d\mathbf{x} = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Démonstration : Pour montrer, l'existence et l'unicité de la solution $\tilde{\phi}_\eta$ du problème (4.7), on va appliquer le théorème de Lax-Milgram. En effet, l'application

$$\mathcal{L} : \psi \in H_m^1(\Omega) \mapsto \int_{\Omega} f \psi d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} g \psi d\sigma$$

est une forme linéaire continue sur $H_m^1(\Omega)$. De plus, l'application

$$a : (\tilde{\phi}_\eta, \psi) \mapsto \int_{\Omega} \nabla \tilde{\phi}_\eta \cdot \nabla \psi d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta \psi d\sigma - \frac{\eta}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta d\mathbf{x} \int_{\partial\Omega} \psi d\sigma$$

est :

- Une forme bilinéaire sur $H_m^1(\Omega) \times H_m^1(\Omega)$.
- Continue sur $H_m^1(\Omega) \times H_m^1(\Omega)$.
- et coercive sur $H_m^1(\Omega) \times H_m^1(\Omega)$ car :

$$\forall \tilde{\phi}_\eta \in H_m^1(\Omega),$$

$$\begin{aligned} a(\tilde{\phi}_\eta, \tilde{\phi}_\eta) &= \|\nabla \tilde{\phi}_\eta\|_{L^2(\Omega)} + \eta \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta^2 d\sigma - \frac{\eta}{\text{mes}(\partial\Omega)} \left(\int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta d\sigma \right)^2 \\ &\geq \|\nabla \tilde{\phi}_\eta\|_{L^2(\Omega)} + 0 \text{ car d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz,} \\ &\quad \left(\int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta \times 1 d\sigma \right)^2 \leq \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta^2 d\sigma \text{ mes}(\partial\Omega) \\ &\geq C_{PW}(\Omega) \|\tilde{\phi}_\eta\|_{H^1(\Omega)}^2 \text{ d'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger dans } H_m^1(\Omega). \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\forall \tilde{\phi}_\eta \in H_m^1(\Omega), a(\tilde{\phi}_\eta, \tilde{\phi}_\eta) \geq C_{PW}(\Omega) \|\tilde{\phi}_\eta\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (4.12)$$

On remarque que la constante $C_{PW}(\Omega)$ ne dépend pas de η .

Le théorème de Lax-Milgram peut donc s'appliquer et on en déduit que le problème (4.7) est bien posé : Il existe un unique $\tilde{\phi}_\eta \in H_m^1(\Omega)$ qui est solution de (4.7). Observons que l'inégalité de la coercivité est uniforme en η et reste vraie pour $\eta = 0$. Ainsi, la démonstration ci-dessus reste valable dans le cas $\eta = 0$.

On fait maintenant l'interprétation de la solution du problème faible (4.7). D'après le lemme 4.1.1, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla \tilde{\phi}_\eta \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} + \eta \left(\underbrace{\int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta \varphi d\sigma}_{=0} - \frac{1}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta d\mathbf{x} \underbrace{\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma}_{=0} \right) = \int_{\Omega} f \varphi d\mathbf{x} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} g \varphi d\sigma}_{=0}. \end{array} \right.$$

On a donc

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{\phi}_\eta \cdot \nabla \varphi - f \varphi d\mathbf{x} = 0.$$

Or, d'après la définition de la dérivée au sens des distributions cela est équivalent à

$$\langle -\Delta \tilde{\phi}_\eta - f, \varphi \rangle_{\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)', \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)} = 0.$$

Donc, au sens des distributions, on a :

$$-\Delta \tilde{\phi}_\eta = f.$$

De plus, on a fait l'hypothèse que $f \in L^2(\Omega)$, ainsi $\Delta\tilde{\phi}_\eta \in L^2(\Omega)$.

On montre maintenant que l'on a la relation :

$$-\nabla\tilde{\phi}_\eta \cdot \mathbf{n} = \eta\tilde{\phi}_\eta - \frac{\eta}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta d\sigma + g \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Pour cela on va utiliser un lemme dont la démonstration est dans le livre de Girault-Raviart [32], page 28 :

Lemme 4.1.6

On note $H_{div}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}$. Pour tout $v \in H_{div}(\Omega)$, on peut définir l'opérateur de trace normale $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ continue de $H_{div}(\Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, à partir de la formule de Green :

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega), \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} = - \int_\Omega \varphi \nabla \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

On applique la formule du lemme ci dessus en prenant $\mathbf{v} = \nabla\tilde{\phi}_\eta$ et, d'après l'équation (4.8), on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varphi \in H^1(\Omega), \\ \int_\Omega \underbrace{(-\Delta\tilde{\phi}_\eta - f)}_{=0} \varphi d\mathbf{x} + \langle \nabla\tilde{\phi}_\eta \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \\ + \eta \left(\int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta \varphi d\sigma - \frac{1}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta d\sigma \int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right) = - \int_{\partial\Omega} g \varphi d\sigma. \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition 4.1.1. ■

On a montré que le problème (4.7) pour $\tilde{\phi}_\eta$ est bien posé.

Etude de la limite quand η tend vers 0 : On étudie maintenant le comportement du problème (4.7) quand η tend vers 0.

Proposition 4.1.2

$\tilde{\phi}_\eta$ converge vers $\tilde{\phi}_0$ dans $L^2(\Omega)$ et $\tilde{\phi}_0 \in H_m^1(\Omega)$ est l'unique solution faible du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\tilde{\phi}_0 = f & \text{dans } \Omega \\ -\nabla\tilde{\phi}_0 \cdot \mathbf{n} = g & \text{sur } \partial\Omega \\ \int_\Omega \tilde{\phi}_0 d\mathbf{x} = 0. & \end{array} \right. \quad (4.14)$$

C'est à dire que $\tilde{\phi}_0$ est la solution (4.7), pour $\eta = 0$.

Pour revenir au problème initial, on rappelle que $\phi_\eta = \tilde{\phi}_\eta + \langle \phi_\eta \rangle = \tilde{\phi}_\eta - \frac{1}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta d\sigma$ est l'unique solution faible de (4.3) avec $\eta > 0$. On pose ensuite $\phi_0 = \tilde{\phi}_0 - \frac{1}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_0 d\sigma$.

De plus, il existe $c(\Omega, f, g) > 0$, indépendant de η , tel que l'on ait l'estimation :

$$\|\phi_\eta - \phi_0\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\Omega, f, g)\eta.$$

Démonstration : D'après la démonstration de l'inégalité sur la coercivité (4.12), on peut affirmer que

$$\begin{aligned}
 C_{PW}(\Omega) \|\tilde{\phi}_\eta\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq a(\tilde{\phi}_\eta, \tilde{\phi}_\eta) = \mathcal{L}(\tilde{\phi}_\eta) \\
 &\leq \int_\Omega f \tilde{\phi}_\eta \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} g \tilde{\phi}_\eta \, d\sigma \\
 &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \underbrace{\|\tilde{\phi}_\eta\|_{L^2(\Omega)}}_{\leq \|\tilde{\phi}_\eta\|_{H^1(\Omega)}} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\tilde{\phi}_\eta\|_{L^2(\partial\Omega)} \text{ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
 &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{\phi}_\eta\|_{H^1(\Omega)} + C_{tr}(\Omega) \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\tilde{\phi}_\eta\|_{H^1(\Omega)} \\
 &\quad \text{d'après la continuité de l'opérateur de trace dans } H^1(\Omega).
 \end{aligned}$$

On rappelle que $C_{tr}(\Omega) > 0$ est une constante indépendante de η et $\tilde{\phi}_\eta$.

Donc pour tout $\eta \geq 0$, on a :

$$\|\tilde{\phi}_\eta\|_{H^1(\Omega)} \leq \underbrace{\frac{1}{C_{PW}(\Omega)} (\|f\|_{L^2(\Omega)} + C_{tr}(\Omega) \|g\|_{L^2(\partial\Omega)})}_{\text{indépendant de } \eta}.$$

Ainsi, pour tout $\eta > 0$, $\tilde{\phi}_\eta$ est à valeur dans un sous ensemble borné de $H^1(\Omega)$. D'après le lemme 4.1.5, on peut extraire une sous-suite encore notée $(\tilde{\phi}_\eta)$ convergeant faiblement vers $\tilde{\phi}_0$ dans $H_m^1(\Omega)$.

Grâce à la convergence faible de la sous-suite $(\tilde{\phi}_\eta)$, on peut montrer que la limite $\tilde{\phi}_0$ est aussi la solution du problème (4.7) pour $\eta = 0$. On passe à la limite $\eta \rightarrow 0$ dans le problème (4.7), vérifié par $\tilde{\phi}_\eta$:

$$\begin{aligned}
 \forall \psi \in H_m^1(\Omega), \\
 \int_\Omega \nabla \tilde{\phi}_\eta \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} + \eta \left(\int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta \psi \, d\sigma - \frac{1}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta \, d\sigma \int_{\partial\Omega} \psi \, d\sigma \right) &= \int_\Omega f \psi \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} g \psi \, d\sigma \\
 \downarrow &\quad \downarrow & \downarrow & \quad \text{quand } \eta \rightarrow 0 \\
 \int_\Omega \nabla \tilde{\phi}_0 \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} + 0 &= -0 & &= \int_\Omega f \psi \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} g \psi \, d\sigma.
 \end{aligned}$$

Or, le problème consistant à trouver $\tilde{\phi}_0 \in H_m^1(\Omega)$ tel que

$$\forall \psi \in H_m^1(\Omega), \int_\Omega \nabla \tilde{\phi}_0 \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} = \int_\Omega f \psi \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} g \psi \, d\sigma \quad (4.15)$$

admet une unique solution. Ainsi, la limite $\tilde{\phi}_0$ étant indépendant du choix de l'extraction de la suite, on en déduit la convergence de toute la suite $(\tilde{\phi}_\eta)_{\eta>0}$.

On veut maintenant estimer $\|\tilde{\phi}_\eta - \tilde{\phi}_0\|_{H^1(\Omega)}$. Pour cela, on fait la différence entre les problèmes faibles (4.7) et (4.15). On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 \|\nabla (\tilde{\phi}_\eta - \tilde{\phi}_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= -\eta \left(\int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta (\tilde{\phi}_\eta - \tilde{\phi}_0) \, d\sigma - \frac{1}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta \, d\sigma \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta - \tilde{\phi}_0 \, d\sigma \right) \\
 &\leq \eta \left(\|\tilde{\phi}_\eta\|_{L^2(\partial\Omega)} + \text{mes}(\partial\Omega) \|\tilde{\phi}_\eta\|_{L^2(\partial\Omega)} \right) \|\tilde{\phi}_\eta - \tilde{\phi}_0\|_{L^2(\partial\Omega)}.
 \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (lemme 4.1.3), on a :

$$\|\tilde{\phi}_\eta - \tilde{\phi}_0\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1 + \text{mes}(\partial\Omega)}{C_{PW}(\Omega)} \|\tilde{\phi}_\eta\|_{H^1(\Omega)} \eta.$$

Comme $\phi_\eta - \phi_0 = \tilde{\phi}_\eta - \tilde{\phi}_0 - \frac{1}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_\eta - \tilde{\phi}_0 d\sigma$, on en déduit l'existence d'une constante $c(\Omega, f, g)$, indépendante de η telle que

$$\|\phi_\eta - \phi_0\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\Omega, f, g) \eta. \quad \blacksquare$$

Cette propriété permet de montrer le bon comportement du problème (4.7), vérifié par $\tilde{\phi}_\eta$.

4.1.2.2 Tests numériques

La décomposition $\phi_\eta = \tilde{\phi}_\eta + \langle \phi_\eta \rangle$ permet de définir cette quantité à partir du problème (4.7) vérifié par $\tilde{\phi}_\eta$. De plus, on a la convergence dans $H^1(\Omega)$ de ϕ_η vers $\phi_0 = \tilde{\phi}_0 + \langle \phi_0 \rangle$, où $\tilde{\phi}_0$ est la solution du problème (4.7) pour $\eta = 0$, c'est à dire du système (4.15). En reprenant les notations générales des méthodes AP présentées dans la figure 4.2, on remarque que l'on a défini les problèmes \mathcal{P}'_η et \mathcal{P}'_0 . Pour compléter l'étude, il reste donc à créer le problème discréétisé $\mathcal{P}'_{\eta,h}$, de pas h et à étudier sa limite quand η et h tendent vers 0.

Maintenant que la théorie a été présentée, nous allons désormais nous attacher à montrer numériquement l'intérêt d'utiliser la décomposition partie moyenne et partie fluctuante.

Nous allons ainsi considérer le problème 1D suivant :

$$\begin{cases} -\phi_\eta'' = f & \text{dans }]0, 1[\\ \phi'_\eta(0) = \eta \phi_\eta(0) + g_0 \\ -\phi'_\eta(1) = \eta \phi_\eta(1) + g_1. \end{cases} \quad (4.16)$$

où f, g_0, g_1 tel que $\int_0^1 f dx = g_0 + g_1$.

On suppose que f est régulière, par exemple continue. On notera F la primitive de f .

Pour les tests numériques, nous avons choisi :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \\ g_0 &= \cos(0) = 1 \\ g_1 &= -\cos(1). \end{aligned}$$

On peut alors mettre en œuvre le schéma volumes finis de pas constant δx suivant pour

résoudre le problème (4.16) :

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{\delta x \eta}{1 + \frac{\delta x}{2} \eta} & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 + \frac{\delta x \eta}{1 + \frac{\delta x}{2} \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\eta, \frac{1}{2}} \\ \phi_{\eta, \frac{3}{2}} \\ \vdots \\ \phi_{\eta, K - \frac{3}{2}} \\ \phi_{\eta, K - \frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta x (F(\delta x) - F(0)) - \frac{\delta x}{1 + \frac{\delta x}{2} \eta} g_0 \\ \delta x (F(2\delta x) - F(\delta x)) \\ \vdots \\ \delta x (F((K-1)\delta x) - F((K-2)\delta x)) \\ \delta x (F(K\delta x) - F((K-1)\delta x)) - \frac{\delta x}{1 + \frac{\delta x}{2} \eta} g_1 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Il convient de préciser quelques notations :

- K = nombre de cellules volumes finis ($= 10000$, ici).
- Pas constant : $\delta x = \frac{1}{K}$.
- $\tilde{\phi}_{0,i+\frac{1}{2}} \approx \tilde{\phi}_0 ((i + \frac{1}{2})\delta x)$, pour $i \in \{0, \dots, K-1\}$.
- $\phi_{0,i+\frac{1}{2}} = \tilde{\phi}_{0,i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(\tilde{\phi}_{0,\frac{1}{2}} - \frac{\delta x}{2} g_0 + \tilde{\phi}_{0,K-\frac{1}{2}} - \frac{\delta x}{2} g_1 \right)$.
- $\phi_{\eta,i+\frac{1}{2}} \approx \phi_\eta ((i + \frac{1}{2})\delta x)$.

On remarque dans la figure 4.3 que le conditionnement augmente quand η tend vers 0. Cela peut se traduire par une grande sensibilité aux erreurs (due à la précision de la machine, par exemple) sur le membre de droite du système linéaire (4.17) ou par une très lente convergence des méthodes de type gradient conjugué.

On va maintenant résoudre le problème linéaire 1D (4.16) en utilisant la décomposition $\phi_\eta = \tilde{\phi}_\eta + \langle \phi_\eta \rangle$. Comme $\langle \phi_\eta \rangle$ peut se calculer en fonction de $\tilde{\phi}_\eta$, il ne reste qu'à approcher cette dernière fonction. Cela nous donnera le problème discréteisé $\mathcal{P}'_{\eta,h}$, présenté dans les généralités sur les schémas AP, voir la figure 4.2.

La fonction $\tilde{\phi}_\eta$ se calcule alors grâce au problème suivant :

$$\begin{cases} -\tilde{\phi}_\eta'' = f & \text{dans }]0, 1[\\ \tilde{\phi}'_\eta(0) = \frac{\eta}{2} (\tilde{\phi}_\eta(0) - \tilde{\phi}_\eta(1)) + g_0 \\ -\tilde{\phi}'_\eta(1) = \frac{\eta}{2} (\tilde{\phi}_\eta(1) - \tilde{\phi}_\eta(0)) + g_1 \\ \int_0^1 \tilde{\phi}_\eta dx = 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

On utilise à nouveau un schéma volumes finis de pas constant δx pour approcher $\tilde{\phi}_\eta$, solution

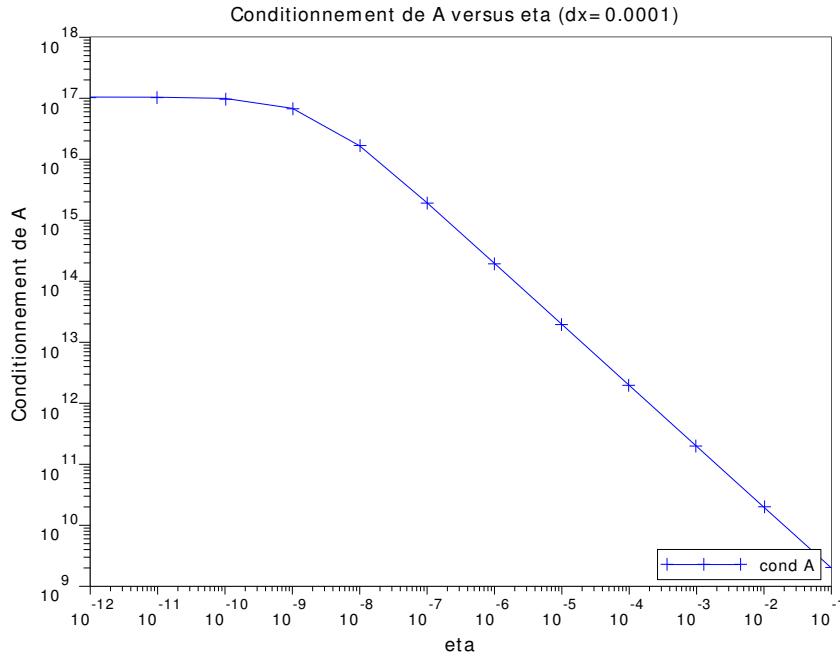


FIGURE 4.3 – Conditionnement en norme $\|\cdot\|_2$ en fonction de η , de la matrice associée au système (4.17), calculant l'approximation de ϕ sans utiliser le schéma AP.

faible de (4.18). On doit alors résoudre le système linéaire suivant.

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 + \frac{\delta x}{1 + \frac{\delta x}{2} \eta} & -1 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\delta x}{1 + \frac{\delta x}{2} \eta} \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ -\frac{\delta x}{1 + \frac{\delta x}{2} \eta} & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 + \frac{\delta x}{1 + \frac{\delta x}{2} \eta} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_{\eta, \frac{1}{2}} \\ \tilde{\phi}_{\eta, \frac{3}{2}} \\ \vdots \\ \tilde{\phi}_{\eta, K-\frac{3}{2}} \\ \tilde{\phi}_{\eta, K-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta x (F(\delta x) - F(0)) - \delta x \frac{1 + \frac{\delta x}{4} \eta}{1 + \frac{\delta x}{2} \eta} g_0 - \frac{\delta x^2 \eta}{4 + 2 \delta x \eta} g_1 \\ \delta x (F(2\delta x) - F(\delta x)) \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta x (F((K-1)\delta x) - F((K-2)\delta x)) \\ \delta x (F(K\delta x) - F((K-1)\delta x)) - \frac{\delta x^2 \eta}{4 + 2 \delta x \eta} g_0 - \delta x \frac{1 + \frac{\delta x}{4} \eta}{1 + \frac{\delta x}{2} \eta} g_1 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

La matrice du système linéaire ci-dessus n'est pas inversible car la condition de moyenne nulle n'a pas été intégrée dans la discrétisation (cela aurait conduit à la résolution *a priori* couteuse d'un système de type point selle). La matrice est symétrique et semi-définie positive. Cependant, on remarque que la méthode du gradient conjugué maintient cette condition de moyenne nulle si le second membre du système et le vecteur servant à l'initialisation sont tous les deux de moyenne nulle. Dans cette situation, on constate que la convergence de la méthode du gradient conjugué est assurée, la vitesse est liée au conditionnement effectif de la matrice, c'est à dire au rapport entre la plus grande valeur propre et la seconde plus petite (la plus petite valeur propre étant nulle), voir l'article de Bochev et Lehoucq [17] et le

théorème 13.11, page 583, du livre d'Axelsson [14]. On remarque que pour le second membre du système linéaire (4.19), on utilise la primitive de f , notée F . Cela est lié au besoin d'avoir un second membre de moyenne nulle afin de pouvoir utiliser la méthode décrite ci-dessus. En effet, approcher $\delta x(F((i+1)\delta x) - F(i\delta x))$ par $f((i + \frac{1}{2})\delta x)$ ($i \in \{0, \dots, K-1\}$) génère une erreur d'approximation sur la moyenne du second membre de (4.19) qui empêche la méthode de gradient conjugué de converger.

L'étude de (4.18) montre une des difficultés pour l'utilisation pratique de la méthode AP proposée pour un modèle multidimensionnel du plasma où les lignes de champ ne sont pas forcément alignées sur le maillage : l'apparition de termes non locaux, en effet, pour savoir ce qu'il se passe à un des bords du domaine de calcul en utilisant les conditions aux limites, on remarque qu'il faut connaître la valeur de $\tilde{\phi}_\eta$ sur l'autre bord du domaine. Dans un modèle multidimensionnel fortement anisotrope (directions parallèles et perpendiculaires aux lignes de champ), il faudra alors suivre les lignes de champ et savoir où elles interceptent le limiteur.

Dans la figure 4.4, l'évolution de l'erreur en norme L^1 et L^2 pour différentes méthodes de calcul a été représentée. On constate que pour des valeurs de η plus grandes que 10^{-6} , toutes les méthodes ont une décroissance en $\mathcal{O}(\eta)$. Par contre, pour des valeurs de η plus petites que 10^{-6} , seule la méthode dite AP (passant par le calcul de $\tilde{\phi}_\eta$) continue à avoir une erreur qui décroît en $\mathcal{O}(\eta)$ avant d'atteindre l'erreur de discréétisation. Pour les deux méthodes, Choleski et gradient conjugué, utilisant la résolution directe de (4.16) (sans passer par le calcul de $\tilde{\phi}_\eta$), pour $\eta \leq 10^{-6}$, l'erreur L^2 sur ϕ_η recommence à augmenter pour ensuite tendre vers une constante. Pour la dérivée, sur la figure 4.5, les trois courbes montrent bien une décroissance de l'erreur L^2 en $\mathcal{O}(\eta)$. Ce comportement se comprend en regardant la figure 4.6, où on voit que, pour $\eta \leq 10^{-6}$, seule la méthode AP réussit à maintenir une valeur moyenne de ϕ_η proche de celle de ϕ_0 . Les méthodes ne passant pas par le calcul de $\tilde{\phi}_\eta$ donnent une valeur moyenne de ϕ_η proche de 0 pour $\eta \leq 10^{-6}$, d'où l'erreur observée. On observe ainsi un décalage dans le tracé des courbes de ϕ_η , voir la figure 4.7. La figure 4.8 montre le nombre d'itérations réalisées par la méthode du gradient conjugué avec et sans méthode AP. Sur cette figure, on constate que la convergence de la méthode du gradient conjugué est très lente.

La figure 4.9 montre que la convergence au maillage du schéma avec la méthode AP est bien d'ordre 2.

4.1.2.3 Synthèse

On a vu ici les points clef du schéma AP utilisé :

- Séparer la partie moyenne $\langle \phi \rangle$ de la partie fluctuante $\tilde{\phi}$. Reformuler le problème pour $\tilde{\phi}$.
- Calculer la moyenne $\langle \phi \rangle$ à l'aide d'une intégrale sur la frontière du domaine Ω .
- Montrer que le problème à moyenne nulle reste bien défini quand $\eta = 0$. Etudier la convergence quand $\eta \rightarrow 0$.
- Choisir une méthode de discréétisation (volumes finis, ici).

Il reste maintenant à appliquer cette méthode au problème modélisant le courant électrique en prenant en compte la non-linéarité des conditions aux limites.

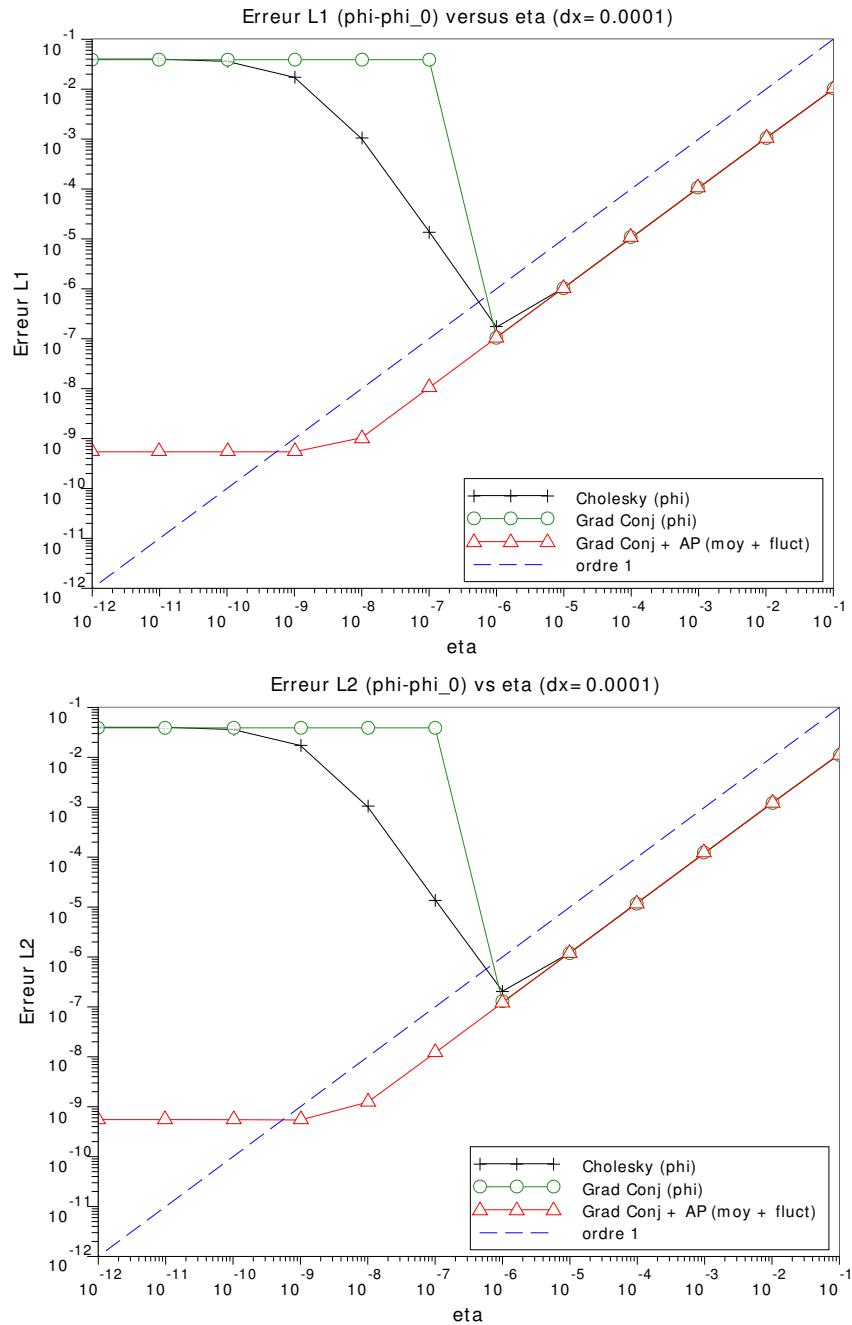


FIGURE 4.4 – Erreur $\phi_\eta - \phi_0$ pour les normes L^1 et L^2 en fonction de η avec trois méthodes de calcul différentes pour ϕ_η :

- En noir (+) : Résolution directe du problème (4.16) (sans méthode AP) par la méthode de Cholesky.
- En vert (o) : Résolution directe du problème (4.16) (sans méthode AP) par la méthode du gradient conjugué.
- En rouge (Δ) : Résolution avec la méthode AP (utilisant $\phi_\eta = \tilde{\phi}_\eta + \langle \phi_\eta \rangle$), en passant par la résolution de (4.18) par la méthode du gradient conjugué.

L'erreur est la différence entre ϕ_η approchée par le schéma et la solution exacte ϕ_0 . Pour des valeurs de η supérieures à 10^{-6} , les trois courbes sont confondues.

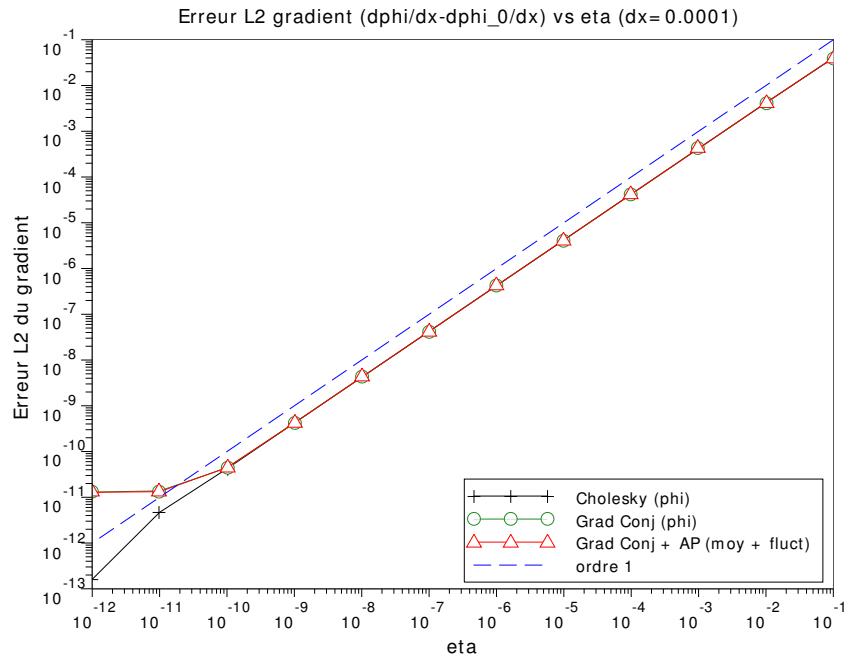


FIGURE 4.5 – Erreur $(\phi_\eta - \phi_0)'$ en norme L^2 en fonction de η avec trois méthodes de calcul différentes pour ϕ_η :

- En noir (+) : Résolution directe du problème (4.16) (sans méthode AP) par la méthode de Cholesky.
- En vert (o) : Résolution directe du problème (4.16) (sans méthode AP) par la méthode du gradient conjugué.
- En rouge (Δ) : Résolution avec la méthode AP (utilisant $\phi_\eta = \tilde{\phi}_\eta + \langle \phi_\eta \rangle$), en passant par la résolution de (4.18) par la méthode du gradient conjugué.

L'erreur est la différence entre $\frac{1}{\delta x} (\tilde{\phi}_{\eta,i+\frac{1}{2}} - \tilde{\phi}_{\eta,i-\frac{1}{2}})$ et ϕ'_0 . Les trois courbes sont confondues quelque soit la valeur de η .

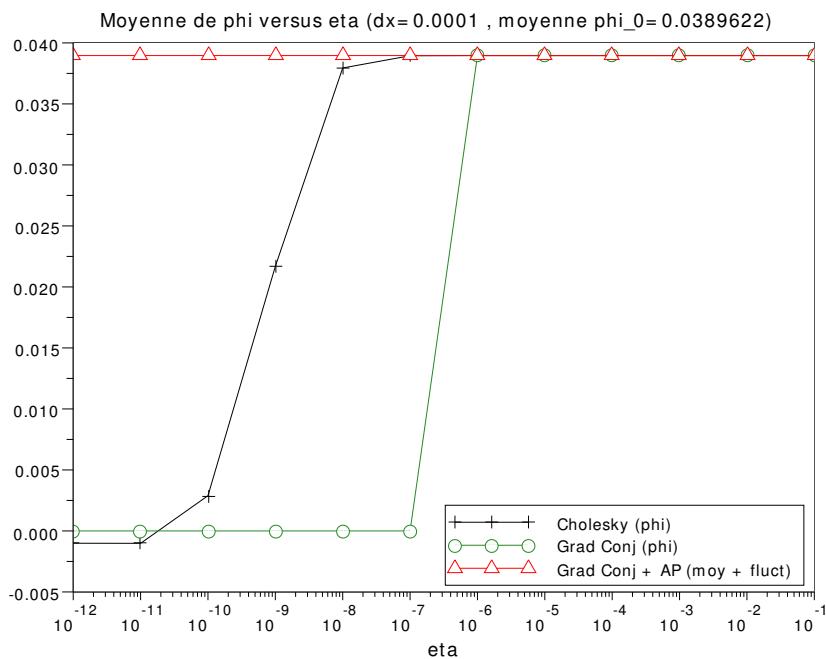
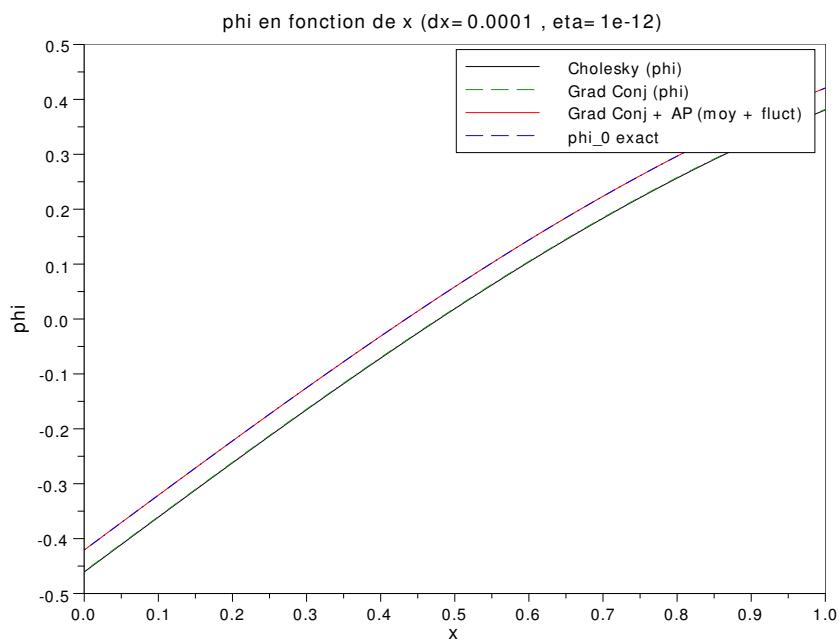
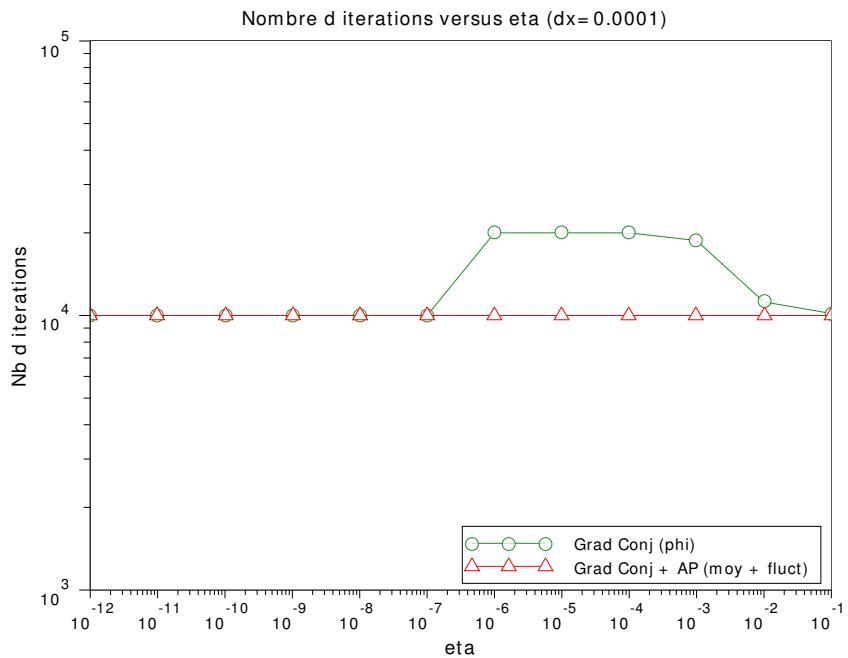


FIGURE 4.6 – Moyenne de ϕ_η approché en fonction de η , la légende des trois courbes est la même que pour la figure 4.4. Pour des valeurs de η pas trop petites, les trois courbes sont confondues.

FIGURE 4.7 – Tracé de ϕ_η en fonction de x .

- En noir : tracé de ϕ_η , obtenu par la résolution directe du problème (4.16) (sans méthode AP) par la méthode de Cholesky.
- En vert (mixte tirets-pointillés) : tracé de ϕ_η , obtenu par la résolution directe du problème (4.16) (sans méthode AP) par la méthode du gradient conjugué.
- En rouge : tracé de ϕ_η , obtenu par la résolution avec la méthode AP, en passant par la résolution de (4.18) par la méthode du gradient conjugué.
- En bleu (tirets) : tracé de ϕ_0 calculé analytiquement.



- FIGURE 4.8 – Nombre d’itérations pour la méthode du gradient conjugué en fonction de η .
- En vert (mixte tirets-pointillés) : Nombre d’itérations pour la résolution directe du problème (4.16) (sans méthode AP) par la méthode du gradient conjugué.
 - En rouge : Nombre d’itérations pour la résolution avec la méthode AP, en passant par la résolution de (4.18) par la méthode du gradient conjugué.

On constate que pour les deux méthodes, le nombre d’itérations est très élevé (de l’ordre de 10^4). L’initialisation de la méthode du gradient conjugué est ici faite avec un vecteur nul.

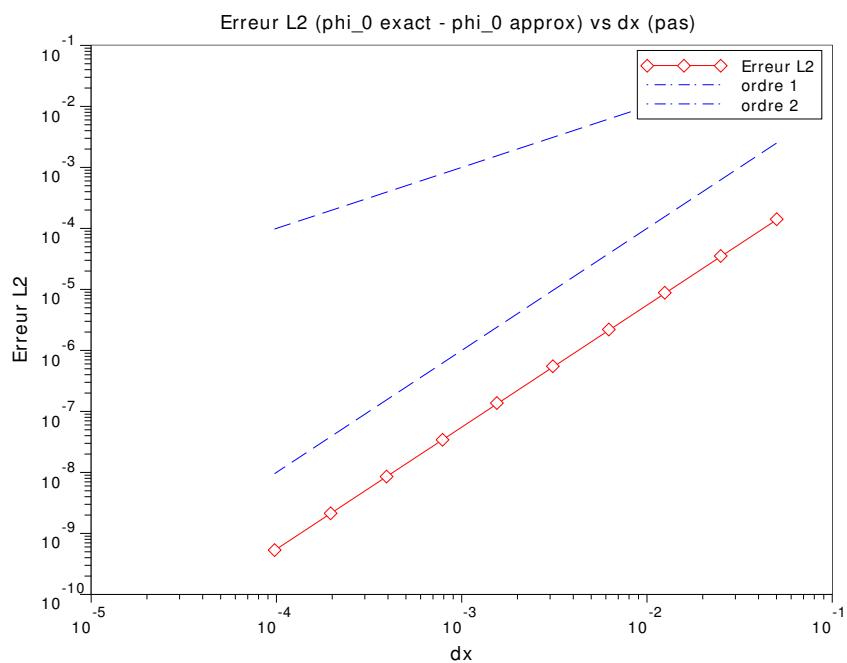


FIGURE 4.9 – Convergence au maillage, erreur L^2 (différence entre ϕ_0 approché par le schéma et ϕ_0 calculé analytiquement).

4.1.3 Cas d'une condition aux limites non linéaire pour le problème isotrope

Dans cette sous-section, nous allons généraliser l'étude au cas d'une condition aux limites non linéaire, toujours dans le cas multidimensionnel isotrope. Ce résultat permettra d'établir le comportement du modèle originel 1D du potentiel électrique, décrit par le système (4.2). Ce résultat s'étend au cas multidimensionnel et nous allons le présenter dans ce cadre. Le domaine utilisé sera alors un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ qui est borné, connexe et à frontière lipschitzienne. On se place dans le cas où la résistivité dans la direction parallèle peut varier, c'est à dire que l'on pose $\eta(\mathbf{x}) = \eta q(\mathbf{x})$, où $\eta \in \mathbb{R}$ et q est une fonction continue bornée et strictement positive sur $\overline{\Omega}$.

On considère le système d'équations non linéaire, d'inconnue ϕ_η suivant, pour tout $\eta > 0$:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\eta q} \nabla \phi_\eta \right) = \frac{1}{\eta q} f + S & \text{dans } \Omega \\ -\frac{1}{\eta q} (\nabla \phi_\eta \cdot \mathbf{n}) = h(\phi_\eta) + \frac{1}{\eta q} g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.20)$$

On fait comme pour la section précédente : on décompose ϕ_η en une partie moyenne et une partie fluctuante : $\phi_\eta = \tilde{\phi}_\eta + \langle \phi_\eta \rangle$. On a ainsi $\int_{\Omega} \tilde{\phi}_\eta d\mathbf{x} = 0$ et la moyenne $\langle \phi_\eta \rangle$ est reliée à $\tilde{\phi}_\eta|_{\partial\Omega}$ par la relation suivante :

$$\int_{\partial\Omega} h(\tilde{\phi}_\eta + \langle \phi_\eta \rangle) d\sigma = \int_{\Omega} S d\mathbf{x}. \quad (4.21)$$

Pour obtenir cette relation, il suffit d'intégrer formellement la condition aux limites de (4.20) sur le bord en utilisant la condition de compatibilité :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{q} f d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g d\sigma.$$

Ainsi, grâce la relation (4.21), on définira une fonction m telle que :

$$m(\tilde{\phi}_\eta|_{\partial\Omega}) = \langle \phi_\eta \rangle = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} \phi_\eta d\mathbf{x}.$$

On montre plus bas que m est bien définie sur $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

On aboutit ainsi à notre problème à moyenne nulle :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\eta q} \nabla \tilde{\phi}_\eta \right) = \frac{1}{\eta q} f + S & \text{dans } \Omega \\ -\frac{1}{\eta q} (\nabla \tilde{\phi}_\eta \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = h(\tilde{\phi}_\eta|_{\partial\Omega} + m(\tilde{\phi}_\eta|_{\partial\Omega})) + \frac{1}{\eta q} g & \text{sur } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} \tilde{\phi}_\eta d\mathbf{x} = 0. \end{cases}$$

Pour que ces expressions formelles puissent avoir un sens, nous faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 4.1.1

- Ω est un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d avec une frontière lipschitzienne.
- $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$ tels que la condition de compatibilité suivante soit vérifiée
$$\int_{\Omega} \frac{1}{q} f d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g d\sigma.$$
- $S \in L^2(\Omega)$.
- $q \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ et il existe des constantes $q_{min}, q_{max} > 0$ vérifiant, pour tout $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, $0 < q_{min} < q(\mathbf{x}) < q_{max}$.
- $h \in \mathcal{C}^2(\partial\Omega \times \mathbb{R})$.
- $\partial_\psi h(\mathbf{x}, \psi) > 0$ (pour tout $(\mathbf{x}, \psi) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$).
- Pour tout $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, il existe $a(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$h(\mathbf{x}, a(\mathbf{x})) = \frac{1}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\Omega} S d\mathbf{x}.$$

La condition de compatibilité $\int_{\Omega} \frac{1}{q} f d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g d\sigma$ est une condition nécessaire d'existence d'une solution faible au problème (4.20).

En appliquant le théorème des fonctions implicites, sur $h \in \mathcal{C}^2(\partial\Omega \times \mathbb{R})$, on montre que la fonction $a \in \mathcal{C}^1(\partial\Omega)$. $\partial\Omega$ étant un fermé borné de \mathbb{R}^d , on en déduit que a est bornée sur \mathbb{R}^d .

On souhaiterait affirmer l'existence d'une fonction $m : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$,

$$\int_{\partial\Omega} h(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + m(\varphi)) d\sigma = \int_{\Omega} S d\mathbf{x}.$$

En prenant un domaine Ω de dimension 1 (c'est à dire, $d = 1$), on remarque que la frontière $\partial\Omega$ se ramène à deux points et que $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subset L^\infty(\partial\Omega)$. On en déduit alors l'existence de m . Grâce au théorème des fonctions implicites, on en déduit que m est de classe \mathcal{C}^1 sur $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$. Dans le cas $d = 1$, on supposera de plus que $(\mathbf{x}, \varphi) \mapsto h(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + m(\varphi))$ est bornée par M .

Pour un domaine Ω de dimension $d \geq 2$, nous avons eu besoin de faire des hypothèses supplémentaires sur h :

Hypothèse 4.1.2

- Si $d = 1$ (cas unidimensionnel) : La fonction $(\mathbf{x}, \varphi) \mapsto h(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + m(\varphi))$ est bornée par M sur $\partial\Omega \times H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$.
- Si $d > 1$ (cas multidimensionnel) : Les fonctions h et $\partial_\psi h$ et $\partial_\psi^2 h$ sont bornées sur $\partial\Omega \times \mathbb{R}$. Notamment, on définit M tel que :

$$\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \forall \psi \in \mathbb{R}, |h(\mathbf{x}, \psi)| \leq M$$

L'hypothèse 4.1.2 dans le cas $d > 1$ est peut être plus exigeante que nécessaire. Cette hypothèse nous permet de prouver le lemme suivant qui sera très utile dans la suite :

Lemme 4.1.7

Sous les hypothèses 4.1.1 et 4.1.2 (dans le cas $d > 1$), il existe une unique fonction m telle que :

$$m : \begin{cases} H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto m(\varphi) \text{ tel que } \int_{\partial\Omega} h(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + m(\varphi)) d\sigma = \int_{\Omega} S d\mathbf{x}. \end{cases}$$

De plus, m est de classe \mathcal{C}^1 sur $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Démonstration du lemme 4.1.7: La démonstration du cas $d = 1$ ayant déjà été faite, il ne reste plus qu'à traiter le cas multidimensionnel.

On commence par montrer l'existence de m à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

Soit $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

On rappelle que la fonction a , définie par

$$h(\mathbf{x}, a(\mathbf{x})) = \frac{1}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\Omega} S d\mathbf{x},$$

est continue et bornée sur $\partial\Omega$.

Comme h est strictement croissante par rapport à sa seconde variable, on peut définir pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit (et fixé), les fonctions a^+ et a^- telles que, pour tout $\mathbf{x} \in \partial\Omega$:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}, a^+(\mathbf{x})) &= \frac{1}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\Omega} S d\mathbf{x} + \epsilon \\ h(\mathbf{x}, a^-(\mathbf{x})) &= \frac{1}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\Omega} S d\mathbf{x} - \epsilon. \end{aligned}$$

De même que a , les fonctions a^+ et a^- sont continues et bornées sur $\partial\Omega$.

Donc, en notant $\chi_{\varphi+\mu < a^+}$ la fonction caractéristique associée à l'ensemble $\{\mathbf{x} \in \partial\Omega, \varphi(\mathbf{x}) + \mu < a^+(\mathbf{x})\}$, on a, pour presque tout $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, $\chi_{\varphi+\mu < a^+(\mathbf{x})} \rightarrow 0$ quand $\mu \rightarrow +\infty$. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, h étant supposée bornée, on en déduit que :

$$\int_{\partial\Omega} h(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + \mu) \chi_{\varphi+\mu < a^+}(\mathbf{x}) d\sigma \xrightarrow{\mu \rightarrow +\infty} 0.$$

On pose :

$$\int_{\partial\Omega} h(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + \mu) d\sigma = \int_{\partial\Omega} \underbrace{h(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + \mu) \chi_{\varphi+\mu < a^+}(\mathbf{x})}_{< \frac{1}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\Omega} S d\mathbf{x} + \epsilon} d\sigma + \int_{\partial\Omega} \underbrace{h(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + \mu) \chi_{\varphi+\mu \geq a^+}(\mathbf{x})}_{\geq \frac{1}{\text{mes}(\partial\Omega)} \int_{\Omega} S d\mathbf{x} + \epsilon} d\sigma.$$

Ce qui donne :

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} h(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + \mu) d\sigma = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} h(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + \mu) \chi_{\varphi+\mu \geq a^+}(\mathbf{x}) d\sigma \geq \int_{\Omega} S d\mathbf{x} + \text{mes}(\partial\Omega) \epsilon.$$

De même, en utilisant la fonction a^- , on prouve que :

$$\lim_{\mu \rightarrow -\infty} \int_{\partial\Omega} h(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + \mu) d\sigma \leq \int_{\Omega} S d\mathbf{x} - \text{mes}(\partial\Omega) \epsilon.$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $m(\varphi) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\int_{\partial\Omega} h(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + m(\varphi)) d\sigma = \int_{\Omega} S d\mathbf{x}.$$

L'unicité de $m(\varphi)$ découle de la monotonie de h par rapport à sa seconde variable.

Pour la régularité de m , nous allons utiliser le théorème des fonctions implicites. L'existence de m étant déjà connue, il suffit de prouver que la fonction

$$G : \begin{cases} H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\varphi, z) \mapsto \int_{\partial\Omega} h(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + z) d\sigma \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times \mathbb{R}$. En utilisant la formule de Taylor sur $\psi \mapsto h(\mathbf{x}, \psi)$ au voisinage de $\varphi(\mathbf{x}) + z$, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall \varphi, \delta\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \forall z, \delta z \in \mathbb{R}, \\ G(\varphi + \delta\varphi, z + \delta z) = G(\varphi, z) + \int_{\partial\Omega} \partial_\psi h(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + z) (\delta\varphi(\mathbf{x}) + \delta z) d\sigma \\ + \int_{\partial\Omega} R(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + z, \delta\varphi(\mathbf{x}) + \delta z) d\sigma \end{aligned} \quad (4.22)$$

où la fonction R est le reste du développement limité de h .

On remarque alors que :

$$(\delta\varphi, \delta z) \mapsto \int_{\partial\Omega} \partial_\psi h(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + z) (\delta\varphi(\mathbf{x}) + \delta z) d\sigma$$

est une application linéaire continue sur $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R} . Il reste à montrer que le dernier terme de (4.22) est en $o(\|\delta\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + |\delta z|)$.

Comme $\partial_\psi^2 h$ est supposée bornée sur $\partial\Omega \times \mathbb{R}$, on a l'existence d'une constante $c(h) > 0$ (indépendante de $\mathbf{x}, \varphi, \delta\varphi, z, \delta z$) telle que :

$$\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \forall \varphi, \delta\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \forall z, \delta z \in \mathbb{R}, |R(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + z, \delta\varphi(\mathbf{x}) + \delta z)| \leq c(h)(\delta\varphi(\mathbf{x}) + \delta z)^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \forall \varphi, \delta\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \forall z, \delta z \in \mathbb{R}, \\ \int_{\partial\Omega} R(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + z, \delta\varphi(\mathbf{x}) + \delta z) d\sigma \leq c(h, \partial\Omega) \|\delta\varphi + \delta z\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \\ \leq c(h, \partial\Omega) \left(\|\delta\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 + \delta z^2 \right) \end{aligned}$$

On en déduit que G est de classe \mathcal{C}^1 sur $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times \mathbb{R}$ et, d'après le théorème des fonctions implicites, m est de classe \mathcal{C}^1 sur $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. ■

Les hypothèses sur la fonction h étant contraignantes, il convient de préciser que l'on peut trouver de telles fonctions h . Par exemple, pour le modèle 1D du potentiel électrique étudié dans la sous-section 4.1.4, on prendra :

$$h(x, \psi) = \left(1 - e^{\Lambda(x) - \psi}\right), \quad \text{avec } \Lambda \in \mathcal{C}^2(\partial\Omega) \text{ et } S = 0.$$

Dans un cas multidimensionnel ($d > 1$), avec $S = 0$, on pourrait par exemple prendre h sous la forme :

$$h(\mathbf{x}, \psi) = \arctan(\Lambda(x) + \psi), \quad \text{avec } \Lambda \in \mathcal{C}^2(\partial\Omega).$$

Dans un souci de lisibilité, dans la suite, nous ne ferons plus apparaître la trace des fonctions sur $\partial\Omega$ lorsque cela est évident. Ainsi, pour tout $\varphi \in H_m^1(\Omega)$, $m(\varphi)$ désignera en fait $m(\varphi|_{\partial\Omega})$.

La suite du paragraphe est dédiée à la démonstration théorème suivant qui montre que le problème est bien posé (4.20) et que l'on peut passer à la limite $\eta \rightarrow 0$.

Théorème 4.1.1

Sous les hypothèses 4.1.1 et 4.1.2, pour tout $\eta \geq 0$, le problème (4.20) rappelé ci-dessous

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\eta q} \nabla \phi_\eta \right) = \frac{1}{\eta q} f + S & \text{dans } \Omega \\ -\frac{1}{\eta q} (\nabla \phi_\eta \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = h(\phi_\eta|_{\partial\Omega}) + \frac{1}{\eta q} g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une unique solution faible $\phi_\eta \in H^1(\Omega)$.

De plus, quand η tend vers 0, ϕ_η converge en norme H^1 vers une fonction $\phi_0 \in H^1(\Omega)$ qui vérifie $\phi_0 = m(\tilde{\phi}_0|_{\partial\Omega}) + \tilde{\phi}_0$ où $\tilde{\phi}_0 \in H_m^1(\Omega)$ est l'unique solution faible du problème suivant :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left(\frac{1}{q} \nabla \tilde{\phi}_0 \right) = \frac{1}{q} f & \text{dans } \Omega \\ -\nabla \tilde{\phi}_0 \cdot \mathbf{n} = g & \text{sur } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} \tilde{\phi}_0 d\mathbf{x} = 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Enfin, il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour tout $\eta \in]0, \eta_0]$, il existe une constante $c(\Omega, \phi_0, S)$, indépendante de η, ϕ_η telle que, pour tout $\eta \in [0, \eta_0]$:

$$\|\phi_\eta - \phi_0\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\Omega, \phi_0, S) \eta.$$

L'existence et l'unicité d'une solution faible au problème linéaire (4.23) se démontrent de la même manière que pour le cas linéaire, voir la proposition 4.1.2, équation (4.14). La principale différence étant l'ajout d'une fonction q , ce qui ne change pas la méthode de la démonstration car q est bornée sur $\overline{\Omega}$ avec un minorant strictement positif.

Pour démontrer le résultat, nous allons faire appel à la formulation variationnelle du problème vérifié par $\tilde{\phi}_\eta$ que l'on obtient formellement pour des solutions régulières de la

manière suivante :

$$\begin{aligned} \forall \psi \in H_m^1(\Omega) &= \left\{ v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} v d\mathbf{x} = 0 \right\}, \\ \int_{\Omega} -\nabla \cdot \left(\frac{1}{q} \nabla \tilde{\phi}_{\eta} \right) \psi d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \frac{1}{q} f \psi d\mathbf{x} + \eta \int_{\Omega} S \psi d\mathbf{x} \\ \int_{\Omega} \frac{1}{q} \nabla \tilde{\phi}_{\eta} \cdot \nabla \psi d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} -\frac{1}{q} (\nabla \tilde{\phi}_{\eta} \cdot \mathbf{n}) \psi d\sigma &= \int_{\Omega} \frac{1}{q} f \psi d\mathbf{x} + \eta \int_{\Omega} S \psi d\mathbf{x} \\ \int_{\Omega} \frac{1}{q} \nabla \tilde{\phi}_{\eta} \cdot \nabla \psi d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega} h(\tilde{\phi}_{\eta} + m(\tilde{\phi}_{\eta})) \psi d\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g \psi d\sigma &= \int_{\Omega} \frac{1}{q} f \psi d\mathbf{x} + \eta \int_{\Omega} S \psi d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Le fait que $\tilde{\phi}_{\eta}$ soit à moyenne nulle nous permettra d'utiliser l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (voir le lemme 4.1.3) afin d'obtenir des estimations de $\tilde{\phi}_{\eta}$ indépendantes de η .

Lemme 4.1.8

On pose $\phi_{\eta} = \tilde{\phi}_{\eta} + m(\tilde{\phi}_{\eta})$. Alors, le problème faible trouver $\tilde{\phi}_{\eta} \in H_m^1(\Omega)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \psi \in H_m^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \frac{1}{q} \nabla \tilde{\phi}_{\eta} \cdot \nabla \psi d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega} h(\tilde{\phi}_{\eta} + m(\tilde{\phi}_{\eta})) \psi d\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g \psi d\sigma \\ = \int_{\Omega} \frac{1}{q} f \psi d\mathbf{x} + \eta \int_{\Omega} S \psi d\mathbf{x} \end{array} \right. \quad (4.24)$$

est équivalent au problème trouver $\phi_{\eta} \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \psi \in H^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \frac{1}{q} \nabla \phi_{\eta} \cdot \nabla \psi d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega} h(\phi_{\eta}) \psi d\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g \psi d\sigma = \int_{\Omega} \frac{1}{q} f \psi d\mathbf{x} + \int_{\Omega} S \psi d\mathbf{x}. \end{array} \right. \quad (4.25)$$

On remarque que le problème (4.25) n'est autre que la formulation faible du problème initial sur ϕ_{η} , donné par le système (4.20).

Démonstration du lemme 4.1.8 : Soit $\tilde{\phi}_{\eta} \in H_m^1(\Omega)$ solution du problème (4.24), on montre que $\phi_{\eta} = \tilde{\phi}_{\eta} + m(\tilde{\phi}_{\eta})$ est solution de (4.25).

En effet, si pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$, on pose $\psi = \varphi - \langle \varphi \rangle \in H_m^1(\Omega)$ dans (4.24), on a, d'après la relation de compatibilité $\int_{\Omega} \frac{1}{q} f d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g d\sigma$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{q} \nabla \tilde{\phi}_{\eta} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega} h(\tilde{\phi}_{\eta} + m(\tilde{\phi}_{\eta})) \varphi d\sigma + \eta \langle \varphi \rangle \int_{\partial\Omega} h(\tilde{\phi}_{\eta} + m(\tilde{\phi}_{\eta})) d\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g \varphi d\sigma \\ = \int_{\Omega} \frac{1}{q} f \varphi d\mathbf{x} + \eta \int_{\Omega} S \varphi d\mathbf{x} + \langle \varphi \rangle \int_{\Omega} S d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Or, par définition de m , $\int_{\partial\Omega} h(\tilde{\phi}_{\eta} + m(\tilde{\phi}_{\eta})) d\sigma = \int_{\Omega} S d\mathbf{x}$, on en déduit que $\phi_{\eta} = \tilde{\phi}_{\eta} + m(\tilde{\phi}_{\eta})$ est solution du problème faible (4.25).

Réiproquement si $\phi_\eta \in H_m^1(\Omega)$ est solution de (4.25), alors on peut montrer que $\tilde{\phi}_\eta = \phi_\eta - \langle \phi_\eta \rangle \in H_m^1(\Omega)$ est solution de (4.24). Pour cela, on remarque d'abord que :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in H^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \frac{1}{q} \nabla \tilde{\phi}_\eta \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega} h(\tilde{\phi}_\eta + \langle \phi_\eta \rangle) \varphi \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g \varphi \, d\sigma = \int_{\Omega} \frac{1}{q} f \varphi \, d\mathbf{x} + \eta \int_{\Omega} S \varphi \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Pour montrer que $\langle \phi_\eta \rangle = m(\tilde{\phi}_\eta)$, il suffit de prendre $\varphi = 1$ dans (4.27) et d'utiliser la relation de compatibilité ainsi que la définition de m . ■

4.1.3.1 Existence et unicité à $\eta > 0$ fixé

Dans ce paragraphe, on prouve le lemme suivant :

Lemme 4.1.9

Le problème : trouver $\tilde{\phi}_\eta \in H_m^1(\Omega)$ solution du problème (4.24) rappelé ci-dessous

$$\begin{aligned} \forall \psi \in H_m^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \frac{1}{q} \nabla \tilde{\phi}_\eta \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega} h(\tilde{\phi}_\eta + m(\tilde{\phi}_\eta)) \psi \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g \psi \, d\sigma = \int_{\Omega} \frac{1}{q} f \psi \, d\mathbf{x} + \eta \int_{\Omega} S \psi \, d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.28)$$

admet une unique solution pour tout $\eta \geq 0$.

Démonstration du lemme 4.1.9 : On commence par définir le sous ensemble K_η de $H_m^1(\Omega)$ de la manière suivante :

$$K_\eta = \left\{ v \in H_m^1(\Omega), \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{PW}(\Omega)^2 q_{max} \left(\eta (C_{tr}(\Omega) \operatorname{mes}(\Omega) M + \|S\|_{L^2(\Omega)}) \right. \right.$$

$$\left. \left. + C_{tr}(\Omega) \left\| \frac{1}{q} g \right\|_{L^2(\partial\Omega)} + \left\| \frac{1}{q} f \right\|_{L^2(\Omega)} + \eta \|S\|_{L^2(\Omega)} \right) \right\},$$

où $C_{tr}(\Omega)$ est la constante de l'inégalité de trace $\|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_{tr}(\Omega) \|v\|_{H^1(\Omega)}$.

On remarque que K_η est un compact pour la topologie associée à la norme L^2 , en vertu du théorème de Rellich.

Soit l'application T_η :

$$\begin{cases} K_\eta \rightarrow H_m^1(\Omega) \\ w \mapsto v \text{ solution de } \forall \psi \in H_m^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \frac{1}{q} \nabla v \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega} h(w + m(w)) \psi \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g \psi \, d\sigma = \int_{\Omega} \frac{1}{q} f \psi \, d\mathbf{x} + \eta \int_{\Omega} S \psi \, d\mathbf{x}. \end{cases} \quad (4.29)$$

De la même manière que pour le cas linéaire, on peut montrer qu'il existe une unique fonction $v \in H_m^1(\Omega)$ solution du problème faible décrit dans (4.29). Ainsi T_η est bien définie de $K_\eta \subset H_m^1(\Omega)$ à valeurs dans $H_m^1(\Omega)$. Nous allons montrer que T_η est bien à valeur dans K_η . Soit $w \in H_m^1(\Omega)$, en choisissant $\phi = v$, on a alors :

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{q}} \nabla v \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int_{\partial\Omega} h(w + m(w)) v \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g v \, d\sigma = \int_{\Omega} \frac{1}{q} f v \, d\mathbf{x} + \eta \int_{\Omega} S v \, d\mathbf{x}.$$

D'après les inégalités de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} \|\frac{1}{\sqrt{q}} \nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \eta \|h(w + m(w))\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\frac{1}{q} g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &+ \|\frac{1}{q} f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \eta \|S\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (lemme 4.1.3) et l'inégalité de trace $\|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_{tr}(\Omega) \|v\|_{H^1(\Omega)}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{PW}(\Omega)^2 q_{max}} \|v\|_{H^1(\Omega)} &\leq \left(\eta C_{tr}(\Omega) \underbrace{\|h(w + m(w))\|_{L^2(\partial\Omega)}}_{\leq \text{mes}(\Omega) M} \right. \\ &+ \left. C_{tr}(\Omega) \|\frac{1}{q} g\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\frac{1}{q} f\|_{L^2(\Omega)} + \eta \|S\|_{L^2(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

d'où l'estimation :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{PW}(\Omega)^2 q_{max} \left(\eta C_{tr}(\Omega) \text{mes}(\Omega) M + C_{tr}(\Omega) \|\frac{1}{q} g\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\frac{1}{q} f\|_{L^2(\Omega)} + \eta \|S\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Ainsi T_η est bien une application allant du compact K_η (pour la topologie associée à la norme L^2) vers lui-même. Pour appliquer le théorème du point fixe de Schauder, on a besoin de montrer que T_η est continue pour la norme L^2 . Soit (w_n) une suite d'éléments de K qui converge vers $\bar{w} \in K$ pour la norme L^2 . Montrons que $(T_\eta(w_n))$ converge vers $T_\eta(\bar{w})$ en norme L^2 . Comme $\partial\Omega$ est borné, on peut extraire une sous-suite de $(w_n|_{\partial\Omega})$, notée $(w_{n_k}|_{\partial\Omega})$ qui converge vers $\bar{w}|_{\partial\Omega}$ presque partout.

Comme h et m sont continues, on en déduit que $h(w_{n_k} + m(w_{n_k})) \rightarrow h(\bar{w} + m(\bar{w}))$ presque partout et $h(w_{n_k} + m(w_{n_k}))$ est borné indépendamment de n_k (par hypothèse). D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$\forall \psi \in H_m^1(\Omega), \int_{\partial\Omega} h(w_{n_k} + m(w_{n_k})) \psi \, d\mathbf{x} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} h(\bar{w} + m(\bar{w})) \psi \, d\sigma.$$

Comme \bar{w} est donné *a priori*, la limite ne dépend pas du choix de la sous-suite de (w_n) (qui est une suite quelconque d'éléments de K convergeant vers \bar{w}). Donc, pour la suite entière (w_n) , on a :

$$\forall \psi \in H_m^1(\Omega), \int_{\partial\Omega} h(w_n + m(w_n|_{\partial\Omega})) \psi \, d\sigma \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} h(\bar{w} + m(\bar{w}|_{\partial\Omega})) \psi \, d\sigma.$$

Ainsi, en posant $v_n = T_\eta(w_n)$, on a (v_n) borné dans $H_m^1(\Omega)$ (espace de Banach réflexif), donc, à une sous-suite près, (v_n) converge faiblement vers $\bar{v} \in H_m^1(\Omega)$ (et converge aussi dans L^2 d'après le théorème de Rellich). Ainsi en passant à la limite des deux côtés on a :

$$\begin{aligned} \forall \psi \in H_m^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \frac{1}{q} \nabla \bar{v} \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega} h(\bar{w} + m(\bar{w})) \psi \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g \psi \, d\sigma = \int_{\Omega} \frac{1}{q} f \psi \, d\mathbf{x} + \eta \int_{\Omega} S \psi \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

C'est à dire que $\bar{v} = T_\eta(\bar{w})$, ainsi \bar{v} est indépendant du choix de la sous suite de (v_n) . On en déduit la convergence de toute la suite (v_n) vers \bar{v} . Donc T_η est continue de K_η dans K_η . De plus K_η est compact pour la topologie associée à la norme L^2 .

Ainsi d'après le théorème du point fixe de Schauder, il existe $\tilde{\phi}_\eta \in K_\eta$ tel que $\tilde{\phi}_\eta = T_\eta(\tilde{\phi}_\eta)$.

On a donc montré l'existence d'une solution de $H_m^1(\Omega)$ au problème (4.24).

On peut donc calculer $\phi_\eta = \tilde{\phi}_\eta + m(\tilde{\phi}_\eta)$ solution de (4.25).

Pour montrer l'unicité de $\tilde{\phi}_\eta$, solution de (4.24), on utilise l'équivalence avec le problème résolu par ϕ_η , (4.25), voir le lemme 4.1.8. On montrera alors l'unicité de ϕ_η par un argument de monotonie pour enfin revenir à $\tilde{\phi}_\eta$.

Prouvons l'unicité de la solution du problème (4.25) : Soit ϕ_η^1 et ϕ_η^2 deux solutions de (4.25). On fait alors la différence des deux équations et on prend pour fonction test $\psi = \phi_\eta^1 - \phi_\eta^2$, ce qui permet d'obtenir l'équation :

$$\|\nabla(\phi_\eta^1 - \phi_\eta^2)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \underbrace{\eta \int_{\partial\Omega} (h(\phi_\eta^1) - h(\phi_\eta^2)) (\phi_\eta^1 - \phi_\eta^2) d\sigma}_{\geq 0} = 0.$$

On en déduit que

$$\int_{\partial\Omega} (h(\phi_\eta^1) - h(\phi_\eta^2)) (\phi_\eta^1 - \phi_\eta^2) d\sigma = 0.$$

Comme h est une fonction strictement croissante, cela implique que $(h(\phi_\eta^1) - h(\phi_\eta^2)) (\phi_\eta^1 - \phi_\eta^2) \geq 0$ (presque partout sur $\partial\Omega$). On en déduit que $\phi_\eta^1 - \phi_\eta^2 = 0$ sur $\partial\Omega$. Comme de plus $\|\nabla(\phi_\eta^1 - \phi_\eta^2)\|_{L^2(\Omega)} = 0$, on obtient $\phi_\eta^1 = \phi_\eta^2$.

On rappelle que l'on cherche à montrer l'unicité de la solution $\tilde{\phi}_\eta$ du problème reformulé (4.24). On a alors

$$\tilde{\phi}_\eta^1 - \tilde{\phi}_\eta^2 = m(\tilde{\phi}_\eta^2) - m(\tilde{\phi}_\eta^1).$$

Le premier membre étant de moyenne (sur Ω) nulle, on en déduit que $m(\tilde{\phi}_\eta^2) = m(\tilde{\phi}_\eta^1)$ puis que $\tilde{\phi}_\eta^1 = \tilde{\phi}_\eta^2$.

On a donc montré l'existence et l'unicité de la solution au problème (4.24) ainsi qu'au problème équivalent pour $\phi_\eta \in H^1(\Omega)$ (4.25). ■

4.1.3.2 Limite quand $\eta \rightarrow 0$

Il s'agit ici de montrer que ϕ_η converge bien vers $\phi_0 \in H^1(\Omega)$, solution de

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \tilde{\phi}_0 + m(\tilde{\phi}_0) \\ \forall \psi \in H_m^1(\Omega), \int_{\Omega} \frac{1}{q} \nabla \tilde{\phi}_0 \cdot \nabla \psi d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g \psi d\sigma &= \int_{\Omega} \frac{1}{q} f \psi d\mathbf{x} + \int_{\Omega} S \psi d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Pour cela, on va simplement donner une estimation en norme H^1 de $\tilde{\phi}_\eta$.

Pour tout $1 \geq \eta > 0$, $\tilde{\phi}_\eta$ est dans le compact K_1 (pour la norme L^2) : On peut donc en extraire une sous-suite qui converge vers une fonction $\tilde{\phi}_0 \in L^2(\Omega)$. De plus, on peut aussi en extraire une nouvelle sous-suite qui converge faiblement dans $H^1(\Omega)$ (lemme 4.1.5). Donc $\tilde{\phi}_0 \in K_1 \subset H^1(\Omega)$. En utilisant la convergence faible, on peut passer à la limite dans (4.24), et montrer que cette limite est la solution de (4.24) en prenant $\eta = 0$:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{q} \nabla \tilde{\phi}_0 \cdot \nabla \psi d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{q} g \psi d\sigma = \int_{\Omega} \frac{1}{q} f \psi d\mathbf{x} + \int_{\Omega} S \psi d\mathbf{x}, \quad \forall \psi \in H_m^1(\Omega). \quad (4.30)$$

Comme $\tilde{\phi}_0$ est recherchée dans $H_m^1(\Omega)$, on peut en montrer l'existence et l'unicité via le théorème de Lax-Milgram. On construit ensuite ϕ_0 en posant $\phi_0 = \tilde{\phi}_0 + m(\tilde{\phi}_0)$.

On va maintenant estimer l'erreur $\|\phi_\eta - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}$ en remarquant que

$$\|\phi_\eta - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\tilde{\phi}_\eta - \tilde{\phi}_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + |m(\tilde{\phi}_\eta) - m(\tilde{\phi}_0)|^2.$$

Pour évaluer $\|\tilde{\phi}_\eta - \tilde{\phi}_0\|_{H^1(\Omega)}$, on fait la différence entre les problèmes faibles pour $\eta > 0$ (4.24) et $\eta = 0$ (4.30). Ce qui donne :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{q} \nabla (\tilde{\phi}_\eta - \tilde{\phi}_0) \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega} h(\tilde{\phi}_\eta + m(\tilde{\phi}_\eta)) \psi \, d\sigma = \eta \int_{\Omega} S \psi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \psi \in H_m^1(\Omega).$$

En prenant $\psi = \tilde{\phi}_\eta - \tilde{\phi}_0$ et en utilisant l'inégalité de Poincaré, on a l'existence d'une constante $c(\Omega, S)$ telle que :

$$\|\tilde{\phi}_\eta - \tilde{\phi}_0\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\Omega, S) \eta.$$

Pour montrer que $|m(\tilde{\phi}_\eta) - m(\tilde{\phi}_0)| \leq c(\Omega, \tilde{\phi}_0, S) \eta$, pour η suffisamment petit, on se rappelle simplement que d'après le théorème des fonctions implicites, m est de classe C^1 au voisinage de ϕ_0 .

On a donc bien l'existence d'un $\eta_0 > 0$, tel que pour tout $\eta \leq \eta_0$, on a :

$$\|\phi_\eta - \phi_0\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\Omega, \tilde{\phi}_0, S) \eta,$$

où $c(\Omega, \tilde{\phi}_0, S)$ ne dépend pas de η , ni de ϕ_η .

Cela achève la démonstration du théorème 4.1.1.

4.1.4 Application au problème du potentiel électrique 1D

On revient maintenant à notre problème de potentiel électrique ϕ_η , pour lui appliquer la méthode AP basée sur la décomposition en partie moyenne et partie fluctuante présentée dans le paragraphe 4.1.3. On va appliquer les résultats et la méthode donnés par le théorème 4.1.1 au modèle 1D du potentiel électrique. On prend ici $\Omega =]-L, L[$.

On souhaite résoudre le problème (4.2) rappelé ci dessous :

$$\begin{cases} -\partial_x \left(\frac{1}{\eta(x)} \partial_x \phi_\eta(x) \right) = S - \partial_x \left(\frac{1}{\eta(x)} f(x) \right) & x \in]-L, L[\\ \frac{1}{\eta} \partial_x \phi_\eta(-L) = \frac{1}{\eta(-L)} f(-L) + \left(1 - e^{\Lambda(-L) - \phi_\eta(-L)} \right) & x = -L \\ \frac{1}{\eta} \partial_x \phi_\eta(L) = \frac{1}{\eta(L)} f(L) - \left(1 - e^{\Lambda(L) - \phi_\eta(L)} \right) & x = L. \end{cases}$$

On utilise à nouveau la méthode de la décomposition en partie moyenne et partie fluctuante : $\phi_\eta = \langle \phi_\eta \rangle + \tilde{\phi}_\eta$, avec

$$\langle \phi_\eta \rangle = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_{]-L, L[} \tilde{\phi}_\eta \, dx = m(\tilde{\phi}_\eta).$$

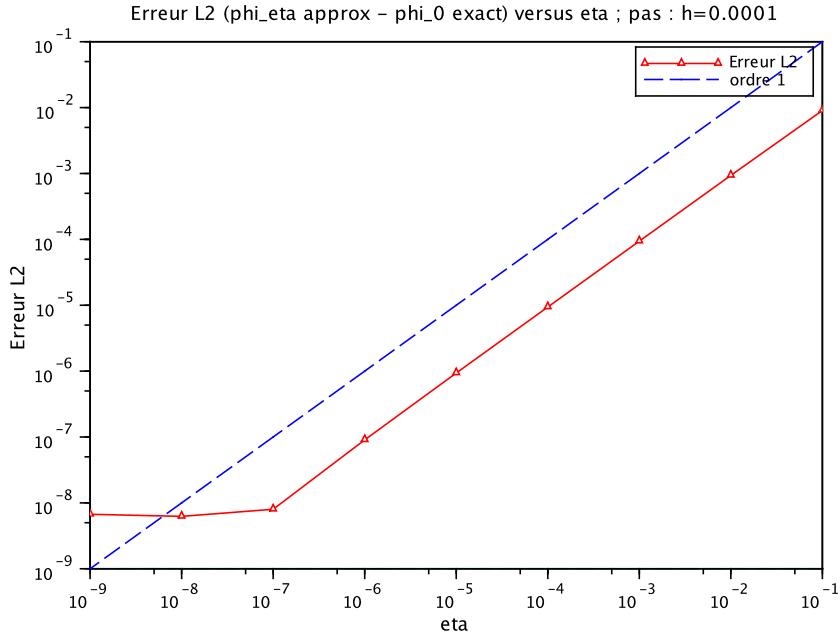


FIGURE 4.10 – $\|\phi_{\eta,\delta x} - \phi_{0,\delta x}\|_{L^2([-0.4,0.4])}$ en fonction de η . La discréétisation utilise un schéma centré en volumes finis avec un pas de $\delta x = 10^{-4}$.

Formellement, le problème (4.2) est ainsi reformulé sous la forme :

$$\begin{cases} -\partial_x \left(\frac{1}{\eta(x)} \partial_x \tilde{\phi}_\eta(x) \right) = S - \partial_x \left(\frac{1}{\eta(x)} f(x) \right) & x \in]-L, L[\\ \frac{1}{\eta} \partial_x \tilde{\phi}_\eta(-L) = \frac{1}{\eta(-L)} f(-L) + \left(1 - e^{\Lambda(-L) - \tilde{\phi}_\eta(-L) - m(\tilde{\phi}_\eta)} \right) & x = -L \\ \frac{1}{\eta} \partial_x \tilde{\phi}_\eta(L) = \frac{1}{\eta(L)} f(L) - \left(1 - e^{\Lambda(L) - \tilde{\phi}_\eta(L) - m(\tilde{\phi}_\eta)} \right) & x = L. \end{cases} \quad (4.31)$$

L'existence et l'unicité de $\tilde{\phi}_\eta \in H_m^1(-L, L)$ et $\phi_\eta \in H^1(-L, L)$, ainsi que le comportement quand η tend vers 0, découlent du paragraphe précédent.

Dans ce cas, on peut calculer explicitement $m(\phi_{\eta|\partial\Omega})$ en sommant les deux conditions aux limites :

$$m(\tilde{\phi}_\eta) = \ln \left(\frac{\exp(\Lambda(-L) - \tilde{\phi}_\eta(-L)) + \exp(\Lambda(L) - \tilde{\phi}_\eta(L))}{2 - \int_{]-L,L[} S dx} \right).$$

Nous avons ainsi fait un test numérique afin de confirmer numériquement le résultat théorique provenant du théorème 4.1.1. Dans la figure 4.10, la convergence de la méthode préservant l'asymptotique est confirmé numériquement : on observe la même vitesse de convergence que pour le cas linéaire (voir le paragraphe 4.1.2.2), c'est à dire $\|\phi_{\eta,\delta x} - \phi_{0,\delta x}\|_{L^2} = \mathcal{O}(\eta)$,

jusqu'à arriver à l'erreur de discréttisation. On utilise ici un schéma volumes finis centrés. La résolution du problème discret non linéaire est effectuée par une méthode de point fixe.

Dans les tests numériques, on a choisi :

- $S = 0$.
- $f(x) = 2(x + 0.4)$.
- $\Lambda(x) = 0$.
- $q(x) = 1$, c'est à dire, $\eta(x) = \eta$.

4.2 Pénalisation pour l'équation du potentiel en 1D

On souhaite à nouveau utiliser une méthode de type domaine fictif pour faciliter la discréttisation des conditions aux limites. Quelques essais ont d'abord été réalisés avec les méthodes proposées par Angot dans [8] et testées par Ramière [51]. L'idée de ces méthodes est de fixer des conditions de saut pour la solution et pour le flux à la frontière du domaine originel. L'inconvénient de cette méthode est la nécessité de réaliser un traitement adapté des cellules proches de l'interface avec l'obstacle, selon le *stencil* du schéma. Cela complexifie un peu la programmation.

Pour éviter cela, nous avons étudié une autre méthode, de type pénalisation volumique, proposée par Bensiali *et al.* [15], dont les tests numériques sur des cas d'équations elliptiques linéaires semblaient donner des résultats de convergence intéressants. L'idée de la méthode est simplement d'ajouter un terme de pénalisation volumique correspondant aux conditions aux limites de Fourier souhaitées ; comme ce qui est fait pour une condition aux limites de Dirichlet.

4.2.1 Présentation de la méthode de pénalisation proposée par Bensiali *et al.*

Dans cette sous-section, on fait une brève description de la méthode de pénalisation proposée par Bensiali *et al.* [15]. La méthode a été décrite à travers l'exemple d'un problème elliptique linéaire sur un domaine à une seule dimension d'espace.

Cette pénalisation s'obtient directement à partir des conditions aux limites :

Problème originel :

On considère le problème originel suivant, d'inconnue u :

$$\begin{cases} -a u'' = f & z \in]-0.4, 0.4[\\ a u'(-0.4) = b u(-0.4) + g(-0.4) \\ -a u'(0.4) = b u(0.4) + g(0.4). \end{cases}$$

Problème pénalisé ($\varepsilon \ll 1$) :

$$\begin{cases} -a u''_\varepsilon \\ + \frac{\chi_1}{\varepsilon} (a u'_\varepsilon - b u_\varepsilon - g(-0.4)) & x \in]-0.5, 0.5[\\ + \frac{\chi_2}{\varepsilon} (a u'_\varepsilon - b u_\varepsilon - g(0.4)) = f \\ u_\varepsilon(-0.5) = u_\varepsilon(0.5) \\ \chi_1 = 1 \text{ si } x \in [-0.45, -0.4] \text{ et } 0 \text{ sinon.} \\ \chi_2 = 1 \text{ si } x \in [0.4, 0.45] \text{ et } 0 \text{ sinon.} \\ \chi = 1 \text{ si } x \in]-0.5, -0.4] \cup [0.4, 0.5[\text{ et } 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cadre 1D, il est possible de calculer explicitement les solutions et d'estimer l'erreur

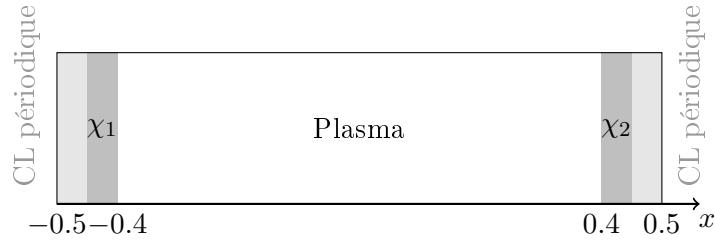


FIGURE 4.11 – Le domaine de calcul utilisé : χ_1 vaut 1 en $x \in]-0.45, -0.4[$ et 0 ailleurs. Quand à χ_2 , elle vaut 1 dans $]0.4, 0.45[$ et 0 partout ailleurs.

due à la pénalisation. On a alors :

$$\|u_{\varepsilon}|_{]-0.4,0.4[} - u\|_{H^1} = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \|u_{\varepsilon}|_{]-0.4,0.4[} - u\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Les tests numériques en 1D réalisés par Bensiali *et al.* [15] montrent une décroissance de l'erreur $\|u - u_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)}$ en $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Cependant, dans des domaines de dimension 2 ou plus, aucun résultat théorique n'est proposé. Cette absence provient du fait qu'il faut étendre la notion de vecteur normal à la frontière du domaine dans tout le volume pénalisé. Une autre difficulté du cas multidimensionnel est le cadre inconfortable pour les estimations sur la forme bilinéaire correspondante.

Pour avoir une convergence au maillage d'ordre 2, il est souvent nécessaire de faire un traitement adapté des cellules au voisinage de la frontière (avec un méthode de type *cut-cell*, par exemple) ou d'utiliser un maillage adapté au domaine pénalisé, comme cela a été fait dans les tests numériques du chapitre 2. Cela retire bien évidemment une partie des avantages des méthodes de pénalisation. Il est apparu lors des tests numériques que pour retrouver une convergence au maillage d'ordre 2 avec un schéma de type différences finies, il faut que la frontière du domaine originel soit confondue avec un des points de la discréétisation.

Deux questions restent en suspens pour cette méthode de pénalisation :

- Ces résultats intéressants peuvent-ils être confirmés numériquement sur un problème avec un espace multidimensionnel ?
- Le bon comportement de la méthode de pénalisation sur le cas linéaire se retrouve t-il aussi avec une condition aux limites non linéaire ?

Dans le paragraphe suivant, nous allons réaliser quelques tests numériques sur le modèle 1D du potentiel électrique pour apporter quelques éléments de réponse à la deuxième question.

4.2.2 Application au problème du potentiel électrique

Bien que l'on n'ait pas de résultat théorique concernant l'utilisation de cette méthode de pénalisation sur le cas non linéaire, nous avons choisi de la mettre en place sur le problème du potentiel électrique. On applique alors la méthode de pénalisation proposée à au problème de potentiel électrique après la décomposition en partie fluctuante ($\tilde{\phi}_\eta$) et partie moyenne ($m(\tilde{\phi}_\eta|_{\partial\Omega})$). Le domaine de calcul considéré est représenté dans la figure 4.11.

Le système d'équations pénalisé est alors le suivant :

$$\begin{cases} -\frac{1}{\eta} \partial_x^2 \tilde{\phi}_\eta + \frac{\chi_1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\eta} \partial_x \tilde{\phi}_\eta(0.1) - \frac{1}{\eta} f(-0.4) - \left(1 - e^{\Lambda(-0.4) - \tilde{\phi}_\eta(-0.4) - m(\tilde{\phi}_\eta)} \right) \right) \\ \quad + \frac{\chi_2}{\varepsilon} \left(-\frac{1}{\eta} \partial_x \tilde{\phi}_\eta(0.4) + \frac{1}{\eta} f(0.4) - \left(1 - e^{\Lambda(0.4) - \tilde{\phi}_\eta(0.4) - m(\tilde{\phi}_\eta)} \right) \right) = -\frac{1}{\eta} \partial_x f &] - 0.5, 0.5[\\ \tilde{\phi}_\eta(0.5) = -\phi_\eta(-0.5) \\ m(\tilde{\phi}_\eta) = \ln \left(\frac{e^{\Lambda(-L) - \tilde{\phi}_\eta(-0.4)} + e^{\Lambda(L) - \tilde{\phi}_\eta(0.4)}}{2} \right). \end{cases}$$

où on a les quantités suivantes :

- $\chi_1 = 1$ si $z \in [-0.45, -0.4]$ et = 0 ailleurs.
- $\chi_2 = 1$ si $z \in [0.4, 0.45]$ et = 0 ailleurs.
- ε = paramètre de pénalisation ($0 < \varepsilon \ll 1$).

Le schéma numérique est à nouveau un schéma de type volumes finis. La discrétisation des termes pénalisés a été faite à l'aide d'une discrétisation de type LUD (*Linear Upwind Differencing*, voir [64], page 165) d'ordre 2. Sur les maillages utilisés, les parois plasma-limiteur sont à l'interface entre deux cellules volumes finis. Ainsi, comme l'interface plasma-limiteur n'est pas confondue avec le centre d'une cellule, la convergence quand le pas du maillage tend vers 0 est limitée à l'ordre 1. Donc avec ce schéma, on ne pourra pas étudier numériquement l'erreur sur la dérivée $\partial_x \phi_\eta$, ni rechercher la présence de couche limite due à la pénalisation sur ce terme.

Pour les tests numériques, on utilise dans la configuration suivante :

$$f(x) = \cos(2\pi x), \quad \Lambda = 0, \quad S(x) = 0.$$

L'étude numérique de l'évolution de l'erreur due à la méthode de pénalisation a été faite dans la figure 4.12. On observe une décroissance de l'erreur en norme L^2 décroît comme $\mathcal{O}(\varepsilon)$ jusqu'à arriver à l'erreur de discrétisation spatial qui est relativement élevée à cause du fait que le schéma numérique n'est que d'ordre 1. La figure 4.13 permet de contrôler la convergence de la méthode quand la résistivité tend vers 0.

Ces premiers essais encourageants permettent d'entrouvrir des perspectives de méthodes de pénalisation volumique pour les équations régissant le potentiel électrique, en vue d'une intégration dans un modèle plus complet. Pour un modèle multidimensionnel, il sera peut être nécessaire d'utiliser une méthode de frontière immergée avec des conditions de saut, comme dans [8].

4.3 Modèle 2D anisotrope

Pour résumer les résultats précédents sur le modèle 1D du potentiel électrique, on peut noter qu'une bonne partie des difficultés réside dans la prise en compte de la faible résistivité parallèle η . Pour traiter le problème, nous nous sommes tournés vers des méthodes préservant l'asymptotique. L'idée la plus naturelle consiste à séparer ϕ_η en sa moyenne selon la variable

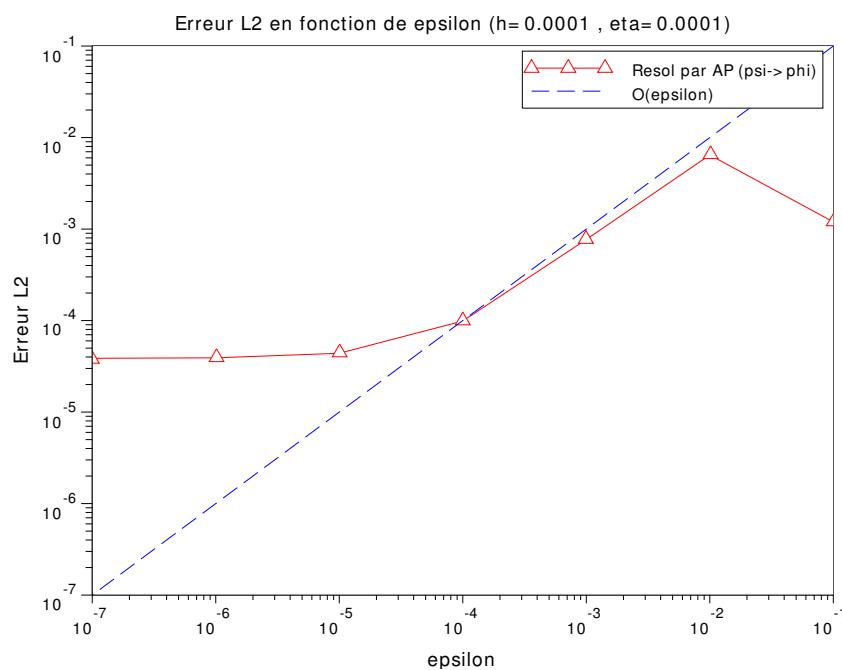


FIGURE 4.12 – Erreur L^2 en fonction du paramètre de pénalisation ϵ . On a pris $\eta = 10^{-4}$ et $\delta x = 10^{-4}$. On observe une décroissance de l'erreur en $\mathcal{O}(\epsilon)$ jusqu'à l'erreur de discréétisation spatiale.

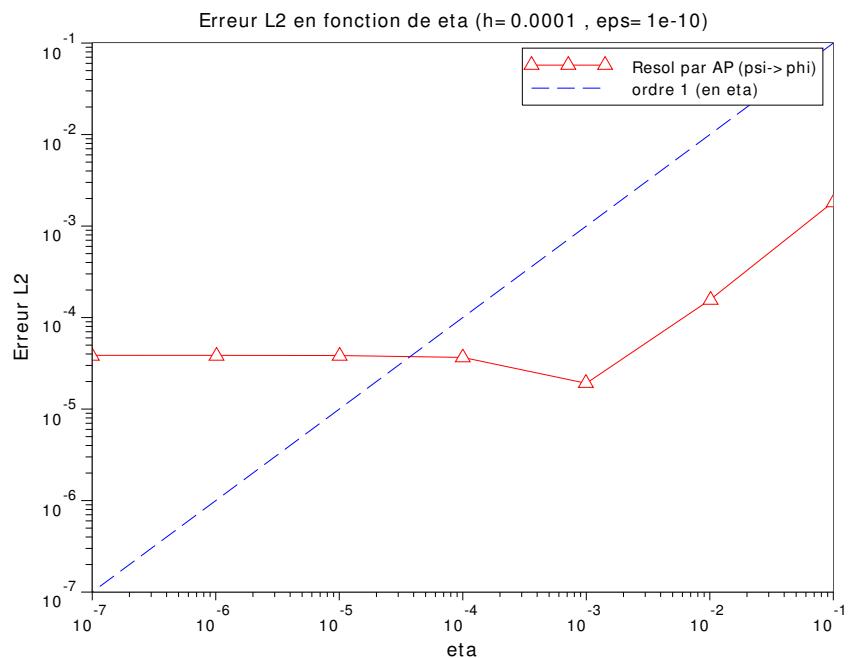


FIGURE 4.13 – Erreur L^2 en fonction de la résistivité parallèle η . On a pris $\varepsilon = 10^{-10}$ et $\delta x = 10^{-4}$. On observe une décroissance de l'erreur en $\mathcal{O}(\eta)$ jusqu'à l'erreur de discréétisation spatiale.

x (abscisse curviligne le long des lignes de champ magnétique) et en sa partie fluctuante. Les bonnes propriétés de cette méthode quand η tend vers 0 se vérifient alors aisément. On est même parvenu à les généraliser à un problème elliptique non linéaire et isotrope. Le souci, est l'apparition de termes non locaux au bord du domaine contenant le plasma qui impliquent de pouvoir suivre une ligne de champ magnétique. Si dans le cadre à une dimension d'espace, cela ne pose aucun problème, il n'en est pas de même si les lignes de champ ne sont pas alignées avec le maillage dans un cadre multidimensionnel. C'est ainsi que pour le modèle du potentiel électrique dans un système à deux dimensions d'espace, on fera appel à une autre décomposition de ϕ_η : cette décomposition sera nommée micro-macro, en référence à l'article qui l'a introduite [27].

Nous allons maintenant nous intéresser au modèle 2D du potentiel électrique décrit dans l'article de Negulescu *et al.* [45], qui est donné par le problème non linéaire (4.1) rappelé ci-dessous :

$$\begin{cases} -\partial_t \partial_y^2 \phi_\eta - \frac{1}{\eta} \partial_x^2 \phi_\eta + \nu \partial_y^4 \phi_\eta = S & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\ \partial_y \phi_\eta|_{t=0} = \partial_y \phi_{ini} & \text{dans } \Omega \\ \partial_y \phi_\eta|_{\Sigma_{\parallel}} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_y^3 \phi|_{\Sigma_{\parallel}} = 0 & \text{sur }]0, T[\times \Sigma_{\parallel} \\ \partial_x \phi_\eta|_{x=-L} = \eta \left(1 - e^{\Lambda - \phi_\eta|_{x=-L}} \right) & \text{sur }]0, T[\times \{-L\} \times]0, l[\\ \partial_x \phi_\eta|_{x=L} = -\eta \left(1 - e^{\Lambda - \phi_\eta|_{x=L}} \right) & \text{sur }]0, T[\times \{L\} \times]0, l[\\ \text{condition de périodicité de } \phi_\eta & \text{sur }]0, T[\times \{-0.5, 0.5\} \times]l, 1[, \end{cases}$$

où $\nu > 0$ est une constante strictement positive. Et Λ désigne le potentiel de référence à l'intérieur du limiteur.

L'existence et l'unicité de la solution faible au problème (4.1) à η fixé est déjà prouvée dans l'article pré-cité, sous une condition de terme source de faible amplitude.

Dans toute cette section, Ω désignera le domaine

$$\Omega = (-0.5, 0.5] \times]0, 1[\setminus ((-0.5, -0.4] \times]0, l[) \cup (]0.4, 0.5[\times]0, l[),$$

comme représenté dans la figure 4.1, rappelée ici pour plus de lisibilité.

De même, on donne les domaines suivants :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\parallel} &= ([-L, L] \times \{0\}) \cup ([-0.5, -L] \times \{l\}) \cup ([L, 0.5] \times \{l\}) \cup ([-0.5, 0.5] \times \{1\}) \\ \Sigma_{\perp-L} &= \{-L\} \times]0, l[\\ \Sigma_{\perp L} &= \{L\} \times]0, l[\\ \Sigma_{\perp} &= \Sigma_{\perp-L} \cup \Sigma_{\perp L}. \end{aligned}$$

La réunion $\Sigma_{\parallel} \cup \Sigma_{\perp} \cup (\{-0.5\} \times]l, 1[) \cup (\{0.5\} \times]l, 1[)$ donne la frontière de Ω .

Pour un temps $T > 0$, on défini Ω_T comme étant l'ensemble $]0, T[\times \Omega$.

Dans la suite, nous allons traiter la situation où η tend vers 0. Pour éviter le problème de la dégénérescence du problème (4.1) quand $\eta \rightarrow 0$, nous allons le reformuler en utilisant une décomposition dite micro-macro [27] de la solution ϕ_η . On prouve alors l'existence et l'unicité

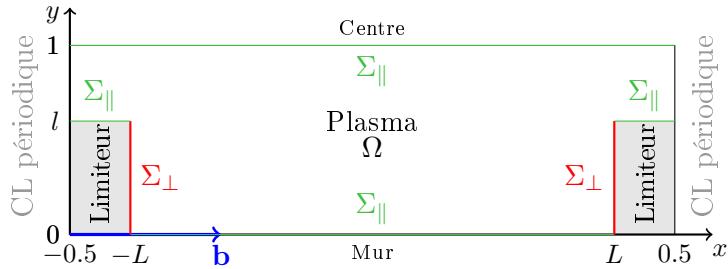


FIGURE 4.14 – Rappel de la figure 4.1 : Représentation en deux dimensions de la zone contenant le plasma de bord. x correspond à une abscisse curviligne le long d'une ligne de champ magnétique (de direction \mathbf{b}). Le domaine contenant le plasma est Ω et les frontières sont Σ_{\parallel} (pour tout la partie parallèle à \mathbf{b}) et Σ_{\perp} (pour la partie perpendiculaire à \mathbf{b}). Cette configuration sera notamment celle utilisée dans la section 4.3.

de ϕ_0 , et on étudie la convergence de (ϕ_η) vers ϕ_0 . Enfin nous conclurons cette partie par des tests numériques.

Ces travaux sont résumés dans un compte rendu de la conférence *Seventh International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications (FVCA7)* qui a été accepté pour publication [9].

4.3.1 Décomposition micro-macro

Pour traiter le cas d'une faible résistivité parallèle dans un domaine en dimension 2, nous allons donc mettre en place la méthode de la décomposition micro-macro décrite dans l'article de Degond *et al.* [27]. Dans leur travail, Degond *et al.* ont présenté et étudié la méthode pour un problème elliptique linéaire fortement anisotrope. Mentrelli et Negulescu [44] ont aussi utilisé, sans démonstration, cette méthode AP pour résoudre numériquement une équation de diffusion non linéaire anisotrope, issue d'un modèle simplifié décrivant l'évolution de la température du plasma dans un tokamak.

L'idée est de décomposer le potentiel électrique de la manière suivante

$$\phi_\eta = p_\eta + \eta q_\eta,$$

où p_η est indépendant de la variable x , associé à l'axe parallèle aux lignes de champ magnétique. Autrement dit $\partial_x \phi_\eta = \eta \partial_x q_\eta$. Pour assurer l'unicité de cette décomposition, il faudra alors fixer une condition supplémentaire sur q_η . On remarque ici, que c'est la même idée que la décomposition en partie moyenne et partie fluctuante, p_η jouant un rôle similaire à la moyenne sur la ligne de champ et q_η se comparant à la partie fluctuante. La différence étant que q_η n'est pas fixé par une condition de moyenne nulle mais par une condition de type Dirichlet.

L'idée qui nous évitera de conserver des termes non locaux dans les équations que l'on va résoudre, c'est de ne pas calculer p_η et q_η mais ϕ_η et q_η . La contrepartie de cette stratégie est que l'on devra évaluer deux fonctions de trois variables ($\phi_\eta(t, x, y)$ et $q_\eta(t, x, y)$) au lieu d'une fonction de deux variables ($p_\eta(t, y)$) et d'une autre de trois variables ($q_\eta(t, x, y)$). On reprend

alors le problème (4.1) et on remplace les termes $\frac{1}{\eta} \partial_x \phi_\eta$ et $\frac{1}{\eta} \partial_x^2 \phi_\eta$ par, respectivement, $\partial_x q_\eta$ et $\partial_x^2 q_\eta$:

$$\begin{cases} -\partial_t \partial_y^2 \phi_\eta - \partial_x^2 q_\eta + \nu \partial_y^4 \phi_\eta = S & \text{dans } \Omega_T \\ \partial_x \phi_\eta = \eta \partial_x q_\eta & \text{dans } \Omega_T \\ \partial_x q_{\eta|x=-L} = (1 - e^{\Lambda - \phi_{\eta|x=-L}}) & \text{sur }]0, T[\times \Sigma_{\perp - L} \\ \partial_x q_{\eta|x=L} = - (1 - e^{\Lambda - \phi_{\eta|x=L}}) & \text{sur }]0, T[\times \Sigma_{\perp L} \\ q_{\eta|x=-L} = 0 & \text{sur }]0, T[\times \{-L\} \times]0, 1[\\ \partial_y \phi_{\eta|\Sigma_{\parallel}} = 0 & \text{sur }]0, T[\times \Sigma_{\parallel} \\ \partial_y^3 \phi_{\eta|\Sigma_{\parallel}} = 0 & \text{sur }]0, T[\times \Sigma_{\parallel} \\ \phi_{\eta|t=0} = \phi_{ini} & \text{à } t = 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

On ajoute à cela une condition de périodicité sur ϕ_η par rapport à la variable x en $\{-0.5\} \times]l, 1[$ et $\{0.5\} \times]l, 1[$, pour tout temps entre 0 et T .

Pour faciliter la résolution numérique du problème (4.32), on pourra remplacer l'équation $\partial_x \phi_\eta = \eta \partial_x q_\eta$ par :

$$\begin{cases} \partial_x^2 \phi_\eta = \eta \partial_x^2 q_\eta & \text{dans } \Omega_T \\ \partial_x \phi_{\eta|x=-0.5} = \eta \partial_x q_{\eta|x=-0.5} & \text{sur }]0, T[\times \{-0.5\} \times]l, 1[\\ \partial_x \phi_{\eta|x=-L} = \eta \partial_x q_{\eta|x=-L} & \text{sur }]0, T[\times \Sigma_{\perp - L} \\ \partial_x \phi_{\eta|x=L} = \eta \partial_x q_{\eta|x=L} & \text{sur }]0, T[\times \Sigma_{\perp L} \\ \partial_x \phi_{\eta|x=0.5} = \eta \partial_x q_{\eta|x=0.5} & \text{sur }]0, T[\times \{0.5\} \times]l, 1[. \end{cases}$$

A $\eta > 0$ fixé, l'existence et l'unicité de la solution faible ϕ_η de (4.1) sont garanties [45]. On peut alors aisément prouver que la décomposition $\phi_\eta = p_\eta + \eta q_\eta$ est unique. Il reste donc à étudier le comportement quand η tend vers 0 : c'est à dire d'abord montrer que ϕ_0 et q_0 , les solutions du problème limite pour $\eta \rightarrow 0$ ont bien un sens et évaluer l'erreur $\|\phi_\eta - \phi_0\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}$. On remarque que, sous réserve d'avoir la convergence de ϕ_η, q_η vers ϕ_0, q_0 quand η tend vers 0, on a ϕ_0 indépendant de x .

La démonstration de l'existence et de l'unicité de ϕ_0 se fait en suivant étape par étape la preuve faite pour le cas à η fixé donnée dans [45] : on démontre le cas linéaire puis on étend au cas linéaire par un argument de type point fixe. Dans un souci de rigueur et de clarté, nous allons l'exposer en détail ici.

Nous allons ici commencer par donner quelques définitions d'espaces qui seront fréquemment utilisés dans les démonstrations qui vont suivre.

Définition 4.3.1

On définit les espaces de Hilbert suivants :

- $V = \{f \in H^1(\Omega), \partial_y^2 f \in L^2(\Omega), f \text{ périodique sur } \{-0.5, 0.5\} \times]l, 1[, \partial_y f = 0 \text{ sur } \Sigma_{\parallel}\}$

avec pour produit scalaire :

$$\langle f, v \rangle_V = \int_{\Omega} \partial_x f \partial_x v \, dydx + \int_{\Omega} \partial_y^2 f \partial_y^2 v \, dydx + 2 \int_0^l f|_{x=L} v|_{x=L} \, dy.$$

– L'ensemble des éléments de V à dérivée par rapport à x (direction parallèle) nulle :

$$V_0 = \{f \in H^1(\Omega), \partial_y^2 f \in L^2(\Omega), \partial_x f = 0 \text{ dans } \Omega, \partial_y f = 0 \text{ sur } \Sigma_{\parallel}\}.$$

On le munit du produit scalaire :

$$\langle f, v \rangle_{V_0} = \int_{\Omega} \partial_y^2 f \partial_y^2 v \, dydx + 2 \int_0^l f|_{x=L} v|_{x=L} \, dy.$$

– $H = \{f \in L^2(\Omega), \partial_y f \in L^2(\Omega)\}$ avec son produit scalaire (pour $\epsilon > 0$) :

$$\langle f, v \rangle_H = \epsilon \int_{\Omega} f v \, dydx + \int_{\Omega} \partial_y f \partial_y v \, dydx.$$

– L'ensemble des éléments de H à dérivée par rapport à x (direction parallèle) nulle : $H_0 = \{f \in H^1(\Omega), \partial_x f = 0 \text{ dans } \Omega\}$, muni du produit scalaire (pour $\epsilon > 0$) :

$$\langle f, v \rangle_{H_0} = \epsilon \int_{\Omega} f v \, dydx + \int_{\Omega} \partial_y f \partial_y v \, dydx.$$

– $Q = \{f \in L^2(\Omega), \partial_x f \in L^2(\Omega), f|_{x=-L} = 0 \text{ sur }]0, l[\}$, muni du produit scalaire :

$$\langle f, v \rangle_Q = \int_{\Omega} \partial_x f \partial_x v \, dydx.$$

On remarque que le produit scalaire $\langle f, v \rangle_{H_0}$ dépend d'un paramètre ϵ dont on va expliciter le rôle par la suite.

On montre alors aisément l'inégalité de type Poincaré suivante, voir [45] :

Lemme 4.3.1

Il existe une constante $C_{\Omega} > 0$ (ne dépendant que de Ω), telle que pour tout $\phi \in V$, on a :

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} (\|\phi|_{x=L}\|_{L^1(]0, l[)} + \|\partial_x \phi\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_y^2 \phi\|_{L^2(\Omega)}).$$

On note V_0^* le dual topologique de V_0 . H_0 étant un espace de Hilbert, on l'identifie à son dual topologique. On note \hookrightarrow l'inclusion avec injection continue. V_0 muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle_{V_0}$ est aussi un espace de Hilbert.

On précise que $V_0 \hookrightarrow H_0 \hookrightarrow V_0^*$ forme un triplet d'évolution (voir la définition dans l'annexe A) car V_0 est dense dans H_0 et que l'inclusion de V_0 dans H_0 est continue.

On définit aussi :

Définition 4.3.2

L'espace \mathcal{A} est l'espace des fonctions ϕ telles que :

- $\phi \in L^2(0, T; V)$,
- $\partial_y \phi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$,
- $\partial_y \phi \in L^2\left(0, T; \{f \in H^1(\Omega), \partial_y^2 f \in L^2(\Omega), f|_{\Sigma_\parallel} = 0\}\right)$,
- $\partial_y^2 \phi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$,
- $\partial_t \phi \in L^2(0, T; V)$,
- $\partial_y \partial_t \phi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

L'espace \mathcal{A}_\perp est l'espace des fonctions ϕ telles que :

- $\phi \in L^2(0, T; V_0)$,
- $\partial_y \phi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$,
- $\partial_y \phi \in L^2\left(0, T; \{f \in H^1(\Omega), \partial_y^2 f \in L^2(\Omega), \partial_x f = 0 \text{ dans } \Omega, f|_{\Sigma_\parallel} = 0\}\right)$,
- $\partial_y^2 \phi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$,
- $\partial_t \phi \in L^2(0, T; V_0)$,
- $\partial_y \partial_t \phi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

Dans l'article de Negusescu *et al.* [45], il est montré que, sous des hypothèses convenables sur les données S, ϕ_{ini} , la solution ϕ_η est dans \mathcal{A} pour tout $\eta > 0$. On peut alors montrer que $q_\eta \in L^2(0, T, Q)$ en écrivant $q_\eta(t, x, y) = \frac{1}{\eta} (\phi_\eta(t, x, y) - \phi_\eta(t, L, y))$, pour presque tout $t \in]0, T[, (x, y) \in \Omega$. De plus, on a le lemme suivant qui sera utilisé lors de l'étude de la convergence quand η tend vers 0 :

Lemme 4.3.2

Si $\phi_\eta \in \mathcal{A}$, alors, $q_\eta \in L^2(0, T, V)$.

Démonstration : On sait déjà que $\partial_x q_\eta = \frac{1}{\eta} \partial_x \phi_\eta \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$. Par ailleurs, comme

$$\partial_y \phi_\eta \in L^2\left(0, T; \{f \in H^1(\Omega), \partial_y^2 f \in L^2(\Omega), f|_{\Sigma_\parallel} = 0\}\right),$$

on montre que $\partial_y \phi_\eta|_{x=-L}$ et $\partial_y^2 \phi_\eta|_{x=-L}$ sont dans $L^2(0, T; L^2([0, 1]))$, en utilisant les résultats du livre de Lions-Magenes [42], page 9. Il vient alors $\partial_y q_\eta, \partial_y^2 q_\eta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Enfin, on remarque que $\partial_y q_\eta|_{\Sigma_\parallel} = 0$. ■

Dans la suite, nous allons notamment prouver que ϕ_0 appartient à \mathcal{A}_\perp .

Si on fait le produit scalaire de la première équation de (4.32), par une fonction $v \in V$

(donc v ne dépend pas de t), on a le problème faible pour $\eta > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall v \in V, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \partial_y \phi_{\eta} \partial_y v \, dy dx + \int_{\Omega} \partial_x q_{\eta} \partial_x v \, dy dx + \nu \int_{\Omega} \partial_y^2 \phi_{\eta} \partial_y^2 v \, dy dx \\ \quad + \int_0^l (1 - \exp(\Lambda - \phi_{\eta}|_{x=-L})) v|_{x=-L} \, dy + \int_0^l (1 - \exp(\Lambda - \phi_{\eta}|_{x=L})) v|_{x=L} \, dy \\ = \int_{\Omega} S v \, dy dx \\ \partial_y \phi_{\eta}|_{t=0} = \partial_y \phi_{ini}. \end{array} \right. \quad (4.33)$$

On réécrit maintenant le problème (4.32) sous sa forme faible en espace et en temps : Trouver $\phi_{\eta} \in \mathcal{A}$ et $q_{\eta} \in L^2(0, T, Q)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \xi \in H^1(]0, T[), \forall v \in V \cap H^2(\Omega), \forall w \in Q, \\ \int_{\Omega} \partial_y \phi_{\eta|t=T} \partial_y v \, dy dx \xi(T) - \int_0^T \int_{\Omega} \partial_y \phi_{\eta|t=T} \partial_y v \, dy dx \xi' dt + \int_0^T \int_{\Omega} \partial_x q_{\eta} \partial_x v \, dy dx \xi dt \\ \quad + \nu \int_0^T \int_{\Omega} \partial_y^2 \phi_{\eta} \partial_y^2 v \, dy dx \xi dt + \int_0^T \int_0^l (1 - e^{\Lambda - \phi_{\eta}|_{x=-L}}) v|_{x=-L} \, dy \xi dt \\ \quad + \int_0^T \int_0^l (1 - e^{\Lambda - \phi_{\eta}|_{x=L}}) v|_{x=L} \, dy \xi dt = \int_{\Omega} \partial_y \phi_{ini} \partial_y v \, dy dx \xi(0) + \int_0^T \int_{\Omega} S v \, dy dx \xi dt \\ \eta \int_0^T \int_{\Omega} \partial_x q_{\eta} \partial_x w \, dy dx \xi dt = \int_0^T \int_{\Omega} \partial_x \phi_{\eta} \partial_x w \, dy dx \xi dt. \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Le problème faible pour $\eta = 0$ est le même que le problème (4.33) sauf que les espaces dans lesquels on recherche ϕ_0 et q_0 sont différents :

On cherche à trouver $\phi_0 \in \mathcal{A}_{\perp}$ et $q_0 \in L^2(0, T, Q)$ solution faible de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall v \in V_0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \partial_y \phi_0 \partial_y v \, dy dx + \int_{\Omega} \partial_x q_0 \partial_x v \, dy dx + \nu \int_{\Omega} \partial_y^2 \phi_0 \partial_y^2 v \, dy dx \\ \quad + 2 \int_0^l (1 - \exp(\Lambda - \phi_0)) v \, dy = \int_{\Omega} S v \, dy dx \\ \partial_y \phi_0|_{t=0} = \partial_y \phi_{ini}. \end{array} \right. \quad (4.35)$$

Comme ϕ_0 est à chercher parmi les fonctions constantes par rapport à x , l'axe parallèle aux lignes de champ magnétique, on peut se retrouindre à $v \in V_0$, ce qui donne le système

suivant :

$$\begin{cases} \forall v \in V_0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \partial_y \phi_0 \partial_y v \, dydx + \nu \int_{\Omega} \partial_y^2 \phi_0 \partial_y^2 v \, dydx \\ \quad + 2 \int_0^l (1 - \exp(\Lambda - \phi_0|_{x=L})) v|_{x=L} \, dy = \int_{\Omega} S v \, dydx \\ \partial_y \phi_0|_{t=0} = \partial_y \phi_{ini}. \end{cases} \quad (4.36)$$

On peut ainsi découpler ϕ_0 et q_0 dans le système (4.35) pour donner le problème (4.36), mais cela ne peut se faire que dans le cas $\eta = 0$. C'est le système (4.36) que l'on va considérer pour construire ϕ_0 dans la suite.

Comme la forme bilinéaire $(\phi, v) \in H \times H \mapsto \int_{\Omega} \partial_y \phi \partial_y v \, dydx$ n'est pas coercive sur H , d'où l'introduction du paramètre $\epsilon > 0$. On remplacera donc cette forme linéaire par $(\phi, v) \in H \times H \mapsto \int_{\Omega} \epsilon \phi v + \partial_y \phi \partial_y v \, dydx$ et on étudiera le comportement quand ϵ tend vers 0.

Nous faisons ensuite l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.3.1

1. $S, \partial_y S, \partial_y^2 S, \partial_t S, \partial_t^2 S \in L^2(\Omega_T)$ et $\|S\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq C_s$ et $\|S|_{t=T}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_s$ avec C_s à définir.
2. $\phi_{ini} \in H^4(\Omega)$.
3. ϕ_{ini} est indépendant de x , c'est à dire $\partial_x \phi_{ini} = 0$.
4. $\int_{\Omega} S|_{t=0} \, dydx = \int_{\Omega} \partial_y^4 \phi_{ini} \, dydx + 2 \int_0^l (1 - e^{\Lambda - \phi_{ini}|_{x=L}}) \, dy$.

Les hypothèses 3 et 4 du théorème 4.3.1 sont des conditions nécessaires d'existence de ϕ_0 , la solution du problème (4.36), ce sont des conditions de compatibilité de la condition initiale. On remarque que pour $\eta > 0$, les hypothèses 3 et 4 ne sont en général pas valables au temps $t > 0$. A S fixé, on peut trouver ϕ_{ini} vérifiant ces deux hypothèses 3 et 4, par exemple en recherchant parmi les constantes par rapport à x et y .

Nous allons maintenant énoncer le résultat que nous allons démontrer dans la suite :

Théorème 4.3.1

Sous l'hypothèse 4.3.1, le problème (4.34) admet une unique solution $(\phi_\eta, q_\eta) \in \mathcal{A} \times L^2(0, T, Q)$. De plus, on a la convergence faible de ϕ_η et q_η :

$$\begin{aligned} \phi_\eta &\rightharpoonup \phi_0 && \text{dans } L^2(\Omega_T) \\ q_\eta &\rightharpoonup q_0 && \text{dans } L^2(\Omega_T), \end{aligned}$$

où $(\phi_0, q_0) \in \mathcal{A}_\perp \times L^2(0, T, Q)$ est l'unique solution faible de (4.35).

Enfin, on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|\phi_\eta - \phi_0\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))} \leq c(\Omega_T, \phi_0, S, \Lambda) \sqrt{\eta}.$$

On remarque que l'estimation d'erreur n'est pas donnée dans $L^2(\Omega_T)$, cela restant une question ouverte.

La démonstration du théorème 4.3.1 consiste d'abord à prouver l'existence et l'unicité de ϕ_0 , solution de (4.36), puis de q_0 , solution de (4.35) et enfin étudier le comportement quand η tend vers 0. C'est l'objet de la suite de cette partie.

4.3.1.1 Existence de ϕ_0 dans le cas linéaire

On commence par étudier le problème linéaire en vue de prouver l'existence de ϕ_0 , solution du problème non linéaire (4.36), par une méthode de point fixe.

Dans ce paragraphe, la solution recherchée dans le problème linéaire est ϕ^ϵ . Dans le problème non linéaire (4.37) présenté plus bas, le terme non linéaire de (4.36), $(1 - \exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}))$ a été remplacé par $h\phi_{|x=L}^\epsilon + g$, où $h \in L^\infty([0, T] \times [0, l])$ et $g \in L^2([0, T] \times [0, l])$.

On va utiliser l'espace suivant, dont les propriétés sont rappelées dans l'annexe A :

$$W^{1,2}(0, T; V_0, H_0) = \{f \in L^2(0, T; V_0), \partial_t f \in L^2(0, T; V_0^*)\}$$

Nous allons montrer la propriété suivante :

Proposition 4.3.1

On considère le problème linéarisé sous sa forme faible :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \xi \in H^1([0, T]), \forall v \in V_0, \\ \int_{\Omega} \epsilon \phi_{|t=T}^\epsilon v + \partial_y \phi_{|t=T}^\epsilon \partial_y v \, dy dx \xi(T) - \int_0^T \int_{\Omega} \epsilon \phi_{|t=T}^\epsilon v + \partial_y \phi_{|t=T}^\epsilon \partial_y v \, dy dx \xi' dt \\ \quad + \nu \int_0^T \int_{\Omega} \partial_y^2 \phi^\epsilon \partial_y^2 v \, dy dx \xi dt + 2 \int_0^T \int_0^l h \phi_{|x=L}^\epsilon v_{|x=L} \, dy \xi dt \\ = \int_{\Omega} \epsilon \phi_{ini} v + \partial_y \phi_{ini} \partial_y v \, dy dx \xi(0) + \int_0^T \int_{\Omega} S v \, dy dx \xi dt - 2 \int_0^T \int_0^l g v_{|x=L} \, dy \xi dt. \end{array} \right. \quad (4.37)$$

On suppose que $h : [0, T] \times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ est dans $L^\infty([0, T] \times [0, l])$ et qu'il existe h_{min} tel que pour presque tout $t \in [0, T]$, $y \in [0, l]$, $h(t, y) \geq h_{min} > 0$. On admet que $g \in L^2([0, T] \times [0, l])$, $S \in L^2(\Omega_T)$ et $\phi_{ini} \in H^1(\Omega)$. Ce système admet une unique solution $\phi^\epsilon \in W^{1,2}(0, T; V_0, H_0)$. De plus, il existe une constante $c(\Omega_T, \nu, h_{min}) > 0$ (indépendante de ϵ) telle que cette solution vérifie l'estimation d'énergie, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\epsilon \|\phi^\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y \phi^\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \nu \|\partial_y^2 \phi^\epsilon\|_{L^2(0, t; L^2(\Omega))}^2 \\ & \quad + 2h_{min} \|\phi_{|x=L}^\epsilon\|_{L^2(0, t; L^2(\Sigma_{\perp L}))}^2 \\ & \leq c(\Omega_T, \nu, h_{min}) \left(\frac{1}{2} \left(\epsilon \|\phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y \phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \|g\|_{L^2([0, T] \times \Sigma_{\perp L})}^2 + \|S\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \right). \end{aligned}$$

On remarque que la condition initiale $\partial_y \phi_{0|t=0} = \partial_y \phi_{ini}$ a été changée en $\phi_{|t=0}^\epsilon = \phi_{ini}$.

Démonstration de la proposition 4.3.1 : Cette démonstration consiste essentiellement à vérifier soigneusement les hypothèses d'un résultat donnée par Zeidler et Boron dans [66], page 424 et rappelé en annexe A (théorème A.0.1). Le théorème utilisé est basé sur la méthode de Galerkin pour un problème d'évolution du premier ordre :

On remarque que, pour presque tout $t \in]0, T[$, $v \mapsto \int_{\Omega} S v \, dydx - 2 \int_0^l g v|_{x=L} \, dy$ est une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert V_0 . D'après le théorème de Riesz, on peut donc trouver $\mathcal{S}(t) \in V_0$ tel que :

$$\forall v \in V_0, \langle \mathcal{S}(t), v \rangle_{V_0} = \int_{\Omega} S v \, dydx - 2 \int_0^l g v|_{x=L} \, dy.$$

En utilisant les produits scalaires hilbertiens sur H_0 et V_0 , on réécrit le problème (4.37) sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi^\epsilon \in W^{1,2}(0, T; V_0, H_0) = \{f \in L^2(0, T; V_0), \partial_t f \in L^2(0, T; V_0^*)\} \text{ tel que :} \\ \forall \xi \in C_c^\infty(]0, T[), \forall v \in V, \forall t \in]0, T[, \\ - \int_0^T \langle \phi^\epsilon(t), v \rangle_{H_0} \xi'(t) \, dt + \int_0^T a(t, \phi^\epsilon(t), v) \xi(t) \, dt = \int_0^T \langle \mathcal{S}(t), v \rangle_{V_0} \xi(t) \, dt \\ \phi_{0|t=0}^\epsilon = \phi_{ini} \in H_0. \end{array} \right.$$

avec la forme bilinéaire $a(t, ., .) : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$a(t, \phi, v) = \nu \int_{\Omega} \partial_y^2 \phi \partial_y^2 v \, dydx + 2 \int_0^l h(t) \phi|_{x=L} v|_{x=L} \, dy.$$

Cette forme bilinéaire $a(t, ., .)$ est donc :

1. Continue, uniformément par rapport à t :

$$\begin{aligned} |a(\phi, v)| &\leq \nu \|\partial_y^2 \phi\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_y^2 v\|_{L^2(\Omega)} + 2\|h\|_\infty \|\phi|_{x=L}\|_{L^2(]0, l[\times\{L\})} \|v|_{x=L}\|_{L^2(]0, l[\times\{L\})} \\ &\leq (\nu + 2\|h\|_\infty) \|\phi\|_{V_0} \|v\|_{V_0}. \end{aligned}$$

2. Coercive, uniformément par rapport à t :

$$\begin{aligned} a(\phi, \phi) &= \nu \|\partial_y^2 \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^l h \phi_{0|x=L}^2 \, dy \quad \text{Rappel : } h \geq h_{min} > 0 \\ &\geq \min\{\nu, 2h_{min}\} \left(\|\partial_y^2 \phi\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^l \phi_{|x=L}^2 \, dy \right) \\ &\geq c(\nu, h_{min}) \|\phi\|_{V_0}. \end{aligned}$$

D'après le théorème A.0.1, on a l'existence et l'unicité de la solution du problème linéarisé (4.37). On a de plus l'inégalité suivante, pour une constante $c(\Omega_T, \nu, h) > 0$ indépendante de ϕ^ϵ, ϵ :

$$\begin{aligned} \|\phi^\epsilon\|_{W^{1,2}(0, T; V_0, H_0)} &= \|\phi^\epsilon\|_{L^2(0, T; V_0)} + \|\partial_t \phi^\epsilon\|_{L^2(0, T; V_0^*)} \quad (\text{rappel de la définition}) \\ &\leq c(\Omega_T, \nu, h_{min}) \left(\|\phi_{|t=0}^\epsilon\|_H + \|S\|_{L^2(0, T; V_0^*)} + \|g\|_{L^2(0, T; V_0^*)} \right) \\ &\leq c(\Omega_T, \nu, h_{min}) \left(\epsilon \|\phi_{|t=0}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_y \phi_{|t=0}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|S\|_{L^2(0, T; V_0^*)} + \|g\|_{L^2(0, T; V_0^*)} \right). \end{aligned}$$

De plus, on a, pour $t \in]0, T[$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\epsilon \|\phi^\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y \phi^\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \int_0^t \nu \|\partial_y^2 \phi^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + 2 \int_0^t \int_0^l h \left(\phi_{|x=L}^\epsilon \right)^2 dy dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\epsilon \|\phi_{|t=0}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y \phi_{|t=0}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + 2 \int_0^t \int_0^l g \phi_{|x=L}^\epsilon dy dt + \int_0^t \int_\Omega S \phi^\epsilon dy dx dt. \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\epsilon \|\phi^\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y \phi^\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \nu \|\partial_y^2 \phi^\epsilon\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + 2h_{min} \|\phi_{|x=L}^\epsilon\|_{L^2(0,t;L^2(\Sigma_{\perp L}))}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\epsilon \|\phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y \phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + 2 \|g\|_{L^2(0,t;L^2(\Sigma_{\perp L}))} \|\phi_{|x=L}^\epsilon\|_{L^2(0,t;L^2(\Sigma_{\perp L}))} \\ & \quad + \|S\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} \|\phi^\epsilon\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Au final, en utilisant des inégalités de Young, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\epsilon \|\phi^\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y \phi^\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \nu \|\partial_y^2 \phi^\epsilon\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + 2h_{min} \|\phi_{|x=L}^\epsilon\|_{L^2(0,t;L^2(\Sigma_{\perp L}))}^2 \\ & \leq c(\Omega_T, \nu, h_{min}) \left(\frac{1}{2} \left(\epsilon \|\phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y \phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + 2 \|g\|_{L^2(0,T[\times \Sigma_{\perp L}])}^2 + \|S\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \right). \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration du cas linéaire. ■

4.3.1.2 Existence de ϕ_0 dans le cas non linéaire

Nous allons alors maintenant prouver le résultat dans le cas non linéaire, à l'aide d'un argument de type point fixe.

Proposition 4.3.2

Sous l'hypothèse 4.3.1, le problème non linéaire (4.36) qui consiste à trouver $\phi_0 \in \mathcal{A}_\perp$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \xi \in H^1(]0, T[), \forall v \in V_0, \\ \int_{\Omega} \epsilon \phi_0|_{t=T} v + \partial_y \phi_0|_{t=T} \partial_y v \, dy dx \xi(T) - \int_0^T \int_{\Omega} \partial_y \phi_0|_{t=T} \partial_y v \, dy dx \xi' dt \\ \quad + \nu \int_0^T \int_{\Omega} \partial_y^2 \phi_0 \partial_y^2 v \, dy dx \xi dt + 2 \int_0^T \int_0^l \left(1 - e^{\Lambda - \phi_0|_{x=L}}\right) \phi_0|_{x=L} v|_{x=L} \, dy \xi dt \\ = \int_{\Omega} \partial_y \phi_{ini} \partial_y v \, dy dx \xi(0) + \int_0^T \int_{\Omega} S v \, dy dx \xi dt \end{array} \right.$$

admet une unique solution faible $\phi_0 \in \mathcal{A}_\perp$, c'est à dire telle que :

- $\phi_0 \in L^2(0, T; V_0)$.
- $\partial_y \phi_0 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.
- $\partial_y \phi_0 \in L^2\left(0, T; \{f \in H^1(\Omega), \partial_y^2 f \in L^2(\Omega), \partial_x f = 0 \text{ dans } \Omega, f|_{\Sigma_\parallel} = 0\}\right)$.
- $\partial_y^2 \phi_0 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.
- $\partial_t \phi_0 \in L^2(0, T; V_0)$.
- $\partial_y \partial_t \phi_0 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

De plus, on a l'estimation d'énergie suivante, pour une constante $c(\Omega_T) > 0$:

$$\|\partial_y \phi_0\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} + \|\phi_0\|_{L^2(0, T; V_0)} \leq c(\Omega_T) \left(1 + \|\partial_y \phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)} + \|S\|_{L^\infty(\Omega_T)}\right).$$

Etant donné la régularité de ϕ_0 on, peut montrer que $\phi_0|_{x=L} \in H^1(]0, T[\times]0, l[)$, et par une inégalité de Trudinger [6, 19], que $e^{\Lambda - \phi_0|_{x=L}} \in L^2(]0, T[\times]0, l[)$.

Ainsi, on est assuré que la formulation variationnelle de (4.36) a un sens.

Lemme 4.3.3

Pour tout $\phi \in H^1(]0, T[\times]0, l[)$, il existe une constante $c(l, T, \Lambda, \|\phi\|_{H^1(]0, T[\times]0, l[)}) > 0$ telle que

$$\|\exp(\Lambda - \phi)\|_{L^2(]0, T[\times]0, l[)} \leq c(l, T, \Lambda, \|\phi\|_{H^1(]0, T[\times]0, l[)}).$$

Soit $K > 0$. Si, de plus, on suppose que $\|\phi\|_{H^1(]0, T[\times]0, l[)} \leq K$, alors :

$$\|\exp(\Lambda - \phi)\|_{L^2(]0, T[\times]0, l[)} \leq c(l, T, \Lambda, K).$$

Démonstration : Soit $\phi \in H^1(]0, T[\times]0, l[)$. D'après l'inégalité de Trudinger [6], page 277, on a :

$$\inf \left\{ k > 0, \int_0^T \int_0^l \exp\left(\frac{|\phi|^2}{k^2}\right) - 1 \, dy \, dt \leq 1 \right\} \leq c(l, T) \|\phi\|_{H^1(]0, T[\times]0, l[)}.$$

Ce qui implique que :

$$\int_0^T \int_0^l \exp\left(\frac{|\phi|^2}{(c(l, T) \|\phi\|_{H^1(]0, T[\times]0, l[)})^2}\right) \, dy \, dt \leq 1 + lT.$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité précédente par $\exp((c(l, T)\|\phi\|_{H^1([0, T] \times [0, l])})^2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \exp((c(l, T)\|\phi\|_{H^1([0, T] \times [0, l])})^2) \int_0^T \int_0^l \exp\left(\frac{|\phi|^2}{(c(l, T)\|\phi\|_{H^1([0, T] \times [0, l])})^2}\right) dy dt \\ & \leq (1 + lT) \exp((c(l, T)\|\phi\|_{H^1([0, T] \times [0, l])})^2). \end{aligned}$$

L'inégalité de Young nous permet d'avoir :

$$\int_0^T \int_0^l \exp(-2\phi) dy dt \leq (1 + lT) \exp((c(l, T)\|\phi\|_{H^1([0, T] \times [0, l])})^2).$$

Au final cela donne :

$$\|\exp(\Lambda - \phi)\|_{L^2([0, T] \times [0, l])} \leq ((1 + lT) \exp(2\Lambda + (c(l, T)\|\phi\|_{H^1([0, T] \times [0, l])})^2))^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit alors les inégalités annoncées dans le lemme 4.3.3. ■

Les hypothèses de terme source de faible amplitude ($\|S\|_{L^\infty([0, T] \times \Omega)} \leq C_s$ et $\|S|_{t=T}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_s$) vont nous permettre d'établir les estimations d'énergie utiles à la démonstration. Une question intéressante qui reste en suspens est la suivante : Est-ce que ces hypothèses sur S sont uniquement techniques ? Ou est-ce que la résolution du problème est vraiment compromise quand S est trop grand ?

4.3.1.2.1 Etape 1 : On commence par démontrer l'estimation d'énergie qui est simplement une estimation *a priori*. Pour cela, on considère l'équation (4.36) avec $v = \phi_0$ et on intègre par rapport au temps t :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\partial_y \phi_0|_{t=T}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\partial_y^2 \phi_0\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + 2 \int_0^T \int_0^l \left(1 - e^{\Lambda - \phi_0|x=L|}\right) \phi_0|_{x=L} dy dt \\ & = \frac{1}{2} \|\partial_y \phi_0|_{t=0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \int_\Omega S \phi_0 dy dx dt. \end{aligned} \tag{4.38}$$

On peut montrer que la fonction $f(x) = x(1 - e^{\Lambda - |x|})$ vérifie, pour des constantes c_1, c_2, c_3 strictement positives bien choisies :

$$\begin{aligned} f(x) & \geq c_1|x|e^{\Lambda+|x|} & \text{si } x < -c_\Lambda = \min\{\Lambda - 1, 0\} \\ f(x) & \geq -c_2 & \text{si } -c_\Lambda \leq x \leq \Lambda + 1 \\ f(x) & \geq c_3|x| & \text{si } x > \Lambda + 1. \end{aligned}$$

En injectant ce découpage du terme non linéaire dans (4.38), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\partial_y \phi_0|_{t=T}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\partial_y^2 \phi_0\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + 2c_1 \int_0^T \int_{0 \leq |\phi_0|_{x=L} < -c_\Lambda} \left(1 - e^{\Lambda + |\phi_0|_{x=L}}\right) |\phi_0|_{x=L} dy dt \\ & + 2c_3 \int_0^T \int_{|\phi_0|_{x=L} > \Lambda + 1} |\phi_0|_{x=L} dy dt \leq 2c_2 lT + \frac{1}{2} \|\partial_y \phi_0|_{t=0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|S\|_{L^\infty(\Omega_T)} \|\phi_0\|_{L^1(\Omega_T)}. \end{aligned}$$

En prenant $c_4 = \min\{c_1, c_3\}$, l'inégalité précédente devient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\partial_y \phi_0|_{t=T}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\partial_y^2 \phi_0\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + 2c_4 \underbrace{\int_0^T \int_0^l |\phi_0|_{x=L} dy dt}_{=\|\phi_0|_{x=L}\|_{L^1([0,T]\times[0,l])}} \\ & \leq c(\Omega_T) + \frac{1}{2} \|\partial_y \phi_0|_{t=0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|S\|_{L^\infty(\Omega_T)} \sqrt{\text{mes}(\Omega)} \|\phi_0\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

On utilise ensuite l'estimation donnée par l'inégalité de type Poincaré du lemme 4.3.1 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\partial_y \phi_0|_{t=T}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\partial_y^2 \phi_0\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + 2c_4 \|\phi_0|_{x=L}\|_{L^1([0,T]\times[0,l])} \\ & \leq c(\Omega_T) + \frac{1}{2} \|\partial_y \phi_0|_{t=0}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + \sqrt{\text{mes}(\Omega)} C_\Omega \|S\|_{L^\infty(\Omega_T)} \left(\|\phi_0|_{x=L}\|_{L^1([0,T]\times[0,l])} + \sqrt{T} \|\partial_y^2 \phi_0\|_{L^2(\Omega_T)} \right). \end{aligned}$$

On demande alors à ce que $\|S\|_{L^\infty(\Omega_T)}$ soit suffisamment petit pour avoir :

$$\sqrt{\text{mes}(\Omega)} C_\Omega \|S\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq c_4.$$

Cela permet au terme comprenant $\|\phi_0|_{x=L}\|_{L^1([0,T]\times[0,l])}$ dans le membre de droite de l'inégalité précédente d'être plus faible que son homologue dans le membre de gauche. En rappelant que l'on veut $\|S\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq C_s$, on prend alors :

$$C_s \leq \frac{c_4}{\sqrt{\text{mes}(\Omega)} C_\Omega}.$$

Ensuite, on pourra observer que pour une constante $c_1(\Omega_T, \nu) > 0$ bien choisie, on a

$$\sqrt{\text{mes}(\Omega)} T C_\Omega \|\partial_y^2 \phi_0\|_{L^2(\Omega_T)} \leq \frac{\nu}{2C_s} \|\partial_y^2 \phi_0\|_{L^2(\Omega_T)} + c_1(\Omega_T, \nu),$$

où $c_1(\Omega_T, \nu)$ ne dépend pas de ϕ_0 .

On obtient alors l'inégalité suivante, pour $c_5(\Omega_T, \nu) > 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\partial_y \phi_0|_{t=T}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \|\partial_y^2 \phi_0\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + c_5(\Omega_T, \nu) \|\phi_0|_{x=L}\|_{L^1([0,T]\times[0,l])} \\ & \leq c(\Omega_T) + \frac{1}{2} \|\partial_y \phi_0|_{t=0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|S\|_{L^\infty(\Omega_T)} c_1(\Omega, \nu). \end{aligned}$$

En faisant appel à nouveau à l'inégalité de type Poincaré du lemme 4.3.1, on obtient l'estimation d'énergie de la proposition 4.3.2.

4.3.1.2.2 Etape 2 : Dans cette étape, on étudie une version modifiée du problème (4.36) : comme pour le problème linéaire (voir la proposition 4.3.1), on introduit le paramètre ϵ et on prend un terme non linéaire borné indépendamment de l'inconnue. Pour cela, on introduit

le paramètre $n \in \mathbb{N}^*$, dont dépendra la borne du terme non linéaire. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{1 + |x|/n} \leq n$.

On va montrer l'existence d'une solution pour le problème suivant dont l'inconnue est $\phi_0^{\epsilon,n} \in W^{1,2}(0, T; V_0, H_0)$ telle que :

$$\begin{aligned} & \forall v \in V_0, \\ & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \epsilon \phi_0^{\epsilon,n} v + \partial_y \phi_0^{\epsilon,n} \partial_y v \, dy dx + \nu \int_{\Omega} \partial_y^2 \phi_0^{\epsilon,n} \partial_y^2 v \, dy dx \\ & \quad + 2 \int_0^l \left(1 - \exp \left(\Lambda - \frac{\phi_0^{\epsilon,n}|_{x=L}}{1 + |\phi_0^{\epsilon,n}|_{x=L}/n} \right) \right) v|_{x=L} \, dy = \int_{\Omega} S v \, dy dx \\ & \phi_0^{\epsilon,n}|_{t=0} = \phi_{ini}. \end{aligned}$$

Le terme

$$\frac{\phi_0^{\epsilon,n}|_{x=L}}{1 + |\phi_0^{\epsilon,n}|_{x=L}/n}$$

est alors dans $L^\infty([0, T] \times [0, l])$ avec une borne ne dépendant que de n . Cela nous permettra d'utiliser notre argument de type point fixe.

Pour une fonction $\varphi \in W^{1,2}(0, T; V_0, H_0)$, on considère le problème linéarisé suivant dont le but est de chercher $\phi^{lin} \in W^{1,2}(0, T; V_0, H_0)$, tel que :

$$\begin{aligned} & \forall v \in V_0, \\ & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \epsilon \phi^{lin} v + \partial_y \phi^{lin} \partial_y v \, dy dx + \nu \int_{\Omega} \partial_y^2 \phi^{lin} \partial_y^2 v \, dy dx \\ & \quad + 2 \int_0^l \left(1 - \exp \left(\Lambda - \frac{\varphi|_{x=L}}{1 + |\varphi|_{x=L}/n} \right) - \frac{\varphi|_{x=L}}{1 + |\varphi|_{x=L}/n} + \phi^{lin}|_{x=L} \right) v|_{x=L} \, dy = \int_{\Omega} S v \, dy dx \\ & \phi^{lin}|_{t=0} = \phi_{ini}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Dans un souci de lisibilité des notations, nous n'avons pas fait apparaître la dépendance de ϕ^{lin} en ϵ et n .

D'après les résultats précédents sur le problème linéaire (proposition 4.37) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\epsilon \|\phi^{lin}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y \phi^{lin}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \nu \|\partial_y^2 \phi^{lin}\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + 2 \|\phi^{lin}|_{x=L}\|_{L^2(0,t;L^2([0,l]))}^2 \\ & \leq c(\Omega_T, \nu) \left(\frac{1}{2} \left(\epsilon \|\phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y \phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + 2 \left\| 1 - \exp \left(\Lambda - \frac{\varphi|_{x=L}}{1 + |\varphi|_{x=L}/n} \right) - \frac{\varphi|_{x=L}}{1 + |\varphi|_{x=L}/n} \right\|_{L^2(0,t;L^2([0,l]))}^2 + \|S\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 \right). \end{aligned}$$

donc on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\epsilon \|\phi^{lin}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y \phi^{lin}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \nu \|\partial_y^2 \phi^{lin}\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + 2 \|\phi^{lin}|_{x=L}\|_{L^2(0,t;L^2([0,l]))}^2 \\ & \leq c(\Omega_T, \nu) \left(\frac{1}{2} \left(\epsilon \|\phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y \phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + 2 (1 + e^{\Lambda+n} + n)^2 l T \right). \end{aligned}$$

Ce qui donne, d'après l'inégalité de type Poincaré du lemme 4.3.1 :

$$\|\phi^{lin}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi^{lin}\|_{L^2(0,T;V_0)} \leq M(\Omega_T, \nu, n, \epsilon).$$

où $M(\Omega_T, \nu, n, \epsilon)$ est une constante indépendante de ϕ^{lin} mais dépendant, entre autres, de n, ϵ .

On définit l'ensemble $X = \{\phi \in W^{1,2}(0, T; V_0, H_0), \|\phi\|_{W^{1,2}(0,T;V_0,H_0)} \leq M(\Omega_T, \nu, n, \epsilon)\}$.

Soit la fonction $\mathcal{G} : X \rightarrow X$ qui à φ associe ϕ^{lin} . On montre que \mathcal{G} est continue sur X (par rapport à la norme L^2) :

X est un fermé borné convexe, avec une inclusion compacte dans $L^2([0, T] \times \Omega)$, d'après le lemme d'Aubin-Lions (voir par exemple le livre de Showalter [59], page 106). Pour prouver la continuité de \mathcal{G} , on utilise le fait que $W^{1,2}(0, T; V_0, H_0)$ est inclus de manière compacte dans $L^2(0, T, L^2([0, l]))$. Cette inclusion compacte s'obtient en utilisant le lemme d'Aubin-Lions pour montrer que $W^{1,2}(0, T; V_0, H_0) \hookrightarrow L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Omega))$ avec injection continue et compacte. Ensuite, on utilise l'inclusion avec injection continue $L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2([0, l]))$ ([42], page 9).

La continuité de \mathcal{G} se montre facilement en utilisant le fait que $W^{1,2}(0, T; V_0, H_0)$ est inclus de manière compacte dans $L^2(0, T, L^2([0, l]))$: On prend alors une suite (φ_k) d'éléments de X convergeant vers $\bar{\varphi} \in X$ pour la norme $L^2(\Omega_T)$. D'après l'injection compacte de $W^{1,2}(0, T; V_0, H_0)$ dans $L^2(0, T, L^2([0, l]))$, on sait qu'à une sous-suite près, $(\varphi_{k|x=L})$ converge vers $\bar{\varphi}_{|x=L}$. Comme, pour tout k , $\phi_k^{lin} = \mathcal{G}(\varphi_k) \in X$, on remarque que, à une sous-suite près, (ϕ_k^{lin}) converge faiblement dans $X \subset W^{1,2}(0, T; V_0, H_0)$ vers $\overline{\phi^{lin}}$. A nouveau, d'après l'injection compacte de $W^{1,2}(0, T; V_0, H_0)$ dans $L^2(0, T, L^2([0, l]))$, on peut affirmer qu'à une sous-suite près, $(\phi_{k|x=L}^{lin})$ converge vers $\overline{\phi^{lin}}_{|x=L}$. On peut donc passer à la limite $k \rightarrow +\infty$ dans la formulation faible (4.39), pour avoir :

$$\begin{aligned} & \forall v \in V_0, \\ & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \epsilon \overline{\phi^{lin}} v + \partial_y \overline{\phi^{lin}} \partial_y v \, dy dx + \nu \int_{\Omega} \partial_y^2 \overline{\phi^{lin}} \partial_y^2 v \, dy dx \\ & \quad + 2 \int_0^l \left(1 - \exp \left(\Lambda - \frac{\bar{\varphi}_{|x=L}}{1 + |\bar{\varphi}_{|x=L}|/n} \right) - \frac{\bar{\varphi}_{|x=L}}{1 + |\bar{\varphi}_{|x=L}|/n} + \overline{\phi^{lin}}_{|x=L} \right) v_{|x=L} \, dy \\ & \quad = \int_{\Omega} S v \, dy dx \\ & \overline{\phi^{lin}}_{|t=0} = \phi_{ini}. \end{aligned}$$

Ainsi $\overline{\phi^{lin}}$ est unique et indépendant du choix de l'extraction de la sous-suite. On donc $(\mathcal{G}(\varphi_k))$ converge vers $\overline{\phi^{lin}} = \mathcal{G}(\bar{\varphi})$ en norme $L^2(\Omega_T)$. D'où la continuité de \mathcal{G} .

On a donc l'existence d'une solution faible au problème, pour tout $v \in V_0$: Trouver $\phi_0^{\epsilon,n} \in X \subset W^{1,2}(0, T; V_0, H_0)$ tel que, pour tout $t \in]0, T[$:

$$\begin{aligned} & \epsilon \int_{\Omega} \partial_t (\phi_0^{\epsilon,n}) v + \partial_t (\partial_y \phi_0^{\epsilon,n}) \partial_y v \, dy dx + \nu \int_{\Omega} \partial_y^2 \phi_0^{\epsilon,n} \partial_y^2 v \, dy dx \\ & \quad + 2 \int_0^l \left(1 - \exp \left(\Lambda - \frac{\phi_0^{\epsilon,n}_{|x=L}}{1 + |\phi_0^{\epsilon,n}_{|x=L}|/n} \right) - \frac{\phi_0^{\epsilon,n}_{|x=L}}{1 + |\phi_0^{\epsilon,n}_{|x=L}|/n} + \phi_0^{\epsilon,n} \right) v_{|x=L} \, dy = \int_{\Omega} S v \, dy dx. \end{aligned}$$

En se rappelant que

$$\int_0^l \left(-\frac{\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}}{1 + |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}|/n} + \phi_{0|x=L}^{\epsilon,n} \right) \phi_{0|x=L}^{\epsilon,n} dy \geq 0,$$

on obtient l'estimation, pour presque tout $t \in]0, T[$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\epsilon \|\phi_0^{\epsilon,n}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y \phi_0^{\epsilon,n}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \nu \|\partial_y^2 \phi_0^{\epsilon,n}\|_{L^2([0,t] \times \Omega)}^2 \\ & + 2 \int_0^t \int_0^l \phi_{0|x=L}^{\epsilon,n} |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}| \exp \left(\Lambda + \frac{|\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}|}{1 + |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}|/n} \right) dy dt \\ & + 2 \int_0^t \int_0^l |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}| dy dt \leq c(\Omega_T, \phi_{ini}, \nu). \end{aligned} \quad (4.40)$$

avec $c(\Omega, \phi_{ini}, \nu)$ indépendante de n et ϵ et c_Λ ne dépendant que de Λ .

Maintenant que l'on a prouvé l'existence de $\phi_0^{\epsilon,n}$, on va s'attacher à faire tendre n vers $+\infty$ (étape 3) puis ϵ vers 0 (étape 4).

4.3.1.2.3 Etape 3 : On étudie le comportement quand $n \rightarrow +\infty$.

Comme la suite $(\phi_0^{\epsilon,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,2}(0, T; V_0, H_0)$, on en déduit l'existence d'une sous-suite, encore notée $(\phi_0^{\epsilon,n})$, telle que :

$$\begin{aligned} \phi_0^{\epsilon,n} &\rightarrow \phi_0^\epsilon \quad \text{fort dans } L^2(\Omega_T) \\ \partial_y \phi_0^{\epsilon,n} &\rightharpoonup \partial_y \phi_0^\epsilon \quad \partial_y^2 \phi_0^{\epsilon,n} \rightharpoonup \partial_y^2 \phi_0^\epsilon \quad \partial_x \phi_0^{\epsilon,n} \rightharpoonup \partial_x \phi_0^\epsilon \quad \text{faible dans } L^2(\Omega_T). \end{aligned}$$

De plus, $\phi_0^{\epsilon,n}(t) \rightarrow \phi_0^\epsilon(t)$ fortement dans $L^2(\Omega)$, pour tout $t \in [0, T]$.

Pour justifier le passage à la limite, quand $n \rightarrow +\infty$, il ne reste plus qu'à montrer la convergence du terme de bord :

$$\int_0^T \int_0^l \left(1 - \exp \left(\Lambda - \frac{\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}}{1 + |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}|/n} \right) - \frac{\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}}{1 + |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}|/n} + \phi_{0|x=L}^{\epsilon,n} \right) v_{|x=L} dy dt.$$

Grâce à l'inclusion compacte de $W^{1,2}(0, T; V_0, H_0)$ dans $L^2(0, T; L^2(\Sigma_{\perp L}))$, on peut affirmer qu'il existe une sous-suite, encore notée $(\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n})$ telle que $\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Ce qui implique que

$$\int_0^T \int_0^l \left(-\frac{\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}}{1 + |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}|/n} + \phi_{0|x=L}^{\epsilon,n} \right) v_{|x=L} dy dt \longrightarrow 0$$

quand $n \rightarrow +\infty$.

Nous allons maintenant nous intéresser à la partie exponentielle qui contient le terme de bord.

On rappelle que l'on a, d'après (4.40) :

$$\int_0^T \int_{0 \phi_{0|x=L}^{\epsilon,n} < -c_\Lambda}^l |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}| \exp\left(\Lambda + \frac{|\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}|}{1 + |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}|/n}\right) dy dt \leq c(\Omega, \phi_{ini}, \nu).$$

(où $c(\Omega, \phi_{ini}, \nu)$ est indépendante de n et ϵ).

Comme $\exp\left(\Lambda - \frac{\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}}{1 + |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}|/n}\right)$ est bornée dans $L^1([0, T] \times [0, l])$ et est décroissante, on peut appliquer le lemme de Fatou. Ainsi, sa limite quand $n \rightarrow +\infty$ est $\exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon)$ et appartient à $L^1([0, T] \times [0, l])$. On prend ici v quelconque dans V_0 . Donc les inégalités ci-dessous ont un sens, quelque soit $K > 0$:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_0^l \left(\exp\left(\Lambda - \frac{\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}}{1 + |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}|/n}\right) - (\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon) \right) v_{|x=L} dy dt \right| \\ & \leq \left| \int_0^T \int_{0 \phi_{0|x=L}^{\epsilon,n} < -K}^l \left(\exp\left(\Lambda - \frac{\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}}{1 + |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}|/n}\right) - \exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon) \right) v_{|x=L} dy dt \right| \\ & \quad + \left| \int_0^T \int_{0 \phi_{0|x=L}^{\epsilon,n} \geq -K}^l \left(\exp\left(\Lambda - \frac{\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}}{1 + |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}|/n}\right) - \exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon) \right) v_{|x=L} dy dt \right|. \end{aligned} \tag{4.41}$$

On veut montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, le membre de gauche de l'inégalité ci-dessus (4.41) soit plus petit que δ .

On commence par majorer le premier terme du membre de droite de (4.41), ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{0 \phi_{0|x=L}^{\epsilon,n} < -K}^l \left(\exp\left(\Lambda - \frac{\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}}{1 + |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}|/n}\right) - \exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon) \right) v_{|x=L} dy dt \right| \\ & \leq \frac{1}{K} \int_0^T \int_{0 \phi_{0|x=L}^{\epsilon,n} < -K}^l \exp\left(\Lambda - \frac{\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}}{1 + |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}|/n}\right) |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}| |v_{|x=L}| dy dt \\ & \quad + \int_0^T \int_{0 \phi_{0|x=L}^{\epsilon,n} \geq -K}^l \exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon) |v_{|x=L}| dy dt. \end{aligned}$$

Pour K suffisamment grand, on a :

$$\left| \int_0^T \int_{0 \phi_{0|x=L}^{\epsilon,n} < -K}^l \left(\exp\left(\Lambda - \frac{\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}}{1 + |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}|/n}\right) - \exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon) \right) v_{|x=L} dy dt \right| \leq \frac{\delta}{2}.$$

On fixe K à cette valeur. Pour le second terme du membre de droite de (4.41), il suffit d'utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour justifier, à K fixé, l'existence d'un entier n_0 telle que pour tout $n \geq n_0$,

$$\left| \int_0^T \int_{0 \phi_{0|x=L}^{\epsilon,n} \geq -K}^l \left(\exp\left(\Lambda - \frac{\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}}{1 + |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}|/n}\right) - \exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon) \right) v_{|x=L} dy dt \right| \leq \frac{\delta}{2}.$$

On a donc, pour tout $n > n_0$,

$$\left| \int_0^T \int_0^l \left(\exp \left(\Lambda - \frac{\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}}{1 + |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}|/n} \right) - \exp \left(\Lambda - \phi_{0|x=L}^{\epsilon} \right) \right) v_{|x=L} dy dt \right| \leq \delta.$$

La convergence du terme de bord

$$\int_0^T \int_0^l \left(1 - \exp \left(\Lambda - \frac{\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}}{1 + |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}|/n} \right) - \frac{\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}}{1 + |\phi_{0|x=L}^{\epsilon,n}|/n} + \phi_{0|x=L}^{\epsilon,n} \right) v_{|x=L} dy dt.$$

vers

$$\int_0^T \int_0^l \left(1 - \exp \left(\Lambda - \phi_{0|x=L}^{\epsilon} \right) \right) v_{|x=L} dy dt.$$

est donc acquise.

On a donc l'existence d'une fonction $\phi_0^{\epsilon} \in W^{1,2}(0, T, V_0, H_0)$ telle que pour tout $v \in V_0$ et pour tout $\xi \in H^1([0, T[)$,

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} (\epsilon \phi_0^{\epsilon} v + \partial_y \phi_0^{\epsilon} \partial_y v) \xi' dy dx dt \\ & + \int_{\Omega} \phi_0^{\epsilon}(T) v \xi(T) dy dx + \int_{\Omega} \partial_y \phi_0^{\epsilon}(T) \partial_y v \xi(T) dy dx \\ & + \nu \int_0^T \int_{\Omega} \partial_y^2 \phi_0^{\epsilon} \partial_y v \xi dy dx dt + 2 \int_0^T \int_0^l \left(1 - e^{\Lambda - \phi_{0|x=L}^{\epsilon}} \right) v_{|x=L} \xi dy dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} S v \xi dy dx dt + \int_{\Omega} \partial_y \phi_{0|x=0}^{\epsilon} \partial_y v \xi(0) dy dx. \end{aligned}$$

Ceci est la formulation faible du système d'évolution :

$$\begin{cases} \forall v \in V_0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \epsilon \phi_0^{\epsilon} v + \partial_y \phi_0^{\epsilon} \partial_y v dy dx + \nu \int_{\Omega} \partial_y^2 \phi_0^{\epsilon} \partial_y^2 v dy dx \\ \quad + 2 \int_0^l \left(1 - e^{\Lambda - \phi_{0|x=L}^{\epsilon}} \right) v_{|x=L} dy = \int_{\Omega} S v dy dx \\ \phi_{0|x=0}^{\epsilon} = \phi_{ini}. \end{cases} \quad (4.42)$$

L'unicité se prouve en utilisant la monotonie de $x \mapsto -\exp(\Lambda - x)$ (fonction croissante).

On a donc l'estimation :

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon}{2} \|\phi_{0|x=L}^{\epsilon}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_y \phi_{0|x=L}^{\epsilon}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\partial_y^2 \phi_0^{\epsilon}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \\ & + 2 \int_0^T \int_0^l \left(1 - e^{\Lambda - \phi_{0|x=L}^{\epsilon}} \right) \phi_{0|x=L}^{\epsilon} \xi dy dt \\ & \leq \frac{\epsilon}{2} \|\phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_y \phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|S\|_{L^\infty(\Omega_T)} \|\phi_0^{\epsilon}\|_{L^1(\Omega_T)}^2. \end{aligned}$$

En reprenant la démonstration de l'étape 1 et d'après la majoration que l'on a supposée pour $\|S\|_{L^\infty(\Omega_T)}$, on a :

$$\begin{aligned} & \epsilon \|\phi_0^\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y \phi_0^\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_0^\epsilon\|_{L^2(0,T;V)}^2 \\ & \leq c(\Omega_T, \nu) \left(1 + \epsilon \|\phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y \phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|S\|_{L^\infty(\Omega_T)} \right), \end{aligned} \quad (4.43)$$

où $c(\Omega_T, \nu) > 0$ est indépendante de ϵ .

4.3.1.2.4 Etape 4 : On fait maintenant tendre ϵ vers 0.

On remarque que $(\phi_0^\epsilon)_\epsilon$ est bornée dans $L^2(0, T, V_0)$ indépendamment de ϵ , ce qui nous permet d'affirmer que l'on a la convergence faible de ϕ_0^ϵ vers ϕ_0 dans $L^2(\Omega_T)$.

Comme d'habitude, le point le plus délicat est la convergence du terme non linéaire.

On va pour cela utiliser les hypothèses sur S et $\phi_{0|t=0}$ pour prouver que $\exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon)$ est borné indépendamment de ϵ dans $W^{1,1}(]0, T[\times]0, l[)$. En effet, comme on a pris $v \in H^2(\Omega)$, on sait que $v|_{x=L} \in H^{\frac{3}{2}}(]0, l[) \subset L^\infty(]0, l[)$ et $\xi \in H^1(]0, T[) \subset L^\infty(]0, T[)$. Donc le caractère borné de $\exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon)$ dans $W^{1,1}(]0, T[\times]0, l[)$ nous assure sa convergence à une sous-suite près dans $L^1(]0, T[\times]0, l[)$. On pourra donc utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour montrer :

$$\int_0^T \int_0^l \left(1 - \exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon) \right) v|_{x=L} \xi \, dy \, dt \longrightarrow \int_0^T \int_0^l \left(1 - \exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}) \right) v|_{x=L} \xi \, dy \, dt.$$

En reprenant la démonstration de l'étape 1, on prouve que :

$$\int_0^T \int_0^l \left(1 - e^{\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon} \right) \phi_{0|x=L}^\epsilon \, dy \, dt \leq c(\Omega_T, \nu, \phi_{ini}),$$

où $c(\Omega_T, \nu, \phi_{ini})$ est indépendante de ϵ .

On en déduit :

$$\int_0^T \int_{0 \phi_{0|x=L}^\epsilon \leq -c_\Lambda}^l e^{\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon} |\phi_{0|x=L}^\epsilon| \, dy \, dt + \int_0^T \int_{0 \phi_{0|x=L}^\epsilon > -c_\Lambda}^l |\phi_{0|x=L}^\epsilon| \, dy \, dt \leq c(\Omega_T, \nu, \phi_{ini}).$$

Ainsi on a :

$$c_\Lambda \int_0^T \int_{0 \phi_{0|x=L}^\epsilon \leq -c_\Lambda}^l e^{\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon} \, dy \, dt \leq c(\Omega_T, \nu, \phi_{ini}).$$

Comme $\int_0^T \int_{0 \phi_{0|x=L}^\epsilon > -c_\Lambda}^l e^{\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon} \xi \, dy \, dt$ est aussi borné indépendamment de ϵ , on peut prouver que $(t, y) \mapsto \exp(\Lambda - \phi_0^\epsilon(t, L, y))$ est bien borné indépendamment de ϵ dans $L^1(]0, T[\times]0, l[)$.

Pour étendre le caractère borné de $\exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon)$ à $W^{1,1}(]0, T[\times]0, l[)$, on va maintenant prouver qu'il en est de même pour les dérivées $\partial_y \exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon) = -\partial_y \phi_{0|x=L}^\epsilon \exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon)$ et $\partial_t \exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon) = -\partial_t \phi_{0|x=L}^\epsilon \exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon)$. Pour cela, on va dériver formellement par rapport à y , puis par rapport t , le système d'équation et, à chaque, fois étudier les propriétés.

Etude du système pour $\partial_y \phi_0^\epsilon$: On commence par définir l'espace :

$$U_0 = \{f \in H^2(\Omega), \partial_x f = 0 \text{ dans } \Omega, f = 0 \text{ sur } \Sigma_{\parallel}\}$$

Pour une constante $R \in]0, l[$ quelconque, on a le système sous forme faible, d'inconnue $\partial_y \phi_0^\epsilon \in W^{1,2}(0, T, U_0, H_0)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall u \in U_0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\epsilon \partial_y \phi_0^\epsilon u + \partial_y (\partial_y \phi_0^\epsilon)) \partial_y u dy dx + \nu \int_{\Omega} \partial_y^2 (\partial_y \phi_0^\epsilon) \partial_y^2 u dy dx \\ \quad + 2 \int_0^l \partial_y \phi_0^\epsilon|_{x=L} \exp \left(\Lambda - \int_R^{y'} \partial_y \phi_0^\epsilon(t, L, y') dy' - \phi_0^\epsilon(t, L, R) \right) u|_{x=L} dy \\ \quad = \int_{\Omega} \partial_y S u dy dx. \end{array} \right. \quad (4.44)$$

Pour obtenir formellement le système (4.44), on a repris le problème (4.42) avec pour fonction test $\partial_y^2 v = \partial_y u$, où $v \in V_0$ telle que $\partial_y^3 v|_{\Sigma_{\parallel}} = 0$.

On note que U_0 est caractérisé par des conditions aux limites de type Dirichlet sur Σ_{\parallel} alors que V_0 fait apparaître des conditions de type Robin.

On voit ici la nécessité d'avoir $\partial_y S \in L^2(\Omega_T)$.

En reprenant le raisonnement des étapes précédentes on montre que $\partial_y \phi_0^\epsilon \in W^{1,2}(0, T, U_0, H_0)$ est bien l'unique solution de (4.44).

On a alors l'égalité *a priori* :

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon}{2} \|\partial_y \phi_0^\epsilon(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_y (\partial_y \phi_0^\epsilon(T))\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\partial_y^2 (\partial_y \phi_0^\epsilon)\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \\ & + 2 \int_0^T \int_0^l e^{\Lambda - \phi_0^\epsilon|_{x=L}} |\partial_y \phi_0^\epsilon|_{x=L}^2 dy dt \\ & = \frac{\epsilon}{2} \|\partial_y \phi_0^\epsilon(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_y (\partial_y \phi_0^\epsilon(0))\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \partial_y S \partial_y \phi_0^\epsilon dy dx dt. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Comme ϕ_0^ϵ est uniformément borné dans $L^2(0, T, V_0)$ (*i.e.* indépendamment de ϵ), on en déduit que $\partial_y \phi_0^\epsilon$ est uniformément borné dans $L^2(\Omega_T)$. En utilisant l'égalité (4.45) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le terme $\int_0^T \int_{\Omega} \partial_y S \partial_y \phi_0^\epsilon dy dx dt$ on obtient :

$$\int_0^T \int_0^l e^{\Lambda - \phi_0^\epsilon|_{x=L}} |\partial_y \phi_0^\epsilon|_{x=L}^2 dy dt \leq c(\Omega_T, \nu, \phi_{ini}).$$

où $c(\Omega_T, \nu, \phi_{ini})$ est indépendante de ϵ . On peut ainsi affirmer que $\partial_y e^{\Lambda - \phi_0^\epsilon|_{x=L}}$ est borné dans $L^1(]0, T[\times]0, l[)$.

Il reste à faire de même pour $\partial_t e^{\Lambda - \phi_0^\epsilon|_{x=L}}$, mais le traitement sera plus délicat.

Etude du système pour $\partial_t \phi_0^\epsilon$: On part du système (4.42) et on dérive formellement l'équation par rapport à t . Cela nous permet alors d'avoir le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall v \in V_0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \epsilon \partial_t \phi_0^\epsilon v + \partial_y (\partial_t \phi_0^\epsilon) \partial_y v \, dy dx + \nu \int_{\Omega} \partial_y^2 (\partial_t \phi_0^\epsilon) \partial_y^2 v \, dy dx \\ \quad + 2 \int_0^l \partial_t \phi_0^\epsilon|_{x=L} \exp \left(\Lambda - \int_{\tau}^t \partial_y \phi_0^\epsilon(t', L, y) dt' - \phi_0^\epsilon(\tau, L, y) \right) v|_{x=L} \, dy = \int_{\Omega} \partial_t S v \, dy dx \\ \epsilon \int_{\Omega} \partial_t (\phi_0^\epsilon|_{t=0}) v + \partial_t \partial_y \phi_0^\epsilon|_{t=0} \partial_y v \, dy dx = \int_{\Omega} -\nu \partial_y^2 \phi_{ini} \partial_y^2 v + S|_{t=0} v \, dy dx \\ \quad - 2 \int_0^l \left(1 - e^{\Lambda - \phi_{ini}|_{x=L}} \right) v|_{x=L} \, dy. \end{array} \right.$$

La condition initiale du système ci-dessus provient de l'équation d'évolution de (4.42) prise en $t = 0$.

En prenant $v = \partial_t \phi_0^\epsilon$ comme fonction test, on obtient l'égalité *a priori* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\epsilon}{2} \|\partial_t \phi_0^\epsilon(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_y \partial_t \phi_0^\epsilon(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y^2 \partial_t \phi_0^\epsilon\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \\ \quad + \int_0^T \int_0^l |\partial_t \phi_0^\epsilon|_{x=L}^2 \exp \left(\Lambda - \phi_0^\epsilon|_{x=L} \right) \, dy dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t S \partial_t \phi_0^\epsilon \, dy dx \, dt \\ \quad + \frac{\epsilon}{2} \|\partial_t \phi_0^\epsilon|_{t=0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_y \partial_t \phi_0^\epsilon|_{t=0}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{array} \right. \quad (4.46)$$

Tous les termes du membre de gauche sont positifs, donc, pour les majorer, il suffit d'étudier le membre de droite :

- Traitement du terme $\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t S \partial_t \phi_0^\epsilon \, dy dx \, dt$: On commence par rappeler que, par intégration par partie, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t S \partial_t \phi_0^\epsilon \, dy dx \, dt &= - \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t^2 S \phi_0^\epsilon \, dy dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} S|_{t=T} \phi_0^\epsilon|_{t=T} \, dy dx \, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} S|_{t=0} \phi_{ini} \, dy dx \, dt. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Comme $\partial_t^2 S$ est supposé être dans $L^2(\Omega_T)$, le premier terme du membre de droite de (4.47) se majore à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De même, la majoration du troisième terme du membre de droite de (4.47) ne pose pas de problème. Il reste à étudier $\|\phi_0^\epsilon|_{t=T}\|_{L^2(\Omega)}$. Pour cela, on fait le produit scalaire dans $L^2(\Omega_T)$ de l'équation du système initial (4.32) avec $\partial_t \phi_0^\epsilon$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} &\epsilon \|\partial_t \phi_0^\epsilon\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|\partial_t \partial_y \phi_0^\epsilon\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \frac{\nu}{2} \|\partial_y^2 \phi_0^\epsilon|_{t=T}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + 2 \int_0^T \int_0^l \left(1 - e^{\Lambda - \phi_0^\epsilon|_{x=L}} \right) \partial_t \phi_0^\epsilon|_{x=L} \, dy \, dt = - \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t S \phi_0^\epsilon \, dy dx \, dt \\ &\quad + \int_{\Omega} S|_{t=T} \phi_0^\epsilon|_{t=T} \, dy dx - \int_{\Omega} S|_{t=0} \phi_{ini} \, dy dx + \frac{\nu}{2} \|\partial_y^2 \phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Le terme non linéaire de l'équation vaut :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l \left(1 - e^{\Lambda - \phi_0^\epsilon|_{x=L}}\right) \partial_t \phi_0^\epsilon|_{x=L} dy dt &= \int_0^l \left(\phi_0^\epsilon(T, L, y) + e^{\Lambda - \phi_0^\epsilon(T, y, L)}\right) dy \\ &\quad - \int_0^l \left(\phi_0^\epsilon(0, L, y) + e^{\Lambda - \phi_0^\epsilon(0, L, y)}\right) dy. \end{aligned}$$

On utilise maintenant l'hypothèse $\|S|_{t=T}\|_\infty \leq C_s$. Comme C_s est à déterminer, on va désormais la fixer en disant que c'est une constante suffisamment petite pour que l'on ait (on rappelle que $x + e^{\Lambda - x} \geq |x|$ dès que $|x| \geq c_\Lambda$) :

$$\begin{aligned} \epsilon \|\partial_t \phi_0^\epsilon\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|\partial_t \partial_y \phi_0^\epsilon\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \frac{\nu}{2} \|\partial_y^2 \phi_0^\epsilon|_{t=T}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \int_0^l |\phi_0^\epsilon|_{t=T}| dy \leq c(\Omega_T, \nu, \Lambda, S, \phi_{ini}) \text{ (indépendante de } \epsilon\text{).} \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré du lemme 4.3.1, on en déduit que $\|\phi_0^\epsilon|_{t=T}\|_{L^2(\Omega)}$ est borné indépendamment de ϵ .

- Montrons maintenant que

$$\epsilon \|\partial_t \phi_0^\epsilon|_{t=0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y \partial_t \phi_0^\epsilon|_{t=0}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

est majoré indépendamment de ϵ . Pour faire cela, on remarque que :

$$\epsilon \partial_t \phi_0^\epsilon|_{t=0} - \partial_y^2 \partial_t \phi_0^\epsilon|_{t=0} = (S|_{t=0} - \partial_y^4 \phi_{ini}) + \partial_x^2 q_0.$$

On rappelle que l'on a la relation de compatibilité

$$\int_\Omega (S|_{t=0} - \partial_y^4 \phi_{ini}) dy dx - 2 \int_0^l \left(1 - e^{\Lambda - \phi_{ini}|_{x=L}}\right) dy = 0.$$

car cela est aussi égal à $\int_\Omega -\partial_t \partial_y^2 \phi_0 dy dx = -\partial_t \int_{\Sigma_\parallel} \partial_y \phi_0 dx = 0$. En faisant le produit scalaire sur V_0 , on obtient :

$\forall v \in V_0$,

$$\int_\Omega \epsilon \partial_t \phi_0^\epsilon|_{t=0} v + \partial_y \partial_t \phi_0^\epsilon|_{t=0} \partial_y v dy = \int_\Omega (S|_{t=0} - \partial_y^4 \phi_{ini}) v dy dx - 2 \int_0^l \left(1 - e^{\Lambda - \phi_{ini}|_{x=L}}\right) dy.$$

Donc en prenant $\partial_t \phi_0^\epsilon|_{t=0}$ comme fonction test, on a :

$$\begin{aligned} \epsilon \|\partial_t \phi_0^\epsilon|_{t=0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y \partial_t \phi_0^\epsilon|_{t=0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \underbrace{\|\partial_x \partial_t \phi_0^\epsilon|_{t=0}\|_{L^2(\Omega)}^2}_{=0 \text{ (par hypothèse)}} \\ \leq \|S|_{t=0} - \partial_y^4 \phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_t \phi_0^\epsilon|_{t=0}\|_{L^2(\Omega)} + 2 \|1 - e^{\Lambda - \phi_{ini}|_{x=L}}\|_{L^2([0, l])} \|\partial_t \phi_0^\epsilon|_{t=0}\|_{L^2([0, l])} \\ \leq \left(\|S|_{t=0} - \partial_y^4 \phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)} + 2c(\Omega) \|1 - e^{\Lambda - \phi_{ini}|_{x=L}}\|_{L^2([0, l])}\right) \|\partial_t \phi_0^\epsilon|_{t=0}\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (voir le lemme 4.1.3), pour des fonctions à moyenne nulle sur un domaine borné et connexe, on a l'existence d'une constante $C_{PW}(\Omega) > 0$ (indépendante de ϵ) telle que :

$$\begin{aligned} C_{PW} \|\partial_t \phi_{0|t=0}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq \left(\|S|_{t=0} - \partial_y^4 \phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)} + 2c(\Omega) \|1 - e^{\Lambda - \phi_{ini|x=L}}\|_{L^2([0,l])} \right) \|\partial_t \phi_{0|t=0}^\epsilon\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

On a donc montré que $\epsilon \|\partial_t \phi_0^\epsilon(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y \partial_t \phi_0^\epsilon(0)\|_{L^2(\Omega)}^2$ est borné indépendamment de ϵ .

On a donc tous les éléments pour affirmer que $\int_0^T \int_0^l |\partial_t \phi_{0|x=L}^\epsilon|^2 \exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon) dy dx dt$ est borné indépendamment de ϵ . D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l |\partial_t \phi_{0|x=L}^\epsilon| \exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon) dy dx dt \\ \leq \left(\int_0^T \int_0^l |\partial_t \phi_{0|x=L}^\epsilon|^2 \exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon) dy dx dt \int_0^T \int_0^l \exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon) dy dx dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

C'est à dire, étant donné que l'on vient de prouver le caractère borné de ses dérivées, que $\exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon)$ est borné dans $W^{1,1}([0, T] \times [0, l])$.

On en déduit donc que $\exp(\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon)$ converge fortement, quand $\epsilon \rightarrow 0$, vers $\exp(\Lambda - \phi_{0|x=L})$. La convergence des autres termes de la formulation faible est immédiate en vertu de l'estimation (4.43).

Pour l'unicité, le raisonnement est assez classique puisqu'il est basé sur le caractère croissant de la fonction $x \mapsto -e^{-x}$. En effet, si on prend ϕ_{01} et ϕ_{02} deux solutions du problème (4.36), vérifié par ϕ_0 , on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\partial_t \partial_y \phi_{01|t=T} - \phi_{02|t=T}\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_y^2 (\phi_{01} - \phi_{02})\|_{L^2(\Omega_T)} + \\ \underbrace{\int_0^T \int_0^l (e^{\Lambda - \phi_{02|x=L}} - e^{\Lambda - \phi_{01|x=L}}) (\phi_{01|x=L} - \phi_{02|x=L}) dy dt}_{\geq 0} = 0. \end{aligned}$$

On a alors $\phi_{01} = \phi_{02}$, c'est à dire l'unicité de ϕ_0 . La proposition 4.3.2 est ainsi démontrée.

Il reste maintenant à montrer l'unicité et l'existence de q_0 , puis d'étudier la convergence de ϕ_η, q_η .

4.3.1.3 Unicité de q_0

Pour cela, on va rechercher $q_0(t)$, non pas dans V_0 mais dans

$$Q = \{f \in L^2(\Omega), \partial_x f \in L^2(\Omega), f|_{x=-L} = 0 \text{ sur }]0, 1[\},$$

(rappel de la définition 4.3.1). Pour presque tout $t \in]0, T[$, on cherche $q_0(t) \in Q$ solution du problème linéaire, avec $\phi_0 \in \mathcal{A}_\perp$ déjà déterminé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall v \in V, \\ \int_{\Omega} \partial_x q_0 \partial_x v \, dydx = - \int_0^l \left(1 - e^{\Lambda - \phi_0|_{\Sigma_\perp L}} \right) (v|_{x=L} + v|_{x=-L}) \, dy \\ \quad + \int_{\Omega} (S + \partial_t \partial_y^2 \phi_0) v - \nu \partial_y^4 \phi_0 v \, dydx \\ q_0|_{x=-L} = 0. \end{array} \right.$$

Supposons que l'on ait deux solutions q_0^1 et q_0^2 , alors, pour presque tout $t \in]0, T[$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall v \in V, \\ \int_{\Omega} \partial_x (q_0^1 - q_0^2) \partial_x v \, dydx = 0 \\ q_0^1|_{x=-L} - q_0^2|_{x=-L} = 0. \end{array} \right.$$

Par densité, on en déduit que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall v \in Q, \\ \int_{\Omega} \partial_x (q_0^1 - q_0^2) \partial_x v \, dydx = 0 \\ q_0^1|_{x=-L} - q_0^2|_{x=-L} = 0. \end{array} \right.$$

C'est à dire $\|\partial_x (q_0^1 - q_0^2)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ avec la condition $q_0^1|_{x=-L} - q_0^2|_{x=-L} = 0$, par une inégalité de type Poincaré, on en déduit l'unicité de q_0 dans Q .

4.3.1.4 Convergence quand $\eta \rightarrow 0$

Nous allons montrer que $\|q_\eta\|_{L^2(\Omega_T)}$ et $\|\partial_x q_\eta\|_{L^2(\Omega_T)}$ sont bornés indépendamment de η afin de montrer la convergence faible de $(q_\eta)_{\eta>0}$.

Pour cela nous allons commencer par montrer que :

Lemme 4.3.4

Sous les hypothèses du théorème 4.3.1, on a $\partial_y^4 \phi_0 \in L^2(\Omega_T)$.

Ce résultat sera utile dans les estimations qui seront faites pour $\|q_\eta\|_{L^2(\Omega_T)}$ et $\|\partial_x q_\eta\|_{L^2(\Omega_T)}$.

Démonstration du lemme 4.3.4: Pour une constante $R \in]0, l[$ quelconque, on a le système suivant sous forme faible, d'inconnue $\partial_y^2 \phi_0^\epsilon \in W^{1,2}(0, T, V_0, H_0)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall v \in V_0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \epsilon \partial_y^2 \phi_0^\epsilon v + \partial_y (\partial_y^2 \phi_0^\epsilon) \partial_y v \, dydx + \nu \int_{\Omega} \partial_y^2 (\partial_y^2 \phi_0^\epsilon) \partial_y^2 v \, dydx \\ \quad + 2 \int_0^l \left(\partial_y^2 \phi_0^\epsilon|_{x=L} - (\partial_y \phi_0^\epsilon|_{x=L})^2 \right) e^{\Lambda - \int_R^y \int_R^{y'} \partial_y^2 \phi_0^\epsilon(t, L, z) dz \, dy' - (y-R) \partial_y \phi_0^\epsilon(t, L, R) - \phi_0^\epsilon(t, L, R)} \, dy \\ = \int_{\Omega} \partial_y S v \, dydx, \end{array} \right. \quad (4.48)$$

obtenu formellement à partir de (4.42) en prenant pour fonction test $\partial_y^2 v = \partial_y u$, où $v \in V_0$ telle que $\partial_y^3 v|_{\Sigma_\parallel} = 0$.

En reprenant les étapes 1 à 3 de la démonstration de la proposition 4.3.2, on montre que le système (4.48) admet une unique solution $\partial_y^2 \phi_0^\epsilon \in W^{1,2}(0, T, V_0, H_0)$ et que l'on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon}{2} \|\partial_y^2 \phi_0^\epsilon|_{t=T}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y^3 \phi_0^\epsilon|_{t=T}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\partial_y^4 \phi_0^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + 2 \int_0^T \int_0^l |\partial_y^2 \phi_0^\epsilon|_{x=L}|^2 e^{\Lambda - \phi_0^\epsilon|_{x=L}} dy dt \\ & = \frac{\epsilon}{2} \|\partial_y^2 \phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y^3 \phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \int_0^T \int_\Omega S \partial_y^2 \phi_0^\epsilon dx dy dt \\ & + 2 \int_0^T \int_0^l |\partial_y \phi_0^\epsilon|_{x=L}|^2 \partial_y^2 \phi_0^\epsilon e^{\Lambda - \phi_0^\epsilon|_{x=L}} dy dt. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Il reste à étudier le second membre de l'égalité ci-dessus. On commence par étudier l'intégrale qui contient le terme source, à l'aide d'intégrations par parties :

$$\int_0^T \int_\Omega S \partial_y^2 \phi_0^\epsilon dy dx dt = - \int_0^T \int_\Omega \partial_y S \partial_y \phi_0^\epsilon dy dx dt.$$

Or, $\|\partial_y \phi_0^\epsilon\|_{L^2(\Omega_T)}$ est borné indépendamment de ϵ .

On étudie maintenant le terme de bord $\int_0^T \int_0^l |\partial_y \phi_0^\epsilon|_{x=L}|^2 \partial_y^2 \phi_0^\epsilon e^{\Lambda - \phi_0^\epsilon|_{x=L}} dy dt$. Pour cela, on remarque que $\partial_y \phi_0^\epsilon|_{x=L}$ est dans $H^1([0, T] \times [0, l])$:

- $\phi_0^\epsilon \in L^2(0, T, V_0) \subset L^2(0, T, H^2(\Omega))$ donc $\phi_0^\epsilon|_{x=L} \in L^2(0, T, H^{\frac{3}{2}}(\Sigma_{\perp L}))$.
- $\partial_t \phi_0^\epsilon \in L^2(0, T, V_0) \subset L^2(0, T, H^2(\Omega))$ donc $\partial_t \phi_0^\epsilon|_{x=L} \in L^2(0, T, H^{\frac{3}{2}}(\Sigma_{\perp L}))$.

Pour plus de détails, voir, par exemple, le livre de Lions-Magenes [42], page 9. A l'aide des injections de Sobolev, on en déduit que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\partial_y \phi_0^\epsilon|_{x=L} \in L^r([0, T] \times [0, l])$. De plus, les injections étant continues et comme ϕ_0^ϵ et $\partial_t \phi_0^\epsilon$ sont bornés indépendamment de ϵ dans $L^2(0, T, H^2(\Omega))$, on sait que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\|\partial_y \phi_0^\epsilon|_{x=L}\|_{L^r([0, T] \times [0, l])}$ est borné indépendamment de ϵ . De plus, on peut montrer que $\|e^{\Lambda - \phi_0^\epsilon|_{x=L}}\|_{L^2([0, T] \times [0, l])} \leq c(\Omega_T, \Lambda, \nu)$ est borné indépendamment de ϵ , d'après l'inégalité de Young et le théorème de Trudinger (voir le lemme 4.3.3). Donc on aboutit à :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_0^l |\partial_y \phi_0^\epsilon|_{x=L}|^2 \partial_y^2 \phi_0^\epsilon e^{\Lambda - \phi_0^\epsilon|_{x=L}} dy dt \right| \\ & \leq \left(\int_0^T \int_0^l |\partial_y \phi_0^\epsilon|_{x=L}|^4 e^{\Lambda - \phi_0^\epsilon|_{x=L}} dy dt \int_0^T \int_0^l |\partial_y^2 \phi_0^\epsilon|_{x=L}|^2 e^{\Lambda - \phi_0^\epsilon|_{x=L}} dy dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \|\partial_y \phi_0^\epsilon|_{x=L}\|_{L^8([0, T] \times [0, l])}^2 \|e^{\Lambda - \phi_0^\epsilon|_{x=L}}\|_{L^2([0, T] \times [0, l])} \left(\int_0^T \int_0^l |\partial_y^2 \phi_0^\epsilon|_{x=L}|^2 e^{\Lambda - \phi_0^\epsilon|_{x=L}} dy dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq c(\Omega_T, \Lambda, \nu) \left(\int_0^T \int_0^l |\partial_y^2 \phi_0^\epsilon|_{x=L}|^2 e^{\Lambda - \phi_0^\epsilon|_{x=L}} dy dt \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

où $c(\Omega_T, \Lambda, \nu)$ est indépendante de ϵ .

Donc, suite à une inégalité de Young, on a l'estimation suivante : On réinjecte ce qui précède dans (4.49) et on utilise l'inégalité de Young pour absorber

$$c(\Omega_T, \Lambda, \nu) \left(\int_0^T \int_0^l |\partial_y^2 \phi_{0|x=L}^\epsilon|^2 e^{\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon} dy dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a alors l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon}{2} \|\partial_y^2 \phi_{0|t=T}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y^3 \phi_{0|t=T}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\partial_y^4 \phi_{0|t=T}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \int_0^T \int_0^l |\partial_y^2 \phi_{0|x=L}^\epsilon|^2 e^{\Lambda - \phi_{0|x=L}^\epsilon} dy dt \\ & \leq c(T, l, \Lambda, \phi_{0|x=L}) + \frac{\epsilon}{2} \|\partial_y^2 \phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y^3 \phi_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \|\partial_y S\|_{L^2(\Omega_T)} \|\partial_y \phi_{0|t=T}^\epsilon\|_{L^2(\Omega_T)}. \end{aligned}$$

Le second membre étant borné indépendamment de ϵ , on en déduit que $(\partial_y^4 \phi_{0|t=T}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est borné indépendamment de ϵ dans $L^2(\Omega_T)$. On peut alors faire tendre ϵ vers 0.

Donc on a, $\partial_y^2 \phi_0 \in L^2(0, T, V_0)$ et en particulier, $\partial_y^4 \phi_0 \in L^2(\Omega_T)$. ■

Le fait que $\partial_y^4 \phi_0$ est dans $L^2(\Omega_T)$ va s'avérer important pour montrer l'existence de q_0 . Pour montrer l'existence de q_0 et la convergence de ϕ_η , nous allons adapter la démonstration du théorème 3 de l'article de Degond *et al.* [27] ; cette dernière concerne uniquement un problème elliptique linéaire.

On prend les systèmes vérifiés par ϕ_η (4.32) et ϕ_0 (4.36), on en fait la différence, puis on effectue le produit scalaire avec la fonction test $\phi_\eta - \eta q_\eta - \phi_0 \in \mathcal{A}_\perp$. On remarque que $\phi_\eta - \eta q_\eta - \phi_0 \in L^2(0, T, V)$, d'après le lemme 4.3.2. On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \partial_t \partial_y (\phi_\eta - \phi_0) \partial_y (\phi_\eta - \eta q_\eta - \phi_0) dy dx dt \\ & + \nu \int_0^T \int_\Omega \partial_y^2 (\phi_\eta - \phi_0) \partial_y^2 (\phi_\eta - \eta q_\eta - \phi_0) dy dx dt \\ & + \int_0^T \int_0^l \left(e^{\Lambda - \phi_{0|x=-L}} - e^{\Lambda - \phi_{\eta|x=-L}} \right) (\phi_\eta - \eta q_\eta - \phi_0)|_{x=-L} dy dt \\ & + \int_0^T \int_0^l \left(e^{\Lambda - \phi_{0|x=L}} - e^{\Lambda - \phi_{\eta|x=L}} \right) (\phi_\eta - \eta q_\eta - \phi_0)|_{x=L} dy dt = 0. \end{aligned}$$

En se rappelant que, $q_{\eta|x=-L} = 0$, on a alors

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t \partial_y (\phi_\eta - \phi_0) \partial_y (\phi_\eta - \phi_0) dy dx dt + \nu \|\partial_y^2 (\phi_\eta - \phi_0)\|_{L^2(\Omega_T)} \\
 & + \underbrace{\int_0^T \int_0^l \left(e^{\Lambda - \phi_0|_{x=-L}} - e^{\Lambda - \phi_\eta|_{x=-L}} \right) (\phi_\eta - \phi_0)|_{x=-L} dy dt}_{\geq 0} \\
 & + \int_0^T \int_0^l \left(e^{\Lambda - \phi_0|_{x=L}} - e^{\Lambda - \phi_\eta|_{x=L}} \right) (\phi_\eta - \phi_0)|_{x=L} dy dt \\
 & - \eta \left(\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t \partial_y \phi_\eta \partial_y q_\eta dy dx dt + \nu \int_0^T \int_{\Omega} \partial_y^2 \phi_\eta \partial_y^2 q_\eta dy dx dt \right. \\
 & + \int_0^T \int_0^l \left(1 - e^{\Lambda - \phi_\eta|_{x=L}} \right) q_\eta|_{x=L} dy dt \\
 & - \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t \partial_y \phi_0 \partial_y q_\eta dy dx dt - \nu \int_0^T \int_{\Omega} \partial_y^2 \phi_0 \partial_y^2 q_\eta dy dx dt \\
 & - \int_0^T \int_0^l \left(1 - e^{\Lambda - \phi_0|_{x=-L}} \right) q_\eta|_{x=-L} dy dt \\
 & \left. - \int_0^T \int_0^l \left(1 - e^{\Lambda - \phi_0|_{x=L}} \right) q_\eta|_{x=L} dy dt \right) = 0.
 \end{aligned}$$

En utilisant l'argument de monotonie, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t \partial_y (\phi_\eta - \phi_0) \partial_y (\phi_\eta - \phi_0) dy dx dt + \nu \|\partial_y^2 (\phi_\eta - \phi_0)\|_{L^2(\Omega_T)} + \\
 & \underbrace{\int_0^T \int_0^l \left(e^{\Lambda - \phi_0|_{x=-L}} - e^{\Lambda - \phi_\eta|_{x=-L}} \right) (\phi_\eta - \phi_0)|_{x=-L} dy dt}_{\geq 0} + \\
 & \underbrace{\int_0^T \int_0^l \left(e^{\Lambda - \phi_0|_{x=L}} - e^{\Lambda - \phi_\eta|_{x=L}} \right) (\phi_\eta - \phi_0)|_{x=L} dy dt}_{\geq 0} + \eta \|\partial_x q_\eta\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \\
 & \leq \eta \int_0^T \int_{\Omega} S q_\eta dy dx dt - \eta \left(\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t \partial_y^2 \phi_0 q_\eta dy dx dt + \nu \int_0^T \int_{\Omega} \partial_y^4 \phi_0 q_\eta dy dx dt \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^T \int_0^l \left(1 - e^{\Lambda - \phi_0|_{x=L}} \right) q_\eta|_{x=L} dy dt \right).
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Par des inégalités de type Poincaré, on montre qu'il existe une constante $c(\Omega_T)$ indépendante de $\phi_0, \phi_\eta, q_\eta$ telle que $\|q_\eta\|_{L^2(\Omega_T)} \leq c(\Omega_T) \|\partial_x q_\eta\|_{L^2(\Omega_T)}$ et $\|q_\eta|_{x=L}\|_{L^2([0,T] \times [0,l])} \leq c(\Omega_T) \|\partial_x q_\eta\|_{L^2(\Omega_T)}$. On obtient alors l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
 \|\partial_x q_\eta\|_{L^2(\Omega_T)}^2 & \leq \|S\|_{L^2(\Omega_T)} \|q_\eta\|_{L^2(\Omega_T)} + \|\partial_t \partial_y^2 \phi_0 + \nu \partial_y^4 \phi_0\|_{L^2(\Omega_T)} \|q_\eta\|_{L^2(\Omega_T)} \\
 & + \|1 - e^{\Lambda - \phi_0|_{x=L}}\|_{L^2([0,T] \times [0,l])} \|\partial_x q_\eta\|_{L^2(\Omega_T)},
 \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\|q_\eta\|_{L^2(\Omega_T)} \leq c(\Omega_T, \phi_0, S, \Lambda) \quad \text{et} \quad \|\partial_x q_\eta\|_{L^2(\Omega_T)} \leq c(\Omega_T, \phi_0, S, \Lambda).$$

où $c(\Omega_T, \phi_0, S, \Lambda)$ est indépendante de ϕ_η, q_η . A une sous-suite près, $(q_\eta)_{\eta>0}$ converge alors faiblement dans $L^2(\Omega_T)$ vers une fonction q_0 . Il en est de même pour $(\partial_x q_\eta)_{\eta>0}$.

On reprend maintenant l'inégalité (4.50), à l'aide du caractère borné de $\|q_\eta\|_{L^2(\Omega_T)}$, on a :

$$\begin{aligned} & \|\partial_y(\phi_\eta - \phi_0)|_{t=T}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\partial_y^2(\phi_\eta - \phi_0)\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \\ & \underbrace{\int_0^T \int_0^l \left(e^{\Lambda - \phi_0|x=-L} - e^{\Lambda - \phi_\eta|x=-L} \right) (\phi_\eta - \phi_0)|_{x=-L} dy dt}_{\geq 0} + \\ & \underbrace{\int_0^T \int_0^l \left(e^{\Lambda - \phi_0|x=L} - e^{\Lambda - \phi_\eta|x=L} \right) (\phi_\eta - \phi_0)|_{x=L} dy dt}_{\geq 0} \leq c(\Omega_T, \phi_0, S, \Lambda) \eta. \end{aligned} \quad (4.51)$$

On en déduit que

$$\underbrace{\|\partial_x(\phi_\eta - \phi_0)\|_{L^2(\Omega_T)} + \|\partial_y^2(\phi_\eta - \phi_0)\|_{L^2(\Omega_T)}}_{=\eta \|\partial_x q_\eta\|_{L^2(\Omega_T)}} \leq c(\Omega_T, \phi_0, S, \Lambda) \sqrt{\eta}.$$

Nous allons alors minorer les termes de bords non-linéaires.

En étudiant la fonction $\mu : z \mapsto (1 - e^{-z})z$, on remarque que, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $\mu(z) \geq \omega(z)$ où :

$$\omega(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}z^2 & \text{si } z \leq 1 \\ \frac{1}{2}z & \text{si } z > 1. \end{cases}$$

En considérant, $e^{\Lambda - \phi_0|x=L} \mu(\phi_\eta|x=L - \phi_0|x=L)$ on obtient l'inégalité :

$$\begin{aligned} & (e^{\Lambda - \phi_0|x=L} - e^{\Lambda - \phi_\eta|x=L})(\phi_\eta - \phi_0)|_{x=L} = e^{\Lambda - \phi_0|x=L} \left(1 - e^{-(\phi_\eta|x=L - \phi_0|x=L)} \right) (\phi_\eta|x=L - \phi_0|x=L) \\ & \geq \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\Lambda - \phi_0|x=L} |\phi_\eta|x=L - \phi_0|x=L|^2 & \text{si } \phi_\eta|x=L - \phi_0|x=L \leq 1 \\ \frac{1}{2} e^{\Lambda - \phi_0|x=L} |\phi_\eta|x=L - \phi_0|x=L| & \text{si } \phi_\eta|x=L - \phi_0|x=L > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

En intégrant sur Ω_T , il vient alors :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{0 \leq \phi_\eta|x=L - \phi_0|x=L \leq 1} e^{\Lambda - \phi_0|x=L} |\phi_\eta|x=L - \phi_0|x=L|^2 dy dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{0 \phi_\eta|x=L - \phi_0|x=L > 1} e^{\Lambda - \phi_0|x=L} |\phi_\eta|x=L - \phi_0|x=L| dy dt \\ & \leq \int_0^T \int_0^l \left(e^{\Lambda - \phi_0|x=L} - e^{\Lambda - \phi_\eta|x=L} \right) (\phi_\eta|x=L - \phi_0|x=L) dy dt \\ & \leq c(\Omega_T, \phi_0, S, \Lambda) \eta. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega}^l e^{\Lambda - \phi_0|_{x=L}} |\phi_\eta|_{x=L} - \phi_0|_{x=L}| dy dt &\leq \left(\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega}^l e^{\Lambda - \phi_0|_{x=L}} |\phi_\eta|_{x=L} - \phi_0|_{x=L}|^2 dy dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega}^l e^{\Lambda - \phi_0|_{x=L}} dy dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Cela permet d'obtenir, en vertu de l'inégalité (4.51) :

$$\int_0^T \int_0^l \frac{1}{2} \exp(\Lambda - \phi_0|_{x=L}) |\phi_\eta|_{x=L} - \phi_0|_{x=L}| dy dt \leq c(\Omega_T, \phi_0, S, \Lambda) \sqrt{\eta}.$$

On va montrer ci-après que l'on a l'inégalité de type Poincaré suivante :

Lemme 4.3.5

Pour tout $\phi \in L^2(0, T; V)$, on a l'estimation :

$$\|\phi\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))} \leq C(\Omega) \left(\|\phi|_{x=L} e^{\Lambda - \phi_0|_{x=L}}\|_{L^1([0, T] \times [0, l])} + \|\partial_x \phi\|_{L^2(\Omega_T)} + \|\partial_y^2 \phi\|_{L^2(\Omega_T)} \right),$$

où $C(\Omega)$ ne dépend que de Ω .

Démonstration du lemme 4.3.5 : On peut d'abord montrer que pour tout $\phi \in V$ et pour tout $t \in]0, T[$, on a :

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \left(\|\phi|_{x=L} e^{\Lambda - \phi_0|_{x=L}(t)}\|_{L^1([0, l])} + \|\partial_x \phi\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_y^2 \phi\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

La démonstration est similaire à celle l'inégalité de type Poincaré donnée dans [45].

On obtient ensuite le résultat du lemme 4.3.5 en intégrant l'inégalité ci-dessus et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ■

A partir de l'inégalité (4.51), on en déduit :

$$\begin{aligned} \|\phi_\eta - \phi_0\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))} &\leq c(\Omega) \left(\|(\phi_\eta|_{x=L} - \phi_0|_{x=L}) e^{\Lambda - \phi_0|_{x=L}}\|_{L^1([0, T] \times \Sigma_{\perp L})} \right. \\ &\quad \left. + \|\partial_x (\phi_\eta - \phi_0)\|_{L^2(\Omega_T)} + \|\partial_y^2 (\phi_\eta - \phi_0)\|_{L^2(\Omega_T)} \right) \\ &\leq c(\Omega_T, \phi_0, S, \Lambda) \sqrt{\eta}. \end{aligned}$$

Remarquons que nous avons une estimation de $\phi_\eta - \phi_0$ en norme $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ mais pas en norme $L^2(\Omega_T)$. En effet, l'estimation de $\phi_\eta - \phi_0$ en norme $L^2(\Omega_T)$ ne nous a pas semblé accessible.

On souhaite maintenant prouver que l'on peut passer à la limite dans la formulation faible du problème avec décomposition micro-macro (4.34). En reprenant la démonstration de l'estimation d'énergie de l'étape 1 (démonstration de la proposition 4.3.2), on peut montrer que $\|\phi_\eta\|_{L^2(0, T; V)}$ est borné indépendamment de η .

Par ailleurs, on sait que l'on a la convergence de $\partial_y^2 \phi_\eta$ vers $\partial_y^2 \phi_0$ quand $\eta \rightarrow 0$. En reprenant la démonstration de l'étape 4, on peut montrer que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\partial_y \partial_t \phi_{\eta|t=T}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\eta} \|\partial_x \partial_t \phi_\eta\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \nu \|\partial_y^2 \partial_t \phi_\eta\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \\ & + \int_0^T \int_0^l e^{\Lambda - \phi_{\eta|x=-L}} |\partial_t \phi_{\eta|x=-L}|^2 dy dt + \int_0^T \int_0^l e^{\Lambda - \phi_{\eta|x=L}} |\partial_t \phi_{\eta|x=L}|^2 dy dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t S \partial_t \phi_\eta dy dx dt + \frac{1}{2} \|\partial_y \partial_t \phi_{\eta|t=0}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

On en déduit que $\|\partial_t \phi_\eta\|_{L^2(0,T,V)}$ est borné indépendamment de η . On en déduit que $\phi_{\eta|x=L}$ est borné dans $H^1([0, T] \times [0, l])$ indépendamment de η et donc que $e^{\Lambda - \phi_{\eta|x=L}}$ est borné dans $L^2([0, T] \times [0, l])$.

De plus, $\partial_t \partial_y \phi_\eta$, $\partial_y^2 \phi_\eta$ et q_η sont bornés dans $L^2(\Omega_T)$ indépendamment de η .

Donc à une sous-suite près, on peut passer à la limite dans la formulation faible du problème avec décomposition micro-macro (4.34) pour obtenir le problème faible (4.35), dont l'unicité de la solution (ϕ_0, q_0) a été prouvée. On en déduit que :

$$q_\eta \rightharpoonup q_0 \quad \phi_\eta \rightharpoonup \phi_0 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega_T).$$

Cela clôture la démonstration du théorème 4.3.1.

4.3.2 Aspects numériques

Dans cette partie, nous allons faire des tests numériques sur le système (4.32) obtenu avec la méthode AP basée sur la décomposition micro-macro de Degond *et al.* [27] (voir sous-section 4.3.1). Nous avons opté pour un schéma de type différences finies centrées en espace avec une discréétisation en temps de type Euler. La mise en place d'une méthode de *splitting* directionnel aurait grandement facilité les calculs, hélas, les problèmes obtenus en regardant chaque direction (x et y) pris individuellement ne sont pas inversibles. Le choix a donc été de discréétiser le problème (4.32) de façon complètement implicite, excepté le terme non linéaire. Ainsi, on résout un système linéaire à chaque pas de temps afin de trouver les approximations de ϕ_η et q_η . A première vue, on pourrait noter qu'un schéma aux différences finies est peu adapté à la décomposition micro-macro établie ici puisque ϕ_0 n'est pas solution d'un problème continu, mais seulement d'un problème faible. En effet, le problème continu

sur ϕ_0, q_0 est sous-déterminé :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\partial_t \partial_y^2 \phi_0 - \partial_x^2 q_0 + \nu \partial_y^4 \phi_0 = S & \text{dans } \Omega_T \\ q_0|_{x=-L} = 0 & \text{sur }]0, T[\times \Sigma_{\perp} - L \\ \partial_y \phi_0|_{\Sigma_{\parallel}} = 0 & \text{sur }]0, T[\times \Sigma_{\parallel} \\ \partial_y^3 \phi_0|_{\Sigma_{\parallel}} = 0 & \text{sur }]0, T[\times \Sigma_{\parallel} \\ \phi_{\eta}|_{t=0} = \phi_{ini} & \text{à } t = 0 \\ \partial_x^2 \phi_0 = 0 & \text{dans } \Omega_T \\ \partial_x \phi_0|_{x=-0.5} = 0 & \text{sur }]0, T[\times \{-0.5\} \times]l, 1[\\ \partial_x \phi_0|_{x=-L} = 0 & \text{sur }]0, T[\times \{-L\} \times]0, l[\\ \partial_x \phi_0|_{x=L} = 0 & \text{sur }]0, T[\times \{L\} \times]0, l[\\ \partial_x \phi_0|_{x=0.5} = 0 & \text{sur }]0, T[\times \{0.5\} \times]l, 1[\\ \partial_x q_0|_{x=-L} = \left(1 - e^{\Lambda - \phi_0|_{x=-L}}\right) & \text{sur }]0, T[\times \{-L\} \times]0, l[\\ \partial_x \phi_0|_{x=L} = -\left(1 - e^{\Lambda - \phi_0|_{x=L}}\right) & \text{sur }]0, T[\times \{L\} \times]0, l[\end{array} \right. \quad (4.52)$$

La mise en place d'une discréétisation en espace de type éléments finis, plus adaptée à la formulation variationnelle (4.34), pourra faire l'objet de développements futurs. On considère un maillage rectangulaire de l'espace de pas constant δx (selon la direction (Ox)) et δy (selon la direction (Oy)). Le pas en temps est noté δt . Si $\phi_{i,j}^n$ est une approximation de $\phi_{\eta}(n\delta t, -0.5 + i\delta x, j\delta y)$, et $q_{i,j}^n$ est une approximation de $q_{\eta}(n\delta t, -0.5 + i\delta x, j\delta y)$, alors on a discréétisé le terme de condition à la limite de la manière suivante, en prenant I_1 tel que $-0.5 + I_1 \delta x = -L = -0.4$:

$$\frac{q_{I_1+1,j}^{n+1} - q_{I_1-1,j}^{n+1}}{2\delta x} - \phi_{I_1,j}^{n+1} = \left(1 - e^{\Lambda - \phi_{I_1,j}^n} - \phi_{I_1,j}^n\right).$$

On fait de même en $x = L$. Cette linéarisation temporelle nous permet d'avoir une matrice inversible (identique à chaque pas de temps).

Dans la figure 4.15, on observe que le conditionnement de la matrice obtenue avec la méthode AP est très mauvais, quelque soit $\eta > 0$. Néanmoins, on remarquera qu'il est borné indépendamment de η , ce qui n'est pas le cas pour la matrice correspondant à la résolution du problème sans la méthode AP. Pour éviter les problèmes de convergence liés à ce mauvais préconditionnement, nous avons choisi de résoudre le problème linéaire par une méthode de type LU, qui semblait être plus rapide que GMRES, tout du moins avec la bibliothèque PETSc. La construction d'un préconditionneur efficace en vue de l'utilisation d'une méthode itérative, pourrait être un développement futur pour les aspects numériques.

Pour le test de convergence, nous avons choisi une configuration où le limiteur remonte jusqu'en haut du domaine de calcul, c'est à dire $l = 1$. On rappelle que le domaine de calcul est représenté dans la figure 4.1. Cela ne change pas les propriétés démontrées dans la sous-section 4.3.1. On a pris à nouveau $L = 0.4$. La solution manufacturée choisie est la suivante :

$$\phi_{\eta}(t, x, y) = \eta \left(\frac{t}{\pi}\right)^2 \cos(\pi y) \cos(1.25\pi x) - \ln \left(1 - \frac{1.25t^2}{\pi \cos(\pi y)}\right) + \Lambda. \quad (4.53)$$

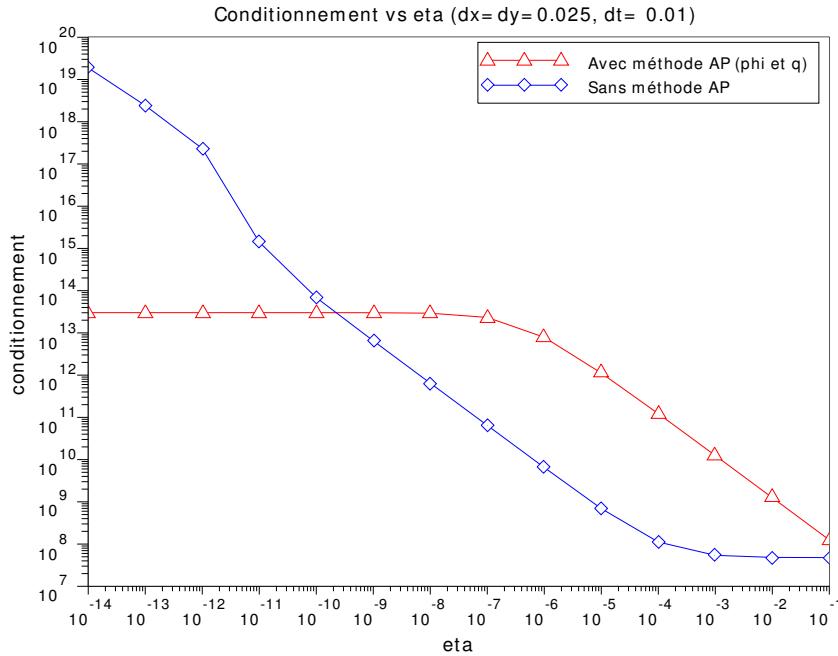


FIGURE 4.15 – Conditionnement en norme 2 en fonction de la résistivité parallèle η pour le système linéaire (identique à chaque pas de temps) approchant la solution (4.53). On a pris $\delta x = \delta y = 0.025$ et $\delta t = 0.001$.

On remarquera que le terme source S associé à la solution manufacturée (4.53) dépend de η mais n'est pas singulier quand $\eta \rightarrow 0$. Cela diffère légèrement du cadre de l'étude théorique de la sous section 4.3.1. Le tracé de la solution approchée par le schéma numérique est représenté dans la figure 4.17. En étudiant l'erreur en norme L^2 , voir la figure 4.16, on observe que le schéma numérique est bien d'ordre 2 en espace, en accord avec ce qui était attendu. Pour la convergence quand $\eta \rightarrow 0$, on remarque avec la figure 4.18 que la décroissance de $\|\phi_\eta^{approche} - \phi_0\|_{L^2(\Omega)}$ est en $\mathcal{O}(\eta)$ avant de stagner au niveau de l'erreur de discréétisation. Cette décroissance en $\mathcal{O}(\eta)$ est en accord avec l'expression de ϕ_η dans (4.53). ϕ_0 est obtenue en prenant $\eta = 0$ dans l'équation (4.53).

4.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons étudié un problème modélisant le potentiel électrique dans le plasma de bord d'un tokamak. L'essentiel du travail réalisé consiste à étudier le comportement du problème quand la résistivité parallèle aux lignes de champ magnétique η tend vers 0. Le fait de passer directement à la limite $\eta \rightarrow 0$ dans les équations rend le système mal posé. Numériquement, ce phénomène se traduit par un conditionnement non borné des matrices considérées quand $\eta \ll 1$. L'utilisation de méthodes préservant l'asymptotique (AP) permet d'éviter ce problème. Nous avons d'abord étudié la méthode décomposant la solution en

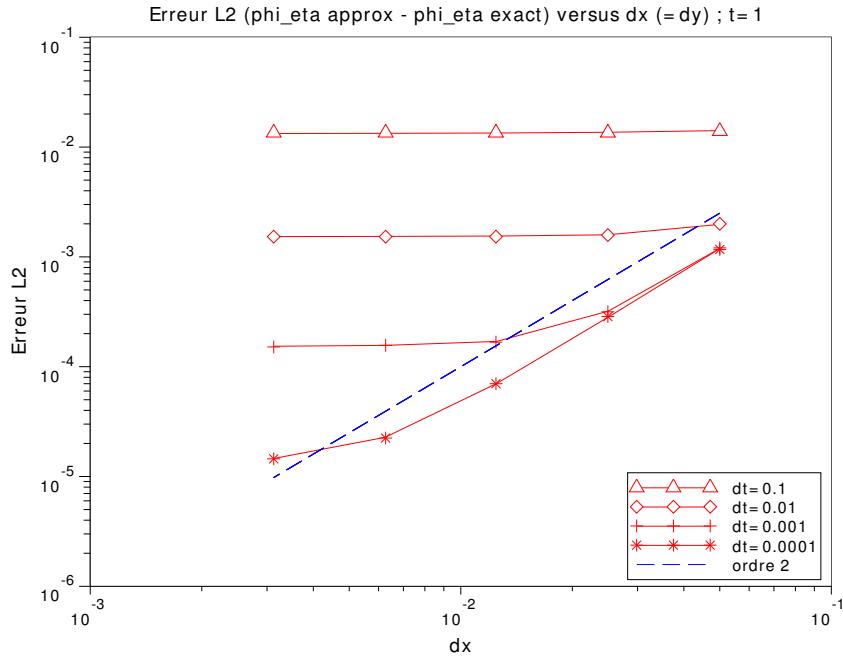


FIGURE 4.16 – $\|\phi_\eta^{\text{approche}} - \phi_\eta\|_{L^2(\Omega)}$ à $t = 1$ en fonction du pas $\delta x = \delta y$ pour différents pas de temps et $\eta = 0.001$. La solution de référence est celle donnée par l'équation (4.53).

sa partie moyenne et sa partie fluctuante, pour un problème elliptique avec des conditions aux limites non linéaires de type Fourier. Nous avons ensuite appliqué les résultats obtenus au problème modélisant le potentiel électrique dans un cadre 1D et montré que l'on avait l'estimation $\|\phi_\eta - \phi_0\|_{L^2([-L, L])} = \mathcal{O}(\eta)$.

Pour le modèle 2D anisotrope du potentiel électrique, la difficulté liée à la faible résistivité parallèle est de même nature. Cependant, pour éviter les difficultés numériques provenant de la présence de termes non locaux dans les conditions aux limites, une autre méthode préservant l'asymptotique a été proposée à partir de la décomposition micro-macro introduite par Degond *et al.* pour un problème elliptique linéaire anisotrope. Comme pour le modèle 1D, nous avons pu définir de manière unique la limite ϕ_0 . Il convient d'insister sur le fait que le problème limite obtenu n'est bien posé que sous sa forme faible. Nous avons aussi obtenu une estimation de $\phi_\eta - \phi_0$ pour la norme $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ (mais pas pour la norme $L^2(\Omega_T)$). Des tests numériques ont permis de vérifier que la matrice associée au système linéaire à inverser possède bien un conditionnement borné indépendamment de η .

Enfin des essais numériques de pénalisation encourageants ont été réalisés avec le modèle 1D. Ces travaux correspondent aux objectifs de l'ANR ESPOIR. L'analyse théorique de la méthode de pénalisation proposée pourrait faire l'objet de travaux ultérieurs.

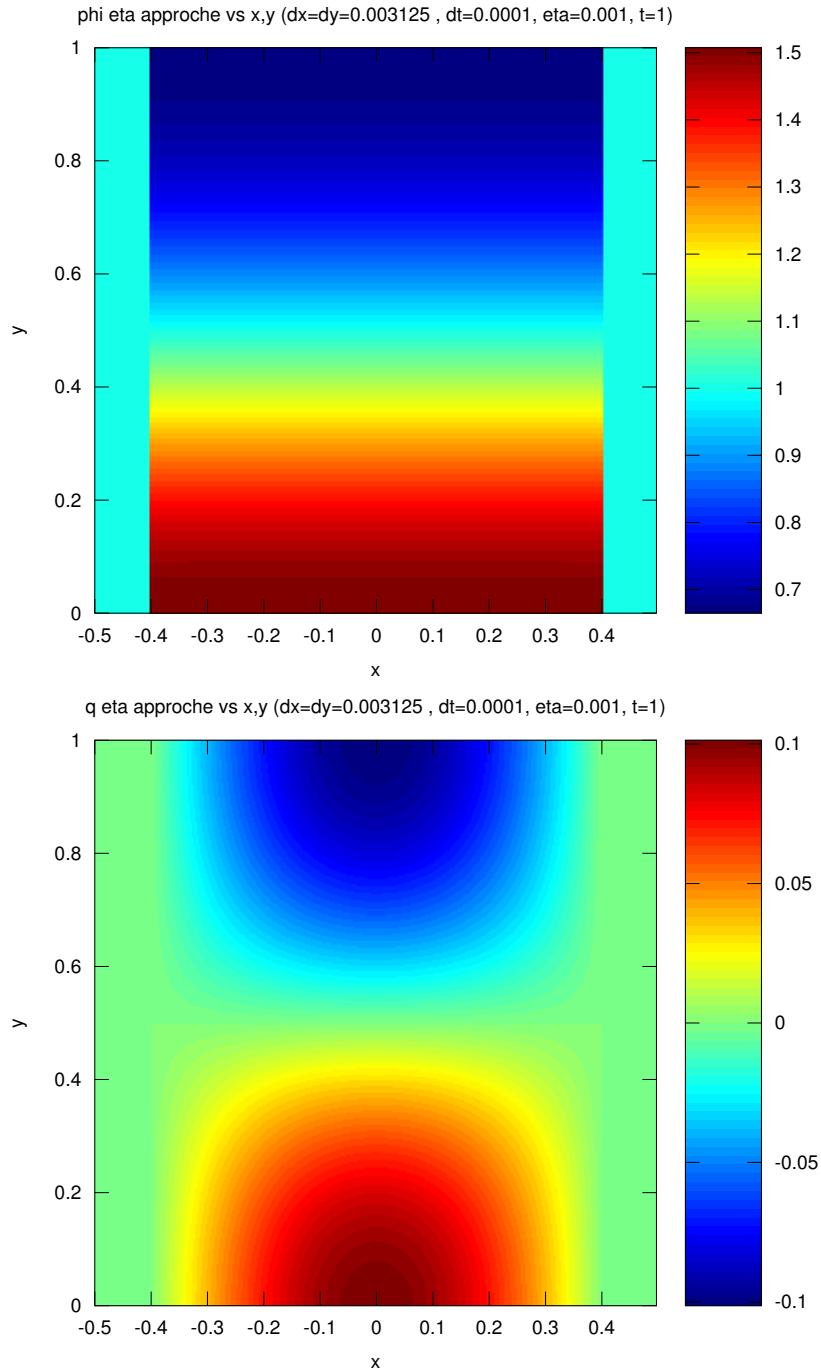


FIGURE 4.17 – Approximation de ϕ_η et q_η pour $\delta x = \delta y = 0.003125$, $dt = 0.0001$ et $\eta = 0.001$. La solution de référence est celle donnée par (4.53). On rappelle que les zones $x \leq -0.4$ et $x \geq 0.4$ correspondent au limiteur et les valeurs de ϕ_η dans cette zone n'ont pas de sens physique.

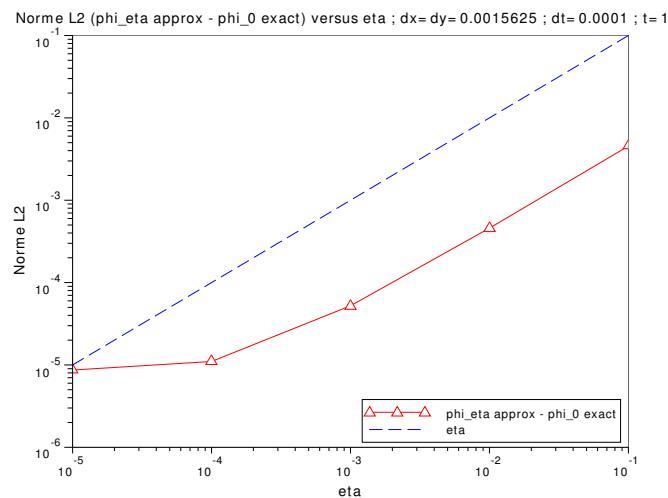


FIGURE 4.18 – $\|\phi_\eta^{\text{approche}} - \phi_0\|_{L^2}$ en fonction de η pour $\delta x = \delta y = 0.0015625$, $dt = 0.0001$. La solution de référence est celle donnée par l'équation (4.53).

Chapitre 5

Conclusions de la thèse et perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié deux problèmes différents. Pour un problème hyperbolique non linéaire à bord non caractéristique et conditions aux limites maximales strictement dissipatives, nous avons proposé une méthode de pénalisation qui ne génère pas de couche limite, au sens où la décroissance de l'erreur en fonction du paramètre de pénalisation ε est optimale, en $\mathcal{O}(\varepsilon)$, pour toutes les normes $H^s, s \geq 0$. L'idée de cette méthode consiste à ne pénaliser que les champs impliqués dans les conditions aux limites, après un changement d'inconnue adapté. Le résultat de convergence a été démontré dans le cadre de solutions régulières définies dans le passé. Des tests numériques ont été réalisés sur un modèle 1D pour la densité et le moment du plasma.

Le deuxième problème concerne la prise en compte du courant électrique (ou du potentiel électrique). La demande établie par les physiciens du CEA impliqués dans l'ANR ESPOIR concernait la pénalisation des conditions aux limites non linéaires du potentiel électrique avec la difficulté provenant de la faible résistivité parallèle aux lignes de champ magnétique, notée η . Pour traiter cette difficulté, nous avons fait appel à des méthodes préservant l'asymptotique (*asymptotic-preserving*, en anglais). Sur le modèle 1D du potentiel électrique, nous avons opté pour la méthode consistant à découpler la partie moyenne de la partie fluctuante, qui semblait naturelle. Pour le modèle 2D, nous avons opté pour une décomposition de type micro-macro qui permet d'éviter la présence de termes non locaux dans les équations. Dans les deux modèles, on a étudié théoriquement la convergence quand la résistivité parallèle η tend vers 0. Des essais numériques de méthodes de pénalisation encourageants ont été proposés : comme pour la première pour le chapitre 2, il s'agit d'étudier des modèles simplifiés du plasma. Un cadre théorique et des tests numériques plus complets restent encore à faire pour cette méthode de pénalisation.

Les travaux réalisés dans cette thèse ont permis d'isoler deux difficultés pour la simulation numérique du plasma de bord d'un tokamak et d'y apporter des solutions. La première des difficultés concernait la mise en place d'une méthode de pénalisation volumique pour un système d'équations hyperboliques non linéaires. La seconde était liée à la forte anisotropie du plasma due au fort confinement magnétique. Pour chacune de ces difficultés un modèle jouet a été étudié.

Il serait intéressant d'essayer d'étendre la méthode de pénalisation à des problèmes hy-

peraboliques linéaires à bord caractéristique. On remarque aussi que l'on s'est focalisé sur l'approximation par pénalisation d'un problème aux limites hyperbolique continu. Des travaux pourraient être menés pour étudier les propriétés du problème pénalisé discrétilisé par un schéma volumes finis.

Pour les modèles de potentiel électrique dans le plasma de bord, il conviendrait d'essayer d'affaiblir les hypothèses sur la fonction h représentant le terme non linéaire dans la condition à la limite du problème elliptique. Pour le modèle 2D anisotrope du potentiel électrique, il serait intéressant de parvenir à avoir une estimation de $\phi_\eta - \phi_0$ pour la norme $L^2(\Omega_T)$ (et pas seulement en norme $L^1(0, T, L^2(\Omega))$).

Il reste aussi à faire la synthèse des travaux précédents pour un modèle plus réaliste en bord de tokamak. Il faudra donc intégrer ces résultats dans un modèle plus complet prenant en compte toutes les variables physiques ainsi que les termes de courbure dans un cadre multidimensionnel. Des travaux ont déjà été réalisés dans ce sens : on pourra notamment citer l'article de Paredes *et al.* [47] qui présente des résultats numériques, sans analyse mathématique, pour une méthode de pénalisation sur la densité, le moment et la température du plasma. Il y a aussi l'article de Bufferand *et al.* [21] qui applique la méthode de pénalisation à des géométries courbes, via le code SolEdge2D.

Cela permettra une meilleure compréhension des interactions plasma-paroi à l'intérieur d'un tokamak.

Annexe A

Rappels pour un problème d'évolution du premier ordre

On rappelle ici le théorème donnant l'existence et l'unicité d'une solution pour un problème d'évolution du premier ordre. Ce théorème est donné dans le livre de Zeidler et Boron [66], page 424 et suivantes. Ce théorème est basé sur la méthode de Galerkin.

Définition A.0.1 (*Triplet d'évolution*)

On définit un triplet d'évolution, noté par la suite " $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ " par la donnée de deux espaces V et H tels que

- V est un espace de Banach réel, séparable et réflexif.
- H est un espace de Hilbert réel et séparable.
- L'injection \hookrightarrow est continue, c'est à dire qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $v \in V$, $\|v\|_H \leq c\|v\|_V$.
- V est dense dans H .

Dans la définition du triplet d'évolution, on confond H et son dual topologique H^* .

Définition A.0.2 (*L'espace $W^{1,2}(0, T; V, H)$*)

Soit le triplet d'évolution $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$.

On définit l'espace $W^{1,2}(0, T; V, H) = \{f \in L^2(0, T; V), \partial_t f \in L^2(0, T; V^*)\}$.

C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{W^{1,2}(0, T; V, H)} = \|u\|_{L^2(0, T; V)} + \|\partial_t u\|_{L^2(0, T; V^*)}.$$

Remarque : on rappelle que l'on a $W^{1,2}(0, T; V, H) \subset C([0, T], H)$ avec injection continue. C'est à dire que, pour toute fonction $u \in W^{1,2}(0, T; V, H)$, il existe une unique fonction $u^\sharp \in C([0, T], H)$ qui coïncide avec u pour presque tout point de $[0, T]$. De plus, on a l'existence d'une constante $c(T) > 0$, indépendante de u et u^\sharp , telle que $\max_{t \in [0, T]} \|u^\sharp(t)\|_H \leq c(T)\|u\|_{W^{1,2}(0, T; V, H)}$. Ainsi, en pratique, on utilisera la notation $u(t)$ (pour $t \in [0, T]$) pour désigner en fait $u^\sharp(t) \in H$.

Théorème A.0.1

Soient $T > 0$ et un triplet d'évolution $V \subset H \subset V^*$. Soit a une forme bilinéaire définie sur $V \times V$, $b \in L^2(0, T; V^*)$ et $u_0 \in H$. On considère le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in W^{1,2}(0, T; V, H) \text{ tel que,} \\ \forall v \in V, \text{pp. } t \in]0, T[, \\ \frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle_H + a(t, u(t), v) = \langle b(t), v \rangle_V \\ u|_{t=0} = u_0 \in H. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

à prendre au sens de

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in W^{1,2}(0, T; V, H) \text{ tel que,} \\ \forall \xi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T]), \forall v \in V, \text{pp. } t \in]0, T[, \\ - \int_0^T \langle u(t), v \rangle_H \xi'(t) dt + \int_0^T a(t, u(t), v) \xi(t) dt = \int_0^T \langle b(t), v \rangle_V \xi(t) dt \\ u|_{t=0} = u_0 \in H. \end{cases}$$

On fait les hypothèses suivantes :

1. Le triplet d'évolution $V \subset H \subset V^*$ est tel que : V et H sont deux espaces de Hilbert réels et V est de dimension infinie.
2. Pour tout t , l'application $a(t, ., .) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est
 - bilinéaire.
 - continue uniformément par rapport à t :

$$\exists c_1 > 0, \forall v, w \in V, a(t, v, w) \leq c_1 \|v\|_V \|w\|_V.$$

- coercive uniformément par rapport à t :

$$\exists c_2 > 0, \forall v \in V, a(t, v, v) \geq c_2 \|v\|_V^2.$$

Où c_1 et c_2 sont indépendants de t .

3. $\{w_1, w_2, \dots\}$ est une base hilbertienne de V et $u_{0,n}$ est une suite de

$$Vect\{w_1, \dots, w_n\} \subset H$$

telle que $u_{0,n} \rightarrow u_0$ dans H (quand $n \rightarrow +\infty$).

Alors, le problème (A.1) admet une unique solution. De plus, $(u_0, b) \mapsto u$ est une application linéaire et continue de $H \times L^2(0, T; V^*)$ vers $W^{1,2}(0, T; V, H)$. C'est à dire qu'il existe une constante $c_3(a)$ (indépendante de u_0 et b) telle que :

$$\|u\|_{W^{1,2}(0, T; V, H)} \leq c_3(a) (\|u_0\|_H + \|b\|_{L^2(0, T; V^*)}).$$

Dans le cadre donné par le théorème A.0.1, on peut aussi montrer la convergence de la méthode de Galerkin, mais cela ne nous servira pas dans le cadre de cette thèse.

Table des figures

1.1	Schéma de la zone proche de la paroi d'un tokamak en configuration limiteur. DSMF = Dernière Surface Magnétique Fermée. La <i>scrape-off layer</i> est la région se situant entre la dernière surface magnétique fermée (DSMF) et la paroi.	13
1.2	A gauche : Photo de l'intérieur de TORE SUPRA (à l'arrêt). Le limiteur est le "trottoir" en bas de la photo. A droite : Image prise par une caméra CCD (dans le visible) de TORE SUPRA en fonctionnement. Un fort dégagement de lumière est généré au niveau du limiteur. Source des deux images : IRFM [2] .	14
1.3	Schéma de la configuration <i>divertor</i> , retenue pour ITER. La <i>scrape-off layer</i> est toujours la région se situant entre la dernière surface magnétique fermée (DSMF) et la paroi.	15
1.4	Schéma du système de coordonnées toriques utilisé dans TOKAM-3D. r est le rayon mineur, φ est l'angle toroïdal et ϑ correspond à l'angle poloïdal.	15
1.5	Un exemple de domaine avec son domaine fictif	19
1.6	Un exemple de domaine avec son domaine fictif pour une méthode de type cut-cell.	22
1.7	Représentation du domaine 1D contenant le plasma de bord. x correspond à une abscisse curviligne le long d'une ligne de champ magnétique. L'aspect périodique vient du fait que sans le limiteur, la ligne de champ magnétique formerait une boucle fermée.	24
1.8	Schéma du domaine spatial	25
1.9	Représentation en deux dimensions de la zone contenant le plasma de bord. L'axe x correspond à une abscisse curviligne le long d'une ligne de champ magnétique (de direction \mathbf{b}). L'axe y correspond à la direction radiale.	31
2.1	Schéma de la <i>scrape-off layer</i> , proche de la paroi du tokamak. L'abscisse correspond aux coordonnées curvilignes le long d'une ligne de champ magnétique.	34
2.2	Représentation du maillage utilisé.	35
2.3	Représentation du domaine de calcul $x \in [0, 0.5]$. La zone où se situe le plasma correspond à $x \in [0, L]$, avec $L = 0.4$	40

2.4	M en fonction de x avec $\varepsilon = 10^{-3}$, avec trois maillages différents (respectivement 1280, 2560 et 10240 volumes de contrôle) en utilisant la pénalisation proposés par Isoardi <i>et al.</i> [37]. Les calculs sont arrêtés quand $\max_{i \in \{1, \dots, J\}} (M_i^n) > 10$, ce qui correspond aux instants suivants : $t = 0.008822$, $t = 0.004107$ et $t = 0.0015834$. Le domaine de calcul correspond à $[0, 0.5]$ et $L = 0.4$ (interface plasma-limiteur). Une condition de symétrie a été imposée en $x = 0$ (voir la figure 2.3).	41
2.5	Tracé de N , Γ et M en fonction de x à $t = 1$ avec la méthode de pénalisation des deux champs en prenant $\varepsilon = 0.1$ (courbe de gauche) et $\varepsilon = 10^{-5}$ (courbe de droite). Les lignes continues représentent les solutions approchées et les pointillés correspondent à la solution de référence ($\varepsilon = 10^{-20}$). Le limiteur est la zone $x \in [0.4, 0.5]$. Le pas du maillage en espace est $\delta x = 10^{-5}$	42
2.6	Erreurs pour N , $\partial_x N$, Γ en $\partial_x \Gamma$ en norme L^1 et L^2 avec la pénalisation des deux champs, cf. (2.13). Les lignes en pointillés représentent respectivement les courbes $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}, \varepsilon^{-\frac{1}{4}}, \varepsilon^{1/4}, \varepsilon^{1/2}$ et ε . Le pas du maillage en espace est $\delta x = 10^{-5}$	43
2.7	Estimation de l'épaisseur de la couche limite en fonction du paramètre de pénalisation ε . L'épaisseur a été calculée avec la relation $x_{J_{bl}} - 0.4$ où $J_{bl} = \max\{ N_i^n - 0 < 0.01 N_I^n 0 \}$ et I le numéro de la cellule, dans le plasma, qui est en contact avec l'interface plasma-limiteur. En fait, $x_{J_{bl}}$ est la valeur de la coordonnée curviligne (x) où N atteint 99% de la valeur qui lui est imposée à l'intérieur de la zone pénalisée (0 pour la pénalisation considérée dans le paragraphe 2.2.2). Cette définition de la taille de la couche limite a été faite par analogie avec le cas d'un flux laminaire autour d'une lame plane (voir par exemple la page 30 de [58]). Les lignes en pointillés représentent respectivement les courbes $\varepsilon^{1/4}, \varepsilon^{1/2}$ et ε . Le pas en espace est $\delta x = 10^{-5}$	45
2.8	Tracé de N , Γ et M en fonction de x avec la méthode de pénalisation sans couche limite (à gauche pour $\varepsilon = 0.1$ et à droite pour $\varepsilon = 10^{-5}$), voir l'équation (2.17). Les traits pleins représentent la solution approchée par le schéma numérique tandis que les pointillés correspondent à la solution exacte (à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$). Le limiteur correspond à la zone $x \in [0.4, 0.5]$. Le pas en espace est $\delta x = 10^{-5}$	53
2.9	Erreurs pour N , $\partial_x N$, Γ et $\partial_x \Gamma$ en norme L^1 et L^2 avec la pénalisation sans couche limite, voir l'équation (2.17). Les pointillées représentent les courbes $\varepsilon^{1/4}, \varepsilon^{1/2}$ et ε . Le pas en espace est toujours $\delta x = 10^{-5}$	54
2.10	Erreur pour $\partial_x N$ en norme L^2 avec la méthode de pénalisation sans couche limite, pour $0.4 \leq x \leq 0.45$. Les lignes en pointillés représentent les courbes $\varepsilon^{1/4}, \varepsilon^{1/2}$ et ε . Le pas en espace est $\delta x = 10^{-5}$. On constate que le taux de convergence optimal, en $\mathcal{O}(\varepsilon)$, est atteint.	55
2.11	Représentation graphique de N , Γ et M en fonction de x (à $t = 1$) avec la pénalisation sans couche limite (la condition initiale est la solution stationnaire). La solution exacte correspond à la ligne grise en traits pleins. Le limiteur correspond à la zone $x \in [0.4, 0.5]$, voir la figure 2.3. On a choisi $\varepsilon = 10^{-3}$ et $M_0 = 0.99$	56

2.12 Représentation du domaine de calcul pour le limiteur avec deux faces en contact avec le plasma.	57
2.13 Tracé de N , Γ et M en fonction de x (à $t = 1$) avec la pénalisation sans couche limite et le limiteur à deux faces (à gauche avec $\varepsilon = 0.1$ et à droite avec $\varepsilon = 10^{-5}$) Le limiteur correspond ici à la zone $x \in [-0.1, 0.1]$. Pour $\varepsilon = 0.1$, on a $\max(N) = 115.65$ et $\max(\Gamma) = 122.72$. Pour $\varepsilon = 10^{-5}$, on obtient $\max(N) = 168.91$ et $\max(\Gamma) = 152.04$	58
2.14 Tracé des erreurs en norme L^1 et L^2 de N , $\partial_x N$, Γ et $\partial_x \Gamma$ avec la méthode de pénalisation sans couche limite appliquée à la configuration du limiteur à deux faces (voir la figure 2.12). Les pointillés représentent les courbes $\varepsilon^{1/4}, \varepsilon^{1/2}$ et ε . L'erreur dans le plasma est évaluée sur l'ensemble $x \in] -0.5, -0.1[\cup]0.1, 0.5[$. Dans le limiteur, la zone sur laquelle l'erreur est calculée est $x \in [-0.1, -0.075] \cup [0.075, 0.1]$. Ainsi la zone où $\alpha(x) \neq 1$ n'est pas incluse dans les endroits où l'erreur a été estimée. Ici, on a pris $M_0 = 0.9$ et le pas est $\delta x = 10^{-5}$	59
2.15 Erreurs en norme L^1 pour N et $\partial_x N$ en fonction de ε pour la pénalisation sans couche limite avec le limiteur à deux faces (voir la figure 2.12). Les pointillés représentent les courbes $\varepsilon^{1/4}, \varepsilon^{1/2}$ et ε . L'erreur dans le plasma est évaluée sur l'ensemble $x \in] -0.5, -0.1[\cup]0.1, 0.5[$. Dans le limiteur, la zone sur laquelle l'erreur est calculée est $x \in [-0.1, -0.075] \cup [0.075, 0.1]$. Ainsi, la zone où $\alpha(x) \neq 1$ n'est pas incluse dans les endroits où l'erreur a été estimée.	61
3.1 Schéma du domaine spatial.	87
4.1 Représentation en deux dimensions de la zone contenant le plasma de bord. x correspond à une abscisse curviligne le long d'une ligne de champ magnétique (de direction \mathbf{b}). Le domaine contenant le plasma est Ω et les frontières sont Σ_{\parallel} (pour tout la partie parallèle à \mathbf{b}) et Σ_{\perp} (pour la partie perpendiculaire à \mathbf{b}). Cette configuration sera notamment celle utilisée dans la section 4.3.	114
4.2 Schéma présentant les convergences à montrer lors de l'utilisation de méthodes de type AP	116
4.3 Conditionnement en norme $\ \cdot\ _2$ en fonction de η , de la matrice associée au système (4.17), calculant l'approximation de ϕ sans utiliser le schéma AP.	125
4.4 Erreur $\phi_{\eta} - \phi_0$ pour les normes L^1 et L^2 en fonction de η avec trois méthodes de calcul différentes pour ϕ_{η} :	127
4.5 Erreur $(\phi_{\eta} - \phi_0)'$ en norme L^2 en fonction de η avec trois méthodes de calcul différentes pour ϕ_{η} :	128
4.6 Moyenne de ϕ_{η} approché en fonction de η , la légende des trois courbes est la même que pour la figure 4.4. Pour des valeurs de η pas trop petites, les trois courbes sont confondues.	129
4.7 Tracé de ϕ_{η} en fonction de x	130
4.8 Nombre d'itérations pour la méthode du gradient conjugué en fonction de η	131
4.9 Convergence au maillage, erreur L^2 (différence entre ϕ_0 approché par le schéma et ϕ_0 calculé analytiquement).	132

4.10 $\ \phi_{\eta,\delta x} - \phi_{0,\delta x}\ _{L^2([-0.4,0.4])}$ en fonction de η . La discrétisation utilise un schéma centré en volumes finis avec un pas de $\delta x = 10^{-4}$	143
4.11 Le domaine de calcul utilisé : χ_1 vaut 1 en $x \in]-0.45, -0.4[$ et 0 ailleurs. Quand à χ_2 , elle vaut 1 dans $]0.4, 0.45[$ et 0 partout ailleurs.	145
4.12 Erreur L^2 en fonction du paramètre de pénalisation ε . On a pris $\eta = 10^{-4}$ et $\delta x = 10^{-4}$. On observe une décroissance de l'erreur en $\mathcal{O}(\varepsilon)$ jusqu'à l'erreur de discrétisation spatiale.	147
4.13 Erreur L^2 en fonction de la résistivité parallèle η . On a pris $\varepsilon = 10^{-10}$ et $\delta x = 10^{-4}$. On observe une décroissance de l'erreur en $\mathcal{O}(\eta)$ jusqu'à l'erreur de discrétisation spatiale.	148
4.14 Rappel de la figure 4.1 : Représentation en deux dimensions de la zone contenant le plasma de bord. x correspond à une abscisse curviligne le long d'une ligne de champ magnétique (de direction \mathbf{b}). Le domaine contenant le plasma est Ω et les frontières sont Σ_{\parallel} (pour tout la partie parallèle à \mathbf{b}) et Σ_{\perp} (pour la partie perpendiculaire à \mathbf{b}). Cette configuration sera notamment celle utilisée dans la section 4.3.	150
4.15 Conditionnement en norme 2 en fonction de la résistivité parallèle η pour le système linéaire (identique à chaque pas de temps) approchant la solution (4.53). On a un pris $\delta x = \delta y = 0.025$ et $\delta t = 0.001$	180
4.16 $\ \phi_{\eta}^{approche} - \phi_{\eta}\ _{L^2(\Omega)}$ à $t = 1$ en fonction du pas $\delta x = \delta y$ pour différents pas de temps et $\eta = 0.001$. La solution de référence est celle donnée par l'équation (4.53).	181
4.17 Approximation de ϕ_{η} et q_{η} pour $\delta x = \delta y = 0.003125$, $dt = 0.0001$ et $\eta = 0.001$. La solution de référence est celle donnée par (4.53). On rappelle que les zones $x \leq -0.4$ et $x \geq 0.4$ correspondent au limiteur et les valeurs de ϕ_{η} dans cette zone n'ont pas de sens physique.	182
4.18 $\ \phi_{\eta}^{approche} - \phi_{0}\ _{L^2}$ en fonction de η pour $\delta x = \delta y = 0.0015625$, $dt = 0.0001$. La solution de référence est celle donnée par l'équation (4.53).	183

Bibliographie

- [1] Site internet de l'installation National Ignition Facility (NIF) du Lawrence Livermore national Laboratory (LLNL). <https://lasers.llnl.gov/>. Consulté le 10/07/2013.
- [2] Site internet de l'Institut de Recherche sur la Fusion Magnétique (irfm) du CEA de Cadarache. <http://www-fusion-magnetique.cea.fr/>. Consulté le 05/08/2010.
- [3] Site internet du laser Mégajoule du CEA. <http://www-lmj.cea.fr/>. Consulté le 10/07/2013.
- [4] J. Abiteboul, X. Garbet, V. Grandgirard, S.J. Allfrey, G. Dif-Pradalier, Ph. Ghendrih, G. Latu, Passeron C., Y. Sarazin, and A. Strugarek. Turbulent generation and transport of toroidal angular momentum. In *Europhysics conference abstracts*, volume 34A, 2010. 37th EPS Conference on Plasma Physics.
- [5] J. Abiteboul, Ph. Ghendrih, V. Grandgirard, T. Cartier-Michaud, G. Dif-Pradalier, X. Garbet, G. Latu, C. Passeron, Y. Sarazin, A. Strugarek, O. Thomine, and D. Zarzoso. Turbulent momentum transport in core tokamak plasmas and penetration of scrape-off layer flows. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 55(7) :074001, 2013.
- [6] R.A. Adams and J.J.F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 2003.
- [7] S. Alinhac and P. Gérard. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. Savoirs actuels. InterEditions, 1991. pp 101.
- [8] Ph. Angot. A unified fictitious domain model for general embedded boundary conditions. *Comptes Rendus Mathematique Acad. Sci. Paris*, 341(11) :683 – 688, 2005.
- [9] Ph. Angot, T. Auphan, and O. Guès. Asymptotic-Preserving methods for an anisotropic model of electrical potential in a tokamak. In J. Fuhrmann et al. (Eds), editor, *Seventh International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications (FVCA7)*. Springer, june 2014.
- [10] Ph. Angot, T. Auphan, and O. Guès. An optimal penalty method for a hyperbolic system modeling the edge plasma transport in a tokamak. *Journal of Computational Physics*, 261(0) :1 – 22, 2014.
- [11] Ph. Angot, Ch.-H. Bruneau, and P. Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in an incompressible flow,. *Numerische Mathematik*, 81(4) :497–520, 1999.
- [12] T. Auphan. Méthodes de pénalisation pour des systèmes hyperboliques application au transport de plasma en bord de tokamak. Master's thesis, Ecole Centrale Marseille, 2010. Internship report.

- [13] T. Auphan. Penalization for non-linear hyperbolic system. *Advances in Differential Equations*, 19(1-2), 2014.
- [14] O. Axelsson. *Iterative Solution Methods*. Cambridge University Press, 1996.
- [15] B. Bensiali, G. Chiavassa, and J. Liandrat. Pénalisation et conditions aux limites de type neumann/robin. Technical report, Présentation au CANUM 2012, 2012.
- [16] S. Benzoni-Gavage and D. Serre. *Multidimensional hyperbolic partial differential equations. First-order systems and applications*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, 2007.
- [17] P. Bochev and R. B. Lehoucq. On finite element solution of the pure neumann problem. *SIAM Review*, 47(1) :50–66, 2005.
- [18] F. Bouchut and F. James. One-dimensional transport equations with discontinuous coefficients. *Nonlinear Anal.*, 32 :891–933, June 1998.
- [19] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Editions Dunod, Paris, 1999.
- [20] T. Buffard, T. Gallouët, and J.-M. Hérard. A sequel to a rough Godunov scheme : application to real gases. *Computers & Fluids*, 29(7) :813 – 847, 2000.
- [21] H. Bufferand, B. Bensiali, J. Bucalossi, G. Ciraolo, P. Genesio, Ph. Ghendrih, Y. Marandet, A. Paredes, F. Schwander, E. Serre, and P. Tamain. Near wall plasma simulation using penalization technique with the transport code soledge2d-eirene. *Journal of Nuclear Materials*, 438, Supplement(0) :S445 – S448, 2013. Proceedings of the 20th International Conference on Plasma-Surface Interactions in Controlled Fusion Devices.
- [22] G. Carbou and P. Fabrie. Boundary layer for a penalization method for viscous incompressible flow. *Differential Equations*, 8(12) :1453–1480, 2003.
- [23] C. Chainais-Hillairet and E. Grenier. Couches limites de systèmes hyperboliques en dimension un. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 330(8) :737 – 740, 2000.
- [24] A.V. Chankin, J.P. Coad, G. Corrigan, S.J. Davies, S.K. Erents, H.Y. Guo, G.F. Matthews, G.J. Radford, J. Spence, P.C. Stangeby, and A. Taroni. Modelling of sol flows and target asymmetries in jet field reversal experiments with edge2d code. *Contributions to Plasma Physics*, 40(3-4) :288–294, 2000.
- [25] J. Chazarain and A. Piriou. *Introduction to the Theory of Linear Partial Differential Equations*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982. Translated from the French.
- [26] P. Degond, F. Deluzet, and C. Negulescu. An asymptotic preserving scheme for strongly anisotropic elliptic problems. *Multiscale Modeling & Simulation*, 8(2) :645–666, 2010.
- [27] P. Degond, A. Lozinski, J. Narski, and C. Negulescu. An asymptotic-preserving method for highly anisotropic elliptic equations based on a micro–macro decomposition. *Journal of Computational Physics*, 231(7) :2724 – 2740, 2012.
- [28] F. Filbet and S Jin. A class of asymptotic-preserving schemes for kinetic equations and related problems with stiff sources. *Journal of Computational Physics*, 229(20) :7625 – 7648, 2010.

- [29] B. Fornet. A Kreiss' symmetrizer domain penalization method. *Communications in Partial Differential Equations*, 33(9) :1549–1570, 2008.
- [30] B. Fornet and O. Guès. Penalization approach of semi-linear symmetric hyperbolic problems with dissipative boundary conditions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 23(3) :827 – 845, 2009.
- [31] Ph. Ghendrih, K. Bodi, H. Bufferand, G. Chiavassa, G. Ciraolo, N Fedorczak, L. Isoardi, A. Paredes, Y. Sarazin, E. Serre, F. Schwander, and P. Tamain. Transition to supersonic flows in the edge plasma. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 53(5) :054019, 2011.
- [32] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations : theory and algorithms*. Springer series in computational mathematics. Springer-Verlag, 1986.
- [33] E. Godlewski and P.A. Raviart. *Hyperbolic systems of conservation laws*. Mathématiques & applications. Ellipses, 1991.
- [34] J. M. Greenberg and A. Y. Le Roux. A well balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equation. *J. Numer. Anal.*, 33(1) :1–16, 1996.
- [35] O. Guès. Problème mixte hyperbolique quasi-linéaire caractéristique. *Communications in Partial Differential Equations*, 15 :595–654, 1990.
- [36] M. A. Hyman. Non-iterative numerical solution of boundary-value problems. *Applied Scientific Research, Section B*, 2(1) :325–351, 1952.
- [37] L. Isoardi, G. Chiavassa, G. Ciraolo, P. Haldenwang, E. Serre, Ph. Ghendrih, Y. Sarazin, F. Schwander, and P. Tamain. Penalization modeling of a limiter in the tokamak edge plasma. *Journal of Computational Physics*, 229(6) :2220 – 2235, 2010.
- [38] S. Jin. Efficient asymptotic-preserving (AP) schemes for some multiscale kinetic equations. *SIAM J. Sci. Comp.*, 21 :441–454, 1999.
- [39] H. Johansen and Ph. Colella. A cartesian grid embedded boundary method for Poisson's equation on irregular domains. *Journal of Computational Physics*, 147(1) :60 – 85, 1998.
- [40] B. Kadoch, D. Kolomenskiy, Ph. Angot, and K. Schneider. A volume penalization method for incompressible flows and scalar advection–diffusion with moving obstacles. *Journal of Computational Physics*, 231(12) :4365 – 4383, 2012.
- [41] W. Kheriji. Pénalisation d'un demi-espace pour un opérateur hyperbolique quasilinéaire symétrique. Master's thesis, Université de Provence, 2008.
- [42] J.L. Lions and E. Magenes. *Non-homogeneous boundary value problems and applications*. Number vol. 2 in Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Springer-Verlag, 1972.
- [43] Qianlong Liu and Oleg V. Vasilyev. A Brinkman penalization method for compressible flows in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, 227(2) :946 – 966, 2007.
- [44] A. Mentrelli and C. Negulescu. Asymptotic-preserving scheme for highly anisotropic non-linear diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, 231(24) :8229 – 8245, 2012.
- [45] C. Negulescu, A. Nouri, Ph. Ghendrih, and Y. Sarazin. Existence and uniqueness of the electric potential profile in the edge of tokamak plasmas when constrained by the plasma-wall boundary physics. *Kinetic and Related Models*, 1(4), 2008.

- [46] A. Paccou, G. Chiavassa, J. Liandrat, and K. Schneider. A penalization method applied to the wave equation. *Comptes Rendus Mécanique*, 333(1) :79 – 85, 2005.
- [47] A. Paredes, H. Bufferand, F. Schwander, G. Ciraolo, E. Serre, Ph. Ghendrih, and P. Tamain. Penalization technique to model wall-component impact on heat and mass transport in the tokamak edge. *Journal of Nuclear Materials*, 438, Supplement(0) :-, 2013.
- [48] C. Peskin. Flow patterns around heart valves. In Henri Cabannes and Roger Temam, editors, *Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics*, volume 19 of *Lecture Notes in Physics*, pages 214–221. Springer Berlin / Heidelberg, 1973. 10.1007/BFb0112697.
- [49] C. S. Peskin. The immersed boundary method. *Acta Numerica*, 11 :479–517, 1 2002.
- [50] F. Poupaud and M. Rascle. Measure solutions to the linear multi-dimensional transport equation with non-smooth coefficients. *Communications in Partial Differential Equations*, 22 :225–267, 1997.
- [51] I. Ramière. *Méthodes de domaine fictif pour des problèmes elliptiques avec conditions aux limites générales en vue de la simulation numérique des écoulements diphasiques*. PhD thesis, Université de Provence, 2006.
- [52] I. Ramière, Ph. Angot, and M. Belliard. A fictitious domain approach with spread interface for elliptic problems with general boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(4–6) :766 – 781, 2007.
- [53] J. Rauch. Boundary value problems as limits of problems in all space. In *Séminaire Goulaouic-Schwartz, exposé No. 3*, 1978-1979.
- [54] J. B. Rauch. Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 291(1) :167–187, 1985.
- [55] J. B. Rauch and F. J. III Massey. Differentiability of solutions to hyperbolic initial-boundary value problems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 189 :303–318, 1974.
- [56] A. Sarthou, S. Vincent, P. Angot, , and J. P. Caltagirone. The Sub-Mesh penalty method. In R. Eymard, editor, *Finite Volumes for Complex Applications V (Problems & Perspectives)*, page 633–640. Wiley, 2008.
- [57] V.K Saul'ev. On solving boundary-value problems on high-performance computers by fictitious-domain methods. *Siberian Math. Journal*, 4, 1963. (in Russian).
- [58] H. Schlichting and K. Gersten. *Boundary Layer Theory*. Physic and astronomy. MacGraw-Hill, 2000.
- [59] R.E. Showalter. *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 1997.
- [60] P. Tamain. *Etude des flux de matière dans le plasma de bord des tokamaks, alimentation, transport et turbulence*. PhD thesis, Université de Provence, 2007.
- [61] P. Tamain, Ph. Ghendrih, E. Tsitrone, V. Grandgirard, X. Garbet, Y. Sarazin, E. Serre, G. Ciraolo, and G. Chiavassa. Tokam-3d : A 3d fluid code for transport and turbulence in the edge plasma of tokamaks. *Journal of Computational Physics*, 229(2) :361 – 378, 2010.

- [62] Y.-H. Tseng and J. H. Ferziger. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *Journal of Computational Physics*, 192(2) :593 – 623, 2003.
- [63] B van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. v. a second-order sequel to Godunov's method. *Journal of Computational Physics*, 32(1) :101 – 136, 1979.
- [64] H.K. Versteeg and W. Malalasekera. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics : The Finite Volume Method*. Pearson Education Limited, 2007.
- [65] M.-H. Vignal. A boundary layer problem for an asymptotic preserving scheme in the quasi-neutral limit for the euler–poisson system. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 70(6) :1761–1787, 2010.
- [66] E. Zeidler and L.F. Boron. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications : Linear monotone operators. II/A*. Monotone operators / transl. by the author and by Leo F. Boron. Springer-Verlag, 1990.

Résumé

Cette thèse concerne l'étude des interactions entre le plasma et la paroi d'un réacteur à fusion nucléaire de type tokamak. L'objectif est de proposer des méthodes de résolution des systèmes d'équations issus de modèles de plasma de bord. Nous nous sommes intéressés au traitement de deux difficultés qui apparaissent lors de la résolution numérique de ces modèles. La première difficulté est liée à la forme complexe de la paroi du tokamak. Pour cela, il a été choisi d'utiliser des méthodes de pénalisation volumique. Des tests numériques de plusieurs méthodes de pénalisation ont été réalisés sur un problème hyperbolique non linéaire avec un domaine 1D. Une de ces méthodes a été étendue à un système hyperbolique quasilinear avec bord non caractéristique et conditions aux limites maximales strictement dissipatives sur un domaine multidimensionnel : il est alors démontré que cette méthode de pénalisation ne génère pas de couche limite. La deuxième difficulté provient de la forte anisotropie du plasma, entre la direction parallèle aux lignes de champ magnétique et la direction radiale. Pour le potentiel électrique, cela se traduit par une résistivité parallèle très faible. Afin d'éviter les difficultés liées au fait que le problème devient mal posé quand la résistivité parallèle tend vers 0, nous avons utilisé des méthodes de type *asymptotic-preserving* (AP). Pour les problèmes non linéaires modélisant le potentiel électrique avec un domaine 1D et 2D, nous avons fait l'analyse théorique ainsi que des tests numériques pour deux méthodes AP. Des tests numériques sur le cas 1D ont permis une étude préliminaire du couplage entre les méthodes de pénalisation volumique et AP.

Abstract

Title: Analysis of models for ITER: treatment of boundary conditions for the edge plasma in a tokamak

This thesis deals with the study of wall plasma interactions in a nuclear fusion reactor such as a tokamak. The goal is to propose methods to solve partial differential equations issued from edge plasma models. We focus on two difficulties for the numerical resolution of these models. The first issue concerns the complex shape of the tokamak wall: we choose volume penalty methods. Numerical tests on several penalization methods have been performed on a nonlinear hyperbolic problem. One of these methods has been extended to a quasilinear hyperbolic system with a non characteristic boundary and maximally strictly dissipative boundary conditions on a multidimensional domain: it is proven that this penalty method does not generate any boundary layer. The second question comes from the strong plasma anisotropy between the direction parallel to the magnetic field lines and the radial one. Concerning the electrical potential, this results in a very low parallel resistivity. In order to avoid the troubles due to the ill-posedness of the equations when the parallel resistivity tends to 0, we study asymptotic preserving (AP) methods. For 1D and 2D nonlinear models of the electrical potential, we performed the theoretical analysis and numerical simulations for two AP methods. A preliminary study of the coupling between volume penalty and AP methods is also presented.