Aix-Marseille Université
École Doctorale de Sciences Économiques et de Gestion d'Aix-Marseille
Aix-Marseille Sciences Économiques
Groupement de Recherche en Économie Quantitative d'Aix-Marseille

Trois essais sur la généralisation des préférences moyenne–variance à l'ambiguïté

THÈSE

En vue de l'obtention du titre de
Docteur d'Aix-Marseille Université
Spécialité : Sciences Économiques

Présentée par
Eric ANDRÉ

Composition du Jury

M. Philippe BERTRAND	Professeur à l'Université d'Aix-Marseille	*Examinateur*
M. André LAPIED	Professeur à l'Université d'Aix-Marseille	*Directeur de thèse*
M. Olivier LE COURTOIS	Professeur à l'EMLYON Business School	*Rapporteur*
M. Jean-Luc PRIGENT	Professeur à l'Université de Cergy-Pontoise	*Rapporteur*
M. Patrick ROUSSEAU	Professeur à l'Université d'Aix-Marseille	*Examinateur*

Résumé

Cette thèse propose une généralisation des préférences moyenne–variance à l'ambiguïté, c'est-à-dire aux contextes dans lesquels l'investisseur ne peut pas, ou ne souhaite pas, décrire le comportement des actifs risqués par un modèle probabilisé unique. Elle se rattache donc au champ de recherche qui vise à appliquer les modèles de décision dans l'ambiguïté à la théorie mathématique de la finance, et dont le but est d'améliorer les capacités descriptives de cette théorie financière par la généralisation d'une de ses hypothèses centrales : l'utilité espérée.

Les modèles étudiés ici sont ceux qui représentent les croyances du décideur par un ensemble de probabilités, ou *priors* : on cherche à montrer, d'une part, sous quelles conditions ces modèles peuvent être appliqués à la théorie financière et, d'autre part, ce qu'ils lui apportent. Ainsi, après une introduction générale qui propose une synthèse des avancées de ce champ de recherche, un premier essai étudie les conditions de compatibilité entre ces modèles à ensemble de *priors* et les préférences moyenne–variance, un deuxième essai analyse les possibilités offertes par le modèle *Vector Expected Utility* pour généraliser ces préférences à l'ambiguïté et, finalement, un troisième essai développe l'une de ces pistes pour construire un critère moyenne–variance généralisé et étudier les effets de l'aversion à l'ambiguïté sur la composition optimale d'un portefeuille d'actifs risqués. Les résultats obtenus permettent notamment de conclure que l'aversion à l'ambiguïté est bien une explication possible du puzzle de la préférence pour le pays d'origine.

Mots clefs

Théorie de la décision ; Ambiguïté ; Préférences moyenne–variance ; Choix de portefeuille ; Puzzle de la préférence pour le pays d'origine.

Abstract

This dissertation proposes a generalisation of the mean–variance preferences to ambiguity, that is contexts in which the investor can not, or does not wish to, describe the behaviour of the risky assets with a single probabilistic model. Hence it belongs to the field of research that seeks to apply models of decision under ambiguity to the mathematical theory of finance, and whose aim is to improve the descriptive capacities of this theory of finance through the generalisation of one of its central hypothesis: expected utility.

The models that are studied here are those which represent the decision maker's beliefs by a set of *priors*: we aim to show, on the one hand, under which conditions these models can be applied to the financial theory, and, on the other hand, what they bring to it. Therefore, following a general introduction which proposes a survey of the advances of this field of research, a first essay studies the conditions of compatibility between these models with a set of *priors* and the mean–variance preferences, a second essay analyses the possibilities given by the *Vector Expected Utility* model to generalise these preferences to ambiguity and, finally, a third essay develops one of these threads to construct a generalised mean–variance criterion and to study the effects of ambiguity aversion on the optimal composition of a portfolio of risky assets. The results that are obtained allow notably to conclude that aversion to ambiguity is indeed a possible explanation of the home-bias puzzle.

Keywords

Decision theory; Ambiguity; Mean–Variance Preferences; Portfolio Choice; Home-bias Puzzle.

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à mon directeur de thèse, André Lapied : il m'a initié à la théorie de la décision axiomatique dont il sait révéler tout l'intérêt, exposant ses multiples ramifications dans la science économique et ses connections hors de cette discipline. Je lui exprime toute ma gratitude pour m'avoir proposé ce travail de recherche et l'avoir dirigé. Je lui suis aussi très reconnaissant d'être mon mentor dans le noviciat des enseignants-chercheurs : combien de ses conseils si pertinents ont été nécessaires pour arriver sain et sauf à l'étape que voici ! Enfin, la démonstration d'un « esprit libre » dans les couloirs de l'institution est une leçon qui, j'en suis sûr, ne sera pas la moins utile.

Mes remerciements vont ensuite à Olivier Le Courtois et Jean-Luc Prigent qui ont accepté de lire avec soin et de rapporter cette thèse. L'intérêt qu'ils portent à mon travail est le meilleur des encouragements à poursuivre cette recherche.

Philippe Bertrand et Patrick Rousseau me font l'honneur de prendre part à mon jury de thèse : je les en remercie. J'espère avoir su prendre en compte leurs remarques constructives pour améliorer ce mémoire.

Cette page est aussi l'opportunité de remercier les professeurs du Master de Philosophie Économique dont les enseignements m'ont offert des points de vue passionnants sur l'économie en en révélant ses multiples dimensions.

Le GREQAM, ses chercheurs et son personnel administratif, m'ont, quant à eux, fourni un excellent cadre de travail et tout le soutien nécessaire à cette activité de recherche.

Je remercie mes collègues, thésards ou déjà docteurs, d'Aix et de Marseille, pour leur camaraderie et nos nombreuses discussions, avec une mention particulière pour Jean-Sébastien qui a su faire émerger une communauté de notre groupe de doctorants.

Je pense finalement à ma famille et au soutien qu'elle m'a offert pendant ces années de thèse, à mes parents à qui je dois la confiance qui m'a portée dans ce projet, à la mémoire de mon père et au souvenir chaleureux de nos disputations qui m'ont donné le goût du débat d'idées. J'embrasse mes filles : leur amour, leur curiosité et leur enthousiasme sont communicatifs ! Je remercie enfin mon aristophanienne moitié dont il n'est pas possible de surestimer le rôle qu'elle a tenu dans ce projet : ce travail est aussi le sien.

Chapitre 1

Introduction générale

It is my view that most individuals underestimate the uncertainty of the world. This is almost as true of economists and other specialists as it is of the lay public. To me our knowledge of the way things work, in society or in nature, comes trailing clouds of vagueness. Vast ills have followed a belief in certainty, whether historical inevitability, grand diplomatic designs, or extreme views on economic policy. When developing policy with wide effects for an individual or a society, caution is needed because we cannot predict the consequences.

Kenneth J. Arrow

"I know a Hawk from a Handsaw"
in *Eminent Economists, Their Life Philosophies*,
édité par M. Szenberg, Cambridge University Press, 1992.

La théorie mathématique de la finance est un champ de recherche récent mais qui a très rapidement connu de nombreuses applications pratiques. La place prise par la finance de marché dans l'économie réelle, au travers du financement des entreprises, de la mutualisation des risques ou de la gestion de l'épargne des agents, indique l'importance des enjeux qui sont liés aux énoncés de la théorie. Or ces énoncés sont déduits d'un ensemble d'hypothèses qui sont discutées et parfois fortement critiquées, certains résultats théoriques n'étant pas corroborés par les prix et dynamiques des actifs financiers. De plus, chacune des crises qui traversent régulièrement les marchés financiers est l'opportunité, pour l'ensemble des intervenants sur ces marchés, de rappeler la nécessité de faire progresser les outils de mesure et de gestion des risques proposés par la théorie financière.

L'une des hypothèses qui fondent la théorie mathématique de la finance porte sur le comportement des agents : elle postule que leurs préférences sont représentées par le critère de l'utilité espérée. Ce critère est un outil qui permet de déduire de nombreux résultats sur la valorisation des actifs et la composition des portefeuilles optimaux. Or, si la théorie de l'utilité espérée occupe la position du « noyau dur » au sein du programme de recherche de la théorie de la décision, elle subit cependant de nombreuses critiques, principalement à travers des paradoxes en expérimentation qui ont motivé l'ouverture d'un champ de recherche visant à généraliser ce critère dès les années 1980. L'utilité espérée suppose que les décideurs sont capables d'attribuer une loi de probabilité additive unique, objective ou subjective, à tous les événements possibles. Ses généralisations relâchent l'hypothèse d'additivité et introduisent, soit une mesure non additive, soit un ensemble de lois de probabilités, ou *priors*, interprétées comme les scénarios que le décideur juge possibles. Ce champ de recherche est aujourd'hui foisonnant, avec la publication en moins de vingt ans d'un nombre conséquent de nouveaux modèles. Pour la théorie financière se pose alors les questions de savoir si elle peut intégrer ces nouveaux modèles de comportement des agents puis, si cette intégration est possible, de savoir comment ces modèles modifient les énoncés déjà constitués.

Ce travail de recherche est consacré à l'étude des applications en finance de la famille de modèles qui généralisent l'utilité espérée en représentant les croyances du décideur par un ensemble de *priors*. Dans cette introduction générale, nous proposons un résumé des principaux développements de la théorie mathématique de la finance et des enjeux qu'elle représente pour les praticiens, ainsi qu'une présentation des défis auxquels elle fait face et des axes de recherche qui sont explorés pour y répondre (section 1.1). Puis nous présentons le critère de l'utilité espérée, en nous concentrant sur la représentation des choix risqués et sur sa structure axiomatique, les critiques qui lui sont faites et les grandes familles de modèles qui tentent de répondre à ces critiques (section 1.2). Nous décrivons ensuite la famille avec ensemble de *priors* ainsi que ses applications à la finance (section 1.3) et finalement nous introduisons les trois articles qui composent cette thèse (section 1.4). Il faut souligner ici que, dès la section 1.2, nous aurons besoin de recourir au formalisme mathématique de la théorie de la décision. Ce cadre conceptuel s'est progressivement constitué autour des développements de la théorie de l'utilité espérée ; il est aujourd'hui unifié et il est considéré comme connaissance commune dans la littérature de la décision dans l'ambiguïté. La présentation de ce formalisme est donc indispensable si l'on souhaite décrire les résultats de cette littérature ; elle l'est également pour poser le cadre dans lequel les articles de cette thèse sont développés. Finalement, et ce n'est pas son moindre intérêt, cette présentation permet de clarifier certains choix méthodologiques dont les conséquences sur la description de l'ambiguïté dans la cadre d'une application à la finance sont analysées dans le chapitre 2.

1.1 La théorie financière moderne et ses défis

L'étude mathématique des marchés financiers est un champ de recherche récent et en évolution constante. Récent car, si l'on excepte les travaux précurseurs de Bachelier (1900) sur la modélisation des cours de bourse par un mouvement brownien sans tendance, les articles fondateurs sont ceux de Markowitz (1952) pour la théorie du choix de portefeuille, Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966) pour la valorisation des actifs dans un marché à l'équilibre et Black et Scholes (1973) et Merton (1973b) pour la valorisation des actifs contingents. En évolution constante car, bien que certaines grandes hypothèses se soient imposées auprès des chercheurs et des praticiens — essentiellement la modélisation brownienne et l'efficience informationnelle selon Walter (1996, 2013), — des recherches alternatives ont toujours été menées, comme par exemple les travaux de Mandelbrot sur les lois α-stables (Fama, 1963). Cette évolution est le fruit d'une interaction avec les développements des outils informatiques et des connaissances mathématiques et également d'une interaction avec les praticiens. En effet, les outils théoriques ont permis l'émergence de la finance de marché moderne qui, en retour, demande de pouvoir valoriser des produits et gérer des risques de plus en plus complexes.

Nous pouvons donc esquisser les développements parallèles de la théorie de la finance mathématique, regroupés sous trois grands thèmes, et ses applications par l'industrie financière.

1.1.1 Applications et enjeux de la théorie financière

La théorie du choix de portefeuille.

Si la formalisation par Markowitz (1952) de l'arbitrage rendement–risque, ce dernier réduit au moment d'ordre deux, a fini par révolutionner le métier de la gestion d'actifs, les moyens informatiques limités des années 1950 n'ont pas permis une utilisation pratique immédiate de ces idées. C'est l'introduction du modèle linéaire de marché (Markowitz, 1959 ; Sharpe, 1963) qui, en réduisant considérablement le nombre de calculs de covariances nécessaires, a permis son adoption par les professionnels. La théorie moderne du portefeuille, fondée sur l'idée d'une diversification optimale, a alors pu se faire une place au sein de pratiques professionnelles, consistant jusque là à concentrer les investissements sur quelques actifs choisis avec des outils relevant de l'analyse fondamentale ou de l'analyse technique. Parallèlement, Tobin (1958), avec l'introduction d'un actif sans risque, exposa le principe de la séparation en deux fonds dont la demonstration définitive est due à Merton (1972). Ce principe a lancé la gestion d'actif indicielle qui représente à la fin de l'année 2012, 10% des 13 mille milliards de dollars gérés par l'industrie des *mutual funds* aux États-Unis [1]. Finalement, le développement des modèles multi facteurs (Sharpe, 1992) a permis d'imposer la notion de « styles de gestion » qui est aujourd'hui le critère de catégorisation et d'évaluation des performances de la gestion d'actifs.

Les modèles de valorisation d'actifs à l'équilibre.

En postulant qu'il est rationnel pour tous les investisseurs de détenir un portefeuille optimal au sens du critère moyenne–variance, Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966) ont indépendamment construit le *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), modèle de valorisation des actifs à l'équilibre de l'offre et de la demande sur les marchés financiers. Le CAPM, modèle statique, a ensuite été généralisé au temps continu par Merton (1969). Utilisant la modélisation des prix des actifs par des mouvements browniens géométriques, modélisation introduite par Samuelson (1965), et les outils du contrôle optimal stochastique, Merton (1971) étend également le théorème de séparation en deux fonds au cadre dynamique. Ce théorème est ensuite généralisé à trois fonds lorsqu'un taux d'intérêt stochastique est ajouté à l'ensemble des opportunités d'investissement et que la variable d'état devient donc bidimensionnelle (Merton, 1973a). C'est Breeden (1979) qui donnera la forme finale du *Consumption based Capital Asset Pricing Model* (CCAPM) en imposant que la

1. Investment Company Institute 2013 Fact Book (`http://www.icifactbook.org/fb_ch2.html`).

variable d'état soit le niveau de consommation de l'agent représentatif, variable de nouveau unidimensionnelle. Si ces modèles ont permis des études de long terme sur la valorisation des marchés financiers, grace au lien établi entre les données macroéconomiques et les prix d'actifs, ils ont également fourni le cadre théorique pour penser et évaluer la performance des fonds de gestion collective. En effet, le CAPM, parce qu'il met en évidence le lien entre risque et rendement, a permis le développement de mesures de performance des fonds qui prennent en compte le risque pris par le gérant. Ainsi, la rentabilité espérée d'un fonds telle qu'elle découle du CAPM, c'est-à-dire la rentabilité espérée du portefeuille de marché multipliée par le coefficient « beta » qui mesure le risque systématique pris par le gérant, est comparée à la rentabilité réalisée. La différence, nommée « alpha », mesure, si elle est statistiquement significative, la surperformance due au gérant, par exemple obtenue grace à des informations privées (Bertrand et Prigent, 2012, chapitre 4). Ceci reste également vrai pour les « hedge funds » qui justifient leurs frais de gestion élevés par leur capacité à « générer de l'alpha [2]. » Ainsi le modèle CAPM et ses améliorations successives ont structuré le cadre conceptuel du métier de gestion d'actifs.

La valorisation par arbitrage.

À côté de la théorie moderne du portefeuille, la théorie de la valorisation des actifs contingents est apparue lors des années 1970. Elle a eu en quelques dizaines d'années un impact considérable sur l'industrie de la finance et la gestion des risques. Bien que le modèle le plus connu soit celui de Black et Scholes (1973) et Merton (1973b) sur la valorisation des options européennes dans le cadre d'une dynamique brownienne géométrique, c'est la formalisation de la théorie de la valorisation par arbitrage qui a permis les avancées ultérieures. Un ensemble d'articles sont à la source de cette théorie : la notion de probabilité risque–neutre apparaît chez Ross (1978) qui introduit aussi la notion d'arbitrage (Ross, 1976). Celle-ci, affinée par Kreps (1981) dans la notion de *free lunch*, permettra à Harrison et Pliska (1981) de démontrer le théorème fondamental de la valorisation d'actifs en dimension finie, théorème dont la forme définitive, généralisée en dimension infinie, sera donnée par Delbaen et Schachermayer (1994). Ce sont ces développements qui ont permis la croissance exponentielle du marché des produits dérivés dont les encours nominaux étaient, à la fin du mois de juin 2013, de 622 mille milliards de dollars pour les marchés

2. « Equities seeks to generate alpha by identifying out- and under-performing stocks in each sector group's universe within a beta-neutral construct. » Présentation de la stratégie actions de Citadel LLC, l'un des plus importants hedge fund au monde avec 17 milliards de dollars d'actifs sous gestion (`http://www.citadel.com/investment-strategies`).

de gré à gré auxquels il faut ajouter 58 mille milliards de dollars pour les marchés organisés[3]. Sur ce total, 79 mille milliards sont des options et 512 mille milliards ont pour sous-jacent les taux d'intérêt, ce chiffre mettant en lumière l'importance pratique de tous les travaux de modélisation de la courbe des taux[4]. La valeur de marché de ces produits dérivés était estimée à 19 mille milliards de dollars : ce chiffre, issu des modèles de valorisation par arbitrage, illustre l'importance considérable, pour les acteurs des marchés financiers et pour leurs autorités de tutelle, des débats théoriques et pratiques de la finance mathématique que nous présentons à la section suivante.

Notons pour conclure que les trois domaines de la finance mathématique que nous venons de distinguer sont bien sûr intimement liés : le modèle CAPM, qui se fonde sur des investisseurs ayant tous des préférences moyenne–variance au sens de Markowitz (1952), peut également être vu comme un cas particulier du modèle d'évaluation par arbitrage de Ross (1976)[5].

1.1.2 Les limites de la théorie financière moderne

Les acteurs des marchés financiers sont donc préoccupés par le domaine de validité des modèles qu'ils utilisent pour valoriser et gérer les risques de ces produits financiers dont les encours ont connu une croissance exponentielle. Liée à cette question posée à la communauté des chercheurs, question dont l'urgence et l'importance sont soulignées par la récurrence des crises financières, il existe aussi une reflexion à plus long terme issue de la confrontation du comportement réel des actifs financiers et des prévisions des modèles de valorisation par équilibre qui a mis en évidence des « puzzles ».

Les puzzles

Les modèles de valorisation des actifs à l'équilibre concluent que les prix de ces actifs sont déterminés par une ou des variables macroéconomiques, le niveau de consommation globale de l'économie pour le modèle CCAPM. Il a donc été possible de réunir et d'analyser un ensemble de faits stylisés pour tenter de valider ce lien de causalité. Cette confrontation n'a pas confirmé les résultats théoriques, elle a au contraire mis en évidence des divergences entre les prévisions et les faits empiriques,

3. Bank for International Settlement Quarterly Review, December 2013 (http://www.bis.org/publ/qtrpdf/r_qs1312.pdf).
4. Sur ce sujet, voir par exemple Musiela et Rutkowski, 2006.
5. Voir le chapitre 4 de Kast et Lapied (1992).

divergences baptisées *puzzles* dont nous présentons maintenant les principaux d'entre eux [6].

Mehra et Prescott (1985) calculent, à partir des données des États-Unis sur la période de 1947 à 1998, un rendement moyen des actions de 8,1%, et un rendement moyen des billets du Trésor à trois mois de 0,9%. La prime de risque actions est donc importante et les auteurs doivent conclure qu'elle est trop élevée pour être obtenue dans le modèle CCAPM avec un coefficient d'aversion au risque compatible avec les données expérimentales issues des comportements individuels : ils nommeront cette incompatibilité le *puzzle de la prime de risque actions*. De plus, Weil (1989) mettra en évidence le *puzzle du taux sans risque* : une aversion au risque croissante génère un taux sans risque trop élevé par rapport à celui mesuré, il n'est donc pas possible de résoudre le premier puzzle par le niveau de l'aversion au risque sans tomber dans le second. Notons ici que c'est la modélisation du processus de décision de l'agent économique par l'utilité espérée qui permet de qualifier ces deux faits empiriques de puzzles. C'est bien l'interprétation dans les termes de la théorie de la décision, par de l'aversion au risque, qui est confrontée aux comportements réels des actifs. Il est donc ensuite logique de chercher une explication de ces puzzles dans ce champ de la théorie de la décision.

Shiller (1981) avait auparavant mis en lumière un problème lié aux deux précédents, le *puzzle de la volatilité excessive* selon lequel la volatilité des actions est plus élevée que ce que prévoit un modèle avec un taux sans risque constant. Dans ce cadre en effet, les mouvements des prix ne sont dus qu'aux changements des anticipations des dividendes futurs ou de la prime de risque action, mais, cette dernière n'étant pas considérée comme prévisible, seules de nouvelles informations sur les dividendes peuvent être à l'origine de la volatilité des prix. L'étude citée a montré qu'aucune mesure de la volatilité des dividendes espérés ne peut expliquer la volatilité des prix observée.

En étudiant des données sur un ensemble géographique plus large, French et Poterba (1991) découvrent le *puzzle de la préférence pour le pays d'origine* : les portefeuilles internationaux des investisseurs institutionnels sont sous-diversifiés en actifs étrangers et ne profitent donc pas de leurs faibles corrélations avec les actifs domestiques. Les auteurs calculent que, pour justifier ces choix, il faut supposer un pessimisme de l'ordre de 1% sur les rendements espérés des actifs étrangers ou inversement un optimisme qui va jusqu'à plus de 4% sur les rendements des actifs domestiques. Tesar et Werner (1995) valident ces résultats et complètent l'étude en

6. Une étude plus détaillée se trouve par exemple dans Campbell (2003).

montrant que les quantités d'actifs internationaux détenus sont en dessous des limitations réglementaires auxquelles sont soumises les investisseurs et que, dans les cas des États-Unis et du Canada, la faible partie des actifs diversifiée à l'international exhibe elle-même une préférence pour la proximité géographique immédiate. Coval et Moskowitz (1999) testent l'importance de la distance géographique à l'intérieur des États-Unis par une étude économétrique des compositions de portefeuilles. Leurs résultats mettent en évidence une préférence pour la proximité géographique régionale à l'intérieur du pays qui ne peut pas être expliquée par des disparités de contraintes réglementaires.

Citons pour finir le constat d'une forme de prévisibilité des prix qui n'est pas expliquée par les modèles de valorisation d'actifs à l'équilibre basés sur la consommation. Ainsi Campbell et Shiller (1988) montrent que le logarithme du ratio dividende sur prix cause au sens de Granger la croissance des dividendes réels. Ce ratio, sous la forme du CAPE (*cyclically adjusted price earning*) ratio ou « Shiller ratio », est aujourd'hui très largement utilisé par les professionnels pour juger du niveau de valorisation des actifs et se trouve même à la source de stratégies d'investissement [7]. Fama et French (1988) exhibent un déterminant des prix des actions ayant la propriété de retour à la moyenne, ce qui induit une auto-corrélation négative des rendements. Sur des horizons longs de trois à cinq ans, ils estiment la fraction prévisible de la variation des rendements à 40% pour des fonds de petites entreprises et à 25% pour des fonds de grandes entreprises.

Si l'existence de ces puzzles motive le programme de recherche en mathématiques financières, c'est la récurrence des crises financières qui pousse les intervenants sur les marchés financiers à placer ces recherches en tête de leur agenda.

Les crises financières

La sévérité de la plus récente de ces crises, celle qui a connu son paroxysme en octobre 2008 mais dont les conséquences négatives sur l'économie réelle perdurent, a donné une nouvelle visibilité aux professionnels des marchés financiers, et aux responsables de leurs autorités de tutelles, qui appellent à une réflexion critique sur les modèles utilisés pour valoriser et gérer les risques.

Un exemple des demandes des professionnels nous est fourni par Hubert Rodarie, directeur général délégué du groupe d'assurance SMABTP, en charge de la gestion

7. Voir par exemple l'article du Wall Street Journal du 21 novembre 2013 « Shiller's Warnings Sparks Debate on Stock Valuations » et le *Shiller Enhanced CAPE Fund* de DoubleLine, firme de gestion d'actif basée en Californie et gérant 47 milliards de dollars d'actifs.

des actifs du groupe [8]. Il affirme que « la crise financière de 2007 doit produire de nouveaux modèles de risque », titre d'un article publié dans la Revue d'Économie Financière (Rodarie, 2008), dans lequel il fait une critique des hypothèses de la théorie financière moderne :

> Il est [...] nécessaire de parvenir à effectuer une critique adéquate du système axiomatique qui sous-tend la plupart des outils de calcul de risque et d'évaluation des crédits pour pouvoir qualifier leur robustesse. Tout particulièrement, il est essentiel de s'interroger sur les « formes » du hasard qui sont implicitement utilisées dans les outils financiers ou intellectuels.

Cette critique est radicale, puisqu'elle place à la racine de la crise financière une « crise des modèles » qui sont jugés « dépassés » :

> [...] nous estimons que la crise des modèles intellectuels dont les conséquences ont atteint le cœur du système financier est une occasion historique de se dégager de concepts dépassés et inaptes à rendre compte des réalités financières présentes et futures.

Pour illustrer maintenant la demande venant des autorités de tutelle des marchés financiers, nous citons une présentation de Benoît Cœuré, membre du comité exécutif de la Banque Centrale Européenne, intitulée « De quels modèles avons nous besoin en temps de crise ? » Bien que souhaitant mettre l'accent sur ce que les modèles actuels apportent en aide à la décision, y compris dans les conditions présentes, le banquier central doit reconnaitre :

> [...] qu'il est aussi vrai que nos modèles n'ont pas prédit la crise et n'ont été que d'un intérêt limité pour le choix de la politique monétaire lorsqu'elle est survenue. Pouvons-nous identifier leurs faiblesses ? Et bien, ce sont les suspects habituels : linéarité, anticipations rationnelles, marchés complets, hétérogénéité des agents limitée et les imperfections financières (Cœuré, 2012, notre traduction).

Ainsi les crises financières peuvent être des moteurs et accélérateurs de la recherche en théorie financière. Un exemple éclairant est l'apparition du *smile*, c'est-à-dire d'une volatilité dépendante du prix d'exercice, pour la valorisation et la gestion des options suite au krach boursier d'octobre 1987. Jusqu'à cette date, conformément au modèle de Black et Scholes (1973), les options étaient valorisées avec la même volatilité en dehors de la monnaie et à la monnaie, bien que des divergences

8. Au 31 décembre 2012, les actifs du groupe SMABTP atteignent 16,8 milliards d'euros en valeur de marché, http://www.smabtp.fr/SGM/jcms/jizhprod_36983/fr/chiffres-cles-2012.

faibles, mais statistiquement significatives, entre prix de marché et prix théoriques aient déjà été documentées (Rubinstein, 1985). Comme le montrent les figures 1 et 2 de Rubinstein (1994) représentant le *smile* pour les options sur l'indice S&P 500 avant et après la crise, celle-ci marque bien une rupture dans la structure des prix cotés [9]. Ce sont les lourdes pertes subies lors de ce krach par les banques ayant des positions courtes sur des options de vente, ou *puts*, avec des prix d'exercice en dehors, qui ont amenés les teneurs de marché à coter ces *puts* indépendamment des options à la monnaie. La volatilité implicite de ces nouveaux prix d'échange révélait alors le décalage par rapport à la volatilité à la monnaie, c'est-à-dire le *smile*. Si cette méthode permettait de corriger les prix des options en dehors, elle générait cependant d'autres difficultés en faisant intervenir dans les prix des paramètres exogènes non échangeables. D'une part, d'un point de vue théorique, le marché devenait non complet, et les méthodes de valorisation par arbitrage n'étaient plus utilisables ; d'autre part, d'un point de vue pratique, la gestion dynamique des portefeuilles d'options était devenue difficile : en effet, comment anticiper et couvrir l'évolution de ces paramètres lorsque les options vieillissent ou lorsque le prix du sous-jacent change et que les options se trouvent alors plus ou moins en dehors ? Ces ajustements étant des sources de pertes et profits non expliqués, le problème de la modélisation du *smile* fut un sujet de haute priorité pour les départements de recherche quantitative des banques. Plusieurs voies furent explorées : principalement l'utilisation de processus discontinus dans la suite de Merton (1976), la modélisation par volatilité locale (Dupire, 1997) et les modèles à volatilité stochastique (Hull et White, 1987 ; Heston, 1993). C'est finalement un modèle de cette dernière famille qui s'est imposé comme le nouveau standard de l'industrie financière, particulièrement pour les produits dérivés de taux [10] : le modèle SABR, pour « *Stochastic Alpha, Beta, Rho* » de Hagan, Kumar, Lesniewski, et Woodward (2002). Ses atouts sont une formule approchée pour la volatilité implicite de type Black–Scholes qui permet de le considérer comme une évolution du modèle de référence, et sa capacité à expliquer le *smile* avec deux facteurs que les opérateurs se sont rapidement appropriés : la volatilité de la volatilité et la corrélation entre le sous-jacent et la volatilité. Ce n'est donc qu'avec l'adoption de ce modèle qu'il fut de nouveau possible gérer dynamiquement et cor-

9. Rubinstein (1994) attribue ce *smile* à une « crash-o-phobia ».

10. Sur les marchés d'options de taux d'intérêt, c'est la crise du Système Monétaire Européen des années 1992-1993 qui a joué le rôle que le krach d'octobre 1987 a joué pour les marchés actions. Notamment, le *smile* pour le marché des caps et floors en Francs Français a été profondément modifié par la soudaine et conséquente hausse des taux directeurs que la Banque de France a mis en œuvre pour faire cesser les attaques spéculatives contre le taux de change (pour un rappel de ces événements, voir par exemple le chapitre VIII du 63e rapport annuel de la Bank for International Settlements, `http://www.bis.org/publ/arpdf/archive/ar1993_en.pdf`).

rectement les portefeuilles d'options en ajoutant aux sensibilités issues du modèle de Black et Scholes, les sensibilités à ces deux nouveaux facteurs.

Ainsi, pour répondre aux demandes des praticiens et pour tenter de rationaliser les *puzzles*, les chercheurs explorent différents axes de recherche que nous allons maintenant présenter.

1.1.3 Les axes de recherche

Aucune des hypothèses qui fondent la théorie financière n'échappe à l'examen attentif imposé par les défis théoriques et pratiques que nous venons d'évoquer. Toutes les hypothèses sont concernées car la réfutation d'un énoncé par un *puzzle* ne permet jamais de mettre en cause une hypothèse précise, cet énoncé n'étant pas la conséquence logique d'une d'entre elles. De plus, toutes sont individuellement soumises à des critiques : citons par exemple la mise en cause du modèle gaussien par l'étude des distributions des rendements des actifs financiers, ou encore la mise en cause du critère de l'utilité espérée par des expérimentations, point que nous détaillerons dans cette introduction, section 1.2.4. Ce sont donc finalement toutes les hypothèses de la théorie mathématique de la finance qui sont une à une modifiées, affaiblies ou supprimées, pour tenter d'améliorer les capacités descriptives des modèles et pour tester la robustesse des prédictions de ces modèles à ces postulats. Nous proposons de regrouper ces recherches autour de trois thèmes : les hypothèses portant sur la structure des marché, celles portant sur la représentation du comportement des agents et celles portant sur la distribution des rendements. Nous réservons à la section 1.1.4 la présentation de l'hypothèse de non neutralité à l'ambiguité qui relève des deux derniers thèmes en ce qu'elle propose une modélisation de l'incertitude et une modélisation du comportement rationnel des agents face à cette incertitude. Elle constitue la direction de recherche dans laquelle s'inscrit cette thèse.

Les hypothèses portant sur la structure des marchés

Ce premier axe de recherche vise à prendre en compte les contraintes auxquelles sont soumis les agents sur les marchés financiers : le cadre réglementaire et fiscal peut, par exemple, restreindre ou interdire les ventes à découvert ou la possibilité d'emprunter pour investir. Il est aussi possible que les marchés ne soient pas complets au sens où tous les actifs ou toutes les sources de risque ne sont pas négociables. Avec ces imperfections, certains actifs contingents ne sont pas simulables : il n'est pas possible de construire une stratégie autofinancée dont la valeur terminale réplique exactement leurs paiements dans tous les états du monde possibles. Ces actifs non simulables n'ont pas de prix unique et il n'existe pas de stratégie de couverture parfaite. En conséquence, il a été proposé de prendre en compte une fourchette de prix ou de considérer les portefeuilles de surcouverture. Il a également été proposé d'accepter une couverture imparfaite ou de choisir une des mesures martingales équivalentes à l'aide d'un critère (coût quadratique minimal, minimum d'entropie) ou enfin de calculer le prix d'indifférence pour la fonction d'utilité de l'investisseur. Les techniques mathématiques développées pour résoudre ces problèmes d'optimisation avec contraintes font appel à l'analyse convexe et à des résultats de dualité appliqués au calcul stochastique. Parmi l'importante littérature, nous citerons les articles fondateurs de He et Pearson (1991a,b), Karatzas, Lehoczky, Shreve, et Xu (1991) et Cvitanić et Karatzas (1992). Une exposition de ces méthodes ainsi que de nombreuses références bibliographiques se trouvent dans les chapitres 5 et 6 de Karatzas et Shreve (1998).

Les hypothèses portant sur la représentation du comportement des agents

Les modèles de valorisation à l'équilibre supposent l'existence d'un agent représentatif dont les choix seraient identiques à l'ensemble des choix agrégés des agents individuels. En économie, cette hypothèse, qui semble nécessaire pour passer de fondations micro-économiques à des modèles macro-économiques, est contestée [11] et des modèles avec agents hétérogènes ont été développés. Dans le domaine de la finance on citera les articles de Harrison et Kreps (1978), Dumas (1989) et Wang (1996) qui analysent des problèmes d'interaction entre des groupes d'agents ayant des niveaux d'aversion au risque différents.

Dans les modèles de valorisation à l'équilibre, il est également supposé que les préférences de l'agent représentatif sont conformes aux axiomes de l'utilité espérée escomptée, ce qui implique en particulier que ses préférences sont additivement séparables par rapport à la variable temporelle. L'hypothèse dite d'*habit formation* relâche cette contrainte en introduisant un consommateur dont le niveau de bien-être dépend du niveau de consommation des périodes précédentes (Constantinides, 1990 ; Campbell et Cochrane, 1999). Ce modèle permet d'expliquer la prévisibilité à long terme et les risk premia, tout en conservant un agent représentatif et des anticipations rationnelles. Pour conclure, nous notons que la modélisation par l'utilité espérée suppose également que l'agent peut et doit déterminer une loi de probabilité unique pour effectuer ses choix, postulat discuté dans la section 1.1.4.

11. Par exemple Kirman (1992).

Les hypothèses portant sur la distribution des rendements

La finance en temps continu s'est très rapidement développée en s'appuyant sur des modèles d'actifs financiers construits avec des mouvements browniens à volatilité constante, notamment parce que ce ceux-ci permettaient l'utilisation des outils de calcul stochastique disponibles dès les années 1970. Mais ces modèles ne peuvent prendre en compte certains faits empiriques comme les risques extrêmes, les discontinuités de trajectoire ou les changements de régime de volatilité. Plusieurs voies sont explorées pour prendre en compte ces caractéristiques des distributions des rendements. Les modèles à *volatilité stochastique* remplacent le paramètre de volatilité constant par un processus de volatilité qui peut dépendre du processus de prix ou du carré des rendements (les modèles à hétéroscédasticité conditionnelle ou GARCH) ou d'un nouveau processus aléatoire corrélé à celui qui dirige le prix de l'actif[12]. Ces modèles à volatilité stochastique permettent d'obtenir la dépendance de la volatilité au prix d'exercice, ou *smile*, déjà évoquée à la section précédente. Ce phénomène, essentiel pour la valorisation et la couverture des options, est également à l'origine des modèles en *temps déformé* dont le plus connu est le modèle *Variance Gamma* qui utilise une déformation de l'horloge d'un mouvement brownien par une loi gamma (Madan et Seneta, 1990 ; Madan et Milne, 1991 ; Madan, Carr, et Chang, 1998). Ce modèle permet également d'introduire la discontinuité dans les trajectoires puisque le processus dirigeant les prix est uniquement composé de sauts, sans composante continue. Carr, Geman, Madan, et Yor (2002) proposent le modèle CGMY qui comprend une composante de diffusion et de composante de sauts, et dont le modèle *Variance Gamma* est un cas particulier. Dans le même article, ils montrent, par une étude empirique, que les rendements des indices de marchés se comportent comme des processus à sauts purs d'activité infinie et de variation finie, bien que les rendements des actions aient une composante continue. De même, Le Courtois et Walter (2012b) analysent les données à haute fréquence des cours des actions du CAC40 et concluent qu'il est nécessaire de modéliser la dynamique des prix par des processus incorporants une composante continue et des sauts d'activité infinie. Il proposent, pour cela, d'utiliser des *processus de Lévy* à activité infinie et présentent les conséquences de ce choix pour la mesure des risques et la gestion des portefeuilles.

Ces recherches sur la distribution des rendements sont aussi appliquées aux problèmes de valorisation d'actifs à l'équilibre où deux modèles avec agent représentatif rationnel génèrent ainsi une prime de risque élevée, une volatilité élevée et une pré-

12. Sur ces sujets on peut se référer à la section 8E de Duffie (2001).

visibilité des prix. Bansal et Yaron (2004) introduisent une persistance à long terme de chocs à court terme sur la consommation ; les prix des actifs deviennent alors sensibles à de petits changements du taux de croissance. Ce modèle dit de *long run risks* n'est plus markovien et doit être résolu par des méthodes numériques. Gabaix (2008, 2012) introduit des accidents rares de sévérité variable, les *variable rare disasters*, dont l'apparition avec une probabilité calibrée à 3,63% est suffisante pour expliquer la majorité des *puzzles*.

Ces nouvelles hypothèses sur la distribution des rendements ne mettent par en cause la nécessité de disposer *a priori* d'une loi de probabilité unique. Nous abordons maintenant la critique de ce postulat telle qu'elle est proposée par la littérature sur l'ambiguïté.

1.1.4 Définition de l'ambiguïté

On attribue à Knight (1921) la distinction canonique entre *risque*, c'est-à-dire les situations où il est possible de calculer des probabilités numériques sur la base de fréquences, ou du principe d'indifférence pour des jeux de chance, et *incertitude*, c'est-à-dire toutes les situations où ceci n'est pas possible. Indépendamment Keynes (1921) développe cette même distinction, qui restera centrale dans sa pensée économique [13], et qu'il illustre par un exemple en assurance :

> En fait les assureurs eux-mêmes font la distinction entre des risques qui sont assurables de manière convenable, soit parce que leurs probabilités peuvent être estimées entre des limites numériques relativement proches, soit parce qu'il est possible de construire un portefeuille qui couvre toutes les possibilités, et d'autres risques qui ne peuvent pas être traités de la même manière et qui ne peuvent pas former la base d'une activité d'assurance régulière, — bien qu'on puisse s'accorder un pari occasionnel. Je crois donc que la pratique des assureurs affaibli plutôt qu'elle ne supporte l'affirmation que toutes les probabilités peuvent être mesurées et estimées numériquement [14].

Cette distinction entre *risque* et *incertitude* a été prise dans le débat qui a opposé les défenseurs d'une conception objectiviste des probabilités et les défenseurs d'une conception subjectiviste ou personnaliste des probabilités. Cependant la théorie subjective de l'utilité espérée proposée par Savage (1954) n'est pas une réponse aux questions posées par Knight et Keynes. C'est pourquoi la littérature actuelle

13. Voir par exemple le paragraphe « Uncertainty » dans Skidelsky (2009).
14. Keynes (1921), p. 25, notre traduction.

préfère distinguer *risque* et *ambiguïté*. Le premier terme décrit les situations où il est possible de de définir une loi de probabilité unique, objective ou subjective, et le deuxième décrit en négatif toutes les autres situations où « il n'y a pas d'information suffisante sur laquelle fonder une probabilité [15]. »

Cette distinction ne présente pas seulement un intérêt théorique : certains intervenants sur les marchés financiers considèrent qu'elle est capitale. Ainsi, Jean-Claude Trichet, président de la Banque Centrale Européenne de 2003 à 2011, a choisi de mettre l'accent sur l'« incertitude » lors du symposium des banquiers centraux à Jackson Hole consacré aux suites à donner à la crise financière de 2008 (Trichet, 2010). L'incertitude est en effet selon lui « d'une grande importance pour les autorités publiques, particulièrement pour les banquiers centraux ». L'incertitude, la prévention des crise et les outils non conventionnels de politique monétaire « pourraient bien constituer le caractère essentiel de la prochaine décennie. » Il prend ensuite soin de préciser qu'il ne s'agit pas seulement « d'un plus grand degré d'incertitude dans les distributions de probabilité, dont des queues épaisses », mais aussi « d'un élément bien plus notable d'incertitude au sens de Knight, c'est-à-dire le type d'incertitude où il n'y a pas de distribution de probabilité sous-jacente. » Il précisera également, lors d'une autre conférence (Trichet, 2011), qu'il considère que les « événements extrêmes mais de probabilité faible et hautement imprévisibles » peuvent « plus facilement être caractérisés comme incertains [au sens de Knight] que comme risqués ».

Les avancées récentes de la théorie de la décision explorent la définition et la modélisation de ces contextes d'ambiguïté et ce que peut être la décision rationnelle d'un agent économique qui fait face à des situations relevant de ces contextes. Ce sont ces résultats que nous présenterons dans les sections suivantes après avoir rappelé les liens entre la théorie financière et la théorie de la décision.

1.1.5 Théorie de la décision et finance

La théorie de la décision est une des fondations de l'économie quantitative, c'est pourquoi elle se trouve présente dans presque tous les champs de la théorie financière, proposant des critères de décision justifiés par des axiomes comportementaux testables et falsifiables. Nous pouvons ainsi reprendre les trois thèmes de la finance mathématique que nous avons présentés à la section 1.1.1 pour en donner les liens avec la théorie de la décision.

15. Gilboa (2009, p. 130).

La théorie du choix de portefeuille.

Initialement Markowitz ne justifie le choix du critère moyenne–variance que par sa capacité à expliquer la diversification constatée dans certains portefeuilles de professionnels et il ne présente ce critère que comme une « hypothèse de travail raisonnable [16] ». Le choix de ce critère peut cependant être fondé sur l'optimalité individuelle pour un investisseur qui se conforme aux axiomes de l'utilité espérée, dans les trois cas particuliers suivants.

(i) Si la fonction d'utilité est quadratique, le critère de décision ne dépend alors que de la moyenne et de la variance des rendements. Cependant cette forme particulière implique une aversion absolue au risque croissante avec la richesse initiale, c'est-à-dire que la propension d'un investisseur à prendre un risque donné diminue lorsque sa richesse augmente. Arrow (1965, p. 96) qualifie ce comportement de contraire à celui qui est « confirmé par l'observation de tous les jours » et Hicks (1962) avait auparavant prouvé que cet investisseur allouerai aux actifs risqués une proportion décroissante de son capital au fur et à mesure que celui-ci augmente.

(ii) Pour des « petits » risques de faible variance, l'approximation au second ordre de l'utilité espérée (Arrow, 1965 ; Pratt, 1964) peut aussi être considérée comme une justification théorique du modèle moyenne–variance puisqu'elle montre que c'est la variance de ce petit risque qui importe pour le décideur. En toute rigueur, Samuelson (1970) démontre que la composition du portefeuille optimal pour une fonction d'utilité générale peut être approchée asymptotiquement par la composition du portefeuille optimal pour le critère moyenne–variance lorsque les distributions tendent vers des distributions de Dirac.

(iii) Tobin (1958, § 3.3.1) démontre que si les distributions des rendements sont définies par deux paramètres, donc en particulier si elles sont gaussiennes, alors ces distributions sont complètement déterminées par la connaissance de leurs deux premiers moments et le choix de l'investisseur peut ainsi être analysé à partir de courbes d'indifférence dans un plan moyenne–variance. Chamberlain (1983) généralise ce résultat en prouvant que le portefeuille moyenne–variance est optimal si et seulement si les distributions des rendements sont à symétrie sphérique.

Ce sont ces liens entre la théorie de la décision et le critère moyenne–variance qui nous permettent d'appliquer les modèles qui généralisent l'utilité espérée au problème du

16. Markowitz (1952, p. 91).

choix de portefeuille comme nous le montrerons dans le chapitre 4 de cette thèse.

Les modèles de valorisation d'actifs à l'équilibre.

Ces modèles, parce qu'ils sont issus du CAPM qui est obtenu par un raisonnement d'équilibre partiel sur la demande d'actifs, ont logiquement rencontré la théorie de l'équilibre général en économie. Si Arrow (1953) avait déjà reconnu le rôle des actifs financiers pour réduire l'incertitude sur l'allocation finale des agents et l'intérêt, dans ces modèles d'équilibre général, de disposer d'un marché financier à côté du marché des biens de consommation pour atteindre les allocations optimales, il faut attendre l'étape importante que constitua l'article de Radner (1972) pour avoir un équilibre général dynamique et une description des actifs plus générale. Kast et Lapied (1992) montrent que le modèle d'équilibre général, dans une version adaptée de Radner pour inclure les actifs réellement échangés sur les marchés financiers, fournit « les fondements économiques des formules d'évaluation des actifs financiers. » Dans ce cadre, le taux d'intérêt et le système de prix à l'équilibre peuvent être exprimés comme des fonctions de l'utilité marginale d'un consommateur représentatif[17]. Une spécification de cette fonction d'utilité qui, grace à sa capacité à séparer les attitudes face au risque et face à la substitution intertemporelle, a donné lieu à de nombreuses applications en micro et en macro-économie, est la forme récursive proposée par Epstein et Zin (1989). Dans ce cadre les coefficients d'actualisation et les prix des actifs sont des fonctions des deux paramètres d'aversion au risque et de préférence intertemporelle. Cette forme récursive a aussi permis l'application d'un modèle généralisant l'utilité espérée à la valorisation d'actifs à l'équilibre (Chen et Epstein, 2002). Nous revenons sur ce résultat à la section 1.3.4.

La valorisation par arbitrage.

Lorsque les marchés sont complets, le prix d'un actif financier est unique et il est déterminé indépendamment des préférences des investisseurs. Cependant, lorsque les marchés sont incomplets, soit parce qu'il existe des contraintes, soit parce que tous les actifs ne sont pas échangeables, il n'est possible de déterminer par des arguments d'absence d'arbitrage qu'une fourchette de prix pour les actifs contingents. Une solution pour choisir dans cette fourchette ce qui doit être le prix de vente de l'actif contingent, consiste à évaluer les stratégies qui permettent une surréplication de ses paiements, le prix minimal pour entrer dans une de ces stratégies donnant le « prix supérieur de couverture » (El Karoui et Quenez, 1991 ; Cvitanić et Karatzas, 1993).

17. Dana et Jeanblanc-Picqué (1998, chapitre 7).

Symétriquement, l'acheteur de l'actif contingent peut évaluer le « prix inférieur de couverture ». Cependant, cette méthode n'est pas toujours utilisable en pratique : Soner, Shreve, et Cvitanić (1995) prouvent, par exemple, qu'avec des coûts de transaction proportionnels, la stratégie la moins chère qui permet de surcouvrir un call européen dans le modèle de Black–Scholes est la stratégie triviale qui consiste à détenir une unité de l'actif sous-jacent jusqu'à l'expiration de l'option. Une autre solution, initialement proposée par Hodges et Neuberger (1989) et développée par Rouge et El Karoui (2000), est de choisir le prix qui laisse l'agent indifférent entre la détention de l'actif et ne rien faire, prix qui dépend donc de la forme de la fonction d'utilité. Si la forme exponentielle est celle qui a été le plus souvent utilisée, Barrieu et El Karoui (2008) généralisent ce procédé à toutes les fonctions qui ont les mêmes propriétés mathématiques que l'équivalent certain dans le cadre de l'utilité espérée, et font ainsi le lien avec la théorie des mesures de risques. Citons également Jouini et Kallal (2001) qui proposent d'identifier dans un marché rendu incomplet par des frictions, les actifs contingents efficients au sens où ces actifs sont choisis par au moins un agent rationnel maximisant son utilité espérée.

Ces exemples illustrent la place importante qu'occupe le critère de l'utilité espérée parmi les hypothèses qui fondent la théorie financière. Or, et ce sera le sujet de la section suivante, ce critère est lui-même soumis à des critiques et de nombreux modèles visent à sa généralisation au delà du *risque*. Il est donc essentiel de mesurer les effets que ces nouveaux modèles peuvent avoir sur les résultats de la théorie financière : c'est à cet axe de recherche que se rattache cette thèse, en se concentrant sur la famille de modèles avec ensemble de *priors* que nous décrirons à la section 1.3.

1.2 Le modèle de l'utilité espérée et ses critiques

La paternité de l'idée d'utiliser l'utilité espérée plutôt que l'espérance mathématique pour résoudre un problème de décision dans le risque est attribuée à Daniel Bernouilli et son essai de 1738 : « *Specimen theoriae novae de mensura sortis* »[18]. Il faut cependant attendre le milieu du 20e siècle pour que se développe une théorie mathématique de l'utilité espérée à partir de deux contributions fondatrices. Tout d'abord von Neumann et Morgenstern (1944) construisent à partir d'axiomes de rationalité individuelle la première théorie de l'utilité espérée (EU) : le champ de recherche de la théorie de la décision axiomatique était ainsi ouvert. Fishburn et Wakker (1995) retracent la succession de contributions qui établiront clairement que la forme fonctionnelle proposée par von Neumann et Morgenstern découle, par

18. Voir par exemple Savage, 1954, §5.6.

nécessité logique, d'un ensemble d'axiomes imposés aux préférences du décideur. Cette première théorie de l'utilité espérée nécessite cependant la donnée de probabilités objectives, c'est pourquoi Savage (1954), partisan de la théorie subjectiviste des probabilités, proposera une théorie de l'utilité espérée subjective (SEU). Celle-ci se passe de cette donnée exogène : ses prémisses sont uniquement une description exhaustive des états du monde possibles et les préférences du décideur.

Nous présentons maintenant ces deux modèles sans en donner tous les détails, pour lesquels il est possible de consulter les ouvrages de référence que sont Fishburn (1970), Kreps (1988) et Gilboa (2009). Nous nous intéresserons à la tentative de synthèse des visions objectiviste et subjectiviste des probabilités proposée par Anscombe et Aumann (1963) car c'est ce cadre de modélisation qui s'est révélé particulièrement fécond pour les développements ultérieurs des modèles généralisant l'utilité espérée. Cependant, nous verrons dans le chapitre 2 de cette thèse que la représentation particulière du risque qui y est proposée a des conséquences pour la modélisation de l'ambiguïté.

1.2.1 Le théorème de von Neumann et Morgenstern

Dans leur ouvrage, von Neumann et Morgenstern (1944) souhaitaient justifier l'utilisation en théorie des jeux du critère maxmin qui pose que les joueurs choisissent les stratégies mixtes qui maximisent l'espérance de gain [19]. Ils ont donc modélisé les choix risqués par des *loteries*, c'est-à-dire des mesures de probabilité à support fini sur un ensemble quelconque de *conséquences* qui sera noté Z. L'espace de ces loteries de von Neumann–Morgenstern (vNM) est ainsi :

$$L = \left\{ P\colon Z \to [0,1] \;\middle|\; \mathrm{card}\{z \mid P(z) > 0\} < \infty \text{ et } \sum_{z \in Z} P(z) = 1 \right\}$$

Cet espace est doté d'une opération consistant en la combinaison linéaire convexe de deux loteries : pour un réel $\alpha \in [0,1]$, la loterie $R = \alpha P + (1-\alpha)Q$ est la loterie de loteries, ou *mixture*, qui a pour résultat la loterie P avec la probabilité α et la loterie Q avec la probabilité $(1-\alpha)$. On a alors pour tout $z \in Z$, $R(z) = \alpha P(z) + (1-\alpha)Q(z)$.

Les préférences du décideur sont données par une relation binaire sur l'espace des loteries notée $\succsim$, dont les parties symétrique et asymétrique sont respectivement notées $\sim$ et $\succ$. Les axiomes et le théorème de représentation sont les suivants :

19. Gilboa (2009, §8.1).

Axiomes de von Neumann et Morgenstern

(i) Préordre total : *$\succsim$ est complète et transitive.*

(ii) Continuité : *pour tous P, Q, $R \in L$, si $P \succ Q \succ R$ alors il existe α et $\beta \in]0,1[$ tels que $\alpha P + (1-\alpha)R \succ Q \succ \beta P + (1-\beta)R$.*

(iii) Indépendance sur les loteries : *pour tous P, Q, $R \in L$ et pour tout $\alpha \in]0,1[$, $P \succsim Q \iff \alpha P + (1-\alpha)R \succsim \alpha Q + (1-\alpha)R$.*

Théorème 1.2.1 (von Neumann et Morgenstern). *La relation $\succsim$ satisfait aux axiomes précédents si et seulement si il existe une fonction $\tilde{u}\colon Z \to \mathbb{R}$ telle que pour tous P, $Q \in L$,*

$$P \succsim Q \iff \sum_{z \in Z} P(z)\tilde{u}(z) \geqslant \sum_{z \in Z} Q(z)\tilde{u}(z).$$

De plus, $\tilde{u}$ est unique à une transformation positive affine près.

Il nous faut ici présenter la généralisation de l'espace des loteries de vNM proposée par Herstein et Milnor (1953) car elle est abondamment utilisée par la littérature sur l'ambiguïté.

Définition 1.2.2. *Un* **mixture set** *est un ensemble X et une fonction $h\colon [0,1] \times X \times X \to X$ telle que pour tout réels α et $\beta \in]0,1[$ et éléments x et y de X :*

(i) $h(1, x, y) = x$,

(ii) $h(\alpha, x, y) = h(1-\alpha, y, x)$,

(iii) $h(\alpha, h(\beta, x, y), y) = h(\alpha\beta, x, y)$.

L'espace des loteries de vNM muni de l'opération *mixture* décrite au début de cette section est bien sur un *mixture set* au sens de Herstein et Milnor. En adaptant les axiomes de vNM à cette nouvelle définition, on démontre le théorème de représentation suivant (Fishburn, 1970, Theorem 8.4) :

Théorème 1.2.3 (Herstein et Milnor). *La relation $\succsim$ satisfait aux axiomes précédents si et seulement si il existe une fonction $u\colon X \to \mathbb{R}$ telle que pour tous x, $y \in X$:*

$$x \succsim y \iff u(x) \geqslant u(y).$$

De plus, u est affine, c'est-à-dire que pour tout $\alpha \in [0,1]$

$$u(h(\alpha, x, y)) = \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y)$$

et u est unique à une transformation positive affine près.

Il est important ici de bien noter la différence entre la fonction d'utilité des conséquences certaines $\tilde{u}$ définie dans le théorème de vNM et la fonction d'utilité u, affine, définie dans ce cadre généralisé. Dans le cas particulier où le mixture set X est l'espace L des loteries de vNM, les éléments x et y de X sont des loteries P et Q de L et l'identification des deux théorèmes précédents nous donne

$$P \succsim Q \iff \sum_{z \in Z} P(z)\tilde{u}(z) \geqslant \sum_{z \in Z} Q(z)\tilde{u}(z) \iff u(P) \geqslant u(Q).$$

C'est-à-dire que l'utilité de la loterie P est donnée par $u(P) = \sum_{z \in Z} P(z)\tilde{u}(z)$ que l'on notera aussi $\mathbf{E}_P[\tilde{u}]$, et pour laquelle on a bien

$$\mathbf{E}_{\alpha P+(1-\alpha)Q}[\tilde{u}] = \alpha\, \mathbf{E}_P[\tilde{u}] + (1-\alpha)\, \mathbf{E}_Q[\tilde{u}].$$

1.2.2 Le théorème de Savage

En cohérence avec la théorie subjective des probabilités, Savage (1954) n'a pu s'appuyer sur cette description des choix risqués. Les deux primitives de son modèle sont donc l'ensemble Ω des états du monde sur lesquels portent l'incertitude et l'ensemble de conséquences Z, les objets de choix sont des *actes*, c'est-à-dire des fonctions qui assignent des conséquences à chacun des états du monde. L'espace des actes est alors :

$$F = Z^{\Omega} = \{f : \Omega \to Z\}$$

Nous ne donnons que l'axiome qui assure l'additivité de la fonction d'ensemble obtenue par le théorème de représentation. C'est cet axiome qui, comme l'axiome d'indépendance sur les loteries, sera mis en cause par des expériences décrites dans la section 1.2.4. Pour deux actes f et h et un événement $A \subset \Omega$, on notera fAh l'acte tel que

$$fAh(\omega) = \begin{cases} h(\omega) & \text{si } \omega \in A \\ f(\omega) & \text{si } \omega \in A^{\mathsf{c}} \end{cases}$$

Axiome P2 de Savage : *Pour tout f, g, h, $h' \in F$ et pour tout $A \subset \Omega$,*

$$fAh \succsim gAh \iff fAh' \succsim gAh'.$$

Cet axiome est souvent appelé l'*axiome de la chose sûre* car il exige que, si deux choix ont une conséquence commune, celle-ci ne doit pas être prise en compte dans le processus de décision. Le théorème de représentation est le suivant :

Théorème 1.2.4 (Savage). *$\succsim$ satisfait aux axiomes de Savage si et seulement si il existe une mesure de probabilité μ sur $(\Omega, 2^\Omega)$, non atomique, additive pour des sommes finies, et une fonction $u \colon Z \to \mathbb{R}$ non constante, bornée, telles que pour tous $f, g \in F$:*

$$f \succsim g \iff \int_\Omega u(f(\omega))\,\mathrm{d}\mu(\omega) \geqslant \int_\Omega u(g(\omega))\,\mathrm{d}\mu(\omega).$$

De plus, μ est unique et u est unique à une transformation positive affine près.

Si la description des actes est particulièrement intuitive, elle correspond notamment à la description des variables aléatoires en théorie des probabilités, la complexité de son axiomatique n'a pas fait du modèle de Savage le cadre idéal pour les développements des modèles de décision dans l'ambiguïté. Les théoriciens restent cependant attachés à ce résultat obtenu avec des hypothèses minimales : sans imposer aucune structure algébrique, topologique ou relevant de la théorie de la mesure à Ω et Z, Savage réussit à démontrer un théorème de représentation utilisant l'intégration au sens de Lebesgue de fonctions réelles ! Fishburn (1970, p. 191) puis Kreps (1988, p. 127) décriront ce résultat comme étant respectivement « the most brilliant axiomatic theory of utility ever developed » et « the crowning achievement of single-person decision theory ».

Nous disposons donc maintenant de deux critères de l'utilité espéré, l'un ne prenant en compte que des probabilités objectives, l'autre ne prenant en compte que des probabilités subjectives.

1.2.3 Le théorème d'Anscombe et Aumann

Pour que ces deux types de probabilités puissent coexister au sein d'un même modèle, Anscombe et Aumann (1963) proposèrent une nouvelle description des choix risqués qui permet de dériver aisément les probabilités subjectives des probabilités objectives existantes. Par la suite, cette description s'est révélée être bien adaptée aux modifications axiomatiques imposées par la littérature sur l'ambiguïté. Celle-ci se développe aujourd'hui dans un cadre Anscombe–Aumann (AA) généralisé que nous présenterons à la fin de cette section.

L'idée d'Anscombe et Aumann (1963) est de distinguer deux types de loteries : les *horse lotteries* pour lesquelles n'existent que des probabilités subjectives, à l'image de celles qu'un parieur peut utiliser pour des courses de chevaux, et les *roulette lotteries* pour lesquelles existent des probabilités objectives issues de fréquences, comme pour le jeu de roulette. Les actes de Savage relèvent de la première catégorie et les lotteries de vNM de la deuxième catégorie. Les auteurs introduisent également des loteries composées : au lieu d'assigner directement une conséquence à un état du monde, les actes d'Anscombe–Aumann sont des *horse lotteries* qui assignent à chaque état du monde une *roulette lottery*, c'est-à-dire que l'espace des actes devient :

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \to L\}$$

Ainsi le décideur choisi d'abord un acte f, puis un état ω du monde est réalisé, le résultat $f(\omega)$ est lui-même une loterie de vNM dont la loi de probabilité objective est connue. Notons qu'il est toujours possible de considérer des actes purement subjectifs, le résultat $f(\omega)$ étant alors une loterie dégénérée $\delta_{f(\omega)}$, ou des actes purement objectifs, en posant $f(\omega) = l$ pour tous les états $\omega \in \Omega$, avec $l \in L$. Ce dernier point permet d'assimiler l'espace des *roulette lotteries* au sous-ensemble des actes constants dans $\mathcal{F}$.

Nous présentons maintenant les axiomes imposés à la relation de préférence $\succsim$ sur $\mathcal{F}$. Un premier groupe d'axiomes, les conditions de base, resteront présents dans tous les modèles généralisant l'utilité espérée, les deux autres, complétude et indépendance, seront affaiblis ou supprimés pour permettre les développements ultérieurs.

Conditions de Base :

(i) Préordre : *$\succsim$ est réflexive et transitive.*

(ii) Monotonie *: si f et g dans $\mathcal{F}$ sont tels que $f(\omega) \succsim g(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors $f \succsim g$.*

(iii) Continuité *: Soient f, g et $h \in \mathcal{F}$, alors les ensembles $\{\alpha \in [0,1] : \alpha f + (1-\alpha)g \succsim h\}$ et $\{\alpha \in [0,1] : h \succsim \alpha f + (1-\alpha)g\}$ sont fermés dans $[0,1]$.*

(iv) Non trivialité *: il existe f et g dans $\mathcal{F}$ tels que $f \succ g$.*

Complétude : *Pour tous les actes f et g dans $\mathcal{F}$, soit $f \succsim g$, soit $g \succsim f$.*

Indépendance : *Soient f, g et h trois actes dans $\mathcal{F}$ et un réel $\alpha \in]0,1[$, alors*

$$f \succsim g \Rightarrow \alpha f + (1-\alpha)h \succsim \alpha g + (1-\alpha)h.$$

On obtient alors le théorème de représentation suivant :

Théorème 1.2.5 (Anscombe–Aumann). *La relation de préférence $\succsim$ satisfait aux Conditions de Base, est complète et satisfait à l'axiome d'Indépendance si et seulement si il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω et une fonction $\tilde{u} : Z \to \mathbb{R}$ telle que,* *pour tous* $f,\ g \in \mathcal{F}$,

$$f \succsim g \iff \int_\Omega \mathbf{E}_{f(\omega)}[\tilde{u}]\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \geqslant \int_\Omega \mathbf{E}_{g(\omega)}[\tilde{u}]\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega). \tag{1.1}$$

De plus $\mathbb{P}$ *est unique et* u *est unique à une transformation affine positive près.*

Notons que ce résultat est démontré avec un espace des états Ω fini, dans le cas contraire, il est nécessaire de munir Ω d'une algèbre Σ d'évènements (ou d'une σ-algèbre si le modèle nécessite des probabilités σ-additives). C'est ce cadre qui est adoptée par la littérature actuelle : les actes sont des fonctions Σ-mesurables de l'espace des états Ω vers un ensemble de conséquences X, qui prennent un nombre fini de valeurs. Cet ensemble X est convexe et hérite des opérations algébriques d'un espace vectoriel dont il est un sous-ensemble : X est alors un *mixture set*, il englobe le cas particulier de l'espace des loteries de vNM ou *roulette lotteries*. L'espace des actes devient dans ce cadre d'Anscombe–Aumann généralisé :

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \to X\}$$

L'équation (1.1) s'écrit alors, avec les notations du Théorème 1.2.3

$$f \succsim g \iff \int_\Omega u(f(\omega))\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \geqslant \int_\Omega u(g(\omega))\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$

ou encore

$$f \succsim g \iff \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[u \circ f] \geqslant \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[u \circ g].$$

L'utilité espérée d'un acte $f \in \mathcal{F}$ s'écrit donc $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[u \circ f]$ où u est une fonction affine de X dans $\mathbb{R}$. Dans le cas où X est l'espace des loteries de vNM, on a $u \circ f(\omega) = \mathbf{E}_{f(\omega)}[\tilde{u}]$.

C'est sur cette description des choix risqués que ce sont développés les modèles de décision dans l'ambiguïté. Ce champ de recherche a été ouvert pour prendre en compte les critiques faites à la théorie de l'utilité espérée, des critiques de ses capacités descriptives, qui sont le sujet de la prochaine section, mais aussi la critique normative du lien entre rationalité de l'agent économique et utilité espérée, qui sera le sujet de la section 1.2.5.

1.2.4 Les critiques des capacités descriptives

Il a été très tôt mis en lumière par des expériences, dont les plus célèbres sont celles d'Allais (1953) et d'Ellsberg (1961), que la théorie de l'utilité espérée, dans sa forme EU ou SEU, ne décrit pas correctement tous les comportements réels des agents. La première de ces expériences s'applique au cadre de von Neumann et Morgenstern (1944) et met en cause l'axiome d'indépendance, tandis que la deuxième s'applique plutôt au cadre de Savage (1954) et met en cause l'axiome P2 dit de la « chose sûre ».

L'axiome d'indépendance et l'expérience d'Allais

L'expérience fut proposée par Maurice Allais à ses confrères économistes lors du Colloque International de Paris du CNRS sur les « Fondements et Applications de la Théorie du Risque en Économétrie » qui se tint en mai 1952. Ce colloque fut marqué par l'opposition entre, d'un côté, tous les ténors de l'« école américaine » : Arrow, Friedman, Marschak, Samuelson et Savage et, de l'autre, l' « ingénieur-économiste français [20], » qui exposera par la suite ses arguments dans l'article Allais (1953). Parmi ses arguments se trouve donc l'expérience qui devait marquer la théorie de la décision : il est demandé de choisir entre les loteries

$$A = (100m, 1) \text{ et } B = \left(500m, \tfrac{10}{100}; 100m, \tfrac{89}{100}; 0m, \tfrac{1}{100}\right)$$

puis entre les loteries

$$C = \left(100m, \tfrac{11}{100}; 0m, \tfrac{89}{100}\right) \text{ et } D = \left(500m, \tfrac{10}{100}; 0m, \tfrac{90}{100}\right).$$

Les loteries sont notées $P = (z_1, P(z_1); \ldots ; z_n, P(z_n))$ et l'unité de paiement m est le million de francs de 1952, soit environ le pouvoir d'achat de 21,300 euros en 2014 [21], l'idée étant que les paiements de ces loteries sont considérables. La majorité des participants ont pour préférences $A \succ B$ et $D \succ C$.

Cependant, si on introduit les loteries $P = (100m, 1)$, $Q = \left(500m, \tfrac{10}{11}; 0m, \tfrac{1}{11}\right)$ et $R = (0m, 1)$, on a :

$$\begin{aligned} A &= 0,11P + 0,89P \qquad & B &= 0,11Q + 0,89P \\ C &= 0,11P + 0,89R \qquad & D &= 0,11Q + 0,89R \end{aligned}$$

Deux applications successives de l'axiome d'indépendance nous donnent alors

$$A \succ B \iff 0,11P + 0,89P \succ 0,11Q + 0,89P \iff P \succ Q$$

20. Mongin (2013)
21. http://www.insee.fr/fr/themes/calcul-pouvoir-achat.asp

et

$$P \succ Q \iff 0,11P + 0,89R \succ 0,11Q + 0,89R \iff C \succ D.$$

Ce résultat, qui a été vérifié de très nombreuses fois depuis l'expérience initiale d'Allais est donc « un exemple clé d'une violation systématique de l'axiome d'indépendance » (Machina, 1982, p. 287).

L'axiome de la chose sûre et l'expérience d'Ellsberg

La deuxième de ces célèbres expériences a été menée par Ellsberg (1961), également auprès de collègues économistes. L'une des questions posées consiste à choisir parmi des paris portants sur la couleur d'une boule tirée d'une urne. Cette urne contient 90 boules dont on sait que 30 sont de couleur rouge et que les 60 restantes sont de couleur noire ou jaune, mais dans des proportions inconnues. Les paris proposés ont les paiements suivants :

	Rouge	Noire	Jaune
I	\$100	\$0	\$0
II	\$0	\$100	\$0
III	\$100	\$0	\$100
IV	\$0	\$100	\$100

Ellsberg constate que la majorité des réponses donnent les préférences I $\succ$ II et IV $\succ$ III. Or III et IV sont obtenus à partir de I et II par une modification commune du paiement sur l'événement « Jaune », donc, par application de l'axiome P2, on a l'équivalence I $\succ$ II $\iff$ III $\succ$ IV.

Un décideur bayésien se conformant à l'espérance d'utilité doit décider d'une probabilité *a priori* lui donnant la distribution des couleurs dans l'urne. S'il choisissait de construire ce *prior* $\mathbb{P}$ à partir d'un principe d'indifférence, ses préférences seraient alors I $\sim$ II et III $\sim$ IV. Mais en donnant la préférence stricte I $\succ$ II, un décideur bayésien révèle qu'il juge que $\mathbb{P}(\{\text{Rouge}\}) > \mathbb{P}(\{\text{Noire}\})$, ce qui a pour conséquence, la probabilité étant additive, $\mathbb{P}(\{\text{Noire}\} \cup \{\text{Jaune}\}) = \mathbb{P}(\{\text{Rouge}\}^{\mathsf{c}}) < \mathbb{P}(\{\text{Noire}\}^{\mathsf{c}}) = \mathbb{P}(\{\text{Rouge}\} \cup \{\text{Jaune}\})$, c'est-à-dire III $\succ$ IV. L'expérience d'Ellsberg met donc en évidence des choix qui ne peuvent pas être expliqués avec une unique probabilité additive. Au contraire, elle met en évidence une *aversion pour l'ambiguïté* : le décideur préfère entrer dans une loterie risquée dont les probabilités sous-jacentes sont connues.

Cette expérience révèle également une caractéristique importante de l'aversion à l'ambiguïté : la possibilité que la *mixture* de deux actes ambigus soit moins ambiguë que ses constituants. Avec l'urne d'Ellsberg, nous avons le cas extrême où la combinaison de deux actes de probabilités inconnues, les paris sur la couleur « Noire » ou la couleur « Jaune », donne un acte de probabilité connue, le pari sur la couleur « non Rouge ». Cette propriété de *couverture* aura une influence fondamentale sur le développement de la littérature sur l'ambiguïté. Elle met directement en cause l'axiome d'Indépendance puisque, en cas de non neutralité face à l'ambiguïté, il est possible d'avoir $f \succsim g$ mais $\alpha f + (1-\alpha)h \precsim \alpha g + (1-\alpha)h$ si la mixture avec l'acte h réduit l'ambiguïté de l'acte g dans une proportion suffisante.

Au delà de la mise en cause de l'axiome d'indépendance et de l'axiome P2 qui a motivé la recherche de théories alternatives, d'autres critiques de l'utilité espérée existent que nous mentionnons maintenant.

Autres critiques

Ces critiques viennent de l'observation de préférences qui ne semblent pas pouvoir être expliquées par un quelconque critère de décision. Ainsi Tversky (1969) montre que les choix ne sont pas toujours transitifs et Tversky et Kahneman (1986), par une série d'expériences restées célèbres, exhibent des choix qui ne respectent pas l'invariance à la procédure (les choix dépendent du processus utilisé pour les révéler) et l'invariance à la description (la préférence entre deux loteries s'inverse lorsque la description qui en est faite est modifiée). Tversky et Kahneman (1986) en concluent qu' « aucun modèle de décision ne peut être à la fois satisfaisant d'un point de vue normatif et exact d'un point de vue descriptif. »

Pour fonder une nouvelle théorie du choix, il faut donc décider de ce qui est acceptable d'un point de vue normatif : la littérature sur l'ambiguïté considère qu'un agent rationnel doit avoir des préférences transitives et qu'il doit respecter les invariances par rapport à la procédure et à la description mais, par contre, elle considère que les préférences révélées par les expériences d'Allais et d'Ellsberg sont rationnelles, c'est-à-dire que la non neutralité face à l'ambiguïté est un comportement rationnel. Cette position n'est évidemment pas unanimement acceptée et nous présentons maintenant les arguments du débat.

1.2.5 Les aspects normatifs

La défense de l'utilité espérée

Une vision stricte de la rationalité individuelle est défendue par Lucas (1977, p. 15, notre traduction). Partant de la nécessité pour l'analyse économique de connaître la loi de probabilité qu'utilise l'agent, il critique, avec une certaine ironie, la grande liberté laissée dans le choix de cette probabilité par les tenants des probabilités subjectives :

> Même un comportement dément peut être (et aujourd'hui, est) compris comme "rationnel", si on se donne une vision suffisamment anormale des probabilités applicables. Pour pratiquer l'économie, nous avons besoin d'une méthode (qui, nous l'espérons, ne soit pas la psychanalyse) pour comprendre quel problème de décision les agents doivent résoudre.

La méthode défendue par Lucas est celle des anticipations rationnelles qui permettent d'« identifier les probabilités subjectives des agents avec les fréquences observées des événements à prévoir, ou avec les "vraies" probabilités. » Cette position l'amène alors à rejeter la possibilité d'utiliser le raisonnement économique quand les probabilités ne sont pas données par des fréquences :

> Évidemment, [l'hypothèse des anticipations rationnelles] ne sera d'aucune utilité pour comprendre un comportement dément. De même, elle ne sera pas applicable dans les situations pour lesquelles il n'est pas possible de déterminer quelle fréquence observable, s'il y en a, est pertinente : situations que Knight a appelé "incertitude". Elle sera plus sûrement utile dans les situations où les probabilités qui nous intéressent concernent un évènement assez bien défini et récurrent, les situations de "risque" dans la terminologie de Knight. Dans les situations de risque, l'hypothèse des anticipations rationnelles de la part des agents aura une substance utilisable, si bien que le comportement pourra être expliqué dans les termes de la théorie économique. Dans ces situations, les anticipations sont rationnelles au sens donné par Muth. Dans les cas d'incertitude, le raisonnement économique ne sera d'aucune valeur.

Plus récemment, mais sans aller jusqu'à exclure la possibilité du raisonnement économique dans les situations d'incertitude, Al-Najjar et Weinstein (2009) critiquent l'abandon par la littérature sur l'ambiguïté des axiomes d'indépendance et P2. Selon eux, cet abandon impliquerait d'accepter des comportements qui sont par ailleurs considérés comme non rationnels par l'analyse économique, tels que la prise en compte des coûts irrécupérables et l'aversion à l'information. De plus, ils critiquent l'absence d'une théorie cohérente d'actualisation des probabilités *a priori* qui serait équivalente à l'inférence bayésienne, absence qui ne permet pas de qualifier de *croyances* ces nouveaux objets qui remplacent les probabilités dans les modèles avec ambiguïté. Finalement, Al-Najjar et Weinstein argumentent que les préférences mises en évidence par Ellsberg peuvent être expliquées par le corpus existant de la théorie des jeux en considérant que l'agent joue contre un joueur « Nature » malveillant qui choisit la loi de probabilité utilisée, ils notent cependant que cette analyse rejoint l'interprétation des modèles à ensemble de probabilités proposée par Maccheroni, Marinacci, et Rustichini (2006) [22].

La critique de l'utilité espérée

Dans ce même volume de la revue *Economics and Philosophy* consacré à l'aversion à l'ambiguïté, Gilboa, Postlewaite, et Schmeidler (2009) répondent à Al-Najjar et Weinstein que, dans certaines situations, il est plus rationnel d'admettre que nous ne disposons pas d'une information suffisante pour pouvoir décider d'une probabilité *a priori*, que de décider arbitrairement d'un *prior*, comme cela est nécessaire pour l'inférence bayésienne. Ils proposent alors une vision de la rationalité qui demande un compromis entre la cohérence interne et la justification, compromis qui peut être obtenu en sacrifiant l'axiome de complétude ou en affaiblissant l'axiome P2.

Mongin (2013) propose, quant à lui, une interprétation normative de l'expérience d'Allais, au delà de la réfutation empirique de l'hypothèse de l'utilité espérée. Il entend même « confér[er] au paradoxe un sens normatif prioritaire par rapport au sens empirique » et il « distingue [...] deux variantes possibles, faible et forte » de la « conclusion dernière » de l'article d'Allais (1953) : « soit, respectivement : la rationalité individuelle en matière de risque est compatible avec d'autres hypothèses que celle de l'utilité espérée, et l'hypothèse de l'utilité espérée conduit à des violations caractérisées de la rationalité individuelle en matière de risque. » Allais (1993) lui-même affirmait qu' « en fait, ce Paradoxe n'est paradoxal qu'en apparence, et il correspond à une réalité essentielle, la préférence pour la sécurité au voisinage de la certitude. »

Quels comportements observés les nouvelles théories de décision dans l'ambiguïté doivent-elles donc tenter de décrire ? En introduction de son article, Machina (1989) a proposé trois buts que ces critères de décision devraient chercher à atteindre.

(i) Un *but empirique* : dans quelle mesure un nouveau modèle permet de mieux décrire les préférences non modélisables par l'utilité espérée tout en ne cédant rien de ce que cette dernière est capable de décrire ?

(ii) Un *but théorique* : les modèles alternatifs doivent être utiles à l'analyse de problèmes économiques concrets telle que l'investissement ou l'assurance.

22. Cette interprétation sera détaillée à la section 1.3.2

(iii) Un *but normatif* : un modèle ne peut autoriser un décideur à adopter un comportement non rationnel (tel qu'être victime d'une pompe à monnaie) puisque « les économistes sont responsables des implications logiques de leurs modèles de comportement lorsqu'ils sont incorporés dans des contextes sociaux. »

Le champ de recherche de la théorie de la décision dans l'ambiguïté considère qu'un agent rationnel a des préférences transitives, qu'il use de l'utilité espérée en présence de probabilités objectives mais qu'il n'a pas à respecter la neutralité face à l'ambiguïté dans toutes les autres situations. Cette neutralité étant une conséquence de l'utilité espérée, il faut, pour développer ces nouveaux modèles, choisir d'affaiblir ou d'abandonner un ou des axiomes de ce critère. Nous présentons maintenant les principaux choix qui ont été faits en ce domaine.

1.2.6 Les grandes familles de modèles généralisant l'utilité espérée

Trois contributions fondatrices, publiées dans les années 1980, marquent l'ouverture du champ de recherche de la décision dans l'ambiguïté : les préférences incomplètes de Bewley (1986) et les modèles *Choquet Expected Utility* (CEU) de Schmeidler (1989) et *Maxmin Expected Utility* (MEU) de Gilboa et Schmeidler (1989) qui affaiblissent l'axiome d'Indépendance.

Cette thèse s'appuie sur le modèle MEU et plus généralement sur les modèles avec ensemble de probabilités *a priori* qui en sont issus. C'est pourquoi, premièrement, nous leur consacrons la section 1.3 dans son intégralité et, deuxièmement, nous ne présentons dans cette section que les modèles qui sont liés par leur formalisme ou leurs applications à la famille du MEU, c'est-à-dire le modèle des préférences incomplètes, le modèle CEU et les modèles avec probabilités de second ordre. Sans prétendre à l'exhaustivité, mais pour offrir une vision moins partielle de ce très large champ de recherche, il nous faut au minimum évoquer les modèles non axiomatiques de la *Prospect Theory* (Kahneman et Tversky, 1979 ; Tversky et Kahneman, 1992) ainsi que des développements récents tels que la théorie des menus. Deux présentations plus complètes des grandes familles de modèles généralisant l'utilité espérée se trouvent dans les *surveys* proposés par Etner, Jeleva, et Tallon (2009) et Gilboa et Marinacci (2011).

Notations

Nous devons ici donner les notations qui seront utilisées dans la suite de cette introduction générale : ce sont celles posées à la fin de la section 1.2.3 que nous complétons.

Ω est l'espace des états muni d'une algèbre Σ d'évènements et X un ensemble de conséquences qui est un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel. Un *acte* f est une fonction Σ-mesurable de Ω dans X qui prend un nombre fini de valeurs. L'ensemble des actes est noté $\mathcal{F}$ et X est identifié avec le sous-espace des actes constants dans $\mathcal{F}$, ou actes purement objectifs, ou encore loteries de vNM dans le cadre AA standard. Il est alors usuel de noter x l'acte constant qui vaut $x \in X$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Lorsqu'une fonction d'utilité u a été définie, le *profil d'utilité* correspondant à l'acte f est la fonction $a = u \circ f$ de Ω dans $u(X) \subset \mathbb{R}$. Les profils d'utilité forment un sous-ensemble $B_0(\Sigma, u(X))$ de l'espace vectoriel $B_0(\Sigma)$ des combinaisons linéaires des fonctions indicatrices $\mathbf{1}_E$ d'événements E de Σ. L'adhérence de $B_0(\Sigma)$ pour la norme supérieure $\|a\|_{\text{sup}} = \sup_{\omega \in \Omega} |a(\omega)|$ se note $B(\Sigma)$ et on montre que c'est un espace de Banach.

On note $ba(\Sigma)$ l'espace des fonctions d'ensembles de variation bornée, additives pour des sommes finies. Cette variation définit une norme sur $ba(\Sigma)$ donnée par $\|\mu\|_{ba} = \sup \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)|$ où le supremum est pris sur toutes les partitions finies de Ω dans Σ. La métrique associée à cette norme est aussi complète. On montre également qu'il existe un isomorphisme isométrique entre le dual de $B(\Sigma)$ et l'espace $ba(\Sigma)$. En conséquence, toutes les mentions de propriétés topologiques d'éléments de $ba(\Sigma)$ feront référence à la topologie faible$*$ $\sigma(ba(\Sigma), B(\Sigma))$ générée par les fonctions de $B(\Sigma)$, dont on montre qu'elle est équivalente à la topologie $\sigma(ba(\Sigma), B_0(\Sigma))$. On dispose finalement de sous-espaces de $ba(\Sigma)$, à savoir l'espace $ca(\Sigma)$ des fonctions d'ensembles σ-additives et les espaces $ba_1(\Sigma)$ et $ca_1(\Sigma)$ de probabilités $\mathbf{P}$, respectivement additives et σ-additives, telles que $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Les préférences incomplètes

Nous présentons le résultat de Bewley (1986) tel qu'il a été reformulé par Gilboa, Maccheroni, Marinacci, et Schmeidler (2010). L'idée directrice du modèle est posée dans l'introduction : « En présence d'incertitude, les décisions peuvent ne pas être déterminées, et les paris être évités sauf s'ils sont très favorables. » Un décideur préférera donc le *status quo* et ne révélera pas de préférence dans ces cas d'indétermination : sa relation de préférence est alors incomplète. Elle doit par contre être complète sur les actes constants dont l'évaluation n'est pas affectée par la présence d'ambiguïté :

C-Complétude : *Soient x et y deux actes contants dans X, alors soit $x \succsim y$, soit $y \succsim x$.*

Le théorème de représentation fait apparaître un ensemble de probabilités subjectives plutôt qu'une unique loi :

Théorème 1.2.6 (Bewley). *La relation de préférence $\succsim$ satisfait aux Conditions de Base et aux axiomes de C-Complétude et d'Indépendance si et seulement si il existe un ensemble non vide, fermé et convexe $\mathscr{C}$ de probabilités sur (Ω, Σ) et une fonction non constante $u\colon X \to \mathbb{R}$, affine, tels que pour tous f, g dans $\mathcal{F}$,*

$$f \succsim g \iff \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[u \circ f] \geqslant \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[u \circ g], \ \forall \mathbf{P} \in \mathscr{C}.$$

De plus $\mathscr{C}$ est unique et u est unique à une transformation affine positive près.

Ce résultat s'interprète comme un critère d'unanimité sur un ensemble de scénarios : si l'évaluation de l'espérance d'utilité de l'acte f est toujours supérieure à celle de l'acte g quelque soit le scenario choisi dans l'ensemble de probabilités $\mathscr{C}$, alors le décideur peut en conclure qu'il préfère f à g. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce résultat et son interprétation dans la section 1.3.3.

Le modèle Choquet Expected Utility

Gilboa (2009, p. 147) rapporte que David Schmeidler a eut l'intuition que les probabilités, si elles doivent reflèter une propension à parier, n'ont pas de raison d'être additives. Une deuxième intuition vient de la possibilité, illustrée par l'expérience d'Ellsberg, que la mixture de deux actes soit perçue comme moins ambiguë que les actes eux-mêmes, en contradiction de l'axiome d'Indépendance. Schmeidler (1989) réduit alors la portée de cet axiome aux seuls actes comonotones, qui, parce que d'un état du monde à un autre, leurs conséquences sont toujours simultanément meilleures ou moins bonnes, ne peuvent pas se couvrir.

Définition 1.2.7. *Deux actes f et g dans $\mathcal{F}$ sont* **comonotones** *s'il n'existe pas de ω et $\omega' \in \Omega$ tels que $f(\omega) \succ f(\omega')$ et $g(\omega) \prec g(\omega')$.*

Indépendance des actes comonotones : *Soient trois actes f, g et h dans $\mathcal{F}$ comonotones deux à deux et un réel α dans $]0,1[$, alors*

$$f \succsim g \iff \alpha f + (1-\alpha)h \succsim \alpha g + (1-\alpha)h.$$

Avec ce modèle, les croyances du décideur sont représentées par une fonction d'ensemble non additive, ou capacité de Choquet. Il est nécessaire de définir l'intégrale selon une capacité, intégrale qui est additive pour des variables comonotones, avant de donner le théorème de représentation.

Définition 1.2.8. *Une fonction d'ensemble* $\nu\colon \Sigma \to [0,1]$ *est appelée une* **capacité** *si :*

(i) $\nu(\emptyset) = 0$, $\nu(\Omega) = 1$ *;*

(ii) soient E *et* F *dans* Σ*, si* $E \subset F$ *alors* $\nu(E) \leqslant \nu(F)$*.*

*L'***intégrale au sens de Choquet** *d'une fonction réelle* f *selon une capacité* ν *est donnée par :*

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\nu \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{0} [\nu(\{f \geqslant t\}) - 1]\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \nu(\{f \geqslant t\})\,\mathrm{d}t$$

Théorème 1.2.9 (Schmeidler). *La relation de préférence* $\succsim$ *satisfait aux Conditions de Base et aux axiomes de Complétude et d'Indépendance des actes comonotones si et seulement si il existe une capacité* ν *sur* (Ω, Σ) *et une fonction non constante* $u\colon X \to \mathbb{R}$ *affine telles que pour tous* f*,* $g \in \mathcal{F}$*,*

$$f \succsim g \iff \int_\Omega u \circ f\,\mathrm{d}\nu \geqslant \int_\Omega u \circ g\,\mathrm{d}\nu.$$

De plus ν *est unique et* u *est unique à une transformation affine positive près.*

Le lien avec un ensemble de probabilités est donné par le cas particulier où le décideur a de l'aversion à l'incertitude au sens défini par Schmeidler (1989), c'est-à-dire qu'il a une préférence (faible) pour la mixture de deux actes qui ne peut que réduire l'ambiguïté perçue.

Aversion à l'incertitude : *Soient* f *et* g *deux actes dans* $\mathcal{F}$ *et un réel* α *dans* $]0,1[$*, alors*

$$f \sim g \Rightarrow \alpha f + (1-\alpha) g \succsim f.$$

On a alors l'équivalence entre les propositions suivantes :

(i) La relation de préférence $\succsim$ satisfait à l'axiome d'aversion à l'incertitude.

(ii) La capacité ν est convexe, c'est-à-dire que $\nu(E)+\nu(F) \leqslant \nu(E\cup F)+\nu(E\cap F)$, où E et F sont des événements de Σ.

(iii) Le cœur de ν, c'est-à-dire l'ensemble de probabilités défini par

$$\mathrm{Core}(\nu) = \{\mathbf{P} \in ba_1(\Sigma) \mid \mathbf{P}(E) \geqslant \nu(E),\ \forall E \in \Sigma\}$$

est non vide et, pour tout acte f dans $\mathcal{F}$,

$$\int_{\Omega} u \circ f \, \mathrm{d}\nu = \min_{\mathbf{P} \in \mathrm{Core}(\nu)} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[u \circ f].$$

L'utilité espérée avec probabilités de second-ordre

Nous fermons cette section avec une rapide présentation d'un modèle qui assigne une probabilité, appelée probabilité de second ordre, aux scénarios que le décideur utilise pour évaluer l'utilité espérée des actes. Les fondements axiomatiques de ce modèle ont été établis en plusieurs étapes. Dans un premier temps, Klibanoff, Marinacci, et Mukerji (2005) ont démontré une représentation de la relation de préférence du décideur par la fonction

$$V(f) = \int_{ba_1(\Sigma)} \phi\left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[u \circ f]\right) \mathrm{d}\mu(\mathbf{P}) = \mathbf{E}_{\mu}[\phi\left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[u \circ f]\right)]$$

en postulant que le décideur forme une probabilité *a priori* μ sur l'ensemble $ba_1(\Sigma)$ des probabilités sur (Ω, Σ), ce qui lui permet de faire une moyenne pondérée des espérances d'utilité calculées avec chacune des probabilités de $ba_1(\Sigma)$. La probabilité de second-ordre μ représente l'information sur le modèle probabiliste et la fonction ϕ reflète l'attitude face à l'ambiguïté, une fonction concave correspondant à de l'aversion pour l'incertitude au sens donné au paragraphe précédent. Dans un deuxième temps, Nau (2006) et Ergin et Gul (2009) démontrerons ce résultat sans postuler l'existence de la probabilité μ mais en élargissant l'espace des états. Finalement Seo (2009) démontrera ce résultat dans le cadre AA généralisé.

1.3 Les modèles avec ensemble de *priors* et leurs applications

L'article fondateur pour la famille des modèles avec ensemble de *priors* est le *Maxmin Expected Utility* (MEU) de Gilboa et Schmeidler (1989). Construit dans le cadre AA généralisé, ce modèle est fondé sur l'affaiblissement de l'axiome d'Indépendance qui postule une robustesse des préférences lors de mixtures avec un acte quelconque. Tous les modèles de cette famille poursuivront dans cette voie avec des restrictions de la portée de ce principe de robustesse.

La démonstration de Gilboa et Schmeidler (1989) a aussi posé le principe des démonstrations des théorèmes de représentation pour tous les modèles de cette famille. En effet, tous satisfont aux Conditions de Base et à l'axiome de Complétude, qui sont implicitement admis à partir de maintenant. Les diverses versions de l'axiome d'Indépendance qui sont utilisées dans ces modèles sont toujours suffisantes pour que X soit un *mixture set* et que le Théorème 1.2.3 de Herstein et Milnor donne l'existence d'une fonction $u\colon X \to \mathbb{R}$, non constante, affine et unique à une transformation affine positive près. Grace à l'axiome de continuité, tout acte f de $\mathcal{F}$ a un équivalent certain x_f dans X qui est tel que $f \sim x_f$. Il est alors possible de définir une fonction $U\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ telle que $U(f) = u(x_f)$ puis une fonction $I\colon B_0(\Sigma, u(X)) \to \mathbb{R}$ telle que $I(u \circ f) = U(f)$ (Gilboa et Schmeidler, 1989, Lemma 3.2 ou Maccheroni *et al.*, 2006, Lemma 28). Notons que la fonction I est **normalisée**, c'est-à-dire que $I(\mathbf{1}_\Omega) = 1$, en effet $I(\mathbf{1}_\Omega) = U(u^{-1}(1) \cdot \mathbf{1}_\Omega) = u(u^{-1}(1))$. De même l'axiome de monotonie implique que I est **monotone**, c'est-à-dire que $(\forall \omega \in \Omega \ a(\omega) \geqslant b(\omega)) \Rightarrow I(a) \geqslant I(b)$ avec a et b dans $B_0(\Sigma)$. Ce couple de fonctions (I, u) représente la relation de préférence $\succsim$ au sens où $f \succsim g$ si et seulement si $I(u \circ f) \geqslant I(u \circ g)$. La forme fonctionnelle de I dépend finalement des axiomes choisis.

Nous présentons dans un premier temps l'ensemble des axiomes utilisés par la famille des modèles avec ensemble de *priors* et leurs conséquences sur les propriétés de la fonction I, puis dans un deuxième temps, nous présentons les modèles eux-mêmes, obtenus par un assemblage de plusieurs de ces axiomes.

1.3.1 Les axiomes

Les axiomes d'indépendance

Comme annoncé, l'affaiblissement de l'axiome d'Indépendance est le fil directeur de cette famille de modèles. Par commodité, nous rappelons ici l'axiome d'Indépendance tel qu'il est formulé dans le cadre AA. Lorsqu'il est imposé à la relation de préférence $\succsim$, la fonction I est **additive** et **homogène** (de degré 1), c'est-à-dire que $I(a + b) = I(a) + I(b)$ et $I(\alpha a) = \alpha I(a)$ avec a et $b \in B_0(\Sigma)$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Indépendance : *Soient f, g et h trois actes dans $\mathcal{F}$ et un réel $\alpha \in]0, 1[$, alors*

$$f \succsim g \Rightarrow \alpha f + (1 - \alpha)h \succsim \alpha g + (1 - \alpha)h.$$

Il exige que la relation de préférence $\succsim$ soit robuste aux mixtures avec n'importe quel acte h. Comme nous l'avons écrit en commentant l'expérience d'Ellsberg, cet axiome ne permet pas que le décideur perçoive une potentielle réduction de l'ambiguïté obtenue par cette mixture. Le modèle CEU choisi de réduire le champ d'application de cet axiome aux actes comonotones. Le modèle MEU demande que la relation de préférence $\succsim$ ne soit robuste qu'aux mixtures avec des actes constants, ce qui est formulé dans la version suivante de l'axiome :

C-Indépendance : *Soient f et g deux actes dans $\mathcal{F}$, x un acte constant dans X et un réel α dans $]0,1[$, alors*

$$f \succsim g \Rightarrow \alpha f + (1-\alpha)x \succsim \alpha g + (1-\alpha)x.$$

Avec cet axiome, la fonction I est homogène et **c-additive**, c'est-à-dire que $I(a + \alpha \mathbf{1}_\Omega) = I(a) + \alpha$. Maccheroni *et al.* (2006) montrent que cet axiome combine encore deux formes d'indépendance : la robustesse à la mixture avec un acte constant et l'indépendance par rapport au poids de cette mixture. Cette dernière forme est donnée par l'implication

$$\alpha f + (1-\alpha)x \succsim \alpha g + (1-\alpha)x \Rightarrow \beta f + (1-\beta)x \succsim \beta g + (1-\beta)x,$$

avec f et $g \in \mathcal{F}$, $x \in X$ et α et $\beta \in]0,1[$. En ne gardant que la première forme on obtient l'axiome suivant :

C-Indépendance faible : *Soient f et g deux actes dans $\mathcal{F}$, x et y deux actes constants dans X et un réel $\alpha \in]0,1[$, alors*

$$\alpha f + (1-\alpha)x \succsim \alpha g + (1-\alpha)x \Rightarrow \alpha f + (1-\alpha)y \succsim \alpha g + (1-\alpha)y.$$

Avec cet axiome, la fonction I est toujours c-additive mais elle n'est plus homogène. Finalement, il est possible de n'exiger aucune condition d'indépendance sur les actes. Cependant, pour pouvoir appliquer le Théorème 1.2.3 de Herstein et Milnor, il faut au minimum que l'axiome d'indépendance s'applique aux actes constants :

Risque-Indépendance : *Soient x, y et z trois actes constants dans X et un réel $\alpha \in]0,1[$, alors*

$$x \succ y \Rightarrow \alpha x + (1-\alpha)z \succ \alpha y + (1-\alpha)z.$$

Cet axiome seul ne permet de déduire aucune propriété pour la fonction I. Nous terminons cette présentation des axiomes d'indépendance par la version posée par Siniscalchi (2009) pour construire le modèle Vector Expected Utility (VEU). Comme c'est le cas avec l'Indépendance des Actes Comonotones du modèle CEU, cette version restreint le champ d'application de l'axiome, ici aux actes complémentaires.

Définition 1.3.1. *Deux actes f et $\overline{f} \in \mathcal{F}$ sont* **complémentaires** *si et seulement* *si pour toute paire d'états* $(\omega, \omega') \in \Omega^2$

$$\frac{1}{2}f(\omega) + \frac{1}{2}\overline{f}(\omega) \sim \frac{1}{2}f(\omega') + \frac{1}{2}\overline{f}(\omega')$$

Deux actes complémentaires ont des profils d'utilité dont la somme est constante, c'est-à-dire que $u \circ f + u \circ \overline{f} = \alpha$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$. Une illustration en est donnée par deux profils d'utilité opposés au sens algébrique qui seraient obtenus à partir d'une position longue et d'une position courte sur le même actif. L'idée du modèle VEU, portée par l'axiome suivant, est que ces actes complémentaires sont perçus comme également ambigus pour le décideur.

Indépendance des actes complémentaires : *Soient deux paires d'actes complémentaires* $(f, \overline{f})$ *et* $(g, \overline{g})$ *de* $\mathcal{F}^2$ *et un réel* α *dans* $]0,1[$, *alors*

$$f \succsim \overline{f} \text{ et } g \succsim \overline{g} \Rightarrow \alpha f + (1-\alpha)g \succsim \alpha\overline{f} + (1-\alpha)\overline{g}.$$

Autres Axiomes

Après les différentes versions de l'axiome d'Indépendance, nous regroupons dans ce paragraphe trois axiomes dont découlent des propriétés importantes pour la fonction I. Tout d'abord l'axiome d'Aversion à l'Incertitude qui a été introduit avec le modèle CEU et qui rend la fonction I quasiconcave, puis l'axiome de continuité monotone séquentielle qui est la condition pour que l'ensemble de priors ne soit composé que de probabilités σ-additives (Chateauneuf, Maccheroni, Marinacci, et Tallon, 2005) et finalement l'axiome d'utilité non bornée qui implique que $u(X) = \mathbb{R}$. Ce dernier point peut être nécessaire pour prouver l'unicité d'une représentation pour laquelle la fonction I doit être étendue l'espace de Banach $B(\Sigma)$. Il faut alors que l'espace des profils d'utilité correspondant à la fonction d'utilité u soit $B_0(\Sigma)$, sous-espace dense de $B(\Sigma)$, et donc que l'image de u soit $\mathbb{R}$ et non un intervalle strictement inclus dans $\mathbb{R}$.

Aversion à l'incertitude : *Soient* f *et* g *deux actes dans* $\mathcal{F}$ *et un réel* α *dans* $]0,1[$*, alors*

$$f \sim g \Rightarrow \alpha f + (1-\alpha)g \succsim f.$$

Continuité monotone séquentielle : *Soient* f *et* g *deux actes dans* $\mathcal{F}$ *tels que* $f \succ g$ *et* x *un acte constant dans* X*. Soit une séquence* $(E_n)_{n\geqslant 1}$ *d'événements dans* Σ *monotone décroissante* $(E_n \supset E_{n+1})$ *telle que* $\lim_n \downarrow E_n = \bigcap_n E_n = \emptyset$*. Il existe un* $n_0 \geqslant 1$ *tel que* $fE_{n_0}x \succ g$ *et* $f \succ gE_{n_0}x$*.*

Utilité non bornée : *Soient x et y deux actes constants dans X avec $x \succ y$, il existe z et z' dans X tels que*

$$\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \succsim x \succ y \succsim \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z'.$$

1.3.2 Les modèles

Nous pouvons maintenant donner les représentations de la relation de préférence $\succsim$ obtenues dans cette famille de modèles avec ensembles de *priors*, dont la table 1.1 récapitule les bases axiomatiques.

Table 1.1 – Les modèles avec ensemble de priors

Axiomes	SEU	MEU	GMM	MMR	UA	MBA	VEU	**Propriétés de I**
Conditions de base	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	Continue, normalisée
Complétude	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Indépendance	✓							Homogène et additive
C-Indépendance		✓	✓					Homogène et c-additive
C-Indépendance faible				✓			✓	C-additive
Risque-Indépendance					✓	✓		
Indép. actes comp.							✓	
Aversion à l'Incertitude		✓		✓	✓			Quasiconcave
Utilité non bornée				✓	✓			$u(X) = \mathbb{R}$
Continuité monotone							✓	Probabilités σ-additives

SEU : Subjective Expected Utility, MEU : Maxmin Expected Utility, GMM : préférences invariantes biséparables, MMR : représentation variationnelle des préférences, UA : préférences avec aversion à l'incertitude, MBA : préférences rationnelles sous ambiguïté, VEU : Vector Expected Utility.

Le modèle Maxmin Expected Utility

Pour le modèle fondateur, Gilboa et Schmeidler (1989) imposent les axiomes de C-Indépendance et d'Aversion à l'Incertitude, la fonction I est donc homogène, c-additive et quasiconcave. Elle est finalement superlinéaire, c'est-à-dire que $I(\alpha a + \beta b) \geqslant \alpha I(a) + \beta I(b)$, et peut donc s'interpréter comme la fonction support d'un ensemble convexe (Aubin, 1998, Proposition 3.8) : il existe un unique ensemble $\mathscr{C}$ de probabilités sur (Ω, Σ), non vide, fermé et convexe, tel que

$$I(u \circ f) = \min_{\mathbf{P} \in \mathscr{C}} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[u \circ f].$$

Le modèle SEU est alors le cas particulier où l'ensemble $\mathscr{C}$ est un singleton.

Les préférences invariantes biséparables

Ghirardato, Maccheroni, et Marinacci (2004) généralisent ce premier résultat en ne conservant que l'axiome de C-Indépendance, sans l'axiome d'Aversion à l'Incertitude, la fonction I est alors homogène et c-additive mais n'est plus quasiconcave. Pour arriver au théorème de représentation de la relation de préférence $\succsim$, ce papier introduit des définitions et des résultats fondamentaux qui permettront une interprétation comportementale de l'ensemble des priors, interprétation sur laquelle nous reviendrons dans la section 1.3.3.

Définition 1.3.2. *Soient f et g deux actes dans $\mathcal{F}$, f est* **préféré sans ambiguïté** *à g, noté $f \succsim^* g$ si pour tout acte h dans $\mathcal{F}$ et pour tout réel α dans* $[0,1]$

$$\alpha f + (1-\alpha)h \succsim \alpha g + (1-\alpha)h.$$

Cette première définition introduit la relation de préférence non ambiguë $\succsim^*$, qui est la restriction maximale (au sens de l'inclusion $\succsim^* \subset \succsim \subset \mathcal{F} \times \mathcal{F}$) de $\succsim$ qui satisfasse l'axiome d'Indépendance. En présence d'ambiguïté, elle est incomplète et elle a donc une représentation à la Bewley (Théorème 1.2.6) par un critère d'unanimité sur un ensemble de probabilités $\mathscr{C}$:

$$f \succsim^* g \iff \mathbf{E_P}[u \circ f] \geqslant \mathbf{E_P}[u \circ g], \ \forall \mathbf{P} \in \mathscr{C}.$$

Cet ensemble $\mathscr{C}$, parce qu'il est unique et qu'il est révélé par les préférences du décideur, est interprété comme l'ensemble des scénarios qu'il considère comme possibles. Il est alors possible de définir les actes *crisp*, qui comprennent les actes constants :

Définition 1.3.3. *Un acte k dans $\mathcal{F}$ est* **crisp** *s'il existe un acte constant x dans X tel que $k \sim^* x$. On note $\mathtt{K}$ le sous-espace des actes crisp.*

Ils sont caractérisés par le fait que leur espérance d'utilité $\mathbf{E_P}[u \circ k]$ est constante quelque soit le scénario $\mathbf{P} \in \mathscr{C}$ utilisé[23]. On définit aussi à partir de l'ensemble $\mathscr{C}$ la relation d'équivalence suivante : $f \asymp g$ si les deux actes ordonnent les scénarios de $\mathscr{C}$ de manière identique : le meilleur scénario pour f est aussi le meilleur pour g, le plus mauvais scénario pour f est aussi le plus mauvais pour g et ainsi de suite.

23. Le lien entre cette notion et celle d'acte non ambigu est discuté dans la section 4.2.

C'est-à-dire que f et g « ont une dépendance identique à l'ambiguïté révélée par le décideur ». Ainsi tous les actes constants et tous les actes *crisps* sont dans la même classe d'équivalence. Mathématiquement, cela s'écrit : $f \asymp g$ si pour toutes les lois de probabilités $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q} \in \mathscr{C}$,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[u \circ f] \geqslant \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[u \circ f] \iff \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[u \circ g] \geqslant \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[u \circ g].$$

Il existe alors une fonction α de l'espace quotient $\mathcal{F}_{/\asymp}$ dans l'intervalle $[0,1]$ telle que :

$$I(u \circ f) = \alpha([f]) \min_{\mathbf{P} \in \mathscr{C}} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[u \circ f] + (1 - \alpha([f])) \max_{\mathbf{P} \in \mathscr{C}} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[u \circ f].$$

ou $[f]$ est la classe d'équivalence de f et u et $\mathscr{C}$ représentent $\succsim^*$ au sens du Théorème 1.2.6. Cette représentation établit le lien entre la relation de préférence et l'ensemble de scénarios utilisés par le décideur : les actes sont évalués par une moyenne entre la meilleure et la plus mauvaise évaluation de l'utilité espérée, pondérée par un coefficient α qui dépend de classe d'équivalence de l'acte et sera le même pour deux actes dépendants de manière identique de l'ambiguïté. Avec cette représentation, comme avec le modèle MEU, les actes *crisps* sont évalués par leur utilité espérée donnée par $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[u \circ k]$ pour un $\mathbf{P} \in \mathscr{C}$ quelconque.

La représentation variationnelle des préférences

Pour le développement suivant, Maccheroni, Marinacci, et Rustichini (2006) imposent les axiomes de C-Indépendance faible et d'Aversion à l'Incertitude. La fonction I n'est plus homogène, mais elle est c-additive et concave. La représentation, dont l'unicité est obtenue avec l'axiome d'Utilité Non Bornée, utilise la théorie des fonctions conjuguées de Fenchel–Moreau (Aubin, 1998, Théorème 3.1) :

$$I(u \circ f) = \min_{\mathbf{P} \in ba_1(\Sigma)} \{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[u \circ f] + c(\mathbf{P})\}$$

où la fonction conjuguée $c\colon ba_1(\Sigma) \to [0, +\infty]$ est donnée par :

$$c(\mathbf{P}) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \{u(x_f) - \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[u \circ f]\}.$$

c est quasiconvexe, semicontinue inférieurement et telle que $\inf_{\mathbf{P} \in ba_1(\Sigma)} c(\mathbf{P}) = 0$ (et donc, si k est crisp, $I(u \circ k) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[u \circ k]$ pour un $\mathbf{P} \in \mathscr{C}$ quelconque).

Deux cas particuliers sont à noter : le cas où $c(\mathbf{P}) = 0$ si $\mathbf{P} \in \mathscr{C}$, $c(\mathbf{P}) = +\infty$ sinon, donne le modèle MEU, et le cas où $c(\mathbf{P}) = 0$ si $\mathbf{P} = \mathbb{P}$, $c(\mathbf{P}) = +\infty$ sinon, donne le modèle SEU avec la probabilité $\mathbb{P}$.

Les préférences avec aversion à l'incertitude

Le modèle précédent est généralisé par Cerreia-Vioglio, Maccheroni, Marinacci, et Montrucchio (2011c) qui imposent les axiomes de Risque-Indépendance et d'Aversion à l'Ambiguïté. La fonction I est alors quasiconcave et c'est la théorie des fonctions quasiconjuguées (Greenberg et Pierskalla, 1973) qui permet d'obtenir la représentation, dont l'unicité dépend une nouvelle fois de l'axiome d'Utilité Non Bornée :

$$I(u \circ f) = \inf_{\mathbf{P} \in ba_1(\Sigma)} G\left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[u \circ f], \mathbf{P}\right)$$

où la fonction $G \colon \mathbb{R} \times ba_1(\Sigma) \to (-\infty, +\infty]$ est donnée par l'expression :

$$G(t, \mathbf{P}) = \sup_{g \in \mathcal{F}} \{u(x_g) \mid \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[u \circ g] \leqslant t\}.$$

G est quasiconvexe, semicontinue inférieurement et telle que $G(\cdot, \mathbf{P})$ est croissante pour tout $\mathbf{P} \in ba_1(\Sigma)$ et $\inf_{\mathbf{P} \in ba_1(\Sigma)} G(t, \mathbf{P}) = t$ (et donc, si k est *crisp*, $I(u \circ k) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[u \circ k]$ pour un $\mathbf{P} \in \mathscr{C}$ quelconque).

Les auteurs démontrent finalement le résultat très intéressant selon lequel l'adhérence du domaine de la fonction $G(t, \cdot)$, et donc celle de la fonction c du modèle précédent, est égale à l'ensemble de *priors* $\mathscr{C}$ révélé par la relation de préférence non ambiguë $\succsim^*$. Dans ces deux modèles, le décideur ne prend donc en compte que les probabilités qui sont dans l'ensemble des scénarios qu'il juge possibles.

Les préférences rationnelles sous ambiguïté

Cerreia-Vioglio, Ghirardato, Maccheroni, Marinacci, et Siniscalchi (2011a) généralisent les résultats de Ghirardato, Maccheroni, et Marinacci (2004) en n'imposant que l'axiome de Risque-Indépendance à une relation de préférence baptisée MBA (Monotonic, Bernoullian, Archimedean). C'est à ce jour le cadre axiomatique minimal dans lequel les résultats permettant une interprétation comportementale de l'ensemble des *priors* $\mathscr{C}$ est possible.

Le modèle Vector Expected Utility

Finalement, Siniscalchi (2009) propose un modèle basé sur l'axiome d'Indépendance des actes complémentaires (l'axiome de C-Indépendance faible est aussi imposé). Dans ce cadre, deux actes complémentaires f et $\overline{f}$ sont perçus comme également ambigus par le décideur qui ne peut donc les ordonner que selon leur utilité espérée. Les préférences du décideur sur les paires d'actes complémentaires révèlent alors un scénario central $\mathbb{P}$ tel que $f \succsim \overline{f}$ si et seulement si $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[u \circ f] \geqslant \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[u \circ \overline{f}]$. La relation de préférence $\succsim$ est représentée par la fonction

$$I(u \circ f) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[u \circ f] + A(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot u \circ f])$$

qui comprend une évaluation de l'acte par son utilité espérée selon ce scenario central $\mathbb{P}$ auquel est fait un ajustement pour tenir compte de l'ambiguïté avec une fonction $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. $\zeta = \{\zeta_i\}_{0 \leqslant i < n}$ est une base orthonormée du complémentaire du sous-espace des actes *crisps* $\mathtt{K}$ et peut être de dimension infinie. La variable de la fonction d'ajustement A est donc le vecteur des coordonnées du profil d'utilité dans ce sous-espace des actes *non crisps*. La fonction A est telle que $A(0_n) = 0$, un acte crisp ou constant étant ainsi évalué par son utilité espérée seule et telle que $A(-x) = A(x)$ pour refléter la complémentarité. Si le décideur se conforme à l'axiome d'Aversion à l'Incertitude, nous obtenons le cas particulier important où la fonction A est toujours négative ou nulle et concave, l'évaluation du décideur est alors toujours inférieure ou égale à l'utilité espérée. Une présentation plus détaillée de ce modèle se trouve aux chapitres 3 et 4 de cette thèse.

1.3.3 L'interprétation comportementale de l'ensemble de priors

Ces modèle ont en commun l'idée que le décideur forme, en présence d'ambiguïté, un ensemble de scénarios, ou modèles probabilistes, qu'il juge vraisemblables et sur lesquels il va fonder sa décision. Cet ensemble est une généralisation de la probabilité unique du modèle de l'utilité espérée puisque celle-ci correspond, dans tous ces modèles, au cas particulier où l'ensemble de *priors* est réduit à un singleton. Cependant, cette interprétation comportementale n'est pas une conséquence immédiate du modèle MEU où l'ensemble $\mathscr{C}_{\mathrm{MEU}}$ n'est qu'une construction mathématique, le résultat de la correspondance bijective entre fonction superlinéaire fermée et ensemble convexe fermé. Cette interprétation est par contre justifiée par l'introduction de la relation de préférence non ambiguë $\succsim^*$ et de sa représentation par un ensemble uniquement déterminé de probabilités $\mathscr{C}$. Un résultat important dans la direction de l'interprétation proposée fut donc la preuve que ces deux ensembles coïncident.

L'ambiguïté comme une différentielle

Ce résultat a été obtenu par Ghirardato *et al.* (2004) dans le cadre de leurs préférences invariantes biséparables, puis il a été généralisé par Ghirardato et Siniscalchi

(2012). Le principe consiste à démontrer que l'ensemble $\mathscr{C}$ associé à la relation de préférence non ambiguë, est, à une opération de fermeture près, l'union de toutes les lois de probabilités qui approchent localement le critère d'évaluation I.

Pour cela, il est fait une analogie avec la fonction d'évaluation du modèle SEU qui est une forme linéaire sur $B_0(\Sigma)$ donnée par $I(a) = \langle a, \mathbb{P} \rangle$ pour un $a \in B_0(\Sigma)$, et dont la différentielle est $\mathbb{P}$. Il est possible de généraliser cette notion à des fonctions non différentiables avec la dérivée directionnelle pour des fonctions convexes ou encore avec la dérivée directionnelle généralisée au sens de Clarke (1983) pour des fonctions quelconques mais localement lipschitziennes.

Définition 1.3.4. *Soit $I \colon B_0(\Sigma) \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne. Sa* **dérivée directionnelle au sens de Clarke** *au point a dans la direction d est donnée par*

$$I^\circ(a, d) = \limsup_{\substack{b \to a \\ t \downarrow 0}} \frac{I(b + td) - I(b)}{t}.$$

La **différentielle de Clarke** *de I au point a est l'ensemble des formes linéaires qui sont dominées par la dérivée directionnelle supérieure, c'est-à-dire, en identifiant les formes linéaires sur $B_0(\Sigma)$ avec les éléments de $ba(\Sigma)$:*

$$\partial I(a) = \{\mu \in ba(\Sigma) \mid I^\circ(a, d) \geqslant \langle d, \mu \rangle\,,\ \forall d \in B_0(\Sigma)\}.$$

Dans le cas où la fonction I est normalisée, tous les éléments de $\partial I(a)$ sont des probabilités telles que $\mu(\Omega) = 1$. Le résultat obtenu par Ghirardato et Siniscalchi (2012) est l'égalité :

$$\mathscr{C} = \overline{\mathrm{co}} \left(\bigcup_{f \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \partial I(u \circ f) \right)$$

où $\mathcal{F}^{\text{int}}$ est l'ensemble des actes de $\mathcal{F}$ pour lesquels il existe x et $y \in X$ tels que $x \succ f(\omega) \succ y$ pour tout $\omega \in \Omega$. Les formes linéaires qui composent les différentielles généralisées $\partial I(u \circ f)$, et qui composent donc l'ensemble de priors $\mathscr{C}$ associé à la relation de préférence non ambiguë $\succsim^*$, sont tous les modèles d'utilité espérée qui approchent, dans un voisinage de l'acte f, le critère de décision donné par la fonction I, c'est-à-dire qui permettent une interprétation locale du choix du décideur par un critère SEU.

Dans le cas où la fonction I est homogène, on retrouve le résultat de Ghirardato *et al.* (2004) :

$$\mathscr{C} = \partial I(0).$$

Or, avec le modèle MEU, le calcul de la différentielle donne $\partial I(0) = \mathscr{C}_{\mathrm{MEU}}$, ce qui prouve que l'ensemble de scénarios donné par la relation de préférence non ambiguë et l'ensemble de priors donné par la représentation de la fonction I superlinéaire sont les mêmes. Il est alors possible d'interpréter le modèle MEU comme le choix d'un décideur ayant une aversion extrême à l'ambiguïté qui ne considère que l'évaluation la plus défavorable de l'utilité espérée calculée avec tous les scénarios qu'il juge vraisemblables. Il faut cependant noter que cet ensemble ne contient pas tous les scénarios « physiquement » possibles mais ceux que le décideur choisit de ne pas rejeter, cet ensemble est donc subjectif.

Avec cette interprétation, le critère MEU est qualifié de pessimiste. Les modèles qui en sont issus et le généralisent, permettent une attitude plus nuancée face à l'ambiguïté, comme le montre l'analyse qui suit.

Des indices d'aversion à l'ambiguïté

Pour analyser l'attitude de deux décideurs, notés 1 et 2, face à l'ambiguïté, il faut distinguer deux niveaux : la sélection de l'ensemble de scénarios admissibles et la sélection de l'évaluation à partir du calcul des utilités espérées calculées avec ces scénarios. Soit alors $\succsim_1$ et $\succsim_2$ leurs relations de préférences respectives, $\succsim_1^*$ et $\succsim_2^*$ les préférences non ambiguës correspondantes, et $(u_1, \mathscr{C}_1)$ et $(u_2, \mathscr{C}_2)$ les représentations à la Bewley de ces dernières.

La définition et la caractérisation suivantes sont dues à Ghirardato *et al.* (2004, Proposition 6) : on dira que $\succsim_1$ **révèle plus d'ambiguïté** que $\succsim_2$ si pour tous les actes f et $g \in \mathcal{F}$,

$$f \succsim_1^* g \Rightarrow f \succsim_2^* g.$$

Le décideur 2 se comporte comme s'il était mieux informé sur le problème de décision, sa préférence non ambiguë est donc plus riche que celle du décideur 1, c'est-à-dire $\succsim_1^* \subset \succsim_2^*$. On a alors la propriété suivante :

Proposition 1.3.5. *Si $\succsim_1$ révèle plus d'ambiguïté que $\succsim_2$ alors u_1 et u_2 sont des transformations affines positives l'une de l'autre et $\mathscr{C}_2 \subset \mathscr{C}_1$.*

L'ensemble des scénarios que le décideur 1 juge possible est donc plus vaste que celui révélé par les préférences du décideur 2.

Pour analyser maintenant l'attitude des décideurs face à cette ambiguïté, nous supposons que $\succsim_1$ et $\succsim_2$ révèlent la même ambiguïté, on a alors $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_2$ et on suppose sans perte de généralité que $u_1 = u_2$. Nous pouvons maintenant utiliser une définition de Ghirardato et Marinacci (2002) : $\succsim_1$ révèle **plus d'aversion à**

l'ambiguïté que $\succsim_2$ si pour tout $f \in \mathcal{F}$ et pour tout $x \in X$,

$$f \succsim_1 x \Rightarrow f \succsim_2 x.$$

À partir de cette définition on obtient les propriétés suivantes :

Proposition 1.3.6. *Si $\succsim_1$ révèle plus d'aversion à l'ambiguïté que $\succsim_2$ alors*

(i) pour les préférences invariantes biséparables : $\alpha_1([f]) \geqslant \alpha_2([f])$ pour tout $f \in \mathcal{F} \setminus \mathtt{K}$ (Ghirardato et al., 2004, Proposition 12),

(ii) pour la représentation variationnelle des préférences : $c_1(\mathbf{P}) \leqslant c_2(\mathbf{P})$ pour tout $\mathbf{P} \in ba(\Sigma)$ (Maccheroni et al., 2006, Proposition 8),

(iii) pour les préférences avec aversion à l'incertitude : $G_1(t, \mathbf{P}) \leqslant G_2(t, \mathbf{P})$ pour tout $(t, \mathbf{P}) \in \mathbb{R} \times ba(\Sigma)$ (Cerreia-Vioglio et al., 2011c, Proposition 6),

(iv) pour le modèle VEU : $A_1(x) \leqslant A_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (Siniscalchi, 2009, Proposition 4).

Ainsi, chacun de ces modèles produit un indice d'aversion à l'ambiguïté, qui vient compléter l'indice d'aversion au risque de Arrow–Pratt. Dans le cadre des préférences invariantes biséparables, la fonction α donne la pondération de l'évaluation pessimiste dans le choix du décideur, le MEU étant le cas extrême pour lequel $\alpha([f]) = 1$ quelque soit f. Ainsi le décideur 1, ayant plus d'aversion à l'ambiguïté, utilise toujours une valeur de l'indice α plus élevée que le décideur 2.

Les points (ii), (iii) et (iv) de la proposition précédente s'interprètent plus simplement en utilisant les équivalents certains. Pour un acte f, notons $x_f^1 \in X$ un équivalent certain pour le décideur 1, c'est-à-dire que $f \sim_1 x_f^1$, et, de même, notons x_f^2 un acte constant tel que $f \sim_2 x_f^2$. Rappelons que, pour faire ces comparaisons d'attitude, nous supposons au préalable que les deux décideurs ont la même fonction d'utilité u, ainsi, s'ils étaient indifférents envers l'ambiguïté et avaient donc des préférences représentées par le critère de l'utilité espérée, ils auraient les mêmes équivalents certains et on aurait nécessairement $u(x_f^1) = u(x_f^2)$. La proposition précédente implique cependant que $u(x_f^1) \leqslant u(x_f^2)$, c'est-à-dire que si le décideur 1 est suffisamment incité à préférer un pari f à la certitude d'avoir x, alors le décideur 2 le sera aussi, ou, inversement, si le décideur 2 préfère échanger un pari f contre la certitude d'avoir x, alors le décideur 1 fera le même choix.

Pour le modèle VEU, nous pouvons compléter cette interprétation dans le cas où les deux décideurs ont de l'aversion à l'incertitude. On sait alors que les fonctions d'ajustement A_1 et A_2 prennent toujours des valeurs négatives ou nulles, la proposition précédente nous donne donc que $|A_1(x)| \geqslant |A_2(x)|$, c'est-à-dire que le décideur 1 pénalise toujours plus que le décideur 2 l'évaluation de référence donnée par l'espérance d'utilité sous la probabilité $\mathbb{P}$.

Mesures des paramètres d'aversion à l'ambiguïté.

Dans leur article fondateur qui a mis en évidence le puzzle de la prime de risque actions, Mehra et Prescott (1985) font l'hypothèse d'un agent représentatif dont les préférences sur les flux de consommation sont représentées par l'utilité espérée avec une fonction de von Neumann–Morgenstern additive pour la variable temporelle. Pour pouvoir calibrer leur modèle sur les données empiriques, il leur faut de plus spécifier une forme particulière pour cette fonction, qu'ils choisissent dans la famille générant une aversion relative au risque constante. La concavité, et donc l'aversion au risque, est alors déterminée par un paramètre α, qui, lui, peut être choisi pour que le modèle s'ajuste aux valeurs constatées de la prime de risque actions. C'est finalement la comparaison de cette valeur avec celles obtenues lors d'études des comportements individuels face au risque qui leur permettra de conclure à l'existence d'un puzzle.

Pour juger des capacités descriptives des modèles de décision dans l'ambiguïté, il sera nécessaire d'étendre cette méthode aux paramètres supplémentaires introduits par ces nouveaux modèles. Dans un premier temps, les formes fonctionnelles devront être choisies : celle de la fonction d'utilité mais aussi celle de l'indice d'aversion à l'ambiguïté correspondant au critère de décision choisi. Comme dans le risque, les formes les plus simples, mathématiquement et pour leur interprétation, sont celles qui ont les propriétés d'aversion relative ou absolue à l'ambiguïté constante et dont la concavité est définie par un unique paramètre. Avec ces choix, deux paramètres devront donc être calibrés, d'une part sur les données financières et, d'autre part, pour correspondre aux comportements individuels face au risque et à l'ambiguïté. Pour ce dernier cas, la procédure la plus simple, décrite par Strzalecki (2011, example 3) pour le modèle des préférences robustes avec une fonction d'utilité de type aversion relative au risque constante, est l'utilisation en laboratoire des urnes décrites par Ellsberg (1961) ou de variantes. La détermination d'équivalents certains par une méthode appropriée, telle que celle détaillée et argumentée par Halevy (2007), d'abord dans le risque, puis dans l'ambiguïté, permettra d'inférer les valeurs des paramètres d'aversion au risque et à l'ambiguïté. Il faut noter que, pour la majorité de ces modèles, le paramètre d'aversion à l'ambiguïté dépend de la valeur du paramètre d'aversion au risque, qui doit donc être déterminé en premier.

Si la méthode qui vient d'être présentée nécessite de mener des expériences en laboratoire, Chen, Ju, et Miao (2014) proposent de calibrer le paramètre d'aversion à l'ambiguïté de leur modèle d'utilité récursive avec probabilités de second ordre, à l'aide d'une expérience de pensée fondée sur les urnes d'Ellsberg et un résultat de Camerer (1999). Ce dernier a montré que, pour des paris portant sur ces urnes, la prime d'ambiguïté est typiquement de l'ordre de 10 à 20% de l'espérance d'utilité, un résultat que Halevy (2007) a confirmé. Chen *et al.* (2014) calculent alors cette prime d'ambiguïté pour différentes valeurs des paramètres de leur modèle et ils en déduisent une plage de valeurs acceptables au sens où elles génèrent une prime cohérente avec les résultats expérimentaux.

On trouvera finalement dans Etner, Jeleva, et Tallon (2009) et Machina et Siniscalchi (2013) des références d'études des attitudes individuelles face à l'ambiguïté hors du laboratoire, dans des situations réelles telle que l'assurance, le droit ou la médecine, qui peuvent également fournir des indications pertinentes pour les valeurs de ces paramètres d'aversion à l'ambiguïté.

Dans le cadre d'applications à la finance, les indices d'aversion à l'ambiguïté et leurs paramètres calibrés permettent des études de statique comparative, par exemple sur l'évolution de la composition des portefeuilles en fonction de l'attitude face à l'ambiguïté de l'investisseur. Avec ces modèles, nous disposons donc de généralisations de l'utilité espérée qui sont construits sur des bases axiomatiques claires et testables, et qui ont une interprétation comportementale bien argumentée. Ils sont donc particulièrement bien adaptés pour des applications en finance.

1.3.4 Les applications en finance

La recherche théorique sur les modèles de décision en situation d'ambiguïté est très récente, il est donc normal que peu d'applications aient été publiées à ce jour. Il existe cependant déjà des résultats très intéressants, principalement obtenus avec le modèle MEU et avec deux spécifications des préférences variationnelles, mais aussi avec le modèle avec probabilité de second-ordre dont nous ne discutons pas ici. Dans cette section sont donc présentées des applications du modèle MEU dans un cadre statique, deux applications des préférences variationnelles : les préférences moyenne–variance monotones et la théorie du contrôle robuste et la version en temps continu du modèle MEU.

Les applications du modèle MEU en finance

Garlappi, Uppal, et Wang (2007) étudient le choix du portefeuille optimal selon le critère moyenne–variance de Markowitz (1952) lorsque l'investisseur prend en compte une imprécision dans l'estimation des espérances des rendements individuels des actifs ou de celui du portefeuille de marché. Les auteurs donnent les compositions optimales des portefeuilles lorsque cette imprécision prend la forme d'intervalles de confiance et que le critère de décision de l'investisseur est le MEU. Ils montrent par une étude empirique sur les donnée du marché américain que ces compositions sont plus stables dans le temps que celles obtenues par les méthodes bayésiennes classiques.

Boyle, Garlappi, Uppal, et Wang (2012) étendent cette analyse en proposant de mesurer la « familiarité » de l'investisseur avec les différents actifs par la dimension de leurs intervalles de confiance, une approche qui est justifiée par le résultat de la Proposition 1.3.5. Les auteurs démontrent que l'introduction de l'ambiguïté augmente les pondérations des actifs avec lesquels les investisseurs sont familiers, la référence étant la composition du portefeuille optimal pour le critère moyenne–variance. La part allouée aux actifs familiers s'accroit également avec la corrélation des actifs et, bien que la diversification persiste initialement en présence d'un faible niveau d'ambiguïté, les investisseurs peuvent devoir concentrer leurs portefeuilles sur les actifs familiers si les intervalles de confiance des actifs non familiers deviennent suffisamment larges. On fait ainsi un retour à la politique d'investissement défendue par Keynes et récemment également justifiée par la présence d'asymétrie dans la distribution des rendements des actifs (Le Courtois et Walter, 2012a). Finalement, si tous les actifs sont perçus comme trop ambigus, l'investisseur peut choisir de ne pas participer au marché.

Les préférences moyenne–variance monotones

Maccheroni, Marinacci, Rustichini, et Taboga (2009) étudient une spécification des préférences variationnelles, baptisée préférence *Monotone Mean Variance* (MMV) et définie pour tout $f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{P})$ par

$$V^{\theta}_{\mathrm{MMV}}(f) = \min_{\mathbf{Q}\in\Delta^2(\mathbb{P})} \left\{ \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[f] - \frac{1}{2\theta} C(\mathbf{Q}\|\mathbb{P}) \right\}$$

où $\theta > 0$, $\Delta^2(\mathbb{P})$ est l'ensemble des probabilités absolument continues par rapport à $\mathbb{P}$ avec une densité de carré intégrable et

$$C(\mathbf{Q}\|\mathbb{P}) = \begin{cases} \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right)^2\right] - 1 & \text{si } \mathbf{Q} \in \Delta^2(\mathbb{P}) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

est l'indice de concentration relatif de Gini ou distance χ^2. Ils prouvent que cette préférence est l'extension minimale monotone de la préférence moyenne–variance $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f] - \frac{\theta}{2}\,\mathbf{var}_{\mathbb{P}}[f]$. Ces préférences MMV respectent donc la dominance stochastique du premier ordre et corrigent un défaut majeur de ce qui reste un outil central dans les développements de la finance mathématique.

Appliquées au problème du choix de portefeuille optimal, ces préférences MMV permettent une généralisation des résultats de Markowitz dans lesquels les moyennes et variances simples sont remplacées par les moyennes et les variances conditionnées par l'événement « la richesse de l'investisseur ne dépasse pas un seuil fonction de θ ». Ainsi l'investisseur se comporte comme s'il ignorait les parties les plus favorables de la distribution des rendements, celles qui sont aussi susceptibles de générer de larges valeurs pour la variance et donc le non respect de la dominance stochastique du premier ordre.

La théorie du contrôle robuste

Développée par Hansen et Sargent (2001) indépendamment des modèles de décision dans l'ambiguïté, à partir de la littérature sur le contrôle optimal linéaire quadratique gaussien, la théorie du contrôle robuste a été initialement appliquée à des problèmes de macro-économie dynamique. Elle peut cependant être liée aux modèles avec ensemble de priors, puisque sa version statique est une spécification des préférences variationnelles. Ce point a été définitivement prouvé par Strzalecki (2011) qui a fourni la base axiomatique de cette spécification. Le critère de décision correspondant est le suivant :

$$I(u \circ f) = \min_{\mathbf{Q} \in ba_1(\Sigma)} \left\{ \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[u \circ f] + \frac{1}{2\theta} \mathcal{R}(\mathbf{Q} \| \mathbb{P}) \right\}$$

où le paramètre θ mesure la préférence pour la robustesse et $\mathcal{R}(\mathbf{Q}\|\mathbb{P})$ est l'entropie relative de la distribution $\mathbf{Q}$ par rapport à la distribution de référence $\mathbb{P}$ définie par

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} \log \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right], & \text{si } \mathbf{Q} \ll \mathbb{P} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Anderson, Hansen, et Sargent (2003) appliquent ce critère au modèle standard intertemporel avec un agent représentatif qui optimise l'utilité de sa consommation. Cet agent dispose d'un modèle de référence, un processus de Markov avec sauts, mais souhaite prendre en compte la possibilité que ce modèle ne soit pas parfaitement connu. Il veut obtenir un résultat robuste à des variations de son modèle qui seraient difficiles à détecter par des méthodes statistiques, ce qui est capturé par l'entropie relative, qui pénalise les distributions trop éloignées de celle de référence. Après avoir prouvé que ce problème est équivalent à la recherche d'une solution avec un processus *worst-case* obtenu par modification du drift du modèle de référence, les auteurs montrent que cette préoccupation pour la robustesse génère une prime d'ambiguïté en plus de la prime de risque habituelle.

Maenhout (2004) obtient une solution de forme fermée pour le choix du portefeuille optimal à partir d'une spécification du modèle de Anderson *et al.* (2003) dans laquelle le paramètre θ est proportionnel à la fonction d'utilité. Ses résultats montrent que la préoccupation pour la robustesse diminue fortement la demande pour les actions dans le portefeuille optimal et qu'elle augmente la prime de risque action et diminue la taux sans risque. Avec des paramètres « raisonnables », l'auteur obtient une diminution de 50% pour la part allouée aux actions et une prime de risque de 4 à 6%. Uppal et Wang (2003) étendent l'étude précédente au cas de plusieurs actifs pour lesquels l'investisseur a une meilleure connaissance de la loi marginale de l'un d'entre eux. Ce cadre leur permet de montrer que le puzzle de la préférence pour le pays d'origine peut être expliquée par ce facteur.

Les extensions dynamiques de modèles avec ensemble de priors

La théorie du contrôle robuste et le modèle MEU en temps continu de Chen et Epstein (2002) que nous présentons maintenant, font partie, à ce jour, des rares applications dans un cadre dynamique des modèles de décision dans l'ambiguïté. En effet, comme cela a été évoqué dans la section 1.2.5, les théories de l'apprentissage et de l'actualisation des croyances non bayésiennes restent embryonnaires. C'est pourquoi le modèle MEU en temps continu, tout comme la théorie du contrôle robuste, bien qu'ils s'appuient sur des modèles axiomatiques, ne sont pas eux-mêmes des modèles axiomatiques.

Le modèle de Chen et Epstein (2002) en temps continu se fonde cependant sur le modèle de Epstein et Schneider (2003) en temps discret qui est, lui, complètement déduit d'un ensemble d'axiomes. Autour d'une description par un arbre de décision, ces axiomes imposent que les préférences respectent la *cohérence dynamique*, c'est-à-dire que les préférences ne puissent pas se renverser avec le passage du temps. Au delà de son aspect normatif, la cohérence dynamique implique que la fonction d'utilité puisse s'écrire sous forme récursive, ce qui permet l'usage de la théorie de la programmation dynamique de Bellman pour résoudre les problème d'optimisation associés. Cependant la cohérence dynamique est obtenue au prix d'une réduction des capacités descriptives du modèle : il est en effet imposé que l'ensemble des *priors* ait la propriété de *rectangularité*, c'est-à-dire qu'il soit suffisamment vaste pour comprendre toutes les combinaisons de toutes les lois marginales et conditionnelles de tous ses membres. Cette propriété est également appelée stabilité pour le *pasting* par Föllmer et Schied (2011, Définitions 6.38 et 6.41). Riedel (2009, Lemme B1) prouve l'équivalence entre cohérence dynamique, rectangularité et stabilité pour le *pasting*. Ces propriétés circonscrivent les contextes modélisables, ainsi Epstein et Schneider (2003) montrent qu'il n'est pas possible de décrire une version dynamique de l'urne d'Ellsberg avec un ensemble de *priors* rectangulaire.

Chen et Epstein (2002) construisent le modèle MEU en temps continu à partir de ce modèle en temps discret et de la littérature sur les fonctions d'utilité récursives, initiée par Koopmans (1960) pour un flux de consommation déterministe en temps discret avec la fonction $V(c_0, c_1, \dots) = W(c_0, V(c_1, c_2, \dots))$, dont Epstein (1987) montrera que la version en temps continu est donnée par $\mathrm{d}V_t = -f(c_t, V_t)\,\mathrm{d}t$, $V_T = 0$. Duffie et Epstein (1992) généralisent cette utilité récursive au cas d'un flux de consommation stochastique avec la *Stochastic Differential Utility* (SDU), qui est la solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR)

$$\begin{cases} \mathrm{d}V_t = -f(c_t, V_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_t\,\mathrm{d}W_t \\ V_T = 0 \end{cases}$$

où W_t est un mouvement brownien standard. Chen et Epstein construisent alors un ensemble de probabilités absolument continues par rapport au modèle probabiliste de référence $\mathbb{P}$ associé au brownien W_t avec un ensemble Θ de processus générateurs de densité θ qui satisfont aux conditions usuelles permettant l'application du théorème de Girsanov. Celui-ci permet de ramener, par une modification du paramètre de diffusion, toutes les EDSR obtenues pour chacune des lois de l'ensemble de *priors*, au même mouvement brownien. Le problème d'optimisation est alors pour un décideur MEU :

$$\begin{cases} \mathrm{d}V_t = \left(-f(c_t, V_t) + \max\limits_{\theta \in \Theta} \theta_t \sigma_t \right) \mathrm{d}t + \sigma_t\,\mathrm{d}W_t \\ V_T = 0 \end{cases}$$

Finalement Chen et Epstein appliquent le MEU en temps continu au problème de consommation optimale d'un agent représentatif et ils génèrent ainsi une prime d'ambiguïté distincte de la prime de risque.

Epstein et Miao (2003) appliquent le MEU en temps continu pour caractériser l'équilibre d'une économie composée de deux agents ayant des attitudes différentes face à l'ambiguïté des actifs financiers. Spécialement, ils considèrent deux agents et deux catégories d'actifs, l'agent 1 ayant une connaissance parfaite (un unique *prior*) du rendement des actifs du premier groupe mais une connaissance imparfaite (un ensemble de *priors*) du rendement des actifs du second groupe, l'agent 2 ayant une position symétrique. Ce cadre leur permet d'expliquer le puzzle de la préférence pour le pays d'origine.

Les mesures de risque

Des applications à la finance des modèles de décision dans l'ambiguïté sont également obtenues indirectement grace à la similitude formelle entre ces modèles et la théorie des mesures de risques. Une mesure de risque est une fonction ρ qui associe à une position risquée X le montant minimal de capital $\rho(X)$ qui, investi dans l'actif sans risque, doit être ajouté à cette position risquée X pour que le portefeuille résultant soit *admissible*, c'est-à-dire, par exemple, que la probabilité que sa valeur de marché devienne négative soit en dessous d'un seuil donné. Cette théorie a une application très importante : l'évaluation par les autorités de tutelle des risques pris par les institutions financières et les compagnies d'assurance, afin de déterminer, selon des règles de solvabilité comme celles fixées par le comité de Bâle, le montant des fonds propres qui doit être mis en réserve pour assurer cette prise de risque.

Constatant qu'un outil tel que la *Value at Risk*, très utilisé par les régulateurs, peut ne pas détecter l'accumulation mais, au contraire, pénaliser la diversification, Artzner, Delbaen, Eber, et Heath (1999) ont construit la théorie des *mesures de risque cohérentes* en partant des propriétés que celles-ci doivent respecter pour être des outils fiables. Ainsi une mesure de risque est dite *cohérente* si elle satisfait quatre axiomes qui sont l'invariance par translation, la sous-additivité, l'homogénéité et la monotonie. Ces axiomes traduisent les propriétés exigées, la sous-additivité, par exemple, impose que la séparation d'une prise de risque en deux portefeuilles distincts ne permette pas de réduire la mesure du risque total. Il s'agit donc d'une démarche axiomatique tout à fait similaire à celle de la théorie de la décision où ce sont des axiomes comportementaux posés *a priori* qui définissent les propriétés de la fonction représentant les préférences, alors qu'en théorie des mesures de risque, ce sont ces propriétés qui sont posées comme axiomes. Finalement, les propriétés des mesures de risque cohérentes étant celles de la fonction de représentation du modèle MEU, il est logique que les formes mathématiques soient également les mêmes, et Artzner *et al.* (1999) donnent donc une représentation duale des mesures de risque cohérentes qui est la représentation des préférences MEU.

Le parallèle entre les deux théories se poursuit puisque les évolutions ultérieures des mesures de risque ont été obtenues par un affaiblissement des propriétés exigées par les axiomes. Tout d'abord, la théorie, initialement développée en dimension finie, a été rapidement étendue au cas infini par Delbaen (2002), puis les axiomes de sous-additivité et d'homogénéité ont été remplacés par un axiome de convexité, plus faible, mais qui impose tout de même que la diversification ne puisse pas augmenter le risque. C'est la famille des *mesures de risques convexes*, indépendamment construite par Föllmer et Schied (2002a) et Frittelli et Rosazza Gianin (2002), dont les propriétés, et donc la représentation duale, sont celles des préférences variationnelles. Notons que, si les liens avec le modèle MEU sont explicites dès l'article de Föllmer et Schied (2002b), les développements de la théorie des mesures de risques convexes et de la théorie des préférences variationnelles de Maccheroni *et al.* (2006) sont contemporains et indépendants. Le lien entre ces deux littératures sera finalement fait par Schied (2007) et la recherche se développe maintenant conjointement. Ainsi, le dernier développement proposé par El Karoui et Ravanelli (2009), à savoir l'affaiblissement de l'axiome d'invariance par translation en une sous-additivité, a été immédiatement relié par Cerreia-Vioglio, Maccheroni, Marinacci, et Montrucchio (2011b) aux développements des préférences avec aversion à l'incertitude.

La théorie des mesures de risque est appliquée au problème du choix de portefeuille optimal, indépendamment de la notion d'ambiguïté ou parfois en lien avec la théorie de la décision. C'est notamment le cas pour Schied (2007) et Schied, Föllmer, et Weber (2009) qui présentent des techniques de résolution et des résultats généraux en mettant en avant les liens entre le portefeuille optimal pour un investisseur ayant des préférences variationnelles et celui d'un investisseur qui souhaite minimiser une mesure de risque convexe. Il existe également des développements en temps continu pour lesquels le problème de la cohérence dynamique implique de considérer des ensembles de scénarios stables pour le *pasting* (Föllmer et Schied, 2011, chapitre 11), renvoyant encore une fois à la théorie de la décision et particulièrement ici à la notion de rectangularité de l'ensemble de *priors* du modèle MEU dynamique (Epstein et Schneider, 2003). À titre d'exemple, une application des mesures de risque convexes dynamiques à la valorisation par indifférence d'un actif contingent dans un marché incomplet est proposée par Klöppel et Schweizer (2007).

Les méthodes robustes en statistique

Cerreia-Vioglio, Maccheroni, Marinacci, et Montrucchio (2013) établissent un lien avec les méthodes robustes en statistique : ils montrent que, si les préférences subjectives sont cohérentes avec les probabilités objectives connues, l'ambiguïté dans cette famille de modèles est équivalente à l'incertitude sur la distribution du paramètre dans un modèle statistique paramétrique. Cette intuition est sous-jacente à de nombreuses applications en finance du modèle MEU, où l'ensemble de *priors* est en fait un intervalle de confiance pour un estimateur de l'espérance des rendements d'actifs.

1.4 Plan de la thèse

Cette thèse s'inscrit dans le cadre des applications à la finance de modèles de décision dans l'ambiguïté. Plus précisément, elle traite de la prise en compte de la non neutralité des investisseurs face à l'ambiguïté par des préférences moyenne–variance généralisées, issues des modèles avec ensemble de probabilités *a priori*. Comme nous l'avons rappelé dans la section 1.1, les préférences moyenne–variance sont, non seulement une des fondations sur lesquelles la théorie mathématique de la finance s'est édifiée, mais aussi un outil d'analyse essentiel pour le métier de la gestion d'actifs. Ce constat explique l'intérêt qu'elles suscitent auprès des chercheurs et des praticiens. Ainsi, deux articles, récemment publiés, proposent de généraliser les préférences moyenne–variance en utilisant des modèles de décision dans l'ambiguïté : les préférences moyenne–variance monotones de Maccheroni, Marinacci, Rustichini, et Taboga (2009), qui ont été présentées dans la section précédente, et les préférences moyenne–variance robustes de Maccheroni, Marinacci, et Ruffino (2013). Ces derniers construisent, à partir du modèle d'utilité espérée avec probabilités de second ordre de Klibanoff *et al.* (2005), un critère où l'aversion à la variance est complétée par une aversion à l'ambiguïté. Notre travail de recherche est directement influencé par ces deux papiers.

Cette thèse comprend trois articles qui progressent de la théorie de la décision axiomatique vers une application financière, en établissant le lien entre ces deux champs de recherche.

Le premier article, intitulé *Crisp Fair Gambles* (chapitre 2), étudie les conséquences, pour des applications en finance, de la forme choisie pour la description des choix risqués dans l'axiomatique d'Anscombe–Aumann. Le rôle spécifique que tiennent les loteries subjectives pour la représentation de l'ambiguïté dans cette axiomatique est mis en évidence à partir d'une reflexion sur la compatibilité entre préférences moyenne–variance et modèles avec probabilités *a priori* multiples. Nous étudions les actes qui, bien que non constants, se comportent cependant comme des actes purement objectifs (les actes dits *crisp*), et plus particulièrement ceux dont l'espérance d'utilité est nulle (les *crisp fair gambles*). Nous prouvons que l'existence de ces derniers n'est pas compatible avec la prise en compte de la variance dans les préférences (Proposition 2.3.2). Nous étudions alors les conditions nécessaires pour que ces actes n'existent pas, ce qui nous amène à questionner la définition des actes et événements non ambigus, en développant les études faites par Cerreia-Vioglio *et al.* (2011a) dans le cadre de modèles avec ensemble de *priors* et par Nehring (1999), Epstein et Zhang (2001) et Zhang (2002) dans le cadre de capacités de Choquet. Nous démontrons alors de nouveaux résultats : le lien géométrique qui existe en dimension finie entre l'ensemble des priors et le sous espace des actes *crisp* (Theorem 2.4.3), puis la forme de ce lien en dimension infinie (Theorem 2.4.6), ce qui nécessite d'établir des propriétés topologiques des espaces engendrés par l'ensemble de *priors* (Theorem 2.4.5). Finalement, nous concluons que, si l'on veut que les modèles avec probabilités *a priori* multiples soient compatibles avec les préférences prenant en compte la variance, le seul actif non ambigu doit être l'actif sans risque (Theorem 2.5.2).

Le deuxième article, intitulé *Vector Expected Utility Preferences and Mean–Variance Preferences* (chapitre 3) se concentre sur l'un des modèles avec probabilités *a priori* multiples : le modèle Vector Expected Utility (VEU) de Siniscalchi (2009) et cherche à établir des liens entre ce modèle et les préférences moyenne–variance. Pour ce faire, nous explorons deux voies : l'utilisation des polynômes d'Hermite comme base orthonormale de l'espace des variables aléatoires de variance bornée, une technique appliquée par Madan et Milne (1994) à la valorisation des biens contingents, et la représentation variationnelle au sens de Maccheroni *et al.* (2006) du modèle VEU lorsqu'il est concave. La première voie fait le lien avec la littérature qui traite du portefeuille optimal en prenant en compte les moments d'ordre supérieur à la variance (Jondeau et Rockinger, 2006 ; Le Courtois et Walter, 2012b), la deuxième voie fait le lien avec les méthodes d'optimisation avec des contraintes données par des ϕ-divergences, c'est-à-dire des mesures de similarité entre lois de probabilités. Ces liens nous permettent de suggérer une interprétation de l'ambiguïté comme étant un manque d'information du décideur. Ainsi, la première voie décrit un investisseur qui suppose que la distribution de probabilité d'une variable aléatoire est proche d'une loi normale mais souhaite cependant prendre en compte la possibilité que les coefficients de Pearson–Fischer soient non nuls. La deuxième voie décrit un investisseur qui dispose d'une loi de référence, non nécessairement gaussienne, mais souhaite prendre en compte des déviations autour de cette loi, la distance à la loi de référence étant mesurée par la ϕ-divergence. Celle-ci peut être l'entropie relative, on retrouve alors les préférences robustes de Hansen et Sargent (2001), ou la distance χ^2, on retrouve alors les préférences moyenne–variance monotones de Maccheroni *et al.* (2009), ou d'autres fonctions ayant les mêmes propriétés (Ben-Tal et Teboulle, 1987). Le lien avec les ϕ-divergences est obtenu lorsque nous établissons l'expression générale de la fonction conjuguée du critère VEU (Proposition 3.5.2) et que nous donnons sa forme particulière lorsque sont ajoutés aux axiomes du modèle VEU ceux du modèle MEU, puis ceux des préférences invariantes biséparables (sections 3.5.2 et 3.5.3).

Le troisième et dernier article, intitulé *Optimal Portfolio with Vector Expected Utility* (chapitre 4) et publié dans *Mathematical Social Sciences* (André, 2014), propose, à partir du modèle VEU, une généralisation du critère moyenne–variance qui prend en compte l'aversion à l'ambiguïté de l'investisseur. Nous construisons cette généralisation à partir du développement de Taylor au second ordre de l'équivalent certain (Proposition 4.3.1) que nous transformons ensuite pour que sa forme mathématique permette une interprétation comportementale. Cette transformation illustre les propriétés du modèle mises en évidence dans l'article précédent : le rôle de la base orthonormale du sous-espace des actes non *crisp* dont il est proposé une rotation correspondant à la diagonalisation de la matrice hessienne de la fonction d'ajustement A, et les conséquences de la concavité obtenue avec l'hypothèse d'aversion à l'incertitude. Si le développement de Taylor de l'équivalent certain a déjà été appliqué au modèle avec probabilité de second ordre (Nau, 2003 ; Izhakian et Benninga, 2011 ; Maccheroni *et al.*, 2013), nous proposons dans cet article la première application de cette méthode à un modèle avec ensemble de *priors*, ainsi qu'une interprétation originale du comportement de l'investisseur tel qu'il est modélisé par le critère VEU, interprétation issue de l'analyse que nous avons donnée dans l'article précédent. Finalement, nous appliquons ce critère moyenne–variance généralisé au problème du choix de portefeuille optimal. Les résultats obtenus nous permettent de proposer une explication du puzzle de la préférence pour le pays d'origine qui, pour la première fois à notre connaissance, n'impose pas à l'actif domestique d'être non ambigu.

Chapter 2

Crisp Fair Gambles

Abstract

The axiomatic models of decision which model ambiguity through a set of priors theoretically allow for the existence of Crisp Fair Gambles whose expected utility is null whichever of the priors is used. But, in these models, the DM is indifferent to the addition of such acts whose existence would then be at odds with a preference taking into account the variance of the prospects. In this paper we study some geometrical and topological properties of the set of priors that would rule out the existence of Crisp Fair Gambles, properties which have consequences on what can be an unambiguous financial asset.

JEL classification: *D81, G11.*
Keywords: *Monotone Mean–Variance Preferences ; Ambiguity ; Set of Priors ; Crisp acts ; Unambiguous asset.*

2.1 Introduction

This work is motivated by recent papers (Maccheroni, Marinacci, Rustichini, et Taboga, 2009 and Černý, Maccheroni, Marinacci, et Rustichini, 2012) which have shown some unsuspected links between Mean–Variance (MV) preferences and axiomatic models of decision under ambiguity.

Markowitz (1952)' work has brought a new perspective on the choice of the optimal portfolio and this point of view, the MV preferences, remain the cornerstone of the theory. But the criterion itself is as disputed as it is ubiquitous for it has some shortcomings. Especially, while MV preferences are used to model rational behaviour, they fail to respect monotonicity, a widely admitted tenet of rationality which imposes that, if a prospect dominates state–by–state another one, it should be preferred by the decision maker (DM). This is why monotone criteria compatible with MV preferences attract such interest.

Maccheroni, Marinacci, et Rustichini (2006, henceforth MMR) and Maccheroni *et al.* (2009) prove that a specification of their Variational Preferences, named Monotone Mean Variance (MMV), is the minimal monotone functional that extends the MV preferences and agrees with them on their domain of monotonicity. Formally let $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ be a probability space and consider $\mathsf{L}^2(\mathbb{P})$, the set of all uncertain prospects with bounded variance. For any $f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{P})$, the MV preference relation is represented by the function

$$V^{\theta}_{\mathrm{MV}}(f) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f] - \frac{\theta}{2}\,\mathbf{var}_{\mathbb{P}}[f]$$

with $\theta > 0$, which is monotonic on the set

$$\mathcal{G}^{\theta} = \left\{ f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{P}) \colon f - \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f] \leqslant \frac{1}{\theta} \right\}.$$

The MMV preference relation is represented by the function

$$V^{\theta}_{\mathrm{MMV}}(f) = \min_{\mathbf{Q} \in \Delta^2(\mathbb{P})} \left\{ \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[f] - \frac{1}{2\theta} C(\mathbf{Q} \| \mathbb{P}) \right\}$$

where $\Delta^2(\mathbb{P})$ is the set of all probability measures with square integrable densities with respect to $\mathbb{P}$ and

$$C(\mathbf{Q} \| \mathbb{P}) = \begin{cases} \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} \right)^2 \right] - 1 & \text{if } \mathbf{Q} \in \Delta^2(\mathbb{P}) \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

is the relative Gini concentration index or χ^2 distance. The property is then that $V^{\theta}_{\mathrm{MMV}}(f) = V^{\theta}_{\mathrm{MV}}(f)$ for any $f \in \mathcal{G}^{\theta}$ and $V^{\theta}_{\mathrm{MMV}}$ is the function which gives the lowest possible evaluation (the most cautious) outside of $\mathcal{G}^{\theta}$ while being monotonous over $\mathsf{L}^2(\mathbb{P})$.

This means that a DM ranking prospects under ambiguity using the MMV criterion is in fact using a MV preference, at least in $\mathcal{G}^{\theta}$. Hence building her evaluations with a scenario $\mathbb{P}$, that she considers as the most likely and which also gives the impossible events, but also with all the probabilities in $\Delta^2(\mathbb{P})$ through a conservative criterion with a penalty for not using $\mathbb{P}$ given by the χ^2 distance, she ends up ranking prospects based on the mean and variance computed under $\mathbb{P}$. This link is also confirmed by Černý *et al.* (2012) who have shown that optimal portfolios for the MMV criterion are closely related to optimal portfolios for the Expected Utility criterion with a truncated quadratic utility function. Our aim is then to investigate one aspect of these links between the modelling of ambiguity and aversion to variance.

Of course, it is possible, as MMR write page 1472 of their paper, to

> [...] view entropic preferences as essentially an analytically convenient specification of variational preferences, much in the same way as, for example, Cobb–Douglas preferences are an analytically convenient specification of homothetic preferences. As a result, in our setting there might not exist behaviorally significant axioms that would characterize entropic preferences (as we are not aware of any behaviorally significant axiom that characterizes Cobb–Douglas preferences). Similar considerations apply to the Gini preferences that we will introduce momentarily.

The MMV (or Gini) preferences have not yet been fully axiomatised, while Strzalecki (2011) has succeeded in constructing the axiomatic foundations of the entropic or multiplier preferences. Nonetheless they are a Variational Preference hence satisfy the axioms of the latter whose behavioural signification should not be ignored. Especially, we are interested in the existence of a set of priors $\mathscr{C}$ underlying the decision process. It first emerged solely as a mathematical artefact in the seminal paper by Gilboa et Schmeidler (1989) on Maxmin Expected Utility (MEU) although a cognitive interpretation has been appealing from the beginning [1]. The behavioural interpretation of $\mathscr{C}$ as the set of scenarios that the DM deems possible has since then been reinforced and justified in several directions. Ghirardato, Maccheroni, et Marinacci (2004, henceforth GMM) introduce the *unambiguous preference* to formalise

1. See Chapter 17 in Gilboa (2009).

the idea that the ranking between two acts can be unaffected by hedging considerations. It is then the maximal restriction of the initial preference which satisfies the Independence axiom. It is incomplete hence has a Bewley (1986) representation by an unanimity criterion over a set of probabilities which is unique and independent of the choice of normalisation for the utility function. Therefore "it is natural to refer to each prior $\mathbf{P} \in \mathscr{C}$ as a "possible scenario" that the DM envisions"[2]. Also, $\mathscr{C}$ is shown to be the Clarke differential at the origin of the decision criterion, a result which can somewhat leads to the interpretation of the set of priors as the collection of "all the probabilistic scenarios that could rationalise the DM's evaluation of acts"[3]. This result is generalised in Ghirardato et Siniscalchi (2012) to non homogeneous functions where the subdifferential at an arbitrary point is not necessarily the same as the subdifferential at the origin, hence giving a more "local" interpretation of the result. Finally, Cerreia-Vioglio, Maccheroni, Marinacci, et Montrucchio (2011c) introduce the Uncertainty Averse preference as a generalisation of the Variational Preferences and prove that, with these representations, the DM doesn't take into account the probabilities which are not in the set of priors given by the unambiguous preference[4]. This important result implies that the MMV preference seen as a specification of the Variational Preferences should be written as

$$V^{\theta}_{\mathrm{MMV}}(f) = \min_{\mathbf{Q} \in \mathscr{C} \cap \Delta^2(\mathbb{P})} \left\{ \mathbf{E_Q}[f] - \frac{1}{2\theta} C(\mathbf{Q} \| \mathbf{P}) \right\}$$

From a different, "normative viewpoint", Gilboa, Maccheroni, Marinacci, et Schmeidler (2010) characterise a DM by two preference relations: one leading to *objectively rational* choices that "she can convince others she is right in making them" and a second leading to *subjectively rational* choices that "other cannot convince the DM that she is wrong in making them". The first one is incomplete and admit a Bewley representation, the second one is supposed to be a MEU preference. Both of these representations involve a set of priors which are proven to be the same when two axioms of "Consistency" and "Caution" are imposed between the two preference relations. Cerreia-Vioglio (2011) extends the scope of this result to a more general Uncertainty Averse subjective rationality preference.

All the preceding results support the case for the cognitive interpretation of the set of priors. To get to the subject of this paper, it must be added that all

2. Ghirardato *et al.* (2004, p. 145).
3. Ghirardato *et al.* (2004, p. 136).
4. To be precise, they prove that the closure of the domain of the conjugate, or t-conjugate in the quasi concave case, is the set of priors. In Appendix 2.A.4 we propose a simple proof of the inclusion of these domains in the set of priors

the above models have been set up in a generalised Anscombe-Aumann framework which has proven to be particularly well suited for the development of non Expected Utility models. In this setup, *acts* are functions from a state space Ω to a set X of consequences which is supposed to be a convex subset of a vector space. In the Anscombe et Aumann (1963) initial framework, this set X is the set of finitely supported probability distributions over a set of prizes or *roulette lotteries* which model the objective probabilities given to the DM. There are then two stages in an act: first a *horse lottery*, whose probabilities are subjective, is ran to associate to a state of the world a roulette lottery which is then ran to give the final prize. In the development of non Expected Utility models, the ambiguity has been modelled at the stage of the horse lotteries where the unique subjective probability distribution has been replaced by a set of priors (or a non-additive probability).

Then the combination of this setup and of a set of priors $\mathscr{C}$ imply that acts can be classified in two types: *crisp* acts which behave like constant acts and cannot provide any hedging opportunity, are characterised by an Expected Utility which remain constant whichever of the scenario in $\mathscr{C}$ is used, and acts which have variable utility profiles. Note that, as developed in Cerreia-Vioglio, Ghirardato, Maccheroni, Marinacci, et Siniscalchi (2011a, henceforth CGMMS), the set of crisp acts can be strictly larger that the set of *unambiguous* acts if the latter are understood to have the stronger property of being robust to permutations of the payoffs on the partition of events they define. Nonetheless crisp acts are linked to the geometry of the set of priors as will be shown in this paper.

We introduce a subset of the crisp acts, the *crisp fair gambles*, whose expected utility is 0 under all the probabilities in the set of priors $\mathscr{C}$, that is, if k is such a crisp fair gamble, $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[u \circ k] = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[u \circ k]$ for all $\mathbf{P}$ and $\mathbf{Q} \in \mathscr{C}$. It can be seen that the existence of such acts is a problem for the definition of the MMV as a specification of the Variational Preferences. Indeed, suppose that f, k and $f + k$ are in $\mathcal{G}^\theta$, then

$$V^\theta_{\mathrm{MMV}}(f + k) = \min_{\mathbf{Q} \in \mathscr{C} \cap \Delta^2(\mathbb{P})} \left\{ \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[f] + \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[k] - \frac{1}{2\theta} C(\mathbf{Q} \| \mathbf{P}) \right\} = V^\theta_{\mathrm{MMV}}(f)$$

Therefore the DM would be indifferent to the addition of a crisp fair gamble while the standard MV Preference wouldn't as $\mathbf{var}[f + k] \neq \mathbf{var}[f]$.

Therefore, in this paper we study what are the conditions for the existence or non existence of these crisp fair gamble and what they mean in a financial setting. For this we establish some links between the geometry of the set of priors and the subspace of crisp fair gambles in finite and infinite dimension. Section 4.2 recalls some results from CGMMS, the setup in which our results are established. Section 2.3

poses the definition of the crisp fair gamble and gives their first properties. The main results are in Section 2.4 where geometrical and topological properties of the set of priors and the subspace of crisp fair gambles are proved. Finally Section 2.5 gives a link with unambiguous acts.

2.2 The Setup: Rational Preferences under Ambiguity

In this section we recall results from CGMMS where the authors generalise earlier results on the identification of a set of priors and on unambiguous acts and events. These results are extended to a preference relation satisfying minimal assumptions, the MBA (Monotonic, Bernoullian, Archimedean) preference, which encompasses most of the previously axiomatised preferences, such as the Uncertainty Averse preferences, the Variational preferences or the Vector Expected Utility (Siniscalchi, 2009).

The MBA preferences are set in an Anscombe-Aumann environment: given a state space Ω endowed with an algebra Σ, and X a convex subset of a vector space, simple acts are Σ-measurable functions $f\colon \Omega \to X$ such that $f(\Omega)$ is finite. The set of all acts is denoted by $\mathcal{F}$. Given an $x \in X$, define $x \in \mathcal{F}$ to be the constant act such that $x(\omega) = x$ for all $\omega \in \Omega$. With the usual slight abuse of notation, we can then identify X with the subset of constant acts in $\mathcal{F}$.

$B_0(\Sigma, I)$ is the space of simple Σ-measurable function on Ω with values in $I \subset \mathbb{R}$. We write $B_0(\Sigma)$ instead of $B_0(\Sigma, \mathbb{R})$ for the space of finite linear combinations of characteristic functions of sets in Σ. $ba(\Sigma)$, $ba_1(\Sigma)$ and $ca_1(\Sigma)$ denote respectively the spaces of finitely additive measures, finitely additive probabilities and countably additive probabilities on Σ. These spaces are endowed with the total variation norm. Denote by $B(\Sigma)$ be the space of all uniform limits of functions in $B_0(\Sigma)$. Endowed with the supnorm it is a Banach space whose topological dual is isometrically isomorphic to $ba(\Sigma)$. We will write the duality pairing as $\langle a, \mu \rangle = \int a \, \mathrm{d}\mu$, the hyperplane $\mathsf{H}_{\mu,\alpha} = \{a \mid \langle a, \mu \rangle = \alpha\}$ and the closed half space $\mathsf{H}^+_{\mu,\alpha} = \{a \mid \langle a, \mu \rangle \geqslant \alpha\}$. We denote by $\mathbf{1}_E$ the characteristic function of the event $E \in \Sigma$.

The DM preference is modelled by a binary relation $\succsim$ over $\mathcal{F}$. This binary relation is called an *MBA preference* when it satisfies the following set of axioms:

Axiom 2.1 (MBA preference). *The preference relation* $\succsim$

(i) is a Weak Order: $\succsim$ *is non-trivial, complete and transitive on* $\mathcal{F}$,

(ii) is Monotonic: if $f, g \in \mathcal{F}$ *and* $f(\omega) \succsim g(\omega)$ *for all* $\omega \in \Omega$, *then* $f \succsim g$,

(iii) *satisfies Risk Independence: if* x, y, $z \in X$ *and* $\lambda \in (0,1]$, *then* $x \succ y$ *implies* $\lambda x + (1-\lambda)z \succ \lambda y + (1-\lambda)z$,

(iv) *is Archimedean: If* f, g, $h \in \mathcal{F}$ *and* $f \succ g \succ h$, *then there are* α, $\beta \in (0,1)$ *such that* $\alpha f + (1-\alpha)h \succ g \succ \beta f + (1-\beta)h$.

and it can be represented as follows:

Proposition 2.2.1 (CGMMS, Proposition 1). *A binary relation* $\succsim$ *is an MBA preference if and only if there exist a non-constant, affine function* $u\colon X \to \mathbb{R}$ *and a normalised, monotonic, continuous functional* $I_u\colon B_0(\Sigma, u(X)) \to \mathbb{R}$ *such that for each* f, $g \in \mathcal{F}$

$$f \succsim g \iff I_u(u \circ f) \geqslant I_u(u \circ g). \tag{2.1}$$

The unambiguous preference relation was initially defined by GMM as the largest subset of $\succsim$, seen as a subset of $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$, which satisfies the von Neumann–Morgenstern Independence axiom. This relation has a representation in the form of a unanimity criterion *à la* Bewley (1986). These definition and property are extended in CGMMS to the MBA preferences:

Definition 2.2.2 (Unambiguous preference). *Let* f, $g \in \mathcal{F}$. *Say that* f *is* unambiguously preferred *to* g, *denoted* $f \succsim^* g$, *if and only if, for all* $h \in \mathcal{F}$ *and all* $\lambda \in (0,1]$, $\lambda f + (1-\lambda)h \succsim \lambda g + (1-\lambda)h$.

Proposition 2.2.3 (CGMMS, Proposition 2). *Let* $\succsim$ *be an MBA preference. Then there exists a non-empty, unique and closed set* $\mathscr{C} \subset ba_1(\Sigma)$ *such that for each* f, $g \in \mathcal{F}$

$$f \succsim^* g \iff \int u \circ f \,\mathrm{d}\mathbf{P} \geqslant \int u \circ g \,\mathrm{d}\mathbf{P} \text{ for all } \mathbf{P} \in \mathscr{C}. \tag{2.2}$$

where u *is the function obtained in Proposition 2.2.1. Moreover* $\mathscr{C}$ *is independent of the choice of normalisation of* u.

For a function $a \in B_0(\Sigma, I)$, we will denote by $\underline{\mathscr{C}}(a) \overset{\text{def}}{=} \min_{\mathbf{P}\in\mathscr{C}} \int a \,\mathrm{d}\mathbf{P}$ and $\overline{\mathscr{C}}(a) \overset{\text{def}}{=} \max_{\mathbf{P}\in\mathscr{C}} \int a \,\mathrm{d}\mathbf{P}$. It holds that (CGMMS, Corollary 3):

$$\underline{\mathscr{C}}(a) \leqslant I_u(a) \leqslant \overline{\mathscr{C}}(a) \tag{2.3}$$

Now that we have the unambiguous preference relation and the set of priors we can introduce the *crisp* acts:

Definition 2.2.4 (Crisp act). *An act is* crisp *if and only if it is unambiguously indifferent to a constant act.*

It is an immediate consequence of the previous propositions that, for an MBA preference, an act $k \in \mathscr{C}$ is crisp if and only if $\underline{\mathscr{C}}(u \circ k) = \overline{\mathscr{C}}(u \circ k)$.

We close this section with CGMMS definitions of unambiguous acts and events and with some properties that we will need for our discussion in Section 2.5. Their example 3 illustrates that a crisp act may not be unambiguous if it is expected that two acts which induce the same partition of the state space Ω have to be either both ambiguous or both unambiguous.

Definition 2.2.5 ($\succsim$-permutation). *An act $g \in \mathfrak{F}$ is a $\succsim$-permutation of another act $f \in \mathfrak{F}$ if:*

(i) for each $\omega \in \Omega$ there exists $\omega' \in \Omega$ such that $f(\omega) \sim g(\omega')$;

(ii) for each $\omega \in \Omega$ there exists $\omega' \in \Omega$ such that $g(\omega) \sim f(\omega')$;

(iii) for each ω, $\omega' \in \Omega$, $f(\omega) \sim f(\omega')$ if and only if $g(\omega) \sim g(\omega')$.

Definition 2.2.6 ($\succsim$-reduction). *An act $g \in \mathfrak{F}$ is* reduced *if $g(\omega) \sim g(\omega')$ implies $g(\omega) = g(\omega')$. A* $\succsim$-reduction *g of f is a reduced act $g = \{x_1, A_1; \cdots ; x_n, A_n\}$, with $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n$ and $\{A_1, \cdots , A_n\}$ a partition of Ω in Σ such that $g(\omega) \sim f(\omega)$ for all $\omega \in \Omega$.*

Definition 2.2.7 (Unambiguous act). *An act $f \in \mathfrak{F}$ is unambiguous if every $\succsim$-permutation of f is crisp.*

Definition 2.2.8 (Unambiguous event). *An event $E \in \Sigma$ is unambiguous if the unambiguous acts are measurable with respect to E.*

The class of all unambiguous events is denoted by Λ. It is a finite λ-system (CGMMS, Corollary 14) that is: (i) $\Omega \in \Lambda$; (ii) if $A \in \Lambda$ then $A^{\mathsf{c}} \in \Lambda$; (iii) if A, $B \in \Lambda$ and $A \cap B = \emptyset$ then $A \cup B \in \Lambda$. We retain the following intuitive characterisations for an unambiguous event and an unambiguous act:

Proposition 2.2.9 (CGMMS, Proposition 14). *An event $A \in \Sigma$ is unambiguous if and only if $\mathbf{P}(A) = \mathbf{Q}(A)$ for all $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q} \in \mathscr{C}$.*

Proposition 2.2.10 (CGMMS, Appendix D.3 (vii)). *$f \in \mathfrak{F}$ is unambiguous if and only if there exists a $\succsim$-reduction $\{x_i, A_i\}_{i=1}^n$ of f with $\{A_1, \cdots , A_n\}$ a partition of Ω in Λ.*

2.3 Crisp fair gambles

From now on, we suppose that the set of priors $\mathscr{C}$ and the class of unambiguous events Λ have been obtained from an MBA preference, and that a vNM utility function has been chosen so that $0 \in u(X)$.

The unambiguous preference relation is not necessarily antisymmetric, that is $f \succsim^* g$ and $g \succsim^* f$ does not imply that $f = g$ but only implies that $\int u \circ f \, \mathrm{d}\mathbf{P} = \int u \circ g \, \mathrm{d}\mathbf{P}$ for all $\mathbf{P} \in \mathscr{C}$. If f and g are not equal and if the difference $f - g$ or $g - f$ is an act k in $\mathcal{F}$, this act is such that $\int u \circ k \, \mathrm{d}\mathbf{P} = 0$ for all $\mathbf{P} \in \mathscr{C}$. This justifies the following definition:

Definition 2.3.1. *A* crisp fair gamble *is a crisp act whose expected utility is 0 under all probabilities in the set of priors.*

The first properties of crisp fair gambles are summarised in the following proposition.

Proposition 2.3.2. *For any f, $k \in \mathcal{F}$ such that k is a crisp fair gamble:*

(i) for any $\lambda \in (0, 1]$, $\lambda f + (1 - \lambda)k \sim \lambda f$;

(ii) for any $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $f + \lambda k \in \mathcal{F}$, $f + \lambda k \sim f$;

(iii) especially, for any $\lambda \in (0, 1]$ and for any $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $\lambda k \in \mathcal{F}$, $k \sim \lambda k$.

Proof: (i) Denote by x_0 the constant act in $\mathcal{F}$ such that $u(x_0) = 0$. By definition, k is a crisp fair gamble if and only if $k \sim^* x_0$. That is for all $f \in \mathcal{F}$ and $\lambda \in (0, 1]$, $\lambda f + (1 - \lambda)k \sim \lambda f + (1 - \lambda)x_0$. Using representation (2.2), this is equivalent to $I_u(\lambda u \circ f + (1 - \lambda)u \circ k) = I_u(\lambda u \circ f + (1 - \lambda)u(x_0)) = I_u(\lambda u \circ f)$, that is $\lambda f + (1 - \lambda)k \sim \lambda f$.

(ii) For all $\mathbf{P} \in \mathscr{C}$, $\int u \circ (f + \lambda k) \, \mathrm{d}\mathbf{P} = \int u \circ f \, \mathrm{d}\mathbf{P}$, that is $f + \lambda k \sim^* f$, which implies $f + \lambda k \sim f$ (taking $\lambda = 1$ in Definition 2.2.2).

(iii) Take $f = k$ in the two previous propositions. ■

The DM is therefore indifferent to the scaling of a crisp fair gamble and to the addition of any crisp fair gamble. But the variance of λk is different from the variance of k and the variance of $f + k$ is different from the variance of f. Therefore, as discussed in the introduction, this behaviour is at odds with Mean-Variance preferences and more generally with what can be assumed from the rational behaviour of an investor in risky assets. It then seems desirable to impose that :

Axiom 2.2 (No crisp fair gamble). *The only crisp fair gamble is the constant act x_0 whose utility is 0.*

We want to stress that this does not seem a very demanding axiom in a financial context where the concern is for monetary outcomes only. These, in an Anscombe-Aumann type framework, have to be modelled as degenerate horse lotteries or *purely subjective* acts. We use here MMR, Section 3.6's definition of *monetary acts*: X is the set of all finitely supported probabilities on $\mathbb{R}$ and a monetary act f represents a random variable S by associating to any state $\omega \in \Omega$ a degenerate lottery $\delta_{S(\omega)}$. The vNM utility function u is the expected utility according to this probability, that is: $u \circ f(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(x)\delta_{S(\omega)} = \tilde{u}(S(\omega))$ where $\tilde{u}$ is the utility function for monetary prizes. If, for example, $\tilde{u}$ is quadratic, a crisp fair gamble is an act such that $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[S] = \alpha\,\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[S^2]$ for all $\mathbf{P} \in \mathscr{C}$, with α a parameter independent of the choice of the prior. It looks very unlikely that an asset can have this property if the set of priors is not reduced to a singleton or if the random variable is not constant.

In the remaining of this paper, we explore some implications of the No crisp fair gamble Axiom by proving some relations between crisp acts and the geometry of the set of priors.

2.4 Crisp fair gambles in the space of utility profiles

We will assume from now on that the space of utility profiles is $B_0(\Sigma)$. This allows to avoid some technicalities and is motivated by two considerations.

First, the function I_u of Proposition 2.2.1 is defined over the set of utility profiles $B_0(\Sigma, u(X))$ which is a subset of $B_0(\Sigma)$. When I_u is homogeneous, as is the case with the Maxmin Expected Utility of Gilboa et Schmeidler (1989), this function extends uniquely to $B_0(\Sigma)$ and to $B(\Sigma)$ by continuity. When I_u is not homogeneous but is constant additive, as is the case with for Variational Preferences, it has a unique minimal extension to $B_0(\Sigma, u(X)) + \mathbb{R}$ (Dolecki et Greco, 1995) but this is not enough to prove the unicity of the representation. To prove this unicity with the Variational Preferences, and the more general Uncertainty Averse Preferences, where I_u is not even a niveloïd, the following axiom, which implies that $u(X) = \mathbb{R}$, need to be satisfied :

Axiom 2.3 (Unboundedness). *For every $x \succ y$ in X there are z, $z' \in X$ such that*

$$\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}y \succsim x \succ y \succsim \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z'.$$

Second, our final interest is in monetary acts, as they have been defined in the previous section, for which this axiom vacuously holds and for which the set of acts $\mathcal{F}$ itself can be identified with $B_0(\Sigma)$.

2.4.1 Decomposition of crisp acts

Define the sets:

$$\begin{aligned}\mathtt{K} &\stackrel{\text{def}}{=} \{a \in B_0(\Sigma) \mid \text{ there exists } \alpha \in \mathbb{R} \text{ such that } \langle a, \mathbf{P}\rangle = \alpha \text{ for all } \mathbf{P} \in \mathscr{C}\}\\ \mathtt{P} &\stackrel{\text{def}}{=} \{a \in B_0(\Sigma) \mid \langle a, \mathbf{P}\rangle \geqslant 0 \text{ for all } \mathbf{P} \in \mathscr{C}\}\end{aligned}$$

It is immediate that $\mathtt{K}$ is a subspace of $B_0(\Sigma)$ and that $f \in \mathcal{F}$ is crisp if and only if $u \circ f \in \mathtt{K}$.

$\mathtt{P}$ can be written as the intersection of closed half spaces: $\mathtt{P} = \bigcap_{\mathbf{P}\in\mathscr{C}} \mathsf{H}^{+}_{\mathbf{P},0}$, therefore it is a closed and convex set. It is also a cone which contains the origin, then, when considered as the cone of positive elements, it defines a partial order on $B_0(\Sigma)$ (Ekeland et Témam, 1999, Chapter III.5):

$$a \geqslant^* b \iff a - b \in \mathtt{P}$$

It holds that $f \succsim^* g$ if and only if $u \circ f \geqslant^* u \circ g$.

Define the set:

$$\mathtt{L} \stackrel{\text{def}}{=} \mathtt{P} \cap -\mathtt{P}.$$

It is the lineality space of $\mathtt{P}$, that is the largest subspace contained in $\mathtt{P}$ (Rockafellar, 1970, p. 65). It holds that k is a crisp fair gamble if and only if $u \circ k \in \mathtt{L}$. The assumption that the only crisp fair gamble is the constant act x_0 is then equivalent to the assumption that the cone $\mathtt{P}$ is pointed ($l \in \mathtt{P} \cap -\mathtt{P}$ implies that $l = 0 \cdot \mathbf{1}_\Omega$) and that the partial order $\geqslant^*$ defined by this pointed cone $\mathtt{P}$ is antisymmetric.

As an easy consequence of Proposition 2.3.2 we obtain the following property:

Corollary 2.4.1. *The function $I_u \colon B_0(\Sigma) \to \mathbb{R}$ of Proposition 2.2.1 is constant in any directions in $\mathtt{L}$ and especially is null over $\mathtt{L}$.*

Proof: Let $a \in B_0(\Sigma)$ and $l \in \mathtt{L}$. There are $f, k \in \mathcal{F}$ such that $a = u \circ f$ and $k = u \circ l$ is a crisp fair gamble. Therefore by Proposition 2.3.2, $f + k \sim f$ that is $I_u(a + l) = I_u(a)$. Moreover, as $k \sim x_0$ and I_u is normalized, $I_u(l) = u(x_0) = 0$. ∎

With another slight abuse of notation, denote by $X \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cdot \mathbf{1}_\Omega$ the subspace of constant functions in $B_0(\Sigma)$.

Proposition 2.4.2. *The subspace of crisp utility profiles is the (internal) direct sum of the subspace of crisp fair gambles utility profiles and of the subspace of constant utility profiles:*

$$\mathtt{K} = \mathtt{L} \oplus X.$$

Proof: First $\mathtt{L} \cap X = \{0 \cdot \mathbf{1}_\Omega\}$. Second, for any $a \in \mathtt{K}$, there exists by definition $\alpha \in \mathbb{R}$ such that for all $\mathbf{P} \in \mathscr{C}$, $\langle a, \mathbf{P} \rangle = \alpha$. Define $l = a - \alpha \mathbf{1}_\Omega$ which is such that $\langle l, \mathbf{P} \rangle = 0$ for all $\mathbf{P} \in \mathscr{C}$ hence $l \in \mathtt{L}$. Now if there exist l, $l' \in \mathtt{L}$ and α, $\alpha' \in \mathbb{R}$ such that $a = l + \alpha \mathbf{1}_\Omega = l' + \alpha' \mathbf{1}_\Omega$ we would immediately have for any $\mathbf{P} \in \mathscr{C}$, $\langle a, \mathbf{P} \rangle = \alpha = \alpha'$ hence $a - a = l - l' = 0 \cdot \mathbf{1}_\Omega$. Therefore the decomposition is unique and $\mathtt{K}$ is the algebraic internal direct sum of $\mathtt{L}$ and X. But $\mathtt{L}$ is the intersection of closed sets and X is a finite dimensional subspace of a normed space hence both are closed, which concludes (Megginson, 1998, Proposition 1.8.7 and Definition 1.8.8).■

This implies that any crisp act can be uniquely decomposed as the sum of a crisp fair gamble and a constant act. Therefore, imposing the No crisp fair gamble Axiom, that is restricting the subspace of crisp utility profiles to the utility profile of the constant act x_0, which is the null function in $B_0(\Sigma)$, is equivalent to imposing that the only crisp acts are the constant acts.

2.4.2 Crisp acts and the set of priors in finite dimension

In this section, we assume that the state space is finite dimensional with $|\Omega| = n$. Monetary acts and probabilities are then represented by vectors in $\mathbb{R}^n$. We can state our main result:

Theorem 2.4.3. *Let $\mathscr{V}$ be the subspace parallel to the affine hull of the set of priors.*

(i) $\mathtt{L} = (\operatorname{span} \mathscr{C})^\perp$,

(ii) $\mathtt{K} = \mathscr{V}^\perp$,

Proof: See appendix 2.A.1. ■

The first point of this theorem states that the subspace of crisp fair gambles utility profiles and the linear span of the set of priors are orthogonal complements in $\mathbb{R}^n$, therefore non constant crisp fair gambles exist if and only if the set of priors is contained in a subspace of a strictly lower dimension than n. The second, and equivalent, point states that the subspace of crisp utility profiles and the subspace parallel to the affine hull of the set of priors are orthogonal complements, therefore, non constant crisp fair gambles exist if and only if the affine hull of the set of priors is strictly included in the affine hull of the $n-1$ simplex. To conclude, the No Crisp Fair Gamble Axiom imposes that there exist no directions along which the set of priors, seen as a subset of the affine hull of the $n-1$ simplex, is "flat".

2.4.3 Examples in finite dimension

Ellsberg's urn.

The three colors Ellsberg's urn contains 30 red balls and 60 blue and green balls. Utility profiles of acts are vectors $x = (x_R, x_B, x_G)^\mathsf{T}$ in $\mathbb{R}^3$. The set of priors is described by $\mathscr{C} = \mathrm{co}\big\{(\frac{1}{3}, \underline{\alpha}, \frac{2}{3} - \underline{\alpha})^\mathsf{T}, (\frac{1}{3}, \overline{\alpha}, \frac{2}{3} - \overline{\alpha})^\mathsf{T}\big\}$ for any $\underline{\alpha} < \overline{\alpha}$ with $\underline{\alpha}, \overline{\alpha} \in [0, 2/3]$.

To verify point (i) of Theorem 2.4.3, we calculate on the one hand the linear span of $\mathscr{C}$ which is the set of points such that there exist a, $b \in \mathbb{R}$ with:

$$\begin{cases} x_R = \frac{1}{3}(a+b) \\ x_B = a\underline{\alpha} + b\overline{\alpha} \\ x_G = \frac{2}{3}(a+b) - a\underline{\alpha} - b\overline{\alpha} \end{cases} \iff x_R - \frac{1}{2}x_B - \frac{1}{2}x_G = 0$$

that is $\operatorname{span}\mathscr{C}$ is in the plane orthogonal to the vector $(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^\mathsf{T}$. On the other hand, the cone of positive elements is

$$\mathtt{P} = \big\{x \mid \tfrac{1}{3}x_R + \tfrac{2}{3}x_G + \alpha(x_B - x_G) \geqslant 0,\ \forall \alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]\big\}$$

and its lineality space is

$$\begin{aligned} \mathtt{L} &= \big\{x \mid \tfrac{1}{3}x_R + \tfrac{2}{3}x_G + \alpha(x_B - x_G) = 0,\ \forall \alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]\big\} \\ &= \big\{x \mid x_R = -2x_G \text{ and } x_B = x_G\big\} \\ &= \operatorname{span}\big\{(1, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^\mathsf{T}\big\}\,. \end{aligned}$$

hence it holds that $\mathtt{L} = (\operatorname{span}\mathscr{C})^\perp$.

To verify point (ii) of Theorem 2.4.3, we calculate, on the one hand, the affine hull of $\mathscr{C}$ from the same equations as the ones used for the linear span with the added condition that $a + b = 1$. This gives $x_R = \frac{1}{3}$ and $x_B + x_G = \frac{2}{3}$. The subspace that directs this set is the line given by $x_R = 0$ and $x_B = -x_G$. On the other hand, the subspace of crisp utility profiles is obtained by the equation $\mathtt{L} \oplus X$ that is

$$\mathtt{K} = \operatorname{span}\big\{(1, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^\mathsf{T}, (1, 1, 1)^\mathsf{T}\big\}$$

which is the plane orthogonal to $(0, 1, -1)^{\mathsf{T}}$ hence it holds that $\mathtt{K} = \mathscr{V}^{\perp}$.

CGMMS's example 3

Also set in a three states space where utility profiles of acts are vectors $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathsf{T}}$ in $\mathbb{R}^3$, the set of priors is given by $\mathscr{C} = \mathrm{co}\big\{(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12})^{\mathsf{T}}, (\frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{1}{3})^{\mathsf{T}}\big\}$ from which we obtain that

$$\begin{aligned}
\operatorname{span}\mathscr{C} &= \{x \mid 13x_1 + x_2 - 11x_3 = 0\} \\
\mathscr{V} &= \operatorname{span}\big\{(1, -2, 1)^{\mathsf{T}}\big\} \\
\mathtt{L} &= \operatorname{span}\big\{(13, 1, -11)^{\mathsf{T}}\big\} \\
\mathtt{K} &= \operatorname{span}\big\{(13, 1, -11)^{\mathsf{T}}, (1, 1, 1)^{\mathsf{T}}\big\}
\end{aligned}$$

which agree with point (i) and (ii) of Theorem 2.4.3.

2.4.4 Crisp acts and the set of priors, the infinite dimensional case

We now extend this theorem to the infinite dimensional case. This extension is motivated by applications to finance of the axiomatic models of decision under ambiguity, applications for which the functional spaces used cannot be restricted to the finite dimensional ones.

We recall that the space $ba(\Sigma)$ endowed with the total variation norm is a Banach space and that the norm $\|\mu\|_{ba} = \sup_{E \in \Sigma} |\mu(E)|$ is equivalent to this total variation norm (Dunford et Schwartz, 1988, p. 161). The weak* topology on $ba(\Sigma)$ is the topology $\sigma(ba(\Sigma), B_0(\Sigma))$, that is the smallest topology for which the linear functionals $\mu \mapsto \langle a, \mu \rangle$ are continuous for all $a \in B_0(\Sigma)$. Next are some definitions which extend the idea of orthogonality to dually paired spaces.

Definition 2.4.4 (Annihilators). *The* annihilator *of* $\mathscr{C}$ *in* $B_0(\Sigma)$ *is the set:*

$$^{\perp}\mathscr{C} = \{a \in B_0(\Sigma) \mid \langle a, \mathbf{P} \rangle = 0 \textit{ for each } \mathbf{P} \in \mathscr{C}\}.$$

The annihilator *of* $\mathtt{L}$ *in* $ba(\Sigma)$ *is the set:*

$$\mathtt{L}^{\perp} = \{\mu \in ba(\Sigma) \mid \langle l, \mu \rangle = 0 \textit{ for each } l \in \mathtt{L}\}.$$

From the definition it is immediate that $^{\perp}\mathscr{C} = \mathtt{L}$. Theorem 2.4.6 gives an expression of $\mathtt{L}^{\perp}$ first in the case where the priors in $\mathscr{C}$ are finitely additive, and secondly in the case where they are countably additive probabilities. We recall that countable additivity of the priors can be obtained by the standard monotone continuity axiom (Chateauneuf, Maccheroni, Marinacci, et Tallon, 2005) in all the decision models that have been cited in this paper. This second expression is easier to interpret and rely on the following theorem which proves that $\operatorname{span}\mathscr{C}$ is weakly* closed when the priors are σ-additive.

Theorem 2.4.5. *If $\mathscr{C}$ is a weak* closed convex set of elements of $ca_1(\Sigma)$, then:*

(i) $\operatorname{aff}\mathscr{C}$*, the affine hull of the set $\mathscr{C}$, is closed in the weak* topology.*

(ii) $\mathscr{V}$*, the subspace parallel to the affine hull of $\mathscr{C}$, is closed in the weak* topology.*

(iii) $\operatorname{span}\mathscr{C}$*, the linear space spanned by the set $\mathscr{C}$, is closed in the weak* topology.*

Proof: See appendix 2.A.2. ■

Theorem 2.4.6. *Let $\mathscr{C}$ be a weak* closed convex subset of $ba_1(\Sigma)$ and $\mathtt{L}$ be the annihilator of $\mathscr{C}$ in $B_0(\Sigma)$, then*

(i) $\mathtt{L} = {}^{\perp}(\operatorname{span}\mathscr{C})$,

(ii) $\mathtt{L}^{\perp} = \overline{\operatorname{span}\mathscr{C}}^{w^*}$.

Let $\mathscr{C}$ be a weak closed convex subset of $ca_1(\Sigma)$. Denote by $\mathscr{V}$ the subspace which directs the affine hull of $\mathscr{C}$.*

(iii) $\mathtt{L}^{\perp} = \operatorname{span}\mathscr{C}$,

(iv) $\mathtt{K} = {}^{\perp}\mathscr{V}$ *and* $\mathtt{K}^{\perp} = \mathscr{V}$.

Proof: See appendix 2.A.3. ■

This theorem parallels Theorem 2.4.3 replacing orthogonal complements by annihilators. We can now explore the consequences of imposing Axiom 2.2. With the No Crisp Fair Gamble axiom, we have $\mathtt{L} = \{0\}$ and $\mathtt{K} = X$. Then $\mathtt{K}$ is a finite dimensional subspace of the normed vector space $B_0(\Sigma)$ hence it is complemented in $B_0(\Sigma)$ (Megginson, 1998, Theorem 3.2.18).

Definition 2.4.7. *The complement of $\mathtt{K}$ in $B_0(\Sigma)$, is denoted by $\mathtt{NC}$ and is called the* **subspace of non crisp utility profiles***.*

Finally, the idea that with Axiom 2.2, the set of priors has to extend in all directions can best be illustrated by the following corollary:

Corollary 2.4.8. *If the No crisp fair gamble axiom holds then:*

(i) $\operatorname{span}\mathscr{C}$ *and $ba(\Sigma)$ are isometrically isomorphic,*

(ii) $\mathscr{V}$ *and* $\mathtt{NC}^*$ *are isometrically isomorphic.*

Proof: (i) there exists an isometric isomorphism between $(B_0(\Sigma)/\mathtt{L})^* = (B_0(\Sigma))^* \simeq ba(\Sigma)$ and $\mathtt{L}^\perp$ (Megginson, 1998, Theorem 1.10.17).

(ii) there exists an isometric isomorphism between $\mathtt{NC}$ and $B_0(\Sigma)/\mathtt{K}$ (Megginson, 1998, Corollary 3.2.16) and between $(B_0(\Sigma)/\mathtt{K})^*$ and $\mathtt{K}^\perp = \mathscr{V}$. ■

2.5 The link with the unambiguous acts

Define the set:

$$\mathtt{U} \overset{\text{def}}{=} \left\{ a \in B_0(\Sigma) \,\middle|\, a = \sum_{i \in I} a_i \mathbf{1}_{A_i}, \text{ with } \begin{array}{l} \{a_i\}_{i\in I} \text{ a finite family of reals} \\ \{A_i\}_{i \in I} \text{ a finite partition of } \Omega \text{ in } \Lambda \end{array} \right\}$$

f is unambiguous if and only if $u \circ f \in \mathtt{U}$.

Because for all $A_i \in \Lambda$, $\mathbf{1}_{A_i} \in \mathtt{K}$, $\mathtt{U}$ is a subset of $\mathtt{K}$ but the inclusion can be strict as shown by CGMMS's example 3 (reproduced in section 2.4.3 below). It is also a subset of the linear span $\operatorname{span}\{\mathbf{1}_{A_i}, A_i \in \Lambda\}$. In the general case, $\mathtt{U}$ is a symmetric cone, not convex, nonetheless, we have the following property:

Proposition 2.5.1. $\mathtt{U}$ *is a subspace of* $B_0(\Sigma)$ *if and only if* Λ *is an algebra. Then* $\mathtt{U} = \operatorname{span}\{\mathbf{1}_{A_i}, A_i \in \Lambda\}$.

Proof: Let $a = \sum_{i\in I} a_i \mathbf{1}_{A_i}$ and $b = \sum_{j \in J} b_j \mathbf{1}_{B_j}$ be two elements of $\mathtt{U}$ with $\{A_i\}_{i\in I}$ and $\{B_j\}_{j\in J}$ two finite partitions of Ω in Λ. Then $a+b = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(a_i+b_j)\mathbf{1}_{A_i \cap B_j}$ where $\{A_i \cap B_j\}_{i\in I, j \in J}$ is also a finite partition of Ω. Therefore $a+b$ is in $\mathtt{U}$ if and only if $A_i \cap B_j$ is in Λ for all i and j which makes it a π-system hence an algebra (Aliprantis et Border, 2006, Lemma 4.10). Now let $a \in \operatorname{span}\{\mathbf{1}_{A_i}, A_i \in \Lambda\}$, that is $a = \sum_{i \in I} a_i \mathbf{1}_{A_i}$ and let $\{B_j\}_{j\in J}$ be the partition of Ω generated by a. Each B_j writes as some finite unions and intersections of A_i hence it is in the algebra Λ. ■

For example, Λ is an algebra is $\succsim$ is a CEU preference (CGMMS, p. 357). We can now state the link with the crisp fair gambles.

Theorem 2.5.2. *In order to have no crisp fair gambles, it is necessary that all non trivial events in* Σ *are ambiguous.*

Proof: As $X \subset \mathtt{U} \subset \mathtt{K}$, if the subspace $\mathtt{K}$ is reduced to the constant line, $\mathtt{U}$ is also reduced to the same subspace of dimension 1 and Λ can only be the algebra $\{\Omega, \emptyset\}$. ■

Completing the examples of section 2.4.3, we have that, for the Ellsberg's urn, the class of unambiguous events is $\Lambda = \{\Omega, \emptyset, \{x_R\}, \{x_B, x_G\}\}$ which is an algebra. The set, which is a subspace, of unambiguous acts is then

$$\begin{aligned} \mathtt{U} &= \left\{a\mathbf{1}_{\{x_R\}} + b\mathbf{1}_{\{x_B, x_G\}},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \operatorname{vect}\left\{(1,0,0)^\top, (0,1,1)^\top\right\} \end{aligned}$$

This is the plane orthogonal to $(0,1,-1)^\top$ and $\mathtt{K}$ and $\mathtt{U}$ are the same subspace. In the case of CGMMS's example 3, there are no non trivial unambiguous events and $\Lambda = \{\Omega, \emptyset\}$ so that $\mathtt{U}$ is reduced to the constant acts.

2.6 Conclusion

The axiomatic models of decision which model ambiguity through a set of priors theoretically allow for the existence of Crisp Fair Gambles whose expected utility is nul whichever of the prior is used. But, in these models, the DM is indifferent to the addition of such acts whose existence would then be at odds with a preference taking into account the variance of the prospects.

As a consequence, we would like to impose that these Crisp Fair Gambles don't exist, at least when considering financial applications such as the Monotone Mean–Variance preferences. In this paper, we have shown that it is then necessary that there are no unambiguous events and that the set of priors has no direction of flatness. The knowledge of the environment and the attitude of the DM must not allow the use of Expected Utility for any other prospects than the constant ones. In the theory of finance, this has a direct consequence for the introduction of ambiguity in the models as the only asset that can be perceived to be unambiguous by the investor is the riskless asset.

2.A Proofs

Remark 2.A.1 (Affine sets). Any affine set can be obtained from a subspace and a translation : let $\mathscr{V}$ be the subspace parallel the affine hull of the set $\mathscr{C}$: $\mathscr{V} = \operatorname{aff}\mathscr{C} - \operatorname{aff}\mathscr{C} = \{x^* - y^* \mid x^* \in \operatorname{aff}\mathscr{C}, y^* \in \operatorname{aff}\mathscr{C}\}$. Let x_0^* be any element of $\mathscr{C}$. Any $v^* \in \mathscr{V}$ is of the form $v^* = \sum_{i\in I}\alpha_i x_i^* - \sum_{j\in J}\beta_j y_j^*$ where I and J are finite subset of $\mathbb{N}$ and $\sum_{i\in I}\alpha_i = \sum_{j\in J}\beta_j = 1$. But v^* can also be written as $w^* - x_0^*$ with $w^* = \sum_{i\in I}\alpha_i x_i^* - \sum_{j\in J}\beta_j y_j^* + x_0^*$ an element of $\operatorname{aff}\mathscr{C}$ as the sum of the coefficients is equal to one. Therefore $\mathscr{V} = \operatorname{aff}\mathscr{C} - x_0^*$ for any $x_0^* \in \mathscr{C}$.

2.A.1 Proof of Theorem 2.4.3

(i) Let $l \in \mathtt{L}$ and $x^* \in \operatorname{span}\mathscr{C}$, that is there exist $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ a finite family of reals and $\{p_i\}_{i\in I}$ a finite family of elements of $\mathscr{C}$ such that $x^* = \sum_{i\in I}\alpha_i p_i$. Then $l \cdot x^* = \sum_{i\in I}\alpha_i(p_i \cdot l) = 0$ and $\mathtt{L} \subset (\operatorname{span}\mathscr{C})^\perp$. Now take $x \in (\operatorname{span}\mathscr{C})^\perp$, then $x \cdot x^* = 0$ for any $x^* \in \operatorname{span}\mathscr{C}$ especially $x \cdot p = 0$ for all $p \in \mathscr{C}$ hence $(\operatorname{span}\mathscr{C})^\perp \subset \mathtt{L}$.

(ii) Let $x \in \mathtt{K}$, there exists $\gamma \in \mathbb{R}$ such that $x \cdot p = \gamma$ for any $p \in \mathscr{C}$. Any x^* in $\mathscr{V}$ can be written $x_1^* - x_2^*$ with x_1^* and x_2^* in $\operatorname{aff}\mathscr{C}$. Therefore there exist $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ and $\{\beta_j\}_{j\in J}$ two finite families of reals such that $\sum_{i\in I}\alpha_i = 1$, and $\sum_{j\in J}\beta_j = 1$ and $\{p_i\}_{i\in I}$ and $\{q_j\}_{j\in J}$ two finite families of elements of $\mathscr{C}$ such that $x_1^* = \sum_{i\in I}\alpha_i p_i$ and $x_2^* = \sum_{j\in J}\beta_j p_j$. Then $x \cdot x^* = \sum_{i\in I}\alpha_i(x\cdot p_i) - \sum_{j\in J}\beta_j(x \cdot p_j) = \gamma\sum_{i\in I}\alpha_i - \gamma\sum_{j\in J}\beta_j = 0$ and $x \in \mathscr{V}^\perp$. Now suppose $x \in \mathscr{V}^\perp$, then $x \cdot x^* = 0$ for any x^* in $\mathscr{V}$. Let p_0 be any prior in $\mathscr{C}$ and set $\gamma = x \cdot p_0$. For any $p \in \mathscr{C}$, $p - p_0$ is in $\mathscr{V}$, hence $x \cdot (p - p_0) = 0$, that is $x \cdot p = \gamma$ and $x \in \mathtt{K}$. ∎

2.A.2 Proof of Theorem 2.4.5

The proof of this theorem needs the following lemmata.

Lemma 2.A.2. *Let $\mathscr{C}$ be a non-singleton weak* closed convex set of elements of $ba_1(\Sigma)$. Denote by $\operatorname{ri}\mathscr{C}$ the relative weak* interior of the set $\mathscr{C}$,* i.e. *its interior in the relative topology of $\operatorname{aff}\mathscr{C}$ generated by the weak* topology of $ba(\Sigma)$. Denote by $\operatorname{rbd}\mathscr{C} \overset{def}{=} \mathscr{C} \setminus \operatorname{ri}\mathscr{C}$, its relative boundary. Let $\mathbf{P}_0$ be any probability in $\operatorname{ri}\mathscr{C}$.*

(i) For any $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}_0$ in $\mathscr{C}$ and $0 \leqslant \lambda < 1$, the probability $\mathbf{Q} = \lambda\mathbf{P} + (1-\lambda)\mathbf{P}_0$ is in $\operatorname{ri}\mathscr{C}$.

(ii) Let $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}_0$ be a probability in $\mathscr{C}$. The half-ray emanating from $\mathbf{P}_0$: $\{\lambda\mathbf{P} + (1-\lambda)\mathbf{P}_0$ with $\lambda \geqslant 0\}$ has a unique intersection with the relative boundary $\operatorname{rbd}\mathscr{C}$.

(iii) *For any measure* μ *in* $\operatorname{aff}\mathscr{C}$, *there exist a probability* $\mathbf{P} \in \operatorname{rbd}\mathscr{C}$ *and an* $\alpha \in \mathbb{R}^+$, *such that* $\mu = \alpha\mathbf{P} + (1-\alpha)\mathbf{P}_0$ *or* $\mu - \mathbf{P}_0 = \alpha(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0)$.

Proof: A basis for the weak* topology is given by the sets of the form $B(\mu, A) = \{\nu \mid \nu \in ba(\Sigma), |\langle \nu - \mu, a\rangle| < 1 \text{ for each } a \in A\}$ with $\mu \in ba(\Sigma)$ and A a finite subset of $B(\Sigma)$ (Megginson, 1998, Proposition 2.4.12). Therefore if $\mathbf{P}_0 \in \operatorname{ri}\mathscr{C}$, there exists A_0, a finite subset of $B(\Sigma)$, such that $(B(\mathbf{P}_0, A_0) \cap \operatorname{aff}\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}$.

(i) For $\lambda \in [0,1)$, define the set $U \stackrel{\text{def}}{=} (1-\lambda)B(\mathbf{P}_0, A_0) + \lambda\mathbf{P}$, which is a subset of the convex $\mathscr{C}$. Any $\mathbf{Q}' \in U$ is such that $\mathbf{Q}' = (1-\lambda)\mathbf{P}' + \lambda\mathbf{P}$ with $\mathbf{P}' \in B(\mathbf{P}_0, A_0)$, that is $|\langle \mathbf{P}' - \mathbf{P}_0, a\rangle| < 1$ for each $a \in A_0$. This implies that $|\langle (1-\lambda)\mathbf{P}' - (1-\lambda)\mathbf{P}_0, a\rangle| < (1-\lambda)$, hence $|\langle (1-\lambda)\mathbf{P}' + \lambda\mathbf{P} - \lambda\mathbf{P} - (1-\lambda)\mathbf{P}_0, a\rangle| < (1-\lambda)$ or $\left|\left\langle \mathbf{Q}' - \mathbf{Q}, \frac{1}{1-\lambda}a\right\rangle\right| < 1$, therefore $U = B\left(\mathbf{Q}, \frac{1}{1-\lambda}A_0\right) \subset \mathscr{C}$ and $\mathbf{Q} \in \operatorname{ri}\mathscr{C}$.

(ii) First note that the half-line is in the affine hull of $\mathscr{C}$. Then, the previous point proves that this half-line has at most one intersection with the relative boundary of $\mathscr{C}$. Finally, let $E \in \Sigma$ be such that $\mathbf{P}(E) \neq \mathbf{P}_0(E)$, and suppose $\mathbf{P}(E) - \mathbf{P}_0(E) < 0$ (otherwise consider E^{c}) to show that, for a sufficiently large λ, $\mathbf{Q}(E) = \lambda(\mathbf{P}(E) - \mathbf{P}_0(E)) + \mathbf{P}_0(E) < 0$, hence $\mathbf{Q} \notin ba_1(\Sigma) \supset \mathscr{C}$ which concludes.

(iii) Let $\mu \in \operatorname{aff}\mathscr{C}$. If $\mu = \mathbf{P}_0$, the result holds with $\alpha = 0$ and any $\mathbf{P}$ in the relative boundary of $\mathscr{C}$. Now suppose $\mu \neq \mathbf{P}_0$. We want to find a $\lambda > 0$ such that the set function $\mathbf{Q} = \lambda\mu + (1-\lambda)\mathbf{P}_0$, which is in $\operatorname{aff}\mathscr{C}$, is in $B(\mathbf{P}_0, A_0)$, that is for all $a \in A_0$, $|\langle \lambda\mu + (1-\lambda)\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_0, a\rangle| = |\lambda| \cdot |\langle \mu - \mathbf{P}_0, a\rangle| < 1$. This is obtained for any $0 < \lambda < (\sup_{a\in A_0} |\langle \mu - \mathbf{P}_0, a\rangle|)^{-1}$. Then $\mathbf{Q} \in (B(\mathbf{P}_0, A_0) \cap \operatorname{aff}\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}$. From the previous point, there exists a unique $\lambda' > 0$ such that $\mathbf{P} = \lambda'\mathbf{Q} + (1-\lambda')\mathbf{P}_0 \in \operatorname{rbd}\mathscr{C}$. We finally have $\mu = \frac{1}{\lambda}\mathbf{Q} + (1 - \frac{1}{\lambda})\mathbf{P}_0$ and $\mathbf{Q} = \frac{1}{\lambda'}\mathbf{P} + (1 - \frac{1}{\lambda'})\mathbf{P}_0$. Setting $\alpha = \frac{1}{\lambda\lambda'}$ gives the result. ■

Lemma 2.A.3. *Let* $\mathscr{C}$ *be a weak* closed convex set of elements of* $ca_1(\Sigma)$*:*

(i) $\mathscr{C}$ *and* $\operatorname{rbd}\mathscr{C}$ *are weak* sequentially compact.*

(ii) *Any weak* convergent sequence in* $\operatorname{aff}\mathscr{C}$ *or* $\operatorname{span}\mathscr{C}$ *has its limit in* $ca(\Sigma)$.

(iii) *Weak* convergence of a sequence in* $\mathscr{C}$, $\operatorname{rbd}\mathscr{C}$, $\operatorname{aff}\mathscr{C}$ *or* $\operatorname{span}\mathscr{C}$ *is equivalent to its set-wise convergence.*

Proof: (i) As $\|\mathbf{P}\|_{ba} = 1$ for all $\mathbf{P} \in \mathscr{C}$, $\mathscr{C}$ and $\operatorname{rbd}\mathscr{C}$ are norm bounded. By definition $\mathscr{C}$ is weak* closed and $\operatorname{rbd}\mathscr{C} = \mathscr{C} \setminus \operatorname{ri}\mathscr{C} = \mathscr{C} \cap \overline{\operatorname{aff}\mathscr{C} \setminus \mathscr{C}}^{w^*}$ being the intersection of weak* closed set, is also weak* closed, therefore both are weakly* compact (Dunford et Schwartz, 1988, Corollary V.4.3). As they are subsets of $ca(\Sigma)$ this is equivalent to their weak* sequential compactness (Gänssler, 1971, Corollary 2.17).

(ii) Let $\{\mu_n\}$ be a sequence in $\operatorname{aff}\mathscr{C}$ which converges weakly* to $\mu \in ba(\Sigma)$. It is clear that any $\mu_n \in \operatorname{aff}\mathscr{C}$ being the finite sum of σ-additive measures is itself σ-additive hence $\{\mu_n\} \subset \operatorname{aff}\mathscr{C} \subset ca(\Sigma)$. The weak* convergence of $\{\mu_n\}$ means that, for all $a \in B(\Sigma)$, $\{\langle \mu_n, a\rangle\}$ converges to $\langle \mu, a\rangle$. Take the functions a to be the characteristic functions of sets in Σ to obtain that, for each $E \in \Sigma$, $\mu(E) = \lim_n \mu_n(E)$ exists. A corollary of the Vitali-Hahn-Saks Theorem (Dunford et Schwartz, 1988, Corollary III.7.4) then concludes that μ is countably additive and that the countable additivity of μ_n is uniform in $n = 1, 2, \cdots$.

(iii) Proposition 2.15 in Gänssler (1971) states that in $ca(\Sigma)$, weak* convergence of a sequence is equivalent to its set-wise convergence, which concludes with the previous point. ∎

Proof (of Theorem 2.4.5): First, note that if the set of priors is a singleton: $\mathscr{C} = \{\mathbf{P}_0\}$ then $\operatorname{aff}\mathscr{C} = \operatorname{span}\mathscr{C} = \{\mathbf{P}_0\}$ and the results hold trivially. We now suppose that there is more than one prior in $\mathscr{C}$.

(i) Let $\{\mu_n\}$ be a sequence in $\operatorname{aff}\mathscr{C}$ which converges weakly* to $\mu \in ca(\Sigma)$. Let $\mathbf{P}_0 \in \operatorname{ri}\mathscr{C}$ that we can choose to be different from μ if needed. By Lemma 2.A.2, there exist a sequence $\{\alpha_n\}$ in $\mathbb{R}$ and a sequence $\{\mathbf{P}_n\}$ in $\operatorname{rbd}\mathscr{C}$ such that, for all n, $\mu_n = \mathbf{P}_0 + \alpha_n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_0)$. By the weak* sequential compactness of $\operatorname{rbd}\mathscr{C}$, there exists a subsequence $\{\mathbf{P}_k\}$ of $\{\mathbf{P}_n\}$ weakly* convergent to $\mathbf{P} \in \operatorname{rbd}\mathscr{C}$. For any set function ν, denote by $\hat{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \nu - \mathbf{P}_0$, so that $\hat{\mu}_k = \alpha_k \hat{\mathbf{P}}_k \xrightarrow{\text{w}^*} \hat{\mu}$ and $\hat{\mathbf{P}}_k \xrightarrow{\text{w}^*} \hat{\mathbf{P}}$. Considering the characteristic functions of sets in Σ, this implies that for all $E \in \Sigma$, $\hat{\mu}_k(E) \to \hat{\mu}(E)$ and $\hat{\mathbf{P}}_k(E) \to \hat{\mathbf{P}}(E)$.

Let $\Sigma' \stackrel{\text{def}}{=} \{E \in \Sigma \mid \hat{\mathbf{P}}(E) \neq 0\}$. As $\mathbf{P}_0 \in \operatorname{ri}\mathscr{C}$ and $\mathbf{P} \in \operatorname{rbd}\mathscr{C}$, Σ' is not empty.

Let $E \in \Sigma'$, choose $m > 0$ such that $|\hat{\mathbf{P}}(E)| - m > 0$ and define $M = \frac{|\hat{\mu}(E)|+m}{|\hat{\mathbf{P}}(E)|-m}$. For any $\varepsilon > 0$ such that $\varepsilon \leqslant m$, the convergences of $\{\hat{\mu}_k(E)\}$ and of $\{\hat{\mathbf{P}}_k(E)\}$ imply that there exist k_1 and k_2 such that $|\hat{\mathbf{P}}_k(E) - \hat{\mathbf{P}}(E)| < \varepsilon$ for all $k \geqslant k_1$ and $|\hat{\mu}_k(E) - \hat{\mu}(E)| < \varepsilon$ for all $k \geqslant k_2$. Hence, for all $k \geqslant \max(k_1, k_2)$, $||\hat{\mathbf{P}}_k(E)| - |\hat{\mathbf{P}}(E)|| < m$ and $||\hat{\mu}_k(E)| - |\hat{\mu}(E)|| < m$, that is $|\hat{\mathbf{P}}_k(E)| > |\hat{\mathbf{P}}(E)| - m$ and $|\alpha_k \hat{\mathbf{P}}_k(E)| < |\hat{\mu}(E)| + m$ or $|\alpha_k|(|\hat{\mathbf{P}}(E)| - m) < |\alpha_k \hat{\mathbf{P}}_k(E)| < |\hat{\mu}(E)| + m$ that is $|\alpha_k| < M$. We also have

$$|\alpha_k \hat{\mathbf{P}}(E) - \hat{\mu}(E)| \leqslant |\alpha_k| \cdot |\hat{\mathbf{P}}(E) - \hat{\mathbf{P}}_k(E)| + |\alpha_k \hat{\mathbf{P}}_k(E) - \hat{\mu}(E)| < (M+1)\varepsilon$$

hence α_k converges to $\alpha = \hat{\mu}(E)/\hat{\mathbf{P}}(E)$. This is true for all $E \in \Sigma'$, therefore α has to be independent of E. Finally $\alpha_k \hat{\mathbf{P}}_k(E)$ converges to $\alpha \hat{\mathbf{P}}(E)$ for all $E \in \Sigma'$.

Now for all $E \in \Sigma \setminus \Sigma'$, $\{\hat{\mathbf{P}}_k(E)\}$ converges to 0. With the convergence of $\{\alpha_k\}$, this implies that $\{\hat{\mu}_k(E)\}$ converges also to $0 = \alpha \hat{\mathbf{P}}(E)$. Finally, we have shown that for all $E \in \Sigma$, $\{\hat{\mu}_k(E)\}$ converges to $\alpha\hat{\mathbf{P}}(E)$, that is $\{\mu_k\}$ set-wise converges to $\mathbf{P}_0 + \alpha(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0)$, hence, by Lemma 2.A.3, weak* converges to $\mathbf{P}_0 + \alpha(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0)$. Therefore $\mu = \alpha\mathbf{P} + (1-\alpha)\mathbf{P}_0$ which is in $\operatorname{aff}\mathscr{C}$ and $\operatorname{aff}\mathscr{C}$ is weakly* closed.

(ii) From remark 2.A.1, $\mathscr{V}$ can be written as $\mathscr{V} = \operatorname{aff}\mathscr{C} - \mathbf{P}_0 = \{\mu \in ba(\Sigma) \mid \exists \nu \in \operatorname{aff}\mathscr{C}, \mu = \nu - \mathbf{P}_0\}$ with $\mathbf{P}_0$ any element of $\mathscr{C}$. But then, from the previous point, $\mathscr{V}$ is the sum of a weak* closed set and a point therefore it is weakly* closed (Megginson, 1998, Proposition 2.2.9(c)).

(iii) It is a consequence of the Krein-Šmulian Theorem that the linear space spanned by a weak* closed convex subset of a Banach space is closed in the weak* topology if and only if it is closed in the norm topology (Dunford et Schwartz, 1988, Corollary V.5.9). We therefore need to prove that $\operatorname{span}\mathscr{C}$ is closed in the norm topology.

Let $\{\mu_n\}$ be a sequence in $\operatorname{span}\mathscr{C}$ which converges (strongly) to $\mu \in ba(\Sigma)$. For each n, there exist $\{\alpha_n^i\}_{i\in I_n}$, a finite family of reals and $\{\mathbf{P}_n^i\}_{i\in I_n}$, a finite family of probabilities measures in $\mathscr{C}$, such that $\mu_n = \sum_{i\in I_n} \alpha_n^i \mathbf{P}_n^i$. Denote by $\alpha_n = \sum_{i\in I_n} \alpha_n^i$. The convergence of $\{\mu_n\}$ imply that

$$\left\| \sum_{i\in I_n} \alpha_n^i \mathbf{P}_n^i - \mu \right\|_{ba} = \sup_{E\in\Sigma} \left| \sum_{i\in I_n} \alpha_n^i \mathbf{P}_n^i(E) - \mu(E) \right|$$

converges to 0. This has to be true for the event Ω hence $\{\alpha_n\}$ converges to $\alpha = \mu(\Omega)$.

If $\alpha \neq 0$, there exists a sufficiently large $n_0 \in \mathbb{N}$ such that, for all $n \geqslant n_0$, $\alpha_n \neq 0$. Write $\mu_n = \alpha_n \sum_{i\in I_n} \frac{\alpha_n^i}{\alpha_n} \mathbf{P}_n^i = \alpha_n \mathbf{P}_n$, with $\mathbf{P}_n \in \operatorname{aff}\mathscr{C}$. It holds that

$$\|\alpha\mathbf{P}_n - \mu\|_{ba} = \|\alpha\mathbf{P}_n - \alpha_n\mathbf{P}_n + \alpha_n\mathbf{P}_n - \mu\|_{ba} \leqslant |\alpha - \alpha_n| \, \|\mathbf{P}_n\|_{ba} + \|\mu_n - \mu\|_{ba}$$

But $\|\mathbf{P}_n\|_{ba} = 1$ and for all $\varepsilon > 0$, there exist $n_1 \in \mathbb{N}$ and $n_2 \in \mathbb{N}$ such that for all $n \geqslant n_1$, $|\alpha - \alpha_n| < \varepsilon/2$ and for all $n \geqslant n_2$, $\|\mu_n - \mu\|_{ba} < \varepsilon/2$. Therefore, for all $n \geqslant \max(n_0, n_1, n_2)$, $\|\alpha\mathbf{P}_n - \mu\|_{ba} < \varepsilon$ and $\{\mathbf{P}_n\}$ converges strongly to $\frac{1}{\alpha}\mu$ which is then in the closure of $\operatorname{aff}\mathscr{C}$. By the previous point, $\operatorname{aff}\mathscr{C}$ is weak* closed hence closed for the norm topology (which includes all the weak* open and closed sets) hence $\mu \in \alpha \operatorname{aff}\mathscr{C} \subset \operatorname{span}\mathscr{C}$.

If $\alpha = 0$, take a $\mathbf{P}_0 \in \mathscr{C}$ and define $\bar{\mu}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mu_n + \mathbf{P}_0$. The sequence $\{\bar{\mu}_n\}$ converges to $\bar{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \mu + \mathbf{P}_0$. Denote by $\bar{\alpha}_n = \sum_{i\in I_n} \alpha_n^i + 1$ which converges to $\bar{\alpha} = 1$ and writes $\bar{\mu}_n = \bar{\alpha}_n \left(\sum_{i\in I_n} \frac{\alpha_n^i}{\bar{\alpha}_n} \mathbf{P}_n^i + \frac{1}{\bar{\alpha}_n}\mathbf{P}_0 \right) = \bar{\alpha}_n \bar{\mathbf{P}}_n$ with $\bar{\mathbf{P}}_n \in \operatorname{aff}\mathscr{C}$. The same reasoning as above shows that $\bar{\mathbf{P}}_n$ converges to a $\bar{\mathbf{P}} \in \operatorname{aff}\mathscr{C}$ hence $\mu \in \operatorname{aff}\mathscr{C} - P_0 \subset \operatorname{span}\mathscr{C}$ (μ is indeed in the subspace parallel to $\operatorname{aff}\mathscr{C}$).

Therefore $\operatorname{span}\mathscr{C}$ is closed in the norm topology which concludes. ■

2.A.3 Proof of Theorem 2.4.6

Proof: (i) Take $l \in \mathtt{L}$ and $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{P}_i \in \operatorname{span}\mathscr{C}$. First $\langle l, \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{P}_i\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle l, \mathbf{P}_i\rangle = 0$, hence $\mathtt{L} \subset {}^{\perp}(\operatorname{span}\mathscr{C})$. Secondly, if $a \in {}^{\perp}(\operatorname{span}\mathscr{C})$ then for all finite sequences $\{\alpha_i\}$ and $\mathbf{P}_i \in \mathscr{C}$, $\langle l, \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{P}_i\rangle = 0$, especially $\langle l, \mathbf{P}_i\rangle = 0$ for all $\mathbf{P}_i \in \mathscr{C}$, hence ${}^{\perp}(\operatorname{span}\mathscr{C}) \subset \mathtt{L}$.

(ii) $\mathtt{L}^{\perp} = ({}^{\perp}(\operatorname{span}\mathscr{C}))^{\perp} = \overline{\operatorname{span}\{\mathscr{C}\}}^{w^*}$, the weak* closure of the linear hull of $\mathscr{C}$ (Megginson, 1998, Proposition 2.6.6).

(iii) This is an application of Theorem 2.4.5 to the previous point.

(iv) From Proposition 2.4.2 and point (iii), $\mathtt{K} = {}^{\perp}(\operatorname{span}\mathscr{C}) \oplus X$ so we want to prove that ${}^{\perp}(\operatorname{span}\mathscr{C}) \oplus X = {}^{\perp}\mathscr{V}$.

Let $a \in {}^{\perp}(\operatorname{span}\mathscr{C}) \oplus X$. There exist $\delta \in \mathbb{R}$ and $b \in B_0(\Sigma)$ such that $a = b + \delta \mathbf{1}_\Omega$ with $\langle b, \mu\rangle = 0$ for all $\mu \in \operatorname{span}\mathscr{C}$, that is, for all μ of the form $\sum_{i\in I} \alpha_i \mathbf{P}_i$, with I a finite subset of $\mathbb{N}$ and for all $i \in I$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ and $\mathbf{P}_i \in \mathscr{C}$. Take a $\nu \in \mathscr{V}$: ν writes $\sum_{j\in J} \beta_j \mathbf{P}_j - \sum_{k\in K} \gamma_k \mathbf{P}_k$, with J and K two finite subset of $\mathbb{N}$ and, for all $j \in J$ and $k \in K$, $\beta_j, \gamma_k \in \mathbb{R}$, with $\sum_{j\in J} \beta_j = 1$, $\sum_{k\in K} \gamma_k = 1$, and $\mathbf{P}_j, \mathbf{P}_k \in \mathscr{C}$. We have

$$\begin{aligned}
\langle a, \nu\rangle &= \left\langle b + \delta \mathbf{1}_\Omega, \sum_{j\in J} \beta_j \mathbf{P}_j - \sum_{k\in K} \gamma_k \mathbf{P}_k \right\rangle \\
&= \left\langle b, \sum_{j\in J} \beta_j \mathbf{P}_j - \sum_{k\in K} \gamma_k \mathbf{P}_k \right\rangle + \delta \sum_{j\in J} \beta_j \langle \mathbf{1}_\Omega, \mathbf{P}_j\rangle - \delta \sum_{k\in K} \gamma_k \langle \mathbf{1}_\Omega, \mathbf{P}_k\rangle \\
&= 0 + \delta - \delta = 0
\end{aligned}$$

hence $a \in {}^{\perp}\mathscr{V}$ and ${}^{\perp}(\operatorname{span}\mathscr{C}) \oplus X \subset {}^{\perp}\mathscr{V}$.

Now let $a \in {}^{\perp}\mathscr{V}$ and let $\mathbf{P}_0$ be a prior in $\mathscr{C}$. For any $\mathbf{P} \in \mathscr{C}$, $\mathbf{P} - \mathbf{P}_0 \in \mathscr{V}$ hence $\langle a, \mathbf{P} - \mathbf{P}_0\rangle = 0$. Let $\delta = \langle a, \mathbf{P}_0\rangle$ and set $b = a - \delta \mathbf{1}_\Omega$ so that $\langle b, \mathbf{P}\rangle = 0$ for any $\mathbf{P} \in \mathscr{C}$. Take $\mu \in \operatorname{span}\mathscr{C}$:

$$\langle b, \mu\rangle = \left\langle b, \sum_{i\in I} \alpha_i \mathbf{P}_i \right\rangle = \sum_{i\in I} \alpha_i \langle b, \mathbf{P}_i\rangle = 0$$

hence $b \in {}^{\perp}(\operatorname{span}\mathscr{C})$, $a \in {}^{\perp}(\operatorname{span}\mathscr{C}) \oplus X$ and ${}^{\perp}\mathscr{V} \subset {}^{\perp}(\operatorname{span}\mathscr{C}) \oplus X$ which gives the first equality.

The second one comes from the fact that $\mathscr{V}$ is weak* closed by Theorem 2.4.5 hence $({}^{\perp}\mathscr{V})^{\perp} = \mathscr{V}$. ■

2.A.4 A proof that the domain of the conjugate is included in the set of priors

C3M, Theorem 10 prove that, for Uncertainty Averse Preferences, the closure of the domain of the quasi-concave conjugate function $\operatorname{dom}_\Delta G$ is the set of priors $\mathscr{C}$. The Variational Preferences being the special case of additively separable Uncertainty Averse Preferences, this result implies that the domain of the concave Fenchel-Moreau conjugate $\operatorname{dom} c$ is this same set of priors. We propose here a simple direct proof that $\operatorname{dom} c \subset \mathscr{C}$ and a slightly different proof from C3M that $\operatorname{dom}_\Delta G \subset \mathscr{C}$.

Proposition 2.A.4. *(i)* $\operatorname{dom} c \subset \mathscr{C}$ *; (ii)* $\operatorname{dom}_\Delta G \subset \mathscr{C}$*.*

Proof: In equation (2.3), the functions $\underline{\mathscr{C}}(a)$ and $\overline{\mathscr{C}}(a)$ are respectively the lower and the upper support functions of the set $\mathscr{C}$.

(i) In standard convex analysis, it is known that $\underline{\mathscr{C}}(a)$ is the concave conjugate of the (concave) indicator function of $\mathscr{C}$ defined from $ba(\Sigma)$ to $[-\infty, 0]$ by $\psi_{\mathscr{C}}(\mu) = 0$ if $\mu \in \mathscr{C}$, $\psi_{\mathscr{C}}(\mu) = -\infty$ otherwise. $\mathscr{C}$ being (weak*-)closed and convex, it holds that the conjugate of $\underline{\mathscr{C}}(a)$ is $\psi_{\mathscr{C}}$ (Aubin, 2007, § 2.4, Proposition 1). It is a straightforward consequence of the definition of the conjugate that $\underline{\mathscr{C}} \leqslant I_u$ implies $(\underline{\mathscr{C}})^* \geqslant (I_u)^*$ that is $\psi_{\mathscr{C}} \geqslant -c$. Then $c(\mu) = +\infty$ for any μ not in $\mathscr{C}$.

(ii) The t-quasi-conjugate of $\underline{\mathscr{C}}$ is defined for any $\mu \in ba(\Sigma)$ and $t \in \mathbb{R}$ by $G_\mu(t) = \sup_{a \in B_0(\Sigma)} \{\underline{\mathscr{C}}(a) \mid \langle a, \mu \rangle \leqslant t\}$. If $t < 0$, as $G_\mu(t) = G_{-\mu}(-t)$, the following argument holds considering $\mu' = -\mu$, therefore we suppose that $t \geqslant 0$. If μ is not in $\mathscr{C}$ which is a weak*-closed and convex set, we can strictly separate the two by a linear functional: there exist $b \in B_0(\Sigma)$ and $\alpha \in \mathbb{R}$ such that $\langle b, \mu \rangle < \alpha < \langle b, \mathbf{P} \rangle$ for any $\mathbf{P} \in \mathscr{C}$. Considering $b - \alpha \mathbf{1}_\Omega$, we can assume $\alpha = 0$ hence $\langle b, \mu \rangle < 0 < \underline{\mathscr{C}}(b)$. Now for any $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, $\langle \lambda b, \mu \rangle < 0 \leqslant t$ while $\underline{\mathscr{C}}(\lambda b) = \lambda \underline{\mathscr{C}}(b)$ goes to infinity with λ which proves that $G_\mu(t) = +\infty$ for all $t \in \mathbb{R}$ and any μ not in $\mathscr{C}$. ■

Chapter 3

Vector Expected Utility Preferences and Mean–Variance Preferences

Abstract

We study some properties of the Vector Expected Utility model of Siniscalchi (2009) in the context of monetary outcomes and we prove that generalisations of the Mean–Variance preferences can be founded on this model. Exploring two directions — the specification of an orthonormal basis and the dual representation via the Fenchel conjugate — we relate the Vector Expected Utility model with the literature on optimal portfolio with higher moments and the literature on nonlinear programming with a penalty function defined in terms of a ϕ-divergence functional. Both directions can provide generalisations of the standard Markowitz's criterion.

JEL classification: *D81, G11.*
Keywords: *Vector Expected Utility ; Mean–Variance preferences ; Hermite polynomials ; Fenchel Conjugate ; ϕ-divergence.*

3.1 Introduction

In this paper, we study some properties of the Vector Expected Utility (VEU) model of Siniscalchi (2009) in the context of monetary outcomes with the idea to build links with the Mean–Variance preferences. Especially, we prove that two specifications of the model are suitable generalisations of this standard Markowitz's (1952) criterion.

3.1.1 Presentation of the VEU model

A decision maker (DM) conforms to the VEU set of axioms if and only if (iff) she ranks uncertain prospects f, functions from a state space Ω to a set X of consequences which is a mixture space, via the functional:

$$V(f) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\tilde{u} \circ f) + A(\{\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\zeta_i \cdot \tilde{u} \circ f)\}_{0 \leqslant i < n}) \tag{3.1}$$

where $\tilde{u} \colon X \to \mathbb{R}$ is a von Neumann-Morgenstern utility function and $A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is a function such that, for any $\varphi \in \mathbb{R}^n$, $A(-\varphi) = A(\varphi)$ and $A(0_n) = 0$. There are two parts in this evaluation: the expected utility of the act according to a baseline probability $\mathbb{P}$ and an adjustment to this baseline evaluation which is a function of the *variability* of the utility profile and of the DM's attitude towards ambiguity. The next two paragraphs detail first, the construction of the baseline probability, then, the construction of the adjustment function and of the family $\{\zeta_i\}_{0 \leqslant i < n}$.

The baseline probability $\mathbb{P}$ is a key feature of the VEU model as it is revealed by the preferences of the DM over *complementary acts*. These are acts f and $\bar{f}$ such that, for any two states ω and ω' in Ω,

$$\frac{1}{2}f(\omega) + \frac{1}{2}\bar{f}(\omega) \sim \frac{1}{2}f(\omega') + \frac{1}{2}\bar{f}(\omega').$$

This implies that their utility profiles sum to a constant: $\tilde{u} \circ f = \alpha - \tilde{u} \circ \bar{f}$ for some $\alpha \in \mathbb{R}$. In the words of Siniscalchi, they are "the preference counterpart of algebraic negation". In a portfolio application, assuming linear utility, a long and a short position of the same value in the same asset are straightforward examples of complementary acts. The central insight of the VEU model is that complementary acts have the same utility variability, *i.e.* the same ambiguity, hence, have to be ranked according to their baseline expected utility only. Therefore "preferences over complementary acts uniquely identify the baseline prior". As an illustration, consider Ellsberg (1961)'s three colour single urn experiment: a ball is drawn from an urn containing 30 red balls and 60 black and yellow balls with the proportion of black and yellow balls unknown. Assuming linear utility, the act $(10, R; -10, B; 0, Y)$ that yields \$10 if a red ball is drawn and costs \$10 if a black ball is drawn and the act $(-10, R; 10, B; 0, Y)$ are complementary: they embed the same ambiguity and, if the DM is indifferent between these two, we can derive that $\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(B)$. If the DM is also indifferent between $(10, R; 0, B; -10, Y)$ and $(-10, R; 0, B; 10, Y)$, we can infer that she is using the uniform prior as her baseline probability over the state space $S = \{R, B, Y\}$.

The adjustment with respect to the baseline evaluation refers to the notion of *crisp* acts, which has been introduced by Ghirardato, Maccheroni, et Marinacci (2004). They characterise the *unambiguous preference* as the maximal[1] restriction satisfying the independence axiom of the complete DM preference relation. This preference relation is incomplete and has a Bewley (1986) representation by a unanimity criterion over a set of priors $\mathscr{C}$. Acts which have the same expected utility for all the priors in $\mathscr{C}$ are crisp, hence non crisp acts have "variable utility profiles". Using the Hilbert space structure of $\mathsf{L}^2(\mathbb{P})$, Siniscalchi proves that the subspace of crisp acts $\mathtt{K}$ and the subspace of non crisp acts $\mathtt{NC}$ are orthogonal complements, hence, that any act can be decomposed into a crisp component and a "purely ambiguous" one. With $\{\zeta_i\}_{0 \leqslant i < n}$ a basis for the subspace $\mathtt{NC}$, the purely ambiguous component can be written as a linear combination of the vectors ζ_i which are named *adjustment factors* and are interpreted as sources of ambiguity. To give more intuition on this construction, we can elaborate on Siniscalchi's suggestion to draw a parallel with factor pricing models in finance: in these models, "expected asset returns are determined by a linear combination of their covariances with variables representing the risk factors[2]." Cochrane (2005) proposes as risk factors explaining the asset returns: returns on broad based portfolios, interest rates, growth in GDP, investment, but also the term premium, or the dividend/price ratios. If the DM entertains more than one possible probabilistic scenario for these risk factors, then they can also be seen as the drivers of ambiguity. In this paper we will use a *sharp* VEU representation, that is, one where the basis $\{\zeta_i\}_{0 \leqslant i < n}$ is made orthonormal by an application of the Gram-Schmidt procedure. Then, the sources of ambiguity are $\mathbb{P}$-independent, and exposure to one source cannot hedge the ambiguity coming from another. But the interpretation of independent sources of ambiguity as macroeconomic variables is more difficult, a difficulty that also arises with factor pricing models, for example

1. In the sense of set inclusion.
2. Ferson (2003).

when orthogonalised risk factors are used in the Arbitrage Pricing Theory [3].

Going back to equation (3.1), now it can be seen that the argument of the adjustment function A is the vector of coordinates of the utility profile in NC, which can be read as the correlations of the utility profile with each source of ambiguity. Thanks to this construction, the VEU evaluation nicely reduces to EU for crisp acts and reflects complementarities among ambiguous acts. This can again be illustrated using Ellsberg's three colour urn, as in the original paper: let ζ_0 be the random variable such that $\zeta_0(R) = 0$, $\zeta_0(B) = 1$ and $\zeta_0(Y) = -1$ and let $A(\varphi) = -|\varphi|$. Assuming the uniform prior that we derived above, any act f is evaluated through: $V(f) = \frac{1}{3}(f(R)+f(B)+f(Y))-|\frac{1}{3}(f(B)-f(Y))|$. One can check that this evaluation is consistent with the preferences reported in Ellsberg (1961): $V[(10, R; 0, B; 0, Y)] > V[(0, R; 10, B; 0, Y)]$ but $V[(10, R; 0, B; 10, Y)] < V[(0, R; 10, B; 10, Y)]$ highlighting the complementarity of the payoffs on the events B and Y in the last act.

3.1.2 Outline of the paper

To prove that generalisations of the mean–variance preferences can be built on the VEU model, we first need to extend this criterion to the Hilbert space L^2 of random variables with bounded variance. We start by transposing to this space the properties of the set of priors which have been obtained in the infinite dimensional case in section 2.4.2. Having proved, in chapter 2, that the existence of crisp fair gambles is not compatible with a mean–variance preference, we also impose the No Crisp Fair Gamble Axiom 2.2, whose important consequence is given by Theorem 2.5.2, that is, the only crisp acts are the constant ones, in other words, the only unambiguous asset is the riskless asset.

Then two paths are explored. The first one uses Hermite polynomials as an orthonormal basis for the space L^2. This allows to see the parameters of the adjustment function A of the VEU criterion as functions of the cumulants of the law of the return of a portfolio, thereby giving the link with the literature on optimal portfolio with higher order moments (Jondeau et Rockinger, 2006; Le Courtois et Walter, 2012b).

The second one uses the dual representation of a concave VEU criterion, where the concavity is obtained by imposing the Uncertainty Aversion axiom to the preference relation (see section 1.3.1). Using the Fenchel conjugate of the criterion, we obtain what Maccheroni, Marinacci, et Rustichini (2006) have named the Variational Representation of the preference. This allows to link the concave VEU criterion to

3. See also the discussion in Ferson (2003, section 2.7)

general problems of optimisation with a penalty function, of which the variance penalty is one special case.

3.2 Preliminaries: the set of priors and the subspace of non crisp acts in L^2

Given a preference relation $\succsim$, we denote by $\mathscr{C}$ the unique set of probabilities which represents the associated incomplete unambiguous preference relation (see the details in section 2.2). Moreover, we suppose that the set of priors $\mathscr{C}$ is in $ca(\Sigma)$, the space of countably additive measures defined over the σ-algebra Σ (axiomatic conditions for this property are given in Chateauneuf, Maccheroni, Marinacci, et Tallon, 2005). By construction, $\mathscr{C}$ is closed and norm bounded (Proposition 2.2.3), therefore it is weakly* compact (Dunford et Schwartz, 1988, Corollary V.4.3), hence, it is weakly compact and there exists a non negative finite measure $\mu \in ca(\Sigma)$ such that all the priors are absolutely continuous with respect to μ (Gänssler, 1971, Corollary 2.17 and Theorem 2.6). The set of priors is also absolutely continuous with respect to $\mathbb{P} \overset{\text{def}}{=} \mu/\mu(\Omega)$. We denote by $ca(\Sigma, \mathbb{P})$ the subspace of countably additive measures which are absolutely continuous with respect to $\mathbb{P}$.

Remark 3.2.1. $ca(\Sigma, \mathbb{P})$ is a weak* closed linear subspace of $ca(\Sigma)$ (which is itself a closed linear subspace of $ba(\Sigma)$) on which the weak topology $\sigma(ba(\Sigma), ba(\Sigma)^*)$ and the weak* topology $\sigma(ba(\Sigma), B_0(\Sigma))$ coincide (Gänssler, 1971, Lemma 2.12). Therefore the weak* topology on $ca(\Sigma, \mathbb{P})$ will refer to the trace topology induced by the weak* topology $\sigma(ba(\Sigma), B_0(\Sigma))$ on this subspace.

3.2.1 Set of priors and set of acts in the $(\mathsf{L}^p, \mathsf{L}^q)$ duality

Theorem 3.2.2. *For any $1 \leqslant p < \infty$, there exists a (one–to–one and onto) isomorphism $\mathbf{T}$ from $ca(\Sigma, \mathbb{P})$ to $\mathsf{L}^p(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ such that, for any $\mu \in ca(\Sigma, \mathbb{P})$, $\mathbf{T}\mu$ is the Radon-Nikodým derivative $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$ and $\int a \,\mathrm{d}\mu = \int a\mathbf{T}\mu \,\mathrm{d}\mathbb{P}$ for all $a \in B_0(\Sigma)$. Moreover, $\mathbf{T}$ is weak*–to–weak* continuous.*

Proof: See appendix 3.A.1. ■

Definition 3.2.3. *The images by the isomorphism $\mathbf{T}$ of the set of priors $\mathscr{C}$ and of the subspace parallel to the affine hull of the set of priors $\mathscr{V}$ are the following subsets* *of* L^p*:*

$$\Theta \overset{\mathit{def}}{=} \mathbf{T}\mathscr{C} = \left\{\theta = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} \textit{ for all } \mathbf{P} \in \mathscr{C}\right\}$$
$$V \overset{\mathit{def}}{=} \mathbf{T}\mathscr{V}.$$

Fix a $1 \leqslant p < \infty$. Utility profiles which are elements of $B_0(\Sigma)$ can be seen as elements of L^q, where $1/p + 1/q = 1$. Definition 2.4.4 can be specialised to the $(\mathsf{L}^p, \mathsf{L}^q)$ duality pairing: the *annihilator* of Θ in L^q is the set:

$$\mathtt{L} = {}^{\perp}\Theta = \{a \in \mathsf{L}^q \mid \langle a, \theta\rangle = 0 \text{ for each } \theta \in \Theta\}.$$

Recall that $\mathtt{L}$ is the subspace of crisp fair gambles utility profiles. The *annihilator* of $\mathtt{L}$ in L^p is the set:

$$\mathtt{L}^{\perp} = \{\theta \in \mathsf{L}^p \mid \langle a, \theta\rangle = 0 \text{ for each } a \in \mathtt{L}\}.$$

In this setting the subspace of crisp utility profiles is given by:

$$\mathtt{K} \overset{\text{def}}{=} \{a \in \mathsf{L}^q \mid \text{ there exists } \alpha \in \mathbb{R} \text{ such that } \langle a, \theta\rangle = \alpha \text{ for all } \theta \in \Theta\}.$$

Corollary 3.2.4.

(i) Θ*,* $\operatorname{span}\Theta$*,* $\operatorname{aff}\Theta$ *and* V *are weak** *closed.*

(ii) $\mathtt{L}^{\perp} = \operatorname{span}\Theta$*.*

(iii) $K = {}^{\perp}V$*.*

Proof: (i) By definition $\Theta = \mathbf{T}\mathscr{C}$, $\operatorname{span}\Theta = \mathbf{T}\operatorname{span}\mathscr{C}$, $\operatorname{aff}\Theta = \mathbf{T}\operatorname{aff}\mathscr{C}$ and $V = \mathbf{T}\mathscr{V}$, therefore, they are images of weak* closed sets (Theorem 2.4.5) by a weak* to weak* continuous isomorphism, hence, they are themselves weak* closed.

(ii) See point (iii) in Theorem 2.4.6 using the fact that $\operatorname{span}\Theta$ is weak* closed.

(iii) See point (iv) in Theorem 2.4.6. ∎

3.2.2 The special case of $p = 2$

Identifying L^2 with its dual, the subspaces of Corollary 3.2.4 can be seen as orthogonal complements and we retrieve, in the infinite dimensional case, the ideas that have been developed in the finite dimensional case in section 2.4.2:

— the subspace of crisp fair gambles utility profiles $\mathtt{L}$ and the subspace spanned by the set of priors $\operatorname{span}\Theta$ are orthogonal complements,

— the subspace of crisp utility profiles $\mathtt{K}$ and the subspace V are orthogonal complements.

Definition 2.4.7 has already defined the **subspace of non crisp utility profiles** $\mathtt{NC}$ as the complement of $\mathtt{K}$ in $B_0(\Sigma)$. To prove the existence of $\mathtt{NC}$, it was sufficient for $\mathtt{K}$ to be finite dimensional, which is the case when Axiom 2.2 holds. With the Hilbert space structure, the following proposition proves that the No Crisp Fair Gamble axiom is not needed. In L^2, with a slight abuse of notation, we set from now on $\mathtt{NC} = V$, therefore $\mathtt{NC} = \mathbf{T}\mathscr{V}$ and $K = {}^{\perp}\mathtt{NC}$.

Proposition 3.2.5. *The subspace* $\mathtt{K}$ *is closed and the subspaces* $\mathtt{NC}$ *and* $\mathtt{K}$ *are complementary: any function* a *in* L^2 *has a unique decomposition* $a = a_{\mathtt{K}} + a_{\mathtt{NC}}$*, with* $a_{\mathtt{K}} \in \mathtt{K}$ *and* $a_{\mathtt{NC}} \in \mathtt{NC}$*.*

Proof: $\mathtt{NC}$ is weak* closed hence norm closed. Therefore, by Lemma IV.4.4 in Dunford et Schwartz (1988), $\mathtt{K}$, its orthonormal complement in the Hilbert space L^2, is closed and they are complementary. ∎

Note that $\mathbf{1}_\Omega$ is in $\mathtt{K}$ therefore $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(a_{\mathtt{NC}}) = \langle \mathbf{1}_\Omega, a_{\mathtt{NC}} \rangle_{\mathsf{L}^2} = 0$.

3.3 The Vector Expected Utility model

3.3.1 Presentation

We take a framework *à la* Anscombe et Aumann (1963, AA): given a state space Ω endowed with a countably generated[4] σ-algebra of events Σ, and X a convex subset of a vector space, simple acts are Σ-measurable functions $f \colon \Omega \to X$ such that $f(\Omega)$ is finite. The set of all acts is denoted by $\mathcal{F}$. Given an $x \in X$, define $x \in \mathcal{F}$ to be the constant act such that $x(\omega) = x$, for all $\omega \in \Omega$. With the usual slight abuse of notation, we can then identify X with the subset of constant acts in $\mathcal{F}$.

We consider a DM who satisfies Siniscalchi's VEU's axioms so that her preferences admit a VEU representation. A VEU representation is made of five subjective elements $(\tilde{u}, \mathbb{P}, n, \{\zeta_i\}_{0 \leqslant i < n}, A)$ which are such that $f \succsim g$ iff $V(f) \geqslant V(g)$ where:

$$V(f) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{u} \circ f] - A(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot \tilde{u} \circ f])$$

and

4. For a discussion of this assumption, see Siniscalchi (2009, Section 2).

- $\tilde{u}$ is the von Neumann Morgenstern (vNM) utility function,
- $\mathbb{P}$ is the baseline probability over the measured space (Ω, Σ) which is revealed by the DM preferences over complementary acts,
- n is the dimension of the subspace of non crisp acts $\mathtt{NC}$ which can be infinite,
- $\zeta = \{\zeta_i\}_{0 \leqslant i < n}$ is a basis of the subspace $\mathtt{NC}$, $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot \tilde{u} \circ f]$ is the vector whose n elements are $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta_i \cdot \tilde{u} \circ f]$ for $0 \leqslant i < n$, $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta_i] = 0$ and we assume that the representation is *sharp* (Siniscalchi, 2009, Definition 2 in), that is ζ is orthonormal and $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot \tilde{u} \circ k] = 0_n$, for any crisp act k,
- $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is the adjustment function which is such that, for any $x \in \mathbb{R}^n$, $A(-x) = A(x)$ and $A(0_n) = 0$.

Note that our choice of sign for the adjustment function A differ from the choice made in the original paper as per equation (3.1). Indeed, the interpretation of the VEU model is that, while the DM has a reference probabilistic scenario $\mathbb{P}$, which she uses to evaluate the expected utility of her choices, she also deems probable a set of scenarios which are symmetric around the baseline $\mathbb{P}$ (see Siniscalchi, 2009, Lemma 3 and Proposition 3.4.2). Then, the DM measures the variability of the expected utility of her choices under these different scenarios and she adjusts accordingly her baseline expected utility through the function A. Consistent with this interpretation, if the DM is averse to uncertainty in the sense of Schmeidler's (1989) Axiom (see section 1.2.6), the function A is always non negative (Siniscalchi, 2009, Corollary 2) and the evaluation of an act by the DM is always lower or equal than its baseline expected utility.

3.3.2 A property of the attitude towards ambiguity in the VEU criterion

Consider a DM whose preference conforms to the VEU axioms and who has revealed that she perceives some ambiguity, that is, the set of priors associated with her unambiguous preference is not reduced to a singleton. In the following proposition, we show that this DM can not be neutral everywhere towards the ambiguity she has revealed. Therefore the adjustment function A can not be equal to 0 everywhere and moreover it can not be constant along a source of ambiguity, or a combination of sources.

Proposition 3.3.1. *For any direction $h \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$, there exist a $x \in \mathbb{R}^n$ and an $\alpha \in (0, 1)$ such that $A(x + \alpha h) \neq A(x)$.*

Proof: See Appendix 3.A.2 ■

3.3.3 Monetary outcomes and the generalised risk premium

We add the following specifications for *monetary outcomes* along the lines of Maccheroni *et al.* (2006, Section 3.6): X is the set of all finitely supported probabilities on $\mathbb{R}$ and a *monetary act* f represents a random variable $S\colon \Omega \to \mathbb{R}$ by associating to any state $\omega \in \Omega$ a degenerate lottery $\delta_{S(\omega)}$. If $\tilde{u}\colon X \to \mathbb{R}$ is the von Neumann-Morgenstern (vNM) utility function, in this setting, it is defined by the relation $\tilde{u} \circ f(\omega) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\delta_{S(\omega)} = u(S(\omega))$, where $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is the utility function for monetary prizes. The VEU criterion is then given by the function:

$$V(f) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[u(f)] - A(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot u(f)])$$

The following assumption is standard when monetary outcomes are considered:

Assumption 3.1. *u is of class $\mathscr{C}^2$, strictly increasing and concave.*

This assumption imply that u is a bijection: while in the general case, the image of $\mathcal{F}$ by the vNM utility function $\tilde{u}$ is $B_0(\Sigma, \tilde{u}(X))$, the space of simple Σ-measurable function on Ω with values in $\tilde{u}(X) \subset \mathbb{R}$, in this setting, the image of $\mathcal{F}$ by the utility function for monetary prizes u is $B_0(\Sigma)$, the space of finite linear combinations of characteristic functions of sets in Σ, and the monetary acts themselves can be seen as elements of $B_0(\Sigma)$.

To gain further insight into the adjustment function A in the case of monetary outcomes, it is possible to define a generalised *risk premium* for the VEU model. Let f be a monetary act and x_f be its certainty equivalent. For an Expected Utility DM with a probability $\mathbb{P}$, the risk premium is defined by the equation:

$$u(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f] - \pi) = u(x_f) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[u(f)].$$

It is positive for a risk averse agent. For a VEU DM with a baseline probability $\mathbb{P}$, the risk premium can be generalised with the equation

$$u(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f] - \pi_{\mathrm{VEU}}) = u(x_f) = V(f) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[u(f)] - A(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot u(f)])$$

Taking these two definitions together and using the standard first order approximation gives:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f] - \pi_{\mathrm{VEU}}) &= u(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f] - \pi) - A(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot u(f)]) \\ u(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f]) - \pi_{\mathrm{VEU}} u'(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f]) &\approx u(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f]) - \pi u'(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f]) - A(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot u(f)]) \end{aligned}$$

that is

$$\pi_{\text{VEU}} = \pi + \frac{A(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot u(f)])}{u'(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f])}. \tag{3.2}$$

The adjustment function A can be seen as generating an additional *uncertainty premium*, which will always increase the risk premium for an Ambiguity Averse DM. One should also note that the effects of risk aversion and uncertainty aversion are not disentangled in this additional premium.

3.4 Extension of the VEU criterion to L^2

Now we want to extend the VEU functional to the Hilbert space $\mathsf{L}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{L}^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. We recall that Σ is assumed to be countably generated hence $\mathsf{L}^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ is separable.

3.4.1 Properties of the set of priors in the VEU model

By Lemma 3 in Siniscalchi (2009), we know that the baseline probability $\mathbb{P}$ is in the set of priors $\mathscr{C}$ and we deduce that the set of priors is absolutely continuous with respect to $\mathbb{P}$.

Lemma 3.4.1. *The set of priors $\mathscr{C}$, its linear hull $\operatorname{span}\mathscr{C}$, its affine hull $\operatorname{aff}\mathscr{C}$ and the subspace $\mathscr{V}$ parallel to its affine hull are subsets of $ca(\Sigma, \mathbb{P})$.*

Proof: Point 2 of Lemma 3 in Siniscalchi (2009) states that for all $a \in B(\Sigma)$ such that $a \geqslant 0$, and for all $\mathbf{P} \in \mathscr{C}$, $\int a \,\mathrm{d}\mathbf{P} \leqslant 2 \cdot \int a \,\mathrm{d}\mathbb{P}$. This implies that for all $E \in \Sigma$, $\mathbf{P}(E) \leqslant 2 \cdot \mathbb{P}(E)$ hence that all the priors in $\mathscr{C}$ are absolutely continuous with respect to $\mathbb{P}$ from which it follows that all linear combinations of priors are also absolutely continuous with respect to $\mathbb{P}$. ■

We can then apply the results of the previous section. As the image of $\mathbb{P}$ by the isomorphism $\mathbf{T}$ is $\mathbf{1}_\Omega$, we define the translated of the set Θ by the constant function:

$$\check{\Theta} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \check{\theta} = \theta - \mathbf{1}_\Omega \mid \theta \in \Theta \right\}.$$

This set contains the null function therefore $\operatorname{span}\check{\Theta} = \operatorname{aff}\check{\Theta}$. For a θ in Θ, let $\theta' \stackrel{\text{def}}{=} 2 \cdot \mathbf{1}_\Omega - \theta$, such that $\check{\theta} = \theta - \mathbf{1}_\Omega$ and $-\check{\theta} = \theta' - \mathbf{1}_\Omega$. If $\mathbf{Q}$ and $\mathbf{Q}'$ are the probabilities respectively associated with the densities θ and θ', this definition implies that $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[a] = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[a] + \mathbf{E}_{\mathbf{Q}'}[a])$ for any $a \in \mathsf{L}^2$. We also have the following properties:

Proposition 3.4.2.

(i) $\check{\Theta}$ *is centrally symmetric around the origin, that is, for any* θ *in* Θ, θ' *is in* Θ, *hence* $-\check{\theta}$ *is in* $\check{\Theta}$.

(ii) Let $a \in \mathsf{L}^2$, $\theta = \operatorname{argmin}_{\kappa\in\Theta} \langle a, \kappa\rangle$ *if and only if* $\theta' = \operatorname{argmax}_{\kappa\in\Theta} \langle a, \kappa\rangle$.

(iii) If f *and* $\bar{f}$ *are two complementary acts and* $\theta = \operatorname{argmin}_{\kappa\in\Theta} \langle u(f), \kappa\rangle$ *then* $\theta = \operatorname{argmax}_{\kappa\in\Theta} \langle u(\bar{f}), \kappa\rangle$.

(iv) $\operatorname{aff}\check{\Theta}$ *is the subspace parallel to* $\operatorname{aff}\Theta$, *that is* $\mathtt{NC} = \operatorname{span}\check{\Theta} = \operatorname{aff}\check{\Theta} = \operatorname{aff}\Theta - \mathbf{1}_\Omega$.

(v) $\mathtt{K} = \check{\Theta}^\perp = \{a \in \mathsf{L}^2 \mid \langle a, \check{\theta}\rangle = 0$ *for each* $\check{\theta} \in \check{\Theta}\}$.

Proof: See Appendix 3.A.3 ■

Point (iv) of the preceding lemma says that the subspace of non crisp utility profiles $\mathtt{NC}$ of Proposition 3.2.5 coincides, in the case $p = 2$, with the subspace $\mathtt{NC}$ defined by $\operatorname{span}\check{\Theta}$ in Siniscalchi (2009, §B.4.2, construction of the adjustment factors).

3.4.2 The VEU criterion in L^2

The subspace of non crisp utility profiles $\mathtt{NC}$ can be finite or infinite dimensional but, from now on, we will consider the general infinite case. $\mathtt{NC}$ is then isometrically isomorphic to $\ell^2 \stackrel{\text{def}}{=} \ell^2(\mathbb{N})$ (Dunford et Schwartz, 1988, Theorem IV.4.16), the space of square-absolutely sommable sequences. ℓ^2 is an Hilbert space whose topological dual can be identified with itself (Aliprantis et Border, 2006, Section 16.5). Let $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ be its canonical orthonormal basis where $e_0 = (1, 0, 0, \cdots)$, $e_1 = (0, 1, 0, \cdots)$, etc... If $\zeta = \{\zeta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ is a countable orthonormal basis for $\mathtt{NC}$, denote by

— $\mathbf{J}\colon \mathtt{NC} \to \ell^2$ the isomorphism that maps ζ_i to e_i for all $i \in \mathbb{N}$,

— $\mathbf{P}_{\mathtt{NC}}\colon \mathsf{L}^2 \to \mathtt{NC}$ the mapping $a \mapsto \mathbf{P}_{\mathtt{NC}}a = a_{\mathtt{NC}}$,

— $\Pi\colon \mathsf{L}^2 \to \ell^2$ the linear operator defined by $\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{J} \circ \mathbf{P}_{\mathtt{NC}}$.

We can now extend the definition of the VEU criterion to any monetary act $f \in \mathsf{L}^2$, with the notation $a = u(f) \in \mathsf{L}^2$:

$$V(a) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[a] - A \circ \Pi(a) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[a_{\mathtt{K}}] - A \circ \mathbf{J}(a_{\mathtt{NC}}) \tag{3.3}$$

where the function A is defined from ℓ^2 into $\mathbb{R}$.

3.4.3 The model with an Hermite polynomial basis

In this section, we propose to study the possibility of specifying an orthonormal basis ζ for the subspace $\mathtt{NC}$. First, we require that the No Crisp Fair Gamble

Axiom 2.2 studied in chapter 2, holds. Therefore, the subspace $\mathtt{K}$ of crisp acts is reduced to the subspace X of constant acts (Theorem 2.5.2) and $\mathtt{NC}$ is the subspace of centred square integrable random variables. Secondly, we will suppose that the baseline probability $\mathbb{P}$ has a gaussian density. It is then known that the family of Hermite polynomials, appropriately normalised, form an orthonormal basis for the Hilbert space $\mathsf{L}^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ (Courant et Hilbert, 1989, § II.9.4).

When the underlying probability is a standard normal law with mean 0 and unit variance, the Hermite polynomials are given by the formula

$$He_n(z) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^n e^{z^2/2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \left[e^{-z^2/2} \right], \quad n \geqslant 0$$

The first seven polynomials are

$$\begin{aligned}
He_0(z) &= 1 \\
He_1(z) &= z \\
He_2(z) &= z^2 - 1 \\
He_3(z) &= z^3 - 3z \\
He_4(z) &= z^4 - 6z^2 + 3 \\
He_5(z) &= z^5 - 10z^3 + 15z \\
He_6(z) &= z^6 - 15z^4 + 45z^2 - 15
\end{aligned}$$

Therefore, with the No Crisp Fair Gamble axiom, $\mathtt{K}$ is the subspace generated by H_0 and the family H_n with $n \geqslant 1$ is an orthonormal basis of $\mathtt{NC}$. We see two possible way to apply this specific basis.

Gram-Charlier type-A and Edgeworth expansions

The first way uses expansions which allow to approximate the probability density function (pdf) f of the law of a random variable, which is believed to be similar to a normal one, by a pdf of the form

$$f(z) = p(z)\phi(z)$$

where $\phi(z) = (2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2}$ is the standard normal density. The Gram-Charlier type-A expansion and the Edgeworth expansion correspond respectively to the cases

$$p(z) = 1 + \frac{S}{6} He_3(z) + \frac{K}{24} He_4(z)$$

and
$$p(z) = 1 + \frac{S}{6}He_3(z) + \frac{K}{24}He_4(z) + \frac{S^2}{72}He_6(z)$$
where S is the *skewness* and K is the *excess kurtosis* of the pdf f. Not all distribution can be approximated by this method and some conditions have to be imposed on S and K for the pdf $p(z)\phi(z)$ to be everywhere positive (see Jondeau et Rockinger (2001) to which the above presentation owes a lot).

Using these expansions, A, the adjustment function in the VEU model, can be approximated by a function of the two variables S and K or of the three variables S, K and S^2. Pursuing these expansions to a higher order would lead to add variables which are functions of some cumulants of the law of the evaluated random variable. Depending on the form of the function A, a great variety of attitudes towards the shape of the optimal distribution will be allowed.

For a possible simple application to the choice of the optimal portfolio, we can consider the case where the VEU criterion is homogeneous (this is the case when the preference relation $\succsim$ satisfies the C-Independence axiom, that is the setting of Ghirardato *et al.*, 2004). Then, A is homogeneous and, with the symmetry of A, $A(\alpha x) = |\alpha| A(x)$, for any $x \in \ell^2$ and $\alpha \in \mathbb{R}$. Going back to the generalized risk premium given by equation (3.2), that we recall here for convenience:

$$\pi_{\text{VEU}} = \pi + \frac{A(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot u(f)])}{u'(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f])},$$

we have at the first order
$$\pi = \frac{\lambda}{2}\,\mathbf{var}\, f$$
with $\lambda = -u''(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f])/u'(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f])$ the coefficient of absolute risk aversion, and

$$u(f) \approx u(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f]) + (f - \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f])u'(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f]).$$

The constant elements in this approximation are crisp, hence the non crisp component of $u(f)$ is $u'(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f])f$, then

$$A(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot u(f)]) \approx A(u'(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[f])\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot f])$$

and with the homogeneity of A:

$$\pi_{\text{VEU}} = \frac{\lambda}{2}\,\mathbf{var}\, f + A(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot f])$$

In the special case where A is also additively separable, this specification of the

VEU criterion relates the model with the literature on optimisation with higher moments (Jondeau et Rockinger, 2006; Le Courtois et Walter, 2012b). In all cases, the VEU criterion using these expansions can provide a generalisation of the mean–variance analysis, where it is also possible to envision a DM who does not care about variance but only about skewness and kurtosis or a combination of those.

The Madan and Milne approach

The second way builds on the approach developed by Madan et Milne (1994) to price contingent claims as elements of a separable Hilbert space. The authors draw a parallel between using factors in asset pricing, especially using discount bonds as a basis for pricing fixed income securities, and pricing in terms of a Hilbert space basis.

Their model assume an underlying probability space $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ with a filtration $\mathcal{F}$ generated by a d-dimensional Brownian motion. The market consists of d primary assets which are traded continuously. To propose a practical theory of valuation and static hedging of contingent claims, Madan et Milne first construct a discrete time approximation of the market by considering a finite set of times, the end of day settlement times for example. Secondly, they have to specify the law of the probability $\mathbb{P}$ to define a basis. For this purpose they use a method developed by Elliott (1993) as a filtering technique in signal theory which is based on a change of measure. Finally, under an additional assumption of bounded density, they construct an approximating discrete time model for the market with a Gaussian reference measure. The space of contingent claims with finite means and variances therefore admit an Hermite polynomials basis whose elements can be given prices under the Black-Scholes model. These basis prices are then used to value contingent claims.

An operational hedge can also be constructed by financing only a finite number of basis elements. This approximate hedging is technically an Hilbert space projection on the subspace generated by the elements used for the hedge, the distance between the contingent claims and its projection is then a “basis risk”, in the future market sense of the term.

While Madan et Milne (1994) illustrate their theory with a study based on S&P 500 options prices, two notable applications are proposed by Abken, Madan, et Ramamurtie (1996) who expand this theory to imply the risk neutral density from the traded prices of the Eurodollar future options and by Darolles et Laurent (2000) who study the optimality of the polynomial approximation. This last paper also deals with the special case of a reversible Markov process: the infinitesimal generator of its associated semigroup is then self-adjoint and the eigenfunctions of the generator provide a basis for the Hilbert space. The polynomial approximation then uses the first eigenvectors of the diagonalised valuation operator. This is another related route to construct an orthonormal basis for the VEU model in a financial application, which would relate to the literature that uses operator methods to study Markov processes (see Hansen et Scheinkman, 1995 and textbook expositions in Aït-Sahalia, Hansen, et Scheinkman, 2010 and Linetsky, 2007).

3.5 Variational representation of the concave VEU preference

3.5.1 The general representation

Here we suppose that the DM is averse to ambiguity in the sense of Schmeidler's (1989) Axiom (see section 1.2.6), then, the function A is always non negative and convex (Siniscalchi, 2009, Corollary 2), therefore the VEU functional V is concave. Hence, in the following, we will need to deal with conjugates (also know as the Fenchel transforms) in the concave sense according to the definition given by Rockafellar (1974, p. 18).

Definition 3.5.1. *For $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, the space X being in duality pairing with the space X^*, the* **conjugate** *and the* **biconjugate in the concave sense** *are given by:*

$$g^*(x^*) = \inf_{x \in X} \{\langle x, x^* \rangle_{(X,X^*)} - g(x)\} \tag{3.4}$$

$$g^{**}(x) = \inf_{x^* \in X^*} \{\langle x, x^* \rangle_{(X,X^*)} - g^*(x^*)\} \tag{3.5}$$

This is equivalent to taking

$$g^*(x^*) = -f^*(-x^*) \tag{3.6}$$

for $g = -f$ with f^* the conjugate in the convex sense. The main result is the possibility of the representation of a concave function via its Fenchel transform: if g is concave, it holds that $g^{**} = \operatorname{cl} g$ (Rockafellar, 1974, Theorem 5).

We can now give the dual representation of a concave VEU preference:

Proposition 3.5.2. *The variational representation of the concave VEU preference is given by:*

$$V(a) = \min_{\mathbf{P}\in\mathscr{C}}\{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[a] + c^*(\mathbf{P})\}$$

where

$$c^*(\mathbf{P}) = A^* \circ \Pi\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right).$$

Proof: See appendix 3.A.4. ■

3.5.2 The concave homogenous case: the link with the MEU preferences

To get a better understanding of the role of the adjustment function A and of the variational representation, we look at the special case of preference which satisfy both the VEU and the Maxmin Expected Utility (MEU) axioms. Therefore, starting from the VEU axioms, to which are already added the Uncertainty Aversion axiom, we strengthen the Weak C-independence axiom to impose the C-independence axiom (see Section 1.3.1). Then we obtain a special case of the MEU preference where a baseline probability is revealed by the preference of the DM and where the set of priors is symmetric around this baseline probability. Also, a direct adaptation of the proof of Lemma 3.3 in Gilboa et Schmeidler (1989) give the homogeneity of degree 1 of the VEU function V.

Proposition 3.5.3. *If the concave VEU preference satisfy the C-independence axiom, then*

(i) the function A is a semi-norm on ℓ^2,

(ii) the function A is the support function of the subdifferential $\partial A(0)$ which is the set $\Pi\check{\Theta}$, therefore the VEU/MEU criterion can be written

$$V(a) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[a] - \max_{\check{\theta}\in\check{\Theta}}\left\{\left\langle\check{\theta}, a\right\rangle\right\},$$

(iii) the conjugate of the function A is the indicator of the set $\Pi\check{\Theta}$, therefore the variational representation is the standard MEU representation

$$V(a) = \min_{\mathbf{P}\in\mathscr{C}}\{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[a]\}.$$

Proof: See Appendix 3.A.5 ■

Building on point (i) of the previous Proposition, we consider a (non axiomatic) specification of the adjustment function A. It is set to be equal to the ℓ^2 norm, up to a multiplicative coefficient $\lambda \in \mathbb{R}$, that is $A(x) = \lambda \|x\|_{\ell^2}$ for $x \in \ell^2$ therefore $A \circ \Pi(a) = \lambda \|\mathbf{P}_{\mathtt{NC}} a\|_{\mathsf{L}^2}$ for $a \in \mathsf{L}^2$. Note that, as $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{P}_{\mathtt{NC}} a] = 0$, we can write $A \circ \Pi(a) = \lambda \sqrt{\mathbf{var}_{\mathbb{P}}(\mathbf{P}_{\mathtt{NC}} a)}$, hence that, with the No Crisp Fair Gamble Axiom 2.2, the function A is the standard deviation: $A \circ \Pi(a) = \lambda \sigma_{\mathbb{P}}(a)$, where we denote by $\sigma_{\mathbb{P}}(a) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbf{var}_{\mathbb{P}}(a)}$, and the corresponding VEU criterion is a mean–volatility preference:

$$V(a) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[a] - \lambda \sigma_{\mathbb{P}}(a).$$

In general, this preference is not monotonic, while it is presented as a specification of the monotonic VEU preference. This raises the question of the possibility of having a proper axiomatic foundation for this kind of preference, a problem that the Monotone Mean–Variance Preference of Maccheroni *et al.* (2009) also faces. This problem underlies the study of chapter 2 and is also revisited in the next section. Monotonicity considerations set aside, this mean–volatility preference would then be explained by an ambiguity averse VEU investor whose aversion towards the sources of uncertainty is isotropic and homogeneous of degree 1.

This specification is also an MEU preference. The corresponding set of priors can be retrieved using equation (3.7) from the proof of Proposition 3.5.3 in Appendix 3.A.5. The set corresponding to the function A is

$$\mathcal{K}_A = \left\{ x \in \ell^2 \mid \langle x, y \rangle \leqslant \lambda \|x\|_{\ell^2}, \ \forall y \in \ell^2 \right\}$$

hence the set corresponding to the function $A \circ \Pi$ is

$$\mathcal{K}_{A \circ \Pi} = \left\{ \check{\theta} \in \mathsf{L}^2 \mid \langle \check{\theta}, a \rangle \leqslant \lambda \sigma_{\mathbb{P}}(a), \ \forall a \in \mathsf{L}^2 \right\}.$$

Considering the constant functions in this definition, one gets that $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\check{\theta}] = 0$, therefore the set $\Theta = \mathbf{1}_{\Omega} - \mathcal{K}_{A \circ \Pi}$ contains densities of probability distributions. We have, for all $\theta \in \Theta$, $\langle \theta, a \rangle \geqslant V(a)$, that is the set of priors contains all the probabilities whose associated linear functionals dominate the mean-volatility criterion. The MEU representation is then the standard representation of a concave function as the infimum of these linear functionals.

3.5.3 The link with the Monotone Mean–Variance Preference

The Monotone Mean–Variance Preference introduced by Maccheroni, Marinacci, Rustichini, et Taboga (2009) have been presented in Section 2.1. A link can be made with the VEU preference through an adjustment function A set to be proportional to the square of the ℓ^2 norm, that is $A(x) = \lambda/2 \, \|x\|_{\ell^2}^2$, for $x \in \ell^2$, hence $A \circ \Pi(a) = \lambda/2 \, \|\mathbf{P}_{\mathtt{NC}} a\|_{\mathsf{L}^2}^2$, for $a \in \mathsf{L}^2$. The remarks made in the above paragraph still apply and, with the No Crisp Fair Gamble Axiom 2.2, the function A is the variance, hence the corresponding VEU criterion is the mean–variance preference:

$$V(a) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[a] - \frac{\lambda}{2} \, \mathbf{var}_{\mathbb{P}}(a).$$

Monotonicity considerations again set aside, the mean–variance preference is here explained by an ambiguity averse VEU investor whose aversion towards the sources of uncertainty is isotropic and quadratic.

From Proposition 2 in Aubin (2007, chapter 2, § 2.4), we have that the conjugate of a function $A(x) = \phi(\|x\|)$ defined on a Banach space U is the function $A^*(x) = \phi^*(\|x\|_*)$ defined on the dual space U^*, where ϕ^* is the conjugate of the convex function ϕ and $\| \;\; \|_*$ is the dual norm. In our application the space U and its dual are both ℓ^2 and the function ϕ and its conjugate[5] are given by

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2} t^2 & \text{if } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{if } t < 0 \end{cases} \qquad \phi^*(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda} s^2 & \text{if } s \geqslant 0 \\ +\infty & \text{if } s < 0 \end{cases}$$

Therefore we have

$$A^*(x) = \frac{1}{2\lambda} \, \|x\|_{\ell^2}^2$$

and with Proposition 3.5.2

$$\begin{aligned} c^*(\mathbf{P}) = A^* \circ \Pi\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right) &= \frac{1}{2\lambda} A^* \circ \mathbf{J}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} - \mathbf{1}_\Omega\right) \\ &= \frac{1}{2\lambda} \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} - \mathbf{1}_\Omega \right\|_{\mathsf{L}^2}^2 \\ &= \frac{1}{2\lambda} \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} - \mathbf{1}_\Omega\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2\lambda} \mathrm{C}(\mathbf{P}\|\mathbb{P}) \end{aligned}$$

and finally we retrieve the monotone mean variance preferences

$$V(a) = \inf_{\mathbf{P} \in \Delta^2(\mathbb{P})} \left\{ \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[a] + \frac{1}{2\lambda} \mathrm{C}(\mathbf{P}\|\mathbb{P}) \right\}$$

5. Details of the calculus are in Appendix 3.A.6

As in Maccheroni *et al.* (2009), the infimum is taken over the set $\Delta^2(\mathbb{P})$ of all probability measures with square integrable densities with respect to $\mathbb{P}$. A way to introduce a set of priors as it appears in axiomatic models of decision under ambiguity, is to consider the following function ϕ and its conjugate [6]:

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}T(2t-T) & \text{if } t > T \\ \frac{\lambda}{2}t^2 & \text{if } 0 \leqslant t \leqslant T \\ 0 & \text{if } t < 0 \end{cases} \qquad \phi^*(s) = \begin{cases} +\infty & \text{if } s > \lambda T \\ \frac{1}{2\lambda}s^2 & \text{if } 0 \leqslant s \leqslant \lambda T \\ +\infty & \text{if } s < 0 \end{cases}$$

This new function ϕ is the same as the preceding one up to a threshold T above which it becomes linear. The value of the function after the threshold ensures that ϕ and its derivative are both continuous. We will denote this threshold by $\sigma_{\max}$. With this function ϕ, the VEU criterion is given by:

$$V(a) = \begin{cases} \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[a] - \frac{\lambda}{2}\,\mathbf{var}_{\mathbb{P}}(a) & \text{if } \mathbf{var}_{\mathbb{P}}(a) \leqslant \sigma^2_{\max} \\ \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[a] - \lambda\sigma_{\max}\sigma_{\mathbb{P}}(a) + \frac{\lambda}{2}\sigma^2_{\max} & \text{if } \mathbf{var}_{\mathbb{P}}(a) > \sigma^2_{\max} \end{cases}$$

This investor behaves as a mean–variance DM while the variance of her portfolio is below a level given by $\sigma^2_{\max}$, and, above this threshold, her aversion to variance becomes an aversion to volatility.

The dual expression of this VEU criterion is:

$$V(a) = \min_{\mathbf{P}\in\mathscr{C}} \left\{ \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[a] + \frac{1}{2\lambda}\mathrm{C}(\mathbf{P}\|\mathbb{P}) \right\}$$

where

$$\mathscr{C} = \left\{ \mathbf{P} \text{ such that } \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} \right\|_{\mathsf{L}^2} \leqslant \lambda T \right\}$$

This VEU investor uses a set of probabilities which have bounded densities with respect to her reference scenario $\mathbb{P}$.

Therefore, by reducing the range of scenarios used to evaluates her choices, this investor will end up having a higher, quadratic, aversion to risk when this risk is low, and a lower, linear, aversion to risk when it has reached a high enough level. From a normative point of view, this behaviour can be judged either as not desirable or as a rational "preference for security in the neighbourhood of certainty" (Allais, 1993, p. 25). In any case, we learn from this specification of the VEU preference that taking the infimum, in its dual expression, over a bounded set of priors will limit in some way

6. Details of the calculus are in Appendix 3.A.6

the aversion to variance, which corresponds to the infimum over the full set $\Delta^2(\mathbb{P})$. This fact casts a doubt on the possibility of providing an axiomatic foundation for the Monotone Mean Variance preferences. Of course this remark does not lower the interest of having the minimal monotone extension of the Mean–Variance preference, a feature that corrects the main default of what is still a workhorse for the portfolio theory and for which no axiomatic foundations have ever been proposed.

3.6 Conclusion

In this essay, we have explored two ways to link the Vector Expected Utility criterion to the Mean–Variance preferences: one through the use of Hermite polynomials as an orthonormal basis, the other through specifications of the adjustment function A. In both cases, the VEU criterion can be seen as a tool to generalise the Mean–Variance preference by incorporating more subtle attitudes towards risk and uncertainty than the aversion to variance.

The first application will be to revisit Markowitz (1952)'s results on portfolio selection. In this seminal paper, the optimisation is conducted with a penalty function given by the variance of the return of the portfolio. In the previous section, we have shown that the penalty function can be generalised with specifications of the function A. Especially, we have studied the link with the χ^2 measure of distance between two probability distributions which is the penalty used in the Monotone Mean–Variance Preference of Maccheroni *et al.* (2009). This opens the possibility of using other measures of dispersion proposed by the information theory, such as the well-known entropic penalty which is used in the linear-quadratic-Gaussian problem of optimal control (Jacobson, 1973) and has been adapted to economics by the robust control theory of Hansen et Sargent (2001). More generally, this creates a link with the use of ϕ-divergence of probability distributions (Liese et Vajda, 1987) as penalty functions for which there exist duality results for non linear programming problems (Ben-Tal et Teboulle, 1986, 1987; Ben-Tal, Ben-Israel, et Teboulle, 1991).

3.A Proofs

3.A.1 Proof of Theorem 3.2.2

In the following, all the Lebesgue spaces are defined on the measure space $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ so that we write L^p for $\mathsf{L}^p(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$.

Step 1: the case $p = 1$

For $p = 1$, as $\mathbb{P}$ is a finite measure, the Radon-Nikodým Theorem gives a one–to–one and onto isometric isomorphism $\mu \mapsto \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$ from $ca(\Sigma, \mathbb{P})$ onto L^1 where $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$ is such that $\mu(E) = \int_E \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathbb{P}} \,\mathrm{d}\mathbb{P}$, for all $E \in \Sigma$ and $\|\mu\|_{ba} = \left\|\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right\|_{\mathsf{L}^1}$ (Aliprantis et Border, 2006, Theorems 13.18 and 13.19). From now on we suppose that $1 < p < \infty$.

Step 2: Definition of $\mathbf{S}$*, a continuous injection from L^p to $ca(\Sigma, \mathbb{P})$*

Let $a \in \mathsf{L}^p$. It is known that, for any $0 \leqslant q < p$, $\mathsf{L}^p \subset \mathsf{L}^q$ and that the canonical injection is continuous, hence $a \in \mathsf{L}^1$, and, as $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\|a\|_{\mathsf{L}^1} \leqslant \|a\|_{\mathsf{L}^p}$ (Aliprantis et Border, 2006, Corollary 13.3). Then the Radon-Nikodým Theorem gives a measure $\mu_a \in ca(\Sigma, \mathbb{P})$ such that $\mu_a(E) = \int_E a \,\mathrm{d}\mathbb{P}$, for all $E \in \Sigma$. Therefore we have defined a linear map $\mathbf{S}$ between L^p and $ca(\Sigma, \mathbb{P})$ such that $\mathbf{S}a = \mu_a$. It holds that $\mu_a = \mu_b$ implies $a = b$ $\mathbb{P}$-a.-e. hence $\mathbf{S}$ is an injection and $\|\mu_a\|_{ba} = \|a\|_{\mathsf{L}^1} \leqslant \|a\|_{\mathsf{L}^p}$, hence $\mathbf{S}$ is continuous.

Step 3: $\mathbf{S}$ *is a bijection*

Conversely, take a $\mu \in ca(\Sigma, \mathbb{P})$. As above, the Radon-Nikodým Theorem gives a unique function $a \in \mathsf{L}^1$ such that $\mu(E) = \int_E a \,\mathrm{d}\mathbb{P}$, for all $E \in \Sigma$. We have to prove that a is in L^p.

The isometric isomorphism between $B_0^*(\Sigma)$ and $ba(\Sigma)$ gives a unique linear functional $\psi_\mu \in B_0^*(\Sigma)$ such that $\langle \psi_\mu, x \rangle = \int x \,\mathrm{d}\mu$, for all $x \in B_0(\Sigma)$ (Dunford et Schwartz, 1988, Theorem IV.5.1). Let $E \in \Sigma$, it holds that $\langle \psi_\mu, \mathbf{1}_E \rangle = \int \mathbf{1}_E \,\mathrm{d}\mu = \mu(E) = \int_E a \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int \mathbf{1}_E a \,\mathrm{d}\mathbb{P}$. By linear combinations, this extends to $\langle \psi_\mu, x \rangle = \int xa \,\mathrm{d}\mathbb{P}$ for any $x \in B_0(\Sigma)$. Let q be such that $1/p + 1/q = 1$. As $B_0(\Sigma)$ is a subspace of the normed linear space L^q for any $1 < q < \infty$, to a $\psi_\mu \in B_0^*(\Sigma)$ corresponds a $\phi_\mu \in (\mathsf{L}^q)^*$ such that $\|\psi_\mu\|_{(\mathsf{L}^q)^*} = \|\phi_\mu\|_{(\mathsf{L}^q)^*}$ and $\langle \psi_\mu, x \rangle = \langle \phi_\mu, x \rangle$ for all $x \in B_0(\Sigma)$ (Dunford et Schwartz, 1988, Theorem II.3.11). Now, the isometric isomorphism between $(\mathsf{L}^q)^*$ and L^p gives a unique function $b \in \mathsf{L}^p$ such that $\langle \phi_\mu, y \rangle = \int yb \,\mathrm{d}\mathbb{P}$ for all $y \in \mathsf{L}^q$ (Dunford et Schwartz, 1988, Theorem IV.8.1).

Together, these relationships give $\int xa\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \langle \psi_\mu, x\rangle = \langle \phi_\mu, x\rangle = \int yb\,\mathrm{d}\mathbb{P}$, for all $x \in B_0(\Sigma)$, hence $a = b$ $\mathbb{P}$-a.e. which concludes.

Step 4: **S** *is an isomorphism*

S is a one–to–one bounded linear operator from the Banach space L^p to the Banach space $ca(\Sigma, \mathbb{P})$, therefore by the Inverse Mapping Theorem, it is an isomorphism (Megginson, 1998, Corollary 1.6.6). We then define $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$.

Step 5: **T** *is weak* to weak* continuous*

The linear operator $\mathbf{T} \colon ca(\Sigma, \mathbb{P}) \to \mathsf{L}^p$, $1 < p < \infty$ is norm–to–norm continuous, therefore it is weak–to–weak continuous (Megginson, 1998, Theorem 2.5.11). But the space L^p is reflexive (Dunford et Schwartz, 1988, Corollary IV.8.2), therefore, the weak and weak* topologies of L^p are the same (Megginson, 1998, Theorem 2.6.2). As the weak and weak* topologies of $ca(\Sigma, \mathbb{P})$ coincide on $ca(\Sigma, \mathbb{P})$ (Gänssler, 1971, Lemma 2.12), **T** is weak* to weak* continuous. ■

3.A.2 Proof of Proposition 3.3.1

Suppose there is an $h \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$ such that $A(x + \alpha h) = A(x)$, for all $x \in \mathbb{R}^n$ and $\alpha \in (0, 1)$. Define the act k whose utility profile is such that $\tilde{u} \circ k = \sum_{i=0}^{n} h_i \zeta_i$. Note that k is in `NC` and that, by construction, $V(k) = 0$, therefore $k \sim x_0$, where x_0 is the constant act with utility zero. Then, for any act $g \in \mathcal{F}$, and $\alpha \in (0, 1)$, as $\tilde{u}$ is affine and $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}$ is linear:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{u}(\alpha k + (1-\alpha)g)] &= \alpha\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{u} \circ k] + (1-\alpha)\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{u} \circ g] \\
&= (1-\alpha)\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{u} \circ g] \\
&= \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{u} \circ x_0] + (1-\alpha)\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{u} \circ g] \\
&= \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{u}(\alpha x_0 + (1-\alpha)g)]
\end{aligned}$$

and, using the definition of k:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta_i \cdot \tilde{u}(\alpha k + (1-\alpha)g)] &= \alpha\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta_i \cdot \tilde{u} \circ k] + (1-\alpha)\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta_i \cdot \tilde{u} \circ g] \\
&= \alpha h_i + (1-\alpha)\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta_i \cdot \tilde{u} \circ g]
\end{aligned}$$

hence

$$A(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot \tilde{u}(\alpha k + (1-\alpha)g)]) = A(\alpha h + (1-\alpha)\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot \tilde{u} \circ g])$$

Using the property of A in the direction h, and the fact that $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot \tilde{u} \circ x_0] = 0_n$:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot \tilde{u}(\alpha k + (1-\alpha)g)]) &= A((1-\alpha)\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot \tilde{u} \circ g]) \\ &= A(\alpha\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot \tilde{u} \circ x_0] + (1-\alpha)\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot \tilde{u} \circ g]) \\ &= A(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot \tilde{u}(\alpha x_0 + (1-\alpha)g)]) \end{aligned}$$

and finally

$$\begin{aligned} V(\alpha k + (1-\alpha)g) &= \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{u}(\alpha k + (1-\alpha)g)] + A(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot \tilde{u}(\alpha k + (1-\alpha)g)]) \\ &= \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{u}(\alpha x_0 + (1-\alpha)g)] + A(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta \cdot \tilde{u}(\alpha x_0 + (1-\alpha)g)]) \\ &= V(\alpha x_0 + (1-\alpha)g) \end{aligned}$$

This equality is equivalent to $\alpha k + (1-\alpha)g \sim \alpha x_0 + (1-\alpha)g$ for all $g \in \mathcal{F}$, and $\alpha \in (0,1)$, which is the definition of the unambiguous preference, hence $k \sim^* x_0$ and k is crisp, a contradiction. ■

3.A.3 Proof of Proposition 3.4.2

(i) Point 1 of Lemma 3 in Siniscalchi (2009) states that for all $\mathbf{P} \in \mathscr{C}$, $2\mathbb{P} - \mathbf{P}$ is in $\mathscr{C}$. That is, for any $\theta \in \Theta$, $\theta' = 2 \cdot \mathbf{1}_\Omega - \theta$ is in Θ, then $\check{\theta}' = \theta' - \mathbf{1}_\Omega$ is in $\check{\Theta}$. But $\check{\theta}' = \mathbf{1}_\Omega - \theta = -\check{\theta}$, therefore, for any $\check{\theta} \in \check{\Theta}$, $-\check{\theta} \in \check{\Theta}$.

(ii) Suppose that, for all $\kappa \in \Theta$, $\langle a, \theta \rangle \leqslant \langle a, \kappa \rangle$, then $\langle a, \theta - \mathbf{1}_\Omega \rangle \leqslant \langle a, \kappa - \mathbf{1}_\Omega \rangle$ or $\langle a, \mathbf{1}_\Omega - \theta \rangle \geqslant \langle a, -(\kappa - \mathbf{1}_\Omega) \rangle$. Now $\langle a, \theta' - \mathbf{1}_\Omega \rangle = \langle a, \mathbf{1}_\Omega - \theta \rangle \geqslant \langle a, \mathbf{1}_\Omega - \kappa \rangle$, therefore $\langle a, \theta' - \mathbf{1}_\Omega \rangle \geqslant \langle a, -(\kappa - \mathbf{1}_\Omega) \rangle$. By the previous point, the density κ' such that $-(\kappa - \mathbf{1}_\Omega) = \kappa' - \mathbf{1}_\Omega$ is in Θ, hence we can write that $\langle a, \theta' - \mathbf{1}_\Omega \rangle \geqslant \langle a, \kappa' - \mathbf{1}_\Omega \rangle$, and finally $\langle a, \theta' \rangle \geqslant \langle a, \kappa' \rangle$, for all $\kappa' \in \Theta$.

(iii) Let $\alpha \in \mathbb{R}$ be such that $u(f) = \alpha - u(\bar{f})$. If, for all $\kappa \in \Theta$, $\langle u(f), \theta \rangle \leqslant \langle u(f), \kappa \rangle$, then $\langle -u(f), \theta \rangle \geqslant \langle -u(f), \kappa \rangle$ and $\langle \alpha - u(f), \theta \rangle \geqslant \langle \alpha - u(f), \kappa \rangle$, hence, $\langle u(\bar{f}), \theta \rangle \geqslant \langle u(\bar{f}), \kappa \rangle$, for all $\kappa \in \Theta$.

(iv) As $\mathbf{1}_\Omega \in \Theta$, by Remark 2.A.1, U, the subspace parallel to $\operatorname{aff}\Theta$, can be written as $\operatorname{aff}\Theta - \mathbf{1}_\Omega$, which gives the last equality. Also, for any element $u \in U$, there exist $\{u_i\}_{i \in I}$, a finite family of reals, such that $\sum_I u_i = 1$, and $\{\theta_i\}_{i \in I}$, a finite family of elements of Θ, such that $u = \sum_I u_i \theta_i - \mathbf{1}_\Omega = \sum_I u_i \theta_i - (\sum_I u_i)\mathbf{1}_\Omega = \sum_I u_i(\theta_i - \mathbf{1}_\Omega)$ hence $u \in \operatorname{aff}\check{\Theta}$. Conversely, let $v \in \operatorname{aff}\check{\Theta}$: there exist $\{v_i\}_{i \in I}$, a finite family of reals such that $\sum_I v_i = 1$, and $\{\theta_i\}_{i \in I}$, a finite family of elements of Θ such that $v = \sum_I v_i(\theta_i - \mathbf{1}_\Omega) = \sum_I v_i \theta_i - (\sum_I v_i)\mathbf{1}_\Omega = \sum_I v_i \theta_i - \mathbf{1}_\Omega$, hence v is in U.

(v) Let $a \in \check{\Theta}^\perp$, then, for all $\check{\theta} \in \check{\Theta}$, $\langle a, \check{\theta} \rangle = 0 = \langle a, \theta - \mathbf{1}_\Omega \rangle$, that is $\langle a, \theta \rangle =$

$\langle a, \mathbf{1}_\Omega \rangle$, hence a is in $\mathtt{K}$. Conversely, let $a \in \mathtt{K}$, then, there exists $\alpha \in \mathbb{R}$ such that $\langle a, \theta \rangle = \alpha$, for all $\theta \in \Theta$. But $\mathbf{1}_\Omega$ is in Θ, therefore $\alpha = \langle a, \mathbf{1}_\Omega \rangle$ and $\langle a, \theta \rangle = \langle a, \mathbf{1}_\Omega \rangle$, hence $\langle a, \check{\theta} \rangle = 0$, and a is in $\check{\Theta}^\perp$. ∎

3.A.4 Proof of Proposition 3.5.2

We proceed in four steps. Remember that V, $-A$ and $-A \circ \Pi$ are concave functions and that A and $A \circ \Pi$ are convex functions.

Step 1: $V^*(\theta) = (-A \circ \Pi)^*(\theta - \mathbf{1}_\Omega)$

By definition $V^*(\theta) = \inf_{a \in \mathsf{L}^2} \{\langle a, \eta \rangle_{\mathsf{L}^2} - V(a)\}$ that is

$$\begin{aligned} V^*(\theta) &= \inf_{a \in \mathsf{L}^2} \{\langle a, \theta \rangle_{\mathsf{L}^2} - \langle a, \mathbf{1}_\Omega \rangle_{\mathsf{L}^2} + (A \circ \Pi)(a)\} \\ &= \inf_{a \in \mathsf{L}^2} \{\langle a, \theta - \mathbf{1}_\Omega \rangle_{\mathsf{L}^2} - (-A \circ \Pi)(a)\} = (-A \circ \Pi)^*(\theta - \mathbf{1}_\Omega) \end{aligned}$$

Step 2: the adjoint of the linear operator Π

It is the operator $\Pi^* \colon \ell^2 \to \mathsf{L}^2$ such that, for all $a \in \mathsf{L}^2$ and $x \in \ell^2$, $\langle \Pi a, x \rangle = \langle a, \Pi^* x \rangle$. Using the orthogonal decomposition $a = a_{\mathtt{K}} + a_{\mathtt{NC}}$ with $a_{\mathtt{NC}} = \sum_{\mathbb{N}} a_i \zeta_i$, we have, on the one hand, $\langle \Pi a, x \rangle = \langle \Pi(a_{\mathtt{K}} + a_{\mathtt{NC}}), x \rangle = \langle \Pi a_{\mathtt{NC}}, x \rangle = \sum_{\mathbb{N}} a_i x_i$. On the other hand, $\langle a, \Pi^* x \rangle = \langle a_{\mathtt{K}}, \Pi^* x \rangle + \langle a_{\mathtt{NC}}, \Pi^* x \rangle$. If $a_{\mathtt{NC}} = 0$, then $\Pi a = 0$, hence $\langle a_{\mathtt{K}}, \Pi^* x \rangle = 0$ for any x and any $a_{\mathtt{K}}$, therefore $\Pi^* x$ is in $\mathtt{NC}$. If $a_{\mathtt{NC}} = \zeta_i$, then $\langle \Pi a, x \rangle = x_i$, hence $\langle \zeta_i, \Pi^* x \rangle = x_i$, that is, $\Pi^* x = \sum_{\mathbb{N}} x_i \zeta_i$. Finally, Π^* is an injection from ℓ^2 into L^2 which is equal to the isomorphism $\mathbf{J}^{-1}$ when restricted to its range $\mathtt{NC}$.

Step 3: $(-A \circ \Pi)^*(\theta - \mathbf{1}_\Omega) = -A^* \circ \Pi(\theta)$

This is an application to conjugacy in the concave sense of Theorem 19 in Rockafellar (1974), where condition (c) is satisfied: ℓ^2 is a Banach space, ℓ^2 is the range of A and the domain of Π^* and A is lower semi-continuous and nowhere equal to $+\infty$, therefore A is closed in the sense defined p 15 of Rockafellar (1974). The function $-A \circ \Pi$ is concave therefore, by equation (3.6), we have:

$$\begin{aligned} (-A \circ \Pi)^*(\theta - \mathbf{1}_\Omega) &= -(A \circ \Pi)^*(-(\theta - \mathbf{1}_\Omega)) \\ &= -\inf_{x \in \ell^2} \{A^*(x) \mid \Pi^* x = -(\theta - \mathbf{1}_\Omega)\} \\ &= -\inf_{x \in \ell^2} \{A^*(x) \mid \Pi^*(-x) = \theta - \mathbf{1}_\Omega\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-A\circ\Pi)^*(\theta-\mathbf{1}_\Omega) &= -\inf_{-x\in\ell^2}\{A^*(-x)\mid \Pi^*x=\theta-\mathbf{1}_\Omega\}\\ &= -\inf_{-x\in\ell^2}\{A^*(x)\mid \Pi^*x=\theta-\mathbf{1}_\Omega\}\end{aligned}$$

The last equality comes from the fact that $A^*(-x)=A^*(x)$ as A is symmetric (Rockafellar, 1970, Corollary 12.3.1). As Π^*x is in $\mathtt{NC}$, when $\theta-\mathbf{1}_\Omega$ is not in $\mathtt{NC}$, the infimum is taken over the empty set, hence is $+\infty$, otherwise Π^* is a bijection and there is a unique $x\in\ell^2$ such that $\Pi^*x=\theta-\mathbf{1}_\Omega$ which is $x=\Pi(\theta-\mathbf{1}_\Omega)=\Pi\theta$. By Proposition 3.4.2, $\theta-\mathbf{1}_\Omega\in\mathtt{NC}$ is equivalent to $\theta\in\operatorname{aff}\Theta$, therefore

$$(-A\circ\Pi)^*(\theta-\mathbf{1}_\Omega)=\begin{cases}-A^*\circ\Pi(\theta) & \text{if } \theta\in\operatorname{aff}\Theta\\ -\infty & \text{otherwise}\end{cases}.$$

Step 4: conclusion

As V is closed and concave, it holds that, for all $a\in\mathsf{L}^2$:

$$\begin{aligned}V(a)=V^{**}(a) &= \inf_{\theta\in\mathsf{L}^2}\{\langle a,\theta\rangle - V^*(\theta)\}\\ &= \inf_{\theta\in\mathsf{L}^2}\{\langle a,\theta\rangle-(-A\circ\Pi)^*(\theta-\mathbf{1}_\Omega)\}\\ &= \inf_{\theta\in\operatorname{aff}\Theta}\{\langle a,\theta\rangle + A^*\circ\Pi(\theta)\}\end{aligned}$$

The formula can be tightened because we proved in section 2.A.4 that the domain of the conjugate of variational preference is included in the set of priors $\mathscr{C}$. By an adaptation of the same proof, we get the following results for the concave VEU representation:

Lemma 3.A.1. $\operatorname{dom} V^*\subset\Theta$ *and* $\operatorname{dom}(A\circ\Pi)^*\subset\check{\Theta}$.

Proof: The proof in section 2.A.4 holds on the fact that

$$V(a)\geqslant\min_{\mathbf{P}\in\mathscr{C}}\mathbf{E}_\mathbf{P}[a]=\min_{\theta\in\Theta}\langle a,\theta\rangle\,,$$

hence $\mathbf{E}_\mathbb{P}[a]+A\circ\Pi(a)\geqslant\min_{\theta\in\Theta}\langle a,\theta\rangle$, that is $A\circ\Pi(a)\geqslant\min_{\theta\in\Theta}\langle a,\theta-\mathbf{1}_\Omega\rangle$ and finally:

$$A\circ\Pi(a)\geqslant\min_{\check\theta\in\check\Theta}\langle a,\check\theta\rangle\,.$$

Therefore, the function V is greater than the lower support function of the set Θ while the function $A\circ\Pi$ is greater than the lower support function of the set $\check\Theta$.

Taking the conjugates give the result. ■

Using the fact that the infimum is attained on the weak* compact set Θ, the final variational representation is given by:

$$V(a) = \min_{\theta\in\Theta}\{\langle a,\theta\rangle + A^*\circ\Pi(\theta)\}$$

or in terms of probabilities in the set of priors:

$$V(a) = \min_{\mathbf{P}\in\mathscr{C}}\left\{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[a] + A^*\circ\Pi\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right)\right\}.$$ ■

3.A.5 Proof of Proposition 3.5.3

(i) Take x and $y\in\ell^2$ and set $a=\mathbf{J}^{-1}x$, a is in $\mathtt{NC}$. Let $\alpha>0$, it holds $V(\alpha a) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\alpha a] + A\circ\Pi(\alpha a) = A(\alpha x)$ and $\alpha V(a) = \alpha A(x)$, then, the homogeneity of the function V gives the homogeneity of A. Take $\alpha<0$, the symmetry property of A gives that $A(\alpha x) = A((-\alpha)(-x)) = (-\alpha)A(-x) = (-\alpha)A(x)$, therefore, for any $\alpha\in\mathbb{R}$, $A(\alpha x) = |\alpha|A(x)$. From the convexity of A, we have that $A(x+y) = 2A(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y)\leqslant 2(\frac{1}{2}A(x)+\frac{1}{2}A(y))$ therefore A is a semi-norm on ℓ^2.

(ii) By Proposition 3.8 in Aubin (1998), it is enough that A is convex, lower semi-continuous and positively homogeneous to be the support function of the set

$$\mathcal{K}_A = \left\{x\in\ell^2 \mid \langle x,y\rangle\leqslant A(y)\ \forall y\in\ell^2\right\}. \tag{3.7}$$

As $A(0)=0$, Proposition 4.2 in Aubin (1998) gives the equivalence $x\in\partial A(0) \iff \langle x,y\rangle\leqslant A(y)$ for all $y\in\ell^2$, hence $\mathcal{K}_A=\partial A(0)$. Therorem 4.4 in Aubin (1998) gives that

$$\partial V(0) = \partial(\langle\mathbf{1}_\Omega,a\rangle - A\circ\Pi a)(0) = \mathbf{1}_\Omega - \Pi^*\partial A(\Pi 0)$$

therefore:

$$\partial A(0) = \Pi(\mathbf{1}_\Omega - \partial V(0))$$

But Theorem 14 in Ghirardato *et al.* (2004) states that $\partial V(0)=\mathscr{C}$ for an homogeneous and constant additive function. In our L^2 setting, the linear functionals corresponding to the set of priors are given by the set Θ of densities, hence $\partial V(0)=\Theta$ and, using the symmetry property of $\check{\Theta}$ (Proposition 3.4.2):

$$\partial A(0) = \Pi(\mathbf{1}_\Omega - \Theta) = \Pi(-\check{\Theta}) = \Pi\check{\Theta}.$$

The adjustment function A is then the support function of the set $\Pi\check{\Theta}$, that is

$$A(x) = \max_{y \in \Pi\check{\Theta}} \{\langle x, y\rangle\}.$$

If $x = \Pi a$ for an $a \in \mathsf{L}^2$, this is

$$A(\Pi a) = \max_{y \in \Pi\check{\Theta}} \{\langle \Pi a, y\rangle\} = \max_{y \in \Pi\check{\Theta}} \{\langle a, \Pi^* y\rangle\} = \max_{\check{\theta} \in \check{\Theta}} \left\{\left\langle a, \check{\theta}\right\rangle\right\}$$

which gives the result.

(iii) As Θ is weak* closed (Corollary 3.2.4), hence closed, so is $\Pi\check{\Theta}$, therefore the conjugate of its support function is its indicator function (Rockafellar, 1970, Theorem 13.2). That is

$$A^*(x) = \psi_{\Pi\check{\Theta}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in \Pi\check{\Theta} \\ +\infty & \text{if } x \notin \Pi\check{\Theta} \end{cases}$$

With Proposition 3.5.2 this leads to

$$\begin{aligned} c^*(\mathbf{P}) = A^* \circ \Pi\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right) &= \begin{cases} 0 & \text{if } \Pi\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right) \in \Pi\check{\Theta} \\ +\infty & \text{if } \Pi\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right) \notin \Pi\check{\Theta} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} \in \Theta \\ +\infty & \text{if } \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} \notin \Theta \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } \mathbf{P} \in \mathscr{C} \\ +\infty & \text{if } \mathbf{P} \notin \mathscr{C} \end{cases} \end{aligned}$$

hence to the standard MEU representation. Note that we have also retrieved in this special case one of Ghirardato *et al.* (2004)'s result: the set of priors of the Bewley (1986) representation of the unambiguous preference relation is the same as the set of priors of the Gilboa et Schmeidler (1989) representation of the initial preference.■

3.A.6 Calculus of the conjugates

We want to calculate the conjugate function $\phi^*(s) = \sup_{t \in \mathbb{R}}\{st - \phi(t)\}$ for two specification of the function $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Case 1:

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2} t^2 & \text{if } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{if } t < 0 \end{cases}$$

If $s < 0$ then $\lim_{t\to-\infty}(st - \phi(t)) = \lim_{t\to-\infty} st = +\infty$. If $s \geqslant 0$, the maximum is reached for $t = s/\lambda$ therefore

$$\phi^*(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda}s^2 & \text{if } s \geqslant 0 \\ +\infty & \text{if } s < 0 \end{cases}$$

Case 2:

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}T(2t - T) & \text{if } t > T \\ \frac{\lambda}{2}t^2 & \text{if } 0 \leqslant t \leqslant T \\ 0 & \text{if } t < 0 \end{cases}$$

- If $s < 0$ then $\lim_{t\to-\infty}(st - \phi(t)) = \lim_{t\to-\infty} st = +\infty$.
- If $s > \lambda T$ then

$$\lim_{t\to+\infty} st - \phi(t) = \lim_{t\to+\infty} st - \frac{\lambda}{2}T(2t - T) = \lim_{t\to+\infty} t(s - \lambda T) = +\infty.$$

- If $0 \leqslant s \leqslant \lambda T$ then
  — if $t < 0$ then $\sup_{t<0}\{st - \phi(t)\} = \sup_{t<0}\{st\} = 0$,
  — if $0 \leqslant t \leqslant T$, the supremum of $st - \frac{\lambda}{2}t^2$ is obtained for $t = \frac{1}{\lambda}s$ and is equal to $\frac{1}{2\lambda}s^2$,
  — if $t > T$ the supremum of $st - \frac{\lambda}{2}T(2t - T) = t(s - \lambda T) + \frac{\lambda}{2}T^2$ is obtained for $t = T$ and is equal to $sT - \frac{\lambda}{2}T^2$.

  We need to compare the suprema obtained in the last two cases. From $(s - \lambda T)^2 \geqslant 0$, we get $s^2 - 2\lambda sT + \lambda^2T^2 \geqslant 0$, hence $\frac{1}{2\lambda}s^2 \geqslant sT - \frac{\lambda}{2}T^2$. Therefore we can conclude that $\sup_{t\in\mathbb{R}}\{st - \phi(t)\} = \frac{1}{2\lambda}s^2$.

Finally, putting the three pieces together we get the following expression for the conjugate:

$$\phi^*(s) = \begin{cases} +\infty & \text{if } s > \lambda T \\ \frac{1}{2\lambda}s^2 & \text{if } 0 \leqslant s \leqslant \lambda T \\ +\infty & \text{if } s < 0 \end{cases}$$

■

Chapter 4

Optimal Portfolio with Vector Expected Utility

Abstract

We study the optimal portfolio selected by an investor who conforms to Siniscalchi's (2009) Vector Expected Utility's (VEU) axioms and who is ambiguity averse. To this end, we derive a mean-variance preference generalised to ambiguity from the second-order Taylor-Young expansion of the VEU certainty equivalent. We apply this Mean Variance Variability preference to the static two-assets portfolio problem and deduce asset allocation results which extend the mean-variance analysis to ambiguity in the VEU framework. Our criterion has attractive features: it is axiomatically well-founded and analytically tractable, it is therefore well suited for applications to asset pricing as proved by a novel analysis of the home-bias puzzle with two ambiguous assets.

JEL classification*: D81, G11.*

Keywords*: Vector Expected Utility ; Ambiguity ; Portfolio Choice ; Home-bias Puzzle*

4.1 Introduction

Since the seminal works of Markowitz (1952) and Tobin (1958), mean-variance preferences have been the cornerstone of optimal portfolio theory. An investor with mean variance preference having to select risky assets will rank uncertain portfolio returns r according to the following evaluation of their utility:

$$u_{\text{MV}}(r) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(r) - \frac{\gamma}{2}\,\mathbf{var}_{\mathbf{P}}(r)$$

where $\mathbf{P}$ is a given probability and γ is a measure of the aversion to variance. The foundations of the mean-variance preferences and the link between risk and variance for "small risks" are to be found in the classical Arrow-Pratt (Pratt, 1964; Arrow, 1965) approximation of the Expected Utility (EU) certainty equivalent: for an investor with certain wealth w considering a risky investment h, the Taylor expansion to the second order of its certainty equivalent is given by:

$$c(w+h) = w + \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h) - \frac{1}{2}\gamma(w)\,\mathbf{var}_{\mathbf{P}}(h) + o(\mathbf{var}_{\mathbf{P}}(h))$$

where $\gamma(w) = -u''(w)/u'(w)$ is the absolute risk aversion coefficient of the *Bernoulli utility function*[1] u.

While the mean-variance analysis remains the workhorse of modern portfolio theory, it is well known that empirical data cannot be fully rationalised in this context, especially, the equity premium cannot be explained by a risk premium only (the "equity premium puzzle", Mehra et Prescott, 1985) and international portfolios are under diversified (the "home-bias puzzle", French et Poterba, 1991). A large amount of literature has endeavoured to explain these "puzzles", analysing different shortcomings of the classical paradigm. Among these, recent advances in decision theory aimed at generalising the EU framework have allowed to study the effect on asset prices of *ambiguity*: situations where the information available to the investor is too imprecise to be summarised by a unique probability distribution over events[2]. This paper fits into this field of research: its main contribution is to propose a mean-variance preference generalised to ambiguity using Siniscalchi's (2009) Vector Expected Utility (VEU). We study the conditions for existence and calculate the second order Taylor-Young expansion of the VEU certainty equivalent from which we derive a *Mean Variance Variability* preference. This flexible and

1. In Mas-Colell, Whinston, et Green's (1995) terminology, see note 12 p. 184.
2. Recent general references on the subject of ambiguity include Wakker (2008); Etner, Jeleva, et Tallon (2009) and Gilboa et Marinacci (2011).

tractable criterion allows not only to retrieve the existing results for an optimal portfolio with one risky and one ambiguous asset but also to show new results with two ambiguous assets, which we apply to the discussion of the home-bias puzzle.

Several non EU decision theoretic models have been successfully applied to the field of finance and to the discussions of the "puzzles". Among these applications, some have sought to improve the mean-variance preferences: especially Maccheroni, Marinacci, et Ruffino (2013) derive a mean-variance model adjusted for ambiguity from a quadratic approximation of the certainty equivalent of the smooth model of decision making under ambiguity (Klibanoff, Marinacci, et Mukerji, 2005, henceforth KMM). Our work is closely related to this paper which provided the impetus for our research, but is set in a different axiomatic framework hence uses different mathematical tools. While the KMM model has been successfully applied to numerous asset markets problems, we have chosen the VEU model for its specific axiomatic foundations which make it very well suited to financial applications: its central axiom of complementary independence, which will be detailed below, has a very clear and intuitive behavioural interpretation in a portfolio application. Finally the new results which have been obtained in this paper with two ambiguous assets justify by themselves the choice of the VEU model.

4.1.1 Presentation of the VEU model

A decision maker (DM) conforms to the VEU set of axioms if and only if (iff) she ranks uncertain prospects f, functions from a state space S to a set X of consequences which is a mixture space, via the functional:

$$V(f) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\tilde{u} \circ f) + A(\{\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\zeta_i \cdot \tilde{u} \circ f)\}_{0 \leqslant i < n}) \tag{4.1}$$

where $\tilde{u}\colon X \to \mathbb{R}$ is a von Neumann-Morgenstern utility function and $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is a function such that for any $\varphi \in \mathbb{R}^n$, $A(-\varphi) = A(\varphi)$ and $A(0_n) = 0$. There are two parts to this evaluation: the expected utility of the act according to a baseline probability $\mathbb{P}$ and an adjustment to this baseline evaluation, function of the *variability* of the utility profile and of the DM's attitude towards ambiguity.

The baseline probability $\mathbb{P}$ is a key feature of the VEU model as it is revealed by the preferences of the DM over *complementary acts*. These are acts f and $\bar{f}$ such that for any states s and $s' \in S$, $\frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2}\bar{f}(s) \sim \frac{1}{2}f(s') + \frac{1}{2}\bar{f}(s')$ which implies that their utility profiles sum to a constant: $\tilde{u} \circ f = k - \tilde{u} \circ \bar{f}$ for some $k \in \mathbb{R}$. In the words of Siniscalchi, they are "the preference counterpart of algebraic negation". In a portfolio application, assuming linear utility, a long and a short position of the same value in the same asset are straightforward examples of complementary acts. The central insight of the VEU model is that complementary acts have the same utility variability, *i.e.* the same ambiguity, hence have to be ranked according to their baseline expected utility only. Therefore "preferences over complementary acts uniquely identify the baseline prior". As an illustration, consider Ellsberg's (1961) three colour single urn experiment: a ball is drawn from an urn containing 30 red balls and 60 black and yellow balls with the proportion of black and yellow balls unknown. Assuming linear utility, the act $(10, R; -10, B; 0, Y)$ that yields \$10 if a red ball is drawn and costs \$10 if a black ball is drawn and the act $(-10, R; 10, B; 0, Y)$ are complementary: they embed the same ambiguity and if the DM is indifferent between these two, we can derive that $\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(B)$. If the DM is also indifferent between $(10, R; 0, B; -10, Y)$ and $(-10, R; 0, B; 10, Y)$, we can infer that she is using the uniform prior as her baseline probability over the state space $S = \{R, B, Y\}$.

The adjustment to the baseline evaluation refers to the notion of *crisp* acts, which has been introduced by Ghirardato, Maccheroni, et Marinacci (2004, henceforth GMM). They characterise the *unambiguous preference* as the maximal[3] restriction satisfying the independence axiom of the complete DM preference. This preference is incomplete and has a Bewley (1986) representation by a unanimity criterion over a set of priors $\mathscr{C}$. Acts which have the same expected utility for all the priors in $\mathscr{C}$ are crisp, hence non crisp acts have "variable utility profiles". Using the Hilbert space structure of $\mathsf{L}^2(\mathbb{P})$, Siniscalchi proves that the subspace of crisp acts $\mathtt{K}$ and the subspace of non crisp acts $\mathtt{NC}$ are orthogonal complements, hence that any act can be decomposed into a crisp component and a "purely ambiguous" one. With $\{\zeta_i\}_{0\leqslant i<n}$ a basis for the subspace $\mathtt{NC}$, the purely ambiguous component can be written as a linear combination of the vectors ζ_i which are named *adjustment factors* and are interpreted as sources of ambiguity. To give more intuition on this construction, we can elaborate on Siniscalchi's suggestion to draw a parallel with factor pricing models in finance: in these models, "expected asset returns are determined by a linear combination of their covariances with variables representing the risk factors[4]." Cochrane (2005) proposes as risk factors explaining the asset returns: returns on broad based portfolios, interest rates, growth in GDP, investment but also the term premium or the dividend/price ratios. If the DM entertains more than one possible probabilistic scenario for these risk factors, then they can also be seen as the drivers of ambiguity. In this paper we will use a *sharp* VEU representation, that is one where the basis $\{\zeta_i\}_{0\leqslant i<n}$ is made orthonormal by an application of the

3. In the sense of set inclusion.
4. Ferson (2003)

Gram-Schmidt procedure. The sources of ambiguity are then $\mathbb{P}$-independent, and exposure to one source cannot hedge the ambiguity coming from another. But the interpretation of independent sources of ambiguity as macroeconomic variables is more difficult, a difficulty that also arises with factor pricing models, for example when orthogonalised risk factors are used in the Arbitrage Pricing Theory [5].

Going back to equation (4.1), it can now be seen that the argument of the adjustment function A is the vector of coordinates of the utility profile in $\mathtt{NC}$, which can be read as the correlations of the utility profile with each source of ambiguity. Thanks to this construction, the VEU evaluation nicely reduces to EU for crisp acts and reflects complementarities among ambiguous acts. This can again be illustrated using Ellsberg's three colour urn, as in the original paper: let ζ_0 be the random variable such that $\zeta_0(R) = 0$, $\zeta_0(B) = 1$ and $\zeta_0(Y) = -1$ and let $A(\varphi) = -|\varphi|$. Assuming the uniform prior that we derived above, any act f is evaluated through: $V(f) = \frac{1}{3}(f(R)+f(B)+f(Y))-|\frac{1}{3}(f(B)-f(Y))|$. One can check that this evaluation is consistent with the preferences reported in Ellsberg (1961): $V[(10, R; 0, B; 0, Y)] > V[(0, R; 10, B; 0, Y)]$ but $V[(10, R; 0, B; 10, Y)] < V[(0, R; 10, B; 10, Y)]$ highlighting the complementarity of the payoffs on the events B and Y in the last act.

4.1.2 Outline of the paper

The mathematical details of this setup are exposed in Section 4.2. In Section 4.3 we give some sufficient conditions for the VEU certainty equivalent to be differentiable and we compute the second-order Taylor-Young expansion for a "small" incremental act when the DM is *ambiguity averse* in the sense of Schmeidler (1989), *i.e.* a DM with a weak preference for mixtures. The ambiguity averse case highlights the central role of the Hessian of the adjustment function A: the $\mathbb{R}^n$ rotation matrix made of its eigenvectors induces a rotated basis of the subspace of non-crisp acts $\mathtt{NC}$ made of normalised sources of ambiguity which are still $\mathbb{P}$-independent but are also not correlated for the DM's tastes, in the sense that there are no cross terms in her evaluation of an act spanning several sources. Section 4.4 delves further into the properties of the quadratic approximation and proves the link between the DM aversion to these sources of ambiguity and the eigenvalues of the Hessian of A. The ambiguity adjustment term in the quadratic approximation can then be written as the variance of a purely non crisp act $\mathbb{A}h$ obtained by scaling and projecting the evaluated prospect h. Building on this analysis, Section 4.4 proceeds with the exposition

5. See also the discussion in Ferson (2003, section 2.7)

of our generalised Mean Variance Variability criterion which takes the form:

$$u_{\mathrm{MVV}} = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h) - \frac{\gamma}{2}\,\mathbf{var}_{\mathbb{P}}(h) - \frac{\theta}{2}\,\mathbf{var}_{\mathbb{P}}(\mathbb{A}h).$$

where γ and θ are strictly positive constant that respectively measure risk aversion and ambiguity aversion. Section 4.4 concludes with the similarities and differences between our criterion and Maccheroni *et al.*'s (2013). Section 4.5 applies the Mean Variance Variability to the choice of an optimal portfolio and shows that in our setting, the ambiguity adjustment leads to a modified variance-covariance matrix for the assets, a results that lends a lot of tractability to our criterion. Finally an analysis of the home-bias puzzle is proposed, first with a purely risky domestic asset and an ambiguous foreign asset, then with two ambiguous assets, a new analysis allowed by our criterion. Proofs are grouped in the appendix.

4.1.3 Related literature

As has been highlighted above, our work is strongly related to Maccheroni *et al.* (2013) which also contains a study of ambiguity through a second-order approximation "in the small", a mean-variance analysis of the optimal portfolio generalised to ambiguity and an application to the discussion of the home-bias puzzle. Other works share at least one of these lines of research.

Nau (2003, 2006), Skiadas (2008), Izhakian et Benninga (2011) and Jewitt et Mukerji (2011) study ambiguity in the small. Nau (2003) studies the second order approximation of the risk premium for non EU preferences in the state-preference framework and obtains a generalised measure of risk aversion given by the Hessian matrix of the risk neutral probability distribution, where the variables are the finite states of the world. Nau (2006) applies these results to the axiomatisation of a second order utility preference and exhibits a decomposition of the second order approximation of the risk premium into a "pure risk" and an "uncertainty" premium. Skiadas (2008) studies approximations of KMM and divergence[6] preferences' certainty equivalents, for small risks of Brownian and Poissonian types. Izhakian et Benninga (2011) compute in the KMM framework an approximated uncertainty premium with an ambiguity premium component. Jewitt et Mukerji (2011), building on their definitions of "more ambiguous" acts, expose a second order approximation of the ambiguity premium in the KMM and the α-MEU (see e.g. GMM) frameworks. By extending this analysis to the VEU model, our paper allows to test the

6. Maccheroni, Marinacci, et Rustichini's (2006) variational preferences with the Fenchel conjugate equal to the divergence of the priors with respect to a baseline probability.

robustness of these results to the axiomatic specifications.

Taboga (2005), Calafiore (2007), Maccheroni, Marinacci, Rustichini, et Taboga (2009), Garlappi, Uppal, et Wang (2007) and Boyle, Garlappi, Uppal, et Wang (2012) apply a mean variance generalised to ambiguity to the analysis of the optimal portfolio. Taboga (2005) shows that in the KMM model, with Constant Absolute Risk Aversion (CARA) and Constant Ambiguity Attitude, Markowitz's (1952) results hold if unique values of expected returns, variances and covariances are replaced by averages of these moments calculated for all the distributions of asset returns considered by the DM. Furthermore, these averages are not computed under KMM preference's second order probability but under a modified law that puts more weights on pessimistic priors. Calafiore (2007) considers an investor with a mean–variance, or a mean–mean absolute deviation, objective function who does not know the exact probabilistic model for the returns of the assets. The "true" model is nonetheless supposed to lie within a given distance, measured by the Kullback-Leibler divergence or relative entropy, of a reference model. Finally, the investor wishes to construct a portfolio which is robust to the worst case of all the scenarios deemed possible. The author then details the procedure and results of the numerical optimisation process. Maccheroni *et al.* (2009) build from the variational model mean-variance preferences which are monotone. Applied to the optimal portfolio, they lead to another generalisation of Markowitz's results where the unconditional means and variances are replaced by moments conditioned on the wealth not exceeding a given threshold: the investor ignores the most favourable parts of the distributions, parts which lead to high variances hence to the non monotonicity of the original mean-variance preferences. Garlappi *et al.* (2007) study the effect of uncertainty on estimated parameters when the DM uses a Maxmin Expected Utility (Gilboa et Schmeidler, 1989, henceforth MEU) approach versus a Bayesian approach and apply their results to the optimal portfolio. Boyle *et al.* (2012) propose a mean variance analysis with confidence intervals on the means of the returns and an MEU investor. They show that with increasing ambiguity, *i.e.* increasing widths of the confidence intervals, the optimal portfolio changes from Markowitz's diversified holdings to concentration on familiar assets to non participation. Our results confirm that Markowitz's results hold in another axiomatic decision making model if classical variances and covariances are adjusted for ambiguity, these adjustments being model specific.

Our work is also related to several papers which explore the effect of ambiguity on asset prices and possible implications for the puzzles. Among others, Chen et Epstein (2002) study asset returns with a continuous time multiple priors setting and obtain a decomposition of the equity premium in terms of risk and ambiguity, possibly covering some of the gap between historical data and the purely risky equity premium. Fei (2007) and Miao (2009) extend this framework to anticipation and incomplete information respectively. With anticipation, that is when the investor may have some private or inside information on some prices, mean returns are still distorted by ambiguity but also by a third term of the opposite sign which depends on this information. When there is incomplete information, that is when the investor has only access to a sub-filtration of the filtration generated by the Brownian processes that drive the prices, there is also an additional hedging demand which then depends jointly on the estimation risk and the ambiguity. The author also proves that the optimal solution can be solved in two distinct steps, treating the filtering issue first, then solving the BSDE for the optimal portfolio under ambiguity. Epstein et Miao (2003) use a recursive multiple prior settings to characterise the equilibrium in an economy with two agents with heterogeneous beliefs and apply this result to the discussion of the home-bias puzzle. Uppal et Wang (2003) and Maenhout (2004) solve the optimal portfolio with consumption in the continuous time version of the robust preferences (Anderson, Hansen, et Sargent, 2003). They find respectively that under-diversification occurs when the ambiguity on the joint distribution of returns is high and that robustness increases the equity premium and lowers the risk-free rate. Finally, Gollier (2011) studies the comparative statics of more ambiguity aversion and exposes the condition for an increase in ambiguity aversion to decrease the ambiguous asset holding.

4.2 Setup and notations

As the VEU model has been established in a framework *à la* Anscombe et Aumann (1963, AA), this application is set in the standard AA framework. Acts f are functions from a state space S, endowed with a countably generated[7] σ-algebra of events Σ, to the set of all simple probability distributions over a set of prizes which, as we are interested in monetary outcomes, is the real line. We denote by $\mathcal{F}$ the set of all AA acts.

We consider a DM who satisfies Siniscalchi's (2009) VEU's axioms so that her preferences admit a VEU representation. Such a representation is made of five subjective elements $(\tilde{u}, \mathbb{P}, n, \{\zeta_i\}_{0\leqslant i<n}, A)$, detailed below, which are such that $f \succsim g$

7. For a discussion of this assumption, see Siniscalchi (2009, Section 2).

iff $V(f) \geqslant V(g)$ where:

$$V(f) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\tilde{u} \circ f) + A(\{\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\zeta_i \cdot \tilde{u} \circ f)\}_{0 \leqslant i < n}) \tag{4.2}$$

$\tilde{u}$ is the von Neumann-Morgenstern utility function. In the AA framework for monetary outcomes: $\tilde{u} \circ f(s) = \mathbf{E}_{f(s)}[u] = \int_{\mathbb{R}} u(z)\,\mathrm{d}f(s)(z)$ for all $s \in S$, where u is the Bernoulli utility function on which we make the usual assumptions:

Assumption 4.1. *u is of class $\mathscr{C}^2$, strictly increasing and concave.*

$\mathbb{P}$ is the baseline probability over the measured space (S, Σ) which is revealed by the DM preferences over complementary acts. n is the dimension of the subspace of non crisp acts $\mathtt{NC}$ and can be infinite. This subspace and its orthogonal complement in $\mathsf{L}^2(\mathbb{P})$, the subspace $\mathtt{K}$ of crisps acts, are defined with the set $\mathscr{C}$ of priors given by the Bewley (1986) representation of the incomplete unambiguous preference (see GMM). Note that this set is symmetric around the baseline probability $\mathbb{P}$ and all the probabilities in this set are absolutely continuous with respect to $\mathbb{P}$ (Siniscalchi, 2009, Lemma 3). $\{\zeta_i\}_{0 \leqslant i < n}$ is a basis of the subspace $\mathtt{NC}$ and we assume that it has been obtained with a Gram-Schmidt procedure so that it is orthonormal. The representation is then said to be *sharp* (Siniscalchi, 2009, Definition 2). Finally the adjustment function $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is such that for any $\varphi \in \mathbb{R}^n$, $A(-\varphi) = A(\varphi)$ and $A(0_n) = 0$.

An act k is *crisp*[8] if and only if it behaves like its certainty equivalent that is for all $x \in \mathbb{R}$ such that $k \sim x\mathbf{1}_\Omega$, for all AA act g, for all $\alpha \in (0, 1]$ we have $\alpha g + (1-\alpha)x\mathbf{1}_\Omega \sim \alpha g + (1-\alpha)k$. A remarkable property of crisp acts is that their expected utility is the same for all the probabilities in the set of priors $\mathscr{C}$. Having no variation of its utility profile, the vector φ associated to a crisp k is 0_n hence its adjustment is null and its VEU evaluation reduces to $V(k) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\mathbf{E}_{k(s)}[u])$.

While the VEU model allows for a countably infinite family $\zeta = \{\zeta_i\}_{0 \leqslant i < n}$, we will make the assumption in the following that n is finite. This assumption and Proposition 1 in Siniscalchi (2009) implies that, in a financial application, it is possible to construct with $m > n$ assets, a crisp portfolio, that is a portfolio which is seen as perfectly hedged against ambiguity by the investor.

As is standard in the literature[9], we identify the set of our objects of choice, random variables $X\colon S \to \mathbb{R}$, with a subset denoted $\mathcal{F}_d$ of the AA acts: those whose values are the degenerate lotteries $\delta_{X(s)}$ for each $s \in S$. Therefore we have

8. We use Siniscalchi's (2009) definition, see his paper for differences with GMM's.
9. See for example Kreps (1988, p. 101) or Föllmer et Schied (2011, section 2.5).

$\tilde{u} \circ f(s) = \mathbf{E}_{f(s)}[u] = u(X(s))$ hence we will denote by f either the act in $\mathcal{F}_d$ or the associated random variable.

As all the relevant probabilities for the DM are absolutely continuous with respect to $\mathbb{P}$, she will not discriminate between two acts which are equal $\mathbb{P}$-almost everywhere. This allows us to embed the space $\mathcal{F}_d$ into $\mathsf{L}^\infty(\mathbb{P})$, the Banach space of equivalent classes of essentially bounded Σ-measurable functions. As there is only one underlying measured space, we will drop the reference to $\mathbb{P}$ and use L^∞, the associated norm will be denoted by $\|\cdot\|_\infty$.

Slightly changing the initial notations for the VEU model, we define the family of functions $\{\varphi_i\}_{0\leqslant i<n}$ from L^∞ to $\mathbb{R}$ such that $\varphi_i(a) = \mathbf{E}_\mathbb{P}(\zeta_i \cdot a)$ and the associated vector valued function $\varphi\colon \mathsf{L}^\infty \to \mathbb{R}^n$ such that $\varphi(a) = [\varphi_0(a), \dots, \varphi_{n-1}(a)]^\mathsf{T}$.

Finally, we will denote by $\nabla A(x)$ the gradient vector of the function A at a point $x \in \mathbb{R}^n$, by $\nabla^2 A(x)$ its Hessian matrix at x, by $\langle x, y\rangle$ and $\|x\|_{\mathbb{R}^n}$ the scalar product and norm in $\mathbb{R}^n$.

4.3 Quadratic approximation of the certainty equivalent

The certainty equivalent [10] is a function c from L^∞ to $\mathbb{R}$ such that for any act f we have $c(f)\mathbf{1}_\Omega \sim f$ which is $V(c(f)\mathbf{1}_\Omega) = u(c(f)) = V(f)$ hence $c(f) = u^{-1} \circ V(f)$.

We want to write the second order Taylor-Young expansion of the certainty equivalent around an act w (the initial portfolio or initial wealth) in the direction of a “small” incremental act h:

$$c(w+h) = c(w) + \mathrm{d}_w c(h) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2_w c(h)^2 + o(\|h\|^2_\infty) \tag{4.3}$$

where $\mathrm{d}_w c(h)$ is the first-order differential at point w in direction h and $\mathrm{d}^2_w c(h)^2$ is the second-order differential at point w in directions $h \times h$. For these differentials to exist, we need to make the following assumption:

Assumption 4.2. *A is twice continuously differentiable over $\mathbb{R}^n$.*

In our paper, we will consider the case where w is the current wealth, a given amount of money, that is w is the degenerate random variable $w\mathbf{1}_\Omega$ where we also denote by w the scalar measuring this wealth. We will also suppose that the DM is averse to ambiguity in the Schmeidler (1989) sense, that is she conforms to the

10. Its existence and uniqueness is a consequence of the continuity and strict monotonicity of u over the connected space $\mathbb{R}$.

following Ambiguity Aversion axiom: for all AA acts f and g and for all $\alpha \in (0,1)$, $f \sim g$ implies $\alpha f + (1-\alpha) g \succsim g$. Siniscalchi (2009, Corollary 2) proves that this is equivalent to A being nonpositive and concave [11].

With these assumptions, we can now compute the second-order Taylor-Young approximation (all the proofs are in the appendix).

Proposition 4.3.1. *(i) Under assumptions 4.1 and 4.2, the certainty equivalent is twice differentiable. (ii) Then for an ambiguity averse investor with an initial constant wealth w facing a "small risk" h, the certainty equivalent is approximated to the second-order by:*

$$\begin{aligned} c(w+h) = w + \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h) &- \frac{1}{2}\gamma(w)\,\mathbf{var}_{\mathbb{P}}(h) \\ &+ \frac{1}{2}u'(w)\left\langle \nabla^2 A(0_n)\cdot\varphi(h), \varphi(h)\right\rangle + o(\|h\|_\infty^2) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Note that if h is crisp, then $\varphi(h) = 0_n$ and the certainty equivalent reduces, as expected, to the Arrow-Pratt approximation: $c(w+h) = w + \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h) - \frac{1}{2}\gamma(w)\,\mathbf{var}_{\mathbb{P}}(h) + o(\|h\|_\infty^2)$.

We now prove that this approximation can take a simpler form with a rotation of the orthonormal basis of sources of ambiguity.

Proposition 4.3.2. *There exists an orthonormal basis $\hat{\zeta}$ of the subspace of non crisp acts* `NC`*, obtained by a rotation of ζ, in which the approximation can be written:*

$$\begin{aligned} c(w+h) = w + \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h) &- \frac{1}{2}\gamma(w)\,\mathbf{var}_{\mathbb{P}}(h) \\ &- \frac{1}{2}u'(w)\left\langle \Lambda\cdot\hat{\varphi}(h), \hat{\varphi}(h)\right\rangle + o(\|h\|_\infty^2) \end{aligned} \tag{4.5}$$

where Λ is a diagonal matrix with non negative elements and $\hat{\varphi}$ maps an act with its vector of coordinates in the new basis $\hat{\zeta}$.

Interpretation There is a direct interpretation of equation (4.5). Recall that the VEU criterion consists of two parts: an EU evaluation using the baseline probability $\mathbb{P}$ and an adjustment, non positive and concave when the DM is ambiguity averse, function of the variability of the utility profile of the act considered. The quadratic

11. Note that with this axiom, we could compute the first and second order differentials without Assumption 4.2, indeed Rockafellar (2000, Theorem 2.8 and Corollary 2.9) proves the existence almost everywhere of the second-order expansion of a closed, proper, convex function $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Nonetheless, this would not ensure that A is differentiable at 0_n, a property that is needed for our application.

approximation also consists of two parts: the first three terms are the classical Arrow-Pratt approximation of the EU certainty equivalent and the last term is, to a factor $u'(w)$, the approximation of the adjustment for the variability of the utility profile. Indeed the Taylor-Young approximation to the second order of A at 0_n in direction $\varphi \in \mathbb{R}^n$ (endowed with the basis of eigenvectors of the Hessian of A) is:

$$A(\varphi) = A(0_n) + \langle \nabla A(0_n), \varphi \rangle - \frac{1}{2} \langle \Lambda \varphi, \varphi \rangle + o(\|\varphi\|^2_{\mathbb{R}^n})$$

which, when the DM is ambiguity averse (hence $\nabla A(0_n) = 0_n$, see section 4.A.1), reduces to:

$$A(\varphi) = -\frac{1}{2} \langle \Lambda \varphi, \varphi \rangle + o(\|\varphi\|^2_{\mathbb{R}^n}).$$

Now, if we assume that the Bernoulli utility function can be locally approximated around the point w by an affine function that is we can write

$$u \circ (w\mathbf{1}_\Omega + h) \approx u(w) + u'(w)h,$$

then we get that

$$\hat{\varphi}(u \circ (w\mathbf{1}_\Omega + h)) \approx u'(w)\hat{\varphi}(h)$$

and

$$A(\hat{\varphi}(u \circ (w\mathbf{1}_\Omega + h))) = -\frac{1}{2}(u'(w))^2 \langle \Lambda \hat{\varphi}(h), \hat{\varphi}(h) \rangle + o(\|\hat{\varphi}(h)\|^2_{\mathbb{R}^n}).$$

4.4 Mean Variance Variability Preference

4.4.1 Further analysis of the quadratic approximation in the ambiguity averse case

The ambiguity adjustment given by the fourth term of equation (4.5)

$$-\frac{1}{2}u'(w) \langle \Lambda \cdot \hat{\varphi}(h), \hat{\varphi}(h) \rangle \tag{4.6}$$

has two components: the variability of the utility profile of h given by $\hat{\varphi}(h)$, and the attitude towards ambiguity of the DM given by Λ. The later has itself two components: the DM overall level of aversion to ambiguity and her specific levels of aversion to each sources of ambiguity. We would like to have a measure of the respective contributions of this three effects using vector and matrix norms.

Starting with the overall level of aversion to ambiguity, the following property clarifies the link between the Hessian matrix and ambiguity aversion ranking as defined by Ghirardato et Marinacci (2002). Recall that they define [12] a preference $\succcurlyeq_1$ to be *more ambiguity averse* than a preference $\succcurlyeq_2$, if and only if for all $f \in \mathcal{F}_d$ and $x \in X$, $f \succcurlyeq_1 x \Rightarrow f \succcurlyeq_2 x$. Siniscalchi (2009, Proposition 4) proves that for two VEU preferences $(u, \mathbb{P}, n, \zeta, A^1)$ and $(u, \mathbb{P}, n, \zeta, A^2)$ this is equivalent to $A^1(\varphi) \leqslant A^2(\varphi)$ for all $\varphi \in \mathbb{R}^n$. In our setting this extends to:

Proposition 4.4.1. *Consider two VEU preferences $\succcurlyeq_1$ and $\succcurlyeq_2$ on $\mathcal{F}_d$ satisfying the Ambiguity Aversion Axiom with (sharp, Hessian adjusted) representations given by $(u, \mathbb{P}, n, \hat{\zeta}, A^1)$ and $(u, \mathbb{P}, n, \hat{\zeta}, A^2)$ where A^1 and A^2 are twice continuously differentiable with respective ordered diagonal Hessian matrices $\Lambda^1 = \mathrm{diag}(\lambda_i^1)$ and $\Lambda^2 = \mathrm{diag}(\lambda_i^2)$. $\succcurlyeq_1$ is more ambiguity averse than $\succcurlyeq_2$ if and only if for all $0 \leqslant i < n$:*

$$|\lambda_i^1| \geqslant |\lambda_i^2|.$$

Then if $\succcurlyeq_1$ is more ambiguity averse than $\succcurlyeq_2$, any matrix norm will be greater for $\nabla^2 A^1(0_n)$ than for $\nabla^2 A^2(0_n)$, but the converse is not true. Nonetheless a uniform scaling by a constant α of the Hessian of an adjustment function A gives a more ambiguity averse preference if $\alpha > 1$. Therefore, to evaluate the average attitude of the DM towards ambiguity, we propose the widely used Frobenius norm which is:

$$\left\|\nabla^2 A(0_n)\right\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j}(0_n)\right|^2$$

and in the case of a symmetric matrix (Golub et Van Loan, 1996, formula 2.5.7):

$$\left\|\nabla^2 A(0_n)\right\|_{\mathrm{F}}^2 = \|\Lambda\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum_{i=0}^{n-1}|\lambda_i|^2.$$

Setting $\Lambda' = \Lambda / \|\Lambda\|_{\mathrm{F}} = \mathrm{diag}(\lambda'_0, \ldots, \lambda'_{n-1})$ with $\lambda'_i = -\lambda_i / \|\Lambda\|_{\mathrm{F}}$, equation (4.6) rewrites as:

$$-\frac{1}{2}u'(w)\,\|\Lambda\|_{\mathrm{F}}\left\langle \Lambda'.\hat{\varphi}(h), \hat{\varphi}(h)\right\rangle \tag{4.7}$$

where the scalar product blends the variability of the utility profile of h and the DM specific levels of aversion to each sources of ambiguity. While the variability of h could easily be measured by the standard euclidean norm in $\mathbb{R}^n$, it is impossible to disentangle these two effects, indeed, they can compensate each other and one can only infer from the DM preferences the result of their product. Therefore we propose that, instead of considering the coordinates $\hat{\varphi}(h)$ of the projection of h in the rotated

12. This is the version in Siniscalchi (2009, Definition 4).

basis of the subspace of non crisp act, we use a "scaled" projection where the scaling along each source of ambiguity is proportional to the DM level of aversion to that source of ambiguity.

Formally define the linear operator from L^2 to $\mathtt{NC} \subset \mathsf{L}^2$:

$$\mathbb{A}\colon h \mapsto \mathbb{A}h = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\lambda'_i}\, \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\hat{\zeta}_i \cdot h)\hat{\zeta}_i$$

We will call $\mathbb{A}h$ the *scaled non crisp projection* of h. Then the scalar product in equation (4.7) is:

$$\begin{aligned}\big\langle \Lambda' \cdot \hat{\varphi}(h), \hat{\varphi}(h)\big\rangle &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda'_i(\hat{\varphi}_i(h))^2 = \sum_{i=0}^{n-1}(\sqrt{\lambda'_i}\hat{\varphi}_i(h))^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(\sqrt{\lambda'_i}\, \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\hat{\zeta}_i \cdot h))^2\end{aligned}$$

Using Parseval's identity (Conway, 1990, Theorem 4.13(f)) we get:

$$\big\langle \Lambda' \cdot \hat{\varphi}(h), \hat{\varphi}(h)\big\rangle = \left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\lambda'_i}\, \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\hat{\zeta}_i \cdot h)\hat{\zeta}_i \right\|_{\mathsf{L}^2}^2 = \|\mathbb{A}h\|_{\mathsf{L}^2}^2$$

As $\mathbf{1}_\Omega \in \mathtt{K}$ implies $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_\Omega \cdot \mathbb{A}h) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{A}h) = 0$ we can conclude that:

$$\big\langle \Lambda' \cdot \hat{\varphi}(h), \hat{\varphi}(h)\big\rangle = \mathbf{var}_{\mathbb{P}}(\mathbb{A}h) \tag{4.8}$$

This equality explicits the relationship between variance and variation of the utility profile in the VEU model and allows to write the second-order Taylor-Young expansion of the certainty equivalent for an ambiguity averse DM as:

$$\begin{aligned}c(w+h) = w + \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h) - \frac{1}{2}\gamma(w)\, \mathbf{var}_{\mathbb{P}}(h) \\ - \frac{1}{2}u'(w)\, \|\Lambda\|_{\mathrm{F}}\, \mathbf{var}_{\mathbb{P}}(\mathbb{A}h) + o(\|h\|_\infty^2)\end{aligned} \tag{4.9}$$

Special cases Two special cases where the separation of the DM attitude towards ambiguity and the characteristics of the act is achieved help illustrate this result. First, the case where a DM has equal aversion to each source of ambiguity, which implies that the matrix Λ' is the identity matrix, hence that the operator $\mathbb{A}$ reduces to the projection on the subspace $\mathtt{NC}$ of non crisp acts. Using the orthogonal decomposition $h = h_{\mathtt{K}} + h_{\mathtt{NC}}$ in $\mathsf{L}^2 = \mathtt{K} \oplus \mathtt{NC}$ with $h_{\mathtt{K}} \in \mathtt{K}$ and $h_{\mathtt{NC}} \in \mathtt{NC}$, we have that

$\mathbf{var}_{\mathbb{P}}(\mathbb{A}h)$ is the variance of the purely non crisp component of the act: $\mathbf{var}_{\mathbb{P}}(h_{\mathtt{NC}})$ and the ambiguity aversion coefficient in equation (4.9) is $\frac{1}{2}u'(w)\,\|\Lambda\|_{\mathrm{F}}\,\mathbf{var}_{\mathbb{P}}(h_{\mathtt{NC}})$. Second, the case of an "ambiguity isotropic" act h for which there exists $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ such that $h_{\mathtt{NC}} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha\hat{\zeta}_i$ *i.e.* $\hat{\varphi}(h) = \alpha[1]$ (where [1] is the vector made of 1s). Then we have $\mathbf{var}_{\mathbb{P}}(\mathbb{A}h) = \langle \Lambda'.\hat{\varphi}(h), \hat{\varphi}(h)\rangle = \alpha^2 \operatorname{trace}\Lambda'$ and as $n\alpha^2 = \mathbf{var}_{\mathbb{P}}(h_{\mathtt{NC}})$, the ambiguity aversion coefficient is $\frac{1}{2}u'(w)\frac{1}{n}\operatorname{trace}\Lambda\,\mathbf{var}_{\mathbb{P}}(h_{\mathtt{NC}})$. In these two special cases the variance of the scaled non crisp projection of h is equal, up to a positive coefficient, to the variance of the non crisp component of h.

4.4.2 The Mean Variance Variability Criterion

From equation (4.9), the following mean variance preference generalised to take into account the variability of utility profiles is deduced: the DM ranks prospects $h \in \mathsf{L}^\infty$ according to the function

$$u_{\mathrm{MVV}}(h) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h) - \frac{\gamma}{2}\,\mathbf{var}_{\mathbb{P}}(h) - \frac{\theta}{2}\,\mathbf{var}_{\mathbb{P}}(\mathbb{A}h) \tag{4.10}$$

where γ and θ are strictly positive coefficients measuring the respective aversion to risk and aversion to ambiguity.

Therefore a DM using the Mean Variance Variability preference measures the utility of a prospect by its expected utility reduced by a risk aversion factor proportional to its variance and by a risk ambiguity factor proportional to the variance of its scaled non crisp projection.

4.4.3 Comparison with Maccheroni, Marinacci, et Ruffino's criterion

Maccheroni *et al.* (2013) use the smooth model of decision making under ambiguity of Klibanoff *et al.* (2005) to derive the Robust Mean-Variance Preference given by:

$$C(f) = \mathbf{E}_P(f) - \frac{\gamma}{2}\,\mathbf{var}_P(f) - \frac{\theta}{2}\sigma_\mu^2(\mathbf{E}(f))$$

Both their model and ours generalise the classical mean-variance preferences by subtracting a third term which accounts for the DM aversion to ambiguity and which is proportional to a variance. In the Robust Mean-Variance Preference, the variance $\sigma_\mu^2(\mathbf{E}(f))$ is that of the expected utility $\mathbf{E}(f)$ (viewed as a random variable on the set of probabilities that have square integrable density with respect to the baseline probability P) calculated under the second order Borel probability μ. In the Mean Variance Variability criterion, the variance $\mathbf{var}_{\mathbb{P}}(\mathbb{A}h)$ is that of the scaled purely ambiguous part of f calculated under the endogenously determined baseline probability $\mathbb{P}$. Hence to apply the former model, the second order probability is needed while to apply the latter, the processes driving the independent sources of ambiguity have to be inferred.

The formal similarity between the two criteria explains why Maccheroni *et al.*'s results are easily transposed to our setting, nonetheless the properties of the VEU adjustment factors allow to further extend their analysis as will be seen in the next section.

4.5 Application to the choice of the Optimal Portfolio

In this application we suppose that the baseline probability $\mathbb{P}$ has been inferred from the DM preferences over complementary acts and that all the random variables' moments considered are calculated under this baseline probability.

We consider a $k = 0$ risk-free asset whose return is r_0 and $k = 1, \dots, m$ risky (and possibly ambiguous) linearly independent assets whose vector of excess returns over r_0, written $[\tilde{r}_k]$, is characterised by a vector of expected excess returns $[E_k] = [\mathbf{E}(\tilde{r}_k)]$ and a variance-covariance matrix $\Omega = [\sigma_{kl}]_{\substack{1 \leqslant k \leqslant m \\ 1 \leqslant l \leqslant m}}$. In our extended setting, sensibilities of these assets to ambiguity are measured by an (n, m) matrix Z (capital zeta) whose columns are the vectors $Z_k = \hat{\varphi}(\tilde{r}_k) = [\hat{\varphi}_i(\tilde{r}_k)]$ hence whose elements are $Z_{ik} = \hat{\varphi}_i(\tilde{r}_k) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\hat{\zeta}_i \cdot \tilde{r}_k)$.

A portfolio is described by the vector $\psi \in \mathbb{R}^m$ of the proportions of the total wealth invested in each risky asset. The excess returns $\tilde{r}_\psi$ of the portfolios ψ are ranked by the DM using the Mean Variance Variability criterion: $u_{\mathrm{MVV}}(\tilde{r}_\psi) = \mathbf{E}(\tilde{r}_\psi) - \frac{\gamma}{2}\,\mathbf{var}(\tilde{r}_\psi) - \frac{\theta}{2}\,\mathbf{var}(\mathbb{A}\tilde{r}_\psi)$.

Proposition 4.5.1. *(i) The Mean Variance Variability criterion applied to the return of the portfolio can be written as:*

$$u_{\mathrm{MVV}}(\tilde{r}_\psi) = r_0 + \psi^{\mathsf{T}}[E_k] - \frac{\gamma}{2}\psi^{\mathsf{T}}\widehat{\Omega}\psi \tag{4.11}$$

where $\widehat{\Omega} = \Omega + \frac{\theta}{\gamma} Z^{\mathsf{T}}\Lambda' Z$ *is the modified variance-covariance matrix.*

(ii) The modified variance-covariance matrix is symmetric definite positive, its elements are $\hat{\sigma}_{kl} = \operatorname{cov}(\tilde{r}_k, \tilde{r}_l) + \frac{\theta}{\gamma}\operatorname{cov}(\mathbb{A}\tilde{r}_k, \mathbb{A}\tilde{r}_l)$ *and especially, the diagonal terms are* $\hat{\sigma}_{kk} = \mathbf{var}(\tilde{r}_k) + \frac{\theta}{\gamma}\,\mathbf{var}(\mathbb{A}\tilde{r}_k)$ *so that* $\hat{\sigma}_{kk} \geqslant \mathbf{var}(\tilde{r}_k)$.

(iii) The composition of the optimal portfolio is given by:

$$\psi^* = \frac{1}{\gamma}\widehat{\Omega}^{-1}[E_k] \tag{4.12}$$

4.5.1 The case of one ambiguous asset

When $m = 1$, *i.e.* there is one ambiguous asset and the risk-free asset, the solution (4.12) is:

$$\psi_1^* = \frac{E_1}{\gamma \hat{\sigma}_{11}}$$

where $\hat{\sigma}_{11} = \mathbf{var}(\tilde{r}_1) + \frac{\theta}{\gamma}\mathbf{var}(\mathbb{A}\tilde{r}_1)$. As expected, if $\tilde{r}_1$ is crisp, the formula reduces to the standard mean-variance solution (Markowitz, 1952). When the return of the asset is not crisp, it shows that an increase in the ambiguity of the asset or an increase in the aversion to ambiguity will lead to a higher demand for the risk-free asset. This is consistent with results obtained in other axiomatic settings : Maenhout (2004) finds that his calibrated model leads to a reduction of 50% of the share in equities when the investor is concerned by robustness and the numerical results of Calafiore (2007) also shows a sharp reduction in the share of equities versus bonds when his measure of ambiguity increases.

4.5.2 The case of one risky and one ambiguous asset

In the case where asset 1 is risky but crisp and asset 2 is risky and non crisp, the modified variance covariance reduces to:

$$\widehat{\Omega} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \hat{\sigma}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{var}(\tilde{r}_1) & \mathrm{cov}(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) \\ \mathrm{cov}(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) & \mathbf{var}(\tilde{r}_2) + \frac{\theta}{\gamma}\mathbf{var}(\mathbb{A}\tilde{r}_2) \end{bmatrix}$$

and the solutions are:

$$\psi_1^* = \frac{1}{\gamma}\frac{E_1\hat{\sigma}_{22} - E_2\sigma_{12}}{\sigma_{11}\hat{\sigma}_{22} - \sigma_{12}^2} \quad \psi_2^* = \frac{1}{\gamma}\frac{E_2\sigma_{11} - E_1\sigma_{12}}{\sigma_{11}\hat{\sigma}_{22} - \sigma_{12}^2}$$

with the ratio of the weight of the risky asset over the weight of the ambiguous asset equal to:

$$\frac{\psi_1^*}{\psi_2^*} = \frac{E_1\hat{\sigma}_{22} - E_2\sigma_{12}}{E_2\sigma_{11} - E_1\sigma_{12}}$$

As announced in section 4.4.3, we can now prove that Maccheroni *et al.*'s (2013) asset allocation results hold in our axiomatically different setting. Namely define $(\alpha, \beta) = \operatorname{argmin} \|\tilde{r}_2 - (\alpha + \beta\tilde{r}_1)\|_{\mathsf{L}^2}$, the coefficients of the linear regression of the excess return of the ambiguous asset 2 over the excess return of the risky asset 1 using the ordinary least square estimation:

$$\beta(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) = \frac{\mathrm{cov}(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)}{\mathbf{var}(\tilde{r}_1)} \quad \text{and} \quad \alpha(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) = E_2 - \beta(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) E_1$$

Then we have the following relationships:

Proposition 4.5.2. *Proportion of the ambiguous asset:*

$$\operatorname{sgn} \psi_2^* = \operatorname{sgn} \alpha(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$$

Change in ambiguity aversion θ:

$$\operatorname{sgn} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\psi_1^*}{\psi_2^*} \right) = \operatorname{sgn} \alpha(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$$

$$\operatorname{sgn} \frac{\partial \psi_2^*}{\partial \theta} = - \operatorname{sgn} \alpha(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2), \quad \operatorname{sgn} \frac{\partial \psi_1^*}{\partial \theta} = \operatorname{sgn} \alpha(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) \beta(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$$

Change in risk aversion γ:

$$\operatorname{sgn} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\psi_1^*}{\psi_2^*} \right) = \operatorname{sgn} \frac{\partial \psi_2^*}{\partial \gamma} = - \operatorname{sgn} \alpha(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$$

This proves that the DM will hold a long position in the ambiguous asset if $\alpha(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$ is positive and a short position otherwise. As this coefficient is positive when there is an expected added positive return in holding one unit of the ambiguous asset instead of $\beta(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$ units of the risky asset, the investor chooses to trade off between a portfolio with a lower ambiguity and a potential larger return. The two sides of this trade-off are weighted by her aversion parameters as, in all cases, she will decrease in absolute terms the ambiguous asset holding when her ambiguity aversion θ increases. It is also noticeable that the variation of the ratio of the two assets for a change in risk aversion and for a change in ambiguity aversion are of opposite signs, a relationship first obtained with the smooth model of decision making under ambiguity from simulations by Klibanoff *et al.* (2005, Example 2) and confirmed by Maccheroni *et al.* (2013). This paper proves that this inverse relationship also holds in the axiomatic setting of the Vector Expected Utility.

These results are a sound foundation for a discussion of the home-bias puzzle: replacing "risky asset" by "domestic asset" and "ambiguous asset" by "foreign asset" in the above paragraph gives an explanation through the investor's aversion to ambiguity of the lack of diversification of international portfolios first exposed by French et Poterba (1991). Indeed the opposite signs of the effects of risk and ambiguity aversion can be interpreted as a trade-off between diversification and ambiguity: keeping ambiguity aversion constant, an increase in risk aversion will increase the need for diversification hence the investor will choose to hold more of the ambiguous asset, gaining in diversification at the expense of ambiguity.

Nonetheless it does not seem necessary that the domestic asset should be purely risky. Therefore we propose in the next section an analysis of the case where the two assets are ambiguous, with the foreign asset either "objectively" more ambiguous than the domestic one (as measured by the $\mathbb{R}^n$ norm of their vectors of non crisp coordinates) or perceived by the DM as more ambiguous (as measured by its correlation with sources of ambiguity associated with larger eigenvalues of the Hessian). To the best of our knowledge, this analysis has not yet been undertaken while the analytical tractability of our setting rendered it possible.

4.5.3 The case of two ambiguous assets

In the case where the two assets are not crisp, the modified variance covariance matrix is:

$$\begin{aligned}\widehat{\Omega} &= \begin{bmatrix}\hat{\sigma}_{11} & \hat{\sigma}_{12}\\ \hat{\sigma}_{21} & \hat{\sigma}_{22}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\mathbf{var}(\tilde{r}_1)+\frac{\theta}{\gamma}\mathbf{var}(\mathbb{A}\tilde{r}_1) & \operatorname{cov}(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)+\frac{\theta}{\gamma}\operatorname{cov}(\mathbb{A}\tilde{r}_1,\mathbb{A}\tilde{r}_2)\\ \operatorname{cov}(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)+\frac{\theta}{\gamma}\operatorname{cov}(\mathbb{A}\tilde{r}_1,\mathbb{A}\tilde{r}_2) & \mathbf{var}(\tilde{r}_2)+\frac{\theta}{\gamma}\mathbf{var}(\mathbb{A}\tilde{r}_2)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

and the solutions are:

$$\psi_1^* = \frac{1}{\gamma}\frac{E_1\hat{\sigma}_{22}-E_2\hat{\sigma}_{12}}{\hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{22}-\hat{\sigma}_{12}^2} \quad \psi_2^* = \frac{1}{\gamma}\frac{E_2\hat{\sigma}_{11}-E_1\hat{\sigma}_{12}}{\hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{22}-\hat{\sigma}_{12}^2} \tag{4.13}$$

We will denote by $A = E_1\hat{\sigma}_{22}-E_2\hat{\sigma}_{12}$, $B = E_2\hat{\sigma}_{11}-E_1\hat{\sigma}_{12}$ and $C = \hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{22}-\hat{\sigma}_{12}^2$ so that

$$\psi_1^* = \frac{1}{\gamma}\frac{A}{C} \quad \text{and} \quad \psi_2^* = \frac{1}{\gamma}\frac{B}{C}.$$

To analyse these results we need to decompose the excess returns into their respective crisp and ambiguous parts. Recall that in $\mathtt{L}^2$, the subspaces $\mathtt{K}$ of crisp acts and $\mathtt{NC}$ of non crisp acts are orthogonal complement (Siniscalchi, 2009, p. 844), then we can write $\tilde{r}_1 = \tilde{r}_{\mathtt{K}1}+\tilde{r}_{\mathtt{NC}1}$, $\tilde{r}_2 = \tilde{r}_{\mathtt{K}2}+\tilde{r}_{\mathtt{NC}2}$ with $\tilde{r}_{\mathtt{K}1},\tilde{r}_{\mathtt{K}2}\in\mathtt{K}$, $\tilde{r}_{\mathtt{NC}1},\tilde{r}_{\mathtt{NC}2}\in\mathtt{NC}$ and $\tilde{r}_{\mathtt{NC}1} = \left\langle Z_1,\hat{\zeta}\right\rangle$, $\tilde{r}_{\mathtt{NC}2} = \left\langle Z_2,\hat{\zeta}\right\rangle$. Given the orthogonality of $\mathtt{K}$ and $\mathtt{NC}$, we have, for $i = \{1,2\}$:

$$\begin{gathered}\mathbf{var}(\tilde{r}_i) = \mathbf{var}(\tilde{r}_{\mathtt{K}i}) + \mathbf{var}(\tilde{r}_{\mathtt{NC}i}) \text{ with } \mathbf{var}(\tilde{r}_{\mathtt{NC}i}) = \|Z_i\|^2_{\mathbb{R}^n}\\ \operatorname{cov}(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2) = \operatorname{cov}(\tilde{r}_{\mathtt{K}1},\tilde{r}_{\mathtt{K}2}) + \operatorname{cov}(\tilde{r}_{\mathtt{NC}1},\tilde{r}_{\mathtt{NC}2})\\ \text{with } \operatorname{cov}(\tilde{r}_{\mathtt{NC}1},\tilde{r}_{\mathtt{NC}2}) = \langle Z_1, Z_2\rangle\\ \mathbf{var}(\mathbb{A}\tilde{r}_i) = \left\|\sqrt{\Lambda'}Z_i\right\|^2_{\mathbb{R}^n} \text{ and } \operatorname{cov}(\mathbb{A}\tilde{r}_1,\mathbb{A}\tilde{r}_2) = \left\langle \Lambda' Z_1, Z_2\right\rangle\end{gathered}$$

Using some straightforward notations:

$$\begin{gathered}E_i = \mathbf{E}(\tilde{r}_i) = \mathbf{E}(\tilde{r}_{\mathtt{K}i})\\ \sigma_i^2 = \mathbf{var}(\tilde{r}_i),\ \sigma_{\mathtt{K}i}^2 = \mathbf{var}(\tilde{r}_{\mathtt{K}i}),\ \sigma_{\mathtt{NC}i}^2 = \mathbf{var}(\tilde{r}_{\mathtt{NC}i}),\ \sigma_{\mathbb{A}i}^2 = \mathbf{var}(\mathbb{A}\tilde{r}_i)\\ \operatorname{cov}(\tilde{r}_{\mathtt{K}1},\tilde{r}_{\mathtt{K}2}) = \rho_{\mathtt{K}}\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathtt{K}2},\ \operatorname{cov}(\tilde{r}_{\mathtt{NC}1},\tilde{r}_{\mathtt{NC}2}) = \rho_{\mathtt{NC}}\sigma_{\mathtt{NC}1}\sigma_{\mathtt{NC}2},\ \operatorname{cov}(\mathbb{A}\tilde{r}_1,\mathbb{A}\tilde{r}_2) = \rho_{\mathbb{A}}\sigma_{\mathbb{A}1}\sigma_{\mathbb{A}2}\end{gathered}$$

the numerators and the denominator of the solutions to the optimal portfolio problem can then be detailed:

Proposition 4.5.3. *In equation (4.13), the numerators are:*

$$\begin{aligned}A = {} & (E_1\sigma_{\mathtt{K}2}^2 - E_2\rho_{\mathtt{K}}\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathtt{K}2}) + (E_1\sigma_{\mathtt{NC}2}^2 - E_2\rho_{\mathtt{NC}}\sigma_{\mathtt{NC}1}\sigma_{\mathtt{NC}2})\\ & + \tfrac{\theta}{\gamma}(E_1\sigma_{\mathbb{A}2}^2 - E_2\rho_{\mathbb{A}}\sigma_{\mathbb{A}1}\sigma_{\mathbb{A}2})\\ B = {} & (E_2\sigma_{\mathtt{K}1}^2 - E_1\rho_{\mathtt{K}}\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathtt{K}2}) + (E_2\sigma_{\mathtt{NC}1}^2 - E_1\rho_{\mathtt{NC}}\sigma_{\mathtt{NC}1}\sigma_{\mathtt{NC}2})\\ & + \tfrac{\theta}{\gamma}(E_2\sigma_{\mathbb{A}1}^2 - E_1\rho_{\mathbb{A}}\sigma_{\mathbb{A}1}\sigma_{\mathbb{A}2})\end{aligned}$$

and the denominator is:

$$\begin{aligned}C = {} & \sigma_{\mathtt{K}1}^2\sigma_{\mathtt{K}2}^2(1-\rho_{\mathtt{K}}^2) + \sigma_{\mathtt{NC}1}^2\sigma_{\mathtt{NC}2}^2(1-\rho_{\mathtt{NC}}^2) + \tfrac{\theta^2}{\gamma^2}\sigma_{\mathbb{A}1}^2\sigma_{\mathbb{A}2}^2(1-\rho_{\mathbb{A}}^2)\\ & + (\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathtt{NC}2} - \sigma_{\mathtt{K}2}\sigma_{\mathtt{NC}1})^2 + 2\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathtt{K}2}\sigma_{\mathtt{NC}1}\sigma_{\mathtt{NC}2}(1-\rho_{\mathtt{K}}\rho_{\mathtt{NC}})\\ & + \tfrac{\theta}{\gamma}\left[(\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathbb{A}2} - \sigma_{\mathtt{K}2}\sigma_{\mathbb{A}1})^2 + 2\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathtt{K}2}\sigma_{\mathbb{A}1}\sigma_{\mathbb{A}2}(1-\rho_{\mathtt{K}}\rho_{\mathbb{A}})\right]\\ & + \tfrac{\theta}{\gamma}\left[(\sigma_{\mathbb{A}1}\sigma_{\mathtt{NC}2} - \sigma_{\mathbb{A}2}\sigma_{\mathtt{NC}1})^2 + 2\sigma_{\mathtt{NC}1}\sigma_{\mathtt{NC}2}\sigma_{\mathbb{A}1}\sigma_{\mathbb{A}2}(1-\rho_{\mathtt{NC}}\rho_{\mathbb{A}})\right]\end{aligned}$$

It follows directly that $C \geqslant 0$ hence the choice of a long or a short position in the two assets is determined by the signs of the numerators A and B. These formulae also highlight the pivotal role of the correlations (of the crisp parts and of the ambiguous parts) of the excess returns in determining the composition of the optimal portfolio.

We will now study the case where each asset is correlated to a distinct source of ambiguity, therefore their non crisp components are given by $\tilde{r}_{\mathtt{NC1}} = Z_{11}\hat{\zeta}_1$ and $\tilde{r}_{\mathtt{NC2}} = Z_{02}\hat{\zeta}_0$. As the sources are independent this implies $\rho_{\mathtt{NC}} = \rho_{\mathbb{A}} = 0$ that is there is no possibility to hedge away some or all of the ambiguity by holding the two assets. The DM has again to trade off expected return, risk and ambiguity following the Mean Variance Variability criterion which represents her utility. To further focus on the effects of ambiguity, we will consider two assets whose excess returns have similar crisp parts with the same expected return $E_1 = E_2 = E$ and the same variance $\sigma^2_{\mathtt{K1}} = \sigma^2_{\mathtt{K2}} = \sigma^2_{\mathtt{K}}$. Recall that the DM is more averse to the source of ambiguity $\hat{\zeta}_0$ than to the source $\hat{\zeta}_1$ ($\lambda'_0 > \lambda'_1$), hence one may consider in an home-bias puzzle setting that asset 1 is the domestic one and asset 2 the foreign one.

From proposition 4.5.3 we get:

$$A = E\left[\sigma^2_{\mathtt{K}}(1-\rho_{\mathtt{K}}) + Z^2_{02}(1+\frac{\theta}{\gamma}\lambda'_0)\right]$$
$$B = E\left[\sigma^2_{\mathtt{K}}(1-\rho_{\mathtt{K}}) + Z^2_{11}(1+\frac{\theta}{\gamma}\lambda'_1)\right]$$

Then as $\psi^*_1/\psi^*_2 = A/B$:

$$\operatorname{sgn}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\psi^*_1}{\psi^*_2}\right) = \operatorname{sgn}\left[\sigma^2_{\mathtt{K}}(1-\rho_{\mathtt{K}})(\lambda'_0 Z^2_{11} - \lambda'_1 Z^2_{02}) + Z^2_{11}Z^2_{02}(\lambda'_0 - \lambda'_1)\right]$$
$$\operatorname{sgn}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\psi^*_1}{\psi^*_2}\right) = \operatorname{sgn}\left[\sigma^2_{\mathtt{K}}(1-\rho_{\mathtt{K}})(\lambda'_1 Z^2_{02} - \lambda'_0 Z^2_{11}) + Z^2_{11}Z^2_{02}(\lambda'_1 - \lambda'_0)\right]$$

First, the inverse relationship between the sensitivity of the composition of the portfolio to ambiguity aversion and to risk aversion holds with two ambiguous assets correlated to distinct sources of ambiguity. Second, we have that $\psi^*_1 \geqslant \psi^*_2$ if and only if $Z^2_{02}(1+\frac{\theta}{\gamma}\lambda'_0) \geqslant Z^2_{11}(1+\frac{\theta}{\gamma}\lambda'_1)$, hence it is possible that asset 2 could get a larger share of the portfolio than asset 1 if the ratio of their exposures to ambiguity Z_{02}/Z_{11} was to compensate for the DM higher aversion to the source $\hat{\zeta}_0$. While this case is possible, it would not illustrate properly a home-bias application as it would mean comparing a high beta domestic stock to a low beta foreign stock. Therefore, we can sharpen the above results by assuming that $Z^2_{11} = Z^2_{02} = \sigma^2_{\mathtt{NC}}$ which help focus the analysis on the DM different attitude towards the two sources of ambiguity. With this added assumption we have a larger holding of the domestic asset 1 while both assets have the same expected return E and the same variance $\sigma^2_{\mathtt{K}} + \sigma^2_{\mathtt{NC}}$ and we have

$$\operatorname{sgn}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\psi^*_1}{\psi^*_2}\right) = \operatorname{sgn}\left[(\lambda'_0 - \lambda'_1)(\sigma^2_{\mathtt{K}}(1-\rho_{\mathtt{K}}) + \sigma^2_{\mathtt{NC}})\right] = \operatorname{sgn}(\lambda'_0 - \lambda'_1) > 0$$

hence an increase in ambiguity aversion will decrease the holding of the foreign asset 2. Therefore the salient facts of the home-bias puzzle are retrieved in our setting with two ambiguous assets, one perceived as more ambiguous than the other by the DM, instead of one risky and one ambiguous asset. This is consistent with the result obtained by Uppal et Wang (2003) in the framework of the robust preferences, where they show that a higher confidence that the probabilistic model for the domestic assets is correctly specified than those of the foreign assets, can help to account for the under-diversification documented in French et Poterba (1991).

4.6 Conclusion

In this paper we have aimed to corroborate the proposition that ambiguity matters for modern portfolio theory inasmuch as it can help understand some of the otherwise puzzling features of empirical data. To this end, we have studied compositions of optimal portfolios when asset returns are ambiguous using a generalised mean-variance preference that we have founded on an approximation "in the small" of Siniscalchi's (2009) Vector Expected Utility's certainty equivalent. The VEU model has been chosen for its axiomatic foundations which are built upon the seminal work of Gilboa et Schmeidler (1989), extended by Ghirardato, Maccheroni, et Marinacci (2004) and Maccheroni, Marinacci, et Rustichini (2006) among others, papers with numerous applications to finance. Its axiomatic foundations also have a very appealing behavioural interpretation in asset markets: indeed, in this context complementary acts have a straightforward meaning (detailed in the introduction) and the cognitive assumption which underpins the central "Complementary Independence" axiom — complementary acts have the same variability — is easily subscribed to. Moreover the model permits an identification of a baseline prior from the DM preferences and accounts for eventwise complementarity which may allow for "ambiguity diversification".

The calculus of the second-order Taylor-Young expansion of the VEU certainty equivalent has lead to a generalisation of the mean-variance preference through a new term which measures the aversion to ambiguity of the DM and complements the classical aversion to variance. Thanks to its analytical tractability, this *Mean Variance Variability* criterion has allowed to generalise Markowitz's (1952) results: we have shown that aversion to ambiguity can be accounted for by a variance-covariance matrix modified by the second order moments of the *scaled non crisp projections* of the asset returns. Our findings have not only confirmed the robustness to axiomatic specifications of some of the literature's results on asset prices under ambiguity obtained with other models, but also have extended the existing analysis to multiple ambiguous assets, hence have allowed to propose a novel discussion of the home-bias puzzle modelled with two ambiguous assets. Among other results, we have shown that the inverse relationship between the sensitivities of the portfolio composition to aversion to risk and aversion to ambiguity still hold with two ambiguous assets and that the holding of the most ambiguous asset will decline with heightened aversion to ambiguity.

Finally this Mean Variance Variability criterion opens the way for further research on equilibrium asset prices, possibly in a continuous time setting, and to some empirical studies and calibrations which are facilitated by its simple formulation. Especially, a study of the drivers of assets returns and risks could help define the main independent sources of ambiguity which are central to the workings of VEU model.

4.A Proofs

4.A.1 Proof of Proposition 4.3.1.

Additional notations

We introduce three additional functions from L^∞ to L^∞ mapping a random variable to its composition with the utility function or one of its derivatives: $U\colon f \mapsto u \circ f$, $U'\colon f \mapsto u' \circ f$ and $U''\colon f \mapsto u'' \circ f$. Using the function U, the VEU criterion is:

$$V(f) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(U(f)) + A(\varphi(U(f))) \tag{4.14}$$

For the calculus of the differential, we introduce 2 additional functions:

$$\begin{aligned} \Pi\colon \mathsf{L}^\infty &\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ a &\mapsto \begin{pmatrix} \varphi(a) \\ \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(a) \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \text{and} \qquad \begin{aligned} W\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (\varphi, \lambda) &\mapsto \lambda + A(\varphi) \end{aligned}$$

With these additional notations, we can rewrite equation (4.14) as $V(f) = W \circ \Pi \circ U(f)$ and the certainty equivalent as

$$c(f) = u^{-1} \circ W \circ \Pi \circ U(f).$$

We will write $\mathrm{d}c\colon \mathsf{L}^\infty \to \mathscr{L}(\mathsf{L}^\infty, \mathbb{R})$ for the differential function and $\mathrm{d}^2 c = \mathrm{d}(\mathrm{d}c)\colon \mathsf{L}^\infty \to \mathscr{L}(\mathsf{L}^\infty, \mathscr{L}(\mathsf{L}^\infty, \mathbb{R}))$ for the second order differential function.

Finally, to keep the notations as light as possible, $\langle a, b\rangle$ will be the scalar product of $\mathbb{R}^n$ when the functions A and φ are involved and the scalar product of $\mathbb{R}^{n+1}$ when the functions W and Π are involved.

Differentiability

Given that φ is a linear mapping (hence is of class $\mathscr{C}^\infty$), assumptions 4.1 and 4.2 and the following lemma imply that c is twice differentiable.

Lemma 4.A.1. *U is twice L^∞-differentiable and we have for all a, h, $k \in \mathsf{L}^\infty$: $\mathrm{d}_a U(h) = hU'(a)$, $\mathrm{d}^2_a U(h, k) = hkU''(a)$.*

Proof: Take $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. As u is differentiable over $\mathbb{R}$, at any point x there exists $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ such that for all $y \in \mathbb{R}$, $|y| \leqslant \alpha$ implies $|u(x+y) - u(x) - y.u'(x)| \leqslant \varepsilon|y|$. Hence for a given $a \in \mathsf{L}^\infty$ and for any $h \in \mathsf{L}^\infty$ and $s \in S$ such that $|h(s)| \leqslant \alpha$ we have $|u(a(s)+h(s))-u(a(s))-h(s).u'(a(s))| \leqslant \varepsilon|h(s)|$.

Now choose h such that $\|h\|_\infty \leqslant \alpha$, and set $E_h := \{s \mid |h(s)| > \|h\|_\infty\}$ then by definition $\mathbb{P}(E_h) = 0$. For all $s \in S \setminus E_h$ we have $|h(s)| \leqslant \|h\|_\infty \leqslant \alpha$ and the previous inequality holds: $|u(a(s)+h(s))-u(a(s))-h(s).u'(a(s))| \leqslant \varepsilon|h(s)| \leqslant \varepsilon \|h\|_\infty$. As the lhs is bounded $\mathbb{P}$-almost everywhere by $\varepsilon \|h\|_\infty$ so is its essential supremum and we get the desired result:

$$\left\|U(a+h)-U(a)-h.U'(a)\right\|_\infty \leqslant \varepsilon \|h\|_\infty$$

which is U is differentiable and $\mathrm{d}_a U(h) = hU'(a)$.

Using the same reasoning replacing u by u' which is also differentiable over $\mathbb{R}$, we get that for all $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ there exists $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ such that for all $k \in \mathsf{L}^\infty$ with $\|k\|_\infty \leqslant \alpha$ we have

$$\left\|U'(a+k)-U'(a)-k.U''(a)\right\|_\infty \leqslant \varepsilon \|k\|_\infty .$$

Then

$$\begin{aligned}
\| \mathrm{d}U(a+k) - \mathrm{d}U(a) - &kU''(a)\|_{\mathscr{L}(\mathsf{L}^\infty,\mathsf{L}^\infty)} \\
&= \sup_{\|h\|_\infty \leqslant 1} \left\| \mathrm{d}U(a+k)(h) - \mathrm{d}U(a)(h) - hkU''(a)\right\|_\infty \\
&= \sup_{\|h\|_\infty \leqslant 1} \left\|hU'(a+k) - hU'(a) - hkU''(a)\right\|_\infty
\end{aligned}$$

Using Hölder's inequality [13]:

$$\begin{aligned}
\| \mathrm{d}U(a+k) - \mathrm{d}U(a) - &kU''(a)\|_{\mathscr{L}(\mathsf{L}^\infty,\mathsf{L}^\infty)} \\
&\leqslant \sup_{\|h\|_\infty \leqslant 1} \|h\|_\infty \left\|U'(a+k) - U'(a) - kU''(a)\right\|_\infty \\
&\leqslant \left\|U'(a+k) - U'(a) - kU''(a)\right\|_\infty \\
&\leqslant \varepsilon \|k\|_\infty
\end{aligned}$$

which is the result: U is twice differentiable and $\mathrm{d}_a^2 U(k,h) = khU''(a)$. ■

Calculus of the differentials

We first need the differential of u^{-1} which is given by the following lemma:

Lemma 4.A.2. *As u is continuously differentiable and strictly increasing, u^{-1} is L^∞-differentiable and for all a, $h \in \mathsf{L}^\infty$: $\mathrm{d}_a u^{-1}(h) = h/u'(u^{-1}(a))$.*

13. See, for example, Aliprantis et Border, 2006, Prop. 13.2.

Proof: As u is strictly monotone and continuous, it is an homomorphism, and being strictly monotone and differentiable, it is a diffeomorphism. Then its differential is an isomorphism whose inverse is $(\mathrm{d}_b u)^{-1} = \mathrm{d}_{u(b)}(u^{-1})$. Setting $b = u^{-1}(a)$ we have that $\mathrm{d}_a(u^{-1}) \circ \mathrm{d}_{u^{-1}(a)}u = Id$, that is for all $h \in \mathbb{R}$, $\mathrm{d}_a(u^{-1}) \circ (h.u'(u^{-1}(a))) = h$. By the linearity of the differential we obtain

$$u'(u^{-1}(a)).\, \mathrm{d}_a(u^{-1})(h) = h$$

which gives the result. ∎

We can now compute the first and second order differentials of the certainty equivalent in the general case. They are given by the two following lemmas where $\gamma(c(w)) := -u''(c(w))/u'(c(w))$ is the Arrow-Pratt coefficient of risk aversion valued at the certainty equivalent of the initial wealth, $\hat{w} := \varphi(U(w))$ is the $\mathbb{R}^n$ vector of coordinates of the projection onto the subspace $\mathtt{NC}$ of the initial wealth's utility profile and $\dot{w} := U'(w)/u'(c(w))$ and $\ddot{w} := U''(w)/u''(c(w))$ are functions in L^∞.

Lemma 4.A.3. *The first order differential at point $w \in \mathsf{L}^\infty$ in direction $h \in \mathsf{L}^\infty$ is given by :*

$$\mathrm{d}_w c(h) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h\dot{w}) + \langle \nabla A(\hat{w}), \varphi(h\dot{w}) \rangle \tag{4.15}$$

Proof: Using the chain rule for differentials we get:

$$\mathrm{d}_w c(h) = \mathrm{d}_w(u^{-1} \circ W \circ \Pi \circ U)(h) = \mathrm{d}_{W\circ\Pi\circ U(w)} u^{-1} \circ \mathrm{d}_{\Pi\circ U(w)} W \circ \mathrm{d}_{U(w)}\Pi \circ \mathrm{d}_w U(h)$$

The differential of U is given by lemma 4.A.1, the differential of Π, a linear mapping, is itself, the differential of W is given by its gradient thanks to Assumption 4.2 and the differential of u^{-1} is given by lemma 4.A.2. Assembling all the pieces together, we get:

$$\mathrm{d}_w U(h) = hU'(w)$$
$$\mathrm{d}_{U(w)}\Pi(hU'(w)) = \Pi(hU'(w))$$
$$\mathrm{d}_{\Pi\circ U(w)} W(\Pi(hU'(w))) = \big\langle \nabla W(\Pi(U(w))), \Pi(hU'(w)) \big\rangle$$

$$\mathrm{d}_{W\circ\Pi\circ U(w)} u^{-1}(\big\langle \nabla W(\Pi(U(w))), \Pi(hU'(w)) \big\rangle) = \frac{\langle \nabla W(\Pi(U(w))), \Pi(hU'(w)) \rangle}{u'(u^{-1}(W \circ \Pi \circ U(w)))}$$

As $u^{-1}(W \circ \Pi \circ U(w)) = c(w)$, this is:

$$\mathrm{d}_w c(h) = \frac{\langle \nabla W(\Pi(U(w))), \Pi(hU'(w))\rangle}{u'(c(w))} \tag{4.16}$$

From the definition of W we have $\nabla W = (\nabla A, 1)$. Using the notations $\hat{w} := \varphi(U(w))$ and $\dot{w} := U'(w)/u'(c(w))$, the preceding formula is:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_w c(h) &= \frac{\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(hU'(w)) + \langle \nabla A(\hat{w}), \varphi(hU'(w))\rangle}{u'(c(w))} \\
&= \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left(h\frac{U'(w)}{u'(c(w))}\right) + \left\langle \nabla A(\hat{w}), \varphi\left(h\frac{U'(w)}{u'(c(w))}\right)\right\rangle \\
&= \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h\dot{w}) + \langle \nabla A(\hat{w}), \varphi(h\dot{w})\rangle
\end{aligned}$$

■

Lemma 4.A.4. *The second order differential at point $w \in \mathsf{L}^\infty$ in direction $h \in \mathsf{L}^\infty$ valued at h is given by :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2_w c(h)^2 = &-\gamma(c(w))\big(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h^2\ddot{w}) - (\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h\dot{w}))^2\big) \\
&- \gamma(c(w))\left(\left\langle \nabla A(\hat{w}), \varphi(h^2\ddot{w})\right\rangle - \langle \nabla A(\hat{w}), \varphi(h\dot{w})\rangle^2\right) \\
&+ 2\gamma(c(w))\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h\dot{w})\,\langle \nabla A(\hat{w}), \varphi(h\dot{w})\rangle \\
&+ u'(c(w))\left\langle \nabla^2 A(\hat{w})\varphi(h\dot{w}), \varphi(h\dot{w})\right\rangle
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Proof: To obtain the second order differential, we need to differentiate the first-order differential function $\mathrm{d}c\colon \mathsf{L}^\infty \to \mathscr{L}(\mathsf{L}^\infty, \mathbb{R})$ such that $\mathrm{d}c(w) = \mathrm{d}_w c$.

First, we introduce three auxiliary functions :

— $\alpha\colon \mathsf{L}^\infty \to \mathscr{L}(\mathsf{L}^\infty, \mathbb{R}^{n+1})$ such that $\alpha(w)\colon \mathsf{L}^\infty \to \mathbb{R}^{n+1}$ is defined by

$$\alpha(w)(h) = \Pi(hU'(w)),$$

— $\beta\colon \mathsf{L}^\infty \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathscr{L}(\mathsf{L}^\infty, \mathbb{R}^{n+1})$ such that

$$\beta(w) = \big(u'(c(w)), \nabla W(\Pi(U(w))), \alpha(w)\big),$$

— $\gamma\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathscr{L}(\mathsf{L}^\infty, \mathbb{R}^{n+1}) \to \mathscr{L}(\mathsf{L}^\infty, \mathbb{R})$ such that

$$\gamma(t, a, \varphi) = \frac{\langle a, \varphi\rangle}{t}.$$

Then, starting from equation (4.16), we have $\mathrm{d}c = \gamma \circ \beta$ and $\mathrm{d}^2_w c = \mathrm{d}_w(\gamma \circ \beta) =$

$\mathrm{d}_{\beta(w)}\gamma \circ \mathrm{d}_w\beta$.

The proof is now in four steps:

Step 1: $\mathrm{d}_w\alpha$ Take $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. As U' is differentiable there exists $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ such that for all $k \in \mathsf{L}^\infty$ with $\|k\|_\infty \leqslant \alpha$ we have

$$\left\|U'(w+k) - U(w) - kU''(w)\right\|_\infty \leqslant \varepsilon \|k\|_\infty .$$

Then for any $h \in \mathsf{L}^\infty$, using Hölder's inequality:

$$\begin{aligned}\left\|h.(U'(w+k) - U(w) - kU''(w))\right\|_\infty &\leqslant \|h\|_\infty \left\|U'(w+k) - U(w) - kU''(w)\right\|_\infty \\ &\leqslant \varepsilon \|h\|_\infty \|k\|_\infty\end{aligned}$$

As all norms are equivalent on $\mathbb{R}^{n+1}$, we choose w.l.o.g. the sup norm $\|\Pi(a)\|_{\mathbb{R}^{n+1}} = \sup_{0\leqslant i\leqslant n} |\Pi_i(a)|$ for any $a \in \mathsf{L}^\infty$. Then

$$\|\Pi(a)\|_{\mathbb{R}^{n+1}} = \sup_{0\leqslant i\leqslant n} |\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\zeta_i.a]| \leqslant \sup_{0\leqslant i\leqslant n} \|\zeta_i.a\|_{\mathsf{L}^1}$$

if we set $\zeta_n = \mathbf{1}_\Omega$. Using again Hölder's inequality we get $\|\zeta_i.a\|_{\mathsf{L}^1} \leqslant \|\zeta_i\|_{\mathsf{L}^1} \|a\|_\infty$. Then a corollary of the same inequality (Aliprantis et Border, 2006, Corollary 13.3) states that $\mathsf{L}^2(\mathbb{P}) \subset \mathsf{L}^1(\mathbb{P})$ and, when $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\|\zeta_i\|_{\mathsf{L}^1} \leqslant \|\zeta_i\|_{\mathsf{L}^2}$. Now recall that the $\{\zeta_i\}_{0\leqslant i<n}$ have been obtained through the Gram-Schmidt orthogonalisation process in L^2 (Siniscalchi, 2009, p. 843), hence for all $0 \leqslant i < n$, $\|\zeta_i\|_{\mathsf{L}^2} = 1$, to conclude that $\sup_{0\leqslant i\leqslant n} \|\zeta_i.a\|_{\mathsf{L}^1} \leqslant \|a\|_\infty$ and finally $\|\Pi(a)\|_{\mathbb{R}^{n+1}} \leqslant \|a\|_\infty$.

Combining the previous results we have:

$$\begin{aligned}&\|\alpha(w+k)(h) - \alpha(w)(h) - \Pi(hkU''(w))\|_{\mathbb{R}^{n+1}} \\ &\qquad = \|\Pi(hU'(w+k)) - \Pi(hU(w)) - \Pi(hkU''(w))\|_{\mathbb{R}^{n+1}} \\ &\qquad \leqslant \left\|hU'(w+k) - hU(w) - hkU''(w)\right\|_\infty \\ &\qquad \leqslant \varepsilon \|h\|_\infty \|k\|_\infty\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}&\|\alpha(w+k) - \alpha(w) - \Pi(\cdot kU''(w))\|_{\mathscr{L}(\mathsf{L}^\infty,\mathbb{R}^{n+1})} \\ &\qquad = \sup_{\|h\|_\infty\leqslant 1} \|\alpha(w+k)(h) - \alpha(w)(h) - \Pi(hkU''(w))\|_{\mathbb{R}^{n+1}} \leqslant \varepsilon \|k\|_\infty\end{aligned}$$

which proves that the differential of α at point w in direction k is the function

$\mathrm{d}_w\alpha(k)\colon \mathsf{L}^\infty \to \mathscr{L}(\mathsf{L}^\infty, \mathbb{R}^{n+1})$ such that $\mathrm{d}_w\alpha(k,h) = \Pi(hkU''(w))$.

Step 2: $\mathrm{d}_w\beta$ Using the rules of differentiation for functions with values in a product space we have :

$$\mathrm{d}_w\beta = \big(\,\mathrm{d}_w(u'\circ c),\, \mathrm{d}_w(\nabla W\circ\Pi\circ U),\, \mathrm{d}_w\alpha\big)$$

Where we have for all $k\in\mathsf{L}^\infty$:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_w(u'\circ c)(k) &= \mathrm{d}_{c(w)}u'\circ\,\mathrm{d}_wc(k) = u''(c(w)).\,\mathrm{d}_wc(k)\\ &= \frac{u''(c(w))}{u'(c(w))}\big\langle\nabla W(\Pi(U(w))),\Pi(kU'(w))\big\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_w(\nabla W\circ\Pi\circ U)(k) &= \mathrm{d}_{\Pi\circ U(w)}\nabla W\circ\,\mathrm{d}_{U(w)}\Pi\circ\,\mathrm{d}_wU(k)\\ &= \mathrm{d}_{\Pi\circ U(w)}\nabla W(\Pi(kU'(w)))\\ &= \nabla^2W(\Pi(U(w))).\Pi(kU'(w))\end{aligned}$$

and $\mathrm{d}_w\alpha$ has been obtained at step 1.

Step 3: $\mathrm{d}_w\gamma$ We now need the differential of a function defined on a product space. Let (s,b,ψ) be a point in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n+1}\times\mathscr{L}(\mathsf{L}^\infty,\mathbb{R}^{n+1})$. Then for any direction (t,a,φ) in the same product space define the functions :

$$\begin{aligned}\gamma_1\colon \mathbb{R}\to\mathscr{L}(\mathsf{L}^\infty,\mathbb{R}) &\text{ such that } \gamma_1(t)=\gamma(t,b,\psi)=\langle b,\psi\rangle/t\\ \gamma_2\colon \mathbb{R}^{n+1}\to\mathscr{L}(\mathsf{L}^\infty,\mathbb{R}) &\text{ such that } \gamma_2(a)=\gamma(s,a,\psi)=\langle a,\psi\rangle/s\\ \gamma_3\colon \mathscr{L}(\mathsf{L}^\infty,\mathbb{R}^{n+1})\to\mathscr{L}(\mathsf{L}^\infty,\mathbb{R}) &\text{ such that } \gamma_3(\varphi)=\gamma(s,b,\varphi)=\langle b,\varphi\rangle/s\end{aligned}$$

so that we have

$$\mathrm{d}_{(s,b,\psi)}\gamma(t,a,\varphi) = \,\mathrm{d}_s\gamma_1(t) + \,\mathrm{d}_b\gamma_2(a) + \,\mathrm{d}_\psi\gamma_3(\varphi).$$

Now we compute the three partial differentials. The first one is obtained directly by the derivative: $\mathrm{d}_s\gamma_1(t) = -\frac{\langle b,\psi\rangle}{s^2}t$. The second and third ones are direct consequences of the linearity of the scalar product, indeed we have $\gamma_2(b+a)=\gamma_2(b)+\gamma_2(a)$ hence $\mathrm{d}_b\gamma_2(a)=\gamma_2(a)=\langle a,\psi\rangle/s$ and $\gamma_3(\psi+\varphi)=\gamma_3(\psi)+\gamma_3(\varphi)$ hence $\mathrm{d}_\psi\gamma_3(\varphi)=\gamma_3(\varphi)=\langle b,\varphi\rangle/s$. To summarise:

$$\mathrm{d}_{(s,b,\psi)}\gamma(t,a,\varphi) = -\frac{\langle b,\psi\rangle}{s^2}t + \frac{\langle a,\psi\rangle}{s} + \frac{\langle b,\varphi\rangle}{s}$$

Step 4: $\mathrm{d}^2_w c$ Going back to second order differential we have:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2_w c(k) &= \mathrm{d}_{\beta(w)}\gamma \circ \mathrm{d}_w\beta(k)\\ &= \mathrm{d}_{(u'(c(w)),\nabla W(\Pi(U(w))),\alpha(w))}\gamma \circ \mathrm{d}_w\beta(k)\\ &= \mathrm{d}_{(u'(c(w)),\nabla W(\Pi(U(w))),\alpha(w))}\gamma\,(\,\mathrm{d}_w(u'\circ c)(k),\,\mathrm{d}_w(\nabla W\circ\Pi\circ U)(k),\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{d}_w\alpha(k))\end{aligned}$$

Using Step 3:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2_w c(k) = &-\frac{\langle\nabla W(\Pi(U(w))),\alpha(w)\rangle}{(u'(c(w)))^2}\,\mathrm{d}_w(u'\circ c)(k)\\ &+\frac{\langle\,\mathrm{d}_w(\nabla W\circ\Pi\circ U)(k),\alpha(w)\rangle}{u'(c(w))}\\ &+\frac{\langle\nabla W(\Pi(U(w))),\,\mathrm{d}_w\alpha(k)\rangle}{u'(c(w))}\end{aligned}$$

Using Step 2:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2_w c(k) = &-\frac{u''(c(w))}{(u'(c(w)))^3}\left\langle\nabla W(\Pi(U(w))),\Pi(kU'(w))\right\rangle\left\langle\nabla W(\Pi(U(w))),\alpha(w)\right\rangle\\ &+\frac{1}{u'(c(w))}\left\langle\nabla^2 W(\Pi(U(w))).\Pi(kU'(w)),\alpha(w)\right\rangle\\ &+\frac{1}{u'(c(w))}\left\langle\nabla W(\Pi(U(w))),\,\mathrm{d}_w\alpha(k)\right\rangle\end{aligned}$$

Taking the value at h and using Step 1:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2_w c(k,h) = &-\frac{u''(c(w))}{(u'(c(w)))^3}\,\left\langle\nabla W(\Pi(U(w))),\Pi(kU'(w))\right\rangle\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\left\langle\nabla W(\Pi(U(w))),\Pi(hU'(w))\right\rangle\\ &+\frac{1}{u'(c(w))}\left\langle\nabla^2 W(\Pi(U(w))).\Pi(kU'(w)),\Pi(hU'(w))\right\rangle\\ &+\frac{1}{u'(c(w))}\left\langle\nabla W(\Pi(U(w))),\Pi(hkU''(w))\right\rangle\end{aligned}$$

Finally, when $k=h$ as needed in the Taylor-Young formula:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2_w c(h)^2 = &-\frac{u''(c(w))}{(u'(c(w)))^3}\big(\left\langle\nabla W(\Pi(U(w))),\Pi(hU'(w))\right\rangle\big)^2\\ &+\frac{1}{u'(c(w))}\left\langle\nabla^2 W(\Pi(U(w))).\Pi(hU'(w)),\Pi(hU'(w))\right\rangle\\ &+\frac{1}{u'(c(w))}\left\langle\nabla W(\Pi(U(w))),\Pi(h^2U''(w))\right\rangle\end{aligned}$$

As the Hessian matrix of W is the Hessian matrix of A bordered with zeros, we can express this result with the functions A and φ:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2_w c(h)^2 = &-\frac{u''(c(w))}{(u'(c(w)))^3}\big(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(hU'(w)) + \big\langle \nabla A(\varphi(U(w))), \varphi(hU'(w))\big\rangle\big)^2 \\
&+ \frac{1}{u'(c(w))}\big\langle \nabla^2 A(\varphi(U(w))).\varphi(hU'(w)), \varphi(hU'(w))\big\rangle \\
&+ \frac{1}{u'(c(w))}\big(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h^2U''(w)) + \big\langle \nabla A(\varphi(U(w))), \varphi(h^2U''(w))\big\rangle\big)
\end{aligned}$$

With $\hat{w} := \varphi(U(w))$ and distributing the denominators:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2_w c(h)^2 = &-\frac{u''(c(w))}{u'(c(w))}\left(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left(h\frac{U'(w)}{u'(c(w))}\right) + \left\langle \nabla A(\hat{w}), \varphi\left(h\frac{U'(w)}{u'(c(w))}\right)\right\rangle\right)^2 \\
&+ u'(c(w))\left\langle \nabla^2 A(\hat{w}).\varphi\left(h\frac{U'(w)}{u'(c(w))}\right), \varphi\left(h\frac{U'(w)}{u'(c(w))}\right)\right\rangle \\
&+ \frac{u''(c(w))}{u'(c(w))}\left(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left(h^2\frac{U''(w)}{u''(c(w))}\right) + \left\langle \nabla A(\hat{w}), \varphi\left(h^2\frac{U''(w)}{u''(c(w))}\right)\right\rangle\right)
\end{aligned}$$

With the notations $\gamma(c(w)) := -u''(c(w))/u'(c(w))$, $\dot{w} := U'(w)/u'(c(w))$ and $\ddot{w} := U''(w)/u''(c(w))$ and developing the square:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2_w c(h)^2 = \ &\gamma(c(w))\Big((\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h\dot{w}))^2 + 2\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h\dot{w})\,\langle \nabla A(\hat{w}), \varphi(h\dot{w})\rangle \\
&\qquad + \langle \nabla A(\hat{w}), \varphi(h\dot{w})\rangle^2\Big) \\
&+ u'(c(w))\big\langle \nabla^2 A(\hat{w}).\varphi(h\dot{w}), \varphi(h\dot{w})\big\rangle \\
&- \gamma(c(w))\big(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h^2\ddot{w}) + \big\langle \nabla A(\hat{w}), \varphi(h^2\ddot{w})\big\rangle\big)
\end{aligned}$$

Finally rearranging the terms gives the result:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2_w c(h)^2 = &-\gamma(c(w))\left(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h^2\ddot{w}) - (\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h\dot{w}))^2\right) \\
&- \gamma(c(w))\left(\big\langle \nabla A(\hat{w}), \varphi(h^2\ddot{w})\big\rangle - \langle \nabla A(\hat{w}), \varphi(h\dot{w})\rangle^2\right) \\
&+ 2\gamma(c(w))\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h\dot{w})\,\langle \nabla A(\hat{w}), \varphi(h\dot{w})\rangle \\
&+ u'(c(w))\big\langle \nabla^2 A(\hat{w}).\varphi(h\dot{w}), \varphi(h\dot{w})\big\rangle
\end{aligned}$$

■

End of proof of Proposition 4.3.1.

If the act w is the current wealth, that is w is the degenerate random variable $w\mathbf{1}_\Omega$ where we also denote by w the scalar measuring this current wealth, then

$c(w\mathbf{1}_\Omega) = w$, $\hat{w} = 0_n$, and $\dot{w} = \ddot{w} = \mathbf{1}_\Omega$. Then the first-order differential given by equation (4.15) becomes:

$$\mathrm{d}_w c(h) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h) + \langle \nabla A(0_n), \varphi(h) \rangle \tag{4.19}$$

and the second-order differential given by equation (4.18) becomes:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_w^2 c(h)^2 = &-\gamma(w)\big(\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h^2) - (\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h))^2\big) \\ &- \gamma(w)\left(\left\langle \nabla A(0_n), \varphi(h^2)\right\rangle - \langle \nabla A(0_n), \varphi(h)\rangle^2\right) \\ &+ 2\gamma(w)\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h)\,\langle \nabla A(0_n), \varphi(h)\rangle \\ &+ u'(w)\left\langle \nabla^2 A(0_n)\varphi(h), \varphi(h)\right\rangle \end{aligned} \tag{4.21}$$

If the DM conforms to the Ambiguity Aversion axiom, A is nonpositive and concave (Siniscalchi, 2009, Corollary 2). As A is symmetric, *i.e.* $A(-\varphi) = A(\varphi)$, and $A(0_n) = 0$, the concavity implies that A reaches its maximum value 0 at point 0_n that is $\nabla A(0_n) = 0_n$ (our smoothness assumptions can be related to Segal et Spivak's (1990) attitude towards risk of order 2). Finally, equation (4.19) reduces to $\mathrm{d}_w c(h) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h)$ and equation (4.21) reduces to $\mathrm{d}_w^2 c(h)^2 = -\gamma(w)\,\mathbf{var}_{\mathbb{P}}(h) + u'(w)\left\langle \nabla^2 A(0_n)\varphi(h), \varphi(h)\right\rangle$ so that the second-order Taylor-Young expansion is:

$$\begin{aligned} c(w+h) = w + \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h) &- \frac{1}{2}\gamma(w)\,\mathbf{var}_{\mathbb{P}}(h) \\ &+ \frac{1}{2}u'(w)\left\langle \nabla^2 A(0_n)\cdot\varphi(h), \varphi(h)\right\rangle + o(\|h\|_\infty^2) \end{aligned} \tag{4.23}$$

4.A.2 Proof of Proposition 4.3.2.

Being a Hessian matrix, $\nabla^2 A(0_n)$ is symmetric and A being concave, it is semi-definite negative (Rockafellar, 1970, Theorem 4.5). The symmetry of $\nabla^2 A(0_n)$ implies that there exists an orthonormal basis $\{\hat{e}_i\}_{0\leqslant i<n}$ of $\mathbb{R}^n$ formed with normalised eigenvectors (Golub et Van Loan, 1996, Theorem 8.1.1). Assume w.l.o.g. that the eigenvalues are ordered: $-\lambda_0 \geqslant \ldots \geqslant -\lambda_{n-1} \geqslant 0$, there exists a real orthogonal matrix $Q = (\hat{e}_0, \ldots, \hat{e}_{n-1})$ such that $Q^\mathsf{T}\nabla^2 A(0_n)Q = \mathrm{diag}(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1})$ where λ_i is the eigenvalue associated with the eigenvector $\hat{e}_i$. We will denote by Λ the diagonal matrix with positive elements $\Lambda := \mathrm{diag}(-\lambda_0, \ldots, -\lambda_{n-1})$.

Q is a rotation matrix (of generic element q_{ij}) and, $\{e_i\}_{0\leqslant i<n}$ being the canonical basis of $\mathbb{R}^n$, the vectors $\hat{e}_i = Qe_i$ define the rotated basis of $\mathbb{R}^n$ in which the Hessian matrix is diagonal. Now φ is an isomorphism from `NC` (which we have supposed to be finite dimensional) to $\mathbb{R}^n$ mapping the basis $\zeta = \{\zeta_i\}_{0\leqslant i<n}$ to $\{e_i\}_{0\leqslant i<n}$. Define

the family $\hat{\zeta} = \{\hat{\zeta}_i\}_{0 \leqslant i < n}$ by $\hat{\zeta}_i = \sum_{j=0}^{n-1} q_{ji}\zeta_j$. We have that

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\hat{\zeta}_i \cdot \hat{\zeta}_j) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left(\left(\sum_{k=0}^{n-1} q_{ki}\zeta_k\right)\left(\sum_{l=0}^{n-1} q_{lj}\zeta_l\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} q_{ki}q_{lj}\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\zeta_k \cdot \zeta_l).$$

As ζ is an orthonormal basis, $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\zeta_k \cdot \zeta_l) = \delta_{kl}$ (Kronecker delta) and $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\hat{\zeta}_i \cdot \hat{\zeta}_j) = \sum_{k=0}^{n-1} q_{ki}q_{kj}$ which is the expression of the element (i,j) of the product of matrices $Q^{\mathsf{T}}Q = \mathrm{Id}$, hence $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\hat{\zeta}_i \cdot \hat{\zeta}_j) = \delta_{ij}$ and $\hat{\zeta}$ is an orthonormal basis of $\mathtt{NC}$. Finally, the mapping $\hat{\varphi}$ defined by $\hat{\varphi}_i(a) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\hat{\zeta}_i \cdot a)$ is an isomorphism from $\mathtt{NC}$ to $\mathbb{R}^n$ mapping the basis $\hat{\zeta}$ to $\{\hat{e}_i\}_{0 \leqslant i < n}$.

Taking the coordinates of the projection of h in this rotated basis $\hat{\zeta}$ of the space $\mathtt{NC}$ allows to use the diagonalised Hessian of A. Then we can rewrite equation (4.23) as:

$$\begin{aligned} c(w+h) = w + \mathbf{E}_{\mathbb{P}}(h) &- \frac{1}{2}\gamma(w)\,\mathbf{var}_{\mathbb{P}}(h) \\ &- \frac{1}{2}u'(w)\,\langle \Lambda \cdot \hat{\varphi}(h), \hat{\varphi}(h)\rangle + o(\|h\|_\infty^2) \end{aligned}$$

4.A.3 Proof of Proposition 4.4.1

Proposition 4 in Siniscalchi (2009) proves that $\succcurlyeq_1$ is more ambiguity averse than $\succcurlyeq_2$ if and only if for all $d \in \mathbb{R}^n$, $A^1(d) \leqslant A^2(d)$.

Suppose that $\succcurlyeq_1$ is more ambiguity averse than $\succcurlyeq_2$ and that $|\lambda_i^1| < |\lambda_i^2|$ that is there exist $\eta > 0$ such that $\lambda_i^1 = \lambda_i^2 + 2\eta$ (all eigenvalues are negative). Take an act $h = \alpha\hat{\zeta}_i$ with $\alpha \in \mathbb{R}^*$, that is $\hat{\varphi}(h) = \alpha\hat{e}_i$. Then with our assumptions, the second order approximations are: $A^1(\hat{\varphi}(h)) = \frac{1}{2}\lambda_i^1\alpha^2 + o(|\alpha|^2)$ and $A^2(\hat{\varphi}(h)) = \frac{1}{2}\lambda_i^2\alpha^2 + o(|\alpha|^2)$ and we have

$$A^2(\hat{\varphi}(h)) - A^1(\hat{\varphi}(h)) + \eta\alpha^2 = o(|\alpha|^2)$$

that is for all $\varepsilon > 0$, there exists $r > 0$ such that for all α with $|\alpha|^2 \leqslant r$

$$\frac{|A^2(\hat{\varphi}(h)) - A^1(\hat{\varphi}(h)) + \eta\alpha^2|}{|\alpha|^2} \leqslant \varepsilon.$$

As $A^2(\hat{\varphi}(h)) - A^1(\hat{\varphi}(h))$ is positive and η is strictly positive:

$$\eta \leqslant \frac{A^2(\hat{\varphi}(h)) - A^1(\hat{\varphi}(h))}{\alpha^2} + \eta \leqslant \varepsilon$$

a contradiction (choose $\varepsilon = \eta/2$).

Now suppose that for all $0 \leqslant i < n$ $|\lambda_i^1| \geqslant |\lambda_i^2|$ and there exists $d \in \mathbb{R}^n$ such that $A^1(d) > A^2(d)$ that is there exists $\eta > 0$ such that $A^1(d) = A^2(d) + \eta$. Write $d = \sum_{i=0}^{n-1} d_i \hat{e}_i$ so that

$$\eta = A^1(d) - A^2(d) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda_i^1 - \lambda_i^2)d_i^2 + o(\|d\|_{\mathbb{R}^n}^2)$$

and for all $\varepsilon > 0$, there exists $r > 0$ such that for all d with $\|d\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leqslant r$

$$\eta \leqslant \eta + \frac{\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda_i^2 - \lambda_i^1)d_i^2}{\|d\|_{\mathbb{R}^n}^2} \leqslant \varepsilon$$

a contradiction.

As $\nabla^2 A^1(0n) = -Q\Lambda Q^\mathsf{T}$, with q_{ij} being the elements of Q, this result implies that $\succcurlyeq_1$ is more ambiguity averse than $\succcurlyeq_2$ if and only if for all $0 \leqslant i < n$ and for all $0 \leqslant j < n$:

$$\frac{\partial^2 A^1}{\partial x_i \partial x_j}(0_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^1 q_{ik} q_{jk} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^2 q_{ik} q_{jk} = \frac{\partial^2 A^2}{\partial x_i \partial x_j}(0_n)$$

4.A.4 Proof of Proposition 4.5.1

The excess returns of the portfolios are given by $\tilde{r}_\psi = \psi^\mathsf{T}[\tilde{r}_k]$, hence the expected excess return of the portfolio is $\mathbf{E}(\tilde{r}_\psi) = \psi^\mathsf{T}[E_k]$ and its variance is $\mathbf{var}(\tilde{r}_\psi) = \psi^\mathsf{T}\Omega\psi$. The coordinates in the subspace of non crisp acts of the return of the portfolio are given by $\hat{\varphi}_i(\tilde{r}_\psi) = \mathbf{E}_\mathbb{P}(\hat{\zeta}_i \cdot \tilde{r}_\psi) = \sum_{k=1}^m \psi_k \mathbf{E}_\mathbb{P}(\hat{\zeta}_i \cdot \tilde{r}_k)$ so that the vector of coordinates $\hat{\varphi}(\tilde{r}_\psi)$ is given by $Z\psi$. Therefore the ambiguity adjustment given by equation (4.8) is $\mathbf{var}(\mathbb{A}\tilde{r}_\psi) = \langle \Lambda' \cdot \hat{\varphi}(\tilde{r}_\psi), \hat{\varphi}(\tilde{r}_\psi)\rangle = (Z\psi)^\mathsf{T}\Lambda' Z\psi = \psi^\mathsf{T} Z^\mathsf{T} \Lambda' Z\psi$. Finally, the Mean Variance Variability criterion applied to the return of the portfolio is: $u_{\mathrm{MVV}}(\tilde{r}_\psi) = r_0 + \psi^\mathsf{T}[E_k] - \frac{\gamma}{2}\psi^\mathsf{T}\widehat{\Omega}\psi$ where $\widehat{\Omega} = \Omega + \frac{\theta}{\gamma} Z^\mathsf{T}\Lambda' Z$.

Denoting by $\sqrt{\Lambda'}$ the matrix $\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_0'}, \ldots, \sqrt{\lambda_{n-1}'})$, we have

$$Z^\mathsf{T}\Lambda' Z = Z^\mathsf{T}(\sqrt{\Lambda'})^\mathsf{T}\sqrt{\Lambda'}Z = (\sqrt{\Lambda'}Z)^\mathsf{T}\sqrt{\Lambda'}Z$$

hence $Z^\mathsf{T}\Lambda' Z$ is symmetric semi-definite positive. Recall that $Z = [\hat{\varphi}(\tilde{r}_1), \ldots, \hat{\varphi}(\tilde{r}_m)]$, then the element (k,l) of $Z^\mathsf{T}\Lambda' Z$ is $\sum_{i=0}^{n-1}\lambda'_i\hat{\varphi}_i(\tilde{r}_k)\hat{\varphi}_i(\tilde{r}_l)$. But

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(\mathbb{A}\tilde{r}_k,\mathbb{A}\tilde{r}_l) &= \mathbf{E}(\mathbb{A}\tilde{r}_k\mathbb{A}\tilde{r}_l)\\
&= \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\lambda'_i}\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\hat{\zeta}_i\tilde{r}_k)\hat{\zeta}_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1}\sqrt{\lambda'_j}\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\hat{\zeta}_j\tilde{r}_l)\hat{\zeta}_j\right)\right)\\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\lambda'_i\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\hat{\zeta}_i\tilde{r}_k)\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}}(\hat{\zeta}_i\tilde{r}_l)\hat{\zeta}_i^2\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\lambda'_i\hat{\varphi}_i(\tilde{r}_k)\hat{\varphi}_i(\tilde{r}_l)
\end{aligned}$$

Therefore $Z^\mathsf{T}\Lambda' Z$ is the variance covariance matrix of the scaled non crisp projections of the excess returns of the assets. The element (k,l) of the modified variance covariance matrix $\widehat{\Omega}$ is $\hat{\sigma}_{kl} = \operatorname{cov}(\tilde{r}_k,\tilde{r}_l)+\frac{\theta}{\gamma}\operatorname{cov}(\mathbb{A}\tilde{r}_k,\mathbb{A}\tilde{r}_l)$ and especially, the diagonal terms are $\hat{\sigma}_{kk} = \mathbf{var}(\tilde{r}_k)+\frac{\theta}{\gamma}\mathbf{var}(\mathbb{A}\tilde{r}_k)$ hence we have $\hat{\sigma}_{kk}\geqslant\mathbf{var}(\tilde{r}_k)$.

The coefficients γ and θ being strictly positive and Ω being symmetric definite positive, the matrix $\widehat{\Omega}$ is also symmetric definite positive, hence it is associated with a definite quadratic form. Therefore the modified variance covariance matrix can replace the variance covariance matrix in the purely risky applications to take into account ambiguity, and all the results concerning the efficient portfolio frontier or the CAPM can be rewritten with these modified values. Looking at the choice of the optimal portfolio, the first order condition for optimality when searching for the maximum of expression (4.11) with no constraint on ψ is:

$$\gamma\widehat{\Omega}\psi = [E_k]$$

$\widehat{\Omega}$ is definite positive hence invertible, the solution is simply:

$$\psi^* = \frac{1}{\gamma}\widehat{\Omega}^{-1}[E_k]$$

4.A.5 Proof of Proposition 4.5.2

In our setting we have:

$$\operatorname{sgn}\beta(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2) = \operatorname{sgn}\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}} = \operatorname{sgn}\sigma_{12}$$

and

$$\operatorname{sgn}\alpha(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2) = \operatorname{sgn}(E_2-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}E_1) = \operatorname{sgn}(E_2\sigma_{11}-E_1\sigma_{12})$$

As $\sigma_{11}\hat{\sigma}_{22} - \sigma_{12}^2 = \mathbf{var}(\tilde{r}_1)\,\mathbf{var}(\tilde{r}_2) - (\operatorname{cov}(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2))^2 + \frac{\theta}{\gamma}\,\mathbf{var}(\tilde{r}_1)\,\mathbf{var}(\mathbb{A}\tilde{r}_2)$, the denominator in ψ_2^* is positive by the Cauchy-Schwarz inequality and the positivity of the variances. Therefore

$$\operatorname{sgn}\psi_2^* = \operatorname{sgn}(E_2\sigma_{11} - E_1\sigma_{12}) = \operatorname{sgn}\alpha(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2).$$

which proves the first relationship. Then the following derivatives:

$$\frac{\partial(\psi_1^*/\psi_2^*)}{\partial\theta} = \frac{E_1}{E_2\sigma_{11} - E_1\sigma_{12}} \cdot \frac{\partial\hat{\sigma}_{22}}{\partial\theta} = \frac{E_1}{E_2\sigma_{11} - E_1\sigma_{12}} \cdot \frac{1}{\gamma}\,\mathbf{var}(\mathbb{A}\tilde{r}_2)$$

$$\frac{\partial\psi_2^*}{\partial\theta} = -\frac{1}{\gamma}\frac{E_2\sigma_{11} - E_1\sigma_{12}}{(\sigma_{11}\hat{\sigma}_{22} - \sigma_{12}^2)^2} \cdot \sigma_{11}\frac{1}{\gamma}\,\mathbf{var}(\mathbb{A}\tilde{r}_2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi_1^*}{\partial\theta} &= \frac{1}{\gamma}\frac{E_1\frac{1}{\gamma}\,\mathbf{var}(\mathbb{A}\tilde{r}_2)(\sigma_{11}\hat{\sigma}_{22} - \sigma_{12}^2) - \sigma_{11}\frac{1}{\gamma}\,\mathbf{var}(\mathbb{A}\tilde{r}_2)(E_1\hat{\sigma}_{22} - E_2\sigma_{12})}{(\sigma_{11}\hat{\sigma}_{22} - \sigma_{12}^2)^2} \\ &= \frac{1}{\gamma^2}\,\mathbf{var}(\mathbb{A}\tilde{r}_2)\sigma_{12}\frac{-E_1\sigma_{12} + \sigma_{11}E_2}{(\sigma_{11}\hat{\sigma}_{22} - \sigma_{12}^2)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\psi_1^*/\psi_2^*)}{\partial\gamma} = \frac{E_1}{E_2\sigma_{11} - E_1\sigma_{12}} \cdot \frac{\partial\hat{\sigma}_{22}}{\partial\gamma} = -\frac{E_1}{E_2\sigma_{11} - E_1\sigma_{12}} \cdot \frac{\theta}{\gamma^2}\,\mathbf{var}(\mathbb{A}\tilde{r}_2)$$

$$\frac{\partial\psi_2^*}{\partial\gamma} = -\frac{E_2\sigma_{11} - E_1\sigma_{12}}{(\gamma\sigma_{11}\hat{\sigma}_{22} - \gamma\sigma_{12}^2)^2}(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)$$

imply respectively

$$\operatorname{sgn}\frac{\partial(\psi_1^*/\psi_2^*)}{\partial\theta} = \operatorname{sgn}(E_2\sigma_{11} - E_1\sigma_{12}) = \operatorname{sgn}\alpha(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$$

$$\operatorname{sgn}\frac{\partial\psi_2^*}{\partial\theta} = -\operatorname{sgn}(E_2\sigma_{11} - E_1\sigma_{12}) = -\operatorname{sgn}\alpha(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$$

$$\operatorname{sgn}\frac{\partial\psi_1^*}{\partial\theta} = \operatorname{sgn}(\sigma_{12})\operatorname{sgn}(E_2\sigma_{11} - E_1\sigma_{12}) = \operatorname{sgn}\alpha(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)\beta(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$$

and

$$\operatorname{sgn}\frac{\partial(\psi_1^*/\psi_2^*)}{\partial\gamma} = \operatorname{sgn}\frac{\partial\psi_2^*}{\partial\gamma} = -\operatorname{sgn}(E_2\sigma_{11} - E_1\sigma_{12}) = -\operatorname{sgn}\alpha(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$$

4.A.6 Proof of Proposition 4.5.3

Starting from the definitions, replacing and rearranging the terms lead to the results:

$$\begin{aligned}
A &= E_1\hat{\sigma}_{22} - E_2\hat{\sigma}_{12} \\
&= E_1(\sigma^2_{\mathtt{K}2} + \sigma^2_{\mathtt{NC}2} + \tfrac{\theta}{\gamma}\sigma^2_{\mathbb{A}2}) - E_2(\rho_{\mathtt{K}}\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathtt{K}2} + \rho_{\mathtt{NC}}\sigma_{\mathtt{NC}1}\sigma_{\mathtt{NC}2} + \tfrac{\theta}{\gamma}\rho_{\mathbb{A}}\sigma_{\mathbb{A}1}\sigma_{\mathbb{A}2}) \\
&= \left(E_1\sigma^2_{\mathtt{K}2} - E_2\rho_{\mathtt{K}}\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathtt{K}2}\right) + \left(E_1\sigma^2_{\mathtt{NC}2} - E_2\rho_{\mathtt{NC}}\sigma_{\mathtt{NC}1}\sigma_{\mathtt{NC}2}\right) + \tfrac{\theta}{\gamma}\left(E_1\sigma^2_{\mathbb{A}2} - E_2\rho_{\mathbb{A}}\sigma_{\mathbb{A}1}\sigma_{\mathbb{A}2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= E_2\hat{\sigma}_{11} - E_1\hat{\sigma}_{12} \\
&= E_2(\sigma^2_{\mathtt{K}1} + \sigma^2_{\mathtt{NC}1} + \tfrac{\theta}{\gamma}\sigma^2_{\mathbb{A}1}) - E_1(\rho_{\mathtt{K}}\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathtt{K}2} + \rho_{\mathtt{NC}}\sigma_{\mathtt{NC}1}\sigma_{\mathtt{NC}2} + \tfrac{\theta}{\gamma}\rho_{\mathbb{A}}\sigma_{\mathbb{A}1}\sigma_{\mathbb{A}2}) \\
&= \left(E_2\sigma^2_{\mathtt{K}1} - E_1\rho_{\mathtt{K}}\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathtt{K}2}\right) + \left(E_2\sigma^2_{\mathtt{NC}1} - E_1\rho_{\mathtt{NC}}\sigma_{\mathtt{NC}1}\sigma_{\mathtt{NC}2}\right) + \tfrac{\theta}{\gamma}\left(E_2\sigma^2_{\mathbb{A}1} - E_1\rho_{\mathbb{A}}\sigma_{\mathbb{A}1}\sigma_{\mathbb{A}2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}^2_{12} \\
&= (\sigma^2_{\mathtt{K}1} + \sigma^2_{\mathtt{NC}1} + \tfrac{\theta}{\gamma}\sigma^2_{\mathbb{A}1})(\sigma^2_{\mathtt{K}2} + \sigma^2_{\mathtt{NC}2} + \tfrac{\theta}{\gamma}\sigma^2_{\mathbb{A}2}) \\
&\quad - (\rho_{\mathtt{K}}\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathtt{K}2} + \rho_{\mathtt{NC}}\sigma_{\mathtt{NC}1}\sigma_{\mathtt{NC}2} + \tfrac{\theta}{\gamma}\rho_{\mathbb{A}}\sigma_{\mathbb{A}1}\sigma_{\mathbb{A}2})^2 \\
&= \sigma^2_{\mathtt{K}1}\sigma^2_{\mathtt{K}2} + \sigma^2_{\mathtt{K}1}\sigma^2_{\mathtt{NC}2} + \tfrac{\theta}{\gamma}\sigma^2_{\mathtt{K}1}\sigma^2_{\mathbb{A}2} + \sigma^2_{\mathtt{NC}1}\sigma^2_{\mathtt{K}2} + \sigma^2_{\mathtt{NC}1}\sigma^2_{\mathtt{NC}2} + \tfrac{\theta}{\gamma}\sigma^2_{\mathtt{NC}1}\sigma^2_{\mathbb{A}2} \\
&\quad + \tfrac{\theta}{\gamma}\sigma^2_{\mathbb{A}1}\sigma^2_{\mathtt{K}2} + \tfrac{\theta}{\gamma}\sigma^2_{\mathbb{A}1}\sigma^2_{\mathtt{NC}2} + \tfrac{\theta^2}{\gamma^2}\sigma^2_{\mathbb{A}1}\sigma^2_{\mathbb{A}2} - \rho^2_{\mathtt{K}}\sigma^2_{\mathtt{K}1}\sigma^2_{\mathtt{K}2} - \rho^2_{\mathtt{NC}}\sigma^2_{\mathtt{NC}1}\sigma^2_{\mathtt{NC}2} \\
&\quad - \tfrac{\theta^2}{\gamma^2}\rho^2_{\mathbb{A}}\sigma^2_{\mathbb{A}1}\sigma^2_{\mathbb{A}2} - 2\rho_{\mathtt{K}}\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathtt{K}2}\rho_{\mathtt{NC}}\sigma_{\mathtt{NC}1}\sigma_{\mathtt{NC}2} - 2\tfrac{\theta}{\gamma}\rho_{\mathtt{K}}\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathtt{K}2}\rho_{\mathbb{A}}\sigma_{\mathbb{A}1}\sigma_{\mathbb{A}2} \\
&\quad - 2\tfrac{\theta}{\gamma}\rho_{\mathtt{NC}}\sigma_{\mathtt{NC}1}\sigma_{\mathtt{NC}2}\rho_{\mathbb{A}}\sigma_{\mathbb{A}1}\sigma_{\mathbb{A}2} \\
&= \sigma^2_{\mathtt{K}1}\sigma^2_{\mathtt{K}2}(1-\rho^2_{\mathtt{K}}) + \sigma^2_{\mathtt{NC}1}\sigma^2_{\mathtt{NC}2}(1-\rho^2_{\mathtt{NC}}) + \tfrac{\theta^2}{\gamma^2}\sigma^2_{\mathbb{A}1}\sigma^2_{\mathbb{A}2}(1-\rho^2_{\mathbb{A}}) \\
&\quad + \sigma^2_{\mathtt{K}1}\sigma^2_{\mathtt{NC}2} + \sigma^2_{\mathtt{NC}1}\sigma^2_{\mathtt{K}2} - 2\rho_{\mathtt{K}}\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathtt{K}2}\rho_{\mathtt{NC}}\sigma_{\mathtt{NC}1}\sigma_{\mathtt{NC}2} \\
&\quad + \tfrac{\theta}{\gamma}\left[\sigma^2_{\mathtt{K}1}\sigma^2_{\mathbb{A}2} + \sigma^2_{\mathbb{A}1}\sigma^2_{\mathtt{K}2} - 2\rho_{\mathtt{K}}\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathtt{K}2}\rho_{\mathbb{A}}\sigma_{\mathbb{A}1}\sigma_{\mathbb{A}2}\right] \\
&\quad + \tfrac{\theta}{\gamma}\left[\sigma^2_{\mathbb{A}1}\sigma^2_{\mathtt{NC}2} + \sigma^2_{\mathtt{NC}1}\sigma^2_{\mathbb{A}2} - 2\rho_{\mathtt{NC}}\sigma_{\mathtt{NC}1}\sigma_{\mathtt{NC}2}\rho_{\mathbb{A}}\sigma_{\mathbb{A}1}\sigma_{\mathbb{A}2}\right] \\
&= \sigma^2_{\mathtt{K}1}\sigma^2_{\mathtt{K}2}(1-\rho^2_{\mathtt{K}}) + \sigma^2_{\mathtt{NC}1}\sigma^2_{\mathtt{NC}2}(1-\rho^2_{\mathtt{NC}}) + \tfrac{\theta^2}{\gamma^2}\sigma^2_{\mathbb{A}1}\sigma^2_{\mathbb{A}2}(1-\rho^2_{\mathbb{A}}) \\
&\quad + (\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathtt{NC}2} - \sigma_{\mathtt{NC}1}\sigma_{\mathtt{K}2})^2 + 2\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathtt{K}2}\sigma_{\mathtt{NC}1}\sigma_{\mathtt{NC}2}(1-\rho_{\mathtt{K}}\rho_{\mathtt{NC}}) \\
&\quad + \tfrac{\theta}{\gamma}\left[(\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathbb{A}2} - \sigma_{\mathbb{A}1}\sigma_{\mathtt{K}2})^2 + 2\sigma_{\mathtt{K}1}\sigma_{\mathtt{K}2}\sigma_{\mathbb{A}1}\sigma_{\mathbb{A}2}(1-\rho_{\mathtt{K}}\rho_{\mathbb{A}})\right] \\
&\quad + \tfrac{\theta}{\gamma}\left[(\sigma_{\mathbb{A}1}\sigma_{\mathtt{NC}2} - \sigma_{\mathtt{NC}1}\sigma_{\mathbb{A}2})^2 + 2\sigma_{\mathtt{NC}1}\sigma_{\mathtt{NC}2}\sigma_{\mathbb{A}1}\sigma_{\mathbb{A}2}(1-\rho_{\mathtt{NC}}\rho_{\mathbb{A}})\right]
\end{aligned}$$

Chapitre 5

Conclusion générale

Le projet de recherche dans lequel s'inscrit cette thèse, appliquer les modèles axiomatiques de décision dans l'ambiguïté à la théorie financière, se déploie en deux temps : premièrement, adapter ces modèles au formalisme des applications financières, en évaluant notamment ce que les choix de modélisation impliquent sur la représentation du risque et de l'ambiguïté dans les marchés financiers et, deuxièmement, analyser les conséquences de l'adoption de ces modèles pour les énoncés de la théorie financière.

Les trois articles de cette thèse avancent vers ces deux objectifs en étudiant les modèles avec ensemble de probabilités *a priori* et plus particulièrement le modèle Vector Expected Utility. Ainsi, le premier article, *Crisp Fair Gambles*, met en lumière une conséquence importante du choix du cadre Anscombe-Aumann pour la description de l'ambiguïté : nous démontrons qu'un axiome supplémentaire, que nous appelons *No Crisp Fair Gamble*, doit être imposé pour que ce cadre soit compatible avec la rationalité moyenne–variance.

Le deuxième article, *Vector Expected Utility Preferences and Mean–Variance Preferences*, explore le lien entre les préférences moyenne–variance et le modèle VEU. Plus généralement, nous posons les termes d'un rapprochement entre l'aversion à la variance et l'aversion à l'ambiguïté. Les critères que nous obtenons suggèrent la prise en compte d'une forme particulière de l'ambiguïté comme un défaut d'information du décideur dont l'aversion à l'incertitude est alors la crainte que le modèle probabiliste réel ne soit pas gaussien, ou, plus généralement, qu'il dévie d'un modèle de référence. L'étude de cette interprétation, qui est soutenue par le lien démontré entre les modèles avec ensemble de *priors* et les méthodes robustes en statistique, doit être poursuivie par l'application de ces critères aux problèmes de la théorie financière. Dans cet article, nous montrons également que le modèle VEU peut être appliqué aux processus de Markov réversibles, ce qui ouvre la voie à de possibles applications en temps continu.

Le troisième article, *Optimal Portfolio with Vector Expected Utility*, propose une application concrète du modèle VEU au choix du portefeuille optimal et à l'explication d'une préférence pour les actifs du pays d'origine. Cette analyse doit être poursuivie, notamment, par la calibration de coefficients d'aversion à l'ambiguïté permettant d'expliquer les données réelles. Ces valeurs pourraient alors, comme dans le cas du risque, être comparées à celles calibrées à partir d'expériences en laboratoire ou de questionnaires auprès d'intervenants sur les marchés, selon les méthodes détaillées à la section 1.3.3 de l'introduction générale.

Finalement, la similitude formelle entre la théorie de la décision dans l'ambiguïté et la théorie des mesures de risque, qui a été présentée à la section 1.3.4 de l'introduction générale, ouvre la perspective de pouvoir construire de nouvelles mesures de risque qui prennent en compte, selon des critères axiomatiquement définis, les incertitudes sur la forme et l'estimation des lois de probabilités qui régissent les mouvements des actifs financiers. La littérature des applications à la finance des modèles généralisant l'utilité espérée, qui propose d'ores et déjà une réponse aux puzzles de la finance puisqu'elle permet de réduire l'écart entre les prévisions théoriques et les comportements réels des actifs, pourrait donc aussi apporter une réponse aux professionnels des marchés financiers qui appellent à une réflexion critique sur les modèles utilisés pour valoriser et gérer les risques.

Bibliographie

Abken, P. A., D. B. Madan, et S. Ramamurtie (1996) : “Estimation of risk-neutral and statistical densities by Hermite polynomial approximation : with an application to eurodollar futures options,” Document de travail 96-5, Federal Reserve Bank of Atlanta. [94]

Aït-Sahalia, Y., L. P. Hansen, et J. A. Scheinkman (2010) : “Operator Methods for Continuous-Time Markov Processes,” in *Handbook of Financial Econometrics : Tools and Techniques*, éd. par Y. Aït-Sahalia et L. P. Hansen, San Diego : North-Holland, vol. 1 of *Handbooks in Finance*, chap. 1, 1–66. [95]

Al-Najjar, N. I. et J. Weinstein (2009) : “The Ambiguity Aversion Literature : A Critical Assessment,” *Economics and Philosophy*, 25, 249–284. [28, 29]

Aliprantis, C. D. et K. C. Border (2006) : *Infinite Dimensional Analysis : A Hitchhiker's Guide*, Springer. [72, 91, 101, 133, 136]

Allais, M. (1953) : “Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque : Critique des Postulats et Axiomes de l'École Américaine,” *Econometrica*, 21, 503–546. [24, 25, 29]

——— (1993) : “The Passion for Research,” in *Eminent Economists : Their Life Philosophies*, éd. par M. Szenberg, Cambridge University Press. [29, 99]

Anderson, E. W., L. P. Hansen, et T. J. Sargent (2003) : “A Quartet of Semigroups for Model Specification, Robustness, Prices of Risk, and Model Detection,” *Journal of the European Economic Association*, 1, 68–123. [49, 50, 116]

André, E. (2014) : “Optimal portfolio with Vector Expected Utility,” *Mathematical Social Sciences*, 69, 50–62. [56]

Anscombe, F. J. et R. J. Aumann (1963) : “A Definition of Subjective Probability,” *The Annals of Mathematical Statistics*, 34, 199–205. [19, 22, 61, 87, 116]

Arrow, K. J. (1953) : “Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques,” *Économètrie, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique*, 11, 41–47. [17]

——— (1965) : “The theory of risk aversion,” in *Aspects of the Theory of Risk Bearing*, Helsinki : Yrjö Jahnssonin Säätiö, reprinted in *Essays in the Theory of Risk Bearing* (1971), Chicago : Markham Publishing Co. [16, 110]

Artzner, P., F. Delbaen, J. Eber, et D. Heath (1999) : “Coherent Measures of Risk,” *Mathematical Finance*, 9, 203–228. [52]

Aubin, J.-P. (1998) : *Optima and Equilibria : An Introduction to Nonlinear Analysis*, Springer. [38, 40, 106]

——— (2007) : *Mathematical methods of game and economic theory*, Dover Publications Inc. [79, 98]

Bachelier, L. (1900) : "Théorie de la spéculation," *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3, 21–86. [3]

Bansal, R. et A. Yaron (2004) : "Risks for the Long Run : A Potential Resolution of Asset Pricing Puzzles," *The Journal of Finance*, 59, 1481–1509. [14]

Barrieu, P. et N. El Karoui (2008) : "Pricing, hedging and optimally designing derivatives via minimization of risk measures," in *Indifference pricing : theory and applications*, éd. par R. Carmona, Princeton, USA : Princeton University Press. [18]

Ben-Tal, A., A. Ben-Israel, et M. Teboulle (1991) : "Certainty equivalents and information measures : Duality and extremal principles," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 157, 211–236. [100]

Ben-Tal, A. et M. Teboulle (1986) : "Expected Utility, Penalty Functions, and Duality in Stochastic Nonlinear Programming," *Management Science*, 32, 1445–1466. [100]

——— (1987) : "Penalty Functions and Duality in Stochastic Programming via ϕ-Divergence Functionals," *Mathematics of Operations Research*, 12, 224–240. [56, 100]

Bertrand, P. et J.-L. Prigent (2012) : *Gestion de portefeuille : Analyse quantitative et gestion structurée*, Paris : Économica, 2e ed. [5]

Bewley, T. F. (1986) : "Knightian Decision Theory : Part I," Document de travail 807, Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University. [30, 31, 60, 63, 83, 107, 112, 117]

Black, F. et M. S. Scholes (1973) : "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *The Journal of Political Economy*, 81, 637–654. [3, 5, 9, 11]

Boyle, P. P., L. Garlappi, R. Uppal, et T. Wang (2012) : "Keynes Meets Markowitz : The Trade-Off Between Familiarity and Diversification," *Management Science*, 58, 253–272. [48, 115]

Breeden, D. T. (1979) : "An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities," *Journal of Financial Economics*, 7, 265–296. [4]

Calafiore, G. (2007) : "Ambiguous Risk Measures and Optimal Robust Portfolios," *SIAM Journal on Optimization*, 18, 853–877. [115, 125]

Camerer, C. (1999) : "Ambiguity-Aversion and Non-Additive Probability :," in *Uncertain Decisions*, éd. par L. Luini, Springer US, 53–79. [47]

Campbell, J. Y. (2003) : "Consumption-based asset pricing," in *Handbook of the Economics of Finance*, éd. par G. M. Constantinides, M. Harris, et R. M. Stulz, Elsevier, vol. 1, Part B, chap. 13, 803–887. [7]

CAMPBELL, J. Y. ET J. H. COCHRANE (1999) : “By Force of Habit : A Consumption-Based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior,” *Journal of Political Economy*, 107, 205–251. [12]

CAMPBELL, J. Y. ET R. J. SHILLER (1988) : “The Dividend-Price Ratio and Expectations of Future Dividends and Discount Factors,” *The Review of Financial Studies*, 1, 195–228. [8]

CARR, P., H. GEMAN, D. B. MADAN, ET M. YOR (2002) : “The Fine Structure of Asset Returns : An Empirical Investigation,” *Journal of Business*, 75, 305–332. [13]

ČERNÝ, A., F. MACCHERONI, M. MARINACCI, ET A. RUSTICHINI (2012) : “On the computation of optimal monotone mean–variance portfolios via truncated quadratic utility,” *Journal of Mathematical Economics*, 48, 386–395. [58, 59]

CERREIA-VIOGLIO, S. (2011) : “Objective Rationality and Uncertainty Averse Preferences,” Working Paper 413, IGIER (Innocenzo Gasparini Institute for Economic Research), Bocconi University. [60]

CERREIA-VIOGLIO, S., P. GHIRARDATO, F. MACCHERONI, M. MARINACCI, ET M. SINISCALCHI (2011a) : “Rational preferences under ambiguity,” *Economic Theory*, 48, 341–375. [41, 55, 61, 62, 63, 64, 70, 72, 73]

CERREIA-VIOGLIO, S., F. MACCHERONI, M. MARINACCI, ET L. MONTRUCCHIO (2011b) : “Risk Measures : Rationality and Diversification,” *Mathematical Finance*, 21. [53]

——— (2011c) : “Uncertainty averse preferences,” *Journal of Economic Theory*, 146, 1275–1330. [41, 45, 60, 79]

——— (2013) : “Ambiguity and robust statistics,” *Journal of Economic Theory*, 148, 974–1049. [53]

CHAMBERLAIN, G. (1983) : “A Characterization of the Distributions That Imply Mean—Variance Utility Functions,” *Journal of Economic Theory*, 29, 185–201. [16]

CHATEAUNEUF, A., F. MACCHERONI, M. MARINACCI, ET J.-M. TALLON (2005) : “Monotone continuous multiple priors,” *Economic Theory*, 26, 973–982. [37, 71, 85]

CHEN, H., N. JU, ET J. MIAO (2014) : “Dynamic asset allocation with ambiguous return predictability,” *Review of Economic Dynamics*. [47]

CHEN, Z. ET L. G. EPSTEIN (2002) : “Ambiguity, Risk, and Asset Returns in Continuous Time,” *Econometrica*, 70, 1403–1443. [17, 50, 51, 115]

CLARKE, F. H. (1983) : *Optimization and Nonsmooth Analysis*, New York : Wiley. [43]

COCHRANE, J. H. (2005) : *Asset Pricing*, Princeton University Press, revised ed. [83, 112]

CŒURÉ, B. (2012) : “Which models do we need in times of crisis ?” in *Banque de France, CEPREMAP, Federal Reserve Bank of Atlanta and Centre d’Analyse Stratégique international conference “Macroeconomic Modeling in Times of Crisis”*, Paris. [9]

CONSTANTINIDES, G. M. (1990) : “Habit Formation : A Resolution of the Equity Premium Puzzle,” *The Journal of Political Economy*, 98, 519–543. [12]

Conway, J. B. (1990) : *A Course in Functional Analysis*, Springer. [122]

Courant, R. et D. Hilbert (1989) : *Methods of mathematical physics*, New York : Wiley. [92]

Coval, J. D. et T. J. Moskowitz (1999) : "Home Bias at Home : Local Equity Preference in Domestic Portfolios," *The Journal of Finance*, 54, 2045–2073. [8]

Cvitanić, J. et I. Karatzas (1992) : "Convex Duality in Constrained Portfolio Optimization," *The Annals of Applied Probability*, 2, 767–818. [12]

——— (1993) : "Hedging Contingent Claims with Constrained Portfolios," *The Annals of Applied Probability*, 3, 652–681. [17]

Dana, R.-A. et M. Jeanblanc-Picqué (1998) : *Marchés financiers en temps continu : valorisation et équilibre*, Paris : Économica. [17]

Darolles, S. et J.-P. Laurent (2000) : "Approximating payoffs and pricing formulas," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24, 1721–1746. [94]

Delbaen, F. (2002) : "Coherent Risk Measures on General Probability Spaces," in *Advances in finance and stochastics : essays in honour of Dieter Sondermann*, éd. par K. Sandmann et P. J. Schönbucher, Springer, 1–37. [53]

Delbaen, F. et W. Schachermayer (1994) : "A general version of the fundamental theorem of asset pricing," *Mathematische Annalen*, 300, 463–520. [5]

Dolecki, S. et G. H. Greco (1995) : "Niveloids," *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 5, 1–22. [66]

Duffie, D. (2001) : *Dynamic Asset Pricing Theory, Third Edition*, Princeton University Press. [13]

Duffie, D. et L. G. Epstein (1992) : "Stochastic Differential Utility," *Econometrica*, 60, 353–394. [51]

Dumas, B. (1989) : "Two-person dynamic equilibrium in the capital market," *Review of Financial Studies*, 2, 157–188. [12]

Dunford, N. et J. T. Schwartz (1988) : *Linear operators. Part 1 : General theory*, New York : Wiley. [70, 75, 76, 77, 85, 87, 91, 101, 102]

Dupire, B. (1997) : "Pricing and hedging with smiles," in *Mathematics of Derivative Securities*, éd. par M. A. H. Dempster et S. R. Pliska, Cambridge University Press. [10]

Ekeland, I. et R. Témam (1999) : *Convex Analysis and Variational Problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics. [67]

El Karoui, N. et M.-C. Quenez (1991) : "Programmation dynamique et évaluation des actifs contingents en marché incomplet," *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 313, 851–854. [17]

El Karoui, N. et C. Ravanelli (2009) : "Cash Subadditive Risk Measures and Interest Rate Ambiguity," *Mathematical Finance*, 19, 561–590. [53]

Elliott, R. J. (1993) : "A General Recursive Discrete-Time Filter," *Journal of Applied Probability*, 30, 575–588. [94]

Ellsberg, D. (1961) : "Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms," *The Quarterly Journal of Economics*, 75, 643–669. [24, 26, 46, 47, 82, 84, 112, 113]

Epstein, L. G. (1987) : "The Global Stability of Efficient Intertemporal Allocations," *Econometrica*, 55, 329–355. [51]

Epstein, L. G. et J. Miao (2003) : "A two-person dynamic equilibrium under ambiguity," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27, 1253–1288. [51, 116]

Epstein, L. G. et M. Schneider (2003) : "Recursive multiple-priors," *Journal of Economic Theory*, 113, 1–31. [50, 51, 53]

Epstein, L. G. et J. Zhang (2001) : "Subjective Probabilities on Subjectively Unambiguous Events," *Econometrica*, 69, 265–306. [55]

Epstein, L. G. et S. E. Zin (1989) : "Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns : A Theoretical Framework," *Econometrica*, 57, 937–969. [17]

Ergin, H. et F. Gul (2009) : "A theory of subjective compound lotteries," *Journal of Economic Theory*, 144, 899–929. [34]

Etner, J., M. Jeleva, et J.-M. Tallon (2009) : "Decision theory under uncertainty," Documents de travail du Centre d'Economie de la Sorbonne 09064, Université Panthéon-Sorbonne (Paris 1). [30, 47, 110]

Fama, E. F. (1963) : "Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis," *The Journal of Business*, 36, 420–429. [3]

Fama, E. F. et K. R. French (1988) : "Permanent and Temporary Components of Stock Prices," *Journal of Political Economy*, 96, 246–273. [8]

Fei, W. (2007) : "Optimal consumption and portfolio choice with ambiguity and anticipation," *Information Sciences*, 177, 5178–5190. [116]

Ferson, W. E. (2003) : "Tests of multifactor pricing models, volatility bounds and portfolio performance," in *Handbook of the Economics of Finance*, éd. par G. M. Constantinides, M. Harris, et R. M. Stulz, Elsevier, vol. 1, Part B, chap. 12, 743–802. [83, 84, 112, 113]

Fishburn, P. C. (1970) : *Utility Theory for Decision Making*, New York : Wiley. [19, 20, 22]

Fishburn, P. C. et P. P. Wakker (1995) : "The Invention of the Independence Condition for Preferences," *Management Science*, 41, 1130–1144. [18]

Föllmer, H. et A. Schied (2002a) : "Convex measures of risk and trading constraints," *Finance and Stochastics*, 6, 429–447. [53]

——— (2002b) : "Robust preferences and convex measures of risk," in *Advances in Finance and Stochastics : Essays in Honour of Dieter Sondermann*, éd. par K. Sandmann et P. J. Schönbucher, Springer-Verlag, 39–56. [53]

——— (2011) : *Stochastic Finance*, Walter de Gruyter & Co, 3rd revised ed. [51, 53, 117]

French, K. R. et J. M. Poterba (1991) : "Investor Diversification and International Equity Markets," *The American Economic Review*, 81, 222–226. [7, 110, 126, 130]

Frittelli, M. et E. Rosazza Gianin (2002) : "Putting order in risk measures," *Journal of Banking & Finance*, 26, 1473–1486. [53]

Gabaix, X. (2008) : "Variable Rare Disasters : A Tractable Theory of Ten Puzzles in Macro-Finance," *The American Economic Review*, 98, 64–67. [14]

——— (2012) : "Variable Rare Disasters : An Exactly Solved Framework for Ten Puzzles in Macro-Finance," *The Quarterly Journal of Economics*, 127, 645–700. [14]

Gänssler, P. (1971) : "Compactness and sequential compactness in spaces of measures," *Probability Theory and Related Fields*, 17, 124–146. [75, 76, 85, 102]

Garlappi, L., R. Uppal, et T. Wang (2007) : "Portfolio Selection with Parameter and Model Uncertainty : A Multi-Prior Approach," *Review of Financial Studies*, 20, 41 –81. [47, 115]

Ghirardato, P., F. Maccheroni, et M. Marinacci (2004) : "Differentiating ambiguity and ambiguity attitude," *Journal of Economic Theory*, 118, 133–173. [39, 41, 42, 43, 44, 45, 59, 60, 63, 83, 93, 106, 107, 112, 114, 117, 130]

Ghirardato, P. et M. Marinacci (2002) : "Ambiguity Made Precise : A Comparative Foundation," *Journal of Economic Theory*, 102, 251–289. [44, 121]

Ghirardato, P. et M. Siniscalchi (2012) : "Ambiguity in the Small and in the Large," *Econometrica*, 80, 2827–2847. [42, 43, 60]

Gilboa, I. (2009) : *Theory of Decision Under Uncertainty*, Cambridge University Press. [15, 19, 32, 59]

Gilboa, I., F. Maccheroni, M. Marinacci, et D. Schmeidler (2010) : "Objective and Subjective Rationality in a Multiple Prior Model," *Econometrica*, 78, 755–770. [31, 60]

Gilboa, I. et M. Marinacci (2011) : "Ambiguity and the Bayesian Paradigm," Working Paper 379, IGIER (Innocenzo Gasparini Institute for Economic Research), Bocconi University. [30, 110]

Gilboa, I., A. Postlewaite, et D. Schmeidler (2009) : "Is It Always Rational to Satisfy Savage's Axioms ?" *Economics and Philosophy*, 25, 285–296. [29]

Gilboa, I. et D. Schmeidler (1989) : "Maxmin expected utility with non-unique prior," *Journal of Mathematical Economics*, 18, 141–153. [30, 34, 35, 38, 59, 66, 96, 107, 115, 130]

Gollier, C. (2011) : "Portfolio Choices and Asset Prices : The Comparative Statics of Ambiguity Aversion," *The Review of Economic Studies*, 78, 1329–1344. [116]

Golub, G. H. et C. F. Van Loan (1996) : *Matrix Computations*, John Hopkins Studies in the Mathematical Sciences, Baltimore and London : John Hopkins University Press, 3rd ed. [121, 140]

Greenberg, H. J. et W. P. Pierskalla (1973) : “Quasi-conjugate functions and surrogate duality,” *Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Operationelle*, 15, 437–448. [41]

Hagan, P. S., D. Kumar, A. S. Lesniewski, et D. E. Woodward (2002) : “Managing Smile Risk,” *Wilmott Magazine*, 1, 84–108. [10]

Halevy, Y. (2007) : “Ellsberg Revisited : An Experimental Study,” *Econometrica*, 75, 503–536. [46, 47]

Hansen, L. P. et T. J. Sargent (2001) : “Robust Control and Model Uncertainty,” *The American Economic Review*, 91, 60–66. [49, 56, 100]

Hansen, L. P. et J. A. Scheinkman (1995) : “Back to the Future : Generating Moment Implications for Continuous-Time Markov Processes,” *Econometrica*, 63, 767–804. [95]

Harrison, J. M. et D. M. Kreps (1978) : “Speculative Investor Behavior in a Stock Market with Heterogeneous Expectations,” *The Quarterly Journal of Economics*, 92, 323–336. [12]

Harrison, J. M. et S. R. Pliska (1981) : “Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading,” *Stochastic Processes and their Applications*, 11, 215–260. [5]

He, H. et N. D. Pearson (1991a) : “Consumption and Portfolio Policies With Incomplete Markets and Short-Sale Constraints : the Finite-Dimensional Case,” *Mathematical Finance*, 1, 1–10. [12]

——— (1991b) : “Consumption and portfolio policies with incomplete markets and short-sale constraints : The infinite dimensional case,” *Journal of Economic Theory*, 54, 259–304. [12]

Herstein, I. N. et J. Milnor (1953) : “An Axiomatic Approach to Measurable Utility,” *Econometrica*, 21, 291–297. [20]

Heston, S. L. (1993) : “A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options,” *The Review of Financial Studies*, 6, 327–343. [10]

Hicks, J. R. (1962) : “Liquidity,” *The Economic Journal*, 72, 787–802. [16]

Hodges, S. D. et A. Neuberger (1989) : “Optimal Replication Of Contingent Claims Under Transactions Costs,” *Review of Futures Markets*, 8, 222–239. [18]

Hull, J. et A. White (1987) : “The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities,” *The Journal of Finance*, 42, 281–300. [10]

Izhakian, Y. et S. Benninga (2011) : “The Uncertainty Premium in an Ambiguous Economy,” *Quarterly Journal of Finance*, 01, 323–354. [56, 114]

Jacobson, D. (1973) : “Optimal stochastic linear systems with exponential performance criteria and their relation to deterministic differential games,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18, 124–131. [100]

Jewitt, I. et S. Mukerji (2011) : “Ordering Ambiguous Acts,” Economics Series Working Paper 553, University of Oxford, Department of Economics. [114]

Jondeau, E. et M. Rockinger (2001) : “Gram–Charlier densities,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25, 1457–1483. [93]

——— (2006) : “Optimal Portfolio Allocation under Higher Moments,” *European Financial Management*, 12, 29–55. [55, 84, 94]

Jouini, E. et H. Kallal (2001) : “Efficient Trading Strategies in the Presence of Market Frictions,” *The Review of Financial Studies*, 14, 343–369. [18]

Kahneman, D. et A. Tversky (1979) : “Prospect Theory : An Analysis of Decision under Risk,” *Econometrica*, 47, 263–291. [30]

Karatzas, I., J. P. Lehoczky, S. E. Shreve, et G. Xu (1991) : “Martingale and Duality Methods for Utility Maximization in an Incomplete Market,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29, 702. [12]

Karatzas, I. et S. E. Shreve (1998) : *Methods of Mathematical Finance*, Springer. [12]

Kast, R. et A. Lapied (1992) : *Fondements microéconomiques de la théorie des marchés financiers*, Paris : Économica. [6, 17]

Keynes, J. M. (1921) : *A Treatise on Probability*, London : Macmillan & Co, reprinted as vol. VIII of The Collected Writings of John Maynard Keynes, London : Macmillan, 1971. [14]

Kirman, A. P. (1992) : “Whom or What Does the Representative Individual Represent ?” *The Journal of Economic Perspectives*, 6, 117–136. [12]

Klibanoff, P., M. Marinacci, et S. Mukerji (2005) : “A Smooth Model of Decision Making under Ambiguity,” *Econometrica*, 73, 1849–1892. [34, 54, 111, 123, 126]

Klöppel, S. et M. Schweizer (2007) : “Dynamic Indifference Valuation Via Convex Risk Measures,” *Mathematical Finance*, 17, 599–627. [53]

Knight, F. H. (1921) : *Risk, Uncertainty and Profit*, Houghton Miffling Company. [14]

Koopmans, T. C. (1960) : “Stationary Ordinal Utility and Impatience,” *Econometrica*, 28, 287–309. [51]

Kreps, D. M. (1981) : “Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities,” *Journal of Mathematical Economics*, 8, 15–35. [5]

——— (1988) : *Notes On The Theory Of Choice*, Westview Press. [19, 22, 117]

Le Courtois, O. et C. Walter (2012a) : “Concentration des portefeuilles boursiers et asymétrie des distributions de rentabilités d’actifs,” *Journal de la Société Française de Statistique*, 153, 1–20. [48]

——— (2012b) : *Risques financiers extrêmes et allocation d’actifs*, Économica. [13, 55, 84, 94]

Liese, F. et I. Vajda (1987) : *Convex Statistical Distances*, Leipzig : Teubner. [100]

Linetsky, V. (2007) : “Spectral Methods in Derivatives Pricing,” in *Handbooks in Operations Research and Management Science*, éd. par John R. Birge and Vadim Linetsky, Elsevier, vol. Volume 15 of *Financial Engineering*, chap. 6, 223–299. [95]

Lintner, J. (1965) : “Security Prices, Risk, and Maximal Gains From Diversification,” *The Journal of Finance*, 20, 587–615. [3, 4]

Lucas, R. E. (1977) : “Understanding business cycles,” *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 5, 7–29. [27]

Maccheroni, F., M. Marinacci, et D. Ruffino (2013) : “Alpha as Ambiguity : Robust Mean-Variance Portfolio Analysis,” *Econometrica*, 81, 1075–1113. [54, 56, 111, 114, 123, 124, 125, 126, 165]

Maccheroni, F., M. Marinacci, et A. Rustichini (2006) : “Ambiguity Aversion, Robustness, and the Variational Representation of Preferences,” *Econometrica*, 74, 1447–1498. [29, 35, 36, 40, 45, 53, 55, 58, 59, 66, 84, 89, 114, 130]

Maccheroni, F., M. Marinacci, A. Rustichini, et M. Taboga (2009) : “Portfolio Selection with Monotone Mean-Variance Preferences,” *Mathematical Finance*, 19, 487–521. [48, 54, 56, 58, 97, 99, 100, 115]

Machina, M. J. (1982) : “”Expected Utility” Analysis without the Independence Axiom,” *Econometrica*, 50, 277–323. [26]

——— (1989) : “Comparative statics and non-expected utility preferences,” *Journal of Economic Theory*, 47, 393–405. [29]

Machina, M. J. et M. Siniscalchi (2013) : “Ambiguity and Ambiguity Aversion,” in *Handbook of the Economics of Risk and Uncertainty*, éd. par M. J. Machina et W. K. Viscusi, North-Holland, 729–807. [47]

Madan, D. B., P. P. Carr, et E. C. Chang (1998) : “The Variance Gamma Process and Option Pricing,” *European Finance Review*, 2, 79–105. [13]

Madan, D. B. et F. Milne (1991) : “Option Pricing With V. G. Martingale Components,” *Mathematical Finance*, 1, 39–55. [13]

——— (1994) : “Contingent Claims Valued and Hedged by Pricing and Investing in a Basis,” *Mathematical Finance*, 4, 223–245. [55, 94]

Madan, D. B. et E. Seneta (1990) : “The Variance Gamma (V.G.) Model for Share Market Returns,” *The Journal of Business*, 63, 511–524. [13]

Maenhout, P. J. (2004) : “Robust Portfolio Rules and Asset Pricing,” *Review of Financial Studies*, 17, 951 –983. [50, 116, 125]

Markowitz, H. M. (1952) : “Portfolio Selection,” *The Journal of Finance*, 7, 77–91. [3, 4, 6, 16, 47, 49, 58, 81, 82, 100, 110, 115, 125, 130]

——— (1959) : *Portfolio Selection ; Efficient Diversification of Investments*, Wiley. [4]

Mas-Colell, A., M. D. Whinston, et J. R. Green (1995) : *Microeconomic Theory*, New York : Oxford University Press. [110]

MEGGINSON, R. E. (1998) : *An Introduction to Banach Space Theory*, no. 183 in Graduate texts in mathematics, New York : Springer. [68, 71, 72, 75, 77, 78, 102]

MEHRA, R. ET E. C. PRESCOTT (1985) : "The equity premium : A puzzle," *Journal of Monetary Economics*, 15, 145–161. [7, 46, 110]

MERTON, R. C. (1969) : "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty : The Continuous-Time Case," *The Review of Economics and Statistics*, 51, 247–257. [4]

——— (1971) : "Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model," *Journal of Economic Theory*, 3, 373–413. [4]

——— (1972) : "An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier," *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7, 1851–1872. [4]

——— (1973a) : "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model," *Econometrica*, 41, 867–887. [4]

——— (1973b) : "Theory of Rational Option Pricing," *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141–183. [3, 5]

——— (1976) : "Option pricing when underlying stock returns are discontinuous," *Journal of Financial Economics*, 3, 125–144. [10]

MIAO, J. (2009) : "Ambiguity, Risk and Portfolio Choice under Incomplete Information," *Annals of Economics and Finance*, 10, 257–279. [116]

MONGIN, P. (2013) : "Le Paradoxe d'Allais : Comment lui rendre sa signification perdue ?" Cahiers de recherche 1021, HEC, Paris. [25, 29]

MOSSIN, J. (1966) : "Equilibrium in a Capital Asset Market," *Econometrica*, 34, 768–783. [3, 4]

MUSIELA, M. ET M. RUTKOWSKI (2006) : *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer. [6]

NAU, R. F. (2003) : "A Generalization of Pratt-Arrow Measure to Nonexpected-Utility Preferences and Inseparable Probability and Utility," *Management Science*, 49, 1089–1104. [56, 114]

——— (2006) : "Uncertainty Aversion with Second-Order Utilities and Probabilities," *Management Science*, 52, 136–145. [34, 114]

NEHRING, K. (1999) : "Capacities and probabilistic beliefs : a precarious coexistence," *Mathematical Social Sciences*, 38, 197–213. [55]

PRATT, J. W. (1964) : "Risk Aversion in the Small and in the Large," *Econometrica*, 32, 122–136. [16, 110]

RADNER, R. (1972) : "Existence of Equilibrium of Plans, Prices, and Price Expectations in a Sequence of Markets," *Econometrica*, 40, 289–303. [17]

RIEDEL, F. (2009) : "Optimal Stopping with Multiple Priors," *Econometrica*, 77, 857–908. [51]

Rockafellar, R. T. (1970) : *Convex Analysis*, no. 28 in Princeton Mathematical Series, Princeton, N.J : Princeton University Press. [67, 105, 107, 140]

——— (1974) : *Conjugate Duality and Optimization*, no. 16 in CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics. [95, 104]

——— (2000) : "Second-Order Convex Analysis," *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 1, 1–16. [119]

Rodarie, H. (2008) : "La crise financière de 2007 doit produire de nouveaux modèles de risque," *Revue d'économie financière*, 7, 135–139. [9]

Ross, S. A. (1976) : "The arbitrage theory of capital asset pricing," *Journal of Economic Theory*, 13, 341–360. [5, 6]

——— (1978) : "A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams," *The Journal of Business*, 51, 453–475. [5]

Rouge, R. et N. El Karoui (2000) : "Pricing Via Utility Maximization and Entropy," *Mathematical Finance*, 10, 259–276. [18]

Rubinstein, M. (1985) : "Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 Through August 31, 1978," *The Journal of Finance*, 40, 455–480. [10]

——— (1994) : "Implied Binomial Trees," *The Journal of Finance*, 49, 771–818. [10]

Samuelson, P. A. (1965) : "Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly," *Industrial management review*, 6, 41–49. [4]

——— (1970) : "The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in terms of Means, Variances and Higher Moments," *The Review of Economic Studies*, 37, 537–542. [16]

Savage, L. J. (1954) : *The Foundations of Statistics*, New York : Wiley, (2nd revised ed. 2003, Dover Publications Inc.). [14, 18, 19, 21, 22, 25]

Schied, A. (2007) : "Optimal investments for risk- and ambiguity-averse preferences : a duality approach," *Finance and Stochastics*, 11, 107–129. [53]

Schied, A., H. Föllmer, et S. Weber (2009) : "Robust preferences and robust portfolio choice," in *Mathematical Modeling and Numerical Methods in Finance*, éd. par P. G. Ciarlet, A. Bensoussan, et Q. Zhang, North-Holland, no. XV in Handbook of Numerical Analysis, 29–87. [53]

Schmeidler, D. (1989) : "Subjective Probability and Expected Utility without Additivity," *Econometrica*, 57, 571–587. [30, 32, 33, 88, 95, 113, 118]

Segal, U. et A. Spivak (1990) : "First order versus second order risk aversion," *Journal of Economic Theory*, 51, 111–125. [140]

Seo, K. (2009) : "Ambiguity and Second-Order Belief," *Econometrica*, 77, 1575–1605. [34]

Sharpe, W. F. (1963) : “A Simplified Model for Portfolio Analysis,” *Management Science*, 9, 277–293. [4]

——— (1964) : “Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk,” *The Journal of Finance*, 19, 425–442. [3, 4]

——— (1992) : “Asset allocation : Management style and performance measurement,” *The Journal of Portfolio Management*, 18, 7–19. [4]

Shiller, R. J. (1981) : “Do Stock Prices Move Too Much to be Justified by Subsequent Changes in Dividends ?” *The American Economic Review*, 71, 421–436. [7]

Siniscalchi, M. (2009) : “Vector Expected Utility and Attitudes Toward Variation,” *Econometrica*, 77, 801–855. [36, 41, 45, 55, 62, 81, 82, 83, 87, 88, 90, 91, 95, 103, 109, 110, 111, 112, 116, 117, 119, 121, 127, 130, 136, 140, 141]

Skiadas, C. (2008) : “Smooth Ambiguity Aversion Toward Small Risks and Continuous-Time Recursive Utility,” *SSRN eLibrary*. [114]

Skidelsky, R. (2009) : *Keynes : The Return of the Master*, Penguin UK. [14]

Soner, H. M., S. E. Shreve, et J. Cvitanić (1995) : “There is no Nontrivial Hedging Portfolio for Option Pricing with Transaction Costs,” *The Annals of Applied Probability*, 5, 327–355. [18]

Strzalecki, T. (2011) : “Axiomatic Foundations of Multiplier Preferences,” *Econometrica*, 79, 47–73. [46, 49, 59]

Taboga, M. (2005) : “Portfolio selection with two-stage preferences,” *Finance Research Letters*, 2, 152–164. [115]

Tesar, L. L. et I. M. Werner (1995) : “Home bias and high turnover,” *Journal of International Money and Finance*, 14, 467–492. [7]

Tobin, J. (1958) : “Liquidity Preference as Behavior Towards Risk,” *The Review of Economic Studies*, 25, 65–86. [4, 16, 110]

Trichet, J.-C. (2010) : “Central banking in uncertain times : conviction and responsibility,” in *Symposium on “Macroeconomic challenges : the decade ahead”*, Jackson Hole, Wyoming. [15]

——— (2011) : “Making decisions in an uncertain world,” Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule (RWTH), Aachen. [15]

Tversky, A. (1969) : “Intransitivity of preferences.” *Psychological Review*, 76, 31–48. [27]

Tversky, A. et D. Kahneman (1986) : “Rational Choice and the Framing of Decisions,” *The Journal of Business*, 59, S251–S278. [27]

——— (1992) : “Advances in prospect theory : Cumulative representation of uncertainty,” *Journal of Risk and uncertainty*, 5, 297–323. [30]

Uppal, R. et T. Wang (2003) : “Model Misspecification and Underdiversification,” *The Journal of Finance*, 58, 2465–2486. [50, 116, 130] von Neumann, J. et O. Morgenstern (1944) : *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton : Princeton university press, (4th ed. 2007). [18, 19, 25]

Wakker, P. P. (2008) : "Uncertainty," in *The New Palgrave Dictionary of Economics*, éd. par S. N. Durlauf et L. E. Blume, New York : Palgrave Macmillan, 428–439, 2nd ed. [110]

Walter, C. (1996) : "Une histoire du concept d'efficience sur les marchés financiers," *Annales. Histoire, Sciences Sociales*, 51, 873–905. [3]

——— (2013) : *Les origines du modèle de marche au hasard en finance.*, Paris : Économica. [3]

Wang, J. (1996) : "The term structure of interest rates in a pure exchange economy with heterogeneous investors," *Journal of Financial Economics*, 41, 75–110. [12]

Weil, P. (1989) : "The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle," *Journal of Monetary Economics*, 24, 401–421. [7]

Zhang, J. (2002) : "Subjective ambiguity, expected utility and Choquet expected utility," *Economic Theory*, 20, 159–181. [55]

Table des matières