

AIX MARSEILLE UNIVERSITE

EA 4671 ADEF

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'AIX MARSEILLE I

SPÉCIALITÉ : SCIENCES DE L'ÉDUCATION (DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES)

présentée et soutenue publiquement
par

KAZAN Elie

Le 10 février 2014

**ETUDE DU PHÉNOMÈNE DIDACTIQUE :
LE DÉDOUBLEMENT DES MILIEUX DANS L'ENSEIGNEMENT
ORDINAIRE ET DANS DES INGÉNIERIES**

Directeur de Thèse : *Yves MATHERON*

Membres du jury :

M^{me} Nawal ABOU RAAD, Maître de conférences, Université Libanaise, Examinatrice

M. Alain BRONNER, Professeur des Universités, Université Montpellier II, Rapporteur

M. Yves MATHERON, Professeur des Universités, IFE-ENS de Lyon, Directeur

M. Alain MERCIER, Professeur des Universités, IFE-ENS de Lyon, Président

M. Serge QUILIO, Maître de Conférences, Université de Nice, Examineur

M. Gérard SENSEVY, Professeur des Universités, Université de Bretagne Occidentale, Rapporteur

KAZAN Elie

Etude d'un phénomène didactique : Le dédoublement des milieux dans l'enseignement ordinaire et dans des ingénieries

Directeur de thèse : Yves MATHERON

Résumé

Cette thèse s'appuie sur un recueil de données empiriques portant sur l'observation de bifurcations au sein des milieux dans trois situations didactiques : au cycle primaire et au collège, dans des classes ordinaires et dans des ingénieries en France (CE1) et au Liban (EB6/Sixième et EB7/Cinquième). Le cadre théorique mobilisé est celui de la théorie anthropologique du didactique (TAD). Nous nous sommes intéressés aux origines des dédoublements de milieux en observant, d'une part, les rapports du professeur et des élèves à un même milieu, et d'autre part, le rapport de chacun à des milieux différents. Nous avons analysé les praxéologies mobilisées par les professeurs et leurs élèves. Nous avons repéré sur l'échelle des niveaux de codétermination didactique la distance mésogénétique entre le milieu institutionnel du savoir et les milieux personnels activés. La thèse définit quelques-unes des caractéristiques du phénomène didactique « dédoublement des milieux » et étudie certains facteurs génériques qui agissent sur son apparition au sein d'une institution.

Ce travail ouvre des perspectives sur la recherche d'autres facteurs à l'origine du phénomène et sur la possibilité de réaliser un critère d'évaluation de la distance entre le milieu institutionnel et les milieux personnels évoqués.

MOTS-CLES : Dédoublement des milieux, bifurcations, distance mésogénétique, théorie anthropologique de didactique, échelle des niveaux de codétermination didactique, praxéologies.

Abstract

This thesis focus on a report of empirical data talking about the observation of bifurcates within the milieu in three didactic situations: at the primary cycle and the college, in ordinary classes and engineering in France (CE1) and in Lebanon (EB6/ 6th grade and EB7/ 7th grade). The theoric mobilized setting in the one of the anthropological theory of didactics (TAD) of the observer, from one hand, the relationships between the teacher and the students in the same milieu, and in another hand, the relationships of each one on the different milieu. We analyzed the mobilized praxeologies by the teacher and their students. We reported on the levels scab of the didactic codetermination the mesogenetic distance between the institutional milieu of knowing and the personal activated milieu. The thesis define some of the characteristics of the didactic phenomenon « duplication of milieu » and study some generic factors that act on its appearance within an institution.

This work opens perspectives on the research of other factors at the origin of the phenomenon and on the possibility of realizing an evaluation criteria of the distance between the institutional milieu and the evocated personal milieu.

KEYWORDS: Duplication of the milieu, mesogenetic distance, anthropological theory of didactic, scale at the dictatic codetermination levels, praxeologies.

Je voudrais adresser, du fond du cœur, mes sincères remerciements à l'homme qui m'a suivi tout le long de ce parcours de longue haleine, qui m'a poussé à aller jusqu'au bout, à celui qui m'a ouvert la porte de sa maison, qui m'a offert la chambre de sa propre fille, qui m'a accueilli chez lui, où je me suis senti comme chez moi, alors que j'étais loin des miens.

Un grand merci à cet être plein de générosité d'âme, à celui qui donne aux autres sans retour, à ce professeur qui m'a fait croire en la didactique ; enfin, à cet ami qui, sans lui, je n'aurais pas été ici aujourd'hui.

Merci Yves!

Je ne sais comment exprimer ma gratitude aux deux personnes qui m'ont encouragé de poursuivre mes études, pour m'avoir fait confiance malgré toutes les circonstances que j'avais au début du travail. Je remercie également le combattant pour la didactique au Liban, M. Hicham Bannout et très reconnaissant à M. Alain Mercier pour l'honneur qu'il m'a fait de présider le jury de ce travail.

J'aimerais remercier aussi tout particulièrement M. Gérard Sensevy et M. Alain Bronner, d'avoir accepté de participer à ce jury.

M. Alain Bronner et M. Gérard Sensevy ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, et je les en remercie. Ils ont également contribué par leurs nombreuses remarques et suggestions à améliorer la qualité de cette thèse, et je leur en suis très reconnaissant.

Je tiens à remercier chaudement le directeur de cette thèse, M. Yves Matheron, sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est, pour m'avoir aidé, guidé, encouragé, conseillé. J'ai pu apprécier sa disponibilité, ses conseils pour les redressements des erreurs et les réorientations fermes qu'il a su donner à ce travail m'ont été précieux.

Mes remerciements vont également à Mme Nawal Abou Raad, pour la gentillesse et la patience qu'elle a manifestée à mon égard durant cette thèse, pour tous les conseils qu'elle m'a prodigués et aussi pour m'avoir fait l'honneur de participer au Jury de soutenance. Il m'est agréable d'exprimer toute ma gratitude à elle qui a su trouver le temps de me lire, de m'encourager et de m'éclairer de ses remarques judicieuses. J'avoue que j'ai eu la chance d'être encadré par une personnalité très généreuse, je la remercie profondément.

Je remercie M. Serge Quilio, d'avoir accepté de participer à ce jury, ainsi que pour son accueil distingué au sein du laboratoire.

J'exprime toute ma gratitude et ma sympathie, à tous les professeurs au collège, en France et au Liban, qui ont accepté de sacrifier des séances de cours avec l'intrusion d'une caméra dans leurs classes. Par la même occasion, que leurs élèves soient remerciés pour leur participation active, leur patience et la pertinence de leurs interventions.

Je tiens aussi à mentionner le plaisir que j'ai eu à travailler au sein du laboratoire UMR-ADEF, et j'en remercie ici tous les membres.

Je dédie cette thèse à ma famille, mes parents, ainsi que pour mes deux frères, Salim et Roger qui m'ont encouragé à aller si loin dans les études. Ils m'ont inculqués le goût du travail, de la rigueur et de l'ambition.

Mes remerciements vont également à ma belle mère pour son soutien auprès de ma famille pendant mon absence durant toutes ces années.

*Finalement, j'exprime ma plus profonde gratitude et mes remerciements à ma petite Famille, mon épouse **Liliane** et mon petit **Stéphane**. Je les remercie du fond du cœur pour ce qu'ils ont enduré et pour tout ce qu'ils ont représenté pour moi dans cette aventure. En effet, combien de soirées, de samedis et dimanches, combien de jours de fête et de jours fériés, combien de périodes de vacances scolaires ont-ils consenti à passer sans moi, sans savoir si cela en valait réellement la peine? Combien de jours à supporter les variations de notre moral ? Que leur dévouement soit instamment honoré avec tout l'amour que je leur porte.*

Table des Matières

INTRODUCTION GENERALE	10
PREMIERE PARTIE : CADRE DE LA RECHERCHE	19
CHAPITRE 1 : ETUDE SUR LE MILIEU	19
1.1 La notion du Milieu dans la TSD	23
1.2 La notion de contrat didactique	26
1.3 Un dédoublement des milieux et non pas une bifurcation des situation	27
1.4 Le milieu de notre étude	29
CHAPITRE 2 : CADRE THEORIQUE	33
2.1 La Transposition didactique	35
2.2 La distance mésogénétique	38
2.3 Notions fondamentales de la théorie anthropologique du didactique (TAD)	39
2.4 La notion de praxéologie en TAD	41
2.5 Les moments didactiques	44
CHAPITRE 3 : CADRE METHODOLOGIQUE	48
3.1 Sur la méthodologie clinique	50
3.2 L'approche clinique didactique et la TAD	51
3.2.1.Dimension institutionnelle d'une démarche clinique	51
3.2.2.Sur la théorie anthropologique	54
3.3 Description de la démarche méthodologique de la recherche	55
3.3.1Sur l'entretien-post professeur	56
3.3.2 Sur l'étude du devoir à domicile	56
3.4 Description des démarches des séquences étudiées	57
3.4.1.Description de la démarche pour les équations au Liban	57
3.4.2.Description de la démarche pour les nombres relatifs au Liban	57
3.4.3.Description de la démarche pour la soustraction en France	58
CHAPITRE 4 :PROBLEMATIQUE DE RECHERCHE	59
4.1 Etude épistémologique de l'objet d'étude	63
4.1.1.Résolution par l'arithmétique d'une situation réelle.	63
4.1.2.Résolution algébrique d'une situation réelle	66
4.1.3.Etude comparative entre la résolution arithmétique et la résolution algébrique	70
4.2 Informations générales sur le professeur observé	73
4.3 Méthodologie de travail pour cette séquence	74
4.4 Les Equations dans le programme libanais de 1997	75
4.5 Le manuel scolaire	76
4.5.1.OM et OD de la partie « cours » du manuel	77
4.5.2.Paragraphe 1 : « Définition »	78
4.5.3.Paragraphe 2 : Equations équivalentes	80
4.5.4.Paragraphe 3 : « Propriétés et Résolution »	81
4.5.5.Résumé	87

4.6	Etude praxéologique de la partie « Cours » du manuel	89
4.7	Premières analyses : Vers une problématique de recherche	92
4.8	Problématique et questions de recherche	108

DEUXIEME PARTIE : ANALYSE EXPERIMENTALE 110

CHAPITRE 5 : ANALYSE DE LA SEQUENCE ORDINAIRE SUR LES EQUATIONS EN EB7 AU LIBAN 111

5.1	Organisation des éléments d'étude	114
5.2	Analyse de la première équation $3x=4$	115
5.2.1.	Etude de l'équation $3x=4$	115
5.2.2.	Etude en termes du dédoublement des milieux	117
5.2.3.	Conclusion	119
5.3	Analyse de l'équation $\frac{3x}{5} = 2$	121
5.4	Analyse de l'équation $\frac{3x}{5} - 1 = 7$	129
5.5	Analyse de l'équation $3x - 1 = x + 6$	131
5.6	Organisation de la suite de la séance	143
5.7	Etude des techniques d'élèves d'un devoir fait à la maison.	144
5.7.1.	Etude de l'équation " $2x-4=2(x-2)$ "	145
5.7.2.	Etude de l'équation " $4(3t+2)=3(t+5)$ "	148
5.7.3.	Conclusion	150
5.8	Conclusion	151

CHAPITRE 6 : LE DEDOUBLEMENT DES MILIEUX DANS UNE INGENIERIE DIDACTIQUE :LES NOMBRES RELATIFS EN SIXIEME AU LIBAN 157

6.1	La construction mathématique de l'ensemble des entiers relatifs	160
6.2	Etude historique	162
6.3	Etude du programme libanais de 1997	168
6.3.1.	OM du savoir « Nombres Relatifs » dans le programme libanais	168
6.3.2.	Introduction des nombres relatifs	168
6.3.3.	La représentation sur l'axe numérique dans le programme libanais	171
6.4	Etude des manuels libanais	173
6.4.1.	Etude du manuel 1	173
6.4.2.	Etude du manuel 2	175
6.4.3.	Etude du manuel 3	178
6.4.4.	Place cognitive des Nombres Relatifs dans les activités des manuels	179
6.4.5.	Présentation des Nombres Relatifs dans les manuels	182
6.5	Conclusion	185
6.6	Analyse de la première séance	187
6.6.1.	L'émergence des milieux cognitifs chez les élèves relatifs au type de tâches : « Calculer une expression numérique».	187
6.6.2.	Un nouveau contrat implique des niveaux de codétermination différents.	191
6.6.3.	L'OM du savoir relative au « Programme du calcul »	193
6.6.4.	La persistance du dédoublement des milieux	200
6.6.5.	Les connaissances antérieures des élèves et le dédoublement des milieux	203

6.6.6. Le dédoublement des milieux est dû à une spécificité « locale » des connaissances antérieures des élèves	206
6.6.7.L'institutionnalisation du programme de calcul	211
6.6.8.Conclusion de la première séance	216
6.7 Analyse de la deuxième séance	220
6.8 Analyse de la troisième séance	228
6.9 Analyse de la quatrième séance	236
6.9.1. « Le programme de calcul » : Une technologie prise en œuvre par les élèves pour justifier des calculs	236
6.9.2.L'institutionnalisation du programme de calcul effectué sur trois opérateurs	238
6.9.3.Conclusion de la première partie de la quatrième séance	239
6.9.4.Introduction des Nombres Relatifs	242
6.9.5.Conclusion de la deuxième partie de la quatrième séance	248
6.10 Conclusion finale du chapitre	252
 CHAPITRE 7 : LE DEDOUBLEMENT DES MILIEUX DANS UNE INGENIERIE DIDACTIQUE : LA SOUSTRACTION AU CE1 EN FRANCE	 261
7.1 Introduction au sujet du savoir	264
7.1.1.Raisonnement arithmétique et techniques opératoires de la soustraction	265
7.1.2.Etude de l'ingénierie de Brousseau (1986) mise en œuvre en 09 – 10 à Marseille	266
7.2 Etude du programme français	270
7.3. Milieux cognitifs de la professeure	273
7.3.1. « Conceptions » de la professeure sur l'addition de deux entiers n et p	273
7.3.2.« Conception » de la professeure sur la soustraction de deux entiers	276
7.3.3.Conclusion	277
7.4 Analyse de la séance	280
7.4.1.Episode 1S : Mobilisation des outils de travail	280
7.4.2.Episode 2S : Convocation des souvenirs	291
7.4.3.Episode 3S : Appropriation du problème	297
7.4.4.Episode 4S : La boîte : « une preuve manipulatoire »	307
7.4.5.Episode 5S : Fin de la résolution du problème du point de vue élève	309
7.4.6.Episode 6S : La professeure retourne aux milieux cognitifs	311
7.4.7.Episode 7S : Clôture du problème	313
7.5 Conclusion	315
 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	 322
 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	 336
 TABLE DES EXTRAITS ETUDIES	 344
 TABLE DES TABLEAUX DU DEDOUBLEMENT DES MILIEUX	 346
 TABLE DES FIGURES	 348

Introduction Générale

Introduction générale

Notre recherche repose sur l'idée partagée en didactique que le professeur, dans un enseignement ordinaire ou dans un enseignement suivant une ingénierie didactique, dévolue à ses élèves un même milieu à partir duquel, les actions des élèves sur ce milieu et les interactions qu'il renvoie, permettent l'enseignement d'une notion. Pour Brousseau (1986, 1988), le milieu est *tout ce qui agit sur l'élève et ce sur quoi l'élève agit*. La modélisation des connaissances proposée par Guy Brousseau repose sur la théorie des jeux. Le milieu est, dans ce cadre, conçu comme un système antagoniste du système « élèves ». Il conditionne le fonctionnement didactique des connaissances mobilisées. Les rétroactions qu'il renvoie aux élèves les autorisent à modifier les états du jeu ; la stratégie optimale pour gagner contre le milieu qui, dans le meilleur des cas, émerge de cette dialectique, correspond aux connaissances mathématiques dont on vise l'enseignement et l'apprentissage. Chevallard (1989a) aborde la notion du milieu à travers le concept de *rapport institutionnel à un objet de savoir*. Le milieu est alors constitué des rapports stables à des objets, qu'ils soient mathématiques ou vus comme non mathématiques, mais considérés comme objets à des fins didactiques. Matheron (2010) propose une définition du milieu en s'appuyant sur le concept d'ostensif. Un ostensif est un objet ayant une réalité perceptible. Le milieu est alors défini comme un ensemble « d'ostensifs qui y sont présents et de non ostensifs qu'ils évoquent ». Matheron (2013) prolonge cette définition en proposant d'adjoindre la notion de média (qui porte une intention) à celle de milieu (dénué d'intention). Les ostensifs autorisent à percevoir ; cette perception étant conditionnée par le contrat didactique prévalant dans la classe. Ils indiquent, pour qui sait les lire, le souvenir d'un ensemble de notions préalablement étudiées, plus ou moins bien organisées par les élèves, et qui constituent à la fois des milieux qui rétroagissent et des médias qui guident l'action.

Comme définie dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (TSD), une situation peut être modélisée à l'aide des interactions d'un sujet générique avec « un » milieu, objet qui apparaît dénué d'intentions, sur lequel et avec lequel on agit et qui rétroagit. Aussi la situation de niveau $(n - 1)$ (voir *figure 1*, p.24), qui deviendra milieu de la situation de niveau n , dépend-elle à son tour des types d'interactions établies par les divers élèves avec le milieu qu'elle contient. Il s'agit d'une modélisation de certains des processus didactiques. Mais ces interactions sont, dans la réalité de l'enseignement, le plus souvent soumises aux fluctuations

interindividuelles. Aussi, les situations qui deviendront milieux peuvent-elles varier d'un élève à l'autre ou, plus précisément, d'un groupe d'élèves à l'autre ; tout simplement parce qu'au cours de leur élaboration, les rapports des élèves à la situation ne sont pas uniformes. En principe, les situations d'institutionnalisation, en indiquant à tous ce qu'est le savoir – une connaissance décontextualisée des situations d'où il a émergé et détachée des personnes qui ont contribué à son émergence –, enjoignent les élèves à faire en sorte que la dimension publique de leur rapport au savoir coïncide avec le rapport institutionnellement attendu. Mais cette injonction générale ne produit d'effets qu'en tendance, de manière différenciée selon les élèves, et cet oubli des conditions d'émergence du savoir suppose un temps plus ou moins long. Enfin, dans la modélisation proposée en Théorie des Situations Didactiques, la phase d'institutionnalisation présuppose la rencontre antérieure des élèves avec des situations adidactiques. Or on sait que dans la réalité de l'enseignement ordinaire, ce type de situations n'est souvent pas pensé et organisé par le professeur dans la classe, que c'est souvent de manière erratique, privée et différée que des élèves rencontrent les dimensions adidactiques attachées à une notion qui leur a été enseignée (Mercier, 1992). Dans de telles conditions, il est loin d'être certain que le milieu que, pour pouvoir enseigner, le professeur pense avoir convoqué dans la classe et qu'il estime partagé par une grande partie des élèves, le soit réellement. Margolinas (2005) a développé le concept de bifurcation didactique des situations. Il découle d'un décalage entre les intentions du professeur et les attentes des élèves. Lorsqu'il propose un problème, le professeur projette son intention d'enseignement, c'est-à-dire sa volonté de modifier le système de connaissances des élèves. Il construit alors une situation didactique en proposant un milieu, ce qui place les élèves dans l'ignorance des intentions de leur professeur.

Dans cette recherche, nous nous intéressons aux origines de ces dédoublements et observons, d'une part, les rapports du professeur et des élèves à un milieu, et d'autre part, les rapports des élèves à un milieu qui peut être le même que celui du professeur ou peut ne pas l'être.

Au professeur incombe la responsabilité de désigner un milieu. Il renvoie les élèves, quand il présente un sujet d'enseignement, aux groupes, aux institutions, aux pratiques par lesquelles ils sont passés. Il fait advenir des ostensifs, des pratiques anciennes, des souvenirs qui relèvent d'un savoir antérieurement rencontré ou étudié, selon Matheron et Salin (2002). Il tente de restreindre ces souvenirs à l'environnement des connaissances nécessaires à la venue du sujet qu'il va enseigner. Il fait contractuellement appel à des connaissances anciennes supposées partagées. Il fait le pari que les élèves se replaceront ainsi dans les mêmes organisations mathématiques nécessitées par son projet d'enseignement. Mais rien ne garantit qu'ils ne

mobiliseront pas des connaissances différentes de celles attendues par le professeur, et par conséquent que les milieux du professeur d'une part, et de certains élèves d'autre part, voire des élèves entre eux, ne seront pas différents. Le dysfonctionnement qui peut surgir s'explique par le fait que les personnes sont multi-assujetties à des institutions différentes, ou parfois mal assujetties à celles considérées comme nécessaires aux processus d'enseignement et d'apprentissage. Les processus mémoriels qui en résultent sont différents pour les élèves et le professeur.

Nous avons supposé qu'existe une certaine dialectique didactique. Elle se déploie, tant aux niveaux des organisations mathématiques que didactiques, à travers les pratiques vécues, les institutions fréquentées et les milieux de connaissance (milieux cognitifs) des élèves et du professeur. Il y a ainsi d'une part l'organisation mathématique du savoir telle qu'elle est envisagée par le professeur, et d'autre part l'action du professeur sur l'élève, action relevant de l'organisation didactique, et la rétroaction des élèves relativement à cette action enseignante. Cette rétroaction renvoie à la mémoire pratique des élèves, c'est-à-dire à la manière selon laquelle les connaissances antérieures, faites de souvenirs pratiques, se convertissent en action pour agir sur le milieu tel qu'il sera présent dans la classe.

D'où notre hypothèse :

Dans toute forme d'enseignement, quelle prenne la forme d'un cours dialogué ou celle d'une ingénierie didactique, il y a une action qui se présente sous la forme d'une dialectique entre les organisations du savoir et les connaissances antérieures des élèves.

Nos questions du début de notre recherche se résumaient en :

- 1) Comment le professeur envisage-t-il de réorganiser les connaissances supposées attribuées aux élèves, jusqu'à aboutir à leur organisation jugée nécessaire pour enseigner ?
- 2) Comment, en interaction avec les élèves dans la classe, il fait advenir des objets mathématiques permettant aux élèves de constituer un milieu propice à l'enseignement ?

Notre point de départ était une observation d'une séquence d'enseignement au Liban. Il s'agissait de rassembler des indices répondant aux questions précédentes et constituant une problématique de recherche. Nous avons observé le thème « Equations du premier degré à une

inconnue en EB7¹ » ; c'était l'objet de notre étude en DEA (Kazan, 2003). Nous avons filmé et transcrit les séances. Nous avons examiné au cours de notre étude comment les mises en œuvre didactiques du professeur peuvent rapporter les milieux cognitifs des élèves aux éléments institutionnels du savoir évoqué. Nous avons vu que l'action des élèves sur un milieu disposé dans la classe par le professeur peut activer des éléments situés dans un milieu différent. Nous avons remarqué que des « bifurcations » ont lieu aux niveaux des milieux à l'intérieur d'une situation didactique, et non pas au niveau des « situations » comme l'a montrée (Margolinas, 2005).

Pour répondre à cette problématique, nous nous sommes concentrés sur la recherche des milieux personnels mis en œuvre par le professeur et les élèves au cours d'une tâche donnée. Nous nous sommes engagés à répondre aux questions suivantes :

- Q1 : Comment l'enseignant fait-il parvenir à l'institution classe un milieu propice à l'enseignement ?*
- Q2 : Est-ce que le milieu dans lequel évoluent les élèves et avec lequel ils travaillent est celui que le professeur souhaite dévoluer ?*
- Q3 : Comment les élèves, en interaction avec le milieu tel qu'il est, mettent-ils en jeu leurs rapports aux objets du milieu institutionnel du savoir ?*

Nous nous sommes appuyés sur l'Approche Anthropologique en Didactique des Mathématiques afin d'étudier les rapports institutionnels et personnels aux savoirs en jeu ; aussi bien pour le professeur que des élèves en classe (Chevallard, 2002). Nous avons reconstruit, sur l'échelle des niveaux de codétermination didactique (voir *Tab OM2*, p.46), les différents milieux personnels des élèves et du professeur. Nous avons tenté de déterminer les origines du *flou* sur les milieux entretenus et de montrer, dans le cas où cela est possible, l'écart entre les différents milieux mobilisés et le milieu institutionnel du savoir ; nous avons désigné cet écart par la « distance mésogénétique ».

Nous avons appliqué une méthodologie de type clinique (Leutenegger, 2000) puisque notre étude concerne la recherche des indices dont le caractère générique, s'il existe, est le symptôme du « phénomène » étudié. Nous avons collecté des traces qui nous ont permis de

¹ EB7 est la classe de cinquième en France.

caractériser, de définir, d'étudier des facteurs agissant sur le phénomène que nous avons désigné par le terme de « dédoublement des milieux ».

Après l'étude de la première séquence, nous avons décidé de prouver des résultats génériques établis dans des séquences bâties autour d'ingénieries didactiques dans lesquelles nous avons analysé les organisations mathématiques et didactiques autour d'un thème mathématique donné.

Nous avons choisi, en collaboration avec l'équipe française (CD)-AMPERES², de faire passer dans des classes libanaises une de leurs *Activités d'Étude et de Recherche* (AER) à propos des « Nombres Relatifs » en EB6 (sixième). Nous avons filmé la séquence. Puis, nous avons fait une analyse en nous focalisant sur la recherche d'éléments trouvés antérieurement, et la recherche d'éléments nouveaux autour de ce phénomène. L'enseignement autour des ingénieries didactiques est récent au Liban. Nous avons remarqué, chez le professeur observé, des pratiques dues, en grande partie, à une inexpérience dans le pilotage de ce type d'enseignement.

Nous avons décidé d'étudier une troisième séquence sur l'enseignement de la « Soustraction » en CE1 dans une école en France. Cette séquence est animée par une professeure expérimentée (selon l'avis des directeurs). Notre but était alors de prouver des résultats généraux qui se répètent dans toutes les séquences ; qu'elles soient en France ou au Liban, dans un enseignement bâti à partir d'une ingénierie didactique ou dans un enseignement ordinaire.

Plan du travail

Ce travail est composé de deux parties : une première partie réunissant les éléments théoriques et une deuxième partie constituant une analyse expérimentale.

La première partie est composée de quatre chapitres. Suite à un travail synthétique, le premier chapitre présente, une étude sur le milieu en Théorie des Situations Didactiques (TSD) et en théorie Anthropologique du Didactique (TAD). Nous justifions nos choix sur l'élaboration du milieu pour notre étude. Nous avons ensuite étudié le « dédoublement des situations » afin de justifier notre hypothèse sur l'existence de dédoublement au niveau des milieux. Ce chapitre débouche sur les éléments constitutifs du cadre théorique de ce travail.

² (CD) AMPERES est une abréviation de *Conception et Diffusion d'Activités Mathématiques et de Parcours d'Étude et de Recherche dans l'Enseignement Secondaire*.

Nous nous sommes appuyés sur la TAD dans notre recherche. Le deuxième chapitre présente les principaux concepts de cette théorie qui sont utiles à l'objet de notre étude : la transposition didactique, les études praxéologiques, les moments didactiques. Nous définissons alors la distance mésogénétique ; concept que nous avons précédemment évoqué.

Nous montrons dans le troisième chapitre la méthodologie utilisée pour répondre à nos hypothèses et pouvoir collecter des éléments génériques sur le phénomène étudié. Nous avons recouru à une méthodologie de type « clinique » de laquelle nous avons pu tirer des indices sur des observations vidéo recueillies au sein de trois classes, soient « standards », soient organisées autour des ingénieries didactiques. Notons que les ingénieries ne sont pas conçues pour tester la validité d'une « méthodologie clinique » comme dans le travail de Leutenegger (2000). Nous avons décrit dans ce chapitre la méthodologie de travail suivie dans chaque séquence étudiée.

Dans le quatrième chapitre, c'est l'étude de la séquence « Equations » qui nous a permis de dévoiler une problématique. Nous présentons dans la première partie de ce chapitre un aperçu historique de l'objet d'étude. Nous présentons ensuite une étude comparative sur les résolutions arithmétiques et algébriques d'un problème afin d'explicitier ces deux techniques et de collecter des indices à partir des pratiques de classe. Dans une deuxième partie, nous présentons l'analyse de la partie « Introduction des Equations » qui débouche sur la problématique et les questions de recherche.

La deuxième partie est composée de trois chapitres constituant l'analyse expérimentale. L'étude porte sur trois séquences d'enseignement entre le Liban et la France. Nous y présentons des expérimentations à partir desquelles nous relevons des indices généraux relatifs au phénomène de dédoublement des milieux.

Le cinquième chapitre détaille l'analyse de la suite de la séquence « Equations » au Liban. Nous avons tenté de regrouper des « germes » pour l'élaboration primitive du phénomène du dédoublement des milieux à travers les transcriptions faites lors de la première séance, et à partir de l'étude d'un devoir fait à la maison par les élèves.

Le sixième chapitre porte sur l'étude d'une séquence d'enseignement organisée autour d'une ingénierie didactique par le groupe (CD)-AMPERES. Il s'agit d'analyser l'enseignement des « Nombres Relatifs » en EB6 (sixième) au Liban. Nous avons présenté dans une première partie de ce chapitre des études mathématiques et épistémologiques pour ce savoir. Nous avons élaboré une étude portant sur la transposition didactique de ce savoir à travers le programme et des manuels scolaires libanais. Nous avons organisé, dans une deuxième partie, nos analyses qui ont constitué l'étude de la validité des éléments figurant lors de la première séquence et la détection de nouveaux indices se rapportant au phénomène du dédoublement des milieux.

Le septième chapitre porte sur l'étude d'une séquence d'enseignement organisée autour d'une ingénierie didactique sur la « Soustraction » en CE1 en France. Nous avons mené, dans une première partie, une étude épistémologique de la soustraction. Nous avons étudié la transposition didactique de ce savoir à travers les programmes français de 2008. Nous avons déterminé, à travers un entretien avec la professeure, ses milieux cognitifs de l'objet d'étude qui ont collaboré à analyser certaines pratiques professorales. Nous avons transcrit une séance dans laquelle nous analysons des extraits permettant d'envisager une étude comparative entre les milieux personnels de la professeure et des élèves. Ce chapitre est destiné à montrer la persistance des éléments justifiés précédemment au sein des séquences étudiées. Il s'agit pour nous de prélever des caractères génériques du phénomène didactique étudié.

Dans la conclusion, nous revenons sur les principales étapes de cette thèse. Nous détaillons des éléments génériques, afin de montrer le phénomène didactique étudié, à travers les analyses recueillies sur les différents rapports personnels des élèves et du professeur aux éléments institutionnels de nouveaux savoirs. Nous proposons ensuite quelques perspectives pour la formation et de recherche.

Première Partie : Cadre de la Recherche

Chapitre 1 : Etude sur le milieu

Chapitre 2 : Cadre théorique

Chapitre 3 : Méthodologie de recherche

Chapitre 4 : Problématique de recherche

CHAPITRE 1

ETUDE SUR LE MILIEU

1.1 Le milieu dans la TSD

1.2 Le contrat didactique

1.3 Un dédoublement des milieux et non pas une bifurcation des situations

1.4 Le milieu de notre étude

1.5 La distance mésogénétique

Introduction générale

Comme définie dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (TSD), une situation peut être modélisée à l'aide des interactions d'un sujet générique avec un milieu, objet qui apparaît dénué d'intentions, sur lequel et avec lequel on agit et qui rétroagit. On sait que dans le schéma qu'il donne de la structuration des milieux et des situations, Brousseau (1986) considère que le milieu d'une situation de niveau n est la situation de niveau $n - 1$. La définition de ce qu'est un milieu est aussi donnée dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) par Chevallard (1989a); il est constitué des rapports stables à des objets, qu'ils soient mathématiques ou vus comme non mathématiques, mais considérés comme objets à des fins didactiques. Revenant au cadre de la TSD, dans l'ordinaire de l'enseignement les « élèves réels » sont parfois éloignés du modèle idéal du sujet générique. Aussi la situation de niveau $n - 1$, qui deviendra milieu de la situation de niveau n , dépend-elle des types d'interactions établis par les divers élèves avec le milieu qu'elle contient. Ces interactions sont ainsi le plus souvent soumises aux fluctuations interindividuelles. Aussi, les situations qui deviendront milieux peuvent-elles varier d'un élève à l'autre ou, plus précisément, d'un groupe d'élèves à l'autre. Dans de telles conditions, il est loin d'être certain que le milieu que, pour pouvoir enseigner, le professeur pense avoir convoqué dans la classe et qu'il estime partagé par une grande partie des élèves, le soit réellement. Dans ce cas, nous dirons qu'il y a dédoublement des situations et, par conséquent, dédoublement des milieux. Dans ce travail, nous nous intéressons aux origines de ces dédoublements et observeront d'une part les rapports du professeur et des élèves à un milieu, et d'autre part, les rapports des élèves à un milieu qui peut être le même que celui du professeur ou peut ne pas l'être. Dans la plupart de cas, nous verrons que les milieux peuvent être le plus souvent différents.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier certaines caractéristiques des notions didactiques : le milieu et le contrat didactique. De plus,, nous indiquerons la définition du milieu que nous utiliserons dans notre étude.

Modélisation de l'enseignement dans la TSD

Les travaux sur les pratiques enseignantes se focalisent d'une part sur l'enseignement ordinaire et d'autre part sur un enseignement issu d'une ingénierie didactique, c'est-à-dire, dans ce dernier cas, sur des classes dans lesquelles les situations sont préparées par le chercheur. Les études menées en TSD ont permis de dégager et théoriser deux notions que nous allons développer ci-dessous : celles de milieu et de contrat didactique.

1.1. La notion du Milieu dans la TSD

La notion du milieu est une notion fondamentale de la théorie des situations didactiques. Pour Brousseau (1998a), le milieu est « tout ce qui agit sur l'élève et ce sur quoi l'élève agit ». C'est le système antagoniste du système enseigné, c'est-à-dire de l'élève. Le milieu permet de rendre compte des différents rôles des élèves et du maître dans les situations³ didactiques. Il est considéré comme l'ensemble des éléments (matériels, sociaux, cognitifs, etc.) permettant la dévolution aux élèves d'une question, et dont les rétroactions alimentent la dynamique d'action/validation/formulation dans une situation d'enseignement.

La notion du « milieu » est utilisée à la fois dans le but de construire des ingénieries didactiques et d'analyser les séquences d'enseignement, que ce soit *a priori* ou *a posteriori*. Elle est tout d'abord rattachée à la notion de situation a-didactique⁴. Puis son usage s'est élargi à l'analyse d'une situation didactique quelconque.

Le « milieu » est structuré par Brousseau (1986a) en six niveaux sous une forme emboîtée allant du milieu matériel (au niveau le plus intérieur) jusqu'au milieu de la recherche en didactique. Chaque milieu correspond à un type de situations et chaque type de situations correspond au milieu du niveau suivant. La structuration proposée par Brousseau est complétée par Margolinas (1995). Dans sa proposition de modélisation, une telle structuration comporte sept niveaux dont trois négatifs (les niveaux les plus bas), qui correspondent aux

³« Le terme situation désigne l'ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve, et des relations qui l'unissent à son milieu.

Une situation didactique est une situation où se manifeste directement ou indirectement une volonté d'enseigner. Le modèle de situation de Brousseau décrit le processus de production de connaissances dans une classe au moyen des deux interactions basiques :

- L'interaction entre l'élève et le milieu, ce dernier offrira des résistances et produira des rétroactions qui influenceront sur les connaissances mathématiques mises en jeu.

- L'interaction entre l'élève et le professeur à propos de l'interaction entre l'élève et son milieu (Brousseau, 1986).

⁴ Une situation adidactique est définie par : « Le maître se refuse à intervenir comme possesseur des connaissances qu'il veut voir apparaître. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation » Brousseau (1998a).

situations adidactiques, et trois niveaux positifs correspondant aux situations sur-didactiques (les situations propres à l'enseignant), la situation S_0 étant la situation didactique qui sépare les situations positives de situations négatives.

Brousseau (1986) a illustré par un schéma l'imbrication des milieux selon une forme « oignon » (colonne 1). Margolinas (1995) a proposé des modifications de la présentation de ce modèle classique, avec des emboîtements de différents niveaux, dans une présentation en tableau à double entrée appelée « structuration du milieu complété » (colonne 2). La fonction essentielle de ce tableau est d'analyser les interactions élève / professeur / milieu à travers les connaissances mises en jeu à chaque niveau. Nous présentons ce tableau tel que Matheron (2010) le donne en ajoutant une colonne indiquant ce qui relève des niveaux didactique, sur-didactique et adidactique (colonne 3) :

	Colonne 1		Colonne 2	Colonne 3
M3 : Milieu de construction		P3 : Professeur noosphérien	S3 : situation noosphérique	Sur-didactique
M2 : Milieu de projet		P2 : Professeur constructeur	S2 : situation de construction	
M1 : Milieu didactique	E1 : Elève réflexif	P1 : Professeur projecteur	S1 : situation de projet	
M0 : Milieu d'apprentissage	E0 : Elève	P0 : Professeur pour l'élève	S0 : situation didactique	Didactique
M-1 : Milieu de référence	E-1 : Elève apprenant	P-1 : professeur observateur	S (-1) : situation d'apprentissage	A-didactique
M-2 : Milieu objectif	E-2 : Elève agissant		S (-2) : situation de référence	
M-3 : Milieu matériel	E-3 : Elève objectif		S (-3) : situation objective	

Figure 1: Emboîtement des milieux

Selon Margolinas (2002), le niveau le plus général du modèle (+3) est le niveau idéologique caractérisant l'activité de l'enseignant qui réfléchit de façon très générale à l'enseignement, ou bien à l'enseignement des mathématiques. À ce niveau, l'activité de l'enseignant n'est pas finalisée. Au niveau suivant (+2, niveau de construction) l'activité de l'enseignant consiste à concevoir les grandes lignes de l'enseignement d'un thème voire, plus rarement, d'une organisation mathématique plus large. Du point de vue de l'ingénierie didactique, c'est à ce niveau qu'intervient de façon caractéristique la recherche d'une situation fondamentale. Si l'on considère l'observation des pratiques ordinaires, on pourrait parler à ce niveau de recherche de problématique. Le niveau (+1, niveau de projet) caractérise l'activité de l'enseignant qui détermine le scénario d'une leçon. Le niveau (0, niveau didactique) caractérise l'action de

l'enseignant en classe. Le niveau (-1, niveau d'observation) est caractéristique de la dévolution ou de l'observation de l'activité des élèves. L'absence de la place du professeur est marquée dans les niveaux (-2) et (-3). L'élève agit dans (-3) sur les objets matériels du milieu et devrait recevoir des rétroactions lui permettant de s'engager dans (-2).

Tout au long de ce processus, le professeur va chercher à créer les conditions pour que les élèves construisent leurs connaissances ou modifient ces dernières comme réponse aux exigences du milieu et/ou aux attentes du professeur lui-même. Il prend des décisions à tous les niveaux de son activité. L'idée de disposer les milieux par ordre, par exemple de débiter toujours par M-3 pour se déplacer après vers M-2 et ainsi de suite, est loin d'être une pratique effective dans l'organisation de l'enseignement « ordinaire ».

Dans Comiti, Grenier et al (1995), nous trouvons une illustration de l'usage de la structuration du milieu dans l'étude des pratiques d'enseignement de la notion de racine carrée en classe de 3^e. A partir des observables, ces chercheurs ont pu relever un phénomène désigné du terme de «dédoublément des situations» (voir 1.3, p.27). Ces chercheurs ont alors montré le décalage existant entre un milieu supposé propice à l'apprentissage et « le » milieu avec lequel des élèves interagissent. Ce phénomène est révélé par un dysfonctionnement au sein du « contrat didactique ».

L'observation de l'interaction du professeur avec des milieux différents qui, dans une classe, réfèrent à des rapports différents à des situations éventuellement différentes elles aussi, peut aider le chercheur à étudier à quel type d'amalgame de « situations » vécues par les élèves ils s'identifient. Cela permet d'identifier les contraintes, les attentes, les ruptures, les renégociations, les divers types de rapports que les élèves ont établis avec des objets connexes ou qui leur paraissent tels. Les situations adidactiques proposées au sein d'ingénieries bâties à partir de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1986) sont conçues en vue d'une construction optimale d'interactions sujets-milieu qui convergent vers les connaissances visées ; le savoir visé étant celui qui correspond à la stratégie optimale. Mais, au sein d'une ingénierie, à chaque niveau de situation les interactions des élèves sont pensées *a priori* comme étant dirigées vers le même milieu précédemment dévolu. La question qui se pose est celle de savoir si le milieu est effectivement le même pour tous : professeur et élèves d'une part, entre élèves d'autre part.

1.2. La notion de contrat didactique

Une notion fondamentale en didactique est celle de « contrat didactique ». Elle permet de saisir la partie des responsabilités contractuellement établies entre l'enseignant et l'enseigné « spécifique du "contenu" : la connaissance mathématique visée » (Brousseau 1986) ; même si les termes du contrat sont grandement implicites.

Lors de la VIII^e école d'été, Brousseau (1995) donne une typologie des contrats modélisant les régulations didactiques selon un partage des responsabilités entre un émetteur et un récepteur d'une connaissance, les situations d'action étant exclues de cette modélisation.

Le contrat didactique fournit le substrat de toute interaction didactique quelle qu'elle soit ; que l'enseignement obéisse à une forme du type émetteur-récepteur, tête pleine / tête vide, apprentissage par adaptation, etc.

Le contrat didactique fonctionne selon le paradoxe suivant : *« dans tous les systèmes didactiques, le maître tente de faire savoir à l'élève ce qu'il veut qu'il fasse, mais il ne peut pas le dire d'une manière telle que l'élève n'ait qu'à exécuter une série d'ordres. Ce contrat fonctionne comme un système d'obligations réciproques qui détermine ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer, et dont il sera d'une manière ou d'une autre responsable devant l'autre »* (Brousseau, 1986). Tout ce que le professeur entreprend, pour faire produire par l'élève les comportements qu'il attend, tend à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut il ne peut plus l'obtenir. Mais l'élève est lui aussi devant une injonction paradoxale : apprendre suppose pour lui qu'il accepte la relation didactique, mais qu'il la considère comme provisoire et s'efforce ultérieurement de se défaire de cette dépendance. Car l'enseignement contient en lui sa propre extinction et l'on évaluera l'apprentissage à un objet de savoir lorsque la relation didactique sera terminée, ou encore lorsque l'élève aura établi une relation à cet objet de savoir après que son enseignement sera terminé.

Ces injonctions paradoxales amènent le professeur à jouer un « double jeu » : dans un premier temps, il s'abstient, pour cela, il va s'efforcer de dissimuler en partie ce qu'il veut enseigner.

Il travaille avec les élèves sur l'histoire qu'ils sont censés avoir vécue. Il leur fait vivre une histoire vraie pour eux mais parfois éloignée du savoir culturel à enseigner ; c'est ce que l'on désigne sous le nom de « genèse artificielle du savoir ». Le professeur réorganise l'histoire des élèves en sélectionnant les éléments nécessaires à son enseignement puis, dans un second temps, il sélectionne dans le présent de l'enseignement pour faire basculer l'histoire de l'élève

vers l'histoire universelle et collective du savoir en jeu. Ce double jeu s'explique en théorie des situations par le couple « dévolution/institutionnalisation » (Lucena, 2012).

Quelques effets de contrat didactique sont bien connus, entre autres « l'effet Topaze et l'effet Jourdain », qui représentent pour le professeur deux manières de « tricher » au jeu d'apprentissage. L'effet « Topaze » se manifeste lorsque le professeur négocie à la baisse les conditions dans lesquelles l'élève finira par donner la réponse attendue : le problème est complètement changé et le professeur finira par prendre à sa charge l'essentiel du travail en allant jusqu'à «souffler» la réponse à l'élève. Les connaissances visées sont faussement attribuées à l'élève. Alors que l'effet « Jourdain » se manifeste lorsque le professeur admet de reconnaître l'indice d'une connaissance savante dans les comportements ou les réponses des élèves, bien qu'elles soient motivées par des causes et des significations banales.

Ajoutons à ces deux effets le glissement métacognitif qui est « le remplacement d'une connaissance par un de ses modèles par une description en métalangage » et le glissement met didactique qui est « le processus didactique qui conduit à l'utilisation didactique effrénée du glissement métacognitif ».

Un autre contrat s'ajoute, celui de la maïeutique que Brousseau l'a défini comme « *Le professeur choisit des questions telles que l'élève puisse en trouver les réponses avec ses propres ressources, et il les organise de façon à modifier ses connaissances ou ses convictions. Le professeur modifie ses questions en fonction des réponses de l'élève* ».

Intervenir par des effets de contrat pourrait être vu comme un enrichissement du milieu en vue du maintien du contrat en cours. Si cela permet que le contrat ne soit pas rompu et que le temps continue d'avancer, les chances d'un apprentissage par l'élève s'amenuisent d'autant.

1.3. Un dédoublement des milieux et non pas une bifurcation des situations

Pour Brousseau (1999) « *nous avons nommé situation le modèle d'interaction d'un sujet avec un milieu qui détermine une certaine connaissance comme ressource disponible pour le sujet, de manière qu'il atteigne dans le milieu un "état favorable". Certaines situations demandent la construction ou l'acquisition de connaissances et de schémas nécessaires, mais d'autres offrent la possibilité au sujet de construire par lui-même une nouvelle connaissance dans un processus génétique. Le mot « situation » sert à décrire l'ensemble des situations qui encadrent une action, comme un modèle théorique et éventuellement formel qui sert à l'étudier* ».

Si nous entendons par situation cela, alors il y a évidemment un dédoublement des « situations qui encadrent une action » ou « bifurcation au niveau des situations ». Mais, ce qui nous intéresse dans notre étude est l'origine de ces dédoublements qui soient l'existence de « plusieurs » milieux encadrant une action.

Le concept de bifurcation didactiques dû à Margolinas (2005) qui explique :

« On peut dire que j'ai rencontré pour la première fois une bifurcation du milieu dans un cas où une situation de classe pose problème au professeur, qui est ralenti dans son avancée normale et mis en difficulté par une classe qui s'agite. C'est donc en terme de dysfonctionnement que j'ai abordé les bifurcations de situation ».

Ce concept découle d'un décalage entre les intentions du professeur et les attentes des élèves. Ce décalage est dû au dysfonctionnement des situations. Lorsqu'il propose un problème aux élèves, le professeur projette son intention d'enseignement, c'est-à-dire sa volonté de modifier le système de connaissances des élèves. Il construit alors une situation didactique en proposant un milieu, ce qui place les élèves dans l'ignorance des intentions de leur professeur. En revanche, ils peuvent les imaginer en s'appuyant sur le milieu matériel de la situation objective. Confrontés à ce milieu matériel, les élèves pourront investir une situation de référence différente de celle prévue dans les intentions du professeur, ce que nous appelons « bifurcation » :

Il y a, pour le professeur, des difficultés à comprendre les indices d'une bifurcation didactique si elle n'a pas été prévue ; cette difficulté d'interprétation des indices fournis dans les interactions avec les élèves peut provenir d'un décalage de la position des acteurs dans la structure des milieux » (Aldon, 2011).

Pour exemplifier, nous tirons un extrait de l'analyse d'une séquence d'enseignement des nombres relatifs :

31	P	Donc on a changé seulement l'ordre des nombres. Donc si on change l'ordre des nombres dans une opération, on a des additions et des soustractions, est-ce que la réponse change ?
<i>Séance3/ Extrait numéro 4/ Ligne 31</i>		

Pour inciter les élèves à se replacer définitivement dans ce sujet, le professeur réalise la tâche mathématique (commutativité des nombres relatifs) par une « bifurcation » qui mène les élèves à un flou sur les milieux institutionnels du savoir. Il s'agit pour lui de convoquer le calcul de l'expression numérique « **a+b-c** » dans le contexte de l'ensemble des Nombres Relatifs : « *Donc si on change l'ordre des nombres dans une opération, on a des additions et*

des soustractions ». Dans ce sens, le calcul de $3 - 2$ pourrait être remplacé par $-2 + 3$ que les élèves ignorent en ce moment. Tandis que les élèves ne peuvent mobiliser que de leurs connaissances antérieures portant sur les additions et les soustractions dans le contexte des entiers positifs. Ces opérations ont pour signification : *Additions* : c'est augmenter un état initial et *Soustractions* : c'est diminuer un état initial.

Dans ce tour de parole, le professeur mobilise à sa giselle secteur mathématique « Nombres Relatifs », mais il y a de fortes chances que les élèves pensent avec les objets d'un autre secteur qu'ils connaissent bien : celui des entiers naturels. Cet état de fait nourrit la bifurcation et sème un « flou » sur les Organisations Mathématiques du savoir auxquelles les élèves pourront se référer. Dans notre recherche, nous ne contentons pas de déterminer la présence d'une bifurcation mais nous tentons de repérer le niveau de l'organisation mathématique à laquelle elle réfère : un sujet, un thème, un secteur mathématiques ? Nous suivons pour cela l'échelle des niveaux de codétermination didactique dans sa partie spécifique au savoir (voir *TabOM 2*, p.46) de Chevallard (2007).

Dans les analyses qui suivent, nous interpréterons la bifurcation du point de vue du professeur et des élèves, autrement dit selon les positions occupées par les uns et les autres au sein de la topogenèse (Chevallard, 1985). En d'autres termes, nous nous démarquons de l'interprétation des bifurcations qui est celle de Margolinas (2005) :

Les bifurcations sont encore vues en terme de dysfonctionnement, mais dans ce cas, contrairement à ce qui avait été observé dans le cas du « carré négatif », il n'y a pas de dysfonctionnement vécu par les professeurs, soit parce que le professeur joue sur le contrat pour orienter les élèves dans la « bonne branche », soit parce que le professeur accepte toute les interprétations possibles du problème ».

Il s'agit pour nous de montrer que les « bifurcations » fonctionnent aux niveaux des milieux à l'intérieur d'une situation didactique et, non dans une bifurcation des « situations » qui se situerait aux niveaux de la colonne 2 de la Figure *figure1*, p.24.

1.4. LE MILIEU DE NOTRE ETUDE

Nous reprenons la définition du milieu de Brousseau (1988) :

« Pour représenter convenablement le fonctionnement non didactique des connaissances, nous devons adopter le plus souvent des situations dans lesquelles les états du jeu sont déterminés alternativement par le joueur et par un SYSTEME antagoniste qui modifie les états du jeu de façon non contrôlée par le joueur. Ce système, nous l'avons déjà signalé, est pour l'observateur une modélisation de

l'environnement et de ses réponses pertinentes pour l'apprentissage en cours [...] C'est ce système antagoniste que nous avons proposé d'appeler milieu ».

Nous exemplifions cette citation sur un cas relatif à l'enseignement de la résolution des équations tirées d'une séquence observée. Une équation de forme $4x - 1 = 2x + 3$ est présentée à la classe afin de la résoudre. Le professeur veut que les élèves appliquent la technique dite de « transposition des termes » dans une équation, technique récemment étudiée par les élèves. Pourtant, des élèves ont travaillé d'une façon différente de celle attendue par leur professeur. Ils ont mobilisé pour cela leurs connaissances antérieures sur les expressions algébriques. Ils ont donné pour solution $6x + 2$ en additionnant les différents termes comme dans une expression de forme $4x - 1 + 2x + 3$. Nous considérons cela comme un état du « système antagoniste » qui va amener le professeur à changer les états du jeu des élèves. C'est-à-dire l'action des élèves sur un milieu pourrait engager un autre milieu, différent de celui attendu par leur professeur. Les interactions avec le milieu adidactique tel qu'il est dévolu dans l'enseignement ordinaire, si tant est qu'il le soit, sont très souvent insuffisantes pour permettre d'établir une connexion directe avec les savoirs institutionnellement visés ; ce qui conduit à différents phénomènes de ruptures du contrat comme les effets Topaze, Jourdain, ou glissement méta-cognitif.

Dans notre étude, nous allons étudier les milieux qui se constituent au fur et à mesure par « l'agrégation » des milieux des élèves et du professeur.

Au sein de l'anthropologie cognitive de Chevallard (1992), la notion du milieu est reprise en termes de rapports institutionnels et de contrats institutionnels :

« On désigne par $C_I(T)$, et on nomme contrat institutionnel relatif à I au temps t , l'ensemble des couples $(O, R_I(O, t))$, où O est un élément de $O_I(t)$ ⁵. On nomme alors milieu institutionnel relatif à I au temps t , et on note $M_I(t)$, le sous-ensemble de $C_I(t)$ formé des couples $(O, R_I(O, t))$ « stables » au temps t » (p. 89).

La notion du milieu que nous avons adoptée dans cette recherche est ainsi étendue à l'étude de l'ensemble des objets institutionnels qui, pour les sujets du système didactique, vont de soi. Les rapports à ces objets sont déterminés par l'ensemble des rapports personnels, du professeur et des élèves, qui existent dans l'institution dans le cas où $R(x, o) \neq \emptyset$ (Chevallard, 2003) où x est l'individu, o est l'objet et $\emptyset$ est l'ensemble vide.

⁵ D'après Chevallard (1992) « à chaque institution I est associé un ensemble d'objets, O_I , dit ensemble des objets institutionnels (pour I), qui est l'ensemble des objets O que connaît I , c'est-à-dire pour lesquels existe un rapport institutionnel $R_I(O)$ [...] L'ensemble O_I dépend de $t = t_i$, et il serait donc plus exact de le noter $O_I(t)$ » (p. 88)

Pour Chevallard (2007) le milieu est désigné par :

« Un milieu est entendu ici dans un sens voisin de celui de milieu adidactique en théorie des situations didactiques. On désignera en effet comme étant un milieu tout système qu'on peut regarder comme dénué d'intentions dans la réponse qu'il peut apporter, de manière explicite ou implicite, à telle question déterminée. Le système considéré se comporte alors à cet égard comme un fragment de « nature ». Par contraste, à propos de nombre de questions qu'on entend leur poser, les média⁶s sont en général mus par une certaine intention, par exemple l'intention « d'informer ». Bien entendu, un média peut, à propos de telle question particulière, être regardé comme un milieu, et être utilisé comme tel ».

Au-delà de la distinction média-milieu, une condition nécessaire au fonctionnement du système didactique tient au fait qu'à chaque instant un ensemble d'objets puisse exister pour les sujets de l'institution, à savoir qu'existent des rapports institutionnels stables. Le fonctionnement du système didactique fait néanmoins « bouger » le milieu, au sens de Chevallard, puisque les rapports personnels aux objets d'enseignement vont se transformer au fil du temps didactique pour devoir se rapprocher des rapports institutionnels.

⁶ Le mot de *média* désignera ici tout système de mise en représentation d'une partie du monde naturel ou social à l'adresse d'un certain public : le « cours » du professeur de mathématiques, un traité de chimie, le journal d'un présentateur de télévision, un quotidien régional ou national, un site Internet, etc., relèvent en ce sens du système des médias (Chevallard, 2007).

Chapitre 2 : Cadre théorique

CHAPITRE 2

CADRE THEORIQUE DE LA RECHERCHE

VERS UNE PROBLEMATIQUE DE RECHERCHE

2.1 La Transposition didactique

2.2 La distance mésogénétique

2.3 Notions fondamentales de la TAD

2.4 Etude praxéologique de la TAD

2.5 Les moments didactiques

Notre travail de recherche se situe dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) développée par Chevallard à partir des années 1980. Cette théorie repose sur un certain nombre de postulats concernant l'activité humaine : rapports personnels, rapports institutionnels, organisations praxéologiques (ponctuelles, locales, régionales, globales), qu'elles soient propres au savoir mathématique, dans le cas qui nous occupe, ou didactiques, destin de chaque objet et notamment l'objet du savoir dans l'écosystème des connaissances.

Nous allons présenter, dans cette partie de notre travail, les principaux concepts de la Théorie Anthropologique du Didactique qui sont en rapport direct avec les « objets » du savoir manipulés ou même évoqués dans cette thèse.

2.1 La Transposition didactique

Chevallard (1985) a défini la transposition didactique de la manière suivante :

« Tout projet social d'enseignement et d'apprentissage se constitue didactiquement avec l'identification et la désignation de contenus de savoirs comme contenus à enseigner. [...] Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le « travail » qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé transposition didactique ».

Nous distinguons, dans le processus de transposition didactique trois types de savoirs : le savoir savant, le savoir à enseigner et le savoir enseigné.

Le savoir savant est celui de la communauté scientifique. Ce savoir constitue la référence suprême du savoir à enseigner qui y trouve ses raisons d'être et sa légitimité. C'est le savoir connu comme pertinent et validé par les communautés scientifiques comme les chercheurs universitaires.

Le savoir à enseigner est celui qu'on trouve consigné dans les curricula et les programmes ainsi que dans les documents d'accompagnement. Ce savoir est issu des décisions de la noosphère (inspecteurs, conseillers, intervenants officiels, groupes de pressions politiques, etc.).

Le passage du savoir savant au savoir à enseigner est qualifié de « transposition externe ».

Le savoir enseigné est, comme son nom l'indique, le savoir enseigné par les professeurs aux élèves. Ce savoir est celui que l'enseignant construit à partir de différentes ressources, comme le manuel, pour le mettre en œuvre dans la classe.

Le passage du savoir à enseigner au savoir enseigné est la « transposition interne », œuvre de l'enseignant. C'est une sorte de scénarisation du savoir à enseigner et qui devient, par cet acte, un savoir « effectivement » enseigné. Cette transposition interne est conditionnée, entre autres, par la connaissance de la part de l'enseignant de l'objet du savoir, les exigences du programme officiel, les pratiques d'enseignement (l'organisation didactique) et la vision propre de l'enseignant (son épistémologie de ce qu'est la discipline et de la manière de l'enseigner). Cet ensemble de conditions et de contraintes lui permettent d'envisager et d'organiser la manière dont les élèves peuvent apprendre ces connaissances nouvelles.

Par suite, la transposition didactique est le processus par lequel un savoir «savant» est transformé de manière à pouvoir être enseigné à des élèves qui l'ignorent encore, mais qui disposent, comme tout un chacun, de certaines connaissances antérieures. La théorie de la transposition didactique met en évidence et étudie la reconstruction, ou plus précisément « la genèse artificielle », d'un objet mathématique « connaissable », qui s'opère au sein du triplet « enseignant, élèves, savoirs » constitutif du système didactique (Chevallard, 1985). L'ensemble des systèmes didactiques réunis dans le système d'enseignement s'inscrit dans l'environnement social. Le sas entre la société et le système éducatif, portant et filtrant les attentes qui se manifestent à propos de l'école, est désigné du substantif parodique de « noosphère⁷ ».

La transposition didactique met en relief l'asymétrie des rôles de l'enseignant et de l'enseigné par rapport à l'échafaudage d'un savoir en classe. Chevallard (1999) désigne ces rôles par le terme grec de *topos* qui signifie lieu. Cet échafaudage, pour un savoir en construction, s'appuie sur un travail coopératif qui prend une forme de jeu de rôles entre les élèves et l'enseignant, chacun effectuant un geste afin que la construction puisse être édifiée.

⁷ L'univers [...] prend son sens de la société au sein de laquelle on distinguera d'abord le système d'enseignement. A l'intérieur du système d'enseignement se forment les systèmes didactiques dont les composantes essentielles sont « élèves, enseignant et savoirs ». Autour du système d'enseignement stricto sensu, on trouve une zone d'interface avec la société que l'on appellera la noosphère. L'ensemble des systèmes d'enseignement et de sa noosphère est désigné comme le système d'enseignement *lato sensu*. La noosphère contient notamment les professeurs militants, leurs associations, les producteurs et les défenseurs de telle doctrine didactique (Chevallard, Enseignement de l'algèbre et TD, Univ Pol Torino, vol 52, 1994)

La transposition didactique souligne aussi la différence des places entre l'enseignant et l'enseigné par rapport au savoir en construction, ce que Chevallard nomme, la topogenèse du savoir. Le professeur, par nature, possède un surplus de savoir en attente d'enseignement, mais aussi par rapport au temps comme temps du savoir. L'enseignant, à la différence de l'enseigné, est capable d'anticipation ; l'élève pourrait, à la rigueur, maîtriser un certain passé, mais seul le maître peut maîtriser le futur car lui seul peut décider de ce que l'enseigné peut apprendre (Cité dans Araya, 2008).

La transposition didactique est considérée non pas simplement comme une description de l'apprêt didactique des savoirs mais comme une transposition de l'espace et du temps didactique. Selon Chevallard (1994) « *le savoir enseigné doit pouvoir être présent selon une progression argumentée, et définir ainsi une norme temporelle de progrès dans le savoir que l'on désignera sous le nom de temps didactique, le processus de construction (interne au système didactique) du temps didactique étant lui-même appelé chronogenèse. D'autre part, chaque "segment" du temps didactique doit dessiner deux places, l'une pour l'enseignant, l'autre pour l'enseigné, selon un processus appelé topogenèse* ». Un autre descripteur du fonctionnement des systèmes didactiques est la mésogenèse (Chevallard, 1992) qui réfère à la construction du milieu dans la classe « à chaque instant, le milieu apparaît subjectivement comme un donné ; mais c'est en vérité un construit permanent » (*Ibid.*).

Dans cette recherche, nous utilisons le concept de mésogenèse, tel qu'il a été défini par Chevallard (1985) dans sa théorie et développé depuis dans le cadre de cette théorie, pour répondre aux questions suivantes : comment se constitue le milieu dans la classe ? Quels sont les milieux activés au cours du temps didactique ? Selon quelle succession l'enquête sur le savoir, si elle a lieu d'un point de vue laissant un *topos* assez large à l'élève, se construit-elle ? Dans la topogenèse, quels rôles le professeur et les élèves auront-ils assumés et à quel niveau de responsabilité ? Quels sont les effets chronogénétiques objectivables en termes de « décalage » temporel pouvant s'installer dans la classe entre le professeur et les élèves ?

Ces trois fonctions, par leurs interactions dans la « transposition interne », règlent le cheminement de la transposition didactique dans la classe. Elles lient les connaissances des élèves aux objets du nouveau savoir, c'est-à-dire les rapports des élèves au savoir que l'enseignement a permis d'établir.

2.2 La distance mésogénétique

Le concept de transposition didactique étudie le processus qui fait que les objets du savoir mathématique savant sont transformés en savoirs à enseigner. Il existe évidemment un écart, ou une distance, entre le savoir savant et le savoir enseigné. Mais il existe aussi un décalage temporel entre le professeur et les élèves⁸. Il se manifeste entre le temps didactique, temps de l'enseignement d'objets de savoir nouveaux par le professeur et le temps de leur apprentissage par les élèves. D'autre part, les deux savoirs, celui du professeur et celui des élèves, prennent leurs origines dans des institutions différentes, notamment sur les plans épistémologiques et didactiques. Pour le professeur à partir de ressources variées venues de sa fréquentation de diverses institutions : scolaires, universitaires, venues d'ouvrages savants ou de manuels du commerce, venues de programmes et instructions officielles, ainsi que des souvenirs de son expérience professionnelle passée, etc. Pour les élèves, ils prennent leur source de l'institution scolaire : école, manuels, cours particuliers ou de leurs parents.

Ainsi, les élèves mobilisent-ils des connaissances antérieures autour de ce qu'ils ont étudié au cours des années scolaires précédentes ou de l'année scolaire présente, tandis que le professeur essaye de reconstruire des savoirs finalisés. Sur le plan didactique, les élèves sont contractuellement engagés à résoudre les tâches mathématiques choisis par le professeur. Ils mobilisent alors certaines connaissances venues de niveaux d'organisation du savoir comme les sujets ou les thèmes, plus rarement des niveaux d'ordre supérieur comme les secteurs. Ils s'engagent alors dans des moments d'élaboration d'une (ou des) techniques personnelles appropriées ou de mise en œuvre de techniques qui leur ont été enseignées et qu'ils s'approprient. Par sa nature, le travail du professeur est évidemment différent (voir fonctionnement du contrat didactique p.26). Il sélectionne les éléments du savoir prescrit lors de la transposition didactique externe et les organise de façon à pouvoir trier ce qui est nécessaire à sa possible dévolution aux élèves ; c'est-à-dire à la responsabilité qu'il leur transfère pour construire ou pour travailler le savoir qu'ils auront à apprendre. Le décalage entre les connaissances des élèves et les intentions du professeur rend parfois délicate l'interprétation des réponses des élèves, car ils ne travaillent pas dans les mêmes milieux de connaissances, qui sont faits des rapports stabilisés à des éléments venus des organisations mathématiques (OM).

⁸Sensevy (1994) explique que le *Journal des fractions* est fondé sur « la nécessité de faire reconnaître par l'institution-classe un espace-temps où l'élève travaille dans sa durée la formation de rapports à des objets complexes (objets de savoir en interrelation avec objets épistémiques), où les rapports ainsi élaborés soient débattus par la communauté des élèves, où les rapports ainsi réélaborés soient désignés par dialogue maître-classe comme rapports institutionnels produisant du temps didactique.

Pour évaluer ce décalage, nous nous intéresserons ; à partir des traces écrites, langagières, gestuelles recueillies des activités des élèves et du professeur ; à l'analyse des organisations mathématiques (OM) mobilisées. Ces OM seront présentées sur l'échelle des niveaux de codétermination didactique (voir *Tab OM2* p.46). La comparaison de ces différents niveaux, qui correspondent à des éléments constitutifs de milieux différents devient alors possible et permet la détermination des écarts. Tout se passe comme si nous pouvons mesurer les distances entre les savoirs des élèves et ceux du professeur ainsi que, éventuellement, la distance au savoir institutionnellement attendu. Nous parlons alors de « distance mésogénétique ».

2.3 Notions fondamentales de la théorie anthropologique du didactique (TAD)

En Théorie Anthropologique du Didactique, la première notion fondamentale est celle est celle d'objet (Chevallard, 2002) :

« Est objet toute entité, matérielle ou immatérielle, qui existe pour au moins un individu. Tout est donc objet, y compris les personnes. Sont ainsi des objets le nombre sept, et aussi le chiffre 7, la notion de père et aussi ce jeune père qui promène son enfant, ou encore l'idée de persévérance (ou de courage, ou de vertu, etc.), et le concept mathématique de dérivée, et aussi le symbole $\hat{c}$, etc »

En particulier, toute œuvre, c'est-à-dire tout produit intentionnel de l'activité humaine, est un objet.

La deuxième notion fondamentale est celle de rapport personnel d'un individu x à un objet o , expression par laquelle Chevallard (2002) désigne la fonction, notée « $R(x, o)$, de toutes les interactions que x peut avoir avec l'objet o — que x le manipule, l'utilise, en parle, en rêve, etc. On dira que o existe pour x si le rapport personnel de x à o est « non vide », ce qu'on note $R(x, o) \neq \emptyset$ ».

La troisième notion fondamentale, celle de personne, est alors le couple formé par un individu x et le système de ses rapports personnels $R(x, o)$:

« A un moment donné de l'histoire de x . Le mot de personne, tel qu'on l'emploie ici, ne doit pas faire illusion : tout individu est unipersonnel, y compris le tout petit enfant, l'infans (étymologiquement, celui qui ne parle pas encore). Bien entendu, au cours du temps, le système des rapports personnels de x évolue : des objets qui n'existaient pas

pour lui se mettent à exister ; d'autres cessent d'exister ; pour d'autres enfin le rapport personnel de x change» (Chevallard, 2002).

Les rapports personnels s'établissent au sein d'institutions I , quatrième notion fondamentale que Chevallard (1992) a définie ainsi :

« L'institution est un dispositif social total qui peut avoir une extension très réduite dans l'espace social, mais qui permet et impose à ses sujets la mise en jeu de manières de faire et de penser ».

D'une manière générale, l'ensemble formé par l'individu et les rapports personnels est à référer à des multiples institutions auxquelles s'est assujetti l'individu. L'individu x se constitue alors en une personne en tant que couple constitué de l'individu et de ses rapports personnels à diverses institutions. L'invariant est l'individu, ce qui change est la personne. Ces propos soulignent l'idée que la personne se constitue à partir de ses propres assujettissements passés et présents, auxquels on ne saurait donc jamais les réduire une fois pour toutes.

Dans notre recherche, l'étude de ses assujettissements pourrait nous montrer les différents éléments mathématiques auxquels les élèves et le professeur rapportent leurs actions lorsqu'ils agissent ou évoquent différents objets de savoir.

Les rapports personnels d'un individu, à un moment donné de son histoire, seront assujettis à des multiples institutions qui pourraient donc évoluer, au fur et à mesure, avec des éléments de savoir. Dès lors, les éléments sont en place pour poser la définition du rapport institutionnel :

« Étant donné un objet o , une institution I , et une position p dans I , on appelle rapport institutionnel à o en position p , et on note $R_I(p, o)$, le rapport à l'objet o qui devrait être, idéalement, celui des sujets de I en position p . Dire que x est un bon sujet de I en position p , c'est dire que l'on a $R(x, o) \cong R_I(p, o)$, où le symbole $\cong$ désigne la conformité du rapport personnel de x au rapport institutionnel en position p . De même que pour une personne x , on parle alors de l'univers cognitif de la position p de I , $U_I(p) = \{(o, R_I(p, o)) / R_I(p, o) \neq \emptyset\}$, et, par extension, de l'univers cognitif de I , $U(I) = \cup_p U_I(p)$. En particulier, s'il existe une position p de I telle que $R_I(p, o) \neq \emptyset$, on dit que I connaît o . Pour nombre d'objets o , on a $R_I(p, o) = \emptyset$: les sujets de I en position p n'ont pas alors, en tant que tels, à connaître o » (Chevallard, 2003).

Dans une institution, une personne peut occuper plusieurs positions vis-à-vis des objets de savoir. Il y a ainsi une dialectique des rapports institutionnels et des rapports personnels : les

premiers fournissent les conditions et les contraintes sous lesquelles se créent et évoluent les seconds, et en retour les seconds, lorsqu'ils sont congruents aux premiers, viennent les soutenir. Ainsi, souligne-t-il (Chevallard, 2003), le rapport personnel émerge donc d'une pluralité de rapports institutionnels :

« Le fait que le rapport personnel $R(x, o)$ émerge d'une pluralité de rapports institutionnels $R_I(p, o)$, $R'_I(p', o)$, $R''_I(p'', o)$,... a plusieurs conséquences notables. En particulier, le rapport personnel $R(x, o)$ n'est jamais parfaitement conforme à tel rapport institutionnel $R_I(p, o)$, : la personne x est quasiment toujours, dans une certaine mesure, un mauvais sujet de I , parce que son rapport s'est formé par l'intégration, au fil du temps, des influences exercées par les divers rapports institutionnels auxquels elle a été assujettie - $R_I(p, o)$, mais aussi $R'_I(p', o)$, $R''_I(p'', o)$, etc. En sens inverse, $R(x, o)$ n'est presque jamais vraiment original, en ce qu'il reflète, en les altérant plus ou moins, les rapports institutionnels sous l'influence desquels la personne x s'est formée. Par contraste, c'est précisément à leur capacité d'élaborer des rapports personnels institutionnellement inédits que l'on reconnaît les créateurs au sens fort du terme, lesquels d'ailleurs ne sont généralement créateurs qu'en tel ou tel domaine artistique, littéraire, scientifique, sportif, etc » (Chevallard, 2003).

Dans notre recherche, nous définissons le milieu institutionnel comme étant l'ensemble des rapports institutionnels à un objet, pour une position institutionnelle donnée, qui pourront valider des techniques ou des rapports personnels sur l'ensemble des tâches que doivent accomplir des personnes occupant cette position. Ainsi l'imbrication du rapport personnel et du rapport institutionnel à propos de l'objet de savoir, définit-il et dévoile-t-il, du point de vue didactique, le rapport au savoir. Celui-ci ne doit pas être envisagé comme allant de soi.

2.4 La notion de praxéologie en TAD

Pour Chevallard (1999), une praxéologie se définit à partir du quadruplet suivant $[T, \tau, \theta, \Theta]$. Celui-ci désigne un type de tâches (T) à accomplir avec une technique τ , devant être validée par une technologie θ , qui elle-même requiert une justification par des théories Θ . Le premier bloc $[T, \tau]$ définit un savoir-faire relevant de la pratique (praxis), alors que le second bloc technologico-théorique $[\theta, \Theta]$ relève d'un discours raisonné (logos).

Notons que :

- T , le type de tâches, est la question générique à accomplir, constituée de l'ensemble des tâches considérées comme étant du même type ;
- τ , la technique permettant la réalisation soit de l'ensemble des tâches du type T , soit d'une partie d'entre elles ;

- θ , la technologie ou discours rationnel destiné à expliquer et valider et produire la technique pour réaliser la tâche (le « pourquoi »);
- Θ , la théorie apportant une justification de niveau supérieur aux assertions que contient le discours technologique, le rendant compréhensible et le produisant

La modélisation en termes de praxéologies offre une méthode d'analyse des pratiques institutionnelles permettant leur description et l'étude de leurs conditions de réalisation (Chevallard, 1999).

Revenant aux notions de personnes et de rapports, un individu n'est pas sujet d'une seule institution. « Une personne x est assujettie à une foule d'institutions » (Chevallard, 1992). Dans ce sens, les élèves ainsi que le professeur pourront jouer sur plusieurs institutions qui relèvent de leurs rapports institutionnels et de leurs assujettissements. Sur ce plan, le travail du professeur et des élèves sera évalué en termes d'activations praxéologiques, considérées comme constructions institutionnelles.

Dans cette recherche, nous nous intéressons à relever les praxéologies, c'est-à-dire les systèmes de type de tâches, de techniques, de technologies et de théorie qui existent dans les institutions déterminées, dans le but de déterminer à partir desquelles le (ou les) niveaux de « dédoublement » sur l'échelle de codétermination didactique.

Pour exemplifier, nous extrayons d'un manuel scolaire le chapitre « Equations » (voir étude du manuel dans 4.5, p.76), dont nous analysons l'organisation mathématique, décrite en termes de « praxéologies », autour d'un seul type de tâches $T_{2,d}$ « Déterminer des équations équivalentes ».

Par exemple : « Les deux équations $2 + x = 5$ et $4x = 12$ ont la même solution qui est 3

Alors elles sont dites équivalentes ».

(Manuel libanais, Classe EB7, Collection Puissance p 168).

L'étude praxéologique est décrite dans le tableau ci-dessous :

Types de tâches T	$T_{2,d}$: «Remplacer une équation par une autre équation équivalente ».
Techniques τ	Dans ce cas, il faut utiliser les techniques $\tau_{1,d}$ relatives au type de tâches $T_{1,d}$: « vérifier si un réel donné est solution d'une équation » - Remplacer x par une valeur numérique dans une expression. - Calculer des expressions numériques en respectant la priorité dans les opérations. - Comparer deux nombres. Il faut appliquer ces techniques $\tau_{1,d}$ sur deux ou plusieurs équations

Technologie Θ_d	- L'égalité de deux nombres. - L'égalité conditionnelle de deux expressions algébriques. - Equations ayant la même solution.
Théorie Θ	$(\mathbb{R}, +, \times)^9$ est un anneau commutatif factoriel dans lequel tout élément non nul possède une décomposition unique en facteurs irréductibles.

Tab OM 1 : Etude praxéologique de la tâche « Déterminer une équation équivalente »

Chevallard (1999) ajoute que « Un complexe de techniques, de technologies et de théories organisées autour d'un type de tâches forme une organisation praxéologique (ou praxéologie) ponctuelle. L'amalgamation de plusieurs praxéologies ponctuelles créera une praxéologie locale, ou régionale ou globale, selon que l'élément amalgamant est, respectivement, la technologie, la théorie ou la position institutionnelle considérée ».

Chevallard (*Ibid.*) ajoute que : « Les organisations ponctuelles qui se regroupent autour d'une technologique déterminée sont nommées praxéologies locales, $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$. Les praxéologies locales relatives à une même théorie, $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$, sont connues comme des praxéologies régionales. Finalement, on nomme organisations globales, notées $[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_k, \Theta_k]$, « le complexe praxéologique obtenu dans une institution donnée, par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories Θ_k ».

Pour étudier les praxéologies mises en place, la TAD propose d'examiner le travail du professeur d'après deux grandes composantes que sont les « organisations mathématiques » (OM) et les « organisations didactiques » (OD). La notion de praxéologie va ainsi nous permettre de décrire l'organisation mathématique ou l'enjeu de l'étude : les objets, les propriétés, les types de problèmes qui la modélise, les techniques mathématiques, les justifications à apporter, etc. L'OM met l'accent sur le contenu mathématique en vigueur. Il s'agit, en fait, de répondre aux questions : Quels types d'équations présenter ? Quelles sont les propriétés à admettre ? Quelles sont les techniques à institutionnaliser ? etc. Quant à l'OD, elle renvoie à la manière dont l'enseignant organise les tâches mathématiques de son OM. Elle met l'accent sur plusieurs questionnements comme : Comment organiser les séquences d'enseignement ? Quels sont les topos des élèves ? Quel est le topos de l'enseignant ? Comment élaborer les techniques ?

⁹ En EB7, la résolution des équations se travaillent sur l'identité conditionnelle de deux expressions algébriques qui ne sont pas enseignées comme étant des polynômes. C'est pourquoi nous nous sommes placés dans la théorie de l'anneau des réels et non dans l'anneau des polynômes $(\mathbb{R}[X], +, \times)$.

Par exemple, dans l'étude du manuel libanais dans lequel nous avons étudié « Les équations du premier degré » en EB7, nous n'avons pu déterminer que des praxéologies locales de la forme $[T_{i,d}, \tau_{i,d}, \theta_d, \Theta]$ avec $i=1, 2, 3$ autour de type de tâches principal « Résoudre une équation du premier degré à une inconnue ». Ceci nous a permis de déterminer les différents éléments des OM et OD de ce savoir tels qu'ils soient présentés dans cette institution « le manuel ». Ce travail constituera, lors de l'étude des séances, un outil pour détecter les différents niveaux de « dédoublement » dans des actions du professeur et des élèves vis-à-vis du savoir institutionnel.

En résumé, l'analyse en termes de « praxéologies » se réalise à l'aide des analyses des OM produites par le professeur et les élèves, ainsi qu'à l'aide des OD mises en œuvre pour permettre l'étude de ces OM.

2.5 Les moments didactiques

Pour analyser les processus didactiques, la TAD propose une organisation des moments didactiques, ou moments de l'étude. Les moments de l'étude, au nombre de six, sont définis par Chevallard (2002) de la manière suivante :

« Le premier moment de l'étude est celui de la première rencontre avec un type de tâches T_i , par exemple à propos d'une tâche T qui « recèle » une tâche $t \in T_i$. Cette « première rencontre » avec T_i peut elle-même avoir lieu en plusieurs fois, en fonction des environnements mathématiques et didactiques dans lesquels elle se produit : on peut redécouvrir un type de tâches comme on redécouvre une personne que l'on croyait connaître.

Le deuxième moment est celui de l'exploration – et donc de la « construction » – du type de tâches T_i , ainsi que de l'élaboration d'une technique τ_i relative à T_i , par l'étude d'un ensemble de tâches problématiques $t_1, \dots, t_n \in T_i$. [...] L'étude d'un problème particulier, spécimen du type étudié, apparaît ainsi, non comme une fin en soi, mais comme un moyen pour qu'une telle technique de résolution se constitue [...].

Le troisième moment de l'étude est celui de la constitution de l'environnement technologico-théorique $[\theta_i/\Theta_i]$ relatif à la technique τ_i . D'une manière générale, ce moment est en interrelation étroite avec chacun des autres moments. Dès la première rencontre avec un type de tâches T_i , il y a généralement mise en relation avec un cadre technologico-théorique antérieurement élaboré, ou se mêlent des germes d'un environnement à créer qui se précisera dans une relation dialectique avec l'émergence de la technique [...].

Le quatrième moment est le moment de l'institutionnalisation, qui a pour objet de préciser ce qu'est « exactement » l'OML élaborée. [...] Le moment de l'institutionnalisation, c'est donc d'abord le moment où, dans la construction « brute » qui, peu à peu, a émergé de l'étude, vont être séparés, par un mouvement qui engage l'avenir, le « mathématiquement nécessaire », qui sera conservé, et le « mathématiquement contingent », qui, bientôt, sera oublié, [...]

Le cinquième moment est celui du travail de l'organisation mathématique, et en particulier du travail de la technique, qui vise à la fois à améliorer cette dernière en la rendant plus efficace et plus fiable – ce qui exige généralement de retoucher la technologie, voire la théorie – et à accroître la maîtrise que l'on a et de la technique et de sa justification.

Le sixième moment est celui de l'évaluation, qui s'articule au moment de l'institutionnalisation : en pratique, il arrive un moment où l'on se doit de « faire le point », en examinant ce que vaut ce qui a été appris – et aussi, on va le voir, ce qui a été construit. [...] ».

Cependant, les moments de l'étude ne se déroulent pas forcément de manière chronologique. Par exemple, les manuels et les cours des enseignants peuvent débiter par le moment de constitution d'un élément-technologico-théorique, celui-ci étant présenté *in extenso* sous forme d'un cours « magistral » ; par exemple par une définition, suivie d'exemples, un théorème suivi de sa démonstration ; sans que la raison d'être du savoir soit rencontrée autrement que par l'exposition de son existence.

L'analyse du système didactique met en relief l'étude des conditions et des contraintes relatives à l'existence de l'OM et de l'OD. Plus généralement, le système se doit « d'identifier et d'organiser de manière optimale les conditions de l'étude sous l'ensemble profus des contraintes qui lui sont imposées, [et de prendre] en compte les différents niveaux de détermination didactique » (Chevallard, 2002). Ces niveaux sont hiérarchisés de la manière suivante, en allant du plus spécifique au plus général : *sujet, thème, secteur, domaine, discipline, pédagogie, école, société*. Ainsi « chaque niveau impose aux niveaux plus profonds des contraintes déterminées, tandis que ces niveaux exercent en retour sur les niveaux supérieurs une pression qui tend à modifier les contraintes y ayant leur siège ».

Matheron (2009)¹⁰ exemplifie l'échelle des niveaux de codétermination didactique donnée par Chevallard à partir du sujet « déterminer un intervalle de confiance ». Les flèches indiquent que les niveaux interagissent l'un sur l'autre¹¹ :

	Civilisation	↑	Innovations technologiques et marché
	Société	↑	Intégrer les technologies nouvelles
↓	École	↑	Cours de 55 minutes
↓	Pédagogie	↑	Élève actif
↓	Discipline	↑	$\cup_k(T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k)$: “ Mathématiques ”
↓	Domaine	↑	Praxéologie globale $(T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k)$
↓		↑	
↓	Secteur	↑	Praxéologie régionale $(T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta)$
↓		↑	
↓	Thème	↑	Praxéologie locale $(T_i, \tau_i, \theta, \Theta)$
↓		↑	
↓	Sujet		Praxéologie ponctuelle $(T, \tau, \theta, \Theta)$

Tab OM 2 : Schéma des niveaux de codétermination didactique

On retrouve, à travers ce schéma, le modèle praxéologique $(T, \tau, \theta, \Theta)$. On y retrouve aussi l'agrégation des praxéologies mathématiques, c'est-à-dire des organisations mathématiques qui, partant d'une organisation ponctuelle relative à un sujet donné, s'insèrent dans des organisations plus vastes : locales, régionales et globales pour désigner respectivement les thèmes, secteurs et domaines. C'est ce qu'indiquent les notations indicées en i , j et k . L'ensemble des domaines constitue la discipline ; à savoir les mathématiques enseignées à un niveau déterminé. On pourrait croire que l'intérêt de la description qui précède ne réside que dans l'organisation des mathématiques transposées ; il n'en est rien. Car les mathématiques elles-mêmes déterminent en partie la manière dont elles seront enseignées, autrement dit l'organisation didactique. Les quatre derniers niveaux, en surplomb de la discipline, déterminent les conditions et contraintes venant de la pédagogie, de l'Ecole, de la société et de la civilisation et qui interviennent dans l'organisation didactique (Matheron, 2010).

Pour exemplifier, on sait que le programme de la classe EB7 (cinquième) au Liban est scindé en 3 domaines d'étude qui sont intitulés Arithmétique et Algèbre (90h), Géométrie (55h) et

¹⁰ Matheron a exemplifié ce tableau de manière sommaire et incomplète sur le sujet « intervalle de confiance », au programme de 2^{de} de 2001.

¹¹ Contrairement à ce que l'utilisation de telles flèches pourrait laisser croire, les interactions ne suivent pas un ordonnancement linéaire selon la hiérarchie croissante ou décroissante propre à ce schéma.

Statistique (5h) (praxéologie globale). Le domaine Arithmétique et Algèbre est quant à lui divisé en 7 secteurs d'études nommés entiers naturels (10h), fractions (10h), décimaux (5h), opérations (30h), proportionnalité (10h), expressions algébriques (15h), équations et inéquations (10h) (praxéologie régionale). Le dernier de ces secteurs se scinde à son tour en un seul thème nommé « équations se ramenant à $ax = b$ » (praxéologie locale). Pour terminer, ce thème d'étude se divise en plusieurs sujets d'étude impliquant un certain nombre de types de tâches différents, dont faire remplacer une équation par une équation équivalente et résoudre une équation du type $ax = b$ où $a \neq 0$ (praxéologie ponctuelle).

L'échelle de codétermination du didactique et du mathématique nous offre un outil intéressant pour interpréter les OM et repérer de quel niveau (sujet, secteur, thème, domaine) émane le dédoublement des milieux.

Dans notre recherche, nous allons repérer les OM relatives au professeur et aux élèves au cours des séances étudiées. Nous identifierons si les OM mobilisées seront différentes ou pas. Pour ce faire, nous nous servons de formes géométriques (losanges, rectangles, ovales). La forme losange illustre les OM mobilisées par les élèves en se basant sur leurs connaissances antérieures, sur leurs techniques personnelles, etc. La forme rectangle illustre des OM relatives au professeur. Alors que la forme ovale montre des OM communes au professeur et aux élèves.

Chapitre 3 : Cadre méthodologique

CHAPITRE 3

METHODOLOGIE DE RECHERCHE

3.1 La méthodologie Clinique

3.2 L'approche clinique et la TAD

3.3 Description de la démarche méthodologique de la recherche

3.4 Description des démarches des séquences étudiées

DEMARCHE METHODOLOGIQUE

Le travail mené s'appuie sur une méthodologie de type clinique, utilisée pour des dispositifs « courts¹² », afin d'observer des phénomènes généraux relevant du « dédoublement des milieux ». La démarche méthodologique porte sur des observations de classes enseignées sur des secteurs mathématiques variés dans deux pays différents : le Liban et la France. Nous avons voulu montrer, à partir des différences pouvant exister à propos de l'enseignement dans ces deux pays, des phénomènes généraux liés à l'enseignement des mathématiques et transcendants des particularités nationales.

Les observations ont porté sur des séquences dans l'enseignement ordinaire : « Les Equations du premier degré à une inconnue en EB7 au Liban », une autre séquence organisée autour d'une ingénierie didactique « Les nombres Relatifs en EB6 au Liban » et une séance tirée d'une ingénierie portant sur « La soustraction en CE1 en France ». Dans un deuxième temps, des compléments sur le fonctionnement des classes ont davantage mobilisé notre travail. Nous y avons fait passer, principalement, un entretien-post séance avec la professeure ayant enseigné la soustraction et avons observé des « devoirs faits à domicile » préparés par des élèves dans notre étude sur les équations.

3.1 Sur la méthodologie clinique

Au début de la recherche, il s'est agi pour nous d'observer une séquence d'enseignement sur les équations en EB7 au Liban. Ce travail s'inscrit dans celui mené en DEA (Kazan, 2003) sur le même thème. Il nous a fallu en extraire un questionnement et une problématique sur l'enseignement de ce thème ; cette observation nous a permis de se fixer sur la question du phénomène de dédoublement des milieux comme cause possible de mésententes professeur – élèves relativement au savoir enseigné et à apprendre. Nous avons réalisé ensuite l'analyse de deux séquences portant sur des thèmes différents.

Le parcours de notre travail s'est centré sur l'observation d'une (ou des) séances didactiques au cours desquelles des micro-découpages de la séance (des extraits) ont été réalisés. Un

¹² Parmi les dispositifs de recherche déjà expérimentés en didactique comparée, deux grandes options ont été privilégiées, selon les questions de recherche traitées et selon la section choisie : 1) Des dispositifs « courts » pour étudier la dynamique d'une seule séance d'enseignement/apprentissage ciblée ou pour comparer plusieurs séances (avec des enseignants contrastés par exemple). 2) Des dispositifs plus conséquents, se déroulant sur des « temps longs » et qui permettent des études diachroniques à l'échelle de quelques mois à une année ; il s'agit bien évidemment dans ce cas de gérer ce temps long et d'introduire cette gestion dans les conditions de fonctionnement du dispositif (Leutenegger, Schubauer, 2002).

extrait délimite, de façon appropriée, le déroulement d'un passage dans une séance. Un passage peut être un exercice comme « résoudre l'équation $3x - 1 = x + 6$ », une discussion lancée avec un élève sur un questionnement demandé, etc. Sur ce plan, l'analyse d'une séquence s'est réalisée par la dissection des séances en des extraits et par la prise en compte des deux étapes suivantes:

- La première prend en compte des moments précis de la séance. Il s'agit de la découper en des extraits qui scandent la variation du travail. Ces moments étaient pour nous des indices qui vont contribuer à élaborer des formes organisatrices du phénomène didactique que nous étudions. Ces moments sont considérés comme étant des moments cruciaux, voire emblématiques relativement à nos questions de recherche.
- La seconde prend en compte le macro-découpage de la séquence étudiée (Leutenegger, Schubauer, 2002). Il s'agit pour nous d'étudier les variations, les évolutions successives du phénomène didactique étalées sur toute la séquence (cas des nombres relatifs par exemple).

La méthodologie suit alors une démarche de type clinique. Les indices qui vont être recueillis seront analysés et organisés pour pouvoir identifier le phénomène du dédoublement des milieux.

3.2 L'approche clinique didactique et la TAD

Dans une première partie, nous étudions, en tant que possible, des éléments de la démarche institutionnelle clinique et des éléments de la théorie anthropologique didactique. Dans une autre partie, nous situons la démarche clinique au sein de la théorie anthropologique à partir des éléments convoqués précédemment.

3.2.1. Dimension institutionnelle d'une démarche clinique

Nous postulons que la classe est une « clinique » dans laquelle des phénomènes didactiques existent et peuvent se révéler à l'observateur, en fonction des moyens dont il dispose. On sait d'ores et déjà, et hors de toute problématique de recherche, que le professeur gère son enseignement et sa classe à partir d'indices ou de signes pris sur les élèves qu'il observe, que cela lui permet d'inférer des comportements et d'ajuster son enseignement. Il rapporte une partie de ces indices aux rapports des élèves aux organisations mathématiques ou tout au moins à certains des éléments de ces organisations.

En Didactique des Mathématiques, à partir du travail de Leutenegger (2009), nous disposons d'une référence pour la « clinique ». Une des références que l'auteur présente pour cette approche est la suivante :

« Comme dans le cas de la clinique médicale, pour laquelle les symptômes relevés permettent au praticien d'inférer un diagnostic en les rapportant au savoir médical, la confrontation de ces suites de signes aux éléments théoriques fournis par la didactique des mathématiques, permet de réduire l'incertitude attachée à l'interprétation des observables ».

Dans notre cas, nous ne possédions pas, au moment de débiter les observations, de « signes » sur le phénomène du dédoublement des milieux. Cependant, les observations cliniques réalisées sur la première séquence observée nous ont permis de confronter l'étude de quelques « signes » déclencheurs. C'est à la lumière de ces signes que nous avons voulu déterminer ce qui pouvait se passer dans d'autres séquences. Dans ce contexte, nous avons recouru à une étude didactique qui s'est appuyée sur une identification des milieux cognitifs que les élèves peuvent mobiliser, afin de déterminer leurs positions effectives par rapport aux milieux institutionnels que le professeur utilise : c'est-à-dire afin de déterminer la distance mésogénétique.

Nous avons fait appel à la démarche clinique parce qu'elle permet, à partir d'observations fines, à alimenter la construction des phénomènes de nature micro-didactique. L'analyse se conduit après coup, à partir des objets présents dans le système observé, et la recherche de leur genèse.

L'approche clinique/expérimentale (Leutenegger, 2000; Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2002) nous fournit une méthodologie à partir de laquelle nous pouvons tirer des informations sur le fonctionnement du système didactique. Dans cette thèse, il ne s'agit pas de la mise en œuvre d'un dispositif expérimental qui nourrit notre méthodologie comme dans le cas du travail de Leutenegger. Il s'agit plutôt d'utiliser une méthodologie de type clinique sur des observations vidéos recueillies au sein de classes, soit ordinaires, soit au sein desquelles sont mises en œuvre des ingénieries didactiques. Dans ce dernier cas, ces ingénieries ne sont pas *a priori* conçues comme dans le travail de Leutenegger pour tester la validité d'une méthodologie clinique en didactique, mais parce qu'elles sont censées améliorer la qualité de l'enseignement et, à partir de là, de l'apprentissage des élèves. Par ailleurs, lorsque cela a été possible et afin de compléter les observations vidéos, nous avons recouru à d'autres recueils de traces concernant l'observation du système didactique. Il s'agit d'une part d'un entretien

semi-directif post séance sur la soustraction, ainsi que d'autre part du recueil des travaux d'élèves dans le cas de l'observation de l'enseignement des équations. Dans ce cas encore, nous avons recouru à une méthodologie clinique.

La démarche clinique est institutionnelle. Elle se fait par la médiatisation d'un « objet » qui fait référence à une institution. L'approche s'apparente à celles dont s'inspire Ginzburg (1989), en particulier, qui a élaboré un paradigme nommé indiciaire, pour parvenir, à partir de l'individualité du phénomène ou de la chose observée, à « remonter » à des caractères généraux. D'autre part, pour constituer une « clinique » pour le didactique nous tirons les informations suivantes du travail de Leutenegger (2009):

« Sur le fait que l'histoire de la clinique médicale montre que le phénomène « maladie » n'existe pas en tant que tel « dans la nature » mais relève d'une construction à partir des signes qui eux-mêmes renvoient à des symptômes. Parmi les symptômes, ne deviennent signes que les observables qui font sens pour le clinicien : celui-ci s'attache à faire parler les symptômes, à les ériger en signes et à les regrouper selon des configurations signifiantes en les rattachant à des savoirs établis. Sur ce plan, une clinique pour le didactique ne peut construire des phénomènes didactiques qu'à partir des signes ».

Dans notre recherche, surtout dans l'étude de la séquence des équations dans une classe ordinaire, l'étude des signes qui laissent des empreintes, par exemple un discours, des techniques d'élèves ou du professeur, etc et leurs regroupements en lien avec les organisations mathématiques enseignées pourront être des symptômes fiables pointant le phénomène du « dédoublement des milieux ».

Nous pouvons dire qu'une démarche clinique en didactique est activée dans une dialectique entre les symptômes d'une « connaissance » mis en avant par un individu et les indices qui leur correspondent. Les signes étudiés devraient être en étroite connexion avec des organisations mathématiques du savoir étudié ou d'un savoir antérieur. Nous supposons que parmi les indices recueillis, il y aura ceux qui peuvent être organisés en des regroupements « signifiants » d'un certain rapport au savoir.

Ce sont des signes que nous cherchons pour étudier des effets sur le dédoublement des milieux. Pour notre recherche, nous postulons de même, en règle générale, l'existence d'une dialectique entre symptômes / indices et information sur les rapports aux mathématiques. L'étude de ces rapports pourra nous conduire à observer les techniques didactiques utilisées par l'enseignant pour faire étudier les mathématiques enseignées. Les regroupements

d'indices pourraient aussi permettre d'accéder aux éléments technologiques qui vivent au sein du système, qu'ils soient mathématiques ou didactiques.

3.2.2. Sur la théorie anthropologique

Aux fondements de la TAD se trouvent, comme on l'a vu, les institutions, les individus et les positions qu'occupent les individus dans les institutions (Bosch & Chevallard, 1999). « En venant occuper ces positions, les individus deviennent les sujets des institutions – sujets actifs qui contribuent à faire vivre les institutions par le fait même de leur être assujettis ». Selon cette théorie, à la base de la modélisation du cognitif, se trouvent quatre notions fondamentales : celles d'objet, de rapport, de personne et d'institution. Dans ce qui suit, nous reprenons certains éléments de la présentation de ces notions telles qu'elles sont exposées par Chevallard dans son article « Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques » (2003).

« Toute entité quelconque (matérielle ou immatérielle) qui existe pour au moins un individu est considérée comme étant un objet. Par suite, tout est objet : une voiture, un graphique, la sensation de peur, etc.

La notion de rapport personnel d'un individu à un objet o , est le système noté $R(x, o)$, de toutes les interactions que cet individu peut avoir avec l'objet : le penser, le toucher, le calculer, en parler, en manger, etc. Dans ce sens, la notion de rapport n'est pas considérée dans son acception intellectualiste, remarque Chevallard : on a un rapport à la brosse à dents, au métro, au Président, à la notion de dérivée, etc ».

La personne x est le couple formé par un individu et l'ensemble de rapports personnels aux objets qu'il a formés à un moment donné de son histoire. Dans ce sens, ce qui peut changer sont les rapports que les individus entretiennent aux objets, donc les personnes ; l'invariant est donc l'individu.

Suivant l'exposition de Chevallard (1992) une personne devient un « sujet d'une institution I » quand elle devient « assujettie » à I ¹³. « Il y a ainsi une dialectique des rapports institutionnels et des rapports personnels : les premiers fournissent les conditions et les contraintes sous lesquelles se créent et évoluent les seconds, et en retour les seconds, lorsqu'ils sont idoines aux premiers, viennent les soutenir » (Chevallard, 1989a).

¹³ Au sein de toute institution, il existe plusieurs positions p légitimées. Ainsi, pour chacune de ces positions il existe le « rapport à l'objet o qui devrait être, idéalement, celui des sujets de I en position p », ce rapport est nommé *rapport institutionnel* et noté par $R_I(p, o)$. Autrement dit, il s'agit de « ce qui se fait dans » l'institution I , avec l'objet de savoir o , lorsque la personne occupe la position p (Chevallard, 1989a). Un « bon sujet » de I en position p par rapport un objet o , est la personne placée dans cette position dont le rapport à o est conforme au rapport institutionnel établi dans I . En d'autres termes, si $R(X, o) \equiv R_I(p, o)$.

Le rapport institutionnel au savoir est l'ensemble des rapports personnels à un objet jugés nécessaires dans une institution I pour assumer d'une manière idoine le rôle dévolu au sujet en position p .

Nous pouvons identifier la dialectique entre les symptômes et les indices, lors d'une démarche clinique, à partir de l'ensemble des rapports personnels à un objet o en position p . Les rapports institutionnels seront ainsi envisagés comme les regroupements de rapports au savoir établis à partir des rapports personnels. Sur ce plan, nous pouvons dire que la dialectique entre les rapports personnels et les rapports institutionnels au savoir dans une approche didactique est identifiée à celle qui se concrétise entre symptômes et indices dans une approche clinique. Nous pouvons associer cette identification à celle donnée par Chevallard dans son Séminaire (2009/2010) qui avance que la « méthodologie » utilisée en TAD peut être désignée comme méthodologie clinico-expérimentale :

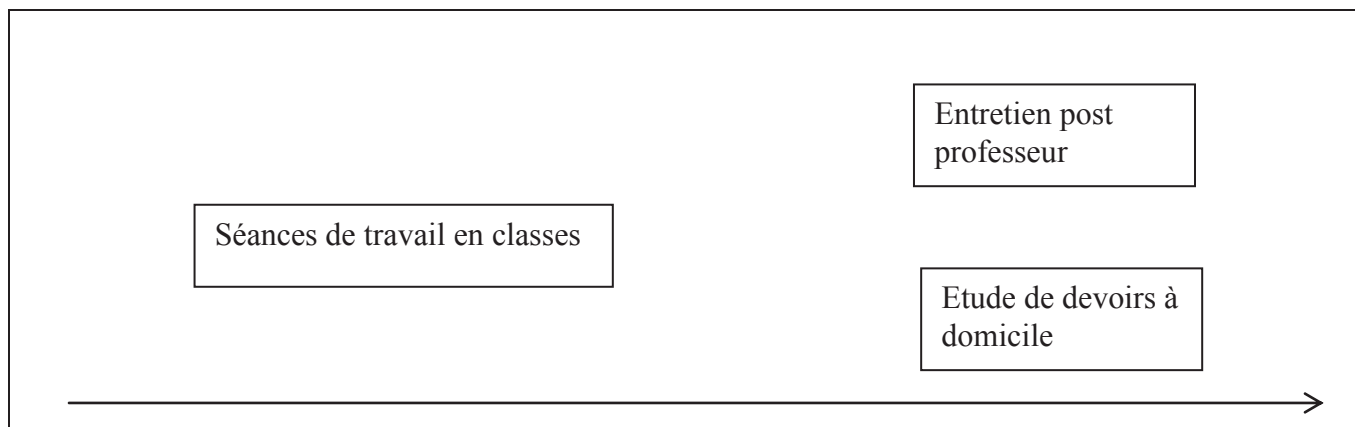
« Cette dernière suppose en amont comme en aval une clinique des types d'objets¹⁴ – quels qu'ils soient – sur lesquels porte la recherche considérée, et qui permet seule de concevoir et de réaliser des gestes observationnels « purs » ou expérimentaux (au sens large ou au sens fort), dont elle permet de lire et d'interpréter les résultats. »

3.3 Description de la démarche méthodologique de la recherche

Dans le recueil des données pour l'étude du phénomène didactique « le dédoublement des milieux », nous avons étudié des transcriptions des séances à partir des vidéos. A cela s'ajoutent des informations recueillies à travers des entretiens avec les enseignants (transcriptions des enregistrements sonores) et l'étude d'un devoir fait à domicile par les élèves sur des équations. La construction de ce système de traces reliant un certain nombre d'évènements a pour but de faire émerger le phénomène didactique postulé.

La figure ci-dessous renvoie aux éléments principaux que nous avons utilisés pour recueillir les données :

¹⁴ Les objets qu'étudie le chercheur peuvent être des personnes, des institutions ou tout type de productions de l'activité humaine, et en particulier des objets discursifs ou textuels, notamment des « exposés » à propos d'un thème déterminé (Chevallard, 2009 – 2010).



3.3.1 Sur l'entretien-post professeur

Nous situons en fait le rapport au savoir en référence au point de vue de Chevallard(1996) dans ce qu'il nomme « l'autre scène didactique » et/ou l'anthropologie du didactique (Id, 1989a). Nous serons donc sensibles à l'hypothèse que les savoirs institutionnels transmis ne sont pas seulement issus du rapport « officiel » à l'institution scolaire, mais qu'ils ressortent aussi de la pratique personnelle de l'enseignant.

Notre référence conceptuelle se situe alors à l'articulation entre le didactique et le clinique prenant à la fois en compte les contraintes externes amenées par l'enseignant, ou qui pèsent sur l'enseignement, en différenciant ici le rapport « officiel » au savoir et le rapport personnel au savoir.

Le but de l'entretien avec la professeure qui a enseigné la « soustraction » était de recueillir, « à chaud », l'avis, le sentiment, l'analyse réflexive du professionnel après l'accomplissement d'une séance de travail. Il s'agit pour nous d'étudier les éléments des milieux institutionnels du savoir mis en place par l'enseignante au cours de la séance. Nous avons interprété ces éléments en termes de niveaux dans l'échelle de codétermination didactique. Enfin, nous avons illustré par un tableau les niveaux mobilisés par le professeur.

3.3.2 Sur l'étude du devoir à domicile

Cette étude, du côté des élèves, vise à explorer, à travers de leurs productions écrites, comment et à partir de quels objets ils se souviennent être entrés dans les séances précédentes et y avoir évolué. Il n'est donc pas question pour nous de vérifier, après coup, si les élèves ont bien compris, voire appris.

Il s'agit pour nous d'étudier les éléments des milieux cognitifs convoqués et utilisés par les élèves au cours d'une séance précédente. Nous avons interprété ces éléments en termes de niveaux de codétermination didactique et les avons illustrés dans des tableaux.

3.4 Description des démarches des séquences étudiées

3.4.1. Description de la démarche pour les équations au Liban

Au mois d'avril 2009, la classe EB7 a commencé l'étude du chapitre sur les équations du premier degré à une inconnue de la forme $ax + b = cx + d$ (où a , b , c et d sont des nombres rationnels). Cette séquence de quatre séances a été filmée. Nous avons ainsi débuté notre recherche par des observations sur ce thème là.

La première séance était destinée à l'explication du chapitre, les deux autres séances étaient réservées à des applications directes afin d'institutionnaliser les techniques de résolution d'une équation algébrique à ce niveau et enfin, la dernière séance était consacrée à mathématiser une situation réelle (la mettre en équation). Nous avons transcrit toutes les séances.

Cependant, nous avons trouvé nécessaire de mener une analyse sur la première séance car la problématique, ainsi que les premières hypothèses sur le phénomène didactique « le dédoublement des milieux », y avaient émergé. En outre, nous avons photographié, tant que l'observation dans les classes le permettait, des devoirs d'élèves faits à domicile. Nous en avons analysé quatre, ceux qui pour nous étaient capables de faire avancer notre sujet de recherche.

3.4.2. Description de la démarche pour les nombres relatifs au Liban

Au mois de novembre 2011, les classes EB6 ont commencé l'étude des « Nombres Relatifs ». Le déroulement de la séquence a pris sept séances. La première séance a été transcrite ainsi que des extraits de toutes les autres séances. Cependant, nous avons décidé d'analyser les quatre premières séances. Les analyses ont été élaborées afin de montrer l'existence de ce phénomène didactique dans une séquence organisée par une ingénierie didactique. Il s'agit de montrer une généricité existentielle de ce phénomène dans des conditions différentes que celles qui prévalent dans l'enseignement ordinaire.

Pour chaque séance, nous avons précisé les organisations mathématiques auxquelles se réfèrent des élèves et le professeur, élaborées en termes de niveaux de codétermination didactique. Nous avons illustré cela par des tableaux qui montrent les différents niveaux

concernés. Enfin, nous avons illustré dans un tableau les changements et évolutions des différents sujets étudiés tout au long de la séquence.

3.4.3. Description de la démarche pour la soustraction en France

Au mois de novembre 2010, les classes de CE1 (EB2) ont commencé l'étude de la soustraction dans une séquence mise en place au sein d'une ingénierie didactique dans une école en France. Nous avons choisi d'analyser une seule séance (leçon 3) pour tester l'existence et la généricité du phénomène didactique « dédoublement des milieux » dans des circonstances différentes de celles qui avaient été observées sur les nombres relatifs. Nous avons décidé d'analyser cette séance en sachant que la professeure française mettait en œuvre une ingénierie conçue par Brousseau (1986) et révisée par Berté et Quilio (1999).

Cette séance a été visionnée et transcrite. Elle était organisée par la professeure dans le but de résoudre deux problèmes avec les élèves. Nous avons décidé d'analyser seulement le premier problème car le déroulement du second problème était quasiment similaire (voir annexe 7.3, p.78). Ensuite, nous avons organisé un entretien avec la professeure au cours duquel nous avons cherché à déterminer son point de vue sur le déroulement de la séance. Il s'agissait de repérer quelques éléments des milieux institutionnels que nous n'avions pas saisis lors du visionnement de la séance. Nous avons fait en sorte de disposer ces éléments au sein de l'échelle des niveaux de codétermination didactique.

Chapitre 4 :Problématique de recherche

CHAPITRE 4

PROBLEMATIQUE ET QUESTIONS DE RECHERCHE

4.1 Etude épistémologique de l'objet d'étude

4.2 Informations générales sur le professeur

4.3 Méthodologie de travail pour cette séquence

4.4 Les équations dans le programme libanais 1997

4.5 Le manuel scolaire

4.6 Etude praxéologique de la partie « Cours » du manuel

4.7 Premières analyses : vers une problématique de recherche

4.8 Problématique de recherche

4.9 Questions de recherche

Introduction

Equation du premier degré à une inconnue en classe de EB7 au Liban

Premier pas vers la résolution algébrique

Le thème choisi est les « Equations » au niveau de la classe de EB7 au Liban. Les élèves sont habitués à résoudre des équations, dès la première classe de l'enseignement primaire EB1, sous le nom « égalités à trou », comme dans $2 + \dots = 7$ et $2 \times \dots = 10$. Alors qu'un élève de EB7 est amené à résoudre des équations se ramenant à la forme $a.x = b$.

L'introduction des lettres dans le programme libanais prend place dans les trois classes du cycle II (EB4, EB5 et EB6¹⁵). En classe de EB5, les lettres interviennent surtout dans le domaine de « *La mesure*¹⁶ », en particulier dans le calcul du périmètre et de l'aire du carré ($C \times C = A$) et ceux du rectangle ($L \times l = A$). Dans le curriculum (1997) de la classe de EB6, les lettres se présentent dans le domaine des « *Expressions algébriques* », elles se situent dans le thème « *Calcul sur des expressions littérales* » (la lettre représente une grandeur) et le thème « *Valeur numérique d'une expression littérale* ».

L'« Equation » est un objet de savoir en EB7, où la lettre prend le statut d'une inconnue. Le passage des lettres « grandeurs » à des lettres « variables » cause aux élèves des difficultés. Kazan (2003) a montré que la résolution des équations se ramenant à la forme $ax=b$ est en lien avec la complexité ostensive des expressions algébriques proposées (Tonnelles, 1980), et les élèves acquièrent par répétition des exercices la résolution en mobilisant plusieurs techniques routinières.

Nous supposons que les techniques mobilisées par les élèves, dans l'activation de cet objet de savoir, peuvent être ancrées chez eux au cours de leurs passés scolaires lors de la résolution des équations « numériques » de type $a \times \dots = b$. Notre supposition est soutenue par Mercier (2004) qui considère que le travail algébrique n'est pas nouveau aux élèves à ce niveau. Il s'appuie sur l'invention des « formules » qui seront devenues « *le moyen de résoudre le problème, alors elle* (c'est-à-dire la formule) *va s'algébriser* ». Houdebine (1991) propose plusieurs repères pour réaliser une progression sur la résolution des équations (en quatrième en France), entre autres, « *un travail de « préparation lointaine » est nécessaire sur deux*

¹⁵ EB4, EB5 et EB6 représentent respectivement les classes CM1, CM2 et Sixième en France.

¹⁶ Les quatre domaines d'études en classe de EB5 sont : Arithmétique et Algèbre, Géométrie, Mesure et Statistique (Curriculum libanais, 1997).

plans ; 1) la maîtrise des expressions algébriques et 2) la maîtrise de la notion de variables et d'équations ».

Le travail algébrique autour les équations met donc en relief plusieurs connaissances antérieures des élèves. Il doit les aider à optimiser différentes techniques servant à résoudre des équations et solutionner des problèmes concrets d'une façon plus économique. Mercier (op.cit) ajoute : *« il faut que dans la culture des élèves quelque chose d'une écriture algébrique existe »*. Dans ces conditions, le travail dans le domaine algébrique ne paraît pas inné chez les élèves, il faut assurer une éducation favorisant l'exploration de l'utilité de ce domaine pour que les élèves puissent ressentir son besoin, voire sa raison d'être. Il faut en plus que des problèmes et techniques pré-algébriques aient été rencontrés par les élèves dans l'enseignement primaire.

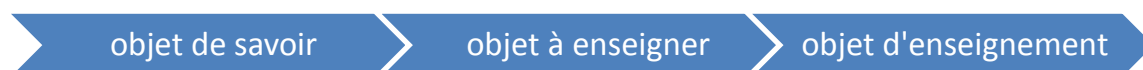
Par ailleurs, l'enseignement des « Equations » à ce niveau est considéré comme nouveau aux élèves de EB7 parce qu'il met en œuvre des objets mathématiques d'ordre algébrique pour la première fois.

Notre hypothèse principale s'appuie sur la conviction que dans toute forme d'enseignement, quelle soit dirigée sous la forme d'un cours ordinaire ou quelle soit sous la forme d'une ingénierie didactique, il va y avoir une activation de plusieurs techniques personnelles. Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence de différents milieux entretenus par les élèves et le professeur afin de prélever une problématique de notre recherche

Pour mener à bien notre observation, nous avons choisi une classe de EB7 d'une école libanaise privée de Beyrouth où nous avons filmé, au mois d'avril 2009, une séquence d'enseignement des « Equations ».

4.1 Etude épistémologique de l'objet d'étude

Dans cette partie, nous étudions un exemple qui met en place la transposition didactique définie par Chevallard (1985) (*voir 2.1, p.35*). Nous reprenons que cette notion représente la distinction entre le « savoir savant », tel qu'il découle de la recherche, et le « savoir enseigné » qu'on observe dans les pratiques de classe. Nous pouvons ainsi illustrer la transposition didactique par le schéma ci-dessous :



La transposition didactique consiste à extraire un savoir de son contexte (universitaire, social, historique, ...) pour le recontextualiser aux niveaux des classes.

Nous allons tenter d'étudier comment les prédécesseurs avaient fait pour résoudre des problèmes dont la solution se ramène à une « Equation du premier degré à une inconnue ». Notre but n'est pas de déterminer si l'enseignant connaît l'histoire des mathématiques ou pas, mais nous voulons concrétiser des indices nous permettant d'affiner le rapport personnel de l'enseignant au savoir et de mesurer, si c'est possible, sa réflexion épistémologique dans la construction de son enseignement.

Pour cela, nous retournons trois siècles en arrière dans l'histoire des sciences, en 1760, nous avons choisi de côtoyer le mathématicien Clairaut et feuilleter quelques pages de son livre « Eléments d'algèbre ».

4.1.1. Résolution par l'arithmétique d'une situation réelle.

Les problèmes mathématiques ont une première particularité qui permet de les distinguer aisément parmi beaucoup d'autres : ce sont des problèmes très difficiles. Leur solution repose sur des techniques spécifiques découvertes et améliorées sans cesse au fil des siècles. Ce sont ces méthodes qu'il convient d'apprendre. Dans la plupart des problèmes traités, il s'agit donc de s'entraîner à utiliser des « outils » et il est malheureusement bien rare que ces outils s'appliquent à des situations étrangères aux mathématiques (Lombard, 2003)

Nous nous intéressons à étudier dans ce contexte comment Clairaut (1760) avait fait pour résoudre des problèmes par leurs propres moyens arithmétiques et algébriques.

Nous étudions le Problème page 2 du livre :

Partager une somme, par exemple, 890ω ¹⁷ à trois personnes, en sorte que la première ait 180ω plus que la seconde, et la seconde 115ω de plus que la troisième.

Clairaut dissèque les nouveaux éléments du discours mathématiques éclairant l'évolution au cours de cet épisode de la manière suivante :

Notons que nous avons numéroté les étapes afin de clarifier l'explication de la résolution.

Etapes	Résolution arithmétique
1	Supposons qu'on connaît la troisième part.
2	Il faudra y ajouter 115ω et l'on a la valeur de la seconde
3	Ensuite pour avoir la première, on ajoute 180ω à cette seconde part.
4	Ce qui revient de même à ajouter 180ω plus 115ω ou 295ω à la troisième
5	Quelque soit sa valeur, nous savons que la troisième plus elle même avec 115ω , plus encore elle même avec 295ω doit faire une somme égale à 890ω .
6	Or le triple de la troisième plus 115ω plus 295ω ou une fois plus 410ω est égale à 890ω .
7	Or le triple de la part qu'on cherche plus 410ω est égal à 890ω . Il faut donc que le triple de la troisième soit plus petit que 890 de 410ω .
8	Donc le triple de la troisième est égal à 480ω .
9	Donc la plus petite part est égale à 160ω .
10	La seconde sera par conséquent de 275ω et la première ou la plus grande est de 495ω .

Figure 2 : Résolution arithmétique de Clairaut 1760

Nous remarquons que l'outil essentiel de cette démarche est le langage ordinaire, augmenté du calcul sur les nombres. Et puisque nous ne calculons pas sur le langage ordinaire, nous attribuons dans ce cas à l'arithmétique la vertu du « raisonnement » (Chevallard, 1989b).

Lombard (2003) considère que la solution à tout problème mathématique repose sur des techniques qui ont pratiquement « tous les caractères de langages. Ils sont, si l'on préfère, « structures comme des langages », et ils s'apprennent donc comme des langages. C'est-à-dire par leur mise en œuvre effective et non pas par des discours extérieurs sur ces langages [...] Apprendre à raisonner revient à s'entraîner à mettre en jeu des combinaisons de « signes », à composer des « phrases » avec ces signes ». C'est ainsi le langage, la technique pratiquée, qui porte en elle-même l'élément technologique qui est le raisonnement. Clairaut accorde une importance au langage qui modélise d'une façon ou d'une autre la culture des individus.

¹⁷ L'unité utilisée dans le livre n'est pas bien claire. Nous avons choisi cette unité qui la ressemble de près.

Dans le contexte de la TAD, nous pouvons dire que le « langage » transmis entre les gens au cours de l'épisode de Clairaut correspond à une technique : (τ) et le « raisonnement » élaboré pour mettre en place ces techniques correspond à une technologie (θ). Ces deux éléments constituent la base de la praxéologie technologique [τ , θ]. Ils sont adaptés effectivement à certains types de problèmes semblables.

La solution arithmétique d'un problème à l'époque de Clairaut mobilise deux domaines de connaissances :

- 1) L'explicitation du problème au biais du langage ordinaire.
- 2) Le calcul sur les nombres. Le calcul est présent ici sous sa désignation « Calculer par surcomptage¹⁸ » en mettant en œuvre les éléments du système de numération. Il suffirait dans l'exemple précédent de dire que le triple d'une part pour prendre une même distance trois fois. Donc le raisonnement arithmétique était suffisamment varié et riche pour entretenir des savoir-faire oral.

Avant de passer à exposer une résolution algébrique de la même équation, nous avons trouvé nécessaire de citer cet extrait de Clairaut (1760) qui s'est placé entre les deux résolutions arithmétique et algébrique :

« C'est vrai, semblablement ainsi que les premiers algébristes ont raisonné quand ils se sont proposées de pareilles questions, sans doute qu'à mesure qu'ils avançaient vers la solution d'une question, ils chargeaient leur mémoire de tous les raisonnements qui les avaient conduits au point où ils en étaient lorsque les questions n'étaient pas plus compliquées que la précédente, il n'y avait pas de quoi se rebuter. Mais dès que leurs recherches ont offert plus d'idées à retenir, il a fallu qu'ils cherchassent une manière plus courte de s'exprimer qu'ils eussent quelques signes simples, avec lesquels quelqu'avancés qu'ils fussent dans la résolution d'un problème. Ils pussent voir d'un coup d'œil ce qu'ils avaient fait ce qu'il leur restait à faire. Or l'espèce de langage particulier qu'ils ont imaginé pour cela, c'est l'algèbre ».

Cela comme si on avait l'intention de construire, au moins, un modèle spécifique pour chaque type de problèmes adapté aux études des autres problèmes semblables. Cette intention paraissait un outil indispensable à la recherche d'une technique plus économique et de construire la mémoire du modèle. Cette mémoire sera le moteur pour la résolution des

¹⁸ Quand il s'agit d'ajouter deux quantités, on peut garder en mémoire la première quantité comme si elle avait été déjà dénombrée, et continuer à réciter la suite numérique en pointant les objets de la deuxième (effectivement ou mentalement) : je dois ajouter 5 et 3. Pour cela je garde " 5 " en mémoire et je récite la comptine numérique à partir de 5 en énonçant seulement les trois mots-nombres qui suivent : " 6, 7, 8 ".

En classe, nous pouvons coller quand même les cartes des nombres allant de 1 à un ordre donné. Pour calculer 5+3, je marque la carte 5 et je sur-compte trois cartes à partir de celle-ci.

problèmes prototypiques : « [...] ils chargeaient leur mémoire de tous les raisonnements qui les avaient conduits au point où ils en étaient » (Clairaut, 1760). A notre avis, ce chargement organisé de la mémoire avait amené à une catégorisation des problèmes typiques. Cela nous invite à rejoindre Brousseau (1998a) dans la notion de « situation fondamentale ¹⁹ », cas par exemple de la situation « *Qui dira vingt* » pour déclencher la division euclidienne qui à une situation fait correspondre une connaissance. Kuzniak (2004) clarifie que « *Toute collection de situations qui caractérisent une même connaissance mathématique, possède au moins une situation fondamentale qui les génère toutes par la détermination des valeurs de ses variables* ». Nous trouvons cela un bon exemple qui peut mettre en place une situation « représentante ». Elle pourrait réactiver la mémoire du modèle ainsi que sa solution. En d'autres termes, cette mémoire est présente parce qu'elle permet de replacer le savoir mathématique en jeu à la remémoration de la « situation fondamentale » qui le génère.

En guise de conclusion, le travail de Clairaut constitue un indéniable progrès dans la résolution des problèmes par l'arithmétique. Pourtant il marque, dans son livre, l'existence des équations « compliquées », devant lesquels l'arithmétique seule nous laisserait coi. Nous citons par exemple les deux équations $\frac{7x}{3} + 180 = 550$ et $x + \frac{11}{17}x + \frac{10}{17}x + 300 \neq 1000$ qui sont considérées comme plus difficile que l'équation $3x + 41 \neq 89$. Nous n'allons pas étudier les causes de cette complication. Mais nous disons que les seules lumières de l'arithmétique paraissaient insuffisantes pour tenir le secteur de la « résolution d'équations ». D'où l'usage de l'algèbre devrait paraître, en particulier, un moyen efficace et économique pour résoudre des situations compliquées.

4.1.2. Résolution algébrique d'une situation réelle

Nous reprenons le problème énoncé précédemment :

Partager une somme, par exemple, 890 ω à trois personnes, en sorte que la première ait 180 ω plus que la seconde, et la seconde 115 ω de plus que la troisième.

¹⁹ « C'est un schéma de situation capable d'engendrer par le jeu des variables didactiques qui la déterminent, l'ensemble des situations correspondant à un savoir déterminé. Une telle situation, lorsqu'on peut l'identifier, offre des possibilités d'enseignement mais surtout une représentation du savoir par les problèmes où il intervient permettant de restituer le sens du savoir à enseigner », Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques, Brousseau (1998a).

La résolution algébrique de ce problème selon Clairaut (1760) est représentée dans son livre « Eléments d'Algèbre » de la façon suivante :

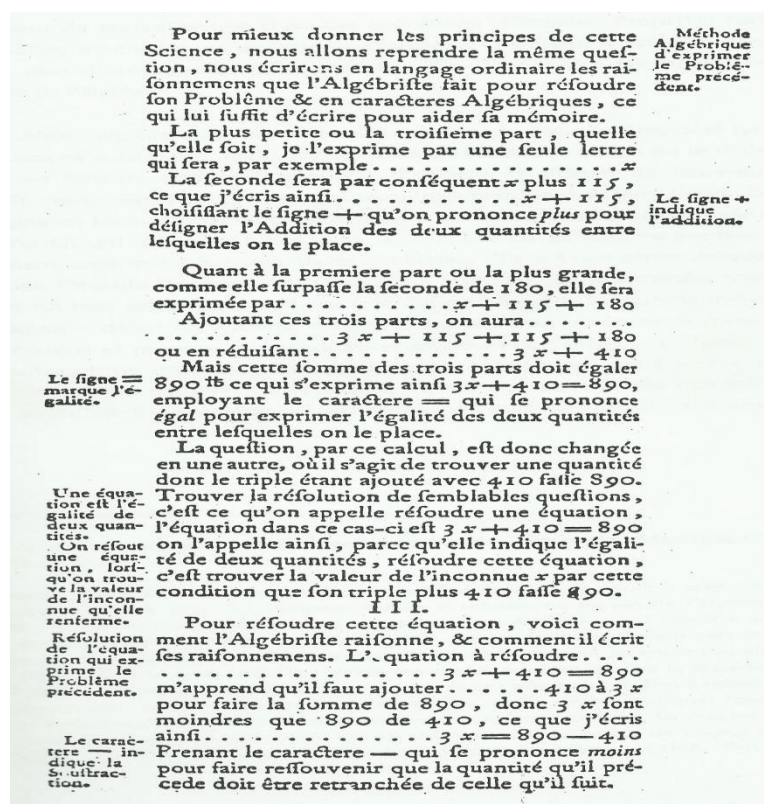


Figure 3 : Extrait du livre de Clairaut 1760

Etapes	Résolution algébrique
1	La plus petite part ou la troisième, quelque soit, je l'exprime par la lettre x (le pronom « je » est relatif à l'auteur du livre).
2	La seconde sera par conséquence x plus 115, qu'il écrit ainsi $x+115$. Choisisant le signe + qu'on prononce plus pour désigner l'addition.
3	La première part surpasse la deuxième de 180 ω , elle sera $x+115+180$.
4	Ajoutant ces trois parts, on aura $3x+115+115+180$ ou en réduisant $3x+410$.
5	Mais cette somme de trois parts doit égaler 890 ω . Ce qui exprime aussi $3x+410 = 890$ (employant le caractère « = » qui se prononce égal pour exprimer l'égalité des deux quantités entre lesquelles on le place).
Clairaut a ajouté : « Trouver la solution de semblables questions, c'est-ce qu'on appelle résoudre une équation. L'équation dans ce cas ci est $3x+410 = 890$. On l'appelle ainsi parce qu'elle indique l'égalité de deux quantités, résoudre une équation, c'est trouver la valeur de l'inconnue x par cette condition que son triple plus 410 fasse 890 ω ».	
6	$3x+410 = 890$ m'apprend qu'il faut ajouter 410 à $3x$ pour faire la somme de 890. Donc $3x$ sont moindres que 890 de 410 ce que j'écris ainsi $3x = 890 - 410$ (le caractère « - » qui se prononce moins pour faire ressouvenir que la quantité qu'il précède doit être retranchée de celle qui suit.
7	De cette nouvelle équation $3x = 890 - 410$ l'on tire cette autre nouvelle équation $3x = 480$.

8	Mais si $3x$ valent 480, un x vaut donc le tiers de 480 ou 160 ce que j'écris ainsi $x = \frac{480}{3} = 160 .$ La question est résolue puisqu'il suffit de connaître une des parts pour connaître les autres.
---	--

Figure 4 : Résolution algébrique de Clairaut 1760

Nous remarquons d'abord que l'enseignement de la résolution algébrique de certains problèmes courants suppose des instruments qui ne font pas partie de l'algèbre tel qu'il s'enseigne dans nos jours. Par exemple pour passer de l'équation $3x+410 = 890$ à l'équation équivalente $3x = 890 - 410$ nous pratiquons une règle d'action (Houdebine, 1991) dite « la transposition des termes », tandis que Clairaut l'a résolue par l'intermédiaire d'un raisonnement par « le calcul » en mettant en œuvre le concept de la différence de deux nombres positifs « 890 et 410 ». Cette caractéristique due au « raisonnement » peut se considérer comme une richesse profuse sans doute trop généreusement à l'arithmétique (Chevallard, 1989b). En effet, elle trouve mécaniquement son exacte traduction dans les égalités algébriques qui leur répondent.

Donc, la résolution actuelle des équations se fait par l'usage des règles dues aux illustrations de didactique des « Equations du premier degré à une inconnue ». Elle n'avait pas eu lieu à l'époque de Clairaut parce que le passage d'une équation à une autre équation équivalente avait été muni par des raisonnements qui relient le statut et l'existence de la lettre x à sa signification pratique (une part d'un hérité). Par exemple « $3x+410$ » apprend Clairaut « *qu'il faut ajouter 410 à $3x$ pour faire la somme [...]* », qui est loin d'être considérée comme une expression algébrique formée par les deux objets mathématiques : $3x$ et $+410$. De même, pour résoudre l'équation $\frac{7x}{3} + 180 = 5500$, Clairaut a raisonné de la façon suivante : « *Si le tiers de $7x$ est 5320, les $7x$ entiers valent donc trois fois davantage, ce que l'on écrit ainsi $7x = 5\ 3\ 2\ 0\ 3$* ». Celle-ci met en relief l'usage du langage arithmétique au service de la résolution des équations. Le langage évite le recours à de nouveaux systèmes de nombres, comme celui des « Nombres Rationnels », pour cette équation.

Désormais, l'algèbre enseignée possède une thématique propre qui n'est, en aucun sens, une généralisation de celle du langage arithmétique. Chevallard (1989b) a, par ailleurs, mis en évidence que le *calcul algébrique*, par exemple le calcul sur l'expression $(3x+410)$, n'est pas

un épiphénomène du numérique, il doit être considéré en soi comme un élément essentiel de production de nouveaux systèmes de nombres²⁰.

²⁰ « A tout domaine de calcul correspondent ainsi des formes (ou structures) algébriques, qui offrent une image formelle du domaine de calcul considéré. Aux entiers naturels, on pourra faire correspondre la structure de demi-anneau (unitaire, commutatif, intègre) ; aux entiers relatifs, la structure d'anneau (euclidien) ; aux rationnels, la structure de corps; etc. L'étude de ces calculs algébriques est l'un des objets de l'algèbre »,

4.1.3. Etude comparative entre la résolution arithmétique et la résolution algébrique

Dans le but de rechercher des outils pertinents pour analyser des gestes en rapport avec la séance observée, nous allons faire une étude comparative entre la résolution arithmétique et la résolution algébrique de la situation prescrite par Clairaut.

Partager une somme, par exemple, 890 u à trois personnes, en sorte que la première ait 180 u plus que la seconde, et la seconde 115 u de plus que la troisième.

Etapes	Résolution arithmétique	Etapes	Résolution algébrique
1	Supposons qu'on connaît la troisième part.	1	La plus petite part ou la troisième, quelque soit, je l'exprime par la lettre x .
2	Il faudra y ajouter 115 u et l'on a la valeur de la seconde	2	La seconde sera par conséquence x plus 115, qu'il écrit ainsi $x+115$.
3	Ensuite pour avoir la première, on ajoute 180 u à cette seconde part.	3	La première part surpasse la deuxième de 180 u, elle sera $x+115+180$.
4	Ce qui revient de même à ajouter 180 u plus 115 u ou 295 u à la troisième	4	Ajoutant ces trois parts, on aura $3x+115+115+180$ ou en réduisant $3x+410$.
5	Quelque soit sa valeur, nous savons que la troisième plus elle même avec 115 u, plus encore elle même avec 295 u doit faire une somme égale à 890 u.	5	Mais cette somme de trois parts doit égaler 890u. Ce qui exprime aussi $3x+410 = 890$ (employant le caractère « = » qui se prononce égal pour exprimer l'égalité des deux quantités entre lesquelles on le place).
6	Or le triple de la troisième plus 115 u plus 295 u ou une fois plus 410 u est égale à 890 u.	6	$3x+410 = 890$ m'apprend qu'il faut ajouter 410 à $3x$ pour faire la somme de 890. Donc $3x$ font moindres que 890 de 410 ce que j'écris ainsi $3x = 890 - 410$ (le caractère « - » qui se prononce moins pour faire ressouvenir que la quantité qu'il précède doit être retranchée de celle qui suit.
7	Or le triple de la part qu'on cherche plus 410 u est égal à 890 u. Il faut donc que le triple de la troisième soit plus petit que 890 de 410 u.		De cette nouvelle équation $3x = 890 - 410$ l'on tire cette autre nouvelle équation $3x = 480$
8	Donc le triple de la troisième est égal à 480 u.	8	Mais si $3x$ valent 480, un x vaut donc le tiers de 480 ou 160 ce que j'écris ainsi $x = \frac{480}{3} = 160$
9	Donc la plus petite part est égale à 160 u.		
10	La seconde sera par conséquent de 275 u et la première ou la plus grande est de 495 u.		
Commentaires		Commentaires	
Le discours mathématique est un savoir faire		La résolution algébrique se fait par l'écrit.	

oral. Un problème sera résolu par le calcul sur les discours du langage ordinaire	C'est le passage du connu « Supposons qu'on connaît la troisième part » à l'inconnu « Donc la petite part est égale à 160 ».
Nous pouvons ajouter à ce propos la méthode de la « fausse supposition » qui convient de plus avec le passage du connu vers le nombre inconnu. Par cette méthode, nous choisissons une quantité (hypothèse), raisonner suivant les conditions de la situation et la comparer ainsi aux données du problème. A la lumière de son appropriation avec les données, nous accepterons la quantité ainsi supposéesinon, nous l'agrandirons ou prendrons une autre quantité plus petite.	Une pratique algébrique peut aboutir à une relation entre deux grandeurs (par exemple une expression du type $3x+2y+1$ où x et y désignent deux grandeurs). En algèbre nous manipulons aussi des symboles qui doivent être interprétés de diverses manières, en fonction du contexte. Nous voyons apparaître une distinction entre, au moins, trois utilisations différentes des symboles: a) En tant que "nombres inconnus spécifiques" (cas des équations); b) En tant que "nombres généralisés" (identités du type $a(b+c)=ab+ac$); c) En tant que "variables" (cas des fonctions ou des formules).
Le résultat d'une pratique arithmétique est toujours un nombre. En arithmétique, nous travaillons toujours avec des "nombres concrets".	L'activité algébrique met en jeu des "signes" ou "symboles".
Les symboles n'existent pas dans le langage arithmétique, chaque étape de résolution a un sens unique et un référent concret. Les étapes marquent des actions comme par exemple : « le triple de la troisième plus 115 u plus 295u ou une fois plus 410u est égale à 890u ». Donc nous ne pouvons pas trouver qu'une seule réponse qui permet de « donner ».	D'ailleurs, le sens de ces signes est modifié de façon essentielle. Dans le "langage algébrique" ces signes possèdent une certaine dualité qui complique leur utilisation et interprétation. Cette dualité des opérations fait référence au fait que, dans le langage algébrique, une opération signifie soit une action (comme en arithmétique: $x+5=8$), soit une permanence (c.à.d. indique une certaine opération peut ne pas être achevée, comme il

	en va de l'opération de multiplication dans l'expression $a(b + c) = ab + ac$). La dualité de l'égalité indique que le signe $=$ en algèbre peut signifier aussi bien une action -par exemple, dans $2a+3a = ("donne") 5a$ - qu'une équivalence - comme dans l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
--	--

En résumé, les élèves pourront appliquer leurs connaissances antérieures dans le domaine de l'Arithmétique pour résoudre des Equations par des outils algébriques. Cette étude pourra nous renseigner sur les niveaux du dédoublement des milieux dans les cas où les élèves combinent la résolution arithmétique par la résolution algébrique dans une équation.

4.2 Informations générales sur le professeur observé

La première phase de la transposition didactique concerne le passage du savoir savant au savoir à enseigner avec l'impact de la noosphère²¹, et la seconde phase le passage du savoir à enseigner au savoir enseigné. Les enseignants sont les acteurs principaux de la deuxième phase de la transposition didactique interne. Ils sont reconnus institutionnellement comme ayant des connaissances mathématiques déterminées et une certaine expérience de l'enseignement, par le système scolaire (Tavignot, 1995). Dans ce sens, nous commençons cette étude en donnant des informations générales sur l'enseignant observé et sur la façon dont il prépare la classe.

Le professeur, âgé de 35 ans, a fait quatre ans d'études universitaires à la Faculté des Sciences – Université Libanaise, pour obtenir une licence en Sciences Physiques. Notons que la première année de ce parcours est en tronc commun avec le parcours des Mathématiques. Donc au niveau des connaissances mathématiques, le professeur atteste d'un certain baguage de connaissances mathématiques qui lui permet de concevoir des organisations mathématiques.

Le professeur a 13 ans d'expérience d'enseignement des mathématiques dans cette école. Il a toujours la même charge : enseigner la classe de EB6 du cycle II et toutes les classes du cycle III²². L'année de nos observations, le professeur enseignait deux classes de EB7 de 22 élèves chacune. Signalons, qu'il garde les mêmes élèves d'une classe à une autre à partir de la classe de EB6. Il planifie son enseignement mathématique au fur et à mesure de l'année selon une répartition précise en collaboration avec le coordinateur des mathématiques. Ses plans d'étude tiennent compte de ses expériences des années précédentes, des remarques pédagogiques et didactiques de son coordinateur, aussi que les erreurs des élèves des années précédentes.

Le professeur utilise le manuel scolaire comme ressource principale pour ses préparations du cours. Il propose en plus des activités mathématiques pour introduire des nouvelles notions et pour travailler une technique. Les activités sont menées par ordre de difficultés du plus simple au plus complexe. Il prend en considération le fait que la dévolution d'une notion devrait se mettre en œuvre pendant l'explication du cours et s'optimise en faisant travailler les élèves

²¹ La noosphère est le lieu de rencontre entre le système éducatif et son environnement sociétal, où s'arbitre la sélection des objets à enseigner, et où interviennent de nombreux individus aux fonctions multiples.

²² Le cycle III au Liban compte les classes: EB7 (Cinquième), EB8 (Quatrième), EB9 (Troisième).

plusieurs exercices typiques. Et pour lui, les exercices du livre ne répondent pas parfois au contenu mathématique de la notion. D'où la nécessité de préparer des exercices supplémentaires.

Le professeur illustre ce que l'on nomme le contrat « d'ostension²³ » caractérisé par Brousseau (1996) :

« Le professeur “ montre ” un objet, ou une propriété, l'élève accepte de le “ voir ” comme le représentant d'une classe dont il devra reconnaître les éléments dans d'autres circonstances. La communication de connaissance, ou plutôt de reconnaissance, ne passe pas par son explicitation sous forme d'un savoir ».

C'est à travers un discours ostensif de la part du professeur que l'élève va apprendre la résolution des « Equations ».

Le parcours didactique de ce professeur relève de la forme générale du « cours magistral », une technique qui d'après Matheron (2010) :

« Prenait la forme d'une ostension directe et assumée d'éléments du savoir, en direction des élèves. On y exposait le cours en y montrant tout d'abord un certain nombre d'éléments technologiques (une définition, une propriété, un postulat, etc.), suivis le plus souvent d'exemples, c'est-à-dire de l'ostension des techniques que la technologie permet de construire, ou des phénomènes qu'elle explique ».

4.3 Méthodologie de travail pour cette séquence

Deux choix méthodologiques sont possibles pour étudier les pratiques enseignantes : observer les pratiques enseignantes à partir d'une ingénierie didactique proposée par un groupe de chercheurs, ou bien observer la pratique quotidienne du professeur et de ses élèves. Nous avons choisi d'observer le deuxième type d'observation en se penchant à la fois sur :

- Les discours du professeur et des élèves en classe, recueillis à différents moments de la séquence que nous trouvons nécessaire.
- Les traces écrites au tableau qui représente un « lieu de travail », un « lieu de savoir » et un « lieu d'écriture » (Robert et Vandebrouk, 2003)²⁴.

²³ Brousseau (1996) caractérise le contrat d'ostension par: Le professeur « montre » un objet ou une propriété, l'élève accepte de le « voir » comme le représentant d'une classe dont il devra reconnaître les éléments dans d'autres circonstances».

²⁴ Robert et Vandebrouk (2003) ont caractérisé le tableau comme étant :

1. Lieu de travail : le professeur utilise le tableau comme un lieu de travail, sans jamais rédiger proprement devant les élèves. Cet usage permet de donner à voir un processus plus qu'un produit.

Notons qu'aux moments de notre observation de cette séquence, nous avons fait tous les jours un entretien à l'oral avec le professeur avant la séance. Ceci nous a permis d'être plus proches de certaines de ses décisions sur la gestion de sa classe.

En ce qui concerne les « Equations », le professeur a affirmé qu'il n'a aucune difficulté à expliquer cette notion. Pour sa préparation, il se base sur le manuel adopté par l'école. Il note les parties essentielles du cours et planifie des exercices d'application.

4.4 Les Equations dans le programme libanais de 1997

Pour cette recherche, nous avons muni une étude du programme libanais concernant les deux domaines : « Equations » et les « Nombres Relatifs ». Pour éviter les répétitions, nous avons choisi de détailler l'étude du programme sur les « Relatifs » (voir p. 168) et, de se contenter de mener un aperçu non exhaustif sur les programmes des « Equations » dans ce chapitre. La partie du programme portant sur les équations est montré dans l'extrait ci-dessous :

Cycle moyen		
ARITHMETIQUE ET ALGEBRE (90h)		
7. EQUATIONS ET INEQUATIONS (10 h)		
CONTENU	OBJECTIFS	COMMENTAIRES
7.1. Equations se ramenant à $ax = b$.	1. Remplacer une équation par une équation qui lui est équivalente. 2. Résoudre une équation du type $ax = b$ où $a \neq 0$. 3. Organiser des données et les traduire par une équation se ramenant à $ax = b$ et calculer ensuite x. • Connaître qu'on ne change pas l'équation quand on additionne aux deux membres ou on les multiplie par une même quantité. • Connaître que l'équation $ax = b$ a pour solution $\frac{b}{a}$ • Ramener une équation linéaire à la forme $ax = b$ par une succession d'opérations citées en 1. et 2. • Savoir choisir l'inconnue dans un problème, le mettre en équation, résoudre l'équation et donner la solution du problème.	On se limitera au cas où a et b sont numériques. On envisagera les équations particulières : $0 \times x = b$ ($b \neq 0$) et $0 \times x = 0$. On familiarisera l'élève au vocabulaire des équations : membre, inconnue, solution ou racine.

Figure 5 : Les équations dans le curriculum libanais

Dans le contexte des niveaux de codétermination didactique, le programme de la classe EB7 (Cinquième) au Liban est scindé en 3 domaines d'étude qui sont intitulés Arithmétiques et Algèbre (90h), Géométrie (55h) et Statistique (5h) (praxéologie globale). Le domaine Arithmétiques et Algèbre est quant à lui divisé en 7 secteurs d'études nommés : Entiers naturels (10h), Fractions (10h), Décimaux (5h), Opérations (30h), Proportionnalité (10h), Expressions algébriques (15h), Equations et Inéquations (10h) (praxéologie régionale).

2. Lieu de savoir : le professeur utilise le tableau pour écrire le fruit des cheminements et des explications orales. Ces écrits sont porteurs du savoir, les formules décontextualisées sont apparentes. Les élèves ont devant leurs yeux un modèle magistrale applicable.

3. Lieu d'écriture : le tableau est un simple lieu d'écriture, l'écrit est identique à l'oral, et il n'y a pas de travail spécifique sur ou à partir de cet écrit. Le professeur écrit les éléments qui doivent être pris par les élèves.

A son tour, le secteur « Equations et Inéquations » se scinde en un seul thème nommé « Equations se ramenant à $ax=b$ » (praxéologie locale). Ce thème renferme plusieurs sujets d'étude impliquant un certain nombre de types de tâches comme : « Remplacer une équation par une équation qui lui est équivalente », « Résoudre une équation du type $ax=b$ où $a \neq 0$ », « Organiser des données et les traduire par une équation » (praxéologie ponctuelle). Des techniques exigibles à la réalisation de ces sujets accompagnent la colonne des sujets étudiés, nous mentionnons « Connaître qu'on ne change pas l'équation quand on additionne aux deux membres ou on les multiplie par une même quantité », « Connaître que l'équation $ax=b$ a pour solution $x = \frac{b}{a}$ », etc. Nous résumons dans le tableau ci-dessous les différents niveaux de ce programme :

Domaine : Arithmétique et Algèbre		
Secteur : Equations et Inéquations		
Thème : Equations se ramenant à $ax=b$		
Sujet 1 : Remplacer une équation par une équation qui lui est équivalente	Sujet 2 : Résoudre une équation du type $ax=b$ où $a \neq 0$	Sujet 3 : Organiser des données et les traduire par une équation

Tab OM 3 : Les Equations dans le programme libanais 1997

4.5 Le manuel scolaire

Le manuel est une sorte d'objet intermédiaire, source de renseignements sur des phénomènes liés à l'éducation. Il est vu comme un objet intermédiaire principal entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné (Tavignot, 1995).

Bucheton(1999) constate que : « *Pour des enseignants [les manuels] sont des références fiables quant aux savoirs qui y sont présentés. Ils sont donc un outil précieux pour la préparation des leçons au plan des contenus enseignés et des pistes pédagogiques proposées* ». Les manuels constituent un précieux indicateur des pratiques de classe. C'est l'occasion d'étudier les conceptions des professeurs qui reflètent, par leur influence, les disciplines et les niveaux scolaires (Bruillard, 2005).

Le « manuel » est donc un objet didactique qui réunit deux dimensions constitutives de toute approche didactique : *une dimension transpositive* puisqu'il propose une réorganisation des savoirs en vue de leur enseignement, *une dimension situationnelle* puisqu'il est censé réunir

un ensemble de conditions spécifiques, qui, bien que non suffisantes, doivent permettre de donner un sens aux connaissances visées (Briand, 2010).

Le schéma ci-dessous illustre la place du manuel dans le parcours de la transposition du savoir :

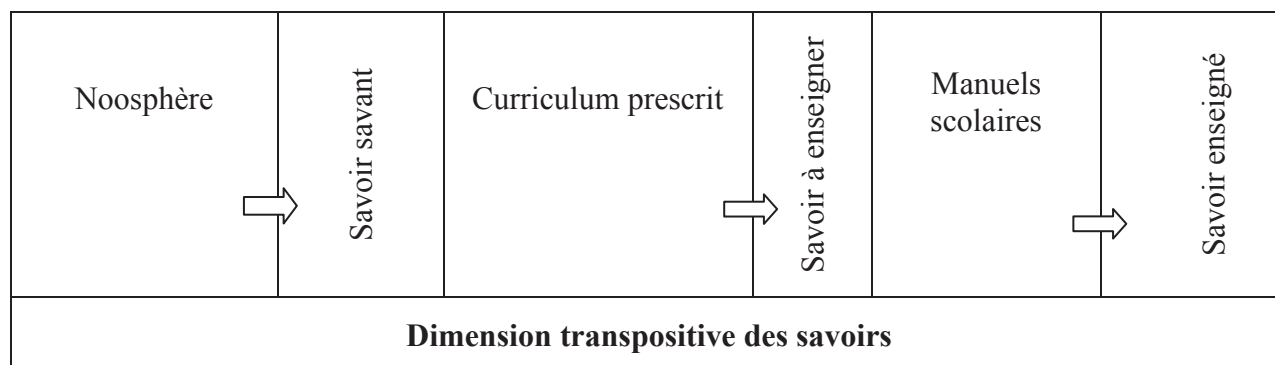


Figure 6 : Place du manuel dans la transposition didactique du savoir

4.5.1. OM et OD de la partie « cours » du manuel

Nous avons trouvé nécessaire de cerner notre étude du manuel suivant deux ordres :

- a) *Une organisation mathématique* qui est le contenu mathématique visé qui peut se construire dans une classe de mathématiques où l'on étudie le thème ;
- b) *Une organisation didactique* qui est la manière dont peut se réaliser l'étude du thème. Cette étude se fera ultérieurement dans les analyses.

Le Chapitre est formé de deux parties (voir Annexe 2, p8) : la première partie parle de la résolution algébrique d'une équation et l'autre partie porte sur la mise en équation d'un problème.

La première partie est scindée en trois sous parties : Définition, Equations équivalentes, Propriétés et résolution. Nous allons montrer d'abord cette partie afin de l'étudier et de mener une analyse suivant l'organisation praxéologique de Chevallard (1999) :

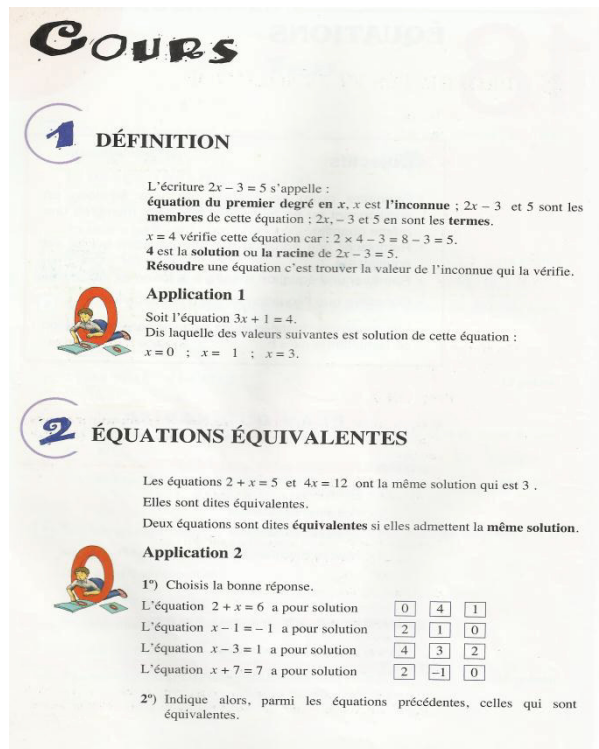


Figure 7 : Cours chapitre « Equations », p168

4.5.2. Paragraphe 1 : « Définition »

Le manuel scolaire ouvre sur l'objet « Equation » par une « ostension assumée²⁵ ». Le manuel place l'objet d'étude : « Résolution de l'équation du premier degré » au niveau générique « Equations et Inéquations ». Il ne prend pas en considération les rapports personnels des élèves ni leurs connaissances antérieures autour des éléments qui entrent en jeu dans l'étude de cet objet de savoir. Par exemple, une situation qui amène les élèves à mettre en évidence la résolution algébrique d'un problème dont l'inconnue se présente sous forme d'une lettre par exemple.

Le manuel est conforme au programme libanais, il a défini le premier l'équation et parle de l'exemple « $2x-3=5$ » qui peut se ramener à la forme « $a.x=b$ ». La dévolution de cet objet paraît comme une fin en soi. L'élève n'a qu'à accepter cet objet mathématique qui est montré par le mot « s'appelle » dans « L'écriture $2x-3=5$ s'appelle :

Equation de premier degré à une inconnue ».

²⁵ Matheron (2010) a défini l'ostension assumée par l'intermédiaire d'un exemple: " Le cours magistral a constitué, depuis la création de l'Ecole obligatoire et pendant des décennies, la technique courante de l'enseignement. Elle prenait la forme d'une ostension directe et assumée d'éléments du savoir, en direction des élèves. On y exposait le cours en y montrant tout d'abord un certain nombre d'éléments technologiques (une définition, une propriété, un postulat, etc.), suivis le plus souvent d'exemples ; c'est-à-dire de l'ostension des techniques que la technologie permet de construire, ou des phénomènes qu'elle explique (une expérience de physique, une tournure littéraire, un passage musical, etc.) Les élèves devaient ensuite apprendre le cours et s'exercer à l'usage des techniques, parfois même en inventer qui n'avaient pas été montrées, à l'aide d'éléments trouvés dans le corpus constitué du cours magistral copié".

Il a officialisé le vocabulaire spécifique de l'équation à partir des ostensifs²⁶ écrits en gras « **équation du premier degré : $2x-3=5$, l'inconnue : x , membres : $2x-3$ et 5 et les termes $2x$, -3 et 5** ».

Bosch et Chevallard (1999) ont indiqué que « *Le propre des ostensifs, c'est de pouvoir être manipulés, ce mot étant entendu en un sens large : manipulation au sens strict (celle du compas, ou du stylo, par exemple), mais aussi bien par la voix, le regard, etc* ». Dans ce sens les ostensifs vont élargir le champ des recherches. Mais, il se peut que la présence d'un ostensif comme « $2x-3$ » cible les prérequis des élèves du chapitre « Expressions Algébriques » qui pourrait renvoyer les élèves à leurs acquis antérieures.

Dans ce paragraphe, un nouveau type de tâche $T_{1,d}$ apparaît : « Vérifier si un réel donné est solution de l'équation » dans les deux lignes suivantes :

« $x=4$ **vérifie l'équation $2x-3=5$ car $2 \times 4 - 3 = 8 - 3 = 5$** »

Alors 4 est la racine ou la solution²⁷ de $2x-3=5$ ».

Cette tâche n'est pas prescrite dans le programme (voir 4.4, p.75) parmi les sujets, ou les techniques, qui sont aptes à réaliser le type de tâches principal T_d « Résoudre algébriquement une équation du premier degré à une inconnue ». Ces deux lignes marquées, ci-haut, sont suivies dans le manuel par l'explication suivante « **Résoudre une équation c'est trouver la valeur de l'inconnue qui la vérifie** » qui doit constituer le moment de la construction *du bloc technologique* autour du type $T_{1,d}$.

Ce type de tâches $T_{1,d}$ ne contribue pas à la réalisation du type de tâche T_d qu'il appelle puisque la nature de travail est différent. Le $T_{1,d}$ « Vérifier si un réel donné est solution de l'équation » appelle des techniques basées sur le calcul numérique effectué sur deux expressions numériques représentant les membres de l'équation et, qui soient variées de celles du type de tâches principal T_d .

Dans la ligne qui suit, on a l'« Application 1 » du cours :

²⁶ Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique,

On appelle *ostensifs* les objets qui ont pour nous une forme *matérielle, sensible*, au demeurant quelconque. Un objet matériel (un stylo, un compas, etc.) est un ostensif. Mais il en va de même :

- des gestes : nous parlerons d'ostensifs *gestuels* ;
- des mots, et, plus généralement, du discours : nous parlerons ici d'ostensifs *discursifs* (ou langagiers) ;
- des schémas, dessins, graphismes : on parlera en ce cas d'ostensifs *graphiques* ;
- des écritures et formalismes : nous parlerons alors d'ostensifs *scripturaux*. (Bosch et Chevallard, 1999),

²⁷ Notons que la définition de la « solution » ou de la « racine » n'est pas signalée dans le cours. Elle est justifiée à partir de la technique présente.

« Soit l'équation $3x+1=4$

Dis laquelle des valeurs suivantes est solution de cette équation.

$x=0$ $x=1$ $x=3$ ».

Cette « application 1 » replace officiellement les élèves dans l'institutionnalisation du type de tâche $T_{1,d}$. Ceci puisque la technique assumée à la réalisation de $T_{1,d}$ est déjà ébauchée et démontrée dans « $x=4$ est une solution de $2x-3=5$ ». Il s'agit de travailler dans le quatrième moment celui de l'institutionnalisation $[T, \tau, \theta, \Theta]$. Rappelons que pour Chevallard (2002) « le quatrième moment est le moment de l'institutionnalisation, qui a pour objet de préciser ce qu'est “ exactement ” l'organisation mathématique élaborée ». Par suite, le type de tâche $T_{1,d}$ ne constitue pas une première rencontre avec la tâche (premier moment). Il ne s'agit pas d'émergence de techniques nouvelles des organisations mathématiques (deuxième moment) ni de construire un bloc technologique relatif à la technique (troisième moment).

4.5.3. Paragraphe 2 : Equations équivalentes

Du point de vue programme, le manuel se place dans le sujet : « Remplacer une équation par une équation équivalente ». Cela constitue un nouveau type de tâches, noté $T_{2,d}$, sous type de type de tâches principale T_d vu que les techniques nécessaires à sa réalisation font parties de la résolution de la tâche principale. Comme au paragraphe 1, le manuel présente cet objet de savoir par ostension assumée, il est considéré comme une fin en soi dans :

« Les équations $2+x=5$ et $4x=12$ ont la même solution qui est 3.

Elles sont dites équivalentes ».

Cette clôture constitue un essai vers la constitution *d'un élément technologique* du type de tâches $T_{2,d}$ ainsi définie. Elle situe le sujet au troisième moment de son étude. C'est une volonté vers la résolution de la tâche principale T_d par la mise en œuvre de $T_{2,d}$.

Nous postulons que la définition : « Deux équations sont dites équivalentes si elles admettent la même solution » est parue comme un axiome. Elle peut interdire aux élèves de s'élancer dans la recherche des techniques appropriées à la réalisation de T_d .

Les auteurs du manuel terminent ce paragraphe par l'application 2 :

1) « Choisis la bonne réponse :

L'équation $2+x=6$ a pour solution 0 4 1

L'équation $x-1=-1$ a pour solution 2 1 0

L'équation $x-3=1$ a pour solution 4 3 2

L'équation $x+7=7$ a pour solution 2 -1 0

2) Indiquez alors parmi, les équations précédentes celles qui sont équivalentes ».

Cette application outille pour sa résolution les deux types de tâches $T_{1,a}$ pour la première question $T_{2,a}$ pour la deuxième question. Elle a donc un rôle purement didactique pour la réalisation de la tâche principale, ceci parce que les deux tâches $T_{1,a}$ et $T_{2,a}$ entrent en jeu dans la résolution de la tâche principale T_d .

D'où cette application constitue le moment d'institutionnalisation de $T_{1,a}$ et $T_{2,a}$ puisqu'il n'y a pas de la place aux mathématiques des élèves, ni de la place pour les trois premiers moments didactique (voir 2.5, p.44).

4.5.4. Paragraphe 3 : « Propriétés et Résolution »

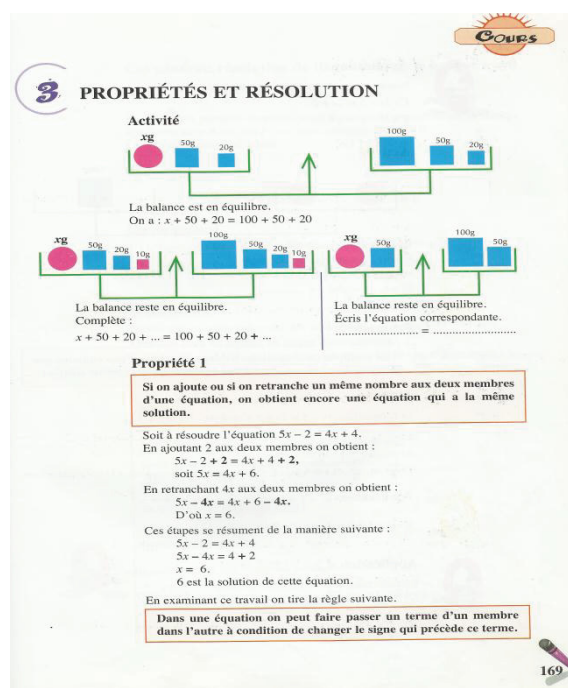


Figure 8 : Cours Chapitre équations, p169

L'ouverture de ce paragraphe a mis en œuvre un nouveau type de tâches défini par :

$T_{3,a}$ « Modéliser algébriquement l'équilibre d'une balance ».

Cette tâche concrétise les poids marqués sur chacun des deux plateaux afin de la modéliser, algébriquement en termes des poids connus et inconnus. Pareillement aux deux paragraphes précédents, les auteurs du manuel présentent cette tâche par ostension, notamment par

« Ostension déguisée²⁸ » puisqu'elle montre l'objet d'étude et consigne les élèves à compléter l'égalité :

« La balance est en équilibre.

On a $x + 50 + 30 = 100 + 50 + 30$ ».

T_{3,a} est considéré comme le cadre technologique de la modélisation algébrique d'une situation « balance » supposée proche du vécu des élèves. C'est grâce à elle qu'ils seront amenés à écrire des équations algébriques. Ils remplacent une quantité inconnue par une lettre, soit « x ».

Or la forme algébrique d'une équation a été l'enjeu d'étude du paragraphe 1 par l'intermédiaire de $2x-3=5$. Ce fait nous incite à poser des interrogations sur la réalité de la fonction didactique de ce paragraphe.

T_{3,a} place l'objet mathématique au troisième moment d'étude, elle montre la balance comme indicateur à la justification des techniques personnelles d'élèves. Sur ce plan, la balance justifie l'usage de la modélisation algébrique de l'équation

Dans cette sous partie, nous remarquons la présence de trois balances dans la figure ci-dessous. La première balance, par ostension, montre aux élèves l'équation qui doit être modélisée par une équation du premier degré à une inconnue. La tâche T_{3,a} est demandée aux élèves à partir de la consigne « compléter ».

La réalisation de T_{3,a} est consignée dans les deux balances du fond que nous avons désigné par « *Situation 1 et Situation 2* » :

²⁸ Berthelot et Salin (1992) ont défini "l'ostension déguisée qui a pour support, le plus souvent, les activités que l'on trouve dans les manuels scolaires, depuis le milieu des années 1980 jusqu'à nos jours. Dans ce dernier cas, le professeur entretient la fiction que l'élève, par son action, produit le savoir, alors qu'en réalité il lui est simplement montré, mais d'une manière plus ou moins bien déguisée". Cette citation est citée dans Matheron (2010).

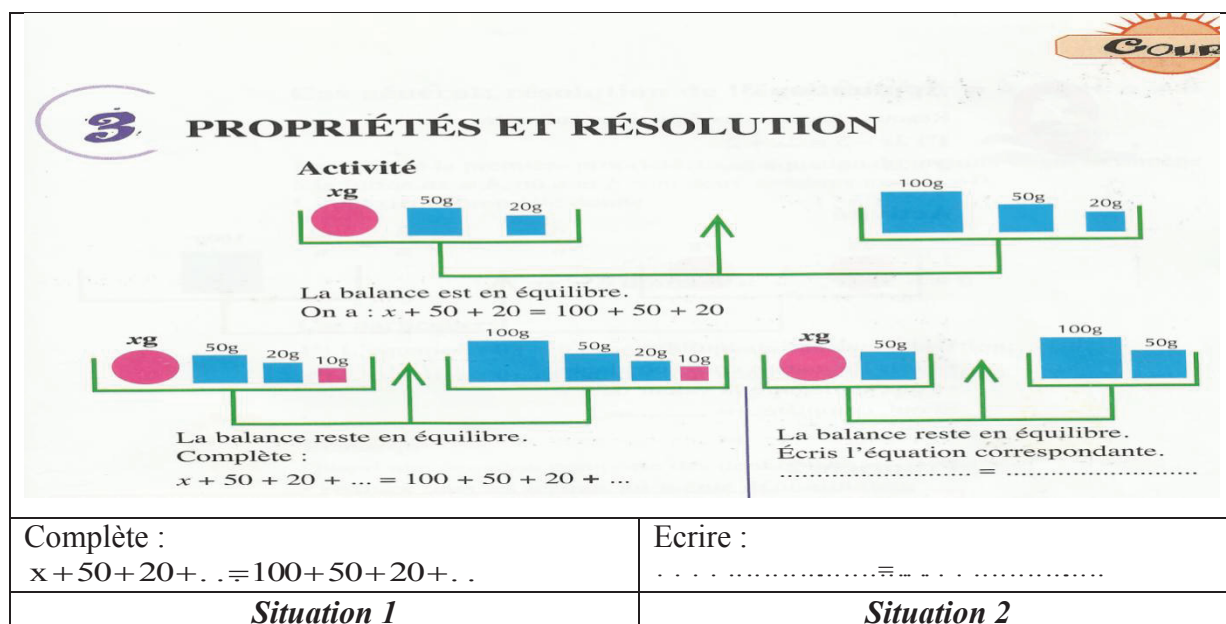


Figure 9 : Les balances dans l'écriture d'une « Equation »

L'inconnu « xg » modélise différemment deux autres masses pour le mettre en valeur aux yeux des élèves. Il nous semble que les situations 1 et 2 ne conviennent pas avec ces deux recommandations du programme: « *Savoir choisir l'inconnue dans un problème, [...] et donner la solution du problème* » (voir 4.4, p.75).

La position de ces balances, tout près l'une de l'autre, peut entraîner les élèves à un travail par analogie à la première balance dans l'écriture de l'équation adéquate pour la situation 2 où nous trouvons au-dessous une ligne pointillée et le symbole égal. Il sera ainsi suffisant d'écrire les « masses » indiquées au-dessus de chacun des poids.

D'où la situation 2 ne peut pas constituer un moment d'exploration d'une technique nouvelle.

Les deux situations constituent à notre avis une justification technologique du type T3,a.

En outre, l'inconnu est présent comme ostensif stable, il ne relève pas d'un besoin fonctionnel au favori de la tâche T3,a.

En ce moment, nous pensons que, pour trouver la valeur de x, l'élève pourra réussir en mobilisant ses mathématiques relatives au domaine numérique. Ce fait pourra le placer en rupture avec les nouvelles techniques algébriques qu'il est entrain d'apprendre. Il sera amené à calculer des opérations numériques dans des égalités à trous. Ce fait pourrait favoriser la recherche des solutions numériques en admettant la « technique » qui revient à donner à l'inconnu x une valeur arbitraire et vérifier, par un calcul numérique, si cette valeur vérifie ou pas l'équation donnée. Cette méthode relève du domaine numérique surtout que les équations proposées ici sont du premier degré dont le coefficient a de x est toujours 1. Donc, l'élève peut réussir ces équations s'il passe du connu, analogiquement à la résolution arithmétique de

Clairaut au XVIII^e siècle, en donnant à x une valeur numérique. Il pourra vérifier ensuite la réalisation du type de tâche $T_{1,a}$ déjà définie.

Si $T_{1,a}$ est réussi alors x est acceptable, sinon l'élève essaiera une autre valeur numérique de « x ». Cette technique est présente dans les classes antérieures, en particulier en EB6. Pour la résolution de l'équation $2a + 1 = 15$, les élèves ont tendance à écrire, après un tâtonnement préalable sur les nombres et les opérations présentes, la valeur numérique correspondant à la solution « 7 » qui sera écrite au-dessous de la lettre comme dans $\boxed{2a + 1 = 15}$ ou à son côté

comme dans : $\boxed{2a + 1 = 15} \quad 7$.

Dans notre sens, la technique déjà explicitée peut être reconnue par les élèves à ce niveau sur des équations de type $ax + b = c$. Le deuxième membre c indique un nombre « réponse » à une expression numérique pour les élèves dans les classes primaires (Houdebine, 1991).

Le passage de la modélisation concrète à la modélisation algébrique est représenté par la l'« axiome mathématique » appelé « Propriété 1 » dans le manuel étudié (voir *Figure 8*, p81) :

Si on ajoute ou on retranche un même nombre aux deux membres d'une équation, on trouve une équation qui a la même solution.

Nous remarquons d'abord que la métaphore de la balance, telle qu'elle est présente, n'est pas une situation justificative de cette propriété 1. Nous la considérons comme un « Axiome » parce qu'elle est proposée aux élèves sans démonstration, ni justification. Par exemple, nous pouvons trouver une équation équivalente en procédant mathématiquement suivant:

$$\text{Si } a = b \text{ alors } a - b = 0$$

$$\text{Parsuite } a + c - (b + c) = 0$$

$$\text{Donc } a + c = b + c$$

La propriété 1 justifie l'ajout d'un terme aux deux membres de l'équation. Elle pourra constituer ultérieurement la justification technico de la règle didactique : « Transposition d'un terme d'un membre à un autre membre dans une équation » que Houdebine (1991) a montré qu'elle est source d'erreurs surtout en cinquième et quatrième²⁹.

²⁹: « La transposition n'apparaît pas "naturellement en cinquième et en quatrième [...] Quand les élèves rencontrent pour la première fois la transposition, elle a le statut d'une procédure, c'est-à-dire d'une action réfléchie, ou encore d'une opération légale parmi d'autres, qui permet de transposer les équations sans perdre ni gagner des solutions [...] », (Houdebine, 1991).

Cette propriété est suivie, dans le cours du manuel page 169, par une application pour l'expliciter et passer à la technique de résolution aux élèves :

Soit à résoudre l'équation $5x-2=4x+4$
En ajoutant 2 aux deux membres de l'équation :
 $5x-2+2 = 4x+4+2$
Soit $5x = 4x+6$
En retranchant $4x$ aux deux membres de l'équation :
 $5x-4x = 4x-4x+6$
Donc, $x = 6$

Manuel page 169

Cette application place la notion mathématique au niveau du sujet : « Résoudre une équation de premier degré³⁰ », c.à.d. au type de tâches principal T_d de la séance.

Le manuel détaille la résolution de l'équation « $5x-2=4x+4$ » en montrant toutes les étapes nécessaires avec explication. L'effectuation du type de tâches $T_{2,d}$: « Remplacer une équation par une autre équation équivalente » paraît nécessaire « $5x-2=4x+4$ est équivalente à $5x=4x+6$ », trouvée à partir de l'ajout de « 2 » aux deux membres de l'équation. La résolution « typique » de cette équation apparaît comme une suite d'éléments technologiques activés par la « règle de transposition des termes dans une équation ». D'où, le manuel place l'objet mathématique au troisième moment d'étude, le moment qui affine les avantages et les économies pour la réalisation de la tâche principale T_d .

Dans ce même paragraphe, il reste à montrer la propriété 2 de la page 170 :

³⁰ Dans le curriculum l'objectif (ou le sujet pour nous) est : « Résoudre une équation de type $a.x=b$ où a est différent de zéro ». Par le type $a.x=b$, il voulait désigner la forme réduite de l'équation générale du premier degré, c.à.d. la forme $ax+b=cx+d$.

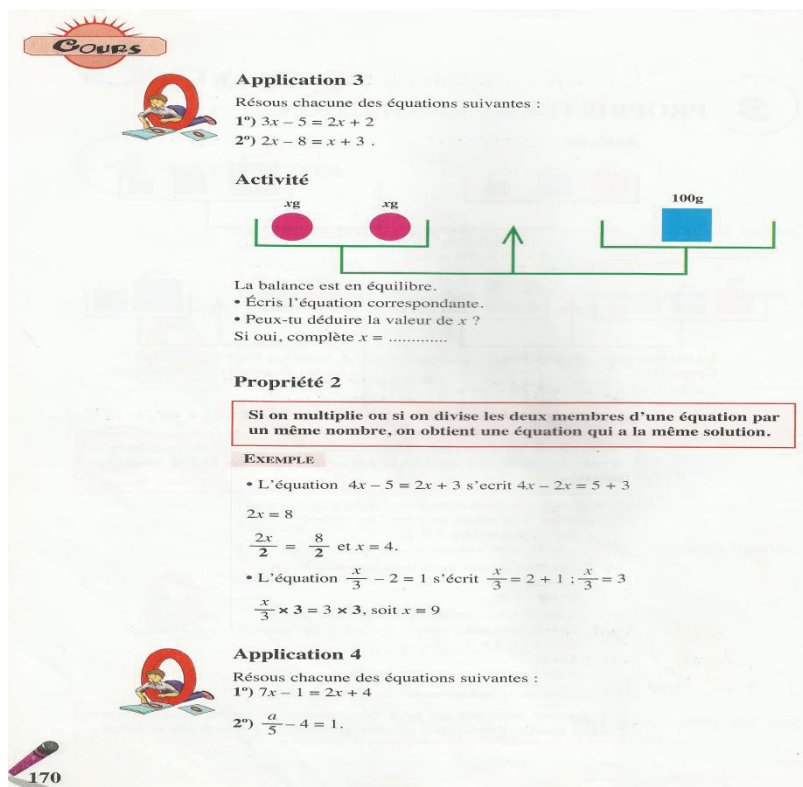


Figure 10 : Propriété 2 du cours « Equations »

La propriété 2 « *Si on multiplie ou on divise un même nombre aux deux membres de l'équation, on trouve une équation qui a la même solution* », est suivie d'un exemple d'application :

L'équation $4x-5=2x+3$ s'écrit $4x-2x=5+3$ qui donne $2x=8$.

Par suite la solution est $\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$, $x=4$.

Pour cet exemple, l'ajout d'un terme aux deux membres est remplacé par la règle de transposition de termes dans « $4x-5=2x+3$ s'écrit $4x-2x=5+3$ » et dans « $\frac{x}{3}-2=1$ s'écrit

$\frac{x}{3}=2+1$ ». Il n'y a plus explicitation comme celle de l'équation « $5x-2=4x+4$ » à la manière de « 1) En ajoutant, 2) En retranchant, 3) Donc ». Les auteurs du manuel montrent « la division par 2 » pour chaque membre de l'équation « $2x=8$ ».

Nous supposons, par analogie à la première propriété, que ce détail « division par 2 » disparaîtra au cours des applications au détriment de la règle de transposition des termes dans laquelle la résolution de $2x=8$ aboutit directement à $x = \frac{8}{2}$, donc à $x=4$.

Signalons que le paragraphe 4 du cours concernant « La modélisation algébrique d'une situation réelle » ne nous intéresse pas. Nous n'allons pas l'étudier.

4.5.5. Résumé

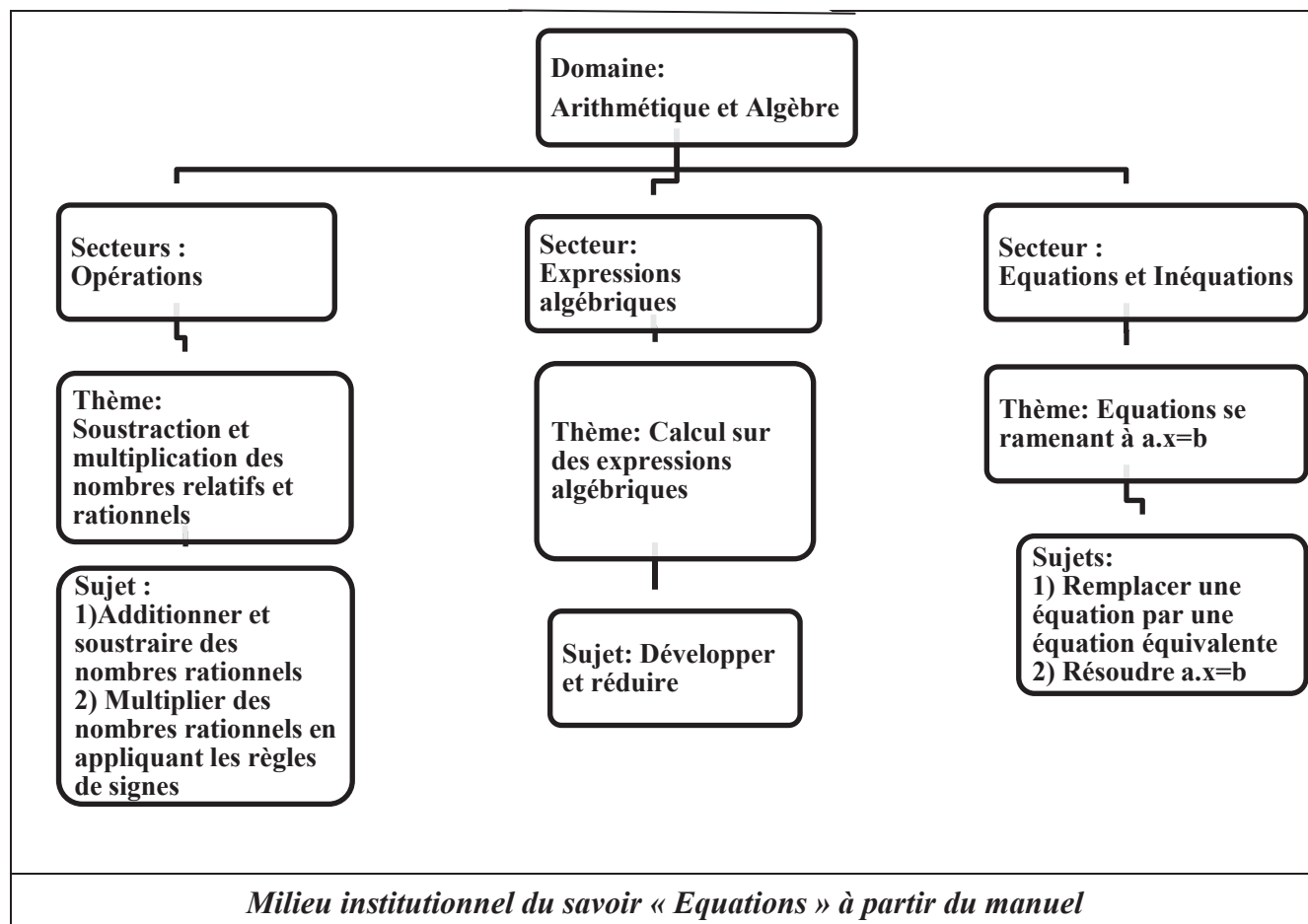
Nous allons résumer dans deux tableaux les différents résultats extrapolés des études précédentes. Cela concerne les OM et les OD mises en œuvre dans le manuel, ainsi que les différents éléments institutionnels qui pourraient activer ce savoir.

OM	Extraits du manuel	OD
Paragraphe 1 : Définition		
Thème : Equation	Définition de l'équation	Moment de présentation « par ostension » de l'écriture d'une équation
	Ostensifs : inconnue, membre, termes	Prérequis sur les expressions numériques et algébriques.
Sujet : type de tâches $T_{1,d}$	$x=4$ est la solution de l'équation car $2 \times 4 - 3 = 8 - 3 = 5$	Moment de constitution un environnement technologique sur la solution d'une équation ($T_{1,d}$)
Sujet : Tâche principale T_d	Résoudre une équation c'est trouver la valeur de l'inconnue qui la vérifie.	Moment de constitution un environnement technologique pour la tâche T_d
Sujet : type de tâches $T_{2,d}$	Application 1	Moment d'institutionnaliser $T_{2,d}$
Paragraphe 2 : Equations équivalentes		
Sujet : type de tâches $T_{2,d}$	Les équations $2+x=5$ et $4x=12$ sont équivalentes car 3 est une solution commune	Moment de constitution un environnement technologique pour la tâche $T_{2,d}$
	Définition	Moment d'institutionnaliser $T_{2,d}$
Sujet : type de tâches $T_{1,d}$ Sujet : type de tâches $T_{2,d}$	Application 2 1) Choisir la bonne solution 2) équations équivalentes	Moment d'institutionnalisation (permettra de savoir ce qu'il faut connaître)
Paragraphe 3 : Propriétés et Résolution		
Sujet : type de tâches $T_{3,d}$	Activité de la Balance	Moment de l'exploration de $T_{3,d}$ et de l'émergence d'une technique τ nécessaire.
	1. Situation 1 2. Situation 2	
Axiome	Propriété 1	Moment de constitution d'un environnement technologique pour la tâche $T_{2,d}$ par l'ajout des termes aux membres de l'équation
Sujet : type de tâches T_d	Application 1	Moment d'institutionnalisation de la technique de résolution en explicitant toutes les tapes pour réaliser T_d (cas : $a=1$. dans $ax=b$)
Organisation mathématique (OM) et organisation didactique (OD)		

Tab OM 4 : OM et OD du chapitre « Equations »

Nous montrons dans le tableau ci-dessous les différents OM aux quelles font appel les auteurs du manuel. Les différents niveaux sont pris du curriculum libanais en vigueur et dont, le manuel est susceptible de les transformer en des objectifs d'enseignement.

Notre but principal est de déterminer un amalgame des OM qui pourra nous informer sur la conception du professeur envers ce savoir.



Tab OM 5 : Milieu institutionnel du savoir « Equations » à partir du manuel

4.6 Etude praxéologique de la partie « Cours » du manuel

Dans la partie « Cours » que nous avons déjà étudié, nous avons relevé trois tâches liées à la réalisation du type de tâches principal T_d . Nous allons expliciter ces tâches dans le but de déterminer ultérieurement leurs rôles dans l'avancement mathématique et didactique de la séance :

Tâche $T_{1,d}$: Vérifier si un réel donné est solution d'une équation.

Exemple : « $x = 4$ vérifie l'équation $2x-3=5$ car $2 \times 4 - 3 = 8 - 3 = 5$
Alors 4 est la racine ou la solution de $2x-3=5$ ».

Tâche $T_{2,d}$: Remplacer une équation par une équation équivalente.

Exemple : « $2+x=5$ et $4x=12$ ont la même solution 3.

Alors elles sont dites équivalentes ».

Tâche $T_{3,d}$: Modéliser algébriquement l'équilibre d'une balance.

Exemple : « On voit des poids marqués sur une photo de balance.

On a $x + 50 + 30 = 100 + 50 + 30$

Type de tâches principal T_d : Résoudre algébriquement une équation du premier degré à une inconnue.

Exemple :

Soit à résoudre l'équation $5x-2=4x+4$
En ajoutant 2 aux deux membres de l'équation
 $5x-2+2 = 4x+4+2$
Soit $5x = 4x+6$
En retranchant $4x$ aux deux membres de l'équation
 $5x-4x = 4x-4x+6$
Donc, $x = 6$

Les trois tâches $T_{1,d}$, $T_{2,d}$ et $T_{3,d}$ s'inscrivent dans la réalisation de T_d . Nous allons illustrer dans un tableau, les organisations praxéologiques locales $(T_{i,d}, \tau_{i,d}, \theta_d, \Theta)$ avec $i=1, 2, 3$, sur lesquelles nous nous basons pour l'analyse de la séance.

Tâches $T_{i,d}$ du type de tâches T_d	$T_{1,d}$	$T_{2,d}$	$T_{3,d}$	T_d
Techniques τ	$\tau_{1,d}$ -Remplacer x par une valeur numérique dans une expression. -Calculer des expressions numériques en respectant la priorité dans les opérations. -Comparer deux nombres.	$\tau_{2,d}$ -Ecrire une (ou plusieurs) équations - $\tau_{1,d}$ est vérifiée sur ces équations.	$\tau_{3,d}$ -Modéliser en termes de x des poids sur un plateau d'une balance. -Marquer l'ostensif « = » entre les deux expressions algébriques obtenues.	τ_d $\tau_{2,d}$ -Transposer des termes sur les membres. -aboutir à la forme $a.x=b$. -Ecrire la solution x sous la forme du quotient de b par a.
Technologie θ_d	- Egalité de deux nombres. - Egalité conditionnelle de deux expressions algébriques. - Equations ayant la même solution. - Propriétés sur la métaphore de la balance : - Propriété 1 : Si on ajoute ou on retranche un même nombre aux deux membres d'une équation, on trouve une équation qui a la même solution. - Propriété 2 : Si on multiplie ou on divise un même nombre aux deux membres de l'équation, on trouve une équation qui a la même solution.			
théorie Θ	$(\mathbb{R}, +, \times)^{31}$ est un anneau commutatif factoriel dans lequel tout élément non nul possède une décomposition unique en facteurs irréductibles.			

Tab OM 6 : Organisation locale $(T_{i,d}; \tau_{i,d}; \theta_d; \Theta)$ avec $i=1, 2, 3$

Le contenu de cette partie précise en général les objectifs essentiels prescrits par le curriculum libanais en vigueur ainsi que les techniques qui vont être mises en œuvre pour répondre à la tâche principale : « Résoudre une équation du premier degré ».

Néanmoins le contenu de la partie étudiée de ce chapitre ne nous paraît pas inhérent pour :

- mettre en évidence différentes facettes des mathématiques, outil pour la vie quotidienne, ainsi que la variété des champs étudiés dans d'autres domaines comme dans la « géométrie » ;
- maintenir une problématisation des savoirs en éviter les ostensions déguisées et assumées dans la présentation de ce nouveau savoir. Si nous ne pouvons pas les éviter, du moins trouver des moyens pour qu'elles ne fassent pas obstacle au travail de recherche des élèves ;

³¹ En Cinquième, la résolution des équations se travaillent sur l'identité conditionnelle de deux expressions algébriques qui ne sont pas enseignées comme étant des polynômes. C'est pourquoi nous nous sommes placés dans la théorie de l'anneau des réels et non dans l'anneau des polynômes $(\mathbb{R}[X], +, \times)$.

- ponctuer la vie scolaire mathématique en organisant dans une sériation un choix d'une ou de plusieurs situations permettant la consolidation et l'institutionnalisation de cette notion en remontant à des secteurs différents comme la géométrie ou d'autres disciplines ;
- répondre à une approche constructiviste, vu que l'ostension assignée dans ce manuel peut amener ses utilisateurs, le professeur et l'élève, à des régressions ailleurs. Elles pourraient laisser place à des multiples bifurcations, à des reflets des pratiques antérieures qui rebutent la relation avec les éléments institutionnels du nouveau savoir.

4.7 Premières analyses : Vers une problématique de recherche

4.7.1. Organisation de la séance

L'observation de cette séquence d'enseignement sur le thème « Equation » a eu lieu dans une école libanaise privée de Beyrouth, elle a duré près de quatre jours en mai 2009. Nous avons filmé le professeur dans la classe. Nous avons photographié, en tant que possible, quelques cahiers d'élèves dans la classe ainsi que des préparations faites à domicile.

Dans le parcours de la séance, nous avons remarqué que le professeur a planifié la première séance d'enseignement (voir Annexe 3, p.11) suivant trois phases illustrées dans le synopsis ci-dessous :

Durée	Episodes	Contenu didactique
8 min	Définition de l'objet d'étude « les équations »	Le professeur tout seul au tableau. Il a défini les équations et introduit le vocabulaire spécifique : termes, membres, inconnues, etc.
14 min	Explication de la leçon : Résolution algébrique des équations	Le professeur fait passer les élèves au tableau pour travailler les équations suivantes : $3x = 4$, $\frac{3x}{5} = 2$, $\frac{3x}{5} - 1 = 7$ et $3x - 1 = x + 6$
28 min	Exercices d'application sur la résolution des équations	Après 14 min 13 sec de travail, le professeur débute cet épisode par le tour de parole: « <i>Maintenant on va faire des applications pour voir si vous avez bien compris</i> ». Il a commencé cette partie par la résolution des équations suivantes $\frac{6x}{7} = -2$, $3x - 4 = 8$, $3x - 4 = 6x + 8$ et $\frac{3x}{7} - 1 = 11$. Il n'a pas raté les <i>cas particuliers</i> comme dans les équations $2x - 4 = 2(x - 2)$ et $3x - 6 = 3x - 4$. Ce sont les équations qui admettent une infinité de solutions ou aucune. Pour clôturer cet épisode, le professeur a présenté l'équation dont l'un des membres est une fraction rationnelle $\frac{3x - 1}{6} = x - 1$. L'un des élèves n'a pas compris la résolution de cette équation et surtout le cadre technologique assigné par le professeur dans le tour de parole suivant : « <i>J'ai multiplié par 6 pour simplifier par 6</i> », il ajoute « <i>inconsciemment fois 6 égal fois 6 (en montrant les deux membres)</i> ». Dans ce cas pour aider l'élève en difficulté, le professeur a travaillé une autre équation qui lui ressemble $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = x - 1$.

Figure11 : Synopsis de la première séance des « Equations »

4.7.2. Analyse de l'extrait : « Introduction des Equations »

Nous montrons dans cet épisode comment le professeur a introduit l'équation du premier degré à une inconnue.

Signalons que dans la transcription le nom de chaque élève est désigné par une, deux ou trois lettres : **E** désigne un élève que nous n'avons pas pu identifier, et **ES** désigne un groupe d'élèves. L désigne le tour de parole relatif à l'intervention dans les transcriptions.

Le professeur explicite « La définition » l'enjeu de la séance.

Durée : Min 1 sec 23³²

L1	P	Bon d'abord on va commencer par la définition ou bien par le modèle de l'équation. En générale, une équation. Quel genre ou quel modèle on peut avoir. <u>Ex :</u> (Il écrit au tableau) 1 ^{er} modèle : $2x - 5 = 6$ 2 ^{eme} modèle : $3x^2 - 6 = 3$ 3 ^{eme} modèle (etc) : $4x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ Ce qui diffère ici c'est l'exposant, n'est-ce pas? Ca c'est l'exposant 1, ici l'exposant 2, ici exposant 3. Donc, en général une équation est formée d'inconnue n'est-ce pas? Selon l'équation $2x - 5 = 6$ est formée d'une inconnue. Combien d'inconnues il y a ? – une variable.
L2	EI	1 inconnue
L3	P	De 1 inconnue, 2 inconnues, etc. $2x - 3y + 6 =$, c'est une équation à combien d'inconnues?
L4	EI	2
L5	P	2 inconnus, 2 variables x et y, n'est-ce pas ? Donc, ça c'est l'équation à une inconnue. Mais ici on dit au 1 ^{er} degré, ici au deuxième degré (<i>le professeur montre les équations du tableau</i>)
L6	EI	Car l'exposant est 2 // ou bien 3 ^{eme} degré.
L7	P	Donc, comment je peux savoir de quel degré / suivant l'exposant (il répond à sa question) suivant le degré je peux savoir combien d'inconnue. Ici j'ai une inconnue, ici (<i>montre le tableau</i>) j'ai 2 inconnues, ici 3 inconnues. On appelle inconnue ou bien solution de l'équation ou bien racine, même chose. L'inconnue qu'on va trouver, ... on va trouver la solution de l'équation, on va trouver la racine de l'équation. Mais, pour trouver ça, il faut résoudre une équation. Qu'est-ce que veut dire résoudre une équation ? Oui ? –vous savez ?

Extrait 1 : Equation/ Introduire les ostensifs/ L1-L7

Le professeur agit sur le milieu cognitif du savoir par l'intermédiaire des ostensifs langagiers « *définition, modèle, genre* ». Il semble pour nous que ces ostensifs constituent, pour lui, des organisations mathématiques fiables pour la reconstruction du savoir. Signalons que ces

³² Cette indication **Min 1 sec 23** représente, dans ce chapitre, la durée de l'extrait.

ostensifs peuvent être porteurs d'une certaine ambiguïté et il est difficile pour nous de les expliciter.

Le professeur a parlé dans L1 et L7 des ostensifs propres à ce savoir. Il voulait cadrer fortement le travail effectué par lui même en ajoutant, par écrit au tableau, d'autres ostensifs que les élèves ignorent « *exposants, équations à plusieurs variables, degré de l'équation* ». Notons que « Equations à plusieurs variables, degré de l'équation » ne sont pas mentionnés dans le manuel. Ces termes font partie des connaissances du professeur, notamment aux élèves de la classe de EB9 (troisième). Il s'agit pour nous *des indices* qui précisent le mouvement topogénétique du professeur. Il a considéré que la « définition » est le synonyme de « modèle de l'équation » (L1). Il a commencé à définir les « Equations » mais il s'est arrêté pour questionner les élèves sur le « modèle » ou le « genre » comme si ces deux mots sont synonymes, comme s'il s'agit pour lui de tisser des rapports aux connaissances des élèves sur les éléments du nouveau savoir.

Il s'adresse à ses élèves par le pronom « on » dans « *Bon d'abord, on va commencer* » (L1), « *Mais ici on dit* » (L5) et « *L'inconnue qu'on va trouver. On va trouver la solution de l'équation, on va trouver la racine de l'équation* » (L7). Il nous semble que la volonté du professeur est de faire mobiliser les connaissances et les savoir-faire des élèves sur le sens de la tâche : « Résoudre » en leur cédant un topos élevé.

Cet extrait se termine par la question « vous savez ? ». A notre avis, il pose la question aux élèves comme s'il leur dit « Connaissez-vous la réponse ? ». Le mode « présent de l'indicatif » de ce verbe atteste en vigueur une vérité générale comme si les élèves se sont habitués avec.

Ce sujet pourrait être considéré comme nouveau aux élèves vu qu'il convoque un vocabulaire non familier. Pourtant il ne paraît pas comme tel puisque la plupart de ses composantes sont déjà vus par eux. Par exemple le mot « Equation » est déjà vu à plusieurs reprises dès les petites classes, mais il est utilisé dans le sens arithmétique. Cet ostensif langagier active une technique personnelle chez les élèves, qui les amène à advenir des pratiques antérieures qui relèvent des applications institutionnelles. Ces diverses applications devraient outiller un certain bloc technologique fondé sur les exercices et les problèmes routiniers rencontrés au cours de leur passé scolaire. Sur ce plan, les élèves pourraient vérifier par eux mêmes les critères de la réussite de la tâche prescrite et mesurer le progrès qu'ils accomplissent aux moments de sa dévolution. Ces outils peuvent être renvoyés à la réalisation des types de

tâches comme « Compléter des égalités additives et soustractives » qui se présentent dans le curriculum libanais à partir de la classe de EB1.

Dans cet extrait, le professeur s'est attardé au niveau du secteur « Equation ». C'est un niveau ciblant directement le nouveau savoir. Pour ce faire, nous nous plaçons au cœur du curriculum libanais en vigueur (voir 4.4, p.75) qui permet de préciser les niveaux de codétermination didactique dans lesquels sont pris les problèmes proposés aux élèves. Nous remarquons que le professeur se replace immédiatement au sujet « Résoudre une équation », inclus dans le thème « Équations se ramenant à $ax = b$ », partie prenante du secteur « Equations et inéquations ».

Le professeur continue son discours par :

Durée : Min 1 sec 16

L7	P	Donc, comment je peux savoir de quel degré / suivant l'exposant (il répond à sa question) ;suivant le degré je peux savoir combien d'inconnue. Ici j'ai une inconnue, ici (<i>montre le tableau</i>) j'ai 2 inconnues, ici 3 inconnues. On appelle inconnue ou bien solution de l'équation ou bien racine, même chose. L'inconnue qu'on va trouver,... on va trouver la solution de l'équation, on va trouver la racine de l'équation. Mais, pour trouver ça, il faut résoudre une équation. Qu'est-ce que veut dire résoudre une équation ? Oui ? –vous savez ?
L8	EI	Trouver la racine de cette équation
L9	P	Trouver la (regarde les élèves en attendant la réponse)
L10	EI	Trouver la racine
L11	P	Bravo Melissa, trouve l'inconnue, trouver la racine, trouver la solution. Vous avez une idée : Equation, solution, racine, résoudre. Oui?
L12	EI	Oui

Extrait 2 : Equation/ Résoudre une équation / L7-L12

La ligne L7 se termine par la question « vous savez ? ». Cette action a été confrontée par les élèves par la réponse L8«*trouver la racine de cette équation* ». La technique didactique du professeur qui revient à féliciter cet élève par « Bravo » (L11) avance le temps didactique et permettra au professeur de mettre fin à l'explication. Signalons qu'il venait de mentionner dans L7 ce que cet élève vient de répondre « *On va trouver la solution* ».

En général pour résoudre une équation, c'est-à-dire pour accomplir le type de tâches principal T_d , il faut trouver la valeur de l'inconnue qui la vérifie. Il nous paraît que l'organisation mathématique conçue par le professeur dans L7 pourra renverser la réalisation de T_d « [...] Ici j'ai une inconnue, ici j'ai 2 inconnues, ici 3 inconnues [le professeur montre les trois modèles

de L1]. On appelle inconnue ou bien solution de l'équation ou bien racine, même chose. L'inconnue qu'on va trouver, on va trouver la solution de l'équation, on va trouver la racine de l'équation. Mais, pour trouver ça, il faut résoudre une équation ». Dans ce sens, une organisation mathématique aura lieu, elle prend la forme :

Type de tâches	Trouver l'inconnue
Technique	Résoudre l'équation

Cette intervention du professeur fait revivre le passé didactique des élèves. Il a activé la mémoire officielle des élèves d'une tâche institutionnalisée dans les années antérieures « Trouver la valeur qui manque dans une égalité ». Les élèves savent qu'ils sont en face d'un nouveau savoir puisqu'ils travaillent dans un nouveau chapitre. Ils sont pris par le contrat didactique « *Un nouveau apprentissage a lieu vers la fin de tout chapitre nouveau* ». Ce contrat détermine le rôle du professeur et celui de l'élève dans une séance « d'explication du cours » dont son enjeu respecte les principes de l'« ostension assumée ». Cette ostension s'est appropriée par une forme d'adhésion acceptée par les élèves qui ont répondu docilement, d'une façon très réduite, aux questions posées par leur professeur.

Par contre, le professeur provoque la notion mathématique en la plaçant dans un milieu dont l'intention est de le transformer en un milieu institutionnel du savoir nouveau. Ce milieu est fait d'ostensifs qui sont présents dans son discours (modèle, genre, inconnue, variable, exposant, l'équation est formée d'inconnues) et de non ostensifs qu'ils évoquent (définition de l'équation, qu'est-ce que veut dire « résoudre une équation »). L'activation de cette situation est menée par une personne (le professeur) qui connaît les rapports institutionnels aux éléments convoqués et qui observe ceux qui sont en train d'être construits dans la classe en établissant un rapport des connaissances à cela (Matheron, 2010)³³.

Nous pensons que les interactions élèves / professeur ainsi que l'enjeu établi font entrer implicitement la classe dans un contrat qui pourrait s'expliquer pour nous par : « *La convocation des ostensifs nouveaux pourraient engager les élèves à mener des rétroactions à des organisations mathématiques relevées de leurs propres univers cognitifs. Ils vont devoir cibler les éléments du milieu institutionnel au biais de leurs connaissances antérieures* ». Nous observons pour le moment une « bifurcation », le professeur mène des actions archivées dans ses propres OM du savoir par contre, les élèves travaillent toujours dans leurs propres OM.

³³ Pour Matheron (2010) « l'ensemble des ostensifs matériellement présents et des non-ostensifs qu'ils peuvent évoquer auprès des élèves et du professeur, constitue un univers de connaissances fait des rapports sous contrat établis, ou à établir, aux ostensifs et non-ostensifs et au travail mathématique qu'ils permettent d'accomplir ».

Par suite, la bifurcation a lieu parce que le professeur injecte dans cette institution des ostensifs nouveaux dont les rapports de connaissances des élèves pourraient être différents à leurs significations réelles.

Le professeur revit le passé didactique des élèves à travers un discours rassurant. Un discours qui montre aux élèves qu'ils connaissent déjà ce qu'ils sont en train de faire. Il paraît que ce qu'il explique est routinier chez l'élève vu l'usage excessif du « n'est-ce pas ? » (Répété trois fois). Il place les élèves au niveau de leurs connaissances autour du type de tâches comme « Compléter l'équation $a + \dots = c$ »³⁴ relatif au secteur « ajouter n ». Cela témoigne, à notre sens, un coup de force qui écrase le passé didactique des élèves qui, dans un sens figuré peut s'expliquer par : « Lancer un projectile dans le champ de l'adversaire pour marquer un but ». Cela peut contribuer à constituer une mémoire officielle de la classe qui pourrait placer les élèves dans un nouveau milieu.

En plus, le discours du professeur a été muni d'un mouvement topogénétique ascendant au biais du pronom personnel : « vous » et descendant « on » qui aura des effets chronogénétique permettant d'avancer le temps didactique et amène à la régulation du nouveau sujet. Notons que pour ce moment de la séance, la technique de résolution n'a pas été enseignée malgré les tentatives du professeur de réduire la distance aux éléments du nouveau savoir « vous savez ? », « n'est ce pas ? ». Le rapport des élèves à ce nouvel objet est donc relatif à des types de tâches sans technique.

4.7.3. Conclusion

En guise de conclusion, le professeur a essayé de mobiliser des éléments du milieu institutionnel comme : « *l'inconnue qu'on va trouver* », « *on va trouver la racine* », « *il faut résoudre une équation* », « *degré de l'équation* », « *inconnue ou variable* ». Il s'est appuyé sur les rapports de connaissances aux objets de ce milieu institutionnel en s'aidant de son topos ascendant (élevé) pour mener ses actions et descendant pour négocier la transition du sujet et faire avancer le temps didactique.

Ces actions sont imposées aux élèves puisque l'enseignant prend la responsabilité du tableau pour réciter ses connaissances et, de temps à autre, il pose des questions et se contente de la réponse « *oui* » qui est une confirmation qui ne prouve pas l'acquisition de ce qui s'est expliqué. Les élèves vont essayer de rapporter ces nouveaux éléments au sein de leurs milieux

³⁴ Ce type de tâche est extrait du programme libanais 1997, classe EB1, p82.

cognitifs³⁵ qui relèvent, des deux domaines « Calcul des égalités à trou » et « Calcul des expressions algébriques ». Ces gestes imposées du professeur ne permettent aux élèves que de dire « Oui Monsieur ». C'est dans ce sens que règne une tendance globale en classe qui fait croire que les élèves sont pris par la situation implantée par le professeur. Il nous semble dans ce cas que les rétroactions des élèves pourraient ne pas s'entremêler avec les intentions didactiques du professeur. Le « oui » des élèves ne marque pas cette *robustesse* de la relation entre la zone assujettie du milieu cognitif des élèves et les nouveaux éléments. Ils activent leurs propres connaissances et les développe ainsi dans un milieu inadéquat que le professeur a l'intention de promouvoir. C'est-à-dire les élèves pourraient projeter leurs connaissances ailleurs dans le milieu institutionnel. Et donc « *Ce savoir mathématique est, pour l'essentiel, du savoir ayant eu, mais n'ayant plus, le statut de savoir enseigné : du savoir, donc, qui a été enseigné et qui, de ce fait, « est supposé connu ». Un savoir qui a cessé d'être un enjeu didactique et dont le contrat didactique verse dès lors la maîtrise adéquate à la charge de l'enseigné* » (Chevallard, 1989a). Nous considérons que les actions professorales pourront contribuer à créer une divergence affectant le milieu institutionnel du savoir et le milieu cognitif de l'élève. Cela puisque nous pourrions s'attendre à ce que l'élève serait *chargé* inconvenablement aux exigences de la nouvelle tâche dans le sens de Chevallard.

Dans cet enjeu didactique, le professeur, en implantant des connaissances *ça et là*, ne peut pas autoriser aux élèves de rapporter à leurs milieux cognitifs les éléments pertinents à la réalisation de la tâche comme il souhaite. Cette action pourrait amener à des résultats inappropriés. Ainsi, elle peut inciter les élèves à diffuser indûment leurs rapports aux objets du milieu institutionnel où ils sont dans l'attente de quelques choses qu'ils ignorent. Ils sont amenés, comme l'indique leur professeur, à « *Trouver l'inconnue* » avec une technique non connue à ce niveau « Résoudre une équation ». A la lumière de ces assujettissements, nous pouvons s'attendre à une divergence qui écarte le fil de connexion entre les milieux cognitifs des élèves, faits de leurs connaissances primitives dans les domaines « *Calculs numériques* » et « *Expressions algébriques* », et le milieu institutionnel du savoir faits d'ostensifs nouveaux comme les « *degré, racine, solution, inconnue, variables* » et de non ostensifs qui évoquent comme « *On va commencer par la définition* ».

³⁵: « Pour gérer la mémoire didactique de la classe, l'enseignant mobilise des éléments des *cadres institutionnels* de cette mémoire, qui servent de points de référence pour provoquer la remémoration des élèves. Dans ce sens, les gestes accomplis par le professeur sont porteurs de ces éléments, qui bornent une « zone » de l'univers cognitif –ou lieu cognitif qui peut devenir ou être le milieu institutionnel –de la classe, afin que les élèves interagissent avec les objets et rapports aux objets mis en évidence pour des élèves « bien assujettis » à l'institution » Araya (2008).

Le schéma ci-dessous illustre nos idées sur la possibilité d'émergence d'une divergence, indiquée par une flèche dans un contre sens, qui pourrait écarter les milieux cognitifs des élèves aux objets du milieu institutionnel du savoir :

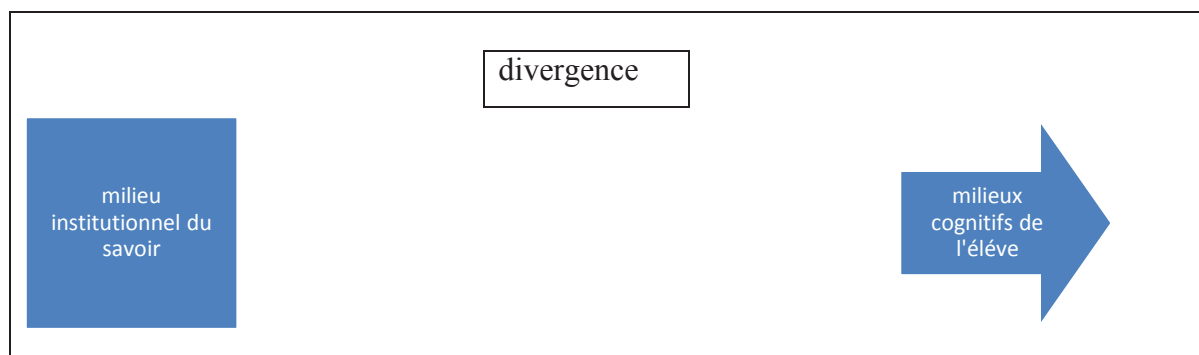


Figure 12 : schéma de divergence entre les différents milieux entretenus

Dans la suite du déroulement de la séance, le professeur, dans son discours, invite les élèves à ouvrir leur livre pour mettre en place la technique visée :

L13	P	Maintenant comment résoudre une équation ? Ouvrez à la page 172. je crois. Ouvrez vos livres p.168-169. Bon tout d'abord (<i>Il efface le tableau</i>) si vous voyez P.169 il y a une balance, N'est-ce pas ?
L14	El	Oui

Extrait 3 : Equation/ résolution et balance 1/ L13-L14

Ensuite, il les a poussés à bien regarder les images illustrées dans le manuel:

L15	P	Est-ce qu'elle est équilibrée cette balance là ?
L16	El	Oui

Les élèves répondent par « oui ». Cette réponse affirmative vient du fait qu'ils sont au point de reconnaître l'ostensif scriptural qui est « la balance ». Comme si le professeur attend cette réponse pour passer à un nouveau cadre didactique pour la suite de la séance. Il embarque son institution dans un nouveau milieu dans lequel doit se mouvoir la situation pour atteindre les objets du savoir. D'où le rôle des élèves est essentiel pour avancer le temps didactique de la séance sur lequel le professeur s'appuie pour fonctionner la chronogenèse de la séance. Les élèves seront-ils capables d'appropriier le sujet du savoir : « Equations algébriques » par un travail analogique avec « la balance » ?

Dans ce sens, le professeur continue :

L16	P	Comment vous avez su ? (les élèves crient ensemble, Brouhaha) La flèche au milieu. Ou bien dans chaque membre, dans chaque case il y a même quantité. Donc moi, si j'ai une balance pour qu'elle reste équilibrée il faut que j'ai même poids, n'est-ce pas ? dans chaque case. Si j'enlève ici 20g, il faut enlever aussi ici 20g pour qu'elle reste
------------	----------	--

Extrait 4 : Equation/ résolution et balance 2/ L16

Dans ce tour de parole, il semble que le professeur a placé le cadre technologique de la résolution d'équations au niveau de la métaphore : « la balance » qui va avec. Il a considéré que la balance est un moyen pour introduire les techniques convenables pour la résolution pendant un temps didactique convenable puisqu'elle est vécue des élèves. Nous mettons cependant en doute l'appropriation de l'usage de cette métaphore puisqu'elle ne relève pas d'une balance « virtuelle » où nous trouvons en équilibre les masses marquées comme celles dans les images du manuel. Par contre le travail sur « la balance » est muni d'une monstration « *Si vous voyez p 169 il y a une balance, n'est-ce pas ? Est-ce qu'elle est équilibrée cette balance là ?* » (L13). Ce travail n'autorise pas la condition nécessaire au succès cognitif d'une métaphore au sens de Soto-Andrade (2006)³⁶.

L'enseignant accorde, ici, un *topos* qui reste restreint pour l'ensemble des élèves de la classe. Ceux-ci se trouvent implicitement devant deux obligations 1) accepter les gestes scripturales rencontrées c.à.d. « la balance » sans aucune hésitation et 2) répondre à la question posée par leur professeur et qui nécessite, dans ce cas, un « oui » ou un « non ». Ces actions exemplifient, à notre avis, la postulation mimétique décrite par Sensevy (2001a) :

« Une tendance professorale à considérer en situation que l'élève a compris ce qu'il fallait qu'il comprenne dans les termes où lui (le professeur) comprend ».

³⁶**Comment interagit l'apprenant avec les métaphores ?** Dans l'enseignement traditionnel des mathématiques il n'y a pas de mention explicite des métaphores. Il y a néanmoins des métaphores implicites ou inconscientes, que l'enseignant transmet, ou impose même, à l'apprenant. Beaucoup d'entre elles sont des métaphores consacrées par la pratique mathématique : « la droite numérique », le graphe d'une fonction en tant que trace d'un mouvement fictif (Acevedo, 2005), etc. D'autre part, l'apprenant n'ose surtout pas « métaphoriser » quand il aborde un problème posé par l'enseignant. En plus, il a le sentiment que les métaphores sont quelque chose d'illégal, qui n'est pas dans les règles. C'est ce qu'avouent les étudiants des cours décrits en Annexe, que nous avons interviewés. En outre, les plus éveillés disent préférer créer leurs propres métaphores, avec un peu d'aide, à la rigueur, plutôt que les recevoir toutes faites de l'enseignant. Partant, un point fondamental concernant l'opération des métaphores est d'*autoriser* explicitement les étudiants à s'en servir. En plus, il faudra les stimuler et les aider à construire leurs propres métaphores, au lieu de toujours leur proposer des métaphores toutes faites. Une condition nécessaire au succès cognitif d'une métaphore auprès d'un étudiant est un haut degré de familiarité de celui-ci avec le domaine source de la métaphore. Autrement, nous aurions des métaphores qui « tombent dans le vide ». Bien sûr, l'enseignant devrait être au courant du vécu préalable de l'étudiant, mais en même temps la participation des étudiants à la construction des métaphores à employer tend à assurer un degré de familiarité plus élevé. Ensuite, une fois la métaphore en place et le transfert de sens opéré, l'apprenant peut travailler dans le domaine source de la métaphore, en y puisant dans sa propre expérience. (p 136)

Nous nous posons plusieurs questions sur la balance ainsi que sur les « pistes » de son usage par les élèves dans le vécu libanais. Nous sommes sûrs et certains que peu d'élèves connaissent ou utilisent cet outil, il est loin d'être de leurs vécus. Les balances de ce type n'existent plus dans les magasins ni dans les laboratoires des écoles, celles là sont remplacées par les balances électroniques. Sans oublier que l'usage des « poids » ne peut amener l'élève qu'à utiliser des nombres strictement positifs. Les exemples des poids marqués sur les plateaux favorisent une seule propriété, qui est la propriété 1 du livre : « *On peut ajouter un même nombre aux deux membres de l'équation* ». Par contre la propriété 2 qui revient à : « *multiplier ou diviser un même nombre aux deux membres de l'équation* » est loin d'être accessible par les élèves surtout si on multiplie par un nombre non entier.

Nous pouvons donc conclure que cet outil est loin d'être accessible par les élèves à ce niveau. Par contre, « *l'idée pédagogique de la balance, si elle permet de faire honnêtement comprendre la manipulation qui consiste à ajouter ou retrancher une même quantité à chaque membre, n'en présenterait pas moins le risque d'ancrer trop fortement l'assimilation des nombres à des quantités concrètes, et par conséquent de rendre plus difficile l'acceptation intuitive de la règle des signes, lorsque on aborde la multiplication des nombres négatifs* » (Lombard, 2003).

Cet outil qui est présenté en image ne garantit pas l'appel à l'algébrisation des situations 1 et 2 proposées dans le livre (voir *figure 9*, p.83). En plus le temps consacré pour l'étude de ces deux situations ne permet pas aux élèves « *d'entrer dans une activité intellectuelle et qu'ils soient convaincus que cela en vaut la peine* » (Douady, 1994).

Nous disons que le professeur est entré dans la logique des élèves par l'intermédiaire de la « Balance », au moins provisoirement. Il s'attache progressivement à faire évoluer le rapport des élèves par une prise de sens de cet outil sous son contrôle. Dans ce sens, cet outil ébauche à un bricolage³⁷ didactique au sens de Chevallard (2005) dont ses conséquences didactiques pourraient amener ses éléments de savoir à un carrefour.

Ce premier extrait tourne autour de la définition de l'objet du savoir. Nous nous demandons comment les élèves vont appliquer les explications du professeur. Nous nous focalisons sur la façon dont les élèves vont construire les rapports aux objets du nouveau savoir. En particulier

³⁷Il y a en tout cela – le détournement des savoirs en vue d'un bricolage social et culturel –, qui est monnaie courante, une manœuvre sur laquelle on peut vouloir attirer l'attention du monde, et cela d'abord parce qu'elle porte à oublier collectivement, hormis au sein de rares aréopages, et sans que l'on ait conscience d'oublier, la fonction intrinsèque de la connaissance ».

notre but est de voir comment ils vont réagir au moment didactique : « la discussion de la technique » avant qu'elle ne soit routinière³⁸.

Après que le professeur ait introduit l'équation par analogie à la balance, il a donné directement des exemples dont nous allons choisir quelques uns :

Durée : Min 0 sec 47

L18	P	Equilibrée. <u>L'équation est la même chose.</u> Mais au lieu de cette flèche là, il ya le = ici. Si moi j'ai $3x = 4$, donc équation. <u>La règle me dit :</u> Je peux additionner, ajouter, soustraire, diviser, multiplier chaque membre par le même nombre, rien ne change (<i>montre à la main gauche les deux membres de l'équation tout en regardant les élèves</i>) L'équilibre reste. Je ne peux pas ajouter 4 ici, je ne fais rien quand j'ajoute ici 4. Il faut ajouter ici 4
L19	EI	4
L20	P	Comme si j'ai des poids. C'est clair ? Pour cela, avec cette technique là, on va trouver l'inconnue. Mon but à la fin est trouver $x =$. Oui?
L21	EI	Oui

Extrait 5 : Equation/ Equilibre et égalité/ L18 à L21

Le professeur a présenté l'équation et les propriétés de l'égalité comme un résultat naturel de la métaphore « La balance ». Ceci est attesté par sa diction en L18 « *La règle me dit : Je peux additionner, ajouter, soustraire, diviser, multiplier chaque membre par le même nombre, rien ne change. L'équilibre reste [...]* ». Le rôle de l'élève n'est pas primordial pour cette phase didactique. Le professeur n'a pas effectué de justifications autour de ce phénomène scientifique, c'est « *la règle me dit* ». L'important pour lui c'est « l'équilibre » comme si c'est ce phénomène de la balance qui a ressorti la « règle » sur les propriétés 1 et 2 du cours.

Le professeur n'a pas eu recours à une justification technologique « *La règle me dit* » pour démontrer les propriétés mathématiques.

Cet extrait se termine par une interrogation « Oui ? » (L20) incitant les élèves à accepter et le professeur à avancer le temps didactique.

Pour nous, les élèves pourraient réagir avec cette tâche mathématique de la façon suivante :

1) Remonter au niveau du Secteur : « Calcul numérique sur les quatre opérations » et « Calcul numérique d'une expression faisant intervenir plusieurs opérations » qui fait partie de leurs

³⁸ Chevallard (1995) estime « qu'une technique est routinière quand elle est répétée plusieurs fois et de la même façon pendant différents moments de la séquence d'enseignement ».

connaissances antérieures. Un secteur qui devrait constituer un certain bloc technologique qui vérifie l'action ;

- 2) Travailler sur les données numériques « 3 et 4 » de l'écriture $3x = 4$;
- 3) Traduire ce qu'ils ont eu au profit de l'exigence de la nouvelle tâche et du contrat didactique précisé à partir du tour de parole L20 du professeur « *Mon but à la fin est trouver $x =$* ».

A notre avis, les éléments du milieu cognitif des élèves pèsent sur les éléments du nouveau milieu dans le sens où ils mobilisent, en grande partie, ses connaissances antérieures sur les équations. Par exemple, les élèves, dans la résolution de l'équation $3x = 4$, pourront travailler dans l'ordre suivant : 1) mener des calculs sur les nombres 3 et 4 qui sont présents dans l'équation, en traduisant les dires du professeur dans le tour de parole L18 « *je peux additionner, ajouter, soustraire* ». 2) Ecrire « $x = \dots$ » pour rejoindre « le but » assigné par le professeur dans le même tour de parole. En d'autres termes, les élèves pourront se servir de leurs connaissances antérieures sur des types de tâches tels que : « Trouver le quotient de deux nombres b par a » relevés des classes précédentes. Pour ce faire, ils sont amenés à trouver le nombre qui manque dans l'égalité $a \times \dots = b$. La présence de la lettre x qui prend le statut d'une inconnue dans une équation est une nouveauté pour les élèves de la classe de EB7.

La dévolution de la nouvelle tâche est perçue par les élèves par la trouvaille de « x » qui soit écrite sur un côté suivie d'un calcul qui relève de leurs « Domaines de connaissances » c'est-à-dire de leurs propres organisations mathématiques.

Dans ce sens, l'élève se replie vers ses connaissances antérieures pour agir contre la nouvelle situation. Dans le schéma ci-dessous, nous montrons une balance dont le poids des connaissances munies par « les milieux cognitifs des élèves » est plus lourd que celui « des éléments du nouveau milieu institutionnel » du professeur.

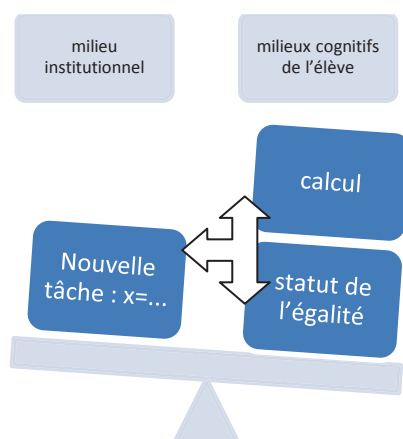


Figure 13 : divergence entre le milieu institutionnel et les milieux cognitifs des élèves

Nous remarquons que le professeur n'a pas travaillé les deux paragraphes 1 et 3 du cours suivant l'ordre proposé dans le manuel : 1) Définition, 2) Equations équivalentes et 3) Propriétés et résolution. Pour lui l'enchaînement des calculs dû à la recherche du poids de l'inconnu x de la *figure 9*, p.83 suffira pour induire ce sujet. C'est-à-dire pour trouver la valeur de « x », les paragraphes 1) et 3) seront seulement suffisants pour que les élèves puissent trouver implicitement des équations équivalentes.

4.7.4. Vers une Problématique de recherche

Nous voudrions maintenant envisager le rôle de cet extrait pour la suite de notre travail. Nous pouvons repérer deux actions professorales délimitant la relation didactique avec la tâche en question :

Le professeur a muni son action en dirigeant la chronogenèse par l'intermédiaire des « coups de force » dans le tour de parole L1 : « *Bon d'abord on va commencer par la définition* » qui dirige sa question dans L7 « *Mais pour trouver ça, il faut résoudre une équation* ». Ces interventions visent à faire advenir à la classe des objets de référence dans le but de construire une mémoire officielle pour l'ensemble classe. Cette mémoire, qui peut être à la fois didactique et culturel, est assumée à l'aide de la réactivation du passé des élèves à partir du phénomène de « l'équilibre de la balance ».

Le professeur considère que son milieu devrait l'être pour les élèves. Notre conviction vient du fait que ses tours de parole se sont clôturés par une réponse déterminante pour ses élèves, comme le « oui ? » qui accélère le temps didactique. Rappelons que les actions du professeur sont outillées par le phénomène d'ostension dont le rôle est décisif pour la chronogenèse de la séance. Grâce à ceci, nous pouvons dire que le milieu du professeur et celui de l'élève ne vont pas dans la même direction pour accomplir la même tâche dans cette première partie du

travail. Dans la suite de la séance, nous allons essayer de repérer les actions des élèves c.à.d. repérer là où les élèves vont ébaucher leurs techniques.

Le professeur a réactivé un milieu propice à son enseignement déjà étudié dans L20. Il a accompli son travail en mettant en exergue les rapports aux objets pertinents à la réalisation de cette tâche. Ce sont des techniques qui placent le sujet au cœur des ostensifs et qui pourraient situer le travail aux niveaux des « moments didactiques avancés » comme le moment de la construction une justification technologique aux techniques utilisées. Nous avons observé cela lorsque le professeur plonge les élèves dans une phase didactique très avancée : « *Mon but à la fin* » (L20). Elle est déclarée par le professeur comme si c'est lui qui doit construire cette technique pour l'apprendre. Il n'a pas donné la chance à l'élève de participer. Il a annoncé publiquement la finalité de son enseignement après une série de calculs sur les nombres présents dans l'équation.

Cette explication qui est basée sur « l'ostension assumée » plonge les élèves dans un milieu qu'il ignore, dans un flou sur un milieu *avec et sur lequel* ils doivent agir. Ce « *flou* » place la réalisation du type de tâche T_d dans un état de distorsion entre le professeur et les élèves.

Donc le milieu propice à l'enseignement est à « la fin » de ce que le professeur montre. Ce qui rejoint l'idée de Matheron (2011):

« La mésogenèse est donc désormais pour partie à la charge des élèves. En indiquant aux élèves leur topos, c'est-à-dire le lieu qui leur est assigné, à travers l'évocation de quelques objets du milieu avec lesquels ils pourront interagir, tout en laissant un flou sur le milieu qu'ils devront effectivement y trouver ».

Dans ce sens, le professeur prend en compte des objets qui intéressent son projet didactique sur une tâche prise comme nouvelle aux élèves à ce niveau. Selon Matheron, ces objets ne contribuent pas réellement à la reconstruction des « milieux cognitifs » appropriés pour la nouvelle tâche puisqu'elle laisse un « flou » sur les milieux advenu par le professeur.

Notre idée sur la divergence entre les milieux cognitifs de l'élève et le milieu institutionnel ne s'éloigne pas de celle de Sensevy (2001b) :

« Tout semble se passer dans la relation didactique, comme si l'arrière fond de l'entendement professoral, c'est-à-dire l'ensemble des rapports que le professeur établit aux objets (de savoirs) pertinents pour le ou les objets enjeux, avait tendance à diffuser indûment ».

Sensevy (2011) interprète le rôle le professeur par: « *Non seulement dans l'interprétation que le professeur effectue des attentes et des conduites des élèves, et de ce qu'ils produisent, mais encore dans l'interprétation de la manière même dont ils vont former rapport aux objets du milieu* ». A notre avis, la *manière* indiquée par l'auteur représente les différentes techniques que les élèves mettront en œuvre par les élèves pour réaliser la tâche consignée. Les techniques pourraient mettre en relation des éléments des milieux cognitifs de l'élève avec des éléments qui sont différents de ceux du milieu institutionnel.

Enfin pour pouvoir déterminer la place de l'élève dans la reconstruction du savoir supposé assujéti par le professeur nous nous référons à Chevallard (1988) qui a écrit à ce propos :

« Un savoir qui a cessé d'être un enjeu didactique et dont le contrat didactique verse dès lors la maîtrise adéquate à la charge de l'enseigné ».

Nous disons que l'élève se trouve parfois dans une place qui lui procure la reconstruction de ses propres savoirs. Pour ce faire il mobilise ses connaissances d'une façon qu'il trouve propice à cette tâche. Cela a été fait parce que l'« enjeu didactique » cesse d'être un enjeu présent, dans le sens où les mathématiques du professeur ne sont plus les mathématiques nécessaires à enseigner, mais par contre, ce sont les mathématiques des élèves qui tiennent la scène d'enseignement.

Pour résumer notre point de vue, nous considérons que Matheron (2011) a désigné l'existence d'un certain flou sur les milieux cognitifs des élèves et les milieux institutionnels du savoir.

Sensevy (2001b) a montré que les objets des milieux institutionnels peuvent diffuser indûment, cela est dû aux arrières fonds des élèves c.à.d. à ce que les élèves connaissent déjà.

Chevallard (1988) a ajouté que les élèves sont parfois chargés de rapporter leurs connaissances aux éléments institutionnels nouveaux dans le sens où ils revitalisent leurs mathématiques d'élèves dans une autre situation sans prendre en compte les nouvelles organisations mathématiques.

D'où les trois auteurs attestent l'existence du « flou » entre les milieux des élèves et les milieux institutionnels advenus par le professeur. Cela charge les élèves à construire leurs propres mathématiques en réactivant des connaissances antérieures de leurs milieux cognitifs. La genericité des milieux institutionnels assujétis par le professeur et la spécificité de celui de l'élève pourraient amener à circonscrire le milieu de l'élève.

Nous allons récapituler dans un schéma notre configuration sur les milieux mobilisés par le professeur et les élèves pour réaliser la tâche principale :

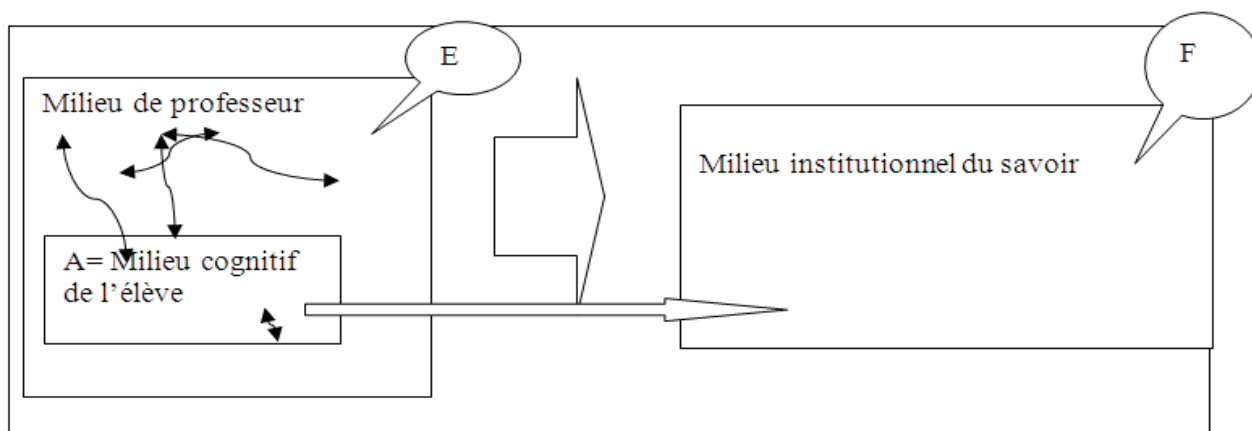


Figure 14 : émergence vers le milieu institutionnel du savoir

Nous désignons par A le milieu cognitif de l'élève³⁹, E le milieu que le professeur souhaite dévoluer, on a $A \subset E$ (dans le sens où les éléments cognitifs des élèves peuvent être interprétés par le professeur afin de les rapporter aux éléments institutionnels du savoir) et par F le milieu institutionnel du savoir.

Le complément de A dans E , noté $\bar{A}$, est l'ensemble des éléments assujettis par le professeur et qui ne sont pas pris en compte par l'élève. Cet ensemble indique la présence des éléments de l'organisation mathématique du savoir non abordables par les élèves. $\bar{A}$ constitue pour nous le milieu « flou » de l'élève.

Nous voyons à l'intérieur de l'ensemble E trois formes différentes de flèches. La première forme est celle qui est à l'intérieur de l'ensemble A , par laquelle, nous voulons dire que l'élève peut munir des actions en mobilisant des connaissances antérieures qu'ils trouvent adéquates avec ce type de tâches. Ce sont les mathématiques de l'élève qui surgissent. La deuxième forme de flèche dans l'ensemble $\bar{A}$ montre les actions professorales qui s'élaborent suivant les organisations mathématiques du savoir sans prendre en considération les rapports de l'élève à ces organisations. Par exemple le professeur a parlé des éléments de l'équation (inconnues, variables, équilibre) sans prendre en compte si l'élève a compris ou pas. Ce sont les mathématiques du professeur qui surgissent à ce point. La troisième forme relie l'ensemble A à l'ensemble $\bar{A}$, pour illustrer les actions professorales qui mettent en place les

³⁹ Le milieu cognitif de l'élève est pris dans le sens de l'univers cognitif de Chevallard (2003) qui met en relation les objets d'enseignement O d'une personne X dans un rapport R dans une institution. L'univers cognitif de X , est représenté par l'ensemble $U(x) = \{(o, R(X, o)) / R(X, o) \neq \emptyset\}$.

connaissances des élèves aux objets d'enseignement. Par exemple, dans le tour de parole L9 « *Mais au lieu de cette flèche là, il y a le = ici. Si moi j'ai $3x=4$ donc équation* », le professeur incite indirectement les élèves à mobiliser leurs connaissances pour effectuer un calcul de type $a \times \dots = b$. Les élèves pourront ainsi envisager la réalisation de la tâche avec ce qu'ils savent tout en mettant en exergue ce que le professeur fait advenir.

Nous avons muni les deux ensembles E et F par deux flèches aussi de formes différentes. La longue flèche relie le milieu cognitif de l'élève avec le milieu institutionnel du savoir. Ceci indique que les élèves peuvent réaliser la nouvelle tâche en tenant compte de leurs milieux cognitifs, sans mobiliser les milieux assujettis par leur professeur. La courte flèche qui relie le milieu du professeur E au milieu institutionnel F indique que les éléments mathématiques et didactiques se rapportent aux éléments du savoir pour réaliser la tâche.

4.8 Problématique et questions de recherche

Nous avons étudié, dans le chapitre 1, le « dédoublement des situations » ou « la bifurcation au niveau des situations ». Dans ce chapitre, nous avons vu que l'action des élèves sur un milieu advenu par le professeur pourrait activer un autre milieu différent de celui attendu. Il s'agit pour nous de montrer que les « bifurcations » fonctionnent aux niveaux des milieux à l'intérieure d'une situation didactique et, non pas une bifurcation des « situations ».

Dans notre étude, nous allons étudier les milieux qui se constituent au fur et à mesure de l'avancement du temps didactique. Il s'agit pour nous de reconstruire les différents milieux personnels des élèves et du professeur afin de déterminer des relations entre les objets activés par chacun d'eux dans la réalisation de la tâche mathématique correspondante au savoir. Pour ce faire, nous allons préciser, sur l'échelle de la codétermination didactique, l'origine du « *flou* » sur les milieux entretenus et montrer, dans le cas de possible, la distance mésogénétique entre les différents milieux mobilisés et le milieu institutionnel du savoir.

Pour réaliser cette tâche, nous nous sommes posé les questions suivantes :

Q₁ : Comment l'enseignant parvient-il à faire advenir dans l'institution classe un milieu propice à l'enseignement ?

Q₂ : Est-ce que le milieu dans lequel évoluent les élèves et avec lequel ils travaillent est celui avec lequel le professeur souhaite évoluer ?

Q₃ : Comment les élèves, en interaction avec le milieu advenu, mettent-ils en jeu les rapports aux objets du milieu institutionnel du savoir ?

Deuxième Partie : Analyse Expérimentale

Chapitre 5 : Le dédoublement des milieux dans la séquence ordinaire sur les équations en EB7 au Liban

Chapitre 6 : Le dédoublement des milieux dans une ingénierie didactique sur les nombres Relatifs en EB6 au Liban

Chapitre 7 : Le dédoublement des milieux dans une ingénierie didactique sur la soustraction en CE1 en France

Chapitre 5 : Analyse de la séquence ordinaire sur les équations en EB7 au Liban

CHAPITRE 5

ANALYSE DE LA SEQUENCE ORDINAIRE SUR LES EQUATIONS EN EB7AU LIBAN

5.1 Organisation des éléments d'étude

5.2 Analyse de la première équation $3x = 4$

5.3 Analyse de l'équation $\frac{3x}{5} = 2$

5.4 Analyse de l'équation $\frac{3x}{5} - 1 = 7$

5.4 Analyse de l'équation $3x - 1 = x + 6$

5.5 Organisation de la suite de la séance

5.6 Etude des techniques d'élèves d'un devoir à la maison

5.7 Conclusion

Introduction

Pour la suite de la séance, le professeur va travailler avec les élèves des exercices d'application sur la résolution des équations du premier degré à une inconnue.

Les deux épisodes analysés de la séance des « Equations » nous placent dans la recherche des réponses à nos questions de recherche. Pour ceci, nous allons observer la façon dont les élèves vont exploiter les techniques amenées par le professeur pour résoudre les tâches du type : « Résoudre une équation du premier degré à une inconnue ». Nous allons préciser sur l'échelle de la codétermination didactique les différents milieux mobilisés par les élèves et le professeur.

Nous allons faire une étude sur un double plan. D'une part, nous allons essayer d'étudier quelques exemples tirés de la première séance sur le type de tâches principal : « Résoudre une équation du premier degré à une inconnue ». D'autre part, nous allons étudier les techniques des élèves commises lors d'un travail individuel préparé à la maison dans le but de déterminer comment les élèves vont appréhender la nouvelle tâche étudiée.

Rappelons que nous avons observé et filmé toute la séquence pendant quatre jours durant laquelle nous avons photographié quelques cahiers d'élèves en classe. Nous nous intéressons à en tirer des indices permettant d'analyser plus brièvement la façon d'approprier le nouveau savoir par les élèves.

5.1 Organisation des éléments d'étude

Rappelons que pendant la première séance, le professeur a travaillé au tableau, avec la collaboration de l'un des élèves, les équations ci-dessous :

Equation 1	$3x = 4$
Equation 2	$\frac{3x}{5} = 2$
Equation 3	$\frac{3x}{5} - 1 = 7$
Equation 4	$3x - 1 = x + 6$
Applications Professeur : « Maintenant on va faire des applications pour voir si vous avez bien compris ».	
Equation 1A	$\frac{6x}{7} = -2$
Equation 2A	$3x - 4 = 8$
Equation 3A	$3x - 4 = 6x + 8$
Equation 4A	$\frac{3x}{7} - 1 = 11$
Equation 5A	$2x - 4 = 2(x - 2)$
Equation 6A	$3x - 6 = 3x - 4$
Equation 7A	$\frac{3x - 1}{6} = x - 1$
Equation 8A	$\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = x - 1$

Extrait 6 : Equations de la première séance

5.2 Analyse de la première équation $3x=4$

5.2.1. Etude de l'équation $3x=4$

Dans les moments qui précèdent le travail de la première équation, le professeur a déjà « défini » ce qu'est une équation par l'exemple de la balance : « L'équation est la même chose » dont la flèche désigne le signe « = » de l'objet mathématique.

Durée : Min 4 sec 27

Ligne	Equation 1	
L22	P	Si moi j'ai $3x=4$. Comment je peux avoir $x=$? En supprimant le..? <i>(Il regardait les élèves afin de répondre à cette question).</i>
L23	El	Le 3
L24	P	Le 3. Comment je peux ?
L25	El	Je peux diviser par 3.
L26	P	Je peux diviser par 3 c.à.d. Quoi ?// hé// Il est en quel côté. Il est d'un côté. // Comment je supprime le 3 ici ? Vous m'avez dit : « on divise par 3 ». Donc j'ai divisé par 3, il devient x <i>(il a écrit au tableau en même temps $x=$).</i> Donc, // Oui ?// car 3 divisée par 3 <i>(il a souligné à l'aide de sa craie le 3 dans $3x=4$ et continue)</i> donne
L27	El	4
L28	P	$x=4$, n'est ce pas? Seulement ?
L29	El	Elève: Non...Non, sur 3.
L30	P	Sur 3, pourquoi sur 3? Je dois diviser par 3 et par 3 dans chaque membre /// terme.
L31	El	Oui
L32	P	Un autre modèle un peu plus difficile <i>(c.à.d. une nouvelle équation).</i>

Extrait 7 : Equation $3x=4$ / L22 à L32

Pour cette équation, le professeur a soufflé la réponse aux élèves dans la maïeutique qu'il utilise : « *Comment je peux avoir $x=$?* » (L22) et aussi grâce à un effet Topaze « *En supprimant le ?* ». De plus, il a montré l'équation avec la main en regardant le 3 de $3x=4$. Les élèves n'ont qu'à répondre à la question et donc, la réponse 3 de l'un des élèves vient de soi.

Les élèves rencontrent, pour la première fois, la technique qui revient à diviser par un nombre chacun des membres d'une égalité, par l'intermédiaire du verbe « supprimer » qui évoque plutôt une « suppression » ou même une « soustraction » d'un terme. Notons que cette technique n'a pas été introduite antérieurement au cours de l'explication. La technologie de

cette technique qui à « $ax=b$ fait correspondre la solution $x=\frac{b}{a}$ » peut relever évidemment

de la règle donnée par le professeur dans L18 « *La règle me dit : je peux additionner, ajouter, soustraire, diviser, multiplier chaque membre par le même nombre, rien ne change* ». Cette

« règle » précise que le professeur a replacé le sujet enseigné à l'intérieur de l'application de la règle de même opération avec le même nombre dans chacun des membres de l'égalité. La réponse d'un élève dans L25 : « Je peux diviser par 3 » montre qu'il se place dans le calcul de $x = \frac{b}{a}$ qui représente pour lui le calcul du quotient de a par b. Cela a déjà été étudié par les élèves lors des années précédentes, notamment dans le calcul du nombre qui vérifie l'égalité $a \times \dots = b$.

Rappelons que le professeur a clôturé son discours par l'énoncé du but principal du nouveau chapitre : « *Mon but à la fin est de trouver x* » (L20). Ce travail devrait apporter quelque chose de nouveau aux élèves qui sont dans le bain d'une nouvelle leçon. Comment l'interaction entre les pôles didactiques (Professeur / élève / savoir) a-t-elle eu lieu dans cet épisode?

Pour pouvoir préciser les milieux cognitifs des élèves, c'est-à-dire à pouvoir déterminer les connaissances dont ils disposent et qu'ils vont mobiliser pour l'accomplissement de cette tâche, nous avons déterminé les chapitres que les élèves viennent d'étudier avant l'explication de ce chapitre. Nous avons remarqué qu'ils ont déjà fini le chapitre sur « les expressions algébriques » que ses objectifs dans le curriculum sont les suivants :

6. EXPRESSIONS ALGEBRIQUES (15 h)		
CONTENU	OBJECTIFS	COMMENTAIRES
6.1. Calcul sur des expressions algébriques.	1. Développer et réduire des expressions algébriques. • Connaître la signification de: terme algébrique ou monôme, coefficient, variable, expression algébrique. • Reconnaître les termes semblables parmi plusieurs termes algébriques. • Réduire les termes semblables dans une expression algébrique. • Additionner et soustraire des expressions algébriques. • Multiplier deux expressions algébriques.	

Figure 15 : Les expressions algébriques dans le curriculum libanais

Au début de la séance, le professeur n'a pas pu réussir à différencier le statut de x dans les deux secteurs « Expressions algébriques » et « Equations ». Rappelons que x est une « variable » dans une expression algébrique « *Equations à plusieurs variables* » au lieu de dire : « Equations à plusieurs inconnues » et une « inconnue » dans une équation.

A notre sens, le professeur a actualisé le passé didactique de l'institution classe au moyen de l'ostensif : « variable x » qui renvoie à « variation » et donc à « fonction ». Il a reconstitué la mémoire officielle relative au chapitre précédent : « Expressions algébriques ».

Le professeur se place au niveau du secteur : « Expressions algébriques » dont dérive le thème « calcul sur des expressions algébriques » englobant la réalisation de la tâche : « Développer et réduire des expressions algébriques ». Les techniques nécessaires pour traiter cette tâche sont multiples, comme le montre la partie « Objectif » du curriculum (voir 4.4, p.76). Nous nous attendons à ce que l'élève se place dans le même secteur, mais le sujet pourrait être différent. Aussi, l'écriture de l'ostensif « x », dans le membre de gauche, apparaît aux élèves, en l'absence notamment d'un contrôle théorique approprié, comme un indicateur pour effectuer des calculs.

5.2.2. Etude en termes du dédoublement des milieux

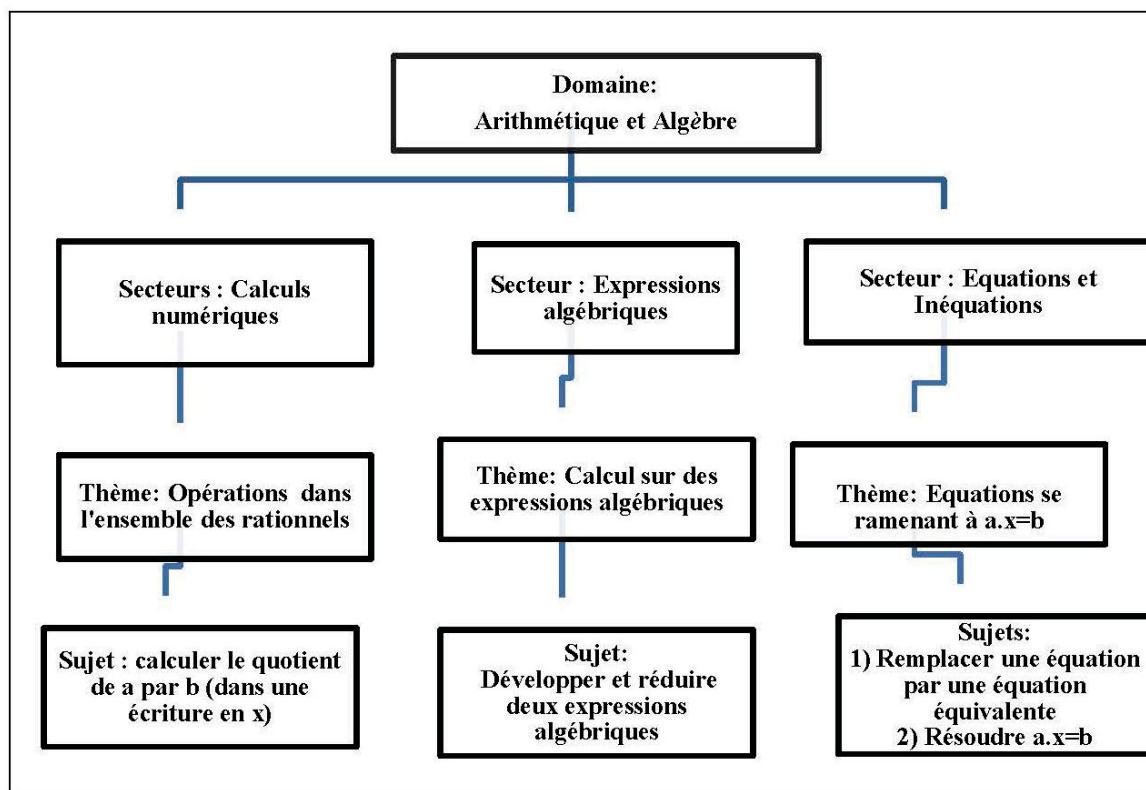
Du côté du professeur

Le professeur fait advenir le « milieu institutionnel » avec l'objet de savoir « $ax=b$ » qui renvoie aux secteurs :

- 1) « Calculs numériques » dans les tours de paroles L18 « *Je peux additionner, ajouter, soustraire, diviser [...]* » et L22 du professeur « *[...] en supprimant le [...]* » ;
- 2) « Expressions Algébriques » dû à la présence des monômes comme « $3x$ » suscitant chez l'élève, à ce niveau, la mobilisation des techniques spécifiques déjà étudiées ;
- 3) « Equations » dans les tours de paroles L26 du professeur « *Il est en quel côté ? (Pour le x)* » et dans L30 : « *Je dois diviser par 3 et par 3 dans chaque membre* ».

Le professeur mobilise donc des objets appartenant aux trois secteurs. Les deux secteurs « Expressions algébriques » et « Equations » amènent à la résolution de deux types de tâches différentes. Le premier consiste à faire des calculs algébriques variés, tandis que l'autre vise à la résolution d'une équation. Dans notre sens, le premier est considéré comme fournissant une technique pour le deuxième car l'élève doit pouvoir effectuer des calculs algébriques pour résoudre une équation algébrique. Signalons que l'ostensif principal mis en œuvre dans les deux types de tâches est identique : « c'est la lettre x ». Nous pensons que, du point de vue du professeur, cet ostensif est évidemment décontextualisé. Tandis qu'il peut signifier pour l'élève une « lettre de l'alphabet » ordonnée dans une série d'ostensifs : « 3, x , = et 4 ». Cette conviction est peut être due, en partie, à la définition des termes dans le manuel : « *Les termes de l'équation $2x-3=5$ sont $2x$, -3 et 5* » qui sont écrits l'un à la suite de l'autre, sans que le

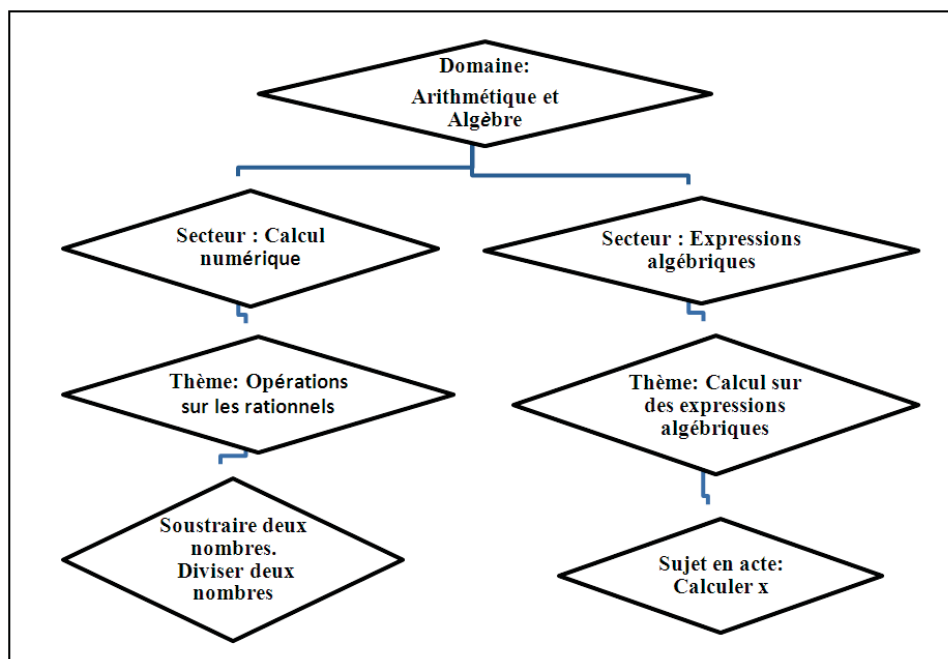
signe « = » n'apparaît dans cette suite. Et avec « la suppression de x », comme l'énonce le professeur dans L22, il ne reste que les termes constants « 2, -3 et 5 » sériés horizontalement. Le troisième secteur amène à la résolution de la tâche « Calcul numérique », qui débouche sur le calcul du quotient de deux nombres rationnels non nuls. D'où notre idée sur le regroupement des niveaux de la codétermination est explicitée dans le tableau ci-dessous :



Tab OM 7 : Milieux cognitifs () du professeur pour l'équation $3x = 4$

Du côté des élèves

L'équation proposée est « $3x=4$ ». Il n'y a pas *a priori* de calculs algébriques à effectuer. La dévolution des objets de savoir effectuée par le professeur contraint la réussite de la tâche par l'effectuation des calculs. Nous pouvons supposer que, compte tenu de ce qu'on leur a enseigné, les élèves se placent, en particulier, autour du secteur : « Calcul numérique » qui sollicite les connaissances antérieures des élèves ; surtout celles qui sont spécifiques au thème « Opérations sur les rationnels » dont un sujet est « Soustraire deux nombres ; diviser deux nombres ». D'où l'idée de regrouper les niveaux de codétermination didactique relatifs aux élèves dans le tableau ci-dessous :

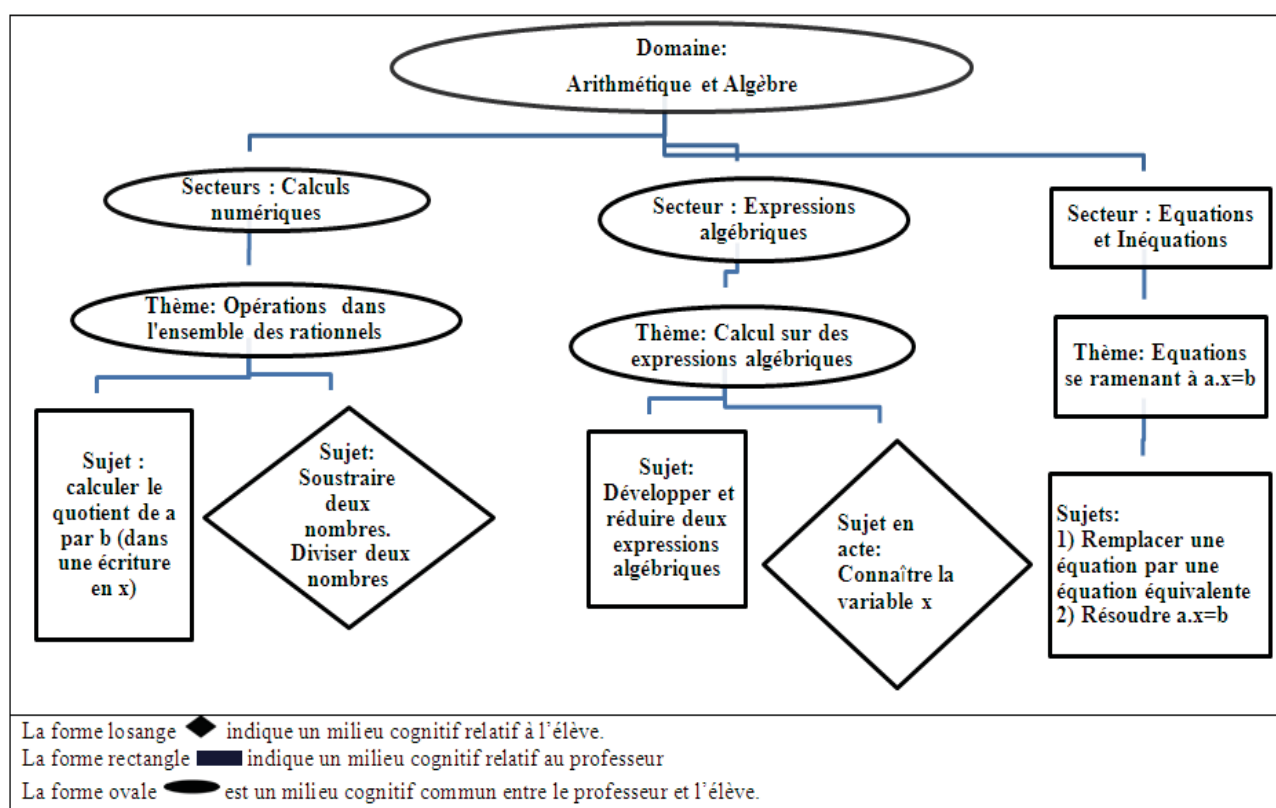


Tab OM 8 : Tableau 2 : milieux cognitifs de l'élève (◆) pour l'équation $3x=4$

5.2.3. Conclusion

Le professeur et l'élève se placent dans des sujets différents dans lesquels ils vont envisager des rapports personnels aux objets institutionnels du savoir. Le professeur veut que ce qui est milieu pour lui le soit aussi pour l'élève, et il tend à construire une mémoire officielle pour faire advenir des rapports aux objets du nouveau milieu. Les élèves instaurent des techniques en mobilisant la mémoire pratique des objets des milieux auxquels ils se réfèrent. Tout se passe comme si les deux pôles du système didactique (Professeur et élève) travaillent la tâche nouvelle en se référant à un « dédoublement des milieux ». Tout le problème didactique consiste à bâtir du nouveau, à partir des milieux des connaissances anciennes des élèves, afin que ces connaissances coïncident plus ou moins bien avec l'organisation de celles qui sont attendues pour le milieu du professeur.

Il en résulte que le professeur et l'élève adhèrent à la nouvelle tâche en se référant à deux milieux différents. Pour l'élève l'attaque de la tâche s'appuie sur la réactivation des éléments de ses milieux cognitifs, indépendamment de ce que le professeur souhaite voir mobilisé pour le nouveau milieu institutionnel du savoir. De là, vient l'idée de combiner les milieux des élèves et du professeur dans un même tableau montrant les différents milieux des élèves et du professeur.



Tab OM 9 : Dédoublement des milieux pour l'équation $3x=4$

5.3 Analyse de l'équation $\frac{3x}{5} = 2$

La résolution de cette équation nécessite l'usage de la propriété 2 du cours qu'on peut désigner par « la transposition multiplicative des termes » :

Durée : Min 6 sec 13

L33	P	Comment on fait ? (Il écrit l'équation au tableau)
L34	Els	Multiplier
L35	P	Je dois trouver $x=$ / (<i>Il écrit $x=$ au tableau</i>) /Celui qui a une question qu'il lève la main SVP// Comment on doit chasser ce $\frac{3}{5}$. [<i>Les élèves crient ensemble</i>] Vous avez à lever le doigt (<i>brouhaha</i>)

Le professeur débute cette partie par « Comment on fait ? ». Cette intervention relève de l'intention de la construction d'un milieu activé par la manipulation des techniques qui étaient imprécises pour les élèves dans l'équation précédente. Celui-ci attend que la réponse à cette question puisse être spécifiée à travers la définition d'une « pratique » donnée par un élève : les élèves doivent réactiver des rapports à une technique déjà instaurée dans le cours à travers la première équation ($3x=4$).

Le professeur tend, pour accomplir cette tâche, à la replacer dans ce que la classe a déjà rencontré. Mais il y a des « nouveautés » avec cette nouvelle équation : c'est $\frac{3}{5}$ et non pas 3

(dans l'équation $3x=4$) et $\frac{3x}{5}$ et non pas $\frac{3}{5}x$. Les élèves sont donc face à deux difficultés supplémentaires portant sur des ostensifs, pour pouvoir retrouver la technique attendue.

La réponse de plusieurs élèves dans L34 « *multiplier* » représente pour nous un indicateur sur le milieu de l'élève. Elle indique que les élèves se replacent dans le secteur « Calcul Numérique ». Au même moment que le professeur active des rapports aux éléments des secteurs : « Expressions algébriques » et « Equations ». C'est ce qu'atteste son intervention « *Je dois trouver x* » (L35) qui indique une technique présente dans les secteurs : « Expressions algébriques » et « Equations ». Pourtant, cette tâche est effectuée au moyen de la sous-tâche suivante dans le tour de parole L35 du professeur « *Comment on doit chasser ce $\frac{3}{5}$?* ». Cette intervention suffit pour attacher la résolution de la tâche à la mobilisation des éléments du « domaine numérique ».

Les réponses des élèves à la question de **P** « comment on fait » sont explicitées dans cet extrait :

Durée : Min 0 sec 10

L36	El	$x=3-5$
L37	P	$3-5$?
L38	Autre élève	Non
L39	Autre élève	Il y a 2 aussi
L40	P	Je n'ai pas compris // Il faut faire quelque chose ici et ici (il montre le deuxième membre de l'équation) pour que je garde l'équilibre.
L41	El	$\frac{3x}{5} \times 5$ et 2×5 pour chasser le 5.

Extrait 8 : Equation $\frac{3x}{5} = 2$ / L36 à L41

La réponse de l'un des élèves « $x=3-5$ » justifie deux affirmations : 1) soit qu'il soit en rapport avec le secteur « calcul numérique », 2) soit qu'il applique le théorème-en-acte suivant : « L'équation est une série de nombres écrits l'un à côté. Et, pour trouver la valeur de la lettre x , on doit faire un calcul ». Nous pensons que pour lui, la soustraction est l'opération la plus avantageuse. Il a tendance à substituer la division des nombres par une soustraction. C'est la confusion classique entre soustraction et division.

La réponse d'un autre élève dans L39 « Il y a 2 aussi », pour corriger la réponse de son camarade « $x=3-5$ » (L36) pourrait soutenir notre conviction que « *l'équation est une série de nombres dont la résolution exige de faire des calculs sur tous ses termes* ». C'est semblable au cas de l'équation $3x=4$. Pascal (1980) explique à ce propos que « *L'élève a pour lot de calculer, c'est la majeure partie de sa partie mathématique d'élève. Il s'appropriera le problème à résoudre en le faisant rentrer dans son domaine, celui de calcul* ». L'ostensif « x » dans le membre de gauche apparaît alors, en l'absence notamment d'un contrôle théorique approprié, comme fournissant un indicateur assez généralement valable de l'acceptabilité des opérations effectuées et, à notre sens, comme fournissant des rapports essentiels aux éléments du nouveau milieu.

Nous voyons donc dans ce contexte combien les différentes techniques de l'élève s'intègrent dans une même appréhension des écritures qu'il doit traiter par le calcul. On notera d'ailleurs que la consigne de « Résoudre » telle qu'elle fonctionne dans cette institution n'est pas mathématiquement formulée.

Le professeur tend à construire un bloc technologique dans le tour de parole L40 « *Je n'ai pas compris. Il faut faire quelque chose ici et ici pour que je garde l'équilibre* ». Il essaie de

dévoluer à la classe les rapports qui serviront à se replacer dans le milieu institutionnel du savoir. C'est-à-dire, à travers son discours, à établir des rapports entre les milieux de la situation et les objets du nouveau savoir.

Il nous semble alors que la fonction technologique de « garder l'équilibre » est signifiée autrement pour l'élève qui se trouve dans l'exigence de rechercher de rapports avec les écritures numériques. La réponse de l'élève « $\frac{3x}{5} \times 5$ et 2×5 pour chasser le 5 » (L41) traduit la volonté du professeur « Il faut faire ». Il a multiplié les deux membres par 5 parce que peut-être la réponse qui porte sur la soustraction « $x=3-5$ » n'était pas correcte. Cet élève va sans doute multiplier par le nombre 5 « *ici et ici* ». Or cette réponse n'a pas de vie, elle est écrasée par le meneur du jeu dans L42 :

L41	El	$\frac{3x}{5} \times 5$ et 2×5 pour chasser le 5.
L42	P	Je ne peux pas chasser ces deux $\frac{3}{5}$, (il écrit au tableau $\frac{3}{5} \times \dots = 1$). Je ne peux pas ! (ces deux c'est-à-dire le 3 et le 5 de la fraction). // C'est difficile, vous avez raison. // Mon but, c'est quoi ? // C'est pour avoir $1 \times x$ (Les élèves crient ensemble. Brouhaha). Ecoute moi, mon but ce n'est pas avoir $1 \times x = ?$ / (Pendant ce temps, le professeur a ajouté un x à côté de $\frac{3}{5}$ dans l'égalité $\frac{3}{5} \times \dots = 1$ qui est devenue $\frac{3x}{5} \times \dots = 1$).

Extrait 9 : Equation $\frac{3x}{5} = 2$ / L41-42

La réponse L41 nous place devant la possibilité : l'élève aurait voulu déterminer la valeur de « x » en deux temps consistant à multiplier par 5 puis diviser par 3 les deux membres de l'équation. Ces deux temps semblent attendus puisque la technique de la résolution est en cours d'élaboration.

Or L41 met en opposition les demandes du professeur dans L35 : « [...] Comment on doit chasser ce $\frac{3}{5}$ ». Il s'agit pour le professeur de travailler sur le nombre rationnel $\frac{3}{5}$ qui peut être considéré comme un algorithme plus économique à l'apprentissage puisque son usage ne demande qu'une seule étape pour la résolution.

Nous pouvons ainsi se demander pourquoi le professeur veut tout de suite que les élèves multiplient par $\frac{5}{3}$ en disant « Je ne peux pas chasser ces deux $\frac{3}{5}$ » (L42). Ces demandes ne

sont pas perçues comme tel. L'élève a choisi de multiplier par le nombre entier 5. Nous pensons qu'alors le professeur et les élèves ne conçoivent pas leurs actions dans le même domaine numérique.

L'élève a multiplié par 5 (*ici et ici*) (L41) suite aux demandes excessives du professeur dans L35, L40 et à l'échec de l'un de ses camarades dans L36, L38 et L39. Nous disons que « multiplier par 5 » a lieu parce que « soustraire » était une fausse réponse.

Face à cette analyse, nous pensons que les tentatives de cet élève s'enracinent dans le thème propre au « calcul numérique ».

Les tentatives du professeur pour construire un bloc-technologique n'étaient pas réussies en général. Il a poussé implicitement les élèves à la réalisation de la tâche « Multiplier deux fractions », et plus précisément à la division de deux fractions dans une égalité à trou. Ceci est apte à faire trouver l'inverse de $\frac{3}{5}$. Il écrit « $\frac{3}{5} \times \dots = 1$ » à la fin de la ligne L42. Cela montre la nécessité de mener des calculs pour réussir la tâche. En outre, il nous semble que la question « *Mon but, c'est quoi ? // c'est pour avoir $1 \times x$?* » peaufine le détail, d'une manière qui souligne la position technique propre de l'enseignant au sens où il est seul capable de fournir certains commentaires qui marquent sa culture technique et son vécu d'enseignant : « la simplification d'écriture due à l'élément neutre de « x » dans l'ensemble des réels IR. Dans ce contexte, il pourra mettre à sa guise le nombre 1 devant x, rien ne change, et avoir l'égalité $x = 1 \times x$ ».

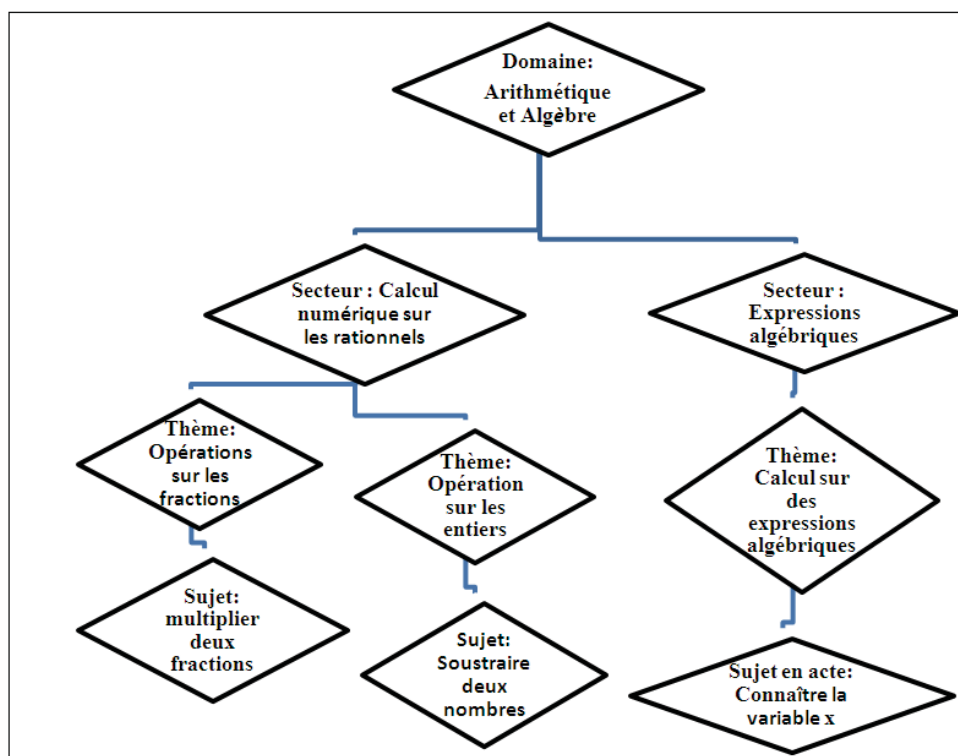
Le professeur renvoie donc les élèves au secteur « Calcul numérique » qui englobe le thème « Opérations sur les fractions » pour répondre à la tâche « Diviser deux fractions » dans une égalité à trou indépendante de l'ostensif « x ». Pourtant il remonte au secteur « Ensemble des rationnels Q » qui englobe le thème « Ecriture fractionnaire d'un nombre » pour répondre à la tâche « Calculer l'inverse d'un nombre », car il a écrit au tableau $\frac{3}{5} \times \dots = 1$. Le professeur

a ajouté un x à côté de $\frac{3}{5}$ dans l'égalité $\frac{3}{5} \times \dots = 1$. Tout se passe comme si le professeur considérait que tout ce qui est vrai pour le numérique est apte à l'être pour l'algébrique $\frac{3}{5} \times \dots = 1$ est équivalente à $\frac{3x}{5} \times \dots = 1$.

Ceci nous permet de conclure que les deux tâches : « Calculer une égalité à trou » et « Résoudre l'équation » sont équivalentes aux yeux du professeur. D'où une nouvelle

invitation aux élèves de la classe qui les contraint à s'enraciner dans leurs milieux cognitifs : « les opérations sur les nombres ». Notons que ces milieux ne concernent pas l'élève dans L41 qui veut multiplier les deux membres de l'équation par 5, sauf si sa réponse relève d'une tentative personnelle indépendante de ce que le professeur impose.

Nous montrons dans un tableau les milieux cognitifs possibles de l'élève lors de cet extrait :



Tab OM 10 : milieux cognitifs de l'élève pour l'équation $\frac{3x}{5} = 2$

En revanche, la dévolution de la tâche est assignée par le professeur à la comparaison entre l'équation précédente « $3x=4$ » et l'équation « $\frac{3x}{5} = 2$ ». Cette démarche relève d'un « *Ostensif déclencheur* » (Araya, 2008)⁴⁰. Pour le professeur, il suffit de montrer la première équation aux élèves pour qu'ils puissent résoudre la nouvelle équation :

⁴⁰ [...] l'utilisation d'une analogie de la part de l'enseignant demande aux élèves d'effectuer un double remplacement. D'une part, il faut qu'ils se replacent à l'instant où ils sont entrés en contact avec la première partie de l'analogie qu'utilise le professeur, afin de reconnaître ce que l'enseignant a l'intention de souligner. D'autre part, les élèves doivent transposer ce que l'enseignant a souligné – ou suivre la transposition faite par l'enseignant – vers la pratique contenue dans la situation face à laquelle se trouve actuellement la classe.

L48	P	$\frac{5}{3} // = \frac{10}{3}$ / (il écrit au tableau $x = 2 \times \frac{5}{3}$, il montre le 3 de la première équation) Ici on a commencé par 1. C'est la même chose. // Quelle est la différence entre 3 et $\frac{3}{5}$ (il montre l'équation 1). Ça un nombre et ça un nombre. Ce sont des fractions, mais c'est le même principe. Donc quand je divise par 3, je divise par $\frac{3}{5}$. // Diviser par $\frac{3}{5}$, ça fait fois ??
-----	---	---

Extrait 10 : Equation $\frac{3x}{5} = 2$ / L48

Le professeur identifie les coefficients de x dans les deux équations comme un ressort à la résolution de la nouvelle équation. Il prive la classe de toute justification technologique et impose une technicité instrumentale (Abou Raad, 2006) qui clôt l'institutionnalisation de la tâche de la façon suivante L50 :

L50	P	fois l'inverse, c'est ça (Il écrit un x au dessous de l'équation). Je divise par $\frac{3}{5}$ (c'est-à-dire 2 divisé par $\frac{3}{5}$), au revoir $\frac{3}{5}$. Je divise par $\frac{3}{5}$ (il montre le second membre) // $x = 2 \div \frac{3}{5}$. Ça fait $x = 2 \times \frac{5}{3}$, 2 fois l'inverse.
-----	---	---

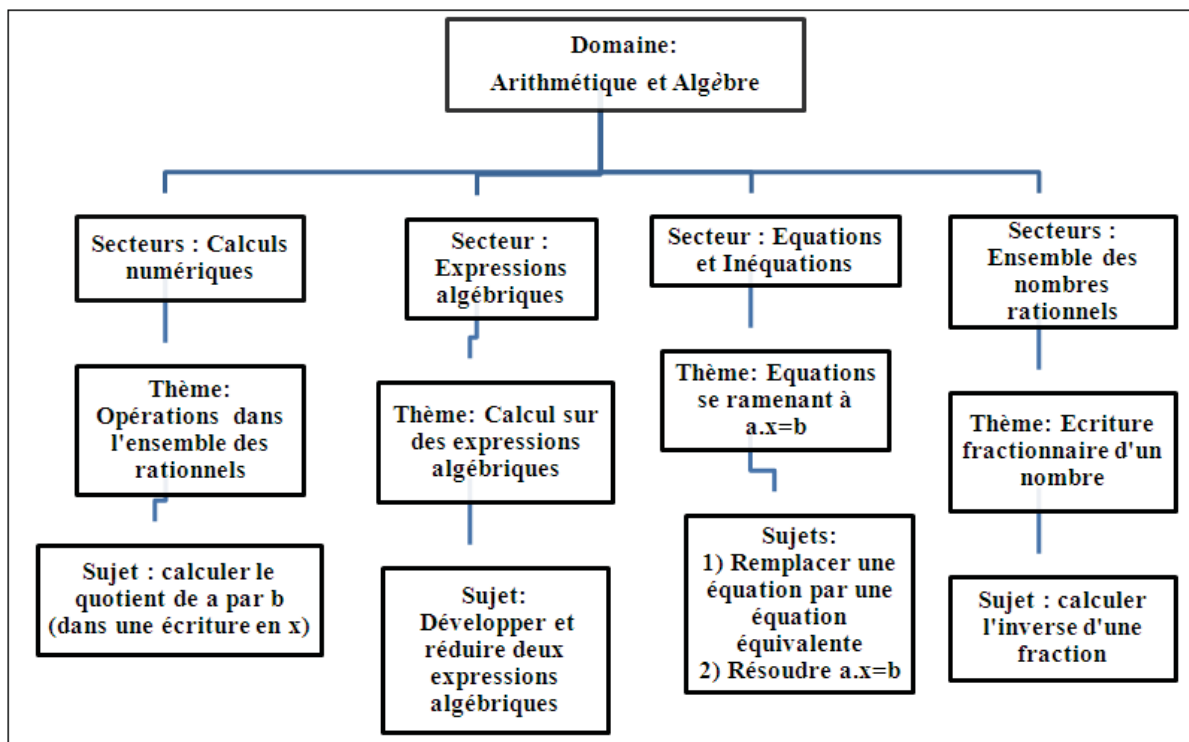
Extrait 11 : Equation $\frac{3x}{5} = 2$ / L50

Nous remarquons que le professeur a trouvé la solution en se servant du sujet « Quotient de deux nombres » issu du thème « Opérations sur les nombres rationnels », inclus dans le secteur « Calcul numérique ». Ce fait est en contradiction avec ce qu'il a fait advenir à la première ligne de cet extrait vu que le sujet qui porte sur « Calculer l'inverse d'un nombre » issu du thème « Ecriture fractionnaire d'un nombre » qui dérive du secteur « Ensemble des nombres rationnels ».

Pour terminer son parcours, il a appliqué la propriété 2, la technique qui revient à multiplier le même nombre aux deux membres dans L50.

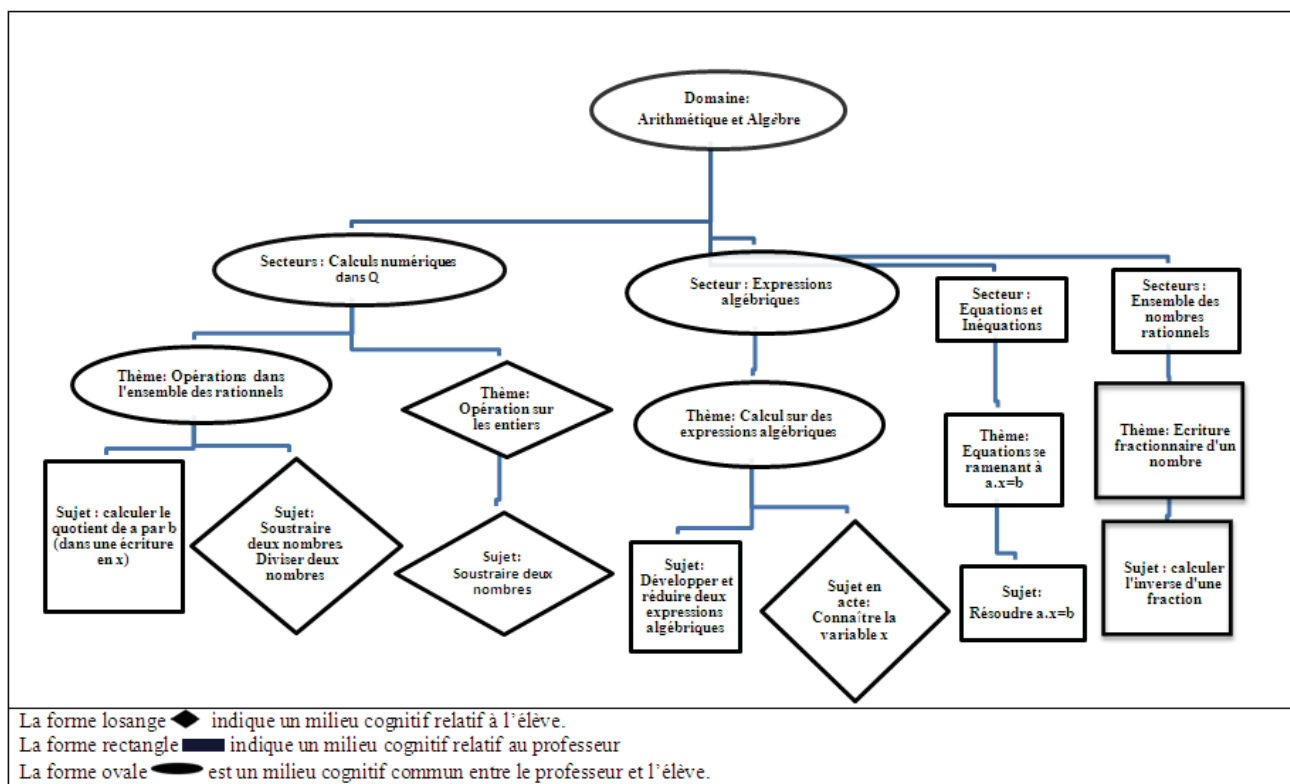
En résumé, le professeur a placé les élèves dans trois milieux différents, chacun d'eux amène une technique différente du point de vue « praxéologie mathématique ».

Le professeur, pour résoudre une équation, utilise uniquement le secteur relevant du calcul numérique : « je divise » ; « fois l'inverse ». Dans ce contexte, le milieu institutionnel amené par le professeur pourrait être en conformité avec le tableau ci-dessous :



Tab OM 11 : Milieux cognitifs assujettis par le professeur dans l'équation $\frac{3x}{5} = 2$

En principe, les tableaux **OM10**, p.125 et **OM11** nous permettent de voir comment le professeur et les élèves relient les secteurs de leurs connaissances aux éléments du milieu institutionnel du savoir. Le tableau suivant permettra de montrer les différents milieux mis en jeu en précisant, par l'intermédiaire des formes géométriques, leur intersection et leur interférence :



Tab OM 12 : Dédoublment des milieux pour l'équation $\frac{3x}{5} = 2$

5.4 Analyse de l'équation $\frac{3x}{5} - 1 = 7$

Le professeur présente maintenant la troisième équation qu'il a nommée « Level 3 », considérée comme plus difficile que les autres.

Min 3 sec 44

Ligne	Equation 3	
L51	P	Maintenant Level 3 (<i>il écrit level 3 au tableau</i>) : $\frac{3x}{5} - 1 = 7$ Qui peut m'aider pour faire ceci? - Personne! -Passe (un volontaire passe au tableau).
L52	Pati	Pour enlever le -1 // On fait +1
L53	P	Bravo
L'élève écrit au tableau de la façon suivante : $\frac{3x}{5} = 7 + 1 = 8$ $x = 8 \times \frac{5}{3} = \frac{40}{3}$		
L54	P	Merci. Vous remarquez que Pati a dit qu'elle a très bien compris. Tout le monde a compris comme Pati. Voyons. Melissa c'est ton tour, monte. Mais c'est la réponse n'est ce pas? Voyons la question.

Extrait 12 : Equation $\frac{3x}{5} - 1 = 7$ / L51 à L54

Notons que c'est la première fois que le professeur présente une équation dont son premier membre est une somme de deux monômes.

Nous remarquons que la technique de **EI**, élève très brillant(e) du point de vue de son professeur, est formée seulement de deux lignes. Le professeur appuie sur le rapport personnel de l'un des élèves pour aider les autres élèves à réactiver eux aussi leurs rapports. Les élèves de la classe sont muets, ils recopient du tableau sans réagir.

Puisque l'élève désigné a pu donner la bonne réponse, cela signifie qu'il va faire avancer le temps didactique. Pour résoudre cette équation, dans une durée qui n'a pas dépassé quelques secondes, il lui suffisait d'appliquer les techniques de l'équation précédente sans approuver le besoin d'aller explorer d'autres techniques que celles activées précédemment en classe.

Deux explications pourraient permettre d'interpréter la première ligne de la résolution

$\frac{3x}{5} = 7 + 1 = 8$. D'une part, il est possible que la notion d'équation se heurte à une conception dissymétrique des équations (Houdebine, 1991). En effet cet élève, devant l'équation $\frac{3x}{5} - 1 = 7$, pense au premier membre comme à une opération et au second membre comme au

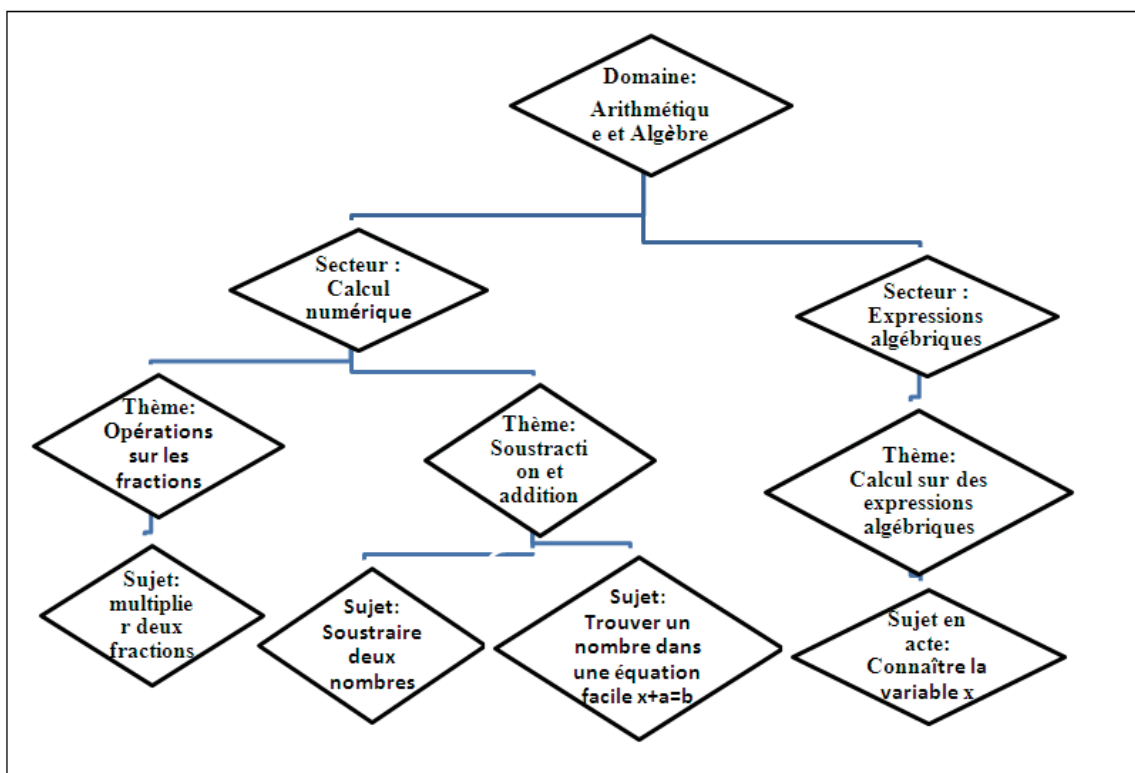
résultat car il a écrit, tout de suite, deux signes « = » pour arriver au résultat de la somme 8 dans « $\frac{3x}{5} = 7 + 1 = 8$ ». Il apparaît que, dans ce cas, la logique de cet élève est du même type que celle qui préside au raisonnement suivant : « J'ai un certain nombre de bonbons, en perdant 1 il me reste 8. Combien avais-je ? ». Dans ce contexte, il se replace dans le thème « Calcul numérique » pris du secteur « Addition et Soustraction des nombres positifs » dont dérive le sujet « Calculer le terme manquant dans une égalité à trou ».

D'autre part il est probable que cet élève a donné l'impression d'utiliser la transposition des termes comme s'il la connaissait depuis longtemps. Or l'idée derrière cela ne semble pas récente, elle apparaissait spontanément dès que l'on travaillait sur des équations faciles comme $x - 1 = 7$ dont le résultat est évident pour l'élève car $8 - 1 = 7$. Nous trouvons de nombreux exercices relevant du passé scolaire de l'élève, précisément de la classe EB2 (CM1 en France) qui amènent les élèves à écrire des égalités de la même famille que « $3 + 2 = 5$ » par exemple. La réponse est $5 - 2 = 3$ ou $5 - 3 = 2$. Ces exemples étaient considérablement travaillés par les élèves dans le but de cerner le lien entre les deux opérations : « Addition et soustraction ». Dans ce sens le signe « = » pourrait indiquer « a pour résultat » dans une situation qui signifie une « égalité conditionnelle » entre deux fonctions égales. La réussite, dans ce cas, est due aux avantages « mémoriels, épistémologiques » des élèves relatifs aux années antérieures. Cette réussite aura peut-être des conséquences didactiques inadaptées aux équations qui comportent la lettre « x » dans les deux membres. Pour cette supposition l'élève remonte au secteur « Calcul numérique dans Q » qui englobe le thème « Addition et Soustraction » pour répondre au sujet « Ecrire des égalités de la même famille ».

Nous pensons que la deuxième ligne est un signe qui place les actions des élèves au niveau de la technicité requise par l'exigence du nouveau milieu. Il est suffisant pour l'élève de faire une série de calculs au deuxième membre ($7 + 1 = 8$ et $8 \times \frac{5}{3} = \frac{40}{3}$) qui révèlent une adaptation aux exigences de la nouvelle tâche.

Les rapports des élèves aux objets du milieu de la nouvelle tâche apparaissent à la deuxième ligne : « $x =$ ». Ceci pourrait être révélé comme signe marquant la proximité entre les milieux cognitifs de l'élève et les contraintes de réussite de la nouvelle tâche. Dans ce contexte l'élève tisse des rapports avec les éléments du milieu institutionnel du savoir sans éprouver le besoin d'aller plus loin dans la recherche d'une (ou des) technique(s) nouvelle(s).

Le tableau présenté ci-dessous illustre notre point de vue sur les milieux cognitifs de l'élève pris en compte dans la résolution de cette équation :



Tab OM 13 : Milieux cognitifs de l'élève pour l'équation $\frac{3x}{5} - 1 = 7$

5.5 Analyse de l'équation $3x - 1 = x + 6$

5.5.1. Analyse de l'équation

Le professeur a commencé la résolution de cette équation par le tour de parole L55 qui montre le passage à une nouveauté dans le travail :

Durée : Min 0 sec 30

L55	P	(L'élève Melissa est au tableau) J'ai changé tout, n'est ce pas? –Voyons, est-ce qu'elle va savoir comment réfléchir et comment utiliser les informations qui sont dans la tête. Yallah (mot libanais qui signifie vas-y), passe au tableau, essaie de faire quelque chose. Passe au tableau, moi je t'aide, moi je t'aide, Hé.
L56	EI	(L'élève a écrit $3x=6$ au tableau).

Extrait 13 : Equation $3x - 1 = x + 6$ / L55-L56

Le professeur cherche à réactiver un rapport entre les traces du milieu complémentaire $\bar{A}$ (voir figure 14, p.108) et les éléments du nouveau savoir avec lesquels Melissa pourra établir un rapport. Ceci apparaîtra soit par une verbalisation écrite au tableau traduisant les ses

techniques, soit par une verbalisation orale. Il s'agit pour nous d'un premier « essai » pour relier les milieux de l'élève **A** et le milieu complémentaire $\overline{A}$.

Le professeur a évoqué dans L55 des objets non ostensifs comme « la méthode de réfléchir » et « d'utiliser les informations qui sont dans la tête », des pistes de réflexion que, selon lui, Melissa pourra rapporter des techniques de résolution des équations précédentes afin de résoudre la quatrième équation $3x-1=x+6$, que le professeur a considérée comme plus difficile que les trois premières.

Par conséquent, ces non ostensifs désignés par le professeur dans ce tour de parole pourront mobiliser des connaissances antérieures et des arrière-fonds au service de ce type de tâches. Ces non ostensifs peuvent être transparents pour les uns, mais ne manquent pas de flou pour beaucoup d'autres.

Dans L56, Melissa a écrit au tableau sa réponse sous la forme « $3x = 6$ ». D'après ce qui a déjà été enseigné, l'écriture $3x = 6$ relève du « modèle » de l'équation 1 « $a.x = b$ », que Melissa le considère comme sa référence. Cette référence a été attestée par le professeur à partir de l'équation 1 « $3x=4$ » de la série « Explication du cours ».

Son premier geste est de repérer dans le premier membre le terme qui dépend de x et dans le second membre le terme connu. Elle procède donc par analogie en suivant la logique de l'écriture ostensive, à laquelle elle ne peut que se référer, puisque dans l'explication du professeur manquent des éléments technologiques associés à la technique prescrite dans le programme : « Ramener une équation linéaire à la forme : $ax=b$ ». L'élève se trouve à mi-chemin de l'OM de ce savoir. Elle sait qu'il faut avoir $ax=b$ mais il lui manque la justification mathématique pour y arriver.

Nous pensons que la dynamique du système didactique de cette situation a permis à Melissa un travail de reconstruction du souvenir mettant en œuvre le « modèle » de l'équation 1 sachant que la résolution est toujours écrite devant elle au tableau. L'élève est prise par le contrat qui conditionne ses actions qui est : « avoir la forme $ax=b$ ». Dans ce sens nous disons que le milieu de cet élève est restreint, et qu'elle évolue dans les contraintes imposées par son professeur sous la forme de « coups de force » mathématiques et didactiques, elle ne peut agir qu'à partir de telles contraintes, qui conduisent vers ce que nous pouvons la considérer comme une « filtration didactique » dans le sens où l'élève n'utilise que des rapports que le professeur trouve essentiels et économiques à son action.

Dans cette logique, l'élève mobilise les ostensifs : $3x$ (à la place de $3x-1$), le signe $=$ et le nombre 6 (à la place de $x+6$) afin de pouvoir s'engager dans la technique relative au modèle amené et attendu par le professeur. Melissa a reproduit, à ce moment-là, une pratique désignée comme « mémoire pratique de la personne » ou « mémoire pratique » (Matheron et Salin, 2002). Elle a essayé de reproduire le modèle qui lui permet d'inférer dans quel milieu institutionnel du savoir va se replacer. Un milieu qui est en cours d'intégration dans son milieu cognitif. Elle essaie d'adapter ses techniques personnelles aux objets du milieu institutionnel en tant que milieu conçu comme essentiel (le modèle $a.x=b$) à l'attaque de la tâche problématique nouvelle.

Ainsi, l'élève s'est-elle placée dans le thème des « Equations et Inéquations » dont dérive le secteur des « Equation de la forme $ax + b = cx + d$ » qui répond à la technique « Ramener toute équation à la forme $a.x=b$ ».

Pourtant le professeur est intervenu pour faire dévier le parcours de travail de l'élève dans le tour de parole L57 :

Durée : Min 0 sec 41

L57	P	$3x = 6$. Je peux savoir. N'oublie pas que c'est une balance, tu enlèves une banane d'ici, tu dois enlever une autre banane d'ici // non pas une pomme // Oui !! A quoi tu penses Melissa // Banane (brouhaha en classe) Qu'est-ce qu'on doit supprimer // Qu'est-ce qu'on doit avoir? Tu sais? // Qui sait? (<i>en regardant les élèves</i>)// Qui peut m'aider ? Qu'est-ce qu'on doit avoir ?
-----	---	--

Extrait 14 : Equation $3x-1=x+6$ / L57

L'intervention du professeur : « *N'oublie pas que c'est une balance* » révèle une intention d'activer la technique : « Ramener toute équation au modèle de l'équation 1 : $ax=b$ » et de la justifier avec des éléments du bloc technologique constitué des propriétés 1 et 2 du cours : « *tu enlèves une banane d'ici, tu dois enlever une autre banane d'ici* ». L'essentiel pour lui est la monstration de l'équilibre de la balance en le mimant avec les mains. D'où son rappel chaque fois qu'il croit nécessaire d'en éprouver ce besoin didactique : « *N'oublie pas que c'est une **balance*** ». Ceci peut constituer un système d'évidences qui fait appel à la mémoire didactique d'un savoir quotidien. Notons que le professeur n'a pas enseigné le principe de la balance, ni l'a fait éprouver comme une nécessité pour la réalisation de la tâche.

Les actions du professeur ont été menées par des mouvements topogénétiques descendants qui le rapprochent du topos de l'élève dans « *Qu'est ce qu'on doit supprimer, qu'est-ce qu'on doit avoir ?* » et « *tu dois enlever, à quoi tu penses ?* ». Ces gestes définissent l'action du professeur qui prend en charge le tableau et impose un dialogue avec le groupe classe par l'intermédiaire des pronoms « tu » et « on ». Ces mouvements topogénétiques repérés dans un

épisode chronologique identique auront des effets mésogénétiques (Sensevy et al, 2000). Ils invitent la classe à s'engager dans les étapes nécessaires pour la résolution d'une équation de la forme $ax + b = cx + d$ qu'ils ne connaissent pas encore, et autorisent les élèves à enrichir le milieu en réactualisant des connaissances nouvelles émergeant de la résolution de cette équation.

Le professeur place la tâche dans le thème des « Equations et Inéquations⁴¹ » dans le secteur des « Equation de la forme $ax + b = cx + d$ » mais dans un sujet différent de celui de l'élève. Le sujet du milieu institutionnel du professeur est « Résoudre une équation par l'usage d'une balance » et, par suite, contient l'application implicite des propriétés 1 et 2 du cours. Alors que le sujet de Melissa travaille est de revenir à tout prix à la forme : « $ax = d$ (les nombres **a** et **d** sont les mêmes termes de l'équation $ax + b = cx + d$) » déjà institutionnalisée dans les équations précédentes.

Le professeur continue son discours. Il s'arrête lorsque plusieurs élèves interviennent en même temps dans le tour de parole suivant :

L58	Els	On prend les inconnues seuls et les nombres seuls.
-----	-----	--

Le professeur enrichit les éléments du milieu par la règle reproduite par les élèves dans les tours de paroles précédents. Il a récolté le fruit de son travail en obtenant la technique suivante : « *On prend les inconnues seules et les nombres seuls* ». Notons qu'on ne sait pas comment ces élèves connaissent cette technique. Elle apparaît après l'intervention du professeur dans L57 : « *N'oublie pas que c'est une balance [...]* ». La technique qui advient ne fait pas appel à des éléments technologiques qui la justifient. En fait, c'est la métaphore de la balance qui est « l'élément technologique » qui la justifie. Celle là est accompagnée par des ostensifs langagiers et gestuels comme il montre l'extrait suivant » :

L59	P	(il reprend ce que les élèves ont dit dans L58) On prend les inconnues seules (<i>Il montre de son doigt les inconnues</i>). Pour avoir ce modèle là (<i>il montre l'équation $3x=4$</i>) x seuls et les nombres seuls
L60	El	Seuls (le professeur reprend le refrain avec les élèves : « les x seuls et les nombres seuls » avec des gestes à la main)

Extrait 15 : Equation $3x - 1 = x + 6$ / L59 – L60

Le professeur s'appuie sur le rapport personnel des élèves dans L58 « *On prend les inconnues seules et les nombres seuls* » pour aider la classe à réactiver ses rapports à la technique attendue. Le rôle de ce tour de parole est déterminant pour que le professeur puisse déclencher la technique et la reformuler plusieurs fois. Ce faisant il fournit en quelque sorte « un permis »

⁴¹ Nous écrivons le secteur "Equations et Inéquations" tel qu'il est dans le curriculum libanais en vigueur.

de passage à une autre tâche qui, selon nous, conduit à la réalisation de la transposition des termes d'un membre à un autre dans une équation. Ces élèves (dans L58) sont implicitement remerciés pour leur rôle décisif dans l'avancement du temps didactique de la séance.

Les élèves ont donc imposé, sans s'en rendre compte, la technique « transposer les termes dans une équation » qui est associée au sujet sur lequel ils travaillent. Ce sujet dérive du thème « Equation de la forme $ax + b = cx + d$ » qui relève du secteur « Equations et Inéquations ».

Nous allons étudier maintenant comment le professeur invite l'élève à être acteur de son projet didactique et à établir un rapport idoine⁴² aux objets du milieu institutionnel du savoir. Nous allons découper la suite de la résolution de l'équation $3x - 1 = x + 6$ en trois phases débouchant chacune sur une évolution mésogénétique désignée par une « Phase de travail », afin de mettre en œuvre les techniques qui réalisent le type de tâches « Résoudre une équation de la forme $ax + b = cx + d$ ».

5.5.2. Phases de résolution de l'équation

Phase 1⁴³ : Constitution de l'élément technologique : « Equations équivalentes » apparues sous forme de métaphore : « Garder l'équilibre ».

Le professeur entame son discours par une question « As-tu compris ? » et sans attendre la réponse de la bouche de Melissa passe pour parler de l'égal « = » :

L61	P	As-tu compris (il s'adresse à Melissa qui est toujours au tableau) Donc on commence par l'égal, pour garder l'égal (<i>il a écrit le signe = sous l'égal de l'équation</i>). Tu comprends ?? Oui !!
L62	El	Oui
L63	P	Comment on fait, ce x, au revoir ici (il montre des gestes de mains que le x est parti. Melissa au tableau murmure des paroles inaudibles) Donc tu n'as pas compris, et tu n'essaies pas de comprendre et tu n'essaies pas d'utiliser ce que j'ai dit [...]

Extrait 16 : Phase 1 dans la résolution d'équation/ L61 à L63

Phase 2 : L'émergence de la sous-tâche 1 : « Transposer les termes d'un membre à un autre dans une équation ».

Dans cette phase le professeur explicite la technique qui relève de la règle de « transposition des termes » dans la suite de la ligne L63. Notons que cette technique n'est définie que par l'action que l'on fait.

⁴² La notion de rapport idoine à un objet de savoir aux objets de l'action est: « *Il faut en effet un rapport déterminé (en particulier un mode d'action déterminé) aux objets du milieu (en particulier du milieu matériel) pour que l'adéquation au rapport institutionnel puisse s'établir* » Chevallard (1989a).

⁴³ Remarque : Dans ce qui suit, les titres des phases sont proposés par nous et non par le professeur.

L63	P	[...] Ça doit être fixe (pour le terme $3x$ // (il écrit en même temps ce terme sous le premier $3x$) et ça doit être fixe « pour le terme $+6$ » (il écrit ce terme sous le premier $+6$). Pourquoi? (Il répond à sa question) / Parce que je veux les x ici. Donc je dois supprimer celui-là (il entoure le terme -1) et celui-là (il entoure le terme x) Comment ? Ici (il montre le -1) // Qu'est-ce qu'on fait ? (il prend ses doigts en pistolet et tire sur le terme -1)
L64	Els et P	$+1$ (il tire sur -1 du premier membre de l'équation $3x-1=x+6$) // $+1$ (du second membre) (Les élèves se moquent de Mélissa en disant : « Bravo Melissa »)

Extrait 17 : Phase 2 dans la résolution d'équation/ L63 à L64

Phase 3 : L'application de la sous-tâche 1 et l'émergence de la sous-tâche 2 : « Réduire les termes semblables »

L65	P	[...] Moi, mon but c'est quoi? // les x seuls. C'est ici, il y a $3x$, je reste ici, et ne quitte pas Ici, il y a x, il y a 6, ne quitte pas. Je veux chasser le -1, qu'est-ce que je fais? Avec un pistolet (il tire) $+1$ (au premier membre), $+1$ (du second membre). Comme si je mets $20g$ / $20g$ (avec des gestes de mains montrant l'équilibre de la balance). Regardez la balance. Ok, donc, $+1$ au revoir $+1$ (il montre en même temps le -1) (il écrit : $3x \dots = 6+1$) x (Il montre le x du second membre) // $-x$ (Il écrit : $3x - x = 6+1$) Continue (il s'adresse à Mélissa d'un sang très froid, comme si la tâche est trop facile). Tu sais réduire Mélissa // tu sais réduire ? $3x-x$, Hein ? yallah, $3x-x=2x$ // $= 6+1$ égal 7 bravo (il écrit: $2x=7$) Maintenant $x=$ // on revient à ce modèle là (il montre l'équation $3x=4$) // Hecht, SVP, Non. (Pendant ce temps, Mélissa regarde ses amis pour qu'ils lui soufflent la bonne réponse, elle a écrit $x = \frac{7}{2}$)
L66	P	Bravo Mélissa, voyons si est-ce que tu as compris maintenant, tu vas passer après.

Extrait 18 : Phase 3 dans la résolution d'équation/ L65 à L66

Nous remarquons que le recours à l'ostension se renforce, le professeur espère que l'élève le suive dans ses actes. « Tu n'as pas compris », « Tu n'essaies pas de comprendre » (L63) définit le topos ascendant (très élevé) du professeur. Notre description du professeur rejoint Mercier et al (2001) dans : « *En enseignant par ostension sans y associer une pratique expérimentale, le professeur affirme implicitement « qu'il n'y a qu'à regarder bien pour voir ce qui doit être vu, et compris ce qui doit être compris ».* Cette pratique correspond non pas même à un empirisme réaliste, mais à l'épistémologie préscientifique des gnostiques qui

imaginent la possibilité d'un accès immédiat et pratique à l'essence des choses ». Donc le professeur voudrait que l'élève puisse voir et comprendre ce que lui a déjà vu et compris. Pour lui la monstration et l'appel à un objet sont suffisants pour qu'il devienne accessible par les élèves.

Nous remarquons dans cet épisode que les élèves n'ont pas eu l'occasion d'interagir avec leur professeur : c'est lui qui pose les questions et y répond immédiatement. Leur accompagnement s'est limité à la seule réponse de Melissa « Oui ».

La topogénèse se caractérise par l'action du professeur qui s'appuie sur un long tour de parole. Il s'adresse à l'ensemble classe par le pronom personnel « je » et par le pronom possessif « mon » dans « mon but c'est quoi ? ». Dans ce sens, les élèves ne sont pas aptes à mesurer par eux-mêmes les progrès qu'ils accomplissent. Cette technique didactique et ses conséquences ne permettent pas non plus, la dévolution aux élèves de la tâche concernée. L'organisation de la résolution dirigée par le professeur, qui suit les trois phases que nous avons dégagées, ne permet pas à l'élève de mettre en œuvre les mêmes rapports attendus aux objets du milieu institutionnel. Les élèves entretiennent des rapports aux objets du nouveau milieu en rapportant les techniques utilisées à leurs connaissances antérieures sans prendre en considération les explications, naïves ou savantes, du professeur. Sur ce plan, ce type d'enseignement accroît la distance mésogénétique entre les milieux entretenus par le professeur et les élèves vu que les buts ne sont pas les mêmes.

Dans ce cas, nous nous attendons à l'émergence des milieux différents pour le professeur et pour les élèves. C'est ainsi qu'apparaît le phénomène de « dédoublement des milieux » sous l'effet des coups de forces qu'accomplit le professeur. Or la réponse de Melissa converge vers la nécessité de la réponse $x = \frac{7}{2}$, peut-être parce que l'élève envisage les rapports aux objets du milieu institutionnel en fonction de ce qu'elle trouve en phase avec la réalisation de la tâche : « trouver x », montrée par le professeur comme critère de réussite.

Dans la phase 3, le professeur transpose à son institution les trois étapes apparues brièvement dans le cours, en laissant place à des techniques personnelles dont il suppose *à priori* la compréhension et la mise en œuvre par les élèves. Il a recouru au pistolet pour dire que la personne tuée n'existe plus, alors le terme disparaît, on ne le voit plus. Il a déclenché cet

ostensif que Araya (2008) a nommé « *Ostensif déclencheur*⁴⁴ » qui le renvoie, lui et la classe, à la propriété 1 du cours « La transposition des termes » ; propriété qui n'a pas été encore institutionnalisée. Dans ce sens, nous pensons que pour transposer un terme, il peut évoquer cette machine qui déclenche l'application de cette propriété. Il mime un geste avec son propre pistolet (en disposant ses doigts suivant la forme du pistolet) pour jouer selon la règle : « tirer le feu sur les objets à transposer ». Ce jeu devrait favoriser la recherche des équations équivalentes.

Signalons que le passage concernant cette notion est présent dans le paragraphe 2 du manuel et que le professeur ne l'a pas expliqué aux élèves afin de se permettre d'évoquer les équations équivalentes (élément technologique).

Nous allons résumons dans un tableau la façon dont le professeur a enchaîné la résolution de cette équation :

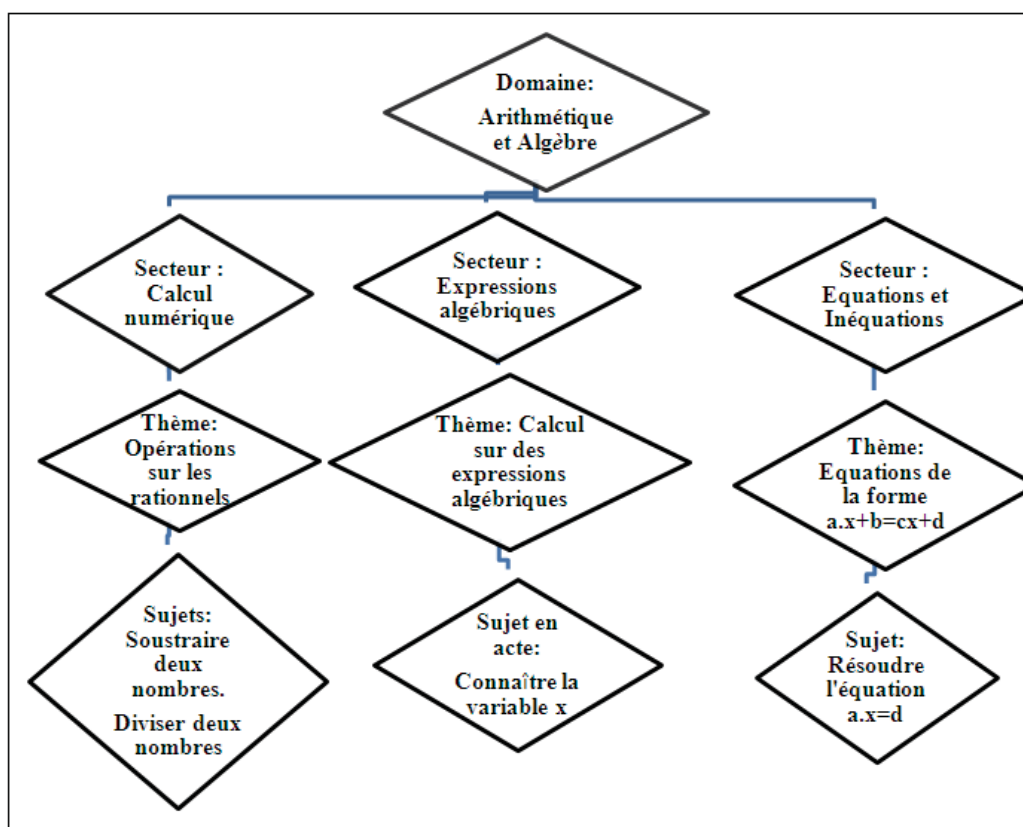
Phase 1	Constitution de l'élément technologique : « Equations équivalentes » Cette phase est apparue sous le prétexte : « garder l'équilibre ».
	Mots clefs du prof pour lancer la parole : « As-tu compris ? » puis la réponse « Oui » de l'élève.
	Le topos de l'élève au tableau a été écrasé par l'intervention du prof : « Tu as compris? // Elle n'a pas compris (<i>s'adresse aux élèves</i>). Bon on répète ». Cette intervention annonce la venue d'une nouvelle phase.
Phase 2	L'émergence du type de tâches 1 : « transposer les termes d'un membre à un autre membre dans une équation ». Donc, Phase 2 = phase 1+ l'émergence de la nouvelle tâche1
	L'usage abusif de l'ostensif déclencheur « le pistolet ».
	Le tour de parole, « Prof: Tu as compris? // Elle n'a pas compris (<i>s'adresse aux élèves</i>). Bon on répète », annonce l'ouverture de la nouvelle phase3.
Phase 3	C'est l'application du type de tâches1 et l'émergence de la tâche 2 : « Réduire les termes semblables ». Donc, Phase 3 = phase1+phase 2+ l'émergence de la nouvelle tâche 2+remémoration du modèle de l'équation 1.

Extrait 19 : Phases de résolution pour une équation

⁴⁴ Araya (2008) a défini l'ostensif déclencheur par : « Il s'agit de désigner un ostensif comme celui qui a la plus haute valence sémiotique. L'ostensif désigné peut, chez un groupe de sujets qui intègrent l'institution, réactiver, avec un certain degré d'« automaticité », un non-ostensif ».

5.5.3. Dédoublément des milieux

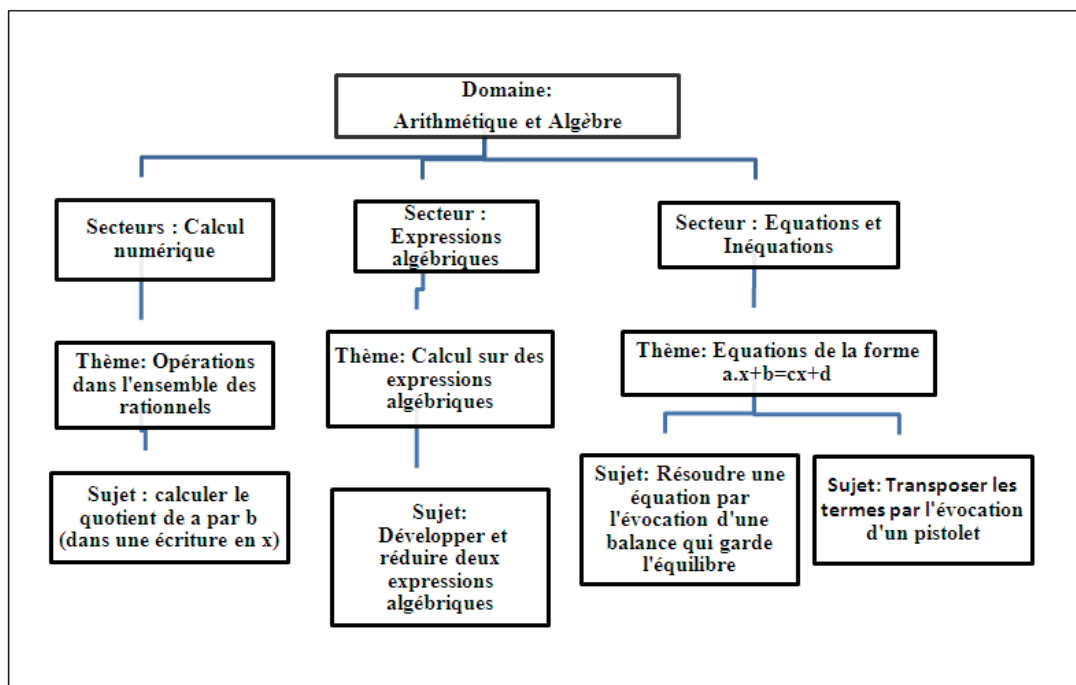
Nous allons définir dans des tableaux les milieux cognitifs de l'élève, le milieu institutionnel du professeur, puis dans un troisième les milieux d'intersection pour réaliser la tâche principale « Résolution de l'équation $3x - 1 = x + 6$ ».



Tab OM 14 : Milieux cognitifs de l'élève pour l'équation $3x - 1 = x + 6$

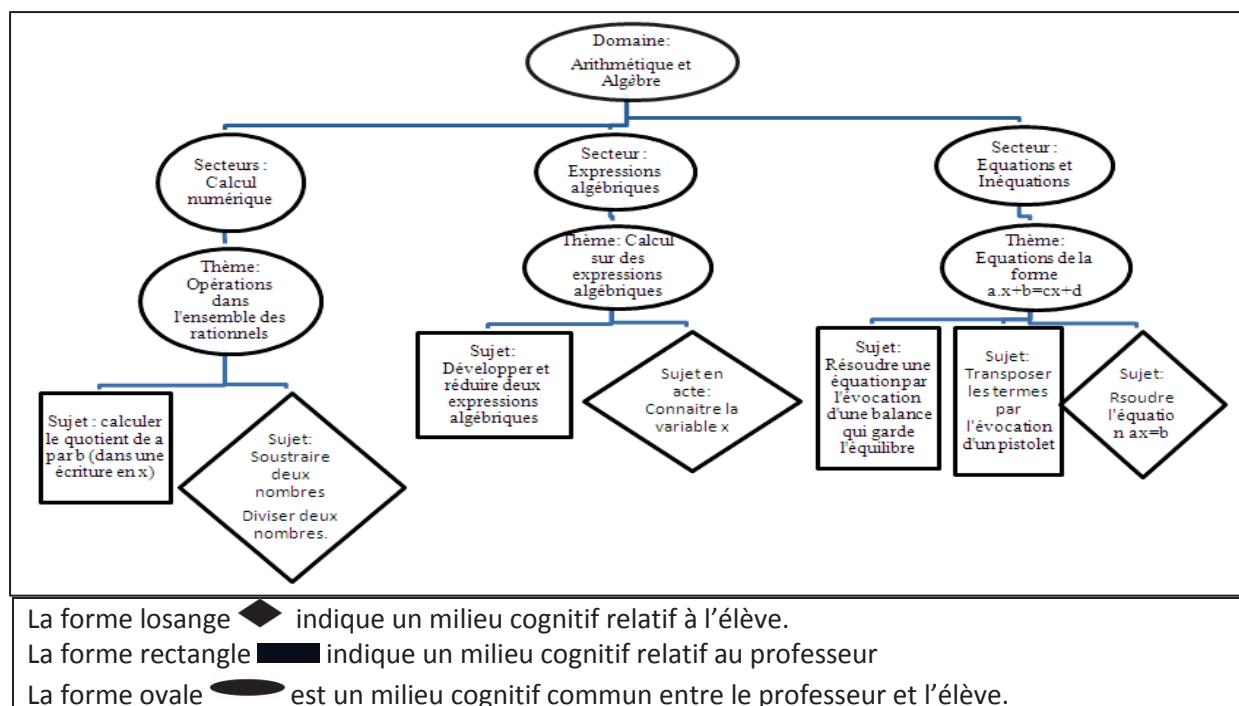
A signaler que le sujet de l'élève : « Résoudre l'équation $a.x=d$ » a été conçu comme tel, dans le cas où il y a un élève qui a déployé la règle : « On prend les inconnues seules et les nombres seuls ». Le professeur a joué un grand rôle dans l'émergence de cette réponse. Nous voyons, que dans son tour de parole qui précède la réponse de l'élève, les mots suivants : « *N'oublie pas que c'est une balance, tu enlèves une banane d'ici, tu dois enlever une banane d'ici, non pas une pomme, [...] Qu'est ce qu'on doit supprimer ?* ». Ces sollicitations répétées ont amené l'élève à suivre convenablement l'intention du professeur car dans une équation il n'y a que des termes en x et des nombres. La réponse de cet élève vient mais elle est dépourvue des éléments technologiques qui la justifient.

Pour ces raisons, nous avons considéré que la réponse de cet élève ainsi que celle de Melissa : « $3x=6$ » abordent toutes les deux le même sujet qui débouche sur la résolution de l'équation du modèle 1 : « $ax=b$ ».



Tab OM 15 : Milieux institutionnels assujettis du professeur pour l'équation $3x-1=x+6$

Nous comparons dans un autre tableau les niveaux de codétermination activés par le professeur et les élèves :



Tab OM 16 : Dédoublment des milieux pour l'équation $3x-1=x+6$

Conclusion

Ce tableau montre l'absence de sujets communs entre le professeur et les élèves. Ce qui indique que les élèves traitent la tâche proposée en mobilisant des milieux différents de ceux du professeur. Les éléments des milieux sont issus d'un sens inverse sur l'échelle des niveaux de codétermination didactique. Le professeur joue sur l'appropriation de la genericité de ses gestes tandis que les propositions des élèves sont indexées sur la modestie de leurs connaissances antérieures. Dans ce cas, ce qui est milieu pour le professeur n'est pas perçu comme tel aux yeux des élèves, dans le sens où le milieu dans lequel évolue l'élève n'est pas le milieu que le professeur souhaite dévoluer.

5.6 Organisation de la suite de la séance

L'explication du cours est terminée. Le professeur annonce la venue de la partie « Application » dans L67 : « *Bon, on va faire des applications. Et voyons si on a compris ou non* ». Dans cette partie, il a laissé un temps aux élèves pour travailler individuellement avant qu'il fasse passer l'un d'eux au tableau.

Lors de la correction, nous avons remarqué que les élèves ont travaillé, en général, sans erreurs.

Nous allons exposer la production des élèves dans un tableau. Nous n'allons pas mener une analyse exhaustive :

Equation 1	Equation 2	Equation 3
$\frac{6x}{7} = -2$ $x = -2 \times \frac{7}{6} = \frac{-14}{6} = \frac{-7}{3}$	$3x - 4 = 8$ $3x = 12$ $x = \frac{12}{3} = 4$	$3x - 4 = 6x + 8$ $3x - 6x = +4 + 8$ $-3x = 12$ $x = \frac{12}{-3} = -4$
Equation 4	Equation 5	Equation 6
$\frac{3x}{7} - 1 = 11$ $\frac{3x}{7} = 11 + 1 = 12$ $x = 12 \times \frac{7}{3} \text{ (l'élève écrit } \frac{14}{3})$ $x = 28$	$2x - 4 = 2(x - 2)$ $2x - 4 = 2x - 4$ $2x - 2x = +4 - 4$ $0 = 0$ Pour clarifier aux yeux des élèves la différence entre un nombre solution et un nombre non solution, le professeur a explicité l'exemple de la résolution de l'équation $2x+1=7$ Il écrit ainsi : $2x + 1 = 7$ $x = 2 \text{ vérifie}$ Il clôt le travail par : « Cette équation (c.à.d. la 5) admet tout nombre comme solution ».	$\frac{3x-1}{6} = x-1$ $\frac{3x-1}{6} = \frac{6x-6}{6}$ Le professeur dit "j'ai multiplié par 6 pour simplifier par 6." Inconsciemment, $\dots \times 6 = \dots \times 6$" (il montre les 2 membres) $3x - 1 = 6x - 6$ Un élève a avoué qu'il n'a pas compris. Le professeur a repris en exemplifiant sur l'équation : $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = 3x + 1$ Le professeur « je préfère, moi, même dénominateur » et continue par : $\frac{2x-3}{6} = \frac{18x+6}{6}$

Extrait 20 : Suite des équations étudiées au cours de la première séance

Les techniques utilisées par ces élèves sont convenablement réalisées. Les élèves se sont impliqués dans la résolution des équations de forme générale $ax + b = cx + d$ en suivant soigneusement les étapes imposées par le professeur. Cependant l'absence d'erreurs nous laisse penser que 1) soit la résolution de la tâche est non problématique, ce qui contredit ce que nous avons remarqué lors de l'explication, 2) soit le travail exposé au tableau ne reflète pas réellement le travail des élèves.

Pour cela nous avons décidé d'étudier de près comment font les élèves lorsqu'ils s'affrontent individuellement la résolution de telles tâches. L'étude du devoir fait à la maison, le jour même de cette séance, nous a paru l'idée la plus judicieuse. Il traduit les rapports que les élèves ont établis aux moments de l'explication de cette notion. Il nous permet de relever la façon utilisée par les élèves pour appliquer la technique ébauchée, ainsi que son perfectionnement dans le sens de « solliciter la technique la plus économique ».

A noter que le professeur a fait passer des exercices d'application sur des équations impossibles et sur d'autres qui sont indéterminées.

5.7 Etude des techniques d'élèves d'un devoir fait à la maison.

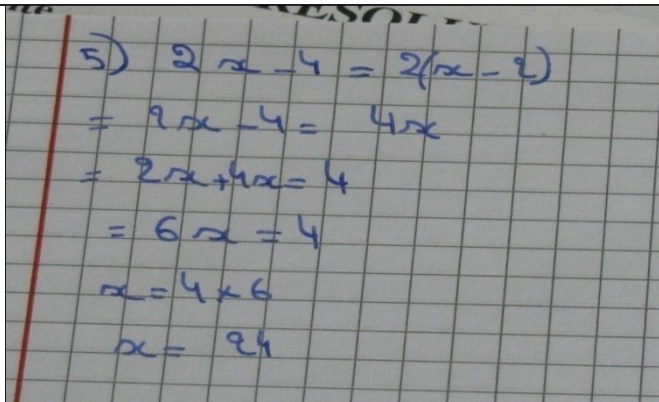
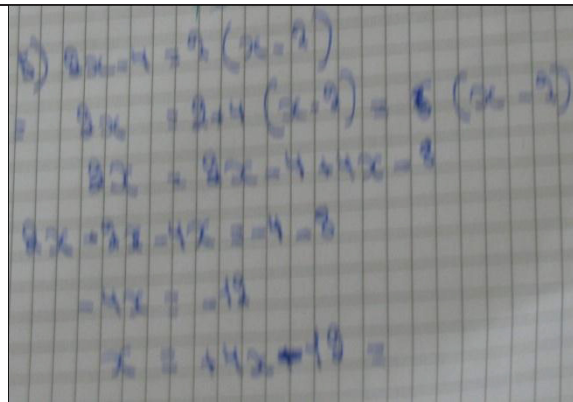
Pour limiter notre travail, nous avons choisi d'analyser deux cahiers, et plus particulièrement les deux équations :

$$\text{Equation 1 : } 2x - 4 = 2(x - 2)$$

$$\text{Equation 2 : } 4(3t + 2) = 3(t + 5)$$

Rappelons que les élèves ont déjà achevé le travail sur le secteur « Expressions Algébriques » qui tourne autour de deux tâches principales : « Développement et factorisation ».

5.7.1. Etude de l'équation " $2x-4=2(x-2)$ "

Techniques d'élèves	
Technique 1	Technique 2
	
Nous avons réécrit le travail de ces deux élèves faute de l'illisibilité.	
Ligne 1 : $2x - 4 = 2(x - 2)$ Ligne 2 : $= 2x - 4 = 4x$ Ligne 3 : $= 2x + 4x = 4$ Ligne 4 : $= 6x = 4$ Ligne 5 : $x = 4 \times 6$ Ligne 6 : $x = 24$	Ligne 1 : $2x - 4 = 2(x - 2)$ Ligne 2 : $2x = 2 + 4(x - 2) = 6(x - 2)$ Ligne 3 : $2x + 2x = 4 + 4x - 8$ Ligne 4 : $2x + 2x - 4x = -4 - 8$ Ligne 5 : $-4x = -12$ Ligne 6 : $x = 4x - 12$

Extrait 21 : Techniques d'élèves dans l'équation $2x-4 = 2(x-2)$

Etude de la technique 1

L'élève agit sur le milieu qui réfère à deux secteurs : « Calcul numérique » et « Expressions algébriques ». Cette action apparaît clairement dans :

- 1) L'écriture du signe égal au début des lignes 2, 3 et 4 qui indique un statut ne montrant pas l'équivalence des équations. Débuter la ligne par ce signe pourra montrer que 1) la résolution est encore inachevée et qu'il y a donc d'autres étapes à faire ou 2) le travail se fait par analogie à la factorisation ou au développement vu qu'il est nécessaire de débiter par le signe « = » dans ces deux cas.

Le signe « = » pourra être le signifiant de : « a pour résultat » qui ne justifie pas le passage aux équations équivalentes.

- 2) L'apparition des calculs algébriques corrects comme $2x+4x=6x$ ou erronées comme dans $2(x-2) = 4x$.

- 3) Le calcul numérique est présent dans toutes les lignes de la résolution.

Dans les quatre premières lignes, l'élève active des connaissances basées sur le théorème suivant : « une somme de deux ou de plusieurs termes n'a de sens que si elle exprime un

résultat ». Nous voyons que le passage d'une ligne à une autre est accompagné par un calcul au moment où l'écriture des équations équivalentes n'est pas abordée.

Or le signe « = » dans l'équation est un : « signifiant de l'égalité conditionnelle entre deux expressions algébriques ». Au cours de l'explication, la balance était une métaphore justificative, élément technologique de la transposition des termes. L'évocation de cette métaphore était sans doute fortuite, et n'a sans doute pas fourni du sens aux yeux de cet élève ; le statut de l'égalité dans ce sens n'est pas développé.

Pourtant, le passage de la ligne 3 : « $=2x+4x=4$ » à la ligne 4 : « $=6x=4$ » montre le rapport établi par les élèves envers la technique enseignée par le professeur.

Un fait surprenant : le signe « = » n'apparaît plus dans les deux dernières lignes devant les équations. C'est ici que l'élève semble profiter de ce que le professeur a établi à propos de la nouvelle tâche dans L20 « *Mon but à la fin c'est de trouver x* ». Ainsi l'élève s'est replacé dans ce souvenir en se remémorant de ce qui lui semble être de l'ordre de l'essentiel pour la réalisation de cette tâche : il s'agit de travailler pour le calcul de « x ». Dans ce sens, l'écriture du signe « = » traduit explicitement le calcul.

Mais l'élève n'a pas réussi à aboutir, il a écrit à la ligne 5 « $x=4 \times 6$ » à la place de « $x=6 : 4$ », il n'a pas pu traiter la nouvelle écriture mathématique « $a.x=b$ ». Pour cela, nous considérons que le rapport de cet élève à l'objet « équation » n'est pas conforme au rapport institutionnel attendu. Cet objet demeure en partie, pour lui, une suite ordonnée de termes dont les relations ne sont pas encore convenablement établies à ce niveau.

Etude de la technique 2

Ligne 2 : $2x=2+4(x-2)=6(x-2)$

L'élève a transposé le terme « -4 » au second membre en appliquant le théorème-en-acte: « on fixe, à leurs places, le terme $2x$ du premier membre et le nombre 2 du second membre », qui répond au jeu du pistolet du professeur. Ce théorème a été déformé par la présence de l'ostensif : $2.(x-2)$. L'élève fixe le 2 à sa place, « prend ainsi son pistolet » et « tire » sur le -4. Il le « place » entre les facteurs 2 et $(x-2)$ du terme $2(x-2)$. Cet élève ne manque pas l'occasion d'utiliser ses connaissances antérieures, notamment celles qui relèvent du calcul numérique, compte tenu de la présence du calcul de $2 + 4$. Le signe « = » écrit deux fois dans « $2x=2+4(x-2)=6(x-2)$ » n'a de sens que s'il exprime le résultat +6. L'élève s'est replacé dans le secteur : « Calcul numérique », en oubliant temporairement l'expression $(x-2)$, pour effectuer une tâche qui relève de son passé scolaire. L'arrivée à $6(x-2)$ est due en partie à l'engagement dans le type de tâches « calculer des expressions numériques qui font intervenir plusieurs

opérations » relatif au thème « Calcul dans une expression numérique ». Ce thème est présenté aux élèves dans les classes antérieures.

Ligne 3 : $2x+2x=4+4x-8$

L'élève n'a pas mobilisé le terme $6(x-2)$ pour passer à une autre équation équivalente. Il s'est de nouveau replacé dans les secteurs : « Calcul algébrique » et « Equation », où le professeur s'était placé pendant la séance précédente. Cet élève a écrit une équation équivalente (présence du signe =) provenant de la transposition des termes. Puis, il a développé à sa guise les expressions algébriques comme dans :

$$2x = 2 + 4(x-2) = 6(x-2)$$

$$2x + 2x = 4 + 4x - 8$$

L'élève semble avoir transposé le terme 2 du second membre en $2x$ au premier membre. Il a développé le calcul $4(x-2)$ qui pour lui, il est égal à $4+4x-8$. Un autre cas est aussi possible, l'élève a ajouté au premier membre « $2x$ » et au second membre « $+2$ » et il a développé $4(x-2)$

Ligne 4 : $2x+2x-4x = -4-8$

L'élève a écrit une autre équation équivalente issue de la transposition correcte du terme $4x$. Mais une erreur s'est produite au changement de signe du terme fixé $+4$. Tout se passe comme si l'élève avait procédé selon le théorème suivant : « On tire avec le pistolet sur deux nombres en conformité avec ce cas : l'un d'eux doit dépendre de x et l'autre est un nombre ». Ceci parce que cet élève a changé le signe du terme $+4$ là où deux termes connus sont présents ($+4$ et -8) au second membre.

Ligne 5 : $-4x = -12$

Dans cette ligne, l'élève refuse la réponse « $0x$ », pour cela il a réécrit « $-4x$ ». Signalons que cet élève a bien calculé la somme « $-4-8=-12$ ».

Sans oublier que le professeur a travaillé sur des équations similaires (équation 5 dans la partie « application »).

Ligne 6 : $x = 4x-12$

L'élève s'est placé au cœur du nouveau milieu, il a voulu répondre aux contraintes des éléments du nouveau milieu de L26 « *Mon but est de trouver x* ». Face à ces contraintes l'élève utilise des ostensifs sans s'intéresser au contrôle des actions faites sur et avec eux.

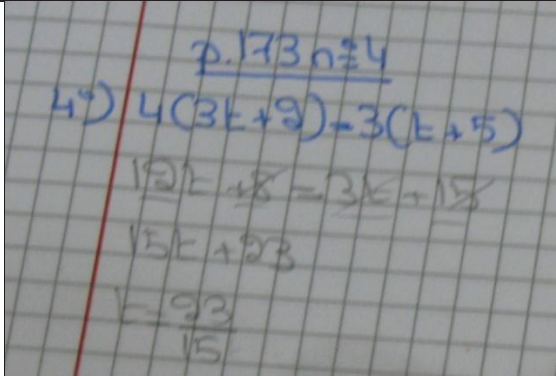
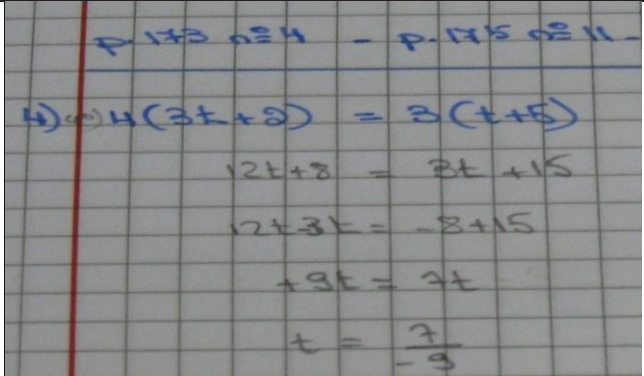
L'élève a fait de son mieux pour travailler avec les éléments nouveaux. Mais l'absence du cadre technologique l'a peut-être privé de l'appropriation de la notion de la « solution ». Cette solution désigne que le nombre qu'on cherche est représenté par la lettre « x » qui vérifie une

équation. Remarquons que la définition de la « solution » est présente dans le « cours » du manuel mais elle n'était pas abordée par le professeur. L'élève a commencé par écrire le « $x =$ ». Il se trouve devant l'obligation d'exprimer un résultat. Pour cela, sa réponse est « $x = 4x - 12$ » qui provient de la transposition du terme « $-4x$ » du membre de gauche à celui de droite. Il s'est arrêté à ce point sans doute parce qu'il vient d'étudier dans le chapitre précédant le sujet « Réduction des termes semblables dans une expression algébrique ».

Ce qui nous laisse penser que le rapport de l'élève avec la notion de solution dans le cadre algébrique n'est pas stable ; elle se mêle aux contraintes venues des nouveaux objets, « il doit exprimer une valeur de x », et aux éléments qui entrent en jeu dans la résolution comme les « Calculs numériques et algébriques ».

5.7.2. Etude de l'équation " $4(3t+2)=3(t+5)$ "

Nous présentons maintenant les techniques de résolution de l'équation notée 2A pour deux autres élèves :

Techniques d'élèves	
Technique 1	Technique 2
	
Nous avons réécrit le travail de ces deux élèves faute de l'illisibilité.	
Ligne 1 : $4(3t+2)=3(t+5)$ Ligne 2 : $12t+8=3t+15$ Ligne 3 : $15t+23$ Ligne 4 : $t=\frac{23}{15}$	Ligne 1 : $4(3t+2)=3(t+5)$ Ligne 2 : $12t+8=3t+15$ Ligne 3 : $12t-3t=-8+15$ Ligne 4 : $9t=7t$ Ligne 5 : $t=\frac{7}{-9}$

Extrait 22 : techniques d'élèves dans l'équation $4(3t+2)=3(t+5)$

Etude de la technique 1

La ligne 2 : « $12t+8=3t+15$ » montre la capacité de cet élève à travailler dans le secteur des « Expressions algébriques » relatives au type de tâches « Développement d'une expression algébrique ».

Pourtant dans la ligne 3 « $15t+23$ », l'élève réactive ses connaissances sur la somme des termes semblables d'une expression algébrique. Ceci a été fait sans prendre en considération la différence fonctionnelle du signe de l'égalité « = ». Cet élève traite l'équation comme étant une expression, le signe « = » ne semble pas être pris en compte. C'est un ostensif dynamique, il le transmet d'une équation à une autre, qui dépend de l'engagement « muet » de l'élève dans le travail. A notre sens, la ligne 2 : $12t+8=3t+15$ est identifiée à une expression algébrique. L'élève s'est engagé implicitement dans l'effectuation d'un calcul. Le signe « = » ainsi présent dans cette équation est perçu comme tel « $12t+8+3t+15 =$ ». La ligne 3 « $15t+23$ » donne la somme obtenue. L'élève a traité les termes dans une équation comme s'il le fait dans une expression.

La dernière ligne nous indique que l'élève agit sur la tâche sous l'effet du contrat didactique⁴⁵ qui précise les enjeux de la situation et par l'activation de plusieurs contraintes, en particulier : « le but est de trouver $x=$ ». Dans la somme « $15t+23$ », l'élève assume ses responsabilités en écrivant « $t =$ ». Un travail qui met l'ostensif au cœur de l'activité et qu'au terme duquel l'élève croit qu'il est à la hauteur des modifications qu'il opère. Le reste n'a de sens que pour achever son travail envers la tâche (l'enjeu dans le sens du contrat). Il détermine, à l'aide de la division des deux coefficients du binôme, la solution de l'équation. Il divise en tenant compte du travail mené en classe pendant la première séance sur les équations.

Etude de la technique 2

Les lignes 2 et 3 montrent que la technique de résolution de l'équation est supposée institutionnalisée.

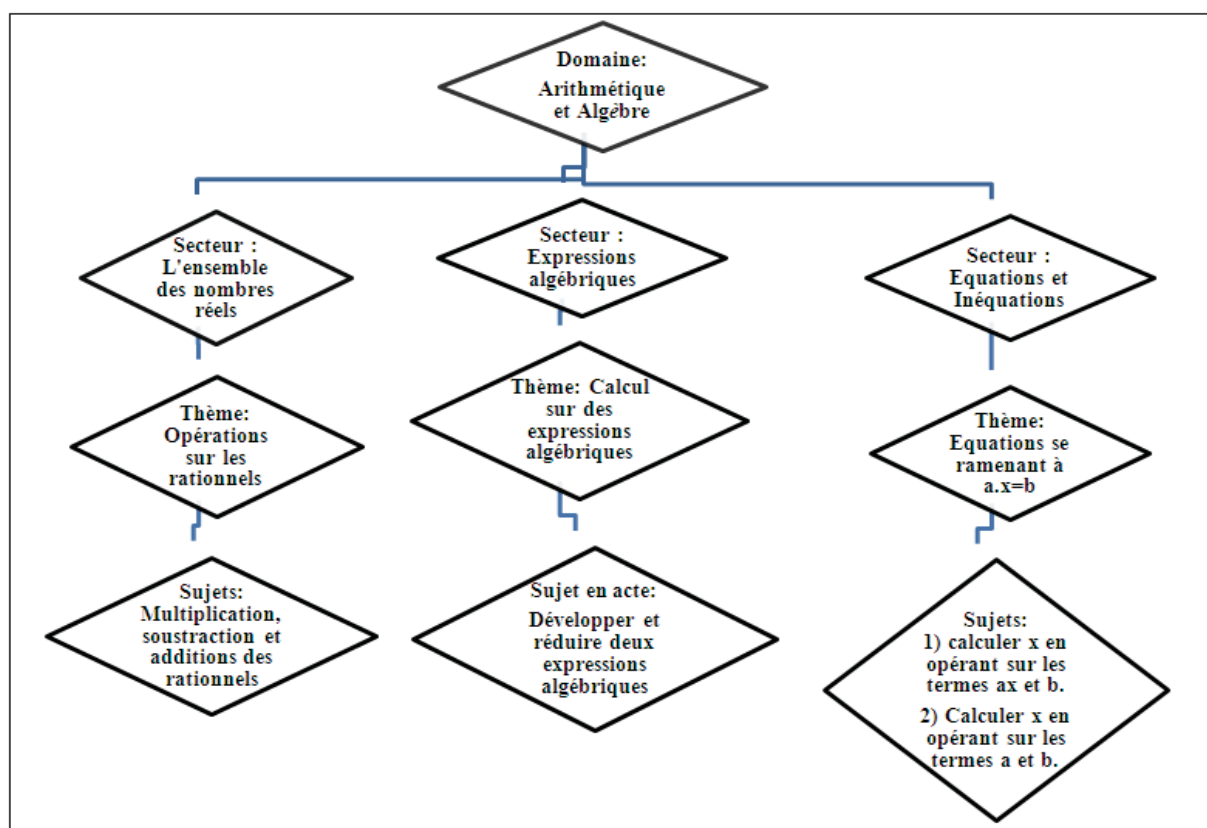
La ligne 3 montre que l'erreur dépend de la confusion entre le calcul numérique et algébrique ($-8+15=7t$ à la place de 7).

Tandis que la dernière ligne renforce notre idée que l'élève réactive les rapports aux objets du nouveau milieu en mobilisant des connaissances antérieures qui ne sont parfois pas en adéquation avec les nouveaux éléments. Des connaissances qui sont en étroite connexion, voire restreintes, en faveur de la nouvelle tâche.

⁴⁵ Assude et al (2007) décrivent au moins trois dynamiques des milieux à l'intérieur desquelles l'action du professeur est étudiée : Une première dynamique tient à la dévolution d'un rapport adéquat au milieu puisque certaines potentialités du milieu sont investies par les élèves, sous le contrôle du contrat didactique [...] La dévolution apparaît alors comme un processus complexe qui ne se réduit pas à l'engagement d'un sujet dans une tâche prescrite [...] un engagement du professeur dans le travail du savoir, notamment dans une analyse préalable qui lui permet de préciser les enjeux de la situation et, en particulier, un certain vocabulaire et/ou un système stable de notations. (Cité par Araya (2008) P83).

5.7.3. Conclusion

Nous présentons d'abord les différents milieux cognitifs que l'élève a mobilisés pour l'effectuation de la tâche :



Tab OM 17 : Milieux cognitifs d'élèves pour la préparation à domicile

Les connaissances antérieures des élèves, relevant de leurs milieux cognitifs, sont activées au profit de cette nouvelle tâche, mais elles subsistent à distance aux éléments du nouveau milieu institutionnel. C'est dans ce sens que l'élève sait qu'il faut faire quelque chose pour la réalisation d'une nouvelle tâche. Cela l'a incité à se restreindre aux niveaux des « nouveaux ostensifs » et à ses connaissances antérieures. Par suite, la distance mésogénétique entre les milieux cognitifs des élèves et le milieu institutionnel du savoir s'accroît.

Dans le travail des élèves, nous remarquons qu'il y a des tentatives d'appliquer la technique déjà embauchée en classe. Mais ces tentatives ne sont pas toujours réussies car elles se mêlent à des connaissances antérieures des élèves comme « Le calcul dans le domaine numérique ».

Donc, les connaissances antérieures sont outillées au profit de la nouvelle tâche. Les élèves entissent les rapports au nouveau milieu du savoir par l'intermédiaire de la technique la plus

économique qu'ils ont réalisé. C'est la technique qui juxtapose leurs connaissances antérieures (milieux cognitifs) clôturée par le travail « de la fin » (L20) qui revient à calculer « $x=$ » (Ce qui nous laisse penser que les deux ostensifs « x » et « $=$ » forment un ostensif unique qui est « $x=$ »).

5.8 Conclusion

Au début de notre étude nous nous sommes posé plusieurs questions qui nous semblaient importantes pour avancer dans notre sujet de recherche, en particulier :

Q_1 : Comment l'enseignant parvient-il à faire advenir dans l'institution classe un milieu propice à l'enseignement ?

Q_2 : Est-ce que le milieu dans lequel évoluent les élèves et avec lequel ils travaillent est celui avec lequel le professeur souhaite évoluer ?

Q_3 : Comment les élèves, en interaction avec le milieu advenu, mettent-ils en jeu les rapports aux objets du milieu institutionnel du savoir ?

Première partie (Chapitre 4)

Pour cerner notre étude, nous avons mené une observation de classe sur la séquence concernant « la résolution algébrique de l'équation du premier degré à une inconnue en classe EB7 au Liban (cinquième en France) », que nous avons analysée en grande partie. Nous avons sollicité, pour ce faire, plusieurs cadres théoriques. Les analyses des organisations mathématiques (OM) et didactiques (OD) ont été menées sur une étude du manuel scolaire ; ceci pour déterminer la façon dont le curriculum libanais ainsi que le manuel traitent la transposition didactique du savoir savant. Cette étude nous a permis de déterminer les niveaux de codétermination didactique qu'appelle cette notion pour l'effectuation de cette transposition. Nous avons classifié le domaine, les secteurs, les thèmes ainsi que les sujets qui entrent en jeu dans la reconstruction de ce savoir mathématique.

Nous avons ensuite conçu une étude praxéologique du « Cours du manuel », pour ce faire nous avons identifié les organisations locales ($T_{i,d}$, $\tau_{i,d}$, θ_d , Θ) qui montrent, en général, les techniques ainsi que les blocs technologico-théoriques, que le professeur et les élèves ont à mobiliser pour la réalisation du type de tâche principal de la séquence qui est : « Résoudre une équation du premier degré à une inconnue ».

Nous avons trouvé nécessaire d'articuler la séquence étudiée avec une étude datée de 1760 par Clairaut dans son livre « Eléments d'algèbre ». Ceci pour concevoir une diversité des milieux qui peuvent être mis en place par le professeur, qui n'est pas présents dans le manuel. En d'autres termes, nous avons voulu aborder les milieux qui déterminent la mésogenèse de ce savoir. De cette partie, nous concluons que faire de l'arithmétique, ou de l'arithmétique généralisée au sens de Chevallard (1989b), pour induire l'algèbre n'est pas une évidence. Autrement dit l'enseignement de la résolution algébrique de l'équation ne peut pas être simplifié si l'on remplace les lettres par des nombres, ou céder la place à un discours technologique justifiant l'usage de telle ou telle technique. Par exemple remplacer le nombre convenable, qui est 4, dans la résolution de l'équation $x+3=7$ ou poser un problème familier comme : « J'ai déjà 3 bonbons il m'en faut combien pour avoir 7 ». Dans ce cas il faut que x fasse 4.

Nous avons étudié les limites qu'impose ce travail dans des équations variées, comme celles qui comportent « x » dans les deux membres et les assujettissements inappropriés qui pourront en découler. L'étude comparative menée entre la résolution arithmétique et algébrique nous a permis d'étudier de près les activités de référence ainsi que le côté historico-mathématique qui jouent, à notre avis, un rôle décisif dans l'épistémologie du professeur ; même parfois si celui-ci ne se rend pas compte de sa légitimité avec le sujet.

Deuxième partie (Chapitre 5)

Nous avons analysé dans cette partie les équations préparées par le professeur. Nous avons fait notre analyse de façon à pouvoir cibler notre question principale située dans l'enjeu du professeur pour faire advenir le milieu institutionnel du savoir, et comment ses actions sont prises en compte par les élèves. Nous avons étudié quatre équations travaillées en classe avec le professeur et un devoir préparé à la maison par les élèves dans lequel nous avons étudié les techniques de quatre élèves sur deux équations différentes. Pour chacune des équations nous avons fait une analyse détaillée, elle nous a permis de déterminer les niveaux de codétermination didactique que le professeur a utilisés dans la réalisation de la tâche principale et les niveaux pris en compte par les élèves en suivant les gestes de leur professeur. Ensuite nous avons classifié les niveaux élaborés dans des tableaux en nous efforçant de montrer, à l'aide d'une analyse détaillée sur les techniques activées, les différents milieux du professeur et des élèves, sans oublier de préciser les milieux identiques.

Nous avons remarqué que les milieux du professeur et des élèves peuvent être identiques comme ils peuvent être en interférence avec d'autres milieux. Nous tirons comme première

conclusion que les rapports des élèves aux éléments du milieu institutionnel peuvent ne pas être conformes à ceux que le professeur souhaite faire advenir.

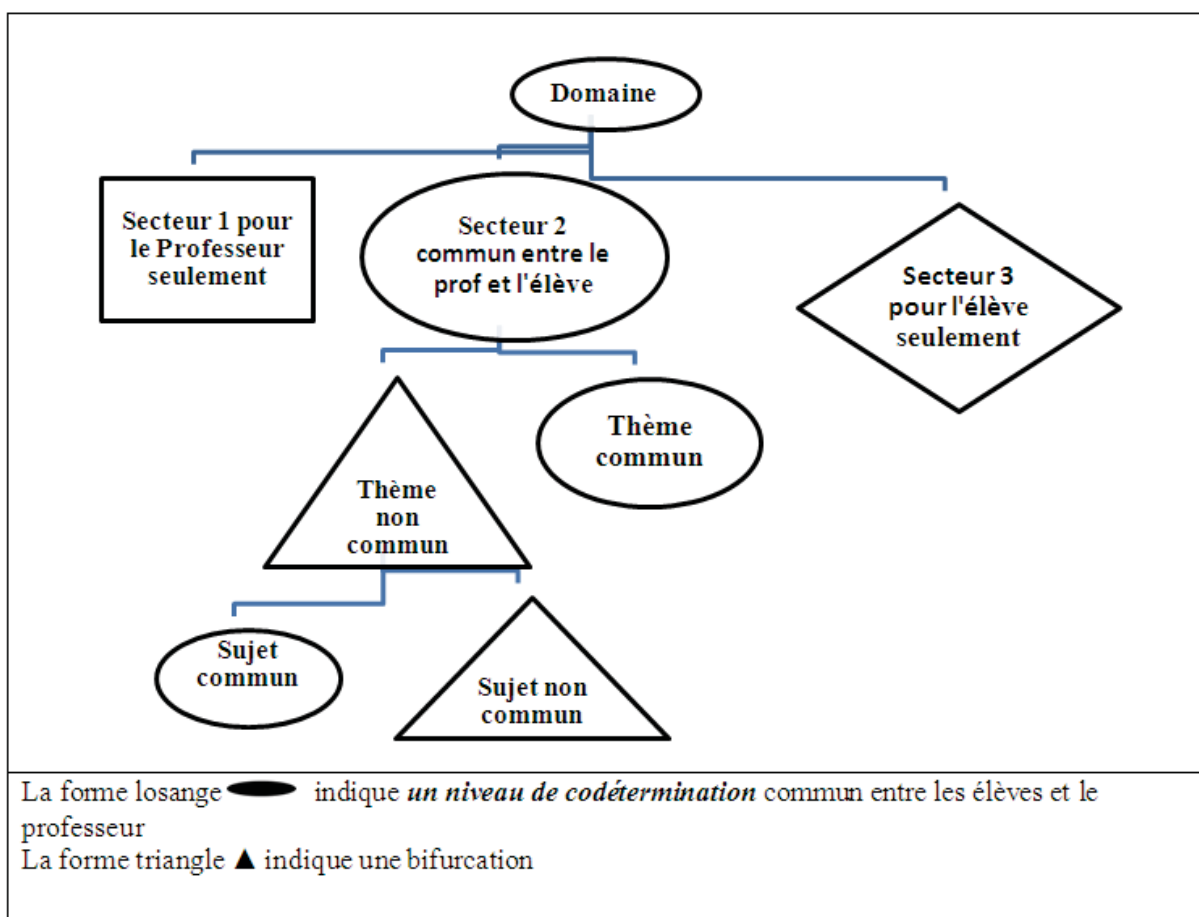
Notre hypothèse qui porte sur l'existence d'un « flou » entre les milieux des élèves et les milieux du professeur est validée. Ce flou pousse davantage l'élève à être responsable de la construction de ses « propres mathématiques » en réactivant des connaissances antérieures issues de ses milieux cognitifs. La généricité des milieux institutionnels du professeur et la spécificité de celui de l'élève pourraient l'amener à circonscrire son milieu cognitif. Cette hypothèse est outillée à l'intérieure du tableau **Tab OM 16**, p.141 dans lequel nous avons prouvé l'absence de sujets communs au professeur et aux élèves, et qui de plus montre, que le professeur et les élèves traitent la même tâche en mobilisant des milieux différents sur les échelles de codétermination didactique.

Les techniques d'élèves ont montré qu'ils s'interdisent implicitement de pénétrer dans des niveaux évoqués institutionnellement par le professeur. Ils ont donc, pour effectuer le travail qui leur est montré ou dévolu, à se placer par eux-mêmes au sein des secteurs, thèmes et sujets qui leur procureront les éléments du nouveau milieu, puisque c'est justement le but assigné à travers la tâche enseignée. Pour exemplifier, nous trouvons dans le tableau **OM16** des élèves qui ont fait l'étude de la tâche principale « Résoudre une équation » en fournissant des sujets différents de ceux pris en charge par leur professeur. Signalons que ces sujets peuvent être renvoyés à des thèmes, secteurs et domaines communs entre le professeur et les élèves.

Il s'agit pour l'élève d'installer des techniques en activant les rapports aux objets du nouveau milieu. Le professeur veut que ce qui est milieu pour lui le soit aussi pour l'élève. Il tend dans ce cas à construire une mémoire officielle pour faire advenir des rapports aux objets du nouveau milieu. Par suite la dynamique du système didactique de la séance étudiée a permis à quelques élèves de se replacer au niveau du souvenir des objets de leurs propres connaissances. Dans ce sens, les élèves ont réactivé les « ostensifs » au profit de l'activité. Par exemple pour résoudre l'équation $3x - 1 = x + 6$, l'élève a écrit $3x = 6$. Il a mis $3x$ à la place de $3x-1$, puis il a réécrit le signe « = » au-dessous du premier et le nombre 6 à la place de $x+6$. L'élève a fait de son mieux pour accéder à la technique relative au modèle proposé par le professeur. Autrement dit, il a écrit cela ($3x = 6$) parce que son professeur avait transformé toutes les équations du modèle de l'équation1 ($a.x=b$). L'élève a donc essayé de reproduire le modèle qui lui permet d'inférer le milieu institutionnel du savoir à partir des techniques embauchées par son professeur. C'est donc un milieu qui n'est pas encore institutionnalisé par l'élève en ce moment.

Phénomène du « Dédoubllement des milieux »

Nous allons résumer, dans le schéma ci-dessous, notre configuration sur les niveaux de codétermination didactiques qui pourraient être mobilisés par le professeur et les élèves dans leur réalisation d'une tâche unique :



Tab OM 18 : Tableau illustrant le dédoublement des milieux aux niveaux de codétermination

Face aux gestes du professeur, l'élève active des connaissances antérieures qu'il trouve propice à l'émergence du même savoir (ou plutôt de son savoir en acte). Les analyses que nous avons menées dans ce chapitre montrent que la dévolution de la tâche principale n'est pas la même pour le professeur et pour l'élève, dans le sens où les niveaux de codétermination didactique peuvent se construire différemment. Dans les tableaux que nous avons fournis (*Tab1 à 11*), nous avons vu que face aux interventions du professeur, les actions de l'élève pourraient se placer dans un secteur, dans un thème ou dans un sujet différent que celui que son professeur souhaite advenir.

Le dédoublement des milieux a lieu quand les niveaux de codétermination didactique s'interfèrent ou quand les objets de savoir ne sont pas identiques.

L'analyse de la séance et du devoir nous ont montré que les élèves lient les éléments des objets du milieu institutionnel du savoir à leurs propres objets de savoir, à leurs connaissances. Les milieux cognitifs mobilisés sont alors tantôt restreints, parfois insuffisants pour réaliser une tâche mathématique. Ils la rapportent cependant à des éléments ancrés dans le milieu institutionnel du savoir que le professeur a imposé.

Chapitre 6 : Le dédoublement des milieux dans une ingénierie didactique : Les Nombres relatifs en sixième au Liban

CHAPITRE 6

LE DEDOUBLEMENT DES MILIEUX DANS UNE INGENIERIE

DIDACTIQUE :

LES NOMBRES RELATIFS EN SIXIEME AU LIBAN

6.1 *La construction mathématique de l'ensemble des entiers relatifs*

6.2 *Etude historique*

6.3 *Etude du programme libanais 1997*

6.4 *Conclusion*

6.5 *Analyse de la première séance*

6.6 *Analyse de la deuxième séance*

6.7 *Analyse de la troisième séance*

6.8 *Analyse de la quatrième séance*

6.9 *Conclusion finale*

L'histoire des nombres négatifs montre que leur introduction a été un processus d'une lenteur surprenante, sans doute pour des raisons d'ordre conceptuel. Pourtant ces nombres semblent familiers aux élèves puisqu'ils les rencontrent dans leur environnement proche et dans la vie courante, du moins pour ce qui concerne les entiers (températures, ascenseurs, etc).

Plusieurs questions se posent : Quelle est la raison d'être de tels nombres ? Depuis quand les mathématiciens les utilisent-ils ? Dans quelles situations apparaissent-ils ? Quels sont les obstacles majeurs qu'il a fallu franchir la découverte de ces nombres ?

L'objectif principal de ce chapitre est de mener une analyse didactique utilisant comme cadre méthodologique le phénomène du « dédoublement des milieux ». Notre but est de montrer si ce phénomène est présent dans des ingénieries⁴⁶ conçues et appliquées dans les institutions scolaires. Pour ce faire, il s'agit de recourir à la théorie anthropologique et préciser sur les niveaux de codétermination didactiques la distance mésogénétique entre les milieux personnels entretenus par professeur et les élèves vis-à-vis du milieu institutionnel du savoir. Nous avons choisi, pour notre recherche, le domaine des nombres relatifs en EB6 (Sixième). Nous avons choisi d'étudier ce domaine dans une école libanaise privée. Nous avons filmé un professeur en train d'enseigner, pour la première fois dans sa classe, une ingénierie didactique.

Ce chapitre porte sur une première partie théorique et une deuxième partie expérimentale. Pour déterminer la place cognitive et épistémologique de ce savoir dans les pratiques et dans les techniques du professeur et des élèves, nous avons élaboré la première partie théorique. Elle porte sur l'étude mathématique, l'étude historique et l'étude de la transposition du savoir dans le programme libanais (1997) et dans des manuels libanais. L'étude des manuels nous a paru indispensable puisque le professeur observé applique, dans sa profession, un enseignement ordinaire basé évidemment sur les manuels. La deuxième partie est expérimentale dans laquelle nous avons effectué une analyse en termes du « dédoublement des milieux ».

⁴⁶ Cette ingénierie est issue d'un parcours d'étude et de recherche produite par le groupe AMPERES, année 2010-2011

Partie historico-théorique des Nombres Relatifs

6.1. La construction mathématique de l'ensemble des entiers relatifs

L'ensemble des entiers naturels muni de l'addition $(\mathbb{N}, +)$ est un monoïde⁴⁷ où tout élément est simplifiable⁴⁸. Le seul élément qui admet un opposé est 0 ($0+0=0$). A cet ensemble manque une propriété fondamentale pour que $(\mathbb{N}, +)$ devienne un groupe⁴⁹ : l'existence pour tout entier naturel d'un opposé. Ainsi, pour tout entier naturel **a** doit exister un nombre **b** tel que **a+b=b+a=0**. Malheureusement le nombre **b** n'appartient pas à $\mathbb{N}$ puisque dans cet ensemble il n'y a pas d'opposé. Pour cette raison principale, on a éprouvé le besoin d'inventer un ensemble qui est, en fait, $\mathbb{N}$ auquel on rajoute l'ensemble des opposés de tous les entiers naturels.

Les études montrent que $(\mathbb{N}, +)$ peut être « plongé » dans un groupe plus étendu⁵⁰. De façon générale, si M est un monoïde commutatif on peut le plonger dans un monoïde commutatif plus grand où tout élément est de la forme $m.s^{-1}$ ($m - s$ en notation additive), m appartient à M et s étant un élément simplifiable de M .

Dans le cas particulier où M est le monoïde additif $\mathbb{N}$, on le plonge dans un groupe commutatif noté $(\mathbb{Z}, +)$, qu'on appelle groupe des entiers relatifs, ou groupe des entiers

⁴⁷ Un **monoïde** (M, Φ) est un ensemble M muni d'une loi de composition interne (c'est un procédé qui, à deux éléments de l'ensemble M , associe un troisième élément de M), associative et qui possède un élément neutre.

⁴⁸ Un monoïde E est dit simplifiable à gauche, ou encore régulier à gauche

Si $\forall (a, b, c) \in E^3, a\Phi b = a\Phi c \Rightarrow b = c$

⁴⁹ Un ensemble E muni d'une opération interne (les deux opérands ainsi que le résultat appartiennent à E) est dit un groupe si et seulement si :

- l'opération est associative
- admet un élément neutre 0
- Tout élément de E admet un symétrique appelé dans le cas de l'addition opposé. C'est à dire que $\forall x \in E, \exists x' \in E / x + x' = 0$

Si de plus l'opération est commutative, le groupe est dit commutatif.

⁵⁰ On procède comme suit. Soit S l'ensemble des éléments simplifiables de M . Dans le produit cartésien $M \times S$, on considère la relation d'équivalence entre (m_1, s_1) et (m_2, s_2) définie par la condition $m_1 s_2 = m_2 s_1$. On note m/s (en contexte multiplicatif) la classe d'équivalence de (m, s) . On montre que, pour $m, n \in M$ et $s, t \in S$, la classe d'équivalence de $(m, s) \cdot (n, t)$ ne dépend que des classes d'équivalence de (m, s) et (n, t) , ce qui permet de munir l'ensemble quotient d'une loi de composition θ qui peut être caractérisée par $m/s \cdot \theta n/t = (mn) / (st)$. On munit ainsi l'ensemble quotient d'une structure de monoïde. Ce monoïde est noté M_S . Le monoïde M est isomorphe au sous-monoïde de M_S formé par les éléments de la forme $(m, 1)$, m parcourant M . On identifie M à ce sous-monoïde de M_S et on a donc bien « plongé » M dans un monoïde tel qu'annoncé groupe.

rationnels. Pour ce faire on a défini sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation d'équivalence R suivante :
 $(a, b) R (c, d) \iff a + d = b + c.$

Ainsi, si a et b sont deux nombres naturels, le couple (a, b) peut s'écrire d'une des deux façons $(a, a + n)$ ou $(b + n, b)$ avec n naturel (selon que $a \leq b$ ou $b \leq a$). Dans ces deux écritures n n'intervient que la somme des entiers naturels.

Au sein de cette relation R , tout nombre relatif est une classe d'équivalence dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / R$, noté $\bar{x}$. Cette classe est indépendante du représentant (x, y) qui la définit. Par exemple l'entier relatif **2** peut être défini à partir des couples $(7, 5), (4, 2)$ etc.

$\bar{0}$ est la classe d'équivalence $(a, a), (b, b)$ etc. Tout élément de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / R$ admet un élément symétrique noté $-\bar{x}$ dont un de ses représentant est (y, x) . Ceci puisque $\bar{x} + (-\bar{x})$ est représenté par le couple $(x + y, y + x)$ considéré comme représentant de 0 . Donc $\bar{x} + (-\bar{x}) = -\bar{x} + \bar{x} = \bar{0}$.

En notant $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / R = \mathbb{Z}$, on a donc $(\mathbb{Z}, +)$ un groupe commutatif. Autrement dit $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$.

Pour exemplifier, on pourra identifier le nombre **2** avec le couple $(3, 1)$, **2** est le résultat de la soustraction $3 - 1$. Cela permet d'inventer le résultat de la soustraction de $1 - 3$ et de l'appeler $(1, 3)$ dans un premier temps, opposé de celui de $(3, 1)$ par la même relation R .

En résumé, une construction mathématique de l'ensemble des entiers relatifs est possible si elle prolonge les entiers naturels.

6.2. Etude historique

Il semble que les premiers à avoir utilisé des quantités négatives, dès le premier siècle, soit les chinois. Leur but principal était de fournir des méthodes pour résoudre les problèmes quotidiens de l'ingénierie, de l'arpentage et du commerce. Les calculs s'effectuent ainsi en utilisant des baguettes à calculer, les positifs sont représentés par des baguettes rouges, les négatifs par des baguettes noires. A cette époque, on ne parle pas de « nombres négatifs » mais de « quantités négatives ». Mais c'est le plus souvent au mathématicien Brahmagupta (598 - 660) que l'on attribue les nombres négatifs (*cité dans (Boyé, 2009)*). Sans justification, il donne les règles pour faire des additions et des soustractions sur les biens, les dettes, le néant.

Une dette retranchée du néant devient un bien, un bien retranché du néant devient une dette.

Les « nombres négatifs » vont ainsi apparaître dans les calculs. Les règles de calcul sont données, mais on ne se préoccupe pas de les justifier.

Dans sa théorie de résolution des équations (Muadala), le mathématicien Al Khawarizmi (780 ; 850) accepte les termes négatifs dans les équations mais il s'attache à s'en débarrasser au plus vite. Pour cela, il ajoute les opposés des deux côtés de l'équation. Pour lui, les solutions négatives n'existent pas puisqu'elles sont dépourvues du sens. Les mathématiciens de cette époque n'admettent pas les quantités négatives, pour cela ils choisissent les constantes qui garantissent l'obtention exclusive des solutions positives.

En Occident, l'introduction des nombres négatifs était cependant difficile parce que les nombres sont, à l'époque, considérés comme des mesures de grandeurs (longueur, surface, volume,...). Les mathématiciens se heurtent à l'obstacle du zéro clairement apparu vers la fin du XIV^e siècle. Il faut attendre le siècle suivant pour la découverte des êtres numériques non positifs. Néanmoins ces nombres ne seront pas pour autant acceptés comme des nombres à part « entière », même des siècles après leur découverte comme nous allons voir dans la suite de cette étude.

Les nombres négatifs apparaissent à la fin du XV^e siècle avec les travaux de Nicolas Chuquet (1445 ; 1500). Il est un des premiers à isoler une valeur négative dans un membre d'une équation. De son côté, Chuquet admet des solutions négatives à des problèmes abstraits (c'est-à-dire comprenant de purs nombres et non des mesures de grandeurs) où une valeur est

considérée comme solution dans la mesure où elle satisfait l'équation. Plus encore, il élabore même des procédures pour additionner et pour soustraire de tels nombres.

Le contexte dans lequel sont apparus les nombres négatifs à la fin du XV^e siècle était toujours celui des équations, par exemple dans les écrits du mathématicien italien Cardan (1501-1576).

« Cardan est encore le premier qui ait aperçu la multiplicité des valeurs de l'inconnue dans les équations, et leur distinction en positives et négatives. Cette découverte qui, avec une autre de Viète, est le fondement de toutes celles d'Harriot et Descartes sur l'analyse des équations, cette découverte, dis-je, est clairement contenue dans son Ars magna. Dès l'article troisième il observe que la racine d'un carré est également plus ou moins le côté de ce carré, et dans l'article 7 il propose une équation qui, réduite à notre langage, serait $x^2 + 4x = 21$, et il remarque que la valeur de x est également $+ 3$ ou $- 7$, et qu'en changeant le signe du second terme $4x$, elle devient $- 3$ ou $+ 7$. Ces racines négatives, il les nomme feintes ».

J. F. Montucla, Histoire des mathématiques, 1758 (cité dans (Boyé, 2009))

Les travaux de Cardan sont devenus des sources réelles pour plusieurs mathématiciens dans le domaine de la résolution des équations. En 1629 dans "*Invention nouvelle en algèbre*", Albert Girard s'en inspire pour admettre l'existence de racines négatives ou imaginaires dans une équation.

L'apparition des nombres négatifs se manifeste donc dans un contexte particulier qui est celui de la résolution des équations. Notons qu'à la même époque d'autres mathématiciens, comme Viète (1540-1603), ne donneront que les solutions positives des équations.

En 1591, François Viète (1540 ; 1603) publie "*In artem ananyticam isagoge*" dans lequel il pose les bases du calcul littéral. A cette époque encore, les lettres ne représentent que des quantités positives et les solutions négatives des équations sont écartées. Au début du XVII^e siècle, les règles sur le calcul littéral sont parfaitement maîtrisées, mais les lettres représentent toujours des quantités positives et jamais des négatives. La solution d'une équation telle que $x = - 3$ est absurde.

En 1637 dans "*La géométrie*", René Descartes (1596 ; 1650) qualifie de "moindres que rien" de telles solutions :

« En chaque équation autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines : mais souvent il arrive que ces racines soient fausses ou moindres que rien ». Il s'agit principalement de la résolution des équations qui étaient longtemps utilisés comme des auxiliaires de calcul : les données et les résultats sont positifs mais la résolution se

fait au biais des nombres négatifs. Par exemple, dans la résolution de l'équation $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, Descartes a remarqué l'existence de quatre racines dont trois sont vraies 2, 3 et 4 et une fausse qui est 5 (cité dans (Gaud, 1991)). Pour lui la fausse racine est -5.

En géométrie analytique, Descartes s'arrange pour choisir les axes de façon à n'avoir que des points dont les coordonnées sont positives. Il y a peu d'occasion de manipuler des «Nombres» négatifs qui aient un sens physique Il faudra attendre le XVIII^e siècle pour que Maclaurin, et surtout Euler, expliquent comment l'on peut prendre des coordonnées négatives. Pourtant, ce même *Maclaurin* a exprimé dans "*Traité des Fluxions*"(1749) le doute planant encore sur l'adhésion par les mathématiciens aux quantités négatives :

« *L'usage du signe négatif en algèbre donne lieu à plusieurs conséquences qu'on a d'abord peine à admettre et ont donné l'occasion à des idées qui paraissent n'avoir aucun fondement réel* ».

Ce qui nous laisse dire qu'à cette époque le statut des nombres négatifs présente toujours des alternatives douteuses. Les mathématiciens ont découvert ces nombres comme outil pour répondre à certains de leurs domaines, surtout pour la résolution des équations, mais n'ont pas pu arriver à en extraire les propriétés mathématiques.

En 1713, Fahrenheit s'arrange pour que ces sortes de températures soient évitées. Son thermomètre est pourvu d'une graduation évitant les températures négatives. En 1730, Réaumur réalise le premier thermomètre scientifique et il faudra encore un siècle pour que le grand public s'habitue à des températures en dessous de zéro.

En 1741, le physicien suédois *Anders Celsius* (1701 ; 1744) fait construire un thermomètre à mercure dont le 0 est défini par le point de congélation de l'eau et le 100 son point d'ébullition. Il faudra pourtant attendre le début du XIX^e siècle pour que les températures négatives se mettent en place. Il faut dire qu'à cette époque les besoins de quantités négatives pour les sciences sont plutôt rares.

Progressivement, les négatifs sont soumis à des règles de calcul en prolongeant celles existant pour les nombres positifs.

Dans "*Eléments d'algèbre*" p 31 (1760), le mathématicien français *A. Clairaut* (1713 ; 1765) manipule des nombres négatifs comme solution numérique d'une équation à partir de son expression littérale :

« Ce que nous venons de dire dans cet article, va nous servir pour faire d'une manière plus précise et plus étendue, la filiation des règles et des signes algébrique. Ce qu'on va lire est un extrait fort abrégé de ce qu'on trouve dans Euler (Eléments d'Algèbre, p 50, tome 1er). Si on part de l'addition, la plus simple des opérations qu'on puisse pratiquer sur deux nombres a et b , et si on l'appelle c , on aura $a + b = c$, d'où l'on tire tout de suite $a = c - b$, et voilà évidemment l'origine de la soustraction; de plus le nombre qu'on veut soustraire pourrait être plus grand que celui dont on veut le soustraire, et le reste alors serait une quantité négative ».

Pour Clairaut le nombre négatif est indiqué sous l'appellation de « *quantité négative* ». C'est le résultat de la soustraction lorsque le nombre qu'on veut soustraire est plus grand que celui dont on veut le soustraire. Ceci met en relief la confusion entre le signe de l'opération et le signe du nombre. La distinction ne sera vraiment faite qu'à la fin du XIX^e siècle, mais le problème pédagogique persiste même dans les recherches contemporaines. Pour exemplifier, Mercier et Matheron (2004) ont mentionné :

« Ainsi, le jeu avec les ostensifs $+$, $()$, $-$, considérés comme signes d'opérations et signes algébriques, induit un double jeu de mémoire tandis que, pour le professeur comme pour l'élève, les discours qui pourraient justifier la confusion nécessaire des symboles d'opérations et des signes de relatifs sont inaccessibles ».

Ce qui prouve que la dévolution des objets de savoir « nombres relatifs » est toujours problématique. La transposition didactique mettra en cause les multiples confusions d'usage faites par les élèves à propos de ces divers ostensifs ; en particulier, la confusion entre le signe de l'opération et le signe du nombre.

Pourtant, le doute sur l'existence des nombres négatifs se révèle toujours problématique même au XIX^e siècle. Le mathématicien Carnot (1753 ; 1823) a écrit : « *retirer une quantité effective de zéro, quelque chose de rien : opération impossible. L'usage des nombres négatifs conduit à des conclusions erronées* » (Référence : *Géométrie de position*, 1803)

Pour clôturer cet aperçu, en 1821, Augustin Louis Cauchy (1789 ; 1857) dans son "*Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique*", p. 1-2, définit les nombres relatifs comme une partie numérique précédée d'un signe $+$ ou $-$.

« Nous prendrons toujours la dénomination des nombres dans le sens où on l'emploie en arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue des grandeurs, et nous appliquerons uniquement la dénomination de quantités aux quantités réelles positives ou négatives, c'est-à-dire aux nombres précédés des signes $(+)$ et $(-)$ ».

Cauchy a introduit la mesure absolue d'une grandeur pour des nombres positifs et négatifs. Il a ainsi défini les nombres négatifs comme des nombres composés de deux parties. La première partie est numérique, représente les nombres positifs connus par les élèves, et l'autre partie est un signe. Il n'a pas mis en relief l'organisation mathématique qui montre que l'ensemble des entiers relatifs est construit par un prolongement sur les entiers naturels (*voir 6.1 p.160*)

Conclusion

Au cours de l'histoire la découverte abstraite des nombres relatifs s'est révélée d'une lenteur surprenante. Il a fallu attendre plusieurs siècles, voire jusqu'au XV^e siècle, l'apparition d'êtres numériques non positifs. Les nombres négatifs sont apparus pour répondre à une nécessité interne aux mathématiques (résolution des équations algébriques) et non pas pour une modélisation du monde réel.

Les mathématiciens chinois ont manipulé ces nouveaux nombres depuis les premiers siècles. Mais ils en avaient une appréhension partielle, avec d'étonnantes lacunes. Ces nombres, considérés comme des quantités négatives, étaient un outil pour faciliter la résolution des équations dont seules les solutions positives sont acceptées.

Cette étude peut appuyer la suite de notre travail, tant aux niveaux épistémologique que didactique.

Le niveau épistémologique nous permet de repérer des obstacles potentiels dans la construction des nombres relatifs et comprendre les conceptions entretenues sur les conditions de l'existence des entités mathématiques. Ces conditions relèvent d'une alternative externe / interne au monde mathématique que (Schubring, 1986) a désignée comme une épistémologie à double sens :

« Une épistémologie substantialiste (ou ontologique) selon laquelle les concepts sont justifiés par une réduction à des êtres auxquels on accorde une existence comme à celle du monde physique - une épistémologie systémique, où l'existence est justifiée par la cohérence du champ conceptuel, les concepts ne devant satisfaire qu'à des conditions internes aux mathématiques ».

Cet extrait souligne la place importante, considéré comme « en accord » avec la réalité physique par l'auteur, pour la construction du nouveau savoir. Mais cette construction ne se met en place qu'à partir des propriétés internes aux mathématiques. Il est probable que la

difficulté de la construction, qui prend en compte le monde de la réalité physique, ait ralenti l'avancée de la modélisation mathématique des nombres relatifs.

Cette étude permet d'étudier au niveau didactique les options des méthodes choisies dans les programmes et les manuels, pour lesquelles la transposition didactique des « nombres relatifs » s'appuie sur une tâche mathématiquement significative confiée aux élèves de EB6. Cette étude historique montre qu'il serait erroné de croire que les relatifs puissent prendre le « statut abstrait de nombres » à l'issue d'un premier enseignement.

6.3. Etude du programme libanais de 1997

6.3.1. Organisation mathématique du savoir « Nombres Relatifs » dans le programme libanais

Nous avons étudié le curriculum libanais (voir Annexe 4 p.19) pour identifier les types de tâches institutionnellement attendues des élèves sur les nombres relatifs. Le curriculum libanais⁵¹ place « les Nombres Relatifs » au niveau de la classe de EB6. Nous avons transcrit le contenu des programmes spécifiques à ce savoir dans le tableau ci-dessous, en suivant leurs organisations mathématiques sur l'échelle de niveaux de codétermination didactique (sujet, thème, secteur, domaine). Nous avons remarqué que pour les concepteurs du programme, il n'y a pas de distinction entre ces niveaux. Par exemple, le type de tâches : « Additionner deux nombres relatifs », pris du domaine « Arithmétique et Algèbre », apparaît à la fois au niveau du secteur, du thème et du sujet.

Nous allons réorganiser ce programme dans un nouveau tableau suivant les divers types d'organisations mathématiques qui peuvent être définis sur les niveaux de codétermination :

Domaine : Nombres et Calcul				
Secteur : Nombres Relatifs				
Thème 1 : Définition et ordre sur les nombres relatifs			Thème 2: Calculer sur des nombres relatifs	
Sujet 1 : Identifier des nombres positifs et des nombres négatifs.	Sujet 2 : Situer des nombres relatifs sur l'axe numérique.	Sujet 3 : Comparer des nombres relatifs.	Sujet 4 : Additionner des nombres relatifs.	Sujet 5 : Soustraire des nombres relatifs.

Tab OM 19 : Etude praxéologique des nombres relatifs du point de vue « curriculum »

6.3.2. Introduction des nombres relatifs

Une construction mathématique des nombres relatifs n'est pas montrée dans le programme puisque l'introduction de ces nombres dépend effectivement de leur identification : « identifier ». Ils sont introduits comme relevant « des grandeurs » « pouvant avoir deux sens » (Programme libanais, p29), et que les élèves ont déjà rencontrés dans leur quotidien. Par exemple, le degré de la température (région froide, chaude, etc.), l'altitude. En d'autres

⁵¹Décret 10227, 8 mai 1997.

termes les élargissements successifs de l'ensemble des entiers naturels à l'ensemble des entiers relatifs ne sont pas montrés. Le lien est absent entre ces deux ensembles de nombres.

En revanche dans la partie « commentaires » dans le programme, p. 29, concernant le sujet 1, nous lisons :

« On multipliera les exemples de grandeurs pouvant avoir deux sens : déplacement sur une route, température, altitude, temps, etc. On fera remarquer l'intérêt particulier du choix de l'origine (valeur initiale) bien que ce choix soit arbitraire ».

Les nombres relatifs, relevant de concepts abstraits (Berté et al, 2008), dépendent de l'illustration des « grandeurs » comme « le déplacement sur une route, la température », dont la définition manque dans les programmes libanais. Ainsi « La grandeur pouvant avoir deux sens » est une idée globale qui convoque la réalité de la variation (augmentation / diminution). A notre avis, ces grandeurs vont créer des obstacles dans diverses situations, par exemple dans « Qu'est-ce que la somme de deux températures ? ».

Or l'idée de grandeur devrait suivre, pour sa mise en place, une évolution prenant comme origine les nombres entiers, comme le montre la préface d'un ancien manuel scolaire français⁵² (cité dans Bosch et Chevallard, 2001) :

1. IDÉE D'UNITÉ ET DE NOMBRE ENTIER

Définitions : -On appelle unité chacun des objets d'une collection. Le nombre entier exprime la quantité d'unités que comporte une collection. Compter c'est chercher combien il y a d'unités dans une collection d'objets.

2. IDÉE DE GRANDEUR

On appelle grandeur tout ce qui peut être augmenté ou diminué, comme la largeur d'une route, la durée d'un trajet, la vitesse d'un véhicule, le nombre des feuillets d'un livre, etc.

On appelle plus spécialement *grandeurs mathématiques* celles pour lesquelles on peut définir l'égalité et la somme. Exemples: les surfaces, les volumes, les angles, les arcs, les forces, les quantités de chaleur, etc.

• 3. MESURE D'UNE GRANDEUR ET NOMBRE ENTIER

D'une façon générale: Mesurer une grandeur c'est chercher combien de fois elle renferme une autre grandeur de même espèce prise pour unité. Un nombre entier exprime donc la mesure d'une grandeur.

• 4. NOMBRES CONCRETS ET NOMBRES ABSTRAITS

Le nombre suivi de l'indication de l'unité qui l'a fourni s'appelle *nombre concret*.

Encadré 4

⁵² Conforme au programme du 26 juillet 1909

Signalons que l'unité choisie dans cet encadré est un indicateur d'une *quantité initiale* que (Schubring, 1986) décrit ainsi : « *la quantité est, historiquement, le concept de base pour toutes les mathématiques mais, aujourd'hui, «quantité» ne représente plus un concept mathématique concret. Il se réduit plutôt à un élément de rhétorique apparaissant, à l'occasion, dans des discours sur la mathématique* ». Dans ce sens, nous considérons que la quantité est à l'origine de l'apparition des entiers naturels.

Par exemple si nous voulons comparer les longueurs de deux tiges. On pourra faire coïncider une ficelle avec l'une de ces tiges et l'appliquer sur la seconde. Supposons que la longueur de la seconde tige est trois fois plus que celle de la première. Le rapport entre les deux longueurs concerne deux grandeurs de même espèce. Il est égal au nombre abstrait « 3 ».

Nous pouvons déceler dans les termes du vocabulaire du tableau de l'Encadré 4, les résultats suivants : 1) Deux tiges sont présentes : c'est le nombre d'objets de la collection. Ce nombre est désigné par un entier naturel, exprimant une quantité initiale. On compare leurs longueurs qui représentent deux grandeurs de même espèce. 2) L'unité choisie est la longueur de la première tige. « Les deux tiges sont dans le rapport 3 » montre que la longueur de la deuxième tige est « 3 ». C'est-à-dire sa longueur est 3 unités (nombre suivi d'une entité mathématique) qui correspond au nombre concret 3u (ou comme, par exemple, lorsqu'on dit 2 mètres et 15 centimètres = 2,15 m, le nombre 2,15 est concret car il exprime une longueur). 3) Les longueurs des deux tiges sont dans le rapport 3 ce qui donne à ce nombre « 3 » le statut d'un nombre abstrait.

Ces phénomènes réels ont contribué à la naissance des entiers naturels⁵³.

L'émergence des « nombres abstraits », cas des nombres relatifs par exemple, ne se fait pas d'un seul coup. Il faut, comme l'indique l'Encadré 4, des dispositifs didactiques qui assurent la rencontre avec des questions dont ils constituent des réponses, entre autres :

- 1) La nécessité de créer une unité conventionnelle. Ceci pour déterminer le nombre de fois qu'un représentant d'une grandeur est contenu dans une autre grandeur de même espèce.
- 2) La mesure d'une grandeur. Ceci est le rapport de deux grandeurs dont l'une est considérée comme unité.

53 La naissance des fractions, des décimaux, des irrationnels est intimement liée à l'histoire des mesures. C'est pour exprimer le rapport entre de telles grandeurs et une grandeur de même espèce choisie comme référence que des nombres autres que les entiers ont été nécessaires. Cette situation se rencontre lorsque la grandeur choisie, comme référence, n'est pas égale à un nombre entier (de fois) dans la grandeur à mesurer (Matheron et Noirfalise, 2009).

En effet, Matheron et Noirfalise(2009) citent à ce propos :

« Mesurer une grandeur consiste à associer à cette grandeur un nombre exprimant un rapport entre cette grandeur et une grandeur de même espèce prise comme référence ; c'est-à-dire un nombre tel qu'en multipliant cette grandeur de référence par ce nombre, on obtienne la grandeur en question ».

Ainsi la notion de « grandeur » n'est pas simple à définir. Elle s'attache à des dispositifs relevant du monde matériel (physique ou vivant) ou des situations sociales. Dire qu'il fait chaud ou froid dans une pièce, ce qui est une assertion plutôt subjective, dépend de ceux qui la prononcent.

Les notions du « nombre », de « grandeur » et de la « mesure » constituent des notions fondamentales en arithmétique. Elles forment une base technologico-théorique du domaine arithmétique.

6.3.3. La représentation sur l'axe numérique dans le programme libanais

Le recours à l'axe numérique constitue un moyen primordial pour réaliser les différents types de tâches dans les sujets 2, 3, 4 et 5 du programme. Par exemple, nous lisons dans la partie *commentaires*, p. 30 du sujet 3 relatif à la comparaison de deux nombres : *« la représentation des nombres relatifs par des points d'un axe et leurs distances à l'origine joueront un rôle important dans la comparaison des nombres »*. Nous notons ainsi dans la même partie, p. 31 relative au sujet 4 de l'addition des nombres relatifs : *« Le recours à la représentation sur un axe facilite la compréhension. On pourra y représenter l'addition par un déplacement »*. Dans ce contexte, l'addition de deux températures aura-t-elle un sens, représente-t-elle un nombre significatif pour les élèves ? Pour le sujet 5 relatif à la soustraction des nombres relatifs, nous relevons de la même partie p. 31 : *« On conseille d'utiliser la représentation sur un axe et de se limiter (dans le calcul) à des cas simples [...] »*.

Pour les concepteurs du programme, le recours à l'axe numérique est un « facilitateur » pour appréhender différents types de tâches relatives à ce savoir comme « Identifier des nombres positifs et des nombres négatifs », « Additionner des nombres relatifs », alors que pour nous il reflète une représentation non existentielle.

Par exemple, si nous calculons $3 - 8$ nous nous déplaçons 3 pas vers la droite, si l'axe est orienté vers la droite, puis 8 pas vers la gauche du point d'arrivée du premier déplacement. Le résultat de la différence correspond au dernier déplacement (-5). Cette méthode « conseillée »

ne prend en compte que des nombres positifs (3) et (8) munis d'un déplacement approprié sans pouvoir distinguer le signe du nombre et celui de l'opération (Mercier et Matheron, 2004). Pourtant le calcul de cette opération se place à l'intérieur de l'anneau des entiers relatifs ; ce qui ne peut être perçu comme tel dans la classe.

6.4. Etude des manuels libanais

Les manuels scolaires se présentent comme une concrétisation du contenu du programme prescrit. Ils fournissent une manière de rencontre entre les élèves et leur professeur avec la notion mathématique en jeu.

Nous avons choisi d'étudier trois manuels libanais adoptés par les écoles publiques et privées : « Construire les Mathématiques⁵⁴ », « A nous les maths » et « Mathématiques ». Notre but est de rechercher la façon dont ils introduisent les Nombres Relatifs.

6.4.1. Etude du manuel 1

Manuel 1 : « Construire les maths »

Objectifs

A la fin de ce chapitre, je serai capable :

- d'identifier les nombres positifs et négatifs;
- de situer des nombres relatifs sur l'axe numérique;
- de reconnaître deux nombres opposés.

Activités

a) Observe la figure ci-dessous:

b) Recopie et complète le tableau:

Objet	Position	Nombre relatif correspondant
hélicoptère	100 m au-dessus du niveau de la mer	+100
cerf-volant		
oiseau		
bateau à voile		
plongeur		
requin	40 m au-dessous du niveau de la mer	-40
trésor		

Je suis un nombre relatif parce que je dépends de mon signe.

+6,3

c) Qu'est-ce qui distingue les deux nombres +65 et -23 et que traduisent-ils?

d) Reproduis l'axe gradué ci-dessous:

et place les points H; C; O; B; P; R et T correspondant respectivement aux nombres: +100; +65; +40; 0; -23; -40; -106. 1 cm sur l'axe correspond à 10 m dans la réalité.

• Quelle est la lettre qui correspond à zéro?

• Recopie et complète:

Les nombres qui correspondent aux points situés:

• à droite de B, ont le signe

• à gauche de B, ont le signe

e) En comparant les positions de l'oiseau et du requin par rapport au niveau de la mer, précise la position de B par rapport à [OR].

Place le zéro sur l'axe ci-dessous:

Figure 16 : Introduction des nombres relatifs dans le manuel 1

⁵⁴ - « Construire les Mathématiques », Education de base 6, Centre de Recherche et de Développement Pédagogique(CRDP). C'est le livre national libanais des écoles publiques (2000).

- « A nous les maths », Collection Hachette, 2000.

- « Mathématiques », Collection puissance, 2009.

La première « Activité » répond au contenu 4.1 du programme (voir 6.3 p.168). Elle pousse l'élève à rechercher l'altitude de chaque objet, marquée en rouge sur une droite graduée verticale, afin de remplir les cases correspondantes du tableau dans la partie b) qui renferme deux colonnes. Pour remplir les cases de la première colonne intitulée « Position », il suffit de connaître les mots au-dessus / au-dessous et de réécrire l'une des deux phrases écrites dans les autres cases « 100 m au-dessus du niveau de la mer » (modélisée par le signe plus) ou « 40 m au-dessous du niveau de la mer » (modélisée par le signe moins). Pour l'autre colonne, il suffit de suivre les réponses types écrites dans les cases correspondantes comme +100 et -40. Nous remarquons que les auteurs ont choisi pour origine de leur droite graduée le positionnement du bateau qui figure dans l'image à gauche. Le « Zéro », qui jusqu'à ce jour pour les élèves est « le nombre cardinal de l'ensemble qui ne contient aucun élément », prend une nouvelle nomination « Nombre Relatif ». C'est une tentative conforme aux instructions du programme libanais et surtout à la partie commentaire du contenu 4.1 : « *On fera remarquer l'intérêt particulier du choix de l'origine (valeur initiale) bien que ce choix soit arbitraire* ». Notons que l'origine mis en place (le bateau) réfère à un placement qui touche à l'aspect ordinal du nombre puisqu'il s'agit d'un ordre. C'est un placement des objets en fonction de leur altitude qui ne fait pas fonctionner une valeur initiale.

Une définition des nombres relatifs est vue dans c). Cette définition est donnée comme réponse à la question suivante : « Qu'est-ce qui distingue les deux nombres +65 et -23 ? ».

La droite graduée horizontale apparaît dans la question d) qui sert de nouveau à repérer les points (H, C, ...), déjà vus dans la partie a), et qui sont les « correspondants des nombres » (+100, +65, ...). Le marquage de ces points est lié au contexte « altitude » vu que les nombres désignés indiquent des altitudes. Cette question aurait pu être davantage exploitable lorsque les élèves travaillent sur l'aspect repérage, mais n'est d'aucune aide pour la construction du nombre en mathématiques.

Pour récapituler, le manuel 1 a introduit les nombres relatifs en suivant la hiérarchie suivante :

1. Reconnaître les nombres relatifs comme objets de référence à des situations réelles.
2. Ecrire des nombres relatifs $+a$, $-a$ et 0.
3. Situer des nombres relatifs sur une droite graduée

6.4.2. Etude du manuel 2

Nous exposons maintenant un extrait du manuel 2 « A nous les maths ». Nous observons trois activités pour introduire les nombres relatifs.

La première activité est une Q.C.M. Elle a donc pour fonction de mobiliser des prérequis nécessaires à la construction de ce savoir et de parler de la mémoire didactique de l'élève.

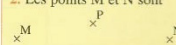
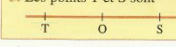
Pourtant les deux autres activités devraient permettre aux élèves de construire progressivement les nombres relatifs et de travailler sur les nombres opposés.

17 Nombres relatifs

Pour un bon départ...

Activité 1 Q.C.M.

Coche, pour chaque ligne, la (les) case(s) de la (des) bonne(s) réponse(s).

	A	B	C	D
1. Le nombre 4,06 est	plus proche de 4 que de 5	supérieur à 4	inférieur à 4,1	compris entre 4,1 et 4,2
2. Les points M et N sont 	alignés avec P.	à 5 cm l'un de l'autre.	à 2 cm du point P.	à égale distance du point P.
3. Les points T et S sont 	alignés avec le point O.	de part et d'autre du point O.	à égale distance du point O.	à 1,5 cm du point O.

Activité 2 De « nouveaux nombres »

Ces trois thermomètres indiquent les températures repérées un jour d'hiver, aux Cèdres, à Faraya et à Saïda.


aux Cèdres


à Faraya


à Saïda

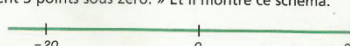
a) Fait-il plus froid aux Cèdres ou à Faraya ? _____
 À Faraya ou à Saïda ? _____
 Aux Cèdres ou à Saïda ? _____

b) Quelle température est inférieure à zéro ? _____
 Quelle température est supérieure à zéro ? _____

Activité 3 Avoir zéro à un test et être en progrès !

Ziad dit qu'il a fait des progrès en orthographe. Pourtant, il a la même note qu'au précédent devoir : zéro.

Il explique à ses camarades : « Au premier test, j'ai eu 20 points sous zéro. Cette fois-ci, j'ai seulement 3 points sous zéro. » Et il montre ce schéma.



Écris sur ce schéma sa position au second test.

178.

Figure 17 : Introduction des nombres relatifs dans le manuel 2

Activité 1

Nous classons dans le tableau ci-dessous quelques-unes des connaissances antérieures relatives à la première activité. Ceci nous permettra à détecter ultérieurement les rapports des élèves avec les éléments institutionnels du savoir.

Remarque : on désigne par la lettre *V* si le choix est correct, sinon par la lettre *F*

Q1 : Le nombre 4.06 est ...(les choix possibles sont écrits ci-dessous :)			
plus proche de 4 que de 5 (F)	supérieur à 4 (V)	inférieur à 4,1 (V)	compris entre 4,1 et 4,2 (F)
Les connaissances mobilisées pour Q1 sont : 1) La présence des décimaux 4,06 - 4,1 - 4,2 et des entiers 4 et 5 mobilise chez les élèves les ensembles des nombres positifs : les entiers et les rationnels. 2) Les éléments de réponses portent sur l'application des propriétés des nombres comme la comparaison de deux nombres positifs, l'encadrement d'un nombre entre deux entiers ou deux décimaux.		Les rapports attendus avec les éléments institutionnels du nouveau savoir pourraient être : 1) Remémorer des propriétés des nombres. 2) Construire des nombres négatifs par élargissement des nombres positifs.	
Q2 : les points M et N sont...			
alignés avec P (F)	à 5cm l'un de l'autre (F)	à 2cm du point P (V)	à égale distance du point P (V)
Les connaissances mobilisées pour Q2 sont : 1) Distance de deux points dans la réponse « M et N sont à égale distance du point P » ou « M et N sont à 2 cm du point P ». 2) L'équidistance d'un point par rapport aux deux autres points.		Les rapports attendus avec les éléments institutionnels du nouveau savoir pourraient être : 1) Désigner des nombres relatifs comme variation entre deux grandeurs (la température baisse ou augmente). 2) Sensibiliser la représentation sur un axe verticale. 3) Introduire la mesure algébrique d'un déplacement. 4) Introduire les nombres opposés.	
Q3 : Les points T et S sont ...			
alignés avec le point O (V)	de part et d'autre du point O (V)	à égale distance du point O (V)	à 1.5 cm du point O (V)
Les connaissances mobilisées pour Q3 sont : 1) Le milieu d'un segment. 2) L'équidistance de deux points.		Les rapports attendus avec les éléments institutionnels du nouveau savoir pourraient être : 1) Introduire les nombres opposés. 2) Sensibiliser la représentation sur un axe.	

Nous nous attendons, dans la suite de ces activités, à un travail qui mobilise principalement certaines connaissances antérieures aptes à ouvrir des pistes de réflexion sur les nombres relatifs. Un travail qui renvoie les élèves à la remémoration de certains concepts

mathématiques définis antérieurement au fil des années, par exemple : la valeur approchée d'un nombre rationnel (EB4 et EB5), comparaison de deux nombres positifs, point équidistant de deux autres (EB6), milieu d'un segment (EB3), etc.

L'activité 2 présente trois thermomètres, sur lesquels nous voyons les températures (-5, 0 et +9) dans trois régions connues du Liban : « Cèdres (très haut sur la montagne) : reconnu être très froid, Faraya (plus bas) : synonyme du ski, Saida : la côte ».

Ainsi, pour répondre à la question *a) Fait-il plus froid aux cèdres ou à Faraya ?*, l'élève peut réécrire facilement les nombres indiqués sur les thermomètres. Notons que le zéro est écrit sans signe. Il désigne la température à Faraya. Il a un statut similaire aux autres, c'est un « état », il ne peut pas présenter une valeur mesurable.

Nous remarquons que la question *b) : « Quelle température est inférieure à zéro ? »* est purement culturelle. Dans ce sens l'élève pourrait se référer naïvement au langage usuel et à ses connaissances sur les températures des régions chaudes ou froides de son entourage. Il peut consulter ses connaissances dans d'autres disciplines, par exemple en géographie.

Dans l'activité 3 la note de Ziad varie de « 20 points sous zéro » jusqu'à « 3 points sous zéro ». Elle a augmenté alors de 17 points. La représentation graphique est marquée sur une droite graduée sur laquelle on trouve les nombres (-20), 0 et 20 (le nombre 20 est écrit sans le signe +). L'axe gradué a pour fonction d'étudier des « variations » puisque la progression qu'a subie Ziad se mesure par une augmentation de 17 points (mesure algébrique d'un segment d'abscisses respectives -20 et -3). Le zéro est écrit au milieu du segment [-20, +20], il a un statut ordinal. Il est synonyme du bilan réussite / échec. En d'autres termes, nous disons que le zéro « anime » d'une certaine façon l'existence des nombres négatifs dans un contexte donné. Nous pensons que cette activité ne fournit pas une occasion pour enseigner les nombres opposés puisque la situation est représentée par une demi-droite (non symétrique) qui est limitée en (20) mais illimitée au-delà de (-20). Cela nous fait croire que (-20) peut ne pas être la plus basse note tandis que 20 en est toujours la plus haute.

Notons que dans cette activité le nombre positif +20 est écrit 20 (sans signe). Cela montre que le but du *Q.C.M. 1* : « Construction des nombres relatifs par élargissement des nombres positifs » pourrait être trouvé ici. Mais il ne peut pas conforme au contenu 4.1 du programme qui recommande les écritures suivantes : « (+a) et (-a) où a est un nombre quelconque pour désigner les nombres relatifs ».

La construction des nombres relatifs n'est donc pas basée sur le prolongement des nombres positifs connus par les élèves. Cela contredit le but principal du Q.C.M. de l'activité 1. Par contre le calcul de la distance de deux points, voire la distance algébrique, pourrait être un support essentiel pour le calcul de la variation de deux nombres et être introductive pour l'enseignement des opérations addition et soustraction des nombres relatifs. Ce qui renforce nos hypothèses concernant l'activité 2.

6.4.3. Etude du manuel 3

Nous trouvons deux activités introductives aux nombres relatifs, désignés par de « nouveaux nombres » dans le troisième manuel, comme dans l'extrait suivant :

Le contexte de l'activité 1 renvoie les élèves à l'ascenseur dont l'usage est connu par la majorité d'entre eux. Nous voyons à droite de l'activité la « plaque d'une ascenseur » sur laquelle nous trouvons les numéros des étages. Les numéros sont disposés verticalement et montrent l'ordre de l'altitude de chacun des étages.

Pour répondre aux questions posées, il suffit de reprendre l'écriture de la phrase donnée : « le bouton 1 correspond au premier étage, le bouton -1 correspond au premier sous-sol » par changement du nombre.

Activité

Découvrir de nouveaux nombres - Notation

Réfléchis et réponds !

Observe la plaque de l'ascenseur ci-contre .

Le bouton **RC** signifie le rez-de-chaussée : c'est l'étage qui est au niveau de la rue principale .

Le bouton **1** correspond au premier étage ; le bouton **-1** correspond au premier sous-sol .

Donne la signification des autres boutons :

.....

.....

Plaque d'ascenseur

Observe les thermomètres ci-contre .

A

B

C

La température indiquée par le thermomètre A est 5 au-dessous de zéro , notée -5 .

-5 est dit nombre négatif .

• Complète .

La température indiquée par le thermomètre B est de zéro , notée +5 .

+5 est dit nombre positif .

• Complète .

La température indiquée par le thermomètre C est de , notée

..... est un nombre

Figure 18 : Introduction des nombres relatifs dans le manuel 3

Le nombre « zéro » est synonyme du « rez-de-chaussée ». Il classe les étages en fonction de leur position par rapport au rez-de-chaussée. Il est désigné par une « *origine arbitraire* » conformément aux recommandations des programmes que nous trouvons écrites dans le commentaire du contenu 4.1 « *On admettra, pour une grandeur donnée, une valeur initiale à partir de laquelle la grandeur pourrait prendre des valeurs positives et négatives* ».

Les nombres négatifs présentés n'ont pas de significations internes aux mathématiques puisqu'ils s'attachent au contexte (plaque de l'ascenseur).

Pour l'activité 2, nous pouvons nous référer à l'activité 2 du manuel 2 « A nous les maths » (voir 6.4.2 p.175) qui répond aux mêmes objectifs.

Nous allons récapituler les résultats de cette partie dans le tableau ci-dessous dans lequel nous montrons la façon dont les manuels présentent les nombres relatifs :

Bilan sur l'introduction des nombres relatifs conçu par trois manuels scolaires libanais		
Manuel 1	Manuel 2	Manuel 3
Identifier les nombres relatifs comme éléments de réponses à des situations vécues par les élèves. Ecrire des nombres relatifs sous la forme (+a), (-a) ou 0. Situer des nombres relatifs sur une droite graduée.		
Le nombre relatif est un état.	Le nombre relatif est un état et marque une variation.	Le nombre relatif est un état.

Le traitement de ces nouveaux nombres se place dans un contexte externe aux mathématiques (thermomètre, plaque d'ascenseur, repérer des objets par rapport à leur altitude). Les auteurs des manuels n'ont pas réservé une introduction aux nombres relatifs apte à donner aux négatifs un statut de nombre abstrait. Ils n'ont pas pris en considération les connaissances mathématiques antérieures des élèves supposées apprises dès les premières années de leurs entrées scolaires dans les situations de dénombrement, de mesurage ou de résolution d'équations, mais ils s'appuient sur leurs connaissances culturelles.

6.4.4. Place cognitive des Nombres Relatifs dans les activités des manuels

Les situations rencontrées dans les manuels réfèrent à des situations concrètes, culturellement connues. Elles sont facilement imaginables par les élèves. Les nombres relatifs leur apparaissent comme relevant d'une réalité sociale évidente et partagée. L'utilisation de ces nombres permet également de faire un lien avec la culture de tous les jours ainsi qu'avec d'autres disciplines comme la géographie (se positionner dans l'espace : gauche, droite).

Les différents contextes utilisés dans les manuels pour illustrer les nombres relatifs sont :

- La lecture de la température dans un thermomètre,
- La plaque de l'ascenseur,
- L'échelle des notes,

- L'altitude et la profondeur.

Par exemple, nous pouvons tirer deux significations différentes des nombres relatifs marqués sur le « thermomètre » :

- 1) Un état : il fait -5°C aux cèdres (repérage une grandeur).
- 2) Une variation : la température a baissé de 3°C (détermination de la mesure algébrique d'une variation).

Si on peut reconnaître la réussite de la modélisation des nombres relatifs à l'aide de la monstration de quelques valeurs liées à la « température », on ne peut que reconnaître aussi l'inconvénient de cette approche sur l'addition et la soustraction : on ne peut opérer sur deux « repères de température », sauf pour calculer leur variation. Cette présentation des relatifs vus seulement comme « repères sur une graduation » (Berté, 2008) constituera sans doute chez les élèves un obstacle. Lorsque nous codons une température inférieure à zéro par des relatifs, il ne s'agit que de repérage par rapport à une origine arbitrairement choisie, comme par exemple dans la situation suivante : « Il faisait 14°C , et la température s'est abaissée à 6°C » ; la variation est codée -8°C . Qu'en est-il alors de la différence de deux variations de température, sans parler du produit de deux variations de température, quel sens lui donner ?

Dans le contexte de repérage sur une droite, il semble que les auteurs des manuels aient eu l'intention de converger rapidement vers les programmes, en particulier vers le secteur 4.2 qui porte sur le type de tâches suivant : « Représentation sur l'axe numérique ». Notons que ce secteur vient à la suite du 4.1 intitulé : « Nombres positifs et nombres négatifs ». Ces deux extraits du programme montrent que le repérage sur une droite graduée apparaît naturel, voire immédiat aux élèves, aux auteurs des programmes, qui supposent qu'ils l'ont déjà rencontrée dans leurs pratiques du quotidien. Or, les connaissances mathématiques antérieures des élèves sur les nombres ne portent que sur la demi-droite représentant des entiers naturels, des décimaux et des fractionnaires positifs.

On sait que les élèves ont travaillé, au cours des années antérieures, les deux aspects du nombre : ordinal et cardinal. Ceci devrait doter les élèves d'EB6 (sixième) d'un rapport personnel relatif aux fonctions essentielles du nombre, proche du rapport institutionnel, en particulier :

- Ce qui sert à compter des objets (il s'agit de la création de l'ensemble des entiers naturels),
- Ce qui sert à mesurer des longueurs,

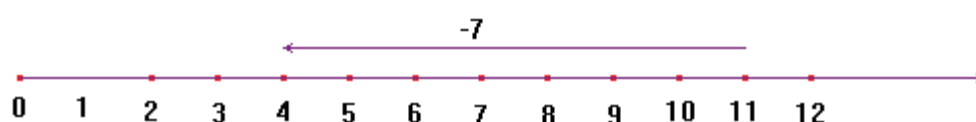
- Ce qui sert à graduer une demi-droite⁵⁵ (Les entiers naturels permettent aussi de désigner la mémoire de la position d'un nombre (appelé aspect ordinal du nombre) dans la suite des entiers naturels.
- Ce qui sert à calculer.

Ces fonctions ne permettent pas à l'élève de concevoir l'élargissement de la demi-droite d'origine O sur laquelle on présentait les nombres positifs. Bref dans les activités introductives des trois manuels, les nombres négatifs sont perçus comme un déplacement vers la gauche sur un axe horizontal ou vers le bas sur un axe vertical. Ces nombres seront modélisés sur une droite qui est perçue comme « objet familier » à l'élève.

Cependant nous avons vu que l'évolution historique de ce savoir a renvoyé au XVIII^e siècle la « représentation » des nombres négatifs sur la droite graduée ; c'est le cas de Celsius (1701, 1744) par exemple (voir partie historique 6.2). Le recours à l'axe numérique ne venait effectivement qu'après la découverte de ces nouveaux nombres. Notamment après que le seul travail sur la demi-droite, relative aux nombres positifs, soit apparu insuffisant pour modéliser certaines situations. Pour exemplifier, nous allons illustrer deux situations réelles qui soutiennent notre point de vue.

Situation 1 : « Il faisait 11°C à midi, la température s'est abaissée de 7°C pendant la soirée ».

Cette situation peut être modélisée graphiquement par le schéma suivant :



Situation 2: « Il faisait 4°C à midi, la température s'est abaissée de 6°C pendant la soirée».

⁵⁵L'aspect ordinal du nombre traduit les propriétés du nombre vu comme un élément dans la suite des nombres entiers naturels. Les relations désignées par les symboles $\geq$ (supérieur ou égal) et $\leq$ (inférieur ou égal) sont des relations d'ordre car elles possèdent les propriétés suivantes : 1) La réflexivité qui signifie que tout élément est en relation avec lui-même, 2) L'antisymétrie qui signifie : si $a \leq b$ et si $b \leq a$ alors $a=b$, 3) La transitivité qui signifie : si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$. Cependant à l'école primaire libanaise, on enseigne seulement les inégalités au sens strict, c'est à dire $<$ et $>$ en les distinguant de l'égalité.



La demi-droite graduée ne suffit pas pour modéliser graphiquement la situation 2 qui peut être vue comme une « tombée dans le vide », tandis qu'elle suffisait pour traiter la situation 1.

Bref cette situation invite au prolongement de la demi-droite à gauche de l'origine O. Notons que les deux situations ne relèvent que du côté ordinal du nombre. Elles ne peuvent donc à elles seules donner aux relatifs le statut de nombres dont leurs propriétés se conforment aux aspects ordinal et cardinal.

En guise de conclusion, l'introduction des « Nombres Relatifs », conçue par les activités introductives dans les manuels ne prend guère en considération l'organisation mathématique et l'évolution épistémologique de ce savoir. L'ensemble de ces nouveaux nombres n'apparaît pas comme élargissement des nombres positifs par une loi de composition interne (voir étude mathématique 6.1, p.160). Par exemple dans la résolution de l'équation $x + 7 = 2$ qui a pour solution le nombre $2 - 7$, voire impossible pour l'élève à ce niveau. Les activités ne mettent pas en relief la nature épistémologique de ce savoir puisque les nombres relatifs et l'axe numérique sont présentés simultanément.

6.4.5. Présentation des Nombres Relatifs dans les manuels

Pour rechercher la façon dont les manuels introduisent les Nombres Relatifs, nous allons nous placer au niveau de l'écriture de ces nombres en tant qu'ostensifs. Nous allons classer dans un tableau les extraits correspondants :

Manuel 1 (P 111)	Partie du livre intitulée : « Cours »
	Un nombre qui dépend de son signe est un nombre relatif. S'il est précédé d'un signe : Positif, c'est un nombre positif ; Négatif, c'est un nombre négatif.
Manuel 2 (P 179)	Partie du livre intitulée : « Ce qu'il faut savoir »
	Un nombre positif est un nombre précédé de signe +. Il est supérieur à zéro. Un nombre négatif est un nombre précédé de signe - . Il est inférieur à zéro.

Manuel 3 (P103, tome 2)	Partie du livre intitulée : « <i>l'essentiel</i> »
	• Des nombres précédés du signe + ou du signe – sont appelés nombres relatifs. • Un nombre relatif est : • Positif s'il est précédé du signe + ; • Négatif s'il est précédé du signe -

Figure 19 : Etude comparative sur les nombres relatifs dans les manuels libanais

Commentaires

1 • Une définition mathématique est absente des trois manuels. Nous rejoignons (Matheron, Mercier, 2004) dans leurs écrits sur le travail algébrique :

« La dimension mathématique de l'activité observée est masquée aux yeux de ses auteurs et il faut en avoir une description théorique pour la retrouver. Nous pourrions l'indiquer rapidement ainsi: «+» désigne une loi de composition interne dans $\mathbf{Z}$, commutative, pour laquelle tout entier relatif x admet un opposé noté $-x$; ce qui permet de définir une deuxième loi interne notée « - », non commutative, définie par : $(y ; x) \rightarrow y + (-x) = y - x$ ».

Par ailleurs, il faut attendre quatre années scolaires pour qu'une définition de l'ensemble des entiers relatifs ait lieu. Nous lisons dans le chapitre 4 « Ensembles »⁵⁶, extrait du paragraphe IV intitulé « Ensembles des nombres », p. 52, les deux définitions suivantes :

L'ensemble N ne suffit pas pour résoudre les équations du type $x + a = b$ où a et b sont des entiers naturels et où l'inconnue x prend ses valeurs dans N . Par contre, toutes ces équations peuvent être résolues dans l'ensemble Z de tous les entiers.

L'ensemble Z est une extension de l'ensemble N (N est une partie de Z) qui permet de résoudre toute équation de la forme $x + a = b$. Mais l'ensemble Z ne suffit pas pour résoudre toute équation de la forme $ax = b$ où a et b sont des entiers ($a \neq 0$) et où l'inconnue x prend ses valeurs dans Z [...].

La première définition explicite la nécessité à laquelle répondent les entiers relatifs. La deuxième est une définition mathématique de l'ensemble Z .

2 • L'écriture d'un nombre relatif proposée par les manuels doit comprendre un signe : + (positif) ou – (négatif). C'est un abus de langage écrit qui n'est pas nouveau, (Cauchy, 1821) a

⁵⁶ Livre national : « Construire les Mathématiques », cycle secondaire, première année, Edition CRDP, 2004.

nommé ces signes des « *adjectifs* ». Il semble que les auteurs se hâtent de traduire par écrit, dans leurs manuels, la partie *Commentaire* ci-dessous :

Contenu	Objectifs	Commentaire
4.1 Nombres positifs et nombres négatifs	1. Identifier les nombres positifs et négatifs. [...] Utiliser la notation classique pour désigner les nombres relatifs.	On utilisera la notation (+a) et (-a), où a est un nombre quelconque, pour désigner les nombres relatifs.

Dans ce cas, la structure des nombres relatifs représentée par les deux écritures (+a) et (-a) pourrait refléter une rupture avec les écritures de type +a et a du nombre positif a. Pourra-t-on admettre que les nombres 3 et (+3) sont les mêmes? Quel rôle jouera le signe dans cette nouvelle approche des nombres ? Sans évidemment amplifier le risque d'erreur des élèves qui voient systématiquement dans l'écriture +a un positif et dans l'écriture -a un négatif quelque soit le nombre a.

Les manuels ne semblent pas envisager les différences dans le statut du signe. S'agit-il du signe du nombre ou du signe de l'opération ? Ecrit-on les nombres relatifs avec ou sans parenthèses ? L'absence de prise en compte didactique de ces questions peut plonger les élèves dans la confusion sur la signification des signes «+» et «-». Est-ce «le signe» du nombre relatif [comme dans -3 et dans (-4)], « un symbole » pour des opérations (comme dans 4 - 3), ou les deux à la fois ?

Un autre problème peut surgir dans l'écriture des parenthèses vu qu'elles ne sont pas nécessaires dans l'écriture du nombre-3, mais s'avèrent indispensables dans l'enseignement des opérations (addition et soustraction)

6.5. Conclusion

Cette étude montre que les nouveaux nombres sont considérés, tant par le programme que par les manuels, comme étant « familiers » aux élèves. Ils les rencontrent dans leur environnement proche et dans leur quotidien. Les manuels scolaires s'appuient sur les connaissances culturelles des élèves pour fonder la structure de ces nouveaux nombres. Les auteurs des manuels ont proposé des situations concrètes comme moteur pour la construction de ces nouveaux nombres. L'utilisation exclusive de ces situations se réfère au contexte principal du « repérage » sur un axe numérique où sont simultanément présentés les nombres positifs et négatifs. L'usage excessif de telles situations risque de provoquer des obstacles lors de l'enseignement des différentes opérations. Ces situations ne permettent pas la rencontre de l'organisation mathématique et des questions auxquelles elle répond qui sont à la base de la construction de l'ensemble des entiers relatifs qui s'explique par « un élargissement de l'ensemble des entiers naturels muni d'une loi de composition interne ». Cette loi est construite de façon à ce que tout nombre positif admette un nombre opposé. Par exemple, l'équation $x + 7 = 4$ admet une solution négative (-3).

Le travail dans un contexte externe aux mathématiques est susceptible de priver les élèves de la justification technologique relative à ce savoir. Néanmoins, les élèves semblent incapables de saisir que « *Des nombres sont des concepts abstraits, qu'ils ont des propriétés définies à l'intérieur des mathématiques, indépendamment de leur interprétation dans un modèle concret quelconque* » (Berté, 2008)⁵⁷. Aussi l'enseignant de mathématiques est-il chargé d'amener progressivement les élèves à se placer dans un contexte purement mathématique. Il a à installer une OD lui permettant de tisser des rapports entre les connaissances et les cultures sur les nombres d'une part et les éléments du milieu institutionnel de ce nouveau savoir d'autre part. Son travail réside surtout dans la mise en place d'un cadre technologique pour amener les élèves à contrôler la validité de leurs techniques.

Partie expérimentale

Au Liban⁵⁸, la séquence d'enseignement sur les relatifs (voir Annexe 5 p.23) a été organisée suivant sept séances. Nous nous centrons sur l'analyse d'extraits susceptibles de contenir des phénomènes relevant du « dédoublement des milieux ».

Les choix didactiques qui sont ceux de l'ingénierie didactique conçue par (CD)AMPERES placent l'étude des « Nombres Relatifs » dans un cadre défini de la manière suivante :

Les relatifs sont vus comme des programmes de calcul permettant de simplifier les calculs au sein d'un programme complexe. Le programme de calcul initial considéré est essentiellement P1 : « A un nombre on ajoute un deuxième et on soustrait au résultat un troisième ». Le Relatif est vu comme un programme P2, simplifié à partir de P1 tout en lui étant équivalent : « A un nombre on ajoute ou on soustrait un deuxième ». Nous signalons que dans **N**, ce programme ne donne pas toujours un résultat. C'est la raison pour laquelle l'application du programme de calcul à certaines valeurs numériques étant parfois impossible dans **N**, car nous obtenons un résultat négatif. Pour ceci, nous nous contentons *de donner le programme sans démonstration d'existence (Ingénierie, p.1)*.

Ainsi, nous notons la désignation *SI/ Ext 2/ L1 à L8* (en italique) pour présenter les tours de paroles de 1 à 8 pris de l'extrait numéro 2 de la première séance. La représentation « **Min sec...** » écrite indiquée à la tête de chaque extrait désigne le moment du déroulement de l'épisode.

⁵⁸ Au Liban, l'ingénierie est organisée autour de sept séances complètes. Tandis que l'enseignement proposé par l'ingénierie recommande, pour les premiers passages, des moments de calcul mental courts de l'ordre de dix minutes pour l'étape qui inaugure la première phase. A la suite de ce temps court de calcul mental, s'organisent des séances complètes.

6.6. Analyse de la première séance

La première séance de l'ingénierie a pour objectif principal d'élaborer une « stratégie » pour calculer mentalement $a + b - c$ dans le cas où $b > c$.

Cette étape a pour fonction d'organiser une première rencontre avec le type de tâches T : « exécuter le programme de calcul $a + b - c$ (a , b et c entiers naturels) » afin de mettre en échec la technique consistant à réaliser les calculs de gauche à droite en posant les opérations. Il faut donc « inventer » une nouvelle technique ; c'est le moment le plus important du déroulement de cette phase. Ayant trouvé qu'il est plus avantageux, pour les valeurs numériques données à a , b et c , de commencer par calculer $b - c$, il reste encore à s'assurer de la validité mathématique de la technique qu'on vient de découvrir. Un moment technologique garantissant partiellement la justification du recours à cette technique conclut de cette phase ; il est réalisé, dans un premier temps, à travers la vérification à la calculatrice de l'exactitude des réponses données. Puis les élèves sont engagés dans la recherche de la justification mathématique de la technique. Celle-ci est trouvée dans la décomposition additive de a en $(a' + a'')$ de manière que lorsque $b < c$, $a' + b = c$.

6.6.1. L'émergence des milieux cognitifs chez les élèves relatifs au type de tâches : « Calculer une expression numérique ».

Min 0

1	P	(P demande aux élèves de ne pas mettre les livres devant eux, seulement les cahiers) Je vais vous donner des calculs à effectuer, vous allez me donner la réponse rapidement et oralement, je commence par deux cents, deux mille sept cent quatre-vingt-neuf plus vingt-cinq moins vingt (il écrit en même temps qu'il parle $2789 + 25 - 20$ puis il met une * devant l'expression arithmétique écrite, il se tourne vers l'ensemble classe) Qui sait donner la réponse ? (des doigts se lèvent) Oui Al
2	Al	Deux mille sept cent quatre-vingt quatre
3	P	(regarde le tableau) Non c'est faux (il tend son doigt vers Che et lui dit) Oui
4	Che	Deux mille sept cent quatre-vingt quatorze
5	P	(se tourne vers le tableau) Deux mille sept cent quatre-vingt quatorze (il se tourne vers les élèves pour dire) C'est très bien, comment tu as réfléchi ?
6	Che	Euh ! premièrement j'ai fait vingt moins vingt-cinq, on obtient cinq, puis j'ai effectué cinq plus deux mille sept cent quatre-vingt-neuf, j'ai obtenu (P lui coupe la parole)
7	P	C'est très bien, qui peut répéter ce qu'il a dit, mais sans utiliser plus et moins

		(3 s d'attente) oui AI (il a levé le doigt)
8	AI	On a euh, on a soustraire euh vingt-cinq par vingt euh, euh, on a fait le cinq plus euh, on additionné euh le cinq avec deux mille sept cent quatre-vingt-neuf, alors on obtient deux mille sept cent quatre-vingt quatorze

Extrait 23 : Nombres Relatifs S1/ Ext 1/ L1 à L8

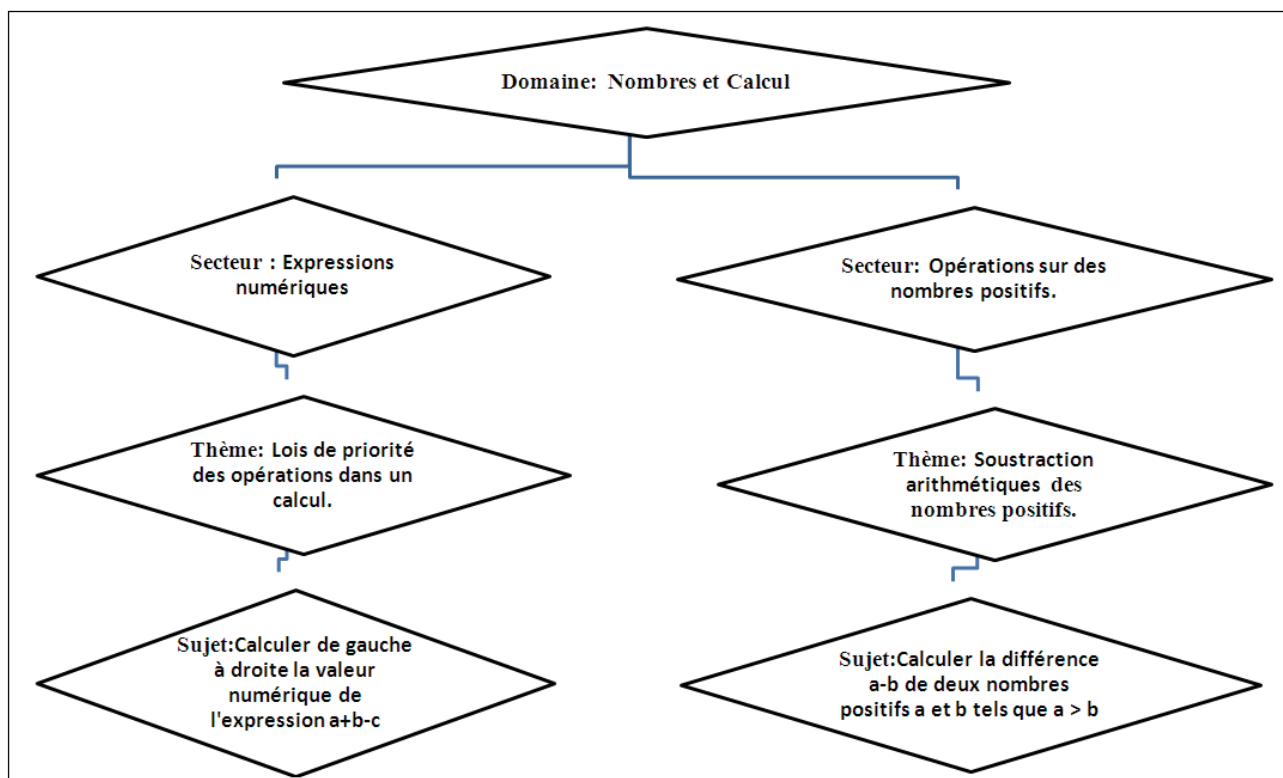
Ce premier extrait porte sur le type de tâches : « Calculer l'expression numérique : $2784+25-20$ ». Il met en évidence des techniques d'élèves qui sont non problématiques : ils ont pu donner, et au bout de quelques secondes seulement, la réponse correcte dans L4 en la justifiant (L8). En principe, ce type de tâches n'est pas nouveau pour les élèves. Le professeur les replace à la fois dans le moment de ré-exploration de ce type de tâches pour la constitution d'un embryon de technique, à partir duquel une technique plus développée pourra émerger pour enseigner le nouveau savoir, et aussi dans le moment de construction du bloc technologico-théorique relatif à cette technique. **Che** a donné correctement la réponse et l'a justifiée dans L6, suite à la demande de son professeur. Pour ce faire, **Che** a réalisé deux tâches principales : la première tâche consiste à calculer la différence de deux entiers 25 et 20 : « Euh ! Premièrement j'ai fait vingt moins vingt-cinq, on obtient cinq » et la deuxième tâche consiste à calculer la somme du nombre 2789 avec le résultat de la différence : « *puis j'ai effectué cinq plus deux mille sept cent quatre-vingt-neuf, j'ai obtenu* ». **Che** a procédé ainsi :

$$2789 + 25 - 20 = 2789 + (25 - 20) = 2789 + 5 = 2789.$$

Che a donc effectué deux tâches principales : 1) calculer $25-20=5$ et 2) additionner le résultat à 2789. Il a mobilisé deux niveaux de codétermination pour deux sujets différents. 1) Le premier sujet « Calcul de la différence de deux nombres positifs » relève du thème « soustraction arithmétique de deux nombres positifs ». Notons qu'à ce moment de l'année, la soustraction est « arithmétique » car elle implique l'idée de diminution d'un nombre donné, de même que l'addition qui associe l'idée d'une augmentation. Le thème précédent relève du secteur : « Opérations sur les nombres positifs⁵⁹ » dans le domaine « Calcul et Nombres ». 2) Le deuxième sujet « Calculer de gauche à droite une expression numérique » relève du thème « priorité des opérations dans le calcul d'une expression numérique » inclus dans le secteur « Expressions numériques de valeurs positives » du domaine « Calcul et Nombres ».

⁵⁹ Jusqu'à la classe de EB6, les nombres positifs représentent les entiers naturels ou les nombres rationnels positifs représentés par une écriture décimale ou fractionnaire.

La première demande du professeur « *C'est très bien, qui peut me répéter ce qu'il a dit* » dans L7 vise, sans doute, à réactiver auprès de la classe des éléments permettant de justifier et d'institutionnaliser – ou de (ré) institutionnaliser - des éléments de la praxéologie considérés connus. Tandis que la seconde demande « *Mais sans utiliser plus ou moins* » a incité **Al** à chercher des « synonymes » en français des mots « plus et moins ». Cet élève a repris la même réponse que **Che** mais avec les deux mots « additionner et soustraire ». Nous illustrons pour cet extrait les milieux cognitifs des élèves, notés *Milieu 1*, représentés en termes des niveaux de codétermination :



Tab OM 20 : Milieux cognitifs des élèves (Milieu 1) pour l'extrait 23 S1/ Ext 1/ L1 à L8

6.6.2. Un nouveau contrat implique des niveaux de codétermination didactique différents.

Au sein des interactions professeur / élèves, nous avons pu déceler deux « contrats » mis en place par le professeur. Nous nous sommes intéressés à étudier le changement des niveaux de codétermination didactique relevés par ces deux contrats.

6.6.2.1. Contrat 1 : « Ne pas commencer par la soustraction »

Après l'extrait précédent, le professeur joue dans L9 sur une autre technique didactique qui consiste à inciter les élèves à rechercher une technique différente de $2789 + 25 - 20 = 2789 + (25 - 20) = 2789 + 5 = 2794$ déjà établie dans l'extrait précédent.

9	P	C'est bien, qui peut me dire cela dans d'autres méthodes ? (il se tourne vers le tableau), il a dit, on a soustrait vingt de vingt-cinq (avec la craie il montre les nombres et le signe tout en parlant), une autre méthode, ne pas commencer par la soustraction par exemple (4s) oui Ca (qui a levé le doigt).
---	---	---

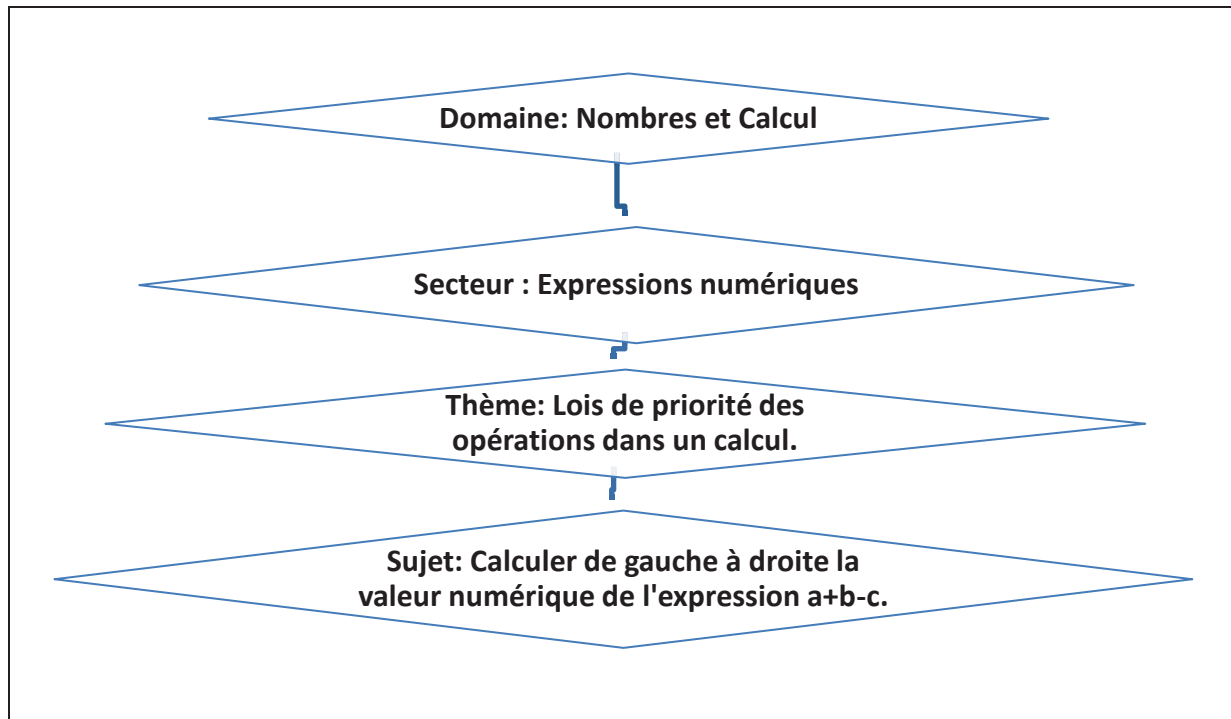
Le professeur a rassuré d'abord ses élèves par l'expression « *C'est bien* » qui remplit une fonction topogénétique. Il ne veut pas perdre les tentatives des élèves dans la recherche d'une « *autre méthode* ». Il leur concède un *topos* plus large et fiable, avec le désir d'avancer dans le travail de recherche de la technique qui leur permettra de rapporter leurs techniques anciennes, déjà établies, aux éléments institutionnels du savoir.

Il a repris la technique établie par AI dans L8 « *on a soustrait vingt de vingt-cinq* » sans s'attarder à attirer l'attention des élèves sur les ostensifs scripturaux au tableau : « les nombres et les signes ». Il replace ses élèves dans un moment de l'exploration et d'émergence d'une nouvelle technique en imposant de nouvelles contraintes : « *Une autre méthode, ne pas commencer par la soustraction par exemple* ». Cette contrainte pousse les élèves à ne pas commencer par la « soustraction ». Par la suite, ils ont essayé de ne pas commencer par le mot « soustraction ». Seul un autre mot leur est possible à ce moment, c'est « additionner » ou « ajouter ». C'est ce qu'ils ont fait dans les tours de parole de L10 à L19. Afin que l'élève EI officialise, dans L20, évidemment sous contrat de L9, la « nouvelle méthode » :

20	EI	(il parle en lisant de son cahier) Deux mille sept cent quatre-vingt-neuf plus vingt-cinq ça fait deux mille, ah ! On additionne deux mille sept cent quatre-vingt-neuf avec vingt-cinq on obtient deux mille huit cent quatorze puis on la soustrait de vingt
----	----	--

Les élèves ont perçu, grâce à cette technique, que le calcul de l'expression numérique $2789 + 25 - 20$ consiste à faire $2789 + 25 - 20 = (2789 + 25) - 20 = 2794$.

Il s'agit de travailler uniquement suivant le sujet « Calculer de gauche à droite dans une expression numérique » dont les niveaux de codétermination sollicités sont explicités dans le tableau ci-dessous :



Tab OM 21 : Milieux cognitifs (Milieu 2) de l'élève dans le calcul de $2789+25-20$ dans 6.6.2

6.6.2.2. Contrat 2 : « Ne pas commencer à ajouter 25 à 2789 »

21	P	C'est bien El , mais il y a une méthode plus rapide , c.à.d. il ne faut pas commencer à ajouter vingt-cinq à deux mille sept cent quatre-vingt-neuf (il les montre avec son doigt), Re (elle a levé le doigt)
22	Re	Vingt-cinq plus vingt, je fais euh deux mille sept cents
23	P	Non, Ca (elle a le doigt levé)
24	Ca	Deux mille sept cent quatre-vingt-neuf moins vingt, euh, puis on ajoute (l'expression sur le visage de P la fait taire et P fait signe par le doigt à Eli de parler)
25	Eli	On enlève de deux mille sept cent quatre-vingt-neuf vingt fois et euh on ajoute vingt cinq

Extrait 24 : Nombres Relatifs S1/ Ext 2/ L21 à L25

Le professeur intervient suivant la même technique didactique évoquée précédemment dans 6.6.2.1, p.191. Il débute par l'expression « *C'est bien* », qui remplit une fonction topogénétique, à laquelle succède l'expression « *mais* » qui peut inciter à une fonction mésogénétique. Elle incite en effet les élèves à rechercher des éléments mathématiques nouveaux dans la recherche d'une « *méthode plus rapide* ». Le professeur replace de nouveau ses élèves dans le moment de l'émergence d'une nouvelle technique suivant la contrainte : « *Il ne faut pas commencer par ajouter vingt-cinq à deux mille sept cent quatre-vingt-neuf* ». Trois élèves ont participé publiquement à la recherche d'une technique adéquate. Ce sont les deux élèves **Eli** et **Ca** qui clôturent ainsi cet extrait par le calcul suivant :

$$2789 + 25 - 20 = 2789 - 20 + 25 = 2794$$

Ils ont permuté la place des deux termes +25 et -20 dans l'expression numérique donnée. En général, les éléments technologiques pour cette technique reposent sur les éléments mathématiques suivants : 1) l'appropriation des nombres relatifs +25 et -20 et 2) l'associativité de la somme des nombres relatifs. Ces deux éléments ne sont pas à la portée des élèves en ce moment. Nous pouvons dire que ces éléments technologiques font appel « au bon sens » des élèves.

6.6.3. L'OM du savoir relative au « Programme du calcul »

6.6.3.1. Etude de la technique didactique du professeur dans L26

Le professeur commence cet extrait par :

26	P	Vous avez déjà dit que (il relie 25 et 20 tout en parlant), on commence à travailler par ces deux nombres, Al a dit on ajoute vingt-cinq et soustrait et on soustrait vingt c.à.d.
----	---	---

Extrait 25 : Nombres Relatifs S1/ L26

La technique didactique du professeur dans L26 repose sur le rappel d'un souvenir « *Vous avez déjà dit que* » et sur un ostensif déclencheur de ce que l'élève **Al** a répondu « *Al a dit on ajoute vingt-cinq et soustrait et on soustrait vingt* ». Et donc, le professeur sollicite la mémoire des élèves qu'il veut réactiver à partir de la manière de faire de **Al**. Elle sera ainsi partagée dans la classe comme élément du milieu à l'aide duquel les élèves ont à étudier : « *On pourrait le considérer [l'ostensif déclencheur] comme un objet qui doit amener les élèves à penser tout de suite à la technique particulière utilisée par le personnage* » (Araya, 2008).

Pourtant cette technique didactique met dans l'ombre deux choses importantes :

Dans L8, **Al** n'a pas dit exactement ce que le professeur a publié. Nous reprenons ce tour de parole :

8	Al	On a euh, on a soustraire euh vingt-cinq par vingt euh, euh, on a fait le cinq plus euh, on additionné euh le cinq avec deux mille sept cent quatre-vingt-neuf, alors on obtient deux mille sept cent quatre-vingt quatorze
---	-----------	---

La technique de **Al** revient 1) à calculer la différence de deux nombres 25 et 20 (dans L26 le professeur relie 25 à 20), c'est-à-dire qu'il évoque la soustraction arithmétique de deux entiers positifs, et 2) à additionner le résultat au premier nombre.

Du point de vue mathématique, les deux techniques activées sont différentes car elles sollicitent des éléments et des propriétés différentes. La première consiste à effectuer le calcul suivant cet ordre : $2789 + 25 - 20 = 2789 + (25 - 20) = 2789 + 5 = 2794$ et la deuxième suivant un ordre différent : $2789 + 25 - 20 = (2789 + 25) - 20 = 2814 - 20 = 2794$.

Le professeur replace les élèves dans le premier extrait *Ext23, p.188* et néglige tout ce qui s'est passé après. Cela montre que la classe n'est pas complètement prise par les deux « contrats 1 et 2 » déjà définis. Leur mise en œuvre nous paraît sans doute abusif surtout que les élèves ont déjà mobilisé des connaissances antérieures propices à la réussite la nouvelle tâche avec leurs propres organisations mathématiques.

En conclusion, le tour de parole L26 peut avoir deux fonctions : topogénétique et mésogénétique. D'abord il rassure les élèves : ce qu'ils vont faire par la suite est déjà établi par **Al**. Ceci va les encourager à développer des techniques personnelles plus développées et productives du savoir. Mais cela aura des effets mésogénétiques peu assurés puisque les rapports personnels des élèves ne sont pas les mêmes que ceux postulés par le professeur. Le professeur et les élèves ont mobilisé des organisations mathématiques différentes.

6.6.3.2. La maïeutique didactique du professeur et son rôle mésogénétique dans la constitution des milieux cognitifs différents chez les élèves.

Min 4

26	P	Vous avez déjà dit que (il relie 25 et 20 tout en parlant), on commence à travailler par ces deux nombres, Al a dit on ajoute vingt-cinq et soustrait et on soustrait vingt c.à.d.
27	E	Cinq
28	P	c.à.d. cinq seulement
29	Al	Non deux mille sept cent quatre-vingt
30	P	Oui, donc tu as dit tu as ajouté vingt-cinq et tu as ajou tu as soustrait vingt, donc qu'est-ce que tu as fait ? Mo
31	Mo	On a ajouté cinq
32	P	Très bien, on a ajouté cinq Qui peut dire cela de nouveau ? Qu'est-ce qu'on a fait ? (par son doigt il donne la parole à Re)
33	Re	On a fait vingt-cinq moins vingt, on a obtenu cinq
34	P	N'utilise pas le moins, un autre mot
36	El 1	Ça veut dire on a enlevé
37	P	Oui
38	El 1	On a enlevé cinq plus euh
39	P	(il entoure le +) Au lieu de dire plus qu'est-ce qu'on dit ?
40	Es	Additionne
41	P	Additionner ou bien aj (<i>aj désigne le premier syllabe de ajouter</i>).
42	Es + P	Ajouter (P entoure le -)
43	Es	Soustraire

Extrait 26 : Nombres Relatifs S1/ Ext 3 L26 à L43

La technique didactique utilisée par le professeur dans L26 est reprise dans L30 : « Oui, donc toi tu as dit », au moment où l'élève n'avait pas dit cela. Le professeur maintient la discussion avec les élèves sous forme de questions / réponses, au moyen d'une maïeutique rassurante qui considère les élèves comme étant « les moteurs » du système didactique. Il est peut-être possible aussi que cette technique didactique soit une « habitude » didactique du professeur pour solliciter et engager dans l'action la classe en permanence.

Le professeur réalise cette intervention au moment propre à la constitution du bloc technologico-théorique puisqu'il a pris en compte les réponses des élèves, afin de les valider. Il n'a pas demandé de produire de nouvelles techniques.

Les réponses de **E** et **Re** dans L27 et L33 : « On a fait vingt-cinq moins vingt » montrent qu'ils sollicitent le type de tâches « Calculer la différence $a - b$ de deux nombres positifs tels que $a > b$ ». Par contre la réponse de **Mo** dans L31 est : « On a ajouté 5 » est attendue et va de soi, car le professeur a clôt sa question dans L32 par « *Qu'est-ce qu'on a fait ?* » Il le place

donc devant la recherche d'une « phrase » qui commence par le verbe d'action « ajouter ». Il veut arriver au programme tel qu'il est présenté dans l'ingénierie.

Nous pouvons dire que les élèves, malgré les techniques didactiques du professeur qui leur sont adressées, n'ont pas pu corréler leurs rapports personnels aux éléments institutionnels que le professeur avait sollicités. Ils ont toujours exprimé leurs réponses à l'intérieur du sujet « Calculer la différence positive de deux nombres positifs » qui relève du thème « soustractions arithmétique de deux nombres positifs », contenu dans le secteur « Opérations sur des nombres positifs » relatif au domaine « Nombres et calcul ».

Pourtant le professeur est préoccupé par l'enseignement des « astuces » comme dans « *au lieu de dire plus qu'est-ce qu'on dit ?* » (L39), désignant « ses » propres organisations didactiques et mathématiques du savoir en jeu. Il ne s'attend qu'à une réponse unique dans L26, L30 et L32 : « ajouter 25 et soustraire 20 », et qui a guidé ses interventions tout au long des paragraphes précédents. Cela s'est fait au détriment de l'institutionnalisation des organisations mathématiques composées par les praxéologies qui mettent en œuvre les technologies qui fondent les types de tâches et les techniques déjà établis.

En revanche, les deux verbes « ajouter ... et soustraire ... » traduisent des opérateurs⁶⁰ mathématiques (+25) et (-20) et que « Ajouter 25 » correspond à la fonction « +25 ». Les éléments de cette réponse ne se rencontrent guère avec « La soustraction arithmétique des nombres positifs : $25 - 20$ » soutenus par les élèves. Cela prouve que les rapports personnels des élèves aux organisations mathématiques et didactiques du savoir ne croisent pas les éléments institutionnels convoqués par le professeur.

Dans le but de repérer les milieux du professeur et des élèves à partir de l'échelle de codétermination didactique, nous avons trouvé nécessaire de mener une étude exhaustive sur « les fonctions » et leur fonctionnalité dans le programme libanais dans les classes des cycles I et II (cycle préparatoire, cycle élémentaire, cycle moyen en France).

⁶⁰ On interprète le terme « opérateur » par : on part d'un état 2789 sur lequel on fait agir deux variations, considérées comme des opérateurs additifs (+25) et (-20) dont la succession équivaut à l'opérateur (+5). Dans ce cas le nouvel objet introduit, la succession de deux opérateurs, apparaît comme un opérateur additif.

6.6.3.3. Les Fonctions opérateurs dans le programme libanais (Cycle I et II)

Le terme « Fonction : ajouter n » est présent dans le curriculum libanais (1997) à partir de la classe de EB1 (CP). Il est l'un des thèmes essentiels pour l'enseignement des secteurs « Addition » et « Dénombrement ». Pour exemplifier, nous mentionnons quelques sujets qui dépendent de ce thème comme : « Ajouter 1 à un nombre donné et établir le lien avec le groupement par 10 », « Exploiter la fonction *ajouter* dans des situations utilisant les verbes qui lui sont associés, par exemple : ajouter, recevoir, avancer,... » (Curriculum EB1, p82).

La fonction « soustraire n » est l'un des trois thèmes principaux pour l'enseignement du secteur « Soustraction » en classe de EB2 (CE1) (Curriculum libanais, 1997, p113). Notons que ces trois thèmes sont: « Opérer sur la soustraction », « Fonction : soustraire n » et « technique opératoire ». Le sujet essentiel qui relève du thème « Fonction : soustraire n » est « Soustraire un nombre sur chaque terme d'une série donnée ». Nous signalons dans la partie commentaires (p 113) les explications suivantes :

« La fonction « soustraire » opère sur un état initial pour le transformer en état final. Une bonne maîtrise de cette fonction suppose que l'élève est capable de trouver l'un des trois variants (état initial, état final, fonction) connaissant les deux autres. Les calculs exigés tiendront compte du niveau de la soustraction, le but n'étant pas la virtuosité dans le calcul ».

Le Thème « Fonction » est repris aussi dans le curriculum de la classe de EB3 (CE2) (p18) sous la forme « Fonction : multiplier par n » comme essentiel au secteur « Multiplication ». Et la « Fonction : diviser par n » fait partie du secteur « La Division » en classe de EB4 (CM1) (curriculum p 96) dont ce thème contient six sujets. Entre autres, nous nous intéressons au troisième sujet : « Déterminer la fonction ($\div n, \times n, - n, + n$) en trouvant la relation qui lie deux séries de nombres ou de grandeurs ». Le curriculum accorde une place importante à l'enseignement du thème « Les Fonctions » dans l'apprentissage des quatre opérations. Il est représenté sous la forme « Fonction : multiplier par $\frac{a}{b}$ ». Il est à la base de l'enseignement du sujet « multiplier un entier par une fraction » en EB5 (CM2) (Curriculum, p126) qui mentionne dans la partie « commentaires » :

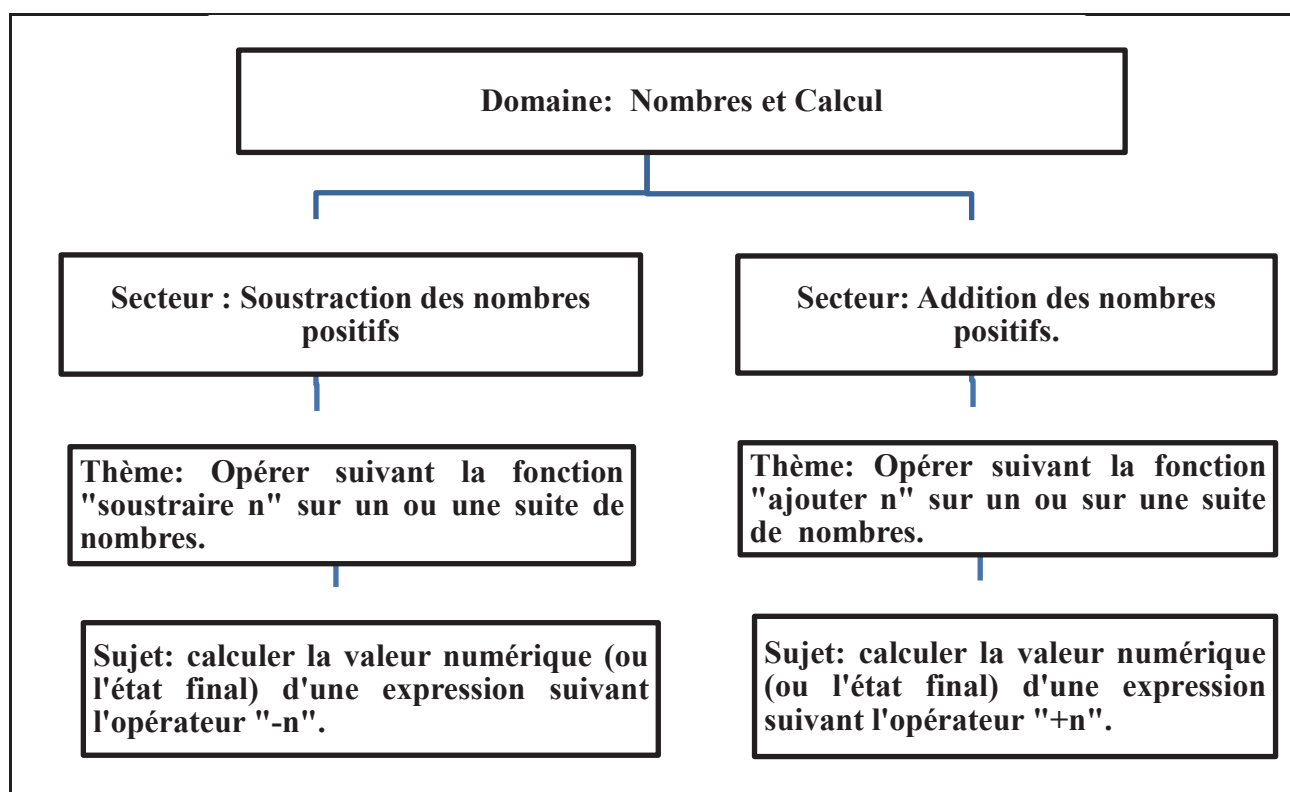
« L'élève connaît les fonctions « multiplier par n », « diviser par n ». Cette situation prépare au concept de la proportionnalité et, de ce fait, au concept de pourcentage, d'échelle, etc. »

En conclusion, cet aperçu montre que les thèmes : « Fonction : ajouter n » et « Fonction : soustraire n » jouent un rôle primordial dans l'enseignement et l'apprentissage des opérations de l'addition et de la soustraction (sujet de notre intérêt). Les sujets principaux d'étude qui en relèvent sont :

« Calculer la valeur numérique ou l'état final d'un nombre (ou d'une expression numérique) suivant les opérateurs « $+n$ » ou « $-n$ » ».

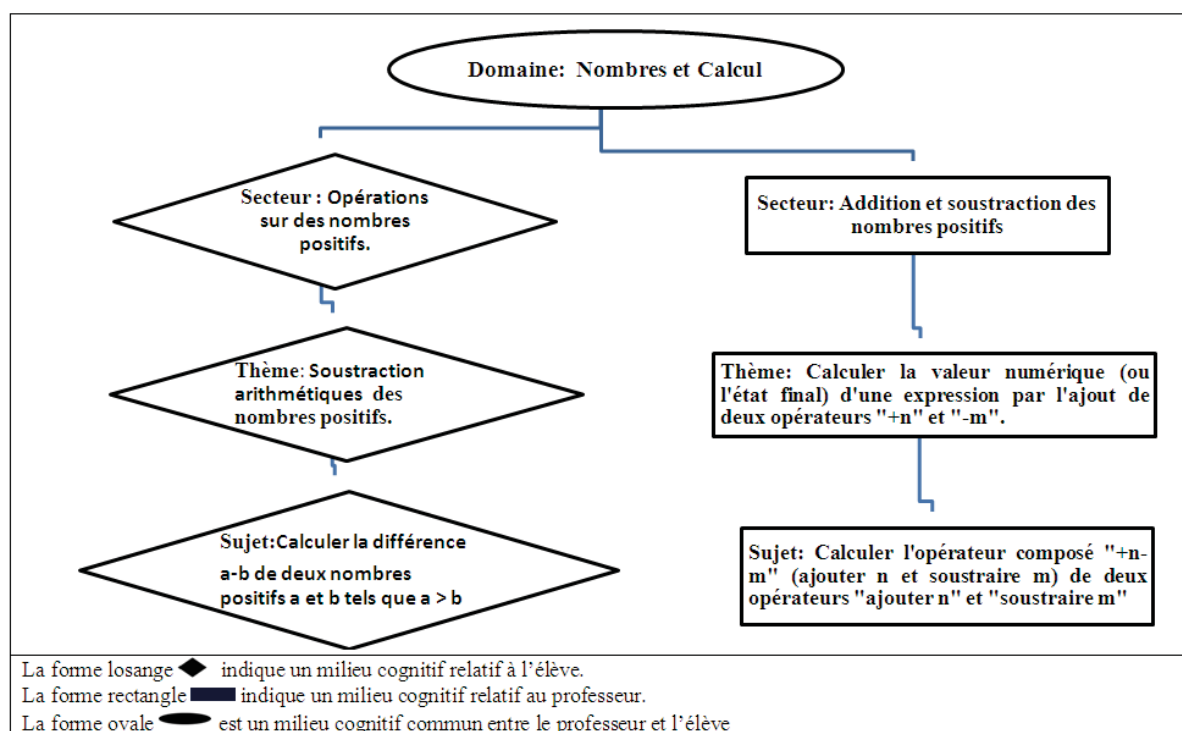
Ces types de tâches s'incorporent aux thèmes : « Opérer suivant la fonction "ajouter n " sur un ou sur une suite de nombres » et « Opérer suivant la fonction "soustraire n " sur un ou sur une suite de nombres ». Ils sont inclus respectivement dans les secteurs « Addition des nombres positifs » et « Soustraction des nombres positifs » du domaine « Nombres et Calcul ».

Par suite la réponse attendue par le professeur dans l'extrait précédent 6.6.3.2, p.195 porte sur l'organisation mathématique résumée dans le tableau ci-dessous :



Tab OM 22 : Tableau du milieu institutionnel d'une « Fonction opérateur » du point de vue curriculum

6.6.3.4. Tableau du dédoublement des milieux du professeur et des élèves pour l'extrait 26 (S1/ Ext 3/ L26 à L43)



Tab OM 23 : Tableau comparatif des milieux cognitifs des élèves et du professeur (Milieu 3) pour l'extrait 26 : S1/ Ext 3/ L26 à L43

6.6.4. La persistance du dédoublement des milieux malgré l'avancement du temps didactique

Dans l'extrait 26 précédent, le professeur a fait participer les élèves à l'aide de ses techniques didactiques et a rendu public la réponse de **Al** « *tu as ajouté 25 et tu as soustrait 20* » (L30). Mais sans se rendre compte, le professeur s'est rapporté au **Milieu 1**, p190 des élèves en explicitant dans L44 la technique suivante :

44	P	Ok, lis cela On ajoute vingt-cinq à deux milles sept cent quatre-vingt-neuf et on soustrait vingt à deux milles sept cent quatre-vingt-neuf qu'est-ce qu'on obtient ?
45	Es	Deux mille huit cent quatorze

Ce tour de parole exprime bien la technique : $(2789+25)$ et $(2789-20)$. Or le mot « et » en français correspond pour le professeur au mot « plus » de l'addition⁶¹. Nous n'allons pas étudier cette technique incorrecte. Mais ce qui est remarquable c'est que le professeur n'a pas pris en compte la réponse de l'élève **Es** dans L45 « 2814 » qui est la somme du premier terme $(2789+25)$ de l'expression ci-dessus. Il a fait de son mieux pour que les élèves répondent à « ses attentes », c'est-à-dire donnent le nombre « *Cinq* » qui correspond à la différence de 25 et 20 (à ce qu'il faut ajouter à 2789).

48	P	Cinq. On peut dire cela d'une façon plus facile (il parle tout en montrant les nombres et les signes au tableau) Ajouter vingt-cinq et soustraire vingt à deux mille sept cent quatre-vingt-neuf revient à ajouter combien
49	E	Cinq
50	P	Cinq à deux mille sept cent quatre-vingt neuf. Ro Refait cette opération (il lui montre l'écrit du tableau)
51	Ro	Deux mille sept cent quatre vingt
52	P	Comme moi j'ai dit, ajouter
53	Ro	On ajoute euh, on ajoute vingt-cinq à deux mille sept cent quatre-vingt-neuf et puis on retire vingt
54	P	Donc qu'est-ce qu'on a fait ?
55	Ro	On a ajouté euh et après soustraire
56	P	Et puis, qu'est-ce qu'on a fait ? On a ajouté

⁶¹ Le mot «et» exprime le «plus» de l'addition. Cela a été vérifié dans L18 de la deuxième séance quand le professeur a corrigé la réponse d'un élève qui a dit : dans L7 : « On va ajouter 156 à 3560 et on soustrait 150 de, euh, 3560 » :

P : Mais elle a dit ajouter 156 à 3560 et soustraire 156 (il corrige) 150 à 3560, si je donne la réponse (il écrit au tableau les deux opérations posées verticalement : $3560+156=3716$ et $3560-150=3410$).

Donc si on dit : ajouter 156 à 3560 et soustraire 150 à 3560, je suis obligé à faire les deux opérations : ajouter 156 à 3560 (il montre la première opération $3560+156$) et soustraire 156 à 3560, et ajouter ces deux résultats (3716 et 3410). Est-ce que c'est vrai ?

57	Es	Cinq
58	P	Qui sait ?
59	El 2	On a ajouté cinq
60	P	Très bien. Je veux que vous disiez cela : ajouter vingt-cinq et soustraire vingt à deux milles sept cent quatre-vingt-neuf revient à ajouter cinq Re (elle se lève et ne dit rien). Ajouter vingt cinq
61	Re	Ajouter vingt-cinq et soustraire vingt à deux milles sept cent quatre-vingt-neuf revient à ajouter cinq
62	P	Très bien, donc (il écrit en parlant) Ajouter 25 et soustraire 20 à 2789 revient à ajouter 5 à 2789 Alors (il trace le signe égale $2789 + 25 - 5 =$) la réponse, deux milles sept cent quatre-vingt-neuf on ajoute à deux milles sept cent quatre-vingt-neuf qu'est-ce qu'on obtient ?
63	Es	Deux milles sept cent quatre-vingt quatorze
64	P	Deux milles sept cent quatre-vingt-quatorze (il écrit 2794 après le signe =)

Extrait 27 : Nombres Relatifs S1/ Ext 4/ L48 à L64

La technique didactique du professeur laisse un *topos* assez large aux élèves. Il s'agit pour lui de reprendre la réponse « Cinq » de l'élève **Es** dans L57 et d'inviter la classe à l'écrire d'une « *façon plus facile* ». Le professeur réalise dans cet extrait un moment de constitution du bloc technologico-théorique par ostension « *Ajouter vingt-cinq et soustraire vingt à deux mille sept cent quatre-vingt-neuf revient à ajouter combien* ». Cette constitution technologique a été dévolue par le professeur en termes « du programme de calcul », élément institutionnel essentiel de l'ingénierie.

Le professeur a donc obligé les élèves à donner des réponses en « reprenant » ce qui était déjà officialisé « *Comme moi j'ai dit, ajouter* » (L52). Pourtant, les réponses des élèves n'ont pas été celles attendues par le professeur. L'élève Ro répond dans L53 par : « On ajoute euh, on ajoute vingt-cinq à deux mille sept cent quatre-vingt-neuf et puis on retire vingt ». Sa réponse est identique à celle de **El** dans L20 du paragraphe 6.6.2.1, p.191. Cela revient à effectuer l'expression numérique en « Calculant de gauche à droite ». Or cette technique a été rejetée par le professeur au profit d'une autre technique par l'intermédiaire du contrat¹ (voir paragraphe 6.6.2.1). Nous avons déjà étudié les niveaux de codétermination didactique relatifs à cette technique dans **Tab OM 21**, p.192.

Dans L54 le professeur a fait de son mieux pour valider la justification de la technique « *Donc qu'est-ce qu'on a fait ?* ». La réponse de l'élève **Ro** dans L54 était floue en termes d'usage des verbes ajouter et soustraire : « *On a ajouté euh et après soustraire* ». Cette phrase désigne « On a ajouté 25 à 2789 et après on a soustrait 20 » puisqu'elle s'appuie sur la technique : « $2789+25-20 = (2789+25)-20$ ». Après quelques interrogations non justificatives sur ce qu'il « faut ajouter », le professeur félicite **Ro** « *Très bien* » dans L62 vu qu'il a fini sa question par « *revient à ajouter 5* ».

Ces gestes répétitifs du professeur, qui ne reposent pas sur une justification technologique, ont contribué à élargir la distance mésogénétique entre les milieux cognitifs des élèves et les éléments d'organisation mathématiques et didactiques prévus par l'ingénierie. Les élèves n'ont pas pu rapporter leurs connaissances antérieures aux éléments institutionnels évoqués par le professeur. Pour exemplifier, l'élève **Ro** a repris dans L54 la réponse de **EI** dans L20 après même plusieurs tentatives du professeur de la rejeter.

En guise de conclusion, cet extrait constitue le « moteur » pour la suite de la séance et même pour la séquence entière. Il remplit une fonction chronogénétique remarquable. Cela puisqu'au bout de quelques minutes de la première séance, le professeur fait explorer, en cédant à l'élève un *topos* ascendant, l'objet mathématique essentiel (programme de calcul), prévu par l'ingénierie, pour introduire le nouveau savoir « les Nombres Relatifs ». Signalons que l'introduction proprement dite des « Nombres Relatifs » aura lieu après deux séances de travail sur et avec cet objet. Néanmoins, cet extrait atteste d'une richesse mésogénétique du côté du professeur. Il a dévolu, au moyen de ses propres techniques didactiques, la tâche aux élèves en enrichissant le milieu institutionnel par des objets mathématiques adéquats au nouveau savoir. Cependant nous avons vu que les élèves n'ont pas pris en charge ces nouveaux objets car leurs techniques étaient invalides. Par suite la démarche relatée dans cet extrait a élargi la distance mésogénétique entre les milieux cognitifs des élèves et les éléments institutionnels.

En termes des niveaux de codétermination didactique, nous pouvons dire qu'il n'y a pas eu de changement avec le paragraphe précédent 6.6.3.3, p.196. Par conséquent, le tableau **Tab OM 23**, p.199 illustre toujours notre point de vue sur les organisations mathématiques prises en charge par les élèves et le professeur.

6.6.5. Les connaissances antérieures des élèves et le dédoublement des milieux

Nous étudions dans cette partie l'extrait qui dure près de huit minutes (Min 7 sec 55 jusqu'à Min 14 sec 45). Il s'agit d'effectuer le calcul des expressions suivantes : $835+24-22$, $12574+356-350$ et $895634+20-19$. Le professeur engage la classe dans un moment de « travail de la technique » par des exercices répétitifs du même type que « $2789 + 25 - 20$ ». C'est le moment où l'élève devrait perfectionner et stabiliser son rapport aux techniques à la maîtrise des techniques (Chevallard, 1999).

Trois élèves sont passés au tableau **Eli**, **Ka** et **Ro**, chacun à son tour pour calculer les trois expressions. Ce qui est remarquable, c'est que leurs rapports à la technique élaborée par le professeur dans L48 : « *Ajouter vingt-cinq et soustraire vingt à deux mille sept cent quatre-vingt-neuf revient à ajouter combien* » sont identiques. Nous avons remarqué que lors du passage au tableau, les techniques et les connaissances antérieures de ces trois élèves ainsi que les « techniques didactiques » du professeur étaient les mêmes. Pour cela nous avons choisi d'extraire l'une d'elles, soit le calcul de $835+24-22$.

Min 7 sec 55

Calcul de $835+24-22$

65	P	(il écrit silencieusement $*835 + 24 - 22 =$) Eli au tableau (Eli regarde le tableau ne sachant quoi faire). Qu'est-ce qu'on fait ? (il donne une craie à Eli) Le même programme de calcul
66	Eli	(il joint $24 - 22$ par analogie à P) On soustrait vingt-quatre à huit cent trente cinq
67	P	On soustrait vingt- quatre, qu'est-ce qu'il y a avant vingt-quatre
68	Eli	On ajoute vingt-quatre à huit cent trente-cinq puis on soustraire vingt
69	P	Qu'est-ce qu'on obtient ? Revient à ajouter
70	Eli	A, ajouter deux
72	P	Très bien, écris, avant de donner la réponse, écris Ajouter vingt-quatre et soustraire vingt-deux (Eli écrit les dictions de P : « Ajouter 24 et soustraire 22 » et continue « revient ») Et soustraire vingt-deux à qui ? (Eli regarde l'expression) A huit cent trente-cinq (Eli efface le mot revient pour écrire à 835, revient à ajouter 2) Revient à ajouter deux à huit cent trente-cinq (Eli ajoute à 835) Donc qu'elle est la réponse ?
73	Eli	Huit cent trente-sept
74	P	Ecris huit cent trente-sept en haut (Eli écrit 837 à la suite du signe =) Très bien, Qui as compris ? (des doigts se lèvent)

Extrait 28 : Nombres Relatifs extrait S1/ Ext 5/ L65 à L74

6.6.5.1. L'officialisation de la conception du programme de calcul

Le professeur débute son discours dans L65 par l'insertion d'un élément nouveau « le programme de calcul » défini au préalable dans l'ingénierie. C'est un objet paramathématique : « ce sont des notions-outils de l'activité mathématique. Elles ne sont pas normalement des objets d'étude pour le mathématicien, comme les notions mathématiques. De plus, elles ne font pas l'objet d'un enseignement: ce sont des objets de savoir auxiliaires, nécessaires à l'enseignement (et à l'apprentissage) des objets mathématiques proprement dits » (Chevallard, 1985). La désignation « programme de calcul » est donc une forme langagière, mais c'est surtout un élément générateur d'un jeu de langage parce qu'il désigne un objet autrement inaccessible, sinon par métaphore ou par la description de son usage : « ça, c'est pour manger », « ça, c'est pour ajouter 3 ». Les explications métaphoriques ne sont pas propres à l'enseignement : elles n'aident pas à produire des jeux de langage ; et les définitions fonctionnelles ne dispensent pas d'un nom (Chevallard, 2005).

La notion de programme de calcul, si elle réfère à une réalité mathématique antérieure à l'algèbre, elle correspond dans cette ingénierie à un outil auxiliaire pour enseigner et justifier le calcul des expressions numériques de type $a+b-c$ suivant la technique élaborée par le professeur « Ajouter... et soustraire ...à un nombre ». Les deux termes numériques qui correspondent à ajouter b et soustraire c sont $(+b)$ et $(-c)$ relèvent aussi d'une fonction d'opérateur : *« Ce que ne dit pas la « notion » de programme de calcul, c'est que les nombres sont aussi des opérateurs c'est-à-dire que les fonctions « opérateur additif » peuvent être dénotées par la notation de l'opérateur seul. Ainsi $+3$ dénote la fonction « ajouter 3 » que l'on nomme « programme de calcul » parce qu'on ne dispose pas de la notion d'opérateur sur un ensemble de nombres (opérateur étant défini par exemple en association à opérande dans la description d'une opération, $+3$ est alors a minima un « opérateur constant »), ou de la notion de fonction numérique, bien plus élaborée »* (Chevallard, 2005).

En outre, le programme de calcul est défini par *« tout procédé mathématique qui permet de passer d'un nombre à un autre suivant une suite déterminée d'opérations. Un programme de calcul permet alors de passer d'une liste de nombres à une liste de nombres fabriquée suivant le même procédé⁶² »*. La « notion » de programme de calcul « correspond, concrètement, à

⁶²<http://melusine.eu.org/syracuse/texpng/cprl/meria/doc17/index.pdf>

Méria F. Calcul Littéral, programme de calcul, développement et factorisation.

l'activité consistant à « faire un calcul », c'est-à-dire à opérer sur des nombres d'une manière déterminée, selon un certain programme » (Chevallard, 2001).

En guise de conclusion, Nous pouvons dire que le programme de calcul « *Ajouter ... et soustraire ... à un nombre* » est un auxiliaire pour calculer l'expression numérique $a+b-c$ en faisant agir sur le nombre **a** deux variations : « ajouter b » et « soustraire c ». Il suffit d'abord de calculer l'opérateur équivalent $(+b-c)$ puis de l'appliquer au nombre **a** dans le cadre d'une fonction numérique qui à tout nombre x fait correspondre $f(x) = x + b - c$.

6.6.5.2. Les connaissances antérieures des élèves élargissent la distance mésogénétique au milieu institutionnel du savoir

L'élève **Eli** débute le calcul de l'expression donnée par analogie. Il prend le relais et atteint la différence « 24-22 » en une ligne. Dans un premier temps, il semble que **Eli** a voulu déterminer cette différence pour effectuer le calcul comme s'il y avait des parenthèses. Mais **Eli** n'a pas pris en charge ce qui s'est vu antérieurement parce qu'il s'est replacé de nouveau dans le *Milieu 1*, p.190 « *On soustrait vingt-quatre à huit cent trente cinq* » (L66). Cet élève voulait dire « ajouter » à la place de « soustraire » puisqu'il procède selon la technique $(835+24)-22$ dans L68.

Le professeur rectifie la réponse de cet élève, dans L67, en lui demandant de regarder le signe qui précède le nombre 24 dans $(835+24-22)$ « *On soustrait vingt-quatre, qu'est-ce qu'il y a avant vingt-quatre* ». Pourtant il a réussi à obtenir la réponse de cet élève dans L70 « *A, ajouter 2* » en recourant à une indication Topaze dans L69 : « *Qu'est-ce qu'on obtient ? Revient à ajouter* ». Comme à son habitude, le professeur n'a pas manqué de féliciter **Eli** dans L72 par l'expression « *Très bien* ». Pour achever le calcul de cette expression, le professeur demande à son élève de dicter le programme de calcul « *Ajouter 24 et soustraire 22* ».

Ici **Eli** est dans le milieu de « Calculer de gauche à droite » et le professeur est dans le milieu du « Programme de calcul ».

En conclusion, cet épisode de 8 minutes environ place le parcours de la séance au moment d'institutionnaliser la technique élaborée par le professeur : « *Ajouter... et soustraire ... à un nombre revient à...* ». Pourtant, le déroulement de cet extrait Ext 28, p.203 n'a pas permis aux élèves d'activer cette technique. Par contre, **Pa** incité les élèves à s'investir davantage dans la

mobilisation de leurs connaissances antérieures qui risquent de devenir « obstacles » à l'apprentissage du nouveau savoir.

En outre, la technique didactique du professeur consiste à garder les élèves dans une dimension topogénétique élevée, au détriment de la validation et du rejet de leurs techniques qui, étaient parfois inadéquates avec les OM et OD du savoir. Il n'a pas insisté sur la justification de la signification de ce sur quoi les élèves ont travaillé au moment de « l'extension praxémique⁶³ ». Cela n'a pas permis aux élèves de mettre à l'écart leurs connaissances antérieures pour former des « conceptions nouvelles ». Pour Brousseau (1998b) « la constitution du sens, tel que nous l'entendons, implique une interaction constante de l'élève avec des situations problématiques, interaction dialectique (car le sujet anticipe, finalise ses actions) où il engage des connaissances antérieures, les soumet à révision, les modifie, les complète ou les rejette pour former des conceptions nouvelles ».

En revanche, le parcours didactique sollicité par le professeur en collaboration avec les élèves a élargi la distance mésogénétique entre les éléments institutionnels proposés dans l'ingénierie avec les milieux cognitifs des élèves. Ceci nous laisse dire que les niveaux de codétermination didactiques dans lesquels ils travaillent ne sont pas modifiés (Voir Tab OM 23, p.199).

Par suite, le dédoublement des milieux persiste dans l'avancement du temps didactique et dans l'ajout des éléments mésogénétiques nouveaux.

6.6.6. Le dédoublement des milieux est dû à une spécificité « locale » des connaissances antérieures des élèves

6.6.6.1. Calcul de $17+21-20$ sans écrire le programme de calcul

Min 19

97	P	(il écrit au tableau $17 + 21 - 20 =$ et invite Ma pendant que plusieurs doigts se lèvent) Ma au tableau et sans écrire le programme, tout de suite écris la réponse (il passe la craie à Ma) et tu vas me dire comment tu as réfléchi (Ma écrit 18) Oui ! pourquoi dix-huit ?
98	Ma	J'ai fait vingt et un moins vingt
99	P	Donc qu'est-ce qu'on dit ? Ajouter
100	Ma	Ajouter vingt et un à dix sept
101	P	Non ! On dit ajouter vingt et un et soustraire vingt à dix-sept revient à (Ma murmure) répète
102	Ma	Ajouter, ajouter dix-sept à vingt un

⁶³Définition : c'est un objet de savoir dont le sens ne peut être conçu indépendamment des pratiques culturelles. (<http://fr.wiktionary.org/wiki/praxe%C3%A8me>)

Matheron (2000) a repris le terme de « praxe » pour désigner « l'instrument constitué d'un ostensif et de son usage », soit une « unité pratique de production mathématique » qui fait sens, mais n'est pas pour autant « douée d'un sens mathématique » comme objet isolé.

103	P	Non ! (Ma regarde l'expression d'un regard de perdu, des doigts se lèvent) Oui (il donne la parole à Ch de sa place)
104	Ch	Ajouter vingt un et soustraire vingt euh à dix-sept euh revient à ajouter un euh à dix-sept
105	P	(il prend la craie de Ma qui est toujours au tableau) Ajouter vingt et un et soustraire vingt à dix-sept (il désigne les nombres avec la craie) car j'ajoute vingt et un et je soustrais vingt pour obtenir un, vingt et un moins vingt égale un, tu as compris (Ma retourne à sa place) Donc, ajouter vingt un et soustraire vingt à dix-sept, revient à ajouter un à dix-sept, la réponse est dix-huit. (il écrit au tableau $17 + 35 - 15 =$)

Extrait 29 : Nombres Relatifs S1/ Ext 6/ L97 à L105

Le professeur engage le moment du « travail de la technique » par des exercices types de la forme « Calculer $a+b-c$ ». Il ajoute des contraintes supplémentaires dans L97 : « *sans écrire le programme, tout de suite écris la réponse* » à la technique qu'il avait donnée : « Ajouter ... et soustraire ... à un nombre ». Un élément technologique sur lequel s'appuie cette technique est « la justification orale » ; elle apparaît dans le même tour de parole « *et tu vas me dire comment tu as réfléchi* ». Pourtant l'élève **Ma** investit le calcul de la différence arithmétique de 21 et 20 dans L98 : « ***J'ai fait vingt et un moins vingt*** ». Mais il est étonnant que cet élève ait changé la réponse dans L100 en « *Ajouter vingt et un à dix sept (17+21)* » lorsqu'il a entendu le mot « ajouter » dit par le professeur dans L99. Cela n'est pas un fait hasardeux. Le professeur est arrivé au début de la séance, notamment dans la ligne L11, à faire dire plusieurs synonymes du mot « plus » en collaboration avec les élèves. Ils ont trouvé les deux mots « additionner » et « ajouter ». Par transitivité, les trois mots « plus, additionner et ajouter » sont identiques. Il apparaît que l'élève **Ma** réutilise ces connaissances pour exprimer sa réponse (L100). Dans ce contexte, la seule possibilité d' « ajouter » réside dans l'effectuation du calcul de $(17+21)$. Ce geste a une dimension technologique comme le prouve la suite de l'échange : malgré les interventions excessives du professeur notamment dans L101 : « *Non ! On dit ajouter vingt et un et soustraire vingt à dix-sept (+21-20) revient ? Répète* », l'élève **Ma** n'a pas changé sa réponse : « *Ajouter, ajouter dix-sept à vingt un (17+21)* » (L102).

Le mot « ajouter » est ainsi le point de départ d'une « bifurcation didactique » puisque les élèves le traduisent par « Additionner deux nombres positifs $(21+17)$ » tandis que le professeur le prend dans le sens de « Calculer l'opérateur composé des deux opérateurs $(+21)$ et (-17) ». Dans ce sens, les élèves et le professeur n'accomplissent pas les mêmes « actes

cognitifs » (Duval, 1995) c'est-à-dire qu'ils se réfèrent à deux appréhensions conceptuelles (noésis) pour les représentations sémiotiques (sémiosis) de l'objet « ajouter ». ⁶⁴

Cependant le professeur n'a pas pu éviter de renoncer à des éléments du milieu institutionnel du savoir imposés par l'ingénierie au détriment des milieux cognitifs des élèves. Cela est apparu clairement dans son tour de parole L105 afin de clôturer ce passage : « *Ajouter vingt et un et soustraire vingt (+21-20) à dix-sept car j'ajoute vingt et un et je soustrais vingt pour obtenir un, vingt et un moins vingt égale un, tu as compris (21-20)* ». Cette intervention rejoint celle de **Ma** dans L98 : « *J'ai fait vingt et un moins vingt* » qui a été rejetée par le professeur lui-même dans L99. Par suite, le professeur accorde une dimension technologique aux techniques personnelles des élèves, notamment aux techniques jugées inadéquates aux OM et OD du savoir. Les éléments technologiques mis en œuvre par le professeur sont « Ajouter 21 et soustraire 20 à 17 revient à » et « Soustraction arithmétique de 21 et 20 ».

Sur ce plan « *les connaissances antérieures mises en place par les élèves sont forcément locales, ayant un domaine de validité restreint. On peut donc s'attendre à ce que à un moment donné, il soit nécessaire de remettre ces connaissances en question, voire de les rejeter* » (Brousseau, 1998a).

6.6.6.2. Milieux personnels mobilisés dans cet épisode

Dans cet extrait, les élèves n'ont pas pu mettre à distance leurs connaissances antérieures afin de pouvoir investir le nouveau savoir. Par contre, leurs connaissances deviennent plus étroites face à la dimension technologique qui a été officialisée par le professeur. Pour exemplifier, nous reprenons le cas de l'élève **Ma** dans L102, celui qui n'a pas changé sa réponse « ajouter 17 à 21 » malgré les interventions multiples de son professeur qui l'ont incité à la corriger.

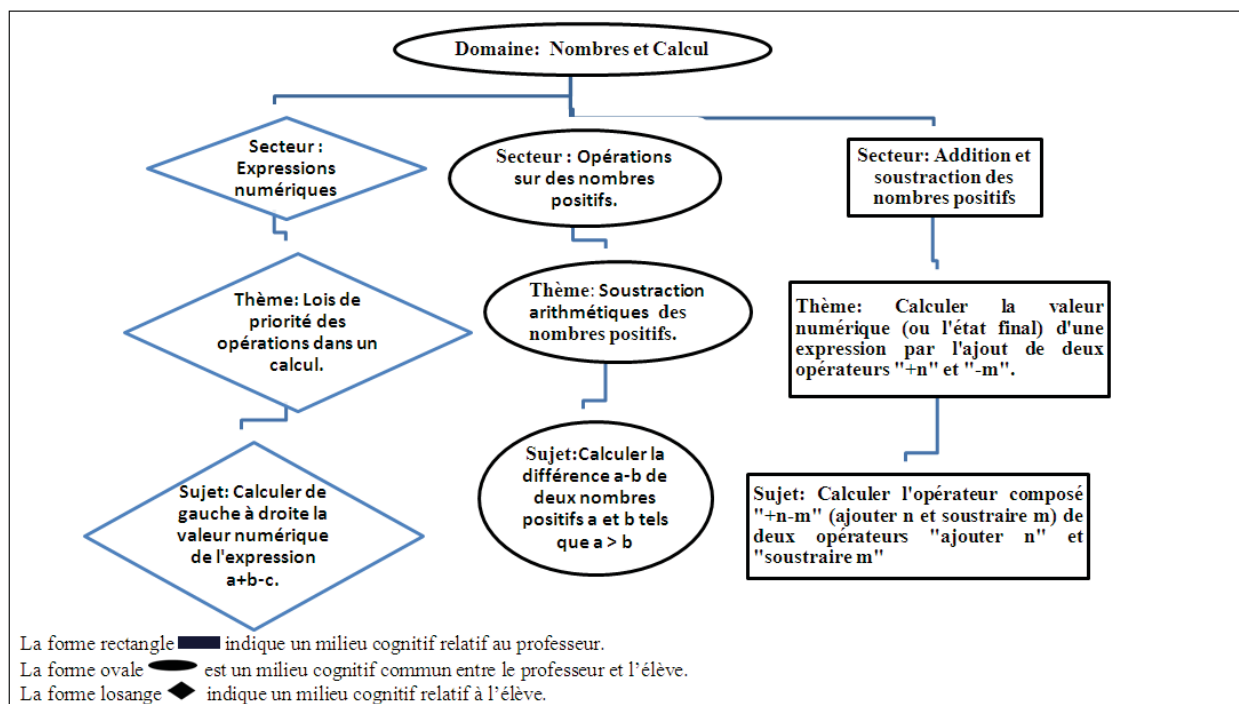
Les élèves se replacent toujours dans le même *Milieu 1* (voir *Tab OM 20*, p.190) convoqué au début de la séance, dont les deux sujets qui en ressortissent sont : « Le calcul de gauche à droite dans une expression numérique » et « Le calcul de la différence positive de deux nombres positifs ».

⁶⁴ On appelle sémiosis l'appréhension ou la production d'une représentation sémiotique, et noésis les actes cognitifs comme l'appréhension conceptuelle d'un objet (Duval, 1995, pp. 2-5). Les représentations sémiotiques sont des représentations dont la production ne peut se faire sans la mobilisation d'un système sémiotique : ainsi les représentations sémiotiques peuvent-elles être des productions discursives (en langue maternelle, en langue formelle) ou non discursives (figures, graphiques, schémas, ...).

Pourtant ce n'est pas le cas du professeur. Il est pris par le milieu du sujet « Calcul de la différence de deux nombres ». Il en résulte qu'il place la classe, sans s'en rendre compte, dans des niveaux de codétermination didactique nouveaux. Il a alterné ses actions entre : 1) les éléments milieux cognitifs des élèves, 2) ses milieux institutionnels et 3) les OD et OM mises en avant par l'ingénierie.

Une nouvelle réorganisation didactique se met en place. En termes de niveaux de codétermination, nous pouvons la repérer comme suit : un sujet commun pour les élèves et le professeur « Calcul de la différence de deux nombres », un sujet propre au professeur « Calcul de l'opérateur composé "+n-m" de deux opérateurs "ajouter n" et "soustraire m" » et un troisième sujet propre aux élèves « calculer de gauche à droite de la valeur numérique d'une expression ».

Cette réorganisation contribue à l'émergence du phénomène « du dédoublement des milieux » qui pourra amener les élèves et le professeur à associer des niveaux de codétermination différents pour la même tâche mathématique.



Tab OM 24 : Tableau comparatif des milieux cognitifs des élèves et du professeur pour l'extrait 29 (S1/ Ext 6)

6.6.7. L'institutionnalisation du programme de calcul

Dans l'extrait précédent, le professeur réalise le déroulement du moment de « travail de la technique » par des exercices typiques « Calculer $a+b-c$ » selon les éléments technologiques suivants (soit pour l'exemple $14+17-15$):

- Appliquer le programme de calcul : « Ajouter 17 et soustraire à 15 revient à ... »
- Ajouter le résultat du programme au nombre 14.

Le travail au tableau s'est fait de la façon suivante :

$$14+17-15=$$

On écrit : Ajouter 17 et soustraire 15 à 14, revient à ajouter 2 à 14.

(On ajoute ensuite le résultat du programme au nombre 14 en écrivant directement

$$14+17-15=16, \text{ sans la peine d'écrire } 14+17-15=14+2=16).$$

6.6.7.1. L'écriture simplifiée du programme de calcul

Le professeur écrit au tableau l'expression $(14+17-15)$. Il demande l'écoute de ses élèves :

146	P	Non, on ne copie pas C'est le même programme, mais il faut simplifier l'écriture C-à-d au lieu de dire, au lieu d'écrire ajouter dix-sept et soustraire quinze à quatorze (il relie 17 et 15 par analogie à son travail précédent) revient à ajouter deux à quatorze, je peux écrire (il écrit après le signe $= 14 + 2 =$), je peux écrire cela en chiffres C-à-d ajouter dix-sept et soustraire quinze à quatorze revient à, ajouter deux à quatorze, la réponse est
-----	---	--

Extrait 30 : Nombres relatifs S1/ Ext 7/ L146

Le professeur contraint les élèves à officialiser la technique suivante : $14+17-15=14+2=16$. Pour lui, c'est une écriture simplifiée du programme de calcul. Il suffit d'écrire « cela en chiffres » (L146). Dans ce contexte, le programme de calcul simplifié est un passage de la forme « verbale » à la forme « symbolique » en chiffres.

Pour valider cette contrainte par les élèves qui n'ont pas saisi la consigne, le professeur (ré) explicite dans L150 : « *J'écris : on ajoute deux à quatorze au lieu d'ajouter dix-sept et de soustraire quinze* ».

Du point de vue de l'ingénierie, cette écriture simplifiée est une « *institutionnalisation de cette nouvelle technique* ». Le professeur peut demander à ses élèves d'effectuer oralement et publiquement le calcul du programme.

Or après un travail de même type sur plusieurs expressions similaires, l'élève **To** est passée au tableau pour calculer $7081+41-40$ (Min 32). L'étonnant c'est que cette élève a répondu par «Ajouter sept mille, ajouter quarante et un à sept mille quatre-vingt-un et je soustrais quarante ((7081+41)-40)». Une telle réponse ne s'appuie pas sur la technique officialisée. C'est la technique des élèves du début de la séance (voir paragraphe 6.6.1, p.189), elle dérive du Milieu 1 (voir *Tab OM 20*, p190). C'est ce qui montre que cette élève (cas des autres peut-être) n'a pas pu rapporter ses connaissances au milieu institutionnel du nouveau savoir dans lequel les nombres désignent des opérateurs.

6.6.7.2. L'institutionnalisation du programme de calcul par « son algébrisation »

Min 32 sec 20

178	P	Donc on a déjà appris un programme de calcul qui facilite le calcul mental, n'est-ce pas ?
179	Es	Oui
180	P	Quel est ce programme ? Qui peut me dire une règle ou bien le programme mais sans dire les nombres, c-à-d sans (Kr lève le doigt) Oui (il donne la parole à Kr qui a levé le doigt)
181	Kr	On a un nombre, et euh, on ajoute, on a trois nombres, on ajoute un nombre à, au nombre principal et on soustrait, euh, soustraire un autre nombre, et euh on obtient la réponse
182	P	C'est bien, mais il faut dire cela (il se tourne vers le tableau) premièrement (il écrit *Programme de calcul) écrivez en rouge, c'est la règle Le programme de calcul, donc on peut utiliser (il écrit ajouter a, il se tourne vers les élèves) des lettres par exemple, ajouter a
183	E	A b
184	Re	Et soustraire b
185	P	Et soustraire b à un nombre
186	Re+ Jo	Revient à ajouter
187	P	A ajouter
188	Ro	Euh euh
189	P	Très bien revient à ajouter un autre nombre par exemple Donc on peut écrire ajouter a et soustraire (il écrit et s) mettez a entre guillemets pour savoir que ça signifie euh un nombre Ajouter a et soustraire (il écrit en même temps qu'il parle) b (il le note « b ») à un nombre, revient à ajouter c (il le note « c ») à ce nombre Des exemples (des doigts se lèvent) Oui

Extrait 31 : Nombres relatifs S1/ Ext 8/ L178 à L189

Dans cet extrait, le professeur va institutionnaliser une règle en s'éloignant des nombres : « *Qui peut me dire une règle mais sans écrire le programme* » (L180). La réponse **Kr** dans L181 : « *On a un nombre, et euh, on ajoute, on a trois nombres, on ajoute un nombre à, au nombre principal et on soustrait, euh, soustraire un autre nombre, et euh on obtient la*

réponse » montre que le calcul d'une expression numérique doit se faire de gauche à droite. C'est-ce qui prouve que le *Milieu 2* (voir *Tab OM 21*, p.192) mobilisé par **Kr**, fait de connaissances antérieures, pourrait devenir de plus en plus local. Cet élève ne peut pas appréhender les éléments institutionnels du savoir puisqu'il n'éprouve pas le besoin de modifier ses propres connaissances, ni de les compléter : avec ses connaissances, cette technique mène à une réponse correcte. De plus, il n'a pas besoin d'« oublier » ses connaissances puisque le professeur les a validées. Comme d'habitude, le professeur a félicité cet élève par « *c'est bien mais il faut dire ça* » (L182). Cette technique didactique encourage l'élève à se maintenir, de plus en plus, dans ses propres milieux cognitifs.

Pour institutionnaliser le programme de calcul, le professeur a choisi le passage de la forme « arithmétique », qui résume un algorithme de calcul entre grandeurs mesurées, à la forme « algébrique » qui représente un élément d'une structure algébrique (expression algébrique par exemple). C'est-ce que montre son tour de parole L182 : « *Le programme de calcul, donc on peut utiliser des lettres par exemple, ajouter **a*** ». Suite à cette demande, les élèves ont « récité la comptine » des lettres consécutifs *a*, *b* et *c* et ont collaboré avec le professeur à la constitution du programme de calcul algébrique : « *Ajouter **a** et soustraire **b** à un nombre, revient à ajouter **c** à ce nombre* » qui, selon le professeur, est « *Un programme qui facilite le calcul mental* » (L178).

Du point de vue de l'élève, ces lettres peuvent ne pas désigner effectivement des nombres puisque dans les tours de parole correspondants à leur activation (L182-189), le professeur ne dit pas « ajouter un nombre **a** » mais « ajouter **a** ».

De plus, à ce moment de l'année scolaire (novembre), les élèves de EB6 n'ont pas encore rencontré les lettres dans un travail algébrique : « C'est la première année où l'élève est confronté à des écritures littérales. Ce passage à l'algébrisation n'est pas évident. L'emploi d'une formule mérite un apprentissage spécifique » (Curriculum libanais, 1997, p35). Notons qu'il faut attendre la fin de l'année pour arriver au secteur « Expressions algébriques » qui mène au travail avec des lettres.

6.6.7.3. Milieux personnels mobilisés dans cet épisode

En guise de conclusion, l'usage des lettres *a*, *b* et *c*, utilisées dans le contexte de la « simplification de programme de calcul », n'a pas d'intérêt mathématique. C'est une modélisation à laquelle recourt le professeur, sans doute parce que ses connaissances le lui

permettent, mais qui ne modifie guère les milieux cognitifs des élèves. C'est peut-être, pour le professeur, une manière de relier les rapports personnels des élèves à des éléments institutionnels du savoir.

Pourtant un nouveau secteur est sollicité par le professeur. C'est celui des : « Expressions algébriques ». Ce secteur englobe le thème « Calcul sur des expressions littérales ». Or le professeur a fait travailler le programme « *Ajouter a et soustraire b à un nombre, revient à ajouter c à ce nombre* » ; c'est-à-dire la réduction de l'opérateur somme $(+a-b)$. Ainsi, dans ce sens, le thème précédent rejoint le sujet « Réduire l'opérateur littéral "+a-b" composé des opérateurs $(+a)$ et $(-b)$ ».

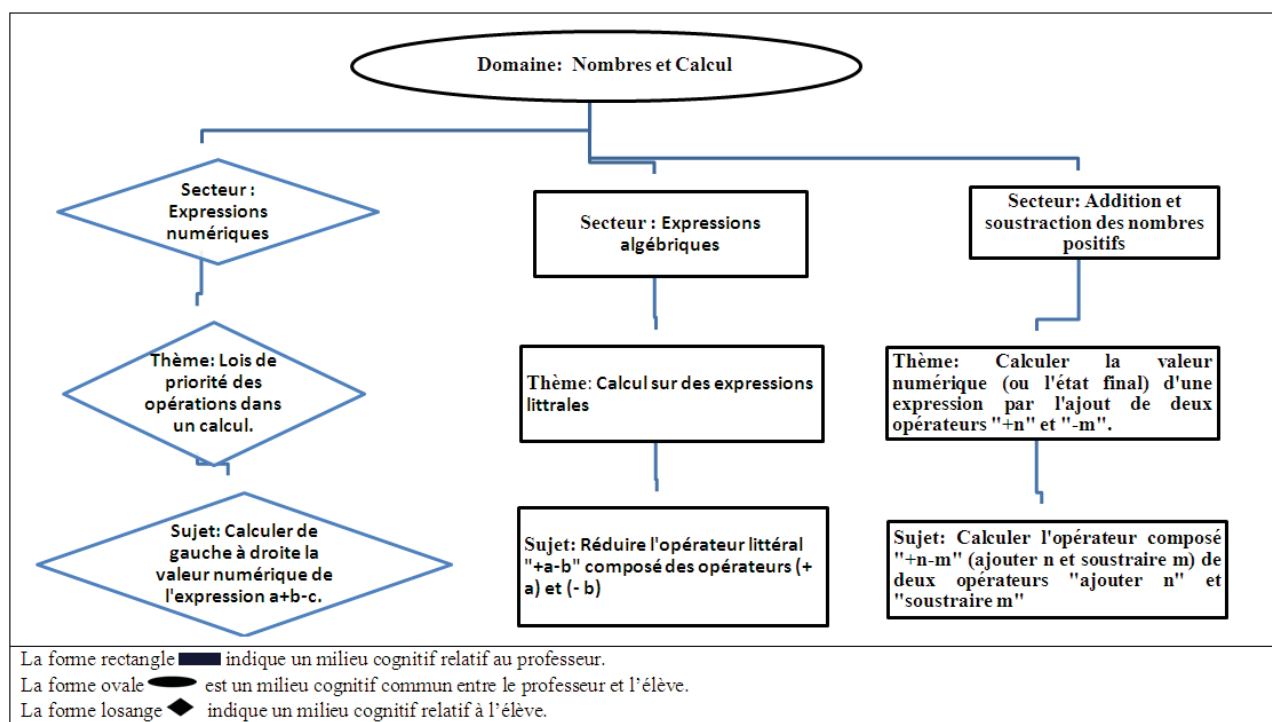
Une nouvelle réorganisation didactique apparaît donc en classe. Elle est caractérisée par l'absence de niveaux de codétermination communs entre les élèves et le professeur relativement à l'organisation mathématique du savoir.

Le professeur s'est placé dans le secteur « Expressions Algébriques » et dans le secteur « Additions et soustractions des nombres positifs » dont la place au sein des niveaux de codétermination didactique est explicitée dans 6.6.3.3, p.199. C'est ce dernier secteur qui définit le milieu institutionnel du savoir à partir de l'OD proposée par l'ingénierie.

De leur côté, les élèves se replacent toujours au niveau du secteur « Expressions numériques », qui est stable pour eux depuis le début de la séance.

Le dédoublement des milieux s'accroît devant l'absence de milieux communs entre le professeur et les élèves. La distance mésogénétique s'élargit.

Dans ce sens, nous pouvons nous attendre à l'apparition de phénomènes didactiques, comme par exemple « l'effet Topaze » ou « l'ostension déguisée », afin que le professeur puisse mobiliser des milieux communs. Par suite l'organisation mathématique proposée par l'ingénierie sera uniquement fréquentée par le professeur pour faire advenir le nouveau savoir.



Tab OM 25 : Tableau comparatif des milieux cognitifs des élèves et du professeur pour l'extrait l'Ext 31 (S1/Ext 8)

6.6.8. Conclusion de la première séance

Le professeur a engagé sa classe dans le cadre des premières propositions de l'ingénierie. L'objectif principal de cette première séance est l'organisation d'une première rencontre avec le type de tâches T : « exécuter le programme de calcul $+b - c$ pour calculer l'expression numérique $a + b - c$ (a, b et c entiers naturels et $b > c$) » afin de mettre en échec la technique consistant à réaliser les calculs de gauche à droite (Ingénierie, p6).

Nous avons choisi d'étudier six extraits de la séance dans lesquels nous avons observé un changement sur les OM et les OD du savoir prescrites par l'ingénierie. Nous nous sommes servis de l'échelle des niveaux de codétermination didactique pour représenter ces organisations ainsi que les réorganisations nouvelles qui sont apparues.

Tout d'abord les élèves se sont engagés, dès le début de la séance, dans la technique qui revient à calculer de gauche à droite les expressions de la forme « $a + b - c$ ». Il fallait qu'ils éprouvent sa mise en défaut pour qu'ils la rejettent, puis que le professeur institutionnalise la technique suivante : « Ajouter... puis soustraire...au nombre revient à ... à ce nombre ». Le professeur est chargé d'assurer la dévolution de cette technique en garantissant sa justification technologique.

Nos résultats concernant le professeur et les élèves

Dans les six extraits étudiés auparavant, les élèves ont mobilisé deux techniques pour résoudre le type de tâches proposé : « Calculer $a + b - c$ ». Ces techniques reposent sur l'application des connaissances antérieures suivantes : « Calculer suivant l'ordre $(a + b) - c$ (*de gauche à droite*) » et « Calculer suivant l'ordre $a + (b - c)$ (*différence positive de b et c*) » (notées respectivement technique 1 et technique 2).

Le professeur a tenté de mettre en défaut ces deux techniques. Pourtant les élèves ont continué à recourir à la technique 1 pendant les six extraits, ils ont rejeté la technique 2 dans les extraits *Ext 24* (L21 - L25) et *Ext 29* (L97 - L105). Ce qui est étonnant est le fait que cette technique, rejetée par le professeur, a joué le rôle d'un élément technologique pour justifier la tâche prescrite par l'ingénierie dans *Ext 28* (L65 - L74). Ainsi l'élève n'a pas pu taire ses connaissances antérieures au profit de la mise en œuvre de la nouvelle technique.

A partir de l'*Ext 26*, le professeur s'est placé dans le cadre du sujet institutionnel de la technique demandée « Calculer l'opérateur composé "+n-m" de deux opérateurs (+n) et (-m) ».

Dans l'*Ext27*, il s'est placé au sein de la logique des élèves pour prendre en charge « la différence positive de deux nombres » après qu'il l'avait rejeté. Enfin dans l'*Ext 29*, il a activé le secteur « Expressions Algébriques » qui ne mobilise pas des éléments mathématiques connus des élèves. Ils ne pourront donc pas les prendre en compte dans la suite de la séquence.

Nos résultats sur le dédoublement des milieux

Nous avons récapitulé tous les « niveaux de codétermination » activés lors des extraits observés dans un tableau (voir *Tab OM 24*, p.210). La lecture des résultats obtenus (en particulier les sujets abordés par les élèves et le professeur) prouve que le milieu institutionnel du savoir n'est pas investi par les élèves. Le seul milieu commun est celui du sujet « *calculer la différence positive de deux nombres* ». Signalons que cette technique pourra devenir un obstacle à l'émergence « du savoir » pour des cas, comme par exemple le calcul de : « $835 - 18 - 8$ ». Cela contribue à avoir un résultat incorrect si on effectue d'abord « $18-8$ ».

L'étude a montré que les élèves et le professeur se placent dans des niveaux de codétermination différents. La justification de la technique institutionnelle (de l'ingénierie) « Ajouter... puis soustraire...au nombre revient à ... à ce nombre » ne peut être validée que par la mobilisation du sujet : « *Calculer l'opérateur composé "+n-m" de deux opérateurs (+n) et (-m)* ». Mais cette technique n'a jamais été un sujet dans lequel les élèves se sont engagés. Plus le temps didactique avance, plus la présence des milieux différents s'intensifient. Par suite, la distance mésogénétique au milieu institutionnel s'accroît. C'est ce qui explique l'apparition du phénomène du « dédoublement des milieux » à l'intérieur de cette ingénierie. Nous avons remarqué l'apparition de plusieurs facteurs qui sont à l'origine et qui entretiennent ce phénomène, entre autres :

1) Les connaissances antérieures des élèves

Lorsque les connaissances antérieures ne sont pas remises en cause, en modification ou en évolution, elles persistent localement et restreignent les niveaux d'OM et d'OD (voir *figure 14*, p.107). Les élèves construisent dans ce sens leurs « propres mathématiques » (Chevallard, 1988) à partir de leurs connaissances anciennes qu'ils trouvent adaptées à la résolution de la tâche demandée.

Dans ce cas, même si le temps didactique avance, comme condition à l'émergence du savoir, la distance mésogénétique s'élargit.

2) La bifurcation didactique

2.1) La bifurcation due aux techniques didactiques du professeur.

Cette technique, qui consiste à laisser un certain *topos* à l'élève, a accordé une valeur importante à leurs techniques personnelles (nous avons entendu « quarante » fois les expressions « C'est bien » et « Très bien »). Les élèves n'ont jamais rencontré une problématique dans la résolution des tâches demandées. Ils ne sont pas même allés à la recherche d'une technique économique. Cela a circonscrit les milieux des élèves, précisément dans les cas où ces techniques avaient été validées et justifiées par le professeur.

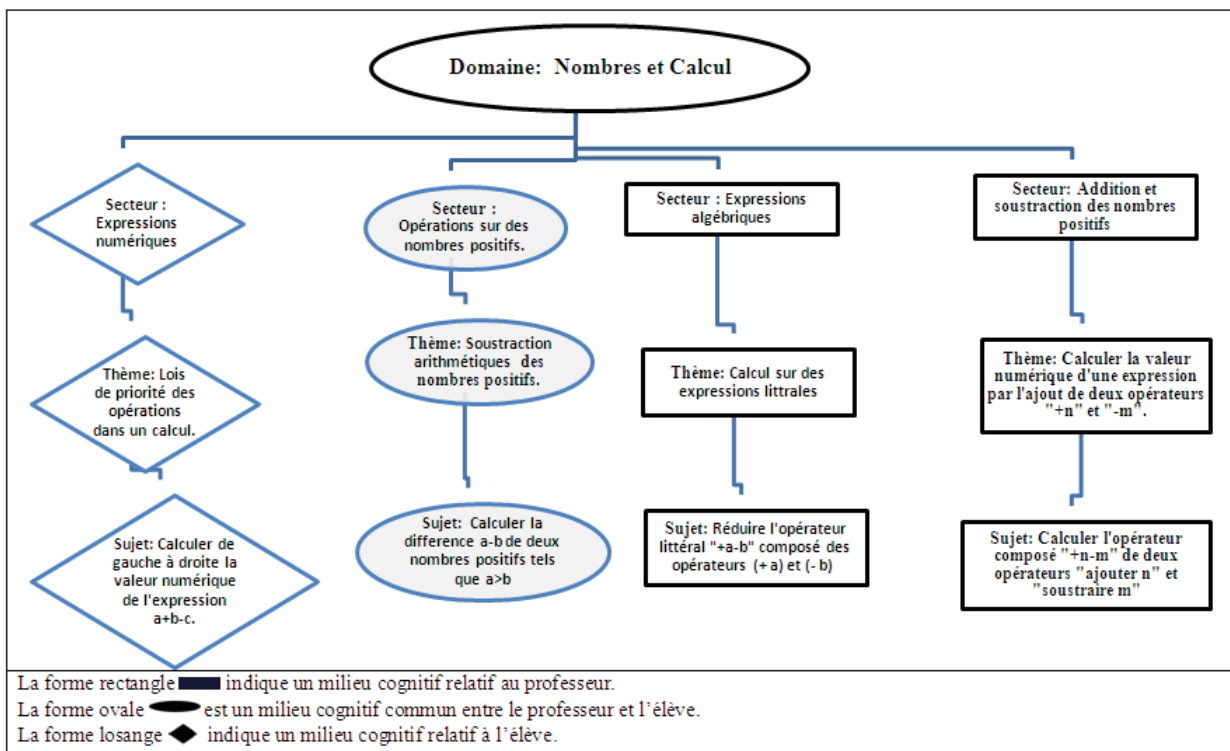
2.2) La bifurcation due à la prise en charge des « techniques correctes » mais inappropriées au milieu institutionnel.

Le professeur a validé des techniques correctes qui ne permettent pas de remettre en question les connaissances antérieures des élèves. Nous avons vu qu'il a institutionnalisé dans *l'Ext* 28, p.203 la technique relative au sujet « La différence positive de deux entiers 21 et 20 dans le calcul de $17+21-20$ ». Une fois validée, cette technique pourra remplir une fonction technologique pour d'autres tâches de même type. Pourtant son rôle est seulement limité aux tâches du type « Calculer $a+b-c$ avec $b > c$ ». Elle s'avère inappropriée, voire incorrecte, pour calculer $(347+61-62)$ par exemple.

L'officialisation de quelques techniques correctes, qui ne pourront pas remettre en cause les connaissances antérieures des élèves, contribue donc à l'apparition du phénomène de dédoublement des milieux.

2.3) La bifurcation due aux représentations sémiotiques

Nous avons vu que les différentes représentations sémiotiques qu'a suscitées l'usage du mot « ajouter » ont accentué la « bifurcation didactique ». Dans cette séance, nous avons remarqué que les élèves ont utilisé le mot « ajouter » pour « additionner deux nombres positifs » tandis que le professeur l'a utilisé dans le sens « Calculer l'opérateur composé des deux opérateurs ». Le professeur ainsi que ses élèves ont travaillé à partir de leurs interprétations différentes du même mot. Cela a contribué à les placer au sein de niveaux de codétermination différents. D'où l'apparition du phénomène du dédoublement des milieux.



Tab OM 26 : Nombres Relatifs, Tableau du dédoublement des milieux des élèves et du professeur de la première séance

6.7. Analyse de la deuxième séance

La deuxième séance débute par le corrigé du devoir donné lors de la première séance. Les élèves passent au tableau, écrivent le programme de calcul pour les trois premières expressions : $15+37-7$, $58+1024-24$ et $104+1024-24$. L'écriture des mêmes phrases (programme de calcul) a relevé l'utilisation d'un certain stéréotype qui s'est répété d'une expression à une autre.

Par exemple, dans le calcul de $(3560+156-150)$ l'élève **Ka** a débuté par une technique relevant du *Milieu 1* (voir Tab OM 20, p.190) « *On va ajouter 156 à 3560 et on soustrait 150 de, euh, 3560* ». Dans le calcul de $(121+229-29)$ l'élève **Re** a pris en compte la différence de deux nombres en disant « *Car on fait $229 - 29$* ».

Le calcul des expressions $(a + b - c$ avec $b < c)$ est fait par **Ro** dans le calcul de l'expression $340+61-62$ (min 18 sec16). Cet élève a fait le calcul avec réussite. Or le professeur a demandé de justifier sa technique « *Pourquoi à la fin on a soustrait 1 ?* ». L'élève répond par : « *Car 61 est plus petit que 62* ». Cela montre qu'il se place dans le secteur « Nombres Positifs » puisqu'il a comparé les deux nombres positifs 61 et 62 et non pas dans celui du « Programme de calcul (opérateur) ».

6.7.1. Le dédoublement des milieux entre les milieux cognitifs des élèves, les milieux institutionnels du savoir prescrit par l'ingénierie et les OM du professeur.

6.7.1.1. Cas du calcul de l'expression : $340+61-62$ ($61 < 62$)

Le calcul de $(340+61-62)$ réussi par l'élève **Ro** au tableau a été l'occasion d'institutionnaliser le calcul des expressions de type « $a + b - c$ avec $b < c$ » mené par le professeur.

Min 24 sec 55 (cet extrait porte sur les tours de parole L1 à L49)

1	P	Qu'est-ce qu'on a appris de ces calculs ? (il s'agit de $340+61-62$)
2	Al	De soustraire
3	P	Quand on soustrait et quand on ajoute ? Cha
4	Cha	Si le nombre de soustraction est plus grand que le nombre de l'addition, alors on soustrait c de ce nombre. Et si le nombre d'addition est plus grand que celui de soustraction, alors on additionne c à ce nombre

Extrait 32 : Nombres Relatifs S2/ Ext 1/ L1 à L4

La réponse « *Qu'est-ce qu'on a appris* » dans L1 devrait fournir la seule réponse possible dans le cadre « d'une logique des programmes de calcul » en disant : « *à soustraire 1* » (Ingénierie, p 10). La réponse de **Al** se situait dans cette logique, et a guidé la réponse de **P**

dans L3 « *Quand on soustrait et quand on ajoute ?* ». La technique utilisée par **Cha** dans L4 consiste à comparer deux nombres positifs. Ils sont désignés par « le nombre d'addition » (c.à.d. 61) et « le nombre de soustraction » (c.à.d. 62). Les éléments technologiques mis en avant par cet élève sont : 1) comparer deux nombres positifs et 2) admettre l'existence de leur différence quelles que soient leurs valeurs. Il s'agit donc pour **Cha** de mettre en évidence « les nombres relatifs ». Cet élève réalise cette technique au cours du moment de l'institutionnalisation de la praxéologie permettant de préciser ce qu'est exactement l'OM élaborée : « *le nombre négatif est introduit comme différence de deux positifs, ce qui est cohérent avec la conception de la fraction comme nombre rationnel et quotient de deux entiers, que les élèves ont rencontré en 6ème* » (Berté et Al, 2008). Dans ce contexte, **Cha** considère implicitement que l'écriture $61 - 62$ représente un nombre relatif. C'est la classe d'équivalence de couples entiers, par exemple (61, 62), (7, 8) qui seront équivalents et leur classe notée -1 (voir étude mathématique 6.1, p.160). Pourtant ce fait n'était pas pris en considération par le professeur.

Dans ce même extrait, l'élève **Ja** n'a pas compris la justification par la décomposition de (-62) dans L15 « *Monsieur, moi je n'ai pas compris comment on a fait 1* (pour le calcul de $(340+61-62)$) ». Pour répondre à sa question, le professeur demande :

22	P	Comment je peux la décomposer (il s'agit du nombre 62) ? Qui sait ? Donc pour soustraire 62, je peux soustraire 61 et puis soustraire
23	Els	61
24	P	Un. Je soustrais 61 et puis je soustrais 1, dans cette façon je soustrais 62. C'est-à-dire je peux écrire (il écrit à côté de $\dots+61-62$) $\dots+61-61-1$. Tu as compris comment ? Au lieu d'écrire moins 62, j'écris moins 61 moins 1. C'est-à-dire je soustrais 61 et puis je soustrais 1 Ajouter 61 et soustraire 61 (il barre +61 et -61 figurant dans l'expression $(\dots+61-61-1)$ revient à

Extrait 33 : Nombres Relatifs S2/ Ext 2/ L22 à L24

Le professeur réalise un moment de construction du bloc technologico-théorique par la convocation du type de tâches : « Trouver une autre écriture d'un nombre relatif (négatif) ». Il se replace dans le secteur « Nombres Relatifs » qui débouche sur le thème « opérations sur les nombres relatifs » qui renferme le sujet « Décomposer un nombre relatif en une somme de plusieurs nombres ». Il apparaît ainsi une praxéologie mathématique que les élèves ignorent. En plus, le professeur a barré +61 et -61 dans l'écriture $(\dots+61-61-1)$. Cette technique consiste, en général, à simplifier la somme des nombres relatifs dans une expression numérique.

Les rapports personnels des élèves apparaissent en rupture avec la dimension technologique évoquée par le professeur dans L24 :

39	Ta	Non, ça sert à quoi la leçon ? Ça veut dire par exemple dans les problèmes, vous ne pouvez pas nous donner $347+61-40$.
-----------	-----------	--

Cette élève ne sait pas « *A quoi sert la leçon* ». Aussi le rapport de ses connaissances antérieures aux niveaux de codétermination que le professeur vient d'évoquer est en grande partie non motivé.

La justification technologique du calcul de programme « ajouter 61 et soustraire 62 » qui consiste à décomposer les nombres -62 en $(-61 - 1)$ sollicite des niveaux de codétermination qui ne peuvent pas être mobilisés par les élèves. Ils ne conviennent pas non plus aux OM et OD définies par l'ingénierie puisque le professeur a surpassé les organisations du milieu institutionnel du savoir prescrit. Il se place dans « ses propres mathématiques » afin de trouver un cadre technologique pour justifier des « mathématiques différentes » des autres.

6.7.1.2. Deuxième exemple : calcul de $3469+45-46$

Nous citons un autre exemple dans lequel le professeur se sert de son propre rapport à des propres «organisations mathématiques» ignorées des élèves pour justifier les techniques d'élèves qui relèvent des organisations différentes.

Min 35 sec 38 (cet extrait porte sur les tours de parole L1 à L21)

1	P	Chr , $3469+45-46$
2	Chr	Ajouter 46 et soustraire 45
3	P	Ajouter quoi ? Qu'est-ce qu'on a ?
4	Chr	45
5	P	Donc répète
6	Chr	Ajouter 46 et soustraire
7	P	Chr, qu'est-ce qu'on ajoute ? Quel est le nombre précédé du signe plus ?

Extrait 34 : Nombres Relatifs S2/ Ext 3/ L1 à L7

D'abord l'élève **Chr** refuse de dire « ajouter 45 » comme l'incite son professeur. Il apparaît que sa réponse « ajouter 46 », provient du théorème en acte suivant « puisque 46 est plus grand que 45, on ne doit dire que 46 moins 45 ». Par suite le programme pour **Chr** est « *ajouter 46 et soustraire 45* ». Cet élève réalise ce passage dans le cadre technologique portant sur la « différence positive de deux nombres ».

Pour remédier à ses erreurs, le professeur mobilise « son » secteur « Nombres Relatifs » (on dit « son » car c'est un secteur que les élèves ignorent à ce moment) signalé par l'évocation de « Nombre précédé d'un signe » (L7). Ce secteur débouche effectivement sur le thème « Identification des nombres relatifs » qui renferme le sujet « Ecrire un nombre positif +a et un nombre négatif -a ». Notons que ces niveaux constituent le sujet d'enseignement de la troisième séance. Donc à ce moment, tout cela est loin d'être accessible aux élèves. En plus cette organisation didactique se place contre l'émergence scientifique, voire épistémologique, des nombres relatifs d'après les recommandations de l'ingénierie « *Des élèves devraient fournir la seule réponse possible dans le cadre d'une logique des programmes de calcul* ». (Ingénierie, p10).

6.7.2. Les représentations sémiotiques du mot « Simplifier »

Dans le quatrième programme de calcul, « ajouter 62 puis soustraire 61 » équivaut à « ajouter 1 », la question cruciale de cette partie de la séance tourne autour de la question : A quoi équivaut le programme de calcul « ajouter 61 puis soustraire 62 » ?

Des élèves devraient fournir la seule réponse possible dans le cadre « d'une logique des programmes de calcul » en disant : « à soustraire 1 ». Tout en le justifiant [...] » (Ingénierie, p10).

Le professeur débute cet extrait en sollicitant la mémoire didactique des élèves sur les moments de travail avec « les programmes de calcul ». Il écrit au tableau : « *Ajouter 46 et soustraire 47 revient à soustraire 1* ».

Min 46 sec 10 (Extrait L1 à L31)

1	P	Qui peut me simplifier ce programme ?
2	Els	Monsieur, moi, moi (des doigts se lèvent)
3	Re	Quoi ?
4	P	Simplifier ce programme. Mar de ta place (Ma n'a pas de réponse) oui To
5	To	Ajouter 6
6	P	Ajouter
7	To	Ajouter 6
8	P	Non, Jo
9	Jo	On ajoute un nombre, on ajoute 46 et on soustrait 47
10	P	Oui mais j'ai dit simplifier. C'est-à-dire N'écrivez pas ajouter et soustraire. Oui To Qu'est-ce qu'on peut utiliser au lieu d'ajouter et de soustraire ?

Extrait 35 : Nombres Relatifs S2/ Ext4/ L1 à L10

Il apparaît que les élèves n'ont pas compris quelle est la tâche demandée. Il semble qu'ils ont essayé de simplifier « la phrase » écrite en mots au tableau pour en réutiliser quelques mots. Par exemple, la simplification d'un prénom composé comme Marie-Claude est Marie. L'élève

To a répondu par « ajouter 6 » (L5 et L7) qui ne convient pas avec la consigne demandée. **Jo** a pris la première partie de la phrase « *Ajouter 46 et soustraire 47 revient à soustraire 1* » qui est « On ajoute 46 et on soustrait 47 ». Mais, le professeur situe le travail de *simplification* demandé dans la recherche des « synonymes » en français : « *Qu'est-ce qu'on peut utiliser au lieu d'ajouter et de soustraire ?* » (L10). Il sollicite la mémoire didactique de l'extrait *Ext 26*, p.195 de la première séance dans lequel les élèves ont confondu (voir **6.6.6.1**, p.206) les mots « plus, additionner et ajouter » et « moins, soustraire et retirer ». Dans ce contexte, l'élève **El** a répondu par « additionner » (L11). **Elv** a répondu par « plus 46 moins 47 » (L16) qui a été reprise par **Re** dans L24.

6.7.3. Clôture de la séance

Les tours de parole ci-dessous clôturent le débat de la deuxième séance :

24	Re	Plus 46, moins 47
25	P	Moins 47
26	Ma	(il crie) Est égal
27	P	Egal à moins 1 (il écrit en même temps $+46 - 47 = -1$) C'est comme par exemple, si on a un nombre $300+46-47$ (il écrit au tableau $300+46-47=$) est égal à quoi ? Trois cent moins un (il écrit $300-1=$) Car ajouter 46 et soustraire 47 revient à soustraire 1 (il écrit suite à $= 299$)
28	Re	Soustraire 1
29	P	C'est-à-dire au lieu d'écrire $+46-47$ je peux écrire
30	Re	$300-1$
31	P	moins 1 (il souligne le moins 1 dans $300-1 = 299$ et puis il relie 46 et 47 dans $300+46-47 =$ puis il passe à $+46 - 47 = -1$ qui est toujours au tableau et relie les deux nombres du 1 ^{er} avant l'« = » et souligne -1 après l'égal) Donc ajouter 46 et soustraire 47 revient à soustraire 1 (les élèves l'accompagnent dans le programme de calcul) (on entend la sonnerie de la cloche)

Extrait 36 : Nombres Relatifs S2/ Ext5/ L24 à L31

Le professeur lance un débat avec les élèves à partir d'une indication Topaze. Il lui revient de rapprocher le calcul du programme « $+46 - 47 = -1$ » (L27, L29 et L31) avec le calcul de l'expression $(300+46-47)$ (L27 et L29). La simplification du programme de calcul, qui est le sujet d'intérêt de cet extrait, est exprimé dans L31 de la façon suivante : « *Donc ajouter 46 et soustraire 47 revient à soustraire 1* » pour le calcul de $(300+46-47)$.

En guise de conclusion, le professeur a posé une question relativement floue à laquelle on ne peut répondre du point de vue « ingénierie ». En réalité, il a écrit au tableau le programme « *ajouter 46 et soustraire 47 revient à soustraire 1* » dont la réponse est « *revient à soustraire*

I ». Mais effectivement la question devrait être « Simplifier le programme suivant : ajouter 46 et soustraire 45 ».

Cet extrait prouve que le professeur prend en compte les OD du savoir indiquées dans l'ingénierie. Mais dans l'institutionnalisation des techniques ou des propriétés, il utilise comme cadre technologique ses propres éléments cognitifs issus des OM du savoir. Pourtant ce cadre est parfois inapproprié surtout s'il ne s'accorde pas aux OD de l'ingénierie.

Par suite, le dédoublement des milieux a lieu entre les milieux cognitifs du professeur et les éléments institutionnels du savoir. Il est dû au chevauchement des milieux institutionnels entre le professeur et l'OD pour l'émergence du savoir.

6.7.4. Conclusion de la deuxième séance

Nous avons observé dans cette séance que le professeur élabore des justifications technologiques à des techniques d'élèves ou à des propriétés mathématiques, qui font advenir des niveaux de codétermination ne pouvant pas être mobilisés par les élèves. Ces sujets sont 1) « Ecrire un nombre positif (+a) et un nombre négatif (-a) » et 2) « Décomposer un nombre relatif en une somme de plusieurs nombres ». Ainsi le professeur mobilise-t-il des niveaux de codétermination qui découlent du savoir avant même qu'il soit institutionnalisé. De telles justifications ne conviennent pas aux OM et aux OD définies à l'avance dans l'ingénierie. Aussi, le professeur recourt à des OD qui vont à l'encontre de l'émergence scientifique, voire épistémologique, du savoir.

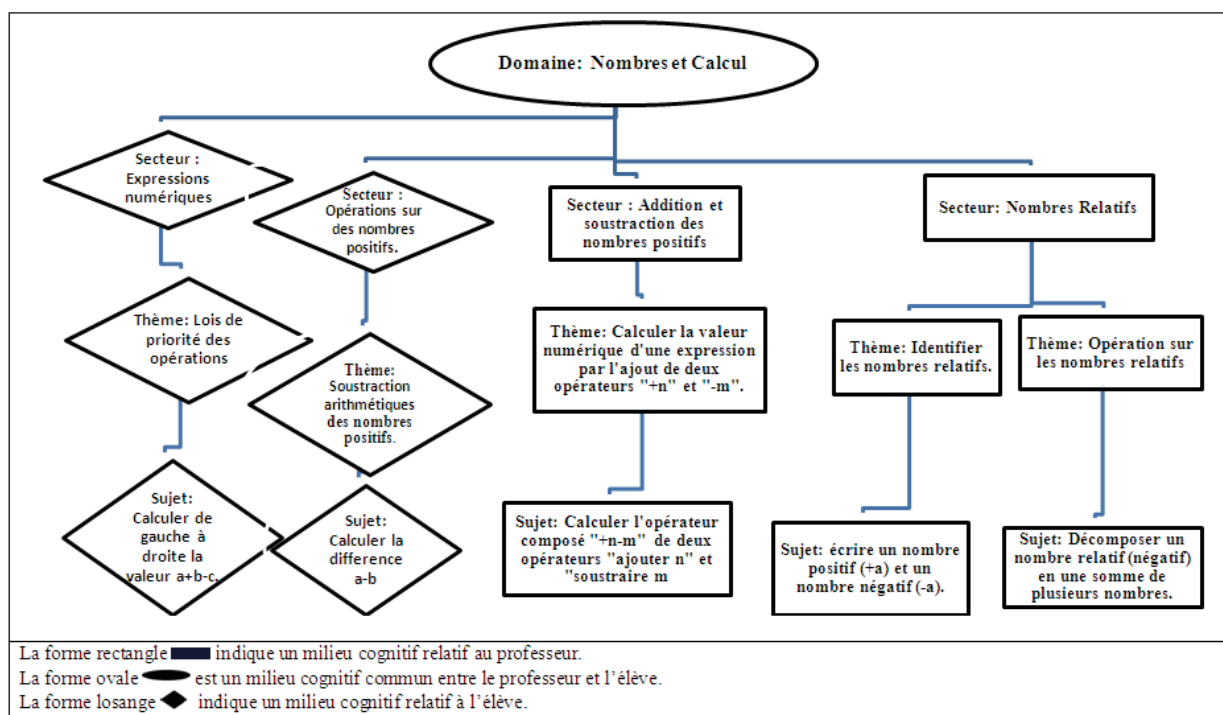
Les gestes professoraux ont donc pour effet de faire avancer le temps didactique et d'élargir la distance mésogénétique entre les milieux cognitifs des élèves avec les OM et les OD de l'ingénierie. En d'autres termes, le professeur institutionnalise trop *tôt ou trop tard* le savoir par des gestes (attitudes) qui créent des ruptures entre les OD et OM associées et l'émergence scientifique proprement dite du savoir. Certains gestes auront donc pour effet de faire avancer le temps didactique mais aussi d'accroître la distance mésogénétique entre 1) les milieux cognitifs des élèves, 2) les organisations mathématiques du professeur et 3) les milieux institutionnels prescrits par l'ingénierie.

La distance mésogénétique varie selon les sujets mobilisés de la façon suivante :

Les sujets mobilisés par les élèves « Calculer de gauche à droite dans une expression numérique » et « calculer la différence $a - b$ » sont aptes à réduire cette distance par rapport au milieu institutionnel du sujet « Calculer sur des opérateurs ».

Mais les sujets mobilisés par le professeur « Ecrire un nombre positif (+a) et un nombre négatif (-a) » et « Décomposer un nombre relatif en une somme de plusieurs nombres », dans le cadre d'une dimension technologique, sont aptes à accroître cette distance par rapport au milieu institutionnel.

Nous illustrons dans un tableau les différents niveaux de codétermination didactique activés par les élèves et le professeur.



Tab OM 27 : Nombres Relatifs, Tableau du dédoublement des milieux de la deuxième séance

6.8. Analyse de la troisième séance

6.8.1. Organisation de la troisième séance

Au début de la troisième séance le professeur se place dans l'étape 3 de l'ingénierie (p11) qui a pour but d'institutionnaliser le calcul de $(a + b - c)$ cas où $b < c$. Il est proposé de demander aux élèves de noter sur le cahier de cours le résumé suivant :

3. Une nouvelle notation pour simplifier l'écriture

Pour simplifier l'écriture du programme de calcul, « à un nombre, on ajoute 45 et on soustrait 46 », on aurait pu écrire : $\dots + 45 - 46 = \dots - 1$.

On a préféré écrire :

$$+45 - 46 = -1$$

qui signifie que si à un nombre, on ajoute 45 puis on soustrait 46, alors on lui soustrait 1.

$$\text{Ainsi : } 458 + 45 - 46 = 458 - 1 = 457$$

P engage les élèves à écrire par eux-mêmes, dans la suite du cours, ce que l'on a alors observé avec les autres programmes de calcul :

$$+124 - 125 = -1, \text{ ainsi } 15627 + 124 - 125 = 15627 - 1 = 15626 \dots \quad (\text{Ingénierie, p11})$$

Ensuite il s'engage dans l'étape 4 : « mise en évidence des nombres négatifs ». Il s'agit de « demander aux élèves s'ils peuvent trouver des programmes de calculs qui reviendraient à soustraire 2, 3, 4, 5 ou 6 au premier nombre, donc des écritures équivalentes à -2 , -3 , -4 , -5 ou -6 . Les élèves comprennent qu'il suffit de choisir deux nombres dont la différence est 2, 3, 4, 5 ou 6 et d'écrire correctement qu'on ajoute le plus petit et que l'on retranche ensuite le plus grand » (Ingénierie, p12).

Enfin, le professeur mène un travail de justification sur la propriété mathématique « la commutativité » du calcul fait par le programme de calcul par exemple :

$$\left. \begin{array}{l} +7 - 1 = -4 \\ -1 + 7 = -4 \end{array} \right\} +7 - 1 = -1 \quad -1 + 7$$

et

$$\left. \begin{array}{l} +8 - 3 = +5 \\ -3 + 8 = +5 \end{array} \right\} +8 - 3 = -3 + 8$$

Dans l'ingénierie, il est proposé de demander aux élèves de noter :

II. Un nouveau type de calculs

1. Exemples

$$+7 - 11 = -4$$

$$-3 + 8 = +5$$

2. Propriété de ce nouveau type de calculs

Propriété

Si on change l'ordre des opérations dans un programme de calcul contenant des additions et des soustractions, on obtient un programme de calcul équivalent.

Exemples

$$+7 - 11 = - 11 + 7 = - 4$$

$$- 3 + 8 = + 8 - 3 = + 5 \quad (\text{Ingénierie, p15})$$

6.8.2. Niveaux de codétermination didactique relatifs à cette séance

Notre but principal ne consiste pas à mener une étude sur la conformité de l'ingénierie mise en place par le professeur. Nous nous intéressons à déceler les différents niveaux de codétermination didactique activés afin de prouver l'apparition du phénomène de « dédoublement des milieux ».

Pour ce faire, nous allons limiter notre étude dans cette séance à trois extraits qui attestent l'existence de ce phénomène.

6.8.2.1. Le dédoublement des milieux entre les milieux cognitifs des élèves et les milieux institutionnels du savoir dans la simplification du programme de calcul $+242 - 247$

Min 24 sec 28

1	P	(Il écrit au tableau de la feuille qu'il tient à la main $1350+242-247=1345$) Provient de la simplification du programme de calcul ($+242-247=-5$) C'est un autre exemple, donc ajouter 242 et soustraire 247 à 1350 revient
2	Els	Revient à soustraire
3	P	Oui, c'est égal à 1345. Pourquoi on a obtenu cette réponse ?
4	Re	Car on a soustrait, moins 247
5	To	Moins, c'est moins 5
6	P	Pourquoi on a soustrait 5 ?
7	Re	Car on a ajouté 242 et on a soustrait 247
8	P	Cela revient à soustraire 5 Donc cette réponse provient de la simplification du programme de calcul « Ajouter 242 et soustraire 247 revient à soustraire 5 »

Extrait 37 : Nombres Relatifs S3/ Ext 1/ L1 à L8

Le professeur organise cet extrait en sollicitant la mémoire des élèves sur « la simplification du programme de calcul » (voir 6.7.2, p.223) : « *Provient de la simplification du programme de calcul* ». La réponse de l'élève **Re** dans L4 « *Car on a soustrait, moins 247* » ne convient pas avec celle du professeur. Deux hypothèses se présentent face à cette réponse. 1) **Re** commence sa réponse par « soustraire » pour répondre à Els dans le tour de parole

L2 : « Revient à soustraire ». Mais il a complètement changé en « moins 247 ». Il semble qu'il a répondu à partir de la technique « Calcul de gauche à droite : $1345+242-247 = (1345+242)-247$ » qui se conclut par « moins 5 ». C'est ce qui montre que cet élève mobilise le sujet « Calculer de gauche à droite dans une expression numérique » (voir *Tab OM 20*, p.190) qui explicite les autres niveaux de codétermination). 2) La réponse de **Re** peut provenir d'un retour à un synonyme du mot « soustraire » en français. Nous avons souligné dans le paragraphe 6.6.6.1 (p.206) que soustraire a la même signification que « moins » et « retirer ». Dans ce sens la seule possibilité de produire une réponse avec le mot « moins » est de dire « moins 247 » puisque ce signe précède le nombre 247.

Cependant après la réponse justificative de **To** dans L5 « *moins, c'est moins 5* », l'élève **Re** se place dans le cadre logique du programme de calcul en disant « *Car on a ajouté 242 et on a soustrait 247* » (L7). Nous pouvons dire que cet extrait qui porte sur le calcul de « $+242 - 245$ » a une fonction mésogénétique. C'est à partir de la constitution d'un milieu contenant ce calcul que les élèves pourront justifier leurs calculs propres au type de tâches « calculer l'opérateur composé de deux opérateurs » qui est l'objectif du professeur dès la première séance. Par suite, ce type de tâches pourra devenir « un sujet commun » aux niveaux de codétermination auxquels se référeront les élèves et le professeur.

L'extrait précédent a été complété par des questions / réponses entre le professeur et les élèves et s'achève avec ces tours de paroles :

14	P	(il montre le -5) soustraction. Est-ce qu'il y en a des programmes de calcul qui aboutit à une addition ?
15	Els	Oui, oui
16	P	Donnez-moi un exemple, levez le doigt. Oui Ma .
17	Ma	247 moins 242
18	P	Très bien. Si on ajoute, ajouter 247 et soustraire 240 (il écrit pendant qu'il parle $+247 - 240 =$) revient à quoi ? (il regarde les élèves en attente de la réponse)

Extrait 38: Nombres Relatifs S3/ Ext 2/ L14 à L18

Cet extrait montre que l'activation de la technique « calculer la différence positive de deux nombres » persiste comme élément technologique essentiel dans le calcul de l'expression « $1345+242-247$ » pour l'élève **Ma**. Cet élève a répondu dans L17 par « 247 moins 242 » malgré les sollicitations multiples du professeur pour officialiser « le programme de calcul ». Cet élève **Ma** n'a pas pris en compte dans ce tour de parole L17 ce qui s'est fait avec **Re** dans L7 « *car on a ajouté 242 et on a soustrait 247* ». Malgré tout, le professeur félicite cet élève

« Très bien » (L18) tout en utilisant le programme de calcul convenable « *ajouter 247 et soustraire 240* ».

Cet extrait atteste l'existence d'élèves qui ne s'engagent pas dans un calcul du type « Programme de calcul », mais continuent d'utiliser d'autres techniques du secteur « Calcul de la différence positive de deux nombres ».

6.8.2.2. Le dédoublement des milieux entre : les OM du professeur et les milieux institutionnels de l'ingénierie

Nous montrons l'extrait ci-dessous qui vient après près de douze minutes de travail dans cette séance sur les programmes de calcul.

Min 36 sec 18

1	P	Qu'est-ce qu'on peut remarquer ? Oui Jo
2	Jo	On a remarqué que si le nombre était, comme par exemple, soustraire 7 et ajouter 4 c'est soustraire 3 et si on les inverse c'est la même chose
3	P	C'est-à-dire, si on dit ajouter 4 et soustraire 3, aussi c'est la même réponse. C'est-à-dire si on change l'ordre, c'est très bien Jo Faites attention. Ajouter 7 et soustraire 11 (il montre du doigt $+7-11=-4$) revient à quoi ?
4	Els	A soustraire 4
5	P	Soustraire 11 et ajouter 7 (il montre $-11+7=-4$) revient à quoi ?
6	Els	A soustraire 4

Extrait 39 : Nombres Relatifs S3/ Ext 3/ L1 à L6

Cet extrait porte sur l'étude de la propriété « commutativité » des opérations dans un programme de calcul contenant des additions et des soustractions (Ingénierie, p 15).

La première partie de la réponse de **Jo** « *On a remarqué que si le nombre était* » (L2) laisse une certaine place à l'usage des « Nombres » qu'il connaît. Or cet élève se trouve confronté à une tâche problématique : c'est que « l'usage des nombres positifs ne pourrait pas justifier l'ordre des opérations avec une soustraction ». Pour faire face à cette problématique, l'élève **Jo** termine par « *comme par exemple, soustraire 7 et ajouter 4 c'est soustraire 3 et si on les inverse c'est la même chose* » (L2). Cet élève, plongé dans le sujet « Opération sur les programmes de calcul » dans lequel il valide cet exemple, a abandonné la justification avec les nombres positifs. Il s'est lancé dans un « saut informationnel » puisque ses connaissances antérieures ne peuvent servir à valider la résolution de cette nouvelle tâche problématique.

Dans ce contexte, **Jo** s'engage dans le sujet « Calculer en utilisant le programme de calcul » au sein d'un cadre conceptuel nouveau « Calculer l'opérateur composé de deux autres

opérateurs (soustraire 7 et ajouter 4) ». Ce nouveau placement est suivi, dans les tours de paroles L4 et L6 de cet extrait, des réponses de certains de ses camarades qui montrent qu’eux aussi se placent dans ce même cadre.

Ces élèves ont commencé à entrer dans certains niveaux de l’OM dont le sujet « Calculer l’opérateur composé de deux opérateurs » fait partie. C’est ce qui laisse supposer que ce sujet est « commun » aux élèves et au professeur.

Comment le professeur va-t-il s’y prendre pour inciter les élèves à se placer définitivement dans le cadre de ce sujet ?

L’extrait précédent vient suite à plusieurs tours de parole à partir de L6 :

31	P	Donc on a changé seulement l’ordre des nombres. Donc si on change l’ordre des nombres dans une opération, on a des additions et des soustractions, est-ce que la réponse change ?
----	---	---

Extrait 40 : Nombres Relatifs S3/ L31

Le professeur engage la tâche « Changer l’ordre des nombres » par une « bifurcation » qui constitue à replacer les élèves dans un flou sur les milieux institutionnels du savoir. Il s’agit pour lui de citer la propriété mathématique (commutativité) dans le contexte des « Nombres Relatifs » puisque sa réponse contient les deux mots « nombres et opérations » : « *Donc on a changé seulement l’ordre des nombres* ». Il continue par « *Donc si on change l’ordre des nombres dans une opération, on a des additions et des soustractions* ». A ce moment de l’enseignement, les élèves ne connaissent que les additions et les soustractions dans le contexte des entiers positifs : « *Addition* : c’est augmenter un état initial et *Soustraction* : c’est diminuer un état initial ». Alors que le professeur se place dans le secteur des « Nombres Relatifs ». Il semble qu’il identifie l’opérateur (-10) avec le nombre négatif (-10). C’est ce qui nourrit la bifurcation qui sème un « flou » sur les OD et les OM du savoir.

Notons que la propriété est énoncée dans l’ingénierie (p 15) par « Si on change l’ordre des opérations dans un programme de calcul contenant des additions et des soustractions, on obtient un programme de calcul équivalent ». La « commutativité » réfère au cadre des programmes de calcul, c’est-à-dire des opérateurs à ce moment du temps didactique. Par contre le professeur a repris cette propriété mais dans l’ensemble des « Relatifs ». Dans ce sens il devance les milieux institutionnels du savoir avant même qu’ils soient introduits.

En conclusion, le professeur s’est placé seul dans le secteur « Nombres Relatifs » qui renferme le premier thème « Identifier les nombres relatifs » en activant le sujet « Ecrire un

nombre relatif » et le second thème « Opération sur les nombres relatifs » qui débouche sur le sujet « Additionner deux relatifs de signes opposés » qui est activé par le professeur pour la première fois.

6.8.2.3. Le dédoublement des milieux entre : les OM du professeur et les milieux institutionnels de l'ingénierie

L'extrait suivant se place dans le temps de clôture de la séance :

Min 42 sec40 (Fin de la séance)

1	Ka	Tu peux répéter un peu sur le changement d'ordre
2	P	Changement de l'ordre. Bien sûr. Regarde bien « ajouter 7 et soustraire 11 revient à quoi ? » (il montre $+7-11=-4$)
3	Re	A soustraire 4
4	P	Si je veux soustraire 11 avant d'ajouter 7. Soustraire 11 puis ajouter 7 (il montre $-11+7=-4$) revient à quoi ?
5	Els	Soustraire 4
6	P	C'est la même réponse n'est-ce pas ? Donc je peux changer l'ordre. Tu as compris ?
7	Ka	Pourquoi, on ne met pas moins par exemple 3 moins 8 (à propos de $+8-3=-3+8$)
8	P	Plus 3 moins 8. Tu n'as pas changé l'ordre. Tu as changé l'opération. Ici j'ajoute 8 et je soustrais 3 (il montre $+8-3$). Dans la deuxième aussi, j'ajoute 8, c'est le même nombre que j'ajoute, et je soustrais 3. Mais seulement j'ai changé l'ordre. Toi tu dis ajouter 3 et soustraire 8. Est-ce que j'ai ajouté 3 dans les deux ? (il montre $+8-3$) J'ai ajouté 8. Ici ajouter 8. Toi tu dis ajouter 3 et soustraire 8. C'est tout à fait différent. Oui Re
9	Re	Toi tu as dit on change l'ordre et on change encore le signe plus On additionne et on soustrait, c'est-à-dire
10	P	Mais quel est le signe qui précède 8
11	Re	Plus
12	P	Quel est le signe qui précède 3 ?
13	Re	Moins

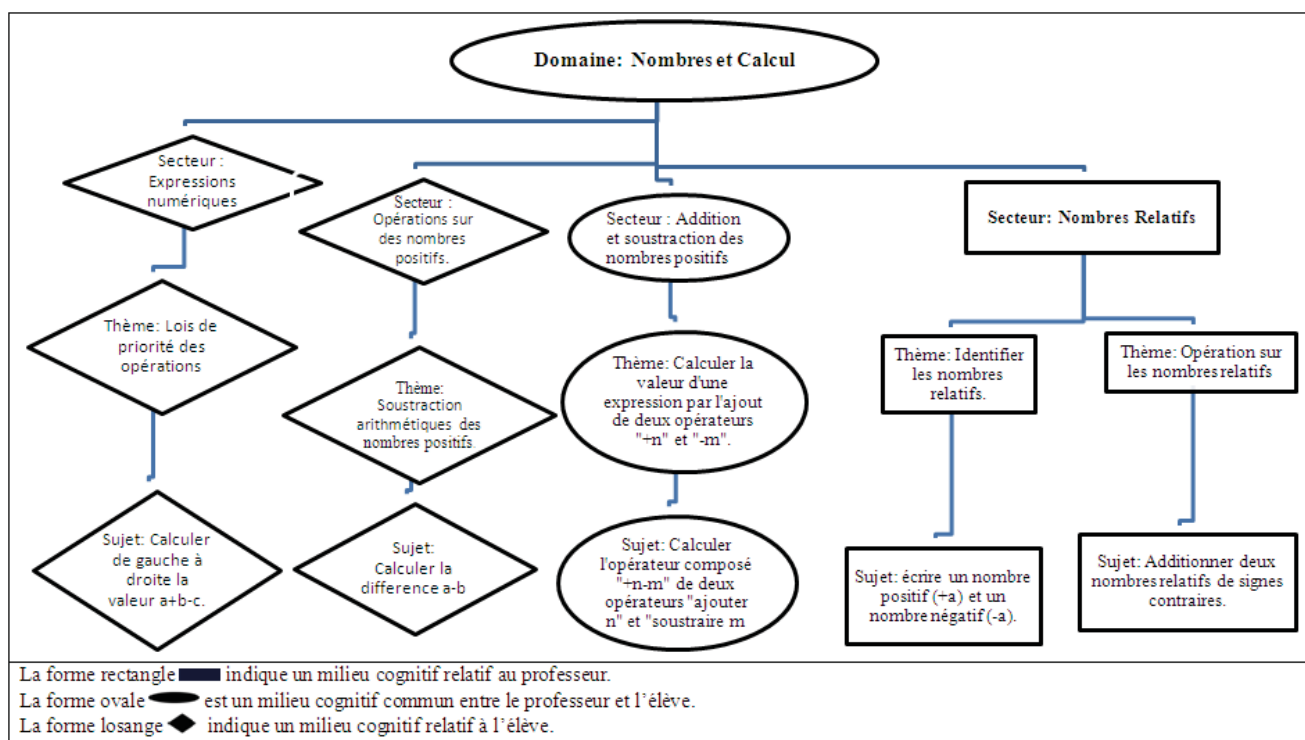
Extrait 41 : Nombres Relatifs S3/ Ext 4/ L1 à L13

Il s'agit d'expliquer à un élève la propriété de commutativité dans l'égalité ($-7+11 = +11-7$). **P** se place au sein du cadre de l'ingénierie qui consiste à faire un calcul sur des programmes de calcul : « Si je veux soustraire 11 avant d'ajouter 7. Soustraire 11 puis ajouter 7 (il montre $-11+7=-4$) revient à quoi ? » (L4).

Pour expliquer à **Ka** dans L7 : « Pourquoi, on ne met pas moins par exemple 3 moins 8 (à propos de $+8-3=-3+8$) », le professeur se place, en L10, au sein du secteur des nombres relatifs « Mais quel est le signe qui précède 8 » et encore « Quel est le signe qui précède 3 ? » (L12). Il fait ainsi advenir des éléments technologiques que les élèves ne connaissent pas. Une telle logique accroît la distance mésogénétique entre les milieux institutionnels de l'ingénierie et les OM et OD sollicitées par le professeur.

6.8.3. Conclusion

Le dédoublement a lieu entre les milieux cognitifs des élèves, les OM et OD utilisées par le professeur et les milieux institutionnels de l'ingénierie. Nous illustrons dans ce tableau la nouvelle OM mise en place pendant cette séance.



Tab OM 28 : Nombres Relatifs, Tableau du dédoublement des milieux de la troisième séance

6.9. Analyse de la quatrième séance

Cette séance est organisée ainsi :

1. Correction du devoir fait à la maison qui a pour but principal de valider la simplification du programme de calcul,
2. Introduction des « Nombres Relatifs »,
3. Addition des nombres relatifs positifs.

6.9.1. « Le programme de calcul » : Une technologie prise en œuvre par les élèves pour justifier des calculs

Nous avons indiqué dans la conclusion de la séance précédente (voir 6.8.3, p.234) que le sujet « Calculer un opérateur composé de plusieurs opérateurs » est devenu en général une technique d'élèves pour justifier les calculs sur des expressions de forme « $a + b - c$ ». La première partie de cette séance qui a duré près de seize minutes en est une preuve.

Dans allons étudier dans cette partie des tours de parole qui montrent l'implication des élèves dans la technique relative au type de tâches « Simplifier un programme de calcul ».

Min 7 sec 10

1	P	Mar (elle passe au tableau), soustraire 8 et soustraire 8 (elle écrit $-8-8=$) revient à quoi Mar
2	Mar	Zéro
3	P	Elle a dit zéro, qui sait la réponse ? (des doigts se lèvent) Jos
4	Jos	Moins 1
5	P	Non ce n'est pas soustraire 1. Cha
6	Cha	Moins 8.
7	P	Non
8	Sam	-16
9	P	Pourquoi moins 16 ?
10	Sam	Car moins 8 et moins 8 aussi c'est

Extrait 42 : Nombres Relatifs S4/ Ext 1/ L1 à L10

Le professeur mène le moment du travail de la technique « simplifier un programme de calcul » en coopération avec les élèves. Il s'agit de corriger le devoir et de donner oralement des exercices similaires. La réponse de Mar dans L2, « Zéro », au programme « soustraire 8 et soustraire 8 ($-8-8$) », semble représenter le calcul de « $8-8$ ». Ce calcul a lieu dans l'ensemble des entiers positifs puisque le nombre « -8 » (le premier -8) n'est pas encore introduit. Mar est ainsi contrainte de trouver une réponse. Elle mobilise dans ce cas ses connaissances antérieures sans se préoccuper du premier signe « moins ».

Cependant l'élève **Sam** a recouru dans sa réponse : « *car moins 8 et moins 8 aussi* » (L10) à l'idée d'un programme de calcul à partir du calcul : « A un nombre donné soustraire 8 et *aussi* soustraire 8 revient à lui soustraire 16 ». Il dispose de sa mémoire pratique relative aux « programmes de calcul » des séances précédentes. Ce rapport s'est établi dans le but de trouver des techniques plus économiques pour calculer des expressions de la forme « $a + b - c$ » où a est un nombre initial donné ». « *Ce type de mémoire rencontre alors la métis de l'élève, que l'on souhaite devenu un temps mathématicien ; c'est-à-dire devenu, par sa ruse et son intelligence, créateur de mathématiques, bien qu'elles en soient peut-être restées à l'état brut, non abouties, demandant affinage et validation, mais en tout cas nouvelles pour lui et pour ses pairs* » (Matheron, 2010). Donc la métis de **Sam** ainsi que son bon sens pour trouver une justification mathématique lui ont permis de proposer une technologie liant ses connaissances antérieures (calculer une expression de forme $a + b - c$) au nouveau cadre (programme de calcul).

Cet extrait est suivi de plusieurs interventions qui pourraient montrer l'engagement des élèves dans la technique basée sur « le programme de calcul ». Pour exemplifier nous montrons les interventions suivantes :

27	P	Passe au tableau (Re passe au tableau). Ajouter 5 et ajouter 5 revient à quoi ?
28	Els	Ajouter 10 (Re écrit $+5+5=$)
29	P	Ajouter 10 (Re fait le signe oui de tête et écrit $+10$) Oui, Man (elle passe au tableau), ajouter 3 et ajouter 4 revient à quoi ? (elle écrit $+3+4=$)
30	Els	Ajouter 7 elle écrit $+3+4=+7$)
31	P	Man est au tableau Revient à quoi ?
32	Man	7 (elle écrit $+7$ suite à $=$)
33	P	A ajouter 7, très bien. Jo (il passe au tableau) soustraire 4 et soustraire 5 (il écrit $-4-5=-9$).
34	Jo	Revient à soustraire 9

Extrait 43 : Nombres Relatifs S4/ Ext 2/ L27 à L34

Nous remarquons dans cet extrait que les élèves ont répondu immédiatement aux questions qui portent sur le calcul des programmes de calcul. Or le professeur a clôturé ses questions dans L27, L29 et L31 par l'expression « revient à quoi ? ». Pour cette raison, les élèves ont répondu par « ajouter ... » qui représente le programme de calcul simplifié. La réponse de **Jo**, « Revient à soustraire 9 » (L34), contient le signe « revient » (c'est le mot qui clôt le programme de calcul) alors que la question du professeur dans L33 ne contenait pas l'expression « revient à quoi ? ». Les réponses des élèves attestent que le rapport au sujet

« Calculer l'opérateur composé de deux autres opérateurs » est en train de se constituer d'une façon partagée.

6.9.2. L'institutionnalisation du programme de calcul effectué sur trois opérateurs

Le professeur compte aller vers l'institutionnalisation du programme de calcul dans le cas de trois opérateurs. Il a demandé aux élèves de calculer « $-5+5-1$ » (L37). C'est **Al** qui a répondu par « *Euh revient à soustraire 1* » (L38). Cet élève a effectué un calcul mental dans le cadre du programme de calcul. Nous citons l'extrait qui montre comment le professeur a explicité ce calcul aux élèves :

41	P	On a commencé, tu as commencé par cette opération n'est-ce pas ? (il montre $-5+5$ qu' Al relie ensemble par un trait) Soustraire 5 et ajouter 5 revient à quoi ?
42	Els	Zéro (Al écrit 0 au-dessous de $-5+5$)
43	P	Zéro (Al après 0 il écrit $-1=-1$). Zéro et soustraire 1 de zéro revient à soustraire 1. Très bien Ant (il passe au tableau) Ajouter 2 et ajouter 4 (il écrit $+2$) et ajouter 4 (il écrit $+4=$) revient à quoi Ant ?

Extrait 44 : Nombres Relatifs S4/ Ext 3/ L41 à L43

Comme prévu, le professeur accorde une priorité au calcul des opérateurs « soustraire 5 » et « ajouter 5 ». Au tableau, l'élève **Al** relie ces deux opérateurs et écrit un zéro en dessous.

Mais pour effectuer le calcul de « $0 - 1 = \dots$ ». Le professeur a ajouté l'explication suivante : « *Zéro et soustraire 1 de zéro revient à soustraire 1* » (L43). Or du point de vue « cognitifs » des élèves, dire « soustraire 1 de zéro » est dénué de sens dans l'ensemble des nombres positifs. Cela puisque les élèves savent que 1) zéro est le plus petit des nombres positifs et 2) la soustraction des nombres positifs fait diminuer l'état initial. Face à ces deux connaissances, l'explication de **P** n'est pas acceptée par les élèves. Par suite le calcul mené par le professeur « soustraire un de zéro » n'a de sens que s'il se fait dans le secteur « Nombres Relatifs ».

Cette même explication est reprise dans l'extrait ci-dessous :

46	P	Rox, ajouter 4 soustraire 4 et ajouter 2 (elle écrit $+4-4+2=+2$, hésitante elle efface du coup la réponse $+2$, elle joint $+4$ et -4 et met en dessous 0). C'est bien, ajouter 4 et soustraire 4 (il montre du doigt les nombres) revient à
47	Els	Zéro
48	P	Ecris, zéro plus 2 (elle écrit suite à $= 0+2=$). Ajouter 2 à zéro revient à ?
49	Els + Rox	2, plus 2 (Rox écrit 2 après $=$ et retourne à sa place)

Extrait 45 : Nombres Relatifs S4/ Ext 4/ L46 à L49

Il s'agit de simplifier le programme « $+4 - 4 + 2$ ». **Rox** a écrit la réponse correcte au tableau après avoir souligné les opérateurs opposés « $+4$ et -4 ». Cependant le professeur a demandé dans L48 : « *Ecris, zéro plus 2 (elle écrit suite à $= 0+2=$). Ajouter 2 à zéro revient à ?* ». Cette explication « ajouter deux à zéro » relève du sujet « additionner deux nombres positifs » puisque le programme de calcul : « $0+2$ » peut se traduire par « ajouter 0 et ajouter 2 à un nombre revient à lui ajouter 2 » et non par « ajouter 2 à zéro ».

6.9.3. Conclusion de la première partie de la quatrième séance

Les niveaux de codétermination didactique sollicités par les uns et les autres dans les moments précédents de cette séance n'ont pas changé de ceux de la séance précédente (voir *Tab OM 28*, p.235). La différence qui s'est établie dans cette première partie réside dans la disparition des techniques de calcul dans les deux sujets « Calculer de gauche à droite dans une expression numérique de la forme $(a + b - c)$ » et « Calculer la différence positive de $(b - c)$ ». Au fur et à mesure que cette partie avance, ces deux sujets ont laissé place au milieu institutionnel : « Calculer l'opérateur composé de plusieurs (deux ou trois) opérateurs » proposé par l'ingénierie.

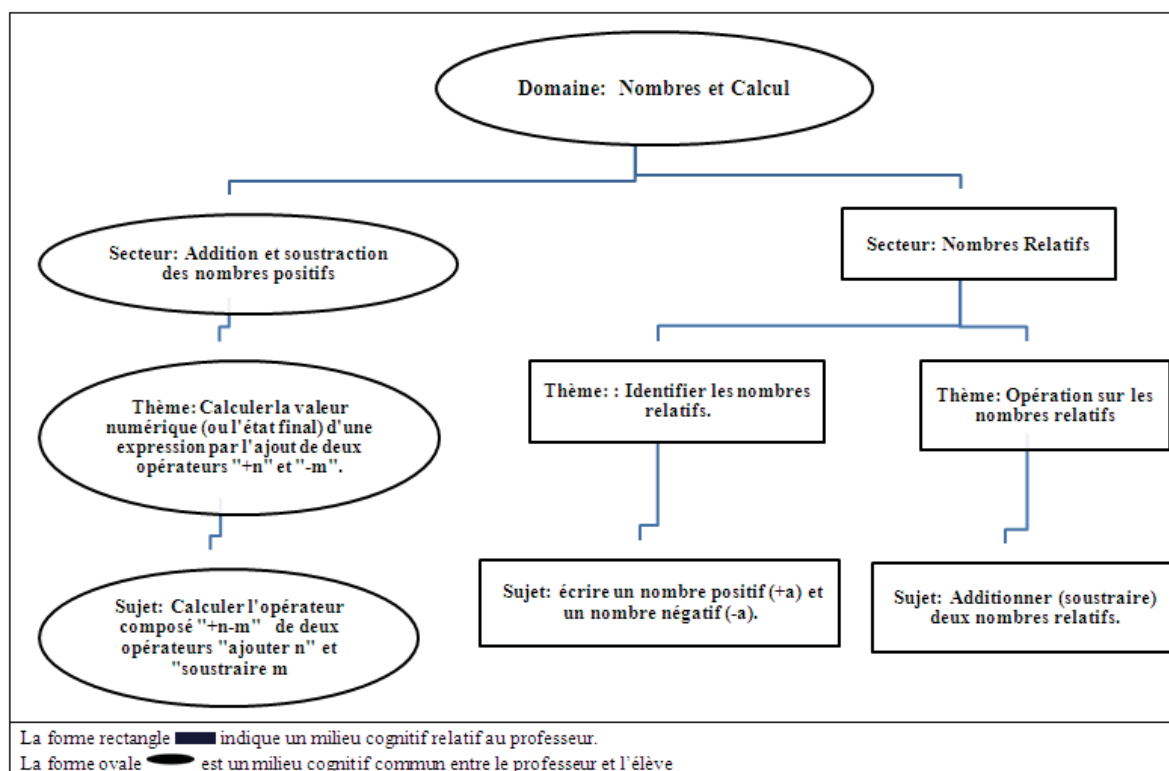
En général, les élèves se sont impliqués dans le sujet institutionnel du savoir. Ils ont effectué différents calculs avec réussite portant sur : « deux additions, deux soustractions, des programmes comprenant trois opérations, des programmes équivalents à zéro ». Dans ce sens nous pouvons dire que « *L'idée commence à vivre que ce que l'on fait sur les programmes de calcul s'apparente à ce qui se fait avec des nombres. C'est désormais au professeur de dire que l'on « invente » de nouveaux nombres : les négatifs* » (Ingénierie, p15). En d'autres termes, la distance mésogénétique entre les milieux cognitifs des élèves et le milieu institutionnel du savoir diminue. La distance est ainsi plus réduite. Par suite, le dédoublement entre ces milieux tend à s'annuler.

Cependant, le milieu institutionnel n'est pas l'unique milieu qui a existé dans la classe. Nous avons prouvé l'existence de plusieurs sujets « distincts » entre le professeur et les élèves, aptes à faire émerger un dédoublement de milieux.

L'organisation didactique cette partie a permis de faire vivre deux moments : construction d'un bloc technologico-théorique et moment de travail de la technique. On a « Calculé une expression numérique » en utilisant des justifications qui se placent au niveau du sujet « Calculer (additionner ou soustraire) deux nombres relatifs ». Le partage des connaissances

relatives à ce niveau ne peut s'appuyer sur les rapports établis par les élèves : les nombres relatifs ne relèvent pas de leurs connaissances antérieures. Le professeur devance le savoir enseigné par des gestes qui renvoient subtilement à sa propre connaissance de l'OM sur les « Nombres Relatifs ». L'activation par le professeur d'éléments technologiques relevant du secteur « Nombres Relatifs » a contribué à l'apparition d'un dédoublement des milieux.

Nous illustrons notre analyse précédente dans le tableau ci-dessous afin de montrer les différents niveaux de codétermination didactique activés au cours de cette partie de la quatrième séance. Dans ce tableau, nous observons que le milieu institutionnel du savoir est pris en compte par les élèves. Cependant le professeur a pris en charge la mobilisation d'autres niveaux qui ne concernent uniquement que lui.



Tab OM 29 : Nombres Relatifs, Tableau du dédoublement des milieux de la première partie de la quatrième séance

6.9.4. Introduction des Nombres Relatifs

6.9.4.1. L'introduction de nouveaux nombres : les nombres Positifs et les nombres Négatifs

Le professeur a institutionnalisé pendant les moments d'enseignement précédents le calcul sur « les programmes de calcul ». Les élèves, quant à eux, ont mis en œuvre ce type de calcul à partir de la troisième séance. De plus, ils l'ont pris comme cadre technologique pour justifier des calculs faits sur deux additions, deux soustractions etc.

Dans l'extrait ci-dessous, nous montrons l'introduction des « Nombres Relatifs » :

Min 16 sec 57 jusqu'à min 27 sec 50

1	P	Donc on a sur le tableau des nombres qui sont précédés du signe moins (il montre le nombre -30 au tableau), des nombres précédés du signe plus (il montre le nombre +10) et des nombres sans signes par exemple le zéro. Qu'appelle-t-on ces nombres ? Qui sait ?
2	Sam	Nuls
3	P	Non
4	Cha	Consécutifs
5	P	Non
6	Eln	Relatifs, nombres Relatifs
7	P	Nombres Relatifs, c'est le titre du chapitre. C'est bien ce sont les nombres relatifs. Mais qui sait par exemple comment on appelle les nombres précédés du signe moins ?
8	Jo	Les nombres négatifs
9	P	Très bien, les nombres précédés du signe moins s'appellent les nombres négatifs. Et ceux précédés du signe (il tend le doigt vers les nombres précédés par un signe plus)
10	Els	Brouhaha, positifs
11	P	Très bien, tous les nombres positifs et négatifs sont appelés les nombres relatifs. Est-ce que c'est clair ?

Extrait 46 : Nombres Relatifs S4/ Ext 5/ L1 à L11

Le professeur mène le moment de la première rencontre avec les Nombres Relatifs par la monstration de « Programmes de calcul équivalents » écrits au tableau (-30 et +10). Leur introduction ne s'est pas faite réellement à partir de ces programmes « *on a sur le tableau des nombres qui sont précédés du signe* » (L1). Il a attiré l'attention des élèves sur la représentation sémiotique de ces nouveaux objets « nombre et signe » ou « nombre sans signe » représentant uniquement le zéro (pour ce moment). Ensuite il a mis en évidence ces objets mathématiques nouveaux qui seront notés « *ce sont les Nombres Relatifs* » (L7). Enfin il présente les nombres Négatifs ceux précédés du signe « moins » et les nombres Positifs ceux précédés du signe « plus ».

Cette introduction ne coïncide pas effectivement avec « *L'idée commence à **vivre** que ce que l'on fait sur les programmes de calcul s'apparente à ce qui se fait avec des nombres. C'est désormais au professeur de dire que l'on « invente » de nouveaux nombres : les négatifs* » (Ingénierie, p.15). En outre, dans la partie définition (Ibid.) nous lisons : « a) Les nombres entiers peuvent donc être notés avec un signe + ; on les appelle des nombres positifs ». Cela garde un lien étroit entre les anciens et les nouveaux nombres.

Cette introduction montre, pour le moment, que les nouveaux nombres sont introduits d'une façon formelle. Cela puisque le lien avec les « anciens » travaux concernant les « programmes de calcul » n'est pas pris en compte dans cet extrait, ainsi que le lien avec les « anciens » nombres. Nous nous attendons à ce qu'un certain nombre de règles se construisent dans l'implicite sur la base de confusions, principalement à propos du signe « + » des nombres positifs. Pour exemplifier, nous extrayons les tours de parole suivants :

33	P	Donnez-moi des nombres relatifs
34	Els	Zéro
35	P	Zéro
36	San	1
37	P	Plus 1

Extrait 47 : Nombres Relatifs S4/ Ext 6/ L33 à L37

Le professeur corrige l'élève **San** à propos du nombre positif qu'il a donné dans L36 : « 1 » n'est pas correct. Le nombre positif est « *plus 1 (+1)* ». Dans ce sens, le professeur semble préoccupé par l'enseignement des nouveaux symboles désignant les types de nombres au détriment de l'enseignement de la relation qui existe entre le nouveau et l'ancien. C'est-à-dire entre les nombres positifs que les élèves connaissent et les nouveaux nombres positifs que le professeur a « inventés ». Cette invention pourrait constituer une mise « au frigo » des « nombres anciens » des élèves par l'intermédiaire d'une nouvelle dénomination « la valeur absolue » :

47	P	Relatifs. Le nombre relatif est composé d'un signe (il entoure le signe plus devant 5)
48	Re	Et d'un chiffre
49	Ma	Plus trois
50	P	Ce nombre s'appelle, c'est-à-dire le nombre sans le signe, s'appelle la valeur absolue de ce nombre, c'est-à-dire plus 5 est composé du signe plus
51	Re	Et de la valeur absolue

Extrait 48 : Nombres Relatifs S4/ Ext 7/ L47 à L51

Cet extrait montre que les élèves sont familiers avec l'écriture des « nombres positifs ». C'est le cas de l'élève **Ma** qui a proposé dans L49 le nombre : « Plus trois » pour un nombre positif.

Le professeur a officialisé une nouvelle dénomination « la valeur absolue » pour parler des « nombres anciens » des élèves.

Par suite, le nombre positif est formé d'un signe « plus » et d'une « valeur absolue ». C'est ce qui pourrait renforcer l'idée d'une rupture entre anciens nombres / nouveaux nombres positifs.

Bref, l'introduction de ces nombres continue avec cet extrait :

75	P	Avec le signe plus sont appelés les nombres
76	Els	Positifs
76	P	Les nombres positifs (il continue à écrire s'appellent « nombres positifs », * Les nombres)
78	Re	Et les nombres précédés d'un signe moins s'appellent négatifs

Extrait 49 : Nombres Relatifs S4/ Ext 8/ L75 à L78

Cet extrait institutionnalise les nombres relatifs. Ils sont positifs avec « le signe plus » et négatifs avec le signe « moins ».

Le professeur passe ensuite à l'acte. Il a donné des exercices pour fixer les rapports des élèves avec ces nouveaux objets de savoir. Il a demandé à ses élèves de donner des nombres positifs puis négatifs. Voilà les réponses recueillies :

$$\begin{cases} \text{Nombres positifs : } 0, +1, +2, +8, +4, \dots \\ \text{Nombres négatifs : } 0, -1, -2, -8, -6, -12, \dots \end{cases}$$

Nous remarquons que, pour ces élèves qui ont répondu, les nombres positifs doivent être précédés par le signe « plus ». Cela peut justifier la présence d'une rupture avec les nombres positifs qu'ils connaissent déjà.

6.9.4.2. L'écriture des nouveaux Nombres Positifs

Min 33 sec 7 jusqu'à min 34 sec 40

1	P	Faites bien attention. Les nombres négatifs sont toujours précédés du signe (il montre les exemples notés au tableau et place la craie sur le signe -)
2	Els	Moins
3	P	Moins. Les nombres positifs sont précédés du signe plus (il montre les exemples notés au tableau et place la craie sur le signe +) Mais par exemple plus 2 (il écrit $+2=2$) c'est-à-dire au lieu d'écrire plus 2 on peut parfois écrire 2, 2 c'est-à-dire plus 2. Au lieu d'écrire plus 3 (il écrit $+3=$) on peut écrire
4	Els	3

Extrait 50: Nombres Relatifs S4/ Ext 9/ L1 à L4

Le professeur a passé une minute à peu près pour montrer les différentes écritures des nombres positifs. Cependant il n'a pas donné une importance particulière à ce qu'il a déclaré. Il a commencé son discours par reprendre l'écriture générale du nombre positif « *les nombres positifs sont précédés du signe plus* » (L3). Il a ensuite donné un exemple qui peut s'écrire *parfois* sans le signe plus : « *Mais par exemple plus 2 (il écrit $+2=2$) c'est-à-dire au lieu d'écrire plus 2 on peut parfois écrire 2, 2 c'est-à-dire plus 2* » (suite de L3). La spécificité de cette écriture (nombre positif sans signe) est montrée dans l'extrait ci-dessous »

Min 38 sec12 jusqu'à min 39 sec 2

1	P	Ma , que veut dire un nombre positif ? Ma, lève-toi, oui
2	Ma	Zéro, plus 1, plus 2, plus 6
3	P	Donc, que veut dire un nombre positif ?
4	Re	Précédé
5	P	Ce sont les nombres précédés
6	Els	Par le signe plus
7	P	Assieds-toi, oui Man les nombres négatifs
8	Man	Les nombres négatifs sont avec moins
9	Re	Précédé
10	P	précédé du signe moins. Assieds-toi Les nombres relatifs. oui Jo
11	Jo	Les nombres relatifs ça veut dire les deux signes moins et plus
12	P	Les nombres positifs et les nombres négatifs. Très bien

Extrait 51 : Nombres Relatifs S4/ Ext 10/ L1 à L12

Nous remarquons dans cet extrait que tous les nombres positifs donnés par les élèves sont écrits avec le signe « plus ». Les signes « moins et plus » révèlent l'aspect « Relatifs » de ces nombres. C'est ce que montre le tour de parole L11 de **Jo** : « *Les nombres relatifs ça veut dire les deux signes moins et plus* ». Nous pouvons remarquer qu'aucun des élèves n'a osé donner un nombre positif sans signe. Par suite, l'aspect « les nouveaux nombres positifs sont les

anciens nombres » que les élèves manipulent depuis des années n'apparaît pas comme une connaissance des élèves.

En conclusion, les explications du professeur concernant l'introduction des nouveaux nombres ont sans doute marqué la mémoire des élèves. Du coup, tout nombre « Positif » apparaît ainsi comme « nouveau » et s'écrit avec un signe « plus ».

Par suite, le statut des nombres relatifs positifs et négatifs n'est pas perçu correctement par les élèves.

Pour exemplifier, nous allons nous permettre de tirer un extrait de la cinquième séance afin de montrer cette confusion.

6.9.4.3. Confusion entre « nouveaux / anciens » : cas de comparaison de deux nombres positifs +2 et +4

La comparaison de deux nombres positifs de petite taille (inférieurs à 10) est une tâche très routinière pour les élèves de EB6. Nous cherchons à savoir si cette tâche demeure en tant que telle aux élèves ou sera envisagée différemment avec l'introduction de ces nouveaux nombres.

Cinquième séance Min 13 sec 06 jusqu'à min 14 sec 57

1	P	Nous allons maintenant comparer deux nombres relatifs. On commence par (il écrit et souligne * Comparaison) On commence par le premier cas. Si on a deux nombres positifs par exemple (il écrit et souligne : 1) Deux nombres positifs).
2	Re	Plus 2
3	P	Premier cas, si on a deux nombres positifs par exemple. Par exemple
4	Els	Plus 2
5	P	plus 2 et
6	Elv	plus 4
7	P	plus 4 (il écrit +2 ... +4). Qui est le plus grand ?
8	Eli	Plus 4
9	Mar	Plus 2
10	P	Oui Eli
11	Eli	Plus 4
12	P	Plus 4. Si les deux nombres sont positifs, on a déjà dit au lieu de 2 je peux écrire
13	Els	2
14	P	(Il efface le signe + devant 2) Au lieu de 4
15	Els	4
16	P	Au lieu de plus 4 (Il efface le signe + devant 4)
17	Els	4
18	P	Qui est le plus grand 2 ou 4 (il note $2 \leq 4$) Donc c'est le même sur ce qu'on sait déjà
19	Ta	On n'écrit pas plus ?
20	P	Si, on écrit plus (il ajoute les deux plus devant 2 et 4) Plus deux c'est deux, plus quatre c'est quatre

Extrait 52 : Nombres Relatifs S4/ Ext 11/ L1 à L20

Le professeur mène la comparaison de deux « nombres positifs » dans le moment de travail de la technique, par l'activation de la mémoire pratique des élèves. Il s'agit pour lui d'organiser un travail de remémoration sur une propriété mathématique « comparaison de deux nombres » considérée, pour lui, comme évidente chez les élèves dans le cadre des nombres qu'ils connaissent « *Donc c'est le même sur ce qu'on sait déjà* » (L18).

Pourtant les élèves réalisent ce type de tâches dans un moment de l'émergence d'une nouvelle technique. Leurs réponses, recueillies au cours de cet extrait, paraissent confuses. Ils n'ont pas saisi directement la réponse, ils ont hésité dans la recherche du plus grand nombre entre +2 et +4. Contrairement aux attentes du professeur sur le fait que cette tâche relève des acquis antérieurs « *ce qu'on sait déjà* » (L18), les liens avec les anciennes comparaisons ne paraissent pas évidents. C'est le cas de **Mar** qui a répondu par « *Plus deux (+2)* » (L9) pour dire que « +2 est plus grand que +4 ». Sa réponse est là pour corriger celle de **Eli** « *Plus quatre (+4)* » (L8). **Mar** se retrouve d'emblée confronté à un ensemble de règles qui lui semble arbitraires et qui se construisent dans l'implicite qu'il ne saisit pas des confusions entre les nombres positifs qu'il connaît déjà et les nouveaux nombres relatifs. L'élève **Ta** s'est intéressé à la façon d'écrire les nombres « *On n'écrit pas plus ?* » (L19). Cet élève était préoccupé par la mise en place des tâches « *Ecrire des nombres* » qui soient différentes de la tâche principale proposée par le professeur « comparer deux nombres ».

Ces tâches ne relèvent pas d'une technique relative à des OM antérieurement institutionnalisées.

Le professeur est intervenu pour expliquer lequel est le plus grand. Il a effacé les signes « plus » devant les deux nombres en récitant la phrase « Au lieu de +2 on écrit 2 » (L14 et L16). Cette phrase replace les élèves dans leur milieu primitif dans lequel ils ont l'habitude de comparer : « l'ensemble des entiers naturels ».

En conclusion, les propriétés mathématiques qui relèvent des tâches routinières dans le cadre des anciens nombres ne se transposent pas effectivement aux nouveaux nombres. C'est le cas par exemple de la comparaison de deux nombres positifs qui est considérée comme relevant d'une propriété mathématique institutionnalisée du point de vue professeur, mais qui renvoie à une tâche nouvelle du point de vue des élèves. Cette confusion élargit la distance mésogénétique entre les milieux cognitifs des élèves et les milieux institutionnels du savoir et favorise l'entretien du dédoublement des milieux.

6.9.5. Conclusion de la deuxième partie de la quatrième séance

L'absence du lien entre les « anciens » nombres des élèves et les « nouveaux » nombres relatifs

Au cours de cette séance, l'introduction des nouveaux nombres a été faite d'une façon plutôt formelle ou canonique (renvoyant à la forme) que fonctionnelle (concernant le sens et la signification). Le professeur semble préoccupé par l'enseignement des nouveaux symboles désignant les « Nombres Relatifs » au détriment de l'enseignement du rapport qui existe entre nouveaux / anciens nombres.

Le lien avec la technique institutionnalisée par les élèves qui concerne « Calculer une expression en effectuant un programme de calcul » n'est pas pris en compte ainsi que le lien avec les « anciens » nombres positifs des élèves.

Nous avons ainsi identifié l'apparition de certaines règles qui se construisent dans l'implicite, principalement sur la base de confusions à propos de l'écriture de ces nombres. Par exemple, pour l'élève **Jo** : « *« Les nombres relatifs ça veut dire les deux signes moins et plus »* (voir *Ext 42*, p.236).

En revanche, le professeur a officialisé une nouvelle dénomination : « la valeur absolue », qui tend à remplacer les « anciens » nombres chez les élèves. A cet égard, tout nombre positif sera formé de deux parties : un signe « plus » et d'une « valeur absolue ». C'est ce qui pourrait renforcer l'idée d'une rupture entre anciens / nouveaux nombres positifs.

Il a utilisé peu de temps pour montrer les différentes écritures d'un nombre positif. Cependant il n'a pas donné une importance à ce fait. Ces facteurs ainsi que d'autres montrent que le professeur remplace les milieux institutionnels proposés dans l'ingénierie par la mobilisation de ses pratiques professorales dans l'enseignement ordinaire des Nombres Relatifs que nous avons relevé quelques une de leurs traces à partir de l'étude faite sur le programme libanais (voir 6.3, p.168) et des manuels (voir 6.4, p.173). Ces études prescrivent l'introduction des nombres « Relatifs » à partir des cadres de pratiques vécues par les élèves (météo, cabine d'ascenseur, etc).

A son insu, le professeur a introduit les nombres relatifs par la « monstration de quelques nombres écrits au tableau » sans les rapporter aux milieux institutionnels (simplifier des programmes de calcul) proposés dans l'ingénierie. Notons que la technique basée sur « la simplification un programme de calcul » constitue, pour l'ingénierie didactique, le sujet d'étude des séances précédentes. Mais **P** a fait comme il a l'habitude dans l'enseignement

ordinaire : une simple « monstration » des nombres précédés d'un signe est suffisante pour introduire les nombres relatifs.

D'autre part, les programmes ainsi que les manuels présentent les nombres relatifs sous la forme : (+a), (-a) et 0. Le professeur n'a pas consacré que peu d'importance sur ce détail. Dans ce sens, un nombre positif est de la forme (+a). Cette conception est soutenue par le professeur tout le long de l'introduction : il a refusé la réponse de **San** quand il a dit que « 1 » est un nombre positif (voir *Ext 47*, p.243).

De plus, nous avons vu que les élèves ne projettent pas, sur les nouveaux nombres, les techniques et les propriétés mathématiques connues sur les « anciens ». Ces propriétés relèvent des tâches routinières dans le cadre des anciens nombres. C'est le cas par exemple de la comparaison de deux nombres positifs qui, du point de vue professeur, est considérée comme relevant d'une propriété mathématique connue, mais constitue, du point de vue des élèves, une tâche nouvelle. Par exemple, la comparaison de deux nombres **+2** et **+4** a été très difficile aux élèves. Ils n'ont pu ni la faire, ni la justifier (voir 6.9.4.3, p.246).

En conclusion, les explications du professeur concernant l'introduction des nouveaux nombres ont marqué une rupture spectaculaire avec ceux que les élèves connaissent.

Résultats pour notre recherche

L'introduction faite sur les nombres relatifs a marqué une distance mésogénétique entre 1) les milieux cognitifs des élèves représentés par leurs connaissances antérieures sur les anciens nombres, 2) les milieux institutionnels du savoir représentés par les OM et les OD proposées dans l'ingénierie et 3) les OM du professeur pour les « Nombres Relatifs » et ses contraintes professionnelles sur des pratiques didactiques de l'enseignement ordinaire.

Cette distance est due essentiellement aux représentations sémiotiques de ces nouveaux objets mathématiques. Les actes cognitifs qui en ressortissent ne sont pas identiques. Pour le professeur les anciens et nouveaux nombres positifs sont identiques : « *Les nombres positifs sont précédés du signe plus. Mais par exemple plus 2 (il écrit $+2=2$) c'est-à-dire au lieu d'écrire plus 2 on peut parfois écrire 2, 2 c'est-à-dire plus 2* » (voir *Ext 49*, p.246). Ceci n'est pas le cas des élèves qui, avec les contraintes imposées par le professeur, les a institutionnalisés comme étant des objets nouveaux :

9	P	Très bien, les nombres précédés du signe moins s'appellent les nombres négatifs. Et ceux précédés du signe
10	Els	(Brouhaha) Positifs

La distance mésogénétique dépend essentiellement du caractère topogénétique du professeur accordé aux élèves. En d'autres termes, le topos du professeur lui a permis davantage de devancer sur les OM du savoir pour constituer, selon les cas, un cadre technologique apte à justifier les tâches et les techniques d'élèves. P remonte sur des niveaux de codétermination didactique suffisamment élevés et provoque un « flou » sur les milieux au sein desquels travaillent les élèves. Dans ce sens il en ressort de nouvelles réorganisations mathématiques issues effectivement de la diversité des niveaux de codétermination qui ont contribué à l'apparition du « dédoublement des milieux ».

Niveaux de codétermination

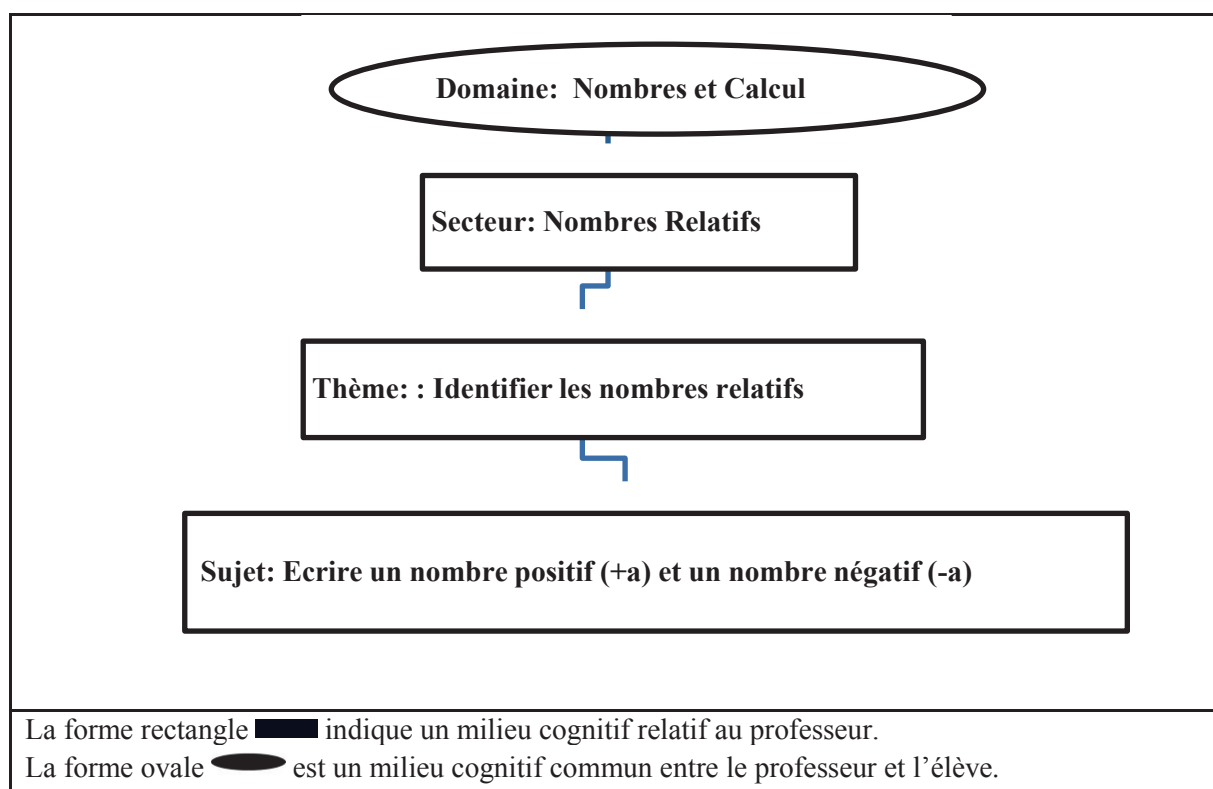
L'introduction des nombres relatifs s'est faite en l'absence des sujets relatifs aux élèves puisque l'émergence de ce nouveau savoir s'est réalisée en rupture avec leurs connaissances antérieures et les techniques institutionnelles « Calculer l'opérateur composé de deux autres opérateurs » développées au cours des séances précédentes.

En revanche, le sujet institutionnel commun pris en compte par les élèves et le professeur dans la première partie de la séance ne s'est pas construit dans les moments que le professeur pensait réservés à la constitution du nouveau savoir. Il suffit pour le professeur de montrer quelques-uns de ces nombres (opérateurs) pour se préoccuper de leur nomination :

1	P	Donc on a sur le tableau des nombres qui sont précédés du signe moins (il montre le nombre -30 au tableau), des nombres précédés du signe plus (il montre le nombre +10) et des nombres sans signes par exemple le zéro. Qu'appelle-t-on ces nombres ? Qui sait ?
----------	----------	--

C'est ce qui montre que le sujet institutionnel du savoir n'est plus présent dans l'OD de cette introduction. Les élèves ont travaillé ainsi dans l'implicite. Leurs rapports personnels au nouveau savoir sont déstabilisés puisque la liaison avec leurs connaissances antérieures est absente. Par contre, le professeur s'est placé dans le secteur « Nombres Relatifs » qui englobe le thème « identification des nombres relatifs » pour montrer le sujet « Ecriture des nombres Relatifs ».

Nous illustrons dans le tableau ci-dessous les niveaux de codétermination didactique relatifs à cette deuxième partie de la séance :



Tab OM 30 : Nombres Relatifs, dédoublement des milieux de la deuxième partie de la quatrième séance

6.10. Conclusion finale du chapitre

Déroulement

Dès les premiers moments du travail, les élèves ont mis en œuvre des techniques personnelles pour le calcul de l'expression numérique : « $a + b - c$ (où a , b et c sont trois entiers positifs et $b > c$) ». Nous avons vu qu'ils ont mobilisé des techniques qui reposent effectivement sur leurs connaissances antérieures, par exemple : « Calculer $(a + b - c)$ suivant l'ordre $(a + b) - c$ (de gauche à droite) » ou « suivant l'ordre $a + (b - c)$ (différence positive de b et c) ». Ils ont eu de la peine pour prendre ces techniques en défaut, les rejeter, pour accepter la technique attendue (telle qu'elle est proposée dans l'ingénierie) qui repose sur les programmes de calcul : « Ajouter... puis soustraire... à un nombre... revient à ... à ce nombre ».

Au cours de la première séance, le professeur ne s'est pas impliqué complètement dans la logique des élèves pour la résolution de la tâche « Calculer la valeur de l'expression : $a + b - c$ ». Il a parfois imposé des contraintes et des contrats sur l'usage de quelques techniques (voir contrat 1, 6.6.2.1, p.193 et contrat 2, 6.6.2.2, p.195). Néanmoins, il a justifié, à plusieurs reprises, la technique institutionnelle en se servant des connaissances antérieures des élèves. Par exemple, il a pris en charge le sujet concernant « La différence positive de deux nombres ($b - c$) » après qu'il l'avait rejeté au profit du sujet « Calculer l'opérateur composé de deux opérateurs $(+b - c)$ ». De plus, il a activé le secteur « Expressions Algébriques », dont l'étude montre qu'il ne touche guère aux OM des élèves puisqu'ils ne l'ont pas étudié à ce moment de l'année scolaire (voir 6.6.7.2, p.214).

Au cours de la deuxième séance, le professeur a produit des justifications technologiques à des techniques d'élèves, ou à des propriétés mathématiques, qui appartiennent à des niveaux de codétermination avancées et qu'ils ne peuvent pas être mobilisés par les élèves. Par exemple, les sujets « Ecrire un nombre positif $(+a)$ et un nombre négatif $(-a)$ » et « Décomposer un Nombre Relatif en une somme de plusieurs nombres ». Le professeur a donc activé des niveaux de codétermination qui découlent du « savoir mathématique » avant même qu'il soit enseigné et, donc appris par les élèves. En outre, le cadre de ces justifications ne convient pas non plus aux OM et aux OD définies dans l'ingénierie. En revanche, il a activé des OD qui vont à l'encontre de l'émergence scientifique, voire épistémologique, du savoir.

Au cours de la troisième séance et jusqu'aux moments qui précèdent l'introduction des « Nombres Relatifs » à la quatrième séance, les élèves se sont impliqués dans le sujet institutionnel du savoir. Ils l'ont pris en charge comme « élément technologique » pour justifier la tâche « Calculer l'expression numérique ». De plus, ils ont effectué avec succès différents calculs comme effectuer : « deux additions, deux soustractions, des programmes comprenant trois opérations, des programmes équivalents à zéro ».

En général, ils ont commencé à changer leurs techniques personnelles au profit des techniques relatives au milieu institutionnel du savoir. Pour la première fois, les rapports des élèves avec le sujet institutionnel transposé par le professeur se sont trouvés en étroite connexion. Cependant, le sujet institutionnel n'était pas l'unique milieu présent dans la classe en ces moments. Nous avons montré l'existence de plusieurs sujets qui sont différents pour le professeur et pour les élèves. Ceci ne permettait guère que de faire émerger uniquement des OM propres au milieu du professeur. Il s'agissait pour lui de mobiliser implicitement les deux sujets « Ecrire un nombre positif (+a) et un nombre négatif (-a) » et « Additionner (soustraire) deux Nombres Relatifs ».

Enfin, l'introduction des nouveaux nombres est réalisée d'une façon plutôt formelle ou canonique (renvoyant à la forme) que fonctionnelle (concernant le sens et la signification), car le lien avec la technique institutionnalisée par les élèves « Calculer une expression en effectuant un programme de calcul » n'est pas pris en compte par le professeur. Le rapport personnel des élèves au nouveau savoir a paru déstabilisé, au point qu'ils étaient devenus incapables de résoudre des tâches routinières pour eux comme la comparaison des nombres positifs +2 et +4 (voir 6.9.4.3, p.246).

L'OD de cette introduction a marqué une rupture spectaculaire avec les « Nombres primitifs » que connaissent les élèves. Le professeur a placé le savoir dans des niveaux qui ne peuvent pas être intégrés par les élèves. Il devance le savoir enseigné par des gestes qui relèvent subtilement de ses propres OM sur les « Nombres Relatifs », de ses attachements interprétatifs aux manuels scolaires et de ses pratiques professorales dans l'enseignement ordinaire.

Niveaux de codétermination

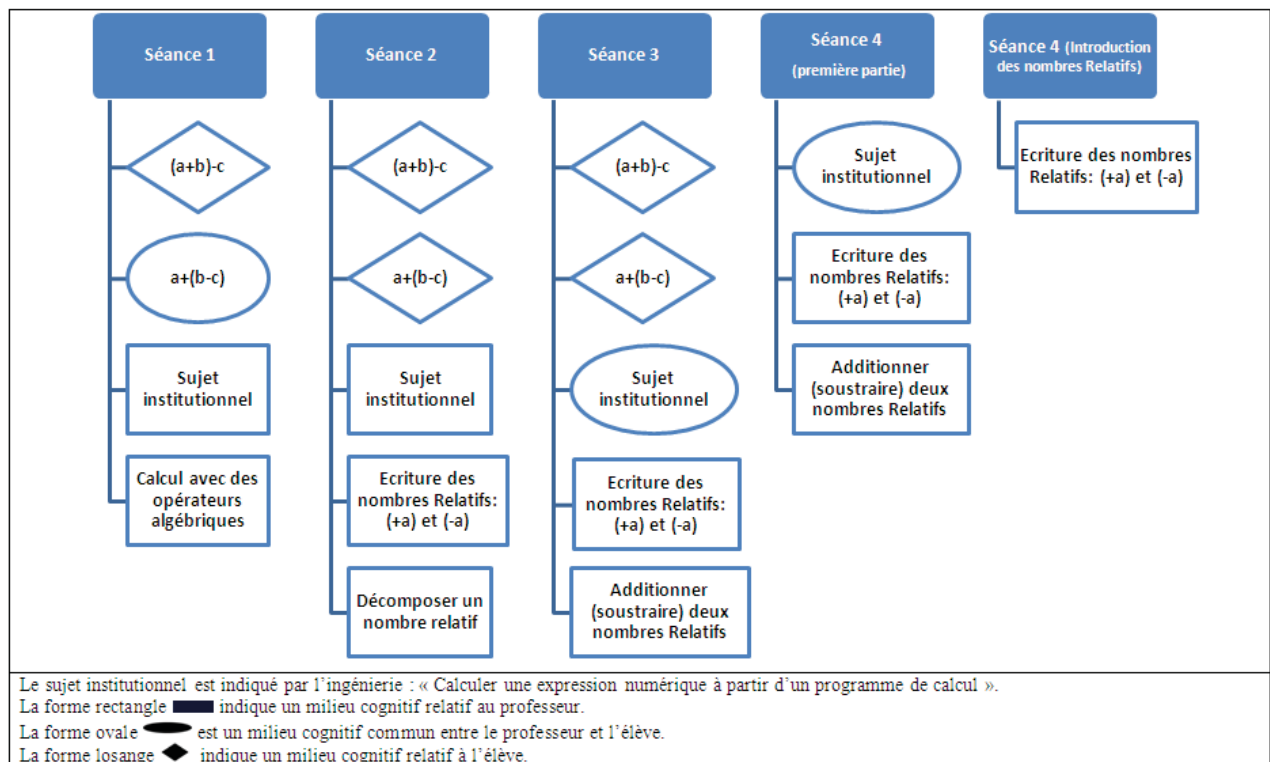
Le déroulement de la séance a fait intervenir des sujets différents sur les niveaux de codétermination, qui ont changé d'un extrait à un autre au cours de la séance. Nous avons décelé trois catégories de sujets :

- Sujets institutionnels relatifs à l'OM et OD de l'ingénierie,
- Sujets relatifs aux élèves activés par leurs connaissances dans la résolution de la tâche principale « calculer l'expression $a + b - c$ »,
- Sujets relatifs au professeur activés par les OM qu'il connaît, ses pratiques professorales.

A la fin de chaque séance, nous avons regroupé dans des tableaux les différents sujets qui se sont succédés suivant l'avancement didactique. Les extraits étudiés ont révélé l'apparition d'organisations nouvelles et différentes rapportées aux niveaux de codétermination didactique.

Pour visualiser de près la nature et les changements de sujets mis en œuvre dans les quatre séances, nous avons regroupé dans un tableau les organisations mathématiques réalisées.

Pour des raisons de clarté, nous avons choisi de représenter uniquement les « sujets » étudiés au cours de ces séances.



Tab OM 31 : Dédoublage des milieux de la séquence dans l'introduction des nombres relatifs

Lecture des résultats du tableau *Tab OM 31*

Les sujets présents dans le tableau ci-dessus montrent l'existence du phénomène étudié le « dédoublement des milieux ». Nous pouvons signaler que :

- Le sujet institutionnel est évoqué à partir de la première séance. Cependant il n'a pas fait partie de la constitution du nouveau « savoir ». Son rôle n'a pas été primordial. L'avancement de son étude au cours de ces séances a été différemment perçu par les élèves et le professeur.

L'emplacement des sujets mathématiques mobilisés dans le tableau nous renseigne sur la variation de la distance mésogénétique entre les milieux cognitifs des élèves et du professeur avec le milieu institutionnel du savoir. Cette distance varie suivant la nature des sujets mathématiques abordés au cours de l'explication. Par exemple, la présence des sujets mathématiques personnels des élèves a pu maintenir le sens « antérieur » des connaissances des élèves, qui concernent « Les Nombres Positifs », au favori de l'abord du sujet institutionnel. Par contre, cette distance a été accrue lorsque le professeur a activé ses connaissances personnelles, cela a joué contre l'appropriation du savoir par les élèves.

Du côté des élèves

Les élèves n'ont pas activé effectivement l'OM relative à ce sujet évoqué par le professeur au cours des deux premières séances. Cette OM n'a pas été institutionnalisée qu'à partir de la troisième séance à côté de la mobilisation d'autres techniques personnelles. A la quatrième séance, cette OM est devenue officielle et a constitué un élément primordial du « milieu cognitif principal » du savoir.

Cet avancement progressif des éléments institutionnels, au cours de la séquence, a maintenu le sens « antérieur » attribué aux connaissances des élèves. Ceci leur a permis de faire évoluer leurs rapports personnels vers les éléments du milieu institutionnel.

Du côté du professeur

Signalons qu'à partir de la deuxième séance le nouveau savoir était présent, activé par le professeur comme cadre technologique pour justifier les techniques des élèves, avant même qu'il soit enseigné.

Le professeur a donc activé le sujet institutionnel « Programme du calcul » tout au long de la séquence, mais pas pendant la quatrième séance aux moments de l'introduction du nouveau savoir. Il s'en écartait plusieurs fois sans s'en rendre compte. Il a accordé une dimension

topogénétique ascendante lui permettait de s'éloigner de ses élèves. Dans ce sens, il n'a pas pu se débarrasser de ses connaissances mathématiques personnelles. Nous pouvons dire que le professeur n'a pas pu mettre « à frigo » ses connaissances personnelles.

Ces phénomènes se sont particulièrement manifestés au cours de la quatrième séance durant laquelle les élèves sont uniquement entrés dans l'abord du sujet institutionnel « Le programme de calcul ». Ainsi nous pouvons dire que l'absence du sujet institutionnel pour le professeur, au moment de l'introduction de ce savoir, peut être interprétée par une naïveté dans la « gestion des connaissances personnelles ».

Le dédoublement des milieux : Définition, critères et facteurs

La distance mésogénétique entre les milieux cognitifs des élèves, les OM du professeur et le milieu institutionnel du savoir varie en fonction de la répartition des sujets mathématiques auxquels se réfèrent les uns et les autres. Dans une séance « d'ingénierie », la présence de sujets différents du sujet institutionnel est capable d'accroître cette distance. Nous pourrions dire que le phénomène du « dédoublement des milieux » existe. Il pourra nous renseigner sur le degré de disponibilité de l'évolution des rapports personnels aux éléments institutionnels du savoir.

Avec l'avancée du temps didactique, si les sujets activés rejoignent le sujet institutionnel, nous pourrions en déduire que les rapports personnels des élèves et du professeur évoluent vers l'émergence proprement dite du savoir. Pour exemplifier, au cours de la deuxième partie de la quatrième séance, la présence de sujets non communs activés par le professeur s'oppose à l'introduction des « Nombres Relatifs », dans le sens où ses rapports personnels ne sont pas uniquement liés à l'OM relative au sujet proposé dans l'ingénierie.

Nous pouvons dire que : Le dédoublement des milieux est un « appareil » didactique permettant de diagnostiquer le degré de l'évolution des rapports personnels de l'institution (élèves et professeur) vers les éléments institutionnels du savoir.

Critère d'apparition du « dédoublement des milieux »

Nous pouvons identifier l'existence de ce phénomène à partir des OM mises en place sur l'échelle de codétermination didactique. Ces organisations s'expriment en termes de : milieux cognitifs des élèves qui se révèlent à partir de leurs connaissances disponibles et de leurs

techniques, les OM du professeur et les milieux institutionnels du savoir consignés dans l'ingénierie et dans les manuels.

La méthodologie de recherche sur « l'apparition de ce phénomène » consiste à repérer la place des milieux cognitifs des élèves et des OM du professeur par rapport aux milieux institutionnels du savoir. Il suffit d'étudier les variations, les changements et les déplacements des milieux activés et d'observer ensuite s'ils se rencontrent. Si les milieux activés par les élèves et le professeur évoluent vers le milieu institutionnel, nous pourrions nous attendre à des rapports personnels appropriés pour la constitution de savoir.

Etude de quelques facteurs qui agissent sur le phénomène de dédoublement des milieux

Au cours de notre étude, nous avons pointé plusieurs facteurs qui ont agi sur le phénomène, entre autres :

1. Les connaissances antérieures des élèves

Lorsque les connaissances antérieures des élèves ne sont pas remises en question, modifiées ou évoluées, elles persistent locales et encapsulées (*voir schéma 4.7.4, p.104*). Les élèves construisent dans ce sens leurs « propres mathématiques » (Chevallard, 1989a) à partir de leurs connaissances qu'ils trouvent propices à l'accomplissement de cette tâche. Dans ce cas, même si le temps didactique avance, comme contrainte à l'émergence du savoir, la distance mésogénétique s'élargit.

2. La bifurcation didactique

2.1. La bifurcation due aux techniques didactiques du professeur.

Certaines techniques didactiques consistent à laisser un topos assez large à l'élève afin de lui laisser une latitude et une valeur à ses techniques personnelles. Par exemple, les félicitations excessives attribuées aux élèves comme « C'est bien » et « Très bien » ont contribué à les confiner dans les milieux faits de leurs connaissances personnelles. Ceci les a interdits de rencontrer une vraie problématique dans la tâche étudiée et de trouver une technique économique qui débouchera au nouveau savoir.

2.2. La bifurcation due à la mise en œuvre des « techniques correctes » mais inappropriées par rapport au cadre du milieu institutionnel.

Le professeur a validé des techniques correctes qui ne remettent pas en cause les connaissances antérieures des élèves. Par exemple, dans le calcul de $(17+21-20)$ la technique qui consiste à calculer la différence de 21 et 20 est correcte. Pourtant cette technique n'est pas tout à fait celle attendue pour nourrir le milieu institutionnel « Les programmes de calcul ».

Ainsi, l'officialisation de quelques techniques correctes, qui ne pourront pas remettre en question les connaissances antérieures des élèves, contribue à l'apparition du phénomène du dédoublement des milieux.

2.3. La bifurcation est due aux représentations sémiotiques

Nous avons vu que les différentes représentations sémiotiques qu'a suscité l'apparition des deux mots « Ajouter » (voir 6.6.6.1, p.206) et « Simplifier » (voir 6.7.2, p.223) ont engagé vers une « bifurcation didactique ». Le professeur ainsi que les élèves pourront ainsi travailler selon des « actes cognitifs » distincts concernant « ces mots » qui les renvoient à des organisations mathématiques différentes.

3. Le dédoublement des milieux dû à la dimension topogénétique

Le topos du professeur, en général, lui permet de rechercher des OM du savoir pour en prélever le cadre technologique qui justifiera les tâches et les techniques d'élèves. Il sollicite des niveaux de codétermination didactique suffisamment élevés qui provoquent en retour un « flou » sur les milieux avec lesquels travaillent les élèves.

Il en résulte de nouvelles réorganisations mathématiques dues effectivement à la diversité des OM présentes dans divers milieux. Ceci contribue à l'apparition du « dédoublement des milieux ».

**Chapitre 7 : Le dédoublement des
milieux dans une ingénierie didactique :
La soustraction au CE1 en France**

CHAPITRE 7

LE DEDOUBLEMENT DES MILIEUX DANS UNE INGENIERIE

DIDACTIQUE :

LA SOUSTRACTION AU CE1 EN FRANCE

- 7.1 *Introduction au sujet de savoir*
 - 7.2 *Etude du programme français*
 - 7.3 *Milieux cognitifs de la professeure*
 - 7.4 *Analyse de la séance*
 - 7.5 *Conclusion*
-

Ce chapitre porte sur l'étude d'une troisième séquence qui concerne l'enseignement de la « Soustraction » en CE1 dans une école en France. Cette séquence est animée par une professeure expérimentée (selon l'avis des directeurs). Notre but revient à étudier la présence du phénomène du « dédoublement des milieux » et voir si nos résultats précédents sont généraux. En d'autres termes, nous tenons à déterminer si les traces précédentes pourront être valides dans toutes les séquences; qu'elles soient en France ou au Liban, dans un enseignement bâti à partir d'une ingénierie didactique ou dans un enseignement ordinaire.

Dans une première partie de ce chapitre, nous étudions le raisonnement arithmétique propre à la soustraction et l'évolution des techniques opératoires au fil du temps. Ensuite, nous explicitons quelques détails de l'ingénierie didactique appliquée dans la classe observée, notamment sur ses grandes étapes, conçue par Guy Brousseau (1986).

Nous analysons, dans une deuxième partie, la transposition didactique de la soustraction dans les programmes Français de 2008. Ensuite, nous étudions les conceptions de la professeure observée, lors d'un entretien fait avec lui à Marseille, après avoir fini l'explication de la séquence. Nous voulons 1) apporter des réponses et des justificatifs à nos interrogations nées de l'observation de la séance et 2) situer le milieu cognitif mathématique de la professeure. Ensuite, nous analysons une leçon de cette ingénierie mise en œuvre en 2009-2010 dans une classe de CE1 (élèves de 7 ans, EB2) de l'école primaire Saint Charles de Marseille dans le cadre d'une recherche conduite par l'IFE (Institut Français de l'Education, ex-INRP)⁶⁵.

A la fin de ce chapitre, nous interprétons nos résultats dans la partie conclusion.

⁶⁵ Mercier, Quilio, Assude, Obstacles dans l'implémentation d'une ingénierie didactique sur la Soustraction, XIII CIAEM-IACME, Recife, Brésil, 2011.

7.1. Introduction au sujet du savoir

Quand un professeur se présente en classe devant les élèves, il a bien entendu envisagé la séance qu'il va enseigner. Les professeurs « *font une distinction entre : celles de leurs activités qui visent l'acquisition des savoirs institutionnalisés tels que les algorithmes de calcul, les définitions canoniques ou les propriétés fondamentales, et celles qui visent la compréhension et l'usage de ces savoirs* » Brousseau (1987). Il ne s'agit donc pas seulement d'enseigner des techniques pour qu'on apprenne les mathématiques, mais de comprendre leur usage dans un problème donné. Enseigner un objet de savoir afin que les élèves le « conceptualisent » c'est enseigner ce que Brousseau (Ibid.) désigne de la manière suivante avec les termes de *forme et de sens* :

« *La forme est ce qui peut être identifié, choisi comme objet d'enseignement, le sens, ce qui permet à la forme de fonctionner, comme solution de problème* ».

Par suite, certains diront que les élèves possèdent une connaissance conceptuelle de la soustraction lorsqu'ils parviennent à « comprendre le sens » de cette opération. La théorie anthropologique, grâce à la notion du rapport au savoir s'affranchit de la distinction traditionnellement faite entre « la compréhension du sens » et l'apprentissage du mécanisme de l'algorithme : « *le rapport personnel ne prend du sens que relativement au rapport institutionnel qui définit le caractère adéquat du rapport personnel à l'objet* » (Chevallard, 1989a). Acquérir le sens de l'addition, de la soustraction comme de n'importe quelle autre notion mathématique, signifie que pour chaque problème proposé par l'institution, le rapport personnel de l'élève doit être évalué par celui qui est « *dépositaire du rapport institutionnel* » (Matheron, 2002) comme proche de ce dernier. En d'autres termes, l'élève évalué doit disposer de moyens suffisants pour résoudre le problème tel qu'attendu par l'institution et pour cela doit être capable de reconnaître et mobiliser les techniques adéquates quand on lui propose ce problème⁶⁶. Pour ce qui concerne l'étude que nous menons sur la soustraction au CE1, quand quelqu'un saura montrer qu'il connaît les trois principaux types de problèmes qui donnent sens à la soustraction⁶⁷, l'institution « classe de CE1 » pourra dire de cette personne qu'elle dispose d'une première compréhension de cette opération.

⁶⁶ <http://eroditi.free.fr/Enseignement/PE1/S4%20additifs.pdf>

⁶⁷ Les trois principaux types de problèmes qui donnent « sens » à la soustraction arithmétique sont :

- * comparer deux grandeurs (lorsqu'on cherche ce qui est différent),
- * déterminer le complément qu'il faut ajouter à la petite pour obtenir la grande,
- * déterminer ce qui reste lorsqu'on retire la petite grandeur à la grande.

http://www.cafepedagogique.net/lesdossiers/Pages/2010/RBrissiaud_Operationsarithmetiques1.aspx

D'où la nécessité d'évaluer le rapport à la soustraction au niveau de la résolution des problèmes et pas seulement dans la réussite de l'application d'une « technique » enseignée.

7.1.1. Raisonnement arithmétique et techniques opératoires de la soustraction

Le sujet d'étude de la séance observée porte sur « Le raisonnement arithmétique » qui désigne, dans ce cas, la modélisation adéquate d'une situation du monde réel grâce à la soustraction.

Pour exemplifier, nous pouvons revenir à la manière dont s'effectuaient les opérations financières entre les gens vers 1850 dans les Alpes de Haute Provence en l'absence d'une calculette ou d'un tableau noir. Chevallard (2009) dans son séminaire a parlé du « *Le postulat théorique essentiel est que lorsqu'on détient une certaine somme d'argent S_0 et qu'on a à payer une somme d'argent S_1 plus petite – le résultat de la soustraction de S_1 à S_0 donne le solde de l'opération financière* ». Nous postulons donc que ce type d'opérations financières est « arithmétisable » par la soustraction. Elle signale la présence d'une « *organisation arithmétique* » relative à la soustraction. *Cette organisation se réfère au système didactique $S(X ; y ; ♥)$ où X est une classe d'élèves de l'école primaire, où y est le maître et où ♥ est la soustraction.*

Si nous envisageons ce sujet mathématique selon les termes « payer » et « emprunter », nous pouvons assigner que le calcul du « solde » repose sur un caractère important du discours mathématique. Ce caractère porte en lui la technique de soustraction et la technologie de cette technique qui est le « raisonnement discursif ». C'est le raisonnement arithmétique qui guide l'exécution de la « technique de calcul », il est l'unique moyen de contrôle du résultat du calcul qui soit intégré dans la technique.

Nous voyons ici en œuvre une partie de praxéologie arithmétique $[\tau, \theta]$ – le bloc technique - technologie – relative à la situation S de soustraction. Le terme τ désigne la technique pratiquée et la technologie θ désigne dans ce cas le raisonnement oral ou langagier associé à τ .

A côté de ce raisonnement arithmétique, les techniques de soustraction ont évolué au fil du temps et selon les pays. Notons que la soustraction a pris une forme définitive vers le XVI^e siècle⁶⁸.

⁶⁸www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/14/14n4.pdf

Dans les institutions scolaires, nous ne trouvons pas une technique unique pour la soustraction. Par exemple, nous voyons dans la société française⁶⁹ du début du XX^e siècle que :

« Plusieurs techniques sont en usage, avec chacune leurs avantages et leurs inconvénients. Chacun a naturellement tendance à considérer que la plus simple est celle qu'il utilise, l'impression de simplicité étant souvent fortement liée à la force de l'habitude ».

Les techniques les plus connues actuellement sont 1) la technique par addition par laquelle le calcul de la différence ($a-b$) consiste à la recherche du nombre qu'il faut ajouter à b pour obtenir a . La difficulté de cette technique réside dans le fait que le lien entre l'addition à trous et la soustraction est loin d'être évident pour l'élève. 2) La technique par emprunt qui s'appuie sur la numération et la règle d'échange de 10 contre 1 ; elle est la traduction symbolique des manipulations réalisées sur un abaque ou un boulier. 3) La méthode classique qui s'appuie sur la conservation de l'écart entre deux nombres lors d'une translation sur la droite numérique⁷⁰.

7.1.2. Etude de l'ingénierie de Brousseau (1986) mise en œuvre en 2009 – 2010 à Marseille

En didactique des mathématiques, un des articles des plus connus pour la soustraction est le "cas de Gaël" qui apparaît dans la thèse d'Etat de Guy Brousseau en 1986. Il a conçu une ingénierie didactique sur la soustraction à l'école primaire et il l'a mise en œuvre pendant quelques années dans l'école expérimentale du COREM (centre d'observation et de recherche sur l'enseignement des mathématiques) à Bordeaux. Cette ingénierie est connue, parce qu'elle fonde le travail de remédiation engagé par Brousseau auprès de Gaël, et aussi parce qu'elle est un exemple prototypique de l'existence du contrat didactique (Brousseau, 1998b). Gaël est un enfant intelligent. C'est l'un des neuf enfants en difficulté élective que Brousseau a aidés par un petit nombre d'interventions didactiques de type clinique entre 1976 et 1983.

Le cas de Gaël étudie les rapports institutionnels à la connaissance mathématique qui relève de « la soustraction ». Les expériences ont été menées en s'appuyant sur le problème majeur

⁶⁹ <http://peysseri.perso.neuf.fr/R02-3.htm>

⁷⁰ Cette méthode est d'un usage très ancien, Fibonacci l'employait déjà dans le LIBER ABACI.

Pour calculer $(61 - 48)$ on dit : « 1 moins 8 ; je ne peux pas ; j'ajoute 10 unités au nombre du haut et une dizaine à celui du bas. D'où 11 moins 8 donne 3 ; 6 moins 5 ($4 + 1$) donne 1 et la réponse est 13.

de cet enfant : le désir de séduire l'adulte et d'entretenir avec lui des rapports affectifs et ludiques.

Dans la classe de Gaël, la soustraction n'a pas été introduite comme moyen obligatoire pour trouver une différence ; souvent l'addition à trou a été utilisée (Brousseau, 1986). Ce procédé tend à obliger l'enfant à sortir d'un automatisme formel qui associe une opération mathématique à une opération matérielle (+ si j'ajoute, - si je retranche) et à se centrer sur l'ensemble qu'il s'agit de compter et sur les relations avec les autres données

Brousseau (1985) a distingué pour cela trois raisons principales que nous résumons de la façon suivante :

1. La situation proposée tend à remplacer les définitions constructives de la soustraction par une définition "algébrique" : il faut trouver un nombre qui satisfait une condition (la différence est ce qu'il faut ajouter à un nombre pour en trouver un autre $39 + \square = 52$).
2. En proposant la compréhension d'une relation et la recherche d'un objet qui la satisfait au lieu de l'apprentissage de la construction d'un terme, la situation a mis en évidence de façon aiguë les conditions paradoxales de toute situation didactique qui rend à la fois nécessaire, et impossible à tenir, tout contrat didactique effectif.
3. Enfin cette expérience met en lumière les rapports et les différences irréductibles entre les approches didactiques, psycho-cognitives et psycho-affectives de la situation d'enseignement.

Il s'agit de mettre à la disposition de Gaël plusieurs raffinements pédagogiques pour concrétiser la soustraction : par exemple faire un schéma, identifier dans une situation le schéma convenable, concrétiser la soustraction par la répétition de manipulations et l'association d'un discours approprié "j'enlève", "je retranche", des discours mnémotechniques, etc. Ces raffinements reposent sur des conceptions de la signification et de l'apprentissage assez anciennes. Elles considèrent que le signifié d'une connaissance ou d'une théorie est constitué de l'ensemble de ses réalisations. C'est-à-dire des situations objectives dans lesquelles elle se trouve vérifiée. Donner du sens à une structure, c'est lui trouver des applications, des occasions de s'en servir. Et pour apprendre une connaissance théorique, il faut la constituer à partir de connaissances déjà acquises et par un discours ou des moyens logiques eux-mêmes déjà connus.

La constitution du sens est faite par le moyen didactique qui est « la dévolution ». Elle consiste à renvoyer l'élève à un rapport avec un milieu dont le professeur peut s'exclure, du

moins en partie (situation a-didactique). Elle produit des rétroactions qui ne peuvent s'observer que si l'élève accepte une activité où il engage sa responsabilité et où il peut savoir par lui-même s'il a réussi ou échoué.

L'idée fondatrice de cette ingénierie est la suivante : l'enseignement doit reposer sur le savoir antérieur des élèves, c'est-à-dire, l'addition, pour construire les sens de la soustraction, c'est-à-dire repérer les problèmes qui peuvent se résoudre avec une soustraction. Nous voyons dans la genèse de l'apprentissage envisagé deux rôles assignés à la seule opération que les enfants connaissent en début du CE1 : un rôle dans la construction du sens de l'opération soustraction et un rôle dans la recherche d'un moyen économique, une technique.

Une nouvelle mise en œuvre de cette ingénierie, retravaillée par Quilio (1999), a été réalisée en 2009-2010 dans une classe de CE1 (élèves de 7 ans, deuxième année de l'enseignement primaire) de l'école primaire Saint Charles de Marseille dans le cadre d'une recherche conduite par l'IFE (Institut Français de l'Education, ex-INRP) (Mercier, Quilio et Assude, 2011).

La réalisation de ce processus d'enseignement est menée à l'aide d'une boîte, et l'étude conduite par les élèves, sous la direction du professeur, consiste à la résolution de l'ensemble des problèmes dont la solution peut être trouvée au moyen de cette boîte. Nous exposons ci-dessous les grandes étapes de cette ingénierie.

Dans une première phase (leçons 1 et 2), la professeure présente pour la première fois le principal matériel du travail « une boîte et des briques ». Il s'agit de prélever ou d'ajouter pour calculer les nombres de briques restantes dans la boîte. Cet outil va être utilisé pour la vérification des calculs menés par les élèves. Il s'agit de les stimuler afin qu'ils produisent des méthodes implicites pour trouver la solution des problèmes de soustraction et comprendre que l'on peut vérifier son résultat avec la boîte.

Dans la deuxième phase (leçons 3, 4 et 5), la professeure propose de parier, au sens de s'engager pour gagner, sur le nombre de briques qui restent dans la boîte une fois qu'on en a enlevé une quantité donnée ou qu'il faut ajouter dans celle-ci connaissant ce qu'il en reste pour obtenir une boîte complète, selon le problème proposé. La preuve par addition va se faire par sur-comptage des briques un à un dans une phase collective d'abord, puis dans une phase

individuelle (dénombrement). Les élèves passent progressivement de la manipulation matérielle des briques à l'usage du nombre et à l'addition pour vérifier leurs résultats.

Dans la troisième phase (leçons 6, 7 et 8), la boîte est évoquée dans les situations où sont mélangés des problèmes d'addition et de soustraction. Le signe moins « $-$ » est introduit comme signe de l'opération. Dans ces leçons, les calculs sont simples et reposent sur les techniques de calcul mental et l'usage du répertoire additif. A ce stade le signe soustractif devient constitutif de l'écriture d'un nombre. Par exemple 11 s'écrit $10 + 1$ (une écriture additive de 11) et aussi $12 - 1$ (une écriture soustractive de 11).

Dans la quatrième phase (9, 10 et 11), il s'agit de faire travailler la technique opératoire. En effet, jusqu'à présent, les stratégies de calcul des élèves pour trouver le résultat dans un problème de soustraction peuvent être différentes alors que l'activité de vérification, qui permet de savoir si leur réponse est correcte, est commune à tous les élèves. Il s'agit maintenant de faire formuler, reconnaître, identifier par tous les élèves, ces stratégies pour trouver la réponse.

Dans la cinquième phase (leçons 12 et 13), il s'agit de faire prendre du recul aux élèves par rapport à leur propre stratégie et par rapport à celles qui ont été vues collectivement dans les leçons antérieures, pour arriver à ce que toutes les stratégies convergent vers celles donnant la réponse en un seul coup. Pour prendre du recul le maître introduit dans la classe des personnages extérieurs à propos desquels on peut débattre des stratégies de façon neutre. Ce ne sont pas des élèves de la classe, mais des « Schtroumpfs » (personnages de bande dessinée). On est plus à l'aise pour commenter ce que les élèves ont fait effectivement dans les séquences précédentes

7.2. Etude du programme français

L'ingénierie proposée a été passée en France, suivant les programmes de 2008⁷¹. Une étude des programmes nous semble importante afin de rechercher nos objectifs :

1. Déterminer l'organisation mathématique relative à ce savoir en l'associant à l'échelle des niveaux de codétermination didactique (Chevallard, 2002).
2. Etudier l'adéquation du rapport personnel de la professeure au rapport institutionnel au savoir.

Dans le paragraphe intitulé « Mathématiques », page 18 du programme de 2008, nous trouvons les indications suivantes :

« La connaissance des nombres et le calcul constituent les objectifs prioritaires du CP et du CE1. La résolution de problèmes fait l'objet d'un apprentissage progressif et contribue à construire le sens des opérations. Conjointement une pratique régulière du calcul mental est indispensable ».

Du tableau intitulé « cycles des apprentissages fondamentaux pour le cours préparatoire et le cours élémentaire première année », page 33 de ce même programme, nous avons tiré cet extrait concernant l'addition et la soustraction :

	Cours préparatoire	Cours élémentaire première année
Nombres et calcul	[...] -Calculer mentalement des sommes et des différences. -Calculer en ligne des sommes, des différences, des opérations à trous. -Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et commencer à utiliser celles de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 100). -Résoudre des problèmes simples à une opération.	[...] -Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 1000). -Résoudre des problèmes relevant de l'addition, de la soustraction. -Utiliser les fonctions de base de la calculatrice.

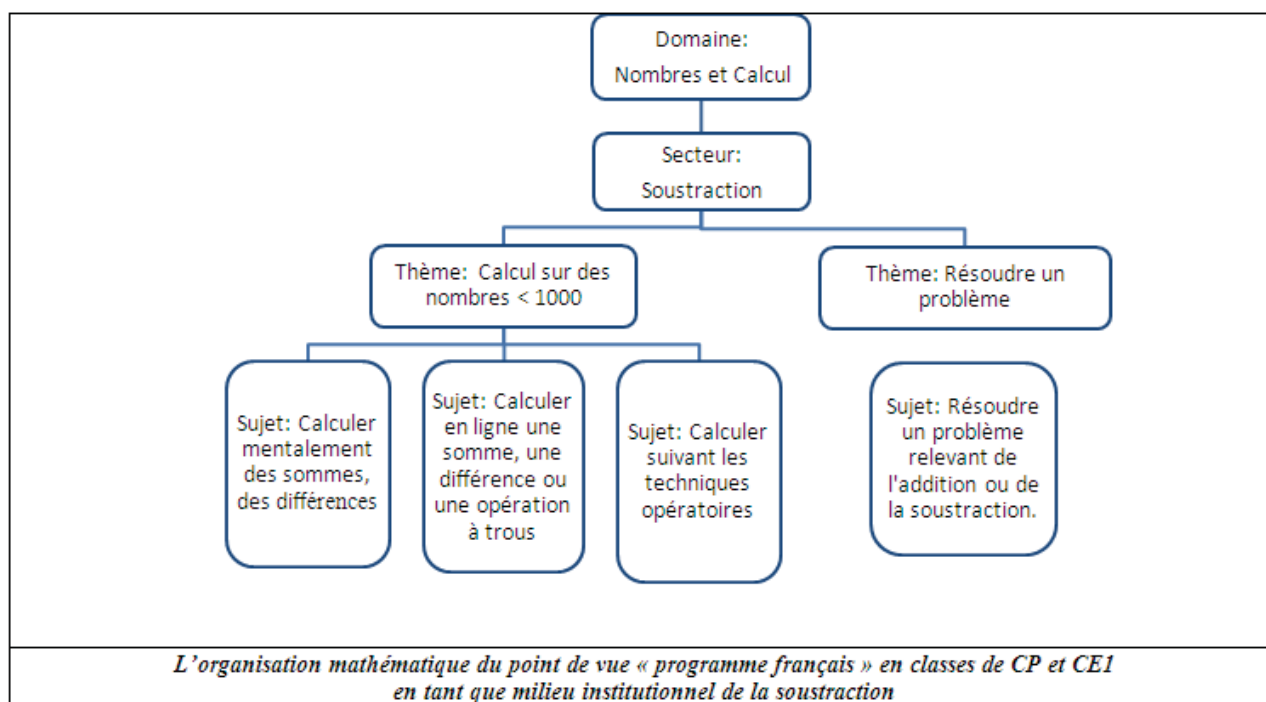
Figure 20 : L'addition et la soustraction dans le programme français 2008

Du point de vue didactique, ces programmes ne donnent aucune indication sur les éléments technologico-théoriques propres aux praxéologies mathématiques sur la soustraction. Ils mentionnent uniquement un travail basé sur des savoir-faire indiqués par des types de tâches, elles-mêmes désignées au moyen de verbes d'action comme « calculer », « résoudre ». Nous pouvons relever qu'il n'existe aucune prescription quant aux organisations didactiques qui

⁷¹ Programmes d'enseignement de l'école primaire, B. O. n° 3 du 19 juin 2008.

vont soutenir l'étude de l'organisation mathématique de la soustraction. La définition mathématique de ce savoir est laissée à la liberté du professeur. L'addition semble constituer l'un des rapports essentiels sur lequel s'appuyer pour un milieu permettant de générer le nouveau savoir vu que ce savoir est présent dans la présentation des objectifs : « *Calculer mentalement des sommes et des différences, connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et commencer à utiliser celles de la soustraction* », etc.

Cette étude pourra nous fournir quelques indications sur la transposition didactique envisagée du point de vue institutionnel de la soustraction. Nous illustrons ci-dessous cette transposition didactique à partir d'un schéma montrant comment se distribuent, dans les progrès, les éléments de l'organisation mathématique relative à la soustraction, en utilisant pour cela une subdivision en domaine, secteurs, thèmes, sujets. Chacun de ces éléments renvoie à un ensemble de conditions et de contraintes relevant de divers niveaux de codétermination didactique qui vont influencer sur la forme et le contenu enseigné.



Tab OM 32 : Organisations mathématiques de la soustraction en CP et en CE1 en France

7.3. Milieux cognitifs de la professeure

7.3.1. “Conceptions” de la professeure sur l’addition de deux entiers n et p

L’écriture de la somme $n + p$ se met en place progressivement dès le début du cycle des apprentissages fondamentaux, à l’occasion d’activités au cours desquelles deux quantités sont réunies, ou bien lorsqu’une quantité subit une augmentation. Cette écriture permet de désigner le cardinal d’objets que l’on possède quand on a reçu « n objets puis encore p objets ». L’expression « n plus p » remplace progressivement le « n et encore p » associé au geste de réunion.

La séance observée, filmée et analysée porte sur deux problèmes qui ont le même énoncé, mais selon l’ingénierie, il y a une différence dans les nombres utilisés :

Problème 1 : Dans la boîte, il y a 48 briques. J’en enlève 23. Combien reste-t-il de briques dans la boîte ?

Problème 2 : Dans la boîte, il y a 51 briques. J’en enlève 18. Combien reste-t-il de briques dans la boîte ?

Le problème 1 a pris 36 min 12 sec et celle du problème 2 a pris 30 minutes. Nous avons visionné avec la professeure le film et au fur et à mesure du visionnement, nous lui avons posé nos questions afin de voir comment elle parvient à instituer un milieu propice à l’enseignement de la soustraction en CE1. Le milieu avec lequel les élèves interagissent est-il le même que celui envisagé par la professeure ou bien un autre milieu se mettra-t-il en place ?

Nous avons pu identifier, chez la professeure, deux fonctions mathématiques et didactiques relatives à l’addition :

7.3.1.1. Fonction 1 : « L’addition permet de calculer »

LE50	Question	Qu’est-ce que tu appelles calcul ?
LE51	P	L’addition, le calcul c’est manipuler ⁷² . Pour moi le calcul c’est manipuler sur les nombres. Et on va le vérifier avec la boîte pour donner du sens au calcul.

Extrait 53 : Soustraction/ Entretien professeure/ Ext 1/ LE50-51

⁷²Ce verbe est défini par :

- Soumettre quelque chose à certaines opérations en le tenant avec la main ou avec un instrument.
- Soumettre quelque chose à divers traitements, divers exercices, en particulier dans un cadre d’apprentissage ou de recherche.

<http://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/manipuler/49188>

Cet extrait nous montre que pour la professeure « l'addition » est le synonyme de « calculer ». et le calcul est une « manipulation » sur les nombres. La professeure se place au niveau des connaissances des élèves qui ne connaissent qu'un seul calcul : celui de la somme.

Or « la manipulation » des nombres à ce niveau (CE1) est désignée officiellement, dans le paragraphe intitulé « Mathématiques », page 18 du programme de 2008, par le terme de « techniques opératoires », ce qui n'est pas la même chose :

La connaissance des nombres et le calcul constituent les objectifs prioritaires du CP et du CE1. La résolution de problèmes fait l'objet d'un apprentissage progressif et contribue à construire le sens des opérations [...].

1 - Nombres et calcul

Les élèves apprennent la numération décimale inférieure à 1000. Ils dénombrent des collections, connaissent la suite des nombres, comparent et rangent.

Ils mémorisent et utilisent les tables d'addition et de multiplication (par 2, 3, 4 et 5), *ils apprennent les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction, celle de la multiplication et apprennent à résoudre des problèmes faisant intervenir ces opérations [...]*.

Concernant les compétences attendues à la fin du CE1 sur ce thème, on trouve, page 20 : « l'élève est capable de : écrire, nommer, comparer, ranger les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000 ».

Dans cette ingénierie, les élèves vont étudier, par l'intermédiaire de matériels spécifiques – une boîte et des briques –, le sens de la soustraction. Ils vont « parier » sur un nombre inférieur à celui qui indique le nombre de briques dans la boîte. Ensuite, ils vont résoudre mentalement le problème, en additionnant le nombre « parié » avec le nombre restant des briques. Ils réussissent si la somme des nombres correspond au nombre total de briques. Ensuite, ils vont utiliser la boîte pour vérifier si le nombre est la solution qui correspond au problème posé : « *on met les cubes, on enlève le nombre voulu, on ferme, on résout, etc.* » (Berté et Quilio, 1999). Dans ce contexte, la « manipulation » indiquée par la professeure dans LE51, devrait inciter les élèves à mobiliser des techniques personnelles pour construire le sens de la soustraction comme par exemple la technique de l'addition de deux nombres.

7.3.1.2. Fonction2:« L'addition permet de vérifier »

LE48	Question	Pas mentalement, mais savent-ils le faire par écrit (<i>pour le calcul de $23+25$</i>)?
LE49	P	Certains, pas tous. C'est-à-dire que ce n'est pas acquis (<i>le calcul de $23+25$</i>). Donc mon but principal n'est pas de les entraîner à faire cette addition. Bien il faudrait l'effectuer quand même pour apporter la réponse à la question. Mais le but là est de traduire la vérification manipulatoire par un calcul, en fait pour donner un sens, je veux vérifier s'il reste bien 25. Donc je peux le vérifier par un calcul.

Extrait 54 : Soustraction/ Entretien professeure/ Ext 2/ LE48-49

Cet extrait montre que la « vérification manipulatoire » des briques va générer institutionnellement « le sens » de la solution. En comptant les objets au fur et à mesure que nous les sortons de la boîte, nous sommes conduits à vérifier le résultat annoncé.

La professeure indique dans LE49 que le calcul de la somme de $23+25$ n'est pas encore bien « acquis » par certains élèves. Son souci n'est pas seulement de mener avec les élèves un bon calcul, mais d'apporter des éléments justificatifs par un calcul. C'est-à-dire que, même si le calcul annoncé pour $23+25$ n'est pas le bon, les élèves devront en apporter la justification. Ils pourront constater alors que leur réponse n'est pas « la solution » du problème.

L'addition apparaît, pour elle, un outil permettant de « vérifier » une réponse en vue d'enseigner une nouvelle technique : celle de la soustraction. Les élèves pourraient rencontrer cette nécessité lorsque la mobilisation de leurs connaissances ne suffit plus pour réussir la nouvelle tâche.

Nous rejoignons dans ce propos le principe du « saut informationnel » de Brousseau(2010) :

« Puisqu'il est fatal de devoir changer de méthode, ne vaudrait-il pas mieux proposer directement le problème dans des conditions où la nouvelle méthode s'imposera plus facilement et où la tentation de prolonger l'ancienne sera visiblement décourageante. [...] C'est l'idée de ce que j'ai appelé plus tard « un saut de complexité ou saut informationnel ».

Donc « donner du sens » à l'addition« $23+25$ », selon la professeure, ne se situe pas dans l'accomplissement d'un bon calcul, comme l'indique la ligne LE49 mais dans la nécessité de changer de technique pour vérifier : calculer au lieu de compter. Du point de vue mathématique, il est recommandé, dans le programme officiel français, dans le paragraphe intitulé « Mathématiques", page 18 :

« La connaissance des nombres et le calcul constituent les objectifs prioritaires du CP et du CE1. La résolution de problèmes fait l'objet d'un apprentissage progressif et contribue à construire le sens des opérations. Conjointement une pratique régulière

du calcul mental est indispensable. De premiers automatismes s'installent. L'acquisition des mécanismes en mathématiques est toujours associée à une intelligence de leur signification ».

En guise de conclusion, la professeure associe à l'écriture additive ($n + p$) un double statut. Elle rapporte ses actions à deux milieux cognitifs, qui expriment pour elle, et relativement à l'enjeu qu'elle assigne à la séance, des rapports pratiques qui mobilisent l'addition : l'un permet de faire des calculs, l'autre est considéré comme un outil permettant, à partir de la vérification de la somme $n + p$, d'aller au-delà de l'addition en vue d'enseigner un nouveau savoir en mathématique. Nous l'identifierons, du point de vue de l'intention de la professeure, comme étant relative à la soustraction à ce moment du temps didactique, et elle repose sur le couple (on parie sur la différence, on vérifie par le calcul de la somme). La professeure énonce ainsi une sorte de dialectique qu'elle souhaite voir mise en œuvre entre les deux fonctions de l'addition.

7.3.2. « Conception » de la professeure sur la soustraction de deux entiers

Une partie du rapport à la soustraction que la professeure a mobilisé à certains moments de la séance apparaît dans l'extrait ci-dessous de l'entretien, à partir du visionnage de la séance :

LE38	Question	Toi tu as enlevé les 23 briques, puis tu as compté ce qui reste. Tu as dénombré les briques restantes.
LE39	P	Donc on a résolu avec la boîte.
LE40	Question	Mais moi je me dis que cette action d'enlever de la boîte se traduit... ça peut être traduit par une addition.
LE41	P	Par une addition à trous, mais ...

Extrait 55 : Soustraction/ Entretien professeure/ Ext 3/ LE38-41

La professeure explique que l'action « d'enlever » des briques de la boîte, qui exprime plutôt la soustraction, peut être associée à une addition à trous. La soustraction a été perçue comme étant une opération inverse de l'addition, elle se manifeste par le calcul d'un terme inconnu dans une égalité à trous. Dans ce cas, nous supposons qu'un tâtonnement sur la file numérique, vu au CP dont certains élèves en disposent sur leur propre pupitre, peut aider pour trouver le terme inconnu.

Du point de vue mathématique, le « dénombrement » d'une quantité joue un rôle primordial pour l'enseignement de la soustraction. Si nous supposons connue la suite ordonnée des entiers naturels, nous pouvons définir $a + b$ comme l'entier atteint en comptant b entiers après a , et $b - a$ comme le premier entier précédant l'entier atteint en comptant a entiers avant b , b compris (Matheron et Noirfalise, 2009). Enfin, si on suppose connue l'addition des entiers

naturels, la différence $b - a$ peut aussi être définie comme le nombre qu'il faut ajouter à a pour atteindre b , donc la solution de l'équation $a + x = b$.

Dans la transposition didactique de la soustraction, la professeure pourrait ainsi se replacer dans deux thèmes mathématiques qui sont « le dénombrement » et le calcul dans une « égalité à trous » :

1) Soustraire signifie diminuer en comptant. Dans ce cas, la professeure se remémore ce qui est en rapport avec le domaine du « dénombrement » en sollicitant les différentes techniques à ce propos qui sont le comptage, le surcomptage et le décomptage.

Les élèves peuvent mobiliser deux types de tâches, ordinale et cardinale, relatives au dénombrement. Citons par exemple :

Type de tâches « cardinale » : Dénombrement d'un ensemble obtenu par réunion de deux ensembles ou par retrait d'une partie.

Type de tâches « ordinale » : Déplacement en avant ou en arrière sur la file numérique, la tâche étant alors plutôt du type « déterminer le résultat d'une augmentation, d'une diminution ».

2) Soustraire b de a (calculer $a - b$) ; c'est trouver le nombre qui compléterait b pour donner a , c'est-à-dire le nombre x tel que $b + x = a$.

7.3.3. Conclusion

Nous pouvons placer les deux « conceptions » de la professeure recueillies dans les niveaux de l'échelle de codétermination didactique suivant l'organisation du savoir. Il est à noter que les types de tâches qui entrent en jeu dans la résolution du problème posé font partie du seul domaine « Calcul et Nombres ». La « soustraction » est le seul secteur dans lequel la professeure a situé ses actions. Cependant nous pouvons distinguer deux thèmes permettant de repérer les techniques relatives aux problèmes traités pendant la séance. Ces deux thèmes portent en général sur « l'addition » et sur l'usage des « propriétés du nombre ». Le premier thème est « l'addition » dont le calcul de $23+25$ est la technique attendue pour vérifier la solution. C'est ce thème qui est convoqué dans le tour de parole LE43 : « *Non moi si un élève me dit par une addition je le laisserai faire jusqu'au bout. Mais là c'est non, c'est la soustraction qui va traduire l'action* ». Ceci pour justifier si l'hypothèse 25 proposée par les élèves est la bonne solution au problème 1, c'est-à-dire si le nombre 25 vérifie l'égalité $23+25=48$. Désormais cette technique n'est pas unique. La professeure garde disponible la

technique utilisant les manipulations des briques qu'elle associe à ce qu'elle nomme une « manipulation mentale » des nombres :

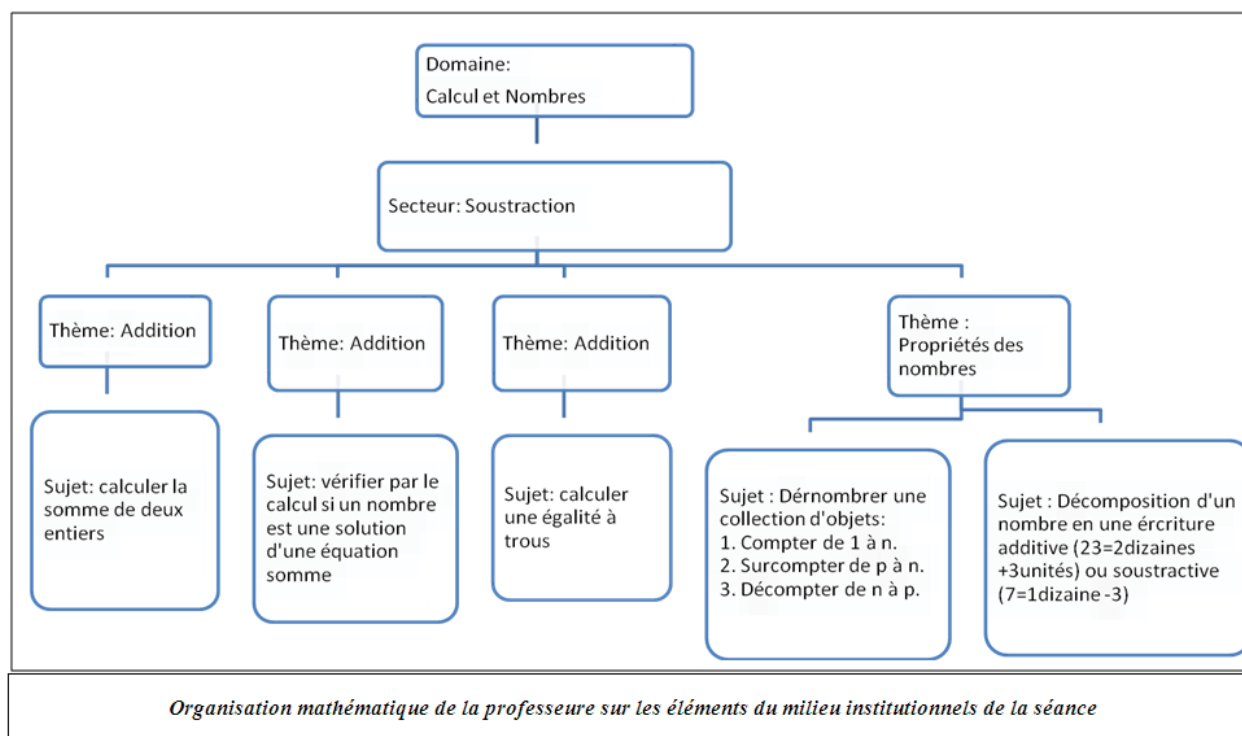
LE54	Question	Donc il y a une sorte de dialectique entre le calcul (que tu appelles calcul écrit) et puis, que nous, on l'appelle calcul aussi c.à.d. que tu as écrit au tableau et la manipulation en acte des briques de la boîte. Donc c'est la manipulation qui confirme l'écriture en quelques sortes.
LE55	P	Exactement, c'est la manipulation qui va donner du sens, qui va justifier l'écriture. Et ce que j'appelle calcul, bien sûr, c'est le calcul en ligne. Mais c'est aussi intérieurement la manipulation mentale des nombres.

Extrait 56 : Soustraction/ Entretien professeure/ Ext 4/ LE54-55

Dans cet extrait, la « manipulation mentale des nombres » évoquée dans LE55 est contenue dans le thème « propriétés du nombre » afin de réaliser des types de tâches comme le dénombrement d'une quantité d'objets, la décomposition d'un nombre dans le système décimal, etc. Notons que le dénombrement à ce niveau se fait par comptage à partir du premier élément (de 1 à n), par surcomptage à partir d'un certain rang (de p à n) ou par décomptage (en allant de n à p).

L'étude des « conceptions » de la professeure sur l'addition et la soustraction durant cette séance a montré que le thème addition est scindé en trois sujets 1) « calculer la somme de deux entiers », 2) « vérifier par le calcul d'une somme si un nombre est solution ou pas d'une équation somme » et finalement 3) « résoudre une égalité à trous ». Ces sujets représentent les différents types de tâches débattus pendant la séance.

Nous illustrons dans le tableau ci-dessous l'organisation mathématique conçue par la professeure pour cette séance :



Tab OM 33 : OM de la professeure pour la soustraction

7.4. Analyse de la séance

Rappelons que la deuxième phase (leçons 3, 4 et 5) de l'ingénierie, la preuve par addition va se faire par surcomptage des cubes un à un, tout d'abord au cours d'une phase collective, puis ensuite au cours d'une phase individuelle. Les élèves passent progressivement de la manipulation matérielle à l'usage du nombre et de l'addition pour vérifier leurs résultats.

Jusqu'à la leçon 3 après avoir écrit leurs réponses, les élèves savent qu'ils ont gagné ou perdu si le nombre écrit correspond ou non au nombre de cubes comptés dans la boîte au moment de la vérification par la manipulation.

Dans la leçon 3 (voir Annexe 7, p.68), les élèves doivent résoudre des problèmes du type : « Dans la boîte, il y a X briques. On en enlève Y. Combien y a-t-il maintenant de briques dans la boîte ? ». Pour résoudre ce type de problèmes, les élèves doivent émettre des « paris » sur le nombre restant de briques dans la boîte, et vérifier ensuite s'il est bon. Il s'agit, à partir du nombre supposé de briques restant dans la boîte, que l'élève ajoute en comptant un à un les cubes sortis pour savoir si le nombre de briques obtenu correspond ou non au nombre qu'il y avait au départ dans la boîte. Le but est d'arriver à une « stratégie » (ou « technique ») de vérification qui utilise l'addition ou le dénombrement sans l'appui du milieu matériel constitué des briques.

7.4.1. Episode 1S : Mobilisation des outils de travail

7.4.1.1. Outils de travail

Dans cette phase, les élèves semblent s'être appropriés la résolution d'un problème à partir de la boîte à briques, comme le montre l'extrait suivant :

Durée : Min 0 sec 28

1	P	Qu'est-ce qu'on a fait en maths vendredi / vendredi c'est ça / la semaine dernière. Qu'est-ce que nous avons fait en mathématiques ?/ Mo
2	Mo	On a fait des problèmes avec des barres
3	P	Avec les barres / c'est-à-dire / Yan / Cam
4	Cam	Avec les briques.
5	P	Vous avez résolu des problèmes en utilisant un outil : Les briques. Et puis quel autre outil ? Ma
6	Ma	La boîte.

Extrait 57 : Soustraction/ Episode 1/ Ext1/ L1 à L6

Dans cet extrait, l'enseignante fait revivre, avec l'aide de quelques élèves, le souvenir des outils de travail pertinents pour la suite de la séance : les briques et la boîte. Elle place les élèves dans le milieu du souvenir des séances précédentes et cherche à réactiver un rapport adéquat à partir de la verbalisation de leurs réponses.

Le souvenir des briques apparaît uniquement dans les réponses des élèves. Mais la professeure convoque aussi la boîte dans :

LE8	P	L'usage de deux outils : boîte et briques. La boîte est nécessaire pour dénombrer ce qui reste.
-----	---	--

Extrait 58 : Soustraction/ Entretien professeure/ Ext 5/ LE8

La boîte est donc un outil pris à part, différent de celui des briques, mais nécessaire pour mener à bien la séance et la résolution du problème posé. La convocation des outils de travail attestée par la professeure peut traduire son idée sur la modélisation mathématique d'un ensemble. Il nous paraît que la boîte peut symboliser, en elle même, l'idée d'un schéma qui représente un ensemble et que l'addition de deux nombres a et b est le cardinal de deux ensembles disjoints ayant respectivement a et b éléments.

LE9	P	Après avoir écrit $23+25$ sur l'affiche du tableau, ils utilisent la boîte pour donner un sens au calcul c.à.d. si on va rajouter $23+25$ il y en aura beaucoup qui pourraient le faire au hasard puisque l'addition, ce qu'ils savent, ce qu'ils connaissent et donc à partir des nombres qui sont présents, donc on va les utiliser dans une addition. En fait pour construire le sens, on va utiliser la boîte pour expliquer ce que veut dire cette addition.
-----	---	--

Extrait 59 : Soustraction/ Entretien professeure/ Ext 6/ LE9

La convocation de l'outil sémiotique « la boîte » dans LE9 pourrait nous renseigner sur les éléments institutionnels que la professeure compte dévoluer à la classe. Ces éléments sont cités dans LE17 de la manière suivante :

LE17	P	[...] Ce que j'attendais d'eux c'est qu'ils fassent l'addition effectivement. Mais surtout qu'ils représentent la boîte là à cette addition.
------	---	---

Extrait 60 : Soustraction/ Entretien professeure/ Ext 7/ LE17

La professeure a donc réactivé ces outils « *pour donner du sens au calcul* ». Ces outils garantissent la remémoration des rapports de connaissances qui entrent en jeu et sont des points d'appui pour faire advenir les éléments du nouveau savoir. La professeure le sait et s'appuie sur cette connaissance antérieure, « l'addition », pour amener le nouveau savoir « la soustraction ». Elle a activé des souvenirs communs en travaillant, avec la classe, les rapports avec la mémoire officielle que les élèves ont sur l'addition. Les élèves engagent leur mémoire pratique sur les briques et la boîte. Le milieu pour la suite est ainsi installé.

Néanmoins, l'idée de la boîte n'est pas figée pour la professeure dans LE5. Elle sait qu'elle n'est guère qu'un artéfact didactique dont l'usage disparaîtra lorsque le temps didactique aura suffisamment avancé et qu'une certaine organisation mathématique aura été institutionnalisée :

LE5	P	La boîte, c'est une transition. Je crois que là ce sont des séances où on doit passer de la vérification manipulatoire à la vérification par le calcul.
-----	---	--

Extrait 61 : Soustraction/ Entretien professeure/ Ext 8/ LE5

Elle s'engage dans l'explication sur la manipulation de la boîte. Celle-ci apparaît comme un objet matériel assurant un certain rapport avec le non-ostensif « vérification », qui passe ensuite par le savoir mathématique 23+25.

Nous interprétons cela comme une tentative, de la part de la professeure, pour déterminer les milieux institutionnels qu'elle compte peut-être mobiliser en organisant, à partir d'un rappel mémoriel sur une « situation additive », le passage des ostensifs à valeurs instrumentales (la boîte) à des ostensifs à valeurs sémiotiques (le sens de la somme). La boîte joue ainsi deux rôles dans l'institutionnalisation du nouveau savoir :

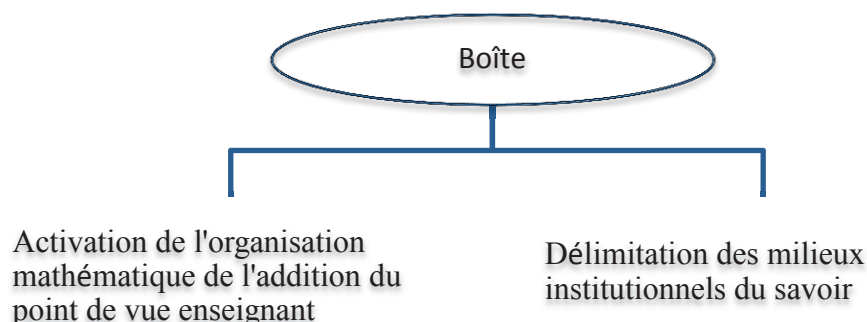


Figure 21 : le rôle de la boîte dans l'enseignement de la soustraction

7.4.1.2. Etapes de travail

La suite de la séance s'organise selon l'extrait ci-dessous :

Durée : Min 2 sec 2

7	P	Qui est-ce qui se souvient des étapes de notre travail ? / Prem
8	Prem	On compte les briques. Si on a assez de briques, sans le calcul Et après / on enlève les briques et compter
9	P	Qui est ce qui peut répéter la première étape ? Après on mettra tout ça dans l'ordre. La première étape que vient de rappeler Prem. Mo
10	Mo	On compte toutes les briques.
11	P	Pour quoi faire ?
12	Mo	Pour. Pour.
13	P	Mo Alors la première étape Na. Vous avez raison, on compte les briques. Mais pourquoi ? Na
14	Na	On compte les briques pour voir si on en a assez pour faire le calcul
15	P	Ah Na nous dit : on compte les briques pour voir si on en a assez pour faire le calcul. Il ne faut pas en avoir trop non plus. Donc on regarde dans la boîte, on a juste ce qu'il faut // tiens toi bien (<i>elle s'adresse à un élève</i>). On regarde juste ce qu'il faut, bien. Ensuite deuxième étape, qu'est-ce qu'on fait ? An
16	An	On enlève les briques de la boîte
17	P	Oui continue, allez, on continue.
18	An	On enlève les briques. On en enlève.
19	P	Très bien, on enlève les briques de la boîte. Et ensuite, donc deuxième étape, on enlève les briques de la boîte. Et enfin, troisième étape ?
20	Elève	On compte les briques.

Extrait 62 : Soustraction/Episode 1/ Ext 2/ L7 à L20

La professeure engage la classe dans une phase de remémoration qui lui servira à organiser la suite de la séance « *Qui est-ce qui se souvient des étapes de notre travail ?* » (L7). Cette phase a pour fonction la reconstruction d'un milieu fait de connaissances et de savoir-faire dont on fixe collectivement les limites : « Résoudre un problème par l'usage d'un outil » dans lequel les différents éléments de la situation entreront en jeu. La professeure institutionnalise la technique de la résolution d'un problème en interrogeant ses élèves sur les étapes de travail par lesquelles ils sont passés auparavant. Elle reformule ensuite avec son propre langage ces « étapes de travail » pour l'appropriation du problème suivant l'ordre chronologique suivant :

1. on regarde d'abord dans la boîte pour savoir si on en a assez pour faire le calcul ;
2. on enlève des briques de la boîte ;
3. on compte les briques qui restent dans la boîte.

Cette chronologie par « étapes » replace les élèves au raisonnement qu'ils auront à faire pour la suite de la résolution de ce problème. Ils auront essentiellement à se rapporter aux éléments

cognitifs, les souvenirs des pratiques antérieures désormais réorganisés par la professeure, qui permettront de déterminer les milieux institutionnels avec lesquels il est attendu que les élèves interagiront.

7.4.1.3. Liens entre les étapes proposées par la professeure et le champ additif modélisé par Vergnaud

Nous nous référons dans ce paragraphe aux typologies des situations additives de Vergnaud (1983) qui nous offrira des outils permettant de situer les OM relatives aux élèves et à la professeure pour nous renseigner sur la présence du phénomène du « dédoublement des milieux ».

Cette typologie se rapporte à des relations de base à partir desquelles il est possible d'engendrer la quasi-totalité des problèmes d'addition et de soustraction de l'arithmétique ordinaire. On obtient ainsi une caractérisation des types de problèmes que l'on peut résoudre à l'aide d'une addition ou à l'aide d'une soustraction. En effet, il faut souvent peu de choses pour qu'un problème additif dont on cherche la résolution devienne soustractif et inversement ; et ceci n'est pas obligatoirement lié à l'opération posée dans la résolution du problème. Par exemple :

Je mets 7 briques dans une boîte, j'en ajoute un certain nombre, la boîte en contient 15. Combien en ai-je ajouté ?

Possibilité 1 : Ce problème peut se résoudre en pensant : $7 + 8 = 15$.

Possibilité 2 : Ce problème peut se résoudre en écrivant : $15 - 7 = 8$.

Vergnaud (1983) a proposé quatre catégories de problèmes additifs qui sont :

Catégorie 1 : Transformation d'état (peut évoquer une quantité discrète, une mesure ou une position sur une piste graduée)

→ recherche de l'état initial.

→ recherche de l'état final.

→ recherche de la transformation.

Catégorie 2 : Composition de 2 mesures : réunion ou séparation de collections (peut évoquer une quantité discrète (nombre d'objets) ou une mesure (longueur, masse, ...))

→ recherche du tout.

→ recherche d'une partie.

Catégorie 3 : Relation de comparaison additive (peut évoquer une quantité discrète, une mesure ou une position sur une piste graduée)

→ recherche d'un état.

→ recherche de la comparaison

Catégorie 4 : Composition de transformations (évoque une transformation positive ou négative)

→ recherche de la transformation composée.

→ recherche de l'une des composantes.

La professeure situe les « *étapes de travail* » dans la catégorie 1 : « Transformation d'un état » de la typologie de Vergnaud afin de rechercher « l'état final » après transformation d'état.

Dans le but de repérer les lieux cognitifs de l'élève et de la professeure pour la suite de la séance, nous allons résumer cela dans le tableau ci-dessous qui met en rapport les étapes du travail proposé par la professeure avec la typologie de Vergnaud :

Etapes du travail conçues par la professeure	Méthode de raisonnement selon la classification de Vergnaud
Etape1 : « On regarde d'abord dans la boîte pour savoir si on en a assez pour faire le calcul ».	Reconnaissance de l'état initial.
Etape2 : « On enlève des briques de la boîte ».	Reconnaissance de la transformation.
Etape3 : « On compte les briques qui restent dans la boîte ».	Recherche de l'état final.

Par suite, les « étapes de travail » gérées par la professeure devraient réactiver chez les élèves leur mémoire pratique de ce qui se fait avec les objets « boîte et briques », c'est-à-dire ce qu'ils ont fait avec ces objets, et la mémoire officielle de ce qu'est en général la « résolution d'un problème » relevant d'une situation additive.

7.4.1.4. Rapports entre les différentes étapes de travail proposées par la professeure et les milieux cognitifs

Nous allons étudier chacune de ces étapes dans le but de rechercher certains des éléments du milieu institutionnel qui peuvent en émerger :

Etape1 : « On regarde d’abord dans la boîte pour savoir si on en a assez pour faire le calcul ».

La professeure a détaillé dans le tour de parole L15 la première étape de travail afin de dévoluer les conditions de la situation aux élèves : « *On regarde d’abord dans la boîte pour savoir si on en a assez pour faire le calcul* ».

Deux secteurs mathématiques peuvent être convoqués dans cette étape : La numération et le Calcul.

Dans ce sens, l’élève devrait s’organiser pour tirer le nombre des briques qui sera précisé par la consigne. Pour ce faire, il doit chercher un certain nombre de dizaines. Il peut être amené à en casser une ou à en ajouter quelques unités pour former le nombre indiqué. Il mettra en place la décomposition additive ou soustractive d’un nombre. Par exemple pour enlever 48 il y a deux techniques possibles qui relèvent de la numération dans le système décimal :

- Soit la prise de quatre dizaines et l’ajout de 8 unités : $40+8=48$. Le raisonnement correspond à celui d’une augmentation.
- Soit par la prise de cinq dizaines, en casser une pour en prélever deux unités. Le raisonnement correspond à celui d’une diminution et de ce fait, une écriture arithmétique traduisant l’énoncé est : $50 - \dots = 48$.

Ces deux techniques relèvent de la catégorie 1 : « Transformation d’un état » de la typologie de Vergnaud. Mais la première technique répond au type de tâches : « Rechercher l’état initial » alors que la deuxième technique répond au type de tâches : « Rechercher la transformation » dans une situation additive.

En général, le travail se mène à bien si un rapport adéquat de l’élève a été établi avec le domaine de la « numération décimale ».

Nous trouvons dans le même tour de parole L15 :

L15	P	[...] Ah Na nous dit on compte les briques pour voir si on en a assez pour faire le calcul [...]
-----	---	--

La professeure va s'appuyer sur le savoir antérieur des élèves concernant « le calcul ». Or l'addition est la seule opération travaillée dans cette classe. C'est ce qu'affirme la professeure dans le tour de parole LE9 de l'entretien :

LE9	P	Après avoir écrit 23+25 sur l'affiche du tableau, ils utilisent la boîte pour donner un sens au calcul c.à.d. si on va rajouter 23+25 il y en aura beaucoup qui pourraient le faire au hasard puisque l'addition c'est ce qu'ils savent, ce qu'ils connaissent et donc à partir des nombres qui sont présents, donc on va les utiliser dans une addition. [...]
-----	---	---

En fait pour construire « le sens » de la situation, la professeure va se servir de la boîte pour expliquer ce que veut désigner cette addition. Dans ce sens, pour trouver le nombre inconnu 25 il suffira de résoudre l'égalité à trou $23 + \dots = 48$. Dans ce cadre, 25 représente la différence des deux nombres 48 et 23, c'est le nombre que l'on doit ajouter au petit pour obtenir le grand. Une addition permettra de vérifier la réponse comme l'indique la professeure dans LE49 :

LE49	P	[...] Donc mon but principal n'est pas de les entraîner à faire cette addition. Bien il faudrait l'effectuer quand même pour apporter la réponse à la question. Mais le but là est de traduire la vérification manipulatoire par un calcul, en fait pour donner un sens, je veux vérifier s'il reste bien 25. Donc je peux le vérifier par un calcul.
------	---	--

Cette idée est fondatrice du fait que la professeure invite la classe à s'engager dans l'usage de la boîte. C'est un usage de valeur « transitoire » de la première phase de la boîte : « l'usage de la boîte vise à simuler les situations proposées » lors de la deuxième phase : « le passage à l'usage du nombre et de l'addition pour vérifier ».

Etape 2 : « On enlève des briques de la boîte »

L'élève **An** a ajouté la deuxième étape en L16 : « *On enlève des briques de la boîte* ». Pour ce faire, il se replace dans le secteur des « propriétés du nombre » qui englobe le thème du « Dénombrement » relatif au sujet « Compter de 1 à 23 ». La réussite est liée ainsi au dénombrement correct des objets.

Cette étape correspond au raisonnement suivant : $48 - 23 = \dots$

Un tel raisonnement relève de la catégorie 1 de la typologie de Vergnaud qui consiste à calculer « l'état final » pour une situation additive.

Etape 3 : « on compte les briques qui restent dans la boîte »

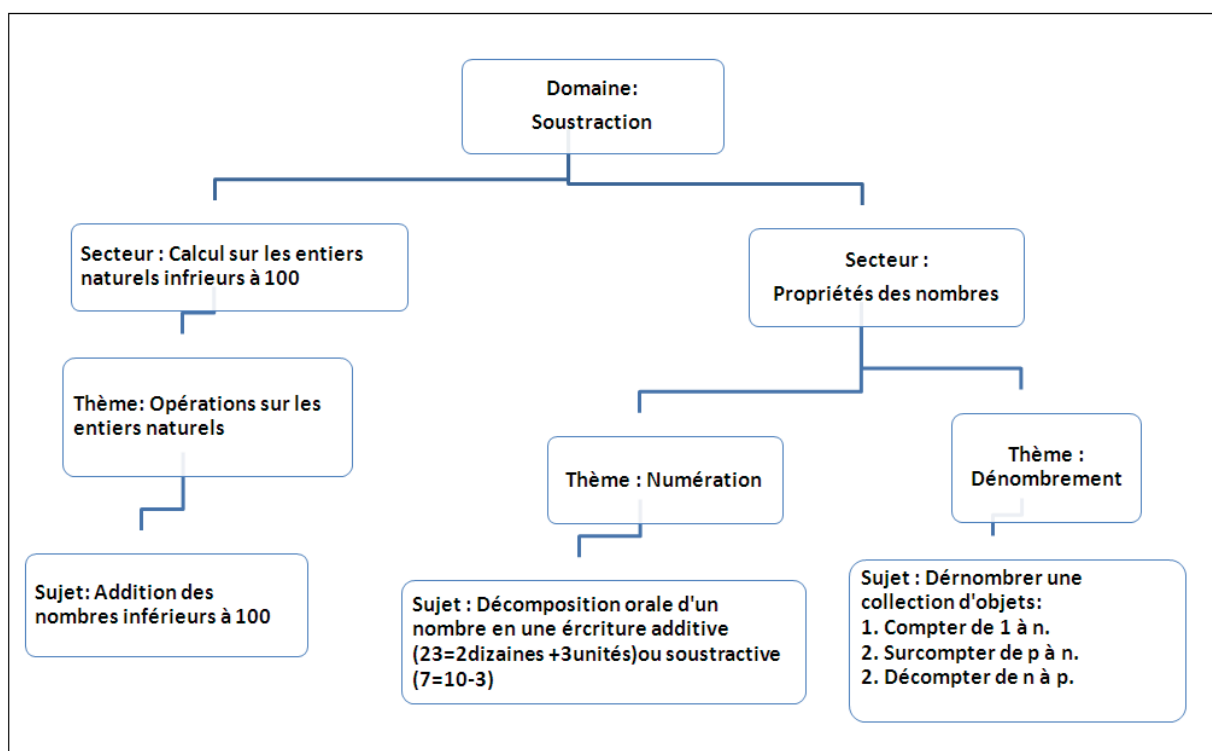
Dans le tour de parole L20 un élève a ajouté la troisième étape de travail « *On compte les briques qui restent dans la boîte* ».

L'élève se replace au niveau du sujet « Compter de n à p », comme dans l'étape 2. Sur ce plan, il est nécessaire pour lui de « Surcompter de n à p » pour réussir la tâche, c'est-à-dire qu'il sache surcompter de 24 jusqu'à 48.

Les résultats de notre enquête sur les étapes organisées par la professeure sont attestés dans sa réponse en LE8 :

LE8	P	Les élèves pourront faire de la façon suivante (pour résoudre le problème): Par une addition. Par tâtonnement sur la file numérique vue au CP jusqu'à 99 et que certains élèves l'ont aussi sur la table pour s'aider.
-----	---	--

Cet extrait nous permet d'étudier les éléments institutionnels du savoir dévolus par la professeure dans l'épisode 1S « Mobilisation des outils de travail » p.280 de la séance, en les replaçant dans le cadre d'une organisation mathématique relevant du domaine de la soustraction:



Tab OM 34 : Milieu institutionnel de la professeure pour le premier épisode de la séance

7.4.1.5. Conclusion

L'épisode 1S, « Mobilisations des outils de travail » de la séance, est organisé autour de plusieurs types de tâches articulés selon plusieurs étapes de travail. Par exemple, le type de tâches de l'étape 1 tourne autour de « Comparer deux nombres » est pertinent pour savoir si on peut enlever une collection d'une autre plus grande. Le type de tâches de l'étape 3 porte sur « Dénombrer une collection d'objets ».

Cet épisode montre aussi que la professeure ne s'attarde pas à instaurer toutes les connaissances et les savoir-faire nécessaires pour cet enjeu de travail. Elle s'est appuyée principalement sur la présence de la boîte pour réaménager le milieu d'étude. Elle a engagé la classe à envisager le rôle de la boîte comme « Outil de résolution ». Elle a utilisé des mots qui marquent des ostensifs à valeur sémiotique (hypothèses, solutions) et des ostensifs à valeur instrumentale (vérifier, calculer).

La professeure a évoqué tout d'abord le souvenir des étapes de travail dans L7, L9, L13, L15, L19. L'évocation multiple de ces étapes a pour fonction d'autoriser *a fortiori* une rétroaction possible du milieu contenant la boîte vers le milieu institutionnel du savoir contenant la soustraction.

Il y a ainsi une sorte d'inclusion du milieu dans lequel les élèves ont travaillé, au cours des trois étapes, dans le milieu institutionnel de la soustraction organisé par la professeure.

La professeure a dévolu son travail de façon à ce que le phénomène de « dédoublement des milieux » ait peu de chance d'apparaître.

Nous allons étudier la présence de ce même phénomène dans les autres épisodes de cette séance.

7.4.2. Episode 2S : Convocation des souvenirs

7.4.2.1. Détermination des milieux cognitifs des élèves

L'ouverture de cet extrait est présentée ci-dessous :

Durée : Min 0 sec 46

21	P	Très bien, on compte les briques qui restent dans la boîte. Donc là vous venez me rappeler ce qu'il faut faire pour utiliser la boîte comme outil de résolution. Mais (<i>après un profond soupir</i>) vendredi avant d'utiliser la boîte comme outil de résolution on a fait autre chose. Alors pour vous aider à s'en rappeler, j'ouvre le tableau pour regarder l'affiche et vous allez expliquer ce qu'on a fait avant d'utiliser la boîte (<i>la professeure ouvre le tableau pour montrer l'affiche</i>) Thé
22	Thé	On a cherché. On a cherché avec tout le monde. Si c'était vraiment. On a mis les numéros dans les hypothèses et après on a vérifié si c'est le bon.

Extrait 63 : Soustraction/ Episode 2/ .Ext 1/ L21 – L22

La professeure souhaite faire changer le rapport institutionnel de la classe qui reposait sur 1) la représentation de « la boîte et des briques » comme outils de travail et 2) les organisations des « étapes de travail ».

Ce changement est amené par l'expression « *vendredi avant d'utiliser la boîte comme outil de résolution on a fait autre chose* ». La professeure replace les élèves, dans les souvenirs de « vendredi », au moment précis « avant d'utiliser la boîte » relatif au statut particulier que prend cet outil « la boîte est un outil de résolution ». Ceci afin de mobiliser leur mémoire pratique relativement à « ce qui se faisait avec la boîte ».

La professeure ouvre le tableau pour montrer une affiche sur laquelle nous lisons : « hypothèse, solution, vérification » et par-dessous des nombres et l'énoncé du problème. **Thé** a réagi immédiatement pour donner la bonne réponse « [...] *On a mis les numéros dans les hypothèses et après on a vérifié si c'est le bon* » (L22).

La professeure a activé les souvenirs des pratiques propres à la séance précédente, qui lui semblent nécessaires pour déclencher le nouveau savoir, ceci par un arrêt du temps didactique. Ces souvenirs sont relatifs aux trois étapes de travail définis antérieurement dans l'épisode 1S, p.280 : « Mobilisation des outils de travail ». Elle souhaite par ceci établir un milieu institutionnellement conforme aux organisations mathématiques et didactiques du nouveau savoir.

Elle est prête ainsi à présenter le premier problème aux élèves. Le travail précédent souligné par la professeure par « *une fonction de contrôle et de vérification* » a pour but d'inciter les élèves à utiliser des techniques correspondantes à des types de tâches qui leur sont routinières.

En allant plus avant dans l'étude de la suite de la séance, nous allons voir comment la professeure va organiser dans la classe le milieu institutionnel du savoir en interaction avec les élèves :

Dure : Min 1 sec 14

22	Thé	On a cherché. On a cherché avec tout le monde. Si c'était vraiment. On a mis les numéros dans les hypothèses et après on a vérifié si c'est le bon.
23	P	Ah Thé, il a dit deux mots très importants. Qui est-ce qui peut répéter ces deux mots très importants. Oui (elle s'adresse à un élève). Alors !
24	Elève	Hypothèse
25	P	Bravo, Thé. Il a dit, on a parlé d'hypothèse vendredi, et il a utilisé un deuxième mot.
26	Elève	On a vérifié
27	P	Très bien, on a vérifié. Alors qui est-ce qui peut me dire exactement ce qu'on fait avant d'utiliser la boîte ?
28	Elève	[...]
29	P	Ah, il n'y a que deux élèves qui s'en souviennent ! Ah Ang
30	Ang	On a [non compris]
32	P	Qui peut répéter ce qu'a dit Ange ? Sou On a essayé, Mel, de trouver la solution sans la boîte. Mais alors comment on a fait sans la boîte ?

Extrait 64 : Soustraction/ Episode 2/ .Ext 2/ L22 – L32

La professeure reformule, à l'aide d'un effet Topaze, la réponse de l'élève dans L23 en mentionnant les principaux éléments de réponse qui sont les « *deux mots* ». Elle va faire avancer le temps didactique en s'appuyant sur le sens commun partagé de ces deux mots dans la classe. La répétition et la recherche de ces deux mots « hypothèse, vérifier » vise à circonscrire le milieu du savoir et à « souffler » aux élèves des pistes pour avancer dans la mise en œuvre d'une technique.

La professeure espère sans doute parvenir à réactiver, à l'aide de cette reformulation, des éléments permettant de justifier l'affirmation précédente donnée par **Thé** dans L22. Il nous semble que le tour de parole de la professeure dans L27 : « *Très bien, on a vérifié. Alors qui est-ce qui peut me dire exactement ce qu'on fait avant d'utiliser la boîte ?* » place de nouveau les élèves dans le souvenir de l'autre jour « vendredi ». La convocation multiple de ce jour-là dans L21 et L25 vise à placer de nouveau les élèves dans ce qu'ils faisaient pour accomplir la tâche demandée, et joue un rôle d'indicateur (Araya, 2008) plus précis. Ce tour de parole

révèle son intention de fixer des points de repère dans le passé didactique des élèves ; ils serviront de point d'appui.

Dans ce sens, la professeure essaie 1) d'institutionnaliser – ou réinstitutionnaliser – des techniques activées antérieurement, qui sont attestées scolairement par le remplacement temporel que suggère le mot « avant », désignant un événement du passé qui a eu lieu et ne se poursuit pas actuellement 2) d'établir un rapport aux milieux cognitifs des élèves afin de les activer et de les rapporter aux éléments du milieu que veut faire institutionnellement vivre la professeure.

La professeure s'appuie sur l'ostensif scriptural « les deux mots » car cet ostensif incite la classe à construire son propre milieu à partir des souvenirs qui y sont présents. Elle attend que la réactivation de ces « deux mots » puisse alors servir à contrôler individuellement ou collectivement les milieux qu'elle souhaite dévoluer pour que les élèves ne s'en écartent pas. C'est ce qu'indique le tour de parole L29 de la professeure : « *Ah, il n'y a que deux élèves qui s'en souviennent ! Ah, Ah* ». Ces ostensifs pourraient amener les élèves à fournir des fragments de vérification qui seront interprétés, au niveau de la classe, comme une attribution de connaissances à ces élèves par la professeure.

Cet épisode 2S est clôturé de la manière suivante :

Durée : Min 0 sec 46

32	P	Qui peut répéter ce qu'a dit Ange ? Sou On a essayé, Mel, de trouver la solution sans la boîte. Mais alors comment on a fait sans la boîte ?
33	Elève	On a calculé
34	P	Dis le bien fort
35	Elève	On a calculé
36	P	Ah ! on a fait un calcul.

Extrait 65 : Soustraction/ Episode 2/ .Ext 3/ L32 – L36

La question de la professeure dans L32 « *comment on a fait ?* » révèle l'intention de faire émerger le souvenir d'une technique au sein de la classe. Elle témoigne ainsi des souvenirs collectivement partagés dans un temps naturel scolaire et dévoile des rapports de connaissances à des éléments du milieu institutionnel. Cela conduit les élèves à se replacer dans ce qu'ils faisaient « l'autre jour » ou ailleurs pour répondre à ce « *comment ?* ».

Ceci peut signaler la place du milieu cognitif de l'élève dans l'organisation mathématique du savoir. Il pourrait se replacer dans un domaine différent de celui de la professeure, que nous pouvons identifier à celui du domaine « Nombre et Calculs », compte tenu de la réponse de plusieurs élèves : « *On a calculé* » (L33 et L35). Nous pouvons renvoyer ce calcul à

« l'addition » puisqu'elle est la seule opération connue par les élèves dans cette classe à ce moment de l'année.

Sous cet angle, le domaine englobe le secteur du « calcul sur les entiers naturels » qui ne contient guère que le thème des « Additions ». Ce thème est relatif au type de tâches : « additionner des nombres inférieurs à 100 ».

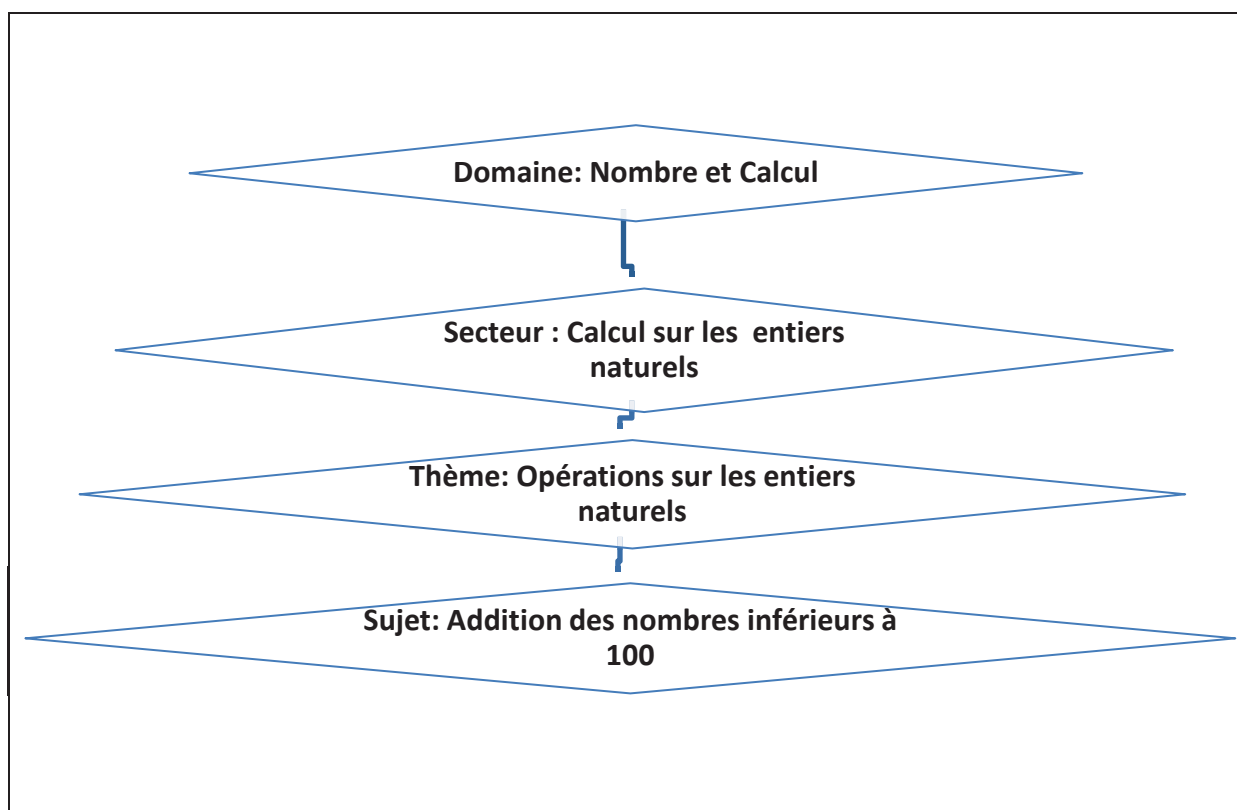
L'usage par la professeure des expressions comme « Dis le bien fort » dans L34 et l'exclamation « Ah ! » dans L36 marquent la venue de la réponse attendue à la question L32 :

32	P	Qui peut répéter ce qu'a dit Ange ? Sou On a essayé, Mel, de trouver la solution sans la boîte. Mais alors comment on a fait sans la boîte ?
----	---	--

La professeure replace le travail évoqué dans cet épisode 2S au niveau du secteur du « Calcul » puisque dans la période « du rappel de ce qui s'est passé le vendredi » les élèves avaient à proposer une « hypothèse » pour vérifier avec un calcul « *c'est le bon* » (cas de L22). Cette technique ne demande pas un travail sur le secteur « Propriétés du nombre », cas de ce qui est fait dans l'épisode 1S précédent. Cette réponse réduit la distance mésogénétique avec les élèves. Elle rapproche les éléments institutionnels du savoir avec les milieux cognitifs des élèves et tend à empêcher leur « dédoublement ».

En guise de conclusion, nous considérons pour l'Episode 2 / *Ext 65* p.293 que ce qui est déjà milieu pour la professeure ne l'est pas nécessairement pour l'élève. La professeure se replace dans le domaine relatif à la « Soustraction » des nombres comme nous avons vu dans le premier épisode 1S. En effet les techniques débattues dans la classe doivent converger du point de vue de la professeure vers le domaine « La soustraction » qui va constituer le domaine principal d'étude. Par contre dans cet épisode 2S l'élève rapporte ses actions au domaine « Nombres et Calcul ».

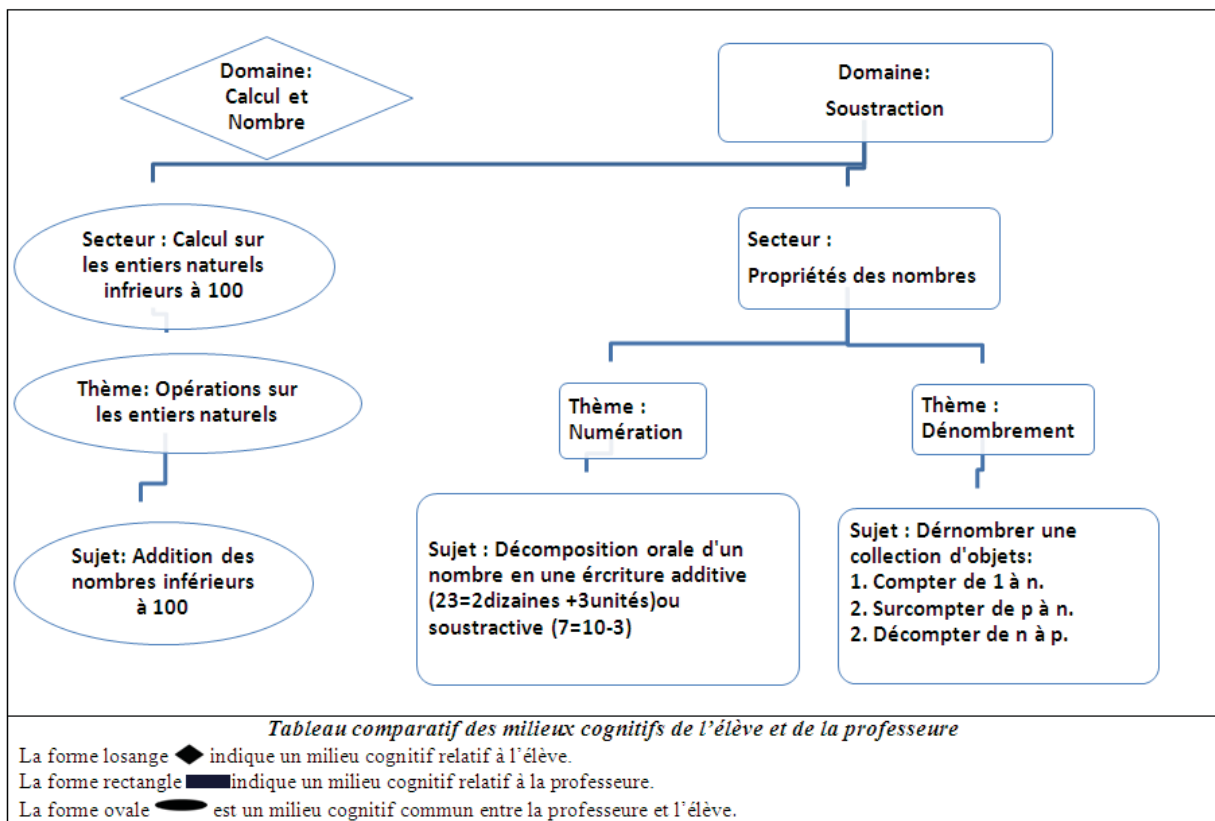
Nous allons rassembler les éléments des milieux cognitifs possibles des élèves pour cet épisode 2S dans le tableau ci-dessous :



Tab OM 35 : Milieu cognitif de l'élève relatif à l'épisode2S de la séance

7.4.2.2. Conclusion des épisodes 1S et 2S

Pour résumer le phénomène de dédoublement des milieux cognitifs des élèves et de la professeure dans les deux épisodes passés 1S : « Mobilisation des outils de travail » et 2S : « Convocation des souvenirs », nous allons illustrer dans un même tableau les éléments constitutifs de ces deux milieux :



Tab OM 36 : Dédouplement des milieux relatif aux épisodes 1S et 2S

7.4.3. Episode 3S : Appropriation du problème

Dans la suite de L36, la professeure récapitule les étapes de travail de « vendredi » pour engager de nouveau les élèves dans le travail du jour comme si elle institutionnalise les étapes de résolution d'un problème pour qu'il réussisse la tâche suivante :

36	P	Ah on a fait un calcul. Donc première étape de vendredi c'était : Je fais mon hypothèse en calculant, j'essaie de trouver la solution. Et deuxième étape, je vérifie en utilisant la boîte.
----	---	--

Après cela, la professeure a mis en place le premier problème (Problème 1). Elle a préparé à l'avance une affiche qu'elle a collée au tableau comme dans le schéma ci-dessous :

Problème 1

Enoncé	Fiche à remplir			
Dans la boîte, il y a 48 briques. J'en enlève 23. Combien reste-t-il de briques dans la boîte ?	Nombre de briques dans la boîte	Nombre de briques sorties	hypothèses	Vérification
	48	23		
		Solution		

La professeure dévolute le problème. Elle publie la consigne :

Durée : Min 0 sec 52

37	Rid	Dans la boîte, il y a 48 briques. J'en enlève 23. Combien reste-il de briques dans la boîte ?
38	P	Bon, cette fois ci dans notre boîte il y a combien de briques ? C'est écrit hein ! Allez
39	Char	48
40	P	Cette fois ci, dans notre boîte on a 48. On en enlève combien ? (la professeure pose la question accompagnée par des gestes sous forme de ronds dans l'air). Bravo à ceux qui lèvent la main.
41	Elève	23
42	P	On en enlève 23, qu'est ce qu'on veut savoir Nas ?
43	Nas	Le résultat
44	P	Ah ça ne suffit pas, c'est toujours un résultat qu'on cherche. Il n'y a que Mél qui réfléchit. Meh, qu'est-ce qu'on cherche ?

Extrait 66 : Soustraction/ Episode 3S/ Ext 1/ L37 à L44

La professeure lit l'énoncé et pose des questions pour s'assurer que les élèves sont capables de réussir la tâche « Calculer le reste de briques dans la boîte ». La réponse de **Nas** « *Le résultat* » (L43) nous laisse penser que cet élève tend à se replacer dans un domaine où il peut

exprimer volontairement la solution du problème par un « calcul ». Pour ce faire, il remonte au domaine « Calcul et Nombres » qui débouche sur le secteur « Calcul numérique ». Ce sont les éléments contenus dans ce secteur qui permettent de donner la solution du problème sous forme de résultat. Plus précisément, nous pouvons remarquer qu'il y a pour les élèves deux différentes données qui sont 48 et 23. Dans ce sens, le « résultat » ne peut advenir qu'après un calcul fait sur ces deux données. Le thème associé à ce calcul dépend de la seule opération que l'élève connaît. Cette opération est évidemment l'« addition des entiers inférieurs à 100 », et c'est elle qui détermine « le sujet » dans l'échelle des niveaux de codétermination didactique, relative à l'OM appropriée. A notre sens il y a deux possibilités pour les élèves dans ce contexte :

- Soit les élèves additionnent 48 et 23 ($48+23 = 71$).
- Soit ils proposent une égalité à trou de la forme : $23 + \dots = 48$.

La professeure, quant à elle, n'a pas accepté la réponse de **Nas** dans L43 : « *Le résultat* ». Elle a répondu dans L44 par « *Ah, ça ne suffit pas* ». Elle relève, dans ce même tour de parole L44, qu'un seul élève répond à ses attentes : « *Il n'y a que Mél qui réfléchit* ». Ce qui tend à prouver que la professeure et les élèves agissent sur deux milieux différents. La professeure s'attend à des réponses différentes que celles données par les élèves. Elle veut que les élèves agissent dans un milieu qui relève de son propre domaine « la soustraction » dans la catégorie 1 de la typologie des situations additives de Vergnaud : « Transformation d'un état : recherche de l'état final ». C'est ce qu'indiquent ses interventions L40 « *Dans la boîte il y a 48* » et L42 « *on en enlève 23* ».

La professeure développe son action par l'intermédiaire d'une maïeutique qui vise à ce que les élèves se placent dans un domaine qu'ils méconnaissent et qui est celui de la « soustraction », au moyen d'interrogations qui n'appellent que des réponses courtes de la part des élèves. Alors que ces derniers replacent leurs actions dans le domaine « Calcul et Nombres ».

La clôture de cet extrait vient avec le tour de parole ci-dessous :

Durée : Min 0 sec 52

50	P	On cherche combien il en reste. Vous allez faire votre calcul, pas maintenant. Vous allez faire votre calcul sur l'ardoise. [...]. Quand je vous le dirai, vous sortirez tout à l'heure ardoise et feutre et vous réfléchirez combien il peut rester de briques dans la boîte. Au départ on en a 48 et j'en enlève 23 [...]. Allez-y, sortez votre matériel
----	---	--

Extrait 67 : Soustraction/ Episode 3S/ Ext 2/ L50

La professeure a repris le problème 1 dans L50. Elle l'amène toujours selon le raisonnement suivant : Recherche de l'état final : « On cherche combien il en reste » puis reconnaissance de l'état initial : « Au départ on en a 48 » et enfin reconnaissance de la transformation : « j'en enlève 23 ».

Les élèves ont essayé de résoudre le problème en 3 minutes. La professeure collecte les réponses et remplit la colonne des hypothèses comme dans le tableau ci-dessous :

Nombre de briques dans la boîte	Nombre de briques sorties	hypothèses	Vérification
48	23	25	
		23	
	Solution	29	
		52	
		200	
		21	

Pour vérifier les réponses des élèves, la professeure les a incités à étudier la validité de certaines « hypothèses » comme 25, 200 et 52 qui figurent dans le tableau ci-dessus. Elle les a poussés à participer davantage, par exemple dans le tour de parole L53 : « *Alors, est-ce qu'il y a au tableau des hypothèses qui vous semblent déjà impossibles ?* ».

Nous étudions maintenant l'extrait de L57 jusqu'à L64 pour savoir comment les élèves ont fait:

Durée : Min 1 sec 04

57	P	Pourquoi 200 te semble impossible ?
58	Cam	Parce que c'est trop loin.
59	P	C'est trop grand comme un nombre. Pourquoi ? Qui peut préciser ? 200 briques qui restent dans la boîte, c'est trop grand.

60	Elève	Le nombre est trop grand
61	P	Oui mais par rapport à quoi c'est trop grand. Soul (Brouhaha dans la classe) plus grand que 48. Ah vous me dites 200 est plus grand que 48. On a 48 dans la boîte au départ, si j'en enlève, il ne peut pas rester 200. Alors 200 là, ce n'est pas possible (elle barre 200). Bien, est-ce qu'il y a une autre hypothèse qui vous semble impossible ? Hakim
62	Haki	52 ?
63	P	Pourquoi 52 ?
64	Haki	C'est plus grand que 48.

Extrait 68 : Soustraction/ Episode 3S/ Ext 3/ L57 à L64

La professeure a engagé les élèves à participer. Ils ont répondu avec succès aux questions posées, ce qui est le cas par exemple de **Cam** qui a répondu dans L56 par « 200 ». Cet élève a justifié sa réponse dans L58 par : « Parce que c'est trop loin ». Il voulait dire parce que 200 est trop loin ou trop grand par rapport à 48. Ce débat signe une certaine conformité des rapports des élèves à celui attendu aux tâches qui portent sur « la comparaison des nombres ».

Cet extrait montre que les élèves sont capables d'accompagner leur professeure dans les secteurs qui leur sont familiers comme celui des : « Propriétés des nombres ». Ce secteur débouche sur le thème du « dénombrement » relatif au type de tâches : « Comparer deux nombres ».

L'extrait suivant montre l'action de la professeure alors qu'elle est parvenue à enrôler les élèves dans le travail de recherche proposé :

Durée : Min 1 sec 50

65	P	Ah très bien, Haki nous dit 52 aussi, c'est plus grand que 48. Donc cette hypothèse n'est pas possible (elle barre 52). Bon maintenant il nous reste d'autres solutions. Alors pour vérifier si (elle s'arrête un petit instant) on va commencer dans l'ordre, si Naw. On va vérifier, pour vérifier si 25 est une hypothèse juste, vraie/ qu'est-ce qu'on va faire ?
66	Elève	(il ne sait pas répondre)
67	P	Allez Cam, tout le monde va réfléchir là. Qu'est-ce que j'aurais à faire comme vérification, en calculant et après avec la boîte. Quel calcul je dois faire pour vérifier si 25 est juste ?
68	Mar	23
69	P	Pourquoi tu as utilisé 23 ? c'est quoi 23 ? (elle écrit 23 dans la colonne de la vérification sur l'affiche du tableau)
70	Mo	Ce qu'on a enlevé
71	P	Bravo, ce qu'on a enlevé. Continue Mar
72	Mar	+25
73	P	Ah Mar dit 23+25, et pourquoi, qui peut expliquer ce calcul ? Mo

Extrait 69 : Soustraction/ Episode 3S/ Ext 4/ L65 à L73

Dans cet extrait **Ext 69**, la professeure a essayé à plusieurs reprises de faire avancer le temps didactique par des mouvements topogénétiques descendants. Elle a raccourci la distance qui la sépare des élèves en dialoguant avec eux avec le pronom « on » à plusieurs reprises dans L65 : « *on va commencer* », « *on va vérifier* », « *qu'est-ce qu'on va faire ?* » et par « tu » dans « *Pourquoi tu as utilisé 23 ?* » (L69). Ceci vise à provoquer chez les élèves l'établissement de rapports adéquats et partagés aux nouveaux objets de savoir.

La réponse de **Mar** dans L68 : « 23 » prouve qu'il répond par contrat sans réfléchir à ce qu'attendait la professeure car le nombre 23, sa réponse, est écrit dans l'énoncé du problème qu'il lit. Cet élève a complété sa réponse dans L72 : « +25 ». C'est la conséquence principale des interventions de la professeure qui a écrit en même temps « 23 » dans la colonne de vérification de l'affiche. La réponse de cet élève est encore une fois obtenue grâce à une sorte de maïeutique, dans le sens où il se trouve obligé de répondre aux questions de sa professeure. Il se place ainsi et se restreint au domaine « Nombres et Calcul » : il a utilisé le nombre 23 en l'associant à l'hypothèse 25 par l'ajout du signe de l'addition.

La professeure par ces félicitations et ses encouragements (L71) pousse **Mar** à lui donner la réponse visée « 23+25 ». Mais elle ne se contente pas de ceci, elle pousse de plus en plus l'ensemble classe à vérifier la solution « *et pourquoi, qui peut expliquer ce calcul ? Mo* » (L73). Mais c'est la professeure même qui a reformulé cette réponse après une série de questions constitutives. Elle a joué sur les petites réponses des élèves comme celles de **Mar** dans L68 : « 23 » et L72 : « +25 » et celle de **Mo** dans L70 : « ce qu'on a enlevé ».

Dans ce même extrait, la professeure a accordé une place primordiale au « Calcul » pour réussir la tâche. Elle place le travail des élèves dans le domaine « Nombres et Calcul » relatif au type de tâches : « Calculer la somme de deux nombres ».

Après L73, la professeure a rempli la colonne de la vérification ci-dessous :

Nombre de briques dans la boîte	Nombre de briques sorties	hypothèses	Vérification
48	23 Solution	25	23+25
		23	
		29	
		52	
		200	
		21	

L'ostensif 23+25 est écrit dans la colonne « vérification » et repris dans l'extrait ci-dessous :

Durée : Min 1 sec 43

73	P	Ah Mar dit 23+25, et pourquoi, qui peut expliquer ce calcul ? Mo
74	Mo	(il ne répond pas)
75	P	23+25, Pourquoi ? Mar a dit c'est ce calcul qui nous permet de vérifier. Oui ? Nas, explique-nous pourquoi ?
76	Nas	Parce que 23 ce qu'on a enlevé. Et 25 c'est [...]
77	P	C'est presque très bien. Je répète ce qu'a dit Nas et vous précisez. 23 ce que j'ai enlevé Et 25 c'est quoi ? Je n'entends pas. Dis le bien fort. 25 c'est ?
78	Mel	C'est ce qui reste dans la boîte
79	P	23 ce que j'ai enlevé, et 25 c'est ce que je pense, pas sûre, ce que je pense qu'il reste. Donc pour vérifier on fait 23+25 Qu'est-ce qu'on doit trouver si la réponse est juste. Allez Chi répète ma question. Qu'est-ce que j'ai demandé ? Qui peut aider Chi ? Mo
80	Mo	(il ne répond pas)
81	P	Ah je répète, écoutez bien. Qu'est-ce qu'on va trouver si 25 est juste ? And Et il y en a combien en tout ?
82	And	(ne répond pas)

Extrait 70 : Soustraction/ Episode 3S/ Ext 5/ L73 à L82

Pour cet extrait nous allons étudier en premier le « déroulement » de l'épisode puis nous mettons la lumière sur l'ostensif « 23+25 ».

7.4.3.1. Le déroulement

La professeure par un mouvement mésogénétique officialise « *Ah Mar dit 23+25, et pourquoi, qui peut expliquer ce calcul ? Mo* » (L73). Dans cet extrait, les élèves interrogés n'ont pas trouvé d'explications à leurs réponses : cas de **Na** dans L76 : « *Parce que 23 ce qu'on a enlevé. Et 25 c'est (il s'arrête sans pouvoir justifier)* ». La professeure s'attend à ce que les élèves répondent à ses questions dans L79 et L81. Aussi ce qui semblait évident à la professeure ne le paraît pas pour autant pour les élèves.

Cet épisode 3S est clôturé par ce tour de parole :

Durée : Min 1 sec 11

83	P	Ah si c'est juste on va trouver 48. J'avais demandé si est-ce que vous avez rangé « ardoise et feutre ». Allez, vous écoutez bien ? Vendredi je vous ai donné des boîtes et il y a des élèves qui, comme le groupe de Rida. Il y a des élèves qui n'ont pas travaillé, qui n'ont rien appris, parce que dès qu'ils ont la boîte, comme ils étaient quatre, ils ont joué. Aujourd'hui je veux à nouveau vous donner des boîtes, mais on ne peut plus travailler tous à deux. Il n'y a pas assez de briques, forcément il y a des groupes qui seront quatre. Ceux qui sont quatre doivent apprendre, travailler quand même. Mais je ne suis pas avec eux que je regarde d'autres élèves. Ils doivent apprendre et travailler sans crier en comptant les briques en faisant la vérification avec la boîte.
----	---	---

Extrait 71 : Soustraction/ Episode 3S/ Ext 6/ L83

La professeure accélère le temps didactique sans pouvoir obtenir des réponses claires. L'élève **And** n'a pas répondu dans L82. La professeure a déduit elle-même la conclusion dans L83 : « Ah, si c'est juste on va trouver 48 ».

D'une part, la non-réponse des élèves à la question L81 : « *Qu'est-ce qu'on va trouver si 25 est juste* » paraît raisonnable puisque dans l'énoncé du problème 1 il n'y a pas 25. D'autre part, les élèves pourraient raisonner de la façon suivante : 1) Reconnaissance de l'état initial : « Au départ on en a 48 » puis 2) reconnaissance de la transformation : « j'en enlève 23 » et enfin 3) recherche de l'état final : « On cherche combien il en reste ».

Par contre, le raisonnement de la professeure suit hiérarchie suivante 1) Reconnaissance de l'état initial : « On en a 23 » puis 2) reconnaissance de la transformation : « On va essayer si 25 est une solution vraie » et enfin 3) recherche de l'état final : « Si c'est juste on va trouver 48 ».

Chacun des deux protagonistes, professeure et élèves, replace ainsi son action dans des rapports de connaissances différents, constituant ainsi des milieux différents. Les élèves ne se sont pas placés dans le de leur professeure.

7.4.3.2. « L'ostensif ⁷³ 23+25 est un objet à regarder »

Nous avons vu apparaître la somme « 23+25 » dans les lignes L73, L75 et L79. Elle semble, depuis la position d'élève, n'être qu'un objet qui se donne simplement à voir, sans inciter à s'engager dans un travail ou une interrogation car les réponses des élèves à son propos sont complètement absentes. La visibilité de cet ostensif lui attribue en quelque sorte une évidence qui ne peut être expliquée ou interrogée par les élèves. La présence de cette somme est semblable aux listes affichées au mur de la classe, aux bandes numériques, etc. Elle apparaît comme un objet qui s'impose de lui-même à ceux qui le regardent et le manipulent. Les interactions des élèves avec cette écriture montrent qu'elle ne peut pas constituer un appui pour sa dévolution. Mais elle est traitée par la professeure comme une nécessité afin de familiariser les élèves aux éléments institutionnels du nouveau savoir : « soustraction ». Dans ce sens, la professeure va calculer la somme « 23+25 » qui prend le statut de « permettre de vérifier » (voir 7.3.1.2, p.275).

Dans ce cadre, il est clair que la professeure pousse les élèves à s'approprier la vérification de la somme de 23+25 à partir de la boîte. C'est ce qu'on observe dans l'extrait de l'entretien suivant :

LE6	Question	Finalement, on fait une hypothèse. On vérifie par le calcul dans un premier temps et on vérifie la vérification du calcul sur la boîte.
LE7	P	Oui c'est ça. Tant que le calcul n'est pas sûr, on utilise toujours la boîte de façon collective et individuelle pour que la preuve manipulatoire doive venir après une preuve intellectuelle dans le calcul.

Extrait 72 : Soustraction/ Entretien/ LE6 – LE7

Nous pouvons voir dans LE7 que les rapports de la professeure et des élèves à « 23+25 » sont différents. Cette différence provient de ce que chacun comprend de ce qui est à faire avec la somme « 23+ 25 ». La professeure attend « une preuve intellectuelle dans le calcul » et la somme « permet de vérifier ». Alors que les élèves restent dans la « preuve manipulatoire » où la somme « permet de calculer ».

La différence du rapport que chacun établit entre ce qui est à faire et ce à quoi sert l'écriture 23 + 25 peut être due à une autre raison. Elle pourrait relever du sens attribué à des écritures

⁷³ « La sémiotité d'un objet, d'un comportement ou d'une situation est ce qu'il donne à voir : Si j'ai en main un marteau et que je fais face à un tas de bardeaux, pour un observateur participant de ma culture, je vais refaire le toit de ma maison. » L'instrumentalité de cet objet ou de ce comportement est ce qu'il réalise : le toit de ma maison.

En considérant les notations mathématiques comme des outils, nous distinguons ce qu'elles permettent de faire de ce qu'elles donnent à voir. Pour signifier que le travail mathématique s'appuie sur la sémiotité des objets et notations, Bosch (1994) les nomme « outils ostensifs » ou ostensifs. » Citées dans (Mercier et Matheron, 2004).

de forme « $n + p$ » et « $n - p$ » à ce niveau de classe. Matheron et Noirfalise (2009) écrivent à ce propos que :

« Les écritures $n + p$ et $n - p$ se mettent donc en place progressivement dès le début du cycle des apprentissages fondamentaux, à l'occasion d'activités au cours desquelles deux quantités sont réunies, ou bien où une quantité subit une augmentation ou une diminution. Ces écritures permettent de désigner le nombre d'objets que l'on possède quand on a reçu « n objets puis encore p objets », ou encore « qu'on a reçu n objets et qu'on en a enlevé p », y compris si ce nombre n n'est pas connu. L'expression « n plus p » remplace progressivement le « n et encore p » associé au geste de réunion ».

Dans ce sens, l'élève voit « $23+25$ » comme une réunion de deux ensembles disjoints dont l'un est de cardinal 23 et l'autre de cardinal 25. Mais l'ensemble de cardinal 25 n'est pas vu des élèves puisqu'il n'est pas une donnée du problème. Les élèves ont travaillé le problème en utilisant les deux nombres 48 et 23. Par suite, à ce niveau, l'écriture $23+25$ n'est pas associée au « geste de réunion ». C'est sans doute ce qui rend difficile la reconnaissance de ce que désigne $23 + 25$ par les élèves ; aussi bien ce que cette écriture indique et ce que l'on peut en faire.

7.4.3.3. Conclusion

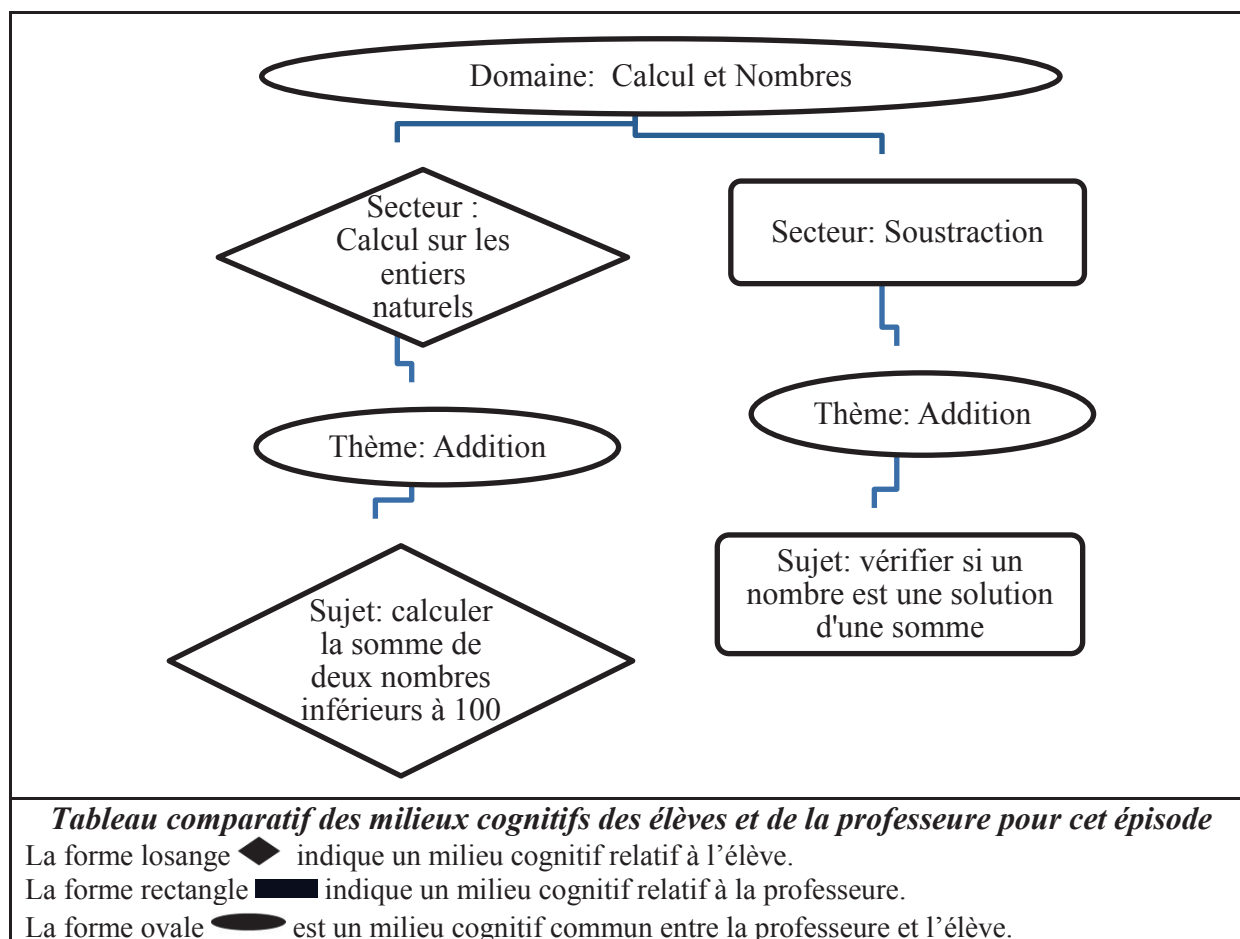
L'épisode 3S nous a permis de montrer le rôle assigné par la professeure aux organisations institutionnelles du savoir convoquées par les directives de l'ingénierie didactique. Et surtout son attachement au premier objectif : « Construire le sens de l'opération soustraction⁷⁴ » à partir des connaissances antérieures des élèves.

Nous avons vu qu'existe une dissymétrie entre « le projet » de la professeure relatif à la construction du sens de « la soustraction » et les rapports établis par les élèves.

Ce qui semble crucial tient en ce que les organisations mathématiques du savoir que la professeure a établies ne sont pas celles des élèves. La professeure se replace dans le secteur de la soustraction tandis que l'élève mène ses actions dans le secteur de l'addition. Une bifurcation institutionnelle est ainsi implicitement créée.

⁷⁴ Le premier objectif que l'ingénierie vise à réaliser est : « Construire le sens de l'opération, c'est-à-dire explorer le champ de problèmes qu'elle sert à résoudre et savoir repérer si un problème se résout ou non par une soustraction. Pour cela, l'enseignant va s'appuyer sur le savoir antérieur des élèves c'est-à-dire l'addition : la différence de deux nombres est le nombre que l'on doit ajouter au petit pour obtenir le grand. Une addition permettra donc de faire la preuve de la réponse. Cette idée est fondatrice du sens » Soustraction à l'école élémentaire, Document rédigé par Annie Berté, Relecture et révisions Serge Quilio (UMR ADEF), 1999.

Nous regroupons les milieux cognitifs des élèves et de la professeure dans un tableau comparatif qui montre comment les différents niveaux des organisations mathématiques convoquées prennent place au cours de l'épisode 3S :



Tab OM 37 : dédoublement des milieux pour l'épisode 3S

7.4.4. Episode 4S : La boîte : « une preuve manipulatoire »

De la minute 20sec 15 jusqu'à minute 29 sec15 de l'épisode précédent, la professeure a organisé un travail de groupe. Elle a distribué une boîte et des briques pour chacun des groupes.

Cet extrait porte sur la collecte et la vérification des réponses recueillies :

Durée : Min 2 sec 16

85	P	On range les briques dans la boîte et les briques. Donc on laisse la boîte de côté, et les briques sans toucher. Alors on y va. On va voir ensemble. Alors on va mettre en commun ce que vous avez trouvé. Alors on va résoudre le problème avec la boîte, et après, on fera la vérification avec la boîte qui correspond au calcul. Première étape, rapidement, qu'est-ce que je fais Nas ?
86	Nas	Je compte combien il y en a pour commencer le calcul.
87	P	Je compte combien il y en a pour commencer le calcul. On y va ensemble. Mél, tu regardes bien. Rid, c'est toi qui comptes et tout le monde regarde où cas où Rid se tromperait. Vas-y Rid (pendant ce temps, elle montre les barres de dizaines et les unités)
88	Rid	10, 20, 30, 40, 50
89	P	50
90	Rid	51
91	P	Dans la boîte il y a 51 briques. Alors est-ce qu'on en a trop ? Comment je dois faire pour préparer mon problème ?
92	Mo	Il faut enlever, faut enlever, faut enlever 3
93	P	Donc j'ai le droit bien sûr de casser des dizaines. J'enlève une, deux et trois. Et je les mets bien loin pour ne pas me tromper. J'enlève trois briques. Donc maintenant Soul, j'ai préparé mon problème. J'en ai combien ? Le total dans ma boîte ?
94	Soul	48

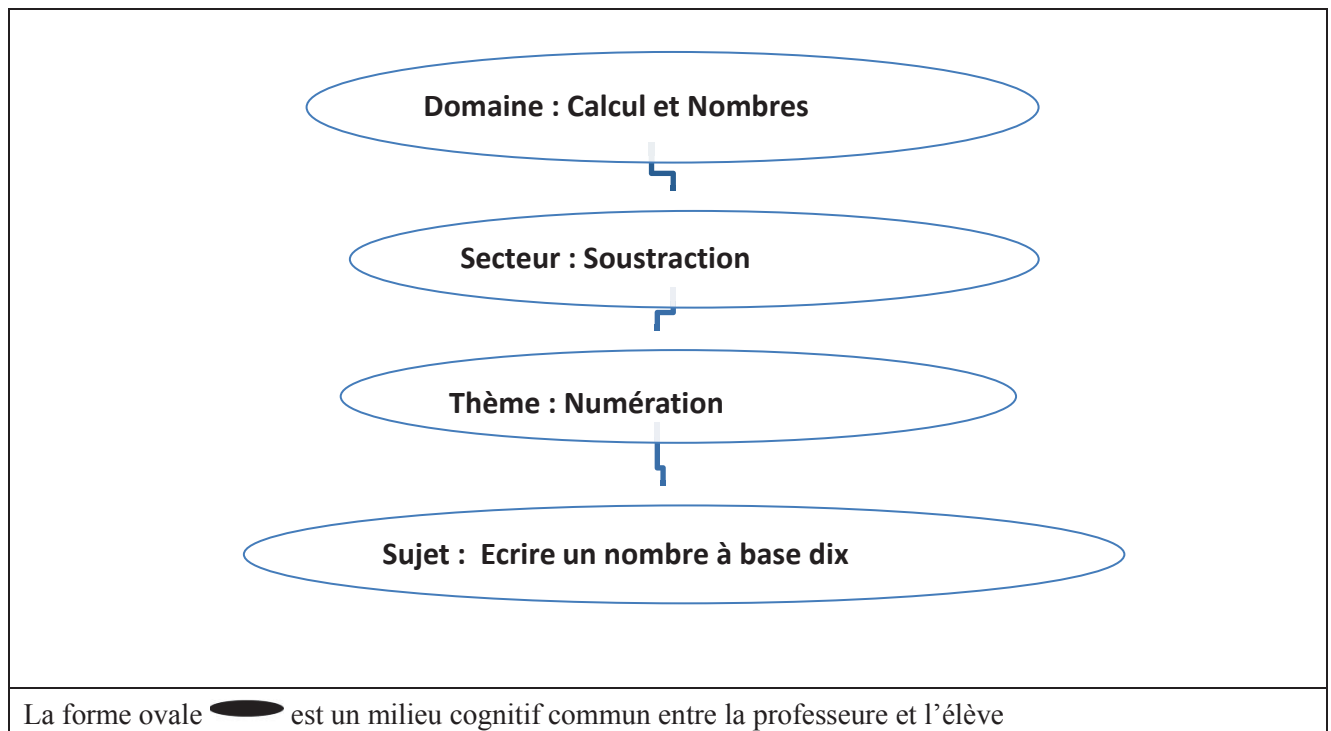
Extrait 73 : Soustraction/ Episode 4S/ Ext 1/ L85 à L94

La professeure place la classe dans le souvenir de l'épisode 2S : « Convocation des outils de travail » en se servant de la boîte pour résoudre le problème, et de la mémoire du second épisode « Etapes de travail » en demandant à **Nas** de faire rapidement la « première étape ». La réponse de cet élève dans L86 l'a convaincue car elle l'a reprise dans L87. La réponse contient deux parties. La première est « *je compte combien il y en a* » qui relève du dénombrement de briques, abordable par les élèves à ce niveau, et la deuxième partie « *pour commencer le calcul* » qui masque un flou sur la nature et les nombres à calculer.

Mo est conscient qu'il faut compter 48 briques dans L92 en enlevant 3 briques du nombre total 51. Ce qui prouve que les élèves ont déjà établi un certain rapport à la soustraction à partir de l'écriture d'un nombre en base 10. Ce rapport s'inscrit dans la modélisation mathématique suivante : « $51 - 3 = 48$ ». La professeure a converti l'action « *enlever* » de **Mo** par « *le droit de casser des dizaines* » dans L93.

Dans cet épisode 4S, la professeure et les élèves se placent dans la même organisation qui débouche sur le sujet « Ecrire un nombre dans le système décimal » qui relève du thème « La numération » relatif au secteur « la soustraction ». Ceci nous permet de conclure que le phénomène du dédoublement des milieux n'est pas présent dans cet épisode.

Nous illustrons dans le schéma ci-dessous les niveaux de l'organisation mathématique :



Tab OM 38 : L'absence du dédoublement des milieux pour l'épisode 4S

7.4.5. Episode 5S : Fin de la résolution du problème du point de vue élève

Durée : Min 2 sec 06

95	P	48. Qu'est-ce que je fais pour résoudre ce problème ? Ang
96	Ang	J'en enlève 23.
97	P	Ah j'en enlève 23, Alors Am tu te redresses et tu comptes. Tout le monde vérifie si Am ne se trompe pas (elle montre les briques aux élèves)
98	Am	10, 20, 21, 22, 23
99	P	Bon il m'avait dit « j'en enlève 23 ». Qu'est-ce que je fais maintenant ? Il n'y a que Nas, allez Naw.
100	Naw	Après on compte ce qu'il y a dans la boîte.
101	P	Ani c'est celui qui compte, et vous regardez tous si Ani se trompe.
102	Ani	10, 20, 21, 22, 23, 24, 25.
103	P	25. Qu'elle est la réponse au problème ? Yan
104	Yan	25
105	P	25 est le résultat. La réponse est une phrase. C'est quoi 25 ? Prem
106	Prem	Ce qu'il y a dans la boîte
107	P	D'après notre résolution il reste 25 briques dans la boîte [...]

Extrait 74 : Soustraction/ Episode 5S/ Ext 1/ L95 à L107

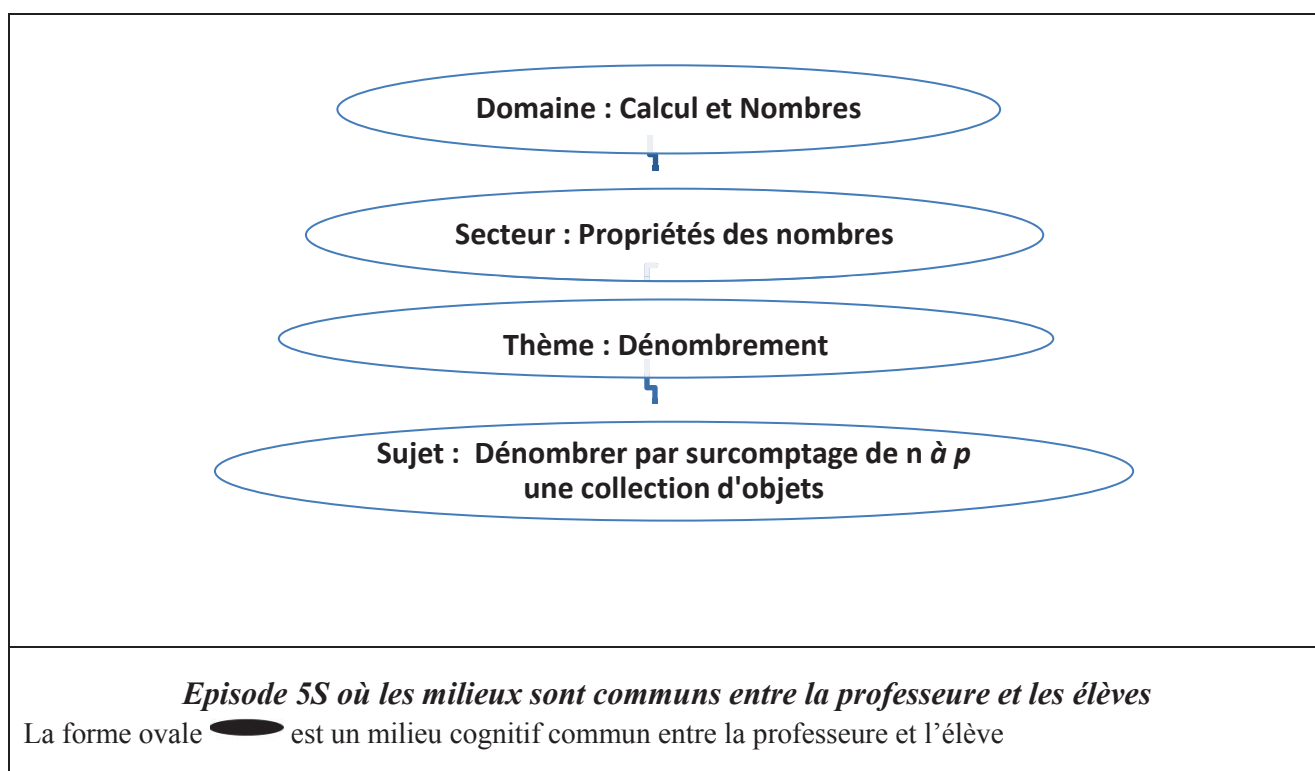
Dans cet épisode, les élèves ont compté 48 briques. La professeure a incité les élèves à calculer le reste des briques, ils ont réussi la tâche en surcomptant de 24 jusqu'à 48. Ils ont trouvé « 25 » dans L102 qui correspond à la solution du problème.

La réussite est sans doute due au raisonnement sur la reconnaissance de l'état initial, de l'état final et de la transformation. La professeure et les élèves ont raisonné de la façon suivante : 1) Reconnaissance de l'état initial : « *Au départ on en a 48* » puis 2) Reconnaissance de la transformation : « *j'en enlève 23* » et enfin 3) Recherche de l'état final : « *On cherche combien il en reste* ». Rappelons que le raisonnement de la professeure lors de l'épisode 3S était 1) Reconnaissance de l'état initial : « *On en a 23* » puis 2) reconnaissance de la transformation : « *On va essayer si 25 est une solution vraie* » et enfin 3) recherche de l'état final : « *Si c'est juste on va trouver 48* ». Cela montre que les élèves sont parvenus à la bonne réponse avec l'aide de leur professeure.

La professeure clôt cet extrait dans L107 : « *D'après notre résolution il reste 25 briques dans la boîte* » qui correspond à la solution du problème 1. Cette conclusion est suffisante pour que les élèves puissent affirmer que le nombre de briques restants dans la boîte est 25 et que c'est la solution du problème.

Dans cet épisode, la professeure et les élèves se placent *à fortiori* dans le même milieu cognitif concerne le domaine « Calcul et Nombres » qui débouche au secteur « Propriétés des nombres ». Ceci renferme le thème du « dénombrement » qui est relatif au sujet « Dénombrer par surcomptage une collection d'objets ». Le phénomène du dédoublement des milieux n'est pas présent dans cet épisode.

Le schéma ci-dessous montre de près que les niveaux de codétermination didactique sont communs :



Tab OM 39 : L'absence du dédoublement des milieux pour l'épisode 5S

7.4.6. Episode 6S : La professeure retourne aux milieux cognitifs

La discussion menée avec les élèves dans l'extrait précédent laisse supposer que la résolution du problème est terminée. Mais il n'en est rien comme le montre l'épisode ci-dessous qui s'inscrit dans la suite du tour de parole L107 :

Durée : Min 1 sec 37

107	P	D'après notre résolution il reste 25 briques dans la boîte. (<i>cité à la fin de l'épisode 5S</i>) Ah mais toute à l'heure il faut vérifier. Il va falloir vérifier, le calcul pour vérifier c'est $23+25$ et avec ma boîte comment je vérifie ? Dans la boîte il en reste combien Mehdi ?
108	Meh	(il ne répond pas)
109	P	Souviens-toi du compte de la boîte, il en reste combien ?
110	Meh	Il en reste [...]
111	P	Réfléchis. On vient de les compter (elle montre la boîte avec la main). Qui s'en souvient ? Yan, tu t'en souviens ?
112	Yan	25
113	P	Dis le plus fort.
114	Yan	25
115	P	Dans la boîte il en reste 25. Alors maintenant on va vérifier avec la boîte ce calcul là (<i>elle montre $23+25$ du tableau</i>). On va faire le même, Donc 25 on le retient. Ang, tu le mets dans la tête, 25, on n'oublie pas, et j'en ai sorti combien ? Qu'est-ce que je dois faire Thé ?
116	Thé	Je dois compter combien on en a sorti.
117	P	Non à la place de compter je dois ?
118	Elèves	Vérifier.
119	P	Qui est-ce qui me dit comment ? Je dois ? (elle regarde les élèves en attendant une réponse).
120	Elèves	Calculer.
121	P	Mo
122	Mo	Vérifier.
123	Elève	Calculer.
124	P	Je dois faire 23, vous avez dit $23+25$, on va dire que c'est plus Ok ? On se contente de plus +. Donc $23+25$, ok ? 23 dans notre tête. Cam, tu regardes ? c'est toi qui compte. Tout le monde vérifie si Cam ne se trompe pas. 25

Extrait 75 : Soustraction/ Episode 6S/ Ext 1/ L106 à L124

Par un geste topogénétique très élevé, la professeure n'accepte plus sa réponse « *D'après notre résolution, il reste 25 briques dans la boîte* » (L107) comme résolution définitive du problème puisqu'elle a exigé sa vérification. Pour ceci, elle réactive la mémoire de l'épisode 2S, p.291 ; en particulier de l'Ext 64, p.292 ; qui dans L23 concernait « *les deux mots importants : hypothèse et calculer* ». Ces deux mots récapitulent la résolution d'un problème sans l'usage de la boîte, et placent la résolution dans la phase qui précède l'usage de la boîte comme outil de résolution. La professeure active cette mémoire en L107 dans le but de donner

sens à la soustraction à partir de la solution trouvée. Le tour de parole suivant de l'entretien vient confirmer notre interprétation :

LE49	P	Certains pas tous. C.à.d. n'est pas acquis (<i>le calcul de 23+25</i>). Donc mon but principal n'est pas de les entraîner à faire cette addition. Bien il faudrait l'effectuer quand même pour apporter la réponse à la question. Mais le but là est de traduire la vérification manipulatoire par un calcul, en fait pour donner un sens, je veux vérifier s'il reste bien 25. Donc je peux le vérifier par un calcul.
------	---	--

Extrait 76 : Soustraction/ Entretien professeur/ LE49

Cela indique que la professeure désire passer à un nouveau niveau institutionnel de connaissance en changeant le rapport des élèves à ces éléments de savoir. C'est le passage de la « vérification manipulatoire », que les élèves ont faite, à la raison d'être du calcul et, que la professeure escompte. Les réponses inadéquates des élèves tout le long de cet extrait montrent qu'ils n'ont pas pu s'engager dans ce nouveau cadre.

D'autre part, le fait que les élèves n'ont pas réagi avec la professeure, pourrait être dû à son propre raisonnement sur le classement du problème selon la typologie de Vergnaud. Ce raisonnement est différent de celui qui a été fait dans l'épisode précédent 5S, p.309. Il ne croise pas celui de l'élève. La résolution de la professeure dans cet épisode 6S est la suivante : 1) la reconnaissance de l'état initial dans L115 : « *tu mets 25 dans la tête* », puis 2) la reconnaissance de la transformation dans L124: « *j'en enlève 23* » et enfin 3) la recherche de l'état final dans L124 : « *23+25* ». Par contre le raisonnement de la professeure et des élèves dans l'épisode 5S était 1) reconnaissance de l'état initial : « *Au départ on en a 48* » puis 2) reconnaissance de la transformation : « *j'en enlève 23* » et enfin 3) recherche de l'état final : « *On cherche combien il en reste* »

En guise de conclusion de l'épisode 6S, nous avons vu que la professeure a accentué la distance mésogénétique qui la sépare des élèves. Elle se place dans ses propres milieux cognitifs du savoir qui sont parfois les milieux cognitifs des autres épisodes. Elle se sert de son rapport personnel au savoir en faisant croire aux élèves que ce sont eux qui ont déterminé le résultat pour vérifier comme dans L124 « *Je dois faire 23, vous avez dit 23+25, on va dire que c'est plus Ok ? On se contente de plus +. Donc 23+25, ok ? [...]* ». Pourtant, c'est elle qui a tout reformulé.

7.4.7. Episode 7S : Clôture du problème

La professeure clôt le problème 1 par l'extrait suivant :

Durée : Min 1 sec 05

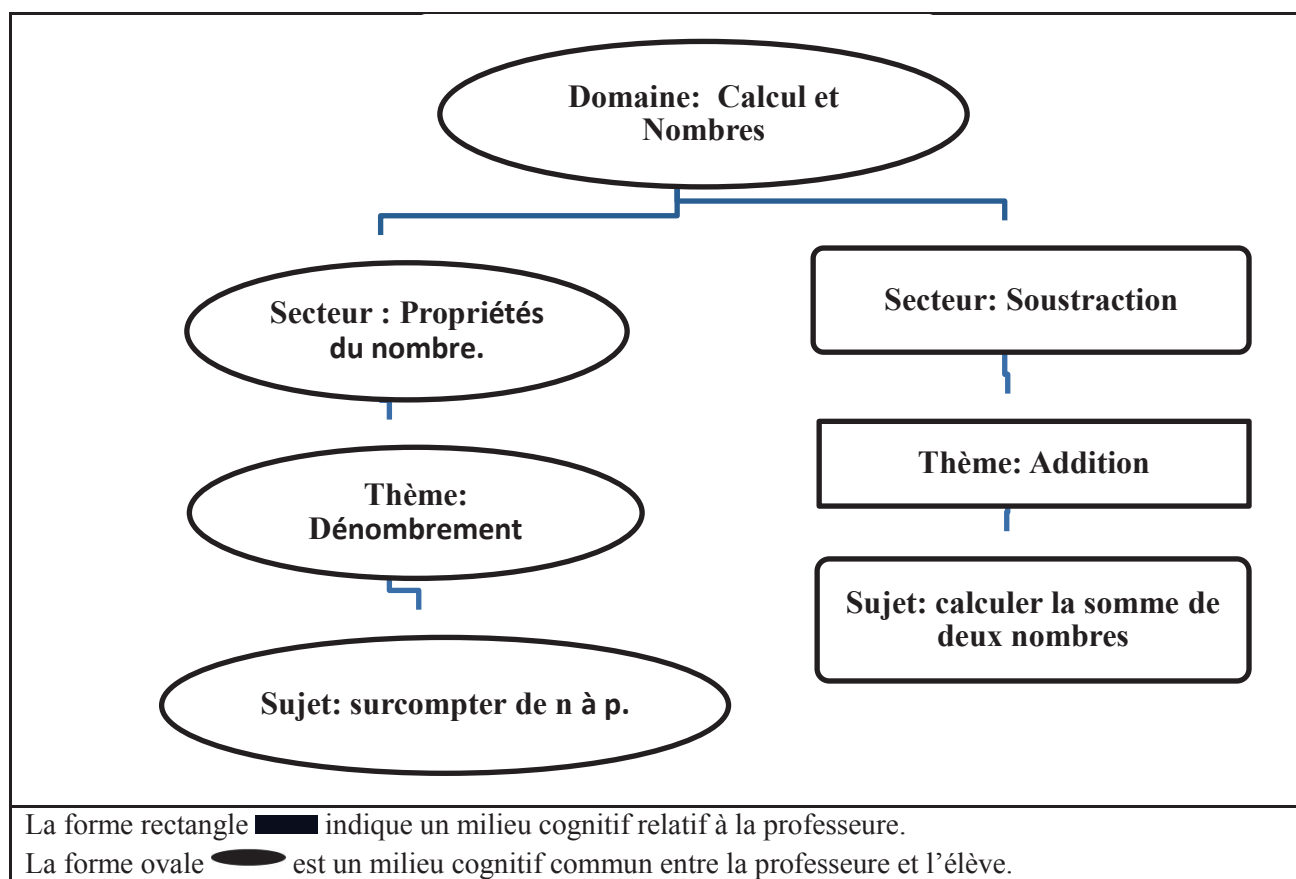
124	P	Je dois faire 23, vous avez dit $23+25$, on va dire que c'est plus Ok ? On se contente de plus. Donc $23+25$, ok ? 23 dans notre tête. Cam, tu regardes ? c'est toi qui comptes. Tout le monde vérifie si Cam ne se trompe pas. 25
125	Cam	26, 27, 28
126	P	Attention à la dizaine. 28
127	Cam	(elle se tait)
128	P	(elle fait signe à un élève de parler)
129	Elève	38
130	P	38, tu as raison. Cam, continue, notre dizaine
131	Cam	48
132	P	Ah 48, qu'est-ce que vous en pensez alors ?
133	Thé	Que c'est bon
134	P	C'est bon, $23+25=48$, c'est ce qu'on avait bien au départ du problème. Donc 25, vous avez trouvé que cette hypothèse est vraie. C'est bien la solution du problème. La solution (elle écrit sur l'affiche : solution est 25). Bravo, c'est bien alors. Très bien Chir, t'as raison d'être contente. Vous avez bien réussi.

Extrait 77 : Soustraction/ Episode 7S/ Ext 1/ L124 à L134

La professeure a incité les élèves à s'engager dans la technique du surcomptage à partir de 25 (L124), en « gardant le 23 dans la tête de Cam ($25+\dots=48$) ». La réponse 48 est la bonne aux dires de **Thé** dans L132. Les élèves se placent dans le secteur « Propriétés du nombre » d'où sont issus le thème « dénombrement » et le sujet « surcomptage de n à p ».

Pour finir, la professeure clôt son discours dans L134 par « *c'est bon, $23+25 = 48$. C'est ce qu'on avait bien au départ du problème [...]* ». Elle se replace dans le même domaine que celui de l'élève. Ce domaine est partagé en deux secteurs. Le premier concerne les « Propriétés du nombre ». Le deuxième secteur concerne « la soustraction » scindé en thème « L'addition de deux entiers » relatif au sujet : « Calculer la somme de deux nombres ».

Nous illustrons dans le schéma ci-dessous cette organisation mathématique :



Tab OM 40 : Dédoublément des milieux pour l'épisode 7S

7.5. Conclusion

Cette étude montre que la professeure, malgré sa prise en compte des milieux constitués des OM contenues dans l'ingénierie didactique, assiste, au fil des interactions didactiques, à une altération progressive entre les milieux institutionnels du savoir et les milieux cognitifs mobilisés par les élèves. Cette altération est attestée par des effets mémoriels qui permettent à la professeure de rectifier et réguler, par exemple dans le tour de parole L7 : « *Qui est-ce qui se souvient des étapes de notre travail ?* ».

La professeure a placé sa classe dans un rapport à plusieurs domaines mathématiques. Nous avons montré l'existence des domaines qui lui sont propres : celui de « la soustraction » ainsi que des domaines relatifs au savoir comme celui : « Nombres et Calcul ». Elle avait à activer le rapport des connaissances antérieures des élèves aux éléments institutionnels du savoir. Pourtant cet enjeu a été perçu différemment par les élèves. Ils ont joué sur un terrain restreint qui relève de leurs propres connaissances. Ils ont essayé de tisser des rapports avec les éléments de savoir avec lesquels leurs rapports ont été antérieurement établis et sont demeurés relativement stables. Nous avons montré qu'ils s'étaient bien rappelés des « étapes de travail » comme conditions nécessaires pour une action dans la séance. Nous avons vu cela au début de la séance dans L10 ; L18 ; L22 où les élèves ont su qu'il fallait compter le reste des briques. Ils ont collaboré à la détermination de la solution du problème, comme par exemple dans cet extrait :

101	Ani	10, 20, 21, 22, 23, 24, 25.
102	P	25. Qu'elle est la réponse au problème ? Yan
103	Yan	25

Cependant la professeure a joué sur un milieu cognitif plus large. Nous pensons qu'elle voulait mobiliser un univers cognitif suffisamment vaste, qui aurait pu lui permettre de réaliser l'objectif principal de l'ingénierie : « Construire le sens de la soustraction ». Cette intention a été contrariée pour deux raisons :

1) En souhaitant que les élèves se replacent dans les mêmes milieux cognitifs et épistémologiques qu'elle, en utilisant pour cela des techniques de remémoration chez les élèves. Elle a utilisé ses milieux cognitifs pour mener à bien l'ingénierie. Par exemple le raisonnement portant sur la typologie des situations additives a changé d'un épisode à un autre puisqu'elle n'a pas pu prendre en considération la situation actuelle de la classe : les niveaux des milieux issus des organisations mathématiques étaient différents. Mais à l'épisode 5S,

p.309, elle a repris le même état initial 48 que les élèves, ce qui lui a permis de partager temporairement les mêmes niveaux d'organisation mathématique que les élèves.

2) En se replaçant dans les milieux conçus par l'ingénierie et les milieux cognitifs des élèves pour atteindre le but principal. Par exemple dans l'épisode 6S, p.311, le tour de parole L107 de la séance :

107	P	D'après notre résolution il reste 25 briques dans la boîte. (<i>Episode 5S</i>)
		Ah mais toute à l'heure il faut vérifier. Il va falloir vérifier, le calcul pour vérifier c'est $23+25$ et avec ma boîte comment je vérifie ? Dans la boîte il en reste combien Mehdi ?

La professeure n'a pas validé définitivement le nombre « 25 », donné par les élèves, comme réponse finale au problème 1 : « *Dans la boîte, il y a 48 briques. J'en enlève 23. Combien reste-t-il de briques dans la boîte ?* » Elle est alors retournée vers les contraintes de l'ingénierie. C'est ce qu'atteste le tour de parole LE49 de l'entretien avec la professeure :

LE49	P	Certains pas tous. C.à.d. n'est pas acquis (sur le calcul de $23+25$). Donc mon but principal n'est pas de les entraîner à faire cette addition. Bien il faudrait l'effectuer quand même pour apporter la réponse à la question. Mais le but là est de traduire la vérification manipulatoire par un calcul, en fait pour donner un sens, je veux vérifier s'il reste bien 25. Donc je peux le vérifier par un calcul.
<i>Entretien professeure-chercheur / S / Extrait 14 / LE 49)</i>		

Malgré le travail réussi avec les élèves durant l'épisode 6S, la professeure s'en démarque finalement. Cette décision aboutit à créer un flou sur les milieux pris en charge par les élèves. Ce flou a eu pour effet de changer le cadre du travail avec la classe.

Dans le parcours de la séance, nous avons vu que l'enjeu poursuivi par la professeure consistait à lier les éléments institutionnels du savoir aux éléments cognitifs des élèves. Ils devront s'assujettir à des OM et des OD communes avec leur professeure. Il fallait pour elle générer un certain milieu. Nous avons remarqué qu'au cours de la séance, elle avait changé le cadre de travail et brisé certains rapports avec les éléments cognitifs des élèves. Elle n'a pas pu rapporter les objets et les ostensifs mathématiques relatifs à des interactions permettant aux élèves de mobiliser les connaissances nécessaires à l'émergence de ce savoir.

L'action conjointe avec ses élèves nous a laissé voir que l'accès à des éléments de savoir transposés est dû en partie à la construction d'une référence commune. Dans la séance, cet accès était souvent hasardeux, difficile à dévoluer aux élèves, au fur et à mesure que la séance avançait, et cela compte tenu de multiplicité des milieux.

Distance mésogénétique

Nous avons vu que les rapports aux éléments institutionnels supposés transposés par la professeure étaient perçus différemment par les élèves. Cette différence est due en partie à la distance qui marque un certain « chevauchement » instable en termes d'éléments des milieux mobilisés. Dans ce sens les rapports aux interactants ont marqué tantôt une convergence, tantôt une divergence avec les éléments institutionnels propres aux interactions des élèves.

Pour raccourcir la distance vers le milieu qui émerge dans l'institution et faire converger les rapports des élèves aux rapports institutionnels au savoir, la professeure a utilisé une maïeutique. Elle n'a pas pu conserver un rapport constant avec les élèves concernant les éléments appropriés du savoir. Elle a incité les élèves à produire des réponses aux questions qu'elle a posées, en imposant des gestes topogénétiques élevés aptes à obtenir des réponses précises et attendues. Ses actions se sont traduites par un topos moins partagé avec ses élèves. Cette distance a été marquée par des justifications qui placent les élèves dans des milieux qu'ils ne peuvent pas investir. Par exemple, la professeure a parlé au début de la séance dans L23 de « *hypothèse et vérification* ». La signification de ces deux mots pourrait placer le parcours du travail dans un processus « mésogénétique » duquel les rapports institutionnels mis en place par les élèves n'ont pas de place. L'importance pour elle était d'élaborer un type de raisonnement à partir des justifications qui renvoient l'action des élèves à la mémoire ostensive. Ces justifications prévues pourraient s'appuyer sur la pratique réalisée auprès des élèves et sur le sens commun de ces mots dans l'institution « classe de mathématiques ». Elle a amené à produire des explications afin que les élèves travaillent dans le milieu adéquat. Pour exemplifier, la professeure dans L23 : « *Ah Thé. Il a dit deux mots très importants. Qui est-ce qui peut répéter ces deux mots très importants. Oui ?* », a repris dans L36 : « *Je fais mon hypothèse en calculant* ». Pourtant la professeure a signalé dans le tour de parole LE1 de l'entretien :

LE1	P	« Emettre une hypothèse à l'aide d'un calcul ». Au cours de l'année, j'ai pris conscience que c'était un point défaillant de ma façon de travailler. J'aurais dû travailler davantage avec les élèves sur leurs stratégies calculatoires. Moi j'ai davantage travaillé sur les vérifications. Du coup la recherche d'une hypothèse est restée un peu obscure. Donc pour l'année prochaine, je veux insister davantage sur toutes les stratégies personnelles, la manipulation du nombre à partir de leurs propriétés.
<i>Entretien professeure-chercheur / S / Extrait 04 / LE 1)</i>		

Ce qu'elle a fait avec les élèves en classe lui apparaît comme « *un point défailant* » parce qu'elle n'a pas pris en compte leurs stratégies (leurs techniques). Ce qui constitue une preuve supplémentaire de l'existence de la distance dont on a antérieurement parlé.

Ces justifications pourraient induire un certain paradoxe entre ce que 1) les élèves doivent justifier des types de tâches en remontant vers une organisation mathématique au niveau du « secteur » et 2) les élèves doivent se replacer au sein d'un niveau plus bas par exemple le « sujet » pour qu'ils puissent élaborer une technique pour s'en sortir.

Un tel paradoxe suffit à créer une distorsion de type mésogénétique sur les niveaux des OM entre la professeure (planificateur) et les élèves (pratiquants).

La professeure a exigé des explications sur le travail considéré comme « achevé » pour les élèves comme dans L73 : « *Ah Marianne dit $23+25$, et pourquoi, qui peut expliquer ce calcul ? Mo* » et dans L106 : « *D'après notre résolution il reste 25 briques dans la boîte. Ah mais toute à l'heure il faut vérifier. Il va falloir vérifier, le calcul pour vérifier c'est $23+25$ et avec ma boîte comment je vérifie ?* ». A la suite de ces deux questions, les élèves n'ont pas trouvé de réponses. Il semble que pour certains d'entre eux, un tel travail est la marque d'un automatisme, voire une évidence non justifiable, puisqu'il relève de leur pratique, d'une action achevée en tant que telle.

Les explications répétées de la professeure avaient augmenté la distance topogénétique entre elle et les élèves. Elles ont mis en place un chevauchement entre l'univers cognitif de chacun d'eux. Ces chevauchements créent une divergence entre les milieux institutionnels au sein desquels se placent les élèves comme dans le schéma ci-dessous :

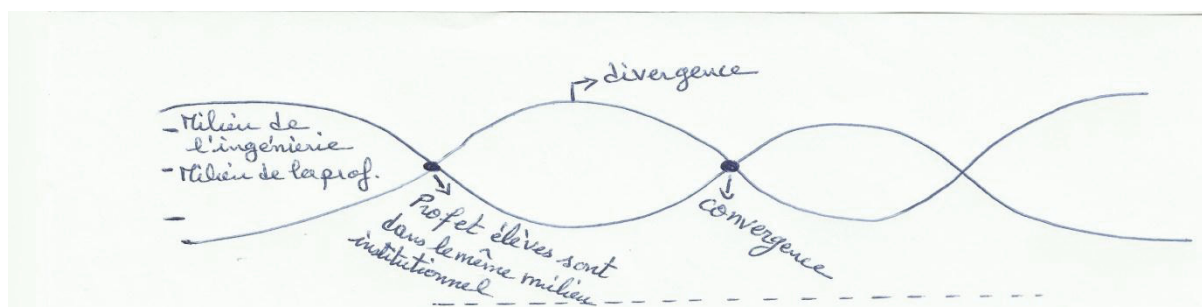


Figure 22 : Distance mésogénétique

L'écart s'élargit entre les milieux institutionnels du savoir et les milieux personnels de la professeure et des élèves. Par exemple dans le déroulement de ce problème, les élèves sont convaincus que le surcomptage des briques restantes a été suffisant pour résoudre

correctement le problème, cas d'**Ani** dans L102 : « 10, 20, 21, 22, 23, 24, 25 ». Pourtant, la professeure n'est pas convaincue par cette vérification. Elle a poussé les élèves à justifier leurs techniques en mobilisant d'autres connaissances. Elle les a encouragés à justifier à l'aide de l'égalité $23 + 25 = 48$. C'est une tentative de la professeure pour remonter aux pistes didactiques et épistémologiques relatives à l'enseignement de la soustraction présentée comme étant l'opération inverse de l'addition. Ce que l'élève n'est pas capable de faire.

Dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, les bifurcations pourront apparaître au niveau des échelles de codétermination didactique vues ici comme des milieux issus des OM du savoir. Nous avons montré qu'une certaine bifurcation peut être marquée au niveau du domaine, du secteur, d'un thème ou d'un sujet (cas des tableaux : *Tab OM 36, p.296 ; OM 37, p.306 et OM40, p.314*). Nous avons illustré des schémas qui montrent ces bifurcations en termes de « niveau commun, niveau relatif à la professeure et niveau relatif à l'élève ». Si le niveau du plus haut est commun à la professeure et aux élèves, nous pourrions descendre au niveau du plus bas. Sinon nous pourrions dire qu'une bifurcation aura lieu. Par suite, si tous les niveaux sont communs, la bifurcation n'aura pas lieu.

D'une manière générale, le phénomène du dédoublement des milieux dépend de la multiplicité des milieux qui pourraient exister entre la professeure et les élèves. Ce phénomène a lieu lorsque, dans le parcours de la séance, les milieux de l'enseignant et des élèves deviennent différents. Les élèves ne pourront plus rapporter leurs actions aux éléments institutionnels évoqués ou mis en place par la professeure. Dans ce sens, la distance mésogénétique entre les milieux cognitifs de la professeure et des élèves varie. Elle est contrariée par le rapport qui lit 1) les milieux institutionnels du savoir avec 2) le milieu cognitif et épistémologique de la professeure et 3) l'organisation didactique et mathématique de l'ingénierie.

D'autre part, la distance peut varier en fonction de la position des éléments des milieux propres à la professeure avec les connaissances antérieures des élèves et les rapports aux éléments propres au sujet. Dans ce contexte, ce qui est milieu pour la professeure peut ne pas apparaître un milieu pour l'élève. Il en résulte une divergence didactique entre l'enjeu didactique de la séance et les interactions des élèves. Cette divergence existe parce que les milieux ne sont pas identiques. Nous avons vu dans la séance que la professeure gère cette distance en menant des tentatives pour la raccourcir. Par exemple, pour la réduire, elle

s'engage dans une démarche maïeutique. Cela a pour effet de produire une convergence. Sinon, le « dédoublement » se révélera plus profond, la distance mésogénétique s'accroîtra.

Conclusions et perspectives

Dans les théories didactiques, le fonctionnement du système didactique est lié à l'analyse d'une situation dans laquelle il y a du didactique⁷⁵. Une situation didactique est faite d'une conjonction de rapports dits personnels, que met en œuvre une personne (élèves ou professeur), et de rapports dits institutionnels qui procèdent de la volonté de faire étudier un savoir. En d'autres termes, une situation didactique réalise la volonté de recréer une genèse des objets de savoir par une interaction entre un élève et le professeur. Celle-ci ne pouvant suivre la genèse historique, pour toutes sortes de raisons d'ordre didactique et notamment parce que les institutions de production des mathématiques et les institutions didactiques diffèrent, est qualifiée d'artificielle.

Le travail de recherche que nous avons mené porte sur l'étude des secteurs mathématiques diversifiés. Nous avons étudié un phénomène didactique nouveau, « le dédoublement des milieux », dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique élaborée par Yves Chevallard. Cette théorie nous a permis, à partir des outils qu'elle fournit, de déterminer et d'observer l'apparition de dédoublements des milieux, à la fois dans des séances ordinaires et dans celles organisées à partir des ingénieries didactiques. Les dédoublements de situations ont été étudiés depuis la théorie des situations didactiques. Or, M-J. Perrin-Glorian soulignait en 1998, « La notion de milieu n'est donc pas liée chez Chevallard à celle de situation », et elle précisait « ainsi le milieu matériel de la situation objective [*c'est un des milieux pris en compte en théorie des situations didactiques*] doit contenir les savoirs nécessaires à la compréhension du problème, il est donc contenu dans le milieu au sens de Chevallard ». Pour M-J. Perrin-Glorian, la théorie des situations, issue au départ de l'analyse de situations de l'école élémentaire, y a importé des spécificités propres à ce niveau scolaire ; par exemple « le milieu de la situation objective est en effet souvent matériel ou presque. Ce n'est plus le cas quand on s'intéresse à des situations s'adressant à des élèves de lycée. » Pour nous, dans un processus didactique tel que nous l'avons analysé, si effectivement nous avons rencontré davantage d'objets matériels à l'école élémentaire (les boîtes qui contiennent des briques par exemple), la raison de la démarcation que nous avons faite en étudiant les dédoublements de milieux et non pas de situations, ne tient pas qu'à une différence de niveau dans le cursus scolaire. Les élèves, dès l'école primaire, ont rencontré une quantité innombrable de situations à partir desquelles ils ont établi des rapports de connaissance ; que ces situations soient scolaires ou extrascolaires car « le didactique est dense dans le social ». Autant d'occasions de constituer des milieux, mais aussi autant d'occasions de créer des milieux différenciés les uns

⁷⁵<http://www.ardm.eu/contenu/yves-chevallard>

des autres. Un des paris qui fondent la relation didactique est pourtant celui de la possibilité d'une intersection commune entre eux. Aussi, à partir des analyses que nous avons menées, nous avons pu établir l'existence d'un certain nombre de rapports différents, rapports personnels des élèves et du professeur, aux milieux et aux éléments institutionnels de nouveaux savoirs : les « Equations » en EB7, les « Nombres Relatifs » en EB6 et la « Soustraction » en CE1. Le pari d'une intersection commune s'est ainsi parfois transformé en une simple fiction à laquelle chacun des partenaires a cru, à son insu quelquefois, afin que la relation didactique puisse s'établir et se pérenniser. La convergence des milieux reste parfois de l'ordre de l'apparence et s'opère bien souvent de manière labile et inattendue, lors d'épisodes souvent privés de la biographie didactique d'élèves (Mercier, 1992). Nous ne nous sommes pas penchés sur ce type de phénomènes dont l'étude mériterait une nouvelle thèse à elle seule. Nous avons seulement voulu montrer qu'au-delà d'une mystification qui voudrait que les élèves investissent le milieu dévolu par le professeur, parce que celui-ci l'a précisément apprêté pour cela « en se mettant au niveau des élèves », la réalité didactique est beaucoup plus complexe, que ce soit dans les classes à enseignement « standard » ou même dans celles où l'enseignement est issu d'ingénieries didactiques.

Nos observations

C'est la raison pour laquelle nous avons choisi d'observer une séquence d'enseignement ordinaire et deux séquences issues d'ingénieries didactiques. Pour diversifier nos observations et montrer la généralité du phénomène, l'étude s'est réalisée dans des classes différentes et à propos de plusieurs thèmes mathématiques. Nous nous sommes centrés dans nos analyses sur l'étude des techniques du professeur et des élèves. Le corpus de nos analyses a tourné autour des questions suivantes : Comment le professeur parvient-il à dévoluer à l'institution classe un milieu propice à l'enseignement ? Est-ce que les élèves investissent ce milieu ? Est-ce que le milieu, dans lequel évoluent les élèves et avec lequel ils travaillent, est celui que le professeur souhaite dévoluer ? Comment les élèves, en interaction avec le milieu, mettent-ils en jeu les rapports aux objets du milieu institutionnel du savoir ?

Nous avons filmé le travail des professeurs en classe, en considérant que nous devions garder la trace des ostensifs scripturaux, langagiers et écrits. Nous avons ensuite étudié la manière selon laquelle s'élaboraient et s'exprimaient des techniques personnelles. Puis nous avons explicité les résultats obtenus en termes d'organisations mathématiques (OM) référées aux

degrés différents sur l'échelle des niveaux de codétermination didactique. C'est ainsi que nous avons obtenu des réponses aux questions posées par cette recherche.

Du côté du professeur : Comment le professeur fait-il parvenir à l'institution classe un milieu propice à l'enseignement ?

Dans la plupart des séances observées, les professeurs ont fait advenir des organisations mathématiques relatives à des sujets qui ne peuvent être appréhendées comme telles par les élèves. Leurs rapports personnels n'étaient pas uniquement dirigés vers les sujets institutionnels de savoir que l'on souhaitait enseigner. Les élèves ont essayé, presque tout le temps, de négocier avec les objets du nouveau savoir en mettant en place des milieux issus de leurs propres connaissances mathématiques.

Les professeurs devancent le savoir enseigné par des gestes qui relèvent subtilement de leurs propres OM, de leurs attachements interprétatifs aux manuels scolaires et de leur expérience professorale. Ils se balancent entre ce qu'ils savent déjà et ce qui va être mis en activité par les élèves. Par exemple, le raisonnement de la professeure avec qui nous avons observé la soustraction, a changé d'un épisode à un autre. Elle n'a pas pu maintenir des niveaux stables sur les OM et OD du savoir. Nous avons détecté un indice de « distorsion » entre les sujets personnels connus du professeur et les éléments institutionnels du savoir. Cette distorsion s'est manifestée par un « refus » lors de la validation des techniques personnelles d'élèves. La professeure s'est appuyée sur des objets mathématiques (« il faut vérifier », « des égalités à trous ») qui montrent une certaine fragilité de son OD.

Les professeurs se hâtent d'évoquer les éléments du savoir nouveau ; c'est ce que l'on a pu observer dans le cas des séquences « Equations » et « Nombres relatifs ». Ils se placent souvent dans des moments didactiques trop « en avance » par rapport à ceux où se trouvent leurs élèves. Par exemple, le professeur observé sur les « Nombres relatifs » s'est servi des OM relatives au savoir (opérations sur les nombres Relatifs) dans des moments réservés à la première rencontre des élèves avec la tâche (institutionnaliser ce que sont les programmes de calcul) ou dans les moments d'émergence des techniques personnelles. Les professeurs ont ainsi placé tout de suite le savoir dans des niveaux élevés sur l'échelle de la codétermination didactique. Ils ont ensuite essayé de négocier « la descente » vers le sujet voulu. En d'autres termes, ils ont placé le savoir dans des niveaux qui ne peuvent pas être intégrés par les élèves. Ces derniers ne peuvent pas, dans ces cas, reconnaître la problématique que voudrait faire vivre cet enseignement en tant que justification à la constitution du nouveau savoir.

Les professeurs observés ont eu tendance à activer des éléments institutionnels dans des moments inappropriés relativement à l'avancement didactique du savoir. Ils ont réussi à rendre officiel aux yeux des élèves le sujet mathématique enseigné. Mais ils n'ont pas pu taire leurs attachements personnels à leurs propres mathématiques. La professeure de la soustraction n'a pas admis la clôture correcte du *problème 1* donnée par les élèves. Nous avons vu qu'elle a accentué la distance mésogénétique qui la sépare des élèves et s'est placée ensuite dans ses propres milieux cognitifs. Elle s'est servie de son rapport personnel au savoir en faisant croire aux élèves que c'était eux qui avaient déterminé le résultat permettant de vérifier. Pourtant, c'est elle qui a tout reformulé.

Les professeurs placent leur classe dans un rapport à plusieurs domaines mathématiques. Par exemple, nous avons montré que la professeure de la soustraction a imposé un domaine (sur les niveaux de codétermination didactique) qui lui est propre, comme celui de « la soustraction » tandis que le domaine institutionnel est « Nombres et Calcul ». Le professeur des « Nombres relatifs » a mobilisé des domaines relatifs au savoir comme celui « Nombres et Calcul » avant même que l'apprentissage soit réalisé par les élèves.

Les enjeux portés par ces professeurs ont été perçus différemment par les élèves qui ont joué sur un terrain restreint : celui qui relève de leurs propres connaissances. Ils ont essayé de se remémorer des rapports antérieurement établis avec les éléments du savoir.

Du côté des élèves : Est-ce que les élèves investissent un milieu ? Est-ce que le milieu, dans lequel évoluent les élèves et avec lequel ils travaillent, est celui que le professeur souhaite dévoluer ? Comment les élèves, en interaction avec le milieu advenu, mettent-ils en jeu les rapports aux objets du milieu institutionnel du savoir ?

L'analyse de travail des élèves a montré qu'ils n'investissent pas un seul milieu. Ils se trouvent souvent au carrefour entre diverses pistes que permettent de suivre leurs connaissances antérieures et entre les contraintes institutionnelles imposées par leurs professeurs. Leur rôle dans la contribution à l'émergence du savoir était souvent empreint de passivité au regard des professeurs. La plupart de leurs techniques personnelles, même celles qui pouvaient contribuer à élaborer un embryon de technique plus développée, ont été mises à l'écart. Ils se sont retrouvés face à des milieux qu'ils ne pouvaient pas investir. Certaines techniques didactiques mises en œuvre par les professeurs, ne leur ont pas permis « d'oublier » des techniques personnelles réussies, mais inappropriées au nouveau savoir en

cours d'élaboration. Les élèves n'ont pas réussi à rencontrer et à lever la problématique qui aurait pu leur permettre de tisser des rapports nouveaux avec les éléments institutionnels du savoir. Par exemple, les élèves n'ont activé que tardivement, après trois séances sur « Les Nombres Relatifs », la technique institutionnelle établie par leur professeur puisqu'ils ont précédemment donné des réponses correctes à partir de leurs propres milieux cognitifs. Cela a conforté à leurs yeux le sens et l'efficacité « antérieurement » attribués à leurs connaissances. Pour exemplifier nous reprenons le cas de l'élève **Ma** dans L102 (*Ext 29, séance 1, Nombres Relatifs, p.207*), celui qui n'a pas changé sa réponse « *ajouter 17 à 21* », malgré les interventions multiples de son professeur. De surcroît, les élèves se sont toujours replacés dans le même milieu, dit *Milieu 1*, p.190, convoqué dès le début de la séance, dont les deux sujets mathématiques qui le constituent sont : « Le calcul de gauche à droite dans une expression numérique » et « Calcul de la différence positive de deux nombres positifs ».

Sur le dédoublement des milieux

Nous nous sommes intéressés dès le début de notre travail à l'observation du « *flou* » sur les milieux mobilisés par les élèves. Nous avons étudié l'origine de ce caractère qui nous a engagés dans l'étude du phénomène du « dédoublement des milieux ». Ces milieux, tels que définis dans la TAD, sont avant tout faits des rapports à des objets stables qu'ils soient mathématiques ou vus comme « non mathématiques » mais sollicités par des finalités d'ordre didactique.

Le déroulement des séquences observées a fait intervenir des OM variées. Dans notre recherche, nous avons reconstruit ces organisations suivant des indices relevés à partir des techniques et des gestes recueillis. Nous les avons classées en termes de niveaux de codétermination didactique, selon la hiérarchie suivante : sujet, thème, secteur et domaine.

Nous avons montré, à partir de nos analyses, que les organisations mathématiques changent au cours d'une même séance. Le milieu institutionnel n'était pas l'unique milieu présent dans la classe pendant les moments didactiques de la constitution du savoir. Les OM du savoir sont partagées entre :

- Les OM et les OD institutionnelles du savoir,
- Les OM conçues par les élèves. Elles peuvent relever de leurs connaissances antérieures, des techniques personnelles acquises, des techniques qui reflètent la « *métis* (Matheron, 2010) et le bon sens pour faire des mathématiques.

- Les OM amenées par les professeurs. Elles sont activées à partir de leurs OM sur le savoir, de leurs pratiques professorales, de leurs attachements interprétatifs aux manuels scolaires.

Dans toutes les séances observées, la présence des sujets différents, activés par le professeur et les élèves, a marqué un écart à celui du sujet mathématique institutionnel. Nous avons pointé les niveaux de chevauchement ainsi que ceux de la rencontre avec les sujets mobilisés. Nous avons désigné cet écart par le terme de « distance mésogénétique », à l'origine du « phénomène didactique » que nous étudions : « le dédoublement des milieux ». Nous lui accordons l'adjectif « phénomène » parce qu'il est issu des « praxis » permettant de montrer, à partir de gestes observables, comment des individus (professeur et élèves) parviennent à partager des pratiques, des représentations, des connaissances, produisant ainsi, dans la société considérée qui est la classe, des pratiques sociales identifiables. Ce phénomène est par ailleurs « didactique » parce qu'il situe ces gestes interactifs dans un travail coopératif entre le professeur et les élèves.

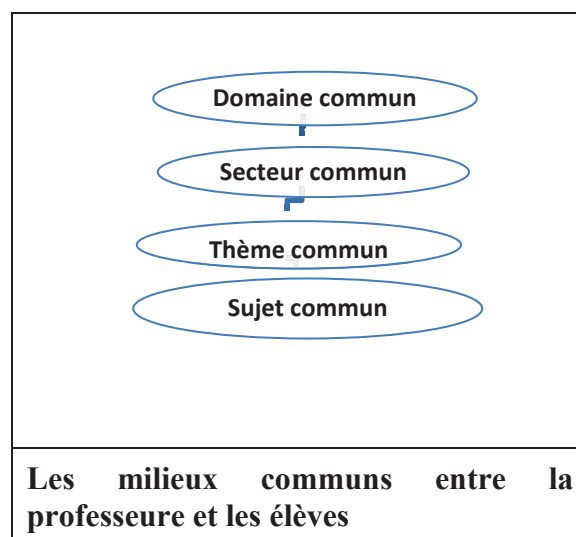
Le dédoublement des milieux et le degré de l'évolution du savoir

Nous avons récapitulé les OM mobilisées au cours d'un épisode didactique par les élèves et le professeur et, nous les avons représentées dans un tableau renvoyant aux « niveaux de codétermination ». Une telle représentation a pu montrer la spécificité des sujets mis en œuvre par chacun des protagonistes de la relation didactique vis-à-vis du sujet institutionnel dont l'enseignement est visé. Ce phénomène relève de « *la genèse et l'évolution des objets de savoir*⁷⁶ dans une institution » en termes des rapports institutionnels et personnels à un objet. L'apparition du dédoublement des milieux est due aussi à la présence au sein du système didactique de sujets mathématiques différents du sujet vu institutionnellement comme enjeu de la relation.

⁷⁶La théorie anthropologique du didactique, tiré du site <http://www.ardm.eu/contenu/yves-chevallard>

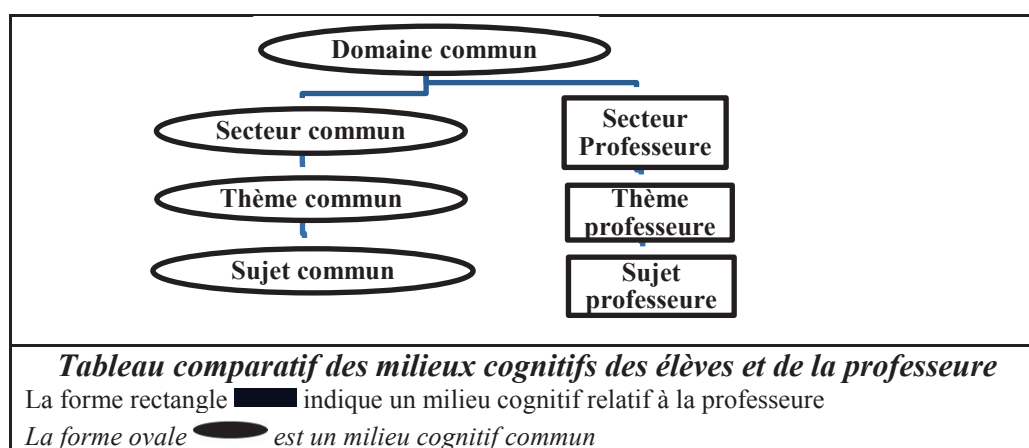
Par exemple : A l'épisode 5S, p.309 de la soustraction, la professeure et les élèves ont pu s'assujettir dans le même milieu institutionnel. Le schéma illustrant ce propos prend la forme ci-dessous :

Ce schéma indique que les rapports personnels des élèves et de la professeure sont communs peuvent intégrer dans le rapport institutionnel du savoir. Nous ne pouvons pas parler dans ce cas de « distance mésogénétique » entre les milieux, ni de dédoublement des milieux.



Cependant, la professeure n'a pas pu maintenir à valeur nulle cet « écart » jusqu'à la fin de la période. Elle a installé une nouvelle OM au sein de la classe.

Nous avons vu que cette nouvelle ré-organisation est apte à accroître la « distance mésogénétique » au sujet institutionnel, sans y impliquer effectivement les élèves. Cette nouvelle organisation prend ainsi la forme :



Ce schéma indique que les rapports personnels des élèves et de la professeure ne peuvent pas converger vers le rapport institutionnellement attendu du savoir. Il y a eu une bifurcation dans le sens où les milieux personnels de la professeure peuvent agir contre l'émergence proprement dite du milieu institutionnel. Cela accroît la distance mésogénétique tout en générant un flou sur le milieu institutionnel.

Les positions des sujets mathématiques envers lesquels sont entretenus des rapports peuvent nous renseigner sur la variation de la « distance mésogénétique » entre les milieux cognitifs des élèves, les OM du professeur et le milieu institutionnel du savoir. Elle varie suivant la nature des sujets traités au sein de l'institution. Par exemple, nous avons supposé que la présence ou non de rapports personnels des élèves à des sujets mathématiques, telle que nous l'avons repérée dans le tableau, pourra ou non maintenir présent le sens « antérieur » attribué à leurs connaissances ; ce qui pourra gêner ou favoriser la constitution de rapports nouveau au savoir enseigné. Par contre, cette distance est accrue par la présence des rapports personnels du professeur aux sujets mathématiques comme cela a été le cas à plusieurs reprises, et qui a joué contre l'émergence de rapports des élèves au savoir visé par le professeur.

Sur ce plan, le phénomène du « dédoublement des milieux » peut être considéré comme un « appareil » didactique permettant de *décrire la genèse* à partir de laquelle s'établissent des rapports personnels d'élèves et de professeur à l'objet de savoir *et leur évolution*.

Etude de quelques facteurs qui agissent sur le phénomène du dédoublement des milieux

Nous avons vu que les rapports aux éléments institutionnels supposés transposés par les professeurs, étaient différents selon les élèves. Cette différence est due à plusieurs facteurs qui affectent un « chevauchement » en termes d'éléments des milieux mobilisés. Dans ce sens, les rapports personnels marquent tantôt une convergence, tantôt une divergence avec les éléments institutionnels du savoir.

Au cours de notre étude, nous avons pointé plusieurs facteurs qui ont agi sur le fonctionnement de ce phénomène, entre autres :

1) Les connaissances antérieures des élèves

Lorsque les connaissances antérieures des élèves ne sont pas remises en cause alors que cela est nécessaire, soit qu'elles devraient être modifiées ou en tout cas qu'elles devraient évoluer, alors elles persistent locales et n'adhèrent pas aux niveaux des OM du savoir. Les élèves construisent alors leurs « propres mathématiques » (Chevallard, 1988) à partir de leurs connaissances qu'ils trouvent propices à l'effectuation de la nouvelle tâche proposée.

Dans ce cas, même si le temps didactique avance, la « distance mésogénétique » s'élargit. Sur ce plan, les professeurs hâtent pour évoquer les éléments institutionnels du savoir sans prendre en considération les techniques personnelles des élèves.

2) La bifurcation due aux techniques didactiques du professeur.

Pour raccourcir la distance au milieu qui émerge dans l'institution et faire converger les rapports des élèves aux rapports institutionnels, les professeurs utilisent souvent des techniques didactiques bien connues comme la maïeutique. Ils incitent les élèves à produire des réponses aux questions qu'ils posent par l'intermédiaire de gestes « topogénétiques ascendants » qui sont aptes à recueillir des réponses précises et institutionnellement attendues. En d'autres termes, les actions des professeurs sont effectuées par un topos moins partagés avec leurs élèves.

Certaines techniques didactiques consistent à laisser un certain topos à l'élève apte à donner une valeur importante à ses techniques personnelles. Par exemple, les félicitations excessives de la part du professeur, dans la séquence des « Nombres Relatifs » attribuées aux élèves, « *Bien* » ; « *Très bien* » ; ont circonscrit leurs milieux dans leurs milieux cognitifs. Certaines de ces techniques n'ont pas permis aux élèves de rencontrer la problématique des tâches étudiées, ni de construire et d'accepter la technique la plus économique qui débouchera sur le nouveau savoir.

3) La bifurcation due à l'utilisation des « techniques correctes » mais inappropriées aux éléments du milieu institutionnel.

Les professeurs ont validé des techniques correctes d'élèves qui ne remettent pas en cause les connaissances antérieures utilisées. Dans la séquence des « Nombres Relatifs », par exemple, le professeur a validé le calcul de la différence de deux nombres positifs 21 et 20 pour le calcul de $(17+21-20)$ au moment où cette technique devait être remplacée par le « programme de calcul ». Pourtant cette technique ne convient pas avec le milieu institutionnel qui correspond seulement aux calculs sur « les programmes de calcul ».

Ainsi la mise en œuvre de quelques techniques correctes, qui ne renvoyaient pas aux connaissances antérieures des élèves, contribue à l'apparition du phénomène du « dédoublement des milieux ».

4) La bifurcation est due aux représentations sémiotiques

Nous avons vu que les différentes représentations sémiotiques de certains ostensifs pourront engager vers une « bifurcation didactique ». Par exemple, le mot « ajouter » est à l'origine d'une « bifurcation didactique » dans la séquence des Nombres Relatifs, puisque les élèves le traduisent par « Additionner deux nombres positifs ($21+17$) », tandis que le professeur le considère comme « Calculer l'opérateur composé des deux opérateurs (+21) et (-17) ». Dans ce sens, les élèves et le professeur n'accomplissent pas les mêmes « actes cognitifs » (Duval, 1995), ils procèdent de deux appréhensions conceptuelles (noésis) pour les représentations sémiotiques (sémiosis) du mot « ajouter ».

En revanche, le professeur ainsi que les élèves peuvent mobiliser des « actes cognitifs » différents. C'est ce qui fait apparaître des niveaux de codétermination différents pour chacun d'eux.

5) Le dédoublement des milieux dû à la dimension topogénétique

Dans les séances observées, le topos qu'investit le professeur lui permettait souvent de devancer les OM afin d'utiliser un cadre technologique pour justifier les tâches et les techniques d'élèves. Il remonte ainsi dans des niveaux de codétermination didactique assez élevés et provoque un « flou » sur les milieux plus ou moins perçus par les élèves. Engagés dans cette voie, il en ressort de nouvelles réorganisations mathématiques dues à la diversité des niveaux de codétermination activés et, qui pourront contribuer à l'émergence du « dédoublement des milieux ».

6) Le dédoublement des milieux dû aux contrats didactiques imposés dans l'institution

Les professeurs observés avaient souvent tendance à plonger les élèves dans un travail par « contrat ». Ils imposent des contraintes adéquates aux éléments du savoir. Par exemple, le professeur des « Nombres Relatifs » a placé les élèves dans le moment de l'exploration et de l'émergence d'une nouvelle technique en imposant la contrainte « *Une autre méthode, ne pas commencer par la soustraction par exemple* ». Cette contrainte a poussé les élèves à élaborer des techniques qui vont avec elle. Ils ont proposé ainsi des techniques qui commencent par l'addition.

Perspectives de la recherche

Avant de passer aux développements possibles de ce travail, nous devons nous interroger sur le degré de généralisation des résultats trouvés. Nous avancerons que, comme dans toute recherche, les résultats trouvés ne peuvent être que limités.

Le travail que nous avons mené ici donne des éléments de réponses à des questions déterminées qui ont contribué à étudier le phénomène du « dédoublement des milieux ». Mais la vertu d'une recherche figure dans les nouvelles questions qu'elle permet de poser.

Nous avons observé des séquences d'enseignement selon des dispositifs de « court terme ». Nous avons filmé quelques séances qui s'étendent sur une durée de quelques semaines et portent sur « les premiers moments de l'émergence de savoir », voire sur son introduction par le professeur. Nous posons ainsi la question suivante : quels rapports émergent-ils dans des moments plus avancés de l'étude d'un savoir, le moment d'institutionnalisation par exemple, ou encore lorsque qu'il sera amalgamé à d'autres savoirs, en particulier dans des dispositifs de « long terme » ?

Nous avons pu identifier quelques facteurs qui contribuent à l'apparition de ce phénomène et; nous sommes convaincus de la présence d'autres facteurs. Nous formulons ainsi l'hypothèse que s'il y a des causes pour ce phénomène, elles sont forcément soutenues par un modèle particulier d'organisation didactique et par des contrats didactiques particuliers. Ainsi, une telle étude devrait être complétée par l'analyse des contrats didactiques établis dans les institutions observées.

Nous avons montré que la présence de sujets mathématiques différents du sujet institutionnel pourrait réduire, cas de présence des sujets personnels d'élèves, ou accroître, cas de présence des sujets personnels pour le professeur, la « distance mésogénétique » avec le milieu institutionnel du savoir. Nous envisageons alors de rechercher les causes qui impliquent des variations sur cette distance. Nous proposons de rechercher des unités convenables afin d'effectuer le mesurage entre le milieu institutionnel du savoir et les milieux personnels du professeur et des élèves.

Références bibliographiques

Références Bibliographiques

Abou Raad N. (2006) *Le calcul algébrique en France et au Liban. Etude comparée de l'enseignement de la factorisation et des erreurs des élèves.* Thèse de doctorat en Sciences de l'Education de l'Université Aix-Marseille I.

Aldon G. (2011) *Interactions didactiques dans la classe de mathématiques en environnement numérique : construction et mise à l'épreuve d'un cadre d'analyse exploitant la notion d'incident.* Thèse de doctorat, Université Lyon 1.

Araya A. (2008) *La gestion de la mémoire didactique par le professeur dans l'enseignement secondaire des mathématiques. Etude du micro-cadre institutionnel en France et au Costa Rica.* Thèse de l'Université Paul Sabatier-Toulouse III.

Assude T., Mercier A. et Sensevy, G. (2007) *L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux.* Recherche en didactique des mathématiques, Vol 27 (2), 221 – 252

Berthelot R. & Salin M. –H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la*

Berté. A et al (2008) *Enseigner les nombres négatifs au collège.* Groupe Didactique des mathématiques- IREM d'Aquitaine. AMPERES-INRP, REPERES -, IREM. N° 73.

Berté A. et Quilio S. (1999) Soustraction à l'école élémentaire, UMR-ADEF.

Bosch M., Chevallard Y. (1999) *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs.* Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 19/1, pp. 77-124

Boyé. A (2009) Quelques éléments d'histoire des nombres négatifs, IREM-Nantes.
<http://www.paperblog.fr/2566500/quelques-elements-d-histoire-des-nombres-negatifs-par-anne-boyé/>

Briand J. (2010) *Le manuel scolaire carrefour de tensions mais aussi outil privilégié de vulgarisation des recherches en didactique des mathématiques.* Séminaire DIDIREM Paris 7.

Brousseau G et Pérès J. (1985) *Le cas de Gaël.* IREM de Bordeaux.

Brousseau G. (1986) *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.* Thèse de doctorat d'État, Université de Bordeaux I, Bordeaux.

Brousseau G (1987) *Représentations et didactique du sens de la division.* IREM –Bordeaux I.

Brousseau G (1988) *Le contrat didactique : le milieu.* Recherches en didactique des mathématiques, vol 9 (3), pp 309 – 336.

Brousseau G. (1995) *L'enseignant dans la théorie des situations didactiques : 1. Structure et fonctionnement du système didactique.* In : Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (Eds.) Actes de

la VIII^e Ecole d'été de didactique des mathématiques St-Sauves d'Auvergne. Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand. Actes de la VIII^e Ecole d'Été, 1995, p. 3-46.

Brousseau G. (1996) *Cours 2 : Les stratégies de l'enseignant et les phénomènes typiques de l'activité didactique*, In R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (Eds), Actes de la VIII^e École d'Été de didactique des mathématiques. Clermont-Ferrand : IREM, p. 16-30,

Brousseau G. (1998a) *Théories des situations didactiques*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

Brousseau G. (1998b) *Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique*. In G.Brousseau, *Théorie des situations didactiques* (pp. 115-160). Grenoble La Pensée Sauvage.

Brousseau G. (1999) *Educación y didáctica de las matemáticas*. Education Mathématisa, Mexico.

Brousseau G. (2010) *Premières découvertes des Obstacles épistémologiques et didactiques en Mathématiques*.

Bruillard E. (2005) *Les manuels scolaires questionnés par la recherche*. CRDP de Basse-Normandie, documents, actes et rapports sur l'éducation. Caen. Pp 13 – 36.

Bucheton D. (1999) *Les manuels : un lien entre l'école, la famille, l'élève et les savoirs*, CRDP, Basse-Normandie.

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique*. Grenoble, la pensée sauvage.

Chevallard Y. (1988) *La dialectique entre études locales et théorisation : le cas de l'algèbre dans l'enseignement du second degré*.

Chevallard Y. (1989a) *Le concept du rapport au savoir : Rapport personnel, Rapport institutionnel, rapport officiel*. Séminaire de didactique des mathématiques et d'informatique, numéro 108, LSD-IMAG, Grenoble.

Chevallard Y. (1989b) *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège*, «petit x» no 19 pp. 43 à 72.

Chevallard, Y. (1992) *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*. Recherches en didactique des mathématiques, 12 (1), 73 – 112.

Chevallard Y. (1994) *Enseignement de l'algèbre et TD*. Université Pol Torino, vol 52.

Chevallard Y. (1995) *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*, IUFM et IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard Y. (1996) *Regards croisés sur le didactique. Un colloque épistolaire*. Grenoble, la Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1999) *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. RDM 19/2, la pensée sauvage.

Chevallard Y. (2002) *Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques.*

Chevallard, Y. (2003). *Approche anthropologique du rapport au savoir et didactiques des mathématiques.* In Maury, S. et Caillot, M., *Rapport au savoir et didactiques.* Paris : FABERT, pp. 81-104

Chevallard Y. (2005) *La didactique dans la cité avec les autres sciences.*

Chevallard Y. (2007) *Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux.* Séminaire national de didactique des mathématiques. ARDM et IREM de Paris 7, Paris, pp. 344-366.

Comiti C. Grenier D. et Margolinas C. (1995) *Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques.* In Arsac G.,

Douady R. (1994) *Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir : une chronique en calcul mental, un projet en algèbre à l'articulation collège-seconde.* IREM Paris-VII. In Repères IREM n° 15, avril 1994, Topiques Éditions.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine.* Berne. Peter Lang.

<http://eroditi.free.fr/Enseignement/PE1/S4%20additifs.pdf>

Gaud. J, Guichard. J.P (1991) *Aperçu historique sur les nombres relatifs : Les relatifs : Quelle histoire !* REPERES IREM, numéro 2 janvier.

Ginzburg, C. (1989) *Mythes, emblèmes, traces. Morphologie et histoire.* Paris : Nouvelle bibliothèque scientifique Flammarion (Original publié en 1986).

Gréa J., Grenier D., & Tiberghien, A. (Eds.) (1995) *Différents types de savoirs et leur articulation.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Houdebine J. (1991) *Changer un terme de membre en changeant de signe.* Irem de Rennes, petit x, Page 38

Kazan E. (2003) *Etude de quelques difficultés dans la résolution algébrique de l'équation du premier degré à une inconnue en EB7 au Liban.* Mémoire pour obtenir un DEA en didactique des mathématiques. Faculté de Pédagogie.

Kuzniak A. (2004) *La théorie des situations didactiques de Brousseau.* IREM de Strasbourg.

Leutenegger F. (2000) *Construction d'une « clinique » pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement.* Recherches en didactique des mathématiques, 20 (2), p. 209-250.

Leutenegger F. (2009) *Le temps d'instruire : Approche clinique et expérimentale du didactique ordinaire.* Berne : Peter Lang. Coll. Exploration.

Lombard P. (2003) *De l'intuition à l'argumentation, est-il possible d'apprendre à raisonner ?* IREM Lorraine

Lucena (2012) *L'analyse des situations d'enseignement / apprentissage en éducation visuelle au premier cycle dans une approche par compétences.*
http://admee2012.uni.lu/pdf2012/A20_03.pdf

Margolinas C. (1995) *La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations', Les débats de didactique des mathématiques.* Grenoble. La Pensée Sauvage, pp. 89-102.

Margolinas C. (2002). *Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur.* In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 141-156). Grenoble La Pensée Sauvage.

Margolinas C. (2005) *Les bifurcations didactiques: un phénomène révélé par l'analyse de la structuration des milieux.*

Matheron Y. (2000) *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée. Quelques exemples.* Thèse Université d'Aix Marseille I, 2000.

Matheron Y. et Salin M. (2002) *Les pratiques ostensives comme travail de construction d'une mémoire officielle de la classe dans l'action enseignante.* Revue Française de Pédagogie, n° 141, octobre-novembre-décembre 2002.

Matheron Y. (2009) *Praxéologies professionnelles enseignantes en mathématiques : le problème de l'enseignement parcellaire en sujets et en thèmes.* In J. Clanet (Ed.) Recherche/formation des enseignants. Quelles articulations ? (pp. 111-125). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Matheron. Y, Noirfalise. A (2009) *Enseigner les mathématiques à l'école élémentaire.* Vuibert, Tome 1.

Matheron Y. (2010) *Contribution à l'étude du travail de la mémoire dans les processus d'enseignement et d'éducation,* Note de synthèse HDR, 2010.

Matheron Y. (2011) *Le travail du professeur de mathématiques relatif à la conception et la réalisation des phases de dévolution.* Vol 5. Presses Univ. De Rennes.

Matheron Y. (2013) (à paraître) *Médias – milieux, une frontière ténue au sein de la problématique de base,* EA-ADEF, Aix-Marseille Univ.; ENS de Lyon, IFE, Marseille, France

Mercier A. (1992) *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique.* Thèse de doctorat : Université de Bordeaux I.

Mercier, Rouchier et Lemoyne (2001) *Des outils et techniques d'enseignement aux théories didactiques, Le génie didactique.* De Boeck.

Mercier A. et Matheron Y. (2004) *Les usages didactiques des outils sémiotiques du travail mathématique : Etude de quelques effets mémoriels* ». Revue des sciences de l'éducation. Vol. 30, n° 2. pp 355 – 377.

Mercier A. (2004) *Evaluer et comprendre les effets des pratiques pédagogiques*. Textes d'une conférence au PIREF, UMR ADEF.

Mercier A. (2004) *L'ostension*. Groupe de Travail Toulousain en Didactique des Mathématiques.

Mercier & Margolinas (2005) *Balises en didactique des mathématiques*. Cédérom– La Pensée Sauvage – Editions.

Mercier A., Quilio S. et Assude T. (2011) *Obstacles dans l'implémentation d'une ingénierie didactique sur la Soustraction*. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brésil.

Pascale D. (1980) *Le problème du zéro, L'économie de l'échec dans la classe et la production de l'erreur*. Mémoire en DEA.

Patricia T. (1995) *A propos de la transposition didactique en didactique des mathématiques*, SPIRALE - Revue de Recherches en Éducation - N° 15 (31-60).

Glorian M-J (1998) *Analyse d'un problème de fonctions en termes de milieu. Structuration du milieu pour l'élève et pour le maître*” in *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*. Ed. Coordonnée par Robert Noirfalise, IREM de Clermont-Ferrand, pp. 17 - 37

Robert et Vandebrouk (2003) *Des utilisations du tableau par des professeurs des mathématiques en classe de seconde*. RDM, v.23, n°3, pp278-424.

Schubauer-Leoni, M.-L. & Leutenegger, F. (2002). *Expliquer et comprendre dans une approche clinique/expérimentale du didactique ordinaire*. In F. Leutenegger & M. Saada-Robert Expliquer et comprendre en sciences de l'éducation. Bruxelles: De Boeck Raisons éducatives.

Schubring. G. (1986) *Ruptures dans le statut mathématiques des nombres négatifs*. Université de Bielefeld, «petit x» n° 12, p. 5 à 32.

Sensevy, G. (1994). *Institutions didactiques, régulation, autonomie. Une étude des fractions au cours moyen*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille.

Sensevy, G., Mercier, A. & Schubauer-Leoni, M.-L. (2000). *Vers un modèle de l'action didactique du professeur : à propos de la Course à 20*. Recherches en Didactique des mathématiques, 20 (3) 263-304.

Sensevy G. (2001a) *Modèles de l'action du professeur: nécessités, difficultés*. De Boek University, p 223.

Sensevy G. (2001b) *Le génie didactique Usages et mésusages des théories de l'enseignement*. De Boeck University, 2001.

Sensevy G. (2011) *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles : De Boeck.

Soto- Andrade J. (2006) *Un monde dans un grain de sable: Métaphores et analogies dans l'apprentissage des mathématiques*. Annales de Didactique et de Sciences cognitives, volume 11, p. 123 – 147. IREM de Strasbourg.

Tonnelle J. (1980) *Le Monde clos de la factorisation au premier cycle*. Mémoire de DEA. IREM d'Aix-Marseille

Tavignot P. (1995) *A propos de la transposition didactique en didactique des mathématiques*. Spirale 15.

Vergnaud G. (1983) *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Peter Lang, collection Exploration Recherches en Sciences de l'Education.

Ingénieries

Brousseau G. (1986) *Soustraction à l'école élémentaire*. Document rédigé par Berté A, Relecture et révisions Quilio S(1999) (UMR ADEF).

Les Nombres Relatifs en Cinquième, (CD) AMPERES

<http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/relatifs.pdf>

Livres électroniques

Les livres électroniques sont lus sur le site :

<http://books.fr>

Clairaut A-C (1760) *Eléments d'Algèbre*, Académie des sciences de France, d'Angleterre, de Prusse, de Russie, de Bologne et d'Upfal, quatrième édition.

Cauchy. A. L (1821) *Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique*.

Maclaurin C. (1749) *Des calculs dans la méthode des fluxions*. Livre second, chapitre premier. Paris C-A- Jombert. Tome II, p.153.

Carnot L. (1803) *Géométrie de Position*. Paris J-B-M Dupart.

Sites électroniques

[http://fr.wikiversity.org/wiki/Groupe_\(math%C3%A9matiques\)/Groupes,_premi%C3%A8res_notions](http://fr.wikiversity.org/wiki/Groupe_(math%C3%A9matiques)/Groupes,_premi%C3%A8res_notions)

Etude mathématique des Nombres Relatifs cité dans

<http://www.math.ens.fr/culturemath/maths/pdf/logique/relatifs.pdf>

Etude mathématique des Nombres Relatifs cité dans

<http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/nombres/les-negatifs>

Etude mathématique des Nombres Relatifs cité dans

<http://www.ardm.eu/contenu/yves-chevallard>

Chevallard, La théorie anthropologique du didactique

<http://melusine.eu.org/syracuse/texpng/cprl/meria/doc17/index.pdf>

Méria F. Calcul Littéral, programme de calcul, développement et factorisation.

<http://peysseri.perso.neuf.fr/R02-3.htm>

www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/14/14n4.pdf

Guinet R. Histoires des techniques opératoires, PDF.

http://serge.mehl.free.fr/anx/fauss_pos.html

Méthode de la fausse position

<http://eroditi.free.fr/Enseignement/PE1/S4%20additifs.pdf>

Les problèmes additifs

http://www.cafepedagogique.net/lesdossiers/Pages/2010/RBrissiaud_Operationsarithmetiques1.aspx

La pédagogie et la didactique des opérations arithmétiques à l'école (1) : Le dilemme de l'automatisation, celui de la symbolisation et l'inspection générale.

<http://fr.wiktionary.org/wiki/prax%C3%A8me>

Dictionnaire

Séminaire de didactique

Chevallard Y. (2001) Séminaire de didactique des mathématiques, Séance 13.

Chevallard Y. (2004 – 2005) Séminaire pour les PCL2 de l'IUFM d'Aix-Marseille, pages 457 et suivantes.

Chevallard Y. (2009 / 2010) Journal du Séminaire TAD/IDD 2009-2010.

Chevallard Y. (2009) Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement. Journal du séminaire TAD/IDD, UMR-ADEF.

Manuels scolaires et Curricula

A nous les maths (2000) Education de base 6 (sixième). Collection Hachette.

Construire les Mathématiques (1998) Education de base 7. Cycle complémentaire, première année (cinquième). Edition CRDP (Centre de Recherche et de Développement Pédagogique).

Construire les Mathématiques (2000) Education de base 6. Cycle primaire. Edition CRDP

Construire les Mathématiques (2004) Education de base 10. Cycle secondaire, première année, Edition CRDP.

Curriculum Libanais (1997) CRDP, Décret 10227, 8 mai 1997.

Mathématiques (2009) Education de base 6. Collection puissance.

Programmes d'enseignement Français de l'école primaire (2008). B. O. n° 3 du 19 juin.

Table des extraits étudiés

Extrait 1 : Equation/ Introduire les ostensifs/ L1-L3	93
Extrait 2 : Equation/ Introduire des éléments non demandés des élèves / L3-L7	95
Extrait 3 : Equation/ résolution et balance 1/ L13-L14.....	99
Extrait 4 : Equation/ résolution et balance 2/ L16	100
Extrait 5 : Equation/ Equilibre et égalité/ L18 à L21	102
Extrait 6 : Equations de la première séance	114
Extrait 7 : Equation $3x=4$ / L22 à L32	115
Extrait 8 : Equation $\frac{3x}{5} = 2$ / L36 à L41	122
Extrait 9 : Equation $\frac{3x}{5} = 2$ / L42	123
Extrait 10 : Equation $\frac{3x}{5} = 2$ / L48	126
Extrait 11 : Equation $\frac{3x}{5} = 2$ / L50	126
Extrait 12 : Equation $\frac{3x}{5} - 1 = 7$ / L51 à L54	129
Extrait 13 : Equation $3x - 1 = x + 6$ / L55	131
Extrait 14 : Equation $3x-1=x+6$ / L57	133
Extrait 15 : Equation $3x - 1 = x + 6$ / L59 – L60	134
Extrait 16 : Phase 1 dans la résolution d'équation/ L61 à L63	135
Extrait 17 : Phase 2 dans la résolution d'équation/ L63 à L64	136
Extrait 18 : Phase 3 dans la résolution d'équation/ L65 à L66	136
Extrait 19 : Phases : Phasesésolution pour une équation.....	138
Extrait 20 : Suite des équations étudiées au cours de la première séance	143
Extrait 21 : techniques d'élèves dans l'équation $2x-4=2(x-2)$	145
Extrait 22 : techniques d'élèves dans l'équation $4(3t+2)=3(t+5)$	148
Extrait 23 : Nombres Relatifs S1/ Ext 1/ L1 à L8	188
Extrait 24 : Nombres Relatifs S1/ Ext 2/ L21 à L25	193
Extrait 25 : Nombres Relatifs S1/ L26	193
Extrait 26 : Nombres Relatifs S1/ Ext 3 L26 à L43	195
Extrait 27 : Nombres Relatifs S1/ Ext 4/ L48 à L64	201
Extrait 28 : Nombres Relatifs extrait S1/ Ext 5/ L65 à L74	203
Extrait 29 : Nombres Relatifs S1/ Ext 6/ L97 à L105	207
Extrait 30 : Nombres relatifs S1/ Ext 7/ L146	211
Extrait 31 : Nombres relatifs S1/ Ext 8/ L178 à L189	212
Extrait 32 : Nombres Relatifs S2/ Ext 1/ L1 à L4	220
Extrait 33 : Nombres Relatifs S2/ Ext 2/ L22 à L24	221
Extrait 34 : Nombres Relatifs S2/ Ext 3/ L1 à L7	222

<i>Extrait 35 : Nombres Relatifs S2/ Ext4/ L1 à L10</i>	<i>223</i>
<i>Extrait 36 : Nombres Relatifs S2/ Ext5/ L24 à L31</i>	<i>224</i>
<i>Extrait 37 : Nombres Relatifs S3/ Ext 1/ L1 à L8</i>	<i>229</i>
<i>Extrait 38: Nombres Relatifs S3/ Ext 2/ L14 à L18</i>	<i>230</i>
<i>Extrait 39 : Nombres Relatifs S3/ Ext 3/ L1 à L6</i>	<i>231</i>
<i>Extrait 40 : Nombres Relatifs S3/ L31</i>	<i>232</i>
<i>Extrait 41 : Nombres Relatifs S3/ Ext 4/ L1 à L13</i>	<i>233</i>
<i>Extrait 42 : Nombres Relatifs S4/ Ext 1/ L1 à L10</i>	<i>236</i>
<i>Extrait 43 : Nombres Relatifs S4/ Ext 2/ L27 à L34</i>	<i>237</i>
<i>Extrait 44 : Nombres Relatifs S4/ Ext 3/ L41 à L43</i>	<i>238</i>
<i>Extrait 45 : Nombres Relatifs S4/ Ext 4/ L46 à L49</i>	<i>238</i>
<i>Extrait 46 : Nombres Relatifs S4/ Ext 5/ L1 à L11</i>	<i>242</i>
<i>Extrait 47 : Nombres Relatifs S4/ Ext 6/ L33 à L37</i>	<i>243</i>
<i>Extrait 48 : Nombres Relatifs S4/ Ext 7/ L47 à L51</i>	<i>243</i>
<i>Extrait 49 : Nombres Relatifs S4/ Ext 8/ L75 à L78</i>	<i>244</i>
<i>Extrait 50: Nombres Relatifs S4/ Ext 9/ L1 à L4</i>	<i>245</i>
<i>Extrait 51 : Nombres Relatifs S4/ Ext 10/ L1 à L12</i>	<i>245</i>
<i>Extrait 52 : Nombres Relatifs S4/ Ext 11/ L1 à L20</i>	<i>246</i>
<i>Extrait 53 : Soustraction/ Entretien professeure/ Ext 1/ LE50-51</i>	<i>273</i>
<i>Extrait 54 : Soustraction/ Entretien professeure/ Ext 2/ LE48-49</i>	<i>275</i>
<i>Extrait 55 : Soustraction/ Entretien professeure/ Ext 3/ LE38-41</i>	<i>276</i>
<i>Extrait 56 : Soustraction/ Entretien professeure/ Ext 4/ LE54-55</i>	<i>278</i>
<i>Extrait 57 : Soustraction/ Episode 1/ Ext1/ L1 à L6</i>	<i>280</i>
<i>Extrait 58 : Soustraction/ Entretien professeure/ Ext 5/ LE8.....</i>	<i>281</i>
<i>Extrait 59 : Soustraction/ Entretien professeure/ Ext 6/ LE9.....</i>	<i>281</i>
<i>Extrait 60 : Soustraction/ Entretien professeure/ Ext 7/ LE17.....</i>	<i>281</i>
<i>Extrait 61 : Soustraction/ Entretien professeure/ Ext 8/ LE5.....</i>	<i>282</i>
<i>Extrait 62 : Soustraction/Episode 1/ Ext 2/ L7 à L20</i>	<i>283</i>
<i>Extrait 63 : Soustraction/ Episode 2/ .Ext 1/ L21 – L22.....</i>	<i>291</i>
<i>Extrait 64 : Soustraction/ Episode 2/ .Ext 2/ L22 – L32.....</i>	<i>292</i>
<i>Extrait 65 : Soustraction/ Episode 2/ .Ext 3/ L32 – L36.....</i>	<i>293</i>
<i>Extrait 66 : Soustraction/ Episode 3S/ Ext 1/ L37 à L44.....</i>	<i>297</i>
<i>Extrait 67 : Soustraction/ Episode 3S/ Ext 2/ L50.....</i>	<i>299</i>
<i>Extrait 68 : Soustraction/ Episode 3S/ Ext 3/ L57 à L64.....</i>	<i>300</i>
<i>Extrait 69 : Soustraction/ Episode 3S/ Ext 4/ L65 à L73.....</i>	<i>300</i>
<i>Extrait 70 : Soustraction/ Episode 3S/ Ext 5/ L73 à L82.....</i>	<i>302</i>
<i>Extrait 71 : Soustraction/ Episode 3S/ Ext 6/ L83.....</i>	<i>303</i>
<i>Extrait 72 : Soustraction/ Entretien/ LE6 – LE7.....</i>	<i>304</i>
<i>Extrait 73 : Soustraction/ Episode 4S/ Ext 1/ L85 à L94.....</i>	<i>307</i>
<i>Extrait 74 : Soustraction/ Episode 5S/ Ext 1/ L95 à L106.....</i>	<i>309</i>
<i>Extrait 75 : Soustraction/ Episode 6S/ Ext 1/ L106 à L123.....</i>	<i>311</i>
<i>Extrait 76 : Soustraction/ Entretien professeure/ LE49.....</i>	<i>312</i>
<i>Extrait 77 : Soustraction/ Episode 7S/ Ext 1/ L123 à L133.....</i>	<i>313</i>

Table des tableaux du dédoublement des milieux

Tab OM 1 : Etude praxéologique de la tâche « Déterminer une équation équivalente ».....	43
Tab OM 2 : Schéma des niveaux de codétermination didactique.....	46
Tab OM 3 : Les Equations dans le programme libanais 1997	76
Tab OM 4 : OM et OD du chapitre « Equations ».....	87
Tab OM 5 : Milieu institutionnel du savoir « Equations » à partir du manuel	88
Tab OM 6 : Organisation locale ($T_{i,d}; \tau_{i,d}; \theta_d; \Theta$) avec $i=1, 2, 3$	90
Tab OM 7 : Milieux cognitifs(■)du professeur pour l'équation $3x=4$	118
Tab OM 8 : Tableau 2 : milieux cognitifs de l'élève (◆) pour l'équation $3x=4$	119
Tab OM 9 : Dédoublement des milieux pour l'équation $3x=4$	120
Tab OM 10 : milieux cognitifs de l'élève pour l'équation $\frac{3x}{5}=2$	125
Tab OM 11 : Milieux cognitifs assujettis par le professeur dans l'équation $\frac{3x}{5}=2$	127
Tab OM 12 : Dédoublement des milieux pour l'équation $\frac{3x}{5}=2$	128
Tab OM 13 : Milieux cognitifs de l'élève pour l'équation $\frac{3x}{5}-1=7$	131
Tab OM 14 : Milieux cognitifs de l'élève pour l'équation $3x-1=x+6$	139
Tab OM 15 : Milieux institutionnels assujettis du professeur pour l'équation $3x-1=x+6$	140
Tab OM 16 : Dédoublement des milieux pour l'équation $3x-1=x+6$	141
Tab OM 17 : Milieux cognitifs d'élèves pour la préparation à domicile.....	150
Tab OM 18 : Tableau illustrant le dédoublement des milieux aux niveaux de codétermination	154
Tab OM 19 : Etude praxéologique des nombres relatifs du point de vue « curriculum »	168
Tab OM 20 : Milieux cognitifs des élèves (Milieu 1) pour l'extrait 23 S1/ Ext 1/ L1 à L8. 190	
Tab OM 21 : Milieux cognitifs (Milieu 2) de l'élève dans le calcul de $2789+25-20$ dans 6.6.2	192
Tab OM 22 : Tableau du milieu institutionnel d'une « Fonction opérateur ».....	198
Tab OM 23 : Tableau comparatif des milieux cognitifs des élèves et du professeur (Milieu 3) pour l'extrait 26 : S1/ Ext 3/ L26 à L43	199
Tab OM 24 : Tableau comparatif des milieux cognitifs des élèves et du professeur pour l'extrait 29 (S1/ Ext 6)	210
Tab OM 25 : Tableau comparatif des milieux cognitifs des élèves et du professeur pour l'extrait l'Ext 31 (S1/Ext 8)	215
Tab OM 26 : Nombres Relatifs, Tableau du dédoublement des milieux des élèves et du professeur de la première séance	219
Tab OM 27 : Nombres Relatifs, Tableau du dédoublement des milieux de la deuxième séance	227

<i>Tab OM 28 : Nombres Relatifs, Tableau du dédoublement des milieux de la troisième séance</i>	235
<i>Tab OM 29 : Nombres Relatifs, Tableau du dédoublement des milieux de la première partie de la quatrième séance</i>	241
<i>Tab OM 30 : Nombres Relatifs, dédoublement des milieux de la deuxième partie de la</i>	251
<i>Tab OM 31 : Dédoublement des milieux de la séquence dans l'introduction des nombres relatifs</i>	255
<i>Tab OM 32 : Organisations mathématiques de la soustraction en CP et en CE1 en France</i>	272
<i>Tab OM 33 : OM de la professeure pour la soustraction</i>	279
<i>Tab OM 34 : Milieu institutionnel de la professeure pour le premier épisode de la séance</i>	289
<i>Tab OM 35 : Milieu cognitif de l'élève relatif à l'épisode 2S de la séance</i>	295
<i>Tab OM 36 : Dédoublement des milieux relatif aux épisodes 1S et 2S</i>	296
<i>Tab OM 37 : dédoublement des milieux pour l'épisode 3S</i>	306
<i>Tab OM 38 : L'absence du dédoublement des milieux pour l'épisode 4S</i>	308
<i>Tab OM 39 : L'absence du dédoublement des milieux pour l'épisode 5S</i>	310
<i>Tab OM 40 : Dédoublement des milieux pour l'épisode 7S</i>	314

Table des figures

Figure 1: Emboîtement des milieux.....	24
Figure 2 : Résolution arithmétique de Clairaut 1760	64
Figure 3 : Extrait du livre de Clairaut 1760	67
Figure 4 : Résolution algébrique de Clairaut 1760	68
Figure 5 :Les équations dans le curriculum libanais	75
Figure 6 : Place du manuel dans la transposition didactique du savoir	77
Figure 7 : Cours chapitre « Equations », p168	78
Figure 8 : Cours Chapitre équations, p169	81
Figure 9 :Les balances dans l'écriture d'une « Equation »	83
Figure 10 : Propriété 2 du cours « Equations »	86
Figure 11 : Synopsis de la première séance des « Equations »	92
Figure 12 : schéma de divergence entre les différents milieux entretenus	99
Figure 13 : divergence entre le milieu institutionnel et le milieux cognitifs des élèves.....	104
Figure 14 : émergence vers le milieu institutionnel du savoir	107
Figure 15 : Les expressions algébriques dans le curriculum libanais	116
Figure 16 : Introduction des nombres relatifs dans le manuel 1.....	173
Figure 17 : Introduction des nombres relatifs dans le manuel 2.....	175
Figure 18 : Introduction des nombres relatifs dans le manuel 3.....	178
Figure 19 : Etude comparative sur les nombres relatifs dans les manuels libanais	183
Figure 20 : L'addition et la soustraction dans le programme français 2008.....	270
Figure 21 : le rôle de la boîte dans l'enseignement de la soustraction.....	282
Figure 22 : Distance mésogénétique.....	318